

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 8

Πρόβλημα 1 Αληθές ή ψευδές;

1. $A \prec B \Rightarrow \cup A \preceq \cup B$
2. $A \times B \sim A \times C \Rightarrow B \sim C$
3. $A \preceq A \times A$
4. $A \prec B \Leftrightarrow A \preceq B \ \& \ \neg(A \sim B)$
5. $\alpha < \omega_1 \Leftrightarrow \alpha \preceq \omega$
6. $\omega \leq \alpha \Leftrightarrow \alpha \sim \alpha'$

Πρόβλημα 2 Υποθέτουμε ότι τα σύνολα A και B μπορούν να διαταχθούν καλώς. Δείξτε ότι:

1. $A \prec B \Leftrightarrow \neg(B \preceq A)$
2. ένα από τα $A \preceq B$, $B \preceq A$ ισχύει.
3. $\omega \preceq A \Rightarrow A \sim A \times A$ (στηριχτείτε στο γεγονός ότι αν $\omega \leq \alpha$ τότε $\alpha \times \alpha \sim \alpha$).

Πρόβλημα 3 Δείξτε ότι αν $\emptyset \neq A \preceq B$ τότε $\exists f, f : B \rightarrow A$ (χωρίς AC). Δείξτε ότι αν B είναι διατακτικός (ή αν ισχύει το AC) τότε και το αντίθετο είναι σωστό.

Πρόβλημα 4 Εστω λ ένας διατακτικός αριθμός που είναι όριο από πληθικούς (δηλ. $\alpha < \lambda \Rightarrow \exists$ πληθικός β ώστε $\alpha < \beta < \lambda$). Δείξτε ότι λ είναι πληθικός.

Πρόβλημα 5 Δείξτε ότι αν α είναι άπειρος και $\beta \neq 0$ τότε $\alpha \times \beta \sim \max(\alpha, \beta)$.