Ισοπεριμετρικές ανισότητες για το μέτρο του Gauss

Διπλωματική Εργασία

Μαρία Μαστροθεοδώρου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2018

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**
1.1 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα 1
1.2 Περιγραφή της εργασίας 6
1.3 Κανονικές τυχαίες μεταβλητές 10

2 Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss **13**
2.1 Εισαγωγή 13
2.2 Gaussian συμμετρικοποίηση 17
2.3 Η ισοπεριμετρική ανισότητα 26
2.4 Η απόδειξη του Bobkov 26

3 Η ανισότητα του Ehrhard **35**
3.1 Η ανισότητα Ehrhard-Borell 35
3.2 Η ανισότητα του Ehrhard 37
3.3 Η συναρτησιακή ανισότητα του Borell 40

4 Διαστολές συμμετρικών κυρτών σωμάτων **45**
4.1 Η εικασία του Shepp 45
4.2 Το βασικό τεχνικό αποτέλεσμα 48
4.3 Η βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα του Kahane 60

5 Η ανισότητα της θετικής συνδιακύμανσης **63**
5.1 Το λήμμα του Šidák και η εικασία της θετικής συνδιακύμανσης 63
5.2 Το θεώρημα του Royen 65

6 Το B-θεώρημα **75**
6.1 Η εικασία του Banaszczyk 75
6.2 Ανισότητα Poincaré 77

7 Συνδυαστικές εφαρμογές του μέτρου του Gauss **83**
7.1 Προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων 83
7.2 Το θεώρημα του Spencer 84

7.3 Το θεώρημα του Banaszczyk 89

8 Βιβλιογραφικά σχόλια **99**

Ευχαριστίες

Για την εκπόνηση αυτής της εργασίας θέλω να ευχαριστήσω πρώτον από όλους τον καθηγητή και επιβλέποντά μου κ. Α. Γιαννόπουλο για την αδιάκοπη βοήθεια που μου προσέφερε επιστημονικά και ηθικά, καθώς και για τη συνεχή και πάντα πρόθυμη παρουσία του. Ιδιαίτερα τον ευχαριστώ για την αγάπη που μου ενέπνευσε για τα μαθηματικά, ήδη από τα πρώτα μαθήματά του που παρακολούθησα στο προπτυχιακό πρόγραμμα.

Ανάλογες ευχαριστίες εκφράζω και για άλλους καθηγητές του τμήματος Μαθηματικών, καθώς και για τους καθηγητές κ. Δ. Γατζούρα και κ. Δ. Χελιώτη που δέχτηκαν να είναι μέλη της τριμελούς μου επιτροπής.

Επίσης, ευχαριστίες θέλω να απευθύνω σε όσους φίλους μού στάθηκαν, ιδιαίτερα στις μαθηματικούς – δυνάμει ή ενεργεία – Αγγελική, Αλεξάνδρα, Γιώτα, Μαρία και Χάρις, που με βοήθησαν ποικιλοτρόπως σε όλη τη διάρκεια του μεταπτυχιακού προγράμματος, και φυσικά στο μαθηματικό κ. Γ. Πρωτοπαπά, που μου μετέδιδε πάντα με αγάπη τον ενθουσιασμό και τις γνώσεις του για τα Μαθηματικά.

Επίσης, ένα ευχαριστώ είναι λίγο για τα 5 μου αδέρφια, τις νύφες και το γαμπρό μου, που με στήριξαν ψυχολογικά, αλλά και πρακτικά. Τέλος, ευχαριστώ από καρδιάς τους γονείς μου για όλα όσα μου έδωσαν και ιδιαίτερα το μαθηματικό πατέρα μου.

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα

Μετρικός χώρος πιθανότητας είναι μια τριάδα (X, d, μ), όπου (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος και μ ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ των Borel υποσυνόλων του (X, d). Για κάθε μη κενό $A \in \mathcal{B}(X)$ και $t > 0$ ορίζουμε την t-*περιοχή* του A ως εξής:

$$A_t = \{x \in X : \ d(x, A) < t\}.$$

Γενικότερα, αν (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος και μ ένα μέτρο στην $\mathcal{B}(X)$, η *επιφάνεια* ενός Borel υποσυνόλου A του X ως προς το μ ορίζεται ως εξής:

$$\mu^+(A) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{\mu(A_t \setminus A)}{t}.$$

Αν $\mu(A) < \infty$, το οποίο φυσικά ισχύει για κάθε A αν ο (X, d, μ) είναι μετρικός χώρος πιθανότητας, τότε

$$\mu^+(A) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}.$$

Σε κάθε μετρικό χώρο πιθανότητας μπορούμε να διατυπώσουμε το *ισοπεριμετρικό πρόβλημα*:

Για δοσμένο $0 < \alpha < 1$, *να βρεθεί το*

$$\inf\{\mu^+(A) : A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \geqslant \alpha\}$$

και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σύνολα A *για τα οποία πιάνεται αυτό το infimum.*

Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε αντίστοιχο πρόβλημα για το μέτρο των t-περιοχών, σταθεροποιώντας κάποιο $t > 0$:

Για δοσμένα $0 < \alpha < 1$ *και* $t > 0$, *να βρεθεί το*

$$\inf\{\mu(A_t) : A \in \mathcal{B}(X), \mu(A) \geqslant \alpha\}$$

και να βρεθούν (αν υπάρχουν) τα σύνολα A *για τα οποία πιάνεται αυτό το infimum.*

Οι λύσεις του δεύτερου προβλήματος μπορεί να είναι διαφορετικές για διαφορετικές τιμές του t. Στα κλασικά όμως παραδείγματα δεν εξαρτώνται από το t και αυτό σημαίνει ότι είναι και λύσεις του πρώτου προβλήματος. Είναι μάλιστα, όπως θα δούμε, πολύ «συμμετρικά υποσύνολα» του X, το οποίο σημαίνει ότι μπορούμε σχετικά εύκολα να υπολογίσουμε το μέτρο της t-περιοχής τους και την επιφάνειά τους.

Ανισότητα Brunn-Minkowski και η ισοπεριμετρική ανισότητα

Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$A + B := \{a + b : a \in A,\ b \in B\}$$

και για κάθε $t \geqslant 0$,

$$tA = \{ta : a \in A\}.$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο $|\cdot|$ στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 1.1.1 (ανισότητα Brunn-Minkowski). *Έστω K και T δύο μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/n} \geqslant |K|^{1/n} + |T|^{1/n}.$$

Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα (κυρτά συμπαγή σύνολα με μη κενό εσωτερικό), ισότητα στην ανισότητα Brunn-Minkowski μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά (δηλαδή, αν $K = aT + x$ για κάποιον $a \geqslant 0$ και κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$).

Η ανισότητα Brunn-Minkowski εκφράζει με μια έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι *κοίλη* συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και αν $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geqslant \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}.$$

Από την τελευταία ανισότητα, σε συνδυασμό με την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geqslant |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn–Minkowski μπορούμε να δώσουμε την απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον $\mathbb{R}^n$: «ανάμεσα σε όλα τα μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ που έχουν δεδομένο όγκο α, η μπάλα όγκου α έχει ελάχιστη επιφάνεια».

Ο ορισμός της επιφάνειας που θα χρησιμοποιήσουμε είναι αυτός του Minkowski, ο οποίος βασίζεται στην έννοια της t-*περιοχής*: αν A είναι ένα μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και αν $t > 0$, η t-περιοχή του A είναι το σύνολο $A_t = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < t\}$, όπου $d(x, A) = \inf\{|x - a| : a \in A\}$ είναι η Ευκλείδεια απόσταση του x από το σύνολο A. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $t > 0$,

$$A_t = A + tD_n,$$

όπου $D_n = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < 1\}$ είναι η ανοικτή Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με τον ορισμό της επιφάνειας κατά Minkowski, αν A είναι ένα μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο όγκο, η *επιφάνεια* $\partial(A)$ του A ορίζεται από την

$$\partial(A) = \liminf_{t\to 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t}.$$

Μπορεί να ελέγξει κανείς ότι αν το A είναι κυρτό σώμα, τότε το $\liminf$ στο δεξιό μέλος είναι όριο.

Η απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τον Ευκλείδειο χώρο δίνεται από το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.2. *Αν A είναι μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο όγκο, τότε*

$$\partial(A) \geqslant n|A|^{\frac{n-1}{n}}|B_2^n|^{\frac{1}{n}}.$$

Πράγματι, παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε $t > 0$, ανάμεσα σε όλα τα μη κενά Borel υποσύνολα του Ευκλείδειου χώρου που έχουν δεδομένο όγκο, η μπάλα έχει τη «μικρότερη t-επέκταση».

Πρόταση 1.1.3. *Έστω B μια μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Αν A είναι ένα μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $|A| = |B|$, τότε $|A_t| \geqslant |B_t|$ για κάθε $t > 0$.*

Απόδειξη. Λόγω του αναλλοίωτου του όγκου ως προς μεταφορές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B = rB_2^n$ για κάποιον $r > 0$. Από την ανισότητα Brunn-Minkowski παίρνουμε

$$\begin{aligned}|A + tD_n|^{1/n} &\geqslant |A|^{1/n} + |tD_n|^{1/n} = |A|^{1/n} + t|D_n|^{1/n} = r|B_2^n|^{1/n} + t|B_2^n|^{1/n} \\ &= |(r+t)B_2^n|^{1/n} = |(r+t)D_n|^{1/n} = |B + tD_n|^{1/n},\end{aligned}$$

απ¨ όπου έπεται το ζητούμενο. ∎

Τώρα, από τον ορισμό της επιφάνειας έχουμε:

Θεώρημα 1.1.4. *Έστω A μη κενό Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο όγκο και έστω $r > 0$ τέτοιος ώστε $|A| = |rB_2^n|$. Τότε,*

$$\partial(A) \geqslant \partial(rB_2^n).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την προηγούμενη πρόταση γράφουμε

$$\begin{aligned}\partial(A) &= \liminf_{t\to 0^+} \frac{|A_t| - |A|}{t} = \liminf_{t\to 0^+} \frac{|A_t| - |rB_2^n|}{t} \geqslant \liminf_{t\to 0^+} \frac{|(rB_2^n)_t| - |rB_2^n|}{t} \\ &= \partial(rB_2^n).\end{aligned}$$

∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι αν $|A| = |rB_2^n|$ τότε $r = (|A|/|B_2^n|)^{1/n}$ και ότι

$$\partial(rB_2^n) = \lim_{t\to 0^+} \frac{|(r+t)D_n| - |rB_2^n|}{t} = \lim_{t\to 0^+} \frac{(r+t)^n - r^n}{t} |B_2^n| = nr^{n-1}|B_2^n|.$$

Αντικαθιστώντας το r βλέπουμε ότι $nr^{n-1}|B_2^n| = n|A|^{\frac{n-1}{n}}|B_2^n|^{\frac{1}{n}}$. ■

Ισοπεριμετρική ανισότητα στην σφαίρα

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα

$$S^{n-1} = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 = 1\}$$

στον $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένη με τη γεωδαισιακή μετρική ρ: η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x, y \in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x, y. Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο σ: για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma(A) := \frac{|C(A)|}{|B_2^n|},$$

όπου B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα,

$$C(A) := \{sx : x \in A \text{ και } 0 \leqslant s \leqslant 1\},$$

και $|Q|$ είναι το n-διάστατο μέτρο Lebesgue του Q. Η ρ είναι όντως μετρική στην S^{n-1} (άσκηση). Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε

$$\|x - y\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2},$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x, y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leqslant \|x-y\|_2 \leqslant \rho(x,y).$$

Η απάντηση στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για τη σφαίρα δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 1.1.5. *Έστω* $\alpha \in (0,1)$ *και έστω*

$$B(x,r) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x,y) \leqslant r\}$$

μια μπάλα στην S^{n-1} *με ακτίνα* $r > 0$ *που επιλέγεται ώστε* $\sigma(B(x,r)) = \alpha$. *Τότε, για κάθε* $A \subseteq S^{n-1}$ *με* $\sigma(A) = \alpha$ *και για κάθε* $t > 0$ *έχουμε*

$$\sigma(A_t) \geqslant \sigma\big(B(x,r)_t\big) = \sigma\big(B(x,r+t)\big).$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α και οποιοδήποτε $t > 0$ οι γεωδαισιακές μπάλες μέτρου α δίνουν τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική $\|\cdot\|_2$ και το μέτρο πιθανότητας γ_n που έχει πυκνότητα τη συνάρτηση
$$g_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-\|x\|_2^2/2}.$$
Δηλαδή, αν A είναι ένα σύνολο Borel στον $\mathbb{R}^n$, τότε
$$\gamma_n(A) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|x\|_2^2/2} dx.$$
Το γ_n είναι το n-διάστατο *μέτρο του Gauss* και ο χώρος πιθανότητας $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2, \gamma_n)$ είναι ο n-διάστατος *χώρος του Gauss*.

Το μέτρο του Gauss έχει δύο πολύ σημαντικές ιδιότητες. Από τη μία πλευρά είναι μέτρο γινόμενο, πιο συγκεκριμένα $\gamma_n = \gamma_1 \otimes \cdots \otimes \gamma_1$. Από την άλλη πλευρά είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Αν $U \in O(n)$ και A είναι ένα Borel υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε
$$\begin{aligned}\gamma_n(U(A)) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{U(A)} e^{-\|x\|_2^2/2} dx = \frac{|\det U|}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|Uy\|_2^2/2} dy \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-\|y\|_2^2/2} dy = \gamma_n(A).\end{aligned}$$
Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss είναι η εξής.

Θεώρημα 1.1.6. *Έστω $\alpha \in (0,1)$, $\theta \in S^{n-1}$, και $H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle \leqslant \lambda\}$ ένας ημίχωρος του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(H) = \alpha$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ και για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \alpha$ ισχύει*
$$\gamma_n(A_t) \geqslant \gamma_n(H_t).$$

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, μια απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.6 βασίζεται στην «παρατήρηση του Poincaré» και ουσιαστικά ανάγει το πρόβλημα στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για την σφαίρα. Η παρακάτω ανισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 1.1.6.

Θεώρημα 1.1.7. *Αν $\gamma_n(A) \geqslant 1/2$, τότε για κάθε $t > 0$*
$$1 - \gamma_n(A_t) \leqslant \frac{1}{2} \exp(-t^2/2).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.1.6 γνωρίζουμε ότι
$$1 - \gamma_n(A_t) \leqslant 1 - \gamma_n(H_t)$$
όπου H ημίχωρος μέτρου $1/2$. Αφού το γ_n είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H = \{x \in \mathbb{R}^n : x_1 \leqslant 0\}$, οπότε ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς $x_2, \ldots, x_n$ βλέπουμε ότι
$$1 - \gamma_n(H_t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-s^2/2} ds.$$
Παραγωγίζοντας δείχνουμε ότι η συνάρτηση
$$F(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-s^2/2} ds$$
είναι φθίνουσα στο $[0, +\infty)$. Από την $F(t) \leqslant F(0)$ προκύπτει το συμπέρασμα. ∎

1.2 Περιγραφή της εργασίας

Στο **Κεφάλαιο 2** αποδεικνύουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss. Συμβολίζουμε με Φ τη συνάρτηση κατανομής της τυπικής $N(0,1)$ τυχαίας μεταβλητής. Δηλαδή,

$$\Phi(x) = \gamma_1(-\infty, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Κάνουμε επίσης τη σύμβαση ότι $\Phi(-\infty) = 0$ και $\Phi(\infty) = 1$. Παρατηρήστε ότι αν

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \leqslant a\},$$

όπου $u \in S^{n-1}$, είναι ένας κλειστός ημίχωρος, τότε $\gamma_n(H) = \Phi(a)$ και $\gamma_n(H_t) = \Phi(a+t)$ για κάθε $t > 0$.

Συνεπώς, το Θεώρημα 1.1.6 μπορεί ισοδύναμα να διατυπωθεί ως εξής:

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω* A *ένα Borel σύνολο στον* $\mathbb{R}^n$ *και έστω* H *ένας ημίχωρος τέτοιος ώστε* $\gamma_n(A) = \gamma_n(H) = \Phi(a)$ *για κάποιον* $a \in \mathbb{R}$. *Τότε,*

$$\gamma_n(A_t) \geqslant \gamma_n(H_t) = \Phi(a+t)$$

για κάθε $t > 0$.

Παρουσιάζουμε τρεις αποδείξεις του Θεωρήματος 1.2.1:

(i) Η πρώτη βασίζεται στην «παρατήρηση του Poincaré» και ουσιαστικά ανάγει το πρόβλημα στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για την σφαίρα.

(ii) Η δεύτερη βασίζεται στη μέθοδο της Gaussian συμμετρικοποίησης.

(iii) Η τρίτη οφείλεται στον Bobkov και χρησιμοποιεί μια συναρτησιακή ανισότητα, η απόδειξη της οποίας, με τη σειρά της, βασίζεται σε μια ανισότητα δύο σημείων και στο κεντρικό οριακό θεώρημα, στο πνεύμα της αρχικής απόδειξης της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev από τον Gross.

Στο **Κεφάλαιο 3** παρουσιάζουμε την απόδειξη της ανισότητας Ehrhard-Borell. Ο Ehrhard έδωσε μια απόδειξη της Gaussian ισοπεριμετρικής ανισότητας χρησιμοποιώντας τη μέθοδο της Gaussian συμμετρικοποίησης που περιγράφουμε στο Κεφάλαιο 2. Με την ίδια μέθοδο απέδειξε μια ανισότητα τύπου Brunn-Minkowski, η οποία είναι ισχυρότερη από την

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant [\gamma_n(A)]^{\lambda}[\gamma_n(B)]^{1-\lambda}, \tag{1.2.1}$$

η οποία μας λέει ότι το γ_n είναι λογαριθμικά κοίλο. Το επιχείρημά του περιοριζόταν στα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1.2.2 (Ehrhard). *Έστω A, B κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{1.2.2}$$

Η ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν τα A και B είναι παράλληλοι ημίχωροι.

Ο Latała απέδειξε ότι η (1.2.2) εξακολουθεί να ισχύει αν το A είναι κυρτό και το B είναι τυχόν Borel σύνολο. Τελικά, ο Borell αφαίρεσε την υπόθεση της κυρτότητας για το A και απέδειξε την (1.2.2) σε πλήρη γενικότητα.

Θεώρημα 1.2.3 (Ehrhard-Borell). *Έστω A, B δύο σύνολα Borel στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{1.2.3}$$

Περιγράφουμε το επιχείρημα του Ehrhard και το επιχείρημα του Borell το οποίο οδηγεί σε μια γενικότερη συναρτησιακή ανισότητα από την οποία προκύπτει το Θεώρημα 1.2.3.

Στο **Κεφάλαιο 4** μελετάμε το ρυθμό μεταβολής του μέτρου Gauss συμμετρικών κυρτών σωμάτων ως προς διαστολές. Το κεντρικό αποτέλεσμα οφείλεται στους Latała και Oleszkiewicz, οι οποίοι απέδειξαν μια εικασία του L. A. Shepp.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω A ένα συμμετρικό, κλειστό και κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω P μια συμμετρική λωρίδα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\gamma_n(A) = \gamma_n(P).$$

Τότε

$$\gamma_n(tA) \geqslant \gamma_n(tP) \ \ \textit{για κάθε } t \geqslant 1$$

και

$$\gamma_n(tA) \leqslant \gamma_n(tP) \ \ \textit{για κάθε } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Για κάθε συμμετρικό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$r(A) = \sup\{r \geqslant 0 : rB_2^n \subseteq A\}.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε συμμετρική λωρίδα P η παράμετρος $r(P)$ ισούται με το μισό του πλάτους της P. Επίσης, για κάθε A έχουμε

$$r(A) = \inf\{r(P) : A \subseteq P, P \text{ συμμετρική λωρίδα στον } \mathbb{R}^n\}.$$

Το Θεώρημα 1.2.4 είναι συνέπεια του ακόλουθου.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω A ένα συμμετρικό, κυρτό και κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω P μια συμμετρική λωρίδα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\gamma_n(A) = \gamma_n(P)$. Τότε,*

$$r(A)\gamma_n^+(A) \geqslant r(P)\gamma_n^+(P).$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.5 χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Ehrhard για να αναγάγουμε το πρόβλημα σε ένα διδιάστατο πρόβλημα.

Στο **Κεφάλαιο 5** παρουσιάζουμε την πρόσφατη απόδειξη του Royen για την εικασία της θετικής συνδιακύμανσης για το μέτρο του Gauss.

Θεώρημα 1.2.6 (Royen). *Αν K, T είναι δύο συμμετρικά, κλειστά και κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\gamma_n(K \cap T) \geqslant \gamma_n(K)\,\gamma_n(T).$$

Δεδομένου ότι κάθε κλειστό συμμετρικό κυρτό σύνολο είναι αριθμήσιμη τομή συμμετρικών λωρίδων, για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.6 μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$K = \bigcap_{i=1}^{m_1} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leqslant 1\}$$

και

$$T = \bigcap_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leqslant 1\},$$

όπου $m_1, m_2 \geqslant 1$ και $v_i \in \mathbb{R}^n$. Με άλλα λόγια, αρκεί να αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω $P_1, \ldots, P_m$ συμμετρικές λωρίδες στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant m_1 < m$ έχουμε*

$$\gamma_n(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_m) \geqslant \gamma_n(P_1 \cap \cdots \cap P_{m_1})\,\gamma_n(P_{m_1+1} \cap \cdots \cap P_m).$$

Η ειδική περίπτωση $m_1 = m - 1$ είναι απλή. Μάλιστα, μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα: αν K είναι ένα συμμετρικό κλειστό κυρτό σύνολο και P μια συμμετρική λωρίδα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\gamma_n(K \cap P) \geqslant \gamma_n(K)\gamma_n(P).$$

Κατόπιν, ένα απλό επιχείρημα επαγωγής μάς δίνει το επόμενο θεώρημα, το οποίο αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Khatri και Šidák.

Θεώρημα 1.2.8 (Khatri, Šidák). *Αν $P_1, \ldots, P_m$ είναι συμμετρικές λωρίδες στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\gamma_n(P_1 \cap \cdots \cap P_m) \geqslant \gamma_n(P_1) \cdots \gamma_n(P_m).$$

Το Θεώρημα 1.2.6 είναι λοιπόν μια πολύ ισχυρότερη εκδοχή του Θεωρήματος 1.2.8.

Στο **Κεφάλαιο 6** παρουσιάζουμε το B-θεώρημα των Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey, το οποίο απαντά θετικά σε μια εικασία του Banaszczyk.

Θεώρημα 1.2.9. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση*

$$t \mapsto \gamma_n(e^t K)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Όπως θα δούμε, η ανάλυση των Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey ανάγει το πρόβλημα σε μια ανισότητα τύπου Poincaré για το μέτρο γ_K με πυκνότητα

$$d\gamma_K(x) = \frac{\mathbf{1}_K(x)e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}{\int_K e^{-\|y\|_2^2/2}\,dy},$$

το οποίο είναι ο περιορισμός του μέτρου Gauss στο K.

Στο **Κεφάλαιο 7** παρουσιάζουμε εφαρμογές γεωμετρικών ανισοτήτων για το μέτρο του Gauss σε προβλήματα «εξισορρόπησης διανυσμάτων». Το γενικό πλαίσιο είναι το εξής: για κάθε ζεύγος U, V συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την παράμετρο $\beta(U,V)$ ως τον μικρότερο $r > 0$ που ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: για κάθε $u_1, \dots, u_n \in U$ υπάρχουν πρόσημα $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_n u_n \in rV.$$

Διάφορα θεωρήματα «εξισορρόπησης διανυσμάτων», τα οποία έχουν αποδειχθεί από διάφορους συγγραφείς για πολύ διαφορετικούς σκοπούς, μπορούν να περιγραφούν ως εκτιμήσεις για την παράμετρο $\beta(U,V)$ για συγκεκριμένη επιλογή του U, του V, ή και των δύο τους.

Ο Spencer απέδειξε ότι $\beta(Q_n, Q_n) \leqslant c\sqrt{n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το ίδιο αποτέλεσμα αποδείχθηκε, ανεξάρτητα, από τον Gluskin.

Θεώρημα 1.2.10 (Spencer, Gluskin). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_\infty \leqslant 1$, μπορούμε να επιλέξουμε πρόσημα $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_n u_n\|_\infty \leqslant C\sqrt{n}.$$

Ένα πολύ γνωστό πρόβλημα του Komlós ρωτάει αν η ακολουθία $\beta(B_2^n, Q_n)$ είναι φραγμένη. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια απόδειξη του θεωρήματος του Spencer και της καλύτερης γνωστής εκτίμησης $O(\sqrt{\log n})$ για το ερώτημα του Komlós, η οποία οφείλεται στον Banaszczyk.

Θεώρημα 1.2.11 (Banaszczyk). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_2 \leqslant 1$, μπορούμε να επιλέξουμε πρόσημα $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_n u_n\|_\infty \leqslant C\sqrt{\log n}.$$

Οι αποδείξεις χρησιμοποιούν τα αποτελέσματα που παρουσιάζουμε σε προηγούμενα κεφάλαια: στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.10 χρησιμοποιείται το λήμμα του Sidák, ενώ για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.11 γίνεται πρώτα μια αναγωγή του προβλήματος σε μια νέα ανισότητα για το μέτρο Gauss, η οποία αποδεικνύεται με αναγωγή στο επίπεδο μέσω της ανισότητας του Ehrhard.

Πιο συγκεκριμένα, για κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο V στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε την παράμετρο

$$\beta(V) = \inf\left\{\rho > 0 : \forall u_1, \dots, u_n \in B_2^n \ \exists \epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\} : \sum \epsilon_i u_i \in \rho V\right\}.$$

Με βάση τον ορισμό της παραμέτρου $\beta(V)$, το πρόβλημα του Komlós παίρνει την ακόλουθη μορφή: υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\beta(Q_n) \leqslant C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Περιγράφουμε το ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα που αποδείχθηκε από τον Banaszczyk.

Θεώρημα 1.2.12 (Banaszczyk). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με $\gamma_n(K) \geqslant 1/2$. Τότε, $\beta(K) \leqslant c$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Το Θεώρημα 1.2.11 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 1.2.12. Το βασικό τεχνικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.12 είναι το επόμενο θεώρημα, στην απόδειξη του οποίου χρησιμοποιείται ουσιαστικά η ανισότητα του Ehrhard.

Θεώρημα 1.2.13. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(K) \geqslant 1/2$, και $u \in \mathbb{R}^n$ με $\|u\|_2 \leqslant 1/5$. Τότε, το $(K+u) \cup (K-u)$ περιέχει ένα κυρτό σώμα K' με $\gamma_n(K') \geqslant 1/2$.*

1.3 Κανονικές τυχαίες μεταβλητές

Η τυπική κανονική κατανομή στον $\mathbb{R}^n$ είναι το Borel μέτρο πιθανότητας γ_n που ορίζεται από την

$$\gamma_n(B) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_B \exp(-\|x\|_2^2)dx,$$

για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$, όπου $\|\cdot\|_2$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα. Μια τυχαία μεταβλητή $N : \Omega \to \mathbb{R}^n$ λέγεται τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή στον $\mathbb{R}^n$ αν $P(N \in B) = \gamma_n(B)$ για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$.

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \mathbb{R}$ λέγεται κανονικά κατανεμημένη στο $\mathbb{R}$ αν $X = \sigma N + m$ για κάποια τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή N στο $\mathbb{R}$ και κάποιους $\sigma \geqslant 0$ και $m \in \mathbb{R}$. Γράφουμε μ για την κατανομή $\mathrm{dist}(X)$ της X (δηλαδή, το μέτρο πιθανότητας στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\mu(B) = P(X \in B)$). Τότε ισχύουν τα εξής:

Πρόταση 1.3.1. *Έστω $X = \sigma N + m$ μια κανονική τ.μ. και έστω $\mu = \mathrm{dist}(X)$. Τότε, η μέση τιμή και η διασπορά της X δίνονται από τις*

$$\mathbb{E}X = m \quad \textit{και} \quad \mathbb{V}(X) = \sigma^2.$$

Η χαρακτηριστική συνάρτηση της X είναι η

$$\mu(-t) = \mathbb{E}(e^{itX}) = e^{imt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Λέμε ότι η X της Πρότασης 2.1.1 είναι μια $N(m, \sigma^2)$ τυχαία μεταβλητή. Αν $\sigma = 0$ τότε $\mu = \delta_m$ (η σημειακή μάζα στο m), ενώ αν $\sigma > 0$ έχουμε

$$d\mu(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(x-m)^2}{2\sigma^2}\right) dx,$$

απ¨ όπου βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}(f(X)) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-(x-m)^2/2\sigma^2}dx$$

για κάθε $f \in L_1(\mu)$ ή $f : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ Borel μετρήσιμη.

Έστω $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Λέμε ότι το X είναι Gaussian με μέσι $m \in \mathbb{R}^n$ αν υπάρχει $n \times n$ πίνακας A ώστε

$$\mathrm{dist}(X) = \mathrm{dist}(AN + m),$$

όπου N τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή στον $\mathbb{R}^n$. Το X λέγεται κεντραρισμένο αν $m = 0$.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω $X = (X_1, \dots, X_n) : \Omega \to \mathbb{R}^n$ ένα τυχαίο διάνυσμα. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το X είναι Gaussian και $\mathrm{dist}(X) = \mathrm{dist}(AN + m)$ για κάποιον A και κάποιο m.*

(β) *Για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \dots, t_n \in \mathbb{R}$, η τυχαία μεταβλητή*

$$Y = \sum_{i=1}^{n} t_i X_i$$

είναι κανονικά κατανεμημένη στο $\mathbb{R}$.

(γ) *Υπάρχουν $a \in \mathbb{R}^n$ και θετικά ημιορισμένη τετραγωνική μορφή Q στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}(e^{i\langle y, X\rangle}) = e^{i\langle a, y\rangle - \frac{1}{2}Q(y)}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Έστω ότι οι ισοδύναμες συνθήκες (α)-(γ) ισχύουν για το τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \dots, X_n)$. Θεωρούμε τον πίνακα $\Gamma = (\gamma_{ij})$ των συνδιακυμάνσεων

$$\gamma_{ij} = \mathbb{E}\big([X_i - \mathbb{E}X_i] \cdot [X_j - \mathbb{E}X_j]\big), \qquad i, j = 1, \dots, n.$$

Τότε, με το συμβολισμό της Πρότασης 1.3.2, ισχύουν τα εξής:

(i) $m = \mathbb{E}X$.

(ii) $\mathbb{E}(Y) = \langle t, m\rangle$, όπου $t = (t_1, \dots, t_n)$.

(iii) $\mathbb{V}(Y) = \|A^*t\|_2^2$.

(iv) $AA^* = \Gamma$.

(v) $a = m$.

(vi) $Q(y) = \langle \Gamma y, y\rangle = \mathbb{V}(\langle y, X\rangle)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1.3.3 (θεώρημα αντιστροφής για το μετασχηματισμό Fourier). *Αν* $f, \hat{f} \in L_1(\mathbb{R}^n)$, *τότε*

$$f(z) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{R}^n} \hat{f}(y) e^{i\langle y, z\rangle} dy \tag{1.3.1}$$

σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$. *Επιπλέον, η* (1.3.1) *ισχύει σε κάθε* $z \in \mathbb{R}^n$ *στο οποίο η* f *είναι συνεχής.*

Υποθέτουμε ότι το τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι κανονικά κατανεμημένο στον $\mathbb{R}^n$, και ότι $\mathbb{E}(X_i) = 0$, $i = 1, \ldots, n$. Αν ο πίνακας συνδιακυμάνσεων Γ είναι αντιστρέψιμος, τότε από το θεώρημα αντιστροφής παίρνουμε το εξής:

Πρόταση 1.3.4. *Αν* $\mathrm{dist}(X) = \mathrm{dist}(AN)$, *τότε το* X *έχει πυκνότητα που δίνεται από την*

$$g(z) = (2\pi)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(i\langle y, z\rangle - \langle \Gamma y, y\rangle/2) dy,$$

όπου $\Gamma = AA^*$ *ο πίνακας συνδιακυμάνσεων των* X_i.

Κεφάλαιο 2

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

2.1 Εισαγωγή

Το τυπικό μέτρο Gauss γ_n είναι το μέτρο Borel στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα

$$d\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} \exp(-\|x\|_2^2/2)\, dx.$$

Με τον όρο *Gaussian μέτρο* εννοούμε γενικότερα ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ που είναι γραμμική εικόνα του τυπικού μέτρου Gauss γ_n.

Για κάθε Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$, η t-περιοχή του A είναι το σύνολο

$$A_t := \{x \in \mathbb{R}^n : \|x - a\|_2 < t \text{ για κάποιο } a \in A\}.$$

Συμβολίζουμε με Φ τη συνάρτηση κατανομής της τυπικής $N(0,1)$ τυχαίας μεταβλητής. Δηλαδή,

$$\Phi(x) = \gamma_1(-\infty, x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Κάνουμε επίσης τη σύμβαση ότι $\Phi(-\infty) = 0$ και $\Phi(\infty) = 1$. Παρατηρήστε ότι αν

$$H = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle \leqslant a\},$$

όπου $u \in S^{n-1}$, είναι ένας κλειστός ημίχωρος, τότε $\gamma_n(H) = \Phi(a)$ και $\gamma_n(H_t) = \Phi(a + t)$ για κάθε $t > 0$.

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss ισχυρίζεται ότι οι ημίχωροι είναι τα ακραία σύνολα για το ισοπεριμετρικό πρόβλημα.

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω A ένα Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω H ένας ημίχωρος τέτοιος ώστε $\gamma_n(A) = \gamma_n(H) = \Phi(a)$ για κάποιον $a \in \mathbb{R}$. Τότε,*

$$\gamma_n(A_t) \geqslant \gamma_n(H_t) = \Phi(a + t)$$

για κάθε $t > 0$.

Το Θεώρημα 2.1.1 αποδείχθηκε από τους Sudakov και Tsirelson [56] (και ανεξάρτητα από τον Borell [15]) οι οποίοι χρησιμοποίησαν το ισοπεριμετρικό θεώρημα στη σφαίρα και την παρατήρηση ότι οι προβολές στον $\mathbb{R}^n$ των ομοιόμορφων μέτρων στις N-διάστατες σφαίρες ακτίνας $\sqrt{N}$ προσεγγίζουν το μέτρο του Gauss καθώς το $N \to \infty$. Εξηγούμε αρχικά, εν συντομία, αυτή την προσέγγιση.

Σταθεροποιούμε $n \geqslant 1$ και για κάθε $N \geqslant n$ συμβολίζουμε με $P_{N+1,n}$ την προβολή από τον $\mathbb{R}^{N+1}$ στον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε σ_N^* για το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην $\sqrt{N}S^N$. Η παρατήρηση του επόμενου λήμματος αποδίδεται στον Poincaré αν και φαίνεται ότι ήταν γνωστή πολύ νωρίτερα.

Λήμμα 2.1.2. *Για κάθε Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N^*(P_{N+1,n}^{-1}(A) \cap \sqrt{N}S^N) = \gamma_n(A).$$

Περιγραφή της απόδειξης. Έστω $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών. Για κάθε $k \geqslant 1$ ορίζουμε $R_k^2 = g_1^2 + \cdots + g_k^2$. Τότε, η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\frac{\sqrt{N}}{R_{N+1}}(g_1, \ldots, g_{N+1})$ είναι το σ_N^*, άρα η κατανομή του $\frac{\sqrt{N}}{R_{N+1}}(g_1, \ldots, g_n)$ είναι το $P_{N+1,n}(\sigma_N^*)$. Παρατηρούμε ότι οι $R_n^2, R_{N+1}^2 - R_n^2$ και $\frac{1}{R_n}(g_1, \ldots, g_n)$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, η R_n^2/R_{N+1}^2 είναι ανεξάρτητη από το $\frac{1}{R_n}(g_1, \ldots, g_n)$. Παρατηρούμε επίσης ότι η R_n^2/R_{N+1}^2 έχει κατανομή Βήτα με παραμέτρους $\frac{n}{2}, \frac{N+1-n}{2}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\sigma_N^*(P_{N+1,n}^{-1}(A) \cap \sqrt{N}S^N) &= \mathbb{P}\Big(\frac{\sqrt{N}}{R_{N+1}}(g_1, \ldots, g_n) \in A\Big) \\ &= \mathbb{P}\Big(\frac{\sqrt{N}R_n}{R_{N+1}}\frac{1}{R_n}(g_1, \ldots, g_n) \in A\Big).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}&\sigma_N^*(P_{N+1,n}^{-1}(A) \cap \sqrt{N}S^N) \\ &\quad = B\Big(\frac{n}{2}, \frac{N+1-n}{2}\Big)^{-1}\int_{S^{n-1}}\int_0^1 \mathbf{1}_A(\sqrt{N}tx)t^{\frac{n}{2}-1}(1-t)^{\frac{N+1-n}{2}-1}\,dt\,d\sigma(x) \\ &\quad = B\Big(\frac{n}{2}, \frac{N+1-n}{2}\Big)^{-1}\frac{2}{N^{n/2}}\int_{S^{n-1}}\int_0^{\sqrt{N}} \mathbf{1}_A(rx)r^{n-1}\Big(1-\frac{r^2}{N}\Big)^{\frac{N+1-n}{2}-1}\,du\,d\sigma(x),\end{aligned}$$

αν θέσουμε $r = \sqrt{N}t$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\lim_{N\to\infty} \sigma_N^*(P_{N+1,n}^{-1}(A) \cap \sqrt{N}S^N) = \frac{2}{2^{n/2}\Gamma(n/2)}\int_{S^{n-1}}\int_0^{\infty} \mathbf{1}_A(rx)r^{n-1}e^{-r^2/2}dr\,d\sigma(x),$$

το οποίο είναι ακριβώς το $\gamma_n(A)$. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a = \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) > -\infty$. Για κάθε $b < a$ έχουμε $\gamma_n(A) > \Phi(b) = \gamma_1((-\infty, b])$, άρα το Λήμμα 2.1.2 δείχνει ότι αν το N είναι αρκετά μεγάλο τότε

$$\sigma_N^*(P_{N+1,n}^{-1}(A) \cap \sqrt{N}S^N) > \sigma_N^*(P_{N+1,1}^{-1}((-\infty, b]) \cap \sqrt{N}S^N).$$

Έστω $t > 0$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$P_{N+1,n}^{-1}(A_t) \cap \sqrt{N}S^N \supseteq (P_{N+1,n}^{-1}(A) \cap \sqrt{N}S^N)_t,$$

όπου η t-περιοχή στο δεξιό μέλος λαμβάνεται ως προς τη γεωδαισιακή μετρική στην $\sqrt{N}S^N$. Η σημαντική παρατήρηση είναι ότι το $P_{N+1,1}^{-1}((-\infty, b]) \cap \sqrt{N}S^N$ είναι γεωδαισιακή μπάλα στην $\sqrt{N}S^N$. Συνεπώς, από τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sigma_N^*(P_{N+1,n}^{-1}(A_t) \cap \sqrt{N}S^N) &\geqslant \sigma_N^*((P_{N+1,n}^{-1}(A) \cap \sqrt{N}S^N)_t)\\ &\geqslant \sigma_N^*((P_{N+1,1}^{-1}((-\infty, b]) \cap \sqrt{N}S^N)_t).\end{aligned}$$

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$(P_{N+1,1}^{-1}((-\infty, b]) \cap \sqrt{N}S^N)_t = P_{N+1,1}^{-1}((-\infty, b + s_N]) \cap \sqrt{N}S^N,$$

όπου

$$s_N := \sqrt{N}\cos\left(\arccos(b/\sqrt{N}) - t/\sqrt{N}\right) - b \to t$$

καθώς το $N \to \infty$. Από την ανισότητα

$$\sigma_N^*(P_{N+1,n}^{-1}(A_t) \cap \sqrt{N}S^N) \geqslant \sigma_N^*(P_{N+1,1}^{-1}((-\infty, b + s_N]) \cap \sqrt{N}S^N),$$

εφαρμόζοντας πάλι το Λήμμα 2.1.2, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\gamma_n(A_t) &= \lim_{N\to\infty} \sigma_N^*(P_{N+1,n}^{-1}(A_t) \cap \sqrt{N}S^N)\\ &\geqslant \lim_{N\to\infty} \sigma_N^*(P_{N+1,1}^{-1}((-\infty, b + s_N]) \cap \sqrt{N}S^N = \gamma_1((-\infty, b + t]) = \Phi(b + t).\end{aligned}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $b < a$, έπεται ότι $\gamma_n(A_t) \geqslant \Phi(a + t)$. ∎

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε Borel σύνολο A, η επιφάνεια του A ως προς το μ ορίζεται ως εξής:

$$\mu^+(A) = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}.$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$\varphi(x) = \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} \tag{2.1.1}$$

και

$$I(t) := \varphi \circ \Phi^{-1}(t), \qquad t \in [0, 1]. \tag{2.1.2}$$

Θα δούμε ότι η Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.3. *Για κάθε Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\gamma_n^+(A) \geqslant I(\gamma_n(A)). \tag{2.1.3}$$

Επιπλέον, ισότητα ισχύει για κάθε ημίχωρο.

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι το Θεώρημα 2.1.1 συνεπάγεται το Θεώρημα 2.1.3. Έστω A ένα Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Αφού η Φ είναι αύξουσα, το Θεώρημα 2.1.1 δείχνει ότι για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(A_t)) \geqslant \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + t.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\gamma_n^+(A) &= \liminf_{t\to 0^+} \frac{\gamma_n(A_t) - \gamma_n(A)}{t} = \liminf_{t\to 0^+} \frac{\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A_t))) - \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)))}{t} \\
&\geqslant \lim_{t\to 0^+} \frac{\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + t) - \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)))}{t} = \Phi'(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))) \\
&= \varphi \circ \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) = I(\gamma_n(A)).
\end{aligned}$$

Αντίστροφα, υποθέτοντας το Θεώρημα 2.1.3 έχουμε ότι η συνάρτηση $h(t) = \Phi^{-1}(\gamma_n(A_t))$ ικανοποιεί την

$$h'(t) = \frac{\gamma_n^+(A_t)}{\varphi \circ \Phi^{-1}(\gamma_n(A_t))} = \frac{\gamma_n^+(A_t)}{I(\gamma_n(A_t))} \geqslant 1,$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s)\, ds \geqslant h(0) + t$$

για κάθε $t > 0$. Άρα, αν $\gamma_n(A) = \Phi(a)$ βλέπουμε ότι

$$\gamma_n(A_t) = \Phi(h(t)) \geqslant \Phi(h(0) + t) = \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + t) = \Phi(a + t),$$

και έπεται το Θεώρημα 2.1.1.

Στην επόμενη παράγραφο δίνουμε μια πρώτη πλήρη απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας στο χώρο του Gauss μέσω της Gaussian συμμετρικοποίησης. Η μέθοδος αυτή θα χρησιμοποιηθεί και στο Κεφάλαιο 3 για την απόδειξη της ανισότητας του Ehrhard.

Ο Bobkov έδωσε μια απόδειξη της Gaussian ισοπεριμετρικής ανισότητας, στην ισοδύναμη μορφή του Θεωρήματος 2.1.3, η οποία δεν χρησιμοποιεί τεχνικές συμμετρικοποίησης ή αναδιάταξης. Το επιχείρημά του βασίζεται σε μια ανισότητα δύο σημείων και στο κεντρικό οριακό θεώρημα, στο πνεύμα της αρχικής απόδειξης της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev από τον Gross. Στην τελευταία παράγραφο αυτού του κεφαλαίου παρουσιάζουμε λεπτομερώς την απόδειξη του Bobkov.

2.2 Gaussian συμμετρικοποίηση

Θεωρούμε το τυπικό μέτρο του Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε με γ_k την προβολή του γ_n σε κάθε k-διάστατο αφινικό υπόχωρο F του $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιούμε επίσης το συμβολισμό

$$H(u,r) := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x,u\rangle > a\}$$

για τον ημίχωρο που ορίζεται από το $u \in S^{n-1}$ και κάποιον $a \in \mathbb{R}$.

Ορισμός 2.2.1 (Gaussian συμμετρικοποίηση). Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$ και F ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-k$. Η *Gaussian* k*-συμμετρικοποίηση ως προς τον* F *στη διεύθυνση του* $u \perp F$ είναι μια απεικόνιση που σε κάθε ανοικτό ή κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί ένα σύνολο A' το οποίο ορίζεται ως εξής. Για κάθε $x \in F$:

(i) Αν $\gamma_k(A \cap (x+F^{\perp})) = 0$ τότε $A' \cap (x+F^{\perp}) = \emptyset$.

(ii) Αν $\gamma_k(A \cap (x+F^{\perp})) = 1$ τότε $A' \cap (x+F^{\perp}) = x+F^{\perp}$.

(iii) Αν $0 < \gamma_k(A \cap (x+F^{\perp})) < 1$ τότε, αν το A είναι ανοικτό,

$$A' \cap (x+F^{\perp}) = H(u,a) \cap (x+F^{\perp}),$$

ενώ αν το A είναι κλειστό,

$$A' \cap (x+F^{\perp}) = \overline{H(u,a)} \cap (x+F^{\perp}),$$

όπου ο a ορίζεται από την ισότητα

$$\gamma_k(A \cap (x+F^{\perp})) = \gamma_k(H(u,a) \cap (x+F^{\perp})).$$

Θα συμβολίζουμε το A' με $S(A)$ ή με $S_{F,u}(A)$ αν χρειάζεται να είμαστε πιο ακριβείς.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει της βασικές ιδιότητες της Gaussian συμμετρικοποίησης. Η απόδειξη δεν παρουσιάζει σημαντικές δυσκολίες.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω* $S = S_{F,u}$ *μια Gaussian* k*-συμμετρικοποίηση στον* $\mathbb{R}^n$*. Η* S *έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(α) *Είναι μονότονη: αν* $A \subseteq B$ *και τα* $S(A)$ *και* $S(B)$ *ορίζονται, τότε* $S(A) \subseteq S(B)$.

(β) *Είναι κάτω ημισυνεχής: αν* $\{A_j\}$ *είναι μια αύξουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων, τότε*

$$S\Big(\bigcup_j A_j\Big) = \bigcup_j S(A_j).$$

(γ) *Είναι συνεπής ως προς τα συμπληρώματα:*

$$S_{F,u}(A^c) = \big(S_{F,-u}(A)\big)^c.$$

(δ) *Είναι αναλλοίωτη ως προς τον* $\langle u\rangle := \mathrm{span}(\{u\})$*:*

$$S(A) + (F + \langle u\rangle)^{\perp} = S(A).$$

(ε) *Είναι ημι-αναλλοίωτη ως προς τον* F*: για κάθε* $z \in F$,

$$S(A + z) = S(A) + z.$$

Αν ο F_1 *είναι γραμμικός υπόχωρος του* F *και* $A + F_1 = A$, *τότε*

$$S(A) = S(A) + F_1.$$

(στ) *Διατηρεί το μέτρο: αν ένα σύνολο* $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *είναι αναλλοίωτο ως προς τον* $F^{\perp}$, *δηλαδή* $B + F^{\perp} = B$, *τότε*

$$\gamma_n(B \cap A) = \gamma_n(B \cap S(A)).$$

Ειδικότερα,

$$\gamma_n(A) = \gamma_n(S(A)). \tag{2.2.1}$$

Η πιο σημαντική ιδιότητα της Gaussian συμμετρικοποίησης είναι ότι «μικραίνει την επιφάνεια» ενός συνόλου. Σε αυτή την παράγραφο, για κάθε $\rho > 0$, η ρ-*περιοχή* ενός συνόλου $A \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι το σύνολο

$$A_\rho = A + B_\rho,$$

όπου $B_\rho = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leqslant \rho\}$ είναι η κλειστή Ευκλείδεια μπάλα με κέντρο το 0 και ακτίνα ρ. Παρατηρήστε ότι αν το A είναι κλειστό ή ανοικτό τότε η ρ-περιοχή A_ρ του A είναι κλειστό ή ανοικτό, αντίστοιχα, σύνολο.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω* $S = S_{F,u}$ *μια Gaussian* k*-συμμετρικοποίηση στον* $\mathbb{R}^n$*. Για κάθε κλειστό σύνολο* $A \subset \mathbb{R}^n$ *ισχύει*

$$S(A_\rho) \supseteq \big(S(A)\big)_\rho. \tag{2.2.2}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος θα γίνει σε τέσσερα βήματα.

Βήμα 1. Αποδεικνύουμε την (2.2.2) για τις συμμετρικοποιήσεις στο $\mathbb{R}$.

Αρχίζουμε με την ειδική περίπτωση όπου $n = 1$, $F = \{0\}$, $u = -1$ και A είναι ένα διάστημα στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $\alpha = \gamma_1(A)$. Τα διαστήματα που έχουν μέτρο ίσο με α σχηματίζουν μια μονοπαραμετρική οικογένεια

$$\left\{A_s = [s, \nu(s)], s \in [-\infty, \Phi^{-1}(1-\alpha)],\ \nu(s) = \Phi^{-1}(\Phi(s) + \alpha)\right\}.$$

Παρατηρήστε ότι $S_{F,u}(A) = A_{-\infty}$. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$q_\rho(s) = \gamma_1((A_s)_\rho).$$

Παραγωγίζοντας την q_ρ ως προς s παίρνουμε

$$q'_\rho(s) = g(s)\left[\frac{g(\nu(s)+\rho)}{g(\nu(s))} - \frac{g(s-\rho)}{g(s)}\right], \tag{2.2.3}$$

όπου g είναι η πυκνότητα του γ_1. Ξαναγράφουμε την (2.2.3) στη μορφή

$$q'_\rho(s) = g(s)[\theta(\nu(s)) - \theta(-s)],$$

όπου

$$\theta(s) := \frac{g(s+\rho)}{g(s)} = \exp\left(\int_s^{s+\rho} (\log g)'(r)\, dr\right).$$

Η συνάρτηση $\log g$ είναι κοίλη, άρα η θ είναι φθίνουσα. Συνεπώς, αν $\nu(s) > -s$ έχουμε $q'_\rho(s) < 0$ ενώ αν $\nu(s) < -s$ έχουμε $q'_\rho(s) > 0$. Αυτό σημαίνει ότι η q_ρ παρουσιάζει μέγιστο στο σημείο $s = -\nu(s) = \Phi^{-1}((1-\alpha)/2)$ το οποίο αντιστοιχεί στο συμμετρικό διάστημα A_s, και είναι μονότονη αριστερά και δεξιά από αυτό το σημείο. Έπεται ότι η $q_\rho(-\infty) \leqslant q_\rho(s)$ ισχύει για κάθε s. Ξαναγράφουμε αυτή την ανισότητα στη μορφή

$$\gamma_1((S(A_s))_\rho) = \gamma_1((A_{-\infty})_\rho) \leqslant \gamma_1((A_s)_\rho) = \gamma_1(S((A_s)_\rho)).$$

Αφού τα σύνολα $(S(A_s))_\rho$ και $S((A_s)_\rho)$ είναι ημιευθείες, από αυτή την ανισότητα έπεται ότι

$$(S(A_s))_\rho \subseteq S((A_s)_\rho),$$

δηλαδή έχουμε αποδείξει την (2.2.2) στην περίπτωση που το A είναι διάστημα.

Στη συνέχεια θεωρούμε μια πεπερασμένη οικογένεια $\{A_1, \dots, A_{m+1}\}$ ξένων διαστημάτων τα οποία έχουμε αριθμήσει από τα αριστερά προς τα δεξιά. Θα αποδείξουμε την (2.2.2) με επαγωγή ως προς m για το σύνολο $A = \bigcup_i A_i$ και για τις δύο συμμετρικοποιήσεις $S_+ = S_{\{0\},1}$ και $S_- = S_{\{0\},-1}$. Έχουμε ήδη εξετάσει την περίπτωση $m = 0$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα διαστήματα A_j έχουν ανά δύο κάποια απόσταση, συγκεκριμένα ότι αν $j \neq k$ τότε $(A_j)_\rho \cap (A_k)_\rho = \emptyset$. Αλλιώς, μπορούμε να πετύχουμε να ικανοποιούν αυτή την υπόθεση μικραίνοντας κάποια από αυτά. Γιατί, αν κάνουμε αυτό, το σύνολο A_ρ θα παραμείνει αμετάβλητο, οπότε το αριστερό μέλος της (2.2.2) δεν θα αλλάξει, ενώ το δεξιό μέλος θα έχει μικρύνει.

Πράγματι, αν ρ_0 είναι ο μεγαλύτερος θετικός αριθμός για τον οποίο ικανοποιείται αυτή η συνθηκη, τότε για κάθε $\rho > \rho_0$ θα έχουμε ότι το A_{ρ_0} είναι ένωση m ξένων διαστημάτων, και χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση,

$$S(A_\rho) = S((A_{\rho_0})_{\rho-\rho_0}) \supseteq (S(A_{\rho_0}))_{\rho-\rho_0} \supseteq ((S(A))_{\rho_0})_{\rho-\rho_0} = (S(A))_\rho.$$

Θα δείξουμε πρώτα ότι η «χειρότερη» περίπτωση είναι αυτή στην οποία τα ακραία διαστήματα A_1 και A_{m+1} είναι ημιευθείες. Θέτουμε $J = \bigcup_{i=2}^{m} A_i$. Τότε,

$$S_-(A) = S_-\left(\bigcup_{i=1}^{m+1} A_i\right) = S_-\left[S_-(A_1) \cup J \cup S_+(A_{m+1})\right] \tag{2.2.4}$$

και

$$S_-(A_\rho) = S_-\left[S_-((A_1)_\rho) \cup J_\rho \cup S_+((A_{m+1})_\rho)\right]. \tag{2.2.5}$$

Εφαρμόζοντας την (2.2.2) την οποία έχουμε ήδη αποδείξει για τα μεμονωμένα διαστήματα A_1 και A_{m+1}, παίρνουμε

$$S_-((A_1)_\rho) \supseteq (S_-(A_1))_\rho \quad \text{και} \quad S_+((A_{m+1})_\rho) \supseteq (S_+(A_{m+1}))_\rho.$$

Εισάγοντας αυτούς τους εγκλεισμούς στην (2.2.5) έχουμε

$$S_-(A_\rho) \supseteq S_-\left[(S_-(A_1)_\rho) \cup J_\rho \cup (S_+(A_{m+1})_\rho)\right]. \tag{2.2.6}$$

Από την (2.2.6) φαίνεται ότι όταν μεταβαίνουμε από το σύστημα των διαστημάτων $A_1, \dots, A_{m+1}$ στο σύστημα $S_-(A_1), A_2, \dots, A_m, S_+(A_{m+1})$, το δεξιό μέλος της (2.2.2) παραμένει αναλλοίωτο, ενώ το αριστερό μέλος μπορεί μόνο να μικρύνει. Μπορούμε λοιπόν να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου $A_1 = S_-(A_1)$ και $A_{m+1} = S_+(A_{m+1})$. Το πλεονέκτημα αυτής της περίπτωσης είναι ότι, τώρα, το συμπλήρωμα του συνόλου A αποτελείται από m διαστήματα, συνεπώς μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση σε αυτό. Θέτοντας λοιπόν $C = A_\rho$, θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα $(C^c)_\rho = A^c$, την οποία ξαναγράφουμε ως $((C^c)_\rho)^c = A$. Εφαρμόζοντας την (2.2.2) για το σύνολο C^c, παίρνουμε

$$S_-(A) = S_-(((C^c)_\rho)^c) = S_+((C^c)_\rho) \subseteq (S_+((C^c)_\rho))^c.$$

Στη συνέχεια, πηγαίνουμε στις ρ-περιοχές και εφαρμόζουμε την ταυτότητα

$$(((S_+(B))_\rho)^c)_\rho = S_-(B^c)$$

για το σύνολο $B = C^c$. Έτσι, παίρνουμε τον εγκλεισμό

$$(S_-(A))_\rho = S_-(C) \subseteq S_-(A_\rho).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (2.2.2) για πεπερασμένες ενώσεις διαστημάτων στο $\mathbb{R}$ (παρατηρήστε ότι δεν έχει σημασία αν θα υποθέσουμε αυτά τα διαστήματα ανοικτά ή κλειστά). Αφού κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathbb{R}$ είναι αριθμήσιμη ένωση ανοικτών διαστημάτων, από τη μονοτονία και τη συνέχεια της συμμετρικοποίησης (βλέπε Πρόταση 2.2.2 (α) και (β)) μπορούμε να συμπεράνουμε την (2.2.2) για τυχόν ανοικτό σύνολο. Αφού κάθε κλειστό σύνολο γράφεται ως τομή μιας φθίνουσας ακολουθίας ανοικτών συνόλων, η (2.2.2) επεκτείνεται στην κλάση των κλειστών συνόλων. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη στη μονοδιάστατη περίπτωση. Μάλιστα, σε αυτό το βήμα χρησιμοποιήσαμε μόνο το γεγονός ότι το γ_1 είναι συμμετρικό και λογαριθμικά κοίλο. ■

Βήμα 2. Αποδεικνύουμε την (2.2.2) για τις 1-συμμετρικοποιήσεις στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $u \in S^{n-1}$, $F = \langle u \rangle^\perp$ ένα υπερεπίπεδο, και $S = S_{F,u}$ η αντίστοιχη συμμετρικοποίηση. Θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $R_x = \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + ru,\ r \in \mathbb{R}\}$ για τις ευθείες κατά μήκος των οποίων γίνεται η συμμετρικοποίηση S. Θα επαληθεύσουμε την (2.2.2) χωριστά σε κάθε ευθεία, δηλαδή θα αποδείξουμε τον εγκλεισμό

$$S(A_\rho) \cap R_x \supseteq (S(A))_\rho \cap R_x \tag{2.2.7}$$

για κάθε $x \in F$. Μπορούμε να εκφράσουμε τα σύνολα της (2.2.7) γράφοντας

$$S(A_\rho) \cap R_x = S(A_\rho \cap R_x) \supseteq \bigcup_{y \in F} S((A \cap R_y)_\rho \cap R_x) \tag{2.2.8}$$

και

$$(S(A))_\rho \cap R_x = \bigcup_{y \in F} ((S(A \cap R_y))_\rho \cap R_x). \tag{2.2.9}$$

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι κάθε n-διάστατη μπάλα αποκόπτει ένα ευθύγραμμο τμήμα από κάθε ευθεία, και για κάθε $x \in F$ γράφουμε

$$\begin{aligned}(S(A) \cap R_y)_\rho \cap R_x &= S(A \cap R_y) + (B_\rho \cap R_{x-y}),\\ S((A \cap R_y)_\rho \cap R_x) &= S(A \cap R_y + (B_\rho \cap R_{x-y})).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την (2.2.2) για το μονοδιάστατο σύνολο $A \cap R_y + x - y$, το οποίο περιέχεται στην ευθεία R_x, παίρνουμε

$$S(A \cap R_y + (B_\rho \cap R_{x-y})) \supseteq S(A \cap R_y) + (B_\rho \cap R_{x-y}).$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω έχουμε

$$S((A \cap R_y)_\rho \cap R_x) \supseteq (S(A) \cap R_y)_\rho \cap R_x.$$

Παίρνοντας ενώσεις ως προς όλα τα y, και λαμβάνοντας υπόψιν τις (2.2.8) και (2.2.9), συμπεραίνουμε ότι ισχύει η (2.2.7). Με αυτό τον τρόπο έχουμε αποδείξει το θεώρημα για τις 1-συμμετρικοποιήσεις στον $\mathbb{R}^n$. ∎

Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε εδώ ότι, επαναλαμβάνοντας το ίδιο ουσιαστικά επιχείρημα, μπορούμε να αποδείξουμε το εξής γενικότερο αποτέλεσμα:

Λήμμα 2.2.4. *Αν ο εγκλεισμός* (2.2.2) *ισχύει για τις* k*-συμμετρικοποιήσεις στον* $\mathbb{R}^k$ *τότε ισχύει και για κάθε* k*-συμμετρικοποίηση στον* $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant k$.

Βήμα 3. Αποδεικνύουμε ότι κάθε 2-συμμετρικοποίηση προκύπτει ως όριο πεπερασμένων συνθέσεων 1-συμμετρικοποιήσεων. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι μπορούμε να επεκτείνουμε την (2.2.2) στις συνθέσεις 1-συμμετρικοποιήσεων και αυτό μας δίνει την (2.2.2) για τις 2-συμμετρικοποιήσεις.

Αρχίζουμε από την περίπτωση του $\mathbb{R}^2$. Ορίζουμε μια ακολουθία $\{e_j\}$, $j = 0, 1, 2, \dots$ μοναδιαίων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^2$ θέτοντας $e_0 := (0, 1)$ και

$$e_j := \left(\cos\left(\frac{3\pi}{2} + 2^{-j}\pi\right), \sin\left(\frac{3\pi}{2} + 2^{-j}\pi\right)\right), \qquad j \geqslant 1.$$

Παρατηρήστε ότι $e_j \to -e_0$ και ότι η γωνία που σχηματίζουν τα e_{j+1} και $-e_0$ είναι το μισό της γωνίας που σχηματίζουν τα e_j και $-e_0$. Επιπλέον, ισχύει η

$$e_j + e_0 \perp e_{j+1}. \tag{2.2.10}$$

Θεωρούμε τις 1-συμμετρικοποιήσεις $S_j := S_{e_{j+1}^{\perp}, e_j}$ και τις συνθέσεις τους $T_j := S_j \circ S_{j-1} \circ \cdots \circ S_1 \circ S_0$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $\{T_j\}$ συγκλίνει στη 2-συμμετρικοποίηση $T := S_{\{0\}, e_1}$. Βασικό ρόλο θα παίξει το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 2.2.5. *Για κάθε* $c, c' > 0$ *και* $j \geqslant 0$, *για κάθε κλειστό σύνολο* $A \subseteq \mathbb{R}^2$ *και* $x \in T_j(A)$, *έχουμε*

$$x + ce_0 + c'e_j \in T_j(A). \tag{2.2.11}$$

Παρατηρήστε ότι η (2.2.11) μας λέει ότι το σύνολο $T_j(A)$ περιέχει, μαζί με κάθε σημείο του, έναν κώνο που «παράγεται» από τις διευθύνσεις e_0 και e_j. Όταν το j είναι μεγάλο, η γωνία που σχηματίζουν τα e_0 και e_j τείνει να γίνει ίση με π, άρα το σύνολο $T_j(A)$ τείνει να γίνει ημιεπίπεδο με κάθετο διάνυσμα το e_1. Αυτό το ημιεπίπεδο αντιστοιχεί στη 2-συμμετρικοποίηση T.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Στην περίπτωση $j = 0$ ο ισχυρισμός προκύπτει άμεσα αν εφαρμόσουμε την Πρόταση 2.2.2(ε) για τη συμμετρικοποίηση S_0. Για το επαγωγικό βήμα, θεωρούμε το διάνυσμα $w_j = e_j + e_0$ και το ευθύγραμμο τμήμα

$$\Delta_{j,r} := \{y \in \mathbb{R}^2 : y = \lambda r e_0 + (1-\lambda) r e_j,\ 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\}.$$

Θα γράφουμε

$$R_d = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = dw_j + ce_{j+1},\ c \in \mathbb{R}\}$$

για τις ευθείες κατά μήκος των οποίων γίνεται η συμμετρικοποίηση S_{j+1}. Κρατώντας το d σταθερό, κατασκευάζουμε κώνους με ακμές στις διευθύνσεις των e_0 και e_j, και κορυφή κάθε σημείο του $T_j(A) \cap R_d$. Η ένωση αυτών των κώνων είναι το σύνολο

$$C_d = \{y \in \mathbb{R}^2 : y = x + ce_0 + c'e_j,\ x \in T_j(A) \cap R_d,\ c, c' \geqslant 0\}. \tag{2.2.12}$$

Θεωρούμε $t > d$. Από την (2.2.10) γνωρίζουμε ότι τα διανύσματα e_0 και e_j σχηματίζουν ίσες γωνίες με το e_{j+1}, συνεπώς

$$C_d \cap R_t = T_j(A) \cap R_d + (t-d)w_j + \Delta_{j,r}.$$

Ο αριθμός r εξαρτάται από τα j, t, d, αλλά δεν μας χρειάζεται να γνωρίζουμε την τιμή του. Μέσα στην ευθεία R_t εφαρμόζουμε την (2.2.2) για το μονοδιάστατο σύνολο $C_d \cap R_t$, και παίρνουμε

$$\begin{aligned} S_{j+1}(C_d \cap R_t) &= S_{j+1}(T_j(A) \cap R_d + (t-d)w_j + \Delta_{j,r}) \\ &= S_{j+1}(T_j(A) + \Delta_{j,t}) + (t-d)w_j \\ &\supseteq S_{j+1}(T_j(A)) + \Delta_{j,r} + (t-d)w_j \\ &= \{y \in R_t : y = x + ce_0 + c'e_j,\ x \in T_{j+1}(A) \cap R_d,\ c, c' \geqslant 0\}. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, λόγω της (2.2.12),

$$S_{j+1}(C_d \cap R_t) \subseteq S_{j+1}(T_j(A) \cap R_t) = T_{j+1}(A) \cap R_t,$$

άρα

$$T_{j+1}(A) \supseteq \{y \in \mathbb{R}^n : y = x + ce_0 + c'e_j,\ x \in T_{j+1}(A),\ c, c' \geqslant 0\}.$$

Αυτό το επιχείρημα ολοκληρώνει την απόδειξη. ∎

Το επόμενο λήμμα θα μας βοηθήσει να περάσουμε στις 2-συμμετρικοποιήσεις, περιγράφοντας τη σύγκλιση των T_j στην T.

Λήμμα 2.2.6. *Θεωρούμε την παραπάνω ακολουθία* $\{T_j\}$ *μετασχηματισμών υποσυνόλων του* $\mathbb{R}^2$. *Έστω* A *ένα κλειστό σύνολο και έστω* $R, \varepsilon > 0$. *Τότε, για* j *αρκετά μεγάλο, ισχύουν οι*

$$((T_j(A))_\varepsilon \cap B_R) \supseteq T(A) \cap B_R \tag{2.2.13}$$

και

$$((T(A))_\varepsilon \cap B_R) \supseteq T_j(A) \cap B_R. \tag{2.2.14}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με K_j τον κώνο $\{y \in \mathbb{R}^2 : y = ce_0 + c'e_j,\ c, c' \geqslant 0\}$. Από το Λήμμα 2.2.5 έχουμε ότι: αν $x \in T_j(A)$ τότε $x + K_j \subseteq T_j(A)$. Θα αποδείξουμε την (2.2.14) με απαγωγή σε άτοπο. Ας υποθέσουμε ότι για κάθε j υπάρχει κάποιο σημείο $x_j \in (T_j(A) \cap B_R) \setminus (T(A))_\varepsilon$. Τότε,

$$\gamma_2(T_j(A)) \geqslant \gamma_2(x_j + K_j) \geqslant \gamma_2\left(\bigcap_{x \in B_R \setminus (T(A))_\varepsilon} x + K_j\right).$$

Οι κώνοι K_j μεγαλώνουν και τείνουν προς το ημιεπίπεδο. Άρα,

$$\bigcup_j \bigcap_{x \in B_R \setminus (T(A))_\varepsilon} (x + K_j) \supseteq (T(A))_\varepsilon,$$

απ¨ όπου έπεται ότι

$$\liminf_j \gamma_2(T_j(A)) \geqslant \gamma_2((T(A))_\varepsilon) \geqslant \gamma_2(T(A)).$$

Από την άλλη πλευρά, από την Πρόταση 2.2.2 (ζ) έχουμε

$$\gamma_2(T_j(A)) = \gamma_2(A) = \gamma_2(T(A)).$$

Αυτή η αντίφαση αποδεικνύει την (2.2.14). Η (2.2.13) αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο. ∎

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα για κάθε 2-συμμετρικοποίηση T. Αρχικά παρατηρούμε ότι η (2.2.2) ισχύει για τον T_j. Πράγματι,

$$(T_j(A))_\rho = (S_j(T_{j-1}(A))_\rho \subseteq S_j(T_{j-1}(A_\rho)) \subseteq \cdots \subseteq S_j \circ S_{j-1} \circ \cdots \circ S_0(A_\rho = T_j(A_\rho). \tag{2.2.15}$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.2.6 για να περάσουμε από τον T_j στον T. Σταθεροποιούμε A, ρ, έναν μικρό $\varepsilon > 0$, και έναν μεγάλο $R > 0$. Αν το j είναι αρκετά μεγάλο, οι (2.2.13) και (2.2.15) μας δίνουν

$$(T(A) \cap B_R)_\rho \subseteq ((T_j(A))_\varepsilon \cap B_R)_\rho \subseteq ((T_j(A))_{\rho+\varepsilon} \cap B_{R+\rho}) \subseteq (T_j(A_{\rho+\varepsilon}) \cap B_{R+\rho}).$$

Εφαρμόζοντας την (2.2.14) για το $A_{\rho+\varepsilon}$ βλέπουμε ότι αν το j είναι αρκετά μεγάλο τότε

$$T_j(A_{\rho+\varepsilon}) \cap B_{R+\rho} \subseteq (T(A_{\rho+\varepsilon}))_\varepsilon \cap B_{R+\rho} \subseteq (T(A_{\rho+\varepsilon}))_\varepsilon.$$

Συνεπώς,

$$(T(A) \cap B_R)_\rho \subseteq (T(A_{\rho+\varepsilon}))_\varepsilon.$$

Παίρνοντας το όριο, πρώτα καθώς το $R \to \infty$ και μετά καθώς το $\varepsilon \to 0$, παίρνουμε την

$$(T(A))_\rho \subseteq T(A_\rho).$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει το θεώρημα για τις 2-συμμετρικοποιήσεις στον $\mathbb{R}^2$. Με βάση το Λήμμα 2.2.4 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι το θεώρημα ισχύει για τις 2-συμμετρικοποιήσεις στον $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. ■

Βήμα 4. Κάθε k-συμμετρικοποίηση ($k \geqslant 3$) αναπαρίσταται ως σύνθεση 2-συμμετρικοποιήσεων. Χρησιμοποιώντας αυτή την αναπαράσταση, αποδεικνύουμε την (2.2.2) στη γενική περίπτωση.

Λήμμα 2.2.7. *Έστω F_1, F_2 και F_3 ανά δύο ορθογώνιοι υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, και έστω $u \in S^{n-1}$ ένα διάνυσμα κάθετο σε όλους τους F_i. Ορίζουμε $S_1 = S_{F_1+F_2,u}$ και $S_2 = S_{F_2+F_3,u}$. Αν τα σύνολα A και $S_2(A)$ είναι κλειστά, τότε*

$$(S_1 \circ S_2)(A) = S_{F_2,u}(A).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $F = (F_1 + F_2 + F_3 + \langle u \rangle)^\perp$. Από την Πρόταση 2.2.2 (δ) για κάθε κλειστό σύνολο A έχουμε τις ισότητες

$$\begin{aligned} S_1(A) &= S_1(A) + (F_1 + F_2 + \langle u \rangle)^\perp = S_1(A) + F_3 + F, \\ S_2(A) &= S_2(A) + F_1 + F. \end{aligned}$$

Από την $F_1 \subseteq F_1 + F_2$ και από την Πρόταση 2.2.2 (στ) βλέπουμε ότι

$$(S_1 \circ S_2)(A) = (S_1 \circ S_2)(A) + F_1.$$

Χρησιμοποιώντας όλες τις προηγούμενες ισότητες παίρνουμε

$$\begin{aligned} (S_1 \circ S_2)(A) &= (S_1 \circ S_2)(A) + F_3 + F = ((S_1 \circ S_2)(A) + F_1) + F_3 + F \\ &= (S_1 \circ S_2)(A) + (F_1 + F_3 + F) = (S_1 \circ S_2)(A) + (F_2 + \langle u \rangle)^\perp. \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 2.2.2 (δ) ισχύει και η ισότητα

$$S_{F_2,u}(A) = S_{F_2,u}(A) + (F_2 + \langle u \rangle)^{\perp}.$$

Επιπλέον, τα σύνολα $(S_1 \circ S_2)(A)$ και $S_{F_2,u}(A)$ είναι αναλλοίωτα ως προς μεταφορές στη διεύθυνση του u (βλέπε Πρόταση 2.2.2 (ε)). Άρα, καθένα από αυτά αποκόπτει ημίχωρο άπό κάθε αφινικό υπόχωρο $R_x = x + F_2^{\perp}$, $x \in F_2$. Παρατηρούμε ότι, επειδή η συμμετρικοποίηση διατηρεί το μέτρο,

$$\gamma_k(S_{F_2,u}(A) \cap R_x) = \gamma_k(A \cap R_x) = \gamma_k(S_1(A) \cap R_x) = \gamma_k((S_1 \circ S_2)(A) \cap R_x),$$

όπου $k = \dim(F_2^{\perp})$. Αφού τα σύνολα αυτά είναι ημίχωροι, αναγκαστικά ισχύει ότι

$$(S_1 \circ S_2)(A) \cap R_x = S_{F_2,u}(A) \cap R_x.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $x \in F_2^{\perp}$, τελικά έχουμε $(S_1 \circ S_2)(A) = S_{F_2,u}(A)$.

Παρατηρήστε ότι ο ισχυρισμός του λήμματος μας δίνει ότι οι συμμετρικοποιήσεις S_1 και S_2 αντιμετατίθενται. ∎

Λήμμα 2.2.8. *Έστω $m \geqslant 3$, $k \geqslant 2$ και $T = S_{F,u}$ τυχούσα k-συμμετρικοποίηση στον $\mathbb{R}^m$. Μπορούμε να βρούμε 2-συμμετρικοποιήσεις $T_1, T_2, \dots, T_{k-1}$ τέτοιες ώστε*

$$T = T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_{k-1}. \tag{2.2.16}$$

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα $v \in (F+\langle u \rangle)^{\perp}$. Θεωρούμε τους υποχώρους $F_3 = (F + \langle u, v \rangle)^{\perp}$, $G_2 = F$ και $F_1 = \langle v \rangle$, και εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.2.7 για τις συμμετρικοποιήσεις $S_1 = S_{F_1+F_2,u} = S_{F+\langle v \rangle,u}$ και $S_2 = S_{F_2+F_3,u} = S_{\langle u,v \rangle^{\perp},u}$. Παρατηρήστε ότι η S_2 είναι 2-συμμετρικοποίηση, συνεπώς η (2.2.2) ισχύει γι¨ αυτήν, δηλαδή μετασχηματίζει κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα. Τότε, από το Λήμμα 2.2.7 έχουμε

$$S_1 \circ S_2(A) = S_{F_2,u}(A) = T(A)$$

για κάθε κλειστό σύνολο A. Θέτουμε $T_{k-1} = S_2$ και εφαρμόζουμε το ίδιο επιχείρημα για την $(k-1)$-συμμετρικοποίηση S_1. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, σε κάθε βήμα απομονώνουμε ένα νέο όρο T_j και μειώνουμε τη διάσταση της συμμετρικοποίησης που γράφεται ως σύνθεση. Συνεχίζουμε μέχρι να φτάσουμε σε μια 2-συμμετρικοποίηση. Μετά από $k-2$ βήματα παίρνουμε μια αναπαράσταση της μορφής (2.2.16). ∎

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.3. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, μένει να εξετάσουμε συμμετρικοποιήσεις τάξης μεγαλύτερης από 2. Θεωρούμε μια l-συμμετρικοποίηση T η οποία αναπαρίσταται στη μορφή (2.2.16) και εφαρμόζοντας την (2.2.2) για τις 2-συμμετρικοποιήσεις T_j έχουμε

$$\begin{aligned} T(A_\rho) &= T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_{k-1}(A_\rho) \supseteq T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_{k-2}((T_{k-1}(A)))\rho) \\ &\cdots \supseteq T_1((T_2 \circ \cdots \circ T_{k-1}(A))_\rho) \supseteq (T_1 \circ T_2 \circ \cdots \circ T_{k-1}(A))_\rho = (T(A))_\rho \end{aligned}$$

για κάθε κλειστό σύνολο A. ∎

2.3 Η ισοπεριμετρική ανισότητα

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2.3 μπορούμε να αποδείξουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω* $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ *και* $\rho > 0$. *Τότε,*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(A_\rho)) \geqslant \Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + \rho. \tag{2.3.1}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι το A είναι κλειστό. Θεωρούμε τυχούσα n-συμμετρικοποίηση S. Από την (2.2.2) έχουμε

$$\gamma_n(S(A_\rho)) \geqslant \gamma_n((S(A))_\rho). \tag{2.3.2}$$

Από την (2.2.1) έχουμε $\gamma_n(S(A_\rho)) = \gamma_n(A_\rho)$. Από την άλλη πλευρά, τα σύνολα $S(A)$ και $S(A_\rho)$ είναι ημίχωροι. Τότε, από τον ορισμό της συνάρτησης Φ και του γ_n, έχουμε

$$\gamma_n((S(A))_\rho) = \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(S(A)) + \rho) = \Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + \rho).$$

Αντικαθιστώντας αυτή τη σχέση στην (2.3.2) παίρνουμε την (2.3.1). Έχοντας αποδείξει τον ισχυρισμό του θεωρήματος για κλειστά σύνολα, μπορούμε να τον αποδείξουμε για οποιοδήποτε Borel σύνολο. ■

2.4 Η απόδειξη του Bobkov

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε την απόδειξη του Bobkov για την ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss.

Θεώρημα 2.4.1. *Για κάθε Borel σύνολο* $A \subset \mathbb{R}^n$,

$$\gamma_n^+(A) \geqslant I(\gamma_n(A)),$$

όπου

$$\gamma_n^+(A) = \liminf_{r\to 0} \frac{\gamma_n(A_r) - \gamma(A)}{r}$$

είναι το μέτρο της επιφάνειας του A *κατά Minkowski και* $A_r = \{x \in \mathbb{R}^n : \ d(x, A) < r\}$, *η* r*-γειτονιά του* A.

Ο Bobkov απέδειξε το Θεώρημα 2.4.1 μέσω της ακόλουθης συναρτησιακής ανισότητας.

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω* $I = \varphi \circ \Phi^{-1}$. *Τότε για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$,

$$I(\mathbb{E}(f)) \leqslant \mathbb{E}\left(\sqrt{I(f)^2 + \|\nabla f\|_2^2}\right),$$

όπου $\mathbb{E}(f)$ *είναι η μέση τιμή της συνάρτησης* f *ως προς το μέτρο Gauss* γ_n.

Ακριβέστερα, για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1 αρκεί το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 2.4.2, το οποίο προκυτει άμεσα από την ανισότητα $\sqrt{a^2+b^2} \leqslant |a| + |b|$:

Πόρισμα 2.4.3. *Για κάθε τοπικά Lipschitz συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *ισχύει*

$$I(\mathbb{E}(f)) - \mathbb{E}(I(f)) \leqslant \mathbb{E}(\|\nabla f\|_2).$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.1. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f_r(x) = \max\left\{1 - \frac{1}{r}\mathrm{dist}(x, A_r), 0\right\}.$$

Για την f_r ισχύει ότι $\mathbf{1}_{A_r} \leqslant f_r \leqslant \mathbf{1}_{A_{2r}}$, οπότε

$$\gamma_n(A_r) \leqslant \mathbb{E}(f_r) \leqslant \gamma_n(A_{2r}).$$

Επίσης $I(f_r) = 0$ στο $A_r \cup \overline{A_{2r}}^c$, αφού $f_r(x) = 1$ στο A_r και $f_r(x) = 0$ στο $\overline{A_{2r}}^c$. Έτσι,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(I(f_r)) &= \int_{A_{2r}\setminus A_r} I(f_r)\, d\gamma_n \leqslant \int_{A_{2r}\setminus A_r} d\gamma_n \\ &= \gamma_n(A_{2r}) - \gamma_n(A_r)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\|\nabla f_r\|_2) &= \int_{A_{2r}\setminus A_r} \|\nabla f_r\|_2\, d\gamma_n \leqslant \frac{1}{r}\left(\gamma_n(A_{2r}) - \gamma_n(A_r)\right) \\ &= 2\frac{\gamma_n(A_{2r}) - \gamma_n(A_r)}{2r} - \frac{\gamma_n(A_r) - \gamma_n(A)}{r},\end{aligned}$$

αφού $\|\nabla f_r\|_2 \leqslant 1/r$ στο A_{2r} και $\|\nabla f_r\|_2 = 0$ στο A_r. Εφαρμόζοντας λοιπόν την ανισότητα

$$I(\mathbb{E}(f)) - \mathbb{E}(I(f)) \leqslant \mathbb{E}(\|\nabla f\|_2)$$

για την f_r και αφήνοντας το $r \to 0$, παίρνουμε

$$I(\gamma_n(A)) - 0 \leqslant 2\gamma_n^+(A) - \gamma_n^+(A) = \gamma_n^+(A).$$

■

Ο Bobkov αποδεικνύει πρώτα ένα διακριτό ανάλογο του Θεωρήματος 2.4.1. Συμβολίζουμε με E_2^n τον διακριτό κύβο, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n. Για κάθε $f : E_2^n \to \mathbb{R}$ το (διακριτό) ανάδελτα της f ορίζεται ως εξής:

$$\nabla f(x) = \left(\frac{f(x) - f(s_1(x))}{2}, \dots, \frac{f(x) - f(s_n(x))}{2}\right),$$

όπου $s_i(x) = (x_1, \dots, -x_i, \dots, x_n)$, $i = 1, \dots, n$ είναι τα n γειτονικά σημεία του x. Το μέτρο του $\nabla f(x)$ ορίζεται φυσιολογικά:

$$\|\nabla f(x)\|_2 = \frac{1}{2}\sqrt{\sum_{i=1}^{n} |f(x) - f(s_i(x))|^2}.$$

Θεωρούμε επίσης την οικογένεια $\mathcal{J}$ των συναρτήσεων $J : [0,1] \to [0,\infty)$ που ικανοποιούν τα εξής:

(i) $J(0) = J(1) = 0$.

(ii) Για κάθε $a, b \in [0,1]$,

$$J\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{J(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{J(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2}. \tag{2.4.1}$$

Θα αποδείξουμε ότι οι συναρτήσεις της κλάσης $\mathcal{J}$ ικανοποιούν το εξής:

Θεώρημα 2.4.4 (Bobkov). *Έστω $J \in \mathcal{J}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $f : E_2^n \to [0,1]$ ισχύει*

$$J(\mathbb{E}(f)) \leqslant \mathbb{E}\left(\sqrt{J(f)^2 + \|\nabla f\|_2^2}\right).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή ως προς n. Στο λήμμα που ακολουθεί επαληθεύουμε την περίπτωση $n = 1$.

Λήμμα 2.4.5. *Έστω $J \in \mathcal{J}$. Για κάθε $f : E_2^1 := \{-1, 1\} \to [0,1]$ ισχύει*

$$J(\mathbb{E}(f)) \leqslant \mathbb{E}\left(\sqrt{J(f)^2 + \|\nabla f\|_2^2}\right).$$

Απόδειξη. Θέτουμε $a = f(-1)$ και $b = f(1)$. Τότε, $a, b \in [0,1]$ και $\mathbb{E}(f) = \frac{a+b}{2}$. Επίσης,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\sqrt{J(f)^2 + \|\nabla f\|_2^2}\right) &= \frac{1}{2}\sqrt{J(f(-1))^2 + \|\nabla f(-1)\|_2^2} + \frac{1}{2}\sqrt{J(f(1))^2 + \|\nabla f(1)\|_2^2} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{J(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{J(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2},\end{aligned}$$

διότι $\|\nabla f(-1)\|_2 = \|\nabla f(1)\|_2 = \left|\frac{a-b}{2}\right|$. Από την υπόθεση ότι $J \in \mathcal{J}$ έπεται το λήμμα. ∎

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.4 μένει να αιτιολογήσουμε το επαγωγικό βήμα. Έστω $f : E_2^{n+1} \to [0,1]$. Γράφοντας το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_{n+1} στον E_2^{n+1} στη μορφή $\mu_{n+1} = \mu_n \otimes \mu_1$, έχουμε

$$\mathbb{E}_{n+1}(f) = \frac{\mathbb{E}_n(f_0) + \mathbb{E}_n(f_1)}{2},$$

όπου οι $f_0, f_1 : E_2^n \to [0,1]$ ορίζονται ως εξής:

$$f_0(x) = f(x,1) \quad \text{και} \quad f_1(x) = f(x,-1).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|\nabla f(x,1)\|_2^2 &= \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} |f(x,1) - f(s_i(x),1)|^2 + \frac{1}{4}|f(x,1) - f(x,-1)|^2 \\ &= \|\nabla f_0(x)\|_2^2 + \left|\frac{f_0(x) - f_1(x)}{2}\right|^2\end{aligned}$$

και όμοια,

$$\|\nabla f(x,-1)\|_2^2 = \|\nabla f_1(x)\|_2^2 + \left|\frac{f_0(x)-f_1(x)}{2}\right|^2.$$

Άρα,

$$\mathbb{E}_{n+1} := \mathbb{E}_{n+1}\left(\sqrt{J(f)^2+\|\nabla f\|_2^2}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}_n\left(\sqrt{J(f_0)^2+\|\nabla f_0\|_2^2+\left|\frac{f_0-f_1}{2}\right|^2}\right)$$
$$+\frac{1}{2}\mathbb{E}_n\left(\sqrt{J(f_1)^2+\|\nabla f_1\|_2^2+\left|\frac{f_0-f_1}{2}\right|^2}\right).$$

Θέτουμε

$$u_0 = \left(J(f_0)^2+\|\nabla f_0\|_2^2\right)^{1/2}, \quad u_1 = \left(J(f_1)^2+\|\nabla f_1\|_2^2\right)^{1/2} \quad \text{και} \quad v = \frac{f_0-f_1}{2},$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\int \sqrt{u^2+v^2} \geqslant \sqrt{\left(\int u\right)^2 + \left(\int v\right)^2}$$

γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{n+1} &= \frac{1}{2}\mathbb{E}_n\left(\sqrt{u_0^2+v^2}\right) + \frac{1}{2}\mathbb{E}_n\left(\sqrt{u_1^2+v^2}\right)\\ &\geqslant \frac{1}{2}\sqrt{(\mathbb{E}_n(u_0))^2+(\mathbb{E}_n(v))^2)} + \frac{1}{2}\sqrt{(\mathbb{E}_n(u_1))^2+(\mathbb{E}_n(v))^2}.\end{aligned}$$

Από την επαγωγική υπόθεση,

$$\mathbb{E}_n(u_0) = \mathbb{E}_n\sqrt{J(f_0)^2+\|\nabla f_0\|_2^2} \geqslant J(\mathbb{E}_n(f_0))$$

και

$$\mathbb{E}_n(u_1) = \mathbb{E}_n\sqrt{J(f_1)^2+\|\nabla f_1\|_2^2} \geqslant J(\mathbb{E}_n(f_1)).$$

Επίσης,

$$\mathbb{E}_n(v) = \frac{\mathbb{E}_n(f_0)-\mathbb{E}_n(f_1)}{2}.$$

Αν λοιπόν θέσουμε $a=\mathbb{E}_n(f_0)$ και $b=\mathbb{E}_n(f_1)$, τότε

$$\mathbb{E}_{n+1} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{J(a)^2+\left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{J(b)^2+\left|\frac{a-b}{2}\right|^2} \geqslant J\left(\frac{a+b}{2}\right),$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε την (2.4.1), δηλαδή την χαρακτηριστική ιδιότητα της κλάσης $\mathcal{J}$. Έτσι, προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}_{n+1} := \mathbb{E}_{n+1}\left(\sqrt{J(f)^2+\|\nabla f\|_2^2}\right) \geqslant J(\mathbb{E}_{n+1}(f))$$

διότι $\mathbb{E}_{n+1}(f) = \frac{a+b}{2}$. ∎

Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε την ανισότητα του Θεωρήματος 2.4.4 για τη συνάρτηση $I = \varphi \circ \Phi^{-1}$. Στην πρόταση που ακολουθεί ελέγχουμε ότι $I \in \mathcal{J}$.

Πρόταση 2.4.6. *Η συνάρτηση* $I = \varphi \circ \Phi^{-1} : [0,1] \to [0,\infty)$ *ικανοποιεί την ανισότητα*

$$I\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{I(a)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2} + \frac{1}{2}\sqrt{I(b)^2 + \left|\frac{a-b}{2}\right|^2},$$

για κάθε $a, b \in [0,1]$. *Δηλαδή,* $I \in \mathcal{J}$.

Απόδειξη. Έστω $c \in (0,1)$. Θέτουμε $\Delta(c) = \big(-\min(c, 1-c), \min(c, 1-c)\big)$ και ορίζουμε $g_c : \Delta(c) \to \mathbb{R}$ με $g_c(x) = I(c+x)^2 + x^2$. Αν $c = \frac{a+b}{2}$ και $x = \frac{a-b}{2}$, και αν θεωρήσουμε την $g := g_{\frac{a+b}{2}}$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$2\sqrt{g(0)} \leqslant \sqrt{g(x)} + \sqrt{g(-x)}.$$

Παρατηρήστε ότι $x \in \Delta(c)$, διότι

$$\left|\frac{a-b}{2}\right| \leqslant \min\left\{\frac{a+b}{2}, 1 - \frac{a+b}{2}\right\}$$

για κάθε $a, b \in (0,1)$. Υψώνοντας στο τετράγωνο τη ζητούμενη ανισότητα παίρνουμε

$$4g(0) - \big(g(x) + g(-x)\big) \leqslant 2\sqrt{g(x)}\sqrt{g(-x)}$$

ή, ισοδύναμα,

$$16g(0)^2 - 8g(0)\big(g(x) + g(-x)\big) + \big(g(x) + g(-x)\big)^2 \leqslant 4g(x)g(-x)$$

ή, ισοδύναμα,

$$16g(0)^2 + \big(g(x) - g(-x)\big)^2 \leqslant 8g(0)\big(g(x) + g(-x)\big).$$

Όμως, $g(0) = I(c)^2$ και αν θέσουμε $h(x) = g(x) - g(0) = I(c+x)^2 + x^2 - I(c)^2$, τότε μπορούμε να ξαναγράψουμε τη ζητούμενη ανισότητα στη μορφή

$$16I(c)^4 + \big(h(x) - h(-x)\big)^2 \leqslant 8I(c)^2\big(h(x) + h(-x) + 2I(c)^2\big),$$

δηλαδή ζητάμε την

$$\big(h(x) - h(-x)\big)^2 \leqslant 8I(c)^2\big(h(x) + h(-x)\big). \tag{2.4.2}$$

Λήμμα 2.4.7. *Για τη συνάρτηση* I *ισχύουν τα ακόλουθα:* (α) $I \cdot I'' = -1$ *και* (β) *η* $(I')^2$ *είναι κυρτή.*

Απόδειξη. (α) Αποδεικνύεται εύκολα με πράξεις αν παρατηρήσουμε ότι $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$.
(β) Είναι $((I')^2)' = 2I'I'' = -2I'/I$, οπότε

$$((I')^2)'' = -2\frac{I \cdot I'' - (I')^2}{I^2} = 2\,\frac{1 + (I')^2}{I^2} \geqslant 0.$$

■

Λήμμα 2.4.8. *Η συνάρτηση* $R(x) = h(x) + h(-x) - 2I'(c)^2x^2$ *είναι κυρτή στο* $\Delta(c)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$R'(x) = 2I(c+x)I'(c+x) - 2I(c-x)I'(c-x) + 4x - 4I'(c)^2x$$

και χρησιμοποιώντας την $I \cdot I'' = -1$ βλέπουμε ότι η

$$R''(x) = 4\left[\frac{I'(c+x)^2 + I'(c-x)^2}{2} - I'(c)^2\right]$$

είναι μη αρνητική αφού η $(I')^2$ είναι κυρτή και $c = \frac{c+x}{2} + \frac{c-x}{2}$, οπότε $I'(c)^2 \leqslant I'(\frac{c+x}{2})^2 + I'(\frac{c-x}{2})^2$. ■

Εφόσον η R είναι άρτια, από το προηγούμενο λήμμα έπεται ότι $R(x) \geqslant R(0)$ για κάθε $x \in \Delta(c)$, δηλαδή

$$h(x) + h(-x) \geqslant 2I'(c)^2x^2.$$

Έτσι, η (2.4.2) θα προκύψει από την ισχυρότερη ανισότητα

$$\big(h(x) - h(-x)\big)^2 \leqslant 16I(c)^2I'(c)^2x^2. \tag{2.4.3}$$

Με άλλα λόγια, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left|\frac{h(x) - h(-x)}{x}\right| \leqslant 4I(c)|I'(c)|.$$

Η I είναι συμμετρική γύρω από το 1/2. Πράγματι, αν $\Phi^{-1}(1/2 + c) = y$ τότε $\Phi(y) = 1/2 + c$ και $1 - \Phi(y) = \Phi(-y) = 1/2 - c$, οπότε $y = -\Phi(1/2 - c)$. Άρα

$$I\left(\frac{1}{2} + c\right) = \varphi(y) = I\left(\frac{1}{2} - c\right) \quad \text{και} \quad I(1-c) = I(c),$$

οπότε $|I'(1-c)| = |I'(c)|$ και

$$|I((1-c)+x)^2 - I((1-c)-x)^2| = |I(c-x)^2 - I(c+x)^2|.$$

Υποθέτουμε ότι $0 < c \leqslant 1/2$ λόγω συμμετρίας, και ότι $x > 0$ αφού η $\frac{h(x)-h(-x)}{x}$ είναι άρτια. Επίσης, επειδή η I είναι αύξουσα στο $[0, 1/2]$ και φθίνουσα στο $[1/2, 1]$ έχουμε ότι $I(c+x) \geqslant I(c-x)$ αν και μόνο αν $1 - (c+x) \geqslant c - x$, δηλαδή, αν και μόνο αν $0 < c \leqslant \frac{1}{2}$. Άρα τελικά αρκεί να δείξουμε ότι

$$\frac{I(c+x)^2 - I(c-x)^2}{x} \leqslant 4I(c)I'(c)$$

όταν $0 < x < c \leqslant \frac{1}{2}$. Θέτουμε $u(x) = I(c+x)^2 - I(c-x)^2$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.4.7 έχουμε ότι $u''(x) = 2[I'(c+x)^2 - I'(c-x)^2] \leqslant 0$, άρα η u είναι κοίλη στο $(0, c]$. Ισοδύναμα η συνάρτηση

$$\frac{u(x)}{x} = \int_0^1 u'(xt)\, dt$$

είναι φθίνουσα στο $(0,c]$, οπότε

$$\frac{u(x)}{x} \leqslant \lim_{s\to 0^+} \frac{u(s)}{s} = 4I'(c)I(c)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. ∎

Χρησιμοποιώντας τη συναρτησιακή ανισότητα του Θεωρήματος 2.4.4 και το κεντρικό οριακό θεώρημα, μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.4.2. Αρκεί να αποδείξουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.4.9. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ μια C^2-συνάρτηση με φραγμένες μερικές παραγώγους πρώτης και δεύτερης τάξης. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_k : \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n = \mathbb{R}^{nk} \to [0,1]$ με*

$$f_k(x_1,\dots,x_k) = f\left(\frac{x_1+\cdots+x_k}{\sqrt{k}}\right).$$

Τότε,

$$\int_{E_2^{nk}} \sqrt{I(f_k)+\|\nabla f_k\|_2^2}\, d\mu_{nk} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I(f)^2+\|\nabla f\|_2^2}\, d\gamma_n,$$

όταν $k\to\infty$.

Απόδειξη. Για κάθε $k\in\mathbb{N}$ θεωρούμε την $g_k : E_2^{nk} \to \mathbb{R}^n$ με $g(x_1,\dots,x_k) = \frac{1}{\sqrt{k}}(x_1+\cdots+x_k)$ και το επαγόμενο μέτρο τ_k στην Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή,

$$\tau_k(A) = \mu_{nk}(g_k^{-1}(A))$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\int_{E_2^{nk}} f_k\, d\mu_{nk} = \int_{\mathbb{R}^n} f\, d\tau_k.$$

Ισχυρισμός 2.4.10. *Για κάθε Borel υποσύνολο B του $\mathbb{R}^n$,*

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k(B) = \gamma_n(B).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Έχουμε

$$\tau_k(B) = \mu_{nk}\left(\left\{(x_1,\dots,x_k)\in E_2^{nk} : \frac{x_1+\cdots+x_k}{\sqrt{k}} \in A\right\}\right).$$

Αν $B = (-\infty,a_1]\times\cdots\times(-\infty,a_n]$, τότε

$$\begin{aligned}\tau_k(B) &= \mu_{nk}\left(\bigcap_{j=1}^n \left\{(x_1,\dots,x_k)\in E_2^{nk} : \frac{(x_1+\cdots+x_k)_j}{\sqrt{k}} \leqslant a_j\right\}\right)\\ &= \prod_{j=1}^n \mu_k\left(\frac{x_{1j}+\cdots+x_{kj}}{\sqrt{k}} \leqslant a_j\right).\end{aligned}$$

Από το κεντρικό οριακό θεώρημα,

$$\lim_{k\to\infty} \mu_k \left(\frac{x_{1j} + \cdots + x_{kj}}{\sqrt{k}} \leqslant a_j \right) = \gamma_1((-\infty, a_j]).$$

Άρα,

$$\lim_{k\to\infty} \tau_k(B) = \prod_{j=1}^{n} \gamma_1((-\infty, a_j]) = \gamma_n(B).$$

Αφού η Borel σ-άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$ παράγεται από την οικογένεια των συνόλων της μορφής $B = (-\infty, a_1] \times \cdots \times (-\infty, a_n]$, έπεται ο ισχυρισμός. ∎

Έστω τώρα $(x_1, \dots, x_k) \in E_2^{nk}$. Συμβολίζουμε με $s_j(x_i)$ το διάνυσμα που διαφέρει (κατά το πρόσημο) από το x_i στην j-θέση, και θέτουμε

$$u = \frac{x_1 + \cdots + x_k}{\sqrt{k}} \quad \text{και} \quad v_{ij} = \frac{x_1 + \cdots + s_j(x_i) + \cdots + x_k}{\sqrt{k}}.$$

Από το θεώρημα Taylor, χρησιμοποιώντας και την υπόθεση ότι η f έχει φραγμένες μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης, παίρνουμε

$$f(v_{ij}) = f(u) + \partial_j f(u) \frac{2}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right)$$

για κάθε $i \leqslant k$ και $j \leqslant n$. Αν τώρα θέσουμε $\gamma_j = \partial_j f(u)$, $j = 1, \dots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\nabla f_k(x_1, \dots, x_k)\|_2^2 &= \frac{1}{4} \sum_{i,j} |f(v_{ij}) - f(u)|^2 \\
&= \frac{1}{4} \sum_{i,j} \left| \frac{2\gamma_j}{\sqrt{k}} + O\left(\frac{1}{k}\right) \right|^2 \\
&= \frac{k}{4} \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{4}{k}\gamma_j^2 + \gamma_j O(1/k^{3/2}) + O(1/k^2) \right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \gamma_j^2 + O(1/\sqrt{k}) \sum_{j=1}^{n} \gamma_j + O(1/k) \\
&= \|\nabla f(u)\|_2^2 + O(1/\sqrt{k}) \\
&= \left\| \nabla f\left(\frac{x_1 + \cdots + x_k}{\sqrt{k}} \right) \right\|_2^2 + O(1/\sqrt{k}),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η f έχει φραγμένες μερικές παραγώγους πρώτης τάξης. Από την παραπάνω ανισότητα έπεται ότι

$$\int_{E_2^{nk}} \sqrt{I(f_k) + \|\nabla f_k\|_2^2}\, d\mu_{nk} \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \sqrt{I(f)^2 + \|\nabla f\|_2^2}\, d\gamma_n,$$

καθώς το $k \to \infty$. ∎

Χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\mathbb{E}_{\mu_{nk}}(f_k) \to \mathbb{E}_{\gamma_n}(f)$ όταν $k \to \infty$, από την Πρόταση 2.4.9 παίρνουμε το Θεώρημα 2.4.2.

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με την παρατήρηση ότι η συνάρτηση I είναι η μεγαλύτερη συνάρτηση της κλάσης $\mathcal{J}$.

Πρόταση 2.4.11. *Η συνάρτηση* $I = \phi \circ \Phi^{-1} : [0,1] \to [0,\infty)$ *είναι η μεγαλύτερη ανάμεσα σε όλες τις συναρτήσεις της οικογένειας* $\mathcal{J}$*: αν* $J \in \mathcal{J}$ *τότε* $J(p) \leqslant I(p)$ *για κάθε* $p \in [0,1]$.

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η I είναι η μεγαλύτερη συνάρτηση στην κλάση $\mathcal{J}$ προκύπτει από το γεγονός ότι αν A είναι ημίχωρος, τότε $\gamma_n^+(A) = I(\gamma_n(A))$. Πράγματι, αν $0 < p < 1$, τότε υπάρχει $a \in (-\infty, +\infty)$ τέτοιο ώστε $\Phi(a) = p$. Τότε, επιλέγοντας τον ημίχωρο $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 \leqslant a\}$ έχουμε ότι $p = \Phi(a) = \gamma_n(A)$, οπότε

$$\begin{aligned}\gamma_n^+(A) &= \lim_{r\to 0}\frac{\gamma_n(A_r)-\gamma_n(A)}{r} = \lim_{r\to 0}\frac{\Phi(a+r)-\Phi(a)}{r}\\ &= \varphi(a) = \varphi(\Phi^{-1}(p))\\ &= \varphi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))) = I(\gamma_n(A)).\end{aligned}$$

Έπεται ότι αν θεωρήσουμε μια συνάρτηση $J \in \mathcal{J}$ και τυχόν $p \in [0,1]$, επιλέγοντας ημίχωρο A με $\gamma_n(A) = p$ θα έχουμε

$$J(p) = J(\gamma_n(A)) \leqslant \gamma_n^+(A) = I(p).$$

Χρησιμοποιούμε εδώ το γεγονός ότι, όπως φαίνεται από την απόδειξη, η Πρόταση 2.4.9 άρα και το Θεώρημα 2.4.2 και το Θεώρημα 2.4.1, εξακολουθούν να ισχύουν αν αντικαταστήσουμε την I με οποιαδήποτε συνάρτηση $J \in \mathcal{J}$. ∎

Κεφάλαιο 3

Η ανισότητα του Ehrhard

3.1 Η ανισότητα Ehrhard-Borell

Το μέτρο του Gauss γ_n είναι λογαριθμικά κοίλο. Αν A, B είναι δύο σύνολα Borel στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$ τότε

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant [\gamma_n(A)]^{\lambda}[\gamma_n(B)]^{1-\lambda}. \tag{3.1.1}$$

Αυτό προκύπτει, για παράδειγμα, από το γεγονός ότι η πυκνότητα του γ_n είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Όμως, το γεγονός ότι το γ_n είναι λογαριθμικό κοίλο δεν συνεπάγεται την ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gaussian.

Ο Ehrhard έδωσε μια απόδειξη της Gaussian ισοπεριμετρικής ανισότητας χρησιμοποιώντας μια διαδικασία συμμετρικοποίησης στο χώρο του Gauss, ανάλογη με την κλασική συμμετρικοποίηση κατά Steiner. Με την ίδια μέθοδο απέδειξε μια ανισότητα τύπου Brunn-Minkowski, η οποία είναι ισχυρότερη από την (3.1.1). Το επιχείρημά του περιοριζόταν στα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 3.1.1 (Ehrhard). *Έστω A, B κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{3.1.2}$$

Η ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν τα A και B είναι παράλληλοι ημίχωροι.

Για να αποδείξουμε ότι η (3.1.2) συνεπάγεται την (3.1.1) ελέγχουμε πρώτα ότι η $\log\Phi$ είναι κοίλη. Έχουμε $(\log\Phi)'(x) = \Phi'(x)/\Phi(x)$, άρα

$$(\log\Phi)''(x) = \frac{\Phi''(x)\Phi(x) - [\Phi'(x)]^2}{\Phi^2(x)}.$$

Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $\Phi''(x)\Phi(x) \leqslant [\Phi'(x)]^2$, και αυτή η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$g(x) = e^{-x^2/2} + x\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt \geqslant 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Παραγωγίζοντας την g παίρνουμε

$$g'(x) = -xe^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2} + \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} dt > 0,$$

το οποίο δείχνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Από την άλλη πλευρά, εύκολα βλέπουμε ότι $g(x) \to 0$ καθώς το $x \to -\infty$. Έπεται ότι $g > 0$, άρα η $\log \Phi$ είναι κοίλη.

Θεωρούμε τώρα δύο κυρτά σύνολα A, B στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Από την

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)),$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η Φ είναι αύξουσα, παίρνουμε

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \Phi(\lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B))).$$

Αφού η Φ είναι λογαριθμικά κοίλη, έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B))) &\geqslant \left(\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))\right)^{\lambda}\left(\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(B))\right)^{1-\lambda} \\ &= \gamma_n(A)^{\lambda}\gamma_n(B)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.1.1) για κυρτά σύνολα. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι το γ_n είναι λογαριθμικά κοίλο αν υποθέσουμε ότι η (3.1.2) ισχύει για οποιαδήποτε Borel σύνολα (το οποίο ισχύει όπως θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο).

Ο Latała απέδειξε ότι η (3.1.2) εξακολουθεί να ισχύει αν το A είναι κυρτό και το B είναι τυχόν Borel σύνολο. Τελικά, ο Borell αφαίρεσε την υπόθεση της κυρτότητας για το A και απέδειξε την (3.1.2) σε πλήρη γενικότητα.

Θεώρημα 3.1.2 (Ehrhard-Borell). *Έστω A, B δύο σύνολα Borel στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{3.1.3}$$

Μπορούμε να αποδείξουμε ότι η Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας Ehrhard-Borell. Έστω A ένα Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και $\varepsilon > 0$. Για τυχόν $\lambda \in (0,1)$ γράφουμε

$$A + \varepsilon B_2^n = (1-\lambda)[(1-\lambda)^{-1}A] + \lambda[\varepsilon\lambda^{-1}B_2^n],$$

και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.1.2 παίρνουμε

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(A + \varepsilon B_2^n)) \geqslant (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n((1-\lambda)^{-1}A)) + \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(\varepsilon\lambda^{-1}B_2^n)). \tag{3.1.4}$$

Τώρα, παίρνουμε το όριο του δεξιού μέλους καθώς το $\lambda \to 0^+$. Έχουμε

$$(1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n((1-\lambda)^{-1}A)) \to \Phi^{-1}(\gamma_n(A))$$

και

$$\lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(\varepsilon\lambda^{-1}B_2^n)) = \varepsilon \cdot \frac{\lambda}{\varepsilon}\Phi^{-1}(\gamma_n(\varepsilon\lambda^{-1}B_2^n) \to \varepsilon$$

διότι

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\Phi^{-1}(\gamma_n(rB_2^n))}{r}=1. \tag{3.1.5}$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(A_\varepsilon))\geqslant\Phi^{-1}(\gamma_n(A))+\varepsilon,$$

όπως θέλαμε. Για την απόδειξη της (3.1.5) χρησιμοποιούμε το ακόλουθο επιχείρημα: Είναι κατ′ αρχήν φανερό ότι

$$\gamma_n(rB_2^n)\leqslant\gamma_n(\{x:\langle x,e_1\rangle\leqslant r\})=\Phi(r),$$

άρα $\Phi^{-1}(\gamma_n(rB_2^n))/r\leqslant 1$ για κάθε $r>0$. Θεωρούμε τυχόν $\delta\in(0,1)$ και θα δείξουμε ότι αν το r είναι αρκετά μεγάλο τότε $\Phi^{-1}(\gamma_n(rB_2^n))>(1-\delta)r$ ή, ισοδύναμα,

$$\gamma_n(\mathbb{R}^n\setminus rB_2^n)<1-\Phi((1-\delta)r)=\gamma_1([(1-\delta)r,\infty)).$$

Επιλέγουμε πεπερασμένο σύνολο $T\subset S^{n-1}$ με την ιδιότητα ότι

$$\mathbb{R}^n\setminus rB_2^n\subset\left\{x\in\mathbb{R}^n:\max_{z\in T}\langle x,z\rangle>(1-\delta/2)r\right\}.$$

Αν N είναι το πλήθος των σημείων του T τότε

$$\gamma_n(\mathbb{R}^n\setminus rB_2^n)\leqslant\sum_{z\in T}\gamma_n(\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,z\rangle>(1-\delta/2)r\}=N\cdot\gamma_1([(1-\delta/2)r,\infty)).$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$N\lim_{r\to\infty}\frac{\gamma_1([(1-\delta/2)r,\infty))}{\gamma_1([(1-\delta)r,\infty))}<1.$$

Όμως, το όριο αυτό είναι ίσο με μηδέν: αρκεί να χρησιμοποιήσουμε τη βασική ανισότητα

$$\frac{s}{s^2+1}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}\leqslant\gamma_1([s,\infty))\leqslant\frac{1}{s}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-s^2/2}$$

με $s=(1-\delta)r$ και $s=(1-\delta/2)r$ για να φράξουμε το λόγο $\gamma_1([(1-\delta/2)r,\infty))/\gamma_1([(1-\delta)r,\infty))$ και κατόπιν να αφήσουμε το $r\to\infty$.

Όπως θα δούμε στην Παράγραφο 3.3, ο Borell απέδειξε μια γενικότερη συναρτησιακή ανισότητα από την οποία προκύπτει το Θεώρημα 3.1.2.

3.2 Η ανισότητα του Ehrhard

Η αρχική απόδειξη της ανισότητας του Ehrhard βασίζεται στην παρατήρηση ότι η κυρτότητα ενός συνόλου διατηρείται από τις Gaussian συμμετρικοποιήσεις.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω A ένα κυρτό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και S μια Gaussian συμμετρικοποίηση στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, το σύνολο $S(A)$ είναι επίσης κυρτό.*

Απόδειξη. Εξετάζουμε πρώτα τις 1-συμμετρικοποιήσεις, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.3. Έστω $u \in S^{n-1}$. Θέτουμε $F = \langle u\rangle^{\perp}$ και $S = S_{F,u}$. Η συμμετρικοποίηση S γίνεται κατά μήκος των ευθειών της μορφής $R_x := x + \langle u\rangle$, όπου $x \in F$. Για κάθε $x \in F$, το σύνολο $A \cap R_x$ μπορεί να είναι ημιευθεία ή διάστημα, ενώ το σύνολο $S(A) \cap R_x$ είναι ημιευθεία, από τον ορισμό της 1-συμμετρικοποίησης.

Θα γράφουμε

$$\begin{aligned} A \cap R_x &= x + [a_x, b_x]u, \\ S(A) \cap R_x &= x + [c_x, \infty]u, \end{aligned}$$

όπου

$$c_x = \Phi^{-1}(1 + \Phi(a_x) - \Phi(b_x)) = -\Phi^{-1}(\Phi(b_x) - \Phi(a_x)).$$

Για την κυρτότητα του συνόλου $S(A)$ απαιτείται να δείξουμε ότι, για κάθε $x, y \in F$ και $\lambda \in [0,1]$, ισχύει ο εγκλεισμός

$$S(A) \cap R_{\lambda x + (1-\lambda)y} \supseteq \lambda(S(A) \cap R_x) + (1-\lambda)(S(A) \cap R_y).$$

Με το συμβολισμό που έχουμε εισαγάγει, αυτός ο εγκλεισμός ανάγεται στην ανισότητα

$$c_{\lambda x + (1-\lambda)y} \leqslant \lambda c_x + (1-\lambda)c_y,$$

η οποία είναι ισοδύναμη με την

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\Phi(b_{\lambda x+(1-\lambda)y}) - \Phi(a_{\lambda x+(1-\lambda)y})) \\ \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\Phi(b_x) - \Phi(a_x)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\Phi(b_y) - \Phi(a_y)). \end{aligned} \tag{3.2.1}$$

Λόγω της κυρτότητας του A, ισχύουν οι ανισότητες

$$b_{\lambda x+(1-\lambda)y} \geqslant \lambda b_x + (1-\lambda)b_y \geqslant \lambda a_x + (1-\lambda a_y \geqslant a_{\lambda x+(1-\lambda)y}.$$

Θα ελέγξουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned} \Phi^{-1}(\Phi(\lambda b_x + (1-\lambda)b_y) - \Phi(\lambda a_x + (1-\lambda)a_y)) \\ \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\Phi(b_x) - \Phi(a_x)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\Phi(b_y) - \Phi(a_y)), \end{aligned}$$

η οποία είναι ισχυρότερη από την (3.2.1). Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η συνάρτηση

$$g(a,b) = \Phi^{-1}(\Phi(b) - \Phi(a)), \qquad (a,b) \in \{(a,b) \in \mathbb{R}^2 : a < b\}$$

είναι κοίλη, κάτι που επαληθεύουμε με απευθείας υπολογισμό της Εσσιανής της.

Το επιχείρημα που παρουσιάσαμε αποδεικνύει ότι το $S(A)$ είναι κυρτό στην περίπτωση που η S είναι 1-συμμετρικοποίηση. Αυτό έχει ως συνέπεια το ότι η σύνθεση οσωνδήποτε 1-συμμετρικοποιήσεων διατηρεί κι αυτή την κυρτότητα. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.2.6 και την n-διάστατη γενίκευσή του, μπορούμε να αποδείξουμε ότι οι 2-συμμετρικοποιήσεις διατηρούν την κυρτότητα. Για απλότητα, ας θεωρήσουμε μια 2-συμμετρικοποίηση T στο χώρο $\mathbb{R}^2$. Έστω $\{T_j\}$ η ακολουθία των συνθέσεων που προσεγγίζουν την T, όπως στα Λήμματα 2.2.5 και 2.2.6. Γνωρίζουμε ότι, επειδή το A είναι κυρτό, τα σύνολα $T_j(A)$ είναι επίσης κυρτά, άρα, για κάθε $\varepsilon, R > 0$, τα σύνολα

$$C_{R,\varepsilon} = \left(\bigcup_{i\geqslant 0} \bigcap_{j>i} (T_j(A))_\varepsilon \right) \cap B_R$$

και

$$C_R = \cap_{\varepsilon>0} C_{R,\varepsilon}$$

είναι επίσης κυρτά. Από την (2.2.13) έχουμε $T(A) \cap B_R \subseteq C_{R,\varepsilon}$. Συνεπώς,

$$T(A) \cap B_R \subseteq C_R.$$

Από την άλλη πλευρά, η (2.2.14) δείχνει ότι

$$C_R \subseteq (T(A))_\varepsilon \cap B_R$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Αφού το σύνολο $T(A)$ είναι κλειστό, έχουμε

$$T(A) = \bigcap_{\varepsilon>0} (T(A))_\varepsilon.$$

Συνεπώς, $T(A) \cap B_R = C_R$. Αυτό αποδεικνύει ότι το $T(A)$ είναι κυρτό, και έχουμε επαληθεύσει την περίπτωση των 2-συμμετρικοποιήσεων στο επίπεδο. Η γενική περίπτωση, των 2-συμμετρικοποιήσεων στον $\mathbb{R}^n$, προκύπτει από το Λήμμα 2.2.4.

Τώρα, ο ισχυρισμός του θεωρήματος για συμμμετρικοποιήσεις τάξης μεγαλύτερης από 2 είναι άμεση συνέπεια της (2.2.16). ■

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την ανισότητα του Ehrhard για κυρτά σύνολα.

Θεώρημα 3.2.2 (ανισότητα του Ehrhard). *Έστω A και B μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\lambda \in (0,1)$,*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{3.2.2}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι τα A και B είναι συμπαγή. Στον $\mathbb{R}^{n+1}$ θεωρούμε τα σύνολα $A' = A \times \{1\}$, $B' = B \times \{0\}$ και

$$C = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : j = \lambda a' + (1-\lambda)b',\ a' \in A',\ b' \in B',\ \lambda \in [0,1]\}.$$

Έστω $e = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ και $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο e. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.2.1 για το σύνολο C και την n-συμμετρικοποίηση $S = S_{\langle e\rangle,u}$. Έχουμε ότι το $S(C)$ είναι κυρτό, και αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση

$$Q(\lambda) = \Phi^{-1}(\gamma_n(C \cap (\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}))) = \Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B))$$

είναι κοίλη στο $[0,1]$. Τότε, για την (3.2.2) απλώς παρατηρούμε ότι είναι ισοδύναμη με την

$$Q(\lambda) \geqslant \lambda Q(1) + (1-\lambda)Q(0).$$

Αν τα A και B είναι *τυχόντα* κυρτά σύνολα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το γ_n είναι μέτρο Radon και να εφαρμόσουμε την (3.2.2) σε δύο ακολουθίες συμπαγών συνόλων που προσεγγίζουν τα A και B «από μέσα» και μετά να πάρουμε το όριο. ■

3.3 Η συναρτησιακή ανισότητα του Borell

O Borell χρησιμοποιεί την ημιομάδα της θερμότητας. Για κάθε Borel μετρήσιμη, μη αρνητική συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$, η «εξέλιξη» της f τη χρονική στιγμή $t \geqslant 0$ είναι η συνάρτηση

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \sqrt{t}y)\, d\gamma_n(y).$$

Θεώρημα 3.3.1 (Borell). *Έστω* $f_0, f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ *μετρήσιμες συναρτήσεις για τις οποίες υπάρχουν* $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ *τέτοιοι ώστε*

$$f_0 \geqslant \Phi(a_1 r_1 + a_2 r_2)$$

και

$$\limsup_{\|x_i\|_2 \to \infty} f_i(x_i) \leqslant \Phi(r_i), \qquad i = 1, 2.$$

Αν για κάποιους $a_1, a_2 \geqslant 0$ *με* $a_1 + a_2 = 1$ *ικανοποιείται η*

$$(\Phi^{-1} \circ f_0)(a_1 x_1 + a_2 x_2) \geqslant a_1(\Phi^{-1} \circ f_1)(x_1) + a_2(\Phi^{-1} \circ f_2)(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ *τότε για κάθε* $t \geqslant 0$ *ισχύει*

$$(\Phi^{-1} \circ P_t f_0)(a_1 x_1 + a_2 x_2) \geqslant a_1(\Phi^{-1} \circ P_t f_1)(x_1) + a_2(\Phi^{-1} \circ P_t f_2)(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Για την απόδειξη ορίζουμε $C : [0,\infty) \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$C(t, x_1, x_2) = (\Phi^{-1} \circ P_t f_0)(a_1 x_1 + a_2 x_2) - (a_1(\Phi^{-1} \circ P_t f_1)(x_1) + a_2(\Phi^{-1} \circ P_t f_2)(x_2)).$$

Αφού $P_0 f = f$, η υπόθεσή μας είναι ότι $C(0, x_1, x_2) \geqslant 0$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$, και θα θέλαμε να δείξουμε ότι $C(t, x_1, x_2) \geqslant 0$ για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Το επόμενο λήμμα δίνει κάποιες ικανές συνθήκες.

Λήμμα 3.3.2. *Έστω ότι η* C *είναι δύο φορές διαφορίσιμη και* $C(0, x_1, x_2) \geqslant 0$ *για κάθε* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. *Αν από τις*

$$\mathrm{Hess}(C) \geqslant 0, \qquad \nabla C = 0, \qquad C \leqslant 0$$

έπεται ότι $\partial_t C \geqslant 0$, *και αν για κάποιο* $T > 0$ *έχουμε*

$$\liminf_{\|(x_1,x_2)\|_2 \to \infty} \Big(\inf_{0 \leqslant t \leqslant T} C(t, x_1, x_2) \Big) \geqslant 0,$$

τότε $C(t, x_1, x_2) \geqslant 0$ *για κάθε* $0 \leqslant t \leqslant T$ *και για κάθε* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και ορίζουμε $C_\varepsilon(t, x_1, x_2) = C(t, x_1, x_2) + \varepsilon t$. Αν η C_ε έχει αρνητική τιμή σε κάποιο σημείο τότε χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι

$$\liminf_{\|(x_1,x_2)\|_2\to\infty} \Big(\inf_{0\leqslant t\leqslant T} C(t, x_1, x_2)\Big) \geqslant 0$$

συμπεραίνουμε, περιορίζοντας την C_ε σε κατάλληλο συμπαγές υποσύνολο του $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, ότι η C_ε παίρνει ελάχιστη τιμή σε κάποιο (t^*, x_1^*, x_2^*) στο οποίο τότε ικανοποιούνται οι

$$\nabla C = 0, \quad \mathrm{Hess}(C) \geqslant 0, \quad C < 0 \quad \text{και} \quad \partial_t C + \varepsilon \leqslant 0$$

(μάλιστα, $\partial_t C + \varepsilon = 0$ αν $t < T$). Από την υπόθεσή μας, αφού $\nabla C = 0$ και $\mathrm{Hess}(C) \geqslant 0$, παίρνουμε $\partial_t C \geqslant 0$, το οποίο οδηγεί σε άτοπο αφού $\partial_t C \leqslant -\varepsilon$. Έτσι έχουμε αποδείξει ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και $T > 0$ ισχύει $C_\varepsilon(t, x_1, x_2) \geqslant 0$ στο $[0, T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, και αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε ότι η C είναι μη αρνητική. □

Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι η δεύτερη υπόθεση του Λήμματος 3.3.2 ικανοποιείται λόγω των υποθέσεων του Θεωρήματος 3.3.1. για τις συναρτήσεις f_i.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω ότι η C είναι δύο φορές διαφορίσιμη και $C(0, x_1, x_2) \geqslant 0$ για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε*

$$f_0 \geqslant \Phi(a_1 r_1 + a_2 r_2)$$

και

$$\limsup_{\|x_i\|_2\to\infty} f_i(x_i) \leqslant \Phi(r_i), \qquad i = 1, 2.$$

Τότε, για κάθε $T > 0$,

$$\liminf_{\|(x_1,x_2)\|_2\to\infty} \Big(\inf_{0\leqslant t\leqslant T} C(t, x_1, x_2)\Big) \geqslant 0.$$

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$. Από τη συνέχεια της Φ^{-1} υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιος ώστε

$$\Phi^{-1}(\Phi(r_i) + 2\varepsilon) \leqslant r_i + \delta, \qquad i = 1, 2.$$

Θεωρούμε $s > 0$ τέτοιον ώστε $\gamma_n(sB_2^n) = 1 - \varepsilon$. Τότε, για κάθε $0 \leqslant t \leqslant T$,

$$\begin{aligned} P_t f_i(x_i) &= \int_{sB_2^n} f_i(x_i + \sqrt{t}y)\, d\gamma_n(y) + \int_{\mathbb{R}^n\setminus sB_2^n} f_i(x_i + \sqrt{t}y)\, d\gamma_n(y) \\ &\leqslant (1-\varepsilon) \sup(f_i|_{x_i + s\sqrt{t}B_2^n}) + \varepsilon \sup(f_i) \\ &\leqslant (1-\varepsilon) \sup(f_i|_{x_i + s\sqrt{t}B_2^n}) + \varepsilon \\ &\leqslant \Phi(r_i) + 2\varepsilon \end{aligned}$$

αν υποθέσουμε ότι τα $\|x_i\|_2$ είναι αρκετά μεγάλα (τότε για κάθε $y \in x_i + s\sqrt{T}B_2^n$ έχουμε το $\|y\|_2$ επίσης μεγάλο, άρα $f_i(y) \leqslant (1+\varepsilon)\Phi(r_i)$ λόγω της υπόθεσης ότι $\limsup_{\|x_i\|_2\to\infty} f_i(x_i) \leqslant \Phi(r_i)$).

Επιπλέον, από την $f_0 \geqslant \Phi(a_1r_1 + a_2r_2)$ έχουμε ότι $P_tf_0 \geqslant \Phi(a_1r_1 + a_2r_2)$, απ' όπου έπεται ότι αν τα $\|x_i\|_2$ είναι αρκετά μεγάλα τότε

$$\begin{aligned} C(t, x_1, x_2) &= (\Phi^{-1} \circ P_tf_0)(a_1x_1 + a_2x_2) - (a_1(\Phi^{-1} \circ P_tf_1)(x_1) + a_2(\Phi^{-1} \circ P_tf_2)(x_2)) \\ &\geqslant a_1r_1 + a_2r_2 - (a_1(\Phi^{-1} \circ P_tf_1)(x_1) + a_2(\Phi^{-1} \circ P_tf_2)(x_2)) \\ &\geqslant a_1r_1 + a_2r_2 - a_1\Phi^{-1}(\Phi(r_1) + 2\varepsilon) - a_2\Phi^{-1}(\Phi(r_2) + 2\varepsilon) \\ &\geqslant a_1r_1 + a_2r_2 - a_1(r_1 + \delta) - a_2(r_2 + \delta) = -\delta \end{aligned}$$

για κάθε $0 \leqslant t \leqslant T$. Αφήνοντας το $\delta \to 0^+$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f_i είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμες και ότι για κάθε $t > 0$ και $x \in \mathbb{R}^n$

$$\left\|\nabla f_i(x + \sqrt{t}y)\right\|_2 e^{-\|y\|_2^2/2} \to 0$$

όταν $\|y\|_2 \to \infty$. Σημειώνουμε ότι αν f είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί αυτές τις υποθέσεις τότε με ολοκλήρωση κατά μέρη μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$\partial_t P_t f = \frac{1}{2}\Delta P_t f. \tag{3.3.1}$$

Μπορούμε τότε να πάρουμε μια διαφορική εξίσωση για την $F = \Phi^{-1} \circ P_t f$: χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$(1/\Phi'(x))' = x/\Phi'(x)$$

βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \partial_t F &= \frac{\partial_t P_t f}{\Phi'(F)} = \frac{\Delta P_t f}{2\Phi'(F)}, \\ \nabla F &= \frac{\nabla P_t f}{\Phi'(F)}, \\ \Delta F &= \frac{\Delta P_t f}{\Phi'(F)} + F\frac{\|\nabla P_t f\|_2^2}{(\Phi'(F))^2}. \end{aligned} \tag{3.3.2}$$

Έπεται ότι

$$\partial_t F = \frac{1}{2}(\Delta F - F\|\nabla F\|_2^2). \tag{3.3.3}$$

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω για τις

$$F_i(t, z) = \Phi^{-1} \circ P_t f_i(z).$$

Έχουμε

$$C(t, x_1, x_2) = F_0(t, a_1x_1 + a_2x_2) - a_1F_1(t, x_1) - a_2F_2(t, x_2).$$

Τότε, γράφοντας για απλότητα $F_0 := F_0(t, a_1x_1 + a_2x_2)$ και $F_i := F_i(t, x_i)$, $i = 1, 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} C &= F_0 - (a_1F_1 + a_2F_2) \\ \nabla_{x_i} C &= a_i(\nabla F_0 - \nabla F_i) \\ \nabla_{x_i}\nabla_{x_j}^* C &= a_ia_j \mathrm{Hess}(F_0) - \delta_{ij}a_i \mathrm{Hess}(F_i), \end{aligned}$$

άρα από την 3.3.3 βλέπουμε ότι η C ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\partial_t C = \frac{1}{2}(\mathcal{S} + \mathcal{P}),$$

όπου

$$\mathcal{S} = \Delta F_0 - (a_1 \Delta F_1 + a_2 \Delta F_2)$$

και

$$\mathcal{P} = -\big(F_0 \|\nabla F_0\|_2^2 - a_1 F_1 \|\nabla F_1\|_2^2 - a_2 F_2 \|\nabla F_2\|_2^2\big).$$

Θα δείξουμε ότι η C ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 3.3.2 για κάθε $T > 0$, οπότε έπεται το θεώρημα. Μάλιστα, από το Λήμμα 3.3.3 γνωρίζουμε ότι η ικανοποιείται η

$$\liminf_{\|(x_1,x_2)\|_2 \to \infty} \Big(\inf_{0 \leqslant t \leqslant T} C(t, x_1, x_2) \Big) \geqslant 0,$$

άρα μένει να ελέγξουμε ότι αν ικανοποιούνται οι

$$\mathrm{Hess}(C) \geqslant 0, \qquad \nabla C = 0, \qquad C \leqslant 0$$

τότε $\partial_t C \geqslant 0$. Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι αν $\nabla C = 0$ και $C \leqslant 0$ τότε $\mathcal{P} \geqslant 0$, ανεξάρτητα από το a. Πράγματι, αν $\nabla C = 0$ τότε από την $0 = \nabla_{x_i} C = a_i(\nabla F_0 - \nabla F_i)$ βλέπουμε ότι $\nabla F_i = \nabla F_0$, $i = 1, 2$. Άρα, $\mathcal{P} = -\|\nabla F_0\|_2^2 C \geqslant 0$. Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι μπορούμε να εκφράσουμε την $\mathcal{S}$ ως $\mathcal{E}(C)$ για κάποιον ελλειπτικό τελεστή $\mathcal{E}$. Τότε, από την $\mathrm{Hess}(C) \geqslant 0$ έπεται ότι $\mathcal{S} \geqslant 0$.

Γνωρίζουμε ότι κάθε τελεστής δεύτερης τάξης γράφεται στη μορφή $\mathcal{E} = \nabla^* A \nabla$ όπου A είναι ένας συμμετρικός $2n \times 2n$ πίνακας. Επιπλέον, ο $\mathcal{E}$ είναι ελλειπτικός αν και μόνο αν ο A είναι θετικά ημιορισμένος. Είναι φυσιολογικό να κοιτάξουμε για πίνακες της μορφής

$$A = B \otimes I_n = (b_{ij} I_n)_{1 \leqslant i,j \leqslant 2},$$

όπου ο I_n είναι ο ταυτοτικός $n \times n$ πίνακας και ο B είναι ένας θετικά ημιορισμένος 2×2 πίνακας. Θέτοντας $a = (a_1, a_2)$ και $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in})$, $i = 1, 2$, έχουμε

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(C) &= \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} \Big(\sum_{k=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_{ik} \partial x_{jk}} C \Big) = \sum_{i,j=1}^{2} b_{ij} (a_i a_j \Delta F_0 - \delta_{ij} a_i \Delta F_i) \\ &= \langle Ba, a \rangle \Delta F_0 - b_{11} a_1 \Delta F_1 - b_{22} a_2 \Delta F_2. \end{aligned}$$

Έτσι, μπορούμε να βρούμε έναν ελλειπτικό τελεστή $\mathcal{E}$ της παραπάνω μορφής, τέτοιον ώστε $\mathcal{E}(C) = \mathcal{S} = \Delta F_0 - (a_1 \Delta F_1 + a_2 \Delta F_2)$, αν υπάρχει θετικά ημιορισμένος 2×2 πίνακας B που ικανοποιεί τις

$$\langle Ba, a \rangle = \langle Be_1, e_1 \rangle = \langle Be_2, e_2 \rangle = 1.$$

Αφού $a_1 + a_2 = 1$, μπορούμε να επιλέξουμε $b_{11} = b_{22} = 1$ και $b_{12} = b_{21} = -1/2$. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την ανισότητα Ehrhard-Borell.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A και B είναι μη-κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Μπορούμε να βρούμε μια άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $\tilde{f}_1$ τέτοια ώστε $0 \leqslant \tilde{f}_1 \leqslant 1$, $\tilde{f}_1 \equiv 1$ στο A, και $\tilde{f}_1 \equiv 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon$. Για $\delta \in (0,\varepsilon)$ ορίζουμε $f_1 = \delta + (1-\varepsilon)\tilde{f}_1$. Παρατηρήστε ότι $\alpha := \delta + (1-\varepsilon) < 1$. Τότε έχουμε $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και η f_1 ικανοποιεί την

$$\delta \leqslant f_1 \leqslant \alpha, \qquad f_1 \equiv \alpha \ \text{ στο } A, \qquad f_1 \equiv \delta \ \text{ στο } \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε μια συνάρτηση f_2 τέτοια ώστε

$$\delta \leqslant f_2 \leqslant \alpha, \qquad f_2 \equiv \alpha \ \text{ στο } B, \qquad f_2 \equiv \delta \ \text{ στο } \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon.$$

Έστω $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε

$$\gamma := \max\{\Phi(\lambda\Phi^{-1}(\alpha) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\delta)), \Phi(\lambda\Phi^{-1}(\delta) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\alpha))\}.$$

Παρατηρήστε ότι $\gamma \to 0$ όταν $\delta \to 0$. Τώρα, επιλέγουμε μια συνάρτηση f_0 τέτοια ώστε

$$\gamma \leqslant f_0 \leqslant \alpha, \quad f_0 \equiv \alpha \ \text{ στο } \lambda A_\varepsilon + (1-\lambda)B_\varepsilon, \quad f_0 \equiv \gamma \ \text{ στο } \mathbb{R}^n \setminus (\lambda A_\varepsilon + (1-\lambda)B_\varepsilon)\varepsilon.$$

Με αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να ελέγξουμε ότι η υπόθεση

$$f_0 \geqslant \Phi(a_1 r_1 + a_2 r_2)$$

του Θεωρήματος 3.3.1 ικανοποιείται με $r_1 = r_2 = \gamma$ και ότι

$$(\Phi^{-1} \circ f_0)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda(\Phi^{-1} \circ f_1)(x_1) + (1-\lambda)(\Phi^{-1} \circ f_2)(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Το Θεώρημα 3.3.1 δείχνει ότι, για κάθε $t \geqslant 0$,

$$(\Phi^{-1} \circ P_t f_0)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda(\Phi^{-1} \circ P_t f_1)(x_1) + (1-\lambda)(\Phi^{-1} \circ P_t f_2)(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Επιλέγοντας $t = 1$ και $x_1 = x_2 = 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} & f_0(y)\,d\gamma_n(y)\Big) \\ &\geqslant \lambda\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)\,d\gamma_n(y)\Big) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_2(y)\,d\gamma_n(y)\Big).\end{aligned}$$

Αφήνοντας πρώτα το $\delta \to 0$ και κατόπιν το $\varepsilon \to 0$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} & \mathbf{1}_{\lambda A + (1-\lambda)B}(y)\,d\gamma_n(y)\Big) \\ &\geqslant \lambda\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(y)\,d\gamma_n(y)\Big) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B(y)\,d\gamma_n(y)\Big).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.1.3). □

Κεφάλαιο 4

Μέτρο Gauss διαστολών συμμετρικών κυρτών σωμάτων

4.1 Η εικασία του Shepp

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε το ρυθμό μεταβολής του μέτρου Gauss συμμετρικών κυρτών σωμάτων ως προς διαστολές. Το κεντρικό αποτέλεσμα οφείλεται στους Latała και Oleszkiewicz, οι οποίοι απέδειξαν μια εικασία του L. A. Shepp.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω A ένα συμμετρικό, κλειστό και κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω P μια συμμετρική λωρίδα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\gamma_n(A) = \gamma_n(P).$$

Τότε

$$\gamma_n(tA) \geqslant \gamma_n(tP) \text{ για κάθε } t \geqslant 1$$

και

$$\gamma_n(tA) \leqslant \gamma_n(tP) \text{ για κάθε } 0 \leqslant t \leqslant 1.$$

Για κάθε συμμετρικό, κλειστό και κυρτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$r(A) = \sup\{r \geqslant 0 : rB_2^n \subseteq A\}.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε συμμετρική λωρίδα P η παράμετρος $r(P)$ ισούται με το μισό του πλάτους της P. Επίσης, για κάθε A έχουμε

$$r(A) = \inf\{r(P) : A \subseteq P, P \text{ συμμετρική λωρίδα στον } \mathbb{R}^n\}.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Ehrhard για να αναχθούμε σε ένα διδιάστατο πρόβλημα. Στη συνέχεια, το βασικό τεχνικό αποτέλεσμα είναι το εξής.

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω A ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τον y-άξονα και βρίσκεται κάτω από το γράφημα μιας άρτιας, λείας, κοίλης συνάρτησης $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, φθίνουσας στο $[0, r)$, με $\lim_{x \to r^-} f(x) = -\infty$. Έστω P μια συμμετρική λωρίδα πλάτους 2p που ικανοποιεί την $\gamma_2(A) = \gamma_2(P)$. Τότε,*

$$r\gamma_2^+(A) \geqslant r(P)\gamma_2^+(P) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} pe^{-p^2/2}.$$

Το Θεώρημα 4.1.2 μας επιτρέπει να αποδείξουμε το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω A ένα συμμετρικό, κυρτό και κλειστό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω P μια συμμετρική λωρίδα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\gamma_n(A) = \gamma_n(P)$. Τότε,*

$$r(A)\gamma_n^+(A) \geqslant r(P)\gamma_n^+(P).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geqslant 2$. Θέτουμε $r = r(A)$ και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$A \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leqslant r\}.$$

Για κάθε $x \in (-r, r)$ ορίζουμε

$$A(x) = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : (x, y) \in A\}$$

και

$$f(x) = \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(A(x))).$$

Από την κυρτότητα του A βλέπουμε ότι $A((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \supseteq (1-\lambda)A(x_1) + \lambda A(x_2)$ για κάθε $x_1, x_2 \in (-r, r)$ και $\lambda \in (0, 1)$, και σε συνδυασμό με την ανισότητα του Ehrhard συμπεραίνουμε ότι η f είναι κοίλη. Αφού το A είναι συμμετρικό, η f είναι άρτια, άρα φθίνουσα στο $[0, r)$. Ορίζουμε

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < r, y \leqslant f(x)\}.$$

Τότε, $\gamma_2(B) = \gamma_n(A) = \gamma_n(P)$. Έστω $t > 0$, $x \in (-r - t, r + t)$ και $y \in (B_t)(x)$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $(x', y') \in B$ τέτοιο ώστε $|x - x'| = t_1$, $|y - y'| = t_2$ και $t_1^2 + t_2^2 \leqslant t^2$. Αφού $(A(x'))_{t_2} \subseteq (A_t)(x)$, από την ισοπεριμετρική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}(\gamma_{n-1}((A_t)(x)) &\geqslant \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(A(x')_{t_2}) \\ &\geqslant \Phi^{-1}(\gamma_{n-1}(A(x')) + t_2 \geqslant y' + t_2 \geqslant y.\end{aligned}$$

Παίρνοντας το supremum πάνω από όλα τα $y \in (B_t)(x)$ βλέπουμε ότι

$$\gamma_1((B_t)(x)) \leqslant \gamma_{n-1}((A_t)(x))$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in (-r - t, r + t)$. Έπεται ότι $\gamma_2(B_t) \leqslant \gamma_n(A_t)$ για κάθε $t > 0$, άρα $\gamma_2^+(B) \leqslant \gamma_n^+(A)$. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$r\gamma_2^+(B) \geqslant r(P)\gamma_n^+(P).$$

Με ένα επιχείρημα προσέγγισης μπορούμε να αναχθούμε στην περίπτωση που η f είναι λεία και $\lim_{x\to r^-} f(x) = -\infty$. Τότε, η τελευταία ανισότητα είναι συνέπεια του Θεωρήματος 4.1.2. □

Δεχόμενοι το Θεώρημα 4.1.3 μπορούμε να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα. Για κάθε μετρήσιμο σύνολο B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$ ορίζουμε

$$\gamma_B(t) := \gamma_n(tB).$$

Ισχυρισμός 4.1.4. *Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 αρκεί να δείξουμε ότι*

$$\gamma_A'(1) \geqslant \gamma_P'(1) \tag{4.1.1}$$

για κάθε συμμετρικό, κλειστό και κυρτό σύνολο A στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε συμμετρική λωρίδα P στον $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \gamma_n(P)$.

Απόδειξη. Από την (4.1.1) έπεται αρχικά ότι αν για κάποια A, P όπως παραπάνω και κάποιους $t, s > 0$ ισχύει $\gamma_A(t) = \gamma_P(s)$ τότε

$$\gamma_A'(t) \geqslant \frac{s}{t}\gamma_P'(s). \tag{4.1.2}$$

Πράγματι, εφαρμόζοντας την (4.1.1) για τα $A_1 = tA$ και $P_1 = sP$ παίρνουμε

$$\gamma_{A_1}'(1) \geqslant \gamma_{P_1}'(1).$$

Όμως,

$$t\gamma_A'(t) = t\lim_{h\to 0}\frac{\gamma_n((t+h)A) - \gamma_n(tA)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{\gamma_{A_1}(1+h/t) - \gamma_{A_1}(1)}{h/t} = \gamma_{A_1}'(1),$$

και όμοια $s\gamma_P'(s) = \gamma_{P_1}'(1)$, απ' όπου έπεται η (4.1.2).

Έστω τώρα A ένα συμμετρικό, κλειστό και κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ και P συμμετρική λωρίδα P στον $\mathbb{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \gamma_n(P)$. Ορίζουμε $G : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$G(t) := \gamma_P^{-1}(\gamma_A(t)).$$

Από την $\gamma_A(t) = \gamma_P(G(t))$ και την (4.1.2) βλέπουμε ότι

$$\frac{G(t)}{t}\gamma_P'(G(t)) \leqslant \gamma_A'(t) = \gamma_P'(G(t))G'(t),$$

δηλαδή $tG'(t) \geqslant G(t)$. Με άλλα λόγια $(\ln G)'(t) \geqslant \frac{1}{t}$ και αφού $G(1) = 1$ (λόγω της $\gamma_A(1) = \gamma_P(1)$) συμπεραίνουμε ότι $G(t) \geqslant t$ για κάθε $t > 1$. Έπεται ότι

$$\gamma_A(t) = \gamma_P(G(t)) \geqslant \gamma_P(t)$$

για κάθε $t > 1$. Όμοια, από τις $(\ln G)'(t) \geqslant \frac{1}{t}$ και $G(1) = 1$ βλέπουμε ότι $G(t) \leqslant t$, άρα $\gamma_A(t) \leqslant \gamma_P(t)$, για κάθε $0 \leqslant t \leqslant 1$. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1. Αν $r = r(A)$ έχουμε $rB_2^n \subseteq A$, άρα για κάθε $x \in A$ και $t > 1$ ισχύει
$$x + (t-1)rB_2^n \subseteq tA.$$
Αυτό αποδεικνύει ότι
$$A_{(t-1)r} \subseteq tA.$$
Έπεται ότι
$$\gamma_A'(1) = \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_n((1+h)A) - \gamma_n(A)}{h} \geqslant \lim_{h\to 0} \frac{\gamma_n(A_{hr}) - \gamma_n(A)}{h} = r\gamma_n^+(A) = r(A)\gamma_n^+(A).$$
Έστω $2p$ το πλάτος της λωρίδας P. Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι
$$\gamma_P'(1) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} p e^{-p^2/2} = r(P)\gamma_n^+(P),$$
και έχουμε το θεώρημα. □

4.2 Το βασικό τεχνικό αποτέλεσμα

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Θεωρούμε ένα υποσύνολο A του $\mathbb{R}^2$ το οποίο είναι συμμετρικό ως προς τον y-άξονα και βρίσκεται κάτω από το γράφημα μιας άρτιας, λείας, κοίλης συνάρτησης $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$, φθίνουσας στο $[0, r)$, με $\lim_{x\to r^-} f(x) = -\infty$. Θα δείξουμε ότι αν P είναι μια συμμετρική λωρίδα πλάτους $2p$ που ικανοποιεί την $\gamma_2(A) = \gamma_2(P)$, τότε

$$r\gamma_2^+(A) \geqslant r(P)\gamma_2^+(P) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} p e^{-p^2/2}. \tag{4.2.1}$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε συχνά τις συναρτήσεις
$$\begin{aligned} T(y) &= 1 - \Phi(y), \\ h(y) &= 2\pi T(y)^2 \exp(y^2). \end{aligned}$$

Λήμμα 4.2.1. *Η συνάρτηση $h(y)$ είναι φθίνουσα στο $[0, \infty)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι η $T(y)\exp(y^2/2)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση στο $(0, \infty)$. Παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned} \frac{d}{dy}\left(T(y)\exp\left(\frac{y^2}{2}\right)\right) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(y\exp\left(\frac{y^2}{2}\right)\int_y^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\,ds - 1\right) \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\left(\exp\left(\frac{y^2}{2}\right)\int_y^\infty s\exp\left(-\frac{s^2}{2}\right)\,ds - 1\right) = 0. \end{aligned}$$
■

Λήμμα 4.2.2. *Η συνάρτηση* $g(y) = \frac{1}{h(y)} - y^2$ *είναι αύξουσα στο* $[0, \infty)$. *Ειδικότερα,*

$$\frac{1}{h(y)} \geqslant y^2 + \frac{3}{2} \quad \textit{αν} \ \ y > \frac{3}{2}$$

και

$$\sqrt{2\pi}\, T(y) \geqslant \frac{1}{\sqrt{y^2+2}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right), \qquad y > 0. \tag{4.2.2}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση $\varphi(y) = \sqrt{2\pi}T(y) - \exp(-y^2/2)/\sqrt{y^2+2}$ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}(y^2+2)^{3/2} \exp\left(\frac{y^2}{2}\right) \varphi'(y) &= y^3 + 3y - (y^2+2)^{3/2} \\ &= \frac{1}{y^3 + 3y + (y^2+2)^{3/2}} \left((y^3+3y)^2 - (y^2+2)^3\right) \\ &= -\frac{3y^2+8}{y^3+3y+(y^2+3)^{3/2}} < 0.\end{aligned}$$

Αφού $\lim\limits_{y\to\infty} \varphi(y) = 0$, παίρνουμε την (4.2.2). Έχουμε επίσης

$$\begin{aligned}T(y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_y^\infty \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}y} \int_y^\infty s \exp\left(-\frac{s^2}{2}\right) ds \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{\exp(-y^2/2)}{y}.\end{aligned} \tag{4.2.3}$$

Από τις (4.2.2) και (4.2.3) βλέπουμε ότι $0 \leqslant g(y) \leqslant 2$ στο $[0, \infty)$. Σταθεροποιούμε $a \in [0, 2]$. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $g(y_a) \geqslant a$ για κάποιον $y_a > 0$ τότε $g(y) \geqslant a$ για κάθε $y \geqslant y_a$. Παρατηρήστε ότι $g(y) \geqslant a$ αν και μόνο αν $T(y) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2)/\sqrt{y^2+a}$. Μελετάμε τη συμπεριφορά της συνάρτησης $\psi_a(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-y^2/2)/\sqrt{y^2+a} - T(y)$. Έχουμε

$$\sqrt{2\pi} \exp(y^2/2)(y^2+a)^{3/2} \psi_a'(y) = (y^2+a)^{3/2} - y - y(y^2+a).$$

Άρα $\psi_a'(y) \geqslant 0$ αν και μόνο αν $(y^2+a)^3 \geqslant (y^3 + (a+1)y)^2$, ή ισοδύναμα αν $(2-a)y^4 + (1 + 2a - 2a^2)y^2 - a^3 \leqslant 0$. Το αριστερό μέλος της τελευταίας ανισότητας είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού ως προς y^2 με μη αρνητικό μεγιστοβάθμιο συντελεστή τον $2-a$. Επιπλέον, η ανισότητα ικανοποιείται προφανώς όταν $y = 0$. Συνεπώς, υπάρχει μη αρνητικός αριθμός m_a τέτοιος ώστε η ψ_a να είναι αύξουσα στοδιάστημα $(0, m_a)$ και φθίνουσα στο διάστημα (m_a, ∞). Δεδομένου ότι $\lim_{y\to\infty} \psi_a(y) = 0$, συμπεραίνουμε ότι αν $\psi_a(y_a) \geqslant 0$ τότε $\psi_a(y) \geqslant 0$ για κάθε $y \geqslant y_a$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη, διοτι $h(3/2)^{-1} \geqslant (3/2)^2 + 3/2$. ■

Λήμμα 4.2.3. *Η συνάρτηση* $xT(x)\exp(x^2/2)$ *είναι αύξουσα στο* $[0, \infty)$.

Απόδειξη. Έχουμε

$$(\sqrt{2\pi}xT(x)\exp(x^2/2))' = (1+x^2)\sqrt{2\pi}T(x)\exp(x^2/2) - x,$$

αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $\sqrt{h(x)} > x/(x^2+1)$. Όμως, από το Λήμμα 4.2.2,

$$\sqrt{h(x)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} > \frac{x}{x^2+1}.$$

■

Λήμμα 4.2.4. *Η συνάρτηση* $F(x) = \frac{1}{h(x)} + 2\ln T(x)$ *είναι φθίνουσα στο* $[0,\infty)$.

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Komatu,

$$T(x) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}} \exp\left(-\frac{x^2}{2}\right).$$

Άρα $\sqrt{h(x)} \geqslant 2/(x+\sqrt{x^2+4})$, απ¨ όπου έπεται ότι

$$x\sqrt{h(x)} \geqslant \frac{2x}{x+\sqrt{x^2+4}} = 1 - \left(\frac{2}{x+\sqrt{x^2+4}}\right)^2 \geqslant 1-h(x).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
F'(x) &= -\frac{h'(x)}{h(x)^2} + 2\frac{T'(x)}{T(x)} \\
&= -\frac{1}{h(x)}\frac{(2\pi T(x)^2\exp(x^2))'}{2\pi T(x)^2\exp(x^2)} - \frac{2\exp(-x^2/2)}{\sqrt{2\pi}T(x)} \\
&= -\frac{2}{h(x)}\left(\frac{T'(x)}{T(x)} + x\right) - \frac{2}{\sqrt{h(x)}} \\
&= \frac{2}{h(x)^{3/2}}\left(1-h(x)-x\sqrt{h(x)}\right) \leqslant 0,
\end{aligned}$$

και το λήμμα έχει αποδειχθεί. ■

Λήμμα 4.2.5. *Για κάθε* $y \in \mathbb{R}$ *ισχύει* $\Phi^2(y)h(y) \leqslant \pi/8$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{8}{\pi}\Phi(y)^2h(y)\exp(-y^2) &= (4\Phi(y)T(y))^2 \\
&= (1-\gamma_2([-|y|,|y|]\times[-|y|,|y|]))^2 \leqslant (1-\gamma_2(B(0,|y|)))^2 \\
&= \left(1-\frac{1}{2\pi}\int_0^{|y|}\exp\left(-\frac{r^2}{2}\right)2\pi r\,dr\right)^2 = \left(\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)\right)^2 \\
&= \exp(-y^2),
\end{aligned}$$

και το λήμμα έπεται. ■

Λήμμα 4.2.6. *Έστω* f *μια φθίνουσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο* $(0,\infty)$ *και* μ *ένα πεπερασμένο θετικό μέτρο στο* $(0,\infty)$. *Για κάθε* $0 \leqslant a_1 < b_1 \leqslant \infty$, $0 \leqslant a_2 < b_2 \leqslant \infty$ *με* $a_1 \leqslant a_2$ *και* $b_1 \leqslant b_2$ *ισχύει*

$$\frac{1}{\mu(a_1,b_1)}\int_{a_1}^{b_1} f(x)\,d\mu(x) \geqslant \frac{1}{\mu(a_2,b_2)}\int_{a_2}^{b_2} f(x)\,d\mu(x).$$

Ο ισχυρισμός του Λήμματος 4.2.6 προκύπτει άμεσα από τη μονοτονία της f.

Λήμμα 4.2.7. *Για κάθε* $0 \leqslant c_1 < d_1 \leqslant \infty$, $0 \leqslant c_2 < d_2 \leqslant \infty$ *με* $c_1 \leqslant c_2$ *και* $d_1 \leqslant d_2$ *ισχύει*

$$\frac{\Phi(d_1)-\Phi(c_1)}{\exp(-c_1^2/2)-\exp(-d_1^2/2)} \geqslant \frac{\Phi(d_2)-\Phi(c_2)}{\exp(-c_2^2/2)-\exp(-d_2^2/2)}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\sqrt{2\pi}(\Phi(d)-\Phi(c)) = \int_{c^2}^{d^2} \frac{1}{2\sqrt{y}}\exp\left(-\frac{y}{2}\right)\,dy,$$

και εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.2.6 για την $f(y) = 1/\sqrt{y}$. ∎

Λήμμα 4.2.8. *Έστω* $s \geqslant u > 0$ *και* $p > 0$ *τέτοια ώστε*

$$1-\Phi(u) \leqslant 1-\Phi(p) + \frac{1}{2}(1-\Phi(s)). \tag{4.2.4}$$

Τότε,

$$\frac{1}{2}\exp((u^2-s^2)/2) + \exp((u^2-p^2)/2) \geqslant 1. \tag{4.2.5}$$

Απόδειξη. Αν $u \geqslant p$ τότε η (4.2.5) είναι προφανής, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $p > u$. Από την (4.2.4) βλέπουμε ότι

$$\frac{\Phi(p)-\Phi(u)}{1-\Phi(s)} \leqslant \frac{1}{2},$$

και από το Λήμμα 4.2.7 παίρνουμε

$$\frac{\Phi(p)-\Phi(u)}{1-\Phi(s)} \geqslant \frac{\exp(-u^2/2)-\exp(-p^2/2)}{\exp(-s^2/2)}.$$

Η (4.2.5) προκύπτει από αυτές τις δύο ανισότητες. ∎

Λήμμα 4.2.9. *Έστω* $c > 0$ *και* $p_0 > 0$ *τέτοια ώστε* $\exp(-cp_0) \leqslant 1-p_0$. *Τότε,* $\exp(-cp) \leqslant 1-p$ *για κάθε* $p \in [0,p_0]$. *Ειδικότερα,*

$$(1-p)\exp(4p/\pi) \geqslant 1 \quad \textit{για κάθε } \; p \in [0,1/3]$$

και

$$(1-p)\exp(4p/(\pi-4/9)) \geqslant 1 \quad \textit{για κάθε } \; p \in [0,1/2].$$

Απόδειξη. Η συνάρτηση $\exp(-cp)-1+p$ είναι κυρτή συνάρτηση του p, και αυτό μας δίνει τον πρώτο ισχυρισμό του λήμματος. Οι υπόλοιποι προκύπτουν από τον πρώτο, σε συνδυασμό με τις ανισότητες $\exp(4/e\pi) \geqslant 3/2$ και $\exp(2/(\pi-4/9)) \geqslant 2$. ■

Λήμμα 4.2.10. *Για κάθε* $p \in (0,1/2]$ *και* $z \geqslant 0$,

$$p\exp(-\pi z^2/16p^2) + (1-p) \geqslant \exp(-z/2).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας ανάπτυγμα Taylor, έχουμε

$$\begin{aligned} p\exp\left(\frac{z}{2}-\frac{\pi z^2}{16p^2}\right)+(1-p)\exp\left(\frac{z}{2}\right) &\geqslant p\left(1+\frac{z}{2}-\frac{\pi}{16p^2}z^2\right)+(1-p)\left(1+\frac{z}{2}+\frac{z^2}{8}\right)\\ &= 1+\frac{z}{2}-\frac{\pi+2(p-1)p}{16p}z^2, \end{aligned}$$

άρα η ανισότητα ισχύει για $z \leqslant 8p/(\pi+2(p-1)p)$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$f(p) = (1-p)\exp(4p/(\pi+2(p-1)p)) \geqslant 1.$$

Αν $p \leqslant 1/3$ τότε $f(p) \geqslant (1-p)\exp(4p/\pi) \geqslant 1$ από το προηγούμενο λήμμα. Αν $p \in [1/3,1/2]$, τότε $(1-p)p \geqslant 2/9$, άρα και πάλι,

$$f(p) \geqslant (1-p)\exp(4p/(\pi-4/9)) \geqslant 1.$$

■

Λήμμα 4.2.11. *Αν* $y \leqslant \frac{3}{2}$ *και* $z \geqslant 0$ *ή αν* $0 \leqslant z \leqslant y^2+\frac{3}{2}$, *τότε*

$$\Phi(y)\exp(-h(y)z^2/2)+1-\Phi(y) \geqslant \exp(-z/2). \tag{4.2.6}$$

Απόδειξη. Αν $y \leqslant 0$ τότε το λήμμα έπεται από τα Λήμματα 4.2.10 και 4.2.5. Για $y > 0$, θέτουμε $R_y(z) = \exp(-z/2) - \Phi(y)\exp(-h(y)z^2/2)$ και $M(y) = \sup\{R_y(z) : z > 1/h(y)\}$. Παρατηρούμε πρώτα ότι, από το Λήμμα 4.2.1, η $R_y(z)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $y>0$ για κάθε σταθερό z. Καθώς η $1/h(y)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του $y>0$, βλέπουμε ότι το $\sup_{z>1/h(y)}$ παίρνεται πάνω από μια φθίνουσα οικογένεια συνόλων. Όλες μαζί αυτές οι παρατηρήσεις δείχνουν ότι η $M(y)$ είναι φθίνουσα για $y>0$. Έχουμε

$$\frac{\partial}{\partial z}R_y(z) = R_y'(z) = -\frac{1}{2}\exp\left(-\frac{z}{2}\right)+\Phi(y)h(y)z\exp\left(-\frac{h(y)z^2}{2}\right).$$

Άρα, $R_y'(0) < 0$ και $R_y'(z) < 0$ αν το z είναι αρκετά μεγάλο. Παρατηρούμε ότι $R_y'(1/h(y)) = (\Phi(y)-1/2)\exp(-1/(2h(y))) > 0$. Αφού $R_y'(z)=0$ αν και μόνο αν $\ln(2\Phi(y)h(y)z) = h(y)z^2/2 - z/2$, συμπεραίνουμε ότι για κάθε σταθερό $y>0$ η συνάρτηση R_y έχει το πολύ δύο τοπικά ακρότατα στο$(0,\infty)$ γιατί το αριστερό μέλος της τελευταίας ισότητας είναι κοίλη συνάρτηση ενώ το δεξιό είναι κυρτή συνάρτηση. Συνοψίζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για κάθε $y>0$ υπάρχουν θετικοί αριθμοί $\alpha(y) < \beta(y)$ τέτοιοι ώστε η συνάρτηση R_y να είναι φθίνουσα στο διάστημα $(0, \alpha(y))$, αύξουσα στο διάστημα $(\alpha(y), \beta(y))$, στο οποίο ανήκει ο $1/h(y)$, και πάλι φθίνουσα στο διάστημα $(\beta(y), \infty)$. Άρα, για να δείξουμε τον βασικό μας ισχυρισμό ότι $T(y) \geqslant R_y(z)$ για κάθε $y \in [0, 3/2]$ και $z \geqslant 0$, αρκεί να δείξουμε ότι $T(y) \geqslant M(y)$, αφού για τα σημεία $z = 0$ και $z = 1/h(y)$ ισχύει τετριμμένα.

Πινακας 1

k	y_k	T_1	T_2	Φ_1	Φ_2	h_1	h_2	z_k	Z_k	a_k	b_k	M_k
1	0.00	0.500	0.500	0.500	0.500	1.570	1.571	1.34	1.35	0.256	0.254	0.393
2	0.25	0.401	0.402	0.598	0.599	1.075	1.081	1.78	1.81	0.206	0.202	0.309
3	0.49	0.311	0.313	0.687	0.689	0.772	0.783	2.26	2.33	0.162	0.155	0.242
4	0.69	0.244	0.246	0.754	0.756	0.602	0.613	2.70	2.80	0.130	0.123	0.192
5	0.87	0.192	0.193	0.807	0.808	0.493	0.499	3.16	3.25	0.104	0.098	0.149
6	1.04	0.149	0.150	0.850	0.851	0.411	0.417	3.62	3.72	0.082	0.077	0.117
7	1.18	0.118	0.120	0.880	0.882	0.351	0.365	3.97	4.22	0.069	0.060	0.104
8	1.25	0.105	0.106	0.894	0.895	0.330	0.337	4.23	4.40	0.061	0.055	0.087
9	1.35	0.088	0.089	0.911	0.912	0.300	0.308	4.53	4.72	0.052	0.047	0.075
10	1.43	0.076	0.077	0.923	0.924	0.280	0.288	4.76	4.99	0.047	0.041	0.067
11	1.49	0.068	0.069	0.931	0.932	0.267	0.276	4.92	5.20	0.043	0.037	0.064
12	1.52	0.064										

Θεωρούμε τον Πίνακα 1. Στην k-οστή γραμμή, η τιμή στην στήλη του T_1 είναι η $T_1(y_k)$, και το ίδιο εννοούμε για τις επόμενες πέντε στήλες. Για $k = 1, \dots, 11$, ελέγχουμε ότι οι αριθμοί στον πίνακα ικανοποιούν τις παρακάτω ανισότητες:

$$
\begin{gathered}
T_1(y_k) \leqslant T(y_k) \leqslant T_2(y_k), \qquad \Phi_1(y_k) \leqslant \Phi(y_k) \leqslant \Phi_2(y_k),\\
h_1(y_k) \leqslant 2\pi T_1(y_k)^2 \exp(y_k^2) \leqslant h(y_k),\\
h_2(y_k) \geqslant 2\pi T_2(y_k)^2 \exp(y_k^2) \geqslant h(y_k),\\
z_k \leqslant Z_k, \qquad \frac{1}{2}\exp(-z_k/2) \leqslant a_k, \qquad \frac{1}{2}\exp(-Z_k/2) \geqslant b_k,\\
\Phi_1(y_k)h_1(y_k)z_k \exp(-h_1(y_k)z_k^2/2) \geqslant a_k,\\
\Phi_2(y_k)h_2(y_k)Z_k \exp(-h_1(y_k)Z_k^2/2) \leqslant b_k
\end{gathered}
$$

και

$$T_1(y_{k+1}) \geqslant M_k \geqslant \exp(-z_k/2) - \Phi_1(y_k)\exp(-h_2(y_k)Z_k^2/2).$$

Παρατηρήστε επίσης ότι $T_1(y_{12}) \leqslant T(y_{12})$.

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τον ισχυρισμό μας. Για κάθε $y \in [0, 3/2]$ μπορούμε να βρούμε $k \in \{1, \dots, 11\}$ τέτοιον ώστε $y_k \leqslant y \leqslant y_{k+1}$. Παρατηρούμε ότι

$$
\begin{aligned}
R'_{y_k}(z_k) &= -\frac{1}{2}\exp(-z_k/2) + \Phi(y_k)h(y_k)z_k \exp(-h(y_k)z_k^2/2)\\
&\geqslant -\frac{1}{2}\exp(-z_k/2) + \Phi_1(y_k)h_1(y_k)z_k \exp(-h_2(y_k)z_k^2/2)\\
&\geqslant -a_k + a_k = 0,
\end{aligned}
$$

ενώ

$$\begin{aligned} R'_{y_k}(Z_k) &= -\frac{1}{2}\exp(-Z_k/2) + \Phi(y_k)h(y_k)Z_k\,\exp(-h(y_k)Z_k^2/2) \\ &\leqslant -\frac{1}{2}\exp(-Z_k/2) + \Phi_2(y_k)h_2(y_k)Z_k\,\exp(-h_1(y_k)Z_k^2/2) \\ &\leqslant -b_k + b_k = 0, \end{aligned}$$

το οποίο σημαίνει ότι $z_k \leqslant \beta_k = \beta(y_k) \leqslant Z_k$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} M(y) \leqslant M(y_k) &= R_{y_k}(\beta_k) = \exp(-\beta_k/2) - \Phi(y_k)\exp(-h(y_k)\beta_k^2/2) \\ &\leqslant \exp(-z_k/2) - \Phi_1(y_k)\exp(-h_2(y_k)Z_k^2/2) \leqslant M_k \\ &\leqslant T_1(y_{k+1}) \leqslant T(y_{k+1}) \leqslant T(y), \end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη στην περίπτωση που $y < 3/2$. Αν $y \geqslant 3/2$, παρατηρούμε ότι έχουμε ήδη αποδείξει την (4.2.6) για $0 \leqslant z \leqslant 1/h(y)$. Άρα το Λήμμα 4.2.2 συνεπάγεται την (4.2.6) για $0 \leqslant z \leqslant y^2 + 3/2$. ∎

Λήμμα 4.2.12. *Έστω $w \geqslant a \geqslant x \geqslant 0$ και $y \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$\Phi(y)\Phi(w) + (1-\Phi(y))\Phi(x) \geqslant \Phi(a). \tag{4.2.7}$$

Τότε, αν $y \leqslant \frac{3}{2}$ ή $a^2 - x^2 \leqslant y^2 + \frac{3}{2}$, έχουμε

$$w\sqrt{1+k^2}\exp(-y^2/2) \geqslant \sqrt{2\pi}(a^2-x^2)(1-\Phi(y)) + kx\exp(-y^2/2) \tag{4.2.8}$$

για κάθε $k \geqslant 0$.

Απόδειξη. Διαιρώντας τα δύο μέλη της (4.2.8) με $\sqrt{1+k^2}$ και παίρνοντας το supremum πάνω από όλα τα k, βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$w^2 \geqslant h(y)z^2 + x^2,$$

όπου $z = a^2 - x^2$. Αν υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει, τότε από την (4.2.7) παίρνουμε

$$\Phi(y)\Phi\left(\sqrt{h(y)z^2+x^2}\right) + (1-\Phi(y))\Phi(x) > \Phi(a),$$

άρα

$$\Phi(y)\left(\Phi\left(\sqrt{h(y)z^2+x^2}\right) - \Phi(a)\right) > (1-\Phi(y))(\Phi(a)-\Phi(x)). \tag{4.2.9}$$

Άρα, προφανώς, $h(y)z^2 + x^2 > a^2$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \sqrt{2\pi}(\Phi(a)-\Phi(x)) &= \int_{x^2}^{a^2} \frac{1}{2\sqrt{y}}\exp(-y/2)\,dy \\ &\geqslant \frac{1}{a}\left(\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{a^2}{2}\right)\right) \\ &= \frac{1}{a}\exp(-x^2/2)(1-\exp(-z/2)). \end{aligned} \tag{4.2.10}$$

Με παρόμοιο τρόπο δείχνουμε ότι

$$\sqrt{2\pi}\left(\Phi\left(\sqrt{h(y)z^2+x^2}\right)-\Phi(a)\right)\leqslant\frac{1}{a}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right)\left(\exp\left(-\frac{z}{2}\right)-\exp(-h(y)z^2/2)\right). \tag{4.2.11}$$

Από τις (4.2.9), (4.2.10) και (4.2.11) παίρνουμε

$$\exp\left(-\frac{z}{2}\right)>\Phi(y)\exp(-h(y)z^2/2)+1-\Phi(y),$$

το οποίο αντιφάσκει προς το Λήμμα 4.2.11. ■

Λήμμα 4.2.13. *Αν οι* $p>0$ *και* q *ικανοποιούν τη συνθήκη*

$$\frac{1}{2}(1-\Phi(q))=1-\Phi(p),$$

τότε

$$4\exp(q^2-p^2)p^2-p^2\leqslant\ln 4.$$

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι $q<p$. Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

(α) Υποθέτουμε ότι $q^2>p^2$. Τότε $-q>p$, άρα $1-\Phi(q)=\Phi(-q)\geqslant\Phi(p)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\Phi(q)$, δηλαδή $q\leqslant\Phi^{-1}(1/3)\leqslant-0.4$ και

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}p\exp\left(-\frac{p^2}{2}\right)\leqslant\Phi(p)-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\Phi(q).$$

Έτσι, από το Λήμμα 4.2.1,

$$\begin{aligned}4p^2\exp(q^2-p^2)&\leqslant 2\pi\Phi(q)^2\exp(q^2)=h(-q)\leqslant h(0.4)\\&=2\pi\Phi(-0.4)^2\exp(0.16)\leqslant 0.876<\ln 4.\end{aligned}$$

(β) Υποθέτουμε ότι $q^2\leqslant p^2$ και $q\leqslant 0$. Τότε $\Phi(q)\leqslant\frac{1}{2}$, άρα $p\leqslant\Phi^{-1}(0.75)\leqslant 0.679$ και

$$4p^2\exp(q^2-p^2)-p^2\leqslant 3p^2<\ln 4.$$

(γ) Τέλος, υποθέτουμε ότι $q>0$. Θεωρούμε το p σαν συνάρτηση του q. Τότε, έχουμε

$$\frac{d}{dq}(p^2-q^2)=2p\frac{dp}{dq}-2q=p\exp((p^2-q^2)/2)-2q.$$

Όμως, από το Λήμμα 4.2.3 έχουμε $q\sqrt{h(q)}<p\sqrt{h(p)}$ άρα

$$\frac{2q}{p}<\frac{2\sqrt{h(p)}}{\sqrt{h(q)}}=2\exp\left(\frac{p^2-q^2}{2}\right)\frac{T(p)}{T(q)}=\exp((p^2-q^2)/2).$$

Άρα, η p^2-q^2 είναι αύξουσα συνάρτηση του q. Επιπλέον, από το Λήμμα 4.2.1 έχουμε $h(q)\geqslant h(p)$, άρα $\exp(p^2-q^2)\leqslant 4$ δηλαδή $p^2-q^2\leqslant\ln 4$.

Πίνακας 2

k	q_k	T_k	p_k	d_k
1	1.20	0.1152	1.58	1.057
2	0.52	0.3016	1.04	0.812
3	0.20	0.4208	0.81	0.617
4	0.00	0.5000		

Από τον Πίνακα 2 ελέγχουμε εύκολα ότι για $k = 1, 2, 3$,

$$T_k \geqslant T(q_k) \geqslant 2T(p_k)$$

και

$$p_k^2 - q_k^2 \leqslant d_k \leqslant (2\pi T_{k+1}^2 \exp(q_{k+1}^2))^{-1} - q_{k+1}^2 \leqslant h(q_{k+1})^{-1} - q_{k+1}^2.$$

Ας υποθέσουμε ότι $q \in [q_k, q_{k-1})$ για κάποιον $k = 1, \dots, 4$, όπου έχουμε θέσει $q_0 = \infty$. Τότε, από το Λήμμα 4.2.2 και τη μονοτονία της $p^2 - q^2$ παίρνουμε για $k = 2, 3, 4$,

$$h(q)^{-1} - q^2 \geqslant h(q_k)^{-1} - q_k^2 \geqslant d_{k-1} \geqslant p_{k-1}^2 - q_{k-1}^2 \geqslant p^2 - q^2$$

και για $k = 1$,

$$h(q)^{-1} - q^2 \geqslant h(q_1)^{-1} - q_1^2 \geqslant (2\pi T_1^2 \exp(q_1^2))^{-1} - q_1^2 \geqslant \ln 4 \geqslant p^2 - q^2.$$

Άρα,

$$p^2 h(q) \leqslant 1.$$

Επιπλέον, από το Λήμμα 4.2.4 έχουμε $F(q) \geqslant F(p)$, άρα

$$h(p)^{-1} - h(q)^{-1} \leqslant 2\ln(T(q)/T(p)) = \ln 4.$$

Τελικά, παίρνουμε

$$4\exp(q^2 - p^2)p^2 - p^2 = p^2\left(\frac{h(q)}{h(p)} - 1\right) = p^2 h(q)\left(\frac{1}{h(p)} - \frac{1}{h(q)}\right) \leqslant \ln 4.$$

∎

Πόρισμα 4.2.14. *Αν $w^2 - p^2 \geqslant \ln 4$ τότε*

$$w\gamma_2^+(A) \geqslant p\gamma_2^+(P) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\, p \exp\left(-\frac{p^2}{2}\right).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\gamma_2(A) = 2\Phi(p) - 1 = \Phi(q)$. Τότε,

$$\frac{1}{2}(1 - \Phi(q)) = 1 - \Phi(p),$$

και από την ισοπεριμετρική ανισότητα,

$$\gamma_2^+(A) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{q^2}{2}\right).$$

Άρα, αν $w\gamma_2^+(A) < p\gamma_2^+(P)$ τότε $w < 2p\exp((q^2 = p^2)/2)$, οπότε το Λήμμα 4.2.13 μας δίνει

$$w^2 - p^2 < 4p^2\exp(q^2 - p^2) - p^2 \leqslant \ln 4,$$

και καταλήγουμε σε άτοπο. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Λόγω του Πορίσματος 4.2.14 μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$w^2 - p^2 < \ln 4. \tag{4.2.12}$$

Για κάθε $x \in [0, w)$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} A(x) &= \{(x_1, x_2) \in (-w, w) \times \mathbb{R} : |x_1| < x \ \text{ ή } \ x_2 \leqslant f(x_1)\} \\ \gamma(x) &= \gamma_2(A(x)) \end{aligned}$$

και

$$d(x) = \frac{1}{2\pi}\int_x^w \exp\left(-\frac{(t^2 + f^2(t))}{2}\right)\sqrt{1 + (f'(t))^2}\, dt.$$

Ορίζουμε $a(x)$ και $g(x)$ από τις

$$\Psi(a(x)) = \gamma(x)$$

και

$$g(x) = 2\pi w d(x) + \sqrt{2\pi}x(1 - \Phi(y))\exp(-x^2/2) - \sqrt{2\pi}a\exp(-a^2/2),$$

όπου $y = f(x)$. Τότε $A(0) = A$, $\gamma(0) = \gamma_2(A)$, $2d(0) = \gamma_2^+(A)$ και $a(0) = p$, άρα για να αποδείξουμε το θεώρημα πρέπει να δείξουμε ότι $g(0) \geqslant 0$. Αφού $a(w) = w$ και $d(w) = 0$ έχουμε $g(w) = 0$, άρα αρκεί να δείξουμε ότι η g είναι φθίνουσα στο $[0, w)$.

Παρατηρούμε επίσης ότι για $y = f(x)$ και $a = a(x)$ έχουμε

$$\Phi(y)\Phi(w) + (1 - \Phi(y))\Phi(x) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma(x) = \Phi(a). \tag{4.2.13}$$

Επιπλέον, αν $k = -f'(x)$ τότε

$$\begin{aligned} d'(x) &= -\frac{\sqrt{1+k^2}}{2\pi}\exp\left(-\frac{(x^2 + y^2)}{2}\right), \\ \gamma'(x) &= 2\frac{1 - \Phi(y)}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{x^2}{2}\right). \end{aligned}$$

Έτσι, αφού $a'(x)\Psi'(a) = \gamma'(x)$, έχουμε

$$a'(x) = (1 - \Phi(y))\exp((a^2 - x^2)/2).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \exp(x^2/2)g'(x) = {} & \sqrt{2\pi}(a^2 - x^2)(1 - \Phi(y)) + kx\exp(-y^2/2) \\ & - \sqrt{1+k^2}\, w\exp(-y^2/2). \end{aligned}$$

Συνεπώς, από το Λήμμα 4.2.12, η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν αποδείξουμε τον επόμενο ισχυρισμό. ∎

Ισχυρισμός 4.2.15. *Με τον παραπάνω συμβολισμό, δεν είναι δυνατόν να ισχύουν ταυτόχρονα οι* $y = f(x) > 3/2$, $a(x)^2 > x^2 + y^2 + 3/2$ *και* $w^2 - p^2 < \ln 4$.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Ας υποθέσουμε ότι, για κάποιον $0 \leqslant x < w$, έχουμε $y = f(x) > 3/2$, $a = a(x) > \sqrt{x^2 + y^2 + 3/2}$ και $w^2 < p^2 + \ln 4$. Έστω ότι η εφαπτόμενη ℓ του συνόλου A στο σημείο (x, y) τέμνει τον y-άξονα στο σημείο $(0, s)$. Τότε, αφού το A είναι κυρτό, περιέχεται στο ημιεπίπεδο κάτω από την ευθεία ℓ. Συνεπώς,

$$\gamma_2(D) + \Phi(u) \geqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\gamma_2(A),$$

όπου D είναι το σύνολο των σημείων που έχουν αρνητική πρώτη συντεταγμένη και βρίσκονται πάνω από την ευθεία ℓ, και u είναι η απόσταση της αρχής των αξόνων από την ℓ. Εφόσον $\gamma_2(D) \leqslant \frac{1}{2}(1 - \Phi(s))$ και $\gamma_2(A) = 2\Phi(p) - 1$, παίρνουμε

$$1 - \Phi(u) \leqslant 1 - \Phi(p) + \frac{1}{2}(1 - \Phi(s)).$$

Έτσι, από το Λήμμα 4.2.8,

$$\frac{1}{2}\exp((u^2 - s^2)/2) + \exp((u^2 - p^2)/2) \geqslant 1. \tag{4.2.14}$$

Ειδικότερα, αφού $u^2 \leqslant s^2$ και $u^2 \leqslant x^2 + y^2$ παίρνουμε

$$w^2 \leqslant p^2 + \ln 4 \leqslant u^2 + 2\ln 4 \leqslant x^2 + y^2 + 2\ln 4.$$

Παρατηρήστε ότι, από την (4.2.13),

$$(1 - \Phi(y))(\Phi(a) - \Phi(x)) \leqslant \Phi(y)(\Phi(w) - \Phi(a)).$$

Αφού $a^2 > x^2 + y^2 + 3/2 > x^2 + 3.75$, από το Λήμμα 4.2.7 παίρνουμε

$$\Phi(a) - \Phi(x) \geqslant (1 - \Phi(x))(1 - \exp((x^2 - a^2)/2)) \geqslant (1 - \Phi(x))(1 - \exp(-1.875)).$$

Επιπλέον, από την απόδειξη του Λήμματος 4.2.7,

$$\Phi(w) - \Phi(a) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}a}\left(\exp\left(-\frac{a^2}{2}\right) - \exp\left(-\frac{w^2}{2}\right)\right),$$

και από το Λήμμα 4.2.2,

$$1 - \Phi(y) \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi(y^2 + 2)}}\exp\left(-\frac{y^2}{2}\right).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}(1 - \Phi(x))\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \\ \leqslant (1 - \exp(-1.875))^{-1}\frac{\sqrt{y^2 + 2}}{a} \times \left(\exp\left(\frac{x^2 + y^2 - a^2}{2}\right) - \exp\left(\frac{x^2 + y^2 - w^2}{2}\right)\right).\end{aligned} \tag{4.2.15}$$

Υποθέτουμε πρώτα ότι $x \leqslant 0.8$. Από το Λήμμα 4.2.1,

$$(1-\Phi(x))\exp(x^2/2) \geqslant (1-\Phi(0.8))\exp(0.32) \geqslant 0.29.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού

$$\frac{\sqrt{y^2+2}}{a} \leqslant \sqrt{\frac{y^2+2}{y^2+3/2}} \leqslant \sqrt{\frac{4.25}{3.75}},$$

από την (4.2.15) παίρνουμε

$$(1-\Phi(x))\exp\left(\frac{x^2}{2}\right) \leqslant (1-\exp(-1.875))^{-1}\sqrt{\frac{4.25}{3.75}}\left(\exp(-0.75)-\frac{1}{4}\right) \leqslant 0.28.$$

Αυτή η αντίφαση δείχνει ότι $x > 0.8$, συνεπώς $a \geqslant \sqrt{x^2+y^2+3/2} \geqslant \sqrt{y^2+2}$. Έτσι, από την (4.2.15),

$$(4.2.16) \qquad (1-\Phi(x))\exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$$
$$(1-\exp(-1.875))^{-1} \times \left(\exp\left(\frac{x^2+y^2-a^2}{2}\right) - \exp\left(\frac{x^2+y^2-w^2}{2}\right)\right).$$

Πινακας 3

k	d_k	x_k	T_k	c_k
1	1.50	3.23	0.0005	0.092
2	1.85	2.29	0.0109	0.149
3	2.12	1.80	0.0358	0.180
4	2.27	1.53	0.0629	0.202
5	2.39	1.31	0.0950	0.224
6	2.52	1.05	0.1468	0.254
7	2.71	0.51		

Βλέπουμε ότι οι αριθμοί στον Πίνακα 3 ικανοποιούν τις παρακάτω ανισότητες για $k = 1,\dots,6$:

$$T_k \leqslant (1-\Phi(x_k)), \qquad c_k < T_k\exp(x_k^2/2)$$
$$c_k > (1-\exp(-1.875))^{-1}(\exp(-0.75)-\exp(-d_{k+1}/2)$$

και

$$x_k \geqslant \sqrt{2\ln 4 - d_k} + \sqrt{-2\ln(2-4\exp(-d_k/2))}.$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει επίσης όταν $k=7$. Ας υποθέσουμε ότι

$$w^2-x^2-y^2 \in [d_k, d_{k+1}] \text{ για κάποιον } k=1,2,\dots,7,$$

όπου έχουμε κάνει τη σύμβαση ότι $d_8=\infty$. Τότε,

$$x^2+y^2-u^2 = x^2+y^2-w^2+w^2-u^2 \leqslant -d_k + 2\ln 4$$

και
$$u^2 - p^2 \leqslant x^2 + y^2 - p^2 \leqslant x^2 + y^2 - w^2 + \ln 4 \leqslant \ln 4 - d_k.$$

Έτσι, από την (4.2.14), παίρνουμε
$$s^2 - u^2 \leqslant -2\ln\left(2 - 2\exp((u^2 - p^2)/2)\right) \leqslant -2\ln(2 - 4\exp(-d_k/2)).$$

Θεωρούμε το τρίγωνο ABC με κορυφές $A = (0,0)$, $B = (x,y)$ και $C = (0,s)$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα,
$$\begin{aligned} x \leqslant |BC| &\leqslant \sqrt{|AC|^2 - u^2} + \sqrt{|AB|^2 - u^2} \\ &\leqslant \sqrt{-2\ln(2 - 4\exp(-d_k/2))} + \sqrt{2\ln 4 - d_k} \leqslant x_k. \end{aligned}$$

Άρα, αν $k = 7$ παίρνουμε $x < 0.8$, το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την προηγούμενη υπόθεσή μας. Για $k < 7$, από το Λήμμα 4.2.1 έχουμε
$$(1 - \Phi(x))\exp(x^2/2) \geqslant (1 - \Phi(x_k))\exp(x_k^2/2) > c_k$$

και
$$\begin{aligned} &(1 - \exp(-1.875))^{-1}\left(\exp\left(\frac{x^2 + y^2 - a^2}{2}\right) - \exp\left(\frac{x^2 + y^2 - w^2}{2}\right)\right) \\ &\qquad \leqslant (1 - \exp(-1.875))^{-1}(\exp(-0.75) - \exp(-d_{k+1}/2)) < c_k. \end{aligned}$$

Αυτές οι ανισότητες έρχονται σε αντίφαση με την (4.2.16), και η απόδειξη είναι τώρα πλήρης. ■

4.3 Η βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα του Kahane

Μια συνέπεια του Θεωρήματος 4.1.1 είναι το επόμενο αποτέλεσμα, το οποίο δίνει τις βέλτιστες σταθερές στην Gaussian έκδοση της ανισότητας του Kahane.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω X χώρος με νόρμα και έστω $g, \{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ ανεξάρτητες τυπικές Gaussian τυχαίες μεταβλητές. Για κάθε $q \geqslant p > 0$, κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε $z_1, \dots, z_n \in X$ έχουμε*
$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i z_i\right\|^q\right)^{1/q} \leqslant \frac{\kappa_q}{\kappa_p}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} g_i z_i\right\|^p\right)^{1/p},$$

όπου
$$\kappa_p = (\mathbb{E}|g|^p)^{1/p} = \sqrt{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{p+1}{2}\Big)\Big)^{1/p}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $S = \sum_{i=1}^{n} g_i z_i$ και ορίζουμε $a \in \mathbb{R}$ από την εξίσωση
$$\mathbb{E}\|S\|^q = \mathbb{E}|ag|^q,$$

δηλαδή
$$|a| = (\mathbb{E}\|S\|^q)^{1/q}/\kappa_q.$$

Τότε

$$\mathbb{E}\,\|S\|^q = q\int_0^\infty t^{q-1}\mathbb{P}(\|S\|>t)\,dt = q\int_0^\infty t^{q-1}\mathbb{P}\left(|ag|>t\right)dt = \mathbb{E}\,|ag|^q,$$

άρα μπορούμε να βρούμε $t_0 > 0$ τέτοιον ώστε

$$\mathbb{P}\left(\|S\|>t_0\right) = \mathbb{P}\left(|ag|>t_0\right).$$

Ισοδύναμα, αν $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \|\sum_{i=1}^n x_i z_i\| \leqslant t_0\}$ και P είναι μια συμμετρική λωρίδα πλάτους $2t_0/a$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\gamma_n(A) = \gamma_n(P).$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.1.1 βλέπουμε ότι $\gamma_n(tA) \geqslant \gamma_n(tP)$ για κάθε $t \geqslant 1$ και $\gamma_n(tA) \leqslant \gamma_n(tP)$ για κάθε $0 \leqslant t \leqslant 1$. Ισοδύναμα, $\mathbb{P}\left(\|S\|>t\right) \geqslant \mathbb{P}\left(|ag|>t\right)$ για κάθε $0 \leqslant t \leqslant t_0$ και $\mathbb{P}\left(\|S\|>t\right) \leqslant \mathbb{P}\left(|ag|>t\right)$ για κάθε $t \geqslant t_0$. Έπεται ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\left(\frac{t}{t_0}\right)^{q-1}\left(\mathbb{P}\left(\|S\|>t\right) - \mathbb{P}\left(|ag|>t\right)\right) \leqslant \left(\frac{t}{t_0}\right)^{p-1}\left(\mathbb{P}\left(\|S\|>t\right) - \mathbb{P}\left(|ag|>t\right)\right).$$

Συνεπώς,

$$\frac{1}{t_0^{p-1}}\int_0^\infty t^{p-1}(\mathbb{P}\left(\|S\|>t\right) - \mathbb{P}\left(|ag|>t\right))\,dt \geqslant \frac{1}{t_0^{q-1}}\int_0^\infty t^{q-1}(\mathbb{P}\left(\|S\|>t\right) - \mathbb{P}\left(|ag|>t\right))\,dt = 0,$$

δηλαδή

$$\int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}(\|S\|>t)\,dt \geqslant \int_0^\infty t^{p-1}\mathbb{P}\left(|ag|>t\right)dt.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\mathbb{E}\,\|S\|^p \geqslant \mathbb{E}\,|ag|^p = |a|^p\kappa_p^p = \frac{(\mathbb{E}\,\|S\|^q)^{p/q}}{\kappa_q^p}\,\kappa_p^p,$$

απ΄ όπου προκύπτει το θεώρημα. □

Κεφάλαιο 5

Η ανισότητα της θετικής συνδιακύμανσης

5.1 Το λήμμα του Šidák και η εικασία της θετικής συνδιακύμανσης

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε την πρόσφατη απόδειξη της εικασίας της θετικής συνδιακύμανσης για το μέτρο του Gauss από τον Royen.

Θεώρημα 5.1.1 (Royen). *Αν* K, T *είναι δύο συμμετρικά, κλειστά και κυρτά σύνολα στον* $\mathbb{R}^n$ *τότε*

$$\gamma_n(K \cap T) \geqslant \gamma_n(K)\,\gamma_n(T).$$

Αφού κάθε κλειστό συμμετρικό κυρτό σύνολο είναι αριθμήσιμη τομή συμμετρικών λωρίδων, για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1 μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$K = \bigcap_{i=1}^{m_1} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leqslant 1\}$$

και

$$T = \bigcap_{i=m_1+1}^{m_1+m_2} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leqslant 1\},$$

όπου $m_1, m_2 \geqslant 1$ και $v_i \in \mathbb{R}^n$. Με άλλα λόγια, αρκεί να αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω* $m \geqslant 2$ *και* $P_1, \ldots, P_m$ *συμμετρικές λωρίδες στον* $\mathbb{R}^n$*. Για κάθε* $1 \leqslant m_1 < m$ *έχουμε*

$$\gamma_n(P_1 \cap P_2 \cap \cdots \cap P_m) \geqslant \gamma_n(P_1 \cap \cdots \cap P_{m_1})\,\gamma_n(P_{m_1+1} \cap \ldots \cap P_m).$$

Η ειδική περίπτωση $m_1 = m - 1$ είναι απλή. Μάλιστα, μπορούμε να διατυπώσουμε και να αποδείξουμε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα.

Πρόταση 5.1.3. *Έστω* C *ένα συμμετρικό κλειστό κυρτό σύνολο και* P *μια συμμετρική λωρίδα στον* $\mathbb{R}^n$*. Τότε,*

$$\gamma_n(C \cap P) \geqslant \gamma_n(C)\gamma_n(P).$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε επαγωγή ως προς τη διάσταση. Αν $n = 1$ τότε τα C και P είναι συμμετρικά διαστήματα στο $\mathbb{R}$, άρα το $C \cap P$ είναι είτε το C ή το P. Αφού το γ_1 είναι μέτρο πιθανότητας, προφανώς έχουμε

$$\gamma_1(C \cap P) = \min\{\gamma_1(C), \gamma_1(P)\} \geqslant \gamma_1(C)\gamma_1(P).$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $n \geqslant 2$ και ότι το θεώρημα ισχύει για όλες τις διαστάσεις που είναι μικρότερες από n. Έστω C ένα συμμετρικό, κλειστό και κυρτό σύνολο και έστω P μια συμμετρική λωρίδα στον $\mathbb{R}^n$. Από το αναλλοίωτο του γ_n ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μπορούμε να υποθέσουμε ότι $P = \{x \in \mathbb{R}^n : |x_n| \leqslant t\}$ για κάποιο $t > 0$. Θέτουμε $C_s = C \cap \{x : x_n = s\}$ και θεωρούμε την άρτια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f(s) = \gamma_{n-1}(C_s)$. Τότε,

$$\begin{aligned}\gamma_n(C \cap P) &= \int_{-t}^{t} \gamma_{n-1}(C_s)d\gamma_1(s) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{1}_{[-t,t]}(s)f(s)d\gamma_1(s)\\ &= \int_0^{\infty} \gamma_1(s \in J_t : f(s) \geqslant z)dz,\end{aligned}$$

όπου $J_t := [-t, t]$. Αφού το $\{f \geqslant z\}$ είναι συμμετρικό και κυρτό για κάθε z, από τη μονοδιάστατη περίπτωση του θεωρήματος έχουμε

$$\gamma_1(s \in J_t : f(s) \geqslant z, s) = \gamma_1(\{f \geqslant z\} \cap J_t) \geqslant \gamma_1(\{f \geqslant z\}) \cdot \gamma_1(J_t).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\gamma_n(C \cap P) &\geqslant \gamma_1(J_t) \int_0^{\infty} \gamma_1(\{f \geqslant z\})dz\\ &= \gamma_1(J_t) \int_{-\infty}^{\infty} \gamma_{n-1}(C_s)ds = \gamma_1(J_t)\gamma_n(C).\end{aligned}$$

Είναι όμως φανερό ότι $\gamma_n(P) = \gamma_1([-t, t]) = \gamma_1(J_t)$, και αυτό τελικά μας δίνει $\gamma_n(C \cap P) \geqslant \gamma_n(C)\gamma_n(P)$. □

Ένα απλό επιχείρημα επαγωγής μας δίνει το επόμενο θεώρημα, το οποίο αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Khatri και Šidák.

Θεώρημα 5.1.4 (Khatri, Šidák). *Αν $P_1, \dots, P_m$ είναι συμμετρικές λωρίδες στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\gamma_n(P_1 \cap \cdots \cap P_m) \geqslant \gamma_n(P_1) \cdots \gamma_n(P_m).$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $m \geqslant 2$ και ότι το θεώρημα ισχύει αν το πλήθος των λωρίδων είναι μικρότερο από m και θεωρούμε m συμμετρικές λωρίδες $P_1, \dots, P_m$ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, το $C := P_1 \cap \ldots \cap P_{m-1}$ είναι συμμετρικό κλειστό και κυρτό, άρα

$$\begin{aligned}\gamma_n(P_1 \cap \cdots \cap P_{m-1} \cap P_m) &= \gamma_n(C \cap P_m) \geqslant \gamma_n(C)\gamma_n(P_m)\\ &= \gamma_n(P_1 \cap \cdots \cap P_{m-1})\gamma_n(P_m)\end{aligned}$$

από την Πρόταση 5.1.3. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τις $P_1, \dots, P_{m-1}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Το θεώρημα των Khatri και Šidák μπορεί να διατυπωθεί και ως θεώρημα σύγκρισης για ανελίξεις του Gauss:

Θεώρημα 5.1.5. *Έστω* $(X_k)_{k=1}^m$ *και* $(Y_k)_{k=1}^m$ *δύο ανελίξεις του Gauss τέτοιες ώστε:*

(i) *Για κάθε* $k = 1, \dots, m$, $\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(Y_k^2)$.

(ii) *Οι τυχαίες μεταβλητές* Y_k, $1 \leqslant k \leqslant m$, *είναι ανεξάρτητες.*

Τότε,

$$\mathbb{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |X_k| \leqslant \mathbb{E} \max_{1 \leqslant k \leqslant m} |Y_k|.$$

Επιπλέον, για κάθε $t_1, \dots, t_m > 0$,

$$\mathbb{P}(|X_k| \geqslant t_k \ \text{για κάποιον } k) \leqslant \mathbb{P}(|Y_k| \geqslant t_k \ \text{για κάποιον } k),$$

ή ισοδύναμα

$$\mathbb{P}(|X_k| \leqslant t_k \ \text{για κάθε } k) \geqslant \mathbb{P}(|Y_k| \leqslant t_k \ \text{για κάθε } k) = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(|Y_k| \leqslant t_k).$$

Για την απόδειξη αυτού του θεωρήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X_k = \langle G, v_k \rangle$ όπου G είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ για κάποιον $n \leqslant m$, και $v_1, \dots, v_m \in \mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.1.4 για τις λωρίδες $P_k = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_k \rangle| \leqslant t_k\}$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(|X_k| \leqslant t_k \ \text{για κάθε } k) &= \gamma_n(P_1 \cap \cdots \cap P_m) \geqslant \prod_{k=1}^m \gamma_n(P_k) \\
&= \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(|X_k| \leqslant t_k) = \prod_{k=1}^m \mathbb{P}(|Y_k| \leqslant t_k) \\
&= \mathbb{P}(|Y_k| \leqslant t_k \ \text{για κάθε } k),
\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ισότητα προκύπτει από την υπόθεση ότι $\mathbb{E}(X_k^2) = \mathbb{E}(Y_k^2)$ και η τελευταία από την ανεξαρτησία των Y_k.

5.2 Το θεώρημα του Royen

Περνάμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος του Royen. Κάθε κεντραρισμένο Gaussian μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι εικόνα του γ_n μέσω γραμμικού μετασχηματισμού, είναι λοιπόν σαφές ότι μπορούμε να δείξουμε κάτι γενικότερο.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω* μ *ένα κεντραρισμένο Gaussian μέτρο στον* $\mathbb{R}^n$ *και έστω* X *τυχαίο διάνυσμα με κατανομή το* μ. *Δηλαδή,* $\mathbb{P}(X \in B) = \mu(B)$ *για κάθε Borel σύνολο* $B \subset \mathbb{R}^n$. *Ορίζουμε* $X_i := \langle X, v_i \rangle$, $i = 1, \dots, m$, *όπου* $v_1, \dots, v_m$ *είναι μη μηδενικά διανύσματα στον* $\mathbb{R}^n$. *Αν* $m_1 + m_2 = m$ *τότε*

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(|X_1| \leqslant t_1, \dots, |X_m| \leqslant t_m) \\
&\qquad \geqslant \mathbb{P}(|X_1| \leqslant t_1, \dots, |X_{m_1}| \leqslant t_{m_1}) \mathbb{P}(|X_{m_1+1}| \leqslant t_{m_1+1}, \dots, |X_m| \leqslant t_m)
\end{aligned} \tag{5.2.1}$$

για κάθε $t_1, \dots, t_m > 0$.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων C του X είναι γνησίως θετικά ορισμένος. Γράφουμε τον C στη μορφή

$$C = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22} \end{pmatrix},$$

όπου C_{ij} είναι ένας $m_i \times m_j$ πίνακας, και για κάθε $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ ορίζουμε

$$C(\tau) = \begin{pmatrix} C_{11} & \tau C_{12} \\ \tau C_{21} & C_{22} \end{pmatrix}.$$

Θεωρούμε τυχαίο διάνυσμα $X(\tau) \sim N(0, C(\tau))$ και, όπως πριν, ορίζουμε $X_i(\tau) = \langle X(\tau), v_i \rangle$. Θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες παρατηρήσεις:

(i) Αν μ_1, μ_2 είναι τα μέτρα Gauss στους $\mathbb{R}^{m_1}, \mathbb{R}^{m_2}$ με πίνακες συνδιακυμάνσεων C_{11}, C_{22} αντίστοιχα, τότε

$$\mathbb{P}((X_1(\tau), \dots, X_{m_1}(\tau)) \in A_1) = \mu_1(A_1) \quad \text{και} \quad \mathbb{P}((X_{m_1+1}(\tau), \dots, X_m(\tau)) \in A_2) = \mu_2(A_2)$$

για κάθε $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ και κάθε ζεύγος Borel συνόλων $A_1 \subset \mathbb{R}^{m_1}$, $A_2 \subset \mathbb{R}^{m_2}$.

(ii) Αν ν είναι η κατανομή του $X(0)$, δηλαδή το μέτρο Gauss με πίνακα συνδιακυμάνσεων τον $C(0)$, τότε $\nu = \mu_1 \otimes \mu_2$.

Για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$ θέτουμε $Z_i(\tau) := \frac{1}{2} X_i(\tau)^2$, Τότε, μπορούμε να δείξουμε ότι η (5.2.1) είναι ισοδύναμη με την

$$\mathbb{P}(Z_1(1) \leqslant s_1, \dots, Z_m(1) \leqslant s_m) \geqslant \mathbb{P}(Z_1(0) \leqslant s_1, \dots, Z_m(0) \leqslant s_m), \tag{5.2.2}$$

όπου $s_i := \frac{1}{2} t_i^2$. Πράγματι, από τις παρατηρήσεις έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|X_1| \leqslant t_1, \dots, |X_m| \leqslant t_m) &= \mathbb{P}(|X_1(1)| \leqslant t_1, \dots, |X_m(1)| \leqslant t_m) \\ &= \mathbb{P}(Z_1(1) \leqslant s_1, \dots, Z_m(1) \leqslant s_m) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} &\mathbb{P}(Z_1(0) \leqslant s_1, \dots, Z_m(0) \leqslant s_m) \\ &\qquad = \mathbb{P}(|X_1(0)| \leqslant t_1, \dots, |X_m(0)| \leqslant t_m) \\ &\qquad = \nu([-t_1, t_1] \times \cdots \times [-t_m, t_m]) \\ &\qquad = \mu_1([-t_1, t_1] \times \cdots \times [-t_{m_1}, t_{m_1}]) \mu_2([-t_{m_1+1}, t_{m_1+1}] \times \cdots \times [-t_m, t_m]) \\ &\qquad = \mathbb{P}(|X_1(0)| \leqslant t_1, \dots, |X_{m_1}(0)| \leqslant t_{m_1}) \mathbb{P}(|X_{m_1+1}(0)| \leqslant t_{m_1+1}, \dots, |X_m(0)| \leqslant t_m) \\ &\qquad = \mathbb{P}(|X_1| \leqslant t_1, \dots, |X_{m_1}| \leqslant t_{m_1}) \mathbb{P}(|X_{m_1+1}| \leqslant t_{m_1+1}, \dots, |X_m| \leqslant t_m). \end{aligned}$$

Η (5.2.2) θα προκύψει από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.2.2. *Η συνάρτηση* $\tau \mapsto \mathbb{P}(Z_1(\tau) \leqslant s_1, \dots, Z_m(\tau) \leqslant s_m)$ *είναι αύξουσα στο* $[0,1]$.

Συμβολίζουμε με $f(x,\tau)$ την πυκνότητα του $Z(\tau)$ και θέτουμε $K = [0,s_1] \times \cdots \times [0,s_m]$. Παραγωγίζοντας ως προς τ παίρνουμε

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\mathbb{P}(Z_1(\tau) \leqslant s_1, \dots, Z_m(\tau) \leqslant s_m) = \frac{\partial}{\partial\tau}\int_K f(x,\tau)\,dx = \int_K \frac{\partial}{\partial\tau} f(x,\tau)\,dx. \tag{5.2.3}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 5.2.3. *Για κάθε Borel σύνολο* $K \subseteq [0,\infty)^m$ *και κάθε* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geqslant 0$,

$$\int_K e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i}\frac{\partial}{\partial\tau}f(x,\tau)\,dx = \frac{\partial}{\partial\tau}\left(\int_K e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i} f(x,\tau)\,dx\right).$$

Απόδειξη. Έχουμε υποθέσει ότι ο C είναι θετικά ορισμένος, άρα οι C_{11} και C_{22} είναι θετικά ορισμένοι, και το ίδιο ισχύει για τον $C(\tau)$ για κάθε $\tau \in [0,1]$. Το τυχαίο διάνυσμα $X(\tau) \sim N(0, C(\tau))$ έχει πυκνότητα

$$\det(C(\tau))^{-1/2}(2\pi)^{-m/2}\exp\Big(-\frac{1}{2}\langle C(\tau)^{-1}x, x\rangle\Big).$$

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι η πυκνότητα του $Z(\tau)$ είναι ίση με

$$f(x,\tau) = \det(C(\tau))^{-1/2}(4\pi)^{-m/2}\frac{1}{\sqrt{x_1\cdots x_m}}\sum_{\epsilon\in E_2^m} e^{-\langle C(\tau)^{-1}\sqrt{x_\epsilon}, \sqrt{x_\epsilon}\rangle}\mathbf{1}_{(0,\infty)^m}(x),$$

όπου $\sqrt{x_\epsilon} := (\epsilon_i\sqrt{x_i})_{i\leqslant m}$ για κάθε $\epsilon \in E_2^m = \{-1,1\}^m$ και $x \in (0,\infty)^m$.

Η συνάρτηση $\tau \mapsto \det(C(\tau))^{-1/2}$ είναι διαφορίσιμη στο $[0,1]$. Ειδικότερα,

$$M := \sup_{\tau\in[0,1]}\det(C(\tau))^{-1/2} + \sup_{\tau\in[0,1]}\frac{\partial}{\partial\tau}\det(C(\tau))^{-1/2} < \infty.$$

Αφού $C(\tau) = \tau C(1) + (1-\tau)C(0)$, έχουμε $\frac{\partial}{\partial\tau}C(\tau) = C(1) - C(0)$, και

$$\frac{\partial}{\partial\tau}e^{-\langle C(\tau)^{-1}\sqrt{x_\epsilon}, \sqrt{x_\epsilon}\rangle} = -\langle C(\tau)^{-1}(C(1)-C(0))C(\tau)^{-1}\sqrt{x_\epsilon},\, \sqrt{x_\epsilon}\rangle\, e^{-\langle C(\tau)^{-1}\sqrt{x_\epsilon}, \sqrt{x_\epsilon}\rangle}.$$

Από τη συνέχεια της $\tau \mapsto C(\tau)$ παίρνουμε

$$\langle C(\tau)^{-1}\sqrt{x_\epsilon},\, \sqrt{x_\epsilon}\rangle \geqslant a\langle\sqrt{x_\epsilon},\, \sqrt{x_\epsilon}\rangle = a\sum_{i=1}^m |x_i|$$

και

$$\langle C(\tau)^{-1}(C(1)-C(0))C(\tau)^{-1}\sqrt{x_\epsilon},\, \sqrt{x_\epsilon}\rangle \leqslant b\langle\sqrt{x_\epsilon},\, \sqrt{x_\epsilon}\rangle = b\sum_{i=1}^m |x_i|$$

για κάποιους $a > 0$ και $b < \infty$. Έπεται ότι

$$\sup_{\tau\in[0,1]}\Big|\frac{\partial}{\partial\tau}f(x,\tau)\Big| \leqslant g(x) := M\pi^{-m/2}\frac{1}{\sqrt{x_1\cdots x_m}}\Big(1 + b\sum_{i=1}^m |x_i|\Big)e^{-a\sum_{i=1}^m |x_i|}$$

για κάθε $x \in (0,\infty)^m$.

Αφού η συνάρτηση g του δεξιού μέλος ανήκει στον $L_1((0,\infty)^m)$ και $e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i} \geqslant 1$, μπορούμε τώρα να δικαιολογήσουμε τον τύπο του λήμματος, χρησιμοποιώντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue. □

Θέτοντας $\lambda_1 = \cdots = \lambda_m = 0$ στο Λήμμα 5.2.3 παίρνουμε την (5.2.3). Τώρα, για την απόδειξη της Πρότασης 5.2.2 αρκεί να αποδείξουμε ότι:

Πρόταση 5.2.4. *Για κάθε* $0 \leqslant \tau \leqslant 1$ *και* $s_1, \dots, s_m > 0$ *ισχύει*

$$\int_K \frac{\partial}{\partial \tau} f(x,\tau)\, dx \geqslant 0, \tag{5.2.4}$$

όπου $K = [0,s_1] \times \cdots \times [0,s_m]$.

Αρχικά υπολογίζουμε το μετασχηματισμό Laplace της $\frac{\partial}{\partial\tau} f(x,\tau)$. Από το Λήμμα 5.2.3 έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{[0,\infty)^m} e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i} \frac{\partial}{\partial \tau} f(x,\tau)\, dx &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\int_{[0,\infty)^m} e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i} f(x,\tau)\, dx\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial \tau}\left(\mathbb{E}\left[\exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i^2(\tau)\Big)\right]\right).\end{aligned}$$

Στο επόμενο λήμμα υπολογίζουμε αυτή τη μέση τιμή.

Λήμμα 5.2.5. *Έστω* X *ένα* m*-διάστατο κεντραρισμένο Gaussian διάνυσμα με πίνακα συνδιακυμάνσεων* C*. Τότε, για κάθε* $\lambda_1, \dots, \lambda_m \geqslant 0$ *έχουμε*

$$\mathbb{E}\left[\exp\Big(-\sum_{i=1}^m \lambda_i X_i^2\Big)\right] = \det(I_m + 2\Lambda C)^{-1/2},$$

όπου $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Απόδειξη. Έστω A ένας συμμετρικός θετικά ορισμένος πίνακας. Μπορούμε να βρούμε $U \in O(n)$ και έναν διαγώνιο πίνακα $D = \mathrm{diag}(d_1, d_2, \dots, d_m)$, όπου $d_i > 0$, έτσι ώστε $A = UDU^t$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\langle Ax, x\rangle)\, dx = \int_{\mathbb{R}^m} \exp(-\langle Dx, x\rangle)\, dx = \prod_{i=1}^m \Big(\frac{\pi}{d_i}\Big)^{1/2} = \pi^{m/2}\det(D)^{-1/2} = \pi^{m/2}\det(A)^{-1/2}.$$

Συνεπώς, αν Y είναι ένα Gaussian διάνυσμα $Y \sim N(0, I_m)$ και B ένας συμμετρικός πίνακας τέτοιος ώστε $2B \prec I_m$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(\exp(\langle BY, Y\rangle)\right) &= (2\pi)^{-m/2}\int_{\mathbb{R}^m} \exp\Big(-\Big\langle\Big(\frac{1}{2}I_m - B\Big)(x), x\Big\rangle\Big)\, dx \\ &= 2^{-m/2}\det\Big(\frac{1}{2}I_m - B\Big)^{-1/2} = \det(I_m - 2B)^{-1/2}.\end{aligned}$$

Τώρα, αν $X \sim N(0, C)$ μπορούμε να γράψουμε $X \sim AY$, όπου $Y \sim N(0, I_m)$ και $C = A^t$. Τότε,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{i=1}^{m}\lambda_i X_i^2\right)\right] &= \mathbb{E}\left(\exp(-\langle \Lambda X, X\rangle)\right)\\ &= \mathbb{E}\left(-\langle \Lambda AY, AY\rangle)\right) = \mathbb{E}\left(-\langle A^t\Lambda AY, Y\rangle)\right)\\ &= \det(I_m + 2A^t\Lambda A)^{-1/2} = \det(I_m + 2\Lambda C)^{-1/2},\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας, στο τέλος, το γεγονός ότι $\det(I_m + A_1A_2) = \det(I_m + A_2A_1)$ για κάθε ζεύγος $m \times m$ πινάκων A_1, A_2. □

Από το Λήμμα 5.2.5 έχουμε

$$\int_{[0,\infty)^m} e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i} f(x,\tau)\,dx = \det(I_m + \Lambda C(\tau))^{-1/2},$$

όπου $\Lambda = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_m)$.

Αν $A = (a_{ij})_{i,j=1}^m$ είναι ένας $m \times m$ πίνακας και $J \subset [m] = \{1, \dots, m\}$, συμβολίζουμε με A_J τον τετραγωνικό πίνακα $A_j = (a_{ij})_{i,j\in J}$. Χρησιμοποιώντας επαγωγή ως προς m ή τον τύπο του Leibniz για ορίζουσες, μπορούμε να εκφράσουμε την ορίζουσα $\det(I_m + A)$ ως εξής:

$$\det(I_m + A) = 1 + \sum_{\emptyset \neq J \subset [m]} \det(A_J).$$

Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε

$$\det(I_m + \Lambda C(\tau)) = 1 + \sum_{\emptyset \neq J \subset [m]} \det((\Lambda C(\tau))_J) = 1 + \sum_{\emptyset \neq J \subset [m]} \det(C(\tau)_J)\prod_{j\in J}\lambda_j.$$

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα από την Γραμμική Άλγεβρα.

Λήμμα 5.2.6. *Έστω $m = m_1 + m_2$ και A ένας $m \times m$ πίνακας που γράφεται στη μορφή $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$, όπου ο A_{ij} είναι $m_i \times m_j$ πίνακας και οι A_{11}, A_{22} είναι αντιστρέψιμοι. Τότε,*

$$\det(A) = \det(A_{11})\ \det(A_{22})\ \det(I_{n_1} - A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{1/2}).$$

Επιπλέον, αν ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος τότε

$$\mathbf{0} \preceq A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{1/2} \preceq I_{m_1}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε τον $\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22}\end{pmatrix}$ στη μορφή

$$\begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^{1/2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{11}^{-12}A_{12}A_{22}^{-1/2} \\ A_{22}^{-1/2}A_{21}A_{11}^{-1/2} & I_{n_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_{11}^{1/2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_{22}^{1/2}\end{pmatrix},$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} I_{n_1} & A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1/2} \\ A_{22}^{-1/2}A_{21}A_{11}^{-1/2} & I_{n_2} \end{pmatrix}
&= \det\begin{pmatrix} I_{n_1} - A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1/2} & 0 \\ A_{22}^{-1/2}A_{21}A_{11}^{-1/2} & I_{n_2} \end{pmatrix} \\
&= \det(I_{n_1} - A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1/2}).
\end{aligned}$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό παρατηρούμε ότι $A_{11}^{-1/2}A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}A_{11}^{-1/2} = B^tB \succ \mathbf{0}$, όπου $B := A_{22}^{-1/2}A_{21}A_{11}^{-1/2}$. Αν ο A είναι θετικά ορισμένος τότε για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^{n_1}$ και $y \in \mathbb{R}^{n_2}$ έχουμε

$$t^2\langle A_{11}x, x\rangle + 2t\langle A_{21}x, y\rangle + \langle A_{22}y, y\rangle \geqslant 0.$$

Συνεπώς, πρέπει να έχουμε

$$\langle A_{21}x, y\rangle^2 \leqslant \langle A_{11}x, x\rangle \, \langle A_{22}y, y\rangle.$$

Αντικαθιστώντας το x με $A_{11}^{-1/2}x$ και το y με $A_{22}^{-1/2}y$ παίρνουμε

$$\langle Bx, y\rangle^2 \leqslant \|x\|_2^2 \, \|y\|_2^2.$$

Επιλέγοντας $y = Bx$ έχουμε $\langle B^tBx, x\rangle \leqslant \|x\|_2^2$, το οποίο αποδεικνύει ότι $B^tB \preceq I_{n_1}$. □

Για κάθε $\emptyset \neq J \subset [m]$ γράφουμε $J = J_1 \cup J_2$, όπου $J_1 = J \cap [m_1]$ και $J_2 = J \setminus J_1$. Τότε,

$$C(\tau)_J = \begin{pmatrix} C_{J_1} & \tau C_{J_1,J_2} \\ \tau C_{J_2,J_1} & C_{J_2} \end{pmatrix}.$$

Αν το J_1 ή το J_2 είναι το κενό σύνολο τότε $((C(\tau))_J = C_J$, αλλιώς χρησιμοποιούμε το Λήμμα 5.2.6 για να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\det(C(\tau)_J) &= \det(C_{J_1})\,\det(C_{J_2})\,\det(I_{|J_1|} - \tau^2 C_{J_1}^{-1/2}C_{J_1,J_2}C_{J_2}^{-1}C_{J_2,J_1}C_{J_1}^{1/2}) \\
&= \det(C_{J_1})\,\det(C_{J_2})\prod_{i=1}^{|J_1|}(1-\tau^2\mu_{J_1,J_2}(i)),
\end{aligned}$$

όπου $\mu_{J_1,J_2}(i)$, $1 \leqslant i \leqslant |J_1|$, είναι οι ιδιοτιμές του $C_{J_1}^{-1/2}C_{J_1,J_2}C_{J_2}^{-1}C_{J_2,J_1}C_{J_1}^{1/2}$. Το Λήμμα 5.2.6 δείχνει ότι $\mu_{J_1,J_2}(i) \in [0,1]$.

Λήμμα 5.2.7. *Ο μετασχηματισμός Laplace της* $\frac{\partial}{\partial\tau}f(x,\tau)$ *δίνεται από την*

$$\int_{[0,\infty)^m} e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i}\frac{\partial}{\partial\tau}f(x,\tau)\,dx = \frac{1}{2}\det(I_m + \Lambda C(\tau))^{-3/2}\sum_{\emptyset\neq J\subset[m]} a_J(\tau)\prod_{j\in J}\lambda_j$$

για κάποιους $a_J(\tau) \geqslant 0$.

Απόδειξη. Είδαμε ότι

$$\int_{[0,\infty)^m} e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i} \frac{\partial}{\partial \tau} f(x,\tau)\,dx = \det(I_m + \Lambda C(\tau))^{-1/2}.$$

Παραγωγίζοντας έχουμε

$$\begin{aligned}&\frac{\partial}{\partial \tau}\det(I_m + \Lambda C(\tau))^{-1/2}\\ &\qquad = -\frac{1}{2}\det(I_m + \Lambda C(\tau))^{-3/2} \sum_{\emptyset \neq J \subset [m]} \frac{\partial}{\partial \tau}\det(C(\tau)_J)\det(\Lambda_J).\end{aligned}$$

Από την

$$\det(C(\tau)_J) = \det(C_{J_1})\,\det(C_{J_2}) \prod_{i=1}^{|J_1|}(1-\tau^2 \mu_{J_1,J_2}(i)),$$

και το γεγονός ότι $\mu_{J_1,J_2}(i) \in [0,1]$, για κάθε $\emptyset \neq J \subset [m]$ και για κάθε $\tau \in [0,1]$ έχουμε

$$a_J(\tau) := -\frac{\partial}{\partial \tau}\det(C(\tau)_J) \geqslant 0.$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα. ■

Ορισμός 5.2.8. Για κάθε $\alpha > 0$ ορίζουμε

$$g_\alpha(x,y) := e^{-x-y} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+\alpha-1}}{\Gamma(k+\alpha)} \frac{y^k}{k!}, \qquad x > 0, y \geqslant 0.$$

Επίσης, αν $Y = (Y_1,\dots,Y_m)$ είναι ένα τυχαίο διάνυσμα τέτοιο ώστε $\mathbb{P}(Y_i \geqslant 0) = 1$, για κάθε $\mu, \alpha_1, \dots, \alpha_m > 0$ ορίζουμε

$$h_{\alpha_1,\dots,\alpha_m,\mu,Y}(x_1,\dots,x_m) := \mathbb{E}\left[\prod_{i=1}^m \frac{1}{\mu} g_{\alpha_i}\Big(\frac{x_i}{\mu}, Y_i\Big)\right], \qquad x_1,\dots,x_m > 0.$$

Λήμμα 5.2.9. *Έστω $\mu > 0$ και Y ένα τυχαίο m-διάστατο διάνυσμα με μη αρνητικές συντεταγμένες. Για $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_m) \in (0,\infty)^m$ ορίζουμε $h_\alpha := h_{\alpha_1,\dots,\alpha_m,\mu,Y}$. Τότε:*

(i) *Για κάθε $\alpha \in (0,\infty)^m$ έχουμε $h_\alpha \geqslant 0$ και $\int_{(0,\infty)^m} h_\alpha(x)\,dx = 1$.*

(ii) *Αν $\alpha \in (0,\infty)^m$ και $\alpha_i > 1$ τότε $\lim_{x_i \to 0^+} h_\alpha(x) = 0$, η παράγωγος $\frac{\partial}{\partial x_i} h_\alpha(x)$ υπάρχει και*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} h_\alpha(x) = h_{\alpha - e_i} - h_\alpha.$$

(iii) *Αν $\alpha \in (1,\infty)^m$ τότε για κάθε $J \subset [m]$, η παράγωγος $\frac{\partial^{|J|}}{\partial x_J} h_\alpha(x)$ υπάρχει και ανήκει στον $L_1((0,\infty)^m)$. Επιπλέον, για κάθε $\lambda_1,\dots,\lambda_m \geqslant 0$ έχουμε*

$$\int_{(0,\infty)^m} e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_J} h_\alpha(x) = \prod_{i \in J} \lambda_i \int_{(0,\infty)^m} e^{-\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i} h_\alpha(x)\,dx.$$

Απόδειξη. (i) Είναι φανερό ότι η h_α είναι μη-αρνητική. Για κάθε $y \geqslant 0$ και $\alpha > 0$,

$$\int_0^\infty \frac{1}{\mu} g_\alpha\Big(\frac{x}{\mu}, y\Big)\, dx = \int_0^\infty g_\alpha(x,y)\, dx = 1.$$

Από το θεώρημα Fubini,

$$\int_{(0,\infty)^m} h_\alpha(x)\, dx = \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^m \frac{1}{\mu} g_{\alpha_i}\Big(\frac{x_i}{\mu}, Y_i\Big)\, dx_i\right] = 1.$$

(ii) Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η $\Gamma(x)$ είναι φθίνουσα στο $(0, x_0]$ και αύξουσα στο $[x_0, \infty)$ για κάποιο $1 < x_0 < 2$ με $\Gamma(x_0) > 1/2$. Συνεπώς, για κάθε $\alpha > 0$ και $k \geqslant 1$ έχουμε

$$\Gamma(k+\alpha) \geqslant \frac{1}{2}\Gamma(k) = \frac{1}{2}(k-1)!$$

και

$$\begin{aligned} g_\alpha(x,y) &\leqslant e^{-x} \sum_{k=0}^\infty \frac{x^{k+\alpha-1}}{\Gamma(k+\alpha)} \leqslant 2\left(x^{\alpha-1}e^{-x} + x^\alpha \sum_{k=1}^\infty \frac{x^{k-1}}{(k-1)!} e^{-x}\right) \\ &= 2x^{\alpha-1}(e^{-x} + x). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι για κάθε $\alpha > 0$ και $0 < a < b < \infty$ έχουμε $g_\alpha(x,y) \leqslant C(\alpha, a, b) < \infty$ για κάθε $x \in (a,b)$ και $y \geqslant 0$. Επιπλέον,

$$h_\alpha(x) \leqslant \Big(\frac{2}{\mu}\Big)^m \prod_{i=1}^m \Big(\frac{x_i}{\mu}\Big)^{\alpha_i - 1}\Big(1 + \frac{x_i}{\mu}\Big).$$

Ειδικότερα, αν $\alpha_i \geqslant 1$ έχουμε $\lim_{x_i \to 0^+} h_\alpha(x) = 0$. Παρατηρήστε ότι αν $\alpha > 1$ τότε $\frac{\partial}{\partial x} g_\alpha = g_{\alpha-1} - g_\alpha$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue ολοκληρώνουμε την απόδειξη του (ii).

(iii) Από το (ii) έχουμε

$$\frac{\partial^{|J|}}{\partial x_J} h_\alpha = \sum_{\delta \in \{0,1\}^J} (-1)^{|J| - \sum_{i \in J} \delta_i} f_{\alpha - \sum_{i\in J} \delta_i e_i} \in L_1((0,\infty)^m).$$

Επιπλέον, $\lim_{x_j \to 0^+} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_J} h_\alpha(x) = 0$ για κάθε $j \notin J$. Ολοκληρώνουμε την απόδειξη με επαγωγή ως προς το $|J|$ χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη. □

Αφού ο $C(\tau)$ είναι γνησίως θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας, υπάρχει $\mu > 0$ τέτοιος ώστε ο $C(\tau) - \mu I_m$ να είναι θετικά ορισμένος, άρα μπορούμε να γράψουμε $C(\tau) = \mu I_m + AA^t$ για κάποιον $m \times m$ πίνακα A. Έστω $(g_j^{(\ell)})_{j \leqslant m,\, \ell \leqslant 3}$ ανεξάρτητες $N(0,1)$ τυχαίες μεταβλητές, και έστω

$$Y_i = \frac{1}{2\mu} \sum_{\ell=1}^3 \sum_{j,j' \leqslant m} g_j^{(\ell)} g_{j'}^{(\ell)} a_{ij} a_{ij'} = \sum_{\ell=1}^3 \left(\sum_{j=1}^m \frac{1}{\sqrt{2\mu}} g_j^{(\ell)} a_{ij}\right)^2, \qquad 1 \leqslant i \leqslant m$$

και

$$h_{3, C(\tau)} := h_{\frac{3}{2}, \dots, \frac{3}{2}, \mu, Y}.$$

Θα αποδείξουμε τον ακόλουθο τύπο.

Λήμμα 5.2.10. *Έχουμε*

$$\det(I_m+\Lambda C(\tau))^{-\frac{3}{2}}=\int_{(0,\infty)^m}e^{-\sum_{i=1}^m\lambda_i x_i}h_{3,C(\tau)}(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Για κάθε $\alpha,\mu>0$ και $\lambda,y\geqslant 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty\frac{1}{\mu}e^{-\lambda x}g_\alpha\left(\frac{x}{\mu},y\right)\,dx&=e^{-y}\sum_{k=0}^\infty\frac{y^k}{k!\Gamma(k+\alpha)}\int_0^\infty e^{-(\lambda+\frac{1}{\mu})x}\frac{x^{k+\alpha-1}}{\mu^{k+\alpha}}\,dx\\&=e^{-y}\sum_{k=0}^\infty\frac{y^k}{k!(1_\mu\lambda)^{k+\alpha}}=(1+\mu\lambda)^{-\alpha}e^{-\frac{\mu\lambda}{1+\mu\lambda}y}.\end{aligned}$$

Από το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{(0,\infty)^m}e^{-\sum_{i=1}^m\lambda_i x_i}h_{3,C(\tau)}(x)\,dx&=\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m\int_0^\infty\frac{1}{\mu}e^{-\lambda_i x_i}g_{3/2}\left(\frac{x_i}{\mu},Y_i\right)\,dx_i\right)\\&=\det(I_m+\mu\Lambda)^{-\frac{3}{2}}\mathbb{E}\left(e^{-\sum_{i=1}^m\frac{\mu\lambda_i}{1+\mu\lambda_i}Y_i}\right).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $Y_i=\sum_{\ell=1}^3(X_i^{(\ell)})^2$, όπου οι $X^{(\ell)}:=(X_i^{(\ell)})_{i\leqslant m}\sim N\left(0,\frac{1}{2\mu}AA^t\right)$ είναι ανεξάρτητες. Συνεπώς, παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\int_{(0,\infty)^m}e^{-\sum_{i=1}^m\lambda_i x_i}h_{3,C(\tau)}(x)\,dx\\&\quad=\det(I_m+\mu\Lambda)^{-\frac{3}{2}}\det(I_m+2\mu\Lambda(I_m+\mu\Lambda)^{-1}\frac{1}{2\mu}AA^t)^{-\frac{3}{2}}\\&\quad=\det(I_m+\Lambda C(\tau))^{-\frac{3}{2}},\end{aligned}$$

από το Λήμμα 5.2.5. □

Απόδειξη της Πρότασης 5.2.4. Από το Λήμμα 5.2.10 και το Λήμμα 5.2.9 βλέπουμε ότι

$$\det(I_m+\Lambda C(\tau))^{-\frac{3}{2}}\prod_{j\in J}\lambda_j=\int_{(0,\infty)^m}e^{-\sum_{i=1}^m\lambda_i x_i}\frac{\partial^{|J|}}{\partial x_J}h_{3,C(\tau)}(x)\,dx.$$

Σε συνδυασμό με το Λήμμα 5.2.7 έχουμε

$$\begin{aligned}&\int_{[0,\infty)^m}e^{-\sum_{i=1}^m\lambda_i x_i}\frac{\partial}{\partial\tau}f(x,\tau)\,dx\\&\quad=\frac{1}{2}\det(I_m+\Lambda C(\tau))^{-3/2}\sum_{\emptyset\neq J\subset[m]}a_J(\tau)\prod_{j\in J}\lambda_j\\&\quad=\frac{1}{2}\int_{(0,\infty)^m}e^{-\sum_{i=1}^m\lambda_i x_i}\sum_{\emptyset\neq J\subset[m]}a_J(\tau)\frac{\partial^{|J|}}{\partial x_J}h_{3,C(\tau)}(x)\,dx\end{aligned}$$

για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$. Συνεπώς,

$$\frac{\partial}{\partial \tau} f(x, \tau) = \sum_{\emptyset \neq J \subset [m]} \frac{1}{2} a_J(\tau) \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_J} h_{3, C(\tau)}(x).$$

Αφού $a_J(\tau) \geqslant 0$ και, από το Λήμμα 5.2.9,

$$\lim_{x_i \to 0^+} \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_J} h_{3, C(\tau)}(x) = 0$$

για κάθε $i \notin J$, με διαδοχικές εφαρμογές του θεμελιώδους θεωρήματος του Απειροστικού Λογισμού παίρνουμε

$$\int_K \frac{\partial^{|J|}}{\partial x_J} h_{3, C(\tau)}(x)\, dx = \int_{\prod_{j \in [m] \setminus J} [0, t_j]} h_{3, C(\tau)}(t_J, x_{[m] \setminus J})\, dx_{[m] \setminus J} \geqslant 0,$$

όπου $y = (t_J, x_{[m] \setminus J})$ με $y_i = t_i$ αν $i \in J$ και $y_i = x_i$ αν $i \in [m] \setminus J$.

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης και του θεωρήματος του Royen. ■

Κεφάλαιο 6

Το B-θεώρημα

6.1 Η εικασία του Banaszczyk

Το B-θεώρημα των Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey απαντά θετικά σε μια εικασία του Banaszczyk. Η αρχική εικασία του Banaszczyk ρωτούσε αν για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $a, b > 0$ ισχύει η ανισότητα

$$\gamma_n(\sqrt{ab}K)^2 \geqslant \gamma_n(aK)\gamma_n(bK). \tag{6.1.1}$$

Ειδικότερα, η συνάρτηση

$$t \mapsto \gamma_n(t^{-1}K)\gamma_n(tK)$$

παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο σημείο $t = 1$. Από το γεγονός ότι το γ_n είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας έχουμε την ανισότητα

$$\gamma_n\left(\frac{a+b}{2}K\right)^2 \geqslant \gamma_n(aK)\gamma_n(bK) \tag{6.1.2}$$

για κάθε $a, b > 0$. Δεδομένου ότι $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$, άρα $\sqrt{ab}K \subseteq \frac{a+b}{2}K$ για κάθε $a, b > 0$, η ανισότητα (6.1.1) είναι ισχυρότερη από την (6.1.2). Οι Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey έδωσαν καταφατική απάντηση στην εικασία αποδεικνύοντας την εξής ισοδύναμη προταση.

Θεώρημα 6.1.1. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση*

$$t \mapsto \gamma_n(e^t K)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Μάλιστα, όπως θα δούμε, η απόδειξη του θεωρήματος δίνει ένα γενικότερο αποτέλεσμα. Για κάθε $(t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $\Delta(t_1, \dots, t_n)$ τον διαγώνιο πίνακα με διαγώνιες συντεταγμένες τους $t_1, \dots, t_n$. Αν T είναι ένας γραμμικός τελεστής στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε $e^T K$ για την εικόνα του K μέσω του τελεστή e^T. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$(t_1, \dots, t_n) \mapsto \gamma_n(e^{\Delta(t_1,\dots,t_n)}K)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^n$. Το θεώρημα προκύπτει αν περιορίσουμε αυτό το αποτέλεσμα σε n-άδες της μορφής $(t,\dots,t)$.

Σταθεροποιούμε δύο n-άδες $(a_1,\dots,a_n)$ και $(b_1,\dots,b_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε με A και B τους αντίστοιχους διαγώνιους πίνακες. Ορίζουμε $f = f_{K,B,A} : \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(t) = \gamma_n(e^{B+tA}K)$$

και σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη. Ισοδύναμα, θέλουμε να δείξουμε ότι

(6.1.3)
$$\frac{f''(t)}{f(t)} - \frac{[f'(t)]^2}{[f(t)]^2} \leqslant 0.$$

Παρατηρώντας ότι $f_{K,B,A}(s+t) = f_{K_1,0,A}(t)$ για κάθε $s,t\in\mathbb{R}$, όπου $K_1 = e^{B+sA}K$, βλέπουμε ότι αρκεί να εξετάσουμε την ειδική περίπτωση όπου $B=0$ και $t=0$. Με άλλα λόγια, αρκεί να ελέγξουμε την (6.1.3) για τη συνάρτηση

$$f(t) = \gamma_n(e^{tA}K)$$

στο σημείο $t=0$. Το θεώρημα αντιστοιχεί στην περίπτωση $A=I$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = e^{tA}x$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για κάθε διαγώνιο πίνακα X ισχύει $\det\left(e^X\right) = e^{\mathrm{tr}(X)}$, παίρνουμε

$$f(t) = \gamma_n(e^{tA}K) = \frac{e^{t\cdot\mathrm{tr}(A)}}{(2\pi)^{n/2}}\int_K e^{-\|e^{tA}x\|_2^2/2}\,dx.$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $t\mapsto e^{t\cdot\mathrm{tr}(A)}$ είναι λογαριθμικά αφινική. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε την (6.1.3) για τη συνάρτηση

$$g(t) = \int_K e^{-\|e^{tA}x\|_2^2/2}dx$$

στο σημείο $t=0$.

Η παράγωγος της g δίνεται από την

$$g'(t) = -\int_K \langle e^{tA}x, Ae^{tA}x\rangle e^{-\|e^{tA}x\|_2^2/2}dx,$$

και η δεύτερη παράγωγος της g από την

$$g''(t) = \int_K \left(\langle e^{tA}x, Ae^{tA}x\rangle^2 - 2\langle e^{tA}x, A^2e^{tA}x\rangle\right)e^{-\|e^{tA}x\|_2^2/2}dx.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

(6.1.4)
$$\frac{g''(0)}{g(0)} - \frac{[g'(0)]^2}{[g(0)]^2} \leqslant 0.$$

Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{\int_K \langle x, Ax\rangle^2 e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}{\int_K e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx} - \left(\frac{\int_K \langle x, Ax\rangle e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}{\int_K e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}\right)^2 \leqslant 2\frac{\int_K \langle x, A^2x\rangle^2 e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}{\int_K e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}. \tag{6.1.5}$$

Εισάγοντας το μέτρο πιθανότητας γ_K με πυκνότητα

$$d\gamma_K(x) = \frac{\mathbf{1}_K(x) e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}{\int_K e^{-\|y\|_2^2/2}\,dy},$$

το οποίο είναι ο περιορισμός του μέτρου Gauss στο K, ξαναγράφουμε την προηγούμενη ανισότητα ως εξής:

$$\int [f_A(x)]^2\,d\gamma_K(x) - \left(\int f_A(x)\,d\gamma_K(x)\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\int \|\nabla f_A(x)\|_2^2\,d\gamma_K(x),$$

όπου $f_A(x) = \langle x, Ax\rangle$. Συνεπώς, αυτό που θέλουμε είναι να επαληθεύσουμε μια ανισότητα Poincaré για το μέτρο γ_K και τη συνάρτηση f_A, με σταθερά $\frac{1}{2}$.

6.2 Ανισότητα Poincaré

Το μέτρο γ_K είναι λογαριθμικά κοίλο ως προς το γ_n: ανήκει στην κλάση των μέτρων πιθανότητας μ της μορφής $d\mu(x) = e^{-W(x)}\,dx$ με την W κυρτή C^2 συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathrm{Hess}(W) \geqslant I$ στο κυρτό σύνολο K όπου $W < \infty$. Είναι μάλιστα τεχνικά ευκολότερο να υποθέσουμε ότι η W ορίζεται σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$ και όχι μόνο στο κυρτό σύνολο K. Για το σκοπό αυτό, θεωρούμε το γ_K ως το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας πυκνοτήτων της μορφής

$$e^{-\|x\|_2^2-\psi(x)},$$

όπου η ψ είναι σταθερή στο K και παίρνει «μεγάλες τιμές» έξω από το K. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ψ είναι άρτια όταν το K είναι συμμετρικό, και ότι η $\mathrm{Hess}(\psi)$ είναι διαφορίσιμη και φραγμένη στον $\mathbb{R}^n$. Γράφοντας $W(x) = \|x\|_2^2 + \psi(x)$ δουλεύουμε με ένα μέτρο πιθανότητας μ που δίνεται από την

$$d\mu(x) = e^{-W(x)}\,dx\,, \quad W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Hess}(W) \geqslant I. \tag{6.2.1}$$

Στην περίπτωσή μας, η W είναι επιπλέον άρτια και το ζητούμενο είναι τώρα να δείξουμε ότι για την

$$q(x) = \langle x, Ax\rangle - \int \langle x, Ax\rangle\,d\mu(x)$$

ισχύει

$$\int q^2\,d\mu \leqslant \frac{1}{2}\int \|\nabla q\|_2^2\,d\mu.$$

Είναι γνωστό ότι τα μέτρα πιθανότητας μ της μορφής (6.2.1) ικανοποιούν την ανισότητα Poincaré με σταθερά 1:

Λήμμα 6.2.1. *Για κάθε μέτρο πιθανότητας* μ *της μορφής* (6.2.1) *και για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση* $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *με* $g \in L_2(\mu)$ *και* $\int g \, d\mu = 0$ *έχουμε*

$$\int g^2 \, d\mu \leqslant \int \|\nabla g\|_2^2 \, d\mu. \tag{6.2.2}$$

Παρατηρήστε ότι εφαρμόζοντας απευθείας την (6.2.2) θα παίρναμε ένα ασθενέστερο αποτέλεσμα από το ζητούμενο, χάνοντας μια σταθερά 2. Για να ξεπεράσουμε αυτήν την δυσκολία χρησιμοποιούμε ουσιαστικά την πρόσθετη υπόθεση ότι $\int \nabla q \, d\mu = 0$. Θα την εκμεταλλευτούμε μέσω του επόμενου λήμματος, το οποίο παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Λήμμα 6.2.2. *Έστω* μ *ένα μέτρο πιθανότητας στον* $\mathbb{R}^n$, *της μορφής* $d\mu(x) = e^{-W(x)} \, dx$, *όπου* $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *είναι μια κυρτή συνάρτηση με* $\mathrm{Hess}(W) \geqslant I$. *Τότε, για κάθε διαφορίσιμη συνάρτηση* $f \in L_2(\mu)$ *με* $\int f \, d\mu = 0$ *και* $\int \nabla f \, d\mu = 0$ *έχουμε*

$$\int f^2 \, d\mu \leqslant \frac{1}{2} \int \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu.$$

Για την απόδειξη εισάγουμε τον διαφορικό τελεστή Laplace-Beltrami ο οποίος αντιστοιχεί στην W: για κάθε $u \in C^2$ ορίζουμε

$$Lu = \Delta u - \langle \nabla W, \nabla u \rangle.$$

Ο L είναι καλά ορισμένος στο

$$\mathcal{D} := \{u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : u \in C^2(\mathbb{R}^n) \ \text{ με συμπαγή φορέα}\}$$

και επεκτείνεται σε έναν μη-φραγμένο αυτοσυζυγή τελεστή στον $L_2(\mu)$. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι ο L ικανοποιεί την ταυτότητα του Green: αν f είναι μια τοπικά Lipschitz συνάρτηση τέτοια ώστε οι f και $\|\nabla f\|_2$ να ανήκουν στον $L_2(\mu)$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) Lu(x) \, d\mu(x) = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u(x), \nabla f(x) \rangle \, d\mu(x) \tag{6.2.3}$$

για κάθε $u \in \mathcal{D}$. Για την απόδειξη, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} f(x) Lu(x) \, d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x)(\Delta u(x) - \langle \nabla W(x), \nabla u(x) \rangle) \, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-W(x)} \Delta u(x) \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-W(x)} \langle \nabla W(x), \nabla u(x) \rangle \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u(x), \nabla (f e^{-W})(x) \rangle \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-W(x)} \langle \nabla W(x), \nabla u(x) \rangle \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u(x), \nabla f(x) \rangle \, d\mu(x).
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι

$$\nabla(Lu) = L\nabla u - \mathrm{Hess}(W)(\nabla u). \tag{6.2.4}$$

Συνδυάζοντας τις δύο προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
(6.2.5)\qquad \int_{\mathbb{R}^n} (Lu)^2 \, d\mu &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u, \nabla(Lu)\rangle \, d\mu \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla u, L\,(\nabla u)\rangle \, d\mu + \int_{\mathbb{R}^n} \langle (\mathrm{Hess}(W))(\nabla u), \nabla u\rangle \, d\mu \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \big(\|\mathrm{Hess}(u)\|_{HS}^2 + \langle (\mathrm{Hess}(W))(\nabla u), \nabla u\rangle\big) \, d\mu.
\end{aligned}
$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής κλασσικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 6.2.3. Ο χώρος $L(\mathcal{D}) = \big\{Lu : u \in C^2$ με συμπαγή φορέα$\big\}$ είναι $L_2(\mu)$-πυκνός στον χώρο $L_2^0(\mu) := \{g \in L_2(\mu) : \int g \, d\mu = 0\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ανήκει στην κλάση C^2 και συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ με λ. Θεωρούμε τον ορθομοναδιαίο τελεστή $U : L_2(\mu) \to L_2(\lambda)$ ο οποίος ορίζεται από την

$$U(f) = fe^{-W/2}.$$

Έστω $\psi \in \mathcal{D}$ και $f \in L_2(\mu)$ με $\|\nabla f\|_2 \in L_2(\mu)$. Θέτουμε $g = U(f) \in L_2(\lambda)$ και γράφουμε

$$
\begin{aligned}
\langle -L(U^*(\psi), f\rangle_{L_2(\lambda)} &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla(U^*(\psi))(x), \nabla f(x)\rangle e^{-W(x)} dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\psi(x) + \frac{1}{2}\psi(x)\nabla W(x), e^{-W(x)/2}\nabla f(x)\rangle \, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\psi(x) + \frac{1}{2}\psi(x)\nabla W(x), \nabla g(x) + \frac{1}{2}g(x)\nabla W(x)\rangle \, dx \\
&= -\int_{\mathbb{R}^n} \Delta\psi(x) g(x) dx + \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla(\psi g)(x), \nabla W(x)\rangle \, dx \\
&\qquad + \frac{1}{4}\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\psi(x)\|\nabla W(x)\|_2^2 dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} (-\Delta\psi(x) + V(x)\psi(x)) g(x) dx,
\end{aligned}
$$

όπου $V(x) = \frac{1}{4}\|\nabla W(x)\|_2^2 - \frac{1}{2}\Delta W(x)$. Έπεται ότι για κάθε $f \in L_2(\mu)$ ισχύει η σχέση

$$(6.2.6)\qquad \langle -L(U^*(\psi), f\rangle_{L_2(\lambda)} = \langle -\Delta\psi + V\psi, Uf\rangle_{L_2(\lambda)}.$$

Θεωρούμε $f \in L_2(\mu)$ η οποία είναι ορθογώνια στον $L(\mathcal{D})$. Θα αποδείξουμε ότι η f είναι σταθερή. Αυτό αποδεικνύει ότι αν $f \in L_2^0(\mu)$ και $f \perp L(\mathcal{D})$ τότε $f \equiv 0$, και έπεται ο ισχυρισμός του λήμματος.

Παρατηρούμε αρχικά ότι, λόγω της (6.2.6), η $g = Uf$ ικανοποιεί την $\Delta g = Vg$ ως κατανομή στον $\mathcal{D}'$. Άρα $g \in W^{2,2}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ και η $\|\nabla f\|_2$ ορίζεται καλά. Θεωρούμε $h \in \mathcal{D}$ με $h \equiv 1$ σε μια περιοχή του 0, ορίζουμε $h_k(x) = h(x/k)$, $k \geqslant 1$, και θα δείξουμε ότι $\lim_{k\to\infty} \| \|\nabla(h_k f)\|_2\|_{L_2(\mu)} = 0$.

Αυτό αποδεικνύει ότι η f είναι σταθερή, και έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla(h_kf)(x)\|_2^2d\mu(x) &= \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla(h_kge^{W/2})(x)\|_2^2e^{-W(x)}dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(\|\nabla(h_kg)(x)\|_2^2+(h_k(x)g(x))^2W(x))\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}(\|\nabla(h_kg)(x)\|_2^2+h_k^2(x)g(x)\Delta g(x))\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla h_k(x)\|_2^2g^2(x)\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}h_k^2(x)\|\nabla g(x)\|_2^2dx\\ &\quad+2\int_{\mathbb{R}^n}h_k(x)g(x)\langle\nabla h_k(x),\nabla g(x)\rangle\,dx+\int_{\mathbb{R}^n}h_k^2(x)g(x)\Delta g(x)\,dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla h_k(x)\|_2^2g^2(x)\,dx\to 0\end{aligned}$$

όταν $k\to\infty$, διότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{div}(h_k^2g\nabla g)(x)\,dx=0.$$

■

Απόδειξη του Λήμματος 6.2.2. Έστω $f\in L_2(\mu)$ με $\int f\,d\mu=0$ και $\int\nabla f\,d\mu=0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\nabla f\in L_2(\mu)$. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι, αφού $\int f\,d\mu=0$, προφανώς έχουμε

$$\min\Big\{\int_{\mathbb{R}^n}(g-f)^2\,d\mu\ :\ g\in L_2(\mu),\ \int_{\mathbb{R}^n}g\,d\mu=0\Big\}=0.$$

Συνεπώς, από το Λήμμα 6.2.3,

$$\inf\Big\{\int_{\mathbb{R}^n}(Lu-f)^2\,d\mu: u\in C^2\,\text{με συμπαγή φορέα}\Big\}=0.$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $u\in C^2$ με συμπαγή φορέα έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}(f^2(x)-\frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|_2^2)\,d\mu(x)\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}(Lu-f)^2\,d\mu(x),$$

δηλαδή

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Big((Lu(x)-f(x))^2-f^2(x)+\frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|_2^2\Big)\,d\mu(x)\geqslant 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Big((Lu(x))^2-2f(x)Lu(x)+\frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|_2^2\Big)\,d\mu(x)\geqslant 0.$$

Από την (6.2.5), από το γεγονός ότι $\langle(\mathrm{Hess}(W))(\nabla u(x)),\nabla u(x)\rangle\geqslant\|\nabla u(x)\|_2^2$ και από την (6.2.3), βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\|\mathrm{Hess}(u)(x)\|_{HS}^2+\|\nabla u(x)\|_2^2+2\langle\nabla u(x),\nabla f(x)\rangle+\frac{1}{2}\|\nabla f(x)\|_2^2\Big)\,d\mu\geqslant 0.$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την τελευταία ανισότητα στη μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\|\mathrm{Hess}(u)(x)\|_{\mathrm{HS}}^2-\|\nabla u(x)\|_2^2+\frac{1}{2}\|2\nabla u(x)+\nabla f(x)\|_2^2\Big)\,d\mu(x)\geqslant 0.$$

Θέτοντας $\alpha:=\int_{\mathbb{R}^n}\nabla u(x)\,d\mu(x)$, εισάγοντας μια συνάρτηση u_0 με $\nabla u_0=\nabla u-\alpha$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\int_{\mathbb{R}^n}\nabla f\,d\mu=0$, βλέπουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\|\alpha\|_2^2+\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\|\mathrm{Hess}(u_0)\|_{\mathrm{HS}}^2-\|\nabla u_0\|_2^2+\frac{1}{2}\|2\nabla u_0+\nabla f\|_2^2\Big)\,d\mu\geqslant 0.$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\big(\|\mathrm{Hess}(u_0)\|_{\mathrm{HS}}^2-\|\nabla u_0\|_2^2\big)\,d\mu\geqslant 0.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2.1 για τις συναρτήσεις $\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}$ για $j=1,\dots,n$ (αυτή είναι ακριβώς η ανισότητα Poincaré για ένα μέτρο μ αυτής της ειδικής μορφής) και αθροίζοντας πάνω από όλα τα $j=1,\dots,n$ παίρνουμε την τελευταία ανισότητα, άρα και το συμπέρασμα. ∎

Κεφάλαιο 7

Συνδυαστικές εφαρμογές του μέτρου του Gauss

7.1 Προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων

Για κάθε ζεύγος U, V συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την παράμετρο $\beta(U, V)$ ως τον μικρότερο $r > 0$ που ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: για κάθε $u_1, \ldots, u_n \in U$ υπάρχουν πρόσημα $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_n u_n \in rV.$$

Διάφορα θεωρήματα «εξισορρόπησης διανυσμάτων», τα οποία έχουν αποδειχθεί από διάφορους συγγραφείς για πολύ διαφορετικούς σκοπούς, μπορούν να περιγραφούν ως εκτιμήσεις για την παράμετρο $\beta(U, V)$ για συγκεκριμένη επιλογή του U, του V, ή και των δύο τους:

(α) Ο Banaszczyk απέδειξε ένα γενικό κάτω φράγμα για την παράμετρο $\beta(U, V)$ συναρτήσει των όγκων των U, V: υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων U, V στον $\mathbb{R}^n$,

$$\beta(U, V) \geqslant c\sqrt{n}(|U|/|V|)^{1/n}.$$

(β) Οι Bárány και Grinberg έχουν αποδείξει ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$\beta(K, K) \leqslant 2n.$$

(γ) Η διανυσματική μορφή ενός πολύ γνωστού θεωρήματος των Beck και Fiala ισχυρίζεται ότι

$$\beta(B_1^n, Q_n) \leqslant 2,$$

όπου B_1^n είναι η μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n και Q_n είναι ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$.

(δ) Ο Spencer απέδειξε ότι $\beta(Q_n, Q_n) \leqslant c\sqrt{n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το ίδιο αποτέλεσμα αποδείχθηκε, ανεξάρτητα, από τον Gluskin.

(ε) O Banaszczyk απέδειξε ότι αν $\mathcal{E}$ είναι ένα ελλειψοειδές με κέντρο συμμετρίας το 0 και κύριους ημιάξονες $a_1, \dots, a_n$ τότε

$$\beta(B_2^n, \mathcal{E}) = (a_1^{-2} + \cdots + a_n^{-2})^{1/2}.$$

Μια κλασική αναφορά γι¨ αυτά τα αποτελέσματα, ιδίως για εκείνα που προέκυψαν από προβλήματα της Συνδυαστικής, είναι το βιβλίο του Spencer [54].

Ένα πολύ γνωστό πρόβλημα του Komlós ρωτάει αν η ακολουθία $\beta(B_2^n, Q_n)$ είναι φραγμένη. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε μια απόδειξη του θεωρήματος του Spencer και της καλύτερης γνωστής εκτίμησης $O(\sqrt{\log n})$ για το ερώτημα του Komlós, η οποία οφείλεται στον Banaszczyk. Οι αποδείξεις χρησιμοποιούν τα αποτελέσματα που συζητήσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια: στην πρώτη χρησιμοποιείται το λήμμα του Šidák, ενώ στη δεύτερη γίνεται πρώτα μια αναγωγή του προβλήματος σε μια νέα ανισότητα για το μέτρο Gauss, η οποία αποδεικνύεται με αναγωγή στο επίπεδο μέσω της ανισότητας του Ehrhard (την ίδια στρατηγική είχαμε ακολουθήσει στην απόδειξη του S-θεωρήματος).

Το θεώρημα του Spencer μπορεί να διατυπωθεί στην παρακάτω ισοδύναμη μορφή.

Θεώρημα 7.1.1 (Spencer, Gluskin). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_\infty \leqslant 1$, μπορούμε να επιλέξουμε πρόσημα $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_n u_n\|_\infty \leqslant C\sqrt{n}.$$

Αντίστοιχα, η εκτίμηση του Banaszczyk για το πρόβλημα του Komlós διατυπώνεται ως εξής.

Θεώρημα 7.1.2 (Banaszczyk). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_2 \leqslant 1$, μπορούμε να επιλέξουμε πρόσημα $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_n u_n\|_\infty \leqslant C\sqrt{\log n}.$$

7.2 Το θεώρημα του Spencer

Το θεώρημα του Spencer είναι σχεδόν άμεση συνέπεια του ακόλουθου θεωρήματος.

Θεώρημα 7.2.1. *Υπάρχουν $\beta > 0$ και $0 < \delta < 1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $r \leqslant n$ και $u_1, \dots, u_r \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_\infty \leqslant 1$ μπορούμε να βρούμε $\epsilon_1, \dots, \epsilon_r \in \{-1, 0, 1\}$ τέτοια ώστε*

$$|\{j \leqslant r : \epsilon_j = 0\}| < \delta r$$

και

$$\|\epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_r u_r\|_\infty \leqslant \beta\sqrt{r}\sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $n \times r$ πίνακα A με στήλες τα u_j, και γράφουμε a_i, $i = 1, \dots, n$ για τις γραμμές του A. Αν $x = (x_1, \dots, x_r) \in \mathbb{R}^r$, τότε $\|x_1u_1 + \cdots + x_ru_r\|_\infty \leqslant M$ αν και μόνο αν $x \in K = K(M)$, όπου

$$K(M) = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i\rangle| \leqslant M, i = 1, \dots, n\}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες απλές παρατηρήσεις:

(i) Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^r$ και $z \in \mathbb{R}^r$, τότε

$$\gamma_r(z + K) \geqslant e^{-\frac{\|z\|_2^2}{2}}\gamma_r(K).$$

(ii) Για κάθε $s > 0$,

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^s e^{-t^2/2}dt \geqslant 1 - e^{-s^2/2}.$$

(iii) Αν $s \geqslant 2$ τότε $1 - e^{-s^2/2} \geqslant \exp\left(-2e^{-s^2/2}\right)$.

Για κάθε $i = 1, \dots, n$ ορίζουμε

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i\rangle| \leqslant M\}.$$

Κάθε P_i είναι συμμετρική λωρίδα πλάτους $2M/\|a_i\|_2$. Παρατηρήστε ότι $\|a_i\|_2 \leqslant \sqrt{r}$ διότι $\|a_i\|_\infty \leqslant 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\gamma_r(P_i) &\geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M/\sqrt{r}}^{M/\sqrt{r}} \frac{1}{(2\pi)^{\frac{r-1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-t^2/2}e^{-\|y\|_2^2/2}dy\,dt \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-M/\sqrt{r}}^{M/\sqrt{r}} e^{-t^2/2}dt \\
&= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{M/\sqrt{r}} e^{-t^2/2}dt \\
&\geqslant 1 - \exp(-M^2/2r).
\end{aligned}$$

Από το λήμμα του Šidák παίρνουμε ένα κάτω φράγμα για το $\gamma_r(K)$:

Πρόταση 7.2.2. *Για κάθε* $p \in (0,1)$ *υπάρχει* $\beta = \beta(p) > 0$ *με την ακόλουθη ιδιότητα: αν*

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i\rangle| \leqslant \beta\sqrt{r}\sqrt{\log(\frac{2n}{r})}, i \leqslant n\right\},$$

τότε $\gamma_r(K) \geqslant 2^{-pr}$.

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι αν επιλέξουμε $M = \beta\sqrt{r}\sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)}$ τότε

$$\frac{M}{\sqrt{r}} = \beta\sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)} \geqslant \beta\sqrt{\log 2} \geqslant 2,$$

με την προϋπόθεση ότι το β θα επιλεγεί αρκετά μεγάλο. Τότε,

$$\gamma_r(P_i) \geqslant 1 - \exp(-M^2/2r) \geqslant \exp(-2e^{-\beta^2 \log(2n/r)/2}).$$

Από τον ορισμό του K και το λήμμα του Sidák,

$$\begin{aligned}\gamma_r(K) = \gamma_r(P_1 \cap \cdots \cap P_n) &\geqslant \prod_{i=1}^{n} \gamma_r(P_i) \\ &\geqslant \prod_{i=1}^{n} \left(1 - \exp(-M^2/2r)\right) \geqslant \exp\left(-2ne^{-M^2/2r}\right) \\ &= \exp\left(-\frac{2n}{\exp(\beta^2 \log(2n/r)/2)}\right).\end{aligned}$$

Θέλουμε να επιτύχουμε το κάτω φράγμα $\gamma_r(K) \geqslant 2^{-pr}$, συνεπώς αρκεί να επιλέξουμε $\beta > 0$ το οποίο να ικανοποιεί την

$$\frac{2n}{\exp(\beta^2 \log(2n/r)/2)} \leqslant pr.$$

Ισοδύναμα, ζητάμε να ισχύει η

$$\beta^2 \log\left(\frac{2n}{r}\right) \geqslant \log\left(\frac{2n}{pr}\right).$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι αυτή η συνθήκη ικανοποιείται αν $\beta > \sqrt{1 + c\log(1/p)}$. Με αυτή την επιλογή ικανοποιούνται και όλοι οι υπόλοιποι περιορισμοί, άρα η απόδειξη είναι πλήρης.■

Λήμμα 7.2.3. *Υπάρχει $\gamma \in (0,1)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν το β είναι αρκετά μεγάλο και αν*

$$K = \left\{x \in \mathbb{R}^r : |\langle x, a_i\rangle| \leqslant \beta\sqrt{r}\sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)}, i \leqslant n\right\},$$

τότε μπορούμε να βρούμε $A \subseteq \{-1,1\}^r$ πληθικότητας $|A| > 2^{\gamma r}$, τέτοιο ώστε

$$\bigcap_{\epsilon \in A} (\epsilon + K) \neq \emptyset.$$

Απόδειξη. Οπως θα φανεί από την απόδειξη, θα εφαρμόσουμε το προηγούμενο λήμμα με $p = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\log 2}\right)$. Σταθεροποιούμε τα $p, \beta(p)$ και $M(p)$ όπως στην Πρόταση 7.2.2. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^r} \chi_{\epsilon+K}(x)\gamma_r(dx) &= \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^r} \gamma_r(\epsilon + K) \\ &\geqslant \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^r} e^{-\|\epsilon\|_2^2/2}\gamma_r(K) \\ &\geqslant 2^r e^{-r/2} 2^{-pr} \\ &= 2^{(1-\frac{1}{2\log 2}-p)r}.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $p_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\log 2}\right)$, και αυτή η επιλογή προσδιορίζει τα $\beta = \beta(p_0)$ και K. Έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^r} \chi_{\epsilon + K}(x)\gamma_r(dx) \geqslant 2^{p_0 r},$$

άρα μπορούμε να βρούμε $x_0 \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{\epsilon \in \{-1,1\}^r} \chi_{\epsilon + K}(x_0) \geqslant 2^{p_0 r},$$

και αν ορίσουμε $A = \{\epsilon : x_0 \in \epsilon + K\}$ τότε $|A| > 2^{p_0 r}$ και

$$\bigcap_{\epsilon \in A} (\epsilon + K) \neq \emptyset.$$

Αυτό αποδεικνύει το λήμμα με $\gamma = p_0 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2\log 2}\right)$. ∎

Μπορούμε τώρα να συνεχίσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1. Υπάρχει $\delta = \delta(\gamma) \in (0,1)$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{s=0}^{[(1-\delta)r]+1} \binom{r}{s} < 2^{\gamma r}.$$

Αφού $|A| > 2^{\gamma r}$, μπορούμε να επιλέξουμε $\epsilon^{(1)}, \epsilon^{(2)} \in A$ με

$$|\{j \leqslant r : \epsilon_j^{(1)} = \epsilon_j^{(2)}\}| \leqslant \delta r.$$

Αφού $(\epsilon^{(1)} + K) \cap (\epsilon^{(2)} + K) \neq \emptyset$ και το K είναι συμμετρικό, έπεται ότι

$$\epsilon := \frac{\epsilon^{(1)} - \epsilon^{(2)}}{2} \in K,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\|\epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_r u_r\|_\infty \leqslant \beta\sqrt{r}\sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)}.$$

Επιπλέον, $\epsilon \in \{-1,0,1\}^r$ και $|\{j \leqslant r : \epsilon_j = 0\}| \leqslant \delta r$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. ∎

Μπορούμε μάλιστα να αποδείξουμε ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7.2.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $r \leqslant n$ και κάθε $u_1, \ldots, u_r \in \mathbb{R}^n$ με $\|u_j\|_\infty \leqslant 1$, μπορούμε να επιλέξουμε $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r \in \{-1,1\}$ τέτοια ώστε*

$$\|\epsilon_1 u_1 + \cdots + \epsilon_r u_r\|_\infty \leqslant C\sqrt{r}\sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.2.1 υπάρχουν $\epsilon_1^1, \ldots, \epsilon_r^1 \in \{-1, 0, 1\}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $\sigma_1 = \{j \leqslant r : \epsilon_j^1 = 0\}$ τότε $|\sigma_1| \leqslant \delta r$ και

$$\Big\| \sum_{j \notin \sigma_1} \epsilon_j^1 u_j \Big\|_\infty = \|\epsilon_1^1 u_1 + \cdots + \epsilon_r^1 u_r\|_\infty \leqslant \beta\, \sqrt{r}\, \sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)}.$$

Κρατάμε τα ϵ_j^1, $j \notin \sigma_1$, και θεωρούμε τα διανύσματα u_j, $j \in \sigma_1$. Έχουμε $|\sigma_1| \leqslant \delta r$ και $\|u_j\|_\infty \leqslant 1$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε και πάλι το Θεώρημα 7.2.1 και να επιλέξουμε $\epsilon_j^2 \in \{-1, 0, 1\}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $\sigma_2 = \{j \in \sigma_1 : \epsilon_j^2 = 0\}$, τότε $|\sigma_2| \leqslant \delta|\sigma_1| \leqslant \delta^2 r$, και

$$\Big\| \sum_{j \in \sigma_1 \setminus \sigma_2} \epsilon_j^2 u_j \Big\|_\infty = \Big\| \sum_{j \in \sigma_1} \epsilon_j^2 u_j \Big\|_\infty \leqslant \beta\, \sqrt{\delta r}\, \sqrt{\log\left(\frac{2n}{\delta r}\right)}$$

(η συνάρτηση $t \mapsto \sqrt{t}\, \sqrt{\log(2n/t)}$ είναι αύξουσα στο διάστημα στο οποίο δουλεύουμε). Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο μέχρι να καταλήξουμε σε κάποιο k_0 για το οποίο $|\sigma_{k_0}| \leqslant \sqrt{r}\, \sqrt{\log(\frac{2n}{r})}$. Εφόσον $\delta \in (0, 1)$, έχουμε $|\sigma_k| \leqslant \delta^k r \to 0$ άρα θα υπάρξει κάποιο τέτοιο βήμα k_0. Στο k-οστό βήμα έχουμε

$$\Big\| \sum_{j \in \sigma_{k-1} \setminus \sigma_k} \epsilon_j^k u_j \Big\|_\infty \leqslant \beta\, \sqrt{\delta^{k-1} r}\, \sqrt{\log\left(\frac{2n}{\delta^{k-1} r}\right)},$$

όπου ϵ_j^k είναι τα πρόσημα τα οποία επελέγησαν στο k-οστό βήμα. Για κάθε $j \in \sigma_{k-1} \setminus \sigma_k$ θέτουμε $\epsilon_j = \epsilon_j^k$, ενώ αν $j \in \sigma_{k_0}$ τότε θέτουμε $\epsilon_j = 1$. Με αυτό τον τρόπο έχουμε βρεί μια επιλογή προσήμων $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_r \in \{-1, 1\}$ για την οποία

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{j=1}^r \epsilon_j u_j \Big\|_\infty &\leqslant \sum_{k=1}^{k_0} \Big\| \sum_{j \in \sigma_{k-1} \setminus \sigma_k} \epsilon_j u_j \Big\|_\infty + \Big\| \sum_{j \in \sigma_{k_0}} u_j \Big\|_\infty \\
&\leqslant \sum_{k=0}^{k_0-1} \beta\, \sqrt{\delta^k r}\, \sqrt{\log\left(\frac{2n}{\delta^k r}\right)} + \sqrt{r}\, \sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)} \\
&\leqslant (\beta + 1)\, \sqrt{r}\, \sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)} \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{k/2} + \beta\, \sqrt{r} \sum_{k=0}^{\infty} \delta^{k/2}\, \sqrt{\log(\delta^{-k})}.
\end{aligned}$$

Αυτές οι δύο σειρές συγκλίνουν, συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\Big\| \sum_{j=1}^r \epsilon_j u_j \Big\|_\infty &\leqslant (\beta + 1) A(\delta)\, \sqrt{r}\, \sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)} + \beta B(\delta)\, \sqrt{r} \\
&\leqslant C(\beta, \delta)\, \sqrt{r}\, \sqrt{\log\left(\frac{2n}{r}\right)}.
\end{aligned}$$

Οι σταθερές β και δ ήσαν απόλυτες σταθερές, άρα το ίδιο ισχύει και για την C. ∎

Παρατηρήστε ότι αν επιλέξουμε $r = n$ στο Θεώρημα 7.2.4 παίρνουμε το θεώρημα του Spencer (Θεώρημα 7.1.1).

7.3 Το θεώρημα του Banaszczyk

Έστω V ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$\beta(V) = \inf\left\{\rho > 0 : \forall u_1, \ldots, u_n \in B_2^n \; \exists \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\} : \sum \epsilon_i u_i \in \rho V\right\}.$$

Με βάση τον ορισμό της παραμέτρου $\beta(V)$, το πρόβλημα του Komlós παίρνει την ακόλουθη μορφή: υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\beta(Q_n) \leqslant C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οι Banaszczyk και Szarek διατύπωσαν την ακόλουθη εικασία, η οποία θα έδινε μία, όχι ακριβώς βέλτιστη, απάντηση στο πρόβλημα του Komlós.

Εικασία 7.3.1. *Υπάρχει μια φθίνουσα συνάρτηση $f : (0,1) \to \mathbb{R}^+$ τέτοια ώστε*

$$\beta(V) \leqslant f(\gamma_n(V))$$

για κάθε κλειστό και κυρτό υποσύνολο V του $\mathbb{R}^n$.

Ειδικότερα, αν $\gamma_n(V) \geqslant 1/2$ τότε $\beta(V) \leqslant C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το δεύτερο μέρος της εικασίας αποδείχθηκε από τον Banaszczyk.

Θεώρημα 7.3.2 (Banaszczyk). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με $\gamma_n(K) \geqslant 1/2$. Τότε, $\beta(K) \leqslant c$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7.3.2 είναι η καλύτερη γνωστή εκτίμηση για το πρόβλημα του Komlós.

Θεώρημα 7.3.3 (Banaszczyk). *Ισχύει η ανισότητα $\beta(Q_n) \leqslant c\sqrt{\log n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\gamma_n(rQ_n) &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_{rQ_n} e^{-|x|^2/2} dx = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-r}^{r} e^{-t^2/2} dt\right)^n \\ &\geqslant \left(1 - e^{-r^2/2}\right)^n.\end{aligned}$$

Αν το n είναι αρκετά μεγάλο και αν επιλέξουμε $r = 2\sqrt{\log n}$, τότε

$$\gamma_n(2\sqrt{\log n} Q_n) \geqslant (1 - n^{-2})^n \geqslant \frac{1}{2},$$

και το Θεώρημα 7.3.2 δείχνει ότι

$$\beta(2\sqrt{\log n} Q_n) \leqslant C.$$

Συνεπώς,

$$\beta(Q_n) \leqslant 2\sqrt{\log n} C \leqslant c' \sqrt{\log n},$$

όπως ισχυριστήκαμε. ∎

Το βασικό τεχνικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.2 είναι το εξής.

Θεώρημα 7.3.4. *Έστω* K *κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\gamma_n(K) \geqslant 1/2$*, και* $u \in \mathbb{R}^n$ *με* $\|u\|_2 \leqslant 1/5$*. Τότε, το* $(K+u) \cup (K-u)$ *περιέχει ένα κυρτό σώμα* K' *με* $\gamma_n(K') \geqslant 1/2$*.*

Με δεδομένο το Θεώρημα 7.3.4 η απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.2 είναι πολύ απλή:

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι, αν $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ και $|u_j| \leqslant 1/5$, τότε υπάρχουν $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1,1\}$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j \in K$.

Έστω ότι $\gamma_n(K) \geqslant 1/2$, αλλά το παραπάνω δεν ισχύει. Υπάρχουν δηλαδή $u_1, \dots, u_m \in \mathbb{R}^n$ με $|u_j| \leqslant 1/5$, τα οποία έχουν την ιδιότητα: για κάθε $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m \in \{-1,1\}$,

$$\sum_{j=1}^m \varepsilon_j u_j \notin K.$$

Από το Θεώρημα 7.3.4, υπάρχει κυρτό σώμα $K_1 \subseteq (K+u_m) \cup (K-u_m)$ με $\gamma_n(K_1) \geqslant 1/2$. Τότε, για κάθε $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-1} \in \{-1,1\}$,

$$\sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j u_j \notin K_1.$$

Πράγματι, αν για κάποια $\varepsilon_j^* \in \{-1,1\}$, $j \leqslant m-1$, είχαμε $\nu = \sum_{j=1}^{m-1} \varepsilon_j^* u_j \in K_1$, τότε θα ήταν: είτε $\nu \in K + u_m$ οπότε $\nu - u_m \in K$, είτε $\nu \in K - u_m$ οπότε $\nu + u_m \in K$. Σε κάθε περίπτωση, αυτό είναι άτοπο από την υπόθεσή μας.

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο, ορίζουμε ακολουθία κυρτών σωμάτων K_s, $s = 1, 2, \dots$, με $\gamma_n(K_s) \geqslant 1/2$ και

$$\sum_{j=1}^{m-s} \varepsilon_j u_j \notin K_s$$

για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_{m-s} \in \{-1,1\}$. Στο βήμα $s = m-1$, προκύπτει κυρτό σώμα K_{m-1} με $\gamma_n(K_{m-1}) \geqslant 1/2$, και $\pm u_1 \notin K_{m-1}$. Όμως τότε, υπάρχει κυρτό σώμα $K_m = W \subseteq (K_{m-1} + u_1) \cup (K_{m-1} - u_1)$, τέτοιο ώστε: $\gamma_n(W) \geqslant 1/2$ και $o \notin W$. Αυτό είναι άτοπο, γιατί το W πρέπει να διαχωρίζεται γνήσια από το o, δηλαδή να περιέχεται γνήσια σε έναν ημίχωρο H με $\gamma_n(H) < 1/2$. ∎

Αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε το Θεώρημα 7.3.4. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $u = re_n$. Θεωρούμε τον κύλινδρο Z που αποτελείται από όλες τις ευθείες l που είναι παράλληλες προς το u και έχουν την ιδιότητα το μήκος του $K \cap l$ να είναι μεγαλύτερο ή ίσο του $2r$.

Ορίζουμε

$$K * u := K \cap Z + \{tu : |t| \leqslant 1\} = [(K+u) \cup (K-u)] \cap Z.$$

Από τον τρόπο ορισμού του Z, προκύπτει ότι το $K*u$ είναι κυρτό και $K*u \subseteq (K+u) \cup (K-u)$. Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι:

Θεώρημα 7.3.5. *Αν* $\gamma_n(K) \geqslant 1/2$ *και* $r \leqslant 1/5$*, τότε* $\gamma_n(K*u) \geqslant \gamma_n(K) \geqslant 1/2$*.*

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε $\psi(K)$ για την προβολή του K στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Τότε, υπάρχουν συναρτήσεις $h_1, h_2 : \psi(K) \to \mathbb{R}$, τέτοιες ώστε

$$K = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in \psi(K), h_1(x) \leqslant x_n \leqslant h_2(x)\},$$

όπου h_1 κυρτή, h_2 κοίλη, και $h_1 \leqslant h_2$ στο $\psi(K)$. Θέτουμε $A = \mathrm{int}(\psi(K))$, και ορίζουμε $h_3 : A \to \mathbb{R}$ μέσω της

$$\int_{-\infty}^{h_3(x)} e^{-t^2/2}dt = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} e^{-t^2/2}dt, \quad x \in A.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Ehrhard για $n = 2$, βλέπουμε ότι η h_3 είναι κοίλη στο A. Επομένως, το

$$U = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in A, x_n < h_3(x)\}$$

είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}\gamma_n(U) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_A \int_{-\infty}^{h_3(x)} e^{-t^2/2}dt\gamma_{n-1}(dx) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\psi(K)} \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} e^{-t^2/2}dt\gamma_{n-1}(dx) \\ &= \gamma_n(K).\end{aligned}$$

Ορίζουμε $\alpha = \sup\{h_3(x) : x \in A\}$. Από την $\gamma_n(U) = \gamma_n(K) \geqslant 1/2$ έπεται ότι $\alpha > 0$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $H_t = \{(x, x_n) : x_n = t\}$, και μία συνάρτηση $f : (-\infty, \alpha) \to \mathbb{R}$ μέσω της

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{f(t)} e^{-s^2/2}ds = \gamma_{n-1}(\psi(U \cap H_t)).$$

Από την ανισότητα του Ehrhard, η f είναι κοίλη. Εύκολα ελέγχουμε ότι είναι και φθίνουσα. Επίσης,

$$\gamma_n(K) = \gamma_n(U) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\alpha} \int_{-\infty}^{f(t)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} ds dt.$$

Θεωρούμε τα σύνολα

$$B = \{x \in \psi(K) : h_2(x) - h_1(x) \geqslant 2r\}$$

και

$$C = \{x \in A : h_3(x) > -p\},$$

όπου p ο αριθμός που ορίζεται από τη σχέση

$$\int_p^{\infty} e^{-t^2/2}dt = 2\int_0^r e^{-t^2/2}dt.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε διάφορα λήμματα που προκύπτουν από στοιχειώδεις ιδιότητες της συνάρτησης $e^{-t^2/2}$:

Λήμμα 7.3.6. *Αν* $r \leqslant 1/5$, *τότε* $p > 1$. *Ειδικότερα,* $p > r/2$.

Λήμμα 7.3.7. *Έστω $r > 0$. Η συνάρτηση*

$$x \mapsto \int_x^{x+r} e^{-t^2/2} dt$$

είναι αύξουσα στο $(-\infty, -r/2]$ και φθίνουσα στο $[r/2, +\infty)$. Για κάθε $x \geqslant 0$,

$$\int_x^{x+r} e^{-t^2/2} dt \leqslant \int_{x-r}^{x} e^{-t^2/2} dt.$$

Λήμμα 7.3.8. *Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Τότε,*

$$\int_a^b e^{-t^2/2} dt \leqslant 2 \int_0^{(b-a)/2} e^{-t^2/2} dt.$$

Λήμμα 7.3.9. *Έστω $a, b, c \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν την*

$$\int_a^b e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^{c} e^{-t^2/2} dt.$$

Τότε, για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_{a-r}^{b+r} e^{-t^2/2} dt > \int_{-\infty}^{c+r} e^{-t^2/2} dt.$$

Έχουμε $B = \psi(K) \cap Z$, και το C είναι μη κενό, γιατί $\alpha = \sup h_3 > 0$. Επίσης, το C είναι κυρτό, γιατί η h_3 είναι κοίλη. Θα δείξουμε ότι $C \subseteq B$: Έστω $x \in C$. Τότε,

$$\begin{aligned} 2\int_0^r e^{-t^2/2} dt &= \int_p^{\infty} e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^{-p} e^{-t^2/2} dt \\ &< \int_{-\infty}^{h_3(x)} e^{-t^2/2} dt = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} e^{-t^2/2} dt \\ &\leqslant 2 \int_0^{\frac{h_2(x)-h_1(x)}{2}} e^{-t^2/2} dt. \end{aligned}$$

Άρα, $h_2(x) - h_1(x) \geqslant 2r$, δηλαδή $x \in B$.

Ερχόμαστε στο $K * u$. Έχουμε

$$K * u = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in B, h_1(x) - r \leqslant x_n \leqslant h_2(x) + r\},$$

και, αν θεωρήσουμε το

$$V = \{(x, x_n) \in \mathbb{R}^n : x \in C, x_n < h_3(x) + r\},$$

τότε,

$$\begin{aligned} \gamma_n(V) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_C \int_{-\infty}^{h_3(x)+r} e^{-t^2/2} dt \gamma_{n-1}(dx) \\ &< \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_B \int_{h_1(x)-r}^{h_2(x)+r} e^{-t^2/2} dt \gamma_{n-1}(dx) \\ &= \gamma_n(K * u), \end{aligned}$$

γιατί, $C \subseteq B$ όπως είδαμε, και από την

$$\int_{-\infty}^{h_3(x)} e^{-t^2/2}dt = \int_{h_1(x)}^{h_2(x)} e^{-t^2/2}dt$$

έπεται η

$$\int_{-\infty}^{h_3(x)+r} e^{-t^2/2}dt = \int_{h_1(x)-r}^{h_2(x)+r} e^{-t^2/2}dt$$

για κάθε $r > 0$ (Λήμμα 7.3.9). Βλέπουμε λοιπόν ότι το θεώρημα θα αποδειχθεί αν ισχύει το εξής:

Πρόταση 7.3.10. $\gamma_n(V) \geqslant \gamma_n(U)$.

Ακριβώς όπως για το U, ορίζουμε για το V συνάρτηση $g : (-\infty, \alpha+r) \to \mathbb{R}$ που να ικανοποιεί την

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{g(t)} e^{-s^2/2}ds = \gamma_{n-1}(\psi(V \cap H_t)), \qquad -\infty < t < \alpha + r.$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την g συναρτήσει της f:

$$g(t) = \begin{cases} f(-p), & \text{αν } -\infty < t \leqslant -p + r \\ f(t-r), & \text{αν } -p + r \leqslant t < \alpha + r \end{cases}$$

Με τη βοήθεια της g, το $\gamma_n(V)$ γράφεται στη μορφή

$$\gamma_n(V) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\alpha+r}\int_{-\infty}^{g(t)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dsdt.$$

Αυτό λοιπόν που ζητάμε να δείξουμε είναι η ανισότητα

$$\begin{aligned}(7.3.1)\qquad \int_{-\infty}^{-p+r}\int_{-\infty}^{f(-p)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dsdt + \int_{-p+r}^{\alpha+r}\int_{-\infty}^{f(t-r)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dsdt \\ \geqslant \int_{-\infty}^{\alpha}\int_{-\infty}^{f(t)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dsdt,\end{aligned}$$

έχοντας εξασφαλίσει τις εξής προϋποθέσεις:

(α) το r είναι θετικό, και αρκετά μικρό.

(β) $\int_p^{+\infty} e^{-t^2/2}dt = \int_{-r}^{r} e^{-t^2/2}dt$, και αν $r \leqslant 1/5$ τότε $p \geqslant 1$ (Λήμμα 7.3.6).

(γ) $\alpha > 0$.

(δ) Η $f : (-\infty, \alpha) \to \mathbb{R}$ είναι φθίνουσα, κοίλη, με $f(0) \geqslant 0$.

Αυτές είναι οι μόνες υποθέσεις που θα χρειαστούμε στη συνέχεια.

Λήμμα 7.3.11. *Ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{2p}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leqslant \int_{p}^{p+r} e^{-t^2/2}dt.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\Psi(x) = \int_x^{+\infty} e^{-t^2/2} dt,$$

και ζητάμε την $\Psi(2p) \leqslant \Psi(p) - \Psi(p+r)$. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $p \mapsto \Psi(p+r)/\Psi(p)$ είναι φθίνουσα. Πράγματι, εύκολα ελέγχουμε ότι η $\log \Psi$ είναι φθίνουσα, και αυτό μάς εξασφαλίζει ότι

$$\left(\log \frac{\Psi(p+r)}{\Psi(p)}\right)'(p) = \frac{\Psi'(p+r)}{\Psi(p+r)} - \frac{\Psi'(p)}{\Psi(p)} < 0.$$

Άρα,

$$\frac{\Psi(p) - \Psi(p+r)}{\Psi(p)} > \frac{\Psi(0) - \Psi(r)}{\Psi(0)} = \frac{\Psi(p)}{2\Psi(0)},$$

δηλαδή,

$$\frac{\Psi(p) - \Psi(p+r)}{\Psi(2p)} > \frac{1}{2\Psi(0)} \frac{\Psi^2(p)}{\Psi(2p)}.$$

Ομοίως, η συνάρτηση $p \mapsto \Psi^2(p)/\Psi(2p)$ είναι αύξουσα, γιατί

$$\left(\log \frac{\Psi^2(p)}{\Psi(2p)}\right)'(p) = \frac{2\Psi'(p)}{\Psi(p)} - \frac{2\Psi'(2p)}{\Psi(2p)} > 0,$$

άρα,

$$\frac{\Psi(p) - \Psi(p+r)}{\Psi(2p)} > \frac{1}{2\Psi(0)} \frac{\Psi^2(p)}{\Psi(2p)} \geqslant \frac{1}{2\Psi(0)} \frac{\Psi^2(1)}{\Psi(2)},$$

το οποίο μπορούμε εύκολα να δούμε ότι ξεπερνάει το 1. Αυτό συμπληρώνει την απόδειξη. ■

Απόδειξη της (7.3.1). Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι γνησίως φθίνουσα και $\lim_{t\to a} f(t) = -\infty$. Γράφουμε $b = \lim_{t\to -\infty} f(t)$ και θεωρούμε την αντίστροφη συνάρτηση της f, $h : (-\infty, b) \to (-\infty, a)$. Η h είναι κοίλη, γνησίως φθίνουσα, $h(0) \geqslant 0$, και η (7.3.1) παίρνει την ισοδύναμη μορφή

$$\int_{f(-p)}^{b} \int_{-\infty}^{h(s)} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dt ds \leqslant \int_{-\infty}^{f(-p)} \int_{-\infty}^{h(s)} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dt ds. \tag{7.3.2}$$

Γράφουμε $u = f(-p)$ και $v = f(-r/2)$. Από το Λήμμα 7.3.6, $p > r/2$ άρα $u > v$. Έστω l η γραμμική συνάρτηση με $l(u) = -p$ και $l(v) = -r/2$ (η l συμπίπτει με την h στα u και v). Η l είναι γνησίως φθίνουσα.

Ισχυρισμός 7.3.12. *Ισχύουν οι ανισότητες*

$$\int_{u}^{+\infty} \int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dt ds \geqslant \int_{u}^{b} \int_{-\infty}^{h(s)} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dt ds, \tag{7.3.3}$$

και

$$\int_{-\infty}^{u} \int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dt ds \leqslant \int_{-\infty}^{u} \int_{h(s)}^{h(s)+r} e^{-\frac{t^2+s^2}{2}} dt ds. \tag{7.3.4}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Η h είναι κοίλη και ταυτίζεται με την l στα u και v. Άρα,

$$l(s) \geqslant h(s), \quad -\infty < s \leqslant v, \tag{7.3.5}$$

$$l(s) \leqslant h(s), \quad v < s \leqslant u, \tag{7.3.6}$$

$$l(s) \geqslant h(s), \quad u < s \leqslant b. \tag{7.3.7}$$

Η ανισότητα (7.3.3) είναι άμεση συνέπεια της (7.3.7). Από τις (7.3.5), (7.3.6) και το γεγονός ότι η $x \mapsto \int_x^{x+r} e^{-t^2/2}dt$ είναι αύξουσα (Λήμμα 7.3.7), παίρνουμε

$$\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-t^2/2}dt \leqslant \int_{h(s)}^{h(s)+r} e^{-t^2/2}dt$$

για κάθε $s \leqslant u$ (εξετάζουμε χωριστά τις περιπτώσεις $s \leqslant v$ και $s \geqslant v$). Αυτό αποδεικνύει την (7.3.4). ∎

Με βάση τον ισχυρισμό, για την απόδειξη της (7.3.2) αρκεί να αποδείξουμε την

$$\int_u^{+\infty}\int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds \leqslant \int_{-\infty}^{u}\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds. \tag{7.3.8}$$

Η f είναι γνησίως φθίνουσα, $f(0) \geqslant 0$, και $-r/2 < 0$, άρα $v = f(-r/2) > 0$. Θέτοντας $s = 0$ στην (7.3.5), παίρνουμε $l(0) \geqslant h(0) \geqslant 0$. Γράφουμε $w = l^{-1}(0)$, οπότε $w \geqslant 0$. Αφού $l(u) = -p < 0$, έπεται ότι $w < u$. Ορίζουμε $d = u - w$. Για την απόδειξη της (7.3.8), αρκεί να δείξουμε τις ακόλουθες τρείς ανισότητες:

$$\frac{1}{2}\int_u^{u+d}\int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds \leqslant \int_{w}^{u}\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds, \tag{7.3.9}$$

$$\frac{1}{2}\int_u^{u+d}\int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds \leqslant \int_{w-d}^{w}\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds, \tag{7.3.10}$$

$$\int_{u+d}^{+\infty}\int_{-\infty}^{l(s)} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds \leqslant \int_{-\infty}^{w-d}\int_{l(s)}^{l(s)+r} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}}dtds. \tag{7.3.11}$$

Αφού $0 \leqslant w < u$, έχουμε

$$e^{-(s+u)^2/2} < e^{-(s\pm w)^2/2} \tag{7.3.12}$$

για κάθε $s \geqslant 0$. Η l είναι γνησίως φθίνουσα και $l(w) = 0$, άρα

$$l(s) = -m(s-w)$$

για κάποιον συντελεστή $m > 0$. Η συνθήκη $l(u) = -p$ δίνει $-m(u-w) = -p$, δηλαδή $md = p$. Οι ανισότητες (7.3.9) και (7.3.10) γράφονται

$$\frac{1}{2}\int_0^d \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-\frac{(s+u)^2+t^2}{2}} dt ds \leqslant \int_0^d \int_{l(s+w)}^{l(s+w)+r} e^{-\frac{(s+w)^2+t^2}{2}} dt ds \tag{7.3.13}$$

και

$$\frac{1}{2}\int_0^d \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-\frac{(s+u)^2+t^2}{2}} dt ds \leqslant \int_0^d \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-\frac{(w-s)^2+t^2}{2}} dt ds \tag{7.3.14}$$

αντίστοιχα. Σταθεροποιούμε $s \in (0, d)$. Με βάση τους ορισμούς μας, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt = \int_{-\infty}^{-m(s+u-w)} e^{-t^2/2} dt &= \int_{m(s+d)}^{\infty} e^{-t^2/2} dt \\ &= \int_{p+ms}^{\infty} e^{-t^2/2} dt.\end{aligned}$$

Από τον ορισμό του p και το Λήμμα 7.3.11,

$$\frac{\int_{ms}^{ms+r} e^{-t^2/2} dt}{\int_{p+ms}^{\infty} e^{-t^2/2} dt} > \frac{\int_0^r e^{-t^2/2} dt}{\int_p^{\infty} e^{-t^2/2} dt} = \frac{1}{2}.$$

Επομένως, από το Λήμμα 7.3.7,

$$\frac{1}{2}\int_{p+ms}^{\infty} e^{-t^2/2} dt < \int_{ms}^{ms+r} e^{-t^2/2} dt \leqslant \int_{ms-r}^{ms} e^{-t^2/2} dt.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt < \int_{ms-r}^{ms} e^{-t^2/2} dt &= \int_{-ms}^{-ms+r} e^{-t^2/2} dt \\ &= \int_{l(s+w)}^{l(s+w)+r} e^{-t^2/2} dt,\end{aligned}$$

και

$$\frac{1}{2}\int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt < \int_{ms}^{ms+r} e^{-t^2/2} dt = \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-t^2/2} dt.$$

Χρησιμοποιώντας την (7.3.12), γράφουμε

$$\frac{1}{2} e^{-(s+u)^2/2} \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt < e^{-(s+w)^2/2} \int_{l(s+w)}^{l(s+w)+r} e^{-t^2/2} dt,$$

και

$$\frac{1}{2} e^{-(s+u)^2/2} \int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2} dt < e^{-(w-s)^2/2} \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-t^2/2} dt,$$

και ολοκληρώνοντας αυτές τις ανισότητες ως προς $s \in (0, d)$, παίρνουμε τις (7.3.13) και (7.3.14) αντίστοιχα.

Η (7.3.11) είναι ισοδύναμη με την

$$\int_d^{+\infty}\int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-\frac{(s+u)^2+t^2}{2}}dtds \leqslant \int_d^{+\infty}\int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-\frac{(w-s)^2+t^2}{2}}dtds.$$

Σταθεροποιούμε $s \in (d,+\infty)$. Τότε, $ms > md = p$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 7.3.10 και το Λήμμα 7.3.11, παίρνουμε

$$\frac{\int_{ms}^{ms+r} e^{-t^2/2}dt}{\int_{p+ms}^{\infty} e^{-t^2/2}dt} > \frac{\int_{p}^{p+r} e^{-t^2/2}dt}{\int_{2p}^{\infty} e^{-t^2/2}dt} \geqslant 1.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2}dt &= \int_{-\infty}^{-m(s+u-w)} e^{-t^2/2}dt = \int_{m(s+d)}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt\\ &= \int_{p+ms}^{+\infty} e^{-t^2/2}dt \leqslant \int_{ms}^{ms+r} e^{-t^2/2}dt\\ &= \int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-t^2/2}dt.\end{aligned}$$

Παίρνοντας υπ¨ όψιν και την (7.3.12), έχουμε

$$e^{-(s+u)^2/2}\int_{-\infty}^{l(s+u)} e^{-t^2/2}dt < e^{-(w-s)^2/2}\int_{l(w-s)}^{l(w-s)+r} e^{-t^2/2}dt,$$

και ολοκληρώνοντας ως προς $s \in (d,+\infty)$ παίρνουμε την (7.3.11). ■

Κεφάλαιο 8

Βιβλιογραφικά σχόλια

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gauss ανακαλύφθηκε από τους Sudakov και Tsirelson [56], και ανεξάρτητα από τον Borell [15], οι οποίοι χρησιμοποίησαν την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα και την παρατήρηση ότι τα ομοιόμορφα μέτρα στις N-διάστατες σφαίρες ακτίνας $\sqrt{N}$ όταν προβληθούν στον $\mathbb{R}^n$ προσεγγίζουν το μέτρο του Gauss όταν το $N \to \infty$. Η παρατήρηση αυτή είναι γνωστή ως «λήμμα του Poincaré» (βλέπε [55] και [42]) αλλά φαίνεται ότι αυτό ήταν ήδη γνωστό στον Maxwell, βλέπε για παράδειγμα [22]. Ο Borell [15] απέδειξε μεταξύ άλλων μια ανισότητα Brunn-Minkowski για τον χώρο του Gauss. Μια άλλη απόδειξη της Gaussian ισοπεριμετρικής ανισότητας δόθηκε από τον Ehrhard [25] ο οποίος ανέπτυξε μια μέθοδο συμμετρικοποίησης για τον χώρο του Gauss. Περιγράφουμε λεπτομερώς αυτήν την απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας, ακολουθώντας το βιβλίο του Lifshits [45]. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε το επιχείρημα του Bobkov [12], ο οποίος απέδειξε αρχικά μια συναρτησιακή ανισότητα για τον διακριτό κύβο και από αυτήν πήρε την Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα (βλέπε επίσης [10] και [11]). Η αρχική απόδειξη του Bobkov βασίζεται σε μια ανισότητα δύο σημείων και στο κεντρικό οριακό θεώρημα. Υπάρχουν κι άλλες αποδείξεις της συναρτησιακής του ανισότητας, οι οποίες χρησιμοποιούν παρεμβολή κατά μήκος της ημιομάδας Ornstein–Uhlenbeck, στοχαστικό λογισμό ή δυναμικό προγραμματισμό.

Η ανισότητα του Ehrhard

Η ανισότητα του Ehrhard είναι ένα από τα βαθύτερα αποτελέσματα για το μέτρο του Gauss και έχει βρει πολλές σημαντικές εφαρμογές. Μεταξύ αυτών, το S-θεώρημα και το φράγμα του Banaszczyk για το πρόβλημα του Komlós, τα οποία παρουσιάζουμε αναλυτικά σε επόμενα κεφάλαια. Παρουσιάζουμε αρχικά την απόδειξη του Ehrhard, η οποία βασίζεται στη μέθοδο της συμμετρικοποίησης που αναπτύξαμε λεπτομερώς στο προηγούμενο κεφάλαιο. Ο R. Latała [38] απέδειξε ότι η ανισότητα του Ehrhard εξακολουθεί να ισχύει αν το ένα από τα δύο σύνολα είναι τυχόν Borel σύνολο και το δεύτερο είναι κυρτό. Τελικά, η ανισότητα αποδείχθηκε σε πλήρη γενικότητα από τον C. Borell στο [17]. Ο Borell χρησιμοποίησε την ημιομάδα της θερμότητας, και η μέθοδός του αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Barthe και Huet [8], την εργασία των οποίων ακολουθεί περισσότερο η δική μας παρουσίαση. Για άλλες εφαρμογές της μεθόδου παραπέμπουμε στην εργασία των Ivanisvili και Volberg [33]. Πρόσφατα, έχουν εμφανιστεί κι άλλες αποδείξεις της ανισότητας Ehrhard-Borell, από τον van Handel [60] και από τους Neeman και Παούρη [46]. Ενδιαφέρον παρουσιάζει και η εργασία [50], όπου μελετώνται οι περιπτώσεις ισότητας στην ανισότητα Ehrhard-Borell.

Διαστολές συμμετρικών κυρτών σωμάτων

Το βασικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου οφείλεται στους Latała και Oleszkiewicz [41] και δίνει καταφατική απάντηση σε ένα ερώτημα που εμφανίστηκε αρχικά σε ένα αδημοσίευτο χειρόγραφο του L. A. Shepp (1969). Το ίδιο ερώτημα τέθηκε αργότερα από τον Szarek στο [58]. Για διαστάσεις $n \leqslant 3$ είχε προηγουμένως δοθεί καταφατική απάντηση από τους Sudakov και Zalgaller [57]. Επίσης, πριν από το γενικό αποτέλεσμα, οι Kwapien και Sawa [37] είχαν επαληθεύσει την περίπτωση όπου το συμμετρικό κυρτό σώμα του προβλήματος είναι unconditional, δηλαδή συμμετρικό ως προς όλα τα κύρια επίπεδα.

Η ανισότητα της θετικής συνδιακύμανσης

Η εικασία της θετικής συνδιακύμανσης για το μέτρο του Gauss έχει μακρά ιστορία (βλέπε [21] για την αρχική περίοδο). Ξεκινάει με μια εργασία των Dunnett και Sobel [24] το 1955, και οι πρώτες συνεισφορές έγιναν από τον Dunn [23] και μετά από τους Khatri [35] και Šidák [51]. Το πρόβλημα λύθηκε στο επίπεδο από τον Pitt το 1977 (βλέπε [47]). Ο Hargé [31] γενίκευσε το αποτέλεσμα των Khatri–Šidák στην περίπτωση που (αντί για λωρίδα) το ένα από τα δύο σύνολα είναι συμμετρικό ελλειψοειδές. Πριν από την πλήρη απόδειξη της εικασίας από τον Royen στο [48], κάποια μερικά αποτελέσματα είχαν αποδειχθεί από τον Borell [16] και από τους Schechtman, Schlumprecht και Zinn [49]. Σε αυτή την εργασία ακολουθούμε την παρουσίαση του επιχειρήματος του Royen από τους Latała και Matlak [40].

Το B-θεώρημα

Το Θεώρημα 6.1.1 αποδείχθηκε από τους Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey [20]. Δίνει καταφατική απάντηση σε ένα ερώτημα του Banaszczyk (βλέπε Latała [39]). Στην ίδια εργασία, το πρόβλημα γενικεύεται ως εξής: λέμε ότι ένα μέτρο πιθανότητας μ και ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν το B-θεώρημα αν η συνάρτηση $t \mapsto \mu(e^t K)$ είναι λογαριθμικά κοίλη. Οι συγγραφείς μελετούν το πρόβλημα στον $\mathbb{C}^n$ και αποδεικνύουν, με μεθόδους μιγαδικής παρεμβολής, ότι το B-θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει για μια πιο γενική κλάση συνόλων και μέτρων. Αποδεικνύουν επίσης ότι το B-θεώρημα ισχύει για κάθε unconditional λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ αν το κυρτό σώμα K είναι επίσης unconditional.

Συνδυαστικές εφαρμογές του μέτρου του Gauss

Στο τελευταίο κεφάλαιο μελετάμε προβλήματα σχετικά με την παράμετρο $\beta(U,V)$, η οποία ορίζεται για κάθε ζεύγος U,V συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ ως ο μικρότερος $r>0$ που ικανοποιεί την παρακάτω συνθήκη: αν $u_1,\dots,u_n\in U$ τότε υπάρχουν πρόσημα $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{-1,1\}$ τέτοια ώστε $\epsilon_1u_1+\cdots+\epsilon_nu_n\in rV$. Το κάτω φράγμα $\beta(U,V)\geqslant c\sqrt{n}(|U|/|V|)^{1/n}$ αποδείχθηκε από τον Banaszczyk [4]. Οι Bárány και Grinberg [7] απέδειξαν ότι $\beta(U,U)\leqslant 2n$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα U στον $\mathbb{R}^n$. Ο Spencer [52] απέδειξε ότι $\beta(Q_n,Q_n)\leqslant c\sqrt{n}$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το ίδιο αποτέλεσμα αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Gluskin [29]. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε εδώ ακολουθεί το [28].

Το πιο γνωστό ανοικτό πρόβλημα αυτής της περιοχής είναι το ερώτημα του Komlós αν η ακολουθία $\beta(B_2^n,Q_n)$ είναι φραγμένη. Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα οφείλεται στον Banaszczyk: υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n\geqslant 1$ και $u_1,\dots,u_n\in\mathbb{R}^n$ με $|u_j|\leqslant 1$, μπορούμε να βρούμε πρόσημα $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{-1,1\}$ τέτοια ώστε

$$\|\epsilon_1u_1+\cdots+\epsilon_nu_n\|_\infty\leqslant C\sqrt{\log n}.$$

Παρουσιάζουμε την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος ακολουθώντας την εργασία του Banaszczyk [5].

Βιβλιογραφία

[1] D. Bakry and M. Ledoux, *Lévy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite-dimensional diffusion generator*, Invent. Math. **123** (1996), 259-281.

[2] K. Ball and A. Pajor, *Convex bodies with few faces*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 225-231.

[3] W. Banaszczyk, *A Beck–Fiala-type theorem for Euclidean norms*, Europ. J. Combin. **11** (1990), 497-500.

[4] W. Banaszczyk, *Balancing vectors and convex bodies*, Studia Math. **106** (1993), 93-100.

[5] W. Banaszczyk, *Balancing vectors and Gaussian measures of n-dimensional convex bodies*, Random Structures Algorithms **12** (1998), no. 4, 351–360.

[6] W. Banaszczyk and S. J. Szarek, *Lattice coverings and Gaussian measures of n-dimensional convex bodies*, Discrete and Computational Geometry **17** (1997), no. 3, 283–286.

[7] I. Bárány and V. S. Grinberg, *On some combinatorial questions in finite dimensional spaces*, Linear Algebra Appl. **41** (1981), 1-9.

[8] F. Barthe and N. Huet, *On Gaussian Brunn-Minkowski inequalities*, Studia Math. **191** (2009), no. 3, 283–304.

[9] J. Beck and T. Fiala, *Integer-making theorems*, Discrete Appl. Math. **3** (1981), 1–8.

[10] S. G. Bobkov, *Extremal properties of half-spaces for log-concave distributions*, Ann. Probab. **24** (1996), 35–48.

[11] S. G. Bobkov, *A functional form of the isoperimetric inequality for the Gaussian measure*, J. Funct. Anal. **135** (1996), 39–49.

[12] S. G. Bobkov, *An isoperimetric inequality on the discrete cube and an elementary proof of the isoperimetric inequality in Gauss space*, Ann. Probab. **25** (1997), 206–214.

[13] S. G. Bobkov and M. Ledoux, *From Brunn-Minkowski to Brascamp-Lieb and to logarithmic Sobolev inequalities*, Geom. Funct. Anal. **10** (2000), 1028–1052.

[14] V. Bogachev, *Gaussian measures*, Amer. Math. Soc. (1998).

[15] C. Borell, *The Brunn-Minkowski inequality in Gauss space*, Inventiones Math. **30** (1975), 207-216.

[16] C. Borell, *A Gaussian correlation inequality for certain bodies in $\mathbb{R}^n$*, Math. Ann. **256** (1981), 569–573.

[17] C. Borell, *The Ehrhard inequality*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **337** (2003), no. 10, 663–666.

[18] C. Borell, *Minkowski sums and Brownian exit times*, Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (6) **16** (2007), no. 1, 37–47.

[19] C. Borell, *Inequalities of the Brunn-Minkowski type for Gaussian measures*, Probab. Theory Related Fields **140** (2008), no. 1-2, 195–205.

[20] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi and B. Maurey, *The (B)-conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems*, J. Funct. Anal. **214** (2004), 410–427.

[21] S. Das Gupta, M. L. Eaton, I. Olkin, M. Perlman, L. J. Savage and M. Sobel, *Inequalities on the probability content of convex regions for elliptically contoured distributions*, Proc. Sixth Berkeley Symp. Math. Statist. Prob. **3** (1972), 241–264.

[22] P. Diaconis and D. Freedman, *A dozen de Finetti-style results in search of a theory*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **23** (1987), 397-423.

[23] O. J. Dunn, *Estimation of the means of dependent variables*, Ann. Math. Statist. **29** (1958), 1095–1111.

[24] C. W. Dunnett and M. Sobel, *Approximations to the probability integral and certain percentage points to a multivariate analogue of Student's* t*-distribution*, Biometrika **42** (1955), 258–260.

[25] A. Ehrhard, *Symétrisation dans l'espace de Gauss*, Math. Scand. **53** (1983), 281–301.

[26] R. J. Gardner and A. Zvavitch, *Gaussian Brunn-Minkowski inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **362** (2010), no. 10, 5333–5353.

[27] D. J. H. Garling, *Inequalities: A Journey into Linear Analysis*, Cambridge University Press (2007).

[28] A. Giannopoulos, *On some vector balancing problems*, Studia Mathematica **122** (1997), 225–234.

[29] E. D. Gluskin, *Extremal properties of orthogonal parallelepipeds and their applications to the geometry of Banach spaces*, Math. USSR Sbornik **64** (1989), 85-96.

[30] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. **97** (1975), 1061–1083.

[31] G. Hargé, *A particular case of correlation inequality for the Gaussian measure*, Ann. Probab. **27** (1999), 1939–1951.

[32] P. Ivanisvili, *Boundary value problem and the Ehrhard inequality*, Preprint (2016) arXiv:1605.04840.

[33] P. Ivanisvili and A. Volberg, *Bellman partial differential equation and the hill property for classical isoperimetric problems*, Preprint (2015) arXiv:1506.03409.

[34] B. S. Kashin, *Analogue of Menchoff's theorem "on correction" for discrete orthonormal systems*, Mat. Zametki **46**(6) (1989), 67-74.

[35] C. G. Khatri, *On certain inequalities for normal distributions and their applications to simultaneous confidence bounds*, Ann. Math. Statist. **38** (1967), 1853–1867.

[36] D. Kleitman, *On a combinatorial conjecture of Erdös*, J. Combin. Theory Ser.A **1** (1966), 209-214.

[37] S. Kwapien and J. Sawa, J. *On some conjecture concerning Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets*, Studia Math. **105** (1993), 173–187.

[38] R. Latała, *A note on the Ehrhard inequality*, Studia Math. **118** (1996), no. 2, 169–174.

[39] R. Latała, *On some inequalities for Gaussian measures*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. II (Beijing, 2002), 813–822, Higher Ed. Press, Beijing, 2002.

[40] R. Latała and D. Matlak, *Royen's proof of the Gaussian correlation inequality*, Geometric aspects of functional analysis, 265–275, Lecture Notes in Math., 2169, Springer, Cham, 2017.

[41] R. Latała and K. Oleszkiewicz, *Gaussian measures of dilatations of convex symmetric sets*, Ann. Probab. **27** (1999), no. 4, 1922–1938.

[42] M. Ledoux, *Isoperimetry and Gaussian Analysis*, Ecole d'Eté de Probabilités de St.-Flour 1994, Lecture Notes in Math. **1709** (1996), 165–294.

[43] M. Ledoux, *Concentration of measure and logarithmic Sobolev inequalities*, Séminaire de Probabilités, XXXIII, Lecture Notes in Mathematics **1704**, 120–216.

[44] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs, 89. American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[45] M. A. Lifshits, *Gaussian random functions*, Mathematics and its Applications, 322. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1995.

[46] J. Neeman and G. Paouris, *An interpolation proof of Ehrhard"s inequality*, Preprint (2016), arXiv:1605.07233.

[47] L. D. Pitt, *A Gaussian correlation inequality for symmetric convex sets*, Annals of Probability **5** (1977), 470–474.

[48] T. Royen, *A simple proof of the Gaussian correlation conjecture extended to some multivariate gamma distributions*, Far East J. Theor. Stat. **48** (2014), 139–145.

[49] G. Schechtman, T. Schlumprecht and J. Zinn, *On the Gaussian measure of the intersection*, Ann. Probab. **26** (1998), 346–357.

[50] Y. Shenfeld and R. van Handel, *The equality cases of the Ehrhard-Borell inequality*, Preprint (2017).

[51] Z. Šidák, *On multivariate normal probabilities of rectangles: their dependence on correlation*, Ann. Math. Statist. **39** (1968), 1425–1434.

[52] J. Spencer, *Six standard deviations suffice*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 679–706.

[53] J. Spencer, *Balancing vectors in the max norm*, Combinatorica **6**(1) (1986), 55–65.

[54] J. Spencer, *Ten Lectures on the Probabilistic Method*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Penn. 1994.

[55] D. W. Stroock, *Probability Theory, an Analytic View*, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[56] V. N. Sudakov and B. S. Tsirelson, *Extremal properties of half-spaces for spherically invariant measures*, J. Soviet. Math. **9** (1978), 9–18; translated from Zap. Nauch. Sem. L.O.M.I. **41** (1974), 14–24.

[57] V. N. Sudakov and V. A. Zalgaller, *Some problems on centrally symmetric convex bodies*, In Problems in Global Geometry. Zap. Naucn. Sem. Leningrad. Otdel. Mat. Inst. Steklov. (LOMI) **45** (1974) 75–82.

[58] S. J. Szarek, *Condition numbers of random matrices*, J. Complexity **7** (1991) 131–149.

[59] S. J. Szarek and E. Werner, *Confidence regions for means of multivariate normal distributions and a nonsymmetric correlation inequality for Gaussian measure*, J. Multivariate Anal. **68** (1999), no. 2, 193–211.

[60] R. van Handel, *The Borell-Ehrhard game*, Probability Theory and Related Fields, to appear.