7TH MATH@NTUA SUMMER SCHOOL 2024
"MATHEMATICAL ANALYSIS" IN HONOR OF SPIROS ARGYROS

ΒΑΣΙΛΗΣ ΓΡΗΓΟΡΙΑΔΗΣ

1. Εισαγωγη

Ορισμός 1 (Σημεία συσσώρευσης). Δίνονται ένας τοπολογικός χώρος $(X, \mathcal{T})$, $A \subseteq X$, $x \in X$ και μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X. Το x είναι **σημείο συσσώρευσης του συνόλου** A αν για κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$ υπάρχει $y \neq x$ με $y \in U \cap A$. Το x είναι **σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας** $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ αν για κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}$ είναι άπειρο.

Η επόμενη πρόταση συνδέει τα σημεία συσσώρευσης συνόλων με τα σημεία συσσώρευσης ακολουθιών.

Πρόταση 2. *Θεωρούμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ για τον οποίο κάθε μονοσύνολο είναι κλειστό (αυτοί οι τοπολογικοί χώροι είναι γνωστοί ως T_1) και μια ακολουθία $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ στοιχείων του X με $x_n \neq x_m$ για κάθε $n \neq m$. Τότε ένα $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου $A := \{x_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ αν και μόνο αν το x είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.*

Απόδειξη. Για την ευθεία κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης του συνόλου A και θεωρούμε ένα $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$. Τότε υπάρχει $x_{n_1} \in A$ με $x_{n_1} \neq x$ και $x_{n_1} \in U$. Το σύνολο $U \setminus \{x_{n_1}\}$ είναι ανοικτό και περιέχει το x, επομένως από την υπόθεσή μας υπάρχει $x_{n_2} \in A$ με $x_{n_2} \neq x$ και $x_{n_2} \in U \setminus \{x_{n_1}\}$. Επαναλαμβάνουμε την προηγούμενη διαδικασία παίρνοντας το ανοικτό σύνολο $U \setminus \{x_{n_1}, x_{n_2}\}$, το οποίο περιέχει το x, και βρίσκουμε $x_{n_3} \in A$ με $x_{n_3} \neq x$ και $x_{n_3} \in U \setminus \{x_{n_1}, x_{n_2}\}$. Αναδρομικά κατασκευάζουμε φυσικούς αριθμούς $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ για τους οποίους $x_{n_k} \neq x_{n_m}$ για κάθε $k \neq m$ και με $x_{n_k} \in U$ για κάθε k. Τότε το σύνολο $\{n_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ είναι ένα άπειρο υποσύνολο του $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}$, συνεπώς το τελευταίο σύνολο είναι άπειρο.

Αντίστροφα υποθέτουμε ότι το x είναι σημείο συσσώρευσης της $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και θεωρούμε ένα $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$. Τότε υπάρχουν άπειρα-πολλά $n \in \mathbb{N}$ με $x_n \in U$. Ειδικότερα υπάρχουν $n \neq m$ με $x_n \in U$ και $x_m \in U$. Αφού η $(x_i)_{i\in\mathbb{N}}$ είναι ένα-προς-ένα έχουμε $x_n \neq x_m$, συνεπώς τουλάχιστον ένα από τα x_n και x_m διαφέρει από το x. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει $y \in A$ με $y \neq x$ και $y \in U$. □

Ορισμός 3 (Τοπολογία γινόμενο). Θεωρούμε μια οικογένεια τοπολογικών χώρων $((Y_i, \mathcal{T}_i))_{i\in I}$ – υποθέτουμε ότι κάθε $Y_i \neq \emptyset$. Ορίζουμε το $\prod_{i\in I} Y_i$ ως το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : I \to \bigcup_{i\in I} Y_i$ με την ιδιότητα για κάθε $i \in I$ να ισχύει $f(i) \in Y_i$. (Προκύπτει από το Αξίωμα Επιλογής ότι $\prod_{i\in I} Y_i \neq \emptyset$.)

Αυτές είναι λεπτομερείς σημειώσεις πάνω στο mini course που έδωσα στο 7th MATH@NTUA summer school 2024 προς τιμή του Σπύρου Αργυρού. Όλα τα αποτελέσματα που αναφέρονται είναι γνωστά. Ευχαριστώ θερμά τον **Βασίλη Κανελλόπουλο** για τις εκτεταμένες και πολύ βοηθητικές συζητήσεις που είχαμε. Θα ήθελα επίσης να ευχαριστήσω τον **Κώστα Τσαπρούνη** για τα χρήσιμα σχόλια που μου έστειλε.

Για κάθε $i_1, \ldots, i_n \in I$ και κάθε $U_{i_1} \in \mathcal{T}_{i_1}, \ldots, U_{i_n} \in \mathcal{T}_{i_n}$ ορίζουμε τα σύνολα

$$W(i_1, \ldots, i_n, U_{i_1}, \ldots, U_{i_n}) = \left\{ f \in \prod_{i \in I} Y_i \;\mid\; \forall k = 1, \ldots, n \; (f(i_k) \in U_{i_k}) \right\}.$$

Το σύνολο όλων των $W(i_1, \ldots, i_n, U_{i_1}, \ldots, U_{i_n})$ όπως πιο πάνω είναι βάση για την **τοπολογία γινόμενο** στο $\prod_{i \in I} Y_i$.

Όταν οι τοπολογικοί χώροι $(Y_i, \mathcal{T}_i)$ είναι ο ίδιος τοπολογικός χώρος $(Y, \mathcal{T})$ τότε το $\prod_{i \in I} Y_i$ είναι ακριβώς το σύνολο όλων των συναρτήσεων $f : I \to Y$, το οποίο συμβολίζουμε με Y^I. Σε αυτή την περίπτωση αντί για I είναι πιο πρακτικό να χρησιμοποιούμε το σύμβολο X. Επιπλέον αν ο $(Y, \mathcal{T})$ είναι μετρικοποιήσιμος χώρος και d είναι μια μετρική στο Y που παράγει την $\mathcal{T}$ τότε μια βάση για την τοπολογία γινόμενο στον Y^X αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής

$$G(x_1, \ldots, x_n, g, \varepsilon) = \left\{ f \in Y^X \;\mid\; \forall k = 1, \ldots, n \; (d(f(x_k), g(x_k)) < \varepsilon) \right\},$$

όπου $x_1, \ldots, x_n \in X$, $g \in Y^X$ and $\varepsilon > 0$.

Μια ακολουθία $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στον Y^X συγκλίνει στην $f \in Y^X$ ως προς την τοπολογία γινόμενο αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $\lim\limits_{n \to \infty} f_n(x) = f(x)$, όπου το τελευταίο όριο λαμβάνεται στον Y. Γι' αυτόν τον λόγο η τοπολογία γινόμενο είναι επίσης γνωστή και ως **τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης**.

Θα μας απασχολήσει ιδιαίτερα ο $\mathbb{R}^X$ με την τοπολογία γινόμενο. Η επόμενη πρόταση χαρακτηρίζει τα συμπαγή υποσύνολα του τελευταίου χώρου.

Πρόταση 4. *Θεωρούμε ένα μη κενό σύνολο X και τον χώρο $\mathbb{R}^X$ με την τοπολογία γινόμενο. Τότε για κάθε $A \subseteq \mathbb{R}^X$ έχουμε ότι η κλειστότητα $\overline{A}$ του A είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^X$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $\sup_{f \in A} |f(x)| < \infty$.*

Απόδειξη. Αρχικά τονίζουμε ότι για κάθε $x \in X$ ισχύει $\sup_{f \in A} |f(x)| = \sup_{f \in \overline{A}} |f(x)|$. Το τελευταίο μπορεί να αποδειχθεί εύκολα θεωρώντας βασικές περιοχές της μορφής $\left\{ g \in \mathbb{R}^X \;\mid\; |g(x) - f(x)| < \varepsilon \right\}$ για $f \in \overline{A}$ και $\varepsilon > 0$.

Για την ευθεία κατεύθυνση υποθέτουμε ότι το $\overline{A}$ είναι συμπαγές και παίρνουμε $x \in X$. Η *συνάρτηση αποτίμησης* $E_x : \mathbb{R}^X \to \mathbb{R} : E_x(f) = f(x)$ είναι εύκολα συνεχής συνάρτηση, συνεπώς το σύνολο $E_x[\overline{A}] = \left\{ f(x) \;\mid\; f \in \overline{A} \right\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Ειδικότερα είναι φραγμένο, επομένως υπάρχει $M_x > 0$ έτσι ώστε για κάθε $f \in \overline{A}$ να ισχύει $|f(x)| \leq M_x$. Συνεπώς $\sup_{f \in A} |f(x)| < \infty$.

Αντίστροφα αν για κάθε $x \in X$ ισχύει $\sup_{f \in A} |f(x)| = \sup_{f \in \overline{A}} |f(x)| < \infty$ τότε ορίζουμε $n_x =$ ο ελάχιστος φυσικός αριθμός με την ιδιότητα για κάθε $f \in \overline{A}$ να ισχύει $|f(x)| \leq n_x$. Τότε $\overline{A} \subseteq \prod_{x \in X} [-n_x, n_x]$. Το τελευταίο σύνολο είναι γινόμενο συμπαγών συνόλων και άρα από το Θεώρημα Tychonoff το $\prod_{x \in X} [-n_x, n_x]$ είναι συμπαγές. Συνεπώς και το $\overline{A}$ είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς. □

Ορισμός 5 (Οι χώροι Cantor και Baire)**.** Θα μας απασχολήσουν επίσης τα σύνολα $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ με την τοπολογία γινόμενο όπου το $\{0,1\}$ και το $\mathbb{N}$ λαμβάνονται με τη συνήθη μετρική της απολύτου τιμής. Όπως είναι γνωστό οι χώροι $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ και $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ είναι μετρικοποιήσιμοι. Μάλιστα γίνονται πλήρεις και διαχωρίσιμοι μετρικοί χώροι. Ο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ονομάζεται **χώρος του Cantor** (είναι γνωστό ότι είναι τοπολογικά ισομορφικός με το γνωστό σύνολο Cantor στο $[0,1]$) και ο $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ ονομάζεται **χώρος του Baire** (είναι γνωστό ότι είναι τοπολογικά ισομορφικός με το σύνολο $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$).

Θα συμβολίζουμε τα στοιχεία αυτών των χώρων με α, β, γ, ... Μια ακολουθία $(\alpha_n)_{n \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ συγκλίνει στο $\alpha \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει $\lim\limits_{n \to \infty} \alpha_n(k) = \alpha(k)$, όπου το τελευταίο όριο λαμβάνεται στο σύνολο

$\{0,1\}$. Επομένως η συνθήκη $\lim_{n\to\infty} \alpha_n(k) = \alpha(k)$ είναι ισοδύναμη με το ότι η ακολουθία $(\alpha_n(k))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι τελικά σταθερή και ίση με $\alpha(k)$. Ισχύουν ακριβώς τα ίδια αν αντί για τον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ έχουμε τον $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

Για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ θεωρούμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A : \mathbb{N} \to \{0,1\}$ με $\chi_A(k) = 1 \iff k \in A$. Τότε $\chi_A \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Μάλιστα η συνάρτηση

$$\chi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \{0,1\}^{\mathbb{N}} : A \mapsto \chi_A$$

είναι εύκολα ένα-προς-ένα και επί.

Η χ μεταφέρει την τοπολογία του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ στο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ ως ακολούθως: ορίζουμε ένα $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ να είναι ανοικτό στον $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ αν και μόνο αν το σύνολο $\chi[\mathcal{A}] = \{\chi_A \mid A \in \mathcal{A}\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$.

Τότε ο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι τοπολογικά ισομορφικός με τον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$, ο ισομορφισμός δεν είναι άλλος από τη χ. Επομένως ο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ αποκτά τη δομή ενός πλήρη και διαχωρίσιμου μετρικού χώρου μέσω της $\rho(A,B) := d_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}(\chi_A, \chi_B)$, όπου $A, B \subseteq \mathbb{N}$ και $d_{\{0,1\}^{\mathbb{N}}}$ είναι η μετρική του χώρου του Cantor.

Είναι χρήσιμο να εξηγήσουμε τη σύγκλιση στον $\mathcal{P}(\mathbb{N})$: μια ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ συγκλίνει στο $A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$ αν και μόνο αν για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε για κάθε $n \geq n_0$ ισχύει

$$k \in A_n \iff k \in A.$$

(Η πιο πάνω ισοδυναμία σημαίνει ότι $\chi_{A_n}(k) = \chi_A(k)$.)

Ορισμός 6 (Borel σύνολα και Borel-μετρήσιμες συναρτήσεις). Θεωρούμε έναν μετρικό χώρο (X,d). Η οικογένεια $\mathcal{B}(X)$ των **Borel συνόλων** του X είναι η μικρότερη οικογένεια υποσυνόλων του X που περιέχει όλα τα d-ανοικτά υποσύνολα του X και είναι κλειστή ως προς τα συμπληρώματα καθώς και ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις (ελάχιστη σ-άλγεβρα που περιέχει όλα τα ανοικτά του χώρου).

Παραδείγματα Borel συνόλων: Τα ανοικτά σύνολα, τα κλειστά σύνολα (ως συμπληρώματα ανοικτών), τα F_σ σύνολα (ως αριθμήσιμη ένωση κλειστών), τα G_δ σύνολα (ως συμπληρώματα F_σ) και ούτω καθεξής.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι έχουμε ακόμα έναν μετρικό χώρο (Y,ρ). Μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι **Borel-μετρήσιμη** αν για κάθε ρ-ανοικτό $U \subseteq Y$ το σύνολο $f^{-1}[U]$ είναι Borel υποσύνολο του X, δηλαδή η f "αντιστρέφει τα ανοικτά σε Borel". Μπορεί να αποδειχθεί ότι η f είναι Borel-μετρήσιμη αν και μόνο αν αντιστρέφει τα Borel υποσύνολα του Y σε Borel υποσύνολα του X.

Προφανώς κάθε συνεχής συνάρτηση είναι Borel-μετρήσιμη. Είναι εύκολο να δει κανείς ότι η σύνθεση δύο Borel-μετρήσιμων συναρτήσεων (ειδικότερα η σύνθεση μιας Borel-μετρήσιμης με μια συνεχή) είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.

Σε αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να διατυπώσουμε το κύριο θεώρημα στο οποίο αναφερόμαστε σε αυτό το mini course.

Θεώρημα 7 (Rosenthal, Bourgain-Fremlin-Talagrand, βλ. [Ros77, BFT78, Deb09]). *Θεωρούμε έναν πλήρη και διαχωρίσιμο μετρικό χώρο* $(\mathcal{X}, d)$ *και μια ακολουθία* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *συνεχών συναρτήσεων από τον* $\mathcal{X}$ *στον* $\mathbb{R}$ *με* $f_n \neq f_m$ *για κάθε* $n \neq m$*. Υποθέτουμε ότι ισχύουν τα ακόλουθα.*

(α) *Για κάθε* $x \in \mathcal{X}$ *έχουμε* $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$*.*

(β) *Κάθε σημείο συσσώρευσης της* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *στον* $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ *είναι Borel-μετρήσιμη συνάρτηση.*

Τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο.*

Μάλιστα, αν η f *είναι σημείο συσσώρευσης της* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *(και αναγκαστικά Borel-μετρήσιμη) τότε υπάρχει υπακολουθία της τελευταίας που συγκλίνει κατά σημείο στην* f*.*

Το πιο πάνω αποτέλεσμα έχει εφαρμογές στη δουλειά άλλων ερευνητών, αναφέρουμε ενδεικτικά την ταξινόμηση των διαχωρίσιμων Rosenthal compacta από τους Αργυρό-Δωδό-Κανελλόπουλο [ADK08].

Θα δώσουμε την απόδειξη του Debs [Deb87] και θα περιοριστούμε στο πρώτο συμπέρασμα δηλαδή την ύπαρξη συγκλίνουσας υπακολουθίας χωρίς να αναφερθούμε στο όριο f. Το δεύτερο συμπέρασμα αποδεικνύεται με παρόμοιο τρόπο, βλ. [Deb09].

Παρατήρηση 8. Σχετικά με το Θεώρημα 7 παρατηρούμε τα ακόλουθα.

(1) Η υπόθεσή μας ότι η ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα-προς-ένα είναι για να αποφύγουμε τις τετριμμένες περιπτώσεις:

Αν υπάρχει n_0 έτσι ώστε $f_{n_0} = f_n$ για άπειρα $n \in \mathbb{N}$ τότε έχουμε προφανώς μια συγκλίνουσα υπακολουθία. Η εναλλακτική είναι όταν για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα ως προς το πλήθος $m \in \mathbb{N}$ με $f_n \neq f_m$. Τότε διαγράφουμε τις επαναλήψεις και περνάμε σε μια ένα-προς-ένα υπακολουθία $(f_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$, οπότε αντικαθιστούμε την $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με την $(f_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$. (Οι συνθήκες (α) και (β) διατηρούνται στις υπακολουθίες.)

(2) Σύμφωνα με την Πρόταση 4 η ιδιότητα $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| < \infty$ για κάθε $x \in \mathcal{X}$ σημαίνει ότι η κλειστότητα του συνόλου $\{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπαγές σύνολο.

Μια ακολουθία σε ένα συμπαγές υποσύνολο *μετρικού χώρου* έχει συγκλίνουσα υπακολουθία. Όμως ο $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ με την τοπολογία γινόμενο δεν είναι μετρικοποιήσιμος και γενικά δεν είναι σωστό ότι κάθε ακολουθία $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ που βρίσκεται σε ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Επομένως *το Θεώρημα 7 δίνει μια αναγκαία συνθήκη* (τη συνθήκη (β) του θεωρήματος) *ώστε μια ένα-προς-ένα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που βρίσκεται σε ένα συμπαγές υποσυνόλο του* $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ *να έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.*

(3) Η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ του Θεωρήματος 7 όντως έχει σημείο συσσώρευσης. Για να το δούμε αυτό, σημειώνουμε αρχικά ότι τα μονοσύνολα είναι κλειστά στον χώρο $\mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ με την τοπολογία γινόμενο. (Αυτό μπορεί να το δει κανείς εύκολα.) Από την Πρόταση 2 αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $A := \{f_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ έχει σημείο συσσώρευσης.

Από το (2) αυτής της παρατήρησης το $\overline{A}$ είναι συμπαγές. Αν υπάρχει $f \in \overline{A}$ έτσι ώστε για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ με $f \in U$ να ισχύει $(U \setminus \{f\}) \cap A \neq \emptyset$ τότε η f είναι σημείο συσσώρευσης του A. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι δεν υπάρχει τέτοια f, δηλαδή για κάθε $f \in \overline{A}$ υπάρχει ανοικτό $U_f \subseteq \mathbb{R}^{\mathcal{X}}$ με $f \in U_f$ και $(U_f \setminus \{f\}) \cap A = \emptyset$ – επειδή $f \in \overline{A}$ θα έχουμε αναγκαστικά $U_f \cap A \neq \emptyset$, επομένως $U_f \cap A = \{f\}$.[1] Με

[1] Από αυτό προκύπτει ότι $A = \overline{A}$ αλλά δεν θα το χρειαστούμε.

εφαρμογή του Αξιώματος Επιλογής θεωρούμε μια συνάρτηση που αντιστοιχεί σε κάθε $f \in \overline{A}$ ένα σύνολο U_f όπως πιο πάνω. Τότε $\overline{A} \subseteq \bigcup_{f\in\overline{A}} U_f$ και, αφού το $\overline{A}$ είναι συμπαγές, υπάρχουν $f_1, \ldots, f_n \in \overline{A}$ έτσι ώστε $A \subseteq \overline{A} \subseteq U_{f_1} \cup \cdots \cup U_{f_n}$. Τότε έχουμε

$$A = (U_{f_1} \cap A) \cup \cdots \cup (U_{f_n} \cap A) = \{f_1, \ldots, f_n\}$$

και συνεπώς το A θα ήταν πεπερασμένο σύνολο, άτοπο.

(4) Προκύπτει ότι το δεύτερο συμπέρασμα του Θεωρήματος 7 ("Μάλιστα, αν η f είναι σημείο συσσώρευσης της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$...") είναι ισχυρότερο από το πρώτο συμπέρασμα ("...η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει κατά σημείο."). Για να το δούμε αυτό επιλέγουμε ένα σημείο συσσώρευσης f της $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, το οποίο υπάρχει από το (3) πιο πάνω. Από το δεύτερο συμπέρασμα του θεωρήματος υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ που είναι κατά σημείο συγκλίνουσα στην f, ειδικότερα η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία, δηλαδή ισχύει το πρώτο συμπέρασμα.

Πέραν του Θεωρήματος 7 ο Debs αποδεικνύει ότι μια συγκλίνουσα υπακολουθία μπορεί να κατασκευαστεί με "Borel-τρόπο". Ο ακριβής ορισμός του τελευταίου απαιτεί έννοιες της κατασκευαστικής περιγραφικής θεωρίας συνόλων (effective descriptive set theory) που με τη σειρά της χρησιμοποιεί έννοιες από τη θεωρία αναδρομής (recursion theory). Σε αυτό το mini course αποφεύγουμε την αναφορά σε αυτές τις περιοχές.

Από την άλλη αναφέρουμε ένα χαρακτηριστικό πόρισμα του ισχυρότερου αποτελέσματος του Debs, το οποίο είναι ελεύθερο από έννοιες της θεωρίας αναδρομής.

Πόρισμα 9 (Debs, βλ. [Deb87]). *Θεωρούμε πλήρεις και διαχωρίσιμους μετρικούς χώρους (T, d_T) και $(\mathcal{X}, d_{\mathcal{X}})$ καθώς και μια ακολουθία Borel-μετρήσιμων συναρτήσεων $F_n : T \times \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ για την οποία για κάθε $t \in T$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ η συνάρτηση $F_n^t : \mathcal{X} \to \mathbb{R} : F_n^t(x) = F(t, n)$ είναι συνεχής. Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάθε $t \in T$ η ακολουθία συναρτήσεων $(F_n^t)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ένα-προς-ένα και ότι ικανοποιεί τις υποθέσεις (α) και (β) του Θεωρήματος 7.*

Τότε υπάρχει Borel-μετρήσιμη συνάρτηση $\sigma : T \to \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ έτσι ώστε για κάθε $t \in T$ το $\sigma(t)$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία στο $\mathbb{N}$, ας τη συμβολίσουμε με $(k_n^t)_{n\in\mathbb{N}}$, και η υπακολουθία $(F_{k_n^t}^t)_{n\in\mathbb{N}}$ συγκλίνει κατά σημείο.

Στη δική μας παρουσίαση της απόδειξης του Debs θα αντικαταστήσουμε τις έννοιες της θεωρίας αναδρομής που χρησιμοποιούνται σε αυτήν με πιο "κλασικές" έννοιες. Περισσότερες πληροφορίες δίνονται στην Παρατήρηση 25 στο τέλος. Το κατά πόσον η δική μας προσέγγιση μπορεί να οδηγήσει σε μια "κλασική" απόδειξη του Πορίσματος 9 είναι θέμα προς διερεύνηση.

2. Φίλτρα

Παρουσιάζουμε μερικές έννοιες και αποτελέσματα από τη θεωρία των φίλτρων.

Ορισμός 10 (Φίλτρο και συναφείς έννοιες). Υπενθυμίζουμε ότι **φίλτρο (filter)** σε ένα σύνολο X είναι ένα μη κενό σύνολο $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(X)$ με τις ιδιότητες:

(1) $\emptyset \notin \mathcal{F}$,
(2) για κάθε $A, B \in \mathcal{F}$ έχουμε $A \cap B \in \mathcal{F}$,
(3) για κάθε $A, B \subseteq X$ με $A \subseteq B$ αν $A \in \mathcal{F}$ τότε $B \in \mathcal{F}$.

Μια μη κενή οικογένεια $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ είναι **βάση φίλτρου (filter basis)** αν $\emptyset \notin \mathcal{B}$ και για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}$ υπάρχει $B_3 \in \mathcal{B}$ με $B_3 \subseteq B_1 \cap B_2$. Σε αυτή την περίπτωση είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η οικογένεια

$$\mathcal{F}_{\mathcal{B}} = \{A \subseteq X \mid \exists B \in \mathcal{B}\ (B \subseteq A)\}$$

είναι φίλτρο στο X.

Θα λέμε ότι μια βάση φίλτρου $\mathcal{B}$ είναι **βάση (basis) του φίλτρου** $\mathcal{F}$ αν $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{\mathcal{B}}$ όπως πιο πάνω.

Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X **αποφασίζει (decides)** μια δοσμένη οικογένεια $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(X)$ αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ έχουμε $A \in \mathcal{F}$ ή $X \setminus A \in \mathcal{F}$.

Ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο X ονομάζεται **υπερφίλτρο (ultrafilter)** αν δεν περιέχεται γνήσια σε κανένα φίλτρο στο X. Όπως είναι γνωστό για κάθε βάση φίλτρου $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(X)$ υπάρχει ένα υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ στο X με $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Στο τελευταίο γίνεται χρήση του Αξιώματος Επιλογής. Επίσης είναι γνωστό ότι αν το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο στο X τότε για κάθε $A, B \subseteq X$ με $A \cap B = \emptyset$ αν $A \cup B \in \mathcal{F}$ τότε $A \in \mathcal{F}$ ή $B \in \mathcal{F}$ (και συμβαίνει ακριβώς μία από τις δύο περιπτώσεις), ειδικότερα για κάθε $A \subseteq X$ έχουμε $A \in \mathcal{F}$ ή $X \setminus A \in \mathcal{F}$. Με άλλα λόγια ένα υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ αποφασίζει όλο το δυναμοσύνολο $\mathcal{P}(X)$.

Παρατηρούμε ότι τα πιο πάνω A, B δεν χρειάζεται να είναι ξένα, δηλαδή αν $A \cup B \in \mathcal{F}$ και το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο τότε $A \in \mathcal{F}$ ή $B \in \mathcal{F}$ (ενδεχομένως να συμβαίνουν και τα δύο). Αυτό συμβαίνει γιατί $A \cup B = (A \setminus B) \cup B$ και τα τελευταία δύο σύνολα είναι ξένα. Επιπλέον μπορούμε να έχουμε περισσότερα από δύο σύνολα, δηλαδή αν $A \cup B \cup C \in \mathcal{F}$ τότε ένα από τα A, B, C ανήκει στο $\mathcal{F}$. Αυτό συμβαίνει γιατί μπορούμε να δούμε την ένωση $A \cup B \cup C$ ως την ένωση των συνόλων $A \cup B$ και C. Ένα από τα δύο τελευταία ανήκει στο υπερφίλτρο $\mathcal{F}$, στην περίπτωση όπου $A \cup B \in \mathcal{F}$ εφαρμόζουμε τα προηγούμενα.

Ένα υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ στο X ονομάζεται **τετριμμένο (principal)** αν για κάποιο $x_0 \in X$ έχουμε $\mathcal{F} = \{A \subseteq X \mid x_0 \in A\}$, ισοδύναμα αν $\{x_0\} \in \mathcal{F}$. Είναι εύκολο να δεις κανείς ότι ένα υπερφίλτρο είναι τετριμμένο αν και μόνο αν έχει ένα στοιχείο που είναι πεπερασμένο σύνολο. Για να το δούμε αυτό ας υποθέσουμε (στη μη τετριμμένη κατεύθυνση) ότι το $\mathcal{F}$ έχει ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο $F = \{x_1, \ldots, x_n\}$ όπου $n \geq 2$. Τότε γράφουμε $F = F' \cup \{x_n\}$, όπου $F' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\} \cup \{x_n\}$. Εφόσον $F \in \mathcal{F}$ και το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο ένα από τα F' και $\{x_n\}$ ανήκουν στο $\mathcal{F}$. Αν $\{x_n\} \in \mathcal{F}$ έχουμε τελειώσει. Αν $F' \in \mathcal{F}$ και το F' δεν είναι μονοσύνολο συνεχίζουμε ομοίως με το F' στη θέση του F.

Παράδειγμα 11. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{B} = \{\mathbb{N} \setminus F \mid \text{το } F \text{ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του } \mathbb{N}\}.$$

Η $\mathcal{B}$ είναι εύκολα βάση φίλτρου στο $\mathbb{N}$ και, σύμφωνα με τα προηγούμενα, υπάρχει ένα υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ που περιέχει τη $\mathcal{B}$. Για κάθε πεπερασμένο σύνολο $F \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε $\mathbb{N} \setminus F \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$, συνεπώς $F \notin \mathcal{F}$. Άρα το υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ είναι μη τετριμμένο.

Τα μη τετριμμένα υπερφίλτρα είναι αρκετά σύνθετα σύνολα τα οποία δεν μπορούν να περιγραφούν εύκολα.

Λήμμα 12. *Για κάθε μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ το $\mathcal{F}$ δεν έχει την ιδιότητα του Baire (BP) στον χώρο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Ειδικότερα το $\mathcal{F}$ δεν είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.*

[Υπενθυμίζουμε ότι ένα υποσύνολο A ενός μετρικού χώρου (X, d) έχει την BP αν υπάρχει d-ανοικτό U για το οποίο η συμμετρική διαφορά $A \triangle U := (A \setminus U) \cup (U \setminus A)$ είναι σύνολο 1ης κατηγορίας. Όπως είναι γνωστό, μπορούμε να αντικαταστήσουμε στον προηγούμενο ορισμό το ανοικτό σύνολο U με ένα Borel σύνολο B. Προκύπτει ότι τα Borel σύνολα έχουν την BP.]

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ στο $\mathbb{N}$. Λέμε ότι ένα $E \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι **tail set** αν για κάθε $A, B \subseteq \mathbb{N}$ για τα οποία η συμμετρική διαφορά $A \triangle B$ είναι πεπερασμένο σύνολο , αν $A \in E$ τότε $B \in E$.

Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι tail set. Για να το δούμε αυτό υποθέτουμε ότι $A \in \mathcal{F}$ και πως το $A \triangle B$ είναι περασμένο σύνολο. Επειδή το $\mathcal{F}$ είναι μη τετριμμένο έχουμε ότι $\mathbb{N} \setminus (A \triangle B) \in \mathcal{F}$ και συνεπώς $[\mathbb{N} \setminus (A \triangle B)] \cap A \in \mathcal{F}$. Αλλά

$$[\mathbb{N} \setminus (A \triangle B)] \cap A \subseteq B,$$

άρα $B \in \mathcal{F}$.

Χρησιμοποιούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα: αν ένα $E \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$ έχει την BP και είναι tail set τότε ένα από τα E και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus E$ είναι 1ης κατηγορίας, δηλαδή αριθμήσιμη ένωση πουθενά πυκνών συνόλων. Το τελευταίο είναι συνέπεια του **δεύτερου τοπολογικού μηδέν-ένα κανόνα (second topological zero-one law)**, (βλ. [Kec95, 8.47] και [Oxt80, 21.4]).

Εφαρμόζουμε το πιο πάνω παίρνοντας για E το φίλτρο $\mathcal{F}$. Αν το $\mathcal{F}$ είχε την BP, αφού είναι και tail set, τότε ένα από τα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}$ θα ήταν 1ης κατηγορίας. Μάλιστα δεν μπορούν και τα δύο τελευταία σύνολα να είναι 1ης κατηγορίας γιατί ο $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι πλήρης και διαχωρίσιμος μετρικός χώρος (Θεώρημα Κατηγορίας του Baire). Επομένως ακριβώς ένα από αυτά είναι 1ης κατηγορίας.

Στη συνέχεια θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N}) : f(A) = \mathbb{N} \setminus A$. Η f είναι εύκολα τοπολογικός ισομορφισμός και συνεπώς αντιστρέφει σύνολα 1ης κατηγορίας σε σύνολα 1ης κατηγορίας.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $A \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε

$$\begin{aligned} A \in f^{-1}[\mathcal{F}] &\iff f(A) \in \mathcal{F} \\ &\iff \mathbb{N} \setminus A \in \mathcal{F} \\ &\iff A \notin \mathcal{F} \\ &\iff A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}. \end{aligned}$$

Συνεπώς $f^{-1}[\mathcal{F}] = \mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}$ και $f^{-1}[\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}] = \mathcal{F}$. Σε κάθε περίπτωση προκύπτει από τα πιο πάνω ότι και τα δύο σύνολα $\mathcal{F}$ και $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \setminus \mathcal{F}$ είναι 1ης κατηγορίας, άτοπο. Συνεπώς το $\mathcal{F}$ δεν έχει την BP. □

Τα φίλτρα και ειδικότερα τα υπερφίλτρα συνδέονται με τη σύγκλιση ακολουθιών σε τοπολογικούς χώρους.

Ορισμός 13 (Σύγκλιση ακολουθίας ως προς φίλτρο στο $\mathbb{N}$). Θεωρούμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{T}$ και ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ στο $\mathbb{N}$. Λέμε ότι η ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ **συγκλίνει** στο $x \in X$ ως προς το φίλτρο $\mathcal{F}$, συμβολικά $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$, αν για κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}$ ανήκει στο φίλτρο $\mathcal{F}$.

Παρατηρούμε ότι αν ο $(X, \mathcal{T})$ είναι Hausdorff τότε το πιο πάνω x είναι μοναδικό: αν έχουμε $x \neq y$ επιλέγουμε $U_x, U_y \in \mathcal{T}$ με $x \in U_x$, $y \in U_y$ και $U_x \cap U_y = \emptyset$. Τότε τα σύνολα $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_x\}$ και $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U_y\}$ είναι ξένα και συνεπώς δεν μπορούν να ανήκουν και τα δύο στο φίλτρο $\mathcal{F}$.

Παράδειγμα 14 (Σύγκλιση φραγμένης ακολουθίας πραγματικών ως προς υπερφίλτρο). Θεωρούμε μια φραγμένη ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ πραγματικών αριθμών και ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ στο $\mathbb{N}$.

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ με $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε $M > 0$ με $|x_n| \leq M$ για κάθε n και θέτουμε $A_1 = \mathbb{N}$. Διαμερίζουμε το $[-M, M]$ στα υποδιαστήματα $[-M, 0]$ και $[0, M]$ και θεωρούμε τα αντίστοιχα σύνολα φυσικών

$$A_1^l = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [-M, 0]\} \quad A_1^r = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [0, M]\}.$$

Τότε $\mathbb{N} = A_1 = A_1^l \cup A_1^r \in \mathcal{F}$ και συνεπώς από την ιδιότητα του υπερφίλτρου έχουμε $A_1^l \in \mathcal{F}$ ή $A_1^r \in \mathcal{F}$. Συνεχίζοντας με όμοιο τρόπο βρίσκουμε μια ακολουθία $(I_k)_{k\in\mathbb{N}}$ κλειστών και φραγμένων διαστημάτων του $\mathbb{R}$ με διάμετρος$(I_k) \to 0$ έτσι ώστε για κάθε k το σύνολο $A_k = \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in I_k\}$ να ανήκει στο υπερφίλτρο $\mathcal{F}$. Θεωρούμε το μοναδικό $x \in \mathbb{R}$ με $x \in I_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Τότε για κάθε ανοικτό $U \subseteq \mathbb{R}$ με $x \in U$ υπάρχει k_0 αρκετά μεγάλο ώστε $x \in I_{k_0} \subseteq U$ και άρα $A_{k_0} \subseteq \{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in U\}$, επομένως το τελευταίο σύνολο ανήκει στο $\mathcal{F}$.

Πολλές φορές δεν είναι απαραίτητο να εφαρμόσουμε στην πλήρη της έκταση την ιδιότητα του υπερφίλτρου να αποφασίζει όλο το δυναμοσύνολο. Στο Παράδειγμα 14 χρειάζεται να γνωρίζουμε ότι το δοσμένο υπερφίλτρο αποφασίζει μια **αριθμήσιμη** οικογένεια συνόλων της μορφής $\{n \in \mathbb{N} \mid x_n \in [p, q]\}$ όπου $p, q \in \mathbb{R}$. Μάλιστα, ο Alex Kreuzer [Kre12] παραθέτει μια μεγάλη κατηγορία αποδείξεων, όπου η χρήση ενός υπερφίλτρου στο $\mathbb{N}$ μπορεί να αντικατασταθεί από τη χρήση ενός φίλτρου, το οποίο αποφασίζει μια επαρκώς μεγάλη αριθμήσιμη οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$.

Στο επόμενο λήμμα παρουσιάζουμε μια βασική μέθοδο κατασκευής φίλτρου στο $\mathbb{N}$ που αποφασίζει μια δοσμένη αριθμήσιμη $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Λήμμα 15. *Για κάθε μη κενή αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{A}$ από υποσύνολα του $\mathbb{N}$ υπάρχει μια μη κενή αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{P}(\mathbb{N})$, η οποία αποτελείται από άπειρα σύνολα και είναι βάση ενός φίλτρου $\mathcal{F}$, το οποίο αποφασίζει την οικογένεια $\mathcal{A}$.*

Επιπλέον το φίλτρο $\mathcal{F}$ είναι F_σ υποσύνολο του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια απαρίθμηση $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της οικογένειας $\mathcal{A}$ και ορίζουμε την ακολουθία $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με αναδρομή στο $n \in \mathbb{N}$ ως ακολούθως.

$$B_1 = \begin{cases} A_1, & \text{αν το } A_1 \text{ είναι άπειρο,} \\ \mathbb{N} \setminus A_1, & \text{αν το } A_1 \text{ είναι πεπερασμένο,} \end{cases}$$

$$B_{n+1} = \begin{cases} B_n \cap A_{n+1}, & \text{αν το } B_n \cap A_{n+1} \text{ είναι άπειρο,} \\ B_n \setminus A_{n+1}, & \text{αν το } B_n \cap A_{n+1} \text{ είναι πεπερασμένο.} \end{cases}$$

Προφανώς ισχύει $B_{n+1} \subseteq B_n$ για κάθε n. Ισχυριζόμαστε ότι κάθε B_n είναι άπειρο σύνολο. Αυτό είναι σαφές για $n = 1$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $n \geq 1$ το σύνολο B_n είναι άπειρο και δείχνουμε το ίδιο για το B_{n+1}. Αν το $B_n \cap A_{n+1}$ είναι άπειρο τότε $B_{n+1} = B_n \cap A_{n+1}$ και συνεπώς το B_{n+1} είναι άπειρο. Αν το $B_n \cap A_{n+1}$ είναι πεπερασμένο τότε $B_{n+1} = B_n \setminus A_{n+1}$. Προφανώς ισχύει

$$B_n = (B_n \cap A_{n+1}) \cup (B_n \setminus A_{n+1}) = (B_n \cap A_{n+1}) \cup B_{n+1}.$$

Αφού το B_n είναι άπειρο και το $B_n \cap A_{n+1}$ πεπερασμένο προκύπτει από τις πιο πάνω ισότητες ότι το B_{n+1} είναι άπειρο. Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα.

Προκύπτει ότι η οικογένεια $\mathcal{B} = \{B_n \mid n \in \mathbb{N}\} \subseteq \mathbb{N}$ είναι βάση φίλτρου στο $\mathbb{N}$, της οποία μάλιστα κάθε στοιχείο είναι άπειρο σύνολο. Παίρνουμε το φίλτρο

$$\mathcal{F} = \mathcal{F}_\mathcal{B} = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \mid \exists n \ (B_n \subseteq A)\}.$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι το $\mathcal{F}$ αποφασίζει την $\mathcal{A}$. Πράγματι, θεωρούμε ένα σύνολο $A = A_m \in \mathcal{A}$, όπου $m \in \mathbb{N}$. Αν $m = 1$ τότε το $B_1 \in \mathcal{F}$ είναι είτε το A_1, οπότε $A_1 \in \mathcal{F}$, είτε το $\mathbb{N} \setminus A_1$, οπότε $\mathbb{N} \setminus A_1 \in \mathcal{F}$. Αν $m = n + 1$ τότε το $B_m = B_{n+1} \in \mathcal{F}$ είναι είτε το $B_n \cap A_{n+1} \subseteq A_{n+1} = A_m$, οπότε $A_m \in \mathcal{F}$, είτε το $B_n \setminus A_{n+1} \subseteq \mathbb{N} \setminus A_{n+1} = \mathbb{N} \setminus A_m$, οπότε $\mathbb{N} \setminus A_m \in \mathcal{F}$.

Έπειτα δείχνουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι F_σ υποσύνολο του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\mathcal{M}_n = \{A \in \mathcal{P}(\mathbb{N}) \ \mid \ B_n \subseteq A\},$$

έτσι που $\mathcal{F} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_n$ και επομένως αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $\mathcal{M}_n$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Θεωρούμε ένα $n \in \mathbb{N}$ και μια ακολουθία $(Y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ από στοιχεία του $\mathcal{M}_n$ η οποία συγκλίνει στο $Y \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$. Δείχνουμε ότι $Y \in \mathcal{M}_n$, δηλαδή ότι $B_n \subseteq Y$. Έστω $k \in B_n$, αφού $Y_i \to Y$ υπάρχει i αρκετά μεγάλο έτσι ώστε $k \in Y_i \iff k \in Y$. Όμως $Y_i \in \mathcal{M}_n$ οπότε $k \in B_n \subseteq Y_i$ και άρα $k \in Y_i$. Επομένως $k \in Y$. Αυτό δείχνει ότι $B_n \subseteq Y$ και άρα το $\mathcal{M}_n$ είναι κλειστό. □

Τα υπερφίλτρα συνδέονται επίσης με τα σημεία συσσώρευσης ακολουθιών.

Λήμμα 16 (Σημεία συσσώρευσης και υπερφίλτρα). *Θεωρούμε έναν τοπολογικό χώρο $(X, \mathcal{T})$ και μια ακολουθία $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ στο X. Αν το $x \in X$ είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ τότε υπάρχει ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ στο $\mathbb{N}$ με $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$.*

Απόδειξη. Για κάθε $U \in \mathcal{T}$ με $x \in U$ ορίζουμε $A_U = \{n \in \mathbb{N} \ \mid \ x_n \in U\}$. Επειδή το x είναι σημείο συσσώρευσης της ακολουθίας $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ έχουμε ότι κάθε A_U είναι άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Επιπλέον για κάθε $U, V \in \mathcal{T}$ με $x \in U \cap V$ έχουμε $A_{U \cap V} = A_U \cap A_V$.

Θεωρούμε την οικογένεια υποσυνόλων του $\mathbb{N}$,

$$\mathcal{B} = \{A_U \setminus F \ \mid \ U \in \mathcal{T} \ \& \ x \in U \ \& \text{ το } F \text{ είναι πεπερασμένο} \subseteq \mathbb{N}\}.$$

Είναι σαφές ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{B}$ είναι μη κενό σύνολο.

Επιπλέον για κάθε $U_1, U_2 \in \mathcal{T}$ με $x \in U_1$ και $x \in U_2$ και κάθε πεπερασμένα $F_1, F_2 \subseteq \mathbb{N}$ ισχύει $x \in U_1 \cap U_2 \in \mathcal{T}$ και

$$A_{U_1 \cap U_2} \setminus (F_1 \cup F_2) = A_{U_1} \cap A_{U_2} \setminus (F_1 \cup F_2) = (A_{U_1} \setminus F_1) \cap (A_{U_2} \setminus F_2).$$

Επειδή $F = F_1 \cup F_2$ είναι πεπερασμένο υποσύνολο του $\mathbb{N}$ έχουμε ότι το σύνολο $A_{U_1 \cap U_2} \setminus F$ ανήκει στη $\mathcal{B}$.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι η $\mathcal{B}$ είναι βάση φίλτρου και, σύμφωνα με τα προηγούμενα, από το Αξίωμα Επιλογής υπάρχει ένα υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ στο $\mathbb{N}$ με $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. Επειδή για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq \mathbb{N}$ έχουμε $\mathbb{N} \setminus F = A_X \setminus F \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$ καταλήγουμε ότι $\mathbb{N} \setminus F \in \mathcal{F}$ και άρα $F \notin \mathcal{F}$. Συνεπώς το $\mathcal{F}$ είναι μη τετριμμένο.

Τέλος δείχνουμε ότι $x_n \xrightarrow{\mathcal{F}} x$. Πράγματι αν έχουμε $U \in \mathcal{T}$ και $x \in U$ τότε ισχύει $\{n \in \mathbb{N} \ \mid \ x_n \in U\} = A_U \setminus \emptyset \in \mathcal{B} \subseteq \mathcal{F}$. □

Κλείνουμε με μια βασική ιδιότητα των φίλτρων.

Πρόταση 17. *Θεωρούμε ένα φίλτρο $\mathcal{F}$ σε ένα μη κενό σύνολο X και $X_1, \dots, X_n \subseteq X$ με $X = X_1 \cup \dots \cup X_n$. Τότε υπάρχει $k \in \{1, \dots, n\}$ με την ιδιότητα $X_k \cap A \neq \emptyset$ για κάθε $A \in \mathcal{F}$.*

(Παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα είναι τετριμμένο αν το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο στο X γιατί τότε θα έχουμε $X_k \in \mathcal{F}$ για κάποιο k.)

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι το συμπέρασμα δεν είναι σωστό. Τότε για κάθε $k = 1, \dots, n$ υπάρχει $A_k \in \mathcal{F}$ με $X_k \cap A_k = \emptyset$. Θεωρούμε τέτοια σύνολα $A_1, \dots, A_n \in \mathcal{F}$. Επειδή $X = \bigcup_{1 \leq k \leq n} X_k$ προκύπτει ότι $\bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k = \emptyset$. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί τα $A_1, \dots, A_n$ είναι στοιχεία του $\mathcal{F}$ και συνεπώς το $\emptyset = \bigcap_{1 \leq k \leq n} A_k$ θα ήταν επίσης στοιχείο του $\mathcal{F}$. □

3. Διατακτικοι αριθμοι

Παρουσιάζουμε συνοπτικά μερικά βασικά στοιχεία από τη θεωρία των διατακτικών αριθμών καθώς και την τεχνική της υπερπεπερασμένης αναδρομής-επαγωγής.

Ορισμός 18 (Καλά διατεταγμένος χώρος). Δίνεται ένα μη κενό σύνολο U και μια διμελής σχέση $\leq$ στο U, η οποία είναι **ολική διάταξη** στο U, δηλαδή ικανοποιεί για κάθε $x, y, z \in U$ τα ακόλουθα:

$$x \leq x,\ \ (x \leq y \ \&\ y \leq x) \ \Rightarrow\ x = y,\ \ (x \leq y \ \&\ y \leq z) \ \Rightarrow\ x \leq z,\ \ x \leq y \text{ ή } y \leq x.$$

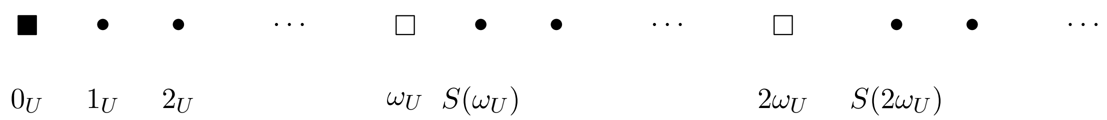
Η $\leq$ είναι **καλή διάταξη** στο U αν κάθε μη κενό υποσύνολο του U έχει $\leq$-ελάχιστο στοιχείο, δηλαδή

$$\forall A \subseteq U \ (\ A \neq \emptyset \implies \exists x \in A\ \forall y \in A\ (x \leq y)\ ).$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το ζεύγος $(U, \leq)$ είναι **καλά διατεταγμένος χώρος**. Επίσης είναι βολικό να θεωρούμε το κενό σύνολο $\emptyset$ ως καλά διατεταγμένο χώρο.

Το κλασικό παράδειγμα ενός καλά διατεταγμένου χώρου που είναι άπειρο σύνολο είναι το ζεύγος $(\mathbb{N}, \leq_{\mathbb{N}})$. Επίσης κάθε αρχικό τμήμα $U_x := \{y \in U \mid y < x\}$ ενός καλά διατεταγμένου $(U, \leq)$ (όπου $x \in U$) με τον περιορισμό της $\leq$ στο U_x είναι καλά διατεταγμένος χώρος. Με $<$ εννοούμε το **αυστηρό μέρος** της $\leq$, δηλαδή τη διμελή σχέση $x < y \iff x \leq y \ \&\ x \neq y$.

Παράδειγμα 19. Δίνουμε το παράδειγμα ενός καλά διατεταγμένου χώρου $(U, \leq)$ με αναπαράσταση σε διάγραμμα μεγαλώνοντας προς τα δεξιά. Όπως αναφέραμε πιο πάνω κάθε αρχικό τμήμα του $(U, \leq)$ είναι επίσης καλά διατεταγμένος χώρος.



Πιο πάνω το 0_U είναι το ελάχιστο στοιχείο του U, το 1_U είναι το ελάχιστο στοιχείο του U που είναι μεγαλύτερο του 0_U και το 2_U είναι το ελάχιστο στοιχείο του U που είναι μεγαλύτερο του 1_U. Γενικά για κάθε $x \in U$ αν υπάρχει $y \in U$ με $x < y$ τότε ορίζουμε $S(x)$ να είναι το ελάχιστο τέτοιο y, έτσι που $1_U = S(0_U)$ και $2_U = S(1_V)$.

Γενικά δεν είναι όλα τα στοιχεία $y \in U$ της μορφής $S(x)$ για κάποιο $x \in U$, δείτε για παράδειγμα τα στοιχεία του πιο πάνω διαγράμματος που αναπαριστώνται με $\square$. Τα $y \in U$ που είναι της μορφής $S(x)$ ονομάζονται **επόμενοι** και τα $y \in U$ που δεν είναι επόμενοι και είναι διάφορα του 0_U ονομάζονται **οριακά σημεία**.

Ο ω_U είναι το ελάχιστο οριακό σημείο του U (ορίζεται εφόσον ο U έχει οριακά σημεία) και ο $2\omega_U$ είναι το ελάχιστο οριακό σημείο του U που είναι μεγαλύτερο του ω_U (ορίζεται εφόσον ο U έχει τουλάχιστον δύο οριακά σημεία).

Στους καλά διατεταγμένους χώρους ισχύει μια γενικευμένη μορφή της Αρχής της Επαγωγής.

Πρόταση 20 (Αρχή της Υπερπεπερασμένης Επαγωγής). *Θεωρούμε έναν καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$ και ένα $P \subseteq U$, το οποίο ικανοποιεί την ακόλουθη ιδιότητα:*

για κάθε $y \in U$, αν για κάθε $x < y$ έχουμε $x \in P$ τότε $y \in P$.[2]

[2] Η υπόθεση "για κάθε $x < \min U$ έχουμε $x \in P$" ισχύει τετριμμένα, επομένως από αυτή την ιδιότητα έχουμε ειδικότερα ότι $\min U \in P$.

Τότε $P = U$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $P \neq U$, έτσι που $U \setminus P \neq \emptyset$. Θεωρούμε το $y = \min(U \setminus P)$. Τότε για κάθε $x < y$ έχουμε $x \notin U \setminus P$, άρα $x \in P$. Από την ιδιότητα του P προκύπτει ότι $y \in P$, το οποίο είναι άτοπο γιατί $y \in U \setminus P$. □

Όπως η Αρχή της Επαγωγής έτσι και η Αρχή της Επαγωγής μας επιτρέπει να δίνουμε **ορισμούς με αναδρομή**. Δίνουμε ένα παράδειγμα. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια συνάρτηση $\Phi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to \mathcal{P}(\mathbb{N})$ και έναν καλά διατατεγμένο χώρο $(U, \leq)$ με $U \neq \emptyset$. Ορίζουμε την οικογένεια $(A_y)_{y \in U}$ με αναδρομή στο y ως εξής.

Υποθέτουμε ότι για κάποιο $y \in U$ έχουμε ορίσει το A_x για κάθε $x < y$. (Για $y = \min U \equiv 0_U$ αυτή η υπόθεση δεν σημαίνει απολύτως τίποτα.) Τότε παίρνουμε το σύνολο $\bigcup_{x<y} A_x$ (στην περίπτωση όπου $y = 0_U$ το τελευταίο είναι το κενό σύνολο) και ορίζουμε $A_y = \Phi(\bigcup_{x<y} A_x)$. Έχουμε ορίσει λοιπόν το A_y και από την Αρχή της Υπερπεπερασμένης Αναδρομής έχουμε ορίσει τα A_y για κάθε $y \in U$.[3] Παρατηρούμε ότι $A_{0_U} = \Phi(\emptyset)$ –πολλές φορές για να τονίσουμε το σημείο εκκίνησης ορίζουμε ξεχωριστά το A_{0_U}, αλλά αυτό δεν είναι πάντα απαραίτητο.

Παράδειγμα 21 (Παράδειγμα ορισμού με αναδρομή και απόδειξης με επαγωγή). Συμβολίζουμε με $\mathcal{C}(\mathbb{R})$ το σύνολο όλων των κλειστών υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και θεωρούμε μια συνάρτηση $D : \mathcal{C}(\mathbb{R}) \to \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Θεωρούμε επίσης έναν καλά διατεταγμένο χώρο $(U, \leq)$ με $U \neq \emptyset$.

Ορίζουμε με αναδρομή την πιο κάτω οικογένεια $(F_y)_{y \in U}$ υποσυνόλων του $\mathbb{R}$ και δείχνουμε με την Αρχή της Υπερπεπερασμένης Επαγωγής ότι $F_y \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ για κάθε $y \in U$.

Ορισμός $(F_y)_{y \in U}$*:*

$$F_0 = D(\mathbb{R}) \quad \text{και} \quad F_y = D\left(\bigcap_{x<y} F_x\right), \quad \text{όπου } y \in U \text{ με } y > 0_U.$$

(Εδώ διακρίνουμε περιπτώσεις $y = 0_U$ και $y \neq 0_U$.) Πιο απλά μπορούμε να ορίσουμε κατευθείαν $F_y = D\left(\bigcap_{x<y} F_x\right)$ με τη διευκρίνιση ότι με $\bigcap_{x<0_U} F_x$ εννοούμε το $\mathbb{R}$.

Δείχνουμε ότι $F_y \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$ με επαγωγή στο y. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $y \in U$ ισχύει για κάθε $x < y$ πως το F_x είναι κλειστό. Τότε και η τομή $\bigcap_{x<y} F_x$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$ ως τομή κλειστών και, αφού η D παίρνει τιμές στο $\mathcal{C}(\mathbb{R})$, προκύπτει ότι το $F_y = D\left(\bigcap_{x<y} F_x\right)$ είναι επίσης κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}$. Από την Αρχή της Υπερπεπερασμένης Αναδρομής το F_y είναι κλειστό για κάθε $y \in U$.

Ορισμός 22 (Διατακτικοί αριθμοί). Ένα σύνολο ξ ονομάζεται **διατακτικός αριθμός** αν ικανοποιεί τα ακόλουθα.

(α) Κάθε στοιχείο του ξ είναι υποσύνολο του ξ.

(β) Το ζεύγος $(\xi, \leq)$ είναι καλά διατεταγμένος χώρος, όπου $\leq$ είναι η διμελής σχέση στο ξ που ορίζεται ως ακολούθως:

$$x \leq y \iff x = y \text{ ή } x \in y,$$

όπου $x, y \in \xi$.

[3] Σε αυτό το σημείο παρακάμπτουμε μια σημαντική λεπτομέρεια: θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η συλλογή όλων των ζευγών (y, A_y), όπου $y \in U$, είναι σύνολο. Το τελευταίο φαίνεται προφανές αλλά η αυστηρή του απόδειξη με βάση τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων απαιτεί αρκετή δουλειά. Δεν θα αναφερθούμε περισσότερο σε αυτό καθώς απέχει αρκετά από τους στόχους μας.

Οι διατακτικοί αριθμοί συμβολίζονται συνήθως με μικρά γράμματα της ελληνικής αλφαβήτου: ξ, η, ζ ή α, β, γ.

Μερικά παραδείγματα διατακτικών αριθμών είναι τα εξής:

$$\emptyset,\ \{\emptyset\},\ \{\emptyset, \{\emptyset\}\},\ \Big\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\Big\}, \ldots$$

Παρατηρήστε ότι κάθε ένα από τα πιο πάνω είναι το σύνολο όλων των αντικειμένων που εμφανίζονται στα αριστερά του.

Παραθέτουμε μερικά **βασικά αποτελέσματα** που αφορούν τους καλά διατεταγμένους χώρους και τους διατακτικούς αριθμούς.

(1) Για κάθε δύο καλά διατεταγμένους χώρους ο ένας είναι ισομορφικός ως προς τη διάταξη με ένα αρχικό τμήμα του δεύτερου (ενδεχομένως με όλο τον δεύτερο χώρο).

(2) Για κάθε σύνολο A υπάρχει ένας καλά διατεταγμένος χώρος $(\chi(A), \leq)$ για τον οποίο δεν υπάρχει ένα-προς-ένα συνάρτηση $f : \chi(A) \to A$. Μάλιστα ο $(\chi(A), \leq)$ είναι ο "ελάχιστος" τέτοιος καλά διατεταγμένος χώρος.
Ειδικότερα για $A = \mathbb{N}$ συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν καλά διατεταγμένοι χώροι $(U, \leq)$ με το U να είναι υπεραριθμήσιμο σύνολο.

(3) Κάθε καλά διατεταγμένος χώρος $(U, \leq)$ είναι ισομορφικός ως προς τη διάταξη με ακριβώς έναν διατακτικό αριθμό $\xi_{(U,\leq)}$.[4] Ειδικότερα υπάρχει ένα-προς-ένα και επί συνάρτηση $f : U \to \xi_{(U,\leq)}$. Μάλιστα αν ο $(U', \leq')$ είναι ένας καλά διατεταγμένος χώρος που είναι ισομορφικός ως προς τη διάταξη με τον $(U, \leq)$ τότε $\xi_{(U',\leq')} = \xi_{(U,\leq)}$. Επομένως οι διατακτικοί αριθμοί είναι "αντιπρόσωποι" των καλά διατεταγμένων χώρων.

Με βάση τα προηγούμενα καταλήγουμε ότι *υπάρχουν διατακτικοί αριθμοί που είναι υπεραριθμήσιμα σύνολα*, ένας τέτοιος είναι ο διατακτικός αριθμός που αντιστοιχεί στον $(\chi(\mathbb{N}), \leq)$. Γενικότερα *για κάθε σύνολο X υπάρχει διατακτικός αριθμός ξ^X για τον οποίο δεν υπάρχει ένα-προς-ένα συνάρτηση $g : \xi^X \to X$*, συγκεκριμένα ο ξ^X είναι ο διατακτικός αριθμός που αντιστοιχεί στον καλά διατεταγμένο χώρο $(\chi(X), \leq)$.

(4) Ορίζουμε τη διμελή σχέση ανάμεσα στους διατακτικούς αριθμούς,

$$\xi_1 \leq \xi_2 \iff \xi_1 = \xi_2 \text{ ή } \xi_1 \in \xi_2.$$

Τότε η $\leq$ είναι καλή διάταξη στην κλάση όλων των διατακτικών αριθμών. Ειδικότερα κάθε δύο διατακτικοί αριθμοί συγκρίνονται και αν υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός που ικανοποιεί μια ιδιότητα P τότε υπάρχει ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός που ικανοποιεί την P.

(5) Ορίζουμε

$$\omega = \text{ο ελάχιστος άπειρος διατακτικός αριθμός,}$$
$$\omega_1 = \text{ο ελάχιστος υπεραριθμήσιμος διατακτικός αριθμός.}$$

Αποδεικνύεται ότι ο ω_1 είναι ο διατακτικός αριθμός που αντιστοιχεί στον καλά διατεταγμένο χώρο $(\chi(\mathbb{N}), \leq)$.

[4] Για την απόδειξη αυτού χρειάζεται το *Αξίωμα Αντικατάστασης* (για την ακρίβεια Αξιωματικό Σχήμα Αντικατάστασης), το οποίο διατυπώθηκε από τον Fraenkel. Αυτό είναι το μοναδικό αξίωμα της θεωρίας συνόλων που δεν διατυπώκε από τον Zermelo. Η συλλογή των αξιωμάτων των Zermelo-Fraenkel μαζί με το Αξίωμα Επιλογής συμβολίζεται με ZFC.

Γενικότερα ορίζουμε

$$|X|^+ = \text{ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός } \xi \text{ με την ιδιότητα}$$
$$\text{να μην υπάρχει ένα-προς-ένα συνάρτηση } g : \xi \to X.$$

Είναι γνωστό ότι ο $|X|^+$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός, επομένως για κάθε $\xi < |X|^+$ έχουμε $\xi + 1 < |X|^+$. Αποδεικνύεται ότι ο $|X|^+$ είναι ο διατακτικός αριθμός που αντιστοιχεί στον $(\chi(X), \leq)$. Προφανώς $\omega_1 = |\mathbb{N}|^+$.

(6) Μπορούμε να εφαρμόσουμε αναδρομή και επαγωγή στην κλάση όλων των διατακτικών αριθμών. Για παράδειγμα μπορούμε να ορίσουμε με αναδρομή σύνολα A_ξ *για κάθε* διατακτικό αριθμό ξ και να αποδείξουμε ιδιότητες γι' αυτά όπως με την Αρχή Υπερπερασμένης Επαγωγής. Στην πράξη μας ενδιαφέρουν τα A_ξ όπου το ξ είναι μικρότερο ενός επαρκώς μεγάλου διατακτικού αριθμού.

(7) Κάθε στοιχείο ενός διατακτικού αριθμού είναι διατακτικός αριθμός. Μάλιστα κάθε διατακτικός αριθμός είναι το σύνολο όλων των διατακτικών αριθμών που είναι μικρότεροί του.

(8) Για κάθε διατακτικό αριθμό ξ ορίζουμε $\xi + 1 = \xi \cup \{\xi\}$. Τότε το $\xi + 1$ είναι διατακτικός αριθμός. Μάλιστα ο $\xi + 1$ είναι ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός που είναι μεγαλύτερος του ξ.

(9) Για κάθε σύνολο διατακτικών αριθμών A η ένωση $\bigcup A := \{\xi \mid \exists \eta \in A \ (\xi \in \eta)\}$ είναι διατακτικός αριθμός. Μάλιστα ο $\bigcup A$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα $\sup A$ του A.
Προκύπτει ότι για κάθε ακολουθία $(\xi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ διατακτικών αριθμών με $\xi_n < \omega_1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $\xi := \sup\{\xi_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι μικρότερος του ω_1. Αυτό συμβαίνει γιατί $\xi = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \xi_n$ και άρα ο ξ είναι αριθμήσιμη ένωση αριθμήσιμων συνόλων.

(10) Στους διατακτικούς αριθμούς ορίζονται οι πράξεις της πρόσθεσης, του πολλαπλασιασμού και της ύψωσης σε δύναμη, αν και πολλές από τις γνωστές ιδιότητες δεν διατηρούνται. Για παράδειγμα δεν είναι αντιμεταθετικές πράξεις ούτε ισχύουν γενικά οι γνωστοί κανόνες διαγραφής.
Με τη βοήθεια αυτών των πράξεων μπορούμε να περιγράψουμε μερικούς διατακτικούς αριθμούς ως ακολούθως:

$$0, 1, \ldots, \omega, \omega + 1, \ldots, 2\omega, \ldots, 3\omega, \ldots, \omega \cdot \omega = \omega^2,$$
$$\ldots, \omega^3, \ldots, \omega^n, \ldots, \omega^\omega, \ldots, \omega^{\omega^\omega}, \ldots$$

Όλοι αυτοί οι διατακτικοί αριθμοί είναι μικρότεροι του ω_1.

Θα λέμε ότι μια συλλογή $(X_\xi)_\xi$, όπου ξ είναι διατακτικός αριθμός, είναι **φθίνουσα** αν για κάθε διατακτικούς $\xi < \xi'$ ισχύει $X_{\xi'} \subseteq X_\xi$. Όπως θα δούμε πιο κάτω στην Πρόταση 24 κάθε φθίνουσα συλλογή σταθεροποιείται σε κάποιο σημείο, δηλαδή δεν μπορούμε να αφαιρούμε συνεχώς στοιχεία από ένα σύνολο "επ' άπειρον". Το τελευταίο δεν φαίνεται αρχικά να είναι σωστό. Για παράδειγμα μπορούμε να πάρουμε την ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ με

$$A_n = \{42\} \ \cup \ \{k \in \mathbb{N} \mid k \geq n + 100\}.$$

Τότε το A_{n+1} είναι γνήσιο υποσύνολο του A_n για κάθε n. Επομένως η $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ δεν σταθεροποιείται παρ' όλο που τα σύνολα γίνονται όλο και μικρότερα.

Από την άλλη όμως μπορούμε να συνεχίσουμε ορίζοντας $A_\omega = \{42\}$, έτσι που $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = A_\omega = \{42\}$. Από εδώ έχουμε δύο επιλογές: ή θα τερματίσουμε (π.χ. γιατί ο κανόνας που ακολουθούμε μας λέει ότι πρέπει να αφαιρούμε στοιχεία ≥ 100) ή θα αφαιρέσουμε ακόμα ένα στοιχείο, το 42, για να καταλήξουμε στο $A_{\omega+1} := \emptyset$, απ' όπου δεν μπορούμε να αφαιρέσουμε άλλα στοιχεία. Επομένως αυτή η διαδικασία τερματίζεται το πολύ μέχρι τον $\omega + 1$. Βλέπουμε λοιπόν σε αυτό το παράδειγμα ότι όντως δεν μπορούμε να αφαιρούμε συνεχώς στοιχεία "επ' άπειρον" αρκεί αυτό να ερμηνευθεί με βάση τους διατακτικούς αριθμούς.

Η πιο πάνω αρχή περί αφαίρεσης στοιχείων διατυπώνεται αυστηρά στην Πρόταση 24. Προηγουμένως δίνουμε ένα βοηθητικό λήμμα, το οποίο θα χρειαστούμε και στη συνέχεια.

Λήμμα 23. *Θεωρούμε μια φθίνουσα συλλογή $(X_\xi)_\xi$ υποσυνόλων του X, όπου ξ είναι διατακτικός αριθμός. Τότε υπάρχει ένας διατακτικός αριθμός $\eta_0 < |X|^+$ και μια γνησίως αύξουσα οικογένεια $(\xi_\eta)_{\eta<\eta_0}$ διατακτικών αριθμών έτσι ώστε κάθε X_ξ να ανήκει στο σύνολο $\left\{X_{\xi_\eta} \mid \eta < \eta_0\right\}$.*[5]

*Ειδικότερα για κάθε φθίνουσα συλλογή $(A_\xi)_\xi$ από υποσύνολα του $\mathbb{N}$ υπάρχει ένα **αριθμήσιμο** σύνολο J διατακτικών αριθμών έτσι ώστε για κάθε ξ υπάρχει $\zeta \in J$ με $A_\xi = A_\zeta$.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι το δεύτερο συμπέρασμα για τη συλλογή $(A_\xi)_\xi$ είναι συνέπεια του πρώτου συμπεράσματος: για $X = \mathbb{N}$ έχουμε $|X|^+ = \omega_1$ και άρα για τα $\eta_0 < \omega_1$ και $(\xi_\eta)_{\eta<\eta_0}$ που προκύπτουν από το πρώτο συμπέρασμα το σύνολο $J = \{\xi_\eta \mid \eta < \eta_0\}$ είναι αριθμήσιμο.

Επομένως αρκεί να αποδείξουμε το πρώτο συμπέρασμα. Το πρώτο βήμα είναι να διαγράψουμε τις επαναλήψεις που ενδεχομένως να υπάρχουν. Δηλαδή μπορεί έχουμε $X_0 = \cdots = X_{\omega_1}$, το X_{ω_1+1} να είναι γνήσιο υποσύνολο του X_{ω_1}, $X_{\omega_1+1} = \cdots = X_{\omega_1+\omega_1}$, το $X_{\omega_1+\omega_1+1}$ να είναι γνήσιο υποσύνολο του $X_{\omega_1+\omega_1}$ και ούτω καθεξής. Τότε θα πάρουμε $X_{\xi_0} = X_0$, $X_{\xi_1} = X_{\omega_1+1}$, $X_{\xi_2} = X_{\omega_1+\omega_1+1}$, ...

Αυστηρά ορίζουμε τη συνάρτηση $(f(\eta))_{\eta<|X|^+}$ με την αναδρομή

$$f(\eta) = \begin{cases} \xi_\eta, & \text{όπου } \xi_\eta \text{ είναι ο ελάχιστος } \xi \text{ με } X_\xi \notin \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta\right\} \\ & \text{αν υπάρχει } \xi \text{ με } X_\xi \notin \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta\right\}, \\ & \\ 0, & \text{αν για κάθε } \xi \text{ ισχύει } X_\xi \in \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta\right\}. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια αν συμβαίνει η πρώτη περίπτωση στον ορισμό του $f(\eta)$ τότε έχουμε $X_{f(\eta)} \notin \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta\right\}$ και για κάθε $\xi < f(\eta)$ έχουμε $X_\xi \in \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta\right\}$. Θα δείξουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα μέχρι κάποιου $\eta_0 < |X|^+$ και μετά γίνεται και παραμένει 0.

Για να δείξουμε το πιο πάνω ξεκινάμε με μερικές παρατηρήσεις. Αν συμβαίνει η πρώτη περίπτωση στον ορισμό του $f(\eta)$ τότε υπάρχει ξ με $X_\xi \notin \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta\right\}$, συνεπώς για κάθε $\eta' < \eta$ επίσης υπάρχει ξ με $X_\xi \notin \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta'\right\}$, δηλαδή για κάθε $\eta' < \eta$ συμβαίνει επίσης η πρώτη περίπτωση στον ορισμό του $f(\eta')$.

Επιπλέον αν $\eta_1 < \eta_2$ και συμβαίνει η πρώτη περίπτωση στον ορισμό του $f(\eta_2)$ ισχυριζόμαστε ότι $f(\eta_1) < f(\eta_2)$. (Από πιο πάνω συμβαίνει η πρώτη περίπτωση

[5]Στην ανάλυση συναντάμε πολλές φορές φθίνουσες συλλογές $(X_\xi)_\xi$ για τις οποίες αν για κάποιο ξ_0 ισχύει $X_{\xi_0+1} = X_{\xi_0}$ τότε για κάθε ξ που είναι μεγαλύτερο αυτού του ξ_0 θα ισχύει $X_\xi = X_{\xi_0}$. Για τέτοιου είδους συλλογές το συμπέρασμα διατυπώνεται πιο απλά ως εξής: υπάρχει $\xi_0 < |X|^+$ έτσι ώστε για κάθε $\xi \geq \xi_0$ ισχύει $X_\xi = X_{\xi_0}$, έτσι που κάθε X_ξ είναι της μορφής X_η για κάποιο $\eta \leq \xi_0$. Εδώ όμως θα συναντήσουμε οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ για τις οποίες θα χρειαστούμε αυτή την πιο γενική μορφή.

και στον ορισμό του $f(\eta_1)$.) Αν είχαμε $f(\eta_2) < f(\eta_1)$ και, αφού συμβαίνει η πρώτη περίπτωση στον ορισμό του $f(\eta_1)$, θα είχαμε ότι $X_{f(\eta_2)} \in \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta_1\right\}$. Αλλά, το τελευταίο σύνολο περιέχεται στο $\left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta_2\right\}$ και άρα το $X_{f(\eta_2)}$ θα ήταν μέλος του. Αυτό όμως είναι άτοπο από τον ορισμό του $f(\eta_2)$ δεδομένου ότι συμβαίνει η πρώτη περίπτωση στον ορισμό του. Αν $f(\eta_2) = f(\eta_1)$ τότε $X_{f(\eta_2)} = X_{f(\eta_1)} \in \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta_2\right\}$, το οποίο πάλι έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του $f(\eta_2)$. Άρα $f(\eta_1) < f(\eta_2)$.

Ισχυρισμός. Υπάρχει $\eta_0 < |X|^+$ έτσι ώστε για κάθε ξ να ισχύει $X_\xi \in \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta_0\right\}$, δηλαδή συμβαίνει η δεύτερη περίπτωση στον ορισμό του $f(\eta_0)$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι για κάθε $\eta < |X|^+$ υπάρχει ξ με $X_\xi \notin \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta\right\}$. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $\eta < |X|^+$ συμβαίνει η πρώτη περίπτωση στον ορισμό του $f(\eta)$. Συνεπώς για κάθε $\eta_1 < \eta_2$ έχουμε από τα πιο πάνω ότι $f(\eta_1) < f(\eta_2)$ και $X_{f(\eta_2)} \notin \left\{X_{f(\zeta)} \mid \zeta < \eta_2\right\}$, ειδικότερα $X_{f(\eta_2)} \neq X_{f(\eta_1)}$. Αφού η $(X_\xi)_\xi$ είναι φθίνουσα έχουμε επιπλέον ότι $X_{f(\eta_2)} \subseteq X_{f(\eta_1)}$.

Προκύπτει λοιπόν ότι για κάθε $\eta_1 < \eta_2 < |X|^+$ το $X_{f(\eta_2)}$ είναι γνήσιο υποσύνολο του $X_{f(\eta_1)}$. Από το Αξίωμα Επιλογής υπάρχει συνάρτηση $c : \mathcal{P}(X) \to X$ έτσι ώστε $c(A) \in A$ για κάθε μη κενό $A \subseteq X$. Επειδή ο $|X|^+$ είναι οριακός διατακτικός αριθμός έχουμε για κάθε $\eta < |X|^+$ ότι $\eta + 1 < |X|^+$, επομένως το σύνολο $X_{f(\eta)} \setminus X_{f(\eta+1)}$ είναι μη κενό. Θέτουμε $x_\eta = c\left(X_{f(\eta)} \setminus X_{f(\eta+1)}\right) \in X_{f(\eta)} \setminus X_{f(\eta+1)}$ για κάθε $\eta < |X|^+$.

Αν $\eta_1 < \eta_2 < |X|^+$ τότε $\eta_1 + 1 \leq \eta_2$ και άρα $f(\eta_1 + 1) \leq f(\eta_2)$. Επομένως ισχύει $x_{\eta_2} \in X_{f(\eta_2)} \subseteq X_{f(\eta_1+1)}$. Από την άλλη $x_{\eta_1} \notin X_{f(\eta_1+1)}$. Επομένως $x_{\eta_1} \neq x_{\eta_2}$. Με άλλα λόγια η συνάρτηση $g : |X|^+ \to X : g(\eta) = x_\eta$ ειναι ένα-προς-ένα, το οποίο είναι άτοπο από τον ορισμό του $|X|^+$.

$\square$ *Απόδειξη Ισχυρισμού.*

Παίρνουμε τον ελάχιστο $\eta_0 < |X|^+$ όπως στον πιο πάνω Ισχυρισμό και θεωρούμε τα $f(\eta) = \xi_\eta$ για κάθε $\eta < \eta_0$. Τότε για κάθε $\eta < \eta' < \eta_0$ συμβαίνει η πρώτη περίπτωση στον ορισμό των $f(\eta)$ και $f(\eta')$ και, από πιο πάνω, έχουμε ότι $\xi_\eta < \xi_{\eta'}$. Συνεπώς η $(\xi_\eta)_{\eta<\eta_0}$ είναι γνησίως αύξουσα. Επιπλέον, αφού ο η_0 ικανοποιεί τον πιο πάνω Ισχυρισμό έχουμε ότι κάθε X_ξ είναι της μορφής X_{ξ_ζ} για κάποιο $\zeta < \eta_0$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Πρόταση 24. *Για κάθε φθίνουσα συλλογή $(X_\xi)_\xi$ υποσυνόλων του X υπάρχει ένα ξ_0 έτσι ώστε για κάθε $\xi \geq \xi_0$ να ισχύει $X_\xi = X_{\xi_0}$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα υπάρχουν $\eta_0 < |X|^+$ και μια γνησίως αύξουσα οικογένεια διατακτικών αριθμών $(\xi_\eta)_{\eta<\eta_0}$ έτσι ώστε για κάθε ξ να υπάρχει $\eta < \eta_0$ με $X_\xi = X_{\xi_\eta}$. Παίρνουμε $\xi_0 = \sup\{\xi_\eta \mid \eta < \eta_0\}$. Αν $\xi \geq \xi_0$, εφόσον η $(X_\xi)_\xi$ είναι φθίνουσα, έχουμε $X_\xi \subseteq X_{\xi_0}$. Επιπλέον υπάρχει $\eta < \eta_0$ με $X_\xi = X_{\xi_\eta}$ και, αφού $\xi_\eta \leq \xi_0$, έχουμε $X_{\xi_0} \subseteq X_{\xi_\eta}$. Άρα ισχύει

$$X_\xi \subseteq X_{\xi_0} \subseteq X_{\xi_\eta} = X_\xi.$$

Συνεπώς ισχύει $X_\xi = X_{\xi_0}$. $\square$

Μόνο το πρώτο συμπέρασμα – *το δεύτερο αποδεικνύεται παρόμοια.*

Θεωρούμε ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ στο $\mathbb{N}$.

Στόχος μας είναι να βρούμε μια *αριθμήσιμη* οικογένεια $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ για την οποία να ισχύει

(1) $\quad \forall p < q \ \forall x \in \mathcal{X} \ \exists H \in \mathcal{A} \ [\ (\ \forall k \in H \ (f_k(x) \geq p) \ ) \ \vee \ (\ \forall k \in H \ (f_k(x) \leq q) \ ) \ ]$

όπου πιο πάνω τα p, q είναι ρητοί αριθμοί.

Ισχυρισμός 1. Αν υπάρχει $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ που ικανοποιεί την (1) τότε η $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία.

Απόδειξη ισχυρισμού. Θεωρούμε μια απαρίθμηση $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ της $\mathcal{A}$ και ορίζουμε αναδρομικά

$$\begin{aligned} m_1 &= \ \min H_1 \\ m_{n+1} &= \ \min \left(\cap_{k\leq n} H_k \cap (m_n, \infty) \right). \end{aligned}$$

(Ο πιο πάνω ορισμός είναι εφικτός γιατί για κάθε $A_1, \ldots, A_n \in \mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$, επειδή το $\mathcal{F}$ είναι μη τετριμμένο, το σύνολο $\cap_{k\leq n} A_k$ είναι άπειρο.)

Δείχνουμε ότι η υπακολουθία $(f_{m_n})_{n\in\mathbb{N}}$ είναι κατά σημείο συγκλίνουσα. Θεωρούμε $x \in \mathcal{X}$ και $\varepsilon > 0$. Έχουμε $\sup_{n\in\mathbb{N}} |f_n(x)| \leq M_x < \infty$. Καλύπτουμε το $[-M_x, M_x]$ με πεπερασμένα ως προς το πλήθος μη κενά ανοικτά διαστήματα μήκους $< \varepsilon$, τα οποία έχουν άκρα ρητούς αριθμούς. Ας τα συμβολίσουμε με $(p_1, q_1), \ldots, (p_l, q_l)$. Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ το $f_k(x)$ ανήκει σε ένα από αυτά τα διαστήματα, επομένως

$$\mathbb{N} = \bigcup_{1\leq i\leq l} \ \{k \in \mathbb{N} \ | \ p_i < f_k(x) < q_i\}.$$

Επειδή το $\mathcal{F}$ είναι φίλτρο στον $\mathbb{N}$, από την Πρόταση 17 υπάρχει ένα από τα σύνολα της πιο πάνω ένωσης, το οποίο τέμνει κάθε στοιχείο του $\mathcal{F}$ σε ένα μη κενό σύνολο.

Καταλήγουμε λοιπόν ότι υπάρχουν ρητοί αριθμοί $p < q$ με $q - p < \varepsilon$ έτσι ώστε για κάθε $A \in \mathcal{F}$ να ισχύει $I_{p,q} \cap A \neq \emptyset$, όπου $I_{p,q} = \{k \in \mathbb{N} \ | \ p < f_k(x) < q\}$.

Μπορούμε να βρούμε ρητούς αριθμούς $p' < q'$ έτσι ώστε $p' < p < q < q'$ και $q' - p' < \varepsilon$. Εφαρμόζουμε την (1) στα ζεύγη (p', p) και (q, q') καθώς και στο δοσμένο x. Τότε βρίσκουμε θετικούς ακέραιους $s \equiv s(p', p, x)$ και $t \equiv t(q, q', x)$ έτσι ώστε

(2) $$\forall k \in H_s \ (\ f_k(x) \geq p' \ ) \quad \text{ή} \quad \forall k \in H_s \ (\ f_k(x) \leq p \ )$$

καθώς και

(3) $$\forall k \in H_t \ (\ f_k(x) \geq q \ ) \quad \text{ή} \quad \forall k \in H_t \ (\ f_k(x) \leq q' \ )$$

Επειδή $H_s \in \mathcal{F}$ έχουμε $I_{p,q} \cap H_s \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει $k_0 \in H_s$ με $p < f_{k_0}(x) < q$. Αυτό σημαίνει ότι δεν μπορεί να συμβαίνει η δεύτερη περίπτωση της (2), δηλαδή δεν μπορούμε να έχουμε $\forall k \in H_s \ (\ f_k(x) \leq p \ )$. Άρα συμβαίνει η πρώτη περίπτωση της (2) δηλαδή έχουμε $\forall k \in H_s \ (\ f_k(x) \geq p' \ )$.

Όμοια, επειδή $H_t \in \mathcal{F}$ έχουμε $I_{p,q} \cap H_t \neq \emptyset$, δηλαδή υπάρχει $k_1 \in H_t$ με $p < f_{k_1}(x) < q$. Άρα δεν μπορούμε να έχουμε $\forall k \in H_t \ (\ f_k(x) \geq q \ )$. Επομένως συμβαίνει η δεύτερη περίπτωση της (3) δηλαδή έχουμε $\forall k \in H_t \ (\ f_k(x) \leq q' \ )$.

Καταλήγουμε λοιπόν στο ακόλουθο:

(4) $$\forall k \in H_s \cap H_t \ (\ p' < f_k(x) < q' \ ).$$

Θεωρούμε $n_0 \geq \max\{s, t\}$. Τότε για κάθε $n \geq n_0$ έχουμε από τον ορισμό της υπακολουθίας ότι

$$m_{n+1} \in \cap_{k\leq n} H_k \subseteq H_s \cap H_t.$$

Άρα από την (4) προκύπτει ότι $p' < f_{m_{n+1}}(x) < q'$. Αυτό δείχνει ότι η $(f_{m_n}(x))_{n\in\mathbb{N}}$ είναι Cauchy ακολουθία.

$\square$ *Απόδειξη Ισχυρισμού 1.*

Στη συνέχεια κατασκευάζουμε μια αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{F}$ και δείχνουμε ότι γι' αυτήν επαληθεύεται η (1).

Σταθεροποιούμε μια αριθμήσιμη βάση $\{V_t \mid t \in \mathbb{N}\}$ της τοπολογίας του $\mathcal{X}$. Για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \subseteq \mathcal{X}$ θέτουμε

$$L^{p,t}(A) = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists x \in V_t \cap A \ (\ f_k(x) < p \ )\} \tag{5}$$

και

$$R^{q,t}(A) = \{k \in \mathbb{N} \mid \exists x \in V_t \cap A \ (\ f_k(x) > q \ )\}. \tag{6}$$

(Αν $V_t \cap A = \emptyset$ τότε $L^{p,t}(A) = R^{q,t}(A) = \emptyset$.)

Παρατηρούμε ότι αν $A \subseteq B$ και υπάρχει $x \in V_t \cap A$ με $f_k(x) < p$, τότε υπάρχει $x \in V_t \cap B$ με $f_k(x) < p$. Με άλλα λόγια έχουμε $L^{p,t}(A) \subseteq L^{p,t}(B)$.

Όμοια αν $A \subseteq B$ και υπάρχει $x \in V_t \cap A$ με $f_k(x) > q$, τότε υπάρχει $x \in V_t \cap B$ με $f_k(x) > q$. Επομένως $R^{q,t}(A) \subseteq R^{q,t}(B)$. Συνοψίζουμε:

$$A \subseteq B \implies L^{p,t}(A) \subseteq L^{p,t}(B) \text{ και } R^{q,t}(A) \subseteq R^{q,t}(B). \tag{7}$$

Στη συνέχεια για κάθε $p, q \in \mathbb{Q}$ με $p < q$ ορίζουμε τον τελεστή

$$D_{p,q} : \mathcal{P}(\mathcal{X}) \to \mathcal{P}(\mathcal{X}) :$$

$$x \in D_{p,q}(A) \iff \Big(\ x \in A \ \& \ \forall t \text{ με } x \in V_t \text{ ισχύει } \big(L^{p,t}(A) \cap R^{q,t}(A)\big)^c \notin \mathcal{F}\Big), \tag{8}$$

όπου $A \subseteq \mathcal{X}$ και $\mathcal{F}$ είναι το μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$ που σταθεροποιήσαμε στην αρχή.[6]

Προφανώς $D_{p,q}(A) \subseteq A$ για κάθε $A \subseteq \mathcal{X}$. Επιπλέον αν $A \subseteq B$ τότε για κάθε $t \in \mathbb{N}$ έχουμε από την (7) ότι $(L^{p,t}(A) \cap R^{q,t}(A))^c \supseteq (L^{p,t}(B) \cap R^{q,t}(B))^c$ και άρα αν $(L^{p,t}(A) \cap R^{q,t}(A))^c \notin \mathcal{F}$ τότε $(L^{p,t}(B) \cap R^{q,t}(B))^c \notin \mathcal{F}$.

Καταλήγουμε από την (8) ότι:

$$A \subseteq B \implies D_{p,q}(A) \subseteq D_{p,q}(B). \tag{9}$$

Στη συνέχεια θεωρούμε $p, q \in \mathbb{Q}$ με $p < q$. Ορίζουμε με αναδρομή στους διατακτικούς αριθμούς ξ τα σύνολα $X_\xi^{p,q} \equiv X_\xi$ και $Y_\xi^{p,q} \equiv Y_\xi$ ως ακολούθως:

$$\begin{cases} X_0 = Y_0 = \mathcal{X} \\ X_\xi = D_{p,q}\left(\bigcap_{\eta<\xi} X_\eta\right) \\ Y_\xi = \bigcap_{\eta<\xi} X_\eta, \ \text{ όπου } \xi > 0. \end{cases} \tag{10}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $\xi_1 < \xi_2$ έχουμε $\bigcap_{\eta<\xi_2} X_\eta \subseteq \bigcap_{\eta<\xi_1} X_\eta$ και άρα από την (9) ισχύει $X_{\xi_2} \subseteq X_{\xi_1}$. Επομένως για κάθε διατακτικό ξ έχουμε $X_{\xi+1} = D_{p,q}\left(\bigcap_{\eta\leq\xi} X_\eta\right) = D_{p,q}(X_\xi)$. Επιπλέον

[6]Επειδή το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο η συνθήκη $J^c \notin \mathcal{F}$ είναι ισοδύναμη με $J \in \mathcal{F}$ για κάθε $J \subseteq \mathbb{N}$ αλλά, για λόγους που σχετίζονται με την περιγραφική θεωρία συνόλων, διατηρούμε την $J^c \notin \mathcal{F}$. Βλ. την Παρατήρηση 25 για περισσότερες πληροφορίες.

(11) $$X_\xi = D_{p,q}(Y_\xi).$$

Ισχυρισμός 2. Για κάθε ζεύγος ρητών αριθμών (p,q) με $p<q$ και κάθε $t \in \mathbb{N}$ υπάρχει ένα αριθμήσιμο σύνολο $J(p,q,t)$ από διατακτικούς αριθμούς έτσι ώστε για κάθε ξ να ισχύει

$$L^{p,t}(Y_\xi) \in \left\{L^{p,t}(Y_\eta) \;\mid\; \eta \in J(p,q,t)\right\} \quad \text{και} \quad R^{q,t}(Y_\xi) \in \left\{R^{q,t}(Y_\eta) \;\mid\; \eta \in J(p,q,t)\right\}$$

όπου τα σύνολα $Y_\xi \equiv Y_\xi^{p,q}$ ορίζονται όπως στη (10).

Απόδειξη ισχυρισμού. Προφανώς αν $\xi_1 < \xi_2$ τότε $Y_{\xi_2} \subseteq Y_{\xi_1}$ και άρα από την (7) έχουμε $L^{p,t}(Y_{\xi_2}) \subseteq L^{p,t}(Y_{\xi_1})$ και $R^{q,t}(Y_{\xi_2}) \subseteq R^{q,t}(Y_{\xi_1})$. Επομένως οι συλλογές $(L^{p,t}(Y_\xi))_\xi$ και $(R^{p,t}(Y_\xi))_\xi$ είναι φθίνουσες. Από το Λήμμα 23 υπάρχει για κάθε μία από αυτές τις δύο συλλογές ένα αριθμήσιμο σύνολο από διατακτικούς αριθμούς, έτσι ώστε κάθε στοιχείο της συλλογής να είναι ίσο με ένα στοιχείο της ίδιας συλλογής, το οποίο έχει δείκτη μέσα από το αντίστοιχο αριθμήσιμο σύνολο διατακτικών αριθμών. Παίρνουμε $J(p,q,t)$ να είναι η ένωση αυτών των δύο αριθμήσιμων συνόλων διατακτικών αριθμών και έχουμε το ζητούμενο.

$\square$ *Απόδειξη Ισχυρισμού 2.*

Τώρα είμαστε έτοιμοι να ορίσουμε την αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{A}$ που χρειαζόμαστε για την (1). Θέτουμε

(12) $$\mathcal{A} = \left\{L^{p,t}(Y_\eta^{p,q})^c,\ R^{q,t}(Y_\eta^{p,q})^c \;\mid\; p,q \in \mathbb{Q},\ p<q,\ t \in \mathbb{N},\ \eta \in J(p,q,t)\right\} \cap \mathcal{F},$$

όπου τα $J(p,q,t)$ είναι όπως στον Ισχυρισμό 2.

Είναι σαφές ότι η $\mathcal{A}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια στοιχείων του $\mathcal{F}$.

Κάνουμε ακόμα μία παρατήρηση για τα σύνολα $X_\xi \equiv X_\xi^{p,q}$ της (10), όπου $p,q \in \mathbb{Q}$ με $p<q$. Επειδή η $(X_\xi^{p,q})_\xi$ είναι φθίνουσα, από την Πρόταση 24 υπάρχει (και μάλιστα ο ελάχιστος) διατακτικός αριθμός $\xi_1 \equiv \xi_1(p,q)$ με $X_{\xi_1}^{p,q} = X_\xi^{p,q}$ για κάθε $\xi > \xi_1$. Ειδικότερα έχουμε $X_{\xi_1}^{p,q} = X_{\xi_1+1}^{p,q}$.

Ισχυρισμός 3. Θεωρούμε $p,q \in \mathbb{Q}$ με $p<q$ και τα σύνολα $X_\xi \equiv X_\xi^{p,q}$ όπως ορίζονται στη (10). Αν ο ξ ικανοποιεί $X_{\xi+1} = X_\xi$ τότε $X_\xi = \emptyset$. Επομένως $X_{\xi_1(p,q)}^{p,q} = \emptyset$.

Απόδειξη ισχυρισμού. Θέτουμε $Y = X_\xi = X_{\xi+1}$ και υποθέτουμε προς άτοπο ότι $Y \neq \emptyset$. Προφανώς ισχύει $D_{p,q}(Y) = D_{p,q}(X_\xi) = X_{\xi+1} = Y$.

Συμβολίζουμε με S το σύνολο όλων των πεπερασμένων ακολουθιών $u = (u_1, \ldots, u_n)$ με $u_i \in \{0,1\}$ για κάθε $i < n$. Το προηγούμενο n είναι μοναδικό για το u, το καλούμε *μήκος* του u και το συμβολίζουμε με $|u|$. Επιτρέπουμε πιο πάνω το μήκος να είναι 0, δηλαδή να έχουμε $n = 0$, οπότε με $u = (u_1, \ldots, u_n)$ εννοούμε την κενή ακολουθία, την οποία συμβολίζουμε με $\emptyset$. Αν $u, v \in S$ συμβολίζουμε με $u * v$ την *παράθεση* της ακολουθίας u με τη v, δηλαδή $u * v = (u_1, \ldots, u_n, v_1, \ldots, v_m)$, όπου $u = (u_1, \ldots, u_n)$ και $v = (v_1, \ldots, v_m)$. Θα μας απασχολήσουν οι παραθέσεις $u * (i) = (u_1, \ldots, u_n, i)$ όπου $i = 0, 1$.

Θα κατασκευάσουμε μια οικογένεια $(B_u)_{u \in S}$ και μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $(k_n)_{n=0,1,\ldots}$, έτσι ώστε για κάθε $u, v \in S$ να ισχύουν τα ακόλουθα:

(α) Το B_u είναι ίσο με κάποιο στοιχείο V_t της βάσης που σταθεροποιήσαμε πιο πάνω και $B_u \cap Y \neq \emptyset$.

(β) d-διάμετρος$(B_u) \leq 2^{-|u|}$.

(γ) $\overline{B_v} \subseteq B_u$ όταν η v είναι γνήσια επέκταση της u.

(δ) $B_{u*(0)} \subseteq \Big\{x \in \mathcal{X} \ \mid \ f_{k_{|u|+1}}(x) < p\Big\}$ και $B_{u*(1)} \subseteq \Big\{x \in \mathcal{X} \ \mid \ f_{k_{|u|+1}}(x) > q\Big\}$.

Η κατασκευή γίνεται με επαγωγή στο μήκος $|u|$ της u. Για $|u| = 0$ έχουμε $u = \emptyset$. Παίρνουμε ένα στοιχείο της βάσης V_{t_0}, του οποίου η d-διάμετρος είναι $\leq 2^{-0} = 1$ και που ικανοποιεί $V_{t_0} \cap Y \neq \emptyset$, το τελευταίο είναι εφικτό γιατί $Y \neq \emptyset$. Θέτουμε $B_\emptyset = V_{t_0}$ και $k_0 = 1$ (η τιμή του k_0 δεν αφορά τη (δ)). Τότε ισχύουν τα (α),(β), (γ) και (δ) για πεπερασμένες ακολουθίες μέχρι μήκους 0 (έχουμε μόνο μία τέτοια ακολουθία). Τα (γ) και (δ) ισχύουν τετριμμένα.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι για κάποιο n έχουν οριστεί τα B_u για κάθε u με $|u| \leq n$ καθώς και φυσικούς αριθμούς $k_0 < \cdots < k_n$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα πιο πάνω (α), (β), (γ) και (δ) για πεπερασμένες ακολουθίες μήκους μέχρι n. Θα ορίσουμε τα B_v για $|v| = n+1$ καθώς και τον φυσικό αριθμό k_{n+1} έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι (α)–(δ) για πεπερασμένες ακολουθίες μέχρι μήκους $n+1$.

Σταθεροποιούμε προς το παρόν ένα $u \in S$ με $|u| = n$. Τότε από το (α) έχουμε $B_u = V_{t_u}$ για κάποιο $t_u \in \mathbb{N}$. Παίρνουμε επίσης ένα $x_u \in B_u \cap Y$. Εφόσον $Y = D_{p,q}(Y)$ και $x_u \in Y \cap V_{t_u}$ έχουμε από την (8) ότι $\big(L^{p,t_u}(Y) \cap R^{q,t_u}(Y)\big)^c \notin \mathcal{F}$. Επειδή το $\mathcal{F}$ είναι υπερφίλτρο προκύπτει ότι $L^{p,t_u}(Y) \cap R^{q,t_u}(Y) \in \mathcal{F}$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την τομή $J_n = \cap_{|u|=n} L^{p,t_u}(Y) \cap R^{q,t_u}(Y)$, όπου το t_u είναι όπως πιο πάνω. Η τελευταία τομή είναι στοιχείο του $\mathcal{F}$ ως πεπερασμένη τομή στοιχείων του $\mathcal{F}$ και, επειδή το $\mathcal{F}$ είναι μη τετριμμένο, το σύνολο J_n είναι άπειρο υποσύνολο του $\mathbb{N}$. Συνεπώς υπάρχει ένα $k_{n+1} \in J_n$ με $k_{n+1} > k_n$. Απομένει να ορίσουμε τα $B_{u*(i)}$ όπου $|u| = n$ και $i = 0, 1$.

Θεωρούμε λοιπόν ένα $u \in S$ με $|u| = n$. Επειδή $k_{n+1} \in J_n \subseteq L^{p,t_u}(Y) \cap R^{q,t_u}(Y)$ έχουμε από τις (5) και (6) ότι υπάρχουν $x \in V_{t_u} \cap Y$ και $y \in V_{t_u} \cap Y$ με

$$f_{k_{n+1}}(x) < p < q < f_{k_{n+1}}(y).$$

Από τη συνέχεια της $f_{k_{n+1}}$ υπάρχουν V_t και V_s διαμέτρου $\leq 2^{-(n+1)}$ με $V_t \subseteq \overline{V_t} \subseteq V_{t_u}$ και $V_s \subseteq \overline{V_s} \subseteq V_{t_u}$ έτσι ώστε $x \in V_t \cap Y$, $y \in V_s \cap Y$ και

$$V_t \subseteq f^{-1}_{k_{n+1}}[(-\infty, p)] \quad \text{και} \quad V_s \subseteq f^{-1}_{k_{n+1}}[(q, +\infty)].$$

Θέτουμε $B_{u*(0)} = V_t$ και $B_{u*(1)} = V_s$. Τότε τα $B_{u*(i)}$, $i = 0, 1$ ικανοποιούν τα (α), (β) και επιπλέον η κλειστότητά τους περιέχεται στο $B_u = V_{t_u}$ – αυτό ρυθμίζει τη (γ). Επιπλέον η (δ) ικανοποιείται από τα πιο πάνω (υπενθυμίζουμε ότι $k_{n+1} = k_{|u|+1}$). Αυτό ολοκληρώνει την κατασκευή.

Στη συνέχεια ορίζουμε τη συνάρτηση

$$\tau : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to \mathcal{X} : \{\tau(\alpha)\} = \text{ το μοναδικό στοιχείο της τομής } \textstyle\bigcap_{n \in \mathbb{N}} B_{(\alpha(1),\ldots,\alpha(n))}.$$

(Η τ είναι καλά ορισμένη επειδή ο $(\mathcal{X}, d)$ είναι πλήρης και από τα (α), (β), (γ) η $\big(\ \overline{B_{(\alpha(1),\ldots,\alpha(n))}}\ \big)_{n \in \mathbb{N}}$ είναι μια φθίνουσα ακολουθία μη κενών κλειστών συνόλων με διάμετρο που συγκλίνει στο 0.)

Δείχνουμε ότι η τ είναι συνεχής συνάρτηση. Για να το δούμε αυτό θεωρούμε μια ακολουθία $(\alpha_i)_{i \in \mathbb{N}}$ και α στον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με $\alpha_i \to \alpha$. Δοσμένου $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ με $2^{-n} < \varepsilon$. Από τον χαρακτηρισμό της σύγκλισης στον χώρο του Cantor (βλ. Ορισμό 5) υπάρχει i_0 αρκετά μεγάλο έτσι ώστε για κάθε $i \geq i_0$ να ισχύει $(\alpha_i(1), \ldots, \alpha_i(n)) = (\alpha(1), \ldots, \alpha(n))$. Παίρνουμε $i \geq i_0$, επειδή $\tau(\alpha_i) \in B_{(\alpha_i(1),\ldots,\alpha_i(n))} = B_{(\alpha(1),\ldots,\alpha(n))}$ και

$\tau(\alpha) \in B_{(\alpha(1),\dots,\alpha(n))}$ έχουμε

$$d(\tau(\alpha_i), \tau(\alpha)) \leq d\text{-διάμετρος}(B_{(\alpha(1),\dots,\alpha(n))}) \leq 2^{-n} < \varepsilon.$$

Αυτό δείχνει ότι $\tau(\alpha_i) \to \tau(\alpha)$ στον $(\mathcal{X}, d)$. Επομένως η τ είναι συνεχής συνάρτηση.

Όπως στα (2) και (3) της Παρατήρησης 8, το άπειρο σύνολο $A := \{f_{k_n} \mid n \in \mathbb{N}\}$ είναι άπειρο, έχει συμπαγή κλειστότητα και συνεπώς η υπακολουθία $(f_{k_n})_{n\in\mathbb{N}}$ έχει ένα σημείο συσσώρευσης f. Από το Λήμμα 16 υπάρχει μη τετριμμένο υπερφίλτρο $\mathcal{F}'$ στο $\mathbb{N}$ έτσι ώστε $f_{k_n} \xrightarrow{\mathcal{F}'} f$. Παίρνουμε ένα $r \in (p,q)$ και ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$f_{k_n}(\tau(\alpha)) > r \iff f_{k_n}(\tau(\alpha)) \geq r \iff \alpha(n) = 1. \tag{13}$$

Για να το δούμε αυτό δείχνουμε ότι για κάθε α, n ισχύει

$$\alpha(n) = 1 \implies f_{k_n}(\tau(\alpha)) > r \implies f_{k_n}(\tau(\alpha)) \geq r \implies \alpha(n) = 1.$$

Σχετικά με την πρώτη συνεπαγωγή, αν $\alpha(n) = 1$ τότε από τη (δ) εφαρμοσμένη στη $u * (1) := (\alpha(1),\dots,\alpha(n-1)) * (1) = (\alpha(1),\dots,\alpha(n))$ έχουμε για κάθε $x \in B_{u*(1)} = B_{(\alpha(1),\dots,\alpha(n))}$ ότι $f_{k_{|u|+1}}(x) > q > r$. Εφόσον $\tau(\alpha) = B_{(\alpha(1),\dots,\alpha(n))}$ και $n = |u|+1$ προκύπτει ότι $f_{k_n}(\tau(\alpha)) > r$. Η δεύτερη από τις πιο πάνω συνεπαγωγές είναι τετριμμένη. Σχετικά με την τρίτη συνεπαγωγή, δείχνουμε ισοδύναμα ότι αν $\alpha(n) = 0$ τότε $f_{k_n}(\tau(\alpha)) < r$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\alpha(n) = 0$ και, όπως πριν, παίρνουμε $u = (\alpha(1),\dots,\alpha(n-1))$, έτσι που $u * (0) = (\alpha(1),\dots,\alpha(n-1)) * (0) = (\alpha(1),\dots,\alpha(n))$. Εφαρμόζουμε πάλι τη (δ) και παίρνουμε $f_{k_n}(\tau(\alpha)) < p < r$. Αυτό αποδεικνύει την τρίτη συνεπαγωγή και συνεπώς έχουμε αποδείξει τη (13).

Στη συνέχεια ισχυριζόμαστε ότι για κάθε $\alpha \in 2^{\mathbb{N}}$ έχουμε

$$f(\tau(\alpha)) > r \iff \{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 1\} \in \mathcal{F}'. \tag{14}$$

Για την ευθεία κατεύθυνση, αφού $f_{k_n} \xrightarrow{\mathcal{F}'} f$, παίρνοντας μια κατάλλλη βασική περιοχή της f προκύπτει ότι το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \mid f_{k_n}(\tau(\alpha)) > r\}$, το οποίο από τη (13) είναι ίσο με το $\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 1\}$, ανήκει στο φίλτρο $\mathcal{F}'$. Αντίστροφα αν $f(\tau(\alpha)) \leq r$ τότε για οποιοδήποτε r' με $r < r' < q$ το σύνολο $\{n \in \mathbb{N} \mid f_{k_n}(\tau(\alpha)) < r'\}$ ανήκει στο $\mathcal{F}'$. Εφαρμόζουμε τη (13) με το $r' := (r+q)/2$ στη θέση του r και έχουμε ότι $f_{k_n}(\tau(\alpha)) \geq r' \iff \alpha(n) = 1$ για κάθε n. Επομένως τα σύνολα $\{n \in \mathbb{N} \mid f_{k_n}(\tau(\alpha)) < r'\}$ και $\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 0\}$ είναι ίσα. Προκύπτει ότι $\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 0\} \in \mathcal{F}'$ και άρα ισχύει $\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 1\} \notin \mathcal{F}'$. Συνεπώς αν $\{n \in \mathbb{N} \mid \alpha(n) = 1\} \in \mathcal{F}'$ τότε $f(\tau(\alpha)) > r$. Έχουμε αποδείξει λοιπόν τη (14).

Παίρνοντας για α να είναι η χαρακτηριστική συνάρτηση $\chi_A \in 2^{\mathbb{N}}$, όπου $A \subseteq \mathbb{N}$, προκύπτει από τη (14) ότι $f(\tau(\chi_A)) > r \iff \{n \in \mathbb{N} \mid \chi_A(n) = 1\} = A \in \mathcal{F}'$, δηλαδή

$$\mathcal{F}' = (f \circ \tau \circ \chi)^{-1}[(r, \infty)].$$

όπου $\chi : \mathcal{P}(\mathbb{N}) \to 2^{\mathbb{N}} : A \mapsto \chi_A$, η οποία είναι συνεχής.

Ειδικότερα το $\mathcal{F}'$ είναι η αντίστροφη εικόνα του ανοικτού συνόλου (r, ∞) μέσω της Borel-μετρήσιμης συνάρτησης $f \circ \tau \circ \chi$. Επομένως το $\mathcal{F}'$ είναι Borel σύνολο. Αυτό όμως είναι άτοπο γιατί το $\mathcal{F}'$ είναι μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$ (Λήμμα 12).

$\square$ *Απόδειξη Ισχυρισμού 3.*

Τώρα είμαστε έτοιμοι να δείξουμε την (1) για την οικογένεια $\mathcal{A}$. Θεωρούμε ρητούς αριθμούς p, q με $p < q$ και $x \in \mathcal{X}$. Θεωρούμε επίσης τα σύνολα $X_\xi \equiv X_\xi^{p,q}$ και $Y_\xi \equiv Y_\xi^{p,q}$ όπως στη (10) καθώς και τον ελάχιστο διατακτικό αριθμό $\xi_1 \equiv \xi_1(p,q)$ για τον οποίο

$X_{\xi_1} = X_{\xi_1+1}$ (βλ. την τελευταία παράγραφο πριν από τον Ισχυρισμό 3). Τότε από τον Ισχυρισμό 3 έχουμε $X_{\xi_1} = \emptyset$, ειδικότερα $x \notin X_{\xi_1}$.

Αν πάρουμε $\xi \equiv \xi(p,q,x)$ να είναι ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός με $x \notin X_\xi$ προκύπτει ότι $x \in \bigcap_{\eta<\xi} X_\eta \setminus X_\xi = Y_\xi \setminus D_{p,q}(Y_\xi)$ όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την (11). (Έχουμε αναγκαστικά ότι $\xi > 0$ γιατί $X_0 = \mathcal{X}$.)

Επειδή $x \in Y_\xi \setminus D_{p,q}(Y_\xi)$, από την (8) υπάρχει t έτσι ώστε $x \in V_t$ και

$$\big(L^{p,t}(Y_\xi) \cap R^{q,t}(Y_\xi)\big)^c = L^{p,t}(Y_\xi)^c \cup R^{q,t}(Y_\xi)^c \in \mathcal{F}. \tag{15}$$

Από τον ορισμό του $L^{p,t}(Y_\xi)$ (βλ. την (5)) έχουμε για κάθε $k \in L^{p,t}(Y_\xi)^c$ ότι

$$\forall x' \in V_t \cap Y_\xi \ \ (\ f_k(x') \geq p\ ),$$

ειδικότερα για $x' = x \in V_t \cap Y_\xi$ παίρνουμε $f_k(x) \geq p$. Όμοια από την (6) έχουμε για κάθε $k \in R^{q,t}(Y_\xi)^c$ ότι

$$\forall x' \in V_t \cap Y_\xi \ \ (\ f_k(x') \leq q\ ),$$

ειδικότερα για $x' = x \in V_t \cap Y_\xi$ παίρνουμε $f_k(x) \leq q$. Δείξαμε λοιπόν ότι

$$\forall k \in L^{p,t}(Y_\xi)^c \ \ (\ f_k(x) \geq p\ ) \quad \text{και} \quad \forall k \in R^{q,t}(Y_\xi)^c \ \ (\ f_k(x) \leq q\ ).$$

Επομένως, για να αποδείξουμε την (1), αρκεί να δείξουμε ότι ένα από τα σύνολα $L^{p,t}(Y_\xi)^c$ και $R^{q,t}(Y_\xi)^c$ ανήκει στην $\mathcal{A}$.

Από τον Ισχυρισμό 2 υπάρχουν $\eta, \zeta \in J(p,q,t)$ έτσι ώστε $L^{p,t}(Y_\xi)^c = L^{p,t}(Y_\eta)^c$ και $R^{p,t}(Y_\xi)^c = R^{p,t}(Y_\zeta)^c$. Αν $L^{p,t}(Y_\eta)^c \in \mathcal{F}$ τότε, αφού $\eta \in J(p,q,t)$, έχουμε από τον ορισμό της $\mathcal{A}$ (βλ. τη (12)) ότι $L^{p,t}(Y_\xi)^c = L^{p,t}(Y_\eta)^c \in \mathcal{A}$. Αν $L^{p,t}(Y_\eta)^c \notin \mathcal{F}$ τότε από την ιδιότητα του υπερφίλτρου ισχύει $L^{p,t}(Y_\eta) = L^{p,t}(Y_\xi) \in \mathcal{F}$. Επομένως από τη (15) έχουμε ότι

$$\big(L^{p,t}(Y_\xi)^c \cup R^{q,t}(Y_\xi)^c\big) \cap L^{p,t}(Y_\xi) = R^{q,t}(Y_\xi)^c \cap L^{p,t}(Y_\xi) = R^{q,t}(Y_\zeta)^c \cap L^{p,t}(Y_\xi) \in \mathcal{F}.$$

Άρα $R^{q,t}(Y_\zeta)^c \in \mathcal{F}$ και επειδή $\zeta \in J(p,q,t)$ έχουμε πάλι ότι $R^{q,t}(Y_\xi)^c = R^{q,t}(Y_\zeta)^c \in \mathcal{A}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Παρατήρηση 25 (Αντικατάσταση του υπερφίλτρου). Στην προηγούμενη απόδειξη χρησιμοποιούμε την ιδιότητα του υπερφίλτρου $\mathcal{F}$ να αποφασίζει το $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ μόνο σε αριθμήσιμα-πολλά υποσύνολα του $\mathbb{N}$. Συγκεκριμένα χρησιμοποιήσαμε ότι το $\mathcal{F}$ αποφασίζει την αριθμήσιμη οικογένεια

$$\begin{aligned} \mathcal{A}_1 := &\left\{ L^{p,t}(X^{p,q}_{\xi_1(p,q)}) \cap R^{q,t}(X^{p,q}_{\xi_1(p,q)}) \ \mid\ p,q \in \mathbb{Q},\ p<q,\ t \in \mathbb{N} \right\} \\ &\qquad \bigcup \left\{ L^{p,t}(Y^{p,q}_\xi) \ \mid\ p,q \in \mathbb{Q},\ p<q,\ t \in \mathbb{N},\ \xi \in J(p,q,t) \right\}, \end{aligned} \tag{16}$$

όπου τα $X^{p,q}_\xi$, $Y^{p,q}_\xi$, $L^{p,t}(Y^{p,q}_\xi)$, $R^{q,t}(Y^{p,q}_\xi)$, $\xi_1(p,q)$ και $J(p,q,t)$ είναι όπως στην προηγούμενη απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι για το $\xi_1(p,q)$ ισχύει $X^{p,q}_{\xi_1(p,q)} = X^{p,q}_{\xi_1(p,q)+1}$, βλ. πριν από τον Ισχυρισμό 3.[7]

Δεδομένου του Λήμματος 15 είναι φυσικό να αναρωτηθεί κανείς *αν μπορούμε να αντικαταστήσουμε το υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ με ένα φίλτρο $\mathcal{F}_0$ το οποίο αποφασίζει την αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{A}_1$*. Η αντικατάσταση του υπερφίλτρου με ένα συνηθισμένο φίλτρο

[7] *Προσοχή.* Σύμφωνα με τον Ισχυρισμό 3 ισχύει $X^{p,q}_{\xi_1}(p,q) = \emptyset$. Αλλά δεν μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση (i): το $\mathcal{F}$ αποφασίζει το $L^{p,t}(X^{p,q}_{\xi_1(p,q)}) \cap R^{q,t}(X^{p,q}_{\xi_1(p,q)})$, με την υπόθεση (ii): το $\mathcal{F}$ αποφασίζει το $L^{p,t}(\emptyset) \cap R^{q,t}(\emptyset)$, καθώς για να αποδειχθεί ότι $X^{p,q}_{\xi_1}(p,q) = \emptyset$ χρειάζεται πρώτα να ξέρουμε ότι το $\mathcal{F}$ έχει την (i).

είναι ένα από τα βασικά στοιχεία στην κατασκευή της συγκλίνουσας υπακολουθίας "με Borel-τρόπο" που αναφέραμε πριν από το Πόρισμα 9.[8]

Μια πρώτη προσπάθεια. Ας υποθέσουμε ότι θέλουμε να ορίσουμε ένα φίλτρο $\mathcal{F}_0$, το οποίο αποφασίζει την αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{A}_1$ και που προορίζεται να αντικαταστήσει το υπερφίλτρο $\mathcal{F}$. Για να γίνει οριστεί το φίλτρο $\mathcal{F}_0$ με εφαρμογή του Λήμματος 15 χρειάζεται να έχουμε την οικογένεια $\mathcal{A}_1$, ο ορισμός της οποίας στηρίζεται στους τελεστές $D_{p,q}$, οι οποίοι ορίζονται με βάση το υπερφίλτρο $\mathcal{F}$ που πρόκειται να αντικατασταθεί από το $\mathcal{F}_0$. Με άλλα λόγια *για να οριστεί το $\mathcal{F}_0$ χρειάζεται η $\mathcal{A}_1$ η οποία χρειάζεται το $\mathcal{F}_0$*. Μοιάζει να δημιουργείται ένας φαύλος κύκλος, ο οποίος όμως μπορεί να ξεπεραστεί με μεθόδους από τη θεωρία αναδρομής.

Πρόσθετα εργαλεία. Στη θεωρία αναδρομής ορίζονται κάποιες οικογένειες υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, η καθεμία από τις οποίες έχει ενδιαφέρουσα δομή και που αποτελεί αριθμήσιμο υποσύνολο του $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Μία από αυτές είναι η οικογένεια των Σ^1_1 υποσυνόλων του $\mathbb{N}$, την οποία συμβολίζουμε με $\Sigma^1_1(\mathbb{N})$. Μεταξύ πολλών άλλων η $\Sigma^1_1(\mathbb{N})$ είναι κλειστή ως προς πεπερασμένες ενώσεις και πεπερασμένες τομές.

Στην απόδειξη του ο Debs χρησιμοποιεί ένα συγκεκριμένο φίλτρο $\mathcal{F}_S$, το οποίο είναι εμπνευσμένο από μια κατασκευή του Solovay [Sol78] και που αποφασίζει την αριθμήσιμη οικογένεια $\Sigma^1_1(\mathbb{N})$. Η κατασκευή του $\mathcal{F}_S$ έχει για αφετηρία τις ιδέες του Λήμματος 15, αποτελεί όμως μια αρκετά πιο σύνθετη κατασκευή. Σε αντίθεση με τα υπερφίλτρα, το $\mathcal{F}_S$ είναι "καλό" σύνολο από την άποψη της ορισιμότητας, για παράδειγμα έχει την ιδιότητα BP και δεν απέχει πολύ από τα Borel σύνολα.[9]

Αντικαθιστώντας το $\mathcal{F}$ με το $\mathcal{F}_S$ ορίζονται οι τελεστές $D_{p,q}$ όπως στην (8).[10] Όμοια ορίζονται και τα αντίστοιχα σύνολα $X^{p,q}_\xi$ και $Y^{p,q}_\xi$ όπως στη (10). Πιο κάτω όταν θα αναφερόμαστε σε αυτά τα σύνολα θα εννοούμε αυτά που έχουν οριστεί με βάση το $\mathcal{F}_S$.

Μπορεί να αποδειχθεί ότι για έναν συγκεκριμένο *αριθμήσιμο* διατακτικό αριθμό που συμβολίζεται με ω_1^{CK} και που είναι γνωστός στη θεωρία αναδρομής ως *Church-Kleene διατακτικός*, τα σύνολα $X^{p,q}_\xi$, $Y^{p,q}_\xi$, $L^{p,t}(Y^{p,q}_\xi)$ και $R^{q,t}(Y^{p,q}_\xi)$ ανήκουν στη $\Sigma^1_1(\mathbb{N})$ για κάθε $\xi < \omega_1^{CK}$, $p,q \in \mathbb{Q}$ με $p<q$ και $t \in \mathbb{N}$.

Από ένα αποτέλεσμα του Μοσχοβάκη (βλ. [Mos74] και [Mos09, 7C.8]) έχουμε ότι το $X^{p,q}_{\xi_1(p,q)}$ ανήκει επίσης στη $\Sigma^1_1(\mathbb{N})$, όπου ο $\xi_1(p,q)$ είναι –όπως πιο πάνω– ο ελάχιστος διατακτικός με $X^{p,q}_{\xi_1(p,q)} = X^{p,q}_{\xi_1(p,q)+1}$. Συνεπώς το $\mathcal{F}_S$ αποφασίζει την αριθμήσιμη οικογένεια $\mathcal{A}_2$, η οποία ορίζεται όπως στη (16) αντικαθιστώντας το "$\xi \in J(p,q,t)$" με το "$\xi < \omega_1^{CK}$".

Ακόμα προκύπτει από την απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος του Μοσχοβάκη και τον Ισχυρισμό 3 ότι ο πιο πάνω $\xi_1(p,q)$ είναι μικρότερος του ω_1^{CK}. Ειδικότερα για κάθε $p,q \in \mathbb{Q}$ με $p<q$ και κάθε $x \in \mathcal{X}$ ο ελάχιστος διατακτικός αριθμός $\xi(p,q,x)$ για τον οποίο ισχύει $x \notin X^{p,q}_{\xi(p,q,x)}$ είναι μικρότερος του ω_1^{CK} και συνεπώς το $L^{p,t}(Y^{p,q}_{\xi(p,q,x)})$ ανήκει στην $\mathcal{A}_2$. Με βάση αυτά τα δεδομένα μπορεί να διαπιστώσει

[8] Στην απόδειξη του Ισχυρισμού 3 χρησιμοποιούμε ακόμα ένα υπερφίλτρο –το $\mathcal{F}'$– αλλά αυτό δεν επηρεάζει την κατασκευή της υπακολουθίας.

[9] Για την ακρίβεια το $\mathcal{F}_S$ είναι συναναλυτικό σύνολο, το οποίο σημαίνει ότι το συμπλήρωμα του $\mathcal{F}_S$ στον $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ είναι συνεχής εικόνα του χώρου του Baire.

[10] Παρατηρήστε ότι η συνθήκη $\left(L^{p,t}(A) \cap R^{q,t}(A)\right)^c \notin \mathcal{F}_S$ στον ορισμού του $D_{p,q}$ δεν είναι ισοδύναμη με τη $L^{p,t}(A) \cap R^{q,t}(A) \in \mathcal{F}_S$, γιατί το $\mathcal{F}_S$ δεν είναι υπερφίλτρο.

κανείς ότι όλα τα βήματα της προηγούμενης απόδειξης μπορούν να εκτελεστούν παίρνοντας το $\mathcal{F}_S$ στη θέση του $\mathcal{F}$.

Και ένα πρόβλημα. Μπορεί η συγκλίνουσα υπακολουθία του Θεωρήματος 7 να κατασκευαστεί "με Borel-τρόπο" (βλ. Πόρισμα 9) χωρίς να χρησιμοποιηθεί η θεωρία αναδρομής;

Αναφορες

[ADK08] S. A. Argyros, P. Dodos, and V. Kanellopoulos, *A classification of separable Rosenthal compacta and its applications*, Dissertationes Math. **449** (2008), 52. MR 2358122

[BFT78] J. Bourgain, D.H. Fremlin, and M. Talagrand, *Pointwise compact sets of Baire-measurable functions*, Amer. J. Math. **100** (1978), no. 4, 845–886.

[Deb87] G. Debs, *Effective properties in compact sets of Borel functions*, Mathematica **34** (1987), no. 1, 64–68.

[Deb09] Gabriel Debs, *Borel extractions of converging sequences in compact sets of Borel functions*, J. Math. Anal. Appl. **350** (2009), no. 2, 731–744. MR 2474809 (2009k:03077)

[Kec95] Alexander S. Kechris, *Classical descriptive set theory*, Graduate Texts in Mathematics, vol. 156, Springer-Verlag, 1995.

[Kre12] Alexander P. Kreuzer, *Non-principal ultrafilters, program extraction and higher-order reverse mathematics*, J. Math. Log. **12** (2012), no. 1, 1250002, 16. MR 2950192

[Mos74] Yiannis N. Moschovakis, *Structural characterizations of classes of relations*, Generalized recursion theory (Proc. Sympos., Univ. Oslo, Oslo, 1972), Stud. Logic Found. Math., vol. Vol. 79, North-Holland, Amsterdam-London, 1974, pp. 53–79. MR 411953

[Mos09] Y.N. Moschovakis, *Descriptive set theory, second edition*, Mathematical Surveys and Monographs., vol. 155, American Mathematical Society, 2009.

[Oxt80] John C. Oxtoby, *Measure and category*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 2, Springer-Verlag, New York-Berlin, 1980, A survey of the analogies between topological and measure spaces. MR 584443

[Ros77] Haskell P. Rosenthal, *Point-wise compact subsets of the first Baire class*, Amer. J. Math. **99** (1977), no. 2, 362–378. MR 438113

[Sol78] Robert M. Solovay, *Hyperarithmetically encodable sets*, Trans. Amer. Math. Soc. **239** (1978), 99–122. MR 491103