Πιθανοθεωρητικές μέθοδοι στην κυρτή γεωμετρική ανάλυση

Διδακτορική Διατριβή

Λαμπρινή Χιώνη

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2017

Εισηγητής:

Απόστολος Γιαννόπουλος

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Χρησιμοποιώντας πιθανοθεωρητικές μεθόδους συνεισφέρουμε στα ακόλουθα προβλήματα της θεωρίας των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και, γενικότερα, των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

1. Υποκανονικές διευθύνσεις ισοτροπικών κυρτών σωμάτων. Έστω K ένα κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0 και όγκο 1 στον $\mathbb{R}^n$. Μια διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ λέγεται υποκανονική για το K με σταθερά $b > 0$ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant b\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(K)}.$$

Αποδεικνύουμε ότι αν το K είναι ισοτροπικό τότε οι περισσότερες διευθύνσεις είναι υποκανονικές με σταθερά η οποία είναι λογαριθμική ως προς τη διάσταση. Ακριβέστερα, για κάθε $\alpha > 1$ έχουμε

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C(\log n)^{3/2} \max\left\{\sqrt{\log n}, \sqrt{\alpha}\right\} L_K$$

για όλα τα θ σε ένα υποσύνολο Θ_α της S^{n-1} μέτρου $\sigma(\Theta_\alpha) \geqslant 1 - n^{-\alpha}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Δίνουμε επίσης εκτιμήσεις για τη διάμετρο των τυχαίων προβολών των L_q-κεντροειδών σωμάτων $Z_q(K)$ του K και, χρησιμοποιώντας τις, αποδεικνύουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε για τον τυχαίο υπόχωρο F διάστασης $(\log n)^4$ όλες οι διευθύνσεις στον F είναι υποκανονικές με σταθερά $O(\log^2 n)$.

2. Τυχαίες τομές ισοτροπικών κυρτών σωμάτων. Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ συνδιάστασης $k = \gamma n$, όπου $\gamma \in (1/\sqrt{n}, 1)$, ικανοποιεί την

$$K \cap F \subseteq \frac{c}{\gamma}\sqrt{n} L_K (B_2^n \cap F)$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-\sqrt{n})$. Επίσης, χρησιμοποιώντας μία διαφορετική μέθοδο, μελετάμε το ίδιο ερώτημα για τα L_q-κεντροειδή σώματα $Z_q(\mu)$ ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ και κάθε $\gamma \in (0,1)$ αποδεικνύουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,(1-\gamma)n}$ ικανοποιεί την

$$Z_q(\mu) \cap F \subseteq c_2(\gamma)\sqrt{q}\, B_2^n \cap F.$$

3. Τυχαία προσέγγιση κυρτών σωμάτων και ο δείκτης κορυφών. Αποδεικνύουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\alpha > 1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον

$\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, τότε το τυχαίο υποσύνολο $X \subset K$ πληθικότητας $\mathrm{card}(X) = \lceil \alpha n \rceil$ ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-c_1 n}$ την

$$K \subseteq c_2 n \, \mathrm{conv}(X),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Εφαρμόζοντας αυτό το αποτέλεσμα, αποδεικνύουμε ότι ο δείκτης κορυφών οποιουδήποτε κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ φράσσεται από $c_3 n^2$, όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, επεκτείνοντας έτσι την εκτίμηση που είχαν δώσει οι Bezdek και Litvak στη συμμετρική περίπτωση.

4. Ασυμπτωτικό σχήμα τυχαίων πολυτόπων. Έστω $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}.$$

Δίνουμε ακριβείς εκτιμήσεις για τα quermassintegrals και άλλες γεωμετρικές παραμέτρους του K_N στο πλήρες διάστημα $cn \leqslant N \leqslant \exp(n)$ τιμών του N. Αυτές οι εκτιμήσεις συμπληρώνουν τις εκτιμήσεις που είχαν δώσει οι Γιαννόπουλος, Δαφνής, Τσολομύτης και άλλοι συγγραφείς για το διάστημα $cn \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$.

Αναλύουμε το πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται τα αποτελέσματα της διατριβής στο Κεφάλαιο 2, στο οποίο γίνεται επίσης σύγκριση με προηγούμενα αποτελέσματα και αναφορά στα νέα εργαλεία που χρησιμοποιούμε. Περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται χωριστά στο Κεφάλαιο 3 (για τις υποκανονικές διευθύνσεις ισοτροπικών κυρτών σωμάτων), το Κεφάλαιο 4 (για τις τυχαίες τομές ισοτροπικών κυρτών σωμάτων), το Κεφάλαιο 5 (για την τυχαία προσέγγιση κυρτών σωμάτων και το δείκτη κορυφών) και το Κεφάλαιο 6 (για το ασυμπτωτικό σχήμα τυχαίων πολυτόπων).

Τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας, τα οποία χρησιμοποιούνται στη διατριβή, παρουσιάζονται συνοπτικά στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 1.

Κεφάλαιο 1

Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε συνοπτικά βασικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας και της θεωρίας των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας τα οποία χρησιμοποιούνται ουσιαστικά στα επόμενα. Για περισσότερες πληροφορίες και λεπτομερείς αποδείξεις παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία [1] και [2].

1.1 Κυρτά σώματα

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια δομή $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται με $|\cdot|$. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n και σ για το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Η πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Για κάθε $k \leqslant n$ και $F \in G_{n,k}$ συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ στον F. Επίσης, ορίζουμε $B_F = B_2^n \cap F$ και $S_F = S^{n-1} \cap F$. Το n-διάστατο μέτρο του Gauss γ_n είναι το Borel μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $(2\pi)^{-n/2}\exp(-\|x\|_2^2/2)$.

Τα γράμματα c, c', c_1, c_2 κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές, οι οποίες μπορεί να αλλάζουν από γραμμή σε γραμμή. Οποτεδήποτε γράφουμε $a \simeq b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ έτσι ώστε $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$. Επίσης, αν $K, D \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K \simeq D$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ έτσι ώστε $c_1 K \subseteq D \subseteq c_2 K$.

Κυρτά σώματα

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο C του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το C είναι συμμετρικό αν «$x \in C$ αν και μόνον αν $-x \in C$». Λέμε ότι το C έχει *βαρύκεντρο* το 0 (την αρχή των αξόνων) αν

$$\int_C \langle x, \theta \rangle \, dx = 0$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_C : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ ενός κυρτού σώματος C με $0 \in \mathrm{int}(C)$ ορίζεται ως εξής:

$$\rho_C(x) = \max\{t > 0 : tx \in C\}.$$

Η *συνάρτηση στήριξης* του C ορίζεται για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ από την

$$h_C(y) = \max\{\langle x, y\rangle : x \in C\}.$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_C(\theta) \leqslant h_C(\theta)$. Το *μέσο πλάτος* του C είναι η ποσότητα

$$w(C) = \int_{S^{n-1}} h_C(\theta)\, d\sigma(\theta).$$

Η *περιγεγραμμένη ακτίνα* του C είναι η

$$R(C) = \max\{\|x\|_2 : x \in C\}.$$

Αν το 0 είναι εσωτερικό σημείο του C, γράφουμε $r(C)$ για την εγγεγραμμένη ακτίνα του C (τον μεγαλύτερο $r > 0$ για τον οποίο $rB_2^n \subseteq C$). Η *ακτίνα όγκου* του C είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vrad}(C) = \left(\frac{|C|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}.$$

Το *πολικό σώμα* C° του C ορίζεται να είναι το

$$C^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } y \in C\}. \tag{1.1.1}$$

Βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι ακόλουθες:

(i) $0 \in C^\circ$.

(ii) Αν $0 \in \mathrm{int}(C)$, τότε $(C^\circ)^\circ = C$.

(iii) Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_{C^\circ}(\theta) = 1/h_C(\theta)$.

(iv) Για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.

Γράφουμε $\overline{C}$ για το πολλαπλάσιο όγκου 1 του κυρτού σώματος $C \subseteq \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\overline{C} := \frac{C}{|C|^{1/n}}$.

Μεικτοί όγκοι

Συμβολίζουμε με $\tilde{\mathcal{K}}_n$ τον κυρτό κώνο όλων των μη-κενών συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Το θεμελιώδες θεώρημα του Minkowski για τους μεικτούς όγκους ισχυρίζεται ότι υπάρχει μια συνάρτηση $V : (\tilde{\mathcal{K}}_n)^n \to \mathbb{R}^+$ που έχει τις εξής ιδιότητες:

(i) Η V έχει ως «διαγώνιο» τον όγκο: αν $K \in \tilde{\mathcal{K}}_n$ τότε $V(K, \dots, K) = V_n(K)$.

(ii) Η V είναι θετικά γραμμική ως προς κάθε συντεταγμένη της: αν $K_1,\dots,K_i^{(1)},K_i^{(2)},\dots,K_n\in\tilde{\mathcal{K}}_n$ και $t_1,t_2\geqslant 0$, τότε

$$V(K_1,\dots,t_1K_i^{(1)}+t_2K_i^{(2)},\dots,K_n)=\sum_{j=1}^{2}t_jV(K_1,\dots,K_i^{(j)},\dots,K_n).$$

(iii) Η V είναι συμμετρική: αν $K_1,\dots,K_n\in\tilde{\mathcal{K}}_n$ και ϕ είναι οποιαδήποτε μετάθεση των δεικτών, τότε

$$V(K_{\phi(1)},\dots,K_{\phi(n)})=V(K_1,\dots,K_n).$$

Η τιμή $V(K_1,\dots,K_n)$ ονομάζεται *μεικτός όγκος* των $K_1,\dots,K_n$. Έπεται ότι, για κάθε $m\in\mathbb{N}$ και $K_1,\dots,K_m\in\tilde{\mathcal{K}}_n$, ο όγκος του $t_1K_1+\cdots+t_mK_m$ είναι ένα ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς $t_i>0$. Δηλαδή,

$$V_n(t_1K_1+\cdots+t_mK_m)=\sum_{1\leqslant i_1,\dots,i_n\leqslant m}V(K_{i_1},\dots,K_{i_n})t_{i_1}\cdots t_{i_n}.$$

Ειδικότερα, αν $K,L\in\tilde{\mathcal{K}}_n$ τότε η συνάρτηση $V_n(K+tL)$ είναι πολυώνυμο ως προς $t\in[0,\infty)$:

$$V_n(K+tL)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V_j(K,L)\,t^j, \tag{1.1.2}$$

όπου $V_j(K,L)=V(K;n-j,L;j)$ είναι ο j-οστός μεικτός όγκος των K και L. Στο εξής θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $L;j$ εννοώντας $L,\dots,L$ j-φορές.

Η (1.1.2) είναι γνωστή ως *τύπος Minkowski-Steiner*. Από την (1.1.2) βλέπουμε ότι

$$V_1(K,L)=\frac{1}{n}\lim_{t\to 0^+}\frac{V_n(K+tL)-V_n(K)}{t},$$

το οποίο μαζί με την κλασική ανισότητα Brunn-Minkowski $V_n(K+tL)^{1/n}\geqslant V_n(K)^{1/n}+tV_n(L)^{1/n}$ συνεπάγεται ότι

$$V_1(K,L)\geqslant V_n(K)^{\frac{n-1}{n}}V_n(L)^{1/n} \tag{1.1.3}$$

για κάθε $K,L\in\tilde{\mathcal{K}}_n$. Η (1.1.3) είναι η *πρώτη ανισότητα του Minkowski.*

Ο *τύπος του Steiner* είναι ειδική περίπτωση της (1.1.2). Ο όγκος του $K+tB_2^n$, $t>0$, αναπτύσσεται ως πολυώνυμο του t:

$$V_n(K+tB_2^n)=\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}W_j(K)t^j, \tag{1.1.4}$$

όπου

$$W_j(K)=V_j(K,B_2^n)=V(K;n-j,B_2^n;j) \tag{1.1.5}$$

είναι το *j-οστό quermassintegral* του K. Τα quermassintegrals W_j έχουν αρκετές από τις ιδιότητες των μεικτών όγκων: είναι μονότονα, συνεχή ως προς τη μετρική Hausdorff, και ομογενή βαθμού $n-j$.

Η ανισότητα Aleksandrov-Fenchel ισχυρίζεται ότι αν $K,\ L,\ K_3,\dots,K_n\in\tilde{\mathcal{K}}_n$, τότε

$$V(K,L,K_3,\dots,K_n)^2\geqslant V(K,K,K_3,\dots,K_n)V(L,L,K_3,\dots,K_n). \tag{1.1.6}$$

Από την (1.1.6) έπεται ότι η ακολουθία $(W_0(K),\dots,W_n(K))$ είναι λογαριθμικά κοίλη: έχουμε

$$W_j^{k-i}\geqslant W_i^{k-j}W_k^{j-i} \tag{1.1.7}$$

αν $0\leqslant i<j<k\leqslant n$.

Είναι βολικό να δουλεύουμε με την ακόλουθη κανονικοποίηση των quermassintegrals: για κάθε $1\leqslant k\leqslant n$ ορίζουμε

$$Q_k(K)=\left(\frac{1}{\omega_k}\int_{G_{n,k}}|P_F(K)|\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k}. \tag{1.1.8}$$

Παρατηρήστε ότι $Q_1(K)=w(K)$ και $Q_n(K)=(|K|/\omega_n)^{1/n}$. Ο ολοκληρωτικός τύπος του Kubota

$$W_{n-k}(K)=\frac{\omega_n}{\omega_k}\int_{G_{n,k}}|P_F(K)|d\nu_{n,k}(F) \tag{1.1.9}$$

δείχνει ότι

$$Q_k(K)=\left(\frac{W_{n-k}(K)}{\omega_n}\right)^{1/k}. \tag{1.1.10}$$

Από την (1.1.7) συμπεραίνουμε ότι η $Q_k(K)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του k.

Γεωμετρικές ανισότητες

Θα χρησιμοποιούμε συχνά τις παρακάτω βασικές ανισότητες για όγκους κυρτών σωμάτων:

(α) Ανισότητα του Urysohn. Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$w(C)\geqslant\left(\frac{|C|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}. \tag{1.1.11}$$

Παρατηρήστε ότι, από τον ορισμό και τη μονοτονία των παραμέτρων $Q_k(C)$, η ανισότητα Urysohn γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$Q_1(C)\geqslant Q_n(C). \tag{1.1.12}$$

(β) Η ανισότητα Blaschke–Santaló. Αν C είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ή γενικότερα αν το C έχει βαρύκεντρο το 0, τότε

$$|C|\,|C^\circ|\leqslant|B_2^n|^2. \tag{1.1.13}$$

(γ) Η ανισότητα των Bourgain–V. Milman [28]. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(C)$ ισχύει

$$|C|\,|C^\circ| \geqslant c^n |B_2^n|. \tag{1.1.14}$$

Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή και ως αντίστροφη ανισότητα Santaló.

(δ) Η ανισότητα των Rogers–Shephard. Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε ο όγκος του *σώματος διαφορών* $K - K := \{x - y : x, y \in K\}$ ικανοποιεί την

$$|C - C| \leqslant \binom{2n}{n} |C|. \tag{1.1.15}$$

Η θέση John και η θέση Löwner

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{E}(K)$ την οικογένεια των ελλειψοειδών που περιέχονται στο K. Ένα επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχεται στο K και έχει το μέγιστο δυνατό όγκο. Λέμε ότι το $\mathcal{E}$ είναι το *ελλειψοειδές μέγιστου όγκου* του K.

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Θα λέμε ότι το $u \in \mathbb{R}^n$ είναι *σημείο επαφής* του K και της B_2^n αν $\|u\|_2 = \|u\|_K = 1$, δηλαδή αν το u είναι κοινό σημείο των συνόρων τους. Το θεώρημα του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ του K και της B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \ldots, c_m$ τέτοιοι ώστε*

$$x = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, u_j \rangle u_j \tag{1.1.16}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις 1.1.2. Το Θεώρημα 1.1.1 μας εξασφαλίζει ότι ο ταυτοτικός τελεστής I του $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή

$$I = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j, \tag{1.1.17}$$

όπου $u_j \otimes u_j$ είναι η προβολή στη διεύθυνση του u_j: $(u_j \otimes u_j)(x) = \langle x, u_j \rangle u_j$. Σημειώστε ότι από την (1.1.16) για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|x\|_2^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^m c_j \langle x, u_j \rangle^2. \tag{1.1.18}$$

Επίσης, αν επιλέξουμε $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, όπου $\{e_i\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$n = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|_2^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_j \langle e_i, u_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j \|u_j\|_2^2 = \sum_{j=1}^{m} c_j.$$

Μια πολύ γνωστή συνέπεια του θεωρήματος 1.1.1 (που συνήθως αποκαλείται το *θεώρημα του John*) λέει ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subseteq \sqrt{n}\,\mathcal{E}$. Ο ισχυρισμός αυτός είναι ισοδύναμος με την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 1.1.3. *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subset \sqrt{n} B_2^n$.*

Ο *λόγος όγκων* ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vr}(K) = \min_{\mathcal{E}}\{(|K|/|\mathcal{E}|)^{1/n}\}, \tag{1.1.19}$$

όπου το minimum παίρνεται πάνω από όλα τα 0-συμμετρικά ελλειψοειδή που περιέχονται στο K. Ο Ball απέδειξε στο [16] ότι $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(C_n) \simeq \sqrt{n}$ στη συμμετρική περίπτωση και $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(\Delta_n) \simeq \sqrt{n}$ στη γενική περίπτωση, όπου C_n είναι ο κύβος όγκου 1 και Δ_n είναι το κανονικό simplex όγκου 1.

Λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K βρίσκεται στη θέση Löwner αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Ισοδύναμα, αν το πολικό σώμα K° του K βρίσκεται στη θέση John.

Ο *εξωτερικός λόγος όγκων* ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος K είναι η ποσότητα

$$\mathrm{ovr}(K) = \min_{\mathcal{E}}\{(|\mathcal{E}|/|K|)^{1/n}\}, \tag{1.1.20}$$

όπου το minimum παίρνεται πάνω από όλα τα 0-συμμετρικά ελλειψοειδή τα οποία περιέχουν το K. Μπορεί κανείς να δείξει ότι $\mathrm{ovr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(\overline{B}_1^n) \simeq \sqrt{n}$ στη συμμετρική περίπτωση και $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(\Delta_n) \simeq \sqrt{n}$ στη γενική περίπτωση.

Αριθμοί κάλυψης

Έστω A και B δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ο *αριθμός κάλυψης του A από το B* είναι ο μικρότερος φυσικός N για τον οποίο υπάρχουν N μεταφορές του B των οποίων η ένωση καλύπτει το A:

$$N(A,B) = \min\Big\{N \in \mathbb{N} : \ \exists x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B)\Big\}.$$

Μια παραλλαγή του παραπάνω αριθμού κάλυψης ορίζεται ως εξής:

$$\overline{N}(A,B) = \min\Big\{N \in \mathbb{N} : \ \exists x_1, \ldots, x_N \in A \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B)\Big\}.$$

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι $N(A,B) \leqslant \overline{N}(A,B)$. Μπορούμε επίσης εύκολα να ελέγξουμε ότι $\overline{N}(A,B-B) \leqslant N(A,B)$. Ειδικότερα, αν το B είναι συμμετρικό και κυρτό, τότε $\overline{N}(A,2B) \leqslant N(A,B)$.

Αν A,B είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με το B συμμετρικό τότε, για κάθε $t>0$ ορίζουμε

$$S_t(A,B)=\max\{m\in\mathbb{N}:\ \exists x_1,\dots,x_m\in A \text{ ώστε } \|x_i-x_j\|_B>t \text{ για } i\neq j\}.$$

Από τον ορισμό ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\overline{N}(A,tB)\leqslant S_t(A,B)\leqslant \overline{N}(A,\tfrac{t}{2}B).$$

Τέλος, θα χρειαστούμε δύο βασικά θεωρήματα για αριθμούς κάλυψης. Το πρώτο είναι η ανισότητα του Sudakov:

Θεώρημα 1.1.4 (Sudakov). *Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $t>0$ ισχύει*

$$N(K,tB_2^n)\leqslant 2\exp\left(cn\,(w(C)/t)^2\right), \tag{1.1.21}$$

όπου $c>0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Το επόμενο θεώρημα δυϊσμού για τους αριθμούς κάλυψης αποδείχθηκε από τους Artstein, Milman και Szarek [13].

Θεώρημα 1.1.5. *Υπάρχουν απόλυτες θετικές σταθερές α και β τέτοιες ώστε για κάθε $n\geqslant 1$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$*

$$N(B_2^n,\alpha^{-1}C^\circ)^{\frac{1}{\beta}}\leqslant N(C,B_2^n)\leqslant N(B_2^n,\alpha C^\circ)^{\beta} \tag{1.1.22}$$

Ο V. Milman (βλέπε [79]) απέδειξε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\beta>0$ με την εξής ιδιότητα: κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο το 0 έχει γραμμική εικόνα $\tilde{C}$ τέτοια ώστε $|\tilde{C}|=|B_2^n|$ και

$$\max\bigl\{N(\tilde{C},B_2^n),N(B_2^n,\tilde{C}),N(\tilde{C}^\circ,B_2^n),N(B_2^n,\tilde{C}^\circ)\bigr\}\leqslant \exp(\beta n). \tag{1.1.23}$$

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα C που ικανοποιεί αυτή την εκτίμηση είναι σε *M-θέση με σταθερά β*.

Αργότερα, ο Pisier [93] έδωσε μια διαφορετική προσέγγιση σε αυτό το αποτέλεσμα, που δίνει περισσότερες πληροφορίες για τη συμπεριφορά των αριθμών κάλυψης. Η ακριβής διατύπωση είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 1.1.6 (Pisier). *Για κάθε $1\leqslant\alpha<2$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{C}$ του C τέτοια ώστε*

$$\max\bigl\{N(\tilde{C},tB_2^n),N(B_2^n,t\tilde{C}),N(\tilde{C}^\circ,tB_2^n),N(B_2^n,t\tilde{C}^\circ)\bigr\}\leqslant \exp\left(\frac{c(\alpha)n}{t^\alpha}\right) \tag{1.1.24}$$

για κάθε $t\geqslant 1$, όπου η σταθερά $c(\alpha)$ εξαρτάται μόνο από το α, και $c(\alpha)=O\bigl((2-\alpha)^{-\alpha/2}\bigr)$ καθώς το $\alpha\to 2$.

Χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα

Έστω C συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_C : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$\|x\|_C = \inf\{t > 0 : x \in tC\}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ συμβολίζεται με X_C. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία μπάλα $C = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ του X είναι συμμετρικό κυρτό σώμα.

Ορίζουμε

$$M(C) := \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_C d\sigma(\theta).$$

Παρατηρώντας ότι $\|x\|_C = h_{C^\circ}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ βλέπουμε ότι $M(C) = w(C^\circ)$ και ότι

$$M(C)^{-1} \leqslant \mathrm{vrad}(C) \leqslant w(C) = M(C^\circ).$$

Η ανισότητα στο αριστερό μέλος ελέγχεται εύκολα αν εκφράσουμε τον όγκο του C σαν ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες Hölder και Jensen, ενώ η ανισότητα στο δεξιό μέλος προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Urysohn.

Η δυϊκή ανισότητα Sudakov των Pajor και Tomczak-Jaegermann [85] δίνει άνω φράγμα για τους αριθμούς κάλυψης $N(B_2^n, tC)$ συναρτήσει της παραμέτρου $M(C)$.

Θεώρημα 1.1.7 (Pajor-Tomczak). *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t > 0$,*

$$\log N(B_2^n, tC) \leqslant cn\,(M(C)/t)^2\,, \tag{1.1.25}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την *M^*-ανισότητα*:

Θεώρημα 1.1.8. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$R(C \cap F) \leqslant c_1 \sqrt{\frac{n}{n-k}}\, w(C)$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_2(n-k))$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η πρώτη απόδειξη της (1.1.8), με ασθενέστερη εξάρτηση από το λόγο $\frac{n}{n-k}$, δόθηκε από τον V. Milman στο [77], και μια δεύτερη απόδειξη δόθηκε στο [78], με γραμμική εξάρτηση από το $\frac{n}{n-k}$. Το Θεώρημα 1.1.8 αποδείχτηκε, σε αυτή τη βέλτιστη μορφή, από τους Pajor και Tomczak-Jaegermann στο [85]. Τέλος, ο Gordon [49] απέδειξε μία ακόμα πιο ακριβή μορφή της ανισότητας, εξασφαλίζοντας ότι η τιμή της σταθεράς c_1 μπορεί να υποτεθεί (ασυμπτωτικά) ίση με 1.

Έστω X, Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Η *απόσταση Banach–Mazur* του X από τον Y ορίζεται ως εξής:

$$d(X,T) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός}\}. \tag{1.1.26}$$

Σε γεωμετρική γλώσσα η απόσταση Banach–Mazur περιγράφεται ως εξής: αν $X = X_K$ και $Y = X_C$ (δηλαδή οι μοναδιαίες μπάλες των X, Y είναι τα κυρτά σώματα K, C αντίστοιχα) τότε ο $d(X, Y)$ είναι ο μικρότερος $d > 0$ ώστε

$$C \subseteq T(K) \subseteq dC \tag{1.1.27}$$

για κάποιον αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$. Είναι προφανές ότι $d(X, Y) \geqslant 1$ για κάθε δύο n-διάστατους χώρους, με ισότητα αν και μόνον αν οι χώροι είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Έτσι, η απόσταση Banach–Mazur μετράει πόσο διαφέρουν δύο χώροι από το να είναι ισομετρικοί.

Εκτός από την απόσταση Banach-Mazur θα χρησιμοποιήσουμε και τη γεωμετρική απόσταση $d_G(K, C)$ δύο συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και C στον $\mathbb{R}^n$. Είναι ο μικρότερος $d > 0$ για τον οποίο υπάρχουν $a, b > 0$ με $ab \leqslant d$ ώστε

$$\frac{1}{a}C \subseteq K \subseteq bC. \tag{1.1.28}$$

Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ είναι unconditional αν η $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι 1-unconditional βάση για τη νόρμα $\|\cdot\|_C$ που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το C: αυτό σημαίνει ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$ έχουμε

$$\big\|\varepsilon_1 t_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n t_n e_n\big\|_C = \big\|t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n\big\|_C.$$

Η ανισότητα του Pisier και η MM^*-ανισότητα

Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω α μια νόρμα στον $L(\ell_2^n, X)$. Η *δυϊκή ως προς το ίχνος νόρμα* ορίζεται στον $L(X, \ell_2^n)$ ως εξής:

$$\alpha^*(v) = \sup\{\mathrm{tr}(vu) : \alpha(u) \leqslant 1\}. \tag{1.1.29}$$

Το λήμμα του Lewis [66] ισχύει για κάθε ζευγάρι δυϊκών ως προς το ίχνος νορμών:

Θεώρημα 1.1.9. *Για κάθε νόρμα α στον $L(\ell_2^n, X)$, υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε $\alpha(u) = 1$ και $\alpha^*(u^{-1}) = n$.*

Η *ℓ-νόρμα* στον $L(\ell_2^n, X)$ ορίστηκε από τους Figiel και Tomczak-Jaegermann στο [37]. Έστω $\{g_1, \ldots, g_n\}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $u : \ell_2^n \to X$ ορίζουμε την ℓ-νόρμα του u ως εξής:

$$\ell(u) = \left(\mathbb{E}\,\Big\|\sum_{i=1}^n g_i u(e_i)\Big\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.1.30}$$

Ένας απλός υπολογισμός μας δίνει ότι

$$\ell(u) \simeq \sqrt{n}\, w((u^{-1})^*(K^\circ)), \tag{1.1.31}$$

όπου K είναι η μοναδιαία μπάλα του X. Αυτή η σχέση συνδέει την ℓ-νόρμα με το μέσο πλάτος. Ένα απλούστερο μοντέλο προκύπτει αν στη θέση των κανονικών τυχαίων μεταβλητών θεωρήσουμε τις Rademacher συναρτήσεις $r_i : E_2^n \to \{-1,1\}$ που ορίζονται μέσω των $r_i(\varepsilon) = \varepsilon_i$, όπου βλέπουμε τον $E_2^n = \{-1,1\}^n$ σαν χώρο πιθανότητας με το ομοιόμορφο μέτρο. Από μια ανισότητα των Maurey και Pisier έπεται ότι

$$\ell(u) \simeq \left(\int_{E_2^n} \Big\| \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i) \Big\|^2 d\varepsilon \right)^{1/2}. \tag{1.1.32}$$

Το σύμβολο $\simeq$ σημαίνει εδώ ότι οι δύο ποσότητες διαφέρουν κατά έναν όρο τάξης το πολύ ίσης με $\sqrt{\log n}$.

Θεωρούμε τις Walsh συναρτήσεις $w_A(\varepsilon) = \prod_{i\in A} r_i(\varepsilon)$, όπου $A \subseteq \{1,\dots,n\}$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι κάθε συνάρτηση $f : E_2^n \to X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$f(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon) x_A, \tag{1.1.33}$$

για κάποια διανύσματα $x_A \in X$. Ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f : E_2^n \to X$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L_2(X)} = \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|^2 d\epsilon \right)^{1/2} \tag{1.1.34}$$

Η *Rademacher προβολή* $R_n : L_2(X) \to L_2(X)$ είναι ο τελεστής που απεικονίζει την $f = \sum w_A x_A$ στη συνάρτηση $R_n f := \sum_{i=1}^n r_i x_{\{i\}}$. Γράφουμε $\mathrm{Rad}(X)$ για τη νόρμα του τελεστή R_n. Οι Figiel και Tomczak-Jaegermann [37] απέδειξαν το εξής:

Θεώρημα 1.1.10. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε*

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*) \leqslant n\mathrm{Rad}(X). \tag{1.1.35}$$

Ο Pisier έδωσε στο [92] μια ακριβή εκτίμηση για την $\mathrm{Rad}(X)$ συναρτήσει της απόστασης Banach-Mazur $d(X,\ell_2^n)$.

Θεώρημα 1.1.11. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Τότε,*

$$\mathrm{Rad}(X) \leqslant c\log[d(X,\ell_2^n)+1] \leqslant c\log(n+1), \tag{1.1.36}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, και η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το θεώρημα του John.

Σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των Lewis, Figiel και Tomczak-Jaegermann, το Θεώρημα 1.1.11 οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Θεώρημα 1.1.12 (MM^*-ανισότητα). *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μια θέση $\tilde{K}$ του K για την οποία*

$$w(\tilde{K})w(\tilde{K}^\circ) \leqslant c\log[d(X_K,\ell_2^n)+1] \leqslant c\log(n+1), \tag{1.1.37}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Υπολογίζοντας τον όγκο του $\tilde{K}$ σε πολικές συντεταγμένες και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι $w(\tilde{K}^\circ)^{-1} \leqslant c_2\sqrt{n}|\tilde{K}|^{1/n}$. Έπεται ότι

$$w(\tilde{K}) \leqslant c\sqrt{n}\log n|\tilde{K}|^{1/n}. \tag{1.1.38}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο παίρνουμε την εξής *αντίστροφη ανισότητα Urysohn.*

Θεώρημα 1.1.13. *Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει μια γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K με όγκο $|\tilde{K}|=1$ και μέσο πλάτος*

$$w(\tilde{K}) \leqslant c\sqrt{n}\log n, \tag{1.1.39}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Επιπλέον, με ένα απλό επιχείρημα που βασίζεται στην ανισότητα Rogers-Shephard μπορούμε να δούμε ότι η υπόθεση της συμμετρίας στο προηγούμενο θεώρημα δεν είναι απαραίτητη.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [3] και [6] για τη θεωρία των κυρτών σωμάτων και στα βιβλία [1], [4] και [5] για την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία και την τοπική θεωρία των χώρων με νόρμα.

1.2 Μέσοι νορμών στη σφαίρα

Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το C. Για κάθε $q\geqslant 1$ ορίζουμε

$$M_q := M_q(C) = \left(\int_{S^{n-1}}\|\theta\|^q\sigma(d\theta)\right)^{1/q}.$$

Παρατηρήστε ότι $M_1(C)=M(C)$. Οι παράμετροι M_q μελετήθηκαν από τους Litvak, Milman και Schechtman στο [68], όπου προσδιορίζεται η τάξη μεγέθους τους:

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με b τη μικρότερη σταθερά για την οποία ισχύει $\|x\|\leqslant b\|x\|_2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\max\left\{M_1, c_1\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\} \leqslant M_q \leqslant \max\left\{2M_1, c_2\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\}$$

για κάθε $q\in[1,n]$, όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\|x\|_C$ η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το C. Ορίζουμε $k(C)$ τον μεγαλύτερο φυσικό $k \leqslant n$ για τον οποίον

$$\mu_{n,k}\left(F \in G_{n,k} : \frac{M(C)}{2}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_C \leqslant 2M(C)\|x\|_2,\ x \in F\right) \geqslant \frac{n}{n+k}.$$

Επίσης, ορίζουμε $k_*(C) = k(C^\circ)$.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι διάσταση $k(C)$ προσδιορίζεται πλήρως από τις παραμέτρους $M(C)$ και $b(C)$.

Θεώρημα 1.2.2 (Milman–Schechtman). *Υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ ώστε*

$$c_1 n\frac{M(C)^2}{b(C)^2} \leqslant k(C) \leqslant c_2 n\frac{M(C)^2}{b(C)^2}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$. Αντίστοιχα, θεωρώντας το C° στη θέση του C, έχουμε

$$c_1 n\frac{w(C)^2}{R(C)^2} \leqslant k_*(C) \leqslant c_2 n\frac{w(C)^2}{R(C)^2},$$

διότι $M(C^\circ) = w(C)$ και $b(C^\circ) = R(C)$.

Η μεταβολή της συμπεριφοράς της ποσότητας M_q συμβαίνει όταν $q \simeq n(M_1/b)^2$. Η τιμή αυτή του q είναι περίπου ίση με τη διάσταση Dvoretzky $k(C)$ του C. Παρατηρήστε επίσης ότι, από το Θεώρημα 1.2.1 έχουμε $M_n \simeq b$. Αφού $M_q \leqslant b$ για κάθε $q \geqslant 1$ και η συνάρτηση $q \mapsto M_q$ είναι προφανώς αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι $M_q \simeq b$ αν $q \geqslant n$. Με άλλα λόγια, έχουμε μια δεύτερη μεταβολή συμπεριφοράς της παραμέτρου M_q στο σημείο $q = n$.

Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$d_*(C) = \min\left\{-\log\sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} : h_C(x) \leqslant \frac{w(C)}{2}\right\}\right), n\right\}.$$

Η παράμετρος d_* ορίστηκε από τους Klartag και Vershynin στο [63], όπου επίσης αποδείχτηκε ότι η $d_*(C)$ είναι πάντα μεγαλύτερη από $k_*(C)$:

Πρόταση 1.2.3. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$d_*(C) \geqslant ck_*(C),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η πράμετρος $d_*(C)$ συνδέεται στενά με εκτιμήσεις για το μέτρο των διευθύνσεων στις οποίες μια νόρμα είναι «πολύ μικρότερη» από τη μέση τιμή της. Στα επόμενα θα χρειαστούμε τέτοιες εκτιμήσεις, στην παρακάτω μορφή:

Θεώρημα 1.2.4. *Για κάθε $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ έχουμε*

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : h_C(x) < \varepsilon w(C)\}) < \varepsilon^{c_1 d_*(C)} < \varepsilon^{c_1 k_*(C)},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Το Θεώρημα 1.2.4 έχει σαν συνέπεια τις ακόλουθες αντίστροφες ανισότητες Hölder.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0 < q < c_1 d_*(C)$,*

$$c_2 w(C) \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_C^q(x)} d\sigma(x)\right)^{-1/q} \leqslant c_3 w(C).$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $0 < q < c_1 d_*(C)$ ισχύει

$$w_{-q}(C) \simeq w(C).$$

Η δεξιά ανισότητα του Θεωρήματος 1.2.5 προκύπτει εύκολα από την ανισότητα Hölder. Για την αριστερή ανισότητα χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά μέρη σε συνδυασμό με τις εκτιμήσεις του προηγούμενου θεωρήματος.

Ειδικότερα, αφού $d_*(C) \geqslant ck_*(C)$, έχουμε πάντα το εξής.

Θεώρημα 1.2.6. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $w_q(C) \simeq w_{-q}(C)$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant k_*(C)$.*

Πράγματι, από το Θεώρημα 1.2.1 έχουμε $w_q(C) \simeq w(C)$ για κάθε $q \leqslant k_*(C)$ και από το Θεώρημα 1.2.5 παίρνουμε $w_{-q}(C) \simeq w(C)$ για κάθε $q < k_*(C)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το συμπέρασμα.

1.3 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Η πυκνότητα ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{P}_n$ συμβολίζεται με f_μ.

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$. Λέμε ότι το μ έχει *βαρύκεντρο* το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle \, d\mu(x) = \langle x_0, \theta \rangle$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ισοδύναμα, αν $x_0 = \mathbb{E}_\mu(x)$. Η υποκλάση $\mathcal{CP}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα *κεντραρισμένα* $\mu \in \mathcal{P}_n$. Αυτά είναι τα μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$ που έχουν βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων. Δηλαδή, $\mu \in \mathcal{CP}_n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle d\mu(x) = 0$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Η υποκλάση $\mathcal{SP}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα άρτια (συμμετρικά) μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$: το μ λέγεται άρτιο αν $\mu(A) = \mu(-A)$ για κάθε σύνολο Borel A στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Όπως στην περίπτωση των μέτρων, το βαρύκεντρο της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{bar}(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx}.$$

Ειδικότερα, η f έχει βαρύκεντρο (ή βαρύκεντρο) την αρχή των αξόνων αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x)\, dx = 0$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε λέμε και ότι η f είναι *κεντραρισμένη*.

Ορισμός 1.3.1. Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλο* αν για κάθε ζεύγος μη κενών συμπαγών συνόλων A, B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda} \mu(B)^{\lambda}.$$

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλη* αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = 1$ (τότε λέμε ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη *πυκνότητα*). Από την ανισότητα Prékopa-Leindler έπεται ότι το μέτρο μ που έχει πυκνότητα την f είναι λογαριθμικά κοίλο. Ένα θεώρημα του Borell [25] δείχνει ότι, αντίστροφα, αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H (θα λέμε ότι το μ είναι μη εκφυλισμένο), τότε το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f, δηλαδή $d\mu(x) = f(x)\, dx$.

Αν K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\mu_K(A) = |K \cap A| = \int_A \mathbf{1}_K(x) dx$$

για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Από την κυρτότητα του K έπεται ότι η $\mathbf{1}_K$ είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα το μ_K είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.

Επίσης, για κάθε $c > 0$, η συνάρτηση $f_c(x) = \exp(-c\|x\|_2^2)$ είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι, για κάθε $c > 0$, το μέτρο

$$\gamma_{n,c}(A) = \frac{1}{I(c)} \int_A \exp(-c\|x\|_2^2) dx$$

όπου $I(c) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-c\|x\|_2^2) dx$, είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Ειδικότερα αυτό ισχύει για το τυπικό μέτρο του Gauss γ_n.

Θα χρησιμοποιούμε συχνά δύο ανισότητες για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις και λογαριθμικά κοίλα μέτρα. Η πρώτη οποίο οφείλεται στον Fradelizi [38] και δείχνει ότι η τιμή μιάς λογαριθμικά κοίλης συνάρτησης στο βαρύκεντρό της είναι συγκρίσιμη με τη μέγιστη τιμή της (με τη σταθερά σύγκρισης να εξαρτάται - εκθετικά - μόνο από τη διάσταση). Παρατηρήστε ότι αν η f υποτεθεί άρτια, τότε $f(0) = \|f\|_\infty$.

Λήμμα 1.3.2 (Fradelizi). *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση μϵ $\mathrm{bar}(f) = 0$. Τότϵ,*

$$f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy = 1$. Από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\log f\left(\int_{\mathbb{R}^n} yf(y)dy\right) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy. \tag{1.3.1}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη, έχουμε

$$-\log f(x) \geqslant -\log f(y) + \langle x-y, \nabla\left(-\log f\right)(y)\rangle . \tag{1.3.2}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας με $f(y)$, και στη συνέχεια ολοκληρώνοντας ως προς y, παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\log f(x) &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y, -\nabla f(y)\rangle\, dy \\ &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy - n, \end{aligned} \tag{1.3.3}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει αν ολοκληρώσουμε κατά μέρη (και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι τιμές $f(y)$ της f φθίνουν εκθετικά καθώς $\|y\|_2 \to \infty$). Συνδυάζοντας τις (1.3.1) και (1.3.3) βλέπουμε ότι

$$\log f(0) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dx \geqslant \log f(x) - n,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Παίρνοντας το supremum πάνω από όλα τα x έχουμε το ζητούμενο. ∎

Η δεύτερη ανισότητα είναι το λήμμα του Grünbaum [50]: ισχυρίζεται ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων, τότε κάθε υπερεπίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ορίζει δύο ημιχώρους που έχουν περίπου το ίδιο μέτρο. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε προέρχεται από το [72].

Λήμμα 1.3.3. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο το 0. Τότε,*

$$\frac{1}{e} \leqslant \mu(\{x : \langle x,\theta\rangle \geqslant 0\}) \leqslant 1-\frac{1}{e}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\mu(\{x : |\langle x,\theta\rangle| > M\}) = 0$$

για κάποιον $M > 0$. Για τη γενική περίπτωση προσεγγίζουμε το τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με μέτρα που έχουν αυτήν την ιδιότητα στη διεύθυνση του θ.

Ορίζουμε $G(t) = \mu(\langle x,\theta\rangle \leqslant t)$. Η G είναι λογαριθμικά κοίλη, αύξουσα, και έχουμε $G(t) = 0$ αν $t \leqslant M$ και $G(t) = 1$ αν $t \geqslant M$. Αφού το μ έχει βαρύκεντρο το 0, ισχύει

$$\int_{-M}^{M} tG'(t)dt = 0,$$

και με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$\int_{-M}^{M} G(t)dt = M.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$G(0) \geqslant \frac{1}{e}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\log G$ είναι κυρτή συνάρτηση, συνεπώς

$$G(t) \leqslant G(0)e^{\alpha t},$$

όπου $\alpha = G'(0)/G(0)$. Μπορούμε να επιλέξουμε τον M αρκετά μεγάλο ώστε $1/c < M$. Τότε, $G(t) \leqslant G(0)e^{\alpha t}$ αν $t \leqslant 1/\alpha$ και, προφανώς, $G(t) \leqslant 1$ αν $t > 1/\alpha$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} M = \int_{-M}^{M} G(t)dt &\leqslant \int_{-\infty}^{1/\alpha} G(0)e^{\alpha t}dt + \int_{1/\alpha}^{M} 1dt \\ &= \frac{eG(0)}{\alpha} + M - \frac{1}{\alpha}, \end{aligned}$$

και αυτό μας δίνει $G(0) \geqslant 1/e$. ■

1.4 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Σε αυτή την παράγραφο, ορίζουμε αρχικά την ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος K και την ισοτροπική σταθερά L_K ως αναλλοίωτη της αφινικής κλάσης του K. Στη συνέχεια, δίνουμε έναν γενικότερο ορισμό στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

Ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος

Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο $|K| = 1$, είναι κεντραρισμένο (δηλαδή έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων), και υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = \alpha^2 \|y\|_2^2 \tag{1.4.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Αν το K ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη (1.4.1) τότε

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^{n} \int \langle x, e_i\rangle^2 dx = n\alpha^2,$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το $U(K)$ είναι επίσης ισοτροπικό για κάθε $U \in O(n)$.

Η *ισοτροπική συνθήκη* (1.4.1) είναι ισοδύναμη με καθεμία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$,

$$\int_K x_i x_j dx = \alpha^2 \delta_{ij}. \tag{1.4.2}$$

(ii) Για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $T \in L(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K \langle x, Tx \rangle dx = \alpha^2 (\mathrm{tr} T). \tag{1.4.3}$$

Κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια *θέση* $\tilde{K}$ που είναι ισοτροπική. Λέμε ότι το $\tilde{K}$ είναι μια *ισοτροπική θέση* του K. Αποδεικνύεται ότι η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μονοσήμαντα ορισμένη (αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς) και ότι προκύπτει σαν λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης. Αν ορίσουμε

$$\mathcal{T}(K) = \inf \left\{ \int_{TK} \|x\|_2^2 dx : T \in SL(n) \right\}, \tag{1.4.4}$$

τότε μια θέση K_1 του K είναι ισοτροπική αν και μόνο αν

$$\int_{K_1} \|x\|_2^2 dx = \mathcal{T}(K). \tag{1.4.5}$$

Αν K_1 και K_2 είναι δύο ισοτροπικές θέσεις του K τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $K_2 = U(K_1)$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n} \min \left\{ \frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{TK} \|x\|_2^2 dx \;\Big|\; T \in GL(n) \right\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από τη γραμμική κλάση του K. Θα χρησιμοποιούμε συχνά το γεγονός ότι, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η

$$nL_K^2 \leqslant \frac{1}{|K|^{1+\frac{2}{n}}} \int_K \|x\|_2^2 \, dx, \tag{1.4.6}$$

που είναι άμεση συνέπεια του ορισμού της σταθεράς L_K. Επίσης, αν το K_1 είναι ισοτροπική θέση του K τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_{K_1} \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2.$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται *ισοτροπική σταθερά* του K.

Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Γενικεύοντας τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος λέμε ότι ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι *ισοτροπικό* αν έχει βαρύκεντρο το 0 και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 \, d\mu(x) = 1 \tag{1.4.7}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν το $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει βαρύκεντρο το 0 τότε το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx \rangle \, d\mu(x) = \mathrm{tr}(T),$$

ή ισοδύναμα, $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu(x) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$. Σημειώνουμε επίσης ότι αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 \, d\mu(x) = n.$$

Κάθε μη εκφυλισμένο κενταρισμένο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει μια ισοτροπική εικόνα $\nu = \mu \circ S$, όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση.

Ανάλογα, αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 τότε η f λέγεται *ισοτροπική* αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 f(x) \, dx = 1$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ένα μη εκφυλισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η πυκνότητά του f_μ είναι ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Παρατήρηση 1.4.1. Συγκρίνοντας τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος με εκείνον του ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου βλέπουμε ότι ένα κυρτό σώμα K με όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η συνάρτηση $L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K} K}$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Ορισμός 1.4.2 (γενικός ορισμός της ισοτροπικής σταθεράς)**.** Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε τον *πίνακα συνδιακυμάνσεων* $\mathrm{Cov}(f)$ της f ως τον πίνακα με συντεταγμένες

$$[\mathrm{Cov}(f)]_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx}.$$

Παρατηρήστε ότι αν η f είναι ισοτροπική τότε ο $\mathrm{Cov}(f)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα, η *ισοτροπική σταθερά* της ορίζεται από την:

$$L_f := \left(\frac{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx} \right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}. \tag{1.4.8}$$

Επίσης, αν μ είναι ένα μη εκφυλισμένο πεπερασμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε ορίζουμε την ισοτροπική του σταθερά θέτοντας $L_\mu := L_{f_\mu}$, δηλαδή

$$L_\mu := \left(\frac{\|\mu\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x) dx} \right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}, \tag{1.4.9}$$

όπου

$$\|\mu\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)$$

και $\mathrm{Cov}(\mu) := \mathrm{Cov}(f_\mu)$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η ισοτροπική σταθερά L_μ είναι αφινικά αναλλοίωτη: έχουμε $L_\mu = L_{a\mu\circ A}$ και $L_f = L_{af\circ A}$ για κάθε αντιστρέψιμο αφινικό μετασχηματισμό A του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε θετικό αριθμό a. Παρατηρούμε επίσης ότι:

(i) Ο Ορισμός 1.4.2 συμφωνεί με τον ορισμό που είχαμε δώσει για την ισοτροπική σταθερά ενός κυρτού σώματος, με την έννοια ότι $L_{\mathbf{1}_K} = L_K$. Ένας απλός τρόπος για να το δούμε είναι να υποθέσουμε ότι το K είναι στην ισοτροπική θέση και μετά να παρατηρήσουμε ότι $\|\mathbf{1}_K\|_\infty = 1$, $\int \mathbf{1}_K(x)\,dx = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_K) = L_K^2\, I$.

(ii) Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\int f_\mu = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mu) = I$, απ' όπου έπεται ότι $L_\mu = \|\mu\|_\infty^{1/n}$. Επιπλέον, αφού το μ έχει εξ ορισμού βαρύκεντρο το 0, το Λήμμα 1.3.2 μας εξασφαλίζει ότι

$$f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0),$$

συνεπώς $L_\mu \simeq (f_\mu(0))^{1/n}$.

Είναι σχετικά απλό να δεί κανείς ότι οι ισοτροπικές σταθερές όλων των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι ομοιόμορφα φραγμένες από κάτω, από μια σταθερά $c > 0$ που είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση: αν $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$L_f = \|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

ψ_α–εκτιμήσεις

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\alpha \geqslant 1$ ορίζουμε την ψ_α-νόρμα της f ως εξής:

$$\|f\|_{\psi_\alpha} := \inf\left\{ t > 0 : \int_\Omega \exp\left(\frac{|f(\omega)|}{t}\right)^\alpha d\mu(\omega) \leqslant 2\right\}, \tag{1.4.10}$$

με την προϋπόθεση ότι υπάρχουν $t > 0$ για τους οποίους $\int_\Omega \exp\left(\frac{|f(\omega)|}{t}\right)^\alpha d\mu(\omega) \leqslant 2$.

Οι ψ_α-νόρμες είναι μια υποκλάση της οικογένειας των νορμών Orlicz. Κάθε τέτοια νόρμα ορίζεται από μια άρτια κυρτή συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ που ικανοποιεί τις $\Phi(0) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$. Για κάθε τέτοια συνάρτηση, η μοναδιαία μπάλα του αντίστοιχου χώρου Orlicz αποτελείται από όλες τις $\mathcal{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις f για τις οποίες $\int_\Omega \Phi(f(\omega))d\omega \leqslant 1$. Οι ψ_α-νόρμες, οι οποίες μας ενδιαφέρουν εδώ, είναι ακριβώς εκείνες οι νόρμες Orlicz που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $t \in \mathbb{R} \to e^{|t|^\alpha} - 1$.

Η ψ_α-νόρμα περιγράφεται ισοδύναμα μέσω των L_q-νορμών.

Λήμμα 1.4.3. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Έστω $\alpha \geqslant 1$ και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \simeq \sup_{p \geqslant \alpha} \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/\alpha}},$$

όπου οι σταθερές της ισοδυναμίας είναι απόλυτες σταθερές.

Θα χρησιμοποιούμε επίσης συχνά την εξής, ουσιαστικά ισοδύναμη, περιγραφή της ψ_α-νόρμας.

Λήμμα 1.4.4. *Έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση και έστω $\alpha \geqslant 1$.*

(i) *Αν $\|f\|_{\psi_\alpha} < \infty$ τότε για κάθε $t > 0$ έχουμε $\mu(\{\omega : |f(\omega)| \geqslant t\|f\|_{\psi_\alpha}\}) \leqslant 2e^{-t^a}$.*

(ii) *Αν $\mu(\{\omega : |f(\omega)| \geqslant bt\}) \leqslant 2e^{-t^a}$ για κάποιον $b > 0$ και για κάθε $t > 0$, τότε $\|f\|_{\psi_\alpha} \leqslant cb$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Ορισμός 1.4.5. Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $\alpha \geqslant 1$ και $\theta \in S^{n-1}$. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί ψ_α *εκτίμηση με σταθερά* $b_\alpha = b_\alpha(\theta)$ στη διεύθυνση του θ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant b_\alpha \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2. \tag{1.4.11}$$

Λέμε ότι το μ είναι ψ_α-*μέτρο με σταθερά* $B_\alpha > 0$ αν

$$\sup_{\theta \in S^{n-1}} \frac{\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_\alpha}}{\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2} \leqslant B_\alpha. \tag{1.4.12}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.4.3 βλέπουμε ότι το μ ικανοποιεί ψ_α εκτίμηση με σταθερά b_α στη διεύθυνση του $\theta \in S^{n-1}$ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \leqslant c b_\alpha q^{1/\alpha} \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2 \tag{1.4.13}$$

για κάθε $q \geqslant \alpha$.

Το επόμενο βασικό λήμμα του Borell ισχύει στο γενικό πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Λήμμα 1.4.6. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στην κλάση $\mathcal{P}_n$. Για κάθε συμμετρικό κλειστό κυρτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = \alpha \in (0,1)$ και για κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$1 - \mu(tA) \leqslant \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{t+1}{2}}. \tag{1.4.14}$$

Συνέπεια του λήμματος του Borell είναι το γεγονός ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι ψ_1-μέτρο (σε κάθε διεύθυνση) με μια απόλυτη σταθερά.

Θεώρημα 1.4.7. *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ λογαριθμικά κοίλο. Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ημινόρμα τότε για κάθε $q > p \geqslant 1$ έχουμε*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Οι συναρτήσεις $x \mapsto |\langle x, \theta\rangle|$, $\theta \in S^{n-1}$, ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.4.7. Συνεπώς,

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \leqslant cq\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_1 \tag{1.4.15}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_1} \leqslant c\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_1 \tag{1.4.16}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

1.5 Η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς

Ένα βασικό ανοικτό πρόβλημα, το πρώτο χρονολογικά, για τη γεωμετρία των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι αν υπάρχει ομοιόμορφο άνω φράγμα, ανεξάρτητο από τη διάσταση, για τις ισοτροπικές σταθερές τους.

Εικασία 1.5.1. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε

$$L_K \leqslant C$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx \leqslant C^2$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Γενικότερα, υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε

$$L_\mu \leqslant C$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, αν $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$f(0)^{1/n} \leqslant C,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Αφετηρία της Εικασίας 1.5.1 είναι ένα γνωστό ανοικτό πρόβλημα της θεωρίας των κυρτών σωμάτων.

Εικασία 1.5.2 (εικασία του υπερεπιπέδου)**.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ ώστε*

$$|K \cap \theta^{\perp}| \geqslant c. \tag{1.5.1}$$

Η σύνδεση προκύπτει από το εξής γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.5.3. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\frac{c_1}{L_K} \leqslant |K \cap \theta^{\perp}| \leqslant \frac{c_2}{L_K},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Από το Θεώρημα 1.5.3 γίνεται φανερή η σχέση της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς με την εικασία του υπερεπιπέδου. Αν υποθέσουμε ότι η εικασία του υπερεπιπέδου ισχύει και αν το K είναι ισοτροπικό, το Θεώρημα 1.5.3 δείχνει ότι *όλες* οι τομές $K \cap \theta^{\perp}$ έχουν όγκο φραγμένο από c_2/L_K. Αφού η (1.5.1) πρέπει να ισχύει για τουλάχιστον ένα $\theta \in S^{n-1}$, συμπεραίνουμε ότι $L_K \leqslant c_2/c$. Αντίστροφα, αποδεικνύεται ότι αν υπάρχει απόλυτο άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά τότε ισχύει η εικασία του υπερεπιπέδου.

Έτσι, η εικασία του υπερεπιπέδου ρωτάει, ισοδύναμα, αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ιδιότητα

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C \tag{1.5.2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. O Bourgain απέδειξε στο [27] ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\,\mathrm{log}n$, και ο Klartag [58] έδωσε το φράγμα $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}$. Μια δεύτερη απόδειξη του φράγματος του Klartag δίνεται στο [61].

1.6 L_q-κεντροειδή σώματα

Ορισμός 1.6.1. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του K ως το συμμετρικό κυρτό σώμα που έχει συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(K)}(y) = \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L^q(K)} = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}.$$

Από την ανισότητα Hölder είναι φανερό ότι αν $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$ τότε

$$Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq Z_{\infty}(K) := \mathrm{conv}(K \cup (-K)).$$

Παρατηρήστε ότι $Z_q(T(K)) = T(Z_q(K))$ για κάθε $T \in SL(n)$ και για κάθε $q \geqslant 1$. Επίσης, ένα κυρτό σώμα K που έχει όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 είναι ισοτροπικό αν το $Z_2(K)$ είναι πολλαπλάσιο της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας.

Ο ορισμός επεκτείνεται φυσιολογικά στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int f = 1$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(f)$ της f να είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(f)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q f(x)\, dx\right)^{1/q}.$$

Αντίστοιχα, αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q \, d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Παρατηρήστε ότι αν το μ έχει πυκνότητα f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue τότε $Z_q(\mu) = Z_q(f_\mu)$.

Όπως και στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων, το $Z_q(\mu)$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα και έχουμε $Z_q(T \circ \mu) = T(Z_q(\mu))$ για κάθε $T \in SL(n)$ και για κάθε $q \geqslant 1$. Μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f είναι ισοτροπική αν $Z_2(f) = B_2^n$.

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, από το Θεώρημα 1.4.7, για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε

$$Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq \frac{c_1 q}{p} Z_p(K), \tag{1.6.1}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αν το K έχει βαρύκεντρο στο 0, τότε

$$Z_q(K) \supseteq c_2 Z_\infty(K) \tag{1.6.2}$$

για κάθε $q \geqslant n$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό προκύπτει από την ανισότητα

$$\int_K |\langle x, \theta\rangle|^q dx \geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(q+n+1)} \max\left\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\right\},$$

η οποία ισχύει για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $q \geqslant 1$. Από αυτήν βλέπουμε ότι αν $q \geqslant n$ τότε

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \simeq \max\{h_K(\theta), h_K(-\theta)\},$$

δηλαδή $Z_q(K) \supseteq cZ_\infty(K)$.

Εντελώς ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για λογαριθμικά κοίλα μέτρα: αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f τότε για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε

$$Z_p(f) \subseteq Z_q(f) \subseteq \frac{cq}{p} Z_p(f), \tag{1.6.3}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ο ασυμπτωτικός τύπος της επόμενης πρότασης (βλέπε [89]) είναι πολύ χρήσιμος.

Πρόταση 1.6.2. *Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{c_1}{f(0)^{1/n}} \leqslant |Z_n(f)|^{1/n} \leqslant \frac{c_2}{f(0)^{1/n}}, \tag{1.6.4}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Περιθώριες κατανομές και προβολές

Ορισμός 1.6.3. Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω ακέραιος $1\leqslant k<n$ και έστω $F\in G_{n,k}$. Η *περιθώρια συνάρτηση* $\pi_F(f):F\to[0,\infty)$ της f ως προς F ορίζεται ως εξής:

$$\pi_F(f)(x):=\int_{x+F^{\perp}} f(y)dy. \tag{1.6.5}$$

Γενικότερα, για κάθε $\mu\in\mathcal{P}_n$ ορίζουμε την περιθώρια κατανομή του μ ως προς τον k-διάστατο υπόχωρο F θέτοντας

$$\pi_F(\mu)(A):=\mu(P_F^{-1}(A))$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του F. Αν το μ έχει (λογαριθμικά κοίλη) πυκνότητα f_μ τότε οι δύο ορισμοί συμφωνούν. Μπορούμε να δούμε ότι

$$f_{\pi_F(\mu)}=\pi_F(f_\mu)$$

σχεδόν παντού. Πράγματι, για κάθε Borel υποσύνολο A του F, έχουμε

$$\begin{aligned}\pi_F(\mu)(A)=\mu(P_F^{-1}(A))&=\int f_\mu(x)\mathbf{1}_A(P_Fx)\,dx \\ &=\int_F\int_{F^\perp} f_\mu(x+y)\mathbf{1}_A(x)\,dy\,dx,\end{aligned} \tag{1.6.6}$$

από το θεώρημα Fubini. Με μια αλλαγή μεταβλητής βλέπουμε ότι

$$\pi_F(\mu)(A)=\int_A\left(\int_{x+F^\perp} f_\mu(y)\,dy\right)\,dx=\int_A\pi_F(f_\mu)(x)\,dx.$$

Η επόμενη πρόταση περιγράφει κάποιες βασικές ιδιότητες των περιθώριων κατανομών.

Πρόταση 1.6.4. *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $F\in G_{n,k}$.*

(i) *Αν η f είναι άρτια, τότε και η $\pi_F(f)$ είναι άρτια.*

(ii) *Έχουμε*

$$\int_F\pi_F(f)(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

(iii) *Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g:F\to\mathbb{R}$ έχουμε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(P_Fx)f(x)\,dx=\int_F g(x)\pi_F(f)(x)\,dx.$$

(iv) *Για κάθε $\theta\in S_F$,*

$$\int_F\langle x,\theta\rangle\pi_F(f)(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\theta\rangle f(x)dx. \tag{1.6.7}$$

Ειδικότερα, αν η f είναι κεντραρισμένη τότε, για κάθε $F\in G_{n,k}$ η $\pi_F(f)$ είναι κεντραρισμένη.

(v) *Για κάθε* $p > 0$ *και για κάθε* $\theta \in S_F$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^p f(x)dx = \int_F |\langle x, \theta\rangle|^p \pi_F(f)(x)dx.$$

Ειδικότερα, αν η f *είναι ισοτροπική, τότε και η* $\pi_F(f)$ *είναι ισοτροπική.*

(vi) *Αν η* f *είναι λογαριθμικά κοίλη, τότε και η* $\pi_F(f)$ *είναι λογαριθμικά κοίλη.*

Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε για οποιοδήποτε μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$.

Προβολές του $Z_q(f)$

Μια βασική παρατήρηση του Παούρη στο [88] είναι ότι κάθε προβολή του L_q-κεντροειδούς σώματος μιας πυκνότητας f συμπίπτει με το L_q-κεντροειδές σώμα της αντίστοιχης περιθώριας πυκνότητας της f. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του θεωρήματος Fubini.

Θεώρημα 1.6.5. *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ *πυκνότητα στον* $\mathbb{R}^n$. *Για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *και για κάθε* $F \in G_{n,k}$ *και* $q \geqslant 1$, *έχουμε*

$$P_F(Z_q(f)) = Z_q(\pi_F(f)). \tag{1.6.8}$$

Απόδειξη. Για κάθε $q \geqslant 1$ και για κάθε $\theta \in S_F$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^q f(x)dx = \int_F |\langle x, \theta\rangle|^q \pi_F(f)(x)dx,$$

διότι $\langle x, \theta\rangle = \langle P_F(x), \theta\rangle$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα,

$$h_{Z_q(f)}(\theta) = h_{Z_q(\pi_F f)}(\theta),$$

για κάθε $\theta \in S_F$, και το συμπέρασμα προκύπτει από την παρατήρηση ότι $h_{P_F(Z_q(f))}(\theta) = h_{Z_q(f)}(\theta)$ για κάθε $\theta \in S_F$. $\square$

Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $F \in G_{n,k}$, η συνάρτηση $\pi_F(f)$ είναι μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον F. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την Πρόταση 1.6.2 για την $\pi_F(f)$. Έπεται ότι

$$\frac{c_1}{\pi_F(f)(0)^{1/k}} \leqslant |Z_k(\pi_F(f))|^{1/k} \leqslant \frac{c_2}{\pi_F(f)(0)^{1/k}}.$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την (1.6.8) έχουμε το εξής.

Θεώρημα 1.6.6. *Έστω* f *μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με* $\mathrm{bar}(f) = 0$ *στον* $\mathbb{R}^n$. *Τότε, για κάθε* $1 \leqslant k < n$ *και για κάθε* $F \in G_{n,k}$, *έχουμε*

$$c_1 \leqslant [\pi_F(f)(0)]^{\frac{1}{k}} |P_F(Z_k(f))|^{\frac{1}{k}} \leqslant c_2, \tag{1.6.9}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ *είναι απόλυτες σταθερές.*

1.7 Εκτιμήσεις μεγάλων αποκλίσεων για την Ευκλείδεια νόρμα

Η ακόλουθη ανισότητα μεγάλων αποκλίσεων αποδείχθηκε από τον Παούρη στο [88].

Θεώρημα 1.7.1 (Παούρης). *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant ct\sqrt{n}\}) \leqslant \exp\left(-t\sqrt{n}\right) \tag{1.7.1}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.7.1 συνδέεται με τη συμπεριφορά των ροπών της συνάρτησης $x \mapsto \|x\|_2$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε

$$I_q(\mu) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Από το Θεώρημα 1.4.7, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $p, q \geqslant 1$ έχουμε

$$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{pq} \leqslant c_1 q \|\langle \cdot, y\rangle\|_p,$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επίσης, αφού η $\|x\|_2$ είναι νόρμα, για κάθε $p, q \geqslant 1$ έχουμε

$$I_{pq}(K) \leqslant c_1 q I_p(K).$$

Ειδικότερα, έχουμε

$$I_q(\mu) \leqslant c_1 q I_2(\mu) \tag{1.7.2}$$

για κάθε $q \geqslant 2$. Ο Παούρης απέδειξε την εξής ανισότητα.

Θεώρημα 1.7.2 (Παούρης). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_3, c_4 > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$I_q(\mu) \leqslant c_4 I_2(\mu) \tag{1.7.3}$$

για κάθε $q \leqslant c_3\sqrt{n}$.

Υποθέτοντας ότι έχουμε δείξει το Θεώρημα 1.7.2, μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.7.1 ως εξής: θεωρούμε ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα του Markov, για κάθε $q \geqslant 2$ έχουμε

$$\mu(\{\|x\|_2 \geqslant e^3 I_q(\mu)\}) \leqslant e^{-3q}.$$

Τότε, από το Λήμμα του Borell παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mu(\{\|x\|_2 \geqslant e^3 I_q(\mu)s\}) &\leqslant (1 - e^{-3q})\left(\frac{e^{-3q}}{1 - e^{-3q}}\right)^{(s+1)/2} \\ &\leqslant e^{-qs}\end{aligned}$$

για κάθε $s \geqslant 1$. Επιλέγοντας $q = c_3\sqrt{n}$, και χρησιμοποιώντας την (1.7.3), βλέπουμε ότι

$$\mu(\{\|x\|_2 \geqslant c_4 e^3 I_2(\mu)s\}) \leqslant \exp(-c_3\sqrt{n}s)$$

για κάθε $s \geqslant 1$. Αφού το μ είναι ισοτροπικό, έχουμε $I_2(\mu) = \sqrt{n}$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.7.2, ορίζουμε πρώτα κάποιες παραμέτρους οι οποίες μας επιτρέπουν να μελετήσουμε σε μεγαλύτερο βάθος την οικογένεια των L_q-κεντροειδών σωμάτων του μ. Αρχικά, για κάθε $p \neq 0$ ορίζουμε

$$w_p(C) = \left(\int_{S^{n-1}} h_C^p(\theta)\sigma(d\theta)\right)^{1/p}.$$

Παρατηρήστε ότι το $w_1(C) = w(C)$ είναι το μέσο πλάτος του C. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.2.1 για το πολικό του C, παίρνουμε αμέσως το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.7.3. *Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, c_3 > 0$ ώστε για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν $1 \leqslant q \leqslant k_*(C)$ τότε $w(C) \leqslant w_q(C) \leqslant c_1 w(C)$.*

(ii) *Αν $k_*(C) \leqslant q \leqslant n$ τότε $c_2\sqrt{q/n}\,R(C) \leqslant w_q(C) \leqslant c_3\sqrt{q/n}\,R(C)$.*

Οι q-ροπές της Ευκλείδειας νόρμας ως προς το μ συνδέονται με τις παραμέτρους w_q και τα L_q-κεντροειδή σώματα του μ μέσω του επόμενου λήμματος.

Λήμμα 1.7.4. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ έχουμε*

$$w_q(Z_q(\mu)) = a_{n,q}\sqrt{\frac{q}{q+n}}I_q(\mu)$$

όπου $a_{n,q} \simeq 1$.

Απόδειξη. Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle|^q \sigma(d\theta)\right)^{1/q} = a_{n,q}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q+n}}\|x\|_2,$$

όπου $a_{n,q} \simeq 1$. Αφού

$$w_q(Z_q(\mu)) = \left(\int_{S^{n-1}}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^q d\mu(x)\sigma(d\theta)\right)^{1/q},$$

ο ισχυρισμός του λήμματος έπεται. ■

Κεντρικό ρόλο στη δουλειά του Παούρη παίζει η παράμετρος $q_*(\mu)$, η οποία, για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$, ορίζεται ως εξής:

$$q_*(\mu) = \max\{q \geqslant 2 : k_*(Z_q(\mu)) \geqslant q\}.$$

Θα χρειαστούμε ένα κάτω φράγμα για το $q_*(\mu)$.

Πρόταση 1.7.5. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{k_*(Z_2(\mu))}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $q_* := q_*(\mu)$. Από το Λήμμα 1.7.3 (i), το Λήμμα 1.7.4, την ανισότητα Hölder και την παρατήρηση ότι $I_2(\mu) = w_2(Z_2(\mu))$ (η οποία ελέγχεται εύκολα) παίρνουμε

$$\begin{aligned} w(Z_{q_*}(\mu)) &\geqslant c_1 w_{q_*}(Z_{q_*}(\mu)) = c_1 a_{n,q_*}\sqrt{\frac{q_*}{n+q_*}} I_{q_*}(\mu) \geqslant c_1 a_{n,q_*}\sqrt{\frac{q_*}{n+q_*}} I_2(\mu) \\ &= c_1 a_{n,q_*}\sqrt{\frac{q_*}{n+q_*}}\,\sqrt{n} w_2(Z_2(\mu)). \end{aligned} \tag{1.7.4}$$

Με άλλα λόγια,

$$w(Z_{q_*}(\mu)) \geqslant c_2\sqrt{q_*} w(Z_2(\mu)). \tag{1.7.5}$$

Αφού $R(Z_{q_*}(\mu)) \leqslant Cq_* R(Z_2(\mu))$, χρησιμοποιώντας τον ορισμό του q_* και το Θεώρημα 1.2.2 γράφουμε

$$\begin{aligned} q_* + 1 \geqslant k_*(Z_{q_*}(\mu)) &\geqslant c_3 n \left(\frac{w(Z_{q_*}(\mu))}{R(Z_{q_*}(\mu))}\right)^2 \\ &\geqslant c_3 n \frac{c_2^2 q_*}{C^2 q_*^2}\frac{w^2(Z_2(\mu))}{R^2(Z_2(\mu))} = c_5 \frac{k_*(Z_2(\mu))}{q_*}. \end{aligned} \tag{1.7.6}$$

Έτσι, καταλήγουμε στην $q_*(\mu) \geqslant c\,\sqrt{k_*(Z_2(\mu))}$ για κάποια (απόλυτη) σταθερά $c > 0$. □

Παρατηρήστε ότι αν το μ είναι ισοτροπικό τότε $k_*(Z_2(\mu)) = n$. Έτσι, παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 1.7.6. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$,*

$$q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{n}.$$

Το Θεώρημα 1.7.1 εμπεριέχεται σε ένα μεταγενέστερο θεώρημα του Παούρη [89] το οποίο θα μας φανεί επίσης χρήσιμο, γι' αυτό το λόγο περιγράφουμε την απόδειξή του. Αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$, επεκτείνουμε τον ορισμό του $I_q(\mu)$, επιτρέποντας αρνητικές τιμές του q, με τον προφανή τρόπο: για κάθε $q \in (-n, \infty)$, $q \neq 0$, ορίζουμε

$$I_q(\mu) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Τότε, έχουμε:

Θεώρημα 1.7.7. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k \leqslant q_*(\mu)$ έχουμε*

$$I_{-k}(\mu) \simeq I_k(\mu).$$

Ειδικότερα, το Θεώρημα αυτό δείχνει ότι για κάθε $k \leqslant q_*(\mu)$ έχουμε $I_k(\mu) \leqslant CI_2(\mu)$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτός ακριβώς ήταν ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 1.7.2.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.7.7 βασίζεται σε δύο ταυτότητες:

(α) Αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant k < n$ ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$I_{-k}(f) = c_{n,k}\left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0)d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/k}, \tag{1.7.7}$$

όπου

$$c_{n,k} = \left(\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\right)^{1/k} \simeq \sqrt{n}.$$

(β) Αν C είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant k < n$ ένας θετικός ακέραιος, τότε

$$w_{-k}(C) \simeq \sqrt{k}\left(\int_{G_{n,k}} |P_FC|^{-1}d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{k}}. \tag{1.7.8}$$

Έστω τώρα f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε έναν ακέραιο $1 \leqslant k < n$ και κάποιον $F \in G_{n,k}$. Από το Θεώρημα 1.6.6, έχουμε

$$\frac{1}{|P_F(Z_k(f))|^{1/k}} \simeq \pi_F(f)(0)^{1/k}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ταυτότητες παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 1.7.8. *Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k < n$ έχουμε*

$$w_{-k}(Z_k(f)) \simeq \sqrt{k}\left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0)d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{k}}$$

και

$$I_{-k}(f) \simeq \sqrt{\frac{n}{k}}w_{-k}(Z_k(f)). \tag{1.7.9}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.7.7. Θυμηθείτε ότι, για κάθε $1 \leqslant k < n$,

$$w_k(Z_k(\mu)) \simeq \sqrt{k/n}\, I_k(\mu). \tag{1.7.10}$$

Από την άλλη πλευρά, από την (1.7.9) βλέπουμε ότι

$$w_{-k}(Z_k(\mu)) \simeq \sqrt{k/n}\, I_{-k}(\mu).$$

Θέτουμε $k_0 = \lfloor q_* \rfloor$, όπου $q_* = q_*(\mu)$. Τότε,

$$k_*(Z_{k_0}(\mu)) \simeq k_*(Z_{q_*}(\mu)) \geqslant c_1 q_* \geqslant c_1 k_0. \tag{1.7.11}$$

Από το Θεώρημα 1.2.6 έχουμε

$$w_{-k}(Z_{k_0}(\mu)) \simeq w_k(Z_{k_0}(\mu)) \tag{1.7.12}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant c_2 k_*(Z_{k_0}(\mu))$, και η (1.7.11) δείχνει ότι η (1.7.12) ισχύει για κάθε $k \leqslant c_3 q_*(\mu)$. Θέτοντας $k_1 = \lfloor c_3 q_*(\mu) \rfloor \simeq k_0$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $Z_{k_0}(\mu) \simeq Z_{k_1}(\mu)$, παίρνουμε

$$w_{-k_1}(Z_{k_1}(\mu)) \simeq w_{k_1}(Z_{k_1}(\mu)). \tag{1.7.13}$$

Είναι τώρα φανερό ότι $I_{-k_1}(\mu) \simeq I_{k_1}(\mu)$ και αφού $k_1 \simeq q_*(\mu)$ βλέπουμε ότι η $q \mapsto I_q(\mu)$ είναι «σταθερή» για τα $1 \leqslant |q| \leqslant c q_*(\mu)$. ■

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με δύο βασικές συνέπειες των προηγούμενων αποτελεσμάτων.

Θεώρημα 1.7.9. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Αν $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, τότε*

$$w(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{q}. \tag{1.7.14}$$

Για το Θεώρημα 1.7.9 γράφουμε $w(Z_q(\mu)) \simeq w_q(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{q/n} I_q(\mu) \simeq \sqrt{q}$, όπου η πρώτη ισότητα ισχύει διότι $\sqrt{n} \leqslant q_*(\mu)$, η δεύτερη από το Λήμμα 1.7.4 και η τρίτη προκύπτει από το Θεώρημα 1.7.2.

Επίσης, από το Θεώρημα 1.7.7 προκύπτει η εξής εκτίμηση για το μέτρο «μικρής μπάλας».

Θεώρημα 1.7.10. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ έχουμε*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon^{c\sqrt{n}}, \tag{1.7.15}$$

όπου $\varepsilon_0, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Έστω $1 \leqslant k \leqslant q_*(\mu)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon I_2(\mu)\}) &\leqslant \mu(\{x : \|x\|_2 < c_1\varepsilon I_{-k}(\mu)\}) \\ &\leqslant (c_1\varepsilon)^k \leqslant \varepsilon^{k/2}, \end{aligned}$$

για κάθε $0 < \varepsilon < c_1^{-2}$ και $k \leqslant q_*(\mu)$. Αφού $q_*(\mu) \geqslant c_2\sqrt{n}$, έπεται το συμπέρασμα με $\varepsilon_0 = c_1^{-2}$ και $c = c_2/2$. ■

1.8 Όγκος των κεντροειδών σωμάτων και ισοτροπική σταθερά

Από το Θεώρημα 1.7.7 έχουμε ότι για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$I_{-q}(\mu) \simeq I_2(\mu) = \sqrt{n} \quad \text{για κάθε } 0 < q \leqslant q_*(\mu). \tag{1.8.1}$$

Είναι γνωστό ότι οι θετικές ροπές $I_q(\mu)$ δεν είναι πλέον συγκρίσιμες με την $I_2(\mu)$ όταν το q γίνει πολύ μεγαλύτερο από $q_*(\mu)$. Δεν είναι όμως γνωστό αν αυτό συμβαίνει και για τις αρνητικές ροπές.

Μάλιστα, θα μπορούσε η (1.8.1) να ισχύει για κάθε θετικό q μεχρι το $n-1$. Το ερώτημα αυτό, στην πραγματικότητα είναι ισοδύναμο με την εικασία του υπερεπιπέδου, όπως απέδειξαν οι Δαφνής και Παούρης στο [36] εισάγοντας μια άλλη παράμετρο, που για κάθε $\delta \geqslant 1$ δίνεται από την

$$q_{-c}(\mu,\delta) := \max\big\{1 \leqslant q \leqslant n-1 : I_{-q}(\mu) \geqslant \delta^{-1} I_2(\mu) = \delta^{-1}\sqrt{n}\big\}, \tag{1.8.2}$$

και μετράει πόσο μεγάλο είναι το εύρος της (1.8.1) αν επιτρέψουμε εξάρτηση των σταθερών από το δ. Οι Δαφνής και Παούρης απέδειξαν ότι

$$L_n \leqslant C\delta \sup_{\mu} \sqrt{\frac{n}{q_{-c}(\mu,\delta)}}\ \log\Big(\frac{en}{q_{-c}(\mu,\delta)}\Big) \tag{1.8.3}$$

για κάθε $\delta \geqslant 1$. Έδειξαν επίσης ότι, αν ισχύει η εικασία του υπερεπίπέδου, δηλαδή αν ισχύει η 1.5.2, τότε θα έχουμε

$$q_{-c}\big(\mu,\delta_0\big) = n-1 \tag{1.8.4}$$

για κάποιο $\delta_0 \simeq 1$ και για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι, από την (1.8.1), γνωρίζουμε ήδη ότι

$$q_{-c}\big(\mu,\delta_1\big) \geqslant q_*(\mu) \geqslant c_1\sqrt{n}, \tag{1.8.5}$$

όπου οι $\delta_1 \geqslant 1$ και $c_1 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στο [61] οι Klartag και E. Milman ορίζουν μια κληρονομική παραλλαγή της παραμέτρου $q_*(\mu)$ ως εξής:

$$q_*^H(\mu) := n \inf_k \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{q_*(\pi_E\mu)}{k}, \tag{1.8.6}$$

όπου $\pi_E\mu$ είναι το περιθώριο μέτρο του μ ως προς τον E, και για κάθε $q \leqslant q_*^H(\mu)$ δίνουν ένα κάτω φράγμα για τον όγκο των σωμάτων $Z_q(\mu)$:

$$\big|Z_q(\mu)\big|^{1/n} \geqslant c_3\sqrt{q/n} \tag{1.8.7}$$

όπου $c_3 > 0$ απόλυτη σταθερά. Υπενθυμίζουμε ότι, αν το μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο τότε το ίδιο ισχύει για όλα τα περιθώρια μέτρα του. Έτσι, για κάθε υπόχωρο $E \in G_{n,k}$, έχουμε ότι $q_*(\pi_E\mu) \geqslant c_1\sqrt{k}$. Από αυτό έπεται ότι, για όλα τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα μ ισχύει $q_*^H(\mu) \geqslant c_1\sqrt{n}$. Σημειώστε επίσης ότι, για εκείνα τα μέτρα για τα οποία έχουμε $q_*(\mu) \simeq \sqrt{n}$, η παράμετρος $q_*^H(\mu)$ επίσης δεν ξεπερνά ένα σταθερό πολλαπλάσιο της $\sqrt{n}$. Δεν αποκλείεται το φράγμα (1.8.7) να ισχύει και για μεγαλύτερες τιμές του $q \in [1,n]$. Μάλιστα, αν μπορούσε κανείς να αποδείξει την (1.8.7) για μεγαλύτερες τιμές του q, αυτό θα οδηγούσε στη βελτίωση του γνωστού άνω φράγματος για την L_n (για παράδειγμα, μπορεί κάποιος να δει τον υπολογισμό μετά το Λήμμα 2.2 στο [61]). Φαίνεται λοιπόν ότι τα κάτω φράγματα για τον όγκο του $Z_q(\mu)$ είναι πολύ σημαντικά (είναι άμεσα συνδεδεμένα με το κεντρικό πρόβλημα της θεωρίας). Στο πλήρες πεδίο τιμών του q, έως και n, το κάτω φράγμα που είναι γνωστό οφείλεται στους Lutwak, Yang και Zhang [74]: έχουν αποδείξει ότι

$$|Z_q(\mu)|^{1/n} \geqslant cL_\mu^{-1}\sqrt{q/n} \tag{1.8.8}$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$. Η περίπτωση του άνω φράγματος φαίνεται, πλέον, απλούστερη και έχει απαντηθεί πλήρως από τον Παούρη στο [88]. Το επόμενο θεώρημα, το οποίο θα χρησιμοποιούμε συχνά, συνοψίζει τα γνωστά αποτελέσματα για την ακτίνα όγκου του $Z_q(\mu)$.

Θεώρημα 1.8.1. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Αν $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ τότε*

$$|Z_q(\mu)|^{1/n} \simeq \sqrt{q/n}, \tag{1.8.9}$$

ενω αν $\sqrt{n} \leqslant q \leqslant n$ τότε

$$c_6L_\mu^{-1}\sqrt{q/n} \leqslant |Z_q(\mu)|^{1/n} \leqslant c_7\sqrt{q/n}. \tag{1.8.10}$$

Αξίζει να αναφέρουμε ότι η Βριτσίου όρισε στο [98] μια παραλλαγή του $q_{-c}(\mu,\delta)$ θέτοντας

$$q_{-c}^H(\mu,\delta) := n\inf_k \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{q_{-c}(\pi_E\mu,\delta)}{k}$$

για κάθε $\delta \geqslant 1$, και έδειξε ότι

$$\left|Z_q(\mu)\right|^{1/n} \geqslant c_4\delta^{-1}\sqrt{q/n} \tag{1.8.11}$$

για κάθε $q \leqslant q_{-c}^H(\mu,\delta)$. Εξακολουθεί να ισχύει η

$$q_{-c}^H(\mu,\delta_1) \geqslant c_1\sqrt{n} \tag{1.8.12}$$

για κάποιο $\delta_1 \simeq 1$ από την (1.8.5) και τον ορισμό του $q_{-c}^H(\mu,\delta_1)$. Προς το παρόν, στις αποδείξεις όπου χρησιμοποιούμε κάτω φράγματα για τον όγκο των L_q-κεντροειδών σωματων, η μόνη συγκεκριμένη εκτίμηση που έχουμε μεχρις στιγμής για τις παραμέτρους $q_*^H(\mu)$ ή $q_{-c}^H(\mu,\delta)$, άρα αυτό που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε στις εκτιμήσεις μας, είναι ότι όλες τους έχουν τάξη τουλάχιστον $\sqrt{n}$ όταν το μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$.

Κεφάλαιο 2

Αποτελέσματα της διατριβής

Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε το πλαίσιο και τα αποτελέσματα της διατριβής. Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα έχουν ήδη δημοσιευτεί. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 προέρχονται από τις εργασίες:

> S. Brazitikos and L. Hioni, *Sub-Gaussian directions of isotropic convex bodies*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **425** (2015), 919-927.

και

> A. Giannopoulos, L. Hioni and A. Tsolomitis, *Geometry of random sections of isotropic convex bodies*, Bulletin of the Hellenic Mathematical Society **60** (2016), 20-40.

(β) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4 προέρχονται από την εργασία:

> A. Giannopoulos, L. Hioni and A. Tsolomitis, *Geometry of random sections of isotropic convex bodies*, Bulletin of the Hellenic Mathematical Society **60** (2016), 20-40.

(γ) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 5 προέρχονται από την εργασία:

> S. Brazitikos, G. Chasapis and L. Hioni, *Random approximation and the vertex index of convex bodies*, Archiv der Mathematik **108** (2017), 209-221.

(δ) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 6 προέρχονται από την εργασία:

> A. Giannopoulos, L. Hioni and A. Tsolomitis, *Asymptotic shape of the convex hull of isotropic log-concave random vectors*, Advances in Applied Mathematics **75** (2016), 116-143.

2.1 Υποκανονικές διευθύνσεις και υποκανονικοί υπόχωροι

Έστω μ ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι μια διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ είναι *υποκανονική* για το μ με σταθερά $b > 0$ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(\mu)} \leqslant b\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(\mu)}. \tag{2.1.1}$$

Τελείως ανάλογα, αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι μια διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ είναι *υποκανονική* για το K με σταθερά $b > 0$ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant b\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(K)}. \tag{2.1.2}$$

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι ένα ερώτημα του V. Milman στο πλαίσιο των κυρτών σωμάτων: είναι σωστό ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 να έχει τουλάχιστον μία υποκανονική διεύθυνση με σταθερά C;

Το πρόβλημα της ύπαρξης υποκανονικών διευθύνσεων μπορεί να διατυπωθεί και να μελετηθεί στο γενικότερο πλαίσιο των κεντραρισμένων λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Καταφατική απάντηση στο ερώτημα του V. Milman έχει δοθεί για κάποιες ειδικές κλάσεις κυρτών σωμάτων. Στη γενική περίπτωση, πρώτος ο Klartag [59] απέδειξε, για οποιοδήποτε κεντραρισμένο κυρτό σώμα, την ύπαρξη διευθύνσεων που είναι «σχεδόν υποκανονικές».

Η καλύτερη μέχρι στιγμής απάντηση στο αρχικό ερώτημα του V. Milman είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 2.1.1 (Βαλέττας-Γιαννόπουλος-Παούρης)**.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 να έχει τουλάχιστον μία υποκανονική διεύθυνση με σταθερά $C\sqrt{\log n}$.*

Παραμένει ανοικτό το ερώτημα αν το φράγμα $C\sqrt{\log n}$ του Θεωρήματος 2.1.1 μπορεί να αντικατασταθεί από μια απόλυτη σταθερά $C > 0$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει είναι να δοθούν εκτιμήσεις για το μέτρο των διευθύνσεων που είναι ψ_2-διευθύνσεις ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με σταθερά, έστω, λογαριθμική ως προς τη διάσταση n. Στην ενότητα § 3.3, χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή μιας ιδέας του Klartag, αποδεικνύουμε το εξής.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε το $\Psi_2(K)$ να έχει ελάχιστο μέσο πλάτος πάνω από όλες τις γραμμικές εικόνες του που έχουν τον ίδιο όγκο. Τότε, για κάθε $\delta \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε $\Theta_\delta \subseteq S^{n-1}$ μέτρου $\sigma(\Theta_\delta) \geqslant 1-\delta$ τέτοιο ώστε κάθε $\theta \in \Theta_\delta$ να είναι ψ_2-διεύθυνση για το K με σταθερά $C\delta^{-1}(\log n)^{3/2}$.*

Δεδομένου ότι $\Psi_2(T(K)) = T(\Psi_2(K))$ για όλες τις $T \in SL(n)$, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει μια θέση $K_1 = T(K)$ του K τέτοια ώστε η Πρόταση 2.1.2 να εφαρμόζεται για το K_1. Μία πολύ πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση για μελέτη είναι να θεωρήσουμε ότι το K είναι στην ισοτροπική του θέση. Το βασικό μας αποτέλεσμα σε αυτό το κεφάλαιο δίνει, σε αυτή την περίπτωση, λογαριθμικά φράγματα για την $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}$ με πιθανότητα πολυωνυμικά κοντά στο 1.

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\alpha > 1$ έχουμε*

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C(\log n)^{3/2} \max\left\{\sqrt{\log n}, \sqrt{\alpha}\right\} L_K$$

για όλα τα θ σε ένα υποσύνολο Θ_α της S^{n-1} μέτρου $\sigma(\Theta_\alpha) \geqslant 1 - n^{-\alpha}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το Θεώρημα 2.1.3 εξασφαλίζει ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C(\log n)^2 L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{1}{n}$. Αυτό μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}$ στην S^{n-1}:

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{S^{n-1}} \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} d\sigma(\theta) \leqslant C(\log n)^2 L_K,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρουσιάζουμε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 2.1.3 και 2.1.4 στην ενότητα § 3.4. Σημειώνουμε ότι η καλύτερη μέχρι τώρα γνωστή γενική εκτίμηση για το μέσο πλάτος του $\Psi_2(K)$, όπου K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ήταν

$$w(\Psi_2(K)) \simeq \mathbb{E}_\sigma(\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}) \leqslant C\sqrt[4]{n} L_K,$$

από το [45].

Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου μελετάμε μια ισχυρότερη μορφή του προβλήματος, το ερώτημα αν μπορούμε να έχουμε υποκανονική εκτίμηση *για όλες τις διευθύνσεις* θ ενός υποχώρου $F \in G_{n,k}$ διάστασης k που αυξάνει στο άπειρο καθώς το n τείνει στο άπειρο. Λέμε ότι ο $F \in G_{n,k}$ είναι *υποκανονικός υπόχωρος* για το K με σταθερά $b > 0$ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant b \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(K)} \tag{2.1.3}$$

για κάθε $\theta \in S_F = S^{n-1} \cap F$. Όπως θα δούμε, αν το K είναι ισοτροπικό τότε ο τυχαίος υπόχωρος διάστασης $(\log n)^4$ είναι υποκανονικός με σταθερά $b \simeq (\log n)^2$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής.

Θεώρημα 2.1.5. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $k \simeq (\log n)^4$ τότε υπάρχει υποσύνολο Γ της $G_{n,k}$ με $\nu_{n,k}(\Gamma) \geqslant 1 - n^{-(\log n)^3}$ τέτοιο ώστε*

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C(\log n)^2 L_K \tag{2.1.4}$$

για κάθε $F \in \Gamma$ και κάθε $\theta \in S_F$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ένα πολύ βασικό εργαλείο για την απόδειξη των αποτελεσμάτων αυτού του κεφαλαίου, αλλά και άλλων βασικών αποτελεσμάτων της διατριβής, είναι ένα πρόσφατο αποτέλεσμα του E. Milman [76] για το μέσο πλάτος $w(Z_q(K))$ των L_q-κεντροειδών σωμάτων $Z_q(K)$ ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 2.1.6 (E. Milman). *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n}(\log n)^2 L_K, \tag{2.1.5}$$

και για όλα τα $q \geqslant 1$ έχουμε ότι

$$w(Z_q(K)) \leqslant C\log(1+q)\max\left\{\frac{q\log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q}\right\} L_K, \tag{2.1.6}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το Θεώρημα 2.1.6 απαντά στο ερώτημα να δοθεί ακριβές άνω φράγμα για το μέσο πλάτος

$$w(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(x)\, d\sigma(x)$$

ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή την L_1-νόρμα της συνάρτησης στήριξης του K ως προς το μέτρο Haar στη σφαίρα, το οποίο ήταν ανοικτό για κάποια χρόνια. Από τον εγκλεισμό $K \subseteq (n+1)L_K B_2^n$ (βλέπε [55]) προκύπτει το απλό άνω φράγμα $w(K) \leqslant (n+1)L_K$. Το άνω φράγμα $w(K) \leqslant cn^{3/4}L_K$ αποδείχθηκε στη διδακτορική διατριβή της Χαρτζουλάκη [54]. Διαφορετικές προσεγγίσεις, που όμως οδηγούν στο ίδιο άνω φράγμα, οφείλονται στους Pivovarov [94] και Βαλέττα-Γιαννόπουλο-Παούρη [45].

2.2 Τυχαίες τομές και τυχαίες στροφές ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $\overline{c}_0 > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$R(K \cap F) \leqslant \overline{c}_0\sqrt{n/k}\,\sqrt{n}L_K. \tag{2.2.1}$$

Από ένα γενικό αποτέλεσμα των Litvak, V. Milman και Pajor [67] έπεται ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ο τυχαίος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$R(K \cap F) \leqslant \overline{c}_1(n/k)^{3/2}\sqrt{n}L_K, \tag{2.2.2}$$

όπου $\overline{c}_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Αποδεικνύουμε ένα φράγμα της τάξης του $\gamma^{-1}\sqrt{n}L_K$ όταν η συνδιάσταση k είναι μεγαλύτερη από γn.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την*

$$R(K \cap F) \leqslant \frac{\overline{c}_0 n}{\max\{k, \sqrt{n}\}}\sqrt{n}L_K \tag{2.2.3}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-\sqrt{n})$, όπου $\overline{c}_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το Θεώρημα 2.2.1 αρχίζει να δίνει μη τετριμμένη πληροφορία όταν $k > \sqrt{n}$. Σε αυτή την περίπτωση, γράφοντας $k = \gamma n$ για κάποιο $\gamma \in (1/\sqrt{n}, 1)$ βλέπουμε ότι

$$R(K \cap F) \leqslant \frac{\overline{c}_0}{\gamma}\sqrt{n}L_K \tag{2.2.4}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-\sqrt{n})$ στην $G_{n,(1-\gamma)n}$. Το αποτέλεσμα του [67] επιτυγχάνει ασθενέστερη $\gamma^{-3/2}$-εξάρτηση από το $\gamma = k/n$.

Στην ενότητα § 4.4 μελετάμε τη διάμετρο της τυχαίας τομής του L_q-κεντροειδούς σώματος $Z_q(\mu)$ ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ παίρνουμε ακριβές άνω φράγμα για την ακτίνα της τυχαίας $(n-k)$-διάστατης τομής του $Z_q(\mu)$, το οποίο επεκτείνει παρόμοιο αποτέλεσμα των Μπραζιτίκου και Σταυρακάκη (βλέπε [31]) το οποίο είχε αποδειχθεί μόνο για $q \in [1, \sqrt{n}]$.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant q \leqslant n$. Τότε:*

(α) *Με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-\overline{c}_4 n}$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n/2}$ ικανοποιεί την*

$$R(Z_q(\mu) \cap F) \leqslant \overline{c}_5\sqrt{q} \tag{2.2.5}$$

όπου $\overline{c}_4, \overline{c}_5 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

(β) *Με πιθανότητα μεγαλύετρη από $1 - e^{-n}$, ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$Z_q(\mu) \cap U(Z_q(\mu)) \subseteq (\overline{c}_6\sqrt{q})\, B_2^n, \tag{2.2.6}$$

όπου $\overline{c}_6 > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Η μέθοδος της απόδειξης βασίζεται σε εκτιμήσεις, από τα [76] και [40], για τους αριθμούς Gelfand συμμετρικού κυρτού σώματος, οι οποίες εξαρτώνται από ογκομετρικές παραμέτρους του. Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα μελετώντας τα ίδια ερωτήματα για το πολικό σώμα $Z_q^{\circ}(\mu)$ του κεντροειδούς σώματος $Z_q(\mu)$.

Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου μελετάμε τη διάμετρο της τυχαίας τομής κυρτού σώματος που έχει *μέγιστη ισοτροπική σταθερά*. Θέτουμε

$$L_n' := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\}. \tag{2.2.7}$$

Εφαρμόζοντας τις μεθόδους της ενότητας § 4.4, αποδεικνύουμε κάποιες όχι αναμενόμενες ιδιότητες αυτών των σωμάτων.

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω K ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $L_K = L_n'$. Τότε:*

(α) *Ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n/2}$ ικανοποιεί τις*

$$R(K \cap F) \leqslant \overline{c}_7\sqrt{n} \tag{2.2.8}$$

και

$$L_{K\cap F} \leqslant \bar{c}_8 \tag{2.2.9}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-\bar{c}_9 n}$, *όπου* $\bar{c}_i > 0$ *είναι απόλυτες σταθερές.*

(β) *Ο τυχαίος* $U \in O(n)$ *ικανοποιεί την*

$$K \cap U(K) \subseteq (\bar{c}_{10}\sqrt{n})\, B_2^n, \tag{2.2.10}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$, *όπου* $\bar{c}_{10} > 0$ *είναι απόλυτη σταθερά.*

Το ίδιο αποτέλεσμα αποδεικνύεται αν υποθέσουμε ότι το K έχει σχεδόν μέγιστη ισοτροπική σταθερά, δηλαδή $L_K \geqslant \beta L_n'$ για κάποια (απόλυτη) σταθερά $\beta \in (0,1)$. Καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με τις σταθερές $\bar{c}_i$ να εξαρτώνται μόνο από το β.

2.3 Τυχαία προσέγγιση κυρτών σωμάτων και ο δείκτης κορυφών

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο αποδείχθηκε από τους Gluskin-Litvak στο [48] και τον Barvinok στο [18]: αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $d > 1$ υπάρχουν $N \leqslant dn$ σημεία $x_1,\dots,x_N \in K$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{absconv}(\{x_1,\dots,x_N\}) \subseteq K \subseteq \gamma_d\sqrt{n}\,\mathrm{absconv}(\{x_1,\dots,x_N\}). \tag{2.3.1}$$

Για την απόδειξη υποθέτει κανείς ότι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου που περιέχει την κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(C)$ του C και στη συνέχεια κάνει ουσιαστική χρήση ενός θεωρήματος των Batson, Spielman και Srivastava [20] για την επιλογή προσεγγιστικής αναπαράστασης της ταυτοτικής απεικόνισης με λίγα διανύσματα από δοθείσα αναπαράσταση τύπου John.

Μια γενίκευση του παραπάνω αποτελέσματος αποδείχθηκε πρόσφατα από τον Σ. Μπραζιτίκο στο [30]: υπάρχει απόλυτη σταθερά $\alpha > 1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα του οποίου το ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα, τότε υπάρχουν $N \leqslant \alpha n$ σημεία $x_1,\dots,x_N \in K\cap S^{n-1}$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq B_2^n \subseteq cn^{3/2}\mathrm{conv}(\{x_1,\dots,x_N\}), \tag{2.3.2}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Για την απόδειξη χρησιμοποιείται, στη θέση του θεωρήματος των Batson, Spielman και Srivastava, ένα πιο λεπτό θεώρημα του Srivastava από το [96].

Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου δίνει μια τυχαία εκδοχή της (2.3.2) με βελτιωμένη εξάρτηση από τη διάσταση.

Θεώρημα 2.3.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $\alpha > 1$ *με την ακόλουθη ιδιότητα: αν* K *είναι ένα κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *το οποίο έχει βαρύκεντρο το μηδέν, αν* $N = \lceil \alpha n\rceil$ *και* $x_1,\dots,x_N$ *είναι* *ανεξάρτητα τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη απο $1 - e^{-n}$ έχουμε*

$$K \subseteq c_1 n \,\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}), \tag{2.3.3}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα, και χρησιμοποιούμε τα *μονόπλευρα L_q-κεντροειδή σώματα* του K. Αυτά είναι τα κυρτά σώματα $Z_q^+(K)$, $q \geqslant 1$, με συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_q^+(K)}(y) = \left(2\int_K \langle x, y\rangle_+^q dx\right)^{1/q}, \tag{2.3.4}$$

όπου $a_+ = \max\{a, 0\}$.

Ένα επόμενο ερώτημα, το οποίο σχετίζεται άμεσα με το Θεώρημα 2.3.1, είναι να σταθεροποιήσουμε $N \geqslant \alpha n$ και να ζητήσουμε εκτιμήσεις για τη μεγαλύτερη τιμή $t(N,n)$ για την οποία N ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K ικανοποιούν την

$$\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}) \supseteq t(N,n)\, K \tag{2.3.5}$$

με πιθανότητα «εκθετικά κοντά» στο 1. Μια ακριβής απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα ενοποιούσε το Θεώρημα 2.3.1 και ένα αποτέλεσμα των Γιαννόπουλου και V. Milman από το [41], το οποίο απαντά στο ίδιο πρόβλημα στην περίπτωση που το N είναι εκθετικό ως προς το n. Δείχνουμε το ακόλουθο, πιο γενικό, αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω $\beta \in (0,1)$. Υπάρχει σταθερά $\alpha = \alpha(\beta) > 1$ η οποία εξαρτάται μόνο από το β και μια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα: αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, αν $\alpha n \leqslant N \leqslant e^n$ και αν $x_1, \ldots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K, τότε*

$$\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}) \supseteq \frac{c_1 \beta \log(N/n)}{n}\, K. \tag{2.3.6}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-N^{1-\beta} n^{\beta}}$.

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 2.3.1 είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 2.3.2.

Το Θεώρημα 2.3.1 σχετίζεται επίσης με το ερώτημα να δοθούν εκτιμήσεις για το *δείκτη κορυφών* ενός όχι απαραίτητα συμμετρικού n-διάστατου κυρτού σώματος. Ο δείκτης κορυφών ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ορίστηκε από τους Bezdek και Litvak στο [22] ως εξής:

$$\mathrm{vi}(K) = \inf\Big\{\sum_{j=1}^N \|y_j\|_K : K \subseteq \mathrm{conv}(\{y_1, \ldots, y_N\})\Big\}, \tag{2.3.7}$$

όπου $\|\cdot\|_K$ είναι η νόρμα με μοναδιαία μπάλα το K στον $\mathbb{R}^n$. Ο δείκτης αυτός συνδέεται στενά με την *παράμετρο φωτισμού* ενός κυρτού σώματος, η οποία εισήχθη από τον K. Bezdek στο [21], και με μια πολύ γνωστή εικασία των Boltyanski και Hadwiger για την κάλυψη n-διάστατου κυρτού σώματος από 2^n μικρότερα θετικά ομοιοθετικά αντίγραφά του (βλέπε [22] και [47]). Οι Bezdek και Litvak απέδειξαν ότι

$$\frac{c_1 n^{3/2}}{\mathrm{ovr}(K)} \leqslant \mathrm{vi}(K) \leqslant c_2 n^{3/2}, \tag{2.3.8}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές και $\mathrm{ovr}(K)$ είναι ο εξωτερικός λόγος όγκων του K. Απ' όσο γνωρίζουμε, η έννοια του δείκτη κορυφών δεν έχει μελετηθεί στην περίπτωση των μη συμμετρικών κυρτών σωμάτων. Ένας φυσιολογικός τρόπος ορισμού του για ένα αυθαίρετο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι να θεωρήσουμε πρώτα $z \in \mathrm{int}(K)$ και να θέσουμε

$$\mathrm{vi}_z(K) = \inf\Big\{ \sum_{j=1}^{N} p_{K,z}(y_j) : K \subseteq \mathrm{conv}(\{y_1, \ldots, y_N\})\Big\}, \tag{2.3.9}$$

όπου

$$p_{K,z}(x) = p_{K-z}(x) = \inf\{t > 0 : x \in t(K-z)\} \tag{2.3.10}$$

είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K ως προς το z. Παίρνοντας σαν z το βαρύκεντρο $\mathrm{bar}(K)$ του K, μπορούμε να ορίσουμε τον (γενικευμένο) δείκτη κορυφών του K ως εξής:

$$\mathrm{vi}(K) = \mathrm{vi}_{\mathrm{bar}(K)}(K). \tag{2.3.11}$$

Με αυτό τον ορισμό, είναι φανερό ότι $\mathrm{vi}(K) = \mathrm{vi}(K - \mathrm{bar}(K))$, επομένως μπορούμε να περιορίσουμε τη μελέτη μας στα κεντραρισμένα κυρτά σώματα. Αποδεικνύουμε κάποιες γενικές ιδιότητες αυτού του δείκτη και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.3.1 παίρνουμε την ακόλουθη γενική εκτίμηση.

Θεώρημα 2.3.3. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\frac{c_1 n^{3/2}}{\mathrm{ovr}(\mathrm{conv}(K, -K))} \leqslant \mathrm{vi}(K) \leqslant c_2 n^2. \tag{2.3.12}$$

2.4 Ασυμπτωτικό σχήμα τυχαίων πολυτόπων

Στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε το ασυμπτωτικό σχήμα τυχαίων πολυτόπων των οποίων οι κορυφές έχουν λογαριθμικά κοίλη κατανομή. Θεωρούμε ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $N \geqslant n$ θεωρούμε N ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα $x_1, \ldots, x_N$ με κατανομή το μ. Μας ενδιαφέρουν οι γεωμετρικές ιδιότητες του τυχαίου πολυτόπου

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}.$$

Η μελέτη του ασυμπτωτικού σχήματος του K_N εγκαινιάστηκε από τους Γιαννόπουλο, Δαφνή και Τσολομύτη, οι οποίοι έδωσαν μια αρκετά ακριβή περιγραφή του στα [34] και [35]. Η βασική τους ιδέα ήταν να συγκρίνουν το τυχαίο πολύτοπο K_N με το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$ του μ για κατάλληλη τιμή $q = q(N,n) \simeq \log(N/n)$. Η περιγραφή που δίνουν, σε πλήρη γενικότητα, για το ασυμπτωτικό σχήμα του τυχαίου K_N βασίζεται στην παρατήρηση ότι:

(α) $K_N \supseteq c\, Z_{\log(N/n)}(\mu)$ με πιθανότητα εκθετικά κοντά στο 1.

(β) Για κάθε $\alpha > 1$ και $q \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}\left[\sigma(\{\theta : h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(\mu)}(\theta)\})\right] \leqslant N\alpha^{-q}.$$

Χρησιμοποιώντας τον εγκλεισμό $K_N \supseteq c\, Z_{\log(N/n)}(\mu)$ και τα γνωστά κάτω φράγματα για τον όγκο των L_q-κεντροειδών σωμάτων του μ, αποδεικνύουν ότι, για κάθε $n \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$, όλα τα quermassintegrals $W_{n-k}(K_N)$ του K_N ικανοποιούν τους εξής ασυμπτωτικούς τύπους.

Θεώρημα 2.4.1 (Γιαννόπουλος-Δαφνής-Τσολομύτης)**.** *Αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(cn)$ τότε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει ότι*

$$L_\mu^{-1}\sqrt{\log N} \lesssim \mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \lesssim w(Z_{\log N}(K)). \tag{2.4.1}$$

Για κάθε $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος

$$\mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \simeq \sqrt{\log N}. \tag{2.4.2}$$

Μελετάμε το ερώτημα αν αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να επεκταθούν στο μέγιστο δυνατό εύρος $cn \leqslant N \leqslant \exp(n)$ τιμών του N. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του E. Milman (Θεώρημα 2.1.6) μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή ενα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο*

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}.$$

Αν $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(cn)$ τότε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει

$$L_\mu^{-1}\sqrt{\log N} \lesssim \mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \lesssim \sqrt{\log N}\big(\log\log N\big)^2. \tag{2.4.3}$$

Στη συνέχεια δίνουμε εκτιμήσεις των quermassintegrals $Q_k(K_N)$ για τα «περισσότερα» K_N:

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο*

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}.$$

Για κάθε $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$ και $s \geqslant 1$ ισχύει

$$Q_k(K_N) \leqslant c_2(s)\sqrt{\log N}\ (\log\log N)^2, \tag{2.4.4}$$

για κάθε $1 \leqslant k < n$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-s}$.

Δίνουμε επίσης εκτιμήσεις για την ακτίνα όγκου της τυχαίας προβολής $P_F(K_N)$ του K_N στον $F \in G_{n,k}$ (συναρτήσει των n, k και N) όταν $e^{\sqrt{n}} \leqslant N \leqslant e^n$. Οι εκτιμήσεις αυτές επεκτείνουν τη βέλτιστη εκτίμηση $\mathrm{vrad}(P_F(K_N)) \simeq \sqrt{\log N}$ η οποία είχε δοθεί στο [34] μόνο στην περίπτωση όπου $N \leqslant e^{\sqrt{n}}$.

Θεώρημα 2.4.4. *Αν* $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant e^{cn}$ *και* $s \geqslant 1$, *τότε το τυχαίο* K_N *ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από* $1 - \max\{N^{-s}, e^{-c_{11}\sqrt{N}}\}$ *το ακόλουθο: για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *υπάρχει υποσύνολο* $M_{n,k}$ *της* $G_{n,k}$ *με* $\nu_{n,k}(M_{n,k}) \geqslant 1 - e^{-c_{12}k}$ *τέτοιο ώστε*

$$c_{13}L_\mu^{-1}\sqrt{\log N} \leqslant \mathrm{vrad}(P_F(K_N)) := \left(\frac{|P_F(K_N)|}{\omega_k}\right)^{1/k} \leqslant c_3(s)\sqrt{\log N}\big(\log\log N\big)^2 \tag{2.4.5}$$

για κάθε $F \in M_{n,k}$.

Στην ενότητα § 6.3 δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη της εκτίμησης των Alonso-Gutiérrez, Δαφνή, Hernández-Cifre και Prochno (από το [10]) για την k-οστή μέση εξωτερική ακτίνα

$$\tilde{R}_k(K_N) = \int_{G_{n,k}} R(P_F(K_N))\, d\nu_{n,k}(F) \tag{2.4.6}$$

του τυχαίου K_N, συναρτήσει των N, n και k.

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω* $x_1, \ldots, x_N$ *ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο* μ *στον* $\mathbb{R}^n$, *και έστω* $K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$. *Αν* $n \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ *τότε, για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *και* $s > 0$ *έχουμε*

$$c_4(s)\max\left\{\sqrt{k}, \sqrt{\log(N/n)}\right\} \leqslant \tilde{R}_k(K_N) \leqslant c_5(s)\max\left\{\sqrt{k}, \sqrt{\log N}\right\} \tag{2.4.7}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-s}$, *όπου* $c_4(s), c_5(s)$ *είναι θετικές σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το* s.

Παρουσιάζουμε έναν τύπο για την $\tilde{R}_k(K_N)$, ο οποίος ισχύει για κάθε $cn \leqslant N \leqslant \exp(n)$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε νέα απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.5 για τις «μικρές» τιμές του N και να το συμπληρώσουμε για τις «μεγάλες» τιμές του N (βλέπε το Θεώρημα 6.3.5).

Στην ενότητα § 6.4 παρουσιάζουμε εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης και τους δυϊκούς αριθμούς κάλυψης του τυχαίου K_N. Για κάποιες τιμές του N, αυτές μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι το τυχαίο K_N είναι σε α-κανονική M-θέση με $\alpha \sim 1$.

Θεώρημα 2.4.6. *Έστω* μ *ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον* $\mathbb{R}^n$. *Τότε, υποθέτοντας ότι* $n^2 \leqslant N \leqslant \exp\big((n\log n)^{2/5}\big)$, *έχουμε ότι το τυχαίο* K_N *ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από* $1 - N^{-1}$ *τις εκτιμήσεις*

$$\max\{\log N(K_N, tr_NB_2^n), \log N(r_NB_2^n, tK_N)\} \leqslant c_{14}\frac{n(\log n)^2\log(1+t)}{t}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, *όπου* $r_N = \sqrt{\log N}$ *και* $c_{14} > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Σαν εφαρμογή δίνουμε μια εκτίμηση της μέσης τιμής της διαμέτρου των k-διάστατων τομών ενός τυχαίου K_N, η οποία ορίζεται από την

$$\tilde{D}_k(K_N) = \int_{G_{n,k}} R(K_N \cap F)\, d\nu_{n,k}(F). \tag{2.4.8}$$

Η μελέτη μας στην § 6.4 δείχνει ότι η συμπεριφορά της παραμέτρου $\tilde{D}_k(K_N)$ δεν είναι πάντα η ίδια με αυτήν της $\tilde{R}_k(K_N)$. Για να δώσουμε μια γεύση των αποτελεσμάτων μας, αναφέρουμε εδώ την ακόλουθη απλοποιημένη διατύπωση.

Θεώρημα 2.4.7. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και $a, b \in (0,1)$.*

(α) *Αν $k \leqslant bn$ τότε το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα $1 - N^{-1}$ την*

$$\tilde{D}_k(K_N) \leqslant c_b \sqrt{\log N} \quad \text{αν } n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$$

και την

$$\tilde{D}_k(K_N) \leqslant c_b \sqrt{\log N}(\log\log N)^2 \quad \text{αν } \exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n).$$

(β) *Αν $k \geqslant an$ και $N \leqslant \exp((n\log n)^{2/5})$ τότε το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα $1 - \exp(-\sqrt{n})$ την*

$$c_a \frac{\sqrt{\log N}}{\log^3 n} \leqslant \tilde{D}_k(K_N),$$

όπου οι c_a, c_b είναι θετικές σταθερές οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τα a και b αντιστοίχως.

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με μια σύντομη συζήτηση του ανοιχτού ερωτήματος αν η ισοτροπική σταθερά του τυχαίου K_N είναι φραγμένη από μια σταθερά ανεξάρτητη των n και N. Οι Klartag και Kozma έδειξαν στο [60] ότι αν $N > n$ και αν $G_1, \ldots, G_N$ είναι ανεξάρτητα Gaussian τυχαία δανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε η ισοτροπική σταθερά του τυχαίου πολυτόπου $K_N = \mathrm{conv}\{\pm G_1, \ldots, \pm G_N\}$ φράσσεται από απόλυτη σταθερά $C > 0$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - Ce^{-cn}$. Η ίδια ιδέα εφαρμόζεται στην περίπτωση που οι κορυφές x_j του K_N είναι κατανεμημένες ως προς ένα ισοτροπικό ψ_2-μέτρο μ.

Δείχνουμε ότι, στη γενική ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη περίπτωση, η μέθοδος των Klartag ανδ Kozma δίνει φράγμα της τάξης $O(\sqrt{\log(2N/n)})$ αν $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ (παρόμοια απόδειξη και μια επέκταση για τυχαίες διαταραχές τυχαίων πολυτόπων εμφανίστηκε, ανεξάρτητα και σχεδόν ταυτόχρονα, στο [11]).

Κεφάλαιο 3

Υποκανονικές διευθύνσεις και υποκανονικοί υπόχωροι

3.1 Υποκανονικές διευθύνσεις και υποκανονικοί υπόχωροι

Έστω μ ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι μια διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ είναι *υποκανονική* για το μ με σταθερά $b > 0$ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(\mu)} \leqslant b\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(\mu)}. \tag{3.1.1}$$

Τελείως ανάλογα, αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, λέμε ότι μια διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ είναι *υποκανονική* για το K με σταθερά $b > 0$ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant b\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(K)}. \tag{3.1.2}$$

Η έννοια της υποκανονικής διεύθυνσης είναι λοιπόν ταυτόσημη με αυτήν της ψ_2-διεύθυνσης.

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι ένα ερώτημα του V. Milman στο πλαίσιο των κυρτών σωμάτων:

> *Είναι σωστό ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 να έχει τουλάχιστον μία υποκανονική διεύθυνση με σταθερά C;*

Παρατηρήστε ότι, αν το θ είναι υποκανονική διεύθυνση για το K με σταθερά b, τότε για κάθε $T \in SL(n)$ το $(T^*)^{-1}(\theta)/\|(T^*)^{-1}(\theta)\|_2$ είναι υποκανονική διεύθυνση, με την ίδια σταθερά, για το $T(K)$. Συνεπώς, για τη μελέτη αυτού του προβλήματος μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Σε αυτή την περίπτωση, έχουμε $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(K)} = L_K$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, άρα η (3.1.2) γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant b\, L_K. \tag{3.1.3}$$

Σημειώνουμε επίσης ότι από την ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται ότι κάθε $\theta \in S^{n-1}$ είναι ψ_1-διεύθυνση για το K με μια απόλυτη σταθερά C.

Καταφατική απάντηση στο ερώτημα του V. Milman έχει δοθεί για κάποιες ειδικές κλάσεις κυρτών σωμάτων. Το πρώτο αποτέλεσμα αυτού του είδους οφείλεται στους Bobkov και Nazarov και αφορά την unconditional περίπτωση. Στα [23] και [24] αποδεικνύουν ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant c\sqrt{n}\|\theta\|_\infty \tag{3.1.4}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι $L_K\geqslant c$, από αυτό το αποτέλεσμα βλέπουμε, για παράδειγμα, ότι η διαγώνια διεύθυνση είναι υποκανονική για όλα τα ισοτροπικά unconditional κυρτά σώματα. Από την (3.1.4) προκύπτει επίσης ότι η μέση τιμή της $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}$ στην S^{n-1} είναι «λογαριθμική» ως προς τη διάσταση στην unconditional περίπτωση: από την

$$\int_{S^{n-1}}\|\theta\|_\infty d\sigma(\theta)\simeq\frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}} \tag{3.1.5}$$

και την (3.1.4) παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}d\sigma(\theta)\leqslant C_1\sqrt{\log n}. \tag{3.1.6}$$

Ειδικότερα, το άνω φράγμα της (3.1.6) ισχύει για όλες τις κανονικοποιημένες ℓ_p^n-μπάλες $\overline{B}_p^n$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Η εκτίμηση είναι ακριβής στην περίπτωση της κανονικοποιημένης ℓ_1^n-μπάλας $\overline{B}_1^n$: έχουμε $\mathbb{E}_\sigma(\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(\overline{B}_1^n)})\simeq\sqrt{\log n}$. Μια ακριβής περιγραφή της συμπεριφοράς των γραμμικών συναρτησοειδών στις ℓ_p^n-μπάλες, για όλα τα $1\leqslant p\leqslant\infty$, δίνεται στο άρθρο [17] των Barthe, Guédon, Mendelson και Naor. Ειδικότερα, δείχνουν ότι στην περίπτωση $2\leqslant p\leqslant\infty$ έχουμε $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(\overline{B}_p^n)}\leqslant C$ για κάθε $\theta\in S^{n-1}$, όπου $C>0$ είναι μια σταθερά ανεξάρτητη από το p και το n.

Ένα άλλο ειδικό αποτέλεσμα οφείλεται στον Παούρη, ο οποίος απέδειξε στο [87] ότι όλα τα ισοτροπικά κυρτά σώματα που έχουν «μικρή διάμετρο» έχουν υποκανονικές διευθύνσεις με ομοιόμορφα φραγμένη σταθερά: Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $K\subseteq(\gamma\sqrt{n}L_K)B_2^n$ για κάποια σταθερά $\gamma>0$, τότε

$$\sigma\big(\{\theta\in S^{n-1}:\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}\geqslant c_1\gamma tL_K\}\big)\leqslant\exp(-c_2\sqrt{n}t^2/\gamma) \tag{3.1.7}$$

για κάθε $t\geqslant 1$, όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στη γενική περίπτωση, πρώτος ο Klartag [59] απέδειξε την ύπαρξη διευθύνσεων που είναι «σχεδόν υποκανονικές». Ακριβέστερα, απέδειξε ότι για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχει $\theta\in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$\mu\left(\{x:|\langle x,\theta\rangle|\geqslant ct\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_2(K)}\}\right)\leqslant e^{-\frac{t^2}{[\log(t+1)]^{2\alpha}}} \tag{3.1.8}$$

για κάθε $1\leqslant t\leqslant\sqrt{n}\log^\alpha n$, όπου $\alpha=3$. Ισοδύναμα,

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}\leqslant C(\log n)^\alpha\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_2(K)}.$$

Αυτή η εκτίμηση βελτιώθηκε, αρχικά από τους Γιαννόπουλο, Παούρη και Pajor στο [43], και αργότερα από τους Βαλέττα, Γιαννόπουλο και Παούρη στα [44] και [45].

Το πρόβλημα της ύπαρξης υποκανονικών διευθύνσεων μπορεί να διατυπωθεί και να μελετηθεί στο γενικότερο πλαίσιο των κεντραρισμένων λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Μια φυσιολογική προσέγγιση στο γενικότερο αυτό πρόβλημα είναι να θεωρήσουμε το συμμετρικό κυρτό σώμα $\Psi_2(\mu)$ με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{\Psi_2(\mu)}(\theta) := \sup\left\{\frac{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_q(\mu)}}{\sqrt{q}} : 2 \leqslant q \leqslant n\right\} \tag{3.1.9}$$

και να εκτιμήσουμε τον όγκο του. Παρατηρήστε ότι το $\Psi_2(\mu)$ περιέχει το ελλειψοειδές $\frac{1}{\sqrt{2}}Z_2(\mu)$, όπου

$$h_{Z_2(\mu)}(\theta) := \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_2(\mu)}.$$

Θα θέλαμε να δείξουμε ότι, για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ, το $\Psi_2(\mu)$ έχει φραγμένο λόγο όγκων, και πιο συγκεκριμένα ότι

$$\left(\frac{|\Psi_2(\mu)|}{|Z_2(\mu)|}\right)^{1/n} \leqslant C, \tag{3.1.10}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Τότε, για κάποιο $\theta \in S^{n-1}$ θα είχαμε

$$h_{\Psi_2(\mu)}(\theta) \leqslant C h_{Z_2(\mu)}(\theta) = C\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_2(\mu)}. \tag{3.1.11}$$

Στην περίπτωση $d\nu_K(x) = \mathbf{1}_K(x)dx$ ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος γνωρίζουμε ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \simeq \sup\left\{\frac{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_q(K)}}{\sqrt{q}} : 2 \leqslant q \leqslant n\right\} = h_{\Psi_2(\nu_K)}(\theta). \tag{3.1.12}$$

Έτσι, η (3.1.10) θα έδινε καταφατική απάντηση στο πρόβλημα. Αυτό που αποδεικνύεται στα [44] και [45] είναι ότι η (3.1.10) ουσιαστικά ισχύει: για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$c_1 \leqslant \left(\frac{|\Psi_2(\mu)|}{|Z_2(\mu)|}\right)^{1/n} \leqslant c_2\sqrt{\log n}, \tag{3.1.13}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Συνοψίζοντας, η καλύτερη μέχρι στιγμής απάντηση στο αρχικό ερώτημα του V. Milman είναι η ακόλουθη:

Θεώρημα 3.1.1 (Βαλέττας-Γιαννόπουλος-Παούρης). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 να έχει τουλάχιστον μία υποκανονική διεύθυνση με σταθερά $C\sqrt{\log n}$.*

Παραμένει ανοικτό το ερώτημα αν το φράγμα $C\sqrt{\log n}$ του Θεωρήματος 3.1.1 μπορεί να ανικατασταθεί από μια απόλυτη σταθερά $C > 0$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει είναι να δοθούν εκτιμήσεις για το μέτρο των διευθύνσεων που είναι ψ_2-διευθύνσεις ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με σταθερά, έστω, λογαριθμική ως προς τη διάσταση n. Δεδομένου ότι η απάντηση εξαρτάται από τη *θέση* του σώματος, λογικό είναι να θεωρήσουμε κατάλληλη θέση $T(K)$, $T \in SL(n)$, του σώματος K και να μελετήσουμε την κατανομή των ψ_2-νορμών $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}$ ως προς το (αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς) μέτρο πιθανότητας σ στη σφαίρα. Ο Klartag στο [59] έδωσε ένα αποτέλεσμα τέτοιου τύπου: αν το K έχει όγκο 1 και βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων, τότε υπάρχει $T \in SL(n)$ τέτοιος ώστε το σώμα $K_1 = T(K)$ να έχει την παρακάτω ιδιότητα: Υπάρχει $\Theta \subseteq S^{n-1}$ με μέτρο $\sigma(\Theta) \geqslant \frac{4}{5}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\theta \in \Theta$ και κάθε $t \geqslant 1$,

$$|\{x \in K_1 : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant ct\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_1(K)}\}| \leqslant \exp\left(-\frac{ct^2}{\log^2 n \log^5(t+1)}\right).$$

Στην ενότητα § 3.3, χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή της ιδέας του Klartag, δίνουμε μια σύντομη απόδειξη παρόμοιου αποτελέσματος.

Πρόταση 3.1.2. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε το $\Psi_2(K)$ να έχει ελάχιστο μέσο πλάτος πάνω από όλες τις γραμμικές εικόνες του που έχουν τον ίδιο όγκο. Τότε, για κάθε $\delta \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε $\Theta_\delta \subseteq S^{n-1}$ μέτρου $\sigma(\Theta_\delta) \geqslant 1-\delta$ τέτοιο ώστε κάθε $\theta \in \Theta_\delta$ να είναι ψ_2-διεύθυνση για το K με σταθερά $C\delta^{-1}(\log n)^{3/2}$.*

Δεδομένου ότι $\Psi_2(T(K)) = T(\Psi_2(K))$ για όλες τις $T \in SL(n)$, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει μια θέση $K_1 = T(K)$ του K τέτοια ώστε η Πρόταση 3.1.2 να εφαρμόζεται για το K_1. Μία πολύ πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση για μελέτη είναι να θεωρήσουμε ότι το K είναι στην ισοτροπική του θέση. Το βασικό μας αποτέλεσμα σε αυτό το κεφάλαιο δίνει, σε αυτή την περίπτωση, λογαριθμικά φράγματα για την $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}$ με πιθανότητα πολυωνυμικά κοντά στο 1.

Θεώρημα 3.1.3. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\alpha > 1$ έχουμε*

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C(\log n)^{3/2}\max\left\{\sqrt{\log n},\sqrt{\alpha}\right\}L_K$$

για όλα τα θ σε ένα υποσύνολο Θ_α της S^{n-1} μέτρου $\sigma(\Theta_\alpha) \geqslant 1-n^{-\alpha}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το θεώρημα 3.1.3 εξασφαλίζει ότι

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C(\log n)^2 L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{1}{n}$. Αυτό μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}$ στην S^{n-1}:

Θεώρημα 3.1.4. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{S^{n-1}}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}d\sigma(\theta) \leqslant C(\log n)^2 L_K,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρουσιάζουμε τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.1.3 και 3.1.4 στην ενότητα § 3.4. Σημειώνουμε ότι η καλύτερη μέχρι τώρα γνωστή γενική εκτίμηση για το μέσο πλάτος του $\Psi_2(K)$, όπου K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ήταν

$$w(\Psi_2(K)) \simeq \mathbb{E}_\sigma(\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}) \leqslant C\sqrt[4]{n}L_K,$$

από το [45].

Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου μελετάμε μια ισχυρότερη μορφή του προβλήματος, το ερώτημα αν μπορούμε να έχουμε υποκανονική εκτίμηση *για όλες τις διευθύνσεις* θ ενός υποχώρου $F \in G_{n,k}$ διάστασης k που αυξάνει στο άπειρο καθώς το n τείνει στο άπειρο. Λέμε ότι ο $F \in G_{n,k}$ είναι *υποκανονικός υπόχωρος* για το K με σταθερά $b > 0$ αν

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant b\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_2(K)} \tag{3.1.14}$$

για κάθε $\theta \in S_F = S^{n-1} \cap F$. Όπως θα δούμε, αν το K είναι ισοτροπικό τότε ο τυχαίος υπόχωρος διάστασης $(\log n)^4$ είναι υποκανονικός με σταθερά $b \simeq (\log n)^2$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής.

Θεώρημα 3.1.5. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $k \simeq (\log n)^4$ τότε υπάρχει υποσύνολο Γ της $G_{n,k}$ με $\nu_{n,k}(\Gamma) \geqslant 1 - n^{-(\log n)^3}$ τέτοιο ώστε*

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C(\log n)^2 L_K \tag{3.1.15}$$

για κάθε $F \in \Gamma$ και κάθε $\theta \in S_F$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

3.2 Μέσο πλάτος ισοτροπικού κυρτού σώματος

Το βασικό εργαλείο για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3 και του Θεωρήματος 3.1.4 είναι ένα πρόσφατο αποτέλεσμα του E. Milman [76] για το μέσο πλάτος $w(Z_q(K))$ των L_q-κεντροειδών σωμάτων $Z_q(K)$ ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 3.2.1 (E. Milman)**.** *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n}(\log n)^2 L_K, \tag{3.2.1}$$

και για όλα τα $q \geqslant 1$ έχουμε ότι

$$w(Z_q(K)) \leqslant C\log(1+q)\max\left\{\frac{q\log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q}\right\} L_K, \tag{3.2.2}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το Θεώρημα 3.2.1 απαντά στο ερώτημα να δοθεί άνω φράγμα για το μέσο πλάτος

$$w(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(x)\, d\sigma(x)$$

ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή την L_1-νόρμα της συνάρτησης στήριξης του K ως προς το μέτρο Haar στη σφαίρα, το οποίο ήταν ανοικτό για κάποια χρόνια. Από τον εγκλεισμό $K \subseteq (n+1)L_K B_2^n$ (βλέπε [55]) προκύπτει το απλό άνω φράγμα $w(K) \leqslant (n+1)L_K$. Το άνω φράγμα $w(K) \leqslant cn^{3/4}L_K$ αποδείχθηκε στη διδακτορική διατριβή της Χαρτζουλάκη [54]. Διαφορετικές προσεγγίσεις, που όμως οδηγούν στο ίδιο άνω φράγμα, οφείλονται στους Pivovarov [94] και Βαλέττα-Γιαννόπουλο-Παούρη [45].

Ο E. Milman ξεκινάει από την ιδέα να χρησιμοποιηθούν εκτιμήσεις «τύπου Dudley». Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός κάλυψης $N(K,T)$ του K από το T είναι ο ελάχιστος αριθμός μεταφορών του T που η ένωσή τους καλύπτει το K. Για κάθε $k \geqslant 1$ θέτουμε

$$e_k(K,T) := \inf\{s > 0 : N(K,sT) \leqslant 2^k\}. \tag{3.2.3}$$

Ειδικότερα, ο *k-οστός αριθμός εντροπίας* του K είναι ο $e_k(K) := e_k(K,B_2^n)$.

Το φράγμα του Dudley για το μέσο πλάτος διατυπώνεται ως εξής: αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\sqrt{n}w(K) \leqslant c_1 \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}} e_k(K,B_2^n), \tag{3.2.4}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αν το K είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\log N(K,sB_2^n) \leqslant C_1 \frac{n^{3/2}L_K}{s} \tag{3.2.5}$$

για κάθε $s > 0$ (η εκτίμηση αυτή ήταν η βάση του επιχειρήματος της Χαρτζουλάκη). Συνεπώς,

$$e_k(K,B_2^n) = \inf\{s > 0 : N(K,sB_2^n) \leqslant 2^k\} \leqslant C_2\sqrt{n}L_K \frac{n}{k}. \tag{3.2.6}$$

Συνδυάζοντας αυτή την εκτίμηση με το φράγμα (3.2.4) του Dudley παίρνουμε

$$w(K) \leqslant C_3 \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{n}{k}\, L_K, \tag{3.2.7}$$

το οποίο μας δίνει μια απόδειξη της $w(K) \leqslant Cn^{3/4}L_K$.

Ο E. Milman χρησιμοποιεί μία ισχυρότερη εκδοχή του φράγματος του Dudley, η οποία είχε αποδειχθεί από τους V. Milman και Pisier. Στο [83], για κάθε $k \geqslant 1$ εισήγαγαν την παράμετρο

$$v_k(K) := \sup\{\mathrm{vrad}(P_F(K)) : F \in G_{n,k}\}. \tag{3.2.8}$$

Παρατηρήστε ότι, για κάθε $F \in G_{n,k}$,

$$|P_F(K)| \leqslant N(P_F(K), e_kP_F(B_2^n))|e_kB_F| \leqslant N(K, e_k(K)B_2^n)e_k^k|B_F| \leqslant (2e_k)^k|B_F|, \tag{3.2.9}$$

συνεπώς,

$$v_k(K) \leqslant 2e_k(K). \tag{3.2.10}$$

Από την (3.2.10) είναι σαφές ότι το επόμενο θεώρημα δίνει ισχυρότερη εκτίμηση από την (3.2.4).

Θεώρημα 3.2.2 (V. Milman-Pisier). *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\sqrt{n}w(K) \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Rad}_k(K) v_k(K), \tag{3.2.11}$$

όπου $\mathrm{Rad}_k(K) := \sup\{\mathrm{Rad}(X_{P_F(K)}) : F \in G_{n,k}\}$, *και* $\mathrm{Rad}(Y) \leqslant c_3 \log(d(Y, \ell_2^{\dim(Y)}) + 1)$ *είναι η σταθερά Rademacher του* Y.

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.2.2 είναι η ανισότητα

$$\sqrt{n}w(K) \lesssim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} v_k(K), \tag{3.2.12}$$

όπου χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\lesssim$ για να υποδηλώσουμε ότι η ανισότητα (3.2.12) ισχύει αν πολλαπλασιάσουμε το δεξιό μέλος με (σταθερή) δύναμη του $\log n$. Ο E. Milman εφαρμόζει την (3.2.12) για ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτή την περίπτωση, όπως είδαμε στο Κεφάλαιο 1, έχουμε περισσότερες πληροφορίες στη διάθεσή μας. Γνωρίζουμε ότι αν K είναι ένα συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$Z_n(K) \simeq Z_\infty(K) \supseteq K. \tag{3.2.13}$$

Μας αρκεί λοιπόν, για να δείξουμε την (3.2.1), να βρούμε άνω φράγμα για το $w(Z_n(K))$, και γενικότερα για το $w(Z_q(K))$, $1 \leqslant q \leqslant n$. Από την (3.2.12) έχουμε

$$\sqrt{n}w(Z_q(K)) \lesssim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} v_k(Z_q(K)). \tag{3.2.14}$$

Για να εκτιμήσουμε την παράμετρο $v_k(Z_q(K))$, θεωρούμε τυχόντα $F \in G_{n,k}$ και προσπαθούμε να δώσουμε άνω φράγμα για την

$$\mathrm{vrad}(P_F(Z_q(K))) = \left(\frac{|P_F(Z_q(K))|}{|B_2^k|} \right)^{1/k}. \tag{3.2.15}$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι, αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $F \in G_{n,k}$ ισχύει $P_F(Z_q(\mu)) = Z_q(\pi_F(\mu))$. Αφού το $\pi_F(\mu)$ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον F μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το εξής αποτέλεσμα από το [88], το οποίο αναφέρθηκε και στο Κεφάλαιο 1, στη συζήτηση για το Θεώρημα 1.8.1.

Λήμμα 3.2.3 (Παούρης). *Αν ν είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^k$ τότε*

$$\mathrm{vrad}(Z_q(\nu)) \leqslant c_4 \sqrt{q} \quad \text{αν } q \leqslant k, \tag{3.2.16}$$

και

$$\mathrm{vrad}(Z_q(\nu)) \leqslant c_5 (q/k) \sqrt{k} \quad \text{αν } q \geqslant k. \tag{3.2.17}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.2.3 για το $\nu = \pi_F(\mu_K)$, παίρνουμε

$$v_k(Z_q(K)) \leqslant c_6\sqrt{\frac{q}{k}}\max(\sqrt{q}, \sqrt{k})L_K. \tag{3.2.18}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} L_K^{-1}\sqrt{n}w(Z_q(K)) &\lesssim L_K^{-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}v_k(z_q(K)) \simeq \sum_{k=1}^{n}\max\left(\sqrt{\frac{q}{k}}, \frac{q}{k}\right) \\ &\simeq q\sum_{k=1}^{q}\frac{1}{k} + \sqrt{q}\sum_{k=q}^{n}\frac{1}{\sqrt{q}} \simeq q\log q + \sqrt{q}\sqrt{n} \leqslant \sqrt{n}\sqrt{q}\log q. \end{aligned} \tag{3.2.19}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (3.2.2) και του Θεωρήματος 3.2.1.

3.3 Λογαριθμικές εκτιμήσεις σε κατάλληλη θέση

Σε αυτή την ενότητα αποδεικνύουμε την Πρόταση 3.1.2. Θεωρούμε ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $\Psi_2(T(K)) = T(\Psi_2(K))$ για κάθε $T \in SL(n)$, άρα υπάρχει $T \in SL(n)$ τέτοιος ώστε το $K_1 = T(K)$ να έχει την ιδιότητα

$$w(\Psi_2(K_1)) \leqslant w(\Psi_2(S(K_1)) \tag{3.3.1}$$

για κάθε $S \in SL(n)$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $\delta \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε $\Theta_\delta \subseteq S^{n-1}$ μέτρου $\sigma(\Theta_\delta) \geqslant 1-\delta$ τέτοιο ώστε, για κάθε $\theta \in \Theta_\delta$,

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K_1)} \leqslant C\delta^{-1}(\log n)^{3/2}\,\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(K_1)}. \tag{3.3.2}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 1.1.13 γνωρίζουμε ότι αν το K_1 ικανοποιεί την (3.3.1) τότε

$$w(\Psi_2(K_1)) \leqslant C_1(\log n)\,[\mathrm{vrad}(\Psi_2(K_1))], \tag{3.3.3}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την άλλη πλευρά, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}}\frac{h_{\Psi_2(K_1)}(\theta)}{h_{Z_2(K_1)}(\theta)}\,d\sigma(\theta) &\leqslant \left(\int_{S^{n-1}} h^2_{\Psi_2(K_1)}(\theta)\,d\sigma(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{S^{n-1}} h^{-2}_{Z_2(K_1)}(\theta)\,d\sigma(\theta)\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\leqslant \left(\int_{S^{n-1}} h^2_{\Psi_2(K_1)}(\theta)\,d\sigma(\theta)\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{S^{n-1}} h^{-n}_{Z_2(K_1)}(\theta)\,d\sigma(\theta)\right)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant C_2 w(\Psi_2(K_1))\mathrm{vrad}(Z_2^\circ(K_1)) \\ &= C_2\frac{w(\Psi_2(K_1))}{\mathrm{vrad}(Z_2(K_1))}, \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα Cauchy-Schwarz, την ανισότητα Hölder, την ισότητα

$$\mathrm{vrad}(Z_2(K_1))\mathrm{vrad}(Z_2^\circ(K_1)) = 1$$

η οποία ισχύει γιατί το $Z_2(K_1)$ είναι ελλειψοειδές, και την ισοδυναμία της L_1 και της L_2 νόρμας της συνάρτησης $h_{\Psi_2(K_1)}$ στη σφαίρα S^{n-1}. Η τελευταία είναι μια γνωστή ανισότητα τύπου Kahane-Khintchine, η οποία εμπεριέχεται επίσης στο Θεώρημα 1.2.1.

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες εκτιμήσεις συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \frac{h_{\Psi_2(K_1)}(\theta)}{h_{Z_2(K_1)}(\theta)}\, d\sigma(\theta) \leqslant C_3 \log n \left(\frac{|\Psi_2(K_1)|}{|Z_2(K_1)|}\right)^{1/n} \leqslant C_4(\log n)^{3/2},$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την (3.1.13).

Με απλή εφαρμογή της ανισότητας Markov βλέπουμε ότι για κάθε $\delta \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε $\Theta_\delta \subseteq S^{n-1}$ με μέτρο $\sigma(\Theta_\delta) \geqslant 1-\delta$ τέτοιο ώστε κάθε $\theta \in \Theta_\delta$ να ικανοποιεί την (3.3.2). ■

3.4 Λογαριθμικές εκτιμήσεις στην ισοτροπική θέση

Σε αυτή την ενότητα υποθέτουμε ότι το K είναι στην ισοτροπική θέση. Το βασικό μας αποτέλεσμα (Θεώρημα 3.1.3) δίνει λογαριθμικές εκτιμήσεις για την $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}$ με πιθανότητα πολυωνυμικά κοντά στο 1.

Υπενθυμίζουμε αρχικά ότι το $\Psi_2(K)$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την $h_{\Psi_2(K)}(y) = \|\langle\cdot,y\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}$. Έχουμε επίσης ότι

$$h_{\Psi_2(K)}(y) \simeq \sup_{q\geqslant 2} \frac{h_{Z_q(K)}(y)}{\sqrt{q}} \simeq \sup_{2\leqslant q\leqslant n} \frac{h_{Z_q(K)}(y)}{\sqrt{q}}, \tag{3.4.1}$$

επειδή $h_{Z_q(K)}(y) \simeq h_{Z_n(K)}(y)$ για κάθε $q \geqslant n$.

Βασιζόμενοι στο γεγονός ότι αν $2^s \leqslant q < 2^{s+1}$ τότε

$$\frac{h_{Z_q(K)}(y)}{\sqrt{q}} \leqslant \frac{h_{Z_{2^{s+1}}(K)}(y)}{2^{s/2}} \leqslant \sqrt{2}\frac{h_{Z_{2^{s+1}}(K)}(y)}{2^{(s+1)/2}}, \tag{3.4.2}$$

μπορούμε να απλοποιήσουμε περαιτέρω την (3.4.1) και να γράψουμε

$$h_{\Psi_2(K)}(y) \simeq \max_{1\leqslant s\leqslant m} \frac{h_{Z_{2^s}(K)}(y)}{2^{s/2}}, \tag{3.4.3}$$

όπου $m = \lfloor \log_2 n \rfloor$.

Αρχικά δίνουμε ένα απλό επιχείρημα το οποίο οδηγεί στο άνω φράγμα του Θεωρήματος 3.1.4 για τό μέσο πλάτος

$$w(\Psi_2(K)) = \int_{S^{n-1}} \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} d\sigma(\theta). \tag{3.4.4}$$

Πρόταση 3.4.1. *Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι*

$$w(\Psi_2(K)) \leqslant C(\log n)^2 L_K,$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Από την (3.4.3), για κάθε $y \in S^{n-1}$ έχουμε ότι

$$h_{\Psi_2(K)}(y) \leqslant C_1 \max_{1\leqslant s\leqslant m} \frac{h_{Z_{2^s}(K)}(y)}{2^{s/2}} \leqslant C_1 \sum_{s=1}^{m} \frac{h_{Z_{2^s}(K)}(y)}{2^{s/2}}, \tag{3.4.5}$$

όπου $m = \lfloor \log_2 n \rfloor$. Προκύπτει λοιπόν άμεσα ότι

$$w(\Psi_2(K)) \leqslant C_1 \sum_{s=1}^{m} \frac{w(Z_{2^s}(K))}{2^{s/2}}. \tag{3.4.6}$$

Από το Θεώρημα 3.2.1 γνωρίζουμε ότι

$$w(Z_{2^s}(K)) \leqslant C_2 s 2^{s/2} \max\left\{ \frac{s2^{s/2}}{\sqrt{n}}, 1 \right\} L_K. \tag{3.4.7}$$

Κατά συνέπεια, συμβολίζοντας με k τον μεγαλύτερο ακέραιο για τον οποίο $k^2 2^k \leqslant n$, και χρησιμοποιώντας άθροιση κατά μέρη στο τελευταίο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} w(\Psi_2(K)) &\leqslant C_3 \sum_{s=1}^{m} s \max\left\{ \frac{s2^{s/2}}{\sqrt{n}}, 1 \right\} L_K \leqslant C_3 \left(\sum_{s=1}^{k} s + \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{s=k+1}^{m} s^2 2^{s/2} \right) L_K \\ &\leqslant C_4 \left(k^2 + \frac{m^2 2^{m/2}}{\sqrt{n}} \right) L_K \leqslant C_5 m^2 \, L_K \leqslant C (\log n)^2 L_K, \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. ■

Κάνοντας μια πιο προσεκτική εφαρμογή της θεωρίας των κεντροειδών σωμάτων, μπορούμε να πάρουμε την εκτίμηση (με πιθανότητα πολυωνυμικά κοντά στο 1) του Θεωρήματος 3.1.3.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3. Θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω παρατηρήσεις:

(i) Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$, αν ορίσουμε $k = k_*(A) = n \left(\frac{w(A)}{R(A)}\right)^2$, τότε, από το Θεώρημα 1.2.1 έχουμε

$$w_k(A) := \left(\int_{S^{n-1}} h_A^k(\theta) \, d\sigma(\theta) \right)^{1/k} \leqslant C_1 w(A), \tag{3.4.9}$$

όπου $C_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

(ii) Αν $A = Z_q(K)$ τότε τα αποτελέσματα του Παούρη στο [88] (ή νωρίτερα στο [87]) δείχνουν ότι, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$,

$$w(Z_q(K)) \geqslant c_1 w_q(Z_q(K)) \geqslant c_2 \sqrt{q/n}\, I_q(K) \geqslant c_2 \sqrt{q/n}\, I_2(K) = c_2 \sqrt{q} L_K. \tag{3.4.10}$$

Μάλιστα (βλέπε Θεώρημα 1.8.1 στο Κεφάλαιο 1) οι E. Milman και Klartag έχουν αποδείξει το καλύτερο φράγμα

$$\mathrm{vrad}(Z_q(K)) \geqslant c_3 \sqrt{q} L_K \tag{3.4.11}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant q_H(K)$, όπου $q_H(K) \geqslant c_4\sqrt{n}$ είναι η «κληρονομική» παράμετρος του K η οποία ορίστηκε και μελετήθηκε στο [61] για το σκοπό αυτό. Από την άλλη πλευρά, γνωρίζουμε ότι

$$R(Z_q(K)) \leqslant C_2 q L_K, \tag{3.4.12}$$

άρα έχουμε $k_*(Z_q(K)) \geqslant c_5 n/q$ για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$.

(iii) Για τις τιμές $\sqrt{n} \leqslant q \leqslant n$ έχουμε το ασθενέστερο φράγμα

$$w(Z_q(K)) \geqslant \mathrm{vrad}(Z_q(K)) \geqslant c_6\sqrt{q}, \tag{3.4.13}$$

το οποίο προκύπτει από την ανισότητα (1.1.11) του Urysohn και το φράγμα των Lutwak, Yang και Zhang για την $\mathrm{vrad}(Z_q(K))$ το οποίο ισχύει για όλες τις τιμές $2 \leqslant q \leqslant n$ (βλέπε, πάλι, Θεώρημα 1.8.1 στο Κεφάλαιο 1). Έτσι, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$ έχουμε την εκτίμηση

$$k_*(Z_q(K)) \geqslant c_7 n/(qL_K^2). \tag{3.4.14}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.1 και την (3.4.9) έχουμε

$$\left(\int_{S^{n-1}} h_{Z_q(K)}^{k_*}(\theta)\, d\sigma(\theta)\right)^{1/k_*} \leqslant C_3 \log(1+q) \max\left\{\frac{q\log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q}\right\} L_K, \tag{3.4.15}$$

όπου $k_* := k_*(Z_q(K))$, και εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $q \leqslant n$ υπάρχει ένα υποσύνολο Θ_q της S^{n-1} τέτοιο ώστε $\sigma(S^{n-1} \setminus \Theta_q) \leqslant \exp(-c_8 n/(qL_K^2))$ και

$$h_{Z_q(K)}(\theta) \leqslant C_4\sqrt{q}\log(1+q) \max\left\{\frac{\sqrt{q}\log(1+q)}{\sqrt{n}}, 1\right\} L_K \tag{3.4.16}$$

για κάθε $\theta \in \Theta_q$.

Σταθεροποιούμε $\alpha > 1$ και ορίζουμε $q_0 = \frac{c_8 n}{2\alpha L_K^2 \log n}$. Τότε, για κάθε $q \leqslant q_0$ έχουμε

$$\sigma(S^{n-1} \setminus \Theta_q) \leqslant \frac{1}{n^{2\alpha}}.$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$\sigma\Big(S^{n-1} \setminus \bigcap_{s=1}^{\lfloor \log_2 q_0 \rfloor} \Theta_{2^s}\Big) \leqslant \frac{c_9 \log n}{n^{2\alpha}} \leqslant \frac{1}{n^{\alpha}}. \tag{3.4.17}$$

Αν $\Theta := \bigcap_{s=1}^{\lfloor \log_2 q_0 \rfloor} \Theta_{2^s}$ τότε, για κάθε $\theta \in \Theta$ και κάθε $q \leqslant q_0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{h_{Z_q(K)}(\theta)}{\sqrt{q}} &\leqslant C_4 \log(1+q) \max\left\{\frac{\sqrt{q}\log(1+q)}{\sqrt{n}}, 1\right\} L_K \\ &\leqslant C_5 (\log n) \max\left\{\frac{\log(1+q_0)}{\sqrt{\alpha} L_K \sqrt{\log n}}, 1\right\} L_K, \end{aligned} \tag{3.4.18}$$

ενώ για $q_0 \leqslant q \leqslant n$ χρησιμοποιούμε τη γνωστή σχέση αντίστροφου εγκλεισμού των κεντροειδών σωμάτων και γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{h_{Z_q(K)}(\theta)}{\sqrt{q}} &\leqslant \frac{C_6 q}{q_0}\frac{h_{Z_{q_0}(K)}(\theta)}{\sqrt{q}} = C_6\sqrt{q/q_0}\frac{h_{Z_{q_0}(K)}(\theta)}{\sqrt{q_0}} \\ &\leqslant C_6\sqrt{n/q_0}\log(1+q_0)\max\left\{\frac{\log(1+q_0)}{\sqrt{\alpha}L_K\sqrt{\log n}},1\right\}L_K \\ &\leqslant C_7\sqrt{\alpha}(\log n)^{3/2}\max\left\{\frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{\alpha}L_K},1\right\}L_K^2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας αυτή την εκτίμηση με την (3.4.18) βλέπουμε ότι

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C_8\sqrt{\alpha}(\log n)^{3/2}\max\left\{\frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{\alpha}L_K},1\right\}L_K^2 \tag{3.4.19}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-n^{-\alpha}$.

Τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.1 από το [44]:

Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K_1 τέτοιο ώστε $L_{K_1} \leqslant C_0$, όπου $C_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, και

$$\Psi_2(K) \subseteq c_{10}L_K\Psi_2(K_1). \tag{3.4.20}$$

Εφαρμόζοντας για το K_1 την (3.4.19) βλέπουμε ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-n^{-\alpha}$,

$$\begin{aligned}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} &\leqslant c_{10}L_K\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K_1)} \leqslant C_8c_{10}L_K\sqrt{\alpha}(\log n)^{3/2}\max\left\{\frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{\alpha}},1\right\}C_0^2 \\ &\leqslant C_9L_K\sqrt{\alpha}(\log n)^{3/2}\max\left\{\frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{\alpha}},1\right\}.\end{aligned}$$

Με αυτό ολοκληρώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.3. ∎

Παρατήρηση 3.4.2. Από το Θεώρημα 3.1.3 έχουμε ειδικότερα ότι

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C_{10}(\log n)^2L_K \tag{3.4.21}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{1}{n}$. Μπορούμε να χρησιμοποίησουμε αυτή την εκτίμηση για να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.4. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} &\leqslant \sqrt{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_1}(K)}}\sqrt{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_2(K)}} \\ &\leqslant \sqrt{C_11L_K}\,\sqrt{L_K} = C_{12}\sqrt{n}L_K\end{aligned}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, οπότε αν θέσουμε

$$\Gamma = \{\theta \in S^{n-1} : \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C_{10}(\log n)^2L_K\}$$

έχουμε $\sigma(S^{n-1}\setminus\Gamma)<\frac{1}{n}$, και ολοκληρώνοντας την $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}$ στην S^{n-1} παίρνουμε

$$\begin{aligned} w(\Psi_2(K)) &= \int_{S^{n-1}}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}\,d\sigma(\theta)\\ &= \int_{\Gamma}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}\,d\sigma(\theta)+\int_{S^{n-1}\setminus\Gamma}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}\,d\sigma(\theta)\\ &\leqslant C_{10}(\log n)^2L_K+\frac{1}{n}\cdot C_{12}\sqrt{n}L_K\leqslant C_{13}(\log n)^2L_K. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 3.4.3. Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $\psi_K:[1,\infty)\to\mathbb{R}$ με

$$\psi_K(t):=\sigma\left(\{\theta\in S^{n-1}:\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}\leqslant ct\sqrt{\log n}L_K\}\right)$$

εμφανίστηκε στο [45], όπου δείχθηκε ότι για κάθε $t\geqslant 1$ έχουμε

$$\psi_K(t)\geqslant\exp(-cn/t^2),$$

$c>0$ απόλυτη σταθερά. Το Θεώρημα 3.1.3 δίνει περισσότερες πληροφορίες. Για παράδειγμα, βλέπουμε ότι $\psi_K(t)\geqslant 1/2$ όταν το t είναι τάξης $t\simeq(\log n)^{3/2}$.

3.5 Υποκανονικοί υπόχωροι ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

Σε αυτή την ενότητα μελετάμε το ερώτημα αν μπορούμε να έχουμε υποκανονική εκτίμηση για όλες τις διευθύνσεις θ ενός υποχώρου $F\in G_{n,k}$ διάστασης k που αυξάνει στο άπειρο καθώς το n τείνει στο άπειρο. Όπως θα δούμε, αν το K είναι ισοτροπικό τότε ο τυχαίος υπόχωρος διάστασης $(\log n)^4$ είναι υποκανονικός με σταθερά $b\simeq(\log n)^2$.

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $k\simeq(\log n)^4$ τότε υπάρχει υποσύνολο Γ της $G_{n,k}$ με $\nu_{n,k}(\Gamma)\geqslant 1-n^{-(\log n)^3}$ τέτοιο ώστε*

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}\leqslant C(\log n)^2L_K \tag{3.5.1}$$

για κάθε $F\in\Gamma$ και για κάθε $\theta\in S_F$, όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ένα βασικό συστατικό της απόδειξης είναι το γεγονός ότι έχουμε καλές εκτιμήσεις για την περιγεγραμμένη ακτίνα των τυχαίων προβολών των L_q-κεντροειδών σωμάτων $Z_q(K)$ του K, οι οποίες προκύπτουν από τα ακριβή άνω φράγματα του E. Milman για το μέσο πλάτος τους $w(Z_q(K))$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον εξής «ασυμπτωτικό τύπο» για τη διάμετρο των k-διάστατων προβολών ενός συμμετρικού κυρτού σώματος.

Πρόταση 3.5.2. *Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1\leqslant k<n$ και $\alpha>1$. Υπάρχει υποσύνολο $\Gamma_{n,k}\subset G_{n,k}$ μέτρου $\nu_{n,k}(\Gamma_{n,k})\geqslant 1-e^{-c_2\alpha^2k}$ τέτοιο ώστε, η ορθογώνια προβολή του D πάνω σε οποιονδήποτε υπόχωρο $F\in\Gamma_{n,k}$ να ικανοποιεί την*

$$R(P_F(D))\leqslant c_3\alpha\max\{w(D),R(D)\sqrt{k/n}\}, \tag{3.5.2}$$

όπου $c_2>0, c_3>1$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η διάμετρος της προβολής $P_F(D)$ είναι το $\max_{u\in S^{n-1}\cap F} h_D(u)$ όπου h_D είναι η συνάρτηση στήριξης του D. Η σταθερά Lipschitz της h_D φράσσεται από $R(D)$. Για τυχόντα F και ένα $\frac{1}{2}$-δίκτυο $\mathcal{N}$ στην $S_F = S^{n-1}\cap F$ έχουμε

$$\max_{u\in S_F} h_D(u) \leqslant 2\max_{z\in\mathcal{N}} h_D(z).$$

Πράγματι, αν $u_0 \in S_F$ τότε με διαδοχική προσέγγιση βρίσκουμε $\delta_j \leqslant \frac{1}{2^j}$ και $(z_j)\subset\mathcal{N}$ τέτοια ώστε $u_0 = z_0 + \sum_{j=1}^{\infty}\delta_j z_j$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η h_D είναι συνεχής, ομογενής και υποπροσθετική, παίρνουμε

$$|h_D(u_0)| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} 2^{-j}|h_D(z_j)| \leqslant 2\max_{z\in\mathcal{N}}|h_D(z)|.$$

Θεωρούμε ένα $\frac{1}{2}$-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_{F_0} για κάποιον σταθερό F_0, με πληθάριθμο το πολύ ίσο με 5^k. Για κάθε $z\in\mathcal{N}$, από την κλασική σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}&\nu(\{U\in O(n) : h_D(U(z)) \geqslant t + w(D)\})\\ &\qquad = \sigma\left(\left\{\theta\in S^{n-1} : h_D(\theta)\geqslant t + \int_{S^{n-1}} h_D(u)d\sigma(u)\right\}\right)\\ &\qquad \leqslant \exp(-c_1t^2n/(R(D))^2).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\nu(\{U\in O(n) :\ \exists z\in\mathcal{N} \text{ ώστε } \ h_D(U(z)) \geqslant t + w(D)\}) \leqslant 5^k e^{-c_1t^2n/(R(D))^2}.$$

Δηλαδή, ο $U\in O(n)$ ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $e^{\ln(5)k - c_1t^2n/(R(D))^2}$ την

$$\max_{z\in\mathcal{N}}|h_D(U(z))| \leqslant t + w(D).$$

Επιλέγοντας $t = \alpha R(D)\sqrt{k/n}$ για $\alpha > 1$ παίρνουμε $B\subset G_{n,k}$ με μέτρο μεγαλύτερο από $1-e^{-k}$ τέτοιο ώστε για κάθε $F\in B$ να ισχύει

$$\max_{\theta\in S_F}|h_D(\theta)| \leqslant 2\left(c_2R(D)\sqrt{k/n} + w(D)\right),$$

και έπεται ο ισχυρισμός της πρότασης. ∎

Συνδυάζοντας την Πρόταση 3.5.2 με το Θεώρημα 3.2.1 και το γεγονός ότι $R(Z_q(K)) \leqslant cqL_K$, παίρνουμε το εξής.

Λήμμα 3.5.3. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant q\leqslant n$ ορίζουμε*

$$k_0(q) := \log^2(1+q)\max\{\log^2(1+q), n/q\}. \tag{3.5.3}$$

Τότε, για κάθε $1\leqslant k\leqslant k_0(q)$, ο τυχαίος $F\in G_{n,k}$ ικανοποιεί την

$$R(P_F(Z_q(K))) \leqslant c_1\alpha\log(1+q)\max\left\{\frac{q\log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q}\right\} L_K \tag{3.5.4}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-c_2\alpha^2k_0(q)}$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Αφού $R(Z_q(K)) \leqslant cqL_K$ βλέπουμε ότι

$$\frac{R(Z_q(K))\sqrt{k_0(q)}}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{cq}{\sqrt{n}}\log(1+q)\max\left\{\log(1+q), \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{q}}\right\} L_K = c\log(1+q)\max\left\{\frac{q\log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q}\right\} L_K. \tag{3.5.5}$$

Από το Θεώρημα 3.2.1 έχουμε άνω φράγμα της ίδιας τάξης για το $w(Z_q(K))$. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε την Πρόταση 3.5.2 για το $Z_q(K)$. ■

Παρατήρηση 3.5.4. Παρατηρήστε ότι αν $1 \leqslant s \leqslant k$ τότε το συμπέρασμα της Πρότασης 3.5.2 εξακολουθεί να ισχύει για τον τυχαίο $F \in G_{n,s}$ με την ίδια πιθανότητα στην $G_{n,s}$. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος Fubini και της ανισότητας $R(P_H(D)) \leqslant R(P_F(D))$ η οποία ισχύει για κάθε s-διάστατο υπόχωρο H ενός k-διάστατου υπόχωρου F του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.1. Ορίζουμε q_0 μέσω της εξίσωσης

$$q_0\log^2(1+q_0) = n. \tag{3.5.6}$$

Παρατηρήστε ότι $q_0 \simeq n/(\log n)^2$ και $\log(1+q_0) \simeq \log n$. Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant q_0$ έχουμε $q\log^2(1+q) \leqslant n$, άρα

$$k_0(q) = \frac{n\log^2(1+q)}{q} \geqslant \frac{c_1 n\log^2(1+q_0)}{q_0} \tag{3.5.7}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, διότι η συνάρτηση $q \mapsto \log^2(1+q)/q$ είναι φθίνουσα για $q \geqslant 4$. Έπεται ότι

$$k_0(q) \geqslant c_1\log^4(1+q_0) \geqslant c_2(\log n)^4 \tag{3.5.8}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant q_0$.

Σταθεροποιούμε $\alpha > 1$ και ορίζουμε

$$k_0 = c_1\log^4(1+q_0). \tag{3.5.9}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.5.3 και την Παρατήρηση 3.5.4, για κάθε $q \leqslant q_0$ μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο $\Gamma_q \subseteq G_{n,k_0}$ με $\nu_{n,k_0}(\Gamma_q) \geqslant 1 - e^{-c\alpha^2 k_0}$, τέτοιο ώστε

$$R(P_F(Z_q(K))) \leqslant c_3\alpha\log(1+q)\max\left\{\frac{q\log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q}\right\} L_K \leqslant c_3\alpha\sqrt{q}\log(1+q)L_K \tag{3.5.10}$$

για κάθε $F \in G_{n,k_0}$. Αν ορίσουμε $\Gamma := \bigcap_{s=1}^{\lfloor \log_2 q_0\rfloor}\Gamma_{2^s}$, τότε

$$\nu_{n,k_0}\big(G_{n,k_0}\setminus\Gamma\big) \leqslant \nu_{n,k_0}\Big(G_{n,k_0}\setminus\bigcap_{s=1}^{\lfloor \log_2 n\rfloor}\Gamma_{2^s}\Big) \leqslant c(\log n)e^{-c\alpha^2 k_0} \leqslant \frac{1}{n^{\log^3 n}} \tag{3.5.11}$$

αν το $\alpha \simeq 1$ επιλεγεί αρκετά μεγάλο. Τότε, για κάθε $F \in \Gamma$, για κάθε $\theta \in S_F$ και για κάθε $1 \leqslant s \leqslant \lfloor \log_2 q_0 \rfloor$ έχουμε

$$\frac{h_{Z_{2^s}(K)}(\theta)}{\sqrt{2^s}} = \frac{h_{P_F(Z_{2^s}(K))}(\theta)}{\sqrt{2^s}} \leqslant c_3\alpha \log(1+2^s)L_K \leqslant c_4\alpha(\log n)L_K. \tag{3.5.12}$$

Παίρνοντας υπόψη μας και το γεγονός ότι αν $2^s \leqslant q < 2^{s+1}$ τότε

$$\frac{h_{Z_q(K)}(y)}{\sqrt{q}} \leqslant \frac{h_{Z_{2^{s+1}}(K)}(y)}{2^{s/2}} = \sqrt{2}\frac{h_{Z_{2^{s+1}}(K)}(y)}{2^{(s+1)/2}}, \tag{3.5.13}$$

βλέπουμε ότι

$$\frac{h_{Z_q(K)}(y)}{\sqrt{q}} \leqslant c_5\alpha(\log n)L_K \tag{3.5.14}$$

για κάθε $F \in \Gamma$, για κάθε $\theta \in S_F$ και για κάθε $2 \leqslant q \leqslant q_0$.

Στη συνέχεια, παρατηρήστε ότι αν $q_0 \leqslant q \leqslant n$ τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\frac{h_{Z_q(K)}(y)}{\sqrt{q}} &\leqslant \frac{c_6 q}{q_0}\frac{h_{Z_{q_0}(K)}(y)}{\sqrt{q}} = \frac{c_6\sqrt{q}}{\sqrt{q_0}}\frac{h_{Z_{q_0}(K)}(y)}{\sqrt{q_0}} \leqslant \frac{c_6\sqrt{n}}{\sqrt{q_0}}\frac{h_{Z_{q_0}(K)}(y)}{\sqrt{q_0}} \\ &= c_6\log(1+q_0)\frac{h_{Z_{q_0}(K)}(y)}{\sqrt{q_0}} \leqslant c_7(\log n)\frac{h_{Z_{q_0}(K)}(y)}{\sqrt{q_0}},\end{aligned} \tag{3.5.15}$$

άρα

$$\frac{h_{Z_q(K)}(y)}{\sqrt{q}} \leqslant c_7\alpha(\log n)^2 L_K \tag{3.5.16}$$

για κάθε $F \in \Gamma$, για κάθε $\theta \in S_F$ και για κάθε $q_0 \leqslant q \leqslant n$.

Θυμηθείτε ότι η συνάρτηση στήριξης του κυρτού σώματος $\Psi_2(K)$ είναι η

$$h_{\Psi_2(K)}(y) = \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)}.$$

Έχουμε επίσης

$$h_{\Psi_2(K)}(y) \simeq \sup_{q\geqslant 2}\frac{h_{Z_q(K)}(y)}{\sqrt{q}} \simeq \sup_{2\leqslant q\leqslant n}\frac{h_{Z_q(K)}(y)}{\sqrt{q}} \tag{3.5.17}$$

διότι $h_{Z_q(K)}(y) \simeq h_{Z_n(K)}(y)$ για κάθε $q \geqslant n$. Έτσι, από τις (3.5.14) και (3.5.16) και από το γεγονός ότι $\alpha \simeq 1$ βλέπουμε ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C(\log n)^2 L_K \tag{3.5.18}$$

για κάθε $F \in \Gamma$ και για κάθε $\theta \in S_F$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. ∎

Κεφάλαιο 4

Τυχαίες τομές και τυχαίες στροφές ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

4.1 Τυχαίες τομές ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

Στόχος μας σε αυτο το κεφάλαιο είναι να δώσουμε καινούριες εκτιμήσεις για τη διάμετρο της τυχαίας $(n-k)$-διάστατης τομής ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος. Επίσης, χρησιμοποιώντας μια διαφορετική μέθοδο, μελετάμε το ίδιο ερώτημα για τα L_q-κεντροειδή σώματα ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου και τα αντίστοιχα πολικά τους σώματα.

Υπενθυμίζουμε ότι η εγγεγραμμένη ακτίνα $r(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$ είναι ο μεγαλύτερος $r>0$ για τον οποίο ισχύει ότι $rB_2^n \subseteq K$, ενώ η ακτίνα $R(K) := \max\{\|x\|_2 : x \in K\}$ του K είναι ο μικρότερος $R>0$ για τον οποίο $K \subseteq RB_2^n$.

Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η εγγεγραμμένη ακτίνα και η ακτίνα του K ικανοποιούν τα φράγματα

$$c_1 L_K \leqslant r(K) \leqslant R(K) \leqslant c_2 n L_K,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Μάλιστα, οι Kannan, Lovász και Simonovits στο [55] έδειξαν ότι

$$R(K) \leqslant (n+1) L_K. \tag{4.1.1}$$

Ένα φυσιολογικό ερώτημα, το οποίο είναι πιθανόν να έχει καταφατική απάντηση, είναι το ακόλουθο.

Ερώτημα 4.1.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\overline{c}_0 > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την*

$$R(K \cap F) \leqslant \overline{c}_0 \sqrt{n/k}\,\sqrt{n} L_K. \tag{4.1.2}$$

Οι Litvak, V. Milman και Pajor έχουν αποδείξει στο [67] ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ο τυχαίος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$R(K \cap F) \leqslant c (n/k)^{3/2} \tilde{M}(K), \tag{4.1.3}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και

$$\tilde{M}(K) := \frac{1}{|K|}\int_K \|x\|_2 dx. \tag{4.1.4}$$

Στην περίπτωση ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος έχουμε $|K| = 1$ και

$$\tilde{M}(K) \leqslant \left(\int_K \|x\|_2^2 dx\right)^{1/2} = \sqrt{n}L_K, \tag{4.1.5}$$

άρα η (4.1.3) συνεπάγεται ότι ο τυχαίος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$R(K\cap F) \leqslant \overline{c}_1 (n/k)^{3/2}\sqrt{n}L_K, \tag{4.1.6}$$

όπου $\overline{c}_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το πρώτο μας κύριο αποτέλεσμα δείχνει ότι μπορούμε να έχουμε ένα φράγμα της τάξης του $\gamma^{-1}\sqrt{n}L_K$ όταν η συνδιάσταση k είναι μεγαλύτερη από γn.

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την*

$$R(K\cap F) \leqslant \frac{\overline{c}_0 n}{\max\{k,\sqrt{n}\}}\sqrt{n}L_K \tag{4.1.7}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-\sqrt{n})$, όπου $\overline{c}_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 4.1.2 αρχίζει να δίνει μη τετριμμένη πληροφορία όταν $k > \sqrt{n}$. Σε αυτή την περίπτωση, γράφοντας $k = \gamma n$ για κάποιο $\gamma \in (1/\sqrt{n}, 1)$ βλέπουμε ότι

$$R(K\cap F) \leqslant \frac{\overline{c}_0}{\gamma}\sqrt{n}L_K \tag{4.1.8}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-\sqrt{n})$ στην $G_{n,(1-\gamma)n}$. Το αποτέλεσμα του [67] επιτυγχάνει ασθενέστερη $\gamma^{-3/2}$-εξάρτηση από το $\gamma = k/n$.

Μια φυσιολογική προσέγγιση για το παραπάνω ερώτημα θα ήταν να συνδυάσουμε την M^*-ανισότητα με κάποιο άνω φράγμα για το μέσο πλάτος

$$w(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(x)\, d\sigma(x), \tag{4.1.9}$$

ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, ο E. Milman έδειξε στο [76] ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$w(K) \leqslant c_3\sqrt{n}(\log n)^2 L_K. \tag{4.1.10}$$

Η εξάρτηση από το n είναι βέλτιστη αν αγνοήσουμε τον λογαριθμικό παράγοντα. Από την M^*-ανισότητα – βλέπε Θεώρημα 1.1.8 – γνωρίζουμε ότι, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$R(K\cap F) \leqslant c_4\sqrt{\frac{n}{k}}\, w(K) \tag{4.1.11}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_5 k)$, όπου $c_4, c_5 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Συνδυάζοντας την (4.1.11) με το θεώρημα του E. Milman καταλήγουμε στην παρακάτω εκτίμηση:

Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$R(K \cap F) \leqslant \frac{\overline{c}_2 n \log^2 n \, L_K}{\sqrt{k}} \tag{4.1.12}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-\overline{c}_3 k)$, όπου $\overline{c}_2, \overline{c}_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Σημειώνουμε ότι το άνω φράγμα του Θεωρήματος 4.1.2 έχει κάποια πλεονεκτήματα συγκρινόμενο με την (4.1.12): Αν το k είναι ανάλογο του n (ας πούμε $k \geqslant \gamma n$ για κάποιον $\gamma \in (1/\sqrt{n}, 1)$) τότε το Θεώρημα 4.1.2 εγγυάται ότι $R(K \cap F) \leqslant c(\gamma)\sqrt{n} L_K$ για τον τυχαίο $F \in G_{n,n-k}$. Γενικότερα, για κάθε $k \geqslant \frac{c_6 n}{(\log n)^4}$ έχουμε

$$\frac{\overline{c}_0 n\sqrt{n}}{\max\{k, \sqrt{n}\}} \leqslant \frac{\overline{c}_2 n (\log n)^2}{\sqrt{k}}, \tag{4.1.13}$$

άρα η εκτίμηση του Θεωρήματος 4.1.2 είναι ισχυρότερη από την (4.1.12). Παρόλα αυτά, τονίζουμε ότι το φράγμα μας δεν είναι βλετιστο και θα ήταν πολύ ενδιαφέρον να αποφασίσουμε αν η (4.1.2) αληθεύει. Τότε, θα ήταν βέλτιστη για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$.

Στην ενότητα §4.4 μελετάμε τη διάμετρο της τυχαίας τομής του L_q-κεντροειδούς σώματος $Z_q(\mu)$ ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ παίρνουμε ακριβές άνω φράγμα για την ακτίνα της τυχαίας $(n-k)$-διάστατης τομής του $Z_q(\mu)$, το οποίο επεκτείνει παρόμοιο αποτέλεσμα των Μπραζιτίκου και Σταυρακάκη (βλέπε [31]) το οποίο είχε αποδειχθεί μόνο για $q \in [1, \sqrt{n}]$.

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant q \leqslant n$. Τότε:*

(α) *Με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-\overline{c}_4 n}$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n/2}$ ικανοποιεί την*

$$R(Z_q(\mu) \cap F) \leqslant \overline{c}_5 \sqrt{q} \tag{4.1.14}$$

όπου $\overline{c}_4, \overline{c}_5 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

(β) *Με πιθανότητα μεγαλύετρη από $1 - e^{-n}$, ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$Z_q(\mu) \cap U(Z_q(\mu)) \subseteq (\overline{c}_6 \sqrt{q})\, B_2^n, \tag{4.1.15}$$

όπου $\overline{c}_6 > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Η μέθοδος της απόδειξης βασίζεται σε εκτιμήσεις, από τα [76] και [40], για τους αριθμούς Gelfand συμμετρικού κυρτού σώματος, οι οποίες εξαρτώνται από ογκομετρικές παραμέτρους του. Συνδυάζοντας αυτές τις γενικές εκτιμήσεις με τις ιδιότητες της οικογένειας των κεντροειδών σωμάτων $Z_q(\mu)$ ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ, τις οποίες έχουμε παρουσιάσει στο Κεφάλαιο 1, δίνουμε εκτιμήσεις για την ελάχιστη δυνατή ακτίνα μιας $(n-k)$-διάστατης τομής του $Z_q(\mu)$. Στη συνέχεια δίνουμε φράγματα για την ακτίνα της τυχαίας $(n-k)$-διάστατης τομής του $Z_q(\mu)$, χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα από τα [42], [97] και το [69]. Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα μελετώντας τα ίδια ερωτήματα για το πολικό σώμα $Z_q^{\circ}(\mu)$ του κεντροειδούς σώματος $Z_q(\mu)$.

Στην τελευταία ενότητα αυτού του κεφαλαίου μελετάμε τη διάμετρο της τυχαίας τομής κυρτού σώματος που έχει *μέγιστη ισοτροπική σταθερά*. Θέτουμε

$$L_n' := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\}. \tag{4.1.16}$$

Είναι γνωστό ότι $L_n \leqslant cL_n'$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$ (βλέπε [2, Κεφάλαιο 3]). Εφαρμόζοντας τις μεθόδους της ενότητας § 4.4, αποδεικνύουμε κάποιες, μάλλον όχι αναμενόμενες, ιδιότητες αυτών των σωμάτων.

Θεώρημα 4.1.4. *Έστω K ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $L_K = L_n'$. Τότε:*

(α) *Ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n/2}$ ικανοποιεί τις*

$$R(K\cap F) \leqslant \overline{c}_7\sqrt{n} \tag{4.1.17}$$

και

$$L_{K\cap F} \leqslant \overline{c}_8 \tag{4.1.18}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-\overline{c}_9 n}$, όπου $\overline{c}_i>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

(β) *Ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$K\cap U(K) \subseteq (\overline{c}_{10}\sqrt{n})\, B_2^n, \tag{4.1.19}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$, όπου $\overline{c}_{10}>0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Το ίδιο αποτέλεσμα αποδεικνύεται αν υποθέσουμε ότι το K έχει σχεδόν μέγιστη ισοτροπική σταθερά, δηλαδή $L_K \geqslant \beta L_n'$ για κάποια (απόλυτη) σταθερά $\beta\in(0,1)$. Καταλήγουμε στα ίδια συμπεράσματα με τις σταθερές $\overline{c}_i$ να εξαρτώνται μόνο από το β.

Σημειώνουμε ότι οι Alonso-Gutiérrez, Bastero, Bernués και Παούρης έχουν αποδείξει στο [9] ότι κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια τομή $K\cap F$ διάστασης $n-k$ με ισοτροπική σταθερά

$$L_{K\cap F} \leqslant c\sqrt{\frac{n}{k}}\log\Big(\frac{en}{k}\Big). \tag{4.1.20}$$

Για την απόδειξη αυτού του αποτελέσματος θεώρησαν μια α-κανονική M-θέση του K. Στο Θεώρημα 4.1.4 θεωρούμε κυρτά σώματα στην ισοτροπική θέση και οι εκτιμήσεις (4.1.17) και (4.1.18) ισχύουν για τυχαίο υπόχωρο F.

4.2 Εργαλεία από τη θεωρία των λογαριθμικά κοίλων μέτρων

Υπενθυμίζουμε αρχικά κάποια εργαλεία από τη θεωρία των λογαριθμικά κοίλων μέτρων. Το ακόλουθο ακριβές αποτέλεσμα για τις ροπές $I_q(K)$ ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ αποδείχθηκε από τον Παούρη (βλέπε § 1.7).

Θεώρημα 4.2.1 (Παούρης). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\delta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\frac{1}{\delta}\sqrt{n}L_K = \frac{1}{\delta}I_2(K) \leqslant I_{-q}(K) \leqslant I_q(K) \leqslant \delta I_2(K) = \delta\sqrt{n}L_K \tag{4.2.1}$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$.

Για κάθε $q \geqslant 1$, το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$ του λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_q(\mu)}(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q}. \tag{4.2.2}$$

Είδαμε ότι το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν είναι κεντραρισμένο και $Z_2(\mu) = B_2^n$. Αν το K είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε $Z_q(K) = L_K Z_q(\mu_K)$. Θα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$Z_q(K) \subseteq c_1\frac{q}{p}Z_p(K) \tag{4.2.3}$$

για κάθε $1 \leqslant p < q$. Ειδικότερα, αν το K είναι ισοτροπικό, τότε $R(Z_q(K)) \leqslant c_1 q L_K$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι $Z_q(K) \supseteq c_2 Z_\infty(K)$ για κάθε $q \geqslant n$.

Στην § 1.7 είδαμε ότι αν $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ τότε

$$w\big(Z_q(\mu)\big) \simeq \sqrt{q}, \tag{4.2.4}$$

και για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,

$$\mathrm{vrad}(Z_q(\mu)) \leqslant c_1\sqrt{q}. \tag{4.2.5}$$

Αντίστροφα, αν $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ τότε

$$\mathrm{vrad}(Z_q(\mu)) \geqslant c_2\sqrt{q}. \tag{4.2.6}$$

Οι (4.2.5) και (4.2.6) προσδιορίζουν την ακτίνα όγκου του $Z_q(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$. Για τις μεγαλύτερες τιμές του q μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το κάτω φράγμα

$$\mathrm{vrad}(Z_q(\mu)) \geqslant c_2\sqrt{q}\, L_\mu^{-1}, \tag{4.2.7}$$

το οποίο αποδείχθηκε από τους Lutwak, Yang και Zhang [74] στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων και επεκτάθηκε στην κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας από τους Παούρη και Pivovarov στο [90].

Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $E \in G_{n,k}$, το marginal του μ ως προς τον E είναι το μέτρο πιθανότητας $\pi_E(\mu)$ με πυκνότητα

$$f_{\pi_E(\mu)}(x) = \int_{x+E^{\perp}} f_\mu(y)dy. \tag{4.2.8}$$

Είδαμε ότι αν το μέτρο μ είναι κεντραρισμένο, ισοτροπικό ή λογαριθμικά κοίλο τότε και το μέτρο $\pi_E(\mu)$ είναι αντίστοιχα και αυτό κεντραρισμένο, ισοτροπικό ή λογαριθμικά κοίλο. Μια χρήσιμη παρατήρηση είναι η ταυτότητα

$$P_F\big(Z_q(\mu)\big) = Z_q\big(\pi_F(\mu)\big) \tag{4.2.9}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $F \in G_{n,n-k}$.

Αν μ είναι ένα κεντραρισμένο, λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $p > 0$ ορίζουμε

$$K_p(\mu) := K_p(f_\mu) = \left\{ x : \int_0^\infty r^{p-1} f_\mu(rx)\, dr \geqslant \frac{f_\mu(0)}{p} \right\}. \tag{4.2.10}$$

Από τον παραπάνω ορισμό προκύπτει οτι το $K_p(\mu)$ είναι ένα αστρόμορφο σώμα με ακτινική συνάρτηση

$$\rho_{K_p(\mu)}(x) = \left(\frac{1}{f_\mu(0)} \int_0^\infty p r^{p-1} f_\mu(rx)\, dr \right)^{1/p} \tag{4.2.11}$$

για $x \neq 0$. Τα σώματα $K_p(\mu)$ εισήχθησαν από τον K. Ball (στο [14]) ο οποίος έδειξε ότι αν το μέτρο μ είναι λογαριθμικά κοίλο τότε, για κάθε $p > 0$, το $K_p(\mu)$ είναι κυρτό σώμα.

Αν το K είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,n-k}$, το σώμα $\overline{K_{k+1}}(\pi_{F^\perp}(\mu_K))$ ικανοποιεί την

$$|K \cap F|^{1/k} \simeq \frac{L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_{F^\perp}(\mu_K))}}{L_K}. \tag{4.2.12}$$

Η απόδειξη της (4.2.12) (και όλων των προηγούμενων ισχυρισμών) υπάρχει στο [2].

4.3 Τυχαίες τομές ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

Διάμετρος τυχαίων τομών

Για την απόδειξη του θεωρήματος 4.1.2 θα χρειαστούμε τα Λήμματα 4.3.1 και 4.3.2, τα οποία στηρίζονται σε ιδέες του Klartag από το [57].

Λήμμα 4.3.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ υπάρχει ένα υποσύνολο $\mathcal{A} := \mathcal{A}(n,k)$ της $G_{n,n-k}$ με μέτρο $\nu_{n,n-k}(\mathcal{A}) \geqslant 1 - e^{-\sqrt{n}}$, το οποίο έχει την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $F \in \mathcal{A}$,*

$$|\{x \in K \cap F : \|x\|_2 \geqslant c_1 \sqrt{n} L_K\}| \leqslant e^{-(k+\sqrt{n})} |K \cap F|, \tag{4.3.1}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες έχουμε ότι

$$\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\|x\|_2^{k+q}dx\,d\nu_{n,n-k}(F)=\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\int_K\|x\|_2^q dx=\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}I_q^q(K), \tag{4.3.2}$$

και με εφαρμογή της ανισότητας Markov βλέπουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $F\in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$\int_{K\cap F}\|x\|_2^{k+q}dx\leqslant\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}(eI_q(K))^q \tag{4.3.3}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-q}$.

Σταθεροποιούμε έναν υπόχωρο $F\in G_{n,n-k}$ ο οποίος ικανοποιεί την (4.3.3). Από την (4.2.12) έχουμε

$$|K\cap F|^{1/k}\geqslant c_2\frac{L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_{F^\perp}(\mu_K))}}{L_K}\geqslant\frac{c_3}{L_K} \tag{4.3.4}$$

όπου $c_2,c_3>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\leqslant(c_4\sqrt{n})^k \tag{4.3.5}$$

για μια απόλυτη σταθερά $c_4>0$. Χρησιμοποιώντας τώρα την (1.7.3) με $q=\sqrt{n}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{|K\cap F|}\int_{K\cap F}\|x\|_2^{k+q}dx&\leqslant\frac{1}{|K\cap F|}\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}(eI_q(K))^q\\&\leqslant(c_5L_K)^k(c_4\sqrt{n})^k(e\delta\sqrt{n}L_K)^q\leqslant(c_6\sqrt{n}L_K)^{k+q},\end{aligned} \tag{4.3.6}$$

όπου $c_6>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έτσι προκύπτει ότι

$$|\{x\in K\cap F:\|x\|_2\geqslant ec_6\sqrt{n}L_K\}|\leqslant e^{-(k+\sqrt{n})}|K\cap F|. \tag{4.3.7}$$

και έχουμε δείξει το λήμμα με $c_1=ec_6$. ■

Λήμμα 4.3.2 (Klartag). *Έστω A ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^m$. Τότε για κάθε $0<\varepsilon<1$ έχουμε*

$$|\{x\in A:\|x\|_2\geqslant\varepsilon R(A)\}|\geqslant\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^m|A|. \tag{4.3.8}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $x_0\in A$ τέτοιο ώστε $\|x_0\|_2=R(A)$ και ορίζουμε $v=x_0/\|x_0\|_2$. Αν ορίσουμε το σύνολο

$$A^+:=\{x\in A:\langle x,v\rangle\geqslant 0\}, \tag{4.3.9}$$

τότε, αφού το A είναι συμμετρικό, έχουμε $|A^+|=|A|/2$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\{x\in A:\|x\|_2\geqslant\varepsilon R(A)\}\supseteq\varepsilon x_0+(1-\varepsilon)A^+, \tag{4.3.10}$$

και έτσι έχουμε ότι

$$|\{x\in A:\|x\|_2\geqslant\varepsilon R(A)\}|\geqslant|\varepsilon x_0+(1-\varepsilon)A^+|=(1-\varepsilon)^m|A^+|=\frac{1}{2}(1-\varepsilon)^m|A|, \tag{4.3.11}$$

το οποίο ήταν και το ζητούμενο. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Από το Λήμμα 4.3.1 μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο $\mathcal{A}$ της $G_{n,n-k}$ με $\nu_{n,n-k}(\mathcal{A}) \geqslant 1-e^{-\sqrt{n}}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $F \in \mathcal{A}$,

$$|\{x \in K \cap F : \|x\|_2 \geqslant c_1\sqrt{n}L_K\}| \leqslant e^{-(k+\sqrt{n})}|K \cap F|. \tag{4.3.12}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Αν $k > n/3$ τότε επιλέγουμε $\varepsilon_0 = 1 - e^{-\frac{1}{3}}$ και έχουμε

$$\frac{1}{2}(1-\varepsilon_0)^{n-k}|K \cap F| = \frac{1}{2}e^{-\frac{n-k}{3}}|K \cap F| > e^{-\frac{n-k}{3}+1}|K \cap F| > e^{-(k+\sqrt{n})}|K \cap F|, \tag{4.3.13}$$

γιατί $k + \sqrt{n} > \frac{n-k}{3} + 1$. Από το Λήμμα 4.3.2 έπεται ότι

$$|\{x \in K \cap F : \|x\|_2 \geqslant \varepsilon_0 R(K \cap F)\}| > |\{x \in K \cap F : \|x\|_2 \geqslant c_1\sqrt{n}L_K\}|, \tag{4.3.14}$$

συνεπώς

$$R(K \cap F) < c_2\sqrt{n}L_K, \tag{4.3.15}$$

όπου $c_2 = \varepsilon_0^{-1}c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Περίπτωση 2. Αν $k \leqslant n/3$ τότε επιλέγουμε $\varepsilon_1 = \frac{k+\sqrt{n}}{6(n-k)}$. Σημειώνουμε ότι $\varepsilon_1 < 1/2$. Από την ανισότητα $1 - t > e^{-2t}$ στο $(0, 1/2)$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(1-\varepsilon_1)^{n-k}|K \cap F| &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{k+\sqrt{n}}{6(n-k)}\right)^{n-k}|K \cap F| \\ &> e^{-\frac{k+\sqrt{n}}{3}-1}|K \cap F| > e^{-(k+\sqrt{n})}|K \cap F|, \end{aligned} \tag{4.3.16}$$

γιατί $\frac{2(k+\sqrt{n})}{3} > 1$. Από το Λήμμα 4.3.2 αυτό συνεπάγεται ότι

$$|\{x \in K \cap F : \|x\|_2 \geqslant \varepsilon_1 R(K \cap F)\}| > |\{x \in K \cap F : \|x\|_2 \geqslant c_1\sqrt{n}L_K\}|, \tag{4.3.17}$$

επομένως

$$\varepsilon_1 R(K \cap F) < c_1\sqrt{n}L_K, \tag{4.3.18}$$

το οποίο, από την επιλογή του ε_1 δίνει

$$R(K \cap F) < \frac{c_3 n}{\max\{k, \sqrt{n}\}}\sqrt{n}L_K \tag{4.3.19}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος (με πιθανότητα $1 - e^{-\sqrt{n}}$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$). ■

Παρατήρηση 4.3.3. Είναι δυνατόν να βελτιώσουμε την πιθανότητα $1 - e^{-\sqrt{n}}$ που ήδη έχουμε, όταν $1 \leqslant k \leqslant n/2$. Αυτό προκύπτει αν αξιοποιήσουμε γνωστά αποτελέσματα που δείχνουν ότι η ύπαρξη μιας s-διάστατης τομής με ακτίνα r εξασφαλίζει ότι η τυχαία m-διάστατη τομή, όπου $m < s$, έχει ακτίνα της «ίδιας τάξης». Η παρατήρηση αυτή έγινε αρχικά στα [42] και [97], και αργότερα στο [69] όπου αποδεικνύεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 4.3.4 (Litvak, Pajor, Tomczak-Jaegermann). *Έστω A συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant s < m \leqslant n-1$. Αν $R(A\cap F) \leqslant r$ για κάποιον υπόχωρο $F \in G_{n,m}$ τότε ο τυχαίος υπόχωρος $E \in G_{n,s}$ ικανοποιεί την*

$$R(A\cap E) \leqslant r\left(c_2\sqrt{\frac{n}{n-m}}\right)^{\frac{n-s}{m-s}} \tag{4.3.20}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2e^{-(n-s)/2}$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Εφαρμόζουμε αυτό το αποτέλεσμα ως εξής: θεωρούμε $k \geqslant \sqrt{n}$ και θέτουμε $t = k/2$. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2 προκύπτει ότι υπάρχει $E \in G_{n,n-t}$ τέτοιος ώστε

$$R(K\cap E) \leqslant \frac{c_1 n}{t}\sqrt{n}L_K, \tag{4.3.21}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3.4 για $s = n-k$ και $m = n-t$ έχουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την ανισότητα

$$R(K\cap F) \leqslant \left(\frac{c_2 n}{t}\right)^{\frac{k}{2(k-t)}} R(K\cap E) = c_3\left(\frac{n}{k}\right)^2\sqrt{n}L_K \tag{4.3.22}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2e^{-k/4}$, όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, αν $k \geqslant \gamma n$ για κάποιον $\gamma \in (0,1)$ τότε έχουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$R(K\cap F) \leqslant c(\gamma)\sqrt{n}L_K. \tag{4.3.23}$$

Αξίζει εδώ να σημειωθεί ότι η εκτίμηση που έχουμε για την πιθανότητα είναι μεγαλύτερη από $1-2e^{-\gamma n/4}$, όπου $c(\gamma) = O(\gamma^{-2})$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το γ.

Παρατήρηση 4.3.5. Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την ίδια τεχνική για να δώσουμε κάτω φράγμα για τη διάμετρο της τυχαίας $(n-k)$-διάστατης τομής ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K. Έφαρμόζοντας ξανά ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες έχουμε ότι

$$\int_K \|x\|_2^{-q}dx = \frac{n\omega_n}{(n-k)\omega_{n-k}}\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\|x\|_2^{k-q}dx\, d\nu_{n,n-k}(F) \tag{4.3.24}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $0 < q < n$. Έτσι προκύπτει ότι

$$\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\|x\|_2^{k-q}dx\, d\nu_{n,n-k}(F) = \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}I_{-q}^{-q}(K), \tag{4.3.25}$$

και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov βλέπουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$\int_{K\cap F}\|x\|_2^{k-q}dx \leqslant \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\left(\frac{e}{I_{-q}(K)}\right)^q \tag{4.3.26}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-q}$. Αν υποθέσουμε ότι $q > k$ τότε για κάθε $F \in G_{n,n-k}$ που ικανοποιεί την (4.3.26) έχουμε

$$|K\cap F|\, R(K\cap F)^{k-q} \leqslant \int_{K\cap F}\|x\|_2^{k-q}dx \leqslant \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}(e/I_{-q}(K))^q, \tag{4.3.27}$$

το οποίο οδηγεί στην

$$R(K\cap F)\geqslant \left(\frac{n\omega_n}{(n-k)\omega_{n-k}}\right)^{\frac{1}{q-k}}|K\cap F|^{\frac{1}{q-k}}\left(\frac{I_{-q}(K)}{e}\right)^{\frac{q}{q-k}} \tag{4.3.28}$$
$$\geqslant \left(\frac{c_1}{\sqrt{n}L_K}\right)^{\frac{k}{q-k}}(c_2I_{-q}(K))^{\frac{q}{q-k}}.$$

Αν $k\leqslant\sqrt{n}$ τότε επιλέγοντας $q=2\sqrt{n}$ και χρησιμοποιώντας την $I_{-2\sqrt{n}}(K)\geqslant c_3\sqrt{n}L_K$ παίρνουμε το παρακάτω αποτέλεσμα:

Πρόταση 4.3.6. *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant k\leqslant\sqrt{n}$ υπάρχει υποσύνολο $\mathcal{A}$ της $G_{n,n-k}$ με $\nu_{n,n-k}(\mathcal{A})\geqslant 1-e^{-\sqrt{n}}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $F\in\mathcal{A}$,*

$$R(K\cap F)\geqslant c\sqrt{n}L_K, \tag{4.3.29}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Τυχαίες στροφές ισοτροπικού κυρτού σώματος

Επιλέγοντας $k=\lfloor n/2\rfloor$ στο Θεώρημα 4.1.2 βλέπουμε ότι αν το K είναι ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ο υπόχωρος $F\in G_{n,\lceil n/2\rceil}$ ικανοποιεί την

$$R(K\cap F)\leqslant c_1\sqrt{n}\,L_K \tag{4.3.30}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2\exp(-c_2n)$, όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Τότε, χρησιμοποιώντας γνωστά αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε άνω φράγμα για την ακτίνα $R(K\cap U(K))$ της τομής του K με την τυχαία στροφή του $U(K)$: ένα γνωστό επιχείρημα του Krivine (βλέπε [5] ή [81]) δείχνει ότι αν $R(K\cap F)\leqslant r$ για κάποιον $r>0$ και για κάθε υπόχωρο F σε ένα υποσύνολο της $G_{n,\lceil n/2\rceil}$ μέτρου μεγαλύτερου από $1/2$, τότε υπάρχει $U\in O(n)$ ώστε $R(K\cap U(K))\leqslant\sqrt{2}\,r$. Πράγματι, από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι υπάρχει $E\in G_{n,n/2}$ ώστε

$$\|y\|_K\geqslant\frac{1}{r}\|y\|_2 \tag{4.3.31}$$

για κάθε $y\in E$ και για κάθε $y\in E^{\perp}$. Γράφουμε $P_1=P_E$ και $P_2=P_{E^{\perp}}$. Τότε, έχουμε $I=P_1+P_2$ και ορίζουμε $U=P_1-P_2\in O(n)$. Έστω $x\in\mathbb{R}^n$ και γράφουμε $x=x_1+x_2$, όπου $x_1=P_1(x)$ και $x_2=P_2(x)$. Τότε,

$$\|x_1+x_2\|_K+\|x_1-x_2\|_K\geqslant 2\max\{\|x_1\|_K,\|x_2\|_K\}\geqslant\frac{2}{r}\max\{\|x_1\|_2,\|x_2\|_2\}$$
$$\geqslant\frac{\sqrt{2}}{r}\sqrt{\|x_1\|_2^2+\|x_2\|_2^2}=\frac{\sqrt{2}}{r}\|x\|_2.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\|x\|_K+\|x\|_{U^{-1}(K)}\geqslant\frac{\sqrt{2}}{r}\|x\|_2, \tag{4.3.32}$$

ή ισοδύναμα,

$$2\mathrm{conv}(K^\circ \cup U(K^\circ)) \supseteq K^\circ + U(K^\circ) \supseteq \frac{\sqrt{2}}{r} B_2^n. \tag{4.3.33}$$

Περνώντας στα πολικά σώματα βλέπουμε ότι $K \cap U(K) \subseteq \sqrt{2} r B_2^n$.

Έτσι, από την (4.3.30) έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Πρόταση 4.3.7. *Για κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε*

$$K \cap U(K) \subseteq (c_3 \sqrt{n} L_K)\, B_2^n, \tag{4.3.34}$$

όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Μάλιστα, μπορούμε να αποδείξουμε το ανάλογο της Πρότασης 4.3.7 για τον τυχαίο $U \in O(n)$, χρησιμοποιώντας το ακόλουθο αποτέλεσμα των Vershynin και Rudelson (βλέπε [97, Θεώρημα 1.1]):

Υπάρχουν απόλυτες σταθερες $\gamma_0 \in (0, 1/2)$ και $c_1 > 0$ οι οποίες έχουν την παρακάτω ιδιότητα: αν A και D είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία έχουν τομές διάστασεων τουλάχιστον k και $n - 2\gamma_0 k$ αντίστοιχα, των οποίων οι ακτίνες φράσονται από 1, τότε ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την

$$R(A \cap U(D)) \leqslant c_1^{n/k} \tag{4.3.35}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$.

Ειδικότερα, αν εφαρμόσουμε το παραπάνω για $D = A$ και $k = n/2$ έχουμε το εξής (βλέπε [31]): *Αν*

$$r_A := \min\{R(A \cap F) : \dim(F) = \lceil (1 - \gamma_0) n \rceil\} \tag{4.3.36}$$

τότε $R(A \cap U(A)) \leqslant c_2 r_A$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ ως προς $U \in O(n)$.

Επιλέγοντας $k = \lfloor \gamma_0 n \rfloor$ στο Θεώρημα 4.1.2 έχουμε ότι αν το K είναι ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$r_K \leqslant c_4 \sqrt{n} L_K \tag{4.3.37}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_4 > 0$. Έτσι, έχουμε μια ισχυρότερη μορφή της Πρότασης 4.3.7.

Θεώρημα 4.3.8. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$K \cap U(K) \subseteq (c_5 \sqrt{n} L_K)\, B_2^n, \tag{4.3.38}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c_5 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

4.4 Τυχαίες τομές των κεντροειδών σωμάτων ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου

Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε την περίπτωση των L_q-κεντροειδών σωμάτων $Z_q(\mu)$ ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Εδώ, η αποδεικτική μέθοδος διαφέρει από αυτήν της προηγούμενης ενότητας.

Το Θεώρημα 4.3.4 μας δίνει έναν τρόπο να δώσουμε άνω φράγμα για την ακτίνα της τυχαίας $(n-k)$-διάστατης τομής ενός συμμετρικού κυρτού σώματος A στον $\mathbb{R}^n$ αν μπορούμε να έχουμε ένα άνω φράγμα για την ακτίνα *κάποιας* $(n-t)$-διάστατης τομής του A, με $t \ll k$. Αυτό μας οδηγεί στο να μελετήσουμε τους αριθμούς Gelfand $c_t(A)$, οι οποίοι ορίζονται ως εξής:

$$c_t(A) = \min\{R(A \cap F) : F \in G_{n,n-t}\} \tag{4.4.1}$$

για κάθε $t = 0, \dots, n-1$.

Στο [40] αποδεικνύεται ότι αν A είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $t = 1, \dots, \lfloor n/2 \rfloor$ υπάρχει υπόχωρος $F \in G_{n,n-2t}$ τέτοιος ώστε

$$A \cap F \subseteq c_1 \frac{n}{t} \log\Big(e + \frac{n}{t}\Big) w_t(A) B_2^n \cap F, \tag{4.4.2}$$

όπου

$$w_t(A) := \sup\{\mathrm{vrad}(A \cap E) : E \in G_{n,t}\}. \tag{4.4.3}$$

Έτσι έχουμε

$$c_{2t}(A) \leqslant c_1 \frac{n}{t} \log\Big(e + \frac{n}{t}\Big) w_t(A). \tag{4.4.4}$$

Θα εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο για το σώμα $Z_q(\mu)$. Ένα άλλο βασικό εργαλείο μας είναι το επόμενο θεώρημα το οποίο συνδυάζει αποτελέσματα των Παούρη και Klartag (βλέπε [76] ή [2, Κεφάλαιο 5] για περισσότερες πληροφορίες):

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω μ ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant t \leqslant n$ και $q \geqslant 1$ έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} v_t(Z_q(\mu)) &:= \sup\{\mathrm{vrad}(P_E(Z_q(\mu))) : E \in G_{n,t}\} \\ &\leqslant c_0 \sqrt{\frac{q}{t}} \max\{\sqrt{q}, \sqrt{t}\} \max_{E \in G_{n,t}} \det \mathrm{Cov}(\pi_E(\mu))^{\frac{1}{2t}}, \end{aligned} \tag{4.4.5}$$

όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.4.1 ως εξής: για κάθε $1 \leqslant t \leqslant n/2$ και κάθε $E \in G_{n,t}$ έχουμε ότι το $\pi_E(\mu)$ είναι ισοτροπικό, άρα $\det \mathrm{Cov}(\pi_E(\mu))^{\frac{1}{2t}} = 1$. Έτσι έχουμε ότι

$$w_t(Z_q(\mu)) \leqslant v_t(Z_q(\mu)) \leqslant c_0 \sqrt{\frac{q}{t}} \max\{\sqrt{q}, \sqrt{t}\}. \tag{4.4.6}$$

Τότε, από την (4.4.4) παίρνουμε το ακόλουθο.

Λήμμα 4.4.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant t \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$. Τότε,*

$$c_{2t}(Z_q(\mu)) \leqslant c_2 \frac{n}{t} \log\left(e + \frac{n}{t}\right) \sqrt{\frac{q}{t}} \max\{\sqrt{q}, \sqrt{t}\}, \tag{4.4.7}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Έστω $k \geqslant 4$ και $t = k/4$. Από το Θεώρημα 4.4.1 έχουμε ότι υπάρχει $E \in G_{n,n-2t}$ τέτοιος ώστε

$$R(Z_q(\mu) \cap E) \leqslant c_2 \frac{n}{t} \log\left(e + \frac{n}{t}\right) \sqrt{\frac{q}{t}} \max\{\sqrt{q}, \sqrt{t}\}, \tag{4.4.8}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3.4 με $s = n - k$ και $m = n - 2t$ βλέπουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την

$$R(Z_q(\mu) \cap F) \leqslant \left(\frac{c_2 n}{t}\right)^{\frac{k}{2(k-2t)}} R(K \cap E) = c_3 \left(\frac{n}{k}\right)^2 \log\left(e + \frac{4n}{k}\right) \sqrt{\frac{q}{k}} \max\{\sqrt{q}, \sqrt{k}\} \tag{4.4.9}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2e^{-k/2}$, όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, αν $k = \gamma n$ μπορούμε να επιλέξουμε $t = \gamma n / \log(c/\gamma)$, για $c > e^2$, και παίρνουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.4.3. *Έστω μ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\gamma \in (0,1)$. Αν $k \geqslant \gamma n$ τότε ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n-k}$ ικανοποιεί την*

$$R(Z_q(\mu) \cap F) \leqslant c(\gamma)\sqrt{q} \tag{4.4.10}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2e^{-\gamma n/2}$, όπου $c(\gamma) = O(\gamma^{-2}\log^{5/2}(c/\gamma))$ είναι θετική σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από το γ.

Επιλέγοντας $t = \gamma_0 n/2$ στην (4.4.7) βλέπουμε ότι

$$r_{Z_q(\mu)} = c_{\gamma_0 n}(Z_q(\mu)) \leqslant c_4 \sqrt{q} \tag{4.4.11}$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$, όπου $c_4 = c_4(\gamma_0) > 0$, και εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα των Rudelson και Vershynin (όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.8) έχουμε:

Θεώρημα 4.4.4. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant q \leqslant n$. Τότε, ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$Z_q(\mu) \cap U(Z_q(\mu)) \subseteq (c\sqrt{q})\, B_2^n, \tag{4.4.12}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 4.1.3 συνοψίζει τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 4.4.3 και του Θεωρήματος 4.4.4.

Παρατήρηση 4.4.5. Μπορούμε ακόμα να μελετήσουμε το ίδιο ερώτημα για το πολικό σώμα $Z_q^\circ(\mu)$ του $Z_q(\mu)$. Ξέρουμε ότι

$$w_t(Z_q^\circ(\mu)) := \sup\{\mathrm{vrad}(Z_q^\circ(\mu)\cap E) : E\in G_{n,t}\} \simeq \inf\{\mathrm{vrad}(P_E(Z_q(\mu))) : E\in G_{n,t}\}^{-1} \tag{4.4.13}$$

λόγω δυϊσμού και λόγω της αντίστροφης ανισότητας Santaló (1.1.14) των Bourgain-Milman. Για κάθε $1\leqslant t\leqslant n-1$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$v_t^-(A) = \inf\{\mathrm{vrad}(P_E(Z_q(\mu))) : E\in G_{n,t}\}. \tag{4.4.14}$$

Στην περίπτωση $A = Z_q(\mu)$ αυτή η παράμετρος έχει μελετηθεί στο [40]:

Λήμμα 4.4.6 (Γιαννόπουλος-E. Milman)**.** *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικό κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q\geqslant 1$ και $1\leqslant k\leqslant n-1$ έχουμε*

$$v_k^-(Z_q(\mu)) \geqslant c_1\sqrt{\min(q,\sqrt{k})}. \tag{4.4.15}$$

Αν υποθέσουμε ότι $\sup_n L_n\leqslant \alpha$ έπεται ότι

$$v_k^-(Z_q(\mu)) \geqslant \frac{c_2}{\alpha}\sqrt{\min(q,k)} \tag{4.4.16}$$

Αυτές οι εκτιμήσεις οδηγούν στα παρακάτω φράγματα για την ελάχιστη δυνατή ακτίνα μιας $(n-k)$-διάστατης τομής του $Z_q^\circ(\mu)$.

Θεώρημα 4.4.7. *Έστω μ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q\geqslant 1$ και $1\leqslant k\leqslant n-1$ έχουμε ότι:*

(α) *Υπάρχει $F\in G_{n,n-k}$ τέτοιος ώστε*

$$P_F(Z_q(\mu)) \supseteq \frac{1}{R_{k,q}}B_2^n\cap F \quad \textit{άρα} \quad R(Z_q^\circ(\mu)\cap F)\leqslant R_{k,q}, \tag{4.4.17}$$

όπου

$$R_{k,q} = \min\left\{1, c_3\frac{1}{\min(q^{1/2},k^{1/4})}\frac{n}{k}\log\left(e+\frac{n}{k}\right)\right\}. \tag{4.4.18}$$

(β) *Αν υποθέσουμε ότι $\sup_n L_n\leqslant\alpha$, τότε υπάρχει υπόχωρος $F\in G_{n,n-k}$ τέτοιος ώστε*

$$P_F(Z_q(\mu)) \supseteq \frac{1}{R_{k,q,\alpha}}B_2^n\cap F \quad \textit{άρα} \quad R(Z_q^\circ(\mu)\cap F)\leqslant R_{k,q,\alpha}, \tag{4.4.19}$$

όπου

$$R_{k,q,\alpha} = \min\left\{1, c_4\alpha\frac{1}{\sqrt{\min(q,k)}}\frac{n}{k}\log\left(e+\frac{n}{k}\right)\right\}. \tag{4.4.20}$$

Υποθέτοντας ακομα ότι $q \leqslant \sqrt{n}$ και επιλέγοντας $k = \gamma_0 n$, από τις (4.4.17) και (4.4.18) βλέπουμε ότι

$$c_{\gamma_0 n}(Z_q^\circ(\mu)) \leqslant c_1(\gamma_0)\frac{1}{\sqrt{q}}, \tag{4.4.21}$$

όπου $c_1(\gamma_0) > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Στη συνέχεια εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.3.4 με $s = n/2$ και $m = (1-\gamma_0)n$ και προκύπτει ότι ο τυχαίος υπόχωρος $E \in G_{n,n/2}$ ικανοποιεί την

$$R(Z_q^\circ(\mu) \cap E) \leqslant c_3 \cdot c_{\gamma_0 n}(Z_q^\circ(\mu)) \leqslant c_2(\gamma_0)\frac{1}{\sqrt{q}} \tag{4.4.22}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2e^{-n/4}$, όπου $c_2(\gamma_0) > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό οδηγεί στο συμπέρασμα ότι ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την

$$Z_q^\circ(\mu) \cap U(Z_q^\circ(\mu)) \subseteq \frac{c}{\sqrt{q}}\, B_2^n, \tag{4.4.23}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η ίδια εκτίμηση υπάρχει στο [62] (και μια δεύτερη απόδειξη δίνεται στο [31]).

Υποθέτοντας ότι $\sup_n L_n \leqslant \alpha$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το ίδιο επιχείρημα για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$: Επιλέγοντας $k = \gamma_0 n$, από τις (4.4.19) και (4.4.20) βλέπουμε ότι

$$c_{\gamma_0 n}(Z_q^\circ(\mu)) \leqslant c_1(\gamma_0)\frac{\alpha}{\sqrt{q}}, \tag{4.4.24}$$

όπου $c_1(\gamma_0) > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.3.4 με $s = n/2$ και $m = (1-\gamma_0)n$ και έχουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $E \in G_{n,n/2}$ ικανοποιεί την

$$R(Z_q^\circ(\mu) \cap E) \leqslant c_3 \cdot c_{\gamma_0 n}(Z_q^\circ(\mu)) \leqslant c_2(\gamma_0)\frac{\alpha}{\sqrt{q}} \tag{4.4.25}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2e^{-n/4}$, όπου $c_2(\gamma_0) > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Τέλος, έπεται ότι ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την

$$Z_q^\circ(\mu) \cap U(Z_q^\circ(\mu)) \subseteq \frac{c\alpha}{\sqrt{q}}\, B_2^n, \tag{4.4.26}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

4.5 Τυχαίες τομές σωμάτων με μέγιστη ισοτροπική σταθερά

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε δύο μη αναμενόμενες ιδιότητες των συμμετρικών κυρτών σωμάτων που έχουν μέγιστη ισοτροπική σταθερά. Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο της προηγούμενης ενότητας, δηλαδή θα προσπαθήσουμε να εκτιμήσουμε τις ποσότητες

$$c_t(K) = \min\{R(K \cap F) : F \in G_{n,n-t}\} \tag{4.5.1}$$

για κάθε $t = 0, \ldots, n-1$.

Παρατηρούμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε από την (4.2.12) έχουμε ότι

$$|K \cap E|^{\frac{1}{n-t}} \leqslant c_2 \frac{L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_{E^\perp}(\mu_K))}}{L_K} \leqslant \frac{c_3 L_{n-t}}{L_K} \tag{4.5.2}$$

για κάθε $E \in G_{n,t}$, συνεπώς,

$$w_t(K) \leqslant c_4 \sqrt{t} \left(\frac{c_3 L_{n-t}}{L_K} \right)^{\frac{n-t}{t}}. \tag{4.5.3}$$

Υποθέτουμε ότι το K έχει μέγιστη ισοτροπική σταθερά, δηλαδή $L_K = L_n'$ (το ίδιο επιχείρημα εφαρμόζεται αν υποθέσουμε ότι η L_K είναι σχεδόν μέγιστη, δηλαδή $L_K \geqslant \beta L_n'$ για κάποια απόλυτη σταθερά $\beta \in (0,1)$). Γνωρίζουμε ότι $L_{n-t} \leqslant c_1 L_n \leqslant c_2 L_n'$ για κάθε $1 \leqslant t \leqslant n-1$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Έτσι, προκύπτει το παρακάτω:

Λήμμα 4.5.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $L_K = L_n$, και έστω $1 \leqslant t \leqslant \lfloor n/2 \rfloor$. Τότε,*

$$c_{2t}(K) \leqslant c_1^{\frac{n-t}{t}} \frac{n}{\sqrt{t}} \log\Big(e + \frac{n}{t}\Big), \tag{4.5.4}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.3.4 με $s = n/2$ και $m = (1-\gamma_0)n$ βλέπουμε ότι ο τυχαίος υπόχωρος $E \in G_{n,n/2}$ ικανοποιεί την

$$R(K \cap E) \leqslant c_3 \cdot c_{\gamma_0 n}(K) \leqslant c_1(\gamma_0)\sqrt{n} \tag{4.5.5}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - 2e^{-n/4}$, όπου $c_1(\gamma_0) > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Επίσης, αφού $c_{\gamma_0 n}(K) \leqslant c(\gamma_0)\sqrt{n}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την (4.3.35) και έχουμε:

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $L_K = L_n$. Ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$K \cap U(K) \subseteq (c_3\sqrt{n})\, B_2^n, \tag{4.5.6}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Επιπλέον, μπορούμε να αποδείξουμε το τοπικό ανάλογο αυτού του συμπεράσματος: τυχαίες τομές, διάστασης ανάλογης του n, ενός n-διάστατου σώματος με μέγιστη ισοτροπική σταθερά έχουν φραγμένη ισοτροπική σταθερά.

Θεώρημα 4.5.3. *Έστω K ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $L_K = L_n$. Ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,n/2}$ ικανοποιεί την*

$$L_{K \cap F} \leqslant c_4 \tag{4.5.7}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-c_5 n}$, όπου $c_4, c_5 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Στο [36] (βλέπε και [2, Λήμμα 6.3.5]) αποδεικνύεται ότι αν $L_K = L_n$ τότε

$$|K \cap F|^{\frac{1}{n}} \geqslant c_6 \tag{4.5.8}$$

για κάθε $G_{n,n/2}$, όπου $c_6 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Καθώς $R(K \cap F) \leqslant c_3\sqrt{n}$ για ένα τυχαίο υπόχωρο $F \in G_{n,n/2}$, χρησιμοποιώντας την (1.4.6) βλέπουμε ότι για όλους αυτούς τους F ισχύει

$$\frac{n}{2}L_{K\cap F}^2 \leqslant \frac{1}{|K \cap F|^{1+\frac{4}{n}}}\int_{K\cap F}\|x\|_2^2 dx \leqslant \frac{1}{|K \cap F|^{\frac{4}{n}}}R^2(K \cap F) \leqslant c_6^{-4}c_3^2 n, \tag{4.5.9}$$

το οποίο με τη σειρά του δίνει ότι

$$L_{K\cap F} \leqslant c_4, \tag{4.5.10}$$

με $c_4 = \sqrt{2}c_6^{-2}c_3$. ■

Κεφάλαιο 5

Τυχαία προσέγγιση και δείκτης κορυφών

5.1 Εισαγωγή

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι το ακόλουθο αποτέλεσμα, το οποίο αποδείχθηκε από τους Gluskin-Litvak στο [48] και τον Barvinok στο [18]:

Αν $C \subset \mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές σύνολο τότε, για κάθε $d > 1$ υπάρχει ένα υποσύνολο $X \subseteq C$ πληθικότητας $\mathrm{card}(X) \leqslant dn$ τέτοιο ώστε, για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\max_{x\in X} |\langle z, x\rangle| \leqslant \max_{x\in C} |\langle z, x\rangle| \leqslant \gamma_d\sqrt{n}\max_{x\in X} |\langle z, x\rangle|, \tag{5.1.1}$$

όπου $\gamma_d := \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$.

Για την απόδειξη υποθέτει κανείς ότι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου που περιέχει την κυρτή θήκη $\mathrm{conv}(C)$ του C και στη συνέχεια κάνει ουσιαστική χρήση ενός θεωρήματος των Batson, Spielman και Srivastava [20] για την επιλογή προσεγγιστικής αναπαράστασης της ταυτοτικής απεικόνισης με λίγα διανύσματα από δοθείσα αναπαράσταση τύπου John.

Από την (5.1.1) μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $d > 1$ υπάρχουν $N \leqslant dn$ σημεία $x_1, \ldots, x_N \in K$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{absconv}(\{x_1, \ldots, x_N\}) \subseteq K \subseteq \gamma_d\sqrt{n}\,\mathrm{absconv}(\{x_1, \ldots, x_N\}). \tag{5.1.2}$$

Μια γενίκευση του παραπάνω αποτελέσματος αποδείχθηκε πρόσφατα από τον Σ. Μπραζιτίκο στο [30].

Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\alpha > 1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα του οποίου το ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα, τότε υπάρχουν $N \leqslant \alpha n$ σημεία $x_1, \ldots, x_N \in K \cap S^{n-1}$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq B_2^n \subseteq cn^{3/2}\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}), \tag{5.1.3}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται, στη θέση του θεωρήματος των Batson, Spielman και Srivastava, ένα πιο λεπτό θεώρημα του Srivastava από το [96].

Η (5.1.3) αποδείχτηκε στο [30] με στόχο το ακόλουθο *ποσοτικό θεώρημα τύπου Helly* για τη διάμετρο:

Αν $\{P_i : i\in I\}$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ με

$$\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right)=1,$$

τότε υπάρχουν $s\leqslant \alpha n$ και $i_1,\dots i_s\in I$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{diam}(P_{i_1}\cap\cdots\cap P_{i_s})\leqslant cn^{3/2}, \tag{5.1.4}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα αυτού του κεφαλαίου δίνει μια τυχαία εκδοχή της (5.1.3) με βελτιωμένη εξάρτηση από τη διάσταση.

Θεώρημα 5.1.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\alpha>1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο έχει βαρύκεντρο το μηδέν, αν $N=\lceil \alpha n\rceil$ και $x_1,\dots,x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη απο $1-e^{-n}$ έχουμε*

$$K\subseteq c_1 n\,\mathrm{conv}(\{x_1,\dots,x_N\}), \tag{5.1.5}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα. Θα χρησιμοποιήσουμε τα λεγόμενα *μονόπλευρα L_q-κεντροειδή σώματα* του K. Αυτά είναι τα κυρτά σώματα $Z_q^+(K)$, $q\geqslant 1$, με συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_q^+(K)}(y)=\left(2\int_K \langle x,y\rangle_+^q dx\right)^{1/q}, \tag{5.1.6}$$

όπου $a_+=\max\{a,0\}$. Δείχνουμε ότι αν $N\geqslant \alpha n$, όπου $\alpha>1$ είναι μια απόλυτη σταθερά, τότε N ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1,\dots,x_N$ ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K ικανοποιούν την

$$\mathrm{conv}(\{x_1,\dots,x_N\})\supseteq c_1Z_2^+(K)\supseteq c_2L_KB_2^n \tag{5.1.7}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-n)$, όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Δεδομένου ότι το K περιέχεται στην $(n+1)L_KB_2^n$, το Θεώρημα 5.1.1 έπεται.

Ένα επόμενο ερώτημα, το οποίο σχετίζεται άμεσα με το Θεώρημα 5.1.1, είναι να σταθεροποιήσουμε $N\geqslant \alpha n$ και να ζητήσουμε εκτιμήσεις για τη μεγαλύτερη τιμή $t(N,n)$ για την οποία N ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1,\dots,x_N$ ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K ικανοποιούν την

$$\mathrm{conv}(\{x_1,\dots,x_N\})\supseteq t(N,n)\,K \tag{5.1.8}$$

με πιθανότητα «εκθετικά κοντά» στο 1. Μια ακριβής απάντηση σε αυτό το ερώτημα θα ενοποιούσε το Θεώρημα 5.1.1 και το επόμενο αποτέλεσμα των Γιαννόπουλου και V. Milman από το [41], το οποίο απαντά στο ίδιο πρόβλημα στην περίπτωση που το N είναι εκθετικό ως προς το n:

Για κάθε $\delta \in (0,1)$ υπάρχει $n_0 = n_0(\delta)$ τέτοιος ώστε: αν $n \geqslant n_0$, αν $C \log n/n \leqslant \gamma \leqslant 1$ και αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $N = \exp(\gamma n)$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ τον εγκλεισμό

$$K \supseteq \mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}) \supseteq c(\delta)\gamma K, \tag{5.1.9}$$

με $c(\delta)$ μια σταθερά εξαρτώμενη από το δ.

Δείχνουμε το ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω $\beta \in (0,1)$. Υπάρχει σταθερά $\alpha = \alpha(\beta) > 1$ η οποία εξαρτάται μόνο από το β και μια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα: αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, αν $\alpha n \leqslant N \leqslant e^n$ και αν $x_1, \ldots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K, τότε*

$$\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}) \supseteq \frac{c_1 \beta \log(N/n)}{n} K. \tag{5.1.10}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-N^{1-\beta} n^{\beta}}$.

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 5.1.1 είναι ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 5.1.2.

Το Θεώρημα 5.1.1 σχετίζεται επίσης με το ερώτημα να δοθούν εκτιμήσεις για το *δείκτη κορυφών* ενός όχι απαραίτητα συμμετρικού n-διάστατου κυρτού σώματος. Ο δείκτης κορυφών ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ορίστηκε από τους Bezdek και Litvak στο [22] ως εξής:

$$\mathrm{vi}(K) = \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{N} \|y_j\|_K : K \subseteq \mathrm{conv}(\{y_1, \ldots, y_N\}) \Big\}, \tag{5.1.11}$$

όπου $\| \cdot \|_K$ είναι η νόρμα με μοναδιαία μπάλα το K στον $\mathbb{R}^n$. Ο δείκτης αυτός συνδέεται στενά με την *παράμετρο φωτισμού* ενός κυρτού σώματος, η οποία εισήχθη από τον K. Bezdek στο [21], και με μια πολύ γνωστή εικασία των Boltyanski και Hadwiger για την κάλυψη n-διάστατου κυρτού σώματος από 2^n μικρότερα θετικά ομοιοθετικά αντίγραφά του (βλέπε [22] και [47]). Οι Bezdek και Litvak απέδειξαν ότι

$$\frac{c_1 n^{3/2}}{\mathrm{ovr}(K)} \leqslant \mathrm{vi}(K) \leqslant c_2 n^{3/2}, \tag{5.1.12}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές και $\mathrm{ovr}(K)$ είναι ο εξωτερικός λόγος όγκων του K. Απ' όσο γνωρίζουμε, η έννοια του δείκτη κορυφών δεν έχει μελετηθεί στην περίπτωση των μη συμμετρικών κυρτών σωμάτων. Ένας φυσιολογικός τρόπος ορισμού του για ένα αυθαίρετο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι να θεωρήσουμε πρώτα $z \in \mathrm{int}(K)$ και να θέσουμε

$$\mathrm{vi}_z(K) = \inf \Big\{ \sum_{j=1}^{N} p_{K,z}(y_j) : K \subseteq \mathrm{conv}(\{y_1, \ldots, y_N\}) \Big\}, \tag{5.1.13}$$

όπου

$$p_{K,z}(x) = p_{K-z}(x) = \inf\{t > 0 : x \in t(K - z)\} \tag{5.1.14}$$

είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K ως προς το z. Παίρνοντας σαν z το βαρύκεντρο $\mathrm{bar}(K)$ του K, μπορούμε να ορίσουμε τον (γενικευμένο) δείκτη κορυφών του K ως εξής:

$$\mathrm{vi}(K) = \mathrm{vi}_{\mathrm{bar}(K)}(K). \tag{5.1.15}$$

Με αυτό τον ορισμό, είναι φανερό ότι $\mathrm{vi}(K) = \mathrm{vi}(K - \mathrm{bar}(K))$, επομένως μπορούμε να περιορίσουμε τη μελέτη μας στα κεντραρισμένα κυρτά σώματα. Αποδεικνύουμε κάποιες γενικές ιδιότητες αυτού του δείκτη και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.1 παίρνουμε την ακόλουθη γενική εκτίμηση.

Θεώρημα 5.1.3. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $n \geqslant 2$ και κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\frac{c_1 n^{3/2}}{\mathrm{ovr}(\mathrm{conv}(K, -K))} \leqslant \mathrm{vi}(K) \leqslant c_2 n^2. \tag{5.1.16}$$

Το κάτω φράγμα στο Θεώρημα 5.1.3 δεν είναι ακριβές, ακόμα και στη συμμετρική περίπτωση. Οι Gluskin και Litvak [48] έχουν αποδείξει ότι για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\mathrm{ovr}(K) \geqslant c\sqrt{\frac{n}{\log(2n)}} \quad \text{και} \quad \mathrm{vi}(K) \geqslant cn^{3/2}.$$

Θα ήταν ενδιαφέρον να δοθούν εναλλακτικά κάτω φράγματα για την παράμετρο $\mathrm{vi}(K)$ και φυσικά θα ήταν ενδιαφέρον να αποφανθεί κάποιος αν, στη μη συμμετρική περίπτωση, το άνω φράγμα $\mathrm{vi}(K) \leqslant Cn^2$ στο Θεώρημα 5.1.3 είναι ή δεν είναι ακριβές.

5.2 Τυχαία προσέγγιση κυρτού σώματος

Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ θεωρούμε τα μονόπλευρα L_q-κεντροειδή σώματα $Z_q^+(K)$ του K με συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_q^+(K)}(y) = \left(2\int_K \langle x, y\rangle_+^q \, dx\right)^{1/q}, \tag{5.2.1}$$

όπου $a_+ = \max\{a, 0\}$. Σε μια δυϊκή μορφή, τα μονόπλευρα L_q-κεντροειδή σώματα εισήχθησαν από τον Haberl στο [52]. Όταν το K είναι συμμετρικό, είναι φανερό ότι $Z_q^+(K) = Z_q(K)$. Σε κάθε περίπτωση, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι

$$Z_q^+(K) \subseteq 2^{1/q} Z_q(K). \tag{5.2.2}$$

Παρατηρούμε ότι $Z_q^+(K) \subseteq 2^{1/q} K$ για κάθε $q \geqslant 1$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3.3 του Grünbaum μπορούμε να ελέγξουμε ότι αν $1 \leqslant q \leqslant r < \infty$ τότε

$$\left(\frac{2}{e}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} Z_q^+(K) \subseteq Z_r^+(K) \subseteq \frac{Cr}{q}\left(\frac{2e-2}{e}\right)^{\frac{1}{q}-\frac{1}{r}} Z_q^+(K), \tag{5.2.3}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτός ο διπλός εγκλεισμός εμφανίζεται ως (2.3) στο [51, Παράγραφος 2] και είναι το ανάλογο της (1.6.1). Μπορούμε να τον επαληθεύσουμε ακολουθώντας την απόδειξη της (1.6.1) και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 1.3.3 του Grünbaum. Το επόμενο λήμμα έχει επίσης αποδειχθεί από τους Guédon και E. Milman στο [51].

Λήμμα 5.2.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\overline{c}_0>0$ τέτοια ώστε, για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,*

$$Z_2^+(K)\supseteq \overline{c}_0 L_K B_2^n. \tag{5.2.4}$$

Ισοδύναμα, για κάθε $\theta\in S^{n-1}$,

$$h_{Z_2^+(K)}(\theta)=\left(2\int_K \langle x,y\rangle_+^2 dx\right)^{1/2}\geqslant \overline{c}_0 L_K. \tag{5.2.5}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης το επόμενο λήμμα, το οποίο υπάρχει στο [51] (βλέπε επίσης [2, Θεώρημα 13.2.7]).

Λήμμα 5.2.2. *Έστω K κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\theta\in S^{n-1}$,*

$$\left(\frac{2}{e^2}\right)^{1/q}\left(\frac{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}{\Gamma(n+q+1)}\right)^{1/q} h_K(\theta)\leqslant h_{Z_q^+(K)}(\theta)\leqslant 2^{1/q}h_K(\theta). \tag{5.2.6}$$

Απόδειξη. Θα παρουσιάσουμε εν συντομία την απόδειξη της αριστερής ανισότητας. Έστω

$$H_\theta^+=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta\rangle\geqslant 0\},\quad H_\theta(t)=\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,\theta\rangle=t\},$$

και

$$f_\theta(t)=|K\cap H_\theta(t)|.$$

Αρχικά παρατηρούμε ότι, από την ανισότητα Brunn-Minkowski, η $f_\theta^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη στο φορέα της, και έτσι έχουμε ότι

$$f_\theta(t)\geqslant\left(1-\frac{t}{h_K(\theta)}\right)^{n-1}f_\theta(0) \tag{5.2.7}$$

για κάθε $t\in[0,h_K(\theta)]$. Επομένως,

$$\begin{aligned} h^q_{Z_q^+(K)}(\theta) &=2\int_0^{h_K(\theta)} t^q f_\theta(t)dt\geqslant 2\int_0^{h_K(\theta)} t^q\left(1-\frac{t}{h_K(\theta)}\right)^{n-1}f_\theta(0)dt\\ &=2f_\theta(0)h_K^{q+1}(\theta)\int_0^1 s^q(1-s)^{n-1}ds\\ &=\frac{\Gamma(n)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+n+1)}\,2f_\theta(0)h_K^{q+1}(\theta). \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Επίσης παρατηρούμε ότι

$$2f_\theta(0)h_K(\theta)=\frac{f_\theta(0)}{\|f_\theta\|_\infty}\,2\|f_\theta\|_\infty h_K(\theta)\geqslant\frac{f_\theta(0)}{\|f_\theta\|_\infty}\,(2|K\cap H_\theta^+|). \tag{5.2.9}$$

Γνωρίζουμε ότι $\|f_\theta\|_\infty\leqslant ef_\theta(0)$, από το Λήμμα 1.3.2 του Fradelizi, και ότι $|K\cap H_\theta^+|\geqslant e^{-1}$ από το Λήμμα 1.3.3 του Grünbaum. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε το ζητούμενο. ■

Τα Θεωρήματα 5.1.2 και 5.1.1 προκύπτουν από το επόμενο θεώρημα, το οποίο γενικεύει στη μη συμμετρική περίπτωση αντίστοιχα συμπεράσματα των Γιαννόπουλου, Δαφνή και Τσολομύτη από το [34] για τη συμμετρική περίπτωση.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $\beta \in (0,1)$. Υπάρχουν σταθερές $\alpha = \alpha(\beta) > 1$ εξαρτώμενες μόνο από το β και απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $N \geqslant \alpha n$ και $x_1, \ldots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K, τότε υπάρχει $q \geqslant c_1 \beta \log(N/n)$ τέτοιο ώστε*

$$\mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}) \supseteq c_2 Z_q^+(K) \tag{5.2.10}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-N^{1-\beta} n^{\beta}}$.

Η απόδειξη της (5.2.10) χρησιμοποιεί την οικογένεια των μονόπλευρων L_q-κεντροειδών σωμάτων του K. Συγκεκριμένα, χρειαζόμαστε την παρακάτω εκτίμηση (η ιδέα της απόδειξης πηγαίνει πίσω στο [34] – βλέπε επίσης [91]).

Λήμμα 5.2.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $q \geqslant 2$,*

$$\inf_{\theta \in S^{n-1}} \mu_K \left(\left\{ x : \langle x, \theta \rangle > \tfrac{1}{2} h_{Z_q^+(K)}(\theta) \right\} \right) \geqslant C^{-q}. \tag{5.2.11}$$

Απόδειξη. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $q \geqslant 2$ και $\theta \in S^{n-1}$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα Paley-Zygmund

$$\mathbb{P}\big(g \geqslant t\mathbb{E}\,(g)\big) \geqslant (1-t)^2 \frac{[\mathbb{E}\,(g)]^2}{\mathbb{E}\,(g^2)} \tag{5.2.12}$$

για τη μη αρνητική τυχαία μεταβλητή

$$g_\theta(x) = 2\langle x, \theta \rangle_+^q \tag{5.2.13}$$

στο (K, μ_K), όπου μ_K είναι το μέτρο Lebesgue στο K. Με εφαρμογή της (5.2.3) για $r = 2q$ προκύπτει ότι

$$\mathbb{E}\,(g_\theta^2) = h^{2q}_{Z^+_{2q}(K)}(\theta) \leqslant C_1^q h^{2q}_{Z_q^+(K)}(\theta) = C_1^q \left[\mathbb{E}\,(g_\theta)\right]^2, \tag{5.2.14}$$

όπου $C_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την (5.2.12) έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_K(\{x : \langle x, \theta \rangle > t\, h_{Z_q^+(K)}(\theta)\}) &= \mu_K(\{x : \langle x, \theta \rangle > t\,[\mathbb{E}\,(g_\theta)]^{1/q}\}) \\ &= \mu_K(\{x : \langle x, \theta \rangle_+ > t\,[\mathbb{E}\,(g_\theta)]^{1/q}\}) \\ &= \mu_K(\{x : \langle x, \theta \rangle_+^q > t^q\, \mathbb{E}\,(g_\theta)\}) \\ &= \mu_K(\{x : g_\theta(x) > 2t^q\, \mathbb{E}\,(g_\theta)\}) \\ &\geqslant (1-2t^q)^2 \frac{[\mathbb{E}\,(g_\theta)]^2}{\mathbb{E}\,(g_\theta^2)} \geqslant \frac{(1-2t^q)^2}{C_1^q} \end{aligned} \tag{5.2.15}$$

για κάθε $t \in (0, 2^{-\frac{1}{q}})$. Επιλέγοντας $t = \frac{1}{2}$ παίρνουμε το λήμμα με $C = 4C_1$. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.3. Έστω $q \geqslant 2$. Θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο $C_N := \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\}$. Με πιθανότητα ίση με ένα, το C_N έχει μη κενό εσωτερικό και για κάθε $J = \{j_1, \dots, j_n\} \subset \{1, \dots, N\}$, τα σημεία $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ είναι αφινικά ανεξάρτητα. Γράφουμε H_J για τον αφινικό υπόχωρο, ο οποίος προσδιορίζεται από τα $x_{j_1}, \dots, x_{j_n}$ και H_J^+, H_J^- για τους δύο κλειστούς ημιχώρους που έχουν σύνορο το H_J.

Αν $\frac{1}{2}Z_q^+(K) \nsubseteq C_N$, τότε υπάρχει $x \in \frac{1}{2}Z_q^+(K) \setminus C_N$, άρα υπάρχει κάποια έδρα του C_N που ορίζει κάποιον αφινικό υπόχωρο H_J όπως παραπάνω, τέτοιον ώστε: είτε $x \in H_J^-$ και $C_N \subset H_J^+$, ή $x \in H_J^+$ και $C_N \subset H_J^-$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε J, η πιθανότητα καθενός από αυτά τα δύο ενδεχόμενα φράσσεται από

$$\left(\sup_{\theta \in S^{n-1}} \mu_K\left(\left\{x : \langle x, \theta\rangle \leqslant \tfrac{1}{2} h_{Z_q^+(K)}(\theta)\right\}\right)\right)^{N-n} \leqslant \left(1 - C^{-q}\right)^{N-n}, \tag{5.2.16}$$

όπου $C > 0$ είναι η σταθερά του Λήμματος 5.2.4. Έτσι προκύπτει ότι

$$\mathbb{P}\left(\tfrac{1}{2}Z_q^+(K) \nsubseteq C_N\right) \leqslant 2\binom{N}{n}(1 - C^{-q})^{N-n}. \tag{5.2.17}$$

Καθώς $\binom{N}{n} \leqslant \left(\frac{eN}{n}\right)^n$, αυτή η πιθανότητα είναι μικρότερη από $\exp(-N^{1-\beta}n^\beta)$ αν

$$\left(\frac{2eN}{n}\right)^n (1 - C^{-q})^{N-n} < \left(\frac{2eN}{n}\right)^n e^{-C^{-q}(N-n)} < \exp(-N^{1-\beta}n^\beta), \tag{5.2.18}$$

και η τελευταία ανισότητα ικανοποιείται αν

$$\frac{N}{n} - 1 > C^q \left[\left(\frac{N}{n}\right)^{1-\beta} + \log\left(\frac{2eN}{n}\right)\right]. \tag{5.2.19}$$

Επιλέγουμε $q = \frac{\beta}{2\log C}\log\left(\frac{N}{n}\right)$ και $\alpha_1(\beta) := C^{4/\beta}$. Παρατηρούμε ότι αν $N \geqslant \alpha_1(\beta)n$ τότε $q \geqslant 2$ και η (5.2.19) παίρνει τη μορφή

$$\frac{N}{n} - 1 > \left(\frac{N}{n}\right)^{1-\frac{\beta}{2}} + \left(\frac{N}{n}\right)^{\frac{\beta}{2}} \log\left(\frac{2eN}{n}\right). \tag{5.2.20}$$

Καθώς

$$\lim_{t \to +\infty} \left[t - 1 - t^{1-\frac{\beta}{2}} - t^{\frac{\beta}{2}}\log(2et)\right] = +\infty, \tag{5.2.21}$$

μπορούμε να βρούμε $\alpha_2(\beta)$ τέτοιον ώστε η (5.2.20) να ικανοποιείται για κάθε $N \geqslant \alpha_2(\beta)n$. Θέτοντας $\alpha = \max\{\alpha_1(\beta), \alpha_2(\beta)\}$ βλέπουμε ότι ο ισχυρισμός του θεωρήματος ικανοποιείται με πιθανότητα μεγαλύτερη απο $1 - e^{-N^{1-\beta}n^\beta}$ για κάθε $N \geqslant \alpha n$, με $c_1 = \frac{1}{2\log C}$ και $c_2 = \frac{1}{2}$. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.2. Έστω $\beta \in (0, 1)$ και έστω $\alpha = \alpha(\beta)$ η σταθερά από το Θεώρημα 5.2.3. Έστω $\alpha n \leqslant N \leqslant e^n$ και $x_1, \dots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.2.2 με $q = n$ έχουμε ότι $h_{Z_n^+(K)} \geqslant c_1 h_K(\theta)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, επομένως

$$Z_n^+(K) \supseteq c_1 K, \tag{5.2.22}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από το Θεώρημα 5.2.3 γνωρίζουμε ότι αν $q = c_2\beta \log(N/n)$ (οπότε επίσης έχουμε ότι $q \leqslant n$) τότε

$$C_N = \mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}) \supseteq c_3 Z_q^+(K) \tag{5.2.23}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-N^{1-\beta} n^\beta)$, όπου $c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Από την (5.2.3) έπεται ότι

$$Z_n^+(K) \subseteq \frac{c_4 n}{q} \left(\frac{2e-2}{e} \right)^{\frac{1}{q} - \frac{1}{n}} Z_q^+(K) \subseteq \frac{2c_4 n}{q} Z_q^+(K), \tag{5.2.24}$$

όπου $c_4 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι

$$C_N = \mathrm{conv}(\{x_1, \ldots, x_N\}) \supseteq \frac{c_5 q}{n} K \supseteq \frac{c_6 \beta \log(N/n)}{n} K \tag{5.2.25}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-N^{1-\beta} n^\beta)$, όπου $c_5, c_6 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. $\blacksquare$

Επιλέγοντας $N = \lceil \alpha n \rceil$ στο Θεώρημα 5.1.2 παίρνουμε το Θεώρημα 5.1.1:

Θεώρημα 5.2.5. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\alpha > 1$ με την παρακάτω ιδιότητα: αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το τυχαίο υποσύνολο $X \subset K$ πληθικότητας $\mathrm{card}(X) = \lceil \alpha n \rceil$ ικανοποιεί την*

$$K \subseteq Cn\, \mathrm{conv}(X) \tag{5.2.26}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

5.3 Γενικευμένος δείκτης κορυφών

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Από τον ορισμό του δείκτη κορυφών που δώσαμε στην εισαγωγή του κεφαλαίου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σώμα K είναι κεντραρισμένο, άρα

$$\mathrm{vi}(K) = \inf \Big\{ \sum_{j=1}^N p_K(y_j) : K \subseteq \mathrm{conv}(\{y_1, \ldots, y_N\}) \Big\}, \tag{5.3.1}$$

όπου p_K είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K. Καθώς κάθε κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα είναι κεντραρισμένο, ο ορισμός μας συμπίπτει με αυτόν που έχουν δώσει Bezdek και Litvak [22] στη συμμετρική περίπτωση.

Είναι ακόμα απλό να ελεγχθεί ότι ο δείκτης κορυφών είναι αναλλοίωτος ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $T \in GL(n)$ έχουμε

$$\mathrm{vi}(T(K)) = \mathrm{vi}(K). \tag{5.3.2}$$

Αυτό προκύπτει από την παρατήρηση ότι $T(K) \subseteq \mathrm{conv}(\{y_1,\dots,y_N\})$ αν και μόνο αν $K \subseteq \mathrm{conv}(\{x_1,\dots,x_N\})$ με $T(x_j)=y_j$, επομένως

$$\begin{aligned}\mathrm{vi}(T(K)) &= \inf\Big\{\sum_{j=1}^N p_{T(K)}(T(x_j)) : K\subseteq \mathrm{conv}(\{x_1,\dots,x_N\})\Big\}\\ &= \inf\Big\{\sum_{j=1}^N p_K(x_j) : K\subseteq \mathrm{conv}(\{x_1,\dots,x_N\})\Big\}\\ &= \mathrm{vi}(K).\end{aligned} \tag{5.3.3}$$

Μία ακόμα χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι ο δείκτης κορυφών είναι σταθερός ως προς μια παραλλαγή της απόστασης Banach-Mazur. Υπενθυμίζουμε ότι η απόσταση Banach-Mazur δυο σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$ είναι η ποσότητα

$$d(K,L)=\inf\{t>0 : T(L+y)\subseteq K+x\subseteq t(T(L+y))\}, \tag{5.3.4}$$

με το infimum να είναι πάνω από όλους τους $T\in GL(n)$ και όλα τα $x,y\in\mathbb{R}^n$. Δοθέντων δύο κεντραρισμένων κυρτών σωμάτων K και L, θέτουμε

$$\tilde{d}(K,L)=\inf\{t>0 : T(L)\subseteq K\subseteq tT(L)\}, \tag{5.3.5}$$

παίρνοντας το infimum πάνω από όλους τους $T\in GL(n)$. Παρατηρούμε ότι αν τα K και L είναι συμμετρικά κυρτά σώματα τότε $\tilde{d}(K,L)=d(K,L)$. Με αυτό τον ορισμό μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι αν τα K και L είναι κεντραρισμένα κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathrm{vi}(K)\leqslant \tilde{d}(K,L)\,\mathrm{vi}(L). \tag{5.3.6}$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι το άνω φράγμα του Θεωρήματος 5.1.3.

Πρόταση 5.3.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_1>0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n\geqslant 2$ και για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathrm{vi}(K)\leqslant C_1 n^2. \tag{5.3.7}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Από το Θεώρημα 5.2.5 μπορούμε να βρούμε $N\leqslant \alpha n$ και $x_1,\dots,x_N\in K$ τέτοια ώστε

$$K\subseteq Cn\,\mathrm{conv}(\{x_1,\dots,x_N\}), \tag{5.3.8}$$

όπου $\alpha, C>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Θέτουμε $y_j=Cnx_j$, $1\leqslant j\leqslant N$. Τότε, $K\subseteq \mathrm{conv}(\{y_1,\dots,y_N\})$ και $p_K(y_j)=Cnp_K(x_j)\leqslant Cn$, επομένως

$$\mathrm{vi}(K)\leqslant \sum_{j=1}^N p_K(y_j)\leqslant CnN\leqslant C\alpha n^2. \tag{5.3.9}$$

Το αποτέλεσμα έπεται με $C_1=C\alpha$. ■

Για το κάτω φράγμα απλά ελέγχουμε ότι το επιχείρημα του [22] μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στη μη συμμετρική περίπτωση. Υπενθυμίζουμε ότι ένα κυρτό σώμα K είναι στη θέση John αν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Το θεώρημα του John (βλέπε [53] και [1, Κεφάλαιο 2]) εξασφαλίζει ότι το K είναι στη θέση John αν και μόνο αν $B_2^n \subseteq K$ και υπάρχουν $v_1, \dots, v_m \in \mathrm{bd}(K) \cap S^{n-1}$ (σημεία επαφής του K και της B_2^n) και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $a_1, \dots, a_m$ τέτοιοι ώστε

$$\sum_{j=1}^{m} a_j v_j = 0 \tag{5.3.10}$$

και ο ταυτοτικός τελεστής I να αναπαρίσταται στη μορφή

$$I = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j \otimes v_j, \tag{5.3.11}$$

όπου $(v_j \otimes v_j)(y) = \langle v_j, y\rangle v_j$. Λέμε επίσης ότι ένα κυρτό σώμα K είναι στη θέση Löwner αν το ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου που περιέχει το K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Αυτό ισχύει αν και μόνο αν το K° είναι στη θέση John. Ειδικότερα, έχουμε πάλι μια αναπαράσταση του ταυτοτικού τελεστή, ανάλογη της (5.3.11). Ο εξωτερικός λόγος όγκων ενος κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ είναι η ποσότητα

$$\mathrm{ovr}(K) = \inf\left\{ \left(\frac{|\mathcal{E}|}{|K|}\right)^{1/n} : \mathcal{E} \text{ είναι ελλειψοειδές και } K \subseteq \mathcal{E} \right\}. \tag{5.3.12}$$

Αν το K είναι στη θέση Löwner τότε έχουμε ότι $(|B_2^n|/|K|)^{1/n} = \mathrm{ovr}(K)$.

Πρόταση 5.3.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 2$ και για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathrm{vi}(K) \geqslant \frac{cn^{3/2}}{\mathrm{ovr}(\mathrm{conv}(K, -K))}. \tag{5.3.13}$$

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι ο δείκτης κορυφών είναι αναλλοίωτος ώς προς γραμμικούς μετασχηματισμούς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου που περιέχει την $\mathrm{conv}(K, -K)$. Δηλαδή, $K \subseteq \mathrm{conv}(K, -K) \subseteq B_2^n$ και

$$\left(\frac{|B_2^n|}{|\mathrm{conv}(K, -K)|}\right)^{1/n} = \mathrm{ovr}(\mathrm{conv}(K, -K)). \tag{5.3.14}$$

Για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και $y_1, \dots, y_N$ τέτοια ώστε $K \subseteq \mathrm{conv}(\{y_1, \dots, y_N\})$, θεωρούμε την απόλυτη κυρτή θήκη $Q = \mathrm{conv}(\{\pm y_1, \dots, \pm y_N\}) \supseteq \mathrm{conv}(K, -K)$ των $y_1, \dots, y_N$. Τότε,

$$Q^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y_j\rangle| \leqslant 1 \text{ για κάθε } j = 1, \dots, N\}, \tag{5.3.15}$$

και ένα αποτέλεσμα των Ball και Pajor από το [15] δίνει το κάτω φράγμα

$$|Q^\circ| \geqslant \left(\frac{n}{\sum_{j=1}^N \|y_j\|_2}\right)^n \tag{5.3.16}$$

για τον όγκο του. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Blaschke-Santaló – την (1.1.13) – παίρνουμε

$$|\mathrm{conv}(K,-K)| \leqslant |Q| \leqslant \frac{|B_2^n|^2}{|Q^\circ|} \leqslant |B_2^n|^2 \left(\frac{\sum_{j=1}^N \|y_j\|_2}{n}\right)^n . \tag{5.3.17}$$

Έτσι προκύπτει ότι

$$1 \leqslant \left(\frac{|B_2^n|}{|\mathrm{conv}(K,-K)|}\right)^{1/n} |B_2^n|^{1/n} \frac{\sum_{j=1}^N \|y_j\|_2}{n} \leqslant \frac{\mathrm{ovr}(\mathrm{conv}(K,-K))}{cn^{3/2}} \sum_{j=1}^N \|y_j\|_2 \tag{5.3.18}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Καθώς $K \subseteq B_2^n$, έχουμε $\|y_j\|_2 \leqslant p_K(y_j)$ για κάθε $j = 1, \ldots, N$. Συνεπώς,

$$\sum_{j=1}^N p_K(y_j) \geqslant \frac{cn^{3/2}}{\mathrm{ovr}(\mathrm{conv}(K,-K))}, \tag{5.3.19}$$

και παίρνοντας το infimum πάνω απ'ολα τα N και όλες τις N-άδες $(y_1, \ldots, y_N)$ έπεται το κάτω φράγμα για τον $\mathrm{vi}(K)$. ■

Κεφάλαιο 6

Ασυμπτωτικό σχήμα τυχαίων πολυτόπων

6.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο δίνουμε νέες πληροφορίες για το ασυμπτωτικό σχήμα τυχαίων πολυτόπων των οποίων οι κορυφές έχουν λογαριθμικά κοίλη κατανομή. Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N \geqslant n$ θεωρούμε N ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα $x_1, \dots, x_N$ με κατανομή το μ, και ορίζουμε το τυχαίο πολύτοπο

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\}.$$

Για $N \geqslant n+1$, θεωρούμε επίσης το τυχαίο πολύτοπο

$$C_N := \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\}.$$

Βασικά ερωτήματα για τη γεωμετρία των τυχαίων αυτών πολυτόπων είναι τα εξής:

(i) Να προσδιοριστεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της «ακτίνας όγκου» $|K_N|^{1/n}$ και $|C_N|^{1/n}$ του τυχαίου K_N ή C_N.

(ii) Να περιγραφεί το τυπικό «ασυμπτωτικό σχήμα» των K_N και C_N.

(iii) Να δοθούν άνω φράγματα για την ισοτροπική σταθερά των K_N και C_N.

Χρησιμοποιώντας την κλασική μέθοδο της συμμετρικοποίησης κατά Steiner, μπορεί κανείς να δείξει ότι στην περίπτωση που το μ είναι το ομοιόμορφο μέτρο μ_K σε ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, η μέση τιμή της ακτίνας όγκου του K_N ελαχιστοποιείται όταν $K = B(n)$, όπου $B(n)$ είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Υπολογίζοντας, ασυμπτωτικά, την $\mathbb{E}\,|K_N|^{1/n}$ σε αυτή την ειδική περίπτωση, παίρνουμε το κάτω φράγμα

$$\mathbb{E}\,|K_N|^{1/n} \geqslant c\,\min\left\{\frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}, 1\right\}$$

για $N \geqslant c_1 n$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Χρησιμοποιώντας μια διαφορετική μέθοδο, ο Pivovarov έχει αποδείξει στο [95] ότι ισχυρότερη εκτίμηση ισχύει, με μεγάλη πιθανότητα, στην περίπτωση που το N είναι γραμμικό ως προς τη διάσταση: αν $\gamma > 1$ και $n \leqslant N \leqslant \gamma n$ τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_1 n)$, έχουμε

$$|K_N|^{1/n} \geqslant \frac{c_2(\gamma) L_K \sqrt{\log(1+N/n)}}{\sqrt{n}},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές και $c_2(\gamma) = c_2/\sqrt{\log(1+\gamma)}$.

Η μελέτη του ασυμπτωτικού σχήματος του K_N εγκαινιάστηκε από τους Γιαννόπουλο, Δαφνή και Τσολομύτη, οι οποίοι έδωσαν μια αρκετά ακριβή περιγραφή του στα [34] και [35]. Η βασική τους ιδέα προέρχεται από τη μελέτη της συμπεριφοράς της κλάσης των συμμετρικών τυχαίων ± 1-πολυτόπων, τα οποία είναι οι απόλυτες κυρτές θήκες τυχαίων υποσυνόλων του διακριτού κύβου $E_2^n = \{-1, 1\}^n$. Σταθεροποιούμε $N > n$ και θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο

$$K_{n,N} = \mathrm{conv}\{\pm \vec{X}_1, \ldots, \pm \vec{X}_N\}$$

όπου τα $\vec{X}_1, \ldots, \vec{X}_N$ είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένα στον E_2^n. Η κλάση αυτή μελετήθηκε από τους Γιαννόπουλο και Χαρτζουλάκη στο [39], όπου αποδείχθηκε ότι το τυχαίο $K_{n,N}$ έχει όγκο της μέγιστης δυνατής τάξης μεγέθους ανάμεσα σε όλα τα ± 1-πολύτοπα με N κορυφές, για το πλήρες εύρος τιμών των n και N. Το αποτέλεσμα προκύπτει από την ακόλουθη βασική παρατήρηση: Αν $n \geqslant n_0$ και αν $N \geqslant n(\log n)^2$, τότε

$$K_{n,N} \supseteq c\left(\sqrt{\log(N/n)}B_2^n \cap B_\infty^n\right) \tag{6.1.1}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στο [71], οι Litvak, Pajor, Rudelson και Tomczak–Jaegermann θεώρησαν ένα γενικότερο πλαίσιο: όρισαν ως $K_{n,N}$ την απόλυτη κυρτή θήκη των γραμμών ενός τυχαίου πίνακα $\Gamma_{n,N} = (\xi_{ij})_{1\leqslant i\leqslant N, 1\leqslant j\leqslant n}$, όπου οι ξ_{ij} είναι ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν τις συνθήκες $\|\xi_{ij}\|_{L_2} \geqslant 1$ και $\|\xi_{ij}\|_{L_{\psi_2}} \leqslant \rho$ για κάποια σταθερά $\rho \geqslant 1$. Γι' αυτή τη μεγαλύτερη κλάση τυχαίων πολυτόπων, γενίκευσαν και βελτίωσαν τις εκτιμήσεις του [39] με δύο τρόπους: έδωσαν εκτιμήσεις για κάθε $N \geqslant (1+\delta)n$, όπου το $\delta > 0$ μπορεί να είναι μικρό (μέχρι της τάξης του $1/\log n$) και απέδειξαν τον ακόλουθο εγκλεισμό: για κάθε $0 < \beta < 1$,

$$K_{n,N} \supseteq c(\rho)\left(\sqrt{\beta \log(N/n)}B_2^n \cap B_\infty^n\right) \tag{6.1.2}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_1 n^\beta N^{1-\beta}) - \exp(-c_2 N)$. Η απόδειξη στο [71] βασίζεται σε ένα κάτω φράγμα της τάξης της $\sqrt{N}$ για τη μικρότερη ιδιάζουσα τιμή του τυχαίου πίνακα $\Gamma_{n,N}$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-cN)$.

Με μία έννοια, οι δύο αυτές εργασίες μελετούν το τυχαίο πολύτοπο $K_N = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ που παράγεται από N ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ ομοιόμορφα κατανεμημένα στο μοναδιαίο κύβο $Q_n := [-1/2, 1/2]^n$. Οι Γιαννόπουλος, Δαφνής και Τσολομύτης [34] ξεκινούν από την παρατήρηση ότι οι (6.1.1) και (6.1.2) μπορούν να ξαναγραφούν συναρτήσει των L_q-κεντροειδών σωμάτων του Q_n: Αν, για δοθέν $\alpha \geqslant 1$, ορίσουμε $C(\alpha) = \alpha B_2^n \cap B_\infty^n$, τότε

$$C(\sqrt{q}) \simeq Z_q(Q_n).$$

Συνεπώς, οι (6.1.2) και (6.1.1) παίρνουν τη μορφή

$$K_{n,N} \supseteq c(\rho) Z_{\beta \log(N/n)}(Q_n). \tag{6.1.3}$$

Ξεκινώντας από αυτή την παρατήρηση, η βασική τους ιδέα είναι να συγκρίνουν το τυχαίο πολύτοπο $K_N = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ που παράγεται από N ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ που έχουν ως κατανομή ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ με το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$ του μ για κατάλληλη τιμή $q = q(N,n) \simeq \log(N/n)$. Η περιγραφή που δίνουν, σε πλήρη γενικότητα, για το ασυμπτωτικό σχήμα του τυχαίου K_N είναι ότι:

(α) $K_N \supseteq c\, Z_{\log(N/n)}(\mu)$.

(β) Για κάθε $\alpha > 1$ και $q \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}\left[\sigma(\{\theta : h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(\mu)}(\theta)\})\right] \leqslant N\alpha^{-q}.$$

Χρησιμοποιώντας τον εγκλεισμό $K_N \supseteq c\, Z_{\log(N/n)}(\mu)$ και τα γνωστά κάτω φράγματα για τον όγκο των L_q-κεντροειδών σωμάτων του μ, αποδεικνύουν ότι, για κάθε $n \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$,

$$|K_N|^{1/n} \geqslant c_4 \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}, \tag{6.1.4}$$

ενώ όταν $e^{\sqrt{n}} \leqslant N \leqslant e^n$,

$$|K_N|^{1/n} \geqslant c_5 L_\mu^{-1} \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}} \tag{6.1.5}$$

με πιθανότητα εκθετικά κοντά στο 1. Από την άλλη πλευρά, η

$$\mathbb{E}\left[\sigma(\{\theta : h_{K_N}(\theta) \geqslant \alpha h_{Z_q(\mu)}(\theta)\})\right] \leqslant N\alpha^{-q} \tag{6.1.6}$$

είναι επαρκής για κάποια βέλτιστα άνω φράγματα. Αρχικά, για κάθε $n \leqslant N \leqslant \exp(n)$, το μέσο πλάτος $w(K_N)$ του K_N ικανοποιεί την

$$\mathbb{E}\left[w(K_N)\right] \leqslant c_6\, w(Z_{\log N}(\mu)). \tag{6.1.7}$$

Επιπλέον,

$$|K_N|^{1/n} \leqslant c_7 \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}} \tag{6.1.8}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{1}{N}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στο [35], τα αποτελέσματα αυτά επεκτάθηκαν για όλα τα quermassintegrals $W_{n-k}(K_N)$ του K_N:

Θεώρημα 6.1.1. *Αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(cn)$ τότε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει ότι*

$$L_\mu^{-1}\sqrt{\log N} \lesssim \mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \lesssim w(Z_{\log N}(K)). \tag{6.1.9}$$

Για κάθε $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει ο ασυμπτωτικός τύπος

$$\mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \simeq \sqrt{\log N}. \tag{6.1.10}$$

Όλες αυτές οι εκτιμήσεις ισχύουν όταν $n^{1+\delta} \leqslant N \leqslant n^2$, όπου το $\delta \in (0,1)$ είναι σταθεροποιημένο, αν επιτρέψουμε οι σταθερές να εξαρτώνται απο το δ. Η επέκταση των αποτελεσμάτων στην περίπτωση που το N είναι ανάλογο της διάστασης ($N \simeq n$) είναι εφικτή, αλλά χρειάζεται πρόσθετη δουλειά (βλέπε, για παράδειγμα, τη μεταγενέστερη εργασία των Alonso-Gutiérrez και Prochno [12] για την περίπτωση του μέσου πλάτους).

Από μια πιο λεπτομερή ανάλυση (βλέπε [35, Θεώρημα 1.2]) προκύπτει ότι αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε, για κάθε $s \geqslant 1$, το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-s}$,

$$Q_k(K_N) \leqslant c_1(s)\sqrt{\log N} \tag{6.1.11}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-\sqrt{n})$,

$$Q_k(K_N) \geqslant c_8\sqrt{\log N} \tag{6.1.12}$$

για όλα $1 \leqslant k \leqslant n$, όπου $c_1(s) > 0$ εξαρτάται μόνο από το s, και $c_8 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ένα εύλογο ερώτημα, το οποίο ανακύπτει, είναι αν αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να επεκταθούν στο μέγιστο δυνατό εύρος $cn \leqslant N \leqslant \exp(n)$ τιμών του N. Αν ακολουθήσει κανείς την προσέγγιση των [34] και [35] τότε προκύπτουν δυο βασικά εμπόδια. Το πρώτο είναι ότι το κάτω φράγμα $|Z_q(\mu)|^{1/n} \geqslant c\sqrt{q/n}$ για τον όγκο του L_q-κεντροειδούς σώματος $Z_q(\mu)$ είναι μέχρι στιγμής γνωστό μόνο όταν $q \leqslant \sqrt{n}$. Μάλιστα, όπως έχουμε αναφέρει στην § 1.8, αν μπορούσε να αποδείξει κανείς το ίδιο για μεγαλύτερες τιμές του q, αυτό θα οδηγούσε στη βελτίωση του γνωστού άνω φράγματος για την L_n. Το δεύτερο είναι το γεγονός ότι, μέχρι πρόσφατα, γνωρίζαμε βέλτιστη εκτίμηση για το μέσο πλάτος του $Z_q(\mu)$ μόνο όταν $q \leqslant \sqrt{n}$. Ο Παούρης έδειξε στο [88] ότι για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $q \leqslant \sqrt{n}$ έχουμε

$$w\big(Z_q(K)\big) \leqslant c_9\sqrt{q}. \tag{6.1.13}$$

Σε αυτό το σημείο, χρησιμοποιούμε το πρόσφατο αποτέλεσμα του E. Milman: για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $q \in [\sqrt{n}, n]$ έχουμε ότι

$$w(Z_q(\mu)) \leqslant c_{10}\sqrt{q}\ \log^2(1+q). \tag{6.1.14}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα του E. Milman (Θεώρημα 3.2.1) μπορούμε να δείξουμε το παρακάτω.

Θεώρημα 6.1.2. *Έστω $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή ενα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο*

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}.$$

Αν $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(cn)$ *τότε για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *ισχύει*

$$L_\mu^{-1}\sqrt{\log N} \lesssim \mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \lesssim \sqrt{\log N}\big(\log\log N\big)^2. \tag{6.1.15}$$

Στη συνέχεια δίνουμε εκτιμήσεις των quermassintegrals $Q_k(K_N)$ για τα «περισσότερα» K_N:

Θεώρημα 6.1.3. *Έστω* $x_1, \ldots, x_N$ *ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας* μ *στον* $\mathbb{R}^n$*. Θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο*

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}.$$

Για κάθε $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$ *και* $s \geqslant 1$ *ισχύει*

$$Q_k(K_N) \leqslant c_2(s)\sqrt{\log N}\ (\log\log N)^2, \tag{6.1.16}$$

για κάθε $1 \leqslant k < n$*, με πιθανότητα μεγαλύτερη από* $1 - N^{-s}$*.*

Δίνουμε επίσης εκτιμήσεις για την ακτίνα όγκου της τυχαίας προβολής $P_F(K_N)$ του K_N στον $F \in G_{n,k}$ (συναρτήσει των n, k και N) όταν $e^{\sqrt{n}} \leqslant N \leqslant e^n$. Οι εκτιμήσεις αυτές επεκτείνουν τη βέλτιστη εκτίμηση $\mathrm{vrad}(P_F(K_N)) \simeq \sqrt{\log N}$ η οποία είχε δοθεί στο [35] μόνο στην περίπτωση όπου $N \leqslant e^{\sqrt{n}}$.

Θεώρημα 6.1.4. *Αν* $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant e^{cn}$ *και* $s \geqslant 1$*, τότε το τυχαίο* K_N *ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από* $1 - \max\{N^{-s}, e^{-c_{11}\sqrt{N}}\}$ *το ακόλουθο: για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *υπάρχει υποσύνολο* $M_{n,k}$ *της* $G_{n,k}$ *με* $\nu_{n,k}(M_{n,k}) \geqslant 1 - e^{-c_{12}k}$ *τέτοιο ώστε*

$$c_{13}L_\mu^{-1}\sqrt{\log N} \leqslant \mathrm{vrad}(P_F(K_N)) := \left(\frac{|P_F(K_N)|}{\omega_k}\right)^{1/k} \leqslant c_3(s)\sqrt{\log N}\big(\log\log N\big)^2 \tag{6.1.17}$$

για κάθε $F \in M_{n,k}$*.*

Στη ενότητα § 6.3 δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη της εκτίμησης των Alonso-Gutiérrez, Δαφνή, Hernández-Cifre και Prochno (από το [10]) για την k-οστή μέση εξωτερική ακτίνα

$$\tilde{R}_k(K_N) = \int_{G_{n,k}} R(P_F(K_N))\, d\nu_{n,k}(F) \tag{6.1.18}$$

του τυχαίου K_N, συναρτήσει των N, n και k.

Θεώρημα 6.1.5. *Έστω* $x_1, \ldots, x_N$ *ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο* μ *στον* $\mathbb{R}^n$*, και έστω* $K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$*. Αν* $n \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ *τότε, για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *και* $s > 0$ *έχουμε*

$$c_4(s)\max\left\{\sqrt{k}, \sqrt{\log(N/n)}\right\} \leqslant \tilde{R}_k(K_N) \leqslant c_5(s)\max\left\{\sqrt{k}, \sqrt{\log N}\right\} \tag{6.1.19}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-s}$*, όπου* $c_4(s), c_5(s)$ *είναι θετικές σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το* s*.*

Παρουσιάζουμε έναν τύπο για την $\tilde{R}_k(K_N)$, ο οποίος ισχύει για κάθε $cn \leqslant N \leqslant \exp(n)$. Αυτό μας επιτρέπει να δώσουμε νέα απόδειξη (και να την εξηγήσουμε) της βέλτιστης εκτίμησης του Θεωρήματος 6.1.5 για τις «μικρές» τιμές του N καθώς και το αντίστοιχο ανάλογο για τις «μεγάλες» τιμές του N (βλέπε το Θεώρημα 6.3.5).

Στην ενότητα § 6.4 παρουσιάζουμε εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης και τους δυϊκούς αριθμούς κάλυψης του τυχαίου K_N. Για κάποιες τιμές του N, αυτές μας επιτρέπουν να συμπεράνουμε ότι το τυχαίο K_N είναι σε α-κανονική M-θέση με $\alpha \sim 1$.

Θεώρημα 6.1.6. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υποθέτοντας ότι $n^2 \leqslant N \leqslant \exp\big((n\log n)^{2/5}\big)$, έχουμε ότι το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-1}$ τις εκτιμήσεις*

$$\max\{\log N(K_N, tr_N B_2^n), \log N(r_N B_2^n, tK_N)\} \leqslant c_{14}\frac{n(\log n)^2\log(1+t)}{t}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $r_N = \sqrt{\log N}$ και $c_{14} > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Σαν εφαρμογή δίνουμε μια εκτίμηση της μέσης τιμής της διαμέτρου των k-διάστατων τομών ενός τυχαίου K_N, η οποία ορίζεται από την

$$\tilde{D}_k(K_N) = \int_{G_{n,k}} R(K_N \cap F)\, d\nu_{n,k}(F). \tag{6.1.20}$$

Η μελέτη μας στην § 6.4 δείχνει ότι η συμπεριφορά της παραμέτρου $\tilde{D}_k(K_N)$ δεν είναι πάντα η ίδια με αυτήν της $\tilde{R}_k(K_N)$. Για να δώσουμε μια γεύση των αποτελεσμάτων μας, αναφέρουμε εδώ την ακόλουθη απλοποιημένη διατύπωση.

Θεώρημα 6.1.7. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και $a, b \in (0,1)$.*

(α) *Αν $k \leqslant bn$ τότε το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα $1 - N^{-1}$ την*

$$\tilde{D}_k(K_N) \leqslant c_b\sqrt{\log N} \quad \text{αν } n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$$

και την

$$\tilde{D}_k(K_N) \leqslant c_b\sqrt{\log N}(\log\log N)^2 \quad \text{αν } \exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n).$$

(β) *Αν $k \geqslant an$ και $N \leqslant \exp((n\log n)^{2/5})$ τότε το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα $1 - \exp(-\sqrt{n})$ την*

$$c_a\frac{\sqrt{\log N}}{\log^3 n} \leqslant \tilde{D}_k(K_N),$$

όπου οι c_a, c_b είναι θετικές σταθερές οι οποίες εξαρτώνται μόνο από τα a και b αντιστοίχως.

Ολοκληρώνουμε αυτό το κεφάλαιο με μια σύντομη συζήτηση του ανοιχτού ερωτήματος αν η ισοτροπική σταθερά του τυχαίου K_N είναι φραγμένη από μια σταθερά ανεξάρτητη των n και N.

Η κλάση των Gaussian τυχαίων πολυτόπων K_N στον $\mathbb{R}^n$ είναι η πρώτη κλάση τυχαίων πολυτόπων για την οποία έχουμε ομοιόμορφα φράγματα. Οι Klartag και Kozma έδειξαν στο [60] ότι αν $N > n$ και αν $G_1, \ldots, G_N$ είναι ανεξάρτητα Gaussian τυχαία δανύσματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε η ισοτροπική σταθερά του τυχαίου πολυτόπου $K_N = \mathrm{conv}\{\pm G_1, \ldots, \pm G_N\}$ φράσσεται από απόλυτη σταθερά $C > 0$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - Ce^{-cn}$.

Η ίδια ιδέα εφαρμόζεται στην περίπτωση που οι κορυφές x_j του K_N είναι κατανεμημένες ως προς ένα ισοτροπικό ψ_2-μέτρο μ. Τότε, το φράγμα εξαρτάται μόνο από την ψ_2-σταθερά του μ. Ο Alonso-Gutiérrez [8] και οι Γιαννόπουλος, Δαφνής και Guédon [33] εφάρμοσαν την ίδια περίπου μέθοδο για να δώσουν θετική απάντηση στην περίπτωση που οι κορυφές του K_N επιλέγονται από τη μοναδιαία σφαίρα ή από ένα unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα αντίστοιχα.

Δείχνουμε ότι, στη γενική ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη περίπτωση, η μέθοδος των Klartag ανδ Kozma δίνει φράγμα της τάξης $O(\sqrt{\log(2N/n)})$ αν $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ (παρόμοια απόδειξη και μια επέκταση για τυχαίες διαταραχές τυχαίων πολυτόπων εμφανίστηκε, ανεξάρτητα και σχεδόν ταυτόχρονα, στο [11]).

6.2 Εκτιμήσεις για τα quermassintegrals

Για την απόδειξη των αποτελεσμάτων αυτής της ενότητας θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.1 από το [35], το οποίο διατυπώνουμε στη γενικότερη περίπτωση των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων τυχαίων διανυσμάτων (η εκτίμηση πιθανότητας σε αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιεί το [7, Θεώρημα 3.13]: αν $\gamma > 1$ και $\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N$ είναι ο τυχαίος τελεστής $\Gamma(y) = (\langle x_1, y\rangle, \ldots \langle x_N, y\rangle)$ που ορίζεται από τις κορυφές $x_1, \ldots, x_N$ του K_N τότε $\mathbb{P}(\|\Gamma : \ell_2^n \to \ell_2^N\| \geqslant \gamma\sqrt{N}) \leqslant \exp(-c_0\gamma\sqrt{N})$ για κάθε $N \geqslant c\gamma n$ – βλέπε το [35] για περισσότερες πληροφορίες).

Λήμμα 6.2.1. *Έστω μ ένα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα κατανεμημένα ως προς μ, με $N \geqslant c_1 n$ όπου $c_1 > 1$ απόλυτη σταθερά. Τότε, για κάθε $q \leqslant c_2 \log(N/n)$ έχουμε ότι*

$$K_N \supseteq c_3\, Z_q(\mu) \tag{6.2.1}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_4\sqrt{N})$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2. . Έχουμε ήδη αναφέρει στην εισαγωγή ότι η ισοδυναμία $\mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \simeq \sqrt{\log N}$ όταν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ έχει αποδειχθεί στο [35]. Συνοπτικά, το επιχείρημα είναι το εξής. Αρχικά δείχνουμε ότι

$$\overline{c}_1\sqrt{n}|Z_{\log(N/n)}(K)|^{1/n} \leqslant \mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \leqslant \overline{c}_2 w(Z_{\log N}(K)), \tag{6.2.2}$$

όπου $\overline{c}_1, \overline{c}_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Αφού η ακολουθία $Q_k(\cdot)$ είναι φθίνουσα ως προς k, βλέπουμε αμέσως ότι

$$\mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \geqslant \mathbb{E}\left[Q_n(K_N)\right] = \mathbb{E}\left(\frac{|K_N|}{\omega_n}\right)^{1/n}. \tag{6.2.3}$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}\left(\frac{|K_N|}{\omega_n}\right)^{1/n} \geqslant c_4\left(\frac{|Z_{\log(N/n)}(K)|}{\omega_n}\right)^{1/n}, \tag{6.2.4}$$

όπου $c_4>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνδυάζοντας τις (6.2.3) και (6.2.4) παίρνουμε την αριστερή ανισότητα στην (6.2.2).

Στην αντίστροφη κατεύθυνση, θεωρούμε $n^2\leqslant N\leqslant \exp(cn)$ και παρατηρούμε ότι, από την ανισότητα του Παούρη (Θεώρημα 1.7.1), με πιθανότητα εκθετικά κοντά στο 1, τα $x_1,\ldots,x_N$ ικανοποιούν την $\|x_j\|_2\leqslant c_5n$ για κάθε $1\leqslant j\leqslant N$. Συνεπώς,

$$R(K_N)\leqslant c_5n.$$

Τώρα, για κάθε $\alpha>1$ και $\theta\in S^{n-1}$, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\mathbb{P}(\alpha,\theta):=\mu\left(\{x:|\langle x,\theta\rangle|\geqslant \alpha\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_q(\mu)}\}\right)\leqslant \alpha^{-q}, \tag{6.2.5}$$

άρα,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(h_{K_N}(\theta)\geqslant \alpha h_{Z_q(\mu)}(\theta)\right)&=\mathbb{P}\left(\max_{j\leqslant N}|\langle x_j,\theta\rangle|\geqslant \alpha\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_q(\mu)}\right)\\&\leqslant N\,\mathbb{P}(\alpha,\theta)\leqslant N\alpha^{-q}.\end{aligned}\tag{6.2.6}$$

Από το θεώρημα Fubini έπεται ότι

$$\mathbb{E}\left[\sigma(\theta:h_{K_N}(\theta)\geqslant \alpha h_{Z_q(\mu)}(\theta))\right]\leqslant N\alpha^{-q}. \tag{6.2.7}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $h_{K_N}(\theta)\leqslant R(K_N)\leqslant c_5n$, γράφουμε

$$w(K_N)\leqslant \int_{A_N}h_{K_N}(\theta)\,d\sigma(\theta)+c_6\sigma(A_N^c)n, \tag{6.2.8}$$

όπου $A_N=\{\theta:h_{K_N}(\theta)\leqslant \alpha h_{Z_q(\mu)}(\theta)\}$. Έπεται ότι

$$w(K_N)\leqslant \alpha\int_{A_N}h_{Z_q(\mu)}(\theta)\,d\sigma(\theta)+c_6\sigma(A_N^c)n, \tag{6.2.9}$$

άρα, από την (6.2.7),

$$\mathbb{E}\left[w(K_N)\right]\leqslant \alpha w(Z_q(\mu))+c_6Nn\alpha^{-q}. \tag{6.2.10}$$

Αφού $w(Z_q(\mu))\geqslant w(Z_2(\mu))=1$, παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left[w(K_N)\right]\leqslant (\alpha+c_6Nn\alpha^{-q})w(Z_q(\mu)). \tag{6.2.11}$$

Επιλέγοντας $\alpha=e$ και $q=2\log N$ βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[Q_1(K_N)\right]=\mathbb{E}\left[w(K_N)\right]\leqslant c_7\,w(Z_{2\log N}(\mu))\leqslant c_8\,w(Z_{\log N}(\mu)), \tag{6.2.12}$$

παίρνοντας υπόψη μας το γεγονός ότι $Z_{2\log N}(K)\subseteq cZ_{\log N}(K)$. Αφού η ακολουθία $Q_k(K)$ είναι φθίνουσα ως προς k, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right]\leqslant \mathbb{E}\left[Q_1(K_N)\right]\leqslant c_9\,w(Z_{\log N}(\mu)), \tag{6.2.13}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, όπου $c_9 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έτσι έχουμε αποδείξει την (6.2.2).

Τώρα, από τα γνωστά κάτω φράγματα για τον όγκο του $Z_q(\mu)$ έχουμε: αν $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε

$$|Z_{\log N}(\mu)|^{1/n} \geqslant c_{10}\sqrt{\log N/n}, \tag{6.2.14}$$

και

$$w(Z_{\log N}(\mu)) \leqslant c_{11}\sqrt{\log N}. \tag{6.2.15}$$

Συνεπώς, η (6.2.2) παίρνει τη μορφή

$$\mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \simeq \sqrt{\log N}. \tag{6.2.16}$$

Στην περίπτωση $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(cn)$, έχουμε

$$w(Z_{\log N}(\mu)) \leqslant c_{12}L_\mu^{-1}\sqrt{\log N}, \tag{6.2.17}$$

άρα

$$c_{13}L_\mu^{-1}\sqrt{\log N} \leqslant \mathbb{E}\left[Q_k(K_N)\right] \leqslant \overline{c}_2 w(Z_{\log N}(\mu)), \tag{6.2.18}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.1 για να δώσουμε άνω φράγμα για το $w(Z_{\log N}(\mu))$, ολοκληρώνουμε την απόδειξη. ■

Για να δείξουμε το Θεώρημα 6.1.3 χρειαζόμαστε το Λήμμα 4.2 από το [34], το οποίο ισχύει γενικότερα και όχι μόνο για ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα τυχαία διανύσματα.

Λήμμα 6.2.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(cn)$ και κάθε $q \geqslant \log N$ και $r \geqslant 1$, έχουμε ότι*

$$\int_{S^{n-1}} \frac{h^q_{K_N}(\theta)}{h^q_{Z_q(\mu)}(\theta)}\, d\sigma(\theta) \leqslant (c_1 r)^q \tag{6.2.19}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - r^{-q}$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Όπως πριν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $R(K_N) \leqslant c_2 n$, άρα $h_{K_N}(\theta) \leqslant c_2 n h_{Z_q(\mu)}(\theta)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Γράφουμε

$$\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_N}(\theta)^q}{h_{Z_q(\mu)}(\theta)^q}\, d\sigma(\theta) = \int_0^{n+1} qt^{q-1}\sigma\Big(\theta : \, h_{K_N}(\theta) \geqslant t h_{Z_q(\mu)}(\theta)\Big)\, dt. \tag{6.2.20}$$

Σταθεροποιούμε $\alpha > 1$, το οποίο θα επιλεγεί κατάλληλα, και γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left(\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_N}(\theta)^q}{h_{Z_q(\mu)}(\theta)^q}\, d\sigma(\theta)\right) &\leqslant \alpha^q + \int_\alpha^{n+1} qt^{q-1}Nt^{-q}\, dt \\ &\leqslant \alpha^q + qN\log\left(\frac{n+1}{\alpha}\right). \end{aligned} \tag{6.2.21}$$

Επιλέγουμε $\alpha = e$. Αν $q \geqslant \log N$, τότε

$$\mathbb{E}\left(\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_N}(\theta)^q}{h_{Z_q(\mu)}(\theta)^q}\, d\sigma(\theta)\right) \leqslant c_1^q \tag{6.2.22}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$. Από την ανισότητα Markov, για κάθε $r \geqslant 1$ έχουμε

$$\int_{S^{n-1}} \frac{h_{K_N}(\theta)^q}{h_{Z_q(\mu)}(\theta)^q}\, d\sigma(\theta) \leqslant (c_1 r)^q \tag{6.2.23}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - r^{-q}$. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.3. Έστω $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned} w(K_N) &= \int_{S^{n-1}} h_{K_N}(\theta)\, d\sigma(\theta) \\ &\leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \big(h_{Z_q(\mu)}(\theta)\big)^p\, d\sigma(\theta)\right)^{1/p} \left(\int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_{K_N}(\theta)}{h_{Z_q(\mu)}(\theta)}\right)^q d\sigma(\theta)\right)^{1/q} \\ &= w_p\big(Z_q(\mu)\big) \left(\int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_{K_N}(\theta)}{h_{Z_q(\mu)}(\theta)}\right)^q d\sigma(\theta)\right)^{1/q}, \end{aligned}$$

όπου p είναι ο συζυγής εκθέτης του q. Αν τώρα επιλέξουμε $q = \log N \geqslant \sqrt{n}$ και χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 6.2.2 έχουμε ότι

$$w(K_N) \leqslant c_1 r w_p\big(Z_q(\mu)\big)$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - r^{-q}$. Καθώς $q = \log N$, προκύπτει ότι $p < 2$ και καθώς το $w_p(Z_q(\mu))$ είναι ισοδύναμο με το $w(Z_q(\mu))$ (βλέπε [1, Κεφάλαιο 5]). Χρησιμοποιώντας αυτό και εφαρμόζοντας την εκτίμηση του E. Milman για το $w(Z_q(\mu))$ συμπεραίνουμε ότι

$$w(K_N) \leqslant c_2 r \sqrt{\log N}\big(\log\log N\big)^2$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - r^{-\log N}$. Επιλέγοντας $r = e$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη της (6.1.16). ■

Μπορούμε επίσης να δώσουμε εκτιμήσεις για την ακτίνα όγκου της τυχαίας προβολής $P_F(K_N)$ του K_N στον $F \in G_{n,k}$ συναρτήσει των n, k και N. Στο [35] έχει αποδειχθεί ότι αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε, το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-s}$ το εξής: για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$,

$$c_3\sqrt{\log N} \leqslant \mathrm{vrad}(P_F(K_N)) \leqslant c_4(s)\sqrt{\log N} \tag{6.2.24}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-c_5 k}$ ως προς το μέτρο Haar $\nu_{n,k}$ στην $G_{n,k}$. Επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα στην περίπτωση που $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.4. Για το άνω φράγμα, χρησιμοποιώντας την (6.1.16) και τον τύπο του Kubota, έχουμε

$$\left(\frac{1}{\omega_k}\int_{G_{n,k}}|P_F(K_N)|\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k}\leqslant c_6(s)\sqrt{\log N}\,\big(\log\log N\big)^2L_K.$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Markov έχουμε ότι με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-t^{-k}$ ως προς το μέτρο Haar $\nu_{n,k}$ στην $G_{n,k}$ έχουμε

$$\left(\frac{|P_F(K_N)|}{\omega_k}\right)^{1/k}\leqslant c_6(s)t\sqrt{\log N}\big(\log\log N\big)^2.$$

Επιλέγοντας $t=e$ παίρνουμε το αποτέλεσμα.

Για το κάτω φράγμα, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,k}}\frac{|P_F^{\circ}(K_N)|}{\omega_k}\,d\nu_{n,k}(F)&=\int_{G_{n,k}}\int_{S_F}\frac{1}{h^k_{P_F(K_N)}(\theta)}d\sigma_F(\theta)\,d\nu_{n,k}(F)\\&=\int_{G_{n,k}}\int_{S_F}\frac{1}{h^k_{K_N}(\theta)}d\sigma_F(\theta)\,d\nu_{n,k}(F)\\&\leqslant\left(\int_{G_{n,k}}\int_{S_F}\frac{1}{h^n_{K_N}(\theta)}d\sigma_F(\theta)\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{k/n}\\&=\left(\int_{S^{n-1}}\frac{1}{h^n_{K_N}(\theta)}d\sigma(\theta)\right)^{k/n}\\&=\left(\frac{|K_N^{\circ}|}{\omega_n}\right)^{k/n}.\end{aligned}\tag{6.2.25}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την ανισότητα Blaschke-Santaló (1.1.13) και το γεγονός ότι $K_N\supseteq c_7Z_{\log N}(\mu)$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c\sqrt{N})$ (σημειώνουμε ότι $\log N\simeq\log N/n$ για τα N που χρησιμοποιούμε) έχουμε

$$\left(\frac{|K_N^{\circ}|}{\omega_n}\right)^{k/n}\leqslant\left(\frac{\omega_n}{|K_N|}\right)^{k/n}\leqslant\left(\frac{\omega_n}{|c_7Z_{\log N}(\mu)|}\right)^{k/n}.\tag{6.2.26}$$

Καθώς ο $\log N$ είναι μεγαλύτερος από $\sqrt{n}$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την ανισότητα

$$|Z_{\log N}(K)|^{1/n}\geqslant cL_\mu^{-1}\sqrt{(\log N)/n}$$

και να πάρουμε την

$$\int_{G_{n,k}}\frac{|P_F^{\circ}(K_N)|}{\omega_k}\,d\nu_{n,k}(F)\leqslant\left(\frac{c_8L_\mu}{\sqrt{\log N}}\right)^k.\tag{6.2.27}$$

Τέλος, εφαρμόζουμε την ανισότητα Markov και την αντίστροφη ανισότητα Santaló (1.1.14) των Bourgain και V. Milman και έτσι ολοκληρώνουμε την απόδειξη. ∎

6.3 Μέση εξωτερική ακτίνα

Για κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, η k-οστή μέση εξωτερική ακτίνα του C ορίζεται από την

$$\tilde{R}_k(C) = \int_{G_{n,k}} R(P_F(C))\, d\nu_{n,k}(F). \tag{6.3.1}$$

Οι Alonso-Gutiérrez, Δαφνής, Hernández-Cifre και Prochno μελέτησαν στο [10] την τάξη μεγέθους της παραμέτρου $\tilde{R}_k(K_N)$ σαν συνάρτηση των N, n και k. Το βασικό τους αποτέλεσμα είναι το Θεώρημα 6.1.5:

Αν $n \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και $s > 0$ έχουμε

$$c_1(s) \max\left\{\sqrt{k}, \sqrt{\log(N/n)}\right\} \leqslant \tilde{R}_k(K_N) \leqslant c_2(s) \max\left\{\sqrt{k}, \sqrt{\log N}\right\} \tag{6.3.2}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-s}$, όπου $c_1(s), c_2(s)$ είναι θετικές σταθερές που εξαρτώνται μόνο από το s.

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε μια διαφορετική (και απλούστερη) απόδειξη αυτού του αποτελέσματος. Επίσης, επεκτείνουμε αυτές τις εκτιμήσεις στο διάστημα $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$. Η προσέγγισή μας βασίζεται στην Πρόταση 3.5.2:

Αν C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant k < n$ και κάθε $s > 1$ υπάρχει υποσύνολο $\Gamma_{n,k} \subset G_{n,k}$, με μέτρο μεγαλύτερο από $1 - e^{-c_1 s^2 k}$, τέτοιο ώστε η ορθογώνια προβολή του C σε κάθε υπόχωρο $F \in \Gamma_{n,k}$ να ικανοποιεί την

$$R(P_F(C)) \leqslant w(C) + c_2 s\sqrt{k/n}R(C), \tag{6.3.3}$$

όπου $c_1 > 0, c_2 > 1$ είναι απόλυτες σταθερές.

Σημειώνουμε ότι η αντίστροφη ανισότητα $R(P_F(C)) \geqslant c \max\{w(C), \sqrt{k/n}R(C)\}$ ισχύει επίσης για τον τυχαίο $F \in G_{n,k}$. Για να το δούμε αυτό, αρχικά παρατηρούμε ότι αν $x \in C$ και $\|x\|_2 = R(C)$ τότε, για τους περισσότερους $F \in G_{n,k}$ έχουμε

$$\|P_F(x)\|_2 \geqslant c\sqrt{k/n}\|x\|_2,$$

άρα

$$R(P_F(C)) \geqslant c\sqrt{k/n}R(C).$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το $\nu_{n,k}$ βλέπουμε ότι

$$\tilde{R}_k(C) \geqslant c\sqrt{k/n}R(C).$$

Από την άλλη πλευρά, αν $\sqrt{k/n}R(C) \leqslant c' w(C)$ για μια, αρκετά μικρή, απόλυτη σταθερά $0 < c' < 1$ τότε, από την απόδειξη του V. Milman για το θεώρημα Dvoretzky παίρνουμε ότι οι περισσότερες k-διάστατες προβολές του C είναι ισομορφικές Ευκλείδειες μπάλες ακτίνας $w(C)$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\tilde{R}_k(C) \geqslant cw(C)$. Συνοψίζουμε αυτές τις παρατηρήσεις στον ακόλουθο ασυμπτωτικό τύπο.

Πρόταση 6.3.1. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε ότι*

$$\tilde{R}_k(C) \simeq w(C) + \sqrt{k/n}R(C). \tag{6.3.4}$$

Θα εφαρμόσουμε αυτό τον τύπο για το τυχαίο K_N. Λόγω της (6.3.4), το μόνο που χρειαζόμαστε είναι να εκτιμήσουμε το μέσο πλάτος $w(K_N)$ και την ακτίνα $R(K_N)$ για το τυχαίο K_N. Δίνουμε αυτές τις εκτιμήσεις στην Πρόταση 6.3.2 και την Πρόταση 6.3.4 αντίστοιχα. Βασικά εργαλεία είναι οι ανισότητες (1.7.1) και (1.7.15) του Παούρη, σε συνδυασμό με το Λήμμα 6.2.1.

Πρώτη περίπτωση: $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$

Πρόταση 6.3.2. *Αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε, για κάθε $s \geqslant 1$, το τυχαίο K_N ικανοποιεί τις*

$$c_1\sqrt{\log N} \leqslant w(K_N) \leqslant c_2 s\sqrt{\log N}$$

και

$$c_3\sqrt{n} \leqslant R(K_N) \leqslant c_4 s\sqrt{n}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\max\{N^{-s}, e^{-c\sqrt{n}}\}$.

Απόδειξη. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.3 είδαμε ότι, για κάθε $n \leqslant N \leqslant \exp(n)$,

$$w(K_N) \leqslant c_1 s w\big(Z_{\log N}(\mu)\big) \tag{6.3.5}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-N^{-s}$. Υποθέτοντας ότι $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ έχουμε ότι $\log N \leqslant \sqrt{n}$. Τότε $w\big(Z_{\log N}(\mu) \simeq \sqrt{\log N}$, άρα

$$w(K_N) \leqslant c_2 s\sqrt{\log N} \tag{6.3.6}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-N^{-s}$. Για το κάτω φράγμα χρησιμοποιούμε το Λήμμα 6.2.1: γνωρίζουμε ότι για κάθε $N \geqslant c_3 n$ ισχύει

$$K_N \supseteq c_4\, Z_{\log(N/n)}(\mu) \tag{6.3.7}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_5\sqrt{N})$. Έτσι προκύπτει ότι αν $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε

$$w(K_N) \geqslant c_4 w(Z_{\log(N/n)}(\mu)) \geqslant c_6\sqrt{\log(N/n)}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_7\sqrt{N})$.

Για την ακτίνα του K_N, εφαρμόζοντας την (1.7.1) βλέπουμε ότι, για κάθε $t \geqslant 2$,

$$R(K_N) = \max_{1 \leqslant j \leqslant N} \|x_j\|_2 \leqslant c_8 t\sqrt{n} \tag{6.3.8}$$

με πιθανότητα μεγαλυτερη από $1 - N\exp\left(-t\sqrt{n}\right) \geq 1-\exp(-(t-1)\sqrt{n}) \geqslant 1-N^{-(t-1)}$. Για το κάτω φράγμα, αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ χρησιμοποιούμε την (1.7.15) και έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathrm{Prob}(R(K_N) \leqslant \varepsilon_0\sqrt{n}) &= \mathrm{Prob}\left(\max_{1 \leqslant j \leqslant N} \|x_j\|_2 \leqslant \varepsilon_0\sqrt{n}\right) \\ &= \big[\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon_0\sqrt{n}\})\big]^N \leqslant e^{-c_9\sqrt{n}N},\end{aligned}$$

η οποία δείχνει ότι $R(K_N) \geqslant \varepsilon_0\sqrt{n}$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_9\sqrt{n}N)$. ■

Παρατήρηση 6.3.3. Μάλιστα, για την απόδειξη του κάτω φράγματος $R(K_N) \geqslant c\sqrt{n}$ δεν χρειαζόμαστε την ανισότητα του Παούρη. Ο Latała έχει αποδείξει στο [64] ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $0 \leqslant t \leqslant 1$ έχουμε

$$\mu(\{x : \|x\| \leqslant t\mathbb{E}_\mu(\|x\|)\}) \leqslant Ct, \tag{6.3.9}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αν υποθέσουμε ότι το μ είναι ισοτροπικό τότε προκύπτει ότι $\mathbb{E}_\mu(\|x\|_2) \leqslant \sqrt{n}$, και άρα, επιλέγοντας μια, αρκετά μικρή, απόλυτη σταθερά ε_0 έχουμε από την (6.3.9) ότι

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon_0\sqrt{n}\}) \leqslant e^{-1}.$$

Αυτή η πληροφορία είναι αρκετή για το σκοπό μας.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5. Έστω $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$. Από την (6.3.4) και την Πρόταση 6.3.2 έχουμε ότι το K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \max\{N^{-s}, e^{-c\sqrt{n}}\}$ το ακόλουθο: για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$

$$\begin{aligned}\tilde{R}_k(K_N) &= \int_{G_{n,k}} R(P_F(K_N))\, d\nu_{n,k}(F) \simeq w(K_N) + \sqrt{k/n}R(K_N)\\ &\geqslant c_1\left(\sqrt{\log(N/n)} + \sqrt{k/n}\,\sqrt{n}\right) \simeq \max\left\{\sqrt{\log(N/n)}, \sqrt{k}\right\}\end{aligned}$$

και ομοίως,

$$\begin{aligned}\tilde{R}_k(K_N) &= \int_{G_{n,k}} R(P_F(K_N))\, d\nu_{n,k}(F) \simeq w(K_N) + \sqrt{k/n}R(K_N)\\ &\leqslant c_2(s)\left(\sqrt{\log N} + \sqrt{k/n}\,\sqrt{n}\right) \leqslant 2c_2(s)\max\left\{\sqrt{\log N}, \sqrt{k}\right\},\end{aligned}$$

όπως στο [10]. ■

Δεύτερη περίπτωση: $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$

Η επόμενη πρόταση θα μας δώσει τις εκτιμήσεις μας στην περίπτωση $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$.

Πρόταση 6.3.4. *Αν $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$ τότε, για κάθε $s \geqslant 1$, το τυχαίο K_N ικανοποιεί τις*

$$c_1L_\mu^{-1}\sqrt{\log N} \leqslant w(K_N) \leqslant c_2 s\sqrt{\log N}(\log\log N)^2$$

και

$$c_3\max\{\sqrt{n}, R(Z_{\log N}(\mu))\} \leqslant R(K_N) \leqslant c_3 s\, \log N$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \max\{N^{-s}, e^{-c\sqrt{n}}\}$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας ξανά την (6.3.5), όταν $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$ έχουμε ότι

$$w(K_N) \leqslant c_2 s\sqrt{\log N}(\log\log N)^2 \tag{6.3.10}$$

κάνοντας χρήση του θεωρήματος του E. Milman. Για το κάτω φράγμα, χρησιμοποιώντας ξανά την 6.2.1, την ανισότητα Urysohn (1.1.11) και το διαθέσιμο κάτω φράγμα για τον όγκο του $Z_{\log N}(\mu)$, έχουμε

$$w(K_N) \geqslant c_4 w(Z_{\log N}(\mu)) \geqslant c_4(|Z_{\log N}(\mu)|/|B_2^n|)^{1/n} \geqslant c_6 L_\mu^{-1}\sqrt{\log N}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_5\sqrt{N})$.

Για την ακτίνα του K_N θα χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση $R(K_N) \leqslant ct\sqrt{n}$. Από την (6.3.8) με $t \simeq s\log N/\sqrt{n}$ προκύπτει το φράγμα $c\log N$ με πιθανότητα μεγαλύτερ από $1-N^{-s}$. Για το κάτω φράγμα, δείχνουμε ότι $R(K_N) \geqslant c\sqrt{n}$ ακριβώς όπως στην απόδειξη της Πρότασης 6.3.2, παίρνοντας υπόψη μας και το φράγμα $R(K_N) \geqslant R(Z_{\log N}(\mu))$. ■

Χρησιμοποιώντας τώρα τις Προτάσεις 6.3.4 και 6.3.1, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.5, παίρνουμε την παρακάτω εκτίμηση:

Θεώρημα 6.3.5. *Έστω $x_1,\dots,x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ ον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο $K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1,\dots,\pm x_N\}$. Αν $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$ τότε, για κάθε $s \geqslant 1$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε*

$$\begin{aligned} &c\max\left\{L_\mu^{-1}\sqrt{\log N}, \sqrt{k}, \sqrt{k/n}R(Z_{\log N}(\mu))\right\} \\ &\qquad \leqslant \tilde{R}_k(K_N) \leqslant Cs\max\{\sqrt{\log N}(\log\log N)^2, \sqrt{k/n}\log N\}\end{aligned}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-N^{-s}$, όπου $c, C>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Σε πλήρη γενικότητα δεν μπορούμε να περιμένουμε κάτι καλύτερο: για παράδειγμα, αν $\mu=\mu_1^n$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο στην $B_1^n/|B_1^n|$, τότε $R(Z_{\log N}(\mu_1^n)) \simeq \log N$, και για μεγάλες τιμές του N (εκθετικές ως προς N) έχουμε

$$\tilde{R}_k(K_N) \simeq \sqrt{k/n}\log N.$$

Από την άλλη πλευρά, αν το μ ικανοποιεί (ομοιόμορφη) ψ_2-εκτίμηση με σταθερά b τότε γνωρίζουμε ότι $L_\mu \leqslant C_1 b$ (βλέπε [61]) καθώς και ότι $I_n(\mu) \leqslant cb\sqrt{n}$ (βλέπε [88]), από τα οποία προκύπτει ότι $w(K_N) \leqslant R(K_N) \leqslant C_2 b\sqrt{n}$. Έτσι, σε αυτή την περίπτωση (η οποία, για παράδειγμα, συμπεριλαμβάνει την περίπτωση του μέτρου του Gauss) έχουμε:

Θεώρημα 6.3.6. *Έστω $x_1,\dots,x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία με κατανομή ένα ισοτροπικό, λαγαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί μια ψ_2-εκτίμηση με σταθερά b. Θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο $K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1,\dots,\pm x_N\}$. Αν $n \leqslant N \leqslant \exp(n)$ και $s \geqslant 1$ τότε το K_N ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-N^{-s}$, την*

$$c_1 b^{-1}\max\left\{\sqrt{k}, \sqrt{\log(N/n)}\right\} \leqslant \tilde{R}_k(K_N) \leqslant c_2(s) b\max\left\{\sqrt{k}, \sqrt{\log N}\right\} \tag{6.3.11}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, όπου $c_2(s)$ είναι μια θετική σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από το s.

6.4 Εκτιμήσεις εντροπίας και διάμετρος τομών

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων A και B στον $\mathbb{R}^n$, ο αριθμός κάλυψης $N(A,B)$ του A από το B είναι ο μικρότερος αριθμός μεταφορών του B η ένωση των οποίων καλύπτει το A. Όπως αναφέραμε στο Κεφάλαιο 1, ο V. Milman έδειξε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\beta > 0$ τέτοια ώστε κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ να έχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ η οποία ικανοποιεί την $|\tilde{K}| = |B_2^n|$ και την

$$\max\big\{N(\tilde{K},B_2^n), N(B_2^n,\tilde{K}), N(\tilde{K}^\circ,B_2^n), N(B_2^n,\tilde{K}^\circ)\big\} \leqslant \exp(\beta n). \tag{6.4.1}$$

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα το οποίο ικανοποιεί τα παραπάνω είναι στην M-θέση με σταθερά β. Επίσης, ο Pisier έδειξε ότι για κάθε $0<\alpha<2$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}_\alpha$ του K τέτοια ώστε

$$\max\big\{N(\tilde{K}_\alpha,tB_2^n), N(B_2^n,t\tilde{K}_\alpha), N(\tilde{K}_\alpha^\circ,tB_2^n), N(B_2^n,t\tilde{K}_\alpha^\circ)\big\} \leqslant \exp\left(\frac{c(\alpha)n}{t^\alpha}\right) \tag{6.4.2}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου η σταθερά $c(\alpha)$ εξαρτάται μόνο από το α, και $c(\alpha) = O\big((2-\alpha)^{-\alpha/2}\big)$ καθώς το $\alpha \to 2$. Λέμε ότι το $\tilde{K}_\alpha$ είναι μια α-κανονική M-θέση του K.

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για μεγάλο εύρος των τιμών του N, το τυχαίο K_N είναι σε α-κανονική M-θέση με $\alpha \sim 1$. Για το σκοπό αυτό, είναι βολικό να ορίσουμε $r_N = \sqrt{\log N}$: υπενθυμίζουμε ότι αν $n^2 \leq N \leq \exp(\sqrt{n})$ τότε $\mathrm{vrad}(K_N) \simeq r_N$ για το τυχαίο K_N (στην περίπτωση $N \geqslant \exp(\sqrt{n})$ έχουμε την ασθενέστερη εκτίμηση $c_1L_\mu^{-1}r_N \leqslant \mathrm{vrad}(K_N) \leqslant c_2r_N$). Παρουσιάζουμε εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης $N(K_N,tr_NB_2^n)$ και $N(r_NB_2^n,tK_N)$ για το τυχαίο K_N και για κάθε $t \geqslant 1$. Από το θεώρημα δυϊσμού για τους αριθμούς εντροπίας, των Artstein-Avidan, V. Milman και Szarek [13], οι δύο αυτές εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης προσδιορίζουν και τους $N(r_NK_N^\circ,tB_2^n)$ και $N(B_2^n,tr_NK_N^\circ)$, οπότε ολοκληρώνεται η απόδειξη των τεσσάρων εκτιμήσεων που απαιτούνται στην (6.4.2).

Πρόταση 6.4.1. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-N^{-1}$ την εκτίμηση εντροπίας*

$$\log N(K_N,tr_NB_2^n) \leqslant \begin{cases} \frac{cn}{t^2} & \text{αν } n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n}) \\ \frac{cn\log^4 n}{t^2} & \text{αν } \exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(cn). \end{cases}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι το τυχαίο K_N ικανοποιεί την $w(K_N) \leqslant c_1\sqrt{\log N} \simeq r_N$ για τα «μικρά» N, και την $w(K_N) \leqslant c_2\sqrt{\log N}(\log\log N)^2 \simeq r_N(\log\log N)^2$ για τα «μεγάλα» N, από τις Προτάσεις 6.3.2 και 6.3.4 αντίστοιχα. Έτσι, το φράγμα για τον αριθμό κάλυψης $N(K_N,tr_NB_2^n)$ είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Sudakov (βλέπε (1.1.21))

$$\log N(C,tB_2^n) \leqslant cn(w(C)/t)^2$$

η οποία ισχύει για κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $t>0$. ∎

Στη συνέχεια δίνουμε εκτιμήσεις για τους δυϊκούς αριθμούς κάλυψης $N(r_N B_2^n, tK_N)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα (βλέπε [46] και [2, Πρόταση 9.2.8] ή [40] για την ισχυρότερη ανισότητα που διατυπώνουμε εδώ):

Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ και για κάθε $1 \leqslant t \leqslant \min\left\{\sqrt{q}, c_1 \frac{n \log q}{q^2}\right\}$ έχουμε

$$\log N\big(\sqrt{q} B_2^n, tZ_q(\mu)\big) \leqslant c_2 \frac{n(\log q)^2 \log t}{t}, \tag{6.4.3}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Επίσης, αν $q \leqslant (n \log n)^{2/5}$ τότε η (6.4.3) ισχύει για κάθε $t \geqslant 1$.

Ανάλογες εκτιμήσεις ισχύουν και για μεγαλύτερες τιμές του q, αλλά είναι ασθενέστερες και δεν φαίνονται να είναι τελικές, και έτσι προτιμούμε να περιοριστούμε στην παρακάτω περίπτωση.

Πρόταση 6.4.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υποθέτοντας ότι $n^2 \leqslant N \leqslant \exp\big((n \log n)^{2/5}\big)$, έχουμε ότι το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_1\sqrt{N})$ την εκτίμηση εντροπίας*

$$\log N(r_N B_2^n, tK_N) \leqslant c_2 \frac{n(\log n)^2 \log(1+t)}{t}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια του γεγονότος ότι $K_N \supseteq c_3 Z_{\log N}(\mu)$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_1\sqrt{N})$. Τότε, έχουμε

$$\log N(r_N B_2^n, tK_N) \leqslant \log N(r_N B_2^n, c_3 t Z_{\log N}(\mu)),$$

και το ζητούμενο προκύπτει από την (6.4.3). ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.6. Από την Πρόταση 6.4.2 έχουμε

$$\log N(r_N B_2^n, tK_N) \leq c \frac{n \log^2 n \log(1+t)}{t}.$$

Από την Πρόταση 6.4.1, αφού

$$N \leq \exp\left((n \log n)^{2/5}\right) \leq \exp(\theta\sqrt{n}),$$

για κατάλληλη απόλυτη σταθερά $\theta > 0$, έχουμε

$$\log N(K_N, t r_N B_2^n) \leq \frac{cn}{t}$$

(σε αυτό το σημείο μπορούμε να απαλείψουμε τον πρόσθετο όρο θ στον εκθέτη, διότι στην απόδειξη της Πρότασης 6.4.1 μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $Z_{\theta\sqrt{n}}(\mu) \subseteq \theta Z_{\sqrt{n}}(\mu)$). Συνδυάζοντας αυτές τις εκτιμήσεις έχουμε το ζητούμενο. ■

Παρατήρηση 6.4.3. Ακολουθώντας το επιχείρημα του [35] μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές c_1, c_2, c_3 και c_4 τέτοιες ώστε, για κάθε $0 < t < 1$, το τυχαίο K_N να ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-1}$ τις επόμενες εκτιμήσεις εντροπίας:
(α) Αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε

$$c_1 n \log \frac{c_2}{t} \leqslant \log N(K_N, tr_N B_2^n) \leqslant c_3 n \log \frac{c_4}{t}, \tag{6.4.4}$$

(β) Αν $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$ τότε

$$c_1 n \log \frac{c_2}{t} \leqslant \log N(K_N, t\tilde{r}_N B_2^n) \leqslant c_3 n \log \frac{c_4 \big(\log\log N\big)^2}{t}, \tag{6.4.5}$$

όπου ο $\tilde{r}_N := \mathrm{vrad}(K_N)$ ικανοποιεί την $c_5 L_\mu^{-1} r_N \leqslant \tilde{r}_N \leqslant c_6 r_N$.

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκτιμήσεις εντροπίας μπορούμε να υπολογίσουμε τη μέση διάμετρο των k-διάστατων τομών του τυχαίου K_N. Αυτή η παράμετρος ορίζεται για κάθε κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ως εξής:

$$\tilde{D}_k(C) = \int_{G_{n,k}} R(C \cap F)\, d\nu_{n,k}(F). \tag{6.4.6}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το επόμενο λήμμα (για $\alpha = 2$) το οποίο έχει ουσιαστικά αποδειχθεί στο [80] του V. Milman (βλέπε επίσης [2, Λήμμα 9.2.5]):

Λήμμα 6.4.4. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι*

$$\log N(C, tB_2^n) \leqslant \frac{\gamma n}{t^\alpha} \tag{6.4.7}$$

για κάθε $t \geqslant 1$ και κάποιες σταθερές $\alpha > 0$ και $\gamma \geqslant 1$. Τότε, για κάθε ακέραιο $1 \leqslant d < n$, ο τυχαίος υπόχωρος $H \in G_{n,d}$ ικανοποιεί την

$$C \cap H^\perp \subseteq c_1 \alpha^{-1} \left(\frac{\gamma n}{d}\right)^{1/\alpha} \log\left(\frac{n}{d}\right) B_{H^\perp} \tag{6.4.8}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_2 d)$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Από την Πρόταση 6.4.1 γνωρίζουμε ότι το τυχαίο $r_N^{-1} K_N$ ικανοποιεί την υπόθεση του Λήμματος 6.4.4 με $\gamma \simeq 1$ αν $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ και $\gamma \simeq \log^4 n$ αν $N \geqslant \exp(\sqrt{n})$. Άρα, για κάθε $k < n$ έχουμε ότι αν $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε η k-διάστατη τομή του K_N έχει ακτίνα

$$R(K_N \cap F) \leqslant c_1 \sqrt{\log N} \sqrt{\frac{n}{n-k}} \log\left(\frac{n}{n-k}\right), \tag{6.4.9}$$

ενώ αν $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$ τότε το αντίστοιχο φράγμα είναι

$$R(K_N \cap F) \leqslant c_1 \sqrt{\log N} (\log n)^2 \sqrt{\frac{n}{n-k}} \log\left(\frac{n}{n-k}\right), \tag{6.4.10}$$

και τα δυο με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_2(n-k))$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Από τις Προτάσεις 6.3.2 και 6.3.4 γνωρίζουμε επίσης ότι το τυχαίο K_N έχει ακτίνα

$$R(K_N) \leqslant c \max\{\sqrt{n}, \log N\} \leqslant cn,$$

και το ίδιο φράγμα ισχύει για όλες τις τομές του $K_N \cap F$. Επομένως, αν $n\exp(-c_2(n-k)) \leqslant 1$ (το οποίο ισχύει αν $k < n - c_3 \log n$) ολοκληρώνοντας στην $G_{n,k}$ βλέπουμε ότι ισχύουν τα φράγματα (6.4.9) και (6.4.10) και για το $\tilde{D}_k(K_N)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\tilde{D}_k(K_N) \leqslant \tilde{R}_k(K_N)$ έχουμε την ακόλουθη.

Πρόταση 6.4.5. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λαγαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N^{-1}$ τα ακόλουθα:*

(α) *Αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε:*

- (i) *Αν $k \leqslant \log N$ τότε $\tilde{D}_k(K_N) \leqslant c_1\sqrt{\log N}$.*
- (ii) *Αν $k \geqslant \log N$ τότε $\tilde{D}_k(K_N) \leqslant c_1 \min\left\{\sqrt{k}, \sqrt{\log N}\sqrt{\frac{n}{n-k}}\log\left(\frac{n}{n-k}\right), \log N\right\}$.*

(β) *Αν $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$ τότε:*

- (i) *Αν $k \leqslant n(\log\log N)^4/\log N$ τότε $\tilde{D}_k(K_N) \leqslant c_2\sqrt{\log N}(\log\log N)^2$.*
- (ii) *Αν $k \geqslant n(\log\log N)^4/\log N$ τότε*

$$\tilde{D}_k(K_N) \leqslant c_2 \min\left\{\sqrt{k/n}\log N, \sqrt{\log N}(\log n)^2\sqrt{\frac{n}{n-k}}\log\left(\frac{n}{n-k}\right)\right\},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Παρατήρηση 6.4.6. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να εκτιμήσουμε τη μέση ακτίνα του $K_N \cap F$ στην $G_{n,k}$ για κάποιες τιμές του k, δίνεται από το επόμενο Θεώρημα των Klartag και Vershynin από το [63]:

Αν $1 \leqslant k \leqslant c_1 n(M(C)/b(C))^2$, τότε

$$\frac{c_2}{M(C)} \leqslant \left(\int_{G_{n,k}} R(C\cap F)^k \, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} \leqslant \frac{c_3}{M(C)}, \tag{6.4.11}$$

όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Παρατηρούμε ότι το τυχαίο K_N ικανοποιεί την $K_N \supset Z_2(\mu) = B_2^n$ και ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες, σε συνδυασμό με την ανισότητα Hölder, έχουμε ότι

$$M(K_N) \geqslant \frac{1}{\mathrm{vrad}(K_N)} \simeq \frac{1}{\sqrt{\log N}}.$$

Επομένως, μπορούμε να εφαρμόσουμε την (6.4.11) στο K_N: για κάθε $1 \leqslant k \leqslant cn/\log N$ έχουμε

$$\tilde{D}_k(K_N) \leqslant \left(\int_{G_{n,k}} R(C\cap F)^k \, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} \leqslant \frac{c_3}{M(C)} \leqslant c_4\sqrt{\log N}. \tag{6.4.12}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε κάτω φράγματα για το $\tilde{D}_k(K_N)$. Θα δώσουμε μάλιστα ένα κάτω φράγμα που ισχύει για την ακτίνα *οποιασδήποτε* τομής $K_N \cap F$, $F \in G_{n,k}$. Χρειαζόμαστε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 6.4.7. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι*

$$\log N(B_2^n, tC) \leqslant \frac{\gamma n}{t^\alpha} \tag{6.4.13}$$

για κάθε $t \geqslant 1$ και κάποιες σταθερές $\alpha > 0$ και $\gamma \geqslant 1$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k < n$ και κάθε υπόχωρο $F \in G_{n,k}$ έχουμε

$$R(C \cap F) \geqslant c\alpha\gamma^{-1/\alpha}(k/n)^{1/\alpha}, \tag{6.4.14}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $1 \leqslant k < n$ και $F \in G_{n,k}$. Η προβολή $P_F(C^\circ)$ του C° στον F ικανοποιεί την

$$N(P_F(C^\circ), tB_F) \leqslant N(C^\circ, tB_2^n) \leqslant \exp\left(\frac{\gamma n}{k}\frac{k}{t^\alpha}\right) \tag{6.4.15}$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.4.4 για το σώμα $P_F(C^\circ)$ (με $\gamma' = \gamma n/k$): υπάρχει $H \in G_{k,\lfloor k/2 \rfloor}(F)$ τέτοιος ώστε

$$P_F(C^\circ) \cap H \subseteq c_1\alpha(\gamma n/k)^{1/\alpha} B_H. \tag{6.4.16}$$

Παίρνοντας πολικά στον H βλέπουμε ότι $P_H(C \cap F) \supseteq c_1\alpha(k/\gamma n)^{1/\alpha} B_H$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^k$ και κάθε $H \in G_{k,s}$ ισχύει $M(A \cap H) \leqslant \sqrt{k/s}M(A)$ (βλέπε [1, Κεφάλαιο 5]), έχουμε

$$\begin{aligned} w(C \cap F) = M((C \cap F)^\circ) &\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} M((C \cap F)^\circ \cap H) = \frac{1}{\sqrt{2}} w(P_H(C \cap F)) \\ &\geqslant c_2\alpha(k/\gamma n)^{1/\alpha}. \end{aligned}$$

Το ίδιο κάτω φράγμα ισχύει για την $R(C \cap F)$. ∎

Από την Πρόταση 6.4.2 ξέρουμε ότι αν, για παράδειγμα, $n^2 \leqslant N \leqslant \exp\big((n \log n)^{2/5}\big)$, τότε το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_1\sqrt{N})$ την εκτίμηση εντροπίας

$$\log N(B_2^n, tr_N^{-1}K_N) \leqslant c_2 \frac{n(\log n)^2 \log(1+t)}{t}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Σημειώνουμε ότι οι ενδιαφέρουσες τιμές για το t είναι μέχρι το n (αλλιώς το $tr_N^{-1}K_N$ περιέχει την B_2^n). Έτσι, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 6.4.7 με $C = r_N^{-1}K_N$, $\gamma = \log^3 n$ και $\alpha = 1$ και έχουμε:

Πρόταση 6.4.8. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Αν $n^2 \leqslant N \leqslant \exp\big((n\log n)^{2/5}\big)$ τότε το τυχαίο K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_1\sqrt{N})$ το ακόλουθο: για κάθε $1 \leqslant k < n$ και κάθε υπόχωρο $F \in G_{n,k}$,*

$$R(K_N \cap F) \geqslant c\sqrt{\log N}\frac{k}{n\log^3 n}, \tag{6.4.17}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το ίδιο φράγμα ισχύει για το $\tilde{D}_k(K_N)$.

Παρατήρηση 6.4.9. Ένα ενδιαφέρον και ανοιχτό για την ώρα ερώτημα είναι να δοθεί άνω φράγμα για το $M(K_N)$. Ας αναφέρουμμε σε αυτό το σημείο ότι ανοιχτό είναι και το αντίστοιχο ερώτημα για το $Z_q(\mu)$. Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα εμφανίζεται στο [40] (βλέπε επίσης [46]):

Για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $2 \leqslant q \leqslant q_0 := (n\log n)^{2/5}$ έχουμε

$$M(Z_q(\mu)) \leqslant C\frac{\sqrt{\log q}}{\sqrt[4]{q}}. \tag{6.4.18}$$

Αυτή η εκτίμηση δεν φαίνεται να είναι βέλτιστη. Παρατηρήστε ότι, αφού $K_N \supseteq cZ_{\log N}(\mu)$, έχουμε

$$M(K_N) \leqslant C\frac{\sqrt{\log\log N}}{\sqrt[4]{\log N}} \tag{6.4.19}$$

για το τυχαίο K_N, τουλάχιστον όταν $\log N \leqslant (n\log n)^{2/5}$.

6.5 Σχόλια πάνω στην ισοτροπική σταθερά

Σε αυτή την τελευταία ενότητα εφαρμόζουμε τη μέθοδο των Klartag και Kozma για να εκτιμήσουμε την ισοτροπική σταθερά L_{K_N} του τυχαίου K_N. Αφετηρία μας είναι η ανισότητα

$$|K_N|^{2/n} nL_{K_N}^2 \leqslant \frac{1}{|K_N|}\int_{K_N}\|x\|_2^2\,dx \tag{6.5.1}$$

(βλέπε (1.4.6)).

Αν υποθέσουμε ότι $N \leqslant \exp(\sqrt{n})$ τότε γνωρίζουμε από την (6.1.4) ότι

$$|K_N|^{1/n} \geqslant c_1\frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}} \tag{6.5.2}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_2\sqrt{n})$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(K_N)$ την οικογένεια των εδρών του K_N και με $[y_1,\dots,y_n]$ την κυρτή θήκη των $y_1,\dots,y_n$. Παρατηρούμε ότι, με πιθανότητα ίση 1, όλες οι έδρες του K_N είναι simplices και ότι, για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$, τα x_j και $-x_j$ δεν μπορούν να ανήκουν στην ίδια έδρα του K_N. Ακολουθώντας το επιχείρημα από το [60, Λήμμα 2.5] μπορούμε να δείξουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 6.5.1. *Έστω $F_1,\dots,F_M$ οι έδρες του K_N. Τότε,*

$$\frac{1}{|K_N|}\int_{K_N}\|x\|_2^2dx \leqslant \frac{n}{n+2}\max_{1\leqslant s\leqslant M}\frac{1}{|F_s|}\int_{F_s}\|u\|_2^2du. \tag{6.5.3}$$

Θεωρούμε $y_1,\dots,y_n\in\mathbb{R}^n$ και ορίζουμε $F=[y_1,\dots,y_n]$. Τότε, $F=T(\Delta^{n-1})$ όπου $\Delta^{n-1}=[e_1,\dots,e_n]$ και $T_{ij}=\langle y_j,e_i\rangle =: y_{ji}$. Υποθέτουμε ότι $\det T\neq 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\frac{1}{|F|}\int_F\|u\|_2^2du &= \frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}\|Tu\|_2^2du\\ &= \frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n y_{ji}u_j\right)^2du.\end{aligned}$$

Από το γεγονός ότι

$$\frac{1}{|\Delta^{n-1}|}\int_{\Delta^{n-1}}(u_{j_1}u_{j_2})\,du=\frac{1+\delta_{j_1,j_2}}{n(n+1)}, \tag{6.5.4}$$

έχουμε ότι

$$\frac{1}{|F|}\int_F\|u\|_2^2du=\frac{1}{n(n+1)}\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n y_{ji}^2+\left(\sum_{j=1}^n y_{ji}\right)^2\right), \tag{6.5.5}$$

από το οποίο συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{|F|}\int_F\|u\|_2^2du\leqslant\frac{2}{n(n+1)}\max_{\varepsilon_j=\pm1}\|\varepsilon_1y_1+\cdots+\varepsilon_ny_n\|_2^2. \tag{6.5.6}$$

Στη συνέχεια χρησιμοποιούμε την ακόλουθη ανισότητα τύπου Bernstein (για μια απόδειξη, βλέπε [1, Θεώρημα 3.5.16]):

Λήμμα 6.5.2. *Έστω $g_1,\dots,g_n$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}(g_j)=0$ σε κάποιο χώρο πιθανότητας (Ω,μ). Υποθέτουμε ότι $\|g_j\|_{\psi_1}\leqslant A$ για κάθε $1\leqslant j\leqslant n$ και κάποια σταθερά $A>0$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left\{\left|\sum_{j=1}^n a_jg_j\right|\geqslant t\right\}\leqslant 2\exp\left(-c\min\left\{\frac{t^2}{A^2\|a\|_2^2},\frac{t}{A\|a\|_\infty}\right\}\right) \tag{6.5.7}$$

για κάθε $t>0$.

Αρχικά σταθεροποιούμε $\theta\in S^{n-1}$ και μια επιλογή προσήμων $\varepsilon_j=\pm1$, και εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.5.2 για τις τυχαίες μεταβλητές $g_j(y_1,\dots,y_n)=\langle\varepsilon_jy_j,\theta\rangle$ στον $\Omega=(\mathbb{R}^n,\mu)^n$. Αφού το μ είναι ισοτροπικό, γνωρίζουμε ότι $\|g_j\|_{\psi_1}\leqslant C$. Επιλέγοντας $\alpha=C_0\log(2N/n)$, έχουμε

$$\mathbb{P}\,\{|\langle\varepsilon_1y_1+\cdots+\varepsilon_ny_n,\theta\rangle|>\alpha n\}\leqslant 2\exp(-c\alpha n). \tag{6.5.8}$$

Θεωρούμε ένα $1/2$-δίκτυο $\mathcal{N}$ στην S^{n-1} με πληθικότητα $|\mathcal{N}| \leqslant 5^n$. Τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_2\alpha n)$ έχουμε

$$|\langle \varepsilon_1 y_1 + \cdots + \varepsilon_n y_n, \theta\rangle| \leqslant \alpha n \tag{6.5.9}$$

για κάθε $\theta \in \mathcal{N}$ και κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$. Χρησιμοποιώντας ένα σύνηθες επιχείρημα προσέγγισης και λαμβάνοντας υπόψιν όλες τις 2^n πιθανές επιλογές προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$, παίρνουμε ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_3\alpha n)$,

$$\max_{\varepsilon_j = \pm 1} \|\varepsilon_1 y_1 + \cdots + \varepsilon_n y_n\|_2 \leqslant C_1 \alpha n. \tag{6.5.10}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι

$$|\mathcal{F}(K_N)| \leqslant \binom{2N}{n} \leqslant \exp(c_3\alpha n/2) \tag{6.5.11}$$

αν το C_0 είναι αρκετά μεγάλο. Επομένως, από το Λήμμα 6.5.1 και την (6.5.6), βλέπουμε ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - |\mathcal{F}(K_N)| \exp(-c_3\alpha n) \geqslant 1 - \exp(-c_4\alpha n)$,

$$\frac{1}{|K_N|} \int_{K_N} \|x\|_2^2 dx \leqslant C_2\alpha^2 = C_3 \log^2(2N/n), \tag{6.5.12}$$

όπου $C_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Απο τις (6.5.1) και (6.5.2) παίρνουμε (με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c\sqrt{n})$)

$$L_{K_N}^2 \leqslant \frac{c_4}{\log(2N/n)} \frac{1}{|K_N|} \int_{K_N} \|x\|_2^2 \, dx \leqslant C_5 \log(2N/n), \tag{6.5.13}$$

άρα $L_{K_N} \leqslant C_6 \sqrt{\log(2N/n)}$.

Βιβλιογραφία

[H-1] S. Brazitikos and L. Hioni, *Sub-Gaussian directions of isotropic convex bodies*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **425** (2015), 919-927.

[H-2] A. Giannopoulos, L. Hioni and A. Tsolomitis, *Asymptotic shape of the convex hull of isotropic log-concave random vectors*, Advances in Applied Mathematics **75** (2016), 116-143.

[H-3] S. Brazitikos, G. Chasapis and L. Hioni, *Random approximation and the vertex index of convex bodies*, Archiv der Mathematik **108** (2017), 209-221.

[H-4] A. Giannopoulos, L. Hioni and A. Tsolomitis, *Geometry of random sections of isotropic convex bodies*, Bulletin of the Hellenic Mathematical Society **60** (2016), 20-40.

Βιβλία

[1] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs **202** (2015).

[2] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Amer. Math. Society, Mathematical Surveys and Monographs **196** (2014).

[3] R. Gardner, *Geometric Tomography*, *Second Edition*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **58**, Cambridge University Press, 2006.

[4] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[5] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[6] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

Άρθρα

[7] R. Adamczak, A. E. Litvak, A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Quantitative estimates of the convergence of the empirical covariance matrix in log-concave ensembles*, J. Amer. Math. Soc. **23** (2010), No. 2, 535–561.

[8] D. Alonso-Gutiérrez, *On the isotropy constant of random convex sets*, Proc. Amer. Math. Soc. **136** (2008), 3293–3300.

[9] D. Alonso-Gutiérrez, J. Bastero, J. Bernués and G. Paouris, *High dimensional random sections of isotropic convex bodies*, J. Math. Appl. **361** (2010), 431-439.

[10] D. Alonso-Gutiérrez, N. Dafnis, M. A. Hernandez Cifre and J. Prochno, *On mean outer radii of random polytopes*, Indiana Univ. Math. J. **63** (2014), no. 2, 579-595.

[11] D. Alonso-Gutiérrez, A. E. Litvak and N. Tomczak-Jaegermann, *On the isotropic constant of random polytopes*, J. Geom. Anal. **26** (2016), no. 1, 645-662.

[12] D. Alonso-Gutiérrez and J. Prochno, *On the Gaussian behavior of marginals and the mean width of random polytopes*, Proc. Amer. Math. Soc. **143** (2015), no. 2, 821-832.

[13] S. Artstein, V. Milman and S. Szarek, *Duality of metric entropy*, Annals of Math. **159** (2004), 1313–1328.

[14] K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in* $\mathbb{R}^n$, Studia Math. **88** (1988), 69–84.

[15] K. M. Ball and A. Pajor, *Convex bodies with few faces*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), no. 1, 225–231.

[16] K. M. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, J. London Math. Soc. (2) **44** (1991), 351-359.

[17] F. Barthe, O. Guédon, S. Mendelson and A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the* ℓ_p^n*-ball*, Ann. Prob. **33** (2005), 480–513.

[18] A. Barvinok, *Thrifty approximations of convex bodies by polytopes*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2014), no. 16, 4341–4356.

[19] J. Bastero, *Upper bounds for the volume and diameter of* m*-dimensional sections of convex bodies*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 1851–1859.

[20] J. Batson, D. Spielman and N. Srivastava, *Twice-Ramanujan Sparsifiers*, STOC' 2009: Proceedings of the 41st annual ACM Symposium on Theory of Computing (ACM, New York, 2009), pp. 255–262.

[21] K. Bezdek, *The illumination conjecture and its extensions*, Period. Math. Hungar. **53** (2006), 59–69.

[22] K. Bezdek and A. E. Litvak, *On the vertex index of convex bodies*, Adv. Math. **215** (2007), 626–641.

[23] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 53–69.

[24] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. 56, Birkhauser, Basel, 2003, 3–13.

[25] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. **12** (1974), 239–252.

[26] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467–1476.

[27] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1469** (1991), 127–137.

[28] J. Bourgain and V. D. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in* $\mathbb{R}^n$, Invent. Math. **88** (1987), 319–340.

[29] J. Bourgain, J. Lindenstrauss and V. D. Milman, *Minkowski sums and symmetrizations*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1317** (1988), 44–74.

[30] S. Brazitikos, *Quantitative Helly-type theorem for the diameter of convex sets*, Discrete Comput. Geom. **57** (2017), no. 2, 494-505.

[31] S. Brazitikos and P. Stavrakakis, *On the intersection of random rotations of a symmetric convex body*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **157** (2014), 13-30.

[32] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi and B. Maurey, *The* (B)*-conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems*, J. Funct. Anal. **214** (2004), 410–427.

[33] N. Dafnis, A. Giannopoulos and O. Guédon, *On the isotropic constant of random polytopes*, Advances in Geometry **10** (2010), 311-321.

[34] N. Dafnis, A. Giannopoulos and A. Tsolomitis, *Asymptotic shape of a random polytope in a convex body*, J. Funct. Anal. **257** (2009), 2820–2839.

[35] N. Dafnis, A. Giannopoulos and A. Tsolomitis, *Quermaßintegrals and asymptotic shape of random polytopes in an isotropic convex body*, Michigan Mathematical Journal **62** (2013), 59–79.

[36] N. Dafnis and G. Paouris, *Small ball probability estimates, ψ_2-behavior and the hyperplane conjecture*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 1933-1964.

[37] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[38] M. Fradelizi, *Sections of convex bodies through their centroid*, Arch. Math. **69** (1997), 515–522.

[39] A. Giannopoulos and M. Hartzoulaki, *Random spaces generated by vertices of the cube*, Discrete Comput. Geom. **28** (2002), 255-273.

[40] A. Giannopoulos and E. Milman, *M-estimates for isotropic convex bodies and their L_q-centroid bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2116** (2014), 159-182.

[41] A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Concentration property on probability spaces*, Adv. in Math. **156** (2000), 77-106.

[42] A. Giannopoulos, V. D. Milman and A. Tsolomitis, *Asymptotic formulas for the diameter of sections of symmetric convex bodies*, Journal of Functional Analysis **223** (2005), 86–108.

[43] A. Giannopoulos, A. Pajor and G. Paouris, *A note on subgaussian estimates for linear functionals on convex bodies*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2599–2606.

[44] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the existence of subgaussian directions for log-concave measures*, Contemporary Mathematics **545** (2011), 103–122.

[45] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the distribution of the ψ_2-norm of linear functionals on isotropic convex bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2050** (2012), 227–254.

[46] A. Giannopoulos, P. Stavrakakis, A. Tsolomitis and B-H. Vritsiou, *Geometry of the L_q-centroid bodies of an isotropic log-concave measure*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 7, 4569-4593.

[47] E. D. Gluskin and A. E. Litvak, *Asymmetry of convex polytopes and vertex index of symmetric convex bodies*, Discrete Comput. Geom. **40** (2008), 528–536.

[48] E. D. Gluskin and A. E. Litvak, *A remark on vertex index of the convex bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **2050**, Springer, Berlin (2012), 255–265.

[49] Y. Gordon, *On Milman's inequality and random subspaces which escape through a mesh in $\mathbb{R}^n$*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 84–106.

[50] B. Grünbaum, *Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1257-1261.

[51] O. Guédon and E. Milman, *Interpolating thin-shell and sharp large-deviation estimates for isotropic log-concave measures*, Geom. Funct. Anal. **21** (2011), 1043–1068.

[52] C. Haberl, *L_p intersection bodies*, Adv. Math. **217** (2008), 2599–2624.

[53] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187–204.

[54] M. Hartzoulaki, *Probabilistic methods in the theory of convex bodies*. PhD thesis, University of Crete, 2003.

[55] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541-559.

[56] B. S. Kashin, *Sections of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 334–351.

[57] B. Klartag, *A geometric inequality and a low M-estimate*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 2619-2628.

[58] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1274-1290.

[59] B. Klartag, *Uniform almost sub-Gaussian estimates for linear functionals on convex sets*, Algebra i Analiz **19** (2007), 109–148.

[60] B. Klartag and G. Kozma, *On the hyperplane conjecture for random convex sets*, Israel J. Math. **170** (2009), 253–268.

[61] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform – A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10–34.

[62] B. Klartag and E. Milman, *Inner regularization of log-concave measures and small-ball estimates*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis (Klartag-Mendelson-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **2050** (2012), 267–278.

[63] B. Klartag and R. Vershynin, *Small ball probability and Dvoretzky theorem*, Israel J. Math. **157** (2007), 193–207.

[64] R. Latała, *On the equivalence between geometric and arithmetic means for log-concave measures*, Convex geometric analysis (Berkeley, CA, 1996), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **34**, Cambridge Univ. Press, Cambridge (1999), 123–127.

[65] R. Latala and K. Oleszkiewicz, *Small ball probability estimates in terms of widths*, Studia Math. **169** (2005), 305–314.

[66] D. R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18-29.

[67] A. E. Litvak, V. D. Milman and A. Pajor, *Covering numbers and "low M^*-estimate" for quasi-convex bodies*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1499-1507.

[68] A. Litvak, V. D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95–124.

[69] A. E. Litvak, A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Diameters of Sections and Coverings of Convex Bodies*, J. Funct. Anal. **231** (2006), 438–457.

[70] A. Litvak, V. D. Milman, A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Entropy extension*, Funct. Anal. Appl. **40** (2006), 298–303.

[71] A. E. Litvak, A. Pajor, M. Rudelson and N. Tomczak-Jaegermann, *Smallest singular value of random matrices and geometry of random polytopes*, Adv. Math. **195** (2005), no. 2, 491–523.

[72] L. Lovász and S. Vempala, *The geometry of logconcave functions and sampling algorithms*, Random Structures Algorithms **30** (2007), 307-358.

[73] E. Lutwak and G. Zhang, *Blaschke-Santaló inequalities*, J. Differential Geom. **47** (1997), 1–16.

[74] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *L^p affine isoperimetric inequalities*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111–132.

[75] E. Lutwak, D. Yang, and G. Zhang, *Moment-entropy inequalities*, Annals of Prob. **32** (2004), 757–774.

[76] E. Milman, *On the mean width of isotropic convex bodies and their associated L_p-centroid bodies*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 11, 3408-3423.

[77] V. D. Milman, *Geometrical inequalities and mixed volumes in the Local Theory of Banach spaces*, Astérisque **131** (1985), 373–400.

[78] V. D. Milman, *Random subspaces of proportional dimension of finite dimensional normed spaces: approach through the isoperimetric inequality*, Lecture Notes in Mathematics **1166** (1985), 106–115.

[79] V. D. Milman, *Isomorphic symmetrization and geometric inequalities*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 107–131.

[80] V.D. Milman, *A note on a low M^*-estimate*, in "Geometry of Banach spaces, Proceedings of a conference held in Strobl, Austria, 1989" (P.F. Muller and W. Schachermayer, Eds.), LMS Lecture Note Series, Vol. 158, Cambridge University Press (1990), 219-229.

[81] V. D. Milman, *Some applications of duality relations*, Lecture Notes in Mathematics **1469** (1991), 13–40.

[82] V. D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1376** (1989), 64–104.

[83] V. D. Milman and G. Pisier, *Gaussian processes and mixed volumes*, Annals of Probability **15** (1987), 292–304.

[84] V. D. Milman and G. Schechtman, *Global versus Local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces*, Duke Math. Journal **90** (1997), 73–93.

[85] A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Subspaces of small codimension of finite dimensional Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 637–642.

[86] G. Paouris, *Ψ_2-estimates for linear functionals on zonoids*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 211-222.

[87] G. Paouris, *On the ψ_2-behavior of linear functionals on isotropic convex bodies*, Studia Math. **168** (2005), 285–299.

[88] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geometric and Functional Analysis **16** (2006), 1021–1049.

[89] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287–308.

[90] G. Paouris and P. Pivovarov, *A probabilistic take on isoperimetric-type inequalities*, Adv. Math. **230** (2012), 1402-1422.

[91] G. Paouris and E. Werner, *Relative entropy of cone measures and L_p-centroid bodies*, Proc. Lond. Math. Soc. **104** (2012), 253-286.

[92] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Annals of Math. **115** (1982), 375-392.

[93] G. Pisier, *A new approach to several results of V. Milman*, J. Reine Angew. Math. **393** (1989), 115–131.

[94] P. Pivovarov, *On the volume of caps and bounding the mean-width of an isotropic convex body*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **149** (2010), 317-331.

[95] P. Pivovarov, *On determinants and the volume of random polytopes in isotropic convex bodies*, Geometriae Dedicata **149**, (2010), 45-58.

[96] N. Srivastava, *On contact points of convex bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2050**, Springer, Berlin (2012), 393–412.

[97] R. Vershynin, *Isoperimetry of waists and local versus global asymptotic convex geometries* (with an appendix by M. Rudelson and R. Vershynin), Duke Mathematical Journal **131** (2006), 1–16.

[98] B-H. Vritsiou, *Further unifying two approaches to the hyperplane conjecture*, Int. Math. Res. Not. (2014).

Abstract

Using probabilistic methods we contribute to the following questions about isotropic convex bodies and, more generally, log-concave probability measures in $\mathbb{R}^n$.

Sub-Gaussian directions of isotropic convex bodies. Let K be a centered convex body of volume 1 in $\mathbb{R}^n$. A direction $\theta \in S^{n-1}$ is called sub-Gaussian for K with constant $b > 0$ if $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant b\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(K)}$. We show that if K is isotropic then most directions are sub-Gaussian with a constant which is logarithmic in the dimension. More precisely, for any $\alpha > 1$ we have

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_{\psi_2}(K)} \leqslant C(\log n)^{3/2} \max\left\{\sqrt{\log n}, \sqrt{\alpha}\right\} L_K$$

for all θ in a subset Θ_α of S^{n-1} with $\sigma(\Theta_\alpha) \geqslant 1 - n^{-\alpha}$, where $C > 0$ is an absolute constant. We also give bounds on the diameter of random projections of the L_q-centroid bodies $Z_q(K)$ of K and using them we deduce that if K is an isotropic convex body in $\mathbb{R}^n$ then for a random subspace F of dimension $(\log n)^4$ one has that all directions in F are sub-Gaussian with constant $O(\log^2 n)$.

Random sections of isotropic convex bodies. Let K be an isotropic symmetric convex body in $\mathbb{R}^n$. We show that a subspace $F \in G_{n,n-k}$ of codimension $k = \gamma n$, where $\gamma \in (1/\sqrt{n}, 1)$, satisfies

$$K \cap F \subseteq \frac{c}{\gamma}\sqrt{n} L_K (B_2^n \cap F)$$

with probability greater than $1 - \exp(-\sqrt{n})$. Using a different method we study the same question for the L_q-centroid bodies $Z_q(\mu)$ of an isotropic log-concave probability measure μ on $\mathbb{R}^n$. For every $1 \leqslant q \leqslant n$ and $\gamma \in (0,1)$ we show that a random subspace $F \in G_{n,(1-\gamma)n}$ satisfies $Z_q(\mu) \cap F \subseteq c_2(\gamma)\sqrt{q}\, B_2^n \cap F$.

Rough random approximation and the vertex index of convex bodies. We prove that there exists an absolute constant $\alpha > 1$ with the following property: if K is a convex body in $\mathbb{R}^n$ whose center of mass is at the origin, then a random subset $X \subset K$ of cardinality $\mathrm{card}(X) = \lceil \alpha n \rceil$ satisfies with probability greater than $1 - e^{-c_1 n}$

$$K \subseteq c_2 n \,\mathrm{conv}(X),$$

where $c_1, c_2 > 0$ are absolute constants. As an application we show that the vertex index of any convex body K in $\mathbb{R}^n$ is bounded by $c_3 n^2$, where $c_3 > 0$ is an absolute constant, thus extending an estimate of Bezdek and Litvak for the symmetric case.

Asymptotic shape of random polytopes. Let $x_1, \ldots, x_N$ be independent random points distributed according to an isotropic log-concave measure μ on $\mathbb{R}^n$, and consider the random polytope

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}.$$

We provide sharp estimates for the quermassintegrals and other geometric parameters of K_N in the range $cn \leqslant N \leqslant \exp(n)$; these complement previous results of Dafnis, Giannopoulos and Tsolomitis that were given for the range $cn \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$.