ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 5

Πρόβλημα 1. Ποιά από τα παρακάτω είναι αληθή. Τα A_1, A_2 είναι σύνολα διατακτικών αριθμών.

1. $x \in \alpha, \alpha \in \beta \to x \in \beta$
2. $\alpha \in x, x \in \beta \to \alpha \in \beta$
3. $\alpha \in \beta, \beta \in x \to \alpha \in x$
4. $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta$
5. $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha$
6. $\alpha < \beta \leftrightarrow \alpha \cap \beta \neq \beta$
7. $A_1 \cap A_2 = \emptyset \to \sup(A_1) \neq \sup(A_2)$
8. $\sup(A_1) < \mathrm{seq}(A_1)$
9. Αν $a \subseteq b$ και $<$ διατάσσει καλώς το b τότε $< \cap\, a^2$ διατάσσει καλώς το a

Πρόβλημα 2. Έστω $f : A \rightarrowtail \alpha$ μονομορφισμός και $R = \{\langle a, b\rangle \mid a, b \in A \wedge f(a) < f(b)\}$. Δείξτε ότι R διατάσσει καλώς το A.

Πρόβλημα 3. Έστω A σύνολο διατακτικών. Δείξτε ότι $\cup A$ είναι διατακτικός και ότι $\cup A = \sup(A)$.

Έστω $f : \omega \to \mathrm{Ord}$ δηλ. f είναι συνάρτηση με $\mathrm{domain}(f) = \omega$ και $\forall n \in \omega, f(n) \in \mathrm{Ord}$, έτσι ώστε $n < m \to f(n) < f(m)$. Δείξτε ότι $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ είναι οριακός διατακτικός. Όθεν δείξτε ότι ω δεν είναι ο μοναδικός οριακός διατακτικός αριθμός (χρησιμοποιείστε ορισμό με υπερπεπερασμένη αναδρομή).

Πρόβλημα 4. Έστω A και B σύνολα με καλές διατάξεις $<_A$ και $<_B$ αντίστοιχα. Μπορείτε να ορίσετε μία καλή διάταξη $<$ στο $A \cup B$;