Προβλήματα 2 – Λύσεις

1. Η λύση στις διαλέξεις. Εναλλακτικά, η συνάρτηση $f : (a,b) \to (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ με $f(x) = \frac{\pi}{b-a}x - \frac{\pi}{2}\frac{b+a}{b-a}$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφη $f^{-1}(y) = \frac{b-a}{\pi}y + \frac{b+a}{2}$. το ίδιο ισχύει για τη συνάρτηση $g : (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \tan(x)$.

   Άλλη λύση προκύπτει θεωρώντας τις συναρτήσεις $f : (a,b) \to (0,1)$ με $f(x) = \frac{x-a}{b-a}$ και $g : (0,1) \to \mathbb{R}$ με $g(x) = \frac{2x-1}{x(1-x)}$.

2. Μία λύση μπορεί να βασιστεί στο λήμμα που προηγείται της απόδειξης του πορίσματος $\overline{\overline{\mathrm{Tr}}} = 2^{\aleph_0}$ των διαλέξεων. Π.χ. για να αποδείξουμε ότι $[a,b) = (a,b)$ παίρνουμε ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του (a,b), π.χ. $k_n = a + \frac{b-a}{n+2}$, $n = 0,1,2,\ldots$. Έστω τώρα f μία 1-1 αντιστοιχία μεταξύ τού $[a,b) \setminus \{a, k_0, k_1 \ldots\}$, δηλ. του $(a,b) \setminus \{k_0, k_1 \ldots, k_n, \ldots\}$, και του $(a,b) \setminus \{k_0, k_1 \ldots, k_n, \ldots\}$. Εν προκειμένω, η f μπορεί να είναι η ταυτοτική, δηλ. $f(x) = x$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [a,b) \to (a,b)$ με

$$\begin{aligned} g(a) &= k_0 \\ g(k_n) &= k_{n+1} \\ g(x) &= f(x) \quad \text{αν } x \neq a, k_0, k_1, \ldots, k_n, \ldots \end{aligned}$$

   Η g είναι 1-1 και επί.

   Παρόμοια μπορούμε να δουλέψουμε στην περίπτωση των π.χ. $[a,b]$ και $\mathbb{R}$.

3. $\overline{\overline{\mathbb{R}^n}} = \overline{\overline{\underbrace{\mathbb{R} \times \cdots \times \mathbb{R}}_{n}}} = 2^{\aleph_0} \cdots 2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 + \cdots + \aleph_0} = 2^{\aleph_0} = \overline{\overline{\mathcal{P}(\mathbb{N})}}$.

4. (Βλ. νόμο (viii) πληθικής αριθμητικής.) Θα ορίσουμε μία 1-1, επί αντιστοιχία $F : ((A \times B) \to C) \to (A \to (B \to C))$. Εάν $f \in ((A \times B) \to C)$, ορίζουμε το $F(f) : A \to (B \to C)$ θέτοντας $F(f)(a) : B \to C$ να είναι η συνάρτηση που στέλνει το $b \in B$ στο $F(f)(a)(b) = f(\langle a,b \rangle)$.

   Η F είναι 1-1. Διότι έστω $f \neq g$ και $f, g : A \times B \to C$. Επειδή $f \neq g$ υπάρχουν a, b ώστε $f(\langle a,b \rangle) \neq g(\langle a,b \rangle)$. Συμπεραίνουμε ότι $F(f) \neq F(g)$. Πρός τούτοις αρκεί να υπάρχουν $a \in A$ και $b \in B$ ώστε $F(f)(a)(b) \neq F(g)(a)(b)$. Αλλά αυτό ισχύει διότι οι αντίστοιχες τιμές τους $f(\langle a,b \rangle)$ και $g(\langle a,b \rangle)$ είναι άνισες.

   Η F είναι επί. Διότι έστω $g \in A \to (B \to C)$. Τότε ορίζουμε $f : A \times B \to C$ με $f(\langle a,b \rangle) = g(a)(b)$. Έχουμε ότι $F(f)(a)(b) = f(\langle a,b \rangle) = g(a)(b)$, άρα $F(f) = g$.

5. Επειδή $T_{n+1} = \mathcal{P}(T_n)$ έχουμε $\overline{\overline{T_0}} < \overline{\overline{T_1}} < \overline{\overline{T_2}} < \cdots < \overline{\overline{T_n}} < \cdots$. Πιο γενικά μπορούμε να αποδείξουμε ότι εάν $A_1, A_2, \ldots, A_n, \ldots$ σύνολα ώστε $\overline{\overline{A_1}} < \overline{\overline{A_2}} < \cdots < \overline{\overline{A_n}} < \cdots$ τότε εάν $S = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ έχουμε για κάθε n, $\overline{\overline{A_n}} < \overline{\overline{S}}$. Αυτό συμβαίνει επειδή $A_n \subseteq S$ και για να αποδείξουμε ότι $\overline{\overline{A_n}} < \overline{\overline{S}}$ αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο S δεν είναι ισοπληθικό με κανένα υποσύνολο του A_n. Εάν το S ήταν ισοδύναμο με υποσύνολο του A_n τότε το A_{n+1} ως υποσύνολο του S θα ήταν επίσης ισοπληθικό με κάποιο υποσύνολο του A_n, πράγμα που αντιφάσκει με την υπόθεση $\overline{\overline{A_n}} < \overline{\overline{A_{n+1}}}$.

6. Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [0,1] \to [0,1]$ προσδιορίζεται μοναδικά από τον περιορισμό της f στο υποσύνολο $\mathbb{Q} \cap [0,1] \subseteq [0,1]$. Κι' αυτό διότι κάθε $x \in [0,1]$ είναι όριο μιας ακολουθίας $q_1, q_2, \ldots, q_n, \ldots$ ρητών που ανήκουν στο $[0,1]$, δηλ. $\lim_{n\to\infty} q_n = x$ άρα λόγω συνέχειας $\lim_{n\to\infty} f(q_n) = f(x)$. Επειδή $\mathbb{Q} \cap [0,1] \preccurlyeq \mathbb{Q}$ και $[0,1] \preccurlyeq \mathbb{R}$, το σύνολο Σ' όλων των συναρτήσεων $f : \mathbb{Q} \cap [0,1] \to [0,1]$ είναι $\Sigma' \preccurlyeq {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \preccurlyeq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$. Άρα το σύνολο Σ όλων των συνεχών συναρτήσεων στο $[0,1]$ με τιμές στο $\mathbb{R}$ είναι

$$\Sigma \preccurlyeq \Sigma' \preccurlyeq {}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \sim {}^{\mathbb{N}}({}^{\mathbb{N}}2) \sim {}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}2 \sim {}^{\mathbb{N}}2 \sim \mathbb{R}$$

Και επειδή υπάρχουν τουλάχιστον $\mathbb{R}$ το πλήθος συνεχείς τέτοιες συναρτήσεις (οι σταθερές στο $[0,1] \sim \mathbb{R}$) έχουμε ότι $\mathbb{R} \preccurlyeq \Sigma \preccurlyeq \mathbb{R}$, άρα και $\Sigma \sim \mathbb{R}$.

7. Ερώτηση: Σε κάθε απαριθμητό υποσύνολο $A \subseteq \mathbb{R}$ πόσες συναρτήσεις $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ αντιστοιχούν ώστε τα σημεία ασυνέχειας της f να είναι τα σημεία του συνόλου A. Επειδή στα σημεία $\mathbb{R} \setminus A$ η συνάρτηση είναι συνεχής, με σκεπτικό ανάλογο της προηγούμενης άσκησης μπορούμε να δούμε ότι αυτές οι συναρτήσεις f προσδιορίζονται επακριβώς από τις τιμές τους στο A και στα ρητά σημεία του $[0,1]$. Οι τιμές που μπορούν να πάρουν στο $A \preccurlyeq \mathbb{N}$ είναι το πολύ ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R}$ δηλαδή $\mathbb{R}$ και για κάθε τέτοια περίπτωση, όπως στην προηγούμενη άσκηση, $\mathbb{R}$ το πολύ περιπτώσεις συναρτήσεων. Άρα αν Σ είναι το σύνολο όλων των δυνατών περιπτώσεων τέτοιων συναρτήσεων με υποσύνολο σημείων ασυνεχείας $A \preccurlyeq \mathbb{N}$, έχουμε $\Sigma \preccurlyeq \mathbb{R} \times \mathbb{R} \sim \mathbb{R}$ δηλ. $\Sigma \preccurlyeq \mathbb{R}$. Πόσα τέτοια υποσύνολα A μπορούν να υπάρξουν· Το πολύ ${}^{\mathbb{N}}\mathbb{R} \sim \mathbb{R}$. Άρα, τελικά, το σύνολο όλων των συνεχών συναρτήσεων με ένα απαριθμητό σύνολο σημείων ασυνέχειας είναι το πολύ $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ δηλ. τελικά ισοπληθικό με το $\mathbb{R}$.