ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6

Πρόβλημα 1

Έστω X σύνολο και έστω f μία συνάρτηση που ικανοποιεί τις

- $\mathrm{dom}(f) = \omega$
- $f(0) = X$
- $f(n') = f(n) \cup \bigcup f(n), \quad \forall n \in \omega$

[η συνάρτηση αυτή ορίζεται με αναδρομή]

Αποδείξτε ότι εάν $\mathrm{Rg}(f) = \mathrm{Range}(f)$

1. $\cup Rg(f) \supseteq X$
2. $a \in b,\ b \in \cup\mathrm{Rg}(f) \to a \in \cup\mathrm{Rg}(f)$.

και εάν $y \supseteq X$ *και* $a \in b,\ b \in y \to a \in y$ τότε $y \supseteq \cup\mathrm{Rg}(f)$.

[Η $\cup\mathrm{Rg}(f)$ ονομάζεται η μεταβατική κλειστότητα του X και είναι το μικρότερο μεταβατικό σύνολο που περιέχει το X.]

Πρόβλημα 2

Έστω a σύνολο. Αποδείξτε ότι υπάρχει σύνολο A έτσι ώστε

1. $a \subseteq A$
2. $x, y \in A \to \langle x, y\rangle \in A$
3. εάν A' επίσης ικανοποιεί τις 1. και 2. τότε $A \subseteq A'$.

Πρόβλημα 3

Όπως στις διαλέξεις μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $+ : \omega^2 \to \omega$ που ικανοποιεί τα

1. $n + 0 = n$
2. $n + m' = (n + m)'$

δηλ. την πρόσθεση στους φυσικούς.

Χρησιμοποιώντας την καλή διάταξη $<$ στο ω^2 που ορίζεται από

$$\langle s, t\rangle \ < \ \langle n, m\rangle \leftrightarrow s < n \vee (s = n \wedge t < m)$$

δείξτε ότι η πράξη $+$ είναι αντιμεταθετική δηλ. $\forall n, m\ n + m = m + n$.

Πρόβλημα 4

Έστω $\alpha \uplus \beta = (\alpha \times \{0\}) \cup (\beta \times \{1\})$ δηλ. η ξένη ένωση των α και β. έστω $R \subseteq (\alpha \uplus \beta)^2$ έτσι ώστε

$$\langle \gamma, i \rangle \, R \, \langle \delta, j \rangle \leftrightarrow i < j \vee (i = j \wedge \gamma < \delta)$$

[Δηλαδή το $\alpha \uplus \beta$ διατεταγμένο από την R φαίνεται ακριβώς σαν μία κόπια του α ακολουθούμενη από μία κόπια του β]

Δείτε ότι η R διατάσσει καλώς το $\alpha \uplus \beta$.

Έστω $\alpha \dot{+} \beta$ είναι ο μοναδικός διατακτικός γ έτσι ώστε $\langle \alpha \uplus \beta, R \rangle \cong \langle \gamma, \in \rangle$.

Αποδείξτε ότι

1. $\alpha \dot{+} 0 = \alpha$
2. $\alpha \dot{+} \beta' = (\alpha \dot{+} \beta)'$
3. $1 \dot{+} \omega \neq \omega \dot{+} 1$