ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 9

Πρόβλημα 1 Εστω A και B σύνολα ώστε B είναι καλά διατάξιμο και $a \cap B \neq \emptyset$ για όλα τα $a \in A$. Δείξτε ότι A έχει μία συνάρτηση επιλογής, με την έννοια ότι υπάρχει μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A ώστε για κάθε $a \in A$ $f(a) \in a$.

Πρόβλημα 2 Εστω A σύνολο μη κενών κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Δείξτε ότι A έχει συνάρτηση επιλογής.

Πρόβλημα 3 Εστω S απεικόνιση με domain A έτσι ώστε $S(a) \neq \emptyset$, $\forall a \in A$. Δείξτε

1. $S[A]$ έχει συνάρτηση επιλογής $\Rightarrow \prod_{a \in A} S(a) \neq \emptyset$
2. $\cap S[A] \neq \emptyset \Rightarrow \prod_{a \in A} S(a) \neq \emptyset$
3. S είναι 1-1 και $\prod_{a \in A} S(a) \neq \emptyset \Rightarrow S[A]$ έχει συνάρτηση επιλογής.

Πρόβλημα 4 Αν η S δεν είναι 1-1 τότε (αν δεν ισχύει το AC) το 3. του Προβλήματος 3 μπορεί να μην ισχύει. Για να το δούμε έστω C ένα σύνολο που δεν έχει συνάρτηση επιλογής $\emptyset \notin C$ και δείξτε

1. $\exists$ σύνολο B ώστε $\emptyset \notin B$, B δεν έχει συναρτήσεις επιλογής και $x, y \in B$ και $x \neq y \Rightarrow x \cap y = \emptyset$.
2. Για B όπως παραπάνω ορίζουμε $K : \cup B \to B$ με $K(a) =$ «το μοναδικό $b \in B$ ώστε $a \in b$».
   Δείξτε ότι $\prod_{a \in \cup B} K(a) \neq \emptyset$ αλλά $K[\cup B] = B$ δεν έχει συνάρτηση επιλογής.

Πρόβλημα 5 Εστω R γραμμική διάταξη στο σύνολο A. Αποδείξτε ότι R διατάσσει καλώς το A αν και μόνον αν δεν υπάρχει συνάρτηση $g : \omega \to A$ ώστε $\forall n \in \omega$, $g(n+1) \, R \, g(n)$.

Πρόβλημα 6 Ας υποθέσουμε ότι τα υποσύνολα του ω χωρίζονται σε δύο σύνολα M και E (M είναι τα «μείζονα» υποσύνολα του ω E είναι τα «ελάσσονα» υποσύνολα του ω) έτσι ώστε για $X \subseteq \omega$

$$X \in M \Leftrightarrow (\omega \setminus X) \in E$$

και αν $X_1, \ldots, X_n \in M$ ($n \in \omega$) τότε $X_1 \cap X_2 \cap \ldots \cap X_n$ είναι άπειρο. Δείξτε ότι τα M και E δρουν όπως υποβάλλει το όνομά τους με το να αποδείξετε τα ακόλουθα:

1. $\emptyset \in E$, $\omega \in M$
2. $X \subseteq \omega$ και X πεπερασμένο $\Rightarrow$ $X \in E$
3. $X, Y \in M \Rightarrow X \cap Y \in M$
4. $X, Y \in E \Rightarrow X \cup Y \in E$
5. $X \subseteq Y \subseteq \omega$, $X \in M \Rightarrow Y \in M$
6. $X \subseteq Y \subseteq \omega$, $Y \in E \Rightarrow X \in E$
7. $\omega \setminus X$ πεπερασμένο $\Rightarrow$ $X \in M$

Εστω $B = \{A \subseteq \mathcal{P}(\omega) | X_1, \ldots, X_n \in A\, (n \in \omega) \Rightarrow X_1 \cap \ldots \cap X_n$ άπειρο $\}$. Δείξτε ότι $B \neq \emptyset$ και B ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του λήμματος του Zorn. Οθεν υποθέτοντας το λήμμα του Zorn δείξτε ότι είναι δυνατό να δημιουργήσουμε ένα χωρισμό των συνόλων του ω σε μείζονα και ελάσσονα υποσύνολα.