ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 3

Πρόβλημα 1. Μπορούμε να ορίσουμε ως **καλώς ορισμένες** ή **οριστικές** τις συνθήκες $\Theta(x, y, \ldots, z)$ που μπορούν να οριστούν με βάση σχέσεις της μορφής $x \in y$ ή $x = y$ και τη χρήση των λογικών συνδέσμων $\neg, \wedge, \vee, \rightarrow, \leftrightarrow$ και των ποσοδεικτών $\forall$ και $\exists$.

π.χ. η συνθήκη $x \subseteq y$ είναι καλώς ορισμένη επειδή είναι ισοδύναμη με το $\forall t\,(t \in x \rightarrow t \in y)$ [χρησιμοποιήθηκαν τα $t \in x, t \in y, \rightarrow$ και $\forall t$].

Αποδείξτε βρίσκοντας κατάλληλα ισοδύναμα ότι οι συνθήκες

$$x = \{y\}, x = \mathcal{P}(y), x = \langle y, z\rangle, x = \cup y, \langle y, z\rangle \in x$$

είναι καλώς ορισμένες.

Πρόβλημα 2. Ενα σύνολο B ονομάζεται **αθεμελίωτο** αν υπάρχει ακολουθία συνόλων $B_0, B_1, B_2, B_3, \ldots$ έτσι ώστε $B = B_0, B_1 \in B_0, B_2 \in B_1, B_3 \in B_2, \ldots$ κ.ο.κ. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο A τέτοιο ώστε για σύνολο X

$$X \in A \leftrightarrow X \text{ δεν είναι αθεμελίωτο.}$$

Πρόβλημα 3. Εστω A σύνολο. Αποδείξτε ότι υπάρχει σύνολο b ώστε

$$x \in b \leftrightarrow \exists a,\ a \in A \,\&\, x = \{a\}$$

(δηλ. $\{\{a\} | a \in A\}$ είναι σύνολο).

Δείξτε επίδης ότι $\{\{a, b\} | a, b \in A\}$ είναι σύνολο.

Πρόβλημα 4. Δείξτε ότι $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, $\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$ και $\emptyset \neq \{\emptyset\}$. Κατόπιν δείξτε ότι το αξίωμα του ζεύγους μπορεί να αποδειχθεί από τα υπόλοιπα αξιώματα.

Πρόβλημα 5. Εστω A σύνολο. Ορίστε ένα σύνολο B ώστε $B \notin A$.

Πρόβλημα 6. Εστω A σύνολο. Δείξτε ότι τα $\{\langle x, y\rangle | x, y \in A \;\&\; x \in y\}$ και $\{\langle x, y\rangle | \langle y, x\rangle \in A\}$ είναι σύνολο.

Υποθέστε ότι για κάθε σύνολο a υπάρχουν το πολύ δύο σύνολα b έτσι ώστε $\Theta(a, b)$ ισχύει. Δείξτε ότι το

$$\{b | \exists x\,(x \in A \wedge \Theta(x, b))\}$$

είναι σύνολο.

Πρόβλημα 7. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο A ώστε

$$x \in A \leftrightarrow \exists y,\ x = \{y\}$$

[Αυτό το «σύνολο» αντιστοιχεί στον αριθμό 1 του Frege, δηλ. την κλάση όλων των συνόλων με ένα στοιχείο.]

Πρόβλημα 8. Εστω a, b δύο διαφορετικά σύνολα. Θέτουμε

$$\ulcorner x, y \urcorner = \{\{x, a\}, \{y, b\}\}$$

Δείξτε ότι αν $x \neq x'$ τότε $\{x, a\} \neq \{x', a\}$ και είτε $\{y, b\} \neq \{x', a\}$ ή $\{x, a\} \neq \{y', b\}$.

Κατόπιν δείξτε ότι

$$\ulcorner x, y \urcorner = \ulcorner x', y' \urcorner \leftrightarrow x = x' \;\&\; y = y'$$

[Δηλαδή το $\ulcorner\ \urcorner$ λειτουργεί ως τελεστής διατεταγμένου ζεύγους.]