Η βέλτιστη σταθερά στην ανισότητα του Grothendieck

Διπλωματική Εργασία

Αλέξανδρος Γεωργακόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα – 2016

Ευχαριστίες

Με την εργασία αυτή ολοκληρώνονται οι σπουδές μου στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα του τμήματος μαθηματικών στα θεωρητικά μαθηματικά.

Θα ήθελα να ευχαριστήσω τον καθηγητή του τμήματος μαθηματικών κ. Αποστόλη Γιαννόπουλο για το ωραίο θέμα που μου πρότεινε να ασχοληθώ και για τη βοήθεια του σε όλα τα στάδια της εργασίας. Οι μαθηματικές μας συναντήσεις ήταν υπέροχες και θα τις θυμάμαι πάντα. Πιο πολύ όμως τον ευχαριστώ για όλα τα μαθηματικά που με έχει μάθει, άμεσα ή έμμεσα.

Στη συνέχεια θα ήθελα να ευχαριστήσω τους γονείς μου Ζαχαρία και Αργυρούλα, τον αδερφό μου Άκη και την ξαδέρφη μου Μαρία για την αγάπη και την υποστήριξη που τόσο αδιάκοπα μου προσφέρουν, πάντοτε.

Επίσης ευχαριστώ τους φίλους μου για όλες τις υπέροχες στιγμές.

Τέλος, ευχαριστώ θερμά το Κοινωφελές Ίδρυμα Ωνάση για την χορήγηση υποτροφίας για την παρακολούθηση του δεύτερου έτους του μεταπτυχιακού προγράμματος.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Η ανισότητα του Grothendieck

Το 1953, στο πολύ γνωστό «Resumé» [13], ο Grothendieck απέδειξε ένα θεώρημα το οποίο αποκάλεσε «το θεμελιώδες θεώρημα της μετρικής θεωρίας των τανυστικών γινομένων». Το θεώρημα αυτό είναι σήμερα γνωστό ως *η ανισότητα του Grothendieck*. Οι Lindenstrauss και Pelczynski έδωσαν μια ισοδύναμη διατύπωση της ανισότητας του Grothendieck και απέδειξαν πολύ σημαντικές εφαρμογές της για τους χώρους L_p.

Η διατύπωση των Lindenstrauss και Pelczynski στο [19] ήταν η ακόλουθη:

Υπάρχει απόλυτη σταθερά $K > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $m, n \in \mathbb{N}$, για κάθε $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ με πραγματικές συντεταγμένες, και για οποιαδήποτε διανύσματα $x_1, \dots, x_m$, $y_1, \dots, y_n \in S^{m+n-1}$, υπάρχουν $\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_m, \delta_1, \dots, \delta_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle \leqslant K \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i\delta_j. \tag{1.1.1}$$

Με $\langle \cdot, \cdot \rangle$ συμβολίζουμε το εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^{m+n}$ και με S^{m+n-1} την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^{m+n}$.

Το infimum πάνω από όλες τις θετικές σταθερές K που ικανοποιούν την (1.1.1) ονομάζεται, γενικά και σε αυτήν την εργασία, *σταθερά του Grothendieck*, και συμβολίζεται με K_G.

Η ανισότητα του Grothendieck παίζει σημαντικό ρόλο σε πολλές περιοχές: τη γεωμετρία των χώρων Banach, τις C^*-άλγεβρες, την αρμονική ανάλυση, τους χώρους τελεστών, την κβαντομηχανική και την επιστήμη των υπολογιστών. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία [20], [10], [12], [9], [1] και στο πρόσφατο άρθρο επισκόπησης [21] του Pisier.

Ο ίδιος ο Grothendieck έθεσε (στο Resumé) το πρόβλημα να προσδιοριστεί η ακριβής τιμή της σταθεράς K_G. Το πρόβλημα αυτό παραμένει ανοικτό, παρόλο που έχουν γίνει σημαντικές προσπάθειες από πολλούς μαθηματικούς. Η σταθερά K_G εμφανίζεται σε διάφορα μαθηματικά αποτελέσματα και η ακριβής τιμή της παρουσιάζει ιδιαίτερο ενδιαφέρον για κάποιες περιοχές στη Φυσική (βλέπε [11]) και την επιστήμη των υπολογιστών (βλέπε [2]), όμως δεν είναι καν γνωστό το πρώτο δεκαδικό της ψηφίο. Αυτή τη στιγμή, το μόνο που γνωρίζουμε είναι ότι

$$1.676 < K_G < 1.783.$$

1.2 Εκτιμήσεις για τη βέλτιστη σταθερά

Μετά από τα πρώτα άνω φράγματα που δόθηκαν από τον ίδιο τον Grothendieck, τους Lindenstrauss-Pelczynski και Rietz (καθώς και μεταγενέστερα, τα οποία όμως ήταν υποδεέστερα), ο Krivine [18] απέδειξε ότι

$$K_G \leqslant \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})} = 1.782\ldots \tag{1.2.1}$$

Το επιχείρημα του Krivine ήταν πολύ πιο σύνθετο από τα προηγούμενα και, κατά κάποιον τρόπο, σταμάτησε την πρόοδο στο πρόβλημα. Ο λόγος ήταν ότι ο Krivine έκανε την εικασία ότι το φράγμα του ήταν *η ακριβής τιμή της σταθεράς* K_G. Η εικασία αυτή εμφανίστηκε σε πολλές μεταγενέστερες εργασίες, και οδήγησε αρκετούς ανθρώπους στο να προσπαθήσουν να βρουν πίνακες (a_{ij}) οι οποίοι να υλοποιούν τη σταθερά του Krivine. Ειδικότερα, το 2000 ο Konig διατύπωσε στο [17] μια σαφή ενδιάμεση εικασία σχετικά με τις συναρτήσεις που μεγιστοποιούν έναν oscillatory ολοκληρωτικό τελεστή, η οποία θα είχε ως συνέπεια την εικασία του Krivine.

Ο Konig ξεκινάει από μια αναδιατύπωση της ανισότητας του Grothendieck μέσω ολοκληρωτικών τελεστών. Έστω (Ω,μ) ένας χώρος μέτρου και έστω $K\in L_1(\Omega\times\Omega,\mu\times\mu)$ ένας πυρήνας. Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή $T_K: L_\infty(\Omega,\mu)\to L_1(\Omega,\mu)$ που επάγεται από τον K:

$$T_Kf(x) := \int_\Omega f(y)K(x,y)\,d\mu(y).$$

Η ανισότητα του Grothendieck ισχυρίζεται ότι για κάθε ζεύγος $f,g\in L_\infty(\Omega,\mu;\ell_2)$ φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές σε κάποιον χώρο Hilbert,

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_\Omega K(x,y)\langle f(x),g(y)\rangle\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ \leqslant K_G\|T_K\|_{L_\infty(\Omega,\mu)\to L_1(\Omega,\mu)}\|g\|_{L_\infty(\Omega,\mu;\ell_2)}\|f\|_{L_\infty(\Omega,\mu;\ell_2)}.\end{aligned}\tag{1.2.2}$$

Ξεκινώντας από αδημοσίευτους υπολογισμούς του Haagerup, ο Konig ισχυρίζεται ότι η υπόθεση ότι $K_G = \pi/(2\log(1+\sqrt{2}))$ οδηγεί στην εικασία ότι ο πυρήνας $K : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$K(x,y) := \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2}{2}\right)\sin(\langle x,y\rangle) \tag{1.2.3}$$

θα έπρεπε να είναι ασυμπτωτικά (δηλαδή όταν $n \to \infty$) βέλτιστος για την ανισότητα του Grothendieck. Θεωρώντας την διγραμμική μορφή $B_K : L_\infty(\mathbb{R}^n) \times L_\infty(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$B_K(f,g) := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)K(x,y)\,dx\,dy \tag{1.2.4}$$

και αντιστοιχεί στον K, ο Konig διατυπώνει την ακόλουθη εικασία:

Έστω $f_0 : \mathbb{R}^n \to \{-1,1\}$ η συνάρτηση με $f_0(x_1,\ldots,x_n) = \mathrm{sign}(x_1)$. Τότε,

$$B_K(f,g) \leqslant B_K(f_0,f_0)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε ζεύγος μετρήσιμων συναρτήσεων $f,g : \mathbb{R}^n \to \{-1,1\}$.

Στην ίδια εργασία ο Konig παρουσιάζει ένα αποτέλεσμα (το οποίο αναφέρει ότι είναι σε συνεργασία με την Tomczak-Jaegermann) που λέει ότι αν η εικασία του αληθεύει τότε

$$K_G = \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})}.$$

Οι Braverman, K. Makarychev, Y. Makarychev και Naor [7] απέδειξαν το 2013 ότι η εικασία του Konig δεν ισχύει. Επιπλέον, απέδειξαν ότι η εικασία του Krivine δεν ισχύει:

Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιος ώστε

$$K_G < \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})} - \varepsilon_0.$$

Με άλλα λόγια, το φράγμα του Krivine για τη σταθερά του Grothendieck δεν είναι ακριβές, και το πρόβλημα του ακριβούς προσδιορισμού της τιμής της K_G αποκτά, εκ νέου, ενδιαφέρον.

Αφορμή γι' αυτή την εργασία ήταν αυτή η πρόσφατη εξέλιξη, και σκοπός μας είναι να παρουσιάσουμε τους πιο σημαντικούς σταθμούς της ιστορίας:

- Την ισοδύναμη διατύπωση και απόδειξη της ανισότητας του Grothendieck από τους Lindenstrauss και Pelczynski (Κεφάλαιο 3(α)). Η συγκεκριμένη απόδειξη δίνει το φράγμα
$$K_G \leqslant \sinh(\pi/2) = 2.301\dots$$
- Μια παρεμφερή απόδειξη του Rietz (Κεφαλαιο 3(β)) που οδηγεί στο καλύτερο φράγμα
$$K_G \leqslant 2.261\dots$$
- Το κάτω φράγμα $K_G \geqslant \frac{\pi}{2}$ (Κεφαλαιο 3(γ)) που οφείλεται στον ίδιο τον Grothendieck.
- Την εργασία του Krivine (Κεφάλαιο 4) που δίνει το φράγμα
$$K_G \leqslant \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})} = 1.782\dots$$
- Την πρόσφατη εργασία των Braverman, K. Makarychev, Y. Makarychev και Naor (Κεφάλαιο 5) που αποδεικνύει ότι η σταθερά του Krivine δεν είναι βέλτιστη.

Είναι γνωστό ότι η ανισότητα του Grothendieck συνδέεται στενά με την κλασική ανισότητα του Khintchine. Μπορεί μάλιστα κανείς να αποδείξει την πρώτη σαν συνέπεια της δεύτερης (η απόδειξη αυτή δίνεται π.χ. στο βιβλίο [10]). Περιγράφουμε αυτή τη σχέση, και την αναγωγή της ανισότητας του Grothendieck στην ανισότητα του Khintchine, στο Κεφάλαιο 2, πριν περάσουμε στο κύριο θέμα της εργασίας.

Κεφάλαιο 2

Ανισότητα Khintchine και ανισότητα Grothendieck

2.1 Ανισότητα του Khintchine

Οι συναρτήσεις Rademacher $r_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ ($k \in \mathbb{N}$) ορίζονται από την

$$r_k(t) = \mathrm{sign}\big(\sin(2^k \pi t)\big). \tag{2.1.1}$$

Οι r_k ικανοποιούν την εξής συνθήκη ορθογωνιότητας: αν $1 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_m$ και $p_1, \ldots, p_m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\int_0^1 r_{k_1}^{p_1}(t) r_{k_2}^{p_2}(t) \cdots r_{k_m}^{p_m}(t) dt = 0, \tag{2.1.2}$$

εκτός αν $p_j \in 2\mathbb{N}$ για κάθε $j = 1, \ldots, m$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι προφανώς ίσο με 1. Ειδικότερα, η $\{r_k\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον $L_2[0,1]$. Έπεται ότι, για κάθε ακολουθία $\{a_k\} \in \ell_2$,

$$\int_0^1 \Big| \sum_k a_k r_k(t) \Big|^2 dt = \sum_k a_k^2. \tag{2.1.3}$$

Παρατηρήστε ότι η $\{r_k\}$ δεν είναι ορθοκανονική βάση του $L_2[0,1]$: έχουμε $r_1 r_2 \perp r_k$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Η ανισότητα του Khintchine δείχνει ότι στον υπόχωρο του $L_2[0,1]$ που παράγουν οι r_k, όλες οι L_p-μετρικές ($p > 0$) είναι ισοδύναμες.

Θεώρημα 2.1.1 (Khintchine). *Υπάρχουν σταθερές $A_p, B_p > 0$ $(p > 0)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a = (a_1, \ldots, a_n) \in \ell_2^n$,*

$$A_p \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leqslant B_p \left(\sum_{k=1}^n a_k^2 \right)^{1/2} . \tag{2.1.4}$$

Παρατήρηση 2.1.2. (α) Λόγω της (2.1.3), η ανισότητα του Khintchine γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$A_p \Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_{L_2} \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_{L_p} \leqslant B_p \Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_{L_2} . \tag{2.1.5}$$

(β) Αν δούμε τις r_k σαν τυχαίες μεταβλητές στο $[0, 1]$ τότε εύκολα ελέγχουμε ότι είναι ανεξάρτητες. Η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $(r_1(t), \ldots, r_n(t))$ συμπίπτει με την κατανομή του $(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ στον E_2^n (με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας). Συνεπώς, για κάθε $p > 0$ έχουμε

$$\Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_{L_p} = \left(\frac{1}{2^n} \sum_{\varepsilon_k = \pm 1} \left| \sum_{k=1}^n \varepsilon_k a_k \right|^p \right)^{1/p} . \tag{2.1.6}$$

(γ) Έστω A_p^*, B_p^* οι βέλτιστες σταθερές για τις οποίες ισχύει το Θεώρημα 2.1.1. Από την ανισότητα του Holder είναι φανερό ότι $A_p^* = 1$ αν $p \geqslant 2$ και $B_p^* = 1$ αν $0 < p \leqslant 2$.

Απόδειξη της ανισότητας του Khintchine

(α) Η περίπτωση $\mathrm{p} = 4$: Αρκεί να δείξουμε τη δεξιά ανισότητα. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$\int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t) dt = 1 \tag{2.1.7}$$

μόνο αν $i = j = k = l$ ή αν υπάρχουν $t \neq s$ ώστε κάποιοι δύο από τους i, j, k, l να είναι ίσοι με t και οι άλλοι δύο ίσοι με s. Έτσι, γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left| \sum_{k=1}^n a_k r_k(t) \right|^4 dt &= \sum_{i,j,k,l=1}^n a_i a_j a_k a_l \int_0^1 r_i(t) r_j(t) r_k(t) r_l(t) dt \\ &= 3 \sum_{i,j=1}^n a_i^2 a_j^2 - 2 \sum_{i=1}^n a_i^4 \\ &\leqslant 3 \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^2 , \end{aligned}$$

δηλαδή η ανισότητα ισχύει με $B_4 = \sqrt[4]{3}$. □

Μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε με επαγωγή και να δείξουμε τη δεξιά ανισότητα για κάθε $p = 2^s$. Αντί γι' αυτό, δίνουμε απευθείας απόδειξη για κάθε $p = s \in \mathbb{N}$.

(β) Η περίπτωση $\mathbf{p = s \in \{3, 4, 5, \dots\}}$: Έστω $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k r_k(t)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{k=1}^n a_k^2 = 1$.

Παρατηρήστε ότι

$$|f(t)|^s \leqslant s! e^{|f(t)|} \leqslant s! \left(e^{f(t)} + e^{-f(t)}\right). \tag{2.1.8}$$

Από την ανεξαρτησία των r_k έχουμε

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt = \int_0^1 \prod_{k=1}^n \exp(a_k r_k(t)) dt = \prod_{k=1}^n \int_0^1 \exp(a_k r_k(t)) dt = \prod_{k=1}^n \cosh(a_k). \tag{2.1.9}$$

Για την τελευταία ισότητα, παρατηρήστε ότι $r_k(t) = -1$ με πιθανότητα $1/2$ και $r_k(t) = 1$ με πιθανότητα $1/2$, άρα,

$$\int_0^1 \exp(a_k r_k(t)) dt = \frac{e^{a_k} + e^{-a_k}}{2}. \tag{2.1.10}$$

Χρησιμοποιώντας την $\cosh(x) \leqslant \exp(x^2/2)$ (η οποία αποδεικνύεται με «όρο προς όρο» σύγκριση των αναπτυγμάτων Taylor των δύο συναρτήσεων) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_0^1 e^{f(t)} dt \leqslant \prod_{k=1}^b \exp(a_k^2/2) = \exp\left(\frac{1}{2}\sum_{k=1}^n a_k^2\right) = \sqrt{e}, \tag{2.1.11}$$

και, λόγω συμμετρίας,

$$\int_0^1 e^{-f(t)} dt \leqslant \sqrt{e}. \tag{2.1.12}$$

Από την (2.1.8) βλέπουμε ότι

$$\int_0^1 \left|\sum_{k=1}^n a_k r_k(t)\right|^s ds \leqslant (2\sqrt{e}) s! \leqslant (2\sqrt{e}) \left(\frac{s}{e}\right)^s \leqslant s^s, \tag{2.1.13}$$

και, παίρνοντας υπόψη την

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_k r_k\right\|_{L_2} = \left(\sum_{k=1}^n a_k^2\right)^{1/2} = 1, \tag{2.1.14}$$

καταλήγουμε στην

$$\left\|\sum_{k=1}^n a_k r_k\right\|_{L_s} \leqslant s \left\|\sum_{k=1}^n a_k r_k\right\|_{L_2}. \tag{2.1.15}$$

Δηλαδή, η ανισότητα ισχύει με $B_s \leqslant s$. □

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1.

(γ) $\mathbf{2 < p < \infty}$: Έστω $p \geqslant 2$. Θεωρούμε τον $s = [p] + 1$. Παρατηρήστε ότι $p < s \leqslant 2p$. Έτσι, έχουμε

$$\Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_{L_p} \leqslant \Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_{L_s} \leqslant s \Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_{L_2} \leqslant 2p \Big\| \sum_{k=1}^n a_k r_k \Big\|_{L_2}. \tag{2.1.16}$$

(δ) $\mathbf{0 < p < 2}$: Ο 2 είναι κυρτός συνδυασμός των p και 4. Μπορούμε δηλαδή να βρούμε $\theta \in (0,1)$ τέτοιον ώστε $2 = p\theta + 4(1-\theta)$: η τιμή του θ είναι $2/(4-p)$. Αν $f(t) = \sum_{k=1}^n a_k r_k(t)$ τότε, από την ανισότητα Holder,

$$\begin{aligned} \int_0^1 |f(t)|^2 dt &= \int_0^1 |f(t)|^{p\theta} |f(t)|^{4(1-\theta)} dt \\ &\leqslant \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\theta} \left(\int_0^1 |f(t)|^4 dt \right)^{1-\theta}. \end{aligned} \tag{2.1.17}$$

Έχουμε δείξει ότι $\|f\|_{L_4} \leqslant \sqrt[4]{3} \|f\|_{L_2}$. Άρα, η (2.1.17) μας δίνει

$$\int_0^1 |f(t)|^2 dt \leqslant 3^{1-\theta} \left(\int_0^1 |f(t)|^p dt \right)^{\theta} \left(\int_0^1 |f(t)|^2 dt \right)^{2(1-\theta)}. \tag{2.1.18}$$

Παρατηρήστε ότι $1 - 2(1-\theta) = p\theta/2$. Έπεται ότι

$$3^{\frac{\theta-1}{p\theta}} \|f\|_{L_2} \leqslant \|f\|_{L_p}. \tag{2.1.19}$$

Τέλος, $\frac{\theta-1}{p\theta} = \frac{1}{2} - \frac{1}{p}$. Δηλαδή, η ανισότητα ισχύει με $A_p = 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$. □

Παρατήρηση 2.1.3. Η απόδειξη που δώσαμε δίνει $B_p \simeq p$ όταν $p \to \infty$. Υπάρχουν καλύτερες αποδείξεις που δείχνουν ότι $B_p^* \simeq \sqrt{p}$ όταν $p \to \infty$. Οι ακριβείς τιμές των A_p^*, B_p^* έχουν υπολογιστεί από τους Szarek (A_1^*) και Haagerup (για κάθε p).

2.2 Ανισότητα του Grothendieck

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Khintchine δείχνουμε τώρα την ανισότητα του Grothendieck.

Θεώρημα 2.2.1 (Grothendieck). *Υπάρχει σταθερά $K_G > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ και $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε*

$$\max \left\{ \Big| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} s_i t_j \Big| : |s_i| \leqslant 1, |t_j| \leqslant 1 \right\} \leqslant 1, \tag{2.2.1}$$

τότε για κάθε χώρο Hilbert H *και για κάθε* $x_i, y_j \in B_H$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$, *ισχύει η ανισότητα*

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leqslant K_G. \tag{2.2.2}$$

Σημείωση. Η υπόθεση (2.2.1) είναι ισοδύναμη με την $\|A : \ell_\infty^n \to \ell_1^n\| \leqslant 1$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$S_n = \sup \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle u_i, v_j \rangle \right|, \tag{2.2.3}$$

όπου το $\sup$ είναι πάνω από όλους τους χώρους Hilbert και όλα τα $u_i, v_j \in B_H$. Αφού $\langle u_i, v_j \rangle \leqslant 1$, είναι φανερό ότι $S_n < +\infty$.

Έστω H χώρος Hilbert και $x_i, y_j \in B_H$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Επειδή το ζητούμενο αφορά $2n$ διανύσματα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο H έχει πεπερασμένη διάσταση $N \leqslant 2n$. Έστω $\{e_1, \ldots, e_N\}$ μια ορθοκανονική βάση για τον H. Ορίζουμε $F : H \to L_2[0,1]$ με $x \mapsto X := F(x)$ όπου

$$X(t) = \sum_{k=1}^{N} \langle x, e_k \rangle r_k(t). \tag{2.2.4}$$

Η F είναι ισομετρία και, για κάθε $x, y \in H$,

$$\langle x, y \rangle = \int_0^1 X(t) Y(t) dt. \tag{2.2.5}$$

Παρατήρηση. Αν ξέραμε ότι υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε $\|X\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $x \in B_H$, τότε θα δείχναμε το Θεώρημα ως εξής: αν $x_i, y_j \in B_H$, τότε

$$\begin{aligned} \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| &= \left| \int_0^1 \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i(t) Y_j(t) dt \right| \\ &\leqslant \int_0^1 \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} X_i(t) Y_j(t) \right| dt \leqslant M^2. \end{aligned} \tag{2.2.6}$$

Στο τελευταίο βήμα εφαρμόσαμε την υπόθεση (2.2.1) για τους $\frac{X_i(t)}{M}, \frac{Y_j(t)}{M} \in [-1,1]$ (για κάθε t χωριστά).

Η απόδειξη θα βασιστεί σε αυτή την παρατήρηση: Σταθεροποιούμε $M > 0$ (το οποίο θα επιλέξουμε κατάλληλα) και για κάθε $x \in H$ γράφουμε $X = X^g + X^b$, όπου

$$X^g(t) = X(t) \ \text{ αν } \ |X(t)| \leqslant M \quad \text{ και } \quad X^g(t) = M(\mathrm{sign} X(t)) \ \text{ αλλιώς.} \tag{2.2.7}$$

Ισχυρισμός. *Για κάθε* $x \in H$,

$$\|X^b\|_{L_2} \leqslant \frac{\sqrt{3}\|X\|_{L_2}^2}{4M}. \tag{2.2.8}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Αν $t \in [0,1]$ τότε είτε $X^b(t) = 0$ ή έχουμε $|X(t)| > M$ και $|X^b(t)| = |X(t)| - M$. Από τη στοιχειώδη ανισότητα $s \leqslant M + \frac{s^2}{4M}$ ($s > 0$) βλέπουμε ότι, στη δεύτερη περίπτωση,

$$|X^b(t)| = |X(t)| - M \leqslant \frac{|X(t)|^2}{4M}. \tag{2.2.9}$$

Δηλαδή, $|X^b| \leqslant X^2/(4M)$ παντού στο $[0,1]$. Άρα,

$$\|X^b\|_{L_2} = \left(\int_0^1 |X^b(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \frac{1}{4M}\left(\int_0^1 |X(t)|^4 dt\right)^{1/2} = \frac{\|X\|_{L_4}^2}{4M}. \tag{2.2.10}$$

Από την ανισότητα του Khintchine - για $p = 4$ - έχουμε

$$\|X\|_{L_4} \leqslant \sqrt[4]{3}\|X\|_{L_2}. \tag{2.2.11}$$

Έπεται ο ισχυρισμός. $\square$

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.1. Έστω $x_i, y_j \in B_H$, $1 \leqslant i, j \leqslant n$. Τότε,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| &= \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i(t)Y_j(t)dt\right| \\ &\leqslant \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i^g(t)Y_j^g(t)dt\right| \\ &+ \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i^b(t)Y_j^g(t)dt\right| + \left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i(t)Y_j^b(t)dt\right|.\end{aligned}$$

Για τον πρώτο όρο παρατηρούμε ότι $\|X_i^g\|_{L_\infty}, \|Y_j^g\|_{L_\infty} \leqslant M$. Όπως στην παρατήρηση, χρησιμοποιώντας την υπόθεση (2.2.1) παίρνουμε

$$\left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}X_i^g(t)Y_j^g(t)dt\right| \leqslant M^2\int_0^1 \left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{X_i^g(t)}{M}\frac{Y_j^g(t)}{M}\right|dt \leqslant M^2. \tag{2.2.12}$$

Για τους άλλους δύο όρους παρατηρούμε ότι:

- Αφού $|X_i^g| \leqslant |X_i|$, $|Y_j^g| \leqslant |Y_j|$ και $\|X_i\|_{L_2}, \|Y_j\|_{L_2} \leqslant 1$, έχουμε $\|X_i^g\|_{L_2} \leqslant 1$ και $\|Y_j^g\|_{L_2} \leqslant 1$.
- Από τον ισχυρισμό, $\|X_i^b\|_{L_2}, \|Y_j^b\|_{L_2} \leqslant \sqrt{3}/(4M)$.

Συνεπώς,

$$\left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i^b(t) Y_j^g(t)dt\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4M}\left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij}\frac{X_i^b(t)}{\|X_i^b\|_{L_2}} Y_j^g(t)dt\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4M} S_n \tag{2.2.13}$$

και

$$\left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i(t) Y_j^b(t)dt\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4M}\left|\int_0^1 \sum_{i,j=1}^n a_{ij} X_i(t)\frac{Y_j^b(t)}{\|Y_j^b\|_{L_2}} dt\right| \leqslant \frac{\sqrt{3}}{4M} S_n. \tag{2.2.14}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\left|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\right| \leqslant M^2 + \frac{\sqrt{3}}{2M} S_n. \tag{2.2.15}$$

Άρα,

$$S_n \leqslant M^2 + \frac{\sqrt{3}}{2M} S_n, \tag{2.2.16}$$

και επιλέγοντας $M = 3\sqrt{3}/4$ παίρνουμε το θεώρημα με $K_G = 81/16$. □

Κεφάλαιο 3

Αρχικές εκτιμήσεις της σταθεράς του Grothendieck

3.1 Η απόδειξη των Lindenstrauss-Pelczynski

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε την απόδειξη των Lindenstrauss και Pelczynski για την ανισότητα του Grothendieck (βλέπε [19] και [20]). Υπενθυμίζουμε ότι θέλουμε να αποδείξουμε το εξής:

Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $K_G > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $n \in \mathbb{N}$ και $A = (a_{ij})$ είναι ένας $n \times n$ πίνακας τέτοιος ώστε

$$\max\left\{ \left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} s_i t_j \right| : |s_i| \leqslant 1, |t_j| \leqslant 1 \right\} \leqslant 1, \tag{3.1.1}$$

τότε για κάθε χώρο Hilbert $\mathcal{H}$ και για κάθε $x_i, y_j \in B_{\mathcal{H}}$, $1 \leqslant i,j \leqslant n$ ισχύει

$$\left| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \right| \leqslant K_G. \tag{3.1.2}$$

Απόδειξη. Έστω $x_i, y_j \in B_{\mathcal{H}}$, $i,j = 1, \dots, n$. Αφού ο γραμμικός υπόχωρος που παράγουν αυτά τα διανύσματα είναι ισομετρικός με τον ℓ_2^N για κάποιον $N \in \mathbb{N}$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_i, y_j \in \ell_2^N$ για κάποιον N. Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα S^{N-1} του ℓ_2^N και το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας σ στην S^{N-1}.

Λήμμα 3.1.1. *Για κάθε $x, y \in S^{N-1}$ έχουμε*

$$\int_{S^{N-1}} \mathrm{sign}(\langle x, \theta \rangle) \cdot \mathrm{sign}(\langle y, \theta \rangle)\, d\sigma(\theta) = 1 - \frac{2\arccos(\langle x, y \rangle)}{\pi}. \tag{3.1.3}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $h = \arccos(\langle x, y\rangle)$. Αφού το σ είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, μπορούμε να επιλέξουμε την ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^N$ έτσι ώστε

$$x = e_1 \quad \text{και} \quad y = (\cos u)e_1 + (\sin u)e_2.$$

Χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες γράφουμε

$$\int_{S^{N-1}} g(\theta)\, d\sigma(\theta) = \frac{1}{N\omega_N} \int_{I^{N-1}} g(\theta(\phi))J(\phi)d\phi,$$

όπου $\theta(\phi) = (\theta_1(\phi), \dots, \theta_N(\phi))$, με

$$\begin{aligned}
\theta_1(\phi) &= \prod_{i=1}^{N-1} \sin\phi_i \\
\theta_k(\phi) &= \cos\phi_{k-1} \prod_{i=k}^{N-1} \sin\phi_i, \qquad 2 \leqslant k \leqslant N-1 \\
\theta_n(\phi) &= \cos\phi_{N-1}
\end{aligned}$$

και

$$I^{N-1} = \{\phi : 0 \leqslant \phi_1 < 2\pi, 0 \leqslant \phi_2, \dots, \phi_{N-1} \leqslant \pi\}.$$

Επίσης,

$$J(\phi) = \prod_{i=2}^{N-1} (\sin\phi_i)^{i-1},$$

και

$$N\omega_N = \int_{I^{N-1}} J(\phi)\, d\phi = 2\pi \prod_{i=2}^{N-1} \int_0^\pi (\sin\phi_i)^{i-1} d\phi_i.$$

Εφαρμόζουμε τα παραπάνω για την $g(\theta) = \mathrm{sign}(h(\theta))$, όπου

$$h(\theta) = \langle x, \theta\rangle\langle y, \theta = \theta_1(\theta_1 \cos u + \theta_2 \sin u).$$

Έχουμε

$$h(\theta(\phi)) = \left(\prod_{i=2}^{N-1} \sin\phi_i\right)^2 \sin\phi_1(\sin\phi_1\cos u + \cos\phi_1 \sin u),$$

άρα

$$g(\theta(\phi)) = \mathrm{sign}(\sin\phi_1 \sin(\phi_1 + u)) = f(\phi_1, u),$$

όπου $f(\phi_1, u) = 1$ στα διαστήματα $(0, \pi - u)$ και $(\pi, 2\pi - u)$, και $f(\phi_1, u) = -1$ στα διαστήματα $(\pi - u, \pi)$ και $(2\pi - u, 2\pi)$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{S^{N-1}} g(\theta)d\sigma(\theta) &= \frac{1}{N\omega_N}\int_{I^{N-1}} f(\phi_1, u)J(\phi)d\phi \\ &= \frac{1}{N\omega_N}\int_0^{2\pi} f(\phi_1, u)d\phi_1 \cdot \prod_{i=2}^{N-1}\int_0^{\pi}(\sin\phi_i)^{i-1}d\phi_i \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\phi_1, u)d\phi_1 = 1 - \frac{2u}{\pi}.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.1.3). □

Εφαρμόζουμε την (3.1.3) ως εξής: από την υπόθεση (3.1.1) γνωρίζουμε ότι, για κάθε $\theta \in S^{N-1}$ και για κάθε t_i, s_j με $|t_i| \leqslant 1$ και $|s_j| \leqslant 1$,

$$-1 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_i s_j \mathrm{sign}(\langle x_i, \theta\rangle)\,\mathrm{sign}(\langle y_j, \theta\rangle) \leqslant 1. \tag{3.1.4}$$

Ολοκληρώνοντας στην S^{N-1} και παίρνοντας υπόψη τον ισχυρισμό, βλέπουμε ότι

$$-1 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}t_i s_j \left(1 - \frac{2\arccos(\langle x, y\rangle)}{\pi}\right) \leqslant 1. \tag{3.1.5}$$

Άρα, ο πίνακας $A_1 = (a_{ij}^{(1)})$ με συντεταγμένες $a_{ij}^{(1)} = a_{ij}\left(1 - \frac{2\arccos(\langle x,y\rangle)}{\pi}\right)$ ικανοποιεί την υπόθεση (3.1.1). Επαγωγικά βλέπουμε ότι για κάθε $m \geqslant 1$ ο πίνακας $A_m = (a_{ij}^{(m)})$ με συντεταγμένες $a_{ij}^{(m)} = a_{ij}\left(1 - \frac{2\arccos(\langle x,y\rangle)}{\pi}\right)^m$ έχει την ίδια ιδιότητα. Ειδικότερα, για κάθε $m \geqslant 1$ έχουμε

$$\left|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\left(1 - \frac{2\arccos(\langle x, y\rangle)}{\pi}\right)^m\right| \leqslant 1. \tag{3.1.6}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι αν $u = \arccos(\langle x, y\rangle)$ τότε $\langle x, y\rangle = \cos u = \sin\left(\frac{\pi}{2} - u\right)$, απ' όπου έπεται ότι

$$\begin{aligned}\langle x, y\rangle &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{\left(\frac{\pi}{2} - u\right)^{2m+1}}{(2m+1)!} \\ &= \sum_{m=0}^{\infty}(-1)^m\frac{(\pi/2)^{2m+1}}{(2m+1)!}\left(1 - \frac{2\arccos(\langle x, y\rangle)}{\pi}\right)^{2m+1},\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την (3.1.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Big|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle\Big| &\leqslant \sum_{m=0}^\infty \frac{(\pi/2)^{2m+1}}{(2m+1)!}\Big|\sum_{i,j=1}^n a_{ij}\left(1-\frac{2\arccos(\langle x,y\rangle)}{\pi}\right)^{2m+1}\Big| \\ &\leqslant \sum_{m=0}^\infty \frac{(\pi/2)^{2m+1}}{(2m+1)!} = \frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{2}.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα με $K_G \leqslant \sinh(\pi/2) = \frac{1}{2}(e^{\pi/2}-e^{-\pi/2})$. □

3.2 Η σταθερά του Rietz

Η σταθερά που προκύπτει από την απόδειξη των Lindenstrauss-Pelczynski (και από αυτήν του Grothendieck) είναι, όπως είδαμε,

$$K_G \leqslant \frac{e^{\pi/2}-e^{-\pi/2}}{2} = \sinh(\pi/2) = 2.301\dots$$

Το 1974, ο Rietz [22] έδωσε ένα καλύτερο άνω φράγμα για την K_G.

Θεώρημα 3.2.1. $K_G \leqslant 2.261$.

Για την απόδειξη, ο Rietz αντικατέστησε την ολοκλήρωση στη σφαίρα της προηγούμενης απόδειξης με ολοκλήρωση στον $\mathbb{R}^n$ ως προς το n-διάστατο μέτρο Gauss σε συνδυασμό με ένα επιχείρημα λογισμού μεταβολών το οποίο προσδιορίζει μια βέλτιστη (σε αυτό το πλαίσιο) απεικόνιση που αντιστοιχεί στη συνάρτηση προσήμου. Όπως αναφέρει ο Rietz, ο S. Kaijser παρατήρησε ότι αυτή η απόδειξη γενικεύεται χωρίς δυσκολία στη μιγαδική περίπτωση και δίνει άνω φράγμα 1.607 για την αντίστοιχη μιγαδική σταθερά.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Για σταθερό φυσικό n, θεωρούμε το κανονικοποιημένο μέτρο Gauss γ_n με μέση τιμή 0 και διασπορά 1 στον $\mathbb{R}^n$. Η πυκνότητα του γ_n είναι η

$$(2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|_2^2/2).$$

Γράφουμε L^2 για τον $L^2(\mathbb{R}^n,\gamma_n)$. Για $t\geqslant 0$, γράφουμε $dm(t) = (2/\pi)^{1/2}\exp(-t^2/2)dt$, όπου dt το μέτρο Lebesgue.

Έστω $\mathcal{U}$ το σύνολο των μη αρνητικών μετρήσιμων συναρτήσεων f, που ορίζονται για $t\geqslant 0$ και έχουν $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Για κάθε $f\in\mathcal{U}$ συμβολίζουμε με ψ την περιττή επέκταση της f στο $\mathbb{R}$. Δηλαδή, έχουμε $\psi(t)=f(t)$ αν $t\geqslant 0$ και $\psi(t) = -f(-t)$ για $t<0$. Κατόπιν, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε τις εξής πραγματικές συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$:

$$\phi_x(z) = \langle x,z\rangle \quad \text{και} \quad \psi_x(z) = \psi(\langle x,z\rangle), \qquad z\in\mathbb{R}^n. \tag{3.2.1}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $\phi_x,\psi_x\in L^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$: έχουμε $\|\phi_x\|^2 = \|x\|_2^2$ και $\|\psi_x\|\leqslant \|f\|_\infty$.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω $f \in \mathcal{U}$ και ψ η περιττή επέκταση της f. Αν $\|x\|_2 = \|y\|_2 = 1$ τότε*

(i) $\langle \phi_x, \phi_y \rangle = \langle x, y \rangle$.

(ii) $\langle \phi_x, \psi_y \rangle = K \cdot \langle x, y \rangle$, *όπου*

$$K = K_f = \int_0^\infty t f(t) dm(t).$$

(iii) $\|\phi_x - \psi_x\|^2 = 1 - 2K + L$, *όπου*

$$L = L_f = \int_0^\infty f^2(t) dm(t).$$

Απόδειξη. Αφού τα x και y έχουν νόρμα 1, έχουμε $x = \langle x, y \rangle y + y'$ όπου το y' είναι κάθετο στο x. Τότε,

$$\int \langle x, z \rangle \langle y, z \rangle d\gamma_n(z) = \langle x, y \rangle \int |\langle y, z \rangle|^2 d\gamma_n(z) + \int \langle y', z \rangle \langle y, z \rangle d\gamma_n(z).$$

Το μέτρο Gauss χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι δίνει στη συνάρτηση $z \mapsto \langle y, z \rangle$ κατανομή Gauss με μέση τιμή 0 και διασπορά $\|y\|_2^2$. Συνεπώς,

$$\int |\langle y, z \rangle|^2 d\gamma_n(z) = \|y\|_2^2 = 1.$$

Αφού η κατανομή Gauss δεν εξαρτάται από τη βάση (είναι αναλλοίωτη ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς), μπορούμε να επιλέξουμε συντεταγμένες έτσι ώστε το y να είναι ένα από τα διανύσματα της βάσης. Τότε,

$$\int \langle y', z \rangle \langle y, z \rangle d\gamma_n(z) = 0.$$

Αυτό αποδεικνύει την (i). Για την (ii), γράφοντας $x = \langle x, y \rangle y + y'$ όπως πριν, έχουμε

$$\int \langle x, z \rangle \psi(\langle y, z \rangle) d\gamma_n(z) = \langle x, y \rangle \int \langle y, z \rangle \psi(\langle y, z \rangle) d\gamma_n(z) + \int \langle y', z \rangle \psi(\langle y, z \rangle) d\gamma_n(z).$$

Πάλι, επιλέγουμε συντεταγμένες έτσι ώστε το y να γίνει διάνυσμα της βάσης μας και ολοκληρώνουμε πρώτα ως προς y. Παίρνουμε έτσι

$$\int \langle y, z \rangle \psi(\langle y, z \rangle) d\gamma_n(z) = \int_0^\infty t f(t) dm(t),$$

και

$$\int \langle y', z \rangle \psi(\langle y, z \rangle) d\gamma_n(z) = 0.$$

Για την (iii), αναπτύσσουμε την $\|\phi_x - \psi_x\|^2$, παρατηρούμε ότι

$$\langle \psi_x, \psi_x \rangle = \int \psi^2(\langle x, z \rangle) d\gamma_n(z) = \int_0^\infty f^2(t) dm(t)$$

και χρησιμοποιούμε τις (i) και (ii). □

Ορισμός 3.2.3. Έστω $A = (a_{ij})$ ένας πραγματικός $n \times n$ πίνακας και έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert. Ορίζουμε

$$\|A\|_{\mathcal{H}} = \sup \left\{ \Big| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \Big| : \|x_i\|_{\mathcal{H}}, \|y_j\|_{\mathcal{H}} \leqslant 1 \right\}$$

και

$$\|A\| = \sup \left\{ \Big| \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} t_i u_j \Big| : -1 \leqslant t_i, u_j \leqslant 1 \right\}.$$

Θεώρημα 3.2.4 (Grothendieck). *Υπάρχει σταθερά γ που δεν εξαρτάται από το n τέτοια ώστε*

$$\|A\|_{\mathcal{H}} \leqslant \gamma \|A\|$$

για όλους τους $n \times n$ πίνακες A.

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{U}$. Ορίζουμε $K = K_f$ και $L = L_f$ όπως στο Λήμμα 3.2.2, και γράφουμε ψ για την περιττή επέκταση της f. Θεωρούμε τυχόντα φυσικό n, έναν πίνακα $A = (a_{ij})$ με $\|A\| \leqslant 1$ και έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$.

Παρατηρούμε ότι η $\|A\|_{\mathcal{H}}$ είναι το supremum των αθροισμάτων

$$\sum_{i=1}^{n} \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \Big\|_{\mathcal{H}}$$

πάνω από όλα τα διανύσματα x_j στον $\mathcal{H}$ που έχουν νόρμα $\leqslant 1$. Αφού κάθε τέτοιο σύνολο $\{x_j\}$ από n διανύσματα παράγει ένα υπόχωρο του $\mathcal{H}$ διάστασης το πολύ ίσης με n, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\mathcal{H} = \mathbb{R}^n$. Ακόμα, επειδή η μοναδιαία μπάλα του $\mathbb{R}^n$ είναι κυρτή, μπορούμε να επιλέξουμε διανύσματα x_i, y_j νόρμας 1 στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\|A\|_{\mathcal{H}} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle.$$

Από το Λήμμα 3.2.2, η ταυτότητα

$$\langle \psi_x, \psi_y \rangle = \langle \phi_x, \psi_y \rangle + \langle \psi_x, \phi_y \rangle - \langle \phi_x, \phi_y \rangle - \langle \phi_x - \psi_x, \psi_y - \phi_y \rangle$$

μας δίνει

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle \psi_{x_i}, \psi_{y_j} \rangle = (2K-1) \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle - \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij} \langle \phi_{x_i} - \psi_{x_i}, \psi_{y_j} - \phi_{y_j} \rangle. \tag{3.2.2}$$

Από την (iii) του Λήμματος 3.2.2, το τελευταίο άθροισμα φράσσεται απολύτως από $\|A\|_{\mathcal{H}}(1-2K+L)$, και αφού $\|A\| \leqslant 1$ παίρνουμε

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\langle \psi_{x_i}, \psi_{y_j}\rangle\Big| \leqslant 1.$$

Εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στην (3.2.2) παίρνουμε

$$1 \geqslant \Big|\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}\langle \psi_{x_i}, \psi_{y_j}\rangle\Big| \geqslant \|A\|_{\mathcal{H}}(|2K-1| + 2K - L - 1). \tag{3.2.3}$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε συνάρτηση f στο σύνολο $\mathcal{U}$. Ειδικότερα, για την $f \equiv 1$ έχουμε $K = \sqrt{2\pi}$ και $L = 1$, άρα η (3.2.3) μας δίνει

$$1 \geqslant \|A\|_{\mathcal{H}}(|2\sqrt{2\pi} - 1| + 2\sqrt{2\pi} - 2) > (0.19)\|A\|_{\mathcal{H}},$$

οπότε $\|A\|_{\mathcal{H}} < 5.2\ldots$. □

Πόρισμα 3.2.5. *Έστω $f \in \mathcal{U}$ τέτοια ώστε $2K_f^2 > L_f$. Τότε,*

$$\gamma \leqslant (2K_f^2 - L_f)^{-1}.$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας την f με την cf για κάποιον $c > 0$, παίρνουμε $K_{cf} = cK_f$ και $L_{cf} = c^2 L_f$. Συνεπώς, η (3.2.3) μας δίνει

$$c^2 \geqslant \|A\|_{\mathcal{H}}(|2cK - 1| + 2cK - c^2 L - 1). \tag{3.2.4}$$

Αν το c ικανοποιεί την $2cK - 1 \leqslant 0$ τότε η (3.2.4) είναι τετριμμένη. Θεωρούμε λοιπόν μόνο εκείνους τους $c > 0$ για τους οποίους $4cK - c^2L - 2 > 0$. Τότε, παίρνουμε

$$\|A\|_{\mathcal{H}} \leqslant c^2(4cK - c^2L - 2)^{-1}$$

για κάθε τέτοιον c. Αν σταθεροποιήσουμε τους K, L, το δεξιό μέλος παίρνει ελάχιστη τιμή για $c = 1/K$. Αφού $2K^2 - L > 0$, αυτή η τιμή του c μας δίνει $\|A\|_{\mathcal{H}} \leqslant (2K^2 - L)^{-1}$. □

Παρατηρούμε τώρα ότι η πραγματική απεικόνιση $f \mapsto 2K_f^2 - L_f$ είναι κάτω ημισυνεχής ως προς την ασθενή*-τοπολογία του $L^\infty(\mathbb{R}^+, dm(t))$ και το $\mathcal{U}$ είναι ασθενώς*-κλειστό υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας αυτού του L^∞ χώρου. Άρα, η $2K_f^2 - L_f$ παίρνει μέγιστη τιμη στο $\mathcal{U}$, ας υποθέσουμε σστη συνάρτηση $\mu(t)$. Σκοπός μας είναι προσδιορίσουμε αυτή τη συνάρτηση.

Έστω h μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στο $[0, \infty)$, τέτοια ώστε $h(t) \geqslant 0$ στο $\{\mu = 0\}$, $h(t) \leqslant 1$ στο $\{\mu = 1\}$ και $\operatorname{esssup}_{t \geqslant 0}|\mu(t) + \epsilon h(t)| = 1$ για $\epsilon > 0$ αρκετά μικρό.

Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο ϵ, γράφουμε K' και L' για τα $K_{\mu+\epsilon h}$ και $L_{\mu+\epsilon h}$ αντίστοιχα, και K, L για τα K_μ, L_μ. Τότε,

$$2(K')^2 - (L') = 2K^2 - L + 2\epsilon \int_0^\infty [2Kh(t)t - \mu(t)h(t)]\, dm(t) + O(\epsilon^2).$$

Αφού $2K^2 - L \geqslant 2(K')^2 - (L')$ και το ϵ μπορεί να επιλεγεί οσοδήποτε μικρό, παίρνουμε

(3.2.5) $$0 \geqslant \int_0^\infty [2Kh(t)t - \mu(t)h(t)]\, dm(t).$$

Θα χρειαστεί να διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Έστω $h(t) \geqslant 0$ με φορέα το $\{\mu = 0\}$. Από την (3.2.5) παίρνουμε

$$0 \geqslant \int_0^\infty 2tKh(t)\, dm(t)$$

το οποίο είναι αδύνατο εκτός αν το $\{\mu = 0\}$ έχει μέτρο 0. Άρα, $\mu(t) > 0$ σχεδόν παντού.

Περίπτωση 2. Έστω $h(t) \leqslant 0$ με φορέα το $\{\mu = 1\}$. Τότε, η (3.2.5) μας δίνει

$$0 \geqslant \int_0^\infty h(t)(2Kt - 1)\, dm(t),$$

άρα $2Kt - 1 \geqslant 0$ για όλα τα t για τα οποία $\mu(t) = 1$.

Περίπτωση 3. Έστω $h(t)$ με φορέα το $\{0 < \mu < 1\}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\epsilon \leqslant 1$, υπάρχουν συναρτήσεις h που ικανοποιούν τις παραπάνω ιδιότητες και είναι αυστηρώς θετικές ή αυστηρώς αρνητικές στο $\{0 < \mu < 1\}$. Για οποιαδήποτε τέτοια h έχουμε

$$0 \geqslant \int_0^\infty h(t)[2Kt - \mu(t)]\, dm(t)$$

και αυτό γίνεται μόνο αν $2Kt = \mu(t)$ σχεδόν παντού στο $\{0 < \mu < 1\}$.

Η πληροφορία που μας δίνουν αυτές οι τρεις περιπτώσεις προσδιορίζει την μ σχεδόν παντού. Είναι η συνάρτηση $\mu(t) = 2Kt$ αν $0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{2K}$ και $\mu(t) = 1$ για $t \geqslant \frac{1}{2K}$.

Υπολογίζοντας την ποσότητα $2K^2 - L$ για αυτήν την μ, βρίσκουμε

$$1 = 2\int_0^{K/2} dm(t) \quad \text{και} \quad 2K^2 - L = 2K\sqrt{2/\pi}\exp(-K^2/8) - \frac{1}{2}.$$

Από πίνακες βλέπουμε ότι $2K^2 - L > 0.4423$ και συνεπώς, από το Πόρισμα 3.2.5, παίρνουμε $\gamma < 2.261\ldots$. $\square$

Παρατήρηση 3.2.6. Αν ο A είναι θετικά ορισμένος, τότε η βέλτιστη τιμή της σταθεράς γ είναι το πολύ ίση με $\pi/2$. Ο Grothendieck έδειξε ότι ο $\pi/2$ είναι κάτω φράγμα για την γ, υπολογίζοντας, για κάθε n, την ακριβή τιμή μιας συγκεκριμένης τανυστικής νόρμας της ταυτοτικής απεικόνισης του $\mathbb{R}^n$, δείχνοντας ότι αυτή η νόρμα κυριαρχείται από το supremum των injective τανυστικών νορμών και παίρνοντας $n \to \infty$. Μια απόδειξη περιγράφεται στην επόμενη παράγραφο. Εδώ δείχνουμε ότι το φράγμα $\pi/2$ είναι και ικανό για θετικά ορισμένους πίνακες, εκμεταλλευόμενοι το γεγονός ότι το τελευταίο άθροισμα στην ανισότητα (3.2.2) είναι μη-θετικό για τέτοιους πίνακες.

Έστω A ένας θετικά ορισμένος $n \times n$ πίνακας με $\|A\| \leqslant 1$. Θεωρούμε τον διανυσματικό χώρο των n-άδων από διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Αυτός γίνεται χώρος Hilbert, εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^n \langle x_i, y_i \rangle$. Εδώ, $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ και $x_i, y_i \in \mathbb{R}^n$. Αυτό το εσωτερικό γινόμενο επάγει τη νόρμα $\|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^n \|x_i\|_2^2$. Τώρα,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle = \langle A\mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle = \langle A^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}, A^{\frac{1}{2}}\mathbf{y} \rangle,$$

διότι ο A είναι θετικά ορισμένος. Συνεπώς,

$$\Big| \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \langle x_i, y_j \rangle \Big| \leqslant \|A^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}\| \cdot \|A^{\frac{1}{2}}\mathbf{y}\|,$$

με ισότητα όταν $\mathbf{x} = \mathbf{y}$. Αυτό αποδεικνύει το επόμενο:

Λήμμα 3.2.7. *Αν ο A είναι θετικά ορισμένος, τότε υπάρχουν μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\|A\| = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \langle x_i, x_j \rangle.$$

Θεώρημα 3.2.8. *Για κάθε θετικά ορισμένο πίνακα A ισχύει*

$$\|A\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{\pi}{2} \|A\|.$$

Απόδειξη. Ακολουθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.4. Έστω $f \in \mathcal{U}$ και ψ η περιττή επέκταση της f. Υποθέτουμε ότι $\|A\| \leqslant 1$ και θεωρούμε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$, νόρμας 1, τέτοια ώστε $\|A\| = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \langle x_i, x_j \rangle$. Τότε, η ανισότητα (3.2.2) ισχύει αν αντικαταστήσουμε τα y_j με τα x_j. Όμως,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \langle \phi_{x_i} - \psi_{x_j}, \phi_{x_j} - \psi_{x_j} \rangle \geqslant 0,$$

άρα

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \langle \psi_{x_i}, \psi_{x_j} \rangle \geqslant \|A\|_{\mathcal{H}} (2K - 1)$$

και

$$1 \leqslant \|A\|_{\mathcal{H}}(2K-1).$$

Αντικαθιστώντας την f με cf, όπου $c>0$, παίρνουμε $c^2 \geqslant \|A\|_{\mathcal{H}}(2cK-1)$, άρα

$$\|A\|_{\mathcal{H}} \leqslant c^2(2cK-1)^{-1}$$

για κάθε $c \geqslant \frac{1}{2K}$. Η ελάχιστη τιμή αυτού του φράγματος για την $\|A\|_{\mathcal{H}}$ πιάνεται όταν $c = 1/K$. Άρα, $\|A\|_{\mathcal{H}} \leqslant \frac{1}{K^2}$. Η μέγιστη τιμή της παραμέτρου K πιάνεται όταν $f \equiv 1$, και τότε $K = \sqrt{2/\pi}$. Συνεπώς, $\|A\|_{\mathcal{H}} \leqslant \pi/2$. □

3.3 Κάτω φράγμα για τη σταθερά του Grothendieck

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι γνωστό ως το «μικρό θεώρημα του Grothendieck».

Θεώρημα 3.3.1. *Έστω S, T συμπαγή σύνολα. Υπάρχει απόλυτη σταθερά k τέτοια ώστε, για κάθε ζεύγος φραγμένων γραμμικών τελεστών $u : C(S) \to \mathcal{H}$, $v : C(T) \to \mathcal{H}$, όπου $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert, και για κάθε πεπερασμένη ακολουθία (x_j, y_j) στον $C(S) \times C(T)$,*

$$\left|\sum \langle u(x_j), v(y_j)\rangle\right| \leqslant k\|u\|\,\|v\| \left\|\Big(\sum |x_j|^2\Big)^{1/2}\right\|_\infty \left\|\Big(\sum |y_j|^2\Big)^{1/2}\right\|_\infty. \tag{3.3.1}$$

Συμβολίζουμε με k_G την βέλτιστη τέτοια σταθερά k.

Η ανισότητα του Grothendieck είναι ισοδύναμη με το ακόλουθο.

Θεώρημα 3.3.2. *Για κάθε $\varphi : C(S) \times C(T) \to \mathbb{R}$ και για κάθε πεπερασμένη ακολουθία (x_j, y_j) στον $C(S) \times C(T)$,*

$$\left|\sum \varphi(x_j, y_j)\right| \leqslant K\|\varphi\| \left\|\Big(\sum |x_j|^2\Big)^{1/2}\right\|_\infty \left\|\Big(\sum |y_j|^2\Big)^{1/2}\right\|_\infty. \tag{3.3.2}$$

Η σταθερά του Grothendieck K_G είναι η βέλτιστη τέτοια σταθερά K.

Θέτοντας $\varphi(x,y) = \langle u(x), v(y)\rangle$ και παρατηρώντας ότι $\|\varphi\| \leqslant \|u\|\,\|v\|$, βλέπουμε ότι το Θεώρημα 3.3.1 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.3.2. Είναι επίσης φανερό ότι

$$k_G \leqslant K_G. \tag{3.3.3}$$

Η επόμενη παρατήρηση είναι το Θεώρημα 3.3.1 είναι ισοδύναμο με το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω S συμπαγές σύνολο. Για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή $u : C(S) \to \mathcal{H}$, όπου $\mathcal{H}$ χώρος Hilbert, και για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(x_1, \dots, x_n)$ στον $C(S)$,*

$$\Big(\sum \|u(x_j)\|^2\Big)^{1/2} \leqslant \sqrt{k_G}\|u\| \left\| \Big(\sum |x_j|^2\Big)^{1/2} \right\|_\infty . \tag{3.3.4}$$

Η σταθερά $\sqrt{k_G}$ είναι η βέλτιστη σταθερά για την οποία ισχύει το παραπάνω.

Η ισοδυναμία των δύο θεωρημάτων είναι απλή. Υποθέτοντας το Θεώρημα 3.3.3 εφαρμόζουμε την $|\langle u(x_j), v(y_j)\rangle| \leqslant \|u(x_j)\| \, \|v(y_j)\|$ και την ανισότητα Cauchy-Schwarz για να πάρουμε την (3.3.1) του Θεωρήματος 3.3.1. Υποθέτοντας το Θεώρημα 3.3.1 εφαρμόζουμε την (3.3.1) με $x_j = y_j$ και $u = v$ για να πάρουμε την (3.3.4) του Θεωρήματος 3.3.3.

Μπορούμε τώρα να δώσουμε κάτω φράγμα για την k_G χρησιμοποιώντας το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.3.4. *Έστω (Ω, μ) χώρος μέτρου. Θεωρούμε $g_j \in L_1(\mu)$ και $x_j \in L_\infty(\mu)$, $1 \leqslant j \leqslant N$, και θετικούς πραγματικούς αριθμούς a, b. Αν $\langle g_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$ και ισχύουν οι*

$$a \left(\sum_{j=1}^N |t_j|^2 \right)^{1/2} \geqslant \left\| \sum_{j=1}^N t_j g_j \right\|_1$$

και

$$\left\| \left(\sum_{j=1}^N |x_j|^2 \right)^{1/2} \right\|_\infty \leqslant b\sqrt{N},$$

τότε

$$K_G \geqslant k_G \geqslant b^{-2}a^{-2}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον $\mathcal{H} = \ell_2^N$ και ορίζουμε $u : L_\infty \to \mathcal{H}$ με

$$u(x) = \sum_{i=1}^N \langle x, g_i\rangle e_i.$$

Από τις υποθέσεις έχουμε $\sum_{j=1}^N \|u(x_j)\|^2 = N$ και $\|u\| \leqslant a$. Από το Θεώρημα 3.3.3 συμπεραίνουμε ότι $1 \leqslant \sqrt{k_G} ab$. □

Θεωρούμε τώρα μια ακολουθία (g_j) ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών και ορίζουμε

$$x_j = c_N \sqrt{N} \frac{g_j}{(\sum |g_j|^2)^{1/2}},$$

όπου η σταθερά c_N επιλέγεται έτσι ώστε να ισχύει η $\langle x_i, x_j\rangle = \delta_{ij}$. Δηλαδή,

$$N^{-1/2}c_N^{-1} = \int |g_1|^2 \left(\sum |g_j|^2\right)^{-1/2}.$$

Δεδομένου ότι

$$\int |g_j|^2 \left(\sum |g_j|^2\right)^{-1/2} = \int |g_1|^2 \left(\sum |g_j|^2\right)^{-1/2}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, N$, βλέπουμε ότι

$$c_N^{-1} = \frac{1}{\sqrt{N}} \int \left(\sum |g_j|^2\right)^{1/2} \to 1$$

όταν $N \to \infty$, από το νόμο των μεγάλων αριθμών (διότι $\mathbb{E}\,|g_1|^2 = 1$). Όμως, από το Λήμμα 3.3.4 έχουμε ότι

$$c_N^{-1}\|g\|_1^{-1} \leqslant \sqrt{k_G},$$

άρα, αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε:

Θεώρημα 3.3.5. *Ισχύει το κάτω φράγμα*

$$K_G \geqslant k_G \geqslant \|g\|_1^{-2} = \frac{\pi}{2},$$

όπου g είναι τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή.

Κεφάλαιο 4

Το άνω φράγμα και η εικασία του Krivine

4.1 Εισαγωγή

Ο Krivine ξεκινάει από μια διαφορετική περιγραφή της σταθεράς του Grothendieck. Έστω L ένα Banach lattice πάνω από το $\mathbb{R}$. Αν $x_1, \ldots, x_k \in L$, ορίζουμε

$$(x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2} = \sup\{a_1 x_1 + \cdots + a_k x_k : a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}, a_1^2 + \cdots + a_k^2 = 1\}.$$

Μπορούμε τότε να ορίσουμε τη μιγαδοποίηση $L_{\mathbb{C}}$ ενός Banach lattice: είναι ένας χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{C}$, όπου στο $L \times L$ ορίζουμε $(a+ib)(x,y) = (ax - by, bx + ay)$ και $\|(x,y)\| = \|(x^2+y^2)^{1/2}\|_L$ για $a, b \in \mathbb{R}$ και $x, y \in L$.

Αν $U : L \to M$ είναι ένας φραγμένος τελεστής μεταξύ δύο Banach lattices, η μιγαδοποίηση $U_{\mathbb{C}} : L_{\mathbb{C}} \to M_{\mathbb{C}}$ του U ορίζεται με τον προφανή τρόπο. Τίθεται το ερώτημα να δοθεί φράγμα για την $\|U_{\mathbb{C}}\|$ αν γνωρίζουμε την $\|U\|$, δηλαδή να προσδιορίσουμε μια σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\|U_{\mathbb{C}}\| \leqslant C\|U\|$ για όλους τους τελεστές $U : L \to M$.

Συμβολίζουμε αυτή τη σταθερά με $K_G(2)$: είναι η μικρότερη πραγματική σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\|(Ux)^2 + (Uy)^2\| \leqslant C\|U\|\|(x^2+y^2)^{1/2}\|$$

για κάθε $x, y \in L$ και οποιουσδήποτε U, L, M.

Γενικεύοντας ακόμα περισσότερο, συμβολίζουμε με $K_G(k)$ (αυτή είναι η σταθερά του Grothendieck τάξης k) τη μικρότερη σταθερά $C > 0$ για την οποία ισχύει

$$\|(Ux_1)^2 + \cdots + (Ux_k)^2\| \leqslant C\|U\| \, \|(x_1^2 + \cdots + x_k^2)^{1/2}\| \tag{4.1.1}$$

για κάθε $x_1, \ldots, x_k \in L$ και για όλα τα Banach lattices L, M και όλους τους τελεστές $U : L \to M$.

Αποδεικνύεται εύκολα ότι στον παραπάνω ορισμό μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο L είναι ένας L^∞ χώρος, ο M ένας L^1 χώρος και ότι οι διαστάσεις τους είναι πεπερασμένες. Ειδικότερα, η $K_G(2)$ είναι η μικρότερη σταθερά $C > 0$ για την οποία $\|U_{\mathbb{C}}\| \leqslant C\|U\|$ για όλους τους τελεστές $U : \ell_\infty^n \to \ell_1^n$, και για κάθε n.

Είναι φανερό ότι η $K_G(k)$ είναι αύξουσα ακολουθία και $K_G(k) \leqslant k$. Αυτό που αποδεικνύεται στην ανισότητα του Grothendieck είναι ότι ένα άνω φράγμα της ακολουθίας $\{K_G(k)\}_{k\in\mathbb{N}}$ είναι το $\sinh(\pi/2) \approx 2.301$. Το όριο αυτής της ακολουθίας είναι η σταθερά του Grothendieck. Αυτό το αποτέλεσμα μας επιτρέπει να γράφουμε την ανισότητα (4.1.1) χωρίς αναφορά στο k. Μπορούμε έτσι να συμπεράνουμε σημαντικά θεωρήματα παραγοντοποίησης τελεστών, το κλασικότερο από τα οποία είναι το ακόλουθο θεώρημα του Grothendieck: κάθε φραγμένος τελεστής $U : L^\infty \to L^1$ παραγοντοποιείται μέσω ενός χώρου Hilbert: δηλαδή, υπάρχουν χώρος Hilbert $\mathcal{H}$ και παραγοντοποίηση $U = W \circ V$, όπου $U : L^\infty \to \mathcal{H}$, $W : \mathcal{H} \to L^1$ και $\|V\| \cdot \|W\| \leqslant K_G\|U\|$.

Ορίζονται επίσης (αλλά δεν θα ασχοληθούμε με αυτές εδώ) οι μιγαδικές σταθερές του Grothendieck: η σταθερά $K_G^{\mathbb{C}}(k)$ είναι ο μικρότερος $C > 0$ για τον οποίο να ισχύει

$$\|(Uf_1)^2 + \cdots + (Uf_k)^2\|_1 \leqslant C\|U\|\|(|f_1|^2 + \cdots + |f_k|^2)^{1/2}\|_\infty$$

για όλους τους τελεστές $U : L_{\mathbb{C}}^\infty(X) \to L_{\mathbb{C}}^1(\Omega, \mu)$ και όλες τις $f_1, \ldots, f_k \in L_{\mathbb{C}}^\infty(X)$. Συμβολίζουμε με $K_G^{\mathbb{C}}$ το supremum όλων των $K_G^{\mathbb{C}}(k)$. Όπως προκύπτει εύκολα από τους ορισμούς, $K_G^{\mathbb{C}}(k) \leqslant K_G(k)$ για κάθε $k \geqslant 2$. Είναι αρκετό να θεωρήσουμε την περίπτωση των $L_{\mathbb{C}}^\infty(C)$ και $L_{\mathbb{C}}^1(\Omega, \beta, \mu)$ που είναι Banach latices πάνω από το $\mathbb{R}$, με $(f + ig) \cup (f' + ig') = f \cup f' + i(g \cup g')$ και να εφαρμόσουμε την ανισότητα (4.1.1) στον τελεστή U. Αυτό μας δίνει την $K_G^{\mathbb{C}} \leqslant K_G$. Στην πραγματικότητα, $K_G^{\mathbb{C}} < K_G$ διότι $K_G \geqslant \pi/2$ ενώ είναι γνωστό ότι $K_G^{\mathbb{C}} \leqslant e^{1-\gamma} < \pi/2$, όπου γ είναι η σταθερά του Euler.

Σημειώνουμε ότι $K_G(2) \geqslant \sqrt{2}$. Αυτό φαίνεται αν εφαρμόσουμε την ανισότητα (4.1.1) για $k = 2$, τον τελεστή $U : \ell_\infty^2 \to \ell_1^2$ με $Ue_1 = \frac{1}{2}(e_1 + e_2)$ και $Ue_2 = \frac{1}{2}(e_1 - e_2)$ (όπου $\{e_1, e_2\}$ είναι η κανονική βάση του ℓ_∞^2 και του ℓ_1^2). Ο U είναι ισομετρία, οπότε $\|U\| = 1$ και η (4.1.1) για $x_1 = e_1, x_2 = e_2$ δίνει το αποτέλεσμα.

Στο προηγούμενο Κεφάλαιο είδαμε ότι ο Rietz είχε αποδείξει το άνω φράγμα σε $K_G \leqslant 2.261$. Ο Krivine εισήγαγε νέες μεθόδους για να φράξει τις σταθερές $K_G(k)$. Μεταξύ άλλων, απέδειξε ότι

$$K_G(2) = \sqrt{2}, \qquad K_G(4) \leqslant \frac{\pi}{2}, \qquad K_G \leqslant \frac{\pi}{2}\log(1 + \sqrt{2}) \approx 1.782$$

και υπεστήριξε ότι η τελευταία ποσότητα είναι πολύ πιθανό να είναι η ακριβής τιμή της K_G. Στις επόμενες παραγράφους περιγράφουμε την προσέγγισή του στο πρόβλημα.

4.2 Χαρακτηρισμός για την $K_G(k)$

Ο Krivine ξεκινάει λοιπόν από έναν άλλο χαρακτηρισμό των σταθερών $K_G(k)$ με όρους της θεωρίας των νορμών τανυστικών γινομένων. Έστω X, Y δύο συμπαγείς χώροι. Ταυτίζουμε το $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$ (ως $\mathbb{R}$-άλγεβρα) με τον υπόχωρο του $\mathcal{C}(X \times Y)$ που παράγεται από όλους τους γραμμικούς συνδυασμούς των συναρτήσεων της μορφής $f(x)g(y)$, όπου $f \in \mathcal{C}(X), g \in \mathcal{C}(Y)$. Αυτή τη συνάρτηση τη συμβολίζουμε με $f \otimes g$. Αν $F \in \mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$, ορίζουμε τη νόρμα της, και την συμβολίζουμε με $\|F\|_{\mathcal{C}(X)\otimes\mathcal{C}(Y)}$ ή $\|F\|_{\otimes}$, θέτοντας

$$\|F\|_{\otimes} = \inf \sum_{i=1}^{n} \|f_i\| \|g_i\|,$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλες τις αναπαραστάσεις της F στη μορφή

$$F(x, y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x) g_i(y).$$

Η πλήρωση του $\mathcal{C}(X) \otimes \mathcal{C}(Y)$ ως προς αυτή τη νόρμα συμβολίζεται με $\mathcal{C}(X) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(Y)$, και λέγεται προβολικό τανυστικό γινόμενο των $\mathcal{C}(X), \mathcal{C}(Y)$. Ο δυϊκός του χώρος ταυτίζεται (ως χώρος Banach) με τον χώρο όλων των φραγμένων τελεστών από τον $\mathcal{C}(X)$ στον $\mathcal{C}(Y)^*$. Κάθε τέτοιος τελεστής ορίζει την γραμμική μορφή

$$\langle T_U, f \otimes g \rangle = \langle Uf, g \rangle$$

για κάθε $f \in \mathcal{C}(X), g \in \mathcal{C}(Y)$.

Έστω $f : X \to \mathbb{R}$ και $A \subset X$. Συμβολίζουμε με f_A τον περιορισμό της f στο A. Αποδεικνύεται το ακόλουθο.

Πρόταση 4.2.1. *Έστω $F \in \mathcal{C}(X) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(Y)$, όπου X, Y είναι δύο συμπαγείς χώροι. Τότε,*

$$\|F\|_{\mathcal{C}(X) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(Y)} = \sup \Big\{ \|F_{A\times B}\|_{\mathcal{C}(A)\otimes\mathcal{C}(B)} : A \subset X, B \subset Y \,\textit{πεπερασμένα} \Big\}.$$

Έστω S^{k-1} η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^k$. Συμβολίζουμε με pr_i τη συνάρτηση $\mathrm{pr}_i : S^{k-1} \to \mathbb{R}$ με $\mathrm{pr}_i(x_1, \ldots, x_k) = x_i$. Προφανώς, $(\mathrm{pr}_1)^1 + \cdots + (\mathrm{pr}_k)^2 = 1$.

Πρόταση 4.2.2. *Η σταθερά $K_G(k)$ ισούται με τη νόρμα στο χώρο $\mathcal{C}(S^{k-1}) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(S^{k-1})$ της συνάρτησης $\langle x, y \rangle$, ορισμένης στο $S^{k-1} \times S^{k-1}$.*

Απόδειξη. Έστω $C = \|\mathrm{pr}_1 \otimes \mathrm{pr}_1 + \cdots + \mathrm{pr}_k \otimes \mathrm{pr}_k\|_{\otimes}$ η νόρμα της $\langle x, y\rangle$ στον $\mathcal{C}(S^{k-1}) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(S^{k-1})$. Προφανώς, $C \leqslant k$. Θεωρούμε πεπερασμένα $A, B \subset S^{k-1}$ τέτοια ώστε

$$\|\mathrm{pr}_1 \otimes \mathrm{pr}_1 + \cdots + \mathrm{pr}_k \otimes \mathrm{pr}_k\|_{\mathcal{C}(A)\otimes\mathcal{C}(B)} \geqslant C - \epsilon$$

(από την Πρόταση 4.2.1) και έναν γραμμικό τελεστή $U : \mathcal{C}(A) \to \mathcal{C}(B)^*$ με $\|U\| = 1$, τέτοιον ώστε

$$\langle U\,\mathrm{pr}_1, \mathrm{pr}_1\rangle + \cdots + \langle U\,\mathrm{pr}_k, \mathrm{pr}_k\rangle = \|\mathrm{pr}_1 \otimes \mathrm{pr}_1 + \cdots + \mathrm{pr}_k \otimes \mathrm{pr}_k\|_{\mathcal{C}(A)\otimes\mathcal{C}(B)} \geqslant C - \epsilon.$$

Ένας τέτοιος τελεστής υπάρχει, γιατί από την προηγούμενη παρατήρηση για τον δυϊκό ενός τανυστικού γινομένου, είναι αρκετό να αναζητήσουμε $T \in (\mathcal{C}(A) \otimes \mathcal{C}(B))^*$ τέτοιον ώστε $\|T\| = 1$ και $T(\mathrm{pr}_1 \otimes \mathrm{pr}_1 + \cdots + \mathrm{pr}_k \otimes \mathrm{pr}_k) = \|\mathrm{pr}_1 \otimes \mathrm{pr}_1 + \cdots + \mathrm{pr}_k \otimes \mathrm{pr}_k\|_{\mathcal{C}(A)\otimes\mathcal{C}(B)})$. Αφού $\mathcal{C}(B)^* = L^1(B, \mu)$, όπου μ είναι το μέτρο που δίνει μάζα 1 σε κάθε σημείο του B, έχουμε

$$\begin{aligned} C - \epsilon &\leqslant \sum_{i=1}^{k} \langle U\,\mathrm{pr}_i, \mathrm{pr}_i\rangle = \int_B \sum_{i=1}^{k} (U\,\mathrm{pr}_i)(\xi)\mathrm{pr}_i(\xi)\mu(d\xi) \\ &\leqslant \int_B \Big(\sum_{i=1}^{k} |U\,\mathrm{pr}_i(\xi)|^2\Big)^{1/2} \mu(d\xi) = \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{k} |U\,\mathrm{pr}_i|^2\Big)^{1/2}\Big\|_1 \\ &\leqslant K_G(k)\|U\| \Big\|\Big(\sum_{i=1}^{k} |\mathrm{pr}_i|^2\Big)^{1/2}\Big\|_\infty \leqslant K_G(k). \end{aligned}$$

Αφού το ϵ ήταν τυχόν, παίρνουμε $C \leqslant K_G(k)$.

Αντίστροφα, έστω $U : L^\infty(X) \to L^1(B, \mu)$ με $\|U\| = 1$, και έστω $f_1, \ldots, f_k \in L^\infty(X)$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\|(Uf_1)^2 + \cdots + (Uf_k)^2\|_1 \leqslant C\|(f_1^2 + \cdots + f_k^2)^{1/2}\|_\infty.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα X, B είναι πεπερασμένα σύνολα (από τον ορισμό της $K_G(k)$) και ότι

$$\|(f_1^2 + \cdots + f_k^2)^{1/2}\|_\infty \leqslant 1.$$

Έστω X' (αντίστοιχα B') η ένωση των φορέων των $f_1, \ldots, f_k$ (αντίστοιχα των $Uf_1, \ldots, Uf_k$). Ορίζουμε $J_1 : L^\infty(X') \to L^\infty(X)$ θέτοντας $J_1(\phi) = \phi((f_1^2 + \cdots + f_k^2)^{1/2})$ και $J_2 : L^1(B, \mu) \to L^1(B', \mu)$ θέτοντας $J_2(\phi) = \phi \cdot \mathbf{1}_B$. Στη συνέχεια ορίζουμε $V : L^\infty(X) \to L^1(B', \mu)$ με $V = J_2 \circ U \circ J_1$ και θέτουμε $\phi_i = f_i/(f_1^2 + \cdots + f_k^2)^{1/2}$. Είναι φανερό ότι $\|J_1\|, \|J_2\| \leqslant 1$, οπότε $\|V\| \leqslant \|U\| \leqslant 1$ και $V\phi_i = Uf_i$. Επιπλέον, $\phi_1^2 + \cdots + \phi_k^2 = 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \|(Uf_1)^2 + \cdots + (Uf_k)^2)^{1/2}\|_1 &= \|(V\phi_1)^2 + \cdots + (V\phi_k)^2)^{1/2}\|_1 \\ &= \int_{B'} ((V\phi_1)^2 + \cdots + (V\phi_k)^2)^{1/2} d\mu \\ &= \int_{B'} \Big(\sum_{i=1}^{k} V\phi_i \cdot \psi_i\Big)\, d\mu, \end{aligned}$$

με τις $\psi_1, \dots, \psi_k \in L^\infty(B', \mu)$ να ικανοποιούν την $\psi_1^2 + \cdots + \psi_k^2 = 1$: θέτουμε

$$\psi_i = \frac{V\phi_i}{((V\phi_1)^2 + \cdots + (V\phi_k)^2)^{1/2}}.$$

Ισχύει ότι $L^1(B', \mu) = \mathcal{C}(B')^*$, άρα $V : \mathcal{C}(X') \to \mathcal{C}(B')^*$, και έχουμε

$$\int_{B'} \Big(\sum_{i=1}^{k} V\phi_i \cdot \psi_i \Big)\, d\mu = \sum_{i=1}^{k} \langle V\phi_i, \psi_i \rangle \leqslant \|V\| \, \Big\| \sum_{i=1}^{k} \phi_i \otimes \psi_i \Big\|_{\mathcal{C}(X') \otimes \mathcal{C}(B')}.$$

Παρατηρούμε ότι $\|V\| \leqslant 1$. Επιπλέον, αφού $\phi_1^2 + \cdots + \phi_k^2 = 1$ και $\psi_1^2 + \cdots + \psi_k^2 = 1$, έχουμε

$$\Big\| \sum_{i=1}^{k} \phi_i \otimes \psi_i \Big\|_{\mathcal{C}(X') \otimes \mathcal{C}(B')} \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{k} \mathrm{pr}_i \otimes \mathrm{pr}_i \Big\|_{\mathcal{C}(S^{k-1}) \otimes \mathcal{C}(S^{k-1})} = C.$$

Πράγματι, κάθε ταυτότητα της μορφής

$$x_1 y_1 + \cdots + x_k y_k = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_1, \dots, x_k) g_j(y_i, \dots, y_k)$$

που ισχύει στο $S^{k-1} \times S^{k-1}$, με $f_j, g_j \in \mathcal{C}(S^{k-1})$, μας επιτρέπει να γράψουμε

$$\sum_{i=1}^{k} \phi_i(x)\psi_i(y) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\phi_1(x), \dots, \phi_k(x)) g_j(\psi_1(y), \dots, \psi_k(y))).$$

Έχουμε λοιπόν, τελικά,

$$\|((Uf_1) + \cdots + (Uf_k))^{1/2}\| \leqslant C.$$

$\square$

Παρατήρηση 4.2.3. Με τον ίδιο τρόπο μπορεί κανείς να αποδείξει ότι η μιγαδική σταθερά $K_G^{\mathbb{C}}(k)$ είναι η νόρμα της συνάρτησης $\langle x, y \rangle$ ορισμένης πάνω στο $X_k \times X_k$, στον $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X_k) \otimes \mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X_k)$, όπου X_k είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{C}^k$ και $\mathcal{C}_{\mathbb{C}}(X_k)$ είναι ο χώρος των συνεχών μιγαδικών συναρτήσεων πάνω στο X_k.

Τώρα, στρέφουμε την προσοχή μας στην $K_G(2)$.

Πρόταση 4.2.4. *Η $K_G(2)$ είναι η νόρμα της συνάρτησης $\cos(x-y)$ στον $\mathcal{C}[-\pi, \pi] \,\widehat{\otimes}\, \mathcal{C}[-\pi, \pi]$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να βρούμε συνεχείς συναρτήσεις f_i, g_i στην S^1, τέτοιες ώστε

$$\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty \|g_i\|_\infty \leqslant K_G(2) + \epsilon$$

και
$$x_1y_1 + x_2y_2 = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_1, x_2)g_i(y_1, y_2),$$
όπου $x_1^2 + x_2^2 = y_1^2 + y_2^2 = 1$. Άρα,
$$\cos(x - y) = \sum_{i=1}^{n} f_i(\cos x, \sin x)g_i(\cos y, \sin y),$$
οπότε $\|\cos(x-y)\|_{\otimes} \leqslant K_G(2) + \epsilon$. Έπεται ότι $\|\cos(x-y)\|_{\otimes} \leqslant K_G(2)$.

Αντίστροφα, θεωρούμε τυχούσα αναπαράσταση της $\cos(x-y)$ στη μορφή
$$\sum_{i=1}^{n} \phi_i(x)\psi_i(y),$$
με
$$\sum_{i=1}^{n} \|f_i\|_\infty \|g_i\|_\infty \leqslant \|\cos(x-y)\|_{\otimes} + \epsilon.$$
Έστω $p \in S^1$ και $\alpha(s) \in [-\pi, \pi]$ τέτοιος ώστε $p = (\cos\alpha(s), \sin\alpha(s))$. Τότε, έχουμε
$$\langle s, t\rangle = \cos(\alpha(t) - \alpha(s)) = \sum_{i=1}^{n} \phi_i(\alpha(s))\psi_i(\alpha(t)),$$
το οποίο δείχνει ότι
$$\|\langle s, t\rangle\|_{\otimes} \leqslant \|\cos(x-y)\|_{\otimes} + \epsilon.$$
Σημειώνουμε ότι σε αυτό το σημείο χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.2.1, διότι οι $\phi_i \circ \alpha, \psi_i \circ \alpha$ δεν είναι συνεχείς. Τελικά, $K_G(2) \leqslant \|\cos(x-y)\|_{\otimes} + \epsilon$. □

Θεώρημα 4.2.5. $K_G(2) = \sqrt{2}$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι $\|\cos(x-y)\|_{\otimes} \leqslant \sqrt{2}$. Έστω f, g δύο φραγμένες 2π-περιοδικές συναρτήσεις στο $\mathbb{R}$. Θέτουμε $F = f * g$. Έχουμε λοιπόν
$$F(x-y) = \int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)g(t-y)\frac{dt}{2\pi},$$
το οποίο μας δίνει
$$\|F(x-y)\|_{\otimes} \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$
Μάλιστα, για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει
$$\|F(nx - ny)\|_{\otimes} \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty.$$

Θεωρούμε την

$$g(x) = \operatorname{sign}(\cos x) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1}\cos((2k+1)x),$$

και μια συνεχή, άρτια συνάρτηση f τέτοια ώστε $f(\pi + x) = -f(x)$. Τότε,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos((2k+1)x)$$

και

$$F(x) = (f * g)(x) = b_1 \cos x + b_3 \cos(3x) + \cdots ,$$

όπου

$$b_{2k+1} = \frac{2}{\pi}\frac{(-1)^k}{2k+1}a_{2k+1}.$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε επιλέξει την f με τέτοιον τρόπο ώστε $a_1 > \frac{|a_3|}{3} + \frac{|a_5|}{5} + \cdots$. Προκύπτει τότε ότι $b_1 > |b_3| + |b_5| + \cdots$. Τότε, η σειρά Dirichlet

$$D(s) = b_1 + \frac{b_3}{3^s} + \cdots + \frac{b_{2k+1}}{(2k+1)^s} + \cdots$$

συγκλίνει απολύτως για $s \geqslant 0$, και η

$$\frac{1}{D(s)} = \gamma_1 + \frac{\gamma_3}{3^s} + \cdots + \frac{\gamma_{2k+1}}{(2k+1)^s} + \cdots$$

είναι μια απολύτως συκλίνουσα σειρά Dirichlet. Οι συντελεστές της δίνονται από τις σχέσεις

$$b_1\gamma_1 = 1,\ b_1\gamma_3 + b_3\gamma_1 = 0, \ldots, \sum_{d|n} b_d\gamma_{n/d} = 0$$

για $n > 1$ περιττό. Ισχύει δηλαδή η αναδρομική σχέση

$$\gamma_n = -\frac{1}{b_1}\sum_{d|n, d\neq 1} b_d\gamma_{n/d}$$

για $n > 1$. Επιπλέον, αφού η συνάρτηση F είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{2k+1}F((2k+1)x) &= \sum_{k,l\geqslant 0} b_{2l+1}\gamma_{2k+1}\cos((2k+1)(2l+1)x)\\ &= \sum_{r=0}^{\infty}\cos((2r+1)x)\sum_{d|2r+1} b_d\gamma_{\frac{2r+1}{d}} = \cos x\end{aligned}$$

(η ομαδοποίηση των όρων δικαιολογείται από το γεγονός ότι η διπλή σειρά των $b_{2l+1}\gamma_{2k+1}$ είναι απολύτως συγκλίνουσα). Συνεπώς,

$$\cos(x-y) = \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{2k+1}F((2k+1)(x-y)),$$

και παίρνοντας νόρμες στο χώρο $\mathcal{C}[-\pi,\pi]\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{C}[-\pi,\pi]$ βλέπουμε ότι

(4.2.1) $$K_G(2) \leqslant \|f\|_\infty(|\gamma_1| + |\gamma_3| + \cdots + |\gamma_{2k+1}| + \cdots).$$

Θέτουμε $\chi(2k+1) = \sqrt{2}\cos((2k+1)\pi/4) \in \{-1,1\}$ και παρατηρούμε ότι $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ για m,n περιττούς.

Ας υποθέσουμε ότι η f έχει επιλεγεί έτσι ώστε το a_{2k+1} να είναι το πρόσημο του $-(-1)^k\chi(2k+1)$ για $k \geqslant 1$. Έχουμε $a_1 > 0$ από τη συνθήκη που επιβάλαμε για την f. Άρα, $b_1 > 0$ και ο b_{2k+1} έχει το πρόσημο του $-\chi(2k+1)$ για $k \geqslant 1$. Θα δείξουμε αναδρομικά ότι ο γ_{2k+1} έχει το πρόσημο του $\chi(2k+1)$ για $k \geqslant 0$. Για $k = 0$ έχουμε $\gamma_1 = 1/b_1 > 0$. Αν $k \geqslant 1$ τότε

$$\gamma_{2k+1} = -\frac{1}{b_1}\sum_{d|2k+1} b_d\gamma_{(2k+1)/d}.$$

Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τον $\frac{2k+1}{d} < 2k+1$ έχουμε ότι ο $-b_d\gamma_{(2k+1)/d}$ έχει το πρόσημο του $\chi(d)\chi((2k+1)/d)$, δηλαδή του $\chi(2k+1)$. Αυτό είναι λοιπόν το πρόσημο του γ_{2k+1}.

Από την (4.2.1) παίρνουμε ότι

$$K_G(2) \leqslant \|f\|_\infty \sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{2k+1}\chi(2k+1).$$

Οι σειρές Dirichlet $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{b_{2k+1}}{(2k+1)^s}$ και $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\gamma_{2k+1}}{(2k+1)^s}$ είναι η μία αντίστροφη της άλλης, και $\chi(mn) = \chi(m)\chi(n)$ για m,n περιττούς. Προκύπτει έτσι ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}\gamma_{2k+1}\chi(2k+1) = \frac{1}{\sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1}\chi(2k+1)} = \frac{1}{\sqrt{2}F(\pi/4)}.$$

Συνεπώς,

$$K_G(2) \leqslant \frac{\|f\|_\infty}{\sqrt{2}F(\pi/4)}.$$

Τώρα,

$$F(\pi/4) = (f*g)(\pi/4) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(\pi/4-t)dt.$$

Αφού $g(t) = \mathrm{sign}(\cos t)$, παίρνουμε ότι $g(\pi/4-t) = 1$ για $t \in [-\pi/4, 3\pi/4]$ και $g(\pi/4-t) = -1$ για $t \in [-\pi,-\pi/4] \cup [3\pi/4,\pi]$. Άρα,

$$F(\pi/4) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_{-\pi/4}^{3\pi/4} f(t)dt - \int_{-\pi}^{-\pi/4} f(t)dt - \int_{3\pi/4}^{\pi} f(t)dt\right],$$

και αφού $f(t) = f(-t) = -f(\pi + t)$ παίρνουμε

$$F(\pi/4) = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi/4} f(t)dt.$$

Υποθέτουμε τώρα ότι $f(t) = \|f\|_\infty$ για $t \in [0, \pi/4]$. Τότε $F(\pi/4) = \|f\|_\infty/2$, άρα $K_G(2) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}\frac{1}{2}} = \sqrt{2}$, το οποίο είναι αυτό που θέλουμε.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης μένει να βρούμε μια συνάρτηση f συνεχή, άρτια στο $\mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(t) = -f(t+\pi)$, η οποία επιπλέον να ικανοποιεί τις εξής συνθήκες:

(i) $f(t) = \|f\|_\infty$ για $t \in [0, \pi/4]$.

(ii) $a_1 > 0, \mathrm{sign}(a_{2k+1}) = -(-1)^k \chi(2k+1)$ για $k \geqslant 1$.

(iii) $a_1 > \frac{|a_3|}{3} + \frac{|a_5|}{5} + \cdots + \frac{|a_{2k+1}|}{2k+1} + \cdots$, όπου a_{2k+1} είναι ο συντελεστής της σειράς Fourier

$$f(t) = \sum_{k=0}^{\infty} a_{2k+1}\cos((2k+1)t).$$

Αρκεί να ορίσουμε την f στο $[0, \pi/2]$. Θέτουμε $f(t) = \frac{2}{3}(\pi/4)^3$ για $t \in [0, \pi/2]$ και $f(t) = (\pi/4)^2(\pi/2 - t) - \frac{1}{3}(\pi/2 - t)^3$ για $t \in [\pi/4, \pi/2]$. Η f είναι συνεχής, και μάλιστα παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Έχουμε $\|f\|_\infty = \frac{2}{3}(\pi/4)^3$ και αυτό δίνει την πρώτη συνθήκη. Επίσης,

$$\begin{aligned} a_{2k+1} &= \frac{4}{\pi}\int_0^{\pi/2} f(t)\cos((2k+1)t)dt \\ &= \frac{4\sqrt{2}}{\pi(2k+1)^3}\chi(2k+1)\left(\frac{1}{2k+1} - (-1)^k\frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

Αφού $1 > \frac{\pi}{4} > \frac{1}{3}$, έχουμε την δεύτερη συνθήκη. Για την τρίτη συνθήκη γράφουμε

$$1 - \frac{\pi}{4} > \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4}\left(\frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^k}{2k+1}\right).$$

Όμως

$$\frac{\pi}{4} - \frac{(-1)^k}{2k+1} \leqslant \frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} - 1,$$

συνεπώς αρκεί να επαληθεύσουμε την

$$1 - \frac{\pi}{4} > \Big(\frac{\pi}{4} + \frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{\pi^4}{96} - 1\Big),$$

το οποίο είναι απλό. $\square$

4.3 Μια ισοδύναμη νόρμα στο χώρο $\mathcal{C}(S)\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{C}(T)$

Έστω S, T δύο συμπαγείς χώροι και $\mathcal{E}(S,T)$ το σύνολο των συναρτήσεων $F : S \times T \to \mathbb{R}$ που έχουν αναπαράσταση της μορφής $F(s,t) = \langle X_s, Y_t \rangle$, όπου $s \mapsto X_s$ και $t \mapsto Y_t$ είναι συνεχείς συναρτήσεις από τους S, T αντίστοιχα σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, τέτοιες ώστε $\|X_s\| = \|Y_t\| = \rho$ για κάθε $s \in S, t \in T$. Ορίζουμε $\|F\|_*$ να είναι το ελάχιστο άνω φράγμα των ρ^2 πάνω από όλες τις δυνατές αναπαραστάσεις της F. Προφανώς, $\|F\|_\infty \leqslant \|F\|_*$.

Ισχυρισμός. *Ο χώρος $\mathcal{E}(S,T)$, εφοδιασμένος με τη νόρμα $\|\cdot\|_*$, είναι $\mathbb{R}$-άλγεβρα με νόρμα.*

Απόδειξη. Αν $F(S,T) = \langle X_s, Y_t \rangle$ τότε $\lambda F(s,t) = \langle \operatorname{sign}(\lambda)|\lambda|^{1/2} X_s, |\lambda|^{1/2} Y_t \rangle$, το οποίο δείχνει ότι $\lambda F \in \mathcal{E}(S,T)$ και ότι $\|\lambda F\|_* \leqslant |\lambda| \|F\|_*$. Για την αντίστροφη ανισότητα, βάζουμε όπου λ το $1/\lambda$ και όπου F την λF.

Έστω $F, F' \in \mathcal{E}(S,T)$. Τότε, $F(s,t) = \langle X_s, Y_t \rangle$ και $F'(s,t) = \langle X'_s, Y'_t \rangle$, όπου $\|X_s\| = \|Y_t\| = \rho$ και $\|X'_s\| = \|Y'_t\| = \rho'$. Είναι φανερό ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X_s, Y_t \in \mathcal{H}$, $X'_s, Y'_t \in \mathcal{H}'$ για $s \in S, t \in T$, όπου οι $\mathcal{H}, \mathcal{H}'$ είναι δύο ορθογώνιοι υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Σε αυτήν την περίπτωση,

$$F(s,t) + F'(s,t) = \langle X_s + X'_s, Y_t + Y'_t \rangle$$

και

$$\|X_s + X'_s\|^2 = \|Y_t + Y'_t\|^2 = \rho^2 + (\rho')^2.$$

Έπεται ότι $F + F' \in \mathcal{E}(S,T)$ και ότι $\|F + F'\|_* \leqslant \|F\|_* + \|F'\|_*$. Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο χώρος Hilbert αποτελείται από Gaussian τυχαίες μεταβλητές. Τότε, κάθε τυχαία μεταβλητή του H είναι ανεξάρτητη από κάθε τυχαία μεταβλητή του H'. Άρα, έχουμε

$$\langle X_s X'_s, Y_t Y'_t \rangle = \mathbb{E}[X_s Y_t X'_s Y'_t] = \mathbb{E}[X_s Y_t]\mathbb{E}[X'_s Y'_t] = F(s,t)F'(s,t).$$

Επίσης $\|X_s X'_s\|^2 = \|Y_t Y'_t\|^2 = \rho^2(\rho')^2$. Αυτό αποδεικνύει ότι $FF' \in \mathcal{E}(S,T)$ και $\|FF'\|_* \leqslant \|F\|_* \|F'\|_*$. □

Πρόταση 4.3.1. *Έστω $F : S \times T \to \mathbb{R}$ με $F(s,t) = \langle X_s, Y_t \rangle$, όπου οι $s \mapsto X_s$, $t \mapsto Y_t$ είναι συνεχείς στους χώρους S, T αντίστοιχα, με τιμές σε ένα χώρο $\mathcal{H}$. Τότε,*

$$\|F\|_* \leqslant \sup_s \|X_s\| \sup_t \|Y_t\|.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sup_s \|X_s\| \sup_t \|Y_t\| = 1$, άρα $\|X_s\|\,\|Y_t\| \leqslant 1$ για όλα τα s, t. Θέτουμε

$$M = \sup_s \|X_s\|, \quad X'_s = \frac{X_s}{M}, \quad Y'_t = MY_t.$$

Έπεται ότι $\|X'_s\|, \|Y'_t\| \leqslant 1$ για όλα τα s, t. Αν το $s_0 \in S$ είναι τέτοιο ώστε $\|X_{s_0}\| = M$, τότε από την $\|X_{s_0}\|\|Y_t\| \leqslant 1$ βλέπουμε ότι $\|Y_t\| \leqslant \frac{1}{M}$ για όλα τα t.

Έστω e_1, e_2 δύο διανύσματα του $\mathcal{H}$, νόρμας 1, κάθετα μεταξύ τους. Θέτουμε $X''_s = X'_s + \phi(s)e_1$ και $Y''_t = Y'_t + \psi(t)e_2$, όπου $\phi(s) = (1 - \|X'_s\|^2)^{1/2}$ και $\psi(t) = (1 - \|Y'_t\|^2)^{1/2}$. Τότε, $F(s,t) = \langle X''_s, Y''_t\rangle$ και $\|X''_s\| = \|Y''_t\| = 1$. Συνεπώς, $\|F\|_* \leqslant 1$. □

Πρόταση 4.3.2. *Έστω $F \in \mathcal{E}(S,T)$ με $\|F\|_* < 1$. Τότε, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $s \mapsto X_s$, $t \mapsto Y_t$ από τους S, T αντίστοιχα σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, τέτοιες ώστε*

$$F(s,t) = \langle X_s, Y_t\rangle \quad \textit{και} \quad \|X_s\| = \|Y_t\| = 1.$$

Απόδειξη. Έχουμε $F(s,t) = \langle X_s, Y_t\rangle$ με $\|X_s\| = \|Y_t\| = \rho \leqslant 1$, και μπορούμε να εφαρμόσουμε την προηγούμενη πρόταση. □

Ισχυρισμός. *Ο $\mathcal{E}(S,T)$ είναι πλήρης με τη νόρμα $\|\cdot\|_*$.*

Απόδειξη. Έστω $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία στον $\mathcal{E}(S,T)$, τέτοια ώστε $\|F_N\|_* < 2^{-n}$. Ψάχνουμε για μια $F \in \mathcal{E}(S,T)$ τέτοια ώστε

$$\|F_0 + \cdots + F_n - F\|_* \to 0$$

όταν $n \to \infty$. Για κάθε n έχουμε

$$F_n(s,t) = \frac{1}{2^n}\langle X^n_s, Y^n_t\rangle,$$

όπου $s \mapsto X^n_s$, $t \mapsto Y^n_t$ είναι συνεχείς συναρτήσεις στους S, T αντίστοιχα με τιμές σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}_n$, και $\|X^n_s\|, \|Y^n_t\| \leqslant 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλοι οι χώροι $\mathcal{H}_n$ είναι ανά δύο ορθογώνιοι υπόχωροι ενός χώρου Hilbert. Θέτουμε

$$X_s = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} X^n_s, \qquad Y_t = \sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n/2} Y^n_t.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι οι X_s, Y_t είναι συνεχείς συναρτήσεις των s, t αντίστοιχα. Θέτουμε $F(s,t) = \langle X_s, Y_t\rangle$. Τότε, $F \in \mathcal{E}(S,T)$ και

$$F - (F_0 + \cdots + F_n) = \Big\langle \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k/2} X^k_s, \sum_{k=n+1}^{\infty} 2^{-k/2} Y^k_t \Big\rangle,$$

άρα

$$\|F - (F_0 + \cdots + F_n)\|_* \leqslant \sup_s \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} X^k_s \Big\| \sup_t \Big\| \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k/2} Y^k_t \Big\| \leqslant \frac{1}{2^n}.$$

□

Θεώρημα 4.3.3. *Ισχύει η ισότητα $\mathcal{E}(S,T) = \mathcal{C}(S) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(T)$ και η νόρμα $\|\cdot\|_*$ είναι ισοδύναμη με αυτήν του τανυστικού γινομένου. Πιο συγκεκριμένα, αν $F \in \mathcal{C}(S)\widehat{\otimes}\mathcal{C}(T)$ τότε*

$$\|F\|_* \leqslant \|F\|_\otimes \leqslant \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})}\|F\|_*.$$

Απόδειξη. Αν $f \in \mathcal{C}(S), g \in \mathcal{C}(T)$ τότε $f(s)g(t) \in \mathcal{E}(S,T)$ και

$$\|f(s)g(t)\|_* \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$$

από την Πρόταση 4.3.1 με $H = \mathbb{R}$. Παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς βλέπουμε ότι $\mathcal{C}(S) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(T) \subset \mathcal{E}(S,T)$ και ότι $\|F\|_* \leqslant \|F\|_\otimes$ για κάθε $F \in \mathcal{C}(S) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(T)$. Για την άλλη ανισότητα, χρησιμοποιούμε το εξής:

Λήμμα 4.3.4. *Έστω $F \in \mathcal{E}(S,T)$ και $a > 0$, τέτοια ώστε $\|F\|_\infty \leqslant \frac{\pi}{2a}$ και $\|\sin(aF)\|_* < 1$. Τότε $\|F\|_\otimes \leqslant \frac{\pi}{2a}$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\sin(aF) \in \mathcal{E}(S,T)$ διότι το $\mathcal{E}(S,T)$ είναι άλγεβρα Banach. Έστω (X,Y) ένα ζεύγος Gaussian τυχαίων μεταβλητών, με $\|X\|_2 = \|Y\|_2 = 1$. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\mathbb{E}[\mathrm{sign}X \cdot \mathrm{sign}Y] = \frac{2}{\pi}\arcsin \mathbb{E}[XY].$$

Αφού $\|\sin(aF)\|_* < 1$, από την Πρόταση 4.3.2 παίρνουμε

$$\sin(aF(s,t)) = \langle X_s, Y_t \rangle,$$

όπου οι X_s, Y_t είναι συνεχείς συναρτήσεις των s,t με τιμές σε έναν χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, και $\|X_s\| = \|Y_t\| = 1$. Είναι φανερό ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο H είναι ένας χώρος Gaussian τυχαίων μεταβλητών σε κάποιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{B}, \mathbb{P})$. Από την προηγούμενη παρατήρηση προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}[\mathrm{sign}X_s, \mathrm{sign}Y_t] = \frac{2}{\pi}\arcsin \mathbb{E}[X_sY_t] = \frac{2a}{\pi}F(s,t).$$

Συνεπώς,

$$F(s,t) = \frac{\pi}{2a}\int_\Omega \mathrm{sign}X_s(\omega)\mathrm{sign}Y_t(\omega)\mathbb{P}(d\omega).$$

Αυτή η σχέση δείχνει αμέσως ότι αν S', T' είναι πεπερασμένα υποσύνολα των S,T τότε

$$\|F(s,t)\|_{\mathcal{C}(S')\otimes\mathcal{C}(T')} \leqslant \frac{\pi}{2a}.$$

Το λήμμα έπεται από την Πρόταση 4.2.1. □

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 4.3.3. Έστω τώρα $F \in \mathcal{E}(S,T)$. Τότε

$$\|\sin(aF)\|_* = \Big\| \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{(aF)^{2n+1}}{(2n+1)!} \Big\|_* \leqslant \sinh(a\|F\|_*),$$

διότι η $\mathcal{E}(S,T)$ είναι άλγεβρα Banach. Θέτουμε

$$a = \frac{\log(1+\sqrt{2}) - \epsilon}{\|F\|_*}$$

για $0 < \epsilon < \log(1+\sqrt{2})$. Τότε $\sinh(a\|F\|_*) < 1$, οπότε $\|\sin(aF)\|_* < 1$, και από το Λήμμα 4.3.4,

$$\|F\|_{\otimes} \leqslant \frac{\pi}{2a} = \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2}) - \epsilon} \|F\|_*.$$

Αφήνοντας το $\epsilon \to 0$ παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

Πόρισμα 4.3.5.

$$K_G \leqslant \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})}.$$

Απόδειξη. Εχουμε δείξει ότι η $K_G(k)$ είναι η νόρμα της $\langle s,t\rangle$ στον χώρο $\mathcal{C}(S^{k-1}) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(S^{k-1})$. Συνεπώς,

$$K_G(k) \leqslant \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})} \|\langle s,t\rangle\|_*.$$

Όμως, από τον ορισμό της νόρμας $\|\cdot\|_*$ έχουμε $\|\langle s,t\rangle\|_* \leqslant 1$ (στην πραγματικότητα $\|\langle s,t\rangle\|_* = 1$ αφού $\|\cdot\|_* \geqslant \|\cdot\|_\infty$). Παίρνουμε λοιπόν

$$K_G(k) \leqslant \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. □

4.4 Συναρτήσεις θετικού τύπου στη σφαίρα

Θα προσπαθήσουμε τώρα να φράξουμε την $K_G(k) = \|\langle s,t\rangle\|_{\mathcal{C}(S^{k-1})\widehat{\otimes}\mathcal{C}(S^{k-1})}$ χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.4. Για το σκοπό αυτό πρέπει να υπολογίσουμε την $\|\sin(a\langle s,t\rangle)\|_*$ στην $\mathcal{E}(S^{k-1},S^{k-1})$. Συμβολίζουμε με a_0 το supremum των $a \leqslant \pi/2$ που ικανοποιούν την $\|\sin(a\langle s,t\rangle\|_* < 1$ και θα δείξουμε ότι $K_g(k) \leqslant \frac{\pi}{2a}$. Γενικότερα, θα υπολογίσουμε την $\|F(\langle s,t\rangle)\|_*$ για κάθε $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$.

Αν S είναι ένα σύνολο, μια συνάρτηση $F : S \times S \to \mathbb{R}$ θα λέγεται *θετικού τύπου* αν $F(s,t) = F(t,s)$ για κάθε $s,t \in S$ και

$$\sum_{i,j=1}^{n} a_i a_j F(s_i,s_j) \geqslant 0$$

για κάθε $s_1, \dots, s_n \in S$ και $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Η συνθήκη αυτή είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη μιας οικογένειας $(X_s)_{s\in S}$ σε ένα χώρο Hilbert $\mathcal{H}$, τέτοιας ώστε

$$F(s,t) = \langle X_s, X_t \rangle.$$

Πρόταση 4.4.1. *Έστω S συμπαγής χώρος και $F : S \times S \to \mathbb{R}$ θετικού τύπου. Τότε, $F \in \mathcal{C}(S) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(S)$ και $\|F\|_* = \|F\|_\infty$.*

Απόδειξη. Από την $F(s,t) = \langle X_s, X_t \rangle$ έπεται ότι

$$\|X_s - X_{s_0}\|^2 = F(s,s) + F(s_0,s_0) - 2F(s,s_0) \to 0$$

όταν $s \to s_0$, διότι η F είναι συνεχής. Άρα, η X_s είναι συνεχής στο S και $F \in \mathcal{E}(S,S)$. Επίσης,

$$\|F\|_* \leqslant \sup_s \|X_s\| \sup_t \|X_t\| = \sup_s \|X_s\|_2^2 = \sup_s F(s,s) \leqslant \|F\|_\infty,$$

και έτσι έχουμε την ισότητα. □

Πρόταση 4.4.2. *Έστω $F \in \mathcal{C}(S) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(S)$ συμμετρική συνάρτηση, σταθερή στη διαγώνιο του $S \times S$. Τότε, για κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχουν συναρτήσεις G, G' συνεχείς, θετικού τύπου στο $S \times S$, τέτοιες ώστε $F = G - G'$ και $\|F\|_* \geqslant \|G\|_* + \|G'\|_* - \epsilon$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\|F\|_* = 1 - \epsilon$. Από την Πρόταση 4.3.2 παίρνουμε $F(s,t) = \langle X_s, Y_t \rangle$, όπου X_s, Y_t είναι συνεχείς, νόρμας 1, με τιμές σε κάποιον χώρο Hilbert $\mathcal{H}$. Τότε, $\langle X_s, Y_t \rangle = \langle X_t, Y_s \rangle$ και η $\langle X_s, Y_s \rangle$ είναι σταθερή στο S. Θέτουμε

$$G(s,t) = \frac{1}{4}\langle X_s + Y_s, X_t + Y_t \rangle$$

και

$$G'(s,t) = \frac{1}{4}\langle X_s - Y_s, X_t - Y_t \rangle.$$

Οι G, G' είναι συνεχείς, θετικού τύπου στο $S \times S$, και $F(s,t) = G(s,t) - G'(s,t)$. Από την άλλη πλευρά,

$$\|G\|_* = \sup_s \frac{1}{4}\|X_s + Y_s\|^2 = \frac{1}{4}\|X_s + Y_s\|^2$$

για όλα τα s, διότι $\|X_s\|^2 = \|Y_s\|^2 = 1$ και το $\langle X_s, Y_s \rangle$ δεν εξαρτάται από το s. Όμοια,

$$\|G'\|_* = \frac{1}{4}\|X_s - Y_s\|^2.$$

Συνεπώς,

$$\|G\|_* + \|G'\|_* = \frac{1}{2}(\|X_s\|^2 + \|Y_s\|^2) = 1 \leqslant \|F\|_* + \epsilon.$$

□

Πρόταση 4.4.3. *Έστω $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $F(\langle s,t\rangle) \in \mathcal{C}(S^{k-1}) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(S^{k-1})$. Για κάθε $\epsilon > 0$, υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $G, G' : [-1,1] \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε οι $G(\langle s,t\rangle), G'(\langle s,t\rangle)$ να είναι θετικού τύπου στο $S^{k-1} \times S^{k-1}$, $F = G - G'$ και $\|F\|_* \geqslant G(1) + G'(1) - \epsilon$.*

Απόδειξη. Από την προηγούμενη πρόταση, υπάρχουν δύο συναρτήσεις $G_0(s,t), G_1(s,t)$ συνεχείς, θετικού τύπου στο $S^{k-1} \times S^{k-1}$, τέτοιες ώστε

$$F(\langle s,t\rangle) = G_0(s,t) - G_1(s,t)$$

και

$$\|F(\langle s,t\rangle)\|_* \geqslant \|G_0\|_* + \|G_1\|_* - \epsilon = \|G_0\|_\infty + \|G_1\|_\infty - \epsilon.$$

Έστω Γ η ομάδα των στροφών της S^{k-1} και $\mathbb{P}$ το μέτρο Haar στην Γ. Τότε,

$$\begin{aligned} F(\langle s,t\rangle) &= \int_\Gamma F(\langle \sigma s, \sigma t\rangle)\mathbb{P}(d\sigma) \\ &= \int_\Gamma G_0(\langle \sigma s, \sigma t\rangle)\mathbb{P}(d\sigma) - \int_\Gamma G_1(\langle \sigma s, \sigma t\rangle)\mathbb{P}(d\sigma). \end{aligned}$$

Οι συναρτήσεις

$$\int_\Gamma G_i(\langle \sigma s, \sigma t\rangle)\mathbb{P}(d\sigma), \qquad i = 0,1$$

είναι συνεχείς στο $S^{k-1} \times S^{k-1}$ και θετικού τύπου. Επειδή είναι αναλλοίωτες ως προς τις στροφές, γράφονται στη μορφή $G_i'(\langle s,t\rangle)$, όπου G_i' είναι συνεχείς συναρτήσεις από το $[-1,1]$ στο $\mathbb{R}$. Έπεται ότι $G_i'(1) \leqslant \|G_i\|_\infty = \|G_i\|_*$, άρα $\|F\|_* \geqslant G_0(1) + G_1(1) - \epsilon$. □

Σημείωση. Πρέπει εδώ να σημειώσουμε ότι αν η $G(\langle s,t\rangle)$ είναι θετικού τύπου στο $S^{k-1} \times S^{k-1}$ τότε $\|G(\langle s,t\rangle)\|_* = \|G\|_\infty = G(1)$, διότι

$$\|G\|_\infty \leqslant \|G(\langle s,t\rangle)\|_* = \sup_s G(\langle s,t\rangle) = G(1) \leqslant \|G\|_\infty.$$

Υπενθυμίζουμε τώρα κάποια αποτελέσματα για τη μοναδιαία σφαίρα S^{k-1} του $\mathbb{R}^k$. Έστω σ το μέτρο πιθανότητας στην S^{k-1} που είναι αναλλοίωτο ως προς τις στροφές. Συμβολίζουμε με H_n το χώρο των πολυωνύμων με k μεταβλητές, τα οποία είναι ομογενή βαθμού n και αρμονικά στον $\mathbb{R}^k$. Ο H_n έχει διάσταση

$$N(n) = \frac{(k+2n-2)(k+n-3)!}{n!(k-2)!}$$

και ισχύει η διασπαση

$$L^2(S^{k-1}, \sigma) = H_0 \otimes H_1 \otimes \cdots \otimes H_n \otimes \cdots .$$

Έστω $\Delta_{n,j}(s)$, $1 \leqslant j \leqslant N(n)$, μια ορθογώνια βάση του H_n. Τότε, η

$$\sum_{j=1}^{N(n)} \Delta_{n,j}(s)\Delta_{n,j}(t)$$

είναι μια συνάρτηση στο $S^{k-1} \times S^{k-1}$ που εξαρτάται από το $\langle s,t\rangle$. Γράφεται λοιπόν στη μορφή $P_n(\langle s,t\rangle)$, όπου το $P_n(x)$ είναι πολυώνυμο βαθμού n μιας μεταβλητής. Είναι φανερό από τον ορισμό ότι η $P_n(\langle s,t\rangle)$ είναι θετικού τύπου στο $S^{k-1} \times S^{k-1}$. Επίσης, $|P_n(x)| \leqslant P_n(1)$ για κάθε $x \in [-1,1]$.

Στο $[-1,1]$, ορίζουμε το εξής μέτρο πιθανότητας:

$$\pi_k(dx) = \frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{k-1}{2}\right)}(1-x^2)^{\frac{k-3}{2}}dx.$$

Για κάθε συνεχή συνάρτηση $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{-1}^{1} F(x)\pi_k(dx) = \int_{S^{k-1}} F(\langle s,t\rangle)\sigma(ds)$$

(σημειώνουμε ότι το δεξιό μέλος δεν εξαρτάται από το t, διότι το σ είναι αναλλοίωτο ως προς τις στροφές).

Η ακολουθία $\{P_n(x)\}_{n\geqslant 0}$ είναι ένα πλήρες ορθογώνιο σύστημα του $L^2([-1,1],\pi_k)$ και έχουμε τη γεννήτρια συνάρτηση

$$\sum_{n=0}^{\infty} r^n P_n(x) = (1-r^2)(1-2rx+r^2)^{-\frac{k}{2}}.$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι το $P_n(x)$ είναι το γινόμενο του πολυωνύμου

$$(-1)^n(1-x^2)^{-a}(\frac{d^n}{dx^n})(1-x^2)^{n+a}$$

με μια θετική σταθερά, όπου $a = \frac{k-3}{2}$.

Θεώρημα 4.4.4. *Μια συνεχής συνάρτηση $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ έχει την ιδιότητα ότι η $F(\langle s,t\rangle)$ είναι θετικού τύπου στο $S^{k-1} \times S^{k-1}$ αν και μόνο αν*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

για κάποιους $a_n \geqslant 0$ με

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(1) < \infty.$$

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η συνθήκη είναι ικανή προκύπτει άμεσα. Για το αναγκαίο, γράφουμε

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x),$$

θεωρούμε δηλαδή την διάσπαση της F στον $L^2([-1,1],\pi_k)$. Ο a_n έχει το ίδιο πρόσημο με το

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} F(x)P_n(x)\pi_k(dx) &= \int_{S^{k-1}\times S^{k-1}} F(\langle s,t\rangle)P_n(\langle s,t\rangle)\sigma(ds)\sigma(dt) \\ &= \sum_{j=1}^{N(n)} \int_{S^{k-1}\times S^{k-1}} F(\langle s,t\rangle)\Delta_{n,j}(s)\Delta_{n,j}(t)\sigma(ds)\sigma(dt),\end{aligned}$$

διότι η $F(\langle s,t\rangle)$ είναι θετικού τύπου στο $S^{k-1}\times S^{k-1}$. Συνεπώς, $a_n \geqslant 0$ για κάθε n.

Από τη σύγκλιση της σειράς στον L^2 έπεται ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών n_p τέτοια ώστε

$$\sum_{n=0}^{n_p} a_n P_n(x) \to F(x)$$

σχεδόν παντού στο $[-1,1]$. Αφήνοντας το x να πάει στο 1 βλέπουμε ότι

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(1) < \infty.$$

□

Θεώρημα 4.4.5. *Έστω F συνεχής συνάρτηση στο $[-1,1]$. Τότε, η $F(\langle s,t\rangle)$ ανήκει στον $\mathcal{C}(S^{k-1})\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{C}(S^{k-1})$ αν και μόνο αν*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x)$$

για κάποιους $a_n \in \mathbb{R}$ με

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n P_n(1)| < \infty.$$

Τότε,

$$\|F(\langle s,t\rangle)\|_* = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n P_n(1)| < \infty.$$

Απόδειξη. Το Θεώρημα προκύπτει άμεσα από το προηγούμενο θεώρημα και την Πρόταση 4.4.3. □

Σημείωση. Σε αυτό το θεώρημα μπορούμε να πάρουμε οποιαδήποτε ακολουθία πολυωνύμων που να είναι ορθογώνια στο $[-1,1]$ ως προς το μέτρο $(1-x^2)^{(k-3)/2}dx$, με το P_n να έχει βαθμό n. Ειδικότερα, το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν στη θέση των P_n χρησιμοποιήσουμε τα $\lambda_n P_n$ για κάποιους $\lambda_n \neq 0$.

Πρόταση 4.4.6. *Έστω $F \in L^2([-1,1],\pi_k)$, $F = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n$. Τότε, αν $|r|<1$ έχουμε*

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n P_n(1) = (1-r^2)\int_{-1}^{1} F(x)(1-2rx+r^2)^{-k/2}\pi_k(dx).$$

Απόδειξη. Αρκεί να επαληθεύσουμε το ζητούμενο για την $F = P_n$. Το δεξιό μέλος ισούται με

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1} P_n(x)\Big[\sum_{m=0}^{\infty} r^m P_m(x)\Big]\pi_k(dx) &= r^n \int_{-1}^{1} P_n^2(x)\pi_k(dx)\\ &= r^n \int_{S^{k-1}} P_n^2\langle s,u\rangle\sigma(du) = r^n P_n(1).\end{aligned}$$

□

Πρόταση 4.4.7. *Έστω F μια συνεχής και περιττή πραγματική συνάρτηση στο $[-1,1]$ με $F(\langle s,t\rangle) \in \mathcal{C}(S^{k-1})\,\widehat{\otimes}\,\mathcal{C}(S^{k-1})$. Γράφουμε*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{2n+1}P_{2n+1}(x).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}&i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1}P_{2n+1}(1)\\ &\qquad = 2^{1-k/2}\frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\frac{k-1}{2})}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-1}^{1} F(x)(1-x^2)^{(k-3)/2}(\epsilon-ix)^{-k/2}dx.\end{aligned}$$

Απόδειξη. Το πολυώνυμο P_n είναι περιττό αν και μόνο αν ο n είναι περιττός. Άρα, η διάσπαση της F δεν περιέχει άρτιους όρους. Από την προηγούμενη πρόταση παίρνουμε

$$i\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1}P_{2n+1}(1) = \lim_{r\to i}(1-r^2)\int_{-1}^{1} F(x)(1-2rx+r^2)^{-k/2}\pi_k(dx),$$

που δίνει το αποτέλεσμα που θέλαμε. □

Θεωρούμε την $F(x) = x^{2n+1}$ και υπολογίζουμε ακριβώς το δεξιό μέλος. Βρίσκουμε

$$\begin{aligned} 2^{1-k/2}\frac{\Gamma(\frac{k}{2})}{\sqrt{\pi}\Gamma(\frac{k-1}{2})}\lim_{\epsilon\to 0}\int_{-1}^{1}(1-x^2)^{(k-3)/2}(\epsilon - ix)^{-k/2}x^{2n+1}dx \\ = i(-1)^n\frac{(k-4)(k-8)\cdots(k-4n)}{(k+2)(k+6)\cdots(k+4n-2)} \end{aligned}$$

για $n \geqslant 1$, ή απλά i για $n = 0$. Άμεσο συμπέρασμα είναι το εξής:

Πρόταση 4.4.8. *Έστω $F : [-1,1] \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε*

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\gamma_{2n+1}x^{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}P_{2n+1}(x)$$

με

$$\sum_{n=0}^{\infty}|\gamma_{2n+1}| < \infty.$$

Τότε,

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1}P_{2n+1}(1) = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n b_{2n+1}A_{2n+1},$$

όπου $A_1 = 1$ και

$$A_{2n+1} = \frac{(k-4)(k-8)\cdots(k-4n)}{(k+2)(k+6)\cdots(k+4n-2)}.$$

Ειδικότερα, για $k = 4$, έχουμε

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_{2n+1}P_{2n+1}(1) = \gamma_1.$$

Θεωρούμε τώρα την $F(x) = \sin(ax)$. Γράφουμε

$$\sin(ax) = \sum_{n=0}^{\infty}a_{2n+1}P_{2n+1}(x),$$

όπου a_{2n+1} είναι το πρόσημο του

$$-\int_{-1}^{1}\sin(ax)P_{2n+1}(x)(1-x^2)^{\delta}dx,$$

και $\delta = (k-3)/2$, δηλαδή το πρόσημο του

$$\int_{-1}^{1}\sin(ax)\frac{d^{2n+1}}{dx^{2n+1}}(1-x^2)^{2n+1+\delta}dx.$$

Ολοκληρώνοντας $2n+1$ φορές κατά παράγοντες, βρίσκουμε το ολοκλήρωμα

$$(-1)^n a^{2n+1} \int_{-1}^{1} \cos(ax)(1-x^2)^{\delta} dx.$$

Αφού $0 \leqslant a \leqslant \pi/2$, έχουμε $\cos(ax) \geqslant 0$, άρα $(-1)^n a_{2n+1} \geqslant 0$. Συνεπώς,

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_{2n+1} P_{2n+1}(1) = \sum_{n=0}^{\infty} |a_{2n+1} P_{2n+1}(1)| = \| \sin(a\langle s,t\rangle)\|_*.$$

Αυτό δείχνει το εξής:

Πρόταση 4.4.9. *Αν $0 \leqslant a \leqslant \pi/2$ τότε η νόρμα $\| \sin(a\langle s,t\rangle)\|_*$ στο χώρο $\mathcal{C}(S^{k-1}) \widehat{\otimes} \mathcal{C}(S^{k-1})$ ισούται με*

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_{2n+1}}{(2n+1)!} a^{2n+1}.$$

Ειδικότερα, για $k=4$ έχουμε

$$\| \sin(a\langle s,t\rangle)\|_* = a$$

και για $k=3$ έχουμε

$$\| \sin(a\langle s,t\rangle)\|_* = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!(4n+1)}.$$

Τώρα, επιλέγουμε a τέτοιον ώστε $\| \sin(a\langle s,t\rangle)\|_* = 1$, και όπως έχουμε δει,

$$K_G(k) \leqslant \frac{\pi}{2a}.$$

Αυτό μας δίνει ένα άνω φράγμα για την $K_G(k)$ για κάθε $k \geqslant 2$. Ειδικότερα, $K_G(4) \leqslant \pi/2$ και $K_G(3) < 1,517$.

Κεφάλαιο 5

Η σταθερά του Krivine δεν είναι βέλτιστη

5.1 Η εικασία του Konig

Η πεποίθηση ότι το επιχείρημα του Krivine προσδιόριζε την ακριβή τιμή της σταθεράς K_G οδήγησε στην προσπάθεια να βρεθούν πίνακες (a_{ij}) οι οποίοι να υλοποιούν αυτή τη σταθερά. Μετά από δουλειά των Haagerup, Tomczak-Jaegermann και Konig, το 2000 ο Konig διατύπωσε στο [17] μια σαφή ενδιάμεση εικασία σχετικά με τις συναρτήσεις που μεγιστοποιούν έναν oscillatory ολοκληρωτικό τελεστή, η οποία θα είχε ως συνέπεια την εικασία του Krivine.

Ο Konig ξεκινάει από μια αναδιατύπωση της ανισότητας του Grothendieck μέσω ολοκληρωτικών τελεστών. Έστω (Ω,μ) ένας χώρος μέτρου και έστω $K\in L_1(\Omega\times\Omega,\mu\times\mu)$ ένας πυρήνας. Θεωρούμε τον ολοκληρωτικό τελεστή $T_K : L_\infty(\Omega,\mu)\to L_1(\Omega,\mu)$ που επάγεται από τον K:

$$T_Kf(x) := \int_\Omega f(y)K(x,y)\,d\mu(y).$$

Η ανισότητα του Grothendieck ισχυρίζεται ότι για κάθε ζεύγος $f,g\in L_\infty(\Omega,\mu;\ell_2)$ φραγμένων μετρήσιμων συναρτήσεων με τιμές σε κάποιον χώρο Hilbert,

$$\tag{5.1.1} \begin{aligned}&\int_\Omega\int_\Omega K(x,y)\langle f(x),g(y)\rangle\,d\mu(x)\,d\mu(y)\\ &\qquad\leqslant K_G\|T_K\|_{L_\infty(\Omega,\mu)\to L_1(\Omega,\mu)}\|g\|_{L_\infty(\Omega,\mu;\ell_2)}\|f\|_{L_\infty(\Omega,\mu;\ell_2)}.\end{aligned}$$

Ξεκινώντας από αδημοσίευτους υπολογισμούς του Haagerup, ο Konig ισχυρίζεται ότι η υπόθεση ότι $K_G=\pi/(2\log(1+\sqrt{2}))$ οδηγεί στην εικασία ότι ο πυρήνας $K:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$

που ορίζεται από την

$$K(x,y) := \exp\left(-\frac{\|x\|_2^2+\|y\|_2^2}{2}\right)\sin(\langle x,y\rangle) \tag{5.1.2}$$

θα έπρεπε να είναι ασυμπτωτικά (δηλαδή όταν $n\to\infty$) βέλτιστος για την ανισότητα του Grothendieck. Θεωρώντας την διγραμμική μορφή $B_K : L_\infty(\mathbb{R}^n)\times L_\infty(\mathbb{R}^n)\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$B_K(f,g) := \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(y)K(x,y)\,dx\,dy \tag{5.1.3}$$

και αντιστοιχεί στον K, ο Konig διατυπώνει την ακόλουθη εικασία:

Εικασία 5.1.1 (Konig). *Έστω $f_0 : \mathbb{R}^n\to\{-1,1\}$ η συνάρτηση με $f_0(x_1,\dots,x_n) = \mathrm{sign}(x_1)$. Τότε,*

$$B_K(f,g)\leqslant B_K(f_0,f_0)$$

για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε ζεύγος μετρήσιμων συναρτήσεων $f,g:\mathbb{R}^n\to\{-1,1\}$.

Στην ίδια εργασία ο Konig αποδεικνύει το εξής αποτέλεσμα (που είναι σε συνεργασία με την Tomczak-Jaegermann):

Πρόταση 5.1.2 (Konig-Tomczak-Jaegermann). *Αν η Εικασία 5.1.1 αληθεύει τότε*

$$K_G = \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την (5.1.1) με $\Omega=\mathbb{R}^n$ και τον πυρήνα K που ορίστηκε στην (5.1.2). Αν $f(x)=g(x)=\frac{x}{\|x\|_2}$ τότε, υποθέτοντας την Εικασία 5.1.1 έχουμε

$$\begin{aligned}
K_G &\geqslant \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\left\langle \frac{x}{\|x\|_2},\frac{y}{\|y\|_2}\right\rangle dx\,dy}{\|T_K : L_\infty(\mathbb{R}^n)\to L_1(\mathbb{R}^n)\|}\\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\left\langle \frac{x}{\|x\|_2},\frac{y}{\|y\|_2}\right\rangle dx\,dy}{\int_{\mathbb{R}^n}\left|\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\mathrm{sign}(y_1)\,dy\right|\,dx}\\
&= \frac{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\left\langle \frac{x}{\|x\|_2},\frac{y}{\|y\|_2}\right\rangle dx\,dy}{\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} K(x,y)\mathrm{sign}(y_1)\mathrm{sign}(x_1)\,dy\,dx} =: \frac{I_n}{J_n}.
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι η I_n/J_n είναι αύξουσα ακολουθία και

$$\frac{I_n}{J_n}\to\frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})}.$$

Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες γράφουμε τον αριθμητή I_n στη μορφή

$$I_n = \int_0^\infty \int_0^\infty (st)^{n-1} e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} \left(\int_{S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} \sin(st\langle u,v\rangle)\, \langle u,v\rangle\, su\, dv \right) ds\, dt. \tag{5.1.4}$$

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\int_{S^{n-1}} \sin(r\langle u,v\rangle)\, \langle u,v\rangle\, dv = 2(n-1)\omega_{n-1} \int_0^1 \sin(rt)t(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt.$$

Θέτοντας $t = \cos\theta$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sin(rt)t(1-t^2)^{\frac{n-3}{2}} dt &= \int_0^{\pi/2} \sin(r\cos\theta)(\cos\theta)(\sin\theta)^{n-2} d\theta \\ &= \frac{r}{n-1} \int_0^{\pi/2} \cos(r\cos\theta)(\sin\theta)^n d\theta \\ &= \frac{r}{n-1} \frac{\sqrt{\pi}}{2} \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) \left(\frac{2}{r}\right)^{n/2} J_{n/2}(r), \end{aligned}$$

όπου $J_{n/2}$ είναι η συνάρτηση Bessel τάξης $n/2$. Από αυτή τη σχέση, την (5.1.4) και την

$$(n\omega_n)((n-1)\omega_{n-1}) = \frac{4\pi^{n-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} I_n &= c_n \int_0^\infty \int_0^\infty (st)^{n/2} J_{n/2}(st) e^{-\frac{s^2+t^2}{2}} ds\, dt \\ &= c_n \int_0^\infty \left(\int_0^\infty J_{n/2}(u) u^{n/2} e^{-\frac{u^2}{2t^2}} du \right) e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{dt}{t}, \end{aligned}$$

όπου $c_n = 2^{\frac{n}{2}+1}\pi^n/\Gamma(n/2)$. Είναι γνωστό ότι το εσωτερικό ολοκλήρωμα ισούται με την τροποποιημένη υπεργεωμετρική συνάρτηση

$$d_n t^{n+1} {}_1F_1\left(\frac{n+1}{2}; \frac{n}{2}+1; -\frac{t^2}{2}\right), \qquad d_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\sqrt{2}\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}.$$

Τελικά, έχουμε

$$\begin{aligned} I_n &= c_n d_n \int_0^\infty {}_1F_1\left(\frac{n+1}{2}; \frac{n}{2}+1; -\frac{t^2}{2}\right) t^n e^{-\frac{t^2}{2}} dt \\ &= c_n d_n 2^{\frac{n-1}{2}} \int_0^\infty {}_1F_1\left(\frac{n+1}{2}; \frac{n}{2}+1; -u\right) u^{\frac{n-1}{2}} e^{-u} du. \end{aligned}$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right) {}_2F_1\left(\frac{n+1}{2}; \frac{n+1}{2}; \frac{n}{2}+1; -1\right),$$

και χρησιμοποιώντας τον τύπο μετασχηματισμού

$$_2F_1(\alpha;\beta;\gamma;z) = (1-z)^{\gamma-(\alpha+\beta)}{}_2F_1(\gamma-\alpha;\gamma-\beta;\gamma;z)$$

για τις υπεργεωμετρικές συναρτήσεις βλέπουμε ότι η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{n}{2}+1;-1\right).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} I_n &= \frac{c_n d_n}{\sqrt{2}}\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right){}_2F_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{n}{2}+1;-1\right) \\ &= 2^{n/2}\pi^n \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)^2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{}_2F_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{n}{2}+1;-1\right). \end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Για να υπολογίσουμε το ολοκλήρωμα J_n γράφουμε τα $x, y \in \mathbb{R}^n$ στη μορφή $x = (x_1, x')$ και $y = (y_1, y') \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^{n-1}$, οπότε

$$\langle x, y\rangle = x_1y_1 + \langle x', y'\rangle.$$

Τότε,

$$\sin(\langle x, y\rangle) = \sin(x_1y_1)\cos(\langle x', y'\rangle) + \cos(x_1y_1)\sin(\langle x', y'\rangle).$$

Αφού η συνάρτηση $\mathrm{sign}(y_1)\cos(x_1y_1)$ είναι περιττή ως προς y_1, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}} \cos(x_1y_1)\mathrm{sign}(y_1)e^{-fracy_1^2 2}dy_1 = 0.$$

Άρα,

$$\begin{aligned} J_n = &\left(\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \sin(x_1y_1)\mathrm{sign}(x_1y_1)e^{-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}}dx_1\,dy_1\right) \\ &\times\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \cos(\langle x', y'\rangle)e^{-\frac{\|x'\|_2^2+\|y'\|_2^2}{2}}dx'\,dy'\right). \end{aligned}$$

Η συνάρτηση $e^{-\|y'\|_2^2/2}$ είναι πολλαπλάσιο σταθερού σημείου του μετασχηματισμού Fourier στον $\mathbb{R}^n$, και πιο συγκεκριμένα το δεύτερο ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$(2\pi)^{\frac{n-1}{2}}\int_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-\frac{\|x'\|_2^2}{2}}dx' = 2^{\frac{n-1}{2}}\pi^{n-1}.$$

Έπεται ότι

$$J_n = 2^{\frac{n+3}{2}}\pi^{n-1}\int_0^\infty\int_0^\infty \sin(x_1y_1)e^{-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}}dx_1\,dy_1.$$

Χρησιμοποιώντας πάλι πολικές συντεταγμένες, $x_1 = r\cos\varphi$, $y_1 = r\sin\varphi$, θέτοντας $u = r^2/2$ και $\psi = 2\varphi$, με διπλή ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\begin{aligned} J_n &= 2^{\frac{n+3}{2}}\pi^{-1}\int_0^{\pi/2}\left(\int_0^\infty \sin(u\sin\psi)e^{-u}du\right)d\psi \\ &= 2^{\frac{n+3}{2}}\pi^{n-1}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin\psi}{1+\sin^2\psi}\,d\psi. \end{aligned}$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $v = \tan^2(\psi/2)$ καταλήγουμε στην

$$J_n = 2^{n+52}\pi^{n-1}\int_0^1 \frac{dv}{1+6v+v^2} = 2^{\frac{n}{2}+1}\pi^{n-1}\log(1+\sqrt{2}). \tag{5.1.6}$$

Υποθέτοντας την Εικασία 5.1.1 έχουμε $K_G \geqslant I_n/J_n$, άρα οι (5.1.5) και (5.1.6) μας δίνουν

$$K_G \geqslant \frac{I_n}{J_n} = \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})}\,\frac{\Gamma^2\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}\,{}_2F_1\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2};\frac{n}{2}+1;-1\right),$$

το οποίο τείνει στο $\pi/(2\log(1+\sqrt{2}))$ όταν $n \to \infty$. Αυτό αποδεικνύει ότι αν η Εικασία 5.1.1 ισχύει τότε η σταθερά του Krivine είναι βέλτιστη. □

Η Πρόταση 5.1.2 δείχνει ότι η Εικασία 5.1.1 είναι συμβατή με τη δουλειά του Haagerup και την εικασία του Krivine. Επίσης, ο Konig αναφέρει ότι σε συνεργασία με την Tomczak-Jaegermann έχει επαληθεύσει την Εικασία 5.1.1 για $n = 1$.

Θεώρημα 5.1.3. *Για κάθε ζεύγος Lebesgue μετρήσιμων συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R} \to \{-1, 1\}$ ισχύει*

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x)g(y)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\sin(xy)\,dx\,dy \\ &\qquad\leqslant \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} \mathrm{sign}(x)\,\mathrm{sign}(y)\exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right)\sin(xy)\,dx\,dy = 2\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2}). \end{aligned} \tag{5.1.7}$$

Επιπλέον, ισότητα στην (5.1.7) έχουμε αν και μόνο αν $f(x) = g(x) = \mathrm{sign}(x)$ σχεδόν παντού ή $f(x) = g(x) = -\mathrm{sign}(x)$ σχεδόν παντού.

Στην τελευταία παράγραφο αυτού του Κεφαλαίου περιγράφουμε μια απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3. Το βασικό αποτέλεσμα του Κεφαλαίου ισχυρίζεται ότι η Εικασία 5.1.1 δεν ισχύει αν $n \geqslant 2$. Οι Braverman, K. Makarychev, Y. Makarychev και Naor ξεκινώντας από αυτό το σημείο απέδειξαν ότι η σταθερά του Krivine δεν είναι βέλτιστη. Πιο συγκεκριμένα, απέδειξαν το εξής.

Θεώρημα 5.1.4 (Braverman-Makarychev-Makarychev-Naor). *Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ τέτοιος ώστε*

$$K_G < \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})} - \varepsilon_0.$$

Όπως είπαμε, η απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.4 ξεκινάει με την απόδειξη του ισχυρισμού ότι η εικασία του Konig δεν αληθεύει όταν $n = 2$. Για να πετύχει κανείς ένα καλύτερο άνω φράγμα για την σταθερά του Grothendieck χρειάζεται, μετά από αυτό, να κάνει αρκετή πρόσθετη δουλειά. Τα δύο αυτά στάδια περιγράφονται στις επόμενες δύο παραγράφους.

5.2 Αντιπαράδειγμα για την εικασία του Konig

Θα χρειαστούμε διάφορες ιδιότητες των πολυωνύμων Hermite, για τις οποίες παραπέμπουμε στο βιβλίο [3] των Andrews, Askey και Roy. Θεωρούμε την ακολουθία $\{h_m\}_{m=0}^{\infty}$ των πολυωνύμων Hermite $h_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τα οποία κανονικοποιούμε έτσι ώστε να σχηματίζουν ορθοκανονική βάση για το μέτρο Gauss στο $\mathbb{R}$ που έχει πυκνότητα την $x \mapsto e^{-x^2}$. Συγκεκριμένα, έχουμε

$$h_m(x) = \frac{(-1)^m}{\sqrt{2^m m! \sqrt{\pi}}}\, e^{x^2} \frac{d^m}{dx^m}(e^{-x^2}), \tag{5.2.1}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}} h_m(x) h_k(x) e^{-x^2} dx = \delta_{mk}. \tag{5.2.2}$$

Στη συνέχεια θα παίξει ιδιαίτερο ρόλο το πέμπτο πολυώνυμο Hermite h_5 το οποίο ισούται με

$$h_5(x) = \frac{4x^5 - 20x^3 + 15x}{2\sqrt[4]{\pi}\sqrt{15}}.$$

Αρχίζουμε με ένα τεχνικό λήμμα.

Λήμμα 5.2.1. *Ισχύουν οι ταυτότητες*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} h_5(x)^4 dx = \frac{4653}{\sqrt{\pi}} \tag{5.2.3}$$

και

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\Big) h_5(x_1)^2 h_5(y_1)^2 \cos(x_1 y_1) dx_1 dy_1 = 49\sqrt{2}. \tag{5.2.4}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{h_n(x)}{\sqrt{n!}} t^n = \frac{1}{\sqrt[4]{\pi}} \exp\Big(\sqrt{2}tx - \frac{t^2}{2}\Big). \tag{5.2.5}$$

Έπεται ότι για κάθε $x, u_1, u_2, u_3, u_4 \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned}\Big(\sum_{a=0}^{\infty} \frac{h_a(x)}{\sqrt{a!}} u_1^a\Big)\Big(\sum_{b=0}^{\infty} \frac{h_b(x)}{\sqrt{b!}} u_1^b\Big)\Big(\sum_{c=0}^{\infty} \frac{h_c(x)}{\sqrt{c!}} u_1^c\Big)\Big(\sum_{d=0}^{\infty} \frac{h_d(x)}{\sqrt{d!}} u_1^d\Big) \\ = \frac{1}{\pi} \exp\left(\sqrt{2}x(u_1+u_2+u_3+u_4) - \frac{u_1^2+u_2^2+u_3^2+u_4^2}{2}\right).\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $A \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-x^2 + \sqrt{2}Ax\Big) &= e^{A^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\Big(-\Big(x - \frac{A}{\sqrt{2}}\Big)^2\Big)\, dx \\ &= \sqrt{\pi} e^{A^2/2}.\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (5.2.6) με e^{-x^2} και ολοκληρώνοντας ως προς $x \in \mathbb{R}$ παίρνουμε την εξής ταυτότητα:

$$\begin{aligned}\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{\infty}\sum_{d=0}^{\infty} \frac{u_1^a u_2^b u_3^c u_4^d}{\sqrt{a!b!c!d!}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} h_a(x)h_b(x)h_c(x)h_d(x)\, dx = \\ \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp\left(\frac{(u_1+u_2+u_3+u_4)^2 - u_1^2 - u_2^2 - u_3^2 - u_4^2}{2}\right)\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

παίρνοντας υπόψη μας και την (5.2.7). Εξισώνοντας τους συντελεστές του $u_1^5u_2^5u_3^5u_4^5$ στα δύο μέλη της (5.2.8) καταλήγουμε στην

$$\frac{1}{14400} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2/2} h_5(x)^4 dx = \frac{517}{1600\sqrt{\pi}},$$

η οποία μας δίνει την (5.2.3).

Για να αποδείξουμε την (5.2.4), ξεκινώντας από την (5.2.5), βλέπουμε ότι για κάθε $x_1, y_1, u_1, u_2, v_1, v_2 \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{a=0}^{\infty} \frac{h_a(x_1)}{\sqrt{a!}} u_1^a\right)\left(\sum_{b=0}^{\infty} \frac{h_b(x_1)}{\sqrt{b!}} u_2^b\right)\left(\sum_{c=0}^{\infty} \frac{h_c(y_1)}{\sqrt{c!}} v_1^c\right)\left(\sum_{d=0}^{\infty} \frac{h_d(y_1)}{\sqrt{d!}} v_2^d\right) = \\ \frac{1}{\pi} \exp\left(\sqrt{2}x_1(u_1+u_2) + \sqrt{2}y_1(v_1+v_2) - \frac{u_1^2+u_2^2+v_1^2+v_2^2}{2}\right).\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

Σημειώνουμε επίσης την επόμενη ταυτότητα: για κάθε $A, B \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(\sqrt{2}Ax + \sqrt{2}By - \frac{x^2+y^2}{2}\right) \cos(xy) dxdy = \sqrt{2}\pi e^{(A^2+B^2)/2} \cos(AB). \tag{5.2.10}$$

Θα αποδείξουμε την (5.2.10) σε λίγο, αλλά ας υποθέσουμε αρχικά ότι ισχύει και ας δούμε πώς ολοκληρώνεται η απόδειξη της (5.2.4). Αν πολλαπλασιάσουμε την (5.2.9) με $\exp\Big(-\frac{x_1^2+x_2^2}{2}\Big)\cos(x_1y_1)$, και μετά ολοκληρώσουμε ως προς $(x_1,y_1)\in\mathbb{R}^2$, παίρνουμε την εξής ταυτότητα:

$$\begin{aligned}\sum_{a=0}^{\infty}\sum_{b=0}^{\infty}\sum_{c=0}^{\infty}\sum_{d=0}^{\infty}\frac{u_1^au_2^bv_1^cv_2^d}{\sqrt{a!b!c!d!}}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}h_a(x_1)h_b(x_1)h_c(y_1)h_d(y_1)\cos(x_1y_1)dx_1dy_1\\ =\sqrt{2}e^{u_1u_2+v_1v_2}\cos((u_1+u_2)(v_1+v_2)).\end{aligned}\tag{5.2.11}$$

Εξισώνοντας τους συντελεστές του $u_1^5u_2^5v_1^5v_2^5$ στα δύο μέλη της (5.2.11), συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{14400}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\Big)h_5(x_1)^2h_5(y_1)^2\cos(x_1y_1)dx_1dy_1=\frac{49\sqrt{2}}{14400}$$

απ' όπου έπεται η (5.2.4).

Μένει να δείξουμε την (5.2.10). Έστω I το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (5.2.10). Η αλλαγή μεταβλητής $u=x-\sqrt{2}A$ και $v=y-\sqrt{2}B$ δίνει την ακόλουθη ταυτότητα:

$$I=e^{A^2+B^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{u^2+v^2}{2}\Big)\cos((u+\sqrt{2}A)(v+\sqrt{2}B))dudv.\tag{5.2.12}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\cos((u+\sqrt{2}A)(v+\sqrt{2}B))&=\cos(u(v+\sqrt{2}B))\cos(\sqrt{2}A(v+\sqrt{2}B))\\&\quad-\sin(u(v+\sqrt{2}B))\sin(\sqrt{2}A(v+\sqrt{2}B)).\end{aligned}\tag{5.2.13}$$

Αφού $\int_{-\infty}^{\infty}e^{-u^2/2}\sin(u(v+\sqrt{2}B))du=0$, έπεται ότι

$$\begin{aligned}&e^{-A^2-B^2}I\\&=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{u^2+v^2}{2}\Big)\cos(u(v+\sqrt{2}B))\cos(\sqrt{2}A(v+\sqrt{2}B))dudv.\end{aligned}\tag{5.2.14}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για κάθε $x_1\in\mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y_1^2/2}\cos(x_1y_1)dy_1=\sqrt{2\pi}e^{-x_1^2/2},\tag{5.2.15}$$

μπορούμε να γράψουμε την εξίσωση (5.2.14) στη μορφή

$$\begin{aligned}e^{-A^2-B^2}I&=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{v^2+(v+\sqrt{2}B)^2}{2}\Big)\cos(\sqrt{2}A(v+\sqrt{2}B))dv\\&=\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{(\sqrt{2}v+B)^2+B^2}{2}\Big)\cos(\sqrt{2}A(v+\sqrt{2}B))dv.\end{aligned}\tag{5.2.16}$$

Η αλλαγή μεταβλητής $w = \sqrt{2}c + b$ στην (5.2.16) μας δίνει

$$
\begin{aligned}
(5.2.17)\quad e^{-A^2+B^2} I &= \sqrt{\pi} e^{-B^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2} \cos(A(w-B))dw \\
&= \sqrt{\pi} e^{-B^2/2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-w^2/2} (\cos(Aw)\cos(AB) + \sin(Aw)\sin(AB))dw \\
&= \sqrt{2}\pi e^{-(A^2+B^2)/2} \cos(AB).
\end{aligned}
$$

Αυτό αποδεικνύει την (5.2.10), και η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης. □

Για $\eta \in (0,1)$ ορίζουμε $f_\eta : \mathbb{R}^2 \to \{-1,1\}$ ως εξής:

$$
(5.2.18)\qquad f_\eta(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & x_2 \geqslant \eta h_5(x_1), \\ -1 & x_2 < \eta h_5(x_1). \end{cases}
$$

Παρατηρούμε ότι, αφού η h_5 είναι περιττή, το ίδιο ισχύει και για την f_η (σχεδόν παντού). Για $z \in \mathbb{C}$ με $|\mathrm{Re}(z)| < 1$ ορίζουμε

$$
(5.2.19)\quad H_\eta(z) := \frac{1}{2\pi(1-z^2)} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f_\eta(x) f_\eta(y) \exp\left(\frac{-\|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 + 2z\langle x,y\rangle}{1-z^2} \right) dxdy.
$$

Λήμμα 5.2.2. *Η H_η είναι αναλυτική στη λωρίδα*

$$
(5.2.20)\qquad S := \{z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < 1\}
$$

Ακόμη, για όλα τα $a+bi \in S$ έχουμε

$$
(5.2.21)\qquad |H_\eta(a+bi)| \leqslant \frac{\pi((1+a)^2+b^2)((1-a)^2+b^2)}{2(1-a^2)\sqrt{(1-a^2)^2+b^4+2(1+a^2)b^2}}.
$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $a \in (-1,1)$ και $b \in \mathbb{R}$, και γράφουμε $z = a+bi$. Τότε,

$$
\begin{aligned}
&|H_\eta(z)| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi|1-z^2|} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \exp\left(-\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z^2}\right)(\|x\|_2^2 + \|y\|_2^2) + 2\mathrm{Re}\left(\frac{z}{1-z^2}\right)\langle x,y\rangle \right) dxdy \\
&= \frac{1}{2\pi|1-z^2|} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right)\|x+y\|_2^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)\|x-y\|_2^2 \right) dxdy \\
(5.2.22)\ &= \frac{1}{8\pi|1-z^2|} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \exp\left(-\frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1+z}\right)\|u\|_2^2 - \frac{1}{2}\mathrm{Re}\left(\frac{1}{1-z}\right)\|v\|_2^2 \right) dudv \\
&= \frac{1}{8\pi|1-z^2|} \cdot \frac{(2\pi)^2}{\mathrm{Re}(\frac{1}{1-z})\mathrm{Re}(\frac{1}{1+z})} \\
(5.2.23)\ &= \frac{\pi((1+a)^2+b^2)((1-a)^2+b^2)}{2(1-a^2)\sqrt{(1-a^2)^2+b^4+2(1+a^2)b^2}},
\end{aligned}
$$

όπου στην (5.2.22) χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής $x+y=u$ και $x-y=v$, της οποίας η Ιακωβιανή ισούται με $\frac{1}{4}$. Αφού το ολοκλήρωμα που ορίζει την H_η συγκλίνει απόλυτα στην S, ο ισχυρισμός έπεται. □

Λήμμα 5.2.3. *Για κάθε $z \in \mathbb{C}$ με $|\mathrm{Re}(z)| < 1$ έχουμε $H_0(z) = \arcsin(z)$.*

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε το ζητούμενο για $z \in (0,1)$. Γράφοντας $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2) \in \mathbb{R}^2$, έχουμε

(5.2.24)
$$\begin{aligned} H_0(z) &= \left(\frac{1}{2\pi(1-z^2)}\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} \mathrm{sign}(x_2)\mathrm{sign}(y_2)\exp\left(\frac{-x_2^2-y_2^2+2zx_2y_2}{1-z^2}\right)dx_1dy_1\right)\\ &\quad\cdot\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\exp\left(\frac{-x_1^2-y_1^2+2zx_1y_1}{1-z^2}\right)dx_2dy_2\right)\\ &= \frac{1-z^2}{2\pi}\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathrm{sign}(u)\mathrm{sign}(v)e^{-u^2-v^2+2zvu}dudv\right)\left(\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}e^{-(u-zv)^2-(1-z^2)v^2}dudv\right). \end{aligned}$$

Τώρα,

$$\int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}} e^{-(u-zv)^2-(1-z^2)v^2}dudv = \left(\int_{\mathbb{R}}e^{-w^2}dw\right)\left(\int_{\mathbb{R}}e^{-(1-z^2)v^2}dv\right) = \frac{\pi}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{5.2.25}$$

Ορίζουμε

$$\psi(z) = \int_{\mathbb{R}\times\mathbb{R}}\mathrm{sign}(u)\mathrm{sign}(v)e^{-u^2-v^2+2zvu}dudv = 2\int_0^\infty\int_0^\infty e^{-u^2-v^2}(e^{2zuv}-e^{-2zuv})dudv.$$

Χρησιμοποιώντας τις πολικές συντεταγμένες $u = r\cos\theta$ και $v = r\sin\theta$, και μετά κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $r=\sqrt{s}$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \psi(z) &= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty re^{-r^2}(e^{zr^2\sin(2\theta)}-e^{-zr^2\sin(2\theta)})drd\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\int_0^\infty e^{-s}(e^{sz\sin(2\theta)}-e^{-sz\sin(2\theta)})dsd\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{1-z\sin(2\theta)}-\frac{1}{1+z\sin(2\theta)}\right)d\theta\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2z\sin(2\theta)}{1-z^2\sin^2(2\theta)}d\theta. \end{aligned} \tag{5.2.26}$$

Λόγω της ταυτότητας

$$\frac{d}{d\theta}\left(\frac{-1}{\sqrt{1-z^2}}\arcsin\left(\frac{z\cos(2\theta)}{\sqrt{1-z^2\sin^2(2\theta)}}\right)\right) = \frac{2z\sin(2\theta)}{1-z^2\sin^2(2\theta)},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\psi(z) = \frac{2\arcsin(z)}{\sqrt{1-z^2}}. \tag{5.2.27}$$

Το Λήμμα τώρα προκύπτει αν αντικαταστήσουμε τις (5.2.25) και (5.2.27) στην (5.2.24). □

Θεώρημα 5.2.4. *Υπάρχει $\eta_0 > 0$ τέτοιο ώστε για όλα τα $\eta \in (0, \eta_0)$ να έχουμε*

$$\frac{H_\eta(i)}{i} \in \big(\log\big(1+\sqrt{2}\big).$$

Το Θεώρημα αυτό συνεπάγεται ότι η απάντηση στο πρόβλημα του Konig είναι αρνητική. Πράγματι, από την (5.2.19) έχουμε

$$\frac{H_\eta(i)}{i} = \frac{1}{4\pi}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f_\eta(x)f_\eta(y)\exp\bigg(-\frac{\|x\|_2^2+\|y\|_2^2}{2}\bigg)\sin(\langle x,y\rangle)dxdy = \frac{B_K(f_\eta,f_\eta)}{4\pi}.$$

Αφού $\arcsin(i) = i\log(1+\sqrt{2})$, από το Λήμμα 5.2.3 και από το Θεώρημα 5.2.4 έπεται ότι, για κάθε $\eta \in (0,\eta_0)$ έχουμε $B_K(f_\eta, f_\eta) > B_K(f_0, f_0)$. Αφού $f_0(x_1,x_2) = \mathrm{sign}(x_2)$, έπεται η αρνητική απάντηση στο πρόβλημα του Konig.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.4. Ορίζουμε $\phi(\eta) = 4\pi H_\eta(i)/i$. Το αποτέλεσμα θα προκύψει αν δείξουμε ότι $\phi(\eta) = \phi(0) + 1600\sqrt{2}\eta^4 + O(\eta^6)$ όταν $\eta \to 0$. Για να το δείξουμε αυτό, αφού η ϕ είναι άρτια, αρκεί να δείξουμε ότι $\phi''(0) = 0$ και $\phi''''(0) = 38400\sqrt{2}$.

Αφού η h_5 είναι περιττή, έχουμε

(5.2.28)

$$\begin{aligned}&\phi(\eta)\\ &\quad= 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{\eta h_5(x_1)}^{\infty}\int_{\eta h_5(y_1)}^{\infty}\exp\bigg(-\frac{x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2}{2}\bigg)\sin(x_1y_1+x_2y_2)dx_2dy_2dx_1dy_1.\end{aligned}$$

Ορίζουμε $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ με

(5.2.29)

$$\begin{aligned}&F(u_1,u_2)\\ &\quad= 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{u_1 h_5(x_1)}^{\infty}\int_{u_2 h_5(y_1)}^{\infty}\exp\bigg(-\frac{x_1^2+x_2^2+y_1^2+y_2^2}{2}\bigg)\sin(x_1y_1+x_2y_2)dx_2dy_2dx_1dy_1,\end{aligned}$$

οπότε $\phi(\eta) = F(\eta,\eta)$. Αφού η F είναι συμμετρική, δηλαδή $F(u_1,u_2) = F(u_2,u_1)$, έπεται ότι

(5.2.30) $$\phi''(0) = 2\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}(0,0) + 2\frac{\partial^2 F}{\partial u_1\partial u_2}(0,0)$$

και

(5.2.31) $$\phi''''(0) = 2\frac{\partial^4 F}{\partial u_1^4}(0,0) + 8\frac{\partial^4 F}{\partial u_1\partial u_2^3}(0,0) + 6\frac{\partial^4 F}{\partial u_1^2\partial u_2^2}(0,0).$$

Τώρα,

(5.2.32) $$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial u_1}(u_1,u_2) = -4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{u_2 h_5(y_1)}^{\infty}&\exp\bigg(-\frac{x_1^2+u_1^2h_5(x_1)^2+y_1^2+y_2^2}{2}\bigg)\\ &\times h_5(x_1)\sin(x_1y_1+u_1h_5(x_1)y_2)dy_2dx_1dy_1.\end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την (5.2.32) μέσα στο ολοκλήρωμα ως προς u_1, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial u_1^2}(0,0) &= -4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x_1^2+y_1^2+y_2^2}{2}\Big)h_5(x_1)^2 y_2\cos(x_1y_1)dy_2dx_1dy_1 \\ &= -4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\Big)h_5(x_1)^2\cos(x_1y_1)dx_1dy_1 \\ &= -4\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_1^2}h_5(x_1)^2dx_1 = -4\sqrt{2\pi}.\end{aligned} \tag{5.2.33}$$

Παραγωγίζοντας την (5.2.32) ως προς u_2, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial u_1\partial u_2}(u_1,u_2) &= 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x_1^2+u_1^2h_5(x_1)^2+y_1^2+u_2^2h_5(y_1)^2}{2}\Big) \\ &\quad\cdot h_5(x_1)h_5(y_1)\sin(x_1y_1+u_1u_2h_5(x_1)h_5(x_2))dx_1dy_1.\end{aligned} \tag{5.2.34}$$

Συνεπώς,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1\partial u_2}(0,0) = 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\Big)h_5(x_1)h_5(y_1)\sin(x_1y_1)dx_1dy_1. \tag{5.2.35}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y_1^2/2}h_5(y_1)\sin(x_1y_1)dy_1 = \sqrt{2\pi}e^{-x_1^2/2}h_5(x_1). \tag{5.2.36}$$

Άρα,

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u_1\partial u_2}(0,0) = 4\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_1^2}h_5(x_1)^2dx_1 = 4\sqrt{2\pi}. \tag{5.2.37}$$

Αντικαθιστώντας τις (5.2.33) και (5.2.37) στην (5.2.30), βλέπουμε ότι $\phi''(0)=0$.

Στη συνέχεια θα υπολογίσουμε το $\phi''''(0)$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (5.2.31). Παραγωγίζοντας την (5.2.32) μέσα στο ολοκλήρωμα ως προς u_1 τρεις φορές, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}&\frac{\partial^4 F}{\partial u_1^4}(0,0) \\ &= 12\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{0}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x_1^2+y_1^2+y_2^2}{2}\Big)h_5(x_1)^4\cos(x_1y_1)\Big(y_2+\frac{y_2^3}{3}\Big)dy_2dx_1dy_1 \\ &= 20\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\Big)h_5(x_1)^4\cos(x_1y_1)dx_1dy_1 \\ &= 20\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-x_1^2}h_5(x_1)^4dx_1 = 93060\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{5.2.38}$$

Παραγωγίζοντας την (5.2.34) ως προς u_2 δύο φορές, παίρνουμε την ταυτότητα

$$\begin{aligned}\frac{\partial^4 F}{\partial u_1\partial u_2^3}(0,0) &= -4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\exp\Big(-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\Big)h_5(x_1)^3h_5(x_1)\sin(x_1y_1)dx_1dy_1 \\ &= -4\sqrt{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-y_1^2}h_5(y_1)^4dy_1 = -18612\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{5.2.39}$$

Τέλος, παραγωγίζοντας την (5.2.34) ως προς u_1 και μετά ως προς u_2, βλέπουμε ότι

(5.2.40) $$\frac{\partial^4 F}{\partial u_1^2 \partial u_2^2}(0,0) = 4\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{x_1^2+y_1^2}{2}\right) h_5(x_1)^2 h_5(y_1)\cos(x_1y_1)dx_1dy_1 = 196\sqrt{2}.$$

Συνεπώς,

$$\phi''''(0) = 38400\sqrt{2}$$

□

Παρατήρηση 5.2.5. Όπως είδαμε, το πέμπτο πολυώνυμο Hermite h_5 είναι η σωστή επιλογή για την (5.2.18). Αξίζει τον κόπο να δούμε πώς έφτασαν σε αυτό οι Braverman, Makarychev, Makarychev και Naor. Έφτασαν, όπως γράφουν, σε αυτήν την επιλογή αναζητώντας το απλούστερο δυνατό μέλος μιας γενικής οικογένειας τρόπων με τους οποίους μπορεί κανείς να προσεγγίσει τη συνάρτηση $(x_1, x_2) \mapsto \mathrm{sign}(x_2)$.

Σταθεροποιούμε δύο περιττές συναρτήσεις $\alpha, \beta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και θεωρούμε τα αναπτύγματά τους

$$\alpha(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k h_{2k+1}(x) \quad \text{και} \quad \beta(x) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k h_{2k+1}(x).$$

Για κάθε $\eta > 0$ ορίζουμε $f_\eta, g_\eta : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 1\}$ με

(5.2.41)
$$f_\eta(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & , x_2 \geqslant \eta\alpha(x_1) \\ -1 & , x_2 < \eta\alpha(x_1) \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g_\eta(x_1,x_2) = \begin{cases} 1 & , x_2 \geqslant \eta\beta(x_1) \\ -1 & , x_2 < \eta\beta(x_1) \end{cases}$$

Για $z \in \mathbb{C}$ με $|\mathrm{Re}(z)| < 1$ ορίζουμε

$$H_\eta(z) = \frac{1}{2\pi(1-z^2)}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f_\eta(x)g_\eta(y)\exp\left(\frac{-\|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 + 2z\langle x,y\rangle}{1-z^2}\right) dx\, dy.$$

Η τελική μας επιλογή στην (5.2.19) αντιστοιχεί στο ζεύγος $\alpha = \beta = h_5$.

Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.4, ορίζουμε $\varphi(\eta) = 4\pi H_\eta(i)/i$. Για να δείξουμε ότι $\varphi(\eta) > \varphi(0)$ για αρκετά μικρά $\eta \in (0,1)$, ξεκινάμε υπολογίζοντας την $\varphi''(0)$, η οποία δίνεται από τον παρακάτω τύπο:

(5.2.42) $$\varphi''(0) = -4\sqrt{2\pi}\sum_{k=0}^{\infty}(a_k - (-1)^k b_k)^2 \leqslant 0.$$

Αφού η φ είναι περιττή, όλες οι περιττής τάξης παράγωγοί της μηδενίζονται στο 0, άρα για να μπορέσουμε να δείξουμε ότι $\varphi(\eta) > \varphi(0)$ για αρκετά μικρά $\eta \in (0,1)$, πρέπει αναγκαστικά να ισχύει $\varphi''(0) = 0$. Λόγω της (5.2.42), προκύπτουν οι περιορισμοί

(5.2.43) $$a_k = (-1)^k b_k, \qquad k \geqslant 0$$

για τους συντελεστές στα αναπτύγματα Hermite.

Το καλύτερο λοιπόν που μπορούμε να ελπίζουμε είναι το $\varphi(\eta)$ θα είναι μεγαλύτερο από το $\varphi(0)$ κατά έναν όρο τέταρτης τάξης, και γι' αυτό το σκοπό χρειάζεται να υπολογίσουμε την $\varphi''''(0)$. Αυτό είναι δυνατόν, με τη βοήθεια κάποιων ταυτοτήτων από το [4]. Για κάθε $a, b, c, d, k \geqslant 0$ ορίζουμε

$$L_k(a,b,c,d) := \frac{\sqrt{2(2a+1)!(2b+1)!(2c+1)!(2d+1)!}}{(2k)!(a+b+1-k)!(c+d+1-k)!} \cdot \binom{2k}{a-b+k}\binom{2k}{c-d+k},$$

με τη σύμβαση ότι $L_k(a,b,c,d) = 0$ αν κάποιος από τους αριθμούς που εμφανίζονται στα παραγοντικά ή τους διωνυμικούς συντελεστές είναι αρνητικός. Κάνοντας ένα μακροσκελή υπολογισμό που χρησιμοποιεί αποτελέσματα από το [4] βλέπουμε ότι αν ικανοποιείται ο περιορισμός (5.2.43) τότε

$$\varphi''''(0) = 8 \sum_{\substack{(k,p,q,r,s)\in\mathbb{N}\cup\{0\} \\ p+q+r+s\in 2\mathbb{N}}} a_p a_q a_r a_s L_k(p,q,r,s)(1+3(-1)^{k+r+s}).$$

Αν θέλουμε, για απλότητα, να επιλέξουμε $\alpha = \beta$, η απλούστερη λύση για τους περιορισμούς (5.2.43) προκύπτει αν πάρουμε $\alpha = \beta = h_5$ (η επιλογή $\alpha = \beta = h_1$ δεν δουλεύει: μπορεί να ελέγξει κανείς ότι δίνει $\varphi(\eta) = \varphi(0)$ για κάθε η). Θα μπορούσαμε όμως να επιλέξουμε και $\alpha = -\beta = h_3$.

5.3 Η σταθερά του Krivine δεν είναι βέλτιστη

Θεωρούμε την σταθερά η_0 του Θεωρήματος 5.2.4 και σταθεροποιούμε κάποιο $\eta \in (0, \eta_0)$. Για κάθε $0 \leqslant p \leqslant 1$ ορίζουμε

$$F_p = (1-p)H_0 + pH_\eta,$$

όπου H_η είναι η συνάρτηση που ορίστηκε στην (5.2.19). Συμβολίζουμε τον ανοικτό μοναδιαίο δίσκο του $\mathbb{C}$ με

$$\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}.$$

Θεώρημα 5.3.1. *Υπάρχει $p_0 > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $0 < p < p_0$ να ισχύει $F_p(\mathbb{S}) \supseteq \frac{9}{10}\mathbb{D}$ και η F_p^{-1} να είναι καλά ορισμένη και αναλυτική στο $\frac{9}{10}\mathbb{D}$. Επιπλέον, αν γράψουμε*

$$F_p^{-1}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(p) z^k$$

τότε υπάρχει $\gamma = \gamma_p \in [0, \infty)$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_k(p)|\gamma^k = 1 \tag{5.3.1}$$

και

$$\gamma > \log(1+\sqrt{2}) = 0.88137\ldots \tag{5.3.2}$$

Υποθέτοντας το Θεώρημα 5.3.1 μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.1.4.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.4. Σταθεροποιούμε $0 < p < p_0$ και θεωρούμε τη σταθερά γ του Θεωρήματος 5.3.1. Από την (5.3.1), η $\sum_{k=1}^{\infty} a_k(p)\gamma^k$ συγκλίνει απολύτως, άρα η F_p^{-1} είναι αναλυτική και ορίζεται καλά στο $\gamma\mathbb{D}$. Για αρκετά μικρό p, κάποιοι από τους συντελεστές $\{a_k(p)\}_{k=1}^{\infty}$ είναι αρνητικοί, γιατί ο τρίτος συντελεστής Taylor της $H_0^{-1}(z) = \sin z$ είναι αρνητικός. Συνεπώς, για κάθε $r \in [0,1]$ έχουμε

$$F_p^{-1}(r\gamma) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(p) r^k \gamma^k \in (-1,1) \subseteq \mathbb{S}. \tag{5.3.3}$$

Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert. Ορίζουμε δύο απεικονίσεις

$$L_p, R_p : \mathcal{H} \to \bigoplus_{k=1}^{\infty} \mathcal{H}^{\otimes k} =: \mathcal{K}$$

θέτοντας

$$L_p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{|a_k(p)|}\gamma^{k/2} x^{\otimes k}$$

και

$$R_p(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \operatorname{sign}(a_k(p))\sqrt{|a_k(p)|}\gamma^{k/2} x^{\otimes k}.$$

Από την (5.3.1) βλέπουμε ότι αν $\|x\|_{\mathcal{H}} = 1$ τότε $\|L_p(x)\|_{\mathcal{K}} = \|R_p(x)\|_{\mathcal{K}} = 1$. Επιπλέον, αν $\|x\|_{\mathcal{H}} = \|y\|_{\mathcal{H}} = 1$ τότε, χρησιμοποιώντας και την (5.3.3), έχουμε

$$\langle L_p(x), R_p(x)\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} a_k(p)\gamma^k \langle x,y\rangle^k = F_p^{-1}(\gamma\langle x,y\rangle) \in \mathbb{S}. \tag{5.3.4}$$

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $G : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^2$ να είναι ένας $2 \times N$ τυχαίος πίνακας με συντεταγμένες ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Έστω $g_1, g_2 \in \mathbb{R}^2$ οι πρώτες δύο στήλες του G (δηλαδή, οι g_1, g_2 είναι ανεξάρτητα τυπικά διδιάστατα κανονικά τυχαία διανύσματα). Αν $x, y \in \mathbb{R}^N$ είναι δύο μοναδιαία διανύσματα που ικανοποιούν την $\langle x,y\rangle \in \mathbb{S}$, τότε από το αναλλοίωτο ως προς στροφές παίρνουμε

(5.3.5)

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}\left[f_\eta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Gx\right) f_\eta\left(\frac{1}{\sqrt{2}}Gy\right)\right] = \mathbb{E}\left[f_\eta\left(\frac{g_1}{\sqrt{2}}\right) f_\eta\left(\langle x,y\rangle\frac{g_1}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-\langle x,y\rangle^2}\frac{g_2}{\sqrt{2}}\right)\right] \\
&= \frac{1}{(2\pi)^2}\int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f_\eta\left(\frac{u}{\sqrt{2}}\right) f_\eta\left(\langle x,y\rangle\frac{u}{\sqrt{2}} + \sqrt{1-\langle x,y\rangle^2}\frac{v}{\sqrt{2}}\right)\exp\left(-\frac{\|u\|_2^2+\|v\|_2^2}{2}\right) du\,dv \\
&= \frac{2}{\pi}H_\eta(\langle x,y\rangle),
\end{aligned}$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $u = \sqrt{2}u'$ και $v = (\sqrt{2}v' - \sqrt{2}\langle x, y\rangle u')/\sqrt{1-\langle x,y\rangle^2}$, που έχει Ιακωβιανή ίση με $4/(1-\langle x,y\rangle^2)$.

Σταθεροποιούμε έναν $m \times n$ πίνακα $A = (a_{ij})$ και θεωρούμε μοναδιαία διανύσματα $x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_n \in \mathcal{H}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle x_i, y_j\rangle = M := \max_{u_1,\ldots,u_m,v_1,\ldots,v_n \in S_{\mathcal{H}}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\langle u_i, v_j\rangle, \tag{5.3.6}$$

όπου $S_{\mathcal{H}}$ είναι η μοναδιαία σφαίρα του $\mathcal{H}$. Θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα

$$\{L_p(x_i)\}_{i=1}^m \bigcup \{R_p(y_j)\}_{j=1}^n,$$

τα οποία μπορούμε να σκεφτόμαστε σαν διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, όπου $N = m + n$. Από την (5.3.4) έχουμε $\langle L_p(x_i), R_p(y_j)\rangle \in \mathbb{S}$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$ και $1 \leqslant j \leqslant n$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την ταυτότητα (5.3.5) γι' αυτά τα διανύσματα. Έστω λ μια δίτιμη τυχαία μεταβλητή, ανεξάρτητη από τον G, με $\Pr[\lambda = 1] = p$ και $\Pr[\lambda = 0] = 1 - p$. Ορίζουμε τυχαίες μεταβλητές $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m, \delta_1, \ldots, \delta_n \in \{-1, 1\}$ θέτοντας

$$\varepsilon_i = (1-\lambda) f_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}} G L_p(x_i)\right) + \lambda f_\eta\left(\frac{1}{\sqrt{2}} G L_p(x_i)\right)$$

και

$$\delta_j = (1-\lambda) f_0\left(\frac{1}{\sqrt{2}} G R_p(y_j)\right) + \lambda f_\eta\left(\frac{1}{\sqrt{2}} G R_p(y_j)\right).$$

Τότε, χρησιμοποιώντας τις (5.3.5), (5.3.4) και (5.3.6) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\max_{\sigma_1,\ldots,\sigma_m,\tau_1,\ldots,\tau_n \in \{-1,1\}} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\sigma_i\tau_j \geqslant \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\varepsilon_i\delta_j\right] \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Big((1-p)H_0(\langle L_p(x_i), R_p(y_j)\rangle\Big) + pH_\eta\Big(\langle L_p(x_i), R_p(y_j)\rangle\Big) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}F_p(\langle L_p(x_i), R_p(y_j)\rangle) \\
&= \frac{2}{\pi}\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}F_p(F_p^{-1}\gamma\langle x_i, y_j\rangle) \\
&= \frac{2\gamma}{\pi}M.
\end{aligned}$$

Αυτό μας δίνει την ανισότητα

$$K_G \leqslant \frac{\pi}{2\gamma} < \frac{\pi}{2\log(1+\sqrt{2})},$$

όπως θέλαμε. □

Ο επόμενος στόχος μας είναι λοιπόν να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.3.1.

Λήμμα 5.3.2. *Η H_0 είναι ένα-προς-ένα στο $\mathbb{S}$ και $H_0(\mathbb{S}) \supseteq \mathbb{D}$.*

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η H_0 είναι ένα-προς-ένα στο $\mathbb{S}$ είναι συνέπεια του Λήμματος 5.2.3. Για να δείξουμε ότι $H_0(\mathbb{S}) \supseteq \mathbb{D}$ πρέπει να δείξουμε ότι αν $a, b \in \mathbb{R}$ και $a^2 + b^2 < 1$ τότε $|\mathrm{Re}(\sin(a + bi))| < 1$. Έχουμε

$$|\mathrm{Re}(\sin(a+bi))| = \frac{e^b + e^{-b}}{2}|\sin a|. \tag{5.3.7}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $|\sin a| \leqslant |a|$ βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $x \in (0, 1)$,

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2}\sqrt{1-x^2} < 1. \tag{5.3.8}$$

Από τον τύπο του Taylor γνωρίζουμε ότι υπάρχει $y \in [0, x]$ τέτοιο ώστε

$$\frac{e^x + e^{-x}}{2} = 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \cdot \frac{e^y + e^{-y}}{2} \leqslant 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} \cdot \frac{e+^{-1}}{2} < 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}. \tag{5.3.9}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12}\right)^2 (1 - x^2) = 1 - \frac{7x^4}{12} - \frac{x^6}{3} - \frac{11x^8}{144} - \frac{x^{10}}{144} < 1,$$

το οποίο μαζί με την (5.3.9) μας δίνει την (5.3.8). □

Παρατήρηση 5.3.3. Κοιτάζοντας πιο προσεκτικά την παράσταση στην (5.3.7) βλέπουμε ότι υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ (για παράδειγμα, μπορούμε να πάρουμε $\varepsilon_0 = 0.05$) τέτοιος ώστε $H_0(\mathbb{S}) \supseteq (1 + \varepsilon_0)\mathbb{D}$. Δεν θα χρειαστούμε αυτήν την παρατήρηση, προτιμήσαμε λοιπόν να δώσουμε την παραπάνω απλούστερη απόδειξη μιας ασθενέστερης πρότασης.

Λήμμα 5.3.4. *Για κάθε $r \in (0, 1)$ υπάρχουν $p_r \in (0, 1)$ και ένα φραγμένο ανοικτό σύνολο $\Omega_r \subseteq \mathbb{S}$ με $\overline{\Omega_r} \subseteq \mathbb{S}$, τέτοια ώστε: για κάθε $p \in (0, p_r)$, η συνάρτηση F_p είναι ένα-προς-ένα στο Ω_r και $F_p(\Omega_r) = r\mathbb{D}$. Άρα, η F_p^{-1} είναι καλά ορισμένη και αναλυτική στο $r\mathbb{D}$.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο

$$E_n = \left\{ z \in \mathbb{C} : |\mathrm{Re}(z)| < 1 - \frac{1}{n}, \ |\mathrm{Im}(z)| < n \right\}.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.3.2, σταθεροποιούμε n αρκετά μεγάλο ώστε $H_0(E_n) \supseteq r\overline{\mathbb{D}}$. Από την (5.2.21) βλέπουμε ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $|H_\eta(z)| \leqslant M$ για κάθε $\eta > 0$ και $z \in \partial E_{n+1}$. Από το Λήμμα 5.3.2, η H_0 παίρνει μια τιμή $\zeta \in r\overline{\mathbb{D}}$ ακριβώς μία φορά στο E_{n+1}, και αυτό συμβαίνει σε κάποιο σημείο του E_n. Άρα,

$$m := \min_{\substack{\zeta \in r\mathbb{D} \\ z \in \partial E_{n+1}}} |H_0(z) - \zeta| > 0.$$

Ορίζουμε $p_r = m/(2M)$.

Σταθεροποιούμε $\zeta \in r\mathbb{D}$. Αν $p \in (0, p_r)$ τότε για κάθε $z \in \partial E_{n+1}$ έχουμε

$$|p(H_\eta(z) - H_0(z))| < \frac{m}{2M}(|H_\eta(z)| + |H_0(z)|) \leqslant m \leqslant |H_0(z) - \zeta|.$$

Από το θεώρημα Rouché το πλήθος των ριζών της $H_0 - \zeta$ στο E_{n+1} είναι το ίδιο με το πλήθος των ριζών της $H_0 - \zeta + p(H_\eta - H_0) = F_p - \zeta$ στο E_{n+1}. Άρα, η F_p παίρνει την τιμή ζ ακριβώς μία φορά στο E_{n+1}. Αφού το ζ ήταν το τυχόν σημείο του $r\mathbb{D}$, μπορούμε να θέσουμε $\Omega_r = F_p^{-1}(r\mathbb{D})$. □

Λήμμα 5.3.5. *Για κάθε $r \in (0, 1)$ υπάρχει σταθερά $C_r > 0$ τέτοια ώστε, με το συμβολισμό του Λήμματος 5.3.4, για κάθε $p \in (0, p_r)$ και για κάθε $z \in r\mathbb{D}$,*

$$|F_p^{-1}(z) - \sin z - p(z - H_\eta(\sin z))\cos z| \leqslant C_r p^2. \tag{5.3.10}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$z = F_p(F_p^{-1}(z)) = (1-p)H_0(F_p^{-1}(z)) + pH_\eta(F_p^{-1}(z)). \tag{5.3.11}$$

Παραγωγίζοντας την (5.3.11) ως προς p, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
0 &= H_\eta(F_p^{-1}(z)) - H_0(F_p^{-1}(z)) \\
&\quad + \left(\frac{d}{dp}F_p^{-1}(z)\right)\left((1-p)\frac{dH_0}{dz}(F_p^{-1}(z)) + p\frac{dH_\eta}{dz}(F_p^{-1}(z))\right) \\
&= H_\eta(F_p^{-1}(z)) - H_0(F_p^{-1}(z)) + \left(\frac{d}{dp}F_p^{-1}(z)\right)\frac{dF_p}{dz}(F_p^{-1}(z)) \\
&= H_\eta(F_p^{-1}(z)) - H_0(F_p^{-1}(z)) + \frac{\frac{d}{dp}F_p^{-1}(z)}{\frac{d}{dz}(F_p^{-1}(z))}.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{d}{dp}F_p^{-1}(z) = (H_0(F_p^{-1}(z)) - H_\eta(F_p^{-1}(z)))\frac{d}{dz}(F_p^{-1}(z)). \tag{5.3.12}$$

Παραγωγίζοντας την (5.3.12) ως προς p, και χρησιμοποιώντας την (5.3.12) όπου εμφανίζεται ο όρος $\frac{d}{dp}F_p^{-1}(z)$, παίρνουμε την ταυτότητα

(5.3.13)
$$\begin{aligned}
\frac{d^2}{dp^2}F_p^{-1}(z) &= \left[\frac{dH_0}{dz}(F_p^{-1}(z)) - \frac{dH_\eta}{dz}(F_p^{-1}(z)) + (H_0(F_p^{-1}(z)) - H_\eta(F_p^{-1}(z)))\frac{d^2}{dz^2}(F_p^{-1}(z))\right] \\
&\quad \cdot (H_0(F_p^{-1}(z)) - H_\eta(F_p^{-1}(z)))\frac{d}{dz}(F_p^{-1}(z)).
\end{aligned}$$

Παίρνουμε $M = M_r > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $w \in \Omega_r$,

$$\max\left\{|H_0(w)|, |H_\eta(w)|, \left|\frac{dH_0}{dz}(w)\right|, \left|\frac{dH_\eta}{dz}(w)\right|\right\} \leqslant M. \tag{5.3.14}$$

Παρατηρηστε ότι η (5.3.14) εφαρμόζεται για το $w = F_p^{-1}(z)$ όπου $z \in r\mathbb{D}$. Ορίζουμε επίσης

$$R = R_r = \max_{w \in \partial\Omega_{(1+r)/2}} |w|.$$

Τότε, αν $\zeta \in \frac{1+r}{2}\mathbb{D}$ έχουμε $|F_p^{-1}(\zeta)| \leqslant R$. Αν $z \in r\mathbb{D}$ τότε από τον τύπο του Cauchy έχουμε

$$\left|\frac{d}{dz}(F_p^{-1}(z))\right| - \left|\frac{1}{\pi(r+1)} \oint_{\frac{1+r}{2}\partial\mathbb{D}} \frac{F_p^{-1}(\zeta)}{(\zeta - z)^2} d\zeta\right| \leqslant \max_{\zeta \in \frac{1+r}{2}\partial\mathbb{D}} \frac{|F_p^{-1}(\zeta)|}{(|\zeta| - |z|)^2} \leqslant \frac{4R}{(1-r)^2}.$$

Όμοια,

$$\left|\frac{d^2}{dz^2} F_p^{-1}(z)\right| = \left|\frac{2}{\pi(r+1)} \oint_{\frac{1+r}{2}\partial\mathbb{D}} \frac{F_p^{-1}(\zeta)}{(\zeta - z)^3} d\zeta\right| \leqslant \frac{16R}{(1-r)^3}.$$

Από αυτές τις εκτιμήσεις και την ταυτότητα (5.3.13) προκύπτει ότι

$$\left|\frac{d^2}{dp^2} F_p^{-1}(z)\right| \leqslant \left(2M + 2M\frac{16R}{(1-r)^2}\right) 2M \frac{4R}{(1-r)^2}.$$

Από τον τύπο του Taylor συμπεραίνουμε ότι

$$\left|F_p^{-1}(z) - F_0^{-1}(z) - p\frac{d}{dp}F_p^{-1}(z)\Big|_{p=0}\right| \leqslant C_r p^2,$$

όπου

$$C_r = \frac{8M^2R}{(1-r)^2}\left(1 + \frac{16R}{(1-r)^3}\right).$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι από το Λήμμα 5.2.3 και την ταυτότητα (5.3.12) έχουμε

$$\frac{d}{dp}F_p^{-1}(z)\Big|_{p=0} = (z - H_\eta(\sin z))\cos z.$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1. Σταθεροποιούμε κάποιο $r \in (0,1)$. Το πολυώνυμο Hermite h_5 είναι περιττό, άρα το ίδιο ισχύει για την H_η. Έπεται ότι η F_p είναι περιττή, άρα $a_k(p) = 0$ για τους άρτιους k. Για κάθε $z \in r\mathbb{D}$ γράφουμε $\phi(z) = (z - H_\eta(\sin z))\cos z$. Θεωρούμε τα αναπτύγματα σε δυναμοσειρά

$$\sin z = \sum_{k=0}^{\infty} b_{2k+1} z^{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)!} z^{2k+1}$$

και

$$\phi(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_{2k+1} z^{2k+1}. \tag{5.3.15}$$

Από τον τύπο του Cauchy, για κάθε $k \geqslant 0$ έχουμε

$$|a_{2k+1}(p) - b_{2k+1} - pc_{2k+1}| = \left| \frac{1}{2\pi i r} \oint_{r\partial\mathbb{D}} \frac{F_p^{-1}(z) - \sin z - p\phi(z)}{z^{2k+2}}\, dz \right| \leqslant \frac{C_r p^2}{r^{2k+2}} \tag{5.3.16}$$

από την (5.3.10). Παρατηρούμε ότι, από το Λήμμα 5.2.2, η ακτίνα σύγκλισης της δυναμοσειράς (5.3.15) είναι τουλάχιστον 1, άρα

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_{2k+1}| \left(\frac{9}{10}\right)^{2k+1} < \infty.$$

Από την (5.3.16) έπεται ότι

(5.3.17)

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |a_{2k+1}(p)| \left(\frac{9}{10}\right)^{2k+1} &\geqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(9/10)^{2k+1}}{(2k+1)!} - p\sum_{k=0}^{\infty} |c_{2k+1}| \left(\frac{9}{10}\right)^{2k+1} - \frac{C_r p^2}{r} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{9}{10r}\right)^{2k+1} \\ &= \frac{e^{9/10} - e^{-9/10}}{2} - O(p) > 1.02 - O(p). \end{aligned}$$

Λόγω συνέχειας, από την (5.3.17) βλέπουμε ότι αν το p είναι αρκετά μικρό τότε υπάρχει $\gamma > 0$ που ικανοποιεί την ταυτότητα (5.3.1). Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε την (5.3.2), και υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\gamma \leqslant \log(1+\sqrt{2}) < 9/10$. Αφού $r \in (9/10, 1)$, έχουμε

$$\frac{\gamma}{r} \leqslant \frac{10\log(1+\sqrt{2})}{9} < \frac{49}{50}. \tag{5.3.18}$$

Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$ το οποίο θα επιλέξουμε αργότερα. Στο Λήμμα 5.3.2 είδαμε ότι $\sin\left(\frac{9}{10}\mathbb{D}\right) \subseteq \mathbb{S}$. Αφού η H_η είναι αναλυτική στο $\mathbb{S}$, έπεται ότι η ϕ είναι αναλυτική στο $\frac{9}{10}\mathbb{D}$. Αφού $\gamma < 9/10$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} |c_{2k+1}| \gamma^{2k+1} < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{5.3.19}$$

Υπάρχει $p = p(\varepsilon)$ τέτοιο ώστε για κάθε $p \in (0, p(\varepsilon))$ να ισχύει $p|c_{2k+1}| < \frac{1}{2}|b_{2k+1}|$ για κάθε $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$. Ειδικότερα, έχουμε

$$\operatorname{sign}(b_{2k+1} + pc_{2k+1}) = \operatorname{sign}(b_{2k+1}) = (-1)^k.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας τις (5.3.1) και (5.3.16), βλέπουμε ότι

(5.3.20)
$$\begin{aligned}\left|1-\frac{F_p^{-1}(i\gamma)}{i}\right| &= \left|\sum_{k=0}^{\infty}(|a_{2k+1}(p)|-(-1)^k a_{2k+1}(p))\gamma^{2k+1}\right|\\ &\leqslant \sum_{k=0}^{\infty}\Big|\,|b_{2k+1}+pc_{2k+1}|-(-1)^k(b_{2k+1}+pc_{2k+1})\Big|\gamma^{2k+1}+2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_rp^2}{r^{2k+2}}\gamma^{2k+1}.\end{aligned}$$

Για να εκτιμήσουμε τους δύο όρους στο δεξιό μέλος της (5.3.20), παρατηρούμε πρώτα ότι, από την (5.3.18),

$$2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{C_rp^2}{r^{2k+2}}\gamma^{2k+1}\leqslant\frac{2C_r}{r}p^2\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{49}{50}\right)^{2k+1}\leqslant C_r'p^2, \tag{5.3.21}$$

όπου η C_r' εξαρτάται μόνο από το r. Αφού $p\in(0,p(\varepsilon))$ γνωρίζουμε ότι για κάθε $k\in\{0,1,\dots,n\}$ ισχύει
$$|b_{2k+1}+pc_{2k+1}|=(-1)^k(b_{2k+1}+pc_{2k+1}).$$

Άρα, οι πρώτοι n όροι του πρώτου αθροίσματος στο δεξιό μέλος της (5.3.20) μηδενίζονται. Συνεπώς, παίρνοντας υπόψη και την (5.3.19), έχουμε

(5.3.22)
$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty}\Big|\,|b_{2k+1}+pc_{2k+1}|-(-1)^k(b_{2k+1}+pc_{2k+1})\Big|\,\gamma^{2k+1}\\ &=\sum_{k=n+1}^{\infty}\Big|\,|b_{2k+1}+pc_{2k+1}|-|b_{2k+1}|-(-1)^kpc_{2k+1}\Big|\,\gamma^{2k+1}\\ &\leqslant 2p\sum_{k=n+1}^{\infty}|c_{2k+1}|\gamma^{2k+1}<p\varepsilon.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τις (5.3.21) και (5.3.22) στην (5.3.20) βλέπουμε ότι αν ορίσουμε $\beta=F_p^{-1}(i\gamma)-i$ τότε

$$|\beta|\leqslant C_r'p^2+p\varepsilon. \tag{5.3.23}$$

Εστω L_0 η σταθερά Lipschitz της H_0 στο $i+\frac{1}{2}\mathbb{D}$ (τον δίσκο ακτίνας $\frac{1}{2}$ με κέντρο το i). Όμοια, έστω L_η η σταθερά Lipschitz της H_η στο $i+\frac{1}{2}\mathbb{D}$, και έστω $L=\max\{L_0,L_\eta\}$. Βλέπουμε ότι η $F_p=(1-p)H_0+pH_\eta$ είναι L-Lipschitz στο $i+\frac{1}{2}\mathbb{D}$. Από την (5.3.23), αν το p είναι αρκετά μικρό τότε $i+\beta\in i+\frac{1}{2}\mathbb{D}$, άρα

$$\begin{aligned}\log(1+\sqrt{2})\geqslant\gamma=\frac{F_p(\beta+i)}{i}&\geqslant\frac{F_p(i)}{i}-L|\beta|\\ &\geqslant\frac{(1-p)H_0(i)+pH_\eta(i)}{i}-Lp(C_r'p+\varepsilon)\\ &=(1-p)\log(1+\sqrt{2})+p\frac{H_\eta(i)}{i}-Lp(C_r'p+\varepsilon).\end{aligned}$$

Οδηγούμαστε έτσι στην

$$\frac{H_\eta(i)}{i} \leqslant \log(1+\sqrt{2}) + LC_r'p + L\varepsilon.$$

Αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$ και $p \in (0, p(\varepsilon))$, και αυτό έρχεται σε αντίθεση με το Θεώρημα 5.2.4. □

Παρατήρηση 5.3.6. Εξετάζοντας την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.4 βλέπουμε ότι η μόνη ιδιότητα της H_η που χρησιμοποιήθηκε ήταν ότι δίνει αντιπαράδειγμα στο πρόβλημα του Konig. Πιο συγκεκριμένα, ας υποθέσουμε ότι $f, g : \mathbb{R}^2 \to \{-1, 1\}$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και ας θεωρήσουμε τη συνάρτηση $H : \mathbb{S} \to \mathbb{C}$ με

$$H(z) = \frac{1}{2\pi(1-z^2)} \int_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} f(x)g(y) \exp\left(\frac{-\|x\|_2^2 - \|y\|_2^2 + 2z\langle x, y\rangle}{1-z^2}\right) dx\, dy.$$

Αν υποθέσουμε ότι $B_K(f,g) > 4\pi\log(1+\sqrt{2})$, όπου B_K είναι η διγραμμική μορφή του Konig στην (5.1.3), τότε μπορούμε να επαναλάβουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.4 αντικαθιστώντας την H_η από την H, και θα καταλήξουμε στο ίδιο συμπέρασμα.

5.4 Η εικασία του Konig για $n = 1$

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 5.1.3. Ορίζουμε

$$M := \sup_{\substack{f,g\in L_\infty(0,\infty)\\ f,g\in[-1,1]}} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)g(y) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx\, dy$$
$$= \sup_{\substack{f,g\in L_\infty(0,\infty)\\ f,g\in\{-1,1\}}} \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)g(y) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx\, dy. \tag{5.4.1}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3 αρκεί να δείξουμε ότι η τιμή M πιάνεται όταν $f \equiv g \equiv 1$ ή $f \equiv g \equiv -1$. Παρατηρήστε ότι το supremum στην (5.4.1) πιάνεται για κάποιες $f, g : (0,\infty) \to \{-1, 1\}$. Πράγματι, έστω μ το μέτρο στο $(0, \infty)$ με πυκνότητα την $x \mapsto e^{-x^2/2}$. Αν οι $f_n, g_n : (0,\infty) \to [-1, 1]$ ικανοποιούν την

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty \int_0^\infty f_n(x)g_n(y) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx\, dy = M,$$

τότε, περνώντας σε υπακολουθία, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f, g \in L_2(\mu)$ και ότι η (f_n) συγκλίνει ασθενώς στην f και η (g_n) συγκλίνει ασθενώς στην g στον $L_2(\mu)$. Τότε, $f, g \in [-1, 1]$ σχεδόν παντού, και από την ασθενή σύγκλιση έχουμε

$$\int_0^\infty \int_0^\infty f(x)g(y) \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx\, dy = M.$$

Με ένα απλό επιχείρημα, βασισμένο στο θεώρημα Krein-Milman, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $f, g \in \{-1, 1\}$.

Υποθέτουμε λοιπόν στη συνέχεια ότι οι $f, g : (0, \infty) \to \{-1, 1\}$ δίνουν μέγιστο στην (5.4.1), δηλαδή

$$M = \int_0^\infty \int_0^\infty f(x)g(y) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx\, dy. \tag{5.4.2}$$

Αυτό σημαίνει ότι σχεδόν για κάθε $x \in (0, \infty)$ έχουμε

$$f(x) = \operatorname{sign}\left(\int_0^\infty g(y)e^{-y^2/2} \sin(xy)\, dy\right) \tag{5.4.3}$$

και

$$g(x) = \operatorname{sign}\left(\int_0^\infty f(y)e^{-y^2/2} \sin(xy)\, dy\right). \tag{5.4.4}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} M &= \int_0^\infty \left|\int_0^\infty g(y)e^{-y^2/2} \sin(xy)\, dy\right| e^{-x^2/2} dx \\ &= \int_0^\infty \left|\int_0^\infty f(y)e^{-y^2/2} \sin(xy)\, dy\right| e^{-x^2/2} dx. \end{aligned} \tag{5.4.5}$$

Λήμμα 5.4.1. *Ορίζουμε $I : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με*

$$I(y) = \int_0^\infty f(x) \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx. \tag{5.4.6}$$

Τότε, η I είναι $\sqrt{2}$-Lipschitz.

Απόδειξη. Αρκεί να φράξουμε την $|I'|$: έχουμε

$$\begin{aligned} |I'(y)| &\leqslant \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) |x\cos(xy) - y\sin(xy)|\, dx \\ &\leqslant \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{2}\right) \sqrt{x^2 + y^2}\, dx \\ &\leqslant \sqrt{2}e^{-y^2/2} \int_0^\infty e^{-x^2/2} \max\{x, y\}\, dx \\ &= \sqrt{2}e^{-y^2/2} \left(\int_0^y e^{-x^2/2} y\, dx + \int_y^\infty e^{-x^2/2} x\, dx\right) \\ &\leqslant \sqrt{2}e^{-y^2/2}\Big(y^2 + e^{-y^2/2}\Big) \leqslant \sqrt{2}, \end{aligned} \tag{5.4.7}$$

όπου, στην τελευταία ανισότητα, χρησιμοποιήσαμε το φράγμα $e^{-t}(2t + e^{-t}) \leqslant 1$, το οποίο ισχύει για κάθε $t \geqslant 0$, διότι

$$e^t - e^{-t} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2t^{2k+1}}{(2k+1)!} \geqslant 2t.$$

□

Λήμμα 5.4.2. *Για κάθε* $z \in [2/5, 4/3]$ *έχουμε*

$$\int_{z-\frac{1}{4}}^{z+\frac{1}{4}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx\, dy > \frac{3}{20}. \tag{5.4.8}$$

Απόδειξη. Για κάθε $q \geqslant 0$ ισχύει $\sin q \geqslant q - \frac{q^3}{6} + \frac{q^5}{120} - \frac{q^7}{5040}$, άρα

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx \qquad \qquad (5.4.9) \\ \geqslant \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \left(xy - \frac{(xy)^3}{6} + \frac{(xy)^5}{120} - \frac{(xy)^7}{5040}\right) dx \\ = -\frac{ye^{-y^2/2}}{105}(y^6 - 7y^4 + 35y^2 - 105) =: h(y). \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει μοναδικό $w \in [0,2]$ στο οποίο μηδενίζεται η h', και ότι η h λαμβάνει στο w τη μέγιστη τιμή της στο $[0,2]$. Πράγματι,

$$h'(y) = \frac{1}{105} e^{-y^2/2}(y^8 - 14y^6 + 70y^4 - 210y^2 + 105),$$

άρα $h'(0) = 1 > 0$ και $h'(2) = -17/(7e^2) < 0$, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι η h μπορεί να έχει το πολύ μία ρίζα στο $[0,2]$. Για το σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε ότι το πολυώνυμο $p(y) = y^8 - 14y^6 + 70y^4 - 210y^2 + 105$ είναι μονότονο στο $[0,2]$. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι

$$p'(y) = -8y^5(4 - y^2) - y\left(52\left(y^2 - \frac{35}{13}\right)^2 + \frac{560}{13}\right) < 0$$

για κάθε $y \in [0,2]$.

Το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι αν θέσουμε

$$G(z) = \int_{z-\frac{1}{4}}^{x+\frac{1}{4}} h(y)\, dy,$$

τότε η G δεν έχει τοπικά ελάχιστα στο $[2/5, 4/3]$. Πράγματι, αν κάποιο $z \in [2/5, 4/3]$ ικανοποιεί την $G'(z) = h(z+1/4) - h(z-1/4) = 0$, τότε $z - 1/4 < w < z + 1/4$, και έπεται ότι $h'(z-1/4) > 0$ και $h'(z+1/4) < 0$. Άρα,

$$G''(z) = h'(z+1/4) - h'(z-1/4) < 0,$$

συνεπώς το z δεν μπορεί να είναι τοπικό ελάχιστο για την G. Τώρα, από την (5.4.9), για κάθε $z \in [2/5, 4/3]$ έχουμε

$$\int_{z-1/4}^{z+1/4} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx\, dy \geqslant G(z) \geqslant \min\left\{G\left(\frac{2}{5}\right), G\left(\frac{4}{3}\right)\right\} > \frac{3}{20},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι παραπάνω τιμές της G υπολογίζονται: για παράδειγμα,

$$G(4/3) = (19047383/313528320)e^{-169/288} + (131938921/313528320)e^{-361/288} > 0.153.$$

□

Θεωρούμε τις εξής δύο ποσότητες:

$$M_0 := \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sin(xy)\, dx\, dy = \frac{\log(1+\sqrt{2})}{\sqrt{2}} = 0.6232\ldots \tag{5.4.10}$$

και

$$M_1Q = \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) |\sin(xy)|\, dx\, dy. \tag{5.4.11}$$

Θα αποδείξουμε ότι $M = M_0$. Η ανισότητα $M_0 \leqslant M_1$ είναι προφανής. Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι οι ποσότητες M_1 και M_0 είναι στην πραγματικότητα πολύ κοντά.

Λήμμα 5.4.3. $M_1 - M_0 < \frac{1}{20}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το πολυώνυμο Taylor p_n βαθμού $2n-1$ της συνάρτησης $x \mapsto \sqrt{1-x}$, δηλαδή,

$$p_n(x) = \sum_{k=0}^{2n-1} (-1)^k \binom{1/2}{k} x^k = 1 + \sum_{k=1}^{2n-1} \frac{\prod_{j=0}^{k-1}(2j-1)}{2^k k!} x^k.$$

Τότε, $\sqrt{1-x} \leqslant p_n(x)$ για κάθε $x \in (-1,1)$ και $n \in \mathbb{N}$.

Τώρα,

$$\begin{aligned} M_1 &= \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) \sqrt{\frac{1-\cos(2xy)}{2}}\, dx\, dy \\ &\leqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) p_n(\cos(2xy))\, dx\, dy. \end{aligned} \tag{5.4.12}$$

Για κάθε $j \in \mathbb{N}$ το ολοκλήρωμα $\int_0^\infty \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) (\cos(2xy))^j\, dx\, dy$ υπολογίζεται σε κλειστή μορφη (ισούται με π φορές έναν γραμμικό συνδυασμό, με ρητούς συντελεστές, τετραγωνικών ριζών ακεραίων). Μπορούμε λοιπόν να υπολογίσουμε ακριβώς το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (5.4.12) για $n = 11$, και παίρνουμε το φράγμα $M_1 < 0.671 < M_0 + 0.05$. □

Λήμμα 5.4.4. *Οι f και g είναι σταθερές στο διάστημα* $[2/5, 4/3]$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι η g δεν είναι σταθερή στο $[2/5, 4/3]$. Από την (5.4.4) γνωρίζουμε ότι $g = \mathrm{sign}(I)$, όπου η I δίνεται στην (5.4.6). Άρα, υπάρχει κάποιο $z \in [2/5, 4/3]$ τέτοιο ώστε $I(z) = 0$. Από το Λήμμα 5.4.1 γνωρίζουμε λοιπόν ότι $|I(y)| \leqslant \sqrt{2}|y - z|$ για κάθε $y \geqslant 0$. Άρα, χρησιμοποιώντας και τις (5.4.5) και (5.4.8), έχουμε

$$\begin{aligned}
M_0 \leqslant M &\leqslant \int_{[0,z-1/4]\cup[z+1/4,\infty)} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) |\sin(xy)|\, dx\, dy + \int_{z-\frac{1}{4}}^{z+\frac{1}{4}} |I(y)|\, dy \\
&\leqslant M_1 - \int_{z-\frac{1}{4}}^{z+\frac{1}{4}} \int_0^\infty \exp\left(-\frac{x^2+y^2}{2}\right) |\sin(xy)|\, dx\, dy \\
&< M_1 - \frac{3}{20} + \frac{\sqrt{2}}{16} < M_1 - \frac{3}{50}.
\end{aligned}$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με το Λήμμα 5.4.3. □

Τέλος, θα χρειαστούμε ένα ακόμα στοιχειώδες λήμμα.

Λήμμα 5.4.5. *Για κάθε $a > 0$ έχουμε*

$$\int_a^\infty e^{-x^2/2} dx < \frac{16}{3e^2 a^3}. \tag{5.4.13}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $c = 16/(3e)^2$ και $\psi(a) = \frac{c}{a^3} - \int_a^\infty e^{-x^2/2} dx$. Αφού $\lim_{a\to\infty} \psi(a) = 0$, αρκεί να δείξουμε ότι η ψ είναι φθίνουσα στο $(0, \infty)$. Αφού $\psi'(a) = e^{-a^2/2} - \frac{3c}{a^4}$, σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $e^{a^2/2} \geqslant a^4/(3c)$, ή ισοδύναμα ότι $a^2 \geqslant 8\log a - 2\log(3c)$. Θέτουμε $\rho(a) = a^2 - 8\log a + 2\log(3c)$. Αφού $\rho'(a) = 2a - 8/a$, το ελάχιστο της ρ πιάνεται στο $a = 2$. Από την επιλογή του c έχουμε $\rho(2) = 0$, και έπεται το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3. Από το Λήμμα 5.4.4 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in [2/5, 4/3]$. Ξεκινώντας από αυτό, θα δείξουμε ότι $f \equiv g \equiv 1$.

Πρώτα θα αποδείξουμε ότι $f(y) = g(y) = 1$ για κάθε $y \in [0, 4/3]$. Σταθεροποιούμε $y \in (0, 1/2]$ και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $x \mapsto \sin(xy)$ είναι κοίλη στο $[0, 4/3]$ (γιατί σε αυτό το διάστημα έχουμε $xy \leqslant 2/3 \leqslant \pi/2$). Έπεται ότι, για $x \in [0, 4/3]$, έχουμε $\sin(xy) \geqslant \frac{\sin(4y/3)}{4/3} x$. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα, το γεγονός ότι $|\sin(xy)| \leqslant xy$

για κάθε $x \geqslant 0$, και το γεγονός ότι $f \equiv 1$ στο $[2/5, 4/3)$, συμπεραίνουμε ότι

(5.4.14)
$$\begin{aligned}\int_0^\infty & e^{-x^2/2}\sin(xy)f(x)\,dx \\ &\geqslant -\int_0^{\frac{2}{5}} e^{-x^2/2}xy\,dx + \int_{\frac{2}{5}}^{\frac{4}{3}} e^{-x^2/2}\frac{\sin(4y/3)}{4/3}x\,dx - \int_{\frac{4}{3}}^\infty e^{-x^2/2}\frac{\sin(4y/3)}{4/3}x\,dx \\ &= -(1-e^{-2/25})y + \frac{\sin(4y/3)}{4/3}(e^{-2/25} - 2e^{-8/9}) =: r(y).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για $z \in [0, 1/2]$

$$\begin{aligned}r'(z) &= \cos\left(\frac{4z}{3}\right)(e^{-2/25} - 2e^{-8/9}) - (1 - e^{-2/25}) \\ &\geqslant \cos\left(\frac{2}{3}\right)(e^{-2/25} - 2e^{-8/9}) - (1 - e^{-2/25}) > 0.002 > 0.\end{aligned}$$

Άρα, η r είναι αύξουσα στο $[0, 1/2]$, και ειδικότερα $r(y) > r(0) = 0$. Από τις (5.4.4) και (5.4.14), έπεται ότι $g(y) = 1$ για κάθε $y \in [0, 1/2]$. Από το Λήμμα 5.4.4 η g είναι σταθερή στο $[2/5, 4/3]$, άρα $g \equiv 1$ στο $[0, 4/3]$. Επαναλαμβάνοντας το παραπάνω επιχείρημα με την f στο ρόλο της g, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv g \equiv 1$ στο $[0, 4/3]$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι $f \equiv g \equiv 1$ στο $[0, 3\pi/4]$. Γνωρίζουμε ήδη ότι $f \equiv g \equiv 1$ στο $[0, 4/3]$, υποθέτουμε λοιπόν ότι $y \in [4/3, 3\pi/4]$. Άρα, $4y/3 \geqslant (4/3)^2 > \pi/2$ και $4y/3 \leqslant \pi$, και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{4}{3}} f(x)e^{-x^2/2}\sin(xy)\,dx &\geqslant \int_0^{\frac{\pi}{2y}} e^{-x^2/2}\sin(xy)\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2y}} e^{-x^2/2}\frac{2xy}{\pi}\,dx \\ &= \frac{2y}{\pi}\Big(1 - e^{-\pi^2/(8y^2)}\Big) \geqslant \frac{2y}{\pi}\left(\frac{\pi^2}{8y^2} - \frac{\pi^4}{128y^4}\right) \\ &= \frac{\pi}{4y} - \frac{\pi^3}{64y^3} \geqslant \frac{8}{27},\end{aligned} \tag{5.4.15}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\sin z \geqslant 2z/\pi$ για $z \in [0, \pi/2]$, την στοιχειώδη ανισότητα $1 - e^{-z} \geqslant z - z^2/2$ που ισχύει για κάθε $z \geqslant 0$, και το γεγονός ότι η συνάρτηση $y \mapsto \frac{\pi}{4y} - \frac{\pi^3}{64y^3}$ έχει μοναδικό τοπικο μέγιστο στο $(1, \infty)$, το οποίο δείχνει ότι το ελάχιστό της στο $[4/3, 3\pi/4]$ πιάνεται στα άκρα, άρα το ελάχιστό της στο $[4/3, 3\pi/4]$ ισούται με $8/27$.

Τώρα, από την (5.4.15),

(5.4.16)
$$\begin{aligned}\int_0^\infty f(x)e^{-x^2/2}\sin(xy)\,dx &\geqslant \frac{8}{27} - \int_{\frac{4}{3}}^\infty e^{-x^2/2}dx = \frac{8}{27} - \left(\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{4}{3}} e^{-x^2/2}dx\right)\\ &\geqslant \frac{8}{27} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{4}{3}}\left(1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{8} - \frac{x^6}{48}\right)dx\\ &= \frac{302572}{229635} - \sqrt{\frac{\pi}{2}} > 0.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την (5.4.4) παίρνουμε από την (5.4.16) ότι $g(y) = 1$. Λόγω συμμετρίας το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται για την f, και έτσι συμπεραίνουμε ότι $f \equiv g \equiv 1$ στο $[0, 3\pi/4]$.

Έστω $A \geqslant 3\pi/4$ το supremum πάνω από όλους τους $a > 0$ για τους οποίους $f \equiv g \equiv 1$ στο $[0, a]$. Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι $A = \infty$, οπότε υποθέτουμε προς άτοπο ότι $A < \infty$.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $y > 0$ και για κάθε $k \geqslant 0$,

(5.4.17)
$$\int_{\frac{2k\pi}{y}}^{\frac{2(k+1)\pi}{y}} e^{-x^2/2}\sin(xy)\,dx = \int_{\frac{2k\pi}{y}}^{\frac{(2k+1)\pi}{y}}\left(e^{-x^2/2} - e^{-(x+\pi/y)^2/2}\right)\sin(xy)\,dx \geqslant 0.$$

Έπεται ότι αν $A \in [2k\pi/y, 2(k+1)\pi/y]$ τότε

(5.4.18)
$$\int_{\frac{2k\pi}{y}}^{A} e^{-x^2/2}\sin(xy)\,dx \geqslant 0.$$

Για να ελέγξουμε την (5.4.18) παρατηρούμε ότι αν $A \in [2k\pi/y, (2k+1)\pi/y]$ τότε η προς ολοκλήρωση συνάρτηση στην (5.4.18) είναι μη αρνητική, ενώ αν $A \in [(2k+1)\pi/y, 2(k+1)\pi/y]$ τότε το ολοκλήρωμα στην (5.4.18) είναι μεγαλύτερο ή ίσο από το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος της (5.4.17). Υποθέτουμε στο εξής ότι $y > A$ και παρατηρούμε ότι, αφού

$A \geqslant 3\pi/4$, έχουμε $3\pi/(2y) < A$. Αυτό μας δίνει το ακόλουθο φράγμα:

$$\begin{aligned}
\int_0^{\min\left\{\frac{2\pi}{y}, A\right\}} e^{-x^2/2} \sin(xy)\, dx &\geqslant \int_0^{\frac{2\pi}{y}} e^{-x^2/2} \sin(xy)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{y}} \left(e^{-x^2/2} - e^{-(x+\pi/y)^2/2}\right) \sin(xy)\, dx \\
&= \int_0^{\frac{\pi}{y}} e^{-x^2/2} \left(1 - e^{-\pi x/y} e^{-(\pi/y)^2/2}\right) \sin(xy)\, dx \\
&\geqslant \left(1 - e^{-(\pi/y)^2/2}\right) \int_0^{\frac{\pi}{2y}} e^{-x^2/2} \frac{2xy}{\pi}\, dx \\
&= \frac{2y}{\pi} \left(1 - e^{-\pi^2/(2y^2)}\right) \left(1 - e^{-\pi^2/(8y^2)}\right) \\
&\geqslant \frac{2y}{\pi} \left(\frac{\pi^2}{2y^2} - \frac{\pi^4}{8y^4}\right) \left(\frac{\pi^2}{8y^2} - \frac{\pi^4}{128y^4}\right) \\
&\geqslant \frac{5\pi^3}{81y^3},
\end{aligned} \tag{5.4.19}$$

όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $y > A \geqslant 3\pi/4$.

Συνδυάζοντας τις (5.4.17), (5.4.18), (5.4.19) και το γεγονός ότι $f \equiv 1$ στο $[0, A)$ βλέπουμε ότι

$$\int_0^A f(x) e^{-x^2/2} \sin(xy)\, dx \geqslant \frac{5\pi^3}{81y^3},$$

άρα, από το Λήμμα 5.4.5,

$$\int_0^\infty f(x) e^{-x^2/2} \sin(xy)\, dx \geqslant \frac{5\pi^3}{81y^3} - \int_A^\infty e^{-x^2/2} dx \geqslant \frac{5\pi^3}{81y^3} - \frac{16}{3e^2 A^3}, \tag{5.4.20}$$

λαμβάνοντας υπόψη και την (5.4.13). Το δεξιό μέλος της (5.4.20) είναι θετικό αν $y \leqslant 5A/4$. Από την (5.4.4) αυτό σημαίνει ότι $g \equiv 1$ στο $[A, 5A/4]$, άρα και στο $[0, 5A/4]$. Λόγω συμμετρίας, έχουμε επίσης $f \equiv 1$ στο $[0, 5A/4]$, το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του A. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space theory*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 233, New York, 2006.

[2] N. Alon and A. Naor, *Approximating the cut-norm via Grothendieck's inequality*, SIAM J. Comput. **35** (2006), 787-803.

[3] G. E. Andrews, R. Askey and R. Roy, *Special functions*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[4] R. Azor, J. Gillis and J. D. Victor, *Combinatorial applications of Hermite polynomials*, SIAM J. Math. Anal. **13** (1982), 879-890.

[5] R. C. Blei, *Analysis in integer and fractional dimensions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 71, Cambridge University Press, Cambridge, 2001.

[6] R. C. Blei, *An elementary proof of Grothendieck's inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **100** (1987), 58-60.

[7] M. Braverman, K. Makarychev, Y. Makarychev and A. Naor, *The Grothendieck constant is strictly smaller than Krivine's bound*, Forum Math. Pi **1** (2013), e4, 42 pp.

[8] A. M. Davie, *Matrix norms related to Grothendieck's inequality*, Lecture Notes in Mathematics **1166** (1985), 22-26.

[9] J. Diestel, J. H. Fourie and J. Swart, *The metric theory of tensor products*, Grothendieck's résumé revisited, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2008.

[10] J. Diestel, H. Jarhow and A. Tonge, *Absolutely summing operators*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 43, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.

[11] P. C. Fishburn and J. A. Reeds, *Bell inequalities, Grothendieck's constant, and root two*, SIAM J. Discrete Math. **7** (1994), 48-56.

[12] D. J. H. Garling,*Inequalities: a journey into linear analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[13] A. Grothendieck, *Résumé de la théorie métrique des produits tensoriels topologiques*, Bol. Soc. Mat. S˜o Paulo **8** (1953), 1-79.

[14] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[15] U. Haagerup, *A new upper bound for the complex Grothendieck constant*, Israel J. Math. **60** (1987), 199-224.

[16] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Basic concepts in the geometry of Banach spaces*, Handbook of the Geometry of Banach spaces, Vol. I, North–Holland (2001) 1-84.

[17] H. Konig, *On an extremal problem originating in questions of unconditional convergence*, Recent progress in multivariate approximation, Vol. 137, Internat. Ser. Numer. Math., pp. 185-192, Birkhauser, Basel, 2001.

[18] J.-L. Krivine, *Constantes de Grothendieck et fonctions de type positif sur les sphères*, Adv. in Math. **31** (1979), 16-30.

[19] J. Lindenstrauss and A. Pelczynski, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–326.

[20] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I & II*, Springer Verlag, 1977 & 1979.

[21] G. Pisier, *Grothendieck's theorem, past and present*, Bull. Amer. Math. Soc. **49** (2012), 237-323.

[22] R. E. Rietz, *A proof of the Grothendieck inequality*, Israel J. Math. **19** (1974), 271-276.