ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 4

Πρόβλημα 1. Έστω $<$ μία μερική διάταξη στο σύνολο A. Δώστε αντιπαραδείγματα για κάθε ένα από τα ακόλουθα:

1. αν $x, y \in A$ και $x < y$ τότε $\forall z \in A(x < z \vee z < y)$.

2. $\exists z \in A$ έτσι ώστε· εάν $x \in A$ τότε $\neg(x < z)$.

3. εάν $x, y \in A$ και $\forall z \in A(z < x \leftrightarrow z < y)$ τότε $x = y$.

(Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τα $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, κ.λ.π.). Πια από τα ανωτέρω είναι αληθή όταν η $<$ είναι οποιαδήποτε γραμμική διάταξη ;

Πρόβλημα 2. Δείξτε ότι $\sup\{\alpha, \beta\} = \alpha \cup \beta$.

Πρόβλημα 3. Έστω X ένα μη κενό σύνολο διατακτικών. Δείξτε ότι $\bigcap X$ είναι το ελάχιστο στοιχείο του X.

Πρόβλημα 4. Έστω $< \subseteq B^2 = B \times B$ έτσι ώστε $\forall X \subseteq B$ με $X \neq \emptyset$ υπάρχει $e \in X$ ώστε για όλα τα $b \in X$, $e < b$ ή $e = b$

και έτσι ώστε για $a, c \in B\,(a < c \to \neg(c < a))$. Δείξτε ότι $<$ διατάσσει καλώς το B.

Πρόβλημα 5. Έστω $<_A, <_B$ καλές διατάξεις στα A, B αντίστοιχα. Έστω $< \subseteq (A \times B)^2$ έτσι ώστε $\langle a, b\rangle < \langle a', b'\rangle \leftrightarrow (a <_A a') \vee (a = a' \wedge b <_B b')$ Δείξτε ότι $<$ διατάσσει καλώς το $A \times B$.

Πρόβλημα 6. Έστω $<$ καλή διάταξη στο A και $F : A \to A$ σέβεται τη διάταξη (δηλ. $a < b \to F(a) < F(b)$). Δείξτε ότι για $a \in A$, $a \leq F(a)$.