ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 4

Λύση 1

1. Έστω $A = \{\{a\}, \{c\}, \{a, b\}\}$ με a, b, c διαφορετικά και $<$ τη σχέση του γνησίου υποσυνόλου.

2. Εάν A είναι το $\mathbb{Z}$ με τη συνήθη διάταξη.

3. Έστω $A = \{\{a\}, \{a, c\}, \{a, b\}\}$ με a, b, c διαφορετικά και $<$ τη σχέση του γνησίου υποσυνόλου.

1. Είναι αληθής για τη γραμμική διάταξη επειδή $\neg(z < y) \Rightarrow$ είτε $z = y$ (οπότε $x < z$) ή $y < z$ (οπότε $x < z$ από μεταβατικότητα).

2. Ψευδής για τη γραμμική διάταξη.

3. Αληθής για τη γραμμική διάταξη. Επειδή υποθέτοντας $\forall z \in A, z < x \leftrightarrow z < y$, έχουμε $y < x \rightarrow y < y$, άτοπο και $x < y \rightarrow x < x$ άτοπο, άρα πρέπει $x = y$.

Λύση 2

Διότι $\sup\{\alpha, \beta\} = \cup\{\alpha, \beta\} = \alpha \cup \beta$.

Λύση 3

Έστω δ το ελάχιστο στοιχείο του X. Τότε $\forall \alpha \in X, \delta \subseteq \alpha$ άρα

$$\begin{aligned} \beta \in \delta \quad &\leftrightarrow \quad \beta \in \alpha, \ \forall \alpha \in X \quad (\text{το } \leftarrow \text{ διότι } \delta \in X) \\ &\leftrightarrow \quad \beta \in \cap X \end{aligned}$$

Λύση 4

Πρέπει να δείξουμε ότι $<$ διατάσσει γραμμικά το B. Έστω $b_1, b_2 \in B$. Τότε $\emptyset \neq \{b_1, b_2\} \subseteq B$ και ας υποθέσουμε ότι b_1 είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\{b_1, b_2\}$ δηλ. $\forall b \in \{b_1, b_2\}, b_1 < b \vee b_1 = b$. Τότε $b_1 < b_2$ ή $b_1 = b_2$. Άρα ακριβώς ένα από τα $b_1 < b_2, b_1 = b_2, b_2 < b_1$ ισχύει επειδή αν ίσχυαν δύο θα είχαμε $b_1 < b_2$ και $b_2 < b_1$. Τελικά, για να δείξουμε τη μεταβατικότητα, δοθέντων $a < b$, $b < c$ δείξτε ότι το a πρέπει να είναι το ελάχιστο στοιχείο του $\{a, b, c\}$.

Λύση 5

Έστω $X \subseteq A \times B, X \neq \emptyset$. Έστω a_0 το ελάχιστο στοιχείο του $Y = \{a \mid a \in A \wedge \exists b(b \in B \wedge \langle a, b\rangle \in X)\}$ ως προς $<_A$ και έστω b_0 το ελάχιστο στοιχείο του $Z = \{b \mid b \in B \wedge \langle a_0, b\rangle \in X\}$ ως προς $<_B$. Τότε για $\langle a, b\rangle \in X$ θα είναι $a \in Y$ άρα είτε $a_0 < a$ στην οποία περίπτωση $\langle a_0, b_0\rangle < \langle a, b\rangle$ ή $a = a_0$ στην οποία περίπτωση $b \in Z$. Άρα $b_0 \leq_B b$ και $\langle a_0, b_0\rangle < \langle a, b\rangle$ ή $\langle a_0, b_0\rangle = \langle a, b\rangle$. Εύκολα μπορούμε να δείξουμε ότι $\langle a, b\rangle < \langle a', b'\rangle \rightarrow \neg(\langle a', b'\rangle < \langle a, b\rangle)$. Το ζητούμενο έπεται από το πρόβλημα 4.

Λύση 6

Ας υποθέσουμε αντίθετα ότι $F(a) < a$ για κάποιο $a \in A$. Έστω a_0 το ελάχιστο τέτοιο a. Τότε, επειδή F σέβεται τη διάταξη, από $F(a_0) < a_0$ παίρνουμε $F(F(a_0)) < F(a_0)$ και επειδή $F(a_0) < a_0$ παραβιάζεται η ελαχιστότητα του a_0, άρα άτοπο!