Προβλήματα 2

1. Για κάθε $\alpha < \beta$ με α, β πραγματικούς αριθμούς, ∞ ή $-\infty$, κατασκεύασε ισομορφισμούς που πιστοποιούν τις ισοπληθικότητες
$$(\alpha, \beta) \sim (0,1) \sim \mathbb{R}.$$

2. Για κάθε $\alpha < \beta$, κατασκεύασε ισομορφισμούς που πιστοποιούν τις ισοπληθικότητες
$$[\alpha, \beta) \sim [\alpha, \beta] \sim \mathbb{R}.$$

3. $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \sim \mathbb{R} \sim \mathbb{R}^n$, για κάθε $n \geq 2$.

Ορισμός 1 *Για όλα τα σύνολα A, B,*

$$\begin{aligned} A \to B &\stackrel{o\rho}{=} \{f \mid f : A \to B\} \\ &= \text{το σύνολο όλων των συναρτήσεων από το } A \text{ στο } B \\ &= {}^{A}B. \end{aligned}$$

4. Για όλα τα σύνολα A, B, C,
$$((A \times B) \to C) \sim (A \to (B \to C)).$$

5. Με τον ορισμό $T_0 = \mathbb{N},\ T_{n+1} = \mathcal{P}(T_n)$ και $T_\infty = \bigcup_{n=0}^{\infty} T_n$, για κάθε m,
$$T_m \prec T_\infty.$$

Για τα τελευταία δύο προβλήματα χρειάζεται κάποια οικειότητα με τις συνεχείς συναρτήσεις.

6. Το σύνολο $C[0,1]$ όλων των συνεχών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Μία συνεχής συνάρτηση προσδιορίζεται μοναδικά από τις τιμές της στα ρητά σημεία.]

7. Το σύνολο των μονοτονικών πραγματικών συναρτήσεων στο κλειστό διάστημα $[0,1]$ είναι ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$. [Υπόδειξη: Μία μονοτονική συνάρτηση έχει το πολύ αριθμήσιμο πλήθος σημείων ασυνέχειας.]