ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 8

Λύση 1

1. Ψευδές. Πάρτε $A = \{\{0, 1, 2\}\}, B = \{\{0\}, \{1\}\}$.
2. Ψευδές. Πάρτε $A = \omega, B = 1, C = \omega$.
3. Αληθές. Εάν $A = \emptyset$ και οι δύο πλευρές είναι $\emptyset$. Διαφορετικά διαλέξτε $a \in A$. Τότε $g : A \rightarrowtail A \times A$ όπου $g(x) = \langle a, x\rangle$.
4. Αληθές. Από θεώρημα Schröder-Bernstein $A \sim B \leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge B \preccurlyeq A$. Άρα

   $A \preccurlyeq B \wedge \neg(A \sim B) \leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge (\neg(A \preccurlyeq B) \vee \neg(B \preccurlyeq A)) \leftrightarrow A \preccurlyeq B \wedge \neg(B \preccurlyeq A) \leftrightarrow A \prec B$.
5. Αληθές. Η πλευρά $\Rightarrow$ από ορισμό του ω_1.

   Η πλευρά $\Rightarrow$: Υποθέτουμε $\alpha \preccurlyeq \omega$. Εάν $\omega_1 \leq \alpha$ τότε $\omega_1 \preccurlyeq \alpha \preccurlyeq \omega$ (άτοπο), άρα $\alpha < \omega_1$.

Λύση 2

Έστω $<_A$, $<_B$ διατάσσουν καλώς τα A, B αντίστοιχα. Διαλέγουμε α, β έτσι ώστε $\langle\alpha, \in\rangle \cong \langle A, <_A\rangle$, $\langle\beta, \in\rangle \cong \langle B, <_B\rangle$. Τότε $\alpha \sim A$, $\beta \sim B$. Έτσι

1. $A \prec B \leftrightarrow \alpha \prec \beta \leftrightarrow \neg(\beta \preccurlyeq \alpha) \leftrightarrow \neg(B \preccurlyeq A)$
2. Ένα από τα $\alpha \preccurlyeq \beta, \beta \preccurlyeq \alpha$ ισχύει άρα ένα από τα $A \preccurlyeq B, B \preccurlyeq A$ ισχύει.
3. $\omega \preccurlyeq A \rightarrow \omega \preccurlyeq \alpha \rightarrow \omega \leq \alpha \rightarrow \alpha \sim \alpha \times \alpha \rightarrow A \sim A \times A$.

Λύση 3

Έστω $g : A \rightarrowtail B$. Διαλέγουμε $a \in A$ και ορίζουμε $f : B \twoheadrightarrow A$ με

$$f(b) = \begin{cases} g^{-1}(b) & \text{εάν } b \in \mathrm{Rg}(g) \\ a & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Αντίστροφα, εάν $f : B \twoheadrightarrow A$ και B ένας διατακτικός ορίζουμε $g : A \rightarrowtail B$ με $g(a) =$ «ο ελάχιστος $\alpha \in B$ έτσι ώστε $f(\alpha) = a$».

Λύση 4

Έστω ότι λ δεν είναι πληθικός. Τότε για κάποιο $\alpha < \lambda$, $\neg(\alpha \prec \lambda)$ δηλαδή $\lambda \preccurlyeq \alpha$. Διαλέγουμε $\alpha < \beta < \lambda$, β πληθικός. Τότε $\beta \preccurlyeq \lambda \preccurlyeq \alpha$ έτσι $\beta \preccurlyeq \alpha \,\&\, \neg(\alpha \prec \beta)$, άτοπο.

Λύση 5

Έστω $\gamma = \max(\alpha, \beta)$, $\delta = \min(\alpha, \beta)$.Τότε $\omega \leq \gamma,\ 0 < \delta$, έτσι $\gamma \preccurlyeq \gamma \times \delta \preccurlyeq \gamma \times \gamma \sim \gamma$ άρα $\gamma \sim \gamma \times \delta = \alpha \times \beta$.