Η Εικασία του Hadwiger

Διπλωματική Εργασία

Ναταλία Τζιώτζιου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2023

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Απόστολος Γιαννόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Παντελής Δοδός, Αναπληρωτής Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Αριστείδης Κατάβολος, Ομότιμος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Περιεχόμενα

Ευχαριστίες

Αρχικά, θα ήθελα να ευχαριστήσω θερμά τον κύριο Απόστολο Γιαννόπουλο για την πολύτιμη βοήθειά του στη διεκπεραίωση τόσο των προπτυχιακών όσο και των μεταπτυχιακών σπουδών μου, για τον προσωπικό χρόνο που αφιέρωσε ώστε να ολοκληρωθεί η παρούσα εργασία, αλλά κυρίως για τον καθοριστικό ρόλο που διαδραμάτισε στη διαμόρφωση των μαθηματικών ενδιαφερόντων μου.

Επίσης, θα ήθελα να ευχαριστήσω τους κυρίους Αριστείδη Κατάβολο και Παντελή Δοδό για την συμμετοχή τους στην τριμελή επιτροπή και τέλος, την οικογένειά μου για τη στήριξη, τη φροντίδα και τα εφόδια που μου προσέφερε απλόχερα και τους αγαπημένους μου φίλους για την παρουσία τους στη ζωή μου.

Ναταλία,
Μάρτιος 2023

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Το πρόβλημα

Το πρόβλημα κάλυψης που θα μελετήσουμε σε αυτή την εργασία ζητάει να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος μεταφορών του εσωτερικού ενός κυρτού σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$ που απαιτούνται για να καλύψουν το K. Δηλαδή, ζητάει την τιμή της παραμέτρου

$$b_0(K) = \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n \ \text{ ώστε } \ K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + \mathrm{int}(K))\right\}.$$

Η εικασία είναι ότι $b_0(K) \leqslant 2^n$ για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Διατυπώθηκε, για $n \geqslant 3$, από τον Hadwiger [60] το 1957, ο οποίος ρωτούσε επίσης αν 2^n μεταφορές απαιτούνται μόνο στην περίπτωση που το K είναι αφφινική εικόνα του n-κύβου $[0, 1]^n$. Στην περίπτωση του επιπέδου, το πρόβλημα είχε ήδη μελετηθεί και απαντηθεί από τον Levi [76] το 1955. Μια ισοδύναμη, όπως θα δούμε, διατύπωση στην οποία το εσωτερικό του κυρτού σώματος αντικαθίσταται από μικρότερα ομοιοθετικά αντίγραφά του, είχε δοθεί ανεξάρτητα από τους Gohberg και Markus στο [56].

Οι δύο μορφές του προβλήματος της κάλυψης είναι ισοδύναμες με δύο μορφές του προβλήματος του φωτισμού. Συγκεκριμένα, έχουμε τα ακόλουθα τέσσερα προβλήματα:

- *Το πρόβλημα της κάλυψης με μικρότερα αντίγραφα.* Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ζητάμε να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος, N, μικρότερων ομοιοθετικών αντιγράφων $K_1, \dots, K_N$ του K που η ένωσή τους καλύπτει το K, δηλαδή

  $$K \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_N.$$

  Συμβολίζουμε αυτόν τον αριθμό με $b(K)$. Λέγοντας «μικρότερα ομοιοθετικά αντίγραφα» εννοούμε ότι κάθε K_i είναι κυρτό σώμα της μορφής $K_i = \kappa_i K + x_i$ για κάποιον $\kappa_i \in (0, 1)$ και κάποιο $x_i \in \mathbb{R}^n$.

- *Το πρόβλημα της κάλυψης με αντίγραφα του εσωτερικού.* Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ζητάμε να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος, N, μεταφορών $K_1, \dots, K_N$ του K που η ένωση των εσωτερικών τους καλύπτει το K, δηλαδή

  $$K \subseteq \mathrm{int}(K_1) \cup \cdots \cup \mathrm{int}(K_N).$$

  Συμβολίζουμε αυτόν τον αριθμό με $b_0(K)$.

- *Το πρόβλημα του φωτισμού.* Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι ένα σημείο $x \in \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από μια (προσανατολισμένη) κατεύθυνση u στον $\mathbb{R}^n$ αν η ακτίνα που ξεκινάει από το x και έχει κατεύθυνση u περιέχει κάποιο εσωτερικό σημείο του K. Με άλλα λόγια, λέμε ότι ένα συνοριακό σημείο x του K φωτίζεται από την u αν $x + \lambda e \in \mathrm{int}(K)$ για όλα τα αρκετά μικρά $\lambda > 0$, όπου e είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση u. Λέμε ότι οι κατευθύνσεις που προσδιορίζονται από τα μη μηδενικά διανύσματα $u_1, \ldots, u_N$ φωτίζουν το σύνορο του K αν κάθε $x \in \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από τουλάχιστον μία από αυτές τις κατευθύνσεις. Ζητάμε να βρεθεί ο ελάχιστος φυσικός N για τον οποίο υπάρχουν N μη μηδενικά διανύσματα που οι κατευθύνσεις τους φωτίζουν το σύνορο του K. Συμβολίζουμε αυτόν τον ελάχιστο φυσικό N με $c(K)$.

- *Το πρόβλημα του κεντρικού φωτισμού.* Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ μια «φωτεινή πηγή». Λέμε ότι ένα σημείο $y \in \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από το x αν η άπειρη ακτίνα με αρχή το x που διέρχεται από το y και το εσωτερικό του K έχουν κοινά σημεία που βρίσκονται έξω από το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$. Λέμε επίσης ότι ένα σύνολο $N \subseteq \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από ένα σύνολο $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$ αν κάθε σημείο του N φωτίζεται από τουλάχιστον ένα σημείο του M. Ζητάμε να βρεθεί ο ελάχιστος φυσικός N για τον οποίο μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο $M = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ το οποίο φωτίζει ολόκληρο το σύνορο του K. Συμβολίζουμε αυτόν τον ελάχιστο φυσικό N με $c_0(K)$.

Όλες αυτές οι παράμετροι ορίζονται, γενικότερα, για κάθε κλειστό κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ (και ενδεχομένως απειρίζονται). Στην περίπτωση όμως που το K είναι κυρτό σώμα, όλες είναι πεπερασμένες και ίσες:

$$b(K) = b_0(K) = c(K) = c_0(K).$$

Η εικασία ότι $c(K) \leqslant 2^n$ έγινε πάλι από τον Hadwiger [61] το 1960, όμως περίπου ταυτόχρονα ο Boltyanski [18] είχε παρατηρήσει την ισοδυναμία του προβλήματος του φωτισμού με το πρόβλημα της κάλυψης. Η προϊστορία αυτών των προβλημάτων περιγράφεται, για παράδειγμα, στα [13], [29], [88], και θα την συζητήσουμε στην Ενότητα 3.2.

Για πολλά χρόνια, το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα για την παράμετρο $b_0(K)$ παρέμενε το

$$b_0(K) \leqslant \binom{2n}{n}(n \ln n + n \ln \ln n + 5n),$$

και στην περίπτωση των κεντρικά συμμετρικών κυρτών σωμάτων,

$$b_0(K) \leqslant 2^n(n \ln n + n \ln \ln n + 5n).$$

Τα δύο αυτά άνω φράγματα προκύπτουν (βλ. [46] ή [98]) με απλό τρόπο, αν συνδυάσουμε τις εκτιμήσεις του Rogers [94] για την πυκνότητα κάλυψης $\vartheta(K)$ του $\mathbb{R}^n$ από ένα (γενικό) κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ με την ανισότητα Rogers-Shephard [95] για τον όγκο του σώματος διαφορών ενός κυρτού σώματος.

Ισχυρότερες εκτιμήσεις σε μικρές διαστάσεις έχουν αποδειχθεί στα [10, 14, 15, 20, 37, 65, 73, 92, 93]. Η εικασία του Hadwiger έχει επιβεβαιωθεί για κάποιες κλάσεις κυρτών σωμάτων όπως τα σώματα σταθερού πλάτους και τα ατρακτοειδή σώματα (fat spindle bodies - βλ. [11, 100]), τα σώματα με ζώνη (belt bodies - βλ. [21, 22, 23, 19, 81]), τα σώματα με διάσταση Helly 2 [20], τα δυϊκά κυκλικά πολύτοπα [12, 104].

Μια κλασματική μορφή του προβλήματος του φωτισμού μελετήθηκε από τον Naszódi [86], ο οποίος απέδειξε τα άνω φράγματα 2^n για την κεντρικά συμμετρική περίπτωση και $\binom{2n}{n}$ για τη γενική περίπτωση. Στα ίδια φράγματα κατέληξαν οι Artstein-Avidan και Slomka [5], οι οποίοι μελέτησαν κλασματικές εκδοχές των αριθμών κάλυψης κυρτών σωμάτων. Απέδειξαν επίσης ότι ο n-κύβος είναι ακραίο σώμα για το πρόβλημα στην κεντρικά συμμετρική περίπτωση. Συνδυάζοντας αυτές τις εκτιμήσεις με μια ανισότητα που συνδέει τους ακέραιους αριθμούς κάλυψης με τους κλασματικούς αριθμούς κάλυψης, οι Artstein και Slomka κατέληξαν σε άνω φράγματα για το κλασικό πρόβλημα του Hadwiger, τα οποία ήταν ακριβώς της ίδιας τάξης με αυτά που προκύπτουν από τις εκτιμήσεις του Rogers. Τα φράγματα αυτά αποδείχθηκαν για μία ακόμη φορά από τους Livshyts και Tikhomirov στο [77] (βλέπε επίσης [78] και [106]).

Τα παραπάνω φράγματα βελτιώθηκαν πρόσφατα με τη χρήση εργαλείων και νέων αποτελεσμάτων από την ασυμπτωτική γεωμετρική ανάλυση. Οι Huang, Slomka, Tkocz και Βριτσίου απέδειξαν στο [64] ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2\sqrt{n}}. \tag{1.1.1}$$

Για την απόδειξη αυτής της ανισότητας, συνδυάζουν την προσέγγιση του [5] με ένα νέο κάτω φράγμα για το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch ενός κυρτού σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$, το οποίο ορίζεται από την

$$\Delta_{KB}(K) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{vol}_n((K-x)\cap(x-K))}{\mathrm{vol}_n(K)} = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{vol}_n(K\cap(x-K))}{\mathrm{vol}_n(K)}.$$

Είναι απλό να ελέγξει κανείς ότι $\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n}$ για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ και εικάζεται ότι το ελάχιστο προκύπτει όταν το K είναι simplex, το οποίο θα έδινε ένα κάτω φράγμα της μορφής $\left(\frac{2}{e}\right)^n$ (βλέπε [58] και [105] για περισσότερες λεπτομέρειες). Με χρήση των εκτιμήσεων «λεπτού δακτυλίου» των Guédon και E. Milman [59] αποδεικνύεται στο [64] ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n}\exp(c\sqrt{n}) \tag{1.1.2}$$

για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Αυτό οδηγεί στο κάτω φράγμα της (1.1.1).

Πολύ πρόσφατα, οι Campos, van Hintum, Morris και Tiba [31] βελτίωσαν την (1.1.1) κατά έναν σχεδόν-εκθετικό παράγοντα. Συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι, για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/L_K^2}, \tag{1.1.3}$$

όπου L_K είναι η ισοτροπική σταθερά του K. Εικάζεται ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$L_K \leqslant C.$$

Με δεδομένη αυτή την εικασία η βελτίωση του φράγματος που επιτυγχάνεται στο [31] για τον αριθμό κάλυψης $N(K, \mathrm{int}(K))$ είναι όντως εκθετική. Η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς δεν έχει ακόμη αποδειχθεί, και για αρκετά χρόνια το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα ήταν

$$L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}$$

για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Πρόσφατα όμως υπήρξαν σημαντικές εξελίξεις σε αυτό το πρόβλημα, με το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα να είναι αυτή τη στιγμή

$$L_K \leqslant c(\ln n)^4$$

για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Συνεπώς, το αποτέλεσμα των Campos, van Hintum, Morris και Tiba εξασφαλίζει ότι

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/(\ln n)^8} \tag{1.1.4}$$

για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Όπως και στο προηγούμενο άρθρο των Huang, Slomka, Tkocz και Βριτσίου, η απόδειξη της (1.1.3) βασίζεται σε μια νέα εκτίμηση για το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch ενός κυρτού σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n} \exp(cn/L_K^2) \tag{1.1.5}$$

για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια, η γραμμή της απόδειξης που ακολουθείται στο [31] είναι η ίδια με εκείνην στο [64].

Παρουσιάζουμε όλες αυτές τις διαδοχικές γενικές εκτιμήσεις για το πρόβλημα της κάλυψης, δίνοντας το απαραίτητο υπόβαθρο και την απόδειξη για κάθε μία. Στην επόμενη ενότητα περιγράφουμε με περισσότερες λεπτομέρειες τα περιεχόμενα κάθε κεφαλαίου της εργασίας.

1.2 Σύντομη περιγραφή της εργασίας

Σε αυτή την ενότητα αναφέρουμε συνοπτικά τα κεντρικά αποτελέσματα που μελετάμε στα επόμενα κεφάλαια.

Κεφάλαιο 2. Παρουσιάζουμε τους απαραίτητους ορισμούς από τη θεωρία των κυρτών σωμάτων και δίνουμε απόδειξη της θεμελιώδους ανισότητας Brunn-Minkowski

$$\mathrm{vol}_n(K+T)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n}$$

που ισχύει για κάθε ζεύγος μη κενών συμπαγών συνόλων K και T στον $\mathbb{R}^n$ μέσω της «συναρτησιακής» της εκδοχής, της ανισότητας Prékopa-Leindler. Αποδεικνύουμε επίσης την ανισότητα Rogers-Shephard για τον όγκο του σώματος διαφορών

$$K - K = \{x - y \,:\, x, y \in K\}$$

ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει ότι

$$2^n \mathrm{vol}_n(K) \leqslant \mathrm{vol}_n(K-K) \leqslant \binom{2n}{n} \mathrm{vol}_n(K)$$

με ισότητα αριστερά αν και μόνο αν το K έχει κέντρο συμμετρίας το 0 και δεξιά αν και μόνο αν το K είναι simplex.

Κεφάλαιο 3. Αποδεικνύουμε ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ οι τέσσερις παράμετροι που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα, δηλαδή

(α) η παράμετρος $b(K)$ κάλυψης με μικρότερα αντίγραφα, (β) η παράμετρος $b_0(K)$ κάλυψης με αντίγραφα του εσωτερικού,

(γ) η παράμετρος $c(K)$ του φωτισμού, και

(δ) η παράμετρος $c_0(K)$ του κεντρικού φωτισμού,

είναι ίσες. Περιγράφουμε επίσης παραδείγματα που δείχνουν ότι αυτό δεν ισχύει γενικά για μη φραγμένα κλειστά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια διατυπώνουμε την εικασία του Hadwiger η οποία, στην περίπτωση που το K είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και με δεδομένες τις παραπάνω ισότητες, ισχυρίζεται ότι οι τέσσερις αριθμοί

$$b(K) = b_0(K) = c(K) = c_0(K)$$

φράσσονται από 2^n με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι παραλληλεπίπεδο. Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου περιγράφουμε την ενδιαφέρουσα προϊστορία του προβλήματος μέχρι τη στιγμή που η διατύπωσή του έφτασε σε αυτή τη μορφή.

Κεφάλαιο 4. Εισάγουμε την έννοια της κάλυψης και την έννοια της στοίχισης ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, και στη συνέχεια ορίζουμε την πυκνότητα στοίχισης και την πυκνότητα κάλυψης του K ως εξής: Για κάθε ακολουθία $\{x_i\}_{i\geqslant 1}$ σημείων του $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε την ακολουθία

$$\mathcal{K} := \{x_i + K : i \geqslant 1\}$$

των μεταφορών $x_i + K$ του K και για κάθε ημιανοικτό κύβο

$$C = \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_i - \tfrac{s}{2} \leqslant x_i < c_i + \tfrac{s}{2}, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$$

ορίζουμε

$$\varrho_+(\mathcal{K}, C) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)} \sum_{(x_i+K)\cap C\neq\varnothing} \mathrm{vol}_n(x_i + K)$$

και

$$\varrho_-(\mathcal{K}, C) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)} \sum_{(x_i+K)\subseteq C} \mathrm{vol}_n(x_i + K).$$

Με λίγα λόγια, $\varrho_+(\mathcal{K}, C)$ είναι ο λόγος του συνολικού όγκου των συνόλων της $\mathcal{K}$ που τέμνουν τον κύβο C προς τον όγκο του C, ενώ $\varrho_-(\mathcal{K}, C)$ είναι ο λόγος του συνολικού όγκου των συνόλων της $\mathcal{K}$ που περιέχονται στον κύβο C προς τον όγκο του C. Γράφουμε $s(C)$ για το μήκος της ακμής του κύβου C και ορίζουμε την άνω και την κάτω πυκνότητα της οικογένειας $\mathcal{K}$ θέτοντας

$$\varrho_+(\mathcal{K}) = \limsup_{s(C)\to\infty} \varrho_+(\mathcal{K}, C) = \lim_{s\to\infty} \sup_{s(C)\geqslant s} \varrho_+(\mathcal{K}, C)$$

και

$$\varrho_-(\mathcal{K}) = \liminf_{s(C)\to\infty} \varrho_-(\mathcal{K}, C) = \lim_{s\to\infty} \inf_{s(C)\geqslant s} \varrho_-(\mathcal{K}, C).$$

Τέλος, ορίζουμε την πυκνότητα στοίχισης $\delta(K)$ του K ως

$$\delta(K) = \sup_{\mathcal{K}} \varrho_+(\mathcal{K}),$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $\mathcal{K}$ μεταφορών του K που σχηματίζουν στοίχιση στον $\mathbb{R}^n$ και την πυκνότητα κάλυψης $\vartheta(K)$ του K ως

$$\vartheta(K) = \inf_{\mathcal{K}} \varrho_-(\mathcal{K}),$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $\mathcal{K}$ μεταφορών του K που σχηματίζουν κάλυψη του $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύουμε επίσης το αναλλοίωτο αυτών των δύο παραμέτρων ως προς αντιστρέψιμους αφφινικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια συγκρίνουμε τις παραμέτρους $\delta(K)$ και $\vartheta(K)$ και δίνουμε κάτω φράγματα γι' αυτές.

Το βασικό θεώρημα του κεφαλαίου οφείλεται στον Rogers: Απέδειξε ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, ισχύει το άνω φράγμα

$$\vartheta(K) \leqslant n\ln n + n\ln\ln n + 5n.$$

Αυτή η ανισότητα συνδέεται στενά με την εικασία του Hadwiger. Είναι αρκετά απλό να δείξει κανείς ότι αν K και D είναι δύο φραγμένα κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό, τότε

$$N(K,D) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K-D)}{\mathrm{vol}_n(D)}\,\vartheta(D).$$

Τότε, επιλέγοντας $D = \mathrm{int}(K)$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Rogers-Shephard βλέπουμε ότι $N(K,\mathrm{int}(K)) \leqslant 2^n\vartheta(K)$ αν το K είναι συμμετρικό και $N(K,\mathrm{int}(K)) \leqslant \binom{2n}{n}\vartheta(K)$ στη γενική περίπτωση. Συνεπώς, το άνω φράγμα του Rogers για την παράμετρο $\vartheta(K)$ έχει ως άμεση συνέπεια τα εξής: Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, τότε

$$N(K,\mathrm{int}(K)) \leqslant 2^n(n\ln n + n\ln\ln n + 5n)$$

αν το K είναι συμμετρικό, και

$$N(K,\mathrm{int}(K)) \leqslant \binom{2n}{n}(n\ln n + n\ln\ln n + 5n)$$

στη γενική περίπτωση.

Κεφάλαιο 5. Γενικεύουμε την έννοια του αριθμού κάλυψης, ορίζοντας καλύψεις με βάρη και, γενικότερα, μέτρα κάλυψης. Συμβολίζουμε με $\mathcal{D}_+^n$ την κλάση των μη αρνητικών διακριτών και πεπερασμένων μέτρων στον $\mathbb{R}^n$. Αν το $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές και το $T \subset \mathbb{R}^n$ είναι συμπαγές με μη κενό εσωτερικό, λέμε ότι το $\mu \in \mathcal{D}_+^n$ είναι μέτρο κάλυψης του K από το T αν $\mu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K$. Ο γενικευμένος αριθμός κάλυψης του K από το T ορίζεται ως

$$N_\omega(K,T) = \inf\{\nu(\mathbb{R}^n) : \nu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K,\ \nu \in \mathcal{D}_+^n\}.$$

Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{D}_+^n$ λέγεται T-διαχωρισμένο αν $\mu * \mathbb{1}_T \leqslant 1$. Ο γενικευμένος αριθμός διαχωρισμού του K από το T ορίζεται ως

$$M_\omega(K,T) = \sup\left\{\int_K d\nu : \nu * \mathbb{1}_T \leqslant 1,\ \nu \in \mathcal{D}_+^n\right\}.$$

Ορίζουμε διάφορες παραλλαγές αυτών των εννοιών και αποδεικνύουμε ανισότητες που συνδέουν αυτούς τους αριθμούς κάλυψης και διαχωρισμού, καθώς και σχέσεις δυϊσμού μεταξύ τους.

Ένα από τα βασικά αποτελέσματα του κεφαλαίου, το οποίο θα μας φανεί χρήσιμο στο Κεφάλαιο 7, ισχυρίζεται ότι αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και T_1, T_2 είναι συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό, τότε

$$N(K, T_1 + T_2) \leqslant \ln(4\overline{N}(K, T_2))(N_\omega(K, T_1) + 1) + \sqrt{\ln(4\overline{N}(K, T_2))(N_\omega(K, T_1) + 1)},$$

όπου $N(A, B)$ είναι ο συνήθης αριθμός κάλυψης του A από μεταφορές του B και $\overline{N}(A, B)$ είναι ο αριθμός κάλυψης του A από μεταφορές του B κατά διανύσματα από το A. Ήδη, χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, μπορούμε να δώσουμε εναλλακτική απόδειξη του φράγματος του Rogers για την εικασία του Hadwiger: Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα, όπου $n \geqslant 3$, τότε

$$\lim_{\lambda \to 1^-} N(K, \lambda K) \leqslant 2^n(n\ln(n) + n\ln\ln(n) + 5n).$$

Κεφάλαιο 6. Ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και για κάθε ζεύγος συμπαγών συνόλων A, B στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $0 < \lambda < 1$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^\lambda.$$

Παρουσιάζουμε βασικές ιδιότητες των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και, ειδικότερα, εισάγουμε την έννοια του ισοτροπικού κυρτού σώματος και του ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας. Στην τελευταία ενότητα του κεφαλαίου δίνουμε μια σύντομη επισκόπηση για κάποια από τα πιο γνωστά προβλήματα αυτής της περιοχής:

(α) την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς,

(β) την εικασία Kannan-Lovász-Simonovits, και

(γ) την εικασία του λεπτού δακτυλίου.

Τα τρία αυτά προβλήματα συνδέονται στενά, και όπως φαίνεται από πολύ πρόσφατα και εντυπωσιακά αποτελέσματα, είναι πιθανό να έχουν καταφατική απάντηση. Για την ακρίβεια, είναι ήδη γνωστό ότι οι τρεις εικασίες ισχύουν αν αγνοήσουμε λογαριθμικούς ως προς τη διάσταση παράγοντες. Στο Κεφάλαιο 7 χρησιμοποιούνται τα καλύτερα γνωστά αποτελέσματα για τις εικασίες (γ) και (α).

Κεφάλαιο 7. Παρουσιάζουμε λεπτομερώς τις αποδείξεις των δύο πρόσφατων αποτελεσμάτων για την εικασία του Hadwiger, τα οποία παρουσιάσαμε πιο αναλυτικά στην προηγούμενη ενότητα. Αρχικά, περιγράφουμε τη δουλειά των Huang, Slomka, Tkocz και Βριτσίου, οι οποίοι απέδειξαν στο [64] ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2\sqrt{n}}. \tag{1.2.1}$$

Βασικό ρόλο παίζει το κάτω φράγμα

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n}\exp(c\sqrt{n}) \tag{1.2.2}$$

για το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch $\Delta_{KB}(K)$ ενός κυρτού σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$, το οποίο προκύπτει με χρήση των εκτιμήσεων «λεπτού δακτυλίου» των Guédon και E. Milman.

Στη συνέχεια περιγράφουμε τη δουλειά των Campos, van Hintum, Morris και Tiba [31] οι οποίοι απέδειξαν ότι, για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$, ισχύει η ανισότητα

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n} \exp(cn/L_K^2)$$

και συνεπώς,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/L_K^2},$$

όπου L_K είναι η ισοτροπική σταθερά του K. Δεδομένου ότι είναι πλέον γνωστό ότι $L_K = O((\ln n)^4)$ για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$, το αποτέλεσμα των Campos, van Hintum, Morris και Tiba εξασφαλίζει ότι

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/(\ln n)^8}$$

για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$.

Κεφάλαιο 8. Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι η ανισότητα Rogers-Shephard $\mathrm{vol}_n(K-K) \leqslant \binom{2n}{n}\mathrm{vol}_n(K)$ από το Κεφάλαιο 2. Το 1938, ο Godbersen έκανε την εικασία ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η εξής ισχυρότερη ανισότητα: Για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$V(K[j], -K[n-j]) \leqslant \binom{n}{j}\mathrm{vol}_n(K),$$

όπου η ποσότητα $V(K_1, \ldots, K_n)$ είναι ο μεικτός όγκος των n κυρτών σωμάτων $K_1, \ldots, K_n$, και συμβολίζουμε με $V(K[j], D[n-j])$ τον μεικτό όγκο j αντιγράφων του κυρτού σώματος K και $n-j$ αντιγράφων του κυρτού σώματος D. Σημειώνουμε ότι είναι σχετικά εύκολο να δει κανείς ότι, αντίστροφα,

$$V(K[j], -K[n-j]) \geqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

Οι περιπτώσεις $j = 1$ και $j = n-1$ της εικασίας του Godbersen προκύπτουν από το γεγονός ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 τότε $-K \subseteq nK$. Ο ίδιος εγκλεισμός, σε συνδυασμό με τη μονοτονία των μεικτών όγκων, δείχνει ότι

$$V(K[j], -K[n-j]) \leqslant n^{\min\{j, n-j\}}\mathrm{vol}_n(K)$$

για κάθε $0 \leqslant j \leqslant n$. Το γεγονός ότι η εικασία του Godbersen ισχυροποιεί την ανισότητα Rogers-Shephard φαίνεται από το ότι, αν ισχύει, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathrm{vol}_n(K-K) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V(K[j], -K[n-j]) \leqslant \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2 \mathrm{vol}_n(K) = \binom{2n}{n}\mathrm{vol}_n(K).$$

Παρουσιάζουμε ένα αποτέλεσμα των Artstein-Avidan, Einhorn, Florentin και Ostrover, το οποίο δίνει την καλύτερη γνωστή εκτίμηση για το πρόβλημα: αν K είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant j \leqslant n-1$, τότε

$$V(K[j], -K[n-j]) \leqslant \frac{n^n}{j^j(n-j)^{n-j}}\mathrm{vol}_n(K) \simeq \binom{n}{j}\sqrt{2\pi\frac{j(n-j)}{n}}\mathrm{vol}_n(K).$$

Παρουσιάζουμε επίσης μια μεταγενέστερη παρατήρηση της Artstein-Avidan: αν K είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$, τότε

$$\sum_{j=0}^{n}\lambda^j(1-\lambda)^{n-j}V(K[j], -K[n-j]) \leqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

Ολοκληρώνοντας αυτή την ανισότητα ως προς λ βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{V(K[j],-K[n-j])}{\binom{n}{j}}\leqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

Η τελευταία ανισότητα δείχνει ότι η εικασία του Godbersen ισχύει κατά (ομοιόμορφο) μέσο όρο. Με απλή εφαρμογή της ανισότητας Markov προκύπτει ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$, τουλάχιστον k από τους δείκτες $j=1,2,\dots,n-1$ ικανοποιούν την

$$V(K[j],-K[n-j])\leqslant \frac{n-1}{n-k}\binom{n}{j}\mathrm{vol}_n(K).$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αποτελέσματα από την κυρτή γεωμετρία

2.1 Κυρτά σώματα

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (μέτρο Lebesgue) στον $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με vol_n. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n. Η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} είναι εφοδιασμένη με ένα αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας, το οποίο συμβολίζουμε με σ: ένας τρόπος ορισμού αυτού του μέτρου είναι να θέσουμε

$$\sigma(A)=\frac{\mathrm{vol}_n(C(A))}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)},$$

για κάθε Borel $A\subseteq S^{n-1}$, όπου $C(A)=\{tx: x\in A, t\in[0,1]\}$. Αν $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση, τότε ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες μας δίνει

$$\int_{\mathbb{R}^n}|f(x)dx=n\omega_n\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty r^{n-1}f(r\vartheta)\,dr\,d\sigma(\vartheta).$$

Τα γράμματα c,c',c_1,c_2 κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές, οι οποίες μπορεί να αλλάζουν από γραμμή σε γραμμή. Οποτεδήποτε γράφουμε $a\approx b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1,c_2>0$ έτσι ώστε $c_1a\leqslant b\leqslant c_2a$. Επίσης, αν $K,L\subseteq\mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K\approx L$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1,c_2>0$ έτσι ώστε $c_1K\subseteq L\subseteq c_2K$.

Ένα *κυρτό σώμα* στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το K είναι συμμετρικό αν «$x\in K$ αν και μόνον αν $-x\in K$». Λέμε ότι το K έχει *κέντρο βάρους* το 0 (ή την αρχή των αξόνων) αν $\int_K\langle x,\vartheta\rangle\,dx=0$ για κάθε $\vartheta\in S^{n-1}$. Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_K:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^+$ του κυρτού σώματος K με $0\in\mathrm{int}(K)$ ορίζεται ως εξής:

$$\rho_K(x)=\max\{t>0: tx\in K\}.$$

Ο όγκος του K σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από την

$$\mathrm{vol}_n(K)=\omega_n\int_{S^{n-1}}\rho_K^n(\vartheta)\,d\sigma(\vartheta).$$

Η *συνάρτηση στήριξης* του K ορίζεται ως εξής:

$$h_K(y) = \max\{\langle x, y\rangle : x \in K\}.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε διευθύνση $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_K(\vartheta) \leqslant h_K(\vartheta)$. Το *μέσο πλάτος* του K είναι η ποσότητα

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta) d\sigma(\vartheta).$$

Η *περιγεγραμμένη ακτίνα* του K είναι η

$$R(K) = \max\{\|x\|_2 : x \in K\}.$$

Πολλές φορές, για σώματα K με $0 \in \mathrm{int}(K)$ λέμε την παραπάνω ποσότητα διάμετρο του σώματος. Ο λόγος είναι ότι αυτές οι δύο ποσότητες είναι ισοδύναμες:

$$R(K) \leqslant \mathrm{diam}(K) \leqslant 2R(K),$$

όπου $\mathrm{diam}(K)$ είναι η συνήθης διάμετρος $\mathrm{diam}(K) = \sup\{\|x-y\|_2 : x, y \in K\}$. Το πολικό σώμα K° του K ορίζεται να είναι το σώμα

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } y \in K\}.$$

Βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι ακόλουθες:

(i) $0 \in K^\circ$.

(ii) Αν $0 \in \mathrm{int}(K)$, τότε $(K^\circ)^\circ = K$.

(iii) Για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_{K^\circ}(\vartheta) = 1/h_K(\vartheta)$.

(iv) Για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.

Κάποιες βασικές ανισότητες για όγκους κυρτών σωμάτων οι οποίες θα φανούν χρήσιμες είναι οι ακόλουθες:

(α) Η ανισότητα του Urysohn. Αν K είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$w(K) \geqslant \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}.$$

(β) Η ανισότητα Blaschke-Santaló. Αν K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ή γενικότερα αν το K έχει κέντρο βάρους το 0, τότε

$$\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leqslant \mathrm{vol}_n(B_2^n)^2.$$

(γ) Η ανισότητα των Bourgain-Milman. Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ ώστε: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K) \cdot \mathrm{vol}_n(K^\circ) \geqslant c^n \mathrm{vol}_n(B_2^n).$$

Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή και ως αντίστροφη ανισότητα Santaló.

Οι μεικτοί όγκοι ορίζονται μέσω ενός κλασικού θεωρήματος του Minkowski το οποίο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ο όγκος αλληλεπιδρά με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού συμπαγών κυρτών συνόλων με μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Αν $K_1, \ldots, K_N$, $N \in \mathbb{N}$, είναι συμπαγή κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$, τότε ο όγκος του $t_1K_1 + \cdots + t_NK_N$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς $t_i \geqslant 0$:

$$\mathrm{vol}_n(t_1K_1 + \cdots + t_NK_N) = \sum_{1\leqslant i_1,\ldots,i_n\leqslant N} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})t_{i_1}\cdots t_{i_n}, \tag{2.1.1}$$

όπου οι συντελεστές $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ επιλέγονται έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτοι ως προς μεταθέσεις των ορισμάτων τους. Ο συντελεστής $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ ονομάζεται μεικτός όγκος της n-άδας $(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$. Θα χρησιμοποιούμε συχνά το γεγονός ότι η συνάρτηση V είναι μη αρνητική και αναλλοίωτη ως προς μεταφορές συνάρτηση, μονότονη ως προς τη σχέση του εγκλεισμού συνόλων και θετικά ομογενής ως προς κάθε όρισμά της. Επίσης, $V(K, \ldots, K) = \mathrm{vol}_n(K)$ για κάθε συμπαγές κυρτό σύνολο K στον $\mathbb{R}^n$. Στο Παράρτημα B κάνουμε μια σκιαγράφηση της απόδειξης του θεωρήματος του Minkowski.

Ο τύπος του Steiner είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Minkowski. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, ο όγκος του $K + tB_2^n$, $t > 0$, αναπτύσσεται ως πολυώνυμο του t:

$$\mathrm{vol}_n(K + tB_2^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_k(K)t^k, \tag{2.1.2}$$

όπου $W_k(K) := V(K[n-k], B_2^n[k])$ είναι το k-οστό quermassintegral του K.

2.2 Η ανισότητα Brunn-Minkowski

Ορισμός 2.2.1. Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$A + B := \{a + b \,:\, a \in A,\, b \in B\}$$

και για κάθε $t \geqslant 0$,

$$tA = \{ta \,:\, a \in A\}.$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 2.2.2 (ανισότητα Brunn-Minkowski). *Έστω K και T δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K + T)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n}. \tag{2.2.1}$$

Σημείωση. Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα, ισότητα στην (2.2.1) μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά.

Η (2.2.1) εκφράζει με μια έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι *κοίλη* συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0, 1)$, τότε

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)T)^{1/n} \geqslant \lambda \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(T)^{1/n}. \tag{2.2.2}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.2.2) και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)T) \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{\lambda}\mathrm{vol}_n(T)^{1-\lambda}. \tag{2.2.3}$$

Η ασθενέστερη αυτή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητη της διάστασης.

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις της (2.2.1). Θα δώσουμε εδώ την απόδειξη της *συναρτησιακής μορφής* της ανισότητας, που οφείλεται στους Prékopa και Leindler.

Θεώρημα 2.2.3 (Prékopa-Leindler). *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρεις μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{2.2.4}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς τη διάσταση n.

(α) $n = 1$: Χρησιμοποιώντας βασικά αποτελέσματα από τη θεωρία του ολοκληρώματος Lebesgue, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ιδέα της μεταφοράς του μέτρου.

Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t \int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t \int g.$$

Με βάση τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t) f(x(t)) = \int f \quad \text{και} \quad y'(t) g(y(t)) = \int g.$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t).$$

Οι x και y είναι γνησίως αύξουσες και επί. Επεται ότι η z είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα και επί, και από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda) y'(t) \geqslant (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned}\int h &= \int_0^1 h(z(t))z'(t)dt \\ &\geqslant \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda)y(t))(x'(t))^{\lambda}(y'(t))^{1-\lambda}dt \\ &\geqslant \int_0^1 f^{\lambda}(x(t))g^{1-\lambda}(y(t))\left(\frac{\int f}{f(x(t))}\right)^{\lambda}\left(\frac{\int g}{g(y(t))}\right)^{1-\lambda} dt \\ &= \left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n \geqslant 2$ και ότι το θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \dots, n-1\}$. Εστω f, g, h όπως στο θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w, s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την (2.2.4) έπεται ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0}(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f_{s_1}(x)^{\lambda} g_{s_0}(y)^{1-\lambda},$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned}H(\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda)s_0} \\ &\geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1}\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0}\right)^{1-\lambda} =: F^{\lambda}(s_1)G^{1-\lambda}(s_0).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις F, G και H, παίρνουμε

$$\int h = \int_{\mathbb{R}} H \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} F\right)^{\lambda}\left(\int_{\mathbb{R}} G\right)^{1-\lambda} = \left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.2. Έστω K, T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.3, οπότε

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)T) = \int h \geqslant \left(\int f\right)^{\lambda}\left(\int g\right)^{1-\lambda} = \mathrm{vol}_n(K)^{\lambda}\mathrm{vol}_n(T)^{1-\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.2.3) για κάθε τριάδα K, T, λ. Για να πάρουμε την (2.2.1) θεωρούμε K και T όπως στο Θεώρημα 2.2.2 (με $\mathrm{vol}_n(K) > 0$, $\mathrm{vol}_n(T) > 0$), και ορίζουμε

$$K_1 = \mathrm{vol}_n(K)^{-1/n}K, \qquad T_1 = \mathrm{vol}_n(T)^{-1/n}T, \qquad \lambda = \frac{\mathrm{vol}_n(K)^{1/n}}{\mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n}}.$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (2.2.3) παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1) \geqslant 1. \tag{2.2.5}$$

Όμως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1 = \frac{K+T}{\mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n}},$$

επομένως η (2.2.5) παίρνει την μορφή

$$\mathrm{vol}_n(K+T) \geqslant \left(\mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n}\right)^n$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

2.3 Η ανισότητα των Rogers και Shephard

Το *σώμα διαφορών* του κυρτού σώματος K είναι το

$$K - K = \{x - y \,:\, x, y \in K\}.$$

Το $K-K$ είναι συμμετρικό (με κέντρο συμμετρίας το 0), και $\mathrm{vol}_n(K-K) \geqslant 2^n \mathrm{vol}_n(K)$ από την ανισότητα Brunn-Minkowski. Οι Rogers και Shephard έδωσαν ακριβές άνω φράγμα για τον όγκο του σώματος διαφορών.

Θεώρημα 2.3.1. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K-K) \leqslant \binom{2n}{n} \mathrm{vol}_n(K).$$

Απόδειξη. Η ανισότητα Brunn-Minkowski μπαίνει στην απόδειξη μέσω του εξής λήμματος:

Λήμμα 2.3.2. *Αν K και T είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση*

$$x \mapsto \mathrm{vol}_n(K \cap (x+T))^{1/n}$$

είναι κοίλη στον φορέα της.

Απόδειξη. Το λήμμα είναι άμεση συνέπεια του εγκλεισμού

$$\lambda(K \cap (x+T)) + (1-\lambda)(K \cap (y+T)) \subseteq K \cap ((\lambda x + (1-\lambda)y) + T).$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_n(K \cap ((\lambda x + (1-\lambda)y) + T)) \geqslant \mathrm{vol}_n(\lambda(K \cap (x+T)) + (1-\lambda)(K \cap (y+T))),$$

και από την (2.2.2) συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(K \cap (\lambda x + (1-\lambda)y + T))^{1/n} \geqslant \lambda \mathrm{vol}_n(K \cap (x+T))^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(K \cap (y+T))^{1/n}.$$

□

Ορίζουμε $f(x) = \mathrm{vol}_n(K \cap (x+K))^{1/n}$. Θέτοντας $T = K$ στο Λήμμα 2.3.2 βλέπουμε ότι η f είναι κοίλη συνάρτηση στον φορέα της, δηλαδή στο $K-K$.

Ορίζουμε μια δεύτερη συνάρτηση $g : K-K \to \mathbb{R}^+$ ως εξής: κάθε $x \in K-K$ γράφεται στην μορφή $x = r\vartheta$, όπου $\vartheta \in S^{n-1}$ και $0 \leqslant r \leqslant \rho_{K-K}(\vartheta)$. Τότε, θέτουμε $g(x) = f(0)(1 - r/\rho_{K-K}(\vartheta))$. Από τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε, η g είναι γραμμική στο ευθύγραμμο τμήμα $[0, \rho_{K-K}(\vartheta)\vartheta]$, μηδενίζεται στο σύνορο του $K-K$, και $g(0)=f(0)$. Αφού η f είναι κοίλη, παίρνουμε $f \geqslant g$ στο $K-K$. Επομένως,

$$\begin{aligned}\int_{K-K} \mathrm{vol}_n(K\cap(x+K))dx &= \int_{K-K} f^n(x)dx \geqslant \int_{K-K} g^n(x)dx \\ &= [f(0)]^n n\omega_n \int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_{K-K}(\vartheta)} r^{n-1}(1-r/\rho)^n\,dr\,d\sigma(\vartheta) \\ &= \mathrm{vol}_n(K)\,n\omega_n \int_{S^{n-1}} \rho^n_{K-K}(\vartheta)\,d\sigma(\vartheta)\int_0^1 t^{n-1}(1-t)^n\,dt \\ &= \mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K-K)\,n\frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \binom{2n}{n}^{-1}\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K-K).\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα του Fubini μας δίνει

$$\begin{aligned}\int_{K-K} \mathrm{vol}_n(K\cap(x+K))dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{vol}_n(K\cap(x+K))dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y)\chi_{x+K}(y)dydx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_K(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{y-K}(x)dx\right)dy \\ &= \int_K \mathrm{vol}_n(y-K)dy = \mathrm{vol}_n(K)^2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Σημείωση. Εξετάζοντας πιό προσεκτικά την απόδειξη, και παίρνοντας υπόψιν τη συνθήκη ισότητας στην ανισότητα Brunn-Minkowski, βλέπουμε ότι ισχύει ισότητα στο Θεώρημα 2.3.1 αν και μόνο αν το K έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$(rK+x)\cap(sK+y) = tK+w$$

για κάθε $r,s>0$ και $x,y\in\mathbb{R}^n$, δηλαδή αν η τομή δύο όχι ξένων ομοιοθετικών προς το K σωμάτων είναι κι αυτή ομοιοθετική προς το K. Οι Rogers και Shephard απέδειξαν ότι η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει το simplex.

Η χρησιμότητα της εκτίμησης του Θεωρήματος 2.3.1 έγκειται στην παρατήρηση ότι ο όγκος του $K-K$ δεν είναι πολύ μεγαλύτερος από τον όγκο του K: έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K-K)^{1/n} \leqslant 4\mathrm{vol}_n(K)^{1/n},$$

δηλαδή, κάθε κυρτό σώμα (που περιέχει το 0) περιέχεται σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα με «περίπου» τον ίδιο όγκο. Η παρατήρηση αυτή θα χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά στη συνέχεια.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Η εικασία του Hadwiger

3.1 Το πρόβλημα και ισοδύναμες διατυπώσεις του

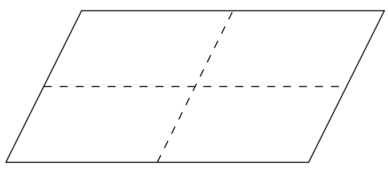
Σε αυτή την ενότητα διατυπώνουμε δύο μορφές του προβλήματος της κάλυψης και δύο μορφές του προβλήματος του φωτισμού. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι τα τέσσερα αυτά προβλήματα είναι ισοδύναμα.

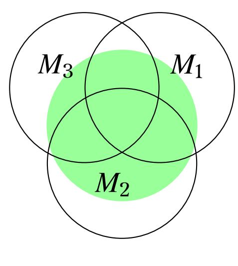
Το πρόβλημα της κάλυψης με μικρότερα αντίγραφα. Έστω K ένα κλειστό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Το πρόβλημα των Gohberg-Markus και Hadwiger ζητάει να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος, N, μικρότερων ομοιοθετικών αντιγράφων $K_1, \ldots, K_N$ του K που η ένωσή τους καλύπτει το K, δηλαδή

$$K \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_N.$$

Συμβολίζουμε αυτόν τον αριθμό με $b(K)$. Λέγοντας «μικρότερα ομοιοθετικά αντίγραφα» εννοούμε ότι κάθε K_i είναι κυρτό σώμα της μορφής $K_i = \kappa_i K + x_i$ για κάποιον $\kappa_i \in (0, 1)$ και κάποιο $x_i \in \mathbb{R}^n$. Εάν το K δεν καλύπτεται από πεπερασμένα το πλήθος μικρότερα ομοιοθετικά αντίγραφά του, τότε ορίζουμε $b(K) = \infty$.

Δεν επιβάλλουμε κάποιον περιορισμό για τους λόγους κ_i, πέρα από το ότι ζητάμε να ισχύουν οι $0 < \kappa_i < 1$. Δηλαδή, οι κ_i μπορούν να είναι οσοδήποτε κοντά στο 1. Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι αν $P \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα παραλληλόγραμμο, τότε $b(P) = 4$. Από την άλλη πλευρά, αν $M \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα συμπαγές κυρτό χωρίο με μη κενό εσωτερικό που δεν είναι παραλληλόγραμμο, τότε μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $b(M) = 3$.





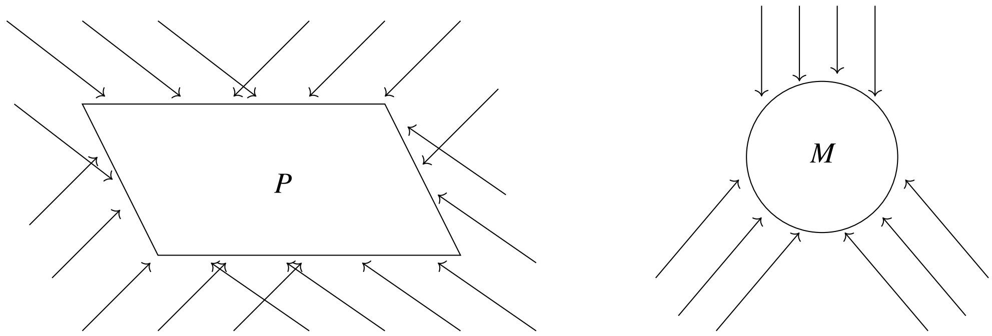
Το πρόβλημα της κάλυψης με αντίγραφα του εσωτερικού. Ένα παρόμοιο πρόβλημα διατυπώθηκε από τον Levi, ο οποίος ζητούσε να βρεθεί το ελάχιστο πλήθος, N, μεταφορών $K_1, \ldots, K_N$ του K που η ένωση των εσωτερικών τους καλύπτει το K, δηλαδή

$$K \subseteq \mathrm{int}(K_1) \cup \cdots \cup \mathrm{int}(K_N).$$

Συμβολίζουμε αυτόν τον αριθμό με $b_0(K)$.

Το πρόβλημα του φωτισμού. Έστω K ένα κλειστό κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι ένα σημείο $x \in \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από μια (προσανατολισμένη) κατεύθυνση u_i στον $\mathbb{R}^n$ αν η ακτίνα που ξεκινάει από το x και έχει κατεύθυνση u_i περιέχει κάποιο εσωτερικό σημείο του K. Με άλλα λόγια, λέμε ότι ένα συνοριακό σημείο x του K φωτίζεται από την u_i αν $x + \lambda e \in \mathrm{int}(K)$ για όλα τα αρκετά μικρά $\lambda > 0$, όπου e είναι το μοναδιαίο διάνυσμα με κατεύθυνση u. Λέμε ότι οι κατευθύνσεις που προσδιορίζονται από τα μη μηδενικά διανύσματα $e_1, \ldots, e_N$ φωτίζουν το σύνορο του K αν κάθε $x \in \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από τουλάχιστον μία από αυτές τις κατευθύνσεις. Συμβολίζουμε με $c(K)$ τον ελάχιστο φυσικό N για τον οποίο υπάρχουν N μη μηδενικά διανύσματα που οι κατευθύνσεις τους φωτίζουν το σύνορο του K.

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι αν $P \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένα παραλληλόγραμμο, τότε $c(P) = 4$. Αν $M \subset \mathbb{R}^2$ είναι ένας δίσκος, τότε $c(M) = 3$.



Το πρόβλημα του κεντρικού φωτισμού. Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε το πρόβλημα του φωτισμού ενός κλειστού κυρτού συνόλου στον $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό από φωτεινές πηγές (το λεγόμενο πρόβλημα του κεντρικού φωτισμού). Έστω $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ μια «φωτεινή πηγή». Λέμε ότι ένα σημείο $y \in \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από το x αν η ακτίνα $[x, y)$ και το εσωτερικό του K έχουν κοινά σημεία που βρίσκονται έξω από το ευθύγραμμο τμήμα $[x, y]$. Λέμε επίσης ότι ένα σύνολο $N \subseteq \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από ένα σύνολο $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$ αν κάθε σημείο του N φωτίζεται από τουλάχιστον ένα σημείο του M. Το πρόβλημα είναι να βρεθεί ο ελάχιστος φυσικός N για τον οποίο μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο $M = \{x_1, \ldots, x_N\} \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ το οποίο φωτίζει ολόκληρο το σύνορο του K. Συμβολίζουμε αυτόν τον ελάχιστο φυσικό N με $c_0(K)$.

Οι παράμετροι $b_0(K)$, $c(K)$ και $c_0(K)$ μπορεί να είναι πεπερασμένες ή άπειρες, όπως και η $b(K)$.

Θεώρημα 3.1.1. *Για κάθε κλειστό κυρτό σύνολο $K \subseteq \mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό, το οποίο δεν ταυτίζεται με τον $\mathbb{R}^n$, ισχύουν οι ανισότητες*

$$c(K) \leqslant b_0(K) \leqslant b(K) \tag{3.1.1}$$

και

$$c(K) \leqslant c_0(K) \leqslant b(K). \tag{3.1.2}$$

Απόδειξη. Έστω $K_1, \dots, K_N$ μεταφορές του K τέτοιες ώστε

$$K \subseteq \mathrm{int}(K_1) \cup \cdots \cup \mathrm{int}(K_N).$$

Για κάθε $i = 1, \dots, N$ συμβολίζουμε με π_i τη μεταφορά για την οποία $\pi_i(K_i) = K$ και με u_i τη διεύθυνσή της. Αν $x \in \mathrm{int}(K_i) \cap \mathrm{bd}(K)$ τότε $\pi_i(x) \in \mathrm{int}(K)$, άρα το x φωτίζεται από την κατεύθυνση u_i. Το διάνυσμα μεταφοράς της π_i δεν είναι το μηδενικό, αφού $x \notin \mathrm{int}(K)$, δηλαδή $K_i \neq K$. Επομένως, το σύνολο $K_i \cap \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από την u_i. Έπεται ότι οι διευθύνσεις $u_1, \dots, u_N$ φωτίζουν ολόκληρο το

$$\mathrm{bd}(K) = \bigcup_{i=1}^{N} (\mathrm{int}(K_i) \cap \mathrm{bd}(K)).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $c(K) \leqslant N$. Επομένως, αν $b_0(K) < \infty$ τότε $c(K) \leqslant b_0(K)$.

Δείχνουμε τώρα τη δεύτερη ανισότητα της (3.1.1). Έστω $N = b(K)$ και $K_1, \dots, K_N$ μικρότερα ομοιοθετικά αντίγραφα του K τέτοια ώστε $K \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_N$ και έστω h_i η ομοιοθεσία λόγου $0 < \kappa_i < 1$ που μετασχηματίζει το K στο K_i. Θεωρούμε ένα σημείο $a_i \in \mathrm{int}(K_i)$ και συμβολίζουμε με h_i' την ομοιοθεσία με κέντρο a_i και λόγο $1/\kappa_i$. Τότε, η $\pi_i = h_i' \circ h_i$ είναι μεταφορά, άρα το $h_i'(K_i) = h_i'(h_i(K)) = \pi_i(K)$ είναι μεταφορά του K. Επίσης, αφού $1/\kappa_i > 1$ και $a_i \in \mathrm{int}(K_i)$ έχουμε ότι $K_i \subseteq \mathrm{int}(h_i'(K_i))$. Συνεπώς,

$$K \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_N \subseteq \mathrm{int}(h_1'(K_1)) \cup \cdots \cup \mathrm{int}(h_N'(K_N)),$$

δηλαδή

$$K \subseteq \mathrm{int}(\pi_1(K)) \cup \cdots \cup \mathrm{int}(\pi_N(K)).$$

Αυτό συνεπάγεται ότι $b_0(K) \leqslant N = b(K)$.

Για την απόδειξη της πρώτης ανισότητας στην (3.1.2) θέτουμε $N = c_0(K)$ και θεωρούμε φωτεινές πηγές $y_1, \dots, y_N \in \mathbb{R}^n \setminus K$ που φωτίζουν ολόκληρο το σύνορο $\mathrm{bd}(K)$ του K. Έστω $a \in \mathrm{int}(K)$ και u_i η κατεύθυνση της ακτίνας $[y_i, a)$, $i = 1, \dots, N$. Ας υποθέσουμε ότι το $x \in \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από το y_i. Επιλέγουμε ένα σημείο $z \in \mathrm{int}(K)$ τέτοιο ώστε $x \in (y_i, x)$ και συμβολίζουμε με v το σημείο του ευθύγραμμου τμήματος $[a, z]$ για το οποίο τα διανύσματα $v - x$ και $a - y_i$ είναι παράλληλα. Τότε $v \in \mathrm{int}(K)$, διότι $a, z \in \mathrm{int}(K)$. Αφού u_i είναι η κατεύθυνση της ακτίνας $[x, v)$, το σημείο x φωτίζεται από την u_i. Επομένως, κάθε σημείο $x \in \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από κάποια από τις διευθύνσεις $u_1, \dots, u_N$, το οποίο αποδεικνύει ότι $c(K) \leqslant N = c_0(K)$.

Τέλος, δείχνουμε τη δεύτερη ανισότητα στην (3.1.2). Έστω $N = b(K)$ και $K_1, \dots, K_N$ μικρότερα ομοιοθετικά αντίγραφα του K τέτοια ώστε $K \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_N$. Έστω h_i η ομοιοθεσία λόγου $0 < \kappa_i < 1$ που μετασχηματίζει το K στο K_i. Θεωρούμε ένα σημείο $a_i \in \mathrm{int}(K_i)$ και συμβολίζουμε με g_i την ομοιοθεσία με κέντρο a_i και λόγο λ_i όπου $1 < \lambda_i < 1/\kappa_i$. Τότε η $f_i = g_i \circ h_i$ είναι ομοιοθεσία με λόγο $\kappa_i \lambda_i$ και συμβολίζουμε το κέντρο της f_i με y_i. Αφού $\lambda_i > 1$ και $a_i \in \mathrm{int}(K_i)$, έχουμε $K_i \subseteq \mathrm{int}(g_i(K_i)) = \mathrm{int}(f_i(K))$, άρα

$$K \subseteq \mathrm{int}(f_1(K)) \cup \cdots \cup \mathrm{int}(f_N(K)).$$

Έστω $x \in \mathrm{int}(f_i(K)) \cap \mathrm{bd}(K)$. Τότε $y_i \notin K$. Πράγματι, αφού $\kappa_i \lambda_i < 1$, αν ίσχυε ότι $y_i \in K$ τότε θα είχαμε $f_i(K) \subseteq K$, άρα $\mathrm{int}(f_i(K)) \subseteq \mathrm{int}(K)$, απ' όπου θα είχαμε $\mathrm{int}(f_i(K)) \cap \mathrm{bd}(K) = \varnothing$, που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι $x \in \mathrm{int}(f_i(K)) \cap \mathrm{bd}(K)$. Θα δείξουμε ότι το x φωτίζεται από το y_i. Αφού $x \in \mathrm{int}(f_i(K))$, έχουμε $x = f_i(z_i)$ για κάποιο $z_i \in \mathrm{int}(K)$. Το σημείο z_i ανήκει στο $[y_i, x)$ αλλά δεν ανήκει στο $[y_i, x]$, αφού $\kappa_i \lambda_i < 1$. Αυτό δείχνει ότι το x φωτίζεται από το y_i. Έτσι, αν το σύνολο $\mathrm{int}(f_i(K)) \cap \mathrm{bd}(K)$ είναι μη κενό, τότε φωτίζεται από το y_i. Από την

$$\mathrm{bd}(K) = (\mathrm{int}(f_1(K)) \cap \mathrm{bd}(K)) \cup \cdots \cup (\mathrm{int}(f_N(K)) \cap \mathrm{bd}(K))$$

έπεται ότι ολόκληρο το σύνορο του K φωτίζεται από N το πολύ φωτεινές πηγές, τα σημεία $y_1, \ldots, y_N$ που βρίσκονται εκτός του K. Συνεπώς, $c_0(K) \leqslant N = b(K)$. □

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι στην περίπτωση που το K είναι κυρτό σώμα, δηλαδή είναι επιπλέον συμπαγές, τότε οι τέσσερις παράμετροι που ορίσαμε σε αυτήν την παράγραφο συμπίπτουν.

Θεώρημα 3.1.2. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$b(K) = b_0(K) = c(K) = c_0(K). \tag{3.1.3}$$

Απόδειξη. Λόγω των (3.1.1) και (3.1.2) αρκεί να δείξουμε ότι $b(K) \leqslant c(K)$. Θέτουμε $N = c(K)$ και θεωρούμε διευθύνσεις $u_1, \ldots, u_N$ οι οποίες φωτίζουν ολόκληρο το σύνορο του K. Συμβολίζουμε με Δ_i το σύνολο όλων των σημείων $x \in \mathrm{bd}(K)$ που φωτίζονται από την κατεύθυνση u_i, $i = 1, \ldots, N$. Παρατηρούμε ότι αν το $x_0 \in \mathrm{bd}(K)$ φωτίζεται από την κατεύθυνση u_i, δηλαδή $x_0 \in \Delta_i$, τότε κάθε σημείο $x \in \mathrm{bd}(K)$ το οποίο βρίσκεται αρκετά κοντά στο x_0 φωτίζεται κι αυτό από την κατεύθυνση u_i. Δηλαδή, τα $\Delta_1, \ldots, \Delta_N$ είναι ανοικτά σύνολα στο $\mathrm{bd}(K)$. Αφού οι διευθύνσεις $u_1, \ldots, u_N$ φωτίζουν ολόκληρο το σύνορο του K, έχουμε

$$\mathrm{bd}(K) = \Delta_1 \cup \cdots \cup \Delta_N.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχουν ανοικτά σύνολα $V_1, \ldots, V_N$ στο $\mathrm{bd}(K)$ που ικανοποιούν τις

$$\overline{V_1} \subseteq \Delta_1, \cdots, \overline{V_N} \subseteq \Delta_N \tag{3.1.4}$$

και

$$\mathrm{bd}(K) = V_1 \cup \cdots \cup V_N. \tag{3.1.5}$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού χρησιμοποιούμε επαγωγή. Ας υποθέσουμε ότι για κάποιον φυσικό $k \in \{1, \ldots, N\}$ έχουμε βρει ανοικτά σύνολα $V_1, \ldots, V_{k-1}$ τέτοια ώστε $\overline{V_1} \subseteq \Delta_1, \cdots, \overline{V_{k-1}} \subseteq \Delta_{k-1}$ και

$$\mathrm{bd}(K) = V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1} \cup \Delta_k \cup \cdots \cup \Delta_N$$

(εάν $k = 1$ τότε η υπόθεση αυτή ικανοποιείται τετριμμένα). Θεωρούμε τα σύνολα

$$F_k = \mathrm{bd}(K) \setminus (V_1 \cup \cdots \cup V_{k-1} \cup \Delta_{k+1} \cup \cdots \cup \Delta_N)$$

και

$$H_k = \mathrm{bd}(K) \setminus \Delta_k.$$

Τα σύνολα F_k, H_k είναι κλειστά και $F_k \cap H_k = \varnothing$. Ορίζουμε $d_k = \mathrm{dist}(F_k, H_k) > 0$. Επιλέγουμε $0 < \varepsilon < d_k$ και θέτουμε $V_k = (F_k)_\varepsilon \cap \mathrm{bd}(K)$, όπου $(F_k)_\varepsilon := \{x : \mathrm{dist}(x, F_k) < \varepsilon\}$. Τότε, το V_k είναι ανοικτό στο $\mathrm{bd}(K)$ και $V_k \cap H_k = \varnothing$, συνεπώς

$$\overline{V_k} \subseteq \Delta_k \quad \text{και} \quad V_1 \cup \cdots \cup V_k \cup \Delta_{k+1} \cup \cdots \cup \Delta_N = \mathrm{bd}(K).$$

Αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα. Για $k = N$ παίρνουμε ανοικτά σύνολα $V_1, \dots, V_N$ στο $\mathrm{bd}(K)$ που ικανοποιούν τις (3.1.4) και (3.1.5).

Για δοθέν $x \in \Delta_i$ συμβολίζουμε με $u_i(x)$ την ακτίνα με αρχή το x στην κατεύθυνση u_i. Αφού το x φωτίζεται από την u_i, η ακτίνα $u_i(x)$ συναντάει το εσωτερικό του K και τέμνει το $\mathrm{bd}(K)$ σε κάποιο σημείο $a_i(x) \neq x$. Δηλαδή, το ευθύγραμμο τμήμα $[x, a_i(x)]$ περιέχεται στο K, τα άκρα του ανήκουν στο $\mathrm{bd}(K)$ και τα εσωτερικά του σημεία ανήκουν στο εσωτερικό του K. Έστω $f_i(x)$ το μήκος του $[x, a_i(x)]$. Η $f_i(x)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο Δ_i η οποία παίρνει γνησίως θετικές τιμές. Αφού το $\overline{V_i} \subseteq \Delta_i$ είναι συμπαγές, η $f_i(x)$ παίρνει ελάχιστη θετική τιμή στο $\overline{V_i}$, άρα υπάρχει $q_i > 0$ τέτοιος ώστε $f_i(x) > q_i$ για κάθε $x \in \overline{V_i}$. Δηλαδή, για κάθε $x \in \overline{V_i}$ το μήκος του $[x, a_i(x)]$ είναι μεγαλύτερο από q_i. Αυτό σημαίνει ότι η μεταφορά π_i κατά q_i στην κατεύθυνση u_i μεταφέρει το $\overline{V_i}$ στο εσωτερικό του K, δηλαδή

$$\pi_i^{-1}(\mathrm{int}(K)) \supseteq \overline{V_i}$$

για κάθε $i = 1, \dots, N$.

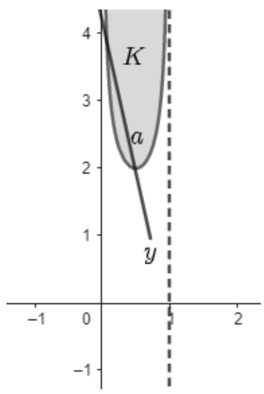
Έστω τώρα y_0 τυχόν εσωτερικό σημείο του K. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $q_1, \dots, q_N$ είναι αρκετά μικροί ώστε να έχουμε $y_0 \in \pi_i^{-1}(K)$ για κάθε $i = 1, \dots, N$. Αφού το κλειστό σύνολο $\overline{V_i} \cup \{y_0\}$ περιέχεται στο $\pi_i^{-1}(\mathrm{int}(K)) = \mathrm{int}(\pi_i^{-1}(K))$, υπάρχει ομοιοθεσία g_i με λόγο $0 < \kappa_i < 1$ τέτοια ώστε $\overline{V_i} \cup \{y_0\} \subseteq g_i(\pi_i^{-1}(K))$ για κάθε $i = 1, \dots, N$.

Παρατηρήστε ότι η $g_i \circ \pi_i^{-1}$ είναι ομοιοθεσία με λόγο $0 < \kappa_i < 1$, δηλαδή το κυρτό σώμα $K_i = g_i(\pi_i^{-1}(K))$ είναι ένα μικρότερο ομοιοθετικό αντίγραφο του K. Θα δείξουμε ότι

$$K \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_N. \tag{3.1.6}$$

Έστω $z \in K$. Επιλέγουμε $x \in \mathrm{bd}(K)$ τέτοιο ώστε $z \in [x, y_0]$. Επιλέγουμε επίσης $1 \leqslant i \leqslant N$ τέτοιο ώστε $x \in \overline{V_i}$, χρησιμοποιώντας την (3.1.5). Αφού τα σημεία y_0 και $x \in \overline{V_i}$ ανήκουν στο κυρτό σύνολο $K_i = g_i(\pi_i^{-1}(K))$, συμπεραίνουμε ότι $[x, y_0] \subseteq K_i$, άρα $z \in K_i \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_N$. Αυτό αποδεικνύει την (3.1.6), άρα $b(K) \leqslant N = c(K)$. □

Προκύπτει φυσιολογικά το ερώτημα αν οι παραπάνω ισότητες ισχύουν και στην περίπτωση μη συμπαγούς συνόλου. Όπως δείχνει το επόμενο παράδειγμα, η απάντηση είναι αρνητική.



Παράδειγμα 3.1.3. Έστω $K \subset \mathbb{R}^2$ μη φραγμένο κυρτό σύνολο με δύο παράλληλες ασύμπτωτες που δεν τέμνουν το K. Μπορούμε συγκεκριμένα να δουλέψουμε με το σύνολο K που αποτελείται από τα

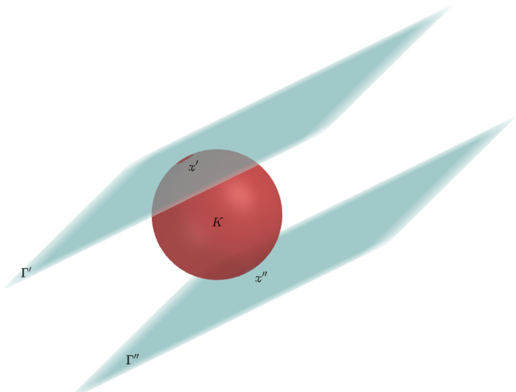
σημεία (x,y) για τα οποία ισχύει η ανισότητα

$$y \geqslant \frac{1}{\sqrt{x(1-x)}}.$$

Το πλάτος του K ως προς τον άξονα x είναι 1. Ωστόσο, το πλάτος κάθε μικρότερου ομοιοθετικού αντιγράφου είναι μικρότερο του 1, οπότε $b(K) > 1$. Εύκολα βλέπουμε ότι $b(K) = 2$. Επιπλέον, $b_0(K) = 1$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε μια μεταφορά π του K κατά ένα διάνυσμα $(0,\alpha)$ με $\alpha < 0$ μπορούμε να πάρουμε ένα σύνολο $\pi(K) = K_1$ τέτοιο ώστε $\mathrm{int}(K_1) \supset K$. Επομένως, $b_0(K) < b(K)$. Επίσης, από το Θεώρημα 3.1.1 έπεται ότι $c(K) = 1$. Θα δείξουμε ότι $c_0(K) = 2$. Έστω $y = (\xi,\eta) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ μια φωτεινή πηγή. Τότε, τουλάχιστον μία από τις $\xi > 0$ ή $\xi < 1$ πρέπει να ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει η πρώτη και επιλέγουμε $\alpha \in \mathrm{int}(K)$ με την πρώτη του συντεταγμένη μικρότερη από ξ. Τότε, η ακτίνα $[y,\alpha)$ τέμνει το σύνορο του K σε ένα σημείο x_0 που δεν φωτίζεται από το y. Επομένως, $c_0(K) > 1$ και από το Θεώρημα 3.1.1 προκύπτει ότι $c_0(K) = 2$.

Αν και στη συνέχεια θα ασχοληθούμε με άνω φράγματα για την παράμετρο $b(K)$, παραθέτουμε ένα αποτέλεσμα που δίνει κάτω φράγμα γι' αυτόν τον αριθμό.

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $c(K) \geqslant n+1$.*



Απόδειξη. Έστω $l_1,\dots,l_n$ τυχαίες κατευθύνσεις. Θα δείξουμε ότι αυτές οι n κατευθύνσεις δεν μπορούν να φωτίσουν το σύνορο του K. Έστω Γ ένα υπερεπίπεδο που περιέχει τις κατευθύνσεις $l_1,\dots,l_{n-1}$. Επιπλέον, έστω Γ',Γ'' δύο υπερεπίπεδα στήριξης του K παράλληλα στο Γ και Π',Π'' οι κλειστοί ημίχωροι που ορίζουν τα Γ' και Γ'' αντίστοιχα και δεν περιέχουν το K. Επιλέγουμε $x' \in \Gamma' \cap K$, $x'' \in \Gamma'' \cap K$ και συμβολίζουμε με l', l'' τις ακτίνες στην κατεύθυνση του l_n με αρχικά σημεία τα x', x'' αντίστοιχα. Τότε, τουλάχιστον ένας από τους εγκλεισμούς $l' \subset \Pi'$, $l'' \subset \Pi''$ πρέπει να ισχύει. Υποθέτουμε ότι ισχύει ο πρώτος και συμπεραίνουμε ότι το σημείο x' δεν φωτίζεται από τις κατευθύνσεις $l_1,\dots,l_n$, άρα $c(K) \geqslant n+1$. □

Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι αν, στην περίπτωση που το K είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, οι τέσσερις αριθμοί

$$b(K) = b_0(K) = c(K) = c_0(K)$$

φράσσονται από 2^n με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι παραλληλεπίπεδο. Για κάθε ζεύγος κυρτών και φραγμένων συνόλων A και B με μη κενό εσωτερικό ορίζουμε

$$N(A,B) = \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists x_1,\dots,x_N \in \mathbb{R}^n \ \text{ ώστε } \ A \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + B)\right\}.$$

Τότε, το πρόβλημα διατυπώνεται ως εξής.

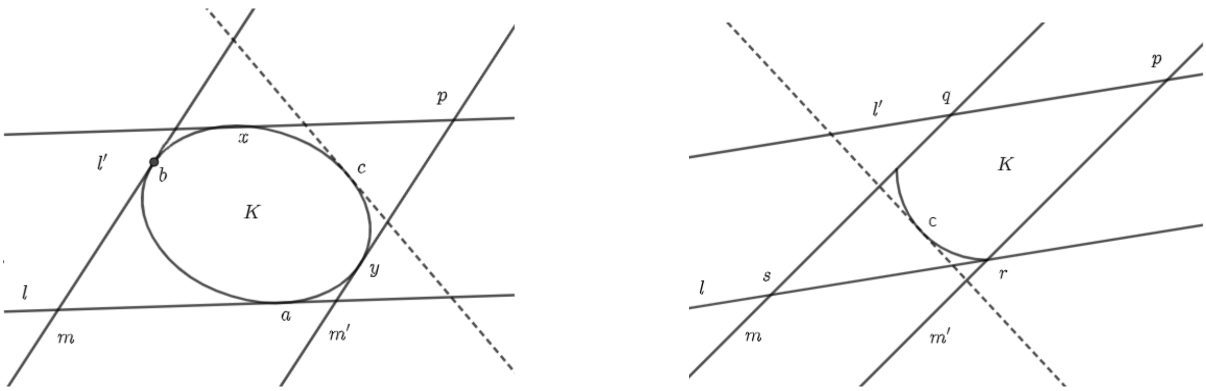
Εικασία 3.1.5. Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σώμα. Τότε, υπάρχει $0 < \lambda < 1$ τέτοιος ώστε $N(K, \lambda K) \leqslant 2^n$, ή ισοδύναμα, $N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant 2^n$. Επιπλέον, ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι αφφινική εικόνα του n-κύβου.

Η Εικασία 3.1.5 έχει αποδειχτεί μόνο για την ειδική περίπτωση $n = 2$. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα, το οποίο βασίζεται στο γεγονός ότι το σύνολο των σημείων ενός κυρτού σώματος από τα οποία διέρχεται μοναδική ευθεία στήριξης είναι πυκνό στο σύνορο. Τα σημεία αυτά λέγονται κανονικά σημεία.

Λήμμα 3.1.6. *Έστω K κυρτό σώμα στο $\mathbb{R}^2$, που δεν είναι παραλληλόγραμμο. Τότε, το K έχει συνοριακά σημεία x_1, x_2 και x_3 από τα οποία διέρχονται μοναδικές ευθείες στήριξης οι οποίες σχηματίζουν ένα τρίγωνο που περιέχει το K.*

Απόδειξη. Έστω $a \in \mathrm{bd}(K)$ τυχόν σημείο του συνόρου από το οποίο διέρχεται μοναδική ευθεία στήριξης, l. Έστω l' η παράλληλη στην l ευθεία στήριξης του K και b κανονικό σημείο του συνόρου από το οποίο διέρχεται ευθεία στήριξης διαφορετική από τις l και l'. Τότε, η ευθεία στήριξης m που διέρχεται από το b, καθώς δεν είναι παράλληλη στην l, έχει μη κενή τομή με αυτήν. Θεωρούμε την ευθεία στήριξης m' που είναι παράλληλη στην m και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

Αν $\{p\} = l' \cap m'$ και το p δεν ανήκει στο K, τότε δημιουργούμε το ζητούμενο τρίγωνο θεωρώντας κανονικό σημείο c στο σύνορο το οποίο είναι ανάμεσα στα σημεία $x \in l' \cap K$ και $y \in m' \cap K$ που είναι κοντινότερα στο p και την ευθεία στήριξής του. Τότε, τα σημεία που θέλουμε είναι τα a, b και c. Μένει η περίπτωση $p \in K$, για την οποία διακρίνουμε υποπεριπτώσεις.



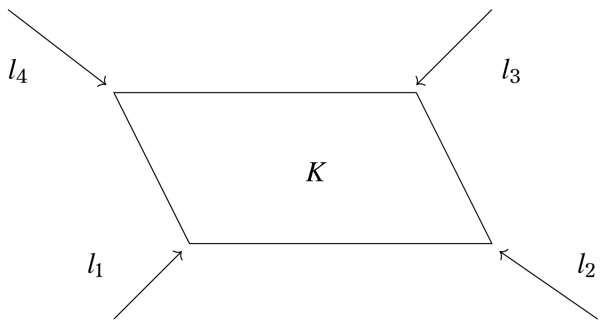
Περιπτώσεις για τις θέσεις των σημείων p, q, r.

Αρχικά υποθέτουμε ότι $\{q\} = l' \cap m$ και το q δεν ανήκει στο K. Έστω u, v τα πλησιέστερα σημεία στο q από τις τομές $l' \cap K$ και $m \cap K$, αντίστοιχα. Τότε θεωρούμε κανονικό σημείο b_1 στο σύνορο του K το οποίο βρίσκεται ανάμεσα στα u και v. Αν αντικαταστήσουμε την ευθεία m από την m_1, η οποία στηρίζει το K στο σημείο b_1 και την m' από την m_1' που είναι παράλληλη στην m_1 και στηρίζει το K, τότε το $\{p_1\} = l' \cap m_1'$ δεν ανήκει στο K και το ζητούμενο έπεται όπως στην πρώτη περίπτωση. Όμοια, μπορούμε να δημιουργήσουμε το ζητούμενο τρίγωνο αν $\{r\} = l \cap m'$ και το r δεν είναι στοιχείο του K. Η τελευταία περίπτωση είναι όταν τα p, q, r ανήκουν στο K. Αν $\{s\} = l \cap m$ και το s δεν ανήκει στο K, τότε όπως πριν υπάρχει το ζητούμενο τρίγωνο. Διαφορετικά, καθώς τα σημεία p, q, r, s ανήκουν στο K, το K είναι παραλληλόγραμμο. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε την Εικασία 3.1.5 για το επίπεδο. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε ότι το φράγμα που θέλουμε ισχύει για το πρόβλημα του φωτισμού και τότε το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από την ισοδυναμία των δύο προβλημάτων (βλ. Θεώρημα 3.1.2).

Θεώρημα 3.1.7. *Για κάθε κυρτό σώμα K στο $\mathbb{R}^2$ ισχύει ότι $c(K) \leqslant 4$ με την ισότητα να ισχύει αν και μόνο αν το K είναι παραλληλόγραμμο.*

Απόδειξη. Έστω K κυρτό σώμα που δεν είναι παραλληλόγραμμο και a, b, c κανονικά σημεία στο σύνορό του όπως στο Λήμμα 3.1.6. Έστω p_1, p_2, p_3 οι γωνίες του τριγώνου και x_0 σημείο του εσωτερικού του K. Συμβολίζουμε με l_1, l_2, l_3 τις κατευθύνσεις των διανυσμάτων $x_0 - p_1$, $x_0 - p_2$, $x_0 - p_3$, αντίστοιχα. Η κατεύθυνση l_1 φωτίζει ολόκληρο το σύνορο ανάμεσα στα a και b, συμπεριλαμβανομένων των σημείων a και b, η κατεύθυνση l_2 το σύνορο ανάμεσα στα σημεία a και c και τα σημεία αυτά, και η κατεύθυνση l_3 το σύνορο ανάμεσα στα b και c. Επομένως, $c(K) \leqslant 3$ και από το Θεώρημα 3.1.4 προκύπτει ότι $c(K) = 3$.



Στη περίπτωση που το K είναι παραλληλόγραμμο, παρατηρούμε ότι δύο γωνίες δεν μπορούν να φωτιστούν από την ίδια κατεύθυνση, άρα $c(K) \geqslant 4$. Επιπλέον, οι κατευθύνσεις που φωτίζουν τις γωνίες αρκούν για να φωτιστεί ολόκληρο το σύνορο, άρα $c(K) = 4$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

3.2 Προϊστορία του προβλήματος

Η πρώτη συνεισφορά στο πρόβλημα είναι αυτή του Levi [76] το 1955. Απέδειξε ότι για κάθε συμπαγές κυρτό χωρίο $K \subset \mathbb{R}^2$, το οποίο δεν είναι παραλληλόγραμμο, ισχύει ότι $b_0(K) = 3$. Αυτό έδωσε το κίνητρο στον Hadwiger να δημοσιεύσει το 1957 στο [60] τη διάσημη εικασία ότι $b(K) \leqslant 2^n$ για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι παραλληλεπίπεδο. Ανεξάρτητα, το 1960, οι Gohberg και Markus [56] έδειξαν ότι $b(K) = 3$ για χωρία στο επίπεδο που δεν είναι παραλληλόγραμμα και διατύπωσαν την ίδια εικασία ότι $b(K) \leqslant 2^n$ για n-διάστατα κυρτά σώματα. Κάποιες ενδιαφέρουσες ιστορικές παρατηρήσεις υπάρχουν στο βιβλίο [23] των Boltyanski, Martini και Soltan: Αναφέρουν ότι ο Gohberg είχε εισαγάγει την παράμετρο $b(K)$ ήδη από το 1956. Το κίνητρό του ήταν από προβλήματα της Συναρτησιακής Ανάλυσης. Ο Krein ενδιαφερόταν για τον ορισμό της διάστασης ενός χώρου Banach μέσω καλύψεων της μοναδιαίας του μπάλας από μεταφορές μικρότερων ομοιοθετικών αντιτύπων της. Παρακίνησε τον Gohberg να δουλέψουν σε αυτό το ερώτημα, συνεχίζοντας προηγούμενη δουλειά των Krein, Krasnosel'ski και Milman [72]. Αφού τελείωσαν το γράψιμο της εργασίας [55], ο Gohberg προσπάθησε να καταλάβει το ανάλογο, σε πεπερασμένες διαστάσεις, των ισχυρισμών που είχαν χρειαστεί στο [55], και οδηγήθηκε στο ακόλουθο πρόβλημα: Ποιο είναι το ελάχιστο πλήθος μπαλών ακτίνας < 1 σε έναν n-διάστατο χώρο Minkowski που η ένωσή τους καλύπτει τη μοναδιαία του μπάλα;

Αυτό το ερώτημα είναι ακριβώς ισοδύναμο με το πρόβλημα της κάλυψης, περιορισμένο στην κεντρικά συμμετρική περίπτωση. Ο Gohberg έδωσε το πρόβλημα στον μαθητή του Markus, ο οποίος σύντομα πρότεινε μια (πολύπλοκη) λύση για την περίπτωση του επιπέδου. Ο Gohberg απλούστευσε αυτή τη λύση, και το 1957 οι δύο συγγραφείς έστειλαν ένα χειρόγραφο (με την πλήρη λύση στην περίπτωση του επιπέδου και τη διατύπωση της εικασίας για την n-διάστατη περίπτωση) στον Yaglom, για να το δημοσιεύσει στο περιοδικό "Math. Education" στη Μόσχα. Όμως αυτό το περιοδικό δεν εκδιδόταν τακτικά και εκείνη την εποχή είχαν σταματήσει να βγαίνουν τεύχη του. Έτσι, οι συγγραφείς δεν είχαν άλλη δυνατότητα από το να δημοσιεύσουν αργότερα, το 1960, τη δουλειά τους στο [56]. Κατά τους συγγραφείς του [23], θα ήταν καλύτερα να μιλάμε για την «εικασία κάλυψης των Gohberg-Markus-Hadwiger» και τον «αριθμό Gohberg-Markus-Hadwiger $b(K)$», η δε παράμετρος $b_0(K)$ θα έπρεπε να ονομάζεται «αριθμός Levi».

Επιπλέον, το 1960 εισήχθη η παράμετρος $c(K)$ από τον Boltyanski, ο οποίος απέδειξε στο [18] ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η ισότητα $b(K) = b_0(K) = c(K)$. Την ίδια χρονιά, ο Hadwiger εισήγαγε στο [61] την παράμετρο $c_0(K)$ και διατύπωσε την εικασία ότι $c_0(K) \leqslant 2^n$ για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι στην εργασία [61] δεν γίνεται καμία αναφορά στο ενδεχόμενο της ισοδυναμίας αυτής της εικασίας με το «πρόβλημα Gohberg-Markus-Hadwiger», παρόλο που αυτή η ισοδυναμία προκύπτει εύκολα από τα επιχειρήματα που εμφανίζονται στο [18].

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Οι εκτιμήσεις του Rogers

4.1 Αριθμοί κάλυψης

Οι ορισμοί της κάλυψης και της στοίχισης μπορούν να δοθούν στο ευρύτατο πλαίσιο της θεωρίας συνόλων. Λέμε ότι μια οικογένεια συνόλων $\{S_i : i \in I\}$ καλύπτει το σύνολο S αν

$$S \subseteq \bigcup_{i\in I} S_i.$$

Αντίστοιχα, λέμε ότι μια οικογένεια συνόλων $\{S_i : i \in I\}$ στοιχίζεται στο σύνολο S αν

$$S_i \cap S_j = \varnothing \quad (i \neq j) \qquad \text{και} \qquad \bigcup_{i\in I} S_i \subseteq S,$$

δηλαδή αν τα σύνολα S_i είναι ξένα ανά δύο και περιέχονται στο S.

Στο πλαίσιο αυτής της εργασίας, το σύνολο S θα είναι ο $\mathbb{R}^n$ ή κάποιο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και η οικογένεια $\{S_i : i \in I\}$ θα είναι μια πεπερασμένη ή άπειρη αριθμήσιμη ακολουθία μεταφορών

$$x + K = \{x + y : y \in K\}$$

ενός κυρτού, συνήθως, συνόλου K. Θα μιλάμε τότε για μια *κάλυψη* με το K ή μια *στοίχιση* του K αντίστοιχα.

Ορισμός 4.1.1. Έστω K ένα υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue και $\{x_i\}_{i\geqslant 1}$ μια ακολουθία σημείων του $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\mathcal{K} := \{x_i + K : i \geqslant 1\}$$

των μεταφορών $x_i + K$ του K. Συμβολίζουμε με C έναν ημιανοικτό κύβο με ακμές παράλληλες στους άξονες:

$$C = \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_i - \tfrac{s}{2} \leqslant x_i < c_i + \tfrac{s}{2}, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}.$$

Το σημείο $c = (c_1, \dots, c_n)$ είναι το κέντρο του C και ο θετικός αριθμός s είναι το μήκος των ακμών του C. Ορίζουμε

$$\varrho_+(\mathcal{K}, C) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)} \sum_{(x_i+K)\cap C\neq\varnothing} \mathrm{vol}_n(x_i + K)$$

και
$$\varrho_-(\mathcal{K},C) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)} \sum_{(x_i+K)\subseteq C} \mathrm{vol}_n(x_i+K).$$

Περιφραστικά, $\varrho_+(\mathcal{K},C)$ είναι ο λόγος του συνολικού όγκου των συνόλων της $\mathcal{K}$ που τέμνουν τον κύβο C προς τον όγκο του C, ενώ $\varrho_-(\mathcal{K},C)$ είναι ο λόγος του συνολικού όγκου των συνόλων της $\mathcal{K}$ που περιέχονται στον κύβο C προς τον όγκο του C. Γράφουμε $s(C)$ για το μήκος της ακμής του κύβου C και ορίζουμε την άνω και την κάτω πυκνότητα της οικογένειας $\mathcal{K}$ θέτοντας

$$\varrho_+(\mathcal{K}) = \limsup_{s(C)\to\infty} \varrho_+(\mathcal{K},C) = \lim_{s\to\infty} \sup_{s(C)\geqslant s} \varrho_+(\mathcal{K},C)$$

και
$$\varrho_-(\mathcal{K}) = \liminf_{s(C)\to\infty} \varrho_-(\mathcal{K},C) = \lim_{s\to\infty} \inf_{s(C)\geqslant s} \varrho_-(\mathcal{K},C).$$

Από τους παραπάνω ορισμούς είναι φανερό ότι

$$\varrho_-(\mathcal{K}) \leqslant \varrho_+(\mathcal{K}).$$

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω K φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K) > 0$. Αν η ακολουθία $\mathcal{K} = \{x_i + K : i \geqslant 1\}$ σχηματίζει στοίχιση στον $\mathbb{R}^n$ τότε*
$$\varrho_+(\mathcal{K}) \leqslant 1.$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $s(K)$ το μήκος των ακμών ενός κύβου, τον οποίο έχουμε σταθεροποιήσει, που έχει ακμές παράλληλες στους άξονες και περιέχει το K. Αν C είναι ένας κύβος, τα σύνολα $x_i + K$ που τέμνουν τον C περιέχονται στον κύβο C' που έχει το ίδιο κέντρο με τον C και έχει μήκος ακμής $s(C) + 2s(K)$. Αφού τα $x_i + K$ είναι ξένα ανά δύο, έπεται ότι

$$\sum_{(x_i+K)\cap C\neq\varnothing} \mathrm{vol}_n(x_i+K) \leqslant (s(C)+2s(K))^n,$$

άρα
$$\varrho_+(\mathcal{K},C) \leqslant \left(1+\frac{2s(K)}{s(C)}\right)^n.$$

Συνεπώς,
$$\varrho_+(\mathcal{K}) \leqslant \limsup_{s(C)\to\infty} \left(1+\frac{2s(K)}{s(C)}\right)^n = 1.$$

□

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω K φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K) > 0$. Αν η ακολουθία $\mathcal{K} = \{x_i + K : i \geqslant 1\}$ σχηματίζει κάλυψη του $\mathbb{R}^n$ τότε*
$$\varrho_-(\mathcal{K}) \geqslant 1.$$

Απόδειξη. Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, συμβολίζουμε με $s(K)$ το μήκος των ακμών ενός κύβου, τον οποίο έχουμε σταθεροποιήσει, που έχει ακμές παράλληλες στους άξονες και περιέχει το K. Τότε, αν C είναι ένας κύβος με $s(C) > 2s(K)$, κάθε σημείο του κύβου C'' που έχει το ίδιο κέντρο με τον C και μήκος ακμής $s(C) - 2s(K)$ περιέχεται σε κάποιο από τα σύνολα $x_i + K$, και αυτό το σύνολο $x_i + K$ αναγκαστικά περιέχεται στον C. Έπεται ότι

$$C'' \subseteq \bigcup_{x_i+K\subseteq C} (x_i+K),$$

και συνεπώς,

$$(s(C) - 2s(K))^n \leqslant \sum_{x_i+K\subseteq C} \mathrm{vol}_n(x_i + K).$$

Επομένως, με την υπόθεση ότι $s(C) > 2s(K)$, έχουμε

$$\varrho_-(\mathcal{K}, C) \geqslant \left(1 - \frac{2s(K)}{s(C)}\right)^n.$$

Έπεται ότι

$$\varrho_-(\mathcal{K}, C) \geqslant \liminf_{s(C)\to\infty} \left(1 - \frac{2s(K)}{s(C)}\right)^n = 1.$$

□

Ορισμός 4.1.4. Έστω K φραγμένο σύνολο με θετικό μέτρο Lebesgue. Η *πυκνότητα στοίχισης* $\delta(K)$ του K ορίζεται από την

$$\delta(K) = \sup_{\mathcal{K}} \varrho_+(\mathcal{K}),$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $\mathcal{K}$ μεταφορών του K που σχηματίζουν στοίχιση στον $\mathbb{R}^n$. Αντίστοιχα, η *πυκνότητα κάλυψης* $\vartheta(K)$ του K ορίζεται από την

$$\vartheta(K) = \inf_{\mathcal{K}} \varrho_-(\mathcal{K}),$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλες τις ακολουθίες $\mathcal{K}$ μεταφορών του K που σχηματίζουν κάλυψη του $\mathbb{R}^n$. Από αυτούς τους ορισμούς και από τα Θεωρήματα 4.1.2 και 4.1.3 προκύπτει άμεσα το εξής.

Θεώρημα 4.1.5. *Έστω K φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K) > 0$. Τότε,*

$$\delta(K) \leqslant 1 \leqslant \vartheta(K).$$

Στόχος μας είναι τώρα να αποδείξουμε το αναλλοίωτο της πυκνότητας στοίχισης ενός συνόλου ως προς αφφινικούς μετασχηματισμούς. Θα χρειαστούμε κάποια τεχνικά βοηθητικά αποτελέσματα που μας επιτρέπουν να υπολογίζουμε την άνω και κάτω πυκνότητα κάποιων ειδικών ακολουθιών από μεταφορές.

Θεώρημα 4.1.6. *Έστω K φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με θετικό μέτρο Lebesgue. Έστω C ένας κύβος με ακμές μήκους $s(C)$ παράλληλες στους άξονες και έστω T ένας αντιστρέψιμος αφφινικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$. Έστω $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ και $y_1, y_2, \ldots$ τα σημεία του πλέγματος $s(C)\mathbb{Z}^n$. Θεωρούμε την ακολουθία συνόλων*

$$\mathcal{K}_P = \{x_i + y_j + K, i = 1, \ldots, N, j \geqslant 1\}$$

και την ακολουθία συνόλων

$$T\mathcal{K}_P = \{T(x_i + y_j + K), i = 1, \ldots, N, j \geqslant 1\}.$$

Τότε,

$$\varrho_+(T\mathcal{K}_P) = \varrho_-(T\mathcal{K}_P) = \varrho_+(\mathcal{K}_P) = \varrho_-(\mathcal{K}_P) = \frac{N\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}. \tag{4.1.1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το πλέγμα των σημείων που έχουν συντεταγμένες ακέραια πολλαπλάσια του

$s(C)$. Παρατηρούμε αρχικά ότι αν μεταφέρουμε τα $x_1, x_2, \ldots, x_N$ κατά ένα διάνυσμα που ανήκει σε αυτό το πλέγμα τότε οι οικογένειες $\mathcal{K}_P$ και $T\mathcal{K}_P$ παραμένουν αμετάβλητες, αν αγνοήσουμε την αρίθμηση των συνόλων από τα οποία αποτελούνται. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι έχουμε μεταφέρει τα $x_1, x_2, \ldots, x_N$ έτσι ώστε καθένα από τα σύνολα $x_i + K$ να έχει τουλάχιστον ένα σημείο του στον κύβο C.

Παρατηρούμε τώρα ότι, αφού ο T είναι ένας μη ομογενής γραμμικός μετασχηματισμός, η οικογένεια $T\mathcal{K}_P$ είναι η οικογένεια των μεταφορών του συνόλου TK κατά τα διανύσματα

$$T(x_i + y_j) - T(0) \qquad (i = 1, \ldots, N, j = 1, 2, \ldots).$$

Έστω G ένας κύβος με ακμές μήκους

$$s(G) > 2s(TC) + 2s(TK),$$

παράλληλες στους άξονες. Θεωρούμε τους κύβους G' και G'' που έχουν το ίδιο κέντρο με τον G και μήκη ακμών

$$s(G) - 2s(TK)$$

και

$$s(G) - 2s(TK) - 2s(TC)$$

αντίστοιχα. Παρατηρούμε ότι η οικογένεια

$$T(y_j + C) \qquad (j = 1, 2, \ldots)$$

καλύπτει τον χώρο, άρα κάθε σημείο του κύβου G'' ανήκει σε κάποιο σύνολο $T(y_j + C)$ το οποίο περιέχεται στον G'. Συνεπώς, αν

$$T(y_j + C) \qquad (j = 1, 2, \ldots, M)$$

είναι τα σύνολα αυτής της μορφής που περιέχονται εξολοκλήρου στον G', έχουμε

$$M\mathrm{vol}_n(TC) = \sum_{j=1}^{M} \mathrm{vol}_n(T(y_j + C)) \geqslant \mathrm{vol}_n(G'') = (s(G) - 2s(TC) - 2s(TK))^n. \tag{4.1.2}$$

Αφού κάθε σύνολο $x_i + K$ έχει τουλάχιστον ένα σημείο στο C, καθένα από τα σύνολα

$$T(x_i + y_j + K) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N, j = 1, 2, \ldots, M)$$

έχει τουλάχιστον ένα σημείο στον G'. Επομένως, όλα αυτά τα σύνολα περιέχονται στον G. Έπεται ότι

$$\varrho_-(T\mathcal{K}_P, G) \geqslant \frac{1}{\mathrm{vol}_n(G)} \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{M} \mathrm{vol}_n(T(x_i + y_j + K)) = NM\frac{\mathrm{vol}_n(TK)}{\mathrm{vol}_n(G)}.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την (4.1.2) παίρνουμε

$$\varrho_-(T\mathcal{K}_P, G) \geqslant N\frac{\mathrm{vol}_n(TK)}{\mathrm{vol}_n(TC)}\left(1 - \frac{2s(TC)}{s(G)} - \frac{2s(TK)}{s(G)}\right)^n = N\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}\left(1 - \frac{2s(TC)}{s(G)} - \frac{2s(TK)}{s(G)}\right)^n.$$

Η ανισότητα αυτή ισχύει για κάθε κύβο G με μήκος ακμής $s(G)$ αρκετά μεγάλο, άρα

$$\varrho_-(T\mathcal{K}_P) = \liminf_{s(G)\to\infty} \varrho_-(T\mathcal{K}_P, G) \geqslant N\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}.$$

Με ένα εντελώς ανάλογο επιχείρημα, παίρνοντας ως G' και G'' τους κύβους που έχουν το ίδιο κέντρο με τον G και μήκη ακμών

$$s(G) + 2s(TK) \quad \text{και} \quad s(G) + 2s(TK) + 2s(TC),$$

μελετώντας τα σύνολα $T(x_i + y_j + K)$ που έχουν κοινά σημεία με τον G, και συνεπώς περιέχονται στον G', βλέπουμε σχετικά εύκολα ότι

$$\varrho_+(T\mathcal{K}_P) \leqslant N\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}.$$

Επομένως,

$$\varrho_+(T\mathcal{K}_P) = \varrho_-(T\mathcal{K}_P) = N\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}.$$

Επιλέγοντας ως T την ταυτοτική απεικόνιση παίρνουμε τις υπόλοιπες ισότητες στην (4.1.1). □

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το αναλλοίωτο της πυκνότητας $\delta(K)$ ως προς αφφινικούς μετασχηματισμούς.

Θεώρημα 4.1.7. *Έστω K φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με θετικό μέτρο Lebesgue. Για κάθε αντιστρέψιμο αφφινικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\delta(TK) = \delta(K).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\delta(TK) \geqslant \delta(K). \tag{4.1.3}$$

Κατόπιν εφαρμόζουμε αυτήν την ανισότητα για το σύνολο TK και τον αντιστρέψιμο αφφινικό μετασχηματισμό T^{-1} και παίρνουμε την αντίστροφη ανισότητα $\delta(K) = \delta(T^{-1}(TK)) \geqslant \delta(TK)$.

Για την απόδειξη της (4.1.3) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\delta(K) > 0$. Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ μπορούμε να επιλέξουμε μια οικογένεια $\mathcal{K} = \mathcal{K}_\varepsilon$ μεταφορών του K τέτοια ώστε

$$\varrho_+(\mathcal{K}) > (1-\varepsilon)\delta(K).$$

Κατόπιν, μπορούμε να επιλέξουμε οσοδήποτε μεγάλους κύβους C για τους οποίους

$$\varrho_+(\mathcal{K}, C) > (1-\varepsilon)^2\delta(K). \tag{4.1.4}$$

Θεωρούμε έναν τέτοιο κύβο C, ο οποίος να ικανοποιεί επίσης την

$$\left(\frac{s(C)}{s(C) + 2s(K)}\right)^n > 1 - \varepsilon. \tag{4.1.5}$$

Συμβολίζουμε με C' τον κύβο που έχει το ίδιο κέντρο με τον C και μήκος ακμών $s(C) + 2s(K)$. Τότε, εκείνα τα σύνολα της $\mathcal{K}$ που τέμνουν τον C περιέχονται εξ ολοκλήρου στον C'. Ας πούμε ότι αυτά τα σύνολα είναι τα

$$x_1 + K, x_2 + K, \dots, x_N + K.$$

Από τον ορισμό του $\varrho_+(\mathcal{K}, C)$ και την (4.1.4) έχουμε

$$N\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)} = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)}\sum_{i=1}^{N}\mathrm{vol}_n(x_i + K) = \varrho_+(\mathcal{K}, C) > (1-\varepsilon)^2\delta(K). \tag{4.1.6}$$

Τώρα είναι εύκολο να ορίσουμε μια στοίχιση C' μεταφορών του κύβου C' που είναι ταυτόχρονα κάλυψη του χώρου. Αρκεί να θεωρήσουμε τις μεταφορές του C' κατά τα διανύσματα του πλέγματος όλων των σημείων που οι συντεταγμένες τους είναι ακέραια πολλαπλάσια του $s(C')$. Έστω $y_1, y_2, \dots$ μια αρίθμηση αυτών των διανυσμάτων, και ας θεωρήσουμε την οικογένεια $\mathcal{K}'_P$ όλων των συνόλων

$$x_i + y_j + K \qquad (i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots)$$

και την οικογένεια $T\mathcal{K}'_P$ όλων των συνόλων

$$T(x_i + y_j + K) \qquad (i = 1, 2, \dots, N, j = 1, 2, \dots).$$

Είναι φανερό ότι αυτές οι δύο οικογένειες είναι στοιχίσεις του τύπου που συζητήσαμε στο Θεώρημα 4.1.6.

Από το Θεώρημα 4.1.6 έχουμε

$$\varrho_+(T\mathcal{K}'_P) = \varrho_-(T\mathcal{K}'_P) = N\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις σχέσεις με τις (4.1.5) και (4.1.6) παίρνουμε

$$\varrho_+(T\mathcal{K}'_P) = \varrho_-(T\mathcal{K}'_P) > (1-\varepsilon)^2\delta(K)\frac{\mathrm{vol}_n(C)}{\mathrm{vol}_n(C')} > (1-\varepsilon)^3\delta(K). \tag{4.1.7}$$

Αφού το $\varepsilon \in (0,1)$ μπορεί να επιλεγεί οσοδήποτε μικρό, συμπεραίνουμε ότι

$$\delta(TK) = \sup_{T\mathcal{K}}\varrho_+(T\mathcal{K}) \geqslant \delta(K),$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλες τις στοιχίσεις $T\mathcal{K}$ του TK. □

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.7 μας δίνει άμεσα το εξής.

Θεώρημα 4.1.8. *Έστω K φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με θετικό μέτρο Lebesgue. Τότε,*

$$\sup_{\mathcal{K}}\varrho_-(\mathcal{K}) = \delta(K), \tag{4.1.8}$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλες τις στοιχίσεις $\mathcal{K}$ του K.

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\delta(K) = \sup_{\mathcal{K}}\varrho_+(\mathcal{K}) \geqslant \sup_{\mathcal{K}}\varrho_-(\mathcal{K}).$$

Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει από την (4.1.7) αν θεωρήσουμε ως T την ταυτοτική απεικόνιση. □

Χρησιμοποιώντας παρόμοια επιχειρήματα και κάνοντας τις τροποποιήσεις που υποδεικνύει ο δυϊσμός μεταξύ στοίχισης και κάλυψης, μπορούμε να δείξουμε τα ακόλουθα δυϊκά αποτελέσματα.

Θεώρημα 4.1.9. *Έστω K φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με θετικό μέτρο Lebesgue. Για κάθε αντιστρέψιμο αφφινικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\vartheta(TK) = \vartheta(K).$$

Θεώρημα 4.1.10. *Έστω K φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με θετικό μέτρο Lebesgue. Τότε,*

$$\inf_{\mathcal{K}} \varrho_+(\mathcal{K}) = \vartheta(K), \tag{4.1.9}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλες τις καλύψεις $\mathcal{K}$ του K.

4.2 Πυκνές στοιχίσεις κυρτών σωμάτων

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω K φραγμένο ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\delta(K) \geqslant \frac{2\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(DK)},$$

όπου $DK := K - K$ είναι το σύνολο διαφορών του K.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in K$. Έστω $s(K) > 0$ αρκετά μεγάλος ώστε το K να περιέχεται σε έναν κύβο με ακμές μήκους $s(K)$ παράλληλες στους άξονες. Θεωρούμε έναν κύβο C με $s(C) > 2s(K)$. Επιλέγουμε μια ακολουθία σημείων $x_i = (x_{i,1}, \ldots, x_{i,n})$ επαγωγικά. Έστω ότι έχουν επιλεγεί τα σημεία x_j, $j < i$. Μεταξύ όλων των σημείων $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τις

$$x + K \subseteq C \tag{4.2.1}$$

και

$$(x + K) \cap (x_j + K) = \varnothing \ \text{ για κάθε } j < i \tag{4.2.2}$$

επιλέγουμε το x_i έτσι ώστε να έχει τη μικρότερη δυνατή πρώτη συντεταγμένη. Παρατηρήστε ότι η συνθήκη (4.2.2) ικανοποιείται τετριμμένα αν $i = 1$. Επίσης, τα σημεία x που ικανοποιούν τις συνθήκες (4.2.1) και (4.2.2) ανήκουν αναγκαστικά σε ένα κλειστό και φραγμένο σύνολο, συνεπώς η επιλογή του x_j είναι πάντοτε δυνατή, μέχρις ότου αυτό το σύνολο των πιθανών σημείων γίνει το κενό σύνολο, οπότε η ακολουθία των σημείων x_i τερματίζεται με κάποιο σημείο x_N.

Έστω y τυχόν σημείο στον κύβο C' που έχει το ίδιο κέντρο με τον C και μήκος ακμών ίσο με $s(C) - 2s(K)$. Τότε,

$$x_{1,1} \leqslant y_1.$$

Έστω r ο μεγαλύτερος φυσικός για τον οποίο το x_r ορίζεται και

$$x_{r,1} \leqslant y_1.$$

Τότε, είτε το x_{r+1} δεν ορίζεται, ή

$$x_{r+1,1} > y_1.$$

Σε κάθε περίπτωση, το y δεν μπορεί να είναι το x_{r+1}. Επομένως, είτε το $y+K$ δεν περιέχεται στο C είτε $(y+K)\cap(x_j+K)\neq\varnothing$ για κάποιον $j=1,\dots,r$. Το πρώτο ενδεχόμενο αποκλείεται αφού υποθέσαμε ότι $y\in C'$. Συνεπώς, υπάρχουν $z_1,z_2\in K$ και $1\leqslant j\leqslant r$ τέτοια ώστε

$$x_j+z_1=y+z_2.$$

Τότε,

$$y=x_j+(z_1-z_2)\in x_j+DK.$$

Αφού $y_1\geqslant x_{j,1}$, βλέπουμε ότι

$$y\in x_j+HDK,$$

όπου HDK είναι το σύνολο όλων των $z\in DK$ με $z_1\geqslant 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι τα σύνολα

$$x_i+HDK \qquad (i=1,\dots,N)$$

σχηματίζουν κάλυψη του κύβου C'. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι, από αυτά τα σύνολα, τα

$$x_i+HDK \qquad (i=1,\dots,N_1)$$

είναι εκείνα που τέμνουν τον C'. Έστω τώρα u_j τα σημεία του $s(C)\mathbb{Z}^n$ και v_j τα σημεία του $s(C')\mathbb{Z}^n$. Τότε, η οικογένεια $\mathcal{K}_P$ των συνόλων

$$x_i+u_j+K \qquad (i=1,\dots,N,\ j=1,2,\dots)$$

σχηματίζει στοίχιση του K, και η οικογένεια $\mathcal{H}_P$ των συνόλων

$$x_i+v_j+HDK \qquad (i=1,\dots,N_1,\ j=1,2,\dots)$$

σχηματίζει κάλυψη με το $H=HDK$. Από το Θεώρημα 4.1.6 έχουμε

$$\varrho_+(\mathcal{K}_P)=\frac{N\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}$$

και

$$\varrho_-(\mathcal{H}_P)=\frac{N_1\mathrm{vol}_n(HDK)}{\mathrm{vol}_n(C')}=\frac{N\mathrm{vol}_n(HDK)}{\mathrm{vol}_n(C)}\left(1-\frac{2s(K)}{s(C)}\right)^{-n}.$$

Αφού η $\mathcal{K}_P$ είναι στοίχιση και η $\mathcal{H}_P$ είναι κάλυψη, έχουμε επίσης

$$\delta(K)\geqslant\varrho_+(\mathcal{K}_P)\quad\text{και}\quad\vartheta(H)\leqslant\varrho_-(\mathcal{H}_P).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$\delta(K)\geqslant\frac{N\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}\geqslant\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(HDK)}\frac{N_1\mathrm{vol}_n(HDK)}{\mathrm{vol}_n(C)}\geqslant\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(HDK)}\left(1-\frac{2s(K)}{s(C)}\right)^{n}\vartheta(HDK).$$

Αφού το $s(C)$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μεγάλο, συμπεραίνουμε ότι

$$\delta(K)\geqslant\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(HDK)}\vartheta(HDK).$$

Το ζητούμενο έπεται αν παρατηρήσουμε ότι $\vartheta(HDK) \geqslant 1$ και ότι $\mathrm{vol}_n(HDK) = \frac{1}{2}\mathrm{vol}_n(DK)$, όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι το DK είναι συμμετρικό ως προς το 0. □

Παρατηρούμε ότι κάθε κάλυψη του χώρου με τα σύνολα HDK μας δίνει αυτομάτως μια κάλυψη, που έχει διπλάσια πυκνότητα, αν εφαρμόσουμε τις ίδιες μεταφορές στο σύνολο DK. Συνεπώς,

$$\vartheta(HDK) \geqslant \frac{1}{2}\vartheta(DK).$$

Έχουμε έτσι το εξής.

Πόρισμα 4.2.2. *Έστω K φραγμένο ανοικτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\delta(K) \geqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(DK)}\vartheta(DK).$$

Στην περίπτωση που το K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα, έχουμε $DK = 2K$. Επομένως,

$$\mathrm{vol}_n(DK) = \mathrm{vol}_n(2K) = 2^n\mathrm{vol}_n(K).$$

Έτσι παίρνουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω K ανοικτό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\delta(K) \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

και

$$\delta(K) \geqslant \left(\frac{1}{2}\right)^{n}\vartheta(K).$$

Συνδυάζοντας αυτό το αποτέλεσμα με το Θεώρημα 4.2.1 και την ανισότητα Rogers-Shephard για τον όγκο του DK καταλήγουμε στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω K ανοικτό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\delta(K) \geqslant \frac{2(n!)^2}{(2n)!}.$$

4.3 Οικονομικές καλύψεις με κυρτά σώματα

Έστω K φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με θετικό μέτρο Lebesgue, και έστω $\mathcal{K} = \{x_i + K : i \geqslant 1\}$ μια ακολουθία μεταφορών του K. Γενικά, η $\mathcal{K}$ δεν θα καλύπτει τον $\mathbb{R}^n$, προκύπτει λοιπόν το ερώτημα ποιο είναι το ποσοστό του χώρου που καλύπτεται από την $\mathcal{K}$. Μπορούμε να μετρήσουμε το ποσοστό του χώρου που μένει ακάλυπτο με τον εξής τρόπο. Για κάθε κύβο C με μήκος ακμής $s(C)$, ορίζουμε

$$\varepsilon(\mathcal{K}) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)}\left[\mathrm{vol}_n(C) - \mathrm{vol}_n\left(\bigcup_{i=1}^{\infty}((x_i + K)\cap C)\right)\right]$$

και στη συνέχεια ορίζουμε

$$\varepsilon_+(\mathcal{K}) = \limsup_{s(C)\to\infty}\varepsilon(\mathcal{K}, C).$$

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω K φραγμένο σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ με θετικό μέτρο και έστω ϱ θετικός αριθμός. Τότε, υπάρχει οικογένεια $\mathcal{K}$ μεταφορών του K τέτοια ώστε*

$$\varrho_+(\mathcal{K}) = \varrho_-(\mathcal{K}) = \varrho$$

και

$$\varepsilon_+(\mathcal{K}) < e^{-\varrho}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το K περιέχεται σε έναν κύβο ακμής $s(K)$. Θεωρούμε έναν κύβο

$$C = [0, s(C))^n$$

με μήκος ακμής $s(C) > 2s(K)$ που επιλέγεται έτσι ώστε ο αριθμός

$$N = \frac{\varrho(s(C))^n}{\mathrm{vol}_n(K)}$$

να είναι ακέραιος. Έστω $\Lambda = s(C)\mathbb{Z}^n$ το πλέγμα όλων των σημείων που οι συντεταγμένες τους είναι ακέραια πολλαπλάσια του $s(C)$, και έστω $y_1, y_2, \ldots$ μια αρίθμηση των σημείων του Λ. Έστω $x_1, x_2, \ldots, x_N$ ένα σύνολο N σημείων που ανήκουν στον C και έστω $\mathcal{K} = \mathcal{K}(x_1, x_2, \ldots, x_N)$ η οικογένεια των μεταφορών

$$x_i + y_j + K \qquad (i = 1, 2, \ldots N, j = 1, 2, \ldots).$$

Από το Θεώρημα 4.1.6 έχουμε

$$\varrho_+(\mathcal{K}) = \varrho_-(\mathcal{K}) = N\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{(s(C))^n} = \varrho.$$

Αφού $s(C) > 2s(K)$, δύο σύνολα $x_i + y_j + K$ και $x_i + y_k + K$ μπορούν να έχουν κοινό σημείο μόνο αν $j = k$ και σε αυτή την περίπτωση συμπίπτουν. Επομένως, αν $\mathbb{1}_K$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του K, τότε η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(x_i + y_j + K)$$

είναι η

$$\sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{1}_K(x - x_i - y_j)$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, N$. Συνεπώς, η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου E των σημείων που δεν καλύπτονται από κανένα σύνολο της $\mathcal{K}$ είναι η

$$\varepsilon(x) = \prod_{i=1}^{N}\left(1 - \sum_{j=1}^{\infty}\mathbb{1}_K(x - x_i - y_j)\right).$$

Επομένως, αν G είναι ένας κύβος με ακμές παράλληλες στους άξονες, έχουμε

$$\varepsilon(\mathcal{K}, G) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)}\int_G \varepsilon(x)\,dx.$$

Η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι περιοδική, με περίοδο $s(C)$, ως προς κάθε μία από τις συντεταγμένες της. Έπεται ότι

$$\varepsilon_+(\mathcal{K}) = \limsup_{s(G)\to\infty}\varepsilon(\mathcal{K}, G) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)}\int_C \varepsilon(x)\,dx.$$

Για την απόδειξη της ύπαρξης μιας οικογένειας $\mathcal{K}$ που ικανοποιεί το ζητούμενο, αρκεί να αποδείξουμε ότι η μέση τιμή της

$$\varepsilon_+(\mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_N))$$

πάνω από όλες τις επιλογές σημείων $x_1, x_2, \dots, x_N$ στο C, είναι μικρότερη από $e^{-\varrho}$. Όμως αυτή η μέση τιμή είναι ίση με

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(C))^N} \int_C \int_C \cdots \int_C \varepsilon_+(\mathcal{K}(x_1, x_2, \dots, x_N))\, dx_1\, dx_2 \cdots dx_N \\ &= \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(C))^{N+1}} \int_C \int_C \cdots \int_C \left(\int_C \varepsilon(x)\, dx \right) dx_1\, dx_2 \cdots dx_N \\ &= \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(C))^{N+1}} \int_C \int_C \cdots \int_C \left(\int_C \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_K(x - x_i - y_j) \right) dx \right) dx_1\, dx_2 \cdots dx_N. \end{aligned}$$

Αλλάζοντας διαδοχικά τη σειρά της ολοκλήρωσης, παραγοντοποιώντας το εσωτερικό ολοκλήρωμα, εναλλάσσοντας τη σειρά της ολοκλήρωσης και άθροισης, και κάνοντας τις αλλαγές μεταβλητής $x_i = z_i + x - y_j$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(C))^{N+1}} \int_C \left(\int_C \int_C \cdots \int_C \prod_{i=1}^{N} \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_K(x - x_i - y_j) \right) dx_1\, dx_2 \cdots dx_N \right) dx \\ &= \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(C))^{N+1}} \int_C \prod_{i=1}^{N} \left(\int_C \left(1 - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{1}_K(x - x_i - y_j) \right) dx_i \right) dx \\ &= \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(C))^{N+1}} \int_C \prod_{i=1}^{N} \left(\mathrm{vol}_n(C) - \sum_{j=1}^{\infty} \int_C \mathbb{1}_K(x - x_i - y_j) dx_i \right) dx \\ &= \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(C))^{N+1}} \int_C \prod_{i=1}^{N} \left(\mathrm{vol}_n(C) - \sum_{j=1}^{\infty} \int_{-x+y_j+C} \mathbb{1}_K(-z_i) dz_i \right) dx. \end{aligned}$$

Όμως τα σύνολα $-x + y_j + C$, $j = 1, 2, \dots$, είναι ξένα και σχηματίζουν κάλυψη του χώρου. Συνεπώς, η μέση τιμή E ισούται τελικά με

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(C))^{N+1}} \int_C \prod_{i=1}^{N} \left(\mathrm{vol}_n(C) - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(-z_i) dz_i \right) dx \\ &= \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(C))^{N+1}} \int_C \prod_{i=1}^{N} (\mathrm{vol}_n(C) - \mathrm{vol}_n(K))\, dx \\ &= \left(1 - \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)} \right)^N = \left(1 - \frac{\varrho}{N} \right)^N < e^{-\varrho}. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το Θεώρημα 4.3.1 δείχνει ότι μπορούμε να ορίσουμε αρκετά οικονομικές καλύψεις του μεγαλύτερου μέρους του χώρου, πρέπει όμως να κάνουμε περισσότερες υποθέσεις για το σύνολο K ώστε να πάρουμε οικονομικές καλύψεις ολόκληρου του χώρου. Στο επόμενο θεώρημα υποθέτουμε ότι το K είναι κυρτό.

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Τότε,*

$$\vartheta(K) \leqslant n \ln n + n \ln\ln n + 5n.$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο βάρους του K βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Είναι γνωστό ότι, τότε,

$$-\frac{1}{n}K \subseteq K. \tag{4.3.1}$$

Επαναλαμβάνουμε τώρα την κατασκευή που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. Επιλέγουμε έναν κύβο με ακμές μήκους $s(K)$ ο οποίος περιέχει το K και έναν κύβο C της μορφής $[0, s(C))^n$, όπου

$$s(C) > 2s(K)$$

και ο αριθμός

$$N = (s(C))^n \varrho / \mathrm{vol}_n(K) \tag{4.3.2}$$

είναι ακέραιος. Στη συνέχεια επιλέγουμε σημεία $y_1, y_2, \dots$ έτσι ώστε οι κύβοι

$$y_j + C \qquad (j = 1, 2, \dots)$$

να δημιουργούν πλακόστρωση του $\mathbb{R}^n$. Τέλος, θεωρούμε την ακολουθία $\mathcal{K}$ των συνόλων

$$x_i + y_j + K \qquad (i = 1, \dots, N, j = 1, 2, \dots)$$

όπου τα $x_1, x_2, \dots, x_N$ είναι σημεία του C τα οποία έχουμε επιλέξει έτσι ώστε να ισχύει

$$\varepsilon_+(\mathcal{K}) < e^{-\varrho}.$$

Σημειώνουμε ότι με αυτή την κατασκευή έχουμε

$$\varepsilon_+(\mathcal{K}) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)} \int_C \varepsilon(x)\, dx = \frac{\mathrm{vol}_n(C \cap E)}{\mathrm{vol}_n(C)},$$

όπου $\varepsilon(x)$ είναι η δείκτρια συνάρτηση του συνόλου E των σημείων E των σημείων που δεν καλύπτονται από τα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{K}$.

Έστω η πραγματικός αριθμός με $0 < \eta < 1/n$. Έστω ότι υπάρχουν $w_1, w_2, \dots, w_M \in C$ τέτοια ώστε τα σώματα

$$y_j + w_k - \eta K \qquad (k = 1, \dots, M, j = 1, 2, \dots)$$

να είναι ξένα ανά δύο και να μην τέμνουν κανένα από τα σύνολα της οικογένειας $\mathcal{K}$. Για μια σταθερή τιμή του k τα σώματα

$$y_j + w_k - \eta K \qquad (j = 1, 2, \dots) \tag{4.3.3}$$

σχηματίζουν στοίχιση στον χώρο και, λόγω της περιοδικότητας του συστήματος, έχουμε

$$\mathrm{vol}_n\left(C\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}(y_j+w_k-\eta K)\right)=\mathrm{vol}_n(w_k-\eta K)=\mathrm{vol}_n(-\eta K)=\eta^n\mathrm{vol}_n(K).$$

Αφού τα σύνολα

$$\bigcup_{j=1}^{\infty}(y_j+w_k-\eta K)\qquad (k=1,\dots,M)$$

είναι ξένα ανά δύο και όλα περιέχονται στο E, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(C\cap E)&\geqslant \mathrm{vol}_n\left(C\cap\bigcup_{k=1}^{M}\bigcup_{j=1}^{\infty}(y_j+w_k-\eta K)\right)\\&=\sum_{k=1}^{M}\mathrm{vol}_n\left(C\cap\bigcup_{j=1}^{\infty}(y_j+w_k-\eta K)\right)=M\eta^n\mathrm{vol}_n(K).\end{aligned}$$

Επομένως,

$$M\leqslant \eta^{-n}\frac{\mathrm{vol}_n(C\cap E)}{\mathrm{vol}_n(K)}=\eta^{-n}\frac{\mathrm{vol}_n(C)}{\mathrm{vol}_n(K)}\frac{\mathrm{vol}_n(C\cap E)}{\mathrm{vol}_n(C)}=\eta^{-n}\frac{\mathrm{vol}_n(C)}{\mathrm{vol}_n(K)}\varepsilon_+(\mathcal{K})<\eta^{-n}\frac{\mathrm{vol}_n(C)}{\mathrm{vol}_n(K)}e^{-\varrho}.$$

Αν δεν υπάρχουν σημεία $w_1,w_2,\dots,w_M$ όπως παραπάνω, παίρνουμε $M=0$. Αλλιώς, παίρνουμε τον M να έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή και επιλέγουμε κάποιο σύνολο σημείων $w_1,w_2,\dots,w_M$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$M\leqslant \eta^{-n}\frac{\mathrm{vol}_n(C)}{\mathrm{vol}_n(K)}e^{-\varrho}. \tag{4.3.4}$$

Θεωρούμε τώρα τυχόν $x\in C$. Αφού $0<\eta<1$, παρατηρούμε ότι τα σώματα

$$y_j+x-\eta K\qquad (j=1,2,\dots)$$

είναι ξένα ανά δύο. Αφού έχουμε επιλέξει το M να έχει τη μέγιστη δυνατή τιμή, τουλάχιστον ένα από τα σώματα αυτής της οικογένειας, ας πούμε το σώμα

$$y_k+x-\eta K \tag{4.3.5}$$

τέμνει κάποιο από τα σώματα της οικογένειας (4.3.3) ή της οικογένειας $\mathcal{K}$. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι το σώμα (4.3.5) τέμνει το σώμα

$$x_i+y_j+K$$

της οικογένειας $\mathcal{K}$. Τότε,

$$-\eta z_1+y_k+x=z_2+x_i+y_j$$

για κάποια σημεία z_1 και z_2 του K. Τότε,

$$x=z_2+\eta z_1+a_i+y_j-y_k.$$

Αφού το K είναι κυρτό, έχουμε

$$z_2 + \eta z_1 \in (1+\eta)K,$$

και αφού τα σημεία $y_1, y_2, \dots$ είναι τα σημεία ενός πλέγματος, υπάρχει φυσικός ℓ έτοιος ώστε

$$y_j - y_k = y_\ell.$$

Συνεπώς,

$$x \in (1+\eta)K + x_i + y_\ell.$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το $x + y_k - \eta K$ τέμνει κάποιο σύνολο $y_j + w_i - \eta K$ της οικογένειας (4.3.3). Τότε,

$$-\eta z_1 + y_k + x = -\eta z_2 + y_j + w_i$$

για κάποια σημεία z_1 και z_2 του K. Έπεται ότι

$$x = -\eta z_2 + \eta z_1 + (y_j - y_k) + w_i.$$

Όμως, από την (4.3.1) μπορούμε να γράψουμε

$$-\eta z_2 = z_3$$

για κάποιο $z_3 \in K$. Συνεπώς, με το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη περίπτωση, βλέπουμε ότι

$$x \in (1+\eta)K + y_\ell + w_i$$

για κάποιον φυσικό ℓ.

Έχουμε έτσι αποδείξει ότι το C καλύπτεται από την οικογένεια $\mathcal{K}$ των συνόλων

$$\begin{aligned} &(1+\eta)K + x_i + y_j \qquad (i = 1, \dots, N,\ j = 1, 2, \dots),\\ &(1+\eta)K + w_k + y_j \qquad (k = 1, \dots, M,\ j = 1, 2, \dots). \end{aligned}$$

Λόγω της περιοδικότητας της οικογένειας, βλέπουμε εύκολα ότι η $\mathcal{K}$ καλύπτει ολόκληρο τον χώρο.

Τώρα, από το Θεώρημα 4.1.6,

$$\varrho_+(\mathcal{K}) = \varrho_-(\mathcal{K}) = \frac{(N+M)\mathrm{vol}_n((1+\eta)K)}{\mathrm{vol}_n(C)}.$$

Επομένως, αν θέσουμε $H = (1+\eta)K$ έχουμε

$$\vartheta(H) \leqslant (N+M)(1+\eta)^n \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}.$$

Από το Θεώρημα 4.1.9 έπεται ότι

$$\vartheta(K) = \vartheta(H) \leqslant (N+M)(1+\eta)^n \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(C)}.$$

Από τις εκτιμήσεις (4.3.2) και (4.3.4) για τους N και M καταλήγουμε στην

$$\vartheta(K) \leqslant (\varrho + \eta^{-n} e^{-\varrho})(1+\eta)^n.$$

Έχουμε το περιθώριο να επιλέξουμε τον ϱ και για να βελτιστοποιήσουμε το φράγμα παίρνουμε $\varrho = n\ln(1/\eta)$. Έτσι, παίρνουμε

$$\vartheta(K) \leqslant \min_{0<\eta<1/n} (1+\eta)^n(1+n\ln(1/\eta)).$$

Υποθέτοντας ότι $n \geqslant 3$ και επιλέγοντας $\eta = 1/(n\ln n)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\vartheta(K) &\leqslant (1+\eta)^n(1+n\ln(1/\eta))\\ &< e^{n\eta}(1+n\ln(1/\eta))\\ &= e^{1/(\ln n)}(1+n\ln(n\ln n))\\ &< \left(1+\frac{2}{\ln n}\right)(n\ln n + n\ln\ln n + 1)\\ &< n\ln n + n\ln\ln n + 5n.\end{aligned}$$

Στην περίπτωση $n = 2$ μπορούμε εύκολα να καταλήξουμε στο ίδιο άνω φράγμα, επιλέγοντας $\eta = 1/e$. □

4.4 Οι εκτιμήσεις του Rogers για το πρόβλημα της κάλυψης

Το εξής απλό γενικό θεώρημα οφείλεται στους Rogers και Zong.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω K και D δύο φραγμένα κυρτά σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Τότε,*

$$N(K,D) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K-D)}{\mathrm{vol}_n(D)}\,\vartheta(D).$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε ένα διακριτό σύνολο $G \subset \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{R}^n = \bigcup_{x\in G}(x+D)$$

και για κάθε αρκετά μεγάλο κύβο C με κέντρο το 0 να ισχύει

$$\sum_{x\in G\cap C} \mathrm{vol}_n(x+D) \leqslant \mathrm{vol}_n(C)\,(\vartheta(D)+\varepsilon).$$

Τότε, για τον πληθάριθμο του $G\cap C$ έχουμε

$$|G\cap C| \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(C)}{\mathrm{vol}_n(D)}\,(\vartheta(D)+\varepsilon).$$

Παρατηρούμε ότι αν $y \in \mathbb{R}^n$ και $x \in G$ τότε

$$(y+K)\cap(x+D) \neq \varnothing \iff x \in y + (K-D).$$

Αφού τα σύνολα $x+D$, $x\in G$ καλύπτουν τον $\mathbb{R}^n$, έπεται ότι τα σύνολα $x+D$ για τα οποία

$$x \in G\cap(y+(K-D))$$

καλύπτουν το $y+K$. Έστω $N(y)$ ο πληθάριθμος του συνόλου $G\cap(y+(K-D))$. Παίρνοντας τη μέση τιμή της $N(y)$ πάνω από όλα τα y σε έναν αρκετά μεγάλο κύβο C, βλέπουμε ότι αυτή η μέση τιμή

φράσσεται από
$$\frac{\mathrm{vol}_n(K-D)}{\mathrm{vol}_n(D)}\,(\vartheta(D)+\varepsilon).$$
Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $y \in C$ ώστε το K να καλύπτεται από
$$N \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K-D)}{\mathrm{vol}_n(D)}\,(\vartheta(D)+\varepsilon)$$
το πολύ σύνολα της μορφής $x-y+D$, όπου $x \in G$. Αφού ο N παίρνει μόνο ακέραιες τιμές, παίρνοντας το ε αρκετά μικρό μπορούμε να πετύχουμε να ισχύει
$$N \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K-D)}{\mathrm{vol}_n(D)}\,\vartheta(D).$$
Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Επιλέγοντας $D = \mathrm{int}(K)$, από το Θεώρημα 4.4.1 και την ανισότητα Rogers-Shephard έχουμε
$$N(K,\mathrm{int}(K)) \leqslant 2^n\vartheta(K)$$
αν το K είναι συμμετρικό και
$$N(K,\mathrm{int}(K)) \leqslant \binom{2n}{n}\vartheta(K)$$
στη γενική περίπτωση. Τώρα, το Θεώρημα 4.3.2 μας δίνει άμεσα τις ακόλουθες εκτιμήσεις.

Θεώρημα 4.4.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$. Τότε,*
$$N(K,\mathrm{int}(K)) \leqslant 2^n(n\ln n + n\ln\ln n + 5n)$$
αν το K είναι συμμετρικό, και
$$N(K,\mathrm{int}(K)) \leqslant \binom{2n}{n}(n\ln n + n\ln\ln n + 5n)$$
στη γενική περίπτωση.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Αριθμοί κάλυψης με βάρη

5.1 Εισαγωγικοί ορισμοί

Ορισμός 5.1.1. Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Ο κλασικός αριθμός κάλυψης του K από το T ορίζεται ως το ελάχιστο πλήθος μεταφορών του T η ένωση των οποίων είναι τέτοια ώστε να καλύπτει το K. Συγκεκριμένα,

$$N(K,T) = \min\left\{N : N \in \mathbb{N}, \exists\, x_1,\dots,x_N \in \mathbb{R}^n : K \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+T)\right\}.$$

Σχόλιο 5.1.2. Στα παρακάτω θα υποθέτουμε ότι το σύνολο K, για τον αριθμό κάλυψης του οποίου ενδιαφερόμαστε, είναι συμπαγές και ότι το σύνολο T, που καλύπτει το K, είναι συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Αυτό γίνεται για να εξασφαλίσουμε ότι ο αριθμός κάλυψης είναι πεπερασμένος.

Μια γνωστή παραλλαγή του ορισμού δίνεται παρακάτω. Συγκεκριμένα, απαιτούμε τα σημεία x_i να μην επιλέγονται από όλο τον χώρο, αλλά μόνο από το K:

$$\overline{N}(K,T) = \min\left\{N : N \in \mathbb{N}, \exists\, x_1,\dots,x_N \in K : K \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+T)\right\}.$$

Παρατήρηση 5.1.3. Προφανώς για την σχέση μεταξύ των δύο αριθμών κάλυψης έχουμε την εξής ανισότητα: $N(K,T) \leqslant \overline{N}(K,T)$.

Λήμμα 5.1.4. *Αν K και T είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $\overline{N}(K,T-T) \leqslant N(K,T)$. Επιπλέον, αν το T είναι Ευκλείδεια μπάλα, τότε $N(K,T) = \overline{N}(K,T)$.*

Μια έννοια που συνδέεται στενά με τους αριθμούς κάλυψης είναι αυτή του αριθμού διαχωρισμού, που εισάγεται παρακάτω.

Ορισμός 5.1.5. Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Ο αριθμός διαχωρισμού του T στο K ορίζεται ως ο μέγιστος αριθμός μη αλληλοεπικαλυπτόμενων μεταφορών του T με κέντρα στο K. Συγκεκριμένα,

$$M(K,T) = \max\{M : M \in \mathbb{N} : \exists\, x_1,\dots,x_M \in K : (x_i+T)\cap(x_j+T) = \varnothing\ \forall i \neq j\}.$$

Λήμμα 5.1.6. *Αν K και T είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $\overline{N}(K,T-T) \leqslant M(K,T) \leqslant N(K,T)$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $M = M(K,T)$ και τότε έχουμε ότι υπάρχουν $x_1,\dots,x_M \in K$ τέτοια ώστε $x_i - x_j \notin T - T$. Έστω ότι υπάρχει $x \in K$ τέτοιο ώστε $x \notin \bigcup_{i=1}^{M}(x_i + T - T)$, τότε $(x+T) \cap (x_i + T) = \varnothing$ και άρα $M(K,T) = M+1$, άτοπο. Έτσι έπεται άμεσα η πρώτη ανισότητα. Για τη δεύτερη, θέτουμε $N(K,T) = N$, $(x_i)_{i=1}^{N}$ την ακολουθία για την οποία ισχύει ότι $K \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + T)$ και υποθέτουμε ότι $M(K,T) = N+1$. Έτσι έχουμε ότι υπάρχει ακολουθία στοιχείων $y_i \in K$ με την ιδιότητα ότι $(y_i+T)\cap(y_j+T) = \varnothing$ για κάθε $i \neq j$. Από τα παραπάνω, για κάθε $i \in \{1,\dots,N+1\}$ υπάρχει x_{j_i} τέτοιο ώστε $y_i \in x_{j_i} + T$. Υπάρχουν $i \neq k$ για τους οποίους ισχύει ότι $x_{j_i} = x_{j_k}$. Θέτουμε $x = x_{j_i}$ και έχουμε για κάποια $t_1,\ t_2 \in T$

$$y_i = x + t_1$$

$$y_k = x + t_2$$

και άρα το στοιχείο $x + t_1 + t_2$ ανήκει στην τομή $(y_i + T) \cap (y_k + T)$, άτοπο. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε τη δεύτερη ανισότητα και άρα ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Τροποποιώντας τον ορισμό του αριθμού διαχωρισμού, μπορούμε να θεωρήσουμε τον αριθμό διαχωρισμού

$$\overline{M}(K,T) = \max\{M : M \in \mathbb{N} : \exists\, x_1,\dots,x_M \in K : (x_i+T)\cap(x_j+T)\cap K = \varnothing\ \forall i \neq j\}.$$

Παρατήρηση 5.1.7. Η συνθήκη $(x_i+T)\cap(x_j+T) = \varnothing$ είναι ισοδύναμη με την απαίτηση $x_i - x_j \notin T - T$, από το οποίο άμεσα συμπεραίνουμε ότι $M(K,T) = M(K,-T) = M\left(K, \frac{T-T}{2}\right)$.

Λήμμα 5.1.8. *Έστω K κυρτό σύνολο και L κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα. Τότε ισχύει ότι $M(K,L) = \overline{M}(K,-L)$ και συνεπώς $M(K,T) = \overline{M}(K,T)$ για κάθε κυρτό σώμα T.*

Έχοντας εισαγάγει τις κλασικές έννοιες των αριθμών κάλυψης και αριθμών διαχωρισμού, θα προχωρήσουμε ορίζοντας και μελετώντας το κεντρικό αντικείμενο της παρούσας ενότητας, τους αριθμούς κάλυψης και διαχωρισμού με βάρη.

Ορισμός 5.1.9. Μια ακολουθία ζευγών $S = \{(x_i,\omega_i) : x_i \in \mathbb{R}^n, \omega_i \in \mathbb{R}^+\}_{i=1}^{N}$ αποτελούμενη από σημεία και βάρη, καλείται κάλυψη με βάρη του K από το T αν για κάθε $x \in K$ έχουμε $\sum_{i=1}^{N}\omega_i \mathbb{1}_{x_i+T}(x) \geqslant 1$. Το συνολικό βάρος της κάλυψης συμβολίζεται με $\omega(S)$ και ορίζεται ως $\omega(S) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i$. Τέλος, ο αριθμός κάλυψης με βάρη του K από το T συμβολίζεται με $N_\omega(K,T)$ και ορίζεται ως:

$$N_\omega(K,T) = \inf\{\omega(S) : S \text{ κάλυψη με βάρη του } K \text{ από το } T\}.$$

Αντίστοιχα με τον περιορισμό που θέσαμε προηγουμένως στο $N(K,T)$, μπορούμε να θεωρήσουμε καλύψεις $S = \{(x_i,\omega_i) : x_i \in K, \omega_i \in \mathbb{R}^+\}_{i=1}^{N}$ με κέντρα στο K. Τότε ο αντίστοιχος αριθμός κάλυψης με βάρη συμβολίζεται με $\overline{N}_\omega(K,T)$ και ορίζεται ως το infimum των συνολικών βαρών καλύψεων αυτής της μορφής.

Παρατήρηση 5.1.10. *Για τους παραπάνω αριθμούς ισχύει ότι $N_\omega(K,T) \leqslant \overline{N}_\omega(K,T)$.*

Παρατήρηση 5.1.11. Έστω S κάλυψη με βάρη, όπως στον Ορισμό 5.1.9. Θεωρώντας το διακριτό μέτρο $\nu = \sum_{i=1}^{N}\omega_i\delta_{x_i}$, όπου δ_x το μέτρο Dirac στο x, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$(\nu * \mathbb{1}_T)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_T(x-y)d\nu(y) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i\mathbb{1}_T(x-x_i) = \sum_{i=1}^{N}\omega_i\mathbb{1}_{T+x_i}(x)$$

Δηλαδή η S είναι κάλυψη αν και μόνο αν $\nu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K$.

Επιπλέον,

$$\nu(\mathbb{R}^n) = \sum_{i=1}^{N} \omega_i.$$

Έχοντας υπόψιν την παραπάνω παρατήρηση και συμβολίζοντας με $\mathcal{D}_+^n$ την κλάση των μη αρνητικών διακριτών και πεπερασμένων μέτρων στον $\mathbb{R}^n$, είναι σαφές ότι

$$N_\omega(K,T) = \inf\{\nu(\mathbb{R}^n) : \nu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K,\ \nu \in \mathcal{D}_+^n\}$$

και

$$\overline{N}_\omega(K,T) = \inf\{\nu(\mathbb{R}^n) : \nu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K,\ \nu \in \mathcal{D}_+^n,\ \mathrm{supp}(\nu) \subset K\}.$$

Σε αυτό το σημείο, μπορούμε να γενικεύσουμε τις μέχρι τώρα έννοιες. Συγκεκριμένα, συμβολίζοντας με $\mathcal{B}_+^n$ τα μη αρνητικά κανονικά μέτρα Borel στον $\mathbb{R}^n$, έχουμε τον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.1.12. Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Ένα μη αρνητικό μέτρο $\mu \in \mathcal{B}_+^n$ καλείται μέτρο κάλυψης του K από το T αν $\mu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K$. Ο αντίστοιχος αριθμός κάλυψης ορίζεται ως

$$N^*(K,T) = \inf\left\{\int_{\mathbb{R}^n} d\mu : \mu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K, \mu \in \mathcal{B}_+^n\right\}.$$

Παρατήρηση 5.1.13. Αργότερα θα δείξουμε ότι το παραπάνω infimum είναι στην πραγματικότητα minimum, δηλαδή υπάρχει βέλτιστο μέτρο κάλυψης το οποίο έχει ολική μάζα ίση με το infimum. Το σύνολο αυτών των βέλτιστων μέτρων είναι κυρτό.

Παρατήρηση 5.1.14. *Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό, τότε $N^*(K,T) \leqslant N_\omega(K,T)$.*

Αντίστοιχα, μπορούμε να επεκτείνουμε την έννοια των αριθμών διαχωρισμού και να θεωρήσουμε πιο γενικές μορφές τους με βάρη. Συγκεκριμένα, ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{B}_+^n$ καλείται T-διαχωρισμένο αν $\mu * \mathbb{1}_T \leqslant 1$. Οι αριθμοί διαχωρισμού που αντιστοιχούν στους $N_\omega(K,T)$, $\overline{N}_\omega(K,T)$ και $N^*(K,T)$ ορίζονται ως

$$\begin{aligned}
M_\omega(K,T) &= \sup\left\{\int_K d\nu : \nu * \mathbb{1}_T \leqslant 1,\ \nu \in \mathcal{D}_+^n\right\}\\
\overline{M}_\omega(K,T) &= \sup\left\{\int_K d\nu :\ \forall\ x \in K, (\nu * \mathbb{1}_T)(x) \leqslant 1,\ \nu \in \mathcal{D}_+^n\right\}\\
M^*(K,T) &= \sup\left\{\int_K d\mu : \mu * \mathbb{1}_T \leqslant 1,\ \mu \in \mathcal{B}_+^n\right\}.
\end{aligned}$$

Παρατήρηση 5.1.15. *Αν $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό, τότε $M_\omega(K,T) \leqslant M^*(K,T)$.*

5.2 Δυϊσμός

Πρόταση 5.2.1. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Τότε,*

$$M^*(K,T) \leqslant N^*(K,-T) \quad \textit{και} \quad \overline{M}_\omega(K,T) \leqslant \overline{N}_\omega(K,-T).$$

Απόδειξη. Έστω μ μέτρο κάλυψης του K από το $-T$ και ρ ένα T-διαχωρισμένο μέτρο. Εξ ορισμού ισχύει ότι $\rho * \mathbb{1}_T \leqslant 1$ και $\mu * \mathbb{1}_{-T} \geqslant \mathbb{1}_K$. Οπότε, κάνοντας χρήση και του θεωρήματος Tonelli, έχουμε τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}\int_K d\rho(x) &= \int \mathbb{1}_K(x)d\rho(x) \leqslant \int (\mu * \mathbb{1}_{-T})(x)d\rho(x)\\ &= \iint \mathbb{1}_{-T}(x-y)d\mu(y)d\rho(x)\\ &= \iint \mathbb{1}_T(y-x)d\rho(x)d\mu(y)\\ &= \int (\rho * \mathbb{1}_{\mathbb{T}})(y)d\mu(y)\\ &\leqslant \int d\mu(y).\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας διαδοχικά infimum ως προς ρ και supremum ως προς μ παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα. Ακολουθώντας τα ίδια βήματα για διακριτά μέτρα ρ και μ τέτοια ώστε $\rho * \mathbb{1}_T \leqslant \mathbb{1}_K$, $\mu * \mathbb{1}_{-T} \geqslant \mathbb{1}_K$ με $\mathrm{supp}(\mu) \subset K$ παίρνουμε τη δεύτερη ανισότητα. □

Πόρισμα 5.2.2. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Τότε, $M_\omega(K,T) \leqslant N_\omega(K,-T)$.*

Απόδειξη. Δουλεύουμε όπως στην απόδειξη της Πρότασης 5.2.1, θεωρώντας τα μέτρα ρ και μ στο $\mathcal{D}^n_+$. □

Στη συνέχεια, θεωρούμε τις διακριτές μορφές των παραπάνω. Συγκεκριμένα, για ένα σύνολο $\Lambda = \{x_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$N_\omega(K,T,\Lambda) = \inf\left\{\sum_{i=1}^N \omega_i : \exists\, (x_i,\omega_i)_{i=1}^N \subset \Lambda \times \mathbb{R}^+,\ \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{1}_T(x-x_i) \geqslant \mathbb{1}_K(x)\ \forall\, x \in \Lambda\right\}$$

και

$$M_\omega(K,T,\Lambda) = \sup\left\{\sum_{i=1}^N \omega_i : \exists\, (x_i,\omega_i)_{i=1}^N \subset (\Lambda \cap K) \times \mathbb{R}^+,\ \sum_{i=1}^N \omega_i \mathbb{1}_T(x-x_i) \leqslant 1\, \forall x \in \Lambda\right\}.$$

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές, $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό και $\Lambda = \{x_i\}_{i=1}^d \subset \mathbb{R}^n$. Τότε ισχύει ότι*

$$N_\omega(K,T,\Lambda) = M_\omega(K,-T,\Lambda)$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα διανύσματα $b, c \in \mathbb{R}^d$, τα οποία ορίζονται ως εξής:

$$c_i = \begin{cases} 1, & x_i \in K \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και $b_i = 1$. Επίσης, ορίζουμε τον $d \times d$ πίνακα M ως εξής:

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in x_j + T \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases}$$

και

$$M^T_{ij} = \begin{cases} 1, & x_i \in x_j - T \\ 0, & \text{διαφορετικά} \end{cases} .$$

Τότε οι παραπάνω διακριτές μορφές κάλυψης και διαχωρισμού με βάρη γράφονται ως

$$N_\omega(K, T, \Lambda) = \min\{\langle b, x\rangle : Mx \geqslant c,\ x \geqslant 0\}$$

και

$$M_\omega(K, -T, \Lambda) = \max\{\langle c, y\rangle : M^T y \leqslant b,\ y \geqslant 0\}.$$

Από το θεώρημα δυϊσμού του γραμμικού προγραμματισμού αυτές οι δύο ποσότητες είναι ίσες. □

Λήμμα 5.2.4. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές, $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό και $\Lambda(\delta) \subset K$ ένα δ-δίκτυο του K. Τότε*

$$N_\omega(K, T + \delta B_2^n) \leqslant N_\omega(K, T, \Lambda(\delta)).$$

Απόδειξη. Αρχικά δείχνουμε την εξής ανισότητα:

$$N_\omega(K, T + \delta B_2^n) \leqslant N_\omega(K \cap \Lambda(\delta) + \delta B_2^n, T + \delta B_2^n).$$

Έστω $\nu \in \mathcal{D}^n_+$ τέτοιο ώστε $\nu * \mathbb{1}_{T+\delta B_2^n} \geqslant \mathbb{1}_{K\cap\Lambda(\delta)+\delta B_2^n}$ και $x \in K$. Τότε, υπάρχει $y \in \Lambda(\delta)$, για την ακρίβεια, $y \in K \cap \Lambda(\delta)$ τέτοιο ώστε $x = y + u$ για κάποιο $u \in \delta B_2^n$, άρα $x \in K \cap \Lambda(\delta) + \delta B_2^n$. Συνεπώς,

$$(\nu * \mathbb{1}_{T+\delta B_2^n})(x) \geqslant \mathbb{1}_{K\cap\Lambda(\delta)+\delta B_2^n}(x),$$

άρα για το $\nu \in \mathcal{D}^n_+$ ισχύει ότι $\nu * \mathbb{1}_{T+\delta B_2^n} \geqslant \mathbb{1}_K$. Με ανάλογη συλλογιστική πορεία, εξάγουμε τις παρακάτω ανισότητες

$$\begin{aligned} N_\omega(K, T + \delta B_2^n) &\leqslant N_\omega(K \cap \Lambda(\delta) + \delta B_2^n, T + \delta B_2^n) \\ &\leqslant N_\omega(K \cap \Lambda(\delta), T) \leqslant N_\omega(K, T, \Lambda(\delta)). \end{aligned}$$

□

Παρατήρηση 5.2.5. Στη πραγματικότητα, οι παραπάνω ανισότητες βασίζονται στις εξής παρατηρήσεις: Αν $K_1 \subset K_2$ συμπαγή κυρτά και T συμπαγές κυρτό με μη κενό εσωτερικό, τότε $N_\omega(K_1, T) \leqslant N_\omega(K_2, T)$. Επίσης, για $\delta > 0$ και K συμπαγές κυρτό ισχύει ότι $N_\omega(K + \delta B_2^n, T + \delta B_2^n) \leqslant N_\omega(K, T)$. Τέλος, παρακάτω χρησιμοποιείται ότι αν $T_1 \subset T_2$ συμπαγή κυρτά με μη κενό εσωτερικό, τότε $N^*(K, T_2) \leqslant N^*(K, T_1)$.

Λήμμα 5.2.6. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές, $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό και $\Lambda(\delta) \subset K$ ένα δ-δίκτυο του $K + T$. Τότε,*

$$M_\omega(K, T) \geqslant M_\omega(K, T + \delta B_2^n, \Lambda(\delta)).$$

Απόδειξη. Έστω $\{(x_i, \omega_i)\}_{i=1}^M \subset (K\cap\Lambda(\delta), \mathbb{R}^+)$ ακολουθία ζευγών που ικανοποιεί τη συνθήκη του ορισμού του $M_\omega(K, T + \delta B_2^n, \Lambda(\delta))$, δηλαδή για κάθε $x \in \Lambda(\delta)$ ισχύει ότι $\sum_{i=1}^M \omega_i \mathbb{1}_{T+\delta B_2^n}(x - x_i) \leqslant 1$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$\sum_{i=1}^M \omega_i \mathbb{1}_T(x - x_i) \leqslant 1.$$

Πράγματι, προς άτοπο υποθέτουμε ότι η παραπάνω ανισότητα δεν ισχύει. Τότε υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\sum_{i=1}^{M} \omega_i \mathbb{1}_T(x - x_i) > 1$, άρα υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_i \in K \cap \Lambda(\delta)$ τέτοιο ώστε $x_i + T$ (στη πραγματικότητα υπάρχουν τόσα ώστε οι συντελεστές των αντίστοιχων δεικτριών να έχουν άθροισμα μεγαλύτερο της μονάδας). Αν για κάποιο $x_i \in K \cap \Lambda(\delta)$ ισχύει ότι $x \in x_i + T$, τότε $x \in K + T$. Καθώς το $\Lambda(\delta)$ είναι δ-δίκτυο του $K + T$, υπάρχει $y \in \Lambda(\delta)$ τέτοιο ώστε $y - x \in \delta B_2^n$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\sum_{i=1}^{M} \omega_i \mathbb{1}_{T+\delta B_2^n}(y - x_i) > 1,$$

καθώς $y - x_i = y - x + x - x_i \in \delta B_2^n + T$, άτοπο. □

Πρόταση 5.2.7. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Τότε,*

$$\lim_{\delta \to 0^+} N^*(K, T + \delta B_2^n) = N^*(K, T).$$

Απόδειξη. Καθώς $T + \delta B_2^n \supset T$, ισχύει προφανώς

$$\lim_{\delta \to 0^+} N^*(K, T + \delta B_2^n) \leqslant N^*(K, T).$$

Για την αντίστροφη φορά, θεωρούμε $\delta_k \to 0^+$ και f_k ακολουθία συνεχών συναρτήσεων με $\mathbb{1}_T \leqslant f_k \leqslant \mathbb{1}_{T+\delta_k B_2^n}$ τέτοια ώστε $f_k \xrightarrow{k\to\infty} \mathbb{1}_T$ κατά σημείο και μονότονα. Έστω $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{B}_+^n$ ακολουθία μέτρων κάλυψης του K από τις f_k, δηλαδή, $\mu_k * f_k \geqslant \mathbb{1}_K$, τέτοια ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} d\mu_k(x) = N^*(K, f_k) + \varepsilon_k,$$

όπου $0 < \varepsilon_k \to 0$ Από το θεώρημα Banach-Alaoglu υπάρχει w^*-συγκλίνουσα υπακολουθία της $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}}$ σε ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{B}_+^n$. Επομένως, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu_k \xrightarrow{w*} \mu$. Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι το μ είναι μέτρο κάλυψης του K από το T. Έστω $x \in K$. Για $k > l$ ισχύει ότι

$$1 \leqslant (\mu_k * f_k)(x) \leqslant (\mu_k * f_l)(x).$$

Από την w^*-σύγκλιση, αφήνοντας το $k \to \infty$ έπεται ότι $1 \leqslant (\mu * f_k)(x)$ και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, καθώς $l \to \infty$ προκύπτει ότι $1 \leqslant (\mu * \mathbb{1}_T)(x)$, άρα το μ είναι μέτρο κάλυψης του K από το T. Συνεπώς,

$$\lim_{k\to\infty} N^*(K, f_k) = \lim_{k\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} d\mu_k \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} d\mu \geqslant N^*(K, T),$$

άρα

$$\lim_{\delta \to 0^+} N^*(K, T + \delta B_2^n) \geqslant N^*(K, T),$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.2.8. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Τότε,*

$$M_\omega(K, T) = M^*(K, T) = N^*(K, -T).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 5.2.1 αρκεί να δείξουμε τη μεσαία από τις εξής ανισότητες: $M^*(K, T) \geqslant M_\omega(K, T) \geqslant N_\omega(K, -T) \geqslant N^*(K, -T)$. Χρησιμοποιώντας τα Λήμματα 5.2.4 και 5.2.6 συνδυαστικά με το

Θεώρημα 5.2.3 για μια ακολουθία $\Lambda(\delta_k)$ από δ_k-δίκτυα του $K+T$ τέτοια ώστε $\delta_k \to 0^+$ και το $K \cap \Lambda(\delta_k)$ να είναι δ_k-δίκτυο του K, έχουμε για τυχόν k τα παρακάτω:

$$\begin{aligned} M_\omega(K,T) &\geqslant M_\omega(K, T+\delta_k B_2^n, \Lambda(\delta_k)) \\ &= N_\omega(K, -(T+\delta_k B_2^n), \Lambda(\delta_k)) \\ &\geqslant N_\omega(K, -(T+2\delta_k B_2^n)). \end{aligned}$$

Επομένως, από την Πρόταση 5.2.7, $M_\omega(K,T) \geqslant \lim_{k\to\infty} N^*(K, -T+2\delta_k B_2^n) = N^*(K,-T)$ και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 5.2.9. Η συνάρτηση $t \mapsto N^*(K,tT)$, $t>0$, είναι μονότονη, άρα σχεδόν παντού συνεχής, από το οποίο συνεπάγεται η ισότητα

$$M_\omega(K,tT) = N_\omega(K,-tT)$$

σχεδόν για κάθε $t>0$. Ισοδύναμα, για $\delta \to 0^+$,

$$\lim_{\delta\to 0^+} M_\omega(K,(1+\delta)T) = N_\omega(K,-(1+\delta)T).$$

Τώρα, από το Θεώρημα 5.2.8 έπεται ότι

$$M_\omega(K,T) = M^*(K,T) = N^*(K,-T) = \lim_{\delta\to 0^+} N_\omega(K,-(1+\delta)T).$$

5.3 Βέλτιστα μέτρα κάλυψης

Επαναφέρουμε σε αυτό το σημείο την προσοχή μας σε κάτι που σχολιάστηκε όταν πρωτοεισήχθησαν οι έννοιες, στην Παρατήρηση 5.1.13.

Πρόταση 5.3.1. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Τότε υπάρχει ένα μη κενό κυρτό σύνολο $C \subset \mathcal{B}_+^n$ μέτρων κάλυψης του K από το T που η ολική τους μάζα είναι ίση με το $N^*(K,T)$. Δηλαδή, για κάθε $\mu \in C$ ισχύει ότι $\mu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K$ και*

$$N^*(K,T) = \int_{\mathbb{R}^n} d\mu.$$

Απόδειξη. Έστω $(\mu_k)_k \subset \mathcal{B}_+^n$ ακολουθία μέτρων κάλυψης του K από το T τέτοια ώστε

$$\mu_k(\mathbb{R}^n) \xrightarrow{k\to\infty} N^*(K,T).$$

Από το θεώρημα Banach-Alaoglu, υπάρχει w^*-συγκλίνουσα υπακολουθία της και άρα χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να θεωρήσουμε ότι $\mu_k \xrightarrow{w^*} \mu$, για κάποιο $\mu \in \mathcal{B}_+^n$. Τότε το μ είναι μέτρο κάλυψης του K από το T. Πράγματι, έστω $x \in K$ και $f \geqslant \mathbb{1}_T$ συνεχής με συμπαγή φορέα. Τότε για $k \to \infty$

$$1 \leqslant (\mu_k * f)(x) \to (\mu * f)(x).$$

Θεωρώντας μονότονη ακολουθία (f_l) συναρτήσεων με συμπαγή φορέα τέτοια ώστε $f_l \geqslant \mathbb{1}_T$ για κάθε l και η (f_l) να συγκλίνει κατά σημείο στην $\mathbb{1}_T$, και χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης βλέπουμε ότι $(\mu * \mathbb{1}_T)(x) \geqslant 1$. Για να δείξουμε ότι το μ επιτυγχάνει το ζητούμενο φράγμα, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\mu(\mathbb{R}^n) \leqslant \lim_{k\to\infty} \mu_k(\mathbb{R}^n) = N^*(K,T)$$

και προφανώς $\mu(\mathbb{R}^n) \geqslant N^*(K,T)$. Καθώς η συνθήκη $\mu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K$ διατηρείται από κυρτούς συνδυασμούς, το σύνολο C είναι κυρτό. □

Παρατήρηση 5.3.2. Δεν υπάρχει εν γένει μέτρο τέτοιο ώστε η τιμή του στον $\mathbb{R}^n$ να επιτυγχάνει ταυτόχρονα τον αριθμό κάλυψης και τον αριθμό διαχωρισμού.

5.3.1 Φράγμα με χρήση του θεωρήματος Glivenko-Cantelli

Θα θέλαμε να φράξουμε από πάνω τον αριθμό κάλυψης $N_\omega(K,T)$. Γνωρίζουμε ότι $N^*(K,T) \leqslant N_\omega(K,T)$, άρα, μέχρι τώρα, το να βρούμε ένα μέτρο Borel του οποίου η ολική μάζα φράσσει από πάνω τον $N^*(K,T)$ δεν δίνει κάποιο άνω φράγμα για τον $N_\omega(K,T)$. Ωστόσο, στη συνέχεια της υποενότητας θα δούμε πως η ολική μάζα μέτρων Borel με συγκεκριμένη μορφή φράσσει το $N_\omega(K,T)$. Γι' αυτόν τον σκοπό θα χρειαστούμε τον ορισμό της κλάσης Glivenko-Cantelli και ένα σχετικό θεώρημα.

Ορισμός 5.3.3. Έστω $\xi_1, \xi_2, \dots$ ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων διανυσμάτων στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή P. Το εμπειρικό μέτρο P_k είναι η κατανομή του $\frac{1}{k}\sum_{i=1}^k \xi_i$. Μια κλάση $\mathcal{A}$ Borel υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ καλείται κλάση Glivenko-Cantelli αν

$$\sup_{A\in\mathcal{A}} |P_n(A) - P(A)| \to 0$$

σχεδόν βεβαίως.

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω C_n η οικογένεια των κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Αν για την κατανομή P ισχύει ότι $P(\partial K) = 0$ για κάθε $K \in C_n$ τότε η οικογένεια C_n είναι κλάση Glivenko-Cantelli για την P.*

Λήμμα 5.3.5. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ και $T \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σύνολο. Έστω επίσης μ το ομοιόμορφο μέτρο σε κάποιο συμπαγές σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\frac{d\mu}{dx} = c\mathbb{1}_A$ για κάποιο $c > 0$. Υποθέτουμε ότι το μ είναι μέτρο κάλυψης του K από το T. Τότε,*

$$N_\omega(K,T) \leqslant \mu(\mathbb{R}^n).$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να δείξουμε ότι υπάρχει διακριτό μέτρο ν τέτοιο ώστε

$$\nu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K \quad \text{και} \quad \nu(\mathbb{R}^n) \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\mu(\mathbb{R}^n).$$

Τότε, από τον ορισμό του $N_\omega(K,T)$ το ζητούμενο είναι άμεσο. Έστω $\mu_0 = \frac{1}{c\mathrm{vol}_n(A)}\mu$ μέτρο πιθανότητας ομοιόμορφα κατανεμημένο στο A, $\xi_1, \xi_2, \dots$ ανεξάρτητη ακολουθία ισόνομων τυχαίων μεταβλητών στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή μ_0 και μ_n το αντίστοιχο εμπειρικό μέτρο. Η υπόθεση ότι το μ είναι μέτρο κάλυψης του K από το T είναι ισοδύναμη με τη συνθήκη ότι $\mu_0(x+T) \geqslant \frac{1}{c\mathrm{vol}_n(A)}$ για κάθε $x \in K$. Αυτό φαίνεται από το γεγονός ότι

$$(\mu * \mathbb{1}_T)(x) = c\mathrm{vol}_n(A) \int \mathbb{1}_T(x-y)d\mu_0(y)$$

και

$$\mu_0(x+T) = \int \mathbb{1}_T(x-y)d\mu_0(y)$$

για κάθε $x \in K$. Καθώς $\mu(\partial L) = 0$ για κάθε $L \in C_n$, άρα $\mu_0(\partial L) = 0$ για κάθε $L \in C_n$, από το Θεώρημα 5.3.4 η οικογένεια C_n είναι κλάση Glivenko-Cantelli για το μ_0. Επομένως, υπάρχει $k > 1$ τέτοιος ώστε

$$\sup_{L \in C_n} |\mu_0(L) - \mu_k(L)| < \frac{\varepsilon}{c\mathrm{vol}_n(A)}$$

σχεδόν βεβαίως. Επομένως, υπάρχει διακριτό μέτρο $\nu_0 = \sum_{i=1}^k \frac{1}{k}\delta_{x_i}$ (κάποιο από τα μ_k) τέτοιο ώστε

$$(\nu_0 * \mathbb{1}_T)(x) = \nu_0(x+T) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{c\mathrm{vol}_n(A)}$$

για κάθε $x \in K$. Τότε, το μέτρο $\nu = \frac{c\mathrm{vol}_n(A)}{1-\varepsilon}\nu_0$ είναι μέτρο κάλυψης του K από το T με $\nu(\mathbb{R}^n) = \frac{1}{1-\varepsilon}\mu(\mathbb{R}^n)$, όπως θέλαμε. □

5.3.2 Φράγματα όγκων

Στο σημείο αυτό θα αποδείξουμε δύο ανισότητες οι οποίες θα χρησιμοποιηθούν αργότερα στις αποδείξεις προτάσεων που σχετίζονται με την εικασία του Hadwiger για αριθμούς κάλυψης με βάρη.

Πρόταση 5.3.6. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Τότε*

$$N^*(K,T) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K-T)}{\mathrm{vol}_n(T)}.$$

Επίσης, αν το T είναι κυρτό, τότε

$$N_\omega(K,T) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K-T)}{\mathrm{vol}_n(T)}.$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.2.8 αρκεί να δείξουμε ότι $M^*(K,T) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K+T)}{\mathrm{vol}_n(T)}$. Έστω $\mu \in \mathcal{B}_+^n$ ένα T-διαχωρισμένο μέτρο, δηλαδή $\mu * \mathbb{1}_T \leqslant 1$. Τότε

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(T)\int_K d\mu(x) &= \int_K \int_{K+T} \mathbb{1}_T(y-x)d\mu(x)dy \\
&= \int_{K+T}\int_K \mathbb{1}_T(y-x)dyd\mu(x) \\
&\leqslant \int_{K+T} (\mu * \mathbb{1}_T)(y)dy \\
&\leqslant \int_{K+T} dy = \mathrm{vol}_n(K+T)
\end{aligned}$$

και λαμβάνοντας supremum στο αριστερό μέλος παίρνουμε το ζητούμενο.

Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε ότι το μέτρο με πυκνότητα $\frac{\mathbb{1}_{K-T}}{\mathrm{vol}_n(T)}$ είναι μέτρο κάλυψης του K από το T. Τότε, το ζητούμενο έπεται από το Λήμμα 5.3.5. □

Πρόταση 5.3.7. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Τότε,*

$$\max\left\{\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(T)}, 1\right\} \leqslant M_\omega(K,T).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 5.2.8 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\max\left\{\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(T)}, 1\right\} \leqslant N^*(K,T).$$

Έστω $\mu \in \mathcal{B}_+^n$ μέτρο κάλυψης του K από το T, δηλαδή $\mu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K$. Τότε,

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(T)\int d\mu(x) &= \iint \mathbb{1}_T(y-x)d\mu(x)dy = \iint \mathbb{1}_T(y-x)dyd\mu(x)\\ &\geqslant \int \mathbb{1}_K(y)dy = \mathrm{vol}_n(K),\end{aligned}$$

και λαμβάνοντας infimum στο αριστερό μέλος συμπεραίνουμε ότι $N^*(K,T) \geqslant \max\left\{\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(T)},1\right\}$. Για τη δεύτερη ανισότητα, έστω $x \in K$. Τότε

$$1 \leqslant (\mu * \mathbb{1}_T)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_T(x-y)d\mu(y) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} d\mu,$$

οπότε $N^*(K,T) \geqslant 1$. □

Θεώρημα 5.3.8. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές και $T \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Τότε,*

$$\max\left\{\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(T)},1\right\} \leqslant N^*(K,T) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K-T)}{\mathrm{vol}_n(T)}.$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από τις παραπάνω προτάσεις και το Θεώρημα 5.2.8. □

Θεώρημα 5.3.9. *Έστω K συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και T_1, T_2 συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Τότε,*

$$N(K,T_1+T_2) \leqslant \ln(4\overline{N}(K,T_2))(N_\omega(K,T_1)+1) + \sqrt{\ln(4\overline{N}(K,T_2))(N_\omega(K,T_1)+1)}.$$

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε μια πεπερασμένη διακριτή κάλυψη με βάρη $(x_i,\omega_i)_{i\in I}$ του K από το T_1, τέτοια ώστε

$$\sum_{i\in I}\omega_i < N_\omega(K,T_1)+\varepsilon.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα βάρη ω_i είναι ρητοί αριθμοί και, επιτρέποντας επαναλήψεις στα σημεία κάλυψης x_i, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\omega_i = \frac{1}{M}$ για κάθε $i \in I$, όπου M είναι ένας αυθαίρετα μεγάλος φυσικός αριθμός. Θέτουμε $N = \lfloor N_\omega(K,T_1)\rfloor$ και υποθέτουμε ότι το $\varepsilon \in (0,1)$ είναι αρκετά μικρό ώστε $N+1 \geqslant N_\omega(K,T_1)+\varepsilon$.

Ξεκινώντας από αυτή την κλασματική κάλυψη, σκοπός μας είναι, με μια τυχαία διαδικασία, να ορίσουμε μια κλασική κάλυψη του K από το T_1+T_2, η οποία θα έχει πληθάριθμο το πολύ ίσο με

$$\ln(4\overline{N}(K,T_2))N_\omega(K,T_1) + \sqrt{\ln(4\overline{N}(K,T_2))N_\omega(K,T_1)}.$$

Θεωρούμε έναν φυσικό S τον οποίο θα προσδιορίσουμε αργότερα και έναν πραγματικό αριθμό $L > 1$ τον οποίο επίσης θα προσδιορίσουμε αργότερα. Τα κέντρα της κάλυψης θα είναι κάποια από τα x_i. Επιλέγουμε καθένα από τα x_i τυχαία και ανεξάρτητα με πιθανότητα $p = \frac{S}{M}$. Ο ισχυρισμός είναι ότι αν επιλέξουμε

$$S = \ln(4\overline{N}(K,T_2)) \qquad \text{και} \qquad L = 1+\frac{1}{\sqrt{S(N+1)}}$$

τότε το σύνολο που παράγεται δίνει με θετική πιθανότητα μια κάλυψη του K από το T_1+T_2 και την ίδια στιγμή ο πληθάριθμος του συνόλου που επιλέγουμε είναι το πολύ ίσος με

$$LS(N+1) \leqslant LS\left(\sum_{i\in I}\omega_i\right) \leqslant LS(N_\omega(K,T_1)+\varepsilon+1).$$

Έστω X_i η τυχαία μεταβλητή Bernoulli που αντιστοιχεί στο x_i και $X = \sum_{i\in I} X_i$. Αρχικά φράσσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\{X > LS(N+1)\}$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i\in I}\frac{1}{M} < N_\omega(K,T_1)+\varepsilon \leqslant N+1,$$

δηλαδή $|I| \leqslant M(N+1)$ όπου $|I|$ είναι ο πληθάριθμος του I, άρα υπάρχουν το πολύ $M(N+1)$ δοκιμές. Από την ανισότητα Chernoff έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X \geqslant LS(N+1)) &= \mathbb{P}\left(e^{tX} \geqslant e^{tLSN}\right)\\
&\leqslant \min_{t>0} e^{-tLS(N+1)}\mathbb{E}\left(e^{tX_1}\cdots e^{tX_{|I|}}\right)\\
&\leqslant \min_{t>0} e^{-tLS(N+1)}\left(pe^t+(1-p)\right)^{M(N+1)}\\
&= \left(\frac{1}{L}\right)^{LS(N+1)}\left(\frac{1-p}{1-Lp}\right)^{(N+1)M(1-Lp)}\\
&= \left(\frac{1}{L}\right)^{LS(N+1)}\left(1+\frac{S(L-1)}{M-LS}\right)^{(N+1)(M-LS)}\\
&\approx \left(\frac{e^{L-1}}{L^L}\right)^{S(N+1)},
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη ισότητα είδαμε με παραγώγιση ότι το ελάχιστο λαμβάνεται όταν $e^t = \frac{L(1-p)}{1-Lp}$ και η προσέγγιση στο τελευταίο βήμα αιτιολογείται αν ο M είναι αρκετά μεγάλος σε σύγκριση με το S. Θέτοντας $L = 1+\xi$, έχουμε ότι $0 < \xi \leqslant 1$ και

$$\mathbb{P}(X \geqslant LS(N+1)) \leqslant \left(\frac{e^{L-1}}{L^L}\right)^{S(N+1)} \leqslant e^{-S(N+1)\xi/3}. \tag{5.3.1}$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι με αρκετά μεγάλη πιθανότητα το σύνολο των σημείων που επιλέγουμε είναι το σύνολο των κέντρων για μια κάλυψη του K από το T_1+T_2. Θεωρούμε ένα ελαχιστικό σύνολο σημείων $\{y_j\}_{j\in J}$ (με πληθάριθμο $\overline{N}(K,T_2)$) ώστε

$$K \subseteq \bigcup_{j\in J}(y_j+T_2).$$

Αν κάθε σημείο y_j ανήκει σε κάποια μεταφορά x_i+T_1, όπου το x_i έχει επιλεγεί, τότε το K καλύπτεται από τα $x_i+T_1+T_2$ και έχουμε το ζητούμενο. Σταθεροποιούμε ένα σημείο $y = y_j$ και υπολογίζουμε την πιθανότητα να καλύπτεται από κάποιο x_i+T_1. Αφού $y\in K$, έχουμε

$$\sum_{\{i\in I: y\in x_i+T_1\}}\frac{1}{M} \geqslant 1,$$

συνεπώς το y ανήκει σε τουλάχιστον M από τα σύνολα x_i+T_1. Επομένως, η πιθανότητα να μην καλύπτεται το y είναι μικρότερη από $\left(1-\frac{S}{M}\right)^M \leqslant e^{-S}$. Συνεπώς, η πιθανότητα να υπάρχει κάποιο y_j,

$j \in J$ που δεν καλύπτεται είναι μικρότερη από $\overline{N}(K, T_2)e^{-S}$.

Έχουμε δείξει ότι η πιθανότητα ότι το K δεν καλύπτεται ή ότι το σύνολο των κέντρων έχει πληθάριθμο μεγαλύτερο από $LS(N+1)$ είναι το πολύ ίση με

$$e^{-S(N+1)\xi/3} + \overline{N}(K, T_2)e^{-S}.$$

Μένει λοιπόν να επιλέξουμε τους S και ξ έτσι ώστε αυτό το φράγμα να είναι μικρότερο από 1. Επιλέγοντας $\xi = \frac{1}{\sqrt{S(N+1)}}$ και $S = \ln(4\overline{N}(K, T_2))$ ελέγχουμε τον περιορισμό. Αυτό δείχνει ότι

$$\begin{aligned}
N(K, T_1 + T_2) \leqslant LS(N+1) &= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{S(N+1)}}\right)\ln(4\overline{N}(K, T_2))(N+1) \\
&= \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\ln(4\overline{N}(K, T_2))(N+1)}}\right)\ln(4\overline{N}(K, T_2))(N+1) \\
&\leqslant \ln(4\overline{N}(K, T_2))(N_\omega(K, T_1) + 1) + \sqrt{\ln(4\overline{N}(K, T_2))(N_\omega(K, T_1) + 1)},
\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

5.4 Ορισμοί σε μετρικό χώρο

Μπορούμε να τροποποιήσουμε τις παραπάνω έννοιες με τέτοιον τρόπο ώστε να είναι συμβατές με το πλαίσιο των μετρικών χώρων. Συγκεκριμένα, έστω (X, d) μετρικός χώρος και $K \subset X$ συμπαγές. Ορίζουμε τον ε-αριθμό κάλυψης του K ως εξής

$$N(K, \varepsilon) = \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists\ x_1, \dots, x_N \in X : K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)\right\}$$

και αντίστοιχα,

$$\overline{N}(K, \varepsilon) = \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists\ x_1, \dots, x_N \in K : K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B(x_i, \varepsilon)\right\}.$$

Ανάλογα, ο αριθμός διαχωρισμού είναι ο μέγιστος αριθμός μη αλληλοεπικαλυπτόμενων ε-μπαλών με κέντρα στο K:

$$M(K, \varepsilon) = \max\{M \in \mathbb{N} : \exists\ x_1, \dots, x_M \in K, B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon) = \varnothing\ \forall\ i \neq j\}$$

και αντίστοιχα,

$$\overline{M}(K, \varepsilon) = \max\{M \in \mathbb{N} : \exists\ x_1, \dots, x_M \in K, B(x_i, \varepsilon) \cap B(x_j, \varepsilon) \cap K = \varnothing\ \forall\ i \neq j\}.$$

Όπως και στην περίπτωση του Ευκλείδειου χώρου $\mathbb{R}^n$, έτσι και στο παρόν πλαίσιο, θα προσθέσουμε την έννοια του βάρους στους παραπάνω αριθμούς και θα διατυπώσουμε σχετικά θεωρήματα, ανάλογα εκείνων που παραθέσαμε στις προηγούμενες υποενότητες.

Ορισμός 5.4.1. Έστω (X, d) μετρικός χώρος και $K \subset X$ συμπαγές. Μια ακολουθία ζευγών $S = \{(x_i, \omega_i) : x_i \in X, \omega_i \in \mathbb{R}^+\}_{i=1}^N$ με $N \in \mathbb{N}$ σημεία και βάρη καλείται ε-κάλυψη του K με βάρη αν για κάθε $x \in K$ ισχύει ότι $\sum_{i: x \in B(x_i, \varepsilon)} \omega_i \geqslant 1$. Το συνολικό βάρος της κάλυψης συμβολίζεται με $\omega(S) = \sum_{i=1}^N \omega_i$. Ο αριθμός

ε-κάλυψης με βάρη του K ορίζεται ως το infimum των συνολικών βαρών των ε-καλύψεων του K με βάρη και συμβολίζεται με $N_\omega(K,\varepsilon)$.

Αντίστοιχα, μπορούμε να ορίσουμε

$$\overline{N}_\omega(K,\varepsilon) = \inf\left\{\int_X d\nu : \forall\ x \int \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\nu(y) \geqslant \mathbb{1}_K(x),\ \nu \in \mathcal{D}_+(X), \mathrm{supp}(\nu) \subset K\right\},$$

όπου με $\mathcal{D}_+(X)$ συμβολίζουμε το σύνολο των διακριτών μη αρνητικών μέτρων στον X. Έστω $\mathcal{B}_+(X)$ το σύνολο των μη αρνητικών μέτρων Borel στον X. Τότε, ο αριθμός κάλυψης ως προς γενικά μέτρα ορίζεται ως

$$N^*(K,\varepsilon) = \inf\left\{\int_X d\mu : \forall\ x \int \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\mu(y) \geqslant \mathbb{1}_K(x),\ \mu \in \mathcal{B}_+(X)\right\}.$$

Ανάλογα, ορίζονται και οι αντίστοιχες έννοιες του αριθμού διαχωρισμού και του αριθμού διαχωρισμού με βάρη. Συγκεκριμένα, ένα μέτρο ρ καλείται ε-διαχωρισμένο αν για κάθε $x \in X$ ισχύει ότι $\int \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\rho(y) \leqslant 1$ και ε-διαχωρισμένο στο K αν $\int \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\rho(y) \leqslant 1$ για κάθε $x \in K$. Οι αριθμοί με βάρη, αντίστοιχοι των $N_\omega(K,\varepsilon)$, $\overline{N}_\omega(K,\varepsilon)$ και $N^*(K,\varepsilon)$, ορίζονται ως εξής:

$$M_\omega(K,\varepsilon) = \sup\left\{\int_K d\rho : \forall\ x \in X \int \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\rho(y) \leqslant 1,\ \rho \in \mathcal{D}_+(X)\right\}$$

$$\overline{M}_\omega(K,T) = \sup\left\{\int_K d\rho : \forall\ x \in K \int \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\rho(y) \leqslant 1,\ \rho \in \mathcal{D}_+(X)\right\}$$

και

$$M^*(K,T) = \sup\left\{\int_K d\rho : \forall\ x \in X \int \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\rho(y) \leqslant 1,\ \rho \in \mathcal{B}_+(X)\right\}.$$

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $K \subset X$ συμπαγές και $\varepsilon > 0$. Τότε*

$$M_\omega(K,\varepsilon) \leqslant M^*(K,\varepsilon) \leqslant N^*(K,\varepsilon) \leqslant N_\omega(K,\varepsilon).$$

Απόδειξη. Η πρώτη και η τελευταία ανισότητα είναι προφανείς από τους ορισμούς των συγκεκριμένων αριθμών. Η ανισότητα που μένει να δείξουμε είναι η μεσαία. Έστω μ ένα μέτρο ε-κάλυψης με βάρη και ρ ένα ε-διαχωρισμένο μέτρο. Από τις υποθέσεις μας ισχύει ότι $\int \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\rho(y) \leqslant 1$ και $\int \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\mu(y) \geqslant \mathbb{1}_K(x)$ για κάθε $x \in X$. Οπότε,

$$\begin{aligned}\int_K d\rho(x) &= \int \mathbb{1}_K(x)d\rho(x) \leqslant \iint \mathbb{1}_{B(y,\varepsilon)}(x)d\mu(y)d\rho(x)\\ &= \iint \mathbb{1}_{B(x,\varepsilon)}(y)d\rho(x)d\mu(y)\\ &\leqslant \int d\mu(y).\end{aligned}$$

Παίρνοντας διαδοχικά infimum και supremum έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 5.4.3. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος, $K \subset X$ συμπαγές και $\varepsilon > 0$. Τότε*

$$N(K,2\varepsilon) \leqslant N_\omega(K,\varepsilon) \leqslant N(K,\varepsilon).$$

Απόδειξη. Η δεξιά ανισότητα είναι άμεση. Για την αριστερή, από το Θεώρημα 5.4.2, αρκεί να δείξουμε ότι

$$N(K,2\varepsilon) \leqslant M(K,\varepsilon).$$

Έστω $(x_i)_{i=1}^N \subset K$ ένα ε-διαχωρισμένο σύνολο. Τότε για κάθε $x \in K$ υπάρχει $i \in 1,\dots,N$ τέτοιο ώστε $B(x,\varepsilon) \cap B(x_i,\varepsilon) \neq \varnothing$, και από την τριγωνική ανισότητα έπεται ότι $x \in B(x_i,2\varepsilon)$. Επομένως, το σύνολο $(x_i)_{i=1}^N$ είναι 2ε-κάλυψη του K, επομένως $N(K,2\varepsilon) \leqslant M(K,\varepsilon)$. □

5.5 Εφαρμογή στην εικασία του Hadwiger

Έχοντας εισαγάγει και μελετήσει βασικές ανισότητες για τους αριθμούς κάλυψης, τους αριθμούς διαχωρισμού και τις γενικευμένες μορφές τους, είμαστε σε θέση να μελετήσουμε μια παραλλαγή της εικασίας του Hadwiger χρησιμοποιώντας τους αριθμούς κάλυψης με βάρη. Συγκεκριμένα, πέρα από το κλασικό πρόβλημα, έχουμε την εξής εικασία:

Εικασία 5.5.1. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\lim_{\lambda\to 1^-} N_\omega(K,\lambda K) \leqslant 2^n.$$

Επιπλέον, ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι γενικευμένο παραλληλεπίπεδο.

Για κεντρικά συμμετρικά κυρτά σώματα θα επαληθεύσουμε την Εικασία 5.5.1, καθώς και τον ισχυρισμό για τις περιπτώσεις ισότητας.

Θεώρημα 5.5.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\lim_{\lambda\to 1^-} N_\omega(K,\lambda K) \leqslant \begin{cases} 2^n, & K=-K \\ \binom{2n}{n}, & K\neq -K \end{cases}$$

Επιπλέον, για κεντρικά συμμετρικό σώμα K, η ισότητα $\lim_{\lambda\to 1^-} N_\omega(K,\lambda K) = 2^n$ ισχύει αν και μόνο αν το K είναι γενικευμένο παραλληλεπίπεδο.

Πριν αποδείξουμε το παραπάνω θεώρημα, θα εισαγάγουμε κάποιους ορισμούς και θα δείξουμε τα απαιτούμενα λήμματα.

Λήμμα 5.5.3 (Schneider). *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα. Έστω $a \in K$ και p το σημείο τομής του ∂K με την ακτίνα που ξεκινάει από το 0 και περνάει από το a. Υποθέτουμε ότι το $(a+K)\cap K$ είναι ομοιοθετικό με το K. Τότε υπάρχει κλειστός κυρτός κώνος $C \subset \mathbb{R}^n$ με κορυφή το 0 τέτοιος ώστε $K=(p-C)\cap(C-p)$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε την ομοιοθεσία $hK = K\cap(K+a)$. Καθώς το K είναι κεντρικά συμμετρικό, το hK έχει κέντρο συμμετρίας το $\frac{a}{2}$, άρα $hK = \frac{a}{2} + \varrho K$, όπου $\varrho = \frac{p-\frac{a}{2}}{p}$. Επίσης, $hK = \varrho(K-p)+p$, το οποίο συνεπάγεται ότι το $p = hp$ είναι το κέντρο της ομοιοθεσίας της $h(x) = \varrho(x-p)+p$.

Θεωρούμε τον κώνο

$$C_0 = \{\lambda(p-y) : y \in \operatorname{int}(K),\ \lambda \geqslant 0\}$$

και την κλειστή του θήκη $C = \overline{C_0}$. Αρχικά δείχνουμε ότι $(p-C_0)\cap(C_0-p) \subset K$. Προς άτοπο, υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in (p-C_0)\cap(C_0-p)$ τέτοιο ώστε $x \notin K$. Έστω $y,z \in K$ τέτοια ωστε

$$[p,y] = K\cap[p,x], \quad [-p,z] = K\cap[-p,x].$$

Θεωρούμε το τετράεδρο T στο K με κορυφές $\pm p, y, z$. Καθώς το p είναι το κέντρο της ομοιοθεσίας h, το σημείο $y' = \varrho(y-p)+p \in (hK)\cap[p,x]$ ανήκει στο σύνορο του hK. Όμως, καθώς το σημείο $w = \varrho(y+p)-p$ ανήκει στο εσωτερικό του T, έπεται ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $w + u \in T$ και $y' + u \in T$, όπου $u = \varepsilon \cdot (y - p)$. Καθώς $y' = w + a$, έπεται ότι $y' + u = (w + u) + a \in T + a$, άρα $y' + u \in K \cap (K + a)$, το οποίο είναι άτοπο καθώς $[p, y'] = (hK) \cap [p, x]$.

Επομένως, δείξαμε ότι $(p - C_0) \cap (C_0 - p) \subset K$ και συνεπώς $(p - C) \cap (C - p) \subset K$. Ο εγκλεισμός $K \subset (p - C) \cap (C - p)$ ελέγχεται άμεσα και έτσι έχουμε $K = (p - C) \cap (C - p)$. □

Αν το K δεν είναι κεντρικά συμμετρικό, τότε μπορούμε να τροποποιήσουμε το Λήμμα 5.5.3 και να πάρουμε το εξής:

Λήμμα 5.5.4. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα το οποίο περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Έστω $a \in K$ και ας υποθέσουμε ότι το σημείο τομής του ∂K με την ακτίνα που ξεκινάει από το 0 και περνάει από το a είναι ένα εκτεθειμένο σημείο του K, το οποίο συμβολίζουμε με p. Έστω q το σημείο του ∂K για το οποίο $0 \in (q, p)$. Υποθέτουμε ότι το $(a + K) \cap K$ είναι ομοιοθετικό με το K. Τότε υπάρχουν κλειστοί κυρτοί κώνοι $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n$, και οι δύο με κορυφή το 0, τέτοιοι ώστε $K = (p + C_1) \cap (q + C_2)$.*

5.5.1 Κάλυψη κυρτού συνόλου από το εσωτερικό του

Στη συνέχεια θα χρειαστεί να δουλέψουμε με τον αριθμό κάλυψης με βάρη ενός συνόλου K από το εσωτερικό του, $\mathrm{int}(K)$, τον οποίο συμβολίζουμε με $N_\omega(K, \mathrm{int}(K))$. Ο ορισμός του είναι ανάλογος με τις περιπτώσεις που ήδη μελετήσαμε:

$$N_\omega(K, \mathrm{int}(K)) = \inf\{\nu(\mathbb{R}^n) : \nu * \mathbb{1}_{\mathrm{int}(K)} \geqslant \mathbb{1}_K,\ \nu \in \mathcal{D}^n_+\}.$$

Λήμμα 5.5.5. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ συμπαγές με μη κενό εσωτερικό. Τότε*

$$N_\omega(K, \mathrm{int}(K)) = \lim_{\lambda\to 1^-} N_\omega(K, \lambda K).$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(K)$. Η ανισότητα

$$N_\omega(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant \lim_{\lambda\to 1^-} N_\omega(K, \lambda K)$$

είναι άμεση από τους ορισμούς. Για την αντίστροφη ανισότητα, έστω $\mu = \sum_{i=1}^N \alpha_i \delta_{x_i}$ ένα μέτρο κάλυψης του K από το $\mathrm{int}(K)$, δηλαδή $\mu * \mathbb{1}_{\mathrm{int}(K)} \geqslant \mathbb{1}_K$. Αν $x \in K$, τότε καθώς $\mu * \mathbb{1}_{\mathrm{int}(K)} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{\mathrm{int}(K)+x_i}(x) \geqslant 1$, υπάρχει κάποιο σύνολο δεικτών A τέτοιο ώστε $x \in \bigcap_{i\in A}(x_i + \mathrm{int}(K))$. Τότε υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε

$$B(x, r) \subset \bigcap_{i\in A}(x_i + \mathrm{int}(K)).$$

Καθώς $1 \leqslant (\mu * \mathbb{1}_{\mathrm{int}(K)})(x)$, για κάθε $y \in B(x, r)$, ισχύει ότι

$$1 \leqslant (\mu * \mathbb{1}_{\mathrm{int}(K)})(y) = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbb{1}_{x_i+\mathrm{int}(K)}(y).$$

Τότε καθώς το K είναι συμπαγές, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in K$ να ισχύει ότι

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{x_i+\mathrm{int}(K)}((1+\delta)x) \\ &= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbb{1}_{\frac{1}{1+\delta}\mathrm{int}(K)}\left(x - \frac{x_i}{1+\delta}\right) = \left(\nu * \mathbb{1}_{\frac{1}{1+\delta}\mathrm{int}(K)}\right)(x), \end{aligned}$$

όπου $\nu = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \delta_{\frac{x_i}{1+\delta}}$. Επομένως, $1 \leqslant \mu * \mathbb{1}_{\frac{1}{1+\delta}\mathrm{int}(K)} \leqslant \mu * \mathbb{1}_{\lambda_0 K}$ για κάποιο $0 < \lambda_0 < 1$, οπότε

$$\lim_{\lambda \to 1^-} N_\omega(K, \lambda K) \leqslant N_\omega(K, \mathrm{int}(K))$$

και έτσι αποδεικνύεται το ζητούμενο. □

Ορισμός 5.5.6. Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα. Ένα σύνολο $A \subset K$ ονομάζεται αντιποδικό στο K αν για κάθε ζεύγος διαφορετικών σημείων στο A υπάρχει ζεύγος διαφορετικών παράλληλων υπερεπιπέδων στήριξης του K, τέτοιο ώστε καθένα από αυτά να περιέχει ένα από τα δύο σημεία του ζεύγους. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.5.7 (Danzer-Grunbaum). *Η μέγιστη πληθικότητα ενός αντιποδικού συνόλου σε ένα κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ είναι ίση με 2^n. Επιπλέον, ισότητα ισχύει αν και μόνο αν το K είναι γενικευμένο παραλληλεπίπεδο.*

Σε αυτό το σημείο είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα 5.5.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.5.2. Υποθέτουμε αρχικά ότι το K δεν είναι κεντρικά συμμετρικό. Από την Πρόταση 5.3.6 έχουμε την ανισότητα

$$\lim_{\lambda \to 1^-} N_\omega(K, \lambda K) \leqslant \lim_{\lambda \to 1^-} \frac{\mathrm{vol}_n(K - \lambda K)}{\mathrm{vol}_n(\lambda K)} = \binom{2n}{n}$$

όπως θέλαμε. Στην περίπτωση που το K είναι κεντρικά συμμετρικό, το ίδιο επιχείρημα δίνει ως άνω φράγμα τον 2^n. Στη συνέχεια, θα αποδείξουμε το ίδιο αποτέλεσμα με διαφορετικό τρόπο, ο οποίος θα μας επιτρέψει να αναλύσουμε και την περίπτωση της ισότητας.

Έστω ότι το K είναι κεντρικά συμμετρικό. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το K έχει μη κενό εσωτερικό και συγκεκριμένα, ότι υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε η $B(0, r)$ να περιέχεται στο εσωτερικό του K. Από το Λήμμα 5.5.5, μπορούμε να δουλέψουμε με τον αριθμό κάλυψης με βάρη $N_\omega(K, \mathrm{int}(K))$ του K από το εσωτερικό του, $\mathrm{int}(K)$. Επίσης, από το Λήμμα 5.3.5, μπορούμε να θεωρήσουμε ομοιόμορφα μέτρα κάλυψης ώστε να φράξουμε το $N_\omega(K, \mathrm{int}(K))$. Πράγματι, έστω το ομοιόμορφο μέτρο μ στο K με πυκνότητα $\frac{2^n \mathbb{1}_K}{\mathrm{vol}_n(K)}$, δηλαδή:

$$d\mu(y) = 2^n \frac{\mathbb{1}_K(y)}{\mathrm{vol}_n(K)} dy.$$

Τότε το μ είναι μέτρο κάλυψης του K από το $\mathrm{int}(K)$. Πράγματι, αν $x \in K$ τότε

$$(\mu * \mathbb{1}_{\mathrm{int}(K)})(x) = \frac{2^n}{\mathrm{vol}_n(K)} \int \mathbb{1}_{\mathrm{int}(K)}(y) \mathbb{1}_K(x - y) dy = 2^n \frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (x + K))}{\mathrm{vol}_n(K)}$$

και καθώς

$$K \cap (x+K) \supset \frac{K}{2} + \frac{1}{2}[K \cap (2x+K)] \supset \frac{K+x}{2} \tag{5.5.1}$$

έπεται ότι

$$2^n \frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (x+K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant 2^n \frac{\mathrm{vol}_n(\frac{K}{2})}{\mathrm{vol}_n(K)} = 1 \tag{5.5.2}$$

όπως θέλαμε. Αυτό συνεπάγεται ότι $N_\omega(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant \mu(\mathbb{R}^n) = 2^n$.

Για την ισότητα, υποθέτουμε ότι $N_\omega(K, \mathrm{int}(K)) = 2^n$ για κάποιο κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα K. Ειδικότερα, δεν υπάρχει $0 < c < 1$ τέτοιο ώστε το $c\mu$ να είναι μέτρο κάλυψης του K από το $\mathrm{int}(K)$. Οπότε η ανισότητα (5.5.2) πρέπει να είναι ισότητα για κάποιο $x \in K$. Πράγματι, αν όχι, από τη συμπάγεια του K υπάρχει $c \in (0,1)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in K$,

$$c2^n \frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (x+K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant 1$$

και έπεται ότι το $c\mu$ είναι μέτρο κάλυψης του K από το $\mathrm{int}(K)$, το οποίο είναι άτοπο καθώς $N_\omega(K, \mathrm{int}(K)) = 2^n$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι η ανισότητα (5.5.2) είναι γνήσια αν και μόνο αν τουλάχιστον ένας από τους εγκλεισμούς της (5.5.1) είναι γνήσιος. Επιπλέον, ο δεξιός εγκλεισμός στην (5.5.1) είναι γνήσιος αν το $x \in K$ δεν είναι ακραίο σημείο του K. Επομένως, τα προαναφερθέντα επιχειρήματα δίνουν ως συμπέρασμα ότι το K έχει τουλάχιστον ένα ακραίο σημείο $x_0 \in K$ για το οποίο ισχύει ότι $(x_0 + K) \cap K = \frac{K}{2} + \frac{1}{2}[K \cap (2x_0 + K)] = \frac{K+x_0}{2}$.

Στόχος μας για το υπόλοιπο της απόδειξης είναι να δείξουμε ότι το K έχει τουλάχιστον 2^n ακραία σημεία $x_1, \dots, x_{2^n} \in K$ τέτοια ώστε $(x_i + K) \cap K = \frac{K+x_i}{2}$ για κάθε $i = 1, \dots, 2^n$ και στη συνέχεια να χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό του Λήμματος 5.5.3 για το K ώστε να συμπεράνουμε ότι το $A = \{x_1, \dots, x_{2^n}\}$ είναι αντιποδικό σύνολο του K. Τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.5.7 για να συμπεράνουμε ότι το K είναι γενικευμένο παραλληλεπίπεδο.

Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακριβώς k ακραία σημεία του K $x_1, \dots, x_k \in K$ τέτοια ώστε

$$(x_i + K) \cap K = \frac{K}{2} + \frac{1}{2}[K \cap (2x_i + K)] = \frac{K+x_i}{2}$$

για κάθε $i = 1, \dots, k$. Τότε από τη συμπάγεια του K έπεται ότι υπάρχει $0 < c < 1$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in K \setminus \{B(x_1, r), \dots, B(x_k, r)\}$ να ισχύει

$$((c\mu) * \mathbb{1}_{\mathrm{int}(K)})(x) = c\mu(x + \mathrm{int}(K)) \geqslant 1.$$

Καθώς $B(0,r) \subset \mathrm{int}(K)$ έχουμε ότι $B(x_i, r) \subset x_i + \mathrm{int}(K)$, άρα το μέτρο $\nu = c\mu + (1-c)\sum_{i=1}^k \delta_{x_i}$ είναι μέτρο κάλυψης του K από το $\mathrm{int}(K)$. Τότε η υπόθεση ότι $N_\omega(K, \mathrm{int}(K)) = 2^n$ οδηγεί στο συμπέρασμα ότι $\nu(\mathbb{R}^n) = c2^n + (1-c)k \geqslant 2^n$, δηλαδή $k \geqslant 2^n$. Λαμβάνοντας υπόψιν τα παραπάνω, υπάρχουν τουλάχιστον 2^n ακραία σημεία $A = \{x_1, \dots, x_{2^n}\}$ στο K τέτοια ώστε $K \cap (x_i + K) = \frac{K+x_i}{2}$ για κάθε $i = 1, \dots, 2^n$. Από το Λήμμα 5.5.3, για κάθε $i = 1, \dots, 2^n$ υπάρχει κλειστός κώνος C_i τέτοιος ώστε $K = (x_i - C_i) \cap (C_i - x_i)$.

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αν $x_j \neq x_i$ τότε το x_j ανήκει στο σύνορο του $C_i - x_i$. Πράγματι, αν το x_j ανήκε στο εσωτερικό του $C_i - x_i$ τότε θα ανήκε στο σύνορο του $x_i - C_i$ καθώς ως ακραίο σημείο ανήκει στο ∂K. Ωστόσο, καθώς $x_j \neq x_i$, υπάρχει ένα ευθύγραμμο τμήμα $(a,b) \subset x_i - C_i$ στην ακτίνα που ξεκινάει από το x_i και διέρχεται από το x_j. Μαζί με την υπόθεση ότι το x_j ανήκει στο εσωτερικό του $C_i - x_i$ συμπεραίνουμε ότι μπορούμε να περιορίσουμε το διάστημα (a, b), δηλαδή να βρούμε $(a', b') \subset (a, b)$, τέτοιο ώστε να περιέχει το x_j και να περιέχεται στο $K = (x_i - C_i) \cap (C_i - x_i)$, άτοπο καθώς το x_j είναι ακραίο σημείο του K.

Μένει να δείξουμε ότι το A είναι αντιποδικό σύνολο του K. Πράγματι, καθώς το x_j ανήκει στο σύνορο του $C_i - x_i$, το ευθύγραμμο τμήμα $[-x_i, x_j]$ περιέχεται στο σύνορο του $C_i - x_i$, άρα υπάρχει υπερεπίπεδο στήριξης H του $C_i - x_i$ που περιέχει τα σημεία $-x_i$ και x_j. Ειδικότερα, το H στηρίζει το K. Δηλαδή, υπάρχει $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in C_i - x_i$,

$$\langle x, v\rangle \leqslant \langle x_j, v\rangle = \langle -x_i, v\rangle,$$

άρα, για κάθε $x \in x_i - C_i$,

$$\langle x, v\rangle \geq \langle -x_j, v\rangle = \langle x_i, v\rangle$$

το οποίο σημαίνει ότι το

$$\begin{aligned} H' &= H + (x_i - x_j) = \{x + x_i - x_j \in \mathbb{R}^n : \langle x, v\rangle = \langle x_j, v\rangle\} \\ &= \{y \in \mathbb{R}^n : \langle y, v\rangle = \langle x_i, v\rangle\} \end{aligned}$$

περιέχει το x_i, στηρίζει το $x_i - C_i$ και στηρίζει το K. Επομένως, συμπεραίνουμε ότι το A είναι αντιποδικό σύνολο του K. Από το Θεώρημα 5.5.7 η μέγιστη πληθικότητα ενός τέτοιου συνόλου σε ένα κυρτό σώμα είναι ίση με 2^n και ισότητα ισχύει μόνο για γενικευμένα παραλληλεπίπεδα, άρα το K είναι γενικευμένο παραλληλεπίπεδο. □

Πόρισμα 5.5.8. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα. Τότε για κάθε $n \geqslant 3$,*

$$\lim_{\lambda \to 1^-} N(K, \lambda K) \leqslant 2^n (n \ln(n) + n \ln\ln(n) + 5n).$$

Απόδειξη. Έστω $0 < \delta < 1$ και $n \geqslant 3$. Από το Θεώρημα 5.3.9, για κάθε $0 < \lambda < 1$

$$\begin{aligned} N(K, \lambda K) &\leqslant \ln\left(4\overline{N}(K, \delta\lambda K)\right)(N_\omega(K, (1-\delta)\lambda K) + 1) \\ &\quad + \sqrt{\ln(4\overline{N}(K, \delta\lambda K))(N_\omega(K, (1-\delta)\lambda K) + 1)} \\ &\leqslant \ln(4\overline{N}(K, \delta\lambda K))(N_\omega(K, (1-\delta)\lambda K) \\ &\quad + \sqrt{\ln(4\overline{N}(K, \delta\lambda K))(N_\omega(K, (1-\delta)\lambda K)} + 2\ln(4\overline{N}(K, \delta\lambda K)). \end{aligned}$$

Από το Θεώρημα 5.3.8 έχουμε ότι

$$N_\omega(K, (1-\delta)\lambda K) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K + (1-\delta)\lambda K)}{\mathrm{vol}_n((1-\delta)\lambda K)} = \left(1 + \frac{1}{(1-\delta)\lambda}\right)^n.$$

Από τα φράγματα όγκων προκύπτει ότι

$$\overline{N}(K, \delta\lambda K) \leqslant M\left(K, \frac{\delta}{2}\lambda K\right) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K + \frac{\delta}{2}\lambda K)}{\mathrm{vol}_n(\frac{\delta}{2}\lambda K)} = \left(1 + \frac{2}{\lambda\delta}\right)^n,$$

άρα

$$\begin{aligned}
N(K,\lambda K) &\leqslant \left(1+\frac{1}{(1-\delta)\lambda}\right)^n \left[n\ln\left(4^{\frac{1}{n}}+\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{n}}}{\lambda\delta}\right)\right] \\
&\quad + \sqrt{\left(1+\frac{1}{(1-\delta)\lambda}\right)^n \left[n\ln\left(4^{\frac{1}{n}}+\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{n}}}{\lambda\delta}\right)\right]} \\
&\quad + 2n\ln\left(4^{\frac{1}{n}}+\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{n}}}{\lambda\delta}\right).
\end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς $\lambda \to 1^-$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 1^-} N(K,\lambda K) &\leqslant \left(1+\frac{1}{(1-\delta)}\right)^n \left[n\ln\left(4^{\frac{1}{n}}+\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{n}}}{\delta}\right)\right] \\
&\quad + \sqrt{\left(1+\frac{1}{(1-\delta)}\right)^n \left[n\ln\left(4^{\frac{1}{n}}+\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{n}}}{\delta}\right)\right]} \\
&\quad + 2n\ln\left(4^{\frac{1}{n}}+\frac{2\cdot 4^{\frac{1}{n}}}{\delta}\right),
\end{aligned}$$

και θέτοντας $\delta = \frac{1}{n\ln(n)}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 1^-} N(K,\lambda K) &\leqslant \left(2+\frac{1}{n\ln n-1}\right)^n [n\ln(4^{\frac{1}{n}}+2\cdot 4^{\frac{1}{n}} n\ln n)] \\
&\quad + \sqrt{\left(2+\frac{1}{n\ln n-1}\right)^n [n\ln(4^{\frac{1}{n}}+2\cdot 4^{\frac{1}{n}} n\ln n)]} \\
&\quad + 2n\ln(4^{\frac{1}{n}}+2\cdot 4^{\frac{1}{n}} n\ln n).
\end{aligned}$$

Όμως, για κάθε $n \geqslant 3$,

$$\left(2+\frac{1}{n\ln n-1}\right)^n \leqslant 2^n e^{\frac{1}{2\ln n}-\frac{2}{n}} \leqslant 2^n\left(1+\frac{1}{\ln n-\frac{1}{n}}\right) \leqslant 2^n\left(1+\frac{2}{\ln n}\right)$$

και

$$n\ln 4^{\frac{1}{n}}+2\cdot 4^{\frac{1}{n}} n\ln n \leqslant n\ln(4n\ln n) = n\ln 4 + n\ln n + n\ln\ln n,$$

άρα

$$\begin{aligned}
&\left(2+\frac{1}{n\ln n-1}\right)^n n\ln(4^{\frac{1}{n}}+2\cdot 4^{\frac{1}{n}} n\ln n) \\
&\qquad \leqslant 2^n\left(1+\frac{2}{\ln n}\right)(n\ln 4+n\ln n+n\ln\ln n) \\
&\qquad \leqslant 2^n(n\ln n+n\ln\ln n+3.1n).
\end{aligned}$$

Επίσης, μπορούμε να δούμε ότι

$$\sqrt{\left(2+\frac{1}{n\ln n-1}\right)^n n\ln(4^{\frac{1}{n}}+2\cdot 4^{\frac{1}{n}} n\ln n)} \leqslant 2^n\frac{n}{2}$$

και

$$2n\ln(4^{\frac{1}{n}} + 2\cdot 4^{\frac{1}{n}} n\ln n) \leqslant 2^n \frac{7}{10} n.$$

Έπεται ότι

$$\lim_{\lambda\to 1^-} N(K,\lambda K) \leqslant 2^n (n\ln n + n\ln\ln n + 5n).$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

6.1 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Η πυκνότητα ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{P}_n$ συμβολίζεται με f_μ.

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$. Λέμε ότι το μ έχει βαρύκεντρο το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta \rangle \, d\mu(x) = \langle x_0, \vartheta \rangle$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Ισοδύναμα, αν

$$x_0 = \int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu(x).$$

Η υποκλάση $C\mathcal{P}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα *κεντραρισμένα* $\mu \in \mathcal{P}_n$. Αυτά είναι τα μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$ που έχουν βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων. Δηλαδή, $\mu \in C\mathcal{P}_n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta \rangle d\mu(x) = 0$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$.

Η υποκλάση $S\mathcal{P}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα άρτια (συμμετρικά) μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$: το μ λέγεται άρτιο αν $\mu(A) = \mu(-A)$ για κάθε σύνολο Borel A στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Όπως στην περίπτωση των μέτρων, το βαρύκεντρο της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{bar}(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx}.$$

Ειδικότερα, η f έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta \rangle f(x) \, dx = 0$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Τότε λέμε και ότι η f είναι *κεντραρισμένη*.

Ορισμός 6.1.1. Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλο* αν για κάθε ζεύγος συμπαγών συνόλων

A, B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}.$$

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλη* αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $0 < \lambda < 1$.

Παρατήρηση 6.1.2. *Η συνέλιξη δύο λογαριθμικά κοίλων συναρτήσεων είναι λογαριθμικά κοίλη. Πράγματι, έστω f και g λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις, τότε αρχικά παρατηρούμε ότι η $h(x, y) := f(x-y)g(y)$ είναι λογαριθμικά κοίλη. Συγκεκριμένα, για $\lambda \in (0, 1)$ ισχύουν τα παρακάτω:*

$$\begin{aligned} h(\lambda(x, y) + (1-\lambda)(z, y)) &= f(\lambda x + (1-\lambda)z - y)g(y) \\ &= f(\lambda(x-y) + (1-\lambda)(z-y))g(y) \\ &\geqslant f(x-y)^{\lambda} f(z-y)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda} \\ &= h(x, y)^{\lambda} h(z, y)^{1-\lambda} \end{aligned}$$

Άρα η h είναι λογαριθμικά κοίλη. Καθώς $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h(x, y)dy$, από το παραπάνω το μόνο που μένει να δείξουμε για να καταλήξουμε στο ζητούμενο είναι ότι για h λογαριθμικά κοίλη ισχύει ότι η $g(x) := \int_{\mathbb{R}^n} h(x, y)dy$ είναι επίσης λογαριθμικά κοίλη. Για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει ότι:

$$h(\lambda x + (1-\lambda)z, y) \geqslant h(x, y)^{\lambda} h(z, y)^{1-\lambda}$$

και από την ανισότητα Prékopa-Leindler (Θεώρημα 2.2.3, έπεται το ζητούμενο.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$ (τότε λέμε ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη *πυκνότητα*). Από την ανισότητα Prékopa-Leindler έπεται ότι το μέτρο μ που έχει πυκνότητα την f είναι λογαριθμικά κοίλο: για να το δούμε αυτό, θεωρούμε δύο συμπαγή σύνολα A, B στον $\mathbb{R}^n$ και τυχόν $\lambda \in (0, 1)$. Τότε, οι συναρτήσεις $w = \mathbb{1}_A f$, $g = \mathbb{1}_B f$ και $h = \mathbb{1}_{(1-\lambda)A+\lambda B} f$ ικανοποιούν την

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant w(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, συνεπώς, το Θεώρημα 2.2.3 δείχνει ότι

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) = \int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} w\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\lambda} = \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}.$$

Το επόμενο θεώρημα του Borell [25] δείχνει ότι, αντίστροφα, κάθε μη εκφυλισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_n$ και έχει λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα.

Θεώρημα 6.1.3. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H. Τότε, το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f, δηλαδή $d\mu(x) = f(x)\, dx$.*

Παράδειγμα 6.1.4. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\mu_K(A) = \mathrm{vol}_n(K \cap A) = \int_A \mathbb{1}_K(x)dx$$

για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Από την κυρτότητα του K έπεται ότι η $\mathbb{1}_K$ είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα το μ_K είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.

Παρατήρηση 6.1.5. Βασικές ιδιότητες της κλάσης των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι οι εξής:

(α) Αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ είναι ένας αφφινικός μετασχηματισμός, τότε το $\mu \circ T^{-1}$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^m$.

(β) Αν κάθε μ_i είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $i = 1, \ldots, k$, τότε το $\mu_1 \otimes \cdots \otimes \mu_k$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{n_k}$.

(γ) Αν τα μ και ν είναι λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε η συνέλιξή τους $\mu * \nu$ (που ορίζεται από την

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\, d(\mu * \nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(x+y)\, d\mu(x)\, d\nu(y)$$

για κάθε μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση h στον $\mathbb{R}^n$) είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό φαίνεται αν παρατηρήσουμε ότι το $\mu * \nu$ είναι η εικόνα του $\mu \times \nu$ μέσω του αφφινικού μετασχηματισμού $T(x, y) = x + y$.

(δ) Αν $\{\mu_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ η οποία συγκλίνει ασθενώς σε ένα μέτρο μ, τότε το μ είναι επίσης λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Το επόμενο λήμμα δείχνει ότι κάθε ολοκληρώσιμη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι τιμές $f(x)$ της f φθίνουν εκθετικά καθώς $\|x\|_2 \to \infty$.

Λήμμα 6.1.6. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ ώστε $f(x) \leqslant Ae^{-B\|x\|_2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, η f έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης.*

Απόδειξη. Εφόσον $\int f > 0$, υπάρχει $t \in (0, 1)$ ώστε το σύνολο $C := \{x : f(x) > t\}$ να έχει θετικό μέτρο Lebesgue. Παρατηρούμε ότι το C είναι κυρτό αφού η f είναι λογαριθμικά κοίλη, και έχει μη κενό εσωτερικό. Πράγματι, αφού το C έχει θετικό μέτρο, η αφφινική του θήκη έχει διάσταση n, άρα το C περιέχει ένα αφφινικά ανεξάρτητο σύνολο $\{x_i\}_{i \leqslant n+1}$. Λόγω κυρτότητας, το C περιέχει το simplex $S = \mathrm{conv}\{x_i\}_{i \leqslant n+1}$. Ειδικότερα, το C έχει μη κενό εσωτερικό. Έστω $x_0 \in C$ και $r > 0$ ώστε $x_0 + rB_2^n \subseteq C$. Θεωρώντας την $f_1(\cdot) = f(\cdot + x_0)$ αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $rB_2^n \subseteq C$.

Ορίζουμε $K = \{x : f(x) > t/e\}$. Τότε, από την ανισότητα του Markov και τη μονοτονία του όγκου έχουμε $0 < \mathrm{vol}_n(K) < \infty$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το K είναι κυρτό, έχει πεπερασμένο όγκο και περιέχει την rB_2^n, συμπεραίνουμε ότι το K είναι φραγμένο. Επομένως, υπάρχει $R > 0$ ώστε $K \subset RB_2^n$. Τότε, για κάθε $\|x\|_2 > R$ έχουμε $R\frac{x}{\|x\|_2} \notin K$, οπότε $f(R/\|x\|_2 x) \leqslant t/e$, ενώ $r\frac{x}{\|x\|_2} \in C$, το οποίο αποδεικνύει ότι $f(r\frac{x}{\|x\|_2}) \geqslant t$. Επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε

$$R\frac{x}{\|x\|_2} = \frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}\frac{rx}{\|x\|_2} + \frac{R-r}{\|x\|_2 - r}x.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη παίρνουμε:

$$\frac{t}{e} \geqslant f\left(R\frac{x}{\|x\|_2}\right) \geqslant f\left(r\frac{x}{\|x\|_2}\right)^{\frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}} f(x)^{\frac{R-r}{\|x\|_2 - r}} \geqslant t^{\frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}} f(x)^{\frac{R-r}{\|x\|_2 - r}}.$$

Έπεται ότι

$$f(x) \leqslant te^{-\frac{\|x\|_2 - r}{R-r}} < e^{-\|x\|_2/R},$$

για κάθε $\|x\|_2 > R$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x \in RB_2^n$ και για κάθε $y \in \frac{x}{2} + \frac{r}{2}B_2^n$ έχουμε (λόγω του ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη)

$$f(y) \geqslant \sqrt{f(x)f(2y-x)} \geqslant \sqrt{t}\,\sqrt{f(x)}.$$

Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $f(x) \leqslant M$ για κάθε $x \in RB_2^n$. Τώρα είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε δύο σταθερές $A, B > 0$, οι οποίες εξαρτώνται από την f, έτσι ώστε $f(x) \leqslant Ae^{-B\|x\|_2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. □

Θα χρειαστούμε επίσης ένα αποτέλεσμα του Fradelizi [51], το οποίο δείχνει ότι η τιμή μιάς λογαριθμικά κοίλης συνάρτησης στο βαρύκεντρό της είναι συγκρίσιμη με τη μέγιστη τιμή της (με τη σταθερά σύγκρισης να εξαρτάται – εκθετικά – μόνο από τη διάσταση). Παρατηρήστε ότι αν η f υποτεθεί άρτια, τότε $f(0) = \|f\|_\infty$.

Θεώρημα 6.1.7. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\mathrm{bar}(f) = 0$. Τότε,*

$$f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy = 1$. Από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\ln f\left(\int_{\mathbb{R}^n} yf(y)dy\right) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ln f(y)dy. \tag{6.1.1}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη, έχουμε

$$-\ln f(x) \geqslant -\ln f(y) + \langle x - y, \nabla(-\ln f)(y)\rangle. \tag{6.1.2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας με $f(y)$, και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας ως προς y, παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\ln f(x) &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ln f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y, -\nabla f(y)\rangle\, dy \\ &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ln f(y)dy - n, \end{aligned} \tag{6.1.3}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει αν ολοκληρώσουμε κατά μέρη (και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι τιμές $f(y)$ της f φθίνουν εκθετικά καθώς $\|y\|_2 \to \infty$). Συνδυάζοντας τις (6.1.1) και (6.1.3) βλέπουμε ότι

$$\ln f(0) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\ln f(y)dx \geqslant \ln f(x) - n,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Παίρνοντας το supremum πάνω από όλα τα x έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 6.1.8. Το παραπάνω θεώρημα ισχύει ακόμη και στη περίπτωση που η f δεν έχει βαρύκεντρο το 0. Πράγματι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η f είναι πυκνότητα και έχει βαρύκεντρο το $\mathrm{bar}(f) = b$. Τότε η $g(x) := f(x + b)$ είναι επίσης πυκνότητα με κέντρο βάρους το 0, συνεπώς ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.1.7. Τότε,

$$g(0) \leqslant \|g\|_\infty \leqslant e^n g(0).$$

Ισοδύναμα, αφού $\|f\|_\infty = \|f\|_\infty$, έχουμε ότι

$$f(b) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(b).$$

6.2 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Ορίζουμε αρχικά την ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος K και την ισοτροπική σταθερά L_K σαν μια αναλλοίωτη της αφφινικής κλάσης του K. Στη συνέχεια δίνουμε έναν πιο γενικό ορισμό στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

Ορισμός 6.2.1. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, είναι κεντραρισμένο (δηλαδή έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων), και υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = \alpha^2 \|y\|_2^2 \tag{6.2.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι αν το K ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη (6.2.1) τότε

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^n \int \langle x, e_i\rangle^2 dx = n\alpha^2,$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το $U(K)$ είναι επίσης ισοτροπικό για κάθε $U \in O(n)$.

Παρατήρηση 6.2.2. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι η *ισοτροπική συνθήκη* (6.2.1) είναι ισοδύναμη με κάθε μία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Για κάθε $i, j = 1, \dots, n$,

$$\int_K x_i x_j dx = \alpha^2 \delta_{ij}, \tag{6.2.2}$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2 (\mathrm{tr} T). \tag{6.2.3}$$

Για να το δούμε, υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό, και θέτοντας $y = e_i$, $y = e_j$ και $y = e_i + e_j$ στην (6.2.1) παίρνουμε την (6.2.2). Παρατηρώντας ότι αν $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ τότε $\langle x, T(x)\rangle = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} x_i x_j$, βλέπουμε αμέσως ότι η (6.2.2) συνεπάγεται την (6.2.3). Τέλος, παρατηρήστε ότι αν εφαρμόσουμε την (6.2.3) για την $T(x) = \langle x, y\rangle y$ παίρνουμε την ισοτροπική συνθήκη (6.2.1).

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα έχει μια γραμμική εικόνα που ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη.

Πρόταση 6.2.3. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό.*

Απόδειξη. Ο τελεστής $M \in L(\mathbb{R}^n)$ που ορίζεται μέσω της $M(y) = \int_K \langle x, y\rangle x dx$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Συνεπώς, έχει μια συμμετρική και θετική τετραγωνική ρίζα S. Θεωρούμε τη γραμμική εικόνα $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ του K. Τότε, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{K}} \langle x, y\rangle^2 dx &= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_K \langle S^{-1}x, y\rangle^2 dx \\ &= |\mathrm{det} S|^{-1} \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle^2 dx \\ &= |\mathrm{det} S|^{-1} \langle \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle x dx, S^{-1}y\rangle \\ &= |\mathrm{det} S|^{-1} \langle MS^{-1}y, S^{-1}y\rangle = |\mathrm{det} S|^{-1} \|y\|_2^2.\end{aligned}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο του $\tilde{K}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Σημείωση 6.2.4. Στη περίπτωση που το κυρτό σώμα K δεν είναι κεντραρισμένο, θεωρώντας αρχικά τη μεταφορά του σε θέση τέτοια ώστε να έχει κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων και χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την Πρόταση 6.2.3, συμπεραίνουμε ότι έχει αφφινική εικόνα που ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη.

Η Πρόταση 6.2.3 δείχνει ότι κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια *θέση* $\tilde{K}$ που είναι ισοτροπική. Λέμε ότι το $\tilde{K}$ είναι μια *ισοτροπική θέση* του K. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μονοσήμαντα ορισμένη (αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς) και ότι προκύπτει σαν λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Θεώρημα 6.2.5. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$B(K) = \inf\left\{ \int_{TK} \|x\|_2^2 dx : T \in SL(n)\right\}. \tag{6.2.4}$$

Τότε, μια θέση K_1 του K είναι ισοτροπική αν και μόνο αν

$$\int_{K_1} \|x\|_2^2 dx = B(K). \tag{6.2.5}$$

Αν K_1 και K_2 είναι δύο ισοτροπικές θέσεις του K τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $K_2 = U(K_1)$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια ισοτροπική θέση K_1 του K. Η Παρατήρηση 6.2.2 δείχνει ότι υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_{K_1} \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2 (\mathrm{tr} T)$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για κάθε $T \in SL(n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{TK_1} \|x\|_2^2 dx &= \int_{K_1} \|Tx\|_2^2 dx = \int_{K_1} \langle x, T^*Tx\rangle dx \\ &= \alpha^2 \mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n\alpha^2 = \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx,\end{aligned} \tag{6.2.6}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στη μορφή

$$\mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n[\det(T^*T)]^{1/n}.$$

Αυτό δείχνει ότι το K_1 ικανοποιεί την (6.2.5). Ειδικότερα, το infimum στην (6.2.4) είναι minimum.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν έχουμε ισότητα στην (6.2.6) τότε $T^*T = I_n$, άρα $T \in O(n)$. Αυτό δείχνει ότι κάθε άλλη θέση $\tilde{K}$ του K που ικανοποιεί την (6.2.5) είναι ορθογώνια εικόνα του K_1, άρα είναι ισοτροπική.

Τέλος, αν K_2 είναι κάποια άλλη ισοτροπική θέση του K τότε το πρώτο μέρος της απόδειξης δείχνει ότι το K_2 ικανοποιεί την (6.2.5). Από το προηγούμενο βήμα πρέπει να έχουμε $K_2 = U(K_1)$ για κάποιον $U \in O(n)$. □

Παρατήρηση 6.2.6. Ένας άλλος τρόπος για να δούμε ότι αν το K είναι λύση του παραπάνω προβλήματος ελαχιστοποίησης τότε το K είναι ισοτροπικό, είναι ο εξής. Θεωρούμε τυχόντα $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Για μικρά $\varepsilon > 0$, ο $I_n + \varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, άρα ο $(I_n + \varepsilon T)/[\det(I_n + \varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους. Συνεπώς,

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \frac{\|x + \varepsilon T x\|_2^2}{[\det(I_n + \varepsilon T)]^{2/n}} dx.$$

Παρατηρούμε ότι $\|x + \varepsilon T x\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\varepsilon\langle x, Tx\rangle + O_{T,K}(\varepsilon^2)$ και $[\det(I_n + \varepsilon T)]^{2/n} = 1 + 2\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O_T(\varepsilon^2)$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \langle x, Tx\rangle dx.$$

Αφού ο T ήταν τυχών, η ίδια ανισότητα ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον T με τον $-T$, άρα

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Έχουμε ήδη δεί ότι αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι το K είναι ισοτροπικό.

Ορισμός 6.2.7. Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει ότι, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n}\min\left\{\frac{1}{\mathrm{vol}_n(TK)^{1+\frac{2}{n}}}\int_{TK}\|x\|_2^2 dx \;\Big|\; T \in GL(n)\right\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από τη γραμμική κλάση του K. Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται *ισοτροπική σταθερά* του K.

Ορισμός 6.2.8. Γενικεύοντας τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος λέμε ότι ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι *ισοτροπικό* αν έχει βαρύκεντρο το 0 και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle^2 \, d\mu(x) = 1$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν το $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει βαρύκεντρο το 0 τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Το μ είναι ισοτροπικό.

(β) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle \, d\mu(x) = \mathrm{tr}(T).$$

(γ) Ισχύουν οι $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu(x) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \dots, n$.

Παρατήρηση 6.2.9. Αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 \, d\mu(x) = n.$$

Επίσης, για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 \, d\mu(x) = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2,$$

όπου $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \left(\sum_{j=1}^n \|T(e_j)\|_2^2\right)^{1/2}$ (για τυχούσα ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$) είναι η Hilbert-Schmidt νόρμα του T.

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι κάθε μη εκφυλισμένο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει μια ισοτροπική εικόνα $\nu = \mu \circ S$, όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, ακολουθώντας την απόδειξη της Πρότασης 6.2.3. Ορίζουμε έναν τελεστή $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$Ty = \int \langle x, y\rangle x \, d\mu(x),$$

παρατηρούμε ότι ο T είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και θέτουμε $\nu = \mu \circ S$ όπου ο S είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος στην $GL(n)$ και ικανοποιεί την $T = S^2$. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int \langle x, y\rangle^2 \, d\nu(x) = \|y\|_2^2.$$

Επιπλέον, αν το μ είναι κεντραρισμένο βλέπουμε ότι και το ν έχει την ίδια ιδιότητα.

Ορισμός 6.2.10. Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Δηλαδή, η f έχει βαρύκεντρο το 0, είναι λογαριθμικά κοίλη και $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$. Τότε, η f λέγεται *ισοτροπική* αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle^2 f(x) \, dx = 1$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Όπως πριν, ελέγχουμε εύκολα ότι η f είναι ισοτροπική αν και μόνο αν ισχύει κάποιο από τα παρακάτω:

(i) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle f(x) \, dx = \mathrm{tr}(T).$$

(ii) Ισχύουν οι
$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\,dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n.$$

Πάλι, αν η f είναι ισοτροπική, τότε $\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 f(x)\,dx = n$, και γενικότερα,
$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 f(x)\,dx = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2$$
για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Εύκολα ελεγχουμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα έχει μια ισοτροπική εικόνα: μπορούμε να βρούμε έναν αφφινικό ισομορφισμό $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και έναν θετικό αριθμό a ώστε η $af \circ S$ να είναι ισοτροπική.

Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο δεν φέρεται από υπερεπίπεδο είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η πυκνότητά του f_μ είναι ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Παρατήρηση 6.2.11. Αξίζει τον κόπο να συγκρίνουμε τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος (Ορισμός 6.2.1) με τον ορισμό του ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας. Παρατηρήστε ότι ένα κυρτό σώμα K με όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η συνάρτηση $L_K^n \mathbb{1}_{\frac{1}{L_K}K}$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Ορισμός 6.2.12 (γενικός ορισμός της ισοτροπικής σταθεράς). Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε τον *πίνακα αδρανείας* – ή *πίνακα συνδιακυμάνσεων* – $\mathrm{Cov}(f)$ της f ως τον πίνακα με συντεταγμένες
$$[\mathrm{Cov}(f)]_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx}\frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx}.$$

Παρατηρήστε ότι αν η f είναι ισοτροπική τότε ο $\mathrm{Cov}(f)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα, η *ισοτροπική σταθερά* της ορίζεται από την:

$$L_f := \left(\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}. \tag{6.2.7}$$

Επίσης, αν μ είναι ένα μη εκφυλισμένο πεπερασμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε ορίζουμε την ισοτροπική του σταθερά θέτοντας $L_\mu := L_{f_\mu}$, δηλαδή

$$L_\mu := \left(\frac{\|\mu\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}, \tag{6.2.8}$$

όπου
$$\|\mu\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)$$
και $\mathrm{Cov}(\mu) := \mathrm{Cov}(f_\mu)$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η ισοτροπική σταθερά L_μ είναι αφφινικά αναλλοίωτη: έχουμε $L_\mu = L_{a\mu\circ A}$ και $L_f = L_{af\circ A}$ για κάθε αντιστρέψιμο αφφινικό μετασχηματισμό

A του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε θετικό αριθμό a. Παρατηρούμε επίσης ότι:

(i) Ο Ορισμός 6.2.12 συμφωνεί με τον προηγούμενο ορισμό (Ορισμός 6.2.7) που είχαμε δώσει για την ισοτροπική σταθερά ενός κυρτού σώματος, με την έννοια ότι $L_{\mathbb{1}_K} = L_K$. Ένας απλός τρόπος για να το δούμε είναι να υποθέσουμε ότι το K είναι στην ισοτροπική θέση και μετά να παρατηρήσουμε ότι $\|\mathbb{1}_K\|_\infty = 1$, $\int \mathbb{1}_K(x)\,dx = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mathbb{1}_K) = L_K^2 I_n$.

(ii) Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\int f_\mu = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$, απ' όπου έπεται ότι $L_\mu = \|\mu\|_\infty^{1/n}$. Επιπλέον, αφού το μ έχει εξ ορισμού βαρύκεντρο το 0, από το Θεώρημα 6.1.7 έχουμε ότι $L_\mu \simeq (f_\mu(0))^{1/n}$. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα αυτή την παρατήρηση.

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε έναν χαρακτηρισμό της ισοτροπικής σταθεράς, τελείως αντίστοιχο με εκείνον του Θεωρήματος 6.2.5: αν $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$nL_f^2 = \inf_{\substack{T\in SL(n)\\ y\in\mathbb{R}^n}} \Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\Big)^{2/n} \int_{\mathbb{R}^n} \|Tx+y\|_2^2 f(x)\,dx.$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι οι ισοτροπικές σταθερές όλων των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι ομοιόμορφα φραγμένες από κάτω, από μια σταθερά $c > 0$ που είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση.

Πρόταση 6.2.13. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Τότε,*

$$L_f = \|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού η f είναι ισοτροπική, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} n = \int \|x\|_2^2 f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{\|x\|_2^2} \mathbb{1}\,dt\right) f(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{x:\|x\|_2^2\geqslant t\}}(x) f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n\setminus\sqrt{t}B_2^n} f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \left(1 - \int_{\sqrt{t}B_2^n} f(x)dx\right) dt \\ &\geqslant \int_0^{(\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}} [1-\omega_n\|f\|_\infty t^{n/2}]\,dt \\ &= (\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}\frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $\omega_n^{-1/n} \approx \sqrt{n}$ καταλήγουμε στην $\|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

6.3 ψ_α–εκτιμήσεις

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Έστω $\Phi : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ μια άρτια κυρτή συνάρτηση τέτοια ώστε $\Phi(0) = 0$ και $\lim_{x\to\infty}\Phi(x) = +\infty$ (μια τέτοια Φ καλείται συνάρτηση Orlicz). Ο χώρος Orlicz $L_\Phi(\mu)$

που αντιστοιχεί στην Φ αποτελείται από όλες τις $\mathcal{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις f για τις οποίες υπάρχει σταθερά $\kappa > 0$ τέτοια ώστε $\int_\Omega \Phi(f/\kappa)d\mu < \infty$. Η νόρμα μιας τέτοιας συνάρτησης f ορίζεται να είναι το infimum όλων των $\kappa > 0$ που ικανοποιούν την $\int_\Omega \Phi(f/\kappa)d\mu \leqslant 1$.

Παρατηρήστε ότι ότι $L_\Phi(\mu) \subseteq L_1(\mu)$: αν μια μετρήσιμη συνάρτηση f έχει πεπερασμένη $\Phi(\mu)$-νόρμα τότε η f είναι ολοκληρώσιμη ως προς μ. Αυτό φαίνεται ως εξής: παρατηρούμε πρώτα ότι, αφού η Φ είναι κυρτή και $\Phi(0) = (0)$, η συνάρτηση $t \mapsto \frac{\Phi(t)}{t}$ είναι αύξουσα. Συνεπώς $\Phi(t) \geqslant \frac{\Phi(t_0)}{t_0} \cdot t$ για κάθε $t > t_0$, όπου t_0 είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός ώστε $\Phi(t_0) > 0$. Τότε, για κάθε $\kappa > \|f\|_{\Phi(\mu)}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\kappa}\mathbb{E}_\mu(|f|) &= \mathbb{E}_\mu\left(\frac{|f|}{\kappa}\cdot \mathbb{1}_{\{|f|\leqslant t_0\kappa\}}\right) + \mathbb{E}_\mu\left(\frac{|f|}{\kappa}\cdot \mathbb{1}_{\{|f|> t_0\kappa\}}\right)\\ &\leqslant t_0 + \frac{t_0}{\Phi(t_0)}\mathbb{E}_\mu(\Phi(|f|/\kappa)) \leqslant t_0\cdot[1+(\Phi(t_0))^{-1}] < +\infty.\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen για την κυρτή συνάρτηση Φ παίρνουμε

$$\Phi(\mathbb{E}_\mu(|f|/\kappa)) \leqslant \mathbb{E}_\mu(\Phi(|f|/\kappa)) \leqslant 1$$

για κάθε $\kappa > \|f\|_{\Phi(\mu)}$. Επομένως,

$$\mathbb{E}_\mu(|f|) \leqslant \Phi_*^{-1}(1)\cdot \|f\|_{\Phi(\mu)}$$

όπου $\Phi_*^{-1}(1) = \inf\{s > 0 : \Phi(t) > 1 \text{ για κάθε } t \geqslant s\}$.

Οι ψ_α-νόρμες είναι ακριβώς εκείνες οι νόρμες Orlicz που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $t \in \mathbb{R} \to e^{|t|^\alpha} - 1$. Το επόμενο λήμμα δίνει μια ισοδύναμη έκφραση για την ψ_α νόρμα μέσω των L_q-νορμών.

Παρατήρηση 6.3.1. Η ψ_α-νόρμα της f είναι στην πραγματικότητα ίση με το minimum του συνόλου $\left\{\kappa \geqslant 0 : \int_\Omega \exp\left(\frac{|f|^\alpha}{\kappa^\alpha}\right)d\mu \leqslant 2\right\}$. Πράγματι, αν $f \in L_{\psi_\alpha(\mu)}$, θεωρώντας μια φθίνουσα ακολουθία στοιχείων κ_λ που συγκλίνει στην $\|f\|_{\psi_\alpha}$ έπεται ότι η $\exp\left(\frac{|f|^\alpha}{\kappa_\lambda^\alpha}\right)$ αυξάνει στην $\exp\left(\frac{|f|^\alpha}{\|f\|_{\psi_\alpha}^\alpha}\right)$. Τώρα το συμπέρασμα έπεται από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης.

Λήμμα 6.3.2. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Έστω $\alpha \geqslant 1$ και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \simeq \sup_{p\geqslant\alpha}\frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/\alpha}},$$

όπου οι σταθερές της ισοδυναμίας είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $p \geqslant \alpha$ να έχουμε

$$\|f\|_p \leqslant Cp^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}.$$

Πράγματι, θέτουμε $A = \|f\|_{\psi_\alpha}$ και χρησιμοποιώντας τη στοιχειώδη ανισότητα $1 + \frac{t^k}{k!} \leqslant e^t$, η οποία ισχύει για κάθε $t > 0$, παίρνουμε

$$1 + \int_\Omega \frac{|f(\omega)|^{k\alpha}}{k!A^{k\alpha}}\,d\mu \leqslant \int_\Omega \exp(|f|/A)^\alpha\,d\mu \leqslant 2,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_\Omega |f|^{k\alpha}\,d\mu \leqslant k!A^{k\alpha}.$$

Έστω $p \geqslant \alpha$. Υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{N}$ ώστε $k\alpha \leqslant p < (k+1)\alpha$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα

Hölder και τον τύπο του Stirling παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|f\|_p &\leqslant \|f\|_{(k+1)\alpha} \leqslant [(k+1)!]^{\frac{1}{(k+1)\alpha}} A \leqslant (2k)^{1/\alpha} A \\ &\leqslant \left(\frac{2p}{\alpha}\right)^{1/\alpha} A \leqslant 2p^{1/\alpha} A.\end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν $\gamma := \sup_{p\geqslant\alpha} \frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}}$, τότε $\int_\Omega |f|^p\, d\mu \leqslant \gamma^p p^{p/\alpha}$ για κάθε $p \geqslant \alpha$. Σταθεροποιούμε $c > 0$ (το οποίο θα επιλέξουμε κατάλληλα) και γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp(|f|/c\gamma)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(c\gamma)^{k\alpha} k!} \int_\Omega |f|^{\alpha k}\, d\mu \leqslant 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(k\alpha)^k}{k! c^{k\alpha}} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{e\alpha}{c^\alpha}\right)^k,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και τη στοιχειώδη ανισότητα $k! \geqslant (k/e)^k$. Επιλέγοντας $c_\alpha := (2e\alpha)^{1/\alpha} \leqslant 2e \cdot e^{1/e} =: c$ βλέπουμε ότι $\|f\|_{\psi_\alpha} \leqslant c_\alpha \gamma \leqslant c\gamma$. □

Ορισμός 6.3.3. Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $\alpha \geqslant 1$ και $\vartheta \in S^{n-1}$. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί *ψ_α εκτίμηση με σταθερά $b_\alpha = b_\alpha(\vartheta)$ στη διεύθυνση του ϑ* αν

$$\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant b_\alpha \|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2.$$

Λέμε ότι το μ είναι ψ_α-μέτρο με σταθερά $B_\alpha > 0$ αν

$$\sup_{\vartheta\in S^{n-1}} \frac{\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_{\psi_\alpha}}{\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2} = B_\alpha.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.3.2 βλέπουμε ότι το μ ικανοποιεί ψ_α εκτίμηση με σταθερά b_α στη διεύθυνση του $\vartheta \in S^{n-1}$ αν

$$\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_q \leqslant c b_\alpha q^{1/\alpha} \|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2$$

για κάθε $q \geqslant \alpha$.

Το επόμενο λήμμα δίνει άλλη μία περιγραφή της ψ_α-νόρμας.

Λήμμα 6.3.4. *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ και έστω $\alpha \geqslant 1$ και $\vartheta \in S^{n-1}$.*

(ι) *Αν το μ ικανοποιεί ψ_α-εκτίμηση με σταθερά b στη διεύθυνση του ϑ τότε για κάθε $t > 0$ έχουμε $\mu(\{x : |\langle x, \vartheta\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2\}) \leqslant 2e^{-t^a/b^\alpha}$.*

(ιι) *Αν $\mu(\{x : |\langle x, \vartheta\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2\}) \leqslant 2e^{-t^a/b^\alpha}$ για κάποιον $b > 0$ και για κάθε $t > 0$ τότε το μ ικανοποιεί ψ_α-εκτίμηση με σταθερά $\leqslant cb$ στη διεύθυνση του ϑ, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Markov. Για τον δεύτερο, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \vartheta\rangle|^p\, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant cbp^{1/\alpha} \|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2,$$

για κάθε $p \geqslant \alpha$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \vartheta\rangle|^p \, d\mu(x) &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(x : |\langle x, \vartheta\rangle| \geqslant t)\, dt \\ &\leqslant \|\langle\cdot, \vartheta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(x : |\langle x, \vartheta\rangle| \geqslant t\|\langle\cdot, \vartheta\rangle\|_2)\, dt \\ &\leqslant 2\|\langle\cdot, \vartheta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1}e^{-t^\alpha/b^\alpha}\, dt,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = (t/b)^\alpha$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \vartheta\rangle|^p \, d\mu(x) &\leqslant 2(b\|\langle, \vartheta\rangle\|_2)^p \int_0^\infty \frac{p}{\alpha} s^{p/\alpha - 1}e^{-s}\, ds \\ &= 2(b\|\langle\cdot, \vartheta\rangle\|_2)^p \Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + 1\right).\end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται από τον τύπο του Stirling. □

Το επόμενο λήμμα είναι το *λήμμα του Borell* στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Λήμμα 6.3.5 (Borell). *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στην κλάση $\mathcal{P}_n$. Για κάθε συμμετρικό κλειστό κυρτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = \alpha \in (0, 1)$ και για κάθε $t > 1$ έχουμε*

(6.3.1)
$$1 - \mu(tA) \leqslant \alpha\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{t+1}{2}}.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρία και την κυρτότητα του A ελέγχουμε ότι

$$\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus (tA)) + \frac{t-1}{t+1}A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A.$$

για κάθε $t > 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το μ είναι λογαριθμικά κοίλο, παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Σημείωση. Το δεξιό μέλος της (6.3.1) γράφεται στη μορφή

(6.3.2)
$$\frac{(1-\alpha)^{\frac{t+1}{2}}}{\alpha^{\frac{t-1}{2}}} < \frac{(1-\alpha)^{\frac{t-1}{2}}}{\alpha^{\frac{t-1}{2}}} = \left(\frac{1}{\alpha} - 1\right)^{\frac{t-1}{2}}.$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Borell θα δούμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι ψ_1-μέτρο (σε κάθε διεύθυνση) με μια απόλυτη σταθερά.

Θεώρημα 6.3.6. *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ λογαριθμικά κοίλο. Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ημινόρμα τότε για κάθε $q > p \geqslant 1$ έχουμε*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Γράφουμε $\|f\|_p^p := \int |f|^p \, d\mu$. Τότε, το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3\|f\|_p\}$$

είναι συμμετρικό, κλειστό και κυρτό. Επίσης, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$tA = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3t\|f\|_p\},$$

και $\mu(A) \geqslant 1 - 3^{-p}$. Συνεπώς, $\frac{1}{\alpha} - 1 \leqslant \frac{3^{-p}}{1-3^{-p}} \leqslant e^{-p/2}$. Από την (6.3.2) βλέπουμε ότι

$$\mu(x : |f(x)| \geqslant 3t\|f\|_p) \leqslant e^{-c_1 p(t-1)}$$

για κάθε $t > 1$, όπου $c_1 = \frac{1}{4}$. Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu &= \int_0^\infty q s^{q-1} \mu(\{x : |f(x)| \geqslant s\}) \, ds \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + (3\|f\|_p)^q \int_1^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p(t-1)} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{c_1 p}(3\|f\|_p)^q \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p t} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{c_1 p}\left(\frac{3\|f\|_p}{c_1 p}\right)^q \Gamma(q+1).\end{aligned}$$

Από τον τύπο του Stirling και από το γεγονός ότι $(a+b)^{1/q} \leqslant a^{1/q} + b^{1/q}$ για κάθε $a, b > 0$ και $q \geqslant 1$, συμπεραίνουμε ότι $\|f\|_{L_q(\mu)} \leqslant c\frac{q}{p}\|f\|_{L_p(\mu)}$. □

Παρατήρηση 6.3.7. Οι συναρτήσεις $x \mapsto |\langle x, \vartheta\rangle|$, $x \in \mathbb{R}^n$, ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.3.6. Συνεπώς,

$$\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_q \leqslant cq\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_1$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_{\psi_1} \leqslant c\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_1$$

για $\vartheta \in S^{n-1}$.

6.4 Εικασίες για τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα διανύσματα

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Ένα *τυχαίο διάνυσμα* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν η κατανομή του

$$\mu(A) := \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\})$$

είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το X είναι ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα αν το μ είναι ισοτροπικό και θα γράφουμε τις ισοτροπικές συνθήκες στη μορφή

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X \otimes X) = I_n.$$

Η πρώτη ισότητα είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι το μ είναι κεντραρισμένο και η δεύτερη είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$.

6.4.1 Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς

Ένα από τα κεντρικά ανοικτά προβλήματα της θεωρίας των κυρτών σωμάτων είναι η εικασία του υπερεπιπέδου, η οποία ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) \geqslant c$ για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων. Το πρόβλημα τέθηκε από τον Bourgain [26] και αποδεικνύεται ότι έχει καταφατική απάντηση αν και μόνο αν ισχύει η ακόλουθη εικασία:

Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_K \leqslant C$ για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$.

Η εικασία μπορεί να αναδιατυπωθεί στό πλαίσιο των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας ή, ισοδύναμα, των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων τυχαίων διανυσμάτων, χωρίς το πρόβλημα να γίνει ουσιαστικά γενικότερο. Από τον γενικό ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς (Ορισμός 6.2.12) βλέπουμε ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και f_μ είναι η πυκνότητα του, τότε

$$L_f := \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)\right)^{\frac{1}{n}} = \|f_\mu\|_\infty^{\frac{1}{n}}.$$

Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$L_n := \max\{\|f\|_\infty^{\frac{1}{n}} : f \text{ ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Γύρω στο 1990, ο Bourgain [27] απέδειξε ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\ln n$ και, το 2006, η εκτίμηση αυτή βελτιώθηκε από τον Klartag [69] ο οποίος έδειξε ότι

$$L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}.$$

Στην ίδια εργασία, ο Klartag έδωσε καταφατική απάντηση στην ισομορφική εκδοχή της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς:

Θεώρημα 6.4.1 (Klartag). *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\varepsilon \in (0,1)$, μπορούμε να βρούμε ένα κυρτό σώμα T στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{bar}(T) = 0$ και ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $(1+\varepsilon)^{-1}T \subseteq K + x \subseteq (1+\varepsilon)T$ και $L_T \leqslant C/\sqrt{\varepsilon}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Το πρόβλημα της ισοτροπικής σταθεράς παραμένει ανοικτό και συνδέεται όπως θα δούμε με πολλά άλλα γνωστά προβλήματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας. Όπως επίσης θα δούμε στην τελευταία υπο-ενότητα αυτής της ενότητας, πρόσφατα αποτελέσματα έχουν βελτιώσει σημαντικά τα φράγματα που είχαν δώσει οι Bourgain και Klartag.

6.4.2 Εικασία Kannan-Lovász-Simonovits

Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το κατά Minkowski περιεχόμενο του A

$$\mu^+(A) := \liminf_{t \to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}.$$

Η σταθερά *Cheeger* χ_μ του μ ορίζεται ως η μεγαλύτερη σταθερά $\chi \geqslant 0$ για την οποία ισχύει ότι

$$\mu^+(A) \geqslant \chi \min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$. Για ευκολία στον συμβολισμό θέτουμε $\psi_\mu = 1/\chi_\mu$ και λέμε ότι η σταθερά ψ_μ είναι η αντίστροφη σταθερά Cheeger του μ.

Η εικασία Kannan-Lovász-Simonovits ισχυρίζεται ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\psi_n := \sup\{\psi_\mu : \mu \text{ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Ιστορικά, το ερώτημα προέκυψε από ένα άρθρο των Dyer, Frieze και Kannan [39], οι οποίοι μελετούσαν αλγορίθμους για τον υπολογισμό του όγκου ενός κυρτού σώματος και απέδειξαν την ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα για κυρτά σώματα: Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν θεωρήσουμε μια διαμέρισή του σε τρία σύνολα S_1, S_2, S_3 ώστε τα S_1, S_2 να είναι «μακριά» το ένα από το άλλο, δηλαδή να ισχύει ότι $d(S_1, S_2) > 0$, τότε

$$\mathrm{vol}_n(S_3) \geqslant \frac{2d(S_1,S_2)}{D}\min\{\mathrm{vol}_n(S_1), \mathrm{vol}_n(S_2)\}$$

όπου D είναι η διάμετρος του K. Από αυτή την ανισότητα προκύπτει ότι για κάθε υποσύνολο S του K ισχύει

$$\mu_K^+(S) \geqslant \frac{2}{D}\min\{\mathrm{vol}_n(S), \mathrm{vol}_n(K\setminus S)\},$$

όπου μ_K είναι το ομοιόμορφο μέτρο στο K. Στο [67] οι Kannan, Lovász και Simonovits αντικατέστησαν στην παραπάνω ανισότητα τη διάμετρο με τη μικρότερη ποσότητα

$$I_1(K) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)}\int_K |x - \mathrm{bar}(K)|\,dx,$$

όπου $\mathrm{bar}(K)$ είναι το κέντρο βάρους K: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε υποσύνολο S του K ισχύει η ανισότητα

$$\mu_K^+(S) \geqslant \frac{\ln 2}{I_1(K)}\min\{\mathrm{vol}_n(S), \mathrm{vol}_n(K\setminus S)\}.$$

Για τη γενική περίπτωση, όπου μ είναι τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, ο Bobkov απέδειξε την αντίστοιχη ανισότητα με διαφορετικό τρόπο: η σταθερά Cheeger του μ ικανοποιεί την

$$\chi_\mu \geqslant \frac{c}{\|f\|_{L_2(\mu)}},$$

όπου $f(x) = \|x - \mathrm{bar}(\mu)\|_2$ και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αν το μ είναι επιπλέον ιστροπικό, τότε $\mathrm{bar}(\mu) = 0$ και $\|f\|_{L_2(\mu)} = \sqrt{n}$. Συνεπώς, $\chi_\mu \geqslant c/\sqrt{n}$. Αυτό εξασφαλίζει το εξής άνω φράγμα για την ψ_n.

Θεώρημα 6.4.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $\psi_n \leqslant C\sqrt{n}$ για κάθε $n \geqslant 1$.*

Ένας ισοδύναμος τρόπος για να διατυπώσουμε την εικασία Kannan-Lovász-Simonovits είναι να ρωτήσουμε αν η ανισότητα Poincaré ισχύει για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ με σταθερά ανεξάρτητη από το μέτρο και από τη διάσταση n: Η σταθερά Poincaré ϑ_μ του μέτρου μ είναι η μικρότερη σταθερά $\vartheta \geqslant 0$ με την ιδιότητα ότι

$$\mathrm{Var}_\mu(f) \leqslant \vartheta^2 \int |\nabla f|^2\,d\mu,$$

για όλες τις λείες συναρτήσεις f στον $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύεται ότι αν το μ είναι λογαριθμικά κοίλο τότε η σταθερά Poincaré και η αντίστροφη σταθερά Cheeger είναι της ίδιας τάξης (γράφουμε $\vartheta_\mu \approx \psi_\mu$), δηλαδή υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε

$$c_1\vartheta_\mu \leqslant \psi_\mu \leqslant c_2\vartheta_\mu$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Η αριστερή ανισότητα αποδείχθηκε από τον Maz'ya (βλ. [83], [84]) και ανεξάρτητα από τον Cheeger (βλ. [33]). Η δεξιά ανισότητα αποδείχθηκε από τον Buser στο [30] (βλ. επίσης Ledoux [74]). Συνεπώς, η εικασία Kannan-Lovász-Simonovits είναι ισοδύναμη με το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε

$$\vartheta_n := \sup\{\vartheta_\mu : \mu \text{ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Από το Θεώρημα 6.4.2 έπεται ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$,

$$\vartheta_n \leqslant C\sqrt{n}.$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, η εικασία Kannan-Lovász-Simonovits συνδέεται στενά με την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς και με το επόμενο πρόβλημα.

6.4.3 Εικασία του λεπτού δακτυλίου

Το κεντρικό οριακό πρόβλημα (σε μια γενική μορφή) ρωτάει ποιές είναι εκείνες οι κατανομές (μεγάλης διάστασης) οι οποίες έχουν κατά προσέγγιση κανονικές περιθώριες κατανομές. Υποθέτουμε ότι $X = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή κανονικοποιημένο έτσι ώστε

$$\mathbb{E}(X_j) = 0 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X_iX_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Αποδεικνύεται ότι αν η κατανομή του X συγκεντρώνεται ισχυρά σε έναν λεπτό δακτύλιο τότε η απάντηση στο κεντρικό οριακό πρόβλημα είναι καταφατική. Ένα τυπικό αποτέλεσμα του είδους είναι το εξής.

Θεώρημα 6.4.3. *Έστω X ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\|X\|_2}{\sqrt{n}} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon \tag{6.4.1}$$

για κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$. Τότε, για κάθε ϑ σε ένα υποσύνολο A της S^{n-1} με $\sigma(A) \geqslant 1 - \exp(-c_1\sqrt{n})$ έχουμε

$$|\mathbb{P}(\langle X, \vartheta\rangle \leqslant t) - \Phi(t)| \leqslant c_2(\varepsilon + n^{-\alpha}) \qquad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R},$$

όπου $\Phi(t)$ είναι η τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής και $c_1, c_2, \alpha > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Αποτελέσματα αυτού του τύπου έχουν εμφανιστεί αρκετές φορές στην βιβλιογραφία (βλέπε, για παράδειγμα, Sudakov [103], Diaconis και Freedman [38], von Weizsäker [107]). Το πρόβλημα έγινε ευρέως γνωστό στο πλαίσιο των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και γενικότερα στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων κατανομών, από μια εργασία των Anttila, Ball και Περυσινάκη [1]. Αποτελέσματα των Παούρη Klartag, Fleury, Guédon και E. Milman [70], [50], [59] δείχνουν ότι αν υποθέσουμε ότι η κατανομή είναι λογαριθμικά κοίλη τότε μπορούμε να αποδείξουμε ισχυρή συγκέντρωση σε λεπτό δακτύλιο και να δώσουμε καταφατική απάντηση στο κεντρικό οριακό πρόβλημα.

Κεντρικό ρόλο στη μελέτη του προβλήματος παίζει η οικογένεια των L_q-κεντροειδών σωμάτων ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$, το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$ του μ ορίζεται μέσω της συνάρτησης στήριξής του

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_q(\mu)} = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν έχει βαρύκεντρο το 0 και $Z_2(\mu) = B_2^n$. Η μελέτη αυτής της οικογένειας σωμάτων, και της συμπεριφοράς τους καθώς το q αυξάνει από το 2 προς το n, δίνει πολλές πληροφορίες για τις ιδιότητες συγκέντρωσης του μέτρου μ.

Η πρώτη σημαντική εφαρμογή της θεωρίας των L_q-κεντροειδών σωμάτων είναι η ανισότητα του Παούρη [90]: για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant ct\sqrt{n}\}) \leqslant \exp\left(-t\sqrt{n}\right)$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η ανισότητα είναι σχεδόν άμεση συνέπεια του εξής αποτελέσματος: υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε, αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$I_q(\mu) \leqslant c_2 I_2(\mu)$$

για κάθε $q \leqslant c_1\sqrt{n}$, όπου η ποσότητα $I_q(\mu)$ ορίζεται, για κάθε $0 \neq q > -n$, ως εξής:

$$I_q(\mu) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Ένα δεύτερο αποτελέσμα του Παούρη [91], το οποίο επεκτείνει το προηγούμενο, ισχυρίζεται ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_3\sqrt{n}$ ισχύει

$$I_{-q}(\mu) \simeq I_q(\mu).$$

Ειδικότερα, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_3\sqrt{n}$ ισχύει $I_q(\mu) \leqslant cI_2(\mu)$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την ανισότητα $I_{-q}(\mu) \leqslant cI_2(\mu)$, με $q \simeq \sqrt{n}$, προκύπτει ότι αν $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ τότε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon^{c_4\sqrt{n}},$$

όπου $\varepsilon_0, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Τα αποτελέσματα του Παούρη δίνουν μια εκτίμηση του μέτρου σε έναν «όχι και τόσο λεπτό» δακτύλιο γύρω από την ακτίνα $\sqrt{n}$: έχουμε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : c\sqrt{n} \leqslant \|x\|_2 < C\sqrt{n}\}) > 1 - o_n(1),$$

όπου $0 < c < 1 < C$ είναι απόλυτες σταθερές.

Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα για την συγκέντρωση ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας σε έναν λεπτό δακτύλιο οφείλεται στους Guédon και E. Milman [59].

Θεώρημα 6.4.4 (Guédon-E. Milman). *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\left|\|X\|_2 - \sqrt{n}\right| \geqslant t\sqrt{n}\right) \leqslant C\exp(-c\sqrt{n}\min(t^3, t)) \tag{6.4.2}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $C, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\|X\|_2)} \leqslant Cn^{1/3}. \tag{6.4.3}$$

Παρατήρηση 6.4.5. Στην περίπτωση που το μ είναι ψ_a, για κάποιον $a \in [1,2]$, με σταθερά b_a, η (6.4.2) βελτιώνεται και έχουμε

$$\mathbb{P}(|\|X\|_2 - \sqrt{n}| \geqslant t\sqrt{n}) \leqslant C\exp(-c' b_a^{-a}\min(t^{2+a}, t)n^{\frac{a}{2}})$$

για κάθε $t > 0$.

Από το Θεώρημα 6.4.4 προκύπτει μια εκτίμηση μεγάλων αποκλίσεων η οποία συμπληρώνει την ανισότητα του Παούρη. Αν X είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp(-c\sqrt{n}\min(t^3, t))$$

για κάθε $t \geqslant 0$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από το Θεώρημα 6.4.4 προκύπτει επίσης μια εκτίμηση για το μέτρο σε μικρές μπάλες. Με τις ίδιες υποθέσεις ισχύει ότι

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp\left(-c_1\sqrt{n}\min\left(t^3, \ln\frac{c_2}{1-t}\right)\right)$$

για κάθε $t \in (0,1)$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Όλα τα παραπάνω θεωρήματα είναι συνέπειες του εξής κύριου τεχνικού αποτελέσματος: Αν X είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε: αν $1 \leqslant |p-2| \leqslant c_1 n^{1/6}$ ισχύει ότι

$$1 - C\frac{|p-2|}{n^{1/3}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2\right)^{1/2}} \leqslant 1 + C\frac{|p-2|}{n^{1/3}},$$

και αν $c_1 n^{1/6} \leqslant |p-2| \leqslant c_2\sqrt{n}$ ισχύει ότι

$$1 - C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2\right)^{1/2}} \leqslant 1 + C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}}.$$

Η βέλτιστη μορφή που μπορούν να πάρουν τα παραπάνω αποτελέσματα παραμένει ανοικτό πρόβλημα. Έστω $n \geqslant 1$. Για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα X στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\sigma_X^2 := \mathbb{E}\,(\|X\|_2 - \sqrt{n})^2$$

και στη συνέχεια θεωρούμε τη σταθερά

$$\sigma_n^2 := \sup_X \mathbb{E}(\|X\|_2 - \sqrt{n})^2,$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα τυχαία διανύσματα X στον $\mathbb{R}^n$. Η εικασία του λεπτού δακτυλίου διατυπώνεται ως εξής.

Εικασία του λεπτού δακτυλίου: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$ ισχύει*

ότι
$$\sigma_n \leqslant C.$$

Το αποτέλεσμα των Guédon και E. Milman (πιο συγκεκριμένα, η (6.4.3) στο Θεώρημα 6.4.4) δείχνει ότι $\sigma_n \leqslant C\sqrt[3]{n}$.

6.4.4 Σύνδεση των προβλημάτων και πρόσφατες εκτιμήσεις

Οι σταθερές L_n, ψ_n και σ_n συνδέονται στενά. Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε
$$\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2) \leqslant \vartheta_\mu^2 \int_{\mathbb{R}^n} 4\|x\|_2^2 d\mu(x) = 4\vartheta_\mu^2 n.$$

Από την άλλη πλευρά,
$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\mu(\|x\|_2^2) &= \mathbb{E}_\mu(\|x\|_2 - n)^2 = \mathbb{E}_\mu[(\|x\|_2 - \sqrt{n})(\|x\|_2 + \sqrt{n})]^2 \\ &\geqslant n\mathbb{E}_\mu(\|x\|_2 - \sqrt{n})^2 = n\sigma_\mu^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς, $\sigma_\mu \leqslant 2\vartheta_\mu$ και έπεται το εξής.

Θεώρημα 6.4.6. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$,*
$$\sigma_n \leqslant 2\vartheta_n \leqslant C\psi_n.$$

Παρατήρηση 6.4.7. Ένα θεώρημα του Eldan [44] συνδέει αντίστροφα τις σταθερές ψ_n και σ_n. Ο Eldan απέδειξε ότι
$$\psi_n^2 \leqslant C_1 \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_k^2}{k}$$
όπου $C_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι
$$\psi_n \leqslant C_2 \ln n \cdot \sigma_n.$$

Οι Eldan και Klartag [45] απέδειξαν ότι η εικασία του λεπτού δακτυλίου είναι ισχυρότερη από την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς.

Θεώρημα 6.4.8 (Eldan-Klartag). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$,*
$$L_n \leqslant C\sigma_n.$$

Για την απόδειξη εισήγαγαν μια νέα παράμετρο, την

$$\sigma_n^* = \frac{1}{\sqrt{n}} \sup_\mu \sup_\vartheta \mathbb{E}_\mu(\langle x, \vartheta\rangle |x|^2), \tag{6.4.4}$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και όλα τα μοναδιαία διανύσματα $\vartheta \in S^{n-1}$. Στη συνέχεια, συνέκριναν τη σταθερά L_n με τη σταθερά σ_n^*.

Θεώρημα 6.4.9 (Eldan-Klartag). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n\geqslant 1$,*

$$L_n \leqslant c_1\sigma_n^*. \tag{6.4.5}$$

Έπεται το Θεώρημα 6.4.8, διότι μπορούμε να δείξουμε ότι $\sigma_n^*\leqslant c\sigma_n$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$. Πράγματι, παρατηρούμε ότι για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\vartheta\in S^{n-1}$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu(\langle x,\vartheta\rangle|x|^2) &= \mathbb{E}_\mu(\langle x,\vartheta\rangle(|x|^2-n))\\ &\leqslant (\mathbb{E}_\mu\langle x,\vartheta\rangle^2)^{1/2}(\mathbb{E}_\mu(|x|^2-\mathbb{E}_\mu|x|^2)^2)^{1/2}\\ &= (\mathrm{Var}_\mu(|x|^2))^{1/2},\end{aligned}$$

και κατόπιν, χρησιμοποιώντας το λήμμα του Borell και την ανισότητα του Παούρη, γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_\mu(|x|^2) &= \mathbb{E}_\mu(|x|^2-n)^2\mathbb{1}_{\{|x|\leqslant c_2\sqrt{n}\}}+\mathbb{E}_\mu(|x|^2-n)^2\mathbb{1}_{\{|x|>c_2\sqrt{n}\}}\\ &\leqslant (c_2+1)^2n\,\mathbb{E}_\mu(|x|-\sqrt{n})^2+(1+c_2^{-4})\mathbb{E}_\mu(|x|^4)\,\mathbb{1}_{\{|x|>c_2\sqrt{n}\}}\\ &\leqslant (c_2+1)^2n\,\sigma_n^2+c_3n^2e^{-\sqrt{n}},\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι

$$\mathbb{E}_\mu(\langle x,\vartheta\rangle|x|^2)\leqslant c_4\sqrt{n}\sigma_n,$$

αν λάβουμε υπόψιν μας το γεγονός ότι $\sigma_n\geqslant\sigma_{\gamma_n}=\sqrt{2}$.

Τα προηγούμενα αποτελέσματα δείχνουν ότι κάθε άνω φράγμα για την εικασία Kannan-Lovász-Simonovits δίνει αμέσως παρόμοια άνω φράγματα για την εικασία του λεπτού δακτυλίου και την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. Μέχρι το 2020, η καλύτερη γνωστή εκτίμηση ήταν

$$\psi_n\leqslant C\sqrt[4]{n},$$

από τους Lee και Vempala [75]. Ο Chen [34], χρησιμοποιώντας τη μέθοδο στοχαστικής τοπικοποίησης του Eldan, απέδειξε ότι

$$\psi_n\leqslant C_1\exp\left(C_2\sqrt{\ln n}\cdot\sqrt{\ln\ln(3n)}\right),$$

όπου $C_1,C_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $\delta>0$ υπάρχει $n_0=n_0(\delta)$ τέτοιος ώστε $\psi_n\leqslant n^\delta$ για κάθε $n\geqslant n_0$. Πολύ πρόσφατα, οι Klartag και Lehec [71] έδωσαν το πρώτο πολυ-λογαριθμικό ως προς n άνω φράγμα για τη σταθερά ψ_n

Θεώρημα 6.4.10 (Klartag-Lehec). *Για κάθε $n\geqslant 2$ ισχύει ότι*

$$\psi_n\leqslant C_1(\ln n)^5,$$

όπου $C_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επίσης, $\sigma_n\leqslant C_2(\ln n)^4$, απ' όπου έπεται ότι

$$L_n\leqslant C_3(\ln n)^4.$$

Ένα ελαφρώς καλύτερο αποτέλεσμα έχει ήδη ανακοινωθεί από τους Jambulapati, Lee και Vempala. Στο [66] δείχνουν ότι

$$\psi_n\leqslant C_1(\ln n)^{3.2226}\quad\text{και}\quad\sigma_n\leqslant C_2(\ln b)^{2.2226},$$

απ᾽ όπου έπεται ότι $L_n \leqslant C_3(\ln n)^{2.2226}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Πρόσφατα αποτελέσματα για την εικασία του Hadwiger

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε δύο πρόσφατα αποτελέσματα για την εικασία του Hadwiger. Οι Huang, Slomka, Tkocz και Βριτσίου, οι οποίοι απέδειξαν στο [64] ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2\sqrt{n}}.$$

Για τον σκοπό αυτό απέδειξαν το κάτω φράγμα

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n} \exp(c\sqrt{n})$$

για το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch $\Delta_{KB}(K)$ ενός κυρτού σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$, το οποίο προκύπτει με χρήση των εκτιμήσεων «λεπτού δακτυλίου» των Guédon και E. Milman.

Πρόσφατα, οι Campos, van Hintum, Morris και Tiba [31] απέδειξαν ότι, για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$, ισχύει η ανισότητα

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n} \exp(cn/L_K^2)$$

και συνεπώς,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/L_K^2},$$

όπου L_K είναι η ισοτροπική σταθερά του K. Λαμβάνοντας υπόψιν την πρόσφατη εκτίμηση $L_K = O((\ln n)^4)$ των Klartag και Lehec, συμπεραίνουμε ότι

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/(\ln n)^8}$$

για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$.

7.1 Φράγμα μέσω των εκτιμήσεων λεπτού δακτυλίου

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε τη δουλειά των Huang, Slomka, Tkocz και Βριτσίου. Στην πορεία συζητάμε προηγούμενα αποτελέσματα σχετικά με το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch $\Delta_{KB}(K)$ ενός κυρτού σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$.

7.1.1 Μέτρα συμμετρίας κυρτών σωμάτων

Ορισμός 7.1.1. Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα και $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε το σύνολο $(K - x) \cap (x - K)$ καλείται *συμμετρική τομή* του K στο x. Χρησιμοποιώντας τη συμμετρική τομή, ορίζουμε το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch:

$$\Delta_{KB}(K) = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{vol}_n((K - x) \cap (x - K))}{\mathrm{vol}_n(K)} = \max_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (x - K))}{\mathrm{vol}_n(K)}.$$

Παρατηρήσεις 7.1.2. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της συνέλιξης συναρτήσεων και μέσω πράξεων μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι ισχύουν οι παρακάτω ισότητες:

$$\mathrm{vol}_n((K - x) \cap (x - K)) = \mathrm{vol}_n(K \cap (2x - K)) = (\mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K)(2x).$$

Επίσης, παρατηρώντας ότι $\mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K = 0 \iff K \cap (x - K) = \varnothing \iff x \notin 2K$ συμπεραίνουμε ότι ο φορέας της $\mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K$ είναι το σύνολο $2K$.

Πόρισμα 7.1.3. *Για το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch έχουμε το κάτω φράγμα*

$$\min_{K \in \mathcal{K}_n} \Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n},$$

όπου με $\mathcal{K}_n$ συμβολίζεται το σύνολο των κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Έστω $K \in \mathcal{K}_n$, θα δείξουμε ότι $\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n}$. Από την Παρατήρηση 7.1.2 γνωρίζουμε ότι ο φορέας της $\mathrm{vol}_n(K \cap (x - K))$ είναι το σύνολο $2K$, οπότε έχουμε τους εξής υπολογισμούς:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (x - K))}{\mathrm{vol}_n(K)} dx &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_{2K} \mathrm{vol}_n(K \cap (x - K)) dx \\ &\leqslant \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_{2K} \mathrm{vol}_n(K) \Delta_{KB}(K) dx \\ &= \Delta_{KB}(K) \mathrm{vol}_n(2K) = 2^n \mathrm{vol}_n(K) \Delta_{KB}(K)\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε στη συνέχεια το αρχικό ολοκλήρωμα μέσω του θεωρήματος Fubini,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (x - K))}{\mathrm{vol}_n(K)} dx &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(y) \mathbb{1}_K(x - y) dx dy \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(y) \mathrm{vol}_n(y + K) dy \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(y) \mathrm{vol}_n(K) dy = \mathrm{vol}_n(K)\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω σχέσεις έχουμε $\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n}$, όπως θέλαμε. □

Μάλιστα, όπως δείχνει το επόμενο θεώρημα των V. Milman και Pajor, για τη συγκεκριμένη επιλογή $x = \mathrm{bar}(K)$, όπου $\mathrm{bar}(K)$ είναι το κέντρο βάρους του K, ισχύει το κάτω φράγμα

$$\frac{\mathrm{vol}_n((K - \mathrm{bar}(K)) \cap (\mathrm{bar}(K) - K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant 2^{-n}.$$

Θεώρημα 7.1.4. *Έστω K και L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με το ίδιο κέντρο βάρους. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(L) \leqslant \mathrm{vol}_n(K-L)\,\mathrm{vol}_n(K\cap L).$$

Ειδικότερα, αν το K έχει κέντρο βάρους το 0, τότε

$$\mathrm{vol}_n(K\cap(-K)) \geqslant 2^{-n}\mathrm{vol}_n(K).$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.4 βασίζεται στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 7.1.5. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $\psi:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μια μη αρνητική, λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,d\mu(x) \leqslant \psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} x\frac{\psi(x)}{\int\psi\,d\mu}\,d\mu(x)\right).$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen για την κυρτή συνάρτηση $t\mapsto t\ln t$, $t>0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\ln\psi(x)\,d\mu(x) \geqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,d\mu(x)\Big)\ln\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,d\mu(x)\Big).$$

Ισοδύναμα,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\ln\psi(x)\,\frac{\psi(x)}{\int\psi\,d\mu}\,d\mu(x) \geqslant \ln\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,d\mu(x)\Big).$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι η $\ln\psi$ είναι κοίλη στο $\{\psi>0\}$ άρα, χρησιμοποιώντας πάλι την ανισότητα Jensen (αυτή τη φορά για ένα διαφορετικό μέτρο πιθανότητας) παίρνουμε

$$\ln\left[\psi\left(\int_{\mathbb{R}^n} x\,\frac{\psi(x)}{\int\psi\,d\mu}\,d\mu(x)\right)\right] \geqslant \int_{\mathbb{R}^n}\ln\psi(x)\,\frac{\psi(x)}{\int\psi\,d\mu}\,d\mu(x) \geqslant \ln\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\psi(x)\,d\mu(x)\Big),$$

που είναι ο ισχυρισμός του λήμματος. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.4. Για κάθε ολοκληρώσιμη (με διανυσματικές, ενδεχομένως, τιμές) συνάρτηση f ορισμένη στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$I(f) := \int_{K\times L} f\Big(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\Big)\,dx\,dy.$$

Επίσης, για κάθε $w\in\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$C_w := (\sqrt{2}K - w)\cap(\sqrt{2}L + w).$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $u=\frac{x+y}{\sqrt{2}}$ και $w=\frac{x-y}{\sqrt{2}}$ βλέπουμε ότι $dxdy = dudw$ και

$$I(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(w)\,\mathrm{vol}_n(C_w)\,dw. \tag{7.1.1}$$

Σημειώνουμε ότι η συνάρτηση $\psi(w) := \mathrm{vol}_n(C_w)$ είναι λογαριθμικά κοίλη και έχει φορέα το σύνολο

$M := \frac{K-L}{\sqrt{2}}$. Συμβολίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο στο M με μ. Τότε

$$\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(L) = \int_M \mathrm{vol}_n(C_w)\,dw = \mathrm{vol}_n(M)\int_M \psi(y)d\mu$$

(αυτό αντιστοιχεί στο να επιλέξουμε $f = \mathbb{1}_M$ στην παραπάνω ισότητα). Επιλέγοντας $f(w) = w\mathbb{1}_M(w)$ στην (7.1.1) και διαιρώντας με $\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(L)$) παίρνουμε

$$0 = \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{vol}_n(K)}\int_K x\,dx - \frac{1}{\sqrt{2}\mathrm{vol}_n(L)}\int_L y\,dy = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(L)}\int_M w\mathrm{vol}_n(C_w)\,dw.$$

Συνεπώς,

$$0 = \frac{\mathrm{vol}_n(M)}{\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(L)}\int w\psi(w)\,d\mu(w) = \int_{\mathbb{R}^n} w\frac{\psi(w)}{\int \psi\,d\mu}\,d\mu(w),$$

και εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.1.5 για τη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ψ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(L)}{\mathrm{vol}_n(M)} \leqslant \psi(0) = 2^{n/2}\mathrm{vol}_n(K\cap L). \tag{7.1.2}$$

Αν υποθέσουμε ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0 τότε επιλέγοντας $L = -K$ έχουμε $K - L = 2K$ και παίρνουμε τον δεύτερο ισχυρισμό του θεωρήματος. □

Σημείωση 7.1.6. *Το αποτέλεσμα των V. Milman και Pajor προκύπτει αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 7.1.4 για το κυρτό σώμα* $K - \mathrm{bar}(K)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα τυχαίο διάνυσμα X στον $\mathbb{R}^n$ καλείται ισοτροπικό αν $\mathbb{E}X = 0$ και $\mathbb{E}(X\otimes X) = I_n$, όπου με I_n συμβολίζεται ο ταυτοτικός πίνακας στον $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n$. Στο Κεφάλαιο 6 είδαμε την εκτίμηση λεπτού δακτυλίου των Guédon και E. Milman: αν X είναι ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, το οποίο είναι ψ_a με σταθερά b_a για κάποιο $a\in[1,2]$, τότε

$$\mathbb{P}(|\,\|X\|_2 - \sqrt{n}\,| \geqslant t\sqrt{n}) \leqslant C\exp(-c' b_a^{-a}\min(t^{2+a},t)n^{\frac{a}{2}})$$

για κάθε $t>0$. Μπορούμε επίσης να μεγαλώσουμε λίγο τη σταθερά c' ώστε να απορροφηθεί η σταθερά C. Έτσι, αντικαθιστώντας την c' με c έχουμε μια ανισότητα της ίδιας μορφής με μόνη διαφορά ότι δεν εμφανίζεται η C. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα για να αποδείξουμε το ακόλουθο κάτω φράγμα για το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch.

Πρόταση 7.1.7. *Έστω $K\subset\mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων, το οποίο είναι ψ_a με σταθερά b_a. Τότε, για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$ ισχύει ότι*

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant \frac{\exp(cb_a^{-a}n^{\frac{a}{2}})}{2^n}$$

Απόδειξη. Έστω X, Y ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Καθώς το μέτρο Δ_{KB} είναι αναλλοίωτο κάτω από αφφινικούς μετασχηματισμούς, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι το K βρίσκεται σε ισοτροπική θέση, δηλαδή $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, $\mathrm{bar}(K) = 0$ όπως έχουμε ήδη υποθέσει και $\mathbb{E}(X\otimes X) = L_K^2 I_n$, όπου L_K η ισοτροπική σταθερά του K. Ισοδύναμα, $\mathrm{vol}_n(K) = 1$ και το $\frac{X}{L_K}$ είναι ισοτροπικό.

Στη συνέχεια, θέλουμε να φράξουμε την $\|f\|_\infty$, όπου $f = \mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K$. Παρατηρούμε ότι καθώς τα διανύσματα X και Y είναι ανεξάρτητα, το άθροισμά τους θα έχει πυκνότητα τη συνέλιξη των πυκνοτήτων τους, άρα την f. Ωστόσο, αντί να δουλέψουμε με το τυχαίο διάνυσμα $X+Y$, θα δουλέψουμε με το $\frac{X+Y}{2}$. Ένας πρώτος λόγος μπορεί να εντοπιστεί στην παρατήρηση ότι η πυκνότητα του $\frac{X+Y}{2}$ είναι η $g(x) = f(2x)2^n$, απ' όπου συμπεραίνουμε ότι τα X και $\frac{X+Y}{2}$ έχουν τον ίδιο φορέα. Επιπλέον, από την ανισότητα Prékopa-Leindler (Θεώρημα 2.2.3) έπεται άμεσα ότι η πυκνότητα της $\frac{X+Y}{2}$ είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα από το Θεώρημα 6.3.6 η $\frac{X+Y}{2}$ είναι ψ_1. Επιπλέον,

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_{X,Y}\left(\left(\frac{X+Y}{2}\right)\otimes\left(\frac{X+Y}{2}\right)\right) = \\
&= \frac{1}{4}\mathbb{E}_{X,Y}(X\otimes X + X\otimes Y + Y\otimes X + Y\otimes Y) = \\
&= \frac{1}{4}(L_K^2 I_n + 0 + 0 + L_K^2 I_n) = \\
&= \frac{1}{2}L_K^2 I_n
\end{aligned}$$

Επομένως, το τυχαίο διάνυσμα $\frac{X+Y}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{L_K}$ είναι ισοτροπικό.

Στη συνέχεια, θα δείξουμε ότι η ψ_a συμπεριφορά του $\frac{X+Y}{2}$ είναι ίδια με εκείνη του διανύσματος X. Σημειώνουμε εδώ ότι για την απόδειξη του άνω φράγματος για την εικασία του Hadwiger, αρκεί η παρατήρηση πως το $\frac{X+Y}{2}$ είναι ψ_1, όπως και το X (ως τυχαίο διάνυσμα με λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα). Ωστόσο, αν υποθέσουμε την ψ_a συμπεριφορά μπορούμε να πετύχουμε καλύτερο φράγμα για το μέτρο συμμετρίας Δ_{KB} ως προς τη διάσταση n.

Για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$ οι παραπάνω υπολογισμοί δείχνουν ότι

$$\left(\mathbb{E}\left|\left\langle\frac{X+Y}{2},y\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}L_K\|y\|_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbb{E}|\langle X,y\rangle|^2)^{\frac{1}{2}}$$

και από την ανισότητα Minkowski έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(\mathbb{E}\left|\left\langle\frac{X+Y}{2},y\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} &\leqslant 2\left(\mathbb{E}\left|\left\langle\frac{X}{2},y\right\rangle\right|^p\right)^{\frac{1}{p}} = (\mathbb{E}|\langle X,y\rangle|^p)^{\frac{1}{p}} \leqslant b_a p^{\frac{1}{a}}(\mathbb{E}|\langle X,y\rangle|^2)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sqrt{2}b_a p^{\frac{1}{a}}\left(\mathbb{E}\left|\left\langle\frac{X+Y}{2},y\right\rangle\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανεξαρτησία και την ισονομία των X και Y και την επιπλέον υπόθεση ότι το X είναι ψ_a με σταθερά b_a.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $r>0$ έχουμε

$$\|g\|_\infty \geqslant \frac{\int_{rL_K\sqrt{n}B_2^n\cap K} g(x)dx}{\int_{rL_K\sqrt{n}B_2^n\cap K} 1dx} = \frac{\mathbb{P}\left(\|\frac{X+Y}{2}\|_2 \leqslant rL_K\sqrt{n}\right)}{\mathbb{P}(\|X\|_2\leqslant rL_K\sqrt{n})}$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 6.4.4 για να κάνουμε μια εκτίμηση των πιθανοτήτων στο δεξιό μέλος της ανισότητας. Συγκεκριμένα, η ανισότητα του θεωρήματος παίρνει την ακόλουθη μορφή: Για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα Z ισχύουν οι ανισότητες

$$\mathbb{P}(\|Z\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}) \leqslant \exp(-c' b_a^{-a}\min(t^{2+a},t)\sqrt[a]{n}) \quad \forall\, t\in[0,1]$$

και

$$\mathbb{P}(\|Z\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}) \leqslant \exp(-c' b_a^{-a} \min(t^{2+a}, t)\sqrt[a]{n}) \quad \forall t \geqslant 0$$

Εφαρμόζουμε την πρώτη για $Z = \frac{X}{L_K}$ και τη δεύτερη για $Z = \frac{X+Y}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{L_K}$ και $t = \frac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}$, οπότε έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \leqslant \frac{2}{\sqrt{2}+1} L_K \sqrt{n}\right) \leqslant \exp(-c' b_a^{-a} n^{\frac{a}{2}})$$

και

$$\mathbb{P}\left(\|\frac{X+Y}{2}\|_2 \leqslant \frac{2}{\sqrt{2}+1} L_K \sqrt{n}\right) \geqslant 1 - \exp(-c' b_a^{-a} n^{\frac{a}{2}})$$

Επομένως, για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$

$$\|g\|_\infty \geqslant \exp(c b_a^{-a} n^{\frac{a}{2}}).$$

Ισοδύναμα,

$$\Delta_{KB}(K) = \frac{\|g\|_\infty}{2^n} \geqslant \frac{\exp(c b_a^{-a} n^{\frac{a}{2}})}{2^n}$$

□

Περιγράφουμε τώρα ένα διαφορετικό επιχείρημα, το οποίο βελτιώνει την εκτίμηση των V. Milman και Pajor, δίνοντας έτσι μια διαφορετική απόδειξη της Πρότασης 7.1.7. Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f, τότε η εντροπία του X ορίζεται από την

$$\mathrm{Ent}(X) = -\int_{\mathbb{R}^n} f \ln f.$$

Από την ανισότητα Jensen παίρνουμε το εξής χρήσιμο λήμμα.

Λήμμα 7.1.8. *Έστω $h : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση, η οποία είναι θετική στον φορέα της f. Τότε,*

$$\mathrm{Ent}(X) \leqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f \ln h + \ln\left(\int_{\mathbb{R}^n} h\right), \tag{7.1.3}$$

αν υποθέσουμε ότι όλες αυτές οι ποσότητες είναι πεπερασμένες. Επιπλέον, αν το X έχει λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$\mathrm{Ent}(X) = \mathbb{E}\,[-\ln f(X)] \geqslant -\ln f(\mathbb{E}(X)). \tag{7.1.4}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη της (7.1.3), χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen γράφουμε

$$\mathrm{Ent}(X) + \int_{\mathbb{R}^n} f \ln h = \int_{\mathbb{R}^n} f \ln \frac{h}{f} \leqslant \ln\left(\int_{\mathbb{R}^n} h\right).$$

Για την (7.1.4) παρατηρούμε ότι αν υποθέσουμε την f λογαριθμικά κοίλη τότε η $-\ln f$ είναι κυρτή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε πάλι την ανισότητα Jensen. □

Θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 7.1.8 ως εξής. Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0, και έστω X, Y ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Τότε η πυκνότητα f

του X είναι η $f(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)}\mathbb{1}_K$ και η πυκνότητα g του $X+Y$ είναι η

$$g(x) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^2}(\mathbb{1}_K * \mathbb{1}_K)(x) = \frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (x-K))}{\mathrm{vol}_n(K)^2}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ταυτότητα μπορούμε πάλι να δούμε ότι η πυκνότητα του $X+Y$ είναι λογαριθμικά κοίλη και έχει κέντρο βάρους το 0. Βλέπουμε τώρα ότι $\mathrm{Ent}(X) = \ln \mathrm{vol}_n(K)$, ενώ από την (7.1.4) έχουμε

$$-\ln\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (-K))}{\mathrm{vol}_n(K)^2}\right) = -\ln g(0) \leqslant \mathrm{Ent}(X+Y).$$

Συνεπώς,

$$-\ln\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (-K))}{\mathrm{vol}_n(K)}\right) = -\ln\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (-K))}{\mathrm{vol}_n(K)^2}\right) - \ln \mathrm{vol}_n(K) \leqslant \mathrm{Ent}(X+Y) - \mathrm{Ent}(X). \tag{7.1.5}$$

Συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με την (7.1.3) εφαρμοσμένη για το $X+Y$, παίρνουμε

$$-\ln\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (-K))}{\mathrm{vol}_n(K)}\right) \leqslant \mathbb{E}\,[-\ln h(X+Y)] + \ln\left(\int_{\mathbb{R}^n} h\right) - \mathrm{Ent}(X) \tag{7.1.6}$$

για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ που είναι θετική στο $2K$ (σημειώνουμε ότι ο πρώτος όρος στο δεξιό μέλος εξαρτάται μόνο από τις τιμές της h στο $2K$, ενώ ο δεύτερος μπορεί μόνο να μικρύνει ή να μείνει ο ίδιος αν περιορίσουμε την h στο $2K$, δηλαδή, αντικαθιστώντας την h με την $h\mathbb{1}_{2K}$ βελτιώνουμε το δεξιό μέλος).

Αν επιλέξουμε για h την δείκτρια συνάρτηση του $2K$, παίρνουμε την

$$\frac{\mathrm{vol}_n((K - \mathrm{bar}(K)) \cap (\mathrm{bar}(K) - K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant 2^{-n}.$$

Θα επιλέξουμε την h διαφορετικά ώστε να πετύχουμε να βελτιώσουμε αυτό το κάτω φράγμα.

Πρόταση 7.1.9. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0, το οποίο είναι ψ_α με σταθερά b_α. Τότε,*

$$\frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (-K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant 2^{-n} \exp(cb_\alpha^{-\alpha} n^{\alpha/2})$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι και τα δύο μέλη της (7.1.5) είναι αναλλοίωτα κάτω από αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς του K, μπορούμε λοιπόν χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Θα εφαρμόσουμε την (7.1.6) με

$$h(x) := \exp(-\lambda\|x\|_2^2)\mathbb{1}_{2K}(x)$$

για κάποια σταθερά $\lambda > 0$ την οποία θα επιλέξουμε αργότερα. Το δεξιό μέλος γίνεται

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\,[\lambda\|X+Y\|_2^2] + \ln\left(\int_{2K} \exp(-\lambda\|x\|_2^2)\,dx\right) - \ln 1 &= 2\mathbb{E}\,[\lambda\|X\|_2^2] + \ln\left(\int_{2K} \exp(-\lambda\|x\|_2^2)\,dx\right) \\ &= 2\lambda n L_K^2 + n\ln 2 + \ln\left(\int_K \exp(-4\lambda\|x\|_2^2)\,dx\right).\end{aligned} \tag{7.1.7}$$

Για να φράξουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε και πάλι τις εκτιμήσεις λεπτού δακτυλίου των Guédon και E. Milman. Για τα σύνολα

$$A_t := \{x \in K : \|x\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}L_K\}$$

έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(A_t) \leqslant c_1 \exp(-c_2 b_\alpha^{-\alpha} t^{2+\alpha} n^{\alpha/2})$$

για κάθε $t \in (0,1)$. Μπορούμε λοιπόν να σπάσουμε το ολοκλήρωμα σε δύο μέρη ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_K \exp(-4\lambda\|x\|_2^2)\,dx &= \int_{A_t} \exp(-4\lambda\|x\|_2^2)\,dx + \int_{K\setminus A_t} \exp(-4\lambda\|x\|_2^2)\,dx \\ &\leqslant c_1 \exp(-c_2 b_\alpha^{-\alpha} t^{2+\alpha} n^{\alpha/2}) + \exp(-4\lambda(1-t)^2 n L_K^2).\end{aligned}$$

Τώρα, επιλέγουμε $t = 1 - \frac{2}{\sqrt{5}}$ και στη συνέχεια τη σταθερά λ έτσι ώστε

$$c_2 b_\alpha^{-\alpha} t^{2+\alpha} n^{\alpha/2} = 4\lambda(1-t)^2 n L_K^2.$$

Η εξίσωση αυτή μας δίνει ότι

$$\lambda \approx b_\alpha^{-\alpha} n^{\alpha/2-1} L_K^{-2}.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις εκτιμήσεις με τις (7.1.6) και (7.1.7) παίρνουμε

$$\begin{aligned}-\ln\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K\cap(-K))}{\mathrm{vol}_n(K)}\right) &\leqslant 2\lambda n L_K^2 + n\ln 2 + \ln(c_1+1) - \frac{16}{5}\lambda n L_K^2 \\ &= n\ln 2 + \ln(c_1+1) - \frac{6}{5}\lambda n L_K^2 \\ &= n\ln 2 + \ln(c_1+1) - c_3 b_\alpha^{-\alpha} n^{\alpha/2}\end{aligned}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$, η οποία υπολογίζεται ακριβώς από τις παραπάνω σχέσεις. Συνθέτοντας με την εκθετική συνάρτηση έχουμε το ζητούμενο. □

7.1.2 Νέο φράγμα για την εικασία του Hadwiger

Εφαρμόζοντας το νέο φράγμα για το μέτρο συμμετρίας $\Delta_{KB}(K)$ αποδεικνύουμε εδώ βελτιωμένη εκτίμηση για την εικασία του Hadwiger. Θα χρειαστούμε επίσης κάποιες ανισότητες για τους αριθμούς κάλυψης.

Λήμμα 7.1.10. *Έστω $K, T \subset \mathbb{R}^n$ κυρτά σώματα. Υποθέτουμε ότι το T περιέχει την αρχή των αξόνων στο εσωτερικό του. Τότε*

$$\overline{N}(K,T) \leqslant 2^n \frac{\mathrm{vol}_n\left(K + \frac{1}{2}(T\cap(-T))\right)}{\mathrm{vol}_n(T\cap(-T))}$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.3.6 γνωρίζουμε ότι

$$M(K,T) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K+T)}{\mathrm{vol}_n(T)}$$

Στη συνέχεια, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\overline{N}(K, T-T) \leqslant M(K,T)$. Πράγματι, θεωρώντας $\{x_1,\dots,x_M\} \in K$ ένα μεγιστικό σύνολο στο A, όπου $M = M(K,T)$, παρατηρούμε ότι για κάθε $x \in K$ ισχύει ότι $(x+T) \cap \bigcup_{i=1}^M \{x_i + T\} \neq \varnothing$. Άρα, $K \subset \bigcup_{i=1}^M \{x_i + T - T\}$, οπότε άμεσα έχουμε ότι $\overline{N}(K, T-T) \leqslant M(K,T)$.

Και καθώς $T\cap(-T)\subset T$, ισχύει ότι $\overline{N}(K,T)\leqslant \overline{N}(K,T\cap(-T))$ και $\overline{N}(K,T)\leqslant \overline{N}\left(K,\frac{1}{2}(T\cap(-T))\right)$, συνεπώς

$$\overline{N}(K,T)\leqslant 2^n\frac{\mathrm{vol}_n\left(K+\frac{1}{2}(T\cap(-T))\right)}{\mathrm{vol}_n(T\cap(-T))}$$

□

Θεώρημα 7.1.11. *Έστω K,T_1 και T_2 φραγμένα Borel σύνολα. Τότε*

$$N(K,T_1+T_2)\leqslant N_\omega(K,T_1)(1+\ln\overline{N}(K,T_2))$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.11 απαιτεί κάποια προεργασία. Δίνουμε πρώτα τους ορισμούς κάποιων εννοιών από τη Συνδυαστική.

Ορισμός 7.1.12. Έστω Y ένα σύνολο, $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y και $X\subseteq Y$. Μια κάλυψη του X από την $\mathcal{F}$ είναι ένα υποσύνολο της $\mathcal{F}$ που η ένωσή του καλύπτει το X. Ο αριθμός κάλυψης $\tau(X,\mathcal{F})$ του X από την $\mathcal{F}$ είναι ο ελάχιστος πληθάριθμος μιας κάλυψης του X από την $\mathcal{F}$.

Μια κλασματική κάλυψη του X από την $\mathcal{F}$ είναι ένα μέτρο μ στην $\mathcal{F}$ τέτοιο ώστε

$$\mu(\{F\in\mathcal{F}:x\in F\})\geqslant 1\quad \text{για κάθε}\ \ x\in X.$$

Ο κλασματικός αριθμός κάλυψης του X από την $\mathcal{F}$ ορίζεται ως εξής:

$$\tau_\omega(X,\mathcal{F})=\inf\{\mu(F):\mu\ \ \text{κλασματική κάλυψη του}\ X\ \text{από την}\ \mathcal{F}\}.$$

Περισσότερες πληροφορίες για τις κλασματικές καλύψεις υπάρχουν στο [52], στο αφηρημένο συνδυαστικό πλαίσιο, και στο [82], στο γεωμετρικό πλαίσιο.

Το επόμενο θεώρημα, που αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Lovász [79] και Stein [102], συγκρίνει τις παραμέτρους τ και τ_ω στην περίπτωση των πεπερασμένων οικογενειών συνόλων. Παρουσιάζουμε τις αποδείξεις στο Παράρτημα A.

Θεώρημα 7.1.13 (Lovász-Stein). *Για κάθε πεπερασμένο σύνολο Λ και $\mathcal{H}\subseteq 2^\Lambda$ έχουμε*

$$\tau(\Lambda,\mathcal{H})<(1+\ln(\max_{H\in\mathcal{H}}\mathrm{card}(H)))\,\tau_\omega(\Lambda,\mathcal{H}). \tag{7.1.8}$$

Επιπλέον, ο άπληστος αλγόριθμος, που επιλέγει κάθε φορά εκείνο το σύνολο που καλύπτει τα περισσότερα από τα σημεία που δεν έχουν ήδη καλυφθεί, δίνει μια κάλυψη με πληθάριθμο μικρότερο από το δεξιό μέλος της (7.1.8).

Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 7.1.13 είναι το ακόλουθο.

Πόρισμα 7.1.14. *Έστω Y ένα σύνολο, $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του Y, και $X\subseteq Y$. Έστω Λ ένα πεπερασμένο υποσύνολο του Y και $\Lambda\subseteq U\subseteq Y$. Υποθέτουμε ότι για κάποια άλλη οικογένεια υποσυνόλων του Y ισχύει ότι $\tau(X,\mathcal{F})\leqslant\tau(\Lambda,\mathcal{F}')$. Τότε,*

$$\tau(X,\mathcal{F})\leqslant\tau(\Lambda,\mathcal{F}')\leqslant(1+\ln(\max_{F'\in\mathcal{F}'}\mathrm{card}(\Lambda\cap F')))\,\tau_\omega(U,\mathcal{F}'). \tag{7.1.9}$$

Στο επόμενο θεώρημα, για δύο σύνολα $K,T\subset\mathbb{R}^n$ θεωρούμε τη διαφορά Minkowski των K και T,

$$K\sim T:=\{x\in\mathbb{R}^n:x+T\subseteq K\}.$$

Θεώρημα 7.1.15. *Έστω K, L και T φραγμένα Borel σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\Lambda \subset \mathbb{R}^n$ ένα πεπερασμένο σύνολο τέτοιο ώστε $K \subseteq \Lambda + T$. Τότε,*

$$N(K,L) \leqslant (1 + \ln(\max_{x \in K-L} \mathrm{card}((x + (L \sim T)) \cap \Lambda)))\, N_\omega(K - T, L \sim T). \tag{7.1.10}$$

Αν $\Lambda \subset K$, τότε έχουμε

$$N(K,L) \leqslant (1 + \ln(\max_{x \in K-L} \mathrm{card}((x + (L \sim T)) \cap \Lambda)))\, N_\omega(K, L \sim T). \tag{7.1.11}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την (7.1.9) ως εξής: Παίρνουμε $Y = \mathbb{R}^n$, $X = K$, $\mathcal{F} = \{x + L : x \in K - L\}$ και $\mathcal{F}' = \{x + (L \sim T) : x \in K - L\}$. Μπορούμε να πάρουμε $U = K - T$ διότι αφαιρώντας από το Λ κάθε στοιχείο του που δεν ανήκει στο $K - T$ εξακολουθούμε να έχουμε τον εγκλεισμό $K \subseteq \Lambda + T$. Αυτό αποδεικνύει την (7.1.10). Για να αποδείξουμε την (7.1.11) παρατηρούμε ότι στην περίπτωση που $\Lambda \subset K$ μπορούμε να επιλέξουμε $U = K$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 7.1.11.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.11. Η ανισότητα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 7.1.15 αν το εφαρμόσουμε με $L = T_1 + T_2$ και $T = T_2$. □

Θεώρημα 7.1.16. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$, να ισχύει ότι*

$$N(K, \mathrm{int}K) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2\sqrt{n}}.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\mathrm{bar}(K) = 0$. Τότε από το Λήμμα 5.3.6 για $0 < \lambda < 1$ και $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} N_\omega(K, \lambda K) \leqslant N_\omega(K, \lambda(K \cap (x - K))) &\leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K - \lambda(K \cap (x - K)))}{\mathrm{vol}_n(\lambda(K \cap (x - K)))} \\ &\leqslant \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda}\right)^n \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(K \cap (x - K))}. \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την Πρόταση 7.1.7 για το σημείο που ελαχιστοποιεί τον λόγο των όγκων, έχουμε

$$N_\omega(K, \lambda K) \leqslant \left(\frac{1 + \lambda}{\lambda}\right)^n 2^n e^{-c\sqrt{n}}$$

και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.1.11 για $T_1 = \alpha\lambda K$ και $T_2 = (1 - \alpha)\lambda K$ για κάποιο $\alpha \in (0,1)$ συμπεραίνουμε ότι

$$N(K, \lambda K) \leqslant \left(\frac{1 + \alpha\lambda}{\alpha\lambda}\right)^n 2^n e^{-c\sqrt{n}} (1 + \ln \overline{N}(K, (1 - \alpha)\lambda K))$$

Από το Λήμμα 7.1.10 παίρνοντας $\lambda \longrightarrow 1^-$, προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} N(K, \mathrm{int}K) &\leqslant \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha}\right)^n 2^n e^{-c\sqrt{n}} \left(1 + \ln\left(2^n \frac{\mathrm{vol}_n(K + \frac{1}{2}(1 - \alpha)(K \cap (-K)))}{\mathrm{vol}_n((1 - \alpha)(K \cap (-K)))}\right)\right) \\ &\leqslant \left(\frac{1 + \alpha}{\alpha}\right)^n 2^n e^{-c\sqrt{n}} \left(1 + \ln\left(\left(\frac{4}{1 - \alpha}\right)^n \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(K \cap (-K))}\right)\right). \end{aligned}$$

Καθώς το K έχει κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 7.1.4 (η ισχυρότερη Πρόταση 7.1.9 δεν θα έδινε κάτι καλύτερο) και έχουμε

$$\begin{aligned} N(K, \mathrm{int}K) &\leqslant \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^n 2^n e^{-c\sqrt{n}}\left(1+\ln\left(\left(\frac{4}{1-\alpha}\right)^n 2^n\right)\right) \\ &\leqslant \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^n 2^n e^{-c\sqrt{n}}\left(1+n\ln\left(\frac{8}{1-\alpha}\right)\right). \end{aligned}$$

Συνεπώς, για $\alpha = 1 - \frac{1}{n}$, έπεται ότι για κάποιες ομοιόμορφες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ έχουμε

$$N(K, \mathrm{int}K) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2\sqrt{n}}.$$

□

Σημείωση 7.1.17. Δουλεύοντας όπως πριν, μπορούμε να αποδείξουμε γενικότερο αποτέλεσμα για κυρτά σώματα ψ_α με σταθερά b_α. Η μόνη διαφορά είναι πως στο τέλος θα χρειαστεί να ελαχιστοποιήσουμε τη συνάρτηση

$$f(\alpha) = \left(\frac{1+\alpha}{\alpha}\right)^n 2^n \exp(-cb_\alpha^\alpha n^{\frac{\alpha}{2}})\left(1+n\ln\left(\frac{8}{1-\alpha}\right)\right).$$

7.1.3 Ομοιόμορφα κυρτά σώματα

Σε αυτή την ενότητα δείχνουμε ότι αν περιοριστούμε στην κλάση των «ομοιόμορφα κυρτών σωμάτων» τότε οι εκτιμήσεις για το μέτρο συμμετρίας, άρα και για την εικασία του Hadwiger, μπορούν να βελτιωθούν.

Ορισμός 7.1.18. Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0. Ο συντελεστής κυρτότητας του K ορίζεται ως

$$\delta_K(\varepsilon) = \inf\left\{1 - \|\frac{x+y}{2}\|_K : \quad \|x\|_K,\ \|y\|_K \leqslant 1, \quad \|x-y\|_K \geqslant \varepsilon\right\}$$

όπου $\|x\|_K = \inf\{r > 0 : \ x \in rK\}$ είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K. Το K καλείται ομοιόμορφα κυρτό αν $\delta_K(\varepsilon) > 0$ για κάθε $0 < \varepsilon < 2$.

Παρατήρηση 7.1.19. Ένα κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 είναι αυστηρά κυρτό, δηλαδή το σύνορό του δεν περιέχει ευθύγραμμα τμήματα, αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα κυρτό.

Θα δείξουμε το εξής θεώρημα για ομοιόμορφα κυρτά σώματα.

Θεώρημα 7.1.20. *Έστω $0 < r < 1$, $0 < \varepsilon < \sqrt{2}$ και K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, τέτοιο ώστε $\delta_K(\varepsilon) \geqslant r$. Ορίζουμε*

$$\alpha := 1 - \exp\left(-\frac{(\sqrt{2}-\varepsilon)^2 n}{4}\right).$$

Τότε ισχύει ότι

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n}\alpha\left(\frac{1}{1-r}\right)^n \quad \text{και} \quad \frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (-K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant \frac{1}{e\sqrt{n}}2^{-n}\left(\frac{1}{1-\alpha r}\right)^n.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.20 θα χρειαστούμε ένα θεώρημα των Arias-de-Reyna, Ball και Villa [2].

Θεώρημα 7.1.21. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα τέτοιο ώστε $0 \in \mathrm{int}(K)$ και $\mathrm{vol}_n(K) = 1$. Τότε για κάθε $0 < \varepsilon' < 1$ ισχύει ότι*

$$\mathrm{vol}_{2n}\left(\left\{(x,y) \in K \times K : \|x-y\|_K \leqslant \sqrt{2}(1-\varepsilon')\right\}\right) \leqslant e^{-\frac{\varepsilon'^2 n}{2}}.$$

Το Θεώρημα 7.1.21 γενικεύτηκε από τους Gluskin και V. Milman [53] ως εξής.

Θεώρημα 7.1.22 (Gluskin-V. Milman). *Έστω D ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(D)$ και $V_1, \ldots, V_m$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(D) = \mathrm{vol}_n(V_1) = \cdots = \mathrm{vol}_n(V_m)$. Για κάθε $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ και κάθε $0 < t < 1$ έχουμε*

$$\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right\|_D \leqslant t\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{1/2}\right) \leqslant \left(te^{\frac{1-t^2}{2}}\right)^n.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $\mathrm{vol}_n(D) = 1$, και θέτουμε $\tau := t\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\right)^{1/2}$. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $y_k = \sum_{i=1}^k \lambda_i x_i$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right\|_D \leqslant t\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{1/2}\right)\\
&\quad= \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{V_1}(x_1)\mathbb{1}_{V_2}(x_2)\ldots\mathbb{1}_{V_m}(x_m)\mathbb{1}_{\tau D}\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right) dx_1 \ldots dx_m\\
&\quad= \left(\prod_{i=1}^m \lambda_i\right)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\lambda_1 V_1}(y_1)\mathbb{1}_{\lambda_2 V_2}(y_2 - y_1)\ldots\mathbb{1}_{\lambda_m V_m}(y_m - y_{m-1})\mathbb{1}_{\tau D(y_m)}\, dy_1 \ldots dy_m.
\end{aligned}$$

Φράσσουμε την τελευταία έκφραση χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young για τη συνέλιξη $m+1$ συναρτήσεων και τις βέλτιστες σταθερές (βλ. [7], [28]): Έπεται ότι για κάθε $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1, \ldots, m$, τέτοια ώστε $\sum_{i=0}^m \frac{1}{p_i} = m$,

$$\mathbb{P}\left((x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \left\|\sum_{i=1}^m \lambda_i x_i\right\|_D \leqslant t\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\Big)^{1/2}\right) \leqslant \left(\prod_{i=1}^m \lambda_i\right)^{-n}\left(\prod_{i=0}^m C_i\right)^n \|\mathbb{1}_{\tau K}\|_{p_0} \prod_{i=1}^m \|\mathbb{1}_{\lambda_i V_i}\|_{p_i}, \tag{7.1.12}$$

όπου

$$C_i = \left(p_i^{1/p_i}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{1-1/p_i}\right)^{1/2}.$$

Παρατηρήστε ότι, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του τ και το γεγονός ότι $\mathrm{vol}_n(D) = \mathrm{vol}_n(V_i) = 1$ για κάθε i, το δεξιό μέλος της (7.1.12) είναι ακριβώς ίσο με

$$\left(t\sqrt{\sum_{i=1}^m \lambda_i^2}\right)^{\frac{n}{p_0}} \prod_{i=1}^m \lambda_i^{\frac{n}{p_i}-n} \prod_{i=0}^m p_i^{\frac{n}{2p_i}}\left(1 - \frac{1}{p_i}\right)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)}. \tag{7.1.13}$$

Θέτουμε τώρα $q_i = 1 - \frac{1}{p_i}$, $i = 0, 1, \ldots, m$. Από τους περιορισμούς μας για τα p_i έπεται τότε ότι $\sum_{i=0}^m q_i = 1$, και $0 \leqslant q_i \leqslant 1$ για κάθε i. Χρησιμοποιώντας αυτόν τον συμβολισμό και παρατηρώντας ότι

$$\prod_{i=1}^m q_i^{q_i} = (1-t^2)^{1-t^2} \frac{1}{\left(\sum_{j=1}^m \lambda_i^2\right)^{1-t^2}} \prod_{i=1}^m \lambda_i^{2q_i},$$

βλέπουμε ότι η (7.1.13) παίρνει τη μορφή

$$\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i^2\right)^{(1-q_0)\frac{n}{2}} t^n \left(\frac{1}{t^{2q_0}} \frac{(q_0(1-q_0))^{q_0}}{1-q_0} \prod_{i=1}^m \left(\frac{q_i(1-q_i)}{\lambda_i^2}\right)^{q_i} \frac{1}{1-q_i}\right)^{\frac{n}{2}}. \tag{7.1.14}$$

Πρέπει να επιλέξουμε τα q_i έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται η τελευταία ποσότητα. Για τον σκοπό μας, αρκεί η επιλογή $q_0 = t^2$ και $q_i = \frac{(1-t^2)\lambda_i^2}{\sum_{j=1}^m \lambda_j^2}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Με αυτή την επιλογή, η (7.1.14) είναι ίση με

$$t^n \left(\prod_{i=1}^m \frac{1}{(1-q_i)^{1-q_i}}\right)^{\frac{n}{2}} = t^n \exp\left(\frac{n}{2}\sum_{i=1}^m (1-q_i)\ln\frac{1}{1-q_i}\right).$$

Το ζητούμενο αποτέλεσμα έπεται τότε, γιατί $(1-q_i)\ln\frac{1}{1-q_i} = (1-q_i)\ln\left(1+\frac{q_i}{1-q_i}\right) \leqslant q_i$ (θυμηθείτε ότι $q_i \geqslant 0$) και $\sum_{i=1}^m q_i = 1 - q_0 = 1 - t^2$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.21. Στο προηγούμενο θεώρημα παίρνουμε $m = 2$, $V_1 = V_2 = D = K$ και $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = -1$. Τότε, για κάθε $0 < t < 1$ έχουμε

$$\mathrm{vol}_{2n}\left(\left\{(x,y) \in K \times K : \|x-y\|_K \leqslant t\sqrt{2}\right\}\right) \leqslant \left(te^{\frac{1-t^2}{2}}\right)^n.$$

Θέτοντας $\varepsilon' = 1 - t$ παίρνουμε την εξής ανισότητα:

$$\mathrm{vol}_{2n}\left(\left\{(x,y) \in K \times K : \|x-y\|_K \leqslant t\sqrt{2}\right\}\right) \leqslant \left((1-\varepsilon')e^{\frac{1-(1-\varepsilon')^2}{2}}\right)^n$$

Άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left((1-\varepsilon')e^{\frac{1-(1-\varepsilon')^2}{2}}\right)^n \leqslant e^{-\frac{\varepsilon'^2 n}{2}}$$

Ισοδύναμα,

$$(1-\varepsilon')e^{\varepsilon'} \leqslant 1$$

Ορίζουμε τη συνάρτηση $f(x) = (1-x)e^x$ για κάθε x στο διάστημα $[0,1]$ και παρατηρούμε ότι $f'(x) = -xe^x$. Συμπεραίνουμε ότι η f είναι φθίνουσα, άρα παρουσιάζει μέγιστο για $x = 0$, επομένως, $f(x) \leqslant f(0) = 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. Για $x = \varepsilon'$ έπεται η ζητούμενη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.20. Για τον πρώτο ισχυρισμό, χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\mathrm{vol}_n(K) = 1$. Έστω X και Y ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Αν $f(x) = \mathrm{vol}_n(K \cap (x - K))$, τότε η πυκνότητα του $\frac{X+Y}{2}$ είναι $g(x) = 2^n f(2x)$. Από την υπόθεση έχουμε $\delta_K(\varepsilon) \geqslant r$, άρα για το σύνολο $\Theta = \{(x,y) \in K \times K : \ \|x-y\|_K \geqslant \varepsilon\}$ ισχύει ότι

$$\Theta \subset \left\{(x,y) \in K \times K : \frac{x+y}{2} \in (1-r)K\right\}$$

Από το Θεώρημα 7.1.21 έχουμε ότι $\mathrm{vol}_{2n}(\Theta) \geqslant 1 - e^{\frac{-(\sqrt{2}-\varepsilon)^2 n}{4}}$, άρα

$$\mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{2} \in (1-r)K\right) = \iint_{(x,y)\in K\times K: \frac{x+y}{2}\in(1-r)K} dxdy \geqslant \iint_{\Theta} dxdy \geqslant 1 - e^{-\frac{(\sqrt{2}-\varepsilon)^2 n}{4}}.$$

Οπότε,

$$\|g\|_\infty \geqslant \frac{\int_{(1-r)K} g(x)dx}{\int_{(1-r)K} dx} = \frac{\mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{2} \in (1-r)K\right)}{\mathbb{P}(X \in (1-r)K)} \geqslant \left(\frac{1}{1-r}\right)^n \left(1 - e^{\frac{-(\sqrt{2}-\varepsilon)^2 n}{4}}\right),$$

και καθώς $\Delta_{KB}(K) = \|g\|_\infty 2^{-n}$, το ζητούμενο είναι άμεσο.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $\mathrm{vol}_n(K) = 1$. Εφαρμόζοντας την (7.1.6) με $h(x) := \exp(-\lambda\|x\|_K)$ για κάποια σταθερά λ που θα επιλέξουμε αργότερα, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
-\ln\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K\cap(-K))}{\mathrm{vol}_n(K)}\right) &\leqslant \mathbb{E}\,[\lambda\|X+Y\|_K] + \ln\left(\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-\lambda\|x\|_K)\,dx\right)\\
&= \lambda\mathbb{E}\,[\|X+Y\|_K] + \ln(\lambda^{-n}n!\mathrm{vol}_n(K)) = \lambda\mathbb{E}\,[\|X+Y\|_K] - n\ln\lambda + \ln(n!).
\end{aligned}
$$

Βελτιστοποιώντας ως προς λ παίρνουμε

$$
-\ln\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K\cap(-K))}{\mathrm{vol}_n(K)}\right) \leqslant n\ln\mathbb{E}\,[\|X+Y\|_K] + \ln\left(\frac{n!e^n}{n^n}\right). \tag{7.1.15}
$$

Δεδομένου ότι $n! \leqslant en^{n+1/2}e^{-n}$, ο τελευταίος όρος φράσσεται από $\ln(e\sqrt{n})$, άρα αυτό που είναι βασικό είναι να φράξουμε την $\mathbb{E}\,[\|X+Y\|_K]$. Για τον σκοπό αυτό, χρησιμοποιούμε πάλι την ανισότητα συγκέντρωσης των Arias-de-Reyna, Ball και Villa. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $\|X+Y\|_K \leqslant 2$, συνεπώς, από τον ορισμό του συντελεστή κυρτότητας έχουμε, για κάθε $\varepsilon\in(0,2)$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[\|X+Y\|_K] &= \mathbb{E}\,[\|X+Y\|_K\mathbb{1}_{\|X-Y\|_K\leqslant\varepsilon}] + \mathbb{E}\,[\|X+Y\|_K\mathbb{1}_{\|X-Y\|_K>\varepsilon}]\\
&\leqslant 2\mathbb{P}(\|X-Y\|_K\leqslant\varepsilon) + 2(1-\delta_K(\varepsilon))\mathbb{P}(\|X-Y\|_K>\varepsilon)\\
&= 2[1-\delta_K(\varepsilon)\mathbb{P}(\|X-Y\|_K>\varepsilon)].
\end{aligned}
$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα για κάποιον $\varepsilon\in(0,\sqrt{2})$ για τον οποίον $\delta_K(\varepsilon)\geqslant r$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.1.21, βλέπουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}\,[\|X+Y\|_K] &\leqslant 2\left[1-\delta_K(\varepsilon)\left(1-\exp\left(-\frac{(\sqrt{2}-\varepsilon)^2n}{4}\right)\right)\right]\\
&\leqslant 2\left[1-r\left(1-\exp\left(-\frac{(\sqrt{2}-\varepsilon)^2n}{4}\right)\right)\right],
\end{aligned}
$$

και εισάγοντας αυτή την εκτίμηση στην (7.1.15) ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.16, χρησιμοποιώντας όμως τώρα το Θεώρημα 7.1.20, παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 7.1.23. *Έστω $0<r<1$, $0<\varepsilon<\sqrt{2}$ και K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, τέτοιο ώστε $\delta_K(\varepsilon)\geqslant r$. Ορίζουμε*

$$
\alpha := 1-\exp\left(-\frac{(\sqrt{2}-\varepsilon)^2n}{4}\right).
$$

Τότε ισχύει ότι

$$
N(K,\mathrm{int}(K)) \leqslant \frac{1}{\alpha}(4(1-r))^n.
$$

7.1.4 Παρατηρήσεις

Στην εργασία [64] διατυπώνεται επίσης μια εικασία, η οποία θα εξασφάλιζε ένα εκθετικά καλύτερο άνω φράγμα για το πρόβλημα κάλυψης του Hadwiger.

Εικασία 7.1.24. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ με κέντρο βαρους το 0 και κάποιο $0 < r < 1$ ισχύει ότι

$$\frac{\mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{2} \in rK\right)}{\mathbb{P}(X \in rK)} \geqslant (1+c)^n$$

όπου X και Y είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K.

Η εικασία παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον καθώς ισχυρίζεται με ποσοτικό τρόπο ότι παίρνοντας συνέλιξη μιας ομοιόμορφης κατανομής με τον εαυτό της βρισκόμαστε ήδη πιο κοντά στην κανονική κατανομή από ότι με την αρχική επίπεδη κατανομή. Μια άλλη ερώτηση που θα οδηγούσε στο ίδιο συμπέρασμα είναι η εξής. Έστω X και Y ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα, ομοιόμορφα κατανεμημένα σε ένα κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0. Το ερώτημα είναι αν $\mathbb{E}\,\|X+Y\|_K \leqslant 2-\Omega(n^{-\alpha})$ για κάποιον $0 \leqslant \alpha < 1$ ανεξάρτητο από το K. Διαφορετικά, για δοθέν $0 \leqslant \alpha < 1$, ποια είναι τα κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ για τα οποία ισχύει κάτι τέτοιο; Οποιοδήποτε τέτοιο φράγμα θα βελτίωνε το τετριμμένο άνω φράγμα

$$\mathbb{E}\,\|X+Y\|_K \leqslant 2\mathbb{E}\,\|X\|_K = 2\left(1-\frac{1}{n+1}\right)$$

το οποίο μας δίνει η τριγωνική ανισότητα και στο οποίο δεν αξιοποιείται καθόλου η ανεξαρτησία. Είδαμε ότι η $\mathbb{E}\,\|X+Y\|_K$ φράσσεται από μια σταθερά μικρότερη από 2 για τα ομοιόμορφα κυρτά σώματα. Όμως για τον κύβο μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\mathbb{E}\,\|X+Y\|_K = 2\left(1-\frac{4^n}{(2n+1)\binom{2n}{n}}\right) \sim 2-\sqrt{\frac{\pi}{n}}.$$

Μπορούμε λοιπόν να ρωτήσουμε αν ισχύει το φράγμα $2-\Omega(n^{-1/2})$. Αν αυτό ήταν σωστό, θα έδινε μία ακόμη απόδειξη για τα κύρια αποτελέσματα αυτής της παραγράφου, το Θεώρημα 7.1.16, την Πρόταση 7.1.7 και την Πρόταση 7.1.9.

Η ποσότητα $\mathrm{Ent}(X+Y)-\mathrm{Ent}(X)$ που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της (7.1.5) έχει μελετηθεί στο πλαίσιο των αντίστροφων ανισοτήτων δυνάμεων εντροπίας για κυρτά μέτρα, μια φυσιολογική γενίκευση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων (βλ. [17] και [80]). Τα άνω φράγματα που δίνονται σε αυτές τις εργασίες, αν τα εξειδικεύσουμε στη λογαριθμικά κοίλη περίπτωση, και τα βελτιωμένα φράγματα αυτής της ενότητας απέχουν, κατά πάσα πιθανότητα, πολύ από το να είναι βέλτιστα. Το βέλτιστο άνω φράγμα είναι άγνωστο ακόμη και στη μονοδιάστατη περίπτωση. Είναι πιθανόν η ακραία κατανομή να είναι η μονόπλευρη εκθετική κατανομή.

Επιπλέον, στις μεγαλύτερες διαστάσεις μοιάζει λογική η ακόλουθη εικασία: Για κάποια απόλυτη σταθερά $\varepsilon > 0$ και για οποιαδήποτα ανεξάρτητα και ισόνομα τυχαία διανύσματα X και Y στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$\mathrm{Ent}(X+Y)-\mathrm{Ent}(X) \leqslant n(\ln 2-\varepsilon).$$

Μια πιο τολμηρή εικασία είναι ότι οι ακραίες κατανομές είναι το μονόπλευρο εκθετικό μέτρο γινόμενο (που θα έδινε το άνω φράγμα $n\gamma$ όπου γ είναι η σταθερά του Euler) και το ομοιόμορφο μέτρο στο simplex αν περιοριστούμε στις ομοιόμορφες κατανομές σε κυρτά σώματα.

7.2 Φράγμα μέσω των εκτιμήσεων για την ισοτροπική σταθερά

Σε αυτή την ενότητα παρουσιάζουμε την πρόσφατη δουλειά των Campos, van Hintum, Morris και Tiba.

7.2.1 Νέο φράγμα για το μέτρο Kövner-Besicovitch

Στην προηγούμενη ενότητα, το φράγμα για την εικασία του Hadwiger προήλθε από την βελτίωση του φράγματος για το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch, Δ_{KB}. Έτσι και τώρα, η βελτίωση του φράγματος για τον αριθμό κάλυψης ενός κυρτού σώματος από το εσωτερικό του, προέρχεται από την βελτίωση του φράγματος για το μέτρο συμμετρίας Δ_{KB}. Επιπλέον, θα χρησιμοποιηθούν γνωστά αποτελέσματα για τους αριθμούς κάλυψης και οι πρόσφατες εκτιμήσεις για την ισοτροπική σταθερά.

Λήμμα 7.2.1. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα όγκου 1 και X, Y ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Τότε για κάθε $z \in K$ ισχύει ότι*

$$f_{\frac{X+Y}{2}}(z) = 2^n vol_n(K \cap (2z - K))$$

Απόδειξη. Αρχικά, καθώς τα διανύσματα X και Y είναι ανεξάρτητα, για την πυκνότητα του αθροίσματός τους παρατηρούμε ότι

$$2^{-n} f_{\frac{X+Y}{2}}(z) = f_{X+Y}(2z) = \int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) f_Y(2z - x)dx$$

και αναπτύσσοντας την τελευταία σχέση της παραπάνω ισότητας βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f_X(x) f_Y(2z - x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_K(x)\mathbb{1}_K(2z - x)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{K\cap(2z-K)}(x)dx = vol_n(K \cap (2z - K))\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 7.2.2. Από το Λήμμα 7.2.1 προκύπτει άμεσα μια ανισότητα για το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch σωμάτων όγκου 1:

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n} \|f_{\frac{X+Y}{2}}\|_\infty \geqslant 2^{-n} \frac{\mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{2} \in A\right)}{\mathbb{P}(X \in A)}$$

όπου για την τελευταία ανισότητα παρατηρούμε ότι καθώς η πυκνότητα $f_{\frac{X+Y}{2}}$ έχει φορέα το K ισχύει ότι:

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{X+Y}{2} \in A\right) &= \int_A f_{\frac{X+Y}{2}}(x)dx = \int_{A\cap K} f_{\frac{X+Y}{2}}(x)dx \\ &\leqslant \|f_{\frac{X+Y}{2}}\|_\infty \int_A \mathbb{1}_K(x)dx = \|f_{\frac{X+Y}{2}}\|_\infty \mathbb{P}(X \in A)\end{aligned}$$

για κάθε μετρήσιμο υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$.

Η παραπάνω παρατήρηση χρησιμοποιήθηκε στα προηγούμενα, μαζί με την εκτίμηση του λεπτού δακτυλίου, για την εξαγωγή φράγματος για το μέτρο συμμετρίας Δ_{KB}. Στη συνέχεια, για την βελτίωση του φράγματος αντικαθίσταται η εκτίμηση του λεπτού δακτυλίου με μια εκτίμηση που εξαρτάται από την ισοτροπική σταθερά L_K και τον όγκο μιας μπάλας αρκούντως μικρής ακτίνας. Επιπλέον, δεν χρησιμοποιείται το άθροισμα δύο διανυσμάτων, αλλά οσοδήποτε μεγάλου πλήθους. Πιο συγκεκριμένα, για μια ακολουθία X_1, $X_2, \ldots$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών ομοιόμορφα κατανεμημένων στο K και για κάθε $k \in \mathbb{N}$, θέτουμε

$$S_k := \frac{1}{2^k} \sum_{i=1}^{2^k} X_i$$

Σημείωση 7.2.3. Καθώς το K είναι κυρτό, από την ανισότητα Prékopa-Leindler (Θεώρημα 2.2.3) έπεται ότι η πυκνότητα f_{S_k} είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Λήμμα 7.2.4. *Για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ με όγκο 1 ισχύει ότι*

$$f_{S_k}(z) \leqslant \left(f_{\frac{X+Y}{2}}(z)\right)^{2^k-1}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή ως προς k. Για $k = 1$ το συμπέρασμα ισχύει τετριμμένα. Υποθέτουμε τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει για $k \geqslant 1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για $k + 1$. Θέτουμε $T_k := 2^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} X_{2^k+i}$ και παρατηρούμε ότι $S_{k+1} = \frac{S_k+T_k}{2}$ καθώς και ότι οι τυχαίες μεταβλητές S_k και T_k είναι ανεξάρτητες, αφού η ακολουθία $(X_i)_{i=1}^{2^{k+1}}$ είναι ανεξάρτητη, καθώς και ισοκατανεμημένες με στήριγμα το K. Από τα παραπάνω, προκύπτει άμεσα ότι

$$f_{S_{k+1}}(z) = f_{\frac{S_k+T_k}{2}}(z) = 2^n \int_K f_{S_k}(y) f_{S_k}(2z-y) dy$$

για κάθε $z \in K$. Από την Σημείωση 7.2.3, η f_{S_k} είναι λογαριθμικά κοίλη, άρα για κάθε $z,\ y \in \mathbb{R}^n$, ισχύει ότι

$$f_{S_k}(z) \geqslant \sqrt{f_{S_k}(y)}\sqrt{f_{S_k}(2z-y)}$$

και επιπλέον, η f_{S_k} είναι μη μηδενική στο K. Άρα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_K f_{S_k}(y) f_{S_k}(2z-y) dy &= \int f_{S_k}(y) \mathbb{1}_K(y) f_{S_k}(2z-y) \mathbb{1}_K(2z-y) dy \\ &\leqslant f_{S_k}^2(z) \int_K f_X(y) f_Y(2z-y) dy\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ότι η πυκνότητα των X και Y είναι η δείκτρια του K. Από την επαγωγική υπόθεση γνωρίζουμε ότι

$$f_{S_k}(z) \leqslant \left(f_{\frac{X+Y}{2}}(z)\right)^{2^k-1}$$

και χρησιμοποιώντας πάλι το γεγονός ότι η πυκνότητα του αθροίσματος είναι η συνέλιξη των πυκνοτήτων των προσθετέων όρων, παίρνουμε

$$\int_K f_X(y) f_Y(2z-y) dy = 2^{-n} f_{\frac{X+Y}{2}}(z),$$

απ' όπου προκύπτει ότι

$$f_{S_{k+1}}(z) \leqslant \left(f_{\frac{X+Y}{2}}(z)\right)^{2(2^k-1)} f_{\frac{X+Y}{2}}(z) = \left(f_{\frac{X+Y}{2}}(z)\right)^{2^{k+1}-1}$$

□

Σημείωση 7.2.5. Για την απόδειξη των Θεωρημάτων 7.2.7, 7.2.10 και 7.2.12, το Λήμμα 7.2.4 θα χρησιμοποιηθεί με την ασθενέστερη μορφή:

$$\|f_{S_k}\|_\infty \leqslant \|f_{\frac{X+Y}{2}}\|_\infty^{2^k-1}.$$

Στο σημείο αυτό, υπενθυμίζουμε ότι για κάθε κυρτό σώμα K υπάρχει ένας αφφινικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε να απεικονίζει το σώμα K σε μια ισοτροπική θέση. Δηλαδή, για την εικόνα K' ισχύει ότι $\mathrm{vol}_n(K) = 1$ και $\mathbb{E}(X \otimes X) = L_K^2 I_n$, όπου X είναι τυχαίο διάνυσμα ομοιόμορφα κατανεμημένο στο K'.

Λήμμα 7.2.6. *Έστω K κυρτό σώμα ομοιόμορφα κατανεμημένο στο K με $\mathbb{E}(X \otimes X) = L_K^2 I_n$. Τότε για τη συνδιακύμανση του αθροίσματος S_k ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}(S_k \otimes S_k) = 2^{-k} L_K^2 I_n$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Καθώς $S_k = 2^{-k} \sum_{i=1}^{2^k} X_i$ και τα X_i είναι ανεξάρτητα και ισόνομα τυχαία διανύσματα, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K, προκύπτει άμεσα ότι

$$\mathbb{E}(S_k \otimes S_k) = \frac{1}{2^k} \sum_{i,j=1}^{2^k} \mathbb{E}(X_i \otimes X_j) = \frac{1}{2^{2k}} \sum_{i=1}^{2^k} \mathbb{E}(X_i \otimes X_i) = 2^{-k} L_K^2 I_n,$$

όπως θέλαμε. □

Θεώρημα 7.2.7. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα. Τότε, για το μέτρο Δ_{KB} ισχύει το εξής φράγμα:*

$$\Delta_{KB} \geqslant \exp\left(\frac{n}{2^{15} L_K^2}\right) \cdot 2^{-n}.$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το K έχει όγκο 1, είναι κεντραρισμένο και $\mathbb{E}(X \otimes X) = L_K^2 I_n$, όπου X ομοιόμορφα κατανεμημένο στο K. Αυτό γιατί, σε διαφορετική περίπτωση, υπάρχει αφφινικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε να απεικονίζει το K σε κυρτό σώμα με τις παραπάνω επιθυμητές ιδιότητες. Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$2^{15} L_K^2 \leqslant 2^k \leqslant 2^{16} L_K^2$$

και θέτουμε $R := 2^{-7}\sqrt{n}$. Από την ανισότητα Markov και το Λήμμα 7.2.6 ισχύει το εξής φράγμα για την $\mathbb{P}(\|S_k\|_2 \geqslant R)$:

$$\mathbb{P}(\|S_k\|_2 \geqslant R) \leqslant \frac{2^{14}}{n} \mathbb{E}(\|S_k\|_2^2) = \frac{2^{14}}{n} \cdot \sum_{i=1}^{n} 2^{-k} L_K^2 = \frac{2^{14} L_K^2}{2^k} \leqslant \frac{1}{2}$$

Στη συνέχεια, φράσσουμε την $\mathbb{P}(\|X\|_2 \leqslant R)$ από τον όγκο της μπάλας ακτίνας R. Συγκεκριμένα,

$$\mathbb{P}(\|X\|_2 \leqslant R) = \int_{\{\|X\|_2 \leqslant R\}} \mathbb{1}_K(x) dx \leqslant \int_{\{\|X\|_2 \leqslant R\}} 1 dx = \mathrm{vol}_n(RB_2^n)$$

αντικαθιστώντας τον όγκο στο δεξιό μέλος της ισότητας με την τιμή του και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, έχουμε τα παρακάτω

$$\mathbb{P}(\|X\|_2 \leqslant R) \leqslant \frac{\pi^{\frac{n}{2}} R^n}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \leqslant \left(\frac{2e\pi R^2}{n}\right)^{\frac{n}{2}} \leqslant e^{-2n-1}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω φράγματα, έχουμε ότι

$$\|f_{S_k}\|_\infty \geqslant \frac{\mathbb{P}(\|S_k\|_2 \leqslant R)}{\mathbb{P}(\|X\|_2 \leqslant R)} \geqslant \frac{e^{2n+1}}{2} \geqslant e^{2n},$$

και από το Λήμμα 7.2.4 έπεται ότι

$$\|f_{\frac{X+Y}{2}}\|_\infty \geqslant (\|f_{S_k}\|_\infty)^{\frac{1}{(2^k-1)}} \geqslant e^{\frac{n}{2^k-1}}.$$

Τέλος, από το Λήμμα 7.2.1, και από την επιλογή του k,

$$\Delta_{KB} \geqslant 2^{-n}\|f_{\frac{X+Y}{2}}\|_\infty \geqslant \exp\left(\frac{n}{2^{15}L_K^2}\right)\cdot 2^{-n}$$

όπως θέλαμε. □

Σημείωση 7.2.8. Η σταθερά 2^{-15} μπορεί να βελτιωθεί αν θεωρήσουμε το R λίγο μεγαλύτερο και άρα το k μικρότερο.

7.2.2 Βελτίωση του φράγματος της εικασίας του Hadwiger

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 7.2.7, εξάγουμε φράγματα για τον αριθμό κάλυψης του K από το εσωτερικό του. Αρχικά, υπενθυμίζουμε ότι δοθέντων κυρτών σωμάτων A και B ορίζουμε τον αριθμό κάλυψης του A από το B ως εξής

$$N(A,B) = \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists x_1,\dots,x_N \in \mathbb{R}^d \ \text{ τέτοια ώστε } \ A \subset \bigcup_{i=1}^{N}(x_i+B)\right\}$$

Παρακάτω θα ασχοληθούμε με φράγματα για το μέγεθος $N(K,\mathrm{int}(K))$. Υπενθυμίζουμε το επόμενο απλό λήμμα.

Λήμμα 7.2.9. *Έστω $A,\ B \subset \mathbb{R}^n$ κυρτά σώματα. Τότε,*

$$N(A,\mathrm{int}(B)) \leqslant O(n\ln n)\cdot \frac{\mathrm{vol}_n(A-B)}{\mathrm{vol}_n(B)}.$$

Θεώρημα 7.2.10. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα. Τότε,*

$$N(K,\mathrm{int}K) \leqslant \exp\left(-\frac{\Omega(n)}{L_K^2}\right)\cdot 4^n$$

καθώς $n \longrightarrow \infty$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.2.7 υπάρχει $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\frac{\mathrm{vol}_n(K\cap(x-K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant \exp\left(\frac{n}{2^{15}L_K^2}\right)\cdot 2^{-n}$$

Θέτουμε $S := K \cap (x - K)$ και παρατηρούμε ότι

$$N(K, \mathrm{int}K) \leqslant N(K, \mathrm{int}(S)) \quad \text{και} \quad \mathrm{vol}_n(K - S) \leqslant \mathrm{vol}_n(K + K) = 2^n \mathrm{vol}_n(K)$$

καθώς $S \subset K$ και $S \subset x - K$, αντίστοιχα. Τότε από το Λήμμα 7.2.9 προκύπτει ότι

$$N(K, \mathrm{int}K) \leqslant N(K, \mathrm{int}(S)) \leqslant O(n \ln n) \cdot \frac{\mathrm{vol}_n(K - S)}{\mathrm{vol}_n(S)} \leqslant O(n \ln n) \cdot 2^n \cdot \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(S)}$$

και από την αρχική επισήμανση,

$$N(K, \mathrm{int}K) \leqslant O(n \ln n) \cdot \exp\left(-\frac{n}{2^{15} L_K^2}\right) \cdot 4^n = \exp\left(-\frac{\Omega(n)}{L_K^2}\right) \cdot 4^n$$

καθώς $n \longrightarrow \infty$, όπως θέλαμε. □

Για να ολοκληρώσουμε το φράγμα που δίνει το Θεώρημα 7.2.10 υπενθυμίζουμε το αποτέλεσμα των Klartag και Lehec για την τάξη της ισοτροπικής σταθεράς ενός κυρτού σώματος.

Θεώρημα 7.2.11. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα. Τότε,*

$$L_K = O(\ln n)^4.$$

Θεώρημα 7.2.12. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα. Τότε,*

$$N(K, \mathrm{int}K) \leqslant \left(-\Omega\left(\frac{n}{(\ln n)^8}\right)\right) \cdot 4^n$$

καθώς $n \longrightarrow \infty$.

Απόδειξη. Από τα Θεωρήματα 7.2.10 και 7.2.11 έπεται άμεσα ότι

$$N(K, \mathrm{int}K) \leqslant \exp\left(-\frac{\Omega(n)}{L_K^2}\right) \cdot 4^n \leqslant \exp\left(-\Omega\left(\frac{n}{(\ln n)^8}\right)\right) \cdot 4^n$$

καθώς $n \longrightarrow \infty$, όπως θέλαμε. □

7.2.3 Εφαρμογή στην εικασία του Ehrhart

Η εικασία του Ehrhart ισχυρίζεται ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων και με την ιδιότητα ότι το μοναδικό σημείο του $\mathbb{Z}^n$ που βρίσκεται στο εσωτερικό του K είναι η αρχή των αξόνων, δηλαδή

$$\mathrm{int}(K) \cap \mathbb{Z}^n = \{0\},$$

ισχύει ότι

$$\mathrm{vol}_n(K) \leqslant \frac{(n+1)^n}{n!},$$

με ισότητα όταν το K είναι το simplex $K = (n+1)\mathrm{conv}\{0, e_1, \dots, e_n\} - (1, \dots, 1)$.

Ο Ehrhart επαλήθευσε την εικασία του στην περίπτωση $n = 2$. Είναι επίσης γνωστό ότι η εικασία ισχύει σε κάποιες ειδικές περιπτώσεις, παραμένει όμως ανοικτή σε πλήρη γενικότητα για διαστάσεις

$n \geqslant 3$. Οι Gritzmann και Wills έδωσαν το γενικό φράγμα

$$\mathrm{vol}_n(K) \leqslant (n+1)^n(1-(1-1/n)^n),$$

το οποίο βελτιώθηκε από τους Berg και Henk σε

$$\mathrm{vol}_n(K) \leqslant 4^n.$$

Η απόδειξη αυτής της ανισότητας βασίζεται στην ανισότητα των V. Milman και Pajor που συζητήσαμε στο Θεώρημα 7.1.4.

Τα αποτελέσματα αυτής της ενότητας μας επιτρέπουν να βελτιώσουμε αυτό το φράγμα. Αποδεικνύουμε πρώτα το εξής κάτω φράγμα για το μέτρο συμμετρίας Kövner-Besicovitch.

Θεώρημα 7.2.13. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0. Τότε,*

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K\cap(-K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant \exp\left(\frac{n}{2^{16}L_K^2}\cdot 2^{-n}\right).$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε πως, από το Σχόλιο 7.2.3, η πυκνότητα f_{S_k} είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση και επιπλέον, καθώς το σώμα K είναι κεντραρισμένο, η f_{S_k} είναι κεντραρισμένη. Από το Θεώρημα 6.1.7 και το φράγμα $\|f_{S_k}\| \geqslant e^{2n}$ έχουμε ότι

$$f_{S_k}(0) \geqslant e^{-n}\cdot\|f_{S_k}\|_\infty \geqslant e^n.$$

Επίσης, από το Λήμμα 7.2.4 έπεται ότι

$$f_{\frac{X+Y}{2}}(0) \geqslant (f_{S_k}(0))^{\frac{1}{2^k-1}} \geqslant e^{\frac{n}{2^k}},$$

και από το Λήμμα 7.2.1 εξάγουμε το φράγμα

$$\frac{\mathrm{vol}_n(K\cap(-K))}{\mathrm{vol}_n(K)} = 2^{-n}\cdot f_{\frac{X+Y}{2}}(0) \geqslant \exp\left(\frac{n}{2^{16}L_K^2}\right)\cdot 2^{-n}$$

όπως θέλαμε. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μια βελτιωμένη εκτίμηση για την εικασία του Ehrhart. Θα χρειαστούμε το πρώτο θεώρημα του Minkowski από τη Γεωμετρία των Αριθμών: Αν C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $C\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$, τότε $\mathrm{vol}_n(C)\leqslant 2^n$.

Θεώρημα 7.2.14. *Έστω $K \subset \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0. Αν $K\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$, τότε*

$$\mathrm{vol}_n(K) \leqslant \exp\left(-\Omega\left(\frac{n}{(\ln n)^8}\right)\right)\cdot 4^n$$

καθώς $n \longrightarrow \infty$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι το $K\cap(-K)$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αφού $K\cap(-K)\subseteq K$ από την υπόθεση έχουμε $(K\cap(-K))\cap\mathbb{Z}^n=\{0\}$. Από το πρώτο θεώρημα του Minkowski έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_n(K\cap(-K)) \leqslant 2^n.$$

Από τα Θεωρήματα 7.2.13 και 7.2.11 συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{2^n}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K \cap (-K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \geqslant \exp\left(\frac{n}{2^{16}L_K^2} \cdot 2^{-n}\right) \geqslant \exp\left(\Omega\left(\frac{n}{(\ln n)^8}\right)\right) \cdot 2^{-n}$$

καθώς $n \longrightarrow \infty$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Η εικασία του Godbersen

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι η ανισότητα Rogers-Shephard για τον όγκο του σώματος διαφορών $K - K = \{x - y : x, y \in K\}$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(K-K) \leqslant \binom{2n}{n}\mathrm{vol}_n(K).$$

(Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε και μια δεύτερη απόδειξη αυτής της ανισότητας.)

Το 1938, ο Godbersen (και αργότερα, ανεξάρτητα, ο Makai Jr.) έκανε την εικασία ότι ισχύει μια ισχυρότερη ανισότητα:

Εικασία του Godbersen. *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant j \leqslant n-1$ ισχύει ότι*

$$V(K[j], -K[n-j]) \leqslant \binom{n}{j}\mathrm{vol}_n(K).$$

Στην ανισότητα της εικασίας, η ποσότητα $V(K_1, \ldots, K_n)$ είναι ο μεικτός όγκος των n κυρτών σωμάτων $K_1, \ldots, K_n$, και συμβολίζουμε με $V(K[j], D[n-j])$ τον μεικτό όγκο j αντιγράφων του κυρτού σώματος K και $n-j$ αντιγράφων του κυρτού σώματος D,

Οι περιπτώσεις $j = 1$ και $j = n-1$ της Εικασίας προκύπτουν από το γεγονός ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 τότε $-K \subseteq nK$. Ο ίδιος εγκλεισμός, σε συνδυασμό με τη μονοτονία των μεικτών όγκων, δείχνει ότι

$$V(K[j], -K[n-j]) \leqslant n^{\min\{j,n-j\}}\mathrm{vol}_n(K)$$

για κάθε $0 \leqslant j \leqslant n$. Το γεγονός ότι η εικασία του Godbersen ισχυροποιεί την ανισότητα Rogers-Shephard φαίνεται από το ότι, αν ισχύει, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathrm{vol}_n(K-K) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V(K[j], -K[n-j]) \leqslant \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\mathrm{vol}_n(K) = \binom{2n}{n}\mathrm{vol}_n(K).$$

8.1 Αναγωγή της εικασίας

Για κάθε ζεύγος συνόλων $A, B \subset \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $A \vee B$ την κυρτή θήκη του συνόλου $A \cup B$. Οι Fáry και Rédi έκαναν την εικασία ότι αν K είναι τυχόν κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και S είναι simplex στον

$\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(S)=\mathrm{vol}_n(K)$ τότε

$$\min_{x\in K}\mathrm{vol}_n((K-x)\vee(x-K))\leqslant\min_{x\in S}\mathrm{vol}_n((S-x)\vee(x-S)). \tag{8.1.1}$$

Θα μελετήσουμε την ακόλουθη γενικότερη εικασία.

Εικασία 8.1.1. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda\in[0,1]$ υπάρχει $x\in K$ ώστε

$$\mathrm{vol}_n((1-\lambda)(K-x)\vee\lambda(x-K))\leqslant\mathrm{vol}_n((1-\lambda)(S-x)\vee\lambda(x-S)), \tag{8.1.2}$$

όπου S είναι simplex στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 και $\mathrm{vol}_n(S)=\mathrm{vol}_n(K)$.

Παρατηρήστε ότι η περίπτωση $\lambda=\frac{1}{2}$ αντιστοιχεί στην εικασία των Fáry και Rédi, διότι για το simplex μπορούμε να δούμε ότι η κυρτή θήκη που έχει τον ελάχιστο όγκο προκύπτει όταν το simplex έχει κέντρο βάρους το 0. Τότε, το δεξιό μέλος της (8.1.1) ισούται με $\frac{1}{2^n}\binom{n}{[n/2]}\mathrm{vol}_n(S)$ και, όπως θα δούμε στο Λήμμα 8.1.3, για κάθε $\lambda\in(0,1)$ και $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ώστε $(n+1)(1-\lambda)-1\leqslant k\leqslant(n+1)(1-\lambda)$ ισχύει ότι

$$\mathrm{vol}_n((1-\lambda)S\vee(-\lambda S))=\binom{n}{k}(1-\lambda)^k\lambda^{n-k}\mathrm{vol}_n(S).$$

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε την ακόλουθη αναγωγή της εικασίας του Godbersen.

Θεώρημα 8.1.2. *Η Εικασία 8.1.1 συνεπάγεται την εικασία του Godbersen*

Θα χρειαστούμε ένα λήμμα για τον όγκο της κυρτής θήκης ομοιοθετικών αντιγράφων ενός simplex S και του $-S$ που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της Εικασίας 8.1.1.

Λήμμα 8.1.3. *Έστω S ένα simplex στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Για δοθέν $\lambda\in(0,1)$, έστω $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ ώστε $(n+1)(1-\lambda)-1\leqslant k\leqslant(n+1)(1-\lambda)$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n((1-\lambda)S\vee(-\lambda S))=\binom{n}{k}(1-\lambda)^k\lambda^{n-k}\mathrm{vol}_n(S). \tag{8.1.3}$$

Απόδειξη. Λόγω συμμετρίας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. Για σχεδόν όλες τιμές του λ οι ανισότητες $(n+1)(1-\lambda)-1\leqslant k\leqslant(n+1)(1-\lambda)$ προσδιορίζουν τον $k=k(\lambda)$ μονοσήμαντα. Όταν αυτό δεν συμβαίνει, οπότε υπάρχουν δύο πιθανές τιμές του k, οι αντίστοιχες τιμές που παίρνει το δεξιό μέλος της (8.1.3) συμπίπτουν, συνεπώς δεν έχει σημασία ποια τιμή του k θα επιλέξουμε.

Αφού το S έχει κέντρο βάρους το 0, εάν $\lambda\leqslant\frac{1}{n+1}$ τότε έχουμε $-\lambda S\subseteq(1-\lambda)S$, άρα η (8.1.3) ισχύει τετριμμένα. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $\frac{1}{n+1}\leqslant\lambda\leqslant\frac{1}{2}$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\mathrm{vol}_n((1-\lambda)S\vee(-\lambda S))=(1-\lambda)^n\mathrm{vol}_n\Big(S\vee\Big(-\frac{\lambda}{1-\lambda}S\Big)\Big), \tag{8.1.4}$$

συνεπώς, αρκεί να υπολογίσουμε την ποσότητα $\frac{\mathrm{vol}_n(S\vee(-tS))}{\mathrm{vol}_n(S)}$ για $t=\frac{\lambda}{1-\lambda}$. Με αυτή την «αλλαγή μεταβλητής», οι υποθέσεις μας παίρνουν τη μορφή

$$\frac{1}{n}\leqslant t\leqslant 1\quad\text{και}\quad\frac{n+1}{1+t}-1\leqslant k\leqslant\frac{n+1}{1+t}.$$

Επιπλέον, για απλότητα, μπορούμε να θεωρήσουμε το $S=\mathrm{conv}\{e_1,\dots,e_{n+1}\}$, την κυρτή θήκη των διανυσμάτων της συνήθους βάσης του $\mathbb{R}^{n+1}$, εμβαπτισμένο στον $\mathbb{R}^{n+1}$, με κέντρο βάρους το $a=\big(\frac{1}{n+1},\dots,\frac{1}{n+1}\big)$.

Θέλουμε τότε να υπολογίσουμε τον όγκο του $K_t := S \vee S_t$, όπου S_t είναι η κυρτή θήκη των διανυσμάτων $v_j = (1+t)a - te_j$, $j = 1, \dots, n+1$.

Αρχικά μελετάμε τις έδρες του K_t. Κάθε έδρα του K_t είναι η κυρτή θήκη τουλάχιστον n κορυφών των S και S_t. Αφού για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n+1$ η ευθεία που διέρχεται από τα e_j και v_j τέμνει το εσωτερικό του K_t, δύο τέτοιες κορυφές δεν μπορούν να ανήκουν στην ίδια έδρα, άρα κάθε έδρα έχει n ή $n+1$ κορυφές. Θα εξετάσουμε μόνο τις κυρτές θήκες n κορυφών, και θα δούμε στην απόδειξη ότι η τυπική έδρα του K_t δεν μπορεί να έχει $n+1$ κορυφές.

Θεωρούμε την $F_k = \mathrm{conv}\{e_1, \dots, e_k, v_{k+1}, \dots, v_n\}$ για κάποιον $k \in \{1, \dots, n\}$. Παρατηρούμε ότι η F_k βρίσκεται στην τομή των υπερεπιπέδων $a + a^{\perp}$ και $e_1 + (u_k)^{\perp}$, όπου

$$u_k = (t, \dots, t[k], -1, \dots, -1[n-k], n - (1+t)k)$$

είναι το κάθετο διάνυσμα της F_k, δηλαδή $\langle u_k, v \rangle = t$ για κάθε κορυφή v της F_k. Έχουμε ότι η F_k είναι έδρα του K_t αν και μόνο αν $K_t \setminus F_k \subseteq \{x : \langle u_k, x \rangle < t\}$, και αρκεί να ελέγξουμε αυτή τη συνθήκη μόνο για τις κορυφές του K_t. Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι αυτό ισχύει αν και μόνο αν $\frac{n+1}{1+t} - 1 < k < \frac{n+1}{1+t}$.

Υποθέτουμε πρώτα ότι $\frac{n+1}{1+t} \notin \mathbb{N}$, οπότε οι παραπάνω ανισότητες έχουν μοναδική λύση ως προς k. Τότε, οι $(n+1)\binom{n}{k}$ τρόποι με τους οποίους μπορούμε να επιλέξουμε k κορυφές του S και $n-k$ κορυφές του S_t αντιστοιχούν σε όλες τις έδρες του K_t. Μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε τη συνεισφορά του $F_k \vee \{a\}$ στον λόγο $\mathrm{vol}_n(K_t)/\mathrm{vol}_n(S)$ αν παρατηρήσουμε ότι, από το αναλλοίωτο του όγκου ως προς μεταφορές, $\mathrm{vol}_n(F_k \vee \{a\}) = \mathrm{vol}_n(V)$, όπου

$$V = \mathrm{conv}\{0, e_1, -a, \dots, e_k - a, -t(e_{k+1} - a), \dots, -t(e_n - a)\}.$$

Επιπλέον, αφού

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{vol}_n(V)|a|}{n+1} &= \mathrm{vol}_{n+1}(\mathrm{conv}\{0, e_1, -a, \dots, e_k - a, -t(e_{k+1} - a), \dots, -t(e_n - a), a\} \\ &= t^{n-k}\mathrm{vol}_{n+1}(\mathrm{conv}\{0, e_1, -a, \dots, e_k - a, e_{k+1} - a, \dots, e_n - a, a\},\end{aligned}$$

και $\frac{1}{n+1}\mathrm{vol}_n(S)|a| = \mathrm{vol}_{n+1}(\mathrm{conv}\{0, e_1, \dots, e_{n+1}\})$, βλέπουμε ότι

$$\frac{\mathrm{vol}_n(F_k \vee \{a\})}{\mathrm{vol}_n(S)} = t^{n-k} \det(e_1 - a, \dots, e_n - a, a) = \frac{t^{n-k}}{n+1}.$$

Τέλος, αθροίζοντας ως προς όλες τις έδρες του K_t, παίρνουμε

$$\frac{\mathrm{vol}_n(K_t)}{\mathrm{vol}_n(S)} = (n+1)\binom{n}{k}t^{n-k} \cdot \frac{1}{n+1} = \binom{n}{k}t^{n-k},$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη σε αυτή την περίπτωση, αν θυμηθούμε τον ορισμό του t και την (8.1.4).

Η άλλη περίπτωση, όπου $t = \frac{n+1}{m} - 1$ για κάποιον $m \in \left\{\lceil \frac{n+1}{2} \rceil, \dots, n\right\}$, έπεται από τη συνέχεια του όγκου. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 8.1.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.1.2. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και ας υποθέσουμε ότι η Εικασία 8.1.1

ισχύει. Η υπόθεσή μας είναι ότι για κάθε $\lambda \in [0,1]$ υπάρχει $x \in K$ ώστε

$$\frac{\mathrm{vol}_n((1-\lambda)(K-x) \vee \lambda(x-K))}{\mathrm{vol}_n(K)} \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n((1-\lambda)(S-x) \vee \lambda(x-S))}{\mathrm{vol}_n(S)},$$

όπου S είναι simplex με κέντρο βάρους το 0. Χρησιμοποιώντας το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 8.3.4, τη μονοτονία, την ομογένεια ως προς κάθε θέση και το αναλλοίωτο ως προς μεταφορές των μεικτών όγκων, για κάθε $\lambda \in (0,1)$ παίρνουμε

$$\frac{V(K[j], -K[n-j])}{\mathrm{vol}_n(K)} \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n((1-\lambda)(K-x) \vee \lambda(x-K))}{(1-\lambda)^j \lambda^{n-j} \mathrm{vol}_n(K)}.$$

Χρησιμοποιώντας τώρα το Λήμμα 8.1.3 με $k = j$ και $\lambda = \frac{n+1-j}{n+1} \in (0,1)$, και παίρνοντας υπόψιν τις δύο τελευταίες ανισότητες, έχουμε ότι

$$\frac{V(K[j], -K[n-j])}{\mathrm{vol}_n(K)} \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n((1-\lambda)(S-x) \vee \lambda(x-S))}{\mathrm{vol}_n(S)} = \binom{n}{j}.$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

8.2 Η συνάρτηση λ-διαφορών

Η «συνάρτηση διαφορών» ορίστηκε αρχικά από τον Colesanti ως ένα συναρτησιακό ανάλογο της έννοιας του σώματος διαφορών. Οι Artstein-Avidan,Einhorn, Florentin και Ostrover γενίκευσαν τον ορισμό της συνάρτησης διαφορών ως εξής.

Ορισμός 8.2.1. Έστω $\lambda \in (0,1)$ και $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$. Η συνάρτηση λ-διαφορών $\Delta_\lambda^{f,g} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ των f και g ορίζεται από την

$$\Delta_\lambda^{f,g}(z) = \sup_{(1-\lambda)x+\lambda y = z} f^{1-\lambda}\left(\frac{x}{1-\lambda}\right) g^\lambda\left(-\frac{y}{\lambda}\right).$$

Ισοδύναμα, αν $f = e^{-\varphi}$ και $g = e^{-\psi}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\Delta_\lambda^{f,g} = e^{-\delta_\lambda^{\varphi,\psi}}, \quad \text{όπου } \delta_\lambda^{\varphi,\psi}(z) = \inf_{(1-\lambda)x+\lambda y = z} \left\{(1-\lambda)\varphi\Big(\frac{x}{1-\lambda}\Big) + \lambda\psi\Big(-\frac{y}{\lambda}\Big)\right\}.$$

Παρατηρήσεις 8.2.2. (α) Η συνάρτηση λ-διαφορών είναι συμβατή με τις μεταφορές και τον πολλαπλασιασμό με θετικές σταθερές. Πιο συγκεκριμένα, αν $f_a(x) := f(x+a)$, όπου $a \in \mathbb{R}^n$, τότε

$$\Delta_\lambda^{f_a, g_b} = (\Delta_\lambda^{f,g})_{(1-\lambda)a+\lambda b},$$

και αν $t, s > 0$ τότε

$$\Delta_\lambda^{tf, sg} = t^{1-\lambda} s^\lambda \Delta_\lambda^{f,g}.$$

(β) Αν ορίσουμε $\Phi(x) = \varphi(x/(1-\lambda))$ και $\Psi(y) = \psi(-y/\lambda)$, εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler για τις $e^{-\Phi}, e^{-\Psi}$ και $e^{-\delta_\lambda^{f,g}}$ βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta_\lambda^{f,g} \geqslant ((1-\lambda)^{1-\lambda}\lambda^\lambda)^n \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^\lambda.$$

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε μια συναρτησιακή ανισότητα η οποία πηγαίνει προς την αντίστροφη κατεύθυνση.

Θεώρημα 8.2.3. *Έστω $f,g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις και έστω $\lambda\in(0,1)$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_\lambda^{f,g}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}f^\lambda g^{1-\lambda}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}f\cdot\int_{\mathbb{R}^n}g. \tag{8.2.1}$$

Απόδειξη. Γράφουμε $f=e^{-\varphi}$ και $g=e^{-\psi}$, όπου φ και ψ είναι κυρτές συναρτήσεις. Έστω $z\in\mathbb{R}^n$. Αρχικά, υποθέτουμε ότι υπάρχουν $x_0,y_0\in\mathbb{R}^n$ ώστε

$$(1-\lambda)x_0+\lambda y_0=z\qquad\text{και}\qquad\delta_\lambda^{\varphi,\psi}(z)=(1-\lambda)\varphi(x_0/(1-\lambda))+\lambda\psi(-y_0/\lambda).$$

Αφού οι φ και ψ είναι κυρτές, για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\psi((1-\lambda)y-z/\lambda)\leqslant(1-\lambda)\psi(y-x_0/\lambda)+\lambda\psi(-y_0/\lambda)$$

και

$$\varphi(\lambda y)\leqslant(1-\lambda)\varphi(x_0/(1-\lambda))+\lambda\varphi(y-x_0/\lambda).$$

Προσθέτοντας αυτές τις δύο ανισότητες, παίρνουμε

$$\psi((1-\lambda)y-z/\lambda)+\varphi(\lambda y)\leqslant\delta_\lambda^{\varphi,\psi}(z)+\lambda\varphi(y-x_0/\lambda)+(1-\lambda)\psi(y-x_0/\lambda). \tag{8.2.2}$$

Καθώς αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$, συνθέτοντας την (8.2.2) με την εκθετική συνάρτηση και ολοκληρώνοντας ως προς $y\in\mathbb{R}^n$ παίρνουμε

$$\Delta_\lambda^{f,g}(z)\int_{\mathbb{R}^n}f^\lambda g^{1-\lambda}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}g((1-\lambda)y-z/\lambda)f(\lambda y)\,dy. \tag{8.2.3}$$

Στην περίπτωση που το infimum στον ορισμό του $\delta_\lambda^{\varphi,\psi}(z)$ δεν επιτυγχάνεται, μπορούμε να βρούμε ακολουθίες $(x_j)_{j=1}^\infty$ και $(y_j)_{j=1}^\infty$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $(1-\lambda)x_j+\lambda y_j=z$ για κάθε $j\geqslant1$ και $\delta_\lambda^{\varphi,\psi}(z)=\lim\limits_{j\to\infty}((1-\lambda)\varphi(\frac{x_j}{1-\lambda})+\lambda\psi(-y_j/\lambda))$. Χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα όπως παραπάνω, έχουμε

$$f^{1-\lambda}(x_j/(1-\lambda))g^\lambda(-y_j/\lambda)\int_{\mathbb{R}^n}f^\lambda g^{1-\lambda}\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}g((1-\lambda)y-z/\lambda)f(\lambda y)\,dy,$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $j\to\infty$ συμπεραίνουμε ότι η (8.2.3) ισχύει και σε αυτή την περίπτωση. Μπορούμε λοιπόν να ολοκληρώσουμε αυτή την ανισότητα ως προς $z\in\mathbb{R}^n$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}f^\lambda g^{1-\lambda}\cdot\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_\lambda^{f,g}&\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n}g((1-\lambda)y-z/\lambda)f(\lambda y)\,dy\right)dz\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(\lambda y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}g((1-\lambda)y-z/\lambda)\,dz\right)dy\\&=\int_{\mathbb{R}^n}f(\lambda y)\,dy\cdot\int_{\mathbb{R}^n}g(-z/\lambda)\,dz\\&=\left(\int_{\mathbb{R}^n}f\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n}g\right).\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.3. □

8.3 Φράγμα για την εικασία του Godbersen

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου, το οποίο δίνει μια εκτίμηση για την εικασία του Godbersen, προκύπτει από την ακόλουθη εφαρμογή του Θεωρήματος 8.1.2.

Θεώρημα 8.3.1. *Έστω K και D κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν το 0 στο εσωτερικό τους. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K \vee -D)\mathrm{vol}_n((K^\circ + D^\circ)^\circ) \leqslant \mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(D).$$

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες κλασικές έννοιες από την Κυρτή Ανάλυση.

(i) Η *κυρτή δείκτρια συνάρτηση* $\mathbb{1}_K^\infty$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται ως εξής: $\mathbb{1}_K^\infty(x) = 0$ αν $x \in K$ και $\mathbb{1}_K^\infty(x) = +\infty$ αν $x \notin K$.

(ii) Ο *μετασχηματισμός Legendre* της $\varphi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$\mathcal{L}\varphi(x) = \sup_{y\in\mathbb{R}^n} (\langle x, y\rangle - \varphi(x)).$$

(iii) Η *ελαχιστική συνέλιξη* δύο συναρτήσεων $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$(f\Box g)(z) = \inf_{x+y=z} (f(x) + g(y)).$$

Είναι γνωστό ότι αν f, g είναι κάτω ημισυνεχείς κυρτές συναρτήσεις τότε

$$f\Box g = \mathcal{L}(\mathcal{L}f + \mathcal{L}g).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την ταυτότητα $\mathcal{L}h_K = \mathbb{1}_K^\infty$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.3.1. Έστω $\lambda \in (0, 1)$. Η συνάρτηση στήριξης $h_{K^\circ}(x)$ είναι ομογενής ως προς K και x, και όμοια η $h_{D^\circ}(y)$ είναι ομογενής ως προς D και y, άρα

$$\delta_\lambda^{h_{K^\circ},h_{D^\circ}}(z) = \inf_{(1-\lambda)x+\lambda y=z} ((1-\lambda)h_{K^\circ}(x/(1-\lambda)) + \lambda h_{D^\circ}(-y/\lambda)) = \left(h_{\frac{1}{1-\lambda}K^\circ}\Box h_{-\frac{1}{\lambda}D^\circ}\right)(z).$$

Χρησιμοποιώντας τις $f\Box g = \mathcal{L}(\mathcal{L}f + \mathcal{L}g)$ και $\mathcal{L}h_K = \mathbb{1}_K^\infty$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\delta_\lambda^{h_{K^\circ},h_{D^\circ}} &= \mathcal{L}\left(\mathbb{1}^\infty_{\frac{1}{1-\lambda}K^\circ} + \mathbb{1}^\infty_{-\frac{1}{\lambda}D^\circ}\right) = \mathcal{L}\left(\mathbb{1}^\infty_{\frac{1}{1-\lambda}K^\circ\cap-\frac{1}{\lambda}D^\circ}\right)\\ &= h_{\frac{1}{1-\lambda}K^\circ\cap-\frac{1}{\lambda}D^\circ} = h_{((1-\lambda)K\vee-\lambda D)^\circ}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι

$$(e^{-h_{K^\circ}})^\lambda(e^{-h_{D^\circ}})^{1-\lambda} = e^{-h_{((1-\lambda)K\vee-\lambda D)^\circ}}.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 8.2.3 για τις $f = e^{-h_{K^\circ}}$ και $g = e^{-h_{D^\circ}}$, και λαμβάνοντας υπόψιν την

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{-h_{A^\circ}} = n!\mathrm{vol}_n(A),$$

βλέπουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n((1-\lambda)K \vee -\lambda D)\mathrm{vol}_n((\lambda K^\circ + (1-\lambda)D^\circ)^\circ) \leqslant \mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(D).$$

Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$\mathrm{vol}_n(K \vee -D)\mathrm{vol}_n((K^\circ + D^\circ)^\circ) \leqslant \mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(D),$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Θεώρημα 8.3.2. *Έστω K και D κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K \cap D$. Για κάθε $\vartheta \in [0,1]$,*

$$\mathrm{vol}_n(K \vee -D)\mathrm{vol}_n(\vartheta K \cap (1-\vartheta)D) \leqslant \mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(D).$$

Απόδειξη. Έστω $\vartheta \in [0,1]$. Παρατηρούμε ότι

$$\vartheta K \cap (1-\vartheta)D \subseteq (K^\circ + D^\circ)^\circ$$

και το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 8.3.1. □

Θεώρημα 8.3.3. *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K$ και κάθε $\lambda \in [0,1]$,*

$$\mathrm{vol}_n((1-\lambda)K \vee -\lambda K) \leqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 8.3.2, το οποίο εφαρμόζουμε με $K_1 = (1-\lambda)K$, $D_1 = \lambda K$ και $\vartheta = \lambda$. □

Θεώρημα 8.3.4. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant j \leqslant n-1$. Τότε,*

$$V(K[j], -K[n-j]) \leqslant \frac{n^n}{j^j(n-j)^{n-j}}\mathrm{vol}_n(K) \simeq \binom{n}{j}\sqrt{2\pi\frac{j(n-j)}{n}}\mathrm{vol}_n(K).$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 \in K$. Θεωρούμε $1 \leqslant j \leqslant n-1$ και θέτουμε $\lambda = (n-j)/n$. Αφού τα $(1-\lambda)K$ και $-\lambda K$ περιέχονται στο $(1-\lambda)K \vee -\lambda K$, από τη μονοτονία και τις ιδιότητες ομογένειας των μεικτών όγκων βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} V(K[j], -K[n-j]) &= \frac{1}{(1-\lambda)^j\lambda^{n-j}}V((1-\lambda)K[j], -\lambda K[n-j]) \\ &\leqslant \frac{1}{(1-\lambda)^j\lambda^{n-j}}\mathrm{vol}_n((1-\lambda)K \vee -\lambda K) \\ &\leqslant \frac{1}{(1-\lambda)^j\lambda^{n-j}}\mathrm{vol}_n(K), \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 8.3.3. Αντικαθιστώντας την τιμή του λ παίρνουμε το συμπέρασμα του θεωρήματος. □

Στο υπόλοιπο αυτής της ενότητας θα δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 8.3.2. Η απόδειξη θα βασιστεί σε μια γενίκευση ενός επιχειρήματος των Rogers και Shephard. Θεωρούμε δύο κυρτά σώματα K και D στον $\mathbb{R}^n$ και ορίζουμε το $(2n+1)$-διάστατο κυρτό σώμα

$$G(K,D) = \{(x,y,\vartheta) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : \vartheta \in [0,1], x \in \vartheta K, x+y \in (1-\vartheta)D\}.$$

Η προβολή του $G(K,D)$ στον $(n+1)$-διάστατο υπόχωρο των σημείων της μορφής $(0,y,\vartheta)$ συμβολίζεται με $C(K,D)$. Δηλαδή,

$$C(K,D)=\{(0,y,\vartheta):\vartheta\in[0,1],y\in(1-\vartheta)D-\vartheta K\}.$$

Ισοδύναμα,

$$C(K,D)=\{0\}\times \mathrm{conv}(D\times\{0\},-K\times\{1\})\subseteq\{0\}\times\mathbb{R}^{n+1}. \tag{8.3.1}$$

Το βασικό εργαλείο των Rogers και Shephard για την απόδειξη του άνω φράγματος για τον όγκο του σώματος διαφορών ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 8.3.5 (Rogers-Shephard). *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $H=K\cap E$ μια j-διάστατη τομή του K και D η ορθογώνια προβολή του K στον $E^{\perp}$. Τότε,*

$$\frac{j!(n-j)!}{n!}\mathrm{vol}_j(H)\mathrm{vol}_{n-j}(D)\leqslant \mathrm{vol}_n(K). \tag{8.3.2}$$

Απόδειξη. Η αρχική παρατήρηση για την απόδειξη είναι ότι όλες οι ποσότητες στην (8.3.2) παραμένουν αμετάβλητες αν κάνουμε μια συμμετρικοποίηση Schwarz, συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλες οι τομές του K που είναι παράλληλες στον H είναι Ευκλείδειες μπάλες. Δηλαδή, μπορούμε να θεωρήσουμε το σώμα

$$K^*=\left\{(u,y)\in\mathbb{R}^{n-j}\times\mathbb{R}^j: u\in D, |y|\leqslant\left(\frac{\mathrm{vol}_j(K_u)}{\mathrm{vol}_j(B_2^j)}\right)^{1/j}\right\},$$

όπου $K_u=K\cap(E+u)$, για κάθε $u\in D$. Παρατηρούμε επίσης ότι $H^*\vee D\subseteq K^*$, όπου $H^*=K^*\cap E$. Τότε, απλός υπολογισμός δείχνει ότι το αριστερό μέλος της (8.3.2) είναι ίσο με $\mathrm{vol}_n(H^*\vee D)$, και αυτό αποδεικνύει την (8.3.2). □

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 8.3.5 μπορούμε να δώσουμε άνω φράγμα για τον όγκο του $C(K,D)$.

Θεώρημα 8.3.6. *Έστω K και D κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\vartheta\in[0,1]$,*

$$\mathrm{vol}_{n+1}(C(K,D))\leqslant\frac{1}{n+1}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(D)}{\mathrm{vol}_n(\vartheta K\cap(1-\vartheta)D)}\right).$$

Απόδειξη. Για να εκτιμήσουμε τον $\mathrm{vol}_{n+1}(C(K,D))$ εφαρμόζουμε το Θεώρημα 8.3.5 για το κυρτό σώμα $G(K,D)$ και τον n-διάστατο αφφινικό υπόχωρο $E=\{\vartheta=\vartheta_0,y=0\}$. Από το θεώρημα Fubini βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{2n+1}(G(K,D))&=\int_0^1\int_{\vartheta K}\mathrm{vol}_n((1-\vartheta)D)\,dx\,d\vartheta=\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(D)\int_0^1\vartheta^n(1-\vartheta)^n d\vartheta\\&=\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(D)\frac{n!n!}{(2n+1)!}.\end{aligned}$$

Όπως στο Θεώρημα 8.3.5, θέτουμε $H=G(K,D)\cap E$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(\vartheta_0K\cap(1-\vartheta_0)D).$$

Όπως αναφέραμε παραπάνω, η προβολή του $G(K,D)$ στον $E^{\perp}$ είναι ακριβώς το $C(K,D)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 8.3.5 παίρνουμε

$$\frac{n!(n+1)!}{(2n+1)!}\mathrm{vol}_{n+1}(C(K,D))\mathrm{vol}_n(\vartheta_0K\cap(1-\vartheta_0)D)\leqslant\mathrm{vol}_{2n+1}(G(K,D)).$$

Αντικαθιστώντας την τιμή του όγκου του $G(K,D)$ σε αυτή την ανισότητα, έχουμε το συμπέρασμα. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 8.3.5, αυτή τη φορά για το σώμα $C(K,D)$, μαζί με το άνω φράγμα που δίνει το Θεώρημα 8.3.6 για τον όγκο του, δίνουμε εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 8.3.2.

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 8.3.2. Έστω K και D κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K \cap D$, και έστω $\vartheta \in [0,1]$. Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(D \vee -K)\mathrm{vol}_n(\vartheta K \cap (1-\vartheta)D) \leqslant \mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(D).$$

Θεωρούμε τον μονοδιάστατο υπόχωρο E του $\mathbb{R}^{n=1}$ που ορίζεται από την $E = \{x = 0\}$. Το κυρτό σώμα $D \vee -K$ είναι η n-διάστατη προβολή του $C(K,D)$ στον υπόχωρο $E^{\perp} = \{(x,0) : x \in \mathbb{R}^n\}$. Αφού $0 \in K \cap D$, η τομή $H = E \cap C(K,D)$ είναι ένα ευθύγραμμο τμήμα. Από το Θεώρημα 8.3.5,

$$\frac{1}{n+1}\mathrm{vol}_n(-K \vee D) \leqslant \mathrm{vol}_{n+1}(C(K,D)). \tag{8.3.3}$$

Συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με το φράγμα για τον όγκο του $C(K,D)$ που μας δίνει το Θεώρημα 8.3.6, παίρνουμε τη ζητούμενη ανισότητα. □

8.4 Μια ισχυρότερη ανισότητα

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με ένα αδημοσίευτο αποτέλεσμα της Artstein-Avidan, το οποίο δίνει την καλύτερη μέχρι στιγμής εκτίμηση για την εικασία του Godbersen.

Θεώρημα 8.4.1. *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in [0,1]$ ισχύει ότι*

$$\sum_{j=0}^{n} \lambda^j (1-\lambda)^{n-j} V(K[j], -K[n-j]) \leqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

Η απόδειξη θα βασιστεί και πάλι σε ένα λήμμα «τύπου Rogers-Shephard».

Λήμμα 8.4.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ένα κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ ως εξής:*

$$C := \mathrm{conv}((\{0\} \times (1-\lambda)K) \cup (\{1\} \times -\lambda K)).$$

Τότε,

$$\mathrm{vol}_{n+1}(C) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{n+1}.$$

Απόδειξη. Αν K_1, K_2 είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε το κυρτό σώμα $T \subset \mathbb{R}^{2n+1} = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την

$$T = \mathrm{conv}(\{(0,0,y) : y \in K_2\} \cup \{(1,x,-x) : x \in K_1\}).$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} T &= \{(\vartheta, \vartheta x, -\vartheta x + (1-\vartheta)y) : x \in K-1, y \in K_2\} \\ &= \{(\vartheta, w, z) : w \in \vartheta K_1, z + w \in (1-\vartheta)K_2\}. \end{aligned}$$

Μπορούμε τότε να υπολογίσουμε τον όγκο του T ως εξής:

$$\mathrm{vol}_{2n+1}(T) = \mathrm{vol}_n(K_1)\mathrm{vol}_n(K_2)\int_0^1 \vartheta^n(1-\vartheta)^n d\vartheta = \frac{n!n!}{(2n+1)!}\mathrm{vol}_n(K_1)\mathrm{vol}_n(K_2).$$

Θεωρούμε τώρα την τομή του T με τον n-διάστατο αφφινικό υπόχωρο

$$E = \{(\vartheta_0, x, 0) : x \in \mathbb{R}^n$$

καθώς και την προβολή του T στον ορθογώνιο υπόχωρο $E^\perp$. Έχουμε

$$T \cap E = \{(\vartheta_0, x, 0) : x \in \vartheta_0 K_1 \cap (1-\vartheta_0)K_2\},$$

άρα

$$\mathrm{vol}_n(T \cap E) = \mathrm{vol}_n(\vartheta_0 K_1 \cap (1-\vartheta_0)K_2).$$

Για την προβολή παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} P_{E^\perp}(T) &= \{(\vartheta, 0, y) : \text{ υπάρχει } x \text{ τ.ω. } (\vartheta, x, y) \in T\} = \{(\vartheta, 0, y) : \vartheta K_1 \cap (1-\vartheta)K_2 - y\} \\ &= \{(\vartheta, 0, y) : y \in (1-\vartheta)K_2 - \vartheta K_1\}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_{n+1}(P_{E^\perp}(T)) = \mathrm{vol}_{n+1}(\{(\vartheta, y) : y \in (1-\vartheta)K_2 - \vartheta K_1\}) = \mathrm{vol}_{n+1}(\mathrm{conv}((\{0\} \times K_2) \cup (\{1\} \times (-K_1)))).$$

Από το Θεώρημα 8.3.5 έχουμε ότι

$$\mathrm{vol}_{n+1}(P_{E^\perp}(T))\mathrm{vol}_n(T \cap E) \leqslant \binom{2n+1}{n}\mathrm{vol}_{2n+1}(T),$$

άρα

$$\begin{aligned} &\mathrm{vol}_{n+1}(\mathrm{conv}((\{0\} \times K_2) \cup (\{1\} \times (-K_1))))\mathrm{vol}_n(T \cap E)\mathrm{vol}_n(\vartheta_0 K_1 \cap (1-\vartheta_0)K_2) \\ &\qquad \leqslant \binom{2n+1}{n}\frac{n!n!}{(2n+1)!}\mathrm{vol}_n(K_1)\mathrm{vol}_n(K_2), \end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει

$$\mathrm{vol}_{n+1}(\mathrm{conv}((\{0\} \times K_2) \cup (\{1\} \times (-K_1)))) \leqslant \frac{1}{n+1}\frac{\mathrm{vol}_n(K_1)\mathrm{vol}_n(K_2)}{\mathrm{vol}_n(\vartheta_0 K_1 \cap (1-\vartheta_0)K_2)}.$$

Θέτοντας $K_1 := \lambda K$, $K_2 = (1-\lambda)K$ και $\vartheta_0 = 1-\lambda$, συμπεραίνουμε ότι $\vartheta_0 K_1 \cap (1-\vartheta_0)K_2 = \lambda(1-\lambda)K$, άρα η τελευταία ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\mathrm{vol}_{n+1}(\mathrm{conv}((\{0\} \times (1-\lambda)K) \cup (\{1\} \times (-\lambda K)))) \leqslant \frac{1}{n+1}\mathrm{vol}_n(K),$$

δηλαδή έχουμε το συμπέρασμα του λήμματος. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Θεώρημα 8.4.1 με έναν απλό υπολογισμό.

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.4.1. Θεωρούμε το κυρτό σώμα $C = \mathrm{conv}((\{0\}\times(1-\lambda)K)\cup(\{1\}\times -\lambda K))$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{n+1}(C) &= \int_0^1 \mathrm{vol}_n((1-t)(1-\lambda)K - t\lambda K)\,dt\\ &= \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}(1-\lambda)^{n-j}\lambda^j V(K[j],-K[n-j])\int_0^1 (1-t)^{n-j}t^j dt\\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}(1-\lambda)^{n-j}\lambda^j V(K[j],-K[n-j]).\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 8.4.2 έπεται ότι

$$\sum_{j=0}^{n}(1-\lambda)^{n-j}\lambda^j V(K[j],-K[n-j]) \leqslant \mathrm{vol}_n(K),$$

όπως θέλαμε. □

Ολοκληρώνοντας την ανισότητα του Θεωρήματος 8.4.1 ως προς λ παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 8.4.3. *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι*

$$\frac{1}{n+1}\sum_{j=0}^{n}\frac{V(K[j],-K[n-j])}{\binom{n}{j}} \leqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

Η ανισότητα αυτή μπορεί να ξαναγραφεί στη μορφή

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{V(K[j],-K[n-j])}{\binom{n}{j}} \leqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

Το Πόρισμα 8.4.3 δείχνει ότι η εικασία του Godbersen ισχύει κατά (ομοιόμορφο) μέσο όρο. Ο μέσος των ποσοτήτων
$$\frac{V(K[j],-K[n-j])}{\binom{n}{j}\mathrm{vol}_n(K)}$$
είναι μικρότερος από 2, δηλαδή για τις μισές τουλάχιστον τιμές του $j\in\{1,2,\dots,n-1\}$ έχουμε ότι

$$V(K[j],-K[n-j]) \leqslant 2\binom{n}{j}\mathrm{vol}_n(K).$$

Γενικότερα, με απλή εφαρμογή της ανισότητας Markov για το ομοιόμορφο μέτρο στο $\{1,2,\dots,n-1\}$ παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 8.4.4. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $1\leqslant k\leqslant n-1$ τότε για τουλάχιστον k από τους δείκτες $j=1,2,\dots,n-1$ ισχύει ότι*

$$V(K[j],-K[n-j]) \leqslant \frac{n-1}{n-k}\binom{n}{j}\mathrm{vol}_n(K).$$

CHAPTER 9

Summary

9.1 The problem

The covering problem that we study in this Thesis asks to find the minimal number of translates of the interior of a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ that are required in order to cover K. In other words, it asks for the value of the parameter

$$b_0(K) = \min\left\{N \in \mathbb{N} : \exists x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ such that } K \subseteq \bigcup_{i=1}^{N}(x_i + \mathrm{int}(K))\right\}.$$

The conjecture states that $b_0(K) \leqslant 2^n$ for every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$. It was formulated, for $n \geqslant 3$, by Hadwiger [60] in 1957, who also asked if 2^n translates are required only in the case where K is an affine image of the n-cube $[0,1]^n$. In the planar case, the problem had been already studied and answered by Levi [76] in 1955. An equivalent, as we will see, formulation, in which the interior of the convex body is replaced by smaller copies of it, had been given independently by Gohberg and Markus in [56].

These two versions of the covering problem are equivalent with two versions of the illumination problem. More precisely, we have the following four problems:

- *Covering with smaller copies.* Let K be a convex body in $\mathbb{R}^n$. We ask for the minimal number, N, of smaller copies $K_1, \dots, K_N$ of K whose union covers K:

  $$K \subseteq K_1 \cup \cdots \cup K_N.$$

  We denote this number by $b(K)$. Saying "smaller copies" of K we mean that each K_i is a convex body of the form $K_i = \kappa_i K + x_i$ for some $\kappa_i \in (0,1)$ and some $x_i \in \mathbb{R}^n$.

- *Covering with copies of the interior.* Let K be a convex body in $\mathbb{R}^n$. We ask for the minimal number, N, of translates $K_1, \dots, K_N$ of K such that the union of their interiors covers K:

  $$K \subseteq \mathrm{int}(K_1) \cup \cdots \cup \mathrm{int}(K_N).$$

  We denote this number by $b_0(K)$.

- *Illumination problem.* Let K be a convex body in $\mathbb{R}^n$. We say that a point $x \in \mathrm{bd}(K)$ is illuminated by a direction u in $\mathbb{R}^n$ if the ray that emanates from x and has direction u contains some interior point of K. In other words, we say that a boundary point x of K is illuminated by u if $x+\lambda e \in \mathrm{int}(K)$ for all sufficiently small $\lambda > 0$, where e is the unit vector in the direction of u. We say that the directions that are determined by the non-zero vectors $u_1, \dots, u_N$ illuminate the boundary of K if every $x \in \mathrm{bd}(K)$ is illuminated by at least one of these directions. We ask to find the minimal number N for which there exist N non-zero vectors whose directions illuminate the boundary of K. We denote this minimal number N by $c(K)$.

- *Central illumination problem.* Let K be a convex body in $\mathbb{R}^n$. Let $x \in \mathbb{R}^n \setminus K$ be a "light source". We say that a point $y \in \mathrm{bd}(K)$ is illuminated by x if the infinite ray from x towards y and the interior of K have common points outside the line segment $[x, y]$. We also say that a set $N \subseteq \mathrm{bd}(K)$ is illuminated by a set $M \subseteq \mathbb{R}^n \setminus K$ if every point of N is illuminated by at least one point of M. We ask to find the minimal number N for which we may find a set $M = \{x_1, \dots, x_N\} \subset \mathbb{R}^n \setminus K$ that illuminates the whole boundary of K. We denote this minimal number N by $c_0(K)$.

All these parameters can be defined, more generally, for every closed convex subset K of $\mathbb{R}^n$ (possibly with an infinite value). However, in the case where K is a convex body, they are all finite and equal:

$$b(K) = b_0(K) = c(K) = c_0(K).$$

The conjecture that $c(K) \leqslant 2^n$ was formulated again by Hadwiger [61] in 1960, but around the same time Boltyanski [18] had observed the equivalence of the illumination problem and the covering problem. The prehistory of these problems is described, for example, in [13], [29], [88], and we shall discuss it in Section 3.2.

For a long period, the best known upper bound for the parameter $b_0(K)$ remained

$$b_0(K) \leqslant \binom{2n}{n}(n \ln n + n \ln \ln n + 5n),$$

and in the case of centrally symmetric convex bodies,

$$b_0(K) \leqslant 2^n(n \ln n + n \ln \ln n + 5n).$$

These two upper bounds follow (see [46] or [98]) in a simple way, if we combine the estimates of Rogers [94] for the covering density $\vartheta(K)$ of $\mathbb{R}^n$ by a (general) convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ with the Rogers-Shephard inequality [95] for the volume of the difference body of a convex body.

Stronger estimates in low dimensions have been proved in [10, 14, 15, 20, 37, 65, 73, 92, 93]. Hadwiger's conjecture has been confirmed for some classes of convex bodies, such as bodies of constant width and fat spindle bodies - see [11, 100], belt bodies - see [21, 22, 23, 19, 81], bodies of Helly dimension 2 [20], dual cyclic polytopes [12, 104].

A fractional version of the illumination problem was studied by Naszódi [86], who obtained the upper bounds 2^n in the centrally symmetric case and $\binom{2n}{n}$ in the general case. Artstein-Avidan and Slomka [5] obtained similar bounds, studying fractional versions of the covering numbers of convex bodies. They also showed that the n-cube is an extremal body for the problem in the centrally symmetric case. Combining these estimates with an inequality that connects integral covering numbers with fractional covering numbers, Artstein and Slomka obtained upper bounds for the classical Hadwiger's problem, which were of exactly the same order as the ones that follow from the estimates of Rogers. These bounds were obtained, once again, by Livshyts and Tikhomirov in [77] (see also [78] and [106]).

Recently, the previously known bounds were improved with the use of tools and new results from asymptotic geometric analysis. Huang, Slomka, Tkocz and Vritsiou proved in [64] that there exist absolute constants $c_1, c_2 > 0$ such that, for every $n \geqslant 2$ and every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2\sqrt{n}}. \tag{9.1.1}$$

For the proof of this inequality, the authors combine the approach of [5] with a new lower bound for the Kövner-Besicovitch measure of symmetry of a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$, which is defined by

$$\Delta_{KB}(K) = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{vol}_n((K-x)\cap(x-K))}{\mathrm{vol}_n(K)} = \max_{x\in\mathbb{R}^n} \frac{\mathrm{vol}_n(K\cap(x-K))}{\mathrm{vol}_n(K)}.$$

It is simple to check that $\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n}$ for every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$ and it has been conjectured that the minimum is obtained when K is a simplex, which would give a lower bound of the form $\left(\frac{2}{e}\right)^n$ (see [58] and [105] for more details). Using the thin-shell estimates of Guédon and E. Milman [59] the authors prove in [64] that there exists an absolute constant $c > 0$ such that

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n} \exp(c\sqrt{n}) \tag{9.1.2}$$

for every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$. This leads to the upper bound given in (9.1.1).

Very recently, Campos, van Hintum, Morris and Tiba [31] improved (9.1.1) by an almost exponential factor. More precisely, they showed that, for every $n \geqslant 2$ and every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/L_K^2}, \tag{9.1.3}$$

where L_K is the isotropic constant of K. It is conjectured that there exists an absolute constant C such that, for every $n \geqslant 2$ and every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$L_K \leqslant C.$$

Assuming this conjecture the improvement of the bound for the covering number $N(K, \mathrm{int}(K))$ in [31] is indeed exponential. The isotropic constant conjecture is not yet confirmed, and for several years the best known upper bound was

$$L_K \leqslant c\sqrt[4]{n}$$

for every $n \geqslant 2$ and every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$. However, there were recent important developments on this problem, and right now the best known upper bound is

$$L_K \leqslant c(\ln n)^4$$

for every $n \geqslant 2$ and every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$. Therefore, the result of Campos, van Hintum, Morris and Tiba guarantees that

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/(\ln n)^8} \tag{9.1.4}$$

for every $n \geqslant 2$ and every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$. As in the previous article of Huang, Slomka, Tkocz and Vritsiou, the proof of (9.1.3) is based on a new estimate for the Kövner-Besicovitch measure of symmetry of a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$. It is proved that

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n} \exp(cn/L_K^2) \tag{9.1.5}$$

for every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$. Apart from this, the approach in [31] is similar to the one in [64].

We present all these general estimates for the covering problem, and we also provide the background that is necessary and the proof for each one of them. In the next section we describe in more detail the contents of each chapter of the Thesis.

9.2 Outline of the Thesis

In this section we briefly review the main notions and results that we study in this Thesis.

Chapter 2. We provide the necessary definitions from the theory of convex bodies and give a proof of the fundamental Brunn-Minkowski inequality

$$\mathrm{vol}_n(K+T)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n}$$

which holds true for every pair of non-empty compact sets K and T in $\mathbb{R}^n$ through its functional version, the Prékopa-Leindler inequality. We also prove the Rogers-Shephard inequality for the volume of the difference body

$$K - K = \{x - y \,:\, x, y \in K\}$$

of a convex body K in $\mathbb{R}^n$. We have that

$$2^n \mathrm{vol}_n(K) \leqslant \mathrm{vol}_n(K-K) \leqslant \binom{2n}{n} \mathrm{vol}_n(K)$$

with equality on the left if and only if K is symmetric about 0 and equality on the right if and only if K is a simplex.

Chapter 3. We prove that for every convex body K in $\mathbb{R}^n$ the four parameters that we defined in the previous section, namely,

(i) the parameter $b(K)$ of covering with smaller copes,

(ii) the parameter $b_0(K)$ of covering with copies of the interior,

(iii) the parameter $c(K)$ of illumination, and

(iv) the parameter $c_0(K)$ of central illumination,

are equal. We also describe examples which show that this is no longer true for unbounded closed convex subsets of $\mathbb{R}^n$. Then we formulate Hadwiger's conjecture which, in the case where K is a convex body in $\mathbb{R}^n$, and in view of the equalities above, asserts that the four numbers

$$b(K) = b_0(K) = c(K) = c_0(K)$$

are bounded by 2^n with equality if and only if K is a parallelepiped. In the last section of this chapter we review the interesting prehistory of the problem until the moment it was finally stated in this form.

Chapter 4. We introduce the notion of covering and the notion of packing of a convex body K in $\mathbb{R}^n$, and then we define the packing dendity and the covering density of K as follows: For every sequence $\{x_i\}_{i\geqslant 1}$ of points in $\mathbb{R}^n$ we consider the sequence

$$\mathcal{K} := \{x_i + K : i \geqslant 1\}$$

of the translates $x_i + K$ of K and for any half-open cube

$$C = \left\{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : c_i - \tfrac{s}{2} \leqslant x_i < c_i + \tfrac{s}{2}, 1 \leqslant i \leqslant n\right\}$$

we define

$$\varrho_+(\mathcal{K}, C) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)} \sum_{(x_i+K)\cap C\neq\varnothing} \mathrm{vol}_n(x_i + K)$$

and

$$\varrho_-(\mathcal{K}, C) := \frac{1}{\mathrm{vol}_n(C)} \sum_{(x_i+K)\subseteq C} \mathrm{vol}_n(x_i + K).$$

In other words, $\varrho_+(\mathcal{K}, C)$ is the ratio of the total volume of the sets from $\mathcal{K}$ that intersect the cube C and the volume of C, while $\varrho_-(\mathcal{K}, C)$ is the total volume of the sets from $\mathcal{K}$ that are contained in C and the volume of C. We write $s(C)$ for the length of the edges of the cube C and define the upper and lower density of the family $\mathcal{K}$ setting

$$\varrho_+(\mathcal{K}) = \limsup_{s(C)\to\infty} \varrho_+(\mathcal{K}, C) = \lim_{s\to\infty} \sup_{s(C)\geqslant s} \varrho_+(\mathcal{K}, C)$$

and

$$\varrho_-(\mathcal{K}) = \liminf_{s(C)\to\infty} \varrho_-(\mathcal{K}, C) = \lim_{s\to\infty} \inf_{s(C)\geqslant s} \varrho_-(\mathcal{K}, C).$$

Finally, we define the packing density $\delta(K)$ of K by

$$\delta(K) = \sup_{\mathcal{K}} \varrho_+(\mathcal{K}),$$

where the supremum is over all sequences $\mathcal{K}$ of translates of K that form a packing in $\mathbb{R}^n$ and the covering density $\vartheta(K)$ of K by

$$\vartheta(K) = \inf_{\mathcal{K}} \varrho_-(\mathcal{K}),$$

where the infimum is over all sequences $\mathcal{K}$ of translates of K that form a covering of $\mathbb{R}^n$. We also prove that these two parameters are invariant under affine transformations of $\mathbb{R}^n$. Then, we compare the parameters $\delta(K)$ and $\vartheta(K)$ and provide lower bounds for them.

The main theorem in this chapter is due to Rogers. He proved that for every convex body K in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, one has the upper bound

$$\vartheta(K) \leqslant n \ln n + n \ln\ln n + 5n.$$

This inequality is closely related with Hadwiger's conjecture. It is not hard to show that if K and D are two bounded convex sets in $\mathbb{R}^n$ with non-empty interior, then

$$N(K, D) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K - D)}{\mathrm{vol}_n(D)}\, \vartheta(D).$$

Choosing $D = \mathrm{int}(K)$ and using the Rogers-Shephard inequality we see that $N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant 2^n\vartheta(K)$ if K

is symmetric and $N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant \binom{2n}{n}\vartheta(K)$ in the general case. Then, the upper bound of Rogers for the parameter $\vartheta(K)$ has the following immediate consequences: If K is a convex body in $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, then

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant 2^n(n \ln n + n \ln \ln n + 5n)$$

if K is symmetric, and

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant \binom{2n}{n}(n \ln n + n \ln \ln n + 5n)$$

in the general case.

Chapter 5. We generalize the notion of covering numbers, and define weighted coverings and, more generally, covering measures. We denote by $\mathcal{D}_+^n$ the class of non-negative discrete and finite measures on $\mathbb{R}^n$. If $K \subset \mathbb{R}^n$ is a compact set and $T \subset \mathbb{R}^n$ is a compact set with non-empty interior, then we say that $\mu \in \mathcal{D}_+^n$ is a covering measure of K by T if $\mu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K$. The generalized covering number of K by T is defined as follows:

$$N_\omega(K, T) = \inf\{\nu(\mathbb{R}^n) : \nu * \mathbb{1}_T \geqslant \mathbb{1}_K,\ \nu \in \mathcal{D}_+^n\}.$$

A measure $\mu \in \mathcal{D}_+^n$ is called T-separated if $\mu * \mathbb{1}_T \leqslant 1$. The generalized separation number of K by T is defined as follows:

$$M_\omega(K, T) = \sup\left\{\int_K d\nu : \nu * \mathbb{1}_T \leqslant 1,\ \nu \in \mathcal{D}_+^n\right\}.$$

We consider several variants of these notions and prove inequalities that relate these covering and separation numbers, as well duality relations between them.

One of the basic results of this chapter, which will be useful for us in Chapter 7, asserts that if K is a compact subset of $\mathbb{R}^n$ with non-empty interior, then

$$N(K, T_1 + T_2) \leqslant \ln(4\overline{N}(K, T_2))(N_\omega(K, T_1) + 1) + \sqrt{\ln(4\overline{N}(K, T_2))(N_\omega(K, T_1) + 1)},$$

where $N(A, B)$ is the usual covering number of A by translates of B and $\overline{N}(A, B)$ is the covering number of A by translates of B with centers in A. Already, using this result, we may give an alternative proof of the estimate of Rogers for Hadwiger's conjecture: If $K \subset \mathbb{R}^n$ is a symmetric convex body, where $n \geqslant 3$, then

$$\lim_{\lambda \to 1^-} N(K, \lambda K) \leqslant 2^n(n \ln(n) + n \ln \ln(n) + 5n).$$

Chapter 6. A Borel probability measure μ on $\mathbb{R}^n$ is called logarithmically concave (log-concave) if it is absolutely continuous with respect to Lebesgue measure and for every pair of compact sets A, B in $\mathbb{R}^n$ and any $0 < \lambda < 1$ one has

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^\lambda.$$

We present basic properties of log-concave probability measures on $\mathbb{R}^n$ and, in particular, we introduce the notion of an isotropic convex body and an isotropic log-concave probability measure. In the last section of this chapter we briefly review some well-known problems in this area:

(i) the isotropic constant conjecture,

(ii) the Kannan-Lovász-Simonovits conjecture, and

(iii) the thin-shell conjecture.

These three problems are closely related and very recent and impressive results indicate that they may all have a positive answer. More precisely, it is already known that the three conjectures hold true if we ignore factors that are logarithmic in the dimension. In Chapter 8 we use the currently best known results for the conjectures (iii) and (i).

Chapter 7. We present detailed proofs of the two recent results on Hadwiger's conjecture that we have already described in the previous section of this summary. First, we describe the work of Huang, Slomka, Tkocz and Vritsiou, who proved in [64] that there exist absolute constants $c_1, c_2 > 0$ such that, for any $n \geqslant 2$ and any convex body $K \subset \mathbb{R}^n$,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2\sqrt{n}}. \tag{9.2.1}$$

The main step for the proof of this estimate is to obtain the lower bound

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n}\exp(c\sqrt{n}) \tag{9.2.2}$$

for the Kövner-Besicovitch measure of symmetry $\Delta_{KB}(K)$ of a convex body $K \subset \mathbb{R}^n$. The proof of this lower bound exploits the thin-shell estimates of Guédon and E. Milman.

Next, we describe the work of Campos, van Hintum, Morris and Tiba [31] who proved that, for any $n \geqslant 2$ and any convex body $K \subset \mathbb{R}^n$, one has the lower bound

$$\Delta_{KB}(K) \geqslant 2^{-n}\exp(cn/L_K^2)$$

and hence,

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/L_K^2},$$

where L_K is the isotropic constant of K. Since it is now known that $L_K \leqslant C(\ln n)^4$ for every $n \geqslant 2$ and any convex body $K \subset \mathbb{R}^n$, the result of Campos, van Hintum, Morris and Tiba implies that

$$N(K, \mathrm{int}(K)) \leqslant c_1 4^n e^{-c_2 n/(\ln n)^8}$$

for every $n \geqslant 2$ and every convex body $K \subset \mathbb{R}^n$.

Chapter 8. The starting point of this chapter is the Rogers-Shephard inequality $\mathrm{vol}_n(K-K) \leqslant \binom{2n}{n}\mathrm{vol}_n(K)$ from Chapter 2. In 1938, Godbersen made the conjecture that for every convex body K in $\mathbb{R}^n$ the following stronger inequality holds true: For every $1 \leqslant j \leqslant n-1$,

$$V(K[j], -K[n-j]) \leqslant \binom{n}{j}\mathrm{vol}_n(K),$$

where the quantity $V(K_1, \ldots, K_n)$ is the mixed volume of the n-tuple of convex bodies $K_1, \ldots, K_n$, and we denote by $V(K[j], D[n-j])$ the mixed volume of j copies of the convex body K and $n-j$ copies of the convex body D. It is relatively simple to check that, conversely,

$$V(K[j], -K[n-j]) \geqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

The cases $j = 1$ and $j = n-1$ of Godbersen's conjecture follow from the fact that if K is a convex body in $\mathbb{R}^n$ with barycenter at 0 then $-K \subseteq nK$. The same inclusion, combined with the monotonicity of mixed volumes, shows that

$$V(K[j],-K[n-j]) \leqslant n^{\min\{j,n-j\}}\mathrm{vol}_n(K)$$

for every $0 \leqslant j \leqslant n$. The fact that Godbersen's conjecture is stronger than the Rogers-Shephard inequality can be seen if we observe that, assuming the conjecture, we may write

$$\mathrm{vol}_n(K-K) = \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V(K[j],-K[n-j]) \leqslant \sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}^2\mathrm{vol}_n(K) = \binom{2n}{n}\mathrm{vol}_n(K).$$

We present a result of Artstein-Avidan, Einhorn, Florentin and Ostrover, which gives the best known estimate for the problem: if K is a convex body in $\mathbb{R}^n$ and $1 \leqslant j \leqslant n-1$, then

$$V(K[j],-K[n-j]) \leqslant \frac{n^n}{j^j(n-j)^{n-j}}\mathrm{vol}_n(K) \simeq \binom{n}{j}\sqrt{2\pi\frac{j(n-j)}{n}}\mathrm{vol}_n(K).$$

We also present a subsequent observation of Artstein-Avidan: if K is a convex body in $\mathbb{R}^n$ and $\lambda \in [0,1]$, then

$$\sum_{j=0}^{n}\lambda^j(1-\lambda)^{n-j}V(K[j],-K[n-j]) \leqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

Integrating this inequality with respect to λ we see that

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n-1}\frac{V(K[j],-K[n-j])}{\binom{n}{j}} \leqslant \mathrm{vol}_n(K).$$

This last inequality shows that Godbersen's conjecture is true on (uniform) average. Applying Markov's inequality we see that for every convex body K in $\mathbb{R}^n$ and every $1 \leqslant k \leqslant n-1$, at least k of the indices $j = 1, 2, \ldots, n-1$ satisfy

$$V(K[j],-K[n-j]) \leqslant \frac{n-1}{n-k}\binom{n}{j}\mathrm{vol}_n(K).$$

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A

Τα θεωρήματα των Lovász και Stein

Σε αυτό το Παράρτημα παρουσιάζουμε τα συνδυαστικά αποτελέσματα των Lovász και Stein τα οποία χρησιμοποιήθηκαν υπό τη μορφή του Θεωρήματος 7.1.13.

A.1 Το θεώρημα του Lovász

Ορισμός A.1.1. Μια πεπερασμένη συλλογή πεπερασμένων συνόλων καλείται υπεργράφημα. Τα σύνολα που περιέχονται στη συλλογή αυτή ονομάζονται ακμές και τα στοιχεία των ακμών, κορυφές. Το σύνολο των ακμών ενός υπεργραφήματος H συμβολίζεται με $E(H)$ και το σύνολο των κορυφών του με $V(H)$.

Ορισμός A.1.2. Ο βαθμός μιας κορυφής είναι το πλήθος των ακμών στις οποίες ανήκει. Ο μέγιστος βαθμός κορυφής του υπεργραφήματος H συμβολίζεται με $d(H)$.

Σημείωση A.1.3. Στις περιπτώσεις που τα εμπλεκόμενα γραφήματα είναι λίγα και δεν υπάρχει κίνδυνος σύγχυσης του συμβολισμού, θα αφαιρούμε το H από το $d(H)$. Το ίδιο ισχύει για όλες τις συναρτήσεις του H που θα ορίσουμε παρακάτω.

Ορισμός A.1.4. Έστω H ένα υπεργράφημα. Ένα k-ταίριασμα του H είναι μια συλλογή ακμών, $\mathcal{M}$, τέτοια ώστε κάθε κορυφή να ανήκει σε k το πολύ από τις ακμές που περιέχονται στην $\mathcal{M}$. Το μέγιστο πλήθος ακμών σε ένα k-ταίριασμα συμβολίζεται με $\nu_k(H)$. Ορίζουμε επίσης $\nu(H) = \nu_1(H)$.

Σημείωση A.1.5. Στην συλλογή ενός k-ταιριάσματος οι ακμές μπορούν να επαναλαμβάνονται.

Παρατηρήσεις A.1.6.
(i) Στην περίπτωση που οι ακμές είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα, ο $\nu(H)$ ταυτίζεται με τον πληθάριθμο του $E(H)$. Πράγματι, κάθε κορυφή ανήκει σε μία ακριβώς ακμή, άρα ως 1-ταίριασμα μπορούμε να θεωρήσουμε το μέγιστο υποσύνολο ακμών, το $E(H)$.

(ii) Ο $\nu(H)$ ισούται με το πλήθος των ξένων μεταξύ τους ακμών.

Ορισμός A.1.7. Ένα k-ταίριασμα ονομάζεται απλό αν δεν υπάρχουν επαναλήψεις ακμών σε αυτό. Το μέγιστο πλήθος ακμών ενός απλού k-ταιριάσματος συμβολίζεται με $\tilde{\nu}_k$.

Παρατήρηση A.1.8. Ισχύει ότι $\tilde{\nu}_k \leqslant \nu_k$ καθώς κάθε απλό k-ταίριασμα είναι k-ταίριασμα.

Λήμμα A.1.9. *Έστω H ένα υπεργράφημα. Τότε ισχύει ότι $\tilde{\nu}_d = |E(H)|$.*

Απόδειξη. Η ανισότητα $|E(H)| \geqslant \tilde{\nu}_d$ είναι προφανής. Αρκεί να δείξουμε ότι το $E(H)$ είναι απλό d-ταίριασμα. Πράγματι, κάθε ακμή υπάρχει μια φορά στο $E(H)$ και καθώς ο μέγιστος βαθμός κορυφής είναι d, κάθε κορυφή περιέχεται σε d το πολύ ακμές. Επομένως, $|E(H)| \leqslant \tilde{\nu}_d$, όπως θέλαμε. □

Ορισμός A.1.10. Έστω H ένα υπεργράφημα. Μια συλλογή T κορυφών του H καλείται k-κάλυμμα αν κάθε ακμή περιέχει τουλάχιστον k κορυφές από την T. Το ελάχιστο πλήθος στοιχείων ενός k-καλύμματος συμβολίζεται με $\tau_k(H)$. Ορίζουμε επίσης $\tau(H) = \tau_1(H)$.

Παρατήρηση A.1.11. Ένα 1-κάλυμμα του H είναι ένα σύνολο αντιπροσώπων, με την έννοια ότι κάθε ακμή περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του 1-καλύμματος. Επομένως, ο $\tau(H)$ είναι το ελάχιστο πλήθος αντιπροσώπων ακμών. Έτσι, εύκολα παρατηρούμε ότι αν οι ακμές είναι ξένα μεταξύ τους σύνολα, ο $\tau(H)$ ταυτίζεται με το πλήθος τους, ενώ αν έχουν μη κενή τομή, ο $\tau(H)$ είναι 1.

Ορισμός A.1.12. Ένα κλασματικό ταίριασμα είναι ένα σύνολο βαρών $\{\omega_E : E \in H\}$ που ικανοποιεί τα παρακάτω:

$$\omega_E \geqslant 0 \quad \text{και} \quad \sum_{x \in E} \omega_E \leqslant 1$$

για κάθε κορυφή $x \in V(H)$. Ορίζουμε $\nu^*(H) = \max \sum_E \omega_E$, όπου το μέγιστο λαμβάνεται πάνω από όλα τα κλασματικά ταιριάσματα.

Ορισμός A.1.13. Ένα κλασματικό κάλυμμα είναι ένα σύνολο βαρών $\{t_x : x \in V(H)\}$ που ικανοποιεί το παρακάτω:

$$\sum_{x \in E} t_x \geqslant 1$$

για κάθε ακμή E. Ορίζουμε $\tau^*(H) = \min \sum_x t_x$, όπου το ελάχιστο λαμβάνεται πάνω από όλα τα κλασματικά καλύμματα.

Η επόμενη παρατήρηση επισημαίνει ότι τα κλασματικά ταιριάσματα και καλύμματα είναι γενικεύσεις των αντίστοιχων k-ταιριασμάτων και καλυμμάτων.

Παρατηρήσεις A.1.14. (i) Έστω $\mathcal{M}$ ένα k-ταίριασμα. Θεωρώντας το σύνολο βαρών που προκύπτει αν θέσουμε $\omega_E = \frac{1}{k}$ για κάθε $E \in \mathcal{M}$ και $\omega_E = 0$ διαφορετικά, παρατηρούμε ότι το $\{\omega_E : E \in H\}$ είναι κλασματικό ταίριασμα. Πράγματι, κάθε κορυφή x ανήκει σε k το πολύ ακμές του $\mathcal{M}$. Επομένως, για κάθε x ισχύει ότι $\sum_{x \in E} \omega_E \leqslant \sum_{x \in E \in \mathcal{M}} \frac{1}{k} \leqslant 1$.

(ii) Έστω T ένα k-κάλυμμα. Θεωρώντας το σύνολο βαρών που προκύπτει αν θέσουμε $t_x = \frac{1}{k}$ για $x \in T$ και $t_x = 0$ διαφορετικά, παρατηρούμε ότι καθώς εξ' ορισμού κάθε ακμή περιέχει τουλάχιστον k σημεία του T, ισχύει ότι $\sum_{x \in E} t_x \geqslant 1$.

Λήμμα A.1.15. *Έστω H ένα υπεργράφημα. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι*

$$\nu \leqslant \frac{\nu_k}{k} \leqslant \nu^* = \tau^* \leqslant \frac{\tau_k}{k} \leqslant \tau.$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα δυϊσμού ισχύει η ισότητα $\nu^* = \tau^*$. Για την πρώτη ανισότητα, θεωρούμε $k \in \mathbb{N}$, ένα k-ταίριασμα $\mathcal{M}$ με πλήθος ακμών ν_k και Λ το μέγιστο σύνολο ξένων μεταξύ τους ακμών, δηλαδή το 1-ταίριασμα πληθαρίθμου ν. Τότε το σύνολο Λ^k που αποτελείται από k αντίτυπα κάθε ακμής του συνόλου Λ είναι ένα k-ταίριασμα με πλήθος ακμών $k\nu$, άρα εξ' ορισμού του ν_k προκύπτει ότι $\nu_k \geqslant k\nu$, απ' όπου προκύπτει η πρώτη ανισότητα. Για την δεύτερη, θεωρούμε το κλασματικό ταίριασμα που επάγεται από το $\mathcal{M}$, όπως στο πρώτο σκέλος των Παρατηρήσεων A.1.14. Εύκολα παρατηρούμε τώρα ότι $\sum_E \omega_E = \frac{\nu_k}{k}$, άρα $\nu^* \geqslant \frac{\nu_k}{k}$. Ακολουθώντας την ίδια συλλογιστική πορεία, θεωρούμε ένα k-κάλυμμα T που αποτελείται από τ_k κορυφές και το 1-κάλυμμα U που αποτελείται από τ κορυφές. Η συλλογή U^k k αντιγράφων των στοιχείων του U είναι k-κάλυμμα με πλήθος στοιχείων $k\tau$, άρα $\tau_k \leqslant k\tau$. Για την τελευταία προς απόδειξη ανισότητα, θεωρούμε το κλασματικό κάλυμμα που επάγεται απο το T, όπως στο δεύτερο σκέλος των Παρατηρήσεων A.1.14. Τότε, $\sum_x t_x = \frac{\tau_k}{k}$ και συνεπώς $\tau^* \leqslant \frac{\tau_k}{k}$, όπως θέλαμε. □

Στη συνέχεια επικεντρώνουμε τη προσοχή μας στον τρόπο εύρεσης συνόλου αντιπροσώπων. Διαισθητικά, ο πιο προφανής τρόπος είναι να εφαρμόσουμε τον εξής αλγόριθμο: επιλέγουμε την κορυφή με τον μεγαλύτερο βαθμό, έστω x_1. Υποθέτοντας ότι έχουμε επιλέξει κορυφές $x_1, \ldots, x_i$ οι οποίες δεν καλύπτουν όλες τις ακμές, επιλέγουμε την κορυφή που καλύπτει το μεγαλύτερο πλήθος από τις εναπομείνασες ακμές, και ονομάζουμε x_{i+1} αυτήν την κορυφή. Ακολουθώντας αυτή τη διαδικασία μέχρι να καλυφθούν όλες οι ακμές εξάγουμε ένα σύνολο αντιπροσώπων $\{x_1, \ldots, x_t\}$. Δεν εξασφαλίζεται σε κάποιο βήμα ότι αυτό το σύνολο είναι το βέλτιστο δυνατό, δηλαδή ότι έχει το μικρότερο πλήθος στοιχείων. Στη συνέχεια θα αναφερόμαστε στον παραπάνω αλγόριθμο με τον όρο «άπληστος αλγόριθμος». Προφανώς για το πλήθος στοιχείων του συνόλου που δημιουργείται με αυτόν τον τρόπο ισχύει ότι $t \geqslant \tau$.

Θεώρημα A.1.16 (Lovász). *Έστω H ένα υπεργράφημα και t το πλήθος των στοιχείων που εξάγει ένας άπληστος αλγόριθμος. Τότε ισχύει ότι*

$$t \leqslant \frac{\tilde{\nu}_1}{1 \cdot 2} + \frac{\tilde{\nu}_2}{2 \cdot 3} + \cdot \cdot + \frac{\tilde{\nu}_{d-1}}{(d-1) \cdot d} + \frac{\tilde{\nu}_d}{d}$$

όπου d είναι ο βαθμός του υπεργραφήματος και $\tilde{\nu}_d = |E(H)|$.

Απόδειξη. Αρχικά, σημειώνουμε ότι η τελευταία ισότητα στη διατύπωση του θεωρήματος ισχύει από το Λήμμα A.1.9. Για την ανισότητα, ορίζουμε t_i να είναι το πλήθος των βημάτων του άπληστου αλγορίθμου κατά τα οποία καλύπτονται i νέες ακμές. Μετά από $t_d + \cdots + t_{i+1}$ βήματα, το υπεργράφημα που σχηματίζεται από τις εναπομείνασες ακμές έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του i. Ονομάζουμε αυτό το υπεργράφημα H_i και παρατηρούμε ότι

$$|E(H_i)| \leqslant \tilde{\nu}_i.$$

Με επαγωγή στον βαθμό του αποδεικνύουμε ότι

$$|E(H_i)| = it_i + \cdots + 2t_2 + t_1.$$

Πράγματι, για $i = 1$, το υπεργράφημα H_1 έχει βαθμό μικρότερο ή ίσο του 1 και σε κάθε βήμα καλύπτεται ακριβώς μία ακμή, ισοδύναμα $|E(H_1)| = t_1$. Υποθέτοντας ότι ισχύει η προς απόδειξη ισότητα για βαθμό μικρότερο ή ίσο του $i-1$, για το υπεργράφημα H_i έχουμε τις εξής επιλογές: αν έχει βαθμό $i-1$, τότε καθώς $t_i = 0$ από την επαγωγική υπόθεση έχουμε το ζητούμενο. Διαφορετικά, το πλήθος των ακμών που καλύπτονται επιλέγοντας στοιχεία που καλύπτουν i ακμές κάθε φορά, μέχρι να φτάσουμε σε υπεργράφημα βαθμού μικρότερου ή ίσου του $i-1$, είναι it_i. Μετρώντας και τις υπόλοιπες ακμές, από την επαγωγική υπόθεση βλέπουμε ότι πάλι ισχύει η ζητούμενη ισότητα.

Επομένως, από τα παραπάνω, για κάθε i από 1 μέχρι d, έχουμε

$$it_i + \cdots + 2t_2 + t_1 \leqslant \tilde{\nu}_i.$$

Πολλαπλασιάζουμε την ανισότητα που προκύπτει για $i = 1$ με $\frac{1}{1\cdot 2}$, για $i = 2$ με $\frac{1}{2\cdot 3}$ και συνεχίζουμε έτσι για κάθε i μέχρι το $d-1$. Για $i = d$ πολλαπλασιάζουμε με $\frac{1}{d}$ και προσθέτουμε όλες τις νέες ανισότητες. Τότε, ο συντελεστής κάθε t_i στο αριστερό μέλος υπολογίζεται ως εξής:

$$
\begin{aligned}
&i\left(\frac{1}{i(i+1)} + \cdots + \frac{1}{d(d-1)} + \frac{1}{d}\right) = \\
&i\left(\frac{1}{i} - \frac{1}{i+1} + \frac{1}{i+1} - \frac{1}{i+2} + \cdots + \frac{1}{d-1} - \frac{1}{d} + \frac{1}{d}\right) = 1,
\end{aligned}
$$

και στο δεξιό μέλος έχουμε το άθροισμα

$$\sum_{i=1}^{d-1} \frac{\tilde{v}_i}{i(i+1)} + \frac{\tilde{v}_d}{d}.$$

Καθώς $t = t_d + \cdots + t_1$, έπεται η ζητούμενη ανισότητα

$$t \leqslant \frac{\tilde{v}}{1\cdot 2} + \frac{\tilde{v}_2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\tilde{v}_{d-1}}{(d-1)\cdot d} + \frac{\tilde{v}_d}{d}.$$

□

Πόρισμα Α.1.17. *Έστω H ένα υπεργράφημα H. Τότε ισχύει ότι*

$$\tau \leqslant \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{d}\right)\tau^* < (1 + \ln d)\tau^*.$$

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι $\tau \leqslant t$, όπου t είναι το πλήθος των στοιχείων του συνόλου που προκύπτει από τον άπληστο αλγόριθμο. Τότε, από το Θεώρημα Α.1.16, ισχύει ότι

$$t \leqslant \frac{\tilde{v}_1}{1\cdot 2} + \frac{\tilde{v}_2}{2\cdot 3} + \cdots + \frac{\tilde{v}_{d-1}}{(d-1)\cdot d} + \frac{\tilde{v}_d}{d},$$

και χρησιμοποιώντας τις $v^* = \tau^*$ και $\tilde{v}_i \leqslant v_i \leqslant iv^*$ για κάθε i, που αποδείχθηκαν στο Λήμμα Α.1.15, έχουμε ότι

$$\tau \leqslant \frac{v^*}{2} + \frac{v^*}{3} + \cdots + \frac{v^*}{d} + v^* = \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{d}\right)\tau^*.$$

Η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την σχέση $\sum_{i=1}^{d} \frac{1}{i} \approx \int_1^d \frac{1}{x}dx = \ln d$. □

Το Πόρισμα Α.1.17 μπορεί να χρησιμοποιηθεί με αρκετούς τρόπους δίνοντας βελτιωμένες εκδοχές γνωστών θεωρημάτων, αλλά και καινούργια αποτελέσματα. Χαρακτηριστικά, αναφέρουμε τα παρακάτω.

Θεώρημα Α.1.18. *Έστω ομάδα G και $A \subset G$ με $|G| = n$ και $|A| = r$. Τότε υπάρχει σύνολο $B \subset G$ τέτοιο ώστε $AB = G$, με πλήθος στοιχείων*

$$|B| \leqslant \frac{1 + \ln r}{r} n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τα σύμπλοκα $A^{-1}g$, $g \in G$ και το υπεργράφημα H που έχει ως ακμές αυτά τα σύνολα. Τότε ο βαθμός κάθε κορυφής είναι r και κάθε ακμή αποτελείται από r το πλήθος κορυφές. Έπεται ότι η συλλογή $\{t_x = \frac{1}{r} : x \in V(H)\}$ είναι κλασματικό κάλυμμα, άρα $\tau^*(H) \leqslant \frac{n}{r}$. Επίσης, $d(H) = r$. Από το Πόρισμα Α.1.17 έπεται ότι

$$\tau(H) \leqslant (1 + \ln r)\frac{n}{r}.$$

Έστω B ένα 1-κάλυμμα του H με πλήθος στοιχείων $\tau(H)$. Τότε για κάθε $g \in G$ ισχύει ότι

$$B \cap A^{-1}g \neq \varnothing,$$

άρα υπάρχουν $b \in B$ και $a \in A$ τέτοια ώστε $b = a^{-1}g$, ή ισοδύναμα, $g = ab$. Αυτό δείχνει ότι $AB = G$. □

Για τις επόμενες εφαρμογές χρειάζεται να ορίσουμε το καρτεσιανό γινόμενο υπεργραφημάτων. Αυτό ορίζεται με τον αναμενόμενο τρόπο, όπως φαίνεται παρακάτω.

Ορισμός A.1.19. Έστω H_1 και H_2 υπεργραφήματα. Το καρτεσιανό τους γινόμενο ορίζεται ως η συλλογή των καρτεσιανών γινομένων των ακμών τους. Συγκεκριμένα, $H_1 \times H_2 = \{E \times F \,:\, E \in H_1, F \in H_2\}$. Επιπλέον, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $H^k = H \times \cdots \times H$, το καρτεσιανό γινόμενο του H με τον εαυτό του k φορές.

Παρατήρηση A.1.20. Ισχύει ότι $V(H_1 \times H_2) = V(H_1) \times V(H_2)$. Πράγματι, η κορυφή $x \in V(H_1 \times H_2)$ ανήκει σε μια ακμή $E \times F$ με $E \in H_1$ και $F \in H_2$, ισοδύναμα $x = (x_1, x_2)$ για κάποιες κορυφές $x_1 \in E$ και $x_2 \in F$.

Θεώρημα A.1.21. *Έστω H ένα υπεργράφημα. Τότε ισχύει ότι $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{\tau(H^k)} = \tau^*(H)$.*

Απόδειξη. Αρχικά, παρατηρούμε ότι

$$\nu^*(H_1 \times H_2) \geqslant \nu^*(H_1)\nu^*(H_2).$$

Πράγματι, έστω $\omega'_E = \{\omega_{E_1} \,:\, E_1 \in H_1\}$ και $\omega''_E = \{\omega_{E_2} \,:\, E_2 \in H_2\}$ τα κλασματικά ταιριάσματα των H_1 και H_2 που επιτυγχάνουν τα $\nu^*(H_1)$ και $\nu^*(H_2)$, αντίστοιχα. Ορίζουμε τη συλλογή βαρών

$$\omega_{E_1\times E_2} = \{\omega_{E_1}\omega_{E_2} \,:\, E_1 \in H_1,\ E_2 \in H_2\}.$$

Τότε προφανώς τα γινόμενα που περιέχονται σε αυτή τη συλλογή είναι θετικά και επιπλέον, για κάθε κορυφή $x = (x_1, x_2)$ στο $H_1 \times H_2$ ισχύει

$$\sum_{x\in E\times F} \omega_{E\times F} = \sum_{x_1\in E,\ x_2\in F} \omega_E\omega_F = \sum_{x_1\in E} \omega_E \sum_{x_2\in F} \omega_F \leqslant 1,$$

άρα το σύνολο που αποτελείται από τα $\omega_{E_1\times E_2}$ είναι κλασματικό ταίριασμα του $H_1 \times H_2$ με

$$\sum_{E_1,\ E_2} \omega_{E_1\times E_2} = \sum_{E_1} \omega'_{E_1} \sum_{E_2} \omega''_{E_2} = \nu^*(H_1)\nu^*(H_2).$$

Αντίστοιχα, μπορούμε να δείξουμε ότι

$$\tau^*(H_1 \times H_2) \leqslant \tau^*(H_1)\tau^*(H_2)$$

και από την ισότητα του Λήμματος A.1.15 έχουμε ότι

$$\tau^*(H_1 \times H_2) = \tau^*(H_1)\tau^*(H_2),$$

συνεπώς

$$\tau^*(H^k) = \tau^*(H)^k.$$

Από τις παραπάνω ισότητες και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\tau \geqslant \tau^*$ βλέπουμε ότι

$$\sqrt[k]{\tau(H^k)} \geqslant \sqrt[k]{\tau^*(H^k)} = \tau^*(H).$$

Μένει να δείξουμε την αντίστροφη ανισότητα. Από το Πόρισμα A.1.17 και παρατηρώντας ότι $d(H^k) = d(H)^k$ έχουμε την παρακάτω συνεπαγωγή

$$\tau(H^k) \leqslant (1 + k \ln d(H))\tau^*(H)^k \implies \sqrt[k]{\tau(H^k)} \leqslant \sqrt[k]{(1 + k \ln d(H))}\tau^*(H),$$

και παίρνοντας το όριο για $k \to \infty$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει η αντίστροφη ανισότητα. □

A.2 Το Θεώρημα του Stein

Θεώρημα A.2.1 (Stein). *Έστω X πεπερασμένο σύνολο πληθικότητας n και*

$$A_1, A_2, \ldots, A_t$$

κάλυψη του X τέτοια ώστε κάθε A_i να περιέχει το πολύ a στοιχεία. Έστω επίσης ότι κάθε στοιχείο του X ανήκει σε τουλάχιστον q από τα A_i. Τότε, υπάρχει υποοικογένεια της δοθείσας κάλυψης που καλύπτει το X και αποτελείται από το πολύ

$$\frac{n}{a} + \frac{t}{q}\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{a}\right)$$

σύνολα.

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι καθώς κάθε A_i περιέχει το πολύ a στοιχεία, κάθε στοιχείο του X ανήκει σε τουλάχιστον q από τα σύνολα της κάλυψης και $|X| = n$, ισχύει ότι

$$nq \leqslant \sum_{i=1}^{t} |A_i| \leqslant at,$$

άρα

$$nq \leqslant at.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι οι ποσότητες n, q, a, t δεν είναι ανεξάρτητες.

Έστω K_a το μέγιστο πλήθος ξένων συνόλων της κάλυψης με πλήθος στοιχείων ίσο με a. Αλλάζοντας την ονομασία των δεικτών αν είναι αναγκαίο, συμβολίζουμε αυτά τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots, A_{K_a}$ (μπορεί να έχουμε $K_a = 0$) και ορίζουμε το σύνολο

$$R_a = X \setminus (A_1 \cup \cdots \cup A_{K_a})$$

με πλήθος στοιχείων ίσο με $n - aK_a$. Παρατηρούμε ότι κάθε στοιχείο της κάλυψης έχει τομή με το R_a πλήθους το πολύ $a - 1$. Πράγματι, κάθε A_i είτε έχει πληθάριθμο μικρότερο ή ίσο του $a - 1$ είτε τέμνει κάποιο από τα $A_1, \ldots, A_{K_a}$. Από τα υπόλοιπα σύνολα, $A_{K_a+1}, \ldots A_t$, επιλέγουμε τη μεγαλύτερη οικογένεια εκείνων που τέμνουν το R_a σε ξένα σύνολα πλήθους $a-1$ και συμβολίζουμε το πλήθος τους με K_{a-1}. Αλλάζοντας πάλι την ονομασία των δεικτών, ονομάζουμε τα σύνολα αυτά

$$A_{K_a+1}, \ldots, A_{K_a+K_{a-1}}$$

και ορίζουμε

$$R_{a-1} = R_a \setminus (A_{K_a+1} \cup \cdots \cup A_{K_a+K_{a-1}})$$

το σύνολο με $(a-1)K_{a-1}$ λιγότερα στοιχεία από το R_a. Συνεχίζοντας όμοια, ορίζουμε τον αριθμό K_{a-2} και R_{a-2} και γενικά, K_s και R_s για κάθε $s = a-2, \ldots, 1$. Συγκεκριμένα, για τα R_s ισχύει ότι

$$R_a \supset R_{a-1} \supset \cdots \supset R_1 = \varnothing.$$

Για κάθε s συμβολίζουμε με k_s το πλήθος των στοιχείων του R_s. Οπότε $k_1 = 0$ και για κάθε s από 1 μέχρι $a-1$ ισχύει ότι

$$k_{s+1} - k_s = sK_s.$$

Ισοδύναμα,

$$K_s = \frac{k_{s+1} - k_s}{s}.$$

Επίσης, κάθε σύνολο της κάλυψης έχει τομή με το R_s πληθικότητας το πολύ $s-1$ και κάθε στοιχείο του R_s βρίσκεται σε τουλάχιστον q από τα σύνολα της κάλυψης, άρα έχουμε ότι

$$qk_s \leqslant (s-1)t.$$

Ισοδύναμα,

$$k_s \leqslant \frac{t}{q}(s-1),$$

που είναι η βασική ανισότητα για το υπόλοιπο της απόδειξης. Έστω $K = K_a + \cdots + K_1$ το πλήθος των συνόλων που χρησιμοποιήθηκαν στην παραπάνω κατασκευή. Υπενθυμίζουμε ότι $k_a = n - aK_a$, και από τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned}
K &= \sum_{s=1}^{a-1} + \frac{n}{a} - \frac{k_a}{a} \\
&= \frac{k_a - k_{a-1}}{a-1} + \frac{k_{a-1} - k_{a-2}}{a-2} + \cdots + \frac{k_2 - k_1}{1} + \frac{n}{a} - \frac{k_a}{a} \\
&= k_a\left(\frac{1}{a(a-1)}\right) + k_{a-1}\left(\frac{1}{(a-2)(a-1)}\right) + \cdots + k_2\left(\frac{1}{1\cdot 2}\right) - k_1 + \frac{n}{a} \\
&\leqslant \frac{t}{q}\frac{a-1}{a(a-1)} + \frac{t}{q}\frac{a-2}{(a-2)(a-1)} + \cdots + \frac{t}{q}\frac{1}{1\cdot 2} + \frac{n}{a} \\
&= \frac{n}{a} + \frac{t}{q}\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{a-1} + \cdots + \frac{1}{2}\right),
\end{aligned}$$

όπως θέλαμε. □

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ B

Το θεώρημα του Minkowski

B.1 Το θεώρημα του Minkowski

Σε αυτό το Παράρτημα κάνουμε μια σκιαγράφηση της απόδειξης του θεμελιώδους θεωρήματος του Minkowski για τους μεικτούς όγκους.

Θεώρημα B.1.1 (Minkowski). *Έστω $K_1, \dots, K_N$ κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και $t_1, \dots, t_N$ μη αρνητικοί αριθμοί. Τότε, ο όγκος του αθροίσματος Minkowski $t_1K_1 + \cdots + t_NK_N$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς t_i. Δηλαδή, ισχύει ότι*

$$\mathrm{vol}_n(t_1K_1 + \cdots + t_NK_N) = \sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_n\leqslant N} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})t_{i_1}\cdots t_{i_n},$$

όπου οι συντελεστές $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτοι ως προς μεταθέσεις των ορισμάτων τους.

Θα αποδείξουμε αρχικά ότι το Θεώρημα B.1.1 ισχύει για κυρτά πολύτοπα και στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την πυκνότητά τους στον χώρο των κυρτών σωμάτων, εφοδιασμένο με τη μετρική Hausdorff, θα συμπεράνουμε το γενικότερο αποτέλεσμα. Για τη διαδικασία αυτή χρειαζόμαστε κάποια λήμματα, στα οποία θα αναφερθούμε συνοπτικά.

Απόδειξη. Όπως αναφέρθηκε, στο πρώτο κομμάτι της απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε την επιπλέον υπόθεση πως τα K_i είναι πολύτοπα. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή. Στην περίπτωση που τα K_i βρίσκονται στο $\mathbb{R}$, καθώς είναι κυρτά σώματα, είναι της μορφής $K_i = [p_i, q_i]$ με $p_i \leqslant q_i$. Τότε το ζητούμενο άθροισμα λαμβάνει τη μορφή

$$\begin{aligned} t_1K_1 + \cdots + t_NK_N &= [t_1p_1, t_1q_1] + \cdots + [t_Np_N, t_Nq_N] \\ &= [t_1p_1 + \cdots + t_Np_N, t_1q_1 + \cdots + t_Nq_N], \end{aligned}$$

άρα για τον όγκο του έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_1(t_1K_1 + \cdots + t_NK_N) &= t_1q_1 + \cdots + t_Nq_N - t_1p_1 - \cdots - t_Np_N \\ &= t_1(q_1 - p_1) + \cdots + t_N(q_N - p_N) \\ &= \mathrm{vol}_1(K_1)t_1 + \cdots + \mathrm{vol}_1(K_N)t_N, \end{aligned}$$

το οποίο είναι πολυώνυμο πρώτου βαθμού ως προς τα t_i. Έστω ότι το συμπέρασμα ισχύει για πολύτοπα στον χώρο $\mathbb{R}^{n-1}$. Θέτουμε, για κάθε διεύθυνση u και υπερεπίπεδο στήριξης $H_{K_j}(u)$, $F_j := F_j(u) = H_{K_j}(u) \cap K_j$ να είναι το υποσύνολο του συνόρου του K_j που τέμνει το φέρον υπερεπίπεδο $H_{K_j}(u)$. Επίσης, για $T := (t_1, \dots, t_N)$ γράφουμε

$$K_T := t_1K_1 + \cdots + t_NK_N$$

$$F_T(u) := H_{K_T}(u) \cap K_T$$

και άμεσα έχουμε την ισότητα $F_T(u) = t_1F_1(u) + \cdots + t_NF_N(u)$. Μεταφέροντας τα κυρτά σώματα K_i (λαμβάνοντας υπόψιν πως ο όγκος τους μένει αναλλοίωτος) μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα F_i περιέχονται στο F_T και $0 \in \mathrm{int}(K_T)$. Αν το K_T έχει διάσταση μικρότερη του n τότε το ζητούμενο έπεται άμεσα από την επαγωγική υπόθεση. Διαφορετικά, θεωρούμε τα μοναδιαία διανύσματα $u_1, \dots, u_m$ τα οποία είναι τέτοια ώστε η ένωση των $F_T(u_i)$ να καλύπτει το σύνορο του K_T. Καθώς το K_T είναι η ένωση των «πυραμίδων» $\mathrm{conv}(F_i \cup \{0\})$, συμβολίζοντας με h_{K_T} τη συνάρτηση στήριξης του K_T, έχουμε τα παρακάτω για τον όγκο του αθροίσματος που μας ενδιαφέρει:

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(K_T) &= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m} h_{K_T}(u_j)\mathrm{vol}_{n-1}(F_T(u_j)) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{m}(t_1h_{K_1}(u_j) + \cdots + t_rh_{K_r}(u_j))\mathrm{vol}_{n-1}(F_T(u_j)),
\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την γραμμικότητα της συνάρτησης στήριξης ως προς το κυρτό K_T και παρατηρήσαμε ότι το F_T είναι διάστασης $n-1$ ως υποσύνολο συνόρου κυρτού σώματος διάστασης n. Εφαρμόζοντας την επαγωγική υπόθεση για τα σύνολα $F_T(u_i)$ παίρνουμε άμεσα το ζητούμενο. Επομένως, δείξαμε ότι το συμπέρασμα του Θεωρήματος ισχύει για κυρτά πολύτοπα. □

Στη συνέχεια αναφέρουμε και αποδεικνύουμε κάποια από τα λήμματα που χρειάζονται για να γίνει η αναγωγή από την ειδική περίπτωση των κυρτών πολύτοπων στη γενική των κυρτών σωμάτων.

Λήμμα B.1.2. *Έστω K κυρτό πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$, τότε $V(K) = V(K, \dots, K)$.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda \geqslant 0$, τότε $\lambda^n\mathrm{vol}_n(K) = \mathrm{vol}_n(\lambda K) = V(K, \dots, K)\lambda^n$, όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει λόγω του Θεωρήματος B.1.1. Από τα παραπάνω, το συμπέρασμα είναι προφανές. □

Λήμμα B.1.3. *Έστω $K_1, \dots, K_n$ κυρτά πολύτοπα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$V(K_1, \dots, K_n) = \frac{1}{n!}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{n+j}\sum_{i_1<\cdots<i_j}\mathrm{vol}_n(K_{i_1} + \cdots + K_{i_j}).$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε το δεξιό μέλος της ζητούμενης ισότητας με $f(K_1, \dots, K_n)$. Για κάθε επιλογή $t_1, \dots, t_n$ το Θεώρημα B.1.1 εξασφαλίζει ότι η συνάρτηση $(t_1, \dots, t_n) \mapsto f(t_1K_1, \dots, t_nK_n)$ είναι ομογενές πολυώνυμο n-οστού βαθμού και έχουμε τα παρακάτω:

$$\begin{aligned}(-1)^{n+1}n!f(\{0\},K_2,\dots,K_n) &= \sum_{2\leqslant i\leqslant n}\mathrm{vol}_n(K_i)-\left[\sum_{2\leqslant i\leqslant n}\mathrm{vol}_n(\{0\}+K_j)+\sum_{2\leqslant i<j\leqslant n}\mathrm{vol}_n(K_i+K_j)\right]\\ &\quad+\left[\sum_{2<j<k\leqslant n}\mathrm{vol}_n(\{0\}+K_j+K_k)+\sum_{2\leqslant i<j<k\leqslant n}\mathrm{vol}_n(\{0\}+K_j+K_k)\right]\\ &\quad-\cdots\\ &=0.\end{aligned}$$

Επομένως, το $f(0K_1,\dots,t_nK_n)$ είναι ταυτοτικά μηδενικό για κάθε επιλογή t_i. Επομένως, στο πολυώνυμο $f(t_1K_1,\dots,t_nK_n)$ οι συντελεστές των $t_{i_1}\cdots t_{i_n}$ με $1\notin\{i_1,\dots,i_n\}$ είναι μηδενικοί. Καθώς το 1 μπορεί να αντικατασταθεί από καθένα από τα $2,\dots,n$, συμπεραίνουμε ότι μόνο το $t_1\dots t_n$ έχει μη μηδενικό συντελεστή, ο οποίος ισούται με $V(K_1,\dots,K_n)$. □

Λήμμα B.1.4. *Έστω $K_1,\dots,K_n$ κυρτά πολύτοπα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε ο μεικτός όγκος $V(K_1,\dots,K_n)$ εξαρτάται συνεχώς από τα $K_1,\dots,K_n$.*

Απόδειξη. Συνδυάζοντας το παραπάνω θεώρημα με το γεγονός πως ο όγκος και το άθροισμα Minkowski είναι συνεχείς συναρτήσεις στον χώρο των κυρτών σωμάτων εφοδιασμένο με τη μετρική Hausdorff, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος B.1.1. Το Λήμμα B.1.4 και η πυκνότητα των κυρτών πολυτόπων στον χώρο των κυρτών σωμάτων μας επιτρέπουν να επεκτείνουμε τον ισχυρισμό του Θεωρήματος B.1.1 από τα κυρτά πολύτοπα σε όλα τα κυρτά σώματα. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Γ

Γραμμικός προγραμματισμός

Γ.1 Το θεώρημα δυϊσμού

Το τυπικό πρόβλημα μεγίστου, P, στον γραμμικό προγραμματισμό είναι το εξής. Δίνονται ένας $m \times n$ πίνακας A και δύο διανύσματα $b \in \mathbb{R}^m$ και $c \in \mathbb{R}^n$. Ζητάμε το

$$\max\langle c, x\rangle \tag{Γ.1.1}$$

πάνω από όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τις

$$Ax \leqslant b \quad \text{και} \quad x \geqslant 0. \tag{Γ.1.2}$$

Το σύνολο F των διανυσμάτων x που ικανοποιούν τις (Γ.1.2) ονομάζεται εφικτό σύνολο του P και τα $x \in F$ είναι τα εφικτά διανύσματα του P. Το F είναι η τομή των m ημιχώρων που προσδιορίζουν οι ανισότητες $Ax \leqslant b$ και των n κλειστών ημιχώρων που προσδιορίζουν οι ανισότητες $x \geqslant 0$, άρα το F είναι πολύεδρο.

Ένα εφικτό διάνυσμα x_0 του P λέγεται βέλτιστο για το P αν $\langle c, x\rangle \leqslant \langle c, x_0\rangle$ για κάθε $x \in F$. Το πρόβλημα P ονομάζεται επιλύσιμο αν το σύνολο F των εφικτών του διανυσμάτων είναι μη κενό και υπάρχει βέλτιστο εφικτό διάνυσμα για το P.

Στην περίπτωση που το σύνολο F των εφικτών διανυσμάτων του P είναι ένα μη κενό πολύτοπο, μπορούμε εύκολα να βρούμε ένα βέλτιστο διάνυσμα.

Θεώρημα Γ.1.1. *Έστω P ένα τυπικό πρόβλημα μεγίστου με σύνολο εφικτών διανυσμάτων το πολύτοπο $F = \mathrm{conv}\{z_1, \dots, z_k\}$. Θεωρούμε $i \in \{1, \dots, k\}$ ώστε*

$$\langle c, z_i\rangle = \max\{\langle c, z_1\rangle, \dots, \langle c, z_k\rangle\}.$$

Τότε, το z_i είναι βέλτιστο διάνυσμα για το P.

Απόδειξη. Έστω x εφικτό διάνυσμα του P. Υπάρχουν $\lambda_i \in [0,1]$ τέτοια ώστε $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ και $x = \lambda_1 z_1 + \cdots + \lambda_k z_k$. Τότε,

$$\langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \langle c, z_j\rangle \leqslant \sum_{j=1}^{k} \lambda_i \langle c, z_i\rangle = \langle c, z_i\rangle.$$

Επομένως, το z_i είναι βέλτιστο διάνυσμα για το P. □

Θεώρημα Γ.1.2. *Έστω P ένα τυπικό πρόβλημα μεγίστου με σύνολο εφικτών διανυσμάτων F. Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση $\langle c, x\rangle$ είναι άνω φραγμένη στο F. Τότε, το P είναι επιλύσιμο και τουλάχιστον ένα από τα βέλτιστα διανύσματα του P είναι ακραίο σημείο του F.*

Απόδειξη. Αφού το F είναι υποσύνολο του $\mathbb{R}^n_+$ δεν περιέχει ευθείες. Μπορούμε τότε να γράψουμε το F στη μορφή

$$F = \mathrm{conv}\{z_1, \dots, z_k\} + \mathrm{cone}\{u_1, \dots, u_p\},$$

όπου $z_1, \dots, z_k, u_1, \dots, u_p \in \mathbb{R}^n$ και $z_1, \dots, z_k$ είναι τα ακραία σημεία του F. Κάθε $x \in F$ γράφεται στη μορφή

$$x = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j z_j + \sum_{s=1}^{p} \mu_s u_s,$$

όπου $\lambda_j \geqslant 0$ με $\lambda_1 + \cdots + \lambda_k = 1$ και $\mu_s \geqslant 0$. Έχουμε

$$\langle c, x\rangle = \sum_{j=1}^{k} \lambda_j \langle c, z_j\rangle + \sum_{s=1}^{p} \mu_s \langle c, u_s\rangle.$$

Από την υπόθεση ότι η f είναι άνω φραγμένη και οι συντελεστές μ_s μπορούν να πάρουν οσοδήποτε μεγάλες θετικές τιμές, συμπεραίνουμε ότι $\langle c, u_s\rangle \leqslant 0$ για κάθε $s = 1, \dots, p$. Τώρα είναι εύκολο να δούμε, όπως στην απόδειξη του προηγούμενου θεωρήματος, ότι αν επιλέξουμε $i \in \{1, \dots, k\}$ ώστε

$$\langle c, z_i\rangle = \max\{\langle c, z_1\rangle, \dots, \langle c, z_k\rangle\}$$

θα ισχύει $\langle c, x\rangle \leqslant \langle c, z_i\rangle$. □

Το τυπικό πρόβλημα ελαχίστου στον γραμμικό προγραμματισμό είναι να βρεθεί το

$$\min\langle c, x\rangle$$

πάνω από όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τις

$$Ax \leqslant b \quad \text{και} \quad x \geqslant 0.$$

Οι έννοιες του εφικτού συνόλου, του εφικτού και του βέλτιστου διανύσματος ορίζονται κατ' αναλογία προς τις αντίστοιχες έννοιες για το πρόβλημα μεγίστου.

Σε κάθε τυπικό πρόβλημα μεγίστου P, όπως αυτό περιγράφεται από τις (Γ.1.1) και (Γ.1.2), αντιστοιχίζουμε ένα τυπικό πρόβλημα ελαχίστου P^*, να βρεθεί το

$$\min\langle b, y\rangle \tag{Γ.1.3}$$

πάνω από όλα τα $y \in \mathbb{R}^m$ που ικανοποιούν τις

$$A^T y \geqslant c \quad \text{και} \quad y \geqslant 0. \tag{Γ.1.4}$$

Τα επόμενα βασικά θεωρήματα αφορούν τον δυϊσμό στον γραμμικό προγραμματισμό: παρέχουν πληροφορίες για τη φύση του προβλήματος και είναι χρήσιμα για την επίλυση συγκεκριμένων προβλημάτων.

Θεώρημα Γ.1.3 (θεώρημα ισορροπίας). *Έστω x και y εφικτά διανύσματα για τα προβλήματα P και P^* αντίστοιχα. Τότε,*

$$\langle c, x\rangle \leqslant \langle b, y\rangle.$$

Αν ισχύει ισότητα, τότε τα x και y είναι βέλτιστα διανύσματα για τα P και P^* αντίστοιχα.

Απόδειξη. Αφού $Ax \leqslant b$ και $y \geqslant 0$, έχουμε

$$\langle Ax, y\rangle \leqslant \langle b, y\rangle.$$

Ομοίως, αφού $A^T y \geqslant c$ και $x \geqslant 0$, έχουμε

$$\langle x, A^T y\rangle \geqslant \langle c, x\rangle.$$

Συνεπώς,

$$\langle c, x\rangle \leqslant \langle x, A^T y\rangle = \langle Ax, y\rangle \leqslant \langle b, y\rangle.$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει ισότητα, και έστω x_1, y_1 εφικτά διανύσματα των προβλημάτων P, P^* αντίστοιχα. Τότε, εφαρμόζοντας τον προηγούμενο ισχυρισμό για τα x_1, y παίρνουμε

$$\langle c, x_1\rangle \leqslant \langle b, y\rangle = \langle c, x\rangle.$$

Αυτό δείχνει ότι το x είναι βέλτιστο διάνυσμα για το P. Όμοια, εφαρμόζοντας τον προηγούμενο ισχυρισμό για τα x, y_1 παίρνουμε

$$\langle b, y_1\rangle \geqslant \langle c, x\rangle = \langle b, y\rangle.$$

Αυτό δείχνει ότι το y είναι βέλτιστο διάνυσμα για το P^*. □

Θεώρημα Γ.1.4 (θεώρημα δυϊσμού). *Έστω P ένα τυπικό πρόβλημα μεγίστου και P^* το δυϊκό του πρόβλημα ελαχίστου, όπως παραπάνω.*

(α) *Αν κάποιο από τα P και P^* είναι επιλύσιμο, τότε το ίδιο ισχύει και για το άλλο, και οι βέλτστες τιμές είναι ίσες.*

(β) *Αν τα P και P^* έχουν και τα δύο μη κενά εφικτά σύνολα, τότε είναι και τα δύο επιλύσιμα.*

Απόδειξη. (α) Υποθέτουμε ότι το P είναι επιλύσιμο, με βέλτιστο διάνυσμα x_0 και θέτουμε $v = \langle c, x_0\rangle$. Αυτό σημαίνει ότι η $\langle c, x\rangle \leqslant v$ είναι συνέπεια του συστήματος ανισοτήτων $Ax \leqslant b$ και $-I_n x \leqslant 0$. Από το λήμμα του Farkas υπάρχουν $y_0 \geqslant 0$ και $u \geqslant 0$ ώστε $y_0^T A - u^T = c^T$ και $\langle b, y_0\rangle \leqslant v$. Συνεπώς, το y_0 είναι εφικτό διάνυσμα του P^*. Από το Θεώρημα Γ.1.3 παίρνουμε

$$\langle c, x_0\rangle = v \geqslant \langle b, y_0\rangle \geqslant \langle c, x_0\rangle,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\langle c, x_0\rangle = \langle b, y_0\rangle$, άρα το y_0 είναι βέλτιστο διάνυσμα για το P^*. Επομένως, το P^* είναι επιλύσιμο και έχει την ίδια βέλτιστη τιμή με το P. Παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι αν το P^* είναι επιλύσιμο με βέλτιστη τιμή v τότε το ίδιο ισχύει για το P.

(β) Υποθέτουμε ότι τα P και P^* έχουν μη κενά εφικτά σύνολα. Έστω y_0 ένα εφικτό διάνυσμα για το P^*. Από το Θεώρημα Γ.1.3 έχουμε $\langle c, x\rangle \leqslant \langle b, y_0\rangle$ για κάθε εφικτό διάνυσμα x του P. Τότε, το Θεώρημα Γ.1.2 δείχνει ότι το P είναι επιλύσιμο, και το αποτέλεσμα έπεται από το (α). □

Βιβλιογραφία

[1] M. Anttila, K. M. Ball and E. Perissinaki, *The central limit problem for convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4723–4735.

[2] J. Arias-de Reyna, K. Ball, and R. Villa, *Concentration of the distance in finite dimensional normed spaces*, Mathematika 45 (1998), no. 2, 245–252.

[3] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos, and V. D. Milman, *Asymptotic geometric analysis. Part I*, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 202, American Mathematical Society, Providence, RI, 2015.

[4] S. Artstein-Avidan, *A short note on Godbersen's Conjecture*, ArXiv e-prints (2017), arXiv:1703.06403.

[5] S. Artstein-Avidan and B. A. Slomka, *On weighted covering numbers and the Levi-Hadwiger conjecture*, Israel J. Math. 209 (2015), no. 1, 125–155.

[6] S. Artstein-Avidan, K. Einhorn, D. I. Florentin and Y. Ostrover, *On Godbersen's conjecture*, Geom. Dedicata 178 (2015), 337–350.

[7] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. Math. 102 (1975), 159–182.

[8] S. L. Berg and M. Henk, *Lattice point inequalities for centered convex bodies*, SIAM J. Discrete Math. 30 (2016), no. 2, 1148–1158.

[9] R. J. Berman and B. Berndtsson, *The volume of Kähler-Einstein Fano varieties and convex bodies*, J. Reine Angew. Math. 723 (2017), 127–152.

[10] K. Bezdek, *The problem of illumination of the boundary of a convex body by affine subspaces*, Mathematika 38 (1991), no. 2, 362–375.

[11] K. Bezdek, *Illuminating spindle convex bodies and minimizing the volume of spherical sets of constant width*, Discrete Comput. Geom. 47 (2012), no. 2, 275–287.

[12] K. Bezdek and T. Bisztriczky, *A proof of Hadwiger's covering conjecture for dual cyclic polytopes*, Geom. Dedicata 68 (1997), no. 1, 29–41.

[13] K. Bezdek and M. A. Khan, *The geometry of homothetic covering and illumination*, Discrete Geometry and Symmetry (Cham) (M. D. E. Conder, A. Deza, and A. I. Weiss, eds.), Springer International Publishing, 2018, pp. 1–30.

[14] K. Bezdek, Z. Lángi, M. Naszódi, and P. Papez, *Ball-polyhedra*, Discrete Comput. Geom. 38 (2007), no. 2, 201–230.

[15] T. Bisztriczky and F. Fodor, *A separation theorem for totally-sewn 4-polytopes*, Studia Sci. Math. Hungar. 52 (2015), no. 3, 386–422.

[16] S. G. Bobkov, *Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures*, Ann. Prob. **27** (1999), 1903–1921.

[17] S. G. Bobkov and M. M. Madiman, *On the problem of reversibility of the entropy power inequality*, Limit theorems in probability, statistics and number theory, Springer Proc. Math. Stat., vol. 42, Springer, Heidelberg, 2013, pp. 61–74.

[18] V. Boltyanski, *A problem on the illumination of the boundary of a convex body*, Izv. Mold. Fil. Akad. Nauk SSSR (1960), no. 10, 77–84.

[19] V. Boltyanski, *Solution of the illumination problem for belt-bodies*, Mat. Zametki 58 (1995), no. 4, 505–511.

[20] V. Boltyanski, *Solution of the illumination problem for bodies with* $\mathrm{md}\, M = 2$, Discrete Comput. Geom. 26 (2001), no. 4, 527–541.

[21] V. Boltyanski and H. Martini, *Combinatorial geometry of belt bodies*, Results Math. 28 (1995), no. 3-4, 224–249.

[22] V. Boltyanski and H. Martini, *Covering belt bodies by smaller homothetical copies*, Beiträge Algebra Geom. 42 (2001), no. 2, 313–324.

[23] V. Boltyanski, H. Martini, and P. S. Soltan, *Excursions into combinatorial geometry*, Universitext, Springer-Verlag, Berlin, 1997.

[24] T. Bonnesen and W. Fenchel, *Theorie der konvexen Körper*, Springer, Berlin (1974).

[25] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Period. Math. Hungar. **6** (1975), 111–136.

[26] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467–1476.

[27] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127–137.

[28] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*, Adv. Math. 20, no. 2 (1976), 151–173.

[29] P. Brass, W. Moser, and J. Pach, *Research problems in discrete geometry*, Springer, New York, 2005.

[30] P. Buser, *A note on the isoperimetric constant*, Ann. Sci. École Norm. Sup. **15** (1982), 213–230.

[31] M. Campos, P. van Hintum, R. Morris and M. Tiba, *Towards Hadwiger's conjecture via Bourgain slicing*, ArXiv e-prints (2022), arXiv:2206.11227.

[32] G. D. Chakerian, *Inequalities for the difference body of a convex body*, Proc. Am. Math. Soc. 18 (1967), 879–884.

[33] J. Cheeger, *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*, Problems in Analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969), Princeton Univ. Press, Princeton (1970), 195–199.

[34] Y. Chen, *An almost constant lower bound of the isoperimetric coefficient in the KLS conjecture*, Geom. Funct. Anal. **31** (2021), 34–61.

[35] A. Colesanti, *Functional inequalities related to the Rogers-Shephard inequality*, Mathematika 53 (2006), 81–101.

[36] N. Dafnis and G. Paouris, *Small ball probability estimates, ψ_2-behavior and the hyperplane conjecture*, J. Funct. Anal. 258 (2010), no. 6, 1933–1964.

[37] B. V. Dekster, *Each convex body in E^3 symmetric about a plane can be illuminated by 8 directions*, J. Geom. 69 (2000), no. 1-2, 37–50.

[38] P. Diaconis and D. Freedman, *Asymptotics of graphical projection pursuit*, Ann. of Stat. **12** (1984), 793-815.

[39] M. Dyer, A. Frieze, and R. Kannan, *A random polynomial-time algorithm for approximating the volume of convex bodies*, J. Assoc. Comput. Mach. 38:1 (1991), 1-17.

[40] E. Ehrhart, *Une généralisation du théorème de Minkowski*, C. R. Acad. Sci. Paris 240 (1955), 483–485.

[41] E. Ehrhart, *Une généralisation probable du théorème fondamental de Minkowski*, C. R. Acad. Sci. Paris 258 (1964), 4885–4887.

[42] E. Ehrhart, *Volume réticulaire critique d'un simplexe*, J. Reine Angew. Math. 305 (1979), 218–220.

[43] K. Einhorn, *On Godbersen's conjecture and related problems*, M.Sc. thesis, Tel Aviv University (2014).

[44] R. Eldan, *Thin shell implies spectral gap up to polylog via a stochastic localization scheme*, Geom. Funct. Anal. **23** (2013), 532–569.

[45] R. Eldan and B. Klartag, *Approximately Gaussian marginals and the hyperplane conjecture* Concentration, functional inequalities and isoperimetry, Contemp. Math. **545**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2011), 55–68.

[46] P. Erdős and C. A. Rogers, *The star number of coverings of space with convex bodies*, Acta Arith. 9 (1964), 41–45.

[47] T. Estermann, *Über den Vektorenbereich eines konvexen Körpers*, Math. Z. 28 (1928), 471–475.

[48] I. Fáry, *Sur la densité des réseaux de domaines convexes*, Bull. Soc. Math. Fr. 78 (1950), 152–161.

[49] I. Fáry and L. Rédei, *Der zentralsymmetrische Kern und die zentralsymmetrische Hülle von konvexen Körpern*, Math. Ann. 122 (1950), 205–220.

[50] B. Fleury, *Concentration in a thin Euclidean shell for log-concave measures*, J. Funct. Anal. **259** (2010), 832–841.

[51] M. Fradelizi, *Sections of convex bodies through their centroid*, Arch. Math. **69** (1997), 515–522.

[52] Z. Füredi, *Matchings and covers in hypergraphs*, Graphs Combin. 4 (1988), no. 2, 115–206.

[53] E. Gluskin and V. Milman, *Geometric probability and random cotype* 2, pp. 123–138, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2004.

[54] C. Godbersen, *Der satz vom vektorbereich in räumen beliebiger dimensionen*, Ph.D. Thesis, Göttingen (1938).

[55] I. C. Gohberg and M. G. Krein, *Fundamental aspects of defect numbers, root numbers and indexes of linear operators*, Uspehi Mat. Nauk (N.S.) **12** (1957) no. 2(74), 43–118.

[56] I. Gohberg and A. Markus, *A problem on covering of convex figures by similar figures*, Izv. Mold. Fil. Akad. Nauk SSSR 10 (1960), no. 76, 87–90.

[57] P. Gritzmann and J. M. Wills, *Lattice points*, Handbook of convex geometry, Vol. A, B, North-Holland, Amsterdam, 1993, pp. 765–797.

[58] B. Grünbaum, *Measures of symmetry for convex sets*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VII, Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1963, pp. 233–270.

[59] O. Guédon and E. Milman, *Interpolating Thin-Shell and Sharp Large-Deviation Estimates for Isotropic Log-Concave Measures*, Geometric and Functional Analysis 21 (2011), no. 5, 1043–1068.

[60] H. Hadwiger, *Ungelöstes Probleme Nr. 20*, Elem. Math. 12 (1957), no. 6, 121.

[61] H. Hadwiger, *Ungelöstes Probleme Nr. 38*, Elem. Math. 15 (1960), 130–131.

[62] A. Hajnal and E. Makai, *Research problems*, Period. Math. Hungar. 5 (1974), 353–354.

[63] M. Henk, M. Henze, and M. A. Hernández Cifre, *Variations of Minkowski's theorem on successive minima*, Forum Math. 28 (2016), no. 2, 311–325.

[64] H. Huang, B. A. Slomka, T. Tkocz and B.-H. Vritsiou. *Improved bounds for Hadwiger's covering problem via thin-shell estimates*, J. Europ. Math. Soc. 24 (2021), 1431–1448.

[65] I. Ivanov and C. Strachan, *On the illumination of centrally symmetric cap bodies in small dimensions*, ArXiv e-prints (2020), arXiv:2007.09765.

[66] A. Jambulapati, Y. T. Lee and S. S. Vempala, *A Slightly Improved Bound for the KLS Constant*, ArXiv e-prints (2022), arXiv:2209.13932.

[67] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541–559.

[68] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Random walks and $O^*(n^5)$ volume algorithm for convex bodies*, Random Structures Algorithms II **1** (1997), 1–50.

[69] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1274–1290.

[70] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Invent. Math. **168** (2007), 91–131.

[71] B. Klartag and J. Lehec, *Bourgain's slicing problem and KLS isoperimetry up to polylog*, Preprint.

[72] M. G. Krein, M. A. Krasnosel'ski and D. P. Milman, *On deficiency numbers of linear operators in Banach spaces and on certain geometric questions*, Sb. Trudov Mat. Inst. Akad. Nauk Ukr. SSR 11 (1948), 97–112.

[73] M. Lassak, *Solution of Hadwiger's covering problem for centrally symmetric convex bodies in E^3*, J. London Math. Soc. (2) 30 (1984), no. 3, 501–511.

[74] M. Ledoux, *A simple analytic proof of an inequality by P. Buser*, Proc. Am. Math. Soc. **121** (1994), 951–959.

[75] Y. T. Lee and S. S. Vempala, *Stochastic localization + stieltjes barrier = tight bound for logsobolev*, Proceedings of the 50th Annual ACM SIGACT Symposium on Theory of Computing (New York, NY, USA), STOC 2018, ACM, 2018, pp. 1122–1129.

[76] F. W. Levi, *Überdeckung eines Eibereiches durch Parallelverschiebung seines offenen Kerns*, Arch. Math. (Basel) 6 (1955), 369–370.

[77] G. Livshyts and K. Tikhomirov, *Randomized coverings of a convex body with its homothetic copies*, and illumination, ArXiv e-prints (2016), arXiv:1606.08876.

[78] G. Livshyts and K. Tikhomirov, *Cube is a strict local maximizer for the illumination number*, Discrete Comput. Geom. 63 (2020), no. 1, 209–228.

[79] L. Lovász, *On the ratio of optimal integral and fractional covers*, Discrete Math. 13 (1975), no. 4, 383–390.

[80] M. Madiman and I. Kontoyiannis, *Entropy bounds on abelian groups and the Ruzsa divergence*, IEEE Trans. Inform. Theory 64 (2018), no. 1, 77–92.

[81] H. Martini, *Some results and problems around zonotopes*, Intuitive geometry (Siófok, 1985), Colloq. Math. Soc. János Bolyai, vol. 48, North-Holland, Amsterdam, 1987, pp. 383–418.

[82] J. Matoušek, *Lectures on discrete geometry*, Graduate Texts in Mathematics, vol, 212, Springer-Verlag, New York, 2002.

[83] V. G. Maz'ya, *The negative spectrum of the higher-dimensional Schrödinger operator*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **144** (1962), 721–722.

[84] V. G. Maz'ya, *On the solvability of the Neumann problem*, Dokl. Akad. Nauk SSSR **147** (1962), 294–296.

[85] V. D. Milman and A. Pajor, *Entropy and Asymptotic Geometry of Non-Symmetric Convex Bodies*, Advances in Mathematics 152 (2000), no. 2, 314–335.

[86] M. Naszódi, *Fractional illumination of convex bodies*, Contributions to Discrete Mathematics 4 (2009), no. 2, 83–88.

[87] M. Naszódi, *On some covering problems in geometry*, Proc. Amer. Math. Soc. 144 (2016), no. 8, 3555–3562.

[88] M. Naszódi, *Flavors of translative coverings*, pp. 335–358, Springer Berlin Heidelberg, Berlin, Heidelberg, 2018.

[89] B. Nill and A. Paffenholz, *On the equality case in Ehrhart's volume conjecture*, Adv. Geom. 14 (2014), no. 4, 579–586.

[90] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1021–1049.

[91] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287–308.

[92] I. Papadoperakis, *An estimate for the problem of illumination of the boundary of a convex body in E^3*, Geom. Dedicata 75 (1999), no. 3, 275–285.

[93] A. Prymak and V. Shepelska, *On the Hadwiger covering problem in low dimensions*, J. Geom. 111 (2020), no. 42, 1–11.

[94] C. A. Rogers, *A note on coverings*, Mathematika 4 (1957), no. 1, 1–6.

[95] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *The difference body of a convex body*, Arch. Math. (Basel) 8 (1957), 220–233.

[96] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *Convex bodies associated with a given convex body*, J. Lond. Math. Soc. 33 (1958), 270–281.

[97] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *Some extremal problems for convex bodies*, Mathematika 5 (1958), 93–102.

[98] C. A. Rogers and C. Zong, *Covering convex bodies by translates of convex bodies*, Mathematika 44 (1997), no. 1, 215–218.

[99] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 44. Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[100] O. Schramm, *Illuminating sets of constant width*, Mathematika 35 (1988), no. 2, 180–189.

[101] G. C. Shephard, *Shadow systems of convex sets*, Isr. J. Math. 2 (1964), 229–236.

[102] S. K. Stein, *Two combinatorial covering theorems*, J. Combinatorial Theory Ser. A 16 (1974), 391–397.

[103] V. N. Sudakov, *Typical distributions of linear functionals in finite-dimensional spaces of high dimension*, Soviet Math. Dokl. 19 (1978), 1578–1582.

[104] I. Talata, *Solution of Hadwiger-Levi's covering problem for duals of cyclic $2k$-polytopes*, Geom. Dedicata 74 (1999), no. 1, 61–71.

[105] S. Taschuk, *The harmonic mean measure of symmetry for convex bodies*, Adv. Geom. 15 (2015), no. 1, 109–120.

[106] K. Tikhomirov, *Illumination of convex bodies with many symmetries*, Mathematika 63 (2017), no. 2, 372–382.

[107] H. von Weizsäker, *Sudakov's typical marginals, random linear functionals and a conditional central limit theorem*, Probab. Theory Relat. Fields **107** (1997), 313–324.