ΛΥΣΕΙΣ ΓΙΑ ΤΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ 9

Λύση 1

Έστω $\leq$ μία καλή διάταξη του B και για $a \in A$ ορίζουμε

$$f(a) = \text{ το } \leq\text{-ελάχιστο στοιχείο του } a \cap B$$

Η f είναι μία συνάρτηση επιλογής του A.

Λύση 2

Ορίζουμε $g : A \to \mathbb{R}$ με

$$g(a) = \begin{cases} \inf(a \cap [0,\infty)) & \text{αν } a \cap [0,\infty) \neq \emptyset \\ \sup(a \cap (-\infty,0]) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Προφανώς επειδή το a είναι κλειστό $g(a) \in a$ για όλα τα $a \in A$.

Λύση 3

1. Έστω f μία συνάρτηση επιλογής για το $S[A]$. Τότε για $a \in A$, $f(S(a)) \in S(a)$ άρα $f \circ S \in \prod_{a \in A} S(a)$.
2. Έστω $b \in \cap S[A]$. Τότε $b \in S(a)$, $\forall a \in A$, έτσι $\{\langle S(a), b\rangle \mid a \in A\}$ είναι συνάρτηση επιλογής για το $S[A]$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε την 1.
3. Εάν $t \in \prod_{a \in A} S(a)$ τότε $\{\langle S(a), t(a)\rangle \mid a \in A\}$ είναι μία συνάρτηση επιλογής για το $S[A]$. (Σημειώστε ότι αν η S δεν είναι 1-1 τότε μπορεί να μην είναι ούτε καν συνάρτηση).

Λύση 4

1. Για $c \in C$ έστω

$$f(c) = \{\langle c, x\rangle \mid x \in c\}$$

Προφανώς επειδή $c \in C \Rightarrow c \neq \emptyset$, $f(c) \neq \emptyset$ και εάν $c_1, c_2 \in C \,\&\, c_1 \neq c_2$ τότε $a \in f(c_1) \cap f(c_2) \Rightarrow a = \langle c_1, x\rangle = \langle c_2, z\rangle$ για κάποιο $x, z \Rightarrow c_1 = c_2$, άτοπο.

Αρα $f(c_1) \cap f(c_2) = \emptyset$.

Ισχυριζόμαστε ότι $f[C]$ δεν έχει συνάρτηση επιλογής επειδή εάν είχε, έστω h ας ήταν μία τέτοια συνάρτηση, τότε η συνάρτηση g με $\mathrm{domain}(g) = C$ και έτσι ώστε $g(c) =$ το μοναδικό x ώστε $h(f(c)) = \langle c, x\rangle$ θα ήταν μία συνάρτηση επιλογής για το C.

2. Έστω i η ταυτοτική συνάρτηση του $\cup B$. Τότε $i \in \prod_{a \in \cup B} K(a)$.

Λύση 5

Εάν R διατάσσει καλώς το A τότε δεν μπορεί να υπάρχει απεικόνιση $g : \omega \to A$ έτσι ώστε $\forall n,\ g(n+1)\, R\, g(n)$ διαφορετικά το $\emptyset \neq g[\omega] \subseteq A$ δεν θα είχε ελάχιστο στοιχείο.

Εάν η R δεν διατάσσει καλώς το A τότε $\exists b \subseteq A$ έτσι ώστε $b \neq \emptyset$ και b δεν έχει R-ελάχιστο στοιχείο. Έτσι για κάθε $c \in b$, $\{a \mid a \in b \wedge aRc\} \neq \emptyset$. Χρησιμοποιώντας το AC, έστω f είναι μία συνάρτηση επιλογής για το $\mathcal{P}(A) - \{\emptyset\}$ και έστω g (χρησιμοποιώντας τον ορισμό με υπερπεπερασμένη αναδρομή) μία συνάρτηση έτσι ώστε $\mathrm{domain}(g) = \omega$

$$g(n) = \begin{cases} f(b) & \text{εάν } n = 0 \\ f(\{a \mid a \in b \wedge a\, R\, g(m)\}) & \text{εάν } m+1 = n \;\&\; f(\ldots) \text{ ορίζεται} \\ f(b) & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

Λαμβάνοντας υπ'όψιν μας τις υποθέσεις είναι εύκολο να δούμε ότι $g(0) \in b$ και $\forall n \in \omega,\ \ g(n+1) = f(\{a \mid a \in b \wedge a\, R\, g(n)\})$. Άρα $g(n+1)\, R\, g(n)$, άρα g είναι η αιτούμενη συνάρτηση.

Λύση 6

3. Υποθέτουμε $X, Y \in M$ και $X \cap Y \notin M$. Τότε $(\omega - X \cap Y) \in M$, άρα $\emptyset = X \cap Y \cap (\omega - X \cap Y) \in M$, άτοπο.

4. $X, Y \in E \to \omega - X, \omega - Y \in M \to (\omega - X) \cap (\omega - Y) = (\omega - X \cup Y) \in M \to X \cup Y \in E$.

5. $X \in M \,\&\, X \subseteq Y \subseteq \omega \,\&\, Y \notin M \to \omega - Y \in M \to \emptyset = X \cap (\omega - Y) \in M$, άτοπο.

6. $X \subseteq Y, Y \in E \to \omega - Y \subseteq \omega - X \,\&\, \omega - Y \in M \to \omega - X \in M \to X \in E$.

$B \neq \emptyset$ επειδή $\{\omega\} \in B$. Έστω $K \subseteq B$ είναι γραμμικά διατεταγμένο από την $\subset$. Θέλουμε να αποδείξουμε ότι $\cup K \in B$. Έστω $X_1, \ldots, X_n \in \cup K$ και έστω $X_i \in b_i \in K \ \ i = 1, \ldots, n$. Επειδή K είναι γραμμικά διατεταγμένο από την $\subset$ μπορούμε να επιλέξουμε $b_i \in K$ ώστε $b_j \subseteq b_i$ για όλα τα $j = 1, \ldots, n$. Αρα $X_1, \ldots, X_n \in b_i$ δηλαδή $X_1 \cap X_2 \cap \cdots \cap X_n$ είναι άπειρο, όπως απαιτείται.

Έστω F ένα μεγιστικό στοιχείο του B (χρησιμοποιούμε το λήμμα του Zorn). Προφανώς $X_1, \ldots, X_n \in F \to X_1 \cap \cdots \cap X_n$ *εναι πειρο*, έτσι το F θα είναι το απαιτούμενο μείζων σύνολο εάν μπορούμε να δείξουμε ότι για $X \subseteq \omega$, $X \in F \leftrightarrow (\omega - X) \notin F$.

Προφανώς δεν είναι δυνατόν να έχουμε $X \in F \,\&\, (\omega - X) \in F$ έτσι είναι αρκετό να δείξουμε ότι $X \in F \vee (\omega - X) \in F$.

Ας υποθέσουμε ότι δεν είναι. Τότε $F \subset F \cup \{X\}, F \cup \{\omega - X\}$ άρα ούτε το $F \cup \{X\}$ ούτε το $F \cup \{\omega - X\}$ μπορεί να είναι στο B. Τότε υπάρχουν $Z_1, \ldots, Z_n \in F,\ Y_1, \ldots, Y_m \in F$ έτσι ώστε $Z_1 \cap Z_2 \cap \cdots \cap Z_n \cap X$ είναι πεπερασμένο, $Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots Y_m \cap (\omega - X$ είναι πεπερασμένο.

Αλλά $Z_1 \cap Z_2 \cap \cdots Z_n \cap Y_1 \cap Y_2 \cap \cdots \cap Y_m \subseteq (Z_1 \cap \cdots \cap Z_n \cap X) \cup (Y_1 \cap \cdots \cap Y_m \cap (\omega - X))$, άρα $Z_1 \cap \cdots \cap Z_n \cap Y_1 \cap \cdots \cap Y_m$ είναι πεπερασμένο και $Z_1 \ldots Z_n, Y_1 \ldots Y_m \in F$, άτοπο.