Προβλήματα 1 – Λύσεις

1.
$$\begin{aligned} x \in f[A \cup B] &\Leftrightarrow \exists y \in A \cup B \ (x = f(y)) \\ &\Leftrightarrow \exists y \in A \ (x = f(y)) \text{ ή } \exists y \in B \ (x = f(y)) \\ &\Leftrightarrow x \in f[A] \text{ ή } x \in f[B] \\ &\Leftrightarrow x \in f[A] \cup f[B]. \end{aligned}$$

2. (a) Θα δείξουμε ότι $x \in A \cup (B \cap C) \Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

$x \in A$: Αμφότερα τα σκέλη τής ισοδυναμίας αληθεύουν.

$x \notin A$: Για κάθε σύνολο S ισχύει $x \in A \cup S \Leftrightarrow x \in S$, οπότε

$$\begin{aligned} x \in A \cup (B \cap C) &\Leftrightarrow x \in B \cap C \\ &\Leftrightarrow x \in B \ \& \ x \in C \\ &\Leftrightarrow x \in A \cup B \ \& \ x \in A \cup C \\ &\Leftrightarrow x \in (A \cup B) \cap (A \cup C). \end{aligned}$$

(b) Δουλεύουμε ομοίως.

(c) $x \in A \setminus (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \notin (A \cap B) \Leftrightarrow x \in A \ \& \ x \notin B$ [διότι αφού το $x \in A$, εάν ανήκε στο B θα ανήκε και στο $A \cap B$] $\Leftrightarrow x \in A \setminus B$.

3.
$$\begin{aligned} x \in C \setminus (A \cup B) &\Leftrightarrow x \in C \ \& \ x \notin A \cup B \\ &\Leftrightarrow x \in C \ \& \ (x \notin A \ \& \ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow (x \in C \ \& \ x \notin A) \ \& \ (x \in C \ \& \ x \notin B) \\ &\Leftrightarrow x \in C \setminus A \ \& \ x \in C \setminus B \\ &\Leftrightarrow x \in (C \setminus A) \cup (C \setminus B). \end{aligned}$$

Επίσης, εάν $\overline{A}$ το συμπλήρωμα τού A ως προς ένα υπερσύνολο, τότε

$$\begin{aligned} x \in \overline{\bigcup_{i \in I} A_i} &\Leftrightarrow x \notin \bigcup_{i \in I} A_i \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I \ (x \notin A_i) \\ &\Leftrightarrow \forall i \in I \ (x \in \overline{A_i}) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcap_{i \in I} \overline{A_i}. \end{aligned}$$

Οι υπόλοιπες δύο σχέσεις τής πρότασης αποδεικνύονται ομοίως.

4. (a)
$$\begin{aligned} x \in f[A \cap B] &\Rightarrow \exists y \in A \cap B \ (x = f(y)) \\ &\Rightarrow \exists y \in A \ (x = f(y)) \ \& \ \exists y \in B \ (x = f(y)) \\ &\Rightarrow x \in f[A] \ \& \ x \in f[B] \\ &\Rightarrow x \in f[A] \cap f[B]. \end{aligned}$$

Αντιστρόφως, $x \in f[A] \cap f[B] \Rightarrow x \in f[A] \ \& \ x \in f[B] \Rightarrow \exists y \in A \ (x = f(y)) \ \& \ \exists z \in B \ (x = f(z))$. Επειδή η f είναι 1-1, τα y και z δε μπορεί να είναι διαφορετικά, άρα $y \in A \cap B$, άρα $\exists y \in A \cap B \ (x = f(y)) \Rightarrow x \in f[A \cap B]$.

(b)
$$\begin{aligned} x \in f[A] \setminus f[B] &\Rightarrow x \in f[A] \ \& \ x \notin f[B] \\ &\Rightarrow \exists y \in A\ (x = f(y)) \ \& \ \forall y \in B\ (x \neq f(y)) \\ &\Rightarrow \exists y \in A \setminus B\ (x = f(y)) \end{aligned}$$

Η τελευταία γραμμή ισχύει επειδή το y που ανήκει στο A, για το οποίο $x = f(y)$, δεν μπορεί να ανήκει στο B· διότι για τα $y \in B$ έχουμε $x \neq f(y)$.

Αντιστρόφως, $x \in f[A \setminus B] \Rightarrow \exists y \in A \setminus B\ (x = f(y)) \Rightarrow$ επειδή f 1-1 δε μπορεί να υπάρχει $y \in B$ ώστε $x = f(y) \Rightarrow \exists y \in A\ (x = f(y))\ \&\ \forall y \in B\ (x \neq f(y)) \Rightarrow x \in f[A]\ \&\ x \notin f[B] \Rightarrow x \in f[A] \setminus f[B]$.

Αντιπαράδειγμα: $A = \{\alpha\},\ B = \{\beta\},\ f(\alpha) = f(\beta) = \gamma$ οπότε $f[A \cap B] = f[\emptyset] = \emptyset,\ f[A] \cap f[B] = \{\gamma\} \cap \{\gamma\} = \{\gamma\},\ f[A \setminus B] = f[\{\alpha\}] = \{\gamma\},\ f[A] \setminus f[B] = \{\gamma\} \setminus \{\gamma\} = \emptyset$.

5.
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[A \cup B] &\Leftrightarrow f(x) \in A \cup B \\ &\Leftrightarrow f(x) \in A \text{ ή } f(x) \in B \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \text{ ή } x \in f^{-1}[B] \\ &\Leftrightarrow x \in f^{-1}[A] \cup f^{-1}[B]. \end{aligned}$$

Η άλλη σχέση ομοίως.

6.
$$\begin{aligned} x \in f^{-1}[\bigcup_{i \in I} B_i] &\Leftrightarrow f(x) \in \bigcup_{i \in I} B_i \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I\ (f(x) \in B_i) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I\ (x \in f^{-1}[B_i]) \\ &\Leftrightarrow x \in \bigcup_{i \in I} f^{-1}[B_i]. \end{aligned}$$

Η δεύτερη σχέση ομοίως και η τρίτη παρόμοια με το 1.

7. Παρόμοια με το 4.

8. Εάν $f : A \rightarrowtail B$ και $g : B \rightarrowtail C$ μονομορφισμοί,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(x) = (g \circ f)(y) &\Rightarrow g(f(x)) = g(f(y)) \\ &\Rightarrow f(x) = f(y) \qquad [g \text{ 1-1}] \\ &\Rightarrow x = y \qquad [f \text{ 1-1}]. \end{aligned}$$

Εάν $f : A \twoheadrightarrow B$ και $g : B \twoheadrightarrow C$ επιμορφισμοί,

$$\begin{aligned} z \in C &\Rightarrow \exists y \in B\ (g(y) = z) \qquad [g \text{ επί}] \\ &\Rightarrow \exists x \in A\ (g(f(x)) = z) \qquad [f \text{ επί}] \\ &\Rightarrow \exists x \in A\ ((g \circ f)(x) = z). \end{aligned}$$