Η εικασία KLS για την ισοπεριμετρική σταθερά λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας

Διπλωματική Εργασία

Σιλουανός Μπραζιτίκος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2014

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το πρόβλημα

Σε αυτήν την εργασία μελετάμε τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας: αυτά είναι τα Borel μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που για κάθε ζευγάρι μη κενών συμπαγών υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ικανοποιούν την ανισότητα:

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}.$$

Λέμε ότι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ είναι ισοτροπικό αν για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}^n} x\, d\mu(x) = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 d\mu(x) = 1.$$

Το πρόβλημα με το οποίο θα ασχοληθούμε είναι η εικασία των Kannan-Lovász-Simonovits. Σύμφωνα με αυτήν την εικασία υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{Is}_n := \min\{\mathrm{Is}_\mu : \mu \text{ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον } \mathbb{R}^n\} \geqslant c,$$

όπου η σταθερά *Cheeger* Is_μ ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ ορίζεται ως η καλύτερη σταθερά $\kappa \geqslant 0$ ώστε για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ να ισχύει:

$$\mu^+(A) \geqslant \kappa \min\{\mu(A), 1-\mu(A)\},$$

όπου

$$\mu^+(A) := \liminf_{t\to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}$$

είναι το κατά Minkowski περιεχόμενο του A.

Ιστορικά, το ενδιαφέρον για την παραπάνω ποσότητα προέκυψε σε ένα άρθρο των Dyer, Frieze και Kannan [50], στην προσπάθεια εύρεσης βέλτιστου αλγορίθμου για τον υπολογισμό του όγκου ενός κυρτού σώματος. Πιο συγκεκριμένα, όπως αρχικά διατυπώθηκε, πρόκειται για μια ισοπεριμετρική ανισότητα για κυρτά σώματα: Δοθέντος κυρτού σώματος K, θεωρούμε τη διαμέρισή του σε τρία σύνολα S_1, S_2, S_3 ώστε τα S_1, S_2 να είναι «μακριά» το ένα από το άλλο, δηλαδή η Ευκλείδειά απόστασή τους $d(S_1, S_2)$ να είναι μεγάλη. Έπεται τότε αναγκαστικά ότι ο όγκος του S_3 είναι μεγάλος;

Σε ένα τελείως γενικό πλαίσιο αυτό δεν μπορεί να ισχύει. Το κλασικό αντιπαράδειγμα είναι να θεωρήσουμε μια λεπτή μπάρα με δυο μεγάλους δίσκους στα άκρα. Φυσικά όμως αυτό δεν είναι κυρτό σύνολο. Η απάντηση για K κυρτό είναι καταφατική και δόθηκε από τους Dyer και Frieze [50] Αν D είναι η διάμετρος του K, τότε

$$|S_3| \geqslant \frac{2d(S_1, S_2)}{D} \min\{|S_1|, |S_2|\}.$$

Θεωρώντας την οριακή περίπτωση παίρνουμε επιπλέον ότι για κάθε υποσύνολο S ενός κυρτού σώματος K διαμέτρου D, ισχύει:

$$|\partial S \cap K| \geq \frac{2}{D} \min\{|S|, |K \setminus S|\}.$$

Με άλλα λόγια, η τελευταία ανισότητα δίνει ότι η επιφάνεια του S μέσα στο K είναι μεγάλη αν συγκριθεί με τους όγκους των S και $K \setminus S$. Με την παραπάνω διατύπωση φαίνεται και η αναλογία με την κλασική ισοπεριμετρική αναισότητα. Στο [68] οι Kannan, Lovász και Simonovits αντικατέστησαν στην παραπάνω ανισότητα τη διάμετρο με τη μέση απόσταση από το κέντρο βάρους. Αυτή η προσέγγιση υπερτερεί σε κυρτά σώματα που έχουν πολύ μεγάλη διάμετρο σε σύγκριση με την μέση απόσταση από το κέντρο βάρους, όπως για παράδειγμα ο κώνος.

Όπως θα δούμε, ένας ισοδύναμος τρόπος για να διατυπώσουμε την εικασία των Kannan-Lovász-Simonovits είναι να ρωτήσουμε αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε ομαλή συνάρτηση φ με $\int_{\mathbb{R}^n} \varphi \, d\mu = 0$, ισχύει

$$c \int_{\mathbb{R}^n} \varphi^2 d\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla\varphi\|_2^2 d\mu.$$

Λέμε τότε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $c > 0$. Η ισοδυναμία των δύο προβλημάτων προκύπτει από το γεγονός ότι

$$\mathrm{Is}_\mu^2 \simeq \inf_\mu \inf_\varphi \frac{\int \|\nabla\varphi\|_2^2 d\mu}{\int \varphi^2 d\mu}.$$

Η εικασία KLS εντάσσεται σε μια ομάδα ανοικτών προβλημάτων που αφορούν την γεωμετρία των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας και έχουν μελετηθεί έντονα τα τελευταία χρόνια. Στην επόμενη παράγραφο περιγράφουμε συνοπτικά κάποια από αυτά: την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς και την εικασία του λεπτού δακτυλίου. Όπως φαίνεται και από τα τελευταία κεφάλαια αυτής της εργασίας, τα παραπάνω τρία ανοικτά προβλήματα σχετίζονται μεταξύ τους.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω σε αυτό το σημείο τον επιβλέποντά μου κ. Γιαννόπουλο που αρχικά με ενέπνευσε να ασχοληθώ με τον κλάδο της Ασυμπτωτικής Κυρτής Γεωμετρίας και στη συνέχεια συνέβαλλε τα μέγιστα στη ομαλή εισαγωγή γύρω από τα προβλήματα του κλάδου.
Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Ωνάση που χρηματοδοτεί την προσπάθειά μου στις μεταπτυχιακές μου σπουδές.

1.2 Η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς και το κεντρικό οριακό πρόβλημα

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν έχει όγκο ίσο με 1, κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων και αν υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ ώστε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε, από την ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται ότι το μέτρο με πυκνότητα $L_K^n \mathbf{1}_{K/L_K}$ είναι λογαριθμικά κοίλο και ισοτροπικό. Αποδεικνύεται εύκολα ότι η αφινική κλάση οποιουδήποτε κυρτού σώματος K περιέχει ένα, μοναδικό αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς, ισοτροπικό κυρτό σώμα. Αυτή είναι η λεγόμενη ισοτροπική θέση του K. Ένα από τα κεντρικά ανοικτά προβλήματα της θεωρίας των κυρτών σωμάτων είναι η εικασία του υπερεπιπέδου, η οποία ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\max_{\theta\in S^{n-1}} |K \cap \theta^{\perp}| \geqslant c$ για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων. Το πρόβλημα τέθηκε από τον Bourgain [31] και αποδεικνύεται ότι έχει καταφατική απάντηση αν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη εικασία:

Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Η εικασία μπορεί να αναδιατυπωθεί στό πλαίσιο των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας (βλέπε Κεφάλαιο 2) χωρίς το πρόβλημα να γίνει ουσιαστικά γενικότερο. Γύρω στο 1990, ο Bourgain [33] απέδειξε ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$ και, το 2006, η εκτίμηση αυτή βελτιώθηκε από τον Klartag [70] ο οποίος έδειξε ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}$.

Το πρόβλημα της ισοτροπικής σταθεράς παραμένει ανοικτό και ήταν η αφετηρία για πολλά άλλα προβλήματα και εικασίες στην ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία. Ένα από αυτά είναι το κεντρικό οριακό πρόβλημα το οποίο (γενικότερα) ρωτάει ποιές είναι εκείνες οι κατανομές (μεγάλης διάστασης) οι οποίες έχουν κατά προσέγγιση κανονικές περιθώριες κατανομές. Υποθέτουμε ότι $X = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή κανονικοποιημένο έτσι ώστε

$$\mathbb{E}(X_j) = 0 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X_iX_j) = \delta_{ij}, \qquad i,j = 1, \ldots, n.$$

Αποδεικνύεται ότι αν η κατανομή του X συγκεντρώνεται ισχυρά σε έναν λεπτό δακτύλιο τότε η απάντηση είναι καταφατική. Ένα τυπικό αποτέλεσμα του είδους είναι το εξής.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω X ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\|X\|_2}{\sqrt{n}}-1\right|\geqslant\varepsilon\right)\leqslant\varepsilon \tag{1.2.1}$$

για κάποιο $\varepsilon\in(0,1)$. Τότε, για κάθε θ σε ένα υποσύνολο A της S^{n-1} με $\sigma(A)\geqslant 1-\exp(-c_1\sqrt{n})$ έχουμε

$$|\mathbb{P}(\langle X,\theta\rangle\leqslant t)-\Phi(t)|\leqslant c_2(\varepsilon+n^{-a})\qquad \text{για κάθε } t\in\mathbb{R},$$

όπου $\Phi(t)$ είναι η τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής και $c_1,c_2,a>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Αποτελέσματα αυτού του τύπου έχουν εμφανιστεί αρκετές φορές στην βιβλιογραφία (βλέπε, για παράδειγμα, Sudakov [117], Diaconis και Freedman [48], von Weizsäker [122]). Το πρόβλημα έγινε ευρέως γνωστό στο πλαίσιο των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και γενικότερα στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων κατανομών, από μια εργασία των Anttila, Ball και Περυσινάκη [2]. Αποτελέσματα των Παούρη Klartag, Fleury, Guédon και E. Milman [71], [53], [62] δείχνουν ότι αν υποθέσουμε ότι η κατανομή είναι λογαριθμικά κοίλη τότε μπορούμε να αποδείξουμε ισχυρή συγκέντρωση σε λεπτό δακτύλιο και να δώσουμε καταφατική απάντηση στο κεντρικό οριακό πρόβλημα.

Κεντρικό ρόλο στη μελέτη του προβλήματος παίζει η οικογένεια των L_q-κεντροειδών σωμάτων ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q\geqslant 1$, το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$ του μ ορίζεται μέσω της συνάρτησης στήριξής του

$$h_{Z_q(\mu)}(y):=\|\langle\cdot,y\rangle\|_{L_q(\mu)}=\left(\int_K|\langle x,y\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν έχει βαρύκεντρο το 0 και $Z_2(\mu)=B_2^n$. Η μελέτη αυτής της οικογένειας σωμάτων, και της συμπεριφοράς τους καθώς το q αυξάνει από το 2 προς το n, δίνει πολλές πληροφορίες για τις ιδιότητες συγκέντρωσης του μέτρου μ.

Η πρώτη σημαντική εφαρμογή της θεωρίας των L_q-κεντροειδών σωμάτων είναι η ανισότητα του Παούρη [106]: για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_2\geqslant ct\sqrt{n}\})\leqslant\exp\left(-t\sqrt{n}\right)$$

για κάθε $t\geqslant 1$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η ανισότητα είναι σχεδόν άμεση συνέπεια του εξής αποτελέσματος: υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1,c_2>0$ ώστε, αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$I_q(\mu)\leqslant c_2 I_2(\mu)$$

για κάθε $q\leqslant c_1\sqrt{n}$, όπου η ποσότητα $I_q(\mu)$ ορίζεται, για κάθε $0\neq q>-n$, ως εξής:

$$I_q(\mu)=\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Ένα δεύτερο αποτελέσμα του Παούρη, το οποίο επεκτείνει το προηγούμενο, ισχυρίζεται ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_3\sqrt{n}$ ισχύει

$$I_{-q}(\mu) \simeq I_q(\mu).$$

Ειδικότερα, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_3\sqrt{n}$ ισχύει $I_q(\mu) \leqslant cI_2(\mu)$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την ανισότητα $I_{-q}(\mu) \leq cI_2(\mu)$, με $q \simeq \sqrt{n}$, προκύπτει ότι αν $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ τότε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon^{c_4\sqrt{n}},$$

όπου $\varepsilon_0, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Τα αποτελέσματα του Παούρη δίνουν μια εκτίμηση του μέτρου σε έναν «όχι και τόσο λεπτό» δακτύλιο γύρω από την ακτίνα $\sqrt{n}$: έχουμε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : c\sqrt{n} \leqslant \|x\|_2 < C\sqrt{n}\}) > 1 - o_n(1),$$

όπου $0 < c < 1 < C$ είναι απόλυτες σταθερές.

Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα για την συγκέντρωση ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας σε έναν λεπτό δακτύλιο οφείλεται στους Guédon και E. Milman [62].

Θεώρημα 1.2.2 (Guédon-E. Milman)**.** *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\left|\|X\|_2 - \sqrt{n}\right| \geqslant t\sqrt{n}\right) \leqslant C\exp(-c\sqrt{n}\min(t^3, t)) \tag{1.2.2}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $C, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\|X\|_2)} \leqslant Cn^{1/3}. \tag{1.2.3}$$

Από το Θεώρημα 1.2.2 προκύπτει μια εκτίμηση μεγάλων αποκλίσεων η οποία συμπληρώνει την ανισότητα του Παούρη.

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp(-c\sqrt{n}\min(t^3, t)) \tag{1.2.4}$$

για κάθε $t \geqslant 0$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Από το Θεώρημα 1.2.2 προκύπτει επίσης μια εκτίμηση για το μέτρο σε μικρές μπάλες.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp\left(-c_1\sqrt{n}\min\left(t^3, \log\frac{c_2}{1-t}\right)\right) \tag{1.2.5}$$

για κάθε $t \in (0,1)$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Όλα τα παραπάνω θεωρήματα είναι συνέπειες του εξής κύριου τεχνικού θεωρήματος.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $1 \leqslant |p-2| \leqslant c_1 n^{1/6}$ τότε*

$$1 - C\frac{|p-2|}{n^{1/3}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2\right)^{1/2}} \leqslant 1 + C\frac{|p-2|}{n^{1/3}}, \tag{1.2.6}$$

και αν $c_1 n^{1/6} \leqslant |p-2| \leqslant c_2\sqrt{n}$ τότε

$$1 - C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2\right)^{1/2}} \leqslant 1 + C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}}. \tag{1.2.7}$$

Η βέλτιστη μορφή που μπορούν να πάρουν τα παραπάνω αποτελέσματα παραμένει ανοικτό πρόβλημα. Έχει διατυπωθεί η εξής πολύ ισχυρή εικασία.

Εικασία του λεπτού δακτυλίου: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα X στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\sigma_X^2 := \mathbb{E}\,(\|X\|_2 - \sqrt{n})^2 \leqslant C^2.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Eldan και Klartag [52] έχουν αποδείξει ότι η εικασία του λεπτού δακτυλίου είναι ισχυρότερη από την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς: υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$L_n \leqslant C\sigma_n$$

για κάθε $n \geqslant 1$, όπου

$$\sigma_n^2 := \sup_X \mathbb{E}(\|X\|_2 - \sqrt{n})^2,$$

είναι το supremum των σ_X^2 πάνω από όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα τυχαία διανύσματα X στον $\mathbb{R}^n$.

1.3 Σύντομη περιγραφή της εργασίας

Σε αυτήν την παράγραφο αναφέρουμε συνοπτικά τα κεντρικά αποτελέσματα που παρουσιάζουμε στα επόμενα Κεφάλαια.

Κεφάλαιο 2. Εισάγουμε την κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Αποδεικνύουμε επίσης χρήσιμες ανισότητες για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις και λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Στην συνέχεια ορίζουμε τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα. Αυτά είναι τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ που έχουν βαρύκεντρο στην αρχή των αξόνων και ικανοποιούν την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 d\mu(x) = 1$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Η ισοτροπική σταθερά ενός μέτρου μ που ανήκει σε αυτήν την κλάση ορίζεται ως εξής:

$$L_\mu := \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\right)^{1/n} \simeq (f(0))^{1/n},$$

όπου f είναι η λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα του μ. Παράλληλα συζητάμε την κλάση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και δίνουμε τον ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς ενός κυρτού σώματος. Μελετάμε τις ιδιότητες συγκέντρωσης των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την ανισότητα Brunn-Minkowski (ακριβέστερα, από το λήμμα του Borell) και τις εκφράζουμε στην μορφή αντίστροφων ανισοτήτων Hölder για ημινόρμες.

Κεφάλαιο 3. Εισάγουμε τέσσερις ισοπεριμετρικές σταθερές (την σταθερά Cheeger Is_μ, την σταθερά Poincaré Poin_μ, την σταθερά εκθετικής συγκέντρωσης Exp_μ και την σταθερά πρώτης ροπής FM_μ) που ορίζονται για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και συζητάμε την σχέση τους. Συμπληρώνοντας κλασικά αποτελέσματα των Maz'ya, Cheeger, Gromov, V. Milman, Buser, Ledoux [99], [41], [36], [83], και άλλων, ο E. Milman [104] απέδειξε ότι οι τέσσερις σταθερές είναι ισοδύναμες στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων: ισχύει

$$\mathrm{Is}_\mu \simeq \sqrt{\mathrm{Poin}_\mu} \simeq \mathrm{Exp}_\mu \simeq \mathrm{FM}_\mu$$

για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ, όπου γράφοντας $a \simeq b$ εννοούμε ότι $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$ για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$.

Κεφάλαιο 4. Συζητάμε την εικασία των Kannan-Lovász-Simonovits: υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{Is}_n := \min\{\mathrm{Is}_\mu : \mu \text{ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον } \mathbb{R}^n\} \geqslant c,$$

Οι Kannan, Lovász και Simonovits [68] απέδειξαν το κάτω φράγμα $\sqrt{n}\mathrm{Is}_\mu \geqslant c$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, χρησιμοποιώντας το λήμμα τοπικότητας των Lovász-Simonovits. Εκτός από το επιχείρημα των Kannan, Lovász και Simonovits, παρουσιάζουμε εναλλακτικές αποδείξεις της ίδιας ανισότητας που δόθηκαν από τον Bobkov [21] και τον E. Milman [104]. Συζητάμε επίσης μεταγενέστερη δουλειά του Bobkov [22] ο οποίος απέδειξε ότι $\sqrt[4]{n}\sqrt{\sigma_\mu}\mathrm{Is}_\mu \geqslant c$. Η ανισότητα αυτή συνδέει την εικασία KLS με την εικασία του λεπτού δακτυλίου. Συνδυάζοντάς την με το θεώρημα των Guédon και E. Milman παίρνουμε το κάτω φράγμα $n^{5/12}\mathrm{Is}_\mu \geqslant c$.

Αξίζει να σημειωθεί ότι ο Eldan [51] απέδειξε πρόσφατα ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα που συνδέει την εικασία KLS με την εικασία του λεπτού δακτυλίου: υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\frac{1}{\mathrm{Is}_n^2} \leqslant C \log n \sum_{k=1}^{n} \frac{\sigma_k^2}{k}.$$

Συνδυάζοντάς αυτήν την ανισότητα με το θεώρημα των Guédon και E. Milman παίρνουμε το φράγμα $\mathrm{Is}_n^{-1} \leqslant Cn^{1/3}\log n$.

Κεφάλαιο 5. Παρουσιάζουμε αρχικά ένα θεώρημα του E. Milman [101] σχετικά με την ευστάθεια της σταθεράς Cheeger ως προς διαταραχές: ποιοτικά, ισχυρίζεται ότι αν K και T είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $|K| \simeq |T| \simeq |K \cap T|$, τότε

$$\mathrm{Is}_K \simeq \mathrm{Is}_T.$$

Το αποτέλεσμα αυτό χρησιμοποιήθηκε από τον Klartag [73], ο οποίος απέδειξε ένα λογαριθμικό ως προς την διάσταση κάτω φράγμα για την σταθερά Poincaré $\mathrm{Poin}_K := \mathrm{Poin}_{\mu_K}$ ενός unconditional ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$: έχουμε

$$\mathrm{Is}_K \simeq \sqrt{\mathrm{Poin}_K} \geqslant \frac{c}{\log n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Παράλληλα, ο Klartag [73] έδωσε καταφατική απάντηση στην εικασία του λεπτού δακτυλίου για την κλάση των unconditional ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων διανυσμάτων. Αυτή είναι μία από τις ελάχιστες ειδικές περιπτώσεις στις οποίες η εικασία έχει επαληθευτεί πλήρως. Ο Klartag απέδειξε ότι αν K είναι ένα unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\sigma_K^2 := \mathbb{E}_{\mu_K}\left(\|x\|_2 - \sqrt{n}\right)^2 \leqslant C^2,$$

όπου $C \leqslant 4$ είναι μια απόλυτη θετική σταθερά.

Κεφάλαιο 6. Παρουσιάζουμε ένα θεώρημα των Ball και Nguyen [11] που συνδέει άμεσα την εικασία KLS με την εικασία του υπερεπιπέδου, κάνοντας χρήση εργαλείων από την θεωρία πληροφορίας. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Η εντροπία κατά Shannon μιας μη αρνητικής μετρήσιμης συνάρτησης $f : \Omega \to \mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $\int f \log(1+f) < +\infty$, ορίζεται ως εξής: $\mathrm{Ent}(f) = -\int_\Omega f \log f + \int_\Omega f \,\log \int_\Omega f$. Στην περίπτωση ενός ισοτροπικού τυχαίου διανύσματος X με πυκνότητα f, η εντροπία του X παίρνει την μορφή

$$\mathrm{Ent}(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} f \log f.$$

Είναι γνωστό ότι ανάμεσα σε όλα τα ισοτροπικά τυχαία διανύσματα, το τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα G έχει την μεγαλύτερη δυνατή εντροπία. Αν X είναι ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε η «διαφορά εντροπίας» $\mathrm{Ent}(G)-\mathrm{Ent}(X)$ δίνει ένα μέτρο της απόστασης ανάμεσα στο X και στο G. Μια ανισότητα των Pinsker [109], Csiszár και Kullback (βλέπε [109], [44] και [76]) ισχυρίζεται ότι αν f και g είναι οι πυκνότητες των X και G τότε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f-g|\right)^2 \leqslant 2(\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X)).$$

Αν X_i είναι ανεξάρτητα αντίτυπα του τυχαίου διανύσματος X, τότε τα κανονικοποιημένα αθροίσματα

$$Y_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$$

προσεγγίζουν την τυπική κανονική κατανομή καθώς το $n \to \infty$. Η ανισότητα Shannon-Stam (βλέπε [112], [113] και [115]) ισχυρίζεται ότι $\mathrm{Ent}(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}) \geqslant \mathrm{Ent}(X)$, δηλαδή, η εντροπία του κανονικοποιημένου αθροίσματος δύο ανεξάρτητων αντιτύπων ενός τυχαίου διανύσματος είναι μεγαλύτερη από αυτήν του αρχικού.

Ο Ball παρατήρησε ότι συγκρίνοντας τις «διαφορές εντροπίας» $\mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Ent}(X)$ και $\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X)$ μπορούμε να συνδέσουμε την εικασία KLS με την εικασία του υπερεπιπέδου. Όπως θα δούμε στην Ενότητα 6.1, αν X είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Ent}(X) \geqslant \delta(\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X))$$

για κάποιον $\delta > 0$, όπου Y είναι ένα ανεξάρτητο αντίτυπο του X, τότε η ισοτροπική σταθερά L_X του X ικανοποιεί την

$$L_X \leqslant e^{1+\frac{2}{\delta}}.$$

Οι Ball και Nguyen απέδειξαν στο [11] ότι αν X είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ του οποίου η πυκνότητα f ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré

$$\kappa \int_{\mathbb{R}^n} fh^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f\|\nabla h\|_2^2.$$

για κάθε ομαλή συνάρτηση h με $\int_{\mathbb{R}^n} fh = 0$, με σταθερά $\kappa > 0$, τότε

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Ent}(X) \geqslant \frac{\kappa}{4(1+\kappa)}\left(\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X)\right),$$

όπου Y είναι ένα ανεξάρτητο αντίτυπο του X. Η απόδειξη παρουσιάζεται στην Ενότητα 6.2. Από το θεώρημα των Ball και Nguyen συμπεραίνουμε ότι, για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα X χωριστά, αν έχουμε ένα φράγμα για την σταθερά Poincaré του X τότε μπορούμε να πάρουμε ένα φράγμα για την ισοτροπική του σταθερά: αν η πυκνότητα του X ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $\kappa > 0$, τότε

$$L_X \leqslant e^{1+\frac{8(1+\kappa)}{\kappa}}.$$

Με άλλα λόγια, η εικασία KLS συνεπάγεται (ισχυρά) την εικασία του υπερεπιπέδου.

Κεφάλαιο 7. Συζητάμε κάποιες εικασίες των Latała και Wojtaszczyk [82] σχετικά με την γεωμετρία των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Αφετηρία τους είναι η ιδιότητα *ελαχιστικής συνέλιξης* την οποία εισήγαγε ο Maurey [98] με σκοπό να δώσει μια κομψή και απλή απόδειξη της ανισότητας συγκέντρωσης του Talagrand για το εκθετικό μέτρο γινόμενο. Γενικά, αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας και φ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι το ζεύγος (μ, φ) έχει την *ιδιότητα* (τ) αν, για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\square\varphi} d\mu\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f} d\mu\right) \leqslant 1,$$

όπου $f\square\varphi$ είναι η ελαχιστική συνέλιξη των f και φ, που ορίζεται ως εξής:

$$(f\square\varphi)(x) = \inf\{f(x-y) + \varphi(y) : \ y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Η ιδιότητα (τ) για ένα ζεύγος (μ, φ) συνδέεται στενά με τις ιδιότητες συγκέντρωσης του μέτρου μ αφού έχει σαν συνέπεια ότι για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\mu\left(x \notin A + B_\varphi(t)\right) \leqslant (\mu(A))^{-1}e^{-t},$$

όπου $B_\varphi(t) = \{\varphi \leqslant t\}$. Φυσιολογικά λοιπόν, αν μας δώσουν ένα μέτρο μ αναζητούμε την καλύτερη συνάρτηση κόστους φ με την ιδιότητα ότι το (μ, φ) έχει την ιδιότητα (τ). Η πρώτη βασική παρατήρηση είναι ότι, αν περιοριστούμε σε άρτια μέτρα πιθανότητας μ και κυρτές συναρτήσεις κόστους φ, τότε η μεγαλύτερη δυνατή συνάρτηση κόστους δεν μπορεί να ξεπερνάει τον μετασχηματισμό Cramer Λ_μ^* του μ, δηλαδή τον μετασχηματισμό Legendre του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace του μ.

Θα συζητήσουμε την εικασία ότι αν το μ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας τότε το ζεύγος $(\mu, \Lambda_\mu^*(\frac{\cdot}{\beta}))$ έχει πάντα την ιδιότητα (τ) για κάποια απόλυτη σταθερά $\beta > 0$. Όταν ισχύει κάτι τέτοιο, λέμε ότι το μ έχει την ιδιότητα ελαχιστικής συνέλιξης. Θα δούμε ότι αν το μ έχει την ιδιότητα ελαχιστικής συνέλιξης τότε το μ ικανοποιεί την εξής ανισότητα συγκέντρωσης: για κάθε $p \geqslant 2$ και για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$,

$$\text{αν} \ \ \mu(A) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{έπεται ότι} \quad 1 - \mu(A + \beta Z_p(\mu)) \leqslant e^{-p}(1 - \mu(A)).$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα Cheeger

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1}{\gamma}\min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}$$

με σταθερά $1/\gamma$, τότε θα δούμε ότι ισχύει και το αντίστροφο (με σταθερά που εξαρτάται μόνο από το γ).

Υποθέτοντας ότι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα συγκέντρωσης, μπορούμε να δείξουμε μια πολύ ισχυρή μορφή σύγκρισης ασθενών και ισχυρών ροπών: για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $p \geqslant 2$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \Big|\|x\| - \mathrm{med}(\|x\|)\Big|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant C\beta \sup_{\|u\|_* \leqslant 1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p},$$

όπου $\|\cdot\|_*$ είναι η δυϊκή νόρμα της $\|\cdot\|$. Αυτή η ανισότητα είναι ισχυρότερη από την εικασία του υπερεπιπέδου και από την εικασία του λεπτού δακτυλίου. Καταφατική απάντηση έχει δοθεί μόνο σε πολύ ειδικές περιπτώσεις: για άρτια λογαριθμικά κοίλα μέτρα γινόμενα, για την ομοιόμορφη κατανομή στις ℓ_p^n-μπάλες και για σφαιρικά συμμετρικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα. Στην τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου περιγράφουμε ένα τέτοιο αποτέλεσμα: αν μ είναι ένα unconditional λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $p \geqslant 1$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant C_1 \int_{\mathbb{R}^n} \|x\| d\nu(x) + C_2 \sup_{\|y\|_* \leqslant 1}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle y, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p},$$

όπου ν είναι το εκθετικό μέτρο γινόμενο με πυκνότητα $d\nu(x) = \frac{1}{2^n} e^{-\|x\|_1} dx$ και $C_1, C_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Κεφάλαιο 2

Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

2.1 Κυρτά σώματα

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και S^{n-1} για την μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται με $|\cdot|$. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n και σ για το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Η πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Έστω $k \leqslant n$ και $F \in G_{n,k}$. Συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ στον F. Επίσης, ορίζουμε $B_F := B_2^n \cap F$ και $S_F := S^{n-1} \cap F$.

Τα γράμματα c, c', c_1, c_2 κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές, οι οποίες μπορεί να αλλάζουν από γραμμή σε γραμμή. Οποτεδήποτε γράφουμε $a \simeq b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ έτσι ώστε $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$. Επίσης, αν $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K \simeq L$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ έτσι ώστε $c_1 K \subseteq L \subseteq c_2 K$.

Ένα **κυρτό σώμα** στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο C του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το C είναι συμμετρικό αν «$x \in C$ αν και μόνον αν $-x \in C$». Λέμε ότι το C έχει *κέντρο βάρους* στο 0 (ή στην αρχή των αξόνων) αν $\int_C \langle x, \theta\rangle\, dx = 0$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_C : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ του κυρτού σώματος C με $0 \in \mathrm{int}(C)$ ορίζεται ως εξής:

$$\rho_C(x) = \max\{t > 0 : tx \in C\}.$$

Η *συνάρτηση στήριξης* του C ορίζεται ως εξής:

$$h_C(y) = \max\{\langle x, y\rangle : x \in C\}.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε διευθύνση $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_C(\theta) \leqslant h_C(\theta)$. Το *μέσο πλάτος* του C είναι η ποσότητα

$$w(C) = \int_{S^{n-1}} h_C(\theta)\sigma(d\theta).$$

Η *περιγεγραμμένη ακτίνα* του C είναι η

$$R(C) = \max\{\|x\|_2 : x \in C\}.$$

Πολλές φορές, για σώματα C με $0 \in \mathrm{int}(C)$ λέμε την παραπάνω ποσότητα διάμετρο του σώματος. Ο λόγος είναι ότι αυτές οι δύο ποσότητες είναι ισοδύναμες:

$$R(C) \leqslant \mathrm{diam}(C) \leqslant 2R(C),$$

όπου $\mathrm{diam}(C)$ είναι η συνήθης διάμετρος $\mathrm{diam}(C) = \sup\{\|x-y\|_2 : x, y \in C\}$. Το πολικό σώμα C° του C ορίζεται να είναι το σώμα

$$C^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \forall y \in C\}.$$

Βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι ακόλουθες:

(i) $0 \in C^\circ$.

(ii) Αν $0 \in \mathrm{int}(C)$, τότε $(C^\circ)^\circ = C$.

(iii) Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_{C^\circ}(\theta) = 1/h_C(\theta)$.

(iv) Για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(TC)^\circ = (T^{-1})^*(C^\circ)$.

Κάποιες βασικές ανισότητες για όγκους κυρτών σωμάτων οι οποίες θα φανούν χρήσιμες είναι οι ακόλουθες:

(α) Η ανισότητα του Urysohn. Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$w(C) \geqslant \left(\frac{|C|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}.$$

(β) Η ανισότητα Blaschke-Santaló. Αν K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ή γενικότερα αν το K έχει κέντρο βάρους το 0, τότε

$$|K|\,|K^\circ| \leqslant |B_2^n|^2.$$

(γ) Η ανισότητα των Bourgain-Milman. Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ ώστε: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, ισχύει

$$|K| \cdot |K^\circ| \geqslant c^n |B_2^n|.$$

Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή και ως αντίστροφη ανισότητα Santaló.

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$\|x\|_K = \inf\{t > 0 : x \in tK\}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ συμβολίζεται με X_K. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία μπάλα $B_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ του X είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Έστω X, Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Η *απόσταση Banach–Mazur* του X από τον Y ορίζεται ως εξής:

$$d(X, Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός}\}.$$

Σε γεωμετρική γλώσσα η απόσταση Banach–Mazur περιγράφεται ως εξής: Αν $X = X_K$ και $Y = X_L$ (δηλαδή οι μοναδιαίες μπάλες των X, Y είναι τα κυρτά σώματα K, L αντίστοιχα) τότε η $d(X, Y)$ είναι ο μικρότερος $d > 0$ ώστε

$$L \subseteq T(K) \subseteq dL$$

για κάποιον αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T. Είναι προφανές ότι $d(X, Y) \geqslant 1$ για κάθε δύο n-διάστατους χώρους, με ισότητα αν και μόνον αν οι χώροι είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Έτσι, η απόσταση Banach–Mazur μετράει πόσο διαφέρουν δύο χώροι από το να είναι ισομετρικοί.

Ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται unconditional αν είναι συμμετρικό ως προς τα επίπεδα συντεταγμένων - ισοδύναμα, αν η συνήθης ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι unconditional βάση για την $\|\cdot\|_K$, δηλαδή αν για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_i = \pm 1$ ισχύει

$$\left\|\varepsilon_1 t_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n t_n e_n\right\|_K = \left\|t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n\right\|_K.$$

Γεωμετρικά, αυτό σημαίνει ότι αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in K$ τότε ολόκληρο το ορθογώνιο $\prod_{i=1}^n [-|x_i|, |x_i|]$ περιέχεται στο K.

Ορισμός 2.1.1. *Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$$

και για κάθε $t \geqslant 0$,

$$tA = \{ta \mid a \in A\}.$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 2.1.2. *Εστω K και T δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/n} \geqslant |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{2.1.1}$$

Σημείωση. Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα, ισότητα στην (2.1.1) μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά.

Η (2.1.1) εκφράζει με μία έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι *κοίλη* συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geqslant \lambda|K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}. \tag{2.1.2}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.1.2) και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geqslant |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}. \tag{2.1.3}$$

Η ασθενέστερη αυτή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητη της διάστασης.

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις της (2.1.1). Θα δώσουμε εδώ την απόδειξη της *συναρτησιακής μορφής* της ανισότητας, που οφείλεται στους Prékopa και Leindler

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρεις μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{2.1.4}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2. Έστω K, T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.3, οπότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| = \int h \geqslant \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda} = |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.1.3) για κάθε τριάδα K, T, λ. Για να πάρουμε την (2.1.1) θεωρούμε K και T όπως στο Θεώρημα 2.1.2 (με $|K| > 0$, $|T| > 0$), και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/n}K, \qquad T_1 = |T|^{-1/n}T, \qquad \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}.$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (2.1.3) παίρνουμε

$$|\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1| \geqslant 1. \tag{2.1.5}$$

Όμως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}},$$

επομένως η (2.1.5) παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geqslant \left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n}\right)^n .$$

□

2.2 Συγκέντρωση του μέτρου

Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Δηλαδή, ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και το μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ των Borel υποσυνόλων του (X, d). Αν $A \in \mathcal{A}$ και $t > 0$, η *t-περιοχή* του A είναι το σύνολο

$$A_t = \{x \in X : \ d(x, A) \leqslant t\}.$$

Ορισμός 2.2.1. *Η συνάρτηση συγκέντρωσης του $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ ορίζεται στο $(0, \infty)$ από την*

$$\alpha(X, t) := 1 - \inf\{\mu(A_t) : \mu(A) \geqslant 1/2\}.$$

Λέμε ότι υπάρχει «συγκέντρωση μέτρου» στον χώρο αν η $\alpha(X, t)$ φθίνει γρήγορα (για παράδειγμα, εκθετικά ως προς t). Πολλές από τις εφαρμογές της συγκέντρωσης του μέτρου βασίζονται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1, δηλαδή αν $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$, τότε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leqslant 2\alpha(X, t)$$

όπου $\mathrm{med}(f)$ *είναι κάποιος μέσος Lévy της f.*

Σημείωση. Μέσος Lévy $\mathrm{med}(f)$ της f λέγεται ένας αριθμός για τον οποίο

$$\mu(\{f \geqslant \mathrm{med}(f)\}) \geqslant 1/2 \text{ και } \mu(\{f \leqslant \mathrm{med}(f)\}) \geqslant 1/2.$$

Ένας τέτοιος αριθμός υπάρχει πάντα, δεν είναι όμως αναγκαστικά μοναδικός.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.2. Θέτουμε $A = \{x : f(x) \geqslant \mathrm{med}(f)\}$ και $B = \{x : f(x) \leqslant \mathrm{med}(f)\}$. Αν $y \in A_t$ τότε υπάρχει $x \in A$ με $d(x, y) \leqslant t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \geqslant -d(y, x) + \mathrm{med}(f) \geqslant \mathrm{med}(f) - t$$

αφού η f είναι 1-Lipschitz. Ομοίως, αν $y \in B_t$ τότε υπάρχει $x \in B$ με $d(x, y) \leqslant t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \leqslant d(y, x) + \mathrm{med}(f) \leqslant \mathrm{med}(f) + t.$$

Δηλαδή, αν $y \in A_t \cap B_t$ τότε $|f(x) - \mathrm{med}(f)| \leqslant t$. Με άλλα λόγια,

$$\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\} \subseteq (A_t \cap B_t)^c = A_t^c \cup B_t^c. \tag{2.2.1}$$

Όμως, από τον ορισμό της συνάρτησης συγκέντρωσης έχουμε $\mu(A_t) \geqslant 1 - \alpha(X,t)$ και $\mu(B_t) \geqslant 1 - \alpha(X,t)$. Επιστρέφοντας στην (2.2.1) βλέπουμε ότι

$$\mu\left(\{|f - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leqslant (1 - \mu(A_t)) + (1 - \mu(B_t)) \leqslant 2\alpha(X,t).$$

□

Στην περίπτωση που η συνάρτηση συγκέντρωσης φθίνει πολύ γρήγορα, το Θεώρημα 2.2.2 δείχνει ότι οι 1-Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις είναι «σχεδόν σταθερές» σε «σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Ισχύει μάλιστα και το αντίστροφο.

Πρόταση 2.2.3. *Έστω $(X,\mathcal{A},d,\mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν για κάποιο $t > 0$ και για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leqslant \eta,$$

τότε $\alpha(X,t) \leqslant \eta$.

Απόδειξη. Έστω A Borel υποσύνολο του X με $\mu(A) \geqslant 1/2$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = d(x,A)$. Η f είναι 1-Lipschitz και $\mathrm{med}(f) = 0$ γιατί η f παίρνει μη αρνητικές τιμές και $\mu(\{x : f(x) = 0\}) \geqslant 1/2$. Από την υπόθεση παίρνουμε

$$\mu(\{x \in X : d(x,A) > t\}) \leqslant \eta,$$

δηλαδή $1 - \mu(A_t) \leqslant \eta$. Έπεται ότι $\alpha(X,t) \leqslant \eta$. □

2.3 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Η πυκνότητα ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{P}_n$ συμβολίζεται με f_μ.

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$. Λέμε ότι το μ έχει βαρύκεντρο το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle \, d\mu(x) = \langle x_0,\theta\rangle \tag{2.3.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ισοδύναμα, αν

$$x_0 = \int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu(x).$$

Η υποκλάση $C\mathcal{P}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα *κεντραρισμένα* $\mu \in \mathcal{P}_n$. Αυτά είναι τα μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$ που έχουν βαρύκεντρο στην αρχή των αξόνων. Δηλαδή, $\mu \in C\mathcal{P}_n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle d\mu(x) = 0 \tag{2.3.2}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Η υποκλάση $\mathcal{SP}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα άρτια (συμμετρικά) μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$: το μ λέγεται άρτιο αν $\mu(A) = \mu(-A)$ για κάθε σύνολο Borel A στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Όπως στην περίπτωση των μέτρων, το βαρύκεντρο της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{bar}(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx}.$$

Ειδικότερα, η f έχει βαρύκεντρο (ή κέντρο βάρους) στην αρχή των αξόνων αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x)\, dx = 0$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε λέμε και ότι η f είναι *κεντραρισμένη*.

Ορισμός 2.3.1. Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλο* αν για κάθε ζεύγος συμπαγών συνόλων A, B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda} \mu(B)^{\lambda}. \tag{2.3.3}$$

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλη* αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda} \tag{2.3.4}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$ (τότε λέμε ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη *πυκνότητα*). Από την ανισότητα Prékopa-Leindler έπεται ότι το μέτρο μ που έχει πυκνότητα την f είναι λογαριθμικά κοίλο: για να το δούμε αυτό, θεωρούμε δύο συμπαγή σύνολα A, B στον $\mathbb{R}^n$ και τυχόν $\lambda \in (0,1)$. Τότε, οι συναρτήσεις $w = \mathbf{1}_A f$, $g = \mathbf{1}_B f$ και $h = \mathbf{1}_{(1-\lambda)A+\lambda B} f$ ικανοποιούν την

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant w(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, συνεπώς, το Θεώρημα 2.1.3 δείχνει ότι

$$\begin{aligned}\mu((1-\lambda)A + \lambda B) &= \int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} w\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\lambda} \\ &= \mu(A)^{1-\lambda} \mu(B)^{\lambda}.\end{aligned}$$

Το επόμενο θεώρημα του Borell [29] δείχνει ότι, αντίστροφα, κάθε μη εκφυλισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_n$ και έχει λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H. Τότε, το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f, δηλαδή $d\mu(x) = f(x)\,dx$.*

Παραδείγματα 2.3.3. (α) Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\mu_K(A) = |K \cap A| = \int_A \mathbf{1}_K(x)dx$$

για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Από την κυρτότητα του K έπεται ότι η $\mathbf{1}_K$ είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα το μ_K είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.

(β) Για κάθε $c > 0$, η συνάρτηση $f_c(x) = \exp(-c\|x\|_2^2)$ είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^n$: παρατηρήστε ότι η Ευκλείδεια νόρμα είναι κυρτή συνάρτηση, και η $t \mapsto ct^2$ είναι επίσης κυρτή. Συνεπώς, η σύνθεσή τους $c\|x\|_2^2 = -\log f(x)$ είναι μια άρτια κυρτή συνάρτηση. Έπεται ότι, για κάθε $c > 0$, το μέτρο

$$\gamma_{r,c}(A) = \frac{1}{I(c)} \int_A \exp(-c\|x\|_2^2)dx$$

όπου $I(c) = \int_{\mathbb{R}^r} \exp(-c\|x\|_2^2)dx$, είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Ειδικότερα αυτό ισχύει για το τυπικό μέτρο του Gauss γ_n.

Παρατήρηση 2.3.4. Βασικές ιδιότητες της κλάσης των λογαριθικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι οι εξής:

(α) Αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι ένας αφινικός μετασχηματισμός, τότε το $\mu \circ T^{-1}$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^m$.

(β) Αν κάθε μ_i είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \dots, k$, τότε το $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$.

(γ) Αν τα μ και ν είναι λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε η συνέλιξή τους $\mu * \nu$ (που ορίζεται από την

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,d(\mu * \nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(x + y)\,d\mu(x)\,d\nu(y)$$

για κάθε μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση h στον $\mathbb{R}^n$) είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό φαίνεται αν παρατηρήσουμε ότι το $\mu * \nu$ είναι η εικόνα του $\mu \times \nu$ μέσω του αφινικού μετασχηματισμού $T(x, y) = x + y$.

(δ) Αν $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο μ, τότε το μ είναι επίσης λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 2.3.5. Έστω $s \in [-\infty, \infty]$. Λέμε ότι ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι *s-κοίλο* αν

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant ((1-\lambda)\mu^s(A) + \lambda\mu^s(B))^{1/s} \tag{2.3.5}$$

για κάθε ζεύγος συμπαγών υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A)\mu(B) > 0$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$. Οι οριακές περιπτώσεις ορίζονται κατάλληλα. Για $s = 0$ το δεξιό μέλος της (2.3.5) γίνεται $\mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}$ (άρα, τα 0-κοίλα μέτρα είναι τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα). Στην περίπτωση $s = -\infty$ το δεξιό μέλος της (2.3.5) γίνεται $\min\{\mu(A), \mu(B)\}$ και στην περίπτωση $s = \infty$ ισούται με $\max\{\mu(A), \mu(B)\}$. Παρατηρήστε ότι αν το μ είναι s-κοίλο και αν $t \leqslant s$ τότε το μ είναι t-κοίλο.

Έστω $\gamma \in [-\infty, \infty]$. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λέγεται *γ-κοίλη* αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant ((1-\lambda)f^{\gamma}(x) + \lambda f^{\gamma}(y))^{1/\gamma} \tag{2.3.6}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $f(x)f(y) > 0$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$. Πάλι, ορίζουμε κατάλληλα τις περιπτώσεις $\gamma = 0, \pm\infty$. Οι $-\infty$-κοίλες είναι οι quasi-κοίλες συναρτήσεις: εκείνες οι συναρτήσεις f για τις οποίες το σύνολο $\{f \geqslant t\}$ είναι κυρτό για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ο Borell [28] μελέτησε την σχέση ανάμεσα στα s-κοίλα μέτρα πιθανότητας και τις γ-κοίλες συναρτήσεις. Το επόμενο θεώρημα γενικεύει το Θεώρημα 2.3.2.

Θεώρημα 2.3.6 (Borell). *Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω F ο αφινικός υπόχωρος που παράγεται από τον φορέα $\mathrm{supp}(\mu)$ του μ. Αν $\dim(F) = d$ τότε για κάθε $-\infty \leqslant s \leqslant 1/d$ έχουμε ότι το μ είναι s-κοίλο αν και μόνο αν έχει μια μη αρνητική πυκνότητα $\psi \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n, dx)$ και η ψ είναι γ-κοίλη, όπου $\gamma = \frac{s}{1-sd} \in [-1/d, +\infty]$. Αν $s > 1/d$ τότε το μ είναι s-κοίλο αν και μόνο αν το μ είναι μέτρο Dirac.*

Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι κάθε ολοκληρώσιμη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι τιμές $f(x)$ της f φθίνουν εκθετικά καθώς $\|x\|_2 \to \infty$.

Λήμμα 2.3.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ ώστε $f(x) \leqslant Ae^{-B\|x\|_2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, η f έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης.*

Απόδειξη. Εφόσον $\int f > 0$, υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε το σύνολο $C := \{x : f(x) > t\}$ να έχει θετικό μέτρο Lebesgue. Παρατηρούμε ότι το C είναι κυρτό αφού η f είναι λογαριθμικά κοίλη, και έχει μη κενό εσωτερικό. Πράγματι, αφού το C έχει θετικό μέτρο, η αφινική του θήκη έχει διάσταση n, άρα το C περιέχει ένα αφινικά ανεξάρτητο σύνολο $\{x_i\}_{i\leqslant n+1}$. Λόγω κυρτότητας, το C περιέχει το simplex $S = \mathrm{conv}\{x_i\}_{i\leqslant n+1}$. Ειδικότερα, το C έχει μη κενό εσωτερικό. Έστω $x_0 \in C$ και $r > 0$ ώστε $x_0 + rB_2^n \subseteq C$. Θεωρώντας την $f_1(\cdot) = f(\cdot + x_0)$ αν χρειασθεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $rB_2^n \subseteq C$.

Ορίζουμε $K = \{x : f(x) > t/e\}$. Τότε, από την ανισότητα του Markov και τη μονοτονία του όγκου έχουμε $0 < |K| < \infty$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το K είναι κυρτό, έχει πεπερασμένο όγκο και περιέχει την rB_2^n, συμπεραίνουμε ότι το K είναι φραγμένο.

Επομένως, υπάρχει $R > 0$ ώστε $K \subset RB_2^n$. Τότε, για κάθε $\|x\|_2 > R$ έχουμε $R\frac{x}{\|x\|_2} \notin K$, οπότε $f(R/\|x\|_2 x) \leqslant t/e$, ενώ $r\frac{x}{\|x\|_2} \in C$, το οποίο αποδεικνύει ότι $f(r\frac{x}{\|x\|_2}) \geqslant t$. Επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε

$$R\frac{x}{\|x\|_2} = \frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}\frac{rx}{\|x\|_2} + \frac{R-r}{\|x\|_2 - r}x.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη παίρνουμε:

$$\frac{t}{e} \geqslant f\left(R\frac{x}{\|x\|_2}\right) \geqslant f\left(r\frac{x}{\|x\|_2}\right)^{\frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}} f(x)^{\frac{R-r}{\|x\|_2 - r}} \geqslant t^{\frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}} f(x)^{\frac{R-r}{\|x\|_2 - r}}.$$

Έπεται ότι

$$f(x) \leqslant te^{-\frac{\|x\|_2 - r}{R-r}} < e^{-\|x\|_2/R},$$

για κάθε $\|x\|_2 > R$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x \in RB_2^n$ και για κάθε $y \in \frac{x}{2} + \frac{r}{2}B_2^n$ έχουμε (λόγω του ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη)

$$f(y) \geqslant \sqrt{f(x)f(2y-x)} \geqslant \sqrt{t}\,\sqrt{f(x)}.$$

Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $f(x) \leqslant M$ για κάθε $x \in RB_2^n$. Τώρα είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε δύο σταθερές $A, B > 0$, οι οποίες εξαρτώνται από την f, έτσι ώστε $f(x) \leqslant Ae^{-B\|x\|_2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. □

Παρατήρηση 2.3.8. Αν $s > 0$ και $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ είναι μια s-κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα, τότε η f έχει συμπαγή φορέα.

Περιγράφουμε εν συντομία την απόδειξη. Έστω $K = \{x : f(x) > 0\}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι ολοκληρώσιμη και επιχειρήματα αντίστοιχα με αυτά της απόδειξης του Λήμματος 2.3.7 μπορούμε να δείξουμε πρώτα ότι η f είναι φραγμένη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η τιμή $a := \sup(f)$ πιάνεται στο $x_0 = 0$. Χρησιμοποιώντας ξανά το γεγονός ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, μαζί με το ότι είναι s-κοίλη, μπορούμε να βρούμε $R > 0$ έτσι ώστε $f(x) \leqslant a/2$ για κάθε x με $\|x\|_2 \geqslant R$. Η συνάρτηση $g(x) = \left(\frac{f(x)}{a}\right)^{1/s}$ είναι κοίλη και ικανοποιεί τα εξής: (α) $\lim_{x\to 0} g(x) = 1$ και (β) $g(x) \leqslant 2^{-1/s}$ αν $\|x\|_2 \geqslant R$. Έστω $y \in \mathbb{R}^n$ με $\|y\|_2 = R$ και ας υποθέσουμε ότι $\lambda y \in K$ για κάποιον $\lambda \geqslant 1$. Γράφουμε $y = \left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)0 + \frac{1}{\lambda}(\lambda y)$ και αφού η g είναι κοίλη παίρνουμε

$$2^{-1/s} \geqslant g(y) \geqslant 1 - \frac{1}{\lambda} + \frac{g(\lambda y)}{\lambda} > 1 - \frac{1}{\lambda}.$$

Έπεται ότι

$$\lambda \leqslant \lambda_0 := \frac{1}{1 - 2^{-1/s}},$$

άρα $K \subseteq (\lambda_0 R)\, B_2^n$.

Θα χρειαστούμε επίσης ένα αποτέλεσμα του Fradelizi [55], το οποίο δείχνει ότι η τιμή μιάς λογαριθμικά κοίλης συνάρτησης στο βαρύκεντρό της είναι συγκρίσιμη με την μέγιστη τιμή της (με την σταθερά σύγκρισης να εξαρτάται - εκθετικά - μόνο από την διάσταση). Παρατηρήστε ότι αν η f υποτεθεί άρτια, τότε $f(0) = \|f\|_\infty$.

Θεώρημα 2.3.9. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με* $\mathrm{bar}(f) = 0$. *Τότε,*

$$f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy = 1$. Από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\log f\left(\int_{\mathbb{R}^n} yf(y)dy\right) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy. \tag{2.3.7}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη, έχουμε

$$-\log f(x) \geqslant -\log f(y) + \langle x - y, \nabla(-\log f)(y)\rangle . \tag{2.3.8}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας με $f(y)$, και στην συνέχεια ολοκληρώνοντας ως προς y, παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\log f(x) &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - y, -\nabla f(y)\rangle\, dy \\ &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy - n, \end{aligned} \tag{2.3.9}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει αν ολοκληρώσουμε κατά μέρη (και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι τιμές $f(y)$ της f φθίνουν εκθετικά καθώς $\|y\|_2 \to \infty$). Συνδυάζοντας τις (2.3.7) και (2.3.9) βλέπουμε ότι

$$\log f(0) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dx \geqslant \log f(x) - n,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Παίρνοντας το supremum πάνω από όλα τα x έχουμε το ζητούμενο. □

Το τελευταίο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι μια ανισότητα του Borell [27].

Θεώρημα 2.3.10 (Borell). *Έστω $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση*

$$\Psi_f(p) = \frac{\int_0^\infty x^p f(x)\,dx}{\Gamma(p+1)}$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στο $[0, \infty)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f > 0$ στο $[0, \infty)$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $q > p \geqslant 0$ τότε $\Psi_f^2\left(\frac{p+q}{2}\right) \geqslant \Psi_f(p)\Psi_f(q)$. Θεωρούμε συναρτήσεις της μορφής $g(x) = ae^{-\beta x}$, όπου $a, \beta > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\Psi_g(r) := \frac{\int_0^\infty x^r a e^{-\beta x}\, dx}{\Gamma(r+1)} = \frac{a}{\beta^{r+1}} \tag{2.3.10}$$

για κάθε $r \geqslant 0$. Επιλέγουμε $a, \beta > 0$ έτσι ώστε η $g(x) = ae^{-\beta x}$ να ικανοποιεί τις

$$\int_0^\infty x^r f(x) dx = \int_0^\infty x^r g(x) dx, \quad \text{για } r = p, q. \tag{2.3.11}$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι οι f και g παίρνουν την ίδια τιμή σε περισσότερα από ένα σημεία. Είναι φανερό ότι δεν μπορεί να ισχύει $f > g$ ή $f < g$ σε ολόκληρο το $[0, \infty)$, άρα υπάρχει $x_1 > 0$ ώστε $f(x_1) = g(x_1)$. Υποθέτουμε ότι αυτό είναι το μοναδικό σημείο τομής των f και g και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $g < f$ στο $[0, x_1)$ και $g > f$ στο (x_1, ∞). Τότε, χρησιμοποιώντας την (2.3.11) ελέγχουμε ότι

$$\int_y^\infty x^p g(x) dx > \int_y^\infty x^p f(x) dx$$

για κάθε $y > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^q f(x) dx &= \int_0^\infty x^p f(x) \Big(\int_0^x (q-p) s^{q-p-1} ds \Big) dx \\
&= \int_0^\infty (q-p) s^{q-p-1} \Big(\int_s^\infty x^p f(x) dx \Big) ds \\
&< \int_0^\infty (q-p) s^{q-p-1} \Big(\int_s^\infty x^p g(x) dx \Big) ds \\
&= \int_0^\infty x^q g(x) dx,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Έχουμε λοιπόν δείξει ότι υπάρχουν $b > a > 0$ ώστε $f(a) = g(a)$ και $f(b) = g(b)$, και από το γεγονός ότι η $f - g$ είναι λογαριθμικά κοίλη (διότι η g είναι λογαριθμικά αφινική) έπεται ότι $f \geqslant g$ στο $[a, b]$ και $f \leqslant g$ στα $[0, a]$ και $[b, \infty)$. Θέτουμε $r = (q-p)/2$. Εξετάζοντας το πρόσημο της συνάρτησης στο παρακάτω ολοκλήρωμα βλέπουμε ότι

$$\int_0^\infty (x^r - a^r)(x^r - b^r) x^p (g(x) - f(x)) dx \geqslant 0,$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty x^{2r+p}(g(x) - f(x)) dx &+ (ab)^r \int_0^\infty x^p (g(x) - f(x)) dx \\
&- (a^r + b^r) \int_0^\infty x^{r+p}(g(x) - f(x)) dx \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $2r + p = q$ και ότι, από την επιλογή της g, τα δύο πρώτα ολοκληρώματα μηδενίζονται. Συνεπώς,

$$\int_0^\infty x^{\frac{p+q}{2}} f(x)dx = \int_0^\infty x^{r+p} f(x)dx \geqslant \int_0^\infty x^{r+p} g(x)dx = \int_0^\infty x^{\frac{p+q}{2}} g(x)dx,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\Psi_f^2\left(\frac{p+q}{2}\right) \geqslant \Psi_g^2\left(\frac{p+q}{2}\right)$. Από την (2.3.10) ελέγχουμε ότι

$$\Psi_g^2\left(\frac{p+q}{2}\right) = \Psi_g(p)\Psi_g(q) = \Psi_f(p)\Psi_f(q),$$

το οποίο τελικά δίνει $\Psi_f^2\left(\frac{p+q}{2}\right) \geqslant \Psi_f(p)\Psi_f(q)$. □

2.4 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Ορίζουμε αρχικά την ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος K και την ισοτροπική σταθερά L_K σαν μιά αναλλοίωτη της αφινικής κλάσης του K. Στις επόμενες υποπαραγράφους δίνουμε έναν πιο γενικό ορισμό στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

Ορισμός 2.4.1. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο $|K| = 1$, είναι κεντραρισμένο (δηλαδή έχει βαρύκεντρο στην αρχή των αξόνων), και υπάρχει μια σταθερά $a > 0$ ώστε

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = a^2 \|y\|_2^2 \tag{2.4.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι αν το K ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη (2.4.1) τότε

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^n \int \langle x, e_i\rangle^2 dx = na^2,$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το $U(K)$ είναι επίσης ισοτροπικό για κάθε $U \in O(n)$.

Παρατήρηση 2.4.2. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι η *ισοτροπική συνθήκη* (2.4.1) είναι ισοδύναμη με καθεμία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Για κάθε $i, j = 1, \dots, n$,

$$\int_K x_i x_j dx = a^2 \delta_{ij}, \tag{2.4.2}$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K \langle x, Tx\rangle dx = a^2(\mathrm{tr}T). \tag{2.4.3}$$

Για να το δούμε, υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό, και θέτοντας $y = e_i$, $y = e_j$ και $y = e_i + e_j$ στην (2.4.1) παίρνουμε την (2.4.2). Παρατηρώντας ότι αν $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ τότε $\langle x, T(x)\rangle = \sum_{i,j=1}^n t_{ij}x_ix_j$, βλέπουμε αμέσως ότι η (2.4.2) συνεπάγεται την (2.4.3). Τέλος, παρατηρήστε ότι αν εφαρμόσουμε την (2.4.3) για την $T(x) = \langle x, y\rangle y$ παίρνουμε την ισοτροπική συνθήκη (2.4.1).

Ύπαρξη

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα έχει μια γραμμική εικόνα που ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη.

Πρόταση 2.4.3. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό.*

Απόδειξη. Ο τελεστής $M \in L(\mathbb{R}^n)$ που ορίζεται μέσω της $M(y) = \int_K \langle x, y\rangle x dx$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Συνεπώς, έχει μια συμμετρική και θετική τετραγωνική ρίζα S. Θεωρούμε την γραμμική εικόνα $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ του K. Τότε, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{K}} \langle x, y\rangle^2 dx &= |\mathrm{det}S|^{-1} \int_K \langle S^{-1}x, y\rangle^2 dx \\ &= |\mathrm{det}S|^{-1} \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle^2 dx \\ &= |\mathrm{det}S|^{-1} \Big\langle \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle x dx, S^{-1}y\Big\rangle \\ &= |\mathrm{det}S|^{-1}\langle MS^{-1}y, S^{-1}y\rangle = |\mathrm{det}S|^{-1}\|y\|_2^2.\end{aligned}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο του $\tilde{K}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Η Πρόταση 2.4.3 δείχνει ότι κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια *θέση* $\tilde{K}$ που είναι ισοτροπική. Λέμε ότι το $\tilde{K}$ είναι μια *ισοτροπική θέση* του K. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μονοσήμαντα ορισμένη (αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς) και ότι προκύπτει σαν λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Θεώρημα 2.4.4. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$B(K) = \inf\Big\{ \int_{TK} \|x\|_2^2 dx : T \in SL(n)\Big\}. \tag{2.4.4}$$

Τότε, μια θέση K_1 του K είναι ισοτροπική αν και μόνο αν

$$\int_{K_1} \|x\|_2^2 dx = B(K). \tag{2.4.5}$$

Αν K_1 και K_2 είναι δύο ισοτροπικές θέσεις του K τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $K_2 = U(K_1)$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια ισοτροπική θέση K_1 του K. Η παρατήρηση 2.4.2 δείχνει ότι υπάρχει $a > 0$ ώστε

$$\int_{K_1} \langle x, Tx\rangle dx = a^2(\mathrm{tr}T)$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για κάθε $T \in SL(n)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{TK_1} \|x\|_2^2 dx &= \int_{K_1} \|Tx\|_2^2 dx = \int_{K_1} \langle x, T^*Tx\rangle dx \\ &= a^2 \mathrm{tr}(T^*T) \geqslant na^2 = \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx, \end{aligned} \tag{2.4.6}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην μορφή

$$\mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n[\det(T^*T)]^{1/n}.$$

Αυτό δείχνει ότι το K_1 ικανοποιεί την (2.4.5). Ειδικότερα, το infimum στην (2.4.4) είναι minimum.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν έχουμε ισότητα στην (2.4.6) τότε $T^*T = I$, άρα $T \in O(n)$. Αυτό δείχνει ότι κάθε άλλη θέση $\tilde{K}$ του K που ικανοποιεί την (2.4.5) είναι ορθογώνια εικόνα του K_1, άρα είναι ισοτροπική.

Τέλος, αν K_2 είναι κάποια άλλη ισοτροπική θέση του K τότε το πρώτο μέρος της απόδειξης δείχνει ότι το K_2 ικανοποιεί την (2.4.5). Από το προηγούμενο βήμα πρέπει να έχουμε $K_2 = U(K_1)$ για κάποιον $U \in O(n)$. □

Παρατήρηση 2.4.5. Ένας άλλος τρόπος για να δούμε ότι αν το K είναι λύση του παραπάνω προβλήματος ελαχιστοποίησης τότε το K είναι ισοτροπικό, είναι ο εξής. Θεωρούμε τυχόντα $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Για μικρά $\varepsilon > 0$, ο $I + \varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, άρα ο $(I + \varepsilon T)/[\det(I + \varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους. Συνεπώς,

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \frac{\|x + \varepsilon Tx\|_2^2}{[\det(I + \varepsilon T)]^{2/n}} dx.$$

Παρατηρούμε ότι $\|x + \varepsilon Tx\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\varepsilon\langle x, Tx\rangle + O_{T,K}(\varepsilon^2)$ και $[\det(I + \varepsilon T)]^{2/n} = 1 + 2\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O_T(\varepsilon^2)$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \langle x, Tx\rangle dx.$$

Αφού ο T ήταν τυχών, η ίδια ανισότητα ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον T με τον $-T$, άρα

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Έχουμε ήδη δεί ότι αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι το K είναι ισοτροπικό.

Ορισμός 2.4.6. Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει ότι, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n}\min\left\{\frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}}\int_{TK}\|x\|_2^2 dx \;\Big|\; T \in GL(n)\right\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από την γραμμική κλάση του K. Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται **ισοτροπική σταθερά** του K.

Το θεώρημα που ακολουθεί δίνει την σχέση ανάμεσα στην ισοτροπική σταθερά ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος και τον ογκο των $(n-1)$-διάστατων τομών του που περνούν από το βαρύκεντρό του.

Θεώρημα 2.4.7. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\frac{c_1}{L_K} \leqslant |K \cap \theta^{\perp}| \leqslant \frac{c_2}{L_K}, \tag{2.4.7}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Θέτουμε $f := f_{K,\theta}$. Για να αποδείξουμε την αριστερή ανισότητα στην (2.4.7), θέτουμε $\beta = \int_0^{+\infty} f(t)dt$ και ορίζουμε

$$g(t) = \|f\|_\infty \chi_{[0,\beta/\|f\|_\infty]}(t).$$

Αφού $g \geqslant f$ στον φορέα της g, έχουμε

$$\int_0^s f(t)dt \leqslant \int_0^s g(t)dt$$

για κάθε $0 \leqslant s \leqslant \beta/\|f\|_\infty$. Τα ολοκληρώματα των f και g στο $[0, +\infty)$ είναι και τα δύο ίσα με β. Άρα,

$$\int_s^\infty g(t)dt \leqslant \int_s^\infty f(t)dt$$

για κάθε $s \geqslant 0$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^2 f(t)dt &= \int_0^\infty \int_0^t 2sf(t)dsdt = \int_0^\infty 2s\left(\int_s^\infty f(t)dt\right)ds \\ &\geqslant \int_0^\infty 2s\left(\int_s^\infty g(t)dt\right)ds = \int_0^\infty t^2 g(t)dt \\ &= \int_0^{\beta/\|f\|_\infty} t^2\|f\|_\infty dt = \frac{\beta^3}{3\|f\|_\infty^2}.\end{aligned}$$

Όμοια, θέτοντας $\alpha = \int_{-\infty}^0 f(t)dt$, βλέπουμε ότι

$$\int_{-\infty}^0 t^2 f(t)dt \geqslant \frac{\alpha^3}{3\|f\|_\infty^2}.$$

Έπεται ότι

$$\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx \geqslant \frac{\beta^3+\alpha^3}{3\|f\|_\infty^2},$$

και αφού $\alpha+\beta = |K| = 1$, παίρνουμε

$$\left(\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{\|f\|_\infty} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}}\frac{1}{ef(0)}.$$

Για να δείξουμε την δεξιά ανισότητα στην (2.4.7), διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $s>0$ ώστε $f(s) = f(0)/2$. Τότε,

$$\beta = \int_0^\infty f(t)dt \geqslant \int_0^s f(t)dt \geqslant sf(s) = sf(0)/2,$$

διότι, αφού η f είναι λογαριθμικά κοίλη, εύκολα βλέπουμε ότι $f(t) \geqslant f(0)^{1-t/s}f(s)^{t/s} \geqslant f(s)$ στο $[0,s]$. Από την άλλη πλευρά, αν $t>s$, τότε

$$f(s) \geqslant [f(0)]^{1-\frac{s}{t}}[f(t)]^{\frac{s}{t}},$$

το οποίο μας δίνει $f(t) \leqslant f(0)2^{-t/s}$. Στη συνέχεια, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty t^2 f(t)dt &= \int_0^s t^2 f(t)dt + \int_s^\infty t^2 f(t)dt \\ &\leqslant \|f\|_\infty \int_0^s t^2 dt + \int_s^\infty t^2 f(0)2^{-t/s}dt \\ &\leqslant f(0)\left(e\frac{s^3}{3} + s^3\int_1^\infty u^2 2^{-u}du\right) \\ &\leqslant c_0 f(0)s^3 \\ &\leqslant c_0 f(0)\left(\frac{2\beta}{f(0)}\right)^3 \\ &\leqslant c_1/[f(0)]^2,\end{aligned}$$

παίρνοντας υπ¨ όψιν το γεγονός ότι $\beta < 1$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάθε $s > 0$ στον φορέα της f έχουμε $f(s) > f(0)/2$. Τότε, στον ρόλο του s χρησιμοποιούμε τον $s_0 = \sup\{s > 0 : f(s) > 0\}$. Έχουμε $\beta \geqslant f(0)s_0/2$ και

$$\int_0^\infty t^2 f(t)dt = \int_0^{s_0} t^2 f(t)dt \leqslant ef(0)s_0^3/3.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε την ίδια εκτίμηση όπως πριν, χωρίς μάλιστα να χρησιμοποιήσουμε την υπόθεση ότι η $\log f$ είναι κοίλη.

Με ακριβώς τον ίδιο τρόπο δουλεύουμε στο $(-\infty, 0]$. Έπεται ότι

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = \int_0^\infty t^2 f(t)dt + \int_{-\infty}^0 t^2 f(t)dt \leqslant \left(\frac{c_2}{f(0)}\right)^2,$$

κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ορισμός 2.4.8. Γενικεύοντας τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος λέμε ότι ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι *ισοτροπικό* αν έχει βαρύκεντρο το 0 και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 \, d\mu(x) = 1 \tag{2.4.8}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν το $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει βαρύκεντρο το 0 τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Το μ είναι ισοτροπικό.

(β) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle \, d\mu(x) = \mathrm{tr}(T). \tag{2.4.9}$$

(γ) Ισχύουν οι $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu(x) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Παρατήρηση 2.4.9. Αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 \, d\mu(x) = n. \tag{2.4.10}$$

Επίσης, για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 \, d\mu(x) = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2. \tag{2.4.11}$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι κάθε μη εκφυλισμένο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει μια ισοτροπική εικόνα $\nu = \mu \circ S$, όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, ακολουθώντας την απόδειξη της Πρότασης 2.4.3. Ορίζουμε έναν τελεστή $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$Ty = \int \langle x, y\rangle x \, d\mu(x),$$

παρατηρούμε ότι ο T είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και θέτουμε $\nu = \mu \circ S$ όπου ο S είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος στην $GL(n)$ και ικανοποιεί την $T = S^2$. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int \langle x, y\rangle^2 \, d\nu(x) = \|y\|_2^2.$$

Επιπλέον, αν το μ είναι κεντραρισμένο βλέπουμε ότι και το ν έχει την ίδια ιδιότητα. □

Ορισμός 2.4.10. Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Δηλαδή, η f έχει βαρύκεντρο το 0, είναι λογαριθμικά κοίλη και $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$. Τότε, η f λέγεται *ισοτροπική* αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 f(x) \, dx = 1 \tag{2.4.12}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Όπως πριν, ελέγχουμε εύκολα ότι η f είναι ισοτροπική αν και μόνο αν ισχύει κάποιο από τα παρακάτω:

(i) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle f(x) \, dx = \mathrm{tr}(T). \tag{2.4.13}$$

(ii) Ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x) \, dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, n. \tag{2.4.14}$$

Πάλι, αν η f είναι ισοτροπική, τότε $\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 f(x) \, dx = n$, και γενικότερα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 f(x) \, dx = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2 \tag{2.4.15}$$

για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Εύκολα ελεγχουμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα έχει μια ισοτροπική εικόνα: μπορούμε να βρούμε έναν αφινικό ισομορφισμό $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και έναν θετικό αριθμό a ώστε η $af \circ S$ να είναι ισοτροπική.

Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο δεν φέρεται από υπερεπίπεδο είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η πυκνότητά του f_μ είναι ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Παρατήρηση 2.4.11. Αξίζει τον κόπο να συγκρίνουμε τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος (Ορισμός 2.4.1) με τον ορισμό του ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου. Παρατηρήστε ότι ένα κυρτό σώμα K με όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η συνάρτηση $L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K}K}$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Ορισμός 2.4.12 (Γενικός ορισμός της ισοτροπικής σταθεράς)**.** Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε τον *πίνακα αδρανείας* – ή *πίνακα συνδιακυμάνσεων* – $\mathrm{Cov}(f)$ της f ως τον πίνακα με συντεταγμένες

$$[\mathrm{Cov}(f)]_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx}\frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx}.$$

Παρατηρήστε ότι αν η f είναι ισοτροπική τότε ο $\mathrm{Cov}(f)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα, η *ισοτροπική σταθερά* της ορίζεται από την:

(2.4.16)
$$L_f := \left(\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Επίσης, αν μ είναι ένα μη εκφυλισμένο πεπερασμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε ορίζουμε την ισοτροπική του σταθερά θέτοντας $L_\mu := L_{f_\mu}$, δηλαδή

(2.4.17)
$$L_\mu := \left(\frac{\|\mu\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}},$$

όπου

$$\|\mu\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)$$

και $\mathrm{Cov}(\mu) := \mathrm{Cov}(f_\mu)$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η ισοτροπική σταθερά L_μ είναι αφινικά αναλλοίωτη: έχουμε $L_\mu = L_{a\mu\circ A}$ και $L_f = L_{af\circ A}$ για κάθε αντιστρέψιμο αφινικό μετασχηματισμό A του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε θετικό αριθμό a. Παρατηρούμε επίσης ότι:

(i) Ο Ορισμός 2.4.12 συμφωνεί με τον προηγούμενο ορισμό (Ορισμός 2.4.6) που είχαμε δώσει για την ισοτροπική σταθερά ενός κυρτού σώματος, με την έννοια ότι $L_{\mathbf{1}_K} = L_K$. Ένας απλός τρόπος για να το δούμε είναι να υποθέσουμε ότι το K είναι στην ισοτροπική θέση και μετά να παρατηρήσουμε ότι $\|\mathbf{1}_K\|_\infty = 1$, $\int \mathbf{1}_K(x)\,dx = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_K) = L_K^2 I$.

(ii) Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\int f_\mu = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mu) = I$, απ¨ όπου έπεται ότι $L_\mu = \|\mu\|_\infty^{1/n}$. Επιπλέον, αφού το μ έχει εξ ορισμού βαρύκεντρο στο 0, από το Θεώρημα 2.3.9 έχουμε ότι $L_\mu \simeq (f_\mu(0))^{1/n}$. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα αυτήν την παρατήρηση.

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε έναν χαρακτηρισμό της ισοτροπικής σταθεράς, τελείως αντίστοιχο με εκείνον του Θεωρήματος 2.4.4: αν $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$nL_f^2 = \inf_{\substack{T\in SL(n)\\ y\in\mathbb{R}^n}} \Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\Big)^{2/n} \int_{\mathbb{R}^n} \|Tx+y\|_2^2 f(x)\,dx.$$

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι οι ισοτροπικές σταθερές όλων των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι ομοιόμορφα φραγμένες από κάτω, από μια σταθερά $c>0$ που είναι ανεξάρτητη από την διάσταση.

Πρόταση 2.4.13. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Τότε,*

$$L_f = \|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c,$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού η f είναι ισοτροπική, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} n = \int \|x\|_2^2 f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{\|x\|_2^2} \mathbf{1}\,dt\right) f(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{x:\|x\|_2^2\geqslant t\}}(x) f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n\setminus \sqrt{t}B_2^n} f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \left(1 - \int_{\sqrt{t}B_2^n} f(x)dx\right) dt \\ &\geqslant \int_0^{(\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}} [1-\omega_n\|f\|_\infty t^{n/2}]\,dt \\ &= (\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}\frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $\omega_n^{-1/n} \simeq \sqrt{n}$ καταλήγουμε στην $\|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$. □

Έστω $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Ένα *τυχαίο διάνυσμα* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν η κατανομή του

$$\mu(A) := \mathbb{P}(X\in A) = \mathbb{P}(\{\omega\in\Omega : X(\omega)\in A\})$$

είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το X είναι ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα αν το μ είναι ισοτροπικό και θα γράφουμε τις ισοτροπικές συνθήκες στην μορφή

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X \otimes X) = \mathrm{Id}.$$

Η πρώτη ισότητα είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι το μ είναι κεντραρισμένο και η δεύτερη είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι $\mathrm{Cov}(\mu) = \mathrm{Id}$.

2.5 ψ_a–εκτιμήσεις

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Έστω $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ μια άρτια κυρτή συνάρτηση τέτοια ώστε $\Phi(0) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$ (θα λέμε ότι η Φ είναι συνάρτηση Orlicz). Ο χώρος Orlicz $L_\Phi(\mu)$ που αντιστοιχεί στην Φ αποτελείται από όλες τις $\mathcal{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχει σταθερά $\kappa > 0$ τέτοια ώστε $\int_\Omega \Phi(f/\kappa)d\mu < \infty$. Η νόρμα μιας τέτοιας συνάρτησης f ορίζεται να είναι το infimum όλων των $\kappa > 0$ που ικανοποιούν την $\int_\Omega \Phi(f/\kappa)d\mu \leqslant 1$.

Παρατηρήστε ότι ότι $L_\Phi(\mu) \subseteq L_1(\mu)$: αν μια μετρήσιμη συνάρτηση f έχει πεπερασμένη $\Phi(\mu)$-νόρμα τότε η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ. Αυτό φαίνεται ως εξής: παρατηρούμε πρώτα ότι, αφού η Φ είναι κυρτή και $\Phi(0) = (0)$, η συνάρτηση $t \mapsto \frac{\Phi(t)}{t}$ είναι αύξουσα. Συνεπώς $\Phi(t) \geqslant \frac{\Phi(t_0)}{t_0} \cdot t$ για κάθε $t > t_0$, όπου t_0 είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός ώστε $\Phi(t_0) > 0$. Τότε, για κάθε $\kappa > \|f\|_{\Phi(\mu)}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_\mu(|f|) &= \mathbb{E}_\mu\Big(\frac{|f|}{\kappa} \cdot \mathbf{1}_{\{|f|\leqslant t_0\kappa\}}\Big) + \mathbb{E}_\mu\Big(\frac{|f|}{\kappa} \cdot \mathbf{1}_{\{|f|> t_0\kappa\}}\Big)\\ &\leqslant t_0 + \frac{t_0}{\Phi(t_0)}\mathbb{E}_\mu(\Phi(|f|/\kappa)) \leqslant t_0 \cdot [1 + (\Phi(t_0))^{-1}] < +\infty.\end{aligned}$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen για την κυρτή συνάρτηση Φ παίρνουμε

$$\Phi(\mathbb{E}_\mu(|f|/\kappa)) \leqslant \mathbb{E}_\mu(\Phi(|f|/\kappa)) \leqslant 1$$

για κάθε $\kappa > \|f\|_{\Phi(\mu)}$. Άρα,

$$\mathbb{E}_\mu(|f|) \leqslant \Phi_*^{-1}(1) \cdot \|f\|_{\Phi(\mu)}$$

όπου $\Phi_*^{-1}(1) = \inf\{s > 0 : \Phi(t) > 1 \text{ για κάθε } t \geqslant s\}$.

Οι ψ_a-νόρμες είναι ακριβώς εκείνες οι νόρμες Orlicz που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $t \in \mathbb{R} \to e^{|t|^a} - 1$. Το επόμενο Λήμμα δίνει μια ισοδύναμη έκφραση για την ψ_a νόρμα μέσω των L_q-νορμών.

Λήμμα 2.5.1. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Έστω $a \geqslant 1$ και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μία $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\|f\|_{\psi_a} \simeq \sup_{p\geqslant a} \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/a}},$$

όπου οι σταθερές της ισοδυναμίας είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $p \geqslant a$ να έχουμε
$$\|f\|_p \leqslant Cp^{1/a}\|f\|_{\psi_a}.$$
Πράγματι, θέτουμε $A = \|f\|_{\psi_a}$ και χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη ανισότητα $1 + \frac{t^k}{k!} \leqslant e^t$, η οποία ισχύει για κάθε $t > 0$, παίρνουμε
$$1 + \int_\Omega \frac{|f(\omega)|^{ka}}{k!A^{ka}}\, d\mu \leqslant \int_\Omega \exp(|f|/A)^a\, d\mu = 2,$$
απ¨ όπου έπεται ότι
$$\int_\Omega |f|^{ka}\, d\mu \leqslant k!A^{ka}.$$
Έστω $p \geqslant a$. Υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{N}$ ώστε $ka \leqslant p < (k+1)a$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder και τον τύπο του Stirling παίρνουμε
$$\begin{aligned}\|f\|_p &\leqslant \|f\|_{(k+1)a} \leqslant [(k+1)!]^{\frac{1}{(k+1)a}} A \leqslant (2k)^{1/a}A\\ &\leqslant \left(\frac{2p}{a}\right)^{1/a} A \leqslant 2p^{1/a}A.\end{aligned}$$
Αντίστροφα, αν $\gamma := \sup_{p\geqslant a} \frac{\|f\|_p}{p^{1/a}}$, τότε $\int_\Omega |f|^p\, d\mu \leqslant \gamma^p p^{p/a}$ για κάθε $p \geqslant a$. Σταθεροποιούμε $c > 0$ (το οποίο θα επιλέξουμε κατάλληλα) και γράφουμε
$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp(|f|/c\gamma)^a &= 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(c\gamma)^{ka}k!}\int_\Omega |f|^{ak}\, d\mu \leqslant 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(ka)^k}{k!c^{ka}}\\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{ea}{c^a}\right)^k,\end{aligned}$$
χρησιμοποιώντας και την στοιχειώδη ανισότητα $k! \geqslant (k/e)^k$. Επιλέγοντας $c_a := (2ea)^{1/a} \leqslant 2e \cdot e^{1/e} =: c$ βλέπουμε ότι $\|f\|_{\psi_a} \leqslant c_a\gamma \leqslant c\gamma$. □

Ορισμός 2.5.2. Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $a \geqslant 1$ και $\theta \in S^{n-1}$. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί *ψ_a εκτίμηση με σταθερά $b_a = b_a(\theta)$ στην διεύθυνση του θ* αν

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_a} \leqslant b_a\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2. \tag{2.5.1}$$

Λέμε ότι το μ είναι ψ_a-μέτρο με σταθερά $B_a > 0$ αν

$$\sup_{\theta\in S^{n-1}} \frac{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_a}}{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2} = B_a. \tag{2.5.2}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.5.1 βλέπουμε ότι το μ ικανοποιεί ψ_a εκτίμηση με σταθερά b_a στην διεύθυνση του $\theta \in S^{n-1}$ αν

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \leqslant cb_a q^{1/a}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2 \tag{2.5.3}$$

για κάθε $q \geqslant a$.

Το επόμενο Λήμμα δίνει ακόμα μία περιγραφή της ψ_a-νόρμας.

Λήμμα 2.5.3. *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ και έστω $a \geqslant 1$ και $\theta \in S^{n-1}$.*

(i) *Αν το μ ικανοποιεί ψ_a-εκτίμηση με σταθερά b στην διεύθυνση του θ τότε για κάθε $t > 0$ έχουμε $\mu(\{x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2\}) \leqslant 2e^{-t^a/b^a}$.*

(ii) *Αν $\mu(\{x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2\}) \leqslant 2e^{-t^a/b^a}$ για κάποιον $b > 0$ και για κάθε $t > 0$ τότε το μ ικανοποιεί ψ_a-εκτίμηση με σταθερά $\leqslant cb$ στην διεύθυνση του θ, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Markov. Για τον δεύτερο, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant cbp^{1/a}\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2,$$

για κάθε $p \geqslant a$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^p \, d\mu(x) &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t)\, dt \\ &\leqslant \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2)\, dt \\ &\leqslant 2\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1}e^{-t^a/b^a}\, dt,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = (t/b)^a$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^p \, d\mu(x) &\leqslant 2(b\|\langle, \theta\rangle\|_2)^p \int_0^\infty \frac{p}{a} s^{p/a-1}e^{-s}\, ds \\ &= 2(b\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2)^p \Gamma\left(\frac{p}{a} + 1\right).\end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται από τον τύπο του Stirling. □

Το επόμενο λήμμα είναι το *λήμμα του Borell* στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Λήμμα 2.5.4. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στην κλάση $\mathcal{P}_n$. Για κάθε συμμετρικό κλειστό κυρτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = a \in (0, 1)$ και για κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$1 - \mu(tA) \leqslant a\left(\frac{1-a}{a}\right)^{\frac{t+1}{2}}. \tag{2.5.4}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την συμμετρία και την κυρτότητα του A ελέγχουμε ότι

$$\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus (tA)) + \frac{t-1}{t+1}A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A.$$

για κάθε $t > 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το μ είναι λογαριθμικά κοίλο, παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Σημείωση. Το δεξιό μέλος της (2.5.4) γράφεται στην μορφή

$$\frac{(1-a)^{\frac{t+1}{2}}}{a^{\frac{t-1}{2}}} < \frac{(1-a)^{\frac{t-1}{2}}}{a^{\frac{t-1}{2}}} = \left(\frac{1}{a}-1\right)^{\frac{t-1}{2}}. \tag{2.5.5}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Borell θα δούμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι ψ_1-μέτρο (σε κάθε διεύθυνση) με μια απόλυτη σταθερά.

Θεώρημα 2.5.5. *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ λογαριθμικά κοίλο. Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ημινόρμα τότε για κάθε $q > p \geqslant 1$ έχουμε*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Γράφουμε $\|f\|_p^p := \int |f|^p \, d\mu$. Τότε, το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3\|f\|_p\}$$

είναι συμμετρικό, κλειστό και κυρτό. Επίσης, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$tA = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3t\|f\|_p\},$$

και $\mu(A) \geqslant 1 - 3^{-p}$. Συνεπώς, $\frac{1}{a} - 1 \leqslant \frac{3^{-p}}{1-3^{-p}} \leqslant e^{-p/2}$. Από την (2.5.5) βλέπουμε ότι

$$\mu(x : |f(x)| \geqslant 3t\|f\|_p) \leqslant e^{-c_1 p(t-1)}$$

για κάθε $t > 1$, όπου $c_1 = \frac{1}{4}$. Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu &= \int_0^\infty q s^{q-1} \mu(\{x : |f(x)| \geqslant s\}) \, ds \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + (3\|f\|_p)^q \int_1^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p(t-1)} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{c_1 p}(3\|f\|_p)^q \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 pt} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{c_1 p}\left(\frac{3\|f\|_p}{c_1 p}\right)^q \Gamma(q+1).\end{aligned}$$

Από τον τύπο του Stirling και από το γεγονός ότι $(a+b)^{1/q} \leqslant a^{1/q} + b^{1/q}$ για κάθε $a, b > 0$ και $q \geqslant 1$, συμπεραίνουμε ότι $\|f\|_{L_q(\mu)} \leqslant c\frac{q}{p}\|f\|_{L_p(\mu)}$. □

Παρατηρήσεις 2.5.6. (α) Τα γραμμικά συναρτησοειδή στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.5.5. Συνεπώς,

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \leqslant cq\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1 \tag{2.5.6}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_1} \leqslant c\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1 \tag{2.5.7}$$

για $\theta \in S^{n-1}$. Το γεγονός αυτό παίζει πολύ βασικό ρόλο στα επόμενα.

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το n-διάστατο μέτρο Gauss είναι λογαριθμικά κοίλο, βλέπουμε ότι αν f είναι μια ημινόρμα, τότε η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 2.5.5. Από την άλλη πλευρά, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες παίρνουμε

$$\left(\int |f(x)|^q \, d\gamma_n(x)\right)^{1/q} \simeq \sqrt{n+q}\left(\int_{S^{n-1}} |f(\theta)|^q \, d\sigma(\theta)\right)^{1/q}, \tag{2.5.8}$$

για κάθε $q \geqslant 1$. Συνδυάζοντας αυτές τις ανισότητες, έχουμε:

$$\left(\int_{S^{n-1}} |f|^q \, d\sigma\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\sqrt{\frac{n+p}{n+q}}\left(\int_{S^{n-1}} |f|^p \, d\sigma\right)^{1/p}, \tag{2.5.9}$$

για κάθε $1 \leqslant p \leqslant q$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια παρατήρηση που μας επιτρέπει να αντικαταστήσουμε την μέση τιμή $\mathbb{E}_\mu$ με τον μέσο Lévy med_μ, και αντίστροφα, σε διάφορες συναρτησιακές ανισότητες για χώρους Orlicz $L_\Phi(\mu)$. Θα περιοριστούμε σε συναρτήσεις Φ που ικανοποιούν την $\Phi(s) < \Phi(t)$ για κάθε $0 \leqslant s < t$. Όλα τα βασικά παραδείγματα είναι αυτής της μορφής.

Λήμμα 2.5.7. *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, έστω Φ μια συνάρτηση Orlicz γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}^+$ και έστω $L_\Phi(\mu)$ ο αντίστοιχος χώρος Orlicz. Για κάθε $f \in L_\Phi(\mu)$ έχουμε*

$$\frac{1}{2}\|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)} \leqslant \|f - \mathrm{med}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)} \leqslant 3\|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η σταθερή συνάρτηση 1 έχει νόρμα $\|1\|_{L_\Phi(\mu)} = 1/\Phi^{-1}(1)$, όπου Φ^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση του περιορισμού της Φ στο $\mathbb{R}^+$. Παρατηρούμε ότι, αφού η $\Phi|_{\mathbb{R}^+}$ είναι κυρτή, γνησίως αύξουσα και $\Phi(0) = 0$, η $\Phi^{-1} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ είναι επίσης γνησίως αύξουσα, κοίλη και $\Phi^{-1}(0) = 0$, άρα η συνάρτηση $\frac{\Phi^{-1}(t)}{t} : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$ είναι φθίνουσα.

Εφαρμόζοντας δύο φορές την ανισότητα Jensen, βλέπουμε ότι

$$|\mathbb{E}_\mu(f) - \mathrm{med}_\mu(f)| \leqslant \mathbb{E}_\mu\left(|f - \mathrm{med}_\mu(f)|\right) \leqslant \Phi^{-1}(1) \cdot \|f - \mathrm{med}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\|f-\mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)} &\leqslant \|f-\mathrm{med}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)} + \frac{1}{\Phi^{-1}(1)}\cdot|\mathbb{E}_\mu(f)-\mathrm{med}_\mu(f)| \\ &\leqslant 2\|f-\mathrm{med}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)}.\end{aligned}$$

Στην συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\mathrm{med}_\mu(f) > \mathbb{E}_\mu(f)$ (διότι, αν ισχύει η αντίστροφη ανισότητα τότε μπορούμε να δουλέψουμε με την $-f$, και αν $\mathrm{med}_\mu(f) = \mathbb{E}_\mu(f)$ τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Από την ανισότητα του Markov παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} &\leqslant \mu\Big(\{f\geqslant \mathrm{med}_\mu(f)\}\Big) \leqslant \mu\Big(\{|f-\mathbb{E}_\mu(f)|\geqslant \mathrm{med}_\mu(f)-\mathbb{E}_\mu(f)\}\Big) \\ &\leqslant \left[\Phi\left(\frac{\mathrm{med}_\mu(f)-\mathbb{E}_\mu(f)}{\|f-\mathbb{E}_\mu f\|_{L_\Phi(\mu)}}\right)\right]^{-1}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$|\mathrm{med}_\mu(f)-\mathbb{E}_\mu(f)| \leqslant \Phi^{-1}(2)\cdot\|f-\mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)},$$

και με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|f-\mathrm{med}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)} &\leqslant \|f-\mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)} + \frac{1}{\Phi^{-1}(1)}\cdot|\mathbb{E}_\mu(f)-\mathrm{med}_\mu(f)| \\ &\leqslant \left(1+\frac{\Phi^{-1}(2)}{\Phi^{-1}(1)}\right)\|f-\mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)} \leqslant 3\|f-\mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)}\end{aligned}$$

διότι $\frac{\Phi^{-1}(2)}{2}\leqslant \Phi^{-1}(1)$. □

Κεφάλαιο 3

Ισοπεριμετρικές σταθερές για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

3.1 Ισοπεριμετρικές σταθερές για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το περιεχόμενο του A κατά *Minkowski* ως προς το μέτρο μ ως εξής:

$$\mu^+(A) = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}, \tag{3.1.1}$$

όπου $A_t = \{x : d(x, A) < t\}$ είναι η t-επέκταση του A ως προς την Ευκλείδεια μετρική. Σε αυτή την ενότητα υπενθυμίζουμε διάφορες *ισοπεριμετρικές σταθερές* οι οποίες δίνουν πληροφορία για την αλληλεπίδραση του μέτρου με την Ευκλείδεια μετρική. Φυσικά, ενδιαφερόμαστε κυρίως για την περίπτωση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

3.1.1 Η σταθερά Cheeger

Ορισμός 3.1.1 (σταθερά Cheeger)**.** Θα λέμε ότι το μέτρο μ ικανοποιεί την *ανισότητα του Cheeger* με σταθερά $\kappa \geqslant 0$ αν για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα:

$$\mu^+(A) \geqslant \kappa \min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}. \tag{3.1.2}$$

Η *σταθερά Cheeger* Is_μ του μ είναι η καλύτερη σταθερά $\kappa \geqslant 0$ για την οποία η (3.1.2) ισχύει για όλα τα A.

Ορίζουμε επίσης την συνάρτηση $I_\mu : [0,1] \to [0,+\infty]$ ως εξής:

$$I_\mu(t) = \inf\{\mu^+(A) : A \text{ Borel},\ \mu(A) = t\}.$$

Αυτή η συνάρτηση ονομάζεται *ισοπεριμετρικό προφίλ* του μ. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{Is}_\mu = \inf_{0<t\leqslant 1/2} \frac{\min\{I_\mu(t), I_\mu(1-t)\}}{t}. \tag{3.1.3}$$

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει μια ισοδύναμη περιγραφή της σταθεράς του Cheeger.

Θεώρημα 3.1.2 (Rothaus, Cheeger, Maz'ya)**.** *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την ανισότητα του Cheeger. Τότε,*

$$a_1 \leqslant \mathrm{Is}_\mu \leqslant 2a_1,$$

όπου a_1 είναι η μεγαλύτερη σταθερά με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε ολοκληρώσιμη, τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$a_1 \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \mathbb{E}_\mu(f)|\, d\mu(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x). \tag{3.1.4}$$

Υπενθυμίζουμε ότι η f καλείται τοπικά Lipschitz αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ υπάρχει $r > 0$ έτσι ώστε ο περιορισμός της f στη μπάλα $B(x,r) := \{y : \|y-x\|_2 < r\}$ να είναι Lipschitz, δηλαδή η $\|\nabla f\|_2$ είναι φραγμένη στη $B(x,r)$, όπου

$$\|\nabla f(x)\|_2 = \limsup_{y\to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{\|y-x\|_2}. \tag{3.1.5}$$

Αν η f είναι συνεχής τότε η $\|\nabla f\|_2$ είναι Borel μετρήσιμη, και αν η f είναι διαφορίσιμη στο x τότε η $\|\nabla f(x)\|_2$ είναι το σύνηθες μήκος του ανάδελτα της f στο σημείο x. Από το θεώρημα του Rademacher έχουμε ότι αν η f είναι τοπικά Lipschitz τότε η $\|\nabla f(x)\|_2$ είναι πεπερασμένη και η f είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue. Επομένως ο ορισμός στην (3.1.5) δεν δημιουργεί σύγχυση στην περίπτωση που το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2 θα χρησιμοποιήσουμε την co-area formula.

Θεώρημα 3.1.3 (co-area formula)**.** *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχουμε:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2\, d\mu(x) \geqslant \int_0^\infty \mu^+(\{x : |f(x)| > s\})\, ds. \tag{3.1.6}$$

Απόδειξη. Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $f_t : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$f_t(x) = \sup\{|f(y)| : y \in B(x,t)\}.$$

Παρατηρούμε ότι η f_t είναι μετρήσιμη και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\limsup_{t\to 0} \frac{f_t(x) - |f(x)|}{t} &\leqslant \limsup_{y\to x} \frac{|f(y)| - |f(x)|}{\|y-x\|_2} \\ &\leqslant \limsup_{y\to x} \frac{|f(y) - f(x)|}{\|y-x\|_2} = \|\nabla f(x)\|_2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας την παραπάνω ανισότητα με το λήμμα του Fatou παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x) &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \limsup_{t\to 0} \frac{f_t(x) - |f(x)|}{t}\, d\mu(x) \\ &\geqslant \limsup_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_t(x) - |f(x)|}{t}\, d\mu(x) \\ &\geqslant \liminf_{t\to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f_t(x) - |f(x)|}{t}\, d\mu(x) \\ &= \liminf_{t\to 0} \int_0^\infty \frac{1}{t} (\mu(\{f_t > s\}) - \mu(\{|f| > s\}))\, ds.\end{aligned}$$

Για κάθε $s > 0$ θέτουμε $A(s) = \{|f| > s\}$ και βλέπουμε ότι $\{f_t > s\} = (A(s))_t$ οπότε χρησιμοποιώντας ξανά το λήμμα του Fatou παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x) &\geqslant \liminf_{t\to 0} \int_0^\infty \frac{\mu((A(s))_t) - \mu(A(s))}{t}\, ds \\ &\geqslant \int_0^\infty \liminf_{t\to 0} \frac{\mu((A(s))_t) - \mu(A(s))}{t}\, ds \\ &= \int_0^\infty \mu^+(A(s))\, ds\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Για να δείξουμε την δεξιά ανισότητα, υποθέτουμε ότι ισχύει η ανισότητα Cheeger με σταθερά $\kappa = \mathrm{Is}_\mu$, και θα δείξουμε ότι για κάθε ολοκληρώσιμη, τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, ισχύει

$$\frac{\kappa}{2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - \mathbb{E}_\mu(f)|\, d\mu(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu(x).$$

Πράγματι, θεωρούμε μια ολοκληρώσιμη και τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι κάτω φραγμένη προσεγγίζοντας την με συναρτήσεις της μορφής $(f + n) \cdot \mathbf{1}_{\{f > -n\}} - n$, αφού, από την συνέχεια της f, κάθε σύνολο $\{f > -n\}$ είναι ανοικτό και άρα η $\nabla((f+n)\cdot \mathbf{1}_{\{f>-n\}})$ ισούται με $\nabla(f+n) = \nabla f$ σε αυτό το σύνολο και επιπλέον $\|\nabla((f+n)\cdot \mathbf{1}_{\{f>-n\}})\|_2 \leqslant \|\nabla f\|_2$ στο σύνολο $\{f \leqslant -n\}$. Τέλος, προσθέτοντας κατάλληλη σταθερά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f > 0$. Από την co-area formula παίρνουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x) &\geqslant \int_0^\infty \mu^+(\{x : f(x) > s\})\, ds \\ &\geqslant \kappa \int_0^\infty \min\{\mu(A(s)), 1 - \mu(A(s))\}\, ds,\end{aligned} \tag{3.1.7}$$

όπου $A(s) = \{f > s\}$. Παρατηρώντας ότι

$$\|\mathbf{1}_B - \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_B)\|_1 = 2\mu(B)(1 - \mu(B))$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$ και χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$\mathbb{E}_\mu(f(g - \mathbb{E}_\mu(g))) = \mathbb{E}_\mu(g(f - \mathbb{E}_\mu(f))),$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_2 d\mu(x) &\geqslant \kappa \int_0^\infty \mu(A(s))(1 - \mu(A(s)))\, ds \\ &= \frac{\kappa}{2} \int_0^\infty \|\mathbf{1}_{A(s)} - \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_{A(s)})\|_1\, ds \\ &\geqslant \frac{\kappa}{2} \sup\left\{ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} (\mathbf{1}_{A(s)} - \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_{A(s)}))g\, d\mu\, ds \,\middle|\, \|g\|_\infty \leqslant 1 \right\} \\ &= \frac{\kappa}{2} \sup\left\{ \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{A(s)}(g - \mathbb{E}_\mu(g))\, d\mu\, ds \,\middle|\, \|g\|_\infty \leqslant 1 \right\} \\ &= \frac{\kappa}{2} \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} f(g - \mathbb{E}_\mu(g))\, d\mu \,\middle|\, \|g\|_\infty \leqslant 1 \right\} \\ &= \frac{\kappa}{2} \sup\left\{ \int_{\mathbb{R}^n} g(f - \mathbb{E}_\mu(f))\, d\mu \,\middle|\, \|g\|_\infty \leqslant 1 \right\} \\ &= \frac{\kappa}{2} \|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_1.\end{aligned}$$

Αυτό δίνει ότι $\kappa \leqslant 2a_1$.

Για την αριστερή ανισότητα, θεωρούμε ένα τυχαίο κλειστό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ και για αρκούντως μικρό $\varepsilon > 0$ ορίζουμε την συνάρτηση

$$f_\varepsilon(x) = \max\left\{0, 1 - \frac{d(x, A_{\varepsilon^2})}{\varepsilon - \varepsilon^2}\right\}.$$

Τότε, $0 \leqslant f_\varepsilon \leqslant 1$, και πιο συγκεκριμένα

$$f_\varepsilon = \begin{cases} 1 & \text{στο } A_{\varepsilon^2} \supseteq A \\ 0 & \text{στο } \{x : d(x, A) > \varepsilon\} \end{cases}$$

Επιπλέον, $f_\varepsilon \longrightarrow \mathbf{1}_A$ όταν $\varepsilon \to 0$. Τέλος, επειδή η f_ε είναι Lipschitz παίρνουμε

$$|f_\varepsilon(x) - f_\varepsilon(y)| \leqslant \frac{1}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\Big|d(x, A_{\varepsilon^2}) - d(y, A_{\varepsilon^2})\Big| \leqslant \frac{\|x-y\|_2}{\varepsilon(1-\varepsilon)},$$

οπότε

$$\|\nabla f_\varepsilon(x)\|_2 \leqslant (\varepsilon - \varepsilon^2)^{-1}.$$

Όμως ισχύει ότι $\nabla f_\varepsilon(x) = 0$ στο $C = \{x : d(x, A) > \varepsilon\} \cup \{x : d(x, A) < \varepsilon^2\}$, οπότε παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f_\varepsilon(x)\|_2 d\mu(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n\setminus C} \|\nabla f_\varepsilon(x)\|_2 d\mu(x)\\ &\leqslant \frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A_{\varepsilon^2})}{\varepsilon(1-\varepsilon)}\\ &= \frac{1}{1-\varepsilon}\,\frac{\mu(A_\varepsilon)-\mu(A)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\frac{\mu(A_{\varepsilon^2})-\mu(A)}{\varepsilon^2},\end{aligned}$$

και αφού υποθέσαμε την (3.1.4) έχουμε:

$$a_1\int_{\mathbb{R}^n} |f_\varepsilon(x) - \mathbb{E}_\mu(f_\varepsilon)|\, d\mu(x) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\,\frac{\mu(A_\varepsilon)-\mu(A)}{\varepsilon} - \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}\,\frac{\mu(A_{\varepsilon^2})-\mu(A)}{\varepsilon^2}.$$

Παίρνοντας $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\mu^+(A) \geqslant a_1\|\mathbf{1}_A - \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_A)\|_1 = 2a_1\mu(A)(1-\mu(A)) \geq a_1 \min\{\mu(A), 1-\mu(A)\},$$

και το ζητούμενο έπεται. □

3.1.2 Η σταθερά Poincaré

Ορισμός 3.1.4 (σταθερά Poincaré)**.** Θα λέμε ότι το μέτρο μ ικανοποιεί την ανισότητα *Poincaré* με σταθερά $\kappa > 0$ αν

$$\kappa \mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2\, d\mu, \tag{3.1.8}$$

για όλες τις τοπικά Lipschitz συναρτήσεις f στον $\mathbb{R}^n$ οι οποίες είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. Η σταθερά *Poincaré* (ή *spectral gap*) Poin_μ του μ είναι η καλύτερη σταθερά $\kappa > 0$ για την οποία ικανοποιείται η (3.1.8).

Η κλασσική ανισότητα Poincaré σχετίζεται με τις ιδιοτιμές του τελεστή Laplace-Beltrami

$$\Delta(f) = \mathrm{div}(\nabla f).$$

Είναι γνωστό ότι οι ιδιοτιμές του $-\Delta$ είναι μη-αρνητικές και σχηματίζουν ένα διακριτό σύνολο, οπότε, μπορούν να γραφούν σε αύξουσα διάταξη ως $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \cdots$, αφού ο Δ μηδενίζεται μόνο στις σταθερές συναρτήσεις. Στην περίπτωση που το μ είναι μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $e^{-\varphi(x)}$ όπου φ είναι μια C^1-συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, ο τελεστής Laplace-Beltrami ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{L}_\mu f = \Delta f - \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε τον ακόλουθο τύπο του Green:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\mathcal{L}_\mu f) g \, d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle \, d\mu, \tag{3.1.9}$$

για όλες τις λείες, φραγμένες συναρτήσεις $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι, από το θεώρημα Green έχουμε:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(\Delta f - \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle) \, e^{-\varphi} &= \int_{\mathbb{R}^n} g(\Delta f) \, e^{-\varphi} - \int_{\mathbb{R}^n} g\langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle e^{-\varphi} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla (g e^{-\varphi}) \rangle - \int_{\mathbb{R}^n} g \langle \nabla f, \nabla \varphi \rangle e^{-\varphi} \\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle e^{-\varphi}.\end{aligned}$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι $\mathrm{Poin}_\mu = \lambda_1$, όπου λ_1 είναι η πρώτη μη μηδενική ιδιοτιμή του διαφορικού τελεστή $-\mathcal{L}_\mu$.

Θεώρημα 3.1.5. *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $e^{-\varphi(x)}$, όπου φ είναι μια C^1-συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για όλες τις λείες συναρτήσεις f με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει:*

$$\lambda_1 \mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu. \tag{3.1.10}$$

Έχουμε ισότητα όταν η f είναι η ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην λ_1. Επομένως, $\mathrm{Poin}_\mu = \lambda_1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ως υπόχωρο του $L_2(\mu)$ με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} fg \, d\mu.$$

Ο τελεστής $-\mathcal{L}_\mu$ είναι αυτοσυζυγής και θετικός, οπότε υπάρχει ορθοκανονική βάση $\{\phi_j\}$ του $L_2(\mu)$ η οποία αποτελείται από ιδιοσυναρτήσεις που αντιστοιχούν στις ιδιοτιμές λ_j. Αν $f \in L_2(\mu)$, τότε από την ταυτότητα του Parseval έχουμε:

$$f = \sum_{j=1}^\infty \langle f, \phi_j \rangle \phi_j \qquad \text{και} \qquad \|f\|_{L_2(\mu)}^2 = \sum_{j=1}^\infty \langle f, \phi_j \rangle^2.$$

Θεωρούμε την *ενέργεια*

$$\mathcal{E}(f,g)=\int_{\mathbb{R}^n}\langle\nabla f,\nabla g\rangle\,d\mu.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{E}(f):=\mathcal{E}(f,f)=\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_2^2d\mu.$$

Επίσης, χρησιμοποιώντας την (3.1.9) βλέπουμε ότι, για κάθε $s\geqslant 1$,

$$\begin{aligned}
0 &\leqslant \mathcal{E}\left(f-\sum_{j=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\varphi_j, f-\sum_{j=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\varphi_j\right)\\
&= \mathcal{E}(f,f)-2\sum_{j=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\mathcal{E}(f,\varphi_j)+\sum_{j,k=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\langle f,\varphi_k\rangle\mathcal{E}(\varphi_j,\varphi_k)\\
&= \mathcal{E}(f,f)+2\sum_{j=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\langle f,\mathcal{L}_\mu\varphi_j\rangle-\sum_{j,k=1}^{s}\langle f,\varphi_j\rangle\langle f,\varphi_k\rangle\langle\varphi_j,\mathcal{L}_\mu\varphi_k\rangle\\
&= \mathcal{E}(f,f)-2\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle^2+\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle^2.
\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια για κάθε s ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^{s}\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle^2\leqslant\mathcal{E}(f),$$

οπότε

$$\lambda_1\|f\|_{L_2(\mu)}^2=\lambda_1\sum_{j=1}^{\infty}\langle f,\varphi_j\rangle^2\leqslant\sum_{j=1}^{\infty}\lambda_j\langle f,\varphi_j\rangle^2\leqslant\mathcal{E}(f).$$

Παρατηρούμε τέλος ότι

$$\mathcal{E}(f)=\mathcal{E}(f-\mathbb{E}_\mu(f)),$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\mathrm{Var}_\mu(f)\leqslant\frac{1}{\lambda_1}\mathcal{E}(f)=\frac{1}{\lambda_1}\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_2^2d\mu.$$

Έπεται ότι η ανισότητα Poincaré ικανοποιείται με $\kappa=\lambda_1$. □

Ο Maz'ya (βλέπε [99], [100]) και ανεξάρτητα ο Cheeger (βλέπε [41]) έδειξαν ότι η σταθερά Poincaré του μ φράσσεται από τη σταθερά Cheeger. Δηλαδή, αν ισχύει η ισοπεριμετρική ανισότητα (3.1.2) τότε ισχύει και η ανίσοτητα Poincaré. Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.6 (Maz'ya, Cheeger). *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την ανισότητα Cheeger. Τότε,*

$$\mathrm{Poin}_\mu \geqslant \frac{\mathrm{Is}_\mu^2}{4}. \tag{3.1.11}$$

Απόδειξη. Έστω $\kappa = \mathrm{Is}_\mu$. Τότε από την co-area formula και τον ορισμό της σταθεράς Cheeger έχουμε ότι για κάθε θετική, λεία συνάρτηση g ισχύει:

$$\begin{aligned}\kappa \int_0^\infty \min\{\mu(\{g \geqslant s\}), 1 - \mu(\{g \geqslant s\})\}\, ds &\leqslant \int_0^\infty \mu^+(\{g \geqslant s\})\, ds \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla g\|_2 d\mu.\end{aligned} \tag{3.1.12}$$

Θεωρούμε μια λεία συνάρτηση f και θέτουμε $m = \mathrm{med}(f)$. Τότε,

$$\mu(\{f \geqslant m\}) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \mu(\{f \leqslant m\}) \geqslant \frac{1}{2}.$$

Ορίζουμε

$$f^+ = \max\{f - m, 0\} \quad \text{και} \quad f^- = -\min\{f - m, 0\}.$$

Τότε, $f - m = f^+ - f^-$ και από τον ορισμό του m έχουμε ότι

$$\mu(\{(f^+)^2 \geqslant s\}) \leqslant \frac{1}{2} \quad \text{και} \quad \mu(\{(f^-)^2 \geqslant s\}) \leqslant \frac{1}{2}$$

για κάθε $s > 0$. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας την (3.1.12) με $g = (f^+)^2$ και $g = (f^-)^2$ και εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\begin{aligned}\kappa \int_{\mathbb{R}^n} |f - m|^2 d\mu &= \kappa \int_{\mathbb{R}^n} (f^+)^2 d\mu + \kappa \int_{\mathbb{R}^n} (f^-)^2 d\mu \\ &= \kappa \int_0^\infty \mu(\{(f^+)^2 \geqslant s\})\, ds + \kappa \int_0^\infty \mu(\{(f^-)^2 \geqslant s\})\, ds \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla((f^+)^2)\|_2 d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla((f^-)^2)\|_2 d\mu \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (\|\nabla((f^+)^2)\|_2 + \|\nabla((f^-)^2)\|_2)\, d\mu.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|\nabla((f^+)^2)\|_2 + \|\nabla((f^-)^2)\|_2 \leqslant 2|f - m|\, \|\nabla f\|_2.$$

Από τα παραπάνω και την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε:

$$\kappa \int_{\mathbb{R}^n} |f - m|^2 d\mu \leqslant 2 \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f - m|^2 d\mu \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 d\mu \right)^{1/2}.$$

Έπεται ότι

$$\frac{\kappa^2}{4}\int_{\mathbb{R}^n}|f-m|^2d\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_2^2 d\mu. \tag{3.1.13}$$

Τέλος, αφού

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|f-m|^2d\mu &= \int_{\mathbb{R}^n}|f-\mathbb{E}_\mu(f)+\mathbb{E}_\mu(f)-m|^2d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f-\mathbb{E}_\mu(f)|^2d\mu+\int_{\mathbb{R}^n}|\mathbb{E}_\mu(f)-m|^2d\mu+2\int_{\mathbb{R}^n}(f-\mathbb{E}_\mu(f))(\mathbb{E}_\mu(f)-m)\,d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}|f-\mathbb{E}_\mu(f)|^2d\mu+\int_{\mathbb{R}^n}|\mathbb{E}_\mu(f)-m|^2d\mu\\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n}|f-\mathbb{E}_\mu(f)|^2d\mu\end{aligned}$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Στην περίπτωση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας, ο Buser [36] (βλέπε επίσης και Ledoux [83]) έδειξε ότι ισχύει και το αντίστροφο. Δηλαδή, ότι η σταθερά Cheeger ενός μέτρου μ φράσσεται από την σταθερά Poincaré. Πιο συγκεκριμμένα έχουμε:

Θεώρημα 3.1.7 (Buser, Ledoux). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{Poin}_\mu \leqslant C^2\mathrm{Is}_\mu^2,$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα δώσουμε μία απόδειξη που χρησιμοποιεί μεθόδους ημιομάδων (βλέπε για παράδειγμα τις σημειώσεις [86] του Ledoux για μια παρουσίαση της σχετικής θεωρίας). Υποθέτουμε ότι $d\mu=e^{-\varphi(x)}dx$, όπου φ είναι μια κυρτή C^2 συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και θεωρούμε την ημιομάδα τελεστών που έχει γεννήτορα τον τελεστή Laplace-Beltrami,

$$\mathcal{L}_\mu(f)=\Delta f-\langle\nabla\varphi,\nabla f\rangle.$$

Ο τελεστής αυτός είναι καλά ορισμένος στον $C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και είναι γνωστό ότι υπάρχει μοναδική ημιομάδα $(P_t)_{t\geqslant 0}$ από φραγμένους γραμμικούς τελεστές στον $L_2(\mu)$ που ικανοποιούν τις

$$\mathcal{L}_\mu f=\lim_{t\to 0}\frac{P_tf-f}{t} \tag{3.1.14}$$

και

$$\frac{d}{dt}(P_tf)=\mathcal{L}_\mu P_tf=P_t\mathcal{L}_\mu f \tag{3.1.15}$$

για κάθε $f\in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Παραθέτουμε τώρα κάποιες βασικές ιδιότητες που μπορούν εύκολα να αποδειχθούν.

- $P_0 f = f$,
- $P_{t+s} f = P_t(P_s f)$,
- $[\,P_t(fg)\,]^2 \leqslant P_t(f^2)P_t(g^2)$

για όλες τις συναρτήσεις $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $t, s \geqslant 0$. Επιπλέον, για κάθε $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $p \geqslant 1$ ισχύει:

$$|P_t(f)|^p \leqslant P_t(|f|^p). \tag{3.1.16}$$

Το μέτρο μ είναι χρονικά αντιστρέψιμο και αναλλοίωτο ως προς τη δράση της $(P_t)_{t\geqslant 0}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $t \geqslant 0$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, P_t g\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} g\, P_t f\, d\mu \tag{3.1.17}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t f\, d\mu = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\mu \tag{3.1.18}$$

αντίστοιχα.

Ορίζουμε μια συμμετρική διγραμμική μορφή Γ μέσω της εξίσωσης

$$\Gamma(f, g) = \langle \nabla f, \nabla g\rangle$$

για όλες τις συναρτήσεις $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Επιπλέον, θέτουμε

$$\Gamma(f) = \Gamma(f, f) = \|\nabla f\|_2^2.$$

Από την (3.1.14) έχουμε

$$2\Gamma(f, g) = \mathcal{L}_\mu(fg) - f\mathcal{L}_\mu(g) - g\mathcal{L}_\mu(f) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}[P_t(fg) - P_t(f)P_t(g)]$$

για όλες τις $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Επίσης,

$$\Gamma(h(f), g) = h'(f)\Gamma(f, g)$$

και

$$\Gamma(fg, h) = f\Gamma(g, h) + g\Gamma(f, h)$$

για όλες $f, g, h \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Στη συνέχεια ορίζουμε μια διγραμμική μορφή Γ_2 «αντικαθιστώντας» το γινόμενο συναρτήσεων με την δράση της Γ: Θέτουμε

$$2\Gamma_2(f, g) = \mathcal{L}_\mu\Gamma(f, g) - \Gamma(f, \mathcal{L}_\mu g) - \Gamma(g, \mathcal{L}_\mu f)$$

για όλες τις $f, g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$. Είναι άμεσο ότι

$$\Gamma_2(f) := \Gamma_2(f,f) = \langle (\mathrm{Hess}\varphi)(\nabla f), \nabla f\rangle + \|\mathrm{Hess} f\|_2^2 \geqslant \|\mathrm{Hess} f\|_2^2,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι η φ είναι κυρτή, επομένως ο Hess φ είναι θετικά ημιορισμένος. Συμπεραίνουμε ότι $\Gamma_2(f) \geqslant 0$. Αυτή η ιδιότητα θα αποδειχθεί χρήσιμη στη συνέχεια.

Θεώρημα 3.1.8 (Bakry-Ledoux). *Για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ ισχύει η παρακάτω κατά σημείο ανισότητα:*

$$2t\|\nabla P_t(f)\|_2^2 \leqslant P_t(f^2) - (P_t(f))^2.$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.1.9. *Για κάθε $f \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ και για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει ότι*

$$\Gamma P_t f \leqslant P_t \Gamma f.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση F που ορίζεται από την

$$F(s) = P_s(\Gamma(P_{t-s}f)) \ \text{ στο } \ [0,t]$$

είναι αύξουσα. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} F'(s) &= P_s\mathcal{L}_\mu\Gamma(P_{t-s}f) - 2P_s\Gamma(P_{t-s}f, \mathcal{L}_\mu P_{t-s}f) \\ &= P_s(\Gamma_2(P_{t-s}(f))) \end{aligned}$$

από τον ορισμό του Γ_2. Επειδή όμως $h = \Gamma_2(P_{t-s}(f)) \geqslant 0$, από την (3.1.16) με $p = 1$ παίρνουμε ότι $F'(s) = P_s(h) \geqslant 0$. Αφού τώρα η F είναι αύξουσα, θα έχουμε ότι

$$F(0) \leqslant F(t)$$

από όπου συμπεραίνουμε ότι

$$\Gamma P_t(f) \leqslant P_t\Gamma f.$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.8. Γράφουμε

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 = \int_0^t \frac{d}{ds} P_s((P_{t-s}f)^2)\, ds.$$

Με διαφόριση και χρησιμοποιώντας τον ορισμό της Γ βλέπουμε ότι

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 = 2\int_0^t P_s(\Gamma(P_{t-s}f))\, ds.$$

Όμως,

$$P_s(\Gamma(P_{t-s}f)) \geqslant \Gamma P_s(P_{t-s}f) = \Gamma P_t f,$$

οπότε

$$P_t(f^2) - (P_t f)^2 \geqslant 2\int_0^t \Gamma(P_t f)\,ds = 2t\Gamma(P_t f),$$

που είναι και το ζητούμενο. □

Από το Θεώρημα 3.1.8 βλέπουμε ότι για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \infty$,

$$\Big\| \|\nabla P_t(f)\|_2 \Big\|_{L_q(\mu)} \leqslant \frac{1}{\sqrt{2t}}\|f\|_{L_q(\mu)}. \tag{3.1.19}$$

Πράγματι, αρχικά ισχύει ότι

$$(P_t(f^2))^{q/2} \leqslant P_t((f^2)^{q/2}) = P_t(|f|^q).$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.8 στη μορφή $\|\nabla P_t f\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2t}P_t(f^2)$, γράφουμε:

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla P_t f\|_2^q\,d\mu\right)^{1/q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\|\nabla P_t f\|_2^2)^{q/2}\,d\mu\right)^{1/q}\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} [P_t(f^2)]^{q/2}\,d\mu\right)^{1/q}\\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} P_t(|f|^q)\,d\mu\right)^{1/q}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2t}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q\,d\mu\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Πόρισμα 3.1.10 (Ledoux)**.** *Για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει:*

$$\|f - P_t(f)\|_{L_1(\mu)} \leqslant \sqrt{2t}\Big\| \|\nabla f\|_2 \Big\|_{L_1(\mu)}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $g \in C_b^\infty(\mathbb{R}^n)$ με $\|g\|_\infty = 1$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} g(f - P_t f)\,d\mu &= -\int_{\mathbb{R}^n} g\Big(\int_0^t (\mathcal{L}_\mu P_s f) ds\Big)\,d\mu\\ &= \int_0^t \Big(-\int_{\mathbb{R}^n} (g\mathcal{L}_\mu P_s f)\,d\mu\Big) ds.\end{aligned}$$

Όμως, γνωρίζουμε ότι

$$\begin{aligned}-\int_{\mathbb{R}^n} g(\mathcal{L}_\mu P_s f)\,d\mu &= -\int_{\mathbb{R}^n} g(P_s\mathcal{L}_\mu f)\,d\mu = -\int_{\mathbb{R}^n} (P_s g)(\mathcal{L}_\mu f)\,d\mu\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla P_s(g), \nabla f\rangle\,d\mu \leqslant \Big\| \|\nabla P_s(g)\|_2 \Big\|_{L_\infty(\mu)} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2\,d\mu.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_0^t \Big(- \int_{\mathbb{R}^n} g\mathcal{L}_\mu P_s f\, d\mu \Big) ds &\leqslant \Big(\int_0^t \Big\| \|\nabla P_s(g)\|_2 \Big\|_{L_\infty(\mu)} ds \Big) \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu \\ &\leqslant \Big(\int_0^t \frac{1}{\sqrt{2s}} \|g\|_\infty ds \Big) \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu \\ &= \sqrt{2t}\, \|g\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu \\ &= \sqrt{2t} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu,\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Πορίσματος 3.1.10 για λείες συναρτήσεις που προσεγγίζουν την χαρακτηριστική συνάρτηση ενός ανοικτού συνόλου με λείο σύνορο, μπορούμε να δώσουμε απόδειξη για το Θεώρημα 3.1.7. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.1.11. *Για κάθε f με $\mathbb{E}_\mu(f) = 0$ και για κάθε $t \geqslant 0$ ισχύει:*

$$\|P_t f\|_{L_2(\mu)} \leqslant e^{-\lambda_1 t} \|f\|_{L_2(\mu)}.$$

Απόδειξη. Με παραγώγιση της συνάρτησης $G(t) = e^{2\lambda_1 t} \|P_t f\|_{L_2(\mu)}^2$ παίρνουμε

$$G'(t) = 2e^{2\lambda_1 t} \left(\lambda_1 \|P_t f\|_{L_2(\mu)}^2 - \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla P_t f\|_2^2 \, d\mu \right) \leqslant 0,$$

όπου χρησιμοποιήθηκαν οι βασικές ιδιότητες της ημιομάδας $(P_t)_{t\geqslant 0}$ και το γεγονός ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά λ_1. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.7. Θεωρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με λείο σύνορο. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\mathbf{1}_{A,\varepsilon} = \max\{1 - \frac{d(x, A)}{\varepsilon}, 0\}$$

που προσεγγίζουν την χαρακτηριστική συνάρτηση του A. Εύκολα βλέπουμε ότι,

$$\frac{\mu(A_\varepsilon) - \mu(A)}{\varepsilon} \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla \mathbf{1}_{A,\varepsilon}\|_2 \, d\mu.$$

Παίρνοντας $\liminf$ και στα δύο μέλη και χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.1.10 και τις ιδιότητες (3.1.16)–(3.1.18) των τελεστών P_t γράφουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{2t}\mu^+(A) &\geqslant \int_A (1 - P_t(\mathbf{1}_A))\, d\mu + \int_{A^c} P_t(\mathbf{1}_A)\, d\mu \\ &= 2\left(\mu(A) - \int_A P_t(\mathbf{1}_A)\, d\mu \right) = 2\left(\mu(A) - \|P_{t/2}(\mathbf{1}_A)\|_{L_2(\mu)}^2 \right)\end{aligned}$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.1.11 και το γεγονός ότι $P_t(a) = a$ για όλες τις σταθερές συναρτήσεις a, γράφουμε:

$$\begin{aligned}\|P_{t/2}(\mathbf{1}_A)\|_{L_2(\mu)}^2 &= [\mu(A)]^2 + \|P_{t/2}(\mathbf{1}_A - \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_A))\|_{L_2(\mu)}^2 \\ &\leqslant [\mu(A)]^2 + e^{-\lambda_1 t}\|\mathbf{1}_A - \mathbb{E}_\mu(\mathbf{1}_A)\|_{L_2(\mu)}^2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\sqrt{2t}\mu^+(A) \geqslant 2\mu(A)(1-\mu(A))(1-e^{-\lambda_1 t}) \geqslant (1-e^{-\lambda_1 t})\min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}$$

για κάθε $t > 0$. Οπότε,

$$\mathrm{Is}_\mu \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \sup_{t>0} \frac{1-e^{-\lambda_1 t}}{\sqrt{t}},$$

και επιλέγοντας $t = 1/\lambda_1$, βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Is}_\mu \geqslant \frac{1-e^{-1}}{\sqrt{2}}\sqrt{\lambda_1}.$$

□

3.1.3 Εκθετική συγκέντρωση

Ορισμός 3.1.12 (σταθερά εκθετικής συγκέντρωσης)**.** Θα λέμε ότι το μ ικανοποιεί *ανισότητα εκθετικής συγκέντρωσης* με σταθερά $\kappa > 0$ αν ισχύει

(3.1.20) $$\mu(\{x : |f(x) - \mathbb{E}_\mu(f)| \geqslant t\}) \leqslant e^{1-\kappa t}$$

για κάθε $t > 0$ και όλες τις ολοκληρώσιμες 1-Lipschitz συναρτήσεις f. Η *σταθερά εκθετικής συγκέντρωσης* Exp_μ του μ είναι η καλύτερη σταθερά $\kappa > 0$ για την οποία ικανοποιείται η (3.1.20). Επιπλέον, θα συμβολίζουμε με $\mathrm{Exp}_\mu(f)$ την καλύτερη σταθερά $\kappa > 0$ για την οποία η f ικανοποιεί την (3.1.20). Από τον ορισμό μπορούμε να ελέγξουμε ότι

(3.1.21) $$\frac{1}{\mathrm{Exp}_\mu(f)} \simeq \|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_{\psi_1}(\mu)}.$$

Οι Gromov και Milman έδειξαν [59] ότι η εκθετική συγκέντρωση έπεται από την ανισότητα Poincaré. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ έτσι ώστε

(3.1.22) $$c\sqrt{\mathrm{Poin}_\mu} \leqslant \mathrm{Exp}_\mu.$$

Πράγματι, η παραπάνω ανισότητα έπεται από μια εκτίμηση για την συνάρτηση συγκέντρωσης του μ συναρτήσει της σταθεράς Poincaré.

Θεώρημα 3.1.13 (Gromov-V. Milman)**.** *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά κ. Τότε, η συνάρτηση συγκέντρωσης a_μ του μ ικανοποιεί την*

$$a_\mu(t) \leqslant \exp\left(-t\sqrt{\kappa}/4\right)$$

για κάθε $t > 0$.

Θα δώσουμε ένα επιχείρημα για το Θεώρημα 3.1.13 που χρησιμοποιεί την έννοια του *συντελεστή επέκτασης* (expansion coefficient) του μ.

Ορισμός 3.1.14. Έστω (X, d, μ) ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Ο συντελεστής επέκτασης (expansion coefficient) του μ ορίζεται για κάθε $\varepsilon > 0$ ως εξής:

$$\mathrm{Exp}_\mu(\varepsilon) = \sup\{s \geqslant 1 : \mu(B_\varepsilon) \geqslant s\mu(B) \ \text{ για κάθε } B \subseteq X \text{ με } \mu(B_\varepsilon) \leqslant 1/2\}.$$

Έχουμε το ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 3.1.15. *Υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει $\mathrm{Exp}_\mu(\varepsilon) \geqslant s > 1$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε:*

$$a_\mu(t) \leqslant \frac{s}{2} s^{-t/\varepsilon}.$$

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq X$ με $\mu(A) \geqslant \frac{1}{2}$, θέτουμε $B = X \setminus A_t$ και επιλέγουμε $k \geqslant 0$ έτσι ώστε $k\varepsilon \leqslant t < (k+1)\varepsilon$. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $1 \leqslant j \leqslant k$ έχουμε:

$$(X \setminus A_{j\varepsilon})_\varepsilon \cap A_{(j-1)\varepsilon} = \emptyset,$$

από όπου παίρνουμε ότι

$$(X \setminus A_{j\varepsilon})_\varepsilon \subseteq X \setminus A_{(j-1)\varepsilon}.$$

Από τον ορισμό του συντελεστή επέκτασης και την υπόθεση ότι $\mathrm{Exp}_\mu(\varepsilon) \geqslant s$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mu(X \setminus A_t) &\leqslant \mu(X \setminus A_{k\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{s}\mu(X \setminus A_{(k-1)\varepsilon}) \leqslant \frac{1}{s^2}\mu(X \setminus A_{(k-2)\varepsilon}) \\ &\leqslant \cdots \leqslant \frac{1}{s^k}\mu(A^c) \leqslant \frac{1}{2}s^{-k} \leqslant \frac{1}{2}s^{-(\frac{t}{\varepsilon}-1)}, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την $t < (k+1)\varepsilon$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.13. Θεωρούμε δύο Borel υποσύνολα A και B του $\mathbb{R}^n$ με

$$\mathrm{dist}(A, B) \geqslant t.$$

Θέτουμε

$$a = \mu(A) > 0 \ \text{ και } \ b = \mu(B) > 0.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$f(x) = \frac{1}{a} - \frac{1}{t}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)\min\{t, d(x, A)\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{a} & \text{στο } A \\ -\frac{1}{b} & \text{στο } B \end{cases}$$

Επίσης

$$\|\nabla f(x)\|_2 \leqslant \frac{1}{t}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \quad \text{για κάθε } x \notin A \cup B,$$

ενώ $\|\nabla f(x)\|_2 = 0$ στο $A \cup B$. Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 d\mu \leqslant \frac{1}{t^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 (1-a-b).$$

Από την άλλη πλευρά, αν $m = \mathbb{E}_\mu(f)$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_\mu(f) &\geqslant \int_A (f-m)^2 d\mu + \int_B (f-m)^2 d\mu \\ &= a\left(\frac{1}{a}-m\right)^2 + b\left(-\frac{1}{b}-m\right)^2 \\ &\geqslant \frac{1}{a}+\frac{1}{b}. \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Poincaré παίρνουμε

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right) \leqslant \frac{1}{\kappa t^2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)^2 (1-a-b),$$

και άρα

$$\kappa t^2 \leqslant \frac{a+b}{ab}(1-a-b) \leqslant \frac{1-a-b}{ab} \leqslant \frac{1-a}{ab}.$$

Από την τελευταία ανισότητα έχουμε ότι

$$\mu(A)\mu(B) \leqslant \frac{1}{\kappa t^2}\mu(X \setminus A).$$

Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ και ένα Borel υποσύνολο B στον $\mathbb{R}^n$ με $\mu(B_\varepsilon) \leqslant 1/2$, και θέτουμε $A := X \setminus B_\varepsilon$. Τότε,

$$\mathrm{dist}(A,B) \geqslant \varepsilon \;\; \text{και} \;\; \mu(A) \geqslant 1/2,$$

και από τα προηγούμενα θα έχουμε ότι

$$\mu(B) \leqslant \frac{2}{\varepsilon^2 \kappa}\mu(B_\varepsilon).$$

Η τελευταία ανισότητα δείχνει ότι

$$\mathrm{Exp}_\mu(\varepsilon) \geqslant \frac{\kappa\varepsilon^2}{2}.$$

Επιλέγουμε $\varepsilon = 2/\sqrt{\kappa}$. Τότε από την Πρόταση 3.1.15 έχουμε

$$a_\mu(t) \leqslant 2^{-t\sqrt{\kappa}/2} < \exp(-t\sqrt{\kappa}/4)$$

που είναι το ζητούμενο. □

Έχοντας αυτό το φράγμα για την $a_\mu(t)$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα **;;**:

Θεώρημα 3.1.16. *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά κ. Τότε, για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που είναι 1-Lipschitz και κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}) \leqslant 2\exp\left(-t\sqrt{\kappa}/4\right),$$

όπου $\mathrm{med}(f)$ είναι ένας μέσος Lévy της f.

Ένα γνωστό επιχείρημα (βλέπε [105, Appendix V]) δείχνει ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε τον μέσο Lévy με την μέση τιμή στο θεώρημα 3.1.16. Τότε, από τον ορισμό της Exp_μ έχουμε:

Θεώρημα 3.1.17. *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά κ. Τότε,*

$$\mathrm{Exp}_\mu \geqslant c\sqrt{\kappa},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επομένως,

$$\mathrm{Exp}_\mu \geqslant c\sqrt{\mathrm{Poin}_\mu}.$$

Στην επόμενη ενότητα θα δούμε ότι η παραπάνω ανισότητα μπορεί να αντιστραφεί.

3.2 Ισοδυναμία των ισοπεριμετρικών σταθερών

Στην εργασία [101] ο E. Milman εισήγαγε μια έννοια συγκέντρωσης ασθενέστερη από αυτή της εκθετικής συγκέντρωσης ως εξής.

Ορισμός 3.2.1 (συγκέντρωση πρώτης ροπής)**.** Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το μ ικανοποιεί *συγκέντρωση πρώτης ροπής* (first moment concentration) με σταθερά κ αν

$$\|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_1(\mu)} \leqslant \frac{1}{\kappa} \tag{3.2.1}$$

για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που είναι ολοκληρώσιμη και 1-Lipschitz. Η *σταθερά πρώτης ροπής* FM_μ του μ είναι η καλύτερη σταθερά $\kappa > 0$ για την οποία ισχύει η (3.2.1).

Υποθέτουμε ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα εκθετικής συγκέντρωσης με σταθερά κ. Τότε, για κάθε ολοκληρώσιμη 1-Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_1(\mu)} &= \int_0^\infty \mu(\{x : |f(x) - \mathbb{E}_\mu(f)| \geqslant t\})\, dt \\ &\leqslant e \int_0^\infty e^{-\kappa t} dt = \frac{e}{\kappa}.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $\mathrm{FM}_\mu \geqslant e^{-1}\mathrm{Exp}_\mu$. Συνοψίζοντας, μέχρι τώρα έχουμε δείξει ότι για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\mathrm{Is}_\mu \lesssim \sqrt{\mathrm{Poin}_\mu} \lesssim \mathrm{Exp}_\mu \lesssim \mathrm{FM}_\mu,$$

όπου $a \lesssim b$ σημαίνει ότι $a \leqslant cb$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Παρόλο που η συγκέντρωση πρώτης ροπής είναι ασθενέστερη από την εκθετική συγκέντρωση, στην περίπτωση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας οι τέσσερεις σταθερές που ορίσαμε είναι ισοδύναμες. Πιο συγκεκριμένα, ο E. Milman έδειξε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2.2 (E. Milman). *Για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{Is}_\mu \simeq \sqrt{\mathrm{Poin}_\mu} \simeq \mathrm{Exp}_\mu \simeq \mathrm{FM}_\mu, \tag{3.2.2}$$

όπου $a \simeq b$ σημαίνει ότι $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$ για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$.

Μια πρώτη παρατήρηση για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2 είναι ότι οι διάφορες ισοπεριμετρικές σταθερές που αναλύσαμε στην προηγούμενη ενότητα έχουν ισοδύναμες περιγραφές μέσω των *γενικευμένων ανισοτήτων Poincaré*.

Ορισμός 3.2.3. Θεωρούμε τους $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ και ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το μ ικανοποιεί μια (p, q)-ανισότητα Poincaré με σταθερά κ αν

$$\kappa\|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_p(\mu)} \leqslant \big\| \|\nabla f\|_2 \big\|_{L_q(\mu)} \tag{3.2.3}$$

για κάθε ολοκληρώσιμη και τοπικά Lipschitz συνάρτηση f. Θα συμβολίζουμε με $C_\mu^{p,q}$ την καλύτερη σταθερά κ για την οποία το μ ικανοποιεί την (3.2.3).

Με την παραπάνω ορολογία και σύμφωνα με το Θεώρημα 3.1.2 έχουμε ότι

$$\sqrt{\mathrm{Poin}_\mu} = C_\mu^{2,2}, \quad \mathrm{FM}_\mu = C_\mu^{1,\infty} \quad \text{και} \quad \mathrm{Is}_\mu \simeq C_\mu^{1,1}.$$

Παρατήρηση 3.2.4. Υπενθυμίζουμε ότι από το Λήμμα 2.5.7 έχουμε ότι για κάθε γνησίως αύξουσα Orlicz συνάρτηση Φ στον $\mathbb{R}^+$ και για κάθε $f \in L_\Phi(\mu)$ ισχύει

$$\frac{1}{2}\|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)} \leqslant \|f - \mathrm{med}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)} \leqslant 3\|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_\Phi(\mu)}. \tag{3.2.4}$$

Θα λέμε ότι το μ ικανοποιεί μια (p,q)-ανισότητα Poincaré με σταθερά κ ως προς τον μέσο Lévy αν

$$\kappa\|f-\mathrm{med}_\mu(f)\|_{L_p(\mu)} \leqslant \big\| \|\nabla f\|_2 \big\|_{L_q(\mu)}$$

για κάθε ολοκληρώσιμη και τοπικά Lipschitz συνάρτηση f. Θα συμβολίζουμε με $C_\mu^{p,q,L}$ την καλύτερη σταθερά κ για την οποία το μ ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα. Παρατηρούμε επίσης ότι για κάθε $p,q\geqslant 1$ ισχύει:

$$\frac{1}{3}C_\mu^{p,q} \leqslant C_\mu^{p,q,L} \leqslant 2C_\mu^{p,q}. \tag{3.2.5}$$

Θεώρημα 3.2.5. *Θεωρούμε* $1\leqslant p\leqslant\infty$, $2\leqslant q\leqslant\infty$ *και θέτουμε* $r=\frac{1}{p}+1-\frac{1}{q}$. *Υποθέτουμε ότι το* μ *είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον* $\mathbb{R}^n$ *και ικανοποιεί μια* (p,q)-*ανισότητα Poincaré. Τότε,*

$$\min\{I(t),I(1-t)\} \geqslant \frac{C_\mu^{p,q}}{32}t^r \quad \text{για κάθε } t\in[0,1/2]. \tag{3.2.6}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αφού $p\geqslant 1$ και $q\geqslant 2$, θα έχουμε ότι $\frac{1}{2}\leqslant r\leqslant 2$. Θεωρούμε ένα ανοικτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με λείο σύνορο. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.7 εφαρμόζουμε το Πόρισμα 3.1.10 και παίρνουμε:

$$\begin{aligned}\sqrt{2t}\mu^+(A) &\geqslant \int_A (1-P_t(\mathbf{1}_A))\,d\mu + \int_{A^c} P_t(\mathbf{1}_A)\,d\mu\\ &= 2\left(\mu(A)-\int_A P_t(\mathbf{1}_A)\,d\mu\right)\\ &= 2\left(\mu(A)(1-\mu(A)) - \int_{\mathbb{R}^n}(P_t(\mathbf{1}_A)-\mu(A))(\mathbf{1}_A-\mu(A))\,d\mu\right).\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Hölder, τον ορισμό της σταθεράς $C_\mu^{p,q}$ και το αναλλοίωτο του μέτρου μ ως προς $(P_t)_{t\geqslant 0}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}(P_t(\mathbf{1}_A)-\mu(A))(\mathbf{1}_A-\mu(A))\,d\mu &\leqslant \|P_t(\mathbf{1}_A)-\mu(A)\|_{L_p(\mu)}\,\|\mathbf{1}_A-\mu(A)\|_{L_{p^*}(\mu)}\\ &\leqslant (C_\mu^{p,q})^{-1}\big\| \|\nabla P_t(\mathbf{1}_A)\|_2\big\|_{L_q(\mu)}\,\|\mathbf{1}_A-\mu(A)\|_{L_{p^*}(\mu)},\end{aligned}$$

όπου με p^* συμβολίζουμε τον συζυγή εκθέτη του p. Συνδυάζοντας την τελευταία ανισότητα με την (3.1.19) παίρνουμε ότι η ανισότητα

$$\sqrt{2t}\mu^+(A) \geqslant 2\left(\mu(A)(1-\mu(A)) - \frac{1}{\sqrt{2t}C_\mu^{p,q}}\|\mathbf{1}_A-\mu(A)\|_{L_q(\mu)}\,\|\mathbf{1}_A-\mu(A)\|_{L_{p^*}(\mu)}\right) \tag{3.2.7}$$

ισχύει για κάθε $t > 0$. Τώρα βελτιστοποιούμε ως προς t. Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση

$$\|\mathbf{1}_A - \mu(A)\|_{L_s(\mu)} \leqslant 2[\mu(A)(1-\mu(A))]^{1/s}$$

για κάθε $s \geqslant 1$, και επιλέγοντας

$$t = \frac{32}{(C_\mu^{p,q})^2}[\mu(A)(1-\mu(A))]^{2(1/q-1/p)},$$

παίρνουμε

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{C_\mu^{p,q}}{8}[\mu(A)(1-\mu(A))]^r \geqslant \frac{C_\mu^{p,q}}{8\cdot 2^r}\min\{\mu(A)^r,(1-\mu(A))^r\},$$

όπου $r = 1 - 1/q + 1/p$. Όμως $\frac{1}{2} \leqslant r \leqslant 2$, άρα $2^r \leqslant 4$, και η αποδείξη ολοκληρώθηκε. □

Η απόδειξη της ισοδυναμίας $\mathrm{FM}_\mu \simeq \mathrm{Is}_\mu$ απαιτεί ένα ακόμη βαθύ αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, το ισοπεριμετρικό προφίλ I_μ του μ είναι κοίλη συνάρτηση στο $(0,1)$, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε $I(t) = I(1-t)$. Ως συνέπεια του παραπάνω έχουμε ότι*

$$\mathrm{Is}_\mu := \inf_{0<t<1}\frac{I(t)}{\min\{t,1-t\}} = \inf_{0<t\leqslant 1/2}\frac{I(t)}{t} = 2I(1/2),$$

που σημαίνει ότι μπορούμε να υπολογίσουμε την σταθερά Cheeger ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ εξετάζοντας μόνο τα Borel υποσύνολα A με $\mu(A) = 1/2$.

Παρατήρηση 3.2.7. Το γεγονός ότι το ισοπεριμετρικό προφίλ ενός κυρτού χωρίου είναι κοίλη συνάρτηση αποδείχτηκε αρχικά από τους Sternberg και Zumbrun στο [116]. Απέδειξαν ότι αν $n \geqslant 2$ και αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε η I_{μ_K} είναι κοίλη στο $[0,1]$, όπου μ_K είναι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο K. Ο Kuwert παρατήρησε αργότερα στο [77] ότι η $I_{\mu_K}^{n/(n-1)}$ είναι επίσης κοίλη στο $[0,1]$. Αυτός είναι μάλιστα ο «σωστός» εκθέτης που θα ήθελε κανείς να έχει. Το αποτέλεσμα του Kuwert γενικεύτηκε για κυρτά χωρία σε πολλαπλότητες Riemann με μη-αρνητική καμπυλότητα Ricci, από τους Bayle και Rosales [17]. Ο E. Milman απέδειξε στο [101] ότι η I_μ παραμένει κοίλη στο γενικότερο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Η μονοδιάστατη περίπτωση είχε ελεγχθεί από τον Bobkov.

Αυτό που χρειαζόμαστε για το επόμενο θεώρημα είναι το γεγονός ότι η $I(t)/t$ είναι φθίνουσα στο $[0,1]$. Ισχύει μάλιστα ότι, για κυρτά χωρία σε πολλαπλότητες με μη-αρνητική καμπυλότητα Ricci, η συνάρτηση $[I_\mu(t)]^{n/(n-1)}/t$ είναι φθίνουσα. Αυτό παρατηρήθηκε από τον E. Milman στο [103].

Με αυτά τα εργαλεία μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος.

Θεώρημα 3.2.8 (E. Milman). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{FM}_\mu = C_\mu^{1,\infty} \leqslant c\, C_\mu^{1,1} \simeq \mathrm{Is}_\mu,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 3.2.5 (με $p = 1$, $q = \infty$ και $r = 2$) γνωρίζουμε ότι

$$\min\{I(t), I(1-t)\} \geqslant c_1\, C_\mu^{1,\infty} t^2 \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1/2],$$

όπου $c_1 > 0$ είναι απόλυτη σταθερά. Οπότε για $t = 1/2$ παίρνουμε ότι

$$I(1/2) \geqslant \frac{c_1}{4}\, C_\mu^{1,\infty}. \tag{3.2.8}$$

Επειδή το ισοπεριμετρικό προφίλ είναι κοίλη συνάρτηση, συμμετρική ως προς το $1/2$, παίρνουμε

$$\frac{\min\{I(t), I(1-t)\}}{t} = \frac{I(t)}{t} \geqslant 2I(1/2) \quad \text{για κάθε } t \in (0, 1/2] \tag{3.2.9}$$

οπότε συνδυάζοντας τις (3.2.8) και (3.2.9) παίρνουμε:

$$\min\{I(t), I(1-t)\} \geqslant \frac{c_1}{2} C_\mu^{1,\infty} t \quad \text{για κάθε } t \in [0, 1/2].$$

Όμως από την (3.1.3) έχουμε ότι

$$\mathrm{Is}_\mu = \inf_{0<t\leqslant 1/2} \frac{\min\{I_\mu(t), I_\mu(1-t)\}}{t}.$$

Έπεται ότι $\mathrm{Is}_\mu \geqslant c C_\mu^{1,\infty}$, που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 3.2.9. Στην πραγματικότητα ο E. Milman έδειξε ότι η τάξη όλων των παραπάνω σταθερών προσδιορίζεται από την συμπεριφορά 1-Lipschitz συναρτήσεων συγκεκριμένης μορφής. Μπορούμε να «υπολογίσουμε» την σταθερά Poincaré ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n$ εξετάζοντας μόνο συναρτήσεις της μορφής $x \mapsto d(x, A)$.

Θεώρημα 3.2.10 (E. Milman). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{Is}_\mu \simeq \inf\left\{ \frac{1}{\int d(x, A)d\mu(x)} : \mu(A) \geqslant \frac{1}{2} \right\}. \tag{3.2.10}$$

Απόδειξη. Έστω A ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) \geqslant 1/2$. Τότε αν συμβολίσουμε με g την συνάρτηση $x \mapsto d(x, A)$, έχουμε ότι η g είναι 1-Lipschitz και ότι $\mathrm{med}_\mu(g) = 0$, και από την (3.1.13) παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\mathrm{Is}_\mu \leqslant \frac{\int \|\nabla g\|_2 d\mu}{\int g\, d\mu} \leqslant \frac{1}{\int g\, d\mu}.$$

Αντίστροφα, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.2 και την Παρατήρηση 3.2.4, γράφουμε

$$\mathrm{Is}_\mu \geqslant c\, C_\mu^{1,\infty,L} = \inf \frac{c}{\int |f|\, d\mu},$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλες τις 1-Lipschitz συναρτήσεις με $\mathrm{med}_\mu(f) = 0$. Επιλέγοντας μια τέτοια συνάρτηση f και θέτοντας

$$A_1 = \{f \leqslant 0\}, \quad \text{και} \quad A_2 = \{f \geqslant 0\},$$

έχουμε ότι

$$\mu(A_i) \geqslant 1/2, \quad \text{για} \quad i = 1, 2.$$

Επιπλέον, από την συνέχεια της f παίρνουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in \mathrm{bd}(A_1) \cup \mathrm{bd}(A_2)$. Τέλος αφού η f είναι 1-Lipschitz, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f|\, d\mu &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_1} d(x, \mathrm{bd}(A_1))\, d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n \setminus A_2} d(x, \mathrm{bd}(A_2))\, d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} d(x, A_1)\, d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} d(x, A_2)\, d\mu(x)\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έπεται. □

Κεφάλαιο 4

Η εικασία KLS

4.1 Το λήμμα τοπικότητας

Το λήμμα τοπικότητας (localization lemma) των Lovász και Simonovits (βλέπε [95]) είναι ένα χρήσιμο εργαλείο που συχνά ανάγει το ερώτημα αν μια ανισότητα ισχύει για όλα τα $1/n$-κοίλα μέτρα στον $\mathbb{R}^n$ στο ερώτημα αν ισχύει αντίστοιχη ανισότητα για όλα τα $1/n$-αφινικά μέτρα που ο φορέας τους είναι ευθύγραμμο τμήμα.

Θεώρημα 4.1.1 (Λήμμα τοπικότητας). *Θεωρούμε δύο συναρτήσεις f και g που είναι κάτω ημισυνεχείς και ολοκληρώσιμες στον $\mathbb{R}^n$ και τέτοιες ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx > 0 \quad \textit{και} \quad \int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx > 0.$$

Τότε, υπάρχουν $a, b \in \mathbb{R}^n$ και αφινική συνάρτηση $\ell : [0, 1] \to \mathbb{R}$ έτσι ώστε να ισχύει

$$\int_0^1 f((1-t)a + tb)\ell(t)^{n-1}dt > 0 \quad \textit{και} \quad \int_0^1 g((1-t)a + tb)\ell(t)^{n-1}dt > 0.$$

Ο Fradelizi και ο Guédon [56] έδωσαν μια διαφορετική προσέγγιση σε αυτό το αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.1.2 (Fradelizi-Guédon). *Έστω K ένα συμπαγές και κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε έναν πραγματικό αριθμό $-\infty < s \leqslant 1/2$ και μια άνω ημισυνεχή συνάρτηση $f : K \to \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε με P_f το σύνολο όλων των s-κοίλων μέτρων πιθανότητας μ που έχουν φορέα το K και ικανοποιούν την $\int f\, d\mu \geqslant 0$. Τότε τα ακραία σημεία του $\mathrm{conv}(P_f)$ είναι τα παρακάτω:*

(i) *Τα μέτρα Dirac στα σημεία $x \in K$ που είναι τέτοια ώστε $f(x) \geqslant 0$.*

(ii) *Τα μέτρα πιθανότητας ν που είναι s-αφινικά, φέρονται σε ευθύγραμμο τμήμα $[a,b] \subset K$, και είναι τέτοια ώστε*
$$\int f\, d\nu = 0 \ \ \textit{και} \ \ \int_a^x f\, d\nu > 0$$
για κάθε $x \in (a,b)$ ή
$$\int_x^b f\, d\nu > 0 \ \ \textit{για κάθε} \ \ x \in (a,b).$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.1.3. *Έστω K ένα κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $-\infty \leqslant \gamma \leqslant 1$. Αν η συνάρτηση $F : K \to \mathbb{R}^+$ είναι γ-κοίλη και η συνάρτηση $G : K \to \mathbb{R}^+$ είναι γ-αφινική, τότε η συνάρτηση $(F-G)_+ : K \to \mathbb{R}^+$ είναι γ-κοίλη.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $-\infty < \gamma \leqslant 1$ και $\gamma \neq 0$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι τα $x, y \in K$ ικανοποιούν τις
$$F(x) \geqslant G(x) \ \ \text{και} \ \ F(y) \geqslant G(y).$$
Τότε, από την ανισότητα Minkowski, για κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε:
$$\begin{aligned}&((1-\lambda)F^\gamma(x) + \lambda F^\gamma(y))^{1/\gamma} - ((1-\lambda)G^\gamma(x) + \lambda G^\gamma(y))^{1/\gamma}\\ &\geqslant ((1-\lambda)(F-G)^\gamma(x) + \lambda(F-G)^\gamma(y))^{1/\gamma},\end{aligned}$$
Όμως η F είναι γ-κοίλη και η G είναι γ-αφινική, άρα αν $x, y \in \mathrm{supp}((F-G)_+)$ τότε
$$(F-G)((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant ((1-\lambda)(F-G)^\gamma(x) + \lambda(F-G)^\gamma(y))^{1/\gamma}.$$
Τέλος, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις προσεγγίζονται από γ_n-κοίλες συναρτήσεις με $\gamma_n \downarrow 0$, βλέπουμε ότι ο ισχυρισμός του λήμματος ισχύει και για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις. Η περίπτωση $\gamma = -\infty$ είναι απλή. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Εύκολα βλέπουμε ότι κάθε μέτρο Dirac σε ένα σημείο $x \in K$ για το οποίο $f(x) \geqslant 0$, είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{conv}(P_f)$, άρα θεωρούμε ένα ακραίο σημείο ν του $\mathrm{conv}(P_f)$ που δεν είναι μέτρο Dirac και θα δείξουμε ότι το ν έχει τις ιδιότητες που περιγράφονται στο (ii).

Έστω F ο αφινικός υπόχωρος που παράγεται από το $\mathrm{supp}(\nu)$. Πρώτα δείχνουμε ότι $\dim(F) = 1$. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε μπορούμε να βρούμε x_0 στο σχετικό εσωτερικό του $\mathrm{supp}(\nu)$ και έναν διδιάστατο υπόχωρο E του $\mathbb{R}^n$ έτσι ώστε $x_0 + E \subseteq F$. Δοθέντος $\theta \in S_E$, θέτουμε
$$\begin{aligned}H_\theta &= \{x \in F : \langle x - x_0, \theta\rangle = 0\}\\ H_\theta^+ &= \{x \in F : \langle x - x_0, \theta\rangle \geqslant 0\}\\ H_\theta^- &= \{x \in F : \langle x - x_0, \theta\rangle \leqslant 0\}.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε συνάρτηση $\phi : S_E \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\phi(\vartheta) = \int_{H_\vartheta^+} f\, d\nu - \frac{1}{2}\int f\, d\nu.$$

Παρατηρούμε ότι επειδή $\dim(H_\vartheta) = 1$, θα έχουμε ότι $\nu(H_\vartheta) = 0$ για όλα τα $\vartheta \in S_E$. Έπεται ότι η ϕ είναι περιττή και συνεχής. Επομένως υπάρχει $\vartheta_0 \in S_E$ τέτοιο ώστε $\phi(\vartheta_0) = 0$. Όμως το x_0 είναι στο σχετικό εσωτερικό του $\operatorname{supp}(\nu)$, οπότε

$$\nu(H_{\vartheta_0}^+) > 0 \ \text{ και } \ \nu(H_\vartheta^-) > 0.$$

Έπεται ότι μπορούμε να ορίσουμε μέτρα

$$\nu_1 = \frac{\nu|_{H_{\vartheta_0}^+}}{\nu(H_{\vartheta_0}^+)} \ \text{ και } \ \nu_2 = \frac{\nu|_{H_{\vartheta_0}^-}}{\nu(H_{\vartheta_0}^-)}.$$

Τότε,

$$\nu = (\nu(H_{\vartheta_0}^+))\nu_1 + (\nu(H_{\vartheta_0}^-))\nu_2$$

που είναι όμως άτοπο επειδή το ν είναι ακραίο σημείο του $\operatorname{conv}(P_f)$.

Εφαρμόζουμε τώρα τον χαρακτηρισμό του Borell για τα s-κοίλα μέτρα και παίρνουμε ότι το ν έχει φορέα ένα ευθύγραμμο τμήμα $[a, b]$ και η πυκνότητα του, έστω $\psi \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}^n, dx)$ είναι μη αρνητική και γ-κοίλη, όπου $\gamma = \frac{s}{1-s} \in [-1, 1]$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι

$$\int f\, d\nu = 0 \text{ και } \int_a^x f\, d\nu > 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b) \text{ ή } \int_x^b f\, d\nu > 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b).$$

Καταρχάς παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \int_a^x f\, d\nu$ είναι συνεχής στο (a, b). Αν $\int_a^c f\, d\nu = 0$ για κάποιο $c \in (a, b)$ τότε μπορούμε να ορίσουμε

$$\nu_1 = \frac{\nu|_{[a,c]}}{\nu([a, c])} \ \text{ και } \ \nu_2 = \frac{\nu|_{[c,b]}}{\nu([c, b])}.$$

Όμως τότε το $\nu = (\nu([a, c]))\nu_1 + (\nu([c, b]))\nu_2$ δεν είναι ακραίο σήμειο του $\operatorname{conv}(P_f)$. Αυτό δείχνει ότι

$$\int_a^x f\, d\nu > 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b) \text{ ή } \int_x^b f\, d\nu > 0 \text{ για κάθε } x \in (a, b).$$

Όμοια, αν $\int f\, d\nu > 0$ τότε μπορούμε να βρούμε $c \in (a, b)$ τέτοιο ώστε

$$\int_a^c f\, d\nu = \frac{1}{2}\int f\, d\nu.$$

Τότε, ορίζοντας τα ν_1 και ν_2 όπως παραπάνω παίρνουμε άτοπο.

Τέλος, δείχνουμε ότι το ν είναι s-αφινικό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\int_a^x f\,d\nu > 0$ για κάθε $x \in (a,b)$. Θέτουμε $u = (b-a)/\|b-a\|_2$, παίρνουμε $c \in (a,b)$, και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $g_t : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$g_t(x) = \frac{\psi(c)}{2}(1 + \gamma t\langle x - c, u\rangle)_+^{1/\gamma}.$$

Για $\gamma = 0$ επεκτείνουμε κατάλληλα τον ορισμό. Παρατηρούμε ότι η g_t είναι γ-αφινική στο $[a,b]$. Ορίζουμε δύο μέτρα μ_t και ν_t με φορέα το $[a,b]$ και πυκνότητες $(\psi - g_t)_+$ και $\min\{\psi, g_t\}$ αντίστοιχα. Αφού $\gamma \in [-1,1]$, η ψ είναι γ-κοίλη και η g_t είναι γ-αφινική στο $[a,b]$, βλέπουμε ότι η $(\psi - g_t)_+$ είναι γ-κοίλη και άρα το μ_t είναι s-κοίλο μέτρο. Επιπλέον η συνάρτηση $\min\{\psi, g_t\}$ είναι επίσης γ-κοίλη, οπότε το ν_t είναι s-κοίλο. Η συνάρτηση $t \mapsto \int f\,d\nu_t$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$, επομένως επειδή $\int f\,d\nu = 0$, θα έχουμε:

$$\lim_{t\to-\infty}\int f\,d\nu_t = \int_a^c f\,d\nu > 0 \quad \text{και} \quad \lim_{t\to\infty}\int f\,d\nu_t = \int_c^b f\,d\nu < 0$$

Έπεται ότι

$$\int f\,d\nu_{t_0} = 0$$

για κάποιο $t_0 \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $\nu = \mu_{t_0} + \nu_{t_0}$, οπότε $\int f\,d\mu_{t_0} = 0$. Θέτουμε $\lambda = \nu_{t_0}([a,b])$. Τότε, $0 < \lambda < 1$ και $\nu = (1-\lambda)\nu_1 + \lambda\nu_2$, όπου $\nu_1 = \frac{\mu_{t_0}}{1-\lambda}$ και $\nu_2 = \frac{\nu_{t_0}}{\lambda}$. Αφού τα ν_1 και ν_2 είναι στο P_f και το ν είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{conv}(P_f)$, έπεται ότι $\nu_1 = \nu_2 = \mu$. Συνεπώς, $\psi = g_{t_0}/\lambda$, και άρα το ν είναι s-αφινικό.

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη χρειάζεται να δείξουμε ότι, αντίστροφα, κάθε μέτρο πιθανότητας ν που ικανοποιεί τη (ii) είναι ακραίο σημείο του $\mathrm{conv}(P_f)$. Για το σκοπό αυτό, ορίζουμε $F : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \int_a^x f\,d\nu$, και χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $F(x) > 0$ στο (a,b). Έστω ψ η γ-αφινική πυκνότητα του ν στο $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν $\lambda_i > 0$ με $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$ και $\mu_i \neq \nu$ στο P_f τέτοια ώστε

$$\nu = \sum_{i=1}^k \lambda_i\mu_i.$$

Αφού $\mu_i \in P_f$, για κάθε $i = 1, \dots, k$, θα έχουμε ότι $\int f\,d\mu_i \geqslant 0$. Όμως

$$0 = \int f\,d\nu = \sum_{i=1}^k \lambda_i \int f\,d\mu_i,$$

οπότε υποχρεωτικά $\int f\,d\mu_i = 0$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant k$. Έστω ψ_i η γ-κοίλη πυκνότητα του μ_i. Συμβολίζουμε με $\rho_i = \psi_i/\psi$ την πυκνότητα του μ_i ως προς το ν. Παρατηρούμε ότι κάθε ρ_i είναι το πηλίκο μιας γ-κοίλης συνάρτησης και μιας γ-αφινικής συνάρτησης, οπότε η ρ_i είναι μια quasi-κοίλη, μη αρνητική και συνεχής συνάρτηση με φορέα ένα ευθύγραμμο τμήμα που περιέχεται στο $[a, b]$. Έπεται ότι είτε είναι μονότονη είτε είναι πρώτα αύξουσα και μετά φθίνουσα στον φορέα της. Αφού $\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \rho_i \equiv 1$ στο $[a, b]$, τουλάχιστον μία από τις συναρτήσεις ρ_i που είναι μη μηδενική στο a πρέπει να να είναι φθίνουσα σε μια περιοχή του a. Έστω ρ_j μια τέτοια συνάρτηση. Τότε η ρ_j είναι φθίνουσα στον φορέα της $[a, c]$, όπου $c \in (a, b]$. Γράφουμε

$$\int f\, d\mu_j = 0 = \int_a^c \rho_j dF = \rho_j(c)F(c) - \int_a^c F\, d\rho_j.$$

Αφού $\rho_j(c)F(c) \geqslant 0$, η ρ_j είναι φθίνουσα και $F > 0$ στο (a, c), θα πρέπει η ρ_j να είναι σταθερή στο $[a, c]$ και $F(c) = 0$. Τότε, $c = b$ και $\rho_j \equiv 1$ στο $[a, b]$ (επειδή η ρ_j είναι η πυκνότητα του μ_j ως προς το ν και τα μέτρα μ_j και ν είναι μέτρα πιθανότητας). Έπεται ότι $\mu_j = \nu$, που είναι άτοπο. □

Ως συνέπεια του Θεωρήματος 4.1.2 παίρνουμε:

Θεώρημα 4.1.4. *Έστω K ένα συμπαγές και κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε $-\infty < s \leqslant 1/2$ και με $\mathcal{P}(K)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των μέτρων πιθανότητας που έχουν φορέα στο K. Έστω $f : K \to \mathbb{R}$ μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση. Συμβολίζουμε με P_f το σύνολο όλων των s-κοίλων μέτρων πιθανότητας μ που έχουν φορέα στο K και ικανοποιούν την $\int f\, d\mu \geqslant 0$. Αν $\Phi : \mathcal{P}(K) \to \mathbb{R}$ είναι μια άνω ημισυνεχής συνάρτηση τότε το $\sup\{\Phi(\mu) : \mu \in P_f\}$ επιτυγχάνεται σε κάποιο ακραίο σημείο του $\mathrm{supp}(P_f)$, δηλαδή είναι το μέτρο Dirac σε κάποιο σημείο $x \in K$ που είναι τέτοιο ώστε $f(x) \geqslant 0$ ή είναι κάποιο μέτρο πιθανότητας ν το οποίο είναι s-αφινικό, έχει φορέα ένα ευθύγραμμο τμήμα $[a, b] \subset K$, και είναι τέτοιο ώστε $\int f\, d\nu = 0$ και $\int_a^x f\, d\nu > 0$ για όλα τα $x \in (a, b)$ ή $\int_x^b f\, d\nu > 0$ για όλα τα $x \in (a, b)$.*

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός (βλέπε [28]) ότι το σύνολο των s-κοίλων μέτρων πιθανότητας που έχουν φορέα στο K είναι w^*-συμπαγές. Αφού η f είναι άνω ημισυνεχής, παίρνουμε ότι το P_f είναι w^*-κλειστό, επομένως w^*-συμπαγές. Από το θεώρημα Krein-Milman έχουμε ότι το $\sup\{\Phi(\mu) : \mu \in P_f\}$ επιτυγχάνεται σε κάποιο $\nu \in \mathrm{Ext}(\overline{\mathrm{conv}}^{w^*}(P_f)) \subseteq \mathrm{Ext}(\mathrm{conv}(P_f))$. □

Ένα πόρισμα του Θεωρήματος 4.1.4 είναι η ακόλουθη πολύ χρήσιμη γεωμετρική εκδοχή του Θεωρήματος 4.1.1.

Θεώρημα 4.1.5. *Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_1, f_2, f_3, f_4 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ που είναι τέτοιες ώστε $f_1^a f_2^\beta \leqslant f_3^a f_4^\beta$ για κάποια $a, \beta > 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι οι f_1, f_2 είναι άνω ημισυνεχείς και οι f_3, f_4 είναι κάτω ημισυνεχείς και ότι για κάποιον $-\infty \leqslant s \leqslant 1/2$ και για κάθε s-αφινικό μέτρο πιθανότητας ν που έχει φορέα στο $[a, b]$ στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\left(\int f_1\, d\nu\right)^a \left(\int f_2\, d\nu\right)^\beta \leqslant \left(\int f_3\, d\nu\right)^a \left(\int f_4\, d\nu\right)^\beta.$$

Τότε, για κάθε s-κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$,

$$\left(\int f_1\, d\mu\right)^a \left(\int f_2\, d\mu\right)^\beta \leqslant \left(\int f_3\, d\mu\right)^a \left(\int f_4\, d\mu\right)^\beta.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f_3 > 0$ στον $\mathbb{R}^n$. Έστω μ ένα s-κοίλο μέτρο πιθανότητας με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $K = \mathrm{supp}(\mu)$. Ορίζουμε

$$f = f_1 - \left(\frac{\int f_1\, d\mu}{\int f_3\, d\mu}\right) f_3$$

και

$$\Phi(\nu) = \left(\frac{\int f_1\, d\mu}{\int f_3\, d\mu}\right)^{\alpha/\beta} \left(\int f_2\, d\nu\right) - \left(\int f_4\, d\nu\right)$$

για όλα τα μέτρα $\nu \in \mathcal{P}(K)$. Χρησιμοποιώντας τις υποθέσεις για τις f_i εύκολα βλέπουμε ότι η f και η Φ είναι άνω ημισυνεχείς και η Φ είναι επιπλέον αφινική. Καθώς $\mu \in P_f$, το Θεώρημα 4.1.4 δίνει ότι υπάρχει ακραίο σημείο ν του $\mathrm{conv}(P_f)$, το οποίο είναι είτε Dirac είτε ένα s-αφινικό μέτρο που έχει φορέα ένα διάστημα $[a, b]$, και είναι τέτοιο ώστε $\Phi(\mu) \leqslant \Phi(\nu)$ και $\int f\, d\nu \geqslant 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\left(\frac{\int f_1\, d\mu}{\int f_3\, d\mu}\right)^{\alpha/\beta} \left(\int f_2\, d\mu\right) - \left(\int f_4\, d\mu\right) &\leqslant \left(\frac{\int f_1\, d\mu}{\int f_3\, d\mu}\right)^{\alpha/\beta} \left(\int f_2\, d\nu\right) - \left(\int f_4\, d\nu\right)\\ &\leqslant \left(\frac{\int f_1\, d\nu}{\int f_3\, d\nu}\right)^{\alpha/\beta} \left(\int f_2\, d\nu\right) - \left(\int f_4\, d\nu\right)\\ &\leqslant 0.\end{aligned}$$

Ένα επιχείρημα προσέγγισης δίνει ότι τα παραπάνω ισχύουν και για κάθε s-κοίλο μέτρο πιθανόητας στον $\mathbb{R}^n$. □

4.2 Η εικασία και τα πρώτα κάτω φράγματα

Ερχόμαστε τώρα στην εικασία των Kannan, Lovász and Simonovits. Στο [68] ορίστηκε ο *ισοπεριμετρική σταθερά* ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ως ο μεγαλύτερος αριθμός $\psi(K)$, για τον οποίο ισχύει το εξής: για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο A του K έχουμε

$$\mu_K^+(A) \geqslant \psi(K) \frac{|A|\,|K \setminus A|}{|K|}, \tag{4.2.1}$$

όπου μ_K είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στο K. Το ενδιαφέρον για αυτή την παράμετρο προέκυψε από την μελέτη πιθανοθεωρητικών αλγορίθμων για τον υπολογισμό του όγκου κυρτών σωμάτων. Υπήρχε μάλιστα σχετική βιβλιογραφία πριν από το [68], και τα ως τότε γνωστά φράγματα για το $\psi(K)$ ήταν της τάξης του $1/\mathrm{diam}(K)$. Ας παρατηρήσουμε ότι αντί για την (4.2.1), κάποιος μπορεί να ζητήσει φράγματα για την μεγαλύτερη σταθερά $\psi(K)$ για την οποία ισχύει

$$\mu_K^+(A) \geqslant \psi(K) \frac{\min\{|A|, |K \setminus A|\}}{|K|} \tag{4.2.2}$$

για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο A του K, επειδή οι ποσότητες στο δεξί μέλος είναι συγκρίσιμες. Επομένως, $\psi(K) \simeq \mathrm{Is}_{\mu_K}$.

Το κύριο αποτέλεσμα στο [68] είναι ένα κάτω φράγμα για την $\psi(K)$ συναρτήσει της ποσότητας

$$M_1(K) = \frac{1}{|K|}\int_K \|x - \mathrm{bar}(K)\|_2\, dx.$$

Θεώρημα 4.2.1 (Kannan-Lovász-Simonovits)**.** *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\psi(K) \geqslant \frac{\ln 2}{M_1(K)}. \tag{4.2.3}$$

Παρατηρούμε ότι αν το K είναι ισοτροπικό τότε $M_1(K) \leqslant \sqrt{n}L_K$, άρα η (4.2.3) παίρνει τη μορφή

$$\psi(K) \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}L_K}, \tag{4.2.4}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η εικασία των Kannan, Lovász and Simonovits είναι ότι ισχύει ένα καλύτερο φράγμα. Στη γλώσσα των κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων, η εικασία τους είναι ότι:

$$\psi(K) \simeq \frac{1}{\sqrt{a(K)}}, \tag{4.2.5}$$

όπου $a(K)$ είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα $M_{ij} := \int_K x_i x_j dx$. Στο [68] αποδείχθηκε ότι

$$\psi(K) \leqslant \frac{10}{\sqrt{a(K)}},$$

επομένως η ερώτηση αφορά το κάτω φράγμα. Αφού $M = L_K^2 I$ όταν το K είναι σε ισοτροπική θέση, έχουμε ότι, σε αυτήν την περίπτωση, $a(K) = L_K$. Επομένως η εικασία *KLS* μπορεί να αναδιατυπωθεί ως εξής:

Εικασία 4.2.2 (εικασία KLS για ισοτροπικά σώματα)**.** *Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\psi(K) \simeq \frac{1}{L_K}.$$

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι όταν το K είναι ισοτροπικό στον $\mathbb{R}^n$, τότε η ποσότητα $1/L_K$ είναι (προσεγγιστικά) ίση με τον $(n-1)$-διάστατο όγκο της τομής του K με ένα οποιοδήποτε υπερεπίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων. Με άλλα λόγια

$$|K \cap \theta^\perp| \simeq 1/L_K$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Αφού ο όγκος $|K \cap \theta^\perp|$ της τομής του K με τον $\theta^\perp$ είναι το περιεχόμενο κατά Minkowski της τομής του K με το σύνολο $\{x : \langle x, \theta\rangle \geqslant 0\}$ ή $\{x \in K : \langle x, \theta\rangle \leqslant 0\}$, μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την εικασία KLS λέγοντας ότι όταν το K είναι ισοτροπικό τότε οι ημίχωροι είναι προσεγγιστικά οι λύσεις του ισοπεριμετρικού προβλήματος για το μέτρο μ_K.

Λαμβάνοντας υπόψη την διαφορετική κανονικοποίηση που επιλέξαμε στον ορισμό των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων, μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε την εικασία KLS σε ένα γενικότερο πλαίσιο ως εξής:

Εικασία 4.2.3 (εικασία KLS για ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα)**.** *Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mathrm{Is}_\mu \geqslant c$$

όπου $c > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.

4.2.1 Το λήμμα τοπικότητας και το φράγμα των Kannan, Lovász and Simonovits

Σε αυτήν την υποενότητα περιγράφουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1 η οποία βασίζεται στο λήμμα τοπικότητας των Lovász και Simonovits.

Σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος 4.2.1. Αρχικά, σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό και θεωρούμε την τομή της $\varepsilon/2$-επέκτασης του $\mathrm{bd}(A)$ με το K. Θα γράφουμε K_3 για την κλειστότητα αυτού του συνόλου. Στον ορισμό (4.2.1) του ισοπεριμετρικού συντελεστή, αντικαθιστούμε το $\mathrm{bd}(A)$ με K_3, το A με $K_1 = A \setminus K_3$ και το $K \setminus A$ με $K_2 = (K \setminus A) \setminus K_3$. Θα έχουμε τελειώσει αν δείξουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό και αφήσουμε το $\varepsilon \to 0^+$.

Ισχυρισμός 4.2.4. *Έστω K ένα κυρτό σώμα και έστω $K = K_1 \cup K_2 \cup K_3$ η διαμέριση του K σε τρία μετρήσιμα σύνολα που είναι τέτοια ώστε $\mathrm{dist}(K_1, K_2) = \varepsilon > 0$. Τότε,*

$$|K_1|\,|K_2| \leqslant \frac{M_1(K)}{\varepsilon \ln 2}|K|\,|K_3|. \tag{4.2.6}$$

Για την απόδειξη του ισχυρισμού 4.2.4 υποθέτουμε ότι τα K_1 και K_2 είναι κλειστά. Υποθέτουμε επίσης ότι $\mathrm{bar}(K) = 0$ και ορίζουμε $f_i = \mathbf{1}_{K_i}$, $i = 1, 2, 3$, και $f_4(x) = \frac{\|x\|_2}{\varepsilon \ln 2}$. Τότε μένει να δείξουμε ότι

$$\int_K f_1(x)dx \int_K f_2(x)dx \leqslant \int_K f_3(x)dx \int_K f_4(x)dx,$$

η οποία σύμφωνα με το Θεώρημα 4.1.5 ανάγεται στο να αποδείξουμε το ακόλουθο μονοδιάστατο πρόβλημα: Έστω $[a, b]$ ένα κλειστό διάστημα του $\mathbb{R}$ με $a \leqslant 0 \leqslant b$ και έστω $u \in [a, b]$. Αν $[a, b] = J_1 \cup J_2 \cup J_3$ είναι η διαμέριστη του $[a, b]$ σε τρία μετρήσιμα σύνολα που είναι τέτοια ώστε $\mathrm{dist}(J_1, J_2) \geqslant \varepsilon$, τότε

$$\int_{J_1} e^t dt \int_{J_2} e^t dt \leqslant \frac{1}{\varepsilon \ln 2} \int_{J_3} e^t dt \int_a^b |t - u| e^t dt.$$

Πρώτα δείχνουμε την παραπάνω ανισότητα στην περίπτωση που τα J_1, J_2, J_3 είναι διαστήματα. Υποθέτουμε ότι το $J_3 = [c, d]$ είναι το μεσαίο διάστημα και έχει μήκος τουλάχιστον ε. Διαιρώντας με e^c, αρκεί να δείξουμε την ανισότητα:

$$\int_a^c e^t\,dt \int_\varepsilon^{b-c} e^t\,dt \le \frac{1}{\varepsilon \ln 2}\int_0^\varepsilon e^t\,dt \int_a^b |t-u| e^t\,dt.$$

Το δεξί μέλος μεγιστοποιείται για $u = \ln\left((e^a + e^b)/2\right)$, ενώ το αριστερό μέλος μεγιστοποιείται για $c = (a + b - \varepsilon)/2$ οπότε αρκεί να δείξουμε ότι:

$$\left(e^{b-a/2} - e^{\varepsilon/2}\right)^2 \le \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon \ln 2}\left(-\ln((e^{a-b}+1)/2)e^{b-a} + \ln((e^{b-a}+1)/2)\right).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι αρκεί να δείξουμε την παραπάνω για $\varepsilon = 0$ λόγω της μονοτονίας. Θέτοντας $x = e^{b-a/2}$ έχουμε να δείξουμε ότι για $x \geqslant 1$ ισχύει:

$$f(x) := \ln 2(x-1)^2 + x^2\ln((x^{-2}+1)/2) - \ln(x^2 + 1/2) \leqslant 0.$$

Με παραγώγιση δείχνουμε αρχικά ότι η συνάρτηση $f'(x)/x$ είναι γνησίως αύξουσα με όριο στο άπειρο ίσο με 0. Έπεται ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα, που σε συνδυασμό με το ότι $f(1) = 0$ δίνει το ζητούμενο.

Στη γενική περίπτωση τώρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το J_3 είναι ανοικτό, αλλιώς αντικαθιστούμε τα J_1, J_2 με τις κλειστές τους θήκες. Επομένως το J_3 είναι ένωση ξένων ανοικτών διαστημάτων. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι αυτά τα διαστήματα έχουν μήκος τουλάχιστον ε. Έστω (c_i, d_i) με $1 \leqslant i \leqslant k$ τα διαστήματα που περιέχονται στο J_3. Τότε από το παραπάνω επιχείρημα έχουμε ότι:

$$\int_a^{c_i} e^t\,dt \int_{d_i}^b e^t\,dt \le \frac{1}{\varepsilon \ln 2}\int_{c_i}^{d_i} e^t\,dt \int_a^b |t-u| e^t\,dt.$$

Αθροίζοντας πάνω από όλα τα i παίρνουμε:

$$\sum_{i=1}^k \int_a^{c_i} e^t\,dt \int_{d_i}^b e^t\,dt \le \frac{1}{\varepsilon \ln 2}\int_{J_3} e^t\,dt \int_a^b |t-u| e^t\,dt.$$

Όμως για κάθε σημείο του J_1 και κάθε σημείο του J_2 υπάρχει τουλάχιστον ένα από τα (c_i, d_i) που τα διαχωρίζει, οπότε έχουμε:

$$\sum_{i=1}^k \int_a^{c_i} e^t\,dt \int_{d_i}^b e^t\,dt \le \frac{1}{\varepsilon \ln 2}\int_{J_1} e^t\,dt \int_{J_2} e^t\,dt,$$

που δίνει το ζητούμενο.

4.2.2 Το επιχειρήμα του Bobkov

Το επιχείρημα του Bobkov που εμφανίζεται στο [19] δουλεύει για ένα τυχαίο λογαρθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Στο εξής υποθέτουμε ότι το μ έχει πυκνότητα (ως προς το μέτρο Lebesgue) που είναι ίση με

$$d\mu(x) = e^{-\varphi(x)}dx,$$

όπου $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση.

Θεώρημα 4.2.5. *Έστω μ ένα λογαρθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{Is}_\mu \geqslant \frac{c}{\|f\|_{L_2(\mu)}},$$

όπου $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το θεώρημα του Bobkov είναι συνέπεια της παρακάτω ανισότητας που συνδέει το περιεχόμενο κατά Minkowski ενός συνόλου A με την κατανομή της Ευκλείδειας νόρμας ως προς το μ.

Θεώρημα 4.2.6. *Έστω μ ένα λογαρθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $r > 0$ έχουμε:*

$$2r\mu^+(A) \geqslant \mu(A)\log\frac{1}{\mu(A)} + (1-\mu(A))\log\frac{1}{1-\mu(A)} + \log\mu(rB_2^n). \tag{4.2.7}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.6 θα χρειαστούμε το συναρτησιακό της ανάλογο. Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με $\int f\log(1+f) < \infty$, η εντροπία της f ως προς μ ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f\log f d\mu - \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu \,\log \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu. \tag{4.2.8}$$

Παρατηρούμε ότι η εντροπία είναι μη αρνητική (από την ανισότητα Jensen) και ομογενής βαθμού 1.

Πρόταση 4.2.7. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ και για κάθε $r > 0$ ισχύει:*

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) + \mathrm{Ent}_\mu(1-f) + \log\mu(rB_2^n) \leqslant 2r\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2\, d\mu.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι λεία, σταθερή έξω από ένα συμπαγές σύνολο και $0 < f(x) < 1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Δοθέντων $t, s \in (0,1)$ με $t + s = 1$, θέτουμε

$$f_t(z) = \sup\left\{f\left(z + \frac{s}{t}(z-x)\right) : x \in rB_2^n\right\}.$$

Ορίζουμε επίσης τις συναρτήσεις $w, u, v : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ως εξής:

$$\begin{aligned} u(x) &\equiv u_t(x) = (f(x))^{1/t} e^{-\varphi(x)} \\ v(y) &= \mathbf{1}_{rB_2^n}(y) e^{-\varphi(y)} \\ w(z) &\equiv w_t(z) = f_t(z) e^{-\varphi(z)}. \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις $w = w_t, u = u_t, v$ ικανοποιούν την

$$w(tx + sy) \geqslant (u(x))^t (v(y))^s,$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f_t \, d\mu \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} \, d\mu \right)^t [\mu(rB_2^n)]^s.$$

Από το θεώρημα Taylor βλέπουμε ότι όταν το $s = 1 - t > 0$ είναι αρκούντως μικρό, τότε

$$f_t(z) = f(z) + [r\|\nabla f\|_2 + \langle \nabla f(z), z \rangle] s + O(s^2),$$

ομοιόμορφα ως προς $z \in \mathbb{R}^n$. Επιπλέον,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu \right)^t = \int_{\mathbb{R}^n} f d\mu + s \, \mathrm{Ent}_\mu(f) + O(s^2).$$

Για να το δούμε αυτό, ορίζουμε $h(t) = (\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu)^t = \exp(t \log \int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu)$ και γράφουμε:

$$h(t) = h(1) + h'(1)(t-1) + O((t-1)^2) = h(1) - h'(1)s + O(s^2),$$

όπου

$$h'(t) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu \right)^t \left(\log \int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} \log f d\mu}{t \int_{\mathbb{R}^n} f^{1/t} d\mu} \right),$$

που μας δίνει ότι $h'(1) = -\mathrm{Ent}_\mu(f)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω και παίρνοντας $s \to 0^+$ έχουμε:

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) + \log \mu(rB_2^n) \int_{\mathbb{R}^n} f \, d\mu \leqslant r \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2 d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), x \rangle \, d\mu(x).$$

Δουλεύοντας όμοια για την $1 - f$ και προσθέτοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.6. Προσεγγίζουμε την χαρακτηριστική συνάρτηση $\mathbf{1}_A$ του A με Lipschitz συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στο $[0, 1]$, και στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την Πρόταση 4.2.7 γι' αυτές. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.5. Υποθέτουμε ότι το μ είναι κεντραρισμένο και άρα $f(x) = \|x\|_2$. Έστω A ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = p \in (0,1)$. Από το Θεώρημα 4.2.6 ξέρουμε ότι για κάθε $r > 0$,

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1}{2r}\left[p\log\frac{1}{p} + (1-p)\log\frac{1}{1-p} + \log\mu(rB_2^n)\right]. \tag{4.2.9}$$

Επιλέγουμε $r_0 > 0$ έτσι ώστε $\mu(r_0B_2^n) = \frac{2}{3}$. Τότε από το λήμμα του Borell θα έχουμε ότι, για κάθε $t > 1$,

$$1 - \mu(tr_0B_2^n) \leqslant \frac{1}{3}2^{-\frac{t-1}{2}}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $-\ln(1-x) \leqslant \frac{x}{1-x}$ για $0 < x < 1$, παίρνουμε

$$-\log\mu(tr_0B_2^n) \leqslant -\log\Big(1 - \frac{1}{3}2^{-\frac{t-1}{2}}\Big) \leqslant 2^{-\frac{t+1}{2}}.$$

Παίρνοντας $r = tr_0$ στην (4.2.9) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\mu^+(A) &\geqslant \frac{1}{2tr_0}\big[p\log(1/p) + (1-p)\log(1/(1-p)) + \log\mu(tr_0B_2^n)\big]\\ &\geqslant \frac{1}{2tr_0}\big[p\log(1/p) + (1-p)\log(1/(1-p)) - 2^{-\frac{t+1}{2}}\big].\end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < p \leqslant 1/2$. Εφαρμόζουμε την (4.2.10) με $t = 3\log(1/p) \geqslant 1$ και παρατηρούμε ότι

$$(1-p)\log(1/(1-p)) \geqslant 2^{-\frac{t+1}{2}}.$$

Για την απόδειξη της τελευταίας ανισότητας θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(p) = (1-p)\log\frac{1}{1-p} - 2^{-\frac{t+1}{2}} = (1-p)\log\frac{1}{1-p} - \frac{1}{\sqrt{2}}p^{3\log 2/2}$$

στο $[0,1/2]$. Τότε, $g(0) = 0$ και η g είναι κοίλη. Επιπλέον, η ανισότητα $g(1/2) \geqslant 0$ είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{\log 2}{2} \geqslant 2^{-\frac{3}{4\log 2}},$$

η οποία μπορεί να επαληθευθεί εύκολα. Έπεται ότι

$$g(p) \geqslant 0 \ \text{ για κάθε } p \in [0,1/2].$$

Τώρα, από την (4.2.10) έχουμε

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1}{2tr_0}p\log\frac{1}{p} = \frac{p}{6r_0} \geqslant \frac{1}{6r_0}\min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}. \tag{4.2.11}$$

Παρόμοιο επιχείρημα δουλεύει αν υποθέσουμε ότι $p \geqslant 1/2$, και οδηγεί στην ίδια εκτίμηση.

Μένει λοιπόν να εκτιμήσουμε το r_0. Υπενθυμίζουμε ότι $f(x) = \|x\|_2$. Αφού $\mu(\{x : \|x\|_2 \geqslant \sqrt{3}\|f\|_{L_2(\mu)}\}) \leqslant \frac{1}{3}$ από την ανισότητα Markov και την επιλογή του r_0 παίρνουμε:

$$r_0 \leqslant \sqrt{3}\|f\|_{L_2(\mu)}.$$

Τότε η (4.2.11) δίνει

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1}{6\sqrt{3}\|f\|_{L_2(\mu)}} \min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}.$$

Με άλλα λόγια, $\mathrm{Is}_\mu \geqslant c/\|f\|_{L_2(\mu)}$, με $c = (6\sqrt{3})^{-1}$. □

Η συνάρτηση $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ ικανοποιεί την $\|f\|_{L_2(\mu)} = \sqrt{n}$ στην ισοτροπική περίπτωση. Επομένως το αποτέλεσμα που περιγράψαμε παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 4.2.8. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\sqrt{n}\mathrm{Is}_\mu \geqslant c,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

4.2.3 Μια τρίτη προσέγγιση

Μια διαφορετική προσέγγιση που οδηγεί στο ίδιο κάτω φράγμα δόθηκε από τον E. Milman στο [101]. Η απόδειξη είναι πολύ απλή με δεδομένο το Θεώρημα 3.2.2.

Θεώρημα 4.2.9. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{Is}_\mu \geqslant \frac{1}{2\inf_{z\in\mathbb{R}^n}\|f_z\|_{L_2(\mu)}},$$

όπου $f_z(x) = \|x - z\|_2$.

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.2.2, αντί να εκτιμήσουμε το Is_μ από κάτω, θα εκτιμήσουμε το FM_μ. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια 1-Lipschitz συνάρτηση και σταθεροποιούμε ένα $z \in \mathbb{R}^n$. Τότε, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f - \mathbb{E}_\mu(f)|\, d\mu &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(z)|\, d\mu(x) + |f(z) - \mathbb{E}_\mu(f)| \\ &\leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n} |f(x) - f(z)|\, d\mu(x) \leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n} \|x - z\|_2\, d\mu(x).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathrm{FM}_\mu \geqslant \frac{1}{2}\sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{\int \|x - z\|_2\, d\mu(x)},$$

οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

Κεφάλαιο 5

Η unconditional περίπτωση

5.1 Ευστάθεια της ισοπεριμετρικής σταθεράς

Το Θεώρημα 3.2.2 οδηγεί σε κάποια πολύ χρήσιμα αποτελέσματα όσον αφορά την ευστάθεια της σταθεράς Cheeger κυρτών σωμάτων ως προς «διαταραχές». Με λίγα λόγια, ο E. Milman έδειξε στο [101] ότι αν K και T είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\text{αν } \ |K| \simeq |T| \simeq |K \cap T| \ \text{ έπεται ότι } \ \mathrm{Is}_K \simeq \mathrm{Is}_T. \tag{5.1.1}$$

Τα αποτελέσματα που περιλαμβάνονται σε αυτήν την ενότητα είναι χρήσιμα όταν προσπαθούμε να υπολογίσουμε την σταθερά Cheeger ανάγοντας το πρόβλημα σε κάποια κλάση κυρτών σωμάτων με πρόσθετες ιδιότητες. Στις δύο τελευταίες ενότητες θα δούμε κάποιες εφαρμογές τους.

Το ακόλουθο θεώρημα δίνει μια ακριβή διατύπωση της (5.1.1).

Θεώρημα 5.1.1 (E. Milman)**.** *Θεωρούμε δύο κυρτά σώματα K και T στον $\mathbb{R}^n$. Αν*

$$|K \cap T| \geqslant a_K|K| \quad \textit{και} \quad |K \cap T| \geqslant a_T|T|,$$

τότε

$$\mathrm{Is}_K \geqslant \frac{ca_K^2}{\log(1 + 1/a_T)}\mathrm{Is}_T.$$

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε μια σειρά από λήμματα.

Ορισμός 5.1.2. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ και για κάθε $\delta \in (0, 1)$, το *δ-εκατοστημόριο* της f ως προς το μέτρο μ ορίζεται ως εξής:

$$Q_{\mu,\delta}(f) := \inf\{q \in \mathbb{R} : \ \mu(\{f \leqslant q\}) \geqslant \delta\}.$$

Παρατηρήσεις 5.1.3. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε τις ακόλουθες χρήσιμες ιδιότητες του συναρτησοειδούς $f \mapsto Q_{\mu,\delta}(f)$.

(i) Παρατηρούμε ότι $Q_{\mu,1/2}(f) = \mathrm{med}_\mu(f)$.

(ii) Για κάθε σταθερά $a \in \mathbb{R}$ έχουμε $Q_{\mu,\delta}(f + a) = Q_{\mu,\delta}(f) + a$.

(iii) Το συναρτησοειδές $Q_{\mu,\delta}$ είναι μονότονο, δηλαδή αν $f \leqslant g$, τότε $Q_{\mu,\delta}(f) \leqslant Q_{\mu,\delta}(g)$.

(iv) Οι προηγούμενες ιδιότητες σε συνδυασμό με εφαρμογή της τριγωνικής ανισότητας δίνουν ότι για κάθε σταθερά $b \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$$Q_{\mu,\delta}(|f|) \leqslant Q_{\mu,\delta}(|f - b|) + b.$$

(v) Από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\mu(|f| \leqslant t\|f\|_{\psi_1(\mu)}) \geqslant 1 - e^{-t}.$$

Για κάθε $\delta \in (0, 1)$ επιλέγουμε $t = t_\delta = \log(1/\delta)$ και έχουμε:

$$Q_{\mu,1-\delta}(|f|) \leqslant \log\left(\frac{1}{\delta}\right) \cdot \|f\|_{\psi_1(\mu)}.$$

Λήμμα 5.1.4. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και f μια 1-Lipschitz συνάρτηση με μία από τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) $\mathbb{E}_\mu(f) = 0$ *και* $\|f\|_{L_1(\mu)} \geqslant (3\mathrm{FM}_\mu)^{-1}$,

(ii) $\mathrm{med}_\mu(f) = 0$ *και* $\|f\|_{L_1(\mu)} \geqslant (6\mathrm{FM}_\mu)^{-1}$.

Τότε,

$$\|f\|_{\psi_1} \leqslant C\|f\|_{L_1(\mu)}. \tag{5.1.2}$$

Επομένως,

$$Q_{\mu,1-\varepsilon_0}(|f|) \geqslant \frac{\|f\|_{L_1(\mu)}}{2}, \tag{5.1.3}$$

όπου $C > 0$ είναι απόλυτη σταθερά και $0 < \varepsilon_0 < 1$.

Απόδειξη. Από το Λήμμα 2.5.7 και το Θεώρημα 3.2.2 έχουμε:

$$\|f\|_{\psi_1} \simeq \|f - \mathbb{E}_\mu(f)\|_{\psi_1} \simeq \frac{1}{\mathrm{Exp}_\mu(f)} \leqslant \frac{1}{\mathrm{Exp}_\mu} \leqslant \frac{C}{\mathrm{FM}_\mu} \leqslant 6C\|f\|_{L_1(\mu)}.$$

Έπεται ότι

$$\|f\|_{L_2(\mu)} \leqslant 2\|f\|_{\psi_1} \leqslant C_1\|f\|_{L_1(\mu)}$$

όπου $C_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Τώρα με τη βοήθεια της τελευταίας ανισότητας, η (5.1.3) προκύπτει ως συνέπεια της ανισότητας Paley-Zygmund: για κάθε $\gamma \in (0, 1)$ έχουμε $Q_{\mu,1-\varepsilon(\gamma)}(|f|) \geqslant \gamma\|f\|_{L_1(\mu)}$, όπου $\varepsilon(\gamma) = (1 - \gamma)^2/C_1^2$. □

Λήμμα 5.1.5. *Θεωρούμε δύο κυρτά σώματα K και T στον $\mathbb{R}^n$ με $T \subseteq K$. Αν $|T| \geqslant a|K|$ τότε*

$$\mathrm{FM}_T \geqslant \frac{c}{\log(1+1/a)}\mathrm{Exp}_K. \tag{5.1.4}$$

Απόδειξη. Γράφουμε μ_T και μ_K για το ομοιόμορφο μέτρο στα T και K αντίστοιχα. Έστω g μια 1-Lipschitz συνάρτηση στο T με $\mathrm{med}_{\mu_T}(g) = 0$ και την ιδιότητα

$$\int |g|\, d\mu_T \geqslant \frac{1}{4\mathrm{FM}_T}.$$

Αφού το T είναι κυρτό, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια 1-Lipschitz συνάρτηση στο K: για παράδειγμα, μπορούμε να θέσουμε $f(x) = g(P_T(x))$, όπου $P_T(x)$ είναι η μετρική προβολή στο T, δηλαδή είναι το μοναδικό y στο T ώστε $d(x,y) = \mathrm{dist}(x,T)$. Είναι γνωστό ότι αυτή η συνάρτηση είναι συστολή (βλέπε [111]), επομένως είναι εμφανές ότι η προαναφερθείσα επέκταση διατηρεί την Lipschitz σταθερά της g. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}_{\mu_K}(f) \geqslant 0$ (αλλιώς δουλεύουμε με τις $-g$ και $-f$). Παρατηρούμε ότι μπορούμε να εκτιμήσουμε την $\mathbb{E}_{\mu_K}(f)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{a}{2} &\leqslant \mu_K(\{f \leqslant 0\}) \leqslant \mu_K(\{|f - \mathbb{E}_{\mu_K}(f)| \geqslant \mathbb{E}_{\mu_K}(f)\})\\ &\leqslant e \cdot \exp\left(-\mathrm{Exp}_K\, \mathbb{E}_{\mu_K}(f)\right).\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Από το Λήμμα 5.1.4 έπεται ότι

$$\frac{1}{2}\|g\|_{L_1(\mu_T)} \leqslant Q_{\mu_T, 1-\varepsilon_0}(|g|),$$

όπου $\varepsilon_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα, την υπόθεση ότι $|T| \geqslant a|K|$, την Παρατήρηση 5.1.3 και την (5.1.5) γράφουμε:

$$\begin{aligned}\frac{1}{8\mathrm{FM}_T} \leqslant \frac{1}{2}\|g\|_{L_1(\mu_T)} &\leqslant Q_{\mu_T,1-\varepsilon_0}(|g|) \leqslant Q_{\mu_K,1-\varepsilon_0 a}(|f|)\\ &\leqslant Q_{\mu_K,1-\varepsilon_0 a}(|f - \mathbb{E}_{\mu_K}(f)|) + \mathbb{E}_{\mu_K}(f)\\ &\leqslant C_1 \log\left(1 + \frac{1}{\varepsilon_0 a}\right)\|f - \mathbb{E}_{\mu_K}(f)\|_{L_{\psi_1}(\mu_K)} + \frac{\log(2e/a)}{\mathrm{Exp}_K}\\ &\leqslant C_2\frac{\log(1+1/a)}{\mathrm{Exp}_K},\end{aligned}$$

όπου $C_1, C_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές και η απόδειξη ολοκληρώνεται. □

Λήμμα 5.1.6. *Θεωρούμε δύο κυρτά σώματα K και T στον $\mathbb{R}^n$ με $T \subseteq K$. Αν $|T| \geqslant a|K|$ τότε*

$$\mathrm{Is}_K \geqslant a^2 \mathrm{Is}_T. \tag{5.1.6}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι $|T| = p|K|$ για κάποιο $p \in (1/2, 1]$. Για κάθε Borel υποσύνολο A του K με $|A| = |K|/2$ έχουμε ότι

$$1 - \frac{1}{2p} \leqslant \mu_T(A \cap T) \leqslant \frac{1}{2p}$$

και

$$\mu_K^+(A) \geqslant \frac{|T|}{|K|}\mu_T^+(A \cap T) \geqslant p\,\mathrm{Is}_T\,\min\{\mu_T(A \cap T), 1 - \mu_T(A \cap T)\}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\mathrm{Is}_K = \inf\{2\mu_K^+(A) : \mu_K(A) = 1/2\} \geqslant (2p-1)\mathrm{Is}_T.$$

Θέτοντας $a_0 := |T|/|K| \geqslant a$ και επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία για μια ακολουθία κυρτών σωμάτων $T = T_0 \subseteq T_1 \subseteq \cdots \subseteq T_k = K$ που ικανοποιούν την $|T_i| = p|T_{i+1}|$ για κάθε $i \leqslant k-1$, για κάποιο $p = a_0^{1/k} \in (1/2, 1]$, βλέπουμε ότι:

$$\mathrm{Is}_K \geqslant (2p-1)^k\mathrm{Is}_T = (2p-1)^{\frac{\log a_0}{\log p}}\mathrm{Is}_T = a_0^{\frac{\log(2p-1)}{\log p}}\mathrm{Is}_T.$$

Αφήνοντας το $p = a_0^{1/k} \to 1^-$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.6, το Θεώρημα 3.2.2 και το Λήμμα 5.1.5 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Is}_K &\geqslant a_K^2\mathrm{Is}_{K\cap T} \geqslant c_1 a_K^2\mathrm{FM}_{K\cap T} \\ &\geqslant c_2\frac{a_K^2}{\log(1+1/a_T)}\mathrm{Exp}_T \geqslant c_3\frac{a_K^2}{\log(1+1/a_T)}\mathrm{Is}_T \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

όπου $c_i > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Λόγω συμμετρίας, ανάλογη ανισότητα ισχύει αν εναλλάξουμε τους ρόλους των K και T. □

Παρατήρηση 5.1.7. Στο [101] αποδεικνύεται ότι ισχύει και ένα ανάλογο του Θεωρήματος 5.1.1 για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Υπενθυμίζουμε ότι η μέση απόσταση των μ_1 και μ_2 ορίζεται ως:

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_1, \mu_2) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} |f_{\mu_1}(x) - f_{\mu_2}(x)|\,dx,$$

όπου f_{μ_i} είναι η πυκνότητα του μ_i. Αποδεικνύεται ότι αν μ_1, μ_2 είναι δύο λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και αν

$$d_{\mathrm{TV}}(\mu_1, \mu_2) \leqslant 1 - \varepsilon$$

για κάποιο $\varepsilon \in (0, 1)$, τότε

$$c(\varepsilon)^{-1}\mathrm{Is}_{\mu_2} \leqslant \mathrm{Is}_{\mu_1} \leqslant c(\varepsilon)\mathrm{Is}_{\mu_2}$$

όπου $c(\varepsilon) \simeq \varepsilon^2/\log(1+1/\varepsilon)$.

5.2 Η εικασία του λεπτού δακτυλίου στην unconditional περίπτωση

Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \dots, X_n)$ ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ένα κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$, για κάθε $i = 1, \dots, n$ και ότι το K είναι αναλλοίωτο ως προς τους υποχώρους συντεταγμένων, δηλαδή τα διανύσματα $(\pm X_1, \dots, \pm X_n)$ ακολουθούν την ίδια κατανομή με το $(X_1, \dots, X_n)$, για κάθε επιλογή προσήμων. Θα δείξουμε ότι το X ικανοποιεί την εικασία λεπτού δακτυλίου (thin shell conjecture).

Θεώρημα 5.2.1 (B.Klartag)**.** *Για κάθε unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\sigma_K^2 := \mathbb{E}_{\mu_K}\left(\|x\|_2 - \sqrt{n}\right)^2 \leqslant C^2,$$

όπου $C \leqslant 4$ είναι μια θετική απόλυτη σταθερά.

Το Θεώρημα 5.2.1 αποδείχθηκε από τον B.Klartag στο [73]. Στις επόμενες δύο παραγράφους περιγράφουμε τα εργαλεία της απόδειξης, η οποία δίνεται στην Ενότητα 5.2.3.

5.2.1 Ένα γενικό άνω φράγμα για τη διακύμανση

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 βασίζεται στην ανάλυση της Neumann Laplacian κυρτών σωμάτων (βλέπε Hörmander [65] και Helffer-Sjöstrand [63]). Παραθέτουμε μερικές ιδιότητές της. Στο εξής υποθέτουμε ότι K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με C^∞-λείο σύνορο. Θα λέμε ότι μια συνάρτηση $\varphi : K \to \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση $C^\infty(K)$ αν έχει παραγώγους κάθε τάξης οι οποίες είναι φραγμένες στο εσωτερικό του K. Τότε, οι παράγωγοί της φ είναι καλά ορισμένες και C^∞-λείες στο $\mathrm{bd}(K)$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}$ την κλάση όλων των $C^\infty(K)$-λείων συναρτήσεων $u : K \to \mathbb{R}$ που ικανοποιούν την

$$\langle \nabla u(x), \nu(x) \rangle = 0$$

για κάθε $x \in \mathrm{bd}(K)$, όπου $\nu(x)$ είναι το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα στο σημείο $x \in \mathrm{bd}(K)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Stokes στη μορφή

$$\int_K \langle \nabla u, \nabla v \rangle = -\int_K (\Delta u) v + \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle v \nabla u, \nu \rangle = -\int_K (\Delta u) v$$

για κάθε $v \in C^\infty(K)$ και $u \in \mathcal{D}$.

Για κάθε συνάρτηση $u \in C^\infty(K)$ ορίζουμε

$$\|u\|_{H^{-1}(K)} = \sup\left\{ \int_K \varphi u : \varphi \in C^\infty(K),\ \int_K \|\nabla \varphi\|_2^2 \leqslant 1 \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|u\|_{H^{-1}(K)} = \infty$ αν $\int_K u \neq 0$ (αν $\int_K \|\nabla\varphi\|_2^2 \leqslant 1$ τότε το ίδιο ισχύει και για την $\varphi_1 = \varphi + a$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$). Θα γράφουμε $\partial_i f$ για την μερική παράγωγο της f ως προς την

i συντεταγμένη. Τέλος, για κάθε $f \in L^2(K)$ θέτουμε

$$\mathrm{Var}_K(f) = \int_K (f(x) - \mathbb{E}_{\mu_K}(f))^2 dx,$$

όπου $\mathbb{E}_{\mu_K}(f) = \int_K f$.

Θεωρούμε τη συνάρτηση $\rho : K \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως $\rho(x) = -\mathrm{dist}(x, \mathrm{bd}(K))$. Αυτή είναι C^∞-λεία, κυρτή και οι παράγωγοί της κάθε τάξης είναι φραγμένες σε μια περιοχή του $\mathrm{bd}(K)$. Επιπλέον $\rho(x) \leqslant 0$ αν $x \in K$ και

$$\rho(x) = 0 \qquad \text{και} \qquad \|\nabla\rho(x)\|_2 = 1 \quad \text{αν } x \in \mathrm{bd}(K).$$

Παρατηρούμε ότι $\nabla\rho(x) = \nu(x)$ για κάθε $x \in \mathrm{bd}(K)$.

Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε το ακόλουθο λήμμα (βλέπε Lichnerowicz, [91], Hörmander [65] και Kadlec [67] για παρεμφερή αποτελέσματα).

Λήμμα 5.2.2. *Θεωρούμε συνάρτηση $u \in \mathcal{D}$ και θέτουμε $f = -\Delta u$. Τότε,*

$$\int_K f^2 = \sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla\partial_i u\|_2^2 + \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle (\mathrm{Hess}\,\rho)\,(\nabla u)\,,\nabla u\rangle.$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $\mathcal{D}$ έχουμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \langle \nabla u(x), \nabla\rho(x)\rangle$ μηδενίζεται στο σύνορο του K. Επιπλέον, το διάνυσμα ∇u είναι εφαπτόμενο στο σύνορο του K, και άρα η παράγωγος της $x \mapsto \langle \nabla u(x), \nabla\rho(x)\rangle$ στη διεύθυνση του ∇u μηδενίζεται στο $\mathrm{bd}(K)$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\langle \nabla u(x), \nabla\left(\langle \nabla u(x), \nabla\rho(x)\rangle\right)\rangle = 0 \;\text{ για κάθε } x \in \mathrm{bd}(K).$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε την τελευταία ισότητα στη μορφή

$$\langle (\mathrm{Hess}\,u)(\nabla\rho), \nabla u\rangle + \langle (\mathrm{Hess}\,\rho)(\nabla u), \nabla u\rangle = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathrm{bd}(K). \tag{5.2.1}$$

Από το θεώρημα Stokes παίρνουμε

$$\int_K f^2 = \int_K (\Delta u)^2 = -\int_K \langle \nabla(\Delta u), \nabla u\rangle + \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle (\Delta u \nabla u), \nabla\rho\rangle.$$

Το ολοκλήρωμα στο σύνορο του K είναι μηδέν, άρα με μια ακόμη εφαρμογή του θεωρήματος Stokes παίρνουμε

$$\int_K f^2 = -\sum_{i=1}^n \int_K \partial_i u \Delta(\partial_i u) = \sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla\partial_i u\|_2^2 - \int_{\mathrm{bd}(K)} \sum_{i=1}^n \langle \partial_i u \nabla\partial_i u, \nabla\rho\rangle.$$

Όμως ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^n \langle (\partial_i u \nabla\partial_i u), \nabla\rho\rangle = \langle (\mathrm{Hess}\,u)(\nabla\rho), \nabla u\rangle.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας την (5.2.1) παίρνουμε

$$\int_K f^2 = \sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla \partial_i u\|_2^2 + \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle (\mathrm{Hess}\,\rho)\,(\nabla u)\,,\nabla u\rangle,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Λήμμα 5.2.3. *Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με C^∞ λείο σύνορο. Αν $f : K \to \mathbb{R}$ είναι μια $C^\infty(K)$-λεία συνάρτηση τότε*

$$\mathrm{Var}_K(f) \leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{H^{-1}(K)}^2.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_K f = 0$. Τότε υπάρχει μια συνάρτηση $u \in \mathcal{D}$ (βλέπε για παράδειγμα [54, Κεφάλαιο 7]) τέτοια ώστε

$$f = -\Delta u.$$

Από το θεώρημα Stokes παίρνουμε

$$\int_K f^2 = -\int_K f\Delta u = \int_K \langle \nabla f, \nabla u\rangle - \int_{\mathrm{bd}(K)} \langle f\nabla u, \nu\rangle = \sum_{i=1}^n \int_K \partial_i(f)\,\partial_i u,$$

όπου το ολοκλήρωμα στο σύνορο μηδενίζεται επειδή $u \in \mathcal{D}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της $H^{-1}(K)$-νόρμας και την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_K f^2 = \sum_{i=1}^n \int_K \partial_i(f)\,\partial_i u &\leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{H^{-1}(K)} \cdot \sqrt{\int_K \|\nabla \partial_i u\|_2^2} \\ &\leqslant \sqrt{\sum_{i=1}^n \|\partial_i f\|_{H^{-1}(K)}^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla \partial_i u\|_2^2}.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 5.2.2 έχουμε

$$\sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla \partial_i u\|_2^2 \leqslant \int_K f^2, \tag{5.2.2}$$

επειδή η Εσσιανή μιας κυρτής συνάρτησης ρ είναι είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας. Από τις δύο τελευταίες ανισότητες παίρνουμε τον ισχυρισμό του λήμματος. □

5.2.2 Μεταφορά του μέτρου

Έστω μ_1, μ_2 δύο πεπερασμένα μέτρα Borel στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια μετρήσιμη απεικόνιση η οποία μεταφέρει το μ_1 στο μ_2, δηλαδή

$$\mu_2(A) = \mu_1(T^{-1}(A))$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$. Αυτό είναι ισοδύναμο με το γεγονός ότι για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση φ ισχύει η ταυτότητα $\int(\varphi\circ T)\,d\mu_1 = \int \varphi\,d\mu_2$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση

$$x \mapsto (x, Tx)$$

μεταφέρει το μέτρο μ_1 στο μέτρο γ στον $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$, το οποίο έχει περιθώρια μέτρα τα μ_1 και μ_2. Η *L^2-Wasserstein απόσταση* των μ_1 και μ_2 ορίζεται ως εξής:

$$W_2(\mu_1,\mu_2) = \inf_{\gamma}\left(\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\|x-y\|_2^2\,d\gamma(x,y)\right)^{1/2},$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλα τα μέτρα γ με περιθώρια μέτρα μ_1 και μ_2. Αν δεν υπάρχει τέτοιο μέτρο γ, θέτουμε $W_2(\mu_1,\mu_2)=\infty$.

Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε C^∞-λεία συνάρτηση $u:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με $\int u\,d\mu = 0$ θέτουμε

$$\|u\|_{H^{-1}(\mu)} = \sup\left\{\int_{\mathbb{R}^n} u\varphi\,d\mu :\ \varphi\in C^\infty(\mathbb{R}^n),\ \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla\varphi\|_2^2\,d\mu \leqslant 1\right\}.$$

Αυτός ο ορισμός προφανώς συμφωνεί με τον προηγούμενο ορισμό που δώσαμε για την $\|\cdot\|_{H^{-1}(K)}$. Έχουμε $\|u\|_{H^{-1}(\mu_K)} = \|u\|_{H^{-1}(K)}$, όπου μ_K είναι το μέτρο Lebesgue στο K. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο θεώρημα που επεκτείνει μια παρατήρηση του Brenier [;] (η απόδειξη που δίνουμε είναι από το [121, Παράγραφος 7.6]).

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω μ ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μια φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση της οποίας το ολόκληρωμα ισούται με 0. Για $\varepsilon>0$ αρκετά μικρό, θεωρούμε το μέτρο μ_ε του οποίου η πυκνότητα ως προς το μ είναι η μη-αρνητική συνάρτηση $1+\varepsilon h$. Τότε,*

$$\|h\|_{H^{-1}}(\mu) \leqslant \liminf_{\varepsilon\to 0^+}\frac{W_2(\mu,\mu_\varepsilon)}{\varepsilon}.$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\varphi\,d\mu \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla\varphi\|_2^2\,d\mu\Big)^{1/2}\liminf_{\varepsilon\to 0^+}\frac{W_2(\mu,\mu_\varepsilon)}{\varepsilon} \tag{5.2.3}$$

για κάθε C^∞-λεία συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$. Μπορούμε, επίσης, να υποθέσουμε ότι η φ έχει συμπαγή φορέα, επειδή το μ έχει συμπαγή φορέα. Αν η φ ικανοποιεί τα παραπάνω, τότε οι παράγωγοι δεύτερης τάξης της είναι φραγμένες. Δηλαδή, υπάρχει $R=R(\varphi)>0$ τέτοιος ώστε

$$|\varphi(y)-\varphi(x)| \leqslant \|\nabla\varphi(x)\|_2\,\|x-y\|_2 + R\|x-y\|_2^2 \tag{5.2.4}$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Έστω $\varepsilon>0$ ώστε $\varepsilon\|h\|_\infty<1$. Θεωρούμε τυχόν μέτρο γ με περιθώρια μέτρα τα μ και μ_ε (παρατηρούμε ότι το μ_ε είναι μη-αρνητικό μέτρο από την επιλογή του ε). Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\varphi\,d\mu = \frac{1}{\varepsilon}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi\,d(\mu_\varepsilon-\mu) = \frac{1}{\varepsilon}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}(\varphi(y)-\varphi(x))\,d\gamma(x,y).$$

Θέτουμε

$$W_2^{\gamma}(\mu,\mu_\varepsilon)=\Big(\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\|x-y\|_2^2\,d\gamma(x,y)\Big)^{1/2}.$$

Τότε, η (5.2.4) και η ανισότητα Cauchy-Schwarz δίνουν:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}h\varphi\,d\mu &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\|\nabla\varphi(x)\|_2\,\|x-y\|_2\,d\gamma(x,y)+\frac{R}{\varepsilon}\iint_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n}\|x-y\|_2^2\,d\gamma(x,y)\\ &\leqslant \frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla\varphi\|_2^2d\mu\Big)^{1/2}W_2^{\gamma}(\mu,\mu_\varepsilon)+\frac{R}{\varepsilon}\big(W_2^{\gamma}(\mu,\mu_\varepsilon)\big)^2.\end{aligned}$$

Παίρνοντας το infimum πάνω από όλα τα δυνατά γ, έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}h\varphi\,d\mu\leqslant\frac{1}{\varepsilon}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla\varphi\|_2^2d\mu\Big)^{1/2}W_2(\mu,\mu_\varepsilon)+\frac{R}{\varepsilon}\big(W_2(\mu,\mu_\varepsilon)\big)^2.\tag{5.2.5}$$

Παρατηρούμε ότι το R εξαρτάται μόνο από την φ. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι

$$\liminf_{\varepsilon\to0^+}\frac{W_2(\mu,\mu_\varepsilon)}{\varepsilon}<\infty,$$

διαφορετικά το θεώρημα ισχύει προφανώς. Τότε,

$$\liminf_{\varepsilon\to0^+}\frac{\big(W_2(\mu,\mu_\varepsilon)\big)^2}{\varepsilon}=\liminf_{\varepsilon\to0^+}\varepsilon\left(\frac{W_2(\mu,\mu_\varepsilon)}{\varepsilon}\right)^2=0,$$

και αφήνοντας το $\varepsilon\to0^+$ στην (5.2.5) παίρνουμε την (5.2.3), που είναι και το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνήθη ορθοκανονική βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και σταθεροποιούμε $x\in K$. Συμβολίζουμε με $x+\mathbb{R}e_i$ την ευθεία που διέρχεται από το x στη διεύθυνση του e_i. Η τομή αυτής της ευθείας με το K είναι ένα κλειστό ευθύγραμμο τμήμα ή ένα σημείο. Συμβολίζουμε τα άκρα αυτού του τμήματος με $\mathfrak{B}_i^-(x)$ και $\mathfrak{B}_i^+(x)$, όπου $\langle\mathfrak{B}_i^-(x),e_i\rangle\leqslant\langle\mathfrak{B}_i^+(x),e_i\rangle$. Τότε,

$$K\cap(x+\mathbb{R}e_i)=\big[\mathfrak{B}_i^-(x),\mathfrak{B}_i^+(x)\big].$$

Για $i=1,\dots,n$ θεωρούμε τις προβολές

$$\pi_i(x_1,\dots,x_n)=(x_1,\dots,x_{i-1},x_{i+1},\dots,x_n).$$

Τότε το, $\pi_i(K)$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^{n-1}$, και για κάθε $y\in\pi_i(K)$ συμβολίζουμε με $q_i^-(y)\in\mathbb{R}$ τη μικρότερη και $q_i^+(y)$ τη μεγαλύτερη i συντεταγμένη μεταξύ όλων των σημείων του K για τα οποία $\pi_i(x)=y$. Με τον παραπάνω συμβολισμό μπορούμε να διατυπώσουμε το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.2.5. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με C^∞-λείο σύνορο. Σταθεροποιούμε $i = 1, \dots, n$ και θεωρούμε μια $C^\infty(K)$-λεία συνάρτηση $\Psi : K \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in K$,*

$$\Psi(\mathfrak{B}_i^-(x)) = \Psi(\mathfrak{B}_i^+(x)). \tag{5.2.6}$$

Για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$ συμβολίζουμε με μ_ε το μέτρο του οποίου η πυκνότητα ως προς το μ είναι $1 + \varepsilon\partial_i\Psi$. Τότε,

$$\liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{W_2(\mu, \mu_\varepsilon)}{\varepsilon} \leqslant \left(\int_K \left[\Psi(x) - \Psi(\mathfrak{B}_i^+(x))\right]^2 dx\right)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι $i = 1$. Για αρκετά μικρό $\varepsilon > 0$, η συνάρτηση $1 + \varepsilon\partial_1\Psi$ είναι θετική στο K, οπότε το μ_ε είναι ένα μη αρνητικό μέτρο.

Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο $\varepsilon > 0$ και γράφουμε $x = (t, y)$, όπου $y = (x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$. Σταθεροποιούμε επίσης ένα σημείο $y \in \pi_1(K)$ και γράφουμε $p = q_1^-(y)$, $q = q_1^+(y)$. Τότε από την (5.2.6) παίρνουμε:

$$\int_p^q (1 + \varepsilon\partial_1\Psi(t, y))dt = q - p + \varepsilon\Psi(t, y)\Big|_{t=p}^q = q - p.$$

Έπεται ότι οι πυκνότητες $t \mapsto 1$ και $t \mapsto 1 + \varepsilon\partial_1\Psi(t, y)$ έχουν το ίδιο ολοκλήρωμα στο διάστημα $[p, q]$. Επομένως υπάρχει μοναδική συνάρτηση $T = T^y : [p, q] \to [p, q]$ η οποία μεταφέρει το μέτρο με πυκνότητα $1 + \varepsilon\partial_1\Psi(t, y)$ στο μέτρο Lebesgue του διαστήματος $[p, q]$ και ικανοποιεί τη σχέση

$$\int_p^{x_1} (1 + \varepsilon\partial_1\Psi(t, y))dt = \int_p^{T(x_1)} \mathbf{1}\, dt.$$

Τότε για κάθε $x_1 \in [p, q]$ έχουμε

$$T(x_1) = x_1 + \varepsilon\left[\Psi(x_1, y) - \Psi(p, y)\right].$$

Συνεπώς,

$$\int_p^q |T(t) - t|^2(1 + \varepsilon\partial_1\Psi(t, y))dt = \varepsilon^2 \int_p^q [\Psi(t, y) - \Psi(p, y)]^2\, dt + \varepsilon^3 R$$

όπου το $|R|$ είναι φραγμένο ανεξάρτητα του ε και του y.

Τώρα για κάθε $(x_1, y) \in K$ ορίζουμε $S(x_1, y) = (T^y(x_1), y)$. Αυτή είναι μια καλά ορισμένη, 1-1 και συνεχής απεικόνιση. Επιπλέον από το θεώρημα Fubini παίρνουμε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $\varphi : K \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\begin{aligned}\int_K \varphi(S(x))d\mu_\varepsilon(x) &= \int_{\pi(K)} \left[\int_p^q \varphi(T^y(x_1), y)\,(1 + \varepsilon\partial_1\Psi)dx_1\right] dy \\ &= \int_{\pi(K)} \left[\int_p^q \varphi(x_1, y)dx_1\right] dy = \int_K \varphi(x)d\mu(x).\end{aligned}$$

Έπεται ότι ο S μεταφέρει το μ_ε στο μ. Άρα,

$$W_2(\mu,\mu_\varepsilon)^2 \leqslant \int_K \|S(x)-x\|_2^2 d\mu_\varepsilon(x) = \varepsilon^2 \int_K \left[\Psi(x)-\Psi(\mathfrak{B}_1^-(x))\right]^2 dt + \varepsilon^3 R',$$

όπου το $|R'|$ δεν εξαρτάται από το ε. Διαιρώντας με ε^2 και παίρνοντας $\varepsilon \to 0^+$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

5.2.3 Η εκτίμηση του λεπτού δακτυλίου στην unconditional περίπτωση

Στο εξής περιοριζόμαστε στην unconditional περίπτωση.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν $\Psi : K \to \mathbb{R}$ είναι μια unconditional συνεχής συνάρτηση, τότε*

$$\mathrm{Var}_K(\Psi) \leqslant \sum_{i=1}^n \int_K \left(\Psi(x)-\Psi(\mathfrak{B}_i^+(x))\right)^2 dx.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το K έχει C^∞-λείο σύνορο και ότι η Ψ είναι μια $C^\infty(K)$-λεία συνάρτηση. Τότε, από το Λήμμα 5.2.3 έχουμε ότι

$$\mathrm{Var}_K(\Psi) \leqslant \sum_{i=1}^n \|\partial_i\Psi\|^2_{H^{-1}(K)}.$$

Χρησιμοποιώντας τις συμμετρίες της Ψ βλέπουμε ότι $\int_K \partial_i\Psi = 0$ για κάθε $i = 1,\ldots,n$. Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.2.4. Συνδυάζοντάς το με το Λήμμα 5.2.5 παίρνουμε

$$\|\partial_i\Psi\|^2_{H^{-1}(K)} \leqslant \int_K \left(\Psi(x)-\Psi(\mathfrak{B}_i^+(x))\right)^2 dx.$$

Προσθέτοντας τις παραπάνω ανισότητες παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 5.2.7. *Θεωρούμε τις άρτιες συνεχείς συναρτήσεις $f_1,\ldots,f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και τη συνάρτηση $\Psi(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{i=1}^n f_i(x_i)$. Τότε,*

$$\mathrm{Var}_K(\Psi) \leqslant \sum_{i=1}^n \int_K \sup_{s,t\in J_i(x)} (f_i(s)-f_i(t))^2 dx,$$

όπου $J_i(x)$ είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$ που είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων και έχει το ίδιο μήκος με το διάστημα $[\mathfrak{B}_i^-(x), \mathfrak{B}_i^+(x)]$.

Λήμμα 5.2.8. *Έστω $X = (X_1,\ldots,X_n) \in \mathbb{R}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα με λογαριθμικά κοίλη unconditional πυκνότητα. Αν $p_1,\ldots,p_n > 0$ και $a_1,\ldots,a_n \geqslant 0$, τότε*

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i|X_i|^{p_i}\right) \leqslant \sum_{i=1}^n \frac{2p_i^2}{p_i+1} a_i^2 \mathbb{E}\left(|X_i|^{2p_i}\right). \tag{5.2.7}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το X είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο σε ένα unconditional κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ θέτουμε

$$\Psi(x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} a_i |x_i|^{p_i},$$

και τότε η ζητούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\mathrm{Var}_K(\Psi) \leqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{2p_i^2}{p_i + 1} \int_K a_i^2 |x_i|^{2p_i} dx_1 \cdots dx_n.$$

Από την πρόταση 5.2.6, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_K \left(\Psi(x) - \Psi(\mathfrak{B}_i^+(x))\right)^2 dx \leqslant \frac{2p_i^2}{p_i + 1} \int_K a_i^2 |x_i|^{2p_i} dx_1 \cdots dx_n.$$

Σταθεροποιούμε $i \leqslant n$ και δείχνουμε την τελευταία ανισότητα με χρήση του θεωρήματος Fubini. Για σταθερό

$$x' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \pi_i(K)$$

θέτουμε $r = q_i^+(x') \geqslant 0$. Τότε μένει να δείξουμε ότι

$$\int_{-r}^{r} \Big[\sum_{j=1}^{n} a_j |x_j|^{p_j} - \Big(a_i r^{p_i} + \sum_{j \neq i} a_j |x_j|^{p_j} \Big) \Big]^2 dx_i \leqslant \frac{2p_i^2}{p_i + 1} \int_{-r}^{r} a_i^2 |x_i|^{2p_i} dx_i.$$

Αυτή ανάγεται στο να δείξουμε ότι

$$\int_{-r}^{r} (a_i |x_i|^{p_i} - a_i r^{p_i})^2 dx_i \leqslant \frac{2p_i^2}{p_i + 1} \int_{-r}^{r} (a_i |x_i|^{p_i})^2 dx_i,$$

που εύκολα επαληθεύεται.

Στη γενική περίπτωση, έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ η λογαριθμικά κοίλη unconditional πυκνότητα του X. Αρχικά κάνουμε την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι s-κοίλη για κάποιον ακέραιο $s \geqslant 1$ και γράφουμε $N = n + s$. Θεωρούμε το unconditional κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ που ορίζεται ως εξής:

$$K = \left\{ (x, y) : \ x \in \mathbb{R}^n, \ y \in \mathbb{R}^s, \ \|y\|_2 \leqslant \omega_s^{-\frac{1}{s}} f^{1/s}(x) \right\},$$

όπου ω_s είναι ο όγκος της s-διάστατης Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας. Από την πρώτη περίπτωση έπεται ότι το λήμμα ισχύει και στην περίπτωση όπου η πυκνότητα f είναι s-κοίλη.

Τέλος, αν $f = e^{-\psi}$ είναι η λογαριθμικά κοίλη unconditional πυκνότητα του X, τότε για κάθε $s > 0$ η συνάρτηση

$$x \mapsto \left(1 - \frac{\psi(x)}{s} \right)_+^s$$

με $x_+ = \max\{x, 0\}$, είναι unconditional και s-κοίλη. Κανονικοποιώντας παίρνουμε μια πυκνότητα που συγκλίνει ασθενώς στην $e^{-\psi}$ (και $\|\cdot\|_{L_1}$-ομοιόμορφα στον $\mathbb{R}^n$) καθώς $s \to \infty$. Επομένως η γενική περίπτωση έπεται από την περίπτωση των s-κοίλων πυκνοτήτων. □

Είμαστε τώρα σε θέση να δείξουμε το βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.9. *Έστω $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο έχει λογαριθμικά κοίλη unconditional πυκνότητα και ικανοποιεί την $\mathbb{E}(X_i^2) = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αν $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$ τότε*

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i^2\right) \leqslant C' \sum_{i=1}^n a_i^2,$$

όπου $C' \leqslant 16$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\mathbb{E}\left(\|X\|_2 - \sqrt{n}\right)^2 \leqslant C^2, \tag{5.2.8}$$

όπου $C \leqslant 4$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επιπλέον, για κάθε $p \geqslant 1$ έχουμε

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\|X\|_p)} \leqslant C_p \cdot n^{1/p-1/2},$$

όπου $C_p > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Απόδειξη. Από την ανισότητα Prékopa-Leindler η τυχαία μεταβλητή X_i έχει μια άρτια, λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα για κάθε i. Από την (5.2.7) και την ισοδυναμία των $\|X_i\|_{L_4}$ και $\|X_i\|_{L_2}$, έχουμε

$$\mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n a_i X_i^2\right) \leqslant \frac{8}{3}\sum_{i=1}^n a_i^2 \mathbb{E}|X_i|^4 \leqslant 16 \sum a_i^2 \left(\mathbb{E}|X_i|^2\right)^2 = 16 \sum_{i=1}^n a_i^2.$$

Επιπλέον, θέτοντας $a_i = 1$ για κάθε i, βλέπουμε ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\left(\|X\|_2 - \sqrt{n}\right)^2\right] &\leqslant \frac{1}{n}\mathbb{E}\left[\left(\|X\|_2 - \sqrt{n}\right)^2 \left(\|X\|_2 + \sqrt{n}\right)^2\right] \\ &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left(\|X\|_2^2 - n\right)^2 \leqslant 16,\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, θέτουμε $E_p = \mathbb{E}\|X\|_p^p$. Από την (5.2.7) και την ισοδυναμία των νορμών $\|X_i\|_{L_p}$ και $\|X_i\|_{L_2}$, έχουμε

$$\mathbb{E}\left(\|X\|_p^p - E_p\right)^2 = \mathrm{Var}\left(\sum_{i=1}^n |X_i|^p\right) \leqslant 2^{1-p} p\Gamma(2p+1) n.$$

Τώρα, για $p \geqslant 2$ παίρνουμε $\mathbb{E}|X_i|^p \geqslant (\mathbb{E}\,(X_i^2))^{p/2} = 1$, ενώ όταν $1 \leqslant p \leqslant 2$

$$\mathbb{E}|X_i|^p \geqslant (\mathbb{E}|X_i|)^p \geqslant 2^{-p/2}\left(\mathbb{E}X_i^2\right)^{p/2} = 2^{-p/2} \geqslant 2^{-1/2}.$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι

$$E_p = \sum_i \mathbb{E}|X_i|^p \geqslant n/\sqrt{2}.$$

Επομένως,

$$\mathrm{Var}(\|X\|_p) \leqslant \mathbb{E}\left(\|X\|_p - E_p^{1/p}\right)^2 \leqslant E_p^{-\frac{2(p-1)}{p}}\,\mathbb{E}\left(\|X\|_p^p - E_p\right)^2 \leqslant C_p n^{2/p-1},$$

και ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

5.3 Η σταθερά Poincaré στην unconditional περίπτωση

Ο B. Klartag έδωσε στο [73] ένα άνω φράγμα, με λογαριθμική εξάρτηση από την διάσταση, για την σταθερά Poincaré $\mathrm{Poin}_K := \mathrm{Poin}_{\mu_K}$ ενός unconditional ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 5.3.1 (B.Klartag)**.** *Για κάθε unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε:*

$$\mathrm{Is}_K \simeq \sqrt{\mathrm{Poin}_K} \geqslant \frac{c}{\log n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη θετική σταθερά.

Στην απόδειξη χρησιμοποιείται το Θεώρημα 5.1.1 του E. Milman από το οποίο εκμεταλλευόμαστε την ακόλουθη ειδική περίπτωση.

Πρόταση 5.3.2. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το K έχει C^∞-λείο σύνορο και ότι $K \subseteq [-R,R]^n$ για κάποιο $R > 0$. Τότε,*

$$\mathrm{Poin}_K \geqslant \frac{\pi^2}{R^2}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$ ορίζουμε

$$\sigma_i(x) = (x_1,\dots,x_{i-1},-x_i,x_{i+1},\dots,x_n).$$

Επιπλέον, για κάθε συνάρτηση $\varphi : K \to \mathbb{R}$ θέτουμε $\sigma_i(\varphi)(x) = \varphi(\sigma_i(x))$.

Ισχυρισμός. *Υπάρχει $1 \leqslant i \leqslant n$ και μια μη μηδενική ιδιοσυνάρτηση Neumann φ που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή $\lambda_1 = \mathrm{Poin}_K$ που είναι τέτοια ώστε $\sigma_i(\varphi) = -\varphi$.*

Απόδειξη του ισχυρισμού. Αν h είναι μια ιδιοσυνάρτηση Neumann που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ τότε γράφουμε $h \in E_\lambda$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το K είναι unconditional παρατηρούμε ότι αν f είναι μια ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_1 τότε το ίδιο ισχύει και για τις $\sigma_i(f)$, $i = 1, \ldots, n$. Ξεκινάμε με μια ιδιοσυνάρτηση $f_0 \in E_{\lambda_1}$ και ορίζουμε

$$f_i = f_{i-1} + \sigma_i(f_{i-1}), \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Τότε, $f_i \in E_{\lambda_1}$ για κάθε $0 \leqslant i \leqslant n$. Αν $f_i \equiv 0$ για κάποιο i τότε θεωρούμε το ελάχιστο i με αυτή την ιδιότητα, και αφού $f_{i-1} \not\equiv 0$ και $\sigma_i(f_{i-1}) = -f_{i-1}$, αποδεικνύεται ο ισχυρισμός.

Σε διαφορετική περίπτωση έχουμε ότι η $g = f_n$ είναι μια μη μηδενική ιδιοσυνάρτηση στο E_{λ_1}. Παρατηρούμε ότι $\sigma_i(g) = g$, και άρα $\sigma_i(\partial_i g) = -\partial_i g$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Έπεται ότι

$$\int_K \nabla g = 0.$$

Τώρα παρατηρούμε ότι οι $\partial_1 g, \ldots, \partial_n g$ ανήκουν στο E_{λ_1}: Χρησιμοποιώντας την (5.2.2) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\lambda_1^2 \int_K g^2 &= \int_K |\Delta g|^2 \geqslant \sum_{i=1}^n \int_K \|\nabla \partial_i g\|_2^2 \geqslant \lambda_1 \sum_{i=1}^n \int_K (\partial_i g)^2 \\ &= \lambda_1 \int_K \|\nabla g\|_2^2 = \lambda_1^2 \int_K g^2,\end{aligned}$$

οπότε πρέπει να έχουμε παντού ισότητα. Όμως,

$$\int_K \|\nabla g\|_2^2 > 0,$$

οπότε, υπάρχει $1 \leqslant i \leqslant n$ τέτοιο ώστε $\partial_i g \not\equiv 0$. Τότε η συνάρτηση $\partial_i g$ ικανοποιεί τον ισχυρισμό. □

Επανερχόμαστε τώρα στην απόδειξη της Πρότασης 5.3.2. Παρατηρούμε ότι για κάθε $0 < r \leqslant R$ και κάθε λεία περιττή συνάρτηση $\psi : [-r, r] \to \mathbb{R}$ έχουμε:

$$\frac{\pi^2}{R^2} \int_{-r}^{r} \psi^2(x)dx \leqslant \frac{\pi^2}{r^2} \int_{-r}^{r} [\psi'(x)]^2 dx. \tag{5.3.1}$$

Αν φ είναι μη μηδενική ιδιοσυνάρτηση που αντιστοιχεί στην λ_1 και ικανοποιεί τον ισχυρισμό, τότε χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini παίρνουμε:

$$\frac{\pi^2}{R^2} \int_K \varphi^2 \leqslant \int_K |\partial_i \varphi|^2 \leqslant \int_K \|\nabla \varphi\|_2^2 = \lambda_1 \int_K \varphi^2.$$

Αυτό δείχνει ότι $\lambda_1 \geqslant \pi^2/R^2$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1. Θέτουμε $R = C \log n$, όπου $C > 0$ είναι μια αρκούντως μεγάλη απόλυτη σταθερά και θεωρούμε το κυρτό και unconditional σώμα

$$T = K \cap [-R, R]^n.$$

Από την Πρόταση 5.3.2 έχουμε ότι

$$\mathrm{Poin}_T \geqslant \frac{\pi^2}{R^2} \geqslant \frac{c_1}{\log^2 n}.$$

Χρησιμοποιώντας τις ψ_1 εκτιμήσεις για τα συναρτησοειδή $\langle \cdot, e_i \rangle$ βλέπουμε ότι

$$|T| \geqslant \Big(1 - \frac{1}{n}\Big)|K|.$$

Τότε από το Θεώρημα 5.1.1 παίρνουμε

$$\mathrm{Is}_K \geqslant c_2 \mathrm{Is}_T \geqslant c_3 \sqrt{\mathrm{Poin}_T} \geqslant \frac{c}{\log n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

5.4 Το φράγμα του Bobkov για την ισοπεριμετρική σταθερά

Ο Bobkov στο [22] έδειξε μια ισχυρότερη μορφή του Θεωρήματος 4.2.5 αντικαθιστώντας την L_2 νόρμα της $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ με την ποσότητα $[\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2)]^{1/4}$.

Θεώρημα 5.4.1 (Bobkov). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{Is}_\mu \geqslant \frac{c}{[\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2)]^{1/4}},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατηρούμε ότι από το λήμμα του Borell έχουμε:

$$[\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2)]^{1/4} \leqslant [\mathbb{E}_\mu(\|x\|_2^4)]^{1/4} \leqslant C\mathbb{E}_\mu(\|x\|_2).$$

Από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι η εκτίμηση στο Θεώρημα 5.4.1 είναι πάντα καλύτερη από αυτήν του Θεωρήματος 4.2.5. Στην πραγματικότητα μπορούμε να ελέγξουμε ότι σε κάποιες περιπτώσεις η διαφορά μεταξύ των δύο εκτιμήσεων είναι ουσιώδης. Για παράδειγμα αν $B := \overline{B}_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1, τότε $\mathrm{Var}_{\mu_B}(\|x\|_2^2) \simeq 1/n^2$, και άρα το Θεώρημα 5.4.1 δίνει ότι $\mathrm{Is}_{\mu_B} \geqslant c\sqrt{n}$, που είναι η σωστή εξάρτηση από την διάσταση σε αυτήν την περίπτωση.

Παρατήρηση. Συνδυάζοντας το παραπάνω με την εκτίμηση λεπτού δακτυλίου των Guédon και E. Milman (βλέπε [62]) παίρνουμε

$$n^{5/12}\mathrm{Is}_n \geqslant c,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Όπως όμως μπορούμε να δούμε στο [51], ο Eldan βελτίωσε ουσιαστικά την εκτίμηση.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.1. Το εναρκτήριο σημείο για την απόδειξη είναι μια παραλλαγή του Ισχυρισμού 4.2.4 για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας που διατυπώνεται παρακάτω.

Λήμμα 5.4.2. *Θεωρούμε μια μη αρνητική συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ και δύο ανοικτά υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{dist}(A, B) = \varepsilon > 0$, και θέτουμε $C = \mathbb{R}^n \setminus (A \cup B)$. Αν η ανισότητα*

$$\mu(A)\mu(B) \leqslant \frac{\mu(C)}{\varepsilon} \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu \tag{5.4.1}$$

ισχύει για κάθε μονοδιάστατο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, τότε ισχύει και για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$.

Παρατηρούμε ότι αν $\varepsilon \to 0^+$ τότε η (5.4.1) δίνει

$$\mu(A)\mu(B) \leqslant \mu^+(C) \int g d\mu. \tag{5.4.2}$$

Στην πραγματικότητα, αν ισχύει η (5.4.2) για όλα τα A, B και C τότε το ίδιο ισχύει και για την (5.4.1). Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$2\min\{\mu(A), \mu(B)\} \geqslant 2\mu(A)\mu(B) \geqslant \min\{\mu(A), \mu(B)\}$$

που ισχύει για όλα τα Borel υποσύνολα A, B του $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την $\mu(A) + \mu(B) = 1$, και το γεγονός ότι

$$\mathrm{Is}_\mu := \inf\Big\{\frac{\mu^+(A)}{\min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}} : A \subset \mathbb{R}^n \text{ Borel}, 0 < \mu(A) < 1\Big\},$$

παίρνουμε:

Λήμμα 5.4.3. *Έστω $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ μια μη αρνητική συνεχής συνάρτηση. Αν η ανισότητα*

$$\mathrm{Is}_\mu^{-1} \leqslant \int g d\mu \tag{5.4.3}$$

ισχύει για κάθε μονοδιάστατο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ, τότε ισχύει ότι

$$\mathrm{Is}_\mu^{-1} \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^n} g d\mu \tag{5.4.4}$$

για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.1 ως εξής. Δείχνουμε πρώτα ότι το εξής:

Λήμμα 5.4.4. *Αν ξ είναι μια τυχαία μεταβλητή με λογαριθμικά κοίλη κατανομή μ στον $\mathbb{R}$ τότε*

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} \leqslant \mathrm{Is}_\mu^{-1} \leqslant \sqrt{3}\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)}. \tag{5.4.5}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το ελάχιστο διάστημα (a, b), πεπερασμένο ή άπειρο, που είναι φορέας του μ. Η συνάρτηση κατανονομής F είναι συνεχώς διαφορίσιμη και αύξουσα στο (a, b) και επιπλέον η πυκνότητα f είναι λογαριθμικά κοίλη. Γράφουμε:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\xi) &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(F^{-1}(p) - F^{-1}(q)\right)^2\, dpdq \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\int_q^p \frac{dt}{I_\mu(t)}\right)^2\, dpdq \\
&\leqslant \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\int_q^p \frac{dt}{2I_\mu(1/2)\min\{t, 1-t\}}\right)^2\, dpdq.
\end{aligned}$$

Όμως $\mathrm{Is}_\mu = 2I_\mu(1/2)$ οπότε προκύπτει η αριστερή ανισότητα. Για τη δεξιά ανισότητα θα χρησιμοποιήσουμε το ότι η I_μ είναι κοίλη. Από το γεγονός αυτό παίρνουμε ότι για κάποιο k έχουμε ότι για $0 < p < 1$ ισχύει:

$$I_\mu(p) \leq I_k(p) - I_\mu(1/2) + k(p - 1/2).$$

Αφού η I_μ είναι μη αρνητική, ισχύει επιπλέον ότι $|k| \leq 2I_\mu(1/2)$. Όπως πριν, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\xi) &= \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\int_q^p \frac{dt}{I_\mu(t)}\right)^2\, dpdq \\
&\geq \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\int_q^p \frac{dt}{I_k(t)}\right)^2\, dpdq
\end{aligned}$$

Όμως η συνάρτηση $x \mapsto 1/I_x(t)$ είναι κυρτή και από τη συμμετρία γύρω από το 0 παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\xi) &\geq \frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 \left(\int_q^p \frac{dt}{I_0(t)}\right)^2\, dpdq \\
&= \frac{1}{2I_\mu^2(1/2)}\frac{1}{2}\int_0^1\int_0^1 (p-q)^2\, dpdq = \frac{1}{3\mathrm{Is}_\mu^2},
\end{aligned}$$

που είναι η δεξιά ανισότητα. Θεωρούμε ένα μονοδιάστατο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε αυτό είναι η κατανομή ενός τυχαίου διανύσματος $u + \xi\vartheta$, όπου τα $u \in \mathbb{R}^n$ και $\vartheta \in S^{n-1}$ είναι σταθερά και κάθετα μεταξύ τους και ξ είναι μια τυχαία μεταβλητή με λογαριθμικά κοίλη κατανομή στην πραγματική ευθεία. Έπεται ότι το μ ικανοποιεί και την (5.4.5). Από το 5.4.3 έπεται ότι αν δείξουμε την

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} \leqslant \mathbb{E}(g(u+\xi\theta)) \tag{5.4.6}$$

για κάποια συνεχή συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ και για όλα τα u, θ και ξ όπως παραπάνω, θα έχουμε ότι

$$\mathrm{Is}_\mu^{-1} \leqslant 2\sqrt{3}\int_{\mathbb{R}^n} g d\mu \tag{5.4.7}$$

για όλα τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$.

Θεωρούμε την συνάρτηση

$$g(x) = C\sqrt{|\,\|x\|_2^2 - a|},$$

όπου τα $a \in \mathbb{R}$ και $C > 0$ θα επιλεγούν κατάλληλα. Το γεγονός ότι η $\mathbb{E}(g(u+\xi\theta)) = C\mathbb{E}\sqrt{|\,\|u\|_2^2 + \xi^2 - a|}$ ικανοποιεί την (5.4.6) έπεται από τις ανισότητες τύπου Khintchine για πολυώνυμα. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε ότι $\|F\|_2 \leqslant c\|F\|_0 \leqslant c\|F\|_{1/2}$ για κάθε πολυώνυμο F βαθμού 2. Συνεπώς,

$$\mathrm{Var}(\xi^2)^{1/2} \leqslant \left(\mathbb{E}|\,\|u\|_2^2 + \xi^2 - a|^2\right)^{1/2} \leqslant c\left(\mathbb{E}\sqrt{|\,\|u\|_2^2 + \xi^2 - a|}\right)^2. \tag{5.4.8}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $A^2 = \mathbb{E}(\xi^2)$ τότε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(\xi^2)^{1/2} &\geqslant \|\xi^2 - A^2\|_0 = \|\xi - A\|_0\|\xi + A\|_0 \\ &\geqslant \frac{1}{c^2}\|\xi - A\|_2\|\xi + A\|_2 \geqslant \frac{1}{c^2}\mathrm{Var}(\xi).\end{aligned}$$

Εξαιτίας της (5.4.8) συνάγουμε ότι

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\xi)} \leqslant C\mathbb{E}\sqrt{|\,\|u\|_2^2 + \xi^2 - a|},$$

που είναι ακριβώς η (5.4.6). Άρα ισχύει η (5.4.7).

Τέλος, από την ανισότητα Hölder παίρνουμε ότι:

$$\int g d\mu = C\mathbb{E}_\mu\sqrt{|\,\|x\|_2^2 - a|} \leqslant C\left(\mathbb{E}_\mu|\,\|x\|_2^2 - a|^2\right)^{1/4}.$$

Επιλέγουμε $a = \mathbb{E}_\mu(\|x\|_2^2)$ για να ελαχιστοποιήσουμε το δεξιό μέλος και συμπεραίνουμε ότι:

$$\mathrm{Is}_\mu^{-1} \leqslant 2\sqrt{3}\,C(\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2))^{1/4} \tag{5.4.9}$$

για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. □

Ο E. Milman πρότεινε στο [101] μια διαφορετική (πιο γεωμετρική) προσέγγιση για το παραπάνω φράγμα, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματά του για την ευστάθεια της σταθεράς Cheeger.

Θεώρημα 5.4.5. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{Is}_\mu \geqslant c \sup_{z\in\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt[4]{\mathrm{Var}_\mu(\|x-z\|_2^2)}},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Σκιαγράφηση της απόδειξης. Υποθέτουμε πρώτα ότι $z=0$ και θέτουμε

$$t := \mathbb{E}_\mu(\|x\|_2) \;\; \text{και} \;\; \sigma := \sqrt{\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2)}.$$

Θεωρούμε τη μπάλα $B = rB_2^n$ με $r = t+2\sigma$. Από την ανισότητα Chebyshev έχουμε:

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}^n : |\|x\|_2 - t| \geqslant \varepsilon\}) \leqslant \frac{\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2)}{\varepsilon^2}$$

(με $\varepsilon = 2\sigma$) οπότε παίρνουμε $\mu(B)\geqslant 3/4$. Από την παραλλαγή του Θεωρήματος 5.1.1 όπως αυτή διατυπώθηκε στην Παρατήρηση 5.1.7 και χρησιμοποιώντας ότι $d_{\mathrm{TV}}(\mu,\nu)\leqslant 2/3$ έχουμε $\mathrm{Is}_\mu \simeq \mathrm{Is}_\nu$ όπου $\nu = \frac{\mu|_B}{\mu(B)}$. Επομένως αρκεί να φράξουμε την Is_ν από κάτω. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις (βλέπε [101] για τις λεπτομέρειες):

(i) Αν $t\leqslant 2\sigma$ τότε δείχνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2\, d\nu(x) = \frac{1}{\mu(B)}\int_B \|x\|_2\, d\mu(x) \leqslant 4t \leqslant 4\sqrt[4]{\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2)},$$

και το ζητούμενο έπεται από το Θεώρημα 4.2.5.

(ii) Αν $t>2\sigma$ τότε χρησιμοποιούμε ένα αποτέλεσμα των Kannan-Lovász-Simonovits, σύμφωνα με το οποίο, για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^n$ που έχει φορέα ένα κυρτό σώμα K έχουμε:

$$\mathrm{Is}_\nu \geqslant c\left(\int \chi_K(x)\, d\nu(x)\right)^{-1}, \tag{5.4.10}$$

όπου με $\chi_K(x)$ συμβολίζουμε το μεγαλύτερο συμμετρικό διάστημα που περιέχεται στο K και έχει κέντρο το x. Στην περίπτωση της μπάλας με ακτίνα r εύκολα βλέπουμε ότι

$$\chi_{rB_2^n}(x) = 2\sqrt{r^2 - \|x\|_2^2}.$$

Εισάγοντας την τελευταία στην (5.4.10) μπορούμε να δείξουμε ότι $\mathrm{Is}_\nu \geqslant c_1/\sqrt{t\sigma}$.

Τέλος, παρατηρώντας ότι $\sqrt{t\sigma}\leqslant \sqrt[4]{\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2)}$, παίρνουμε το θεώρημα. □

Κεφάλαιο 6

Εντροπία και η εικασία KLS

6.1 Εντροπία και η ισοτροπική σταθερά

Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν f είναι η πυκνότητα του X, έχουμε ορίσει την ισοτροπική του σταθερά ως εξής:

$$L_X := L_f = \left(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\right)^{\frac{1}{n}}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$L_X \leqslant ef(0)^{1/n}.$$

Το επόμενη θεώρημα συσχετίζει την L_X με την εντροπία.

Θεώρημα 6.1.1 (Ball). *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $\delta \in (0,1)$ τέτοια ώστε*

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Ent}(X) \geqslant \delta(\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X)) \tag{6.1.1}$$

όπου Y είναι ένα ανεξάρτητο αντίτυπο του X. Τότε,

$$L_X \leqslant e^{1+\frac{2}{\delta}}.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$-\log f(0) \leqslant \mathrm{Ent}(X) \leqslant -\log f(0) + n. \tag{6.1.2}$$

Για την απόδειξη αυτής της ανισότητας, γράφουμε $f = e^{-\varphi}$, όπου φ είναι μια κυρτή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Jensen και το γεγονός ότι

$\int_{\mathbb{R}^n} xf(x)dx = 0$, γράφουμε

$$-\log f(0) = \varphi(0) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(x)f(x)dx = \mathrm{Ent}(X).$$

Στην συνέχεια, χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της φ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη παίρνουμε

$$\mathrm{Ent}(X) - \varphi(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,(\varphi(x) - \varphi(0))\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\langle \nabla\varphi(x), x\rangle dx = n.$$

Αυτό αποδεικνύει την (6.1.2).

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1 θα δείξουμε πρώτα ότι

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) \leqslant -\log f(0) + 2n. \tag{6.1.3}$$

Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα του $\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ δίνεται από την

$$h(x) = 2^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)f(y)dy.$$

Υποθέτοντας πρώτα ότι η f είναι άρτια, και παίρνοντας υπ' όψιν το ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη, βλέπουμε ότι

$$h(0) = 2^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f^2(y)dy \geqslant 2^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(2y)f(0)dy = 2^{-n/2}f(0).$$

Τότε, η (6.1.2) μας δίνει

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) \leqslant \frac{n}{2}\log 2 - \log f(0) + n \leqslant -\log f(0) + \frac{3}{2}n.$$

Για την γενική περίπτωση, όπου η f δεν είναι απαραίτητα άρτια, θεωρούμε ανεξάρτητα αντίτυπα Y, X', Y' του X και παρατηρούμε ότι τα $\frac{X-X'}{\sqrt{2}}$ και $\frac{Y-Y'}{\sqrt{2}}$ είναι ανεξάρτητα συμμετρικά λογαριθμικά κοίλα τυχαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα $g(x) = 2^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n} f(x+y)f(y)\,dy$. Το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω δείχνει ότι $g(0) \geqslant 2^{-n/2}f(0)$. Από την ανισότητα Shannon-Stam και το φράγμα που αποδείξαμε στην συμμετρική περίπτωση, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) &\leqslant \mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y-X'-Y'}{\sqrt{4}}\right) = \mathrm{Ent}\left(\frac{\frac{X-X'}{\sqrt{2}} + \frac{Y-Y'}{\sqrt{2}}}{\sqrt{2}}\right)\\ &\leqslant -\log g(0) + \frac{3}{2}n\\ &\leqslant -\log f(0) + 2n.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (6.1.3). Τώρα, λόγω της υπόθεσής μας για την εντροπία, μπορούμε να γράψουμε

$$(1-\delta)\mathrm{Ent}(X) \leqslant \mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) - \delta\mathrm{Ent}(G) \leqslant \mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right), \tag{6.1.4}$$

(χρησιμοποιώντας επίσης την $\mathrm{Ent}(G) \geqslant 0$). Συνδυάζοντας την (6.1.4) με την (6.1.2) καταλήγουμε στην

$$(1-\delta)(-\log f(0)) \leqslant -\log f(0) + 2n,$$

που είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του θεωρήματος. □

Στην επόμενη παράγραφο θα δούμε ότι αν η πυκνότητα f του X ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά κ τότε η (6.1.1) ισχύει με κάποια σταθερά $\delta = \delta(\kappa)$ που εξαρτάται μόνο από το κ. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα 6.1.2 (Ball-Nguyen)**.** *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα f του X ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $\kappa > 0$. Αν Y είναι ένα ανεξάρτητο αντίτυπο του X τότε*

$$\mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right) - \mathrm{Ent}(X) \geqslant \frac{\kappa}{4(1+\kappa)}\left(\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X)\right),$$

όπου G είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$.

Παίρνοντας υπ' όψιν το Θεώρημα 6.1.1 έχουμε το

Θεώρημα 6.1.3 (Ball-Nguyen)**.** *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η πυκνότητα f του X ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $\kappa > 0$. Τότε,*

$$L_X \leqslant e^{1+\frac{8(1+\kappa)}{\kappa}}.$$

Είναι γνωστό ότι αν η πυκνότητα f ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου τυχαίου διανύσματος X στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά κ, τότε $\kappa \leqslant 1$. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε την εκτίμηση του Θεωρήματος 6.1.3 στην απλούστερη μορφή $L_X \leqslant e^{17/\kappa}$. Ειδικότερα, το Θεώρημα 6.1.3 δείχνει ότι η εικασία KLS έχει σαν συνέπεια την εικασία του υπερεπιπέδου, και μάλιστα η συνεπαγωγή ισχύει ξεχωριστά για κάθε τυχαίο διάνυσμα, ανεξάρτητα από το αν κάποια από τις δύο εικασίες ισχύει γενικά, για όλα τα ισοτροπικά τυχαία διανύσματα.

6.2 Εντροπία και φασματικό κενό

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2 με βάση το άρθρο των Ball και Nguyen [11].

Έστω X ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με αρκετά ομαλή πυκνότητα f. Αντί για την εντροπία θα προτιμήσουμε να δουλέψουμε με την *πληροφορία Fisher* του X η οποία ορίζεται ως εξής:

$$J(X) = J(f) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\nabla f\|_2^2}{f}. \tag{6.2.1}$$

6.2.1 Πληροφορία Fisher για ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα τυχαία διανύσματα

Δείχνουμε πρώτα ότι, ανάμεσα σε όλα τα ισοτροπικά τυχαία διανύσματα, ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα έχει την ελάχιστη δυνατή πληροφορία Fisher.

Πρόταση 6.2.1. *Έστω X ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $J(X) \geqslant J(G)$, όπου G είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Υπολογίζουμε πρώτα την $J(G)$. Αν συμβολίσουμε με g την πυκνότητα του G, τότε

$$J(G) = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|\nabla g\|^2}{g} = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 e^{-\|x\|_2^2/2} dx = n.$$

Γράφουμε f για την πυκνότητα του X. Τότε,

$$\begin{aligned} 0 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \frac{\nabla f(x)}{f(x)} + x \right\|_2^2 f(x) dx &= J(X) + 2\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f(x), x\rangle dx + \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 f(x) dx \\ &= J(X) + 2\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n x_i \frac{\partial f(x)}{\partial x_i} dx + n \\ &= J(X) - 2n\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx + n = J(X) - J(G), \end{aligned}$$

όπου, για την τελευταία ισότητα, χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση κατά μέρη. □

Είναι γνωστό (βλέπε [5] ή [14]) ότι η πληροφορία Fisher του X σχετίζεται με την παράγωγο της εντροπίας κατά μήκος της ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck που αντιστοιχεί στο X και μπορεί να οριστεί ως εξής. Αν X είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με πυκνότητα f τότε, για κάθε $t \geqslant 0$, θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα

$$X_t = e^{-t}X + \sqrt{1 - e^{-2t}}G,$$

και γράφουμε f_t για την πυκνότητά του. Ο γεννήτορας L της ημιομάδας $\{f_t\}_{t\geqslant 0}$ ορίζεται από την εξίσωση

$$\frac{\partial}{\partial t} f_t(x) = L(f_t)(x) := \Delta f_t(x) + \mathrm{div}(x f_t(x)) \tag{6.2.2}$$

Είναι γνωστό ότι αν ξεκινήσουμε την χρονική στιγμή $t = 0$ με μια ομαλή πυκνότητα f, τότε η πυκνότητα f_t είναι γνήσια θετική για $t > 0$. Είναι επίσης C^∞ στον $\mathbb{R}^n$, και τόσο η f_t όσο και οι παράγωγοί της φθίνουν εκθετικά προς το 0 στο ∞ (βλέπε [37] για μια πλήρη απόδειξη αυτών των ισχυρισμών). Άμεσα βλέπουμε το εξής.

Πρόταση 6.2.2. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω G ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα. Τότε,*

$$\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X) = \int_0^\infty (J(f_t) - n)dt.$$

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι από το θεώρημα του Green και την (6.2.2) μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{Ent}(f_t) &= -\frac{\partial}{\partial t}\int_{\mathbb{R}^n} f_t \log f_t \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_t}{\partial t}\log f_t - \int_{\mathbb{R}^n} f_t \frac{\partial(\log f_t)}{\partial t} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} L(f_t)\log f_t - \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial f_t}{\partial t} \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta f_t \log f_t - \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{div}(x f_t(x))\log f_t(x)\,dx \\
&= J(f_t) - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i f_t(x))\log f_t(x)\,dx,
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει ολοκλήρωση κατά μέρη. Με διαδοχικές ολοκληρώσεις κατά μέρη στον τελευταίο προσθετέο, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\partial}{\partial x_i}(x_i f_t(x))\log f_t\,dx = -\int_{\mathbb{R}^n} x_i \frac{\partial f_t}{\partial x_i} = \int_{\mathbb{R}^n} f_t.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς t έχουμε το ζητούμενο. □

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει την συμπεριφορά της f_t σε σχέση με την ανισότητα Poincaré.

Πρόταση 6.2.3. *Έστω X ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα το οποίο ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά $\kappa > 0$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε ότι η f_t ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με την ίδια σταθερά.*

Απόδειξη. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι αν X_1 και X_2 είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την ανισότητα Poincaré

$$\mathrm{Var}[h(X_i)] \leqslant a_i \mathbb{E}\|\nabla h(X_i)\|_2^2, \qquad i = 0, 1$$

για κάθε ομαλή συνάρτηση h στον $\mathbb{R}^n$ (με σταθερές a_i) τότε

$$\mathrm{Var}[h(\sqrt{\lambda}X_1+\sqrt{1-\lambda}X_2)]\leqslant(\lambda a_1+(1-\lambda)a_2)\mathbb{E}\|\nabla h(\sqrt{\lambda}X_1+\sqrt{1-\lambda}X_2)\|_2^2$$

για κάθε ομαλή συνάρτηση h στον $\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζουμε αυτήν την ανισότητα για τα $X_1=X$, $X_2=G$ με $\lambda=e^{-2t}$ (βλέπουμε μάλιστα ότι η σταθερά $\lambda a_1+(1-\lambda)a_2$ είναι καλύτερη, $\leqslant a_1$, διότι η σταθερά Poincaré του τυπικού μέτρου Gauss είναι ίση με 1 ενώ η αντίστοιχη σταθερά οποιουδήποτε άλλου ισοτροπικού μέτρου είναι το πολύ ίση με 1, όπως μπορεί κανείς να ελέγξει εφαρμόζοντας την (3.1.8) για την συνάρτηση $x\mapsto\langle x,e_1\rangle$). □

Θεωρούμε δύο ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα X,Y και ορίζουμε

$$X_t=e^{-t}X+\sqrt{1-e^{-2t}}G_1\quad\text{και}\quad Y_t=e^{-t}Y+\sqrt{1-e^{-2t}}G_2,$$

όπου G_1,G_2 είναι ανεξάρτητα τυπικά κανονικά τυχαία διανύσματα, ανεξάρτητα από τα X και Y. Τότε,

$$\frac{X_t+Y_t}{\sqrt{2}}=e^{-t}\frac{X+Y}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-e^{-2t}}G,$$

όπου $G=\frac{G_1+G_2}{\sqrt{2}}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η πυκνότητα του X έχει συμπαγή φορέα, οπότε η πυκνότητα του X_t μπορεί να υποτεθεί αρκετά ομαλή, και έχει όλες τις ιδιότητες ολοκληρωσιμότητας που απαιτούνται στα επόμενα.

Λήμμα 6.2.4. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η f_t είναι λογαριθμικά κοίλη, δηλαδή έχει την μορφή $f_t=e^{-\varphi_t}$ για κάποια κυρτή συνάρτηση φ_t στον $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον,*

$$\frac{\partial}{\partial t}J(f_t)=2J(f_t)-2\mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f_t\,(\mathrm{Hess}\,\varphi_t)^2\right).$$

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η f_t είναι λογαριθμικά κοίλη προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Prékopa-Leindler. Για τον δεύτερο ισχυρισμό, εφαρμόζοντας ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$J(f_t)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|\nabla f_t\|_2^2}{f_t}=-\int_{\mathbb{R}^n}f_t\Delta\log f_t=\mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n}f_t\;\mathrm{Hess}\,\varphi_t\right).\tag{6.2.3}$$

Για ευκολία στον συμβολισμό γράφουμε $\partial_j(f_t)$ για την μερική παράγωγο της f_t ως προς x_j. Παρατηρούμε ότι

$$J(f_t)=\int_{\mathbb{R}^n}\frac{\|\nabla f_t\|_2^2}{f_t}=\sum_{i=1}^n\int_{\mathbb{R}^n}\frac{(\partial_i(f_t))^2}{f_t}.$$

Χρησιμοποιώντας και την (6.2.2) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}J(f_t) &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} 2\frac{\partial_i(f_t)\cdot\partial_i\partial_t f_t}{f_t} - \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \partial_t f_t\left(\frac{\partial_i f_t}{f_t}\right)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} -2\partial_i(\varphi_t)\cdot\partial_i\left(\sum_{j=1}^n \partial_j\left((\partial_j\varphi_t + x_j)f_t\right)\right) \\ &- \sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^n \partial_j\left(\left(-\partial_j\varphi_t + x_j\right)f_t\right)\right)(\partial_i\varphi_t)^2.\end{aligned}$$

Αν συμβολίσουμε με A, B τους τελευταίους δύο όρους, χρησιμοποιώντας την (6.2.3) και ολοκλήρωση κατά μέρη, παίρνουμε

$$\begin{aligned}A &= 2\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{ij}\varphi_t)\cdot\partial_i\left(\left(-\partial_j\varphi_t + x_j\right)f_t\right)\Big) \\ &= 2J(f_t) - 2\mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,(\mathrm{Hess}\ \varphi_t)^2\right) + 2\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f_t(\partial_{ij}\varphi_t)(\partial_i\varphi_t)(\partial_j\varphi_t - x_j).\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας ξανά κατά μέρη, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}B &= -\sum_{i=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{j=1}^n \partial_j\left(\left(-\partial_j\varphi_t + x_j\right)f_t\right)\right)(\partial_i\varphi_t)^2 \\ &= 2\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f_t(-\partial_j\varphi_t + x_j)(\partial_i\varphi_t)(\partial_{ij}\varphi_t) \\ &= -2\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f_t(\partial_{ij}\varphi_t)(\partial_i\varphi_t)(\partial_j\varphi_t - x_j).\end{aligned}$$

Προσθέτοντας αυτές τις δύο ανισότητες έχουμε το συμπέρασμα. □

Λήμμα 6.2.5. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω G ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα. Τότε,*

$$2\int_0^\infty e^{-2t}(J(f_t) - n)dt \geqslant \mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X).$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 6.2.4 έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(J(f_t) - n) &= -2(J(f_t) - n) - 2\mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,(\mathrm{Hess}\ \varphi_t - I)^2\right) \\ &\leqslant -2(J(f_t) - n).\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας αυτήν την ανισότητα στο $(t, +\infty)$ παίρνουμε

$$J(f_t) - n \geqslant 2(\mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X_t))$$

για κάθε $t > 0$, και με ολοκλήρωση κατά μέρη προκύπτει ότι

$$\int_0^\infty e^{-2t}(J(f_t) - n)dt \geqslant \mathrm{Ent}(G) - \mathrm{Ent}(X) - \int_0^\infty e^{-2t}(J(f_t) - n)dt,$$

που είναι ο ισχυρισμός του Λήμματος. □

6.2.2 Πληροφορία Fisher για περιθώρια μέτρα

Σύμφωνα με το Λήμμα 6.2.4, η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial t}J(f_t)$ της $J(f_t)$ εξαρτάται από την ποσότητα $\mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,(\mathrm{Hess}\ \varphi_t)^2\right)$. Το επόμενο Λήμμα περιγράφει την συμπεριφορά αυτής της ποσότητας για τις περιθώριες πυκνότητες.

Λήμμα 6.2.6. *Έστω $w = e^{-\phi} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^+$ μια θετική ομαλή συνάρτηση και έστω E ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την συνάρτηση*

$$h(x) = \pi_E w(x) = \int_{E^\perp} w(x+y)dy = \int_{E^\perp} e^{-\phi(x+y)}dy.$$

και την γράφουμε στη μορφή $h(x) = e^{-\psi(x)}$. Αν συμβολίσουμε με P_E την ορθογώνια προβολή στον E, τότε για κάθε $x \in E$ έχουμε

$$h(x)\mathrm{Hess}\psi(x) \leqslant \int_{E^\perp} w(x+y)P_E(\mathrm{Hess}\phi(x+y))P_E dy \tag{6.2.4}$$

με την έννοια των τελεστών. Επιπλέον, αν $\mathrm{Hess}\psi(x) \geqslant 0$, τότε

$$\mathrm{tr}\left((\mathrm{Hess}(\psi(x)))^2\, h(x)\right) \leqslant \int_{E^\perp} \mathrm{tr}\left((P_E(\mathrm{Hess}\phi(x+y))P_E)^2\right) w(x+y)dy. \tag{6.2.5}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της h έχουμε τις ταυτότητες

$$\nabla h(x) = \int_{E^\perp} P_E(\nabla w(x+y))dy$$

και

$$\mathrm{Hess}\ h(x) = \int_{E^\perp} P_E(\mathrm{Hess}\ w(x+y))P_E dy.$$

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$h(x)\mathrm{Hess}\ \psi(x) = h(x)\mathrm{Hess}\ (-\log h)(x) = \frac{\nabla h(x) \otimes \nabla h(x)}{h(x)} - \mathrm{Hess}\ h(x).$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις σχέσεις στον πρώτο ισχυρισμό του Λήμματος, βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{\nabla h(x)\otimes\nabla h(x)}{h(x)}\leqslant\int_{E^\perp}\frac{P_E\nabla w(x+y)\otimes P_E\nabla w(x+y)}{w(x+y)}dy.$$

Η τελευταία ανισότητα γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned}&\int_{E^\perp}P_E(\nabla w(x+y))dy\otimes\int_{E^\perp}P_E(\nabla w(x+y))dy\\ &\leqslant\int_{E^\perp}\frac{P_E\nabla w(x+y)\otimes P_E\nabla w(x+y)}{w(x+y)}dy\cdot\int_{E^\perp}w(x+y)dy,\end{aligned}$$

η οποία επαληθεύεται με χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, χρησιμοποιούμε πρώτα την παρατήρηση ότι αν A,B είναι συμμετρικοί τελεστές με $A\geqslant B$, τότε

$$\mathrm{tr}(AH)\geqslant\mathrm{tr}(BH)$$

για κάθε τελεστή $H\geqslant 0$. Συνεπώς, αν Hess $\psi(x)\geqslant 0$, παίρνουμε

$$\mathrm{tr}\left[(\mathrm{Hess}\ \psi(x))^2\,h(x)\right]\leqslant\int_{E^\perp}\mathrm{tr}\left[P_E(\mathrm{Hess}\varphi(x+y))P_E\mathrm{Hess}\psi(x)\right]w(x+y)dy.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι το δεξιό μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι μικρότερο ή ίσο από

$$\Big(\int_{E^\perp}\mathrm{tr}\left[(P_E\mathrm{Hess}\ \varphi(x+y)P_E)^2\right]w(x+y)dy\Big)^{1/2}\Big(\int_{E^\perp}\mathrm{tr}\left[(\mathrm{Hess}\psi(x))^2\right]w(x+y)dy\Big)^{1/2}.$$

Από την άλλη πλευρά, το δεύτερο ολοκλήρωμα ισούται με $\mathrm{tr}\left[(\mathrm{Hess}\ \psi(x))^2\,h(x)\right]$, και αυτό δίνει

$$\mathrm{tr}\left[(\mathrm{Hess}\ \psi(x))^2\,h(x)\right]\leqslant\int_{E^\perp}\mathrm{tr}\left[(P_E\mathrm{Hess}\ \varphi(x+y)P_E)^2\right]w(x+y)dy$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2.6 παίρνουμε την βασική ανισότητα που θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2.

Θεώρημα 6.2.7. *Έστω X ένα λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, με ομαλή πυκνότητα της μορφής $f=e^{-\varphi}$, όπου φ είναι μια κυρτή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, και έστω Y ένα ανεξάρτητο αντίτυπο του X. Συμβολίζουμε με $h=e^{-\psi}$ την πυκνότητα του τυχαίου διανύσματος*

$\frac{X+Y}{\sqrt{2}}$ *και θέτουμε*

$$K = \mathrm{tr}\left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{Hess}\ \varphi)^2 f\right],$$
$$K_2 = \mathrm{tr}\left[\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{Hess}\ \psi)^2\ h\right],$$
$$M = \mathrm{tr}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{Hess}\ \varphi) f\right)^2\right].$$

Τότε,

$$K_2 \leqslant \frac{K+M}{2}.$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα Prékopa-Leindler προκύπτει ότι η h είναι λογαριθμικά κοίλη, άρα Hess $\psi \geqslant 0$. Συμβολίζουμε με $w(x,y) = f(x)f(y)$ την πυκνότητα του τυχαίου διανύσματος (X,Y) στον $\mathbb{R}^{2n}$. Θέτουμε

$$e_i = \left(0,\dots,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\dots,0,\frac{1}{\sqrt{2}},0,\dots\right)$$

όπου οι μη μηδενικές συντεταγμένες είναι η i-οστή και η $(n+i)$-οστή. Γράφουμε E για τον υπόχωρο του $\mathbb{R}^{2n}$ που παράγεται από την ορθοκανονική βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$. Ολοκληρώνοντας την (6.2.5) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} K_2 &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{2n}} w(x,y)\mathrm{tr}\left[\left[\left\langle \mathrm{Hess}(-\log\ w)(x,y)e_i,e_j\right\rangle\right]_{i,j}^2\right] dxdy \\ &= \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)f(y)\sum_{i,j=1}^n \langle \mathrm{Hess}(-\log\ w)(x,y)e_i,e_j\rangle^2 dxdy. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\langle \mathrm{Hess}(-\log w)(x,y)e_i,e_j\rangle^2 = \frac{1}{4}\left(\partial_{ji}\varphi(x) + \partial_{ji}\varphi(y)\right)^2.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} K_2 &\leqslant \frac{1}{4}\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^{2n}} f(x)f(y)\left((\partial_{ji}\varphi(x))^2 + 2\partial_{ji}\varphi(x)\partial_{ji}\varphi(y) + (\partial_{ji}\varphi(y))^2\right) dxdy \\ &= \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} f(\partial_{ji}\varphi)^2 + \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n\left(\int_{\mathbb{R}^n} f\partial_{ji}\varphi\right)^2 \\ &= \frac{K+M}{2} \end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2. Θεωρούμε τα λογαριθμικά κοίλα τυχαία διανύσματα X_t με πυκνότητα $f_t = e^{-\varphi_t}$. Από την (6.2.3) γνωρίζουμε ότι

$$J(t) := J(X_t) = \mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_t \mathrm{Hess}\ \varphi_t\right).$$

Θέτουμε

$$K(t) := \mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,(\mathrm{Hess}\ \varphi_t)^2\right) = -\frac{1}{2}e^{2t}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2t}J(t)\right),$$

όπου η ισότητα προκύπτει από το Λήμμα 6.2.4. Αν $Z_t = \frac{X_t+Y_t}{\sqrt{2}}$ και αν $h_t = e^{-\psi_t}$ είναι η λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα του Z_t, έχουμε επίσης

$$J_2(t) := J(Z_t) = \mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h_t \mathrm{Hess}\ \psi_t\right)$$

και θέτουμε

$$K_2(t) := \mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} h_t\,(\mathrm{Hess}\ \psi_t)^2\right) = -\frac{1}{2}e^{2t}\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2t}J_2(t)\right).$$

Από το Θεώρημα 6.2.7 παίρνουμε

$$K_2(t) \leqslant \frac{K(t)+M(t)}{2} = K(t) - \frac{K(t)-M(t)}{2}, \tag{6.2.6}$$

όπου

$$M(t) := \mathrm{tr}\left[\left(\int_{\mathbb{R}^n} (\mathrm{Hess}\ \varphi_t) f\right)^2\right].$$

Ξαναγράφουμε την (6.2.6) στη μορφή

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(e^{-2t}(J_2(t)-J(t))\right) \geqslant e^{-2t}(K(t)-M(t)). \tag{6.2.7}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.3, η f_t ικανοποιεί την ανισότητα Poincaré με σταθερά κ. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Poincaré για την πυκνότητα $f_t = e^{-\varphi_t}$ και τις συναρτήσεις

$$s_i(x) = \partial_i\varphi_t(x) - \sum_{j=1}^n x_j \int_{\mathbb{R}^n} (\partial_{ij}\varphi_t) f_t,$$

για τις οποίες ισχύει $\int s_i f_t = 0$. Προσθέτοντας τις ανισότητες $\int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla s_i\|_2^2 f_t \geqslant \kappa \int_{\mathbb{R}^n} s_i^2 f_t$, που προκύπτουν από την ανισότητα Poincaré, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_t\,(\mathrm{Hess}\ \varphi_t)^2\right) - \mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_t \mathrm{Hess}\ \varphi_t\right)^2 \\ \geqslant \kappa\left(\mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_t \mathrm{Hess}\ \varphi_t\right)^2 - \mathrm{tr}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f_t \mathrm{Hess}\ \varphi_t\right)\right).\end{aligned}$$

Ξαναγράφουμε αυτήν την ανισότητα στην μορφή $K(t)-M(t) \geqslant \kappa\,(M(t)-J(t))$, ή ισοδύναμα,

$$K(t)-M(t) \geqslant \frac{\kappa}{\kappa+1}\,(K(t)-J(t))\,.$$

Τότε, από την (6.2.7) παίρνουμε την

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(e^{-2t}(J_2(t)-J(t))\Big) \geqslant \frac{\kappa}{\kappa+1}e^{-2t}(K(t)-J(t)),$$

την οποία ολοκληρώνουμε από το t ως το ∞, για να καταλήξουμε στην

$$J(t)-J_2(t) \geqslant \frac{\kappa}{\kappa+1}e^{2t}\int_t^{\infty} e^{-2s}\,(K(s)-J(s))\,ds.$$

Τέλος, από την Πρόταση 6.2.3 και την Πρόταση 6.2.2 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ent}\left(\frac{X+Y}{\sqrt{2}}\right)-\mathrm{Ent}(X) &= \int_0^{\infty}(J(t)-J_2(t))dt \\
&\geqslant \frac{\kappa}{\kappa+1}\int_0^{\infty} e^{2t}\int_t^{\infty} e^{-2s}\,(K(s)-J(s))\,dsdt \\
&= \frac{\kappa}{2(1+\kappa)}\int_0^{\infty}(1-e^{-2t})(K(t)-J(t))dt \\
&= \frac{\kappa}{2(1+\kappa)}\int_0^{\infty}(1-e^{-2t})\Big(-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}(J(t)-n)\Big)dt \\
&= \frac{\kappa}{2(1+\kappa)}\int_0^{\infty} e^{-2t}(J(t)-n)dt.
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με το Λήμμα 6.2.4 παίρνουμε το ζητούμενο. □

Κεφάλαιο 7

Ελαχιστική συνέλιξη και η εικασία KLS

7.1 Ιδιότητα (τ)

Ορισμός 7.1.1 (ελαχιστική συνέλιξη)**.** Έστω f και g Borel μετρήσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $f\Box g$ την *ελαχιστική συνέλιξη* των f και g, που ορίζεται ως εξής:

$$(f\Box g)(x) = \inf\{f(x-y) + g(y) : \ y \in \mathbb{R}^n\}.$$

Αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και φ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι το ζεύγος (μ, φ) έχει *την ιδιότητα* (τ) αν, για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\Box\varphi}d\mu\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f}d\mu\right) \leqslant 1.$$

Ξεκινώντας από τον ορισμό της ιδιότητας (τ) μπορούμε να δείξουμε κάποιες πρώτες βασικές ιδιότητες.

Λήμμα 7.1.2. *Αν τα (μ_i, φ_i) έχουν την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, 2$, τότε το $(\mu_1 \otimes \mu_2, \varphi)$ έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2}$, όπου $\varphi(x_1, x_2) = \varphi_1(x_1) + \varphi_2(x_2)$.*

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{R}^{n_1} \times \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε

$$\psi(y) = -\log\left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-f(x,y)}d\mu_1(x)\right)$$

και $f^y(x) := f(x, y)$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (τ) για το ζεύγος (μ_1, φ_1) βλέπουμε ότι, για κάθε $y, y_1 \in \mathbb{R}^{n_2}$,

$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{f\Box\varphi(x,y)}d\mu_1(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{f^{y_1}\Box\varphi_1(x)+\varphi_2(y-y_1)}d\mu_1(x) \leqslant e^{\psi(y_1)+\varphi_2(y-y_1)}.$$

Έπεται ότι
$$\int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{f\Box\varphi(x,y)}d\mu_1(x) \leqslant e^{\psi\Box\varphi_2(y)}.$$
Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας την ιδιότητα (τ) για το ζεύγος (μ_2,φ_2), βλέπουμε ότι
$$\begin{aligned}\int e^{f\Box\varphi}d(\mu_1\otimes\mu_2) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{\psi\Box\varphi_2(y)}d\mu_2(y) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-\psi(y)}d\mu_2(y)\right)^{-1}\\ &\leqslant \left(\int e^{-f}d\mu_1\otimes d\mu_2\right)^{-1}.\end{aligned}$$
Έπεται ότι το $(\mu_1\otimes\mu_2,\varphi)$ έχει την ιδιότητα (τ). □

Αν μ_1 και μ_2 είναι μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, η συνέλιξή τους $\mu_1*\mu_2$ ορίζεται μέσω της
$$\int_{\mathbb{R}^n} h\ d(\mu_1*\mu_2) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} h(x+y)d\mu_1(x)d\mu_2(y).$$
Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι τα μ_1 και μ_2 είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue, με πυκνότητες f_1 και f_2 αντίστοιχα, τότε το $\mu_1*\mu_2$ είναι το μέτρο που έχει πυκνότητα την f_1*f_2.

Λήμμα 7.1.3. *Αν τα (μ_i,φ_i) έχουν την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$, $i=1,2$, τότε το ζεύγος $(\mu_1*\mu_2,\varphi_1\Box\varphi_2)$ έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι παρόμοια με αυτήν του Λήμματος 7.1.2. Έστω g μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την $g_x:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ με $g_x(y):=g(x+y)$. Τότε, για κάθε x έχουμε ότι η g_x είναι φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ θέτοντας
$$e^{-h(x)} = \int e^{-g_x}\,d\mu_2.$$
Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το (μ_2,φ_2) έχει την ιδιότητα (τ) παίρνουμε:
$$\int e^{\varphi_2\Box g_x}\,d\mu_2 \leqslant e^{h(x)},$$
το οποίο με την σειρά του μας δίνει
$$(h\Box\varphi_1)(x) \geqslant \log\int \exp([g\Box(\varphi_1\Box\varphi_2)](x+y))\,d\mu_2(y).$$
Συνδυάζοντας την τελευταία ανισότητα με το γεγονός ότι το (μ_1,φ_1) έχει την ιδιότητα (τ) παίρνουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 7.1.4. *Υποθέτουμε ότι το (μ_1,φ_1) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^{n_1}$. Έστω $\varphi_2:\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}$ μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση και $\psi:\mathbb{R}^{n_1}\to\mathbb{R}^{n_2}$ μια συνάρτηση με την ιδιότητα $\varphi_2(\psi(x)-\psi(y))\leqslant\varphi_1(x-y)$ για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^{n_1}$. Έστω μ_2 το μέτρο πιθανότητας $\psi(\mu_1)$ στον $\mathbb{R}^{n_2}$, δηλαδή, $\mu_2(A)=\mu_1(\psi^{-1}(A))$ για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$. Τότε, το (μ_2,φ_2) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^{n_2}$.*

Απόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι

$$[(f \circ \psi)\square\varphi_1] \geqslant [(f\square\varphi_2) \circ \psi]$$

για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^{n_2} \to \mathbb{R}$. Από την $\mu_2 = \psi(\mu_1)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{(f\square\varphi_2)(y)} d\mu_2(y) &= \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{((f\square\varphi_2)\circ\psi)(x)} d\mu_1(x)\\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{((f\circ\psi)\square\varphi_1)(x)} d\mu_1(x)\\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n_1}} e^{-(f\circ\psi)(x)} d\mu_1(x)\right)^{-1}\\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^{n_2}} e^{-f(y)} d\mu_2(y)\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι το (μ_2, φ_2) έχει την ιδιότητα (τ). □

Η ιδιότητα (τ) για ένα ζεύγος (μ, φ) συνδέεται άμεσα με τις ιδιότητες συγκέντρωσης του μέτρου μ όπως φαίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7.1.5. *Υποθέτουμε ότι το (μ, φ) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$, έχουμε*

$$\mu\Big(x \notin A + B_\varphi(t)\Big) \leqslant (\mu(A))^{-1} e^{-t},$$

όπου $B_\varphi(t) = \{\varphi \leqslant t\}$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \geqslant t$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_{A,n}(x) = n\mathbf{1}_{A^c}(x)$. Παρατηρούμε ότι αν $x \notin A + B_\varphi(t)$, τότε $(f_{A,n}\square\varphi)(x) \geqslant t$. Πράγματι,

$$(f_{A,n}\square\varphi)(x) = \inf_z \{f_{A,n}(z) + \varphi(x - z)\}.$$

Αν $z \in A$, τότε $f_{A,n}(z) = 0$ και, αφού $x \notin A + B_\varphi(t)$, έχουμε $\varphi(x - z) \geqslant t$. Συνεπώς,

$$f_{A,n}(z) + \varphi(x - z) = \varphi(x - z) \geqslant t.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $z \notin A$ τότε $f_{A,n}(z) = n$ και $\varphi(x - z) \geqslant 0$, άρα

$$f_{A,n}(z) + \varphi(x - z) \geqslant n \geqslant t.$$

Τώρα, από την ιδιότητα (τ) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{f_{A,n}\square\varphi} d\mu &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f_{A,n}} d\mu\right)^{-1} = \left(\int_A e^{-f_{A,n}} d\mu + \int_{\mathbb{R}^n\setminus A} e^{-f_{A,n}} d\mu\right)^{-1}\\ &= (\mu(A) + e^{-n}(1 - \mu(A)))^{-1} \leqslant 1/\mu(A).\end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$\begin{aligned} e^t\mu(x \notin A + B_\varphi(t)) &\leqslant e^t\mu(x : (f_{A,n}\Box\varphi)(x) \geqslant t) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} e^{f_{A,n}\Box\varphi} d\mu \leqslant (\mu(A))^{-1}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $\mu\Big(x \notin A + B_\varphi(t)\Big) \leqslant (\mu(A))^{-1}e^{-t}$, όπως θέλαμε. □

Η επόμενη πρόταση δίνει μια ισχυρότερη εκτίμηση του ίδιου τύπου.

Πρόταση 7.1.6. *Υποθέτουμε ότι το (μ, φ) έχει την ιδιότητα (τ) στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$, έχουμε*

$$\mu(A + B_\varphi(t)) \geqslant \frac{e^t\mu(A)}{(e^t - 1)\mu(A) + 1}. \tag{7.1.1}$$

Ειδικότερα, για κάθε $t > 0$,

$$\text{αν } \ \mu(A) > 0 \quad \text{έπεται ότι} \quad \mu(A + B_\varphi(t)) \geqslant \min\{e^{t/2}\mu(A), 1/2\}, \tag{7.1.2}$$

$$\text{αν } \ \mu(A) \geqslant 1/2 \quad \text{έπεται ότι} \quad 1 - \mu(A + B_\varphi(t)) \leqslant e^{-t/2}(1 - \mu(A)) \tag{7.1.3}$$

και

$$\text{αν } \ \mu(A) = \nu(-\infty, x] \quad \text{έπεται ότι} \quad \mu(A + B_\varphi(t)) \geqslant \nu(-\infty, x + t/2], \tag{7.1.4}$$

όπου ν είναι το συμμετρικό εκθετικό μέτρο με πυκνότητα την $\frac{1}{2}e^{-|x|}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $f(x) = t\,\mathbf{1}_{A^c}$. Αν $x \notin A+B_\varphi(t)$ τότε έχουμε $f\Box\varphi(x) = \inf_y(f(y)+\varphi(x-y)) \geqslant t$, διότι είτε $y \notin A$, και τότε $f(y) = t$, ή $y \in A$, και τότε $\varphi(x - y) \geqslant t$ από την υπόθεση ότι $x \notin A + B_\varphi(t)$. Εφαρμόζοντας την ιδιότητα (τ) για την f παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} e^{f\Box\varphi(x)} d\mu(x) \int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)} d\mu(x) \\ &\geqslant \Big[\mu(A + B_\varphi(t)) + e^t(1 - \mu(A + B_\varphi(t)))\Big]\left[\mu(A) + e^{-t}(1 - \mu(A))\right]. \end{aligned}$$

Κατόπιν, λύνοντας ως προς $\mu(A + B_\varphi(t))$ παίρνουμε την (7.1.1).

Στην συνέχεια, παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f_t(p) := e^tp/((e^t - 1)p + 1)$ είναι αύξουσα ως προς p. Έτσι, αν $p > e^{-t/2}/2$ βλέπουμε ότι $f_t(p) \geqslant f_t(e^{-t/2}/2) \geqslant 1/2$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν $p \leqslant e^{-t/2}/2$ τότε

$$(e^t - 1)p + 1 \leqslant e^{t/2} + 1 - \frac{1}{2}(e^{t/2} + e^{-t/2}) < e^{t/2},$$

παίρνουμε $f_t(p) > e^{t/2}p$ σε αυτήν την περίπτωση, και έπεται η (7.1.2).

Αν $p \geqslant 1/2$, απλώς παρατηρούμε ότι

$$1 - f_t(p) = \frac{1-p}{(e^t-1)p+1} \leqslant \frac{1-p}{(e^t+1)/2} < e^{-t/2}(1-p)$$

και έχουμε την (7.1.3).

Για τον τελευταίο ισχυρισμό θέτουμε $F(x) = \nu(-\infty, x]$ και $g_t(p) = F(F^{-1}(p) + t)$. Οι προηγούμενοι υπολογισμοί δείχνουν ότι αν $t, p > 0$ και αν $F^{-1}(p) + t/2 \leqslant 0$ ή $F^{-1}(p) \geqslant 0$, τότε $f_t(p) \geqslant g_{t/2}(p)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $g_{t+s} = g_t \circ g_s$ και $f_{t+s} = f_t \circ f_s$, μπορούμε να δούμε ότι $f_t(p) \geqslant g_{t/2}(p)$ για κάθε $t, p > 0$. Συνεπώς, η (7.1.4) προκύπτει από την (7.1.1). $\square$

7.2 Η ανισότητα συγκέντρωσης του Talagrand για το εκθετικό μέτρο γινόμενο

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε την πρώτη βασική εφαρμογή της ιδιότητας (τ). Παρουσιάζουμε την απόδειξη του Maurey [98] για την ανισότητα συγκέντρωσης του Talagrand [118] για το εκθετικό μέτρο γινόμενο.

Θεώρημα 7.2.1 (Talagrand). *Για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$,*

$$\nu_n(x \notin A + 6\sqrt{t}B_2^n + 9tB_1^n) \leqslant \frac{1}{\nu_n(A)}e^{-t},$$

όπου $\nu_n = \nu \otimes \cdots \otimes \nu$ είναι το εκθετικό μέτρο γινόμενο με πυκνότητα

$$d\nu_n(x) = \frac{1}{2^n}e^{-\|x\|_1}dx.$$

Ξεκινάμε με την μονοδιάστατη περίπτωση. Θεωρούμε την συνάρτηση $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\psi(t) = \begin{cases} t^2/18, & \text{if } |t| \leqslant 2 \\ 2(|t|-1)/9, & \text{if } |t| > 2. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η ψ είναι άρτια, κυρτή και συνεχώς παραγωγίσιμη. Θεωρούμε επίσης το μέτρο πιθανότητας μ_e στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα $\mathbf{1}_{(0,+\infty)}(x)e^{-x}$.

Πρόταση 7.2.2. *Το ζεύγος (μ_e, ψ) έχει την ιδιότητα (τ).*

Απόδειξη. Έστω f μια φραγμένη συνεχής συνάρτηση στο $(0, +\infty)$. Γράφουμε f_1 για την συνάρτηση $f \square \psi$ και θέτουμε

$$I_0 = \int_0^{+\infty} e^{-f(x)-x}dx \quad \text{και} \quad I_1 = \int_0^{+\infty} e^{f_1(y)-y}dy.$$

Για κάθε $t \in (0,1)$ ορίζουμε $x(t)$ και $y(t)$ μέσω των εξισώσεων

$$\int_0^{x(t)} e^{-f(x)-x}dx = tI_0 \text{ και } \int_0^{y(t)} e^{h(y)-y}dy = tI_1.$$

Από τον ορισμό τους, οι $x(t)$ και $y(t)$ είναι παραγωγίσιμες, με

$$x'(t) = I_0 e^{f(x(t))+x(t)} \text{ και } y'(t) = I_1 e^{-h(y(t))+y(t)}.$$

Έχουμε

$$h(y(t)) = \inf_{y\in\mathbb{R}}\{f(y) + \psi(y(t)-y)\} \leqslant f(x(t)) + \psi(y(t)-x(t)).$$

Συνεπώς,

$$y'(t) \geqslant I_1 e^{-f(x(t))-\psi(y(t)-x(t))+y(t)}.$$

Ορίζουμε

$$z(t) = \frac{x(t)+y(t)}{2} - \psi(y(t)-x(t)).$$

Τότε,

$$\begin{aligned} z'(t) &= \frac{x'(t)+y'(t)}{2} - \psi'(y(t)-x(t))(y'(t)-x'(t)) \\ &= \left(\frac{1}{2} + \psi'(y(t)-x(t))\right)x'(t) + \left(\frac{1}{2} - \psi'(y(t)-x(t))\right)y'(t). \end{aligned}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $|\psi'| \leqslant 1/2$ στο $\mathbb{R}$, άρα η $z(t)$ είναι αύξουσα.

Για συντομία γράφουμε x, y αντί για $x(t), y(t)$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\frac{1}{2}\left(ua + \frac{v}{a}\right) \geqslant \sqrt{uv}, \qquad u, v, a > 0$$

με $a = \exp(f(x))$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} z'(t) &\geqslant (1+2\psi'(y-x))I_0 e^x \frac{e^{f(x)}}{2} + (1-2\psi'(y-x))I_1 e^{-\psi(y-x)+y}\frac{e^{-f(x)}}{2} \\ &\geqslant \sqrt{1-4(\psi'(y-x))^2}\,\sqrt{I_0 I_1}e^{(x+y)/2-\psi(y-x)/2} \\ &= \sqrt{1-4(\psi'(y-x))^2}\,\sqrt{I_0 I_1}e^{(x+y)/2-\psi(y-x)}e^{\psi(y-x)/2} \\ &= \sqrt{1-4(\psi'(y-x))^2}\,\sqrt{I_0 I_1}e^{z(t)}e^{\psi(y-x)/2}. \end{aligned}$$

Ισχυρισμός: Για κάθε s,

$$\left(1-4(\psi'(s))^2\right)e^{\psi(s)} \geqslant 1.$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Αφού η ψ είναι άρτια, αρκεί να δείξουμε την ανισότητα για $s \geqslant 0$. Στο $[2,+\infty)$ έχουμε $\psi'(s) = 2/9$ και η ψ είναι αύξουσα. Αυτό αποδεικνύει ότι αν η ανισότητα ισχύει στο σημείο $s = 2$, τότε θα ισχύει για κάθε $s \geqslant 2$. Ζητάμε

$$\left(1-4(2/9)^2\right)e^{2/9} \geqslant 1,$$

ή ισοδύναμα, $e^{2/9} \geqslant 81/65$. Η τελευταία ανισότητα ισχύει, διότι

$$e^{2/9} \geqslant 1 + \frac{2}{9} + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{9}\right)^2 = \frac{101}{81} > \frac{81}{65}.$$

Για $s \in [0,2]$ έχουμε $\psi'(s) = s/9$, άρα χρειάζεται να ελέγξουμε ότι $e^{-s^2/18} \leqslant 1 - 4s^2/81$. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να ελέγξουμε ότι η συνάρτηση

$$r(u) = 1 - \frac{4u}{81} - e^{-u/18}$$

είναι μη αρνητική στο $[0,4]$. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι η r είναι κοίλη, αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε τις τιμές $r(0)$ και $r(4)$. Όμως, $r(0) = 0$ και η $r(4) \geqslant 0$ ανάγεται στην $e^{2/9} \geqslant 81/65$, την οποία έχουμε ήδη ελέγξει. $\square$

Από τον ισχυρισμό και την προηγούμενη ανισότητα βλέπουμε ότι

$$z'(t) \geqslant \sqrt{I_0 I_1}\, e^{z(t)},$$

άρα

$$\left(-e^{-z(t)}\right)' \geqslant \sqrt{I_0 I_1}.$$

Ολοκληρώνοντας στο $[0,1]$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $z(0) = 0$, παίρνουμε

$$1 \geqslant e^{-z(0)} - e^{-z(1)} = \int_0^1 \left(-e^{-z(t)}\right)' dt \geqslant \sqrt{I_0 I_1}.$$

Με άλλα λόγια,

$$\left(\int_0^\infty e^{f\Box\psi} d\mu_e\right)\left(\int_0^\infty e^{-f} d\mu_e\right) = I_0 I_1 \leqslant 1.$$

Αφού η f ήταν τυχούσα, το ζεύγος (μ_e, ψ) έχει την ιδιότητα (τ). $\square$

Θεωρούμε τώρα την συμμετρική εικόνα μ_e' του μ_e στο $(-\infty, 0)$, με πυκνότητα την $\mathbf{1}_{(-\infty,0)}(x)e^x$. Λόγω συμμετρίας, το (μ_e', ψ) έχει την ιδιότητα (τ). Αν ν είναι το άρτιο εκθετικό μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα $\frac{1}{2}e^{-|x|}$, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\nu = \mu_e * \mu_e'.$$

Από το Λήμμα 7.1.3, το ζεύγος $(\nu, \psi\Box\psi)$ έχει την ιδιότητα (τ). Παίρνοντας υπ' όψιν μας τον ορισμό της ψ, βλέπουμε ότι η $\xi := \psi\Box\psi$ δίνεται από την

$$\xi(t) = \begin{cases} t^2/36, & \text{if } |t| \leqslant 4 \\ 2(|t| - 2)/9, & \text{if } |t| > 4. \end{cases}$$

Θεωρούμε τώρα το μέτρο γινόμενο $\nu_n = \nu \otimes \cdots \otimes \nu$ (n τιμες) στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την συνάρτηση $\xi_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$\xi_n(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^n \xi(x_i).$$

Από το Λήμμα 7.1.2 παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 7.2.3. *Το ζεύγος* (ν_n, ξ_n) *έχει την ιδιότητα* (τ) *στον* $\mathbb{R}^n$. □

Από το Θεώρημα 7.2.3 και την Πρόταση 7.1.5 βλέπουμε ότι για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$,

$$\nu_n(x \notin A + \{\xi_n < t\}) \leqslant \frac{1}{\nu_n(A)} e^{-t}.$$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την ανισότητα του Talagrand.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\{\xi_n \leqslant t\} \subseteq 6\sqrt{t} B_2^n + 9t B_1^n.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ με $\xi_n(x) \leqslant t$. Ορίζουμε y και z στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής: $y_i = x_i$ αν $|x_i| \leqslant 4$ και $y_i = 0$ αλλιώς, $z_i = x_i$ αν $|x_i| > 4$ και $z_i = 0$ αλλιώς. Είναι φανερό ότι

$$x = y + z.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|y\|_2^2 = \sum_{\{i : |x_i| \leqslant 4\}} x_i^2 = 36 \sum_{\{i : |x_i| \leqslant 4\}} \xi(x_i) \leqslant 36 \xi_n(x) \leqslant 36t,$$

άρα $y \in 6\sqrt{t} B_2^n$. Επίσης, αν $|x_i| > 4$, τότε

$$\xi(x_i) = \frac{2}{9}(|x_i| - 2) \geqslant \frac{2}{9}\left(|x_i| - \frac{|x_i|}{2}\right) = \frac{|x_i|}{9},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\|z\|_1 = \sum_{\{i : |x_i| > 4\}} |x_i| \leqslant 9 \sum_{\{i : |x_i| > 4\}} \xi(x_i) \leqslant 9\xi_n(x) \leqslant 9t,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $z \in 9t B_1^n$. □

7.3 Συγκέντρωση και ιδιότητα (τ)

Οι Προτάσεις 7.1.5 και 7.1.6 δείχνουν ότι η ιδιότητα (τ) συνεπάγεται συγκέντρωση. Εδώ δείχνουμε ότι, αντίστροφα, μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ιδιότητα (τ) αν έχουμε κατάλληλες εκτιμήσεις συγκέντρωσης.

Πρόταση 7.3.1. *Έστω* φ *μια άρτια κυρτή συνάρτηση με* $\varphi(0) = 0$. *Έστω* μ *ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον* $\mathbb{R}^n$ *και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει* $\gamma > 1$ *ώστε για κάθε* $t > 0$ *και για κάθε Borel υποσύνολο* A *του* $\mathbb{R}^n$

$$\text{(7.3.1)} \qquad \text{αν } \mu(A) = \nu(-\infty, x] \quad \text{έπεται ότι} \quad \mu(A + \gamma B_\varphi(t)) \geqslant \nu(-\infty, x + \max\{t, \sqrt{t}\}],$$

όπου $B_\varphi(t) = \{\varphi \leqslant t\}$ *(συγκρίνετε με την* (7.1.4) *στην Πρόταση* 7.1.6*). Τότε, το ζεύγος* $(\mu, \varphi(\frac{\cdot}{36\gamma}))$ *έχει την ιδιότητα* (τ).

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση h στον $\mathbb{R}^k$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$A(h,t) := \{x \in \mathbb{R}^k : h(x) < t\}.$$

Έστω g μια αύξουσα δεξιά-συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την

$$\mu(A(f,t)) = \nu(A(g,t)).$$

Τότε, η κατανομή της g ως προς το ν είναι η ίδια με την κατανομή της f ως προς το μ. Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-f(x)} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}} e^{-g(x)} d\nu(x).$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\Box\varphi(\frac{\cdot}{36\gamma})} d\mu \leqslant \int_{\mathbb{R}} e^{g\Box\xi} d\nu,$$

όπου $\xi = \xi_1$ είναι η συνάρτηση κόστους για το ν στο Θεώρημα 7.2.3. Θα δείξουμε ότι για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\mu\left(A\left(f\Box\varphi(\tfrac{\cdot}{36\gamma}), t\right)\right) \geqslant \nu(A(g\Box\xi, t)).$$

Αφού η g είναι αύξουσα, εύκολα ελέγχουμε ότι το σύνολο $A(g\Box\xi, t)$ είναι ημιευθεία, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\text{(7.3.2)} \qquad \text{αν } \; g(x_1) + \xi(x_2) < t \quad \text{έπεται ότι} \quad \mu\left(A\left(f\Box\varphi(\tfrac{\cdot}{36\gamma}), t\right)\right) \geqslant \nu(-\infty, x_1 + x_2].$$

Σταθεροποιούμε x_1 και x_2 με $g(x_1) + \xi(x_2) < t$ και θεωρούμε $s_1 > g(x_1)$ και $s_2 = \xi(x_2)$ με $s_1 + s_2 < t$. Ορίζουμε $A := A(f, s_1)$. Τότε,

$$\mu(A) = \nu(A(g, s_1)) \geqslant \nu(-\infty, x_1].$$

Από τον ορισμό της ξ έπεται εύκολα ότι $x_2 \leqslant \max\{6\sqrt{s_2}, 9s_2\}$, και η υπόθεσή μας (7.3.1) δείχνει ότι

$$\mu(A + \gamma B_\varphi(36s_2)) \geqslant \nu(-\infty, x_1 + x_2].$$

Αφού $\gamma > 1$ και η φ ικανοποιεί την $\varphi(\lambda x) \leqslant \lambda\varphi(x)$ για κάθε $0 < \lambda < 1$, μπορούμε να ελέγξουμε ότι $\gamma B_\varphi(t) \subseteq B_{\varphi(\frac{\cdot}{\gamma})}(t)$ για κάθε $t > 0$, άρα

$$\begin{aligned} A(f, s_1) + \gamma B_\varphi(36s_2) &\subseteq A(f, s_1) + B_{\varphi(\frac{\cdot}{\gamma})}(36s_2) \\ &\subseteq A(f, s_1) + B_{\varphi(\frac{\cdot}{36\gamma})}(s_2) \subseteq A\left(f\Box\varphi(\tfrac{\cdot}{36\gamma}), s_1 + s_2\right). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (7.3.2). □

Το επόμενο λήμμα δίνει την σχέση ανάμεσα στις ανισότητες (7.1.2) και (7.1.3).

Λήμμα 7.3.2. *Για κάθε Borel υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\gamma > 1$ οι παρακάτω δύο συνθήκες είναι ισοδύναμες:*

(i) *Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) > 0$ ισχύει $\mu(A+K) > \min\{\gamma\mu(A), \frac{1}{2}\}$.*

(ii) *Για κάθε Borel υποσύνολο A_1 του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A_1) \geqslant \frac{1}{2}$ ισχύει $1-\mu(A_1-K) < \frac{1}{\gamma}(1-\mu(A_1))$.*

Απόδειξη. (i)⇒(ii) Υποθέτουμε ότι $\mu(A_1) \geqslant 1/2$ αλλά $1-\mu(A_1-K) \geqslant \frac{1}{\gamma}(1-\mu(A_1))$. Θέτουμε $A := \mathbb{R}^n \setminus (A_1 - K)$. Τότε,

$$(A+K) \cap A_1 = \emptyset,$$

απ' όπου έπεται ότι $\mu(A+K) \leqslant 1/2$. Από την άλλη πλευρά,

$$\mu(A+K) \leqslant 1-\mu(A_1) \leqslant \gamma(1-\mu(A_1-K)) = \gamma\mu(A).$$

Άρα, $\mu(A+K) \leqslant \min\{\gamma\mu(A), 1/2\}$, και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

(ii)⇒(i). Έστω A ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\mu(A) > 0$ και $\mu(A+K) \leqslant \min\{\gamma\mu(A), 1/2\}$. Θέτουμε $A_1 := \mathbb{R}^n \setminus (A+K)$. Τότε, $\mu(A_1) \geqslant 1/2$. Επιπλέον, $(A_1 - K) \cap A = \emptyset$, άρα

$$1-\mu(A_1-K) \geqslant \mu(A) \geqslant \frac{1}{\gamma}\mu(A+K) = \frac{1}{\gamma}(1-\mu(A_1)),$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Οδηγούμαστε έτσι στην ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 7.3.3. *Έστω $t > 0$ και έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε, για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$,*

$$\text{αν } \ \mu(A) > 0 \quad \text{έπεται ότι} \quad \mu(A+K) > \min\{e^t\mu(A), 1/2\}.$$

Τότε, για κάθε Borel σύνολο A έχουμε ότι

$$\text{αν } \ \mu(A) = \nu(-\infty, x] \quad \text{έπεται ότι} \quad \mu(A+2K) > \nu(-\infty, x+t].$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = \nu(-\infty, x]$ και διακρίνουμε τρείς περιπτώσεις:

(i) $x \geqslant 0$. Τότε, εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.3.2 με $\gamma = e^t$ παίρνουμε

$$\mu(A+K) > 1-e^{-t}(1-\mu(A)) = \nu(-\infty, x+t].$$

(ii) $-t \leqslant x \leqslant 0$. Τότε $e^t\mu(A) \geqslant 1/2$, και από την υπόθεσή μας παίρνουμε

$$\mu(A+K) \geqslant \min\{e^t\mu(A), 1/2\} = 1/2 = \nu(-\infty, 0].$$

Τότε, εφαρμόζοντας την προηγούμενη περίπτωση (με το $A+K$ στην θέση του A και $x=0$), παίρνουμε

$$\mu(A+2K) = \mu((A+K)+K) > \nu(-\infty, t] \geqslant \nu(-\infty, x+t].$$

(iii) $x \leqslant -t$. Παρατηρούμε ότι $A+2K = (A+K)+K \supseteq A+K$ και $e^t\mu(A) = \nu(-\infty, x+t] \leqslant 1/2$. Από την υπόθεσή μας έπεται ότι

$$\mu(A+K) > e^t\mu(A) = \nu(-\infty, x+t].$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου δίνει κάποιες ικανές συνθήκες ώστε ένα ζεύγος (μ, φ) να έχει την ιδιότητα (τ), στην περίπτωση που η συνάρτηση κόστους φ είναι κυρτή και άρτια. Θυμηθείτε ότι ένα μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την *ανισότητα Cheeger με σταθερά* κ αν για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$,

$$\mu^+(A) := \liminf_{t\to 0^+} \frac{\mu(A+tB_2^n) - \mu(A)}{t} \geqslant \kappa \min\{\mu(A), 1-\mu(A)\}. \tag{7.3.3}$$

Γνωρίζουμε επίσης ότι από την ανισότητα Cheeger έπεται η ιδιότητα εκθετικής συγκέντρωσης: πιο συγκεκριμένα,

$$\mu(A) = \nu(-\infty, x] \quad\Rightarrow\quad \mu(A+tB_2^n) \geqslant \nu(-\infty, x+\kappa t].$$

Θεώρημα 7.3.4. *Έστω $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια άρτια κυρτή συνάρτηση με $\varphi(0) = 0$ και*

$$\min\{1, \varphi(x)\} \leqslant (a\|x\|_2)^2 \tag{7.3.4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το μέτρο πιθανότητας μ ικανοποιεί την ανισότητα Cheeger (7.3.3) *με σταθερά κ και ότι υπάρχει $\gamma > 1$ τέτοιος ώστε*

$$\text{αν}\;\; \mu(A) > 0 \quad \text{έπεται ότι} \quad \mu(A+\gamma B_\varphi(t)) > \min\{e^t\mu(A), 1/2\} \tag{7.3.5}$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Τότε, το $(\mu, \varphi(\cdot/C))$ έχει την ιδιότητα (τ), με $C = 36\max\{2\gamma, a/\kappa\}$.

Απόδειξη. Λόγω της Πρότασης 7.3.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{αν}\;\; \mu(A) = \nu(-\infty, x] \quad \text{έπεται ότι} \quad \mu(A+\beta B_\varphi(t)) \geqslant \nu(-\infty, x+\max\{t, \sqrt{t}\}] \tag{7.3.6}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $\beta > 1$ είναι κατάλληλη σταθερά.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $t < 1$. Από την (7.3.4) βλέπουμε ότι $aB_\varphi(t) \supseteq \sqrt{t}B_2^n$ για κάθε $t < 1$. Τότε, από την ανισότητα Cheeger συμπεραίνουμε ότι η (7.3.6) ισχύει για κάθε $t < 1$ με $\beta = a/\kappa$.

Από την άλλη πλευρά, για $t \geqslant 1$, η Πρόταση 7.3.3 δείχνει ότι η υπόθεσή μας (7.3.5) δίνει την (7.3.6) με $\beta = 2\gamma$.

Συνεπώς, η (7.3.5) ισχύει για κάθε $t \geqslant 0$ με $\beta = \max\{2\gamma, a/\kappa\}$ και ο ισχυρισμός του Θεωρήματος προκύπτει από την Πρόταση 7.3.1. □

7.4 Η εικασία της ελαχιστικής συνέλιξης

Ξεκινώντας από την παρατήρηση ότι αν το ζεύγος (μ, ϕ) έχει την ιδιότητα (τ) και αν $\phi_1 \leqslant \phi$ τότε το (μ, ϕ_1) έχει κι αυτό την ιδιότητα (τ), είναι φυσιολογικό να αναζητήσουμε το «καλύτερο ζεύγος» (μ, φ) που έχει την ιδιότητα (τ). Ένας λογικός τρόπος για να διατυπώσουμε το ερώτημα είναι να σταθεροποιήσουμε το μέτρο μ και να ψάξουμε για την καλύτερη δυνατή συνάρτηση κόστους. Θα χρησιμοποιήσουμε τον λογαριθμικό μετασχηματισμό Laplace του μ. Χρειαζόμαστε επίσης τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.4.1. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$. Ο *μετασχηματισμός Legendre* $\mathcal{L}(f)$ της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathcal{L}(f)(x) := \sup_{y\in\mathbb{R}^n}\{\langle x, y\rangle - f(y)\}.$$

Οι επόμενες βασικές ιδιότητες επαληθεύνται άμεσα από τον ορισμό.

(i) Ο μετασχηματισμός Legendre οποιασδήποτε συνάρτησης είναι κυρτή συνάρτηση.

(ii) Αν η f είναι κυρτή και κάτω ημισυνεχής, τότε $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f)) = f$, αλλιώς $\mathcal{L}(\mathcal{L}(f)) \leqslant f$.

(iii) Αν $f \geqslant g$ τότε $\mathcal{L}(f) \leqslant \mathcal{L}(g)$.

(iv) Ο μετασχηματισμός Legendre ικανοποιεί την $\mathcal{L}(cf)(x) = c\mathcal{L}(f)(x/c)$ και αν $g(x) = f(x/c)$, τότε $\mathcal{L}(g)(x) = \mathcal{L}(f)(cx)$, όπου $c > 0$.

Ορισμός 7.4.2. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$M_\mu(v) := \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle v,x\rangle} d\mu(x) = \exp(\Lambda_\mu(v))$$

όπου

$$\Lambda_\mu(v) = \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle v,x\rangle} d\mu(x)\right)$$

είναι ο λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace του μ. Ορίζουμε επίσης

$$\Lambda_\mu^*(v) := \mathcal{L}(\Lambda_\mu)(v) = \sup_{u\in\mathbb{R}^n}\left\{\langle v, u\rangle - \log\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle u,x\rangle} d\mu(x)\right\}.$$

Η συνάρτηση Λ_μ^* λέγεται *μετασχηματισμός Cramer* του μ και παίζει βασικό ρόλο στην θεωρία των μεγάλων αποκλίσεων. Συχνά, σε αυτήν την θεωρία, οι «ακραίες» συναρτήσεις είναι τα γραμμικά συναρτησοειδή. Είναι λοιπόν ενδιαφέρον να δούμε τι συμβαίνει αν επιλέξουμε $f(x) = \langle x, y\rangle$ στον ορισμό της ιδιότητας (τ). Οδηγούμαστε έτσι στην ακόλουθη:

Πρόταση 7.4.3. *Έστω μ ένα άρτιο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω φ μια κυρτή συνάρτηση κόστους ώστε το (μ, φ) να έχει την ιδιότητα (τ). Τότε,*

$$\varphi(v) \leqslant 2\Lambda_\mu^*(v/2) \leqslant \Lambda_\mu^*(v).$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε $f(x) = \langle x, v\rangle$. Τότε,

$$\begin{aligned} f\square\varphi(x) &= \inf_y\{f(x-y)+\varphi(y)\} = \inf_y\{\langle x-y, v\rangle + \varphi(y)\} \\ &= \langle x, v\rangle - \mathcal{L}\varphi(v). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (τ) και το γεγονός ότι το μ είναι άρτιο γράφουμε

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} e^{f\square\varphi}d\mu \int_{\mathbb{R}^n} e^{-f}d\mu = e^{-\mathcal{L}\varphi(v)}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle x,v\rangle}d\mu \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle x,v\rangle}d\mu \\ &= e^{-\mathcal{L}\varphi(v)}M_\mu^2(v). \end{aligned}$$

Έπεται ότι $\mathcal{L}\varphi(v) \geqslant 2\Lambda_\mu(v)$, και εφαρμόζοντας τον μετασχηματισμό Legendre στα δύο μέλη βλέπουμε ότι $\varphi(v) = \mathcal{L}\mathcal{L}\varphi(v) \leqslant 2\Lambda_\mu^*(v/2)$. Η ανισότητα $2\Lambda_\mu^*(v/2) \leqslant \Lambda_\mu^*(v)$ προκύπτει από την κυρτότητα της Λ_μ^*. □

Ορισμός 7.4.4 (ιδιότητα ελαχιστικής συνέλιξης)**.** Ένα άρτιο μέτρο πιθανότητας μ έχει την *ιδιότητα ελαχιστικής συνέλιξης* με σταθερά β αν το ζεύγος $(\mu, \Lambda_\mu^*(\frac{\cdot}{\beta}))$ έχει την ιδιότητα (τ). Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι το μ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$.

Άμεση συνέπεια του Λήμματος 7.1.2 και της προσθετικότητας της Λ_μ^* είναι ότι η ανισότητα **IC** συμπεριφέρεται καλά ως προς γινόμενα.

Πρόταση 7.4.5. *Έστω μ_i άρτιο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$. Αν το μ_i ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta_i)$, τότε το $\mu = \otimes_{i=1}^k \mu_i$ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$ με $\beta = \max_i \beta_i$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\Lambda_\mu(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{i=1}^k \Lambda_{\mu_i}(x_i) \quad \text{και} \quad \Lambda_\mu^*(x_1,\ldots,x_k) = \sum_{i=1}^k \Lambda_{\mu_i}^*(x_i).$$

Από την $\mathbf{IC}(\beta)$ έχουμε $\mathbf{IC}(\beta_0)$ για κάθε $\beta_0 \geqslant \beta$, οπότε το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Λήμμα 7.1.2. □

Μια χρήσιμη παρατήρηση είναι το γεγονός ότι η ιδιότητα $\mathbf{IC}(\beta)$ είναι αναλλοίωτη ως προς γραμμικούς μετασχηματισμούς.

Πρόταση 7.4.6. *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^k$ μια γραμμική απεικόνιση και έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$. Τότε, το μέτρο πιθανότητας $\mu \circ T^{-1}$ στον $\mathbb{R}^k$ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε μια ισοδύναμη περιγραφή της ιδιότητας $\mathbf{IC}(\beta)$. Στο επόμενο λήμμα, για κάθε $v = (v_0, v_1, \ldots, v_n)$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$ συμβολίζουμε με $\overline{v}$ το διάνυσμα $(v_1, v_2, \ldots, v_n) \in \mathbb{R}^n$.

Λήμμα 7.4.7. *Ένα μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$ αν και μόνο αν για κάθε μη κενό $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ και για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{f\Box\psi_V} d\mu \int_{\mathbb{R}^n} e^{-f} d\mu \leqslant \sup_{v\in V}\left\{e^{v_0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\beta\langle x,\overline{v}\rangle} d\mu(x)\right\}, \tag{7.4.1}$$

όπου

$$\psi_V(x) := \sup_{v\in V}\{v_0 + \langle x, \overline{v}\rangle\}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $V = \{(v_0, \overline{v}) : v_0 = -\Lambda_\mu(\beta\overline{v})\}$. Τότε, το δεξιό μέλος ισούται με 1 και $\psi_V(x) = \Lambda_\mu^*(x/\beta)$, άρα αν το μ ικανοποιεί την (7.4.1) γι' αυτό το σύνολο V, τότε ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$. Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι το μ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$ και θεωρούμε τυχόν μη κενό σύνολο V. Αν το supremum στο δεξιό μέλος είναι άπειρο τότε η ανισότητα προφανώς ισχύει, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι ισούται μέ κάποιον $s < \infty$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $(v_0, \overline{v}) \in V$ έχουμε $v_0 + \Lambda_\mu(\beta\overline{v}) \leqslant \log s$, δηλαδή $v_0 \leqslant \log s - \Lambda_\mu(\beta\overline{v})$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\psi_V(x) = \sup_{v\in V}\{v_0 + \langle x, \overline{v}\rangle\} &\leqslant \log s + \sup_{v\in V}\{\langle x, \overline{v}\rangle - \Lambda_\mu(\beta\overline{v})\}\\ &\leqslant \log s + \sup_{\overline{v}\in\mathbb{R}^n}\{\langle x, \overline{v}\rangle - \Lambda_\mu(\beta\overline{v})\} = \log s + \Lambda_\mu^*(x/\beta).\end{aligned}$$

Αφού το μ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$, βλέπουμε αμέσως ότι το αριστερό μέλος της (7.4.1) είναι μικρότερο από s. □

Απόδειξη της Πρότασης 7.4.6. Έστω $V \subseteq \mathbb{R}\times\mathbb{R}^k$ και έστω $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Ορίζουμε $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(x) := f(T(x))$ και θέτουμε $\tilde{V} := \{(v_0, T^*(\overline{v})) : (v_0, \overline{v}) \in V\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $\psi_V(T(x)) = \psi_{\tilde{V}}(x)$ και $(f\Box\psi_V)(T(x)) \leqslant \tilde{f}\Box\psi_{\tilde{V}}(x)$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^k} e^{f\Box\psi_V} d(\mu\circ T^{-1}) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} e^{\tilde{f}\Box\psi_{\tilde{V}}} d\mu$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^k} e^{-f} d(\mu\circ T^{-1}) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\tilde{f}} d\mu.$$

Από τον ορισμό του $\tilde{V}$ έχουμε:

$$\sup_{v\in V}\left\{e^{v_0}\int_{\mathbb{R}^k} e^{\beta\langle x,\overline{v}\rangle} d(\mu\circ T^{-1})\right\} = \sup_{v\in\tilde{V}}\left\{e^{v_0}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\beta\langle x,\overline{v}\rangle} d\mu\right\}.$$

Από το Λήμμα 7.4.7 γνωρίζουμε ότι η (7.4.1) ισχύει για τα $\mu, \tilde{f}$ και $\tilde{V}$, και οι προηγούμενες σχέσεις δείχνουν ότι η (7.4.1) ισχύει για τα $\mu\circ T^{-1}, f$ και V. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.4.7, αυτήν την φορά στην αντίστροφη κατεύθυνση, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Στην συνέχεια, δείχνουμε ότι κάθε άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$ για κάποια απόλυτη σταθερά $\beta > 0$. Αρχικά δείχνουμε ότι το εκθετικό μέτρο έχει αυτήν την ιδιότητα.

Πρόταση 7.4.8. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}$,*

$$\frac{1}{5}\min(x^2, |x|) \leqslant \Lambda_\nu^*(x) \leqslant \min(x^2, |x|).$$

Ειδικότερα, το ν ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(9)$.

Απόδειξη. Άμεσος υπολογισμός δείχνει ότι $\Lambda_\nu(x) = -\log(1-x^2)$ για $|x| < 1$ (και $= +\infty$ για $|x| \geqslant 1$) και

$$\Lambda_\nu^*(x) = \sqrt{1+x^2} - 1 - \log\left(\frac{\sqrt{1+x^2}+1}{2}\right)$$

για κάθε x. Παρατηρώντας ότι $a/2 \leqslant a - \log(1+a/2) \leqslant a$ για κάθε $a \geqslant 0$, παίρνουμε

$$\frac{1}{2}(\sqrt{1+x^2} - 1) \leqslant \Lambda_\nu^*(x) \leqslant \sqrt{1+x^2} - 1.$$

Κατόπιν, παρατηρούμε ότι

$$\min(|x|, x^2) \geqslant \sqrt{1+x^2} - 1 = \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}+1} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}+1}\min(|x|, x^2).$$

Τότε, το Θεώρημα 7.2.3 και το γεγονός ότι $\xi(x) \geqslant \min((x/9)^2, |x|/9)$ δείχνουν ότι το ν ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(9)$. □

Θεώρημα 7.4.9. *Κάθε άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathbb{R}$ ικανοποιεί την* $\mathbf{IC}(96)$.

Απόδειξη. Έστω μ ένα άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$. Από την Πρόταση 7.4.6 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι ισοτροπικό. Συμβολίζουμε την πυκνότητα του μ με $g(x)$ και γράφουμε

$$\mu[x, \infty) = e^{-h(x)}.$$

Από την ανισότητα του Hensley [64] γνωρίζουμε ότι

$$g(0) = g(0)\left(\int_{\mathbb{R}} x^2 g(x)dx\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{2\sqrt{3}} \geqslant \frac{1}{8}.$$

Έστω $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση που ορίζεται μέσω της

$$\nu(-\infty, x) = \mu(-\infty, T(x)).$$

Τότε, $\mu = \nu \circ T^{-1}$, η T είναι περιττή και κοίλη στο $[0, \infty)$. Ειδικότερα,

$$|T(x) - T(y)| \leqslant 2|T(x-y)|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι $T'(0) = 1/(2g(0)) \leqslant 4$. Αφού η T είναι κοίλη, παίρνουμε $T(x) \leqslant 4x$ για $x \geqslant 0$. Επιπλέον, για $x \geqslant 0$ έχουμε ότι $h(T(x)) = x + \log 2$. Ορίζουμε

$$\tilde{h}(x) = \begin{cases} x^2, & \text{if } |x| \leqslant 2/3 \\ \max\{4/9, h(|x|)\}, & \text{if } |x| > 2/3. \end{cases}$$

Θα δείξουμε ότι το $(\mu, \tilde{h}(\frac{\cdot}{48}))$ έχει την ιδιότητα (τ). Για τον σκοπό αυτό, παρατηρούμε πρώτα ότι $\tilde{h}((T(x) - T(y))/96) \leqslant \tilde{h}(T(|x-y|)/48)$. Λόγω του Λήμματος 7.1.4 αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\tilde{h}\left(\frac{T(x)}{48}\right) \leqslant \xi(x) \tag{7.4.2}$$

για $x \geqslant 0$, όπου $\xi(x)$ είναι η συνάρτηση στο Θεώρημα 7.2.3. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(i) Αν $T(x) \leqslant 32$ τότε

$$\tilde{h}\left(\frac{T(x)}{48}\right) = \left(\frac{T(x)}{48}\right)^2 \leqslant \min\left\{\frac{4}{9}, \left(\frac{x}{6}\right)^2\right\} \leqslant \xi(x).$$

(ii) Αν $T(x) \geqslant 32$ τότε $x \geqslant 8$ και

$$\begin{aligned}\tilde{h}\left(\frac{T(x)}{48}\right) &= \max\left\{\frac{4}{9}, h\left(\frac{T(x)}{48}\right)\right\} \leqslant \max\left\{\frac{4}{9}, \frac{h(T(x))}{48} + \frac{47\log 2}{48}\right\} \\ &= \max\left\{\frac{4}{9}, \frac{x}{48} + \log 2\right\} \leqslant \frac{x}{9} \leqslant \xi(x).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (7.4.2) και στις δύο περιπτώσεις. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρειάζεται να δείξουμε ότι $\Lambda_\mu^*(x) \leqslant \tilde{h}(x)$. Στην περίπτωση που $|x| \leqslant 2/3$ αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\Lambda_\mu^*(x) = \min\{1, \Lambda_\mu^*(x)\} \leqslant x^2 = \tilde{h}(x),$$

όπου η πρώτη ισότητα και η μεσαία ανισότητα είναι ειδική περίπτωση της Πρότασης 7.5.3 (θα αποδειχτεί στην επόμενη παράγραφο). Για την περίπτωση $|x| > 2/3$ παρατηρούμε ότι

$$\Lambda_\mu(t) \geqslant tx + \log \mu[x, \infty) = tx - h(x)$$

για κάθε $x, t \geqslant 0$, και αυτό μας δίνει

$$\Lambda_\mu^*(x) = \Lambda_\mu^*(|x|) = \sup_{t\geqslant 0}\{t|x| - \Lambda_\mu(t)\} \leqslant h(|x|) \leqslant \tilde{h}(x).$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Από την Πρόταση 7.4.5 παίρνουμε αμέσως το εξής.

Πόρισμα 7.4.10. *Κάθε άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο γινόμενο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την* **IC**(96).

Μπαίνει έτσι κανείς στον πειρασμό να διατυπώσει την εξής πολύ γενικότερη εικασία.

Εικασία 7.4.11 (εικασία της ελαχιστικής συνέλιξης)**.** Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\beta > 0$ ώστε κάθε άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ να ικανοποιεί την **IC**(β).

7.5 Ανισότητες συγκέντρωσης

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε ανισότητες συγκέντρωσης που προκύπτουν από την ιδιότητα ελαχιστικής συνέλιξης. Τα L_q-κεντροειδή σώματα $Z_q(\mu)$ του μ μπαίνουν φυσιολογικά σε αυτήν την συζήτηση.

Ορισμός 7.5.1. Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p \geqslant 1$ ορίζουμε

$$M_p(\mu) := \left\{ v \in \mathbb{R}^n : \int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x\rangle|^p d\mu(x) \leqslant 1 \right\}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$Z_p(\mu) := (M_p(\mu))^\circ = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : |\langle v, x\rangle|^p \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, y\rangle|^p d\mu(y) \text{ για κάθε } v \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Για κάθε $p > 0$ ορίζουμε επίσης

$$B_p(\mu) := \{v \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu^*(v) \leqslant p\}.$$

Τα επόμενα δύο αποτελέσματα περιγράφουν την γεωμετρία του $B_p(\mu)$ για μεγάλες και μικρές τιμές του p αντίστοιχα.

Πρόταση 7.5.2. *Έστω μ ένα άρτιο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p \geqslant 1$ έχουμε*

$$Z_p(\mu) \subseteq 2^{1/p} e B_p(\mu).$$

Απόδειξη. Έστω $v \in Z_p(\mu)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\Lambda_\mu^*(v/(2^{1/p}e)) \leqslant p$, ή ισοδύναμα

$$\frac{\langle u, v\rangle}{2^{1/p}e} - \Lambda_\mu(u) \leqslant p$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $u \in \mathbb{R}^n$ με

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x\rangle|^p d\mu(x) = \beta^p.$$

Τότε, $u/\beta \in M_p(\mu)$. Αφού $Z_p(\mu) = (M_p(\mu))^\circ$, έχουμε $\langle u/\beta, v\rangle \leqslant 1$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $\beta \leqslant 2^{1/p}ep$ τότε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\Lambda_\mu(u) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \langle u, x\rangle d\mu(x) = 0,$$

παίρνουμε

$$\frac{\langle u, v\rangle}{2^{1/p}e} - \Lambda_\mu(u) \leqslant \frac{\beta}{2^{1/p}e}\langle u/\beta, v\rangle \leqslant p \cdot 1.$$

(ii) Αν $\beta > 2^{1/p}ep$ τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle u,x\rangle} d\mu(x) &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|e^{\langle u,x\rangle/p}\right|^p \mathbf{1}_{\{\langle u,x\rangle\geqslant 0\}} d\mu(x)\\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\langle u,x\rangle}{p}\right|^p \mathbf{1}_{\{\langle u,x\rangle\geqslant 0\}} d\mu(x)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{\langle u,x\rangle}{p}\right|^p d\mu(x),\end{aligned}$$

άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{2^{1/p}ep\langle u,x\rangle/\beta} d\mu(x) \geqslant \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \left|\frac{2^{1/p}e\langle u,x\rangle}{\beta}\right|^p d\mu(x) = e^p.$$

Συνεπώς, $\Lambda_\mu(2^{1/p}epu/\beta) \geqslant p$, απ' όπου έπεται ότι

$$\Lambda_\mu(u) \geqslant \frac{\beta}{2^{1/p}ep}\Lambda_\mu(2^{1/p}epu/\beta) \geqslant \frac{\beta}{2^{1/p}e}.$$

Άρα,

$$\frac{\langle u,v\rangle}{2^{1/p}e} - \Lambda_\mu(u) \leqslant \frac{\beta}{2^{1/p}e}\langle u/\beta, v\rangle - \frac{\beta}{2^{1/p}e} \leqslant 0$$

διότι $\langle u/\beta, v\rangle \leqslant 1$, και παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 7.5.3. *Αν μ είναι ένα άρτιο ισοτροπικό μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\min\{1, \Lambda_\mu^*(u)\} \leqslant \|u\|_2^2$$

για κάθε u. Ειδικότερα,

$$\sqrt{p}B_2^n \subseteq B_p(\mu)$$

για κάθε $p \in (0,1)$.

Απόδειξη. Αφού το μ είναι άρτιο και ισοτροπικό, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle u,x\rangle} d\mu(x) &= 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k)!}\int_{\mathbb{R}^n}\langle u,x\rangle^{2k} d\mu(x) \geqslant 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{\|u\|_2^{2k}}{(2k)!}\\ &= \cosh(\|u\|_2).\end{aligned}$$

Τότε, για $\|u\|_2 < 1$,

$$\begin{aligned}\Lambda_\mu^*(u) &\leqslant \mathcal{L}(\log\cosh)(\|u\|_2)\\ &= \frac{1}{2}\left[(1+\|u\|_2)\log(1+\|u\|_2) + (1-\|u\|_2)\log(1-\|u\|_2)\right] \leqslant \|u\|_2^2,\end{aligned}$$

όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε την στοιχειώδη ανισότητα $\log(1+x) \leqslant x$ για $x > -1$. □

Για να εξασφαλίσουμε αντίστροφους εγκλεισμούς χρειάζεται να υποθέσουμε κάποια κανονικότητα για τις ροπές των γραμμικών συναρτησοειδών, την οποία εισάγουμε στην επόμενη υποπαράγραφο. Από το λήμμα του Borell γνωρίζουμε ότι αυτή η κανονικότητα εμφανίζεται σίγουρα στην λογαριθμικά κοίλη περίπτωση.

7.5.1 α-κανονικά μέτρα

Ορισμός 7.5.4. Λέμε ότι ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι *α-κανονικό* αν για κάθε $p \geqslant q \geqslant 2$ και για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \alpha\frac{p}{q}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Παρατήρηση 7.5.5. Για κάθε $p \geqslant q$ έχουμε $M_p(\mu) \subseteq M_q(\mu)$ και $Z_q(\mu) \subseteq Z_p(\mu)$. Αν το μέτρο μ είναι α-κανονικό, τότε $M_q(\mu) \subseteq \alpha\frac{p}{q}M_p(\mu)$ και $Z_p(\mu) \subseteq \alpha\frac{p}{q}Z_q(\mu)$ για κάθε $p \geqslant q \geqslant 2$. Επιπλέον, για κάθε άρτιο μέτρο μ έχουμε $\Lambda_\mu^*(0) = 0$, και από την κυρτότητα της Λ_μ^* συμπεραίνουμε ότι $B_q(\mu) \subseteq B_p(\mu) \subseteq \frac{p}{q}B_q(\mu)$ για κάθε $p \geqslant q > 0$.

Από το λήμμα του Borell, κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας είναι c-κοίλο. Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι στην πραγματικότητα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c = 1$.

Πρόταση 7.5.6. *Κάθε άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας είναι 1-κοίλο.*

Απόδειξη. Έστω μ ένα άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Θέλουμε να δείξουμε ότι, για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$,

$$(\mathbb{E}_\mu|\langle x, u\rangle|^p)^{1/p} \leqslant \frac{p}{q}(\mathbb{E}_\mu|\langle x, u\rangle|^q)^{1/q}$$

για κάθε $p \geqslant q \geqslant 2$. Οι Barlow, Marshall και Proschan έχουν αποδείξει ότι

$$(\mathbb{E}_\mu|\langle x, u\rangle|^p)^{1/p} \leqslant \frac{\Gamma(p+1))^{1/p}}{\Gamma(q+1))^{1/q}}(\mathbb{E}_\mu|\langle x, u\rangle|^q)^{1/q},$$

αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η συνάρτηση $f(x) := \frac{1}{x}(\Gamma(x+1))^{1/x}$ είναι φθίνουσα στο $[2, \infty)$. Χρησιμοποιούμε μια ακριβή μορφή του τύπου του Stirling: έχουμε

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) = \sqrt{2\pi}x^{x+1/2}e^{-x+\vartheta(x)},$$

όπου η $\vartheta(x) = \int_0^\infty \arctan(t/x)(e^{2\pi t} - 1)^{-1}dt$ είναι φθίνουσα συνάρτηση. Συνεπώς, η

$$\log f(x) = \frac{\vartheta(x)}{x} + \frac{\log(2\pi x)}{2x} - 1$$

είναι φθίνουσα στο $[2, \infty)$. □

Τα επόμενα αποτελέσματα συμπληρώνουν την Πρόταση 7.5.2 και την Πρόταση 7.5.3 στην περίπτωση που έχουμε α-κανονικότητα.

Πρόταση 7.5.7. *Αν το μ είναι α-κανονικό για κάποιον $\alpha \geqslant 1$, τότε για κάθε $p \geqslant 2$ έχουμε*

$$B_p(\mu) \subseteq 4e\alpha Z_p(\mu).$$

Απόδειξη. Ελέγχουμε πρώτα ότι αν $u \in M_p(\mu)$ τότε

$$\Lambda_\mu\left(\frac{pu}{2ea}\right) \leqslant p.$$

Σταθεροποιούμε $u \in M_p(\mu)$ και θέτουμε $\tilde{u} := \frac{pu}{2ea}$. Τότε,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \tilde{u}, x\rangle|^k d\mu(x)\right)^{1/k} = \frac{p}{2ea}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x\rangle|^k d\mu(x)\right)^{1/k},$$

και το τελευταίο φράσσεται από $\frac{p}{2ea}$ αν $k \leqslant p$ και από $\frac{k}{2e}$ αν $k > p$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \tilde{u}, x\rangle} d\mu(x) &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} e^{|\langle \tilde{u}, x\rangle|} d\mu(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \tilde{u}, x\rangle|^k d\mu(x) \\ &\leqslant \sum_{k\leqslant p} \frac{1}{k!}\left|\frac{p}{2ea}\right|^k + \sum_{k>p} \frac{1}{k!}\left|\frac{k}{2e}\right|^k \leqslant e^{\frac{p}{2ea}} + 1 \leqslant e^p\end{aligned}$$

και έχουμε τον ισχυρισμό.

Τώρα, έστω $v \notin 4eaZ_p(\mu)$. Μπορούμε να βρούμε $u \in M_p(\mu)$ ώστε $\langle v, u\rangle > 4ea$ και τότε

$$\Lambda_\mu^*(v) \geqslant \left\langle v, \frac{pu}{2ea}\right\rangle - \Lambda_\mu\left(\frac{pu}{2ea}\right) > \frac{p}{2ea}4ea - p = p.$$

Συνεπώς, $v \notin B_p(\mu)$. □

Πρόταση 7.5.8. *Αν το μ είναι άρτιο, ισοτροπικό και a-κανονικό για κάποιον $a \geqslant 1$, τότε*

$$\Lambda_\mu^*(u) \geqslant \min\left\{\frac{\|u\|_2}{2ae}, \frac{\|u\|_2^2}{2a^2e^2}\right\}.$$

Ειδικότερα,

$$B_p(\mu) \subseteq \max\{2aep, ae\sqrt{2p}\}B_2^n$$

για κάθε $p > 0$.

Απόδειξη. Αφού το μ είναι άρτιο, ισοτροπικό και a-κανονικό, για κάθε $v \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle v, x\rangle} d\mu(x) &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k)!}\int_{\mathbb{R}^n} \langle v, x\rangle^{2k} d\mu(x) \leqslant 1 + \frac{\|v\|_2^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{(ak\|v\|_2)^{2k}}{(2k)!} \\ &\leqslant 1 + \frac{\|v\|_2^2}{2} + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{ae\|v\|_2}{2}\right)^{2k}.\end{aligned}$$

Αν υποθέσουμε ότι $ae\|v\|_2 \leqslant 1$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle v, x\rangle} d\mu(x) &\leqslant 1 + \frac{\|v\|_2^2}{2} + \frac{4}{3}\left(\frac{ae\|v\|_2}{2}\right)^4 \\ &\leqslant 1 + \frac{a^2e^2\|v\|_2^2}{2} + \frac{(ae\|v\|_2)^4}{8} \leqslant e^{a^2e^2\|v\|_2^2/2},\end{aligned}$$

άρα $\Lambda_\mu(v) \leqslant a^2e^2\|v\|_2^2/2$ σε αυτήν την περίπτωση.

Έστω $u \in \mathbb{R}^n$. Αν $\|u\|_2 \leqslant ae$, μπορούμε να γράψουμε $\Lambda_\mu^*(u) \geqslant \langle u, u/(a^2e^2)\rangle - \Lambda_\mu(u/(a^2e^2))$ και, αφού $\Lambda_\mu(u/(a^2e^2)) \leqslant \|u\|_2^2/(2a^2e^2)$ σε αυτήν την περίπτωση, βλέπουμε ότι

$$\Lambda_\mu^*(u) \geqslant \frac{\|u\|_2^2}{2a^2e^2}.$$

Αν $\|u\|_2 \geqslant ae$, γράφουμε $\Lambda_\mu^*(u) \geqslant \langle u, u/(ae\|u\|_2)\rangle - \Lambda_\mu(u/(ae\|u\|_2))$ και, αφού $\Lambda_\mu(u/(ae\|u\|_2)) \leqslant 1/2 \leqslant \|u\|_2/(2ae)$ σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\Lambda_\mu^*(u) \geqslant \frac{\|u\|_2}{2ae}.$$

Αυτό αποδεικνύει την πρόταση. □

Ορισμός 7.5.9. Λέμε ότι ένα μέτρο μ *ικανοποιεί την ανισότητα συγκέντρωσης με σταθερά* β - και γράφουμε $\mathbf{CI}(\beta)$ - αν για κάθε $p \geqslant 2$ και για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$,

$$\text{αν } \mu(A) \geqslant \frac{1}{2} \quad \text{έπεται ότι} \quad 1 - \mu(A + \beta Z_p(\mu)) \leqslant e^{-p}(1 - \mu(A)). \tag{7.5.1}$$

Παρατηρήστε ότι το $Z_p(\mu)$ είναι, με μία έννοια, το μεγαλύτερο κυρτό συμμετρικό σύνολο που ελπίζουμε ότι θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε σε μια συνεπαγωγή όπως η (7.5.1). Αυτό φαίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 7.5.10. *Έστω μ ένα άρτιο α-κανονικό μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι K είναι ένα κυρτό σύνολο τέτοιο ώστε, για κάθε ημίχωρο A με $\mu(A) \geqslant 1/2$ να έχουμε*

$$1 - \mu(A + K) \leqslant e^{-p}/2.$$

Τότε,

$$K \supseteq c(\alpha)Z_p(\mu)$$

για κάθε $p \geqslant p(\alpha)$, όπου οι $c(\alpha)$ και $p(\alpha)$ εξαρτώνται μόνο από το α.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $v \in \mathbb{R}^n$ και ορίζουμε $A = \{x : \langle v, x\rangle < 0\}$. Τότε,

$$A + K = \{x : \langle v, x\rangle < a(v)\},$$

όπου $a(v) = \sup_{x\in K}\langle x, v\rangle$.

Τότε,

$$\mu(\{x : |\langle x, v\rangle| \geqslant a(v)\}) = 2\mu(\{x : \langle x, v\rangle \geqslant a(v)\}) = 2(1 - \mu(A + K)) \leqslant e^{-p}.$$

Αφού το μ είναι α-κανονικό, έχουμε $\|\langle\cdot, v\rangle\|_p \leqslant \alpha(p/q)\|\langle\cdot, v, \rangle\|_q$ για κάθε $p \geqslant q \geqslant 2$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Paley-Zygmund βλέπουμε ότι για κάθε $q \geqslant 2$,

$$\begin{aligned}\mu(\{x : |\langle x, v\rangle| \geqslant \|\langle\cdot, v\rangle\|_q/2\}) &= \mu(\{x : |\langle x, v\rangle|^q \geqslant 2^{-q}\|\langle\cdot, v\rangle\|_q^q\}) \\ &\geqslant (1 - 2^{-q})^2 \frac{\|\langle\cdot, v\rangle\|_q^{2q}}{\|\langle\cdot, v\rangle\|_{2q}^{2q}} \\ &\geqslant \frac{9}{16}(2\alpha)^{-2q} > (3\alpha)^{-2q}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $p \geqslant p(a) = \max\{8\log(3a), 2\log 4\}$ και $c(a) = (8a\log(3a))^{-1}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mu(\{x : |\langle x, v\rangle| \geqslant c(a)\|\langle\cdot, v\rangle\|_p\}) &\geqslant \mu\left(\left\{x : |\langle x, v\rangle| \geqslant \frac{1}{2}\|\langle\cdot, v\rangle\|_{p/(4\log(3a))}\right\}\right)\\ &> (3a)^{-p/(2\log(3a))}\\ &= e^{-p/2} \geqslant 2e^{-p}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$c(a)\|\langle\cdot, v\rangle\|_p = c(a)\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle v, x\rangle|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant a(v)$$

και αυτό αποδεικνύει ότι $c(a)Z_p(\mu) \subseteq K$. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η ιδιότητα της ελαχιστικής συνέλιξης έχει σαν συνέπεια την ιδιότητα της ανισότητας συγκέντρωσης. Για την ακρίβεια, αν επιπλέον υποθέσουμε ότι ικανοποιείται η ανισότητα του Cheeger

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1}{\gamma}\min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\} \tag{7.5.2}$$

με σταθερά $1/\gamma$, τότε οι δύο ιδιότητες είναι ισοδύναμες (με την εξαίρεση μιας σταθεράς που εξαρτάται από το γ).

Θεώρημα 7.5.11. *Έστω μ ένα άρτιο a-κανονικό ισοτροπικό μέτρο πιθανότητας, όπου $a \geqslant 1$.*

(i) *Αν το μ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$ τότε το μ ικανοποιεί την $\mathbf{CI}(8ea\beta)$.*

(ii) *Αν το μ ικανοποιεί την $\mathbf{CI}(\beta)$ και την ανισότητα του Cheeger (7.5.2), τότε το μ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(36\max\{6e\beta, \gamma\})$.*

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι το μ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$. Από την Παρατήρηση 7.5.5, την Πρόταση 7.1.6 και τον ορισμό του $B_p(\mu)$ παίρνουμε

$$\mu(A + 2\beta B_p(\mu)) \geqslant \mu(A + \beta B_{2p}(\mu)) \geqslant 1 - e^{-p}(1 - \mu(A)).$$

Από την Πρόταση 7.5.7 έπεται ότι

$$\mu(A + 8ea\beta Z_p(\mu)) \geqslant 1 - e^{-p}(1 - \mu(A)).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το μ ικανοποιεί την $\mathbf{CI}(8ea\beta)$.

(β) Υποθέτουμε ότι το μ ικανοποιεί την $\mathbf{CI}(\beta)$. Χρησιμοποιώντας την Παρατήρηση 7.5.5 και την Πρόταση 7.5.2 βλέπουμε ότι αν $\mu(A) \geqslant 1/2$ και $p \geqslant 1$ τότε

$$\begin{aligned}e^{-p}(1 - \mu(A)) > e^{-2p}(1 - \mu(A)) &\geqslant 1 - \mu(A + \beta Z_{2p}(\mu))\\ &\geqslant 1 - \mu(A + e2^{1/2p}\beta B_{2p}(\mu)) \geqslant 1 - \mu(A + 3e\beta B_p(\mu)).\end{aligned}$$

Τότε, το Λήμμα 7.3.2 δείχνει ότι η (7.3.5) ισχύει με $\gamma = 3e\beta$. Έχουμε επίσης ότι η Λ_μ^* είναι άρτια, κυρτή, και $\Lambda_\mu^*(0) = 0$. Τέλος, από την Πρόταση 7.5.3 έχουμε $\min\{1, \Lambda_\mu^*(u)\} \leqslant \|u\|_2^2$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.3.4 παίρνουμε το ζητούμενο. □

Στην συνέχεια δείχνουμε ότι από την **CI** έπεται η ιδιότητα εκθετικής συγκέντρωσης (βλέπε τον Ορισμό 3.1.12) για ισοτροπικά μέτρα.

Πρόταση 7.5.12. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί την **CI**(β). Αν f είναι μια συνάρτηση, 1-Lipschitz ως προς την Ευκλείδεια νόρμα, τότε*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}) \leqslant e^{1-t/\beta_1}, \tag{7.5.3}$$

όπου $\beta_1 = 4e^2\beta$. Επίσης έχουμε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x) - \mathbb{E}_\mu(f)| > t\}) \leqslant e^{1-t/\beta_2}, \tag{7.5.4}$$

όπου $\beta_2 = 8e^3\beta$.

Απόδειξη. Έστω $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) - \mathrm{med}(f) > t\}$ και $A = \{x : f(x) \leqslant \mathrm{med}(f)\}$. Έχουμε $\mu(A) \geqslant 1/2$, και από την **CI**(β) παίρνουμε

$$1 - \mu(A + \beta Z_p(\mu)) \leqslant e^{-p}(1 - \mu(A)) \leqslant e^{-p}/2.$$

Έστω $p \geqslant 1$. Από τις Προτάσεις 7.5.2 και 7.5.8 έχουμε

$$Z_p(\mu) \subseteq 2eB_p(\mu) \subseteq 4e^2pB_2^n.$$

Θέτουμε $t = 4\beta e^2 p$ (τότε, $t \geqslant 4\beta e^2 = \beta_1$). Αφού η f είναι 1-Lipschitz, έχουμε $A_t \cap (A + tB_2^n) = \emptyset$, άρα

$$\mu(A_t) \leqslant 1 - \mu(A + tB_2^n) \leqslant 1 - \mu(A + \beta Z_p(\mu)) \leqslant e^{-t/\beta_1}/2.$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι αν $t > \beta_1$ τότε

$$\mu(\{x : f(x) - \mathrm{med}(f) < -t\}) \leqslant e^{-t/\beta_1}/2,$$

και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο για $t \geqslant \beta_1$. Αν $t \leqslant \beta_1$, τότε προφανώς έχουμε $\mu(A_t) \leqslant 1 \leqslant e^{1-t/\beta_1}$. Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$|\mathbb{E}_\mu(f) - \mathrm{med}(f)| \leqslant \int_0^\infty \mu(\{x : |f(x) - \mathrm{med}(f)| \geqslant t\})\, dt \leqslant e\beta_1,$$

και μετά, διακρίνοντας τις περιπτώσεις $t \geqslant 2e\beta_1$ και $t < 2e\beta_1$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων η εκθετική συγκέντρωση είναι ισοδύναμη με την ανισότητα Cheeger και την ανισότητα Poincaré. Αυτό μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι για τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας οι ιδιότητες **IC** και **CI** είναι ισοδύναμες, και ότι συνεπάγονται την εικασία Kannan-Lovász-Simonovits.

Θεώρημα 7.5.13 (Latała-Wojtaszczyk). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε:*

(i) *Αν το μ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$, τότε το μ ικανοποιεί την $\mathbf{CI}(\beta_0)$ με $\beta_0 \simeq \beta$.*

(ii) *Αν το μ ικανοποιεί την $\mathbf{CI}(\beta_0)$, τότε το μ ικανοποιεί την $\mathbf{IC}(\beta)$ με $\beta \simeq \beta_0$.*

(iii) *Αν το μ ικανοποιεί είτε την $\mathbf{IC}(\beta)$ ή $\mathbf{CI}(\beta)$ και επιπλέον είναι ισοτροπικό, τότε ικανοποιεί την ανισότητα Cheeger* (7.5.2) *με $\gamma \simeq \beta$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να βρούμε μια αφινική απεικόνιση T ώστε το $\mu \circ T^{-1}$ να είναι ισοτροπικό. Αφού $Z_p(\mu \circ T^{-1}) = T(Z_p(\mu))$, βλέπουμε ότι η $\mathbf{CI}(\beta)$ είναι αναλλοίωτη ως προς αφινικούς μετασχηματισμούς. Γνωρίζουμε επίσης από την Πρόταση 7.4.6 ότι η $\mathbf{IC}(\beta)$ είναι αναλλοίωτη ως προς αφινικούς μετασχηματισμούς, άρα για την απόδειξη μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ είναι ισοτροπικό. Αφού το μ είναι λογαριθμικά κοίλο, είναι επίσης 1-κανονικό.

Τότε, η (i) είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7.5.11. Για την (iii) μπορούμε να υποθέσουμε, λόγω της (i), ότι το μ ικανοποιεί την $\mathbf{CI}(\beta)$. Τότε, από την Πρόταση 7.5.12 έχουμε ότι $\mathrm{Exp}_\mu \simeq 1/\beta$, και έπεται το συμπέρασμα.

Για την (ii) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 7.5.11 (ii) πάλι, διότι η (iii) δείχνει ότι το μ ικανοποιεί την ανισότητα Cheeger. □

7.6 Σύγκριση ασθενών και ισχυρών ροπών

Σε αυτήν την παράγραφο δείχνουμε ότι από την ιδιότητα $\mathbf{CI}$ ενός μέτρου πιθανότητας μ έπεται μια πολύ ισχυρή μορφή σύγκρισης ασθενών και ισχυρών ροπών οποιασδήποτε νόρμας ως προς το μ.

Πρόταση 7.6.1. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι α-κανονικό και ικανοποιεί την $\mathbf{CI}(\beta)$. Τότε, για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $p \geqslant 2$,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\,\|x\| - \mathrm{med}(\|x\|)|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant 2\alpha\beta \sup_{\|u\|_* \leqslant 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x\rangle|^p d\mu\right)^{1/p},$$

όπου $\|\cdot\|_*$ είναι η δυϊκή νόρμα της $\|\cdot\|$.

Απόδειξη. Για κάθε $p \geqslant 2$ ορίζουμε

$$m_p := \sup_{\|u\|_* \leqslant 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x\rangle|^p d\mu\right)^{1/p}.$$

Θέτουμε

$$M := \mathrm{med}(\|x\|), \quad A := \{x : \|x\| \leqslant M\} \quad \text{και} \quad \tilde{A} := \{x : \|x\| \geqslant M\}.$$

Τότε, $\mu(A) \geqslant 1/2$ και $\mu(\tilde{A}) \geqslant 1/2$, άρα από την $\mathbf{CI}(\beta)$ και την Παρατήρηση 7.5.5 παίρνουμε: για κάθε $t \geqslant p$,

$$1 - \mu\left(A + \beta\frac{at}{p}Z_p(\mu)\right) \leqslant \frac{1}{2}e^{-t} \quad \text{και} \quad 1 - \mu\left(\tilde{A} + \beta\frac{at}{p}Z_p(\mu)\right) \leqslant \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Θεωρούμε $y \in Z_p(\mu)$, και βρίσκουμε $u \in \mathbb{R}^n$ με $\|u\|_* \leqslant 1$ ώστε

$$\|y\| = \langle u, y\rangle \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant m_p,$$

οπότε

$$\|x\| \leqslant M + tm_p$$

για κάθε $x \in A + tZ_p(\mu)$. Τότε, για κάθε $t \geqslant p$ έχουμε

$$\mu\left(\left\{x : \|x\| \geqslant M + \frac{\alpha\beta t}{p}m_p\right\}\right) \leqslant 1 - \mu\left(A + \beta\frac{at}{p}Z_p(\mu)\right) \leqslant \frac{1}{2}e^{-t}.$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε ότι $\|x\| \geqslant M - tm_p$ για κάθε $x \in \tilde{A} + tZ_p(\mu)$ και $\mu(\{x : \|x\| \leqslant M - \alpha\beta tm_p/p\}) \leqslant e^{-t}/2$, άρα

$$\mu\left(x : |\,\|x\| - M| \geqslant \frac{\alpha\beta t}{p}m_p\right) \leqslant e^{-t} \quad \text{για κάθε } t \geqslant p.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\|x\| - M|^p d\mu\right)^{1/p} \\
&\leqslant \frac{\alpha\beta m_p}{p}\left[p + \left(p\int_p^{\infty} t^{p-1}\mu\left(\left\{x : |\|x\| - M| \geqslant \frac{\alpha\beta t}{p}m_p\right\}\right)dt\right)^{1/p}\right] \\
&\leqslant \frac{\alpha\beta m_p}{p}\left[p + \left(p\int_p^{\infty} t^{p-1}e^{-t}dt\right)^{1/p}\right] \\
&\leqslant \alpha\beta m_p\left(1 + \frac{\Gamma(p+1)^{1/p}}{p}\right) \leqslant 2\alpha\beta m_p,
\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 7.6.2. Με τις υποθέσεις της Πρότασης 7.6.1, από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε (για $\gamma = 4\alpha\beta$) ότι αν $p \geqslant q \geqslant 2$ τότε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left|\|x\| - \left(\int_{\mathbb{R}^n}\|y\|^q d\mu(y)\right)^{1/q}\right|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \gamma \sup_{\|u\|_*\leqslant 1}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|\langle u, x\rangle|^p d\mu\right)^{1/p}. \tag{7.6.1}$$

Αυτό μας οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 7.6.3. Λέμε ότι ένα μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ έχει *συγκρίσιμες ασθενείς και ισχυρές ροπές με σταθερά* γ αν η (7.6.1) ισχύει για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$.

Η εξής εικασία είναι τελείως ανοικτή.

Εικασία 7.6.4 (ασθενείς και ισχυρές ροπές)**.** *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $\gamma_0 > 0$ ώστε κάθε άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ να έχει συγκρίσιμες ασθενείς και ισχυρές ροπές με σταθερά γ_0.*

Πρόταση 7.6.5. *Έστω μ ένα ισοτροπικό μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο έχει συγκρίσιμες ασθενείς και ισχυρές ροπές με σταθερά γ. Τότε:*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} |\|x\|_2 - \sqrt{n}|^2 d\mu(x) \leqslant \gamma^2$.

(ii) *Αν το μ είναι επίσης α-κανονικό, τότε για κάθε $p > 2$,*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \sqrt{n} + \frac{\gamma\alpha}{2}p.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 d\mu = n$ και $\|u\|_2^* = \|u\|_2$. Συνεπώς, η (i) προκύπτει άμεσα από την (7.6.1) αν θέσουμε $p = q = 2$. Επιπλέον, από την (7.6.1) με $q = 2$ παίρνουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \sqrt{n} + \gamma \sup_{\|u\|_2 \leqslant 1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle u, x\rangle|^p d\mu\right)^{1/p} \leqslant \sqrt{n} + \frac{\gamma\alpha}{2}p$$

χρησιμοποιώντας την α-κανονικότητα του μ και την υπόθεση ότι είναι ισοτροπικό. □

Παρατήρηση 7.6.6. Η ιδιότητα (i) παίζει βασικό ρόλο στις αποδείξεις των εκτιμήσεων λεπτού δακτυλίου. Επίσης, η ανισότητα του Παούρη ισχυρίζεται ότι οι ροπές της Ευκλείδειας νόρμας για άρτια ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα φράσσονται από $C(p + \sqrt{n})$. Έτσι, από την Εικασία 7.6.4 θα προέκυπταν τόσο το κεντρικό οριακό θεώρημα όσο και η ανισότητα του Παούρη.

7.6.1 Η unconditional περίπτωση

Θεωρούμε ένα unconditional ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ και εξετάζουμε το πρόβλημα της σύγκρισης ασθενών και ισχυρών ροπών, δηλαδή αν για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $p \geqslant 1$,

$$\left(\int \|x\|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant C_1 \int \|x\| d\mu(x) + C_2 \sup_{\|y\|_* \leqslant 1} \left(\int |\langle y, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p},$$

όπου $C_1, C_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ο Latała απέδειξε στο [80] το εξής σχεδόν βέλτιστο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7.6.7 (Latała). *Έστω μ ένα unconditional λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $p\geqslant 1$,*

$$\left(\int \|x\|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant C_1\int \|x\|d\nu_n(x) + C_2\sup_{\|y\|_*\leqslant 1}\left(\int |\langle y,x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p},$$

όπου ν είναι το εκθετικό μέτρο γινόμενο με πυκνότητα $d\nu_n(x)=\frac{1}{2^n}e^{-\|x\|_1}dx$ και $C_1,C_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η απόδειξη βασίζεται σε ένα θεώρημα του Talagrand: αν μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένες p-ροπές για κάθε $p>0$, για κάθε μη κενό υποσύνολο T του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\gamma_\mu(T)=\inf\sup_{t\in T}\sum_{n=0}^{\infty}\|\langle \pi_{n+1}(t)-\pi_n(t),\cdot\rangle\|_{L^{2^n}(\mu)},$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλες τις οικογένειες υποσυνόλων $T_n\subset T$ και όλες τις συναρτήσεις $\pi_n:T\to T_n$, $n\geqslant 0$, που ικανοποιούν τα εξής:

(i) $\mathrm{card}(T_0)=1$, $\mathrm{card}(T_n)\leqslant 2^{2^n}$ για κάθε $n\geqslant 1$, και

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\pi_n(t)=t$ για κάθε $t\in T$.

Ο Talagrand απέδειξε στο [119] ότι αν ν_n είναι το εκθετικό μέτρο γινόμενο στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\gamma_{\nu_n}(A)\leqslant C\int \sup_{y\in A}\langle y,x\rangle d\nu_n(x) \tag{7.6.2}$$

για κάθε συμμετρικό $A\subseteq\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.6.7. Έστω $A:=K^\circ=\{x\in\mathbb{R}^n:\|x\|_*\leqslant 1\}$ το πολικό σώμα της μοναδιαίας μπάλας της $\|\cdot\|$. Τότε, $\|x\|=\max_{y\in A}\langle y,x\rangle$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε μια οικογένεια υποσυνόλων $A_n\subset A$ και συναρτήσεις $\pi_n:A\to A_n$, $n\geqslant 0$, που ικανοποιούν τα (i) και (ii).

Έστω $p\geqslant 1$. Επιλέγουμε $n_0\geqslant 1$ με $2^{n_0-1}<2p\leqslant 2^{n_0}$. Έχουμε

$$\|x\|=\max_{y\in A}\langle y,x\rangle\leqslant \max_{y\in A}|\langle \pi_{n_0}(y),x\rangle|+\max_{y\in A}\sum_{n=n_0}^{\infty}|\langle \pi_{n+1}(y)-\pi_n(y),x\rangle|.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\left(\int \|x\|^p d\mu(x)\right)^{1/p} &= \left(\int \max_{y\in A}|\langle y,x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p}\\ &\leqslant \left(\int \max_{y\in A}|\langle \pi_{n_0}(y),x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p}\\ &\quad+\left(\int \max_{y\in A}\left(\sum_{n=n_0}^{\infty}|\langle \pi_{n+1}(y)-\pi_n(y),x\rangle|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p}.\end{aligned}\tag{7.6.3}$$

Για τον πρώτο όρο γράφουμε

$$\begin{aligned}
(7.6.4)\qquad \left(\int \max_{y\in A} |\langle \pi_{n_0}(y), x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p} &\leqslant \left(\int \sum_{y\in A_{n_0}} |\langle y, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p}\\
&\leqslant |A_{n_0}|^{1/p} \max_{z\in A_{n_0}} \left(\int |\langle z, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p}\\
&\leqslant 16 \max_{z\in A_{n_0}} \left(\int |\langle z, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p}\\
&\leqslant 16 \max_{\|z\|_*\leqslant 1} \left(\int |\langle z, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p}.
\end{aligned}$$

Έστω

$$R(t) = \Big\{x : \max_{y\in A} \sum_{n=n_0}^{\infty} |\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), x\rangle| \geqslant t \max_{y\in A} \sum_{n=n_0}^{\infty} \|\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), \cdot\rangle\|_{L^{2^n}(\mu)}\Big\}.$$

Από την ανισότητα του Markov, για κάθε $t \geqslant 16$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu(R(t)) &\leqslant \mu\left(\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{y\in A} \{x : |\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), x\rangle| \geqslant t\, \|\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), \cdot\rangle\|_{L^{2^n}(\mu)}\}\right)\\
&\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \sum_{z\in A_n - A_{n+1}} \mu\Big(\{x : |\langle z, x\rangle| \geqslant t\, \|\langle z, \cdot\rangle\|_{L^{2^n}(\mu)}\}\Big)\\
&\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} |A_n|\cdot|A_{n+1}| t^{-2^n}\\
&\leqslant \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{8}{t}\right)^{2^n} \leqslant \left(\frac{8}{t}\right)^{2^{n_0}} + \sum_{k=2^{n_0+1}}^{\infty} \left(\frac{8}{t}\right)^k \leqslant 2\left(\frac{8}{t}\right)^{2^{n_0}} \leqslant 2\left(\frac{8}{t}\right)^{2p}.
\end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
&\left(\int \max_{y\in A} \left(\sum_{n=n_0}^{\infty} |\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), x\rangle|\right)^p d\mu(x)\right)^{1/p}\\
&\leqslant \max_{y\in A} \sum_{n=n_0}^{\infty} \|\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), \cdot\rangle\|_{L^{2^n}(\mu)} \left[16 + \left(2p \int_0^{\infty} t^{p-1} \left(\frac{8}{16+t}\right)^{2p}\right)^{1/p}\right]\\
&\leqslant 32 \max_{y\in A} \sum_{n=n_0}^{\infty} \|\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), \cdot\rangle\|_{L^{2^n}(\mu)}.
\end{aligned}$$

Αφού το μ είναι unconditional και ισοτροπικό, από το θεώρημα σύγκρισης των Bobkov και Nazarov [25] έχουμε

$$\|\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), \cdot\rangle\|_{L^{2^n}(\mu)} \leqslant C\|\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), \cdot\rangle\|_{L^{2^n}(\nu_n)}$$

για κάθε $n \geqslant n_0$. Από την (7.6.2) έπεται ότι

$$\max_{y\in A}\sum_{n=n_0}^{\infty}\|\langle \pi_{n+1}(y) - \pi_n(y), \cdot\rangle\|_{L^{2^n}(\mu)} \leqslant C\int \|x\|d\nu_n(x).$$

Συνδυάζοντας αυτήν την σχέση με τις (7.6.3) και (7.6.4) παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Παρατήρηση 7.6.8. Παρατηρήστε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε $\|\langle y, \cdot\rangle\|_{L^q(\mu)} \leqslant C\|\langle y, \cdot\rangle\|_{L^q(\nu_n)}$. Αφού

$$\left(\int \|x\|^p d\nu(x)\right)^{1/p} \simeq \int \|x\|d\nu(x) + \sup_{\|y\|_*\leqslant 1}\left(\int |\langle y, x\rangle|^p d\nu_n(x)\right)^{1/p},$$

έπεται ότι

$$\left(\int \|x\|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant C\left(\int \|x\|^p d\nu_n(x)\right)^{1/p}.$$

Παρατήρηση 7.6.9. Παρατηρήστε ότι για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int \|x\|d\nu_n(x) &= \int_{E_2^n}\int \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i|x_i|e_i\right\| d\nu_n(x)d\varepsilon\\ &\leqslant \int \max_{1\leqslant i\leqslant n}|x_i|d\nu_n(x)\cdot\int_{E_2^n}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i\right\| d\varepsilon \leqslant C\log n\int_{E_2^n}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i\right\| d\varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού το μ είναι unconditional, από την ανισότητα του Jensen έχουμε επίσης

$$\begin{aligned}\int \|x\|\, d\mu(x) &= \int_{E_2^n}\int \left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i|x_i|e_i\right\| d\mu(x)\, d\varepsilon\\ &\geqslant \int_{E_2^n}\left\|\sum_{i=1}^n (\varepsilon_i\mathbb{E}_\mu(|x_i|))e_i\right\| d\varepsilon\\ &\geqslant c\int_{E_2^n}\left\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i\right\| d\varepsilon.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε το εξής:

Θεώρημα 7.6.10. *Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε unconditional και ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $p \geqslant 1$, έχουμε*

$$\left(\int \|x\|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant C\left[(\log n)\int \|x\|d\mu(x) + \sup_{\|y\|_*\leqslant 1}\left(\int |\langle y, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p}\right].$$

Βιβλιογραφία

[1] S. Alesker, *ψ_2-estimate for the Euclidean norm on a convex body in isotropic position*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Oper. Theory Adv. Appl. **77** (1995), 1-4.

[2] M. Anttila, K. M. Ball and E. Perissinaki, *The central limit problem for convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4723-4735.

[3] S. Artstein–Avidan, K. M. Ball, F. Barthe and A. Naor, *Solution of Shannon's problem on the monotonicity of entropy*, J. Amer. Math. Soc. **17** (2004), 975-982.

[4] S. Artstein–Avidan, K. M. Ball, F. Barthe and A. Naor, *On the rate of convergence in the entropic central limit theorem*, Probab. Theory Related Fields **129** (2004), 381-390.

[5] D. Bakry and M. Emery, *Diffusions hypercontractives*, Séminaire de Probabilités XIX, Lecture Notes in Math. **1123** (1985), 179-206.

[6] D. Bakry and M. Ledoux, *Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator*, Invent. Math. **123** (1996), 259-281.

[7] K.M. Ball, *Isometric problems in ℓ_p and sections of convex sets*, Ph.D. Dissertation, Trinity College, Cambridge (1986).

[8] K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbb{R}^n$*, Studia Math. **88** (1988), 69-84.

[9] K.M. Ball, *An elementary introduction to modern convex geometry*, Flavors of Geometry, Math. Sci. Res. Inst. Publ. **31**, Cambridge Univ. Press (1997).

[10] K. M. Ball, F. Barthe and A. Naor, *Entropy jumps in the presence of a spectral gap*, Duke Math. J. **119** (2003), 41-63.

[11] K. M. Ball and V. H. Nguyen, *Entropy jumps for isotropic log-concave random vectors and spectral gap*, Studia Math. **213** (2012), 81-96.

[12] K. M. Ball and E. Perissinaki, *The subindependence of coordinate slabs for the ℓ_p^n-balls*, Israel J. Math. **107** (1998), 289-299.

[13] R. E. Barlow, A. W. Marshall and F. Proschan, *Properties of probability distributions with monotone hazard rate*, Ann. Math. Statist. **34** (1963), 375-389.

[14] A. R. Barron, *Entropy and the central limit theorem*, Ann. Probab. **14** (1986), 336-342.

[15] F. Barthe, *Un théorème de la limite centrale pour les ensembles convexes*, Séminaire Bourbaki, Vol. 2008/2009, 997-1011.

[16] F. Barthe and D. Cordero-Erausquin, *Invariances in variance estimates*, Proc. London Math. Soc. **106** (2013) 33-64.

[17] V. Bayle and C. Rosales, *Some isoperimetric comparison theorems for convex bodies in Riemannian manifolds*, Indiana Univ. Math. J. **54** (2005), 1371-1394.

[18] L. Berwald, *Verallgemeinerung eines Mittelwertsatzes von J. Favard für positive konkave Funktionen*, Acta Math. **79** (1947), 17-37.

[19] S. G. Bobkov, *Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures*, Ann. Prob. **27** (1999), 1903-1921.

[20] S. G. Bobkov, *On concentration of distributions of random weighted sums*, Ann. Probab. **31** (2003), 195-215.

[21] S. G. Bobkov, *Spectral gap and concentration for some spherically symmetric probability measures*, Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **1807**, Springer, Berlin (2003), 37-43.

[22] S. G. Bobkov, *On isoperimetric constants for log-concave probability distributions*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math., **1910**, Springer, Berlin (2007), 81-88.

[23] S. G. Bobkov and C. Houdré, *Some connections between isoperimetric and Sobolev-type inequalities*, Mem. Amer. Math. Soc. **129** (1997).

[24] S. G. Bobkov and A. Koldobsky, *On the central limit property of convex bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 44-52.

[25] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. **56**, Birkhäuser, Basel (2003), 3-13.

[26] V. Bogachev, *Gaussian measures*, Amer. Math. Soc. (1998).

[27] C. Borell, *Complements of Lyapunov's inequality*, Math. Ann. **205** (1973), 323-331.

[28] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. **12** (1974), 239-252.

[29] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Period. Math. Hungar. **6** (1975), 111-136.

[30] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Inventiones Math. **30** (1975), 207-216.

[31] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467-1476.

[32] J. Bourgain, *On the L^p-bounds for maximal functions associated to convex bodies*, Israel J. Math. **54** (1986), 257-265.

[33] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127-137.

[34] J. Bourgain, *On the isotropy constant problem for ψ_2-bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 114-121.

[35] J. Bourgain, *On the Hardy-Littlewood maximal function for the cube*, Israel J. Math. (to appear).

[36] P. Buser, *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **15** (1982), 213-230.

[37] E. A. Carlen and A. Soffer, *Entropy production by block variable summation and central limit theorem*, Commun. Math. Phys. **140** (1991), 339-371.

[38] I. Chavel, *The Laplacian on Riemannian manifolds*, Spectral theory and geometry, London Math. Soc., Lecture Note Ser. **273**, Cambridge University Press, Cambridge (1999), 30-75.

[39] I. Chavel, *Isoperimetric inequalities - Differential geometric and analytic perspectives*, Cambridge Tracts in Mathematics **145**, Cambridge University Press, Cambridge (2001).

[40] I. Chavel, *Riemannian geometry - A modern introduction*, Second edition, Cambridge Studies in Advanced Mathematics **98**, Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[41] J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*, Problems in Analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969), Princeton Univ. Press, Princeton (1970), 195-199.

[42] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi and B. Maurey, *The* (B)*-conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems*, J. Funct. Anal. **214** (2004), 410-427.

[43] T. Cover and J. Thomas, *Elements of Information Theory*, New York: J. Wiley (1991).

[44] I. Csiszár, *Informationstheoretische Konvergenzbegriffe im Raum der Wahrscheinlichkeitsverteilungen*, Magyar Tud. Akad. Mat. Kutató Int. Közl. **7** (1962), 137-158.

[45] N. Dafnis and G. Paouris, *Small ball probability estimates, ψ_2-behavior and the hyperplane conjecture*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 1933-1964.

[46] S. Dar, *Remarks on Bourgain's problem on slicing of convex bodies*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Operator Theory: Advances and Applications **77** (1995), 61-66.

[47] A. Dembo, T. Cover, and J. Thomas, *Information-theoretic inequalities*, IEEE Trans. Inform. Theory **37** (1991), 1501-1518.

[48] P. Diaconis and D. Freedman, *Asymptotics of graphical projection pursuit*, Ann. of Stat. **12** (1984), 793-815.

[49] M. Dyer and A. Frieze, *Computing the volume of convex bodies: a case where randomness provably helps*, pp. 123-169 in Probabilistic combinatorics and its applications (San Francisco, CA, 1991), edited by B. Bollobás, Proc. Sympos. Appl. Math. 44, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1991.

[50] M. Dyer, A. Frieze, and R. Kannan, *A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies*, J. Assoc. Comput. Mach. 38:1 (1991), 1-17.

[51] R. Eldan, *Thin shell implies spectral gap up to polylog via a stochastic localization scheme* (preprint).

[52] R. Eldan and B. Klartag, *Approximately Gaussian marginals and the hyperplane conjecture Concentration, functional inequalities and isoperimetry*, Contemp. Math. 545, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2011), 55-68.

[53] B. Fleury, *Concentration in a thin Euclidean shell for log-concave measures*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 832-841.

[54] G. B. Folland, *Introduction to Partial Differential Equations*, Mathematical Notes, Princeton University Press, Princeton, NJ (1976).

[55] M. Fradelizi, *Sections of convex bodies through their centroid*, Arch. Math. **69** (1997), 515-522.

[56] M. Fradelizi and O. Guédon, *The extreme points of subsets of s-concave probabilities and a geometric localization theorem*, Discrete Comput. Geom. **31** (2004), 327-335.

[57] A. Giannopoulos, *Notes on isotropic convex bodies*, Lecture Notes, Warsaw 2003, available at `http://users.uoa.gr/apgiannop/`.

[58] D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, 2d ed., Grundlehren Math. Wiss. **224**, Springer, Berlin (1983).

[59] M. Gromov and V. D. Milman, *A topological application of the isoperimetric inequality*, Amer. J. Math. **105** (1983), 843-854.

[60] B. Grünbaum, *Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1257-1261.

[61] O. Guédon, *Kahane-Khinchine type inequalities for negative exponent*, Mathematika **46** (1999), 165-173.

[62] O. Guédon and E. Milman, *Interpolating thin-shell and sharp large-deviation estimates for isotropic log-concave measures*, Geom. Funct. Anal. **21** (2011), 1043-1068.

[63] B. Helffer and J. Sjöstrand, *On the correlation for Kac-like models in the convex case*, J. Statist. Phys. **74** (1994), 349-409.

[64] D. HensleyHensley, D., *Slicing convex bodies: bounds for slice area in terms of the body's covariance*, Proc. Amer. Math. Soc. **79** (1980), 619-625.

[65] L. Hörmander, *L^2-estimates and existence theorems for the $\bar{\partial}$ operator*, Acta Math. **113** (1965), 89-152.

[66] L. Hörmander, *Notions of Convexity*, Progress in Math. **127**, Birkhäuser, Boston-Basel-Berlin (1994).

[67] J. Kadlec, *The regularity of the solution of the Poisson problem in a domain whose boundary is similar to that of a convex domain*, Czechoslovak Math. J. **89** (1964), 386-393.

[68] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541-559.

[69] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Random walks and $O^*(n^5)$ volume algorithm for convex bodies*, Random Structures Algorithms II **1** (1997), 1-50.

[70] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1274-1290.

[71] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Invent. Math. **168** (2007), 91-131.

[72] B. Klartag, *Power-law estimates for the central limit theorem for convex sets*, J. Funct. Anal. **245** (2007), 284-310.

[73] B. Klartag, *A Berry-Esseen type inequality for convex bodies with an unconditional basis*, Probab. Theory Related Fields **145** (2009), 1-33.

[74] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform - A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10-34.

[75] B. Klartag and E. Milman, *Inner regularization of log-concave measures and small-ball estimates*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **2050**, 267-278.

[76] S. Kullback, *A lower bound for discrimination information in terms of variation*, IEEE Trans. Info. Theory **4** (1967), 126-127.

[77] E. Kuwert, *Note on the isoperimetric profile of a convex body*, Geometric Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations, Springer, Berlin (2003), 195-200.

[78] R. Latała, *On the equivalence between geometric and arithmetic means for log-concave measures*, Convex geometric analysis (Berkeley, CA, 1996), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **34**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999), 123-127.

[79] R. Latała, *On some inequalities for Gaussian measures*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Beijing, Vol. II, Higher Ed. Press, Beijing (2002), 813-822.

[80] R. Latała, *Weak and strong moments of random vectors*, Marcinkiewicz centenary volume, Banach Center Publ. **95**, Polish Acad. Sci. Inst. Math., Warsaw (2011), 115-121.

[81] R. Latała and K. Oleszkiewicz, *Small ball probability estimates in terms of widths*, Studia Math. **169** (2005), 305-314.

[82] R. Latała and J. O. Wojtaszczyk, *On the infimum convolution inequality*, Studia Math. **189** (2008), 147-187.

[83] M. Ledoux, *A simple analytic proof of an inequality by P. Buser*, Proc. Am. Math. Soc. **121** (1994), 951-959.

[84] M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian Analysis*, Ecole d'Eté de Probabilités de St.-Flour 1994, Lecture Notes in Math. **1709** (1996), 165-294.

[85] M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities*, Séminaire de probabilités XXXIII, Lecture Notes in Math. **1709**, Springer, Berlin (1999), 120-216.

[86] M. Ledoux, *The geometry of Markov diffusion generators*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. **9** (2000), 305-366.

[87] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs **89**, American Mathematical Society, Providence, RI (2001).

[88] M. Ledoux, *Spectral gap, logarithmic Sobolev constant, and geometric bounds*, Surveys in Differential Geometry, vol. IX, Int. Press, Somerville (2004), 219-240.

[89] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Vol. **23** Springer, Berlin (1991).

[90] P. Li and S. T. Yau, *On the parabolic kernel of the Schrödinger operator*, Acta Math. **156** (1986), 153-201.

[91] A. Lichnerowicz, *Géométrie des groupes de transformations*, Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris, 1958.

[92] E. H. Lieb, *Proof of an entropy conjecture of Wehrl*, Comm. Math. Phys. **62** (1978), 35-41.

[93] M. A. Lifshits, *Gaussian random functions*, Mathematics and its Applications **322**, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[94] A. Litvak, V.D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95-124.

[95] L. Lovász and M. Simonovits, *Random walks in a convex body and an improved volume algorithm*, Random Structures and Algorithms **4** (1993), 359-412.

[96] L. Lovász and S. Vempala, *The geometry of logconcave functions and sampling algorithms*, Random Structures Algorithms **30** (2007), 307-358.

[97] A. W. Marshall, I. Olkin and F. Proschan, *Monotonicity of ratios of means and other applications of majorization*, Inequalities edited by O. Shisha, Acad. Press, New York, London (1967), 177-190.

[98] B. Maurey, *Some deviation inequalities*, Geom. Funct. Anal. **1** (1991), 188-197.

[99] V. G. Maz'ya, *The negative spectrum of the higher-dimensional Schrödinger operator*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **144** (1962), 721-722.

[100] V. G. Maz'ya, *On the solvability of the Neumann problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **147** (1962), 294-296.

[101] E. Milman *On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration*, Invent. Math. **177** (2009), no. 1, 1-43.

[102] E. Milman *On the role of convexity in functional and isoperimetric inequalities*, Proc. Lond. Math. Soc. **99** (2009), no. 1, 32-66.

[103] E. Milman *Isoperimetric and concentration inequalities: equivalence under curvature lower bound*, Duke Math. J. **154** (2010), no. 2, 207-239.

[104] E. Milman *Isoperimetric bounds on convex manifolds*, in Proceedings of the Workshop on "Concentration, Functional Inequalities and Isoperimetry", Contemporary Math. **545** (2011), 195-208.

[105] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200**, Springer, Berlin (1986).

[106] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1021-1049.

[107] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287-308.

[108] L. E. Payne and H. F. Weinberger, *An optimal Poincaré inequality for convex domains*, Arch. Ration. Mech. Anal. **5** (1960), 286•292.

[109] M. S. Pinsker, *Information and Information Stability of Random Variables and Processes*, Holden-Day, San Francisco (1964).

[110] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[111] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[112] C. E. Shannon, *A mathematical theory of communication*, Bell System Tech. J. **27** (1948), 379-423.

[113] C. E. Shannon and W. Weaver, *The mathematical theory of communication*, University of Illinois Press, Urbana, IL (1949).

[114] S. Sodin, *An isoperimetric inequality on the ℓ_p balls*, Ann. Inst. Henri Poincaré Probab. Stat. **44** (2008), 362-373.

[115] A. Stam, *Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon*, Information and Control **2** (1959), 101-112.

[116] P. Sternberg and K. Zumbrun, *On the connectivity of boundaries of sets minimizing perimeter subject to a volume constraint*, Commun. Anal. Geom. **7** (1999), 199-220.

[117] V. N. Sudakov, *Typical distributions of linear functionals in finite-dimensional spaces of high dimension*, Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 1578-1582

[118] M. Talagrand, *A new isoperimetric inequality and the concentration of measure phenomenon*, Geometric aspects of functional analysis (1989–90), Lecture Notes in Math. **1469**, Springer, Berlin (1991), 94-124.

[119] M. Talagrand, *The supremum of some canonical processes*, Amer. J. Math. **116** (1994), 283-325.

[120] M. Talagrand, *The generic chaining - Upper and lower bounds of stochastic processes*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[121] C. Villani, *Topics in Optimal Transportation*, Graduate Texts in Mathematics **58**, Amer. Math. Soc. (2003).

[122] H. von Weizsäker, *Sudakov's typical marginals, random linear functionals and a conditional central limit theorem*, Probab. Theory Relat. Fields **107** (1997), 313-324.