Συναρτησιακές ανισότητες και εφαρμογές σε προβλήματα κυρτής και στοχαστικής γεωμετρίας

Διδακτορική Διατριβή

Δημήτρης-Μάριος Λιακόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2019

Εισηγητής:

Απόστολος Γιαννόπουλος

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Χρησιμοποιώντας γεωμετρικές και αναλυτικές μεθόδους αποδεικνύουμε συναρτησιακές ανισότητες και παρουσιάζουμε εφαρμογές τους στην κυρτή και στοχαστική γεωμετρία.

1. Ανισότητες για τον όγκο τομών και προβολών κυρτών σωμάτων. Αποδεικνύουμε περιορισμένες εκδοχές της ανισότητας Loomis-Whitney και της ανισότητας ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás και Thomason. Γενικεύουμε αυτά τα αποτελέσματα στο πλαίσιο των μεικτών όγκων και παίρνουμε ως εφαρμογή νέες εκτιμήσεις για σχετικές εικασίες των Hug-Schneider και Soprunov-Zvavitch. Ξεκινώντας από την δυϊκή ανισότητα Loomis-Whitney του Meyer μελετάμε το δυϊκό πρόβλημα για τομές και, χρησιμοποιώντας την θεωρία των L_p-κεντροειδών σωμάτων, αποδεικνύουμε τις αντίστοιχες περιορισμένες εκδοχές της ανισότητας του Meyer. Συζητάμε την σχέση της πολυδιάστατης γενίκευσης της γεωμετρικής ανισότητας Brascamp-Lieb και της πολυδιάστατης αντίστροφης ανισότητας Brascamp-Lieb (που οφείλεται στον Barthe) με την ανισότητα Loomis-Whitney, την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás-Thomason και διάφορες γενικεύσεις τους. Αποδεικνύουμε ότι όλες αυτές οι ανισότητες προκύπτουν από την πολυδιάστατη ανισότητα Brascamp-Lieb. Ξεκινώντας από αυτήν την οπτική και έχοντας αυτή τη φορά ως εργαλείο την πολυδιάστατη αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb του Barthe, αποδεικνύουμε μια νέα ανισότητα, την δυϊκή ανισότητα Bollobás-Thomason. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει από μια νέα συναρτησιακή ανισότητα για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις.

2. Συναρτησιακές και στοχαστικές εκδοχές ισοπεριμετρικών ανισοτήτων. Παρουσιάζουμε συναρτησιακές και στοχαστικές εκδοχές κάποιων ισοπεριμετρικών ανισοτήτων για κυρτά σώματα. Επικεντρωνόμαστε στην προσέγγιση των Παούρη και Pivovarov, οι οποίοι χρησιμοποίησαν ανισότητες αναδιάταξης και ταυτότητες από την ολοκληρωτική γεωμετρία για να επεκτείνουν στο γενικότερο πλαίσιο των συνεχών κατανομών διάφορα κλασσικά αποτελέσματα όπως η ανισότητα του Busemann για τυχαία simplices, η ανισότητα Busemann-Straus/Grinberg, η ανισότητα Blaschke-Santaló, ανισότητες για τον όγκο κεντροειδών σωμάτων και άλλες. Τα βασικά εργαλεία σε αυτήν την προσέγγιση είναι η ανισότητα Rogers/Brascamp-Lieb-Luttinger (και μεταγενέστερη δουλειά του Christ) και ταυτότητες τύπου Blaschke-Petkantschin από την ολοκληρωτική γεωμετρία. Αποδεικνύουμε μια επέκταση της ανισότητας Busemann-Straus/Grinberg για φραγμένα Borel σύνολα. Δείχνουμε επίσης ότι στην περίπτωση που το K είναι κυρτό σώμα, ισχύει και αντίστροφη ανισότητα. Αν υποθέσουμε ότι το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ένα επιχείρημα δυϊσμού, το οποίο βασίζεται στην ανισότητα Blaschke-Santaló και την ανισότητα Bourgain-Milman, οδηγεί σε αντίστοιχες ανισότητες για τον όγκο των προβολών του K. Δίνουμε και ευθεία απόδειξη, χωρίς να υποθέσουμε την συμμετρία του σώματος. Αποδεικνύουμε επίσης γενικές συναρτησιακές ανισότητες, ειδικές περιπτώσεις των οποίων είναι οι συναρτησιακές εκδοχές των παραπάνω γεωμετρικών ανισοτήτων.

3. Εκτιμήσεις για μέτρα τομών κυρτών σωμάτων. Συζητάμε γενικεύσεις του «προβλήματος των τομών» και του προβλήματος Busemann-Petty, τόσο στο κλασσικό πλαίσιο όσο και στο γενικευμένο πλαίσιο όπου τυχόν μέτρο αντικαθιστά τον όγκο, ένα πλαίσιο το οποίο μελετήθηκε αρχικά από τον Koldobsky για το πρόβλημα των τομών και από τον Zvavitch για το πρόβλημα Busemann-Petty. Η προσέγγισή μας είναι διαφορετική και βασίζεται σε ολοκληρωτικές ταυτότητες τύπου Blaschke-Petkantschin και ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals. Η μέθοδος που εισάγουμε μας επιτρέπει, συχνά, να αφαιρέσουμε τις υποθέσεις της συμμετρίας και κυρτότητας των σωμάτων, καθώς και της συνέχειας της πυκνότητας του μέτρου.

4. Παρατηρήσεις για την M-παράμετρο ισοτροπικών κυρτών σωμάτων. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, το κέντρο βάρους του είναι στην αρχή των αξόνων, και ο πίνακας αδρανείας του είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα: υπάρχει μια σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2 dx = L_K^2$$

για κάθε ϑ στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Το ερώτημα να δοθεί άνω φράγμα για το μέσο πλάτος $w(K)$ ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος ήταν ανοικτό για αρκετά χρόνια και, τελικά, απαντήθηκε από τον E. Milman ο οποίος απέδειξε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $w(K) \leqslant C\sqrt{n}(\log n)^2 L_K$. Η εξάρτηση από το n είναι βέλτιστη αν εξαιρέσουμε τον λογαριθμικό παράγοντα. Το δυϊκό πρόβλημα, να δοθεί άνω φράγμα για την αντίστοιχη L_1-νόρμα του συναρτησοειδούς Minkowski του K,

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K \, d\sigma(\vartheta),$$

όταν το K είναι συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα, είναι ανοικτό: η καλύτερη γνωστή εκτίμηση οφείλεται στους Γιαννόπουλο και E. Milman. Περιγράφουμε μια αναγωγή του προβλήματος, η οποία οδηγεί σε νέα, κατά την γνώμη μας ενδιαφέροντα, προβλήματα για την γεωμετρία των χαμηλότερης διάστασης τομών και προβολών των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων. Συζητάμε αυτά τα προβλήματα και δίνουμε κάποιες εκτιμήσεις.

Το πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται τα αποτελέσματα της διατριβής αναλύεται στο Κεφάλαιο 2, στο οποίο γίνεται επίσης σύγκριση με προηγούμενα αποτελέσματα. Τα βασικά γεωμετρικά και αναλυτικά εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούνται στη διατριβή παρουσιάζονται συνοπτικά στο εισαγωγικό Κεφάλαιο 1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Βασικές έννοιες, γεωμετρικά και αναλυτικά εργαλεία

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε βασικές έννοιες και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί στην διατριβή. Παρουσιάζουμε επίσης τα βασικά τεχνικά εργαλεία, από την κυρτή γεωμετρική ανάλυση και την ολοκληρωτική γεωμετρία, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα.

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$ και $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Με $(e_i)_{i=1}^n$ συμβολίζουμε τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$, και με $0 = (0, \ldots, 0)$ την αρχή των αξόνων. Για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ με $\vartheta^{\perp}$ συμβολίζουμε το κεντρικό υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο ϑ. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την Ευκλείδεια νόρμα $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, και γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Με τον όρο *όγκος* του A, αναφερόμαστε στο n-διάστατο μέτρο Lebesgue ενός (πλήρους διάστασης) μετρήσιμου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε τον όγκο ενός τέτοιου συνόλου A με $\mathrm{vol}_n(A)$. Γράφουμε κ_n για τον όγκο της B_2^n.

Η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} είναι εφοδιασμένη με ένα αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας, το οποίο συμβολίζουμε με σ: ένας τρόπος ορισμού αυτού του μέτρου είναι να θέσουμε

$$\sigma(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(C(A))}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)},$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq S^{n-1}$, όπου $C(A) = \{tx : x \in A, t \in [0, 1]\}$.

Γράφουμε $GL(n)$ για το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, και $SL(n) = \{T \in GL(n) : \det(T) = 1\}$ είναι το υποσύνολο των $T \in GL(n)$ που διατηρούν τον όγκο. Με $O(n)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών στον $\mathbb{R}^n$. Η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ είναι εφοδιασμένη με ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας (μέτρο Haar) το οποίο συμβολίζουμε με ν_n. Σταθεροποιώντας τυχόν $x_0 \in S^{n-1}$ έχουμε, για κάθε μετρήσιμο

$A \subseteq S^{n-1}$, την ταυτότητα

$$\sigma(A) := \nu_n \left(\{U \in O(n) : U(x_0) \in A\}\right).$$

Για κάθε φυσικό $k < n$, με $G_{n,k}$ συμβολίζουμε την πολλαπλότητα Grassmann, το σύνολο των k-διάστατων υπόχωρων του $\mathbb{R}^n$. Η $G_{n,k}$ είναι επίσης εφοδιασμένη με ένα μέτρο Haar πιθανότητας που συμβολίζουμε με $\nu_{n,k}$, και ορίζεται μέσω του μέτρου στην $O(n)$: Για κάθε μετρήσιμο $S \subseteq G_{n,k}$,

$$\nu_{n,k}(S) := \nu_n \left(\{U \in O(n) : U(\mathbb{R}^k) \in S\}\right).$$

Για έναν υπόχωρο $F \in G_{n,k}$, συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ επί του F.

Τα γράμματα $c, c', \overline{c}, c_1, c_2$ κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές που η τιμή τους μπορεί να αλλάζει από γραμμή σε γραμμή. Όταν γράφουμε $a \lesssim b$, εννοούμε ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $a \leqslant cb$. Γράφουμε επίσης $a \approx b$ αν $a \lesssim b$ και $b \lesssim a$. Όμοια, αν $K, T \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K \approx T$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 K \subseteq T \subseteq c_2 K$. Συμβολίζουμε τέλος με $|A|$ τον πληθάριθμο ενός πεπερασμένου συνόλου A, και συχνά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

1.1 Κυρτά σώματα

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_n$ την κλάση όλων των μη κενών συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το K είναι συμμετρικό αν $K = -K$, δηλαδή αν «$x \in K$ αν και μόνο αν $-x \in K$». Λέμε ότι το K έχει κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων αν το βαρύκεντρό του $\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_K x \, dx$ είναι στην αρχή των αξόνων. Ισοδύναμα, αν

$$\int_K \langle x, \vartheta \rangle \, dx = 0$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Η ακτίνα του K είναι ο μικρότερος $R > 0$ για τον οποίο $K \subseteq RB_2^n$. Αν $0 \in \mathrm{int}(K)$, τότε γράφουμε $r(K)$ για την εσωτερική ακτίνα του K (τον μεγαλύτερο $r > 0$ για τον οποίο $rB_2^n \subseteq K$). Για ευκολία στο συμβολισμό, γράφουμε $\overline{K}$ για το πολλαπλάσιο όγκου 1 ενός κυρτού σώματος $K \subseteq \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\overline{K} := \mathrm{vol}_n(K)^{-1/n} K$.

Ένα συμπαγές σύνολο K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται αστρόμορφο (στο 0) αν περιέχει την αρχή των αξόνων στο εσωτερικό του και κάθε ευθεία που περνάει από το 0 τέμνει το K σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Για κάθε τέτοιο σύνολο, η ακτινική συνάρτηση ρ_K ορίζεται στην S^{n-1} από την

$$\rho_K(\vartheta) = \max\{t > 0 : t\vartheta \in K\}, \qquad \vartheta \in S^{n-1}. \tag{1.1.1}$$

Αν η ρ_K είναι συνεχής, λέμε ότι το K είναι αστρόμορφο σώμα. Τότε, ο όγκος του K σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από την

$$\mathrm{vol}_n(K) = \kappa_n \int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\vartheta) \, d\sigma(\vartheta). \tag{1.1.2}$$

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε την ακτινική συνάρτηση ρ_K στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ μέσω της $\rho_K(x) = \max\{t > 0 : tx \in K\}$. Τότε, η ρ_K είναι θετικά ομογενής βαθμού -1, δηλαδή $\rho_K(ax) = a^{-1}\rho_K(x)$ για κάθε $a > 0$.

Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_K$ το συναρτησοειδές Minkowski του K,

$$\|x\|_K = \min\{t \geqslant 0 : x \in tK\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{1.1.3}$$

Παρατηρήστε ότι $\rho_K(\vartheta) = \|\vartheta\|_K^{-1}$ για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Στην περίπτωση που το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα, το συναρτησοειδές Minkowski $\|\cdot\|_K$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, για την οποία ισχύει $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leqslant 1\}$. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X, $B_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Με αυτήν την έννοια, η κλάση των n-διάστατων χώρων με νόρμα ταυτίζεται με την κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$.

Η ακτίνα όγκου ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vrad}(K) = \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}. \tag{1.1.4}$$

Από την (1.1.2) βλέπουμε ότι αν η αρχή των αξόνων είναι εσωτερικό σημείο του K τότε η ακτίνα όγκου του K είναι ίση με

$$\mathrm{vrad}(K) = \left(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K^{-n}\, d\sigma(\vartheta)\right)^{1/n}. \tag{1.1.5}$$

Η συνάρτηση στήριξης ενός κυρτού σώματος K ορίζεται από την

$$h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}. \tag{1.1.6}$$

Η συνάρτηση στήριξης χαρακτηρίζει το σώμα: Έχουμε $h_K \leqslant h_L$ αν και μόνο αν $K \subseteq L$. Γεωμετρικά, για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$, η ποσότητα $h_K(\vartheta)$ είναι η (προσημασμένη) απόσταση του υπερεπιπέδου στήριξης του K στη διεύθυνση ϑ από την αρχή των αξόνων, η δε ποσότητα $h_K(\vartheta) + h_K(-\vartheta)$ μετράει το «πλάτος» του σώματος K στη διεύθυνση $\vartheta \in S^{n-1}$. Θεωρώντας τη μέση τιμή αυτού του πλάτους στην S^{n-1} (και διαιρώντας με 2) παίρνουμε το *μέσο πλάτος* του K,

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta). \tag{1.1.7}$$

Το συναρτησοειδές h_K είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Λόγω της θετικής ομογένειας μάλιστα, είναι συνηθισμένο να θεωρούμε την h_K ορισμένη μόνο στη σφαίρα S^{n-1}, αντί για ολόκληρον τον $\mathbb{R}^n$. Παρατηροούμε επίσης ότι η h_K είναι άρτια αν και μόνο αν το K είναι συμμετρικό, και θετική αν και μόνο αν $0 \in \mathrm{int}(K)$. Όταν ισχύουν τα παραπάνω, η h_K είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Η κλειστή μοναδιαία μπάλα αυτής της νόρμας είναι το λεγόμενο *πολικό σώμα* του K, το οποίο μπορεί να οριστεί και χωρίς την υπόθεση της συμμετρίας: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $0 \in \mathrm{int}(K)$, ορίζουμε

$$K^\circ := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max_{y\in K}\langle x, y\rangle \leqslant 1\right\}. \tag{1.1.8}$$

Στην περίπτωση που το K είναι συμμετρικό, και $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$, έχουμε $K^\circ = B_{X^*}$, δηλαδή το πολικό σώμα K° είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του δυϊκού χώρου X^*. Σημειώνουμε επίσης ότι $(K^\circ)^\circ = K$ και $h_K(\cdot) = \|\cdot\|_{K^\circ}$ για κάθε κυρτό σώμα K με $0 \in \mathrm{int}(K)$.

Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο 1, έχει κέντρο βάρους το 0, και ο πίνακας αδρανείας του είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, δηλαδή αν υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2 dx = L_K^2 \tag{1.1.9}$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό. Αυτή η ισοτροπική εικόνα του K είναι μονοσήμαντα ορισμένη modulo ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μερικές βασικές γεωμετρικές ανισότητες που θα χρησιμοποιούμε συχνά.

Θεώρημα 1.1.1 (ανισότητα Brunn-Minkowski)**.** *Έστω K και L δύο μη-κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K+L)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(L)^{1/n}. \tag{1.1.10}$$

Αν τα K και L είναι κυρτά σώματα, τότε ισότητα στην (1.1.10) *ισχύει αν και μόνον αν τα K και L είναι ομοιοθετικά.*

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει τον όγκο με το άθροισμα Minkowski. Μια ισοδύναμη διατύπωση είναι ότι για κάθε $\lambda \in (0,1)$, και κάθε ζεύγος μη-κενών, συμπαγών υποσυνόλων K, L του $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)L)^{1/n} \geqslant \lambda \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(L)^{1/n}. \tag{1.1.11}$$

Η ανισότητα αυτή είναι επίσης ισοδύναμη με την

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)L) \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{\lambda}\mathrm{vol}_n(L)^{1-\lambda}. \tag{1.1.12}$$

για κάθε K, L και $\lambda \in (0,1)$. Η συναρτησιακή εκδοχή της ανισότητας Brunn-Minkowski είναι η ανισότητα Prékopa-Leindler: Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{1.1.13}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\right)^{1-\lambda}. \tag{1.1.14}$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται άμεσα από την ανισότητα Prékopa-Leindler, αν θεωρήσουμε τις $f = \mathbf{1}_K$, $g = \mathbf{1}_L$ και $h = \mathbf{1}_{\lambda K + (1-\lambda)L}$.

Μια κλασσική ανισότητα που προκύπτει από την ανισότητα Brunn-Minkowski σε συνδυασμό με τη μέθοδο της συμμετρικοποίησης κατά Steiner (για μια απόδειξη, βλέπε [1, Θεώρημα 1.5.11]) είναι η ανισότητα του Urysohn.

Θεώρημα 1.1.2 (ανισότητα Urysohn). *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε*

$$w(K) \geqslant \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}. \tag{1.1.15}$$

Παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος της (1.1.15) ισούται με την ακτίνα όγκου του K. Μπορούμε λοιπόν να την διατυπώσουμε στην ισοδύναμη μορφή

$$w(K) \geqslant \mathrm{vrad}(K). \tag{1.1.16}$$

Μια βασική ανισότητα που συνδέει τον όγκο ενός κυρτού σώματος με τον όγκο του πολικού του είναι η ανοσότητα Blaschke-Santaló.

Θεώρημα 1.1.3 (ανισότητα Blaschke-Santaló). *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leqslant \kappa_n^2. \tag{1.1.17}$$

Η παραπάνω ανισότητα στην ουσία λέει ότι το γινόμενο όγκων $\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ)$ μεγιστοποιείται στην περίπτωση που το K είναι ελλειψοειδές. Όπως με την ανισότητα του Urysohn, μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα Blaschke-Santaló χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski και συμμετρικοποίηση κατά Steiner (βλέπε [1, Παράγραφος 1.5.4])

Δεδομένου ότι $\kappa_n^{1/n} \approx n^{-1/2}$, η ανισότητα Blaschke-Santaló μας δίνει

$$\big(\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ)\big)^{1/n} \leqslant \frac{c}{n} \tag{1.1.18}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ένα μεταγενέστερο αποτέλεσμα των Bourgain και Milman εξασφαλίζει ότι στην ουσία η ανισότητα αυτή αντιστρέφεται. Γι' αυτό το λόγο, το επόμενο θεώρημα αναφέρεται και ως «αντίστροφη ανισότητα Santaló».

Θεώρημα 1.1.4 (ανισότητα Bourgain-Milman). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $0 \in \mathrm{int}(K)$. Τότε,*

$$(\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ))^{1/n} \geqslant \frac{c}{n} \tag{1.1.19}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατηρήστε ότι από τις ανισότητες Blaschke-Santaló και Bourgain-Milman έπεται ότι

$$\mathrm{vrad}(K)\mathrm{vrad}(K^\circ) \approx 1,$$

για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την θεωρία Brunn-Minkowski και την ασυμπτωτική θεωρία κυρτών σωμάτων παραπέμπουμε στα βιβλία [8] και [1] αντίστοιχα.

1.2 Μεικτοί όγκοι

Οι μεικτοί όγκοι ορίζονται μέσω ενός κλασσικού θεωρήματος του Minkowski το οποίο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ο όγκος αλληλεπιδρά με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού συμπαγών κυρτών συνόλων με μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Αν $K_1, \ldots, K_N \in \mathcal{K}_n$, $N \in \mathbb{N}$, τότε ο όγκος του $t_1K_1 + \cdots + t_NK_N$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς $t_i \geqslant 0$ (βλέπε [3] και [8]):

$$\mathrm{vol}_n(t_1K_1 + \cdots + t_NK_N) = \sum_{1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant N} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}) t_{i_1} \cdots t_{i_n}, \tag{1.2.1}$$

όπου οι συντελεστές $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ επιλέγονται έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτοι ως προς μεταθέσεις των ορισμάτων τους. Ο συντελεστής $V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$ ονομάζεται μεικτός όγκος της n-άδας $(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n})$. Θα χρησιμοποιούμε συχνά το γεγονός ότι η συνάρτηση V είναι θετικά γραμμική ως προς κάθε όρισμά της και ότι $V(K, \ldots, K) = \mathrm{vol}_n(K)$ για κάθε $K \in \mathcal{K}_n$.

Ο τύπος του Steiner είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Minkowski. Ο όγκος του $K + tB_2^n$, $t > 0$, αναπτύσσεται ως πολυώνυμο του t:

$$\mathrm{vol}_n(K + tB_2^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_k(K) t^k, \tag{1.2.2}$$

όπου $W_k(K) := V(K[n-k], B_2^n[k])$ είναι το k-οστό quermassintegral του K.

Η ακολουθία των intrinsic volumes ενός κυρτού σώματος προκύπτει από μια διαφορετική κανονικοποίηση των quermassintegrals. Ορίζουμε τον *k-στο intrinsic volume* $V_k(K)$ του K, μέσω της

$$V_k(K) := \kappa_{n-k}^{-1} \binom{n}{k} W_{n-k}(K) \tag{1.2.3}$$

(βλέπε [8]). Με αυτήν την κανονικοποίηση έχουμε $V_0(K) = 1$, $V_n(K) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $V_1(K) = n\frac{\kappa_n}{\kappa_{n-1}} w(K)$.

Η ανισότητα Aleksandrov-Fenchel ισχυρίζεται ότι για κάθε $K, L, K_3, \ldots, K_n \in \mathcal{K}_n$ ισχύει η ανισότητα

$$V(K, L, K_3, \ldots, K_n)^2 \geqslant V(K, K, K_3, \ldots, K_n) V(L, L, K_3, \ldots, K_n) \tag{1.2.4}$$

(βλέπε [1, Θεώρημα B.2.1]). Ειδικότερα, αυτή η ανισότητα έχει ως συνέπεια το γεγονός ότι η ακολουθία $(W_0(K), \ldots, W_n(K))$ είναι λογαριθμικά κοίλη. Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel μπορούμε να πάρουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski καθώς και την ακόλουθη γενίκευση για τα quermassintegrals:

$$W_k(K + L)^{\frac{1}{n-k}} \geqslant W_k(K)^{\frac{1}{n-k}} + W_k(L)^{\frac{1}{n-k}}, \qquad k = 0, \ldots, n-1. \tag{1.2.5}$$

Από την ανισότητα Alexandrov-Fenchel έπεται επίσης ότι

$$\left(\frac{W_k(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n-k}} \geqslant \left(\frac{W_j(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{n-j}}, \tag{1.2.6}$$

για κάθε $0 \leqslant j < k \leqslant n$. Με βάση αυτήν την παρατήρηση ορίζουμε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$

$$Q_k(K) := \left(\frac{W_{n-k}(K)}{\kappa_n}\right)^{\frac{1}{k}} \tag{1.2.7}$$

και λέμε ότι το $Q_k(K)$ είναι το *κανονικοποιημένο k-στό quermassintegral* του K. Με αυτόν τον συμβολισμό, έχουμε $Q_1(K) = w(K)$, $Q_n(K) = \mathrm{vrad}(K)$. Από την (1.2.6) βλέπουμε ότι η $(Q_k(K))_{k\leqslant n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία του k.

Συμβολίζουμε με $S(K)$ την επιφάνεια του K. Από τον τύπο του Steiner και τον ορισμό της επιφάνειας βλέπουμε ότι $S(K) = nW_1(K)$. Ο ολοκληρωτικός τύπος του Kubota μας δίνει μια πολύ χρήσιμη αναπαράσταση των quermassintegrals:

$$W_k(K) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k}} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(P_E(K))\, d\nu_{n,n-k}(E), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{1.2.8}$$

Η περίπτωση $k = 1$ αντιστοιχεί στον τύπο του Cauchy για την επιφάνεια:

$$S(K) = \frac{\kappa_n}{n\kappa_{n-1}} \int_{S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(P_{\vartheta^\perp}(K))\, d\sigma(\vartheta). \tag{1.2.9}$$

Εφαρμόζοντας τον τύπο του Kubota για $k = n-1$ παίρνουμε $W_{n-1}(K) = \kappa_n w(K)$, ενώ εύκολα βλέπουμε ότι $W_0(K) = \mathrm{vol}_n(K)$, $W_n(K) = \kappa_n$. Ο τύπος του Kubota δίνει επίσης μια ολοκληρωτική αναπαράσταση για το Q_k, ανάλογη της 1.2.8:

$$Q_k(K) = \left(\frac{1}{\kappa_k} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k}. \tag{1.2.10}$$

Οι δυϊκοί μεικτοί όγκοι εισήχθησαν από τον Lutwak στο [79]. Αρχικά θεώρησε κυρτά σώματα, στη συνέχεια όμως επεξέτεινε τον ορισμό του στην κλάση $\mathcal{S}_n$ των αστρόμορφων σωμάτων. Αν $K_1, \ldots, K_n \in \mathcal{S}_n$, ο δυϊκός μεικτός όγκος τους είναι το ολοκλήρωμα

$$\tilde{V}(K_1, \ldots, K_n) = \kappa_n \int_{S^{n-1}} \rho_{K_1}(\vartheta) \cdots \rho_{K_n}(\vartheta) d\sigma(\vartheta). \tag{1.2.11}$$

Αυτά τα ολοκληρώματα έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των μεικτών όγκων αν αντικαταστήσουμε την πρόσθεση κατά Minkowski με την ακτινική πρόσθεση. Η συνάρτηση $\tilde{V}$ είναι προφανώς μη αρνητική, συμμετρική και μονότονη ως προς τα ορίσματά της, θετικά γραμμική ως προς την $\tilde{+}$ για κάθε όρισμά της, και έχει ως διαγώνιο τον όγκο. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι αν $K_1, \ldots, K_m \in \mathcal{S}_n$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$, τότε

$$\mathrm{vol}_n(\lambda_1 K_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} \lambda_m K_m) = \sum_{i_1, \ldots, i_n = 1}^{m} \tilde{V}(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}) \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_n}, \tag{1.2.12}$$

όπου το ακτινικό άθροισμα $K \tilde{+} D$ δύο αστρόμορφων σωμάτων K και D ορίζεται από την

$$\rho_{K \tilde{+} D} = \rho_K + \rho_D. \tag{1.2.13}$$

Ειδικότερα, αν $K, D \in \mathcal{S}_n$ και $t > 0$ τότε

$$\mathrm{vol}_n(K \tilde{+} tD) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \tilde{V}_j(K, D)\, t^j, \tag{1.2.14}$$

όπου $\tilde{V}_j(K,D) := \kappa_n \int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-j}(\vartheta)\rho_D^j(\vartheta)d\sigma(\vartheta)$ είναι ο j-οστός δυϊκός μεικτός όγκος των K και D.

Μια ανισότητα που δείχνει την αναλογία με τους μεικτούς όγκους είναι η δυϊκή ανισότητα Minkowski: για κάθε $K, D \in \mathcal{S}_n$, απλή εφαρμογή της ανισότητας Hölder μας δίνει

(1.2.15)
$$\tilde{V}_1(K,D) \leqslant \left(\kappa_n \int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\vartheta)d\sigma(\vartheta)\right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\kappa_n \int_{S^{n-1}} \rho_D^n(\vartheta)d\sigma(\vartheta)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}}\mathrm{vol}_n(D)^{\frac{1}{n}}.$$

Τα μεικτά επιφανειακά μέτρα ορίστηκαν από τον Aleksandrov και είναι, κατά κάποιον τρόπο, μια τοπική γενίκευση των μεικτών όγκων. Για κάθε $(n-1)$-άδα $\mathcal{L} = (K_1, \ldots, K_{n-1})$ στοιχείων του $\mathcal{K}_n$, το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός μέτρου Borel $S(\mathcal{L}, \cdot)$ στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} με την ιδιότητα

(1.2.16)
$$V(C, K_1, \ldots, K_{n-1}) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_C(\vartheta)dS(\mathcal{L},\vartheta)$$

για κάθε $C \in \mathcal{K}_n$. Το k-οστό επιφανειακό μέτρο του K ορίζεται να είναι το $S_k(K,\cdot) = S(K;k,B_2^n;n-k-1,\cdot)$, $k = 0,1,\ldots,n-1$. Άμεση συνέπεια αυτού του ορισμού είναι ότι τα quermassintegrals του K μπορούν να αναπαρασταθούν στην μορφή

(1.2.17)
$$W_k(K) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta)dS_{n-k-1}(K,\vartheta), \qquad k = 0,1,\ldots,n-1.$$

Το μέτρο $\sigma_K := S(K,\ldots,K)$, το οποίο αντιστοιχεί στην περίπτωση $k = n-1$, είναι το επιφανειακό μέτρο του K. Ο μεικτός όγκος $V_1(K,C)$ εκφράζεται ως

(1.2.18)
$$V_1(K,C) = \frac{1}{n}\int_{S^{n-1}} h_C(\vartheta)d\sigma_K(\vartheta).$$

Παρατηρήστε ότι η επιφάνεια του K ικανοποιεί την

(1.2.19)
$$S(K) = nV_1(K,B_2^n).$$

1.3 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση των Borel μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Η πυκνότητα του $\mu \in \mathcal{P}_n$ συμβολίζεται με f_μ. Λέμε ότι το $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει κέντρο βάρους το 0 και γράφουμε $\mathrm{bar}(\mu) = 0$ αν, για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$,

(1.3.1)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\vartheta\rangle d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\vartheta\rangle f_\mu(x)dx = 0.$$

Ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν

(1.3.2)
$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}$$

για κάθε ζεύγος μη κενών συμπαγών υποσυνόλων A και B του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν ο φορέας της, $\{f > 0\}$, είναι κυρτό σύνολο και ο περιορισμός της $\log f$ σε αυτόν είναι κοίλη συνάρτηση. Είναι γνωστό ότι αν ένα μέτρο πιθανότητας μ είναι λογαριθμικά κοίλο και $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H, τότε $\mu \in \mathcal{P}_n$ και η πυκνότητά του f_μ είναι λογαριθμικά κοίλη. Σημειώνουμε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε η ανισότητα Brunn-Minkowski έχει ως συνέπεια ότι η δείκτρια συνάρτηση $\mathbf{1}_K$ του K είναι η πυκνότητα ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου.

Αν $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο και η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι ημινόρμα, τότε για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^q \, d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}, \tag{1.3.3}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f_μ, ορίζουμε την ισοτροπική σταθερά του μ ως εξής:

$$L_\mu := \left(\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}, \tag{1.3.4}$$

όπου $\mathrm{Cov}(\mu)$ είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του μ με συντεταγμένες

$$\mathrm{Cov}(\mu)_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f_\mu(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\, dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f_\mu(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\, dx}\frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f_\mu(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\, dx}. \tag{1.3.5}$$

Λέμε ότι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν $\mathrm{bar}(\mu) = 0$ και ο $\mathrm{Cov}(\mu)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας, και γράφουμε $\mathcal{IL}_n$ για την κλάση των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Σημειώνουμε ότι ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν το λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ_K με πυκνότητα $x \mapsto L_K^n \mathbf{1}_{K/L_K}(x)$ είναι ισοτροπικό. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$L_\mu \leqslant \kappa L_n, \tag{1.3.6}$$

όπου $\kappa > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (μια απόδειξη δίνεται στο [2, Πρόταση 2.5.12]).

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $E \in G_{n,k}$, η περιθώρια κατανομή του μ ως προς E είναι το μέτρο πιθανότητας $\pi_E(\mu)$ με πυκνότητα

$$f_{\pi_E(\mu)}(x) = \int_{x+E^\perp} f_\mu(y)dy. \tag{1.3.7}$$

Εύκολα ελέγχεται ότι αν το μ έχει κέντρο βάρους το 0, είναι ισοτροπικό ή λογαριθμικά κοίλο, τότε το $\pi_E(\mu)$ έχει επίσης κέντρο βάρους το 0, είναι ισοτροπικό ή λογαριθμικά κοίλο, αντίστοιχα.

Αν μ είναι ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μετρο Lebesgue, και αν f_μ είναι η πυκνότητα του μ και $f_\mu(0) > 0$, τότε για κάθε $p > 0$ ορίζουμε

$$K_p(\mu) := K_p(f_\mu) = \left\{x : \int_0^\infty r^{p-1} f_\mu(rx)\, dr \geqslant \frac{f_\mu(0)}{p}\right\}. \tag{1.3.8}$$

Από τον ορισμό έπεται ότι το $K_p(\mu)$ είναι αστρόμορφο σώμα με ακτινική συνάρτηση

$$\rho_{K_p(\mu)}(x) = \left(\frac{1}{f_\mu(0)}\int_0^\infty p r^{p-1} f_\mu(rx)\, dr\right)^{1/p} \tag{1.3.9}$$

για $x \neq 0$. Τα σώματα $K_p(\mu)$ εισήχθησαν από τον K. Ball ο οποίος απέδειξε ότι αν το μ είναι λογαριθμικά κοίλο τότε, για κάθε $p > 0$, το $K_p(\mu)$ είναι κυρτό σώμα.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με τα ισοτροπικά κυρτά σώματα και τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα παραπέμπουμε στο βιβλίο [2].

1.4 Αποτελέσματα από την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία

1.4.1 Απόσταση Banach-Mazur – το θεώρημα του John

Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Ορίζουμε την *απόσταση Banach-Mazur* των X και Y ως εξής:

$$d_{\mathrm{BM}}(X,Y) := \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| : T : X \to Y \text{ ισομορφισμός}\}. \tag{1.4.1}$$

Οι βασικές ιδιότητες της απόστασης d_{BM} είναι οι εξής:

(α) $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) \geqslant 1$, και ισότητα ισχύει αν και μόνον αν οι X, Y είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

(β) $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) = d_{\mathrm{BM}}(Y,X)$.

(γ) $d_{\mathrm{BM}}(X,Y) \leqslant d_{\mathrm{BM}}(X,Z) d_{\mathrm{BM}}(Z,Y)$.

(δ) $d_{\mathrm{BM}}(X^*,Y^*) = d_{\mathrm{BM}}(X,Y)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur είναι η ακόλουθη: δύο χώροι με νόρμα είναι «κοντά» ως προς τη d_{BM} αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός της μοναδιαίας μπάλας του ενός που «μοιάζει» με τη μοναδιαία μπάλα του δεύτερου:

$$d_{\mathrm{BM}}(X,Y) = \min\{d \geqslant 1 : \text{ υπάρχει } T : X \to Y \text{ ώστε } B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq dB_Y\}. \tag{1.4.2}$$

Μια άλλη, σχετική, έννοια απόστασης κυρτών σωμάτων είναι η λεγόμενη *γεωμετρική απόσταση*: αν K και L είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$d_{\mathrm{G}}(K,L) := \min\left\{d \geqslant 1 : \text{ υπάρχουν } a,b > 0 \text{ με } ab \leqslant d \text{ ώστε } a^{-1}L \subseteq K \subseteq bL\right\}. \tag{1.4.3}$$

Παρατηρήστε ότι αν X_K, X_L είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα με μοναδιαίες μπάλες K, L αντίστοιχα, τότε

$$d_{\mathrm{BM}}(X_K,X_L) = \inf\{d_{\mathrm{G}}(K,T(L)) : T \in GL(n)\}. \tag{1.4.4}$$

Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι unconditional αν η $\{e_1,\dots,e_n\}$ είναι 1-unconditional βάση για τη νόρμα $\|\cdot\|_K$ που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K: αυτό σημαίνει ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1,\dots,t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j = \pm 1$ έχουμε

$$\big\|\varepsilon_1 t_1 e_1 + \cdots + \varepsilon_n t_n e_n\big\|_K = \big\|t_1 e_1 + \cdots + t_n e_n\big\|_K.$$

Με τον όρο *ελλειψοειδές* στον $\mathbb{R}^n$ εννοούμε κάθε κυρτό σώμα της μορφής

$$\mathcal{E} = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{a_i^2} \leqslant 1\right\}, \tag{1.4.5}$$

όπου $\{v_1,\ldots,v_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $a_1,\ldots,a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του $\mathcal{E}$ αντίστοιχα). Αποδεικνύεται ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα $\mathcal{E}$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει $T\in GL(n)$ ώστε $\mathcal{E}=T(B_2^n)$.

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχεται στο K και έχει το μέγιστο δυνατό όγκο. Λέμε σε αυτή την περίπτωση ότι το $\mathcal{E}$ είναι το *ελλειψοειδές μέγιστου όγκου* του K. Ομοίως αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό *ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου* του K, δηλαδή μοναδικό ελλειψοειδές που έχει τον ελάχιστο όγκο, ανάμεσα σε όλα τα ελλειψοειδή που περιέχουν το K.

Λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K βρίσκεται σε *θέση John*, όταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Αντίστοιχα λέμε ότι το K είναι σε *θέση Löwner* αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K. Ένα $x\in\mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο επαφής του K και της B_2^n αν $\|x\|_2=\|x\|_K=1$. Το κλασσικό θεώρημα του F. John [53] μας δίνει ακόμη περισσότερες πληροφορίες, περιγράφοντας την κατανομή των σημείων επαφής στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 1.4.1 (John). *Έστω ότι το συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει ελλειψοειδές μέγιστου όγκου τη B_2^n. Τότε υπάρχουν σημεία επαφής $u_1,\ldots,u_m$ του K και της B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1,\ldots,c_m$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$,*

$$x=\sum_{j=1}^m c_j\langle x,u_j\rangle u_j. \tag{1.4.6}$$

Το Θεώρημα 1.4.1 μας λέει ισοδύναμα ότι ο ταυτοτικός τελεστής I_n στον $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή

$$I_n=\sum_{j=1}^m c_j u_j\otimes u_j, \tag{1.4.7}$$

όπου με $u_j\otimes u_j$ συμβολίζουμε την προβολή στη διεύθυνση του u_j: $(u_j\otimes u_j)(x):=\langle x,u_j\rangle u_j$. Παρατηρήστε ότι από την (1.4.6) έπεται ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2=\langle x,x\rangle=\sum_{j=1}^m c_j\langle x,u_j\rangle^2. \tag{1.4.8}$$

Επίσης, εφαρμόζοντας την ίδια σχέση για $x=e_i$, όπου $\{e_1,\ldots,e_n\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και αθροίζοντας ως προς i, παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^m c_j=n. \tag{1.4.9}$$

Μια πολύ γνωστή συνέπεια του Θεωρήματος 1.4.1 είναι ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται σε θέση John τότε $K\subseteq\sqrt{n}B_2^n$. Στη γλώσσα της γεωμετρικής απόστασης δύο κυρτών σωμάτων, η τελευταία πρόταση μας λέει ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται σε θέση John έχουμε $d_{\rm G}(K,B_2^n)\leqslant\sqrt{n}$. Έπεται ότι για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X, $d_{\rm BM}(X,\ell_2^n)\leqslant\sqrt{n}$. Χρησιμοποιώντας την υποπολλαπλασιαστική ιδιότητα της $d_{\rm BM}$ μπορούμε τότε να δούμε ότι το άνω φράγμα $d_{\rm BM}(X,Y)\leqslant n$ ισχύει για κάθε ζευγάρι n-διάστατων χώρων με νόρμα X, Y.

1.4.2 Αριθμοί κάλυψης

Έστω A και B δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ο *αριθμός κάλυψης του A από το B* είναι ο μικρότερος φυσικός N για τον οποίο υπάρχουν N μεταφορές του B των οποίων η ένωση καλύπτει το A:

$$N(A,B) = \min\Big\{N \in \mathbb{N} : \ \exists x_1,\dots,x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N}(x_j+B)\Big\}.$$

Μια παραλλαγή του παραπάνω αριθμού κάλυψης ορίζεται ως εξής:

$$\overline{N}(A,B) = \min\Big\{N \in \mathbb{N} : \ \exists x_1,\dots,x_N \in A \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N}(x_j+B)\Big\}.$$

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι $N(A,B) \leqslant \overline{N}(A,B)$. Μπορούμε επίσης εύκολα να ελέγξουμε ότι $\overline{N}(A,B-B) \leqslant N(A,B)$. Ειδικότερα, αν το B είναι συμμετρικό και κυρτό, τότε $\overline{N}(A,2B) \leqslant N(A,B)$.

Αν A, B είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με το B συμμετρικό τότε, για κάθε $t>0$ ορίζουμε

$$S_t(A,B) = \max\{m \in \mathbb{N} : \ \exists x_1,\dots,x_m \in A \text{ ώστε } \|x_i - x_j\|_B > t \text{ για } i \neq j\}.$$

Από τον ορισμό ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\overline{N}(A,tB) \leqslant S_t(A,B) \leqslant \overline{N}(A,\tfrac{t}{2}B).$$

Τέλος, θα χρειαστούμε δύο βασικά θεωρήματα για αριθμούς κάλυψης. Το πρώτο είναι η ανισότητα του Sudakov:

Θεώρημα 1.4.2 (Sudakov). *Αν K είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $t>0$ ισχύει*

$$N(K,tB_2^n) \leqslant 2\exp\left(cn\,(w(K)/t)^2\right), \tag{1.4.10}$$

όπου $c>0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Το επόμενο θεώρημα δυϊσμού για τους αριθμούς κάλυψης αποδείχθηκε από τους Artstein, Milman και Szarek [12].

Θεώρημα 1.4.3. *Υπάρχουν απόλυτες θετικές σταθερές α και β τέτοιες ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$*

$$N(B_2^n,\alpha^{-1}K^\circ)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant N(K,B_2^n) \leqslant N(B_2^n,\alpha K^\circ)^{\beta} \tag{1.4.11}$$

Ο V. Milman (βλέπε [87]) απέδειξε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\beta>0$ με την εξής ιδιότητα: κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο το 0 έχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ τέτοια ώστε $\mathrm{vol}_n(\tilde{K}) = \mathrm{vol}_n(B_2^n)$ και

$$\max\big\{N(\tilde{K},B_2^n), N(B_2^n,\tilde{K}), N(\tilde{K}^\circ,B_2^n), N(B_2^n,\tilde{K}^\circ)\big\} \leqslant \exp(\beta n). \tag{1.4.12}$$

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K που ικανοποιεί αυτή την εκτίμηση είναι σε *M-θέση με σταθερά β*.

Αργότερα, ο Pisier [101] έδωσε μια διαφορετική προσέγγιση σε αυτό το αποτέλεσμα, που δίνει περισσότερες πληροφορίες για τη συμπεριφορά των αριθμών κάλυψης. Η ακριβής διατύπωση είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 1.4.4 (Pisier). *Για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$\max\{N(\tilde{K}, tB_2^n), N(B_2^n, t\tilde{K}), N(\tilde{K}^\circ, tB_2^n), N(B_2^n, t\tilde{K}^\circ)\} \leqslant \exp\left(\frac{c(\alpha)n}{t^\alpha}\right) \tag{1.4.13}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου η σταθερά $c(\alpha)$ εξαρτάται μόνο από το α, και $c(\alpha) = O\big((2-\alpha)^{-\alpha/2}\big)$ καθώς το $\alpha \to 2$.

1.4.3 Η M^*-ανισότητα

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K d\sigma(\vartheta).$$

Παρατηρώντας ότι $\|x\|_K = h_{K^\circ}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ βλέπουμε ότι $M(K) = w(K^\circ)$ και ότι

$$M(K)^{-1} \leqslant \mathrm{vrad}(K) \leqslant w(K) = M(K^\circ).$$

Η ανισότητα στο αριστερό μέλος ελέγχεται εύκολα αν εκφράσουμε τον όγκο του K σαν ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες Hölder και Jensen, ενώ η ανισότητα στο δεξιό μέλος προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Urysohn.

Η δυϊκή ανισότητα Sudakov των Pajor και Tomczak-Jaegermann [91] δίνει άνω φράγμα για τους αριθμούς κάλυψης $N(B_2^n, tK)$ συναρτήσει της παραμέτρου $M(K)$.

Θεώρημα 1.4.5 (Pajor-Tomczak). *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t > 0$,*

$$\log N(B_2^n, tK) \leqslant cn\,(M(K)/t)^2, \tag{1.4.14}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την *M^*-ανισότητα*:

Θεώρημα 1.4.6. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$R(K \cap F) \leqslant c_1 \sqrt{\frac{n}{n-k}}\, w(K)$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_2(n-k))$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η πρώτη απόδειξη της (1.4.6), με ασθενέστερη εξάρτηση από το λόγο $\frac{n}{n-k}$, δόθηκε από τον V. Milman στο [85], και μια δεύτερη απόδειξη δόθηκε στο [86], με γραμμική εξάρτηση από το $\frac{n}{n-k}$. Το Θεώρημα 1.4.6 αποδείχτηκε, σε αυτή τη βέλτιστη μορφή, από τους Pajor και Tomczak-Jaegermann στο [91]. Τέλος, ο Gordon [47] απέδειξε μία ακόμα πιο ακριβή μορφή της ανισότητας, εξασφαλίζοντας ότι η τιμή της σταθεράς c_1 μπορεί να υποτεθεί (ασυμπτωτικά) ίση με 1.

1.4.4 Η ανισότητα του Pisier και η MM^*-ανισότητα

Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω α μια νόρμα στον $L(\ell_2^n, X)$. Η *δυϊκή ως προς το ίχνος νόρμα* ορίζεται στον $L(X, \ell_2^n)$ ως εξής:

$$\alpha^*(v) = \sup\{\mathrm{tr}(vu) : \alpha(u) \leqslant 1\}. \tag{1.4.15}$$

Το λήμμα του Lewis [74] ισχύει για κάθε ζευγάρι δυϊκών ως προς το ίχνος νορμών:

Θεώρημα 1.4.7. *Για κάθε νόρμα α στον $L(\ell_2^n, X)$, υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε $\alpha(u) = 1$ και $\alpha^*(u^{-1}) = n$.*

Η *ℓ-νόρμα* στον $L(\ell_2^n, X)$ ορίστηκε από τους Figiel και Tomczak-Jaegermann στο [35]. Έστω $\{g_1, \ldots, g_n\}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $u : \ell_2^n \to X$ ορίζουμε την ℓ-νόρμα του u ως εξής:

$$\ell(u) = \left(\mathbb{E}\,\Big\|\sum_{i=1}^n g_i u(e_i)\Big\|^2\right)^{1/2}. \tag{1.4.16}$$

Ένας απλός υπολογισμός μας δίνει ότι

$$\ell(u) \approx \sqrt{n}\,w((u^{-1})^*(K^\circ)), \tag{1.4.17}$$

όπου K είναι η μοναδιαία μπάλα του X. Αυτή η σχέση συνδέει την ℓ-νόρμα με το μέσο πλάτος. Ένα απλούστερο μοντέλο προκύπτει αν στη θέση των κανονικών τυχαίων μεταβλητών θεωρήσουμε τις Rademacher συναρτήσεις $r_i : E_2^n \to \{-1, 1\}$ που ορίζονται μέσω των $r_i(\varepsilon) = \varepsilon_i$, όπου βλέπουμε τον $E_2^n = \{-1, 1\}^n$ σαν χώρο πιθανότητας με το ομοιόμορφο μέτρο. Από μια ανισότητα των Maurey και Pisier έπεται ότι

$$\ell(u) \approx \left(\int_{E_2^n} \Big\|\sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i)\Big\|^2 d\varepsilon\right)^{1/2}. \tag{1.4.18}$$

Το σύμβολο $\approx$ σημαίνει εδώ ότι οι δύο ποσότητες διαφέρουν κατά έναν όρο τάξης το πολύ ίσης με $\sqrt{\log n}$.

Θεωρούμε τις Walsh συναρτήσεις $w_A(\varepsilon) = \prod_{i \in A} r_i(\varepsilon)$, όπου $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι κάθε συνάρτηση $f : E_2^n \to X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$f(\varepsilon) = \sum_A w_A(\varepsilon) x_A, \tag{1.4.19}$$

για κάποια διανύσματα $x_A \in X$. Ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f : E_2^n \to X$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L_2(X)} = \left(\int_{E_2^n} \|f(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon\right)^{1/2} \tag{1.4.20}$$

Η *Rademacher προβολή* $R_n : L_2(X) \to L_2(X)$ είναι ο τελεστής που απεικονίζει την $f = \sum w_A x_A$ στη συνάρτηση $R_n f := \sum_{i=1}^n r_i x_{\{i\}}$. Γράφουμε $\mathrm{Rad}(X)$ για τη νόρμα του τελεστή R_n. Οι Figiel και Tomczak-Jaegermann [35] απέδειξαν το εξής:

Θεώρημα 1.4.8. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε*

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*) \leqslant n\mathrm{Rad}(X). \tag{1.4.21}$$

Ο Pisier έδωσε στο [100] μια ακριβή εκτίμηση για την $\mathrm{Rad}(X)$ συναρτήσει της απόστασης Banach-Mazur $d(X, \ell_2^n)$.

Θεώρημα 1.4.9. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Τότε,*

$$\mathrm{Rad}(X) \leqslant c\log[d(X, \ell_2^n) + 1] \leqslant c\log(n+1), \tag{1.4.22}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, και η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το θεώρημα του John.

Σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των Lewis, Figiel και Tomczak-Jaegermann, το Θεώρημα 1.4.9 οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Θεώρημα 1.4.10 (MM^*-ανισότητα)**.** *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μια θέση $\tilde{K}$ του K για την οποία*

$$w(\tilde{K})w(\tilde{K}^\circ) \leqslant c\log[d(X_K, \ell_2^n) + 1] \leqslant c\log(n+1), \tag{1.4.23}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Υπολογίζοντας τον όγκο του $\tilde{K}$ σε πολικές συντεταγμένες και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι $w(\tilde{K}^\circ)^{-1} \leqslant c_2\sqrt{n}\,\mathrm{vol}_n(\tilde{K})^{1/n}$. Έπεται ότι

$$w(\tilde{K}) \leqslant c\sqrt{n}\log n\,\mathrm{vol}_n(\tilde{K})^{1/n}. \tag{1.4.24}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο παίρνουμε την εξής *αντίστροφη ανισότητα Urysohn.*

Θεώρημα 1.4.11. *Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει μια γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K με όγκο $\mathrm{vol}_n(\tilde{K}) = 1$ και μέσο πλάτος*

$$w(\tilde{K}) \leqslant c\sqrt{n}\log n, \tag{1.4.25}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Επιπλέον, με ένα απλό επιχείρημα που βασίζεται στην ανισότητα Rogers-Shephard μπορούμε να δούμε ότι η υπόθεση της συμμετρίας στο προηγούμενο θεώρημα δεν είναι απαραίτητη.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [4] και [8] για τη θεωρία των κυρτών σωμάτων και στα βιβλία [1], [6] και [7] για την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία και την τοπική θεωρία των χώρων με νόρμα.

1.5 Αποτελέσματα από την ολοκληρωτική γεωμετρία

Η πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Αν $F \in G_{n,m}$, $k < m$, συμβολίζουμε με $\nu_{F,k}$ το μέτρο πιθανότητας Haar στην πολλαπλότητα $G_{F,k}$ των k-διάστατων υποχώρων του F, και αν $E \in G_{n,k}$, $k < m$, συμβολίζουμε με $\nu_{E,m}$ το μέτρο πιθανότητας Haar στην πολλαπλότητα $G_{E,m}$ των m-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν τον E.

Συμβολίζουμε επίσης με $A_{n,k}$ το σύνολο όλων των k-διάστατων αφφινικών υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ και, για δοθέντα $k < m$ και $F \in A_{n,m}$, συμβολίζουμε με $A_{F,k}$ το σύνολο όλων των k-διάστατων αφφινικών υποχώρων του F. Αν $E \in A_{n,k}$, $k < m$, τότε $A_{E,m}$ είναι η πολλαπλότητα όλων των m-διάστατων αφφινικών υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ που περιέχουν τον E. Τα αντίστοιχα μέτρα πιθανότητας είναι τα $\mu_{n,k}$, $\mu_{F,k}$ και $\mu_{E,m}$. Για κάθε $0 \leqslant k < m \leqslant n$ ορίζουμε

$$G(n,k,m) = \{(F,E) \in G_{n,k} \times G_{n,m} : F \subset E\} \tag{1.5.1}$$

και

$$A(n,k,m) = \{(F,E) \in A_{n,k} \times A_{n,m} : F \subset E\}. \tag{1.5.2}$$

Ο χώρος $G(n,k,m)$ είναι ομογενής $SO(n)$-χώρος και εφοδιάζεται με ένα αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας $\nu_{n,k,m}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη πρόταση (για μια απόδειξη δείτε το [9, Θεώρημα 7.1.1]).

Πρόταση 1.5.1. *Αν $0 \leqslant k < m \leqslant n-1$ και $g : G(n,k,m) \to \mathbb{R}$ είναι μια μη αρνητική $\nu_{n,k,m}$-μετρήσιμη συνάρτηση τότε*

$$\begin{aligned}\int_{G(n,k,m)} g\, d\nu_{n,k,m} &= \int_{G_{n,m}} \int_{G_{F,k}} g(E,F)\, d\nu_{F,k}(E)\, d\nu_{n,m}(F) \\ &= \int_{G_{n,k}} \int_{G_{E,m}} g(E,F)\, d\nu_{E,m}(F)\, d\nu_{n,k}(E).\end{aligned} \tag{1.5.3}$$

Ανάλογη ταυτότητα ισχύει για αφφινικούς υποχώρους (για μια απόδειξη δείτε το [9, Θεώρημα 7.1.2]).

Πρόταση 1.5.2. *Αν $0 \leqslant k < m \leqslant n-1$ και $g : A(n,k,m) \to \mathbb{R}$ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση, έχουμε*

$$\int_{A_{n,m}} \int_{A_{F,k}} g(E,F)\, d\mu_{F,k}(E)\, d\mu_{n,m}(F) = \int_{A_{n,k}} \int_{A_{E,m}} g(E,F)\, d\mu_{E,m}(F)\, d\mu_{n,k}(E). \tag{1.5.4}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε διάφορες ολοκληρωτικές ταυτότητες τύπου Blaschke-Petkantschin. Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ και $x_0, x_1, \dots, x_q \in \mathbb{R}^n$ γράφουμε

$$\Box_q(x_1, \dots, x_q)$$

για τον q-διάστατο όγκο του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $x_1, \dots, x_q$ και

$$\Delta_q(x_0, x_1, \dots, x_q)$$

για τον q-διάστατο όγκο της κυρτής θήκης $\mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \dots, x_q\})$. Παρατηρήστε ότι

$$\Delta_q(x_0, x_1, \dots, x_q) = \frac{1}{q!}\Box_q(x_1 - x_0, \dots, x_q - x_0). \tag{1.5.5}$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, η ταυτότητα Blaschke-Petkantschin (δείτε το [9, Θεώρημα 7.2.1]) ισχυρίζεται ότι·

Θεώρημα 1.5.3 (ταυτότητα Blaschke-Petkantschin). *Αν $1 \leqslant q \leqslant n$ και $g : (\mathbb{R}^n)^q \to \mathbb{R}$ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση τότε*

$$\begin{aligned}(1.5.6)\qquad &\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_q)\, dx_1 \cdots dx_q \\ &= p(n,q) \int_{G_{n,q}} \int_E \cdots \int_E g(x_1, \ldots, x_q) \Box_q(x_1, \ldots, x_q)^{n-q} d_E(x_1) \cdots d_E(x_q)\, d\nu_{n,q}(E),\end{aligned}$$

όπου $d_E(x)$ σημαίνει ολοκλήρωση ως προς το μέτρο Lebesgue στον E, και

$$(1.5.7)\qquad p(n,q) = \frac{\omega_{n-q+1} \cdots \omega_n}{\omega_1 \cdots \omega_q},$$

όπου $\omega_d = d\kappa_d$ είναι η επιφάνεια της S^{d-1} στον $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$.

Παρουσιάζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.3. Για τις ανάγκες της απόδειξης θα χρησιμοποιήσουμε ένα πιο λεπτομερή συμβολισμό: Συμβολίζουμε παρακάτω με λ το n-διάστατο μέτρο Lebesgue. Για κάθε $F \in G_{n,k}$, γράφουμε λ_F για το k-διάστατο μέτρο Lebesgue στον F, το οποίο το βλέπουμε σαν ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, με άλλα λόγια $\lambda_F(A) = \mathrm{vol}_k(A \cap F)$ για κάθε Borel $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Γράφουμε επίσης λ_F^s για το μέτρο γινόμενο $F \times \cdots \times F$ (s φορές). Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και $x_1, \ldots, x_k \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $\Box_k(x_1, \ldots, x_k)$ τον k-διάστατο όγκο του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $x_1, \ldots, x_k$. Παρατηρήστε ότι

$$\mathrm{vol}_k(\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_k)) = \frac{1}{k!} \Box_k(x_1, \ldots, x_k).$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.5.3 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και κάθε φραγμένη μη-αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $f : (\mathbb{R}^n)^k \to \mathbb{R}$,

$$(1.5.8)\qquad \int_{(\mathbb{R}^n)^k} f\, d\lambda^k = p(n,k) \int_{G_{n,k}} \int_{F^k} f\, \Box_k^{n-k} d\lambda_F^k\, d\nu_{n,q}(F).$$

Θα αποδείξουμε την (1.5.8) με επαγωγή στο k, χρησιμοποιώντας το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.5.4. *Έστω $0 \leqslant q \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,q}$. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση, τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f\, d\lambda = \frac{\omega_{n-q}}{2} \int_{G_{F,q+1}} \int_E f(x) d(x,F)^{n-q-1} d\lambda_E\, d\nu_{F,q+1}(E),$$

όπου με $d(x,F)$ συμβολίζουμε την απόσταση του x από τον F.

Απόδειξη. Για κάθε u συμβολίζουμε

$$F_u := \left\{ \sum_{i=1}^m a_i x_i + a_{m+1} u : x_1, \ldots, x_m \in F, a_1, \ldots, a_{m+1} > 0 \right\}.$$

Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες στον $F^\perp$ και χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,d\lambda(x) &= \int_F \int_{F^\perp} f(y+z)d\lambda_{F^\perp}(z)\,d\lambda_F(y)\\ &= \omega_{n-q}\int_F\int_0^\infty\int_{S^{n-1}\cap F^\perp} f(y+tu)t^{n-q-1}d\sigma_{n-q-1}(u)\,dt\,d\lambda_F(y)\\ &= \omega_{n-q}\int_{S^{n-1}\cap F^\perp}\int_F\int_0^\infty f(y+tu)t^{n-q-1}dt\,d\lambda_F(y)\,d\sigma_{n-q-1}(u)\\ &= \omega_{n-q}\int_{S^{n-1}\cap F^\perp}\int_{F_u} f(x)d(x,F)^{n-q-1}\,d\lambda_{F_u}(x)\,d\sigma_{n-q-1}(u)\\ &= \frac{\omega_{n-q}}{2}\int_{G_{F,q+1}}\int_E f(x)d(x,F)^{n-q-1}d\lambda_E\,d\nu_{F,q+1}(E),\end{aligned}$$

όπως έπρεπε να δειχθεί. □

Απόδειξη της (1.5.8). Παρατηρήστε ότι η περίπτωση $k=1$ είναι απλά το Λήμμα 1.5.4 για $q=0$. Για το επαγωγικό βήμα, υποθέτουμε ότι η (1.5.8) έχει αποδειχθεί για κάποιο k και κάθε $n\geqslant k$. Θέτουμε $\mathbf{x}:=(x_1,\dots,x_k)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του Fubini, την επαγωγική υπόθεση και το Λήμμα 1.5.4 γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^n)^{k+1}} f\,d\lambda^{k+1} &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{(\mathbb{R}^n)^k} f(\mathbf{x},x)d\lambda^k(\mathbf{x})\,d\lambda(x)\\ &= p(n,k)\int_{\mathbb{R}^n}\int_{G_{n,k}}\int_{F^k} f(\mathbf{x},x)\Box_k(\mathbf{x})^{n-k}d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{n,k}(F)\,d\lambda(x)\\ &= p(n,k)\int_{G_{n,k}}\int_{F^k}\Box_k(\mathbf{x})^{n-k}\int_{\mathbb{R}^n} f(\mathbf{x},x)d\lambda(x)d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{n,k}(F)\\ &= \frac{p(n,k)\omega_{n-k}}{2}\int_{G_{n,k}}\int_{F^k}\Box_k(\mathbf{x})^{n-k}\int_{G_{F,k+1}}\int_E f(\mathbf{x},x)d(x,F)^{n-k-1}\\ &\quad\times d\lambda_E(x)d\nu_{F,k+1}(E)d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{n,k}(F).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας στη συνέχεια την Πρόταση (1.5.1) ώστε να αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης, καθώς επίσης και την ταυτότητα

$$\Box_{k+1}(x_1,\dots,x_{k+1}) = \Box_k(x_1,\dots,x_k)d(x_{k+1},F) \tag{1.5.9}$$

που ισχύει για κάθε $x_1,\dots,x_k\in F$ και $x_{k+1}\in\mathbb{R}^n$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^n)^{k+1}} f\,d\lambda^{k+1} &= \frac{p(n,k)\omega_{n-k}}{2}\int_{G_{n,k+1}}\int_{G_{E,k}}\int_{F^k}\int_E f(\mathbf{x},x)\Box_k(\mathbf{x})^{n-k}d(x,F)^{n-k-1}\\ &\quad\times d\lambda_E(x)d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{E,k}(F)d\nu_{n,k+1}(E)\\ &= \frac{p(n,k)\omega_{n-k}}{2}\int_{G_{n,k+1}}\int_E\int_{G_{E,k}}\int_{F^k} f(\mathbf{x},x)\Box_{k+1}(\mathbf{x},x)^{n-k-1}\Box_k(\mathbf{x})\\ &\quad\times d\lambda_F^k(\mathbf{x})d\nu_{E,k}(F)d\lambda_E(x)d\nu_{n,k+1}(E).\end{aligned}$$

Τέλος, για κάθε $E \in G_{n,k+1}$ εφαρμόζουμε την επαγωγική υπόθεση για $n = k+1$ και τη συνάρτηση $f(\cdot, x)\Box_{k+1}(\cdot, x)^{n-k-1} : E^k \to \mathbb{R}^+$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{(\mathbb{R}^n)^{k+1}} f\, d\lambda^{k+1} &= \frac{p(n,k)\omega_{n-k}}{2b_{(k+1),k}} \int_{G_{n,k+1}} \int_E \int_{E^k} f(\mathbf{x}, x)\Box_{k+1}(\mathbf{x}, x)^{n-k-1} \\ &\quad \times d\lambda_E^k(\mathbf{x}) d\lambda_E(x) d\nu_{n,k+1}(E) \\ &= p(n, k+1) \int_{G_{n,k+1}} \int_{E^{k+1}} f \Box_{k+1}^{n-k-1} d\lambda_E^{k+1} d\nu_{n,k+1}(E),\end{aligned}$$

και η (1.5.8) έχει έτσι δειχθεί για $k+1$. $\Box$

Θα χρειαστούμε επίσης μια γενίκευση της (1.5.6), η οποία εμφανίζεται, για παράδειγμα, στο [39, Λήμμα 5.1]:

Θεώρημα 1.5.5 (ταυτότητα Blaschke-Petkantschin). *Αν $1 \leqslant q \leqslant k \leqslant n$ και $g : (\mathbb{R}^n)^q \to \mathbb{R}$ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση, τότε*

(1.5.10)

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_q)\, dx_1 \cdots dx_q \\ &= p(n,k,q) \int_{G_{n,k}} \int_E \cdots \int_E g(x_1, \ldots, x_q) \Delta_q(0, x_1, \ldots, x_q)^{n-k}\, d_E(x_1) \cdots d_E(x_q)\, d\nu_{n,k}(E),\end{aligned}$$

όπου

$$p(n,k,q) = (q!)^{n-k} \frac{p(n,q)}{p(k,q)}. \tag{1.5.11}$$

Το αφφινικό ανάλογο της (1.5.6) είναι η ακόλουθη ταυτότητα (δείτε το [9, Θεώρημα 7.2.7]):

Θεώρημα 1.5.6. *Αν $1 \leqslant q \leqslant n$ και $g : (\mathbb{R}^n)^{q+1} \to \mathbb{R}$ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση, τότε*

(1.5.12)

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(x_0, x_1, \ldots, x_q)\, dx_0\, dx_1 \cdots dx_q \\ &= p(n,q)(q!)^{n-q} \int_{A_{n,q}} \int_E \cdots \int_E g(x_0, x_1, \ldots, x_q) \Delta_q^{n-q}(x_0, x_1, \ldots, x_q) d_E(x_0) \cdots d_E(x_q) d\mu_{n,q}(E).\end{aligned}$$

1.6 Ανισότητες αναδιάταξης

Η συμμετρική αναδιάταξη ενός Borel υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue είναι η ανοικτή μπάλα A^* που έχει κέντρο την αρχή των αξόνων και $\mathrm{vol}_n(A^*) = \mathrm{vol}_n(A)$. Σημειώνουμε ότι η $\mathbf{1}_{A^*}$ είναι κάτω ημισυνεχής. Η συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη της $\mathbf{1}_A$ ορίζεται να είναι η $\mathbf{1}_A^* = \mathbf{1}_{A^*}$. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση της οποίας τα σύνολα στάθμης $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$, $t > 0$ έχουν πεπερασμένο μέτρο, ορίζουμε την συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη f^* της f θέτοντας

$$f^*(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f>t\}}^*(x)\, dx = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f>t\}^*}\, dt. \tag{1.6.1}$$

Τότε, η f^* είναι ακτινικά συμμετρική, φθίνουσα και ισομετρήσιμη με την f. Ειδικότερα, $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

1.6.1 Ανισότητα Rogers/Brascamp-Lieb-Luttinger

Η ανισότητα Rogers/Brascamp-Lieb-Luttinger (δείτε τα [104] και [25]) ισχυρίζεται ότι αν $f_1, \dots, f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^N f_i(\langle x, u_i\rangle)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^N f_i^*(\langle x, u_i\rangle)\, dx. \tag{1.6.2}$$

Έπεται ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_K \prod_{i=1}^N f_i(x_i)\, dx \leqslant \int_K \prod_{i=1}^N f_i^*(x_i)\, dx. \tag{1.6.3}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μια αναδιατύπωση της (1.6.2) η οποία οφείλεται στον Christ (δείτε το [29, Θεώρημα 4.2]) και, όπως παρατηρήθηκε στο [94], μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμη σε γεωμετρικά προβλήματα. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ λέγεται quasi-κοίλη αν το σύνολο $\{x : H(x) > s\}$ είναι κυρτό για κάθε $s \in \mathbb{R}$, και quasi-κυρτή αν το σύνολο $\{x : H(x) < s\}$ είναι κυρτό για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την (1.6.3) παίρνουμε:

Θεώρημα 1.6.1. *Έστω $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ μια άρτια quasi-κοίλη συνάρτηση και $f_1, \dots, f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(t_1, \dots, t_N) \prod_{i=1}^N f_i(t_i)\, dt \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} H(t_1, \dots, t_N) \prod_{i=1}^N f_i^*(t_i)\, dt. \tag{1.6.4}$$

Αν η H είναι quasi-κυρτή, τότε η ανισότητα αντιστρέφεται.

Έστω $H : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}^+$. Για δεδομένα $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και $Y = \{y_1, \dots, y_s\} \subset z^\perp$ θεωρούμε την συνάρτηση $H_Y : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$H_Y(t) = H(y_1 + t_1 z, \dots, y_s + t_s z). \tag{1.6.5}$$

Λέμε ότι η H είναι Steiner κυρτή (αντίστοιχα, Steiner κοίλη) αν για κάθε $z \in S^{n-1}$ και κάθε $Y = \{y_1, \dots, y_s\} \subset z^\perp$ η συνάρτηση H_Y είναι άρτια και quasi-κυρτή (αντίστοιχα, quasi-κοίλη). Θέτουμε επίσης

$$\mathcal{F}_H(f_1, \dots, f_s) = \int_{(\mathbb{R}^n)^s} H(x_1, \dots, x_s) \prod_{i=1}^s f_i(x_i)\, dx_1 \dots, dx_s. \tag{1.6.6}$$

Οι εφαρμογές μας αφορούν συναρτησοειδή της μορφής (1.6.6), όπου η H είναι άρτια και Steiner κυρτή ή Steiner κοίλη. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες ανισότητες αναδιάταξης (δείτε την [94, Πρόταση 3.2]).

Θεώρημα 1.6.2. *Έστω $f_1, \ldots, f_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Έστω $H : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}^+$ μια άρτια Steiner κυρτή συνάρτηση. Τότε,*

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_s) \geqslant \mathcal{F}_H(f_1^*, \ldots, f_s^*). \tag{1.6.7}$$

Αν η συνάρτηση H_Y είναι Steiner κοίλη τότε η ανισότητα αντιστρέφεται:

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_s) \leqslant \mathcal{F}_H(f_1^*, \ldots, f_s^*). \tag{1.6.8}$$

Επιπλέον, αν $f_i = f_i^*$, δηλαδή κάθε f_i είναι ακτινικά συμμετρική πυκνότητα, και $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ για κάθε i, τότε μπορούμε να κάνουμε ένα ακόμα βήμα σε αυτήν την διαδικασία συμμετρικοποίησης (δείτε την [94, Πρόταση 3.9]).

Θεώρημα 1.6.3. *Έστω $f_1, \ldots, f_s : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ ακτινικά συμμετρικές πυκνότητες. Έστω $H : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}^+$ μια Steiner κυρτή συνάρτηση. Τότε,*

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_s) \geqslant \mathcal{F}_H(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}), \tag{1.6.9}$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν η H είναι Steiner κοίλη τότε η ανισότητα αντιστρέφεται:

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_s) \leqslant \mathcal{F}_H(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}), \tag{1.6.10}$$

Θα εφαρμόσουμε τα παραπάνω για τις συναρτήσεις

$$H(x_1, \ldots, x_s) = \Box_s(x_1, \ldots, x_s)^p \quad \text{και} \quad H(x_1, \ldots, x_s) = \Delta_s(x_1, \ldots, x_s)^p,$$

με το $p \neq 0$ να κινείται σε κατάλληλο διάστημα. Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι αν η $H : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}^+$ είναι Steiner κυρτή και αν $g : (0,\infty) \to (0,\infty)$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση τότε η $g \circ H$ είναι Steiner κυρτή, ενώ αν η g είναι γνησίως φθίνουσα τότε η $g \circ H$ είναι Steiner κοίλη. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν αν συνθέσουμε μια Steiner κοίλη συνάρτηση με μια γνησίως μονότονη συνεχή συνάρτηση g όπως παραπάνω.

1.6.2 Ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της

Το αρχικό πλαίσιο της ανισότητας Brascamp-Lieb είναι το εξής. Θεωρούμε $m \geqslant n$, $p_1, \ldots, p_m \geqslant 1$ με $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = n$, και $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε έναν πλειογραμμικό τελεστή $\Phi : L^{p_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\Phi(f_1, \ldots, f_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j \rangle)\, dx.$$

Οι Brascamp και Lieb απέδειξαν ότι η νόρμα του Φ είναι το supremum του λόγου

$$\frac{\Phi(g_1, \ldots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_{p_j}}$$

πάνω από όλες τις κεντραρισμένες Gaussian συναρτήσεις $g_1, \ldots, g_m$. Η απόδειξη που έδωσαν βασίστηκε στην ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger.

Θεώρημα 1.6.4 (Brascamp-Lieb). *Έστω $m \geqslant n$, και $p_1, \ldots, p_m \geqslant 1$ με $\frac{1}{p_1} + \cdots + \frac{1}{p_m} = n$. Για δοθέντα $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$, θεωρούμε τον τελεστή Φ (ο οποίος εξαρτάται από τα u_j). Τότε,*

$$\frac{\Phi(f_1, \ldots, f_m)}{\prod_{j=1}^m \|f_j\|_{p_j}} \leqslant D := \sup\left\{\frac{\Phi(g_1, \ldots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_{p_j}} : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0\right\}$$

για κάθε $f_j \in L^{p_j}(\mathbb{R})$.

Ο K. Ball παρατήρησε ότι αν $u_1, \ldots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \ldots, c_m$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί που ικανοποιούν την $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$ τότε

$$\begin{aligned}\sup&\left\{\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m g_j^{c_j}(\langle x, u_j\rangle)dx}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} g_j\right)^{c_j}} : g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}, \lambda_j > 0\right\}\\ &= \inf\left\{\frac{\sqrt{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j \lambda_j u_j \otimes u_j\right)}}{\sqrt{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}}} : \lambda_j > 0\right\} = 1.\end{aligned}$$

Οδηγήθηκε έτσι στην ακόλουθη γεωμετρική έκδοση της ανισότητας Brascamp-Lieb.

Θεώρημα 1.6.5 (K. Ball). *Έστω $u_1, \ldots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \ldots, c_m > 0$ τα οποία ικανοποιούν την*

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j.$$

Αν $f_1, \ldots, f_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j\rangle)dx \leqslant \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t)dt\right)^{c_j}.$$

Το πλεονέκτημα της συνθήκης κανονικοποίησης $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$ είναι ότι η σταθερά στην ανισότητα, η οποία πιάνεται πάντα από Gaussian συναρτήσεις, είναι ίση με 1, και επειδή η συγκεκριμένη συνθήκη εμφανίζεται συχνά στην κυρτή γεωμετρική ανάλυση, η γεωμετρική μορφή της ανισότητας Brascamp-Lieb βρήκε πολλές και σημαντικές εφαρμογές σε αυτήν την περιοχή. Μια άλλη σημαντική εξέλιξη ήταν ότι ισχύει μια αντίστροφη μορφή του Θεωρήματος 1.6.5, η οποία ανακαλύφθηκε και αποδείχθηκε από τον Barthe.

Θεώρημα 1.6.6 (Barthe). *Έστω $u_1, \ldots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \ldots, c_m > 0$ τα οποία ικανοποιούν την $I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j$. Αν $h_1, \ldots, h_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, ορίζουμε*

$$K(h_1, \ldots, h_m) = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup\left\{\prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(\vartheta_j) : \vartheta_j \in \mathbb{R}\ ,\ x = \sum_{j=1}^m \vartheta_j c_j u_j\right\} dx.$$

Τότε,

$$\inf\left\{K(h_1, \ldots, h_m) : \int_{\mathbb{R}} h_j = 1\ ,\ j = 1, \ldots, m\right\} = 1.$$

Η ανισότητα Brascamp-Lieb, και η αντίστροφή της, έχουν πολυδιάστατες επεκτάσεις. Έστω $S^+(\mathbb{R}^k)$ το σύνολο όλων των $k\times k$ συμμετρικών, θετικά ορισμένων πινάκων. Για κάθε $A\in S^+(\mathbb{R}^k)$ συμβολίζουμε με G_A την Gaussian συνάρτηση $G_A:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$G_A(x)=\exp(-\langle Ax,x\rangle).$$

Τέλος, συμβολίζουμε με $L_1^+(\mathbb{R}^k)$ την κλάση των ολοκληρώσιμων μη αρνητικών συναρτήσεων $f:\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $c_1,\dots,c_m>0$ και κάποιους φυσικούς $n_1,\dots,n_m$ μικρότερους ή ίσους από n ισχύει η

$$\sum_{j=1}^m c_jn_j=n.$$

Για κάθε $j=1,\dots,m$, μας δίνεται μια γραμμική απεικόνιση $B_j:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^{n_j}$ η οποία είναι επί. Υποθέτουμε επίσης ότι

$$\bigcap_{j=1}^m \mathrm{Ker}(B_j)=\{0\}.$$

Ορίζουμε δύο τελεστές $I,K:L_1^+(\mathbb{R}^{n_1})\times\cdots\times L_1^+(\mathbb{R}^{n_m})\to\mathbb{R}$ θέτοντας

$$I(f_1,\dots,f_m)=\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(B_jx)dx$$

και

$$K(h_1,\dots,h_m)=\int_{\mathbb{R}^m}^* m(x)dx,$$

όπου $\int^*$ είναι το εξωτερικό ολοκλήρωμα και

$$m(x)=\sup\left\{\prod_{j=1}^m h_j^{c_j}(y_j)\mid y_j\in\mathbb{R}^{n_j}\text{ και }\sum_{j=1}^m c_jB_j^*y_j=x\right\}.$$

Έστω E η μεγαλύτερη σταθερά για την οποία η ανισότητα

$$K(h_1,\dots,h_m)\geqslant E\cdot\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}}h_j\right)^{c_j}$$

ισχύει για όλες τις $h_j\in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$, και έστω F η μικρότερη σταθερά για την οποία η ανισότητα

$$I(f_1,\dots,f_m)\leqslant F\cdot\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}}f_j\right)^{c_j}$$

για όλες τις $f_j\in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$. Τότε, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.6.7 (Barthe). *Οι σταθερές E και F δίνονται από τις*

$$E=\inf\left\{\frac{K(g_1,\dots,g_m)}{\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}}g_j\right)^{c_j}}\mid g_j\ \ \textit{Gaussian}\ ,\ j=1,\dots,m\right\}$$

και

$$F = \sup\left\{ \frac{I(g_1, \dots, g_m)}{\prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_j}} g_j\right)^{c_j}} \mid g_j \ \ \textit{Gaussian} \ , \ j = 1, \dots, m \right\}.$$

Επιπλέον, αν D είναι ο μεγαλύτερος πραγματικός αριθμός για τον οποίο ισχύει

$$\det\left(\sum_{j=1}^m c_j B_j^* A_j B_j\right) \geqslant D \cdot \prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j},$$

για όλους τους $A_j \in S^+(\mathbb{R}^{n_j})$, τότε

$$E = \sqrt{D} \ \ \textit{και} \ \ F = \frac{1}{\sqrt{D}}.$$

Το βασικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.6.7 είναι η επόμενη πρόταση που αποδείχθηκε από τον Barthe. Αν $D > 0$ και αν οι συναρτήσεις $h_j, f_j \in L_1^+(\mathbb{R}^{n_j})$, $1 \leqslant j \leqslant m$, ικανοποιούν την

$$\int_{\mathbb{R}^{n_j}} f_j = \int_{\mathbb{R}^{n_j}} h_j = 1,$$

τότε,

$$K(h_1, \dots, h_m) \geqslant D \cdot I(f_1, \dots, f_m).$$

Στην περίπτωση που οι γραμμικές απεικονίσεις B_j του Θεωρήματος 1.6.7 είναι ορθογώνιες προβολές, ας πούμε P_j, που ικανοποιούν την

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j P_j$$

για κάποιους $c_1, \dots, c_m > 0$, τότε η σταθερά D είναι ίση με 1. Έτσι, παίρνουμε την ακόλουθη πολυδιάστατη γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb και την αντίστροφή της.

Θεώρημα 1.6.8 (Barthe)**.** *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Για $j = 1, \dots m$, έστω F_j ένας d_j-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και P_j η ορθογώνια προβολή στον F_j. Αν*

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j P_j$$

για κάποιους $c_1, \dots, c_m > 0$ τότε για όλες τις μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_j : F_j \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(P_j x)\, dx \leqslant \prod_{j=1}^m \left(\int_{F_j} f_j\right)^{c_j} \tag{1.6.11}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n}^* \sup\left\{ \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(x_j) : x = \sum_{j=1}^m c_j x_j, x_j \in F_j \right\} dx \geqslant \prod_{j=1}^m \left(\int_{F_j} f_j\right)^{c_j}. \tag{1.6.12}$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της διατριβής. Τα περιεχόμενα κάθε κεφαλαίου αντιστοιχούν σε ξεχωριστές εργασίες, οι περισσότερες εκ των οποίων έχουν γίνει δεκτές για δημοσίευση ή έχουν ήδη δημοσιευθεί. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 3 προέρχονται εν μέρει από τις εργασίες

- S. Brazitikos, A. Giannopoulos and D-M. Liakopoulos, *Uniform cover inequalities for the volume of coordinate sections and projections of convex bodies*, Advances in Geometry, **18** (2018), no. 3, 345–354.
- D-M. Liakopoulos, *Reverse Brascamp-Lieb inequality and the dual Bollobás-Thomason inequality*, Archiv der Mathematik (Basel) **112** (2019), no. 3, 293–304.

(β) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 4 προέρχονται εν μέρει από την εργασία

- G. Chasapis and D-M. Liakopoulos, *Extensions of Grinberg's inequality and of its functional form*, (υποβεβλημένη για δημοσίευση).

(γ) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 5 προέρχονται εν μέρει από την εργασία

- G. Chasapis, A. Giannopoulos and D-M. Liakopoulos, *Estimates for measures of lower dimensional sections of convex bodies*, Advances in Mathematics **306** (2017), 880–904.

(δ) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 6 αποτελούν κομμάτι εργασίας που βρίσκεται σε εξέλιξη, και δεν έχουν ακόμα δημοσιευθεί.

2.1 Ανισότητες για τον όγκο τομών και προβολών κυρτών σωμάτων

Η κλασσική ανισότητα Loomis-Whitney [78] συγκρίνει τον όγκο $\mathrm{vol}_n(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με τον γεωμετρικό μέσο των όγκων $\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))$ των ορθογώνιων προβολών του στους υπόχωρους $e_i^{\perp}$, όπου $\{e_1,\ldots,e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1}\leqslant\prod_{i=1}^{n}\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K)), \tag{2.1.1}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τέτοιο ώστε τα $\pm e_i$ να είναι τα κάθετα διανύσματα των εδρών του. Σε αυτήν την ανισότητα, με $\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))$ συμβολίζουμε τον $(n-1)$-διάστατο όγκο της προβολής $P_i(K)$ (γενικότερα, αν A είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε $\mathrm{vol}_n(A)$ για τον όγκο του A στον αφφινικό υπόχωρο $\mathrm{aff}(A)$ που παράγεται από το A). Μάλιστα, η (2.1.1) ισχύει για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$.

Μια δυϊκή ανισότητα, στην οποία οι προβολές $P_i(K)$ αντικαθίστανται από τις τομές $K\cap e_i^{\perp}$, αποδείχθηκε από τον Meyer στο [83]. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1}\geqslant\frac{n!}{n^n}\prod_{i=1}^{n}\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap e_i^{\perp}), \tag{2.1.2}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι γραμμική εικόνα $T(B_1^n)$ του cross-polytope

$$B_1^n=\mathrm{conv}\{\pm e_1,\ldots,\pm e_n\}$$

για κάποιον διαγώνιο (ως προς την δοθείσα βάση) τελεστή $T=\mathrm{diag}(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)$, όπου $\lambda_i>0$. Η απόδειξη αυτής της ανισότητας από τον Meyer δίνεται για unconditional κυρτό σώμα K, αφού πρώτα παρατηρεί ότι κάνοντας Steiner συμμετρικοποίηση ενός σώματος K παίρνουμε κυρτό σώμα για το οποίο μεγαλώνει το δεξιό μέλος της (2.1.2).

Οι δύο αυτές ανισότητες έχουν γενικευτεί στο ακόλουθο πλαίσιο: έστω $u_1,\ldots,u_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1,\ldots,c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John

$$I_n=\sum_{i=1}^{m}c_iu_i\otimes u_i,$$

όπου $I_n:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Τότε, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0,

$$\frac{n!}{n^n}\prod_{i=1}^{m}\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap u_i^{\perp})^{c_i}\leqslant\mathrm{vol}_n(K)^{n-1}\leqslant\prod_{i=1}^{m}\mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_i^{\perp}}(K))^{c_i}. \tag{2.1.3}$$

Η υπόθεση ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0 χρειάζεται μόνο για την αριστερή ανισότητα. Οι περιπτώσεις ισότητας είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές στην ανισότητα Loomis-Whitney και την ανισότητα του Meyer αντίστοιχα. Η δεξιά ανισότητα της (2.1.3) αποδείχθηκε από τον Ball στο [13], ενώ η αριστερή ανισότητα αποδείχθηκε από τους Li και Huang στο [75]. Η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της, που οφείλονται στους Ball και Barthe (βλέπε [14] και [16]), παίζουν τον κρίσιμο ρόλο στις αποδείξεις αυτών των πιο γενικών ανισοτήτων.

Μια επέκταση της ανισότητας Loomis-Whitney αποδείχθηκε από τους Bollobás και Thomason στο [22]. Για να διατυπώσουμε το αποτέλεσμά τους, χρειάζεται να εισάγουμε κάποιο συμβολισμό και ορολογία. Για κάθε $\tau\subset[n]:=\{1,\ldots,n\}$ θέτουμε $F_\tau=\mathrm{span}\{e_j:j\in\tau\}$ και $E_\tau=F_\tau^{\perp}$. Αν $s\geqslant 1$ και $\sigma\subseteq[n]$ λέμε ότι τα (όχι απαραίτητα διακεκριμένα) σύνολα $\sigma_1,\ldots,\sigma_r\subseteq\sigma$ σχηματίζουν ένα *s-ομοιόμορφο κάλυμμα* του σ αν κάθε $j \in \sigma$ ανήκει σε ακριβώς s από τα σύνολα σ_i. Η *ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος* από το [22] δίνει άνω φράγμα για τον όγκο ενός συμπαγούς συνόλου συναρτήσει των όγκων των προβολών του στους υποχώρους συντεταγμένων που αντιστοιχούν σε ένα ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$.

Θεώρημα 2.1.1 (Bollobás-Thomason). *Έστω $r \geqslant 1$ και $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, έχουμε*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(K)). \tag{2.1.4}$$

Στην Παράγραφο 3.1 αποδεικνύουμε *περιορισμένες* εκδοχές της ανισότητας Loomis-Whitney και της ανισότητας ομοιόμορφου καλύμματος του Θεωρήματος 2.1.1. Αφετηρία μας είναι η ακόλουθη ανισότητα από το [43]: Αν $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$ και $P_{ij}(K) = P_{E_{ij}}(K)$, όπου $E_{ij} = \mathrm{span}\{e_i, e_j\}^{\perp}$, τότε

$$\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))\,\mathrm{vol}_{n-1}(P_j(K)) \geqslant \frac{n}{2(n-1)}\,\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_{n-2}(P_{ij}(K)). \tag{2.1.5}$$

Η ανισότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί περιορισμένη (ή «τοπική») εκδοχή της ανισότητας Loomis-Whitney, υπό την έννοια ότι δίνει κάτω φράγμα για τον γεωμετρικό μέσο δύο μόνο προβολών ενός κυρτού σώματος σε υπόχωρους συντεταγμένων συνδιάστασης 1. Συνέπεια της (2.1.5) είναι η ανισότητα

$$\frac{S(P_{u^{\perp}}(K))}{\mathrm{vol}_{n-1}(P_{u^{\perp}}(K))} \leqslant \frac{2(n-1)}{n}\frac{S(K)}{\mathrm{vol}_n(K)}$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $u \in S^{n-1}$, όπου $S(A)$ είναι η επιφάνεια του A στην κατάλληλη διάσταση. Η ανισότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε στο [43] για τη μελέτη ενος ερωτήματος των Dembo, Cover και Thomas [34] σχετικά με τη μονοτονία ενός ανάλογου της πληροφορίας Fisher στην κλάση των συμπαγών κυρτών συνόλων, και εμφανίζεται ξανά στο [44] όπου μελετάται το ερώτημα να συγκριθεί η επιφάνεια $S(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με τη μέση, ελάχιστη ή μέση επιφάνεια των προβολών του συνδιάστασης 1.

Προσαρμόζοντας την απόδειξη του Λήμματος 4.1 από το [43] και συνδυάζοντάς την με την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος (2.1.4) του Θεωρήματος 2.1.1 αποδεικνύουμε την ακόλουθη γενίκευση της (2.1.5).

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω $r > s \geqslant 1$, έστω $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{E_{\sigma_i}}(K)) \geqslant \gamma(n,d,s,r)\mathrm{vol}(P_{E_\sigma}(K))^s\,\mathrm{vol}_n(K)^{r-s},$$

όπου

$$\gamma(n,d,s,r) = \binom{n}{d}^{r-s}\binom{n-\frac{sd}{r}}{n-d}^{-r}.$$

Αν υποθέσουμε ότι τα σύνολα $\sigma_1,\ldots,\sigma_r$ έχουν την ίδια πληθικότητα k, τότε $k=\frac{sd}{r}$ και το αποτέλεσμα παίρνει τη μορφή

$$\prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(P_{E_{\sigma_i}}(K)) \geqslant \binom{n}{d}^{r-s}\binom{n-k}{n-d}^{-r}\mathrm{vol}(P_{E_\sigma}(K))^s\,\mathrm{vol}_n(K)^{r-s}.$$

Η αφετηρία μας (2.1.5) αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση $d=r=2$, $k=1$ και $s=1$. Η περίπτωση $k=1$, $d=r$ και $s=1$ μελετήθηκε πρόσφατα από τους Soprunov και Zvavitch στο [106], οι οποίοι χρησιμοποίησαν παρόμοιο επιχείρημα, βασισμένο στο [43, Λήμμα 4.1] και στην κλασσική ανισότητα Loomis-Whitney.

Στην Παράγραφο 3.2, ξεκινώντας από την ανισότητα του Meyer (2.1.2) μελετάμε το φυσιολογικό ερώτημα αν είναι εφικτό να πάρουμε μια ανισότητα για τομές, η οποία να είναι δυϊκή της (2.1.5). Πιο συγκεκριμένα, το ερώτημα είναι αν για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $i\neq j\in\{1,\ldots,n\}$,

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap e_i^{\perp})\,\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap e_j^{\perp}) \leqslant c_0\mathrm{vol}_{n-2}(K\cap E_{ij})\,\mathrm{vol}_n(K), \tag{2.1.6}$$

όπου $c_0>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Εκμεταλλευόμενοι τις βασικές ιδιότητες της οικογένειας των L_p-κεντροειδών σωμάτων $Z_p(K)$ του K δείχνουμε ότι αυτό το ερώτημα έχει καταφατική απάντηση. Με λίγα λόγια, μέσω ενός επιχειρήματος δυϊσμού, μεταφράζουμε το ερώτημα για τις τομές του K σε ένα ερώτημα για τις προβολές κατάλληλου κεντροειδούς σώματος του K, και μετά χρησιμοποιούμε την ανισότητα Loomis-Whitney (ή κάποια επέκτασή της) για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη. Γενικεύοντας τη μέθοδο και χρησιμοποιώντας πλήρως την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás και Thomason, μπορούμε να αποδείξουμε πιο γενικές ανισότητες αυτής της μορφής, στο πνεύμα του Θεωρήματος 2.1.2.

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω $r>s\geqslant 1$, έστω $\sigma\subseteq[n]$ με πληθικότητα $|\sigma|=d<n$ και έστω $(\sigma_1,\ldots,\sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Θέτουμε επίσης $d_i=|\sigma_i|$. Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(K\cap E_{\sigma_i}) \leqslant \frac{(c_0d)^{ds}}{d_1^{d_1}\cdots d_r^{d_r}}\mathrm{vol}(K\cap E_\sigma)^s\mathrm{vol}_n(K)^{r-s}, \tag{2.1.7}$$

όπου $c_0>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.3 έχουμε $d_1+\cdots+d_r=ds$, άρα

$$d_1^{d_1}\cdots d_r^{d_r}\geqslant\left(\frac{ds}{r}\right)^{ds}$$

από την ανισότητα Jensen. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα στην απλούστερη μορφή

$$\prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(K\cap E_{\sigma_i}) \leqslant \left(\frac{c_0r}{s}\right)^{ds}\mathrm{vol}(K\cap E_\sigma)^s\mathrm{vol}_n(K)^{r-s}.$$

Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την (2.1.7) αν όλα τα σύνολα σ_i έχουν την ίδια πληθικότητα $k=\frac{ds}{r}$. Η αφετηρία μας (2.1.6) αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση $d=r=2$, $k=1$ και $s=1$.

Στη γενικότερη περίπτωση $d = r$, $k = 1$ και $s = 1$, που αντιστοιχεί στο να πάρουμε $\sigma_j = \{i_j\}$ για κάποιους διακεκριμένους $i_1, \dots, i_r \in [n]$, το Θεώρημα 2.1.3 δίνει το φράγμα

$$\prod_{j=1}^{r} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap e_{i_j}^{\perp}) \leqslant (c_0 r)^r \,\mathrm{vol}_{n-r}(K \cap [\mathrm{span}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\}]^{\perp})\, \mathrm{vol}_n(K)^{r-1}.$$

Η σταθερά $(c_0 r)^r$ ίσως δεν είναι βέλτιστη, εξαρτάται όμως μόνο από το r και όχι από τη διάσταση n.

Στην Παράγραφο 3.3 δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη της (2.1.5), με την ίδια σταθερά, χρησιμοποιώντας μια γενική ανισότητα για μεικτούς όγκους. Έστω $\mathcal{C} = (K_3, \dots, K_n)$ μια $(n-2)$-άδα συμπαγών κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ζεύγος συμπαγών κυρτών συνόλων A, B στον $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε το μεικτό όγκο $V(A, B, \mathcal{C})$ με $V(A, B)$. Τότε, για κάθε τριάδα A, B, C συμπαγών κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$V(A,A)V(B,C) \leqslant 2V(A,B)V(A,C). \tag{2.1.8}$$

Μάλιστα, η (2.1.8) είναι άμεση συνέπεια ενός από τα κεντρικά λήμματα στα [43] και [38]. Παρατηρούμε ότι η (2.1.8) οδηγεί σε μια γενίκευση της (2.1.5), η οποία ισχύει για κάθε ζεύγος προβολών συνδιάστασης 1 που ορίζονται από δύο όχι απαραίτητα ορθογώνια διανύσματα u και v.

Θεώρημα 2.1.4. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $u, v \in S^{n-1}$. Θέτουμε $P_{u,v}(K) = P_{\mathrm{span}\{u,v\}^{\perp}}(K)$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(P_u(K))\, \mathrm{vol}_{n-1}(P_v(K)) \geqslant \frac{n}{2(n-1)} \sqrt{1 - \langle u, v\rangle^2}\, \mathrm{vol}_n(K)\, \mathrm{vol}_{n-2}(P_{u,v}(K)).$$

Συζητάμε επίσης ένα διαφορετικό ερώτημα, στο οποίο φαίνεται η χρησιμότητα της (2.1.8). Οι Hug και Schneider [52] έχουν κάνει την εικασία ότι για κάθε $1 \leqslant r \leqslant n$ και κάθε r-άδα $(K_1, \dots, K_r)$ κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$V(K_1, \dots, K_r, B_2^n[n-r]) \leqslant \frac{(n-r)!\kappa_{n-r}}{n!} \prod_{i=1}^{r} V_1(K_i), \tag{2.1.9}$$

όπου $V(A_1, \dots, A_n)$ είναι ο μεικτός όγκος των n συμπαγών κυρτών συνόλων A_i, ο συμβολισμός $A[m]$ χρησιμοποιείται για μια m-άδα $A, \dots, A$, και

$$\kappa_{n-s} V_s(K) = \binom{n}{s} V(K[s], B_2^n[n-s])$$

είναι ο s-οστός intrinsic όγκος του K (βλέπε επίσης [20] για την περίπτωση του επιπέδου). Οι Hug και Schneider απέδειξαν την (2.1.9) στην ειδική περίπτωση που τα σώματα $K_1, \dots, K_r$ είναι ζωνοειδή. Στην περίπτωση $r = 2$, οι Artstein-Avidan, Florentin και Ostrover έχουν αποδείξει στο [11] ότι αν K είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα και Z είναι ένα ζωνοειδές στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathrm{vol}_n(B_2^n)\, V(K, Z, B_2^n[n-2]) \leqslant \frac{n}{n-1} \frac{\kappa_n \kappa_{n-2}}{\kappa_{n-1}^2}\, V(K, B_2^n[n-1])\, V(Z, B_2^n[n-1]). \tag{2.1.10}$$

Από τον ορισμό του $V_1(K)$ αυτή η ανισότητα είναι η ίδια με αυτήν της εικασίας (για $r = 2$).

Ένα πιο γενικό πρόβλημα μελετάται στο [106], όπου οι Soprunov και Zvavitch αποδεικνύουν ότι αν A είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $Z_1, \ldots, Z_r$ είναι ζωνοειδή τότε

$$\mathrm{vol}_n(A)^{r-1} V(Z_1, \ldots, Z_r, A[n-r]) \leqslant r^{r-1} \prod_{i=1}^{r} V(Z_i, A[n-1]),$$

και για κάθε r-άδα (τυχόντων) κυρτών σωμάτων $K_1, \ldots, K_r$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(A)^{r-1} V(K_1, \ldots, K_r, A[n-r]) \leqslant c_{n,r} \prod_{i=1}^{r} V(K_i, A[n-1]), \tag{2.1.11}$$

όπου $c_{n,r} = n^r r^{r-1}$. Επιπλέον, η σταθερά $c_{n,r}$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $c'_{n,r} = n^{r/2} r^{r-1}$ αν τα $K_1, \ldots, K_r$ είναι συμμετρικά.

Παρατηρούμε ότι η (2.1.8) έχει ως συνέπεια μια πιο γενική ανισότητα, η οποία επιβεβαιώνει την εικασία ότι ισχύει η (2.1.9) στην περίπτωση $r = 2$, με μια απόλυτη (σχεδόν βέλτιστη) σταθερά και δείχνει ότι η σταθερά $c_{n,2}$ στην (2.1.11) μπορεί να αντικατασταθεί από τη σταθερά 2.

Θεώρημα 2.1.5. *Έστω A ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K_1 και K_2 στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathrm{vol}_n(A)\, V(K_1, K_2, A[n-2]) \leqslant 2V(K_1, A[n-1])\, V(K_2, A[n-1]).$$

Επιλέγοντας $A = B_2^n$ στο Θεώρημα 2.1.5 παίρνουμε μια παραλλαγή της (2.1.9) με σταθερά 2. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $\frac{n-1}{n} < \frac{\kappa_n \kappa_{n-2}}{\kappa_{n-1}^2} < 1$, άρα η σταθερά $b_{n,2} := \frac{n}{n-1} \frac{\kappa_n \kappa_{n-2}}{\kappa_{n-1}^2}$ που εικάζεται ικανοποιεί την

$$1 < b_{n,2} < \frac{n}{n-1}.$$

Με άλλα λόγια, η σταθερά του Θεωρήματος 2.1.5 υπολείπεται της σταθεράς της εικασίας (μόνο) κατά έναν παράγοντα 2.

Όσον αφορά τις σταθερές $c_{n,r}$ και $c'_{n,r}$ στην (2.1.11), από το Θεώρημα 2.1.5 βλέπουμε αμέσως ότι $c_{n,2} \leqslant 2$ και επίσης παρατηρούμε ότι ένα επαγωγικό επιχείρημα οδηγεί σε μια εκδοχή της γενικής ανισότητας (2.1.11) με μια σταθερά c_r που εξαρτάται μόνο από το r. Θα ήταν ενδιαφέρον να προσδιοριστεί η βέλτιστη τιμή αυτής της σταθεράς. Απλή επαγωγή οδηγεί στην πολύ ασθενή εκτίμηση $c_r \leqslant 2^{2^{r-1}-1}$.

Στην Παράγραφο 3.4 συζητάμε τη σχέση της πολυδιάστατης γενίκευσης της γεωμετρικής ανισότητας Brascamp-Lieb και της πολυδιάστατης αντίστροφης ανισότητας Brascamp-Lieb (που οφείλεται στον Barthe) με την ανισότητα Loomis-Whitney, την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás-Thomason και τις διάφορες γενικεύσεις τους που συζητήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου. Για τον σκοπό αυτό δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό: Λέμε ότι οι υπόχωροι $F_1, \ldots, F_r$ σχηματίζουν s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \ldots, c_r > 0$ για κάποιον $s > 0$ αν

$$sI_n = \sum_{i=1}^{r} c_i P_i, \tag{2.1.12}$$

όπου I_n είναι ο ταυτοτικός τελεστής και P_i είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον F_i. Χρησιμοποιώντας την πολυδιάστατη ανισότητα Brascamp-Lieb αποδεικνύουμε εύκολα το εξής γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.6. *Έστω $F_1,\dots,F_r$ υπόχωροι που σχηματίζουν s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1,\dots,c_r>0$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(P_{F_i}(K))^{c_i}. \tag{2.1.13}$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι αυτή η ανισότητα έχει ως συνέπεια την ανισότητα Loomis-Whitney και όλες τις προηγούμενες επεκτάσεις της.

Ξεκινώντας από την οπτική της Παραγράφου 3.4 και έχοντας αυτή τη φορά ως εργαλείο την πολυδιάστατη αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb του Barthe, στην Παράγραφο 3.5 αποδεικνύουμε μια νέα ανισότητα, την *δυϊκή ανισότητα Bollobás-Thomason.*

Θεώρημα 2.1.7. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in \mathrm{int}(K)$ και $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \geqslant \frac{1}{(n!)^s}\prod_{i=1}^r |\sigma_i|!\,\mathrm{vol}(K\cap F_{\sigma_i}). \tag{2.1.14}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η (2.1.14) είναι ακριβής: γίνεται ισότητα για κάθε s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$ αν το K είναι το cross-polytope $B_1^n=\mathrm{conv}(\{\pm e_1,\dots,\pm e_n\})$.

Ένας ουσιαστικά ισοδύναμος τρόπος για να διατυπώσουμε το Θεώρημα 2.1.1 (βλέπε [22]) είναι ο εξής: για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο με ακμές παράλληλες στους άξονες, τέτοιο ώστε $\mathrm{vol}_n(B)=\mathrm{vol}_n(K)$ και

$$\mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(B)) \leqslant \mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(K)) \tag{2.1.15}$$

για κάθε $\sigma\subseteq[n]$. Παρομοίως, το Θεώρημα 2.1.7 έχει την εξής ισοδύναμη διατύπωση.

Θεώρημα 2.1.8. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Υπάρχει cross-polytope της μορφής $C=\mathrm{conv}(\{\pm\lambda_1e_1,\dots,\pm\lambda_ne_n\})$, όπου $\lambda_i>0$, τέτοιο ώστε $\mathrm{vol}_n(C)=\mathrm{vol}_n(K)$ και $\mathrm{vol}(C\cap F_\sigma)\geqslant \mathrm{vol}(K\cap F_\sigma)$ για κάθε $\sigma\subseteq[n]$.*

Το Θεώρημα 2.1.7, και το ισοδύναμό του Θεώρημα 2.1.8, προκύπτουν από μια νέα συναρτησιακή ανισότητα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ την κλάση των λογαριθμικά κοίλων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$.

Θεώρημα 2.1.9. *Έστω $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ με $f(0)=1$ και $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ μια s-ομοιόμορφη κάλυψη του $[n]$. Τότε,*

$$n^n\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy \geqslant \prod_{i=1}^r\left(\int_{F_i} f(x_i)dx_i\right)^{1/s}.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.9 κάνει ουσιαστική χρήση της πολυδιάστατης αντίστροφης ανισότητας Brascamp-Lieb.

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με γενικεύσεις των ανισοτήτων τύπου Loomis-Whitney που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε τον όγκο με τα quermassintegrals ενός κυρτού σώματος. Τα αποτελέσματα είναι παραλλαγές αντίστοιχων αποτελεσμάτων από το [73]. Αποδεικνύουμε τις ακόλουθες ανισότητες:

Θεώρημα 2.1.10. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $u_1,\ldots,u_m\in\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τη συνθήκη του John $I_n=\sum_{i=1}^m c_iu_i\otimes u_i$ για κάποιους $c_i>0$. Τότε, για κάθε $j=0,1,\ldots,n-1$,*

$$W_j(K)^{\frac{n-j-1}{n-j}}\leqslant \kappa_n^{-\frac{j}{n(n-j)}}\prod_{i=1}^m\left(W_j'(P_{u_i^\perp}(K))\right)^{\frac{c_i}{n}},$$

όπου $W_j'(\cdot)$ είναι το j-οστό quermassintegral στον κατάλληλο υπόχωρο διάστασης $n-1$. Επίσης, για κάθε $j=0,1,\ldots,n-1$,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m c_iW_j'(P_{u_i^\perp}(K))\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}W_{j+1}(K).$$

Ειδικότερα,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m c_i\mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K))\leqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}S(K).$$

2.2 Συναρτησιακές και στοχαστικές εκδοχές ισοπεριμετρικών ανισοτήτων

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε συναρτησιακές και στοχαστικές εκδοχές κάποιων ισοπεριμετρικών ανισοτήτων για κυρτά σώματα. Επικεντρωνόμαστε στην προσέγγιση των Παούρη και Pivovarov, οι οποίοι χρησιμοποίησαν ανισότητες αναδιάταξης και ταυτότητες από την ολοκληρωτική γεωμετρία για να επεκτείνουν στο γενικότερο πλαίσιο των συνεχών κατανομών διάφορα κλασσικά αποτελέσματα όπως η ανισότητα του Busemann για τυχαία simplices, η ανισότητα Busemann-Straus/Grinberg, η ανισότητα Blaschke-Santaló, ανισότητες για τον όγκο κεντροειδών σωμάτων και άλλες. Αυτή η προσέγγιση εγκαινιάστηκε από τον Pivovarov στο [103] και αναπτύσσεται σε μια σειρά άρθρων: δείτε τα [94], [95], [96] και τις συνεργασίες με τους D. Cordero-Erausquin και M. Fradelizi [30], S. Dann [33] και G. Livshyts [77]. Επισκόπηση των παραπάνω δίνεται στο [97].

Τα βασικά εργαλεία σε αυτήν την προσέγγιση είναι η ανισότητα Brascamp-Lieb-Luttinger (δείτε τα [104], [25] και μεταγενέστερη δουλειά του Christ [29]) και ταυτότητες τύπου Blaschke-Petkantschin από την ολοκληρωτική γεωμετρία (παραπέμπουμε στο βιβλίο των R. Schneider και W. Weil [9] στο οποίο αυτά τα θέματα αναπτύσσονται λεπτομερώς).

Αφετηρία μας είναι η ανισότητα Busemann-Straus (δείτε το [26]) που αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Grinberg στο [48]. Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$,

$$\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(K\cap E)^n d\nu_k(E)\leqslant \frac{\kappa_k^n}{\kappa_n^k}\,\mathrm{vol}_n(K)^k, \tag{2.2.1}$$

όπου κ_s είναι ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^s$. Μια σημαντική ιδιότητα του ολοκληρώματος στο αριστερό μέλος της (2.2.1), την οποία παρατήρησε ο Grinberg, είναι ότι είναι αναλλοίωτο ως προς γραμμικούς μετασχηματισμούς του K που διατηρούν τον όγκο. Η αντίστοιχη αφφινική ανισότητα ισχυρίζεται ότι

$$\int_{A_{n,k}}\mathrm{vol}_k(K\cap E)^{n+1}d\mu_{n,k}(E)\leqslant \frac{\kappa_k^{n+1}}{\kappa_n^{k+1}}\,\frac{\kappa_{(k+1)n}}{\kappa_{n(k+1)}}\,\mathrm{vol}_n(K)^{k+1}, \tag{2.2.2}$$

όπου $\mu_{n,k}$ είναι το μέτρο πιθανότητας Haar στο σύνολο $A_{n,k}$ των k-διάστατων αφφινικών υποχώρων του $\mathbb{R}^n$. Μια συζήτηση γι' αυτά τα δύο αποτελέσματα γίνεται στο [9, Παράγραφος 8.6], όπου αποδεικνύεται επίσης η ακόλουθη επέκταση της (2.2.2) (δείτε το [9, Θεώρημα 8.6.4]). Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $1 \leqslant k < m \leqslant n$ τότε

$$\int_{A_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K\cap E)^{m+1} d\mu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^{m+1}}{\kappa_m^{k+1}} \frac{\kappa_{(k+1)m}}{\kappa_{k(m+1)}} \int_{A_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K\cap F)^{k+1} d\mu_{n,m}(F). \tag{2.2.3}$$

Δίνουμε αρχικά έναν απλό τρόπο με τον οποίο μπορούμε να πάρουμε την αντίστοιχη επέκταση της (2.2.1). Δείχνουμε επίσης ότι στην περίπτωση που το K είναι κυρτό σώμα, ισχύει και αντίστροφη ανισότητα.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω K ένα φραγμένο Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, και $1 \leqslant k < m \leqslant n$. Τότε,*

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K\cap E)^m \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K\cap F)^k \, d\nu_{n,m}(F). \tag{2.2.4}$$

Σημειώνουμε ότι $\kappa_k^m/\kappa_m^k \leqslant (\sqrt{e})^{(m-k)m}$. Από την άλλη πλευρά, αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K\cap E)^m \, d\nu_{n,k}(E) \geqslant \alpha_{m,k}^{(m-k)m} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K\cap F)^k \, d\nu_{n,m}(F), \tag{2.2.5}$$

όπου $\alpha_{m,k} = c\max\left\{\frac{1}{L_m}, \left(\frac{m}{m-k}\log\left(\frac{em}{m-k}\right)\right)^{-1/2}\right\}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$.

Αν υποθέσουμε ότι το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ένα επιχείρημα δυϊσμού, το οποίο βασίζεται στην ανισότητα Blaschke-Santaló και την ανισότητα Bourgain-Milman (δείτε το [1, Κεφάλαιο 8]), οδηγεί σε αντίστοιχες ανισότητες για τον όγκο των προβολών του K. Μάλιστα, μπορούμε να τις αποδείξουμε χωρίς να υποθέσουμε την συμμετρία του σώματος, με ένα απευθείας επιχείρημα.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και $1 \leqslant k < m \leqslant n$. Τότε,*

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^{-m} \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant C^{km}\frac{\kappa_m^k}{\kappa_k^m} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(P_F(K))^{-k} \, d\nu_{n,m}(F), \tag{2.2.6}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την άλλη πλευρά,

$$\int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(P_F(K))^{-k} \, d\nu_{n,m}(F) \leqslant C^{km}\frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k}(\log m)^{km} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^{-m} \, d\nu_{n,k}(E), \tag{2.2.7}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Μια συναρτησιακή εκδοχή της (2.2.1) αποδεικνύεται στο [33]: αν $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και f είναι μια μη αρνητική, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_{G_{n,k}} \frac{\|f|_E\|_1^n}{\|f|_E\|_\infty^{n-k}} \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^n}{\kappa_n^k}\|f\|_1^n. \tag{2.2.8}$$

Το επόμενο αποτέλεσμα που αποδεικνύουμε είναι μια πιο γενική ανισότητα, ειδική περίπτωση της οποίας είναι μια συναρτησιακή εκδοχή του Θεωρήματος 2.2.1 (αρκεί να επιλέξουμε $q=k$ και $p=m-k$) και της (2.2.8) (αν, επιπλέον, επιλέξουμε $m=n$).

Θεώρημα 2.2.3. *Έστω $1 \leqslant q \leqslant k < m \leqslant n$, και f μια μη αρνητική, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για $0 \leqslant p \leqslant m-k$,*

(2.2.9)
$$\int_{G_{n,k}} \frac{\|f|_E\|_1^{q(k+p)/k}}{\|f|_E\|_\infty^{pq/k}}\, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^{q(k+p)/k}}{\kappa_m^{q(k+p)/m}} \int_{G_{n,m}} \|f|_F\|_1^{q(k+p)/m} \|f|_F\|_\infty^{q(m-k-p)/m}\, d\nu_{n,m}(F).$$

Ειδικότερα, θέτοντας $q=k$ και $p=m-k$ βλέπουμε ότι

$$\int_{G_{n,k}} \frac{\left(\int_E f(x)\, d_E(x)\right)^m}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}}\, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k} \int_{G_{n,m}} \left(\int_F f(x)\, d_F(x)\right)^k d\nu_{n,m}(F). \tag{2.2.10}$$

Διατυπώνουμε επίσης και αποδεικνύουμε το συναρτησιακό ανάλογο της (2.2.3) (η περίπτωση $m=n$ έχει αποδειχθεί στο [33]).

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω $1 \leqslant k < m \leqslant n$, και f μια μη αρνητική, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

(2.2.11)
$$\int_{A_{n,k}} \frac{\left(\int_E f(x)\, d_E(x)\right)^{m+1}}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}}\, d\mu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^{m+1}}{\kappa_m^{k+1}} \frac{\kappa_{m(k+1)}}{\kappa_{k(m+1)}} \int_{A_{n,m}} \left(\int_F f(x)\, d_F(x)\right)^{k+1} d\mu_{n,m}(F).$$

2.3 Εκτιμήσεις για μέτρα τομών κυρτών σωμάτων

Στο Κεφάλαιο 5 συζητάμε γενικεύσεις του προβλήματος Busemann-Petty και του «προβλήματος των τομών», τόσο στο κλασσικό πλαίσιο όσο και στο γενικευμένο πλαίσιο όπου τυχόν μέτρο αντικαθιστά τον όγκο, ένα πλαίσιο το οποίο μελετήθηκε αρχικά από τον Koldobsky για το πρόβλημα των τομών και από τον Zvavitch για το πρόβλημα Busemann-Petty. Η προσέγγισή μας είναι διαφορετική και βασίζεται σε ολοκληρωτικές ταυτότητες τύπου Blaschke-Petkantschin και ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals.

Το κλασσικό πρόβλημα των τομών ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_1>0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων,

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C_1 \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^\perp). \tag{2.3.1}$$

Είναι γνωστό ότι αυτό το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_2>0$ τέτοια ώστε

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C_2 \tag{2.3.2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Ο Bourgain απέδειξε στο [24] ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$, και ο Klartag [57] βελτίωσε αυτό το φράγμα σε $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}$. Μια δεύτερη απόδειξη της εκτίμησης του Klartag δίνεται στο [61]. Από την ισοδυναμία των δύο προβλημάτων προκύπτει ότι

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c_1 L_n \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^\perp) \leqslant c_2 \sqrt[4]{n} \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^\perp) \tag{2.3.3}$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων.

Η φυσιολογική γενίκευση, το πρόβλημα των τομών για χαμηλότερες διαστάσεις, είναι το ακόλουθο πρόβλημα: Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και έστω $\alpha_{n,k}$ η μικρότερη θετική σταθερά $\alpha > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 ισχύει ότι

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \alpha^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F). \tag{2.3.4}$$

Είναι σωστό ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_3 > 0$ τέτοια ώστε $\alpha_{n,k} \leqslant C_3$ για κάθε n και k;

Από την (2.3.3) έχουμε $\alpha_{n,1} \leqslant cL_n$ για μια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Περιορίζουμε επίσης το πρόβλημα στην κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων και συμβολίζουμε την αντίστοιχη σταθερά με $\alpha_{n,k}^{(s)}$.

Μπορούμε να θέσουμε το ίδιο πρόβλημα αντικαθιστώντας τον όγκο με ένα γενικό μέτρο. Έστω g μια τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\mu(B) = \int_B g(x)dx, \tag{2.3.5}$$

όπου, αν $B \subseteq F$ για κάποιον $F \in G_{n,s}$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$, η ολοκλήρωση θεωρείται ως προς το s-διάστατο μέτρο Lebesgue στον F. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ μπορούμε να ορίσουμε την σταθερά $\alpha_{n,k}(\mu)$ ως τον μικρότερο $\alpha > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 ισχύει

$$\mu(K) \leqslant \alpha^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mu(K \cap F)\, \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}. \tag{2.3.6}$$

Ο Koldobsky απέδειξε στο [65] ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν η g είναι άρτια και συνεχής στο K τότε

$$\mu(K) \leqslant \gamma_{n,1} \frac{n}{n-1} \sqrt{n} \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mu(K \cap \vartheta^{\perp})\, \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{1}{n}}, \tag{2.3.7}$$

όπου, πιο γενικά, $\gamma_{n,k} = \mathrm{vol}_n(B_2^n)^{\frac{n-k}{n}} / \mathrm{vol}_{n-k}(B_2^{n-k}) < 1$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Με άλλα λόγια, για το συμμετρικό (ως προς μ αλλά και ως προς K) ανάλογο $\alpha_{n,1}^{(s)}$ της $\alpha_{n,1}$ έχουμε

$$\sup_{\mu} \alpha_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant c_3 \sqrt{n}. \tag{2.3.8}$$

Στο [66], ο Koldobsky απέδειξε αντίστοιχα αποτελέσματα για τομές χαμηλότερων διαστάσεων: αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν η g είναι άρτια και συνεχής στο K τότε

$$\mu(K) \leqslant \gamma_{n,k} \frac{n}{n-k} (\sqrt{n})^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mu(K \cap F)\, \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}} \tag{2.3.9}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Με άλλα λόγια, για το συμμετρικό ανάλογο $\alpha_{n,k}^{(s)}$ της $\alpha_{n,k}$ έχουμε

$$\sup_{\mu} \alpha_{n,k}^{(s)}(\mu) \leqslant c_4 \sqrt{n}. \tag{2.3.10}$$

Στην Παράγραφο 5.1 δίνουμε μια νέα, διαφορετική, απόδειξη αυτού του αποτελέσματος. Η μέθοδος που εισάγουμε μας επιτρέπει να αφαιρέσουμε τις υποθέσεις της συμμετρίας και της συνέχειας.

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Έστω g φραγμένη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και έστω μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$\mu(K) \leqslant \left(c_5\sqrt{n-k}\right)^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)\cdot \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}, \tag{2.3.11}$$

όπου $c_5 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, $\alpha_{n,k}(\mu) \leqslant c_5\sqrt{n-k}$.

Μάλιστα, η απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 οδηγεί στην ισχυρότερη ανισότητα

$$\mu(K) \leqslant \left(c_5\sqrt{n-k}\right)^k \left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n \, d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{1}{n}} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}. \tag{2.3.12}$$

Το κλασσικό πρόβλημα Busemann-Petty διατυπώνεται ως εξής. Έστω K και D δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^\perp) \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(D\cap\vartheta^\perp) \tag{2.3.13}$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Είναι σωστό ότι $\mathrm{vol}_n(K) \leqslant \mathrm{vol}_n(D)$; Η απάντηση είναι θετική αν $n \leqslant 4$ και αρνητική αν $n \geqslant 5$ (για την ιστορία και τη λύση του προβλήματος, παραπέμπουμε στο βιβλίο του Koldobsky [5]). Η ισομορφική εκδοχή του προβλήματος Busemann-Petty ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_4 > 0$ τέτοια ώστε αν τα K και D ικανοποιούν την (2.3.13) να ισχύει $\mathrm{vol}_n(K) \leqslant C_4\mathrm{vol}_n(D)$. Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα των τομών και με την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς (που ρωτάει αν η $\{L_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία). Ακριβέστερα, είναι γνωστό ότι αν K και D είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 τέτοια ώστε η (2.3.13) να ισχύει για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$, τότε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c_6 L_n \, \mathrm{vol}_n(D)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{2.3.14}$$

όπου $c_6 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η φυσιολογική γενίκευση, το πρόβλημα Busemann-Petty για χαμηλότερες διαστάσεις, είναι το ακόλουθο ερώτημα: Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και έστω $\beta_{n,k}$ η μικρότερη σταθερά $\beta > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K και D στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 που ικανοποιούν την

$$\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F) \leqslant \mathrm{vol}_{n-k}(D\cap F) \tag{2.3.15}$$

για κάθε $F \in G_{n,n-k}$, ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \beta^k \, \mathrm{vol}_n(D)^{\frac{n-k}{n}}. \tag{2.3.16}$$

> *Είναι σωστό ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_5 > 0$ τέτοια ώστε $\beta_{n,k} \leqslant C_5$ για κάθε n και k;*

Από την (2.3.14) έχουμε $\beta_{n,1} \leqslant c_6 L_n \leqslant c_7\sqrt[4]{n}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_7 > 0$. Μελετάμε επίσης το ίδιο ερώτημα για την κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων και συμβολίζουμε την αντίστοιχη σταθερά με $\beta_{n,k}^{(s)}$.

Όπως στην περίπτωση του προβλήματος των τομών, το ίδιο ερώτημα μπορεί να τεθεί για ένα γενικό μέτρο στη θέση του όγκου. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ με τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική πυκνότητα g μπορούμε να ορίσουμε την $\beta_{n,k}(\mu)$ ως τη μικρότερη σταθερά $\beta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K και D στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο βάρους το 0, που ικανοποιούν την $\mu(K \cap F) \leqslant \mu(D \cap F)$ για κάθε $F \in G_{n,n-k}$, έχουμε

$$\mu(K) \leqslant \beta^k \mu(D). \tag{2.3.17}$$

Όμοια, μπορούμε να ορίσουμε τη «συμμετρική» σταθερά $\beta_{n,k}^{(s)}(\mu)$. Οι Koldobsky και Zvavitch [72] απέδειξαν ότι $\beta_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant \sqrt{n}$ για κάθε μέτρο μ με άρτια συνεχή μη αρνητική πυκνότητα. Μάλιστα, η μελέτη αυτών των προβλημάτων στο πλαίσιο των γενικών μέτρων εγκαινιάστηκε από τον Zvavitch στο [108], όπου απέδειξε ότι το κλασσικό πρόβλημα Busemann-Petty για γενικά μέτρα έχει καταφατική απάντηση αν $n \leqslant 4$ και αρνητική αν $n \geqslant 5$. Μελετάμε το πρόβλημα για χαμηλότερες διαστάσεις και στην Παράγραφο 5.2 δίνουμε μια γενική εκτίμηση στην περίπτωση που το μ έχει άρτια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα.

Θεώρημα 2.3.2. *Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με άρτια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα g και έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω D ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(K \cap F) \leqslant \mu(D \cap F) \tag{2.3.18}$$

για κάθε $F \in G_{n,n-k}$. Τότε,

$$\mu(K) \leqslant (c_8 k L_{n-k})^k \, \mu(D), \tag{2.3.19}$$

όπου $c_8 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Συγκρίνοντας το Θεώρημα 2.3.2 με την εκτίμηση $\beta_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant \sqrt{n}$ των Koldobsky και Zvavitch, παρατηρούμε ότι η ανισότητά τους ισχύει για τυχόν μέτρο, δηλαδή δεν απαιτούμε από το μ να είναι λογαριθμικά κοίλο. Από την άλλη πλευρά, το Θεώρημα 2.3.2 ισχύει για τυχούσα συνδιάσταση $k < n$ και η κυρτότητα του δεύτερου σώματος D δεν απαιτείται.

Τα βασικά εργαλεία μας σε όλα αυτά τα αποτελέσματα είναι γενικευμένες ολοκληρωτικές ταυτότητες τύπου Blaschke-Petkantschin και η ανισότητα Busemann-Straus/Grinberg για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals ενός κυρτού σώματος. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.2 χρησιμοποιούμε επίσης ένα θεώρημα των Dann, Παούρη και Pivovarov.

Στην Παράγραφο 5.3 αποδεικνύουμε μια γενική ανισότητα ευστάθειας στο πνεύμα του θεωρήματος ευστάθειας του Koldobsky (δείτε το Θεώρημα 5.3.1).

Θεώρημα 2.3.3. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και K συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Αν g είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\int_{K \cap F} g(x)dx \leqslant \varepsilon \tag{2.3.20}$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$ και για όλους τους $F \in G_{n,n-k}$, τότε

$$\int_K g(x)dx \leqslant \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^k \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}\varepsilon, \tag{2.3.21}$$

όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Μια άλλη παραλλαγή του προβλήματος των τομών παίρνουμε αν θεωρήσουμε «διαφορές όγκων». Οι ανισότητες αυτού του τύπου δίνουν εκτιμήσεις για το σφάλμα που προκύπτει κατά τον υπολογισμό του όγκου ενός κυρτού σώματος μέσω του όγκου των τομών του. Έστω $\varrho_{n,k}$ η μικρότερη σταθερά $\varrho > 0$ που ικανοποιεί την ανισότητα

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} - \mathrm{vol}_n(L)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \varrho^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \big(\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F) - \mathrm{vol}_{n-k}(L\cap F)\big) \tag{2.3.22}$$

για κάθε $1 \leqslant k < n$ και κάθε ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$ με $L \subset K$. Ανοικτό είναι το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\sup_{n,k} \varrho_{n,k} \leqslant C.$$

Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο που έχουμε αναπτύξει μπορεί κανείς να δείξει μια γενική ανισότητα (βλέπε [40].

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω $1 \leqslant k < n$, έστω K κυρτό σώμα με $0 \in K$ και $L \subseteq K$ σύνολο Borel στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε μέτρο μ με φραγμένη μετρήσιμη μη αρνητική πυκνότητα, έχουμε*

(2.3.23)

$$\mu(K)^{n-k} - \mu(L)^{n-k} \leqslant \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}} \max_{F\in G_{n,n-k}} \left(\mu(K\cap F)^{n-k} - \mu(L\cap F)^{n-k}\right)$$

όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρουσιάζουμε επίσης μία ακόμα παραλλαγή των παραπάνω αποτελεσμάτων (βλέπε [41]).

Θεώρημα 2.3.5. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Έστω g φραγμένη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$\frac{\mu(K)}{\mathrm{vol}_n(K)} \leqslant \left(c\sqrt{n-k}\right)^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)}, \tag{2.3.24}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην Παράγραφο 5.4 αποδεικνύουμε κάποια αποτελέσματα για την περίπτωση του όγκου. Έχουμε τα ακόλουθα φράγματα για τις σταθερές $\alpha_{n,k}$ και $\beta_{n,k}$.

Θεώρημα 2.3.6. *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$\alpha_{n,k} \leqslant \beta_{n,k}. \tag{2.3.25}$$

Επιπλέον,

$$\beta_{n,k} \leqslant \overline{c}_1 L_n \tag{2.3.26}$$

όπου $\overline{c}_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Τέλος, για συνδιάσταση k που είναι ανάλογη του n έχουμε το ισχυρότερο φράγμα

$$\beta_{n,k} \leqslant \overline{c}_2 \sqrt{n/k}\, (\log(en/k))^{\frac{3}{2}} \tag{2.3.27}$$

όπου $\overline{c}_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Οι περισσότερες από τις εκτιμήσεις στο Θεώρημα 2.3.6 είναι ίσως γνωστές στους ειδικούς. Απλώς υποδεικνύουμε εναλλακτικούς τρόπους με τους οποίους προκύπτουν. Ειδικότερα, ο Koldobsky έχει αποδείξει στο [68] ότι

$$\beta_{n,k}^{(s)} \leqslant \overline{c}_4\sqrt{n/k}\,(\log(en/k))^{\frac{3}{2}} \tag{2.3.28}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, όπου $\overline{c}_4 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό είναι το συμμετρικό ανάλογο της (2.3.27).

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο περιγράφοντας πρόσφατα αποτελέσματα τα οποία δείχνουν ότι η ανισότητα

$$\sup_{\mu} \alpha_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant 2\sqrt{n}, \tag{2.3.29}$$

η οποία γενικεύτηκε στο [Λ-1], είναι ακριβής. Οι Klartag και Koldobsky απέδειξαν στο [59] ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $n \geqslant 3$,

$$\frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{\log\log n}} \leqslant \alpha_{n,1}^{(s)} \leqslant C\sqrt{n},$$

και, ακόμα πιο πρόσφατα, οι Klartag και Livshyts απέδειξαν στο [60] ότι ο λογαριθμικός όρος στο αριστερό μέλος της προηγούμενης ανισότητας δεν είναι απαραίτητος: τελικά,

$$\alpha_{n,1}^{(s)} \approx \sqrt{n}.$$

Συγκεκριμένα, ισχύει το εξής: για κάθε $n \geqslant 3$ υπάρχουν συμμετρικό κυρτό σώμα T στον $\mathbb{R}^n$ και άρτια συνεχής πυκνότητα $f : T \to [0,\infty)$ τέτοια ώστε, για κάθε αφφινικό υπερεπίπεδο $H \subset \mathbb{R}^n$,

$$\int_{T\cap H} f(x)\,dx \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}\,\mathrm{vol}_n(T)^{-1/n},$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η ύπαρξη των T και f εξασφαλίζεται με πιθανοθεωρητικές μεθόδους.

2.4 Παρατηρήσεις για την M-παράμετρο ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

Στο τελευταίο κεφάλαιο της διατριβής μελετάμε τις παραμέτρους $w(K)$ και $M(K)$ για συμμετρικά ισοτροπικά κυρτά σώματα. Το ερώτημα να δοθεί άνω φράγμα για το μέσο πλάτος ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος

$$w(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta)\,d\sigma(\vartheta),$$

δηλαδή, την L_1-νόρμα της συνάρτησης στήριξης του K ως προς το μέτρο Haar στη σφαίρα, ήταν ανοικτό για αρκετά χρόνια. Το άνω φράγμα $w(K) \leqslant cn^{3/4}L_K$ εμφανίστηκε στη διδακτορική διατριβή της Χαρτζουλάκη [51]. Άλλες προσεγγίσεις που οδηγούν στο ίδιο άνω φράγμα εμφανίζονται σε εργασίες των Pivovarov [102] και Βαλέττα, Γιαννόπουλου και Παούρη [45]. Ο E. Milman απέδειξε στο [84] ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $q \geqslant 1$ ισχύει

$$w(Z_q(K)) \leqslant C\log(1+q)\max\left\{\frac{q\log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q}\right\} L_K$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$w(K)\leqslant C\sqrt{n}(\log n)^2 L_K.$$

Η εξάρτηση από το n είναι βέλτιστη αν εξαιρέσουμε το λογαριθμικό όρο.

Το δυϊκό πρόβλημα, να δοθεί άνω φφράγμα για την αντίστοιχη L_1-νόρμα του συναρτησοειδούς Minkowski του K,

$$M(K):=\int_{S^{n-1}}\|x\|_K\,d\sigma(x),$$

όταν το K είναι συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα, δεν είχε μελετηθεί μέχρι πρόσφατα. Κάποια άνω φράγματα δόθηκαν αρχικά στο [46]. Η καλύτερη γνωστή εκτίμηση

$$M(K)\leqslant \frac{C\log^{2/5}(e+n)}{\sqrt[10]{n}L_K}$$

οφείλεται στους Γιαννόπουλο και E. Milman (δείτε το [42]).

Παρουσιάζουμε δύο προσεγγίσεις στο πρόβλημα. Η πρώτη είναι μέσω της ακολουθίας των παράμέτρων

$$r_k(K)=\sup\{t>0:\nu_{n,k}(\{F\in G_{n,k}:R(K\cap F)\geqslant t\})\geqslant e^{-k}\}. \tag{2.4.1}$$

Αυτές συνδέονται με την ποσότητα

$$d(K)=\min\left\{-\log\sigma\left(\left\{\vartheta\in S^{n-1}:\|\vartheta\|\leqslant\frac{M(K)}{2}\right\}\right),n\right\},$$

η οποία εισήχθη από τους Klartag και Vershynin και είναι πάντα μεγαλύτερη από την «διάσταση Dvoretzky» του K. Αποδεικνύουμε την ακόλουθη γενική ανισότητα:

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει $q_0(K)\geqslant cd(K)$ τέτοιος ώστε*

$$M(K)\approx\frac{1}{r_k(K)}\approx\frac{1}{r_{q_0(K)}(K)}$$

για κάθε $1\leqslant k\leqslant q_0(K)$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε κάποια μερικά αποτελέσματα στην ισοτροπική περίπτωση. Αν

$$w_k(K)=\sup\{\mathrm{vrad}(K\cap F):F\in G_{n,k}\}\quad\text{και}\quad w_k^-(K)=\inf\{\mathrm{vrad}(K\cap F):F\in G_{n,k}\} \tag{2.4.2}$$

τότε, αν $\lambda\in(0,1)$ και $k\geqslant\lambda n$ έχουμε

$$w_k^-(K)\geqslant c(\lambda)\sqrt{k},$$

όπου $c(\lambda)=c^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ και $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$r_k(K)\geqslant c(\lambda)\sqrt{k}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι μορούμε να δώσουμε μια σχεδόν βέλτιστη εκτίμηση για την παράμετρο $w_k(K)$, ακόμα και χωρίς να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ έχουμε

$$w_k(K)\geqslant\frac{c\sqrt{n}}{\log n},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η δεύτερη προσέγγιση μας στο πρόβλημα είναι μέσω της ακολουθίας των παραμέτρων

$$v_k^-(K)=\inf\{\mathrm{vrad}(P_F(K)) : F\in G_{n,k}\}.$$

Το ερώτημα να δοθούν κάτω φράγματα για την $v_k^-(K)$ συνδέεται με το πρόβλημά μας όπως φαίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 2.4.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $\mathrm{vrad}(P_F(K))\geqslant c\sqrt{n}L_K$ για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ και $F\in G_{n,k}$ τότε*

$$M(K)\leqslant \frac{c(\log n)^b}{\sqrt[4]{n}L_K}.$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι η συνθήκη $\mathrm{vrad}(P_F(K))\geqslant c\sqrt{n}L_K$ ικανοποιείται (αν εξαιρέσουμε τον όρο L_K) με πιθανότητα πολύ κοντά στο 1 στην $G_{n,k}$. Αποδεικνύουμε ότι:

(i) Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ και $t>1$,

$$\nu_{n,k}(\{F\in G_{n,k} : \mathrm{vrad}(P_F(K))\geqslant ct^{-1}\sqrt{n}\})\geqslant 1-t^{-kn},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

(ii) Για κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$, ο τυχαίος $F\in G_{n,k}$ ικανοποιεί την

$$\mathrm{vrad}(P_F(K))\geqslant c\sqrt{k}L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-(n-k)n}$.

Το γενικό όμως κάτω φράγμα που γνωρίζουμε αυτήν την στιγμή είναι το εξής.

Πρόταση 2.4.3. *Έστω K ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ και $F\in G_{n,k}$ έχουμε*

$$R(P_F(K))\geqslant \sqrt{k}L_K \quad \textit{και} \quad \mathrm{vrad}(P_F(K))\geqslant c\sqrt[4]{k}L_K.$$

Ειδικότερα, $v_k^-(K)\geqslant c\sqrt[4]{k}L_K$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανισότητες για τον όγκο τομών και προβολών κυρτών σωμάτων

3.1 Περιορισμένες ανισότητες Loomis-Whitney

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε ανισότητες για προβολές κυρτών σωμάτων, οι οποίες σχετίζονται με την κλασσική ανισότητα Loomis-Whitney και την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás-Thomason. Η ανισότητα Loomis-Whitney ισχυρίζεται ότι για κάθε συμπαγές σύνολο K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^{n} \mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))$$

όπου $P_i(K)$ είναι η προβολή του K στον $e_i^{\perp}$. Η ανισότητα των Bollobás και Thomason γενικεύει την ανισότητα Loomis-Whitney. Υπενθυμίζουμε ότι αν $s \geqslant 1$ και $\sigma \subseteq [n]$, τότε λέμε ότι τα $\sigma_1, \ldots, \sigma_r \subseteq \sigma$ σχηματίζουν s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ αν κάθε $j \in \sigma$ ανήκει σε ακριβώς s από τα σύνολα σ_i. Η ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος ισχυρίζεται ότι αν $r \geqslant 1$ και $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ είναι ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$ τότε, για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ που είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{s} \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(K))$$

όπου, για κάθε $\tau \subset [n] := \{1, \ldots, n\}$, θέτουμε $F_\tau = \mathrm{span}\{e_j : j \in \tau\}$ και $E_\tau = F_\tau^{\perp}$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε *περιορισμένες* εκδοχές αυτών των ανισοτήτων. Σε μια απλή περίπτωση, μια τέτοια ανισότητα είχε αποδειχθεί από τους Γιαννόπουλο, Παούρη και Χαρτζουλάκη: Αν $i \neq j \in \{1, \ldots, n\}$ και $P_{ij}(K) = P_{E_{ij}}(K)$, όπου $E_{ij} = \mathrm{span}\{e_i, e_j\}^{\perp}$, τότε

$$\mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))\,\mathrm{vol}_{n-1}(P_j(K)) \geqslant \frac{n}{2(n-1)}\,\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_{n-2}(P_{ij}(K)). \tag{3.1.1}$$

Η ανισότητα αυτή δίνει κάτω φράγμα για τον γεωμετρικό μέσο δύο μόνο προβολών ενός κυρτού σώματος σε υπόχωρους συντεταγμένων συνδιάστασης 1. Αποδεικνύουμε μια γενική ανισότητα αυτού του τύπου.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $r > s \geqslant 1$, $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{E_{\sigma_i}}(K)) \geqslant \gamma(n,d,s,r)\mathrm{vol}(P_{E_\sigma}(K))^s \,\mathrm{vol}_n(K)^{r-s},$$

όπου

$$\gamma(n,d,s,r) = \binom{n}{d}^{r-s} \binom{n - \frac{sd}{r}}{n-d}^{-r}.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1, θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás και Thomason σε συνδυασμό με την ακόλουθη κλασσική ανισότητα του Berwald από το [19].

Λήμμα 3.1.2 (Berwald)**.** *Έστω A κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^m$ και $\varphi : A \to \mathbb{R}^+$ κοίλη συνάρτηση. Τότε, για κάθε $0 < p < q$,*

$$\left[\binom{m+q}{m} \frac{1}{\mathrm{vol}_m(A)} \int_A |\varphi(x)|^q dx\right]^{1/q} \leqslant \left[\binom{m+p}{m} \frac{1}{\mathrm{vol}_m(A)} \int_A |\varphi(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 Έστω $r > s \geqslant 1$, έστω $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο καλυμμα του σ. Παρατηρήστε ότι αν $|\sigma_i| = d_i$ τότε

$$ds = d_1 + \cdots + d_r.$$

Για κάθε $y \in P_{E_\sigma}(K)$ ορίζουμε τα σύνολα

$$K_i(y) = \left\{t \in F_{\sigma \setminus \sigma_i} : y + t \in P_{E_{\sigma_i}}(K)\right\}$$

και

$$K(y) = \{t \in F_\sigma : y + t \in K\}.$$

Τότε, το $K_i(y)$ είναι η ορθογώνια προβολή του $K(y)$ στον $F_{\sigma \setminus \sigma_i}$. Αφού το $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ είναι s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ, βλέπουμε ότι το $(\sigma \setminus \sigma_1, \dots, \sigma \setminus \sigma_r)$ είναι $(r-s)$-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Από την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος έπεται ότι

$$\mathrm{vol}(K(y))^{r-s} \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(K_i(y))$$

για κάθε $y \in P_{E_\sigma}(K)$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι

(3.1.2)
$$\begin{aligned}\prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{E_{\sigma_i}}(K)) &= \prod_{i=1}^{r} \int_{P_{E_\sigma}(K)} \mathrm{vol}(K_i(y))\, dy \geqslant \left(\int_{P_{E_\sigma}(K)} (\mathrm{vol}(K_1(y)) \cdots \mathrm{vol}(K_r(y)))^{1/r} dy\right)^r \\ &\geqslant \left(\int_{P_{E_\sigma}(K)} \mathrm{vol}(K(y))^{\frac{r-s}{r}} dy\right)^r.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski, η συνάρτηση $\varphi : P_{E_\sigma}(K) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\varphi(y) = \mathrm{vol}(K(y))^{1/d}$ είναι κοίλη, και

$$\mathrm{vol}(K(y))^{\frac{r-s}{r}} = \varphi(y)^{\frac{(r-s)d}{r}} = \varphi(y)^{d-\frac{d_1+\cdots+d_r}{r}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_{P_{E_\sigma}(K)} \varphi(y)^d\, dy = \int_{P_{E_\sigma}(K)} \mathrm{vol}(K(y))\, dy = \mathrm{vol}_n(K).$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.1.2 με $A = P_{E_\sigma}(K)$, $m = n-d$, $p = \frac{(r-s)d}{r}$ και $q = d$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}(3.1.3)\qquad &\left[\binom{n-d+\frac{(r-s)d}{r}}{n-d}\frac{1}{\mathrm{vol}(P_{E_\sigma}(K))}\int_{P_{E_\sigma}(K)} \mathrm{vol}(K(y))^{\frac{r-s}{r}}\,dy\right]^r \\ &= \left[\binom{n-\frac{sd}{r}}{n-d}\frac{1}{\mathrm{vol}(P_{E_\sigma}(K))}\int_{P_{E_\sigma}(K)} \varphi(y)^{\frac{(r-s)d}{r}}\,dy\right]^r \\ &\geqslant \left[\binom{n}{d}\frac{1}{\mathrm{vol}(P_{E_\sigma}(K))}\int_{P_{E_\sigma}(K)} \varphi(y)^d\,dy\right]^{r-s} \\ &= \left[\binom{n}{d}\frac{1}{\mathrm{vol}(P_{E_\sigma}(K))}\mathrm{vol}_n(K)\right]^{r-s}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\left(\int_{P_{E_\sigma}(K)} \mathrm{vol}(K(y))^{\frac{r-s}{r}}\,dy\right)^r \geqslant \binom{n}{d}^{r-s}\binom{n-\frac{sd}{r}}{n-d}^{-r}\mathrm{vol}(P_{E_\sigma}(K))^s\,\mathrm{vol}_n(K)^{r-s},$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από την (3.1.2). □

Παρατήρηση 3.1.3. Αν υποθέσουμε ότι τα σύνολα $\sigma_1,\dots,\sigma_r$ έχουν τον ίδιο πληθάριθμο k, τότε $k = \frac{sd}{r}$ και το αποτέλεσμα παίρνει τη μορφή

$$\prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(P_{E_{\sigma_i}}(K)) \geqslant \binom{n}{d}^{r-s}\binom{n-k}{n-d}^{-r}\mathrm{vol}(P_{E_\sigma}(K))^s\,\mathrm{vol}_n(K)^{r-s}.$$

Για να πάρουμε καλύτερη εικόνα για το είδος των εκτιμήσεων που προκύπτουν, ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση δύο ορθογώνιων υποχώρων συντεταγμένων $F_1, F_2 \in G_{n,k}$, όπου $k < n/2$. Τότε, $r=2$, $s=1$ και $d=2k$. Συνεπώς,

$$\gamma(n,2k,1,2) = \binom{n}{2k}\binom{n-k}{k}^{-2} \geqslant c_1^k$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$. Άρα, παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 3.1.4. *Έστω $k < n/2$ και $F_1, F_2 \in G_{n,k}$ δύο ορθογώνιοι υπόχωροι συντεταγμένων. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}(P_{F_1^\perp\cap F_2^\perp}(K))\,\mathrm{vol}_n(K) \leqslant c^k\,\mathrm{vol}(P_{F_1^\perp}(K))\,\mathrm{vol}(P_{F_2^\perp}(K)),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

3.2 Περιορισμένες δυϊκές ανισότητες Loomis-Whitney

Σε αυτήν την παράγραφο ξεκινάμε από το ερώτημα αν ισχύει ανισότητα για τομές κυρτών σωμάτων, η οποία να είναι δυϊκή της (3.1.1). Συγκεκριμένα, το ερώτημα είναι αν για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$, ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap e_i^{\perp})\,\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap e_j^{\perp}) \leqslant c_0 \mathrm{vol}_{n-2}(K \cap E_{ij})\,\mathrm{vol}_n(K), \tag{3.2.1}$$

όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Δείχνουμε αρχικά ότι αυτό το ερώτημα έχει καταφατική απάντηση. Στη συνέχεια, γενικεύοντας τη μέθοδο και χρησιμοποιώντας την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás και Thomason, αποδεικνύουμε πιο γενικές ανισότητες αυτής της μορφής, στο πνεύμα του Θεωρήματος 3.1.1.

Θεώρημα 3.2.1. *Έστω $r > s \geqslant 1$, έστω $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Θέτουμε επίσης $d_i = |\sigma_i|$. Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(K \cap E_{\sigma_i}) \leqslant \frac{(c_0 d)^{ds}}{d_1^{d_1} \cdots d_r^{d_r}} \mathrm{vol}(K \cap E_{\sigma})^s \mathrm{vol}_n(K)^{r-s}, \tag{3.2.2}$$

όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1 θα χρησιμοποιήσουμε μερικές από τις βασικές ιδιότητες των L_p-κεντροειδών σωμάτων ενός κυρτού σώματος. Υπενθυμίζουμε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $p \geqslant 1$, το L_p-κεντροειδές σώμα $Z_p(K)$ του K είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_p(K)}(y) = \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L^p(K)} = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^p dx\right)^{1/p}.$$

Τα L_p-κεντροειδή σώματα εισήχθησαν από τους Lutwak και Zhang. Η συστηματική μελέτη τους από τη σκοπιά της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας ξεκίνησε με τις εργασίες του Παούρη [92] και [93]. Ειδικότερα, η ανισότητα (3.2.4) η οποία εμφανίζεται παρακάτω και παίζει ουσιαστικό ρόλο στο επιχείρημά μας προέρχεται από το [93]. Θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες της οικογένειας $\{Z_p(K)\}_{p \geqslant 1}$. Για τις αποδείξεις παραπέμπουμε στο [2, Κεφάλαιο 5].

Λήμμα 3.2.2 (L_p-κεντροειδή σώματα)**.** *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_i > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$ ισχύουν τα εξής:*

(α) *Για κάθε $q > p \geqslant 1$,*

$$Z_q(K) \subseteq \frac{c_1 q}{p} Z_p(K). \tag{3.2.3}$$

Επιπλέον, αν $p \geqslant n$ τότε

$$Z_p(K) \supseteq c_2 Z_\infty(K),$$

όπου $Z_\infty(K) = \mathrm{conv}\{K, -K\}$.

(β) *Για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n-1$ *και* $F \in G_{n,k}$,

$$c_3 \leqslant \mathrm{vol}(K \cap F^{\perp})^{1/k} \mathrm{vol}(P_F(Z_k(K)))^{1/k} \leqslant c_4. \tag{3.2.4}$$

(γ) *Για κάθε* $p \geqslant 1$ *και κάθε* $u \in S^{n-1}$,

$$c_5 h_{Z_p(K)}(u) \leqslant \frac{1}{\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp})} \leqslant c_6 p h_{Z_p(K)}(u). \tag{3.2.5}$$

Αρχίζουμε με μια ειδική περίπτωση της γενικής ανισότητας του Θεωρήματος 3.2.1, η οποία περιγράφει τις βασικές ιδέες πίσω από την απόδειξή της.

Θεώρημα 3.2.3. *Έστω* K *ένα κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το* 0 *στον* $\mathbb{R}^n$ *και έστω* u, v *ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα στον* $\mathbb{R}^n$. *Αν* $E_{uv} = [\mathrm{span}\{u,v\}]^{\perp}$ *τότε*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp})\, \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap v^{\perp}) \leqslant c\, \mathrm{vol}_{n-2}(K \cap E_{uv})\, \mathrm{vol}_n(K),$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι ομογενής, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{vol}_n(K) = 1$. Χρησιμοποιώντας την (3.2.4) με $F = E_{uv}^{\perp} = \mathrm{span}\{u,v\}$ βλέπουμε ότι

$$\mathrm{vol}_{n-2}(K \cap E_{uv}) \geqslant \frac{c_7}{\mathrm{vol}_2(P_F(Z_2(K)))}.$$

Από την (3.2.5) έχουμε

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp})\, \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap v^{\perp}) \leqslant c_8 \left[h_{Z_1(K)}(u) h_{Z_1(K)}(v)\right]^{-1}.$$

Από την (3.2.3) έχουμε επίσης

$$h_{Z_1(K)}(u) \geqslant c_{10} h_{Z_2(K)}(u) = c_{10} h_{P_F(Z_2(K))}(u)$$

και

$$h_{Z_1(K)}(v) \geqslant c_{10} h_{Z_2(K)}(v) = c_{10} h_{P_F(Z_2(K))}(v),$$

όπου οι δύο ισότητες ισχύουν διότι $u, v \in F$. Αν θεωρήσουμε το διδιάστατο συμμετρικό ελλειψοειδές $C = P_F(Z_2(K))$ είναι φανερό (από την ανισότητα Loomis-Whitney στο επίπεδο) ότι

$$\mathrm{vol}_2(C) \leqslant 4 h_C(u) h_C(v),$$

και αυτό δείχνει ότι

(3.2.6)
$$\begin{aligned} c_7 \mathrm{vol}_{n-2}(K \cap E_{uv})^{-1} &\leqslant \mathrm{vol}_2(P_F(Z_2(K))) \leqslant 4 h_{P_F(Z_2(K))}(u) h_{P_F(Z_2(K))}(v) \\ &\leqslant 4 c_{10}^{-2} h_{Z_1(K)}(u) h_{Z_1(K)}(v) \leqslant 4 c_8 c_{10}^{-2} \big(\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp})\, \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap v^{\perp})\big)^{-1}. \end{aligned}$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Έστω $r > s \geqslant 1$, έστω $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και έστω $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Παρατηρήστε ότι αν $|\sigma_i| = d_i$ τότε $ds = d_1 + \cdots + d_r$.

Η ανισότητα είναι ομογενής, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{vol}_n(K) = 1$. Ξεκινώντας από την (3.2.4) μπορούμε να γράψουμε

$$c_3 \leqslant \mathrm{vol}(K \cap E_{\sigma_i})^{\frac{1}{d_i}} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K)))^{\frac{1}{d_i}} \leqslant c_4$$

για κάθε i, άρα,

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(K \cap E_{\sigma_i}) \leqslant c_3^{d_1+\cdots+d_r} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K)))^{-1} = c_4^{ds} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K)))^{-1},$$

οπότε χρειαζόμαστε κάτω φράγμα για το γινόμενο

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K))).$$

Από την (3.2.3) έχουμε

$$Z_d(K) \subseteq \frac{c_1 d}{d_i} Z_{d_i}(K)$$

για κάθε $i = 1, \ldots, r$, η οποία δίνει

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(Z_d(K))) \leqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\frac{c_1 d}{d_i}\right)^{d_i} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K))) = \frac{(c_1 d)^{ds}}{d_1^{d_1} \cdots d_r^{d_r}} \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K))).$$

Τώρα, αφού το $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ είναι s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ, εφαρμόζοντας την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás και Thomason για το κυρτό σώμα $P_{F_\sigma}(Z_d(K))$ παίρνουμε

$$\mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(Z_d(K)))^s \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_{\sigma_i}}(Z_d(K))).$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας πάλι την (3.2.4), βλέπουμε ότι

$$\mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(Z_d(K)))^s \geqslant c_3^{ds} \mathrm{vol}(K \cap E_\sigma)^{-s}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(K \cap E_{\sigma_i}) \leqslant \frac{(c_1 c_3 d)^{ds}}{d_1^{d_1} \cdots d_r^{d_r}} \mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(Z_d(K)))^{-s} \leqslant \frac{(c_0 d)^{ds}}{d_1^{d_1} \cdots d_r^{d_r}} \mathrm{vol}(K \cap E_\sigma)^s,$$

όπου $c_0 = c_1 c_4 / c_3$, και έπεται το αποτέλεσμα. □

Παρατήρηση 3.2.4. Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.2.1 έχουμε $d_1 + \cdots + d_r = ds$, άρα

$$d_1^{d_1} \cdots d_r^{d_r} \geqslant \left(\frac{ds}{r}\right)^{ds}$$

από την ανισότητα Jensen. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα στην απλούστερη μορφή

$$\prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(K\cap E_{\sigma_i}) \leqslant \left(\frac{c_0 r}{s}\right)^{ds} \mathrm{vol}(K\cap E_{\sigma})^s \mathrm{vol}_n(K)^{r-s}.$$

Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την (3.2.2) αν όλα τα σύνολα σ_i έχουν την ίδια πληθικότητα $k=\frac{ds}{r}$. Η αφετηρία μας (3.1.1) αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση $d=r=2$, $k=1$ και $s=1$. Στη γενικότερη περίπτωση $d=r$, $k=1$ και $s=1$, που αντιστοιχεί στο να πάρουμε $\sigma_j=\{i_j\}$ για κάποιους διακεκριμένους $i_1,\ldots,i_r\in[n]$, το Θεώρημα 3.2.1 δίνει το φράγμα

$$\prod_{j=1}^{r} \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap e_{i_j}^{\perp}) \leqslant (c_0 r)^r\, \mathrm{vol}_{n-r}(K\cap[\mathrm{span}\{e_{i_1},\ldots,e_{i_r}\}]^{\perp})\, \mathrm{vol}_n(K)^{r-1}. \tag{3.2.7}$$

Η σταθερά $(c_0r)^r$ στην (3.2.7) ίσως δεν είναι βέλτιστη, εξαρτάται όμως μόνο από το r και όχι από τη διάσταση n.

Για να δώσουμε μια γεύση των εκτιμήσεων, ας θεωρήσουμε την περίπτωση δύο ορθογώνιων υποχώρων συντεταγμένων $F_1,F_2\in G_{n,k}$, όπου $k<n/2$. Τότε, $r=2$, $s=1$ και $d=2k$. Συνεπώς, παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 3.2.5. *Έστω $k<n/2$ και $F_1,F_2\in G_{n,k}$ δύο ορθογώνιοι υπόχωροι συντεταγμένων. Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}(K\cap F_1^{\perp})\,\mathrm{vol}(K\cap F_2^{\perp}) \leqslant c^k\, \mathrm{vol}(K\cap F_1^{\perp}\cap F_2^{\perp})\,\mathrm{vol}_n(K), \tag{3.2.8}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

3.3 Ανισότητες για μεικτούς όγκους

Δίνουμε τώρα μια εναλλακτική απόδειξη της (3.1.1), με την ίδια σταθερά, χρησιμοποιώντας μια γενική ανισότητα για μεικτούς όγκους. Έστω $\mathcal{C}=(K_3,\ldots,K_n)$ μια $(n-2)$-άδα συμπαγών κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ζεύγος συμπαγών κυρτών συνόλων A,B στον $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε το μεικτό όγκο $V(A,B,\mathcal{C})$ με $V(A,B)$. Θα βασιστούμε σε ένα λήμμα, το οποίο είναι σχεδόν άμεση συνέπεια ενός λήμματος από το [38] (παραλλαγή του οποίου είχε νωρίτερα αποδειχθεί στο [43]).

Λήμμα 3.3.1. *Έστω $\mathcal{C}=(K_3,\ldots,K_n)$ μια $(n-2)$-άδα σωμάτων $K_j\in\mathcal{K}_n$. Αν $A,B\in\mathcal{K}_n$, συμβολίζουμε τον $V(A,B,\mathcal{C})$ με $V(A,B)$. Τότε, για κάθε $A,B,C\in\mathcal{K}_n$ έχουμε*

$$V(A,A)V(B,C)\leqslant 2V(A,B)V(A,C). \tag{3.3.1}$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel, για κάθε $t,s\geqslant 0$ έχουμε

$$V(B+tA,C+sA)^2 - V(B+tA,B+tA)V(C+sA,C+sA)\geqslant 0$$

και

$$V(sB+tC,A)^2 - V(sB+tC,sB+tC)V(A,A)\geqslant 0.$$

Χρησιμοποιώντας την γραμμικότητα των μεικτών όγκων, από την πρώτη ανισότητα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}0 &\leqslant g(t,s) + t^2\left(V(C,A)^2 - V(A,A)V(C,C)\right) + s^2\left(V(B,A)^2 - V(A,A)V(B,B)\right)\\ &\quad + 2ts\left(V(B,C)V(A,A) - V(B,A)V(C,A)\right),\end{aligned}$$

όπου g είναι μια γραμμική συνάρτηση των t και s. Έπεται ότι ο τετραγωνικός όρος είναι μη-αρνητικός, άρα, είτε $V(B,C)V(A,A) > V(B,A)V(C,A)$ ή η διακρίνουσά του

$$\begin{aligned}&(V(B,A)V(C,A) - V(B,C)V(A,A))^2\\ &\qquad - [V(B,A)^2 - V(A,A)V(B,B)]\,[V(C,A)^2 - V(A,A)V(C,C)]\end{aligned}$$

είναι μη-θετική. Όμοια, από την δεύτερη ανισότητα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}0 &\leqslant t^2(V(C,A)^2 - V(A,A)V(C,C)) + s^2(V(B,A)^2 - V(A,A)V(B,B))\\ &\quad + 2ts(V(B,A)V(C,A) - V(B,C)V(A,A)).\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $V(B,C)V(A,A) > V(B,A)V(C,A)$ τότε η διακρίνουσα της δεύτερης τετραγωνικής μορφής (που είναι η ίδια με την προηγούμενη) είναι μη-θετική. Έπεται ότι, και στις δύο περιπτώσεις,

$$\begin{aligned}&(V(B,A)V(C,A) - V(B,C)V(A,A))^2\\ &\qquad \leqslant [V(B,A)^2 - V(A,A)V(B,B)]\,[V(C,A)^2 - V(A,A)V(C,C)]\\ &\qquad \leqslant V(B,A)^2V(C,A)^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$|V(B,A)V(C,A) - V(B,C)V(A,A)| \leqslant V(B,A)V(C,A),$$

και το λήμμα έπεται άμεσα. □

Η (3.3.1) οδηγεί σε μια γενίκευση της (3.1.1), η οποία ισχύει για κάθε ζεύγος προβολών συνδιάστασης 1 που ορίζονται από δύο όχι απαραίτητα ορθογώνια διανύσματα u και v.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $u,v \in S^{n-1}$. Αν $P_{u,v}(K) = P_{\mathrm{span}\{u,v\}^\perp}(K)$, τότε*

$$\mathrm{vol}_{n-1}(P_u(K))\,\mathrm{vol}_{n-1}(P_v(K)) \geqslant \frac{n}{2(n-1)}\sqrt{1-\langle u,v\rangle^2}\,\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_{n-2}(P_{u,v}(K)).$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.2, για κάθε $u \in S^{n-1}$ γράφουμε L_u για το ευθύγραμμο τμήμα $[0,u]$. Υπολογίζοντας τον όγκο του $K + tL_u$ βλέπουμε ότι

$$nV(K[n-1], L_u) = \mathrm{vol}_{n-1}(P_E(K))$$

για κάθε $K \in \mathcal{K}_n$, όπου $E = u^\perp$. Από την γραμμικότητα των μεικτών όγκων έχουμε

$$nV(K_1,\dots,K_{n-1},L_u) = V_E(P_E(K_1),\dots,P_E(K_{n-1})) \tag{3.3.2}$$

για κάθε $K_1,\dots,K_{n-1} \in \mathcal{K}_n$, όπου V_E είναι οι μεικτοί όγκοι στον E. Το ακόλουθο πιο γενικό αποτέλεσμα οφείλεται στον Fedotov (βλέπε [3]).

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $E \in G_{n,k}$ και $L_1, \ldots, L_{n-k}$ συμπαγή κυρτά υποσύνολα του $E^{\perp}$. Για κάθε $K_1, \ldots, K_k \in \mathcal{K}_n$,*

$$\binom{n}{k} V(K_1, \ldots, K_k, L_1, \ldots, L_{n-k}) = V_E(P_E(K_1), \ldots, P_E(K_k)) V_{E^{\perp}}(L_1, \ldots, L_{n-k}),$$

όπου $V_E, V_{E^{\perp}}$ είναι οι μεικτοί όγκοι στους $E, E^{\perp}$ αντίστοιχα.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.2. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.3.1 με $\mathcal{C} = (K, \ldots, K)$, $A = K$, $B = L_u = [0,u]$ και $C = L_v = [0,v]$. Έχουμε

$$V(L_u, L_v) V(K, K) \leqslant 2V(K, L_u) V(K, L_v).$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.3 με $\mathcal{C} = (K, \ldots, K)$, $L_1 = [0,u]$, $L_2 = [0,v]$ και $E = \mathrm{span}\{e_s : s \neq i,j\}$, και παρατηρώντας ότι $V_{E^{\perp}}(L_u, L_v) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \langle u,v\rangle^2}$, βλέπουμε ότι

$$V(L_u, L_v) = V(K, \ldots, K, L_u, L_v) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \langle u,v\rangle^2} \binom{n}{2}^{-1} \mathrm{vol}_{n-2}(P_{u,v}(K)).$$

Παίρνοντας υπόψη την (3.3.2) και το γεγονός ότι $V(K,K) = \mathrm{vol}_n(K)$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{n(n-1)}\sqrt{1 - \langle u,v\rangle^2}\mathrm{vol}_{n-2}(P_{u,v}(K))\,\mathrm{vol}_n(K) \leqslant \frac{2}{n^2}\mathrm{vol}_{n-1}(P_u(K))\,\mathrm{vol}_{n-1}(P_v(K)),$$

και έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 3.3.4. Οι Hug και Schneider [52] έχουν κάνει την εικασία ότι για κάθε $1 \leqslant r \leqslant n$ και κάθε r-άδα $(K_1, \ldots, K_r)$ κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$V(K_1, \ldots, K_r, B_2^n[n-r]) \leqslant \frac{(n-r)!\kappa_{n-r}}{n!} \prod_{i=1}^{r} V_1(K_i), \tag{3.3.3}$$

όπου $V(A_1, \ldots, A_n)$ είναι ο μεικτός όγκος των n συμπαγών κυρτών συνόλων A_i, ο συμβολισμός $A[m]$ χρησιμοποιείται για μια m-άδα $A, \ldots, A$, και

$$\kappa_{n-s} V_s(K) = \binom{n}{s} V(K[s], B_2^n[n-s])$$

είναι ο s-οστός intrinsic όγκος του K (βλέπε επίσης [20] για την περίπτωση του επιπέδου). Οι Hug και Schneider απέδειξαν την (3.3.3) στην ειδική περίπτωση που τα σώματα $K_1, \ldots, K_r$ είναι ζωνοειδή. Στην περίπτωση $r = 2$, οι Artstein-Avidan, Florentin και Ostrover έχουν αποδείξει στο [11] ότι αν K είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα και Z είναι ένα ζωνοειδές στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathrm{vol}_n(B_2^n)\, V(K, Z, B_2^n[n-2]) \leqslant \frac{n}{n-1} \frac{\kappa_n \kappa_{n-2}}{\kappa_{n-1}^2} V(K, B_2^n[n-1])\, V(Z, B_2^n[n-1]). \tag{3.3.4}$$

Από τον ορισμό του $V_1(K)$ αυτή η ανισότητα είναι η ίδια με αυτήν της εικασίας (για $r = 2$).

Παρατηρούμε ότι η (3.3.1) έχει ως συνέπεια μια πιο γενική ανισότητα, η οποία επιβεβαιώνει την εικασία ότι ισχύει η (3.3.3) στην περίπτωση $r = 2$, με μια απόλυτη (σχεδόν βέλτιστη) σταθερά.

Θεώρημα 3.3.5. *Έστω A ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K_1 και K_2 στον $\mathbb{R}^n$,*

$$\mathrm{vol}_n(A)\, V(K_1, K_2, A[n-2]) \leqslant 2V(K_1, A[n-1])\, V(K_2, A[n-1]).$$

Επιλέγοντας $A = B_2^n$ στο Θεώρημα 3.3.5 βλέπουμε αμέσως ότι για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K_1, K_2 στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(B_2^n)\, V(K_1, K_2, B_2^n[n-2]) \leqslant 2V(K, B_2^n[n-1])V(K_2, B_2^n[n-1]). \tag{3.3.5}$$

Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $\frac{n-1}{n} < \frac{\kappa_n \kappa_{n-2}}{\kappa_{n-1}^2} < 1$, άρα η σταθερά $b_{n,2} := \frac{n}{n-1}\frac{\kappa_n \kappa_{n-2}}{\kappa_{n-1}^2}$ που εικάζεται ικανοποιεί την

$$1 < b_{n,2} < \frac{n}{n-1}.$$

Με άλλα λόγια, η σταθερά του Θεωρήματος 3.3.5 υπολείπεται της σταθεράς της εικασίας (μόνο) κατά έναν παράγοντα 2.

Παρατήρηση 3.3.6. Θυμηθείτε ότι

$$V(K_i, B_2^n[n-1]) = \kappa_n \int_{S^{n-1}} h_{K_i}(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta)$$

για $i = 1, 2$ και ότι (βλέπε, για παράδειγμα, [8])

$$V(K_1, K_2, B_2^n[n-2]) = \kappa_n \int_{S^{n-1}} h_{K_1}(\vartheta) \left(h_{K_2}(\vartheta) + \frac{1}{n-1}\Delta_S h_{K_2}(\vartheta) \right) d\sigma(\vartheta)$$

όπου Δ_S είναι ο σφαιρικός τελεστής Laplace στην S^{n-1}, άρα η (3.3.5) έχει ως συνέπεια ότι για κάθε ζεύγος συναρτήσεων στήριξης ισχύει

$$\int_{S^{n-1}} h_{K_1}(\vartheta) \left(h_{K_2}(\vartheta) + \frac{1}{n-1}\Delta_S h_{K_2}(\vartheta) \right) d\sigma(\vartheta) \leqslant 2 \int_{S^{n-1}} h_{K_1}(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta) \int_{S^{n-1}} h_{K_2}(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta).$$

Παρατήρηση 3.3.7. Ένα πιο γενικό πρόβλημα μελετάται στο [106], όπου οι Soprunov και Zvavitch αποδεικνύουν ότι αν A είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $Z_1, \ldots, Z_r$ είναι ζωνοειδή τότε

$$\mathrm{vol}_n(A)^{r-1} V(Z_1, \ldots, Z_r, A[n-r]) \leqslant r^{r-1} \prod_{i=1}^{r} V(Z_i, A[n-1]), \tag{3.3.6}$$

και για κάθε r-άδα (τυχόντων) κυρτών σωμάτων $K_1, \ldots, K_r$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(A)^{r-1} V(K_1, \ldots, K_r, A[n-r]) \leqslant c_{n,r} \prod_{i=1}^{r} V(K_i, A[n-1]), \tag{3.3.7}$$

όπου $c_{n,r} = n^r r^{r-1}$. Επιπλέον, η σταθερά $c_{n,r}$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $c'_{n,r} = n^{r/2} r^{r-1}$ αν τα $K_1, \ldots, K_r$ είναι συμμετρικά.

Από το Θεώρημα 3.3.5 βλέπουμε αμέσως ότι αν $r = 2$ τότε παίρνουμε την (3.3.7) στη μορφή

$$\mathrm{vol}_n(A)\, V(K_1, K_2, A[n-2]) \leqslant 2 \prod_{i=1}^{2} V(K_i, A[n-1]).$$

Ένα απλό επαγωγικό επιχείρημα δείχνει ότι αν $r = 3$ τότε μπορούμε να πάρουμε την (3.3.7) στη μορφή

$$\mathrm{vol}_n(A)^2\, V(K_1, K_2, K_3, A[n-3]) \leqslant 8 \prod_{i=1}^{3} V(K_i, A[n-1]).$$

Γενικότερα, για κάθε $r \geqslant 2$ υπάρχει $c_r > 0$ (που εξαρτάται μόνο από το r) τέτοια ώστε, για κάθε $n > r$ και κάθε r-άδα $(K_1, \dots, K_r)$ κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(A)^{r-1} V(K_1, \dots, K_r, A[n-r]) \leqslant c_r \prod_{i=1}^{r} V(K_i, A[n-1]). \tag{3.3.8}$$

Με επαγωγή μπορεί κανείς να ελέγξει ότι η (3.3.8) ισχύει με $c_r \leqslant 2^{2^{r-1}-1}$. Θα ήταν ενδιαφέρον να προσδιοριστεί η βέλτιστη τιμή αυτής της σταθεράς.

Τέλος, αναφέρουμε ότι οι Soprunov και Zvavitch έχουν παρατηρήσει στο [106] ότι αν $A = \Delta$ είναι ένα n-διάστατο simplex τότε η (3.3.8) ισχύει με σταθερά 1, και κάνουν την εικασία ότι αν ένα κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την (3.3.8) με σταθερά 1 για κάθε r και όλα τα $K_1, \dots, K_r \in \mathcal{K}_n$ τότε το A πρέπει να είναι n-διάστατο simplex. Στο [105] αυτή η εικασία επαληθεύεται με την πρόσθετη υπόθεση ότι το A είναι πολύτοπο.

3.4 Ανισότητα Brascamp-Lieb και ανισότητες για ομοιόμορφα καλύμματα

Σε αυτήν την παράγραφο συζητάμε τη σχέση της πολυδιάστατης γενίκευσης της γεωμετρικής ανισότητας Brascamp-Lieb και της πολυδιάστατης αντίστροφης ανισότητας Brascamp-Lieb (που οφείλεται στον Barthe) με την ανισότητα Loomis-Whitney, την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás-Thomason και τις διάφορες γενικεύσεις τους που συζητήσαμε στις προηγούμενες παραγράφους αυτού του κεφαλαίου.

Για τον σκοπό αυτό δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό: Λέμε ότι οι υπόχωροι $F_1, \dots, F_r$ σχηματίζουν s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \dots, c_r > 0$ για κάποιον $s > 0$ αν

$$sI_n = \sum_{i=1}^{r} c_i P_i, \tag{3.4.1}$$

όπου I_n είναι ο ταυτοτικός τελεστής και P_i είναι η ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον F_i. Χρησιμοποιώντας την πολυδιάστατη ανισότητα Brascamp-Lieb αποδεικνύουμε εύκολα το εξής γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $F_1, \dots, F_r$ υπόχωροι που σχηματίζουν s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \dots, c_r > 0$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}(P_{F_i}(K))^{c_i}. \tag{3.4.2}$$

Η απόδειξη είναι σχεδόν άμεση εφαρμογή της πολυδιάστατης γεωμετρικής ανισότητας Brascamp-Lieb, την οποία υπενθυμίζουμε εδώ.

Θεώρημα 3.4.2 (Barthe). *Έστω $r,n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, \dots r$, έστω F_i ένας d_i-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και P_i η ορθογώνια προβολή στον F_i. Αν*

$$I_n = \sum_{i=1}^{r} c_i P_i$$

για κάποιους $c_1, \dots, c_r > 0$ τότε για όλες τις μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_i : F_i \to \mathbb{R}$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{r} f_i^{c_i}(P_i x)\, dx \leqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\int_{F_i} f_i \right)^{c_i} \tag{3.4.3}$$

και

$$\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup \left\{ \prod_{i=1}^{r} f_i^{c_i}(x_i) : x = \sum_{i=1}^{r} c_i x_i, x_i \in F_i \right\} dx \geqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\int_{F_i} f_i \right)^{c_i}. \tag{3.4.4}$$

Στο παραπάνω θεώρημα, το ολοκλήρωμα στον υπόχωρο F_i είναι ως προς το d_i-διάστατο μέτρο Lebesgue στον F_i.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1. Έχουμε $d_i = \dim(F_i)$ και παρατηρούμε ότι

$$ns = \mathrm{tr}(sI_n) = \sum_{i=1}^{r} c_i \cdot \mathrm{tr}(P_i) = c_1 d_1 + \dots + c_r d_r.$$

Αν K είναι ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε $f_i : F_i \to [0, \infty)$ με $f_i = \mathbf{1}_{P_i(K)}$. Παρατηρούμε ότι αν $x \in K$ τότε $f_i(P_i x) = 1$ για κάθε $i = 1, \dots, r$. Συνεπώς,

$$\mathbf{1}_K(x) \leqslant \prod_{i=1}^{r} f_i^{\frac{c_i}{s}}(P_i x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Από το Θεώρημα 3.4.2 παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(x)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{r} f_i^{\frac{c_i}{s}}(P_i x)\, dx \leqslant \prod_{i=1}^{r} \left(\int_{F_i} f_i \right)^{\frac{c_i}{s}} = \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))^{\frac{c_i}{s}},$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K))^{c_i}$ όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 3.4.3 (Bollobás-Thomason). Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η ανισότητα Bollobás-Thomason αποδεικνύεται με τον ίδιο τρόπο. Παρατηρήστε ότι αν $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ είναι ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$ τότε οι προβολές $P_i := P_{F_{\sigma_i}}$ ικανοποιούν την

$$sI_n = \sum_{i=1}^{r} P_i.$$

Συνεπώς, για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.4.1 με $c_1 = \dots = c_r = 1$ και παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \leqslant \prod_{i=1}^{r} \mathrm{vol}_{n-1}(P_i(K)).$$

που είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 2.1.1.

Σαν ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 3.4.1 παίρνουμε επίσης την ακόλουθη ανισότητα των Bollobás και Thomason [22]. Έστω $\mathcal{C}$ μια πεπερασμένη συλλογή υποσυνόλων των $[n]$, η οποία δεν είναι απαραίτητα ομοιόμορφο κάλυμμα. Υποθέτουμε ότι σε κάθε $\sigma \in \mathcal{C}$ έχουμε αντιστοιχίσει κάποιο θετικό πραγματικό βάρος $w(\sigma)$ με τέτοιο τρόπο ώστε για κάθε $i \in [n]$ να ισχύει η $\sum\{w(\sigma) : i \in \sigma \in \mathcal{C}\} = 1$. Τότε, είναι φανερό ότι

$$I_n = \sum_{\sigma \in \mathcal{C}} w(\sigma) P_{F_\sigma},$$

και από το Θεώρημα 3.4.1 παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K) \leqslant \prod_{\sigma \in \mathcal{C}} \mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(K))^{w(\sigma)}.$$

Παρατήρηση 3.4.4 (η ανισότητα του Ball)**.** Έστω $u_1, \dots, u_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1, \dots, c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John

$$I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i.$$

Ο Ball απέδειξε στο [13] ότι για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K))^{c_i}. \tag{3.4.5}$$

Από το Θεώρημα 3.4.1 μπορούμε να πάρουμε μια απλή απόδειξη της (3.4.5). Παρατηρούμε ότι αν $P_i = P_{u_i^\perp}$ τότε $u_i \otimes u_i = I_n - P_i$, άρα η συνθήκη του John γίνεται $I_n = \sum_{i=1}^m c_i(I_n - P_i)$, απ' όπου παίρνουμε

$$(n-1)I_n = \sum_{i=1}^m c_i P_i, \tag{3.4.6}$$

αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^m c_i = n$. Τώρα, για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.4.1 με $s = n-1$ έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K))^{c_i}. \tag{3.4.7}$$

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μια παραλλαγή του Θεωρήματος 3.1.1.

Θεώρημα 3.4.5. *Έστω $r, s \geqslant 1$, έστω F ένας d-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και $(F_1, \dots, F_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του F με βάρη $c_1, \dots, c_r > 0$. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(P_{E_i}(K))^{c_i} \geqslant \gamma(n,d,s,c_i,d_i)\mathrm{vol}(P_E(K))^s \,\mathrm{vol}_n(K)^{\overline{c}-s},$$

όπου $\overline{c} = \sum_{i=1}^r c_i$ και

$$\gamma(n,d,s,c_i,d_i) = \binom{n}{d}^{\overline{c}-s} \binom{n-d+\frac{(\overline{c}-s)d}{\overline{c}}}{n-d}^{-\overline{c}}.$$

Απόδειξη. Παρατηρήστε ότι αν $\dim(F_i) = d_i$ τότε $ds = c_1 d_1 + \cdots + c_r d_r$. Θέτουμε $E = F^\perp$ και $E_i = F_i^\perp$, $i = 1, \ldots, r$. Για κάθε $y \in P_E(K)$ θεωρούμε τα σύνολα

$$K_i(y) = \{t \in F \cap E_i : y + t \in P_{E_i}(K)\}$$

και

$$K(y) = \{t \in F : y + t \in K\}.$$

Τότε, το $K_i(y)$ είναι η ορθογώνια προβολή του $K(y)$ στον $F \cap E_i$. Σημειώνουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(K) = \int_{P_E(K)} \mathrm{vol}(K(y))\, dy$$

και

$$\mathrm{vol}(P_{E_i}(K)) = \int_{P_E(K)} \mathrm{vol}(K_i(y))\, dy, \qquad i = 1, \ldots, r.$$

Αφού το $(F_1, \ldots, F_r)$ είναι s-ομοιόμορφο κάλυμμα του F με βάρη c_i, έχουμε

$$sI_F = \sum_{i=1}^r c_i (I_F - P_{F\cap E_i}) = (c_1 + \cdots + c_r) I_F - \sum_{i=1}^r c_i P_{F \cap E_i},$$

άρα το $(F \cap E_1, \ldots, F \cap E_r)$ είναι $(\overline{c} - s)$-ομοιόμορφο κάλυμμα του F με βάρη c_i, όπου $\overline{c} = \sum_{i=1}^r c_i$. Από το Θεώρημα 3.4.1 παίρνουμε

$$\mathrm{vol}(K(y))^{\overline{c}-s} \leqslant \prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(K_i(y))^{c_i}$$

για κάθε $y \in P_E(K)$. Γράφουμε

$$\prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(P_{E_i}(K))^{c_i/\overline{c}} = \prod_{i=1}^r \left(\int_{P_E(K)} \mathrm{vol}(K_i(y))\, dy \right)^{c_i/\overline{c}} \geqslant \left(\int_{P_E(K)} \prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(K_1(y))^{c_i/\overline{c}} dy \right) \tag{3.4.8}$$

$$\geqslant \int_{P_E(K)} \mathrm{vol}(K(y))^{\frac{\overline{c}-s}{\overline{c}}}\, dy.$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski, η συνάρτηση $\varphi : P_E(K) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\varphi(y) = \mathrm{vol}(K(y))^{1/d}$ είναι κοίλη, και

$$\mathrm{vol}(K(y))^{\frac{\overline{c}-s}{\overline{c}}} = \varphi(y)^{\frac{(\overline{c}-s)d}{\overline{c}}}.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.1.2 με $A = P_E(K)$, $m = n - d$, $p = \frac{(\overline{c}-s)d}{\overline{c}}$ και $q = d$, παίρνουμε

$$\binom{n - d + \frac{(\overline{c}-s)d}{\overline{c}}}{n-d} \frac{1}{\mathrm{vol}(P_E(K))} \int_{P_E(K)} \mathrm{vol}(K(y))^{\frac{\overline{c}-s}{\overline{c}}} dy \tag{3.4.9}$$

$$= \binom{n - d + \frac{(\overline{c}-s)d}{\overline{c}}}{n-d} \frac{1}{\mathrm{vol}(P_E(K))} \int_{P_E(K)} \varphi(y)^{(\overline{c}-s)d} \overline{c}\, dy$$

$$\geqslant \left[\binom{n}{d} \frac{1}{\mathrm{vol}(P_E(K))} \int_{P_E(K)} \varphi(y)^d\, dy \right]^{\frac{\overline{c}-s}{\overline{c}}}$$

$$= \left[\binom{n}{d} \frac{1}{\mathrm{vol}(P_E(K))} \mathrm{vol}_n(K) \right]^{\frac{\overline{c}-s}{\overline{c}}}.$$

Έπεται ότι

$$\int_{P_E(K)} \mathrm{vol}(K(y))^{\frac{\overline{c}-s}{\overline{c}}}dy \geqslant \binom{n}{d}^{\frac{\overline{c}-s}{\overline{c}}} \binom{n-d+\frac{(\overline{c}-s)d}{\overline{c}}}{n-d}^{-1} \mathrm{vol}(P_E(K))^{\frac{s}{\overline{c}}}\,|K|^{\frac{\overline{c}-s}{\overline{c}}},$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από την (3.4.8). □

Παρατήρηση 3.4.6. Αν οι υπόχωροι $F_1,\dots,F_r$ έχουν την ίδια διάσταση k και όλα τα βάρη c_i είναι ίσα με 1 τότε $k=\frac{sd}{r}$ και το αποτέλεσμα παίρνει τη μορφή

$$\prod_{i=1}^r \mathrm{vol}(P_{E_i}(K)) \geqslant \gamma(n,d,s,r)\mathrm{vol}(P_E(K))^s\,\mathrm{vol}_n(K)^{r-s},$$

όπου

$$\gamma(n,d,s,r)=\binom{n}{d}^{r-s}\binom{n-\frac{sd}{r}}{n-d}^{-r}.$$

3.5 Δυϊκή ανισότητα Bollobás-Thomason

Ξεκινώντας από την οπτική της προηγούμενης παραγράφου και έχοντας αυτή τη φορά ως εργαλείο την πολυδιάστατη αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb του Barthe, σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε μια νέα ανισότητα, την *δυϊκή ανισότητα Bollobás-Thomason*.

Θεώρημα 3.5.1. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in \mathrm{int}(K)$ και $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \geqslant \frac{1}{(n!)^s}\prod_{i=1}^r |\sigma_i|!\,\mathrm{vol}(K\cap F_{\sigma_i}). \tag{3.5.1}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η (3.5.1) είναι ακριβής: γίνεται ισότητα για κάθε s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$ αν το K είναι το cross-polytope $B_1^n=\mathrm{conv}(\{\pm e_1,\dots,\pm e_n\})$. Το Θεώρημα 3.5.1 προκύπτει από μια νέα συναρτησιακή ανισότητα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ την κλάση των λογαριθμικά κοίλων ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$.

Θεώρημα 3.5.2. *Έστω $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ με $f(0)=1$ και $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$. Τότε,*

$$n^n\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy \geqslant \prod_{i=1}^r\left(\int_{F_i} f(x_i)dx_i\right)^{1/s}.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.2 κάνει ουσιαστική χρήση της πολυδιάστατης αντίστροφης ανισότητας Brascamp-Lieb. Θα αποδείξουμε μάλιστα μια πιο γενική μορφή του.

Θεώρημα 3.5.3. *Έστω $f\in\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ με $f(0)=1$ και $F_1,\dots,F_r$ υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$ που σχηματίζουν s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1,\dots,c_r>0$. Τότε,*

$$n^n\int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy \geqslant \prod_{i=1}^r\left(\int_{F_i} f(x_i)dx_i\right)^{c_i/s}.$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι $I_n = \sum_{i=1}^r \frac{c_i}{s} P_{F_i}$ έπεται ότι

$$ns = \mathrm{tr}(sI_n) = \sum_{i=1}^r c_i \cdot \mathrm{tr}(P_{F_i}) = \sum_{i=1}^r c_i d_i,$$

όπου $d_i = \dim(F_i)$. Έστω $z \in \mathbb{R}^n$ και $x_i \in F_i$, $i \in [r]$ τέτοια ώστε $z = \sum_{i=1}^r \frac{c_i}{s} x_i$. Τότε,

$$\frac{z}{n} = \sum_{i=1}^r \frac{c_i d_i}{sn} \cdot \frac{x_i}{d_i},$$

και αφού $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ και $\sum_{i=1}^r \frac{c_i d_i}{sn} = 1$ παίρνουμε

$$f(z/n) \geqslant \prod_{i=1}^r f(x_i/d_i)^{\frac{c_i d_i}{ns}}.$$

Αφού $f(0) = 1$, για κάθε $i \in [r]$ βλέπουμε ότι $f(x_i/d_i) \geqslant f(x_i)^{1/d_i} f(0)^{1-1/d_i} = f(x_i)^{1/d_i}$. Έπεται ότι

$$f(z/n) \geqslant \prod_{i=1}^r f(x_i)^{\frac{1}{d_i} \cdot \frac{c_i d_i}{ns}} = \prod_{i=1}^r f(x_i)^{\frac{c_i}{ns}},$$

άρα

$$f(z/n)^n \geqslant \prod_{i=1}^r f(x_i)^{c_i/s}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$f(z/n)^n \geqslant \sup\left\{ \prod_{i=1}^r f(x_i)^{c_i/s} : z = \sum_{i=1}^r \frac{c_i}{s} x_i, x_i \in F_i \right\}.$$

Συνεπώς, από την πολυδιάστατη αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb (3.4.4) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} f(z/n)^n dz &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n}^* \sup\left\{ \prod_{i=1}^r f(x_i)^{c_i/s} : z = \sum_{i=1}^r \frac{c_i}{s} x_i, x_i \in F_i \right\} dz \\ &\geqslant \prod_{i=1}^r \left(\int_{F_i} f(x_i) dx_i \right)^{c_i/s}.\end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = z/n$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Η γεωμετρική εφαρμογή του Θεωρήματος 3.5.3 που θα παρουσιάσουμε είναι η ακόλουθη γενική ανισότητα «ομοιόμορφου καλύμματος» για τομές κυρτού σώματος.

Θεώρημα 3.5.4. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$ και $F_1, \ldots, F_r$ υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, με $\dim(F_i) = d_i$, που σχηματίζουν s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \ldots, c_r > 0$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \geqslant \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^r (d_i!)^{c_i} \, \mathrm{vol}(K \cap F_i)^{c_i}.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.5.3 για τη συνάρτηση $f(y) = e^{-\|y\|_K}$, όπου $\|y\|_K := \min\{t > 0 : y \in tK\}$ είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K. Παρατηρήστε ότι $f \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$ και $f(0) = 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned} n^n \int_{\mathbb{R}^n} f(y)^n dy &= n^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-n\|y\|_K} dy = n^n \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\|y\|_{\frac{1}{n}K}} dy \\ &= n^n\, n!\mathrm{vol}_n\left(\frac{1}{n}K\right) = n!\,\mathrm{vol}_n(K), \end{aligned}$$

και, για κάθε $i \in [r]$,

$$\int_{F_i} f(x_i)dx_i = \int_{F_i} e^{-\|x_i\|_K} dx_i = \int_{F_i} e^{-\|x_i\|_{K\cap F_i}} dx_i = d_i!\,\mathrm{vol}(K \cap F_i).$$

Έπεται ότι

$$n!\mathrm{vol}_n(K) \geqslant \prod_{i=1}^r \big(d_i!\,\mathrm{vol}(K\cap F_i)\big)^{c_i/s} = \prod_{i=1}^r (d_i!)^{c_i/s}\,\mathrm{vol}(K\cap F_i)^{c_i/s},$$

και έχουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος. □

Παρατήρηση 3.5.5 (δυϊκή ανισότητα Bollobás-Thomason)**.** Μπορούμε να πάρουμε διάφορες εφαρμογές του Θεωρήματος 3.5.4. Αρχικά, έστω $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$. Θέτοντας $F_i = F_{\sigma_i} = \mathrm{span}(\{e_j : j \in \sigma_i\})$, $i \in [r]$, έχουμε $sI_n = \sum_{i=1}^r P_{F_i}$. Έτσι προκύπτει η δυϊκή ανισότητα Bollobás-Thomason του Θεωρήματος 3.5.1: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$ και $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ είναι ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$ τότε

$$\mathrm{vol}_n(K)^s \geqslant \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^r |\sigma_i|!\,\mathrm{vol}(K\cap F_i).$$

Στην ειδική περίπτωση $F_i = e_i^\perp$, $i \in [n]$ έχουμε $(n-1)I_n = \sum_{i=1}^n P_{e_i^\perp}$, και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.5.1 με $s = n-1$ και $|\sigma_i| = \dim(F_i) = n-1$ παίρνουμε την ανισότητα του Meyer

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^n \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap e_i^\perp)$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, διότι

$$\frac{1}{(n!)^{n-1}} \prod_{i=1}^n |\sigma_i|! = \frac{1}{(n!)^{n-1}} \prod_{i=1}^n (n-1)! = \frac{[(n-1)!]^n}{(n!)^{n-1}} = \frac{(n-1)!}{n^{n-1}} = \frac{n!}{n^n}.$$

Ένας ουσιαστικά ισοδύναμος τρόπος για να διατυπώσουμε το Θεώρημα 2.1.1 (βλέπε [22]) είναι ο εξής: για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, μπορούμε να βρούμε ένα ορθογώνιο με ακμές παράλληλες στους άξονες, τέτοιο ώστε $\mathrm{vol}_n(B) = \mathrm{vol}_n(K)$ και

$$\mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(B)) \leqslant \mathrm{vol}(P_{F_\sigma}(K)) \tag{3.5.2}$$

για κάθε $\sigma \subseteq [n]$. Παρομοίως, το Θεώρημα 3.5.1 έχει την εξής ισοδύναμη διατύπωση.

Θεώρημα 3.5.6. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Υπάρχει cross-polytope της μορφής $C = \mathrm{conv}(\{\pm\lambda_1 e_1, \ldots, \pm\lambda_n e_n\})$, όπου $\lambda_i > 0$, τέτοιο ώστε $\mathrm{vol}_n(C) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $\mathrm{vol}(C \cap F_\sigma) \geqslant \mathrm{vol}(K \cap F_\sigma)$ για κάθε $\sigma \subseteq [n]$.*

Το Θεώρημα 3.5.6 προκύπτει από το Θεώρημα 3.5.1 με ένα επιχείρημα που είναι βασικά το ίδιο με αυτό που χρησιμοποίησαν οι Bollobás και Thomason για την απόδειξη της (3.5.2). Στη συνέχεια, λέμε ότι ένα ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$ είναι ανάγωγο αν δεν μπορεί να γραφεί ως ξένη ένωση δύο άλλων ομοιόμορφων καλυμμάτων του $[n]$. Στο [22] αποδεικνύεται ότι το πλήθος των ανάγωγων ομοιόμορφων καλυμμάτων του $[n]$ είναι πεπερασμένο.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.6. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Το Θεώρημα 3.5.1 ισχυρίζεται ότι για κάθε ακέραιο $s \geqslant 1$ και κάθε μη τετριμμένο ανάγωγο s-ομοιόμορφο κάλυμμα $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ του $[n]$ ισχύει η ανισότητα

$$(n!\mathrm{vol}_n(K))^s \geqslant \prod_{j=1}^{r} \big(|\sigma_j|!\, \mathrm{vol}(K \cap F_{\sigma_j})\big).$$

Επιπλέον, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.5.1 για το 1-ομοιόμορφο κάλυμμα $(\{i\}, i \in \tau)$ του $\tau \subseteq [n]$ βλέπουμε ότι

$$|\tau|!\mathrm{vol}(K \cap F_\tau) \geqslant \prod_{i\in\tau} \mathrm{vol}(K \cap F_{\{i\}}).$$

Αφού το πλήθος των ανάγωγων ομοιόμορφων καλυμμάτων του $[n]$ είναι πεπερασμένο, έχουμε πεπερασμένες το πλήθος τέτοιες ανισότητες, οι οποίες ικανοποιούνται από τα στοιχεία του συνόλου $\{|\sigma|!\mathrm{vol}(K \cap F_\sigma) : \sigma \subseteq [n]\}$.

Έστω $\{t_\sigma : \sigma \subseteq [n]\}$ ένα σύνολο θετικών πραγματικών αριθμών που ικανοποιούν τις $t_\sigma \geqslant |\sigma|!\mathrm{vol}(K \cap F_\sigma)$ και $t_{[n]} = n!\mathrm{vol}_n(K)$, και είναι μεγιστικοί ως προς το να ικανοποιούν όλες τις παραπάνω ανισότητες αν αντικαταστήσουμε τον $|\sigma|!\mathrm{vol}(K \cap F_\sigma)$ με τον t_σ για κάθε $\sigma \subseteq [n]$. Τότε, γνωρίζουμε ότι $\prod_{j=1}^r t_{\sigma_j} \leqslant (n!\mathrm{vol}_n(K))^s$ για κάθε (όχι αναγκαστικά ανάγωγο) s-ομοιόμορφο κάλυμμα $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ του $[n]$.

Αφού οι $t_{\{i\}}$, $i \in [n]$, είναι μεγιστικοί, βλέπουμε ότι για κάθε $i \in [n]$ μπορούμε να βρούμε μια ανισότητα στην οποία εμφανίζεται ο $t_{\{i\}}$ η οποία να είναι ισότητα. Αν αυτή η ανισότητα είναι του πρώτου είδους τότε υπάρχει s_i-ομοιόμορφο κάλυμμα $\overline{\sigma}(i) = (\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ του $[n]$ με $\sigma_j = \{i\}$ για κάποιο j, τέτοια ώστε $(n!\mathrm{vol}_n(K))^{s_i} = \prod_{j=1}^r t_{\sigma_j}$. Το ίδιο ισχύει αν η ανισότητα είναι του δεύτερου τύπου, δηλαδή αν έχουμε μια ισότητα του τύπου $\prod_{l\in\tau} t_{\{l\}} = t_\tau$ για κάποιο $\tau \subseteq [n]$ με $i \in \tau$. Διότι, επειδή ο t_τ είναι μεγιστικός, μπορούμε να βρούμε ένα s_i-ομοιόμορφο κάλυμμα $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ του $[n]$ τέτοιο ώστε $\tau = \sigma_{j_0}$ για κάποιο j_0, και τότε το $\overline{\sigma}(i) := (\sigma_j, j \neq j_0) \cup (\{i\} : i \in \tau)$ είναι πάλι s_i-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$.

Τώρα, ορίζουμε $\overline{\sigma} = \bigcup_{i=1}^n \overline{\sigma}(i)$ και $s = \sum_{i=1}^n s_i$. Τότε, το $\overline{\sigma}$ είναι s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$, έχουμε $\{i\} \in \overline{\sigma}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και

$$\prod_{\sigma\in\overline{\sigma}} t_\sigma = (n!\mathrm{vol}_n(K))^s. \tag{3.5.3}$$

Αφού το $\overline{\sigma}' := \overline{\sigma} \setminus (\{i\} : i \in [n])$ είναι $(s-1)$-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$ πρέπει να ισχύει

$$\prod_{\sigma\in\overline{\sigma}'} t_\sigma \leqslant (n!\mathrm{vol}_n(K))^{s-1}. \tag{3.5.4}$$

Συνδυάζοντας τις (3.5.3) και (3.5.4) βλέπουμε ότι $\prod_{i=1}^{n} t_{\{i\}} \geqslant n!\mathrm{vol}_n(K)$. Από την άλλη πλευρά, η $(\{i\} : i \in [n])$ είναι 1-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$, άρα ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα. Συνεπώς,

$$\prod_{i=1}^{n} t_{\{i\}} = n!\mathrm{vol}_n(K). \tag{3.5.5}$$

Τώρα, έστω $\tau \subseteq [n]$ και ας θεωρήσουμε το 1-ομοιόμορφο κάλυμμα $\{\tau\} \cup (\{i\} : i \notin \tau)$ του $[n]$. Χρησιμοποιώντας την (3.5.5) και την υπόθεση ότι $t_\tau \geqslant \prod_{i\in\tau} t_{\{i\}}$ παίρνουμε

$$n!\mathrm{vol}_n(K) \geqslant t_\tau \cdot \prod_{i\notin\tau} t_{\{i\}} \geqslant \prod_{i\in\tau} t_{\{i\}} \cdot \prod_{i\notin\tau} t_{\{i\}} = \prod_{i=1}^{n} t_{\{i\}} = n!\mathrm{vol}_n(K),$$

και έπεται ότι

$$t_\tau = \prod_{i\in\tau} t_{\{i\}} \tag{3.5.6}$$

για κάθε $\tau \subseteq [n]$. Από αυτές τις ισότητες βλέπουμε ότι αν θεωρήσουμε το ορθογώνιο $B = \prod_{i=1}^{n}[0, t_{\{i\}}]$ τότε $\mathrm{vol}_n(B) = \prod_{i=1}^{n} t_{\{i\}} = n!\mathrm{vol}_n(K)$ και

$$\mathrm{vol}(B \cap F_\sigma) = \prod_{i\in\sigma} t_{\{i\}} = t_\sigma \geqslant |\sigma|!\mathrm{vol}(K \cap F_\sigma)$$

για κάθε $\sigma \subseteq [n]$. Τότε, αν θέσουμε $\lambda_i = t_{\{i\}}/2$ και $C = \mathrm{conv}(\{\pm\lambda_1 e_1, \ldots, \pm\lambda_n e_n\})$, παρατηρούμε ότι $\mathrm{vol}_n(C) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $\mathrm{vol}(C \cap F_\sigma) \geqslant \mathrm{vol}(K \cap F_\sigma)$ για κάθε $\sigma \subseteq [n]$. □

Παρατήρηση 3.5.7 (η δυϊκή ανισότητα του Ball)**.** Οι Li και Huang απέδειξαν στο [75] ότι για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε άρτιο ισοτροπικό μέτρο ν στον S^{n-1} ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^\perp)\, d\nu(u)\right) \tag{3.5.7}$$

και προσδιόρισαν τις περιπτώσεις ισότητας. Στην ειδική περίπτωση όπου τα $u_1, \ldots, u_m$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1, \ldots, c_m$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John, παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^\perp)^{c_i}. \tag{3.5.8}$$

Αυτή η ανισότητα (μάλιστα σε γενικότερη μορφή) είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.5.4. Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, θεωρούμε τους υποχώρους $F_i = u_i^\perp$, και αφού $\dim(F_i) = n-1$ και οι F_i σχηματίζουν $(n-1)$-ομοιόμορφο κάλυμμα του $\mathbb{R}^n$ με βάρη $c_1, \ldots, c_m > 0$, χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^{m} c_i = n$ παίρνουμε αμέσως

(3.5.9)
$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} &\geqslant \frac{1}{(n!)^s} \prod_{i=1}^{m}((n-1)!)^{c_i} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^\perp)^{c_i} = \frac{[(n-1)!]^n}{(n!)^{n-1}} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^\perp)^{c_i} \\ &= \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^{m} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^\perp)^{c_i}.\end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα να χρησιμοποιήσουμε ένα επιχείρημα προσέγγισης του Barthe από το [17] για να πάρουμε την (3.5.7) από την (3.5.9). Δίνουμε τη βασική ιδέα της απόδειξης και παραπέμπουμε στο άρθρο του Barthe για περισσότερες λεπτομέρειες. Υπενθυμίζουμε ότι ένα μέτρο Borel ν στην S^{n-1} λέγεται ισοτροπικό αν

$$I_n = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\nu(u).$$

Η υπόθεση ότι τα διανύσματα u_j και τα βάρη c_j ικανοποιούν την (3.5.8) είναι ισοδύναμη με το να πούμε ότι το διακριτό μέτρο $\overline{\nu}$ με $\overline{\nu}(\{u_j\}) = c_j$ είναι ισοτροπικό, δηλαδή $I_n = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\overline{\nu}(u)$. Επίσης, αφού

$$\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp}) \, d\overline{\nu}(u) = \sum_{i=1}^{m} c_i \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^{\perp}) = \log \left(\prod_{i=1}^{m} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u_i^{\perp})^{c_i} \right),$$

μπορούμε να γράψουμε την (3.5.9) στην ισοδύναμη μορφή

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \exp \left(\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp}) \, d\overline{\nu}(u) \right). \tag{3.5.10}$$

Με άλλα λόγια, η (3.5.7) ισχύει για κάθε διακριτό ισοτροπικό μέτρο στην S^{n-1}.

Έστω τώρα ν ένα ισοτροπικό μέτρο Borel στην S^{n-1}. Για κάθε $\varepsilon > 0$ θεωρούμε ένα μεγιστικό ε-δίκτυο N_ε της S^{n-1} και μια διαμέριση $(C_u)_{u \in N_\varepsilon}$ της S^{n-1} σε Borel σύνολα $C_u \subseteq B(u, \varepsilon)$, όπου $B(u, \varepsilon)$ είναι η γεωδαισιακή μπάλα με κέντρο το u και ακτίνα ε. Κατόπιν, θεωρούμε το μέτρο

$$\nu_\varepsilon = \sum_{u \in N_\varepsilon} \nu(C_u) \delta_u,$$

όπου δ_u είναι η μάζα Dirac στο u. Παρατηρήστε ότι, για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{S^{n-1}} f(u) \, d\nu_\varepsilon \longrightarrow \int_{S^{n-1}} f(u) \, d\nu$$

καθώς το $\varepsilon \to 0$. Με άλλα λόγια, $\nu_\varepsilon \to \nu$ ασθενώς καθώς το $\varepsilon \to 0$. Αν $T_\varepsilon = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\nu_\varepsilon(u)$ τότε για το μέτρο $\mu_\varepsilon = \sum_{u \in N_\varepsilon} \nu_\varepsilon(u) |T_\varepsilon^{-1/2}(u)|^2 \delta_{v(u)}$ όπου $v(u) := T_\varepsilon^{-1/2}(u)/|T_\varepsilon^{-1/2}(u)|$ έχουμε

$$I_n = \int_{S^{n-1}} T_\varepsilon^{-1/2}(u) \otimes T_\varepsilon^{-1/2}(u) \, d\nu_\varepsilon(u) = \int_{S^{n-1}} v \otimes v \, d\mu_\varepsilon(v).$$

Αφού $\|T_\varepsilon - I_n\|_{\ell_2^n \to \ell_2^n} \leqslant c_1(\varepsilon)$ για κάποια σταθερά $c_1(\varepsilon)$ που τείνει στο 0 καθώς το $\varepsilon \to 0$, μπορούμε να ελέγξουμε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$

$$\int_{S^{n-1}} f(u) \, d\mu_\varepsilon \longrightarrow \int_{S^{n-1}} f(u) \, d\nu$$

καθώς το $\varepsilon \to 0$. Εφαρμόζοντας την (3.5.10) για το διακριτό ισοτροπικό μέτρο μ_ε παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(K)^{n-1} &\geqslant \frac{n!}{n^n} \exp \left(\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp}) \, d\mu_\varepsilon(u) \right) \\ &\longrightarrow \frac{n!}{n^n} \exp \left(\int_{S^{n-1}} \log \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap u^{\perp}) \, d\nu(u) \right). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.5.7).

3.6 Ανισότητες τύπου Loomis-Whitney για τα quermassintegrals

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με γενικεύσεις των ανισοτήτων τύπου Loomis-Whitney που παρουσιάσαμε στις προηγούμενες παραγράφους που προκύπτουν αν αντικαταστήσουμε τον όγκο με τα quermassintegrals ενός κυρτού σώματος. Τα αποτελέσματα είναι παραλλαγές αντίστοιχων αποτελεσμάτων από το [73].

Θεώρημα 3.6.1. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $u_1,\dots,u_m \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τη συνθήκη του John $I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i$ για κάποιους $c_i > 0$. Τότε,για κάθε $j = 0,1,\dots,n-1$,*

$$W_j(K)^{\frac{n-j-1}{n-j}} \leqslant \kappa_n^{-\frac{j}{n(n-j)}} \prod_{i=1}^m \left(W_j'(P_{u_i^\perp}(K))\right)^{\frac{c_i}{n}},$$

όπου $W_j'(\cdot)$ είναι το j-οστό quermassintegral στον κατάλληλο υπόχωρο διάστασης $n-1$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Cauchy

$$\mathrm{vol}_{n-1}(P_{u^\perp}(K)) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u,v\rangle|\, dS_{n-1}(K,y) \tag{3.6.1}$$

που ισχύει για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $u \in S^{n-1}$, γράφουμε

$$\mathrm{vol}_{n-1}(P_{u^\perp}(K+tB_2^n)) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u,v\rangle|\, dS_{n-1}(K+tB_2^n,v). \tag{3.6.2}$$

Όμως,

$$\mathrm{vol}_{n-1}(P_{u^\perp}(K+tB_2^n)) = \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u^\perp}(K)+tB_{u^\perp}) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} W_j'(P_{u^\perp}(K))t^j, \tag{3.6.3}$$

για κάθε $t \geqslant 0$, όπου $B_{u^\perp}$ είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα στον $u^\perp$. Έχουμε επίσης

$$S_{n-1}(K+tB_2^n,v) = \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i-1}\binom{n-1}{i} S_i(K,v), \tag{3.6.4}$$

συνεπώς

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{n-1}\binom{n-1}{j} W_j'(P_{u^\perp}(K))t^j &= \sum_{i=0}^{n-1} t^{n-i-1}\binom{n-1}{i}\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u,v\rangle|\, dS_i(K,v)\\ &= \sum_{j=0}^{n-1} t^j\binom{n-1}{j}\frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u,v\rangle|\, dS_{n-j-1}(K,v),\end{aligned} \tag{3.6.5}$$

και εξισώνοντας τους συντελεστές των πολυωνύμων παίρνουμε

$$W_j'(P_{u^\perp}(K)) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle u,v\rangle|\, dS_{n-j-1}(K,v) \tag{3.6.6}$$

για κάθε $j = 0,1,\dots,n-1$.

Έστω τώρα $u_1,\dots,u_m\in S^{n-1}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_m\geqslant 0$. Από την (3.6.6) παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K)) = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}}\Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i|\langle u_i,v\rangle|\Big)\,dS_{n-j-1}(K,v). \tag{3.6.7}$$

Θεωρούμε το ζωνότοπο $Z=\sum_{i=1}^m\lambda_i[-u_i,u_i]$. Τότε,

$$h_Z(x)=\sum_{i=1}^m\lambda_i|\langle u_i,x\rangle|,$$

άρα

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \lambda_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K)) &= \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} h_Z(v)\,dS_{n-j-1}(K,v)\\ &= \frac{n}{2}V(K;[n-j-1],B_2^n;[j],Z).\end{aligned} \tag{3.6.8}$$

Υποθέτουμε ότι τα $u_1,\dots,u_m\in S^{n-1}$ ικανοποιούν την συνθήκη του John

$$I_n=\sum_{i=1}^m c_iu_i\otimes u_i$$

για κάποιους $c_i>0$. Τότε $\sum_{i=1}^m c_i=n$, και ο K. Ball έχει αποδείξει ότι

$$\mathrm{vol}_n(Z)\geqslant 2^n\prod_{i=1}^m\Big(\frac{\lambda_i}{c_i}\Big)^{c_i}. \tag{3.6.9}$$

Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel έχουμε

$$\begin{aligned}V(K;[n-j-1],B_2^n;[j],Z) &\geqslant W_j(K)^{\frac{n-j-1}{n-j}}\,W_j(Z)^{\frac{1}{n-j}}\\ &\geqslant W_j(K)^{\frac{n-j-1}{n-j}}\,\kappa_n^{\frac{j}{n(n-j)}}\,\mathrm{vol}_n(Z)^{1/n}\\ &\geqslant 2\kappa_n^{\frac{j}{n(n-j)}}W_j(K)^{\frac{n-j-1}{n-j}}\prod_{i=1}^m\Big(\frac{\lambda_i}{c_i}\Big)^{\frac{c_i}{n}}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K))\geqslant n\kappa_n^{\frac{j}{n(n-j)}}W_j(K)^{\frac{n-j-1}{n-j}}\prod_{i=1}^m\Big(\frac{\lambda_i}{c_i}\Big)^{\frac{c_i}{n}}. \tag{3.6.10}$$

Επιλέγουμε τώρα τους λ_i έτσι ώστε

$$\lambda_iW_j'(P_{u_i^\perp}(K))=c_i,\qquad i=1,\dots,m.$$

Τότε, $\sum_{i=1}^m\lambda_iW_j'(P_{u_i^\perp}(K))=\sum_{i=1}^m c_i=n$ και η (3.6.11) μας δίνει

$$n\prod_{i=1}^m\big(W_j'(P_{u_i^\perp}(K))\big)^{\frac{c_i}{n}}\geqslant n\kappa_n^{\frac{j}{n(n-j)}}W_j(K)^{\frac{n-j-1}{n-j}}. \tag{3.6.11}$$

Αυτό αποδεικνύει την πρόταση. □

Θεώρημα 3.6.2. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τη συνθήκη του John $I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i$ για κάποιους $c_i > 0$. Τότε, για κάθε $j = 0, 1, \ldots, n-1$,*

$$\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{(W_j'(P_{u_i^\perp}(K))^2} \geqslant \frac{4}{W_{j+1}^2(K)},$$

όπου $W_j'(\cdot)$ είναι το j-οστό quermassintegral στον κατάλληλο υπόχωρο διάστασης $n-1$. Ειδικότερα,

$$\sum_{i=1}^m \frac{c_i}{\mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K))^2} \geqslant \frac{4n^2}{S^2(K)}.$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$ που θα επιλεγούν κατάλληλα. Θεωρούμε το ζωνότοπο $Z = \sum_{i=1}^m \lambda_i [-u_i, u_i]$ και θέτουμε $R = R(Z)$. Από την (3.6.8) έχουμε

(3.6.12)
$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \lambda_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K)) &= \frac{n}{2} V(K; [n-j-1], B_2^n; [j], Z) \leqslant \frac{n}{2} V(K; [n-j-1], B_2^n; [j], RB_2^n) \\ &= \frac{n}{2} R\, W_{j+1}(K).\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $z \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε

$$R = \sum_{i=1}^m \lambda_i |\langle u_i, z\rangle|.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}R^2 &= \Big(\sum_{i=1}^m \lambda_i |\langle u_i, z\rangle|\Big)^2 \leqslant \Big(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i^2}{c_i}\Big)\Big(\sum_{i=1}^m c_i \langle u_i, z\rangle^2\Big) \\ &= \sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i^2}{c_i}.\end{aligned} \tag{3.6.13}$$

Από τις (3.6.12) και (3.6.13) έχουμε

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K)) \leqslant \frac{n}{2}\Big(\sum_{i=1}^m \frac{\lambda_i^2}{c_i}\Big)^{1/2} W_{j+1}(K),$$

και επιλέγοντας

$$\lambda_i = \frac{c_i}{W_j'(P_{u_i^\perp}(K))}, \quad i = 1, \ldots, m$$

παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 3.6.3. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν τη συνθήκη του John $I_n = \sum_{i=1}^m c_i u_i \otimes u_i$ για κάποιους $c_i > 0$. Τότε, για κάθε $j = 0, 1, \ldots, n-1$,*

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m c_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K)) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{n} W_{j+1}(K).$$

Ειδικότερα,

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^m c_i \mathrm{vol}_{n-1}(P_{u_i^\perp}(K)) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{n} S(K).$$

Απόδειξη. Όπως πριν, καταλήγουμε στην

$$\sum_{i=1}^{m}\lambda_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K)) \leqslant \frac{n}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{\lambda_i^2}{c_i}\Big)^{1/2}W_{j+1}(K).$$

Ορίζουμε

$$S := \frac{n}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m}c_i\Big)^{1/2}W_{j+1}(K) = \frac{1}{2}W_{j+1}(K)$$

και $\lambda_i = c_i/S$, $i = 1,\dots,m$. Παρατηρήστε ότι, με αυτήν την επιλογή των λ_i έχουμε

$$\frac{1}{S}\sum_{i=1}^{m}c_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K)) \leqslant \frac{n}{2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{S^2}\Big)^{1/2}W_{j+1}(K),$$

δηλαδή

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}c_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K)) \leqslant \frac{1}{2}\sqrt{n}W_{j+1}(K),$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 3.6.4. Από το Θεώρημα 3.6.3 και την ανισότητα αριθμητικού-αρμονικού μέσου έχουμε

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}W_{j+1}(K) \geqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{m}c_i W_j'(P_{u_i^\perp}(K)) \geqslant \frac{n}{\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{W_j'(P_{u_i^\perp}(K))}}$$

και

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{W_j'(P_{u_i^\perp}(K))} \leqslant \Big(\sum_{i=1}^{m}c_i\Big)^{1/2}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{(W_j'(P_{u_i^\perp}(K))^2)}\Big)^{1/2} = \sqrt{n}\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{(W_j'(P_{u_i^\perp}(K))^2)}\Big)^{1/2}.$$

Συνδυάζοντας αυτές τις ανισότητες παίρνουμε

$$\frac{1}{2}\sqrt{n}W_{j+1}(K) \geqslant \frac{\sqrt{n}}{\Big(\sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{(W_j'(P_{u_i^\perp}(K))^2)}\Big)^{1/2}}$$

δηλαδή

$$\frac{4}{W_{j+1}^2(K))} \leqslant \sum_{i=1}^{m}\frac{c_i}{(W_j'(P_{u_i^\perp}(K)))^2},$$

που είναι ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 3.6.2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Συναρτησιακές και στοχαστικές εκδοχές ισοπεριμετρικών ανισοτήτων

4.1 Επεκτάσεις της ανισότητας Busemann-Straus/Grinberg

Η ανισότητα Busemann-Straus/Grinberg ισχυρίζεται ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K \cap E)^n d\nu_k(E) \leqslant \frac{\kappa_k^n}{\kappa_n^k} \mathrm{vol}_n(K)^k, \tag{4.1.1}$$

όπου κ_s είναι ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας στον $\mathbb{R}^s$. Ο Grinberg παρατήρησε ότι το αριστερό μέλος της (4.1.1) είναι αναλλοίωτο ως προς γραμμικούς μετασχηματισμούς του K που διατηρούν τον όγκο. Η αντίστοιχη αφφινική ανισότητα ισχυρίζεται ότι

$$\int_{A_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K \cap E)^{n+1} d\mu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^{n+1}}{\kappa_n^{k+1}} \frac{\kappa_{(k+1)n}}{\kappa_{n(k+1)}} \mathrm{vol}_n(K)^{k+1}, \tag{4.1.2}$$

όπου $\mu_{n,k}$ είναι το μέτρο πιθανότητας Haar στο σύνολο $A_{n,k}$ των k-διάστατων αφφινικών υποχώρων του $\mathbb{R}^n$. Μια επέκταση της (4.1.2) δίνεται στο [9, Θεώρημα 8.6.4]): Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν $1 \leqslant k < m \leqslant n$ τότε

$$\int_{A_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K \cap E)^{m+1} d\mu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^{m+1}}{\kappa_m^{k+1}} \frac{\kappa_{(k+1)m}}{\kappa_{k(m+1)}} \int_{A_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K \cap F)^{k+1} d\mu_{n,m}(F). \tag{4.1.3}$$

Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε την αντίστοιχη επέκταση της (4.1.1).

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω K ένα φραγμένο Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, και $1 \leqslant k < m \leqslant n$. Τότε,*

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K \cap E)^m \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K \cap F)^k \, d\nu_{n,m}(F). \tag{4.1.4}$$

Σημειώνουμε ότι $\kappa_k^m/\kappa_m^k \leqslant (\sqrt{e})^{(m-k)m}$.

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε κάποια αποτελέσματα από την στοχαστική γεωμετρία. Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ και $x_0, x_1, \ldots, x_q \in \mathbb{R}^n$ γράφουμε

$$\square_q(x_1, \ldots, x_q)$$

για τον q-διάστατο όγκο του παραλληλεπιπέδου που παράγεται από τα $x_1, \ldots, x_q$ και

$$\Delta_q(x_0, x_1, \ldots, x_q)$$

για τον q-διάστατο όγκο της κυρτής θήκης $\mathrm{conv}(\{x_0, x_1, \ldots, x_q\})$. Για κάθε $1 \leqslant m \leqslant n$ και $k \geqslant 0$, και για κάθε φραγμένο Borel σύνολο K στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε την παράμετρο

$$I(K, m, k) = \int_K \cdots \int_K \square_m(x_1, \ldots, x_m)^k dx_1 \cdots dx_m. \tag{4.1.5}$$

Η γενικευμένη ανισότητα του Busemann για τυχαία simplices ισχυρίζεται ότι αν $k \geqslant 1$ τότε

$$I(K, n, k) \geqslant \frac{\kappa_{n+k}^n}{\kappa_n^{n+k}} \prod_{j=1}^n \frac{\omega_j}{\omega_{k+j}} \mathrm{vol}_n(K)^{n+k}. \tag{4.1.6}$$

Μάλιστα, η ανισότητα Busemann-Straus/Grinberg (4.1.1) είναι συνέπεια της (4.1.6) και της ταυτότητας Blaschke-Petkantschin (Θεώρημα 1.5.3)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} g(x_1, \ldots, x_q)\, dx_1 \cdots dx_q \\ &\quad = p(n,q) \int_{G_{n,q}} \int_E \cdots \int_E g(x_1, \ldots, x_q) \square_q(x_1, \ldots, x_q)^{n-q} d_E(x_1) \ldots d_E(x_q)\, d\nu_{n,q}(E), \end{aligned} \tag{4.1.7}$$

που ισχύει για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ και κάθε μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση $g : (\mathbb{R}^n)^q \to \mathbb{R}$. Θεωρούμε επίσης την παράμετρο

$$J(K, m, k) = \int_K \cdots \int_K \Delta_m(x_0, x_1, \ldots, x_m)^k dx_0\, dx_1 \cdots dx_m. \tag{4.1.8}$$

Το ανάλογο της (4.1.6) είναι η ακόλουθη ανισότητα του Groemer:

$$J(K, n, k) \geqslant \frac{1}{(n!)^k} \frac{\kappa_{n+k}^{n+1}}{\kappa_n^{n+k+1}} \frac{\kappa_{n(n+k)+n}}{\kappa_{(n+1)(n+k)}} \frac{1}{p(n+k, n)} \mathrm{vol}_n(K)^{n+k+1}. \tag{4.1.9}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1. Έχουμε

$$\begin{aligned} &\int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K \cap F)^k\, d\nu_{n,m}(F) \\ &\quad = \int_{G_{n,m}} \int_F \cdots \int_F \mathbf{1}_K(x_1) \ldots \mathbf{1}_K(x_k)\, d_F(x_1) \cdots d_F(x_k)\, d\nu_{n,m}(F). \end{aligned} \tag{4.1.10}$$

Εφαρμόζοντας την (4.1.7) για την συνάρτηση $f = \prod_{j=1}^k \mathbf{1}_K(x_j)$ στον F^k, παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\int_F \cdots \int_F \mathbf{1}_K(x_1) \cdots \mathbf{1}_K(x_k)\, d_F(x_1) \cdots d_F(x_k) \\ &\quad = p(m,k) \int_{G_{F,k}} \int_E \cdots \int_E \left(\prod_{j=1}^k \mathbf{1}_K(x_j) \right) \square_k^{m-k}(x_1, \ldots, x_k)\, d_E(x_1) \cdots d_E(x_k)\, d\nu_{F,k}(E). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,m}} &\mathrm{vol}_m(K\cap F)^k\,d\nu_{n,m}(F)\\ &= p(m,k)\int_{G_{n,m}}\int_{G_{F,k}}\int_E\cdots\int_E\left(\prod_{j=1}^k \mathbf{1}_K(x_j)\right)\Box_k^{m-k}(x_1,\ldots,x_k)\\ &\qquad\qquad d_E(x_1)\cdots d_E(x_k)\,d\nu_{F,k}(E)\,d\nu_{n,m}(F).\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε την

$$\begin{aligned}\int_{G(n,k,m)} g\,d\nu_{n,k,m} &= \int_{G_{n,m}}\int_{G_{F,k}} g(E,F)\,d\nu_{F,k}(E)\,d\nu_{n,m}(F)\\ &= \int_{G_{n,k}}\int_{G_{E,m}} g(E,F)\,d\nu_{E,m}(F)\,d\nu_{n,k}(E)\end{aligned}\tag{4.1.11}$$

για την συνάρτηση

$$g(E,F) = \int_E\cdots\int_E\left(\prod_{j=1}^k \mathbf{1}_K(x_j)\right)\Box_k^{m-k}(x_1,\ldots,x_k)\,d_E(x_1)\cdots d_E(x_k).\tag{4.1.12}$$

Αυτό μας δίνει

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,m}} &\mathrm{vol}_m(K\cap F)^k\,d\nu_{n,m}(F)\\ &= p(m,k)\int_{G_{n,k}}\int_{G_{E,m}}\int_E\cdots\int_E\left(\prod_{j=1}^k \mathbf{1}_K(x_j)\right)\Box_k^{m-k}(x_1,\ldots,x_k)\\ &\qquad\qquad d_E(x_1)\cdots d_E(x_k)\,d\nu_{E,m}(F)\,d\nu_{n,k}(E).\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι η υπό ολοκλήρωση ποσότητα $g(E,F)$ στο

$$\int_{G_{E,m}}\left[\int_E\cdots\int_E\left(\prod_{j=1}^k \mathbf{1}_K(x_j)\right)\Box_k^{m-k}(x_1,\ldots,x_k)\,d_E(x_1)\cdots d_E(x_k)\right]d\nu_{E,m}(F)\tag{4.1.13}$$

είναι ανεξάρτητη από τον $F\in G_{n,m}$, άρα παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,m}} &\mathrm{vol}_m(K\cap F)^k\,d\nu_{n,m}(F)\\ &= p(m,k)\int_{G_{n,k}}\int_E\cdots\int_E\left(\prod_{j=1}^k \mathbf{1}_K(x_j)\right)\Box_k^{m-k}(x_1,\ldots,x_k)\,d_E(x_1)\cdots d_E(x_k)\,d\nu_{n,k}(E)\\ &= p(m,k)\int_{G_{n,k}}\int_{K\cap E}\cdots\int_{K\cap E}\Box_k^{m-k}(x_1,\ldots,x_k)\,d_E(x_1)\cdots d_E(x_k)\,d\nu_{n,k}(E).\end{aligned}$$

Τέλος, χρησιμοποιούμε την (4.1.6) για το k-διάστατο κυρτό σώμα $K\cap E$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{G_{n,m}}\mathrm{vol}_m(K\cap F)^k\,d\nu_{n,m}(F) \geqslant p(m,k)a_{k,m}\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(K\cap E)^m\,d\nu_{n,k}(E),\tag{4.1.14}$$

όπου

$$a_{k,m} = \frac{\kappa_m^k}{\kappa_k^m}\left(\prod_{j=1}^k \frac{\omega_j}{\omega_{m-k+j}}\right). \tag{4.1.15}$$

Όμως,

$$p(m,k) = \frac{\omega_{m-k+1}\cdots\omega_m}{\omega_1\cdots\omega_k},$$

άρα $p(m,k)a_{k,m} = \kappa_m^k/\kappa_k^m$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση 4.1.2. Η *ακτίνα όγκου* ενός φραγμένου Borel συνόλου A στον $\mathbb{R}^s$ είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vrad}(A) = \left(\frac{\mathrm{vol}_s(A)}{\kappa_s}\right)^{1/s}.$$

Συνεπώς, η ανισότητα (4.1.4) παίρνει την απλή ισοδύναμη μορφή

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vrad}(K\cap E)^{km}\,d\nu_{n,k}(E) \leqslant \int_{G_{n,m}} \mathrm{vrad}(K\cap F)^{km}\,d\nu_{n,m}(F). \tag{4.1.16}$$

Αν υποθέσουμε ότι το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ένα επιχείρημα δυϊσμού, το οποίο βασίζεται στην ανισότητα Blaschke-Santaló και την ανισότητα Bourgain-Milman, οδηγεί σε αντίστοιχη ανισότητα για τον όγκο των προβολών.

Θεώρημα 4.1.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και $1\leqslant k<m\leqslant n$. Τότε,*

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^{-m}\,d\nu_{n,k}(E) \leqslant C^{km}\frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k}\int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(P_F(K))^{-k}\,d\nu_{n,m}(F), \tag{4.1.17}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $K^\circ = \{x\in\mathbb{R}^n : \langle x,y\rangle \leqslant 1$ για κάθε $y\in K\}$ το πολικό σώμα του K. Αφού το K είναι συμμετρικό, το $P_H(K)$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον H για κάθε $H\in G_{n,s}$, $1\leqslant s\leqslant n-1$, και $(P_H(K))^\circ = K^\circ\cap H$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Blaschke-Santaló και την ανισότητα Bourgain-Milman για το $K^\circ\cap H$ έχουμε ότι

$$c\leqslant \mathrm{vrad}(P_H(K))\,\mathrm{vrad}(K^\circ\cap H)\leqslant 1, \tag{4.1.18}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το Θεώρημα 4.1.1, αν εφαρμοστεί για το K°, εκφράζεται (δείτε την (4.1.16)) στη μορφή

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vrad}(K^\circ\cap E)^{km}\,d\nu_{n,k}(E) \leqslant \int_{G_{n,m}} \mathrm{vrad}(K^\circ\cap F)^{km}\,d\nu_{n,m}(F). \tag{4.1.19}$$

Τότε, η (4.1.18) μας δίνει

$$\begin{aligned} c^{km}\int_{G_{n,k}} \mathrm{vrad}(P_E(K))^{-km}\,d\nu_{n,k}(E) &\leqslant \int_{G_{n,k}} \mathrm{vrad}(K^\circ\cap E)^{km}\,d\nu_{n,k}(E)\\ &\leqslant \int_{G_{n,m}} \mathrm{vrad}(K^\circ\cap F)^{km}\,d\nu_{n,m}(F)\\ &\leqslant \int_{G_{n,m}} \mathrm{vrad}(P_F(K))^{-km}\,d\nu_{n,m}(F). \end{aligned} \tag{4.1.20}$$

Η (4.1.17) είναι απλή αναδιατύπωση της (4.1.20) με βάση τον ορισμό της ακτίνας όγκου. □

Παρατήρηση 4.1.4. Η περίπτωση $m = n$ αποδείχθηκε στο [95]. Σε αυτήν την περίπτωση, μπορούμε απλώς να υποθέσουμε ότι η αρχή των αξόνων ανήκει στο εσωτερικό του K. Ο λόγος είναι ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο βάρους του K βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και, τότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε τόσο την ανισότητα Blaschke-Santaló για το K όσο και την ανισότητα Bourgain-Milman για το $P_H(K)$, διότι η εφαρμογή της τελευταίας ανισότητας απαιτεί μόνο το να έχουμε την αρχή των αξόνων στο εσωτερικό του $P_E(K)$, $E \in G_{n,k}$ (το οποίο βέβαια χρειαζόμαστε για κάθε προβολή του K). Όμως, εδώ χρειαζόμαστε επίσης την ανισότητα Blaschke-Santaló για το $P_F(K)$, $F \in G_{n,m}$, και για τον λόγο αυτό υποθέτουμε ότι το K, άρα και κάθε $P_F(K)$, είναι συμμετρικό.

4.2 Εναλλακτική απόδειξη και αντίστροφες ανισότητες

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 και του Θεωρήματος 4.1.3 η οποία μας επιτρέπει να εξασφαλίσουμε και αντίστροφες ανισότητες. Το βασικό μας εργαλείο είναι τα αφφινικά και δυϊκά αφφινικά quermmassintegrals, τα οποία εισάγουμε εδώ στην κανονικοποιημένη τους μορφή. Για κάθε κυρτό σώμα K (ή γενικότερα, για κάθε φραγμένο Borel σύνολο) στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ορίζουμε τα κανονικοποιημένα αφφινικά quermassintegrals του K,

$$\Phi_{[k]}(K) := \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}} \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^{-n} \, d\nu_{n,k}(E) \right)^{-\frac{1}{kn}}. \tag{4.2.1}$$

Είναι γνωστό ότι για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$,

$$c_1 \sqrt{n/k} \leqslant \Phi_{[k]}(K) \leqslant c_2 \min\left\{ \sqrt{n/k}\log n, (n/k)^{3/2}\sqrt{\log(en/k)} \right\} \tag{4.2.2}$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$. Τα φράγματα στο δεξιό μέλος της (4.2.2) αποδείχθηκαν στο [32]. Το δεύτερο φράγμα είναι καλύτερο όταν το k είναι ανάλογο του n. Η αριστερή ανισότητα αποδείχθηκε στο [95].

Επίσης, για κάθε κυρτό σώμα (ή γενικότερα, για κάθε φραγμένο Borel σύνολο) K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ μπορούμε να ορίσουμε τα κανονικοποιημένα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals του K,

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) := \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{n-k}{kn}} \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap E)^n \, d\nu_{n,n-k}(E) \right)^{\frac{1}{kn}}. \tag{4.2.3}$$

Από την ανισότητα του Grinberg γνωρίζουμε ότι αν K είναι ένα φραγμένο Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\left(\tilde{\Phi}_{[k]}(K)\right)^{kn} \leqslant \left(\tilde{\Phi}_{[k]}(B_2^n)\right)^{kn} = \frac{\kappa_{n-k}^n}{\kappa_n^{n-k}} \leqslant (\sqrt{e})^{kn}. \tag{4.2.4}$$

Υποθέτοντας ότι το K είναι κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$, έχουμε δύο κάτω φράγματα για τα $\tilde{\Phi}_{[k]}$, τα οποία αποδείχθηκαν στο [32]:

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) \geqslant \max\left\{ c_1 L_K^{-1}, c_2\left((n/k)\log(en/k)\right)^{-1/2} \right\}. \tag{4.2.5}$$

Ειδικότερα, το δεύτερο φράγμα είναι καλύτερο όταν το k είναι ανάλογο του n.

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω K φραγμένο Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, και $1 \leqslant k < m \leqslant n$. Τότε,*

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K\cap E)^m \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K\cap F)^k \, d\nu_{n,m}(F). \tag{4.2.6}$$

Από την άλλη πλευρά, αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ισχύει και η αντίστροφη ανισότητα

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K\cap E)^m \, d\nu_{n,k}(E) \geqslant \alpha_{m,k}^{(m-k)m} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K\cap F)^k \, d\nu_{n,m}(F), \tag{4.2.7}$$

όπου $\alpha_{m,k} = c\max\left\{\frac{1}{L_m}, \left(\frac{m}{m-k}\log\left(\frac{em}{m-k}\right)\right)^{-1/2}\right\}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$.

Απόδειξη. Έστω K φραγμένο Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, και $1 \leqslant k < m \leqslant n$. Χρησιμοποιώντας τις (4.1.11) και (4.2.3) παρατηρούμε ότι τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals ικανοποιούν την ακόλουθη ταυτότητα:

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_k(K\cap E)^m \, d\nu_{n,m}(E) &= \int_{G_{n,m}} \left(\int_{G_{F,k}} \mathrm{vol}_k(K\cap E)^m \, d\nu_{F,k}(E)\right) d\nu_{n,m}(F) \\ &= \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K\cap F)^k [\tilde{\Phi}_{[m-k]}(K\cap F)]^{(m-k)m} \, d\nu_{n,m}(F).\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

Δεδομένου ότι

$$[\tilde{\Phi}_{[m-k]}(K\cap F)]^{(m-k)m} \leqslant \frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k}$$

από την ανισότητα του Grinberg (4.2.4), συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K\cap E)^m \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K\cap F)^k \, d\nu_{n,m}(F). \tag{4.2.9}$$

Για την αντίστροφη ανισότητα, αν υποθέσουμε ότι K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, συνδυάζοντας την (4.2.8) με τα κάτω φράγματα

$$\tilde{\Phi}_{[m-k]}(K\cap F) \geqslant \max\left\{c_1 L_{K\cap F}^{-1}, c_2\Big(\frac{m}{m-k}\log\Big(\frac{em}{m-k}\Big)\Big)^{-1/2}\right\}$$

και το γεγονός ότι $L_{K\cap F} \leqslant L_m$ για κάθε $F \in G_{n,m}$, παίρνουμε

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K\cap E)^m \, d\nu_{n,k}(E) \geqslant \alpha_{m,k}^{(m-k)m} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(K\cap F)^k \, d\nu_{n,m}(F), \tag{4.2.10}$$

όπου $\alpha_{m,k} = c\max\left\{\frac{1}{L_m}, \left(\frac{m}{m-k}\log\left(\frac{em}{m-k}\right)\right)^{-1/2}\right\}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$. □

Παρατήρηση 4.2.2. Μια παραλλαγή της (4.1.16) αποδεικνύεται από τον Gardner στο [39, Θεώρημα 7.4]: Αν K είναι φραγμένο Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant k < m \leqslant n-1$ και $0 < p \leqslant m$,

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vrad}(K\cap E)^{kp} \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \left(\int_{G_{n,m}} \mathrm{vrad}(K\cap F)^{mp} \, d\nu_{n,m}(F)\right)^{\frac{k}{m}}. \tag{4.2.11}$$

Στην περίπτωση $p = m$ η εκτίμηση του Θεωρήματος 4.1.1 είναι ισχυρότερη, από την ανισότητα Hölder. Μπορούμε μάλιστα να αποδείξουμε μια ισχυρότερη εκδοχή του θεωρήματος του Gardner για όλες τις τιμές του p.

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω K φραγμένο Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k < m \leqslant n-1$ και $0 < p \leqslant m$,*

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vrad}(K \cap E)^{kp}\, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \int_{G_{n,m}} \mathrm{vrad}(K \cap F)^{kp}\, d\nu_{n,m}(F). \tag{4.2.12}$$

Απόδειξη. Για κάθε $1 \leqslant r \leqslant s$, $0 < p \leqslant s$, και κάθε φραγμένο Borel σύνολο A στον $\mathbb{R}^s$, εφαρμόζοντας πρώτα την ανισότητα Hölder και μετά την ανισότητα του Grinberg, μπορούμε να γράψουμε

$$\int_{G_{s,r}} \left(\frac{\mathrm{vol}_r(A \cap E)}{\kappa_r}\right)^p d\nu_{s,r}(E) \leqslant \left(\int_{G_{s,r}} \left(\frac{\mathrm{vol}_r(A \cap E)}{\kappa_r}\right)^s d\nu_{s,r}(E)\right)^{\frac{p}{s}} \leqslant \left(\frac{\mathrm{vol}_s(A)}{\kappa_s}\right)^{\frac{rp}{s}}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\int_{G_{s,r}} \mathrm{vrad}(A \cap E)^{rp}\, d\nu_{s,r}(E) \leqslant \mathrm{vrad}(A)^{rp}. \tag{4.2.13}$$

Τώρα, αν $1 \leqslant k < m \leqslant n-1$, εφαρμόζουμε την (4.2.13) για $r := k$, $s := m$ και $A = K \cap F$ όπου $F \in G_{n,m}$, και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,k}} \mathrm{vrad}(K \cap E)^{kp}\, d\nu_{n,k}(E) &= \int_{G_{n,m}} \int_{G_{F,k}} \mathrm{vrad}(K \cap E)^{kp}\, d\nu_{F,k}(E)\, d\nu_{n,m}(F)\\ &\leqslant \int_{G_{n,m}} \mathrm{vrad}(K \cap F)^{kp}\, d\nu_{n,m}(F).\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (4.2.12). Παρατηρήστε ότι από την ανισότητα Hölder έπεται άμεσα η (4.2.11). □

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, υποθέτοντας ότι το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, με ένα επιχείρημα δυϊσμού παίρνουμε αντίστοιχες ανισότητες για τον όγκο των προβολών του K. Δίνουμε εδώ εναλλακτική απόδειξη χωρίς να υποθέσουμε την συμμετρία του σώματος, και παράλληλα εξασφαλίζουμε αντίστροφες ανισότητες.

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και $1 \leqslant k < m \leqslant n$. Τότε,*

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^{-m}\, d\nu_{n,k}(E) \leqslant C^{km}\frac{\kappa_m^k}{\kappa_k^m} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(P_F(K))^{-k}\, d\nu_{n,m}(F), \tag{4.2.14}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την άλλη πλευρά,

$$\int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(P_F(K))^{-k}\, d\nu_{n,m}(F) \leqslant C^{km}\frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k}(\log m)^{km} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^{-m}\, d\nu_{n,k}(E), \tag{4.2.15}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και $1 \leqslant k < m \leqslant n$. Παρατηρούμε ότι αν $p \neq 0$ τότε

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^p \, d\nu_{n,k}(E) = \int_{G_{n,m}} \int_{G_{F,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(P_F(K)))^p \, d\nu_{F,k}(E) \, d\nu_{n,m}(F).$$

Ειδικότερα, για $p = -m$ παίρνουμε

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^{-m} \, d\nu_{n,k}(E) = \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(P_F K)^{-k} \Phi_{[k]}(P_F(K))^{-km} \, d\nu_{n,m}(F). \tag{4.2.16}$$

Χρησιμοποιώντας το κάτω φράγμα της (4.2.2) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^{-m} \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant C^{km} \frac{\kappa_m^k}{\kappa_k^m} \int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(P_F(K))^{-k} \, d\nu_{n,m}(F), \tag{4.2.17}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την άλλη πλευρά, λόγω της (4.2.16) και του άνω φράγματος στην (4.2.2), έχουμε ότι η (4.2.14) αντιστρέφεται, με την απώλεια ενός $\log m$ παράγοντα. Δηλαδή,

$$\int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(P_F(K))^{-k} \, d\nu_{n,m}(F) \leqslant C^{km} \frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k} (\log m)^{km} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_E(K))^{-m} \, d\nu_{n,k}(E), \tag{4.2.18}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

4.3 Συναρτησιακές εκδοχές

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε μια γενική ανισότητα, ειδική περίπτωση της οποίας είναι μια συναρτησιακή εκδοχή του Θεωρήματος 4.1.1 (αρκεί να επιλέξουμε $q = k$ και $p = m - k$) και της

$$\int_{G_{n,k}} \frac{\|f|_E\|_1^n}{\|f|_E\|_\infty^{n-k}} \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^n}{\kappa_n^k} \|f\|_1^n. \tag{4.3.1}$$

(αν, επιπλέον, επιλέξουμε $m = n$).

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω $1 \leqslant q \leqslant k < m \leqslant n$, και f μια μη αρνητική, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για $0 \leqslant p \leqslant m - k$,*

(4.3.2)

$$\int_{G_{n,k}} \frac{\|f|_E\|_1^{q(k+p)/k}}{\|f|_E\|_\infty^{pq/k}} \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^{q(k+p)/k}}{\kappa_m^{q(k+p)/m}} \int_{G_{n,m}} \|f|_F\|_1^{q(k+p)/m} \|f|_F\|_\infty^{q(m-k-p)/m} \, d\nu_{n,m}(F).$$

Ειδικότερα, θέτοντας $q = k$ και $p = m - k$ βλέπουμε ότι

$$\int_{G_{n,k}} \frac{\left(\int_E f(x) \, d_E(x)\right)^m}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}} \, d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k} \int_{G_{n,m}} \left(\int_F f(x) \, d_F(x)\right)^k \, d\nu_{n,m}(F). \tag{4.3.3}$$

Μπορούμε μάλιστα να διατυπώσουμε το Θεώρημα 4.3.1 σε μια πιο γενική μορφή στην οποία εμφανίζονται οποιεσδήποτε $q \leqslant k$ διαφορετικές πυκνότητες $f_1, \ldots, f_q$. Σε ό,τι ακολουθεί, αν $1 \leqslant q \leqslant n$, $p \neq 0$ και $f_1, \ldots, f_q$ είναι μη αρνητικές, φραγμένες και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$I_p(f_1, \ldots, f_q; n, q) := \frac{1}{(q!)^p} \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^q f_i(x_i)\right) \Box_q(x_1, \ldots, x_q)^p \, dx_1 \ldots dx_q. \tag{4.3.4}$$

Από το Θεώρημα 1.6.3, από το γεγονός ότι η συνάρτηση $H(x_1,\dots,x_q) = \Box_q(x_1,\dots,x_q)$ είναι Steiner κυρτή και από το Θεώρημα 1.5.5 έπεται (δείτε το [33, Πόρισμα 4.2]) ότι, για κάθε $p>0$,

$$I_p(f_1,\dots,f_q;n,q) \geqslant \left(\prod_{i=1}^q \frac{\|f_i\|_1^{1+p/n}}{\kappa_n^{1+p/n}\|f_i\|_\infty^{p/n}}\right) I_p(\mathbf{1}_{B_2^n},\dots,\mathbf{1}_{B_2^n};n,q), \tag{4.3.5}$$

ενώ αν $-(n-k+1)<p<0$ τότε ισχύει η αντίστροφη ανισότητα. Η τιμή της ποσότητας $I_p(\mathbf{1}_{B_2^n},\dots,\mathbf{1}_{B_2^n};n,q)$ υπολογίζεται στο [9, Θεώρημα 8.2.2]:

$$I_p(\mathbf{1}_{B_2^n},\dots,\mathbf{1}_{B_2^n};n,q) = \kappa_{n+p}^q \prod_{j=0}^{q-1} \frac{\kappa_{n-j}}{\kappa_{n+p-j}} = \kappa_{n+p}^q \frac{p(n,q)}{p(n+p,q)}. \tag{4.3.6}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την σχέση

$$I_{-(n-k-p)}(f_1,\dots,f_q;n,q) = p(n,k,q)\int_{G_{n,k}} I_p(f_1|_E,\dots,f_q|_E;k,q)\,d\nu_{n,k}(E). \tag{4.3.7}$$

για $0\leqslant p\leqslant n-k$, η οποία προκύπτει αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.5.5 για την συνάρτηση

$$g(x_1,\dots,x_q) := \left(\prod_{i=1}^q f_i(x_i)\right) \Box_q(x_1,\dots,x_q)^{-(n-k-p)}.$$

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω $1\leqslant q\leqslant k<m\leqslant n$, και $f_1,\dots,f_q$ μη αρνητικές, φραγμένες και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0\leqslant p\leqslant m-k$,*

$$\int_{G_{n,k}} \prod_{i=1}^q \frac{\|f_i|_E\|_1^{1+p/k}}{\|f_i|_E\|_\infty^{p/k}}\,d\nu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^{q(k+p)/k}}{\kappa_m^{q(k+p)/m}} \int_{G_{n,m}} \prod_{i=1}^q \|f_i|_F\|_1^{(k+p)/m}\|f_i|_F\|_\infty^{(m-k-p)/m}\,d\nu_{n,m}(F). \tag{4.3.8}$$

Απόδειξη. Τροποποιούμε το επιχείρημα από το [33, Θεώρημα 5.1]. Αν θεωρήσουμε $E\in G_{n,k}$, και υποθέσουμε ότι $\|f_i|_E\|>0$ για κάθε $i=1,\dots,q$, η (4.3.5) μας δίνει

$$\prod_{i=1}^q \frac{\|f_i|_E\|_1^{1+p/k}}{\|f_i|_E\|_\infty^{p/k}} \leqslant \kappa_k^{q(k+p)/k} \frac{I_p(f_1|_E,\dots,f_q|_E;k,q)}{I_p(\mathbf{1}_{B_2^m\cap E},\dots,\mathbf{1}_{B_2^m\cap E};k,q)}. \tag{4.3.9}$$

Από την (4.3.7), έχουμε

$$\begin{aligned} I_{-(m-k-p)}(\mathbf{1}_{B_2^m},\dots,\mathbf{1}_{B_2^m};m,q) &= p(m,k,q)\int_{G_{m,k}} I_p(\mathbf{1}_{B_2^m\cap E},\dots,\mathbf{1}_{B_2^m\cap E};k,q)\,d\nu_{m,k}(E) \\ &= p(m,k,q) I_p(\mathbf{1}_{B_2^k},\dots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,q). \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

Τώρα ολοκληρώνουμε την (4.3.9) πάνω από την $G_{n,k}$, και στη συνέχεια χρησιμοποιώντας την

(4.1.11), και εφαρμόζοντας τις (4.3.7) και (4.3.10) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{G_{n,k}} \prod_{i=1}^{q} \frac{\|f_i|_E\|_1^{1+p/k}}{\|f_i|_E\|_\infty^{p/k}}\, d\nu_{n,k}(E) \\
&\leqslant \kappa_k^{q(k+p)/k} \frac{1}{I_p(\mathbf{1}_{B_2^k},\dots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,q)} \int_{G_{n,k}} I_p(f_1|_E,\dots,f_q|_E;k,q)\, d\nu_{n,k}(E) \\
&= \kappa_k^{q(k+p)/k} \frac{1}{I_p(\mathbf{1}_{B_2^k},\dots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,q)} \int_{G_{n,k}} \int_{G_{E,m}} I_p(f_1|_E,\dots,f_q|_E;k,q)\, d\nu_{E,m}(F)\, d\nu_{n,k}(E) \\
&= \kappa_k^{q(k+p)/k} \frac{1}{I_p(\mathbf{1}_{B_2^k},\dots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,q)} \int_{G_{n,m}} \int_{G_{F,k}} I_p(f_1|_E,\dots,f_q|_E;k,q)\, d\nu_{F,k}(E)\, d\nu_{n,m}(F) \\
&= \frac{\kappa_k^{q(k+p)/k}}{p(m,k,q)} \frac{I_{-(m-k-p)}(\mathbf{1}_{B_2^m},\dots,\mathbf{1}_{B_2^m};m,q)}{I_p(\mathbf{1}_{B_2^k},\dots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,q)} \int_{G_{n,m}} \frac{I_{-(m-k-p)}(f_1|_F,\dots,f_q|_F;m,q)}{I_{-(m-k-p)}(\mathbf{1}_{B_2^m},\dots,\mathbf{1}_{B_2^m};m,q)}\, d\nu_{n,m}(F) \\
&\leqslant \frac{\kappa_k^{q(k+p)/k}}{\kappa_k^{q(k+p)/m}} \int_{G_{n,m}} \prod_{i=1}^{q} \|f_i|_F\|_1^{(k+p)/m} \|f_i|_F\|_\infty^{(m-k-p)/m}\, d\nu_{n,m}(F),
\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα παρατηρούμε ότι η (4.3.5) αντιστρέφεται για αρνητικές ροπές και ότι

$$\frac{1}{p(m,k,q)} \frac{I_p(\mathbf{1}_{B_2^m},\dots,\mathbf{1}_{B_2^m};m,q)}{I_p(\mathbf{1}_{B_2^k},\dots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,q)} = 1$$

από την (4.3.7), την οποία αυτή τη φορά εφαρμόζουμε για την B_2^m. □

Διατυπώνουμε επίσης και αποδεικνύουμε το συναρτησιακό ανάλογο της (4.1.3) (η περίπτωση $m = n$ έχει αποδειχθεί στο [33]).

Θεώρημα 4.3.3. *Έστω $1 \leqslant k < m \leqslant n$, και f μια μη αρνητική, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

(4.3.11)
$$\int_{A_{n,k}} \frac{\left(\int_E f(x)\, d_E(x)\right)^{m+1}}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}}\, d\mu_{n,k}(E) \leqslant \frac{\kappa_k^{m+1}}{\kappa_m^{k+1}} \frac{\kappa_{m(k+1)}}{\kappa_{k(m+1)}} \int_{A_{n,m}} \left(\int_F f(x)\, d_F(x)\right)^{k+1} d\mu_{n,m}(F).$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε κάποια βοηθητικά αποτελέσματα. Αν $1 \leqslant k \leqslant n$, $p \neq 0$ και $f_1,\dots,f_k,f_{k+1}$ είναι μη αρνητικές, φραγμένες και ολοκληρώσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$, θέτουμε για συντομία

(4.3.12)
$$J_p(f_1,\dots,f_{k+1};n,k) := \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \left(\prod_{i=1}^{k+1} f_i(x_i)\right) \Delta_k(x_1,\dots,x_{k+1})^p\, d\lambda(x_1)\dots d\lambda(x_{k+1}).$$

Με βάση το Θεώρημα 1.6.3, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η συνάρτηση $H(x_1,\dots,x_{k+1}) = \Delta_k(x_1,\dots,x_{k+1})$ είναι Steiner κυρτή, και το Θεώρημα 1.5.6, αποδεικνύεται στο [33, Πόρισμα 4.5] ότι αν $f_1 = \cdots = f_{k+1} = f$ και $p \geqslant 1$ τότε

$$J_p(f,\dots,f;n,k) \geqslant \frac{\|f\|_1^{k+1+kp/n}}{\kappa_n^{k+1+kp/n}\|f\|_\infty^{kp/n}} J_p(\mathbf{1}_{B_2^n},\dots,\mathbf{1}_{B_2^n};n,k). \tag{4.3.13}$$

Η τιμή της $J_p(\mathbf{1}_{B_2^n},\ldots,\mathbf{1}_{B_2^n};n,k)$ υπολογίζεται στο [9, Θεώρημα 8.2.3]:

$$J_p(\mathbf{1}_{B_2^n},\ldots,\mathbf{1}_{B_2^n};n,k)=\frac{1}{(k!)^p}\kappa_{n+p}^{k+1}\frac{\kappa_{k(n+p)+n}}{\kappa_{(k+1)(n+p)}}\frac{p(n,k)}{p(n+p,k)}. \tag{4.3.14}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.3. Έστω $(E,F)\in A_{n,k,m}$. Χρησιμοποιώντας την (4.3.13) για την $f|_E$ με $p=m-k$, γράφουμε

$$\begin{aligned} J_{m-k}(f|_E,\ldots,f|_E;k,k) &\geqslant \frac{\|f|_E\|_1^{k+1+k(m-k)/k}}{\kappa_n^{k+1+k(m-k)/k}\|f|_E\|_\infty^{k(m-k)/k}}J_{m-k}(\mathbf{1}_{B_2^k},\ldots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,k)\\ &=\frac{\|f|_E\|_1^{m+1}}{\kappa_k^{m+1}\|f|_E\|_\infty^{m-k}}J_{m-k}(\mathbf{1}_{B_2^k},\ldots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,k),\end{aligned} \tag{4.3.15}$$

και ολοκληρώνοντας στην $A_{n,k}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\int_{A_{n,k}}\frac{\left(\int_E f(x)\,dx\right)^{m+1}}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}}\,d\mu_{n,k}(E)\\ &\qquad\leqslant\frac{\kappa_k^{m+1}}{J_{m-k}(\mathbf{1}_{B_2^k},\ldots,\mathbf{1}_{B_2^k});k,k}\int_{A_{n,k}}J_{m-k}(f|_E,\ldots,f|_E;k,k)\,d\mu_{n,k}(E).\end{aligned}$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την (1.5.4) για τη συνάρτηση $g(E,F)=J_{m-k}(f|_E,\ldots,f|_E;k,k)$ που είναι ανεξάρτητη από τον $F\in A_{E,m}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}&\int_{A_{n,k}}\frac{\left(\int_E f(x)\,dx\right)^{m+1}}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}}\,d\mu_{n,k}(F)\\ &\qquad\leqslant\frac{\kappa_k^{m+1}}{J_{m-k}(\mathbf{1}_{B_2^k},\ldots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,k)}\int_{A_{n,k}}\int_{A_{E,m}}J_{m-k}(f|_E,\ldots,f|_E;k,k)\,d\mu_{E,m}(F)\,d\mu_{n,k}(E)\\ &\qquad=\frac{\kappa_k^{m+1}}{J_{m-k}(\mathbf{1}_{B_2^k},\ldots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,k)}\int_{A_{n,m}}\int_{A_{F,k}}J_{m-k}(f|_E,\ldots,f|_E;k,k)\,d\mu_{F,k}(E)\,d\mu_{n,m}(F).\end{aligned}$$

Μένει να εκτιμήσουμε το εσωτερικό ολοκλήρωμα στην παραπάνω σχέση. Από το Θεώρημα 1.5.6, έχουμε

$$\begin{aligned}&\int_{A_{F,k}}J_{m-k}(f|_E,\ldots,f|_E;k,k)\,d\mu_{F,k}(E)\\ &\qquad=\int_{A_{F,k}}\int_E\cdots\int_E\left(\prod_{i=1}^{k+1}f(x_i)\right)\Delta_k(x_1,\ldots,x_{k+1})^{m-k}\,d\lambda(x_1)\ldots d\lambda(x_{k+1})\,d\mu_{F,k}(E)\\ &\qquad=\frac{1}{(k!)^{m-k}p(m,k)}\int_F\cdots\int_F\left(\prod_{i=1}^{k+1}f(x_i)\right)\,d\lambda(x_1)\ldots d\lambda(x_{k+1}).\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}&\int_{A_{n,k}}\frac{\left(\int_E f(x)\,d\lambda(x)\right)^{m+1}}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}}\,d\mu_{n,k}(F)\\ &\qquad\leqslant\frac{\kappa_k^{m+1}}{J_{m-k}(\mathbf{1}_{B_2^k},\ldots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,k)}\,\frac{1}{(k!)^{m-k}p(m,k)}\int_{A_{n,m}}\left(\int_F f(x)\,dx\right)^{k+1}\,d\mu_{n,m}(F).\end{aligned}$$

Από την (4.3.14) βλέπουμε ότι

$$(k!)^{m-k}p(m,k)J_{m-k}(\mathbf{1}_{B_2^k},\dots,\mathbf{1}_{B_2^k};k,k)=\kappa_m^{k+1}\frac{\kappa_{k(m+1)}}{\kappa_{(k+1)m}},$$

κι αυτό μας δίνει τον ισχυρισμό του θεωρήματος. □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο πολύ σύντομες αλλά όχι αυτοτελείς αποδείξεις των παραπάνω ανισοτήτων.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. Η ανισότητα

(4.3.16)

$$\int_{G_{n,k}}\frac{\|f|_E\|_1^{q+pq/k}}{\|f|_E\|_\infty^{pq/k}}\,d\nu_{n,k}(E)\leqslant\frac{\kappa_k^{q(k+p)/k}}{\kappa_m^{q(k+p)/m}}\int_{G_{n,m}}\|f|_F\|_1^{q(k+p)/m}\|f|_F\|_\infty^{q(m-k-p)/m}\,d\nu_{n,m}(F).$$

είναι άμεση εφαρμογή του [33, Θεώρημα 5.1] που ισχυρίζεται ότι αν g είναι μια μη αρνητική, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^m$ και αν $1\leqslant q\leqslant k\leqslant m$ και $0\leqslant p\leqslant m-k$, τότε

$$\int_{G_{m,k}}\frac{\|g|_E\|_1^{q(p+k)/k}}{\|g|_E\|_\infty^{pq/k}}\,d\nu_{m,k}(E)\leqslant\frac{\kappa_k^{q(k+p)/k}}{\kappa_m^{q(k+p)/m}}\|g\|_1^{q(k+p)/m}\|g\|_\infty^{q(m-k-p)/m}.$$

Υποθέτουμε ότι f είναι μια μη αρνητική, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα για την $g=f|_F$ όπου $F\in G_{n,m}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,k}}\frac{\|f|_E\|_1^{q+pq/k}}{\|f|_E\|_\infty^{pq/k}}\,d\nu_{n,k}(E)&=\int_{G_{n,m}}\left(\int_{G_{F,k}}\frac{\|f|_E\|_1^{q+pq/k}}{\|f|_E\|_\infty^{pq/k}}\,d\nu_{F,k}(E)\right)d\nu_{n,m}(F)\\&\leqslant\frac{\kappa_k^{q(k+p)/k}}{\kappa_m^{q(k+p)/m}}\int_{G_{n,m}}\|f|_F\|_1^{q(k+p)/m}\|f|_F\|_\infty^{q(m-k-p)/m}d\nu_{n,m}(F).\end{aligned}$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός του θεωρήματος, η ανισότητα

$$\int_{G_{n,k}}\frac{\left(\int_E f(x)\,d_E(x)\right)^m}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}}\,d\nu_{n,k}(E)\leqslant\frac{\kappa_k^m}{\kappa_m^k}\int_{G_{n,m}}\left(\int_F f(x)\,d_F(x)\right)^k\,d\nu_{n,m}(F).\tag{4.3.17}$$

προκύπτει αν επιλέξουμε $q=k$ και $p=m-k$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.3. Στο [33] αποδεικνύεται ότι αν g είναι μια μη αρνητική, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^m$ τότε

$$\int_{A_{m,k}}\frac{\left(\int_E g(x)\,d_E(x)\right)^{m+1}}{\|g|_E\|_\infty^{m-k}}\,d\mu_{m,k}(E)\leqslant\frac{\kappa_k^{m+1}}{\kappa_m^{k+1}}\frac{\kappa_{m(k+1)}}{\kappa_{k(m+1)}}\left(\int_{\mathbb{R}^m}g(x)\,dx\right)^{k+1}.\tag{4.3.18}$$

Έστω $1\leqslant k<m\leqslant n$, και f μια μη αρνητική, φραγμένη και ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, εφαρμόζοντας την προηγούμενη ανισότητα για την $g=f|_F$ όπου $F\in G_{n,m}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\int_{A_{n,k}}\frac{\left(\int_E f(x)\,d_E(x)\right)^{m+1}}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}}\,d\mu_{n,k}(E)\\&=\int_{A_{n,m}}\left(\int_{A_{F,k}}\frac{\left(\int_E f(x)\,d_E(x)\right)^{m+1}}{\|f|_E\|_\infty^{m-k}}\,d\mu_{F,k}(E)\right)d\mu_{n,m}(F)\\&\leqslant\frac{\kappa_k^{m+1}}{\kappa_m^{k+1}}\frac{\kappa_{m(k+1)}}{\kappa_{k(m+1)}}\int_{A_{n,m}}\left(\int_F f(x)\,d_F(x)\right)^{k+1}\,d\mu_{n,m}(F),\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Εκτιμήσεις για το μέτρο τομών κυρτών σωμάτων

5.1 Το «πρόβλημα των τομών» για γενικά μέτρα

Υπενθυμίζουμε ότι το κλασσικό πρόβλημα των τομών ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_1 > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant C_1 \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}). \tag{5.1.1}$$

Είναι γνωστό ότι αυτό το πρόβλημα είναι ισοδύναμο με το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_2 > 0$ τέτοια ώστε

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C_2 \tag{5.1.2}$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Από την ισοδυναμία των δύο προβλημάτων προκύπτει ότι

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c_1 L_n \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) \leqslant c_2 \sqrt[4]{n} \max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) \tag{5.1.3}$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων.

Η φυσιολογική γενίκευση, το πρόβλημα των τομών για χαμηλότερες διαστάσεις, είναι το ακόλουθο πρόβλημα: Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και έστω $\alpha_{n,k}$ η μικρότερη θετική σταθερά $\alpha > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 ισχύει ότι

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \alpha^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F). \tag{5.1.4}$$

Είναι σωστό ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_3 > 0$ τέτοια ώστε $\alpha_{n,k} \leqslant C_3$ για κάθε n και k;

Από την (5.1.3) έχουμε $\alpha_{n,1} \leqslant cL_n$ για μια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Περιορίζουμε επίσης το πρόβλημα στην κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων και συμβολίζουμε την αντίστοιχη σταθερά με $\alpha_{n,k}^{(s)}$.

Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε το ίδιο πρόβλημα αντικαθιστώντας τον όγκο με ένα γενικό μέτρο. Έστω g μια τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel υποσύνολο $B \subseteq \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\mu(B) = \int_B g(x)dx, \tag{5.1.5}$$

όπου, αν $B \subseteq F$ για κάποιον $F \in G_{n,s}$, $1 \leqslant s \leqslant n-1$, η ολοκλήρωση θεωρείται ως προς το s-διάστατο μέτρο Lebesgue στον F. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ μπορούμε να ορίσουμε την σταθερά $\alpha_{n,k}(\mu)$ ως τον μικρότερο $\alpha > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 ισχύει

$$\mu(K) \leqslant \alpha^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)\, \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}. \tag{5.1.6}$$

Στο [66], ο Koldobsky απέδειξε αντίστοιχα αποτελέσματα για τομές χαμηλότερων διαστάσεων: αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν η g είναι άρτια και συνεχής στο K τότε

$$\mu(K) \leqslant \gamma_{n,k}\frac{n}{n-k}(\sqrt{n})^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)\, \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}} \tag{5.1.7}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, όπου $\gamma_{n,k} = \kappa_n^{\frac{n-k}{n}}/\kappa_{n-k}$. Με άλλα λόγια, για το συμμετρικό ανάλογο $\alpha_{n,k}^{(s)}$ της $\alpha_{n,k}$ έχουμε

$$\sup_{\mu} \alpha_{n,k}^{(s)}(\mu) \leqslant c_4\sqrt{n}. \tag{5.1.8}$$

Δίνουμε μια νέα, διαφορετική, απόδειξη αυτού του αποτελέσματος. Η μέθοδος που εισάγουμε μας επιτρέπει να αφαιρέσουμε τις υποθέσεις της συμμετρίας και της συνέχειας.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Έστω g φραγμένη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και έστω μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,*

$$\mu(K) \leqslant \left(c_5\sqrt{n-k}\right)^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)\cdot \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}, \tag{5.1.9}$$

όπου $c_5 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, $\alpha_{n,k}(\mu) \leqslant c_5\sqrt{n-k}$.

Μάλιστα, η απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1 οδηγεί στην ισχυρότερη ανισότητα

$$\mu(K) \leqslant \left(c_5\sqrt{n-k}\right)^k \left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{1}{n}} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}. \tag{5.1.10}$$

Η μέθοδός μας βασίζεται στον ακόλουθο γενικευμένο τύπο Blaschke-Petkantschin (παραπέμπουμε στα [9, Κεφάλαιο 7.2] και [39, Λήμμα 5.1] για τη συγκεκριμένη μορφή του που θα χρειαστούμε):

Λήμμα 5.1.2. *Έστω $1 \leqslant s \leqslant n-1$. Υπάρχει σταθερά $p(n,s) > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε μη αρνητική φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση $f : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}$,*

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} & f(x_1,\dots,x_s) dx_1 \cdots dx_s \\ &= p(n,s) \int_{G_{n,s}} \int_F \cdots \int_F f(x_1,\dots,x_s)\, \mathrm{vol}_s(\mathrm{conv}(0,x_1,\dots,x_s))^{n-s} \\ & \qquad dx_1 \dots dx_s \, d\nu_{n,s}(F). \end{aligned} \tag{5.1.11}$$

Η ακριβής τιμή της σταθεράς $p(n,s)$ είναι

$$p(n,s) = (s!)^{n-s} \frac{(n\kappa_n)\cdots((n-s+1)\kappa_{n-s+1})}{(s\kappa_s)\cdots(2\kappa_2)\kappa_1}. \tag{5.1.12}$$

Έστω K ένα συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.2 με $s = n-k$ για τη συνάρτηση $f(x_1,\dots,x_{n-k}) = \prod_{i=1}^{n-k} \mathbf{1}_K(x_i)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(K)^{n-k} = p(n,n-k) \int_{G_{n,n-k}} \int_{K\cap F} \cdots \int_{K \cap F} & \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0,x_1,\dots,x_{n-k}))^k \\ & dx_1 \dots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F). \end{aligned} \tag{5.1.13}$$

Το επόμενο λήμμα δίνει άνω φράγματα για τις σταθερές $\gamma_{n,k} = \mathrm{vol}_n(B_2^n)^{\frac{n-k}{n}} / \mathrm{vol}_{n-k}(B_2^{n-k})$ και $p(n,n-k)$ οι οποίες θα εμφανιστούν, και θα παίξουν βασικό ρόλο, στις επόμενες παραγράφους.

Λήμμα 5.1.3. *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$e^{-k/2} < \gamma_{n,k} < 1 \quad \text{και} \quad [\gamma_{n,k}^{-n} p(n,n-k)]^{\frac{1}{k(n-k)}} \approx \sqrt{n-k}. \tag{5.1.14}$$

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\gamma_{n,k} := \kappa_n^{\frac{n-k}{n}} / \kappa_{n-k}. \tag{5.1.15}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση Γάμμα είναι λογαριθμικά κυρτή μπορούμε να ελέγξουμε ότι $e^{-k/2} < \gamma_{n,k} < 1$. Μια απόδειξη δίνεται στο [69, Λήμμα 2.1].

Για να δώσουμε άνω φράγμα για την $p(n,n-k)$ ξεκινάμε από το γεγονός ότι $\kappa_s = \pi^{\frac{s}{2}} / \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)$ και χρησιμοποιούμε τον τύπο του Stirling. Έχουμε

$$\begin{aligned} p(n,n-k) &= ((n-k)!)^k \frac{(n\kappa_n)\cdots((k+1)\kappa_{k+1})}{((n-k)\kappa_{n-k})\cdots(2\kappa_2)\kappa_1} \\ &= ((n-k)!)^k \binom{n}{k} \frac{\prod_{s=k+1}^n \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}}{\prod_{s=1}^{n-k} \frac{\pi^{s/2}}{\Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}} \\ &= ((n-k)!)^k \binom{n}{k} \pi^{\frac{k(n-k)}{2}} \frac{\prod_{s=1}^{n-k} \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}{\prod_{s=k+1}^{n} \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)}, \end{aligned} \tag{5.1.16}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα

$$\frac{1}{2}\sum_{s=k+1}^n s - \frac{1}{2}\sum_{s=1}^{n-k} s = \frac{1}{4}(n(n+1) - k(k+1) - (n-k)(n-k+1)) = \frac{1}{2}k(n-k). \tag{5.1.17}$$

Παίρνοντας υπόψη την εκτίμηση

$$\left(\frac{s}{2e}\right)^{\frac{s}{2}}\sqrt{2\pi s}\leqslant \Gamma\left(\frac{s}{2}+1\right)\leqslant \left(\frac{s}{2e}\right)^{\frac{s}{2}}\sqrt{2\pi s}\,e^{\frac{1}{6s}}\leqslant \left(\frac{s}{2e}\right)^{\frac{s}{2}}\sqrt{2\pi s}\,e^{\frac{1}{6}} \tag{5.1.18}$$

βλέπουμε ότι

$$p(n,n-k)\leqslant ((n-k)!)^k(2\pi e)^{\frac{k(n-k)}{2}}e^{\frac{n-k}{6}}\binom{n}{k}^{1/2}\frac{\prod_{s=1}^k s^{\frac{s}{2}}\prod_{s=1}^{n-k}s^{\frac{s}{2}}}{\prod_{s=1}^n s^{\frac{s}{2}}}. \tag{5.1.19}$$

Ορίζουμε

$$t_m = 1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\dots\cdot m^m. \tag{5.1.20}$$

Είναι γνωστό ότι

$$t_m\sim A m^{\frac{m^2}{2}+\frac{m}{2}+\frac{1}{12}}e^{-\frac{m^2}{4}} \tag{5.1.21}$$

καθώς $m\to\infty$, όπου $A>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (η σταθερά Glaisher-Kinkelin, δείτε για παράδειγμα το [36]). Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\gamma_{n,k}^{-n}=\frac{\kappa_{n-k}^n}{\kappa_n^{n-k}}=\frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)^{n-k}}{\Gamma\left(\frac{n-k}{2}+1\right)^n}&\leqslant\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n(n-k)}{2}}\frac{(\pi n)^{\frac{n-k}{2}}e^{\frac{n-k}{6}}}{(\pi(n-k))^{\frac{n}{2}}}\\ &\leqslant e^{\frac{n-k}{6}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{(n+1)(n-k)}{2}}.\end{aligned} \tag{5.1.22}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $n^2=k^2+(n-k)^2+2k(n-k)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\gamma_{n,k}^{-\frac{n}{k(n-k)}}\left(\frac{t_kt_{n-k}}{t_n}\right)^{\frac{1}{2k(n-k)}}&\leqslant\frac{c_1}{\sqrt{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k+1}{4(n-k)}}\left(\frac{n-k}{n}\right)^{\frac{n-k+1}{4k}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n+1}{2k}}\\ &\leqslant\frac{c_1}{\sqrt{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k+1}{4(n-k)}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n+k+1}{4k}}\\ &\leqslant\frac{c_1}{\sqrt{n}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k+1}{4(n-k)}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{n-k}{2k}}\left(\frac{n}{n-k}\right)^{\frac{2k+1}{4k}}\\ &\leqslant\frac{c_2}{\sqrt{n}}\cdot\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n-k}}=\frac{c_2}{\sqrt{n-k}}.\end{aligned} \tag{5.1.23}$$

Αφού

$$\left[((n-k)!)^k(2\pi e)^{\frac{k(n-k)}{2}}e^{\frac{n-k}{6}}\binom{n}{k}^{1/2}\right]^{\frac{1}{k(n-k)}}\leqslant c_3(n-k), \tag{5.1.24}$$

βλέπουμε ότι

$$[\gamma_{n,k}^{-n}p(n,n-k)]^{\frac{1}{k(n-k)}}\leqslant c_0\sqrt{n-k} \tag{5.1.25}$$

για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$, όπου $c_0>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η αντίστροφη ανισότητα προκύπτει με παρόμοιους υπολογισμούς, αλλά δεν θα την χρειαστούμε στη συνέχεια. □

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την ανισότητα Busemann-Straus/Grinberg για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals (που εισήχθησαν από τον Lutwak στα [80] και [81]) ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιούμε την κανονικοποίηση του [32]: υποθέτουμε ότι ο όγκος του K είναι ίσος με 1 και θέτουμε

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) = \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{1}{kn}} \tag{5.1.26}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτόν τον ορισμό στα φραγμένα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Η ανισότητα που ακολουθεί αποδείχθηκε από τους Busemann και Straus [26], και ανεξάρτητα από τον Grinberg [48].

Θεώρημα 5.1.4 (Busemann-Straus/Grinberg). *Έστω K ένα συμπαγές σύνολο όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $T \in SL(n)$ έχουμε*

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) = \tilde{\Phi}_{[k]}(T(K)). \tag{5.1.27}$$

Επιπλέον,

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) \leqslant \tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{B}_2^n), \tag{5.1.28}$$

όπου $\overline{B}_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 5.1.4 για συμπαγή σύνολα. Αυτό φαίνεται αν ανατρέξει κανείς προσεκτικά στο επιχείρημα του Grinberg (για τη γενικότερη αυτή μορφή δείτε επίσης το [39, Παράγραφος 7]). Απευθείας υπολογισμός και το Λήμμα 5.1.3 δείχνουν ότι

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{B}_2^n) = \left(\frac{\kappa_{n-k}^n}{\kappa_n^{n-k}}\right)^{\frac{1}{kn}} = \gamma_{n,k}^{-1/k} \leqslant \sqrt{e}. \tag{5.1.29}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1. Έστω μ ένα μέτρο Borel με φραγμένη τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική πυκνότητα g στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, και σταθεροποιούμε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.2 με $s = n-k$ για τη συνάρτηση

$f(x_1,\ldots,x_{n-k})=\prod_{i=1}^{n-k} g(x_i)\mathbf{1}_K(x_i)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mu(K)^{n-k} &= \prod_{i=1}^{n-k}\int_K g(x_i)dx = \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n} f(x_1,\ldots,x_{n-k})dx_1\ldots dx_{n-k} \\
&= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k}) \\
&\qquad \times\ \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k}))^k dx_1\ldots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k}) \\
&\qquad \times\ \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k dx_1\ldots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k \mu(K\cap F)^{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant p(n,n-k)\left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}} \\
&\qquad \times \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{k}{n}}.
\end{aligned}\tag{5.1.30}$$

Για να εκτιμήσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα, παρατηρούμε ότι αν $\overline{K}=\mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}K$ τότε

$$\begin{aligned}
\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F) &= \mathrm{vol}_n(K)^{n-k}\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\overline{K}\cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant \mathrm{vol}_n(K)^{n-k}\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\overline{B}_2^n\cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= \gamma_{n,k}^{-n}\mathrm{vol}_n(K)^{n-k}
\end{aligned}\tag{5.1.31}$$

από το Θεώρημα 5.1.4 και την (5.1.29). Παίρνοντας υπόψη το Λήμμα 5.1.3 βλέπουμε ότι

$$\mu(K)^{n-k}\leqslant \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)}\left(\int_{G_{n,n-k}}\mu(K\cap F)^n d\nu_{n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}}\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}}. \tag{5.1.32}$$

Αυτό αποδεικνύει την (5.1.10) και έχουμε το συμπέρασμα. □

Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με την παρατήρηση (βλέπε [41]) ότι ισχύει μια παραλλαγή του Θεωρήματος 5.1.1 στην οποία υπεισέρχεται η παράμετρος

$$\mathrm{ovr}(K)=\min\left\{\left(\frac{\mathrm{vol}_n(\mathcal{E})}{\mathrm{vol}_n(K)}\right)^{1/n} : K\subseteq\mathcal{E}\right\}$$

όπου το min είναι πάνω από όλα τα ελλειψοειδή $\mathcal{E}$ που περιέχουν το K.

Θεώρημα 5.1.5. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Έστω g φραγμένη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$,*

$$\mu(K)\leqslant (C_2\,\mathrm{ovr}(K))^k \max_{F\in G_{n,n-k}}\mu(K\cap F)\cdot\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}, \tag{5.1.33}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα των Bárány και Füredi: αν $s \geqslant m+1$ και $w_1, \ldots, w_s \in B_2^m$ τότε

$$\mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(w_1, \ldots, w_s))^{1/m} \leqslant C\frac{\sqrt{\log(1+s/m)}}{m}.$$

Ισοδύναμα, η ακτίνα όγκου της κυρτής θήκης των w_j φράσσεται από $C\sqrt{\log(1+s/m)/m}$. Έπεται το εξής:

Λήμμα 5.1.6. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, αν $\mathcal{E}$ είναι ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^m$, $s \geqslant m+1$ και $w_1, \ldots, w_m \in \mathcal{E}$, τότε*

$$\left(\frac{\mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(w_1, \ldots, w_m))}{\mathrm{vol}_m(\mathcal{E})}\right)^{1/m} \leqslant C\sqrt{\log(1+s/m)/m}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.5. Θεωρούμε ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $K \subseteq \mathcal{E}$ και

$$\mathrm{vol}_n(\mathcal{E}) = \mathrm{ovr}(K)^n \mathrm{vol}_n(K).$$

Όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1, ξεκινάμε γράφοντας

$$\begin{aligned}
\mu(K)^{n-k} &= \prod_{i=1}^{n-k} \int_K g(x_i)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_{n-k})dx_1 \ldots dx_{n-k} \\
&= p(n, n-k) \int_{G_{n,n-k}} \int_{K\cap F} \cdots \int_{K\cap F} g(x_1) \cdots g(x_{n-k}) \\
&\qquad \times\ \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_{n-k}))^k dx_1 \ldots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant p(n, n-k)\left(C/\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \int_{G_{n,n-k}} \int_{K\cap F} \cdots \int_{K\cap F} g(x_1) \cdots g(x_{n-k}) \\
&\qquad \times\ \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E} \cap F)^k dx_1 \ldots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= p(n, n-k)\left(C/\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E} \cap F)^k \mu(K \cap F)^{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant p(n, n-k)\left(C/\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K \cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}} \\
&\qquad \times\ \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E} \cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{k}{n}}.
\end{aligned}$$

Για να εκτιμήσουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα, παρατηρούμε ότι αν $\overline{K} = \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}K$ τότε

$$\begin{aligned}
\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E} \cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F) &= \mathrm{vol}_n(\mathcal{E})^{n-k} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\overline{\mathcal{E}} \cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= \mathrm{vol}_n(\mathcal{E})^{n-k} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\overline{B}_2^n \cap F)^n\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= \frac{\kappa_{n-k}^n}{\kappa_n^{n-k}} \mathrm{vol}_n(\mathcal{E})^{n-k}.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\mu(K)^{n-k} \leqslant C_1^{k(n-k)} \left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n d\nu_{n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}} \mathrm{vol}_n(\mathcal{E})^{\frac{k(n-k)}{n}},$$

άρα

$$\begin{aligned}\mu(K) &\leqslant C_1^k \left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n d\nu_{n-k}(F)\right)^{\frac{1}{n}} \mathrm{vol}_n(\mathcal{E})^{\frac{k}{n}} \\ &= C_1^k \left(\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n d\nu_{n-k}(F)\right)^{\frac{1}{n}} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}} \mathrm{ovr}(K)^k.\end{aligned}$$

Έτσι έχουμε το συμπέρασμα. □

5.2 Το πρόβλημα Busemann-Petty για γενικά μέτρα

Το κλασσικό πρόβλημα Busemann-Petty διατυπώνεται ως εξής. Έστω K και D δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^{\perp}) \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(D\cap\vartheta^{\perp}) \tag{5.2.1}$$

για κάθε $\vartheta\in S^{n-1}$. Είναι σωστό ότι $\mathrm{vol}_n(K)\leqslant\mathrm{vol}_n(D)$; Η απάντηση είναι θετική αν $n\leqslant 4$ και αρνητική αν $n\geqslant 5$ (για την ιστορία και τη λύση του προβλήματος, παραπέμπουμε στο βιβλίο του Koldobsky [5]). Η ισομορφική εκδοχή του προβλήματος Busemann-Petty ρωτάει αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_4>0$ τέτοια ώστε αν τα K και D ικανοποιούν την (5.2.1) να ισχύει $\mathrm{vol}_n(K)\leqslant C_4\mathrm{vol}_n(D)$. Το πρόβλημα αυτό είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα των τομών και με την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς (που ρωτάει αν η $\{L_n\}$ είναι φραγμένη ακολουθία). Ακριβέστερα, είναι γνωστό ότι αν K και D είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 τέτοια ώστε η (5.2.1) να ισχύει για κάθε $\vartheta\in S^{n-1}$, τότε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-1}{n}} \leqslant c_6 L_n\, \mathrm{vol}_n(D)^{\frac{n-1}{n}}, \tag{5.2.2}$$

όπου $c_6>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η φυσιολογική γενίκευση, το πρόβλημα Busemann-Petty για χαμηλότερες διαστάσεις, είναι το ακόλουθο ερώτημα: Έστω $1\leqslant k\leqslant n-1$ και έστω $\beta_{n,k}$ η μικρότερη σταθερά $\beta>0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K και D στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 που ικανοποιούν την

$$\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F) \leqslant \mathrm{vol}_{n-k}(D\cap F) \tag{5.2.3}$$

για κάθε $F\in G_{n,n-k}$, ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \beta^k\, \mathrm{vol}_n(D)^{\frac{n-k}{n}}. \tag{5.2.4}$$

Είναι σωστό ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C_5>0$ τέτοια ώστε $\beta_{n,k}\leqslant C_5$ για κάθε n και k;

Από την (5.2.2) έχουμε $\beta_{n,1} \leqslant c_6 L_n \leqslant c_7 \sqrt[4]{n}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_7 > 0$. Μελετάμε επίσης το ίδιο ερώτημα για την κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων και συμβολίζουμε την αντίστοιχη σταθερά με $\beta_{n,k}^{(s)}$.

Όπως στην περίπτωση του προβλήματος των τομών, το ίδιο ερώτημα μπορεί να τεθεί για ένα γενικό μέτρο στη θέση του όγκου. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ με τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική πυκνότητα g μπορούμε να ορίσουμε την $\beta_{n,k}(\mu)$ ως τη μικρότερη σταθερά $\beta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K και D στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο βάρους το 0, που ικανοποιούν την $\mu(K \cap F) \leqslant \mu(D \cap F)$ για κάθε $F \in G_{n,n-k}$, έχουμε

$$\mu(K) \leqslant \beta^k \mu(D). \tag{5.2.5}$$

Όμοια, μπορούμε να ορίσουμε τη «συμμετρική» σταθερά $\beta_{n,k}^{(s)}(\mu)$. Οι Koldobsky και Zvavitch [72] απέδειξαν ότι $\beta_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant \sqrt{n}$ για κάθε μέτρο μ με άρτια συνεχή μη αρνητική πυκνότητα. Μάλιστα, η μελέτη αυτών των προβλημάτων στο πλαίσιο των γενικών μέτρων εγκαινιάστηκε από τον Zvavitch στο [108], όπου απέδειξε ότι το κλασσικό πρόβλημα Busemann-Petty για γενικά μέτρα έχει καταφατική απάντηση αν $n \leqslant 4$ και αρνητική αν $n \geqslant 5$. Μελετάμε το πρόβλημα για χαμηλότερες διαστάσεις και δίνουμε μια γενική εκτίμηση στην περίπτωση που το μ έχει άρτια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με άρτια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα g και έστω $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω D ένα συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε*

$$\mu(K \cap F) \leqslant \mu(D \cap F) \tag{5.2.6}$$

για κάθε $F \in G_{n,n-k}$. Τότε,

$$\mu(K) \leqslant (c_8 k L_{n-k})^k \mu(D), \tag{5.2.7}$$

όπου $c_8 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Συγκρίνοντας το Θεώρημα 5.2.1 με την εκτίμηση $\beta_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant \sqrt{n}$ των Koldobsky και Zvavitch, παρατηρούμε ότι η ανισότητά τους ισχύει για τυχόν μέτρο, δηλαδή δεν απαιτούμε από το μ να είναι λογαριθμικά κοίλο. Από την άλλη πλευρά, το Θεώρημα 5.2.1 ισχύει για τυχούσα συνδιάσταση $k < n$ και η κυρτότητα του δεύτερου σώματος D δεν απαιτείται.

Θα χρησιμοποιήσουμε κάποια βασικά αποτελέσματα για συναρτησοειδή τύπου Sylvester. Έστω D ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^m$. Για κάθε $p > 0$ θεωρούμε την κανονικοποιημένη p-οστή ροπή της μέσης τιμής του όγκου του τυχαίου simplex $\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_m)$, δηλαδή της κυρτής θήκης της αρχής των αξόνων και m σημείων από το D, που ορίζεται από την

$$S_p(D) = \left(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(D)^{m+p}} \int_D \cdots \int_D \mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_m))^p dx_1 \cdots dx_m \right)^{1/p}. \tag{5.2.8}$$

Επίσης, για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^m$ ορίζουμε

$$S_p(\nu) = \left(\int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_m))^p d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_m) \right)^{1/p}. \tag{5.2.9}$$

Παρατηρήστε ότι η $S_p(D)$ είναι αναλλοίωτη ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς: έχουμε $S_p(D) = S_p(T(D))$ για κάθε $T \in GL(n)$. Το επόμενο αποτέλεσμα είναι ευρέως γνωστό και πηγαίνει πίσω στον Blaschke (δείτε, για παράδειγμα, [2, Πρόταση 3.5.5]).

Λήμμα 5.2.2. *Έστω ν ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^m$ με κέντρο βάρους το 0. Τότε,*

$$m!\, S_2^2(\nu) = \det(\mathrm{Cov}(\nu)). \tag{5.2.10}$$

Ειδικότερα, αν το D έχει κέντρο βάρους το 0 τότε

$$S_2^2(D) = \frac{L_D^{2m}}{m!}. \tag{5.2.11}$$

Από την ανισότητα Hölder έπεται ότι η συνάρτηση $p \mapsto S_p(D)$ είναι αύξουσα στο $(0,\infty)$. Θα χρειαστούμε την ακόλουθη αντίστροφη ανισότητα Hölder.

Λήμμα 5.2.3. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\delta > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^m$ και κάθε $p > 1$,*

$$S_p(\nu) \leqslant (\delta p)^m\, S_1(\nu). \tag{5.2.12}$$

Ειδικότερα, για κάθε κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^m$ και κάθε $p > 1$,

$$S_p(D) \leqslant (\delta p)^m\, S_1(D). \tag{5.2.13}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\delta > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $\nu \in \mathcal{P}_m$ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο τότε, για κάθε ημινόρμα $u : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ και κάθε $q > p \geqslant 1$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^q d\nu(x)\right)^{1/q} \leqslant \frac{\delta q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^m} |u(x)|^p d\nu(x)\right)^{1/p}. \tag{5.2.14}$$

Η ανισότητα αυτή είναι συνέπεια του λήμματος του Borell (δείτε, για παράδειγμα, το [2, Θεώρημα 2.4.6]). Στη συνέχεια, υπενθυμίζουμε ότι

$$\mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_m)) = \frac{1}{m!}|\det(x_1, \ldots, x_m)|. \tag{5.2.15}$$

Η συνάρτηση $u_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $x_i \mapsto |\det(x_1, \ldots, x_n)|$ για σταθερά x_j στον $\mathbb{R}^m$, $j \neq i$, είναι ημινόρμα, όπως και η συνάρτηση $v_i : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$x_i \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m} |\det(x_1, \ldots, x_m)| dx_{i+1} \cdots dx_m \tag{5.2.16}$$

για σταθερά x_j $(1 \leqslant j < i)$ στον $\mathbb{R}^m$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα Fubini και την (5.2.14) παίρνουμε την (5.2.12). □

Παρατήρηση 5.2.4. Ένας εναλλακτικός τρόπος για να δώσουμε άνω φράγμα για την $p(n, n-k)$ είναι να ξεκινήσουμε ξαναγράφοντας την (5.1.13) στη μορφή

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-k} = p(n, n-k) \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F)^n [S_k(K \cap F)]^k \, d\nu_{n,n-k}(F). \tag{5.2.17}$$

Ειδικότερα, θέτοντας $K = B_2^n$ βλέπουμε ότι αν $k \geqslant 2$ τότε

$$\begin{aligned}\kappa_n^{n-k} &= p(n,n-k)\kappa_{n-k}^n[S_k(B_2^{n-k})]^k \\ &\geqslant p(n,n-k)\kappa_{n-k}^n[S_2(B_2^{n-k})]^k \\ &\geqslant p(n,n-k)\kappa_{n-k}^n\left(\frac{L_{B_2^{n-k}}}{\sqrt{n-k}}\right)^{k(n-k)} \\ &\geqslant p(n,n-k)\kappa_{n-k}^n\left(\frac{c_1}{\sqrt{n-k}}\right)^{k(n-k)}\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, απ΄ όπου έπεται ότι

$$p(n,n-k) \leqslant \gamma_{n,k}^n(c_0\sqrt{n-k})^{k(n-k)}, \tag{5.2.19}$$

με $c_0 = c_1^{-1}$. Για την περίπτωση $k = 1$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $S_1(K\cap F) \geqslant \delta^{-(n-1)}S_2(K\cap F)$ για κάθε $F \in G_{n,n-1}$, και μετά να συνεχίσουμε όπως παραπάνω. Η τελική εκτίμηση είναι ακριβώς η ίδια όπως στο Λήμμα 5.1.3:

$$[\gamma_{n,k}^{-n}p(n,n-k)]^{\frac{1}{k(n-k)}} \leqslant c_0\sqrt{n-k}, \tag{5.2.20}$$

και αυτή είναι η ανισότητα που θα χρησιμοποιηθεί στη συνέχεια. Όμως, η απόδειξη του Λήμματος 5.1.3 δείχνει επιπλέον ότι αυτή η εκτίμηση είναι ακριβής για κάθε n και k, δηλαδή δεν μπορούμε να περιμένουμε κάτι καλύτερο.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 θα χρειαστούμε επίσης το ακόλουθο θεώρημα των Dann, Παούρη και Pivovarov από το [33].

Θεώρημα 5.2.5 (Dann-Paouris-Pivovarov)**.** *Έστω u μια φραγμένη ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ με $\|u\|_1 > 0$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$\int_{G_{n,n-k}} \frac{1}{\|u|_F\|_\infty^k}\left(\int_F u(x)dx\right)^n d\nu_{n,n-k}(F) \leqslant \gamma_{n,k}^{-n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx\right)^{n-k}. \tag{5.2.21}$$

Η απόδειξη αυτού του θεωρήματος συνδυάζει ολοκληρωτικές ταυτότητες Blaschke-Petkantschin με ανισότητες αναδιάταξης, και αναπτύσσει ιδέες που είχαν εμφανιστεί στο [94].

Περνάμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1. Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με φραγμένη τοπικά ολοκληρώσιμη πυκνότητα g. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ θα θέλαμε να δώσουμε άνω και κάτω φράγματα για το $\mu(K)$ συναρτήσει των μέτρων $\mu(K\cap F)$, $F \in G_{n,n-k}$. Μπορούμε να δώσουμε ένα κάτω φράγμα χωρίς καμία πρόσθετη υπόθεση για την g. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 5.2.5.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω g μια φραγμένη τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και έστω μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε συμπαγές σύνολο D στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\int_{G_{n,n-k}} \mu(D\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F) \leqslant \gamma_{n,k}^{-n}\|g\|_\infty^k\mu(D)^{n-k}. \tag{5.2.22}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.2.5 για τη συνάρτηση $u = g \cdot \mathbf{1}_D$. Παρατηρούμε ότι $\|u|_F\|_\infty = \|g|_{D\cap F}\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty$ για κάθε $F \in G_{n,n-k}$ και ότι

$$\int_F u(x)dx = \mu(D\cap F) \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx = \mu(D). \tag{5.2.23}$$

Συνεπώς, η πρόταση προκύπτει από την (5.2.21). □

Μπορούμε να δώσουμε ένα άνω φράγμα αν υποθέσουμε ότι η g είναι άρτια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση και το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα.

Πρόταση 5.2.7. *Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με άρτια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα g. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$\mu(K)^{n-k} \leqslant p(n,n-k)\frac{(\kappa\delta k L_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}}\frac{1}{\|g\|_\infty^k}\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F), \tag{5.2.24}$$

όπου $\kappa > 0$ είναι η απόλυτη σταθερά στην (1.3.6) *και $\delta > 0$ είναι η απόλυτη σταθερά στο Λήμμα* 5.2.3.

Απόδειξη. Ξεκινάμε γράφοντας

$$\begin{aligned}\mu(K)^{n-k} &= \prod_{i=1}^{n-k}\int_K g(x_i)dx \\ &= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k}))^k \\ &\qquad \times \prod_{i=1}^{n-k} g(x_i)dx_1\ldots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)^{n-k}[S_k(\mu_{K\cap F})]^k\, d\nu_{n,n-k}(F),\end{aligned} \tag{5.2.25}$$

όπου $\mu_{K\cap F}$ είναι το συμμετρικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $g_{K\cap F} := \frac{1}{\mu(K\cap F)}g\cdot \mathbf{1}_{K\cap F}$. Από το Λήμμα 5.2.3 και το Λήμμα 5.2.2 έχουμε

$$[S_k(\mu_{K\cap F})]^k \leqslant (\delta k)^{k(n-k)}[S_2(\mu_{K\cap F})]^k = (\delta k)^{k(n-k)}\left(\frac{\det(\mathrm{Cov}(\mu_{K\cap F}))}{(n-k)!}\right)^{\frac{k}{2}}. \tag{5.2.26}$$

Τώρα, αφού η g είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη, έχουμε

$$\|g_{K\cap F}\|_\infty = \frac{g(0)}{\mu(K\cap F)} = \frac{\|g\|_\infty}{\mu(K\cap F)}. \tag{5.2.27}$$

Συνεπώς, από την (1.3.4) παίρνουμε

$$\det(\mathrm{Cov}(\mu_{K\cap F})) = \frac{L_{\mu_{K\cap F}}^{2(n-k)}}{\|g_{K\cap F}\|_\infty^2} \leqslant \mu(K\cap F)^2\frac{(\kappa L_{n-k})^{2(n-k)}}{\|g\|_\infty^2}, \tag{5.2.28}$$

όπου $\kappa > 0$ είναι η απόλυτη σταθερά στην (1.3.6). Έπεται ότι

$$[S_k(\mu_{K\cap F})]^k \leqslant \frac{(\kappa\delta k L_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}}\frac{\mu(K\cap F)^k}{\|g\|_\infty^k}. \tag{5.2.29}$$

Επιστρέφοντας στην (5.2.25) παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1. Συνδυάζοντας την Πρόταση 5.2.6 και την Πρόταση 5.2.7 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\mu(K)^{n-k} &\leqslant p(n,n-k)\frac{(\kappa\delta kL_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}}\frac{1}{\|g\|_\infty^{k}}\int_{G_{n,n-k}}\mu(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\\ &\leqslant p(n,n-k)\frac{(\kappa\delta kL_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}}\frac{1}{\|g\|_\infty^{k}}\int_{G_{n,n-k}}\mu(D\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\\ &\leqslant p(n,n-k)\frac{(\kappa\delta kL_{n-k})^{k(n-k)}}{[(n-k)!]^{\frac{k}{2}}}\frac{1}{\|g\|_\infty^{k}}\gamma_{n,k}^{-n}\|g\|_\infty^{k}\mu(D)^{n-k}\\ &\leqslant (c_8kL_{n-k})^{k(n-k)}\,\mu(D)^{n-k}\end{aligned} \tag{5.2.30}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_8>0$, όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα

$$p(n,n-k)\leqslant \gamma_{n,k}^{n}\left(c_0\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \tag{5.2.31}$$

του Λήμματος 5.1.3. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

5.3 Ευστάθεια, ανισότητες για διαφορές όγκων και άλλες παραλλαγές

Η προσέγγιση του Koldobsky στο πρόβλημα των τομών για γενικά μέτρα βασίζεται στο ακόλουθο θεώρημα ευστάθειας.

Θεώρημα 5.3.1 (Koldobsky). *Έστω $1\leqslant k\leqslant n-1$ και K ένα γενικευμένο σώμα k-διατομών στον $\mathbb{R}^n$. Αν f είναι μια άρτια συνεχής μη αρνητική συνάρτηση στο K τέτοια ώστε*

$$\int_{K\cap F} f(x)dx\leqslant \varepsilon \tag{5.3.1}$$

για κάποιο $\varepsilon>0$ και για όλους τους $F\in G_{n,n-k}$, τότε

$$\int_K f(x)dx\leqslant \gamma_{n,k}\frac{n}{n-k}\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}\varepsilon. \tag{5.3.2}$$

Το θεώρημα που ακολουθεί προκύπτει από τη μέθοδο που παρουσιάσαμε και δίνει μια γενική εκτίμηση ευστάθειας στο πνεύμα του Θεωρήματος 5.3.1.

Θεώρημα 5.3.2. *Έστω $1\leqslant k\leqslant n-1$ και K ένα συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Αν g είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη μη αρνητική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\int_{G_{n,n-k}}\Big(\int_{K\cap F} g(x)dx\Big)^n d\nu_{n,n-k}(F)\leqslant \varepsilon^n \tag{5.3.3}$$

για κάποιο $\varepsilon>0$ και όλους τους $F\in G_{n,n-k}$, τότε

$$\int_K g(x)dx\leqslant \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^k \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}}\varepsilon. \tag{5.3.4}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.2 με $s = n-k$ για την συνάρτηση $f(x_1,\dots,x_{n-k}) = \prod_{i=1}^{n-k} g(x_i)\mathbf{1}_K(x_i)$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
(5.3.5)\qquad \prod_{i=1}^{n-k}\int_K g(x_i)dx &\leqslant p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k \\
&\quad\times \int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k})\,dx_1\dots dx_{n-k}\,d\nu_{n,n-k}(F)\\
&\leqslant p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k\Big(\int_{K\cap F} g(x)dx\Big)^{n-k} d\nu_{n,n-k}(F)\\
&\leqslant p(n,n-k)\left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n\,d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{k}{n}}\\
&\quad\times\left(\int_{G_{n,n-k}}\Big(\int_{K\cap F} g(x)dx\Big)^n d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}}\\
&\leqslant p(n,n-k)\varepsilon^{n-k}\left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n\,d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{k}{n}}\\
&\leqslant \gamma_{n,k}^{-n}p(n,n-k)\varepsilon^{n-k}\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}}\\
&\leqslant \Big(c_0\sqrt{n-k}\Big)^{k(n-k)}\varepsilon^{n-k}\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}},
\end{aligned}
$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση (5.3.3) και το φράγμα

$$(5.3.6)\qquad \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k\,d\nu_{n,n-k}(F) \leqslant \gamma_{n,k}^{-n}\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}}$$

μαζί με το Λήμμα 5.1.3. Αυτό δείχνει ότι

$$(5.3.7)\qquad \Big(\int_K g(x)dx\Big)^{n-k} = \prod_{i=1}^{n-k}\int_K g(x_i)dx \leqslant \Big(c_0\sqrt{n-k}\Big)^{k(n-k)}\varepsilon^{n-k}\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}},$$

και έπεται το ζητούμενο. □

Μια άλλη παραλλαγή του προβλήματος των τομών παίρνουμε αν θεωρήσουμε «διαφορές όγκων». Οι ανισότητες αυτού του τύπου δίνουν εκτιμήσεις για το σφάλμα που προκύπτει κατά τον υπολογισμό του όγκου ενός κυρτού σώματος μέσω του όγκου των τομών του. Έστω $\varrho_{n,k}$ η μικρότερη σταθερά $\varrho>0$ που ικανοποιεί την ανισότητα

$$(5.3.8)\qquad \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} - \mathrm{vol}_n(L)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \varrho^k \max_{F\in G_{n,n-k}}\big(\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)-\mathrm{vol}_{n-k}(L\cap F)\big)$$

για κάθε $1\leqslant k<n$ και κάθε ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$ με $L\subset K$. Ανοικτό είναι το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ ώστε

$$\sup_{n,k}\varrho_{n,k}\leqslant C.$$

Το πρόβλημα αυτό είναι ισχυρότερο από το πρόβλημα των τομών, κάτι που μπορούμε να δούμε θέτοντας $L = \beta B_2^n$ στην (5.3.8) και αφήνοντας το β να πάει στο 0.

Το ίδιο ερώτημα μπορεί να τεθεί για γενικά μέτρα στη θέση του όγκου. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των προηγούμενων παραγράφων μπορεί κανείς να δείξει μια γενική ανισότητα.

Θεώρημα 5.3.3. *Έστω $1 \leqslant k < n$, έστω K κυρτό σώμα με $0 \in K$ και $L \subseteq K$ σύνολο Borel στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε μέτρο μ με φραγμένη μετρήσιμη μη αρνητική πυκνότητα, έχουμε*

(5.3.9)

$$\mu(K)^{n-k} - \mu(L)^{n-k} \leqslant \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}} \max_{F \in G_{n,n-k}} \left(\mu(K\cap F)^{n-k} - \mu(L\cap F)^{n-k}\right)$$

όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω g η πυκνότητα του μέτρου μ. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.2 με $q = s = n-k$ για τις συναρτήσεις $f(x_1,\ldots,x_{n-k}) = \prod_{i=1}^{n-k} g(x_i)\mathbf{1}_K(x_i)$ και $h(x_1,\ldots,x_{n-k}) = \prod_{i=1}^{n-k} g(x_i)\mathbf{1}_L(x_i)$ παίρνουμε

(5.3.10)

$$\begin{aligned}
&\mu(K)^{n-k} - \mu(L)^{n-k} = \prod_{i=1}^{n-k}\int_K g(x_i)dx - \prod_{i=1}^{n-k}\int_L g(x_i)dx \\
&= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \Big[\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k})\,\mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k}))^k \\
&- \int_{L\cap F}\cdots\int_{L\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k})\,\mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k}))^k\Big]\,d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{P_{n-k}(K,L;F)} g(x_1)\cdots g(x_{n-k})\,\mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k}))^k \\
&\qquad dx_1\ldots dx_{n-k}\,d\nu_{n,n-k}(F),
\end{aligned}$$

όπου

$$P_{n-k}(K,L;F) = (K\cap F)^{n-k} \setminus (L\cap F)^{n-k}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k}))^k \leqslant \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k$$

για κάθε $(x_1,\ldots,x_{n-k}) \in P_{n-k}(K,L;F)$ από την κυρτότητα του $K\cap F$ και την υπόθεση ότι $0 \in K$. Συνεπώς,

(5.3.11)

$$\begin{aligned}
&\mu(K)^{n-k} - \mu(L)^{n-k} \\
&\leqslant p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k \int_{P_{n-k}(K,L;F)} g(x_1)\cdots g(x_{n-k})\,dx_1\ldots dx_{n-k}\,d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k[\mu(K\cap F)^{n-k} - \mu(L\cap F)^{n-k}]\,d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant \max_{F\in G_{n,n-k}} [\mu(K\cap F)^{n-k} - \mu(L\cap F)^{n-k}]\cdot p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k\,d\nu_{n,n-k}(F).
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Grinberg έχουμε

$$\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k\, d\nu_{n,n-k}(F) \leqslant c_{n,k}^{-kn}\,\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}}, \tag{5.3.12}$$

όπου $\gamma_{n,k}^{-kn} = \kappa_{n-k}^n/\kappa_n^{n-k}$. Χρησιμοποιώντας και την

$$[\gamma_{n,k}^{-n}\, p(n,n-k)]^{\frac{1}{k(n-k)}} \approx \sqrt{n-k}.$$

βλέπουμε ότι

$$\mu(K)^{n-k} - \mu(L)^{n-k} \leqslant \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k(n-k)}{n}} \max_{F\in G_{n,n-k}} [\mu(K\cap F)^{n-k} - \mu(L\cap F)^{n-k}], \tag{5.3.13}$$

και έχουμε το συμπέρασμα. □

Παρατήρηση 5.3.4. Από το Θεώρημα 5.3.3 έπεται το Θεώρημα 5.1.1:

$$\mu(K) \leqslant \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^k \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}} \max_{F\in G_{n,n-k}} \mu(K\cap F) \tag{5.3.14}$$

για κάθε κυρτό σώμα K με $0\in K$ και κάθε μέτρο μ. Θεωρώντας μέτρα που η πυκνότητά τους έχει φορέα το $K\setminus L$ στην (5.3.14), παίρνουμε την ακόλουθη ανισότητα για διαφορές μέτρων:

$$\mu(K) - \mu(L) \leqslant \left(c_0\sqrt{n-k}\right)^k \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}} \max_{F\in G_{n,n-k}} \big(\mu(K\cap F) - \mu(L\cap F)\big), \tag{5.3.15}$$

με τις ίδιες υποθέσεις όπως στο Θεώρημα 5.3.3.

Στην αντίστροφη κατεύθυνση έχουμε το εξής.

Θεώρημα 5.3.5. *Έστω $1\leqslant k<n$, και έστω K και L φραγμένα Borel σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $L\subset K$. Έστω μ ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με φραγμένη πυκνότητα g. Τότε,*

$$\big(\mu(K)-\mu(L)\big)^{\frac{n-k}{n}} \geqslant c_{n,k}^k\,\frac{1}{\|g\|_\infty^{\frac{k}{n}}} \left(\int_{G_{n,n-k}} \big(\mu(K\cap F)-\mu(L\cap F)\big)^{\frac{n}{n-k}}\, d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}}. \tag{5.3.16}$$

Ειδικότερα,

$$\big(\mu(K)-\mu(L)\big)^{\frac{n-k}{n}} \geqslant c_{n,k}^k\,\frac{1}{\|g\|_\infty^{\frac{k}{n}}} \min_{F\in G_{n,n-k}} \big(\mu(K\cap F)-\mu(L\cap F)\big). \tag{5.3.17}$$

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε κάποια βασικά αποτελέσματα για συναρτησοειδή τύπου Sylvester, τα οποία υπενθυμίζουμε. Έστω C φραγμένο Borel σύνολο με θετικό μέτρο στον $\mathbb{R}^m$. Για κάθε $p>0$ ορίζουμε

$$S_p(C) = \left(\frac{1}{|C|^{m+p}}\int_C\cdots\int_C \mathrm{vol}_m(\mathrm{conv}(0,x_1,\dots,x_m))^p dx_1\cdots dx_m\right)^{1/p}. \tag{5.3.18}$$

O Pfiefer [99] (βλέπε επίσης [39]) έχει αποδείξει ότι

$$S_p(C) \geqslant S_p(B_2^m).$$

Γενικότερα, για κάθε Borel μέτρο πιθανότητας ν στον $\mathbb{R}^m$, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant m$ και κάθε $p > 0$, ορίζουμε

$$S_{p,q}(\nu) = \left(\int_{\mathbb{R}^m} \cdots \int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{vol}_q(\mathrm{conv}(0, x_1, \ldots, x_q))^p d\nu(x_1) \cdots d\nu(x_q) \right)^{1/p}. \tag{5.3.19}$$

Μια γενίκευση του αποτελέσματος του Pfiefer αποδεικνύεται στο [33]. Έστω ν ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με φραγμένη μη αρνητική πυκνότητα g. Τότε,

$$S_{p,q}^p(\nu) \geqslant \frac{\|g\|_1^{q+\frac{pq}{m}}}{\kappa_m^{q+\frac{pq}{m}} \|g\|_\infty^{\frac{pq}{m}}} S_{p,q}^p(\mathbf{1}_{B_2^m}). \tag{5.3.20}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $u(x) = g(x)\mathbf{1}_K(x)$ και $v(x) = g(x)\mathbf{1}_L(x)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.5.5 με τον $n-k$ στην θέση του k και $q=1$, αρχίζουμε γράφοντας

$$\begin{aligned} \mu(K) - \mu(L) &= \int_{\mathbb{R}^n} u(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} v(x)dx \\ &= p(n, n-k, 1) \int_{G_{n,n-k}} \Big[\int_{K\cap F} g(x)\, \|x\|_2^k dx - \int_{L\cap F} g(x)\, \|x\|_2^k dx \Big] d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= p(n, n-k, 1) \int_{G_{n,n-k}} \int_{(K\cap F)\setminus(L\cap F)} g(x)\, \|x\|_2^k dx\, d\nu_{n,n-k}(F). \end{aligned} \tag{5.3.21}$$

(Παρατηρήστε ότι $\mathrm{vol}_1(\mathrm{conv}(0,x)) = \|x\|_2$, η Ευκλείδεια νόρμα του x). Για κάθε F θέτουμε $C_F = (K\cap F) \setminus (L\cap F)$ και θεωρούμε το μέτρο ν_F με πυκνότητα g στο C_F. Εφαρμόζοντας την (5.3.20) με $p=k$, $q=1$ και $m = n-k$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mu(K) - \mu(L) &\geqslant p(n, n-k, 1) \int_{G_{n,n-k}} S_{k,1}^k(\nu_F)\, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &\geqslant p(n, n-k, 1) \int_{G_{n,n-k}} \frac{\|g\,|_{C_F}\|_1^{1+\frac{k}{n-k}}}{\kappa_{n-k}^{1+\frac{k}{n-k}} \|g\,|_{C_F}\|_\infty^{\frac{k}{n-k}}} S_k^k(\mathbf{1}_{B_2^{n-k}})\, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= \frac{p(n, n-k, 1)}{\kappa_{n-k}^{\frac{n}{n-k}}} S_2^k(\mathbf{1}_{B_2^{n-k}}) \int_{G_{n,n-k}} \frac{\|g\,|_{C_F}\|_1^{\frac{n}{n-k}}}{\|g\,|_{C_F}\|_\infty^{\frac{k}{n-k}}}\, d\nu_{n,n-k}(F). \end{aligned} \tag{5.3.22}$$

Παρατηρούμε ότι

$$p(n, n-k, 1) = \frac{n\kappa_n}{(n-k)\kappa_{n-k}}$$

και

$$S_{k,1}^k(\mathbf{1}_{B_2^{n-k}}) = \int_{B_2^{n-k}} \|x\|_2^k dx = \frac{n-k}{n} \kappa_{n-k}.$$

Συνεπώς,

$$\frac{p(n, n-k, 1)}{\kappa_{n-k}^{\frac{n}{n-k}}} S_2^k(\mathbf{1}_{B_2^{n-k}}) = \frac{\kappa_n}{\kappa_{n-k}^{\frac{n}{n-k}}} = c_{n,k}^{\frac{kn}{n-k}}.$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $F \in G_{n,n-k}$ έχουμε

$$\|g\,|_{C_F}\|_1 = \mu(K\cap F) - \mu(L\cap F)$$

και

$$\|g\,|_{C_F}\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\mu(K)-\mu(L)\geqslant c_{n,k}^{\frac{kn}{n-k}}\frac{1}{\|g\|_\infty^{\frac{k}{n-k}}}\int_{G_{n,n-k}}(\mu(K\cap F)-\mu(L\cap F)^{\frac{n}{n-k}}\,d\nu_{n,n-k}(F),$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Τέλος, αποδεικνύουμε μία ακόμα παραλλαγή του Θεωρήματος 5.1.1.

Θεώρημα 5.3.6. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in \mathrm{int}(K)$. Έστω g φραγμένη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$,*

$$\frac{\mu(K)}{\mathrm{vol}_n(K)}\leqslant \left(c\sqrt{n-k}\right)^k\max_{F\in G_{n,n-k}}\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)},\tag{5.3.23}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.2 με $s=n-k$ για τη συνάρτηση $f(x_1,\ldots,x_{n-k})=\prod_{i=1}^{n-k}g(x_i)\mathbf{1}_K(x_i)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mu(K)^{n-k}&=\prod_{i=1}^{n-k}\int_K g(x_i)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}f(x_1,\ldots,x_{n-k})dx_1\ldots dx_{n-k}\\
&=p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F}g(x_1)\cdots g(x_{n-k})\\
&\qquad\times\ \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k}))^k dx_1\ldots dx_{n-k}\,d\nu_{n,n-k}(F)\\
&\leqslant p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\int_{K\cap F}\cdots\int_{K\cap F}g(x_1)\cdots g(x_{n-k})\\
&\qquad\times\ \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k dx_1\ldots dx_{n-k}\,d\nu_{n,n-k}(F)\\
&=p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^k\mu(K\cap F)^{n-k}\,d\nu_{n,n-k}(F)\\
&=p(n,n-k)\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n\left(\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)}\right)^{n-k}\,d\nu_{n,n-k}(F)\\
&\leqslant p(n,n-k)\max_{F\in G_{n,n-k}}\left(\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)}\right)^{n-k}\\
&\qquad\times\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\\
&=p(n,n-k)\max_{F\in G_{n,n-k}}\left(\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)}\right)^{n-k}\\
&\qquad\times\ \mathrm{vol}_n(K)^{n-k}\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{vol}_{n-k}(\overline{K}\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F).\end{aligned}\tag{5.3.24}$$

Από την ανισότητα του Grinberg έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left(\frac{\mu(K)}{\mathrm{vol}_n(K)}\right)^{n-k} &\\ &\leqslant p(n,n-k)\max_{F\in G_{n,n-k}}\left(\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)}\right)^{n-k}\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{vol}_{n-k}(\overline{B_2^n}\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\\ &= p(n,n-k)\frac{\kappa_{n-k}^n}{\kappa_n^{n-k}}\max_{F\in G_{n,n-k}}\left(\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)}\right)^{n-k},\end{aligned}$$

άρα

$$\frac{\mu(K)}{\mathrm{vol}_n(K)}\leqslant \alpha_{n,k}\max_{F\in G_{n,n-k}}\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)},$$

όπου

$$\alpha_{n,k}:=\left[p(n,n-k)\frac{\kappa_{n-k}^n}{\kappa_n^{n-k}}\right]^{\frac{1}{n-k}},$$

και το συμπέρασμα έπεται από την (5.2.18). □

Μπορούμε κι εδώ να δείξουμε παρόμοιο αποτέλεσμα στο οποίο υπεισέρχεται ο εξωτερικός λόγος όγκων του K.

Θεώρημα 5.3.7. *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in \mathrm{int}(K)$. Έστω g φραγμένη μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και μ το μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα g. Για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$,*

$$\frac{\mu(K)}{\mathrm{vol}_n(K)}\leqslant \big(C_1\,\mathrm{ovr}(K)\big)^k\max_{F\in G_{n,n-k}}\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)}, \tag{5.3.25}$$

όπου $C_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{E}$ συμμετρικό ελλειψοειδές τέτοιο ώστε $K\subseteq\mathcal{E}$ και

$$\mathrm{ovr}(K)=(\mathrm{vol}_n(\mathcal{E})/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής συνέπεια του Λήμματος 5.1.6: αν $F\in G_{n,n-k}$ και $x_1,\ldots,x_{n-k}\in K\cap F$ τότε

$$\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k})\subseteq K\cap F\subseteq \mathcal{E}\cap F,$$

και αφού το $\mathcal{E}\cap F$ είναι συμμετρικό $(n-k)$-διάστατο ελλειψοειδές, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0,x_1,\ldots,x_{n-k})) &\leqslant \left(C\frac{\sqrt{\log(1+(n-k+1)/n-k)}}{\sqrt{n-k}}\right)^k\mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E}\cap F)\\ &\leqslant \left(\frac{C_1}{\sqrt{n-k}}\right)^k\mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E}\cap F).\end{aligned} \tag{5.3.26}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.2 με $s = n-k$ για τη συνάρτηση $f(x_1, \dots, x_{n-k}) = \prod_{i=1}^{n-k} g(x_i)\mathbf{1}_K(x_i)$ παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\mu(K)^{n-k} &= \prod_{i=1}^{n-k} \int_K g(x_i)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \dots, x_{n-k})dx_1 \dots dx_{n-k} \\
&= p(n, n-k) \int_{G_{n,n-k}} \int_{K\cap F} \cdots \int_{K\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k}) \\
&\quad \times \ \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0, x_1, \dots, x_{n-k}))^k dx_1 \dots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant p(n, n-k) \int_{G_{n,n-k}} \int_{K\cap F} \cdots \int_{K\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k}) \\
&\quad \times \ \mathrm{vol}_{n-k}(\mathrm{conv}(0, x_1, \dots, x_{n-k}))^k dx_1 \dots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant p(n, n-k) \left(C/\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \int_{G_{n,n-k}} \int_{K\cap F} \cdots \int_{K\cap F} g(x_1)\cdots g(x_{n-k}) \\
&\quad \times \ \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E}\cap F)^k dx_1 \dots dx_{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= p(n, n-k) \left(C/\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E}\cap F)^k \mu(K\cap F)^{n-k}\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= p(n, n-k) \left(C/\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E}\cap F)^k \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^{n-k} \\
&\quad \times \ \left(\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)}\right)^{n-k} d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\leqslant p(n, n-k) \left(C/\sqrt{n-k}\right)^{k(n-k)} \max_{F\in G_{n,n-k}} \left(\frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)}\right)^{n-k} \\
&\quad \times \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E}\cap F)^k \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^{n-k} d\nu_{n,n-k}(F).
\end{aligned}
$$

Από την ανισότητα Hölder και την ανισότητα του Grinberg παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E}\cap F)^k \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^{n-k} d\nu_{n,n-k}(F) \\
&\qquad \leqslant \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(\mathcal{E}\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{k}{n}} \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)^n d\nu_{n,n-k}(F)\right)^{\frac{n-k}{n}} \\
&\qquad \leqslant \mathrm{vol}_n(\mathcal{E})^{\frac{k(n-k)}{n}} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{(n-k)^2}{n}} \frac{\kappa_{n-k}^n}{\kappa_n^{n-k}},
\end{aligned}
$$

άρα

$$
\frac{\mu(K)}{\mathrm{vol}_n(K)} \leqslant \alpha_{n,k} \max_{F\in G_{n,n-k}} \frac{\mu(K\cap F)}{\mathrm{vol}_{n-k}(K\cap F)},
$$

όπου

$$
\alpha_{n,k} := \left[p(n, n-k)\frac{\kappa_{n-k}^n}{\kappa_n^{n-k}}\right]^{\frac{1}{n-k}} \left(\frac{C}{\sqrt{n-k}}\right)^k \left(\frac{|\mathcal{E}|}{\mathrm{vol}_n(K)}\right)^{\frac{k}{n}} \leqslant \left(C_1\, \mathrm{ovr}(K)\right)^k,
$$

όπως θέλαμε. □

5.4 Σχετικά αποτελέσματα για την περίπτωση του όγκου

Σε αυτήν την παράγραφο συγκεντρώνουμε κάποιες εκτιμήσεις για το πρόβλημα των τομών και το πρόβλημα Busemann-Petty στην κλασσική περίπτωση του όγκου. Η πρώτη μας παρατήρηση είναι ότι κάθε άνω φράγμα για την $\beta_{n,k}$ συνεπάγεται ένα άνω φράγμα για την $\alpha_{n,k}$..

Πρόταση 5.4.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε*

$$\alpha_{n,k} \leqslant c\beta_{n,k} \tag{5.4.1}$$

για κάθε $n \geqslant 2$ και $1 \leqslant k \leqslant n-1$. □

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, σταθεροποιούμε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιον ώστε

$$\max_{F \in G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F) = \kappa_{n-k} r^{n-k}. \tag{5.4.2}$$

Αν θέσουμε $B(r) = rB_2^n$ τότε έχουμε $\mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F) \leqslant |B(r) \cap F|$ για κάθε $F \in G_{n,n-k}$, άρα

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \big(\beta_{n,k}\big)^k |B(r)|^{\frac{n-k}{n}} = \big(\beta_{n,k}\big)^k \kappa_n^{\frac{n-k}{n}} r^{n-k}. \tag{5.4.3}$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant \gamma_{n,k} \big(\beta_{n,k}\big)^k \max_{F \in G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F). \tag{5.4.4}$$

Αφού $\gamma_{n,k} < 1$ παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

Στη συνέχεια δίνουμε δύο άνω φράγματα για την σταθερά $\beta_{n,k}$. Αυτά ουσιαστικά περιέχονται στις εργασίες των Δαφνή και Παούρη [32] και [31] αντίστοιχα.

Πρόταση 5.4.2. *Έστω K κυρτό σώμα και D συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την*

$$\mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F) \leqslant \mathrm{vol}_{n-k}(D \cap F) \tag{5.4.5}$$

για κάθε $F \in G_{n,n-k}$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant (\bar{c}_1 L_K)^k \, \mathrm{vol}_n(D)^{\frac{n-k}{n}}, \tag{5.4.6}$$

όπου $\bar{c}_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\beta_{n,k} \leqslant c\sqrt[4]{n}, \tag{5.4.7}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θυμηθείτε ότι $\overline{A} = |A|^{-1/n} A$. Χρησιμοποιώντας την (5.4.5) και τον ορισμό του $\tilde{\Phi}_{[k]}(A)$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_n(K)^{n-k} [\tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{K})]^{kn} &= \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F)^n \, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &\leqslant \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(D \cap F)^n \, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= \mathrm{vol}_n(D)^{n-k} [\tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{D})]^{kn} \leqslant e^{\frac{kn}{2}} \mathrm{vol}_n(D)^{n-k}. \end{aligned} \tag{5.4.8}$$

Από το γραμμικά αναλλοίωτο του $\tilde{\Phi}_{[k]}(A)$, αν $\tilde{K}$ είναι μια ισοτροπική εικόνα του K έχουμε

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(\tilde{K}) = \tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{K}). \tag{5.4.9}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε κάποια γνωστά αποτελέσματα από την θεωρία των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων (δείτε το [2, Κεφάλαιο 5]). Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,n-k}$, το σώμα $\overline{K_{k+1}}(\pi_{F^\perp}(\mu_{\tilde{K}}))$ ικανοποιεί την

$$|\tilde{K} \cap F|^{1/k} \geqslant c_1 \frac{L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_{F^\perp}(\mu_{\tilde{K}}))}}{L_K}, \tag{5.4.10}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(\tilde{K}) L_K \geqslant \left(\int_{G_{n,n-k}} (c_1 L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_{F^\perp}(\mu_{\tilde{K}}))})^{kn} d\nu_{n,n-k}(F) \right)^{\frac{1}{kn}}. \tag{5.4.11}$$

Αφού $L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_{F^\perp}(\mu_{\tilde{K}}))} \geqslant c_2$ για κάθε $F \in G_{n,n-k}$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, παίρνουμε

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{K}) L_K \geqslant \left(\int_{G_{n,n-k}} (c_1 L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_F(\mu_{\tilde{K}}))})^{kn} d\nu_{n,n-k}(F) \right)^{\frac{1}{kn}} \geqslant c_3, \tag{5.4.12}$$

όπου $c_3 = c_1 c_2$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε την (5.4.6). Ο δεύτερος ισχυρισμός της πρότασης προκύπτει από το γενικό άνω φράγμα του Klartag για την L_n. □

Η επόμενη πρόταση δίνει καλύτερη εκτίμηση στην περίπτωση που η συνδιάσταση k είναι «μεγάλη».

Πρόταση 5.4.3. *Έστω K κυρτό σώμα και D συμπαγές σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την*

$$\mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F) \leqslant \mathrm{vol}_{n-k}(D \cap F) \tag{5.4.13}$$

για κάθε $F \in G_{n,n-k}$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{n-k}{n}} \leqslant (\overline{c}_2 \sqrt{n/k}\,(\log(en/k))^{\frac{3}{2}})^k\, \mathrm{vol}_n(D)^{\frac{n-k}{n}}, \tag{5.4.14}$$

όπου $\overline{c}_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\beta_{n,k} \leqslant \overline{c}_2 \sqrt{n/k}\,(\log(en/k))^{\frac{3}{2}}. \tag{5.4.15}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο όγκος του K είναι ίσος με 1. Θεωρούμε τις ποσότητες

$$\tilde{W}_{[k]}(K) = \left(\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F) d\nu_{n,k}(F) \right)^{\frac{1}{k}} \tag{5.4.16}$$

και

$$I_{-k}(K) = \left(\int_K \|x\|_2^{-k} dx \right)^{-\frac{1}{k}}. \tag{5.4.17}$$

Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι

$$\tilde{W}_{[k]}(K)I_{-k}(K) = \left(\frac{(n-k)\kappa_{n-k}}{n\kappa_n}\right)^{1/k} = \tilde{W}_{[k]}(\overline{B}_2^n)I_{-k}(\overline{B}_2^n) \tag{5.4.18}$$

και ότι $\left(\frac{(n-k)\kappa_{n-k}}{n\kappa_n}\right)^{1/k} \approx \sqrt{n}$. Στο [31] (δείτε το Θεώρημα 5.2 και το Λήμμα 5.6) αποδεικνύεται ότι υπάρχει $T \in SL(n)$ τέτοιος ώστε το $K_2 = T(K)$ να ικανοποιεί την

$$I_{-k}(K_2) \leqslant c_1\sqrt{n}\sqrt{n/k}\,(\log(en/k))^{\frac{3}{2}}. \tag{5.4.19}$$

Από το γραμμικά αναλλοίωτο του $\tilde{\Phi}_{[k]}(K)$ και την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\tilde{\Phi}_{[k]}(K) = \tilde{\Phi}_{[k]}(K_2) \geqslant \tilde{W}_{[k]}(K_2) \geqslant \frac{c_2\sqrt{n}}{I_{-k}(K_2)} \geqslant \frac{c_3}{\sqrt{n/k}\,(\log(en/k))^{\frac{3}{2}}}. \tag{5.4.20}$$

Από την άλλη πλευρά, στην απόδειξη της Πρότασης 5.4.2 ελέγξαμε ότι αν τα K και D ικανοποιούν την (5.4.13) τότε

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-k}[\tilde{\Phi}_{[k]}(\overline{K})]^{kn} \leqslant e^{\frac{kn}{2}}\,\mathrm{vol}_n(D)^{n-k}. \tag{5.4.21}$$

Εισάγοντας το κάτω φράγμα της (5.4.20) στην (5.4.21) ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Είναι τώρα σαφές ότι το Θεώρημα 2.3.6 συνοψίζει τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου.

5.5 Κάτω φράγματα και άλλες παρατηρήσεις

Υπενθυμίζουμε ότι στο [66], ο Koldobsky απέδειξε ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και αν g είναι μια άρτια και συνεχής συνάρτηση στο K τότε

$$\mu(K) \leqslant \gamma_{n,k}\frac{n}{n-k}(\sqrt{n})^k \max_{F\in G_{n,n-k}} \mu(K\cap F)\,\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}} \tag{5.5.1}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, όπου $\gamma_{n,k} = \kappa_n^{\frac{n-k}{n}}/\kappa_{n-k}$. Δηλαδή,

$$\sup_{\mu} \alpha_{n,k}^{(s)}(\mu) \leqslant c_4\sqrt{n}. \tag{5.5.2}$$

Προηγουμένως, στο [65] είχε δείξει ότι

$$\mu(K) \leqslant \gamma_{n,1}\frac{n}{n-1}\sqrt{n} \max_{\xi\in S^{n-1}} \mu(K\cap \xi^{\perp})\,\mathrm{vol}_n(K)^{\frac{1}{n}}, \tag{5.5.3}$$

δηλαδή

$$\sup_{\mu} \alpha_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant 2\sqrt{n}. \tag{5.5.4}$$

Τα φράγματα αυτά γενικεύτηκαν, όπως είδαμε, στο [Λ-1]. Λίγο αργότερα, οι Klartag και Koldobsky απέδειξαν στο [59] ότι το τελευταίο άνω φράγμα είναι, ουσιαστικά, βέλτιστο: υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c, C > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $n \geqslant 3$,

$$\frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{\log\log n}} \leqslant \alpha_{n,1}^{(s)} \leqslant C\sqrt{n}.$$

Μάλιστα, τελευταία, οι Klartag και Livshyts απέδειξαν στο [60] ότι ο λογαριθμικός όρος στο αριστερό μέλος της προηγούμενης ανισότητας δεν είναι απαραίτητος: τελικά,

$$\alpha_{n,1}^{(s)} \approx \sqrt{n}.$$

Σχετική είναι και η πρόσφατη εργασία [21] των Bobkov, Klartag και Koldobsky. Συγκεκριμένα, το κεντρικό αποτέλεσμα στο [59] είναι το εξής.

Θεώρημα 5.5.1. *Για κάθε $n \geqslant 3$ υπάρχουν συμμετρικό κυρτό σώμα T στον $\mathbb{R}^n$ και άρτια συνεχής πυκνότητα $f : T \to [0,\infty)$ τέτοια ώστε, για κάθε αφφινικό υπερεπίπεδο $H \subset \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{T\cap H} f(x)\,dx \leqslant C\frac{\sqrt{\log\log n}}{\sqrt{n}}\,\mathrm{vol}_n(T)^{-1/n},$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η ύπαρξη των T και f εξασφαλίζεται με πιθανοθεωρητικές μεθόδους. Οι συγγραφείς αποδεικνύουν αρχικά ότι αν $N_1 = n^3$, $N_2 = \lceil n\log^3 n\rceil$, $R_1 = n/\sqrt{\log n}$, $R_2 = n/\sqrt{\log\log n}$ τότε υπάρχουν μοναδιαία διανύσματα $\vartheta_1,\dots,\vartheta_{N_1},\eta_1,\dots,\eta_{N_2}$ τέτοια ώστε, για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ και $t \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{N_1N_2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\varphi(t + R_1\langle\xi,\vartheta_i\rangle + R_2\langle\xi,\eta_j\rangle) \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{n}\,\log n} + C_2\frac{\sqrt{n}}{R_2}\varphi\left(\frac{c\sqrt{n}}{R_2}t\right),$$

όπου $\varphi(s) = \exp(-s^2/2)$. Στη συνέχεια, το κυρτό σώμα T ορίζεται να είναι το $4K$, όπου K είναι η κυρτή θήκη των διανυσμάτων

$$\pm R_1\vartheta_1,\dots,\pm R_1\vartheta_{N_1},\pm R_2\eta_1,\dots,\pm R_2\eta_{N_2},\pm ne_1,\dots,\pm ne_n.$$

Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$\mathrm{vol}_n(T)^{1/n} \leqslant C_2.$$

Στη συνέχεια ορίζουν ένα μέτρο ν ως τη συνέλιξη

$$\gamma_n * \left(\frac{1}{N_1N_2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\frac{\delta_{R_1\vartheta_i+R_2\eta_j} + \delta_{-R_1\vartheta_i-R_2\eta_j}}{2}\right),$$

όπου γ_n είναι το τυπικό μέτρο Gauss στον $\mathbb{R}^n$ και δ_y είναι το μέτρο Dirac που αντιστοιχεί στο y. Η πυκνότητα του ν είναι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{1}{N_1N_2}\sum_{i=1}^{N_1}\sum_{j=1}^{N_2}\frac{\varphi_n(x + R_1\vartheta_i + R_2\eta_j) + \varphi_n(x - R_1\vartheta_i - R_2\eta_j)}{2\,(2\pi)^{n/2}}$$

στο T, όπου $\varphi_n(x) = \exp(-\|x\|_2^2)$. Τέλος, η $f : T \to [0,\infty)$ ορίζεται από την

$$f(x) = \frac{1}{\nu(T)}\mathbf{1}_T(x)g(x).$$

Στο [60] παρουσιάζεται μια βελτιωμένη έκδοση αυτής της πιθανοθεωρητικής τεχνικής, με την οποία επιτυγχάνεται η ισχυρότερη ανισότητα

$$\int_{T\cap H} f(x)\,dx \leqslant \frac{C}{\sqrt{n}}\,\mathrm{vol}_n(T)^{-1/n},$$

για κάθε αφφινικό υπερεπίπεδο $H \subset \mathbb{R}^n$.

Η κλάση $\mathcal{BP}_k^n$ των γενικευμένων σωμάτων k-διατομών στον $\mathbb{R}^n$, εισήχθη από τον Zhang στο [107], και είναι η κλειστή θήκη ως προς την ακτινική μετρική των ακτινικών k-αθροισμάτων πεπερασμένων οικογενειών συμμετρικών ελλειψοειδών. Αν ορίσουμε

$$\mathrm{ovr}(K, \mathcal{BP}_k^n) = \inf \left\{ \left(\frac{\mathrm{vol}_n(D)}{\mathrm{vol}_n(K)} \right)^{1/n} : K \subseteq D, D \in \mathcal{BP}_k^n \right\}, \tag{5.5.5}$$

τότε από το Θεώρημα 5.3.1 έπεται άμεσα η

$$\mu(K) \leqslant \mathrm{ovr}(K, \mathcal{BP}_k^n)^k \frac{n}{n-k} \gamma_{n,k} \max_{F \in G_{n,n-k}} \mu(K \cap F) \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}} \tag{5.5.6}$$

για κάθε μέτρο μ με άρτια συνεχή πυκνότητα. Χρησιμοποιώντας την (5.3.4) και φράγματα για τις ποσότητες

$$\sup_{K \in \mathcal{C}_n} \mathrm{ovr}(K, \mathcal{BP}_k^n), \tag{5.5.7}$$

ο Koldobsky (σε κάποιες περιπτώσεις σε συνεργασία με τον Zvavitch) έχει αποδείξει ακριβέστερες εκτιμήσεις για το πρόβλημα των τομών αυθαίρετης συνδιάστασης, για διάφορες κλάσεις $\mathcal{C}_n$ συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$:

(α) Αν $k \geqslant \lambda n$ για κάποιον $\lambda \in (0,1)$ τότε η (2.3.6) ισχύει για όλα τα συμμετρικά κυρτά σώματα K και όλα τα άρτια μέτρα μ, με μια σταθερά α η οποία εξαρτάται μόνο από το λ (δείτε το [67]. Αυτό το αποτέλεσμα χρησιμοποιεί μια εκτίμηση των Koldobsky, Παούρη και Ζυμωνοπούλου για την παράμετρο $\mathrm{ovr}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ από το [71]).

(β) Αν το K είναι σώμα διατομών τότε η (2.3.6) ισχύει για όλα τα άρτια μέτρα μ, με μια απόλυτη σταθερά α. Αυτό αποδείχθηκε από τον Koldobsky στο [64] για $k = 1$, και από τους Koldobsky και Ma στο [70] για κάθε k.

(γ) Αν το K είναι η μοναδιαία μπάλα ενός n-διάστατου υποχώρου του L_p, $p > 2$ τότε η (2.3.6) ισχύει για όλα τα άρτια μέτρα μ, με σταθερά $\alpha \leqslant c n^{\frac{1}{2} - \frac{1}{p}}$ (δείτε το [66]).

(δ) Αν το K είναι η μοναδιαία μπάλα ενός n-διάστατου χώρου με νόρμα ο οποίος εμφυτεύεται στον L_p, $p \in (-n, 2]$ τότε η (2.3.6) ισχύει για όλα τα άρτια μέτρα μ, με μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p (δείτε το [67]).

(ε) Αν το K έχει φραγμένο εξωτερικό λόγο όγκων τότε η (2.3.6) ισχύει για όλα τα άρτια μέτρα μ, με μια απόλυτη σταθερά α (δείτε το [67]).

Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε αν η μέθοδος μας μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μελέτη ειδικών κλάσεων κυρτών σωμάτων.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 χρησιμοποιούμε ουσιαστικά την υπόθεση ότι το μ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο. Οι Koldobsky και Zvavitch [72] έχουν αποδείξει το φράγμα $\beta_{n,1}^{(s)}(\mu) \leqslant \sqrt{n}$ για κάθε μέτρο μ με άρτια συνεχή μη αρνητική πυκνότητα. Θα ήταν ενδιαφέρον να δούμε αν η μέθοδος μας μπορεί να δώσει αυτήν την εκτίμηση, και ίσως να επεκταθεί σε μεγαλύτερες συνδιαστάσεις k, για γενικότερες κλάσεις μέτρων. Θα ήταν επίσης ενδιαφέρον να δούμε αν η υπόθεση της συμμετρίας για τα K και μ είναι απαραίτητη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Παρατηρήσεις για την M-παράμετρο ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

6.1 Μέσοι νορμών στην σφαίρα

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε

$$M_q := M_q(K) = \left(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|^q \, d\sigma(\vartheta)\right)^{1/q}.$$

Παρατηρήστε ότι $M_1(K) = M(K)$. Οι παράμετροι M_q μελετήθηκαν από τους Litvak, Milman και Schechtman στο [76], όπου προσδιορίζεται η τάξη μεγέθους τους:

Θεώρημα 6.1.1. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με b τη μικρότερη σταθερά για την οποία ισχύει $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\max\left\{M_1, c_1\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\} \leqslant M_q \leqslant \max\left\{2M_1, c_2\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\}$$

για κάθε $q \in [1,n]$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Ορίζουμε $k(K)$ τον μεγαλύτερο φυσικό $k \leqslant n$ για τον οποίο

$$\mu_{n,k}\left(\left\{F \in G_{n,k} : \frac{M(K)}{2}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_K \leqslant 2M(K)\|x\|_2, \text{ για κάθε } x \in F\right\}\right) \geqslant \frac{n}{n+k}.$$

Επίσης, ορίζουμε $k_*(K) = k(K^\circ)$. Το επόμενο θεώρημα (από το [90]) δείχνει ότι η παράμετρος $k(K)$ προσδιορίζεται πλήρως από τις παραμέτρους $M(K)$ και $b(K)$.

Θεώρημα 6.1.2 (Milman–Schechtman). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε*

$$c_1 n \frac{M(K)^2}{b(K)^2} \leqslant k(K) \leqslant c_2 n \frac{M(K)^2}{b(K)^2}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Αντίστοιχα, θεωρώντας το K° στη θέση του K, έχουμε

$$c_1 n \frac{w(K)^2}{R(K)^2} \leqslant k_*(K) \leqslant c_2 n \frac{w(K)^2}{R(K)^2},$$

διότι $M(K^\circ) = w(K)$ και $b(K^\circ) = R(K)$.

Η αλλαγή στην συμπεριφορά της ποσότητας M_q συμβαίνει όταν $q \approx n(M_1/b)^2$. Η τιμή αυτή του q είναι περίπου ίση με τη διάσταση Dvoretzky $k(K)$ του K. Παρατηρήστε επίσης ότι, από το Θεώρημα 6.1.1 έχουμε $M_n \approx b$. Αφού $M_q \leqslant b$ για κάθε $q \geqslant 1$ και η συνάρτηση $q \mapsto M_q$ είναι προφανώς αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι $M_q \approx b$ αν $q \geqslant n$. Με άλλα λόγια, έχουμε μια δεύτερη μεταβολή συμπεριφοράς της παραμέτρου M_q στο σημείο $q = n$.

Ορίζουμε μία ακόμα παράμετρο, την

$$d(K) = \min\left\{ -\log \sigma\left(\left\{ \vartheta \in S^{n-1} : \|\vartheta\| \leqslant \frac{M(K)}{2} \right\} \right), n \right\}.$$

Θέτουμε επίσης $d_*(K) := d(K^\circ)$. Η παράμετρος d ορίστηκε από τους Klartag και Vershynin στο [63], όπου επίσης αποδείχτηκε ότι η $d(K)$ είναι πάντα μεγαλύτερη από $k(K)$:

Πρόταση 6.1.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$d(K) \geqslant ck(K),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η πράμετρος $d(K)$ συνδέεται στενά με εκτιμήσεις για το μέτρο των διευθύνσεων στις οποίες μια νόρμα είναι «πολύ μικρότερη» από τη μέση τιμή της.

Θεώρημα 6.1.4. *Για κάθε $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ έχουμε*

$$\sigma(\{\vartheta \in S^{n-1} : \|\vartheta\| < \varepsilon M(K)\}) < \varepsilon^{c_1 d(K)} < \varepsilon^{c_1 k(K)},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Το Θεώρημα 6.1.4 έχει σαν συνέπεια τις ακόλουθες αντίστροφες ανισότητες Hölder.

Θεώρημα 6.1.5. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0 < q < c_1 d(K)$,*

$$c_2 M(K) \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|^{-q} d\sigma(\vartheta) \right)^{-1/q} \leqslant M(K).$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $0 < q < c_1 d(K)$ ισχύει

$$M_{-q}(K) \approx M(K).$$

Η δεξιά ανισότητα του Θεωρήματος 6.1.5 προκύπτει εύκολα από την ανισότητα Hölder. Για την αριστερή ανισότητα χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά μέρη σε συνδυασμό με τις εκτιμήσεις του προηγούμενου θεωρήματος. Ειδικότερα, αφού $d(K) \geqslant ck(K)$, έχουμε πάντα το εξής.

Θεώρημα 6.1.6. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $M_q(K) \approx M_{-q}(K)$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant k(K)$.*

Πράγματι, από το Θεώρημα 6.1.1 έχουμε $M_q(K) \approx M(K)$ για κάθε $q \leqslant k(K)$ και από το Θεώρημα 6.1.5 παίρνουμε $M_{-q}(K) \approx M(K)$ για κάθε $q \leqslant k(K)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το συμπέρασμα.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, το κέντρο βάρους του είναι στην αρχή των αξόνων, και ο πίνακας αδρανείας του είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα: υπάρχει μια σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2 dx = L_K^2 \tag{6.1.1}$$

για κάθε ϑ στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Το ερώτημα να δοθεί άνω φράγμα για το μέσο πλάτος ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος

$$w(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta),$$

δηλαδή, την L_1-νόρμα της συνάρτησης στήριξης του K ως προς το μέτρο Haar στη σφαίρα, ήταν ανοικτό για αρκετά χρόνια. Τελικά, ο E. Milman απέδειξε στο [84] ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $q \geqslant 1$ ισχύει

$$w(Z_q(K)) \leqslant C\log(1+q)\max\left\{\frac{q\log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q}\right\} L_K$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $Z_q(K)$ είναι το L_q-κεντροειδές σώμα του K. Ειδικότερα, από την $Z_n(K) \approx \mathrm{conv}(K, -K)$ προκύπτει η ανισότητα

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n}(\log n)^2 L_K.$$

Η εξάρτηση από το n είναι βέλτιστη αν εξαιρέσουμε τον λογαριθμικό παράγοντα.

Το δυϊκό πρόβλημα, να δοθεί άνω φράγμα για την αντίστοιχη L_1-νόρμα του συναρτησοειδούς Minkowski του K,

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K \, d\sigma(\vartheta),$$

όταν το K είναι συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα, δεν είχε μελετηθεί μέχρι πρόσφατα. Κάποια άνω φράγματα δόθηκαν αρχικά στο [46]. Η καλύτερη γνωστή εκτίμηση

$$M(K) \leqslant \frac{C\log^{2/5}(e+n)}{\sqrt[10]{n}L_K}$$

οφείλεται στους Γιαννόπουλο και E. Milman (δείτε το [42]). Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε μια αναγωγή του προβλήματος, η οποία οδηγεί σε νέα, κατά την γνώμη μας ενδιαφέροντα, προβλήματα για την γεωμετρία των χαμηλότερης διάστασης τομών και προβολών των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων. Συζητάμε αυτά τα προβλήματα και δίνουμε κάποιες εκτιμήσεις.

6.2 Προσέγγιση μέσω της διαμέτρου των τομών

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ορίζουμε

$$w_k(K) = \sup\{\mathrm{vrad}(K\cap F) : F \in G_{n,k}\} \quad \text{και} \quad w_k^-(K) = \inf\{\mathrm{vrad}(K\cap F) : F\in G_{n,k}\}. \tag{6.2.1}$$

Ορίζουμε επίσης

$$r_k(K) = \sup\{t>0 : \nu_{n,k}(\{F\in G_{n,k} : R(K\cap F)\geqslant t\}) \geqslant e^{-k}\}. \tag{6.2.2}$$

Λήμμα 6.2.1. Η ακολουθία $\{r_k(K)\}_{k=1}^{n-1}$ είναι αύξουσα.

Απόδειξη. Αυτό φαίνεται αν για κάθε $1\leqslant k<m\leqslant n-1$ και $t>0$ γράψουμε

$$\begin{aligned}
&\nu_{n,k}(\{F\in G_{n,k} : R(K\cap F)>t\})\\
&= \int_{G_{n,k}} \mathbf{1}_{\{F\in G_{n,k}:R(K\cap F)>t\}}(F)\, d\nu_{n,k}(F)\\
&= \int_{G_{n,m}} \left(\int_{G_k(E)} \mathbf{1}_{\{F\in G_k(E):R(K\cap F)>t\}}(F)d\nu_{E,k}(F)\right) d\nu_{n,m}(E)\\
&\leqslant \int_{G_{n,m}} \mathbf{1}_{\{E\in G_{n,m}:R(K\cap E)>t\}}(E)\, d\nu_{n,m}(E)\\
&= \nu_{n,m}(\{E\in G_{n,m} : R(K\cap E)>t\}),
\end{aligned}$$

όπου $G_k(E)$ είναι η πολλαπλότητα των k-διάστατων υποχώρων του E και $\nu_{E,k}$ είναι το μέτρο πιθανότητας Haar στην $G_k(E)$. Η παραπάνω ανισότητα ισχύει για κάθε $E\in G_{n,m}$ διότι: αν $R(K\cap E)\leqslant t$ τότε $R(K\cap F)\leqslant t$ για κάθε $F\in G_k(E)$, ενώ αν $R(K\cap E)>t$ τότε

$$\int_{G_k(E)} \mathbf{1}_{\{F\in G_k(E):R(K\cap F)>t\}}(F)\, d\nu_{E,k}(F) \leqslant 1 = \mathbf{1}_{\{E:R(K\cap E)>t\}}(E).$$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι αν $\nu_{n,k}(\{F\in G_{n,k} : R(K\cap F)>t\})\geqslant e^{-k}$ τότε $\nu_{n,m}(\{E\in G_{n,m} : R(K\cap E)>t\})\geqslant e^{-k}\geqslant e^{-m}$, απ' όπου έπεται ότι $r_k(K)\leqslant r_m(K)$. □

Για κάθε $q\neq 0$ θεωρούμε τις παραμέτρους $M_q(K) = \left(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|^q\, d\sigma(\vartheta)\right)^{1/q}$ και

$$d(K) = \min\left\{-\log\sigma\left(\left\{x\in S^{n-1} : \|x\|\leqslant M(K)/2\right\}\right), n\right\}$$

που εισήχθησαν στην προηγούμενη παράγραφο. Έχουμε αναφέρει ότι

$$d(K)\geqslant c_1 k(K)\geqslant c_2 n(r(K)M(K))^2, \tag{6.2.3}$$

όπου $r(A)$ είναι η εγγεγραμμένη ακτίνα του A. Επίσης, υπάρχει $q_0(K)\geqslant cd(K)$, τον οποίο σταθεροποιούμε σε ό,τι ακολουθεί, τέτοιος ώστε

$$M_{-q}(K)\leqslant M(K)\leqslant c_3 M_{-q}(K) \tag{6.2.4}$$

για κάθε $0<q\leqslant 2q_0(K)$. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο θεώρημα των Klartag και Vershynin από το [63] (δείτε επίσης το [98]).

Θεώρημα 6.2.2 (Klartag-Vershynin). *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $q \geqslant k$ έχουμε*

$$\left(\int_{G_{n,k}} R(K\cap F)^{q/2}\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{2/q} \leqslant \left(1+\frac{ck}{q}\log\left(\frac{eq}{k}\right)\right)\frac{M(K)}{(M_{-2q}(K))^2}, \tag{6.2.5}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Μπορούμε τώρα να δώσουμε ένα γενικό άνω φράγμα για την παράμετρο $M(K)$.

Πρόταση 6.2.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $rB_2^n \subseteq K$ τότε*

$$M(K) \leqslant c\min\left\{\frac{1}{r}\sqrt{\frac{d(K)}{n}},\frac{1}{r_{q_0(K)}(K)}\right\},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού $K \supseteq rB_2^n$, από την (6.2.3) έχουμε ότι $d(K) \geqslant c_2 n r^2 M(K)^2$, άρα

$$M(K) \leqslant \frac{c_4}{r}\sqrt{\frac{d(K)}{n}}.$$

Έστω $k \leqslant 2q_0(K)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.2.2, τον ορισμό της παραμέτρου $r_k(K)$ και το γεγονός ότι $M(K) \leqslant c_2 M_{-2k}(K)$ από την (6.2.4), και εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov παίρνουμε

$$e^{-1}r_k(K) \leqslant \left(\int_{G_{n,k}} R(K\cap F)^k\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} \leqslant c_3^2 M(K)^{-1},$$

και αυτό μας δίνει το άνω φράγμα

$$M(K) \leqslant c_5\min\left\{\frac{1}{r_k(K)} : 1\leqslant k\leqslant q_0(K)\right\} = \frac{c_4}{r_{q_0(K)}(K)}, \tag{6.2.6}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιούμε το Λήμμα 6.2.1. □

Πρόταση 6.2.4. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$r_k(K) \geqslant \frac{c}{M(K)},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Aleksandrov έχουμε

$$\begin{aligned}\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K^\circ))^{-n}\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kn}} &\leqslant \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K^\circ)\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{k}}\\ &\leqslant \kappa_k^{1/k} w(K^\circ) \leqslant \frac{c_1 w(K^\circ)}{\sqrt{k}}.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Markov έπεται ότι ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-k}$ την

$$\mathrm{vrad}(P_F(K^\circ)) \leqslant c_2\sqrt{k}\mathrm{vol}_k(P_F(K^\circ))^{1/k} \leqslant c_2c_1ew(K^\circ) = c_3M(K).$$

Συνεπώς, από την ανισότητα Bourgain-Milman έχουμε ότι κάθε τέτοιος F ικανοποιεί την

$$\mathrm{vrad}(K\cap F) \geqslant c_4\mathrm{vrad}(P_F(K^\circ))^{-1} \geqslant c_5/M(K). \tag{6.2.7}$$

Αφού $1-e^{-k} \geqslant e^{-k}$, συμπεραίνουμε ότι $r_k(K) \geqslant c_5/M(K)$. □

Συνδυάζοντας την Πρόταση 6.2.4 με την Πρόταση 6.2.3 (ειδικότερα, από την (6.2.6)) παίρνουμε:

Θεώρημα 6.2.5. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει $q_0(K) \geqslant cd(K)$ τέτοιος ώστε*

$$M(K) \approx \frac{1}{r_k(K)} \approx \frac{1}{r_{q_0(K)}(K)}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant q_0(K)$. Επίσης, αν $rB_2^n \subseteq K$ έχουμε

$$d(K) \geqslant cn\left(\frac{r}{r_{q_0(K)}(K)}\right)^2.$$

Παρατήρηση 6.2.6. Έστω $1 \leqslant k \leqslant q_0(K)$. Από το Θεώρημα 6.2.2 έχουμε

$$\left(\int_{G_{n,k}} R(K\cap F)^k d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{c_1}{M(K)},$$

άρα, χρησιμοποιώντας και την (6.2.7), βλέπουμε ότι ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-k}$ την

$$R(K\cap F) \leqslant c_2\,\mathrm{vrad}(K\cap F) \leqslant c_3\sqrt{k}\,\mathrm{vol}_k(K\cap F)^{1/k}.$$

Στη συνέχεια, ένα γνωστό επιχείρημα (βλέπε [2]) μας δίνει

$$kL_{K\cap F}^2 \leqslant \frac{1}{\mathrm{vol}_k(K\cap F)^{1+\frac{2}{k}}}\int_{K\cap F}\|x\|_2^2dx \leqslant \frac{R^2(K\cap F)}{\mathrm{vol}_k(K\cap F)^{\frac{2}{k}}} \leqslant c_3^2k.$$

Έχουμε έτσι αποδείξει την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.2.7. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant c_1d(K)$ ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$L_{K\cap F} \leqslant c_2,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Ένα φυσιολογικό ερώτημα το οποίο προκύπτει από το Θεώρημα 6.2.5 είναι να δοθούν εκτιμήσεις για την παράμετρο $r_k(K)$ στην περίπτωση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων.

Ερώτημα 6.2.8. Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Να δοθούν κάτω φράγματα για την παράμετρο $r_k(K)$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Αν υποθέσουμε ότι το k είναι ανάλογο του n τότε μπορούμε να δώσουμε ένα πρώτο κάτω φράγμα χρησιμοποιώντας τα L_q-κεντροειδή σώματα του K. Υπενθυμίζουμε ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και αν $q \geqslant 1$ τότε το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$ του μ είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q}. \tag{6.2.8}$$

Παρατηρήστε ότι το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν έχει κέντρο βάρους το 0 και $Z_2(\mu) = B_2^n$. Από την ανισότητα Hölder έπεται ότι $Z_1(\mu) \subseteq Z_p(\mu) \subseteq Z_q(\mu)$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant q < \infty$. Αντίστροφα, αποδεικνύεται ότι

$$Z_q(\mu) \subseteq c_1 \frac{q}{p} Z_p(\mu) \tag{6.2.9}$$

για κάθε $1 \leqslant p < q$. Ειδικότερα, αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε $R(Z_q(\mu)) \leqslant c_2 q$. Λέμε ότι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$. Αν το μ είναι ισοτροπικό τότε έχουμε (βλέπε [2]) τις εκτιμήσεις όγκου

$$\mathrm{vol}_n(Z_q(\mu))^{1/n} \approx \sqrt{q/n}$$

αν $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$ και

$$c_6 L_\mu^{-1} \sqrt{q/n} \leqslant \mathrm{vol}_n(Z_q(\mu))^{1/n} \leqslant c_7 \sqrt{q/n}. \tag{6.2.10}$$

αν $\sqrt{n} \leqslant q \leqslant n$.

Πρόταση 6.2.9. *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$v_k(K) \leqslant \frac{cn}{\sqrt{k}}.$$

Επίσης, αν $\lambda \in (0,1)$ και $k \geqslant \lambda n$ τότε

$$w_k^-(K) \geqslant c(\lambda)\sqrt{k},$$

όπου $c(\lambda) = c^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}$ και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, $r_k(K) \geqslant c(\lambda)\sqrt{k}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το μέτρο μ_K με πυκνότητα $L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K}K}$. Τότε, το μ_k είναι ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο και $Z_q(K) = L_K Z_q(\mu_K)$ για κάθε $q \geqslant 1$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $F \in G_{n,k}$, χρησιμοποιώντας την ταυτότητα

$$P_F(Z_k(K)) = Z_k(\pi_F(\mu_K))$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_k(P_F(K))^{1/k} &\leqslant c_1 \,\mathrm{vol}_k(P_F(Z_n(K)))^{1/k} \leqslant \frac{c_2 n}{k}\mathrm{vol}_k(P_F(Z_k(K)))^{1/k}\\ &= \frac{c_2 n}{k}\mathrm{vol}_k(Z_k(\pi_F(\mu_K)))^{1/k} \leqslant \frac{c_3 n}{k},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει με εφαρμογή της (6.2.10) για το ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\pi_F(\mu_K)$ στον F. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$w_k(K) = \sup\{\mathrm{vrad}(P_F(K)) : F \in G_{n,k}\} \leqslant \frac{c_4 n}{\sqrt{k}}.$$

Παρατηρήστε ότι αυτή η εκτίμηση είναι ακριβής για κάθε k όπως φαίνεται από το παράδειγμα της $\overline{B_1^n}$, του ισοτροπικού πολλαπλάσιου της B_1^n. Τώρα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Rogers-Shephard βλέπουμε ότι

$$1 \leqslant \mathrm{vol}_k(K\cap F)^{\frac{1}{n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(P_{F^\perp}(K))^{\frac{1}{n-k}} \leqslant \mathrm{vol}_k(K\cap F)^{\frac{1}{n-k}} \frac{c_3 n}{n-k}$$

για κάθε $F \in G_{n,k}$. Από αυτήν συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{vrad}(K\cap F) \geqslant c_4\sqrt{k}\mathrm{vol}_k(K\cap F)^{1/k} \geqslant c_4\sqrt{k} c_3^{-\frac{n-k}{k}} \left(\frac{n-k}{n}\right)^{-\frac{n-k}{k}} \geqslant c_5^{\frac{n-k}{k}}\sqrt{k},$$

και έχουμε το συμπέρασμα. □

Αξίζει τον κόπο να παρατηρήσουμε ότι το παρεμφερές ερώτημα για την ποσότητα $w_k(K)$ είναι αρκετά απλούστερο.

Ερώτημα 6.2.10. Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Να δοθούν κάτω φράγματα για την παράμετρο $w_k(K)$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$.

Μπορούμε να δώσουμε μια σχεδόν βέλτιστη απάντηση για την παράμετρο $w_k(K)$, ακόμα και χωρίς να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό.

Πρόταση 6.2.11. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$w_k(K) \geqslant \frac{c\sqrt{n}}{\log n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε μια παρατήρηση των Δαφνή και Παούρη από το [32]. Όπως παρατήρησε ο Grinberg στο [48], η ποσότητα

$$T_k(K^\circ) := \mathrm{vol}_n(K^\circ)^{-1/n}\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K^\circ))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{n}}$$

ικανοποιεί την $T_k(S(K)^\circ) = T_k(K^\circ)$ για κάθε $S \in GL(n)$, και από τις ανισότητες του Aleksandrov έχουμε

$$\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K^\circ))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kn}} \leqslant \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F((S(K)^\circ))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{k}}$$
$$\leqslant \kappa_k^{1/k} w((SK)^\circ) \leqslant \frac{c_1 w((SK)^\circ)}{\sqrt{k}}$$

για κάθε $S \in SL(n)$. Από την MM^*-ανισότητα του Pisier, υπάρχει $S \in SL(n)$ τέτοιος ώστε

$$w((SK)^\circ) \leqslant c_2\sqrt{n}\log n\,\mathrm{vol}_n((SK)^\circ)^{1/n} \leqslant c_3\frac{\log n}{\sqrt{n}}$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_2, c_3 > 0$ (σε αυτό το σημείο παίρνουμε υπόψη μας και την ανισότητα Blaschke-Santaló). Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε $F_0 \in G_{n,k}$ τέτοιον ώστε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_k(P_{F_0}(K^\circ))^{1/k} &= \min\{\mathrm{vol}_k(P_F(K^\circ))^{1/k} : F \in G_{n,k}\}\\ &\leqslant \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K^\circ))^{-n}\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kn}}\\ &\leqslant c_3\frac{\log n}{\sqrt{kn}}.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Bourgain-Milman παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_k(K\cap F_0)^{1/k} \geqslant \frac{c_4}{k}\mathrm{vol}_k(P_{F_0}(K^\circ))^{-\frac{1}{k}} \geqslant \frac{c_4\sqrt{n}}{\sqrt{k}\log n}.$$

Άρα, $\mathrm{vrad}(K\cap F_0) = \kappa_k^{-\frac{1}{k}}\mathrm{vol}_k(K\cap F_0)^{1/k} \geqslant c_5\sqrt{n}/\log n.$ □

Παρατήρηση 6.2.12. Όπως έχουμε αναφέρει, είναι ανοικτό πρόβλημα εάν $T_k(K) \leqslant c\sqrt{n/k}$ για όλα τα συμμετρικά κυρτά σώματα K στον $\mathbb{R}^n$ και όλους τους $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη απόδειξη δείχνει ότι $T_k(K) \leqslant c\sqrt{n/k}\log n$. Αν η απάντηση σε αυτό το ερώτημα είναι καταφατική τότε η εκτίμηση στην Πρόταση 6.2.11 ισχυροποιείται και έχουμε $w_k(K) \geqslant c\sqrt{n}$. Αυτό το κάτω φράγμα είναι ασφαλώς βέλτιστο, κάτι που μπορούμε να δούμε από το παράδειγμα της Ευκλείδειας μπάλας όγκου 1.

Παρατήρηση 6.2.13. Ας υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Τότε γνωρίζουμε (βλέπε [2]) ότι, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,k}$,

$$\mathrm{vol}_k(K\cap F)^{\frac{1}{n-k}} \approx \frac{L_{\pi_{F^\perp}(\mu_K)}}{L_K},$$

όπου μ_K είναι το ομοιόμορφο μέτρο στο K και $\pi_{F^\perp}(\mu_K)$ είναι το περιθώριο μέτρο του μ_K στον $F^\perp$. Από την Πρόταση 6.2.11 βλέπουμε ότι υπάρχει $F_0 \in G_{n,k}$ τέτοιος ώστε

$$\left(\frac{c_1\sqrt{n}}{\sqrt{k}\log n}\right)^{\frac{k}{n-k}} \leqslant \mathrm{vol}_k(K\cap F_0)^{\frac{1}{n-k}},$$

άρα

$$L_K \leqslant (c_2\log n)^{\frac{k}{n-k}}\left(\frac{k}{n}\right)^{\frac{k}{2(n-k)}} L_{\pi_{F_0^\perp}(\mu_K)} \leqslant (c_3\log n)^{\frac{k}{n-k}} L_{\pi_{F_0^\perp}(\mu_K)},$$

διότι $\left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{k}{n-k}} = \left(1+\frac{n-k}{k}\right)^{\frac{k}{n-k}} \approx 1$. Έτσι, παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 6.2.14. *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ υπάρχει $F \in G_{n,k}$ τέτοιος ώστε $L_K \leqslant (c\log n)^{\frac{k}{n-k}} L_{\pi_{F^\perp}(\mu_K)}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, για κάθε $k \leqslant n/\log n$ μπορούμε να βρούμε $F \in G_{n,k}$ τέτοιον ώστε $L_{\pi_{F^\perp}(\mu_K)} \geqslant cL_K$.*

6.3 Προσέγγιση μέσω των προβολών

Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ορίζουμε

$$v_k^-(K) = \inf\{\mathrm{vrad}(P_F(K)) : F \in G_{n,k}\}.$$

Ερώτημα 6.3.1. Να δοθεί κάτω φράγμα για την παράμετρο $v_k^-(K)$. Για ποια σώματα ισχύει ότι $v_k^-(K) \geqslant c\sqrt{n}L_K$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$;

Το ερώτημα αυτό συνδέεται με το πρόβλημά μας όπως φαίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.3.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $\mathrm{vrad}(P_F(K)) \geqslant c\sqrt{n}L_K$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,k}$ τότε*

$$M(K) \leqslant \frac{c(\log n)^b}{\sqrt[4]{n}L_K}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ορίζουμε

$$v_k^-(K) = \inf\{\mathrm{vrad}(P_F(K)) : F \in G_{n,k}\}.$$

Στο [42] αποδεικνύεται ότι αν $rB_2^n \subseteq K$ τότε

$$\sqrt{n}M(K) \leqslant C\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\min\left(\frac{1}{r}, \frac{n}{k}\log\left(e+\frac{n}{k}\right)\frac{1}{v_k^-(K)}\right).$$

Αφού $K \supseteq L_K B_2^n$ και $v_k^-(K) \geqslant c\sqrt{n}L_K$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ (από την υπόθεσή μας) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{n}M(K) &\leqslant \frac{C_1}{L_K}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\min\left(1, \frac{n}{k}\log\left(e+\frac{n}{k}\right)\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\\ &\preceq \frac{1}{L_K}\left(\sum_{k=1}^{\lfloor\sqrt{n}\rfloor}\frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=\lceil\sqrt{n}\rceil}^{n}\frac{\sqrt{n}}{k^{3/2}}\right) \leqslant \frac{C_2\sqrt[4]{n}}{L_K}\end{aligned}$$

διότι $\sum\limits_{k\leqslant\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{k}} \approx \sqrt[4]{n}$ και $\sum\limits_{\sqrt{n}\leqslant k\leqslant n}\frac{1}{k^{3/2}} \approx \frac{1}{\sqrt[4]{n}}$. □

Η συνθήκη $\mathrm{vrad}(P_F(K)) \geqslant c\sqrt{n}L_K$ ικανοποιείται (αν εξαιρέσουμε τον όρο L_K) με πιθανότητα πολύ κοντά στο 1 στην $G_{n,k}$:

Πρόταση 6.3.3. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $t > 1$,*

$$\nu_{n,k}(\{F \in G_{n,k} : \mathrm{vrad}(P_F(K)) \geqslant ct^{-1}\sqrt{n}\}) \geqslant 1 - t^{-kn},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Οι Παούρης και Pivovarov έχουν αποδείξει στο [95] ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$\left(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{kn}} \leqslant c_1\sqrt{k/n},$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\nu_{n,k}(\{F \in G_{n,k} : \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-1/k} \geqslant c_1 t\sqrt{k/n}\} \leqslant t^{-kn}$$

για κάθε $t > 1$, άρα

$$\mathrm{vrad}(P_F(K)) = \left(\frac{\mathrm{vol}_k(P_F(K))}{\kappa_k}\right)^{1/k} \geqslant \frac{1}{c_1 t}\kappa_k^{-1/k}\sqrt{n/k} \geqslant \frac{c_2}{t}\sqrt{n}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - t^{-kn}$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Μια δεύτερη εκτίμηση του ίδιου τύπου, η οποία είναι μάλιστα καλύτερη όταν το k είναι ανάλογο του n, δίνεται από την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 6.3.4. *Έστω K ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$\mathrm{vrad}(P_F(K)) \geqslant c\sqrt{k}L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-(n-k)n}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε το ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ_K με πυκνότητα $L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K}K}$ και για κάθε $1 \leqslant m \leqslant n-1$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\left(\int_{G_{n,m}} L_{\pi_F(\mu_K)}^{mn} d\nu_{n,m}(F)\right)^{\frac{1}{mn}} &\leqslant c_1 \left(\int_{G_{n,m}} f_{\pi_F(\mu_K)}(0)^{mn} d\nu_{n,m}(F)\right)^{\frac{1}{mn}} \\
&\leqslant c_2 \left(\int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(Z_m(\pi_F(\mu_K)))^{-mn} d\nu_{n,m}(F)\right)^{\frac{1}{mn}} \\
&\leqslant c_3 \left(\int_{G_{n,m}} \mathrm{vol}_m(P_F(Z_m(\mu_K)))^{-mn} d\nu_{n,m}(F)\right)^{\frac{1}{mn}} \\
&= \frac{c_3}{\mathrm{vol}_n(Z_m(\mu_K))^{1/n}} \, \frac{1}{T_m(Z_m(\mu_K))} \leqslant \frac{c_3}{\mathrm{vol}_n(Z_m(\mu_K))^{1/n}} \sqrt{\frac{m}{n}} \leqslant c_4
\end{aligned}$$

διότι $\mathrm{vol}_n(Z_m(\mu_K))^{1/n} \geqslant c\sqrt{m/n}$ αν $1 \leqslant m \leqslant \sqrt{n}$. Αυτό δείχνει ότι $L_{\pi_F(\mu_K)} \leqslant C_1$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-mn}$ στην $G_{n,m}$.

Θεωρούμε τώρα $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και συνδυάζοντας την προηγούμενη εκτίμηση με την ανισότητα Rogers-Shephard γράφουμε

$$\begin{aligned}
1 &\leqslant \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{1/k}\mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F^{\perp})^{1/k} \leqslant \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{1/k} \cdot \frac{c_4 L_{\pi_{F^{\perp}}(\mu_K)}}{L_K} \\
&\leqslant \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{1/k} \cdot \frac{C_2}{L_K}
\end{aligned}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\mathrm{vrad}(P_F(K)) \geqslant c_5\sqrt{k}\mathrm{vol}_k(P_F(K))^{1/k} \geqslant c_6\sqrt{k}L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-(n-k)n}$. □

Η επόμενη πρόταση δίνει μια πρώτη απάντηση στο Ερώτημα 6.3.1.

Πρόταση 6.3.5. *Έστω K ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $F \in G_{n,k}$ έχουμε*

$$R(P_F(K)) \geqslant \sqrt{k} L_K \quad \textit{και} \quad \mathrm{vrad}(P_F(K)) \geqslant c\sqrt[4]{k} L_K.$$

Ειδικότερα, $v_k^-(K) \geqslant c\sqrt[4]{k} L_K$.

Απόδειξη. Έστω $F \in G_{n,k}$ και $R = R(P_F(K))$. Αφού το K είναι ισοτροπικό, έχουμε

$$nL_K^2 = \int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \|P_F(x)\|_2^2 dx + \int_K \|P_{F^\perp}(x)\|_2^2 dx \leqslant R^2 + (n-k)L_K^2,$$

το οποίο δείχνει ότι $kL_K^2 \leqslant R^2$, άρα

$$R(P_F(K)) \geqslant \sqrt{k} L_K.$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε την ανισότητα Rogers-Shephard: έχουμε

$$\mathrm{vol}_k(P_F(K))^{1/k} \cdot \mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F^\perp)^{1/k} \geqslant 1$$

και

$$\mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F^\perp)^{1/k} \approx \frac{L_{\pi_F \mu_L}}{L_K} \leqslant \frac{c_1\sqrt[4]{k}}{L_K}.$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{vrad}(P_F(K)) = \kappa_k^{-1/k} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{1/k} \geqslant c_2\sqrt{k} \cdot \frac{c_3 L_K}{\sqrt[4]{k}} = c_4\sqrt[4]{k} L_K.$$

$\square$

Βιβλιογραφία

[L-1] G. Chasapis, A. Giannopoulos and D-M. Liakopoulos, *Estimates for measures of lower dimensional sections of convex bodies*, Advances in Mathematics **306** (2017), 880–904.

[L-2] S. Brazitikos, A. Giannopoulos and D-M. Liakopoulos, *Uniform cover inequalities for the volume of coordinate sections and projections of convex bodies*, Advances in Geometry **18** (2018), 345–354.

[L-3] D-M. Liakopoulos, *Reverse Brascamp-Lieb inequality and the dual Bollobás-Thomason inequality*, Archive der Mathematik (Basel) **112** (2019), no. 3, 293–304.

[L-4] G. Chasapis and D-M. Liakopoulos, *Extensions of Grinberg's inequality and of its functional form*, Preprint.

Βιβλία

[1] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs **202** (2015).

[2] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Amer. Math. Society, Mathematical Surveys and Monographs **196** (2014).

[3] Y. D. Burago and V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York (1988).

[4] R. Gardner, *Geometric Tomography*, *Second Edition*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **58**, Cambridge University Press, 2006.

[5] A. Koldobsky, *Fourier analysis in convex geometry*, Mathematical Surveys and Monographs **116**, Amer. Math. Society (2005).

[6] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[7] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[8] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[9] R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and integral geometry*, Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin (2008).

Άρθρα

[10] D. Alonso–Gutiérrez, S. Artstein–Avidan, B. González Merino, C. H. Jiménez and R. Villa, *Rogers–Shephard and local Loomis–Whitney type inequalities*, Mathematische Annalen (to appear).

[11] S. Artstein-Avidan, D. Florentin and Y. Ostrover, *Remarks about Mixed Discriminants and Volumes*, Communications in Contemporary Mathematics **16** (2014), no. 2, 1350031.

[12] S. Artstein, V. Milman and S. Szarek, *Duality of metric entropy*, Annals of Math. **159** (2004), 1313–1328.

[13] K. M. Ball, *Shadows of convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), 891–901.

[14] K. M. Ball, *Convex geometry and functional analysis*, Handbook of the geometry of Banach spaces (Johnson-Lindenstrauss eds), Vol. I, North-Holland, Amsterdam, (2001), 161–194.

[15] I. Bárány and Z. Füredi, *Approximation of the sphere by polytopes having few vertices*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 651–659.

[16] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. Math. **134** (1998), 335–361.

[17] F. Barthe, *A continuous version of the Brascamp-Lieb inequalities*, Geometric aspects of functional analysis, 53–63, Lecture Notes in Math., **1850**, Springer, Berlin, 2004.

[18] F. Barthe and D. Cordero-Erausquin, *Invariance in variance estimates*, Proc. London Math. Soc. **106** (2013), 33–64.

[19] L. Berwald, *Verallgemeinerung eines Mittelswertsatzes von J. Favard, für positive konkave Functionen*, Acta Math. **79** (1947), 17–37.

[20] U. Betke and W. Weil, *Isoperimetric inequalities for the mixed area of plane convex sets*, Arch. Math. (Basel) **57** (1991), no. 5, 501–507.

[21] S. G. Bobkov, B. Klartag and A. Koldobsky *Estimates for moments of general measures on convex bodies* Proc. Amer. Math. Soc. **146** (2018), no. 11, 4879–4888.

[22] B. Bollobás and A. Thomason, *Projections of bodies and hereditary properties of hypergraphs*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 417–424.

[23] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. **12** (1974), 239–252.

[24] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1469** (1991), 127–137.

[25] H. J. Brascamp, E. H. Lieb and J. M. Luttinger, *A general rearrangement inequality for multiple integrals*, J. Funct. Anal. 17 (1974) 227–237.

[26] H. Busemann and E. G. Straus, *Area and Normality*, Pacific J. Math. **10** (1960), 35–72.

[27] S. Campi and P. Gronchi, *Estimates of Loomis–Whitney type for intrinsic volumes*, Adv. in Appl. Math. **47** (2011), 545–561.

[28] S. Campi, R. J. Gardner and P. Gronchi, *Reverse and dual Loomis–Whitney–type inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **368** (2016), 5093–5124.

[29] M. Christ, *Estimates for the k-plane transform*, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984) 891–910.

[30] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi, G. Paouris and P. Pivovarov, *Shadow systems and the volume of the polar of random sets*, Math. Ann. 362 (2015), 1305–1325.

[31] N. Dafnis and G. Paouris, *Small ball probability estimates, ψ_2-behavior and the hyperplane conjecture*, J. Funct. Anal. **258** (2010), 1933–1964.

[32] N. Dafnis and G. Paouris, *Estimates for the affine and dual affine quermassintegrals of convex bodies*, Illinois J. of Math. **56** (2012), 1005–1021.

[33] S. Dann, G. Paouris and P. Pivovarov, *Bounding marginal densities via affine isoperimetry*, Proc. Lond. Math. Soc. (3) **113** (2016), no. 2, 140–162.

[34] A. Dembo, T. Cover and J. Thomas, *Information-theoretic inequalities*, IEEE Trans. Inform. Theory **37** (1991), 1501–1518.

[35] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155–171.

[36] S. R. Finch, *Mathematical constants*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **94**, Cambridge University Press, Cambridge (2003).

[37] H. Finner, *A generalization of Hölder's inequality and some probability inequalities*, Ann. Probab. **20** (1992), no. 4, 1893–1901.

[38] M. Fradelizi, A. Giannopoulos and M. Meyer, *Some inequalities about mixed volumes*, Israel J. Math. **135** (2003), 157–179.

[39] R. J. Gardner, *The dual Brunn-Minkowski theory for bounded Borel sets: dual affine quermassintegrals and inequalities*, Adv. Math. **216** (2007), 358–386.

[40] A. Giannopoulos and A. Koldobsky, *Volume difference inequalities*, Trans. Amer. Math. Soc. **370** (2018), no. 6, 4351–4372.

[41] A. Giannopoulos and A. Koldobsky, *Private communication.*

[42] A. Giannopoulos and E. Milman, *M-estimates for isotropic convex bodies and their L_q-centroid bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2116** (2014), 159–182.

[43] A. Giannopoulos, M. Hartzoulaki and G. Paouris, *On a local version of the Aleksandrov-Fenchel inequality for the quermassintegrals of a convex body*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2403–2412.

[44] A. Giannopoulos, A. Koldobsky and P. Valettas, *Inequalities for the surface area of projections of convex bodies*, Canad. J. Math. **70** (2018), no. 4, 804–823.

[45] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the distribution of the ψ_2-norm of linear functionals on isotropic convex bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2050** (2012), 227–254.

[46] A. Giannopoulos, P. Stavrakakis, A. Tsolomitis and B-H. Vritsiou, *Geometry of the L_q-centroid bodies of an isotropic log-concave measure*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), no. 7, 4569–4593.

[47] Y. Gordon, *On Milman's inequality and random subspaces which escape through a mesh in $\mathbb{R}^n$*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 84–106.

[48] E. L. Grinberg, *Isoperimetric inequalities and identities for k-dimensional cross-sections of convex bodies*, Math. Ann. **291** (1991), 75–86.

[49] H. Groemer, *On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set.* Arch. Math. (Basel) 25 (1974), 86–90.

[50] H. Groemer, *On the average size of polytopes in a convex set*, Geom. Dedicata 13 (1982), 47–62.

[51] M. Hartzoulaki, *Probabilistic methods in the theory of convex bodies*, Ph.D. Thesis (March 2003), University of Crete.

[52] D. Hug and R. Schneider, *Reverse inequalities for zonoids and their application*, Adv. Math. **228** (2011), no. 5, 2634–2646.

[53] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187–204.

[54] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541–559.

[55] B. S. Kashin, *Sections of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 334–351.

[56] B. Klartag, *A geometric inequality and a low M-estimate*, Proc. Amer. Math. Soc. **132** (2004), 2619–2628.

[57] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1274–1290.

[58] B. Klartag, *Uniform almost sub-Gaussian estimates for linear functionals on convex sets*, Algebra i Analiz **19** (2007), 109–148.

[59] B. Klartag and A. Koldobsky, *An example related to the slicing inequality for general measures*, J. Funct. Anal. **274** (2018), no. 7, 2089–2112.

[60] B. Klartag and G. Livshyts, *The lower bound for Koldobsky's slicing inequality via random rounding*, Preprint.

[61] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform – A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10–34.

[62] B. Klartag and E. Milman, *Inner regularization of log-concave measures and small-ball estimates*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis (Klartag-Mendelson-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **2050** (2012), 267–278.

[63] B. Klartag and R. Vershynin, *Small ball probability and Dvoretzky theorem*, Israel J. Math. **157** (2007), 193–207.

[64] A. Koldobsky, *A hyperplane inequality for measures of convex bodies in $\mathbb{R}^n$, $n \leqslant 4$*, Discrete Comput. Geom. **47** (2012), 538–547.

[65] A. Koldobsky, *A $\sqrt{n}$ estimate for measures of hyperplane sections of convex bodies*, Adv. Math. **254** (2014), 33–40.

[66] A. Koldobsky, *Estimates for measures of sections of convex bodies*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2116** (2014), 261–271.

[67] A. Koldobsky, *Slicing inequalities for measures of convex bodies*, Adv. Math. **283** (2015), 473–488.

[68] A. Koldobsky, *Isomorphic Busemann-Petty problem for sections of proportional dimensions*, Adv. in Appl. Math. **71** (2015), 138–145.

[69] A. Koldobsky and M. Lifshits, *Average volume of sections of star bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **1745** (2000), 119–146.

[70] A. Koldobsky and D. Ma, *Stability and slicing inequalities for intersection bodies*, Geom. Dedicata **162** (2013), 325–335.

[71] A. Koldobsky, G. Paouris and M. Zymonopoulou, *Isomorphic properties of intersection bodies*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 2697–2716.

[72] A. Koldobsky and A. Zvavitch, *An isomorphic version of the Busemann-Petty problem for arbitrary measures*, Geom. Dedicata **174** (2015), 261–277.

[73] G. Leng and L. Zhang, *Extreme properties of quermassintegrals of convex bodies*, Science in China **44** (2001), 837–845.

[74] D. R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18–29.

[75] A-J. Li and Q. Huang, *The dual Loomis-Whitney inequality*, Bull. London Math. Soc. **48** (2016), 676–690.

[76] A. Litvak, V. D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95–124.

[77] G. Livshyts, G. Paouris and P. Pivovarov, *Sharp bounds for marginal densities of product measures*, Israel J. Math. 216 (2016), 877–889.

[78] L. H. Loomis and H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 961–962.

[79] E. Lutwak, *Dual mixed volumes*, Pacific J. Math. **58** (1975), 531–538.

[80] E. Lutwak, *A general isepiphanic inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 415–421.

[81] E. Lutwak, *Intersection bodies and dual mixed volumes*, Adv. Math. **71** (1988), 232–261.

[82] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *Volume inequalities for subspaces of L_p*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111–132.

[83] M. Meyer, *A volume inequality concerning sections of convex sets*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), 151–155.

[84] E. Milman, *On the mean width of isotropic convex bodies and their associated L_p-centroid bodies*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 11, 3408–3423.

[85] V. D. Milman, *Geometrical inequalities and mixed volumes in the Local Theory of Banach spaces*, Astérisque **131** (1985), 373–400.

[86] V. D. Milman, *Random subspaces of proportional dimension of finite dimensional normed spaces: approach through the isoperimetric inequality*, Lecture Notes in Mathematics **1166** (1985), 106–115.

[87] V. D. Milman, *Isomorphic symmetrization and geometric inequalities*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 107–131.

[88] V.D. Milman, *A note on a low M^*-estimate*, in "Geometry of Banach spaces, Proceedings of a conference held in Strobl, Austria, 1989" (P.F. Muller and W. Schachermayer, Eds.), LMS Lecture Note Series, Vol. 158, Cambridge University Press (1990), 219–229.

[89] V. D. Milman, *Some applications of duality relations*, Lecture Notes in Mathematics **1469** (1991), 13–40.

[90] V. D. Milman and G. Schechtman, *Global versus Local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces*, Duke Math. Journal **90** (1997), 73–93.

[91] A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Subspaces of small codimension of finite dimensional Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 637–642.

[92] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1021–1049.

[93] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287–308.

[94] G. Paouris and P. Pivovarov, *A probabilistic take on isoperimetric-type inequalities*, Adv. Math. **230** (2012), 1402–1422.

[95] G. Paouris and P. Pivovarov, *Small-ball probabilities for the volume of random convex sets*, Discrete Comput. Geom. **49** (2013), 601–646.

[96] G. Paouris and P. Pivovarov, *Random ball-polyhedra and inequalities for intrinsic volumes*, Monatsc. Math. 182 (2017), 709–729.

[97] G. Paouris and P. Pivovarov, *Randomised isoperimetric inequalities*, Convexity and Concentration (E. Carlen, M. Madiman, E. Werner, Eds.), The IMA Volumes in Mathematics and its Applications 161 (2017) pp. 391–425.

[98] G. Paouris and P. Valettas, *Variance estimates and almost Euclidean structure*, Advances in Geometry **19** (2019), 165–189.

[99] R. E. Pfiefer, *Maximum and minimum sets for some geometric mean values*, J. Theoret. Probab. **3** (1990), no. 2, 169–179.

[100] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Annals of Math. **115** (1982), 375–392.

[101] G. Pisier, *A new approach to several results of V. Milman*, J. Reine Angew. Math. **393** (1989), 115–131.

[102] P. Pivovarov, *On the volume of caps and bounding the mean-width of an isotropic convex body*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **149** (2010), 317–331.

[103] P. Pivovarov, *On determinants and the volume of random polytopes in isotropic convex bodies*, Geom. Dedicata 149 (2010), 45–58.

[104] C. A. Rogers, *A single integral inequality*, J. London Math. Soc. 32 (1957) 102–108.

[105] Ch. Saroglou, I. Soprunov and A. Zvavitch, *Characterization of simplices via the Bezout inequality for mixed volumes*, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 12, 5333–5340.

[106] I. Soprunov and A. Zvavitch, *Bezout inequality for mixed volumes*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. 23, 7230–7252.

[107] G. Zhang, *Sections of convex bodies*, Amer. J. Math. **118** (1996), 319–340.

[108] A. Zvavitch, *The Busemann-Petty problem for arbitrary measures*, Math. Ann. **331** (2005), 867–887.

Abstract

Using geometric and analytic methods we prove functional inequalities with applications to convex and stochastic geometry.

Inequalities for the volume of sections and projections of convex bodies. We prove restricted versions of the Loomis-Whitney inequality and of the uniform cover inequality of Bollobás and Thomason. We generalize these results in the context of mixed volumes and provide applications to related conjectures of Hug-Schneider and Soprunov-Zvavitch. Starting from the dual Loomis-Whitney inequality of Meyer we study the dual problem for sections and, using the theory of L_p-centroid bodies, we prove the corresponding restricted versions of Meyer's inequality. We discuss the relation of the multidimensional generalization of the geometric Brascamp-Lieb inequality and of the multidimensional reverse Brascamp-Lieb inequality, due to Barthe, with the Loomis-Whitney inequality, the uniform cover inequality of Bollobás-Thomason and several of their generalizations. We show that all these inequalities can be obtained as consequences of the multidimensional Brascamp-Lieb inequality. Starting from this point of view and now using Barthe's multidimensional Brascamp-Lieb inequality, we prove a new sharp inequality, the dual Bollobás-Thomason inequality. This result is a consequence of a new functional inequality for log-concave functions.

Functional and stochastic versions of isoperimetric inequalities. We present functional and stochastic versions of some isoperimetric inequalities for convex bodies. We concentrate on the approach of Paouris and Pivovarov, who used rearrangement inequalities and integral geometric formulas in order to extend to the more general context of continuous distributions a number of classical results such as Busemann's random simplex inequality, the Busemann-Straus/Grinberg inequality, the Blaschke-Santaló inequality, inequalities for the volume of centroid bodies etc. The basic tools in this approach are the Rogers/Brascamp-Lieb-Luttinger inequality (and subsequent work of Christ) and Blaschke-Petkantschin type formulas from integral geometry. We provide an extension of the Busemann-Straus/Grinberg inequality for the volume of sections of bounded Borel sets. We also show that in the case of a convex body one can have reverse inequalities. Assuming that K is a symmetric convex body in $\mathbb{R}^n$ we show that a duality argument, based on the Blaschke-Santaló inequality and the Bourgain-Milman inequality, leads to the corresponding inequality for the volume of projevtions of K. We also provide a direct proof which avoids the symmetry assumption. We also prove general functional inequalities that imply, as special cases, the functional versions of the geometric inequalities above.

Estimates for the measure of sections of convex bodies. We discuss generalizations of the slicing problem and the Busemann-Petty, both in the classical context and in the more general context where volume is replaced by an arbitrary measure. This general study was initiated by Koldobsky for the slicing problem and by Zvavitch for the Busemann-Petty problem. Our approach is different and is based on Blaschke-Petkantschin type formulas and asymptotic estimates for the dual affine quermassintegrals. Our method often allows us to remove the symmetry and convexity assumptions on the bodies as well as the assumptions on the continuity of the densities of the measures involved.

Remarks on the M-estimate for isotropic convex bodies. A convex body K in $\mathbb{R}^n$ is called isotropic

if it has volume $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, its center of mass is at the origin, and its matrix of inertia is a multiple of the identity: there exists a constant $L_K > 0$ such that

$$\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2 dx = L_K^2$$

for all ϑ in the Euclidean unit sphere S^{n-1}. The question to give an upper bound for the mean width $w(K)$ of an isotropic convex body was open for a number of years and was finally answered by E. Milman who showed that for any isotropic convex body K in $\mathbb{R}^n$ one has $w(K) \leqslant C\sqrt{n}(\log n)^2 L_K$. The dependence on n is optimal if we ignore the logarithmic term. The dual problem, to give an upper bound for the L_1-norm of the Minkowski functional of K,

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} \|x\|_K \, d\sigma(x),$$

when K is a symmetric isotropic convex body, is open: the best known upper bound is due to Giannopoulos and E. Milman. We discuss a reduction of the problem that leads to new, interesting in our opinion, questions on the geometry of lower dimensional sections and projections of isotropic convex convex bodies. We discuss these questions and provide some first estimates.