ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 1

Πρόβλημα 1. Αν $f : X \to Y$ και $A, B \subseteq X$ τότε $f[A \cup B] = f[A] \cup f[B]$.

Πρόβλημα 2. Για όλα τα σύνολα A, B, C,

$$\begin{aligned} A \cup (B \cap C) &= (A \cup B) \cap (A \cup C), \\ A \cap (B \cup C) &= (A \cap B) \cup (A \cap C), \\ A \setminus (A \cap B) &= A \setminus B. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3. (Οι νόμοι του De Morgan.) Για όλα τα σύνολα A, B, C,

$$\begin{aligned} C \setminus (A \cup B) &= (C \setminus A) \cap (C \setminus B), \\ C \setminus (A \cap B) &= (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Επίσης, πιο γενικά, αν με $\overline{A}$ συμβολίζουμε το συμπλήρωμα του A τότε

$$\overline{\bigcup_{i \in I} A_i} = \bigcap_{i \in I} \overline{A_i} \quad \text{και} \quad \overline{\bigcap_{i \in I} A_i} = \bigcup_{i \in I} \overline{A_i}$$

Πρόβλημα 4. Για κάθε μονομορφισμό $f : X \rightarrowtail Y$ και για όλα τα $A, B \subseteq X$,

$$\begin{aligned} f[A \cap B] &= f[A] \cap f[B], \\ f[A \setminus B] &= f[A] \setminus f[B]. \end{aligned}$$

Δείξτε επίσης ότι αυτές οι ισότητες δεν ισχύουν πάντα αν η f δεν είναι μονομορφισμός.

Πρόβλημα 5. Για κάθε $f : X \to Y$ και όλα τα $A, B \subseteq Y$,

$$\begin{aligned} f^{-1}[A \cup B] &= f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B], \\ f^{-1}[A \cap B] &= f^{-1}[A] \cap f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 6. Για κάθε $f : X \to Y$ και για κάθε οικογένεια $B_i \subseteq Y$ (αντίστοιχα $A_i \subseteq X$),

$$\begin{aligned} f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] &= \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i], \\ f^{-1}[\bigcap_{i \in I} B_i] &= \bigcap_{i \in I} f^{-1}[B_i], \\ f[\bigcup_{i \in I} A_i] &= \bigcup_{i \in I} f[A_i]. \end{aligned}$$

Πρόβλημα 7. Για κάθε μονομορφισμό $f : X \rightarrowtail Y$ και κάθε οικογένεια συνόλων ώστε $A_i \subseteq X$,

$$f[\bigcap_{i\in I} A_i] = \bigcap_{i\in I} f[A_i].$$

Πρόβλημα 8. Η σύνθεση μονομορφισμών είναι μονομορφισμός, η σύνθεση επιμορφισμών είναι επιμορφισμός και επομένως η σύνθεση αμφιμονοσήμαντων αντιστοιχιών είναι αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία.