Ανισότητες αναδιάταξης και εφαρμογές στην κυρτή γεωμετρική ανάλυση

Διπλωματική Εργασία

Παναγιώτα Χατζηαντώνη

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2018

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Το θέμα αυτής της εργασίας είναι δύο πολύ ισχυρές ανισότητες αναδιάταξης, η ανισότητα Brascamp–Lieb–Luttinger και η ανισότητα Brascamp–Lieb. Παρουσιάζουμε την αρχική απόδειξή τους, μεταγενέστερες αποδείξεις και παραλλαγές τους, καθώς και ποικιλία εφαρμογών τους με την έμφαση σε γεωμετρικές ανισότητες: ισοπεριμετρικές ανισότητες και ακριβείς εκτιμήσεις όγκων.

1.1 Ανισότητα Brascamp–Lieb–Luttinger και εφαρμογές

Αρχικά εισάγουμε την έννοια της συμμετρικής φθίνουσας αναδιάταξης μιας μετρήσιμης συνάρτησης. Αν $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$m_f(t)=\mathrm{vol}_n(\{x:|f(x)|>t\})<\infty \tag{1.1.1}$$

για κάθε $t>0$, τότε η *συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη* της f είναι η μοναδική κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $f^*:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ που έχει τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

(i) Οι f^* και f έχουν την ίδια κατανομή: για κάθε $t>0$,

$$m_{f^*}(t)=m_f(t).$$

(ii) Η f^* είναι ακτινικά συμμετρική, δηλαδή για κάθε $U\in O(n)$ και $x\in\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$f^*(Ux)=f^*(x).$$

(iii) Η f^* είναι φθίνουσα, δηλαδή αν $x,y\in\mathbb{R}^n$ και $0\leqslant|x|\leqslant|y|$ τότε

$$f^*(x)\geqslant f^*(y)\geqslant 0.$$

Συμβολίζουμε με $|x|$ την Ευκλείδεια νόρμα του $x\in\mathbb{R}^n$ και με κ_n είναι τον όγκο της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας B_2^n.

Η ανισότητα Brascamp–Lieb–Luttinger, η οποία φαίνεται ότι είχε νωρίτερα αποδειχθεί και από τον Rogers, είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω* $f_1,\ldots,f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ *μετρήσιμες συναρτήσεις και* $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^n$. *Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j(\langle x,u_j\rangle)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j^*(\langle x,u_j\rangle)dx. \tag{1.1.2}$$

Το Θεώρημα 1.1.1 επιδέχεται την ακόλουθη γενίκευση για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Αν $f_1,\ldots,f_m:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου, και $A=(a_{ji})$ είναι ένας $m\times n$ πίνακας, τότε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k}\cdots\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{j=1}^m f_j\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\Big)dx_n\ldots dx_1 \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^k}\cdots\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{j=1}^m f_j^*\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\Big)dx_n\ldots dx_1.\end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η έννοια της Steiner συμμετρικοποίησης μιας μετρήσιμης συνάρτησης. Αν $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^+$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου και V είναι ένας $(k-1)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^k$ με μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα το e, η *Steiner συμμετρικοποίηση* $f^*(\cdot\,|\,V)$ της f ως προς V ορίζεται ως εξής: Αν $y\in V$, θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t)=f(y+te)$ και ορίζουμε

$$f^*(y+te\,|\,V)=h^*(t).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι οι L^p-νόρμες διατηρούνται από την $f\mapsto f^*(\cdot\,|\,V)$. Με χρήση της μονοδιάστατης ανισότητας Brascamp–Lieb–Luttinger αποδεικνύεται ότι αν $f_1,\ldots,f_m:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου και A είναι ένας $m\times n$ πίνακας, τότε για κάθε $(k-1)$-διάστατο υπόχωρο V του $\mathbb{R}^k$ ισχύει

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^k}\cdots\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{j=1}^m f_j\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\Big)dx_n\ldots dx_1 \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^k}\cdots\int_{\mathbb{R}^k}\prod_{j=1}^m f_j^*\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\,|\,V\Big)dx_n\ldots dx_1.\end{aligned}$$

Με διαδοχικές συμμετρικοποιήσεις της f_j ως προς $(k-1)$-διάστατους υποχώρους παίρνουμε τη συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη f_j^* της f_j, για κάθε $j=1,\ldots,m$. Έτσι αποδεικνύεται η (1.1.3).

Αν θέσουμε $z_l=(x_{1l},\ldots,x_{nl})$, $l=1,\ldots,k$ και $u_j=(a_{j1},\ldots,a_{jn})\in\mathbb{R}^n$, $j=1,\ldots,m$, παίρνουμε την ακόλουθη αναδιατύπωση της (1.1.3).

Θεώρημα 1.1.2. *Έστω* $f_1,\ldots,f_m:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}^+$ *μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου, και έστω* $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^n$. *Τότε,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j(\langle z_1,u_j\rangle,\ldots,\langle z_k,u_j\rangle)dz_k\ldots dz_1 \\ \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j^*(\langle z_1,u_j\rangle,\ldots,\langle z_k,u_j\rangle)dz_k\ldots dz_1.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια ορίζουμε μια σχέση μερικής διάταξης στην κλάση των μέτρων Radon. Αν μ και ν είναι δύο μέτρα Radon στον $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι το μ κυριαρχεί το ν, και γράφουμε $\mu \succ \nu$ ή $\nu \prec \mu$, αν

$$\mu(C) \geqslant \nu(C) \tag{1.1.4}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$. Ένας ισοδύναμος τρόπος για να εκφράσουμε αυτή τη διάταξη είναι να ζητήσουμε να ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,d\mu(x) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,d\nu(x) \tag{1.1.5}$$

για κάθε άρτια και quasi-κοίλη συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ (αυτό σημαίνει ότι για κάθε $s \geqslant 0$ το σύνολο $\{x : F(x) > s\}$ είναι κυρτό). Ανάλογα, αν $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, γράφουμε $f_1 \succ f_2$ αν τα μέτρα μ_i με πυκνότητες f_i ικανοποιούν την $\mu_1 \succ \mu_2$. Από τους ορισμούς ελέγχουμε εύκολα ότι η $\succ$ είναι μεταβατική σχέση τόσο για μέτρα όσο και για συναρτήσεις. Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι αν $\mu \succ \nu$ τότε $\mu \circ T \succ \nu \circ T$ για κάθε γραμμική απεικόνιση T στον $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, κάθε περιθώριο μέτρο του μ κυριαρχεί το αντίστοιχο περιθώριο μέτρο του ν.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brascamp–Lieb–Luttinger αποδεικνύουμε ότι αν $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\prod_{j=1}^n f_j \prec \prod_{j=1}^n f_j^*, \tag{1.1.6}$$

όπου η $\prod_{j=1}^n f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ορίζεται από την $\left(\prod_{j=1}^n f_j\right)(x) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$ για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. Πιο συγκεκριμένα, δείχνουμε το εξής.

Θεώρημα 1.1.3. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Αν $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε*

$$\int_K \prod_{i=1}^n f_i(x_i)dx \leqslant \int_K \prod_{i=1}^n f_i^*(x_i)dx.$$

Άμεση συνέπεια είναι η εξής: Έστω $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ μια άρτια quasi-κοίλη συνάρτηση και $g_1, \ldots, g_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(t)g_1(t_1)\cdots g_N(t_N)\,dt \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} H(t)g_1^*(t_1)\cdots g_N^*(t_N)\,dt.$$

Αν η $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ είναι άρτια και quasi-κυρτή, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(t)g_1(t_1)\cdots g_N(t_N)\,dt \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} H(t)g_1^*(t_1)\cdots g_N^*(t_N)\,dt.$$

Ενδιαφέρον για τις εφαρμογές παρουσιάζει η γενίκευση αυτών των ανισοτήτων για κάποιες συναρτήσεις πολλών μεταβλητών. Θεωρούμε $H : (\mathbb{R}^n)^N \to \mathbb{R}^+$ και τον πλειογραμμικό τελεστή

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} H(x_1, \ldots, x_N) f_1(x_1)\cdots f_N(x_N)\,dx_1\cdots dx_N,$$

όπου $f_1, \dots, f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Λέμε ότι η H είναι *Steiner κυρτή* αν για κάθε $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και κάθε $Y = \{y_1, \dots, y_N\} \subset z^\perp$ η συνάρτηση $H_Y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$H_Y(t) = H(y_1 + tz, \dots, y_N + tz) \tag{1.1.7}$$

είναι άρτια και κυρτή. Τότε, έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.1.4. *Έστω $f_1, \dots, f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $H : \otimes_{i=1}^N \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: για κάθε $z \in S^{n-1}$ και κάθε $Y = \{y_1, \dots, y_N\} \subset z^\perp$ η συνάρτηση H_Y είναι άρτια και quasi-κυρτή. Τότε,*

$$\mathcal{F}_H(f_1, \dots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_H(f_1^*, \dots, f_N^*). \tag{1.1.8}$$

Επιπλέον, αν $f_i = f_i^*$ και $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ για καθε $i = 1, \dots, N$, τότε

$$\mathcal{F}_H(f_1, \dots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_H(\mathbf{1}_{D_n}, \dots, \mathbf{1}_{D_n}),$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αντίστοιχα, αν για κάθε $z \in S^{n-1}$ και για κάθε $Y = \{y_1, \dots, y_N\} \subset z^\perp$ η συνάρτηση H_Y είναι άρτια και quasi-κοίλη τότε

$$\mathcal{F}_H(f_1, \dots, f_N) \leqslant \mathcal{F}_H(f_1^*, \dots, f_N^*). \tag{1.1.9}$$

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε διάφορες εφαρμογές των παραπάνω ανισοτήτων, ξεκινώντας από εφαρμογές του Θεωρήματος 1.1.4.

(α) Στοχαστικές μορφές ισοπεριμετρικών ανισοτήτων. Έστω C συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^N$. Για κάθε $x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$T(x_1, \dots, x_N) = [x_1 \cdots x_N]$$

τον $n \times N$ πίνακα που έχει στήλες τα διανύσματα x_i. Ορίζουμε $F : \otimes_{i=1}^N \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τη συνάρτηση

$$F(x_1, \dots, x_N) := \mathrm{vol}_n(T(x_1, \dots, x_N)C). \tag{1.1.10}$$

Αποδεικνύουμε ότι η F είναι Steiner-κυρτή. Αν σταθεροποιήσουμε $\vartheta \in S^{n-1}$ και $y_1, \dots, y_N \in \vartheta^\perp$, θέσουμε $Y = \{y_1, \dots, y_N\}$, και ορίσουμε $T_Y(t) := [y_1 + t_1\vartheta, \dots, y_N + t_N\vartheta]$ τότε η $F_Y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ με $F_Y(t) = \mathrm{vol}_n(T_Y(t)C)$ είναι άρτια και κυρτή. Από το Θεώρημα 1.1.4 έπεται το εξής:

Θεώρημα 1.1.5. *Έστω $N \geqslant n$ και $\mu_1, \dots, \mu_N \in \mathcal{P}_n$, και έστω f_i η πυκνότητα του μ_i. Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^N$ και ορίζουμε*

$$\mathcal{F}_C(f_1, \dots, f_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{vol}_n([x_1 \cdots x_N]C) \prod_{i=1}^N f_i(x_i)\, dx_N \cdots dx_1.$$

Αν $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ για κάθε$i = 1, \dots, N$, τότε

$$\mathcal{F}_C(f_1, \dots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_C(\mathbf{1}_{D_n}, \dots, \mathbf{1}_{D_n}),$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1.

Μια πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.1.5 είναι η ανισότητα του Groemer για τυχαία πολύτοπα.

Θεώρημα 1.1.6. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K)=1$. Για κάθε $N\geqslant n$ και $p>0$ ορίζουμε*

$$J_p(K;N)=\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}(\{0,X_1,\ldots,X_N\}))^p,$$

όπου (X_i) ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων, ομοιόμορφα κατανεμημένων στο K. Τότε,

$$J_p(K;N)\geqslant J_p(D_n;N),$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Μια δεύτερη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.1.4 αφορά τα κεντροειδή σώματα. Θεωρούμε ένα φραγμένο Borel μετρήσιμο σύνολο $K\subseteq\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K)=1$, και για κάθε $p\geqslant 1$ συμβολίζουμε με $Z_p(K)$ το L_p-κεντροειδές σώμα του K, δηλαδή το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_p(K)}(y)=\left(\int_K|\langle x,y\rangle|^p dx\right)^{1/p}.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1.5 αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 1.1.7. *Έστω K ένα φραγμένο Borel μετρήσιμο σύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K)=1$. Για κάθε $p\geqslant 1$,*

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(K))\geqslant \mathrm{vol}_n(Z_p(D_n)),$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1.

Ένα δεύτερο παράδειγμα Steiner-κυρτής συνάρτησης είναι το ακόλουθο. Θεωρούμε $N,n\geqslant 1$ και $r_1,\ldots,r_N\in(0,\infty)$. Θεωρούμε επίσης μια συνάρτηση $\varphi:\mathcal{K}^n\to[0,\infty)$ (όπου $\mathcal{K}^n$ είναι η κλάση των κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$) που ικανοποιεί τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:

(i) Είναι quasi-κοίλη ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski: δηλαδή, αν $K,L\in\mathcal{K}^n$ και $\lambda\in(0,1)$ τότε

$$\varphi((1-\lambda)K+\lambda L)\geqslant\min\{\varphi(K),\varphi(L)\}.$$

(ii) Είναι μονότονη: αν $K,L\in\mathcal{K}^n$ και $K\subseteq L$ τότε $\varphi(K)\leqslant\varphi(L)$.

(iii) Είναι αναλλοίωτη ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς: αν $K\in\mathcal{K}^n$ και $U\in O(n)$ τότε $\varphi(UK)=\varphi(K)$.

Υποθέτουμε επίσης ότι $\varphi(-K)=\varphi(K)$ για κάθε $K\in\mathcal{K}^n$. Ορίζουμε

$$F(x_1,\ldots,x_N)=\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(x_i,r_i)\right).$$

Τότε, η F είναι άρτια και quasi-κοίλη στον φορέα της. Επιπλέον, για κάθε $z\in S^{n-1}$ και $y_1,\ldots,y_N\in z^{\perp}$ η συνάρτηση $F_{z,Y}:\mathbb{R}^N\to[0,\infty)$ με

$$F_{z,Y}(t)=\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(y_i+t_iz,r_i)\right)$$

είναι άρτια και quasi-κοίλη στον φορέα της. Έπεται η ακόλουθη ανισότητα για μεικτούς όγκους $V_j(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ (στην Παράγραφο 3.2 δίνονται οι απαραίτητοι ορισμοί).

Θεώρημα 1.1.8. *Έστω $N, n \geqslant 1$ και $R > 0$. Θεωρούμε μια πυκνότητα πιθανότητας f στον $\mathbb{R}^n$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$, και μια ακολουθία $X_1, \ldots, X_N$ ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f. Αν $Z_1, \ldots, Z_N$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την $\mathbf{1}_{D_n}$, όπου D_n η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1, τότε για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$ και $s > 0$,*

$$\mathbb{P}\left(V_j\left(\bigcap_{i=1}^N B(X_i, R)\right) > s\right) \leqslant \mathbb{P}\left(V_j\left(\bigcap_{i=1}^N B(Z_i, R)\right) > s\right). \tag{1.1.11}$$

(β) Περιορισμένα αθροίσματα Minkowski και η ανισότητα του Shannon. Ως εφαρμογή της ανισότητας Brascamp–Lieb–Luttinger παρουσιάζουμε μια ανισότητα τύπου Brunn-Minkowski για «περιορισμένα αθροίσματα Minkowski», η οποία αποδείχθηκε από τους Szarek και Voiculescu. Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε επίσης ένα μη κενό υποσύνολο Θ του $A \times B$. Το *περιορισμένο άθροισμα* (ως προς Θ) των A και B είναι το σύνολο

$$A +_\Theta B = \{x + y : (x, y) \in \Theta\}.$$

Οι Szarek και Voiculescu απέδειξαν το εξής.

Θεώρημα 1.1.9. *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε n, για κάθε $\rho \in (0, 1)$ και $A, B \subset \mathbb{R}^n$ με*

$$\mathrm{vol}_n(B)^{1/n} = \rho \cdot \mathrm{vol}_n(A)^{1/n},$$

ισχύει το ακόλουθο: αν το $\Theta \subseteq A \times B \subset \mathbb{R}^{2n}$ ικανοποιεί την

$$\mathrm{vol}_n(\Theta) \geqslant (1 - c\min\{\rho\sqrt{n}, 1\})\mathrm{vol}_n(A)\mathrm{vol}_n(B),$$

τότε

$$\mathrm{vol}_n(A +_\Theta B)^{2/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(A)^{2/n} + \mathrm{vol}_n(B)^{2/n}. \tag{1.1.12}$$

Στη συνέχεια δίνουμε μια εφαρμογή του Θεωρήματος 1.1.9. Αν X είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue, και f η πυκνότητά του, η *εντροπία* του X είναι η ποσότητα

$$h(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\log f(x)\,dx.$$

Η *ανισότητα του Shannon* ισχυρίζεται ότι αν X, Y είναι δύο τέτοια τυχαία διανύσματα και αν τα X, Y είναι ανεξάρτητα, τότε

$$\exp(2h(X)/n) + \exp(2h(Y)/n) \leqslant \exp(2h(X + Y)/n).$$

Η ανισότητα του Shannon είναι ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας. Δίνουμε μια απόδειξη αυτής της ανισότητας, η οποία οφείλεται στους Szarek και Voiculescu και χρησιμοποιεί την εκτίμηση που έδωσαν για τον όγκο περιορισμένων αθροισμάτων Minkowski.

(γ) Η ιδιότητα του τυχαίου συντύπου-2. Έστω $A_1, \ldots, A_m$ μετρήσιμα σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και K αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Για κάθε $t = (t_1, \ldots, t_m) \in \mathbb{R}^m$ ορίζουμε

$$\|t\|_{A_i,K} = \frac{1}{\prod \mathrm{vol}_n(A_i)}\int_{A_1}\cdots\int_{A_m}\Big\|\sum_{i=1}^m t_i x_i\Big\|_K dx_1\cdots dx_m.$$

Οι Gluskin και Milman απέδειξαν ότι

$$\|t\|_{A_i,K} \geqslant c\Big(\sum_{i=1}^m t_i^2\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(A_i)}{\mathrm{vol}_n(K)}\Big)^{2/n}\Big).$$

Ειδικότερα, αν $\mathrm{vol}_n(A_i)=\mathrm{vol}_n(K)$ για κάθε $1\leqslant i\leqslant m$ τότε

$$\|t\|_{A_i,K} \geqslant c\Big(\sum_{i=1}^m t_i^2\Big),$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}^m$. Η απόδειξη βασίζεται στην ακόλουθη συνέπεια της ανισότητας Brascamp–Lieb–Luttinger.

Θεώρημα 1.1.10. *Έστω $A_1,\ldots,A_m$ μετρήσιμα σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{vol}_n(A_i)=\mathrm{vol}_n(K)=\mathrm{vol}_n(B_2^n)=\kappa_n$ για κάθε $1\leqslant i\leqslant m$. Τότε, για κάθε $t_1,\ldots,t_m\in\mathbb{R}$ και $s>0$ ισχύει*

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{nm}\Big((x_i)_{i\leqslant m} : x_i\in A_i \ \ \textit{για κάθε } i \ \ \textit{και} \ \Big\|\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big\|_K < s\Big\}\\ \leqslant \mathrm{vol}_{nm}\Big((x_i)_{i\leqslant m} : x_i\in B_2^n \ \ \textit{για κάθε } i \ \ \textit{και} \ \Big|\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big| < s\Big\}.\end{aligned}$$

Παρουσιάζουμε την απόδειξη αυτού του θεωρήματος και μια εφαρμογή του. Λέμε ότι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ έχει *συντύπο-2* (με σταθερά $C_2(X)\leqslant C$) αν για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και κάθε $x_1,\ldots,x_m\in X$,

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm1}\Big\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_ix_i\Big\| \geqslant \frac{1}{C}\Big(\sum_{i=1}^m\|x_i\|^2\Big)^{1/2}.$$

Συμβολίζουμε με K τη μοναδιαία μπάλα του X. Λέμε ότι ο X έχει *τυχαίο συντύπο-2* με σταθερά $C>0$ αν m τυχαία σημεία $x_1,\ldots,x_m$ που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το K ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-an}$ την

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm1}\Big\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_it_ix_i\Big\| \geqslant \frac{1}{C}\Big(\sum_{i=1}^m t_i^2\Big)^{1/2} \tag{1.1.13}$$

για κάθε επιλογή των $t_i\in\mathbb{R}$ (εδώ, $a>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά). Οι Gluskin και Milman απέδειξαν ότι κάθε n-διάστατος χώρος με νόρμα έχει τυχαίο συντύπο-2 με μια απόλυτη σταθερά $C>0$:

Θεώρημα 1.1.11. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε: για κάθε n, κάθε n-διάστατος χώρος με νόρμα X έχει τυχαίο συντύπο-2 με σταθερά $C>0$.*

1.2 Ανισότητα Brascamp–Lieb και εφαρμογές

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας παρουσιάζουμε την ανισότητα Brascamp–Lieb και γεωμετρικές εφαρμογές της. Το αρχικό πλαίσιο της ανισότητας Brascamp–Lieb είναι το εξής. Θεωρούμε $m\geqslant n$,

$p_1,\dots,p_m \geqslant 1$ με $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=n$, και $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε έναν πλειογραμμικό τελεστή $\Phi : L^{p_1}(\mathbb{R})\times\cdots\times L^{p_m}(\mathbb{R})\to\mathbb{R}$ θέτοντας

$$\Phi(f_1,\dots,f_m)=\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j(\langle x,u_j\rangle)\,dx.$$

Οι Brascamp και Lieb απέδειξαν ότι η νόρμα του Φ είναι το supremum του λόγου

$$\frac{\Phi(g_1,\dots,g_m)}{\prod_{j=1}^m\|g_j\|_{p_j}}$$

πάνω από όλες τις κεντραρισμένες Gaussian συναρτήσεις $g_1,\dots,g_m$. Η απόδειξη που έδωσαν βασίστηκε στην ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω $m\geqslant n$, και $p_1,\dots,p_m\geqslant 1$ με $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m}=n$. Για δοθέντα $u_1,\dots,u_m\in\mathbb{R}^n$, θεωρούμε τον τελεστή Φ (ο οποίος εξαρτάται από τα u_j). Τότε,*

$$\frac{\Phi(f_1,\dots,f_m)}{\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{p_j}}\leqslant D:=\sup\left\{\frac{\Phi(g_1,\dots,g_m)}{\prod_{j=1}^m\|g_j\|_{p_j}} : g_j(t)=e^{-\lambda_j t^2},\lambda_j>0\right\}$$

για κάθε $f_j\in L^{p_j}(\mathbb{R})$.

Ο K. Ball παρατήρησε ότι αν $u_1,\dots,u_m\in S^{n-1}$ και $c_1,\dots,c_m$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την $I_n=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j$ τότε

$$\sup\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x,u_j\rangle)dx}{\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}}g_j\right)^{c_j}} : g_j(t)=e^{-\lambda_j t^2},\lambda_j>0\right\}$$
$$=\inf\left\{\frac{\sqrt{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j\otimes u_j\right)}}{\sqrt{\prod_{j=1}^m\lambda_j^{c_j}}} : \lambda_j>0\right\}=1.$$

Οδηγήθηκε έτσι στην ακόλουθη γεωμετρική έκδοση της ανισότητας Brascamp–Lieb.

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω $u_1,\dots,u_m\in S^{n-1}$ και $c_1,\dots,c_m>0$ τα οποία ικανοποιούν την*

$$I_n=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j.$$

Αν $f_1,\dots,f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x,u_j\rangle)dx\leqslant\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}}f_j(t)dt\right)^{c_j}.$$

Το πλεονέκτημα της συνθήκης κανονικοποίησης $I_n=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j$ είναι ότι η σταθερά στην ανισότητα, η οποία πιάνεται πάντα από Gaussian συναρτήσεις, είναι ίση με 1, και επειδή η συγκεκριμένη συνθήκη εμφανίζεται συχνά στην κυρτή γεωμετρική ανάλυση, η γεωμετρική μορφή της ανισότητας Brascamp–Lieb βρήκε πολλές και σημαντικές εφαρμογές σε αυτήν την περιοχή, μερικές από τις οποίες συζητάμε στη συνέχεια. Μια άλλη σημαντική εξέλιξη ήταν ότι ισχύει μια αντίστροφη μορφή του Θεωρήματος 1.2.2, η οποία ανακαλύφθηκε και αποδείχθηκε από τον Barthe.

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω $u_1,\dots,u_m \in S^{n-1}$ και $c_1,\dots,c_m>0$ τα οποία ικανοποιούν την $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$. Αν $h_1,\dots,h_m : \mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, ορίζουμε*

$$K(h_1,\dots,h_m) = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup\left\{\prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\vartheta_j) : \vartheta_j \in \mathbb{R}\ ,\ x=\sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j\right\} dx.$$

Τότε,

$$\inf\left\{K(h_1,\dots,h_m) : \int_{\mathbb{R}} h_j = 1\ ,\ j=1,\dots,m\right\} = 1.$$

Η ανισότητα Brascamp–Lieb, και η αντίστροφή της, έχουν πολυδιάστατες επεκτάσεις. Έστω $S^+(\mathbb{R}^k)$ το σύνολο όλων των $k\times k$ συμμετρικών, θετικά ορισμένων πινάκων. Για κάθε $A\in S^+(\mathbb{R}^k)$ συμβολίζουμε με G_A την Gaussian συνάρτηση $G_A:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$G_A(x) = \exp(-\langle Ax, x\rangle).$$

Τέλος, συμβολίζουμε με $L_1^+(\mathbb{R}^k)$ την κλάση των ολοκληρώσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1,\dots,c_m>0$ και κάποιους φυσικούς $n_1,\dots,n_m$ μικρότερους ή ίσους από n ισχύει η

$$\sum_{j=1}^m c_j n_j = n.$$

Για κάθε $j=1,\dots,m$, μας δίνεται μια γραμμική απεικόνιση $B_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n_j}$ η οποία είναι επί. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\bigcap_{j=1}^m \mathrm{Ker}(B_j) = \{0\}.$$

Ορίζουμε δύο τελεστές $I,K : L_1^+(\mathbb{R}^{n_1})\times\cdots\times L_1^+(\mathbb{R}^{n_m})\to\mathbb{R}$ θέτοντας

$$I(f_1,\dots,f_m) = \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(B_j x)dx$$

και

$$K(h_1,\dots,h_m) = \int_{\mathbb{R}^m}^{*} m(x)dx,$$

όπου $\int^*$ είναι το εξωτερικό ολοκλήρωμα και

$$m(x) = \sup\left\{\prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(y_j) \mid y_j\in\mathbb{R}^{n_j} \text{ και } \sum_{j=1}^m c_j B_j^* y_j = x\right\}.$$

Έστω E η μεγαλύτερη σταθερά για την οποία η ανισότητα

$$K(h_1,\dots,h_m) \geqslant E\cdot\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} h_j\right)^{c_j}$$

ισχύει για όλες τις $h_j\in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$, και έστω F η μικρότερη σταθερά για την οποία η ανισότητα

$$I(f_1,\dots,f_m) \leqslant F\cdot\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j\right)^{c_j}$$

για όλες τις $f_j\in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$. Τότε, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.4. *Οι σταθερές E και F δίνονται από τις*

$$E = \inf\left\{ \frac{K(g_1,\dots,g_m)}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j\right)^{c_j}} \mid g_j \ \ \textit{Gaussian}\ ,\ j=1,\dots,m \right\}$$

και

$$F = \sup\left\{ \frac{I(g_1,\dots,g_m)}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j\right)^{c_j}} \mid g_j \ \ \textit{Gaussian}\ ,\ j=1,\dots,m \right\}.$$

Επιπλέον, αν D είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει

$$\det\left(\sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j\right) \geqslant D \cdot \prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j},$$

για όλους τους $A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$, τότε

$$E = \sqrt{D} \ \ \textit{και} \ \ F = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Το βασικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.4 είναι η επόμενη πρόταση που αποδείχθηκε από τον Barthe. Αν $D > 0$ και αν οι συναρτήσεις $h_j, f_j \in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$, $1 \leqslant j \leqslant m$, ικανοποιούν την

$$\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n_j}} h_j = 1,$$

τότε,

$$K(h_1,\dots,h_m) \geqslant D \cdot I(f_1,\dots,f_m).$$

Στην περίπτωση που οι γραμμικές απεικονίσεις B_j του Θεωρήματος 1.2.4 είναι ορθογώνιες προβολές, ας πούμε P_j, που ικανοποιούν την

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j P_j$$

για κάποιους $c_1,\dots,c_m > 0$, τότε η σταθερά D είναι ίση με 1. Έτσι, παίρνουμε την ακόλουθη πολυδιάστατη γεωμετρική ανισότητα Brascamp–Lieb και την αντίστροφή της.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Για $j = 1,\dots m$, έστω F_j ένας d_j-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και P_j η ορθογώνια προβολή στον F_j. Αν*

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j P_j$$

για κάποιους $c_1,\dots,c_m > 0$ τότε για όλες τις μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_j : F_j \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(P_j x)\, dx \leqslant \prod_{j=1}^m \left(\int_{F_j} f_j\right)^{c_j} \tag{1.2.1}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* \sup\left\{ \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(x_j) : x = \sum_{j=1}^m c_j x_j, x_j \in F_j \right\} dx \geqslant \prod_{j=1}^m \left(\int_{F_j} f_j\right)^{c_j}. \tag{1.2.2}$$

Στο τελευταίο μέρος της εργασίας παρουσιάζουμε γεωμετρικές εφαρμογές των Θεωρημάτων 1.2.2, 1.2.3 και 1.2.5.

(α) Αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα. Χρησιμοποιώντας τη μονοδιάστατη ανισότητα Brascamp-Lieb αποδεικνύουμε την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα του K. Ball. Με $\partial(K)$ συμβολίζουμε την επιφάνεια ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1.2.6. (i) *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και Q ένας n-διάστατος κύβος. Μπορούμε να βρούμε γραμμική εικόνα $\overline{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$\mathrm{vol}_n(\overline{K}) = \mathrm{vol}_n(Q) \qquad \textit{και} \qquad \partial(\overline{K}) \leqslant \partial(Q).$$

(ii) *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και T ένα κανονικό n-διάστατο simplex. Μπορούμε να βρούμε αφφινική εικόνα $\overline{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$\mathrm{vol}_n(\overline{K}) = \mathrm{vol}_n(T) \qquad \textit{και} \qquad \partial(\overline{K}) \leqslant \partial(T).$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται η θέση John ενός κυρτού σώματος. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(K)$ την οικογένεια των ελλειψοειδών που περιέχονται στο K. Ένα επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Λέμε ότι το $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Θα λέμε ότι το $u \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο επαφής του K και της B_2^n αν $|u| = \|u\|_K = 1$, δηλαδή αν το u είναι κοινό σημείο των συνόρων τους. Το θεώρημα του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ του K και της B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε*

$$\sum_{j=1}^{m} c_j u_j = 0 \tag{1.2.3}$$

και

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle u_j \tag{1.2.4}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Ο *λόγος όγκων* ενός κυρτού σώματος K ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{vr}(K) = \inf_{\mathcal{E} \subseteq K} \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(\mathcal{E})} \right)^{1/n}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα ελλειψοειδή $\mathcal{E}$ που περιέχονται στο K. Το Θεώρημα 1.2.7 προκύπτει σχεδόν άμεσα από το επόμενο θεώρημα, για την απόδειξη του οποίου συνδυάζονται η συνθήκη του Θεωρήματος 1.2.7 και η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb του Θεωρήματος 1.2.5.

Θεώρημα 1.2.8. (i) *Ανάμεσα σε όλα τα συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, ο κύβος έχει τον μέγιστο λόγο όγκων.*

(ii) *Ανάμεσα σε όλα τα κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, το simplex έχει τον μέγιστο λόγο όγκων.*

(β) M και M^*-εκτιμήσεις στις θέσεις John και Löwner. Στη συνέχεια συζητάμε το πρόβλημα να προσδιοριστεί το μέγιστο ή ελάχιστο των παραμέτρων

$$M := M(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K \, d\sigma(x)$$

και

$$M^* := M^*(K) = w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(x) \, d\sigma(x)$$

για ένα κυρτό σώμα K που βρίσκεται στη θέση John ή Löwner (ένα κυρτό σώμα είναι στη θέση Löwner αν το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα). Τα πρώτα αποτελέσματα του είδους οφείλονται στους Schechtman και Schmuckenschläger και αφορούν τη συμμετρική περίπτωση.

(i) Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές Löwner ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ τότε $M(K) \leqslant M(B_1^n)$.

(ii) Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές John ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ τότε $M(K) \geqslant M(B_\infty^n)$.

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν στη μη συμμετρική περίπτωση. Εδώ, το ακραίο σώμα είναι το simplex.

Θεώρημα 1.2.9. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές Löwner του κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$M(K) \leqslant M(\Delta_n),$$

όπου Δ_n είναι το κανονικό simplex που εγγράφεται στην B_2^n.

Το Θεώρημα 1.2.9 οφείλεται στον Barthe και η απόδειξη χρησιμοποιεί την αντίστροφη ανισότητα Brascamp–Lieb. Ο δυϊκός ισχυρισμός αποδείχθηκε από τον Schmuckenschläger:

Θεώρημα 1.2.10. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές John ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$M(K) \geqslant M(\Delta_n)$$

όπου Δ_n είναι το κανονικό simplex που είναι περιγεγραμμένο στην B_2^n.

(γ) Περιθώριες πυκνότητες μέτρων γινομάνων. Έστω f πυκνότητα πιθανότητας στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$. Αν E είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, η περιθώρια πυκνότητα της f στον E ορίζεται από την

$$\pi_E f(x) = \int_{x+E^\perp} f(y) dy, \qquad x \in E.$$

Οι Rudelson και Vershynin απέδειξαν ότι αν $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$, όπου κάθε f_i είναι πυκνότητα στο $\mathbb{R}$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$, τότε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε υπόχωρο E διάστασης k,

$$\|\pi_E f\|_\infty^{1/k} \leqslant C, \tag{1.2.5}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Παρουσιάζουμε ένα ισοδύναμο (και σε ορισμένες περιπτώσεις ισχυρότερο) αποτέλεσμα των Livshyts, Παούρη και Pivovarov, το οποίο αποδεικνύεται με χρήση της ανισότητας Brascamp–Lieb–Luttinger.

Θεώρημα 1.2.11. *Έστω $1 \leqslant k < n$ και $E \in G_{n,k}$. Υπάρχουν $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in [0,1]$ με $\sum_{i=1}^n \gamma_i = k$ τέτοιοι ώστε: αν $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι φραγμένες συναρτήσεις με $\|f_i\|_1 = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ ικανοποιεί την*

$$\|\pi_E f\|_\infty \leqslant \min\left\{ \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{2}}, 2^{k/2} \right\} \prod_{i=1}^n \|f_i\|_\infty^{\gamma_i}. \tag{1.2.6}$$

(δ) Γεωμετρικές εφαρμογές της πολυδιάστατης ανισότητας Brascamp-Lieb. Η κλασική ανισότητα Loomis-Whitney συγκρίνει τον όγκο $\mathrm{vol}_n(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με τον γεωμετρικό μέσο των όγκων $\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))$ των ορθογώνιων προβολών του στους $e_i^\perp$, όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^n \mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K)) \tag{1.2.7}$$

και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τέτοιο ώστε τα $\pm e_i$ να είναι τα κάθετα διανύσματα στις έδρες του. Σε αυτή την ανισότητα, συμβολίζουμε με $\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))$ τον $(n-1)$-διάστατο όγκο του $P_i(K)$ (γενικότερα, αν A είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε $\mathrm{vol}(A)$ για τον όγκο του A στον αφφινικό υπόχωρο $\mathrm{aff}(A)$). Μάλιστα, η (1.2.7) ισχύει για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$.

Μια δυϊκή ανισότητα, στην οποία οι προβολές $P_i(K)$ αντικαθίστανται από τις τομές $K \cap e_i^\perp$, αποδείχθηκε από τον Meyer. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^n \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap e_i^\perp) \tag{1.2.8}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το $K = T(B_1^n)$ όπου $B_1^n = \mathrm{conv}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ και T είναι ένας διαγώνιος (ως προς την δοθείσα βάση) τελεστής $T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$.

Οι δύο προηγούμενες ανισότητες έχουν γενικευτεί στο εξής πλαίσιο: έστω $u_1, \ldots, u_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1, \ldots, c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

Τότε, για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{n!}{n^n} \prod_{j=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_j^\perp)^{c_j} \leqslant \mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \leqslant \prod_{j=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_j^\perp}(K))^{c_j}. \tag{1.2.9}$$

Η υπόθεση ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0 χρειάζεται φυσικά μόνο για την αριστερή ανισότητα. Οι περιπτώσεις ισότητας είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές στις ανισότητες Loomis-Whitney και Meyer αντίστοιχα. Η δεξιά ανισότητα της (1.2.9) αποδείχθηκε από τον Ball, ενώ η αριστερή ανισότητα αποδείχθηκε από τους Li και Huang. Για την απόδειξη αυτών των γενικότερων ανισοτήτων χρησιμοποιούνται η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της.

Μια διαφορετική γενίκευση της ανισότητας Loomis-Whitney αποδείχθηκε από τους Bollobás και Thomason. Για να διατυπώσουμε το αποτέλεσμά τους χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς. Για κάθε μη κενό $\tau \subset [n] := \{1, \ldots, n\}$ θέτουμε $F_\tau = \mathrm{span}\{e_j : j \in \tau\}$ και $E_\tau = F_\tau^\perp$. Δεδομένων $s \geqslant 1$ και $\sigma \subseteq [n]$ λέμε ότι τα (όχι απαραίτητα διακεκριμένα) σύνολα $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \subseteq \sigma$ σχηματίζουν s-ομοιόμορφη κάλυψη του σ αν κάθε $j \in \sigma$ ανήκει σε ακριβώς s από τα σύνολα σ_i. Η *ανισότητα ομοιόμορφης κάλυψης* δίνει άνω φράγμα για τον όγκο ενός συμπαγούς συνόλου μέσω των όγκων των προβολών του στους υποχώρους συντεταγμένων που αντιστοιχούν σε μια ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$.

Θεώρημα 1.2.12 (Bollobás-Thomason). *Έστω $r \geqslant 1$ και $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, έχουμε*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(K)), \tag{1.2.10}$$

όπου $F_\tau = \mathrm{span}\{e_j : j \in \tau\}$ και P_F είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον F.

Παρουσιάζουμε μια απόδειξη αυτής της ανισότητας καθώς και της ακόλουθης δυϊκής ανισότητας Bollobás–Thomason που αποδείχθηκε πρόσφατα από τον Λιακόπουλο.

Θεώρημα 1.2.13. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$ και $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \geqslant \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^{r} |\sigma_i|! \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(K \cap F_{\sigma_i}). \tag{1.2.11}$$

Η (1.2.11) είναι ακριβής: γίνεται ισότητα για κάθε s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ αν $K = T(B_1^n)$ όπου $B_1^n = \mathrm{conv}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$ και T είναι ένας διαγώνιος (ως προς την δοθείσα βάση) τελεστής $T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, $\lambda_i > 0$.

Ένας ουσιαστικά ισοδύναμος τρόπος για να διατυπώσουμε το Θεώρημα 1.2.12 είναι ο εξής: για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο με ακμές παράλληλες στους άξονες, τέτοιο ώστε $\mathrm{vol}_n(B) = \mathrm{vol}_n(K)$ και

$$\mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(B)) \leqslant \mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(K)) \tag{1.2.12}$$

για κάθε $\sigma \subseteq [n]$. Παρομοίως, το Θεώρημα 1.2.13 έχει την εξής ισοδύναμη διατύπωση: Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Υπάρχει cross-polytope της μορφής $C = \mathrm{conv}(\{\pm\lambda_1 e_1, \ldots, \pm\lambda_n e_n\})$, όπου $\lambda_i > 0$, τέτοιο ώστε $\mathrm{vol}_n(C) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $\mathrm{vol}(C \cap F_\sigma) \geqslant \mathrm{vol}(K \cap F_\sigma)$ για κάθε $\sigma \subseteq [n]$.

Το Θεώρημα 1.2.13 προκύπτει από μια συναρτησιακή ανισότητα, η οποία εκμεταλλεύεται την πολυδιάστατη γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ την κλάση των λογαριθμικά κοίλων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$.

Θεώρημα 1.2.14. *Έστω $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ με $f(0) = 1$ και $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Τότε,*

$$n^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy \geqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\int_{F_i} f(x_i) dx_i \right)^{1/s}.$$

Επιπλέον, αποδεικνύουμε γενικότερες ανισότητες που έχουν ως συνέπεια διάφορες γνωστές επεκτάσεις της ανισότητας Loomis–Whitney και της ανισότητας του Meyer. Το βασικό μας εργαλείο είναι, και εδώ, η πολυδιάστατη γενίκευση της γεωμετρικής ανισότητας Brascamp-Lieb και της αντίστροφής της από τον Barthe.

1.3 Κυρτά σώματα

Κλείνουμε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο με την απαραίτητη ορολογία και κάποια βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των κυρτών σωμάτων, τα οποία θα χρειαστούμε στην παρουσίαση των διαφόρων εφαρμογών της ανισότητας Brascamp–Lieb–Luttinger και της ανισότητας Brascamp–Lieb.

1.3.1 Βασικοί ορισμοί

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το K είναι συμμετρικό αν «$x \in K$ αν και μόνον αν $-x \in K$». Το K έχει κέντρο βάρους το 0 (την αρχή των αξόνων) αν

$$\int_K \langle x, \vartheta \rangle \, dx = 0 \tag{1.3.1}$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Η ακτινική συνάρτηση $\rho_K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ ενός κυρτού σώματος K με $0 \in \mathrm{int}(K)$ ορίζεται ως εξής:

$$\rho_K(x) = \max\{t > 0 : tx \in K\}. \tag{1.3.2}$$

Επίσης, το συναρτησοειδές Minkowski του K είναι η συνάρτηση

$$\|x\|_K = \min\{t \geqslant 0 : x \in tK\}. \tag{1.3.3}$$

Παρατηρήστε ότι $\rho_K(x) = \frac{1}{\|x\|_K}$ για κάθε $x \neq 0$. Επίσης, αν το K είναι συμμετρικό τότε η $\|\cdot\|_K$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και το K είναι η μοναδιαία μπάλα του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$. Η συνάρτηση στήριξης του K ορίζεται για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$h_K(y) = \max\{\langle x, y \rangle : x \in K\}. \tag{1.3.4}$$

Λέμε ότι το K είναι λείο αν η h_K είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Παρατηρήστε ότι για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_K(\vartheta) \leqslant h_K(\vartheta)$. Το μέσο πλάτος του K είναι η ποσότητα

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta) \, d\sigma(\vartheta). \tag{1.3.5}$$

Η περιγεγραμμένη ακτίνα (ή εξωτερική ακτίνα) του K είναι η

$$R(K) = \max\{|x| : x \in K\}. \tag{1.3.6}$$

Αν το 0 είναι εσωτερικό σημείο του K, γράφουμε $r(K)$ για την εγγεγραμμένη ακτίνα του K (τον μεγαλύτερο $r>0$ για τον οποίο $rB_2^n \subseteq K$). Η ακτίνα όγκου του K είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vrad}(K) = \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}. \tag{1.3.7}$$

Το πολικό σώμα K° του K ορίζεται να είναι το

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } y \in K\}. \tag{1.3.8}$$

Βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι ακόλουθες:

(α) $0 \in K^\circ$.

(β) Αν $0 \in \mathrm{int}(K)$, τότε $(K^\circ)^\circ = K$.

(γ) Για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_{K^\circ}(\vartheta) = 1/h_K(\vartheta)$.

(δ) Για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.

Γράφουμε $\overline{K}$ για την ομοιοθετική εικόνα όγκου 1 του κυρτού σώματος $K \subseteq \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\overline{K} := \frac{K}{|K|^{1/n}}$.

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, και σταθεροποιούμε μία διεύθυνση $\vartheta \in S^{n-1}$. Ορίζουμε $f = f_{K,\vartheta} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ θέτοντας

$$f(t) = \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap (\vartheta^\perp + t\vartheta)).$$

Ο όγκος εδώ είναι $(n-1)$-διάστατος. Δηλαδή, $f(t)$ είναι το «εμβαδόν» της τομής του K που είναι κάθετη στο ϑ και σε (προσημασμένη) απόσταση t από τον $\vartheta^\perp$. Η *αρχή του Brunn* ισχυρίζεται ότι η $f^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη στον φορέα της. Ο Brunn απέδειξε αυτόν τον ισχυρισμό με την μέθοδο της συμμετρικοποίησης. Έπεται ότι αν το K είναι συμμετρικό με κέντρο το 0, τότε $\|f\|_\infty = f(0)$, δηλαδή η μέγιστη τομή του K είναι η κεντρική. Επίσης, σε αυτή την περίπτωση, η f είναι φθίνουσα στο $[0,\infty)$.

Η αρχή του Brunn είναι ισοδύναμη με την θεμελιώδη ανισότητα Brunn-Minkowski η οποία συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$: Αν K και T είναι δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathrm{vol}_n(K+T)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n}. \tag{1.3.9}$$

Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα, ισότητα στην (1.3.9) μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά.

Η ανισότητα Brunn-Minkowski είναι με τη σειρά της ισοδύναμη με την *συναρτησιακή ανισότητα* Prékopa–Leindler:

Εστω $f,g,h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρεις μετρήσιμες συναρτήσεις, και $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε οτι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Η **επιφάνεια** $\partial(K)$ ενός κυρτού σώματος K ορίζεται ως εξής:

$$\partial(K) = \lim_{t\to 0^+} \frac{|K + tB_2^n| - |K|}{t}. \tag{1.3.10}$$

Η **ισοπεριμετρική ανισότητα** ισχυρίζεται ότι ανάμεσα σε όλα τα κυρτά σώματα που έχουν τον ίδιο όγκο, η μπάλα έχει τη μικρότερη επιφάνεια. Ο ισχυρισμός αυτός είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski: Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν γράψουμε $\mathrm{vol}_n(K) = \mathrm{vol}_n(rB_2^n)$ για κάποιον $r > 0$, τότε για κάθε $t > 0$

$$\mathrm{vol}_n(K + tB_2^n)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + t\mathrm{vol}_n(B_2^n)^{1/n} = (r+t)\mathrm{vol}_n(B_2^n)^{1/n}. \tag{1.3.11}$$

Συνεπώς, η επιφάνεια $\partial(K)$ του K ικανοποιεί την

$$\begin{aligned}\partial(K) &= \lim_{t\to 0^+} \frac{\mathrm{vol}_n(K + tB_2^n) - \mathrm{vol}_n(K)}{t} \geqslant \lim_{t\to 0^+} \frac{(r+t)^n - r^n}{t}\mathrm{vol}_n(B_2^n) \\ &= nr^{n-1}\mathrm{vol}_n(B_2^n),\end{aligned}$$

και αυτό αποδεικνύει ότι

$$\partial(K) \geqslant n\mathrm{vol}_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}}\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \tag{1.3.12}$$

με ισότητα αν $K = rB_2^n$. Ειδικότερα, αν $\mathrm{vol}_n(K) = 1$ τότε έχουμε

$$\partial(K) \geqslant n\mathrm{vol}_n(B_2^n)^{\frac{1}{n}} \geqslant c\sqrt{n}. \tag{1.3.13}$$

1.3.2 Το θεώρημα του John

Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(K)$ την οικογένεια των ελλειψοειδών που περιέχονται στο K. Ένα επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Λέμε ότι το $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Θα λέμε ότι το $u \in \mathbb{R}^n$ είναι σημείο επαφής του K και της B_2^n αν $|u| = \|u\|_K = 1$, δηλαδή αν το u είναι κοινό σημείο των συνόρων τους. Το θεώρημα του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ του K και της B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε*

$$\sum_{j=1}^m c_j u_j = 0 \tag{1.3.14}$$

και

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle u_j \tag{1.3.15}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις 1.3.2. Το Θεώρημα 1.3.1 μας εξασφαλίζει ότι ο ταυτοτικός τελεστής I_n του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αναπαρασταθεί στην μορφή

$$I_n = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j, \tag{1.3.16}$$

όπου $u_j \otimes u_j$ είναι η προβολή στην διεύθυνση του u_j: $(u_j \otimes u_j)(x) = \langle x, u_j \rangle u_j$. Σημειώστε ότι από την (1.3.15) για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$|x|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle^2. \tag{1.3.17}$$

Επίσης, αν επιλέξουμε $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, όπου $\{e_i\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$n = \sum_{i=1}^{n} |e_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_j \langle e_i, u_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u_j \rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j |u_j|^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j.$$

Μια πολύ γνωστή συνέπεια του θεωρήματος 1.3.1 (που συνήθως αποκαλείται το *θεώρημα του John*) λέει ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subseteq \sqrt{n}\,\mathcal{E}$. Ο ισχυρισμός αυτός είναι ισοδύναμος με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.3.3. *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, τότε $K \subseteq \sqrt{n} B_2^n$.*

Απόδειξη. Από την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle u_j \tag{1.3.18}$$

του Θεωρήματος 1.3.1 και αφού $u_j \in S^{n-1}$, έχουμε

$$1 = \langle u_j, u_j \rangle \leqslant \|u_j\|_K \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_{K^\circ} \quad , \quad j = 1, \ldots, m. \tag{1.3.19}$$

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε u_j, το K και η B_2^n έχουν το ίδιο υπερεπίπεδο στήριξης με κάθετο διάνυσμα το u_j. Επομένως, για κάθε $x \in K$ έχουμε $\langle x, u_j \rangle \leqslant 1$, και από την συμμετρία του K, $|\langle x, u_j \rangle| \leqslant 1$. Έπεται ότι $\|u_j\|_K = \|u_j\|_{K^\circ} = |u_j| = 1$, $j = 1, \ldots, m$.

Έστω $x \in K$. Τότε,

$$|x|^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle^2 \leqslant \sum_{j=1}^{m} c_j = n.$$

Αυτό δείχνει ότι $|x| \leqslant \sqrt{n}$. Επομένως, $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n} B_2^n$. □

Λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K βρίσκεται στη θέση Löwner αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Ισοδύναμα, αν το πολικό σώμα K° του K βρίσκεται στη θέση John. Από το θεώρημα του John, αν το K βρίσκεται στη θέση Löwner τότε $K \subseteq B_2^n$ και υπάρχουν $u_1, \dots, u_m \in \mathrm{bd}(K) \cap S^{n-1}$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \dots, c_m$ τέτοιοι ώστε

$$x = \sum_{j=1}^{m} c_j \langle x, u_j \rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger

2.1 Εισαγωγή

Έστω $a = (a_1, \ldots, a_n)$ μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Η *φθίνουσα αναδιάταξη* της a είναι η ακολουθία $a^* = (a_1^*, \ldots, a_n^*)$ που προκύπτει με μετάθεση των δεικτών ώστε να ικανοποιείται η

$$a_1^* \geqslant a_2^* \geqslant \cdots \geqslant a_n^* \geqslant 0. \tag{2.1.1}$$

Ειδικότερα, αν οι a_j είναι διακεκριμένοι τότε η a^* προσδιορίζεται από την (2.1.1) και από το γεγονός ότι τα σύνολα $\{a_1, \ldots, a_n\}$ και $\{a_1^*, \ldots, a_n^*\}$ ταυτίζονται. Αν κάποιοι a_j είναι ίσοι, χρειάζεται να λάβουμε υπόψη μας το πλήθος των εμφανίσεων καθενός από τους όρους της a. Είναι απλό να δείξει κανείς ότι αν a και b είναι δύο n-άδες μη αρνητικών αριθμών τότε

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j \leqslant \sum_{j=1}^n a_j^* b_j^*. \tag{2.1.2}$$

Ο ευκολότερος τρόπος για να δώσουμε αυστηρή απόδειξη είναι να γράψουμε

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j = b_n \left(\sum_{j=1}^n a_j\right) + (b_{n-1} - b_n)\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_j\right) + \cdots + (b_1 - b_2)a_1 \tag{2.1.3}$$

χρησιμοποιώντας άθροιση κατά μέρη ή επαγωγή. Στη συνέχεια παρατηρούμε αρχικά ότι υπάρχει μετάθεση τ του $\{1, \ldots, n\}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j = \sum_{j=1}^n a_{\tau(j)} b_j^*. \tag{2.1.4}$$

Από την (2.1.3) έχουμε

$$\sum_{j=1}^n a_j b_j = \sum_{j=1}^n a_{\tau(j)} b_j^* = b_n^* \left(\sum_{j=1}^n a_{\tau(j)}\right) + (b_{n-1}^* - b_n^*)\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{\tau(j)}\right) + \cdots + (b_1^* - b_2^*)a_{\tau(1)}. \tag{2.1.5}$$

Όμως, αν $a_\tau = (a_{\tau(1)}, \ldots, a_{\tau(n)})$, έχουμε

$$\sum_{j=1}^{k} a_{\tau(j)} \leqslant \sum_{j=1}^{k} a^*_{\tau(j)} = \sum_{j=1}^{k} a^*_j. \tag{2.1.6}$$

Η ανισότητα είναι άμεση από τον ορισμό της φθίνουσας αναδιάταξης και η ισότητα ισχύει διότι $a^* = a^*_\tau$. Τότε, η (2.1.5) μας δίνει

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{n} a_j b_j &= b^*_n \left(\sum_{j=1}^{n} a_{\tau(j)}\right) + (b^*_{n-1} - b^*_n)\left(\sum_{j=1}^{n-1} a_{\tau(j)}\right) + \cdots + (b^*_1 - b^*_2)a_{\tau(1)} \\ &\leqslant b^*_n \left(\sum_{j=1}^{n} a^*_j\right) + (b^*_{n-1} - b^*_n)\left(\sum_{j=1}^{n-1} a^*_j\right) + \cdots + (b^*_1 - b^*_2)a^*_1 \\ &= \sum_{j=1}^{n} a^*_j b^*_j,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει πάλι λόγω της (2.1.3).

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι αν $b_1 > b_2 > \cdots > b_n$ τότε ισότητα στην (2.1.2) ισχύει μόνο αν $a = a^*$. Από την (2.1.3) προκύπτει επίσης το κάτω φράγμα

$$\sum_{j=1}^{n} a_j b_j \geqslant \sum_{j=1}^{n} a^*_j b^*_{n-j+1}.$$

Η ανισότητα αυτή έπεται και από την (2.1.2) αν θέσουμε $c = \max(b_j)$ και παρατηρήσουμε ότι για τους $d_j = c - b_j$ ισχύει $d^*_j = c - b^*_{n-j+1}$.

Σε αυτό το κεφάλαιο θα γενικεύσουμε την (2.1.2) σε ένα πολύ γενικότερο πλαίσιο από αυτό των πεπερασμένων αθροισμάτων γινομένων. Πιο συγκεκριμένα, θα θεωρήσουμε ολοκληρώματα γινομένων συναρτήσεων. Ξεκινάμε ορίζοντας τη γενίκευση της a^* στη συνεχή περίπτωση.

2.2 Συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη συνάρτησης

Ορισμός 2.2.1. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα

$$m_f(t) = \mathrm{vol}_n(\{x : |f(x)| > t\}) < \infty \tag{2.2.1}$$

για κάθε $t > 0$. Τότε θα λέμε ότι η f *έχει σύνολα στάθμης με πεπερασμένο μέτρο*. Η *συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη* της f είναι η μοναδική κάτω ημισυνεχής συνάρτηση $f^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ που έχει τις ακόλουθες τρεις ιδιότητες:

(i) Οι f^* και f έχουν την ίδια κατανομή: για κάθε $t > 0$,

$$m_{f^*}(t) = m_f(t).$$

(ii) Η f^* είναι ακτινικά συμμετρική, δηλαδή για κάθε $U \in O(n)$ και $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$f^*(Ux) = f^*(x).$$

(iii) Η f^* είναι φθίνουσα, δηλαδή αν $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $0 \leqslant |x| \leqslant |y|$ τότε

$$f^*(x) \geqslant f^*(y) \geqslant 0.$$

Σε ό,τι ακολουθεί, $|x|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα του $x \in \mathbb{R}^n$ και κ_n είναι ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας B_2^n.

Απόδειξη της ύπαρξης της f^*. Εξηγούμε εν συντομία την ύπαρξη και τη μοναδικότητα. Μπορούμε να ορίσουμε την f^* απευθείας, θέτοντας

$$f^*(x) = \sup\{t > 0 : \kappa_n |x|^n < m_f(t)\}. \tag{2.2.2}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f^* είναι ακτινικά συμμετρική, φθίνουσα και έχει την ίδια κατανομή με την f. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι, για κάθε $t > 0$, το σύνολο $\{x : f^*(x) > t\}$ είναι η ανοικτή μπάλα όγκου $m_f(t)$, το οποίο αποδεικνύει ότι η f^* είναι κάτω ημισυνεχής. Η μοναδικότητα είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι κάθε συνάρτηση g προσδιορίζεται από τα σύνολα στάθμης $L_r(g) := \{x : g(x) > r\}$. Έχουμε

$$g(x) = \sup\{r : x \in L_r(g)\}$$

και αφού η f^* είναι κάτω ημισυνεχής, τα σύνολα στάθμης $L_r(f^*)$ είναι ανοικτές μπάλες όγκου $m_f(r)$ με κέντρο το 0.

Οι ιδιότητες (ii) και (iii) είναι άμεσες συνέπειες της (2.2.2). □

Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνουμε κάποιες βασικές ιδιότητες της συμμετρικής φθίνουσας αναδιάταξης.

Πρόταση 2.2.2. *Η απεικόνιση $f \mapsto f^*$ έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Αν $0 \leqslant |f| \leqslant |g|$ τότε $0 \leqslant f^* \leqslant g^*$.*

(ii) *Αν G είναι μια θετική μονότονη συνάρτηση, τότε*

$$\int G(|f(x)|)dx = \int G(f^*(x))dx.$$

Ειδικότερα, για κάθε $p > 0$ έχουμε $f \in L^p$ αν και μόνο αν $f^* \in L^p$, και $\|f^*\|_p = \|f\|_p$.

(iii) *Για κάθε $t > 0$*

$$(\mathbf{1}_{\{|f|>t\}})^* = \mathbf{1}_{\{f^*>t\}}.$$

Γενικότερα, αν G είναι μια αύξουσα κάτω ημισυνεχής συνάρτηση στο $[0, \infty)$ τότε

$$(G \circ |f|)^* = G \circ f^*. \tag{2.2.3}$$

Απόδειξη. Αν $0 \leqslant |f| \leqslant |g|$ τότε έχουμε $m_g(t) \leqslant m_f(t)$ για κάθε $t > 0$, άρα η (2.2.2) δείχνει ότι $f^* \leqslant g^*$. Αυτό αποδεικνύει την (i), ενώ το γεγονός ότι οι f και f^* έχουν την ίδια κατανομή μας δίνει αμέσως την (ii).

Τέλος, για να αποδείξουμε την (iii) παρατηρούμε ότι το σύνολο $\{f^*(x) > t\}$ είναι η ανοικτή μπάλα που έχει τον ίδιο όγκο με το $\{|f(x)| > t\}$. Για την τελεταία ισότητα παρατηρούμε ότι

$$\{x : (G \circ |f|)(x) > t\} = \{x : |f(x)| > \beta_G(t)\},$$

όπου

$$\beta_G(t) = \inf\{s : G(s) > t\}.$$

Συνεπώς, οι $(G \circ |f|)^*$ και $G \circ f^*$ είναι ισοκατανεμημένες, φθίνουσες και συμμετρικές. Αφού η σύνθεση μιας κάτω ημισυνεχούς συνάρτησης με μια αύξουσα κάτω ημισυνεχή συνάρτηση είναι κάτω ημισυνεχής, οι δύο συναρτήσεις είναι ίσες. □

Παρατήρηση 2.2.3. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.2.2 (iii) και το γεγονός ότι αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχει σύνολα στάθμης με πεπερασμένο μέτρο τότε

$$|f(x)| = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{|f|>t\}}(x)\, dt,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$f^*(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}^*_{\{|f|>t\}}(x)\, dt. \tag{2.2.4}$$

Υπάρχουν πολλές γνωστές ανισότητες που αφορούν αναδιατάξεις συναρτήσεων. Η απλούστερη είναι η επόμενη.

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ δύο μη-αρνητικές Borel μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx. \tag{2.2.5}$$

Απόδειξη. Αφού

$$\int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\, dt = f(x)$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{f>t\}}(x)\mathbf{1}_{\{g>s\}}(x)dx\, ds\, dt$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^*(x)g^*(x)dx = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{f^*>t\}}(x)\mathbf{1}_{\{g^*>s\}}(x)dx\, ds\, dt.$$

Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(\{f > t\} \cap \{g > s\}) \leqslant \mathrm{vol}_n(\{f^* > t\} \cap \{g^* > s\}) \tag{2.2.6}$$

για κάθε $t, s > 0$. Αν θέσουμε $F_t = \{f > t\}$ και $G_s = \{g > s\}$, τότε η (2.2.6) ανάγεται στην ανισότητα

$$\mathrm{vol}_n(F_t \cap G_s) \leqslant \mathrm{vol}_n(F_t^* \cap G_s^*).$$

Αυτή ισχύει προφανώς: τα σύνολα F_t^* και G_s^* είναι μπάλες με κέντρο το 0. άρα κάποια από τις δύο περιέχεται στην άλλη. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(F_t^* \cap G_s^*) &= \min\{\mathrm{vol}_n(F_t^*), \mathrm{vol}_n(G_s^*)\} = \min\{\mathrm{vol}_n(F_t), \mathrm{vol}_n(G_s)\} \\ &\geqslant \mathrm{vol}_n(F_t \cap G_s),\end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (2.2.5). □

Παρατήρηση 2.2.5. Έστω $f, g \in L^2(\mathbb{R}^n)$. Από τις $\|f - g\|_2^2 \geqslant \|\,|f| - |g|\,\|_2^2 = \|f\|_2^2 + \|g\|_2^2 - 2\langle |f|, |g|\rangle$ και $\langle |f|, |g|\rangle \leqslant \langle f^*, g^*\rangle$ (που είναι άμεση συνέπεια του προηγούμενου θεωρήματος) βλέπουμε ότι

$$\|f^* - g^*\|_2 \leqslant \|f - g\|_2.$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το ίδιο ισχύει για τις L^p-νόρμες και γενικότερα για κάθε Orlicz νόρμα.

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω G μια μη αρνητική κυρτή συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με $G(0) = 0$. Αν f, g είναι μη αρνητικές συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} G(f^*(x) - g^*(x))\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} G(f(x) - g(x))\, dx. \tag{2.2.7}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $G_+ = G \cdot \mathbf{1}_{[0,\infty)}$ και $G_- = G \cdot \mathbf{1}_{(-\infty,0]}$. Οι G_+, G_- είναι κυρτές, οπότε λόγω συμμετρίας, αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο μόνο για την G_+. Δηλαδή, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $G(y) = 0$ αν $y \leqslant 0$ (άρα, στα ολοκληρώματα της (2.2.7) θεωρούμε μόνο τα x για τα οποία $f(x) \geqslant g(x)$ ή $f^*(x) \geqslant g^*(x)$ αντίστοιχα). Θεωρούμε την αριστερή πλευρική παράγωγο D^-G, η οποία είναι μη αρνητική, αύξουσα και κάτω ημισυνεχής. Είναι γνωστό ότι αν η F είναι κυρτή σε ένα ανοικτό διάστημα $I \subset \mathbb{R}$ και $[a, b] \subset I$ τότε

$$F(b) - F(a) = \int_a^b (D^-F)(s)\, ds = \int_a^b (D^+F)(s)\, ds.$$

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$G(f(x) - g(x)) = \int_{g(x)}^{f(x)} (D^-G)(f(x) - s)\, ds = \int_0^\infty (D^-G)(f(x) - s)\mathbf{1}_{\{g \leqslant s\}}(x)\, ds,$$

διότι $(D^-G)(f(x) - s) = 0$ αν $s \geqslant f(x)$, αφού $G \equiv 0$ στο $(-\infty, 0]$. Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}} G(f(x) - g(x))\, dx = \int_0^\infty \left(\int_{\mathbb{R}} (D^-G)(f(x) - s)\mathbf{1}_{\{g \leqslant s\}}(x) dx \right) ds,$$

και το θεώρημα θα προκύψει αν δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}} (D^-G)(f(x) - s)\mathbf{1}_{\{g \leqslant s\}}(x) dx \geqslant \int_{\mathbb{R}} (D^-G)(f^*(x) - s)\mathbf{1}_{\{g^* \leqslant s\}}(x) dx \tag{2.2.8}$$

για κάθε $s \geqslant 0$. Σταθεροποιώντας το s, παρατηρούμε ότι η $y \mapsto (D^-G)(y - s)$ είναι αύξουσα κάτω ημισυνεχής συνάρτηση του y, και χρησιμοποιώντας την (2.2.3) παίρνουμε

$$((D^-G)(f(\cdot) - s))^* = (D^-G)(f^*(\cdot) - s).$$

Συνεπώς, για την (2.2.8) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε μη αρνητική συνάρτηση h με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\mathbf{1}_{\{g\leqslant s\}}(x)\,dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} h^*(x)\mathbf{1}_{\{g^*\leqslant s\}}(x)\,dx. \tag{2.2.9}$$

Λόγω της (2.2.4) αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h>r\}}\mathbf{1}_{\{g\leqslant s\}}dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h^*>r\}}\mathbf{1}_{\{g^*\leqslant s\}}dx. \tag{2.2.10}$$

Από το Θεώρημα 2.2.4 έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h>r\}}\mathbf{1}_{\{g>s\}}dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h^*>r\}}\mathbf{1}_{\{g^*>s\}}dx \tag{2.2.11}$$

και αφαιρώντας από την

$$\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h>r\}}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{h^*>r\}}dx$$

παίρνουμε την (2.2.10). Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο θεώρημα για την $G(y)=|y|^p$, $p\geqslant 1$, παίρνουμε το ακόλουθο.

Πόρισμα 2.2.7. *Για κάθε $p\geqslant 1$ και $f,g\in L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει*

$$\|f^*-g^*\|_p \leqslant \|f-g\|_p.$$

Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι $|\mathbf{1}_A-\mathbf{1}_B|=\mathbf{1}_{A\triangle B}$, οπότε $\|\mathbf{1}_A-\mathbf{1}_B\|_p=\mathrm{vol}_n(A\triangle B)^{1/p}$, παίρνουμε επίσης το εξής.

Πόρισμα 2.2.8. *Έστω (A_n) ακολουθία φραγμένων μετρήσιμων συνόλων και A_∞ φραγμένο μετρήσιμο σύνολο ώστε*

$$\mathrm{vol}_n(A_n\triangle A_\infty)\to 0.$$

Τότε, για κάθε $1\leqslant p<\infty$ ισχύουν οι

$$\lim_{n\to\infty}\|\mathbf{1}_{A_n}-\mathbf{1}_{A_\infty}\|_p=0 \quad \textit{και} \quad \lim_{n\to\infty}\|\mathbf{1}^*_{A_n}-\mathbf{1}^*_{A_\infty}\|_p=0.$$

2.3 Ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger

Μια γνωστή ανισότητα αναδιάταξης του Riesz ισχυρίζεται ότι αν $f,g,h\in L^1(\mathbb{R})$, τότε

$$\iint_{\mathbb{R}^2} f(x)g(y)h(x-y)\,dy\,dx \leqslant \iint_{\mathbb{R}^2} f^*(x)g^*(y)h^*(x-y)\,dy\,dx. \tag{2.3.1}$$

Οι Brascamp, Lieb και Luttinger γενίκευσαν αυτή την ανισότητα ως εξής.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω $f_1,\ldots,f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις και $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j(\langle x,u_j\rangle)dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j^*(\langle x,u_j\rangle)dx. \tag{2.3.2}$$

Σημείωση. Είναι φανερό ότι η (2.3.1) είναι ειδική περίπτωση της (2.3.2): αρκεί να πάρουμε $f_1=f$, $f_2=g$, $f_3=h$ και $u_1=(1,0)$, $u_2=(0,1)$, $u_3=(1,-1)\in\mathbb{R}^2$.

2.3.1 Απόδειξη της ανισότητας Brascamp-Lieb-Luttinger

Το πρώτο βήμα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.3.1 βασίζεται στην αρχή του Brunn.

Πρόταση 2.3.2. *Το Θεώρημα 2.3.1 ισχύει αν κάθε f_j είναι χαρακτηριστική συνάρτηση κάποιου φραγμένου κλειστού διαστήματος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $I_j = [b_j - c_j, b_j + c_j]$ και $f_j = \mathbf{1}_{I_j}$, $j = 1, \ldots, m$. Ορίζουμε $f_j(\cdot \,|\, t)$ θέτοντας

$$f_j(x \,|\, t) = f_j(x + b_j t) = \mathbf{1}_{I_j - b_j t}(x),$$

όπου $I_j - b_j t = [(1-t)b_j - c_j, (1-t)b_j + c_j]$. Ορίζουμε επίσης $G : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$G(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(\langle x, u_j\rangle \,|\, t)dx.$$

Παρατηρώντας ότι $f_j(x \,|\, 1) = \mathbf{1}_{[-c_j, c_j]}(x) = f_j^*(x)$, βλέπουμε ότι για την απόδειξη της πρότασης αρκεί να δείξουμε ότι $G(0) \leqslant G(1)$.

Θα αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο: η G είναι αύξουσα. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε το *κεντρικά συμμετρικό* πολύτοπο

$$K = \{\overline{x} = (x, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : -c_j \leqslant \langle x, u_j\rangle - b_j x_{n+1} \leqslant c_j\}.$$

Τότε,

$$\mathrm{vol}_n(K \cap \{x_{n+1} = t\})) = \mathrm{vol}_n(\{x \in \mathbb{R}^n : -c_j \leqslant \langle x, u_j\rangle - t b_j \leqslant c_j\}) = G(1-t).$$

Βψ Από την αρχή του Brunn, η $t \mapsto G(1-t)$ είναι φθίνουσα. □

Με ένα επαγωγικό επιχείρημα θα δείξουμε τώρα την (2.3.2) στην περίπτωση που οι f_j είναι χαρακτηριστικές συναρτήσεις πεπερασμένων ενώσεων κλειστών διαστημάτων.

Πρόταση 2.3.3. *Το Θεώρημα 2.3.1 ισχύει αν κάθε f_j είναι χαρακτηριστική συνάρτηση μιας πεπερασμένης ένωσης φραγμένων κλειστών διαστημάτων.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f_j είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της ένωσης n_j ξένων κλειστών διαστημάτων: $f_j = \mathbf{1}_{A_j}$, όπου $A_j = \bigcup_{k=1}^{n_j} [b_{kj} - c_{kj}, b_{kj} + c_{kj}]$ και $b_{kj} + c_{kj} < b_{k+1,j} - c_{k+1,j}$, $k = 1, \ldots, n_j - 1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή ως προς το $N = \{n_1, \ldots, n_m\}$. Λέμε ότι $M \prec N$ αν $m_j \leqslant n_j$ για κάθε j και υπάρχει i τέτοιος ώστε $m_i < n_i$. Η Πρόταση 2.3.2 καλύπτει την περίπτωση $N = \{1, 1, \ldots, 1\}$. Υποθέτουμε ότι μας έχει δοθεί η N και ότι η πρόταση έχει αποδειχθεί για κάθε $M \prec N$.

Για κάθε $t \in [0,1]$ ορίζουμε

$$f_{kj}(x \,|\, t) = \mathbf{1}_{[b_{kj}(1-t) - c_{kj}, b_{kj}(1-t) + c_{kj}]}(x) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m, 1 \leqslant k \leqslant n_j)$$

Οι νέες αποστάσεις μεταξύ «διαδοχικών διαστημάτων» είναι οι

$$b_{k+1,j}(1-t) - c_{k+1,j} - b_{kj}(1-t) - c_{kj}$$

άρα είναι φθίνουσες συναρτήσεις του t. Ορίζουμε

$$f_j(x,t) = \sum_{k=1}^{n_j} f_{kj}(x\,|\,t) \qquad (1 \leqslant j \leqslant m)$$

και θέτουμε

$$\tau = \min_{k,j} \left(1 - \frac{c_{kj} + c_{k+1,j}}{b_{k+1,j} - b_{kj}} \right).$$

Άρα, ο τ είναι ο μικρότερος t στο $(0,1]$ για τον οποίο δύο διαδοχικά διαστήματα κάποιας $f_j(\cdot\,|\,t)$ θα ενωθούν. Αυτό σημαίνει ότι αν $M(\tau) = \{n_1(\tau), \ldots, n_m(\tau)\}$ είναι η m-άδα που αντιστοιχεί στις $f_1(\cdot\,|\,\tau), \ldots, f_m(\cdot\,|\,\tau)$, έχουμε $M(\tau) \prec N$.

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j\rangle) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} f_{kj}(\langle x, u_j\rangle) dx \\
&= \sum_{k_1=1}^{n_1} \cdots \sum_{k_m=1}^{n_m} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_{k_j j}(\langle x, u_j\rangle) dx
\end{aligned}$$

όπου $f_{kj} = \mathbf{1}_{[b_{kj} - c_{kj}, b_{kj} + c_{kj}]}$. Εφαρμόζοντας, για καθένα από τα γινόμενα σε αυτό το άθροισμα, το γεγονός ότι η συνάρτηση G της απόδειξης της Πρότασης 2.3.2 είναι αύξουσα, βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_{k_j j}(\langle x, u_j\rangle) dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_{k_j j}(\langle x, u_j\rangle\,|\,\tau) dx$$

Προσθέτοντας και αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης και άθροισης, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j\rangle) dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \left(\sum_{k=1}^{n_j} f_{kj}(\langle x, u_j\rangle\,|\,\tau) \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j\rangle\,|\,\tau) dx.
\end{aligned}$$

Τώρα, εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση για τις $f_j(\cdot\,|\,\tau)$ που ορίζονται με λιγότερα διαστήματα, και έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j\rangle\,|\,\tau) dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^*(\langle x, u_j\rangle\,|\,\tau) dx,$$

όπου $f_j^*(\cdot\,|\,\tau)$ είναι η συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη της $f_j(\cdot\,|\,\tau)$. Παρατηρώντας ότι οι f_j και $f_j(\cdot\,|\,\tau)$ έχουν την ίδια συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j\rangle) dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^*(\langle x, u_j\rangle) dx,$$

που ήταν το ζητούμενο. □

Προσεγγίζοντας ένα μετρήσιμο σύνολο με μια ένωση κλειστών διαστημάτων, παίρνουμε:

Πρόταση 2.3.4. *Το Θεώρημα 2.3.1 ισχύει αν κάθε f_j είναι χαρακτηριστική σύνάρτηση ενός μετρήσιμου συνόλου A_j με $\mathrm{vol}_n(A_j) < \infty$, $1 \leqslant j \leqslant m$.* □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε την απόδειξη του κεντρικού αποτελέσματος.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1. Υποθέτοντας ότι οι $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.3.4 και το θεώρημα Fubini, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j\rangle)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(\prod_{j=1}^m \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f_j > t_j\}}(\langle u_j, x\rangle)dt_j\Big)\, dx \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{f_j > t_j\}}(\langle x, u_j\rangle)dx\Big) dt_m \ldots dt_1 \\ &\leqslant \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}^*_{\{f_j > t_j\}}(\langle x, u_j\rangle)dx\Big) dt_m \ldots dt_1 \\ &= \int_0^\infty \cdots \int_0^\infty \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{\{f_j^* > t_j\}}(\langle x, u_j\rangle)dx\Big) dt_m \ldots dt_1 \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^*(\langle x, u_j\rangle)dx.\end{aligned}$$

□

2.4 Ανισότητα Brascamp–Lieb–Luttinger για συναρτήσεις πολλών μεταβλητών

Έστω $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ μια μετρήσιμη συνάρτηση με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου. Θεωρούμε έναν $(k-1)$-διάστατο υπόχωρο V του $\mathbb{R}^k$ και σταθεροποιούμε ένα σύστημα συντεταγμένων τέτοιο ώστε το e_1 να είναι το κάθετο διανυσμα του V. Η *Steiner συμμετρικοποίηση* $f^*(\cdot \,|\, V)$ της f ως προς V ορίζεται ως εξής: Αν $x_2, \ldots, x_k \in \mathbb{R}$, θεωρούμε τη συνάρτηση $h(t) = f(t, x_2, \ldots, x_k)$ και ορίζουμε

$$f^*(t, x_2, \ldots, x_k \,|\, V) = h^*(t).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\{x : f^*(x \,|\, V) > t\}$ είναι η Steiner συμμετρικοποίηση του $\{x : f(x) > t\}$ ως προς V. Ειδικότερα, οι L^p-νόρμες διατηρούνται από την $f \mapsto f^*(\cdot \,|\, V)$.

Λήμμα 2.4.1. *Έστω $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου και έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Αν V είναι ένας $(k-1)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^k$, τότε*

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\Big)dx_n \ldots dx_1 \\ &\qquad\qquad \leqslant \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j^*\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \,|\, V\Big)dx_n \ldots dx_1.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Γράφουμε $x_i = (t_i, y_i) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^{k-1}$, $i = 1, \dots, n$. Αλλάζοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\Big) dx_n \dots dx_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}} \cdots \int_{\mathbb{R}} \prod_{j=1}^m f_j\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}(t_i, y_i)\Big) dt_n \dots dt_1\Big) dy_n \dots dy_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \cdots \int_{\mathbb{R}^{k-1}} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j(\langle t, u_j\rangle) dt\Big) dy_n \dots dy_1,
\end{aligned}$$

όπου $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn})$, $t = (t_1, \dots, t_n)$ και, για σταθερά y_i,

$$g_j(\langle t, u_j\rangle) = f_j\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\Big).$$

Παρατηρούμε ότι

$$g_j^*(\langle t, u_j\rangle) = f_j^*\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i \,|\, V\Big).$$

Τότε, το Θεώρημα 2.3.1 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Με διαδοχικές συμμετρικοποιήσεις ως προς $(k-1)$-διάστατους υποχώρους παίρνουμε τη συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη f_j^* κάθε f_j, $j = 1, \dots, m$. Έτσι, έχουμε:

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου, και έστω A ένας $m \times n$ πίνακας. Τότε,*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\Big) dx_n \dots dx_1 \\
&\qquad\leqslant \int_{\mathbb{R}^k} \cdots \int_{\mathbb{R}^k} \prod_{j=1}^m f_j^*\Big(\sum_{i=1}^n a_{ji}x_i\Big) dx_n \dots dx_1.
\end{aligned}$$

Αν θέσουμε $z_l = (x_{1l}, \dots, x_{nl})$, $l = 1, \dots, k$ και $u_j = (a_{j1}, \dots, a_{jn}) \in \mathbb{R}^n$, $j = 1, \dots, m$, παίρνουμε την ακόλουθη αναδιατύπωση του Θεωρήματος 2.4.2.

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις με σύνολα στάθμης πεπερασμένου μέτρου, και έστω $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle z_1, u_j\rangle, \dots, \langle z_k, u_j\rangle) dz_k \dots dz_1 \\
&\qquad\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^*(\langle z_1, u_j\rangle, \dots, \langle z_k, u_j\rangle) dz_k \dots dz_1.
\end{aligned}$$

Το Θεώρημα 2.4.3 παίζει σημαντικό ρόλο στη αρχική απόδειξη της ανισότητας Brascamp-Lieb, όπως θα δούμε στην Παράγραφο 4.1.

2.5 Στοχαστική κυριαρχία

Σε αυτή την παράγραφο ορίζουμε μια σχέση μερικής διάταξης στην κλάση των μέτρων Radon του $\mathbb{R}^n$ (αυτά είναι τα κανονικά Borel μέτρα μ με την ιδιότητα $\mu(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές $K \subset \mathbb{R}^n$). Αν μ και ν είναι δύο μέτρα Radon στον $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι το μ κυριαρχεί το ν, και γράφουμε $\mu \succ \nu$ ή $\nu \prec \mu$, αν

$$\mu(C) \geqslant \nu(C) \tag{2.5.1}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$. Ένας ισοδύναμος τρόπος για να εκφράσουμε αυτή τη διάταξη είναι να ζητήσουμε να ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,d\mu(x) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,d\nu(x) \tag{2.5.2}$$

για κάθε άρτια και quasi-κοίλη συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$.

Ορισμός 2.5.1. Μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ λέγεται *quasi-κοίλη* αν για κάθε $s \geqslant 0$ το σύνολο $\{x : F(x) > s\}$ είναι κυρτό. Τελείως ανάλογα, η F λέγεται *quasi-κυρτή* αν για κάθε $s \geqslant 0$ το σύνολο $\{x : F(x) < s\}$ είναι κυρτό.

Για την απόδειξη της (2.5.2) γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,d\mu(x) &= \int_0^\infty \int_{\{x:F(x)>s\}} \mathbf{1}\,d\mu(x)\,ds = \int_0^\infty \mu(\{x : F(x) > s\})\,ds\\ &\geqslant \int_0^\infty \nu(\{x : F(x) > s\})\,ds \geqslant \int_0^\infty \int_{\{x:F(x)>s\}} \mathbf{1}\,d\nu(x)\,ds\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} F(x)\,d\nu(x).\end{aligned}$$

Αντίστροφα, εφαρμόζοντας την (2.5.2) για την άρτια quasi-κοίλη συνάρτηση $F := \mathbf{1}_C$, όπου C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, παίρνουμε την (2.5.1).

Έστω $f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Γράφουμε $f_1 \succ f_2$ αν τα μέτρα μ_i με πυκνότητες f_i ικανοποιούν την $\mu_1 \succ \mu_2$. Από τους ορισμούς ελέγχουμε εύκολα ότι η $\succ$ είναι μεταβατική σχέση τόσο για μέτρα όσο και για συναρτήσεις. Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι αν $\mu \succ \nu$ τότε $\mu \circ T \succ \nu \circ T$ για κάθε γραμμική απεικόνιση T στον $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, κάθε περιθώριο μέτρο του μ κυριαρχεί το αντίστοιχο περιθώριο μέτρο του ν.

Η επόμενη πρόταση, η οποία είναι συνέπεια της ανισότητας Brascamp–Lieb–Luttinger, εξασφαλίζει ότι αν $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\prod_{j=1}^n f_j \prec \prod_{j=1}^n f_j^*, \tag{2.5.3}$$

όπου η $\prod_{j=1}^n f_j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ορίζεται από την $\left(\prod_{j=1}^n f_j\right)(x) = \prod_{j=1}^n f_j(x_j)$ για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Πρόταση 2.5.2. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Αν $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε*

$$\int_K \prod_{i=1}^n f_i(x_i)dx \leqslant \int_K \prod_{i=1}^n f_i^*(x_i)dx.$$

Απόδειξη. Με ένα επιχείρημα προσέγγισης μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι πεπερασμένη τομή συμμετρικών λωρίδων:

$$K = \bigcap_{j=1}^m \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, u_j\rangle| \leqslant 1\}$$

για κάποια $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι $\mathbf{1}_K(x) = \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{[-1,1]}(\langle x, u_j\rangle)$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_K \prod_{i=1}^n f_i(x_i)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{[-1,1]}(\langle x, u_j\rangle) \prod_{i=1}^n f_i(\langle x, e_i\rangle)dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}^*_{[-1,1]}(\langle x, u_j\rangle) \prod_{i=1}^n f_i^*(\langle x, e_i\rangle)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{[-1,1]}(\langle x, u_j\rangle) \prod_{i=1}^n f_i^*(\langle x, e_i\rangle)dx \\ &= \int_K \prod_{i=1}^n f_i^*(x_i)dx,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brascamp–Lieb–Luttinger στο δεύτερο βήμα και το γεγονός ότι $\mathbf{1}^*_{[-1,1]} = \mathbf{1}_{[-1,1]}$. □

Από την Πρόταση 2.5.2 παίρνουμε άμεσα το εξής:

Πρόταση 2.5.3. *Έστω $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ μια άρτια quasi-κοίλη συνάρτηση και $g_1, \ldots, g_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(t)g_1(t_1)\cdots g_N(t_N)\,dt \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} H(t)g_1^*(t_1)\cdots g_N^*(t_N)\,dt.$$

Αν η $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ είναι άρτια και quasi-κυρτή, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(t)g_1(t_1)\cdots g_N(t_N)\,dt \geqslant \int_{\mathbb{R}^N} H(t)g_1^*(t_1)\cdots g_N^*(t_N)\,dt.$$

Απόδειξη. Για κάθε $s \geqslant 0$ ορίζουμε $K(s) = \{t : H(t) > s\}$. Αν υποθέσουμε ότι η H είναι άρτια και quasi-κοίλη τότε κάθε $K(s)$ είναι συμμετρικό και κυρτό. Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} H(t)g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^\infty \mathbf{1}_{K(s)}(t)\,ds\right) g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt\\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K(s)}(t)g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt\,ds\\ &= \int_0^\infty \int_{K(s)} g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt\,ds\\ &\leqslant \int_0^\infty \int_{K(s)} g^*(t_1)\cdots g^*(t_N)\,dt\,ds\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} H(t)g^*(t_1)\cdots g^*(t_N)\,dt,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.5.2. Για τον δεύτερο ισχυρισμό θεωρούμε τα σύνολα $T(s)=\{t: H(t)\leqslant s\}$ τα οποία είναι συμμετρικά και κυρτά αν υποθέσουμε ότι η H είναι άρτια και quasi-κυρτή. Από την $\mathbf{1}_{T(s)}+\mathbf{1}_{K(s)}\equiv 1$ και την

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt = \int_{\mathbb{R}^n} g^*(t_1)\cdots g^*(t_N)\,dt,$$

επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο επιχείρημα παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} H(t)g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K(s)}(t)g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt\,ds\\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K(s)}(t)g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt\,ds\\ &= \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt - \int_{T(s)} g(t_1)\cdots g(t_N)\,dt\right] ds\\ &\geqslant \int_0^\infty \left[\int_{\mathbb{R}^n} g^*(t_1)\cdots g^*(t_N)\,dt - \int_{T(s)} g^*(t_1)\cdots g^*(t_N)\,dt\right] ds\\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K(s)}(t)g^*(t_1)\cdots g^*(t_N)\,dt\,ds\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} H(t)g^*(t_1)\cdots g^*(t_N)\,dt.\end{aligned}$$

□

Στο ίδιο πνεύμα βρίσκεται το θεώρημα του Kanter που ισχυρίζεται ότι η $\succ$ διατηρείται από γινόμενα άρτιων λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Ισχύει μάλιστα ένα γενικότερο αποτέλεσμα. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ λέγεται unimodal αν είναι το όριο μιας αύξουσας ακολουθίας συναρτήσεων της μορφής $\sum_{j=1}^m a_j\mathbf{1}_{C_j}$, όπου a_j είναι μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί και τα C_j είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.5.4 (Kanter). *Έστω $f_1,f_2:\mathbb{R}^{n_1}\to\mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f_1\succ f_2$. Τότε, για κάθε unimodal συνάρτηση $h:\mathbb{R}^{n_2}\to\mathbb{R}^+$ ισχύει $hf_1\succ hf_2$ στον $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$. Επαγωγικά,* *αν f_i, g_i είναι unimodal συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant k$, και $f_i \succ g_i$ για κάθε i, τότε*

$$\prod_{i=1}^{k} f_i \succ \prod_{i=1}^{k} g_i$$

στον $\mathbb{R}^n$, όπου $n = \sum_{i=1}^{k} n_i$. Ειδικότερα, αν τα μ_i, ν_i είναι άρτια λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, με $\mu_i \succ \nu_i$ για κάθε $i \leqslant k$, τότε $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k \succ \nu_1 \otimes \cdots \otimes \nu_k$.

Ιδέα της απόδειξης. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f_1, f_2 και h είναι πυκνότητες πιθανότητας. Αρκεί μάλιστα να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου $h = \mathbf{1}_K$ για κάποιο συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^{n_2}$. Για δοθέν συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^{n_1+n_2}$, εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa–Leindler ελέγχουμε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \int_{\mathbb{R}^{n_2}} \mathbf{1}_C(x,y)\mathbf{1}_K(y)\, dy$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^{n_1}$ και στη συνέχεια εφαρμόζοντας την (2.5.2) γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \mathbf{1}_C(x,y) f_1(x) h(y)\, dx\, dy &= \int_{\mathbb{R}^{n_1}} F(x) f_1(x)\, dx \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^{n_1}} F(x) f_2(x)\, dx = \int_{\mathbb{R}^{n_1}}\int_{\mathbb{R}^{n_2}} \mathbf{1}_C(x,y) f_2(x) h(y)\, dx\, dy.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $hf_1 \succ hf_2$. □

2.6 Steiner κυρτές συναρτήσεις

Έστω $H : (\mathbb{R}^n)^N \to \mathbb{R}^+$. Θεωρούμε τον πλειογραμμικό τελεστή

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} H(x_1, \ldots, x_N) f_1(x_1) \cdots f_N(x_N)\, dx_1 \cdots dx_N,$$

όπου $f_1, \ldots, f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Θα δώσουμε αρχικά μια συνθήκη για την H, η οποία εξασφαλίζει ότι

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_H(f_1^*, \ldots, f_N^*).$$

Ορισμός 2.6.1. Θα λέμε ότι η H είναι *Steiner κυρτή* αν για κάθε $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και κάθε $Y = \{y_1, \ldots, y_N\} \subset z^\perp$ η συνάρτηση $H_Y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$H_Y(t) = H(y_1 + tz, \ldots, y_N + tz) \tag{2.6.1}$$

είναι άρτια και κυρτή.

Πρόταση 2.6.2. *Έστω $f_1, \ldots, f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $H : \otimes_{i=1}^{N} \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: για κάθε $z \in S^{n-1}$ και για κάθε $Y = \{y_1, \ldots, y_N\} \subset z^\perp$ η συνάρτηση H_Y είναι άρτια και quasi-κυρτή. Τότε,*

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_H(f_1^*, \ldots, f_N^*). \tag{2.6.2}$$

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε ότι για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\mathcal{F}_H(f_1,\dots,f_N) \geqslant \mathcal{F}_H(f_1^*(\cdot|\vartheta),\dots,f_N^*(\cdot|\vartheta)),$$

όπου $f^*(\cdot|\vartheta)$ είναι η Steiner συμμετρικοποίηση της f ως προς $\vartheta^\perp$. Σταθεροποιούμε $y_1,\dots,y_N \in \vartheta^\perp$ και θέτουμε $h_i(t_i) = f_i(y_i + t_i\vartheta)$. Για ευκολία στο συμβολισμό γράφουμε $dt = dt_1 \dots dt_N$ και $d\overline{y} = dy_1 \dots dy_N$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini και την Πρόταση 2.5.3 γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}_H(f_1,\dots,f_N) &= \int_{(\vartheta^\perp)^N}\int_{\mathbb{R}^N} H(y_1+t_1\vartheta,\dots,y_N+t_N\vartheta)\prod_{i=1}^N f_i(y_i+t_i\vartheta)\,dt\,d\overline{y}\\
&= \int_{(\vartheta^\perp)^N}\int_{\mathbb{R}^N} H_Y(t_1,\dots,t_N)\prod_{i=1}^N h_i(t_i)\,dt\,dy\\
&\geqslant \int_{(\vartheta^\perp)^N}\int_{\mathbb{R}^N} H_Y(t_1,\dots,t_N)\prod_{i=1}^N h_i^*(t_i)\,dt\,dy\\
&= \mathcal{F}_H(f_1^*(\cdot|\vartheta),\dots,f_N^*(\cdot|\vartheta)),
\end{aligned}$$

διότι η $f_i^*(\cdot|\vartheta)$ είναι η συνάρτηση που παίρνουμε αναδιατάσσοντας την f_i κατά μήκος κάθε ευθείας που είναι παράλληλη στο ϑ.

Με διαδοχικές συμμετρικοποιήσεις ως προς υπόχωρους συνδιάστασης 1 καταλήγουμε στη συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη f_i^* της f_i για κάθε $1 \leqslant i \leqslant N$. Πιο συγκεκριμένα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση με συμπαγή φορέα τότε υπάρχει μια ακολουθία συναρτήσεων g_k, με $g_0 = g$ και $g_{k+1} = g_k(\cdot|\vartheta_k)$ για κάποιο $\vartheta_k \in S^{n-1}$, τέτοια ώστε

$$\lim_{k\to\infty} \|g_k - g^*\|_1 = 0.$$

Έπεται το συμπέρασμα της πρότασης με ένα επιχείρημα προσέγγισης. □

Τελείως ανάλογα αποδεικνύεται η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.6.3. *Έστω $f_1,\dots,f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι η $H : \otimes_{i=1}^N \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: για κάθε $z \in S^{n-1}$ και για κάθε $Y = \{y_1,\dots,y_N\} \subset z^\perp$ η συνάρτηση H_Y είναι άρτια και quasi-κοίλη. Τότε,*

$$\mathcal{F}_H(f_1,\dots,f_N) \leqslant \mathcal{F}_H(f_1^*,\dots,f_N^*). \tag{2.6.3}$$

Ορισμός 2.6.4. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1$. Θα λέμε ότι η f είναι *αναλλοίωτη ως προς στροφές* (πιο απλά, *συμμετρική*) αν $f(x) = f(y)$ όταν $|x| = |y|$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue και με $\mathcal{RP}_n$ την κλάση των μέτρων πιθανότητας από την $\mathcal{P}_n$ που έχουν συμμετρική πυκνότητα. Η Πρόταση 2.6.2 μας εξασφαλίζει ότι αν η H είναι Steiner κυρτή τότε

$$\inf_{\mathcal{P}_n} \mathcal{F}_H(f_1,\dots,f_N) = \inf_{\mathcal{RP}_n} \mathcal{F}_H(f_1,\dots,f_N),$$

όπου f_i είναι οι πυκνότητες των μέτρων στις $\mathcal{P}_n$ και $\mathcal{RP}_n$ αντίστοιχα.

Στη συνέχεια μελετάμε την ποσότητα

$$\inf_{\mathcal{RP}_n} \mathcal{F}_H(f_1,\dots,f_N),$$

κάνοντας την πρόσθετη υπόθεση ότι $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant N$. Θα χρειαστούμε δύο λήμματα.

Λήμμα 2.6.5. *Εστω $f:\mathbb{R}^+\to[0,1]$ μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$A := \int_0^\infty f(t)t^{n-1}dt < \infty.$$

Ορίζουμε $g=\mathbf{1}_{[0,(nA)^{1/n}]}$. Τότε, για κάθε αύξουσα συνάρτηση $\varphi:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$,

$$\int_0^\infty \varphi(t)f(t)t^{n-1}dt \geqslant \int_0^\infty \varphi(t)g(t)t^{n-1}dt.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $B=(nA)^{1/n}$ και παρατηρούμε ότι

$$\int_0^\infty f(t)t^{n-1}dt = \int_0^B t^{n-1}dt.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi(t)f(t)t^{n-1}dt &= \int_0^B \varphi(t)f(t)t^{n-1}dt + \int_B^\infty \varphi(t)f(t)t^{n-1}dt\\ &\geqslant \int_0^B \varphi(t)f(t)t^{n-1}dt + \varphi(B)\int_B^\infty f(t)t^{n-1}dt\\ &= \int_0^B \varphi(t)f(t)t^{n-1}dt + \varphi(B)\int_0^B (1-f(t))t^{n-1}dt\\ &\geqslant \int_0^B \varphi(t)f(t)t^{n-1}dt + \int_0^B \varphi(t)(1-f(t))t^{n-1}dt\\ &= \int_0^B \varphi(t)t^{n-1}dt.\end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.6.6. *Εστω $(\Omega,\Sigma,\mathbb{P})$ χώρος πιθανότητας. Με $\mathbb{E}$ συμβολίζουμε τη μέση τιμή ως προς $\mathbb{P}$. Εστω $X:\Omega\to\mathbb{R}^n$ ένα συμμετρικό τυχαίο διάνυσμα. Εστω $\rho:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ συνάρτηση τέτοια ώστε η συνάρτηση*

$$\mathbb{R}\ni x\mapsto \rho(sx)$$

να είναι κυρτή για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Τότε, η

$$\mathbb{R}^+\ni s\mapsto \mathbb{E}\rho(sX)$$

είναι αύξουσα συνάρτηση.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}\rho(aX)\leqslant \mathbb{E}\rho(X) \tag{2.6.4}$$

για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$. Για τυχόν τέτοιο a, μπορούμε να γράψουμε $a = b \cdot 1 + (1-b)\cdot(-1)$ για κάποιον $0 \leqslant b \leqslant 1$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση της κυρτότητας βλέπουμε ότι

$$\rho(aX) \leqslant b\rho(X) + (1-b)\rho(-X),$$

και παίρνοντας μέσες τιμές έχουμε την (2.6.4). □

Αυτό που χρειαζόμαστε στη συνέχεια είναι η ακόλουθη συνέπεια του Λήμματος 2.6.6. Για κάθε ρ όπως στο λήμμα, η συνάρτηση

$$\mathbb{R}^+ \ni s \mapsto \int_{S^{n-1}} \rho(s\vartheta)d\sigma(\vartheta)$$

είναι αύξουσα.

Λήμμα 2.6.7. *Αν η $H : (\mathbb{R}^n)^N \to \mathbb{R}^+$ είναι Steiner κυρτή, τότε για κάθε $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$, η συνάρτηση*

$$\mathbb{R} \ni s \mapsto H(x_1, \ldots, sx_j, \ldots, x_N) \tag{2.6.5}$$

είναι κυρτή.

Απόδειξη. Ουσιαστικά, το λήμμα προκύπτει από το γεγονός ότι ο περιορισμός μιας κυρτής συνάρτησης σε οποιαδήποτε ευθεία είναι κυρτή συνάρτηση. Σταθεροποιούμε το j όπως στην υπόθεση, και για κάθε $i \neq j$ γράφουμε $x_i = x_i' + s_i x_j$ για κάποια $s_i \in \mathbb{R}$ και $x_i' \perp x_j$. Αφού η H είναι Steiner κυρτή, μπορούμε να πάρουμε $z = x_j$, $y_j = 0$ και $y_i = x_i'$ για κάθε $i \neq j$ και $Y = \{y_1, \ldots, y_N\}$. Τότε, η συνάρτηση $G_Y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$G_Y(t) := H(y_1 + t_1 s_1 z, \ldots, t_j z, \ldots, y_N + t_N s_N z) = H_Y(t_1 s_1, \ldots, t_j, \ldots, t_N s_N)$$

είναι κυρτή. Από την άλλη πλευρά,

$$G_Y(t) = H(x_1 + (t_1 - 1)s_1 x_j, \ldots, x_j + (t_j - 1)x_j, \ldots, x_N + (t_N - 1)s_N x_j),$$

άρα ο περιορισμός της G_Y στην ευθεία $\{t \in \mathbb{R}^N : t_j = s \in \mathbb{R}, t_i = 1 \text{ για κάθε } i \neq j\}$ είναι ακριβώς η συνάρτηση που ορίζεται στην (2.6.5). □

Πρόταση 2.6.8. *Έστω $f_i : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ ακτινικά συμμετρικές πυκνότητες πιθανότητας. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $H : (\mathbb{R}^n)^N \to \mathbb{R}^+$ είναι Steiner κυρτή. Τότε,*

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_n) \geqslant \mathcal{F}_H(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}),$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Για κάθε $x_i \in \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $x_i : r_i\vartheta_i$, όπου $r_i \geqslant 0$ και $\vartheta_i \in S^{n-1}$. Για ευκολία στο συμβολισμό θέτουμε $dr = dr_1 \ldots dr_N$ και $d\overline{\vartheta} = d\sigma(\vartheta_1)\ldots d\sigma(\vartheta_N)$. Μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_N) = (n\kappa_n)^N \int_{(\mathbb{R}^+)^N} \int_{(S^{n-1})^N} H(r_1\vartheta_1, \ldots, r_N\vartheta_N) \prod_{i=1}^N f_i(r_i\vartheta_i) r_i^{n-1}\, d\overline{\vartheta}\, dr.$$

Σταθεροποιούμε $1 \leqslant j \leqslant N$ και υποθέτουμε ότι οι $r_1, \ldots, r_{j-1}, r_{j+1}, \ldots, r_N$ είναι σταθεροί μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί. Προς στιγμήν υποθέτουμε επίσης ότι τα $\vartheta_1, \ldots, \vartheta_N$ είναι σταθερά μοναδιαία διανύσματα. Από το Λήμμα 2.6.7, η συνάρτηση

$$\mathbb{R}^+ \ni r_j \mapsto H(r_1\vartheta_1, \ldots, r_N\vartheta_N)$$

είναι κυρτή. Θεωρώντας το ϑ_j ως τυχαίο διάνυσμα ομοιόμορφα κατανεμημένο στην S^{n-1} και παίρνοντας μέση τιμή, από το Λήμμα 2.6.6 βλέπουμε ότι η συνάρτηση

$$\mathbb{R}^+ \ni r_j \mapsto \int_{S^{n-1}} H(r_1\vartheta_1, \ldots, r_N\vartheta_N)\, d\sigma(\vartheta_j)$$

είναι αύξουσα. Από την υπόθεση έχουμε

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} f_j(x)dx = n\kappa_n \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} f_j(r_j\vartheta_j) r_j^{n-1} d\sigma(\vartheta_j) dr_j.$$

Αφού η f_j εξαρτάται μόνο από την τιμή του r_j, έχουμε ότι για κάθε $\vartheta_j \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\int_0^\infty f_j(r_j\vartheta_j) r_j^{n-1} dr_j = (n\kappa_n)^{-1}.$$

Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 2.6.5 με $A = (n\kappa_n)^{-1}$, και έχουμε

$$\begin{aligned}&\int_0^\infty \int_{S^{n-1}} H(r_1\vartheta_1, \ldots, r_j\vartheta_j, \ldots, r_N\vartheta_N) f_j(r_j\vartheta_j) r_j^{n-1} d\sigma(\vartheta_j) dr_j \\ &\qquad \int_0^{\kappa_n^{-1/n}} \int_{S^{n-1}} H(r_1\vartheta_1, \ldots, r_j\vartheta_j, \ldots, r_N\vartheta_N) f_j(r_j\vartheta_j) r_j^{n-1} d\sigma(\vartheta_j) dr_j.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα Fubini, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_N) &\geqslant (n\kappa_n)^N \int_{[0,\kappa_n^{-1/n}]^N} \int_{(S^{n-1})^N} H(r_1\vartheta_1, \ldots, r_N\vartheta_N) \prod_{i=1}^N r_i^{n-1}\, d\vartheta\, dr \\ &= \mathcal{F}_H(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}).\end{aligned}$$

□

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου παίρνουμε αμέσως το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.6.9. *Έστω $\mu_1, \ldots, \mu_N \in \mathcal{P}_n$, και έστω f_i η πυκνότητα του μ_i. Υποθέτουμε ότι η $H : (\mathbb{R}^n)^N \to \mathbb{R}^+$ είναι Steiner κυρτή και θετουμε*

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_N) := \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} H(x_1, \ldots, x_N) \prod_{i=1}^N f_i(x_i)\, dx_1 \ldots dx_N. \tag{2.6.6}$$

Τότε,

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_H(f_1^*, \ldots, f_N^*).$$

Επιπλέον, αν $f_i = f_i^*$ και $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ για καθε $i = 1, \ldots, N$, τότε

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_H(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}),$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Εφαρμογές της ανισότητας Brascamp–Lieb–Luttinger

3.1 Ανισότητες αναδιάταξης και ισοπεριμετρικές ανισότητες

Έστω C συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^N$. Για κάθε $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$T(x_1, \ldots, x_N) = [x_1 \cdots x_N]$$

τον $n \times N$ πίνακα που έχει στήλες τα διανύσματα x_i. Ορίζουμε $F : \otimes_{i=1}^N \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τη συνάρτηση

$$F(x_1, \ldots, x_N) := \mathrm{vol}_n(T(x_1, \ldots, x_N)C). \tag{3.1.1}$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $S \in SL_n$,

$$F(S(x_1), \ldots, S(x_N)) = F(x_1, \ldots, x_N). \tag{3.1.2}$$

Πράγματι, για κάθε $n \times n$ πίνακα M ισχύει

$$\begin{aligned} F(M(x_1), \ldots, M(x_N)) &= \mathrm{vol}_n([M(x_1) \cdots M(x_N)]C) = \mathrm{vol}_n(M[x_1 \cdots x_N]C) \\ &= |\det(M)|\, \mathrm{vol}_n([x_1 \cdots x_N]C) = |\det(M)|\, F(x_1, \ldots, x_N). \end{aligned}$$

Θα αποδείξουμε ότι η F είναι Steiner-κυρτή.

Πρόταση 3.1.1. *Έστω F η συνάρτηση που ορίστηκε στην (3.1.1). Σταθεροποιούμε $\vartheta \in S^{n-1}$ και $y_1, \ldots, y_N \in \vartheta^{\perp}$. Θέτουμε $Y = \{y_1, \ldots, y_N\}$, ορίζουμε $T_Y(t) := [y_1 + t_1\vartheta, \ldots, y_N + t_N\vartheta]$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $F_Y : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ με*

$$F_Y(t) = \mathrm{vol}_n(T_Y(t)C).$$

Τότε, η F_Y είναι άρτια και κυρτή. Έπεται ότι η F είναι Steiner-κυρτή.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$[y_1 + t_1\vartheta, \ldots, y_N + t_N\vartheta]C = \left\{ \sum_{i=1}^{N} c_i(y_i + t_i\vartheta) : (c_i)_{i\leqslant N} \in C \right\}$$

και

$$[y_1 - t_1\vartheta, \ldots, y_N - t_N\vartheta]C = \left\{ \sum_{i=1}^{N} c_i(y_i - t_i\vartheta) : (c_i)_{i\leqslant N} \in C \right\}.$$

Δεδομένου ότι καθένα από αυτά τα δύο σύνολα είναι ανάκλαση του άλλου ως προς τον $\vartheta^\perp$, βλέπουμε ότι $F_Y(t) = F_Y(-t)$, δηλαδή η F_Y είναι άρτια.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, συμβολίζουμε με P την ορθογώνια προβολή $P_{\vartheta^\perp}$ του $\mathbb{R}^n$ στον $\vartheta^\perp$. Για κάθε συμπαγές κυρτό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $f_A, g_A : P(A) \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f_A(y) := \sup\{\lambda : y + \lambda\vartheta \in A\} \tag{3.1.3}$$

και

$$g_A(y) := \inf\{\lambda : y + \lambda\vartheta \in A\}. \tag{3.1.4}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η f_A είναι κοίλη και η g_A είναι κυρτή. Για δοθέντα $s, t \in \mathbb{R}^N$ θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_{T_Y(s)C}, g_{T_Y(s)C} : P(T_Y(s)C) \to \mathbb{R}$$

και

$$f_{T_Y(t)C}, g_{T_Y(t)C} : P(T_Y(t)C) \to \mathbb{R}$$

που ορίζονται όπως στις (3.1.3) και (3.1.4). Για ευκολία στο συμβολισμό θέτουμε

$$f_s := f_{T_Y(s)C}, \qquad g_s := g_{T_Y(s)C}$$

και

$$f_t := f_{T_Y(t)C}, \qquad g_t := g_{T_Y(t)C}.$$

Αφού η P είναι η ορθογώνια προβολή στον $\vartheta^\perp$, έχουμε

$$P(T_Y(s)C) = P([y_i + s_i\vartheta]C) = [y_i]C = P([y_i + t_i\vartheta]C) = P(T_Y(t)C).$$

Θέτουμε $D = P(T_Y(s)C) = P(T_Y(t)C)$ και ορίζουμε $f, g : D \to \mathbb{R}$ με

$$f = \frac{f_s + f_t}{2}, \qquad g = \frac{g_s + g_t}{2}.$$

Ορίζουμε επίσης

$$\overline{C} := \{y + \lambda\vartheta : y \in D, g(y) \leqslant \lambda \leqslant f(y)\}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$T_Y\left(\frac{s+t}{2}\right) C \subseteq \overline{C}. \tag{3.1.5}$$

Πράγματι, αν $x \in T_Y\left(\frac{s+t}{2}\right)$ τότε υπάρχει $c = (c_1, \ldots, c_N) \in C$ ώστε

$$x = \sum_{i=1}^{N} c_i \left(y_i + \frac{s_i + t_i}{2} \vartheta \right) = y + \sum_{i=1}^{N} c_i \frac{s_i + t_i}{2} \vartheta,$$

όπου $y := \sum_{i=1}^{N} c_i y_i \in D$. Τότε,

$$y + \left(\sum_{i=1}^{N} c_i s_i \right) \vartheta = \sum_{i=1}^{N} c_i (y_i + s_i \vartheta) \in T_Y(s)C,$$

άρα

$$g_s(y) \leqslant \sum_{i=1}^{N} c_i s_i \leqslant f_s(y).$$

Όμοια,

$$g_t(y) \leqslant \sum_{i=1}^{N} c_i t_i \leqslant f_t(y).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} g(y) = \frac{g_s(y) + g_t(y)}{2} &\leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} c_i s_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{N} c_i t_i \\ &\leqslant \frac{f_s(y) + f_t(y)}{2} = f(y), \end{aligned}$$

και αυτό αποδεικνύει ότι $x = y + \sum_{i=1}^{N} c_i \frac{s_i + t_i}{2} \vartheta \in \overline{C}$. Έχουμε έτσι αποδείξει την (3.1.5). Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(\overline{C}) &= \int_D (f(y) - g(y))\, dy = \frac{1}{2} \int_D (f_s(y) - g_s(y))\, dy + \frac{1}{2} \int_D (f_t(y) - g_t(y))\, dy \\ &= \frac{1}{2} \mathrm{vol}_n(T_Y(s)S) + \frac{1}{2} \mathrm{vol}_n(T_Y(t)C) = \frac{1}{2} F_Y(s) + \frac{1}{2} F_Y(t). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας με την (3.1.5) παίρνουμε

$$F\left(\frac{s+t}{2} \right) = \mathrm{vol}_n\Big(T_Y\Big(\frac{s+t}{2} \Big) C \Big) \leqslant \mathrm{vol}_n(\overline{C}) = \frac{1}{2} F_Y(s) + \frac{1}{2} F_Y(t).$$

Έπεται ότι η F_Y είναι κυρτή. $\square$

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 2.6.9 και την Πρόταση 3.1.1 παίρνουμε αμέσως το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω $N \geqslant n$ και $\mu_1, \ldots, \mu_N \in \mathcal{P}_n$, και έστω f_i η πυκνότητα του μ_i. Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^N$ και ορίζουμε*

$$\mathcal{F}_C(f_1, \ldots, f_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{vol}_n([x_1 \cdots x_N]C) \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)\, dx_N \cdots dx_1.$$

Αν $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ *για κάθε* $i = 1, \ldots, N$, *τότε*

$$\mathcal{F}_C(f_1, \ldots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_C(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}),$$

όπου D_n *είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου* 1.

Παρατήρηση 3.1.3. Έστω $g_1 : (0, \infty) \to (0, \infty)$ μια γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση και έστω ότι η $H : \otimes_{i=1}^N \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι Steiner-κυρτή. Τότε, η $g_1 \circ H$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.6.2. Πράγματι, για κάθε $z \in S^{n-1}$ και κάθε $Y = \{y_1, \ldots, y_N\} \subset z^\perp$ έχουμε

$$\{t \in \mathbb{R}^N : g_1 \circ H_Y(t) > \alpha\} = \{t \in \mathbb{R}^N : H_Y(t) > g_1^{-1}(\alpha)\}$$

για κάθε $\alpha > 0$. Όμοια, αν $g_2 : (0, \infty) \to (0, \infty)$ είναι μια γνησίως φθίνουσα συνεχής συνάρτηση, τότε η $g_2 \circ H$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της Πρότασης 2.6.3. Άρα, αν $f_1, \ldots, f_N : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\mathcal{F}_{g_1 \circ H}(f_1, \ldots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_{g_1 \circ H}(f_1^*, \ldots, f_N^*) \tag{3.1.6}$$

και

$$\mathcal{F}_{g_2 \circ H}(f_1, \ldots, f_N) \leqslant \mathcal{F}_{g_2 \circ H}(f_1^*, \ldots, f_N^*). \tag{3.1.7}$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για τον κύβο $C = [-1, 1]^N$, την $g_1(t) = t^p$, $p \neq 0$, και την

$$H(x_1, \ldots, x_N) = \mathrm{vol}_n([x_1 \cdots x_N]C),$$

παίρνουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω* $N \geqslant n$ *και* $\mu_1, \ldots, \mu_N \in \mathcal{P}_n$, *και έστω* f_i *η πυκνότητα του* μ_i. *Για* $p \neq 0$ *ορίζουμε*

$$I_p(f_1, \ldots, f_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{vol}_n\left([x_1 \cdots x_N]\,[-1, 1]^N\right)^p \prod_{i=1}^N f_i(x_i) dx_1 \cdots dx_N.$$

Αν $p > 0$ *και* $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ *για κάθε* $i = 1, \ldots, N$, *τότε*

$$I_p(f_1, \ldots, f_N) \geqslant I_p(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}). \tag{3.1.8}$$

Αν $p < 0$ *τότε ισχύει η αντίστροφη ανισότητα.*

Μια πρώτη εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.2 είναι η ανισότητα του Groemer για τυχαία πολύτοπα.

Θεώρημα 3.1.5 (Groemer). *Έστω* K *συμπαγές υποσύνολο του* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{vol}_n(K) = 1$. *Για κάθε* $N \geqslant n$ *και* $p > 0$ *ορίζουμε*

$$J_p(K; N) = \mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}(\{0, X_1, \ldots, X_N\}))^p,$$

όπου (X_i) *ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων, ομοιόμορφα κατανεμημένων στο* K. *Τότε,*

$$J_p(K; N) \geqslant J_p(D_n; N),$$

όπου D_n *η Ευκλείδεια μπάλα όγκου* 1 *στον* $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Θέτουμε $f_i = \mathbf{1}_K$, $i \geqslant 1$. Παρατηρήστε ότι $f_i^* = \mathbf{1}_{D_n}$. Θεωρούμε μια ακολουθία (X_i) ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων με πυκνότητες f_i, και τα τυχαία διανύσματα X_i^* με πυκνότητες f_i^*. Για κάθε $N \geqslant n$ θεωρούμε τους τυχαίους τελεστές $T_N, T_N^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ με πίνακες τους $n \times N$ πίνακες

$$T_N = [X_1 \cdots X_N] \quad \text{και} \quad T_N^* = [X_1^* \cdots X_N^*].$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{conv}(\{0, X_1, \dots, X_N\}) = T_N(C_N) \quad \text{και} \quad \mathrm{conv}(\{0, X_1^*, \dots, X_N^*\}) = T_N^*(C_N),$$

όπου $C_N = \mathrm{conv}(\{0, e_1, \dots, e_N\})$ (και $\{e_1, \dots, e_N\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^N$). Από το Θεώρημα 3.1.2, για κάθε $N \geqslant n$ έχουμε

$$\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(T_N(C_N)) \geqslant \mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(T_N^*(C_N)),$$

απ' όπου έπεται το θεώρημα. □

Για μια δεύτερη εφαρμογή του Θεωρήματος 3.1.4 θεωρούμε ένα φραγμένο Borel μετρήσιμο σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, και για κάθε $p \geqslant 1$ συμβολίζουμε με $Z_p(K)$ το L_p-κεντροειδές σώμα του K, δηλαδή το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_p(K)}(y) = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^p dx \right)^{1/p}.$$

Θα αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω K ένα φραγμένο Borel μετρήσιμο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K) = 1$. Για κάθε $p \geqslant 1$,*

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(K)) \geqslant \mathrm{vol}_n(Z_p(D_n)),$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1.

Απόδειξη. Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, θέτουμε $f_i = \mathbf{1}_K$, $i \geqslant 1$. Παρατηρήστε ότι $f_i^* = \mathbf{1}_{D_n}$. Θεωρούμε μια ακολουθία (X_i) ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων με πυκνότητες f_i, και τα τυχαία διανύσματα X_i^* με πυκνότητες f_i^*. Για κάθε $N \geqslant n$ θεωρούμε τους τυχαίους τελεστές $T_N, T_N^* : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^n$ με πίνακες τους $n \times N$ πίνακες

$$T_N = [X_1 \cdots X_N] \quad \text{και} \quad T_N^* = [X_1^* \cdots X_N^*].$$

Θέτουμε $C_N = N^{-1/p} B_q^N$, όπου B_q^N είναι η μοναδιαία μπάλα του ℓ_q^N, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} h_{T_N(C_N)}(y)^p &= h_{C_N}(T_N^t y)^p = h_{N^{-1/p}B_q^N}(T_N^t y)^p = h_{N^{-1/p}B_q^N}(\langle X_1, y\rangle, \dots, \langle X_N, y\rangle) \\ &= \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\langle X_i, y\rangle|^p. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N |\langle X_i, y\rangle|^p \overset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_K |\langle x, y\rangle|^p = h_{Z_p(K)}(y)^p$$

σχεδόν βεβαίως, καταλήγουμε στην

$$T_N(C_N) = N^{-1/p} T_N(B_q^N) \to Z_p(K)$$

Άρα,

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(K)) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(T_N(C_N)).$$

Ομοίως,

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(D_n)) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(T_N^*(C_N)).$$

Όμως, από το Θεώρημα 3.1.2, για κάθε $N \geqslant n$ έχουμε

$$\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(T_N(C_N)) \geqslant \mathbb{E}\,\mathrm{vol}_n(T_N^*(C_N),$$

απ' όπου έπεται το θεώρημα. □

3.2 Τυχαίες τομές Ευκλείδειων μπαλών

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο τύπος του Steiner ισχυρίζεται ότι ο όγκος του αθροίσματος Minkowski $K+tB_2^n$ μπορεί να γραφεί ως πολυώνυμο του $t \geqslant 0$: Υπάρχουν μη αρνητικοί συντελεστές $(W_k(K))_{k=0}^n$ τέτοιοι ώστε

$$\mathrm{vol}_n(K+tB_2^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_k(K) t^k \tag{3.2.1}$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Ο συντελεστής $W_k(K)$ του πολυωνύμου στο δεξιό μέλος της (3.2.1) είναι το *k-στό quermassintegral* του K. Οι ποσότητες αυτές έχουν μια ολοκληρωτική αναπαράσταση, μέσω του τύπου του Kubota:

$$W_k(K) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k}} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(P_F(K))\, d\nu_{n,n-k}(F) \tag{3.2.2}$$

Παρατήρηση 3.2.1. (α) Εφαρμόζοντας την (3.2.2) για $k = n-1$ παίρνουμε $W_{n-1}(K) = \kappa_n w(K)$, ενώ εύκολα βλέπουμε ότι $W_0(K) = \mathrm{vol}_n(K)$, $W_n(K) = \kappa_n$.
(β) Από την θεμελιώδη ανισότητα Alexandrov-Fenchel έπεται ότι

$$\left(\frac{W_k(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n-k}} \geqslant \left(\frac{W_j(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n-j}},$$

για κάθε $0 \leqslant j < k \leqslant n$.

Για το λόγο αυτό είναι συχνά βολικό να θεωρήσουμε μια διαφορετική κανονικοποίηση. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ορίζουμε

$$Q_k(K) := \left(\frac{W_{n-k}(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Λέμε ότι το $Q_k(K)$ είναι το *κανονικοποιημένο k-στό quermassintegral* του K. Παρατηρήστε ότι με αυτό το συμβολισμό, από την Παρατήρηση 3.2.1 έπεται ότι $Q_1(K) = w(K)$, $Q_n(K) = \mathrm{vrad}(K)$, καθώς επίσης και το γεγονός ότι η $(Q_k(K))_{k\leqslant n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία του k. Ο τύπος του Kubota δίνει μια ολοκληρωτική αναπαράσταση για το Q_k, ανάλογη της 3.2.2:

$$Q_k(K)=\left(\frac{1}{\kappa_k}\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(K))\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k}.$$

Η ακολουθία των intrinsic volumes ενός κυρτού σώματος προκύπτει επίσης από μια διαφορετική κανονικοποίηση των quermassintegrals. Ορίζουμε τον *k-στό intrinsic volume* $V_k(K)$ του K, μέσω της

$$V_k(K):=\kappa_{n-k}^{-1}\binom{n}{k}W_{n-k}(K). \tag{3.2.3}$$

Σημειώνουμε ότι με αυτή την κανονικοποίηση ισχύουν οι $V_0(K)=1$, $V_n(K)=\mathrm{vol}_n(K)$ και $V_1(K)=n\frac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}}w(K)$.

Στόχος μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε την ακόλουθη ανισότητα για μεικτούς όγκους.

Θεώρημα 3.2.2. *Έστω $N,n\geqslant 1$ και $R>0$. Θεωρούμε μια πυκνότητα πιθανότητας f στον $\mathbb{R}^n$ με $\|f\|_\infty\leqslant 1$, και μια ακολουθία $X_1,\dots,X_N$ ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f. Αν $Z_1,\dots,Z_N$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την $\mathbf{1}_{D_n}$, όπου D_n η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1, τότε για κάθε $1\leqslant j\leqslant n$ και $s>0$,*

$$\mathbb{P}\left(V_j\left(\bigcap_{i=1}^N B(X_i,R)\right)>s\right)\leqslant\mathbb{P}\left(V_j\left(\bigcap_{i=1}^N B(Z_i,R)\right)>s\right). \tag{3.2.4}$$

Θα αποδείξουμε μάλιστα ένα γενικότερο αποτέλεσμα, για μια οικογένεια συναρτήσεων $\varphi:\mathcal{K}^n\to[0,\infty)$ που ικανοποιούν τις ακόλουθες τρεις συνθήκες:

(i) Είναι quasi-κοίλες ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski: δηλαδή, αν $K,L\in\mathcal{K}^n$ και $\lambda\in(0,1)$ τότε
$$\varphi((1-\lambda)K+\lambda L)\geqslant\min\{\varphi(K),\varphi(L)\}.$$

(ii) Είναι μονότονες: αν $K,L\in\mathcal{K}^n$ και $K\subseteq L$ τότε $\varphi(K)\leqslant\varphi(L)$.

(iii) Είναι αναλλοίωτες ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμους: αν $K\in\mathcal{K}^n$ και $U\in O(n)$ τότε $\varphi(UK)=\varphi(K)$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $K\mapsto V_j(K)$ ικανοποιεί τις παραπάνω τρεις συνθήκες. Η πρώτη έπεται από το γεγονός ότι η $K\mapsto V_j(K)^{1/j}$ είναι κοίλη (που είναι συνέπεια της ανισότητας Alexandrov–Fenvhel). Θα αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω $N,n\geqslant 1$ και $r_1,\dots,r_N\in(0,\infty)$. Υποθέτουμε ότι η $\varphi:\mathcal{K}^n\to[0,\infty)$ ικανοποιεί τις συνθήκες (i)–(iii). Έστω $f_1,\dots,f_N$ πυκνότητες πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα $X_1,\dots,X_N$ και $X_1^*,\dots,X_N^*$ ώστε το X_i να έχει πυκνότητα την f_i και το X_i^* να έχει πυκνότητα την f_i^*, $i=1,\dots,N$. Τότε, για κάθε $s\geqslant 0$,*

$$\mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(X_i,r_i)\right)>s\right)\leqslant\mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(X_i^*,r_i)\right)>s\right). \tag{3.2.5}$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι κάθε f_i είναι φραγμένη. Έστω $Z_1, \ldots, Z_N$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα ώστε το Z_i να έχει πυκνότητα την $a_i \mathbf{1}_{b_i B_2^n}$, όπου $a_i = \|f_i\|_\infty$ και ο b_i ικανοποιεί την $\int_{\mathbb{R}^n} a_i \mathbf{1}_{b_i B_2^n}\, dx = 1$, $i = 1, \ldots, N$. Τότε,

$$\mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(X_i, r_i)\right) > s\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(Z_i, r_i)\right) > s\right). \tag{3.2.6}$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.6.9, και για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.2.4. *Έστω $N, n \geqslant 1$ και $r_1, \ldots, r_N \in (0, \infty)$. Υποθέτουμε ότι η $\varphi : \mathcal{K}^n \to [0, \infty)$ ικανοποιεί τις* (i) *και* (ii)*, και ότι $\varphi(-K) = \varphi(K)$ για κάθε $K \in \mathcal{K}^n$. Ορίζουμε*

$$F(x_1, \ldots, x_N) = \varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(x_i, r_i)\right).$$

Τότε, η F είναι άρτια και quasi-κοίλη στον φορέα της. Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι η φ ικανοποιεί και την (iii)*, τότε αν $z \in S^{n-1}$ και $y_1, \ldots, y_N \in z^\perp$ και αν ορισουμε την $F_{z,Y} : \mathbb{R}^N \to [0, \infty)$ με*

$$F_{z,Y}(t) = \varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(y_i + t_i z, r_i)\right),$$

η $F_{z,Y}$ είναι άρτια και quasi-κοίλη στον φορέα της.

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι η F είναι άρτια στον $(\mathbb{R}^n)^N$. Για να δείξουμε ότι είναι quasi-κοίλη στον φορέα της, θεωρούμε $u = (u_1, \ldots, u_N) \in (\mathbb{R}^n)^N$ και $v = (v_1, \ldots, v_N) \in (\mathbb{R}^n)^N$ στον φορέα της F και θα δείξουμε αρχικά ότι

$$\bigcap_{i=1}^N B\left(\frac{u_i + v_i}{2}, r_i\right) \supseteq \frac{1}{2}\bigcap_{i=1}^N B(u_i, r_i) + \frac{1}{2}\bigcap_{i=1}^N B(v_i, r_i).$$

Έστω $w_1, w_2 \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $|w_i - u_i| \leqslant r_i$ και $|w_2 - v_i| \leqslant r_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, N$. Τότε, για κάθε $i = 1, \ldots, N$ έχουμε

$$\left|\frac{w_1 + w_2}{2} - \frac{u_i + v_i}{2}\right| \leqslant \frac{1}{2}|w_1 - u_i| + \frac{1}{2}|w_2 - v_i| \leqslant r_i,$$

απ' όπου έπεται ο εγκλεισμός. Από το γεγονός ότι η φ είναι μονότονη και quasi-κοίλη βλέπουμε τώρα ότι

$$\begin{aligned}
F\left(\frac{u+v}{2}\right) &= \varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B\left(\frac{u_i + v_i}{2}, r_i\right)\right) \\
&\geqslant \varphi\left(\frac{1}{2}\bigcap_{i=1}^N B(u_i, r_i) + \frac{1}{2}\bigcap_{i=1}^N B(v_i, r_i)\right) \\
&\geqslant \min\left\{\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(u_i, r_i)\right), \varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(v_i, r_i)\right)\right\} \\
&= \min\{F(u), F(v)\}.
\end{aligned}$$

Άρα, η F είναι quasi-κοίλη στον φορέα της.

Ο ισχυρισμός ότι η $F_{z,Y}$ είναι quasi-κοίλη προκύπτει από το γεγονός ότι ο περιορισμός μιας quasi-κοίλης συνάρτησης σε μια ευθεία είναι quasi-κοίλη συνάρτηση. Τέλος, έστω $z \in S^{n-1}$ και $y_1, \dots, y_N \in z^{\perp}$. Συμβολίζουμε με R_z την ανάκλαση ως προς τον $z^{\perp}$. Τότε,

$$\begin{aligned} R_z\left(\bigcap_{i=1}^{N} B(y_i + t_i z, r_i)\right) &= \bigcap_{i=1}^{N} R_z(r_i B(0,1) + (y_i + t_i z)) \\ &= \bigcap_{i=1}^{N} (r_i B(0,1) + (y_i - t_i z)) \\ &= \bigcap_{i=1}^{N} B(y_i - t_i z, r_i). \end{aligned}$$

Αφού η φ ικανοποιεί την (iii) συμπεραίνουμε ότι

$$F_{z,Y}(t) = \varphi\left(\bigcap_{i=1}^{N} B(y_i + t_i z, r_i)\right) = \varphi\left(\bigcap_{i=1}^{N} B(y_i - t_i z, r_i)\right) = F_{z,Y}(-t),$$

δηλαδή η $F_{z,Y}$ είναι άρτια. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.3. Θεωρούμε τη συνάρτηση F του Λήμματος 3.2.4. Για το δοθέν $s > 0$ ορίζουμε $H = \mathbf{1}_{\{F > s\}}$. Έστω $z \in S^{n-1}$ και $Y = \{y_1, \dots, y_N\} \in (z^{\perp})^N$. Ορίζουμε $F_{z,Y}(t_1, \dots, t_N) = F(y_1 + t_1 z, \dots, y_N + t_N z)$ και $H_{z,Y}(t_1, \dots, t_N) = \mathbf{1}_{\{F_{y,Z} > s\}}(t_1, \dots, t_N)$. Από το Λήμμα 3.2.4 η $F_{z,Y}$ είναι άρτια και quasi-κοίλη συνάρτηση. Έπεται ότι η $H_{z,Y}$ είναι κι αυτή άρτια και quasi-κοίλη. Από το Θεώρημα 2.6.9 παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^{N} B(X_i, r_i)\right) > s\right) &= \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} H(x_1, \dots, x_N) \prod_{i=1}^{N} f_i(x_i)\, dx_1 \cdots dx_N \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} H(x_1, \dots, x_N) \prod_{i=1}^{N} f_i^*(x_i)\, dx_1 \cdots dx_N \\ &= \mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^{N} B(X_i^*, r_i)\right) > s\right), \end{aligned}$$

δηλαδή έχουμε δείξει την (3.2.5).

Θα αποδείξουμε τώρα την (3.2.6), αρχικά με την πρόσθετη υπόθεση ότι $\|f_i\|_\infty = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, N$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι κάθε f_i είναι ακτινικά συμμετρική και φθίνουσα, άρα unimodal. Γνωρίζουμε τότε ότι $f_i \prec \mathbf{1}_{D_n}$. Αφού η $H = \mathbf{1}_{\{F > s\}}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συμμετρικού κυρτού συνόλου στον $(\mathbb{R}^n)^N$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(X_i,r_i)\right)>s\right) &= \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} H(x_1,\ldots,x_N)\prod_{i=1}^N f_i(x_i)\,dx_1\cdots dx_N\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} H(x_1,\ldots,x_N)\prod_{i=1}^N \mathbf{1}_{D_n}(x_i)\,dx_1\cdots dx_N\\
&= \mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(Z_i,r_i)\right)>s\right),
\end{aligned}$$

Για τη γενική περίπτωση κάνουμε μια αλλαγή μεταβλητής. Για κάθε $i=1,\ldots,N$ θέτουμε $c_i=\|f_i\|_\infty^{-1/n}$ και

$$g_i(x)=\frac{f_i(c_ix)}{\int_{\mathbb{R}^n} f_i(c_iy)dy}=\frac{f_i(c_ix)}{\|f_i\|_\infty}.$$

Τότε $\|g_i\|_1=\|g_i\|_\infty=1$ για κάθε $i=1,\ldots,N$. Εφαρμόζουμε την προηγούμενη ανισότητα για τις $g_1,\ldots,g_N$ και την $H(c_1\cdot,\ldots,c_N\cdot)$, η οποία παραμένει χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συμμετρικού κυρτού συνόλου, και έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(X_i,r_i)\right)>s\right) &= \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} H(x_1,\ldots,x_N)\prod_{i=1}^N f_i(x_i)\,dx_1\cdots dx_N\\
&= \prod_{i=1}^N\|f_i\|_\infty\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} H(c_1y_1,\ldots,c_Ny_N)\prod_{i=1}^N \frac{c_i^nf_i(c_iy_i)}{\|f_i\|_\infty}\,dx_1\cdots dx_N\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} H(c_1y_1,\ldots,c_Ny_N)\prod_{i=1}^N g_i(y_i)\,dy_1\cdots dy_N\\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} H(c_1y_1,\ldots,c_Ny_N)\prod_{i=1}^N \mathbf{1}_{D_n}(y_i)\,dy_1\cdots dy_N\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} H(x_1,\ldots,x_N)\prod_{i=1}^N \|f_i\|_\infty\mathbf{1}_{c_iD_n}(x_i)\,dx_1\cdots dx_N\\
&= \mathbb{P}\left(\varphi\left(\bigcap_{i=1}^N B(Z_i,r_i)\right)>s\right),
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.2.6) με $b_i=c_i\kappa_n^{-1/n}$ για $i=1,\ldots,N$. □

3.3 Περιορισμένα αθροίσματα Minkowski

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε ως εφαρμογή της ανισότητας Brascamp-Lieb-Luttinger μια ανισότητα τύπου Brunn-Minkowski για «περιορισμένα αθροίσματα Minkowski», η οποία αποδείχθηκε από τους Szarek και Voiculescu. Με χρήση αυτής της ανισότητας δίνουμε μια απόδειξη της ανισότητας του Shannon από τη Θεωρία Πληροφορίας.

Έστω A και B δύο μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε επίσης ένα μη κενό υποσύνολο Θ του $A\times B$. Το *περιορισμένο άθροισμα* (ως προς Θ) των A και B

είναι το σύνολο

$$A +_\Theta B = \{x + y : (x, y) \in \Theta\}.$$

Οι Szarek και Voiculescu απέδειξαν το εξής.

Θεώρημα 3.3.1. *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε n, για κάθε $\rho \in (0, 1)$ και $A, B \subset \mathbb{R}^n$ με*

$$\mathrm{vol}_n(B)^{1/n} = \rho \cdot \mathrm{vol}_n(A)^{1/n},$$

ισχύει το ακόλουθο: αν το $\Theta \subseteq A \times B \subset \mathbb{R}^{2n}$ ικανοποιεί την

$$\mathrm{vol}_n(\Theta) \geqslant (1 - c \min\{\rho\sqrt{n}, 1\})\mathrm{vol}_n(A)\mathrm{vol}_n(B),$$

τότε

$$\mathrm{vol}_n(A +_\Theta B)^{2/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(A)^{2/n} + \mathrm{vol}_n(B)^{2/n}. \tag{3.3.1}$$

Παρατηρήσεις 3.3.2. (α) Η σταθερά $c > 0$ είναι ανεξάρτητη από τα ρ, n, A, B και Θ.

(β) Παρατηρήστε ότι η (3.3.1) είναι ασθενέστερη από την ανισότητα Brunn-Minkowski. Αυτό το οποίο έχει σημασία είναι ότι το Θ είναι «μεγάλο» υποσύνολο του $A \times B$ αλλά το $A +_\Theta B$ είναι «μικρότερο» σύνολο από το άθροισμα Minkowski $A + B$.

(γ) Μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε κανονικοποίηση των όγκων υπό τον όρο να ικανοποιείται η σχέση $\mathrm{vol}_n(B)^{1/n} = \rho \cdot \mathrm{vol}_n(A)^{1/n}$. Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι $\mathrm{vol}_n(A) = \mathrm{vol}_n(B_2^n)$ και $\mathrm{vol}_n(B) = \mathrm{vol}_n(\rho B_2^n)$.

Παράδειγμα 3.3.3. Ας θεωρήσουμε τα $A = B_2^n$, $B = \rho B_2^n$ και

$$\Theta = \{(x, y) \in B_2^n \times (\rho B_2^n) : \langle x, y\rangle \leqslant 0\}.$$

Τότε, μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(\Theta) = \frac{\mathrm{vol}_n(A)\mathrm{vol}_n(B)}{2}$$

και

$$A +_\Theta B = \sqrt{1 + \rho^2} B_2^n.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\mathrm{vol}_n(A +_\Theta B)^{2/n} = (1 + \rho^2)\mathrm{vol}_n(B_2^n) = \mathrm{vol}_n(A)^{2/n} + \mathrm{vol}_n(B)^{2/n}.$$

Αυτό δείχνει ότι ο εκθέτης $2/n$ στο Θεώρημα 3.3.1 είναι βέλτιστος.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 βασίζεται στην ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger και σε μια προσεκτικότερη ανάλυση του προηγούμενου παραδείγματος, η οποία δίνεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.3.4. *Έστω $\rho \in (0, 1)$. Θεωρούμε το σύνολο*

$$\Theta = \left\{(x, y) \in B_2^n \times (\rho B_2^n) : |x + y| \leqslant \sqrt{1 + \rho^2}\right\}.$$

Τότε,

$$\mathrm{vol}_n(\Theta) \leqslant (1 - c \min\{\rho\sqrt{n}, 1\})\mathrm{vol}_n(B_2^n)\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n), \tag{3.3.2}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θέτουμε $\tau=\min\{\rho\sqrt{n},1\}/2$. Θα δείξουμε ότι αν $1-\tau/n\leqslant |x|\leqslant 1$ τότε

$$\mathrm{vol}_n\big(\{y\in\rho B_2^n : |x+y|>\sqrt{1+\rho^2}\}\big)\geqslant c_1\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n), \tag{3.3.3}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό συνεπάγεται την (3.3.2), διότι

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}_{2n}\big((B_2^n\times(\rho B_2^n))\setminus\Theta\big)\\ &\qquad\geqslant\int_{\{x\in B_2^n:\,1-\tau/n\leqslant|x|\leqslant 1\}}\mathrm{vol}_n(\{y\in\rho B_2^n:|x+y|>\sqrt{1+\rho^2}\})\,dx\\ &\qquad\geqslant c_1\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n)\mathrm{vol}_n(B_2^n)\,(1-(1-\tau/n)^n)\\ &\qquad\geqslant c_2\tau\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n)\mathrm{vol}_n(B_2^n),\end{aligned}$$

άρα

$$\mathrm{vol}_n(\Theta)=\mathrm{vol}_{2n}\big(B_2^n\times(\rho B_2^n)\big)-\mathrm{vol}_{2n}\big((B_2^n\times(\rho B_2^n))\setminus\Theta\big)\leqslant(1-c_2\tau)\mathrm{vol}_n(B_2^n)\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n).$$

Για την απόδειξη της (3.3.3) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x=(r,0,\dots,0)$, όπου $1-\tau/n\leqslant r\leqslant 1$. Κάνοντας ένα απλό σχήμα βλέπουμε ότι το σύνολο $M:=\{y\in\rho B_2^n:|x+y|\leqslant\sqrt{1+\rho^2}\}$ αποτελείται από δύο μέρη: το πρώτο είναι το

$$M_1:=\{y=(y_1,\dots,y_n)\in\rho B_2^n : y_1\leqslant s\},\quad \text{όπου}\ \ s=\frac{1-r^2}{2r}.$$

Ο όγκος του M_1 φράσσεται ως εξής:

$$\mathrm{vol}_n(M_1)=\kappa_{n-1}\int_{-\rho}^{s}(\rho^2-u^2)^{(n-1)/2}du\leqslant c\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n),$$

όπου $0<c<1$ είναι μια απόλυτη σταθερά, διότι

$$s=(1-r)\left(1+\frac{1-r}{2r}\right)\leqslant\frac{\tau}{n}\left(1+\frac{\tau}{2rn}\right)\leqslant\frac{\rho}{2\sqrt{n}}(1+O(1/n)).$$

Το δεύτερο μέρος του M είναι το σύνολο

$$M_2:=\{y=(y_1,\dots,y_n)\in\rho B_2^n : s<y_1\leqslant\sqrt{1+\rho^2}-r\}.$$

Ο όγκος του M_2 ισούται με

$$\mathrm{vol}_n(M_2)=\kappa_{n-1}\int_s^{\sqrt{1+\rho^2}-r}(1+\rho^2-(r+u)^2)^{(n-1)/2}du.$$

Ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\mathrm{vol}_n(M_2)\leqslant(\rho/\sqrt{n})\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n).$$

Έπεται ότι $\mathrm{vol}_n(M)\leqslant c_1\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n)$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1>0$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{vol}_n(A)=\mathrm{vol}_n(B_2^n)$ και $\mathrm{vol}_n(B)=\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n)$. Ορίζουμε

$$\Theta_1=\{(x,y)\in A\times B : x+y\in A+_\Theta B\}.$$

Παρατηρήστε ότι $A +_\Theta B = A +_{\Theta_1} (B)$ και $\mathrm{vol}_{2n}(\Theta_1) \geqslant \mathrm{vol}_{2n}(\Theta)$. Ορίζουμε $R > 0$ μέσω της ισότητας

$$\mathrm{vol}_n(A +_\Theta B) = \mathrm{vol}_n(RB_2^n).$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(\Theta_1) &= \mathrm{vol}_n(\{(x,y) \in A \times B : x+y \in A +_\Theta B\}) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(x)\mathbf{1}_B(y)\mathbf{1}_{A+_\Theta B}(x+y)dx\,dy \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A^*(x)\mathbf{1}_B^*(y)\mathbf{1}_{A+_\Theta B}^*(x+y)dx\,dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{B_2^n}(x)\mathbf{1}_{\rho B_2^n}(y)\mathbf{1}_{RB_2^n}(x+y)dx\,dy \\
&= \mathrm{vol}_{2n}(\{(x,y) \in B_2^n \times (\rho B_2^n) : x+y \in RB_2^n\}).
\end{aligned}$$

Θέτουμε $\Theta_2 = \{(x,y) \in B_2^n \times (\rho B_2^n) : |x+y| \leqslant \sqrt{1+\rho^2}\}$. Αφού

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(\Theta_2) &= \mathrm{vol}_{2n}(\{(x,y) \in B_2^n \times (\rho B_2^n) : |x+y| \leqslant \sqrt{1+\rho^2}\}) \\
&\leqslant (1 - c\min\{\rho\sqrt{n}, 1\})\mathrm{vol}_n(B_2^n)\mathrm{vol}_n(\rho B_2^n) \\
&\leqslant \mathrm{vol}_{2n}(\Theta) \\
&\leqslant \mathrm{vol}_{2n}(\Theta_1) \\
&\leqslant \mathrm{vol}_{2n}(\{(x,y) \in B_2^n \times (\rho B_2^n) : x+y \in RB_2^n\}),
\end{aligned}$$

παίρνουμε

$$R \geqslant \sqrt{1+\rho^2}.$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_n(A +_\Theta B)^{2/n} = R^2\mathrm{vol}_n(B_2^n) \geqslant (1+\rho^2)\mathrm{vol}_n(B_2^n) = \mathrm{vol}_n(A)^{2/n} + \mathrm{vol}_n(B)^{2/n},$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Μπορούμε να διατυπώσουμε το Θεώρημα 3.3.1 και στην ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 3.3.5. *Υπάρχουν $c, C > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $0 < \delta < c$ και A, B είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue τότε, για κάθε $\Theta \subset A \times B$ με*

$$\mathrm{vol}_n(\Theta) \geqslant (1-\delta)\mathrm{vol}_n(A)\mathrm{vol}_n(B)$$

έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(A +_\Theta B)^{2/n} \geqslant \left(1 - \frac{C\delta}{n}\right)\left(\mathrm{vol}_n(A)^{2/n} + \mathrm{vol}_n(B)^{2/n}\right).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τους όγκους έτσι ώστε

$$\mathrm{vol}_n(A) = 1 \geqslant \mathrm{vol}_n(B) = \rho^n$$

Θεωρούμε τη σταθερά $c > 0$ του Θεωρήματος 3.3.1, για την οποία μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c < 1/2$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

(α) Αν $\rho\sqrt{n} \geqslant \delta/c$, τότε $1-\delta \geqslant 1-c\min\{\rho\sqrt{n},1\}$. Άρα εφαρμόζεται το Θεώρημα 3.3.1 και έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(A+_\Theta B)^{2/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(A)^{2/n} + \mathrm{vol}_n(B)^{2/n},$$

δηλαδή παίρνουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος και μάλιστα σε ισχυρότερη μορφή.

(β) Υποθέτουμε τώρα ότι $\rho\sqrt{n} < \delta/c$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}(1-\delta)\mathrm{vol}_n(A)\cdot\mathrm{vol}_n(B) &\leqslant \mathrm{vol}_n(\Theta)\\ &= \int_B \mathrm{vol}_n(\{x\in A : x+y\in A+_\Theta B\})\,dx\\ &\leqslant \mathrm{vol}_n(B)\mathrm{vol}_n(A+_\Theta B).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{vol}_n(A+_\Theta B)^{2/n} \geqslant (1-\delta) \geqslant 1-\frac{3\delta}{n},$$

και αν επιλέξουμε τη σταθερά $C>0$ αρκετά μεγάλη, αλλά ανεξάρτητη από το n, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(A+_\Theta B)^{2/n} &\geqslant 1-\frac{3\delta}{n} \geqslant \Big(1-\frac{C\delta}{n}\Big)(1+\rho^2)\\ &= \Big(1-\frac{C\delta}{n}\Big)\left(\mathrm{vol}_n(A)^{2/n}+\mathrm{vol}_n(B)^{2/n}\right),\end{aligned}$$

όπου για την επιλογή της σταθεράς C παίρνουμε υπόψιν και την $\rho < \delta/(c\sqrt{n})$. □

Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 3.3.5 μπορούμε να δείξουμε μια παραλλαγή του στην οποία υποθέτουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(\Theta) \geqslant \gamma\mathrm{vol}_n(A)\mathrm{vol}_n(B)$$

για κάποιον $0<\gamma<1$ και συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(A+_\Theta B)^{2/n} \geqslant \left(1-C\rho\sqrt{\log(1+1/\gamma)/n}\left(\mathrm{vol}_n(A)^{2/n}+\mathrm{vol}_n(B)^{2/n}\right)\right.$$

Ειδικότερα, έχουμε το εξής.

Πόρισμα 3.3.6. *Αν $0<\delta<\delta_0$ και το $\Theta\subset A\times B$ ικανοποιεί την*

$$\mathrm{vol}_n(\Theta) \geqslant (1-\delta)^n\mathrm{vol}_n(A)\mathrm{vol}_n(B),$$

τότε

$$\mathrm{vol}_n(A+_\Theta B)^{2/n} \geqslant (1-\varepsilon)\left(\mathrm{vol}_n(A)^{2/n}+\mathrm{vol}_n(B)^{2/n}\right)$$

για κάποιον $0<\varepsilon\leqslant c\sqrt{\delta}$.

3.3.1 Η ανισότητα του Shannon

Έστω X ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue, και έστω f η πυκνότητά του. Η *εντροπία* του X είναι η ποσότητα

$$h(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\log f(x)\,dx.$$

Η *ανισότητα του Shannon* ισχυρίζεται ότι αν X, Y είναι δύο τέτοια τυχαία διανύσματα και αν τα X, Y είναι ανεξάρτητα, τότε

$$\exp(2h(X)/n) + \exp(2h(Y)/n) \leqslant \exp(2h(X+Y)/n).$$

Η ανισότητα του Shannon είναι ένα από τα πιο σημαντικά αποτελέσματα της Θεωρίας Πληροφορίας. Θα δώσουμε μια απόδειξη αυτής της ανισότητας, η οποία οφείλεται στους Szarek και Voiculescu και χρησιμοποιεί την εκτίμηση που έδωσαν για τα περιορισμένα αθροίσματα Minkowski, στη μορφή του Πορίσματος 3.3.6.

Θεωρούμε μόνο την περίπτωση $n = 1$. Έστω $X_1, X_2, \dots, X_N, \dots$ μια ακολουθία ανεξάρτητων αντιγράφων του X σε κάποιον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathbb{P})$. Για κάθε $N \in \mathbb{N}$, η από κοινού πυκνότητα F_N των $X_1, \dots, X_N$ ως προς το μέτρο Lebesgue είναι η συνάρτηση

$$F_N(x_1, \dots, x_N) = f(x_1)\cdots f(x_N).$$

Πρόταση 3.3.7. *Υπάρχουν $\alpha_k, \beta_k > 0$ με $\alpha_k \to 0$ και $\beta_k \to 0$, τέτοιες ώστε*

$$\mathbb{P}((X_1, \dots, X_N) \in K_N(X)) > 1 - \beta_N$$

για κάθε N, όπου

$$K_N(X) = \{x \in \mathbb{R}^N : \exp(N(-h(X) - \alpha_N)) \leqslant F_N(x) \leqslant \exp(N(-h(X) + \alpha_N)\}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\frac{\log F_N}{N}(\overline{x}) := \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \log f(x_j)$$

ως τυχαία μεταβλητή στον $(\mathbb{R}^\infty, \mathbb{P})$, όπου $\mathbb{P} := \otimes_{j=1}^\infty (f(x)dx)$. Τότε,

$$\frac{\log F_N}{N} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \log f(X_j).$$

Από το νόμο των μεγάλων αριθμών, η $\log F_N/N$ συγκλίνει κατά πιθανότητα στην

$$\mathbb{E}(\log f(X)) = \int f(x)\log f(x)\,dx = -h(X).$$

Συνεπώς, υπάρχει μια ακολουθία (α_N) θετικών πραγματικών αριθμών με $\lim_N \alpha_N = 0$, τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}\left(-h(X) - \alpha_N \leqslant \frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \log f(X_j) \leqslant -h(X) + \alpha_N\right) \to 1$$

καθώς το $N \to \infty$. Αυτό είναι ισοδύναμο με τον ισχυρισμό της Πρότασης. $\square$

Πόρισμα 3.3.8. *Με το συμβολισμό της Πρότασης 3.3.7 έχουμε*

$$(1-\beta_N)e^{N(h(X)-\alpha_N)} \leqslant \mathrm{vol}_N(K_N(X)) \leqslant e^{N(h(X)+\alpha_N)}.$$

Απόδειξη. Απλώς παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{P}((X_1,\dots,X_N)\in K_N(X)) = \int_{K_N(X)} F_N(x)\,dx > 1-\beta_N$$

και χρησιμοποιούμε τον ορισμό του $K_N(X)$. □

Αφήνοντας το $N\to\infty$ παίρνουμε

$$\lim_{N\to\infty}\frac{\log \mathrm{vol}_N(K_N(X))}{N} = h(X)$$

και

$$\lim_{N\to\infty}\mathrm{vol}_N(K_N(X))^{2/N} = \exp(2h(X)). \tag{3.3.4}$$

Θεώρημα 3.3.9. *Έστω X,Y ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με πυκνότητες f,g ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε,*

$$\exp(2h(X))+\exp(2h(Y)) \leqslant \exp(2h(X+Y)).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε δύο ακολουθίες (X_k) και (Y_k) από κοινού ανεξάρτητων αντιγράφων των X και Y αντίστοιχα. Ορίζουμε $A_N=K_N(X)$, $B_N=K_N(Y)$ και

$$\Theta_N=\{(x,y)\in A_N\times B_N : x+y\in K_N(X+Y)\}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η Πρόταση 3.3.7 ισχύει για τις A_N, B_N και $C_N := K_N(X+Y)$ ταυτόχρονα, δηλαδή με τις ίδιες ακολουθίες (α_k), (β_k)).

Αν $\mathbf{X}_N=(X_1,\dots,X_N)$ και $\mathbf{Y}_N=(Y_1,\dots,Y_N)$, τότε

$$\begin{aligned}1-\beta_N &\leqslant \mathbb{P}(\mathbf{X}_N+\mathbf{Y}_N\in C_N)\\ &\leqslant \mathbb{P}(\mathbf{X}_N\in A_N\ ,\ \mathbf{Y}_N\in B_N, \mathbf{X}_N+\mathbf{Y}_N\in C_N)\\ &\quad+\mathbb{P}((\mathbf{X}_N,\mathbf{Y}_N)\notin A_N\times B_N)\\ &= \mathbb{P}((\mathbf{X}_N,\mathbf{Y}_N)\in\Theta_N)+1-\mathbb{P}(\mathbf{X}_N\in A_N)\,\mathbb{P}(\mathbf{Y}_N\in B_N)\\ &\leqslant \mathbb{P}((\mathbf{X}_N,\mathbf{Y}_N)\in\Theta_N)+1-(1-\beta_N)^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν F_N,G_N είναι οι πυκνότητες των $\mathbf{X}_N,\mathbf{Y}_N$ ως προς το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^N$, έχουμε

$$\int_{\Theta_N} F_N(x)G_N(x)\,dx = \mathbb{P}((\mathbf{X}_N,\mathbf{Y}_N)\in\Theta_N) \geqslant 1-3\beta_N+\beta_N^2. \tag{3.3.5}$$

Από τον ορισμό των A_N, B_N βλέπουμε ότι

$$\int_{\Theta_N} F_N(x)G_N(x)\,dx \leqslant \mathrm{vol}_N(\Theta_N)\, e^{N(-h(X)+\alpha_N)}e^{N(-h(Y)+\alpha_N)}, \tag{3.3.6}$$

ενώ το Πόρισμα 3.3.6 δείχνει ότι

$$\mathrm{vol}_N(A_N)\mathrm{vol}_N(B_N) \leqslant e^{N(h(X)+\alpha_N)}e^{N(h(Y)+\alpha_N)}. \tag{3.3.7}$$

Από τις (3.3.5), (3.3.6) και (3.3.7) παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{vol}_N(\Theta_N)}{\mathrm{vol}_N(A_N)\mathrm{vol}_N(B_N)} \geqslant (1-3\beta_N+\beta_N^2)e^{-4N\alpha_N},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

$$\lim_{N\to\infty}\left(\frac{\mathrm{vol}_N(\Theta_N)}{\mathrm{vol}_N(A_N)\mathrm{vol}_N(B_N)}\right)^{1/N} = 1.$$

Τώρα, το Πόρισμα 3.3.6 δείχνει ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_N(C_N)^{2/N} &= \mathrm{vol}_N(A_N +_{\Theta_N} B_N)^{2/N} \\ &\geqslant (1-\varepsilon_N)\left(\mathrm{vol}_N(A_N)^{2/N} + \mathrm{vol}_N(B_N)^{2/N}\right)\end{aligned}$$

όπου $\varepsilon_N \to 0^+$ καθώς το $N \to \infty$. Παίρνοντας υπόψη και την (3.3.4) έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.3.10. Η ίδια απόδειξη δίνει την ανισότητα

$$\exp(2h(X)/n) + \exp(2h(Y)/n) \leqslant \exp(2h(X+Y)/n)$$

αν τα X και Y παίρνουν τιμές στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, τα $K_N(X)$ και $K_N(Y)$ είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^{Nn}$, έχουμε $\mathrm{vol}_N(K_N(X))^{2/(Nn)} \to \exp(2h(X)/n)$, και ακολουθούμε τα ίδια βήματα.

3.4 Η ιδιότητα του τυχαίου συντύπου-2

Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι μια γεωμετρική ανισότητα των Gluskin και V. Milman.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $A_1,\dots,A_m$ μετρήσιμα σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και K αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Για κάθε $t=(t_1,\dots,t_m)\in\mathbb{R}^m$ ορίζουμε*

$$\|t\|_{A_i,K} = \frac{1}{\prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_n(A_i)}\int_{A_1}\cdots\int_{A_m}\Big\|\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big\|_K\,dx_1\cdots dx_m.$$

Τότε,

$$\|t\|_{A_i,K} \geqslant c\Big(\sum_{i=1}^m t_i^2\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(A_i)}{\mathrm{vol}_n(K)}\Big)^{2/n}\Big).$$

Ειδικότερα, αν $\mathrm{vol}_n(A_i)=\mathrm{vol}_n(K)$ για κάθε $1\leqslant i\leqslant m$ τότε

$$\|t\|_{A_i,K} \geqslant c\Big(\sum_{i=1}^m t_i^2\Big),$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}^m$.

Σημείωση. Η απόδειξη δείχνει ότι μπορούμε να έχουμε $c \geqslant c(n)/\sqrt{2}$, όπου $c(n) \to 1$ καθώς το $n \to \infty$. Στην ειδική περίπτωση όπου $A_i = K$ για κάθε i παίρνουμε ένα αποτέλεσμα από το [10] το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ως «γενικευμένη ανισότητα Khintchine».

Η απόδειξη βασίζεται στην ακόλουθη συνέπεια της ανισότητας Brascamp–Lieb–Luttinger.

Πρόταση 3.4.2. *Έστω $A_1, \ldots, A_m$ μετρήσιμα σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{vol}_n(A_i) = \mathrm{vol}_n(K) = \mathrm{vol}_n(B_2^n) = \kappa_n$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. Τότε, για κάθε $t_1, \ldots, t_m \in \mathbb{R}$ και $s > 0$ ισχύει*

$$\mathrm{vol}_{n^2}\Big((x_i)_{i\leqslant n} : x_i \in A_i \ \ \textit{για κάθε } i \ \ \textit{και} \Big\| \sum_{i=1}^m t_i x_i \Big\|_K < s\Big\}$$
$$\leqslant \mathrm{vol}_{n^2}\Big((x_i)_{i\leqslant n} : x_i \in B_2^n \ \ \textit{για κάθε } i \ \ \textit{και} \Big| \sum_{i=1}^m t_i x_i \Big| < s\Big\}.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.4.1: αν $f_0, f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $B = (b_{ji})$ είναι ένας $(m+1) \times k$ πίνακας τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=0}^m f_j\Big(\sum_{i=1}^k b_{ji} x_i\Big) dx_k \ldots dx_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=0}^m f_j^*\Big(\sum_{i=1}^k b_{ji} x_i\Big) dx_k \ldots dx_1. \tag{3.4.1}$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mathbf{1}_A$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση ενός συνόλου $A \subset \mathbb{R}^n$ τότε η $\mathbf{1}_A^*$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση της Ευκλείδειας μπάλας rB_2^n, όπου $\mathrm{vol}_n(A) = \mathrm{vol}_n(rB_2^n)$.

Εφαρμόζουμε την (3.4.1) με $k = m$ για τις συναρτήσεις $f_0 = \mathbf{1}_K$ και $f_j = \mathbf{1}_{A_j}$, $1 \leqslant j \leqslant m$, και τον πίνακα B με

$$b_{ji} = \begin{cases} 1 & \text{αν } 1 \leqslant j = i \leqslant m, \\ t_i & \text{αν } j = 0, \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Αυτό δίνει αμέσως το συμπέρασμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1. Υποθέτουμε πρώτα ότι $\mathrm{vol}_n(A_i) = \mathrm{vol}_n(K) = \kappa_n$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.4.2 με $s = 1$ παίρνουμε

$$\int_{A_1} \cdots \int_{A_m} \mathbf{1}_K\Big(\sum_{i=1}^m t_i x_i\Big) dx_m \ldots dx_1 \geqslant \int_{B_2^n} \cdots \int_{B_2^n} \mathbf{1}_{B_2^n}\Big(\sum_{i=1}^m t_i x_i\Big) dx_m \ldots dx_1. \tag{3.4.2}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\|y\|_K = \int_0^\infty \big(1 - \mathbf{1}_K(y/t)\big)\, dt.$$

Τότε, η (3.4.2) μας δίνει

$$\|t\|_{A_i,K} = \int_{A_1}\cdots\int_{A_m}\Big\|\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big\|_K \frac{\prod_{i=1}^m dx_i}{\prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_n(A_i)} \tag{3.4.3}$$
$$= \int_0^\infty\int_{A_1}\cdots\int_{A_m}\big(1-\mathbf{1}_K(t_1x_1+\cdots+t_mx_m/t)\big)\,dt\,\frac{\prod_{i=1}^m dx_i}{\prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_n(A_i)}$$
$$= \int_0^\infty\int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n}\big(1-\mathbf{1}_{B_2^n}(t_1x_1+\cdots+t_mx_m/t)\big)\,dt\,\frac{\prod_{i=1}^m dx_i}{\kappa_n^m}$$
$$= \int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n}\Big|\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big|\frac{\prod_{i=1}^m dx_i}{\kappa_n^m}.$$

Τώρα γράφουμε

$$\int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n}\Big|\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big|\frac{\prod_{i=1}^m dx_i}{\kappa_n^m} = \int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n}\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm1}\Big|\sum_{i=1}^m \varepsilon_it_ix_i\Big|\frac{\prod_{i=1}^m dx_i}{\kappa_n^m}$$
$$\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n}\Big(\sum_{i=1}^m t_i^2|x_i|^2\Big)^{1/2}\frac{\prod_{i=1}^m dx_i}{\kappa_n^m},$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η B_2^n είναι unconditional κυρτό σώμα και την ανισότητα Khintchine με τη βέλτιστη σταθερά $\sqrt{2}$, που οφείλεται στον Szarek. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε την ανισότητα

$$\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1^{1/3}\|f\|_4^{2/3}$$

για τη συνάρτηση $f(x) = \big(\sum_{i=1}^m t_i^2|x_i|^2\big)^{1/2}$ που ορίζεται στον $\mathbb{R}^{nm}$ για να εκτιμήσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα και να καταλήξουμε στο συμπέρασμα με

$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{n}{n+2}\Big)^{3/2}\sqrt{\frac{n+4}{n}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{καθώς το } n\to\infty.$$

Για τη γενική περίπτωση κάνουμε την αντικατάσταση $x_i' = x_i/r_i$, όπου

$$r_i = (\mathrm{vol}_n(A_i)/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n},$$

και στη συνέχεια θέτουμε $K' = rK$, όπου $\mathrm{vol}_n(rK) = \mathrm{vol}(B_2^n) = \kappa_n$, ανάγοντας έτσι το πρόβλημα στην περίπτωση που έχουμε ήδη μελετήσει. □

Το Θεώρημα 3.4.1 συμπληρώνει η εκτίμηση που μας δίνει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.3. *Έστω $A_1,\dots,A_m$ μετρήσιμα σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω K ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{vol}_n(A_i) = \mathrm{vol}_n(K) = 1$ για κάθε $1\leqslant i\leqslant m$. Τότε, για κάθε $t_1,\dots,t_m\in\mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^m t_i^2 = 1$ και κάθε $0<s<1$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}_{nm}\Big((x_i)_{i\leqslant m} : x_i\in A_i \ \text{για κάθε } i \text{ και } \Big\|\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big\|_K < s\Big\} \leqslant s^n\exp\Big(\frac{(1-s^2)n}{2}\Big).$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.3 χρησιμοποιεί την ακριβή μορφή της πολυδιάστατης ανισότητας Young με τη βέλτιστη σταθερά, που οφείλεται στους Beckner και Brascamp–Lieb.

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\mathrm{vol}_n(D) = 1$, και θέτουμε

$$\tau := t\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\right)^{1/2}.$$

Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $y_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right\|_D \leqslant t\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{1/2}\right) = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{V_1}(x_1)\mathbf{1}_{V_2}(x_2)\ldots\mathbf{1}_{V_m}(x_m)\mathbf{1}_{\tau K}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) dx_1\ldots dx_m \\
&= \left(\prod_{i=1}^m \lambda_i\right)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\lambda_1 V_1}(y_1)\mathbf{1}_{\lambda_2 V_2}(y_2 - y_1)\ldots\mathbf{1}_{\lambda_m V_m}(y_m - y_{m-1})\mathbf{1}_{\tau K}(y_m) \\
&\qquad\qquad dx_1\ldots dx_m.
\end{aligned}$$

Φράσσουμε την τελευταία ποσότητα χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young: Έπεται ότι για κάθε $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1, \ldots, m$, τέτοια ώστε $\sum_{i=0}^m \frac{1}{p_i} = m$,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right\|_D \leqslant t\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{1/2}\right) \leqslant \\
&\leqslant \left(\prod_{i=1}^m \lambda_i\right)^{-n}\left(\prod_{i=0}^m C_i\right)^n \|\mathbf{1}_{\tau K}\|_{p_0} \prod_{i=1}^m \|\mathbf{1}_{\lambda_i V_i}\|_{p_i},
\end{aligned} \tag{3.4.4}$$

όπου

$$C_i = \left(p_i^{1/p_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{1-1/p_i}\right)^{1/2}.$$

Παρατηρήστε ότι, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τ και το γεγονός ότι $\mathrm{vol}_n(D) = \mathrm{vol}_n(V_i) = 1$ για κάθε i, το δεξί μέλος της (3.4.4) είναι ακριβώς ίσο με

$$\left(t\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}\right)^{\frac{n}{p_0}} \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\frac{n}{p_i}} \prod_{i=0}^m p_i^{\frac{n}{2p_i}}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)}. \tag{3.4.5}$$

Θέτουμε τώρα $q_i = 1 - \frac{1}{p_i}$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Από τους περιορισμούς μας για τα p_i έπεται τότε ότι $\sum_{i=0}^m q_i = 1$, και $0 \leqslant q_i \leqslant 1$ για κάθε i. Χρησιμοποιώντας αυτό το συμβολισμό, η (3.4.5) παίρνει τη μορφή

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\right)^{(1-q_0)\frac{n}{2}} t^n\left(\frac{1}{t^{2q_0}}\frac{q_0(1-q_0)^{q_0}}{1-q_0}\prod_{i=1}^m\left(\frac{q_i(1-q_i)}{\lambda_i^2}\right)^{q_i}\frac{1}{1-q_i}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{3.4.6}$$

Πρέπει να επιλέξουμε τα q_i έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η τελευταία ποσότητα. Για τον σκοπό μας, αρκεί η επιλογή $q_0 = t^2$ και $q_i = \frac{(1-t)^2\lambda_i}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^2}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Με αυτή την επιλογή, η

(3.4.6) είναι ίση με

$$t^n \left(\prod_{i=1}^{m} \frac{1}{(1-q_i)^{1-q_i}} \right)^{\frac{n}{2}} = t^n \exp\left(\frac{n}{2} \sum_{i=1}^{m} (1-q_i) \log \frac{1}{1-q_i} \right).$$

Το ζητούμενο αποτέλεσμα έπεται τότε, γιατί $(1-q_i)\log\frac{1}{1-q_i} = (1-q_i)\log\left(1+\frac{q_i}{1-q_i}\right) \leqslant q_i$ (θυμηθείτε ότι $q_i \geqslant 0$) και $\sum_{i=1}^{m} q_i = 1 - q_0 = 1 - t^2$. □

3.4.1 Η ιδιότητα του τυχαίου συντύπου-2

Λέμε ότι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ έχει *συντύπο*-2 (με σταθερά $C_2(X) \leqslant C$) αν για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $x_1, \ldots, x_m \in X$,

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1} \Big\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i x_i \Big\| \geqslant \frac{1}{C} \Big(\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2 \Big)^{1/2}.$$

Συμβολίζουμε με K τη μοναδιαία μπάλα του X. Λέμε ότι ο X έχει *τυχαίο συντύπο*-2 με σταθερά $C > 0$ αν n τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_n$ που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το K ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-an}$ την

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1} \Big\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i t_i x_i \Big\| \geqslant \frac{1}{C} \Big(\sum_{i=1}^{m} |t_i|^2 \Big)^{1/2} \tag{3.4.7}$$

για κάθε επιλογή των $t_i \in \mathbb{R}$ (εδώ, $a > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά). Οι Gluskin και V. Milman απέδειξαν ότι κάθε n-διάστατος χώρος με νόρμα έχει τυχαίο συντύπο-2 με μια απόλυτη σταθερά $C > 0$:

Θεώρημα 3.4.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε n, κάθε n-διάστατος χώρος με νόρμα X έχει τυχαίο συντύπο-2 με σταθερά $C > 0$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\mathcal{F}$ των σημείων $y \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τα ακόλουθα: (α) $\frac{1}{2} \leqslant |y| \leqslant 1$ και (β) για κάθε $i \leqslant n$, είτε $y_i = 0$ ή $y_i = \sqrt{2^k/(4n)}$ για κάποιον θετικό ακέραιο k.

Λήμμα 3.4.5. *Αν $\|\cdot\|_u$ είναι μια unconditional νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\min_{x \in S^{n-1}} \|x\|_u \geqslant \min_{y \in \mathcal{F}} \|y\|_u \geqslant \frac{1}{2} \min_{y \in \mathcal{F}} \frac{\|y\|_u}{|y|}.$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in S^{n-1}$ μπορούμε να βρούμε $y \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $0 \leqslant y_i \leqslant |x_i|$ για κάθε $i \leqslant n$. Πράγματι, για κάθε $i \leqslant n$ έχουμε: είτε $2nx_i^2 < 1$, και τότε θέτουμε $y_i = 0$, ή $2nx_i^2 \geqslant 1$ και σε αυτή την περίπτωση βρίσκουμε k_i τέτοιον ώστε $2^{k_i} \leqslant 4nx_i^2 < 2^{k_i+1}$ και θέτουμε $y_i = \sqrt{2^{k_i}/(4n)}$. Είναι φανερό ότι $0 < y_i \leqslant |x_i|$ και $|y| \leqslant |x| = 1$. Από την άλλη πλευρά,

$$|y|^2 = \frac{1}{4n} \sum_{\{i: y_i \neq 0\}} 2^{k_i} > \frac{1}{2}\frac{1}{4n} \sum_{\{i: y_i \neq 0\}} 4nx_i^2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \sum_{\{i: y_i = 0\}} x_i^2\Big).$$

Αφού από την $y_i = 0$ έπεται ότι $x_i^2 < \frac{1}{2n}$, ελέγχουμε εύκολα ότι $|y| \geqslant \frac{1}{2}$.

Τώρα, έστω $x \in S^{n-1}$. Επιλέγουμε $y \in \mathcal{F}$ με $0 \leqslant y_i \leqslant |x_i|$ για κάθε $i \leqslant n$. Αφού η $\|\cdot\|_u$ είναι unconditional, έχουμε $\|x\|_u \geqslant \|y\|_u$ και αυτό αποδεικνύει την αριστερή ανισότητα του λήμματος. Η δεξιά ανισότητα προκύπτει από την ιδιότητα (α) του συνόλου $\mathcal{F}$. □

Τώρα, ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \left\{ \frac{y}{|y|} : y \in \mathcal{F} \right\}.$$

Βλέπουμε εύκολα ότι $\mathrm{card}(\mathcal{A}) \leqslant 5^n$.

Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και K η μοναδιαία μπάλα του. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.3 με $A_i = K$, $i = 1, \ldots, n$ βλέπουμε ότι n τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_n \in K$ ικανοποιούν την (3.4.7) για κάθε $t = (t_1, \ldots, t) \in \mathcal{A}$ με πιθανότητα κοντά στο 1 και με κάποια σταθερά $C = C(\alpha)$. Για κάθε n-άδα $(x_1, \ldots, x_n)$ σημείων του K που έχουν αυτή την ιδιότητα θεωρούμε την unconditional νόρμα

$$t \mapsto \mathrm{Ave}_{\varepsilon_i = \pm 1} \Big\| \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_i t_i x_i \Big\|.$$

Τότε, το Λήμμα 3.4.5 δείχνει ότι η (3.4.7) ισχύει για κάθε $t \in \mathbb{R}^n$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανισότητα Brascamp-Lieb

4.1 Ανισότητα Brascamp-Lieb

Έστω $m \geqslant n$, $p_1, \dots, p_m \geqslant 1$ με $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = n$, και $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τον πλειογραμμικό τελεστή $\Phi : L^{p_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\Phi(f_1, \dots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(\langle x, u_j \rangle)\, dx.$$

Οι Brascamp και Lieb απέδειξαν ότι η νόρμα του Φ είναι το supremum του λόγου

$$\frac{\Phi(g_1, \dots, g_m)}{\prod_{j=1}^{m} \|g_j\|_{p_j}}$$

πάνω από όλες τις κεντραρισμένες Gaussian συναρτήσεις $g_1, \dots, g_m$. Η απόδειξη βασίζεται στην ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger (Θεώρημα 2.4.3).

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω $m \geqslant n$, και $p_1, \dots, p_m \geqslant 1$ με $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = n$. Για δοθέντα $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$, θεωρούμε τον τελεστή Φ (ο οποίος εξαρτάται από τα u_j). Τότε,*

$$\frac{\Phi(f_1, \dots, f_m)}{\prod_{j=1}^{m} \|f_j\|_{p_j}} \leqslant D := \sup\left\{ \frac{\Phi(g_1, \dots, g_m)}{\prod_{j=1}^{m} \|g_j\|_{p_j}} : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0 \right\}$$

για κάθε $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R})$.

Παρατήρηση 4.1.2. (α) Μπορούμε ασφαλώς να υποθέσουμε ότι οι f_j είναι μη-αρνητικές.

(β) Είδαμε ότι η συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη διατηρεί τις p-νόρμες και μεγαλώνει το αριστερό μέλος στο Θεώρημα 4.1.1. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε f_j είναι άρτια και φθίνουσα στο $\mathbb{R}^+$. Κάθε τέτοια συνάρτηση προσεγγίζεται από συναρτήσεις της μορφής

$$\sum_{l=1}^{k} a_l \mathbf{1}_{[-\gamma_l, \gamma_l]}$$

όπου $a_l > 0$ και η $\{\gamma_l\}_{l=1}^{k}$ είναι φθίνουσα. Άρα, αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα για συναρτήσεις αυτού του τύπου.

Λήμμα 4.1.3. *Έστω $\psi_1, \ldots, \psi_s$ μη αρνητικές συναρτήσεις στον $L^p(\mathbb{R}^k)$, $p \geqslant 1$. Τότε,*

$$\Big\| \sum_{j=1}^s \psi_j \Big\|_p \geqslant s^{-1/q} \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_p,$$

όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Απόδειξη. Αφού κάθε ψ_j είναι μη-αρνητική και $p \geqslant 1$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ έχουμε

$$\sum_{j=1}^s \psi_j(x)^p \leqslant \Big(\sum_{j=1}^s \psi_j(x) \Big)^p.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \Big(\sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_p \Big)^p &\leqslant s^{p/q} \sum_{j=1}^s \|\psi_j\|_p^p = s^{p/q} \int_{\mathbb{R}^k} \sum_{j=1}^s \psi_j^p(x) dx \\ &\leqslant s^{p/q} \int_{\mathbb{R}^k} \Big(\sum_{j=1}^s \psi_j(x) \Big)^p dx = s^{p/q} \Big\| \sum_{j=1}^s \psi_j \Big\|_p^p. \end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.1.4. *Έστω $p \geqslant 1$ και έστω η_a η χαρακτηριστική συνάρτηση της μπάλας $\{x \in \mathbb{R}^k : |x| \leqslant a\}$. Ορίζουμε*

$$\varphi_a(x) = \exp\left(\left(1 - \frac{|x|^2}{a^2} \right) \frac{k}{2p} \right) = e^{\frac{k}{2p}} e^{-|x|^2 \frac{k}{2pa^2}}.$$

Τότε, $\eta_a(x) \leqslant \varphi_a(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ και

$$\|\varphi_a\|_p \leqslant \|\eta_a\|_p (3\sqrt{k})^{1/p}.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα $\eta_a(x) \leqslant \varphi_a(x)$ είναι φανερή διότι $\varphi_a(x) \geqslant 1$ όταν $|x| \leqslant a$. Έχουμε $\|\eta_a\|_p^p = \kappa_k a^k$ και

$$\|\varphi_a\|_p^p = e^{k/2} \frac{a^k}{k^{k/2}} (2\pi)^{k/2}.$$

Χρησιμοποιώντας και τον τύπο του Stirling παίρνουμε

$$\left(\frac{\|\varphi_a\|_p}{\|\eta_a\|_p} \right)^p \leqslant e^{k/2} \frac{\Gamma\left(\frac{k}{2} + 1\right)}{k^{k/2}} \leqslant 3\sqrt{k}.$$

□

Παρατήρηση 4.1.5. Παρατηρήστε ότι η φ_a είναι γινόμενο κεντραρισμένων Gaussian συναρτήσεων:

$$\varphi_a(x_1, \ldots, x_k) = e^{\frac{k}{2p}} \prod_{i=1}^k \exp\Big(- \frac{k x_i^2}{2a^2 p} \Big).$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε f_j είναι συνάρτηση της μορφής

$$f_j(t) = \sum_{l=1}^{N} a_{l,j} \mathbf{1}_{[-\gamma_{l,j},\gamma_{l,j}]}(t)$$

όπου $a_{l,j} \geqslant 0$, $\gamma_{l,j} \geqslant \gamma_{l+1,j}$ και N είναι ένας θετικός ακέραιος (ο ίδιος για όλες τις f_j).

Για κάθε $j \leqslant m$ θεωρούμε τη συνάρτηση $G_j : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$G_j(t_1, \dots, t_k) = \prod_{i=1}^{k} f_j(t_i)$$

και τη συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη F_j της G_j στον $\mathbb{R}^k$.

Από το Θεώρημα 2.4.3 και το θεώρημα Fubini βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j(\langle x, u_j\rangle)dx\Big)^k &= \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^{m} G_j(\langle x_1, u_j\rangle, \dots, \langle x_k, u_j\rangle)dx_k \dots dx_1 \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^{m} F_j(\langle x_1, u_j\rangle, \dots, \langle x_k, u_j\rangle)dx_k \dots dx_1.\end{aligned}$$

Αφού η f_j παίρνει μόνο N τιμές, η G_j παίρνει το πολύ $(k+1)^N$ τιμές. [Πράγματι, αν $a_1, \dots, a_N$ είναι οι τιμές της f_j τότε οι τιμές της G_j είναι οι $a_1^{\delta_1} a_2^{\delta_2} \cdots a_N^{\delta_N}$ όπου $\delta_1, \dots, \delta_N$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι και $\delta_1 + \cdots + \delta_N = k$. Με επαγωγή ως προς k βλέπουμε ότι το πλήθος των N-άδων μη αρνητικών ακεραίων που ικανοποιούν την τελευταία εξίσωση είναι το πολύ ίσο με $(k+1)^N$.] Άρα η F_j, όπως και η G_j, παίρνει το πολύ $(k+1)^N$ τιμές και έπεται ότι είναι συνάρτηση της μορφής

$$F_j = \sum_{l=1}^{(k+1)^N} H_{l,j} \eta_{a_{l,j}}, \tag{4.1.1}$$

όπου $H_{l,j} \geqslant 0$ και η $\{a_{l,j}\}$ είναι φθινουσα ως προς l για σταθερό j. Από το Λήμμα 4.1.3,

$$\|f_j\|_{p_j}^k = \|F_j\|_{p_j} = \Big\| \sum_{l=1}^{(k+1)^N} H_{l,j} \eta_{a_{l,j}} \Big\|_{p_j} \geqslant (k+1)^{-N/q_j} \sum_{l=1}^{(k+1)^N} H_{l,j} \|\eta_{a_{l,j}}\|_{p_j}, \tag{4.1.2}$$

όπου q_j είναι ο συζυγής εκθέτης του p_j. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\Phi(f_1, \dots, f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}}\Big)^k &= \frac{\int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m G_j(\langle x_1, u_j\rangle, \dots, \langle x_k, u_j\rangle)dx_k \dots dx_1}{\prod_{j=1}^m \|G_j\|_{p_j}} \\ &\leqslant \frac{\int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m F_j(\langle x_1, u_j\rangle, \dots, \langle x_k, u_j\rangle)dx_k \dots dx_1}{\prod_{j=1}^m \|F_j\|_{p_j}}.\end{aligned}$$

Από τις (4.1.1) και (4.1.2) η ποσότητα αυτή φράσσεται από

$$J := \frac{\sum_{l_1} \cdots \sum_{l_m} H_{l_1,1} \dots H_{l_m,m} \int_{\mathbb{R}^{nk}} \prod_{j=1}^m \eta_{a_{l_j,j}}(\langle x_1, u_j\rangle, \dots, \langle x_k, u_j\rangle)dx_k \dots dx_1}{(k+1)^{-N\sum \frac{1}{q_j}} \sum_{l_1} \cdots \sum_{l_m} H_{l_1,1} \dots H_{l_m,m} \prod_{j=1}^m \|\eta_{a_{l_j,j}}\|_{p_j}}.$$

Θεωρούμε μια m-άδα $(\eta_{b_1},\ldots,\eta_{b_m})$ και τις συναρτήσεις $(\varphi_{b_1},\ldots,\varphi_{b_m})$ όπως στο Λήμμα 4.1.4. Έχουμε $\eta_{b_j}\leqslant\varphi_{b_j}$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^{nk}}\prod_{j=1}^m \eta_{b_j}(\langle x_1,u_j\rangle,\ldots,\langle x_k,u_j\rangle)\leqslant\int_{\mathbb{R}^{nk}}\prod_{j=1}^m \varphi_{b_j}(\langle x_1,u_j\rangle,\ldots,\langle x_k,u_j\rangle). \tag{4.1.3}$$

Επίσης,

$$\prod_{j=1}^m\|\varphi_{b_j}\|_{p_j}\leqslant(3\sqrt{k})^{\sum\frac{1}{p_j}}\prod_{j=1}^m\|\eta_{b_j}\|_{p_j}=(3\sqrt{k})^n\prod_{j=1}^m\|\eta_{b_j}\|_{p_j}.$$

Κάθε φ_{b_j} είναι γινόμενο k ταυτόσημων μονοδιάστατων κεντραρισμένων Gaussian συναρτήσεων $\varphi_{b_j}^{(l)}$ υυπολογισμένων στα σημεία $\langle u_j,x_l\rangle$ αντίστοιχα. Συνεπώς, το δεξιό μέλος της (4.1.3) είναι η k-οστή δύναμη των ολοκληρωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ του γινομένου m κεντραρισμένων Gaussian συναρτήσεων υπολογισμένων στα $\langle x,u_j\rangle$, $j=1,\ldots,m$. Αφού

$$\|\varphi_{b_j}\|_{p_j}=\|\prod_{l=1}^k\varphi_{b_j}^{(l)}\|_{p_j}=\prod_{l=1}^k\|\varphi_{b_j}^{(l)}\|_{p_j},$$

έπεται ότι

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^{nk}}\prod_{j=1}^m\varphi_{b_j}(\langle x_1,u_j\rangle,\ldots,\langle x_k,u_j\rangle)}{\prod_{j=1}^m\|\varphi_{b_j}\|_{p_j}}\leqslant D^k.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Big(\frac{\Phi(f_1,\ldots,f_m)}{\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{p_j}}\Big)^k&\leqslant(k+1)^{N\sum_{j=1}^m\frac{1}{q_j}}(3\sqrt{k})^nD^k\\&=(k+1)^{(m-n)N}(3\sqrt{k})^nD^k.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{\Phi(f_1,\ldots,f_m)}{\prod_{j=1}^m\|f_j\|_{p_j}}\leqslant(k+1)^{\frac{(m-n)N}{k}}(3\sqrt{k})^{\frac{n}{k}}D,$$

και αφήνοντας το $k\to\infty$, ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

4.2 Η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της

Ο K. Ball αναδιατύπωσε την ανισότητα Brascamp–Lieb στην περίπτωση που τα διανύσματα u_j και οι συντελεστές $c_j=1/p_j$ ικανοποιούν τη συνθήκη $I_n=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j$ του θεωρήματος του John. Ταυτόχρονα, έδειξε ότι η τιμή της σταθεράς D στην ανισότητα, η οποία πιάνεται πάντα από Gaussian συναρτήσεις, είναι σε αυτή την περίπτωση ίση με 1. Έδωσε επίσης τις πρώτες σημαντικές εφαρμογές αυτής της ανισότητας στην κυρτή γεωμετρία: για παράδειγμα, απέδειξε την αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα την οποία θα παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 4.2.1 (Ball). *Έστω $u_1,\ldots,u_m\in S^{n-1}$ και $c_1,\ldots,c_m>0$ τα οποία ικανοποιούν την*

$$I_n=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j.$$

Αν $f_1,\ldots,f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x,u_j\rangle)dx\leqslant\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}}f_j(t)dt\right)^{c_j}.$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν τα u_j και c_j ικανοποιούν τη συνθήκη κανονικοποίησης $I_n=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j$ τότε η σταθερά στην ανισότητα του Θεωρήματος 4.2.1 είναι ίση με 1.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω $u_1,\ldots,u_m\in S^{n-1}$ και $c_1,\ldots,c_m>0$ τα οποία ικανοποιούν την $I_n=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j$. Τότε,*

$$\sup\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x,u_j\rangle)dx}{\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}}g_j\right)^{c_j}}:g_j(t)=e^{-\lambda_jt^2},\lambda_j>0\right\}$$
$$=\inf\left\{\frac{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_ju_j\otimes u_j\right)}{\prod_{j=1}^m\lambda_j^{c_j}}:\lambda_j>0\right\}=1.$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $(u\otimes u)(x)=\langle x,u\rangle u$. Θεωρούμε τις $g_j(t)=\exp(-\lambda_jt^2)$, $j=1,\ldots,m$, όπου λ_j είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x,u_j\rangle)dx&=\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j\langle x,u_j\rangle^2\right)dx\\&=\int_{\mathbb{R}^n}\exp\left(-\Big\langle\Big(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_ju_j\otimes u_j\Big)(x),x\Big\rangle\right)dx\\&=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_ju_j\otimes u_j\right)}}.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}}g_j\right)^{c_j}&=\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}}\exp(-\lambda_jt^2)dt\right)^{c_j}=\prod_{j=1}^m\left(\frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{\lambda_j}}\right)^{c_j}\\&=\frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^m\lambda_j^{c_j}}}\end{aligned}$$

διότι $c_1+\cdots+c_m=n$. Έπεται ότι

$$\inf\left\{\left(\frac{\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}}g_j\right)^{c_j}}{\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x,u_j\rangle)dx}\right)^2:g_j(t)=e^{-\lambda_jt^2},\ \lambda_j>0\right\}$$
$$=\inf\left\{\frac{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_ju_j\otimes u_j\right)}{\prod_{j=1}^m\lambda_j^{c_j}}:\lambda_j>0\right\}.$$

Αποδεικνύουμε τώρα ότι αυτή η σταθερά είναι ίση με 1.

Έστω $\lambda_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Για κάθε υποσύνολο $I \subseteq \{1, \dots, m\}$ με πληθάριθμο $|I| = n$ ορίζουμε

$$\lambda_I = \prod_{i \in I} \lambda_j \quad \text{και} \quad U_I = \det\left(\sum_{j \in I} c_j u_j \otimes u_j\right).$$

Από τον τύπο Cauchy-Binet έχουμε

$$\det\left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j\right) = \det\left(\sum_{j=1}^m \lambda_j (\sqrt{c_j} u_j) \otimes (\sqrt{c_j} u_j)\right) = \sum_{|I|=n} \lambda_I U_I. \tag{4.2.1}$$

Θέτοντας $\lambda_j = 1$ στην (4.2.1) βλέπουμε ότι

$$\sum_{|I|=n} U_I = 1.$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$\sum_{|I|=n} \lambda_I U_I \geqslant \prod_{|I|=n} \lambda_I^{U_I} = \prod_{j=1}^m \lambda_j^{\sum_{\{I : j \in I\}} U_I}. \tag{4.2.2}$$

Εφαρμόζοντας πάλι τον τύπο Cauchy-Binet έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{\{I : j \in I\}} U_I &= \sum_{|I|=n} U_I - \sum_{\{I : j \notin I\}} U_I = 1 - \det\big(I_n - (\sqrt{c_j} u_j) \otimes (\sqrt{c_j} u_j)\big)\\ &= 1 - (1 - c_j |u_j|^2) = c_j.\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στις (4.2.1) και (4.2.2) βλέπουμε ότι

$$\det\left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j\right) \geqslant \prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j} \tag{4.2.3}$$

άρα

$$\inf\left\{\frac{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j\right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0\right\} \geqslant 1.$$

Επιλέγοντας $\lambda_j = 1$ έχουμε ισότητα στην (4.2.3), και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θέτουμε

$$I(f_1, \dots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx.$$

Δοκιμάζοντας τις Gaussian συναρτήσεις έχουμε δείξει ότι

$$\sup\left\{I(f_1, \dots, f_m) : \int_{\mathbb{R}} f_j = 1\ ,\ j = 1, \dots, m\right\} \geqslant 1. \tag{4.2.4}$$

Το επόμενο θεώρημα είναι μια αντίστροφη μορφή του Θεωρήματος 4.2.1.

Θεώρημα 4.2.3 (Barthe). *Έστω $u_1,\ldots,u_m \in S^{n-1}$ και $c_1,\ldots,c_m > 0$ τα οποία ικανοποιούν την $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$. Αν $h_1,\ldots,h_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, ορίζουμε*

$$K(h_1,\ldots,h_m) = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup\left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\vartheta_j) : \vartheta_j \in \mathbb{R}\ ,\ x = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j \right\} dx.$$

Τότε,

$$\inf\left\{ K(h_1,\ldots,h_m) : \int_{\mathbb{R}} h_j = 1\ ,\ j = 1,\ldots,m \right\} = 1.$$

Δοκιμάζοντας Gaussian συναρτήσεις παίρνουμε και πάλι το πρώτο μέρος αυτής της αντίστροφης ανισότητας Brascamp-Lieb.

Πρόταση 4.2.4. *Με το συμβολισμό του Θεωρήματος 4.2.3 έχουμε*

$$\inf\left\{ K(h_1,\ldots,h_m) : \int_{\mathbb{R}} h_j = 1\ ,\ j = 1,\ldots,m \right\} \leqslant 1.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $\lambda_j > 0$, $j = 1,\ldots,m$ και τις συναρτήσεις $h_j(t) = \exp(-t^2/\lambda_j)$. Τότε, η συνάρτηση

$$m(x) := \sup\left\{ \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\vartheta_j) : x = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j \right\}$$

δίνεται από την

$$m(x) = \exp\left(-\inf\left\{ \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\vartheta_j^2 : x = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j \right\} \right).$$

Ορίζουμε

$$\|x\|^2 = \sum_{j=1}^m c_j\lambda_j \langle x, u_j\rangle^2 = \langle Ax, x\rangle$$

όπου A είναι ο συμμετρικός θετικά ορισμένος τελεστής $A := \sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j \otimes u_j$. Ελέγχουμε ότι η δυϊκή νόρμα είναι ακριβώς η

$$\|y\|_*^2 = \inf\left\{ \sum_{j=1}^m \frac{c_j}{\lambda_j}\vartheta_j^2 : y = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j \right\}.$$

Συνεπώς,

$$\|y\|_*^2 = \langle By, y\rangle,$$

όπου $B = A^{-1}$. Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(x)dx = \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det B}} = \pi^{n/2}\sqrt{\det A}.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-t^2/\lambda_j)dt \right)^{c_j} = \pi^{n/2} \prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j/2}.$$

Αυτό δείχνει ότι

$$\inf\left\{K^2(h_1,\dots,h_m):\int_{\mathbb{R}}h_j=1\right\}$$
$$\leqslant \inf\left\{\frac{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j\otimes u_j\right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}:\lambda_j>0\right\}=1$$

και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Το βασικό βήμα στο επιχείρημα του Barthe είναι η επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2.5. *Έστω $f_1,\dots,f_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ και $h_1,\dots,h_m:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε*

$$\int_{\mathbb{R}}f_j(t)dt=\int_{\mathbb{R}}h_j(t)dt=1,\qquad j=1,\dots,m.$$

Τότε,

$$I(f_1,\dots,f_m)\leqslant K(h_1,\dots,h_m).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f_j,h_j είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Για κάθε $j=1,\dots,m$ ορίζουμε $T_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ως εξής:

$$\int_{-\infty}^{T_j(t)}h_j(s)ds=\int_{-\infty}^{t}f_j(s)ds.$$

Τότε, κάθε T_j είναι γνησίως αύξουσα, 1-1 και επί, και

$$T_j'(t)h_j(T_j(t))=f_j(t),\quad t\in\mathbb{R}. \tag{4.2.5}$$

Ορίζουμε $W:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ θέτοντας

$$W(y)=\sum_{j=1}^m c_jT_j(\langle y,u_j\rangle)u_j. \tag{4.2.6}$$

Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$J(W)(y)=\sum_{j=1}^m c_jT_j'(\langle y,u_j\rangle)u_j\otimes u_j.$$

Έπεται ότι

$$\big\langle [J(W)(y)](v),v\big\rangle>0\quad \text{αν}\quad v\neq 0$$

άρα η W είναι 1-1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$m(x)=\sup\left\{\prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\vartheta_j):x=\sum_{j=1}^m\vartheta_jc_ju_j\right\}.$$

Τότε, η (4.2.6) δείχνει ότι

$$m(W(y))\geqslant\prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(\langle y,u_j\rangle))$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} m(x)dx &\geqslant \int_{W(\mathbb{R}^n)} m(x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} m(W(y)) \cdot |\det J(W)(y)|\, dy \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(\langle y, u_j\rangle)) \det\left(\sum_{j=1}^m c_j T_j'(\langle y, u_j\rangle) u_j \otimes u_j\right) dy \\ &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(T_j(\langle y, u_j\rangle)) \prod_{j=1}^m \left(T_j'(\langle y, u_j\rangle)\right)^{c_j}\, dy,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 4.2.2. Παίρνοντας υπόψη και την (4.2.5) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} m(x)dx \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle y, u_j\rangle)dy = I(f_1, \ldots, f_m).$$

Με άλλα λόγια, $I(f_1, \ldots, f_m) \leqslant K(h_1, \ldots, h_m)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.3 και του Θεωρήματος 4.2.1. Έστω $f_1, \ldots, f_m$ και $h_1, \ldots, h_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με

$$\int_{\mathbb{R}} f_j(t)dt = \int_{\mathbb{R}} h_j(t)dt = 1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Τότε,

$$I(f_1, \ldots, f_m) \leqslant K(h_1, \ldots, h_m).$$

Παίρνοντας το supremum πάνω από όλες αυτές τις συναρτήσεις f_j και το infimum πάνω από όλες αυτές τις συναρτήσεις h_j βλέπουμε ότι

$$1 \leqslant \sup\Big\{I(f_1, \ldots, f_m)\Big\} \leqslant \inf\Big\{K(h_1, \ldots, h_m)\Big\} \leqslant 1,$$

άρα πρέπει να έχουμε ισότητες παντού. □

4.3 Πολυδιάστατη ανισότητα Brascamp–Lieb

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε την πολυδιάστατη ανισότητα Brascamp–Lieb και την αντίστροφή της. Παρακάτω, με $S^+(\mathbb{R}^k)$ συμβολίζουμε το σύνολο όλων των $k \times k$ συμμετρικών, θετικά ορισμένων πινάκων. Για κάθε $A \in S^+(\mathbb{R}^k)$ συμβολίζουμε με G_A την Gaussian συνάρτηση $G_A : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$G_A(x) = \exp(-\langle Ax, x\rangle).$$

Τέλος, συμβολίζουμε με $L_1^+(\mathbb{R}^k)$ την κλάση των ολοκληρώσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε $m \geqslant n$ και υποθέτουμε ότι για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1, \ldots, c_m > 0$

και κάποιους φυσικούς $n_1,\ldots,n_m$ μικρότερους ή ίσους από n ισχύει η

$$\sum_{j=1}^{m} c_j n_j = n.$$

Για κάθε $j=1,\ldots,m$, μας δίνεται μια γραμμική απεικόνιση $B_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n_j}$ η οποία είναι επί. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\bigcap_{j=1}^{m}\mathrm{Ker}(B_j)=\{0\}.$$

Ορίζουμε δύο τελεστές $I,K : L_1^+(\mathbb{R}^{n_1})\times\cdots\times L_1^+(\mathbb{R}^{n_m})\to\mathbb{R}$ θέτοντας

$$I(f_1,\ldots,f_m)=\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^{m} f_j^{c_j}(B_jx)dx$$

και

$$K(h_1,\ldots,h_m)=\int_{\mathbb{R}^m}^{*} m(x)dx,$$

όπου $\int^*$ είναι το εξωτερικό ολοκλήρωμα και

$$m(x)=\sup\left\{\prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(y_j)\mid y_j\in\mathbb{R}^{n_j}\text{ και }\sum_{j=1}^{m}c_jB_j^*y_j=x\right\}.$$

Έστω E η μεγαλύτερη σταθερά για την οποία η ανισότητα

$$K(h_1,\ldots,h_m)\geqslant E\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}}h_j\right)^{c_j}$$

ισχύει για όλες τις $h_j\in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$, και έστω F η μικρότερη σταθερά για την οποία η ανισότητα

$$I(f_1,\ldots,f_m)\leqslant F\cdot\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}}f_j\right)^{c_j}$$

για όλες τις $f_j\in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$. Τότε, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.1. *Οι σταθερές E και F δίνονται από τις*

$$E=\inf\left\{\frac{K(g_1,\ldots,g_m)}{\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}}g_j\right)^{c_j}}\mid g_j\ \ \textit{Gaussian}\ ,\ j=1,\ldots,m\right\}$$

και

$$F=\sup\left\{\frac{I(g_1,\ldots,g_m)}{\prod_{j=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}}g_j\right)^{c_j}}\mid g_j\ \ \textit{Gaussian}\ ,\ j=1,\ldots,m\right\}.$$

Επιπλέον, αν D είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει

$$\det\left(\sum_{j=1}^{m}c_jB_j^*A_jB_j\right)\geqslant D\cdot\prod_{j=1}^{m}(\det A_j)^{c_j} \tag{4.3.1}$$

για όλους τους $A_j\in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$, τότε

$$E=\sqrt{D}\ \ \textit{και}\ \ F=\frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα της απόδειξης που δώσαμε για τη μονοδιάστατη περίπτωση. Θεωρούμε τις σταθερές

$$E_g = \inf\left\{ \frac{K(g_1,\ldots,g_m)}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j\right)^{c_j}} \mid g_j \ \text{ Gaussian },\ j=1,\ldots,m \right\}$$

και

$$F_g = \sup\left\{ \frac{I(g_1,\ldots,g_m)}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j\right)^{c_j}} \mid g_j \ \text{ Gaussian },\ j=1,\ldots,m \right\}.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$E = E_g = \sqrt{D} \ \text{ και } \ F = F_g = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Λήμμα 4.3.2. *Με το συμβολισμό του Θεωρήματος* 4.3.1 *έχουμε* $F_g = 1/\sqrt{D}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $g_j = G_{A_j}$, $j=1,\ldots,m$, όπου $A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(B_jx)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\sum_{j=1}^m c_j\langle A_jB_jx, B_jx\rangle\Big)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\Big(-\Big\langle\big(\sum_{j=1}^m c_jB_j^*A_jB_j\big)(x), x\Big\rangle\Big)dx \\
&= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\det\big(\sum_{j=1}^m c_jB_j^*A_jB_j\big)}}.
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} G_{A_j}\right)^{c_j} &= \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \exp(-\langle A_jx, x\rangle)\right)^{c_j} \\
&= \prod_{j=1}^m \left(\frac{\pi^{n_j/2}}{\sqrt{\det A_j}}\right)^{c_j} \\
&= \frac{\pi^{n/2}}{\sqrt{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}}}
\end{aligned}$$

διότι $c_1n_1 + \cdots + c_mn_m = n$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{F_g^2} &= \inf\left\{ \left(\frac{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j\right)^{c_j}}{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(B_jx)dx}\right) \mid g_j \ \text{ είναι κεντραρισμένη Gaussian } \right\} \\
&= \inf\left\{ \frac{\det\big(\sum_{j=1}^m c_jB_j^*A_jB_j\big)}{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}} \mid A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j}) \right\} \\
&= D.
\end{aligned}$$

$\square$

Λήμμα 4.3.3. *Έχουμε* $E_g \cdot F_g = 1$ *και* $E_g = 0$ *αν και μόνο αν* $F_g = +\infty$. *Συνεπώς,* $F_g = \sqrt{D}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$ και την τετραγωνική μορφή

$$Q(y) = \Big\langle \sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j y, y \Big\rangle.$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$R(x) = \inf \left\{ \sum_{j=1}^m c_j \langle A_j^{-1} x_j, x_j \rangle \mid x_j \in \mathbb{R}^{n_j} \ \text{ και } \ x = \sum_{j=1}^m c_j B_j^* x_j \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$R(x) = Q^*(x) = \sup\{\langle x, y\rangle^2 \mid Q(y) \leqslant 1\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $x = \sum_{j=1}^m c_j B_j^* x_j$ όπου $x_j \in \mathbb{R}^{n_j}$ τότε

$$\langle x, y\rangle^2 = \Big\langle \sum_{j=1}^m c_j B_j^* x_j, y \Big\rangle^2 = \left(\sum_{j=1}^m \langle \sqrt{c_j} A_j^{-1/2} x_j, \sqrt{c_j} A_j^{1/2} B_j y \rangle \right)^2,$$

άρα, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\langle x, y\rangle^2 &\leqslant \left(\sum_{j=1}^m |\sqrt{c_j} A_j^{-1/2} x_j|^2 \right) \cdot \left(\sum_{j=1}^m |\sqrt{c_j} A_j^{1/2} B_j y|^2 \right) \\
&= \left(\sum_{j=1}^m c_j \langle x_j, A_j^{-1} x_j \rangle \right) \cdot \left(\Big\langle \sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j y, y \Big\rangle \right) \\
&\leqslant R(x) Q(y).
\end{aligned}$$

Επίσης, έχουμε ισότητα στις προηγούμενες ανισότητες αν επιλέξουμε

$$y = \left(\sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j \right)^{-1} (x)$$

και $x_j = A_j B_j y$, $j = 1, \ldots, m$. Άρα, $R = Q^*$.

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι αν $A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$, τότε

$$\frac{I(G_{A_1}, \ldots, G_{A_m})}{\prod_{j=1}^m \left(\int G_{A_j} \right)^{c_j}} = \left(\frac{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}}{\det Q} \right)^{1/2}$$

και

$$\frac{K(G_{A_1^{-1}}, \ldots, G_{A_m^{-1}})}{\prod_{j=1}^m \left(\int G_{A_j^{-1}} \right)^{c_j}} = \left(\frac{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{-c_j}}{\det R} \right)^{1/2}.$$

Αφού $R = Q^*$, έχουμε $(\det Q) \cdot (\det R) = 1$. Συνεπώς,

$$\frac{I(G_{A_1}, \ldots, G_{A_m})}{\prod_{j=1}^m \left(\int G_{A_j} \right)^{c_j}} \cdot \frac{K(G_{A_1^{-1}}, \ldots, G_{A_m^{-1}})}{\prod_{j=1}^m \left(\int G_{A_j^{-1}} \right)^{c_j}} = 1.$$

Από τον ορισμό των E_g και F_g προκύπτει το συμπέρασμα του λήμματος. $\square$

Το βασικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 είναι η επόμενη πρόταση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $D > 0$.

Πρόταση 4.3.4. *Υποθέτουμε ότι οι συναρτήσεις $h_j, f_j \in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$, $1 \leqslant j \leqslant m$, ικανοποιούν την*

$$\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n_j}} h_j = 1.$$

Τότε,

$$K(h_1, \dots, h_m) \geqslant D \cdot I(f_1, \dots, f_m).$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}_L(\mathbb{R}^k)$ την κλάση των μη αρνητικών $f \in L_1(\mathbb{R}^k)$ που είναι περιορισμοί κάποιας θετικής συνάρτησης Lipschitz $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ σε κάποια ανοικτή Ευκλείδεια μπάλα. Αρκεί να αποδείξουμε την πρόταση για συναρτήσεις $f_j, h_j \in \mathcal{C}_L(\mathbb{R}^{n_j})$. Για να το δούμε αυτό, χρησιμοποιούμε τη μονοτονία των συναρτησοειδών I και K: λόγω της κανονικότητας του μέτρου, για κάθε $f \in L_1^+(\mathbb{R}^n)$ και $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση s που είναι θετικός γραμμικός συνδυασμός χαρακτηριστικών συναρτήσεων συμπαγών συνόλων και ικανοποιεί τις $f \geqslant s$ και $\int f \leqslant \varepsilon + \int s$. Συνεπώς, για την αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f_j, h_j είναι συναρτήσεις αυτής της μορφής. Κάθε τέτοια συνάρτηση s είναι κατά σημείο όριο μιας φθίνουσας ακολουθίας συναρτήσεων Lipschitz, άρα αρκεί να θεωρήσουμε μη αρνητικές συναρτήσεις Lipschitz. Προσθέτοντας σε αυτές συναρτήσεις της μορφής $\frac{1}{N}G$, όπου G είναι η τυπική Gaussian πυκνότητα και $N \to \infty$, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι οι συναρτήσεις μας είναι γνήσια θετικές. Τέλος, περικόπτοντας συναρτήσεις αυτής της μορφής μπορούμε να υποθέσουμε ότι ανήκουν στην κλάση $\mathcal{C}_L(\mathbb{R}^n)$. Παρόμοιο επιχείρημα μπορούμε να εφαρμόσουμε για την ανισότητα Brascamp-Lieb. Επιπλέον, αρκεί να ελέγξουμε την τελευταία ανισότητα σε κάποιο πυκνό υποσύνολο του L_1 διότι ο I είναι πλειογραμμικός τελεστής ο οποίος είναι τελεστής με γραμμικό πυρήνα ως προς κάθε f_j, αφού κάθε B_j είναι επί.

Συμβολίζουμε με Ω_{f_j}, Ω_{h_j} τις μπάλες $\{f_j > 0\}$ και $\{h_j > 0\}$ αντίστοιχα. Θα χρησιμοποιήσουμε την απεικόνιση του Brenier: υπάρχει μια συνάρτηση $T_j : \Omega_{f_j} \to \Omega_{h_j}$ τέτοια ώστε

$$|\det J(T_j)(x)| \cdot h_j(T_j x) = f_j(x) \tag{4.3.2}$$

για κάθε $x \in \Omega_{f_j}$. Επιπλέον, η T_j είναι το ανάδελτα μιας κυρτής συνάρτησης (τα βασικά σημεία της απόδειξης παρουσιάζονται στο παράρτημα στο τέλος αυτού του κεφαλαίου). Αφού οι f_j είναι συναρτήσεις Lipschitz και οι $f_j, 1/f_j$ είναι φραγμένες στο Ω_{f_j}, ένα θεώρημα του Caffarelli μας εξασφαλίζει ότι η T_j είναι συνεχώς διαφορίσιμη. Αφού έχουμε επίσης $h_j > 0$, έπεται ότι η Ιακωβιανή $J(T_j)(x)$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας για κάθε $x \in \Omega_{f_j}$.

Γράφουμε $S = \cap_{j=1}^m B_j^{-1}(\Omega_{f_j}) \subseteq \mathbb{R}^n$ και ορίζουμε μια απεικόνιση $\Theta : S \to \mathbb{R}^n$ θέτοντας

$$\Theta(y) := \sum_{j=1}^m c_j B_j^*(T_j(B_j(y))).$$

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$J(\Theta)(y) = \sum_{j=1}^m c_j B_j^*(J(T_j)(B_j y))B_j.$$

Παρατηρούμε ότι

$$|\det J(\Theta)(y)| \geqslant D \cdot \prod_{j=1}^{m} |\det J(T_j)(B_j y)|^{c_j} > 0, \tag{4.3.3}$$

άρα η $J(\Theta)(y)$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Έπεται ότι η Θ είναι 1-1. Χρησιμοποιώντας τις (4.3.2) και (4.3.3) γράφουμε

$$\begin{aligned}
K(h_1,\dots,h_m) &= \int_{\mathbb{R}^n} \sup\Big\{ \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(B_j^* x_j) \mid x = \sum_{j=1}^{m} c_j B_j^* x_j \Big\}\, dx \\
&\geqslant \int_{\Theta(S)} \sup\Big\{ \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(B_j^* x_j) \mid x = \sum_{j=1}^{m} c_j B_j^* x_j \Big\}\, dx \\
&= \int_S |\det J(\Theta)(y)| \sup\Big\{ \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(B_j^* y_j) \mid \Theta(y) = \sum_{j=1}^{m} c_j B_j^* y_j \Big\}\, dy \\
&\geqslant \int_S |\det J(\Theta)(y)| \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(T_j(B_j y))\, dy \\
&\geqslant D \cdot \int_S \prod_{j=1}^{m} |\det J(T_j)(B_j y)|^{c_j} \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(T_j(B_j y))\, dy \\
&= D \cdot \int_S \prod_{j=1}^{m} f_j^{c_j}(B_j y)\, dy \\
&= D \cdot I(f_1,\dots,f_m).
\end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. Συνδυάζοντας το Λήμμα 4.3.2, το Λήμμα 4.3.3 και την Πρόταση 4.3.4, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{D}} = F &\leqslant \sup\Big\{ I(f_1,\dots,f_m) \mid \int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j = 1 \Big\} \\
&\leqslant \frac{1}{D} \cdot \inf\Big\{ K(h_1,\dots,h_m) \mid \int_{\mathbb{R}^{n_j}} h_j = 1 \Big\} \\
&\leqslant E \cdot \frac{1}{D} = \frac{1}{\sqrt{D}}.
\end{aligned}$$

Πρέπει να έχουμε ισότητες παντού, και αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Μια παρατήρηση που είναι σημαντική για τις γεωμετρικές εφαρμογές, και η οποία θα χρησιμοποιηθεί στο επόμενο κεφάλαιο, είναι ότι αν οι γραμμικές απεικονίσεις B_j στο Θεώρημα 4.3.1 είναι ορθογώνιες προβολές, ας πούμε P_j, οι οποίες ικανοποιούν την

$$\mathrm{Id} = \sum_{j=1}^{m} c_j P_j$$

για κάποιους $c_1, \ldots, c_m > 0$ τότε η σταθερά D στην (4.3.1) είναι ακριβώς ίση με 1. Αυτό αποδεικνύεται αν ακολουθήσουμε τα βήματα της απόδειξης που δώσαμε για την τιμή της σταθεράς στη μονοδιάστατη ανισότητα Brascamp–Lieb.

Θεώρημα 4.3.5 (Barthe). *Έστω $r, n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, \ldots r$, έστω F_i ένας d_i-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και P_i η ορθογώνια προβολή στον F_i. Αν*

$$I_n = \sum_{i=1}^{r} c_i P_i$$

για κάποιους $c_1, \ldots, c_r > 0$ τότε για όλες τις μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_i : F_i \to \mathbb{R}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{r} f_i^{c_i}(P_i x)\, dx \leqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\int_{F_i} f_i \right)^{c_i}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup \left\{ \prod_{i=1}^{r} f_i^{c_i}(x_i) : x = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i, x_i \in F_i \right\} dx \geqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\int_{F_i} f_i \right)^{c_i}.$$

4.4 Παράρτημα: η απεικόνιση του Brenier

Έστω K και T δύο ανοικτά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Με τον όρο «*μετασχηματισμός που διατηρεί τον όγκο*» εννοούμε μια απεικόνιση $\varphi : K \to T$ που είναι 1-1, επί και έχει Ιακωβιανή με σταθερή ορίζουσα ίση με $\mathrm{vol}_n(T)/\mathrm{vol}_n(K)$. Σε αυτή την παράγραφο περιγράφουμε τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $\psi : K \to T$ που έχει αυτή την ιδιότητα: η Ιακωβιανή της ψ θα είναι θετικά ορισμένη, κάτι που θα εξασφαλίσουμε ορίζοντας $\psi = \nabla f$ για μια, κατάλληλη, δύο φορές διαφορίσιμη συνάρτηση f. Χρησιμοποιώντας αυτή την απεικόνιση, η οποία ονομάζεται «απεικόνιση Brenier» μπορούμε να δώσουμε μια απόδειξη της ανισότητας Brunn-Minkowski ως εξής: αφού $(I_n + \psi)(K) \subseteq K + T$, έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K+T) \geqslant \int_K |\det J(I_n + \psi)(x)| dx = \int_K |\det(I_n + \mathrm{Hess} f)(x)| dx = \int_K \prod_{i=1}^{n} (1 + \lambda_i(x)) dx,$$

όπου $\lambda_i(x)$ είναι οι μη αρνητικές ιδιοτιμές της $\mathrm{Hess} f$. Επιπλέον, αφού η ψ διατηρεί τον όγκο, έχουμε $\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(x) = \mathrm{vol}_n(T)/\mathrm{vol}_n(K)$ για κάθε $x \in K$. Συνεπώς, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K+T) \geqslant \int_K \left(1 + \Big[\prod_{i=1}^{n} \lambda_i(x) \Big]^{1/n} \right)^n dx = \left(\mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n} \right)^n.$$

Θέλουμε λοιπόν να ορίσουμε μια απεικόνιση της μορφής $\psi = \nabla f$ για κάποια κυρτή συνάρτηση f ορισμένη στο K, έτσι ώστε $\psi(K) = T$. Αρχικά, θα γενικεύσουμε την έννοια της «διατήρησης του όγκου» για απεικονίσεις που μεταφέρουν ένα μέτρο σε κάποιο άλλο. Φυσικά, ενδιαφερόμαστε ιδιαίτερα για την περίπτωση που τα δύο μέτρα είναι τα ομοιόμορφα μέτρα κάποιων κυρτών σωμάτων.

Ορισμός 4.4.1. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ των Borel μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ως υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του $C_\infty(\mathbb{R}^n)^*$, του δυϊκού χώρου των άπειρες φορές διαφορίσιμων συναρτήσεων που μηδενίζονται στο άπειρο. Έστω $\mu,\ \nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$. Λέμε ότι ένα μέτρο πιθανότητας $\gamma \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ έχει *περιθώρια* τα μ και ν αν για οποιεσδήποτε φραγμένες Borel μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχυουν οι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} f(x)d\gamma(x,y)$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y)d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} g(y)d\gamma(x,y).$$

Ορισμός 4.4.2 (Rockafellar)**.** Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Λέμε ότι η G είναι *κυκλικά μονότονη* αν για κάθε $m \geqslant 2$ και $(x_i, y_i) \in G$, $i \leqslant m$, έχουμε

$$\langle y_1, x_2 - x_1\rangle + \langle y_2, x_3 - x_2\rangle + \cdots + \langle y_m, x_1 - x_m\rangle \leqslant 0.$$

Πρόταση 4.4.3. *Έστω μ και ν δύο Borel έτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει μέτρο πιθανότητας γ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ που έχει κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν.*

Η απόδειξη της Πρότασης 4.4.3 βασίζεται στο διακριτό λήμμα που ακολουθεί και σε ένα επιχείρημα προσέγγισης.

Λήμμα 4.4.4. *Θεωρούμε $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$, $i = 1, \dots, m$ και τα μέτρα πιθανότητας*

$$\mu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \delta_{x_i} \ \text{και}\ \nu = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \delta_{y_i}.$$

Υπάρχει μέτρο πιθανότητας γ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ το οποίο έχει κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν.

Απόδειξη. Για κάθε μετάθεση σ του $\{1, \dots, m\}$ θεωρούμε το μέτρο

$$\gamma_\sigma = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m \delta_{(x_{\sigma(i)}, y_i)}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το γ_σ έχει περιθώρια τα μ και ν για κάθε σ. Θέτουμε

$$F(\sigma) = \sum_{i=1}^m \langle y_i, x_{\sigma(i)}\rangle.$$

Θα δείξουμε ότι αν η $F(\sigma)$ είναι μέγιστη τότε ο φορέας $(x_{\sigma(i)}, y_i)$ του γ_σ είναι κυκλικά μονότονος.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $F(I)$ είναι μέγιστη, όπου I είναι η ταυτοτική μετάθεση. Θέλουμε να δείξουμε ότι το $G = \{(x_i, y_i) : i \leqslant m\}$ είναι κυκλικά μονότονο. Έστω $k \leqslant m$ και $i_1, \dots, i_k$ διακεκριμένοι δείκτες και ας θεωρήσουμε τα σημεία $(x_{i_s}, y_{i_s}) \in G$. Αν σ είναι η μετάθεση που ορίζεται από τις $\sigma(i_s) = i_{s+1}$ αν $s < k$, $\sigma(i_k) = i_1$ και $\sigma(i) = i$ αλλιώς, τότε

$$\begin{aligned} 0 \geqslant F(\sigma) - F(I) &= \sum_{s=1}^k \left(\langle y_{i_s}, x_{\sigma(i_s)}\rangle - \langle y_{i_s}, x_{i_s}\rangle\right) \\ &= \langle y_{i_1}, x_{i_2} - x_{i_1}\rangle + \langle y_{i_2}, x_{i_3} - x_{i_2}\rangle + \cdots + \langle y_{i_k}, x_{i_1} - x_{i_k}\rangle. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Απόδειξη της Πρότασης 4.4.3. Για δοθέντα μ και ν ορίζουμε ακολουθίες διακριτών μέτρων πιθανότητας $\mu_n \to \mu$, $\nu_n \to \nu$ που συγκλίνουν στην ασθενή-$*$ τοπολογία. Από το Λήμμα 4.4.4, για κάθε n υπάρχει γ_n με κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ_n, ν_n. Ένα επιχείρημα συμπάγειας (που χρησιμοποιεί το θεώρημα Arzéla-Ascoli) εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός ασθενώς-$*$ υπακολουθιακού ορίου γ της γ_n. Το γ έχει κι αυτό κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν. $\square$

Η επόμενη πρόταση συνδέει την ιδιότητα της κυκλικής μονοτονίας ενός συνόλου με αυτήν του να περιέχεται στο υποδιαφορικό κάποιας κυρτής συνάρτησης.

Πρόταση 4.4.5 (Rockafellar)**.** *Έστω $G \subseteq \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Τότε, το G περιέχεται στο υποδιαφορικό μιας γνήσιας κυρτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν το G είναι κυκλικά μονότονο.*

Απόδειξη. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το υποδιαφορικό μιας γνήσιας κυρτής συνάρτησης ειναι κυκλικά μονότονο. Έστω $(x_i, y_i) \in \partial(f)$, $i = 1, \dots, m$ (δηλαδή, $y_i \in \partial(f)(x_i)$). Τότε,

$$\begin{aligned}
\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle &\leqslant f(x_2) - f(x_1) \\
\langle y_2, x_3 - x_2 \rangle &\leqslant f(x_3) - f(x_2) \\
&\vdots \\
\langle y_m, x_1 - x_m \rangle &\leqslant f(x_1) - f(x_m)
\end{aligned}$$

από τον ορισμό του υποδιαφορικού. Προσθέτοντας τις ανισότητες παίρνουμε

$$\langle y_1, x_2 - x_1 \rangle + \langle y_2, x_3 - x_2 \rangle + \cdots + \langle y_m, x_1 - x_m \rangle \leqslant 0.$$

Συνεπώς, κάθε $G \subseteq \partial(f)$ είναι κυκλικά μονότονο.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, υποθέτουμε ότι το G είναι μη κενό και κυκλικά μονότονο, και σταθεροποιούμε $(x_0, y_0) \in G$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$f(x) = \sup\big\{ \langle y_m, x - x_m \rangle + \langle y_{m-1}, x_m - x_{m-1} \rangle + \cdots + \langle y_0, x_1 - x_0 \rangle \big\},$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα $m \geqslant 0$ και $(x_i, y_i) \in G$, $1 \leqslant i \leqslant m$. Η συνάρτηση f είναι κυρτή ως supremum μιας οικογένειας αφφινικών συναρτήσεων. Χρησιμοποιώντας την κυκλική μονοτονία του G ελέγχουμε εύκολα ότι $f(x_0) = 0$. Αυτό δείχνει ότι η f είναι γνήσια. Τέλος, το G περιέχεται στο υποδιαφορικό της f: Έστω $(x, y) \in G$. Θα δείξουμε ότι

$$t + \langle z - x, y \rangle < f(z)$$

για κάθε $t < f(x)$ και κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Από αυτό έπεται ότι $(x, y) \in \partial(f)$. Αφού $t < f(x)$, υπάρχουν $(x_1, y_1), \dots, (x_m, y_m) \in G$ τέτοια ώστε

$$t < \langle y_m, x - x_m \rangle + \cdots + \langle y_0, x_1 - x_0 \rangle.$$

Από τον ορισμό της f βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
f(z) &\geqslant \langle y, z - x \rangle + \langle y_m, x - x_m \rangle + \cdots + \langle y_0, x_1 - x_0 \rangle \\
&> \langle y, z - x \rangle + t,
\end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Ορισμός 4.4.6. Έστω μ, $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μια μετρήσιμη συνάρτηση που ορίζεται μ-σχεδόν παντού και ικανοποιεί την

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B))$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$. Τότε, λέμε ότι η T *μεταφέρει* το μ στο ν και γράφουμε $T\mu = \nu$. Είναι εύκολο να δούμε ότι $T\mu = \nu$ αν και μόνο αν ια κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(y)d\nu(y) = \int_{\mathbb{R}^n} g(T(x))d\mu(x).$$

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι για κάθε μ και $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ υπάρχει απεικόνιση που είναι η κλίση μιας κυρτής συνάρτησης και μεταφέρει το μ στο ν. Ο Brenier απέδειξε την ύπαρξη και τη μοναδικότητά της κάνοντας κάποιες υποθέσεις ολοκληρωσιμότητας για τις ροπές των μ και ν, οι οποίες αργότερα αφαιρέθηκαν από τον McCann. Η ακριβής διατύπωση του θεωρήματος είναι η εξής.

Θεώρημα 4.4.7 (Brenier-McCann)**.** *Έστω μ, $\nu \in \mathcal{P}(\mathbb{R}^n)$ και έστω ότι το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue. Τότε, υπάρχει κυρτή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η $\nabla f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ να ορίζεται μ-σχεδόν παντού και να ικανοποιεί την $(\nabla f)\mu = \nu$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.4.3 βλέπουμε ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας γ στον $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ το οποίο έχει κυκλικά μονότονο φορέα και περιθώρια τα μ, ν. Από την Πρόταση 4.4.5, ο φορέας του γ περιέχεται στο υποδιαφορικό μιας γνήσιας κυρτής συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Αφού η f είναι κυρτή και το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, η f είναι διαφορίσιμη μ-σχεδόν παντού. Αφού $\mathrm{supp}(\gamma) \subset \partial(f)$, από τον ορισμό του υποδιαφορικού έχουμε $y = \nabla f(x)$ σχεδόν για όλα τα ζεύγη (x, y) ως προς γ. Τότε, για κάθε φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int g(y)d\nu(y) &= \int g(y)d\gamma(x,y) = \int g(\nabla f(x))d\gamma(x,y)\\ &= \int g(\nabla f(x))d\mu(x),\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την $(\nabla f)\mu = \nu$. □

Σημειώνουμε ότι αποτελέσματα ομαλότητας από την θεωρία των ελλειπτικών διαφορικών εξισώσεων εξασφαλίζουν την διαφορισιμότητα της απεικόνισης Brenier. Στην ειδική περίπτωση που το μ είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue σε κάποιο κυρτό σώμα K και το ν είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue σε κάποιο άλλο κυρτό σώμα T, ένα θεώρημα ομαλότητας του Caffarelli δείχνει ότι η f μπορεί να υποτεθεί δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμη. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το επόμενο θεώρημα, από το οποίο μπορούμε επίσης να πάρουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski όπως εξηγήσαμε στην αρχή αυτής της παραγράφου.

Θεώρημα 4.4.8. *Έστω K και T δύο ανοικτά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει κυρτή συνάρτηση $f \in C^2(K)$ τέτοια ώστε η $\psi = \nabla f : K \to T$ να είναι 1-1, επί και να διατηρεί τον όγκο.*

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εφαρμογές της ανισότητας Brascamp–Lieb

5.1 Εφαρμογές της μονοδιάστατης ανισότητας Brascamp-Lieb

Το πρώτο αποτέλεσμα που θα δείξουμε, χρησιμοποιώντας τη μονοδιάστατη ανισότητα Brascamp-Lieb, είναι η αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα του K. Ball.

Θεώρημα 5.1.1 (Ball)**.** (i) *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και Q ένας n-διάστατος κύβος. Μπορούμε να βρούμε γραμμική εικόνα $\overline{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$\mathrm{vol}_n(\overline{K}) = \mathrm{vol}_n(Q) \qquad \textit{και} \qquad \partial(\overline{K}) \leqslant \partial(Q).$$

(ii) *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και T ένα κανονικό n-διάστατο simplex. Μπορούμε να βρούμε αφφινική εικόνα $\overline{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$\mathrm{vol}_n(\overline{K}) = \mathrm{vol}_n(T) \qquad \textit{και} \qquad \partial(\overline{K}) \leqslant \partial(T).$$

Το Θεώρημα 5.1.1 προκύπτει σχεδόν άμεσα από το επόμενο θεώρημα (Θεώρημα 5.1.3) για το οποίο χρειάζεται προηγουμένως να ορίσουμε την έννοια του λόγου όγκων.

Ορισμός 5.1.2. Ο *λόγος όγκων* ενός κυρτού σώματος K ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{vr}(K) = \inf_{\mathcal{E}\subseteq K} \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(\mathcal{E})}\right)^{1/n}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλα τα ελλειψοειδή $\mathcal{E}$ που περιέχονται στο K.

Θεώρημα 5.1.3 (Ball)**.** (i) *Ανάμεσα σε όλα τα συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, ο κύβος έχει τον μέγιστο λόγο όγκων.*

(ii) *Ανάμεσα σε όλα τα κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, το simplex έχει τον μέγιστο λόγο όγκων.*

Απόδειξη. (i) Θέλουμε να δείξουμε ότι αν ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K είναι στη θέση John τότε $\mathrm{vol}_n(K) \leqslant 2^n$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν σημεία επαφής u_j του σώματος με την B_2^n και $c_j > 0$ ώστε

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

Αφού το K είναι συμμετρικό, για κάθε σημείο επαφής u_j του K με την B_2^n έχουμε ότι το $-u_j$ είναι κι αυτό σημείο επαφής. Άρα, το σώμα K περιέχεται στην τομή λωρίδων $C := \{x : |\langle x, u_j\rangle| \leqslant 1\}$, και ο όγκος του φράσσεται από

$$\mathrm{vol}_n(C) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{[-1,1]}(\langle x, u_j\rangle)^{c_j} dx \leqslant \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-1,1]}\right)^{c_j} = \prod_{j=1}^m 2^{c_j} = 2^n$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Brascamp-Lieb, αν πάρουμε υπόψη και το γεγονός ότι $\sum_{j=1}^m c_j = n$.

(ii) Για τη μη συμμετρική περίπτωση, παρατηρούμε αρχικά ότι το n-διάστατο simplex που είναι περιγεγραμμένο στην B_2^n έχει όγκο

$$\frac{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}{n!}$$

(αυτό ελέγχεται ευκολότερα αν δούμε το simplex στον $\mathbb{R}^{n+1}$, πάνω στο υπερεπίπεδο $\sum x_i = 1$). Αρκεί λοιπόν να δείξουμε αυτό το φράγμα για τον όγκο ενος κυρτού σώματος που βρίσκεται στη θέση John. Χρησιμοποιώντας τη μη συμμετρική έκδοση του θεωρήματος του John μπορούμε να βρούμε σημεία επαφής u_j και $c_j > 0$ τέτοια ώστε $\sum_j c_j u_j = 0$ και $I_n = \sum_j c_j u_j \otimes u_j$. Όπως πριν, το K περιέχεται στο σώμα

$$L := \{x : \langle x, u_j\rangle \leqslant 1, j = 1, \dots, m\}$$

το οποίο είναι φραγμένο διότι $\sum_j c_j u_j = 0$, αρκεί λοιπόν να φράξουμε τον όγκο του L.

Ορίζουμε μια νέα ακολουθία διανυσμάτων $(v_j)_{j=1}^m$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$, τα οποία θα ήταν ορθογώνια στην ακραία περίπτωση όπου το K είναι simplex. Στη συνέχεια, το φράγμα θα προκύψει με εφαρμογή της ανισότητας Brascamp-Lieb σε μια οικογένεια συναρτήσεων που το γινόμενό τους έχει φορέα έναν κώνο στον $\mathbb{R}^{n+1}$ ο οποίος έχει τομές όμοιες με το K: γράφουμε τον $\mathbb{R}^{n+1}$ ως $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ και για κάθε j ορίζουμε

$$v_j = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(-u_j, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \in \mathbb{R}^{n+1} \quad \text{και} \quad d_j = \frac{n+1}{n} c_j \in \mathbb{R}^+.$$

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$I_{n+1} = \sum_{j=1}^m d_j v_j \otimes v_j.$$

Θέτουμε $f_j(t) = e^{-t}, t \geqslant 0$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Brascamp-Lieb παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod f_j^{d_j}(\langle x, v_j\rangle) dx \leqslant \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_j\right)^{d_j} = 1, \tag{5.1.1}$$

διότι $\int f_j = 1$.

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το ίδιο ολοκλήρωμα πάνω σε κάθε υπερεπίπεδο $x_{n+1} = r$. Βλέπουμε ότι η συνάρτηση $\prod f_j^{d_j}(\langle x, v_j\rangle)$ δεν μηδενίζεται ακριβώς όταν $\langle x, v_j\rangle \geqslant 0$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$, το οποίο συμβαίνει αν και μόνο αν $r \geqslant 0$ και το σημείο x ανήκει στο $\frac{r}{\sqrt{n}}L \times \{r\}$: αυτό συμβαίνει διότι κάθε f_j είναι μη μηδενική ακριβώς στους μη αρνητικούς $t \in \mathbb{R}$, και σε αυτή την περίπτωση ισούται με $e^{-r\sqrt{n+1}}$ αν λάβουμε υπόψιν μας τη συνθήκη $\sum_{j=1}^m c_j u_j = 0$. Με άλλα λόγια,

$$\begin{aligned}\int_{\{x_{n+1}=r\}} \prod f_j^{d_j}(\langle x, v_j\rangle)dx &= e^{-r\sqrt{n+1}}\mathrm{vol}_n\left(\frac{r}{\sqrt{n}}L\right)\\ &= e^{-r\sqrt{n+1}}\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^n \mathrm{vol}_n(L).\end{aligned}$$

Τότε, από την (5.1.1) παίρνουμε

$$1 \geqslant \mathrm{vol}_n(L)\int_0^\infty e^{-r\sqrt{n+1}}\left(\frac{r}{\sqrt{n}}\right)^n dr = \frac{\mathrm{vol}_n(L)\cdot n!}{n^{n/2}(n+1)^{(n+1)/2}}.$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη παρατηρώντας ότι $\mathrm{vol}_n(K) \leqslant \mathrm{vol}_n(L)$ και ότι το άνω φράγμα που παίρνουμε για τον $\mathrm{vol}_n(K)$ είναι ακριβώς ο όγκος του simplex. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1. Για δοθέν συμμετρικό κυρτό σώμα K πρέπει να βρούμε γραμμική του εικόνα τέτοια ώστε

$$\partial(\overline{K}) \leqslant c_n \mathrm{vol}(\overline{K})^{\frac{n-1}{n}}$$

όπου η c_n προσδιορίζεται έτσι ώστε στην περίπτωση του κύβου να έχουμε ισότητα, δηλαδή, $c_n = 2n$. Η θέση που μας το επιτρέπει είναι η θέση John του K: πράγματι, γι' αυτή τη θέση έχουμε

$$\begin{aligned}\partial(K) &= \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{vol}_n(K + tB_2^n) - \mathrm{vol}_n(K)}{t} \leqslant \lim_{t\to 0}\frac{\mathrm{vol}_n((1+t)K) - \mathrm{vol}_n(K)}{t}\\ &= n\mathrm{vol}_n(K) \leqslant 2n\mathrm{vol}(K)^{\frac{n-1}{n}},\end{aligned}$$

κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 5.1.3 (i) για την τελευταία ανισότητα.

Με εντελώς αντίστοιχο τρόπο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 5.1.1 (ii) χρησιμοποιώντας αυτή τη φορά το Θεώρημα 5.1.3 (ii). □

Στη συνέχεια συζητάμε το πρόβλημα να προσδιοριστεί το μέγιστο ή ελάχιστο των παραμέτρων

$$M := M(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_K \, d\sigma(x)$$

και

$$M^* := M^*(K) = w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(x)\, d\sigma(x)$$

για ένα κυρτό σώμα K που βρίσκεται στη θέση John ή Löwner. Τα πρώτα αποτελέσματα που θα δούμε οφείλονται στους Schechtman και Schmuckenschläger και αφορούν τη συμμετρική περίπτωση.

Πρόταση 5.1.4. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές Löwner ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$M(K) \leqslant M(B_1^n).$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα του John γνωρίζουμε ότι υπάρχουν $u_1,\dots,u_m \in \mathrm{bd}(K)\cap S^{n-1}$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1,\dots,c_m$ τέτοιοι ώστε $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j\otimes u_j$. Παρατηρούμε ότι $K \supseteq S = \mathrm{absconv}\{u_1,\dots,u_m\}$, άρα

$$\|x\|_K \leqslant \|x\|_S = \inf\left\{\sum_{j=1}^m |t_j| : x=\sum_{j=1}^m t_ju_j\right\}.$$

Αφού $x=\sum_{j=1}^m c_j\langle x,u_j\rangle u_j$, έπεται ότι $\|x\|_K\leqslant \sum_{j=1}^m c_j|\langle x,u_j\rangle|$. Συνεπώς,

$$M(K)\leqslant \sum_{j=1}^m c_j\int_{S^{n-1}}|\langle x,u_j\rangle|\,d\sigma(x) = n\int_{S^{n-1}}|\langle x,e_1\rangle|\,d\sigma(x),$$

διότι το ολοκλήρωμα $\int_{S^{n-1}}|\langle x,u\rangle|\,d\sigma$ είναι ανεξάρτητο του $u\in S^{n-1}$ και $\sum_{j=1}^m c_j = n$. Αφού $M(B_1^n) = n\int_{S^{n-1}}|\langle x,e_1\rangle|\,d\sigma(x)$, έχουμε το ζητούμενο. □

Μια παραλλαγή της ποσότητας $M(K)$ είναι η ποσότητα

$$\ell(K) := \mathbb{E}_{\gamma_n}\|x\|_K = \int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K d\gamma_n(x).$$

Με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε εύκολα ότι

$$\ell(K) = \varrho_n\cdot M(K) \tag{5.1.2}$$

όπου $\varrho_n\simeq\sqrt{n}$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τη διάσταση n. Συνεπώς, το πρόβλημα της ελαχιστοποίησης ή μεγιστοποίησης της παραμέτρου $M(K)$ είναι εντελώς ισοδύναμο με το αντίστοιχο πρόβλημα για την $\ell(K)$.

Πρόταση 5.1.5. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές John ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Αν G είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\mathbb{P}\left(\|G\|_K>t\right)\geqslant \mathbb{P}\left(\|G\|_\infty>t\right)$$

για κάθε $t>0$. Έπεται ότι $\ell(K)\geqslant \ell(B_\infty^n)$, άρα και $M(K)\geqslant M(B_\infty^n)$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε πάλι την αναπαράσταση John της ταυτοτικής απεικόνισης και γράφουμε

$$\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-|x|^2/2} = \prod_{j=1}^m g(\langle x,x_j\rangle)^{c_j},$$

όπου $g(t)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-t^2/2}$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brascamp-Lieb μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant m}|\langle G,x_j\rangle|\leqslant t\right) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^m\{|\langle G,x_j\rangle|\leqslant t\}\right)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m \mathbf{1}_{[-t,t]}^{c_j}(\langle x,x_j\rangle)g(\langle x,x_j\rangle)^{c_j}\,dx\\ &\leqslant \prod_{j=1}^m\left(\int_{-t}^t g(t)\,dt\right)^{c_j} = \left(\int_{-t}^t g(t)\,dt\right)^n\\ &= \mathbb{P}\left(\|G\|_\infty\leqslant t\right).\end{aligned}$$

Αφού $K \subseteq \bigcap_{j=1}^m \{x : |\langle x, x_j\rangle| \leqslant 1\}$, έχουμε

$$\max_{1\leqslant j\leqslant m} |\langle x, x_j\rangle| \leqslant \|x\|_K,$$

άρα

$$\mathbb{P}\left(\|G\|_K \leqslant t\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\max_{1\leqslant j\leqslant m} |\langle G, x_j\rangle| \leqslant t\right)$$

και έπεται ότι

$$\mathbb{P}\left(\|G\|_K > t\right) \geqslant \mathbb{P}\left(\|G\|_\infty > t\right)$$

για κάθε $t > 0$. Ο δεύτερος ισχυρισμός της πρότασης έπεται από τον πρώτο και από την ταυτότητα

$$\ell(K) = \int_0^\infty \gamma_n(\{x : \|x\| > t\})\, dt = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(\|G\| > t\right) dt$$

η οποία ισχύει για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$. □

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν στη μη συμμετρική περίπτωση. Εδώ, το ακραίο σώμα είναι το simplex.

Θεώρημα 5.1.6 (Barthe). *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές Löwner του κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$M(K) \leqslant M(\Delta_n),$$

όπου Δ_n είναι το κανονικό simplex που εγγράφεται στην B_2^n.

Απόδειξη. Αφού η B_2^n είναι το ελλειψοειδές Löwner του K, υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n, και $c_1, \ldots, c_m > 0$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^m c_j u_j = 0$ και $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$. Ορίζουμε $C = \mathrm{conv}\{u_1, \ldots, u_m\}$ και αποδεικνύουμε ότι $\ell(C) \leqslant \ell(\Delta_n)$. Αφού $C \subseteq K$, αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.

Ορίζουμε $v_j \in \mathbb{R}^{n+1}$ θέτοντας

$$v_j = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\Big(u_j, \frac{1}{\sqrt{n}}\Big)$$

και επίσης ορίζουμε $d_j = \frac{n+1}{n} c_j$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $|v_j| = 1$ και $I_{n+1} = \sum_{j=1}^m d_j v_j \otimes v_j$.

Στη συνέχεια ορίζουμε $N_C : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^+$ με

$$N_C(x) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^m d_j \vartheta_j : \vartheta_j \geqslant 0 \text{ και } x = \sum_{j=1}^m d_j \vartheta_j v_j\Big\}$$

και για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$I_\lambda(C) = \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \exp(-N_C(x) + \lambda\langle x, e_{n+1}\rangle - |x|^2/2)\, dx,$$

όπου $e_{n+1} = (0_{\mathbb{R}^n}, 1)$.

Έστω ότι το $x=(y,r)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}$ γράφεται ως $x=\sum_{j=1}^m d_j\vartheta_j v_j$ για κάποιους $\vartheta_j\geqslant 0$. Τότε,

$$y=\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sum_{j=1}^m d_j\vartheta_j v_j \quad \text{και} \quad r=\frac{1}{\sqrt{n+1}}\sum_{j=1}^m d_j\vartheta_j,$$

και αυτό δείχνει ότι $r\geqslant 0$ και $y\in\sqrt{n}\,C$. Έπεται ότι

$$e^{-N_C(x)}=\mathbf{1}_{\{y\in r\sqrt{n}\,C\}}\mathbf{1}_{\{r\geqslant 0\}}e^{-r\sqrt{n+1}},$$

άρα

$$I_\lambda(C)=(2\pi)^{n/2}\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}+(\lambda-\sqrt{n+1})r}\gamma_n(r\sqrt{n}C)\,dr. \tag{5.1.3}$$

Ισχυρισμος. Αν $g_\lambda(t)=\mathbf{1}_{\{t\geqslant 0\}}\exp\left(-\frac{t^2}{2}-t+\frac{\lambda}{\sqrt{n+1}}t\right)$ τότε, για κάθε $x\in\mathbb{R}^{n+1}$,

$$\exp(-N_C(x)+\lambda\langle x,e_{n+1}\rangle-|x|^2/2)\geqslant \sup\Big\{\prod_{j=1}^m g_\lambda^{d_j}(\vartheta_j):x=\sum_{j=1}^m d_j\vartheta_j v_j\Big\}. \tag{5.1.4}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης $I_{n+1}=\sum_{j=1}^m d_jv_j\otimes v_j$ ελέγχουμε ότι αν $x=\sum_{j=1}^m d_j\vartheta_jv_j$ τότε $|x|^2\leqslant\sum_{j=1}^m d_j\vartheta_j^2$. Έχουμε επίσης $\sum_{j=1}^m d_j\vartheta_j=\sqrt{n+1}\,\langle x,e_{n+1}\rangle$, και $N_C(x)\leqslant\sum_{j=1}^m d_j\vartheta_j$ από τον ορισμό της N_C. Συνεπώς,

$$-N_C(x)+\lambda\langle x,e_{n+1}\rangle-|x|^2/2\geqslant\sum_{j=1}^m d_j\Big(-\frac{\vartheta_j^2}{2}-\vartheta_j+\frac{\lambda}{\sqrt{n+1}}\vartheta_j\Big),$$

και αυτό συνεπάγεται την

$$\exp(-N_C(x)+\lambda\langle x,e_{n+1}\rangle-|x|^2/2)\geqslant\prod_{j=1}^m g_\lambda^{d_j}(\vartheta_j).$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Τώρα, εφαρμόζοντας την αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb παίρνουμε

$$I_\lambda(C)\geqslant\int_{\mathbb{R}^n}\sup_{x=\sum_{j=1}^m d_j\vartheta_jv_j}\prod_{j=1}^m g_\lambda^{d_j}(\vartheta_j)\,dx\geqslant\Big(\int_{\mathbb{R}}g_\lambda\Big)^{\sum_{j=1}^m d_j}=\Big(\int_{\mathbb{R}}g_\lambda\Big)^{n+1}.$$

Παρατηρώντας ότι όλες αυτές οι ανισότητες γίνονται ισότητες όταν $C=\Delta_n$, συμπεραίνουμε ότι

$$I_\lambda(C)\geqslant I_\lambda(\Delta_n)$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Τότε, η (5.1.3) δείχνει ότι

$$\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}+(\lambda-\sqrt{n+1})r}\gamma_n(r\sqrt{n}C)\,dr\geqslant\int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{2}+(\lambda-\sqrt{n+1})r}\gamma_n(r\sqrt{n}\Delta_n)\,dr$$

για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t=r\sqrt{n}$ παίρνουμε

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2n}(t^2+at+b)}\gamma_n(tC)\,dt\geqslant\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2n}(t^2+at+b)}\gamma_n(t\Delta_n)\,dt$$

για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$. Ειδικότερα,

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2n}(t-u)^2}\gamma_n(tC)\,dt \geqslant \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2n}(t-u)^2}\gamma_n(t\Delta_n)\,dt$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}$, το οποίο δίνει

$$\int_0^\infty e^{-\frac{1}{2n}(t-u)^2}[1-\gamma_n(tC)]\,dt \leqslant \int_0^\infty e^{-\frac{1}{2n}(t-u)^2}[1-\gamma_n(t\Delta_n)]\,dt$$

για κάθε $u \in \mathbb{R}$. Ολοκληρώνοντας αυτή την ανισότητα ως προς u καταλήγουμε στην

$$\int_0^\infty [1-\gamma_n(tC)]\,dt \leqslant \int_0^\infty [1-\gamma_n(t\Delta_n)]\,dt$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα, διότι

$$\begin{aligned}\ell(A) &= \int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_A d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_0^{\|x\|_A}\mathbf{1}\,dt\,d\gamma_n(x)\\ &= \int_0^\infty\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{\{\|x\|_A>t\}}d\gamma_n(x)\,dt = \int_0^\infty[1-\gamma_n(tA)]\,dt\end{aligned}$$

για κάθε κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(A)$. □

Σημείωση. Κοιτάζοντας το προηγούμενο επιχείρημα βλέπουμε ότι $\ell(K) = \ell(\Delta_n)$ τότε $m = n$ και τα $\{v_j\}_{j\leqslant n}$ σχηματίζουν ορθοκανονική βάση. Συνεπώς, το C είναι κανονικό simplex και $K = C$.

Ο δυϊκός ισχυρισμός, ένα μη συμμετρικό ανάλογο της Πρότασης 5.1.5, αποδείχθηκε από τον Schmuckenschläger:

Θεώρημα 5.1.7. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές John ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$M(K) \geqslant M(\Delta_n)$$

όπου Δ_n είναι το κανονικό simplex που είναι περιγεγραμμένο στην B_2^n.

Για την απόδειξη, ο Schmuckenschläger δείχνει ότι

$$\int_0^\infty [1-\gamma_n(tK)]\,dt \geqslant \int_0^\infty [1-\gamma_n(t\Delta_n)]\,dt,$$

μεταφέροντας, όπως και ο Barthe, το πρόβλημα στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brascamp-Lieb.

5.2 Περιθώριες πυκνότητες μέτρων γινομένων

Έστω f πυκνότητα πιθανότητας στον Ευκλείδειο χώρο $\mathbb{R}^n$. Αν E είναι ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, η περιθώρια πυκνότητα της f στον E ορίζεται από την

$$\pi_E f(x) = \int_{x+E^\perp} f(y)dy, \qquad x \in E.$$

Οι Rudelson και Vershynin [40] απέδειξαν ότι αν $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$, όπου κάθε f_i είναι πυκνότητα στο $\mathbb{R}$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$, τότε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε υπόχωρο E διάστασης k,

$$\|\pi_E f\|_\infty^{1/k} \leqslant C, \tag{5.2.1}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Όπως αναφέρουν οι συγγραφείς, στην περίπτωση $k = 1$ μπορεί κανείς να πάρει την σταθερά C της (5.2.1) ίση με $\sqrt{2}$. Αυτό προκύπτει από ένα αποτέλεσμα του Rogozin στο [39], το οποίο ανάγει το πρόβλημα στη μελέτη της $f = \mathbf{1}_{Q_n}$, όπου $Q_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$ είναι ο μοναδιαίος κύβος, σε συνδυασμό με το θεώρημα του K. Ball [3],[4] για τις τομές του Q_n. Πιο συγκεκριμένα, από το θεώρημα του Rogozin έπεται ότι αν $\vartheta \in S^{n-1}$ και $[\vartheta] := \mathrm{span}\{\vartheta\}$ τότε

$$\|\pi_{[\vartheta]}(f)\|_{L^\infty([\vartheta])} \leqslant \|\pi_{[\vartheta]}(\mathbf{1}_{Q_n})\|_{L^\infty([\vartheta])} \tag{5.2.2}$$

για κάθε f στην κλάση

$$\mathcal{F} = \Big\{ f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i) : \|f_i\|_{L^\infty(\mathbb{R})} \leqslant 1 = \|f_i\|_{L^1(\mathbb{R})}, i = 1, \ldots, n \Big\}.$$

Από τον ορισμό της περιθώριας πυκνότητας και την αρχή του Brunn έχουμε

$$\|\pi_{[\vartheta]}(\mathbf{1}_{Q_n}\|_{L^\infty([\vartheta])} = \mathrm{vol}_{n-1}(Q_n \cap \vartheta^\perp),$$

και το θεώρημα του K. Ball μας δίνει $\mathrm{vol}_{n-1}(Q_n \cap \vartheta^\perp) \leqslant \sqrt{2}$, απ' όπου έπεται η (5.2.1) με $C = \sqrt{2}$.

Οι Rudelson και Vershynin μελέτησαν την περίπτωση $k > 1$ με διαφορετική μέθοδο διότι δεν υπάρχει γνωστό ανάλογο του θεωρήματος του Rogozin για μεγαλύτερες διαστάσεις. Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα των Livshyts, Παούρη και Pivovarov, το οποίο για κάποιες τιμές του k δίνει την βέλτιστη τιμή της σταθεράς C στην (5.2.1) και βασίζεται σε κατάλληλη προσαρμογή των αποτελεσμάτων του K. Ball από το [4].

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω $1 \leqslant k < n$ και $E \in G_{n,k}$. Υπάρχουν $\gamma_1, \ldots, \gamma_n \in [0,1]$ με $\sum_{i=1}^n \gamma_i = k$ τέτοιοι ώστε: αν $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι φραγμένες συναρτήσεις με $\|f_i\|_1 = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, τότε η συνάρτηση $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ ικανοποιεί την*

$$\|\pi_E f\|_\infty \leqslant \min\left\{ \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{2}}, 2^{k/2} \right\} \prod_{i=1} \|f_i\|_\infty^{\gamma_i}. \tag{5.2.3}$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε κάποια κλασικά αποτελέσματα του K. Ball. Το πρώτο είναι καθαρά γεωμετρικό.

Λήμμα 5.2.2. *Έστω $b = (b_1, \ldots, b_n) \in S^{n-1}$ και έστω A μετρήσιμο υποσύνολο του $b^\perp$ με $\dim(\mathrm{span}(A)) = k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n$,*

$$|b_i|\,|A|_k \leqslant |P_i(A)|_k,$$

όπου $P_i = P_{e_i^\perp}$ είναι η ορθογώνια προβολή στον $e_i^\perp$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $P_i : b^\perp \to e_i^\perp$ είναι 1-1, αλλιώς $b_i = 0$ και η ανισότητα ισχύει τετριμμένα. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $b \neq \pm e_i$, αλλιώς η ανισότητα ισχύει ως ισότητα. Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $v_1, \dots, v_k$ του $\mathrm{span}(A)$ ε $v_1 = \frac{1}{\|P_i b\|_2} e_i - \frac{b_i}{\|P_i b\|_2} b$ και τα $v_2, \dots, v_k$ κάθετα προς τα e_i και b. Τότε, για κάθε $i \geqslant 2$ έχουμε $P_i(v_i) = v_i$, και $\|P_i(v_1)\|_2 = |b_i|$. Θεωρούμε τον k-διάστατό κύβο $C = \prod_{i=1}^k [0, v_i] \subset \mathrm{span}(A)$. Η προβολή $P_i(C)$ είναι ένα k-διάστατο ορθογώνιο στον $e_i^\perp$, με πλευρές $|b_i|, 1, \dots, 1$. Άρα, $|P_i(C)|_k = |b_i|\,|C|_k$. Αυτό αποδεικνύει ότι το λήμμα ισχύει για κύβους του $\mathrm{span}(A)$ με ακμές παράλληλες στους άξονες. Τότε, το συμπέρασμα προκύπτει αν προσεγγίσουμε το τυχόν A με ενώσεις μη επικαλυπτόμενων τέτοιων κύβων. Αφού η $P_i|_{b^\perp}$ είναι 1-1, οι εικόνες αυτών των κύβων μέσω της P_i παραμένουν μη επικαλυπτόμενες. □

Το δεύτερο βοηθητικό αποτέλεσμα είναι η ακόλουθη ολοκληρωτική ανισότητα από το [3].

Θεώρημα 5.2.3 (K. Ball). *Για κάθε $p \geqslant 2$,*

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\sin t}{t}\right|^p dt \leqslant \sqrt{\frac{2}{p}}. \tag{5.2.4}$$

Θα χρειαστούμε επίσης τη μονοδιάστατη γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb.

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω $u_1, \dots, u_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, $m \geqslant n$, και $c_1, \dots, c_m > 0$ τέτοιοι ώστε $\sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i = I_n$. Τότε, αν $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(\langle x, u_i\rangle)^{c_i} dx \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_i\right)^{c_i}, \tag{5.2.5}$$

με ισότητα αν οι f_i είναι ταυτόσημες Gaussian πυκνότητες.

Βασικό ρόλο στην απόδειξη θα παίξει το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.2.5. *Έστω $1 \leqslant k < n$ και $E \in G_{n,n-k}$. Υπάρχουν διανύσματα $w_1, \dots, w_n$ στον $\mathbb{R}^k = \mathrm{span}\{e_1, \dots, e_k\}$ τέτοια ώστε $I_k = \sum_{i=1}^n w_i \otimes w_i$ και, για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f(x) = \prod_{i=1}^n f_i(x_i)$ όπου $f_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$,*

$$\pi_E f(0) = \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \prod_{i=1}^n f_i(\langle y, w_i\rangle)\, dy. \tag{5.2.6}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $v_1, \dots, v_k$ του $E^\perp$ και ορίζουμε w_i θέτοντας

$$w_i := (\langle v_1, e_i\rangle, \dots, \langle v_k, e_i\rangle), \qquad 1 \leqslant i \leqslant n.$$

Με άλλα λόγια, αν V είναι ο $n \times k$ πίνακας με στήλες τα $v_1, \dots, v_k$, τότε $w_i = V^t(e_i)$, όπου V^t είναι ο ανάστροφος του V. Τότε,

$$\sum_{i=1}^n w_i \otimes w_i = \sum_{i=1}^n V^t(e_i \otimes e_i)V = I_k$$

και

$$\begin{aligned}\pi_E f(0) &= \int_{E^\perp} f(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} f\Big(\sum_{i=1}^k y_i v_i\Big)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^n f_i(\langle Vy, e_i\rangle)\,dy = \int_{\mathbb{R}^k} f_i(\langle y, w_i\rangle)\,dy.\end{aligned}$$

□

Θα χρειαστούμε επίσης δύο προτάσεις οι οποίες επεκτείνουν τις εκτιμήσεις του K. Ball στο [4] για τον όγκο των τομών του κύβου σε ορθογώνια με ακμές παράλληλες στους άξονες συντεταγμένων. Αυτό που έχει σημασία είναι ότι οι εκτιμήσεις είναι ομοιόμορφες ως προς τις διαστάσεις των ορθογωνίων.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω $1 \leqslant k < n$ και $H \in G_{n,n-k}$. Υπάρχουν $b_1, \dots, b_n \in [0,1]$ με $\sum_{i=1}^n b_i = n-k$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $z_1, \dots, z_n > 0$, το ορθογώνιο $B = \prod_{i=1}^n [-z_i/2, z_i/2]$ ικανοποιεί την*

$$|B \cap H| \leqslant \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{2}} \prod_{i=1}^n z_i^{b_i}. \tag{5.2.7}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα $w_1, \dots, w_n$ όπως στο Λήμμα 5.2.5. Για κάθε $i = 1, \dots, n$ ορίζουμε $u_i = w_i/\|w_i\|_2$, $a_i = \|w_i\|_2$ και $b_i = a_i^2$. Για τυχόντες $z_1, \dots, z_n \geqslant 0$ εφαρμόζουμε την (5.2.6) με $f = \mathbf{1}_B$ και $E = H^\perp$, και έχουμε

$$\begin{aligned}|B \cap H| = \pi_{H^\perp}(\mathbf{1}_B)(0) &= \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\left[-\frac{z_i}{2}, \frac{z_i}{2}\right]}(\langle y, w_i\rangle)\,dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^k}\prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\left[-\frac{z_i}{2a_i}, \frac{z_i}{2a_i}\right]}(\langle y, u_i\rangle)\,dy.\end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 5.2.4, η τελευταία ποσότητα φράσσεται από

$$\prod_{i=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{\left[-\frac{z_i}{2a_i}, \frac{z_i}{2a_i}\right]}(t)\,dt\right)^{a_i^2} \prod_{i=1}^n \left(\frac{z_i}{a_i}\right)^{a_i^2}. \tag{5.2.8}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας π.χ. πολλαπλασιαστές Lagrange, παρατηρούμε ότι το γινόμενο $\prod_{i=1}^n a_i^{-a_i^2}$ μεγιστοποιείται όταν $a_1 = \cdots = a_n = \sqrt{\frac{n-k}{n}}$. Συνεπώς,

$$\prod_{i=1}^n a_i^{-a_i^2} \leqslant \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{2}},$$

απ' όπου έπεται το λήμμα. □

Πρόταση 5.2.7. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n/2$ και $H \in G_{n,n-k}$. Υπάρχουν $b_1, \dots, b_n \in [0,1]$ με $\sum_{i=1}^n b_i = n-k$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $z_1, \dots, z_n > 0$, το ορθογώνιο $B = \prod_{i=1}^n [-z_i/2, z_i/2]$ ικανοποιεί την*

$$|B \cap H| \leqslant 2^{k/2} \prod_{i=1}^n z_i^{b_i}. \tag{5.2.9}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in H^\perp$ ισχύει $\xi_i \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Έστω $\overline{P} = P_{H^\perp}$ η ορθογώνια προβολή στον $H^\perp$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ θέτουμε $u_i = \frac{\overline{P}e_i}{\|\overline{P}e_i\|_2}$ και $a_i = \|\overline{P}e_i\|_2$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^n a_i^2 u_i \otimes u_i = I_{H^\perp} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^n a_i^2 = k. \tag{5.2.10}$$

Από την υπόθεσή μας, έχουμε $a_i \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ για κάθε i, αφού ο a_i είναι η i-οστή συντεταγμένη του μοναδιαίου διανύσματος u_i που ανήκει στον $H^\perp$.

Σταθεροποιούμε $z_1, \ldots, z_n \geqslant 0$, τα οποία υποθέτουμε ότι ικανοποιούν την $|B| = \prod_{j=1}^n z_j = 1$. Έστω $X = (X_1, \ldots, X_n)$ τυχαίο διάνυσμα με πυκνότητα την $\mathbf{1}_B$ και $Y = (Y_1, \ldots, Y_n)$ τυχαίο διάνυσμα με πυκνότητα την $\mathbf{1}_{Q_n}$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση $\Phi : H^\perp \to \mathbb{R}$ του $\overline{P}(X)$ ικανοποιεί την

$$\begin{aligned}
\Phi(w) &= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\langle w, \overline{P}(X)\rangle\right)\right] \\
&:= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n X_j a_j \langle w, u_j\rangle\right)\right] \\
&= \mathbb{E}\left[\exp\left(i\sum_{j=1}^n Y_j z_j a_j \langle w, u_j\rangle\right)\right] \\
&= \prod_{j=1}^n \frac{2\sin\frac{1}{2}z_j a_j\langle w, u_j\rangle}{z_j a_j \langle w, u_j\rangle}.
\end{aligned}$$

Αφού η περιθώρια πυκνότητα $\pi_{H^\perp}(\mathbf{1}_B)$ είναι συνεχής, μπορούμε να εφαρμόσουμε τον τύπο αντιστροφής Fourier, και παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|B \cap H| &= \pi_{H^\perp}(\mathbf{1}_B)(0) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^k}\int_{H^\perp} \Phi(w)\, dw \\
&= \frac{1}{\pi^k}\int_{H^\perp} \prod_{j=1}^n \frac{\sin z_j a_j \langle w, u_j\rangle}{z_j a_j\langle w, u_j\rangle}\, dw \\
&\leqslant \frac{1}{\pi^k}\int_{H^\perp} \prod_{j=1}^n \left|\frac{\sin z_j a_j \langle w, u_j\rangle}{z_j a_j\langle w, u_j\rangle}\right| dw \\
&= \frac{1}{\pi^k}\int_{H^\perp} \prod_{j=1}^n \Phi_j(\langle w, u_j\rangle)\, dw,
\end{aligned}$$

όπου η $\Phi_j : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ορίζεται από την $\Phi_j(t) = \left|\frac{\sin z_j a_j t}{z_j a_j t}\right|$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.2.4 με $c_j = a_j^{-2}$ βλέπουμε ότι ο όγκος $|B \cap H|$ φράσσεται από

$$\frac{1}{\pi^k}\prod_{j=1}^n \left(\int_{\mathbb{R}} \Phi_j(t)^{\frac{1}{a_j^2}}\, dt\right)^{a_j^2} = \prod_{j=1}^n \left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}} \Phi_j(t)^{\frac{1}{a_j^2}}\, dt\right)^{a_j^2}. \tag{5.2.11}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.3 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\Phi_j(t)^{\frac{1}{a_j^2}}\,dt &= \frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin z_j a_j t}{z_j a_j t}\right|^{\frac{1}{a_j^2}}dt\\ &= \frac{1}{z_j a_j}\left(\frac{1}{\pi}\int_{\mathbb{R}}\left|\frac{\sin t}{t}\right|^{\frac{1}{a_j^2}}dt\right)\\ &\leqslant \frac{\sqrt{2}}{z_j}.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι για κάθε $z_1,\dots,z_n \geqslant 0$ με $|B| = \prod_{j=1}^n z_j = 1$ ισχύει

$$|B\cap H| \leqslant \prod_{j=1}^n \left(\frac{\sqrt{2}}{z_j}\right)^{a_j^2} = 2^{k/2}\prod_{j=1}^n z_j^{-a_j^2}. \tag{5.2.12}$$

Έπεται ότι για το τυχόν ορθογώνιο $B = \prod_{j=1}^n \left[-\frac{z_j}{2},\frac{z_j}{2}\right]$ ισχύει η ανισότητα

$$|B\cap H| \leqslant 2^{k/2}\prod_{j=1}^n z_j \prod_{j=1}^n z_j^{-a_j^2} = 2^{k/2}\prod_{j=1}^n z_j^{b_j}, \tag{5.2.13}$$

όπου $b_j = 1 - a_j^2$. Παρατηρήστε ότι από την υπόθεση ότι $a_j \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ έχουμε $b_j \in [1/2, 1]$.

Υποθέτουμε τώρα ότι υπάρχει μοναδιαίο διάνυσμα $\xi \in H^\perp$ τέτοιο ώστε $\xi_i \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$ για κάποιον δείκτη i. Υποθέτουμε επίσης, επαγωγικά, ότι η πρόταση ισχύει για όλες τις διαστάσεις έως $n-1$ και για κάθε k. Για δεδομένους $z_1,\dots,z_n \geqslant 0$ παρατηρούμε ότι ο κύλινδρος

$$C = \left\{x \in \mathbb{R}^n : |x_j| \leqslant \frac{z_j}{2} \text{ για κάθε } j \neq i\right\}$$

ικανοποιεί την $|B\cap H| \leqslant |C\cap H|$. Από το Λήμμα 5.2.2 έχουμε ότι

$$|C\cap H| \leqslant \frac{1}{b_i}|P_i(C\cap H)| \leqslant \sqrt{2}|\overline{B}\cap\overline{H}|, \tag{5.2.14}$$

όπου $\overline{B}$ είναι ένα $(n-1)$-διάστατο ορθογώνιο με πλευρές z_j, $j \neq i$, και $\overline{H} = P_i H$ είναι ένας $(k-1)$-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^{n-1}$. Αν $k=1$, τότε

$$|\overline{B}\cap\overline{H}| = |\overline{B}| = \prod_{j\neq i} z_j,$$

άρα

$$|B\cap H| \leqslant \sqrt{2}\prod_{j\neq i} z_j,$$

δηλαδή η πρόταση ισχύει με $b_j = 1$ για κάθε $j \neq i$. Αν $k \geqslant 2$, χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση βρίσκουμε $b_j \in [0,1]$, $j \neq i$ με $\sum_{j\neq i} b_j = n-1-(k-1) = n-k$, τέτοια ώστε

$$|\overline{B}\cap\overline{H}| \leqslant 2^{\frac{k-1}{2}}\prod_{j\neq i} z_j^{b_j}.$$

Από την (5.2.14), παίρνοντας $b_i = 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$|B \cap H| \leqslant 2^{k/2} \prod_{j=1}^{n} z_j^{b_j}.$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1. Θεωρώντας, αν χρειαστεί, μεταφορά της f μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\|\pi_E f\|_\infty = \pi_E f(0). \tag{5.2.15}$$

Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ θέτουμε $c_i = \|f_i\|_\infty$ και θεωρούμε το ορθογώνιο $C = \prod_{i=1}^n [0, c_i]$. Στη συνέχεια επιλέγουμε $w_1, \ldots, w_n$ όπως στο Λήμμα 5.2.5. Χρησιμοποιώντας την (5.2.6), την ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger και την ταυτότητα

$$g(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{g>t\}}(x)\, dt = \int_0^{\|g\|_\infty} \mathbf{1}_{\{g>t\}}(x) dt$$

που ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, γράφουμε

$$\begin{aligned} \pi_E f(0) &= \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \prod_{i=1}^{n} f_i(\langle y, w_i\rangle)\, dy \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \prod_{i=1}^{n} f_i^*(\langle y, w_i\rangle)\, dy \\ &= \int_0^{c_1} \cdots \int_0^{c_n} \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \prod_{i=1}^{n} \mathbf{1}_{\{f_i^* > t_i\}}(\langle x, w_i\rangle)\, dx dt_1 \cdots dt_n. \end{aligned}$$

Για συντομία θέτουμε $dt = dt_1 \cdots dt_n$ και $M = \left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{2}}$. Αφού κάθε f_i^* είναι συμμετρική και φθίνουσα, τα σύνολα $\{f_i^* > t_i\}$ είναι συμμετρικά διαστήματα. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.2.6 με $z_i = |\{f_i^* > t_i\}|$, $i = 1, \ldots, n$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini, την ανισότητα Hölder και το γεγονος ότι

$$\int_0^{c_i} |\{f_i^* > t_i\}|\, dt_i = \|f_i^*\|_1 = \|f_i\|_1 = 1, \tag{5.2.16}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned} \pi_E f(0) &\leqslant M \int_C \prod_{i=1}^{n} |\{f_i^* > t_i\||^{b_i} dt \\ &\leqslant M \prod_{i=1}^{n} c_i^{1-b_i} \prod_{i=1}^{n} \|f_i\|_1^{b_i} \\ &= M \prod_{i=1}^{n} c_i^{1-b_i}, \end{aligned}$$

διότι $\|f_i\|_1 = 1$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Αφού $\sum_{i=1}^n b_i = n - k$, θέτοντας $\gamma_i = 1 - b_i$, $i = 1, \ldots, n$, παίρνουμε την πρώτη εκτίμηση του θεωρήματος. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα με $M = 2^{k/2}$, και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.2.7 αυτή τη φορά, ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

Οι Dann, Παούρης και Pivovarov αποδεικνύουν στο [18] ότι για κάθε $1 \leqslant k < n$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ που ικανοποιεί τις $\|f\|_\infty \leqslant 1 = \|f\|_1$ και $f(0) = \|f\|_\infty$, ισχύει η ανισότητα

$$\int_{G_{n,k}} \pi_E f(0)^n d\mu_{n,k}(E) \leqslant \int_{G_{n,k}} \pi_E \mathbf{1}_{D_n}(0)^n d\mu_{n,k}(E), \tag{5.2.17}$$

όπου $\mu_{n,k}$ είναι το μέτρο Haar στην Grassmannian $G_{n,k}$. Με τις τεχνικές αυτής της παραγράφου μπορούμε να δείξουμε ότι στην περίπτωση που $f \in \mathcal{F}_n$ ισχύει η ακόλουθη ισχυρότερη ανισότητα.

Πρόταση 5.2.8. *Έστω $1 \leqslant k < n$ και $f \in \mathcal{F}_n$. Τότε,*

$$\int_{G_{n,k}} \pi_E f(0)^n d\mu_{n,k}(E) \leqslant \int_{G_{n,k}} \pi_E \mathbf{1}_{Q_n}(0)^n d\mu_{n,k}(E). \tag{5.2.18}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals ενός κυρτού σώματος. Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant k < n$, θέτουμε

$$\overline{\Phi}_k(K) = \frac{\kappa_n}{\kappa_k} \left(\int_{G_{n,k}} |K \cap E|^n d\mu_{n,k}(E) \right)^{\frac{1}{n}}. \tag{5.2.19}$$

Η ιδιότητα που θα μας χρειαστεί είναι ότι

$$\overline{\Phi}_k(K) = \overline{\Phi}_k(TK) \tag{5.2.20}$$

για κάθε $T \in SL_n$. Για την απόδειξη της Πρότασης, θεωρούμε τα διανύσματα $w_1, \ldots, w_n$ του Λήμματος 5.2.5 και όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 γράφουμε

$$\begin{aligned} \pi_E f(0) &\leqslant \int_0^1 \cdots \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^{n-k}} \prod_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{f_i^* > t_i\}}(\langle x, w_i \rangle)\, dx dt_1 \cdots dt_n \\ &= \int_{[0,1]^n} |B(t) \cap E^\perp|\, dt, \end{aligned}$$

όπου $B(t)$ είναι το συμμετρικό ορθογώνιο με μήκη ακμών $|\{f_i^* > t_i\}|$, $i = 1, \ldots, n$. Στη συνέχεια γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{G_{n,k}} \pi_E f(0)^n d\mu_{n,k}(E) &\leqslant \int_{G_{n,k}} \left(\int_{[0,1]^n} |B(t) \cap E^\perp|\, dt \right)^n d\mu_{n,k}(E) \\ &= \int_{G_{n,k}} \left(\int_{[0,1]^n} \left(\prod_{i=1}^n |\{f_j^* > t_j\}| \right)^{\frac{n-k}{n}} |\overline{B}(t) \cap E^\perp|\, dt \right)^n d\mu_{n,k}(E), \end{aligned}$$

όπου $\overline{B}(t) = B(t)/|B(t)|^{1/n}$. Χρησιμοποιώντας δύο φορές την ανισότητα Hölder, και παίρνοντας υπόψη τις (5.2.16) και (5.2.20), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,k}} \pi_E f(0)^n d\mu_{n,k}(E) &\leqslant \int_{[0,1]^n}\int_{G_{n,k}} |\overline{B}(t)\cap E^{\perp}|^n d\mu_{n,k}(E)\,dt \\ &= \int_{G_{n,k}} |Q_n\cap E^{\perp}|^n d\mu_{n,k}(E).\end{aligned}$$

□

5.3 Εφαρμογές της πολυδιάστατης ανισότητας Brascamp-Lieb

Η κλασική ανισότητα Loomis-Whitney [28] συγκρίνει τον όγκο $\mathrm{vol}_n(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με τον γεωμετρικό μέσο των όγκων $\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))$ των ορθογώνιων προβολών του στους $e_i^{\perp}$, όπου $\{e_1,\dots,e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^n \mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K)) \tag{5.3.1}$$

και ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τέτοιο ώστε τα $\pm e_i$ να είναι τα κάθετα διανύσματα στις έδρες του. Σε αυτή την ανισότητα, συμβολίζουμε με $\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))$ τον $(n-1)$-διάστατο όγκο του $P_i(K)$ (γενικότερα, αν A είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε $\mathrm{vol}(A)$ για τον όγκο του A στον αφφινικό υπόχωρο $\mathrm{aff}(A)$). Μάλιστα, η (5.3.1) ισχύει για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$.

Μια δυϊκή ανισότητα, στην οποία οι προβολές $P_i(K)$ αντικαθίστανται από τις τομές $K\cap e_i^{\perp}$, αποδείχθηκε από τον Meyer στο [30]. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n}\prod_{i=1}^n \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap e_i^{\perp}) \tag{5.3.2}$$

με ισότητα αν και μόνο αν $K = T(B_1^n)$ όπου $B_1^n = \mathrm{conv}\{\pm e_1,\dots,\pm e_n\}$ και T είναι ένας διαγώνιος (ως προς την δοθείσα βάση) τελεστής $T = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_i > 0$.

Οι δύο προηγούμενες ανισότητες έχουν γενικευτεί στο εξής πλαίσιο: έστω $u_1,\dots,u_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1,\dots,c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John

$$I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i\otimes u_i.$$

Τότε, για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{n!}{n^n}\prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap u_i^{\perp})^{c_i} \leqslant \mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_i^{\perp}}(K))^{c_i}. \tag{5.3.3}$$

Η υπόθεση ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0 χρειάζεται φυσικά μόνο για την αριστερή ανισότητα. Οι περιπτώσεις ισότητας είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές στις ανισότητες Loomis-Whitney και Meyer αντίστοιχα. Η δεξιά ανισότητα της (5.3.3) αποδείχθηκε από τον Ball στο [5], ενώ η αριστερή ανισότητα αποδείχθηκε από τους Li και Huang στο [24]. Για την απόδειξη αυτών των γενικότερων ανισοτήτων χρησιμοποιούνται η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της.

Μια διαφορετική γενίκευση της ανισότητας Loomis-Whitney αποδείχθηκε από τους Bollobás και Thomason στο [9]. Για να διατυπώσουμε το αποτέλεσμά τους χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς. Για κάθε μη κενό $\tau \subset [n] := \{1,\dots,n\}$ θέτουμε $F_\tau = \mathrm{span}\{e_j : j \in \tau\}$ και $E_\tau = F_\tau^\perp$. Δεδομένων $s \geqslant 1$ και $\sigma \subseteq [n]$ λέμε ότι τα (όχι απαραίτητα διακεκριμένα) σύνολα $\sigma_1,\dots,\sigma_r \subseteq \sigma$ σχηματίζουν s-ομοιόμορφη κάλυψη του σ αν κάθε $j \in \sigma$ ανήκει σε ακριβώς s από τα σύνολα σ_i. Η *ανισότητα ομοιόμορφης κάλυψης* του [9] δίνει άνω φράγμα για τον όγκο ενός συμπαγούς συνόλου μέσω των όγκων των προβολών του στους υποχώρους συντεταγμένων που αντιστοιχούν σε μια ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$.

Θεώρημα 5.3.1 (Bollobás-Thomason). *Έστω $r \geqslant 1$ και $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, έχουμε*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(K)), \tag{5.3.4}$$

όπου $F_\tau = \mathrm{span}\{e_j : j \in \tau\}$ και P_F είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον F.

Θα αποδείξουμε αυτήν την ανισότητα καθώς και την ακόλουθη δυϊκή ανισότητα Bollobás–Thomason που αποδείχθηκε πρόσφατα από τον Λιακόπουλο [25].

Θεώρημα 5.3.2. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$ και $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \geqslant \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^{r} |\sigma_i|! \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(K \cap F_{\sigma_i}). \tag{5.3.5}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η (5.3.5) είναι ακριβής: γίνεται ισότητα για κάθε s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ αν $K = T(B_1^n)$ όπου $B_1^n = \mathrm{conv}\{\pm e_1,\dots,\pm e_n\}$ και $T = \mathrm{diag}(\lambda_1,\dots,\lambda_n)$, $\lambda_i > 0$.

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση $0 \in \mathrm{int}(K)$ δεν είναι απαραίτητη. Όπως έχει δείξει ο Meyer στο [30], αν ξεκινήσουμε από τυχόν κυρτό σώμα και εφαρμόσουμε Steiner συμμετρικοποίηση ως προς $e_1,\dots,e_n$ τότε το αριστερό μέλος της (5.3.5) μένει αμετάβλητο ενώ το δεξιό αυξάνει. Παράλληλα, μετά από αυτές τις n συμμετρικοποιήσεις το K έχει μετασχηματιστεί σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα, το οποίο προφανώς περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.3.2 γι' αυτό.

Ένας ουσιαστικά ισοδύναμος τρόπος για να διατυπώσουμε το Θεώρημα 5.3.1 (βλέπε [9]) είναι ο εξής: για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο με ακμές παράλληλες στους άξονες, τέτοιο ώστε $\mathrm{vol}_n(B) = \mathrm{vol}_n(K)$ και

$$\mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(B)) \leqslant \mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(K)) \tag{5.3.6}$$

για κάθε $\sigma \subseteq [n]$. Παρομοίως, το Θεώρημα 5.3.2 έχει την εξής ισοδύναμη διατύπωση.

Θεώρημα 5.3.3. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Υπάρχει cross-polytope της μορφής $C = \mathrm{conv}(\{\pm\lambda_1 e_1, \ldots, \pm\lambda_n e_n\})$, όπου $\lambda_i > 0$, τέτοιο ώστε $\mathrm{vol}_n(C) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $\mathrm{vol}(C \cap F_\sigma) \geqslant \mathrm{vol}(K \cap F_\sigma)$ για κάθε $\sigma \subseteq [n]$.*

Το Θεώρημα 5.3.2, και το ισοδύναμό του Θεώρημα 5.3.3, προκύπτουν από μια συναρτησιακή ανισότητα που θα δείξουμε στην Ενότητα 5.3.2. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ την κλάση των λογαριθμικά κοίλων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$.

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ με $f(0) = 1$ και $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Τότε,*

$$n^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy \geqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\int_{F_i} f(x_i) dx_i \right)^{1/s}.$$

Επιπλέον, αποδεικνύουμε γενικότερες ανισότητες που έχουν ως συνέπεια διάφορες γνωστές επεκτάσεις της ανισότητας Loomis–Whitney και της ανισότητας του Meyer. Το βασικό μας εργαλείο είναι η πολυδιάστατη γενίκευση της γεωμετρικής ανισότητας Brascamp-Lieb και της αντίστροφής της από τον Barthe.

5.3.1 Ανισότητα Brascamp–Lieb και ανισότητες για ομοιόμορφες καλύψεις

Λέμε ότι οι υπόχωροι $F_1, \ldots, F_r$ σχηματίζουν s-ομοιόμορφη κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \ldots, c_r > 0$ για κάποιον $s > 0$ αν

$$sI_n = \sum_{i=1}^{r} c_i P_i, \tag{5.3.7}$$

όπου I_n είναι ο ταυτοτικός τελεστής και P_i είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον F_i. Αποδεικνύουμε το εξής γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 5.3.5. *Έστω $F_1, \ldots, F_r$ υπόχωροι που σχηματίζουν s-ομοιόμορφη κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \ldots, c_r > 0$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_i}(K))^{c_i}. \tag{5.3.8}$$

Η απόδειξη γίνεται με άμεση εφαρμογή της πολυδιάστατης γεωμετρικής ανισότητας Brascamp–Lieb, την οποία συζητήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο και υπενθυμίζουμε εδώ.

Θεώρημα 5.3.6 (Barthe)**.** *Έστω $r, n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, \ldots r$, έστω F_i ένας d_i-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και P_i η ορθογώνια προβολή στον F_i. Αν*

$$I_n = \sum_{i=1}^{r} c_i P_i$$

για κάποιους $c_1, \ldots, c_r > 0$ τότε για όλες τις μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_i : F_i \to \mathbb{R}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{r} f_i^{c_i}(P_i x)\, dx \leqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\int_{F_i} f_i \right)^{c_i} \tag{5.3.9}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup\left\{\prod_{i=1}^{r} f_i^{c_i}(x_i) : x=\sum_{i=1}^{r} c_i x_i, x_i\in F_i\right\} dx \geqslant \prod_{i=1}^{r}\left(\int_{F_i} f_i\right)^{c_i}. \tag{5.3.10}$$

Στο παραπάνω θεώρημα, το ολοκλήρωμα στον υπόχωρο F_i είναι ως προς το d_i-διάστατο μέτρο Lebesgue στον F_i.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.5. Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $f_i : F_i \to [0,\infty)$ με $f_i = \mathbf{1}_{P_i(K)}$. Παρατηρούμε ότι αν $x\in K$ τότε $f_i(P_i x)=1$ για κάθε $i=1,\dots,r$. Συνεπώς,

$$\mathbf{1}_K(x) \leqslant \prod_{i=1}^{r} f_i^{\frac{c_i}{s}}(P_i x)$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Από το Θεώρημα 5.3.6 παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_K(x)\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^{r} f_i^{\frac{c_i}{s}}(P_i x)\,dx \leqslant \prod_{i=1}^{r}\left(\int_{F_i} f_i\right)^{\frac{c_i}{s}} = \prod_{i=1}^{r}\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))^{\frac{c_i}{s}},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^{r}\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))^{c_i}$ όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 5.3.7 (Bollobás-Thomason)**.** Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η ανισότητα Bollobás-Thomason αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Παρατηρήστε ότι αν $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ είναι μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ τότε οι προβολές $P_i := P_{F_{\sigma_i}}$ ικανοποιούν την

$$sI_n=\sum_{i=1}^{r} P_i.$$

Συνεπώς, για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.3.5 με $c_1=\cdots=c_r=1$ και παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^{r}\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K)).$$

που είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 5.3.1.

Σαν ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 5.3.5 παίρνουμε επίσης την ακόλουθη ανισότητα των Bollobás και Thomason [9]. Έστω $\mathcal{C}$ μια πεπερασμένη συλλογή υποσυνόλων των $[n]$, η οποία δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφη κάλυψη. Υποθέτουμε ότι σε κάθε $\sigma\in\mathcal{C}$ έχουμε αντιστοιχίσει κάποιο θετικό πραγματικό βάρος $w(\sigma)$ με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε $i\in[n]$ να ισχύει η $\sum\{w(\sigma) : i\in\sigma\in\mathcal{C}\}=1$. Τότε, είναι φανερό ότι

$$I_n=\sum_{\sigma\in\mathcal{C}} w(\sigma)P_{F_\sigma},$$

και από το Θεώρημα 5.3.5 παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)\leqslant\prod_{\sigma\in\mathcal{C}}\mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(K))^{w(\sigma)}.$$

Παρατήρηση 5.3.8 (η ανισότητα του Ball)**.** Έστω $u_1, \ldots, u_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1, \ldots, c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John

$$I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i.$$

Ο Ball απέδειξε στο [5] ότι για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^{m} \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K))^{c_i}. \tag{5.3.11}$$

Από το Θεώρημα 5.3.5 μπορούμε να πάρουμε μια απλή απόδειξη της (5.3.11). Παρατηρούμε ότι αν $P_i = P_{u_i^\perp}$ τότε $u_i \otimes u_i = I_n - P_i$, άρα η συνθήκη του John γίνεται $I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i(I_n - P_i)$, απ' όπου παίρνουμε

$$(n-1)I_n = \sum_{i=1}^{m} c_i P_i, \tag{5.3.12}$$

αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^{m} c_i = n$. Τώρα, για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.3.5 με $s = n-1$ έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^{m} \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K))^{c_i}. \tag{5.3.13}$$

5.3.2 Δυϊκή ανισότητα Bollobás–Thomason

Δίνουμε μια απόδειξη μιας πιο γενικής μορφής του Θεωρήματος 5.3.4. Υπενθυμίζουμε ότι $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ είναι η κλάση των λογαριθμικά κοίλων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$.

Θεώρημα 5.3.9. *Έστω $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ με $f(0) = 1$ και $F_1, \ldots, F_r$ υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ που σχηματίζουν s-ομοιόμορφη κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \ldots, c_r > 0$. Τότε,*

$$n^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy \geqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\int_{F_i} f(x_i) dx_i \right)^{c_i/s}.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι $I_n = \sum_{i=1}^{r} \frac{c_i}{s} P_{F_i}$ έπεται ότι

$$ns = \mathrm{tr}(sI_n) = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \mathrm{tr}(P_{F_i}) = \sum_{i=1}^{r} c_i d_i,$$

όπου $d_i = \dim(F_i)$. Έστω $z \in \mathbb{R}^n$ και $x_i \in F_i$, $i \in [r]$ τέτοια ώστε $z = \sum_{i=1}^{r} \frac{c_i}{s} x_i$. Τότε,

$$\frac{z}{n} = \sum_{i=1}^{r} \frac{c_i d_i}{sn} \cdot \frac{x_i}{d_i},$$

και αφού $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ και $\sum_{i=1}^{r} \frac{c_i d_i}{sn} = 1$ παίρνουμε

$$f(z/n) \geqslant \prod_{i=1}^{r} f(x_i/d_i)^{\frac{c_i d_i}{ns}}.$$

Αφού $f(0)=1$, για κάθε $i\in[r]$ βλέπουμε ότι $f(x_i/d_i)\geqslant f(x_i)^{1/d_i}f(0)^{1-1/d_i}=f(x_i)^{1/d_i}$. Έπεται ότι

$$f(z/n)\geqslant\prod_{i=1}^r f(x_i)^{\frac{1}{d_i}\cdot\frac{c_id_i}{ns}}=\prod_{i=1}^r f(x_i)^{\frac{c_i}{ns}},$$

άρα

$$f(z/n)^n\geqslant\prod_{i=1}^r f(x_i)^{c_i/s}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$f(z/n)^n\geqslant\sup\left\{\prod_{i=1}^r f(x_i)^{c_i/s}:z=\sum_{i=1}^r\frac{c_i}{s}x_i,x_i\in F_i\right\}.$$

Συνεπώς, από την πολυδιάστατη αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb (5.3.10) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}f(z/n)^ndz&\geqslant\int_{\mathbb{R}^n}^*\sup\left\{\prod_{i=1}^r f(x_i)^{c_i/s}:z=\sum_{i=1}^r\frac{c_i}{s}x_i,x_i\in F_i\right\}dz\\&\geqslant\prod_{i=1}^r\left(\int_{F_i}f(x_i)dx_i\right)^{c_i/s}.\end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y=z/n$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Η γεωμετρική εφαρμογή του Θεωρήματος 5.3.9 που θα παρουσιάσουμε είναι η ακόλουθη γενική ανισότητα «ομοιόμορφης κάλυψης» για τομές κυρτού σώματος.

Θεώρημα 5.3.10. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$ και $F_1,\ldots,F_r$ υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, με $\dim(F_i)=d_i$, που σχηματίζουν s-ομοιόμορφη κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1,\ldots,c_r>0$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s\geqslant\frac{1}{(n!)^s}\prod_{i=1}^r(d_i!)^{c_i}\prod_{i=1}^r\mathrm{vol}(K\cap F_i)^{c_i}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.3.9 για τη συνάρτηση $f(y)=e^{-\|y\|_K}$, όπου $\|y\|_K:=\min\{t>0:y\in tK\}$ είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K. Παρατηρήστε ότι $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ και $f(0)=1$. Χρησιμοποιώντας την

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^m}e^{-\|x\|_A}dx&=\int_{\mathbb{R}^m}\int_{\|x\|_A}^\infty e^{-t}dt\,dx=\int_0^\infty e^{-t}\int_{\mathbb{R}^m}\mathbf{1}_{\{\|x\|\leqslant t\}}(x)\,dx\,dt\\&=\int_0^\infty e^{-t}\mathrm{vol}_m(tA)\,dt=\mathrm{vol}_m(A)\int_0^\infty t^me^{-t}dt=m!\mathrm{vol}_m(A),\end{aligned}$$

η οποία ισχύει για κάθε κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^m$ με $0\in\mathrm{int}(A)$, γράφουμε

$$\begin{aligned}n^n\int_{\mathbb{R}^n}f(y)^ndy&=n^n\int_{\mathbb{R}^n}e^{-n\|y\|_K}dy=n^n\int_{\mathbb{R}^n}e^{-\|y\|_{\frac{1}{n}K}}dy\\&=n^n\,n!\mathrm{vol}_n\left(\frac{1}{n}K\right)=n!\,\mathrm{vol}_n(K),\end{aligned}$$

και, για κάθε $i \in [r]$,

$$\int_{F_i} f(x_i)dx_i = \int_{F_i} e^{-\|x_i\|_K} dx_i = \int_{F_i} e^{-\|x_i\|_{K\cap F_i}} dx_i = d_i! \,\mathrm{vol}(K \cap F_i).$$

Έπεται ότι

$$n!\mathrm{vol}_n(K) \geqslant \prod_{i=1}^{r} \big(d_i! \,\mathrm{vol}(K \cap F_i)\big)^{c_i/s} = \prod_{i=1}^{r} (d_i!)^{c_i/s} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(K \cap F_i)^{c_i/s},$$

και έχουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 5.3.11 (δυϊκή ανισότητα Bollobás–Thomason)**.** Μπορούμε να πάρουμε διάφορες εφαρμογές του Θεωρήματος 5.3.10. Αρχικά, έστω $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Θέτοντας $F_i = F_{\sigma_i} = \mathrm{span}(\{e_j : j \in \sigma_i\})$, $i \in [r]$, έχουμε $sI_n = \sum_{i=1}^{r} P_{F_i}$. Έτσι προκύπτει η δυϊκή ανισότητα Bollobás-Thomason του Θεωρήματος 5.3.2: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$ και $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ είναι μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ τότε

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \geqslant \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^{r} |\sigma_i|! \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(K \cap F_i).$$

Στην ειδική περίπτωση $F_i = e_i^{\perp}$, $i \in [n]$ έχουμε $(n-1)I_n = \sum_{i=1}^{n} P_{e_i^{\perp}}$, και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.3.2 με $s = n-1$ και $|\sigma_i| = \dim(F_i) = n-1$ παίρνουμε την ανισότητα του Meyer

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^{n} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap e_i^{\perp})$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, διότι

$$\frac{1}{(n!)^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} |\sigma_i|! = \frac{1}{(n!)^{n-1}} \prod_{i=1}^{n} (n-1)! = \frac{[(n-1)!]^n}{(n!)^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \frac{n!}{n^n}.$$

Το Θεώρημα 5.3.3 προκύπτει από το Θεώρημα 5.3.2 με ένα επιχείρημα που είναι βασικά το ίδιο με αυτό που χρησιμοποίησαν οι Bollobás και Thomason για την απόδειξη της (5.3.6). Στη συνέχεια, λέμε ότι μια ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ είναι ανάγωγη αν δεν μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση δύο άλλων ομοιόμορφων καλύψεων του $[n]$. Στο [9] αποδεικνύεται ότι το πλήθος των ανάγωγων ομοιόμορφων καλύψεων του $[n]$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.3. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Το Θεώρημα 5.3.2 ισχυρίζεται ότι για κάθε ακέραιο $s \geqslant 1$ και κάθε μη τετριμμένη ανάγωγη s-ομοιόμορφη κάλυψη $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ του $[n]$ ισχύει η ανισότητα $(n!\mathrm{vol}_n(K))^s \geqslant \prod_{j=1}^{r} \big(|\sigma_j|! \,\mathrm{vol}(K \cap F_{\sigma_j})\big)$. Επιπλέον, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.3.2 για την 1-ομοιόμορφη κάλυψη $(\{i\}, i \in \tau)$ του $\tau \subseteq [n]$ βλέπουμε ότι $|\tau|!\mathrm{vol}(K \cap F_\tau) \geqslant \prod_{i\in\tau} \mathrm{vol}(K \cap F_{\{i\}})$. Αφού το πλήθος των ανάγωγων ομοιόμορφων καλύψεων του $[n]$ είναι πεπερασμένο, έχουμε πεπερασμένες το πλήθος τέοιες ανισότητες, οι οποίες ικανοποιούνται από τα στοιχεία του συνόλου $\{|\sigma|!\mathrm{vol}(K \cap F_\sigma) : \sigma \subseteq [n]\}$.

Έστω $\{t_\sigma : \sigma \subseteq [n]\}$ ένα σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις $t_\sigma \geqslant |\sigma|!\mathrm{vol}(K \cap F_\sigma)$ και $t_{[n]} = n!\mathrm{vol}_n(K)$, και είναι μεγιστικοί ως προς το να ικανοποιούν όλες τις παραπάνω ανισότητες αν αντικαταστήσουμε τον $|\sigma|!\mathrm{vol}(K\cap F_\sigma)$ με τον t_σ για κάθε $\sigma\subseteq[n]$. Τότε, γνωρίζουμε ότι $\prod_{j=1}^r t_{\sigma_j}\leqslant (n!\mathrm{vol}_n(K))^s$ για κάθε (όχι αναγκαστικά ανάγωγη) s-ομοιόμορφη κάλυψη $(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$ του $[n]$.

Αφού οι $t_{\{i\}}$, $i\in[n]$, είναι μεγιστικοί, βλέπουμε ότι για κάθε $i\in[n]$ μπορούμε να βρούμε μια ανισότητα στην οποία εμφανίζεται ο $t_{\{i\}}$ η οποία να είναι ισότητα. Αν αυτή η ανισότητα είναι του πρώτου είδους τότε υπάρχει s_i-ομοιόμορφη κάλυψη $\overline{\sigma}(i)=(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$ του $[n]$ με $\sigma_j=\{i\}$ για κάποιο j, τέτοια ώστε $(n!\mathrm{vol}_n(K))^{s_i}=\prod_{j=1}^r t_{\sigma_j}$. Το ίδιο ισχύει αν η ανισότητα είναι του δεύτερου τύπου, δηλαδή αν έχουμε μια ισότητα του τύπου $\prod_{l\in\tau}t_{\{l\}}=t_\tau$ για κάποιο $\tau\subseteq[n]$ με $i\in\tau$. Διότι, επειδή ο t_τ είναι μεγιστικός, μπορούμε να βρούμε μια s_i-ομοιόμορφη κάλυψη $(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$ του $[n]$ τέτοια ώστε $\tau=\sigma_{j_0}$ για κάποιο j_0, και τότε η $\overline{\sigma}(i):=(\sigma_j,j\neq j_0)\cup(\{i\}:i\in\tau)$ είναι πάλι s_i-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$.

Τώρα, ορίζουμε $\overline{\sigma}=\bigcup_{i=1}^n\overline{\sigma}(i)$ και $s=\sum_{i=1}^n s_i$. Τότε, η $\overline{\sigma}$ είναι s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$, έχουμε $\{i\}\in\overline{\sigma}$ για κάθε $i=1,\ldots,n$ και

$$\prod_{\sigma\in\overline{\sigma}}t_\sigma=(n!\mathrm{vol}_n(K))^s. \tag{5.3.14}$$

Αφού η $\overline{\sigma}':=\overline{\sigma}\setminus(\{i\}:i\in[n])$ είναι $(s-1)$-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$ πρέπει να ισχύει

$$\prod_{\sigma\in\overline{\sigma}'}t_\sigma\leqslant(n!\mathrm{vol}_n(K))^{s-1}. \tag{5.3.15}$$

Συνδυάζοντας τις (5.3.14) και (5.3.15) βλέπουμε ότι $\prod_{i=1}^n t_{\{i\}}\geqslant n!\mathrm{vol}_n(K)$. Από την άλλη πλευρά, η $(\{i\}:i\in[n])$ είναι 1-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$, άρα ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. Συνεπώς,

$$\prod_{i=1}^n t_{\{i\}}=n!\mathrm{vol}_n(K). \tag{5.3.16}$$

Τώρα, έστω $\tau\subseteq[n]$ και ας θεωρήσουμε την 1-ομοιόμορφη κάλυψη $\{\tau\}\cup(\{i\}:i\notin\tau)$ του $[n]$. Χρησιμοποιώντας την (5.3.16) και την υπόθεση ότι $t_\tau\geqslant\prod_{i\in\tau}t_{\{i\}}$ παίρνουμε

$$n!\mathrm{vol}_n(K)\geqslant t_\tau\cdot\prod_{i\notin\tau}t_{\{i\}}\geqslant\prod_{i\in\tau}t_{\{i\}}\cdot\prod_{i\notin\tau}t_{\{i\}}=\prod_{i=1}^n t_{\{i\}}=n!\mathrm{vol}_n(K),$$

και έπεται ότι

$$t_\tau=\prod_{i\in\tau}t_{\{i\}} \tag{5.3.17}$$

για κάθε $\tau\subseteq[n]$. Έπεται ότι αν θεωρήσουμε το $C=\mathrm{conv}(\{\pm\lambda_1e_1,\ldots,\pm\lambda_ne_n\})$ όπου $\lambda_i=t_{\{i\}}/2$,

$$\mathrm{vol}_n(C)=\frac{1}{n!}\prod_{i=1}^n t_{\{i\}}=\mathrm{vol}_n(K)\quad\text{και}\quad\mathrm{vol}(B\cap F_\sigma)=\frac{1}{|\sigma|!}\prod_{i\in\sigma}t_{\{i\}}=\frac{1}{|\sigma|!}t_\sigma\geqslant\mathrm{vol}(K\cap F_\sigma)$$

για κάθε $\sigma\subseteq[n]$. $\square$

Παρατήρηση 5.3.12 (η δυϊκή ανισότητα του Ball)**.** Οι Li και Huang απέδειξαν στο [24] ότι για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε άρτιο ισοτροπικό μέτρο ν στον S^{n-1} ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp})\, d\nu(u)\right) \tag{5.3.18}$$

και προσδιόρισαν τις περιπτώσεις ισότητας. Στην ειδική περίπτωση όπου τα $u_1, \dots, u_m$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1, \dots, c_m$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John, παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^{\perp})^{c_i}. \tag{5.3.19}$$

Αυτή η ανισότητα (μάλιστα σε γενικότερη μορφή) είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.10. Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, θεωρούμε τους υποχώρους $F_i = u_i^{\perp}$, και αφού $\dim(F_i) = n-1$ και οι F_i σχηματίζουν $(n-1)$-ομοιόμορφη κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \dots, c_m > 0$, χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^m c_i = n$ παίρνουμε αμέσως

(5.3.20)
$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(K)^{n-1} &\geqslant \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^m ((n-1)!)^{c_i} \prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^{\perp})^{c_i} = \frac{[(n-1)!]^n}{(n!)^{n-1}} \prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^{\perp})^{c_i} \\ &= \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^{\perp})^{c_i}. \end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε ένα επιχείρημα προσέγγισης του Barthe από το [8] για να πάρουμε την (5.3.18) από την (5.3.20). Δίνουμε τη βασική ιδέα της απόδειξης και παραπέμπουμε στο άρθρο του Barthe για περισσότερες λεπτομέρειες. Υπενθυμίζουμε ότι ένα μέτρο Borel ν στην S^{n-1} λέγεται ισοτροπικό αν

$$I_n = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\nu(u).$$

Η υπόθεση ότι τα διανύσματα u_j και τα βάρη c_j ικανοποιούν την (5.3.19) είναι ισοδύναμη με το να πούμε ότι το διακριτό μέτρο $\overline{\nu}$ με $\overline{\nu}(\{u_j\}) = c_j$ είναι ισοτροπικό, δηλαδή $I_n = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\overline{\nu}(u)$. Επίσης, αφού

$$\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp})\, d\overline{\nu}(u) = \sum_{i=1}^m c_i \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^{\perp}) = \log\left(\prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^{\perp})^{c_i}\right),$$

μπορούμε να γράψουμε την (5.3.20) στην ισοδύναμη μορφή

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp})\, d\overline{\nu}(u)\right). \tag{5.3.21}$$

Με άλλα λόγια, η (5.3.18) ισχύει για κάθε διακριτό ισοτροπικό μέτρο στην S^{n-1}.

Έστω τώρα ν ένα ισοτροπικό μέτρο Borel στην S^{n-1}. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε ένα μεγιστικό ε-δίκτυο N_ε στην S^{n-1} και μια διαμέριση $(C_u)_{u \in N_\varepsilon}$ της S^{n-1} σε Borel σύνολα $C_u \subseteq B(u, \varepsilon)$, όπου $B(u, \varepsilon)$ είναι η γεωδαισιακή μπάλα με κέντρο το u και ακτίνα ε. Κατόπιν, θεωρούμε το μέτρο

$$\nu_\varepsilon = \sum_{u \in N_\varepsilon} \nu(C_u) \delta_u,$$

όπου δ_u είναι η μάζα Dirac στο u. Παρατηρήστε ότι, για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{S^{n-1}} f(u)\, d\nu_\varepsilon \longrightarrow \int_{S^{n-1}} f(u)\, d\nu$$

καθώς το $\varepsilon \to 0$. Με άλλα λόγια, $\nu_\varepsilon \to \nu$ ασθενώς καθώς το $\varepsilon \to 0$. Αν $T_\varepsilon = \int_{S^{n-1}} u \otimes u\, d\nu_\varepsilon(u)$ τότε για το μέτρο $\mu_\varepsilon = \sum_{u\in N_\varepsilon} \nu_\varepsilon(u)|T_\varepsilon^{-1/2}(u)|^2\delta_{v(u)}$ όπου $v(u) := T_\varepsilon^{-1/2}(u)/|T_\varepsilon^{-1/2}(u)|$ έχουμε

$$I_n = \int_{S^{n-1}} T_\varepsilon^{-1/2}(u) \otimes T_\varepsilon^{-1/2}(u)\, d\nu_\varepsilon(u) = \int_{S^{n-1}} v \otimes v\, d\mu_\varepsilon(v).$$

Αφού $\|T_\varepsilon - I_n\|_{\ell_2^n \to \ell_2^n} \leqslant c_1(\varepsilon)$ για κάποια σταθερά $c_1(\varepsilon)$ που τείνει στο 0 καθώς το $\varepsilon \to 0$, μπορούμε να ελέγξουμε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$

$$\int_{S^{n-1}} f(u)\, d\mu_\varepsilon \longrightarrow \int_{S^{n-1}} f(u)\, d\nu$$

καθώς το $\varepsilon \to 0$. Εφαρμόζοντας την (5.3.21) για το διακριτό ισοτροπικό μέτρο μ_ε παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} &\geqslant \frac{n!}{n^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap u^\perp)\, d\mu_\varepsilon(u)\right)\\ &\longrightarrow \frac{n!}{n^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap u^\perp)\, d\nu(u)\right).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (5.3.18).

Βιβλιογραφία

[1] D. Alonso–Gutiérrez, S. Artstein–Avidan, B. González Merino, C. H. Jiménez and R. Villa, *Rogers–Shephard and local Loomis–Whitney type inequalities*, Preprint.

[2] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Mathematical Surveys and Monographs **202**, Amer. Math. Soc. (2015).

[3] K. M. Ball, *Cube slicing in* $\mathbb{R}^n$, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 465–473.

[4] K. M. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Geometric Aspects of Functional Analysis (1987-88), Lecture Notes in Mathematics, vol. 1376, Springer, Berlin, 1989, pp. 251–260.

[5] K. M. Ball, *Shadows of convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), 891-901.

[6] K. M. Ball, *Convex geometry and functional analysis*, Handbook of the geometry of Banach spaces (Johnson-Lindenstrauss eds), Vol. I, North-Holland, Amsterdam, (2001), 161-194.

[7] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. Math. **134** (1998), 335-361.

[8] F. Barthe, *A continuous version of the Brascamp-Lieb inequalities*, Geometric aspects of functional analysis, 53-63, Lecture Notes in Math., **1850**, Springer, Berlin, 2004.

[9] B. Bollobás and A. Thomason, *Projections of bodies and hereditary properties of hypergraphs*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 417-424.

[10] J. Bourgain, M. Meyer, V. D. Milman and A. Pajor, *On a geometric inequality*, Geometric aspects of functional analysis (1986/87), Lecture Notes in Math., **1317**, Springer, Berlin (1988), 271-282.

[11] H. J. Brascamp, E. H. Lieb and J. M. Luttinger, *A general rearrangement inequality for multiple integrals*, J. Funct. Anal. 17 (1974) 227–237.

[12] S. Brazitikos, A. Giannopoulos and D-M. Liakopoulos, *Uniform cover inequalities for the volume of coordinate sections and projections of convex bodies*, Advances in Geometry **18** (2018), 345–354.

[13] Y. Brenier, *Polar factorization and monotone rearrangement of vector-valued functions*. Comm. Pure Appl. Math. 44, 4(1991), 375-417.

[14] H. Busemann and E. G. Straus, *Area and normality*, Pacific J. Math. 10 (1960) 35–72.

[15] L. A. Caffarelli, *Regularity of mappings with a convex potential*, J. Amer. Math. Soc. **5** (1992), 99-104.

[16] M. Christ, *Estimates for the k-plane transform*, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984) 891–910.

[17] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi, G. Paouris and P. Pivovarov, *Shadow systems and the volume of the polar of random sets*, Math. Ann. 362 (2015), 1305–1325.

[18] S. Dann, G. Paouris and P. Pivovarov, *Bounding marginal densities via affine isoperimetry*, Proceedings of the London Mathematical Society 113 (2016), 140–162.

[19] R. J. Gardner, *The dual Brunn-Minkowski theory for bounded Borel sets: dual affine quermassintegrals and inequalities*, Adv. Math. **216** (2007), 358-386.

[20] D. J. H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press (2007).

[21] E. L. Grinberg, *Isoperimetric inequalities and identities for k-dimensional cross-sections of convex bodies*, Math. Ann. 291 (1991) 75–86.

[22] H. Groemer, *On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set*. Arch. Math. (Basel) 25 (1974), 86–90.

[23] H. Groemer, *On the average size of polytopes in a convex set*, Geom. Dedicata 13 (1982), 47–62.

[24] A-J. Li and Q. Huang, *The dual Loomis-Whitney inequality*, Bull. London Math. Soc. **48** (2016), 676-690.

[25] D.-M. Liakopoulos, *Reverse Brascamp–Lieb inequality and the dual Bollobás–Thomason inequality*, Preprint.

[26] G. Livshyts, G. Paouris and P. Pivovarov, *Sharp bounds for marginal densities of product measures*, Israel J. Math. 216 (2016), 877–889.

[27] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *Volume inequalities for subspaces of L_p*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111-132.

[28] L. H. Loomis and H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 961-962.

[29] R. J. McCann, *Existence and uniqueness of monotone measure-preserving maps.* Duke Math. J. 80, 2 (1995), 309-323.

[30] M. Meyer, *A volume inequality concerning sections of convex sets*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), 151-155.

[31] G. Paouris and P. Pivovarov, *A probabilistic take on isoperimetric-type inequalities*, Advances in Mathematics 230 (2012), 1402–1422.

[32] G. Paouris and P. Pivovarov, *Small-ball probabilities for the volume of random convex sets*, Discrete Comput. Geom. 49 (2013), no. 3, 601–646.

[33] G. Paouris and P. Pivovarov, *Random ball-polyhedra and inequalities for intrinsic volumes*, Monatsc. Math. 182 (2017), 709–729.

[34] G. Paouris and P. Pivovarov, *Randomised isoperimetric inequalities*, Convexity and Concentration (E. Carlen, M. Madiman, E. Werner, Eds.), The IMA Volumes in Mathematics and its Applications 161 (2017) pp. 391–425.

[35] P. Pivovarov, *On determinants and the volume of random polytopes in isotropic convex bodies*, Geom. Dedicata 149 (2010), 45–58.

[36] R. T. Rockafellar, *Characterization of the subdifferentials of convex functions.* Pacific J. Math 17 (1966), 497-510.

[37] R. T, Rockafellar, *Convex analysis*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1997. Reprint of the 1970 original, Princeton Paperbacks.

[38] C. A. Rogers, *A single integral inequality*, J. London Math. Soc. 32 (1957) 102–108.

[39] B. A. Rogozin, *An estimate for the maximum of the convolution of bounded densities*, Theory Probab. Appl. **32** (1987), no. 1, 48–56.

[40] M. Rudelson and R. Vershynin, *Small ball probabilities for linear images of high dimensional distributions*, Int. Math. Res. Not. **19** (2015), 9594–9617.

[41] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[42] R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and integral geometry*, Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin (2008).