ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 7

Λύση 1

1. Αληθές, επειδή $f : A \rightarrowtail B \Leftrightarrow f : A \twoheadrightarrow \mathrm{Rg}(f) \wedge \mathrm{Rg}(f) \subseteq B$.
2. Ψευδές. Πάρτε $A = D = \omega,\ B = \omega'$.
3. Αληθές επειδή $f : A \twoheadrightarrow \emptyset \Rightarrow \mathrm{Rg}(f) = \emptyset \Rightarrow f = \emptyset \Rightarrow \emptyset = \mathrm{dom}(f) = A$.
4. Ψευδές. Πάρτε $A = \{\emptyset\},\ B = \{\omega\}$.

Λύση 2

Έστω $f : A \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow B$. Ορίζουμε $G : {}^{A}D \to {}^{B}D$ με $G(h) = h \circ f^{-1}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι G είναι 1-1, επί του ${}^{B}D$.

Για το δεύτερο μέρος έστω $f : A \rightarrowtail B$. Εάν $A = \emptyset$ τότε ${}^{A}D = \{\emptyset\}$. Επειδή $D \neq \emptyset$ διαλέγουμε $d \in D$. Τότε $B \times \{d\} \in {}^{B}D$, έτσι η απεικόνιση $\{\langle \emptyset, B \times \{d\}\rangle\}$ επαληθεύει την ${}^{A}D \preceq {}^{B}D$. Εάν $A \neq \emptyset$ διαλέγουμε $a \in A$ και ορίζουμε $g : B \twoheadrightarrow A$ με

$$g(b) = \begin{cases} f^{-1}(b) & \text{αν } b \in \mathrm{Rg}(f) \\ a & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Τώρα ορίζουμε $G : {}^{A}D \to {}^{B}D$ με $G(h) = h \circ g$. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι G είναι 1-1.

Λύση 3

Έστω $D = \{n \mid n \in \omega \wedge \forall X, \emptyset \neq X \subseteq n \to X \text{ έχει ένα μέγιστο στοιχείο}\}$. Αποδεικνύουμε ότι $D = \omega$ με την αρχή της επαγωγής. Προφανώς $0 \in D$. Υποθέτουμε $n \in D$ και $\emptyset \neq X \subseteq n'$. Εάν $n \in X$ τότε το n πρέπει να είναι το μέγιστο στοιχείο του X. Διαφορετικά, επειδή $n' = n \cup \{n\}, X \subseteq n$ έτσι αφού $n \in D$, X έχει ένα μέγιστο στοιχείο,άρα $n' \in D$.

Λύση 4

1. Αληθές
2. Ψευδές. Πάρτε $\alpha = \omega', \beta = \omega$ και θυμηθείτε ότι $\omega \sim \omega'$.

Λύση 5

Από προηγούμενα παραδείγματα ξέρουμε ότι αφού $A \sim A \times 2$, θα έχουμε ότι $\mathcal{P}(A) \sim \mathcal{P}(A \times 2)$ άρα είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\mathcal{P}(A \times 2) \sim \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A)$. Αλλά $f : \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(A) \rightarrowtail\!\!\!\!\twoheadrightarrow \mathcal{P}(A \times 2)$ όπου $f(B, C) = (B \times \{0\}) \cup (C \times \{1\})$.

Λύση 6

Η εκφώνηση έχει επαρκείς υποδείξεις!