Γεωμετρικά Προβλήματα στη Μη-Γραμμική Συναρτησιακή Ανάλυση

Διδακτορική Διατριβή

Γιώργος Χασάπης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2018

Η διδακτορική διατριβή υλοποιήθηκε με υποτροφία του ΙΚΥ η οποία χρηματοδοτήθηκε από την Πράξη «Πρόγραμμα χορήγησης υποτροφιών για μεταπτυχιακές σπουδές δεύτερου κύκλου σπουδών» από πόρους του ΕΠ «Ανάπτυξη Ανθρώπινου Δυναμικού, Εκπαίδευση και Δια Βίου Μάθηση», 2014-2020 με τη συγχρηματοδότηση του Ευρωπαϊκού Κοινωνικού Ταμείου (Ε.Κ.Τ) και του Ελληνικού Δημοσίου.

Εισηγητής:

Απόστολος Γιαννόπουλος

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Συνδυάζοντας πιθανοθεωρητικές τεχνικές με γεωμετρικά και αναλυτικά εργαλεία, στην παρούσα διατριβή ασχολούμαστε με έναν αριθμό προβλημάτων που εμπίπτουν στον ευρύτερο κλάδο της Ασυμπτωτικής Γεωμετρικής Ανάλυσης. Βασικός άξονας στην περιοχή αυτή, που γεννήθηκε από τη διάδραση της τοπικής θεωρίας χώρων Banach και της κλασικής κυρτότητας, είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των (συμμετρικών) κυρτών σωμάτων του $\mathbb{R}^n$ από την ασυμπτωτική σκοπιά, θεωρώντας δηλαδή ότι η διάσταση n του υποκείμενου χώρου τείνει στο άπειρο. Ακολουθεί μια συνοπτική περιγραφή των αποτελεσμάτων της διατριβής.

1. Ευκλείδεια κανονικοποίηση στη θέση John. Δεδομένου ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται σε θέση John, ορίζουμε, για κάθε $t > 1$

$$K_t := \mathrm{conv}\{K, tB_2^n\}.$$

Συμβολίζουμε επιπλέον $M_t = \int_{S^{n-1}} \|x\|_{K_t}\, d\sigma(x)$. Ένα αποτέλεσμα του Fresen δίνει μια εκτίμηση για την τάξη μεγέθους του μέσου M_t, συγκεκριμένα, για κάθε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$,

$$M_t^2 \geqslant c\frac{\log(1+\frac{n}{t^2})}{n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Με αφετηρία την εκτίμηση αυτή, δίνουμε μια νέα σύντομη απόδειξη του Ισομορφικού Θεωρήματος Dvoretzky των V. Milman και Schechtman: Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, κάθε $c_1 \log n \leqslant k \leqslant n$ και κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος Y του X τέτοιος ώστε

$$d(Y, \ell_2^k) \leqslant c_2 \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\log\left(1+\frac{n}{k}\right)}},$$

όπου με $d(Y, \ell_2^k)$ παραπάνω συμβολίζουμε την απόσταση Banach-Mazur του Y από τον ℓ_2^k. Στην πραγματικότητα μπορούμε να δείξουμε ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα των Litvak, Mankiewicz και Tomczak-Jaegermann από το οποίο έπεται ότι ο τυχαίος υπόχωρος Y ικανοποιεί την παραπάνω ανισότητα με πολύ μεγάλη πιθανότητα. Χρησιμοποιώντας την ίδια μέθοδο αποδεικνύουμε επίσης ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ σε θέση John, τότε για κάθε $k \leqslant \delta n/(\log(n+1))$, όπου $\delta \in (0,1)$ είναι μια απόλυτη σταθερά, η τυχαία k-άδα ορθογώνιων μετασχηματισμών $U_1, \ldots, U_k \in O(n)$ ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_4 n)$, την

$$d_G\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} U_i^*(K^\circ), B_2^n\right) \leqslant c_3\sqrt{\frac{n}{k\log k}},$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές, και με $d_G(K,L)$ συμβολίζουμε τη γεωμετρική απόσταση δύο συμμετρικών κυρτών σωμάτων K, L στον $\mathbb{R}^n$. Το αποτέλεσμα αυτό μπορεί να ιδωθεί σαν μια ισομορφική εκδοχή της λεγόμενης «ολικής μορφής» του Θεωρήματος Dvoretzky που αποδείχθηκε από τους Bourgain, Lindenstrauss και V. Milman.

2. Προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων. Δείχνουμε ότι αν $f(n)$ είναι μια συνάρτηση με $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ και $f(n) = o(n)$ και $n \geqslant n_0$, τότε για κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{n/f(n)}$ υπάρχουν ορθοκανονικά διανύσματα $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log f(n)}$$

για κάθε $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in S$, όπου $c \in (0,1)$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το αποτέλεσμα αυτό βελτιώνει μια προηγούμενη εκτίμηση του Hajela στην κατεύθυνση απόδειξης μιας αρνητικής απάντησης στη γνωστή εικασία του Komlós: Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $x_1, \dots, x_n \in B_2^n$ υπάρχουν $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1,1\}$ τέτοια ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|_\infty \leqslant C.$$

Για την απόδειξη θεωρούμε τυχαίες στροφές της συνήθους ορθοκανονικής βάσης $e_1, \dots, e_n \in \mathbb{R}^n$ και χρησιμοποιούμε μια ανισότητα τύπου small ball για τις τιμές της $\|\cdot\|_\infty$ στην Ευκλείδεια σφαίρα S^{n-1}. Γενικεύοντας την προσέγγισή μας αυτή, αποδεικνύουμε παρόμοια αποτελέσματα στην περίπτωση που το ρόλο της $\|\cdot\|_\infty$ παίρνει μια νόρμα που επάγεται από ένα τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$, καθώς και στην περίπτωση που τα σημεία $x_1, \dots, x_n$ επιλέγονται από μια τυχαία στροφή ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε ένα αποτέλεσμα των Gluskin και V. Milman, που μας επιτρέπει επίσης να δώσουμε μια νέα απόδειξη ενός θεωρήματος του Banasczcyk: Για κάθε ζευγάρι συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν $x_1, \dots, x_n \in K$ τέτοια ώστε για κάθε $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1,1\}$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|_L \geqslant c\sqrt{n} \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(L)} \right)^{1/n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

3. Εκτιμήσεις για μέτρα τομών κυρτών σωμάτων. Μελετάμε τις γενικευμένες εκδοχές δύο κλασικών προβλημάτων της Ασυμπτωτικής Γεωμετρικής Ανάλυσης, της Εικασίας του Υπερεπιπέδου και του Ισομορφικού Προβλήματος Busemann-Petty. Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k \leqslant n-1$ συμβολίζουμε με $\alpha_{n,k}(\mu)$ τον μικρότερο $\alpha > 0$ με την ιδιότητα: Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$\mu(K) \leqslant \alpha^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mu(K \cap F) \cdot \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}},$$

όπου με $G_{n,m}$ συμβολίζουμε το σύνολο των m-διάστατων υπόχωρων του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ συμβολίζουμε επίσης με $\beta_{n,k}(\mu)$ τον μικρότερο β με την ιδιότητα: Για κάθε ζευγάρι κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων K, L στον $\mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει ότι $\mu(K \cap F) \leqslant \mu(L \cap F)$ για κάθε $F \in G_{n,n-k}$, έχουμε ότι

$$\mu(K) \leqslant \beta^k \mu(L).$$

Αποδεικνύουμε ότι, για κάθε μέτρο μ όπως παραπάνω, $\alpha_{n,k}(\mu) \leqslant c_1\sqrt{n-k}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, ενώ από την άλλη $\beta_{n,k}(\mu) \leqslant c_2 k\sqrt[4]{n-k}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$, αν περιοριστούμε στην κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων, κάτω από την επιπλέον υπόθεση ότι το μέτρο μ είναι λογαριθμικά κοίλο. Οι εκτιμήσεις αυτές γενικεύουν και βελτιώνουν προηγούμενα αποτελέσματα των Koldobsky και Zvavitch. Οι αποδείξεις μας ακολουθούν μια διαφορετική μέθοδο από αυτή των προαναφερθέντων συγγραφέων, συνδυάζοντας εργαλεία από την ολοκληρωτική γεωμετρία, αντίστροφες ανισότητες Hölder για λογαριθμικά κοίλα μέτρα και ισοπεριμετρικού τύπου ανισότητες για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals κυρτών σωμάτων, καθώς και συναρτησιακές γενικεύσεις αυτών.

4. Φαινόμενα κατωφλίου για τυχαία πολύτοπα σε υψηλές διαστάσεις. Έστω $N > n$ και $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ τυχαία σημεία που επιλέγονται ανεξάρτητα με κατανομή ένα μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^n$. Αν θεωρήσουμε ένα δεύτερο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, ένα γενικό πρόβλημα, στιγμιότυπα του οποίου έχουν κατά καιρούς απασχολήσει διάφορους συγγραφείς, είναι η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της ποσότητας $\mathbb{E}_{\nu^{\otimes N}}\mu(\mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\})$ καθώς $n \to \infty$, σαν συνάρτηση του πλήθους των κορυφών N. Σε πιο απλή γλώσσα, το ερώτημα που μας απασχολεί είναι: Πόσο μεγάλο χρειάζεται να είναι το πλήθος των κορυφών $N = N(n)$, ώστε το τυχαίο πολύτοπο $\mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\}$ να έχει «σημαντικό» μέγεθος (ως προς το μέτρο μ), καθώς η διάσταση μεγαλώνει; Ασχολούμαστε με τις περιπτώσεις κατά τις οποίες τα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ επιλέγονται με βάση τις κατανομές Βήτα και Βήτα$'$ στον $\mathbb{R}^n$. Συγκεκριμένα, για την περίπτωση της Βήτα κατανομής με παράμετρο $\beta > -1$, αν επιλέξουμε $\mu = \mathrm{vol}_n(\cdot)/\mathrm{vol}_n(B_2^n)$ να είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στη μοναδιαία μπάλα B_2^n του $\mathbb{R}^n$, δείχνουμε το ακόλουθο φαινόμενο κατωφλίου: Για κάθε $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}\{x_1, \ldots, x_N\})}{\mathrm{vol}_n(\mathrm{B}_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((1-\varepsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log n\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((1+\varepsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log n\right). \end{cases}$$

Αποδεικνύουμε επιπλέον ίδιου τύπου αποτελέσματα για όλους τους intrinsic volumes του Βήτα πολυτόπου, καθώς και για την περίπτωση της Βήτα$'$ κατανομής, θεωρώντας στη θέση του κανονικοποιημένου μέτρου Lebesgue ένα τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ. Δείχνουμε πώς από τα αποτελέσματά μας μπορούν να προκύψουν αντίστοιχα παλιότερα αποτελέσματα του Pivovarov, για την περίπτωση κατά την οποία τα σημεία $x_1, \ldots, x_N$ επιλέγονται με βάση το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στην Ευκλείδεια σφαίρα S^{n-1} ή με βάση το μέτρο του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$.

5. Εκτιμήσεις για τα αφφινικά quermassintegrals. Δίνουμε μερικά αποτελέσματα στην κατεύθυνση της επαλήθευσης της ασυμπτωτικής μορφής μιας εικασίας του Lutwak για τα αφφινικά quermassintegrals ενός κυρτού σώματος. Συγκεκριμένα, δεδομένου ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ το k-στό κανονικοποιημένο αφφινικό quermassintegral του K,

$$T_{n,k}(K) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^{1/n}} \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-\frac{1}{kn}},$$

και προσπαθούμε για συγκεκριμένες κλάσεις σωμάτων να βελτιώσουμε την καλύτερη ως τώρα γενική εκτίμηση $T_{n,k}(K) \leqslant c\sqrt{n/k}\log n$, όπου $c > 0$ μια απόλυτη σταθερά, που ισχύει για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Το ζητούμενο γενικά (και το καλύτερο που θα μπορούσε να περιμένει κανείς) είναι να απαλειφθεί ο λογαριθμικός όρος στο παραπάνω άνω φράγμα. Δείχνουμε αρχικά ότι κάτι τέτοιο ισχύει για μια ευρεία κλάση συμμετρικών τυχαίων πολυτόπων: αν $n^2 \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$ και τα $x_1, \dots, x_N$ είναι τυχαία σημεία που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το εσωτερικό ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K, μπορούμε να δείξουμε ότι η εκτίμηση

$$T_{n,k}(\mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\}) \leqslant c\sqrt{\frac{n}{k}}$$

ισχύει με πιθανότητα που τείνει στο 1 καθώς η διάσταση μεγαλώνει. Εξετάζουμε επίσης την περίπτωση κατά την οποία τα σημεία $x_1, \dots, x_N$ επιλέγονται με βάση τη Βήτα κατανομή στον $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε τότε πάλι να αφαιρέσουμε τον λογαριθμικό παράγοντα στο παραπάνω άνω φράγμα, κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις για τα k, N. Μελετάμε τέλος το ίδιο πρόβλημα για την κλάση των unconditional κυρτών σωμάτων: Αν το K είναι unconditional, μπορούμε να δείξουμε το άνω φράγμα $T_{n,k}(K) \leqslant c\sqrt{n/k} \cdot \sqrt{1 + \log(n/k)}$, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Περιγράφουμε ενδελεχέστερα τα παραπάνω αποτελέσματα στο Κεφάλαιο 2, πριν αναλύσουμε τις τεχνικές λεπτομέρειες των σχετικών αποδείξεων ξεχωριστά, στα αντίστοιχα Κεφάλαια 3-7. Παρά το ότι το θεωρητικό πλαίσιο και τα εργαλεία που χρησιμοποιούνται από κεφάλαιο σε κεφάλαιο παρουσιάζουν μια σχετική αυτοτέλεια, συγκεντρώνουμε στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 1 τους ορισμούς κάποιων βασικών εννοιών και την ανάπτυξη του ενιαίου θεωρητικού υπόβαθρου σχετικά με τη γεωμετρία των κυρτών σωμάτων και ορισμένων κλάσεων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, που αποτελούν τα κεντρικά αντικείμενα μελέτης στα επιμέρους κομμάτια της εργασίας.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Συμβολισμός και θεωρητικό υπόβαθρο

Στο κεφάλαιο αυτό εισάγουμε μερικές βασικές έννοιες, καθώς και το συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί με ενιαίο τρόπο στο σύνολο του κειμένου. Διατυπώνουμε επίσης ορισμένα κλασικά αποτελέσματα της σχετικής θεωρίας, που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Επιπλέον έννοιες και βοηθητικά αποτελέσματα που μπορεί να απαιτούνται για την παρουσίαση των αποτελεσμάτων κάθε ξεχωριστού κεφαλαίου θα κάνουν την εμφάνισή τους στην πορεία.

Εργαζόμαστε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, δηλαδή

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

για κάθε $x = (x_1, x_2, \dots, x_n), y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την επαγόμενη Ευκλείδεια νόρμα, και γράφουμε B_2^n για την κλειστή Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και $S^{n-1} := \partial B_2^n$ για τη μοναδιαία σφαίρα, το σύνορο δηλαδή της B_2^n. Αντίστοιχα, για οποιοδήποτε $p \geqslant 1$ συμβολίζουμε με B_p^n την κλειστή μοναδιαία μπάλα ως προς τη συνηθισμένη p-νόρμα

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \right)^{1/p}, \quad x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Με $(e_i)_{i=1}^n$ συμβολίζουμε τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$, και με $o = (0, \dots, 0)$ την αρχή των αξόνων. Για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ με $\vartheta^{\perp}$ συμβολίζουμε το κεντρικό υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο ϑ.

Συμβολίζουμε παντού στο κείμενο με dx την ολοκλήρωση ως προς το n-διάστατο μέτρο Lebesgue. Παρατηρήστε ότι έτσι δεν αναφέρουμε κάθε φορά τη διάσταση στην οποία λαμβάνει χώρα η ολοκλήρωση. Επιλέγουμε το συγκεκριμένο συμβολισμό χάριν απλότητας, ωστόσο τονίζουμε ότι η ολοκλήρωση γίνεται πάντα στην κατάλληλη διάσταση. Σε σημεία του κειμένου όπου μπορεί να προκληθεί σύγχυση, ενδέχεται να χρησιμοποιούμε τον αναλυτικότερο συμβολισμό $d\lambda_n(x)$ για τη Lebesgue ολοκλήρωση στις n διαστάσεις. Τείνουμε να χρησιμοποιούμε τον όρο *όγκος* του A, όταν αναφερόμαστε στο n-διάστατο μέτρο Lebesgue ενός (πλήρους διάστασης) A μετρήσιμου υποσυνόλου του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε τον όγκο ενός τέτοιου A με $\mathrm{vol}_n(A)$.

Γράφουμε $GL(n)$ για το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, και $SL(n) = \{T \in GL(n) : \det(T) = 1\}$ είναι το υποσύνολο των $T \in GL(n)$ που διατηρούν τον όγκο. Με $O(n)$ συμβολίζουμε ως συνήθως την ορθογώνια ομάδα, το σύνολο δηλαδή των ορθογώνιων μετασχηματισμών, στον $\mathbb{R}^n$. [1] Η συμπαγής ομάδα $O(n)$ είναι εφοδιασμένη με ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας (μέτρο Haar) το οποίο συμβολίζουμε με ν_n. Η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα είναι εφοδιασμένη με ένα αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας, το οποίο συμβολίζουμε με σ (για συντομία, απαλείφουμε και εδώ στο συμβολισμό μας την εξάρτηση από τη διάσταση, η οποία όμως κάθε φορά θα είναι σαφής από το περιεχόμενο). Το μέτρο σ επάγεται από το μέτρο ν_n της $O(n)$ ως εξής: Σταθεροποιώντας ένα οποιοδήποτε $x_0 \in S^{n-1}$, ορίζουμε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq S^{n-1}$,

$$\sigma(A) := \nu_n\left(\{U \in O(n) : U(x_0) \in A\}\right).$$

Λόγω της μοναδικότητας του μέτρου Haar, το μέτρο πιθανότητας σ ταυτίζεται με το λεγόμενο cone measure στη σφαίρα, έχουμε δηλαδή

$$\sigma(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(C(A))}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)},$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq S^{n-1}$, όπου $C(A) = \{tx : x \in A, t \in [0,1]\}$.

Για κάθε φυσικό $k < n$, με $G_{n,k}$ συμβολίζουμε την πολλαπλότητα Grassmann, το σύνολο των k-διάστατων υπόχωρων του $\mathbb{R}^n$. Η $G_{n,k}$ είναι επίσης εφοδιασμένη με ένα μέτρο Haar πιθανότητας που συμβολίζουμε με $\nu_{n,k}$, και ορίζεται επίσης μέσω του μέτρου στην $O(n)$: Για κάθε μετρήσιμο $S \subseteq G_{n,k}$,

$$\nu_{n,k}(S) := \nu_n\left(\{U \in O(n) : U(\mathbb{R}^k) \in S\}\right).$$

Για έναν υπόχωρο $F \in G_{n,k}$, συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ επί του F.

Τα γράμματα $c, c', \bar{c}, c_1, c_2$ κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές που η τιμή τους μπορεί να αλλάζει από γραμμή σε γραμμή. Όταν γράφουμε $a \lesssim b$, εννοούμε ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $a \leqslant cb$. Γράφουμε επίσης $a \simeq b$ αν $a \lesssim b$ και $b \lesssim a$. Όμοια, αν $K, T \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K \simeq T$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 K \subseteq T \subseteq c_2 K$. Συμβολίζουμε τέλος με $|A|$ τον πληθάριθμο ενός πεπερασμένου συνόλου A, και ενδέχεται, σε κάποια σημεία να χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1.1 Κυρτά σώματα

Ένα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ λέμε ότι είναι ένα *κυρτό σώμα* στον $\mathbb{R}^n$ αν είναι συμπαγές, κυρτό, και $\mathrm{int}(K) \neq \emptyset$. Λέμε ότι το K είναι *κεντραρισμένο* ή ότι *έχει κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων* αν η

$$\int_K \langle x, \vartheta \rangle \, dx = 0$$

[1] Ο συμβολισμός αυτός δεν συγχέεται με τον εξ' ίσου συνηθισμένο big-O συμβολισμό που περιγράφει την τάξη μεγέθους μιας ποσότητας ως συνάρτηση του n, καθώς οι συγκεκριμένες έννοιες χρησιμοποιούνται πάντα σε διαφορετικό πλαίσιο.

ισχύει για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Επίσης, το K λέγεται *συμμετρικό* (ως προς την αρχή των αξόνων) αν $K=-K$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_K$ το συναρτησοειδές Minkowski του K, δηλαδή

$$\|x\|_K = \min\{t>0 : x \in tK\}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ο συγκεκριμένος συμβολισμός έχει το εξής νόημα: Αν το K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα, τότε το συναρτησοειδές Minkowski $\|\cdot\|_K$ είναι μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, η κλειστή μοναδιαία μπάλα της οποίας είναι το K, ισχύει δηλαδή ότι $K=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_K \leqslant 1\}$. Αντίστροφα, αν $X=(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X, $B_X=\{x\in\mathbb{R}^n : \|x\|\leqslant 1\}$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα. Η κλάση των n-διάστατων χώρων με νόρμα ταυτίζεται με αυτόν τον τρόπο με το σύνολο των συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$.

Δεδομένου ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, η *συνάρτηση στήριξης του* K, $h_K:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ δίνεται από την

$$h_K(x)=\max\{\langle x,y\rangle : y\in K\}.$$

Ο παραπάνω ορισμός έχει μια χρήσιμη γεωμετρική ερμηνεία: Αν επιλέξουμε μια διεύθυνση $\vartheta \in S^{n-1}$, τότε εύκολα μπορούμε να δούμε ότι η ποσότητα $h_K(\vartheta)$ είναι η (προσημασμένη) απόσταση του υπερεπιπέδου στήριξης του K στη διεύθυνση ϑ από την αρχή των αξόνων. Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι η συνάρτηση στήριξης χαρακτηρίζει το σώμα: Έχουμε $h_K \leqslant h_L$ αν και μόνο αν $K\subseteq L$.

Από τον ορισμό της συνάρτησης στήριξης, βλέπουμε ότι η ποσότητα $h_K(\vartheta)+h_K(-\vartheta)$ στην ουσία μετράει το «πλάτος» του σώματος K στη διεύθυνση $\vartheta\in S^{n-1}$. Παίρνοντας τη μέση τιμή (και διαιρώντας με 2) παίρνουμε το λεγόμενο *μέσο πλάτος* του κυρτού σώματος K, που συμβολίζουμε με $w(K)$:

$$w(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta).$$

Είναι άμεσο ότι το συναρτησοειδές h_K είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Λόγω της θετικής ομογένειας μάλιστα, είναι συνηθισμένο να θεωρούμε την h_K ορισμένη μόνο στη σφαίρα S^{n-1}, αντί σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε επιπλέον ότι η h_K είναι άρτια αν και μόνο αν το K είναι συμμετρικό, και θετική αν και μόνο αν $o\in \mathrm{int}(K)$. Όταν ισχύουν τα παραπάνω, η h_K είναι λοιπόν μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Η κλειστή μοναδιαία μπάλα αυτής της νόρμας είναι το *πολικό σώμα του* K, το οποίο μπορεί να οριστεί και χωρίς την υπόθεση της συμμετρίας: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $o\in K$, ορίζουμε

$$K^\circ := \left\{ x\in\mathbb{R}^n : \max_{y\in K}\langle x,y\rangle \leqslant 1\right\}.$$

Στην περίπτωση που το K είναι συμμετρικό, αν $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_K)$, παρατηρήστε ότι $K^\circ = B_{X^*}$, δηλαδή το K° δεν είναι παρά η κλειστή μοναδιαία μπάλα του δυϊκού χώρου X^*. Παρατηρήστε τέλος ότι $(K^\circ)^\circ = K$ και $h_K(\cdot)=\|\cdot\|_{K^\circ}$ για κάθε κυρτό σώμα K με $o\in K$.

Μια, κατά κάποιο τρόπο, δυϊκή έννοια της συνάρτησης στήριξης είναι αυτή της ακτινικής συνάρτησης $\rho_K:\mathbb{R}^n\setminus\{o\}\to\mathbb{R}$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, η οποία δίνεται από την

$$\rho_K(x)=\max\{t>0 : tx\in K\}.$$

Παρατηρήστε ότι η ρ_K είναι θετικά ομογενής βαθμού -1, δηλαδή $\rho_K(ax)=a^{-1}\rho_K(x)$ για κάθε $a>0$.

Με τον όρο *περιγεγραμμένη ακτίνα* ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ εννοούμε την ακτίνα της μικρότερης o-συμμετρικής Ευκλείδειας μπάλας που περιέχει το K. Χρησιμοποιούμε για την περιγεγραμμένη ακτίνα το συμβολισμό $R(K)$, έχουμε δηλαδή

$$R(K) := \min\{r > 0 : K \subseteq rB_2^n\}.$$

Παρατηρήστε ότι $R(K) = \max_{x\in K} \|x\|_2 = \max_{\vartheta\in S^{n-1}} h_K(\vartheta)$. Αντίστοιχα ορίζεται και η *εγγεγραμμένη ακτίνα*, $r(K)$ του K ως η ακτίνα της μεγαλύτερης o-συμμετρικής Ευκλείδειας μπάλας που περιέχεται στο K, δηλαδή

$$r(K) = \max\{r > 0 : rB_2^n \subseteq K\}.$$

Και πάλι, εύκολα βλέπει κανείς ότι $r(K) = \min_{\vartheta\in S^{n-1}} h_K(\vartheta)$.

Χρησιμοποιούμε συχνά το συμβολισμό $\omega_n = \mathrm{vol}_n(B_2^n)$ για τον όγκο της μοναδιαίας μπάλας. Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες, μπορεί κανείς να δει ότι

$$\omega_n = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}. \tag{1.1.1}$$

Καθώς, από τον τύπο του Stirling, έχουμε $\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) \simeq \sqrt{2}\pi e^{-n/2}\left(\frac{n}{2}\right)^{\frac{n+1}{2}}$, έπεται ότι $\omega_n^{1/n} \simeq n^{-1/2}$. Η εκτίμηση αυτή για τον όγκο της n-διάστατης Ευκλείδειας μπάλας υπεισέρχεται συχνά στους υπολογισμούς μας.

Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο 1, είναι κεντραρισμένο, και ο πίνακας αδρανείας του είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x,\vartheta\rangle^2 dx = L_K^2 \tag{1.1.2}$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό. Αυτή η ισοτροπική εικόνα του K είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

1.1.1 Γεωμετρικές ανισότητες

Παραθέτουμε στην παράγραφο αυτή μερικές βασικές γεωμετρικές ανισότητες που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια. Ξεκινάμε με ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα της κλασικής κυρτότητας.

Θεώρημα 1.1.1 (Ανισότητα Brunn-Minkowski)**.** *Έστω K και L δύο μη-κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K+L)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(L)^{1/n}. \tag{1.1.3}$$

Αν υποθέσουμε επιπλέον ότα τα K και L είναι κυρτά σώματα, τότε η ισότητα στην (1.1.3) *ισχύει αν και μόνον αν τα K και L είναι ομοθετικά.*

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει τον όγκο με το άθροισμα Minkowski. Συναντάται συχνά σε δύο άλλες (στην ουσία ισοδύναμες) μορφές: Για κάθε $\lambda \in (0,1)$, και κάθε δύο μη-κενά, συμπαγή $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)L)^{1/n} \geqslant \lambda \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(L)^{1/n}, \tag{1.1.4}$$

ή (χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου),

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)L) \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{\lambda}\mathrm{vol}_n(L)^{1-\lambda}. \tag{1.1.5}$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι ο όγκος είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση (ως προς την άθροιση Minkowski).

Θα χρησιμοποιήσουμε επιπλέον την ακόλουθη συναρτησιακή γενίκευση της ανισότητας Brunn-Minkowski.

Θεώρημα 1.1.2 (Ανισότητα Prékopa-Leindler)**.** *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}.$$

Τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\right)^{1-\lambda}.$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται άμεσα από την ανισότητα Prékopa-Leindler, εφαρμόζοντας την τελευταία για $f = \mathbb{1}_K$, $g = \mathbb{1}_L$ και $h = \mathbb{1}_{\lambda K + (1-\lambda)L}$.

Μια κλασική ανισότητα που μπορεί να δειχθεί σαν συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski και της συμμετρικοποίησης κατά Steiner (για μια απόδειξη, βλ. [2, Θεώρημα 1.5.11]) είναι η ανισότητα του Urysohn.

Θεώρημα 1.1.3 (Ανισότητα του Urysohn)**.** *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε*

$$w(K) \geqslant \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}.$$

Παρατηρήστε ότι το δεξί μέλος της παραπάνω ανισότητας ισούται ακριβώς με την ακτίνα της Ευκλείδειας μπάλας στον $\mathbb{R}^n$ που έχει τον ίδιο όγκο με το σώμα K. Αναφερόμαστε λοιπόν συχνά σε αυτή την ποσότητα με τον όρο *ακτίνα όγκου* του K, και συμβολίζουμε

$$\mathrm{vrad}(K) = \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}.$$

Η ανισότητα του Urysohn μας δίνει μια εκτίμηση για το μέσο πλάτος ενός κυρτού σώματος K αν έχουμε ένα κάτω φράγμα για την ακτίνα όγκου του K (και αντίστροφα).

Ένα κλασικό αποτέλεσμα που συνδέει τον όγκο ενός κυρτού σώματος με τον όγκο του πολικού του είναι το παρακάτω, που διατυπώθηκε αρχικά από τον Blaschke για συμμετρικά σώματα στις 3 διαστάσεις και αποδείχθηκε από τον Santaló για κάθε διάσταση n, ενώ αργότερα φάνηκε ότι ισχύει και χωρίς την υπόθεση της συμμετρίας.

Θεώρημα 1.1.4 (Ανισότητα Blaschke-Santaló)**.** *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε*

$$\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^{\circ}) \leqslant \omega_n^2.$$

Η παραπάνω ανισότητα στην ουσία λέει ότι το γινόμενο όγκων $\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ)$ μεγιστοποιείται στην περίπτωση που το K είναι ελλειψοειδές. Όπως με την ανισότητα του Urysohn, η ανισότητα Blaschke-Santaló μπορεί να δειχθεί χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski και συμμετρικοποίηση κατά Steiner (βλ. [2, Παράγραφος 1.5.4])

Δεδομένου του ασυμπτωτικού τύπου $\omega_n^{1/n} \simeq n^{-1/2}$, ένα μεταγενέστερο αποτέλεσμα των Bourgain και Milman εξασφαλίζει ότι στην ουσία η ανισότητα Blaschke-Santaló αντιστρέφεται. Ενδέχεται λοιπόν να αναφερόμαστε στην ακόλουθη ανισότητα και με τον όρο «αντίστροφη ανισότητα Santaló».

Θεώρημα 1.1.5 (Ανισότητα Bourgain-Milman)**.** *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $o \in \mathrm{int}(K)$. Τότε υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε*

$$(\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ))^{1/n} \geqslant \frac{c}{n}.$$

Παρατηρήστε ότι από τις ανισότητες Blaschke-Santaló και Bourgain-Milman έπεται ότι

$$\mathrm{vrad}(K)\mathrm{vrad}(K^\circ) \simeq 1,$$

για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$.

Μία ακόμη συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski που θα χρησιμοποιήσουμε είναι το επόμενο αποτέλεσμα του C. Borell [30], το οποίο είναι γνωστό σαν το «Λήμμα του Borell».

Θεώρημα 1.1.6 (Borell)**.** *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ κλειστό, κυρτό και συμμετρικό, με $\mathrm{vol}(K \cap A) = \delta > \frac{1}{2}$. Τότε για κάθε $t \geqslant 1$,*

$$\mathrm{vol}(K \cap (tA)^c) \leqslant \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{t+1}{2}}.$$

Σχέδιο της απόδειξης. Δείχνουμε πρώτα ότι $A^c \supseteq \frac{2}{t+1}(tA)^c + \frac{t-1}{t+1}A$, και μετά παίρνουμε την τομή με το K και εφαρμόζουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski. □

Ένα χρήσιμο Πόρισμα του Λήμματος του Borell είναι η ακόλουθη αντίστροφη ανισότητα Hölder για ημινόρμες στον $\mathbb{R}^n$.

Πόρισμα 1.1.7. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μια ημινόρμα, τότε για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε*

$$\left(\int_K f(x)^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_K f(x)^q\,dx\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int_K f(x)^p\,dx\right)^{1/p},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Η αριστερή ανισότητα παραπάνω είναι απλά η ανισότητα Hölder. Δείχνουμε τη δεξιά ανισότηα: Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1.6 για το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) \leqslant 3\|f\|_p\},$$

το οποίο είναι κλειστό, συμμετρικό και κυρτό. Από την ανισότητα του Markov βλέπουμε ότι $\mathrm{vol}(K\cap A)\geqslant 1-3^{-p}>1/2$. Παρατηρήστε ότι για $\delta>1/2$ έχουμε

$$\delta\left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{t+1}{2}}<\frac{(1-\delta)^{\frac{t-1}{2}}}{\delta^{\frac{t-1}{2}}}=\left(\frac{1}{\delta}-1\right)^{\frac{t-1}{2}},$$

και για $\delta=1-3^{-p}$, $\frac{1}{\delta}-1=\frac{3^{-p}}{1-3^{-p}}\leqslant e^{-p/2}$. Από το Θεώρημα 1.1.6 έπεται τότε ότι

$$\mathrm{vol}(\{x\in K:f(x)\geqslant 3t\|f\|_p\})\leqslant e^{-c_1p(t-1)}$$

για κάθε $t>1$, με $c_1=1/4$. Τώρα γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_K f(x)^q\,dx&=\int_0^\infty qs^{q-1}\mathrm{vol}(\{x\in K:f(x)\geqslant s\})\,ds\\&\leqslant(3\|f\|_p)^q+(3\|f\|_p)^q\int_1^\infty qt^{q-1}e^{-c_1p(t-1)}\,dt\\&\leqslant(3\|f\|_p)^q+e^{c_1p}(3\|f\|_p)^q\int_1^\infty qt^{q-1}e^{-c_1pt}\,dt\\&\leqslant(3\|f\|_p)^q+e^{c_1p}\left(\frac{3\|f\|_p}{c_1p}\right)^q\Gamma(q+1).\end{aligned}$$

Το ζητούμενο έπεται τότε εφαρμόζοντας τον τύπο του Stirling και το γεγονός ότι $(a+b)^{1/q}\leqslant a^{1/q}+b^{1/q}$ για κάθε $a,b>0$ και $q\geqslant 1$. □

1.1.2 Intrinsic volumes και quermassintegrals

Δεδομένου ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, ο τύπος του Steiner δείχνει ότι ο όγκος του αθροίσματος Minkowski $K+tB_2^n$ μπορεί να γραφεί σαν ένα πολυώνυμο του t: Υπάρχουν μη-αρνητικοί συντελεστές $(W_k(K))_{k=0}^n$ τέτοιοι ώστε

$$\mathrm{vol}_n(K+tB_2^n)=\sum_{k=0}^n\binom{n}{k}W_k(K)t^k. \tag{1.1.6}$$

Ο όρος $W_k(K)$ στην παραπάνω έκφραση καλείται το *k-στο quermassintegral* του K. Οι ποσότητες αυτές έχουν μια ολοκληρωτική αναπαράσταση, μέσω του τύπου του Kubota:

$$W_k(K)=\frac{\omega_n}{\omega_{n-k}}\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{vol}_{n-k}(P_F(K))\,d\nu_{n,n-k}(F) \tag{1.1.7}$$

Παρατήρηση 1.1.8. (α) Εφαρμόζοντας την (1.1.7) για $k=n-1$ παίρνουμε $W_{n-1}(K)=\omega_nw(K)$, ενώ εύκολα βλέπουμε ότι $W_0(K)=\mathrm{vol}_n(K)$, $W_n(K)=\omega_n$.
(β) Από την ανισότητα Alexandrov-Fenchel (βλ. [2, Θεώρημα B.2.1]) έπεται ότι

$$\left(\frac{W_k(K)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-k}}\geqslant\left(\frac{W_j(K)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-j}},$$

για κάθε $0\leqslant j<k\leqslant n$.

Η παραπάνω Παρατήρηση μας παρακινεί να θεωρήσουμε μια διαφορετική κανονικοποίηση. Ορίζουμε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$

$$Q_k(K) := \left(\frac{W_{n-k}(K)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Καλούμε το $Q_k(K)$ το *κανονικοποιημένο k-στό quermassintegral* του K. Παρατηρήστε ότι με αυτό το συμβολισμό, από την Παρατήρηση 1.1.8 έπεται ότι $Q_1(K) = w(K)$, $Q_n(K) = \mathrm{vrad}(K)$, καθώς επίσης και το γεγονός ότι η $(Q_k(K))_{k\leqslant n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία του k. Ο τύπος του Kubota δίνει μια ολοκληρωτική αναπαράσταση για το Q_k, ανάλογη της 1.1.7:

$$Q_k(K) = \left(\frac{1}{\omega_k}\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k}.$$

Η ακολουθία των intrinsic volumes ενός κυρτού σώματος προκύπτει επίσης από μια διαφορετική κανονικοποίηση των quermassintegrals. Ορίζουμε τον *k-στο intrinsic volume* $V_k(K)$ του K, μέσω της

$$V_k(K) := \omega_{n-k}^{-1}\binom{n}{k}W_{n-k}(K) \tag{1.1.8}$$

(βλ. π.χ. [10, (4.9)]). Σημειώνουμε ότι, με αυτή την κανονικοποίηση, $V_0(K) = 1$, $V_n(K) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $V_1(K) = n\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}}w(K)$.

1.1.3 Απόσταση Banach-Mazur και το Θεώρημα του John

Με την έννοια της απόστασης Banach-Mazur μετράμε το πόσο «όμοιοι» είναι δύο χώροι με νόρμα. Συγκεκριμένα αν X και Y είναι δύο ισόμορφοι χώροι με νόρμα (ενδεχομένως άπειρης διάστασης), ορίζουμε την *απόσταση Banach-Mazur* των X και Y

$$d_{\mathrm{BM}}(X,Y) := \inf\{\|T\|\cdot\|T^{-1}\| : T : X \to Y \text{ ισομορφισμός}\}$$

(στην περίπτωση που οι X, Y δεν είναι ισόμορφοι, θέτουμε κατά σύμβαση $d_{BM}(X,Y) = \infty$). Σημειώνουμε μερικές βασικές ιδιότητες της απόστασης d_{BM}.

Πρόταση 1.1.9. *Έστω X, Y και Z χώροι με νόρμα. Τότε*

(α) $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) \geqslant 1$, *και η ισότητα ισχύει αν και μόνον αν οι X, Y είναι ισομετρικά ισόμορφοι.*

(β) $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) = d_{\mathrm{BM}}(Y,X)$.

(γ) $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) \leqslant d_{\mathrm{BM}}(X,Z)d_{\mathrm{BM}}(Z,Y)$.

(δ) *Αν οι X και Y είναι αυτοπαθείς, τότε* $d_{\mathrm{BM}}(X^*,Y^*) = d_{\mathrm{BM}}(X,Y)$.

Η παρακάτω Πρόταση δίνει μια γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur: Δύο χώροι με νόρμα είναι «κοντά» ως προς τη d_{BM} αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός της μοναδιαίας μπάλας του ενός που «μοιάζει» με τη μοναδιαία μπάλα του δεύτερου.

Πρόταση 1.1.10. *Έστω X και Y ισόμορφοι χώροι με νόρμα. Τότε*

$$d_{\mathrm{BM}}(X,Y) = \inf\{d > 0 : \text{ υπάρχει } T : X \to Y \text{ ώστε } B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq dB_Y\}.$$

Μια άλλη, σχετική, έννοια απόστασης κυρτών σωμάτων είναι η λεγόμενη *γεωμετρική απόσταση*. Συγκεκριμένα, δεδομένων δύο συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$d_{\mathrm{G}}(K,L) := \inf\left\{d>0 : \text{ υπάρχουν } a,b>0 \text{ με } ab\leqslant d \text{ ώστε } a^{-1}L\subseteq K\subseteq bL\right\}.$$

Παρατηρήστε ότι αν X_K, X_L είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα με μοναδιαίες μπάλες K, L αντίστοιχα, τότε

$$d_{\mathrm{BM}}(X_K,X_L)=\inf\{d_{\mathrm{G}}(K,T(L)) : T\in GL(n)\}.$$

Με τον όρο *ελλειψοειδές* στον $\mathbb{R}^n$ εννοούμε κάθε κυρτό σώμα της μορφής

$$\mathcal{E}=\left\{x\in\mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{\langle x,v_i\rangle^2}{a_i^2}\leqslant 1\right\},$$

όπου $\{v_1,\dots,v_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $a_1,\dots,a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του $\mathcal{E}$ αντίστοιχα). Μια χρήσιμη ισοδύναμη περιγραφή των ελλειψοειδών δίνεται από το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 1.1.11. *Ένα κυρτό σώμα $\mathcal{E}$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει $T\in GL(n)$ ώστε $\mathcal{E}=T(B_2^n)$.*

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχεται στο K και έχει το μέγιστο δυνατό όγκο. Λέμε σε αυτή την περίπτωση ότι το $\mathcal{E}$ είναι το *ελλειψοειδές μέγιστου όγκου* του K. Ομοίως δείχνεται ότι υπάρχει μοναδικό *ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου* του K, δηλαδή μοναδικό ελλειψοειδές που έχει τον ελάχιστο όγκο, ανάμεσα σε όλα τα ελλειψοειδή που περιέχουν το K.

Θα λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K βρίσκεται σε *θέση John*, όταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Αντίστοιχα λέμε ότι το K είναι σε *θέση Löwner* αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K. Ένα $x\in\mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο επαφής του K και της B_2^n αν $\|x\|_2=\|x\|_K=1$. Το κλασικό Θεώρημα του F. John [61] στην πραγματικότητα μας δίνει ακόμη περισσότερες πληροφορίες για ένα σώμα που βρίσκεται στην ομώνυμη θέση, περιγράφοντας την κατανομή των σημείων επαφής στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 1.1.12 (John)**.** *Έστω ότι το συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει ελλειψοειδές μέγιστου όγκου τη B_2^n. Τότε υπάρχουν σημεία επαφής $u_1,\dots,u_m$ του K και της B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1,\dots,c_m$ τέτοιοι ώστε*

$$x=\sum_{j=1}^m c_j\langle x,u_j\rangle u_j, \tag{1.1.9}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 1.1.13. Το Θεώρημα 1.1.12 μας λέει ισοδύναμα ότι ο ταυτοτικός τελεστής Id στον $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή

$$\mathrm{Id}=\sum_{j=1}^m c_j u_j\otimes u_j, \tag{1.1.10}$$

όπου με $u_j \otimes u_j$ συμβολίζουμε την προβολή στη διεύθυνση του u_j: $(u_j \otimes u_j)(x) := \langle x, u_j \rangle u_j$. Παρατηρήστε ότι από την (1.1.9) έπεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle^2.$$

Επίσης, εφαρμόζοντας την ίδια σχέση για $x = e_i$, όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$n = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_j \langle e_i, u_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \|u_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j.$$

Μια πολύ γνωστή συνέπεια του Θεωρήματος 1.1.12 (που επίσης αποκαλείται συχνά «το Θεώρημα του John») είναι η παρακάτω.

Πρόταση 1.1.14. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται σε θέση John. Τότε $K \subseteq \sqrt{n} B_2^n$.*

Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιώντας τη γλώσσα της γεωμετρικής απόστασης δύο κυρτών σωμάτων, που ορίστηκε παραπάνω, η τελευταία Πρόταση μας λέει ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται σε θέση John έχουμε $d_{\mathrm{G}}(K, B_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. Έπεται ότι για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X, $d_{\mathrm{BM}}(X, \ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. Χρησιμοποιώντας την υποπολλαπλασιαστική ιδιότητα της d_{BM} (Πρόταση 1.1.9 (γ)) μπορούμε τότε να δούμε ότι το άνω φράγμα $d_{\mathrm{BM}}(X, Y) \leqslant n$ ισχύει για κάθε ζευγάρι n-διάστατων χώρων με νόρμα X, Y.

1.2 Μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση των Borel μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Για κάθε $\mu \in \mathcal{P}_n$ υπάρχει μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f_\mu : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ τέτοια ώστε

$$\mu(A) = \int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\, dx.$$

Λέμε ότι η f_μ είναι η *συνάρτηση πυκνότητας* (ή απλά η *πυκνότητα*) του μ. Λέμε επιπλέον ότι το $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι *κεντραρισμένο* (ή ότι έχει κέντρο βάρους το 0) και γράφουμε $\mathrm{bar}(\mu) = 0$ αν, για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta \rangle d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta \rangle f_\mu(x) dx = 0. \tag{1.2.1}$$

Ένα $\mu \in \mathcal{P}_n$ καλείται *άρτιο* αν $\mu(A) = \mu(-A)$ για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$.

1.2.1 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Μια ιδιαιτέρως ενδιαφέρουσα υποκλάση της $\mathcal{P}_n$ είναι η κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν ο φορέας της, $\{f > 0\}$, είναι κυρτό σύνολο και ο περιορισμός της $\log f$ σε αυτόν είναι κοίλη συνάρτηση. Αναλόγως ορίζεται η έννοια του λογαριθμικά κοίλου μέτρου.

Ορισμός 1.2.1. *Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν για κάθε ζεύγος μη-κενών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε*

$$\mu((1-\lambda)A+\lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}.$$

Αν η $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ είναι μια *λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα*, δηλαδή μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1$, τότε από την ανισότητα Prékopa-Leindler (Θεώρημα 1.1.2) έπεται ότι το μέτρο μ_f που έχει πυκνότητα την f είναι λογαριθμικά κοίλο. Από την άλλη, είναι γνωστό από ένα θεώρημα του Borell [30] ότι αν το μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H, τότε $\mu \in \mathcal{P}_n$ και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f_μ, δηλαδή $d\mu(x) = f(x)\,dx$.

Στεκόμαστε σε δύο συγκεκριμένα παραδείγματα λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Το πρώτο αφορά την κλάση των μέτρων πιθανότητας που επάγονται από κυρτά σώματα. Συγκεκριμένα, δεδομένου ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο K, μ_K. Αυτό είναι το μέτρο πιθανότητας με φορέα το K, που δίνεται από την

$$\mu_K(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(K\cap A)}{\mathrm{vol}_n(K)},$$

για κάθε Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι το γεγονός ότι το μ_K είναι λογαριθμικά κοίλο είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski (Θεώρημα 1.1.1).

Το δεύτερο βασικό μας παράδειγμα αφορά το τυπικό μέτρο του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$, που δίνεται από την

$$\gamma_n(A) = (2\pi)^{-n/2}\int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\|x\|_2^2/2)\,dx.$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $f(x) = (2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|_2^2/2)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, άρα το γ_n είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 1.2.2. Θυμηθείτε ότι το Λήμμα του Borell είναι άμεση συνέπεια του ότι ο n-διάστατος όγκος $\mathrm{vol}_n(\cdot)$ είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση (ανισότητα Brunn-Minkowski). Το Θεώρημα 1.1.6, και άρα και το Πόρισμα 1.1.7 μπορούν να διατυπωθούν στο γενικότερο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Συγκεκριμένα, αν $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο και η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μια ημινόρμα, τότε για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\,d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^q\,d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p\,d\mu(x)\right)^{1/p},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f_μ, ορίζουμε την ισοτροπική σταθερά του μ ως εξής:

$$L_\mu := \left(\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}, \tag{1.2.2}$$

όπου $\mathrm{Cov}(\mu)$ είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του μ με συντεταγμένες

$$\mathrm{Cov}(\mu)_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_ix_jf_\mu(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\,dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_if_\mu(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\,dx}\frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_jf_\mu(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\,dx}. \tag{1.2.3}$$

Λέμε ότι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν $\mathrm{bar}(\mu) = 0$ και ο $\mathrm{Cov}(\mu)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας, και γράφουμε $\mathcal{IL}_n$ για την κλάση των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Σημειώνουμε ότι ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό, δηλαδή ικανοποιεί την (1.1.2), αν και μόνο αν το λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ_K με πυκνότητα $x \mapsto L_K^n \mathbf{1}_{K/L_K}(x)$ είναι ισοτροπικό. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$L_\mu \leqslant \kappa L_n, \tag{1.2.4}$$

όπου $\kappa > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (μια απόδειξη δίνεται στο [3, Πρόταση 2.5.12]).

1.2.2 Οι κατανομές Βήτα και Βήτα′

Παρουσιάζουμε σε αυτή την παράγραφο δύο οικογένειες μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που θα μας απασχολήσουν σε ορισμένα κομμάτια της εργασίας μας. Πρόκειται για τις λεγόμενες κατανομές τύπου Βήτα και Βήτα′. Δίνουμε τους απαραίτητους ορισμούς και εξηγούμε κάποιες βασικές ιδιότητες, καθώς και τη σχέση τους με άλλα γνωστά μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 1.2.3 (Η Βήτα κατανομή στον $\mathbb{R}^n$)**.** *Έστω $\beta > -1$. Θέτουμε*

$$c_{n,\beta} := \pi^{-n/2} \frac{\Gamma\left(\beta + \frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(\beta+1)},$$

και ορίζουμε ν_β να ειναι το μέτρο πιθανότητας με φορέα την B_2^n, και συνάρτηση πυκνότητας

$$p_{n,\beta}(x) := c_{n,\beta}(1 - \|x\|_2^2)^\beta, \quad x \in B_2^n.$$

Με άλλα λόγια,

$$\nu_\beta(A) = c_{n,\beta} \int_A (1 - \|x\|_2^2)^\beta \, dx,$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq B_2^n$.

Παρατήρηση 1.2.4. (α) Για κάθε $\beta > -1$, το μέτρο ν_β είναι αναλλοίωτο ως προς στροφές. Ισχύει δηλαδή ότι $\nu_\beta(A) = \nu_\beta(U(A))$, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
(β) Παρατηρήστε ότι για $\beta = 0$ στον παραπάνω ορισμό παίρνουμε $c_{n,0} = \omega_n^{-1}$. Έπεται ότι το μέτρο ν_0 ταυτίζεται με το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στη μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα, $\mu_{B_2^n}$.

Ολοκληρώνοντας στις $n-1$ συντεταγμένες, είναι εύκολο να δούμε ότι η μονοδιάστατη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του μέτρου ν_β είναι η

$$f_\beta(t) := \alpha_{n,\beta}(1 - t^2)^{\beta + \frac{n-1}{2}}, \qquad t \in [-1, 1],$$

όπου

$$\alpha_{n,\beta} := \frac{c_{n,\beta}}{c_{n-1,\beta}} = \pi^{-1/2} \frac{\Gamma\left(\beta + \frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\beta + \frac{n+1}{2}\right)}.$$

Παρατηρήστε ότι, από τους παραπάνω ορισμούς, προκύπτει ότι $f_\beta = p_{1,\beta+\frac{n-1}{2}}$. Το γεγονός αυτό γενικεύεται και στις υψηλότερες διαστάσεις $1 \leqslant k \leqslant n$.

Πρόταση 1.2.5. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$ και $F \in G_{n,k}$. Αν X είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή ν_β, τότε το $P_F(X)$ ακολουθεί την κατανομή $\nu_{\beta+\frac{n-k}{2}}$ στον $\mathbb{R}^k$.*

Απόδειξη. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $k = n-1$, γιατί δεδομένης αυτής μπορούμε μετά να ολοκληρώσουμε επαγωγικά. Λόγω του αναλλοίωτου σε στροφές, μπορούμε τότε να υποθέσουμε ότι $F = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Έστω $x' = (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in B_2^{n-1}$ με $\|x'\|_2 = r < 1$. Τότε, αν συμβολίσουμε $P_F^{-1}(x') =: x = (x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n) \in B_2^n$, έπεται ότι $|x_n| \leqslant \sqrt{1-r^2}$. Επιπλέον, $\|x\|_2^2 = r^2 + x_n^2$, οπότε ολοκληρώνοντας ως προς τη n-στή συντεταγμένη έχουμε

$$\begin{aligned}
c_{n,\beta} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} (1-\|x\|_2^2)^\beta \, dx_n &= c_{n,\beta} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} (1-r^2-x_n^2)^\beta \, dx_n \\
&= c_{n,\beta}(1-r^2)^\beta \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} \left(1 - \frac{x_n^2}{1-r^2}\right)^\beta dx_n \\
&= c_{n,\beta}(1-r^2)^{\beta+\frac{1}{2}} \int_{-1}^{1} (1-y^2)^\beta \, dy \\
&= p_{n-1,\beta+\frac{1}{2}}(x),
\end{aligned}$$

όπου στο προτελευταίο βήμα κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x_n}{\sqrt{1-r^2}}$, και η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί $c_{n,\beta} \int_{-1}^{1} (1-y^2)^\beta \, dy = c_{n-1,\beta+\frac{1}{2}}$. □

Μία ακόμη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στην Ευκλείδεια σφαίρα, μπορεί κατά κάποιο τρόπο να ιδωθεί σαν οριακό σημείο των μέτρων ν_β, καθώς $\beta \to -1$.

Πρόταση 1.2.6. *Η οικογένεια των μέτρων $(\nu_\beta)_{\beta>-1}$ στον $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει (υπό την ασθενή έννοια) καθώς $\beta \to -1$, στο ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας σ στην S^{n-1}.*

Απόδειξη. Λόγω της συμπάγειας της B_2^n, η οικογένεια $(\nu_\beta)_{\beta>-1}$ είναι tight. Από το Θεώρημα του Prokhorov τότε είναι και ασθενώς ακολουθιακά συμπαγής, δηλαδή υπάρχει μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία $(\nu_{\beta_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset (\nu_\beta)_{\beta>-1}$ με $\beta_n \to -1$. Για κάθε τέτοια ακολουθία το οριακό μέτρο πιθανότητας πρέπει να είναι αναλλοίωτο σε στροφές και έχει φορέα το σύνορο της B_2^n. Από τη μοναδικότητα του μέτρου Haar τότε έπεται ότι το όριο της $(\nu_{\beta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ταυτίζεται με το μέτρο σ στην S^{n-1}. □

Μια παραλλαγή της Βήτα κατανομής, είναι η λεγόμενη Βήτα′ κατανομή.

Ορισμός 1.2.7 (Η Βήτα′ κατανομή στον $\mathbb{R}^n$)**.** *Έστω $\beta > n/2$ και $\sigma > 0$. Θέτουμε*

$$\tilde{c}_{n,\beta,\sigma} := \sigma^{-n}\pi^{-n/2}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\frac{n}{2})},$$

και ορίζουμε $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$ να είναι το μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα

$$\tilde{p}_{n,\beta,\sigma}(x) := \tilde{c}_{n,\beta,\sigma}\left(1 + \frac{\|x\|_2^2}{\sigma^2}\right)^{-\beta}, \qquad x \in \mathbb{R}^n,$$

δηλαδή

$$\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}(A) = \tilde{c}_{n,\beta,\sigma}\int_A \left(1 + \frac{\|x\|_2^2}{\sigma^2}\right)^{-\beta} dx,$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$.

Ανάλογα με την περίπτωση της Βήτα κατανομής, η μονοδιάστατη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$ δίνεται από την

$$\tilde{f}_{\beta,\sigma}(t) := \tilde{\alpha}_{n,\beta,\sigma}(1+t^2)^{-\beta+\frac{n-1}{2}}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

όπου

$$\tilde{\alpha}_{n,\beta,\sigma} := \frac{\tilde{c}_{n,\beta,\sigma}}{\tilde{c}_{n-1,\beta,\sigma}} = \sigma^{-1}\pi^{-1/2}\frac{\Gamma(\beta-\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\beta-\frac{n}{2})}.$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε σταθερό $n \in \mathbb{N}$, έχουμε $\lim_{\beta\to\infty}\beta^{n/2}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta-\frac{n}{2})} = 1$ και $\lim_{\beta\to\infty}\left(1+\frac{\|x\|_2^2}{2\beta}\right)^{-\beta} = \exp\left(\frac{\|x\|_2^2}{2}\right)$. Επιλέγοντας λοιπόν $\sigma = \sqrt{2\beta}$ στους παραπάνω ορισμούς έχουμε ότι

$$\lim_{\beta\to\infty}\tilde{p}_{n,\beta,\sqrt{2\beta}}(x) = (2\pi)^{-n/2}\exp\left(\frac{\|x\|_2^2}{2}\right).$$

Βλέπουμε έτσι ότι το τυπικό μέτρο του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$ μπορεί να ληφθεί σαν «όριο» της οικογένειας $(\tilde{\nu}_{n,\beta\sqrt{2\beta}})_{\beta>n/2}$, καθώς $\beta\to\infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της διατριβής. Τα περιεχόμενα κάθε κεφαλαίου αντιστοιχούν σε ξεχωριστές εργασίες, οι περισσότερες εκ των οποίων έχουν γίνει δεκτές για δημοσίευση ή έχουν ήδη δημοσιευθεί. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 3 προέρχονται από την εργασία

> G. Chasapis and A. Giannopoulos, *Euclidean regularization in John's position*, Indiana University Mathematics Journal 65 (2016), 1877-1890.

(β) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 4 προέρχονται από την εργασία

> G. Chasapis and N. Skarmogiannis, *A note on norms of signed sums of vectors*, (υποβεβλημένη, υπό κρίση).

(γ) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 5 προέρχονται από την εργασία

> G. Chasapis, A. Giannopoulos and D.-L. Liakopoulos, Estimates for measures of lower dimensional sections of convex bodies, Advances in Mathematics 306 (2017), 880-904.

(δ) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 6 προέρχονται από την εργασία

> G. Bonnet, G. Chasapis, J. Grote, D. Temesvari and N. Turchi, *Threshold phenomena for high-dimensional random polytopes*, Communications in Contemporary Mathematics (δεκτή για δημοσίευση).

(ε) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 7 αποτελούν κομμάτι εργασίας που βρίσκεται σε εξέλιξη, και δεν έχουν ακόμα δημοσιευθεί.

2.1 Ευκλείδεια κανονικοποίηση στη θέση John

Στο κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε μια νέα απόδειξη του «Ισομορφικού Θεωρήματος Dvoretzky» των V. Milman και Schechtman [91], καθώς και μια «ισομορφική» μορφή της «ολικής εκδοχής» του Θεωρήματος του Dvoretzky, που αποδείχθηκε από τους Bourgain, Lindenstrauss και V. Milman, [34].

Αφετηρία μας είναι το κλασικό θεώρημα του Dvoretzky [44] για τις σχεδόν σφαιρικές τομές συμμετρικών κυρτών σωμάτων σε υψηλές διαστάσεις, και συγκεκριμένα η απόδειξη του V. Milman, [88]. Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, ορίζουμε τις παραμέτρους

$$M(X) := \int_{S^{n-1}} \|x\| \, d\sigma(x)$$

και $b(X) := \max\{\|x\| : x \in S^{n-1}\}$ (αν K είναι η μοναδιαία μπάλα του X, γράφουμε $M(K) := M(X)$ και $b(K) := b(X)$).

Θεώρημα 2.1.1 (Dvoretzky, V. Milman)**.** *Έστω $\varepsilon \in (0,1)$ και $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $k \leqslant k_X(\varepsilon) := c_1\varepsilon^2 \log^{-1}(2/\varepsilon) n (M(X)/b(X))^2$ υπάρχει ένα υποσύνολο $A_{n,k} \subseteq G_{n,k}$ μέτρου $\nu_{n,k}(A_{n,k}) \geqslant 1 - \exp(-c_2\varepsilon^2 k)$ τέτοιο ώστε για κάθε $F \in A_{n,k}$ και $x \in F$ ισχύει ότι*

$$(1+\varepsilon)^{-1} M(X)\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant M(X)(1+\varepsilon)\|x\|_2.$$

Η παράμετρος $k_X(\varepsilon)$ την παραπάνω διατύπωση ονομάζεται διάσταση Dvoretzky του X. Το θεώρημα των Dvoretzky-Milman εξασφαλίζει την ύπαρξη (μάλιστα «πολλών») k-διάστατων υπόχωρων του $\mathbb{R}^n$ που είναι «σχεδόν Ευκλείδειοι», υπό την έννοια ότι η Banach-Mazur απόσταση ανάμεσα στην $B_X \cap F$ και την $B_2^n \cap F$ είναι απολύτως φραγμένη, για κάθε $k \leqslant k_X(\varepsilon)$.

Η λεγόμενη «ισομορφική» εκδοχή του Θεωρήματος του Dvoretzky, δίνει ένα (ακριβές) ανάλογο αποτέλεσμα για τις «μεγάλες» τιμές του k. Πιο συγκεκριμένα, το ακόλουθο αποτέλεσμα αποδείχθηκε από τους V. Milman και Schechtman, [91] (μια ασθενέστερη εκδοχή είχε δοθεί προηγουμένως στο [89], ενώ μια διαφορετική απόδειξη δόθηκε και από τον Guédon, [58]).

Θεώρημα 2.1.2 (V. Milman-Schechtman)**.** *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $C_1, C_2 > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$, για κάθε $C_1 \log n \leqslant k \leqslant n$ και κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X, υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος Y του X τέτοιος ώστε*

$$d_{\mathrm{BM}}(Y, \ell_2^k) \leqslant C_2 \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\log\left(1+\frac{n}{k}\right)}}. \tag{2.1.1}$$

Ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα, το οποίο δίνει επιπλέον πληροφορία για τη διάμετρο της τυχαίας k-διάστατης τομής ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ σε θέση John αποδείχθηκε αργότερα από τους Litvak, Mankiewicz και Tomczak-Jaegermann [81].

Θεώρημα 2.1.3 (Litvak-Mankiewicz-Tomczak)**.** *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Για κάθε $cn(M(K)/b(K))^2 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$c_3\sqrt{\frac{n}{k}}\, B_2^n \cap F \subseteq K \cap F \subseteq c_4\sqrt{\frac{n}{\log\left(1+\frac{n}{k}\right)}}\, B_2^n \cap F \tag{2.1.2}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_5k)$, *όπου* $c, c_3, c_4, c_5 > 0$ *είναι απόλυτες σταθερές.*

Δίνουμε μια σύντομη και πολύ απλούστερη απόδειξη των Θεωρημάτων 2.1.2 και 2.1.3 χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα του Fresen, [49] για την «Ευκλείδεια κανονικοποίηση» ενός συμμετρικού κυρτού σώματος σε θέση John.

Θεώρημα 2.1.4 (Fresen)**.** *Έστω* K *ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *σε θέση John, και έστω* $K_t := \mathrm{conv}\{K, tB_2^n\}$. *Τότε υπάρχουν απόλυτες σταθερές* $c_1, c_2 > 0$ *τέτοιες ώστε*

$$\left(\frac{M(K_t)}{b(K_t)}\right)^2 \geqslant c_1\frac{t^2}{n}\log\left(c_2\frac{n}{t^2}\right),$$

για κάθε $t \in [c_3, c_4\sqrt{n}]$, *όπου* $c_3, c_4 > 0$ *κατάλληλες απόλυτες σταθερές.*

Η ιδέα της απόδειξης που δίνουμε για τα Θεωρήματα 2.1.2 και 2.1.3 μπορεί να περιγραφεί ως εξής: Δεδομένου ενός n-διάστατου χώρου με νόρμα X με μοναδιαία μπάλα K και $k \in \mathbb{N}$ (σχετικά «μεγάλου»), μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα ένα t που ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.4 έτσι ώστε ο n-διάστατος χώρος με νόρμα X_t με μοναδιαία μπάλα το K_t να έχει διάσταση Dvoretzky μεγαλύτερη από k. Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε το κλασικό Θεώρημα του Dvoretzky για τον X_t, και το ζητούμενο αποτέλεσμα για τον X θα προκύψει από το γεγονός ότι η Banach-Mazur απόστασή του X_t από τον X είναι αρκετά «μικρή» (παρατηρήστε ότι $d_{\mathrm{BM}}(K, K_t) \leqslant t$).

Χρησιμοποιώντας την ίδια ιδέα, αποδεικνύουμε επίσης μια νέα «ισομορφική» εκδοχή του ακόλουθου αποτελέσματος των Bourgain, Lindenstrauss και V. Milman, [34].

Θεώρημα 2.1.5 (Bourgain-Lindenstrauss-V. Milman)**.** *Έστω* $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ *ένας* n*-διάστατος χώρος με νόρμα. Για κάθε* $\varepsilon \in (0, 1/2)$ *και για κάθε ακέραιο*

$$k \geqslant \frac{c_6}{\varepsilon^2}\left(\frac{b}{M}\right)^2,$$

η τυχαία επιλογή k *ορθογώνιων μετασχηματισμών* $U_1, \dots, U_k \in O(n)$ *ικανοποιεί την*

$$d_{\mathrm{G}}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} U_i^*(K^\circ), B_2^n\right) \leqslant (1+\varepsilon)^2, \tag{2.1.3}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c\varepsilon^2 nk(M/b)^2)$, *όπου* $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Το παραπάνω Θεώρημα αναφέρεται συχνά στη βιβλιογραφία σαν η «ολική» εκδοχή του Θεωρήματος του Dvoretzky. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1.4, μπορούμε να δείξουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για τις «μικρές» τιμές του k, στην περίπτωση που το σώμα μας βρίσκεται σε θέση John.

Θεώρημα 2.1.6. *Έστω* K *ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *τέτοιο ώστε η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα* B_2^n *να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του* K. *Για κάθε* $k \leqslant \delta n/\log(n+1)$, *όπου* $\delta \in (0,1)$ *είναι μια απόλυτη σταθερά, η τυχαία* k*-άδα ορθογώνιων μετασχηματισμών* $U_1, \dots, U_k \in O(n)$ *ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από* $1-\exp(-c_7n)$

$$d_{\mathrm{G}}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} U_i^*(K^\circ), B_2^n\right) \leqslant C_3\sqrt{\frac{n}{k\log k}}, \tag{2.1.4}$$

όπου $C_3, c_7 > 0$ *είναι απόλυτες σταθερές.*

Σχολιάζουμε τέλος την ακρίβεια της παραπάνω εκτίμησης. Οι αποδείξεις των παραπάνω αποτελεσμάτων βρίσκονται στην Παράγραφο 3.3.

2.2 Προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων

Μελετάμε προβλήματα σχετικά με την τάξη μεγέθους της νόρμας προσημασμένων αθροισμάτων n διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$. Αφετηρία μας είναι τα κλασικά θεωρήματα των Beck-Fiala, [26] και Spencer, [103], καθώς και ένα γνωστό ανοικτό ερώτημα του Komlós. Δεδομένων δύο συμμετρικών κυρτών σωμάτων K, L στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$\beta(K,L) := \min\left\{ r > 0 : \forall\, (x_i)_{i=1}^n \subset K \;\; \exists\, (\epsilon_i)_{i=1}^n \subset \{-1,1\} \text{ ώστε } \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|_L \leqslant r \right\}.$$

Το πρόβλημα εξαγωγής κατά το δυνατόν ακριβών εκτιμήσεων για την παράμετρο $\beta(K,L)$, ιδίως στην περίπτωση που τα K και L είναι συγκεκριμένα κυρτά σώματα ιδιαιτέρου ενδιαφέροντος, έχει απασχολήσει πολλούς συγγραφείς από παλιά. Ενδεικτικά αναφέρουμε πώς σύμφωνα με μια εκδοχή του Θεωρήματος Beck-Fiala, [26], η παράμετρος $\beta(B_1^n, B_\infty^n)$ είναι φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά, ανεξάρτητη της διάστασης. Από την άλλη, οι Bárány και Grinberg, [23] έχουν δείξει ότι $\beta(K,K) \leqslant 2n$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, ενώ ένα γνωστό αποτέλεσμα του Spencer, [103] (αποδεδειγμένο ανεξάρτητα και από τον Gluskin, [53]) εξασφαλίζει μια πολύ καλύτερη εκτίμηση στην περίπτωση που $K = B_\infty^n$, συγκεκριμένα ότι $\beta(B_\infty^n, B_\infty^n) \leqslant c\sqrt{n}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Το σημαντικότερο και πιο γνωστό ανοικτό σχετικό πρόβλημα είναι η εικασία του Komlós, σύμφωνα με την οποία η ακολουθία $(\beta(B_2^n, B_\infty^n))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Η καλύτερη μέχρι σήμερα γνωστή εκτίμηση σχετικά οφείλεται στον Banaszczyk [19]: Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\beta(B_2^n, B_\infty^n) \leqslant c\sqrt{\log n}$.

Στην αντίθετη κατεύθυνση, ένα γενικό κάτω φράγμα για την παράμετρο β έχει δοθεί επίσης από τον Banaszczyk, [18]: Για κάθε ζευγάρι συμμετρικών κυρτών σωμάτων K, L στον $\mathbb{R}^n$,

$$\beta(K,L) \geqslant c\sqrt{n} \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(L)} \right)^{1/n}. \tag{2.2.1}$$

Στο Κεφάλαιο 4, εξετάζουμε κατά πόσο η εκτίμηση αυτή μπορεί να βελτιωθεί για ορισμένα ζεύγη σωμάτων, αν επιτρέψουμε λιγότερες επιλογές προσήμων $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$. Το πρώτο μας αποτέλεσμα είναι ένα κάτω φράγμα για την ℓ_∞-νόρμα του προσημασμένου αθροίσματος $\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i$ σε αυτή την περίπτωση.

Θεώρημα 2.2.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c \in (0,1)$ που ικανοποιεί τα παρακάτω: Για κάθε $n \geqslant 1$ και $\frac{1}{n} < \delta < 1$, και για κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$, υπάρχουν ορθοκανονικά διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log(1/\delta)}$$

για κάθε $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Παρατηρήστε ότι αν $f(n)$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση με $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ και $f(n) = o(n)$, τότε για αρκετά μεγάλο n η επιλογή $\delta = f(n)^{-1}$ ικανοποιεί την υπόθεση του Θεωρήματος 2.2.1, οπότε για οποιοδήποτε υποσύνολο S του $\{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{n/f(n)}$ μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log f(n)},$$

για κάθε $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in S$, όπου $c\in(0,1)$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτή η εκτίμηση βελτιώνει ένα παλιότερο αποτέλεσμα του Hajela [59] στην κατεύθυνση απόδειξης μιας αρνητικής απάντησης στην εικασία του Komlós που αναφέραμε παραπάνω. Η απόδειξή μας (βλ. Παράγραφος 4.2) ακολουθεί την αρχική ιδέα του Hajela να θεωρήσει κανείς τυχαίες στροφές της συνήθους ορθοκανονικής βάσης $e_1,\ldots,e_n\in\mathbb{R}^n$, την οποία συνδυάζουμε με μια ισχυρότερη εκτίμηση για το μέτρο των «μικρών» τιμών της $\|\cdot\|_\infty$ στην S^{n-1} (μια ανισότητα τύπου small ball, βλ. Λήμμα 4.2.1).

Μπορεί η μέθοδος που ακολουθούμε να είναι εκ φύσεως ανεπαρκής για την κατάρριψη της αρχικής εικασίας του Komlós, στη συνέχεια ωστόσο του Κεφαλαίου 4 διερευνούμε περαιτέρω τη σχέση ανάμεσα σε ανισότητες τύπου small ball και κάτω φράγματα για τυχούσες νόρμες προσημασμένων αθροισμάτων διανυσμάτων που επιλέγονται από την Ευκλείδεια μπάλα B_2^n ή ένα τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα. Πιο συγκεκριμένα, και για μια συνοπτικότερη παρουσίαση των αποτελεσμάτων μας, ας δώσουμε αρχικά τον παρακάτω ορισμό: Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$ και $\delta\in(0,1)$, θέτουμε

$$t_{D,\delta}:=\max\{t>0:\gamma_n(2t\cdot m(D)D)\leqslant(2^\delta e)^{-n}\},$$

όπου $m(D)$ είναι η διάμεσος (median) της συνάρτησης $\|\cdot\|_D$ ως προς το μέτρο του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω $\delta\in(0,1)$, έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S\subseteq\{-1,1\}^n$ με $|S|\leqslant 2^{\delta n}$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^n\subseteq B_2^n:\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i\right\|_D\leqslant\frac{1}{10}t_{D,\delta}m(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon\in S\right)\leqslant 2e^{-n}.$$

Η πιθανότητα στο παραπάνω αποτέλεσμα λαμβάνεται ως προς το γινόμενο του ομοιόμορφου μέτρου πιθανότητας στη B_2^n, $\mu_{B_2^n}^{\otimes n}$. Το Θεώρημα 2.2.2 μπορεί να θεωρηθεί σαν μια επέκταση του Θεωρήματος 2.2.1, αντικαθιστώντας την ℓ_∞-νόρμα με τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, και με το κάτω φράγμα να ισχύει με μεγάλη πιθανότητα για την τυχαία n-άδα $x_1,\ldots,x_n\in B_2^n$. Το πόσο καλό είναι το φράγμα που δίνεται από το παραπάνω αποτέλεσμα είναι βέβαια συνάρτηση του γινομένου $t_{D,\delta}m(D)$ για το εκάστοτε σώμα D, που με τη σειρά του σχετίζεται, από τον ορισμό του $t_{D,\delta}$, με την εξαγωγή ισχυρών small ball ανισοτήτων για το μέτρο Gauss του D. Εξηγούμε πώς, για παράδειγμα στην περίπτωση που $D=B_\infty^n$ ισχύει όντως ότι το $t_{D,\delta}m(D)$ είναι της τάξης της $\sqrt{\log n}$, και εξετάζουμε σχετικές εκτιμήσεις για την περίπτωση των ℓ_p-μπαλών B_p^n, $p\geqslant 1$.

Το Θεώρημα 2.2.2 αποδεικνύεται συνδυάζοντας μια γενίκευση της ιδέας της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.1 (βλ. Πρόταση 4.3.1) και του κάτω φράγματος του Banasczcyk (2.2.1). Δίνουμε ακόμη μια νέα απόδειξη της (2.2.1) σαν άμεσο πόρισμα ενός γενικότερου αποτελέσματος των Gluskin και V. Milman, [54].

Πρόταση 2.2.3 (Gluskin-V. Milman)**.** *Έστω D ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $o\in\mathrm{int}(D)$ και $V_1,\ldots,V_m$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(D)=\mathrm{vol}_n(V_1)=\ldots=\mathrm{vol}_n(V_m)$. Για κάθε*

$\lambda_1,\dots,\lambda_m\in\mathbb{R}$ *και κάθε* $0<t<1$ *έχουμε*

$$\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i\in V_i : \Big\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\Big\|_D \leqslant t\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{1/2}\right) \leqslant \left(te^{\frac{1-t^2}{2}}\right)^n.$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα αποτέλεσε και το έναυσμά μας για τη διατύπωση μιας γενίκευσης του Θεωρήματος 2.2.1 με τη μορφή του Θεωρήματος 2.2.2. Στο ίδιο πνεύμα, αποδεικνύουμε τέλος ένα ακόμη γενικότερο αποτέλεσμα, θεωρώντας διανύσματα που επιλέγονται ομοιόμορφα από τυχαίες στροφές ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.2.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $c>0$ *που ικανοποιεί τα παρακάτω: Έστω* $\delta\in(0,1)$*, έστω* D *ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *και* $S\subseteq\{-1,1\}^n$ *με* $|S|\leqslant 2^{\delta n}$*. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα* K *στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{vol}_n(K)=\mathrm{vol}_n(B_2^n)$ *μπορούμε να βρούμε* $\mathcal{U}\subseteq O(n)$ *με* $\nu_n(\mathcal{U})>1-2e^{-n/2}$ *τέτοιο ώστε, για κάθε* $U\in\mathcal{U}$,

$$\mathbb{P}\left((z_i)_{i=1}^n\subseteq U(K)\times\cdots\times U(K) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\Big\|_D \leqslant ct_{D,\delta}m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon\in S\right)\leqslant e^{-n/2}.$$

Οι λεπτομέρειες των αποδείξεων των παραπάνω ισχυρισμών αναπτύσσονται στην Παράγραφο 4.3.

2.3 Εκτιμήσεις για μέτρα τομών κυρτών σωμάτων

Στο πέμπτο Κεφάλαιο ασχολούμαστε με τις γενικευμένες εκδοχές δύο κλασικών προβλημάτων της Ασυμπτωτικής Γεωμετρικής Ανάλυσης:

(α) **Η εικασία του υπερεπιπέδου:** Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_1>0$ τέτοια ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(K)\leqslant C_1\max_{\vartheta\in S^{n-1}}\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^\perp).$$

(β) **Το ισομορφικό πρόβλημα Busemann-Petty:** Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_2>0$ με την ιδιότητα: Για κάθε ζευγάρι K,L συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^\perp)\leqslant\mathrm{vol}_{n-1}(L\cap\vartheta^\perp)$$

για κάθε $\vartheta\in S^{n-1}$, ισχύει ότι

$$\mathrm{vol}_n(K)\leqslant C_2\mathrm{vol}_n(L).$$

Σημειώνουμε ότι τα δύο παραπάνω προβλήματα παραμένουν ανοικτά και είναι ισοδύναμα, τόσο μεταξύ τους όσο και με ένα άλλο διάσημο πρόβλημα, την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. Η τελευταία ισχυρίζεται ότι, αν θέσουμε

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\},$$

τότε η ακολουθία $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φραγμένη. Η καλύτερη έως τώρα εκτίμηση για το τελευταίο αυτό πρόβλημα είναι ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ έτσι ώστε $L_n\leqslant c\sqrt[4]{n}$ και οφείλεται στον Klartag

[65], ο οποίος βελτίωσε το προηγούμενο φράγμα του Bourgain [32], $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$. Από την άλλη, για την κλασική εκδοχή του προβλήματος Busemann-Petty, που διατυπώνεται ακριβώς όπως το (β) παραπάνω, αλλά με $C_2 = 1$, είναι γνωστό ότι η απάντηση είναι καταφατική στην περίπτωση $n \leqslant 4$, και αρνητική αν $n \geqslant 5$ (για την ιστορία και τη λύση του προβλήματος, παραπέμπουμε στο [7]).

Οι παραλλαγές των δύο παραπάνω προβλημάτων που μας απασχολούν προέρχονται από τη γενίκευση των αντίστοιχων διατυπώσεων, σε δύο κατευθύνσεις: Πρώτον, ο ρόλος των $(n-1)$-διάστατων τομών με υπερεπίπεδα αντικαθίσταται από τις τομές οποιασδήποτε χαμηλότερης διάστασης $n-k$ με υπόχωρους $F \in G_{n,n-k}$. Δεύτερον, στη θέση του όγκου vol_n θεωρούμε ένα γενικό μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$, απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Συγκεκριμένα, αν f είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη, μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την f, που δίνεται δηλαδή από την

$$\mu(A) = \int_A f(x)\,dx,$$

για κάθε Borel μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ (θυμίζουμε ότι με dx συμβολίζουμε πάντα την ολοκλήρωση ως προς το μέτρο Lebesgue στην κατάλληλη διάσταση). Για κάθε τέτοιο μέτρο μ, και κάθε ακέραιο $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ορίζουμε τη σταθερά $\alpha_{n,k}(\mu)$ ως τον μικρότερο $\alpha > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, ισχύει ότι

$$\mu(K) \leqslant \alpha^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mu(K \cap F) \cdot \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}.$$

Τελείως ανάλογα, συμβολίζουμε με $\beta_{n,k}(\mu)$ τον μικρότερο $\beta > 0$ με την ιδιότητα: Για κάθε ζευγάρι κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων K, L στον $\mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει ότι $\mu(K \cap F) \leqslant \mu(L \cap F)$ για κάθε $F \in G_{n,n-k}$ έχουμε ότι

$$\mu(K) \leqslant \beta^k \mu(L).$$

Στην περίπτωση που στους παραπάνω ορισμούς θεωρούμε μόνο συμμετρικά κυρτά σώματα, συμβολίζουμε τις αντίστοιχες σταθερές με $\alpha_{n,k}^{(s)}(\mu)$ και $\beta_{n,k}^{(s)}(\mu)$.

Οι παραπάνω γενικεύσεις προτάθηκαν και μελετήθηκαν αρχικά από τους Koldobsky και Zvavitch. Πρώτος ο Zvavitch, στο [111], μελέτησε το κλασικό πρόβλημα Busemann-Petty για γενικά μέτρα, και έδειξε ότι έχει καταφατική απάντηση στην περίπτωση $n \leqslant 4$ και αρνητική αν $n \geqslant 5$. Ο Koldobsky [71] έδωσε για το συμμετρικό ανάλογο $\alpha_{n,k}^{(s)}$ της $\alpha_{n,k}$ το άνω φράγμα $\alpha_{n,k}^{(s)}(\mu) \leqslant c\sqrt{n}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, αν το μέτρο μ επάγεται από μια άρτια και συνεχή πυκνότητα f. Κάτω από τις ίδιες υποθέσεις για το μ, οι Koldobsky και Zvavitch [77] έχουν επιπλέον δείξει ότι $\beta_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant \sqrt{n}$. Οι συγγραφείς χρησιμοποιούν για τις αποδείξεις των παραπάνω αποτελεσμάτων μεθόδους από την ανάλυση Fourier, συνδέοντας το μέτρο των τομών του K με το μετασχηματισμό Radon του συναρτησοειδούς Minkowski $\|\cdot\|_K$.

Χρησιμοποιώντας μια τελείως διαφορετική προσέγγιση, δίνουμε στο Κεφάλαιο 5 βελτιωμένες εκτιμήσεις για τις σταθερές $\alpha_{n,k}$ και $\beta_{n,k}$ όπως αυτές ορίστηκαν παραπάνω. Συγκεκριμένα, για τη γενίκευση του προβλήματος των τομών, μπορούμε να αφαιρέσουμε τις υποθέσεις της συμμετρίας και της συνέχειας της πυκνότητας του μέτρου. Δείχνουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $o \in \mathrm{int}(K)$. Έστω f φραγμένη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και έστω μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε*

$1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\mu(K) \leqslant \left(c_5\sqrt{n-k}\right)^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)\cdot \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}, \tag{2.3.1}$$

όπου $c_5 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, $\alpha_{n,k}(\mu) \leqslant c_5\sqrt{n-k}$.

Για το γενικευμένο πρόβλημα Busemann-Petty, δίνουμε μια εκτίμηση για τη σταθερά $\beta_{n,k}(\mu)$ για οποιαδήποτε συνδιάσταση k, υποθέτοντας ότι μόνο το ένα σώμα είναι συμμετρικό και ότι το μέτρο μ επάγεται από μια άρτια και λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με άρτια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f και έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω D ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(K\cap F) \leqslant \mu(D\cap F) \tag{2.3.2}$$

για κάθε $F \in G_{n,n-k}$. Τότε,

$$\mu(K) \leqslant (c_8 k L_{n-k})^k\, \mu(D), \tag{2.3.3}$$

όπου $c_8 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατηρήστε ότι το παραπάνω αποτέλεσμα δίνει την εκτίμηση $\beta^{(s)}_{n,k}(\mu) \leqslant c_8 k\sqrt[4]{n-k}$, χρησιμοποιώντας το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα του Klartag για την ισοτροπική σταθερά.

Όπως αναφέραμε, η μέθοδος που ακολουθούμε για την απόδειξη των παραπάνω θεωρημάτων είναι εντελώς διαφορετική από αυτή των Koldobsky και Zvavitch. Οι λεπτομέρειες των αποδείξεων παρουσιάζονται στην Παράγραφο 5.3. Ενδεικτικά, κάποια από τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούμε περιλαμβάνουν:

- **Γενικευμένους τύπους Blaschke-Petkantschin από την ολοκληρωτική γεωμετρία.** Πρόκειται για οικογένειες ταυτοτήτων που συνδέουν το ολοκλήρωμα μιας γενικής συνάρτησης πολλών μεταβλητών στον $\mathbb{R}^n$ με τη μέση τιμή του όγκου χαμηλότερης διάστασης τυχαίων πολυτόπων (βλ. [11, Κεφάλαιο 7.2]). Ενδεικτικά, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για κάθε $1 \leqslant s \leqslant n-1$ και κάθε μη-αρνητική μετρήσιμη $f : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_s)dx_1\cdots dx_s\\ &\quad = p(n,s)\int_{G_{n,s}}\int_F\cdots\int_F f(x_1,\dots,x_s)\,\mathrm{vol}_s(\mathrm{conv}(o,x_1,\dots,x_s))^{n-s}\,dx_1\dots dx_s\,d\nu_{n,s}(F),\end{aligned}$$

  όπου $p(n,s)$ είναι μια γνωστή σταθερά που εξαρτάται από τα n, s.

- **Αντίστροφες ανισότητες Hölder για τα συναρτησοειδή τύπου Sylvester.** Για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $p > 0$ ορίζουμε

$$S_p(\nu) = \left(\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(o,x_1,\dots,x_m))^p\,d\nu(x_1)\dots d\nu(x_m)\right)^{1/p}.$$

Χρησιμοποιούμε γνωστά αποτελέσματα για τις παραπάνω p-ροπές του όγκου τυχαίων simplices, όπως το αναλλοίωτο σε αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς και τη σχέση τους με την ορίζουσα του πίνακα συνδιακυμάνσεων του ν, συγκεκριμένα,

$$m!S_2^2(\nu) = \det(\mathrm{Cov}(\nu)).$$

Από την ανισότητα Hölder, η απεικόνιση $p \mapsto S_p(\nu)$ είναι αύξουσα. Σαν συνέπεια του Λήμματος του Borell (Θεώρημα 1.1.6), μπορούμε επιπλέον να εξασφαλίσουμε την ισχύ αντίστροφων ανισοτήτων τύπου Hölder: Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\delta > 0$ τέτοια ώστε για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^m$ και κάθε $p > 1$,

$$S_p(\nu) \leqslant (\delta p)^m S_1(\nu).$$

Παρατηρήστε ότι τα παραπάνω ισχύουν στην περίπτωση που το ν είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue μ_D που επάγεται από ένα κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$.

- **Την ανισότητα Busemann-Straus/Grinberg και τη συναρτησιακή εκδοχή της.** Για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, η ποσότητα

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) := \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F)^n \, d\nu_{n,n-k}(F) \right)^{\frac{1}{kn}}$$

είναι αναλλοίωτη ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο, και μεγιστοποιείται όταν το K είναι Ευκλείδεια μπάλα, δηλαδή

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) \leqslant \tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{B_2^n}),$$

όπου με $\overline{B_2^n}$ συμβολίζουμε την Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1. Η παραπάνω ισοπεριμετρικού τύπου ανισότητα αποδείχθηκε από τους Busemann-Straus [36], και ανεξάρτητα από τον Grinberg [56]. Χρησιμοποιούμε επίσης μια συναρτησιακή εκδοχή της, που οφείλεται στους Dann, Παούρη και Pivovarov [42]: Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε φραγμένη ολοκληρώσιμη $u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\|u\|_1 > 0$ έχουμε

$$\int_{G_{n,n-k}} \frac{1}{\|u|_F\|_\infty^k} \left(\int_F u(x)dx \right)^n d\nu_{n,n-k}(F) \leqslant \tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{B_2^n})^{kn} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx \right)^{n-k}.$$

Παρατηρήστε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και εφαρμόσουμε την παραπάνω ανισότητα για τη συνάρτηση $u = \mathbb{1}_K$, παίρνουμε ακριβώς την προαναφερθείσα αινισότητα Busemann-Straus/Grinberg.

2.4 Φαινόμενα κατωφλίου για τυχαία πολύτοπα σε υψηλές διαστάσεις

Το αντικείμενο του Κεφαλαίου 6 είναι η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του όγκου, ή γενικότερων λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας, ορισμένων οικογενειών τυχαίων πολυτόπων στον $\mathbb{R}^n$. Με τον όρο «φαινόμενο κατωφλίου» εννοούμε τη δραματική αλλαγή συμπεριφοράς μιας ποσότητας γύρω από μια συγκεκριμένη τιμή μιας εκ των παραμέτρων της. Στη γεωμετρία των n-διάστατων τυχαίων πολυτόπων, δηλαδή κυρτών θηκών $N > n$ σημείων που επιλέγονται ανεξάρτητα βάσει κάποιας κατανομής πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, το πρόβλημα που μας απασχολεί είναι κατά πόσο το αναμενόμενο «μέγεθος» ενός τέτοιου συνόλου παραμένει «μεγάλο», σαν συνάρτηση του πλήθους των κορυφών N, καθώς η διάσταση n τείνει στο άπειρο. Η έννοια του «μεγέθους» καθορίζεται από ένα άλλο μέτρο πιθανότητας, συγκεκριμένα το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue ή, σε άλλες περιπτώσεις, ένα γενικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Ιστορικά, το πρώτο τέτοιου τύπου αποτέλεσμα για τον όγκο ενός τυχαίου πολυτόπου αποδείχθηκε από τους Dyer, Füredi και McDiarmid [46], για την κυρτή θήκη N σημείων που επιλέγονται ομοιόμορφα από το εσωτερικό του n-διάστατου μοναδιαίου κύβου, B_∞^n.

Θεώρημα 2.4.1 (Dyer-Füredi-McDiarmid)**.** *Έστω $N > n$ και $X_1, \ldots, X_N$ τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$ που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το εσωτερικό της B_∞^n. Θέτουμε $C_N := \mathrm{conv}\{X_1, \ldots, X_N\}$. Τότε για κάθε $\varepsilon > 0$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(C_N)}{\mathrm{vol}_n([-1,1]^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant (2e^{-1/2} - \varepsilon)^n \\ 1 & \text{αν } N \geqslant (2e^{-1/2} + \varepsilon)^n. \end{cases}$$

Η γεωμετρική οπτική της μεθόδου των Dyer, Füredi και McDiarmid συνέχισε να χρησιμοποιείται από άλλους συγγραφείς για την απόδειξη παρόμοιων «φαινόμενων κατωφλίου» για τον όγκο κυρτών θηκών από σημεία που επιλέγονται βάσει διαφόρων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Πρώτοι οι Γατζούρας και Γιαννόπουλος [51] γενίκευσαν το παραπάνω αποτέλεσμα, για μια ευρεία κλάση μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που περιλαμβάνει την περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου στον κύβο. Αργότερα, ο Pivovarov [98] απέδειξε θεωρήματα αυτού του τύπου για την περίπτωση που τα σημεία $X_1, \ldots, X_N$ επιλέγονται βάσει του ομοιόμορφου μέτρου στην Ευκλείδεια σφαίρα S^{n-1}, ή του μέτρου του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$.

Στο Κεφάλαιο 6 εξετάζουμε το παραπάνω πρόβλημα όταν τα σημεία $X_1, \ldots, X_N$ επιλέγονται με βάση τη Βήτα κατανομή ν_β, ή τη Βήτα$'$ κατανομή $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$ στον $\mathbb{R}^n$, με παραμέτρους $\beta > -1$ και $\beta > n/2, \sigma > 0$ αντίστοιχα (για τους ακριβείς ορισμούς, δείτε την Παράγραφο 1.2.2). Συμβολίζουμε τα αντίστοιχα τυχαία πολύτοπα με

$$P_{N,n}^{\beta} := \mathrm{conv}\{X_1, \ldots, X_N\},$$

όταν $X_1, \ldots, X_N \sim \nu_\beta$, και

$$\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma} := \mathrm{conv}\{X_1, \ldots, X_N\},$$

$X_1, \ldots, X_N \sim \tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$. Δεδομένου ότι το μέτρο ν_β φέρεται από τη μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα B_2^n, αποδεικνύουμε το παρακάτω αποτέλεσμα για τον αναμενόμενο όγκο του $P_{N,n}^{\beta}$.

Θεώρημα 2.4.2. *Σταθεροποιούμε $\epsilon \in (0,1)$ και έστω $-1 < \beta = \beta(n)$ και $N = N(n)$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^{\beta})}{\mathrm{vol}_n(\mathrm{B}_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((1-\varepsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log n\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((1+\varepsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log n\right). \end{cases}$$

Το παραπάνω Θεώρημα έχει ορισμένες ενδιαφέρουσες συνέπειες. Πρώτον, από τον ορισμό του, το μέτρο ν_β στην ειδική περίπτωση $\beta = 0$ ταυτίζεται με το ομοιόμορφο μέτρο στη B_2^n. Ένα άμεσο πόρισμα λοιπόν του Θεωρήματος 2.4.2 είναι ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για σημεία που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το εσωτερικό της Ευκλείδειας μπάλας.

Πόρισμα 2.4.3. *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$ και έστω $N = N(n)$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων. Έστω $X_1, \dots, X_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στην B_2^n και έστω $B_{N,n} := \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(B_{N,n})}{\mathrm{vol}_n(\mathrm{B}_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((1-\varepsilon)(\frac{n+1}{2})\log n\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((1+\varepsilon)(\frac{n+1}{2})\log n\right). \end{cases}$$

Από την άλλη (βλ. Πρόταση 1.2.6) το ομοιόμορφο μέτρο σ στην Ευκλείδεια σφαίρα S^{n-1} μπορεί να προκύψει σαν το όριο των κατανομών ν_β καθώς $\beta \to \infty$. Το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με το ότι το Θεώρημα 2.4.2 ισχύει για οποιαδήποτε τιμή $\beta > -1$, που μπορεί να μεταβάλλεται με τη διάσταση n, μας επιτρέπει να ανακτήσουμε το αποτέλεσμα για τα σφαιρικά πολύτοπα που είχε αποδειχθεί αρχικά από τον Pivovarov στο [98].

Πόρισμα 2.4.4. *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$ και έστω $N = N(n)$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων. Έστω $X_1, \dots, X_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στην S^{n-1} και έστω $S_{N,n} := \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(S_{N,n})}{\mathrm{vol}_n(\mathrm{B}_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\big((1-\varepsilon)\big(\frac{n-1}{2}\big)\log n\big) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\big((1+\varepsilon)\big(\frac{n-1}{2}\big)\log n\big). \end{cases}$$

Περνώντας στην περίπτωση της Βήτα$'$ κατανομής, θυμίζουμε ότι εδώ το μέτρο $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$ δεν έχει συμπαγή φορέα, δεν είναι λοιπόν σαφές ποια θα ήταν η σωστή κανονικοποίηση για τον όγκο του $\tilde{P}_{N,\nu}^{\beta,\sigma}$ για ένα Θεώρημα ανάλογο του 2.4.2. Ακολουθώντας την ιδέα του Pivovarov [99], επιλέγουμε να αντικαταστήσουμε το ρόλο του κανονικοποιημένου μέτρου Lebesgue από ένα τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Όπως φαίνεται στην παρακάτω διατύπωση, αυτή τη φορά η «τιμή κατωφλίου» του πλήθους σημείων N ποικίλλει, ανάλογα με την τάξη μεγέθους των παραμέτρων σ και β. Ξρησιμοποιούμε εδώ το συμβολισμό $a \ll b$ αν $\frac{a}{b} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Θεώρημα 2.4.5. *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$. Έστω $\mu = \mu_n$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $\sigma = \sigma(n) > 0$ και $\beta = \beta(n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών, και $N = N(n)$ ακολουθία φυσικών. Έστω $\beta - \frac{n}{2} \gg \log n$.*

(α) *Αν $\frac{n}{\sigma^2} \ll \frac{1}{\beta - \frac{n}{2}}$ και $N \geq 3n\log n$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}) = 1.$$

(β) *Αν $\frac{1}{\beta-\frac{n}{2}} \ll \frac{n}{\sigma^2} \ll \frac{1}{\sqrt{\beta-\frac{n}{2}}}$, τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((1-\varepsilon)\frac{n}{\sigma^2}(\beta-\frac{n}{2})\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((1+\varepsilon)\frac{n}{\sigma^2}(\beta-\frac{n}{2})\right). \end{cases}$$

(γ) *Αν $\frac{n}{\sigma^2} \to \infty$ και $\sigma > e^{-\frac{n}{3}}$ (συγκεκριμένα αυτό ισχύει για $\sigma \equiv 1$), τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((\beta-\frac{n}{2})\log\left((1-\varepsilon)\frac{n}{\sigma^2}\right)\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((\beta-\frac{n}{2})\log\left((1+\varepsilon)\frac{n}{\sigma^2}\right)\right). \end{cases}$$

Η μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του μέτρου του τυχαίου πολυτόπου $\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}$ για κάθε δυνατή τιμή των παραμέτρων β, σ, μας δίνει τη δυνατότητα να εκμεταλλευτούμε το γεγονός ότι στην περίπτωση που $\sigma^2 = 2\beta \to \infty$, το Γκαουσιανό μέτρο γ_n στον $\mathbb{R}^n$ προκύπτει σαν όριο των μέτρων $\tilde{\nu}_{\beta,\sqrt{2\beta}}$. Ανακτούμε έτσι ένα άλλο αποτέλεσμα του Pivovarov που πρωτοδιατυπώθηκε στο [99], σχετικά με τη συμπεριφορά του αναμενόμενου μέτρου του Γκαουσιανού τυχαίου πολυτόπου.

Πόρισμα 2.4.6. *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1/2)$. Έστω $\mu = \mu_n$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $N = N(n)$ μια ακολουθία φυσικών. Έστω $X_1,\dots,X_N$ ανεξάρτητα σημεία, κατανεμημένα σύμφωνα με την τυπική Γκαουσιανή κατανομή στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $G_{N,n} := \mathrm{conv}\{X_1,\dots,X_N\}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\mu(G_{N,n}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\big((\frac{1}{2}-\varepsilon)n\big) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\big((\frac{1}{2}+\varepsilon)n\big). \end{cases}$$

Για την απόδειξη των Θεωρημάτων 2.4.2 και 2.4.5, το γεγονός ότι οι Βήτα και Βήτα$'$ κατανομές είναι αναλλοίωτες ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μας επιτρέπει να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των Dyer, Füredi και McDiarmid, ώστε να συνδέσουμε την εκάστοτε υπό εξέταση μέση τιμή με την αντίστοιχη συνάρτηση κατανομής των μέτρων ν_β και $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$, συγκεκριμένα τις συναρτήσεις $\mathrm{B}(d) := \int_d^1 f_\beta(t)\,dt$ και $\tilde{\mathrm{B}}(d) := \int_d^\infty \tilde{f}_{\beta,\sigma}(t)\,dt$, όπου με f_β και $\tilde{f}_{\beta,\sigma}$ συμβολίζουμε τις μονοδιάστατες περιθώριες συναρτήσεις πυκνότητας των n-διάστατων μέτρων ν_β και $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$ αντίστοιχα. Από εκεί και έπειτα, το πρόβλημα ανάγεται στην εξαγωγή όσο γίνεται ακριβέστερων εκτιμήσεων για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των $\mathrm{B}, \tilde{\mathrm{B}}$. Για την B μπορούμε να εξασφαλίσουμε σχετικά εύκολα κάποια καλά φράγματα (βλ. Λήμμα 6.2.2). Στην περίπτωση της Βήτα$'$ κατανομής, διακρίνουμε περιπτώσεις ανάλογα με τις τιμές των παραμέτρων β, σ που υπεισέρχονται στους υπολογισμούς, και χρησιμοποιούμε τη μέθοδο του Laplace (βλ. [14]) για την κατανόηση της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς της $\tilde{\mathrm{B}}$. Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων ολοκληρώνονται στην Παράγραφο 6.3.

Στα περιεχόμενα του κεφαλαίου περιλαμβάνονται ακόμη παρόμοια αποτελέσματα κατωφλίου για ολόκληρη την ακολουθία των intrinsic volumes $(V_k(P^\beta_{N,n}))_{k=1}^n$ του Βήτα πολυτόπου $P^\beta_{N,n}$, βλ. Παράγραφο 6.3.3. Αυτό φαίνεται κατ' αρχάς εφικτό επειδή είναι γνωστό ότι η ποσότητα $\mathbb{E}V_k(P^\beta_{N,n})$ συνδέεται άμεσα με τον αναμενόμενο όγκο του αντίστοιχου k-διάστατου Βήτα πολυτόπου για μια διαφορετική τιμή της παραμέτρου β, συγκεκριμένα

$$\frac{\mathbb{E}V_k(P^\beta_{N,n})}{V_k(B_2^n)} = \frac{\mathbb{E}\mathrm{vol}_k(P^{\beta+\frac{n-k}{2}}_{N,k})}{\mathrm{vol}_k(B_2^k)}$$

(βλ. Πρόταση 1.2.5 και Λήμμα 6.3.7). Η παραπάνω ταυτότητα μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε κατ' ευθείαν το Θεώρημα 2.4.2 στην περίπτωση που $k = k(n) \to \infty$ καθώς $n \to \infty$, για να εξάγουμε μια παρόμοια συμπεριφορά για την ποσότητα V_k. Για την περίπτωση ωστόσο που το k είναι ένας σταθερός ακέραιος, η παραπάνω ταυτότητα ανάγει το πρόβλημα στη μελέτη της ασυμπτωτικής συμπεριφοράς του αναμενόμενου όγκου του Βήτα πολυτόπου καθώς $\beta \to \infty$ (με τη διάσταση να παραμένει σταθερή). Σε αυτό το πλαίσιο, μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 2.4.7. *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$ και $k \in \mathbb{N}$, και έστω $-1 < \beta = \beta(n)$ και $N = N(n)$*

δύο ακολουθίες από πραγματικούς και φυσικούς αριθμούς, αντίστοιχα. Τότε

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\,V_k(P^{\beta}_{N,n})}{V_k(B_2^n)}=\begin{cases}1 & \text{αν } N\geqslant \exp\left(\exp\left((1+\varepsilon)\log\left(\beta+\frac{n-k}{2}\right)\right)\right)\\ 0 & \text{αν } N\leqslant \exp\left(\exp\left((1-\varepsilon)\log\left(\beta+\frac{n-k}{2}\right)\right)\right).\end{cases}$$

Τέλος, εξετάζουμε το αντίστοιχο πρόβλημα για μια διαφορετική κλάση τυχαίων πολυτόπων. Επιλέγουμε πάλι $X_1,\dots,X_N$ σημεία στον $\mathbb{R}^n$ ανεξάρτητα, με κατανομή το μέτρο ν_β ή $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$, θεωρούμε όμως τώρα πολύτοπα που παράγονται από την τομή των ημίχωρων $\{x\in\mathbb{R}^n : \langle X_i,x\rangle\leqslant\alpha\}$, για κάθε $i=1,\dots,N$, και κατάλληλη τιμή του $\alpha>0$. Οι ακριβείς διατυπώσεις και αποδείξεις των αποτελεσμάτων αυτών βρίσκονται στην Παράγραφο 6.4.

2.5 Εκτιμήσεις για τα αφφινικά quermassintegrals

Στο Κεφάλαιο 7 ασχολούμαστε με το πρόβλημα εξαγωγής ακριβών εκτιμήσεων για τα αφφινικά quermassintegrals κυρτών σωμάτων. Δεδομένου ενός κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ και $1\leqslant k\leqslant n-1$, το k-στό αφφινικό quermassintegral του K είναι η ποσότητα

$$\Phi_k(K):=\frac{\omega_n}{\omega_{n-k}}\left(\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{vol}_{n-k}(P_F(K))^{-n}\,d\nu_{n,n-k}\right)^{-\frac{1}{n}}.$$

Οι ποσότητες αυτές εισήχθησαν από τον Lutwak στο [83], και οφείλουν το όνομά τους στο γεγονός (που αποδείχθηκε από τον Grinberg [56]) ότι παραμένουν αναλλοίωτες κάτω από αφφινικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο. Πολλά προβλήματα σχετικά με τη συμπεριφορά των αφφινικών quermassintegrals παραμένουν ανοικτά (βλ.[6, Κεφάλαιο 9]). Συγκεκριμένα, σύμφωνα με μια εικασία του Lutwak, η ανισότητα

$$\omega_n^j\Phi_i(K)^{n-j}\leqslant\omega_n^i\Phi_j(K)^{n-i}$$

ισχύει για κάθε $0\leqslant i<j<n$ (εδώ χρησιμοποιούμε τη σύμβαση $\Phi_0(K)=\mathrm{vol}_n(K)$ και $\Phi_n(K)=\omega_n$).

Θα χρησιμοποιήσουμε μια διαφορετική κανονικοποίηση: Για ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ ορίζουμε το k-στό κανονικοποιημένο αφφινικό quermassintegral του K,

$$T_{n,k}(K):=\mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\left(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kn}}.$$

Ακολουθώντας αυτό το συμβολισμό, η παραπάνω εικασία του Lutwak, ισχυρίζεται ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$

$$T_{n,k}(B_2^n)\leqslant T_{n,k}(K)\leqslant T_{n,k}(\Delta_n),$$

όπου $\Delta_n=\mathrm{conv}(o,e_1,\dots,e_n)$ είναι το n-διάστατο simplex. Παρατηρήστε ότι η αριστερή ανισότητα παραπάνω ισχύει για $k=1$, από την ανισότητα Blaschke-Santaló (Θεώρημα 1.1.4). Από την άλλη, η δεξιά ανισότητα στην περίπτωση $k=1$ δεν είναι γνωστό αν ισχύει (το πρόβλημα αυτό είναι γνωστό ως η εικασία του Malher).

Το συγκεκριμένο πρόβλημα που μελετάμε αποτελεί στην ουσία την ασυμπτωτική εκδοχή της παραπάνω εικασίας του Lutwak (βλ. [41]).

Εικασία 2.5.1. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$c_1\sqrt{\frac{n}{k}} \leqslant T_{n,k}(K) \leqslant c_2\sqrt{\frac{n}{k}}.$$

Παρατηρήστε ότι η περίπτωση $k = 1$ της παραπάνω εικασίας ισχύει, από την ανισότητα Blaschke-Santaló και την αντίστροφη Santaló των Bourgain-Milman (Θεώρημα 1.1.5). Στη γενική περίπτωση, η αριστερή ανισότητα αποδείχθηκε από τους Παούρη και Pivovarov [93]. Σχετικά με το άνω φράγμα, η καλύτερη γνωστή γενική εκτίμηση οφείλεται στους Δαφνή και Παούρη [41]: Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$T_{n,k}(K) \leqslant c\sqrt{\frac{n}{k}}\log n.$$

Στην Παράγραφο 7.1 δίνουμε μια σκιαγράφηση της απόδειξης του παραπάνω άνω φράγματος. Μία ακόμη εκτίμηση που αποδείχθηκε στο [41] είναι η

$$T_{n,k}(K) \leqslant c(n/k)^{3/2}\sqrt{\log(en/k)},$$

που δείχνει ότι η ποσότητα $T_{n,k}(K)$ είναι φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά όταν το k είναι ανάλογο του n. Το πρόβλημα της απαλοιφής του λογαριθμικού όρου στη γενική περίπτωση παραπάνω μένει ωστόσο ανοικτό, ακόμα και για συγκεκριμένες κλάσεις κυρτών σωμάτων.

Στο Κεφάλαιο 7 μελετάμε το ανωτέρω πρόβλημα και δίνουμε μερικά αποτελέσματα για ορισμένες κλάσεις κυρτών σωμάτων. Το πρώτο μας παράδειγμα είναι αυτό των συμμετρικών τυχαίων πολυτόπων με κορυφές που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ και $n^2 \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$. Αν τα $x_1, \ldots, x_N \in K$ είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με κατανομή το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_K, τότε*

$$T_{n,k}(\mathrm{conv}(\pm x_1, \ldots, \pm x_N)) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{2}{N}$.

Το Θεώρημα 2.5.2 αποδεικνύεται συνδυάζοντας γνωστά αποτελέσματα των Γιαννόπουλου, Δαφνή και Τσολομύτη σχετικά με τον όγκο [38], αλλά και ολόκληρη την ακολουθία των κανονικοποιημένων quermassintegrals [39] τυχαίων πολυτόπων με κορυφές από ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K.

Μπορούμε να δείξουμε ακόμη το ζητούμενο άνω φράγμα στην περίπτωση των Βήτα πολυτόπων $P_{N,n}^{\beta} = \mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_N)$ (όταν δηλαδή τα $x_1, \ldots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία κατανεμημένα σύμφωνα με το μέτρο πιθανότητας ν_β στον $\mathbb{R}^n$), κάτω από συγκεκριμένες υποθέσεις για την τάξη μεγέθους των k και N.

Θεώρημα 2.5.3. *Έστω $\beta > -1$, και $x_1, \ldots, x_N$ τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$, ανεξάρτητα και με κατανομή το μέτρο ν_β. Αν $k \geqslant \log\left(n\log\sqrt{\beta + n/2 + 1}\right)$ και $N \geqslant c_0^{\beta + \frac{n+1}{2}}$, όπου $c_0 > 0$ απόλυτη σταθερά, τότε*

$$T_{n,k}(P_{N,n}^{\beta}) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$.

Για την απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος, χρησιμοποιούμε ακριβή φράγματα για τη συνάρτηση κατανομής της περιθώριας πυκνότητας του μέτρου ν_β (βλ. Λήμμα 6.2.2), καθώς και την άμεση σύνδεση των αναμενόμενων intrinsic volumes $V_k(P_{N,n}^{\beta})$ με τον αναμενόμενο όγκο ενός k-διάστατου Βήτα πολύτοπου, με μια διαφορετική παράμετρο $\beta > -1$ (βλ. Πρόταση 1.2.5 και Λήμμα 6.3.7). Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 2.5.2 και 2.5.3 παρουσιάζονται στην Παράγραφο 7.2.

Στη συνέχεια εξετάζουμε την ισχύ της Εικασίας 2.5.1 στην περίπτωση που το K είναι ένα ισοτροπικό unconditional (δηλαδή συμμετρικό ως προς όλους τους άξονες συντεταγμένων) κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας ένα γνωστό αποτέλεσμα των Bobkov και Nazarov, ανάγουμε το πρόβλημα στη μελέτη των κανονικοποιημένων αφφινικών quermassintegrals της B_1^n, της μοναδιαίας μπάλας του ℓ_1^n. Συνδυάζοντας για αυτή την περίπτωση γνωστές εκτιμήσεις των Carl και Pajor [37], και Gluskin [53] για τον όγκο τομών συμμετρικών λωρίδων στον $\mathbb{R}^n$ με το κλασικό Λήμμα Johnson-Lindenstrauss [62], μπορούμε τελικά να δώσουμε την ακόλουθη ελαφρώς βελτιωμένη εκτίμηση.

Θεώρημα 2.5.4. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$T_{n,k}(K) \leqslant c\sqrt{n/k} \cdot \sqrt{1+\log(n/k)}, \tag{2.5.1}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ορίζουμε γενικότερα, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και $p \neq 0$,

$$T_{p,n,k}(K) := \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}} \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^p \, d\nu_{n,k}(F) \right)^{\frac{1}{kp}}$$

(παρατηρήστε ότι $T_{n,k} = T_{-n,n,k}$), και προσπαθούμε να βρούμε το καλύτερο p για το οποίο ικανοποιείται το ζητούμενο άνω φράγμα, $T_{p,n,k}(B_1^n) \leqslant c\sqrt{n/k}$. Παρουσιάζουμε δύο διαφορετικά επιχειρήματα: Το πρώτο συνδυάζει την εύρεση υπόχωρων $F \in G_{n,k}$ για τους οποίους $\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant c/\sqrt{kn}$ (Λήμμα 7.3.4) με γνωστές εκτιμήσεις του Szarek [106] για τον πληθάριθμο ε-δικτύων στη Grassmanian $G_{n,k}$. Το δεύτερο επιχείρημα ανάγει το πρόβλημα στη μελέτη της προβολής της B_1^n σε ένα τυχαίο «Γκαουσιανό υπόχωρο» $G_n(\mathbb{R}^k)$, όπου $G_n = (g_{ij})$ είναι ένας τυχαίος $n \times k$ πίνακας με ανεξάρτητες $N(0,1/n)$ συντεταγμένες. Τα αποτελέσματά μας συνοψίζονται στο παρακάτω.

Θεώρημα 2.5.5. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $p \leqslant -c_1 \min\{(n-k)\log n, n\log(1+k)\}$ έχουμε*

$$T_{p,n,k}(K) \leqslant c_2\sqrt{n/k}, \tag{2.5.2}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 2.5.4 και 2.5.5 αναπτύσσονται στην Παράγραφο 7.3.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ευκλείδεια κανονικοποίηση στη θέση John

3.1 Εισαγωγή

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να παρουσιάσουμε μία μέθοδο η οποία βασίζεται στην «Ευκλείδεια κανονικοποίηση», που πρωτοεμφανίστηκε σε μια δουλειά του Fresen [49], και με βάση αυτήν να δώσουμε σύντομες αποδείξεις διαφόρων αποτελεσμάτων για την τοπική δομή χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα, μεταξύ των οποίων είναι το ισομορφικό θεώρημα Dvoretzky των V. Milman και Schecthman, και μια νέα ισομορφική μορφή ενός αποτελέσματος των Bourgain, Lindenstrauss και V. Milman (της λεγόμενης ολικής εκδοχής του θεωρήματος Dvoretzky).

Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Γράφουμε K για τη μοναδιαία μπάλα $\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ του X, και ορίζουμε

$$M := \int_{S^{n-1}} \|x\| \, d\sigma(x) \ \text{ και } \ b := \max\{\|x\| : x \in S^{n-1}\}, \tag{3.1.1}$$

όπου S^{n-1} είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα και σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Οι παράμετροι M και b παίζουν πολύ σημαντικό ρόλο στην τοπική θεωρία των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα. Η παρατήρηση αυτή έγινε για πρώτη φορά από τον V. Milman [88] στην απόδειξη που έδωσε για το κλασικό θεώρημα Dvoretzky [44] για τις σχεδόν σφαιρικές τομές συμμετρικών κυρτών σωμάτων μεγάλης διάστασης: για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ και κάθε

$$k \leqslant k_X(\varepsilon) = c_1 \varepsilon^2 [\log^{-1}(2/\varepsilon)] n (M/b)^2,$$

μπορούμε να βρούμε έναν υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $\dim(F) = k$ τέτοιον ώστε να ισχύει

$$(1+\varepsilon)^{-1} M \|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant M(1+\varepsilon)\|x\|_2 \tag{3.1.2}$$

για κάθε $x \in F$, όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα. Επιπλέον, αυτό ισχύει για όλους τους F σε ένα υποσύνολο $A_{n,k} \subset G_{n,k}$ μέτρου $\nu_{n,k}(A_{n,k}) \geqslant 1 - \exp(-c_2 \varepsilon^2 k)$, όπου $G_{n,k}$ είναι η πολλαπλότητα

Grassmann των k-διαστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένη με το Haar μέτρο πιθανότητας $\nu_{n,k}$. Επιλέγοντας $\varepsilon = 1/2$ παίρνουμε:

Θεώρημα 3.1.1 (V. Milman). *Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Αν $k \leqslant c_0 n(M/b)^2$, όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, τότε μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο $A_{n,k} \subset G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(A_{n,k}) \geqslant 1 - \exp(-\bar{c}_0 k)$ τέτοιο ώστε για κάθε υπόχωρο $F \in A_{n,k}$ και για κάθε $x \in F$ να ισχύει*

$$\frac{2}{3}M\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \frac{3}{2}M\|x\|_2. \tag{3.1.3}$$

Το Θεώρημα 3.1.1 ισχυρίζεται ότι η απόσταση Banach-Mazur (ακριβέστερα, η γεωμετρική απόσταση) $d_{\mathrm{BM}}(K \cap F, B_2^n \cap F)$ μεταξύ των $K \cap F$ και $B_2^n \cap F$ φράσσεται από 3 για τον τυχαίο $F \in G_{n,k}$ αν υποθέσουμε ότι $k \leqslant k(X) := c_0 n(M/b)^2$. Η παράμετρος $k(X)$, η οποία προσδιορίζεται πλήρως από τα M και b, ονομάζεται διάσταση Dvoretzky του X (δείτε τα [48], [90] και [2], όπου αποδεικνύονται διάφορα αποτελέσματα στα οποία εμφανίζεται φυσιολογικά και παίζει ουσιαστικό ρόλο). Ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι τι μπορούμε να πούμε όταν η διάσταση k είναι μεγαλύτερη από $k(X)$, δηλαδή όταν $k(X) \leqslant k \leqslant n$. Το «ισομορφικό θεώρημα Dvoretzky» των V. Milman και Schechtman δίνει ακριβή απάντηση:

Θεώρημα 3.1.2 (V. Milman-Schechtman). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $C_1, C_2 > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$, για κάθε $C_1 \log n \leqslant k \leqslant n$ και κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X, υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος Y του X τέτοιος ώστε*

$$d_{\mathrm{BM}}(Y, \ell_2^k) \leqslant C_2 \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\log\left(1 + \frac{n}{k}\right)}}. \tag{3.1.4}$$

Μια ασθενέστερη μορφή του Θεωρήματος 3.1.2 αποδείχθηκε αρχικά από τους V. Milman και Schechtman στο [89]. Η ακριβής μορφή που διατυπώνουμε εδώ αποδείχθηκε από τους ίδιους συγγραφείς στο [91] και από τον Guédon στο [58] με μια διαφορετική προσέγγιση. Επεκτάσεις του αποτελέσματος στη μη συμμετρική περίπτωση δόθηκαν από τους Gordon, Guédon και Meyer στο [55] και από τους Litvak και Tomczak-Jaegermann στο [80]. Παρατηρήστε ότι η εκτίμηση είναι ακριβής: αν $X = \ell_\infty^n$ τότε, για κάθε $k \geqslant \log n$ και κάθε k-διάστατο υπόχωρο Y του X ισχύει $d_{\mathrm{BM}}(Y, \ell_2^k) \geqslant \delta \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\log(1+\frac{n}{k})}}$, όπου $\delta > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η παρατήρηση αυτή οφείλεται στους Figiel και Johnson [47], οι οποίοι απέδειξαν ένα ελαφρώς ασθενέστερο αποτέλεσμα, ενώ το πλήρες αποτέλεσμα αποδείχθηκε, ανεξάρτητα, από τους Carl και Pajor στο [37] και από τον Gluskin στο [53].

Ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα, το οποίο δίνει πιο λεπτομερείς πληροφορίες για την διάμετρο της τυχαίας k-διάστατης τομής ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται στη θέση John, αποδείχθηκε από τους Litvak, Mankiewicz και Tomczak-Jaegermann στο [81].

Θεώρημα 3.1.3 (Litvak-Mankiewicz-Tomczak). *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Για κάθε $k(K) \leqslant k \leqslant n$ έχουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$c_3\sqrt{\frac{n}{k}}\, B_2^n \cap F \subseteq K \cap F \subseteq c_4 \sqrt{\frac{n}{\log\left(1+\frac{n}{k}\right)}}\, B_2^n \cap F \tag{3.1.5}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_5k)$*, όπου* $c_3, c_4, c_5 > 0$ *είναι απόλυτες σταθερές.*

Παρατηρήστε ότι, όταν $k(K) \leqslant k \leqslant n$, το Θεώρημα 3.1.3 δίνει το ίδιο άνω φράγμα (με το Θεώρημα 3.1.2) για την απόσταση Banach-Mazur $d_{\rm BM}(K\cap F, B_2^n\cap F)$ μιας τυχαίας k-διαστατης τομής του K από την Ευκλείδεια μπάλα, ενώ αν $1\leqslant k\leqslant k(K)$ γνωρίζουμε ούτως ή άλλως ότι η τυχαία k-διάσταση τομή $K\cap F$ του K έχει φραγμένη απόσταση από την Ευκλείδεια μπάλα.

Δίνουμε μια σύντομη απόδειξη των Θεωρημάτων 3.1.3 και 3.1.2 που βασίζεται στην ακόλουθη ιδέα: αν μας δοθούν ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα X και ένας ακέραιος $1\leqslant k\leqslant n$ αρκεί να βρούμε έναν χώρο Y τέτοιον ώστε $k(Y)\geqslant k$ και $d_{\rm BM}(X,Y)\leqslant f(n/k)$ όπου η $f(n/k)$ είναι όσο γίνεται μικρή. Για το σκοπό αυτό, εκμεταλλευόμαστε ένα αποτέλεσμα του Fresen [49] σχετικά με την «Ευκλείδεια κανονικοποίηση» ενός κυρτού σώματος που βρίσκεται στη θέση John (δείτε την επόμενη παράγραφο για περισσότερες λεπτομέρειες).

Θεώρημα 3.1.4 (Fresen)**.** *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε η B_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Για κάθε $t\in[\alpha,\beta\sqrt{n}]$, όπου $\alpha,\beta>0$ είναι απόλυτες σταθερές, υπάρχει ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K_t τέτοιο ώστε $d(K,K_t)\leqslant t$ και*

$$\left(\frac{M_t}{b_t}\right)^2 \geqslant c_1\frac{t^2}{n}\log\left(\frac{c_2n}{t^2}\right), \tag{3.1.6}$$

όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Για μια δεύτερη εφαρμογή, θεωρούμε την ολική μορφή του θεωρήματος Dvoretzky. Το επόμενο θεώρημα των Bourgain, Lindenstrauss και V. Milman [34] (δείτε επίσης το [101] για την εξάρτηση από το ε) δείχνει ότι ο μέσος όρος (περίπου) $(b/M)^2$ στροφών του πολικού σώματος ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K είναι ισομορφική Ευκλείδεια μπάλα.

Θεώρημα 3.1.5 (Bourgain-Lindenstrauss-V. Milman)**.** *Έστω $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Για κάθε $\varepsilon\in(0,1/2)$ και για κάθε ακέραιο*

$$k\geqslant \frac{c_6}{\varepsilon^2}\left(\frac{b}{M}\right)^2,$$

η τυχαία επιλογή k ορθογώνιων μετασχηματισμών $U_1,\ldots,U_k\in O(n)$ ικανοποιεί την

$$\frac{M}{1+\varepsilon}\|x\|_2\leqslant\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k\|U_i(x)\|\leqslant M(1+\varepsilon)\|x\|_2, \tag{3.1.7}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, ή ισοδύναμα,

$$d_{\rm G}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k U_i^*(K^\circ), B_2^n\right)\leqslant(1+\varepsilon)^2, \tag{3.1.8}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c\varepsilon^2nk(M/b)^2)$, όπου $c,c_6>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Παρουσιάζουμε μια ισομορφική εκδοχή αυτού του αποτελέσματος. Στο πνεύμα του Θεωρήματος 3.1.2 σταθεροποιούμε $k\geqslant 2$, θεωρούμε $U_1,\ldots,U_k\in O(n)$ και θέλουμε να εκτιμήσουμε την τυπική απόσταση Banach-Mazur του $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k U_i^*(K^\circ)$ από την B_2^n. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.4 παίρνουμε:

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Για κάθε $k \leqslant \delta n/\log(n+1)$, όπου $\delta \in (0,1)$ είναι μια απόλυτη σταθερά, η τυχαία k-άδα ορθογώνιων μετασχηματισμών $U_1, \dots, U_k \in O(n)$ ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_7 n)$*

$$d_{\mathrm{G}}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} U_i^*(K^\circ), B_2^n\right) \leqslant C_3\sqrt{\frac{n}{k\log k}}, \tag{3.1.9}$$

όπου $C_3, c_7 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Ο περιορισμός $k \leqslant n/\log(n+1)$ στο Θεώρημα 3.1.6 είναι φυσιολογικός. Παρατηρήστε ότι αν το K είναι στη θέση John τότε $\left(\frac{b}{M}\right)^2 \leqslant \frac{Cn}{\log(n+1)}$ (αυτό είναι συνέπεια του λήμματος Dvoretzky-Rogers, δείτε την επόμενη παράγραφο). Συνεπώς, αν $k \geqslant n/\log(n+1)$ έχουμε

$$d_{\mathrm{G}}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} U_i^*(K^\circ), B_2^n\right) \leqslant C$$

για την τυχαία k-άδα $U_1, \dots, U_k \in O(n)$.

Το Θεώρημα 3.1.6 είναι υπό κάποια έννοια η ολική εκδοχή του Θεωρήματος 3.1.2 και δεν έχει εμφανιστεί κάπου στη βιβλιογραφία. Σχετικά με το αν η εκτίμηση της (3.1.9) είναι ακριβής δείχνουμε (στην Παρατήρηση 3.3.3) ότι αν $K = [-1,1]^n$ είναι ο μοναδιαίος κύβος τότε, *για κάθε* k-άδα $U_1, \dots, U_k \in O(n)$,

$$d_{\mathrm{G}}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} U_i^*(K^\circ), B_2^n\right) \geqslant c\sqrt{\frac{n}{k^2\log k}}, \tag{3.1.10}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

3.2 Συμβολισμός και ορισμοί

Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\|\cdot\|_K$ είναι η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K, θέτουμε

$$M(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K d\sigma(x) \tag{3.2.1}$$

και γράφουμε $b(K)$ για τη μικρότερη θετική σταθερά b με την ιδιότητα $\|x\|_K \leqslant b\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Θέτουμε $k(K) = k(X_K)$, όπου $X_K = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$, και $k^*(K) := k(K^\circ)$. Παρατηρήστε ότι $M(K^\circ) = w(K)$ και $b(K^\circ) = R(K)$, άρα

$$k^*(K) = c_0 n\left(\frac{w(K)}{R(K)}\right)^2. \tag{3.2.2}$$

Από το Θεώρημα 3.1.1 γνωρίζουμε ότι αν $k \leqslant k(K)$ τότε για τους περισσότερους $F \in G_{n,k}$ ισχύει $K \cap F \simeq \frac{1}{M(K)} B_2^n \cap F$. Λόγω δυϊσμού, αν $k \leqslant k^*(K)$ τότε $P_F(K) \simeq w(K)\, B_2^n \cap F$.

Αν K και T είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία περιέχουν την αρχή των αξόνων στο εσωτερικό τους, τότε η γεωμετρική τους απόσταση $d_{\mathrm{G}}(K,T)$ ορίζεται από την

$$d_{\mathrm{G}}(K,T) = \inf\{ab : a,b>0, K\subseteq bT \text{ και } T\subseteq aK\}. \tag{3.2.3}$$

Η φυσιολογική απόσταση μεταξύ δύο n-διάστατων χώρων με νόρμα X_K και X_T είναι η απόσταση Banach-Mazur

$$d_{\mathrm{BM}}(X_K,X_T) = \inf_{A\in GL(n)} \|A : X_K\to X_T\|\,\|A^{-1} : X_T\to X_K\|. \tag{3.2.4}$$

Από τον ορισμό της γεωμετρικής απόστασης βλέπουμε ότι

$$d_{\mathrm{BM}}(X_K,X_T) = \inf\{d_{\mathrm{G}}(K,A(T)) : A\in GL(n)\}. \tag{3.2.5}$$

Με άλλα λόγια, η απόσταση Banach-Mazur $d_{\mathrm{BM}}(X_K,X_T)$ είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός λ για τον οποίο μπορούμε να βρούμε $A\in GL(n)$ τέτοιον ώστε $K\subseteq A(T)\subseteq \lambda K$. Είναι φανερό ότι $d_{\mathrm{BM}}(X_K,X_T)\geqslant 1$ με ισότητα αν και μόνο αν οι X_K και X_T είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Παρατηρήστε ότι $d_{\mathrm{BM}}(X,Z)\leqslant d_{\mathrm{BM}}(X,Y)d_{\mathrm{BM}}(Y,Z)$ για κάθε τριάδα n-διάστατων χώρων με νόρμα.

Θυμίζουμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέμε ότι βρίσκεται στη θέση John αν η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n περιέχεται στο K και για κάθε $T\in GL(n)$ με $T(B_2^n)\subseteq K$ ισχύει $\mathrm{vol}_n(T(B_2^n))\leqslant \mathrm{vol}_n(B_2^n)$, δηλαδή αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου το οποίο εγγράφεται στο K. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι αυτή η θέση είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Επίσης, εύκολα ελέγχεται ότι το K είναι στη θέση John αν και μόνο αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου το οποίο περιέχει το K°.

Το Θεώρημα του John 1.1.12 (δείτε επίσης το [17] για την αντίστροφη συνεπαγωγή) ισχυρίζεται ότι το K είναι στη θέση John αν και μόνο αν $B_2^n\subseteq K$ και υπάρχουν σημεία επαφής $x_1,\ldots,x_m\in\mathbb{R}^n$ των K και B_2^n και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1,\ldots,c_m$ τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{j=1}^m c_j\langle x,x_j\rangle x_j \tag{3.2.6}$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Αυτό συνεπάγεται ότι $K\subseteq\sqrt{n}B_2^n$, άρα, $d_{\mathrm{G}}(K,B_2^n)\leqslant\sqrt{n}$. Ξεκινώντας από την ανάλυση John (3.2.6), οι Dvoretzky και Rogers [45] απέδειξαν διάφορα αποτελέσματα για την κατανομή των x_j στη μοναδιαία σφαίρα. Μία από τις συνέπειες του «λήμματος Dvoretzky-Rogers» είναι ότι αν το K βρίσκεται στη θέση John τότε

$$k(K) = c_0 n\left(\frac{M}{b}\right)^2 \geqslant c\log(n+1). \tag{3.2.7}$$

Αυτή η εκτίμηση παίζει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος του Dvoretzky.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία [9] και [2] για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την ασυμπτωτική θεωρία των κυρτών σωμάτων Ειδικότερα, μπορεί κανείς να βρεί στο [2] τις αποδείξεις όλων των αποτελεσμάτων που αναφέρουμε στις δύο πρώτες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου.

3.3 Κανονικοποίηση στη θέση John και θεωρήματα τύπου Dvoretzky

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $B_2^n \subseteq K$. Για κάθε $t \geqslant 1$ ορίζουμε

$$K_t = \mathrm{conv}(K \cup tB_2^n). \tag{3.3.1}$$

Παρατηρήστε ότι $K_1 = K$. Θέτουμε

$$M_t := \int_{S^{n-1}} \|x\|_{K_t}\, d\sigma(x) \quad \text{και} \quad b_t := \max\{\|x\|_{K_t} : x \in S^{n-1}\}. \tag{3.3.2}$$

Αφού $t \geqslant 1$ και $B_2^n \subseteq K$, έχουμε

$$K \subseteq K_t \subseteq tK, \quad \text{ή ισοδύναμα,} \quad \frac{1}{t}\|x\| \leqslant \|x\|_{K_t} \leqslant \|x\| \tag{3.3.3}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Με άλλα λόγια,

$$d_{\mathrm{BM}}(K, K_t) \leqslant d_{\mathrm{G}}(K, K_t) \leqslant t. \tag{3.3.4}$$

Από την (3.3.3) βλέπουμε ότι $M_1 \leqslant tM_t$ και $b_t \leqslant b_1$, άρα

$$\left(\frac{M_t}{b_t}\right)^2 \geqslant \frac{1}{t^2}\left(\frac{M_1}{b_1}\right)^2 \quad \text{για κάθε } t \geqslant 1. \tag{3.3.5}$$

Το αποτέλεσμα του Fresen (Θεώρημα 3.1.4) δίνει κάτω φράγματα για το λόγο M_t/b_t στην περίπτωση που το K είναι στη θέση John. Η απόδειξη χρησιμοποιεί με ουσιαστικό τρόπο αποτελέσματα παραγοντοποίησης Dvoretzky-Rogers (για την ακρίβεια, το βασικό εργαλείο είναι ένα θεώρημα του Vershynin από το [108]). Προσαρμόζοντας απόλυτες σταθερές και χρησιμοποιώντας τις (3.2.7) και (3.3.5), μπορούμε να επαναδιατυπώσουμε το Θεώρημα 3.1.4 με έναν τρόπο πιο βολικό για τον σκοπό μας, ως εξής:

Λήμμα 3.3.1 (Fresen). *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε η B_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Για κάθε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$ έχουμε*

$$\left(\frac{M_t}{b_t}\right)^2 \geqslant c\frac{t^2}{n}\log\left(1 + \frac{n}{t^2}\right), \tag{3.3.6}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θα περιγράψουμε τις λεπτομέρειες για λόγους πληρότητας. Η ακριβής διατύπωση του λήμματος του Fresen είναι ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $\alpha > 1$ και $\beta < 1$ τέτοιες ώστε, για κάθε $t \in [\alpha, \beta\sqrt{n}]$, το σώμα K_t που ορίζεται από την (3.3.1) ικανοποιεί την

$$\left(\frac{M_t}{b_t}\right)^2 \geqslant c_1\frac{t^2}{n}\log\left(\frac{c_2 n}{t^2}\right), \tag{3.3.7}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $f(y) = \log(c_2 y)/\log(1+y)$ τείνει στο 1 όταν $y \to \infty$, άρα μπορούμε να βρούμε $N > 0$ τέτοιον ώστε

$$\log(c_2 y) \geqslant \frac{1}{2}\log(1+y) \tag{3.3.8}$$

για κάθε $y \geqslant N$. Αν $\alpha^2 \leqslant t^2 \leqslant \min\{\beta^2, N^{-1}\}n$ τότε, θέτοντας $y = n/t^2$ και χρησιμοποιώντας τις (3.3.7) και (3.3.8) παίρνουμε

$$\left(\frac{M_t}{b_t}\right)^2 \geqslant \frac{c_1}{2}\frac{t^2}{n}\log\left(1+\frac{n}{t^2}\right). \tag{3.3.9}$$

Τώρα, ας υποθέσουμε ότι $\min\{\beta^2, N^{-1}\}n \leqslant t^2 \leqslant n$. Παρατηρούμε ότι $tB_2^n \subseteq K_t \subseteq \sqrt{n}B_2^n$, άρα

$$\left(\frac{M_t}{b_t}\right)^2 \geqslant \frac{t^2}{n} \geqslant \frac{1}{C(\beta,N)}\frac{t^2}{n}\log\left(1+\frac{n}{t^2}\right), \tag{3.3.10}$$

όπου $C(\beta, N) = \log(1+\max\{\beta^{-2}, N\})$. Τέλος, αν $1 \leqslant t \leqslant \alpha$ τότε χρησιμοποιούμε τις (3.2.7) και (3.3.5) και γράφουμε

$$\left(\frac{M_t}{b_t}\right)^2 \geqslant \frac{1}{t^2}\left(\frac{M_1}{b_1}\right)^2 \geqslant \frac{c}{\alpha^2}\frac{\log(n+1)}{n} \geqslant \frac{c}{\alpha^4}\frac{t^2}{n}\log\left(1+\frac{n}{t^2}\right). \tag{3.3.11}$$

Το αποτέλεσμα προκύπτει αν επιλέξουμε την σταθερά $c = c(\alpha, \beta, N) > 0$ κατάλληλα, παίρνοντας υπόψη τις (3.3.9), (3.3.10) και (3.3.11). □

Παρατήρηση 3.3.2. Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι αυτό που στην πραγματικότητα απέδειξε ο Fresen είναι ένα κάτω φράγμα για την παράμετρο M_t: για κάθε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$ έχουμε

$$M_t^2 \geqslant \frac{c\log\left(1+\frac{n}{t^2}\right)}{n}, \tag{3.3.12}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Κατόπιν, το Λήμμα 3.3.1 (ή το Θεώρημα 3.1.4) προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι $K_t \supseteq tB_2^n$, και ειδικότερα $b_t \leqslant \frac{1}{t}$.

Χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.3.1 για να «αυξήσουμε» τη διάσταση Dvoretzky του K όσο χρειάζεται, χρησιμοποιώντας το μετασχηματισμό «κανονικοποίησης» $K \mapsto K_t$ για κατάλληλη τιμή του t. Το κόστος αυτής της διαδικασίας μετράται από την απόσταση Banach-Mazur $d_{\mathrm{BM}}(K, K_t)$, η οποία όμως ελέγχεται από το t. Αυτή η γενική ιδέα θα γίνει καθαρή από το επιχείρημα που ακολουθεί.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3. Για τον αριστερό εγκλεισμό αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $k(K) \leqslant k \leqslant n$ τότε το πολικό σώμα K° του K ικανοποιεί την

$$P_F(K^\circ) \subseteq c_3^{-1}\sqrt{k/n}\,B_2^n \cap F \tag{3.3.13}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-c_1 s^2 k}$ ότι $G_{n,k}$. Χρησιμοποιούμε το εξής γενικό θεώρημα, το οποίο είναι κλασική εφαρμογή του φαινομένου της συγκέντρωσης του μέτρου στην Ευκλείδεια σφαίρα (παραπέμπουμε στο [2, Παράγραφος 5.7] για τις λεπτομέρειες). Για κάθε $1 \leqslant k < n$ και $s > 1$ υπάρχει υποσύνολο $A_{n,k} \subset G_{n,k}$ με μέτρο μεγαλύτερο από $1 - e^{-c_1 s^2 k}$ τέτοιο ώστε η ορθογώνια προβολή του K° σε οποιονδήποτε υπόχωρο $F \in A_{n,k}$ να ικανοποιεί την

$$R(P_F(K^\circ)) \leqslant w(K^\circ) + c_2 s\sqrt{k/n}R(K^\circ), \tag{3.3.14}$$

όπου $c_1 > 0, c_2 > 1$ είναι απόλυτες σταθερές. Παρατηρήστε ότι αν $k \geqslant k^*(K^\circ) = k(K)$ τότε από την (3.2.2) έχουμε

$$w(K^\circ) \leqslant c\sqrt{k/n}R(K^\circ).$$

Συνεπώς, αφού $R(K^\circ) = R(B_2^n) = 1$, εφαρμόζοντας την (3.3.14) και επιλέγοντας $s = 1$, παίρνουμε την (3.3.13).

Για τον άλλον εγκλεισμό, θεωρούμε τη μικρότερη τιμή t_k για την οποία

$$c_0 c t_k^2 \log\left(1 + \frac{n}{t_k^2}\right) \geqslant k, \tag{3.3.15}$$

όπου c_0 είναι η σταθερά στο Θεώρημα 3.1.1. Τότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 3.3.1 και παίρνουμε

$$k(K_{t_k}) = c_0 n \left(\frac{M_{t_k}}{b_{t_k}}\right)^2 \geqslant c_0 c t_k^2 \log\left(1 + \frac{n}{t_k^2}\right) \geqslant k. \tag{3.3.16}$$

Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο $A_{n,k} \subset G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(A_{n,k}) \geqslant 1 - \exp(-\bar{c}_0 k)$ τέτοιο ώστε για κάθε υπόχωρο $F \in A_{n,k}$ να ισχύει

$$K_{t_k} \cap F \subseteq \frac{3}{2}\frac{1}{M(K_{t_k})} B_2^n \cap F. \tag{3.3.17}$$

Από τον εγκλεισμό $K \subseteq K_{t_k}$ και την (3.3.12) συμπεραίνουμε ότι

$$K \cap F \subseteq c_4 \sqrt{\frac{n}{\log\left(1 + \frac{n}{k}\right)}}\, B_2^n \cap F \tag{3.3.18}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-\bar{c}_0 k}$ στην $G_{n,k}$.

Απομένει να εκτιμήσουμε την τιμή του t_k: Ας υποθέσουμε ότι $k \leqslant \delta n$ για κάποιο, αρκετά μικρό, $\delta > 0$ το οποίο θα επιλέξουμε σε λίγο, και ας θέσουμε $C = \sqrt{\frac{2}{c_0 c}}$. Η συνάρτηση $g(y) = \log\left(1 + \frac{y(\log 2)}{C^2}\right) / \log\left(1 + y\right)$ τείνει στο 1 καθώς $y \to \infty$, άρα μπορούμε να βρούμε $N > 0$ τέτοιον ώστε

$$\log\left(1 + \frac{y(\log 2)}{C^2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\log\left(1 + y\right)$$

για κάθε $y \geqslant N$. Επιλέγοντας οποιοδήποτε $\delta \in (0, N^{-1})$, έχουμε $y := n/k \geqslant \delta^{-1} \geqslant N$. Τότε, η επιλογή $t_k = C\sqrt{k}/\sqrt{\log\left(1 + \frac{n}{k}\right)}$ μας δίνει

$$c_0 c t_k^2 \log\left(1 + \frac{n}{t_k^2}\right) \geqslant C^2 c_0 c k \frac{\log\left(1 + \frac{n(\log 2)}{C^2 k}\right)}{\log\left(1 + \frac{n}{k}\right)} \geqslant k. \tag{3.3.19}$$

Μένει να ελέγξουμε την περίπτωση $k \geqslant \delta n$. Τότε, από το θεώρημα του John έχουμε

$$K \cap F \subseteq \sqrt{n} B_2^n \cap F \subseteq C(\delta) \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\log\left(1 + \frac{n}{k}\right)}} B_2^n \cap F, \tag{3.3.20}$$

όπου $C(\delta) = \sqrt{\log\left(1 + \frac{1}{\delta}\right)}/\sqrt{\delta}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μοναδιαία μπάλα K του X είναι σε θέση John. Από το Θεώρημα 3.1.3, για κάθε $k(K) \leqslant k \leqslant n$, η τυχαία k-διάστατη τομή $K \cap F$ του K ικανοποιεί την (5.1.13), άρα

$$d_{\mathrm{BM}}(K \cap F, B_2^n \cap F) \leqslant d_{\mathrm{G}}(K \cap F, B_2^n \cap F) \leqslant C_2 \frac{\sqrt{k}}{\sqrt{\log\left(1 + \frac{n}{k}\right)}}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C_2 > 0$. Αφού $k(K) \geqslant C_1 \log n$, έπεται το συμπέρασμα. □

Η απόδειξη της ισομορφικής εκδοχής του «ολικού θεωρήματος Dvoretzky» κινείται στην ίδια γραμμή.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.6. Υποθέτουμε ότι το K βρίσκεται σε θέση John, και επιλέγουμε $t_k > 1$ τέτοιο ώστε

$$k \geqslant \frac{16c_3}{c}\frac{n/t_k^2}{\log\left(1+\frac{n}{t_k^2}\right)}, \tag{3.3.21}$$

όπου $c, c_3 > 0$ είναι οι σταθερές στο Λήμμα 3.3.1 και το Θεώρημα 3.1.5. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.1 βλέπουμε ότι

$$k \geqslant 16c_3\left(\frac{b_{t_k}}{M_{t_k}}\right)^2. \tag{3.3.22}$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.5 για το σώμα K_{t_k} (με αυτήν τιμή του k και με $\varepsilon = 1/4$) βλέπουμε ότι η τυχαία k-άδα $(U_1, \dots, U_k)$ από την $O(n)$ ικανοποιεί την

$$\frac{4}{5}M_{t_k}\|x\|_2 \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \|U_i(x)\|_{K_{t_k}} \leqslant \frac{5}{4}M_{t_k}\|x\|_2 \tag{3.3.23}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_4 n)$. Παίρνοντας υπόψη και την (3.3.3) βλέπουμε ότι

$$\frac{4}{5}M_{t_k}\|x\|_2 \leqslant \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \|U_i(x)\|_K \leqslant \frac{5t_k}{4}M_{t_k}\|x\|_2 \tag{3.3.24}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, άρα,

$$d_{\mathrm{G}}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k U_i^*(K^\circ), B_2^n\right) \leqslant 2t_k \tag{3.3.25}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_4 n)$.

Μένει να επιλέξουμε το t_k. Παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $t_k = 4\sqrt{\frac{c_3 n}{ck\log(k+1)}}$ έχουμε $t_k > 1$ (διότι $k \leqslant \delta n/\log(n+1)$, αρκεί να επιλέξουμε το δ αρκετά μικρό) και

$$\frac{16c_3}{c}\frac{n/t_k^2}{\log(1+n/t_k^2)} = \frac{k\log(k+1)}{\log\left(1+\frac{ck\log(k+1)}{16c_3}\right)} \leqslant k, \tag{3.3.26}$$

με τον περιορισμό ότι $\log(k+1) \geqslant \frac{16c_3}{c}$. Δεδομένου ότι, από το θεώρημα του John, το αποτέλεσμα ισχύει κατά προφανή τρόπο (με ελαφρώς μεγαλύτερη τιμή της σταθεράς C) για μικρές τιμές του k, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 3.3.3. Ας θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $K = [-1, 1]^n$ είναι ο μοναδιαίος κύβος. Τότε, $K^\circ = B_1^n = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_1 \leqslant 1\}$. Θεωρούμε μια k-άδα $U_1, \dots, U_k$ στην $O(n)$ και θέτουμε $V_j = U_j^*$, $1 \leqslant j \leqslant k$. Υποθέτουμε ότι

$$\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k V_i(B_1^n) \supseteq \alpha B_2^n \tag{3.3.27}$$

για κάποιον $\alpha > 0$. Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός κάλυψης $N(A,B)$ ενός σώματος A από κάποιο άλλο σώμα B είναι ο μικρότερος φυσικός αριθμός N για τον οποίο υπάρχουν N μεταφορές του B που η ένωσή τους καλύπτει το A. Ένα στοιχειώδες επιχείρημα δείχνει ότι

$$\begin{aligned}(3.3.28)\qquad \mathrm{vol}_n\left(\sum_{i=1}^k V_i(B_1^n)\right) &\leqslant N\left(\sum_{i=1}^k V_i(B_1^n), krB_2^n\right)\mathrm{vol}_n(krB_2^n)\\ &= N\left(\sum_{i=1}^k V_i(B_1^n), \sum_{i=1}^k rB_2^n\right)\mathrm{vol}_n(krB_2^n)\\ &\leqslant \mathrm{vol}_n(krB_2^n)\prod_{i=1}^k N(V_i(B_1^n), rB_2^n) = (kr)^n\omega_n N(B_1^n, rB_2^n)^k\end{aligned}$$

για κάθε $r > 0$. Τώρα, χρησιμοποιούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα του Schütt [102]: Αν $\log n \leqslant s \leqslant n$ τότε υπάρχει

$$(3.3.29)\qquad r_{n,s} \leqslant c_5\sqrt{\frac{\log(n/s+1)}{s}},$$

όπου $c_5 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, τέτοιος ώστε $N(B_1^n, r_{n,s}B_2^n) \leqslant 2^s$. Από τις (3.3.27) και (3.3.28) έπεται ότι

$$(3.3.30)\qquad \alpha\omega_n^{1/n} \leqslant \frac{1}{k}\mathrm{vol}_n\left(\sum_{i=1}^k V_i(B_1^n)\right)^{1/n} \leqslant r_{n,s}2^{\frac{ks}{n}}\omega_n^{1/n}$$

για κάθε $\log n \leqslant s \leqslant n$. Κάνοντας την υπόθεση ότι $k \leqslant \delta\frac{n}{\log(n+1)}$ μπορούμε να επιλέξουμε $s = \frac{n}{k}$ στην (3.3.30). Έτσι, έχουμε

$$(3.3.31)\qquad \alpha \leqslant 2r_{n,s} \leqslant \frac{c_6\sqrt{k\log(k+1)}}{\sqrt{n}}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $k \geqslant \frac{\delta n}{\log n}$ τότε $k\log(k+1) \geqslant c_7(\delta)n$ και είναι φανερό ότι

$$(3.3.32)\qquad \alpha \leqslant R\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k V_i(B_1^n)\right) \leqslant 1 \leqslant \frac{c_8(\delta)\sqrt{k\log(k+1)}}{\sqrt{n}}.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε

$$(3.3.33)\qquad \frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \|U_i(x)\|_K \leqslant \beta\|x\|_2$$

για κάποιον $\beta > 0$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Από ένα αποτέλεσμα των Litvak, V. Milman και Schectman [82] έπεται ότι $\|x\|_K \leqslant \beta\sqrt{k}\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, άρα, $B_2^n \subseteq \beta\sqrt{k}K$. Αφού η B_2^n και το K έχουν σημεία επαφής, συμπεραίνουμε ότι $\beta \geqslant 1/\sqrt{k}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3.4. *Έστω B_1^n η μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n. Για κάθε $k \geqslant 1$ και κάθε $V_1, \dots, V_k \in O(n)$ ισχύει*

$$(3.3.34)\qquad d_{\mathrm{G}}\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k V_i(B_1^n), B_2^n\right) \geqslant c\sqrt{\frac{n}{k^2\log k}},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Σημείωση. Κατά πάσα πιθανότητα, η εκτίμηση της Πρότασης 3.3.4 δεν είναι βέλτιστη για μεγάλες τιμές του k. Για την ακρίβεια, μας δίνει κάποια μη τετριμμένη πληροφορία μόνο αν $k \leqslant c\sqrt{n/\log(n+1)}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων

4.1 Εισαγωγή

Για κάθε ζεύγος K, D συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$, η παράμετρος $\beta(K, D)$ είναι ο μικρότερος $r > 0$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in K$ υπάρχουν πρόσημα $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n \in rD.$$

Ένα γενικό κάτω φράγμα για την παράμετρο $\beta(K, D)$ αποδείχθηκε από τον Banaszczyk: στο [18] έδειξε ότι αν K και D είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\beta(K, D) \geqslant c\sqrt{n}(\mathrm{vol}_n(K)/\mathrm{vol}_n(D))^{1/n} \tag{4.1.1}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, όπου $\mathrm{vol}_n(K)$ είναι ο όγκος του K. Σε ότι ακολουθεί γράφουμε B_p^n για τη μοναδιαία μπάλα του $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ένα πολύ γνωστό θεώρημα του Spencer [103] ισχυρίζεται ότι $\beta(B_\infty^n, B_\infty^n) \leqslant c\sqrt{n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (το ίδιο αποτέλεσμα αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Gluskin στο [53]): υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ και $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_i\|_\infty \leqslant 1$, μπορούμε να βρούμε $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ ώστε

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_\infty \leqslant c\sqrt{n}. \tag{4.1.2}$$

Από την (4.1.1) βλέπουμε αμέσως ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι βέλτιστο αν αγνοήσουμε απόλυτες σταθερές. Ένα πολύ γνωστό πρόβλημα του Komlós (δείτε τα [104] και [12]) ρωτάει αν η ακολουθία $\beta(B_2^n, B_\infty^n)$ είναι φραγμένη. Δεδομένου ότι $B_\infty^n \subseteq \sqrt{n}B_2^n$, από μια θετική απάντηση σε αυτό το ερώτημα προκύπτει άμεσα η ανισότητα του Spencer. Η καλύτερη γνωστή εκτίμηση οφείλεται στον Banaszczyk [19]: υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ και $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_i\|_2 \leqslant 1$ μπορούμε να βρούμε $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ ώστε

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_\infty \leqslant c\sqrt{\log n}. \tag{4.1.3}$$

Μάλιστα, ο Banaszczyk απέδειξε ένα πιο γενικό θεώρημα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με μέτρο Gauss $\gamma_n(K) \geqslant 1/2$ τότε $\beta(B_2^n, K) \leqslant C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από αυτήν την ανισότητα προκύπτει άμεσα η (4.1.3), διότι $\gamma_n(rB_\infty^n) \geqslant 1/2$ για κάθε $r \geqslant c\sqrt{\log n}$. Η μέθοδος στο [19] δεν είναι κατασκευαστική, πρόσφατα όμως δόθηκε μια αλγοριθμική απόδειξη του φράγματος $O(\sqrt{\log n})$ για το πρόβλημα, από τους Bansal, Dadush και Garg [20].

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι ένα αποτέλεσμα του Hajela [59] στην κατεύθυνση του να δοθεί αρνητική απάντηση στο πρόβλημα του Komlós.

Θεώρημα 4.1.1 (Hajela). *Έστω $f(n)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ και $f(n) = o(n)$. Για κάθε $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ υπάρχει $n_0 = n_0(f, \lambda)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με πληθάριθμο $|S| \leqslant 2^{n/f(n)}$ μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την*

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_\infty \geqslant \exp\left(\frac{\lambda \log\log f(n)}{\log\log\log f(n)}\right)$$

για κάθε $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Μάλιστα, ο Hajela διατυπώνει στο [59] την άποψη ότι το ερώτημα του Komlós έχει αρνητική απάντηση και ότι η εκτίμηση (4.1.3) που αποδείχθηκε αργότερα από τον Banaszczyk πρέπει να είναι βέλτιστη. Το πρώτο μας αποτέλεσμα είναι μια βελτιωμένη έκδοση του Θεωρήματος 4.1.1.

Θεώρημα 4.1.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c \in (0,1)$ που ικανοποιεί τα παρακάτω: Για κάθε $n \geqslant 1$ και $\frac{1}{n} < \delta < 1$, και για κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$, υπάρχουν ορθοκανονικά διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log(1/\delta)}$$

για κάθε $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Το Θεώρημα 4.1.2 έχει ως συνέπεια μια ισχυρότερη έκδοση του θεωρήματος του Hajela. Έστω $f(n)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ και $f(n) = o(n)$. Παρατηρήστε ότι αν θέσουμε $\delta = \delta(f, n) = f(n)^{-1}$ στο Θεώρημα 4.1.2 τότε έχουμε $\frac{1}{n} < \delta < 1$ για αρκετά μεγάλα n, και προκύπτει το κάτω φράγμα

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log f(n)},$$

το οποίο είναι ισχυρότερο από αυτό του Θεωρήματος 4.1.1. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2, την οποία παρουσιάζουμε στην Παράγραφο 4.2, ακολουθούμε αρχικά την ιδέα του Hajela: τα διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ προκύπτουν από τυχαία στροφή της συνήθους βάσης $e_1, \ldots, e_n$ του $\mathbb{R}^n$. Η βελτίωση που πετυχαίνουμε οφείλεται στο Λήμμα 4.2.1 που εξασφαλίζει ισχυρότερες εκτιμήσεις για το «μέτρο των μικρών τιμών» της $\|\cdot\|_\infty$-νόρμας στη σφαίρα.

Η μέθοδος αυτή για να δοθεί κάτω φράγμα για την ℓ_∞-νόρμα ενός προσημασμένου αθροίσματος διανυσμάτων έχει προφανείς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, είμαστε αναγκασμένοι να θεωρήσουμε ένα υποσύνολο $S \subseteq \{-1,1\}^n$ πληθαρίθμου $2^{o(n)}$ αν θέλουμε το Θεώρημα 4.1.2 να μας δώσει κάποιο κάτω φράγμα τάξης μεγαλύτερης από αυτήν στην (4.1.1). Έτσι, αυτή η στρατηγική δεν φαίνεται να επαρκεί για να οδηγήσει σε μια αρνητική απάντηση για το πρόβλημα του Komlós. Πιστεύουμε όμως ότι η διασύνδεση ανάμεσα σε εκτιμήσεις για μικρές μπάλες και τη νόρμα των προσημασμένων αθροισμάτων διανυσμάτων είναι από μόνη της ενδιαφέρουσα, και στην Παράγραφο 4.3 εκμεταλλευόμαστε αυτό το φαινόμενο από διάφορες απόψεις. Αρχικά, υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $x_1, \dots x_n$ ικανοποιούν ένα κάτω φράγμα της μορφής $\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \|_2 \geqslant c\sqrt{n}$ για όλες τις επιλογές προσήμων $\epsilon_i = \pm 1$, και η ℓ_∞^n-νόρμα αντικαθίσταται από τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, για τυχόν δοθέν συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$, θα αποδείξουμε ότι αν τα διανύσματα $x_1, \dots x_n$ ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη τότε για κάθε «μεγάλο» υποσύνολο $S \subseteq \{-1,1\}^n$, η D-νόρμα του $\sum_{i=1}^n \epsilon_i U x_i$ είναι «μεγάλη» για κάθε $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in S$, με μεγάλη πιθανότητα ως προς $U \in O(n)$. Το «πόσο μεγάλη» προσδιορίζεται από τη συμπεριφορά του μέτρου Gauss των πολλαπλασίων του D. Για να κάνουμε τα παραπάνω σαφέστερα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 4.1.3. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$, και $\delta \in (0,1)$, ορίζουμε

$$t_{D,\delta} := \max\{t > 0 : \gamma_n(2t \cdot m(D)D) \leqslant (2^\delta e)^{-n}\},$$

όπου $m(D)$ είναι η διάμεσος της $\|\cdot\|_D$ ως προς το τυπικό μέτρο Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$. Στην περίπτωση που το D είναι η μοναδιαία μπάλα B_p^n κάποιου ℓ_p^n, $p \in [1,\infty]$, θέτουμε $t_{p,\delta} := t_{B_p^n,\delta}$ για συντομία.

Σημειώνουμε ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\delta \in (0,1)$, η παράμετρος $t_{D,\delta}$ ικανοποιεί τα φράγματα

$$c_1 \mathrm{vol}_n(D)^{-1/n} \leqslant t_{D,\delta} m(D) \leqslant c_2 m(D), \tag{4.1.4}$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ (για λόγους πληρότητας, εξηγούμε εν συντομία την (4.1.4) στην Παράγραφο 4.3.1). Παρόλο που ο ορισμός της παραμέτρου $t_{D,\delta}$ μπορεί με την πρώτη ματιά να φαίνεται κάπως τεχνητός, πιστεύουμε ότι η ιδέα πίσω από τον ορισμό της και ο ρόλος που παίζει θα φανούν καθαρά στη συνέχεια (δείτε τα σχόλια μετά από το Θεώρημα 4.1.5).

Χρησιμοποιώντας αυτόν τον συμβολισμό αποδεικνύουμε αρχικά το εξής.

Θεώρημα 4.1.4. *Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\delta \in (0,1)$. Για κάθε $\tau > 0$, κάθε n-άδα διανυσμάτων $x_1, \dots, x_n$ με $\min\limits_{\epsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_2 \geqslant \tau\sqrt{n}$ και κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$, υπάρχει υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) \geqslant 1 - e^{-n}$ τέτοιο ώστε για κάθε $U \in \mathcal{U}$, η*

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i) \Big\|_D \geqslant \tau t_{D,\delta} m(D)$$

να ισχύει για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in S$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση όπου τα $x_1, \dots, x_n$ είναι σημεία από τυχόν κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι μπορεί κανείς να δώσει εναλλακτική απόδειξη της (4.1.1) χρησιμοποιώντας ένα πιο γενικό θεώρημα των Gluskin και V. Milman από το [54]: Έστω D ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(D)$ και $V_1, \dots, V_m$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(D) = \mathrm{vol}_n(V_1) = \cdots = \mathrm{vol}_n(V_m)$. Για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ και κάθε $0 < t < 1$ ισχύει

$$\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \Big\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \Big\|_D \leqslant t \Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \Big)^{1/2} \right) \leqslant \left(t e^{\frac{1-t^2}{2}} \right)^n,$$

όπου η πιθανότητα είναι ως προς το γινόμενο των ομοιόμορφων μέτρων πιθανότητας $\mu_i(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(A\cap V_i)}{\mathrm{vol}_n(V_i)}$. Συμπεριλαμβάνουμε την απόδειξη αυτής της ανισότητας (βλ. Πρόταση 4.3.2), που βασίζεται στην βέλτιστη μορφή της πολυμεταβλητής ανισότητας Young (παραπέμπουμε στα [27] και [35]).

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1.4 παίρνουμε την ακόλουθη παραλλαγή του αποτελέσματος των Gluskin και V. Milman, στην περίπτωση που $V_i = B_2^n$ για κάθε i.

Θεώρημα 4.1.5. *Έστω $\delta \in (0,1)$, έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^n \subseteq B_2^n : \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|_D \leqslant \frac{1}{10} t_{D,\delta} m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\right) \leqslant 2e^{-n}.$$

Μπορούμε να δούμε αυτό το θεώρημα ως επέκταση του αποτελέσματος του Hajela: η ℓ_∞^n-νόρμα αντικαθίσταται από τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και το συμπέρασμα ισχύει για τυχαία επιλογή διανυσμάτων στη μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα. Σε αυτό το πλαίσιο, ο ρόλος της παραμέτρου $t_{D,\delta}$ που εμφανίζεται στα αποτελέσματά μας γίνεται πιο κατανοητός: Αφού, από την (4.1.4),

$$t_{D,\delta} m(D) \simeq t_{D,\delta}\sqrt{n} M(D) \simeq t_{D,\delta} M(D) \mathrm{vrad}(D) \,\mathrm{vol}_n(D)^{-1/n},$$

όπου $M(D) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_D \, d\sigma(x)$ και $\mathrm{vrad}(D) = (\mathrm{vol}_n(D)/\omega_n)^{1/n}$, και αφού $M(D)\mathrm{vrad}(D) \geqslant 1$ (αυτή η ανισότητα είναι απλή συνέπεια της ανισότητας Hölder), βλέπουμε ότι το Θεώρημα 4.1.5 μας δίνει ισχυρότερη πληροφορία απ' ότι η (4.1.1) αν έχουμε $M(D)\mathrm{vrad}(D) \gg 1$ και/ή $t_{D,\delta} \simeq 1$. Αυτές οι προϋποθέσεις ικανοποιούνται στην περίπτωση της $\|\cdot\|_\infty$-νόρμας και θα ήταν ενδιαφέρον να δοθούν κι άλλα παραδείγματα με βέλτιστες εκτιμήσεις.

Η συνάρτηση $t \mapsto \gamma_n(2t \cdot m(D)D)$ που εμφανίζεται στον ορισμό του $t_{D,\delta}$ έχει μελετηθεί στα [67], [79], [96] και αλλού. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις παρακάτω εκτιμήσεις:

- Στο [67] αποδεικνύεται ότι για κάθε $0 < t < \frac{1}{2}$ ισχύει
$$\gamma_n(\{x : \|x\|_D \leqslant t \cdot m(D)\}) \leqslant \frac{1}{2} t^{d(D)},$$
όπου
$$d(D) = \min\left\{n, -\log\gamma_n\left(\frac{m(D)}{2}D\right)\right\}.$$
- Στο [79] αποδεικνύεται ότι αν $\gamma_n(D) \leqslant \frac{1}{2}$ τότε για κάθε $0 < t < \frac{1}{2}$ ισχύει $\gamma_n(tD) \leqslant (2t)^{r^2(D)/4}\gamma_n(D)$ όπου $r(D)$ είναι η εγγεγραμμένη ακτίνα του D.
- Στο [96] αποδεικνύεται ότι για κάθε $0 < t < \frac{1}{2}$ ισχύει $\gamma_n(\{x : \|x\|_D \leqslant t \cdot m(D)\}) \leqslant \frac{1}{2} t^{c/\beta(D)}$, όπου
$$\beta(D) = \frac{\mathrm{Var}_{\gamma_n}(\|\cdot\|_D)}{M^2(D)}$$
και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Σε επόμενη παράγραφο θα συζητήσουμε τις εκτιμήσεις που προκύπτουν από τα παραπάνω σε ειδικές περιπτώσεις, για παράδειγμα όταν το D είναι κάποια ℓ_p^n μπάλα.

Τέλος, μπορούμε να γενικεύσουμε περαιτέρω το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.1.5 στην περίπτωση όπου τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία τα οποία επιλέγονται ομοιόμορφα από τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα.

Θεώρημα 4.1.6. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ που ικανοποιεί τα παρακάτω: Έστω $\delta \in (0,1)$, έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K) = \mathrm{vol}_n(B_2^n)$ μπορούμε να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) > 1 - 2e^{-n/2}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $U \in \mathcal{U}$,*

$$\mathbb{P}\left((z_i)_{i=1}^n \subseteq U(K) \times \cdots \times U(K) : \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\right\|_D \leqslant ct_{D,\delta} m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\right) \leqslant e^{-n/2}.$$

4.2 Βελτιωμένη έκδοση του θεωρήματος του Hajela

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Σε όσα ακολουθούν, συμβολίζουμε με $e_1, \ldots, e_n$ την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με S^{n-1} την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$, και με σ το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Υπενθυμίζουμε ότι το σ μπορεί να οριστεί μέσω του Haar μέτρου πιθανότητας ν_n στην ορθογώνια ομάδα $O(n)$ ως εξής: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq S^{n-1}$ έχουμε

$$\sigma(A) = \nu_n(\{U \in O(n) : U(e_1) \in A\}).$$

Χειαζόμαστε μια εκτίμηση για το μέτρο μικρής μπάλας ως προς την ℓ_∞^n-νόρμα, η οποία δίνεται στο επόμενο λήμμα. Μας προσφέρει ένα φράγμα που η συμπεριφορά του για μικρές τιμές του t θα παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στη συνέχεια. Στην περίπτωση της $\|\cdot\|_\infty$ αυτή η συμπεριφορά έχει παρατηρηθεί από διάφορους συγγραφείς (δείτε, για παράδειγμα, τις [105] και [89]). Δίνουμε μια άμεση και σύντομη απόδειξη της ανισότητας που θα χρειαστούμε.

Λήμμα 4.2.1. *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c \in (0,1)$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$ και $\delta \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{4}\right)$,*

$$\sigma\left(\left\{\vartheta \in S^{n-1} : \|\vartheta\|_\infty \leqslant \frac{c\sqrt{\log(1/\delta)}}{\sqrt{n}}\right\}\right) < 2^{-\delta n},$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το γεγονός (δείτε το [67] για την απλή απόδειξή του) ότι αν A είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\sigma(S^{n-1} \cap A) \leqslant 2\gamma_n(2\sqrt{n}A),$$

και γράφουμε

$$\begin{aligned}\sigma\left(\left\{\vartheta \in S^{n-1} : \|\vartheta\|_\infty \leqslant \frac{s}{2\sqrt{n}}\right\}\right) &\leqslant 2\gamma_n\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leqslant s\}\right)\\ &= 2(1 - 2(1-\Phi(s)))^n \leqslant 2\exp(-2n(1-\Phi(s))),\end{aligned}$$

όπου, ως συνήθως, Φ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας τυπικής κανονικής τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή, $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^x e^{-t^2/2}\,dt$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $(t+s)^2 \leqslant 2(t^2+s^2)$, έχουμε ότι, για κάθε $s > 0$,

$$1 - \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(t+s)^2}{2}}\,dt \geqslant \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-s^2}}{2\sqrt{2}}.$$

Έπεται ότι

$$\sigma\left(\left\{\vartheta\in S^{n-1}:\|\vartheta\|_\infty\leqslant\frac{s}{2\sqrt{n}}\right\}\right)\leqslant 2\exp\left(-\frac{n}{\sqrt{2}}e^{-s^2}\right).$$

Τέλος, αν $\delta\in\left(\frac{1}{n},\frac{1}{4}\right)$ τότε επιλέγοντας $s=\frac{1}{2}\sqrt{\log\left(\frac{1}{\delta}\right)}$ παίρνουμε

$$2\exp\left(-\frac{n}{\sqrt{2}}e^{-s^2}\right)=2\exp\left(-\frac{n}{\sqrt{2}}\delta^{1/4}\right)<2^{-\delta n},$$

και αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Η ιδέα της απόδειξης είναι η ίδια με αυτήν στην εργασία του Hajela. Θεωρούμε ορθοκανονικές n-άδες που προκύπτουν ως τυχαίες στροφές της συνήθους βάσης $e_1,\dots,e_n$ του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n$, μπορούμε να βρούμε $V\in O(n)$ τέτοιον ώστε $\sum_{i=1}^n e_i=V\left(\sum_{i=1}^n\epsilon_ie_i\right)$. Τότε, από το αναλλοίωτο του μέτρου Haar ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, έχουμε ότι, για κάθε $\alpha>0$,

$$\nu_n\left(\left\{U\in O(n):\left\|U\left(\sum_{i=1}^n\epsilon_ie_i\right)\right\|_\infty\leqslant\alpha\right\}\right)=\nu_n\left(\left\{U\in O(n):\left\|U\left(\sum_{i=1}^n e_i\right)\right\|_\infty\leqslant\alpha\right\}\right).$$

Έστω $\delta\in(n^{-1},1/4)$. Αφού $n^{-1/2}\sum_{i=1}^n e_i\in S^{n-1}$, από τον ορισμό του μέτρου σ στην S^{n-1} έπεται, αν πάρουμε $\alpha=c\sqrt{\log(1/\delta)}$ όπου c είναι η σταθερά στο Λήμμα 4.2.1, ότι

$$\begin{aligned}\nu_n&\left(\left\{U\in O(n):\left\|U\left(\sum_{i=1}^n\epsilon_ie_i\right)\right\|_\infty\leqslant c\sqrt{\log(1/\delta)}\right\}\right)\\&=\nu_n\left(\left\{U\in O(n):\left\|U\left(\frac{\sum_{i=1}^n e_i}{\sqrt{n}}\right)\right\|_\infty\leqslant\frac{c\sqrt{\log(1/\delta)}}{\sqrt{n}}\right\}\right)\\&=\sigma\left(\left\{\vartheta\in S^{n-1}:\|\vartheta\|_\infty\leqslant\frac{c\sqrt{\log(1/\delta)}}{\sqrt{n}}\right\}\right).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.1 παίρνουμε

$$\sigma\left(\left\{\vartheta\in S^{n-1}:\|\vartheta\|_\infty\leqslant\frac{c\sqrt{\log(1/\delta)}}{\sqrt{n}}\right)\right)<2^{-\delta n}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\nu_n\left(\left\{U\in O(n):\left\|U\left(\sum_{i=1}^n\epsilon_ie_i\right)\right\|_\infty\leqslant c\sqrt{\log(1/\delta)}\right\}\right)<2^{-\delta n}.\tag{4.2.1}$$

Έστω τώρα $S\subseteq\{-1,1\}^n$ με $|S|\leqslant 2^{\delta n}$. Από την υποπροσθετικότητα του μέτρου και την (4.2.1) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\nu_n\left(\left\{U\in O(n):\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(e_i)\right\|_\infty\geqslant c\sqrt{\log(1/\delta)}\,,\ \text{για κάθε }\epsilon\in S\right\}\right)=\\ &=1-\nu_n\left(\left\{U\in O(n):\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(e_i)\right\|_\infty\leqslant c\sqrt{\log(1/\delta)}\,,\ \text{για κάποιο }\epsilon\in S\right\}\right)\\ &\geqslant 1-\sum_{\epsilon\in S}\nu_n\left(\left\{U\in O(n):\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(e_i)\right\|_\infty\leqslant c\sqrt{\log(1/\delta)}\right\}\right)\\ &>1-|S|\cdot 2^{-\delta n}\geqslant 0.\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι υπάρχει $U_0\in O(n)$ τέτοιος ώστε, αν θέσουμε $x_i=U_0(e_i)$, $i=1,\dots,n$, να ισχύει

$$\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\right\|_\infty\geqslant c\sqrt{\log(1/\delta)},$$

για κάθε $\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in S$, αν υποθέσουμε ότι $\delta<1/4$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση $\delta\in(1/4,1)$ το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο, αφού για κάθε $U\in O(n)$ και κάθε $\epsilon\in\{-1,1\}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iUe_i\right\|_\infty\geqslant 1\geqslant c\sqrt{\log 1/\delta}$$

για κατάλληλη απόλυτη σταθερά $c>0$. □

4.3 Προσημασμένα αθροίσματα τυχαίων διανυσμάτων

Το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2 μας δίνει το κίνητρο να θεωρήσουμε ένα πιο γενικό πλαίσιο. Σε πρώτη φάση, αντικαθιστούμε την ℓ_∞^n νόρμα με τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και εξασθενίζουμε τις υποθέσεις μας για την επιλογή των διανυσμάτων $x_1,\dots,x_n\in B_2^n$. Στη συνέχεια, γενικεύουμε ακόμα περισσότερο, αφήνοντας τα $x_1,\dots,x_n$ να επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα από την B_2^n ή από τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα K.

4.3.1 Νόρμες προσημασμένων αθροισμάτων τυχαίων διανυσμάτων

Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την διάμεσο $m(D)$ της $\|Z\|_D$ όπου $Z\sim N(0,I_n)$ είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.3.1. *Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\tau>0$. Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν την*

$$\left\|\sum_{i=1}^n\zeta_ix_i\right\|_2\geqslant\tau\sqrt{n},$$

για κάθε $\zeta_i = \pm 1$. *Τότε, για κάθε* $S \subseteq \{-1,1\}^n$ *με*

$$|S| \cdot \gamma_n\Big(\frac{2t}{\tau}m(D)D\Big) < 1,$$

μπορούμε να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ *με* $\nu_n(\mathcal{U}) > 1 - |S| \cdot \gamma_n\left(\frac{2t}{\tau}m(D)D\right)$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $U \in \mathcal{U}$ *να έχουμε*

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i)\Big\|_D \geqslant t \cdot m(D)$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την υπόθεση της πρότασης, και σταθεροποιούμε $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n$. Κανονικοποιώντας με την $\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_2$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι είναι μεγαλύτερη από $\tau\sqrt{n}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\nu_n\left(\left\{U \in O(n) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i)\Big\|_D \leqslant t \cdot m(D)\right\}\right)& \\
\leqslant \nu_n\left(\left\{U \in O(n) : \Big\|U\left(\frac{\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i}{\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_2}\right)\Big\|_D \leqslant \frac{t \cdot m(D)}{\tau\sqrt{n}}\right\}\right)& \\
= \sigma\left(\left\{\vartheta \in S^{n-1} : \|\vartheta\|_D \leqslant \frac{t \cdot m(D)}{\tau\sqrt{n}}\right\}\right)& \\
\leqslant \gamma_n\Big(\frac{2t}{\tau}m(D)D\Big) = \mathbb{P}\left(\|Z\|_D \leqslant \frac{2t}{\tau}m(D)\right).&
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\nu_n\left(\left\{U \in O(n) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i)\Big\|_D \geqslant t \cdot m(D)\,,\ \text{για κάθε } \epsilon \in S\right\}\right)& \\
\geqslant 1 - \sum_{\epsilon \in S}\nu_n\left(\left\{U \in O(n) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i)\Big\|_D \leqslant t \cdot m(D)\right\}\right)& \\
> 1 - |S| \cdot \gamma_n\left(\frac{2t}{\tau}m(D)D\right).&
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό της πρότασης. □

Το Θεώρημα 4.1.4 είναι τώρα άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.3.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.4. Έστω $t = \tau t_{D,\delta}$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$. Από τον ορισμό του $t_{D,\delta}$ έχουμε ότι $|S|\gamma_n(\frac{2t}{\tau}m(D)D) < e^{-n}$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την Πρόταση 4.3.1 και να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ τέτοιο ώστε $\nu_n(\mathcal{U}) \geqslant 1 - e^{-n}$ και

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U x_i\Big\|_D \geqslant t \cdot m(D) = \tau t_{D,\delta} m(D)$$

για κάθε $U \in \mathcal{U}$ και κάθε $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$, όπως ισχυρίζεται το θεώρημα. □

Πριν συνεχίσουμε, εξηγούμε εν συντομία τα γενικά φράγματα για την παράμετρο $t_{D,\delta}$, τα οποία αναφέρθηκαν στην εισαγωγή.

Απόδειξη της (4.1.4). Για το άνω φράγμα παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της διαμέσου προκύπτει άμεσα η

$$\gamma_n(m(D)D) = \gamma_n(\|Z\|_D \leqslant m(D)) \geqslant \frac{1}{2} > (2^\delta e)^{-n},$$

άρα $t_{D,\delta} \leqslant \frac{1}{2}$. Για το κάτω φράγμα, αφού ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε $\int_{S^{n-1}} \|x\|_D^{-n}\, d\sigma(x) = \frac{\mathrm{vol}_n(D)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}$, από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$\sigma\left(\|x\|_D \leqslant e^{-\eta}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\right)^{1/n}\right) \leqslant e^{-\eta n}$$

για κάθε $\eta > 0$. Μπορούμε να συνδέσουμε την τελευταία ανισότητα με το μέτρο Gauss – χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με αυτό της απόδειξης του [67, Λήμμα 2.1], μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $a \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\gamma_n\left(\frac{1}{a}\sqrt{n}e^{-\eta}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\right)^{1/n} D\right) &\leqslant \sigma\left(\|x\|_D \leqslant e^{-\eta}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\right)^{1/n}\right) + \gamma_n\left(\frac{1}{a}\sqrt{n}B_2^n\right)\\ &\leqslant e^{-\eta n} + \gamma_n\left(\frac{1}{a}\sqrt{n}B_2^n\right).\end{aligned}$$

Φράσσουμε τον δεύτερο όρο χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, το [25, Πρόταση 2.2], και παίρνουμε $\gamma_n\left(\frac{1}{a}\sqrt{n}B_2^n\right) \leqslant a^{-n}\exp\left(\frac{n(a^2-1)}{2a^2}\right)$. Παρατηρήστε ότι, για $\eta = \log(4e)$ έχουμε $2e^{-\eta n} = 2^{-n+1}(2e)^{-n} \leqslant (2^\delta e)^{-n}$ για κάθε $\delta \in (0,1)$, άρα αρκεί να έχουμε

$$a^{-n}\exp\left(\frac{n(a^2-1)}{2a^2}\right) \leqslant (4e)^{-n} = e^{-\eta n},$$

κάτι που ικανοποιείται αν το a είναι αρκετά μεγάλο (η τιμή $a = 20$ μας κάνει). Τώρα, αφού $\gamma_n\left(\frac{1}{80e}\sqrt{n}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\right)^{1/n} D\right) \leqslant (2^\delta e)^{-n}$ για κάθε $\delta \in (0,1)$, από τον ορισμό του $t_{D,\delta}$ βλέπουμε ότι

$$t_{D,\delta} \geqslant \frac{1}{160e}\frac{\sqrt{n}}{m(D)}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\right)^{1/n} \geqslant c_1\frac{1}{\mathrm{vol}_n(D)^{1/n}m(D)},$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$. □

4.3.2 Τυχαία σημεία από κυρτά σώματα

Θα δούμε τώρα ότι, κατάλληλα κανονικοποιημένη, η υπόθεση για τη νόρμα του αθροίσματος $\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n$ στη διατύπωση της Πρότασης 4.3.1 ικανοποιείται με μεγάλη πιθανότητα όταν τα x_i επιλέγονται τυχαία, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το εσωτερικό ενός γενικού συμμετρικού κυρτού σώματος K. Το ζητούμενο κάτω φράγμα, το οποίο μάλιστα ισχύει για κάθε νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και όχι μόνο για την Ευκλείδεια νόρμα, θα προκύψει ως πόρισμα του ακόλουθου θεωρήματος των Gluskin και V. Milman [54]. Συμπεριλαμβάνουμε την απόδειξη, η οποία βασίζεται στην ακριβή μορφή της πολυδιάστατης ανισότητας του Young, που αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Beckner [27] και Brascamp και Lieb [35].

Πρόταση 4.3.2 (Gluskin-V. Milman). *Έστω D ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $o \in \mathrm{int}(D)$ και $V_1, \ldots, V_m$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(D) = \mathrm{vol}_n(V_1) = \cdots = \mathrm{vol}_n(V_m)$. Για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ και κάθε $0 < t < 1$ έχουμε*

$$\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\|_D \leqslant t \Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \Big)^{1/2} \right) \leqslant \left(t e^{\frac{1-t^2}{2}} \right)^n .$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\mathrm{vol}_n(D) = 1$, και θέτουμε $\tau := t \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \right)^{1/2}$. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $y_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\|_D \leqslant t \Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \Big)^{1/2} \right) = \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{V_1}(x_1) \mathbb{1}_{V_2}(x_2) \ldots \mathbb{1}_{V_m}(x_m) \mathbb{1}_{\tau K} \left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right) dx_1 \ldots dx_m \\
&\quad = \left(\prod_{i=1}^m \lambda_i \right)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\lambda_1 V_1}(y_1) \mathbb{1}_{\lambda_2 V_2}(y_2 - y_1) \ldots \mathbb{1}_{\lambda_m V_m}(y_m - y_{m-1}) \mathbb{1}_{\tau K}(y_m) \\
&\qquad\qquad dx_1 \ldots dx_m .
\end{aligned}$$

Φράσσουμε την τελευταία έκφραση χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young (βλ. [27], [35]): Έπεται ότι για κάθε $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1, \ldots, m$, τέτοια ώστε $\sum_{i=0}^m \frac{1}{p_i} = m$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \left\| \sum_{i=1}^m \lambda_i x_i \right\|_D \leqslant t \Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \Big)^{1/2} \right) \leqslant \\
&\qquad \leqslant \left(\prod_{i=1}^m \lambda_i \right)^{-n} \left(\prod_{i=0}^m C_i \right)^n \| \mathbb{1}_{\tau K} \|_{p_0} \prod_{i=1}^m \| \mathbb{1}_{\lambda_i V_i} \|_{p_i} ,
\end{aligned} \tag{4.3.1}$$

όπου

$$C_i = \left(p_i^{1/p_i} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right)^{1 - 1/p_i} \right)^{1/2} .$$

Παρατηρήστε ότι, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τ και το γεγονός ότι $\mathrm{vol}_n(D) = \mathrm{vol}_n(V_i) = 1$ για κάθε i, το δεξί μέλος της (4.3.1) είναι ακριβώς ίσο με

$$\left(t \sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2} \right)^{\frac{n}{p_0}} \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\frac{n}{p_i}} \prod_{i=0}^m p_i^{\frac{n}{2p_i}} \left(1 - \frac{1}{p_i} \right)^{\frac{n}{2}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)} . \tag{4.3.2}$$

Θέτουμε τώρα $q_i = 1 - \frac{1}{p_i}$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Από τους περιορισμούς μας για τα p_i έπεται τότε ότι $\sum_{i=0}^m q_i = 1$, και $0 \leqslant q_i \leqslant 1$ για κάθε i. Χρησιμοποιώντας αυτό το συμβολισμό, η (4.3.2) παίρνει τη μορφή

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2 \right)^{(1-q_0)\frac{n}{2}} t^n \left(\frac{1}{t^{2q_0}} \frac{q_0 (1-q_0)^{q_0}}{1-q_0} \prod_{i=1}^m \left(\frac{q_i (1-q_i)}{\lambda_i^2} \right)^{q_i} \frac{1}{1-q_i} \right)^{\frac{n}{2}} . \tag{4.3.3}$$

Πρέπει να επιλέξουμε τα q_i έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η τελευταία ποσότητα. Για τον σκοπό μας, αρκεί η επιλογή $q_0 = t^2$ και $q_i = \frac{(1-t)^2\lambda_i}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^2}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Με αυτή την επιλογή, η (4.3.3) είναι ίση με

$$t^n \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{(1-q_i)^{1-q_i}} \right)^{\frac{n}{2}} = t^n \exp\left(\frac{n}{2} \sum_{i=1}^m (1-q_i) \log \frac{1}{1-q_i} \right).$$

Το ζητούμενο αποτέλεσμα έπεται τότε, γιατί $(1-q_i)\log\frac{1}{1-q_i} = (1-q_i)\log\left(1+\frac{q_i}{1-q_i}\right) \leqslant q_i$ (θυμηθείτε ότι $q_i \geqslant 0$) και $\sum_{i=1}^m q_i = 1 - q_0 = 1 - t^2$. □

Παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ειδική περίπτωση της Πρότασης 4.3.2, η οποία ταυτόχρονα μας δίνει εναλλακτική απόδειξη του γενικού κάτω φράγματος του Banaszczyk (4.1.1) για την $\beta(K, D)$.

Πόρισμα 4.3.3. *Έστω K και D συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $x_1, \ldots, x_n$ τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Η ανισότητα*

$$\left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|_D \geqslant \frac{1}{10} \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(D)} \right)^{1/n} \sqrt{n}$$

ισχύει για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ ως προς $x_1, \ldots, x_n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $t > 0$ και αρχικά υποθέτουμε ότι $\mathrm{vol}_n(K) = \mathrm{vol}_n(D)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^n \subseteq K : \left\| \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \epsilon_i x_i \right\|_D \leqslant t, \text{ για κάποια } \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\} \right) \\ \leqslant 2^n \mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^n \subseteq K : \left\| \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \epsilon_i x_i \right\|_D \leqslant t \right)\end{aligned}$$

Τώρα, αν εφαρμόσουμε την Πρόταση 4.3.2 με $m := n$, $V_i := K$ και $\lambda_i := \frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon_i$ για κάθε i, και t τέτοιο ώστε $2te^{(1-t^2)/2} < e^{-1}$ (ας πούμε $t = 1/10$) παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^n \subseteq K : \left\| \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt{n}} \epsilon_i x_i \right\|_D \leqslant t, \text{ για κάποια } \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\} \right) \leqslant 2^n (te^{\frac{1-t^2}{2}})^n < e^{-n}.$$

Έπεται ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ ως προς $(x_1, \ldots, x_n)$, έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|_D > \frac{1}{10}\sqrt{n}$$

για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$.

Για ένα γενικό ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K, D, θέτουμε $a = (\mathrm{vol}_n(D)/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n}$ και $\tilde{K} = aK$. Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω για το ζεύγος $\tilde{K}, D$ και να συμπεράνουμε ότι για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ ισχύει η

$$\left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i a x_i \right\|_D > \frac{1}{10}\sqrt{n},$$

ή, ισοδύναμα, η

$$\left\|\sum_{i=1}^{n}\epsilon_i x_i\right\|_D > \frac{1}{10}\sqrt{n}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(D)}\right)^{1/n}$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$ ως προς $(x_1,\ldots,x_n)$. □

Παρατήρηση 4.3.4. Παρατηρήστε ότι από το Πόρισμα 4.3.3 έπεται άμεσα το κάτω φράγμα του Banaszczyk για την $\beta(K,D)$:

$$\beta(K,D)\geqslant c\sqrt{n}(\mathrm{vol}_n(K)/\mathrm{vol}_n(D))^{1/n}.$$

Σημεία από τη μπάλα

Αρχικά ασχολούμαστε με την περίπτωση όπου τα διανύσματα $x_1,\ldots,x_n$ επιλέγονται τυχαία, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από την B_2^n. Ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 4.1.5 προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του $t_{D,\delta}$ και την ακόλουθη συνέπεια της Πρότασης 4.3.1. Είναι με μια έννοια γενίκευση του αποτελέσματος του Hajela, στο πνεύμα της Πρότασης 4.3.2.

Θεώρημα 4.3.5. *Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S\subseteq\{-1,1\}^n$. Τότε*

$$\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^n\subseteq B_2^n:\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i\right\|_D\leqslant t\cdot m(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon\in S\right)\leqslant|S|\cdot\gamma_n(20t\cdot m(D)D)+e^{-n}.$$

Απόδειξη. Έστω $A\subseteq(B_2^n)^n$ το σύνολο

$$A:=\left\{(x_i)_{i=1}^n\subseteq B_2^n:\left\|\sum\epsilon_i x_i\right\|_2\geqslant\frac{1}{10}\sqrt{n},\ \text{για κάθε } \epsilon_1,\ldots,\epsilon_n\in\{-1,1\}\right\}.$$

Από το Πόρισμα 4.3.3, το οποίο εφαρμόζουμε για $K=D=B_2^n$, έχουμε ότι $\mathbb{P}(A^c)<e^{-n}$. Συνδυάζοντας αυτό το δεδομένο με την Πρόταση 4.3.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((z_i)_{i=1}^n\subseteq B_2^n:\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i z_i\right\|_D\leqslant t\cdot m(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon\in S\right)\\
&=\mathbb{P}\left(((x_i)_{i=1}^n,U)\in(B_2^n)^n\times O(n):\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i U(x_i)\right\|_D\leqslant t\cdot m(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon\in S\right)\\
&\leqslant\mathbb{P}\left(((x_i)_{i=1}^n,U)\in A\times O(n):\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i U(x_i)\right\|_D\leqslant t\cdot m(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon\in S\right)+e^{-n}\\
&\leqslant\int_A\left[\nu_n\left(\left\{U\in O(n):\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i U(x_i)\right\|_D\leqslant t\cdot m(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon\in S\right\}\right)\right]d\mu(x_1,\ldots,x_n)+e^{-n}\\
&<|S|\gamma_n(20t\cdot m(D)D)+e^{-n},
\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας την απόδειξη. □

Εφαρμογή: η περίπτωση του ℓ_p^n. Σαν εφαρμογή θεωρούμε την περίπτωση $D = B_p^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Σημειώνουμε ότι, παρόλο που η εκτίμηση $\beta(B_2^n, B_2^n) \leqslant \sqrt{n}$ φαίνεται να είναι ευρέως γνωστή (μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο [21]), δεν μπορούσαμε να εντοπίσουμε στη βιβλιογραφία κάποιο άνω φράγμα για την παράμετρο $\beta(B_2^n, B_p^n)$, για $p \neq 2$. Όμως, αν $1 \leqslant p < 2$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το άνω φράγμα για την $\beta(B_2^n, B_2^n)$: αν γνωρίζουμε ότι για κάθε $x_1, \dots, x_n \in B_2^n$ υπάρχουν $(\epsilon_i)_{i=1}^n \subseteq \{-1,1\}$ τέτοια ώστε $\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_2 \leqslant \sqrt{n}$, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}} \|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_2 \leqslant n^{1/p}.$$

Αυτή η εκτίμηση είναι μάλιστα ακριβής, κάτι που φαίνεται αν θυμηθούμε το κάτω φράγμα (4.1.1) και το γεγονός ότι ο λόγος $(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(B_p^n))^{1/n}$ είναι της τάξης του $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$. Από την άλλη πλευρά, για την περίπτωση $p > 2$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση του Banasczcyk $\beta(B_2^n, B_\infty^n) \leqslant c\sqrt{\log n}$ με παρόμοιο τρόπο, για να συμπεράνουμε ότι $\beta(B_2^n, B_p^n) \leqslant cn^{1/p}\sqrt{\log n}$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της παραμέτρου β στο [97]:

$$\beta(D) = \frac{\mathrm{Var}_{\gamma_n}(\|\cdot\|_D)}{M^2(D)}.$$

Για το $D = B_p^n$, η $\beta(D)$ έχει υπολογιστεί στο [97]: έχουμε $\beta(B_p^n) \simeq \frac{2^p}{p^2 n}$ αν $1 \leqslant p \leqslant c\log n$ και $\beta(B_p^n) \simeq (\log n)^{-2}$ αν $C\log n \leqslant p \leqslant \infty$, για κάποιες απόλυτες σταθερές $c, C > 0$ (για μια πιο λεπτομερή ανάλυση, μπορεί κανείς να συμβουλευτεί το [86]). Επιπλέον, από αποτελέσματα των Guédon και Latała (δείτε το [3, Παράγραφος 2.4]) είναι γνωστό ότι, γενικά, $m(D) \simeq \mathbb{E}\,\|Z\|_D$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$, και ειδικότερα

$$m(B_p^n) \simeq \mathbb{E}\,\|Z\|_p \simeq n^{1/p}\sqrt{p}, \qquad 1 \leqslant p \leqslant \log n,$$

ενώ

$$m(B_p^n) \simeq \mathbb{E}\,\|Z\|_p \simeq \sqrt{\log n}, \qquad \log n \leqslant p \leqslant \infty.$$

Συνεπώς, επιλέγοντας $t = \frac{1}{4}$ στο Θεώρημα 4.3.5 και χρησιμοποιώντας την εκτίμηση $\gamma_n(\{x : \|x\|_p \leqslant t\cdot m(B_p^n)\}) \leqslant \frac{1}{2}t^{c/\beta(B_p^n)}$, παίρνουμε:

Πόρισμα 4.3.6. *Για κάθε $p \geqslant 1$ υπάρχει σταθερά $c_p > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geqslant n_0(p)$ και κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{c_p n}$ να ισχύει ότι η τυχαία n-άδα σημείων από την B_2^n ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$,*

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|_p \geqslant c\sqrt{p}n^{1/p}$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in S$.

Παρατήρηση 4.3.7. Είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε αυτό το αποτέλεσμα με την (4.1.1). Για κάθε $p \leqslant \log n$, αφού ο λόγος $(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(B_p^n))^{1/n}$ είναι της τάξης του $n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ βλέπουμε ότι για κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{c_p n}$ η τυχαία n-άδα σημείων από την B_2^n ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$,

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|_p \geqslant c\sqrt{p}\sqrt{n}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(B_p^n)}\right)^{1/n}$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$. Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση $p > \log n$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισοδύναμες για να συμπεράνουμε από το Θεώρημα 4.1.2 (ακριβέστερα, το Θεώρημα 4.1.5 σε συνδυασμό με την εκτίμηση του Θεωρήματος 4.1.2) ότι για κάθε $0 < \varrho < 1$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{n^{1-\varrho}}$, η τυχαία n-άδα σημείων από την B_2^n ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$,

$$\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|_p \geqslant c(\varrho)\sqrt{\log n}\sqrt{n}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(B_p^n)}\right)^{1/n}$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Μάλιστα, τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου υποδεικνύουν έναν γενικό τρόπο για να αποδείξουμε παραλλαγές της (4.1.1) σε αυτό το πνεύμα. Μπορούμε να έχουμε ένα μη τετριμμένο κάτω φράγμα για την $\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_D$, με μεγάλη πιθανότητα, για την τυχαία n-άδα $x_1, \ldots, x_n$, αν δεν απαιτήσουμε να ισχύει για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, αλλά για όλες τις n-άδες προσήμων από ένα «μεγάλο» υποσυνολο $S \subseteq \{-1,1\}^n$.

Σημεία από ένα συμμετρικό κυρτό σώμα

Τέλος, μελετάμε την περίπτωση όπου τα $x_1, \ldots, x_n$ επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα από τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Θα αποδείξουμε την ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος 4.3.5, η οποία με τη σειρά της, για $t := ct_{D,\delta}$ θα μας δώσει τον ισχυρισμό του Θεωρήματος 4.1.6.

Θεώρημα 4.3.8. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ που ικανοποιεί τα παρακάτω: Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε $t > 0$ τέτοιον ώστε*

$$|S|\gamma_n(ct(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n} m(D)D) < e^{-n}.$$

Τότε, μπορούμε να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) > 1 - 2e^{-n/2}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $U \in \mathcal{U}$,

$$\mathbb{P}\left((z_i)_{i=1}^n \subseteq U(K) \times \cdots \times U(K) : \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\right\|_D \leqslant t \cdot m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\right) \leqslant e^{-n/2}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$A = \left\{(x_i)_{i=1}^n \subseteq K : \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|_2 > \frac{1}{10}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}\sqrt{n}, \text{για κάθε } \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1,1\}\right\}.$$

Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 4.3.3 για το $D = B_2^n$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(A^c) < e^{-n}$. Χρησιμοποιώντας την

Πρόταση 4.3.1 γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{O(n)} \mathbb{P}\left((z_i)_{i=1}^n \in U(K)^n : \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\right\|_D \leqslant t\cdot m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon\in S\right)\\
&= \mathbb{P}\left(((x_i)_{i=1}^n, U) \in K^n \times O(n) : \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U x_i\right\|_D \leqslant t\cdot m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon\in S\right)\\
&\leqslant \mathbb{P}\left(((x_i)_{i=1}^n, U) \in A \times O(n) : \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U x_i\right\|_D \leqslant t\cdot m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon\in S\right) + e^{-n}\\
&\leqslant \int_A \left[\nu_n\left(\left\{U\in O(n) : \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U x_i\right\|_D \leqslant t\cdot m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon\in S\right\}\right)\right] d\mu(x_1,\dots,x_n) + e^{-n}\\
&< |S|\gamma_n(20t(|B_2^n|/|K|)^{1/n} m(D)D) + e^{-n}.
\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι ο t επιλέγεται έτσι ώστε

$$|S|\gamma_n(20t(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n} m(D)D) < e^{-n}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov μπορούμε να βρούμε $\mathcal{U}\subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) > 1-2e^{-n/2}$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{P}\left((z_i)_{i=1}^n \subseteq U(K)^n : \left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\right\|_D \leqslant t\cdot m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon\in S\right) \leqslant e^{-n/2}.$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Παρατήρηση 4.3.9. Το Θεώρημα 4.3.8 περιγράφει και πάλι την κεντρική ιδέα πίσω από την βελτίωση του αποτελέσματος του Hajela, του Θεωρήματος 4.1.2, καθώς και πίσω από τα υπόλοιπα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Εκτιμήσεις του μέτρου Gauss για μικρά πολλαπλάσια συμμετρικών κυρτών σωμάτων μας επιτρέπουν να δώσουμε κάτω φράγματα για παραλλαγές της παραμέτρου $\beta(K,D)$, που απαιτούν κάτω φράγμα για την D-νόρμα του προσημασμένου αθροίσματος τυχαίας n-άδας διανυσμάτων για όλες τις επιλογές προσήμων από κατάλληλα μεγάλο υποσύνολο του $\{-1,1\}^n$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εκτιμήσεις για μέτρα τομών κυρτών σωμάτων

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο συζητάμε γενικεύσεις του «προβλήματος των τομών» και του προβλήματος Busemann-Petty, στο πλαίσιο όπου ένα τυχόν μέτρο αντικαθιστά τον όγκο, όπως αυτά μελετήθηκαν αρχικά από τον Koldobsky για το πρόβλημα των τομών και από τον Zvavitch για το πρόβλημα Busemann-Petty. Η προσέγγισή μας είναι διαφορετική και βασίζεται σε ολοκληρωτικές ταυτότητες τύπου Blaschke-Petkantschin και ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals.

Το κλασικό πρόβλημα των τομών ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_1 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C_1 \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}). \tag{5.1.1}$$

Είναι γνωστό ότι αυτό το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C_2 \tag{5.1.2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$ (στην Παράγραφο 1.2.1 δίνουμε βασικές πληροφορίες για την κλάση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και την κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας). Ο Bourgain απέδειξε στο [32] ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$, και ο Klartag [65] βελτίωσε αυτό το φράγμα σε $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}$. Μια δεύτερη απόδειξη της εκτίμησης του Klartag δίνεται στο [68]. Από την ισοδυναμία των δύο προβλημάτων προκύπτει ότι

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c_1 L_n \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) \leqslant c_2 \sqrt[4]{n} \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) \tag{5.1.3}$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων.

Η φυσιολογική γενίκευση, το πρόβλημα των τομών για χαμηλότερες διαστάσεις, είναι το ακόλουθο πρόβλημα: Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και έστω $\alpha_{n,k}$ η μικρότερη θετική σταθερά $\alpha > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 ισχύει ότι

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \alpha^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F). \tag{5.1.4}$$

Είναι σωστό ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_3 > 0$ τέτοια ώστε $\alpha_{n,k} \leqslant C_3$ για κάθε n και k;

Από την (5.1.3) έχουμε $\alpha_{n,1} \leqslant cL_n$ για μια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Περιορίζουμε επίσης το πρόβλημα στην κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων και συμβολίζουμε την αντίστοιχη σταθερά με $\alpha_{n,k}^{(s)}$.

Μπορούμε να θέσουμε το ίδιο πρόβλημα αντικαθιστώντας τον όγκο με ένα γενικό μέτρο. Έστω g μια τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\mu(B) = \int_B g(x)dx, \tag{5.1.5}$$

όπου, αν $B \subseteq F$ για κάποιον $F \in G_{n,s}$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$, η ολοκλήρωση θεωρείται ως προς το s-διάστατο μέτρο Lebesgue στον F. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ μπορούμε να ορίσουμε την σταθερά $\alpha_{n,k}(\mu)$ ως τον μικρότερο $\alpha > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 ισχύει

$$\mu(K) \leqslant \alpha^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mu(K \cap F)\, \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}. \tag{5.1.6}$$

Ο Koldobsky απέδειξε στο [70] ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν η g είναι άρτια και συνεχής στο K τότε

$$\mu(K) \leqslant \gamma_{n,1} \frac{n}{n-1} \sqrt{n} \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mu(K \cap \vartheta^{\perp})\, \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{1}{n}}, \tag{5.1.7}$$

όπου, πιο γενικά, $\gamma_{n,k} = \omega_n^{\frac{n-k}{n}} / \omega_{n-k} < 1$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Με άλλα λόγια, για το συμμετρικό (ως προς μ αλλά και ως προς K) ανάλογο $\alpha_{n,1}^{(s)}$ της $\alpha_{n,1}$ έχουμε

$$\sup_{\mu} \alpha_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant c_3 \sqrt{n}. \tag{5.1.8}$$

Στο [71], ο Koldobsky απέδειξε αντίστοιχα αποτελέσματα για τομές χαμηλότερων διαστάσεων: αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν η g είναι άρτια και συνεχής στο K τότε

$$\mu(K) \leqslant \gamma_{n,k} \frac{n}{n-k} (\sqrt{n})^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mu(K \cap F)\, \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}} \tag{5.1.9}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Με άλλα λόγια, για το συμμετρικό ανάλογο $\alpha_{n,k}^{(s)}$ της $\alpha_{n,k}$ έχουμε

$$\sup_{\mu} \alpha_{n,k}^{(s)}(\mu) \leqslant c_4 \sqrt{n}. \tag{5.1.10}$$

Δίνουμε μια νέα, διαφορετική, απόδειξη αυτού του αποτελέσματος. Η μέθοδος που εισάγουμε μας επιτρέπει να αφαιρέσουμε τις υποθέσεις της συμμετρίας και της συνέχειας.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Έστω g φραγμένη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και έστω μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$\mu(K) \leqslant \left(c_5\sqrt{n-k}\right)^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)\cdot \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}, \tag{5.1.11}$$

όπου $c_5 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, $\alpha_{n,k}(\mu) \leqslant c_5\sqrt{n-k}$.

Μάλιστα, η απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1 οδηγεί στην ισχυρότερη ανισότητα

$$\mu(K) \leqslant \left(c_5\sqrt{n-k}\right)^k \left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n \, d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{1}{n}} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}. \tag{5.1.12}$$

Το κλασικό πρόβλημα Busemann-Petty διατυπώνεται ως εξής. Έστω K και D δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^\perp) \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(D\cap\vartheta^\perp) \tag{5.1.13}$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Είναι σωστό ότι $\mathrm{vol}_n(K) \leqslant \mathrm{vol}_n(D)$; Η απάντηση είναι θετική αν $n \leqslant 4$ και αρνητική αν $n \geqslant 5$ (για την ιστορία και τη λύση του προβλήματος, παραπέμπουμε στο βιβλίο του Koldobsky [7]). Η ισομορφική εκδοχή του προβλήματος Busemann-Petty ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_4 > 0$ τέτοια ώστε αν τα K και D ικανοποιούν την (5.1.13) να ισχύει $\mathrm{vol}_n(K) \leqslant C_4\mathrm{vol}_n(D)$. Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα των τομών και με την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς (που ρωτάει αν η $\{L_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία). Ακριβέστερα, είναι γνωστό ότι αν K και D είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 τέτοια ώστε η (5.1.13) να ισχύει για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$, τότε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c_6 L_n \,\mathrm{vol}_n(D)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{5.1.14}$$

όπου $c_6 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η φυσιολογική γενίκευση, το πρόβλημα Busemann-Petty για χαμηλότερες διαστάσεις, είναι το ακόλουθο ερώτημα: Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και έστω $\beta_{n,k}$ η μικρότερη σταθερά $\beta > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K και D στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 που ικανοποιούν την

$$\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F) \leqslant \mathrm{vol}_{n-k}(D\cap F) \tag{5.1.15}$$

για κάθε $F \in G_{n,n-k}$, ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \beta^k \,\mathrm{vol}_n(D)^{\frac{n-k}{n}}. \tag{5.1.16}$$

> *Είναι σωστό ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_5 > 0$ τέτοια ώστε $\beta_{n,k} \leqslant C_5$ για κάθε n και k;*

Από την (5.1.14) έχουμε $\beta_{n,1} \leqslant c_6 L_n \leqslant c_7\sqrt[4]{n}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_7 > 0$. Μελετάμε επίσης το ίδιο ερώτημα για την κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων και συμβολίζουμε την αντίστοιχη σταθερά με $\beta_{n,k}^{(s)}$.

Όπως στην περίπτωση του προβλήματος των τομών, το ίδιο ερώτημα μπορεί να τεθεί για ένα γενικό μέτρο στη θέση του όγκου. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ με τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική πυκνότητα g μπορούμε να ορίσουμε την $\beta_{n,k}(\mu)$ ως τη μικρότερη σταθερά $\beta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K και D στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο βάρους το 0, που ικανοποιούν την $\mu(K\cap F) \leqslant \mu(D\cap F)$ για κάθε $F \in G_{n,n-k}$, έχουμε

$$\mu(K) \leqslant \beta^k \mu(D). \tag{5.1.17}$$

Όμοια, μπορούμε να ορίσουμε τη «συμμετρική» σταθερά $\beta^{(s)}_{n,k}(\mu)$. Οι Koldobsky και Zvavitch [77] απέδειξαν ότι $\beta^{(s)}_{n,1}(\mu) \leqslant \sqrt{n}$ για κάθε μέτρο μ με άρτια συνεχή μη αρνητική πυκνότητα. Μάλιστα, η μελέτη αυτών των προβλημάτων στο πλαίσιο των γενικών μέτρων εγκαινιάστηκε από τον Zvavitch στο [111], όπου απέδειξε ότι το κλασικό πρόβλημα Busemann-Petty για γενικά μέτρα έχει καταφατική απάντηση αν $n \leqslant 4$ και αρνητική αν $n \geqslant 5$. Μελετάμε το πρόβλημα για χαμηλότερες διαστάσεις και δίνουμε μια γενική εκτίμηση στην περίπτωση που το μ έχει άρτια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα.

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με άρτια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα g και έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω D ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(K\cap F) \leqslant \mu(D\cap F) \tag{5.1.18}$$

για κάθε $F \in G_{n,n-k}$. Τότε,

$$\mu(K) \leqslant (c_8 k L_{n-k})^k\, \mu(D), \tag{5.1.19}$$

όπου $c_8 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Συγκρίνοντας το Θεώρημα 5.1.2 με την εκτίμηση $\beta^{(s)}_{n,1}(\mu) \leqslant \sqrt{n}$ των Koldobsky και Zvavitch, παρατηρούμε ότι η ανισότητά τους ισχύει για τυχόν μέτρο, δηλαδή δεν απαιτούμε από το μ να είναι λογαριθμικά κοίλο. Από την άλλη πλευρά, το Θεώρημα 5.1.2 ισχύει για τυχούσα συνδιάσταση $k < n$ και η κυρτότητα του δεύτερου σώματος D δεν απαιτείται.

Αποδεικνύουμε το Θεώρημα 5.1.1 και το Θεώρημα 5.1.2 στην Παράγραφο 5.3. Τα βασικά εργαλεία μας είναι γενικευμένες ολοκληρωτικές ταυτότητες τύπου Blaschke-Petkantschin και η ανισότητα Busemann-Straus/Grinberg για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals ενός κυρτού σώματος. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.2 χρησιμοποιούμε επίσης ένα πρόσφατο αποτέλεσμα των Dann, Παούρη και Pivovarov. Παρουσιάζουμε αυτά τα αποτελέσματα στην Παράγραφο 5.2.

5.2 Εργαλεία από την ολοκληρωτική γεωμετρία

Η μέθοδός μας βασίζεται στη χρήση ολοκληρωτικών τύπων Blaschke-Petkantschin (βλ. [11, Κεφάλαιο 7.2]). Πρόκειται για ταυτότητες που μας επιτρέπουν να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα μιας συνάρτησης k μεταβλητών $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}^n$ ολοκληρώνοντας αρχικά πάνω από όλες αυτές τις k-άδες σε έναν $F \in G_{n,k}$ και έπειτα παίρνοντας τη μέση τιμή ως προς το μέτρο Haar $\nu_{n,k}$ στη $G_{n,k}$. Συγκεκριμένα, θα χρησιμοποιήσουμε την παρακάτω ταυτότητα (βλ. [50, Λήμμα 5.1]).

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Υπάρχει σταθερά $p(n,s) > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε μη αρνητική φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} (5.2.1) \quad & \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_s) dx_1 \cdots dx_s \\ & = p(n,s) \int_{G_{n,s}} \int_F \cdots \int_F f(x_1,\dots,x_s) \operatorname{vol}_s(\operatorname{conv}(o,x_1,\dots,x_s))^{n-s} \\ & \qquad dx_1 \dots dx_s \, d\nu_{n,s}(F). \end{aligned}$$

Η ακριβής τιμή της σταθεράς $p(n,s)$ είναι

$$p(n,s) = (s!)^{n-s} \frac{(n\omega_n)\cdots((n-s+1)\omega_{n-s+1})}{(s\omega_s)\cdots(2\omega_2)\omega_1}. \tag{5.2.2}$$

Παρουσιάζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 για λόγους πληρότητας. Για τις ανάγκες της απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε ένα πιο λεπτομερή συμβολισμό: Συμβολίζουμε παρακάτω με λ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue. Για κάθε $F \in G_{n,k}$, γράφουμε λ_F για το k-διάστατο μέτρο Lebesgue στον F, το οποίο το βλέπουμε σαν ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, με άλλα λόγια $\lambda_F(A) = \operatorname{vol}_k(A \cap F)$ για κάθε Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Γράφουμε επίσης λ_F^s για το μέτρο γινόμενο $F \times \cdots \times F$ (s φορές).

Για κάθε $E \in G_{n,m}$ και $k < m$, συμβολίζουμε με $\nu_{E,k}$ το μέτρο πιθανότητας στο σύνολο $G_{E,k}$ όλων των k-διάστατων υπόχωρων του E, και για $F \in G_{n,k}$, $k < m$, συμβολίζουμε με $\nu_{F,m}$ το μέτρο πιθανότητας στο σύνολο $G_{F,m}$ όλων των m-διάστατων υπόχωρων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν τον F. Δεδομένων $0 \leqslant k < m \leqslant n$ ορίζουμε

$$G(n,k,m) = \{(F,E) \in G_{n,k} \times G_{n,m} : F \subset E\}.$$

Ο χώρος $G(n,k,m)$ είναι ένας ομογενής $SO(n)$-χώρος και μπορεί να εφοδιαστεί με ένα, αναλλοίωτο ως προς στροφές, μέτρο πιθανότητας $\nu_{n,k,m}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι (βλ. [11, Θεώρημα 7.1.1] για την απόδειξη) αν $0 \leqslant k < m \leqslant n-1$ και η $g : G(n,k,m) \to \mathbb{R}^+$ είναι μια $\nu_{n,k,m}$-μετρήσιμη συνάρτηση, τότε (λόγω της μοναδικότητας των αναλλοίωτων μέτρων)

$$\begin{aligned} (5.2.3) \qquad \int_{G(n,k,m)} g \, d\nu_{n,k,m} &= \int_{G_{n,k}} \int_{G_{F,m}} g(E,F) \, d\nu_{F,m}(E) \, d\nu_{n,k}(F) \\ &= \int_{G_{n,m}} \int_{G_{E,k}} g(E,F) \, d\nu_{E,k}(F) \, d\nu_{n,m}(E). \end{aligned}$$

Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και $x_1,\dots,x_k \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $\Box_k(x_1,\dots,x_k)$ τον k-διάστατο όγκο του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $x_1,\dots,x_k$. Παρατηρήστε ότι

$$\operatorname{vol}_k(\operatorname{conv}(o,x_1,\dots,x_k)) = \frac{1}{k!}\Box_k(x_1,\dots,x_k).$$

Χρησιμοποιώντας λοιπόν το συμβολισμό που εισήχθη παραπάνω, για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και κάθε φραγμένη μη-αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $f : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$,

$$\int_{(\mathbb{R}^n)^k} f \, d\lambda^k = b_{n,k} \int_{G_{n,k}} \int_{F^k} f \, \Box_k^{n-k} d\lambda_F^k \, d\nu_{n,q}(F), \tag{5.2.4}$$

όπου

$$b_{n,k} = \frac{(n-k+1)\omega_{n-k+1}\cdots n\omega_n}{\omega_1\cdots k\omega_k}. \tag{5.2.5}$$

Θα αποδείξουμε την (5.2.4) με επαγωγή στο k, χρησιμοποιώντας το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 5.2.2. *Έστω $0 \leqslant q \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,q}$. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda = \frac{\omega_{n-q}}{2}\int_{G_{F,q+1}}\int_E f(x)d(x,F)^{n-q-1}d\lambda_E\, d\nu_{F,q+1}(E),$$

όπου με $d(x,F)$ συμβολίζουμε την απόσταση του x από τον F.

Απόδειξη. Για κάθε u συμβολίζουμε

$$F_u := \left\{\sum_{i=1}^m a_i x_i + a_{m+1}u : x_1,\ldots,x_m \in F, a_1,\ldots,a_{m+1} > 0\right\}.$$

Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες στον $F^\perp$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\lambda(x) &= \int_F\int_{F^\perp} f(y+z)d\lambda_{F^\perp}(z)\, d\lambda_F(y)\\
&= (n-q)\omega_{n-q}\int_F\int_0^\infty\int_{S^{n-1}\cap F^\perp} f(y+tu)t^{n-q-1}d\sigma_{n-q-1}(u)\, dt\, d\lambda_F(y)\\
&= (n-q)\omega_{n-q}\int_{S^{n-1}\cap F^\perp}\int_F\int_0^\infty f(y+tu)t^{n-q-1}dt\, d\lambda_F(y)\, d\sigma_{n-q-1}(u)\\
&= (n-q)\omega_{n-q}\int_{S^{n-1}\cap F^\perp}\int_{F_u} f(x)d(x,F)^{n-q-1}\, d\lambda_{F_u}(x)\, d\sigma_{n-q-1}(u)\\
&= \frac{(n-q)\omega_{n-q}}{2}\int_{G_{F,q+1}}\int_E f(x)d(x,F)^{n-q-1}d\lambda_E\, d\nu_{F,q+1}(E),
\end{aligned}$$

όπως έπρεπε να δειχθεί. □

Απόδειξη της (5.2.4). Παρατηρήστε ότι η περίπτωση $k=1$ είναι απλά το Λήμμα 5.2.2 για $q=0$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι η (5.2.4) έχει αποδειχθεί για κάποιο k και κάθε $n \geqslant k$. Θέτουμε $\mathbf{x} := (x_1,\ldots,x_k)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fubini, την επαγωγική υπόθεση και το Λήμμα 5.2.2 γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{(\mathbb{R}^n)^{k+1}} f\, d\lambda^{k+1} &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{(\mathbb{R}^n)^k} f(\mathbf{x},x)d\lambda^k(\mathbf{x})\, d\lambda(x)\\
&= b_{n,k}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{G_{n,k}}\int_{F^k} f(\mathbf{x},x)\Box_k(\mathbf{x})^{n-k}d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{n,k}(F)\, d\lambda(x)\\
&= b_{n,k}\int_{G_{n,k}}\int_{F^k}\Box_k(\mathbf{x})^{n-k}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},x)d\lambda(x)d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{n,k}(F)\\
&= \frac{b_{n,k}(n-k)\omega_{n-k}}{2}\int_{G_{n,k}}\int_{F^k}\Box_k(\mathbf{x})^{n-k}\int_{G_{F,k+1}}\int_E f(\mathbf{x},x)d(x,F)^{n-k-1}\\
&\quad\times d\lambda_E(x)d\nu_{F,k+1}(E)d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{n,k}(F).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την (5.2.3) ώστε να αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης, καθώς επίσης και την ταυτότητα

$$\Box_{k+1}(x_1,\ldots,x_{k+1}) = \Box_k(x_1,\ldots,x_k)d(x_{k+1},F) \tag{5.2.6}$$

που ισχύει για κάθε $x_1,\ldots,x_k \in F$ και $x_{k+1}\in\mathbb{R}^n$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^n)^{k+1}} f\,d\lambda^{k+1} &= \frac{b_{n,k}(n-k)\omega_{n-k}}{2}\int_{G_{n,k+1}}\int_{G_{E,k}}\int_{F^k}\int_E f(\mathbf{x},x)\Box_k(\mathbf{x})^{n-k}d(x,F)^{n-k-1}\\ &\quad\times d\lambda_E(x)d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{E,k}(F)d\nu_{n,k+1}(E)\\ &= \frac{b_{n,k}(n-k)\omega_{n-k}}{2}\int_{G_{n,k+1}}\int_E\int_{G_{E,k}}\int_{F^k} f(\mathbf{x},x)\Box_{k+1}(\mathbf{x},x)^{n-k-1}\Box_k(\mathbf{x})\\ &\quad\times d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{E,k}(F)d\lambda_E(x)d\nu_{n,k+1}(E).\end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $E\in G_{n,k+1}$ εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση για $n=k+1$ και τη συνάρτηση $f(\cdot,x)\Box_{k+1}(\cdot,x)^{n-k-1}: E^k\to\mathbb{R}^+$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^n)^{k+1}} f\,d\lambda^{k+1} &= \frac{b_{n,k}(n-k)\omega_{n-k}}{2b_{(k+1),k}}\int_{G_{n,k+1}}\int_E\int_{E^k} f(\mathbf{x},x)\Box_{k+1}(\mathbf{x},x)^{n-k-1}\\ &\quad\times d\lambda_E^k(\mathbf{x})d\lambda_E(x)d\nu_{n,k+1}(E)\\ &= b_{n,(k+1)}\int_{G_{n,k+1}}\int_{E^{k+1}} f\Box_{k+1}^{n-k-1}d\lambda_E^{k+1}d\nu_{n,k+1}(E),\end{aligned}$$

και η (5.2.4) έχει έτσι δειχθεί για $k+1$. $\Box$

Θα αξιοποιήσουμε το Θεώρημα 5.2.1 για να πάρουμε μια έκφραση για τον όγκο ενός κυρτού σώματος ως εξής: Έστω K ένα συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.2.1 με $s=n-k$ για τη συνάρτηση $f(x_1,\ldots,x_{n-k})=\prod_{i=1}^{n-k}\mathbf{1}_K(x_i)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}|K|^{n-k} = p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F}&\mathrm{vol}_{n-k}\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k}))^k\\ &dx_1\ldots dx_{n-k}\,d\nu_{n,n-k}(F).\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης κάποια βασικά αποτελέσματα για συναρτησοειδή τύπου Sylvester. Έστω D ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^m$. Για κάθε $p>0$ θεωρούμε την κανονικοποιημένη p-οστή ροπή της μέσης τιμής του όγκου του τυχαίου simplex $\mathrm{conv}(o,x_1,\ldots,x_m)$, δηλαδή της κυρτής θήκης της αρχής των αξόνων και m σημείων από το D, που ορίζεται από την

$$S_p(D) = \left(\frac{1}{\mathrm{vol}_m(D)^{m+p}}\int_D\cdots\int_D \mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(o,x_1,\ldots,x_m))^p dx_1\cdots dx_m\right)^{1/p}. \tag{5.2.8}$$

Επίσης, για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε

$$S_p(\nu) = \left(\int_{\mathbb{R}^m}\cdots\int_{\mathbb{R}^m}\mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(o,x_1,\ldots,x_m))^p d\nu(x_1)\cdots d\nu(x_m)\right)^{1/p}. \tag{5.2.9}$$

Παρατηρήστε ότι η $S_p(D)$ είναι αναλλοίωτη ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς: έχουμε $S_p(D)=S_p(T(D))$ για κάθε $T\in GL(n)$. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ευρέως γνωστό και πηγαίνει πίσω στον Blaschke (δείτε, για παράδειγμα, [3, Πρόταση 3.5.5]).

Λήμμα 5.2.3. *Έστω ν ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^m$ με κέντρο βάρους το 0. Τότε,*

$$m!\, S_2^2(\nu) = \det(\mathrm{Cov}(\nu)). \tag{5.2.10}$$

Ειδικότερα, αν το D έχει κέντρο βάρους το 0 τότε

$$S_2^2(D) = \frac{L_D^{2m}}{m!}. \tag{5.2.11}$$

Από την ανισότητα Hölder έπεται ότι η συνάρτηση $p \mapsto S_p(D)$ είναι αύξουσα στο $(0,\infty)$. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη αντίστροφη ανισότητα Hölder.

Λήμμα 5.2.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\delta > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^m$ και κάθε $p > 1$,*

$$S_p(\nu) \leqslant (\delta p)^m\, S_1(\nu). \tag{5.2.12}$$

Ειδικότερα, για κάθε κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^m$ και κάθε $p > 1$,

$$S_p(D) \leqslant (\delta p)^m\, S_1(D). \tag{5.2.13}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το γεγονός (βλ. Παρατήρηση 1.2.2) ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\delta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $\nu \in \mathcal{P}_m$ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο τότε, για κάθε ημινόρμα $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ και κάθε $q > p \geqslant 1$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q d\nu(x)\right)^{1/q} \leqslant \frac{\delta q}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^p d\nu(x)\right)^{1/p}. \tag{5.2.14}$$

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(o, x_1, \ldots, x_m)) = \frac{1}{m!} |\det(x_1, \ldots, x_m)|. \tag{5.2.15}$$

Η συνάρτηση $u_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $x_i \mapsto |\det(x_1, \ldots, x_n)|$ για σταθερά x_j στον $\mathbb{R}^m$, $j \neq i$, είναι ημινόρμα, όπως και η συνάρτηση $v_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$x_i \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m} |\det(x_1, \ldots, x_m)| dx_{i+1} \cdots dx_m \tag{5.2.16}$$

για σταθερά x_j $(1 \leqslant j < i)$ στον $\mathbb{R}^m$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα Fubini και την (5.2.14) παίρνουμε την (5.2.12). $\square$

Το επόμενο λήμμα δίνει άνω φράγματα για τις σταθερές $p(n, n-k)$ και $\gamma_{n,k} = \omega_n^{\frac{n-k}{n}}/\omega_{n-k}$ οι οποίες θα εμφανιστούν, και θα παίξουν βασικό ρόλο, στις επόμενες παραγράφους.

Λήμμα 5.2.5. *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$e^{-k/2} < \gamma_{n,k} < 1 \quad \textit{και} \quad [\gamma_{n,k}^{-n} p(n, n-k)]^{\frac{1}{k(n-k)}} \simeq \sqrt{n-k}. \tag{5.2.17}$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\gamma_{n,k} := \omega_n^{\frac{n-k}{n}}/\omega_{n-k}. \tag{5.2.18}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση Γάμμα είναι λογαριθμικά κυρτή μπορούμε να ελέγξουμε ότι $e^{-k/2} < \gamma_{n,k} < 1$. Μια απόδειξη δίνεται στο [74, Λήμμα 2.1].

Για να δώσουμε άνω φράγμα για την $p(n,n-k)$ ξεκινάμε από το γεγονός ότι $\omega_s = \pi^{\frac{s}{2}}/\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο του Stirling. Έχουμε

$$\begin{aligned} p(n,n-k) &= ((n-k)!)^k \frac{(n\omega_n)\cdots((k+1)\omega_{k+1})}{((n-k)\omega_{n-k})\cdots(2\omega_2)\omega_1} \\ &= ((n-k)!)^k \binom{n}{k} \frac{\prod_{s=k+1}^{n} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}}{\prod_{s=1}^{n-k} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}} \\ &= ((n-k)!)^k \binom{n}{k} \pi^{\frac{k(n-k)}{2}} \frac{\prod_{s=1}^{n-k}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\prod_{s=k+1}^{n}\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}, \end{aligned} \tag{5.2.19}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\frac{1}{2}\sum_{s=k+1}^{n} s - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-k} s = \frac{1}{4}(n(n+1) - k(k+1) - (n-k)(n-k+1)) = \frac{1}{2}k(n-k). \tag{5.2.20}$$

Παίρνοντας υπόψη την εκτίμηση

$$\left(\frac{s}{2e}\right)^{\frac{s}{2}}\sqrt{2\pi s} \leqslant \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right) \leqslant \left(\frac{s}{2e}\right)^{\frac{s}{2}}\sqrt{2\pi s}\, e^{\frac{1}{6s}} \leqslant \left(\frac{s}{2e}\right)^{\frac{s}{2}}\sqrt{2\pi s}\, e^{\frac{1}{6}} \tag{5.2.21}$$

βλέπουμε ότι

$$p(n,n-k) \leqslant ((n-k)!)^k (2\pi e)^{\frac{k(n-k)}{2}} e^{\frac{n-k}{6}} \binom{n}{k}^{1/2} \frac{\prod_{s=1}^{k} s^{\frac{s}{2}} \prod_{s=1}^{n-k} s^{\frac{s}{2}}}{\prod_{s=1}^{n} s^{\frac{s}{2}}}. \tag{5.2.22}$$

Ορίζουμε

$$t_m = 1\cdot 2^2 \cdot 3^3 \cdot \cdots \cdot m^m. \tag{5.2.23}$$

Είναι γνωστό ότι

$$t_m \sim A m^{\frac{m^2}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{12}} e^{-\frac{m^2}{4}} \tag{5.2.24}$$

καθώς $m\to\infty$, όπου $A>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (η σταθερά Glaisher-Kinkelin, δείτε για παράδειγμα το [5]). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \gamma_{n,k}^{-n} = \frac{\omega_{n-k}^{n}}{\omega_n^{n-k}} = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{n-k}}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+1\right)^{n}} &\leqslant \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n(n-k)}{2}} \frac{(\pi n)^{\frac{n-k}{2}} e^{\frac{n-k}{6}}}{(\pi(n-k))^{\frac{n}{2}}} \\ &\leqslant e^{\frac{n-k}{6}} \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{(n+1)(n-k)}{2}}. \end{aligned} \tag{5.2.25}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $n^2 = k^2 + (n-k)^2 + 2k(n-k)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\gamma_{n,k}^{-\frac{n}{k(n-k)}}\left(\frac{t_k t_{n-k}}{t_n}\right)^{\frac{1}{2k(n-k)}} &\leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k+1}{4(n-k)}}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{n-k+1}{4k}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n+1}{2k}} \\ &\leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k+1}{4(n-k)}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n+k+1}{4k}} \\ &\leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k+1}{4(n-k)}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{2k}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{2k+1}{4k}} \\ &\leqslant \frac{c_2}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-k}} = \frac{c_2}{\sqrt{n-k}}.\end{aligned} \tag{5.2.26}$$

Αφού

$$\left[((n-k)!)^k(2\pi e)^{\frac{k(n-k)}{2}}e^{\frac{n-k}{6}}\binom{n}{k}^{1/2}\right]^{\frac{1}{k(n-k)}} \leqslant c_3(n-k), \tag{5.2.27}$$

βλέπουμε ότι

$$[\gamma_{n,k}^{-n}p(n,n-k)]^{\frac{1}{k(n-k)}} \leqslant c_0\sqrt{n-k} \tag{5.2.28}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει με παρόμοιους υπολογισμούς, αλλά δεν θα την χρειαστούμε στη συνέχεια. □

Παρατήρηση 5.2.6. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να δώσουμε άνω φράγμα για την $p(n,n-k)$ είναι να ξεκινήσουμε ξαναγράφοντας την (5.2.7) στη μορφή

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-k} = p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n[S_k(K\cap F)]^k\,d\nu_{n,n-k}(F). \tag{5.2.29}$$

Ειδικότερα, θέτοντας $K = B_2^n$ βλέπουμε ότι αν $k \geqslant 2$ τότε

$$\begin{aligned}\omega_n^{n-k} &= p(n,n-k)\omega_{n-k}^n[S_k(B_2^{n-k})]^k \\ &\geqslant p(n,n-k)\omega_{n-k}^n[S_2(B_2^{n-k})]^k \\ &\geqslant p(n,n-k)\omega_{n-k}^n\left(\frac{L_{B_2^{n-k}}}{\sqrt{n-k}}\right)^{k(n-k)} \\ &\geqslant p(n,n-k)\omega_{n-k}^n\left(\frac{c_1}{\sqrt{n-k}}\right)^{k(n-k)}\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, απ΄ όπου έπεται ότι

$$p(n,n-k) \leqslant \gamma_{n,k}^n(c_0\sqrt{n-k})^{k(n-k)}, \tag{5.2.31}$$

με $c_0 = c_1^{-1}$. Για την περίπτωση $k=1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, από το Λήμμα 5.2.4, $S_1(K\cap F) \geqslant \delta^{-(n-1)}S_2(K\cap F)$ για κάθε $F \in G_{n,n-1}$, και μετά να συνεχίσουμε όπως παραπάνω. Η τελική εκτίμηση είναι ακριβώς η ίδια όπως στο Λήμμα 5.2.5:

$$[\gamma_{n,k}^{-n}p(n,n-k)]^{\frac{1}{k(n-k)}} \leqslant c_0\sqrt{n-k}, \tag{5.2.32}$$

και αυτή είναι η ανισότητα που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια. Όμως, η απόδειξη του Λήμματος 5.2.5 δείχνει επιπλέον ότι αυτή η εκτίμηση είναι ακριβής για κάθε n και k, δηλαδή δεν μπορούμε να περιμένουμε κάτι καλύτερο.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.2 θα χρειαστούμε επίσης το ακόλουθο θεώρημα των Dann, Παούρη και Pivovarov από το [42].

Θεώρημα 5.2.7 (Dann-Paouris-Pivovarov). *Έστω u μια φραγμένη ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ με $\|u\|_1 > 0$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$\int_{G_{n,n-k}} \frac{1}{\|u|_F\|_\infty^k} \left(\int_F u(x)dx\right)^n d\nu_{n,n-k}(F) \leqslant \gamma_{n,k}^{-n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx\right)^{n-k}. \tag{5.2.33}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.7 συνδυάζει ανισότητες αναδιάταξης με ολοκληρωτικές ταυτότητες τύπου Blaschke-Petkantschin, και αναπτύσσει ιδέες που είχαν εμφανιστεί στο [92].

Τέλος, χρησιμοποιούμε την ανισότητα Busemann-Straus/Grinberg για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals (που εισήχθησαν από τον Lutwak στα [83] και [85]) ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιούμε την κανονικοποίηση του [41]: υποθέτουμε ότι ο όγκος του K είναι ίσος με 1 και θέτουμε

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) = \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{1}{kn}} \tag{5.2.34}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτόν τον ορισμό στα φραγμένα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Η ανισότητα που ακολουθεί αποδείχθηκε από τους Busemann και Straus [36], και ανεξάρτητα από τον Grinberg [56].

Θεώρημα 5.2.8 (Busemann-Straus/Grinberg). *Έστω K ένα συμπαγές σύνολο όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $T \in SL(n)$ έχουμε*

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) = \tilde{\Phi}_{[k]}(T(K)). \tag{5.2.35}$$

Επιπλέον,

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) \leqslant \tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{B}_2^n), \tag{5.2.36}$$

όπου $\overline{B}_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.2.8 για συμπαγή σύνολα. Αυτό φαίνεται αν ανατρέξει κανείς προσεκτικά στο επιχείρημα του Grinberg (για τη γενικότερη αυτή μορφή δείτε επίσης το [50, Παράγραφος 7]). Απευθείας υπολογισμός και το Λήμμα 5.2.5 δείχνουν ότι

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{B}_2^n) = \left(\frac{\omega_{n-k}^n}{\omega_n^{n-k}}\right)^{\frac{1}{kn}} = \gamma_{n,k}^{-1/k} \leqslant \sqrt{e}. \tag{5.2.37}$$

5.3 Εκτιμήσεις για το μέτρο τομών χαμηλότερης διάστασης

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 5.1.1 και το Θεώρημα 5.1.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1. Έστω μ ένα μέτρο Borel με φραγμένη τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική πυκνότητα g στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, και σταθεροποιούμε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.2.1 με $s = n-k$ για τη συνάρτηση $f(x_1,\dots,x_{n-k}) = \prod_{i=1}^{n-k} g(x_i)\mathbf{1}_K(x_i)$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\mu(K)^{n-k} &= \prod_{i=1}^{n-k}\int_K g(x_i)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\dots,x_{n-k})dx_1\dots dx_{n-k} \\
&= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k}) \\
&\qquad \times\ \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(o,x_1,\dots,x_{n-k}))^k dx_1\dots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k}) \\
&\qquad \times\ \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k dx_1\dots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k \mu(K\cap F)^{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant p(n,n-k)\left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}} \\
&\qquad \times \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{k}{n}}.
\end{aligned} \tag{5.3.1}
$$

Για να εκτιμήσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα, παρατηρούμε ότι αν $\overline{K} = \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}K$ τότε

$$
\begin{aligned}
\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F) &= \mathrm{vol}_n(K)^{n-k}\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\overline{K}\cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant \mathrm{vol}_n(K)^{n-k}\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\overline{B}_2^n\cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= \gamma_{n,k}^{-n}\mathrm{vol}_n(K)^{n-k}
\end{aligned} \tag{5.3.2}
$$

από το Θεώρημα 5.2.8 και την (5.2.37). Παίρνοντας υπόψη το Λήμμα 5.2.5 βλέπουμε ότι

$$
\mu(K)^{n-k} \leqslant \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)}\left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n d\nu_{n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}}. \tag{5.3.3}
$$

Αυτό αποδεικνύει την (5.1.12) και έχουμε το συμπέρασμα. □

Περνάμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.2. Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με φραγμένη τοπικά ολοκληρώσιμη πυκνότητα g. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$

θα θέλαμε να δώσουμε άνω και κάτω φράγματα για το $\mu(K)$ συναρτήσει των μέτρων $\mu(K\cap F)$, $F\in G_{n,n-k}$. Μπορούμε να δώσουμε ένα κάτω φράγμα χωρίς καμία πρόσθετη υπόθεση για την g. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.2.7.

Πρόταση 5.3.1. *Έστω g μια φραγμένη τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και έστω μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε συμπαγές σύνολο D στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\int_{G_{n,n-k}} \mu(D\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F) \leqslant \gamma_{n,k}^{-n}\|g\|_\infty^k \mu(D)^{n-k}. \tag{5.3.4}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.2.7 για τη συνάρτηση $u=g\cdot \mathbf{1}_D$. Παρατηρούμε ότι $\|u|_F\|_\infty = \|g|_{D\cap F}\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$ για κάθε $F\in G_{n,n-k}$ και ότι

$$\int_F u(x)dx = \mu(D\cap F) \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx = \mu(D). \tag{5.3.5}$$

Συνεπώς, η πρόταση προκύπτει από την (5.2.33). □

Μπορούμε να δώσουμε ένα άνω φράγμα αν υποθέσουμε ότι η g είναι άρτια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση και το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα.

Πρόταση 5.3.2. *Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με άρτια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα g. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ έχουμε*

$$\mu(K)^{n-k} \leqslant p(n,n-k)\frac{(\kappa\delta k L_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}}\frac{1}{\|g\|_\infty^k}\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F), \tag{5.3.6}$$

όπου $\kappa>0$ είναι η απόλυτη σταθερά στην (1.2.4) και $\delta>0$ είναι η απόλυτη σταθερά στο Λήμμα 5.2.4.

Απόδειξη. Ξεκινάμε γράφοντας

$$\begin{aligned} \mu(K)^{n-k} &= \prod_{i=1}^{n-k}\int_K g(x_i)dx \\ &= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(o,x_1,\ldots,x_{n-k}))^k \\ &\qquad \times \prod_{i=1}^{n-k} g(x_i)dx_1\ldots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^{n-k}[S_k(\mu_{K\cap F})]^k\, d\nu_{n,n-k}(F), \end{aligned} \tag{5.3.7}$$

όπου $\mu_{K\cap F}$ είναι το συμμετρικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $g_{K\cap F} := \frac{1}{\mu(K\cap F)}g\cdot\mathbf{1}_{K\cap F}$. Από το Λήμμα 5.2.4 και το Λήμμα 5.2.3 έχουμε

$$[S_k(\mu_{K\cap F})]^k \leqslant (\delta k)^{k(n-k)}[S_2(\mu_{K\cap F})]^k = (\delta k)^{k(n-k)}\left(\frac{\det(\mathrm{Cov}(\mu_{K\cap F}))}{(n-k)!}\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{5.3.8}$$

Τώρα, αφού η g είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη, έχουμε

$$\|g_{K\cap F}\|_\infty = \frac{g(o)}{\mu(K\cap F)} = \frac{\|g\|_\infty}{\mu(K\cap F)}. \tag{5.3.9}$$

Συνεπώς, από την (1.2.2) παίρνουμε

$$\det(\mathrm{Cov}(\mu_{K\cap F})) = \frac{L_{\mu_{K\cap F}}^{2(n-k)}}{\|g_{K\cap F}\|_\infty^2} \leqslant \mu(K\cap F)^2 \frac{(\kappa L_{n-k})^{2(n-k)}}{\|g\|_\infty^2}, \tag{5.3.10}$$

όπου $\kappa > 0$ είναι η απόλυτη σταθερά στην (1.2.4). Έπεται ότι

$$[S_k(\mu_{K\cap F})]^k \leqslant \frac{(\kappa\delta k L_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}} \frac{\mu(K\cap F)^k}{\|g\|_\infty^k}. \tag{5.3.11}$$

Επιστρέφοντας στην (5.3.7) παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.2. Συνδυάζοντας την Πρόταση 5.3.1 και την Πρόταση 5.3.2 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\mu(K)^{n-k} &\leqslant p(n,n-k)\frac{(\kappa\delta k L_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}}\frac{1}{\|g\|_\infty^k}\int_{G_{n,n-k}}\mu(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F) \\ &\leqslant p(n,n-k)\frac{(\kappa\delta k L_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}}\frac{1}{\|g\|_\infty^k}\int_{G_{n,n-k}}\mu(D\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F) \\ &\leqslant p(n,n-k)\frac{(\kappa\delta k L_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}}\frac{1}{\|g\|_\infty^k}\gamma_{n,k}^{-n}\|g\|_\infty^k\mu(D)^{n-k} \\ &\leqslant (c_8 k L_{n-k})^{k(n-k)}\,\mu(D)^{n-k}\end{aligned} \tag{5.3.12}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_8 > 0$, όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα

$$p(n,n-k) \leqslant \gamma_{n,k}^n \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \tag{5.3.13}$$

του Λήμματος 5.2.5. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Φαινόμενα κατωφλίου για τυχαία πολύτοπα σε υψηλές διαστάσεις

6.1 Εισαγωγή και κεντρικά αποτελέσματα

Τις τελευταίες δεκαετίες, τα τυχαία πολύτοπα είναι ένα από τα εξέχοντα αντικείμενα μελέτης στη στοχαστική γεωμετρία, συνδέοντας προβλήματα και μεθόδους από την κλασική κυρτότητα και τη θεωρία πιθανοτήτων, με πλήθος εφαρμογών σε άλλους τομείς των Μαθηματικών όπως για παράδειγμα την Βελτιστοποίηση, τους Τυχαίους Πίνακες και την Αλγοριθμική Γεωμετρία. Μέσα από την αχανή σχετική βιβλιογραφία, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα πρόσφατα surveys [60, 100] και τις εκεί αναφορές για περισσότερες λεπτομέρειες.

Ένα συγκεκριμένο ζήτημα που έχει μελετηθεί από πολλές απόψεις είναι η πολυπλοκότητα υπολογισμού του όγκου ενός κυρτού σώματος στις υψηλές διαστάσεις, μέσω της προσέγγισής του από τυχαία πολύτοπα. Στο γενικό πλαίσιο, μπορεί κανείς να θεωρήσει την κυρτή θήκη $\mathrm{conv}\{X_1,\dots,X_N\}$ ενός πεπερασμένου πλήθους σημείων που επιλέγονται τυχαία από το εσωτερικό ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, και να διερευνήσει τις συνθήκες κάτω από τις οποίες αυτή η κυρτή θήκη «προσεγγίζει καλά» το αρχικό σώμα, για παράδειγμα ως προς τον όγκο, ή άλλες γεωμετρικές παραμέτρους. Σε μια σημαντική εργασία, οι Dyer, Füredi και McDiarmid [46] έδειξαν ότι η μέση τιμή του όγκου της κυρτής θήκης $C_N=\mathrm{conv}\{X_1,\dots,X_N\}$ από $N>n$ σημεία επιλεγμένα ομοιόμορφα και ανεξάρτητα από τις κορυφές του n-διάστατου κύβου B_∞^n, εμφανίζει μία μετάβαση φάσης όταν το πλήθος των σημείων N είναι εκθετικά μεγάλο ως προς τη διάσταση n, συγκεκριμένα, ότι για κάθε $\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(C_N)}{\mathrm{vol}_n(B_\infty^n)}=\begin{cases}0 & \text{αν } N\leqslant (2e^{-1/2}-\varepsilon)^n\\ 1 & \text{αν } N\geqslant (2e^{-1/2}+\varepsilon)^n.\end{cases}$$

Η μέθοδος που εισήχθη στο [46] επηρέασε έναν αριθμό από μετέπειτα εργασίες, όπως για παράδειγμα την προσέγγιση των Bárány και Pór [24] για την απόδειξη ύπαρξης ±1 πολυτόπων με υπέρ-εκθετικό πλήθος κορυφών. Ακολούθως, παρόμοια αποτελέσματα κατωφλίου για τον όγκο αποδείχθηκαν από τους Γατζούρα και Γιαννόπουλο [51] για τυχαία πολύτοπα που παράγονται από μια ευρύτερη κλάση μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, καθώς και τον Pivovarov [98], ο οποίος ασχολήθηκε με την περίπτωση ανεξάρτητων σημείων κατανεμημένων με βάση το Γκαουσιανό μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στην Ευκλείδεια σφαίρα. Επιπλέον, ο Pivovarov ασχολήθηκε με το δυϊκό πλαίσιο, όπου τυχαία πολύτοπα παράγονται ως τομή τυχαίων ημίχωρων, ως προς τα ίδια μέτρα πιθανότητας. Τονίζουμε πως οι συγγραφείς στα [51] και [98] αξιοποιούν τη μέθοδο του [46], η οποία λόγω της γεωμετρικής της οπτικής, φαίνεται εφαρμόσιμη για μια μεγάλη ποικιλία κατανομών πιθανότητας.

Έστω N και n φυσικοί, $N > n$, και $X_1, X_2, \dots, X_N$ ανεξάρτητα και ισοκατανεμημένα τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια νόρμα $\|\cdot\|_2$ και την αντίστοιχη κλειστή μοναδιαία μπάλα B_2^n. Στο κεφάλαιο αυτό καταπιανόμαστε με τα ακόλουθα μοντέλα κατανομής πιθανότητας.

(α′) Το *Βήτα*-μοντέλο, με παράμετρο $\beta > -1$: το X_1 έχει πυκνότητα ανάλογη με την
$$(1 - \|x\|_2^2)^\beta, \quad x \in \mathrm{B}_2^n.$$
Εστιάζουμε το ενδιαφέρον μας στο τυχαίο πολύτοπο
$$P_{N,n}^\beta := \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}.$$

(β′) Το *Βήτα′*-μοντέλο, με παραμέτρους $\beta > n/2$ και $\sigma > 0$: το X_1 έχει πυκνότητα ανάλογη με την
$$\left(1 + \frac{\|x\|_2^2}{\sigma^2}\right)^{-\beta}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$
Όπως πριν, θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο
$$\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma} := \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}.$$

Πρόσφατα, η γεωμετρία συνόλων που προκύπτουν από αυτά τα μοντέλα τυχαιότητας, στις υψηλές διαστάσεις, έχει μελετηθεί εκτενώς: για παράδειγμα, παραπέμπουμε σε εργασίες που αφορούν τον όγκο [57], τον αριθμό των εδρών [31] ή τους intrinsic volumes [63]. Ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τον μέσο όγκο του πολυτόπου $P_{N,n}^\beta$, καθώς $N \to \infty$, έχουν δοθεί από τον Affentranger [15] για κάθε σταθερή διάσταση n και παράμετρο β. Σημειώνουμε επίσης ότι η γνωμονική προβολή ενός ομοιόμορφα κατανεμημένου σημείου στο ημισφαίριο ακολουθεί τη Βήτα κατανομή, γεγονός που χρησιμοποιείται στα [31] και [64].

Σε αυτό το κεφάλαιο, αποδεικνύουμε μια συμπεριφορά κατωφλίου για τον όγκο και τους intrinsic volumes του $P_{N,n}^\beta$ και το περιεχόμενο του $\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}$ ως προς ένα γενικό λογαριθμικό κοίλο, ισοτροπικό μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, καθώς η διάσταση n τείνει στο άπειρο. Συγκεκριμένα, ένα συμπέρασμα που προκύπτει είναι ότι το πολύτοπο $P_{N,n}^\beta$ τείνει να καταλάβει το σύνολο του όγκου της B_2^n μόνο εφ′ όσον το πλήθος των κορυφών N είναι υπέρ-εκθετικό ως προς n.

Θεώρημα 6.1.1 (Threshold για Βήτα πολύτοπα). *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$ και έστω $-1 < \beta = \beta(n)$ και $N = N(n)$. Τότε,*
$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^\beta)}{\mathrm{vol}_n(\mathrm{B}_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((1-\varepsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log n\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((1+\varepsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log n\right). \end{cases}$$

Παρ' ότι το Θεώρημα 6.1.1 θα μπορούσε να διατυπωθεί αντικαθιστώντας τον όρο $\beta+(n+1)/2$ από $\beta+n/2$, προτιμούμε την παραπάνω γραφή γιατί η συνθήκη «σταθερό ϵ» μπορεί στην πραγματικότητα να αντικατασταθεί από την «$\varepsilon = \varepsilon(n)$, όπου $\varepsilon(n) \to 0^+$ *αρκετά αργά*», και αυτό θα έκανε τους προαναφερθέντες όρους μη εναλλάξιμους. Αναλύουμε τις λεπτομέρειες σχετικά με την επιτρεπτή ταχύτητα με την οποία μπορούμε να έχουμε $\varepsilon(n) \to 0$ στην Παρατήρηση 6.3.6.

Μια ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 6.1.1 παρουσιάζει ενδιαφέρον. Από τον ίδιο τον ορισμό της (βλ. Παράγραφο 6.2.1 παρακάτω), η Βήτα κατανομή για $\beta = 0$ συμπίπτει με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Το ακόλουθο είναι λοιπόν ένα άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 6.1.1.

Πόρισμα 6.1.2. *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$ και έστω $N = N(n)$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων. Έστω $X_1, \dots, X_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στη B_2^n και έστω $B_{N,n} := \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(B_{N,n})}{\mathrm{vol}_n(\mathrm{B}_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((1-\varepsilon)\left(\frac{n+1}{2}\right)\log n\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((1+\varepsilon)\left(\frac{n+1}{2}\right)\log n\right). \end{cases}$$

Επιπλέον, δεδομένου ότι η ομοιόμορφη κατανομή στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} προκύπτει σαν το ασθενές όριο της Βήτα κατανομής, καθώς το $\beta \to -1$ (βλ. για παράδειγμα την απόδειξη του Θεωρήματος 2.7 στο [57]), το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.4 του [98] μπορεί επίσης να ληφθεί σαν πόρισμα του Θεωρήματος 6.1.1.

Πόρισμα 6.1.3. *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$ και έστω $N = N(n)$ μια ακολουθία θετικών ακεραίων. Έστω $X_1, \dots, X_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στην S^{n-1} και έστω $S_{N,n} := \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(S_{N,n})}{\mathrm{vol}_n(\mathrm{B}_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((1-\varepsilon)\left(\frac{n-1}{2}\right)\log n\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((1+\varepsilon)\left(\frac{n-1}{2}\right)\log n\right). \end{cases}$$

Παρόμοια αποτελέσματα μπορούν επίσης να δειχθούν για τους intrinsic volumes του $P_{N,n}^{\beta}$. Όπως επισημάνθηκε στο [63], ο αναμενόμενος k-στός intrinsic volume του $P_{N,n}^{\beta}$ συνδέεται απ' ευθείας με τον αναμενόμενο k-διάστατο όγκο του $P_{N,k}^{\alpha}$ για κάποια διαφορετική παράμετρο α που εξαρτάται από τις β, k και n. Λόγω αυτού, το Θεώρημα 6.1.1 μπορεί να εφαρμοστεί για να αποδειχθούν ανάλογα φαινόμενα κατωφλίου για τους intrinsic volumes $V_k(P_{N,n}^{\beta})$, $k \in \{1, \dots, n\}$, για διάφορες τιμές του $k = k(n)$.

Από την άλλη, η περίπτωση όπου το k είναι ένας σταθερός ακέραιος είναι ανεξαρτήτου ενδιαφέροντος, καθώς ανάγεται στη μελέτη της συμπεριφοράς του $\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^{\beta})$ καθώς $\beta \to \infty$, με τη διάσταση n να μένει σταθερή. Δείχνουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 6.1.4 (Threshold για τους intrinsic volumes Βήτα πολυτόπων)**.** *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$ και $k \in \mathbb{N}$, και έστω $-1 < \beta = \beta(n)$ και $N = N(n)$ δύο ακολουθίες από πραγματικους και φυσικους αριθμους, αντίστοιχα. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,V_k(P_{N,n}^{\beta})}{V_k(B_2^n)} = \begin{cases} 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left(\exp\left((1+\varepsilon)\log\left(\beta + \frac{n-k}{2}\right)\right)\right) \\ 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left(\exp\left((1-\varepsilon)\log\left(\beta + \frac{n-k}{2}\right)\right)\right). \end{cases}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.4, καθώς και μια γενική συζήτηση σχετικά με φαινόμενα κατωφλίου για τους intrinsic volumes του $P_{N,n}^{\beta}$ είναι το περιεχόμενο της Παραγράφου 6.3.3.

Στη συνέχεια καταπιανόμαστε με την περίπτωση της Βήτα$'$ κατανομής. Καθώς εδώ το υποκείμενο μέτρο δεν έχει συμπαγή φορέα, ακολουθώντας την ιδέα του [99], αντικαθιστούμε τον ρόλο του κανονικοποιημένου όγκου στη μπάλα με ένα τυχόν ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $a \ll b$ αν $\frac{a}{b} \to 0$ καθώς $n \to \infty$.

Θεώρημα 6.1.5 (Threshold για τα Βήτα$'$ πολύτοπα)**.** *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1)$. Έστω $\mu = \mu_n$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $\sigma = \sigma(n) > 0$ και $\beta = \beta(n)$ ακολουθίες πραγματικών αριθμών, και $N = N(n)$ ακολουθία φυσικών. Έστω $\beta - \frac{n}{2} \gg \log n$.*

(α) *Αν $\frac{n}{\sigma^2} \ll \frac{1}{\beta - \frac{n}{2}}$ και $N \geq 3n \log n$, τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, \mu(\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}) = 1.$$

(β) *Αν $\frac{1}{\beta - \frac{n}{2}} \ll \frac{n}{\sigma^2} \ll \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{n}{2}}}$, τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, \mu(\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((1-\varepsilon)\frac{n}{\sigma^2}(\beta - \frac{n}{2})\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((1+\varepsilon)\frac{n}{\sigma^2}(\beta - \frac{n}{2})\right). \end{cases}$$

(γ) *Αν $\frac{n}{\sigma^2} \to \infty$ και $\sigma > e^{-\frac{n}{3}}$ (συγκεκριμένα αυτό ισχύει για $\sigma \equiv 1$), τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, \mu(\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((\beta - \frac{n}{2})\log\left((1-\varepsilon)\frac{n}{\sigma^2}\right)\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((\beta - \frac{n}{2})\log\left((1+\varepsilon)\frac{n}{\sigma^2}\right)\right). \end{cases}$$

Καθώς οι πυκνότητες μιας ακολουθίας Βήτα$'$ κατανομών με παραμέτρους $\sigma^2 = 2\beta \to \infty$ συγκλίνουν στην πυκνότητα της τυπικής πολυδιάστατης Γκαουσιανής κατανομής, από το παραπάνω θεώρημα παίρνουμε σαν πόρισμα το αποτέλεσμα του Pivovarov για τα Γκαουσιανά πολύτοπα. Διατυπώνουμε το αποτέλεσμα αυτό με τρόπο ώστε να φαίνεται πιο ξεκάθαρα η απαιτούμενη τάξη μεγέθους του πλήθους των κορυφών N, ως προς τη διάσταση n, σε σχέση με το Θεώρημα 2.2.1 στο [99]. Για ένα σχετικό αποτέλεσμα όπου τον ρόλο των λογαριθμικά κοίλων ισοτροπικών μέτρων έχει ο λόγος όγκων των τομών του Γκαουσιανού πολύτοπου με μπάλες κατάλληλης ακτίνας, βλ. το Θεώρημα 2.1 στο [98].

Πόρισμα 6.1.6. *Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0, 1/2)$. Έστω $\mu = \mu_n$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $N = N(n)$ μια ακολουθία φυσικών. Έστω $X_1, \ldots, X_N$ ανεξάρτητα σημεία, κατανεμημένα σύμφωνα με την τυπική Γκαουσιανή κατανομή στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $G_{N,n} \coloneqq \mathrm{conv}\{X_1, \ldots, X_N\}$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\, \mu(G_{N,n}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\left((\frac{1}{2} - \varepsilon)n\right) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\left((\frac{1}{2} + \varepsilon)n\right). \end{cases}$$

Οι αποδείξεις των παραπάνω βρίσκονται στην Παράγραφο 6.3. Τονίζουμε ότι σε ολα τα Θεωρήματα 6.1.1, 6.1.4 και 6.1.5, η παράμετρος β είναι ελεύθερη να μεταβάλλεται, σαν συνάρτηση της διάστασης n.

Τέλος, στο πνεύμα του [98], ασχολούμαστε επιπλέον με το δυϊκό πλαίσιο, αποδεικνύοντας ανάλογα αποτελέσματα για πολύτοπα που παράγονται από την τομή τυχαίων ημίχωρων. Πιο συγκεκριμένα, δεδομένων $X_1, \dots, X_N$ που επιλέγονται ανεξάρτητα, σύμφωνα με τη Βήτα ή τη Βήτα′ κατανομή, θεωρούμε τα πολύτοπα που προκύπτουν από την τομή των ημίχωρων

$$\{x \in \mathbb{R}^n : \langle X_i, x\rangle \leqslant a\}, \quad i = 1, \dots, N,$$

για κατάλληλο $a > 0$. Οι ακριβείς διατυπώσεις και αποδείξεις των αποτελεσμάτων αυτών βρίσκονται στην καταληκτική Παράγραφο 6.4.

6.2 Συμβολισμός και βοηθητικες εκτιμήσεις

Δεδομένων δύο ακολουθιών θετικών πραγματικών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $a_n \ll b_n$ αν $a_n = o(b_n)$, εννοώντας ότι $a_n/b_n \to 0$, καθώς $n \to \infty$. Αναλόγως, γράφουμε $a_n \gg b_n$ εννοώντας ότι $a_n/b_n \to +\infty$, καθώς $n \to \infty$. Επιπλέον, γράφουμε $a_n \sim b_n$, αν $a_n/b_n \to 1$, καθώς $n \to \infty$.

6.2.1 Οι κατανομές Βήτα και Βήτα′

Όπως αναφέραμε, στο κεφάλαιο αυτό εστιάζουμε σε δύο συγκεκριμένες οικογένειες κατανομών πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τις λεγόμενες Βήτα και Βήτα′. Για να ορίσουμε την Βήτα κατανομή, θέτουμε

$$c_{n,\beta} := \pi^{-n/2}\frac{\Gamma\left(\beta + \frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(\beta+1)}, \quad \beta > -1,\, n \in \mathbb{N},$$

και ορίζουμε ν_β να ειναι το μέτρο πιθανότητας με φορέα την B_2^n, και συνάρτηση πυκνότητας

$$p_{n,\beta}(x) := c_{n,\beta}(1 - \|x\|_2^2)^\beta, \quad x \in B_2^n.$$

Η μονοδιάστατη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του ν_β είναι η

$$f_\beta(t) := \alpha_{n,\beta}(1-t^2)^{\beta + \frac{n-1}{2}}, \qquad t \in [-1, 1],$$

όπου

$$\alpha_{n,\beta} := \frac{c_{n,\beta}}{c_{n-1,\beta}} = \pi^{-1/2}\frac{\Gamma\left(\beta + \frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma\left(\beta + \frac{n+1}{2}\right)}.$$

Τέλος, για $d \in [0, 1]$, θέτουμε

$$\mathrm{B}(d) := \int_d^1 f_\beta(t)\,\mathrm{d}t.$$

Για την Βήτα′ κατανομή, ορίζουμε

$$\tilde{c}_{n,\beta,\sigma} := \sigma^{-n}\pi^{-n/2}\frac{\Gamma(\beta)}{\Gamma(\beta - \frac{n}{2})}, \qquad \beta > \frac{n}{2}, \quad \sigma > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

και έστω $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$ το μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα

$$\tilde{p}_{n,\beta,\sigma}(x) := \tilde{c}_{n,\beta,\sigma}\left(1+\frac{\|x\|_2^2}{\sigma^2}\right)^{-\beta}, \qquad x\in\mathbb{R}^n.$$

Έστω επιπλέον

$$\tilde{\alpha}_{n,\beta,\sigma} := \frac{\tilde{c}_{n,\beta,\sigma}}{\tilde{c}_{n-1,\beta,\sigma}} = \sigma^{-1}\pi^{-1/2}\frac{\Gamma(\beta-\frac{n-1}{2})}{\Gamma(\beta-\frac{n}{2})},$$

οπότε η

$$\tilde{f}_{\beta,\sigma}(t) := \tilde{\alpha}_{n,\beta,\sigma}(1+t^2)^{-\beta+\frac{n-1}{2}}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

είναι η αντίστοιχη μονοδιάστατη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$. Ανάλογα με τη Βήτα περίπτωση, για $d\in[0,\infty)$, θέτουμε

$$\tilde{\mathrm{B}}(d) := \int_d^\infty \tilde{f}_{\beta,\sigma}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Εκτιμήσεις για την ασυμπτωτική συμπεριφορά των συναρτήσεων κατανομής των μέτρων ν_β και $\tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$, συγκεκριμένα για τις συναρτήσεις B και $\tilde{\mathrm{B}}$ που ορίστηκαν παραπάνω, έχουν ένα κεντρικό ρόλο στα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Ξεκινάμε με ένα φράγμα για τον λόγο συναρτήσεων Γάμμα, που δεν είναι παρά μια ειδική περίπτωση της ανισότητας του Wendel (βλ. π.χ. τη σχέση (7) στο [109]), αλλά συναντάται σε αυτή περίπου τη μορφή ήδη στο [1].

Λήμμα 6.2.1. *Για κάθε $x>1$,*

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}.$$

Η παραπάνω ανισότητα θα χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη των ακόλουθων φραγμάτων για τη συνάρτηση κατανομής B.

Λήμμα 6.2.2. *Έστω $d\in(0,1)$. Τότε,*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1-d^2)^{\beta+\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}} \leqslant \mathrm{B}(d) \leqslant \frac{1}{2d\sqrt{\pi}}\frac{(1-d^2)^{\beta+\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}}}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $s=1-t^2$, γράφουμε

$$\mathrm{B}(d) = \alpha_{n,\beta}\int_d^1 (1-t^2)^{\beta+\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\alpha_{n,\beta}\int_0^{1-d^2} s^{\beta+\frac{n-1}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s.$$

Παρατηρήστε ότι, αφού $s\in(0,1-d^2)$, έχουμε $(1-s)^{-1/2}\in(1,d^{-1})$, οπότε

$$\frac{\alpha_{n,\beta}}{2}\int_0^{1-d^2} s^{\beta+\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}s < \mathrm{B}(d) < \frac{\alpha_{n,\beta}}{2d}\int_0^{1-d^2} s^{\beta+\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}s.$$

Το γεγονός ότι

$$\frac{\alpha_{n,\beta}}{\beta+\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\Gamma(\beta+\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\beta+\frac{n}{2}+\frac{3}{2})},$$

μαζί με το Λήμμα 6.2.1, συμπληρώνουν τότε την απόδειξη. □

Παρατήρηση 6.2.3. Σημειώνουμε ότι μια κατάλληλη προσαρμογή της παραπάνω απόδειξης, δίνει παρόμοιες εκτιμήσεις για την $\tilde{\mathrm{B}}$ αν η παράμετρος σ είναι μια απόλυτη σταθερά. Για παράδειγμα αν $\sigma = 1$, έχουμε

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1+d^2)^{-\beta+\frac{n}{2}}}{\sqrt{\beta-\frac{n-1}{2}}} < \tilde{\mathrm{B}}(d) < \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{(1+d^2)^{-\beta+\frac{n}{2}}}{\sqrt{\beta-\frac{n+1}{2}}} \tag{6.2.1}$$

για κάθε $d > 1$. Ωστόσο, στη γενική περίπτωση κατά την οποία η παράμετρος σ μπορεί να μεταβάλλεται με το β ή το n, θα δειξουμε ότι η ασυμπτωτική συμπεριφορά της $\tilde{\mathrm{B}}$ ως προς σ, β και n στην πραγματικότητα εξαρτάται από το μέγεθος της ποσότητας n/σ^2. Το γεγονός αυτό έχει ως αποτέλεσμα τις διάφορες περιπτώσεις στη διατύπωση του Θεωρήματος 6.1.5.

Για την περίπτωση της συνάρτησης κατανομής $\tilde{\mathrm{B}}$ για αυθαίρετο $\sigma > 0$, θα χρησιμοποιήσουμε λοιπόν ένα διαφορετικό επιχείρημα. Παρατηρήστε αρχικά ότι με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, μπορούμε να γράψουμε

$$\tilde{\mathrm{B}}(d) = \frac{\tilde{\alpha}_{n,\beta,\sigma}}{\sqrt{2b_n}}\int_{a_n}^{\infty}\left(1+\frac{s^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}s, \quad b_n = \beta - \frac{n-1}{2} \text{ και } a_n = d\frac{\sqrt{2b_n}}{\sigma}. \tag{6.2.2}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι $\frac{\tilde{\alpha}_{n,\beta,\sigma}}{\sqrt{2b_n}} \to \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ όταν $b_n \to \infty$. Οι εκτιμήσεις για την $\tilde{\mathrm{B}}(d)$ που θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5 βασίζονται στην έκφραση (6.2.2) και το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 6.2.4. *Έστω $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δύο ακολουθίες τέτοιες ώστε $a_n \geq 0$ και $\frac{1}{2} < b_n \to \infty$.*

(α′) *Αν $\frac{a_n^4}{b_n} \to 0$, τότε,*

$$\int_{a_n}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t \sim \int_{a_n}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.$$

Αν επιπλέον $a_n \to \infty$, τότε,

$$\int_{a_n}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-\frac{a_n^2}{2}}}{a_n}.$$

(β′) *Αν $\frac{a_n^2}{b_n} \to \infty$, τότε,*

$$\int_{a_n}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t \sim \frac{1}{\sqrt{2b_n}}\left(1+\frac{a_n^2}{2b_n}\right)^{-(b_n-\frac{1}{2})}.$$

Το βασικό στοιχείο για την απόδειξη του Λήμματος 6.2.4 είναι η μέθοδος του Laplace. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο Θεώρημα 1.1 του [14] για μια γενικότερη εκδοχή του παρακάτω Λήμματος.

Λήμμα 6.2.5 (Μέθοδος Laplace, ειδική περίπτωση)**.** *Έστω $h\colon [a,\infty) \to \mathbb{R}$ μια γνησίως αύξουσα και διαφορίσιμη συνάρτηση. Τότε, καθώς $\lambda \to \infty$,*

$$\int_a^{\infty} e^{-\lambda h(t)}\,\mathrm{d}t \sim \frac{e^{-\lambda h(a)}}{\lambda h'(a)}.$$

Απόδειξη του Λήμματος 6.2.4. Ξεκινάμε κάνοντας κάποιες βοηθητικές εκτιμήσεις. Η ανισότητα $x - \frac{x^2}{2} \leqslant \log(1+x) \leqslant x$ δίνει ότι

$$1 \leqslant \frac{\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}}{e^{-\frac{t^2}{2}}} = \exp\left(-b_n \log\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right) + \frac{t^2}{2}\right) \leqslant e^{\frac{t^4}{8b_n}}.$$

Οπότε, για κάθε ζεύγος ακολουθιών $0 \leqslant c_n < d_n$, έχουμε

$$\int_{c_n}^{d_n} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t \leqslant \int_{c_n}^{d_n} \left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n} \mathrm{d}t \leqslant e^{\frac{d_n^4}{8b_n}} \int_{c_n}^{d_n} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t,$$

και συγκεκριμένα

$$\frac{d_n^4}{b_n} \to 0 \;\Rightarrow\; \int_{c_n}^{d_n} \left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n} \mathrm{d}t \sim \int_{c_n}^{d_n} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t. \tag{6.2.3}$$

Αν επιπλέον $c_n \to \infty$, μπορούμε να πάρουμε μια πιο ξεκάθαρη εκτίμηση, χρησιμοποιώντας μια αλλαγή μεταβλητής και το Λήμμα 6.2.5, συγκεκριμένα

$$\frac{d_n^4}{b_n} \to 0 \text{ και } c_n \to \infty \;\Rightarrow\; \int_{c_n}^{d_n} \left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n} \mathrm{d}t \sim \frac{e^{-\frac{c_n^2}{2}}}{c_n} - \frac{e^{-\frac{d_n^2}{2}}}{d_n}. \tag{6.2.4}$$

Καθώς, για κάθε t, η απεικόνιση $(\frac{1}{2},\infty) \ni b \mapsto \left(1+\frac{t^2}{2b}\right)^{-b}$ είναι φθίνουσα, έχουμε ότι για κάθε ακολουθία $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $\frac{1}{2} < c_n^2 < b_n$,

$$\begin{aligned}\int_{c_n}^{\infty} \left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n} \mathrm{d}t &\leqslant \int_{c_n}^{\infty} \left(1+\frac{t^2}{2c_n^2}\right)^{-c_n^2} \mathrm{d}t \\ &= \sqrt{2}c_n \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \left(1+s^2\right)^{-c_n^2} \mathrm{d}s \\ &= \sqrt{2}c_n \int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \exp\left(-c_n^2 \log(1+s^2)\right) \mathrm{d}s.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 6.2.5, έπεται τότε ότι για $c_n \to \infty$,

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\infty} \exp\left(-c_n^2 \log(1+s^2)\right) \mathrm{d}s \sim \frac{\exp\left(-c_n^2 \log(\frac{5}{4})\right)}{c_n^2}$$

Συγκεκριμένα,

$$b_n > c_n^2 \text{ και } c_n \to \infty \Longrightarrow \int_{c_n}^{\infty} \left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n} \mathrm{d}t = o\left(e^{-c_n^2 \log(\frac{5}{4})}\right). \tag{6.2.5}$$

Έχουμε πλέον κάνει τα απαραίτητα βήματα για να δειξουμε το Λήμμα 6.2.4 (α), αλλά θα χρειαστεί να ξεχωρίσουμε την περίπτωση $a_n \to \infty$ από την περίπτωση η a_n να είναι φραγμένη.

Ας υποθέσουμε αρχικά ότι η a_n είναι φραγμένη. Έστω $c_n > a_n$ μια ακολουθία τέτοια ώστε $\frac{c_n^4}{b_n} \to 0$ και $c_n \to \infty$. Χωρίζοντας το ολοκληρωμα σε δύο μέρη, και εφαρμόζοντας την (6.2.3) για τις a_n και c_n, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t &= \int_{a_n}^{c_n}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t+\int_{c_n}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t\\ &\sim \int_{a_n}^{c_n} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t+o(1)\\ &\sim \int_{a_n}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\,\mathrm{d}t.\end{aligned}$$

Έστω τώρα ότι $a_n\to\infty$. Χωρίζουμε και πάλι το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη, και χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις (6.2.4) με $c_n=a_n$ και $d_n=2a_n$, και (6.2.5) με $c_n=2a_n$. Αυτό δίνει

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t &= \int_{a_n}^{2a_n}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t+\int_{2a_n}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t\\ &\sim \frac{e^{-\frac{a_n^2}{2}}}{a_n}-\frac{e^{-2a_n^2}}{2a_n}+o\left(e^{-4a_n^2\log(\frac{5}{4})}\right)\\ &\sim \frac{e^{-\frac{a_n^2}{2}}}{a_n}.\end{aligned}$$

Για να δείξουμε το σκέλος (β) του Λήμματος 6.2.4, παρατηρούμε ότι η αλλαγή μεταβλητής $s=(1+\frac{t^2}{2b_n})^{-1}$ δίνει

$$\int_{a_n}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t=\sqrt{\frac{b_n}{2}}\int_0^{\left(1+\frac{a_n^2}{2b_n}\right)^{-1}} s^{b_n-\frac{3}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s.$$

Όμως, καθώς η $(0,1)\ni s\mapsto(1-s)^{-\frac{1}{2}}$ είναι αύξουσα, έχουμε

$$1\leqslant\frac{\sqrt{\frac{b_n}{2}}\int_0^{\left(1+\frac{a_n^2}{2b_n}\right)^{-1}} s^{b_n-\frac{3}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s}{\sqrt{\frac{b_n}{2}}\int_0^{\left(1+\frac{a_n^2}{2b_n}\right)^{-1}} s^{b_n-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}s}\leqslant\left(1-\left(1+\frac{a_n^2}{2b_n}\right)^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Παρατηρήστε ότι το δεξί μέλος παραπάνω τείνει στο 1, επειδή $\frac{a_n^2}{b_n}\to\infty$. Άρα, από τις δύο τελευταίες σχέσεις έπεται η ισοδυναμία

$$\begin{aligned}\int_{a_n}^{\infty}\left(1+\frac{t^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}t &\sim \sqrt{\frac{b_n}{2}}\int_0^{\left(1+\frac{a_n^2}{2b_n}\right)^{-1}} s^{b_n-\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}s\\ &\sim \frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{2}(b_n-\frac{1}{2})}\left(1+\frac{a_n^2}{2b_n}\right)^{-(b_n-\frac{1}{2})}\\ &\sim \frac{1}{\sqrt{2b_n}}\left(1+\frac{a_n^2}{2b_n}\right)^{-(b_n-\frac{1}{2})},\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

6.2.2 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω κάποιες γνωστές ιδιότητες συγκέντρωσης των ισοτροπικών, λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Απαντώντας σε ένα κεντρικό πρόβλημα στην ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία (βλ. [16]), ο Klartag [66, Θεώρημα 1.4] έδειξε ότι ένα ισοτροπικό και λογαριθμικά κοίλο μέτρο συγκεντρώνεται στην ουσία σε ένα «λεπτό σφαιρικό δαχτυλίδι» γύρω από την Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας $\sqrt{n}$. Συγκεκριμένα, το αποτέλεσμα μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα 6.2.6 (Thin shell concentration)**.** *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\epsilon \in (0,1)$,*

$$\mu\big(\{x \in \mathbb{R}^n : \big|\|x\| - \sqrt{n}\big| \geqslant \epsilon\sqrt{n}\}\big) \leqslant Cn^{-c\epsilon^2}, \tag{6.2.6}$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c, C > 0$.

Αποτελέσματα αυτού του τύπου έχουν στενή σύνδεση με την εικασία του λεπτού δακτυλίου, που ρωτά αν η ποσότητα $\mathbb{E}\big(\|X\| - \sqrt{n}\big)^2$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη από μια σταθερά ανεξάρτητη της διάστασης, για κάθε τυχαίο διάνυσμα X που ακολουθεί μια ισοτροπική και λογαριθμικά κοίλη κατανομή πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την ιστορία αυτού του προβλήματος, πρόσφατες βελτιώσεις του Θεωρήματος 6.2.6, καθώς επίσης και τη γενική θεωρία των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας, μπορεί κανείς να ανατρέξει στη μονογραφία [3].

6.3 Κυρτές θήκες τυχαίων σημείων

Υπενθυμίζουμε ότι με $P_{N,n}^{\beta}$ και $\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}$ συμβολίζουμε τις κυρτές θήκες $N > n$ ανεξάρτητων τυχαίων σημείων στον $\mathbb{R}^n$, κατανεμημένων σύμφωνα με τη Βήτα κατανομή με παράμετρο β και τη Βήτα′ κατανομή με παραμέτρους β και σ, αντίστοιχα.

6.3.1 Προπαρασκευαστικά Λήμματα

Οι αποδείξεις των Θεωρημάτων 6.1.1 και 6.1.5 ακολουθούν τη μέθοδο που εισήχθη στο [46] και χρησιμοποιήθηκε επίσης στο [98]. Ορίζουμε λοιπόν, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, τα συναρτησοειδή

$$q(x) := \inf\{\mathbb{P}(X \in H) : H \text{ ημίχωρος που περιέχει το } x\},$$

όταν $X \sim \nu_\beta$, και

$$\tilde{q}(x) := \inf\{\mathbb{P}(X \in H) : H \text{ ημίχωρος που περιέχει το } x\},$$

όταν $X \sim \tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$. Το επόμενο Λήμμα εξασφαλίζει έναν τρόπο υπολογισμού των $q(x)$ και $\tilde{q}(x)$ συναρτήσει του Ευκλείδειου μήκους του $x \in \mathbb{R}^n$.

Λήμμα 6.3.1. *Έστω H ημίχωρος σε απόσταση $d \geqslant 0$ από την αρχή των αξόνων. Τότε,*

(α) $\mathbb{P}(X \in H) = \mathrm{B}(d)$, *όταν* $X \sim \nu_\beta$,

(β) $\mathbb{P}(X \in H) = \tilde{\mathrm{B}}(d)$, *όταν* $X \sim \tilde{\nu}_{\beta,\sigma}$.

Απόδειξη. Δείχνουμε το Λήμμα μόνο για την περίπτωση (α), καθώς η (β) δείχνεται ανάλογα. Χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο ως προς στροφές του μέτρου ν_β, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1 \geq d\}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \in H) = \nu_\beta(H) &= \int_H p_{n,\beta}(x)\,\mathrm{d}x = c_{n,\beta} \int_H (1 - \|x\|_2^2)^\beta\,\mathrm{d}x \\
&= c_{n,\beta} \int_d^1 \int_{B_2^{n-1}} (1 - \|x\|_2^2)^\beta\,\mathrm{d}(x_2, \dots, x_n)\,\mathrm{d}x_1 \\
&= c_{n,\beta} \int_d^1 \int_{B_2^{n-1}} (1 - t^2)^\beta \left(1 - \frac{\|y\|_2^2}{1 - t^2}\right)^\beta \mathrm{d}y\,\mathrm{d}t \\
&= c_{n,\beta} \int_d^1 (1 - t^2)^\beta \int_{B_2^{n-1}} (1 - \|z\|_2^2)^\beta (1 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \\
&= \alpha_{n,\beta} \int_d^1 (1 - t^2)^{\beta + \frac{n-1}{2}} \int_{B_2^{n-1}} p_{n-1,\beta}(z)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}t \\
&= \int_d^1 f_\beta(t)\,\mathrm{d}t = \mathrm{B}(d),
\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 6.3.2. *Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,*

(α) $q(x) = \mathrm{B}(\|x\|_2)$,

(β) $\tilde{q}(x) = \tilde{\mathrm{B}}(\|x\|_2)$.

Απόδειξη. Όπως πριν, δείχνουμε μόνο το σκέλος (α). Παρατηρήστε ότι $q(0) = 1/2 = \mathrm{B}(0)$. Αν $x \neq 0$, έστω $H(x)$ ο ημίχωρος που φράσσεται από το υπερεπίπεδο που εφάπτεται της $\|x\| B_2^n$ στο σημείο x, και δεν περιέχει το 0. Τότε, από το Λήμμα 6.3.1 (α), έχουμε

$$\mathrm{B}(\|x\|_2) = \mathbb{P}(X \in H(x)) \geq q(x).$$

Αντίστροφα, έστω H ένας ημίχωρος σε απόσταση d από την αρχή των αξόνων, τέτοιος ώστε $x \in H$. Αν $d = 0$, τότε, $\mathbb{P}(X \in H) \geq 1/2 \geq \mathrm{B}(\|x\|_2)$. Αν $d > 0$, τότε, πάλι από το Λήμμα 6.3.1 (α), έχουμε $\mathbb{P}(X \in H) = \mathrm{B}(d) \geq \mathrm{B}(\|x\|_2)$, καθώς $d \leqslant \|x\|_2$. Έπεται ότι $q(x) \geq \mathrm{B}(\|x\|_2)$. □

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 6.3.2, μπορούμε τώρα να συνδέσουμε το μέγεθος των τυχαίων πολυτόπων $P_{N,n}^\beta$ και $\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}$ με τις συναρτήσεις κατανομής B και $\tilde{\mathrm{B}}$, αντίστοιχα. Φράσσουμε, συγκεκριμένα, από πάνω τον αναμενόμενο όγκο του $P_{N,n}^\beta$ ως προς τη B (και όμοια για το $\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}$).

Λήμμα 6.3.3. *Έστω A ένα φραγμένο, μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Στο Βήτα μοντέλο,*

$$\mathbb{P}(A \subseteq P_{N,n}^\beta) \leqslant \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^\beta \cap A)}{\mathrm{vol}_n(A)} \leqslant N \sup_{x \in A} \mathrm{B}(\|x\|_2).$$

(β) *Στο Βήτα′ μοντέλο,*

$$\mu(A)\,\mathbb{P}(A \subseteq \tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}) \leqslant \mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n} \cap A) \leqslant N\mu(A) \sup_{x\in A} \tilde{\mathrm{B}}(\|x\|_2),$$

όπου μ είναι οποιοδήποτε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε $x \in P^{\beta}_{N,n} = \mathrm{conv}\{X_1, \ldots, X_N\}$ και κάθε ημίχωρο H που περιέχει το x, υπάρχει κάποιος $i = 1, \ldots, N$ ώστε $X_i \in H$. Έπεται έτσι ο ακόλουθος εγκλεισμός ενδεχομένων:

$$\{x \in P^{\beta}_{N,n}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \{X_i \in H\}.$$

Καθώς το παραπάνω ισχύει για κάθε ημίχωρο H που περιέχει το x, από την υποπροσθετικότητα του μέτρου και το Πόρισμα 6.3.2 (α), παίρνουμε

$$\mathbb{P}(x \in P^{\beta}_{N,n}) \leqslant Nq(x) = N\mathrm{B}(\|x\|_2).$$

Χρησιμοποιώντας τώρα την τελευταία εκτίμηση,

$$\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P^{\beta}_{N,n} \cap A) = \mathbb{E} \int_A \mathbb{1}_{P^{\beta}_{N,n}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_A \mathbb{P}(x \in P^{\beta}_{N,n})\,\mathrm{d}x \leqslant N\mathrm{vol}_n(A) \sup_{x\in A} \mathrm{B}(\|x\|_2).$$

Αυτό δείχνει το άνω φράγμα. Από την άλλη, εφ' όσον το ενδεχόμενο $\{A \subseteq P^{\beta}_{N,n}\}$ συνεπάγεται το $\{\mathrm{vol}_n(A) \leqslant \mathrm{vol}_n(P^{\beta}_{N,n} \cap A)\}$, παίρνουμε, από την ανισότητα του Markov,

$$\mathrm{vol}_n(A)\,\mathbb{P}(A \subseteq P^{\beta}_{N,n}) \leqslant \mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P^{\beta}_{N,n} \cap A),$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη.

(β) Η απόδειξη ακολουθεί τις ίδιες γραμμές με αυτήν του (α), χρησιμοποιώντας τώρα το Πόρισμα 6.3.2 (β) αντί του (α). Όπως παραπάνω, για κάθε ημίχωρο H και κάθε σημείο $x \in H$, έχουμε

$$\{x \in \tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}\} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} \{X_i \in H\}.$$

Πάλι, από την υποπροσθετικότητα του μέτρου και το Πόρισμα 6.3.2 (β), παίρνουμε ότι

$$\mathbb{P}(x \in \tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}) \leqslant N\tilde{q}(x) = N\tilde{\mathrm{B}}(\|x\|_2).$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την εκτίμηση, έχουμε

$$\mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n} \cap A) = \mathbb{E} \int_A \mathbb{1}_{\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}}(x)\,\mu(\mathrm{d}x) = \int_A \mathbb{P}(x \in \tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n})\,\mu(\mathrm{d}x) \leqslant N\mu(A) \sup_{x\in A} \tilde{\mathrm{B}}(\|x\|_2),$$

που δείχνει το άνω φράγμα. Το κάτω φράγμα έπεται και πάλι από την ανισότητα του Markov

$$\mu(A)\,\mathbb{P}(A \subseteq \tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}) \leqslant \mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n} \cap A),$$

και η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Για να δώσουμε ένα κάτω φράγμα για τον όγκο του τυχαίου πολυτόπου, δείχνουμε ότι με μεγάλη πιθανότητα αυτό περιέχει μια σχετικά «μεγάλη» μπάλα. Προσαρμόζουμε για τον σκοπό αυτό, το επιχείρημα του [46] στο δικό μας πλαίσιο.

Λήμμα 6.3.4. (α) *Για κάθε $R \in (0,1)$, ο εγκλεισμός $RB_2^n \subseteq P_{N,n}^{\beta}$ ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2\binom{N}{n}(1-\mathrm{B}(R))^{N-n}$.*

(β) *Για κάθε $R > 0$, ο εγκλεισμός $RB_2^n \subseteq \tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}$ ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2\binom{N}{n}(1-\tilde{\mathrm{B}}(R))^{N-n}$.*

Απόδειξη. Ας δείξουμε το σκέλος (α). Έστω $J \subseteq \{1,\dots,N\}$ με $|J| = n$. Με πιθανότητα ίση με ένα, το σύνολο $\{X_j\}_{j\in J}$ είναι αφφινικά ανεξάρτητο. Έστω H_J το αφφινικό υπερεπίπεδο που ορίζεται από την αφφινική θήκη των $\{X_j\}_{j\in J}$ και H_J^+, H_J^- οι αντίστοιχοι κλειστοί ημίχωροι, που καθορίζονται από το H_J. Επιπλέον, έστω X ένα ακόμη ανεξάρτητο Βήτα-κατανεμημένο τυχαίο σημείο, και ας συμβολίσουμε με E_J το ενδεχόμενο: «Είτε $P_{N,n}^{\beta} \subseteq H_J^+$ και $\mathbb{P}(X \notin H)|_{H=H_J^+} \geqslant \mathrm{B}(R)$, είτε $P_{N,n}^{\beta} \subseteq H_J^-$ και $\mathbb{P}(X \notin H)|_{H=H_J^-} \geqslant \mathrm{B}(R)$» (εδώ, και παρακάτω, με $\mathbb{P}(X\notin H)|_{H=G}$ συμβολίζουμε την αποτίμηση της απεικόνισης $H \mapsto \mathbb{P}(X \notin H)$ στον υπόχωρο $G \subset \mathbb{R}^n$).

Ας υποθέσουμε ότι $RB_2^n \nsubseteq P_{N,n}^{\beta}$, οπότε υπάρχει κάποιο $x_0 \in RB_2^n \setminus P_{N,n}^{\beta}$. Τότε υπάρχει κάποιο $J \subseteq \{1,\dots,N\}$ με $|J| = n$ τέτοιο ώστε είτε $P_{N,n}^{\beta} \subseteq H_J^+$ και $x_0 \in H_J^-$, είτε $P_{N,n}^{\beta} \subseteq H_J^-$ και $x_0 \in H_J^+$. Παρατηρήστε ότι έχουμε $\mathbb{P}(X \notin H)|_{H=H_J^+} \geqslant q(x_0) \geqslant \mathrm{B}(R)$, ή $\mathbb{P}(X \notin H)|_{H=H_J^-} \geqslant q(x_0) \geqslant \mathrm{B}(R)$ αντίστοιχα, αφού $\|x_0\|_2 \leqslant R$. Έπεται ότι

$$\{RB_2^n \nsubseteq P_{N,n}^{\beta}\} \subseteq \bigcup_{\substack{J\subseteq[N]\\ |J|=n}} E_J.$$

Μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα του μέτρου,

$$\mathbb{P}(RB_2^n \nsubseteq P_{N,n}^{\beta}) \leqslant \binom{N}{n}\mathbb{P}(E_{[n]}).$$

Στη συνέχεια, παρατηρήστε ότι αν $\mathbb{P}(X\notin H)|_{H=H_{[n]}^+} \geqslant \mathrm{B}(R)$, τότε $\mathbb{P}(X\in H)|_{H=H_{[n]}^+} \leqslant 1-\mathrm{B}(R)$, και ομοίως για τον $H_{[n]}^-$. Έπεται ότι $\mathbb{P}(E_{[n]} \mid X_1,\dots,X_n) \leqslant 2(1-\mathrm{B}(R))^{N-n}$. Τέλος, έχουμε $\mathbb{P}(E_{[n]}) = \mathbb{E}(\mathbb{P}(E_{[n]} \mid X_1,\dots,X_n)) \leqslant 2(1-\mathrm{B}(R))^{N-n}$, και άρα,

$$\mathbb{P}(RB_2^n \nsubseteq P_{N,n}^{\beta}) \leqslant 2\binom{N}{n}(1-\mathrm{B}(R))^{N-n},$$

που δείχνει το ζητούμενο. Το σκέλος (β) αποδεικνύεται και αυτό ομοίως, όπου τώρα η $\tilde{\mathrm{B}}$ παίζει το ρόλο της B. □

Συγκεντρώνοντας τη δουλειά που έχει γίνει μέχρι αυτό το σημείο, διατυπώνουμε το βασικό Λήμμα για την απόδειξη των Θεωρημάτων 6.1.1 και 6.1.5.

Λήμμα 6.3.5. *Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$.*

(α) *Στο Βήτα μοντέλο,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^{\beta})}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N\mathrm{B}\big(\sqrt{1-n^{-(1-\varepsilon)}}\big) \to 0 \\ 1 & \text{αν } N\mathrm{B}\big(\sqrt{1-n^{-(1+\varepsilon)}}\big) - n\log N \to \infty. \end{cases}$$

(β) *Στο Βήτα′ μοντέλο,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } N\tilde{\mathrm{B}}\big((1-\varepsilon)\sqrt{n}\big) \to 0 \\ 1 & \text{αν } N\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) - n\log N \to \infty. \end{cases}$$

Απόδειξη. (α) Θέτουμε $r_n = \sqrt{1 - n^{-(1-\varepsilon)}}$, $A_n = B_2^n \setminus r_n B_2^n$ και υποθέτουμε ότι $N\mathrm{B}(r_n) \to 0$. Ισχύει ότι $\sup_{x\in A_n} \mathrm{B}(\|x\|_2) \leqslant \mathrm{B}(r_n)$, αφού $\|x\|_2 \geqslant r_n$ για κάθε $x \in A_n$. Αυτό σε συνδυασμό με το Λήμμα 6.3.3 (α), μας δίνει

$$\frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P^\beta_{N,n} \cap A_n)}{\omega_n} \leqslant \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P^\beta_{N,n} \cap A_n)}{\mathrm{vol}_n(A_n)} \leqslant N\mathrm{B}(r_n) \to 0.$$

Παρατηρήστε επίσης ότι $\frac{\mathrm{vol}_n(r_n B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)} = r_n^n \to 0$, οπότε

$$\frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P^\beta_{N,n})}{\omega_n} \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(r_n B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)} + \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P^\beta_{N,n} \cap A_n)}{\omega_n} \to 0.$$

Από την άλλη, θέτουμε $s_n = \sqrt{1 - n^{-(1+\varepsilon)}}$ και υποθέτουμε ότι $N\mathrm{B}(s_n) - n\log N \to \infty$. Από το κάτω φράγμα στο Λήμμα 6.3.3 (α) για $A = s_n B_2^n$ παίρνουμε

$$\frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P^\beta_{N,n})}{\omega_n} \geqslant s_n^n \mathbb{P}(s_n B_2^n \subseteq P^\beta_{N,n}) \sim \mathbb{P}(s_n B_2^n \subseteq P^\beta_{N,n}).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(s_n B_2^n \nsubseteq P^\beta_{N,n}) = 0. \tag{6.3.1}$$

Από το Λήμμα 6.3.4 (α), έχουμε, χρησιμοποιώντας την $\binom{N}{n} \leqslant (eN/n)^n$,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(s_n B_2^n \nsubseteq P^\beta_{N,n}) &\leqslant 2\binom{N}{n}(1 - \mathrm{B}(s_n))^{N-n} \\ &\leqslant 2(eN/n)^n \exp((N-n)\log(1-\mathrm{B}(s_n))) \\ &= 2\exp\big(n\log(eN/n) + (N-n)\log(1-\mathrm{B}(s_n))\big). \end{aligned}$$

Καθώς $\log(1-x) \leqslant -x$, έπεται οτι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(s_n B_2^n \nsubseteq P^\beta_{N,n}) &\leqslant 2\exp\big(n\log(eN/n) - (N-n)\mathrm{B}(s_n)\big) \\ &= 2\exp\big(n\log(N) - N\mathrm{B}(s_n)\big)\exp\Big(n\Big(\log\Big(\frac{e}{n}\Big) + \mathrm{B}(s_n)\Big)\Big). \end{aligned}$$

Αφού, για $n \geq e^2$, έχουμε $\log\big(\frac{e}{n}\big) + \mathrm{B}(s_n) \leqslant 0$, παίρνουμε τότε

$$\mathbb{P}(s_n B_2^n \nsubseteq P^\beta_{N,n}) \leqslant 2\exp\big(n\log(N) - N\mathrm{B}(s_n)\big) \to 0.$$

(β) Θέτουμε $r_n = (1-\varepsilon)\sqrt{n}$, $A_n = \mathbb{R}^n \setminus r_n B_2^n$ και υποθέτουμε ότι $N\tilde{\mathrm{B}}(r_n) \to 0$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.2.6 για το μ, βλέπουμε ότι $\mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n} \cap r_n B_2^n) \to 0$. Από την άλλη, το Λήμμα 6.3.3 (β) μας δίνει

$$\mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n} \cap A_n) \leqslant N \sup_{x\in A_n} \tilde{\mathrm{B}}(\|x\|_2) = N\tilde{\mathrm{B}}(r_n) \to 0,$$

οπότε

$$\mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}) = \mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n} \cap r_n B_2^n) + \mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n} \cap A_n) \to 0.$$

Θέτουμε τώρα $s_n = (1+\varepsilon)\sqrt{n}$ και υποθέτουμε ότι $N\tilde{\mathrm{B}}(s_n) - n\log N \to \infty$. Από το κάτω φράγμα στο Λήμμα 6.3.3 (β) παίρνουμε

$$\mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}) \geqslant \mu(s_n B_2^n)\,\mathbb{P}(s_n B_2^n \subseteq \tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}).$$

Λόγω της συγκέντρωσης του μ (βλ. Θεώρημα 6.2.6) έχουμε $\mathbb{E}\,\mu(s_n B_2^n) \to 1$. Από την άλλη, χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με την περίπτωση (α), μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το φράγμα

$$\mathbb{P}(RB_2^n \nsubseteq \tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}) \leqslant 2\exp\Big(n\log N - N\tilde{\mathrm{B}}(R)\Big) \to 0.$$

Παίρνουμε έτσι

$$1 \geq \mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n}) \geq \mu(s_n B_2^n)(1 - \mathbb{P}(s_n B_2^n \nsubseteq \tilde{P}^{\beta,\sigma}_{N,n})) \to 1,$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

6.3.2 Αποδείξεις για τη Βήτα κατανομή

Με αυτή την προεργασία, προχωράμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1 για τον όγκο των Βήτα πολύτοπων.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1: Θέτουμε $r_n = \sqrt{1 - n^{-(1-\frac{\varepsilon}{2})}}$. Από το Λήμμα 6.2.2 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(r_n) &\leqslant \frac{n^{-(1-\frac{\varepsilon}{2})(\beta+\frac{n+1}{2})}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}}}\\ &= \exp\Big(-\Big(1-\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big(\beta+\frac{n+1}{2}\Big)\log n - \frac{1}{2}\log\Big(\beta+\frac{n}{2}\Big)\Big).\end{aligned}$$

Η επιλογή $N \leqslant \exp\big((1-\varepsilon)\big(\beta+\frac{n+1}{2}\big)\log n\big)$ συνεπάγεται ότι

$$N\mathrm{B}(r_n) \leqslant \exp\Big(-\frac{\varepsilon}{2}\Big(\beta+\frac{n+1}{2}\Big)\log n - \frac{1}{2}\log\Big(\beta+\frac{n}{2}\Big)\Big) \to 0,$$

καθώς $n \to \infty$. Η απόδειξη του πρώτου μέρους του Θεωρήματος έπεται από το γεγονός αυτό, σε συνδυασμό με το Λήμμα 6.3.5.

Έστω τώρα $R_n = \sqrt{1 - n^{-(1+\frac{\varepsilon}{2})}}$. Από το Λήμμα 6.2.2 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{B}(R_n) &\geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{n^{-(1+\frac{\varepsilon}{2})(\beta+\frac{n+1}{2})}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}}\\ &= \exp\Big(-\Big(1+\frac{\varepsilon}{2}\Big)\Big(\beta+\frac{n+1}{2}\Big)\log n - \frac{1}{2}\log\Big(4\pi\Big(\beta+\frac{n}{2}+1\Big)\Big)\Big).\end{aligned}$$

Η επιλογή $N = \exp\big((1+\varepsilon)(\beta+\frac{n+1}{2})\log n\big)$ συνεπάγεται ότι

$$N\mathrm{B}(R_n) \geqslant \exp\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big(\beta+\frac{n+1}{2}\Big)\log n - \frac{1}{2}\log\Big(4\pi\Big(\beta+\frac{n}{2}+1\Big)\Big)\Big),$$

και άρα

$$\lim_{n\to\infty} N\mathrm{B}(R_n) - n\log N = \infty.$$

Σε συνδυασμό με το Λήμμα 6.3.5, αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 6.3.6. Όπως προαναγγείλαμε στην παρουσίαση των αποτελεσμάτων, η απόδειξή μας δείχνει ότι το Θεώρημα 6.1.1 μπορεί να διατυπωθεί σε μια ισχυρότερη μορφή, ως εξής:

Έστω $f = f(n)$ μια συνάρτηση με τις ιδιότητες $f(n) \to \infty$ και $f(n) - \log n \to -\infty$ καθώς $n \to \infty$. Αν $N \leqslant \exp\big((\beta + \frac{n+1}{2})f(n)\big)$, τότε, $\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^{\beta})/\omega_n \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Αναλόγως, για κάθε συνάρτηση $g = g(n)$ τέτοια ώστε $g(n) - \log n \to +\infty$ καθώς $n \to \infty$, αν $N \geqslant \exp\big((\beta + \frac{n+1}{2})g(n)\big)$, τότε, $\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^{\beta})/\omega_n \to 1$ καθώς $n \to \infty$.

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού μπορούμε απλά να επαναλάβουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1, θέτοντας τώρα $r_n^2 = 1 - \exp(-f(n)/2)$ για το άνω φράγμα και $R_n^2 = 1 - \exp(-g(n)/2)$ για το κάτω φράγμα, αντίστοιχα. Παρατηρήστε ότι το παραπάνω είναι ισοδύναμο με την αντικατάσταση της υπόθεσης «σταθερό ε» στη διατύπωση του Θεωρήματος, από την « $\varepsilon = \varepsilon(n)$ με $\varepsilon(n) \gg 1/\log n$». Η διατύπωση αυτή κάνει επίσης σαφές ότι η μόνη περίπτωση για την οποία το Θεώρημα 6.1.1 δεν δίνει ένα ξεκάθαρο αποτέλεσμα για την ασυμπτωτική συμπεριφορά του όγκου του $P_{N,n}^{\beta}$ είναι όταν $N \simeq \exp\big((\beta + \frac{n+1}{2})\log(cn)\big)$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$.

Απόδειξη του Πορίσματος 6.1.3: Για την πρώτη περίπτωση, έστω $\varepsilon \in (0,1)$ και μια ακολουθία $N(n) \leqslant \exp((1-\varepsilon)(\frac{n-1}{2})\log n)$. Όπως έχει εξηγηθεί στο [57], το ασθενές όριο μιας ακολουθίας Βήτα κατανομών στον $\mathbb{R}^n$ με $\beta \to -1$ ταυτίζεται με το μοναδικο αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο πιθανότητας στη σφαίρα S^{n-1}, για κάθε σταθερό n. Καθώς η απεικόνιση $(x_1, \ldots, x_N) \mapsto \mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}(x_1, \ldots, x_N))/\omega_n$ είναι συνεχής και φραγμένη, υπάρχει μια ακολουθία β_n τέτοια ώστε $|\,\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^{\beta_n}) - \mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(S_{N,n})| < \varepsilon'\omega_n$, για κάθε $\varepsilon' > 0$. Από το Θεώρημα 6.1.1 έχουμε $\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^{\beta}) \leqslant \varepsilon'\omega_n$, και άρα συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(S_{N,n}) \leqslant 2\varepsilon'\omega_n$. Ομοίως μπορεί να δειχθεί και ο δεύτερος ισχυρισμός. □

6.3.3 Intrinsic volumes Βήτα πολυτόπων

Μείωση της διάστασης

Ξεκινάμε με την ακόλουθη παρατήρηση, που είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 1.2.5, σχετικά με την κατανομή της k-διάστατης προβολής ενός τυχαίου διανύσματος X με κατανομή το ν_β.

Λήμμα 6.3.7. *Για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\mathbb{E}\,V_k(P_{N,n}^{\beta}) = \binom{n}{k}\frac{\omega_n}{\omega_k\omega_{n-k}}\,\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_k\big(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}}\big).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 1.2.5, έπεται ότι

$$\mathbb{E}\mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta})) = \mathbb{E}\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})$$

για κάθε $F \in G_{n,k}$. Από τον ορισμό του V_k (βλ. (1.1.8)) και τον τύπο του Kubota (1.1.7), έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}V_k(P_{N,n}^{\beta}) &= \binom{n}{k}\omega_{n-k}^{-1}\mathbb{E}W_{n-k}(P_{N,n}^{\beta})\\ &= \binom{n}{k}\frac{\omega_n}{\omega_k\omega_{n-k}}\int_{G_{n,k}}\mathbb{E}\mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))\,d\nu_{n,k}(F)\\ &= \binom{n}{k}\frac{\omega_n}{\omega_k\omega_{n-k}}\mathbb{E}\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}}),\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. □

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Kubota (1.1.7) για τη B_2^n έχουμε

$$V_k(B_2^n) = \binom{n}{k}\frac{\omega_n}{\omega_{n-k}},$$

οπότε

$$\frac{\mathbb{E}\, V_k(P_{N,n}^{\beta})}{V_k(B_2^n)} = \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_k\big(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}}\big)}{\omega_k}. \tag{6.3.2}$$

Η παραπάνω σχέση συνεπάγεται ότι για κάθε $k = k(n)$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} k(n) = \infty$, μια συμπεριφορά κατωφλίου όμοια με αυτή που περιγράφει το Θεώρημα 6.1.1 ισχύει και για τους intrinsic volumes του $P_{N,n}^{\beta}$. Συγκεκριμένα, καθώς $n \to \infty$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\, V_k(P_{N,n}^{\beta})}{V_k(B_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\big((1-\epsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log k\big) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\big((1+\epsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log k\big). \end{cases}$$

Επιπλέον, αν $k = n - m$ για οποιοδήποτε σταθερό $m \in \mathbb{N}$, ο λόγος στο αριστερό μέλος παραπάνω συμπεριφέρεται όπως στην περίπτωση $k = n$. Σαν ειδική περίπτωση, για $m = 1$, μπορεί κανείς να συνάγει από το Θεώρημα 6.1.1 την ακόλουθη συμπεριφορά για το εμβαδόν της επιφάνειας S_{n-1} του $P_{N,n}^{\beta}$.

Πρόταση 6.3.8. *Έστω $\epsilon \in (0,1)$. Τότε, καθώς $n \to \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}(S_{n-1}(P_{N,n}^{\beta}))}{S_{n-1}(B_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } N \leqslant \exp\big((1-\epsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log n\big) \\ 1 & \text{αν } N \geqslant \exp\big((1+\epsilon)(\beta + \frac{n+1}{2})\log n\big). \end{cases}$$

Ωστόσο, χρησιμοποιώντας την (6.3.2), ο προσδιορισμός της συμπεριφοράς του k-στού intrinsic volume όταν το k είναι ένας σταθερός ακέραιος απαιτεί να εξετάσει κανείς την περίπτωση κατά την οποία η διάσταση του χώρου μένει σταθερή, ενώ ταυτόχρονα η παράμετρος β τείνει στο άπειρο. Αυτό είναι το περιεχόμενο της επόμενης παραγράφου.

Φαινόμενα κατωφλίου για Βήτα πολύτοπα σε σταθερή διάσταση

Παρουσιάζουμε εδώ την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.4. Αυτή θα προκύψει σαν πόρισμα του επόμενου γενικότερου ισχυρισμού.

Θεώρημα 6.3.9. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ ένας σταθερός ακέραιος, $\delta > 1$ και $N = \delta^{\beta}$.*

(α) *Για κάθε $R \in \Big(0, \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}\Big)$, έχουμε ότι $\mathbb{P}(RB_2^n \subset P_N^{\beta}) \to 1$ καθώς $\beta \to \infty$.*

(β) *Για κάθε $R \in \Big(\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}, 1\Big)$, έχουμε ότι $\mathbb{P}(P_N^{\beta} \subset RB_2^n) \to 1$ καθώς $\beta \to \infty$.*

Δεδομένου του Θεωρήματος 6.3.9, παρατηρήστε ότι αν $N = \delta^{\beta} = \exp(\beta \log \delta)$ και οι ακτίνες R_1, R_2 είναι τέτοιες ώστε $0 < R_1 < \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}} < R_2 < 1$, τότε

$$\lim_{\beta\to\infty} \mathbb{P}(R_1 B_2^n \subseteq P_{N,n}^{\beta} \subseteq R_2 B_2^n) = 1.$$

Συγκεκριμένα

$$\lim_{\beta\to\infty} \mathbb{P}\Big(R_1^n \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^\beta)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)} \leqslant R_2^n\Big) = 1,$$

και αφού αυτό ισχύει για κάθε $0 < R_1 < \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}} < R_2 < 1$, έπεται ότι

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^\beta)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)} = \Big(\frac{\delta-1}{\delta}\Big)^{\frac{n}{2}}.$$

Τώρα εφ' όσον η $N \mapsto \frac{\mathbb{E}\,V_n(P_{N,n}^\beta)}{V_n(B_2^n)}$ είναι αύξουσα, $\lim_{\delta\to\infty}\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)^{\frac{n}{2}} = 1$ και $\lim_{\delta\to 1}\left(\frac{\delta-1}{\delta}\right)^{\frac{n}{2}} = 0$, έχουμε δείξει το ακόλουθο.

Πόρισμα 6.3.10. *Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $f, g\colon (-1,\infty) \to \mathbb{R}_+$ συναρτήσεις τέτοιες ώστε $f(\beta) \to \infty$ και $g(\beta) \to 0$ καθώς $\beta \to \infty$, και έστω $\delta \in (1,\infty)$. Τότε, καθώς $\beta \to \infty$,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^\beta)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)} = \begin{cases} 1 & \text{αν } N \geq \exp(\beta f(\beta)) \\ 0 & \text{αν } N \leqslant \exp(\beta g(\beta)) \\ (\frac{\delta-1}{\delta})^{\frac{n}{2}} & \text{αν } N = \exp(\beta\log(\delta)). \end{cases}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.4: Το αποτέλεσμα ειναι άμεση συνέπεια της (6.3.2) και του Πορίσματος 6.3.10, για $f\left(\beta + \frac{n-k}{2}\right) = (\beta + \frac{n-k}{2})^\varepsilon$ και $g\left(\beta + \frac{n-k}{2}\right) = (\beta + \frac{n-k}{2})^{-\varepsilon}$. □

Αυτό που μένει, είναι η απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.9.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.3.9. (α) Από το Λήμμα 6.2.2 γνωρίζουμε ότι

$$\mathrm{B}(R) \geq \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(1-R^2)^{\beta+\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}},$$

οπότε

$$N\mathrm{B}(R) \geq \frac{(1-R^2)^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}} (\delta(1-R^2))^\beta.$$

Παρατηρήστε ότι $\varepsilon := \delta(1-R^2) - 1 > 0$, επειδή $R < \sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}$. Εύκολα τότε βλέπουμε ότι

$$\lim_{\beta\to\infty} \frac{(1-R^2)^{\frac{n+1}{2}}}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}} (1+\varepsilon)^{\frac{\beta}{2}} = +\infty,$$

συγκεκριμένα $N\mathrm{B}(R) \geqslant (1+\varepsilon)^{\beta/2}$ για αρκετά μεγάλο β. Από την άλλη μεριά, από το Λήμμα 6.3.4 (α),

$$\begin{aligned} 1 - \mathbb{P}(RB_2^n \subset P_N^\beta) &\leqslant 2\binom{N}{n}(1-\mathrm{B}(R))^{N-n} \\ &\leqslant 2N^n(1-\mathrm{B}(R))^{N-n} \\ &= \exp\left(\log(2) + n\log(N) + (N-n)\log(1-\mathrm{B}(R))\right) \\ &\leqslant \exp\left(\log(2) + n\log(N) - (N-n)\mathrm{B}(R)\right), \end{aligned}$$

και αφού $\log N = \beta \log \delta$ και το n είναι σταθερό, έπεται ότι η τελευταία έκφραση τείνει στο 0 καθώς $\beta \to \infty$. Άρα,

$$\lim_{\beta\to\infty} \mathbb{P}(RB_2^n \subseteq P_{N,n}^{\beta}) = 1.$$

(β) Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $s = t^2$, μπορούμε να δούμε ότι αν το x είναι ένα τυχαίο σημείο κατανεμημένο σύμφωνα με το ν_β, τότε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\|x\|_2 \geqslant R) &= c_{n,\beta} \int_{(RB_2^n)^c} (1-\|x\|^2)^{\beta}\,\mathrm{d}x \\
&= nc_{n,\beta}\omega_n \int_R^1 (1-t^2)t^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{B\left(\beta+1,\frac{n}{2}\right)} \int_{R^2}^1 (1-s)^{\beta} s^{\frac{n}{2}-1}\,\mathrm{d}s \\
&\leqslant \frac{1}{B\left(\beta+1,\frac{n}{2}\right)} \int_{R^2}^1 (1-s)^{\beta}\,\mathrm{d}s = \frac{(1-R^2)^{\beta+1}}{B\left(\beta+1,\frac{n}{2}\right)(\beta+1)},
\end{aligned}$$

όπου με $B(a,b) = \frac{\Gamma(a)\Gamma(b)}{\Gamma(a+b)}$ συμβολίζουμε τη συνάρτηση Βήτα. Θέτοντας $N = \delta^{\beta}$ και $\varepsilon := 1-\delta(1-R^2)$, από την παραπάνω ανισότητα βλέπουμε ότι

$$N\mathbb{P}(\|x\|_2 \geqslant R) \leqslant (1-\varepsilon)^{\beta} \frac{1-R^2}{B\left(\beta+1,\frac{n}{2}\right)(\beta+1)}.$$

Παρατηρήστε ότι $\varepsilon \in (0,1)$, αφού $R \in \left(\sqrt{\frac{\delta-1}{\delta}}, 1\right)$, οπότε χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $B\left(\beta+1,\frac{n}{2}\right) \sim \Gamma(n/2)/(\beta+1)^{n/2}$ μπορούμε εύκολα να δούμε ότι

$$\lim_{\beta\to\infty} (1-\varepsilon)^{\frac{\beta}{2}} \frac{1-R^2}{B\left(\beta+1,\frac{n}{2}\right)(\beta+1)} = 0.$$

Συγκεκριμένα, $N\mathbb{P}(\|x\|_2 \geqslant R) \leqslant (1-\varepsilon)^{\frac{\beta}{2}}$ αν το β είναι αρκετά μεγάλο. Αυτό σε συνδυασμό με την ανισότητα $\log x \geqslant 1 - \frac{1}{x}$, που ισχύει για κάθε $x > 0$, δείχνει ότι

$$\begin{aligned}
0 \geqslant N \log \mathbb{P}(\|x\|_2 \leqslant R) &\geqslant N\Big(1 - \frac{1}{\mathbb{P}(\|x\|_2 \leqslant R)}\Big) \\
&\geqslant N\left(1 - \frac{1}{1-\frac{(1-\varepsilon)^{\beta/2}}{N}}\right) = -\frac{N(1-\varepsilon)^{\beta/2}}{N-(1-\varepsilon)^{\beta/2}}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\lim_{\beta\to\infty} N\log\mathbb{P}(\|x\|_2 \leqslant R) = 0$. Από την ανεξαρτησία των $X_1,\ldots,X_N$, παίρνουμε τότε

$$\mathbb{P}(P_{N,n}^{\beta} \subseteq RB_2^n) = \mathbb{P}(\|x\|_2 \leqslant R)^N = \exp(N\log\mathbb{P}(\|x\|_2 \leqslant R)),$$

που δείχνει $\lim_{\beta\to\infty} \mathbb{P}(P_{N,n}^{\beta} \subseteq RB_2^n) = 1$, το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

6.3.4 Αποδείξεις για τη Βήτα′ κατανομή

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2.4 και τα αποτελέσματα της Παραγράφου 6.3.1, μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5. Θέτουμε

$$b_n = \beta - \frac{n-1}{2}.$$

Κάτω από τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.1.5, έχουμε $b_n \to \infty$. Η (6.2.2) παίρνει τότε τη μορφή

$$\tilde{\mathrm{B}}(d) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{\infty} \left(1 + \frac{s^2}{2b_n}\right)^{-b_n} \mathrm{d}s, \quad a_n = d\frac{\sqrt{2b_n}}{\sigma}. \tag{6.3.3}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5 (α): Έστω $\varepsilon > 0$. Από τη σχέση (6.3.3) έπεται ότι

$$\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{\infty} \left(1 + \frac{s^2}{2b_n}\right)^{-b_n} \mathrm{d}s,$$

με $\frac{a_n^4}{b_n} = 4(1+\varepsilon)^4 \frac{n^2(\beta - \frac{n-1}{2})}{\sigma^4} \to 0$ λόγω των υποθέσεών μας. Από το Λήμμα 6.2.4 έπεται τότε ότι,

$$\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}}\, \mathrm{d}t.$$

Καθώς $a_n = (1+\varepsilon)\frac{\sqrt{2b_n n}}{\sigma} \to 0$, έχουμε

$$\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) \to \frac{1}{2}.$$

Άρα, για $N = 3\lceil n \log n\rceil$ και n αρκετά μεγάλο, παίρνουμε

$$\begin{aligned} N\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) - n\log N &\geq \frac{2}{5}N - n\log N \\ &= \frac{6}{5}\lceil n\log n\rceil - n\log(3\lceil n\log n\rceil) \to \infty. \end{aligned}$$

Και πάλι, το Λήμμα 6.3.5 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5 (β): Από την (6.3.3), έχουμε

$$\tilde{\mathrm{B}}\big((1-\varepsilon)\sqrt{n}\big) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{a_n}^{\infty} \left(1 + \frac{s^2}{2b_n}\right)^{-b_n} \mathrm{d}s.$$

Λόγω των υποθέσεών μας, $a_n = (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{2b_n n}}{\sigma} \to \infty$ και $\frac{a_n^4}{b_n} = 4(1-\varepsilon)^4\frac{n^2(\beta - \frac{n-1}{2})}{\sigma^4} \to 0$.

Έτσι, από το Λήμμα 6.2.4,

$$\tilde{\mathrm{B}}\big((1-\varepsilon)\sqrt{n}\big) \sim \frac{e^{-\frac{a_n^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}a_n} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}a_n}\exp\Big(-(1-\varepsilon)^2\frac{b_n n}{\sigma^2}\Big).$$

Συγκεκριμένα, για $N \leqslant \exp\big((1-\varepsilon)^2\frac{nb_n}{\sigma^2}\big)$ και αρκετά μεγάλο n,

$$N\tilde{\mathrm{B}}\big((1-\varepsilon)\sqrt{n}\big) \leqslant \frac{1}{a_n} \to 0,$$

το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}) \to 0,$$

από το Λήμμα 6.3.5.

Όμοια με παραπάνω, έχουμε

$$\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}a_n}\exp\Big(-(1+\varepsilon)^2\frac{b_n n}{\sigma^2}\Big),$$

όπου $a_n = (1+\varepsilon)\frac{\sqrt{2b_n n}}{\sigma}$. Λόγω της συνθήκης $\frac{b_n n}{\sigma^2} \to \infty$, έχουμε ότι, για n αρκετά μεγάλο,

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) &\sim \exp\Big(-(1+\varepsilon)^2\frac{b_n n}{\sigma^2} - \frac{1}{2}\log\frac{b_n n}{\sigma^2} - \log\big(2(1+\varepsilon)\sqrt{\pi}\big)\Big)\\ &\geq \exp\Big(-(1+3\varepsilon)\frac{b_n n}{\sigma^2}\Big),\end{aligned}$$

όπου η ανισότητα ισχύει επειδή $(1+\varepsilon)^2 < 1+3\varepsilon$. Άρα, για $N = \exp\big((1+4\varepsilon)\frac{b_n n}{\sigma^2}\big)$ και n αρκετά μεγάλο, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}N\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) - n\log N &\geq \exp\left(\varepsilon\frac{b_n n}{\sigma^2}\right) - n(1+4\varepsilon)\frac{b_n n}{\sigma^2}\\ &\geq \exp\left(f(n)\right) - \frac{1+4\varepsilon}{\varepsilon}nf(n),\end{aligned} \tag{6.3.4}$$

όπου $f(n) := \varepsilon\frac{b_n n}{\sigma^2}$. Η υπόθεση για την τάξη μεγέθους του β, μαζί με την (6.3.4), δίνουν $N\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) - n\log N \to \infty$, και το Λήμμα 6.3.5 ολοκληρώνει τότε την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5 (γ): Από την (6.3.3) έχουμε

$$\tilde{\mathrm{B}}\big((1-\varepsilon)\sqrt{n}\big) \sim \frac{\tilde{\alpha}_{n,\beta}}{\sqrt{2b_n}}\int_{a_n}^{\infty}\left(1+\frac{s^2}{2b_n}\right)^{-b_n}\mathrm{d}s,$$

όπου $a_n = (1-\varepsilon)\frac{\sqrt{2b_n n}}{\sigma}$. Παρατηρήστε ότι $\frac{a_n^2}{b_n} = (1-\varepsilon)^2\frac{2n}{\sigma^2} \to \infty$ λόγω της υπόθεσης $\frac{n}{\sigma^2} \to \infty$. Κατά συνέπεια, από το Λήμμα 6.2.4

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{B}}\big((1-\varepsilon)\sqrt{n}\big) &\sim \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{\sqrt{b_n}}{\sqrt{2(b_n-\frac{1}{2})}}\left(1+\frac{a_n^2}{2b_n}\right)^{-(b_n-\frac{1}{2})}\\ &\sim \frac{1}{2\sqrt{b_n\pi}}\left(1+(1-\varepsilon)^2\frac{n}{\sigma^2}\right)^{-(b_n-\frac{1}{2})}.\end{aligned}$$

Συγκεκριμένα, για $N \leqslant \exp\big((b_n-\frac{1}{2})\log\big((1-\varepsilon)^2\frac{n}{\sigma^2}\big)\big)$ και αρκετά μεγάλο n,

$$N\tilde{\mathrm{B}}\big((1-\varepsilon)\sqrt{n}\big) \leqslant \frac{1}{\sqrt{b_n}} \to 0,$$

που συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}_{N,n}^{\beta,\sigma}) \to 0,$$

χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.3.5.

Όμοια με παραπάνω, έχουμε

$$\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) \sim \frac{1}{2\sqrt{b_n\pi}}\left(1+(1+\varepsilon)^2\frac{n}{\sigma^2}\right)^{-(b_n-\frac{1}{2})}.$$

Έστω $\varepsilon' \in \left(0, \log\frac{(1+2\varepsilon)^2}{(1+\epsilon)^2}\right)$. Από την τελευταία σχέση, ειναι εύκολο να δούμε ότι για $N = \exp\big((b_n-\frac{1}{2})\log\big((1+2\varepsilon)^2\frac{n}{\sigma^2}\big)\big)$, και n αρκετά μεγάλο,

$$\begin{aligned}N\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) &\geq \frac{1}{4\sqrt{b_n}}\exp\left(\left(b_n-\frac{1}{2}\right)\log\frac{(1+2\varepsilon)^2\frac{n}{\sigma^2}}{1+(1+\varepsilon)^2\frac{n}{\sigma^2}}\right)\\ &\geq \exp\left(\varepsilon' b_n\right).\end{aligned}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι $\log\big((1+2\varepsilon)^2\frac{n}{\sigma^2}\big) < \frac{n}{2}$ λόγω της υπόθεσης $\sigma > e^{-\frac{n}{3}}$. Σε συνδυασμό με την $\log n \ll b_n$, έπεται ότι

$$N\tilde{\mathrm{B}}\big((1+\varepsilon)\sqrt{n}\big) - n\log N \geq \exp\left(\varepsilon' b_n\right) - \frac{n^2}{2}b_n \to \infty,$$

και το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 6.3.5. □

Απόδειξη του Πορίσματος 6.1.6: Αποδεικνύουμε μόνο το πρώτο σκέλος, καθώς και το δεύτερο μπορεί να δειχθεί με τον ίδιο τρόπο. Σταθεροποιούμε $\varepsilon \in (0,1/2)$ και μια ακολουθία $N(n) \leqslant \exp\big(\big(\frac{1}{2}-\varepsilon\big)n\big)$. Για κάθε σταθερό n, ισχύει οτι $\tilde{p}_{n,\beta,\sigma}(x) \to (2\pi)^{-\frac{n}{2}}\exp\big(-\frac{\|x\|^2}{2}\big)$ καθώς $\sigma^2 = 2\beta \to \infty$. Συγκεκριμένα, για κάθε $\varepsilon' > 0$, μπορεί κανείς να βρει σ_n τέτοιο ώστε $\big|\mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}_{N,n}^{\frac{1}{2}\sigma_n^2,\sigma_n}) - \mathbb{E}\,\mu(G_{N,n})\big| < \varepsilon'$. Μπορούμε να επιλέξουμε $\sigma_n \gg n$ και $\beta_n = \frac{1}{2}\sigma_n^2$, ώστε να ικανοποιούνται οι υποθέσεις της περίπτωσης (β) στο Θεώρημα 6.1.5. Κατά συνέπεια, για n αρκετά μεγάλο, $\mathbb{E}\,\mu(\tilde{P}_{N,n}^{\frac{1}{2}\sigma_n^2,\sigma_n}) < \varepsilon'$. Συμπεραίνουμε έτσι ότι $\mathbb{E}\,\mu(G_{N,n}) < 2\varepsilon'$, που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

6.4 Τομές από τυχαίους ημίχωρους

Μελετάμε τώρα πολύτοπα που προκύπτουν παίρνοντας τομές τυχαίων ημίχωρων. Το μοντέλο αυτό βασίζεται και πάλι στην επιλογή N ανεξάρτητων τυχαίων σημείων $X_1,\ldots,X_N$ στον $\mathbb{R}^n$, όμως τώρα θεωρούμε το πολύτοπο που λαμβάνεται από την τομή των ημίχωρων $\{x\in\mathbb{R}^n : \langle X_i,x\rangle \leqslant a\}$ για κάθε $i=1,\ldots,N$, και κατάλληλο $a>0$. Στο πνεύμα του Pivovarov [98], που εργάστηκε στο πλαίσιο αυτό για τις περιπτώσεις κατά τις οποίες τα $X_1,\ldots,X_N$ επιλέγονται με βάση το ομοιόμορφο μέτρο στη S^{n-1} ή το Γκαουσιανό μέτρο, αποδεικνύουμε δύο φαινόμενα κατωφλίου της ίδιας φύσης, όταν τα X_i επιλέγονται με το μέτρο ν_β ή το $\tilde{\nu}_\beta$. Χάριν απλότητας, επιλέγουμε να ασχοληθούμε μόνο με την περίπτωση $\sigma=1$ στο μοντέλο της Βήτα′ κατανομής, συμβολίζουμε λοιπόν $\tilde{\nu}_\beta := \tilde{\nu}_{\beta,1}$ για το υπόλοιπο του κεφαλαίου. Δίνουμε τις ακριβείς διατυπώσεις των αποτελεσμάτων και μερικά προπαρασκευαστικά Λήμματα, πριν περάσουμε στις τελικές αποδείξεις.

Όπως πριν, έστω $N>n$ και $X_1,\ldots,X_N\in B_2^n$ κατανεμημένα ανεξάρτητα σύμφωνα με το ν_β. Θεωρούμε το πολύτοπο

$$H_{N,n}^\beta := \{x\in\mathbb{R}^n : \langle X_i,x\rangle \leqslant 1,\ \text{για κάθε } i=1,\ldots,N\}.$$

Παρατηρήστε ότι το $H_{N,n}^\beta$ περιέχει τη B_2^n. Στην πραγματικότητα ισχύει ο ισχυρότερος εγκλεισμός $H_{N,n}^\beta \supseteq RB_2^n$, όπου $R=\min_{i\in[N]}\|X_i\|^{-1}$. Επιπλέον, όσο μεγαλύτερο είναι το N, τόσο μικραίνει ο όγκος $V_n(H_{N,n}^\beta)$. Το επόμενο αποτέλεσμα περιγράφει ένα φαινόμενο κατωφλίου για τον κανονικοποιημένο όγκο της τομής του $H_{N,n}^\beta$ με μπάλες ακτίνας μεγαλύτερης του 1. Διαφαίνεται ότι, καθώς $n\to\infty$, το $H_{N,n}^\beta$ τείνει να καταλάβει το σύνολο του όγκου μιας τέτοιας μπάλας, αν το πλήθος των σημείων N είναι το πολύ εκθετικό ως προς τη διάσταση.

Θεώρημα 6.4.1. *Σταθεροποιούμε $\epsilon, R\in(0,1)$ και έστω $-1<\beta=\beta(n)$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^\beta\cap R^{-1}B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(R^{-1}B_2^n)} = \begin{cases} 1 & \text{αν } N\leqslant \exp\big((1-\varepsilon)(\beta+\frac{n+1}{2})\log((1-R^2)^{-1})\big)\\ 0 & \text{αν } N\geqslant \exp\big((1+\varepsilon)(\beta+\frac{n+1}{2})\log((1-R^2)^{-1})\big).\end{cases}$$

Για $X_1, \ldots, X_N \in \mathbb{R}^n$ ανεξάρτητα και κατανεμημένα σύμφωνα με το $\tilde{\nu}_\beta$, θέτουμε

$$\tilde{H}^\beta_{N,n} := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle X_i, x\rangle \leqslant n, \text{ φορ εαςη } i = 1, \ldots, N\}.$$

Όπως στην περίπτωση του $\tilde{P}^\beta_{N,n}$, δείχνουμε ένα αποτέλεσμα κατωφλίου για το $\mu(\tilde{H}^\beta_{N,n})$, όπου το μ μπορεί να είναι οποιοδήποτε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 6.4.2. *Σταθεροποιούμε $\epsilon \in (0,1)$ και έστω $\mu = \mu_n$ ένα ισοτροπικό, λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $\beta = \beta(n) > n/2$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\infty} \beta - n/2 = \infty$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\mu(\tilde{H}^\beta_{N,n}) = \begin{cases} 1 & \text{αν } N \leqslant \exp\left(\left(\beta - \frac{n}{2}\right)\log((1-\varepsilon)n)\right) \\ 0 & \text{αν } N \geqslant \exp\left(\left(\beta - \frac{n}{2}\right)\log((1+\varepsilon)n)\right). \end{cases}$$

Για τις αποδείξεις των παραπάνω Θεωρημάτων, συνδέουμε και πάλι τις πιθανότητες του περιέχεσθαι στα $H^\beta_{N,n}$ και $\tilde{H}^\beta_{N,n}$ με τις συναρτήσεις κατανομής B και $\tilde{\mathrm{B}}$ των ν_β και $\tilde{\nu}_\beta$, αντίστοιχα.

Λήμμα 6.4.3. (α) *Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_2^n$. Τότε, $\mathbb{P}(x \in H^\beta_{N,n}) = (1 - \mathrm{B}(\|x\|_2^{-1}))^N$.*

(β) *Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Τότε, $\mathbb{P}(x \in \tilde{H}^\beta_{N,n}) = (1 - \tilde{\mathrm{B}}(n/\|x\|_2))^N$.*

Απόδειξη. Για άλλη μια φορά, περιγράφουμε την απόδειξη μόνο για την περίπτωση της Βήτα κατανομής. Χρησιμοποιώντας την ανεξαρτησία και το αναλλοίωτο ως προς στροφές του ν_β, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(x \in H^\beta_{N,n}) &= \mathbb{P}(\langle X_i, x\rangle \leqslant 1, \text{ για κάθε } i = 1, \ldots, N) \\ &= \mathbb{P}(\langle X_1, x\rangle \leqslant 1)^N = \mathbb{P}\Big(\langle X_1, \frac{x}{\|x\|_2}\rangle \leqslant \|x\|_2^{-1}\Big)^N \\ &= \mathbb{P}\left(\langle X_1, e_1\rangle \leqslant \|x\|_2^{-1}\right)^N = (1 - \mathrm{B}(\|x\|_2^{-1}))^N.\end{aligned}$$

Το ίδιο επιχείρημα αποδεικνύει και το (β). □

Λήμμα 6.4.4. (α) *Έστω $1 \leqslant t < s$ και $B = sB_2^n \setminus tB_2^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(B)(1 - \mathrm{B}(s^{-1}))^N \leqslant \mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H^\beta_{N,n} \cap B) \leqslant \mathrm{vol}_n(B)(1 - \mathrm{B}(t^{-1}))^N.$$

(β) *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, $0 < t < s$ και $B = sB_2^n \setminus tB_2^n$. Τότε,*

$$\mu(B)(1 - \tilde{\mathrm{B}}(n/s))^N \leqslant \mathbb{E}\,\mu(\tilde{H}^\beta_{N,n} \cap B) \leqslant \mu(B)(1 - \tilde{\mathrm{B}}(n/t))^N.$$

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι, π.χ. για το (α),

$$\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H^\beta_{N,n} \cap B) = \mathbb{E}\int_B \mathbb{1}_{\{x \in H^\beta_{N,n}\}}(x)\,\mathrm{d}x = \int_B \mathbb{P}(x \in H^\beta_{N,n})\,\mathrm{d}x,$$

και τα ζητούμενα φράγματα έπονται από το Λήμμα 6.4.3 (α), και το γεγονός ότι $x \in B$ αν και μόνο αν $\|x\|_2 \in (t, s)$. □

Παρατήρηση 6.4.5. *Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες*

$$x - 1 - (x-1)^2 \leqslant \log x \leqslant x - 1,$$

που ισχύουν για κάθε $x \in [1/2, 1]$, *θα εφαρμόσουμε στις αποδείξεις παρακάτω τα φράγματα*

$$\exp(-N\mathrm{B}(a) - N\mathrm{B}(a)^2) \leqslant (1 - \mathrm{B}(a))^N \leqslant \exp(-N\mathrm{B}(a)) \tag{6.4.1}$$

για κάθε $a \in (0,1)$, *και*

$$\exp(-N\tilde{\mathrm{B}}(a) - N\tilde{\mathrm{B}}(a)^2) \leqslant (1 - \tilde{\mathrm{B}}(a))^N \leqslant \exp(-N\tilde{\mathrm{B}}(a)) \tag{6.4.2}$$

για κάθε $a > 0$.

6.4.1 Απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.1

Έστω $0 < R < 1$, $\varepsilon \in (0,1)$, και θέτουμε $t := (1 - (1 - R^2)^{1+\frac{\varepsilon}{2}})^{-1/2}$. Έχουμε τότε

$$\log \sqrt{1 - t^{-2}} = \Big(1 + \frac{\varepsilon}{2}\Big) \log \sqrt{1 - R^2}.$$

Έστω τώρα $s = R^{-1}$. Παρατηρούμε ότι $1 < t < s$, και θέτουμε $B = sB_2^n \setminus tB_2^n$. Τότε,

$$\frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^{\beta} \cap sB_2^n)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)} = \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^{\beta} \cap tB_2^n)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)} + \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^{\beta} \cap B)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)}.$$

Συγκεκριμένα,

$$\frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^{\beta} \cap B)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)} \leqslant \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^{\beta} \cap sB_2^n)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)} \leqslant \Big(\frac{t}{s}\Big)^n + \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^{\beta} \cap B)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)}. \tag{6.4.3}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την (6.4.3) για να φράξουμε από πάνω και κάτω τον λόγο που μελετάμε, από κάτι που τείνει στο 1 ή το μηδέν αντίστοιχα, ανάλογα με την επιλογή του N.

Για το κάτω φράγμα, έστω

$$N \leqslant \exp\Big((1-\varepsilon)\Big(\beta + \frac{n+1}{2}\Big) \log\big((1-R^2)^{-1}\big)\Big).$$

Χρησιμοποιώντας τότε διαδοχικά τα κάτω φράγματα στην (6.4.3), το Λήμμα 6.4.4 (α) και την (6.4.1), γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^{\beta} \cap sB_2^n)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)} \geqslant \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^{\beta} \cap B)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)} &= \frac{\mathrm{vol}_n(B)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H_{N,n}^{\beta} \cap B)}{\mathrm{vol}_n(B)} \\ &\geqslant (1 - (t/s)^n)(1 - \mathrm{B}(s^{-1}))^N \\ &\geqslant (1 - (t/s)^n) \exp(-N\mathrm{B}(R) - N\mathrm{B}(R)^2).\end{aligned}$$

Αρκεί τότε να δείξουμε ότι $N\mathrm{B}(R) \to 0$ και $N\mathrm{B}(R)^2 \to 0$ για να πάρουμε ότι $\frac{\mathbb{E}\,V_n(H_{N,n}^{\beta} \cap sB_2^n)}{V_n(sB_2^n)} \to 1$. Θυμηθείτε ότι από το Λήμμα 6.2.2 έχουμε

$$\mathrm{B}(R) \leqslant \frac{1}{2R\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\beta + \frac{n}{2}}} \exp\Big(-\Big(\beta + \frac{n+1}{2}\Big) \log\big((1-R^2)^{-1}\big)\Big),$$

οπότε
$$NB(R) \leqslant \frac{1}{2R\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\beta + \frac{n}{2}}} \exp\Big(-\varepsilon\Big(\beta + \frac{n+1}{2}\Big) \log\big((1-R^2)^{-1}\big)\Big),$$
που εξασφαλίζει ότι $NB(R) \to 0$ καθώς $n \to \infty$. Εύκολα μπορεί να δει κανείς ότι το ίδιο ισχύει και για την ποσότητα $NB(R)^2$.

Για το άνω φράγμα, επιλέγουμε
$$N \geqslant \exp\Big((1+\varepsilon)\Big(\beta + \frac{n+1}{2}\Big) \log\big((1-R^2)^{-1}\big)\Big).$$
Όμοια με προηγουμένως, χρησιμοποιούμε τα άνω φράγματα στην (6.4.3), το Λήμμα 6.4.4 (α) και την (6.4.1) για να δούμε ότι
$$\frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H^{\beta}_{N,n} \cap sB_2^n)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)} \leqslant \Big(\frac{t}{s}\Big)^n + \exp(-NB(t^{-1})).$$
Παρατηρήστε ότι από την επιλογή των N, t, και το κάτω φράγμα στο 6.2.2, έπεται ότι
$$NB(t^{-1}) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\beta + \frac{n}{2} + 1}} \exp\Big(\frac{\varepsilon}{2}\Big(\beta + \frac{n+1}{2}\Big) \log\big((1-R^2)^{-1}\big)\Big),$$
που δίνει $\lim_{n\to\infty} NB(t^{-1}) = +\infty$. Επειδή $(t/s)^n \to 0$ καθώς $n \to \infty$, έχουμε τότε ότι $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(H^{\beta}_{N,n} \cap sB_2^n)}{\mathrm{vol}_n(sB_2^n)} = 0$, που αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

6.4.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.2

Έστω $\varepsilon \in (0,1)$ και θέτουμε $s_n := n/\sqrt{(1-\varepsilon/2)n - 1}$, $t_n := n/\sqrt{(1+\varepsilon/2)n-1}$. Παρατηρήστε ότι $t_n < s_n$, ενώ ταυτόχρονα είναι και τα δύο της τάξης του $\sqrt{n}$. Θέτουμε τότε $B = s_nB_2^n \setminus t_nB_2^n$. Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, και επιλέγουμε
$$N \geqslant \exp\Big(\Big(\beta - \frac{n}{2}\Big) \log((1+\varepsilon)n)\Big).$$
Εφ΄ όσον
$$\mathbb{E}\,\mu(\tilde{H}^{\beta}_{N,n}) \leqslant \mu(t_nB_2^n) + \mathbb{E}\,\mu(\tilde{H}^{\beta}_{N,n} \cap B) + \mu(\mathbb{R}^n \setminus s_nB_2^n),$$
και από το Θεώρημα 6.2.6 τόσο ο πρώτος όσο και ο τελευταίος όρος τείνουν στο μηδέν με το n, αρκεί να αποδείξουμε ότι το ίδιο συμβαίνει και με τον δεύτερο όρο.

Από τα άνω φράγματα στο Λήμμα 6.4.4 (β) και την (6.4.2), έπεται ότι
$$\mathbb{E}\,\mu(\tilde{H}^{\beta}_{N,n} \cap B) \leqslant \mu(B)(1 - \tilde{B}(n/t_n))^N \leqslant \mu(B)\exp(-N\tilde{B}(n/t_n)).$$
Από την (6.2.1), έχουμε
$$N\tilde{B}(n/r_n) \geqslant \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{n-1}{2}}} \left(\frac{1+\varepsilon}{1+\frac{\varepsilon}{2}}\right)^{\beta - \frac{n}{2}},$$
και αφού η τελευταία έκφραση τείνει στο άπειρο με το n, παίρνουμε $\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}\,\mu(\tilde{H}^{\beta}_{N,n} \cap B) = 0$, που αποδεικνύει το δεύτερο κομμάτι του Θεωρήματος.

Από την άλλη μεριά, έστω

$$N \leqslant \exp\left(\left(\beta - \frac{n}{2}\right)\log((1-\varepsilon)n)\right).$$

Παρατηρήστε ότι, και πάλι από την (6.2.1),

$$N\tilde{\mathrm{B}}(n/s_n) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{\beta - \frac{n+1}{2}}}\left(\frac{1-\varepsilon}{1-\varepsilon/2}\right)^{\beta-\frac{n}{2}},$$

το οποίο τείνει στο μηδέν με το n. Το ίδιο ισχύει και για την ποσότητα $N\tilde{\mathrm{B}}(n/s_n)^2$. Χρησιμοποιώντας τα κάτω φράγματα στο Λήμμα 6.4.4 (β) και την (6.4.2) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,\mu(\tilde{H}^{\beta}_{N,n}) \geqslant \mathbb{E}\,\mu(\tilde{H}^{\beta}_{N,n}\cap B) &\geqslant \mu(B)(1-\tilde{\mathrm{B}}(n/s_n))^N\\ &\geqslant \mu(B)\exp\bigl(-N\tilde{\mathrm{B}}(n/s_n) - N\tilde{\mathrm{B}}(n/s_n)^2\bigr).\end{aligned}$$

Άρα, $\lim_{n\to\infty}\mathbb{E}\,\mu(\tilde{H}^{\beta}_{N,n}) = 1$, που ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Εκτιμήσεις για τα αφφινικά quermassintegrals

7.1 Εισαγωγή

Το πρόβλημα που μελετάμε στο κεφάλαιο αυτό σχετίζεται με κάποιες εικασίες του E. Lutwak για τα αφφινικά quermassintegrals κυρτών σωμάτων: για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, οι ποσότητες

$$\Phi_{n-k}(K) = \frac{\omega_n}{\omega_k}\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n} d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/n}, \tag{7.1.1}$$

εισήχθησαν από τον Lutwak στο [83]. Ο Grinberg έδειξε στο [56] ότι αυτές οι ποσότητες είναι αναλλοίωτες κάτω από αφφινικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο. Ο Lutwak διατύπωσε στο [84] την εικασία ότι τα αφφινικά quermassintegrals ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\omega_n^j \Phi_i(K)^{n-j} \leqslant \omega_n^i \Phi_j(K)^{n-i} \tag{7.1.2}$$

για κάθε $0 \leqslant i < j < n$, όπου ακολουθούμε τη σύμβαση $\Phi_0(K) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $\Phi_n(K) = \omega_n$. Οι περισσότερες εικασίες για τα αφφινικά quermassintegrals παραμένουν ανοικτές (βλ. [6, Κεφάλαιο 9] για περισσότερες λεπτομέρειες και αναφορές). Αν αληθεύουν, θα συνεπάγονται το ακόλουθο (βλ. επίσης [41]): υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$c_1\sqrt{n/k} \leqslant T_{n,k}(K) := \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kn}} \leqslant c_2\sqrt{n/k}. \tag{7.1.3}$$

Το αριστερό μέλος της (7.1.3) αποδείχθηκε από τους Παούρη και Pivovarov στο [93]:

Θεώρημα 7.1.1 (Παούρης-Pivovarov). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$T_{n,k}(K) \geqslant c\sqrt{n/k}. \tag{7.1.4}$$

Σχετικά με το άνω φράγμα, μια σχεδόν βέλτιστη εκτίμηση (παρά έναν λογαριθμικό προς τη διάσταση όρο) μπορεί να δοθεί σαν συνέπεια των ανισοτήτων Alexandrov (βλ. [4, Παράγραφοι 20.1-20.2] και [10, Παράγραφος 6.4]). Από αυτές έπεται ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε η ακολουθία

$$Q_k(K) = \left(\frac{1}{\omega_k}\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} \tag{7.1.5}$$

είναι φθίνουσα ως προς k. Ειδικότερα, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε $Q_k(K) \leqslant Q_1(K)$, το οποίο μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$\left(\frac{1}{\omega_k}\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant w(K), \tag{7.1.6}$$

όπου $w(K)$ είναι το μέσο πλάτος του K. Τότε, από την ανισότητα Hölder,

$$\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kn}} \leqslant \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \omega_k^{1/k} w(K). \tag{7.1.7}$$

Εφ' όσον ο όρος στο αριστερό μέλος αυτής της ανισότητας είναι αναλλοίωτος ως προς αφφινικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος, και είναι γνωστό ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε $w(K) \leqslant c\sqrt{n}\log n\, \mathrm{vol}_n(K)^{1/n}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το γεγονός ότι $\omega_k^{1/k} \simeq 1/\sqrt{k}$, παίρνουμε

$$T_{n,k}(K) \leqslant c_2\sqrt{n/k}\log n. \tag{7.1.8}$$

Η εκτίμηση αυτή παρατηρήθηκε στο [41], όπου δείχθηκε επίσης ότι

$$T_{n,k}(K) \leqslant c_3(n/k)^{3/2}\sqrt{\log(en/k)}. \tag{7.1.9}$$

Με άλλα λόγια, αν το k είναι ανάλογο του n τότε το άνω φράγμα για το $T_{n,k}(K)$ είναι της τάξης του 1. Γενικότερα, για κάθε $p \neq 0$ μπορεί κανείς να θεωρήσει την ποσότητα

$$T_{p,n,k}(K) = \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^p\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{kp}} \tag{7.1.10}$$

και να μελετήσει τη συμπεριφορά της ως προς p, n και k στην περίπτωση που το K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

Το βασικό ερώτημα που παραμένει, είναι κατά πόσον ο όρος $\log n$ στην (7.1.8) είναι πράγματι απαραίτητος. Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε αυτό το πρόβλημα για την περίπτωση των τυχαίων πολυτόπων και την περίπτωση των unconditional κυρτών σωμάτων.

Το πρώτο βασικό μας αποτέλεσμα δίνει μια καταφατική απάντηση στο πρόβλημα για μια αρκετά μεγάλη κλάση τυχαίων πολυτόπων. Έστω $N \geqslant n$ και έστω $x_1, \dots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία που επιλέγονται ομοιόμορφα από το εσωτερικό ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή, ως προς το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue μ_K στο K). Θεωρούμε το συμμετρικό τυχαίο πολύτοπο

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\}.$$

Θεώρημα 7.1.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ και $n^2 \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$. Αν τα $x_1, \dots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα που επιλέγονται ομοιόμορφα από το K τότε*

$$T_{n,k}(K_N) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{2}{N}$.

Ασχολούμαστε επίσης και με την περίπτωση των Βήτα πολυτόπων: Αν τα $x_1, \dots, x_N$ επιλέγονται τυχαία και ανεξάρτητα ως προς το μέτρο ν_β στον $\mathbb{R}^n$, για κάποιο $\beta > -1$, συμβολίζουμε

$$P_{N,n}^{\beta} := \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\}.$$

Για τα τυχαία πολύτοπα $P_{N,n}^{\beta}$ μπορούμε να δείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 7.1.3. *Έστω $\beta > -1$. Αν $k \geqslant \log\left(n \log\sqrt{\beta + n/2 + 1}\right)$ και $N \geqslant c_0^{\beta + \frac{n+1}{2}}$, όπου $c_0 > 0$ απόλυτη σταθερά, τότε*

$$T_{n,k}(P_{N,n}^{\beta}) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$.

Στην περίπτωση που το K είναι ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 7.1.4. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$T_{n,k}(K) \leqslant c\sqrt{n/k} \cdot \sqrt{1 + \log(n/k)}, \tag{7.1.11}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Δίνουμε επίσης φράγματα για το μικρότερο p για το οποίο $T_{p,n,k}(K) \leqslant c\sqrt{n/k}$.

Θεώρημα 7.1.5. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $p \leqslant -c_1 \min\{(n-k)\log n, n\log(1+k)\}$ έχουμε*

$$T_{p,n,k}(K) \leqslant c_2\sqrt{n/k}, \tag{7.1.12}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

7.2 Η περίπτωση των τυχαίων πολυτόπων

7.2.1 Κυρτή θήκη τυχαίων σημείων από ισοτροπικό κυρτό σώμα

Έστω $N \geqslant n$ και έστω $x_1, \dots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία τα οποία επιλέγονται ομοιόμορφα από ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή, έχουν κατανομή το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue μ_K). Θεωρούμε το συμμετρικό τυχαίο πολύτοπο

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\}.$$

Το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του K είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(K)}(y) = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}.$$

Παρατηρήστε ότι $Z_2(K) = L_K B_2^n$. Στο [38] αποδείχθηκε ότι, για κάθε $\beta \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε μια σταθερά $\alpha = \alpha(\beta) > 1$ που εξαρτάται μόνο από το β και απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε αν $N \geqslant \alpha n$, και $x_1, \ldots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K τότε για $q = c_1 \beta \log(N/n)$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\text{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}) \supseteq c_2 Z_q(K) \tag{7.2.1}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-N^{1-\beta} n^{\beta}}$. Από την άλλη πλευρά, είναι γνωστό ότι αν $q \leqslant \sqrt{n}$ τότε

$$\text{vol}_n(Z_q(K))^{1/n} \geqslant c_3 \sqrt{q/n}\, L_K.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε το εξής.

Λήμμα 7.2.1. *Αν $\alpha n \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$ τότε το τυχαίο πολύτοπο K_N ικανοποιεί την*

$$\text{vol}_n(K_N)^{-1/n} \leqslant c_0 \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log(2N/n)} L_K} \tag{7.2.2}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-C\sqrt{N}}$ για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_0, C > 0$ και $\alpha > 1$.

Για την απόδειξη όλων αυτών των ισχυρισμών παραπέμπουμε στο [3, Κεφάλαιο 11].

Οι ποσότητες $Q_k(K_N)$ μελετήθηκαν στο [39], όπου προσδιορίστηκε η μέση τιμή της $Q_k(K_N)$ για όλες τις τιμές του k: Αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(cn)$ τότε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε

$$\mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \simeq L_K \sqrt{\log N}. \tag{7.2.3}$$

Επιπλέον, για το ίδιο εύρος τιμών του N, ισχύει η ισοδυναμία $Q_k(K_N) \simeq L_K \sqrt{\log N}$ με μεγάλη πιθανότητα για το τυχαίο K_N: με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-1}$,

$$Q_k(K_N) \simeq L_K \sqrt{\log N} \tag{7.2.4}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι η ίδια εκτίμηση ισχύει για την ακτίνα όγκου της τυχαίας k-διάστατης προβολής του τυχαίου K_N. Το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-1}$ το εξής: για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left(\frac{\text{vol}_k(P_F(K_N))}{\omega_k}\right)^{1/k} \simeq L_K \sqrt{\log N} \tag{7.2.5}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-ck}$ ως προς το μέτρο Haar $\nu_{n,k}$ στην $G_{n,k}$. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το γεγονός στην ακόλουθη ακριβή μορφή (βλέπε [39, Ισχυρισμός 4.6]):

Λήμμα 7.2.2. *Αν $n^2 \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$ τότε με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{1}{N}$ έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και κάθε $t > 1$,*

$$\nu_{n,k}\left(\left\{F \in G_{n,k} : \left(\frac{\text{vol}_k(P_F K)}{\omega_k}\right)^{1/k} \leqslant c_1 t \sqrt{\log N} L_K\right\}\right) \geqslant 1 - t^{-k}. \tag{7.2.6}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.2. Αν θέσουμε

$$A = \left\{ F \in G_{n,k} : \left(\frac{\mathrm{vol}_k(P_F K)}{\omega_k} \right)^{1/k} \leqslant c_1 t \sqrt{\log N} L_K \right\}$$

και εφαρμόσουμε την παραπάνω εκτίμηση για $t = 2$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F K_N)^{-n}\, d\nu_{n,k}(F) &\geqslant \int_A \mathrm{vol}_k(P_F K_N)^{-n}\, d\nu_{n,k}(F) \\ &\geqslant (1 - 2^{-k})(2c_1 \sqrt{\log N} \omega_k^{1/k} L_K)^{-kn} \\ &\geqslant (4c_1 \sqrt{\log N} \omega_k^{1/k} L_K)^{-kn}. \end{aligned}$$

Συνεπώς, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{1}{N}$, έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F K_N)^{-n}\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-\frac{1}{kn}} \leqslant c_2 \sqrt{\log N} \omega_k^{1/k} L_K. \tag{7.2.7}$$

Έστω τώρα $\mathcal{A}$ το ενδεχόμενο να ισχύει η (7.2.2), και $\mathcal{B}$ το ενδεχόμενο (7.2.7). Παρατηρήστε ότι αν ισχύει το $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$, τότε

$$T_{n,k}(K_N) \leqslant c_1 c_2 \sqrt{\frac{\log N}{\log(N/n)}} \omega_k^{1/k} \sqrt{n} \leqslant c_3 \sqrt{\frac{n}{k}},$$

αφού $\omega_k^{-1/k} \sim \sqrt{k}$ και $\log N \leqslant 2 \log(N/n)$ (διότι $N \geqslant n^2$). Είναι λοιπόν φανερό ότι

$$\mathbb{P}\left(T_{n,k}(K_N) \leqslant c \sqrt{\frac{n}{k}} \right) \geqslant \mathbb{P}(\mathcal{A} \cap \mathcal{B}) = 1 - \mathbb{P}(\mathcal{A}^c \cup \mathcal{B}^c) \geqslant 1 - \frac{2}{N},$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό του θεωρήματος. □

7.2.2 Βήτα πολύτοπα

Υπενθυμίζουμε ότι, για $\beta > -1$, με ν_β συμβολίζουμε το μέτρο πιθανότητας που έχει φορέα την B_2^n, και πυκνότητα

$$p_{n,\beta}(x) = c_{n,\beta}(1 - \|x\|_2^2)^\beta,$$

όπου

$$c_{n,\beta} := \pi^{-n/2} \frac{\Gamma\left(\beta + \frac{n}{2} + 1\right)}{\Gamma(\beta + 1)}.$$

Η μονοδιάστατη περιθώρια πυκνότητα του ν_β δίνεται από την

$$f_\beta(t) = \alpha_{n,\beta}(1 - t^2)^{\beta + \frac{n-1}{2}}, \quad t \in [-1, 1],$$

όπου $\alpha_{n,\beta} := c_{n,\beta}/c_{n-1,\beta}$. Για $d \in [0, 1]$, θέτουμε

$$\mathrm{B}(d) := \int_d^1 f_\beta(t)\, dt.$$

Παρατηρήστε ότι $\mathrm{B}(0) = 1/2$, $\mathrm{B}(1) = 0$ και η B είναι φθίνουσα συνάρτηση του d. Θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω φράγματα για την $\mathrm{B}(d)$ (βλ. Λήμμα 6.2.2): Για κάθε $d \in (0,1)$,

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}} \frac{(1-d^2)^{\beta+\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}} \leqslant \mathrm{B}(d) \leqslant \frac{1}{2d\sqrt{\pi}} \frac{(1-d^2)^{\beta+\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}}}. \tag{7.2.8}$$

Έστω $N > n$, και $x_1, \ldots, x_N$ τυχαία διανύσματα, τα οποία επιλέγονται ανεξάρτητα με κατανομή το μέτρο ν_β. Θεωρούμε το

$$P_{N,n}^{\beta} := \mathrm{conv}\,\{x_1, \ldots, x_N\},$$

το οποίο θα καλούμε Βήτα πολύτοπο (με παράμετρο $\beta > -1$) στον $\mathbb{R}^n$.

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 7.2.3. *Έστω $\beta > -1$, και $x_1, \ldots, x_N$ τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$, ανεξάρτητα και με κατανομή το μέτρο ν_β. Αν $k \geqslant \log\left(n \log\sqrt{\beta + n/2 + 1}\right)$ και $N \geqslant c_0^{\beta+\frac{n+1}{2}}$, όπου $c_0 > 0$ απόλυτη σταθερά, τότε*

$$T_{n,k}(P_{N,n}^{\beta}) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$.

Ο ισχυρισμός θα προκύψει από τα επόμενα δύο λήμματα.

Λήμμα 7.2.4. *Έστω $\beta > -1$ και $N > n$. Αν $g(n,\beta) \geqslant 2\sqrt{\pi}n\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}(1+\log(\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}))$ και $N \geqslant c_1 g(n,\beta)$, η ανισότητα*

$$\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^{\beta})^{1/n} \geqslant c\frac{\sqrt{1-\left(\frac{g(n,\beta)}{N}\right)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}}{\sqrt{n}}.$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$.

Απόδειξη. Για κάθε $R > \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{g(n,\beta)}{N}\right)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}$, παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{g(n,\beta)}{N}\right)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}} B_2^n \nsubseteq P_{N,n}^{\beta}\right) \leqslant \mathbb{P}(RB_2^n \nsubseteq P_{Nn}^{\beta})$$

άρα ο ισχυρισμός του Λήμματος θα προκύψει αν δείξουμε ότι

$$\mathbb{P}(RB_2^n \nsubseteq P_{N,n}^{\beta}) \leqslant e^{-n},$$

για κατάλληλη τιμή του R.

Σταθεροποιούμε κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$ το οποίο θα προσδιοριστεί στη συνέχεια, και θεωρούμε ένα ε-δίκτυο $\mathcal{N}_\varepsilon$ στην S^{n-1}, με πληθάριθμο $|\mathcal{N}_\varepsilon| \leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $a > 0$, αν η $\langle x, \vartheta\rangle \leqslant a$ ισχύει για κάποιο $\vartheta \in S^{n-1}$, τότε $\langle x, \vartheta\rangle \leqslant a + \varepsilon$ για κάποιο $\vartheta \in \mathcal{N}_\varepsilon$. Χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα του μέτρου και την ανεξαρτησία των κορυφών X_i, μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(RB_2^n \not\subseteq P_{N,n}^{\beta}) &\leqslant \mathbb{P}\left(h_{P_{N,n}^{\beta}}(\vartheta) < R, \text{ για κάποιο } \vartheta \in S^{n-1}\right)\\ &\leqslant \mathbb{P}\left(h_{P_{N,n}^{\beta}}(\vartheta) < R, \text{ για κάποιο } \vartheta \in \mathcal{N}_\varepsilon\right) \leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\langle X_i, \vartheta\rangle < R+\varepsilon\right)\\ &= \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n (\mathbb{P}(\langle X, \vartheta\rangle < R+\varepsilon))^N .\end{aligned}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι, για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ και $d \in (0,1)$, από το αναλλοίωτο του ν_β ως προς στροφές,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\langle X, \vartheta\rangle < d) = \mathbb{P}(\langle X, e_1\rangle < d) &= c_{n,\beta}\int_{-1}^{d}\int_{\sqrt{1-x_1^2}B_2^{n-1}} (1-\|x\|_2^2)^\beta \, d(x_2,\dots,x_n)\, dx_1\\ &= c_{n,\beta}\int_{-1}^{d}\int_{\sqrt{1-x_1^2}B_2^{n-1}} (1-x_1^2)^\beta \left(1-\frac{\sum_{i=2}^n x_i^2}{1-x_1^2}\right)^\beta d(x_2,\dots,x_n)\, dx_1\\ &= c_{n,\beta}\int_{-1}^{d}(1-t^2)^\beta \int_{B_2^{n-1}} (1-\|z\|_2^2)^\beta (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dz\, dt\\ &= \alpha_{n,\beta}\int_{-1}^{d}(1-t^2)^{\beta+\frac{n-1}{2}}\, dt \int_{B_2^{n-1}} p_{n-1,\beta}(z)\, dz\\ &= \int_{-1}^{d} f_\beta(t)\, dt = 1-\mathrm{B}(d).\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(RB_2^n \not\subseteq P_{N,n}^{\beta}) &\leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n (1-\mathrm{B}(R+\varepsilon))^N\\ &\leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n \exp(-N\mathrm{B}(R+\varepsilon)) = \exp\left(n\log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - N\mathrm{B}(R+\varepsilon)\right),\end{aligned}$$

άρα μένει να δείξουμε ότι $n\log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right) - N\mathrm{B}(R+\varepsilon) \leqslant -n$, ή, ισοδύναμα,

$$N\mathrm{B}(R+\varepsilon) \geqslant n\left(1+\log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right).$$

Θέτουμε $\varepsilon = (2\sqrt{\beta+\frac{n+1}{2}})^{-1}$, και παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε $N > g(n,\beta)\left(1-4\varepsilon^2\right)^{-\left(\beta+\frac{n+1}{2}\right)}$, τότε $\varepsilon < \frac{1}{2}\sqrt{1-\left(\frac{g(n,\beta)}{N}\right)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}$. Παίρνοντας $R = \sqrt{1-\left(\frac{g(n,\beta)}{N}\right)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}} - \varepsilon$ και χρησιμοποιώντας το κάτω φράγμα στην (7.2.8), μπορούμε τότε να δούμε ότι

$$N\mathrm{B}(R+\varepsilon) \geqslant \frac{N}{2\sqrt{\pi}}\frac{(g(n,\beta)N^{-1})^{\frac{2}{2\beta+n+1}\left(\beta+\frac{n+1}{2}\right)}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}} = \frac{g(n,\beta)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}} \geqslant n\left(1+\log\left(\frac{2}{\varepsilon}\right)\right),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η μέση τιμή, στην $G_{n,k}$, του όγκου του $P_F(P_{N,n}^{\beta})$ συνδέεται με τον όγκο του $P_{N,k}^{\beta'}$, για κάποιο $\beta' > -1$, ως εξής: Υπενθυμίζουμε ότι, για $k=1,\dots,n$, ο k-οστός intrinsic όγκος ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια ολοκληρωτική αναπαράσταση, που δίνεται από τον τύπο του Kubota,

$$V_k(K) = r_{n,k} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F),$$

όπου $r_{n,k} = \binom{n}{k} \frac{\omega_n}{\omega_k \omega_{n-k}}$. Από το Λήμμα 6.3.7 γνωρίζουμε ότι

$$\mathbb{E}(V_k(P_{N,n}^{\beta})) = r_{n,k} \mathbb{E}(\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})).$$

και άρα

$$\mathbb{E} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))\, d\nu_{n,k}(F) = \mathbb{E}(\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})).$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο αποτέλεσμα.

Λήμμα 7.2.5. *Για κάθε $\beta > -1$ και $k \geqslant \log\left(n \log\left(\sqrt{\beta + \frac{n}{2} + 1}\right)\right)$, αν $N \geqslant g(n,\beta) c^{\beta + \frac{n+1}{2}}$, τότε το ενδεχόμενο*

$$\nu_{n,k}\left(\left\{F \in G_{n,k} : \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))^{1/k} \leqslant t \frac{\sqrt{1 - \left(\frac{g(n,\beta)}{N}\right)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}}{\sqrt{k}}\right\}\right) \geqslant 1 - t^{-k},$$

ισχύει, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$.

Απόδειξη του Λήμματος 7.2.5. Ορίζουμε $r := \sqrt{1 - \left(\frac{g(n,\beta)}{N}\right)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}$, και

$$S = \left\{F \in G_{n,k} : \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))^{1/k} \geqslant t \frac{r}{\sqrt{k}}\right\}.$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$\nu_{n,k}(S) \leqslant t^{-k} \frac{\sqrt{k}}{r} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))^{1/k}\, d\nu_{n,k}(F).$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))^{1/k}\, d\nu_{n,k}(F) \leqslant c \frac{r}{\sqrt{k}}\right) \geqslant 1 - e^{-k},$$

το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό του Λήμματος. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))^{1/k}\, d\nu_{n,k}(F) \geqslant c_0 e \frac{r}{\sqrt{k}}\right) &\leqslant (c_1 e)^{-k} \mathbb{E} \frac{\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))\, d\nu_{n,k}(F)}{\mathrm{vol}_k\left(r B_2^k\right)} \\
&= (c_1 e)^{-k} \mathbb{E} \frac{\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})}{\mathrm{vol}_k\left(r B_2^k\right)},
\end{aligned}$$

άρα το πρόβλημα ανάγεται στο να εξασφαλίσουμε κατάλληλο άνω φράγμα για την $\mathbb{E}(\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}}))$. Θα αποδείξουμε ότι

$$\mathbb{E}\frac{\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})}{\mathrm{vol}_k\left(rB_2^k\right)} \leqslant c_1^k,$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι (βλ. Λήμμα 6.3.3 (α)) για κάθε $\beta > -1$, $m \in \mathbb{N}$, και κάθε φραγμένο $A \subset \mathbb{R}^m$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{vol}_m(P_{N,m}^{\beta})) \leqslant N \sup_{x\in A} \mathrm{B}(\|x\|_2)\mathrm{vol}_m(A).$$

Αν $A = B_2^k \setminus rB_2^k$, τότε, αφού $\|x\|_2 \geqslant r$ για κάθε $x \in A$,

$$\mathbb{E}\frac{\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})}{\mathrm{vol}_k(rB_2^k)} \leqslant 1 + \mathbb{E}\frac{\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}} \cap A)}{\mathrm{vol}_k(rB_2^k)} \leqslant 1 + r^{-k}N\mathrm{B}(r).$$

Παρατηρήστε ότι από την υπόθεση για το N έπεται ότι $r \geqslant c_0$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$. Χρησιμοποιώντας το άνω φράγμα στην (7.2.8) παίρνουμε, για $k \geqslant \log\left(n\log\left(\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}\right)\right)$,

$$N\mathrm{B}(r) \leqslant N\frac{1}{2\pi\sqrt{\beta+\frac{n}{2}}}\frac{(g(n,\beta)N^{-1})^{\frac{2}{2\beta+n+1}\left(\beta+\frac{n+1}{2}\right)}}{\left(1-\left(\frac{g(n,\beta)}{N}\right)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}\right)^{\frac{k+1}{2}}} \leqslant c^k,$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

7.3 Η περίπτωση των unconditional κυρτών σωμάτων

Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ (αυτό σημαίνει ότι το K είναι συμμετρικό ως προς τους υποχώρους συντεταγμένων $e_i^{\perp}$, όπου $\{e_1,\dots,e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$). Αφού η ποσότητα $T_{n,k}(K)$ είναι γραμμικά αναλλοίωτη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K βρίσκεται στην ισοτροπική θέση. Από ένα πολύ γνωστό αποτέλεσμα των Bobkov και Nazarov (δείτε τα [28] και [29]) έχουμε τότε

$$c_1B_\infty^n \subseteq K \subseteq c_2nB_1^n$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$, άρα το πρόβλημα ουσιαστικά ανάγεται στο να δοθούν ακριβείς εκτιμήσεις για την $T_{n,k}(K)$ στην περίπτωση που το K είναι το cross-polytope $B_1^n = \mathrm{conv}\{\pm e_1,\dots,\pm e_n\}$. Πράγματι, έχουμε $\mathrm{vol}_k(P_F(K)) \leqslant c_2n\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))$ για κάθε $F \in G_{n,k}$, άρα

$$\begin{aligned}T_{p,n,k}(K) &= \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-p}\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kp}}\\ &\leqslant c_2n\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{-p}\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kp}} \leqslant c_3T_{p,n,k}(B_1^n)\end{aligned}$$

για κάθε $p \neq 0$ και $1 \leqslant k \leqslant n-1$, αν θυμηθούμε ότι $\mathrm{vol}_n(B_1^n) = \frac{2^n}{n!}$, που σημαίνει ότι $\mathrm{vol}_n(B_1^n)^{-1/n} \simeq n$.

Συνεχίζουμε λοιπόν εξετάζοντας την περίπτωση του cross-polytope B_1^n. Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι $B_1^n \supseteq \frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n$ άρα, προφανώς, $P_F(B_1^n) \supseteq \frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n \cap F$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,k}$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{\frac{1}{k}} \geqslant \frac{\omega_k^{1/k}}{\sqrt{n}} \simeq \frac{1}{\sqrt{kn}}.$$

Από την άλλη πλευρά, είναι γνωστό ότι $\mathrm{vol}_k(B_\infty^n \cap F) \geqslant \mathrm{vol}_k(B_\infty^k) = 2^k$ και, αφού το $B_\infty^n \cap F$ είναι το πολικό σώμα του $P_F(B_1^n)$ στον F, η ανισότητα Blaschke-Santaló μας δίνει

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{\frac{1}{k}} \leqslant \mathrm{vol}_k(B_\infty^n \cap F)^{-\frac{1}{k}} \omega_k^{2/k} \leqslant \frac{c}{k}$$

για κάθε k και $F \in G_{n,k}$. Συνοψίζουμε αυτές τις αρχικές πληροφορίες στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 7.3.1. *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και κάθε $F \in G_{n,k}$ έχουμε*

$$\frac{c_1}{\sqrt{kn}} \leqslant \mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{c_2}{k},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$c_3\sqrt{n/k} \leqslant T_{p,n,k}(B_1^n) \leqslant c_4\, n/k$$

για κάθε $p \neq 0$, όπου $c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την τυπική συμπεριφορά μιας k-διάστατης προβολής του B_1^n. Για τον τυχαίο $F \in G_{n,k}$ έχουμε το ακόλουθο άνω φράγμα:

Λήμμα 7.3.2. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$. Αν $k \geqslant \log n$ τότε με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-k)$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{c\sqrt{\log(1+n/k)}}{\sqrt{kn}}. \tag{7.3.1}$$

Απόδειξη. Συνδυάζουμε δύο πολύ γνωστά αποτελέσματα. Το πρώτο είναι το (άνω φράγμα στο) λήμμα των Johnson-Lindenstrauss από το [62].

> *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, τέτοιες ώστε αν $\varepsilon > 0$ και $N < \exp(\varepsilon^2 k/16)$ τότε για κάθε $\{y_1, \ldots, y_N\} \subset S^{n-1}$ υπάρχει υποσύνολο $G \subseteq G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(G) \geqslant 1 - \exp(-\varepsilon^2 k/16)$ τέτοιο ώστε για κάθε $F \in G$ να έχουμε*
>
> $$\|P_F(y_j)\|_2 \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{k/n} \tag{7.3.2}$$
>
> *για κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$.*

Χρησιμοποιούμε επίσης γνωστά κάτω φράγματα για τον όγκο της τομής συμμετρικών λωρίδων. Οι Carl-Pajor [37], και ανεξάρτητα ο Gluskin [53] (δείτε επίσης το [22]), έδωσαν κάτω φράγμα για τον όγκο ενός συμμετρικού πολυέδρου $K = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, w_i\rangle| \leqslant 1, i = 1, \ldots, N\}$ συναρτήσει του $\max\{\|w_i\|_2 : 1 \leqslant i \leqslant N\}$:

Έστω $w_1,\ldots,w_N$ διανύσματα που παράγουν τον $\mathbb{R}^k$ με $\|w_i\|_2\leqslant 1$ για κάθε $1\leqslant i\leqslant N$. Θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σώμα

$$C=\{x\in\mathbb{R}^k : |\langle x,w_i\rangle|\leqslant 1, i=1,\ldots,N\}.$$

Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(C)^{1/k}\geqslant\frac{c}{\sqrt{\log(1+N/k)}}, \tag{7.3.3}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θεωρούμε τα συνήθη ορθοκανονικά διανύσματα $e_1,\ldots,e_n$ στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε $\varepsilon>0$ το οποίο θα επιλεγεί κατάλληλα, και έναν υπόχωρο $F\in G_{n,k}$ που ικανοποιεί την (7.3.2). Αν θέσουμε $w_j=\frac{1}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{n}{k}}P_F(e_j)$ έχουμε ότι

$$\max_{1\leqslant i\leqslant n}\|w_i\|_2\leqslant 1.$$

Από την (7.3.3) βλέπουμε ότι το $C=\{x\in F:|\langle x,w_i\rangle|\leqslant 1, i=1,\ldots,N\}$ έχει όγκο

$$\mathrm{vol}_k(C)^{1/k}\geqslant\frac{c_1}{\sqrt{\log(1+n/k)}}.$$

Συνεπώς, το πολικό σώμα $C^\circ=\mathrm{conv}(\{\pm w_1,\ldots,\pm w_n\})$ του C στον F έχει όγκο

$$\mathrm{vol}_k(C^\circ)^{1/k}\leqslant\frac{c_2}{k}\mathrm{vol}_k(C)^{-1/k}\leqslant\frac{c_3\sqrt{\log(1+n/k)}}{k}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$P_F(B_1^n)=\mathrm{conv}(\{\pm P_F(e_1),\ldots,\pm P_F(e_n)\})=(1+\varepsilon)\sqrt{\frac{k}{n}}K^\circ.$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k}\leqslant(1+\varepsilon)\frac{c_3\sqrt{\log(1+n/k)}}{\sqrt{kn}}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-\varepsilon^2k/16)$, αν υποθέσουμε ότι $n<\exp(\varepsilon^2k/16)$. Αν $k\geqslant\log n$ τότε επιλέγοντας $\varepsilon=4$ παίρνουμε το λήμμα. □

Από το Λήμμα 7.3.2 παίρνουμε εύκολα μια ισχυροποιημένη εκδοχή του Θεωρήματος 7.1.4 για το cross-polytope, η οποία με τη σειρά της έχει ως συνέπεια το Θεώρημα 7.1.4

Πρόταση 7.3.3. *Έστω $1\leqslant k\leqslant n$. Αν $k\geqslant\log n$ τότε*

$$T_{p,n,k}(B_1^n)\leqslant c\sqrt{n/k}\sqrt{\log(1+n/k)} \tag{7.3.4}$$

για κάθε $p\geqslant c'/(n\log n)$, όπου $c,c'>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$T_{n,k}(B_1^n)\leqslant c\sqrt{n/k}\sqrt{\log(1+n/k)}. \tag{7.3.5}$$

Απόδειξη. Έστω $A_{n,k}$ το υποσύνολο της $G_{n,k}$ στο οποίο έχουμε την

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{c\sqrt{\log(1+n/k)}}{\sqrt{kn}}. \tag{7.3.6}$$

Από το Λήμμα 7.3.2 έχουμε $\nu_{n,k}(A_{n,k}) \geqslant 1-\exp(-k)$. Τώρα, για δοθέν $p>0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} T_{p,n,k}(B_1^n) &\leqslant c_1 n\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{-p}\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kp}} \\ &\leqslant c_1 n[\nu_{n,k}(A_{n,k})]^{-\frac{1}{kp}}\left(\frac{c\sqrt{\log(1+n/k)}}{\sqrt{kn}}\right) \\ &\leqslant c_2\sqrt{n/k}\sqrt{\log(1+n/k)}(1-e^{-k})^{-\frac{1}{kp}} \\ &\leqslant c_3\sqrt{n/k}\sqrt{\log(1+n/k)}, \end{aligned}$$

αν πάρουμε υπόψη μας την

$$(1-e^{-k})^{\frac{1}{kp}} \geqslant \exp\left(-\frac{2e^{-k}}{kp}\right) \geqslant \frac{1}{2},$$

που ισχύει γιατί $ke^k \geqslant n\log n$ και $p \leqslant c/(n\log n)$. □

Περνάμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.5. Το πρώτο μας επιχείρημα βασίζεται στην ύπαρξη k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ για τους οποίους $\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{c}{\sqrt{kn}}$. Για το άλλο άκρο, δεν είναι δύσκολο να δώσουμε παραδείγματα υποχώρων $F\in G_{n,k}$ τέτοιων ώστε $\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \simeq \frac{1}{k}$. Μπορούμε απλώς να επιλέξουμε $F_\sigma = \mathrm{span}\{e_j : j\in\sigma\}$ για κάθε $\sigma\subseteq[n]$ με $|\sigma|=k$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P_{F_\sigma}(B_1^n)) = \frac{2^k}{k!}.$$

Το επόμενο λήμμα δίνει συγκεκριμένα παραδείγματα υποχώρων $F\in G_{n,k}$ για τους οποίους $\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{c}{\sqrt{kn}}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k<\frac{n}{10}$, αλλιώς αυτή η εκτίμηση ισχύει για τον τυχαίο F από το Λήμμα 7.3.2.

Λήμμα 7.3.4. *Έστω $1\leqslant k\leqslant n/10$. Υπάρχει $F\in G_{n,k}$ τέτοιος ώστε*

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{c}{\sqrt{kn}},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια διαμέριση $[n]=\sigma_1\cup\cdots\cup\sigma_k$ σε ξένα υποσύνολα σ_i με $|\sigma_i|=m_i$, και ορίζουμε

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}}\sum_{j\in\sigma_i} e_j.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε

$$m_1=\cdots=m_{k-1}=\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor \quad \text{και} \quad m_k = n-(k-1)\left\lfloor\frac{n}{k}\right\rfloor.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\frac{n}{2k} \leqslant \frac{n}{k} - 1 \leqslant m_i \leqslant \frac{n}{k}$$

για κάθε $i = 1, \dots, k-1$ και

$$m_k = n - (k-1)\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor \geqslant n - \frac{k-1}{k}n = \frac{n}{k}.$$

Θέτουμε

$$F = \mathrm{span}\{v_1, \dots, v_k\}.$$

Παρατηρήστε ότι τα $v_1, \dots, v_k$ σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του F και ότι αν $j \in \sigma_i$ τότε

$$P_F(e_j) = \langle e_j, v_i \rangle v_i = \frac{v_i}{\sqrt{m_i}}.$$

Συνεπώς, το $P_F(B_1^n)$ είναι η απόλυτη κυρτή θήκη k ορθογώνιων διανυσμάτων με μήκη

$$\frac{1}{\sqrt{m_1}}, \dots, \frac{1}{\sqrt{m_k}} \leqslant \sqrt{\frac{2k}{n}}.$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n)) = \frac{2^k}{k!} \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{\sqrt{m_i}} \leqslant \frac{2^k}{k!} \left(\frac{2k}{n}\right)^{k/2},$$

άρα $\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant c/\sqrt{kn}$. □

Το επόμενο λήμμα προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της κυρτής θήκης.

Λήμμα 7.3.5. *Έστω $P = \mathrm{conv}(\{u_1, \dots, u_N\})$ και $Q = \mathrm{conv}(\{w_1, \dots, w_N\})$ δύο πολύτοπα στον $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ ισχύει*

$$\|u_j - w_j\|_2 \leqslant \varepsilon \qquad \text{για κάθε } j = 1, \dots, N.$$

Τότε,

$$P \subseteq Q + \varepsilon B_2^k \quad \text{και} \quad Q \subseteq P + \varepsilon B_2^k.$$

Θεωρούμε τις μετρικές $\sigma_\infty(E, F) = \|P_E - P_F\|$ και $d(E, F) = \inf\{\|I_n - U\| : U \in O(n), U(E) = F\}$ στην $G_{n,k}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$\sigma_\infty(E, F) \leqslant d(E, F) \leqslant \sqrt{2}\sigma_\infty(E, F)$$

για κάθε $E, F \in G_{n,k}$. Αρχικά, σταθεροποιούμε έναν υπόχωρο F_0 που ικανοποιεί την εκτίμηση του Λήμματος 7.3.4.

Λήμμα 7.3.6. *Έστω E στον $G_{n,k}$ με $d(E, F_0) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_k(P_E(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{C}{\sqrt{kn}},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $U \in O(n)$ τέτοιος ώστε $U(E) = F_0$ και $\|I_n - U\| \leqslant \varepsilon := \frac{1}{\sqrt{n}}$. Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ θέτουμε $u_j = P_{F_0}(e_j)$ και $w_j = U(P_E(e_j))$. Τότε, $u_j, w_j \in F_0$ και έχουμε

$$\|P_E(e_j) - w_j\|_2 = \|P_E(e_j) - U(P_E(e_j))\|_2 \leqslant d(E, F_0)\, \|P_E(e_j)\|_2 \leqslant \varepsilon$$

και

$$\|P_E(e_j) - u_j\|_2 = \|P_E(e_j) - P_{F_0}(e_j)\|_2 \leqslant \|P_E - P_{F_0}\| = \sigma_\infty(E, F_0) \leqslant \varepsilon,$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$\|u_j - w_j\|_2 \leqslant 2\epsilon = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Από το Λήμμα 7.3.5 παίρνουμε

$$U(P_E(B_1^n)) \subseteq P_{F_0}(B_1^n) + \frac{2}{\sqrt{n}} B_2^n \cap F_0 \subseteq 3P_{F_0}(B_1^n).$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{vol}_k(P_E(B_1^n))^{1/k} \leqslant 3\mathrm{vol}_k(P_{F_0}(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{3c}{\sqrt{kn}},$$

όπου $c > 0$ είναι η σταθερά στο Λήμμα 7.3.4. □

Παρατήρηση 7.3.7. Ο Szarek απέδειξε στα [106] και [107] ότι για κάθε $F \in G_{n,k}$ και κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\nu_{n,k}(B_d(F, \varepsilon)) \geqslant (c_1\varepsilon)^{k(n-k)}.$$

Συνεπώς, το άνω φράγμα

$$\mathrm{vol}_k(P_E(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{C}{\sqrt{kn}}$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από

$$\left(\frac{c_1}{\sqrt{n}}\right)^{k(n-k)}.$$

Έπεται ότι αν $p > 0$ τότε

$$\begin{aligned} T_{p,n,k}(B_1^n) &\leqslant c_1 n \left(\int_{B_d(F_0, 1/\sqrt{n})} \mathrm{vol}_k(P_E(B_1^n))^{-p} d\nu_{n,k}(E) \right)^{-\frac{1}{kp}} \\ &\leqslant c_1 [\nu_{n,k}(B_d(F_0, 1/\sqrt{n}))]^{-\frac{1}{kp}} \cdot \frac{c_2}{\sqrt{kn}} \\ &\leqslant (c_3 n)^{\frac{n-k}{p}} c_4 \sqrt{n/k}. \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

Ειδικότερα παίρνουμε:

Πρόταση 7.3.8. *Για κάθε $p \geqslant (n-k)(\log n)$ έχουμε*

$$T_{p,n,k}(B_1^n) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, άρα $T_{p,n,k}(B_1^n) \simeq \sqrt{n/k}$ από το Λήμμα 7.3.1.

Το δεύτερο επιχείρημά μας βασίζεται στο γεγονός ότι αν ορίσουμε το $B_{n,k} \subseteq G_{n,k}$ θέτοντας

$$B_{n,k} = \left\{ F \in G_{n,k} : \mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{kn}} \right\},$$

τότε (βλέπε [87, Σχέση (1.17)]),

$$\nu_{n,k}(B_{n,k}) = \mathbb{P}\left(\{\omega \in \Omega : G_n(\omega)(\mathbb{R}^k) \in B\}\right),$$

όπου $G_n = (g_{ij})$ είναι ένας $n \times k$ πίνακας με ανεξάρτητες $N(0, 1/n)$ συντεταγμένες. Οι στήλες $g_1, \dots, g_k$ του G_n είναι τότε ανεξάρτητα αντίγραφα ενός $N(0,1)$ τυχαίου διανύσματος g στον $\mathbb{R}^n$. Αν γράψουμε $G(\omega) = G_n(\omega)(\mathbb{R}^k)$, η τελευταία ταυτότητα ισχυρίζεται ότι

$$\nu_{n,k}(B_{n,k}) = \mathbb{P}\left(\mathrm{vol}_k(P_G(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{kn}} \right).$$

Από την ανισότητα Blaschke-Santaló έχουμε $\mathrm{vol}_k(P_G(B_1^n))^{1/k}\mathrm{vol}_k(B_\infty^n \cap G)^{1/k} \leqslant ck$, άρα η ανισότητα $\mathrm{vol}_k(P_G(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{1}{\sqrt{kn}}$ είναι ισοδύναμη με την $\mathrm{vol}_k(B_\infty^n \cap G)^{1/k} \geqslant \sqrt{n/k}$. Αφού $\mathrm{vol}_k(G(B_\infty^k))^{\frac{1}{k}} = \det(G^*G)^{\frac{1}{2k}}\mathrm{vol}_k(B_\infty^k)^{\frac{1}{k}}$, για να πάρουμε αυτό το κάτω φράγμα για τον $\mathrm{vol}_k(B_\infty^n \cap G)^{1/k}$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$B_\infty^n \cap G \supseteq \sqrt{\frac{n}{k}} \det(G^*G)^{-\frac{1}{2k}} G(B_\infty^k). \tag{7.3.8}$$

Όμως, ο όρος $\det(G^*G)^{-\frac{1}{2k}}$ που εμφανίζεται παραπάνω είναι, με μεγάλη πιθανότητα, φραγμένος από μια απόλυτη σταθερά. Για να το δούμε αυτό, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε γνωστές εκτιμήσεις για την κατανομή των ιδιαζουσών τιμών $s_1(G) \geqslant s_2(G) \geqslant \dots \geqslant s_k(G)$ του πίνακα G. Για παράδειγμα, από το [43, Θεώρημα II.13], έχουμε ότι

$$\max\left\{ \mathbb{P}\left(s_1(G) \geqslant \frac{3}{2} + \sqrt{\frac{k}{n}} \right), \mathbb{P}\left(s_k(G) \leqslant \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{k}{n}} \right) \right\} < e^{-\frac{n}{8}}.$$

Συνδυάζοντας αυτήν την εκτίμηση με την ταυτότητα

$$\det(G^*G)^{\frac{1}{2}} = \prod_{i=1}^k s_i(G),$$

βλέπουμε ότι $\det(G^*G)^{\frac{1}{2k}} \in [\frac{1}{6}, \frac{5}{2}]$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-\frac{n}{8}}$, αν υποθέσουμε ότι $k \leqslant n/9$.

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε ότι

$$B_\infty^n \cap G \supseteq c\sqrt{\frac{n}{k}} G(B_\infty^k),$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, αφού τότε η (7.3.8) ισχύει με μεγάλη πιθανότητα, και για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι

$$\max_{\epsilon_i = \pm 1} \|\epsilon_1 G_n(e_1) + \cdots + \epsilon_k G_n(e_k)\|_\infty \leqslant \sqrt{k/n}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\max_{\epsilon_i=\pm1}\|\epsilon_1G_n(e_1)+\cdots+\epsilon_kG_n(e_k)\|_\infty &= \max_{\epsilon_i=\pm1}\max_{1\leqslant j\leqslant n}\left|\sum_{i=1}^k\epsilon_i\langle G_ne_i,e_j\rangle\right|\\ &\leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^k|\langle G_ne_i,e_j\rangle|\\ &= \max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{i=1}^k\left|\langle e_i,G_n^Te_j\rangle\right| = \max_{1\leqslant j\leqslant n}\|G_n^Te_j\|_{\ell_1^k}\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $G_n^Te_j=g_j$ για κάθε $1\leqslant j\leqslant n$, και την ανεξαρτησία των g_j, έχουμε

$$\begin{aligned}\nu_{n,k}(B_{n,k}) &= \mathbb{P}\left(\mathrm{vol}_k(P_G(B_1^n))^{1/k}\leqslant\frac{1}{\sqrt{kn}}\right)\\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\max_{\varepsilon_i=\pm1}\|\varepsilon_1G_n(e_1)+\cdots+\varepsilon_kG_n(e_k)\|_\infty\leqslant\sqrt{\frac{k}{n}}\right)\\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant n}\|g_j\|_{\ell_1^k}\leqslant\sqrt{k/n}\right)\\ &= \left(\mathbb{P}\left(\|g\|_{\ell_1^k}\leqslant\sqrt{k/n}\right)\right)^n.\end{aligned}$$

Θυμηθείτε ότι το g είναι ένα διάνυσμα $\sum_{j=1}^n\tilde{g}_je_j$ όπου οι $\tilde{g}_j$ είναι ανεξάρτητες $N(0,1/n)$ τυχαίες μεταβλητές. Αφού $\|x\|_2\leqslant\|x\|_1$, έχουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k|\tilde{g}_i|\leqslant\sqrt{\frac{k}{n}}\right) &= \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{k/2}\int_{\sqrt{\frac{k}{n}}B_1^k}e^{-\frac{\|x\|_2^2}{2n^{-1}}}\,dx\\ &\geqslant \left(\frac{n}{2\pi}\right)^{k/2}e^{-k/2}\left|\sqrt{\frac{k}{n}}B_1^n\right|\\ &\simeq \left(\frac{1}{2\pi}\right)^{k/2}e^{-k/2}\left(\frac{1}{k}\right)^{k/2} = e^{-\frac{k}{2}(1+\log(2\pi k))},\end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει $\nu_{n,k}(B_{n,k})\geqslant e^{-ckn\log(1+k)}$. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 7.3.8 βλέπουμε ότι αν $p>0$ τότε

$$\begin{aligned}T_{p,n,k}(B_1^n) &\leqslant c_1n\left(\int_{B_d(F_0,1/\sqrt{n})}\mathrm{vol}_k(P_E(B_1^n))^{-p}d\nu_{n,k}(E)\right)^{-\frac{1}{kp}}\\ &\leqslant c_1[\nu_{n,k}(B_{n,k})]^{-\frac{1}{kp}}\cdot\frac{c_2}{\sqrt{kn}}\\ &\leqslant \exp\left(\frac{ckn\log(1+k)}{kp}\right)c_4\sqrt{n/k}.\end{aligned}\tag{7.3.9}$$

Ειδικοτερα παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.3.9. *Για κάθε $p \geqslant n\log(1+k)$ ισχύει*

$$T_{p,n,k}(B_1^n) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, άρα $T_{p,n,k}(B_1^n) \simeq \sqrt{n/k}$ από το Λήμμα 7.3.1.

Το Θεώρημα 7.1.5 προκύπτει από την Πρόταση 7.3.8 και την Πρόταση 7.3.9.

7.4 Ένα γενικό κάτω φράγμα

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θυμηθείτε ότι αν $p>0$, τότε

$$T_{-p,n,k}(K) = \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}} \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-p}\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-\frac{1}{kp}}.$$

Αν με $r(A)$ συμβολίζουμε την εγγεγραμμένη ακτίνα ενός συμμετρικού κυρτού σώματος A στον $\mathbb{R}^m$ (τον μεγαλύτερο $r>0$ για το οποίο $rB_2^m \subseteq A$) τότε για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ και $F\in G_{n,k}$ έχουμε $\omega_k r(P_F(K))^k \leqslant \mathrm{vol}_k(P_F(K))$, και άρα, για κάθε $p>0$,

$$T_{-p,n,k}(K) \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}} \omega_k^{1/k} \left(\int_{G_{n,k}} r(P_F(K))^{-kp}\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-\frac{1}{kp}}. \tag{7.4.1}$$

Για κάθε $q\neq 0$ θεωρούμε την παράμετρο

$$w_q(K) = \left(\int_{S^{n-1}} h_K^q(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta) \right)^{1/q}.$$

Για να δώσουμε ένα κάτω φράγμα για το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος, θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα των Klartag και Vershynin από το [67]. Η ακόλουθη, πιο ευέλικτη, διατύπωση βρίσκεται στο [94].

Θεώρημα 7.4.1. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ και $q\geqslant k$ έχουμε*

$$\left(\int_{G_{n,k}} r(P_F(K))^{-q/2}\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{2/q} \leqslant \left(1 + \frac{c_1 k}{q} \log\left(\frac{eq}{k}\right) \right) \frac{w(K)}{(w_{-2q}(K))^2}, \tag{7.4.2}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στο [67] αποδεικνύεται επίσης ότι ο λόγος $w(K)/w_{-2p}(K)$ παραμένει φραγμένος από μια απόλυτη σταθερά, εφ᾽ όσον $p\leqslant c_2 d_*(K)$, όπου η παράμετρος $d_*(K)$ δίνεται από την

$$d_*(K) = \min\left\{ -\log\sigma\left(\left\{ x\in S^{n-1} : h_K(x) \leqslant \frac{w(K)}{2} \right\} \right), n \right\}.$$

Είναι γνωστό ότι $d_*(K) \geqslant c_3 k_*(K) \geqslant c_4 n(w(K)/R(K))^2$, και άρα έχουμε

$$w_{-2p}(K) \leqslant w(K) \leqslant c_5 \cdot w_{-2p}(K)$$

για κάθε $0 < p \leqslant c_6 n(w(K)/R(K))^2$. Στην πραγματικότητα, υπάρχουν παραδείγματα κυρτών σωμάτων για τα οποία το $k_*(K)$ είναι πολύ μικρότερο από το $d_*(K)$, και άρα το διάστημα των p για τα οποία αυτή η εκτίμηση ισχύει είναι πολύ μεγαλύτερο.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε το επόμενο γενικό κάτω φράγμα για το $T_{-p,n,k}(K)$.

Πρόταση 7.4.2. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant c_3 d_*(K)$ και κάθε $0 < p \leqslant \frac{c_3 d_*(K)}{k}$ έχουμε*

$$T_{-p,n,k}(K) \geqslant c_4 \sqrt{n/k}\, \frac{w(K)}{\mathrm{vrad}(K)}, \tag{7.4.3}$$

όπου οι $c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{vol}_n(K) = \omega_n$, και άρα $\mathrm{vrad}(K) = 1$. Έστω $1 \leqslant k \leqslant c_3 d_*(K)$ και $q = 2c_3 d_*(K)$. Τότε,

$$\left(\int_{G_{n,k}} r(P_F(K))^{-q/2}\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{2/q} \leqslant \left(1 + \frac{c_3 k}{q} \log\left(\frac{eq}{k}\right) \right) \frac{w(K)}{(w_{-2q}(K))^2} \leqslant c_4 \frac{1}{w(K)}, \tag{7.4.4}$$

όπου οι $c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Από την (7.4.1) και το Θεώρημα 7.4.1 παίρνουμε

$$T_{-q/(2k),n,k}(K) \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}} \omega_k^{1/k} \left(\int_{G_{n,k}} r(P_F(K))^{-q/2}\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-2/q} \geqslant c_4^{-1} w(K). \tag{7.4.5}$$

Αφού $\mathrm{vol}_n(K)^{-1/n} \omega_k^{1/k} \simeq \sqrt{n/k}$, έχουμε

$$T_{-p_0,n,k}(K) \geqslant c_2 \sqrt{n/k}\, w(K)$$

για $p_0 = \frac{q}{2k} = c_3 d_*(K)/k$, και τότε το ίδιο ισχύει για κάθε $0 < p \leqslant p_0$ από τη μονοτονία της $p \mapsto T_{-p,n,k}(K)$. $\square$

Βιβλιογραφία

[C-1] G. Chasapis and A. Giannopoulos, *Euclidean regularization in John's position*, Indiana University Mathematics Journal **65** (2016), 1877-1890.

[C-2] G. Chasapis, A. Giannopoulos and D.-L. Liakopoulos, Estimates for measures of lower dimensional sections of convex bodies, Advances in Mathematics **306** (2017), 880-904.

[C-3] G. Bonnet, G. Chasapis, J. Grote, D. Temesvari and N. Turchi, *Threshold phenomena for high-dimensional random polytopes*, Communications in Contemporary Mathematics (to appear).

[C-4] G. Chasapis and N. Skarmogiannis, *A note on norms of signed sums of vectors*, preprint.

Βιβλία

[1] E. Artin. *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, Teubner, Leipzig, (1931); English translation: *The Gamma Function*, Holt, Rinehart and Winston, New York, (1964).

[2] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs **202** (2015).

[3] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Amer. Math. Society, Mathematical Surveys and Monographs **196** (2014).

[4] Y. D. Burago and V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York (1988).

[5] S. R. Finch, *Mathematical constants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **94**, Cambridge University Press, Cambridge (2003).

[6] R. Gardner, *Geometric Tomography*, *Second Edition*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **58**, Cambridge University Press (2006).

[7] A. Koldobsky, *Fourier analysis in convex geometry*, Mathematical Surveys and Monographs **116**, Amer. Math. Society (2005).

[8] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[9] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[10] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge (2014).

[11] R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and integral geometry*, Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin (2008).

[12] J. Spencer, *Ten Lectures on the Probabilistic Method*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Penn. (1994).

[13] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monographs 38, Pitman, London (1989).

[14] R. Wong, *Asymptotic approximations of integrals*, Computer Science and Scientific Computing, Academic Press, Inc., Boston, MA (1989).

Άρθρα

[15] F. Affentranger, *The convex hull of random points with spherically symmetric distributions*, Rend. Sem. Mat. Univ. Politec. Torino **49** (1991), 359–383.

[16] M. Anttila, K. M. Ball and E. Perissinaki, *The central limit problem for convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4723–4735.

[17] K. M. Ball, *Ellipsoids of maximal volume in convex bodies*, Geom. Dedicata **41** (1992), 241–250.

[18] W. Banaszczyk, *Balancing vectors and convex bodies*, Studia Math. **106** (1993), 93–100.

[19] W. Banaszczyk, *Balancing vectors and Gaussian measures of n-dimensional convex bodies*, Random Structures Algorithms **12** (1998), no. 4, 351–360.

[20] N. Bansal, D. Dadush, and S. Garg, *An algorithm for Komlós conjecture matching Banaszczyk's bound*, In 57th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2016, New Brunswick, NJ, USA, October 9-11 2016, 788–799.

[21] I. Bárány, *On the power of linear dependencies*, Building Bridges, Bolyai Society Mathematical Studies, Vol. **19**, Springer, Berlin (2008), pp.31–45.

[22] I. Bárány and Z. Füredi, *Approximation of the sphere by polytopes having few vertices*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 651-659.

[23] I. Bárány and V.S. Grinberg, *On some combinatorial questions in finite dimensional spaces*, Linear Algebra Appl. **41** (1981), 1–9.

[24] I. Bárány and A. Pór, *On $0-1$ polytopes with many facets*, Adv. Math. **161** (2001), 209–228.

[25] A. Barvinok, *Measure Concentration*, lecture notes, University of Michigan (2005), available at `http://www.math.lsa.umich.edu/~barvinok/total710.pdf`.

[26] J. Beck and T. Fiala, *Integer-making theorems*, Discrete Appl. Math. **3** (1981), 1–8.

[27] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. Math. **102** (1975), 159–182.

[28] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 53–69.

[29] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. **56**, Birkhäuser, Basel (2003), 3–13.

[30] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. **12** (1974), 239–252.

[31] G. Bonnet, J. Grote, D. Temesvari, C. Thäle, N. Turchi and F. Wespi, *Monotonicity of facet numbers of random convex hulls*, J. Math. Anal. Appl. **455** (2017), 1351–1364.

[32] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127–137.

[33] J. Bourgain and V. D. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$*, Invent. Math. **88**, no. 2, (1987), 319–340.

[34] J. Bourgain, J. Lindenstrauss and V. D. Milman, *Minkowski sums and symmetrizations*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1317** (1988), 44–74.

[35] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *Best constants in Young"s inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*, Advances in Math. **20**, no. 2 (1976), 151–173.

[36] H. Busemann and E. G. Straus, *Area and Normality*, Pacific J. Math. **10** (1960), 35–72.

[37] B. Carl and A. Pajor, *Gelfand numbers of operators with values in a Hilbert space*, Invent. Math. **94** (1988), 479-504.

[38] N. Dafnis, A. Giannopoulos, and A. Tsolomitis, *Asymptotic shape of a random polytope in a convex body*, J. Funct. Anal. **257**(9) (2009), 2820–2839.

[39] N. Dafnis, A. Giannopoulos and A. Tsolomitis, *Quermassintegrals and asymptotic shape of random polytopes in an isotropic convex body*, Michigan Mathematical Journal **62** (2013), 59–79.

[40] N. Dafnis and G. Paouris, *Small ball probability estimates, ψ_2-behavior and the hyperplane conjecture*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 1933–1964.

[41] N. Dafnis and G. Paouris, *Estimates for the affine and dual affine quermassintegrals of convex bodies*, Illinois J. of Math. **56** (2012), 1005–1021.

[42] S. Dann, G. Paouris and P. Pivovarov, *Bounding marginal densities via affine isoperimetry*, Proceedings of the London Mathematical Society **113** (2016), 140–162.

[43] K. R. Davidson, S. J. Szarek, *Local operator theory, random matrices and Banach spaces*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, North-Holland, Amsterdam (2001), 317–366.

[44] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces*, in Proc. Sympos. Linear Spaces, Jerusalem (1961), 123–161.

[45] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A **36** (1950), 192–197.

[46] M. E. Dyer, Z. Füredi and C. McDiarmid, *Volumes spanned by random points in the hypercube*, Random Structures Algorithms **3** (1992), 91–106.

[47] T. Figiel and W. B. Johnson, *Large subspaces of ℓ_∞^n and estimates of the Gordon-Lewis constant*, Israel J. Math. **37** (1980), 92–112.

[48] T. Figiel, J. Lindenstrauss and V. D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), 53–94.

[49] D. J. Fresen, *Euclidean arrangements in Banach spaces*, Studia Math. **227** (2015), 55–76.

[50] R. J. Gardner, *The dual Brunn-Minkowski theory for bounded Borel sets: dual affine quermassintegrals and inequalities*, Adv. Math. **216** (2007), 358–386.

[51] D. Gatzouras and A. Giannopoulos, *Threshold for the volume spanned by random points with independent coordinates*, Israel Journal of Mathematics **169** (2009), 125–153.

[52] A. Giannopoulos, *On some vector balancing problems*, Studia Math. **122** (1997), 225–234.

[53] E. D. Gluskin, *Extremal properties of orthogonal parallelopipeds and their applications to the geometry of Banach spaces*, Math. USSR Sbornik **64** (1989), 85–96.

[54] E. Gluskin and V. Milman, *Geometric probability and random cotype 2*, Geometric Aspects of Functional Analysis, volume 1850 of Lecture Notes in Math., Springer, Berlin (2004), pages 123–138.

[55] Y. Gordon, O. Guédon and M. Meyer, *An isomorphic Dvoretzky's theorem for convex bodies*, Studia Math. **127** (1998), 191–200.

[56] E. L. Grinberg, *Isoperimetric inequalities and identities for k-dimensional cross-sections of convex bodies*, Math. Ann. **291** (1991), 75–86.

[57] J. Grote, Z. Kabluchko and C. Thäle, *Limit theorems for random simplices in high dimensions*, arXiv:1708.00471.

[58] O. Guédon, *Gaussian version of a theorem of Milman and Schechtman*, Positivity **1** (1997), 1–5.

[59] D. Hajela, *On a Conjecture of Komlós about Signed Sums of Vectors inside the Sphere*, Eur. J. Comb. **9**(1) (1988), 33–37.

[60] D. Hug, *Random polytopes*, Stochastic Geometry, Spatial Statistics and Random Fields. Asymptotic Methods, Lecture Notes in Mathematics **2068** (ed. E. Spodarev) (2013), 205–238.

[61] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187–204.

[62] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space*, in Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn.) (1982), 189–206.

[63] Z. Kabluchko, D. Temesvari and C. Thäle, *Expected intrinsic volumes and facet numbers of random beta-polytopes*, arXiv:1707.02253.

[64] Z. Kabluchko, A. Marynych, D. Temesvari and C. Thäle, *Cones generated by random points on half-spheres and convex hulls of Poisson point processes*, arXiv:1801.08008

[65] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1274–1290.

[66] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Invent. Math. **168** (2007), 91–131.

[67] B. Klartag and R. Vershynin, *Small ball probability and Dvoretzky Theorem*, Israel J. Math. **157** (2007) , no. 1, 193–207.

[68] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform – A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10–34.

[69] A. Koldobsky, *A hyperplane inequality for measures of convex bodies in* $\mathbb{R}^n$, $n \leqslant 4$, Discrete Comput. Geom. **47** (2012), 538–547.

[70] A. Koldobsky, *A* $\sqrt{n}$ *estimate for measures of hyperplane sections of convex bodies*, Adv. Math. **254** (2014), 33–40.

[71] A. Koldobsky, *Estimates for measures of sections of convex bodies*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2116** (2014), 261–271.

[72] A. Koldobsky, *Slicing inequalities for measures of convex bodies*, Adv. Math. **283** (2015), 473–488.

[73] A. Koldobsky, *Isomorphic Busemann-Petty problem for sections of proportional dimensions*, Adv. in Appl. Math. **71** (2015), 138–145.

[74] A. Koldobsky and M. Lifshits, *Average volume of sections of star bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **1745** (2000), 119–146.

[75] A. Koldobsky and D. Ma, *Stability and slicing inequalities for intersection bodies*, Geom. Dedicata **162** (2013), 325–335.

[76] A. Koldobsky, G. Paouris and M. Zymonopoulou, *Isomorphic properties of intersection bodies*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 2697–2716.

[77] A. Koldobsky and A. Zvavitch, *An isomorphic version of the Busemann-Petty problem for arbitrary measures*, Geom. Dedicata **174** (2015), 261–277.

[78] Y. Komatu, *Elementary inequalities for Mills' ratio*, Rep. Statist. Appl. Res. Un. Jap. Sci. Engrs. **4** (1955), 69–70.

[79] R. Latała and K. Oleszkiewicz, *Small ball probability estimates in terms of widths*, Studia Math. **169** (2005), 305–314.

[80] A. E. Litvak and N. Tomczak-Jaegermann, *Random aspects of high dimensional convex bodies*, Geometric Aspects of Functional Analysis, Sringer Lecture Notes in Math. **1795** (2000), 169–191.

[81] A. E. Litvak, P. Mankiewicz and N. Tomczak-Jaegermann, *Randomized Isomorphic Dvoretzky Theorem*, C.R. Acad. Sci. Paris, Ser 1, Math., **335** (2002), 345–350.

[82] A. Litvak, V. D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95–124.

[83] E. Lutwak, *A general isepiphanic inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 415–421.

[84] E. Lutwak, *Inequalities for Hadwiger's harmonic Quermassintegrals*, Math. Annalen **280** (1988), 165–175.

[85] E. Lutwak, *Intersection bodies and dual mixed volumes*, Adv. Math. **71** (1988), 232–261.

[86] A. Lytova and K. E. Tikhomirov, *The variance of the ℓ_p^n-norm of the gaussian vector, and Dvoretzky's theorem*, `https://arxiv.org/abs/1705.05052`, preprint (2017).

[87] P. Mankiewicz and N. Tomczak-Jaegermann, *Geometry of families of random projections of symmetric convex bodies*, Geom. Funct. Anal. **11** (2001), no. 6, 1282–1326.

[88] V. D. Milman, *New proof of the theorem of Dvoretzky on sections of convex bodies*, Funct. Anal. Appl. **5** (1971), 28–37.

[89] V. D. Milman and G. Schechtman, *An "isomorphic" version of Dvoretzky's theorem*, C.R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), 541–544.

[90] V. D. Milman and G. Schechtman, *Global versus Local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces*, Duke Math. Journal **90** (1997), 73–93.

[91] V. D. Milman and G. Schechtman, *An "Isomorphic" Version of Dvoretzky"s Theorem, II*, Convex Geometric Analysis, MSRI Publ., Vol. **34**, Cambridge University Press (1998), 159–164.

[92] G. Paouris and P. Pivovarov, *A probabilistic take on isoperimetric-type inequalities*, Adv. Math. **230** (2012), 1402–1422.

[93] G. Paouris and P. Pivovarov, *Small-ball probabilities for the volume of random convex sets*, Discrete Comput. Geom. **49** (2013), 601–646.

[94] G. Paouris and P. Valettas, *Variance estimates and almost Euclidean structure*, Advances in Geometry (to appear).

[95] G. Paouris, P. Pivovarov and P. Valettas, *On a quantitative reversal of Alexandrov's inequality*, Trans. Amer. Math. Soc. (to appear).

[96] G. Paouris and P. Valettas, *A Gaussian small deviation inequality for convex functions*, Annals of Probability **46** (2018), 1441–1454.

[97] G. Paouris, P. Valettas and J. Zinn, *Random version of Dvoretzky's theorem in ℓ_p^n*, Stochastic Process. Appl. **127** (2017), no. 10, 3187–3227.

[98] P. Pivovarov, *Volume thresholds for Gaussian and spherical random polytopes and their duals*, Studia Math. **183** (2007), 15–34.

[99] P. Pivovarov, *Volume distribution & the geometry of high-dimensional random polytopes*, Phd dissertation, University of Alberta, 2010.

[100] M. Reitzner, *Random polytopes*, in New perspectives in stochastic geometry, Oxford Univ. Press, Oxford, 2010.

[101] M. Schmuckenschläger, *On the dependence on ε in a theorem of J. Bourgain, J. Lindenstrauss and V. D. Milman*, Geometric aspects of functional analysis, Lecture Notes in Math. **1469** (1991), 166–173.

[102] C. Schütt, *Entropy numbers of diagonal operators between symmetric Banach spaces*, J. Approx. Theory **40** (1984), 121–128.

[103] J. Spencer, *Six standard deviations suffice*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 679–706.

[104] J. Spencer, *Balancing vectors in the max norm*, Combinatorica **6**(1) (1986), 55–65.

[105] A. Szankowski, *On Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies*, Israel J. Math. **17** (1974), 325–338.

[106] S. J. Szarek, *Nets of Grassmann manifold and orthogonal groups*, Proceedings of Banach Space Workshop, University of Iowa Press (1982), 169–185.

[107] S. J. Szarek, *The finite dimensional basis problem with an appendix on nets of Grassmann manifolds*, Acta Math. **15** (1983) 153–179.

[108] R. Vershynin, *John's decomposition: selecting a large part*, Israel J. of Math. **122** (2001), 253–277.

[109] J. G. Wendel, *Note on the gamma function*, Amer. Math. Monthly **55** (1948), 563–564.

[110] G. Zhang, *Sections of convex bodies*, Amer. J. Math. **118** (1996), 319-340.

[111] A. Zvavitch, *The Busemann-Petty problem for arbitrary measures*, Math. Ann. **331** (2005), 867–887.

Abstract

Blending probabilistic techniques with geometric and analytical tools, we contribute to the following problems in the field of Asympotic Geometric Analysis.

Euclidean regularization in John's position. Given a convex body K in $\mathbb{R}^n$ in John's position, let $K_t := \mathrm{conv}\{K, tB_2^n\}$, for every $t \geqslant 1$. Using the estimate

$$\int_{S^{n-1}} \|x\|_{K_t}\, d\sigma(x) \geqslant c\frac{\log\left(1+\frac{n}{t^2}\right)}{n},$$

for any $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$, proved originally by Fresen, we provide a simple proof of the randomized version of the Isomorphic Dvoretzky Theorem of V. Milman and Schechtman, proved originally by Litvak, Mankiewicz and Tomczak-Jaegermann: There exist absolute constants $c_1, c_2 > 0$ such that for every $n \in \mathbb{N}$, every $c_1 \log n \leqslant k \leqslant n$ and every n-dimensional normed space X, a random k-dimensional subspace F of X satisfies $d(F, \ell_2^k) \leqslant c_2\sqrt{k}/\sqrt{\log\left(1+\frac{n}{k}\right)}$ with overwhelming probability, where d stands for the usual Banach-Mazur distance. Following the same line of thinking, we prove that if K is a symmetric convex body in $\mathbb{R}^n$ in John's position, then for every $k \leqslant \delta n/\log(n+1)$, where $\delta \in (0,1)$ is an absolute constant, a random k-tuple $U_1, \dots, U_k \in O(n)$ satisfies

$$d\left(\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} U_i^*(K^\circ), B_2^n\right) \leqslant c_3\sqrt{\frac{n}{k\log k}}$$

with probability greater than $1-\exp(-c_4 n)$, where $c_3, c_4 > 0$ are absolute constants. This can be seen as an isomorphic version of the Global Dvoretzky Theorem of Bourgain, Lindenstrauss and V. Milman.

Vector balancing problems. We prove that if $f(n)$ is a function with $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ and $f(n) = o(n)$, then for sufficiently large n and every $S \in \{-1,1\}^n$ with $|S| \leqslant 2^{n/f(n)}$ one can find orthonormal vectors $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}^n$ such that

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\right\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log f(n)}$$

for every $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in S$, where $c \in (0,1)$ is an absolute constant. This result improves upon an older estimate of Hajela in the direction of providing a negative answer to a celebrated conjecture of Komlós. Generalizing our approach, we provide similar results for arbitrary norms in $\mathbb{R}^n$. We employ a result of Gluskin and V. Milman, which also lets us to give an alternative proof of a theorem of Banasczcyk: For every pair of symmetric convex bodies K, L in $\mathbb{R}^n$, there are $x_1, \dots, x_n \in K$ such that for every $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1,1\}$,

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i\right\|_L \geqslant c\sqrt{n}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(L)}\right)^{1/n},$$

where $c > 0$ is an absolute constant.

Estimates on measures of lower-dimensional sections of convex bodies. We study generalized versions of two classical problems in Asymptotic Geometric Analysis: The hyperplane conjecture, and the Isomorphic Buseman-Petty problem. Given a measure μ in $\mathbb{R}^n$ that is absolutely continuous with respect to the Lebesgue measure, and any $1 \leqslant k \leqslant n-1$, we prove that

(a) For every centered convex body K in $\mathbb{R}^n$,

$$\mu(K) \leqslant (c_1\sqrt{n-k})^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)\cdot \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}$$

for some absolute constant $c_1 > 0$, where $G_{n,m}$ stands for the Grassman manifold of m-dimensional subspaces of $\mathbb{R}^n$.

(b) For every symmetric convex body K in $\mathbb{R}^n$ and every compact $L \subseteq \mathbb{R}^n$ with the property that $\mu(K\cap F) \leqslant \mu(L\cap F)$ for every $F \in G_{n,n-k}$, we have that

$$\mu(K) \leqslant (c_2 k \sqrt[4]{n-k})^k \mu(L)$$

for some absolute constant $c_2 > 0$, if μ is log-concave.

These estimates generalize and imporve upon previous results of Koldobsjy and Zvavitch. The proofs follow a new method that combines tools from integral geometry with reverse Hölder inequalities for log-concave measures and isoperimetric-type inequalities for the dual affine quermassintegrals of convex bodies, as well as functional versions of the latter.

Threshold phenomena for high-dimensional random polytopes. We prove a threshold phenomenon for the expected volume of a random polytope generated by N vertices which are chosen identically and independently with respect to the Beta distribution with parameter $\beta > -1$ on $\mathbb{R}^n$. Namely, if $x_1, \dots, x_N \in B_2^n$ are such points, then for any fixed $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mathbb{E}\mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}\{x_1,\dots,x_N\})}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)} = \begin{cases} 0 & \text{if } N \leqslant \exp\left((1-\varepsilon)(\beta+\frac{n+1}{2})\log n\right) \\ 1 & \text{if } N \geqslant \exp\left((1+\varepsilon)(\beta+\frac{n+1}{2})\log n\right). \end{cases}$$

We also provide similar results for all the intrinsic volumes of the Beta polytope. Moreover, replacing normalized volume by an arbitrary isotropic log-concave measure μ on $\mathbb{R}^n$, we prove an analogous statement for the convex hull of N random points chosen according to the Beta$'$ distribution with parameters $\beta > n/2$ and $\sigma > 0$ on $\mathbb{R}^n$. Older results of Pivovarov for the case of points chosen uniformly from the Euclidean sphere S^{n-1} or according to the typical Gaussian distribution γ_n on $\mathbb{R}^n$ are derived as limiting cases.

Estimates for the affine quermassintegrals of convex bodies. We examine the validity of the asymptotic form of a conjecture of Lutwak on the affine quermassintegrals of a convex body, for certain classes of convex bodies in $\mathbb{R}^n$. Given a convex body K in $\mathbb{R}^n$ and $1 \leqslant k \leqslant n-1$, let

$$T_{n,k}(K) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^{1/n}} \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-\frac{1}{kn}},$$

where $\nu_{n,k}$ is the rotationally-invariant probability measure on $G_{n,k}$. The general estimate $T_{n,k}(K) \leqslant c\sqrt{n/k}\log n$, for some absolute constant $c > 0$, can be proved for any convex body K in $\mathbb{R}^n$ and $1 \leqslant k \leqslant n-1$. We examine the necessity of the logarithmic factor in this bound. It is proved that if $n^2 \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$ and $x_1, \dots, x_N$ are random points chosen independently and uniformly from the interior of an isotropic convex body K, then $T_{n,k}(\mathrm{conv}(x_1,\dots,x_N)) \leqslant c\sqrt{\frac{n}{k}}$ holds with overwhelming probability. The same bound can be established in the case of a random Beta polytope, under certain assumptions on the rate of growth of k and N. Finally, the same problem is studied in the case of unconditional convex bodies. We are able to show that if K is unconditional, then the bound $T_{n,k}(K) \leqslant c\sqrt{n/k}\cdot\sqrt{1+\log(n/k)}$ holds for every $1 \leqslant k \leqslant n-1$.