ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 3 — ΛΥΣΕΙΣ

Λύση 1.

$x = \{y\}$ είναι ισοδύναμο με το $\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z = y)$.

$x = \mathcal{P}(y)$ είναι ισοδύναμο με το $\forall z\,(z \in x \leftrightarrow z \subseteq y)$ και ξέρουμε ήδη ότι $z \subseteq y$ είναι οριστική.

$x = \{y, z\}$ είναι ισοδύναμο με το $\forall t\,(t \in x \leftrightarrow t = y \vee t = z)$.

$\langle y, z\rangle = x$ είναι ισοδύναμο με το $\forall u\,(u \in x \leftrightarrow u = \{y\} \vee u = \{y, z\})$.

$x \in \cup y$ είναι ισοδύναμο με το $\exists t\,(t \in y \wedge x \in t)$.

$\langle y, z\rangle \in x$ είναι ισοδύναμο με το $\exists t(\langle y, z\rangle = t \wedge t \in x)$ (εναλλακτικά με το $\forall t(\langle y, z\rangle = t \to t \in x)$).

Λύση 2.

Εστω ότι υπάρχει το A. Τότε αν $A \in A$, η ακολουθία $B_n = A$ δείχνει ότι το A είναι αθεμελίωτο άρα $A \notin A$. Εάν $A \notin A$ τότε A είναι αθεμελίωτο. Εστω $A = A_0, A_1 \in A_0, A_2 \in A_1, \ldots$. Τότε $A_1 \in A$ και η ακολουθία $A_1, A_2, A_3, \ldots$ δείχνει ότι A_1 είναι αθεμελίωτο άρα $A_1 \notin A$ (*άτοπο*). Αρα $\neg(A \notin A)$.

Λύση 3.

Θέτουμε $\Phi(x, y) \leftrightarrow \forall z\,(z \in y \leftrightarrow z = x)$ (δηλ. $\Phi(x, y) \leftrightarrow y = \{x\}$). Ελέγξτε ότι $\forall x, y, z$, $\Phi(x, y) \wedge \Phi(x, z) \to y = z$ δηλ. ότι $\Phi(x, y)$ είναι προτασιακή συνάρτηση. Χρησιμοποιώντας το αξίωμα της αντικατάστασης υπάρχει σύνολο b ώστε $u \in b \leftrightarrow \exists t\,(t \in A \wedge \Phi(t, u))$ $(\leftrightarrow u = \{t\}$ για κάποιο $t \in A)$.

Για το δεύτερο μέρος (η μέθοδος αυτή λειτουργεί επίσης και για το πρώτο μέρος) χρησιμοποιούμε το αξίωμα του διαχωρισμού και

$$\{\{a, b\} | a, b \in A\} = \{u | u \in \mathcal{P}(A) \wedge \exists x \exists y \forall z\,(z \in u \leftrightarrow (z = x \vee z = y))\}$$

Λύση 4.

Για το πρώτο μέρος χρησιμοποιούμε το αξίωμα της έκτασης, π.χ.

$$x \in \mathcal{P}(\emptyset) \leftrightarrow x \subseteq \emptyset \leftrightarrow \forall z\,(z \in x \to z \in \emptyset) \leftrightarrow \forall z\,(z \notin x) \leftrightarrow x = \emptyset \leftrightarrow x \in \{\emptyset\}$$

Ομοίως και για την άλλη ισότητα. Επειδή $\emptyset \in \{\emptyset\}$ ενώ $\emptyset \notin \emptyset$ έχουμε $\emptyset \neq \{\emptyset\}$.

Για το δεύτερο μέρος θεωρούμε το σύνολο $A = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} = \mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset)$ το οποίο υπάρχει από το αξίωμα του κενού συνόλου και το αξίωμα του δυναμοσυνόλου (δηλ. το $\emptyset$ υπάρχει από το αξίωμα του κενού συνόλου, το $\mathcal{P}(\emptyset)$ από το αξίωμα του δυναμοσυνόλου και το $\mathcal{P}\mathcal{P}(\emptyset)$ υπάρχει με ακόμη μία εφαρμογή του αξιώματος του δυναμοσυνόλου). Εστω τώρα σύνολα a και b. Θα αποδείξουμε ότι το σύνολο $\{a, b\}$ υπάρχει. Ορίζουμε συνθήκη $\Psi(x, y) \leftrightarrow (x = \emptyset \wedge y = a) \vee (x \neq \emptyset \wedge y = b)$. Ειναι προφανές ότι $\forall x \exists! y \Psi(x, y)$

δηλ. η $\Psi(x,y)$ είναι προτασιακή συνάρτηση. Αλλά τότε από αξίωμα αντικατάστασης έχουμε ότι η κλάση $\{y|\exists x(x \in \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \wedge \Psi(x,y))\} = \{a,b\}$ είναι σύνολο.

Λύση 5. Εστω A σύνολο. Ορίστε ένα σύνολο B ώστε $B \notin A$.

Θέστε $B = \{x|x \in A \wedge x \notin x\}$. Το B είναι σύνολο από την αρχή του διαχωρισμού. Αλλά τότε αν $B \in A$ έχουμε $B \in B \leftrightarrow B \notin B$ όπως στο παράδοξο του Russell.

Λύση 6.

$\{\langle x,y\rangle | x,y \in A \wedge x \in y\} = \{t|t \in A \times A \wedge \exists x \exists y\, (t = \langle x,y\rangle \wedge\, x \in y\}$ είναι σύνολο από το αξίωμα του διαχωρισμού. Σημειώστε ότι $\langle x,y\rangle \in A \to x,y \in \cup\cup A$ αρα $\{< x,y > \mid < y,x >\in A\} = \{t|t \in \cup\cup A \times \cup\cup A \wedge \exists x \exists y\, (t = \langle x,y\rangle \wedge \langle y,x\rangle \in A)\}$, άρα σύνολο, πάλι από την αρχή του διαχωρισμού.

Για το δεύτερο μέρος θεωρείστε την οριστική συνθήκη

$$\Psi(a,t) \equiv \exists x \exists y (t = \{x,y\} \wedge \Theta(a,x) \wedge \Theta(a,y)) \vee \neg\exists x(\Theta(a,x) \wedge t = \emptyset)$$

δηλ.

- $t = \{x,y\}$ στην περίπτωση που υπάρχουν δύο b, δηλαδή τα x και y, ώστε να ισχύει $\Theta(a,b)$
- $t = \{x\}$ στην περίπτωση που υπάρχει ένα b $(b = x)$
- και $t = \emptyset$ στην περίπτωση που δεν υπάρχει κανένα.

Σχηματίστε το σύνολο $D = \{c \mid \exists a(a \in A \wedge \Psi(a,c))\}$ και κατόπιν πάρτε το $\cup D$ το οποίο είναι το ζητούμενο σύνολο.

Λύση 7. Δείξτε ότι δεν υπάρχει σύνολο A ώστε

$$x \in A \leftrightarrow \exists y,\, x = \{y\}$$

[Αυτό το «σύνολο» αντιστοιχεί στον αριθμό 1 του Frege, δηλ. την κλάση όλων των συνόλων με ένα στοιχείο.]

Εάν το A ήταν σύνολο τότε κάθε σύνολο θα ήταν μέλος του $\cup A$ δηλ. $\forall x\, (x \in \cup A)$. Αλλά τότε από πρόβλημα 5 θα υπήρχε σύνολο B ώστε $B \notin \cup A$ (*άτοπο*).

Λύση 8.

Εστω $x \neq x'$. Εάν $x \neq a$ τότε $x \notin \{x',a\}$ και $x \in \{x,a\}$ άρα $\{x',a\} \neq \{x,a\}$. Εάν $x = a$ τότε $x' \neq a$ (επειδή $x' \neq x$) άρα ομοίως $\{x',a\} \neq \{x,a\}$. Αρα τελικά $\{x',a\} \neq \{x,a\}$. Εάν $\{y,b\} = \{x',a\}$ τότε $b \in \{x',a\}$ άρα $b = x'$ επειδή $b \neq a$, άρα $b \notin \{x,a\}$ άρα $\{x,a\} \neq \{b,y'\}$.

Το τελευταίο μέρος βγαίνει χρησιμοποιώντας την προφανή συμμετρία μεταξύ a και b.