ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 6

Λύση 1

1. $X = f(0) \subseteq \cup \mathrm{Rg}(f) = \cup\{f(n) | n \in \omega\}$
   (διότι, γενικά, αν $a \in A$ τότε $a \subseteq \cup A$)

2. Εστω $a \in b$ και $b \in \cup \mathrm{Rg}(f)$. Τότε, επειδή $b \in f(n)$ για κάποιο $n \in \omega$, θα έχουμε $a \in \cup f(n) \subseteq f(n+1) \subseteq \cup \mathrm{Rg}(f)$. Αρα $a \in \cup \mathrm{Rg}(f)$.

Τελικά για το επόμενο, θα δείξουμε ότι για όλα τα $n \in \omega$, $f(n) \subseteq y$ άρα θα έχουμε τελικά ότι $\cup \mathrm{Rg}(f) \subseteq y$.

Υποθέτουμε, για απαγωγή σε άτοπο, ότι $f(n) \nsubseteq y$ για κάποιο $n \in \omega$ και έστω n_0 το ελάχιστο τέτοιο n.

Αν $n_0 = 0$ τότε $X \nsubseteq y$ (άτοπο) άρα $n_0 = s'$ για κάποιο $s \in \omega$ και $f(s) \subseteq y$. Τότε

$$\begin{aligned} a \in \cup f(s) &\rightarrow a \in b \text{ για κάποιο } b \in f(s) \\ &\rightarrow a \in b,\ b \in y \\ &\rightarrow a \in y \end{aligned}$$

Αρα $\cup f(s) \subseteq y$, άρα $f(n_0) = f(s) \cup \bigcup f(s) \subseteq y$ (άτοπο).

Λύση 2

Χρησιμοποιείστε τις ιδέες του Προβλήματος 1 για να κατασκευάσετε f με domain ω τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} &f(0) = a \\ &f(n') = f(n) \cup (f(n) \times f(n)) \quad \text{για } n \in \omega \end{aligned}$$

και θέστε $A = \cup \mathrm{Rg}(f)$. Απλή επαγωγή στο m δείχνει ότι $n \leq m \rightarrow f(n) \subseteq f(m)$. Τώρα είναι εύκολο να επιβεβαιώσετε τα 1. και 2. Το 3. έπεται αφού δείξετε ότι $f(n) \subseteq A'$ $\forall n \in \omega$.

Λύση 3

Εστω $+$ δεν είναι αντιμεταθετική και έστω $\langle n, m\rangle$ είναι το $<$-ελάχιστο στοιχείο του ω^2 έτσι ώστε $n+m \neq m+n$. Παίρνουμε αντίφαση δουλεύοντας με περιπτώσεις:

1. $n = m = 0$. Τότε $n + m = 0 = m + n$.

2. $m = 0$, $n \neq 0$ έστω $n = s'$. Τότε

$$\begin{aligned} m+n = 0+s' = (0+s)' &= (s+0)' \quad (\text{επειδή } \langle s, 0\rangle < \langle s', 0\rangle = \langle n, m\rangle) \\ &= s' = n = n+m \end{aligned}$$

3. $n, m \neq 0$, έστω $n = s', m = t'$. Τότε

$$\begin{aligned} n + m = s' + t' &= (s' + t)' & \\ &= (t + s')' & \text{επειδή } \langle s', t\rangle < \langle n, m\rangle \\ &= (t + s)'' & \\ &= (s + t)'' & \text{επειδή } \langle s, t\rangle < \langle n, m\rangle \\ &= (s + t')' & \\ &= (t' + s)' & \text{επειδή } \langle s, t'\rangle < \langle n, m\rangle \\ &= t' + s' = m + n & \end{aligned}$$

Λύση 4

1. $\alpha \uplus 0 = \alpha \times \{0\}$ και σ'αυτή την περίπτωση για $\gamma, \delta \in \alpha$

$$\langle\gamma, 0\rangle R \langle\delta, 0\rangle \leftrightarrow \gamma \in \delta$$

Αρα η συνάρτηση $f : \alpha \to \alpha \uplus 0$ που ορίζεται με $f(\gamma) = \langle\gamma, 0\rangle$ είναι 1-1 και επί και

$$f : \langle\alpha, \in\rangle \cong \langle\alpha \uplus 0, R\rangle$$

Δηλαδή $\alpha \uplus 0 = \alpha$.

2. Εστω $g : \langle\alpha \dot{+} \beta, \in\rangle \cong \langle\alpha \uplus \beta, R\rangle$ όπου R είναι η καλή διάταξη του $\alpha \uplus \beta$ και έστω R' είναι η αντίστοιχη διάταξη του $\alpha \uplus \beta'$.

Τότε $R' = R \cup \{\langle\sigma, \langle\beta, 1\rangle\rangle | \sigma \in \alpha \uplus \beta\}$ και $h : \langle(\alpha \dot{+} \beta)', \in\rangle \cong \langle\alpha \uplus \beta', R'\rangle$ όπου $h \restriction \alpha \dot{+} \beta = g$ και $h(\alpha \dot{+} \beta) = \langle\beta, 1\rangle$.

Αρα $\alpha \dot{+} \beta' = (\alpha \dot{+} \beta)'$.

3. $1 \uplus \omega = \{\langle 1, 0\rangle\} \cup \{\langle n, 1\rangle | n \in \omega\}$

Είναι εύκολο να δούμε ότι $h : \langle\omega, \in\rangle \cong \langle 1 \uplus \omega, R\rangle$ όπου

$$\begin{aligned} &h(0) = \langle 1, 0\rangle \\ &h(n') = \langle n, 1\rangle, \ n \in \omega \end{aligned}$$

Αρα $1 \dot{+} \omega = \omega$. Από τα προηγούμενα $\omega \dot{+} 1 = \omega \dot{+} 0' = (\omega \dot{+} 0)' = \omega' \neq \omega$.