ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 7

Πρόβλημα 1 Ποια από τα παρακάτω είναι αληθή;

1. $A \preccurlyeq B \leftrightarrow \exists D \subseteq B,\ A \sim D$
2. $A \prec B \leftrightarrow \exists D \subset B,\ A \sim D$
3. $A \sim \emptyset \leftrightarrow A = \emptyset$
4. $A \sim B \to \cup A \sim \cup B$

Πρόβλημα 2 Δείξτε $A \sim B \to {}^{A}D \sim {}^{B}D$, για οποιοδήποτε σύνολο D και $A \preccurlyeq B \to {}^{A}D \preccurlyeq {}^{B}D$ για οποιοδήποτε σύνολο $D \neq \emptyset$.

Πρόβλημα 3 Υποθέστε ότι $\emptyset \neq X \subseteq n$. Αποδείξτε με αριθμητική επαγωγή ότι το X έχει μέγιστο στοιχείο.

Πρόβλημα 4 Αληθές ή ψευδές;

1. $\alpha = \alpha' \setminus \{\alpha\}$
2. $\alpha \preccurlyeq \beta \leftrightarrow \alpha \leq \beta$

Πρόβλημα 5 Δείξτε ότι αν $A \sim A \times 2$ τότε $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$.

Πρόβλημα 6 (από ανάλυση) Ξέρουμε ότι $[-1,1] \sim [-1,1]^2$. Παρ'όλα αυτά μπορούμε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f : [-1,1] \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [-1,1]^2$ (f 1-1 και επί). Διότι ας υποθέσουμε ότι υπάρχει. Τότε δείξτε ότι

1. $f^{-1} : [-1,1]^2 \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow [-1,1]$ είναι συνεχής.

   Κατόπιν ορίζουμε $g : [0,\pi] \to [-1,1]$ με

   $$g(t) = f^{-1}(\cos(t), \sin(t)) - f^{-1}(\cos(t+\pi), \sin(t+\pi))$$

   άρα g είναι συνεχής. Δείξτε ότι

2. $g(0) = -g(\pi)$
3. $g(t) = 0$ για κάποιο $t \in [0,\pi]$
4. f^{-1} δεν είναι 1-1!