ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 5

Λύση 1

1. Αληθής, επειδή β μεταβατικό σύνολο.

2. Για τον ίδιο λόγο.

3. Ψευδής, πάρτε $x = \{\beta\}$.

4. Αληθής.

5. Αληθής. $\alpha \leq \beta \leftrightarrow \alpha \subseteq \beta \leftrightarrow \alpha \cap \beta = \alpha$.

6. Αληθής. $\alpha < \beta \leftrightarrow \neg(\beta \leq \alpha) \leftrightarrow \neg(\alpha \cap \beta = \beta) \leftrightarrow \alpha \cap \beta \neq \beta$.

7. Ψευδής, πάρτε $A_1 = \omega$ και $A_2 = \{\omega\}$.

8. Ψευδής, πάρτε $A_1 = \omega$.

9. Αληθής

Λύση 2

Για $a, b \in A$ έχουμε $aRb \leftrightarrow f(a) < f(b)$ και $a = b \leftrightarrow f(a) = f(b)$, επειδή f είναι 1-1. Ακριβώς ένα από τα $aRb, bRa, a = b$ ισχύει (Επειδή ακριβώς ένα από τα $f(a) < f(b), f(b) < f(a), f(a) = f(b)$ ισχύει). Εάν aRb, bRc τότε $f(a) < f(b), f(b) < f(c)$ άρα $f(a) < f(c)$ άρα aRc. Τελικά αν $\emptyset \neq X \subseteq A$ τότε $\emptyset \neq f[A] = \{f(x) \mid x \in X\} \subseteq \alpha$. Έστω β το ελάχιστο στοιχείο του $f[A]$. Τότε αν $a \in X$ έχουμε $\neg(f(a) < \beta)$ άρα $\neg(aRf^{-1}(\beta))$ άρα $f^{-1}(\beta)$ είναι το R-ελάχιστο στοιχείο του X.

Λύση 3

Το $\cup A$ είναι διατακτικός αριθμός. Αρα αρκεί να δείξουμε ότι $\cup A = sup(A)$. Έχουμε

$\nu \in \cup A \leftrightarrow \nu \in \alpha$ για κάποιο $\alpha \in A$
$\leftrightarrow \nu < \alpha$ για κάποιο $\alpha \in A$
$\rightarrow \nu < sup(A)$
$\rightarrow \neg(\alpha \leq \nu, \forall \alpha \in A)$
$\rightarrow \nu < \alpha$ για κάποιο $\alpha \in A$
Άρα $\nu \in \cup A \leftrightarrow \nu \in sup(A)$. Απ' το οποίο $\cup A = sup(A)$.

Από το παραπάνω $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ είναι διατακτικός και $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\} = sup\{f(n) \mid n \in \omega\}$. Επειδή $0 \leq f(0) < f(1) \leq \cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ έχουμε $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\} \neq 0$. Εάν $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ ήταν επόμενος διατακτικός έστω $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\} = \delta'$ τότε $\delta < \cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ άρα $\delta < f(n)$ για κάποιο $n \in \omega$ άρα $\delta' \leq f(n) \rightarrow \delta' < f(n+1)$. Αλλά $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\} = \delta'$ και $f(n+1) \leq \cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$. Άτοπο.

Χρησιμοποιώντας αναδρομή έστω f η συνάρτηση με $dom(f) = \omega$ και $f(n) = seq(\omega \cup \{f(k) \mid k < n\})$ για $n \in \omega$.

Προφανώς $f(o) = \omega$ και $n < m \to f(n) < f(m)$. [Ακριβέστερα είναι εύκολο να δούμε ότι $f(n) = (\cdots(((\omega + 1) + 1) + 1) + \cdots + 1)$].

Άρα $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ είναι οριακός διατακτικός και $\omega < f(1) < \cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ άρα $\cup\{f(n) \mid n \in \omega\}$ είναι διαφορετικός από τον ω.

Λύση 4

Αν A, B ξένα μεταξύ τους τότε $<=<_A \cup <_B \cup (A \times B)$ είναι μια τέτοια καλή διάταξη δηλ. για $x, y \in A \cup B$

$$x < y \leftrightarrow (x, y \in A \wedge x <_A y) \vee (x, y \in B \wedge x <_B y) \vee (x \in A \wedge y \in B)$$

Αν A και B δεν είναι ξένα μεταξύ τους τότε

$$<=<_A \cup (<_B \cap (B - A)^2) \cup (A \times (B - A))$$

είναι μια τέτοια διάταξη.