Πολλαπλασιαστές Fourier
και
Θεωρία Littlewood–Paley

Διπλωματική Εργασία

Βασιλική Μπαλίδου

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2021

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Το κεντρικό θέμα της εργασίας είναι η μελέτη των ιδιοτήτων ορθογωνιότητας του μετασχηματισμού Fourier στους χώρους L^p. Η βασική ιδέα πίσω από τη μελέτη την ορθογωνιότητας είναι η ανάλυση μιας συνάρτησης f σε άθροισμα των διαφορετικών «συχνοτήτων» $\Delta_i f$ που την αποτελούν. Οι συχνότητες $\Delta_j f$ μεγέθους $\sim 2^j$ ορίζονται μέσω του μετασχηματισμού Fourier ως

$$\Delta_j f(x) = \int_{2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i \xi \cdot x} d\xi.$$

Οι Δ_j ονομάζονται τελεστές Littlewood-Paley. Για αρκετά διαφορετικά j και k οι $\Delta_j f(x)$ και $\Delta_k f(x)$ ταλαντώνονται σε σημαντικά διαφορετικές συχνότητες. Αυτό έχει σαν αποτέλεσμα οι συνεισφορές των όρων $\Delta_i f(x)$ στο άθροισμα να αλληλοαναιρούνται με περίπου τυχαίο τρόπο.

Για ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $(\varepsilon_k)_k$ που παίρνουν τις τιμές $\{+1, -1\}$ με ίση πιθανότητα, έχουμε $\mathbb{E}(\varepsilon_k) = 0$, $\mathrm{Var}(\varepsilon_k) = 1$ και είναι εύκολο να δούμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\left(\sum_j a_k \varepsilon_k\right)^2\right) = \sum_j a_k^2.$$

Με βάση αυτή την ιδέα και την προηγούμενη παρατήρηση αναμένουμε η $|f|$ να συμπεριφέρεται σαν το $\left(\sum_j |\Delta_j f|^2\right)^{\frac{1}{2}}$.

Το αποτέλεσμα που συνδέει τις συναρτήσεις $\Delta_j f$ και f είναι το ακόλουθο:

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \sim \left\| \left(\sum_j \|\Delta_j f\|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

και οφείλεται στους Littlewood και Paley. Το αποτέλεσμα είναι προφανές για $p = 2$ από το θεώρημα Plancherel, επομένως η θεωρία των Littlewood-Paley μας δίνει τη δυνατότητα να εκφράσουμε την ορθογωνιότητα του μετασχηματισμού Fourier σε χώρους L^p πέρα από τον L^2 μέσω των τελεστών Δ_j. Οι Littlewood και Paley ανέπτυξαν τη θεωρία στη μονοδιάστατη περίπτωση, χρησιμοποιώντας κυρίως μεθόδους Μιγαδικής Ανάλυσης. Στις μεγαλύτερες διαστάσεις, που θα είναι το θέμα της εργασίας μας, η θεωρία αναπτύχθηκε αργότερα, με μεθόδους Πραγματικής Ανάλυσης (θεωρία Calderon-Zygmund).

Ένας ισοδύναμος ορισμός για τους τελεστές Δ_j είναι ο $\Delta_j(f) = f * \mathbb{1}_{I_j}^{\vee}$, όπου $^{\vee}$ ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier και $I_j = \{x \in \mathbb{R}^n : 2^j \leq |x| < 2^{j+1}\}$. Πράγματι,

$$\Delta_j(f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{I_j}(\xi)e^{2\pi i\xi\cdot x}d\xi = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_j}\right)^{\vee}(x) = f * \mathbb{1}_{I_j}^{\vee}(x).$$

Καθώς οι συναρτήσεις $\Delta_j f$ δεν είναι λείες, είναι ενδιαφέρουσα η μελέτη του θεωρήματος Littlewood-Paley για μια παραλλαγή τους, όπου $\Delta_j = f * \Psi_{2^{-j}}$ και $\Psi_{2^{-j}}(x) = 2^{nj}\Psi(2^i x)$, $x \in \mathbb{R}^n$ για συναρτήσεις Ψ με επιθυμητές ιδιότητες. Συνήθως απαιτούμε η Ψ να είναι λεία και να έχει μετασχηματισμό Fourier με συμπαγή φορέα ώστε οι $\Delta_j f$ να είναι λείες συναρτήσεις.

Η θεωρία των Littlewood-Paley έχει σημαντικές εφαρμογές στη θεωρία των πολλαπλασιαστών Fourier, η οποία αποτελεί το δευτερεύον θέμα της εργασίας. Αφού παρουσιάσουμε τα βασικά στοιχεία της, θα αναλύσουμε κάποια αποτελέσματα που δίνουν ικανές συνθήκες ώστε συναρτήσεις με συνεχείς παραγώγους κάθε τάξης να είναι πολλαπλασιαστές Fourier.

Στη συνέχεια περιγράφουμε εν συντομία το περιεχόμενο κάθε κεφαλαίου της εργασίας.

Κεφάλαιο 2. Η εργασία ξεκινάει με την εισαγωγή εννοιών που είναι χρήσιμες για την παρακάτω μελέτη. Ορίζουμε ως συναρτήσεις Schwartz τις συναρτήσεις εκείνες των οποίων οι παράγωγοι μειώνονται «γρήγορα», δηλαδή φράσσονται από κάθε συνάρτηση της μορφής $(1 + |x|)^{-N}$. Οι συναρτήσεις αυτές είναι χρήσιμες για τη μελέτη μας καθώς αποτελούν χώρο αυτομορφισμών των συντελεστών Fourier. Από δυϊκότητα αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε το μετασχηματισμό Fourier στον δυϊκό χώρο των συναρτήσεων Schwartz, τον χώρο των tempered κατανομών. Άλλες σημαντικές ιδιότητες των συναρτήσεων αυτών που θα χρησιμοποιήσουμε για την απόδειξη των θεωρημάτων Littlewood-Paley είναι πως η L^p-σύγκλιση έπεται από την σύγκλιση κατά Schwartz και πως ο χώρος των συναρτήσεων Schwartz είναι πυκνός στον L^p για $1 \leq p < \infty$. Στη συνέχεια του κεφαλαίου παρουσιάζουμε βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier για συναρτήσεις Schwartz καθώς και σχέσεις μεταξύ διαφορετικών συγκλίσεων.

Κεφάλαιο 3. Ένα βασικό αποτέλεσμα του κεφαλαίου αυτού είναι πως οι φραγμένοι τελεστές από χώρους L^p σε χώρους L^q που μετατίθονται με μετατοπίσεις είναι ακριβώς οι τελεστές συνέλιξης. Οι τελεστές αυτοί αποτελούν τον χώρο $\mathscr{M}^{p,q}$. Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση $p = q$ καθώς εντάσσονται σε αυτήν οι singular ολοκληρωτικοί τελεστές οι οποίοι σχετίζονται άμεσα με τη σύγκλιση σειρών Fourier. Τέτοιοι τελεστές ονομάζονται πολλαπλασιαστές Fourier. Ένα βασικό πρόβλημα της θεωρίας των πολλαπλασιαστών Fourier είναι ο χαρακτηρισμός τους μέσω των ιδιοτήτων της συνάρτησης συνέλιξης. Αυτό αποτελεί μέχρι στιγμής ανοιχτό πρόβλημα, ωστόσο είναι γνωστές οι ζητούμενες ιδιότητες σε κάποιες συγκεκριμένες περιπτώσεις. Στο κεφάλαιο αυτό χαρακτηρίζουμε τους χώρους $\mathscr{M}^{1,1}$ και $\mathscr{M}^{2,2}$. Παρουσιάζουμε επίσης κάποια άλλα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας των πολλαπλασιαστών Fourier. Ενδεικτικά αναφέρουμε ότι ο χώρος των πολλαπλασιαστών Fourier $\mathscr{M}^{p,p}$ είναι χώρος Banach και είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathscr{M}^{q,q}$ όπου q ο συζυγής εκθέτης του p. Παρουσιάζουμε επίσης σχέσεις εγκλεισμού για τους χώρους $\mathscr{M}^{p,p}$, $1 \leq p \leq q \leq 2$.

Κεφάλαιο 4. Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε την έννοια του μετασχηματισμού Hilbert. Ο τελεστής αυτός είναι σημαντικός στη θεωρία Calderon-Zygmund για τα singular ολοκληρώματα. Εδώ θα αποδείξουμε ότι είναι φραγμένος τελεστής από τον L^p στον L^p.

Κεφάλαιο 5. Το κεφάλαιο αυτό είναι μια συλλογή ανισοτικών αποτελεσμάτων για γραμμικούς τελεστές που θα χρησιμοποιήσουμε για να αποδείξουμε τα θεωρήματα των Κεφαλαίων 6-8. Η ιδέα πίσω από την απόδειξή τους είναι η μετατροπή μη-γραμμικών ανισοτήτων της Ανάλυσης Fourier σε γραμμικές ανισότητες σε κατάλληλους χώρους Banach. Για το σκοπό αυτό θα ορίσουμε τις νόρμες $\|\cdot\|_{L^p(X,\mathscr{B})} = \left(\int_X \|f\|_{\mathscr{B}}^p \, d\mu\right)^{\frac{1}{p}}$ για $\mathscr{B}$-μετρήσιμες συναρτήσεις f στον χώρο X.

Κεφάλαιο 6. Έχοντας καλύψει τις προαπαιτούμενες έννοιες στα προηγούμενα κεφάλαια, είμαστε πλέον σε θέση να παρουσιάσουμε τα θεωρήματα Littlewood-Paley. Θα εξετάσουμε τέσσερεις παραλλαγές του ίδιου θεωρήματος με βάση δύο χαρακτηριστικά που αφορούν την συνάρτηση Ψ. Θα επιλέξουμε ανάμεσα σε λεία Ψ με κάποιες επιθυμητές ιδιότητες και την χαρακτηριστική συνάρτηση και (για την πολυδιάστατη περίπτωση) ανάμεσα σε δυαδικά ορθογώνια και δυαδικούς δακτύλιους. Παρακάτω παρουσιάζουμε επιγραμματικά το αποτέλεσμα για καθεμία από τις περιπτώσεις.

(α′) (i) *Συνάρτηση Ψ και δυαδικοί δακτύλιοι.* Επιλέγουμε συνάρτηση Ψ στον $\mathbb{R}^n$ και θέτουμε $\Psi_{2^{-j}}(x) = 2^{jn}\Psi(2^j x)$, για $x \in \mathbb{R}^n$ και $j \in \mathbb{Z}$. Ο «λείος» τελεστής Littlewood-Paley είναι ο

$$\Delta_j(f) = f * \Psi_{2^{-j}},$$

και το θεώρημα Littlewood-Paley μας δίνει

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(ii) *Συνάρτηση Ψ και δυαδικά ορθογώνια.* Επιλέγουμε συνάρτηση Ψ στον $\mathbb{R}$ και θέτουμε $\Psi_{2^{-j}}(x) = 2^j\Psi(2^j x)$, για $x \in \mathbb{R}$ και $j \in \mathbb{Z}$. Ο τελεστής Littlewood-Paley είναι ο

$$\boldsymbol{\Delta_j}(f) = \left(\widehat{f}(\xi) \widehat{\Psi_{2^{-j_1}}}(\xi_1) \cdots \widehat{\Psi_{2^{-j_n}}}(\xi_n) \right)^{\vee}$$

για $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ και $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ και το θεώρημα Littlewood-Paley μας δίνει

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_j}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

(β′) (i) *Χαρακτηριστική Συνάρτηση και δυαδικοί δακτύλιοι.* Ο τελεστής Littlewood-Paley είναι ο

$$\Delta_j^{\star}(f) = \left(\widehat{f}(\xi) \mathbb{1}_{2^j \le |\xi| < 2^{j+1}} \right)^{\vee}$$

για $j \in \mathbb{Z}$. Η χαρακτηριστική συνάρτηση του μοναδιαίου δίσκου δεν είναι πολλαπλασιαστής Fourier στον $\mathbb{R}^n$ όταν $n > 1$ εκτός αν $p = 2$. Επομένως το θεώρημα δεν ισχύει για $n > 1$ και $p \neq 2$. Η περίπτωση $n = 1$ περιλαμβάνεται στην κατηγορία «Χαρακτηριστική Συνάρτηση και δυαδικά ορθογώνια».

(ii) *Χαρακτηριστική Συνάρτηση και δυαδικά ορθογώνια.* Ο «μη-λείος» τελεστής Littlewood-Paley είναι ο

$$\boldsymbol{\Delta_j}^{\#}(f) = \left(\widehat{f}(\xi) \mathbb{1}_{2^{j_1} \le |\xi_1| < 2^{j_1+1}} \cdots \mathbb{1}_{2^{j_n} \le |\xi_n| < 2^{j_n+1}} \right)^{\vee}$$

για $j = (j_1, \ldots, j_n) \in \mathbb{Z}^n$ και $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ (για την ειδική περίπτωση $n = 1$ συμβολίζουμε $\Delta_j{}^{\#}(f) = \left(\widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{2^j \leq |\xi| < 2^{j+1}}\right)^{\vee}$ για $j \in \mathbb{Z}$ και $\xi \in \mathbb{R}$) και το θεώρημα Littlewood-Paley μας δίνει

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \sim \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{j} \in \mathbb{Z}^n} \left| \boldsymbol{\Delta_j}{}^{\#}(f) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Το κεφάλαιο αυτό παρουσιάζει επιπλέον μια επέκταση του θεωρήματος (a)-(i)-Littlewood-Paley σε διανύσματα καθώς και κάποια αντιπαραδείγματα που δείχνουν τη σημασία της ℓ^2-νόρμας και αντιπαραδείγματα για την έλλειψη ορθογωνιότητας στους χώρους L^p όταν $p \neq 2$.

Κεφάλαιο 7. Θα δούμε εφαρμογές την θεωρίας Littlewood-Paley στη θεωρία πολλαπλασιαστών Fourier. Θα παρουσιάσουμε δύο θεωρήματα που δίνουν ικανές συνθήκες ώστε συναρτήσεις του $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ να είναι πολλαπλασιαστές Fourier για κάθε $1 < p < \infty$: το θεώρημα Marcinkiewicz και το θεώρημα Hörmander-Mihlin. Καθένα από τα δύο αυτά θεωρήματα απαιτεί κάποια συνθήκη ελάττωσης των παραγώγων. Για τη μονοδιάστατη περίπτωση $n = 1$, το θεώρημα Marcinkiewicz είναι πιο ισχυρό. Για μεγαλύτερες διαστάσεις ωστόσο, κανένα από τα δύο θεωρήματα δεν συνεπάγεται το άλλο. Και τα δύο θεωρήματα έχουν το ελάττωμα να μην μπορούν να ανιχνεύουν συναρτήσεις που είναι πολλαπλασιαστές Fourier για έναν χώρο L^p αλλά όχι για κάποιον άλλο χώρο L^q.

Κεφάλαιο 8. Στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας παρουσιάζουμε κάποιες επιπλέον εφαρμογές της θεωρίας Littlewood-Paley για τους τελεστές που χαρακτηρίζουν τους πολλαπλασιαστές Fourier: $T(f) = (\widehat{f}m)^{\vee}$, όπου m πολλαπλασιαστής Fourier. Θα εξετάσουμε κάτω από ποιες συνθήκες οι τελεστές

$$\sup_{k \in \mathbb{Z}} |T_k(f)|, \quad T_k(f) = \left(\widehat{f}(\xi)m(2^{-k}\xi)\right)^{\vee}$$

και

$$\sum_j T_j, \quad T_j(f) = (\widehat{f}m_j)^{\vee}$$

είναι φραγμένοι στους χώρους L^p.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Κλάση Schwartz και μετασχηματισμός Fourier

2.1 Κλάση Schwartz

Ορισμός 2.1.1. Έστω f συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Για $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ (δηλ. με τους α_i μη αρνητικούς ακέραιους) συμβολίζουμε ως

1. $\partial_i f$ την μερική παράγωγο της f ως προς την i-συντεταγμένη.
2. $\partial_i^m f$ την m-οστή μερική παράγωγο της f ως προς την i-συντεταγμένη.
3. $\partial^\alpha f$ την μερική παράγωγο $\partial_1^{\alpha_1} \cdots \partial_n^{\alpha_n} f$.

Ο φορέας της f είναι το σύνολο $\operatorname{supp}(f) = \overline{\{x : f(x) \neq 0\}}$.

Ορισμός 2.1.2. Ορίζουμε ως

1. $\mathscr{C}^N(\mathbb{R}^n)$ τον χώρο των συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^n$ με συνεχείς μερικές παραγώγους τάξης $k = 0, 1, \ldots, N$.
2. $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ τον χώρο των συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^n$ με συνεχείς μερικές παραγώγους κάθε τάξης.
3. $C_c(\mathbb{R}^n)$ τον χώρο των συνεχών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^n$ με συμπαγή φορέα.
4. $\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) = \{f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n) \mid \operatorname{supp}(f) \text{ συμπαγής}\}$.

Ορισμός 2.1.3. Έστω $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$ με πεδίο τιμών το $\mathbb{C}$. Η f καλείται *συνάρτηση Schwartz* στον $\mathbb{R}^n$ αν για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^n$ υπάρχει $C_{\alpha,\beta} > 0$ ώστε

$$\rho_{\alpha,\beta}(f) := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta f(x) \right| = C_{\alpha,\beta} < \infty.$$

Τα $\rho_{\alpha,\beta}(f)$ ονομάζονται *Schwartz ημινόρμες* της f και το σύνολο των συναρτήσεων Schwartz στον $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται ως $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Θα δούμε τώρα μια ισοδύναμη συνθήκη που χαρακτηρίζει τις συναρτήσεις Schwartz. Θα χρειαστούμε πρώτα τις παρακάτω σχέσεις.

Λήμμα 2.1.4. *Έστω $x \in \mathbb{R}^n$, $k \in \mathbb{Z}^+$ και $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Θέτουμε $|x| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ και $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} \cdots x_n^{\alpha_n}$. Τότε υπάρχουν $C_{n,\alpha} > 0$, $C_{n,k} > 0$ ώστε*

$$\begin{aligned} |x^\alpha| &\leq C_{n,\alpha} |x|^{|\alpha|} \\ |x|^k &\leq C_{n,k} \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha| \\ (1+|x|)^k &\leq 2^k C_{n,k} \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha| . \end{aligned}$$

Απόδειξη. Για την πρώτη ανισότητα έχουμε

$$|x^\alpha| = |x_1|^{\alpha_1} \cdots |x_n|^{\alpha_n} \quad \text{και} \quad |x|^{|\alpha|} = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}^{\,\alpha_1+\cdots+\alpha_n} .$$

Από τις σχέσεις $|x_j| \leq \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}$, υψώνοντας εις την α_j και παίρνοντας το γινόμενο ως προς j, παίρνουμε $|x^\alpha| \leq |x|^{|\alpha|}$. Θέτοντας $C_{n,\alpha} = \sup_{|x|=1} |x^\alpha| \leq 1$ έχουμε τη ζητούμενη σχέση.

Για τη δεύτερη ανισότητα παρατηρούμε ότι αν $x \in \mathbb{R}^n$ και $|x| = 1$ τότε υπάρχει $1 \leqslant j \leqslant n$ ώστε $|x_j| \geqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$, συνεπώς

$$\sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha| \geqslant |x_j|^k \geqslant \frac{1}{n^{k/2}} .$$

Θέτοντας

$$\frac{1}{C_{n,k}} = \min_{|x|=1} \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|$$

έχουμε το ζητούμενο (το minimum υπάρχει λόγω συμπάγειας). Παρατηρούμε επίσης ότι οι σταθερές $C_{n,k}$ αυξάνουν καθώς αυξάνει το k, διότι το $\min_{|x|=1} \sum_{|\alpha|=k} |x^\alpha|$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του k.

Για την τρίτη ανισότητα, γράφουμε

$$(1+|x|)^k = \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} |x|^m$$

και χρησιμοποιώντας την δεύτερη ανισότητα παίρνουμε

$$\begin{aligned} (1+|x|)^k &= \sum_{m=0}^{k} \binom{k}{m} C_{n,m} \sum_{|\alpha|=m} |x^\alpha| \leq 2^k \left(\max_{1\leq m\leq k} C_{n,m} \right) \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha| \\ &= 2^k C_{n,k} \sum_{|\alpha|\leq k} |x^\alpha| , \end{aligned}$$

διότι $C_{n,k} = \max_{1\leq m\leq k} C_{n,m}$. □

Πρόταση 2.1.5. *Έστω $f \in \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) *Για κάθε* $\alpha \in \mathbb{N}^n$ *και* $N \in \mathbb{Z}^+$ *υπάρχει σταθερά* $C_{\alpha,N}$ *ώστε*

$$|(\partial^\alpha f)(x)| \le C_{\alpha,N}\,(1+|x|)^{-N}.$$

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Χρησιμοποιώντας την τρίτη ανισότητα του λήμματος έχουμε

$$\begin{aligned}(1+|x|)^N\,|(\partial^\alpha f)(x)| &\le 2^N C_{n,N}\sum_{|\beta|\le N}\left|x^\beta\right|\,|(\partial^\alpha f)(x)|\\ &\le 2^N C_{n,N}\sum_{|\beta|\le N}\rho_{\alpha,\beta}(f) =: C_{\alpha,N} < \infty.\end{aligned}$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Χρησιμοποιώντας την πρώτη ανισότητα του λήμματος και το (ii) για $N=|\alpha|$ έχουμε

$$\left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right| \le C_{n,\alpha}\,|x|^{|\alpha|}\left|\partial^\beta f(x)\right| \le C_{n,\alpha}\,|x|^{|\alpha|}\,C_{\beta,|\alpha|}\,(1+|x|)^{-|\alpha|} \le C_{n,\alpha}C_{\beta,|\alpha|} =: C_{\alpha,\beta} < \infty.$$

□

Παραθέτουμε τώρα μια χρήσιμη ταυτότητα για τις μερικές παραγώγους.

Πρόταση 2.1.6 (ταυτότητα Leibniz)**.** *Έστω* $\alpha=(\alpha_1,\dots,\alpha_n)$ *και* $\beta=(\beta_1,\dots,\beta_n)$ *με* α_i,β_i *μη αρνητικούς ακέραιους. Γράφουμε* $\beta\le\alpha$ *όταν ισχύει* $\beta_i\le\alpha_i$ *για κάθε* $i=1,\dots,n$. *Τότε, για κάθε* $f,g\in\mathscr{C}^{|\alpha|}(\mathbb{R}^n)$ *ισχύει*

$$\partial^\alpha(fg)=\sum_{\beta\le\alpha}\binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}(\partial^\beta f)(\partial^{\alpha-\beta}g).$$

Απόδειξη. Έπεται εύκολα από την αντίστοιχη μονοδιάστατη ταυτότητα, η οποία προκύπτει άμεσα με επαγωγή. □

Θα μελετήσουμε τώρα τη σύγκλιση στο χώρο των συναρτήσεων Schwartz.

Ορισμός 2.1.7. Έστω $f_k, f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε τη σύγκλιση $f_k \overset{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)}{\longrightarrow} f$ όταν για κάθε $\alpha,\beta\in\mathbb{N}^n$ ισχύει

$$\rho_{\alpha,\beta}(f_k-f) := \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha\partial^\beta(f_k-f)(x)\right| \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Η σύγκλιση στον $\mathscr{S}$ είναι πιο ισχυρή από τη σύγκλιση στον L^p όπως φαίνεται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 2.1.8. *Εστω* $f_k, f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. *Αν* $f_k\overset{\mathscr{S}}{\longrightarrow} f$ *τότε* $f_k \overset{\|\cdot\|_{L^p}}{\longrightarrow} f$ *για κάθε* $0<p<\infty$. *Μάλιστα, υπάρχει* $C_{p,n}>0$ *ώστε*

$$\left\|\partial^\beta f\right\|_{L^p} \le C_{p,n}\sum_{|\alpha|\le[\frac{n+1}{p}+1]}\rho_{\alpha,\beta}(f). \tag{2.1.1}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\left\|\partial^\beta f\right\|_{L^p} &= \left(\int_{|x|\le 1}\left|\partial^\beta f(x)\right|^p dx + \int_{|x|\ge 1}|x|^{n+1}\left|\partial^\beta f(x)\right|^p |x|^{-(n+1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &\le \left(\mu(|x|\le 1)\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|\partial^\beta f(x)\right|^p + \sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^{[\frac{n+1}{p}]+1}\partial^\beta f(x)\right|^p\int_{|x|\ge 1}|x|^{-(n+1)}\,dx\right)^{\frac{1}{p}}\\ &= C_{p,n}\sum_{|\alpha|\in\left\{0,[\frac{n+1}{p}]+1\right\}}\sup_{x\in\mathbb{R}^n}\left|x^\alpha\partial^\beta f(x)\right| \le C_{p,n}\sum_{|\alpha|\le[\frac{n+1}{p}+1]}\rho_{\alpha,\beta}(f).\end{aligned}$$

Δείξαμε τη ζητούμενη ανισότητα. Θέτοντας $\beta = 0^n$ παίρνουμε την L^p σύγκλιση. □

Στην επόμενη πρόταση δείχνουμε ότι η κλάση Schwartz είναι κλειστή ως προς τον πολλαπλασιασμό και τη συνέλιξη. Υπενθυμίζουμε ότι αν $f, g \in L^1(\mathbb{R}^n)$ τότε η συνέλιξη $f * g$ των f και g ορίζεται από την

$$(f*g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)dy.$$

Πρόταση 2.1.9. *Έστω $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε, $fg, f*g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Επίσης,*

$$\partial^\alpha(f*g) = (\partial^\alpha f)*g = f*(\partial^\alpha g) \tag{2.1.2}$$

για κάθε $\alpha \in \mathbb{N}^n$.

Απόδειξη. Έστω $e_j = (0,\ldots,1,\ldots,0)$ το διάνυσμα με 1 στην j-θέση και 0 σε όλες τις υπόλοιπες. Έχουμε

$$\frac{f(y+he_j)-f(y)}{h} - (\partial_j f)(y) \longrightarrow 0$$

καθώς το $h \to 0$ και η ποσότητα αυτή είναι φραγμένη από μια σταθερά που εξαρτάται από την f. Πολλαπλασιάζοντας με $g(x-y)$ και ολοκληρώνοντας ως προς y, άπό το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι $\partial_j(f*g) = (\partial_j f)*g$ και λόγω της συμμετρίας της συνέλιξης ως προς f και g παίρνουμε την (2.1.2) όταν $\alpha = (0,\ldots,1,\ldots 0)$. Επαναλαμβάνοντας αυτό το επιχείρημα και χρησιμοποιώντας επαγωγή παίρνουμε την (2.1.2) στη γενική περίπτωση.

Δείχνουμε τώρα ότι $f*g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Για κάθε $N > n$ έχουμε

$$|(f*g)(x)| \le C_N\int_{\mathbb{R}^n}(1+|x-y|)^{-N}(1+|y|)^{-N}dy.$$

Το μέρος αυτού του ολοκληρώματος πάνω από το σύνολο $\{y : |x| \le 2|x-y|\}$ φράσσεται από

$$\int_{|y-x|\ge\frac{1}{2}|x|}(1+|x|/2)^{-N}(1+|y|)^{-N}dy \le B_N(1+|x|)^{-N},$$

όπου B_N είναι μια σταθερά που εξαρτάται από τα N και n. Στο σύνολο $\{y : 2|y-x| \le |x|\}$ έχουμε $|x| \le 2|y|$, συνεπώς το αντίστοιχο μέρος του ολοκληρώματος φράσσεται από

$$\int_{|y-x|\le\frac{1}{2}|x|}(1+|x-y|)^{-N}(1+|x|/2)^{-N}dy \le B_N(1+|x|)^{-N}.$$

Έτσι συμπεραίνουμε ότι η $f * g$ φράσσεται από $(1+|x|)^{-N}$ στο άπειρο και, αφού το $N > n$ ήταν τυχόν, αυτό δείχνει ότι η $f * g$ φθίνει γρηγορότερα από την αντίστροφη οποιουδήποτε πολυωνύμου στο άπειρο.

Χρησιμοποιώντας την $\partial^\alpha(f * g) = (\partial^\alpha) * g$, και αντικαθιστώντας την f με την $\partial^\alpha f$ στο προηγούμενο επιχείρημα, συμπεραίνουμε ότι όλες οι παράγωγοι της $f * g$ φθίνουν γρηγορότερα από την αντίστροφη οποιουδήποτε πολυωνύμου στο άπειρο. Από την Πρόταση 2.1.5 έπεται τώρα ότι $f * g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Το γεγονός ότι $fg \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ προκύπτει άμεσα από την ταυτότητα του Leibniz και την Πρόταση 2.1.5. $\square$

2.2 Μετασχηματισμός Fourier

Ορισμός 2.2.1. Έστω $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε τον *μετασχηματισμό Fourier* της f ως

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i \langle x,\xi\rangle} dx.$$

Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνουμε τις βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ και $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Ισχύουν τα ακόλουθα.*

(i) $\widehat{f} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

(ii) $\left\|\widehat{f}\right\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}$.

(iii) $\widehat{f+g} = \widehat{f} + \widehat{g}$.

(iv) $\widehat{f * g} = \widehat{f}\,\widehat{g}$.

(v) $\partial^\alpha \widehat{f}(\xi) = [(-2\pi i x^\alpha) f(x)]^\wedge(\xi)$.

(vi) $\widehat{(\partial^\alpha f)}(\xi) = (2\pi i \xi)^\alpha \widehat{f}(\xi)$.

(vii) $[e^{2\pi i\langle x,y\rangle} f(x)]^\wedge(\xi) = \tau^y(\widehat{f})(\xi)$.

(viii) $e^{-2\pi i\langle \xi,y\rangle} \widehat{f}(\xi) = \widehat{\tau^y f}(\xi)$, *όπου $\tau^y f$ είναι η μετατόπιση της f κατά y που ορίζεται από την $(\tau^y(f))(x) = f(x-y)$.*

Ορισμός 2.2.3. Έστω $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε τον *αντίστροφο μετασχηματισμό Fourier* της f ως $f^\vee(\xi) = \widehat{f}(-\xi)$.

Το θεώρημα που ακολουθεί περιγράφει τη σχέση του μετασχηματισμού Fourier με τον αντίστροφό του.

Θεώρημα 2.2.4. *Έστω f, g και h στον $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ισχύουν τα ακόλουθα.*

(i) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\widehat{g}(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g(x)dx$.

(ii) Τύπος αντιστροφής Fourier: $(\widehat{f}\,)^\vee = f = \widehat{(f^\vee)}$.

(iii) Ταυτότητα Parseval: $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{h(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{h}(\xi)}d\xi$.

(iv) Ταυτότητα Plancherel: $\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2} = \|f^\vee\|_{L^2}$.

(v) $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(x)g^\vee(x)dx$.

2.3 Ήπιες κατανομές

Ισχύει ο παρακάτω εγκλεισμός χώρων:

$$\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n).$$

Συμβολίζουμε τους δυϊκούς τους χώρους ως

1. $\left(\mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)\right)^* = \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n)$ *(ο χώρος των κατανομών)*
2. $\left(\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\right)^* = \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ *(ο χώρος των ήπιων (tempered) κατανομών)*
3. $(\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}^n))^* = \mathscr{E}'(\mathbb{R}^n)$ *(ο χώρος των κατανομών με συμπαγή φορέα).*

Τότε, ισχύουν οι εγκλεισμοί

$$\mathscr{E}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{D}'(\mathbb{R}^n).$$

Ορισμός 2.3.1. Έστω $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ και $f, g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε τον *μετασχηματισμό Fourier* της tempered κατανομής u ως $\widehat{u}(f) = u(\widehat{f})$. Θα γράφουμε και

$$\langle \widehat{u}, f\rangle = \langle u, \widehat{f}\rangle.$$

Ανάλογα ορίζεται και ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier ως $u^\vee(f) = u(f^\vee)$. Θα γράφουμε και

$$\langle u^\vee, f\rangle = \langle u, f^\vee\rangle.$$

Ορίζουμε επίσης τη συνέλιξη $g * u$ ως $(g*u)(f) = u(\widetilde{g} * f)$ όπου $\widetilde{g}(x) = g(-x)$. Θα γράφουμε και

$$\langle g * u, f\rangle = \langle u, \widetilde{g} * f\rangle.$$

Πρόταση 2.3.2. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \le p \le \infty$ ισχύει ότι*

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n).$$

Μάλιστα για $1 \le p < \infty$ ο $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ και $1 \le p \le \infty$. Για $N > n$, από την Πρόταση 2.1.5 υπάρχει σταθερά C ώστε $|f(x)| \le C(1+|x|)^{-N}$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|f(x)|\,(1+|x|)^N\right)^p \left((1+|x|)^{-N}\right)^p dx \\ &\le C\int_{\mathbb{R}^n} \left((1+|x|)^{-N}\right)^p dx \le C\int_{\mathbb{R}^n} (1+|x|)^{-N} dx < \infty.\end{aligned}$$

Άρα, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Έστω τώρα $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε το συναρτησοειδές $T_f : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{C}$ με

$$T_f(g) = \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}dx.$$

Θα δείξουμε ότι $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Υπολογίζουμε

$$|T_f(g)| = \left| \int_{\mathbb{R}^n} f\bar{g}dx \right| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f|\,|g|\,dx \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} .$$

Καθώς $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, έπεται ότι $g \in L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ και από την Πρόταση 2.1.8 είναι

$$\|g\|_{L^{p'}} \leq C_{p',n} \sum_{|a| \leq [\frac{n+1}{p'}+1]} \rho_{\alpha,0}(g).$$

Από τη σχέση αυτή και τον Ορισμό 2.1.7 βλέπουμε ότι αν $g_k \xrightarrow{\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)} g$ τότε $T_f(g_k) \to T_f(g)$, συνεπώς $T_f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Έστω τώρα $1 \leq p < \infty$. Γνωρίζουμε ότι οι συνεχείς συναρτήσεις με συμπαγή φορέα είναι πυκνές στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. Το ζητούμενο έπεται από την $C_c(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$. □

Η σύγκλιση στον L^p είναι πιο ισχυρή από τη σύγκλιση στον $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ όπως φαίνεται στην ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.3.3. *Αν f_n, $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάποιο $1 \leq p \leq \infty$ και $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|_{L^p}} f$, τότε $f_n \xrightarrow{\mathscr{S}'} f$.*

Απόδειξη. Δουλεύοντας όπως στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης παίρνουμε

$$|T_f(g) - T_{f_n}(g)| \leq \|f - f_n\|_{L^p} \|g\|_{L^{p'}} \to 0$$

για κάθε $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Έπεται ότι $T_{f_n} \xrightarrow{\mathscr{S}'} T_f$. □

Κλείνουμε το κεφάλαιο με μια πρόταση σχετικά με τη σύγκλιση του μετασχηματισμού Fourier στους χώρους $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Πρόταση 2.3.4. (i) *Αν f_k, $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ και $f_k \xrightarrow{\mathscr{S}} f$ τότε $\widehat{f_k} \xrightarrow{\mathscr{S}} \widehat{f}$.*

(ii) *Αν f_k, $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ και $f_k \xrightarrow{\mathscr{S}'} f$ τότε $\widehat{f_k} \xrightarrow{\mathscr{S}'} \widehat{f}$.*

Απόδειξη. (i) Καθώς $f_k \xrightarrow{\mathscr{S}} f$ έχουμε

$$\rho_{\alpha,\beta}(f_k - f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta (f_k - f)(x) \right| \to 0$$

για κάθε α, β. Θέτουμε $g_k(x) = x^\beta f_k(x)$, $g(x) = x^\beta f(x)$ και παρατηρούμε ότι

$$\rho_{\alpha,\beta}(g_k - g) = \rho_{\alpha,\beta}(x^\beta (f_k - f)) \to 0,$$

επομένως $g_k \xrightarrow{\mathscr{S}} g$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (v), (vi) της Πρότασης 2.2.2 υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\left| x^\alpha \partial^\beta (\widehat{f_k - f})(x) \right| &= \left| x^\alpha [(-2\pi i y)^\beta (f_k - f)(y)]^\wedge (x) \right| \\
&= \left| (-2\pi i)^\beta (2\pi i)^{-\alpha} \right| \left| [\partial^\alpha y^\beta (f_k - f)(y)]^\wedge (x) \right| \\
&\leq \tilde{C}_{\alpha,\beta} \left\| \partial^\alpha y^\beta (f_k - f)(y) \right\|_{L^1} \\
&= \tilde{C}_{\alpha,\beta} \left\| \partial^\alpha (g_k - g) \right\|_{L_1} \\
&\overset{(*)}{\leq} \tilde{C}_{\alpha,\beta} C_{1,n} \sum_{|\gamma| \leq n+2} \rho_{\gamma,\alpha}(g_k - g) \to 0,
\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 2.1.8 και θέσαμε $\tilde{C}_{\alpha,\beta} = \left| (-2\pi i)^\beta (2\pi i)^{-\alpha} \right|$. Δείξαμε ότι $\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \left| x^\alpha \partial^\beta (\widehat{f_k - f})(x) \right| \to 0$, δηλαδή $\widehat{f_k} \xrightarrow{\mathscr{S}} \widehat{f}$.

(ii) Από τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier στον $\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, για τυχούσα $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\left\langle \widehat{f_k} - \widehat{f}, g \right\rangle = \left\langle \widehat{f_k - f}, g \right\rangle = \langle f_k - f, \widehat{g} \rangle \to 0.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Πολλαπλασιαστές Fourier

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε την κλάση των τελεστών που μετατίθενται με τις μετατοπίσεις. Όπως θα δούμε, οι φραγμένοι τελεστές που μετατίθενται με τις μετατοπίσεις είναι τελεστές συνέλιξης. Στη συνέχεια θα εξετάσουμε κάτω από ποιές προϋποθέσεις οι τελεστές αυτοί είναι φραγμένοι μεταξύ L^p χώρων.

Θα συμβολίζουμε ως p, p' τα ζεύγη συζυγών εκθετών.

3.1 Τελεστές που μετατίθενται με τις μετατοπίσεις

Ορισμός 3.1.1. Ορίζουμε το *μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο* δύο μετρήσιμων συναρτήσεων f, g στον $\mathbb{R}^n$ ως

$$\langle f|g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\overline{g(x)}dx$$

και το *πραγματικό εσωτερικό γινόμενο* στον $L^2(\mathbb{R}^n)$ ως

$$\langle f, g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)g(x)dx.$$

Υπενθυμίζουμε πως ο δεύτερος συμβολισμός χρησιμοποιείται και για συναρτήσεις $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$, $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ ως $f(g) = \langle f, g\rangle$.

Με βάση αυτά, για $1 \leq p, q \leq \infty$ ορίζουμε τον *συζυγή τελεστή* T^* ενός φραγμένου τελεστή $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ ως τον τελεστή που ικανοποιεί την

$$\langle T(f)|g\rangle = \langle f|T^*(g)\rangle$$

και τον *ανάστροφο τελεστή* T^t ως τον τελεστή που ικανοποιεί την

$$\langle T(f), g\rangle = \left\langle f, T^t(g)\right\rangle.$$

Ορισμός 3.1.2. Έστω f μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε ως *μετατόπιση* της f κατά y την

$$\left(\tau^y(f)\right)(x) = f(x - y).$$

Ορισμός 3.1.3. Ένας διανυσματικός χώρος X μετρήσιμων συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *κλειστός ως προς μετατοπίσεις* αν για κάθε $f \in X$ και $y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\tau^y(f) \in X$.

Έστω X, Y διανυσματικοί χώροι μετρήσιμων συναρτήσεων, κλειστοί ως προς μετατοπίσεις, και T τελεστής από τον X στον Y. Λέμε ότι ο T *μετατίθεται με τις μετατοπίσεις* αν

$$T(\tau^y(f)) = \tau^y(T(f))$$

για κάθε $f \in X$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 3.1.4. Ο τελεστής συνέλιξης μετατίθεται με τις μετατοπίσεις. Πράγματι, έστω X κλειστός ως προς μετατοπίσεις και $g \in X$. Θεωρούμε τον

$$T : X \to T(X)$$

με

$$f \mapsto f * g.$$

Έστω $x, y \in \mathbb{R}^n$. Είναι

$$\begin{aligned}\tau^y\left(T(f)\right)(x) = \tau^y(f*g)(x) = (f*g)(x-y) &= \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y-z)g(z)dz \\ = \int_{\mathbb{R}^n} \tau^y(f)(x-z)g(z)dz &= (\tau^y(f)*g)(x) = T(\tau^y(f))(x).\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο, δηλαδή κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής που μετατίθεται με τις μετατοπίσεις είναι τελεστής συνέλιξης. Προτού δούμε το θεώρημα θα χρειαστούμε κάποια λήμματα.

Λήμμα 3.1.5. *Έστω $1 \leq p, q \leq \infty$ και T φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^p(\mathbb{R}^n)$ στον $L^q(\mathbb{R}^n)$ που μετατίθεται με τις μετατοπίσεις. Για κάθε $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ οι παράγωγοι της $T(f)$ είναι L^q συναρτήσεις, και για κάθε $\alpha \in \mathbb{N}^n$ ισχύει*

$$\partial^\alpha\left(T(f)\right) = T\left(\partial^\alpha(f)\right). \tag{3.1.1}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε αρχικά τον δείκτη $\alpha = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, με τη μονάδα 1 στην j-θέση και 0 παντού αλλού. Αν $e_j = (0, \ldots, 1, \ldots, 0)$, με τη μονάδα 1 στην j-θέση και 0 παντού αλλού, τότε για τυχούσα $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(f)(y)\frac{\varphi(y+he_j)-\varphi(y)}{h}\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) T\left(\frac{\tau^{he_j}(f)-f}{h}\right)(y)\,dy, \tag{3.1.2}$$

αφού και τα δύο μέλη της ισότητας είναι ίσα με

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)\frac{T(f)(y-he_j)-T(f)(y)}{h}\,dy$$

και ο T μετατίθεται με τις μετατοπίσεις. Αφήνουμε τώρα το $h \to 0$ στα δύο μέλη της (3.1.2). Γράφουμε

$$\frac{\varphi(y+he_j)-\varphi(y)}{h} = \int_0^1 \partial_j\varphi(y+hte_j)\,dt,$$

απ' όπου έπεται ότι αν $|h| < 1/2$ τότε

$$\left|\frac{\varphi(y+he_j)-\varphi(y)}{h}\right| \leqslant \int_0^1 \frac{C_m}{(1+|y+hte_j|)^M}\,dt \leqslant \int_0^1 \frac{C_M}{\left(1+|y|-\frac{1}{2}\right)^M}\,dt \leqslant \frac{C'_M}{(|y|+1)^M}.$$

Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση στο αριστερό μέλος της (3.1.2) φράσσεται από την ολοκληρώσιμη συνάρτηση $|T(f)(y)|C'_M(|y|+1)^{-M}$ και συγκλίνει στην $T(f)(y)\partial_j\varphi(y)$ όταν $h \to 0$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} T(f)(y)\frac{\varphi(y+he_j)-\varphi(y)}{h}\,dy \longrightarrow \int_{\mathbb{R}^n} T(f)(y)\partial_j\varphi(y)\,dy. \tag{3.1.3}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε συνάρτηση f της κλάσης Schwartz ισχύει

$$\frac{\tau^{he_j}(f)(y)-f(y)}{h} = \int_0^1 \partial_j f(y+hte_j)\,dt,$$

και το δεξιό μέλος συγκλίνει κατά σημείο στην $\partial_j f(y)$ όταν $h \to 0$ και φράσσεται από $C'_M(1+|y|)^{-M}$ όταν $|h| < 1/2$, όπως μπορούμε να δούμε αντικαθιστώντας στο προηγούμενο επιχείρημα την f από την φ. Συνεπώς, χρησιμοποιώντας και πάλι το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, έχουμε

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{\tau^{he_j}(f)-f}{h} - \partial_j f\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{3.1.4}$$

Αφού ο $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^q(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος, έπεται ότι

$$\lim_{h\to 0}\left\|T\left(\frac{\tau^{he_j}(f)-f}{h}\right) - T(\partial_j f)\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} = 0. \tag{3.1.5}$$

Αφού $\varphi \in L^{q'}(\mathbb{R}^n)$, από την ανισότητα Hölder συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)T\left(\frac{\tau^{he_j}(f)-f}{h}\right)(y)\,dy \to \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)T(\partial_j f)(y)\,dy$$

όταν $h \to 0$. Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y)T(\partial_j f)(y)\,dy = \int_{\mathbb{R}^n} T(f)(y)\partial_j\varphi(y)\,dy.$$

Έτσι έχουμε αποδείξει το ζητούμενο για τον δείκτη $\alpha = (0,\ldots,1,\ldots,0)$. Με επαγωγή ως προς το $|\alpha|$ αποδεικνύουμε το ζητούμενο στη γενική περίπτωση. □

Λήμμα 3.1.6. *Έστω $1 \leq q \leq \infty$ και συνάρτηση $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ με $\partial^\alpha h \in L^q(\mathbb{R}^n)$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{N}^n$. Τότε η h είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση H που ικανοποιεί την*

$$|H(0)| \leq C_{n,q} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial^\alpha h\|_{L^q}. \tag{3.1.6}$$

Απόδειξη. Έστω $R \geq 1$. Θεωρούμε μια συνάρτηση φ_R στην κλάση $\mathscr{C}_0^\infty$, η οποία είναι σταθερή και ίση με 1 στη μπάλα $\{x : |x| \leq R\}$ και σταθερή και ίση με μηδέν στο $\{x : |x| \geq 2R\}$. Αφού $h \in L^q(\mathbb{R}^n)$, έπεται ότι $\varphi_R h \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Θα δείξουμε ότι $\widehat{\varphi_R h} \in L^1$. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$1 \leq C_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\leq n+1} |(-2\pi i x)^\alpha|. \tag{3.1.7}$$

Πολλαπλασιάζοντας την (3.1.7) επί $|\widehat{\varphi_R h}(x)|$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
|\widehat{\varphi_R h}(x)| &\leqslant C_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\leq n+1} |(-2\pi i x)^\alpha \widehat{\varphi_R h}(x)| \\
&\leq C_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|(\partial^\alpha(\varphi h))^\vee\|_{L^\infty} \\
&\leq C_n(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial^\alpha(\varphi_R h)\|_{L^1} \\
&\leq C_n(2^n R^n v_n)^{1/q'}(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial^\alpha(\varphi_R h)\|_{L^q} \\
&\leq C_{n,R}(1+|x|)^{-(n+1)} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial^\alpha h\|_{L^q},
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibniz και το γεγονός ότι όλες οι παράγωγοι της φ_R είναι κατά σημείο φραγμένες από σταθερές που εξαρτώνται από το R.

Ολοκληρώνοντας αυτή την ανισότητα ως προς x παίρνουμε

$$\|\widehat{\varphi_R h}\|_{L^1} \leq C_{R,n} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial^\alpha h\|_{L^q} < \infty. \tag{3.1.8}$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε τον τύπο αντιστροφής Fourier. Έπεται ότι η $\varphi_R h$ είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση, το μετασχηματισμό Fourier του μετασχηματισμού Fourier της. Αφού $\varphi_R \equiv 1$ στη μπάλα $B(0,R)$, συμπεραίνουμε ότι η h είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση σε αυτή τη μπάλα. Αφού το $R>0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι η h είναι σχεδόν παντού ίση με μια συνεχή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$, την οποία συμβολίζουμε με H. Τώρα, η (3.1.6) προκύπτει άμεσα από την (3.1.8) με $R=1$, αφού $|H(0)| \leq \|\widehat{\varphi_1 h}\|_{L^1}$. □

Θεώρημα 3.1.7. *Έστω $1 \leq p,q \leq \infty$ και T φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^p(\mathbb{R}^n)$ στον $L^q(\mathbb{R}^n)$ που μετατίθεται με τις μετατοπίσεις. Τότε υπάρχει μοναδικό $w \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ώστε*

$$T(f) = f * w, \ \text{ σ.π. για κάθε } f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n).$$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Από τα Λήμματα 3.1.5 και 3.1.6 υπάρχει συνεχής συνάρτηση H τέτοια ώστε $T(f) = H$ σχεδόν παντού, η οποία ικανοποιεί την

$$|H(0)| \leq C_{n,q} \sum_{|\alpha|\leq n+1} \|\partial^\alpha T(f)\|_{L^q}.$$

Ορίζουμε ένα γραμμικό συναρτησοειδές στην $\mathscr{S}$ θέτοντας

$$\langle u, f\rangle = H(0).$$

Το συναρτησοειδές u είναι καλά ορισμένο: αν G είναι μια άλλη συνεχής συνάρτηση τέτοια ώστε $G = T(f)$ σχεδόν παντού, τότε $G = H$ σχεδόν παντού, και αφού οι δύο συναρτήσεις είναι συνεχείς πρέπει να έχουμε $G \equiv H$, άρα $H(0) = G(0)$.

Από τις (3.1.1), (3.1.6) και το γεγονός ότι ο T είναι φραγμένος, έχουμε

$$\begin{aligned}|\langle u,f\rangle| &\le C_{n,q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|\partial^\alpha T(f)\|_{L^q}\\ &\le C_{n,q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|T(\partial^\alpha f)\|_{L^q}\\ &\le C_{n,q}\|T\|_{L^p\to L^q}\sum_{|\alpha|\le n+1}\|\partial^\alpha f\|_{L^p}\\ &\le C'_{n,q}\|T\|_{L^p\to L^q}\sum_{\substack{|\gamma|\le\left[\frac{n+1}{p}\right]+1\\ |\alpha|\le n+1}}\varrho_{\gamma,\alpha}(f).\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι $u\in\mathscr{S}'$. Θέτουμε $w=\tilde{u}$. Αν $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ και $x\in\mathbb{R}^n$, θεωρούμε την συνεχή συνάρτηση $H_x=T(\tau^{-x}f)$. Παρατηρούμε ότι

$$H_x(y)=T(\tau^{-x}f)(y)=\tau^{-x}T(f)(y)=T(f)(x+y)=H(x+y)=\tau^{-x}H(y),$$

όπου η ισότητα $T(f)(x+y)=H(x+y)$ ισχύει σχεδόν για κάθε y. Αυτό δείχνει ότι οι συνεχείς συναρτήσεις H_x και $\tau^{-x}H$ είναι ίσες σχεδόν παντού, άρα $H_x\equiv\tau^{-x}H$, και ειδικότερα $H_x(0)=\tau^{-x}H(0)$, δηλαδή $H_x(0)=H(x)$, που μπορεί να γραφτεί ισοδύναμα ως

$$\langle u,\tau^{-x}f\rangle=H(x). \tag{3.1.9}$$

Τώρα μπορούμε να δείξουμε ότι $T(f)=f*w$ για κάθε $f\in\mathscr{S}$. Αφού ο T είναι αναλλοίωτος ως προς μετατοπίσεις, για δοσμένη $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ έχουμε

$$(f*w)(x)=\langle\tilde{u},\tau^x\tilde{f}\rangle=\langle u,\tau^{-x}f\rangle=H(x)=T(f)(x),$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει σχεδόν για κάθε x, από τον ορισμό της H. Άρα, $f*w=T(f)$ σχεδόν παντού, όπως θέλαμε. Η μοναδικότητα της w προκύπτει από την παρατήρηση ότι αν $f*w=f*w'$ για κάθε $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ τότε $w=w'$. □

3.2 Οι χώροι $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$

Ορισμός 3.2.1. Για $1\le p,q\le\infty$ ορίζουμε

$$\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)=\{T:L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)\mid T \text{ φραγμένος γραμμικός τελεστής που μετατίθεται με τις μετατοπίσεις}\}$$

και θέτουμε $\|T\|_{\mathscr{M}^{p,q}}=\|T\|_{L^p\to L^q}$.

Παρατήρηση 3.2.2. Από το θεώρημα 3.1.7 έχουμε ότι

$$\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)=\{T:L^p(\mathbb{R}^n)\to L^q(\mathbb{R}^n)\mid \exists w\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n):T(f)=f*w\}.$$

Τα δύο θεωρήματα που ακολουθούν μας δίνουν πληροφορίες για κάποιες ιδιότητες των χώρων $\mathscr{M}^{p,q}$. Το πρώτο δείχνει ότι η κλάση $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ παρουσιάζει ενδιαφέρον μόνο όταν $p\le q$. Όταν $p>q$ τότε περιέχει ένα μόνο στοιχείο, τον τελεστή $T=0$.

Θεώρημα 3.2.3. $\mathscr{M}^{p,q} = \{0\}$ *όταν* $1 \leq q < p < \infty$.

Απόδειξη. Ξεκινάμε δείχνοντας ότι

$$\left\|\tau^h(f) + f\right\|_{L^q} \overset{|h|\to\infty}{\longrightarrow} 2^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q} \tag{3.2.1}$$

για $f \in L^q(\mathbb{R}^n)$ και $0 < q < \infty$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει g συνεχής με συμπαγή φορέα ώστε $\|f - g\|_{L^q} < \varepsilon$. Για αρκετά μεγάλο h έχουμε $(\mathrm{supp}(g) + h) \cap \mathrm{supp}(g) = \emptyset$, επομένως

$$\begin{aligned}\left\|\tau^h(g) + g\right\|_{L^q}^q &= \int_{\mathbb{R}^n} \left|\tau^h(g) + g\right|^p = \int_{\mathbb{R}^n} |g(x-h) + g(x)|^p \, dx \\ &= \int_{\mathrm{supp}(g)} |g(x)|^p \, dx + \int_{\mathrm{supp}(g)+h} |g(x-h)|^p \, dx \\ &= 2\int_{\mathrm{supp}(g)} |g(x)|^p \, dx = 2\|g\|_{L^q}^q .\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\left\|\tau^h(f) + f\right\|_{L^q} &\leq \left\|\tau^h(f) - \tau^h(g)\right\|_{L^q} + \|f - g\|_{L^q} + \left\|\tau^h(g) + g\right\|_{L^q} \\ &= 2\|f - g\|_{L^q} + 2^{\frac{1}{q}} \|g\|_{L^q} \leq 2\varepsilon + 2^{\frac{1}{q}}(\|f\|_{L^q} + \varepsilon).\end{aligned}$$

Άρα $\left\|\tau^h(f) + f\right\|_{L^q} - 2^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q} \leq \varepsilon'$. Όμοια,

$$2^{\frac{1}{q}} \|f\|_{L^q} - \left\|\tau^h(f) + f\right\|_{L^q} \leq \varepsilon'$$

και άρα έπεται η σύγκλιση καθώς $|h| \to \infty$.

Έστω τώρα $T \in \mathscr{M}^{p,q}$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\left\|\tau^h(T(f)) + T(f)\right\|_{L^q} &= \left\|T\left(\tau^h(f)\right) + T(f)\right\|_{L^q} = \left\|T\left(\tau^h(f) + f\right)\right\|_{L^q} \\ &\leq \|T\|_{L^p \to L^q} \left\|\tau^h(f) + f\right\|_{L^p} .\end{aligned}$$

Παίρνοντας $|h| \to \infty$, από την (3.2.1) έχουμε

$$2^{\frac{1}{q}} \|T(f)\|_{L^q} \leq \|T\|_{L^p \to L^q} 2^{\frac{1}{p}} \|f\|_{L^p} .$$

Για $T \neq 0$ και $q < p$ είναι $2^{\frac{q}{p}} \|T\|_{L^p \to L^q} < \|T\|_{L^p \to L^q}$, επομένως η παραπάνω σχέση ισχύει μόνο όταν $T = 0$. □

Το δεύτερο θεώρημα αυτής της ενότητας δίνει πληροφορίες για τον δυϊκό του $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ στην περίπτωση $p \leq q$.

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω* $1 < p \leq q < \infty$ *και* $T \in \mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. *Τότε μπορούμε να ορίσουμε τον* T *στον* $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$, *έτσι ώστε ο ορισμός του να συμπίπτει με τον προηγούμενο στον υπόχωρο* $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ *και να απεικονίζει τον* $L^{q'}(\mathbb{R}^n)$ *στον* $L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ *με νόρμα*

$$\|T\|_{L^{q'} \to L^{p'}} = \|T\|_{L^p \to L^q} .$$

Δηλαδή οι χώροι $\mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$ *και* $\mathscr{M}^{q',p'}(\mathbb{R}^n)$ *είναι ισομετρικά ισόμορφοι.*

Απόδειξη. Έστω $T \in \mathscr{M}^{p,q}(\mathbb{R}^n)$. Από το Θεώρημα 3.1.7 υπάρχει $u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ώστε $T(f) = f * u$ σ.π. Μπορούμε τότε να ελέγξουμε ότι ο συζυγής τελεστής $T^* : L^{q'}(\mathbb{R}^n) \to L^{p'}(\mathbb{R}^n)$ είναι ο τελεστής συνέλιξης με την $\overline{\widetilde{u}}$. Πράγματι,

$$\begin{aligned} \langle f|T^*(g)\rangle &= \langle T(f)|g\rangle = \langle f * u, \bar{g}\rangle = \left\langle u, \widetilde{f} * \bar{g}\right\rangle = \left\langle \widetilde{u}, \widetilde{\widetilde{f} * \bar{g}}\right\rangle = \left\langle \widetilde{u}, f * \widetilde{\bar{g}}\right\rangle \\ &= \langle \bar{g} * \widetilde{u}, f\rangle = \langle f, \bar{g} * \widetilde{u}\rangle = \left\langle f|\overline{\bar{g} * \widetilde{u}}\right\rangle = \left\langle f|g * \overline{\widetilde{u}}\right\rangle. \end{aligned}$$

Άρα $T^*(g) = g * \overline{\widetilde{u}}$ σ.π.

Επίσης είναι εύκολο να δούμε ότι $\overline{f * \overline{\widetilde{u}}} = (\overline{\widetilde{f}} * u)\widetilde{\ }$ και επομένως

$$\left\|f * \overline{\widetilde{u}}\right\|_{L^{p'}} = \left\|\overline{\widetilde{f}} * u\right\|_{L^{p'}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\frac{\|T^*(f)\|_{L^{p'}}}{\|f\|_{L^{q'}}} = \frac{\left\|f * \overline{\widetilde{u}}\right\|_{L^{p'}}}{\|f\|_{L^{q'}}} = \frac{\left\|\overline{\widetilde{f}} * u\right\|_{L^{p'}}}{\left\|\overline{\widetilde{f}}\right\|_{L^{q'}}} = \frac{\left\|T(\overline{\widetilde{f}})\right\|_{L^{p'}}}{\left\|\overline{\widetilde{f}}\right\|_{L^{q'}}},$$

το οποίο μας δίνει $\|T^*\|_{L^{q'}\to L^{p'}} = \|T\|_{L^{q'}\to L^{p'}}$. Καθώς $\|T^*\|_{L^{q'}\to L^{p'}} = \|T\|_{L^p\to L^q}$, έπεται η ζητούμενη σχέση. $\square$

Θα μελετήσουμε τώρα τους χώρους $\mathscr{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$. Είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι, πέραν του ορισμού, δεν έχει βρεθεί κλειστός τύπος παρά μόνο για συγκεκριμένες τιμές του p, όπως βλέπουμε στα ακόλουθα θεωρήματα.

Θεώρημα 3.2.5.

$$\mathscr{M}^{1,1}(\mathbb{R}^n) = \{T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n) \mid T(f) = f * \mu, \mu \text{ πεπερασμένο μιγαδικό μέτρο Borel}\}$$

και $\|T\|_{\mathscr{M}^{1,1}} = \|\mu\|$.

Απόδειξη. Έστω $T(f) = f * \mu$ ένας τελεστής συνέλιξης με κάποιο πεπερασμένο μέτρο Borel μ. Τότε

$$\|T(f)\|_{L^1} \leq \|f * \mu\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^1} \|\mu\|,$$

άρα ο $T : L^1(\mathbb{R}^n) \to L^1(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος και $\|T\|_{L^1\to L^1} \leqslant \|\mu\|$.

Αντίστροφα, έστω $T \in \mathscr{M}^{1,1}$. Τότε υπάρχει $u \in \mathscr{S}'$ ώστε $T(f) = f * u$. Θέτουμε $f_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}e^{-\pi|x/\varepsilon|^2}$. Είναι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left|\varepsilon^{-n}e^{-\pi|x/\varepsilon|^2}\right| dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi|x|^2}dx = 1,$$

δηλαδή οι f_ε είναι ομοιόμορφα φραγμένες στον L_1. Καθώς

$$\|f_\varepsilon * u\|_{L^1} = \|T(f_\varepsilon)\|_{L^1} \leq \|T\|_{L^1\to L^1} \|f_\varepsilon\|_{L^1} \leq \|T\|_{L^1\to L^1},$$

έπεται ότι και οι $f_\varepsilon * u$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στον L_1. Χρησιμοποιώντας τώρα το γεγονός ότι $L^1 \hookrightarrow \{\mu : \mu \text{ πεπερασμένο μέτρο Borel}\} = \mathscr{C}_{00}^*(\mathbb{R}^n)$, έχουμε ότι οι $f_\varepsilon * u$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες στον $\mathscr{C}_{00}^*$, άρα ανήκουν σε κάποιο πολλαπλάσιο της μοναδιαίας μπάλας, το οποίο από το θεώρημα

Banach-Alaoglu είναι συμπαγές με την weak* τοπολογία. Επομένως, υπάρχουν $\varepsilon_k \to 0$ και μέτρο μ ώστε $f_{\varepsilon_k} * u \xrightarrow{w^*} \mu$, δηλαδή για κάθε $g \in \mathscr{C}_{00}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle f_{\varepsilon_k} * u, g\rangle \xrightarrow{\varepsilon_k \to 0} \langle \mu, g\rangle$$

και για τον περιορισμό $g \in \mathscr{S}$ είναι

$$\langle u, f_{\varepsilon_k} * g\rangle = \left\langle u, \widetilde{f_{\varepsilon_k}} * g\right\rangle = \langle f_{\varepsilon_k} * u, g\rangle \xrightarrow{\varepsilon_k \to 0} \langle \mu, g\rangle .$$

Θα δείξουμε τώρα ότι $f_{\varepsilon_k} * g \xrightarrow{\mathscr{S}} g$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (2.1.2) και θέτοντας $\partial^\beta g = h \in \mathscr{S}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\partial^\beta (f_{\varepsilon_k} * g - g)(x) &= (f_{\varepsilon_k} * \partial^\beta g - \partial^\beta g)(x) = (f_{\varepsilon_k} * h - h)(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon_k}(y) h(x-y)dy - h(x)\int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon_k}(y)dy\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon_k}(y)\left(h(x-y) - h(x)\right)dy.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\left|x^\alpha \partial^\beta (f_{\varepsilon_k} * g - g)(x)\right| &\le \int_{\mathbb{R}^n} f_{\varepsilon_k}(y)\left|x^\alpha(\tau^y h - h)(x)\right| dy\\ &\le 2\rho_{a,0}(h)\int_{|y|>\delta} f_{\varepsilon_k}(y)dy + \int_{|y|\le\delta} f_{\varepsilon_k}(y)\left|x^\alpha(\tau^y h - h)(x)\right| dy\\ &= 2\rho_{a,0}(h)\int_{|z|>\frac{\delta}{\varepsilon_k}} e^{-\pi|z/\varepsilon|^2}dz + \int_{|z|\le\frac{\delta}{\varepsilon_k}} e^{-\pi|z/\varepsilon|^2}\left|x^\alpha(\tau^{\varepsilon_k z} h - h)(x)\right| dz\\ &\xrightarrow{\varepsilon_k \to 0} 0\end{aligned}$$

καθώς $\tau^{\varepsilon_k z} h \xrightarrow{\varepsilon_k \to 0} h$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\langle u, f_{\varepsilon_k} * g\rangle \xrightarrow{\varepsilon_k \to 0} \langle u, g\rangle$ και έπεται ότι $\mu = u$.

Μένει να δείξουμε ότι $\|T\|_{\mathscr{M}^{1,1}} = \|\mu\|$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz το συναρτησοειδές $\langle \mu, g\rangle$ έχει νόρμα $\|\mu\|$ στον $\mathscr{C}_{00}(\mathbb{R}^n)$ και από την σχέση

$$\langle f_{\varepsilon_k} * u, g\rangle \xrightarrow{\varepsilon_k \to 0} \langle \mu, g\rangle$$

παίρνουμε

$$|\langle \mu, g\rangle| \le \lim_{\varepsilon_k \to 0}\int_{\mathbb{R}^n} |(f_{\varepsilon_k} * u)(x)|\,|g(x)|\,dx \le \lim_{\varepsilon_k \to 0} \|g\|_{L^\infty}\|f_{\varepsilon_k} * u\|_{L^1} \le \|g\|_{L^\infty}\|T\|_{L^1 \to L^1}.$$

Επομένως, $\|\mu\| \le \|T\|_{L^1 \to L^1}$.

Αντίστροφα, όπως έχουμε ήδη δεί, $\|T(f)\|_{L^1} = \|f * u\|_{L^1} = \|f * \mu\|_{L^1} \le \|\mu\|\,\|f\|_{L^1}$, άρα $\|T\|_{L^1 \to L^1} \le \|\mu\|$. □

Για την περίπτωση $p = 2$ έχουμε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο δείχνει ότι οι $T \in \mathscr{M}^{2,2}$ είναι ακριβώς αυτοί που δίνονται ως τελεστές συνέλιξης με $u \in \mathscr{S}'$ που έχουν μετασχηματισμό Fourier μια L^∞-συνάρτηση.

Θεώρημα 3.2.6.

$$\mathscr{M}^{2,2}(\mathbb{R}^n) = \{T : L^2(\mathbb{R}^n) \to L^2(\mathbb{R}^n) \mid T(f) = f * u, u \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \widehat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)\}$$

και $\|T\|_{\mathscr{M}^{2,2}} = \|\widehat{u}\|_{L^\infty}$.

Απόδειξη. Έστω $T(f) = f * u$ με $\widehat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Τότε,

$$\|T(f)\|_{L^2} = \|f * u\|_{L^2} \overset{(*)}{=} \left\|\widehat{f * u}\right\|_{L^2} = \left\|\widehat{f} \cdot \widehat{u}\right\|_{L^2} \leq \|\widehat{u}\|_{L^\infty} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} \overset{(*)}{=} \|\widehat{u}\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2},$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα Plancherel. Επομένως ο T είναι φραγμένος, με

$$\|T\|_{L^2 \to L^2} \leq \|\widehat{u}\|_{L^\infty}.$$

Αντίστροφα, έστω $T(f) = f * u$ φραγμένος στον L^2. Θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{u}$ είναι φραγμένη συνάρτηση. Έστω $\varphi_r \in \mathscr{C}_0^\infty$ με $\operatorname{supp}(\varphi_r) \subseteq B(0, 2r)$ και $\varphi_r|_{B(0,r)} = \mathbb{1}$ για κάθε $r > 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\varphi_r \widehat{u} = ((\varphi_r)^\vee * u)\widehat{\ } = T(\varphi_r^\vee)\widehat{\ } \in L^2$$

επομένως, σε κάθε $B(0, r)$ έχουμε $\widehat{u} = \varphi_r \widehat{u} \in L^2$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι $\widehat{u} \in L^2_{\text{loc}}$. Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\|T\|^2_{L^2 \to L^2} - |\widehat{u}(x)|^2\right) |f(x)|^2 \, dx \geq 0 \tag{3.2.2}$$

για κάθε $f \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ με συμπαγή $\operatorname{supp}(f)$.

Πράγματι, καθώς η f έχει συμπαγή φορέα, υπάρχει r ώστε $\operatorname{supp}(f) \subseteq B(0, r)$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f\widehat{u}|^2 \, dx = \int_{B(0,r)} |f\widehat{u}|^2 \, dx \leq \|f\|_{L^\infty} \int_{B(0,r)} |\widehat{u}|^2 \, dx < \infty,$$

το οποίο μας δίνει ότι $f\widehat{u} \in L^2$. Από την ταυτότητα Plancherel έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{u}(x)|^2 |f(x)|^2 \, dx = \|\widehat{u} f\|^2_{L^2} = \left\|\widehat{T(f^\vee)}\right\|^2_{L^2} = \|T(f^\vee)\|^2_{L^2} \leq \|T\|^2_{L^2 \to L^2} \|f^\vee\|^2_{L^2} \\ = \|T\|^2_{L^2 \to L^2} \|f\|^2_{L^2} = \|T\|^2_{L^2 \to L^2} \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^2 \, dx,\end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει τη ζητούμενη σχέση.

Θέτουμε τώρα $f(x) = (2r)^{-\frac{n}{2}} \mathbb{1}_{B(y,r)}(x)$ για κάθε $r > 0$ και $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις f ανήκουν στον $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ και έχουν συμπαγή φορέα, άρα ικανοποιούν την (3.2.2). Υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned}0 &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left(\|T\|^2_{L^2 \to L^2} - |\widehat{u}(x)|^2\right) |f(x)|^2 \, dx = \int_{B(y,r)} (2r)^{-n} \left(\|T\|^2_{L^2 \to L^2} - |\widehat{u}(x)|^2\right) dx \\ &= \frac{1}{|B(y,r)|} \int_{B(y,r)} \left(\|T\|^2_{L^2 \to L^2} - |\widehat{u}(x)|^2\right) dx \xrightarrow{r \to 0} \|T\|^2_{L^2 \to L^2} - |\widehat{u}(y)|^2\end{aligned}$$

για σχεδόν κάθε y. Για τη σύγκλιση χρησιμοποιήσαμε το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για την $\|T\|^2_{L^2 \to L^2} - |\widehat{u}(x)|^2$ η οποία είναι L^1_{loc} καθώς έχουμε δείξει ότι η $\widehat{u}(x)$ είναι L^2_{loc}.

Υπενθυμίζουμε ότι σύμφωνα με το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue, αν $g \in L^1_{\text{loc}}$ ισχύει

$$\frac{1}{|B(y,r)|}\int_{B(y,r)} g(x)dx \xrightarrow{r\to 0} g(y)$$

για σχεδόν κάθε y. Δείξαμε λοιπόν ότι $\|T\|^2_{L^2\to L^2} - |\widehat{u}(y)|^2 \geq 0$ για σχεδόν κάθε y, από το οποίο συμπεραίνουμε ότι $\|\widehat{u}\|_{L^\infty} \leq \|T\|_{L^2\to L^2}$ και άρα $\widehat{u} \in L^\infty$.

Στο ευθύ της απόδειξης είχαμε δείξει ότι $\|T\|_{L^2\to L^2} \leq \|\widehat{u}\|_{L^\infty}$. Τελικά έπεται ισότητα. □

3.3 Πολλαπλασιαστές Fourier

Στην προηγούμενη ενότητα χαρακτηρίσαμε τους τελεστές συνέλιξης που απεικονίζουν τον L^2 στον L^2. Θα μελετήσουμε τώρα τους χώρους $\mathscr{M}^{p,p}$ για γενικό p. Θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα παρεμβολής Riesz-Thorin, το οποίο παραθέτουμε εδώ.

Θεώρημα 3.3.1 (θεώρημα Riesz-Thorin). *Έστω $1 \leq p_0, p_1, q_0, q_1 \leq \infty$ και τελεστής T ώστε*

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_{L^{q_0}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|T\|_{L^{p_0}\to L^{q_0}} \|f\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}^n)}\\ \|T(f)\|_{L^{q_1}(\mathbb{R}^n)} &\leq \|T\|_{L^{p_1}\to L^{q_1}} \|f\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}^n)}\,.\end{aligned}$$

Τότε, αν ο $0 < \vartheta < 1$ και οι p_0, p_1, q_0, q_1 ικανοποιούν τις σχέσεις

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\vartheta}{p_0} + \frac{\vartheta}{p_1} \quad \textit{και} \quad \frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{q_0} + \frac{\vartheta}{q_1},$$

ισχύει

$$\|T(f)\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq \|T\|^{1-\vartheta}_{L^{p_0}\to L^{q_0}} \|T\|^{\vartheta}_{L^{p_1}\to L^{q_1}} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Αν $1 < p < 2$ και $T \in \mathscr{M}^{p,p}(\mathbb{R}^n)$ τότε από το Θεώρημα 3.2.4 ο T απεικονίζει επίσης τον $L^{p'}$ στον $L^{p'}$. Από το Θεώρημα 3.3.1 έπεται ότι ο T απεικονίζει τον L^2 στον L^2. Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.2.6 ο T είναι τελεστής συνέλιξης με μια ήπια κατανομή που ο μετασχηματισμός Fourier της είναι φραγμένη συνάρτηση. Μπορούμε τώρα να ορίσουμε την κλάση $\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ των πολλαπλασιαστών Fourier για $1 \leq p < \infty$.

Ορισμός 3.3.2 (πολλαπλασιαστές Fourier). Έστω $1 \leq p < \infty$. Ορίζουμε τον χώρο των L^p *πολλαπλασιαστών Fourier* $\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ ως τον χώρο όλων των φραγμένων συναρτήσεων m στον $\mathbb{R}^n$ για τις οποίες ο τελεστής

$$T_m(f) = (\widehat{f}m)^\vee, \qquad f \in \mathscr{S}$$

είναι φραγμένος στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. Ορίζουμε τη νόρμα της m στον $\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ θέτοντας

$$\|m\|_{\mathscr{M}_p} = \|T_m\|_{\mathscr{M}^{p,p}} = \|T_m\|_{L^p\to L^p}\,.$$

Από τα αποτελέσματα της προηγούμενης ενότητας προκύπτουν τα παρακάτω.

Πρόταση 3.3.3. (i) *$m \in \mathscr{M}_p$ αν και μόνο αν $T_m \in \mathscr{M}^{p,p}$.*

(ii) *Για* $1 < p < \infty$, $m \in \mathscr{M}_p$ *αν και μόνο αν* $m \in \mathscr{M}_{p'}$.

(iii) $\mathscr{M}_1(\mathbb{R}^n) = \{\widehat{\mu} \mid \mu$ *πεπερασμένο μέτρο Borel*$\}$.

(iv) $\mathscr{M}_2(\mathbb{R}^n) = L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. (i) Πράγματι, για το ευθύ έχουμε ότι ο T_m είναι φραγμένος στον L^p και μετατίθεται με τις μετατοπίσεις, καθώς

$$\begin{aligned} T_m(\tau^y(f))(x) &= (\widehat{\tau^y f} m)^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\tau^y f}(z) m(z) e^{2\pi i \langle z, x\rangle} dz \\ &\overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(z) e^{-2\pi i\langle z,y\rangle} m(z) e^{-2\pi i \langle z,x\rangle} dz = \int_{\mathbb{R}^n} (\widehat{f}m)(z) e^{2\pi i\langle z, x-y\rangle} dz \\ &= (\widehat{f}m)^\vee(x-y) = T_m(x-y) = \tau^y\left(T_m(x)\right), \end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την $\widehat{\tau^y f}(\xi) = \widehat{f}(x) e^{-2\pi i\langle \xi, y\rangle}$.

Για το αντίστροφο τώρα, $T_m \in \mathscr{M}^{p,p}$ δηλαδή ο T_m είναι φραγμένος στον L^p και έπεται ότι $m \in \mathscr{M}_p$ και ισχύει $\|m\|_{\mathscr{M}_p} = \|m\|_{\mathscr{M}_{p'}}$.

(ii) Άμεσο από το Θεώρημα 3.2.4.

(iii) Πράγματι, από το Θεώρημα 3.2.5 έχουμε $(\widehat{f}m)^\vee = T_m(f) = f * \mu$ άρα $\widehat{f}m = \widehat{f*\mu} = \widehat{f}\cdot\widehat{\mu}$.

(iv) Πράγματι, από το Θεώρημα 3.2.6 έχουμε $m = \widehat{u} \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Riesz-Thorin έχουμε επίσης:

Πρόταση 3.3.4. *Για* $1 \le p \le q \le 2$ *ισχύει ο εγκλεισμός*

$$\mathscr{M}_1 \subseteq \mathscr{M}_p \subseteq \mathscr{M}_q \subseteq \mathscr{M}_2 = L^\infty$$

και πιο συγκεκριμένα

$$\|m\|_{\mathscr{M}_q} \le \|m\|_{\mathscr{M}_p}. \tag{3.3.1}$$

Απόδειξη. Για $1 \le p \le q \le 2$ είναι εύκολο να δούμε ότι $1 \le p \le q \le 2 \le q' \le p'$. Καθώς το q βρίσκεται ανάμεσα στα p και p', υπάρχει $0 < \vartheta < 1$ ώστε $\frac{1}{q} = \frac{1-\vartheta}{p} + \frac{\vartheta}{p'}$.

Έστω τώρα $m \in \mathscr{M}_p$, δηλαδή ο T_m είναι φραγμένος τελεστής από τον L^p στον L^p. Από την Πρόταση 3.3.3 (ii) έχουμε ότι ο T_m είναι και φραγμένος τελεστής από τον $L^{p'}$ στον $L^{p'}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Riesz-Thorin παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|m\|_{\mathscr{M}_q} &= \|T_m\|_{L^q\to L^q} \le \|T_m\|^{1-\vartheta}_{L^p\to L^p} \|T_m\|^{\vartheta}_{L^{p'}\to L^{p'}} \\ &= \|m\|^{1-\vartheta}_{\mathscr{M}_p} \|m\|^{\vartheta}_{\mathscr{M}_{p'}} = \|m\|_{\mathscr{M}_p}. \end{aligned}$$

Από την $\|m\|_{\mathscr{M}_q} \le \|m\|_{\mathscr{M}_p}$ έπεται ότι $m \in \mathscr{M}_q$, δηλαδή έχουμε τον ζητούμενο εγκλεισμό. □

Θεώρημα 3.3.5. *Για κάθε* $1 \le p < \infty$ *ο* $\left(\mathscr{M}_p, \|\cdot\|_{\mathscr{M}_p}\right)$ *είναι χώρος Banach.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 3.3.3 (ii) αν ο $\mathscr{M}_p$ είναι χώρος Banach τότε και ο $\mathscr{M}_{p'}$ είναι χώρος Banach. Αρκεί λοιπόν να εξετάσουμε την περίπτωση $1 \leq p \leq 2$.

Έστω m_n βασική ακολουθία στον $\mathscr{M}_p$ και $\varepsilon > 0$. Από την (3.3.1) έχουμε

$$\|m_n - m_k\|_{L^\infty} = \|m_n - m_k\|_{\mathscr{M}_2} \leq \|m_n - m_k\|_{\mathscr{M}_p} < \varepsilon$$

για κάθε $n, k > N$, για κατάλληλο N. Άρα η (m_n) είναι βασική ακολουθία στον L^∞, επομένως συγκλίνει σε κάποια $m \in L^\infty$.

Έστω τώρα $f \in \mathscr{S}$. Θέτουμε

$$f_n(\xi) = \widehat{f}(\xi) m_n(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle}.$$

Καθώς $\|m_n\|_{L^\infty} \to \|m\|_{L^\infty} < \infty$ έχουμε $|m_n(\xi)| \to |m(\xi)|$ για κάθε ξ και $|m_n(\xi)| \leq C$ για κάποια σταθερά $C < \infty$. Άρα $f_n(\xi) \to \widehat{f}(\xi) m(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle}$ και

$$|f_n(\xi)| \leq |\widehat{f}(\xi)|\, |m_n(\xi)| \leq C |\widehat{f}(\xi)| \in L^1.$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$T_{m_n}(f)(x) = (\widehat{f} m_n)^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) m_n(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi \to \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) m(\xi) e^{2\pi i \langle x, \xi \rangle} d\xi = T_m(f)(x).$$

Καθώς η (m_n) είναι Cauchy στον $\mathscr{M}_p$ έπεται ότι είναι φραγμένη, άρα $\liminf_{n\to\infty} \|m\|_{\mathscr{M}_p} < \infty$. Με βάση τα τελευταία δύο αποτελέσματα, το λήμμα Fatou μας δίνει

$$\begin{aligned} \|T_m(f)\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}^n} |T_m(f)|^p \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \liminf_{n\to\infty} |T_{m_n}(f)|^p \, dx \leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\mathbb{R}^n} |T_{m_n}(f)|^p \, dx \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \|T_{m_n}\|_{L^p \to L^p}^p \int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p \, dx = \liminf_{n\to\infty} \|m_n\|_{\mathscr{M}_p}^p \|f\|_{L^p} . \end{aligned}$$

Επομένως $\|m\|_{\mathscr{M}_p} \leq \liminf_{n\to\infty} \|m_n\|_{\mathscr{M}_p}$ και έπεται ότι $m \in \mathscr{M}_p$.

Επαναλαμβάνοντας την ίδια διαδικασία για την $(m_n - m_k)_n$ για $n, k > N$ παίρνουμε $\|m_k - m\|_{\mathscr{M}_p} \leq \liminf_{n\to\infty} \|m_n - m_k\|_{\mathscr{M}_p} < \varepsilon$ και συμπεραίνουμε ότι $m_k \xrightarrow{\|\cdot\|_{\mathscr{M}_p}} m$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μετασχηματισμός Hilbert

4.1 Ορισμός και βασικές ιδιότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο κάνουμε μια σύντομη αναφορά στον μετασχηματισμό Hilbert.

Ορισμός 4.1.1. Ορίζουμε τον *μετασχηματισμό Hilbert* ως

$$H(f)(x) = \left(\widehat{f}(\xi)(-i\,\mathrm{sgn}\,\xi)\right)^{\vee}(x)\ ,\ f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}),$$

όπου $\mathrm{sgn}\,\xi = \begin{cases} 1 & , \quad \xi > 0 \\ 0 & , \quad \xi = 0 \\ -1 & , \quad \xi < 0 \end{cases}.$

Θα χρειαστούμε κάποιες βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Hilbert. Ξεκινάμε αποδεικνύοντας την ταυτότητα

$$H(f)^2 = f^2 + 2H(fH(f)) \tag{4.1.1}$$

η οποία ισχύει για κάθε $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Παρατηρούμε πρώτα ότι $\widehat{f} * \widehat{h} = \widehat{fh}$ για $f, h \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\widehat{f * h}(\xi) &= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(y)e^{-2\pi i x\xi}dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}} f(x-y)h(y)e^{-2\pi i(x-y)\xi}e^{-2\pi i y\xi}dy\,dx \\
&= \int_{\mathbb{R}} h(y)\left(\int_{\mathbb{R}} f(x-y)e^{-2\pi i(x-y)\xi}dx\right)\,e^{-2\pi i y\xi}dy \\
&= \widehat{f}(\xi)\widehat{h}(\xi).
\end{aligned}$$

Θέτουμε τώρα $g(x) = -i\,\mathrm{sgn}\,x$ και παρατηρούμε ότι

$$g(y)g(x-y) = 1 + g(x)g(y) + g(x)g(x-y)$$

για κάθε $x, y \neq 0$. Πράγματι, η ισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την

$$-\operatorname{sgn}(y)\operatorname{sgn}(x-y) = 1 - sgn(x)\operatorname{sgn}(y) - \operatorname{sgn}(x)\operatorname{sgn}(x-y),$$

δηλαδή την

$$(\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(y))\operatorname{sgn}(x-y) = 1 - sgn(x)\operatorname{sgn}(y) = \operatorname{sgn}(x)(\operatorname{sgn}(x) - \operatorname{sgn}(y)),$$

και το αποτέλεσμα έπεται αν παρατηρήσουμε ότι $\operatorname{sgn}(x-y) = \operatorname{sgn}(x)$ όταν $\operatorname{sgn}(x) \neq \operatorname{sgn}(y)$. Με βάση τις δύο αυτές ιδιότητες γράφουμε

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 2H(fH(f))\right)^{\wedge}(x) &= \widehat{f^2}(x) + 2\widehat{H}(fH(f))(x) = \widehat{ff}(x) + 2g(x)\widehat{fH(f)}(x) \\
&= (\widehat{f} * \widehat{f})(x) + 2g(x)(\widehat{f} * \widehat{H(f)})(x) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{f}(x-y)dy + 2g(x)\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{f}(x-y)g(x-y)dy \qquad (4.1.2) \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{f}(x-y)dy + 2g(x)\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x-y)\widehat{f}(y)g(y)dy \qquad (4.1.3)
\end{aligned}$$

και παίρνοντας το ημιάθροισμα των (4.1.2), (4.1.3) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(f^2 + 2H(fH(f))\right)^{\wedge}(x) &= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{f}(x-y)\left(1 + g(x)g(x-y) + g(x)g(y)\right)dy \\
&= \int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(y)\widehat{f}(x-y)g(y)g(x-y)dy,
\end{aligned}$$

δηλαδή

$$(\widehat{H(f)} * \widehat{H(f)})(x) = (H(f)^2)^{\wedge}(x).$$

Η ζητούμενη σχέση έπεται παίρνοντας αντίστροφους μετασχηματισμούς Fourier.

4.2 L^p-φράγματα για τον μετασχηματισμό Hilbert

Θα δείξουμε ότι, για κάθε $1 < p < \infty$, ο μετασχηματισμός Hilbert είναι φραγμένος τελεστής από τον L^p στον L^p.

Θεώρημα 4.2.1. *Για κάθε* $1 < p < \infty$ *και* $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ *ισχύει*

$$\|H(f)\|_{L^p} \leq 2\max\left\{p, \frac{p}{p-1}\right\}\|f\|_{L^p}.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα: αρχικά για την περίπτωση $p = 2^n$, στη συνέχεια για $p \geq 2$ και τέλος για $1 \leq p < 2$.

(α) Ξεκινάμε με το πρώτο βήμα. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Για $p = 2$ χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Plancherel έχουμε

$$\|H(f)\|_{L^2} = \left\|\widehat{H(f)}\right\|_{L^2} = \left\|\widehat{f}(x)(-i\operatorname{sgn} x)\right\|_{L^2} = \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} = \|f\|_{L^2}.$$

Για το επαγωγικό βήμα έστω ότι ισχύει η ανισότητα

$$\|H(f)\|_{L^{2^k}} \leq (2^k - 1)\|f\|_{L^{2^k}}.$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\|H(f)\|_{L^{2^{k+1}}}^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}} |H(f)|^{2^{k+1}}\,dx\right)^{2^{-k}} = \left(\int_{\mathbb{R}} \left|H(f)^2\right|^{2^k}\,dx\right)^{2^{-k}} \\
&= \left\|H(f)^2\right\|_{L^{2^k}} \leq \left\|f^2\right\|_{L^{2^k}} + 2\,\|H(f(H(f)))\|_{L^{2^k}} \\
&\leq \|f\|_{L^{2^{k+1}}}^2 + 2(2^k-1)\,\|fH(f)\|_{L^{2^k}} \\
&\leq \|f\|_{L^{2^{k+1}}}^2 + 2(2^k-1)\,\left\|f^2\right\|_{L^{2^k}}^{\frac{1}{2}} \left\|H(f)^2\right\|_{L^{2^k}}^{\frac{1}{2}} \\
&= \|f\|_{L^{2^{k+1}}}^2 + 2(2^k-1)\,\|f\|_{L^{2^{k+1}}} \|H(f)\|_{L^{2^{k+1}}}\,,
\end{aligned}$$

όπου για τις ανισότητες χρησιμοποιήσαμε την (4.1.1), την επαγωγική υπόθεση και την ανισότητα Cauchy-Schwarz αντίστοιχα. Έπεται ότι

$$\|H(f)\|_{L^{2^{k+1}}}^2 - 2(2^k-1)\,\|f\|_{L^{2^{k+1}}} \|H(f)\|_{L^{2^{k+1}}} - \|f\|_{L^{2^{k+1}}}^2 \leq 0,$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{\|H(f)\|_{L^{2^{k+1}}}^2}{\|f\|_{L^{2^{k+1}}}^2} - 2(2^k-1)\frac{\|H(f)\|_{L^{2^{k+1}}}}{\|f\|_{L^{2^{k+1}}}} - 1 \leq 0.$$

Λύνοντας τη δευτεροβάθμια εξίσωση παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\frac{\|H(f)\|_{L^{2^{k+1}}}}{\|f\|_{L^{2^{k+1}}}} &\leq 2^k - 1 + \sqrt{(2^k-1)^2+1} = 2^k - 1 + \sqrt{2^{2k} - 2^k + 2} \\
&\leq 2^k - 1 + \sqrt{2^{2k}} = 2^{k+1} - 1.
\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι ο H είναι φραγμένος από τον $L^{2^{k+1}}$ στον $L^{2^{k+1}}$ με

$$\|H(f)\|_{L^{2^{k+1}}} \leq (2^{k+1}-1)\,\|f\|_{L^{2^{k+1}}}.$$

Έπεται ότι

$$\|H(f)\|_{L^{2^n}} \leq (2^n-1)\,\|f\|_{L^{2^n}}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

(β) Για το δεύτερο βήμα, έστω $p \geq 2$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $p \neq 2^n$ για κάθε n, και επιλέγουμε $k \in \mathbb{N}$ ώστε $2^k < p < 2^{k+1}$. Γράφουμε $\frac{1}{p} = \frac{\vartheta}{2^k} + \frac{1-\vartheta}{2^{k+1}}$ για κατάλληλο $0 < \vartheta < 1$ (παρατηρήστε ότι $2^{k+1} = p(\vartheta+1)$). Καθώς ο H είναι φραγμένος τελεστής από τον L^{2^k} στον L^{2^k} και από τον $L^{2^{k+1}}$ στον $L^{2^{k+1}}$, εφαρμόζοντας το θεώρημα Riesz-Thorin παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|H\|_{L^p \to L^p} &\leq \|H\|_{L^{2^k} \to L^{2^k}}^{\vartheta} \|H\|_{L^{2^{k+1}} \to L^{2^{k+1}}}^{1-\vartheta} \\
&\leq (2^k-1)^{\vartheta}(2^{k+1}-1)^{1-\vartheta} \leq 2^{k\vartheta} 2^{(k+1)(1-\vartheta)} \\
&= 2^{k+1} 2^{-\vartheta} = (\vartheta+1) 2^{-\vartheta} p \leq (1+1) 2^{-0} p = 2p.
\end{aligned}$$

Έτσι, έχουμε δείξει ότι $\|H(f)\|_{L^p} \leq 2p\,\|f\|_{L^p}$ για κάθε $p \geq 2$.

(γ) Για το τρίτο βήμα θα αποδείξουμε πρώτα ότι $H^* = -H$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα Parseval υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\langle f|H^*(g)\rangle &= \langle H(f)|g\rangle = \langle H(f),\bar g\rangle = \left\langle \widehat{H}(f),\overline{\widehat{g}}\right\rangle \\ &= \left\langle \widehat{f}(x)(-i\operatorname{sgn}x),\overline{\widehat{g}(x)}\right\rangle = \left\langle \widehat{f}(x),\overline{-(-i\operatorname{sgn}x)\widehat{g}(x)}\right\rangle \\ &= \left\langle \widehat{f},\overline{-\widehat{H}(g)}\right\rangle = \left\langle f,\overline{-H(g)}\right\rangle = \langle f|-H(g)\rangle\,.\end{aligned}$$

Έστω τώρα τυχόν $1<p<2$. Παρατηρούμε ότι ο συζυγής εκθέτης p' του p είναι μεγαλύτερος από 2, και εφαρμόζοντας το (β) έχουμε

$$\|H\|_{L^{p'}\to L^{p'}} \leq 2p'.$$

Έπεται ότι

$$\|H\|_{L^p\to L^p} = \|H^*\|_{L^p\to L^p} = \|H\|_{L^{p'}\to L^{p'}} \leq 2p' = \frac{2p}{p-1}.$$

Έτσι, έχουμε δείξει ότι $\|H(f)\|_{L^p} \leq 2\frac{p}{p-1}\|f\|_{L^p}$ για κάθε $p<2$. □

Πόρισμα 4.2.2. *Για κάθε* $1<p<\infty$ *και* $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R})$ *ισχύει*

$$\left\|\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{(0,\infty)}\right)^{\vee}\right\|_{L^p} \leq 4\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}\|f\|_{L^p}\,.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\neq 0$ ισχύει $\operatorname{sgn}x = 2\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)-1$. Επομένως,

$$\widehat{f}(x)(-i\operatorname{sgn}x) = -i\widehat{f}(x)(2\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)-1) \text{ για σ.κ. } x.$$

Από αυτή τη σχέση παίρνουμε

$$H(f) = \left(\widehat{f}(x)(-i\operatorname{sgn}x)\right)^{\vee} = -i\left(\widehat{f}(x)(2\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)-1)\right)^{\vee} = -2i\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{(0,\infty)}\right)^{\vee} + if.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{(0,\infty)}\right)^{\vee}\right\|_{L^p} &= \frac12\|H(f)-if\|_{L^p} \leq \frac12\|H(f)\|_{L^p} + \frac12\|f\|_{L^p} \\ &\leq \left(\max\left\{p,\frac{p}{p-1}\right\}+\frac12\right)\|f\|_{L^p} \\ &\leq 2\max\left\{p,\frac{p}{p-1}\right\}\|f\|_{L^p} \\ &\leq 4\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}\|f\|_{L^p}\,,\end{aligned}$$

όπου για την τελευταία σχέση χρησιμοποιήσαμε την

$$\max\left\{p,\frac{p}{p-1}\right\} = \begin{cases} p & , \quad p\geq 2 \\ \frac{p}{p-1} & , \quad p<2\end{cases} \leq \begin{cases} p & , \quad p\geq 2 \\ \frac{2}{p-1} & , \quad p<2\end{cases} \leq 2\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}.$$

□

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Διανυσματικές ανισότητες

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε κατάλληλους τελεστές ώστε να μετατρέψουμε μη γραμμικές ανισότητες της Ανάλυσης Fourier σε γραμμικές ανισότητες για τελεστές σε χώρους Banach. Η βασική ιδέα είναι ότι μπορούμε να δούμε κάποιες μη γραμμικές παραστάσεις, π.χ. μεγιστικές συναρτήσεις και τετραγωνικές συναρτήσεις, ως γραμμικές ποσότητες που παίρνουν τιμές σε κάποιον χώρο Banach. Αυτό μας οδηγεί στη μελέτη τελεστών που παίρνουν τιμές σε χώρους Banach.

Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το εξής. Έστω (X,μ) χώρος μέτρου. Ορίζουμε ως $L^p(X,\ell^2)$ τον χώρο Banach των ακολουθιών $(f_i)_i$ μετρήσιμων συναρτήσεων στον X για τις οποίες ισχύει $\int_X(\sum\limits_i |f_i|^2)^{\frac{p}{2}}d\mu<\infty$. Ορίζουμε τη νόρμα στον $L^p(X,\ell^2)$ ως εξής:

$$\|(f_i)_i\|_{L^p(X,\ell^2)} = \| \, \|(f_i)_i\|_{\ell^2}\|_{L^p(X)} = \left(\int_X \left(\sum_i |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} d\mu\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Έστω τώρα γραμμικός τελεστής T ορισμένος στον $L^p(X,\mu)$ με $f\mapsto T(f)$, όπου $T(f)$ μετρήσιμη σε κάποιον άλλο χώρο μέτρου (Y,ν). Ορίζουμε γραμμικό τελεστή

$$\vec{T}: L^p(X,\ell^2)\to L^p(Y,\ell^2) \ \text{ με } \ \vec{T}\big((f_i)_i\big)=\big(T(f_i)\big)_i.$$

Τότε η μη γραμμική ανισότητα

$$\left\|\left(\sum_i |T(f_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \le C_p \left\|\left(\sum_i |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}$$

μπορεί να γραφτεί ως γραμμική στη μορφή

$$\left\|\vec{T}((f_i)_i)\right\|_{L^p(Y,\ell^2)} \le C_p \left\|(f_i)_i\right\|_{L^p(X,\ell^2)}.$$

5.1 ℓ^2-επεκτάσεις γραμμικών τελεστών

Το θεώρημα που ακολουθεί είναι χαρακτηριστικό και πολύ χρήσιμο στη θεωρία των διανυσματικών ανισοτήτων.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω $0 < p, q < \infty$ και T φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^p(\mathbb{R}^n)$ στον $L^q(\mathbb{R}^n)$. Τότε υπάρχει σταθερά $C_{p,q} > 0$ με $C_{p,q} = 1$ όταν $p \leq q$ ώστε*

$$\left\| \left(\sum_i |T(f_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,q} \, \|T\|_{L^p \to L^q} \left\| \left(\sum_i |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

για κάθε $f_i \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

Λήμμα 5.1.2. *Για κάθε $0 < r < \infty$ υπάρχει σταθερά $C_r > 0$ ώστε για κάθε $w_1, \ldots, w_n \in \mathbb{Z}$ να ισχύει*

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} |z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n|^r \, e^{-\pi |z|^2} dz \right)^{\frac{1}{r}} = C_r \left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{5.1.1}$$

Απόδειξη. Καθώς $\left(\sum_{i=1}^n |w_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} = |w|$ θέτουμε $w_i' = \frac{w_i}{|w|}$ και παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\int_{\mathbb{C}^n} |z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n|^r \, e^{-\pi |z|^2} dz \right)^{\frac{1}{r}} = C_r$$

για διανύσματα w με νόρμα 1.

Επιλέγουμε πίνακα $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ με $AA^* = I_n$ (όπου $A^* = \overline{A^t}$) και $A(\bar{w}) = e_1$. Για την πρώτη συντεταγμένη του διανύσματος Az^t, $z = (z_1, \ldots, z_n)$ έχουμε

$$\begin{aligned} (Az^t)_1 &= \langle Az^t, e_1 \rangle = \langle zA^t, e_1 \rangle = \langle z, A^t e_1 \rangle = \langle z, \overline{A^*} e_1 \rangle = \langle z, \overline{A^* e_1} \rangle = \langle z, \overline{A^{-1} e_1} \rangle \\ &= \langle z, \overline{\overline{w}} \rangle = \langle z, w \rangle = z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n. \end{aligned}$$

Καθώς $AA^* = I_n$, έχουμε $|\det A| = 1$ και $|Az^t| = |z|$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^n$. Θέτουμε $y = Az^t$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{C}^n} |z_1 w_1 + \cdots + z_n w_n|^r \, e^{-\pi |z|^2} dz \right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_{\mathbb{C}^n} \left| (Az^t)_1 \right|^r e^{-\pi \left| Az^t \right|^2} |\det A| \, dz \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{C}^n} |y_1|^r \, e^{-\pi |y|^2} dy \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{C}} \cdots \left(\int_{\mathbb{C}} |y_1|^r \, e^{-\pi |y_1|^2} dy_1 \right) e^{-\pi |y_2|^2} dy_2 \cdots e^{-\pi |y_n|^2} dy_n \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left(\int_{\mathbb{C}} |y_1|^r \, e^{-\pi |y_1|^2} dy_1 \right)^{\frac{1}{r}}. \end{aligned}$$

Γράφουμε τον μιγαδικό y_1 σε πολικές συντεταγμένες ως $y_1 = \rho\cos\vartheta + i\rho\sin\vartheta$ και με την αλλαγή μεταβλητής $dy_1 = \rho d\rho d\vartheta$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{C}} |y_1|^r e^{-\pi|y_1|^2} dy_1\right)^{\frac{1}{r}} &= \left(\int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} \rho^r e^{-\pi\rho^2}\rho d\rho d\vartheta\right)^{\frac{1}{r}} = \left(2\pi\int_0^{\infty} \rho^{r+1} e^{-\pi\rho^2} d\rho\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\pi\int_0^{\infty} x^{\frac{r}{2}} e^{-\pi x} dx\right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_0^{\infty} \left(\frac{y}{\pi}\right)^{\frac{r}{2}} e^{-y} dy\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\frac{\Gamma(\frac{r}{2}+1)}{\pi^{\frac{r}{2}}}\right)^{\frac{1}{r}} =: C_r.
\end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1. Για $q < p$ χρησιμοποιώντας την (5.1.1) για $r = q$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_{i=1}^n |T(f_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q &= \left\|C_q^{-1}\left(\int_{\mathbb{C}^n} |z_1T(f_1)+\cdots+z_nT(f_n)|^q e^{-\pi|z|^2} dz\right)^{\frac{1}{q}}\right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \\
&= C_q^{-q}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{C}^n} |z_1T(f_1)+\cdots+z_nT(f_n)|^q e^{-\pi|z|^2} dzdx \\
&= C_q^{-q}\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |T(z_1f_1+\cdots+z_nf_n)|^q dx e^{-\pi|z|^2} dz \\
&= C_q^{-q}\int_{\mathbb{C}^n} \|T(z_1f_1+\cdots+z_nf_n)\|_{L^q}^q e^{-\pi|z|^2} dz \\
&\le C_q^{-q}\|T\|_{L^p\to L^q}^q \int_{\mathbb{C}^n} \|z_1f_1+\cdots+z_nf_n\|_{L^p}^q e^{-\pi|z|^2} dz \\
&= C_q^{-q}\|T\|_{L^p\to L^q}^q \int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |z_1f_1+\cdots+z_nf_n|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} e^{-\pi|z|^2} dz.
\end{aligned}$$

Θέτουμε $dy = e^{-\pi|z|^2}dz$ και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder για τους εκθέτες $\frac{p}{q}$ και $\left(\frac{p}{q}\right)'$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&= C_q^{-q}\|T\|_{L^p\to L^q}^q \int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |z_1f_1+\cdots+z_nf_n|^p dx\right)^{\frac{q}{p}} 1dy \\
&\le C_q^{-q}\|T\|_{L^p\to L^q}^q \left(\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |z_1f_1+\cdots+z_nf_n|^p dxdy\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{\mathbb{C}^n} 1dy\right)^{\frac{1}{(\frac{p}{q})'}} \\
&= C_q^{-q}\|T\|_{L^p\to L^q}^q \left(\int_{\mathbb{C}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |z_1f_1+\cdots+z_nf_n|^p dx e^{-\pi|z|^2} dz\right)^{\frac{q}{p}} \left(\int_{\mathbb{C}^n} e^{-\pi|z|^2} dz\right)^{\frac{1}{(\frac{p}{q})'}} \\
&= C_q^{-q}\|T\|_{L^p\to L^q}^q \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{C}^n} |z_1f_1+\cdots+z_nf_n|^p e^{-\pi|z|^2} dzdx\right)^{\frac{q}{p}} \\
&= C_q^{-q}\|T\|_{L^p\to L^q}^q \left(\int_{\mathbb{R}^n} C_p^p \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{p}{2}} dx\right)^{\frac{q}{p}} \\
&= C_p^q C_q^{-q}\|T\|_{L^p\to L^q}^q \left\|\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}^q.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \to \infty$ έχουμε την ζητούμενη ανισότητα για $q < p$ με $C_{p,q} = C_p C_q^{-1}$.

Έστω τώρα $q \geq p$. Ακολουθώντας τα ίδια αρχικά βήματα παίρνουμε

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |T(f_i)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q(\mathbb{R}^n)}^q \leq C_q^{-q} \|T\|_{L^p \to L^q}^q \int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |z_1 f_1 + \cdots + z_n f_n|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}} e^{-\pi |z|^2} dz.$$

Θέτουμε $dy = e^{-\pi |z|^2} dz$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski για ολοκληρώματα έχουμε

$$\begin{aligned}
&= C_q^{-q} \|T\|_{L^p \to L^q}^q \left\{ \left(\int_{\mathbb{C}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |z_1 f_1 + \cdots + z_n f_n|^p \, dx \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{p}{q}} \right\}^{\frac{q}{p}} \\
&\leq C_q^{-q} \|T\|_{L^p \to L^q}^q \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{C}^n} \left(|z_1 f_1 + \cdots + z_n f_n|^p \right)^{\frac{q}{p}} dy \right)^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{q}{p}} \\
&= C_q^{-q} \|T\|_{L^p \to L^q}^q \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{C}^n} |z_1 f_1 + \cdots + z_n f_n|^q \, e^{-\pi |z|^2} dz \right)^{\frac{p}{q}} dx \right\}^{\frac{q}{p}} \\
&= C_q^{-q} \|T\|_{L^p \to L^q}^q \left\{ \int_{\mathbb{R}^n} C_q^p \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \right)^{\frac{p}{2}} dx \right\}^{\frac{q}{p}} \\
&= C_q^q C_q^{-q} \|T\|_{L^p \to L^q}^q \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}^q \\
&= \|T\|_{L^p \to L^q}^q \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}^q .
\end{aligned}$$

Παίρνοντας το όριο καθώς το $n \to \infty$ έχουμε την ζητούμενη ανισότητα για $q \geq p$ με $C_{p,q} = 1$ □

5.2 Ιδιάζοντες ολοκληρωτικοί τελεστές με τιμές σε χώρους Banach

Έστω $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και ικανοποιεί τη συνθήκη

(5.2.1)
$$\sup_{R>0} \int_{R \leq |x| \leq 2R} |K(x)| dx = A_1 < \infty.$$

Η (5.2.1) είναι λιγότερο περιοριστική από την

(5.2.2)
$$\sup_{x \in \mathbb{R}^n} |x|^n |K(x)| < \infty,$$

και είναι ισοδύναμη με την

(5.2.3)
$$\sup_{R>0} \frac{1}{R} \int_{|x| \leq R} |K(x)| \, |x| dx < \infty.$$

Υποθέτουμε ότι ο πυρήνας K ικανοποιεί κάποια συνθήκη ομαλότητας. Υπάρχουν τρία είδη τέτοιων συνθηκών: η πρώτη είναι η συνθήκη της κλίσης

$$|\nabla K(x)| \leq A_2 |x|^{-n-1}, \qquad x \neq 0 \tag{5.2.4}$$

η δεύτερη είναι η ασθενέστερη συνθήκη Lipschitz

$$|K(x-y) - K(x)| \leq A_2 \frac{|y|^\delta}{|x|^{n+\delta}}, \quad \text{για } |x| \geq 2|y|, \tag{5.2.5}$$

και η τρίτη είναι η ακόμα ασθενέστερη

$$\sup_{y\neq 0} \int_{|x|\geq 2|y|} |K(x-y) - K(x)| dx = A_2 < \infty \tag{5.2.6}$$

η οποία είναι γνωστή ως συνθήκη του Hörmander. Θεωρούμε μια ήπια κατανομή W η οποία επεκτείνει την K και έχει τη μορφή

$$\langle W, \varphi \rangle = \lim_{j\to\infty} \int_{|x|\geq \delta_j} K(x)\varphi(x) dx \tag{5.2.7}$$

για κάποια ακολουθία $\delta_j \downarrow 0$ καθώς $j \to \infty$. Αποδεικνύεται ότι τέτοιες W υπάρχουν αν και μόνο αν υπάρχει το όριο

$$\lim_{j\to\infty} \int_{1\geq |x|\geq \delta_j} K(x) dx = L. \tag{5.2.8}$$

Το επόμενο θεώρημα είναι μία από τις πιο κλασικές εφαρμογές της θεωρίας Calderón-Zygmund.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω $K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση που είναι ολοκληρώσιμη στα συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και ικανοποιεί τις (5.2.1) και (5.2.6) για κάποιες σταθερές $A_1, A_2 < \infty$. Έστω επίσης $W \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ η οποία ικανοποιεί την (5.2.7). Υποθέτουμε ότι ο τελεστής T της συνέλιξης με την W έχει φραγμένη επέκταση που απεικονίζει τον $L^r(\mathbb{R}^n)$ στον $L^r(\mathbb{R}^n)$ με νόρμα B, για κάποιον $1 < r \leq \infty$. Τότε, για κάθε $1 < p < \infty$ ο T επεκτείνεται σε φραγμένο τελεστή από τον $L^p(\mathbb{R}^n)$ στον $L^p(\mathbb{R}^n)$ με νόρμα*

$$\|T\|_{L^p \to L^p} \leq C_n \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} (A_2 + B),$$

όπου $C_n > 0$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται από τη διάσταση αλλά όχι από το r ή το p.

Σκοπός μας είναι να διατυπώσουμε αντίστοιχο θεώρημα για συναρτήσεις που παίρνουν τιμές σε χώρους Banach. Παρόλο που οι χώροι Banach που μας ενδιαφέρουν περισσότερο είναι οι ℓ_r, $1 \leqslant r \leqslant \infty$, θα θεωρήσουμε $\mathscr{B}$-μετρήσιμες συναρτήσεις $f : (X, \mu) \to \mathscr{B}$ για τυχόντα χώρο Banach, και να αποδείξουμε γενικότερες διανυσματικές ανισότητες.

Ορισμός 5.2.2. Έστω (X, μ) χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου και $\mathscr{B}$ χώρος Banach. Μια συνάρτηση f που είναι ορισμένη στον (X, μ) και παίρνει τιμές στον $\mathscr{B}$ λέγεται $\mathscr{B}$-μετρήσιμη αν υπάρχει μετρήσιμο σύνολο $X_0 \subseteq X$ με $\mu(X \setminus X_0) = 0$ ώστε η εικόνα $f(X_0)$ να περιέχεται σε κάποιον διαχωρίσιμο υπόχωρο $\mathscr{B}_0$ του $\mathscr{B}$ και για κάθε $u^* \in \mathscr{B}^*$ η απεικόνιση

$$x \mapsto \langle u^*, f(x) \rangle$$

να είναι μετρήσιμη. Έπεται τότε ότι η μη αρνητική συνάρτηση $x \mapsto \|f(x)\|_{\mathscr{B}}$ είναι μετρήσιμη.

Για $0 < p \leqslant \infty$ ορίζουμε ως $L^p(X, \mathscr{B})$ τον χώρο των $\mathscr{B}$-μετρήσιμων συναρτήσεων f στον χώρο X που ικανοποιούν την

$$\|f\|_{L^p(X,\mathscr{B})} = \| \, \|f\|_{\mathscr{B}} \|_{L^p(X)} = \left(\int_X \|f(x)\|_{\mathscr{B}}^p \, d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

με την προφανή τροποποίηση στην περίπτωση $p = \infty$. Θέτουμε επίσης $L^p(X) := L^p(X, \mathbb{C})$.

Έστω τώρα $\mathscr{B}_1$ και $\mathscr{B}_2$ δύο χώροι Banach. Συμβολίζουμε με $L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ τον χώρο όλων των φραγμένων γραμμικών τελεστών $T : \mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2$. Θεωρούμε έναν πυρήνα ορισμένο στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, ο οποίος παίρνει τιμές στον $L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$. Δηλαδή, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ο $\overrightarrow{K}(x)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, με

$$\left\| \overrightarrow{K}(x)(a) \right\|_{\mathscr{B}_2} \leq \left\| \overrightarrow{K}(x) \right\|_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} \|a\|_{\mathscr{B}_1}$$

για κάθε $a \in \mathscr{B}_1$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $A < \infty$ τέτοια ώστε

$$\left\| \overrightarrow{K}(x) \right\|_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} \leq A \, |x|^{-n} \tag{5.2.9}$$

για κάθε $x \neq 0$, και επίσης ισχύει η συνθήκη κανονικότητας

$$\sup_{y \neq 0} \int_{|x| \geq 2|y|} \left\| \overrightarrow{K}(x-y) - \overrightarrow{K}(x) \right\|_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} dx \leq A. \tag{5.2.10}$$

Επιπλέον, υποθέτουμε ότι υπάρχει μια ακολουθία $\varepsilon_k \downarrow 0$ καθώς $k \to \infty$ και ένας τελεστής $\vec{K}_0 \in L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ τέτοιος ώστε

$$\lim_{k \to \infty} \left\| \int_{\varepsilon_k \leq |x| \leq 1} \overrightarrow{K}(x) dx - \vec{K}_0 \right\|_{\mathscr{B}_1 \to \mathscr{B}_2} = 0. \tag{5.2.11}$$

Τότε, μπορούμε να ορίσουμε έναν τελεστή $\overrightarrow{T}$ ως

$$\overrightarrow{T}(f)(x) = \lim_{k \to \infty} \int_{\varepsilon_k \leq |y|} \overrightarrow{K}(x-y) f(y) dy.$$

για κάθε $f = \sum_{j=1}^{m} f_j u_j$ όπου $f_j \in \mathscr{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $u_j \in \mathscr{B}_1$.

Παραθέτουμε τώρα χωρίς απόδειξη ένα θεώρημα που γενικεύει το Θεώρημα 5.2.1.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω $\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2$ χώροι Banach. Υποθέτουμε ότι ο πυρήνας $\vec{K} : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to L(\mathscr{B}_1, \mathscr{B}_2)$ ικανοποιεί τις (5.2.9), (5.2.10) και (5.2.11). Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχει $1 < r < \infty$ ώστε ο $\overrightarrow{T}$ να είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^r(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_1)$ στον $L^r(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_2)$. Τότε ο $\overrightarrow{T}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_1)$ στον $L^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_2)$ για κάθε $1 < p < \infty$ και ισχύει*

$$\left\| \overrightarrow{T}(f) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_2)} \leq C_n \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\} \left(A + \left\| \overrightarrow{T} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_1) \to L^r(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_2)} \right) \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_1)}$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_1)$.

Το θεώρημα αυτό επεκτείνεται σε διανύσματα όπως φαίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 5.2.4. *Με τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.3 έπεται ότι*

$$\left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} \left\| \vec{T}(f_i) \right\|^r_{\mathscr{B}_2} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} \left(A + \left\| \vec{T} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_1)\to L^r(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_2)} \right) \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \|f_i\|^r_{\mathscr{B}_1} \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

για κάθε $(f_i)_i \subseteq \mathscr{B}_1$.

Απόδειξη. Ορίζουμε ως $\ell^r(\mathscr{B})$ τον χώρο Banach των $\mathscr{B}$-μετρήσιμων ακολουθιών $(f_i)_i$ με

$$\|(f_i)_i\|_{\ell^r(\mathscr{B})} = \left(\sum_i \|f_i\|^r_{\mathscr{B}} \right)^{\frac{1}{r}} < \infty.$$

Τότε η ζητούμενη σχέση γράφεται ως

$$\left\| \left(\vec{T}(f_i) \right)_i \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^r(\mathscr{B}_2))} \leq C_n \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} \left(A + \left\| \vec{T} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_1)\to L^r(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_2)} \right) \|(f_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^r(\mathscr{B}_1))}.$$

Θέτοντας $\widetilde{T}\left((f_i)_i\right) = \left(\vec{T}(f_i)\right)_i$ αρκεί να δείξουμε ότι ο $\widetilde{T}$ πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.3 για τους χώρους Banach $\ell^r(\mathscr{B}_1)$ και $\ell^r(\mathscr{B}_2)$.

- Ο $\widetilde{T}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^r\left(\mathbb{R}^n, \ell^r(\mathscr{B}_1)\right)$ στον $L^r\left(\mathbb{R}^n, \ell^r(\mathscr{B}_2)\right)$.

Πράγματι για $(f_i)_i \subseteq L^r\left(\mathbb{R}^n, \ell^r(\mathscr{B}_1)\right)$ έχουμε

$$\infty > \|(f_i)_i\|_{L^r(\mathbb{R}^n,\ell^r(\mathscr{B}_1))} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|(f_i)_i\|^r_{\ell^r(\mathscr{B}_1)} \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \|f_i\|^r_{\mathscr{B}_1} \right)^{\frac{1}{r}} \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|f_i\|^r_{\mathscr{B}_1} \right)^{\frac{1}{r}}$$

για κάθε i. Άρα $f_i \in L^r\left(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_1\right)$ για κάθε i και επομένως από υπόθεση $\vec{T}(f_i) \in L^r\left(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_2\right)$ για κάθε i. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\left\| \widetilde{T}\left((f_i)_i\right) \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n,\ell^r(\mathscr{B}_2))} &= \left\| \left(\vec{T}(f_i) \right)_i \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n,\ell^r(\mathscr{B}_2))} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left\| \left(\vec{T}(f_i) \right)_i \right\|^r_{\ell^r(\mathscr{B}_2)} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \left\| \vec{T}(f_i) \right\|^r_{\mathscr{B}_2} \right)^{\frac{1}{r}} = \left(\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \left\| \vec{T}(f_i) \right\|^r_{\mathscr{B}_2} \right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left(\sum_i \left\| \vec{T}(f_i) \right\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_2)} \right)^{\frac{1}{r}}.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\vec{T}(f_i) \in L^r\left(\mathbb{R}^n, \mathscr{B}_2\right)$ για κάθε i και θέτοντας

$$\left\| \vec{T} \right\| := \left\| \vec{T} \right\|_{L^r(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_1)\to L^r(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_2)},$$

έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{T}\left((f_i)_i\right)\right\|_{L^r(\mathbb{R}^n,\ell^r(\mathscr{B}_2))} &\leq \left(\sum_i \left(\left\|\vec{T}\right\| \|f_i\|_{L^r(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_1)}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left\|\vec{T}\right\| \left(\sum_i \|f_i\|^r_{L^r(\mathbb{R}^n,\mathscr{B}_1)}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left\|\vec{T}\right\| \left(\sum_i \int_{\mathbb{R}^n} \|f_i\|^r_{\mathscr{B}_1}\right)^{\frac{1}{r}} \left\|\vec{T}\right\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \sum_i \|f_i\|^r_{\mathscr{B}_1}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left\|\vec{T}\right\| \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|(f_i)_i\|^r_{\ell^r(\mathscr{B}_1)}\right)^{\frac{1}{r}} = \left\|\vec{T}\right\| \|(f_i)_i\|_{L^r(\mathbb{R}^n,\ell^r(\mathscr{B}_1))} < \infty.
\end{aligned}
$$

Θέτουμε τώρα $\widetilde{K}(x)\left((f_i)_i\right) = \left(\vec{K}(x)(f_i)\right)_i$ και έχουμε

$$
\widetilde{T}\left((f_i)_i\right)(x) = \left(\vec{T}(f_i)(x)\right)_i = \left(\lim_{k\to\infty} \int_{\varepsilon_k \leq |y|} \vec{K}(x-y) f_i(y) dy\right)_i
$$

$$
\lim_{k\to\infty} \int_{\varepsilon_k \leq |y|} \left(\vec{K}(x-y) f_i(y)\right)_i dy = \lim_{k\to\infty} \int_{\varepsilon_k \leq |y|} \widetilde{K}(x-y)\left(f_i(y)\right)_i dy.
$$

Θα δείξουμε τώρα ότι για τον $\widetilde{K}$ ισχύουν οι σχέσεις (5.2.9), (5.2.10) και (5.2.11). Για $((f_i)_i) \in \ell^r(\mathscr{B}_1)$ έχουμε

$$
\infty > \|((f_i)_i)\|_{\ell^r(\mathscr{B}_1)} = \left(\sum_i \|f_i\|^r_{\mathscr{B}_1}\right)^{\frac{1}{r}} \geq \left(\|f_i\|^r_{\mathscr{B}_1}\right)^{\frac{1}{r}} = \|f_i\|_{\mathscr{B}_1}
$$

για κάθε i. Άρα $f_i \in \mathscr{B}_1$ για κάθε i και επομένως από υπόθεση $\vec{K}(x)(f_i) \in \mathscr{B}_2$ για κάθε i. Υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
\left\|\widetilde{K}(x)\left((f_i)_i\right)\right\|_{\ell^r(\mathscr{B}_2)} &= \left\|\left(\vec{K}(x)(f_i)\right)_i\right\|_{\ell^r(\mathscr{B}_2)} = \left(\sum_i \left\|\vec{K}(x)(f_i)\right\|^r_{\mathscr{B}_2}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\overset{(*)}{\leq} \left(\sum_i \left(\left\|\vec{K}(x)\right\|_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2} \|f_i\|_{\mathscr{B}_1}\right)^r\right)^{\frac{1}{r}} = \left\|\vec{K}(x)\right\|_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2} \left(\sum_i \|f_i\|^r_{\mathscr{B}_1}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \left\|\vec{K}(x)\right\|_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2} \|((f_i)_i)\|_{\ell^r(\mathscr{B}_1)}
\end{aligned}
$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\vec{K}(x)(f_i) \in \mathscr{B}_2$ για κάθε i. Παίρνοντας supremum πάνω από τις $((f_i)_i)$ με $\ell^r(\mathscr{B}_1)$-νόρμα το πολύ 1, έχουμε

$$
\left\|\widetilde{K}(x)\right\|_{\ell^r(\mathscr{B}_1)\to\ell^r(\mathscr{B}_2)} \leq \left\|\vec{K}(x)\right\|_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}.
$$

Με ακριβώς ανάλογο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι

$$
\left\|\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \widetilde{K}(x) dx\right\|_{\ell^r(\mathscr{B}_1)\to\ell^r(\mathscr{B}_2)} \leq \left\|\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1} \vec{K}(x) dx\right\|_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2}.
$$

Επομένως,

(i) $\left\|\widetilde{K}(x)\right\|_{\ell^r(\mathscr{B}_1)\to\ell^r(\mathscr{B}_2)} \leq \left\|\vec{K}(x)\right\|_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2} < A\,|x|^{-n}$,

(ii) $\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\|\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\widetilde{K}(x)dx\right\|_{\ell^r(\mathscr{B}_1)\to\ell^r(\mathscr{B}_2)} \leq \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\|\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\vec{K}(x)dx\right\|_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2} < \infty$,

και

(iii) $$\sup_{y\neq 0}\int_{|x|\geq 2|y|}\left\|\widetilde{K}(x-y)-\widetilde{K}(x)\right\|_{\ell^r(\mathscr{B}_1)\to\ell^r(\mathscr{B}_2)} dx \leq \sup_{y\neq 0}\int_{|x|\geq 2|y|}\left\|\vec{K}(x-y)-\vec{K}(x)\right\|_{\mathscr{B}_1\to\mathscr{B}_2} dx \leq A. \qquad \square$$

Παραθέτουμε τέλος ένα χρήσιμο αποτέλεσμα που θα αξιοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 8.

Θεώρημα 5.2.5. *Έστω K συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και $W \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε για κάθε $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ να ισχύει*

$$\langle W, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{|x|\geq\varepsilon} K(x)\varphi(x)dx.$$

Υποθέτουμε ότι:

(i) *$\int_{K_0} K(x)dx < \infty$ για κάθε συμπαγές K_0 με $0 \notin K_0$.*

(ii) *$\sup_{y\neq 0}\int_{|x|\geq 2|y|}|K(x-y)-K(x)|\,dx = A < \infty$.*

(iii) *Υπάρχει $1 < r \leq \infty$ ώστε ο τελεστής $T : L^r(\mathbb{R}^n) \to L^r(\mathbb{R}^n)$ με $T(f) = f * W$ να είναι φραγμένος.*

Τότε, για κάθε $1 < p < \infty$ ο τελεστής $T : L^p(\mathbb{R}^n) \to L^p(\mathbb{R}^n)$ είναι φραγμένος με νόρμα

$$\|T\|_{L^p\to L^p} \leq C_n \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}(A + \|T\|_{L^r\to L^r}).$$

5.3 Εφαρμογές και ℓ^r-επεκτάσεις γραμμικών τελεστών

Η επόμενη πρόταση είναι εφαρμογή του Θεωρήματος 5.1.1.

Πρόταση 5.3.1. (i) *Έστω $1 < p < \infty$ και $I_i = (a_i, b_i) \subseteq \mathbb{R}$. Θεωρούμε τον τελεστή $T_i(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i}\right)^{\vee}$. Τότε ισχύει*

$$\left\|\Big(\sum_i |T_i(f_i)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \leq c\max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}\left\|\Big(\sum_i |f_i|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}$$

για κάθε $f_i \in L^p(\mathbb{R})$.

(ii) *Έστω $1 < p < \infty$, $I_{i_j} = (a_{i_j}, b_{i_j}) \subseteq \mathbb{R}$ και $\boldsymbol{I_i} = I_{(i_1,\cdots,i_n)} = I_{i_1}\times\cdots\times I_{i_n}$. Θεωρούμε τον τελεστή $\boldsymbol{T_i}(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}}\right)^{\vee}$. Τότε ισχύει*

$$\left\|\Big(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{T_i}(f_{\boldsymbol{i}})|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \leq c\max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}^n\left\|\Big(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |f_{\boldsymbol{i}}|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}$$

για κάθε $f_{\boldsymbol{i}} = f_{(i_1,\dots,i_n)} \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. (i) Έστω $I=(a,b)$, $T(f)=\left(\widehat{f}\mathbb{1}_I\right)^\vee$ και $E^a(f)(x)=f(x)e^{2\pi i a x}$ Θα δείξουμε ότι

$$T=\frac{i}{2}\left(E^aHE^{-a}-E^bHE^{-b}\right)\ \text{σ.π.}$$

Υπενθυμίζουμε τις ιδιότητες:

- $[e^{2\pi i\langle x,y\rangle}f(x)]^\wedge(\xi)=\tau^y(\widehat{f})(\xi)$
- $e^{-2\pi i\langle \xi,y\rangle}\widehat{f}(\xi)=\widehat{\tau^y f}(\xi)$

και παρατηρούμε ότι

$$e^{2\pi i\langle \xi,y\rangle}f^\vee(\xi)=e^{-2\pi i\langle -\xi,y\rangle}\widehat{f}(-\xi)=\widehat{\tau^y f}(-\xi)=\left(\tau^y f\right)^\vee(\xi).$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
E^aHE^{-a}(f)(\xi) &= E^aH(f(x)e^{-2\pi i a x})(\xi)=E^a\left((f(x)e^{-2\pi i a x})^\wedge(y)(-i\operatorname{sgn} y)\right)^\vee(\xi)\\
&= E^a\left(\tau^{-a}(\widehat{f})(y)(-i\operatorname{sgn} y)\right)^\vee(\xi)=\left(\tau^{-a}(\widehat{f})(y)(-i\operatorname{sgn} y)\right)^\vee(\xi)e^{2\pi i a\xi}\\
&= \left[\tau^a\left(\tau^{-a}(\widehat{f})(y)(-i\operatorname{sgn} y)\right)\right]^\vee(\xi)=\left(\widehat{f}(y)(-i\operatorname{sgn}(y-a))\right)^\vee(\xi).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{i}{2}\left(E^aHE^{-a}-E^bHE^{-b}\right)=\left(\widehat{f}(y)\left[\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(y-a))-(\operatorname{sgn}(y-b))\right]\right)^\vee(\xi),$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}(\operatorname{sgn}(y-a))-(\operatorname{sgn}(y-b)) &= \begin{cases}\frac{1}{2}(-1-(-1))=0 & ,\quad x<a\\ \frac{1}{2}(1-(-1))=1 & ,\quad a<x<b\\ \frac{1}{2}(1-(1))=0,\quad b<x\end{cases}\\
&= \mathbb{1}_{(a,b)}\ \text{για}\ x\neq a,b.
\end{aligned}$$

Είναι λοιπόν

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_i|T_i(f_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} &= \left\|\left(\sum_i\left|\frac{i}{2}\left(E^{a_i}HE^{-a_i}-E^{b_i}HE^{-b_i}\right)(f_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\\
&\leq \left\|\left(\sum_i\left|E^{a_i}HE^{-a_i}(f_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}+\left\|\left(\sum_i\left|E^{b_i}HE^{-b_i}(f_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p},
\end{aligned}$$

όπου η ανισότητα έπεται από την υπογραμμικότητα των ℓ^2 και L^p νορμών. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\left(\sum_i\left|E^{a_i}HE^{-a_i}(f_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} &= \left\|\left(\sum_i\left|HE^{-a_i}(f_i)(x)e^{2\pi i a_i x}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\\
&= \left\|\left(\sum_i\left|H\left(E^{-a_i}(f_i)\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Από την Πρόταση 4.2.1 ο H είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον L^p στον L^p με

$$\|H\|_{L^p\to L^p} \leq 2\max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}.$$

Επομένως, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.1 για την ακολουθία $g_i = E^{-a_i}(f_i)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_i \left|H\left(E^{-a_i}(f_i)\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} &\leq 2\max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}\left\|\left(\sum_i \left|E^{-a_i}(f_i)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \\ &= 2\max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}\left\|\left(\sum_i \left|f_i(x)e^{-2\pi i a_i x}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \\ &= 2\max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}\left\|\left(\sum_i |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Τελικά, συμπεραίνουμε ότι

$$\left\|\left(\sum_i |T_i(f_i)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \leq 4\max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}\left\|\left(\sum_i |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}.$$

(ii) Εφαρμόζουμε το (i) για κάθε μεταβλητή χωριστά. □

Δίνουμε επίσης μια εφαρμογή του Θεωρήματος 5.2.3.

Πρόταση 5.3.2. *Έστω* $1 < p < \infty$. *Ισχύει*

$$\left\|\left(\int_0^\infty \left|(\widehat{f_t}\mathbb{1}_{[t,\infty)})^\vee\right|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}^n \left\|\left(\int_0^\infty |f_t|^2\, dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε τη σχέση αρχικά για την περίπτωση $n = 1$.

Θεωρούμε τον τελεστή $T_t(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{[t,\infty)}\right)^\vee$ για $0 < t < \infty$. Παρατηρούμε ότι

$$T_t(f) = \frac{1}{2}f + \frac{i}{2}E^tHE^{-t}(f) \text{ σ.π.}$$

Πράγματι, από τις $\operatorname{sgn} x = 2\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x) - 1$, $x \neq 0$ και $\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{(a,b)}\right)^\vee = \frac{i}{2}(E^aHE^{-a} - E^bHE^{-b})(f)$ σ.π. παίρνουμε

$$\mathbb{1}_{[t,\infty)} = \mathbb{1}_{(0,\infty)} - \mathbb{1}_{(0,t)} = \frac{1}{2}\operatorname{sgn} x + \frac{1}{2} - \mathbb{1}_{(0,t)},$$

άρα

$$\begin{aligned}\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{[t,\infty)}\right)^\vee &= \frac{i}{2}\left(\widehat{f}(-i\operatorname{sgn} x)\right)^\vee + \frac{1}{2}f - \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{(0,t)}\right)^\vee \\ &= \frac{i}{2}H(f) + \frac{1}{2}f - \frac{i}{2}(H - E^tHE^{-t})(f) = \frac{1}{2}f + \frac{i}{2}E^tHE^{-t}(f).\end{aligned}$$

Για $p = 2$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\int_0^\infty \left| (\widehat{f}_t \mathbb{1}_{[t,\infty)})^\vee \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\| \left\| (\widehat{f}_t \mathbb{1}_{[t,\infty)})^\vee \right\|_{L^2((0,\infty))} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \left\| \frac{1}{2} \left\| f_t \right\|_{L^2((0,\infty))} + \frac{1}{2} \left\| E^t H E^{-t}(f_t) \right\|_{L^2((0,\infty))} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq \frac{1}{2} \left\| \left\| f_t \right\|_{L^2((0,\infty))} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \left\| \left\| E^t H E^{-t}(f_t) \right\|_{L^2((0,\infty))} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \frac{1}{2} \left\| \left(\int_0^\infty |f_t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} + \frac{1}{2} \left\| \left(\int_0^\infty \left| E^t H E^{-t}(f_t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} .
\end{aligned}
$$

Τώρα,

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\int_0^\infty \left| E^t H E^{-t}(f_t) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} &= \left\| \left(\int_0^\infty \left| H(E^{-t}(f_t)) \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}} \int_0^\infty \left| H(E^{-t}(f_t)) \right|^2 dt dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left| H(E^{-t}(f_t)) \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} .
\end{aligned}
$$

Από την Πρόταση 4.2.1,

$$
\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left| H(E^{-t}(f_t)) \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} &\leq 2 \max \left\{ p, \frac{p}{p-1} \right\} \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} \left| E^{-t}(f_t) \right|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \max \left\{ p, \frac{p}{p-1} \right\} \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}} |(f_t)|^2 dx dt \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= 2 \max \left\{ p, \frac{p}{p-1} \right\} \left\| \left(\int_0^\infty |f_t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} .
\end{aligned}
$$

Τελικά,

$$
\begin{aligned}
\left\| \left(\int_0^\infty \left| (\widehat{f}_t \mathbb{1}_{[t,\infty)})^\vee \right|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} &\leq \left(\frac{1}{2} + \max \left\{ p, \frac{p}{p-1} \right\} \right) \left\| \left(\int_0^\infty |f_t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \\
&\leq 4 \max \left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\} \left\| \left(\int_0^\infty |f_t|^2 dt \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R})} .
\end{aligned}
$$

Δείξαμε ότι ο T_t είναι φραγμένος τελεστής από τον $L^2(\mathbb{R}, L^2(0,\infty))$ στον $L^2(\mathbb{R}, L^2(0,\infty))$ με

$$
\|T_t\|_{L^2(\mathbb{R},L^2(0,\infty)) \to L^2(\mathbb{R},L^2(0,\infty))} \leq 4 \max \left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\} .
$$

Δείχνουμε ότι ο T_t ικανοποιεί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.3 και έπεται ότι η ζητούμενη σχέση επεκτείνεται στον $L^p(\mathbb{R}, L^2(0,\infty))$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Θεωρήματα Littlewood-Paley

Έστω συναρτήσεις f_i ορισμένες στον $\mathbb{R}^n$, οι οποίες έχουν μετασχηματισμούς Fourier $\widehat{f_i}$ με φορείς $\mathrm{supp}(\widehat{f_i})$ ξένους. Τότε οι f_i είναι ορθογώνιες, δηλαδή ισχύει

$$\Big\|\sum_i f_i\Big\|_{L^2}^2 = \sum_i \|f_i\|_{L^2}^2. \tag{6.0.1}$$

Απόδειξη. Από την ταυτότητα Plancherel

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_i f_i\Big\|_{L^2}^2 &= \Big\|\widehat{\sum_i f_i}\Big\|_{L^2}^2 = \Big\|\sum_i \widehat{f_i}\Big\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^n}\Big|\sum_i \widehat{f_i}\Big|^2 \overset{(*)}{=} \int_{\mathbb{R}^n}\sum_i |\widehat{f_i}|^2 \\ &= \sum_i \|\widehat{f_i}\|_{L^2}^2 = \sum_i \|f_i\|_{L^2}^2,\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει πάλι από την ταυτότητα Plancherel και η $(*)$ ισχύει επειδή οι φορείς των $\widehat{f_i}$ είναι ξένοι. □

Στους χώρους $L^p(\mathbb{R}^n)$ για $p \neq 2$ η (6.0.1) δεν ισχύει. Ωστόσο και σε αυτούς τους χώρους εμφανίζονται κάποιες συνθήκες ορθογωνιότητας. Το θεώρημα Littlewood-Paley αποδεικνύει μια διπλή ανισότητα που παρέχει πληροφορίες ανάλογες της (6.0.1). Πιο συγκεκριμένα θα δούμε ότι

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \approx \Big\|\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

για κάποιες κατάλληλες συναρτήσεις Δ_i.

6.1 Το θεώρημα Littlewood-Paley

Προτού ξεκινήσουμε να αποδεικνύουμε το θεώρημα Littlewood-Paley θα εισαγάγουμε κάποιους βασικούς ορισμούς και προτάσεις που θα χρειαστούμε.

Ορισμός 6.1.1. Έστω Ψ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ και $i \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε τον *τελεστή Littlewood-Paley* που αντιστοιχεί στη συνάρτηση Ψ ως

$$\Delta_i(f) = f * \Psi_{2^{-i}},$$

όπου $\Psi_{2^{-i}}(x) = 2^{in}\Psi(2^i x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και την *τετραγωνική συνάρτηση* που αντιστοιχεί στους τελεστές Littlewood-Paley Δ_j,

$$f \mapsto \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Παρατηρούμε ότι ισχύουν τα εξής:

(i) $\widehat{\Psi_{2^{-i}}}(\xi) = \widehat{\Psi}(2^{-i}\xi)$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$.

(ii) Αν $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ και $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ τότε η $\Delta_i(f)$ είναι καλά ορισμένη (σύμφωνα με τον ορισμό της συνέλιξης μιας συνάρτησης Schwartz και μιας tempered κατανομής).

(iii) Αν $\mathrm{supp}(\widehat{\Psi}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : c_1 < |\xi| < c_2\}$ για κάποιους $0 < c_1 < c_2 < \infty$ τότε $\mathrm{supp}(\widehat{\Delta_i}) \subseteq \{\xi \in \mathbb{R}^n : 2^i c_1 < |\xi| < 2^i c_2\}$.

Θεώρημα 6.1.2 (Littlewood-Paley)**.** *Έστω $\Psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ολοκληρώσιμη, με $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x)dx = 0$, η οποία ικανοποιεί την*

$$|\Psi(x)| + |\nabla\Psi(x)| \leq B(1+|x|)^{-n-1}. \tag{6.1.1}$$

Τότε υπάρχει σταθερά $C_n < \infty$ τέτοια ώστε για κάθε $1 < p < \infty$ και για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ να ισχύει

$$\Big\| \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n B \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.1.2}$$

Αντίστροφα, έστω $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ τέτοια ώστε

- $\widehat{\Psi}(0) = 0$ *και* $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Psi}(2^{-i}\xi)|^2 = 1$ *για κάθε* $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *ή*
- $0 \notin \mathrm{supp}(\widehat{\Psi})$, $\mathrm{supp}(\widehat{\Psi})$ *συμπαγές και* $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \widehat{\Psi}(2^{-i}\xi) = 1$ *για κάθε* $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$.

Τότε υπάρχει σταθερά $C_{n,\Psi}$ τέτοια ώστε, για κάθε $f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ με $(\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ για κάποιο $1 < p < \infty$, υπάρχει μοναδικό πολυώνυμο Q με $f - Q \in L^p$ και

$$\|f - Q\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{n,\Psi} B \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\} \Big\| \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \Big\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.1.3}$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε με το ευθύ για $p = 2$. Από την υπόθεση ότι $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x)\,dx = 0$ έχουμε

$$\widehat{\Psi}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}\Psi(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} (e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle} - 1)\Psi(x)dx.$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
|\widehat{\Psi}(\xi)| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle} - 1||\Psi(x)|dx \overset{(*)}{\leq} \sqrt{4\pi|\xi|}\int_{\mathbb{R}^n} |x|^{\frac{1}{2}}|\Psi(x)|dx \\
&\leq \sqrt{4\pi|\xi|}\int_{\mathbb{R}^n} B\frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{(1+|x|)^{n+1}}dx
\end{aligned}
$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από την (6.1.1) και η $(*)$ από τις

$$|e^{it}-1| = |\cos t - 1 + i\sin t| = \sqrt{2(1-\cos t)} \leq \sqrt{2}|t|^{\frac{1}{2}} \text{ και } \langle \xi, x\rangle \leq |\xi||x|.$$

Επομένως,

$$|\widehat{\Psi}(\xi)| \leq C_n' B|\xi|^{\frac{1}{2}}, \tag{6.1.4}$$

όπου

$$C_n' = \sqrt{4\pi}\int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|^{\frac{1}{2}}}{(1+|x|)^{n+1}}dx.$$

Για $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$ επιλέγουμε το $j \in \{1, \dots, n\}$ για το οποίο $|\xi_j| = \max\limits_{1\leq i\leq n}|\xi_i|$ και ολοκληρώνοντας κατά μέρη το $\int_{\mathbb{R}^n} e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}\Psi(x)dx$ ως προς ∂_j παίρνουμε

$$\widehat{\Psi}(\xi) = -\int_{\mathbb{R}^n} \frac{e^{-2\pi i\langle \xi, x\rangle}}{-2\pi i\xi_j}(\partial_j\Psi)(x)dx.$$

Χρησιμοποιώντας τις

$$|\partial_j\Psi(x)| \leq \left(\sum_{i=1}^n |\partial_i\Psi(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}} = |\nabla\Psi(x)|$$

και

$$|\xi| \leq \sqrt{n}\max_{1\leq i\leq n}|\xi_i| = \sqrt{n}|\xi_j|$$

βλέπουμε ότι

$$|\widehat{\Psi}(\xi)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|(\partial_j\Psi)(x)|}{2\pi|\xi_j|}dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sqrt{n}|\nabla\Psi(x)|}{2\pi|\xi|}dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sqrt{n}B}{2\pi|\xi|(1+|x|)^{n+1}}dx,$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από την (6.1.1).

Επομένως

$$|\widehat{\Psi}(\xi)| \leq C_n'' B|\xi|^{-1}, \tag{6.1.5}$$

όπου

$$C_n'' = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\sqrt{n}}{2\pi(1+|x|)^{n+1}}dx.$$

Από τις (6.1.4) και (6.1.5) έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Psi}(2^{-i}\xi)|^2 &\leq \sum_{2^{-i}|\xi|\leq 1} (C_n')^2B^2|2^{-i}\xi| + \sum_{2^{-i}|\xi|\geq 1} (C_n'')^2B^2|2^{-i}\xi|^{-2} \\
&\leq (C_n')^2B^2|\xi|\sum_{2^{-i}|\xi|\leq 1} 2^{-i} + \sum_{2^{-i}|\xi|\geq 1} (C_n'')^2B^2|2^{-i}\xi|^{-2} \\
&= (C_n')^2B^2|\xi|\sum_{i\geq\log_2|\xi|} 2^{-i} + (C_n'')^2B^2|\xi|^{-2}\sum_{i\leq\log_2|\xi|} 2^{-2i}.
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Psi}(2^{-i}\xi)|^2 \leq C_n B^2 \tag{6.1.6}$$

για κατάλληλη σταθερά C_n.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το ευθύ για $p=2$. Έχουμε:

$$\begin{aligned}
\left\| \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2 dx = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \|\Delta_i(f)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 \\
&\overset{(*)}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Delta_i(f)}(k)|^2 = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 |\widehat{\Psi_{2^{-i}}}(k)|^2 \\
&\leq C_n B^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} |\widehat{f}(k)|^2 = C_n B^2 \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}^2 ,
\end{aligned}$$

όπου η $(*)$ ισχύει από την ταυτότητα Plancherel και η τελευταία ανισότητα από την (6.1.6).

Θα αποδείξουμε τώρα το ευθύ για τυχόν p. Ορίζουμε τον τελεστή $\vec{T}$ που δρα σε συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ ως

$$\vec{T}(f)(x) = (\Delta_i(f)(x))_i.$$

Τότε η (6.1.2) γράφεται ως

$$\left\|\vec{T}(f)\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} \leq C_n B \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} \tag{6.1.7}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι ισχύουν οι προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.3 για $\mathscr{B}_1 = \mathbb{C}$ και $\mathscr{B}_2 = \ell^2$.

Από την περίπτωση $p=2$ έχουμε αποδείξει ότι ο $\vec{T}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})$ στον $L^2(\mathbb{R}^n,\ell^2)$ με

$$\left\|\vec{T}\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})\to L^2(\mathbb{R}^n,\ell^2)} \leq C_n B,$$

δηλαδή ισχύει η τελευταία υπόθεση του Θεωρήματος 5.2.3 για $r=2$.

Υπολογίζουμε

$$\vec{T}(f)(x) = (\Delta_i(f)(x))_i = (f*\Psi_{2^{-i}}(x))_i = \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \Psi_{2^{-i}}(x-y)f(y)dy\Big)_i = \int_{\mathbb{R}^n} \vec{K}(x-y)f(y)dy,$$

όπου $\vec{K}(x)(a) = \big(\Psi_{2^{-i}}(x)a\big)_i$. Ο $\vec{K}(x)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από το $\mathbb{C}$ στον ℓ^2. Πράγματι, έχουμε

$$\begin{aligned}
\left\|\vec{K}(x)(a)\right\|_{\ell^2} &= \Big(\sum_i |\Psi_{2^{-i}}(x)a|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_i |\Psi_{2^{-i}}(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} |a| \\
&= \Big(\sum_i |\Psi_{2^{-i}}(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \|a\|_{\mathbb{C}} .
\end{aligned}$$

Άρα
$$\left\|\overrightarrow{K}(x)\right\|_{\mathbb{C}\to\ell^2} = \Big(\sum_i |\Psi_{2^{-i}}(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}.$$
Χρησιμοποιώντας τώρα την (6.1.1) έχουμε
$$\begin{aligned}
\left\|\overrightarrow{K}(x)\right\|_{\mathbb{C}\to\ell^2} &= \Big(\sum_i |\Psi_{2^{-i}}(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}} = \Big(\sum_i \left|2^{in}\Psi(2^i x)\right|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \Big(\sum_i 2^{2in}(1+2^i|x|)^{-2(n+1)}\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Big(\sum_{2^i|x|\leq 1} 2^{2in}(1+2^i|x|)^{-2(n+1)} + \sum_{2^i|x|\geq 1} 2^{2in}(1+2^i|x|)^{-2(n+1)}\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Big(\sum_{2^i|x|\geq 1} 2^{2in}(2^i|x|)^{-2(n+1)} + \sum_{2^i|x|\leq 1} 2^{2in}\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&= \Big(|x|^{-2(n+1)}\sum_{2^i|x|\geq 1} 2^{-2i} + \sum_{2^i|x|\leq 1} 2^{2in}\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq A\,|x|^{-n}
\end{aligned}$$
για κατάλληλη σταθερά $A = A(n)$. Επομένως,
$$\left\|\overrightarrow{K}(x)\right\|_{\mathbb{C}\to\ell^2} \leq A\,|x|^{-n}. \tag{6.1.8}$$
Επιπλέον έχουμε
$$\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\overrightarrow{K}(x)dx = \lim_{\varepsilon\downarrow 0}\Big(\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\Psi_{2^{-i}}(x)dx\Big)_i = \Big(\int_{0\leq|x|\leq 1}\Psi_{2^{-i}}(x)dx\Big)_i,$$
όπου η δεύτερη ισότητα έπεται απο το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης καθώς η Ψ είναι ολοκληρώσιμη. Με βάση αυτή τη σχέση υπολογίζουμε
$$\begin{aligned}
&\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\left\|\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\overrightarrow{K}(x)dx\right\|_{C\to\ell^2} = \left\|\lim_{\varepsilon\downarrow 0}\int_{\varepsilon\leq|x|\leq 1}\overrightarrow{K}(x)dx\right\|_{C\to\ell^2}\\
&= \left\|\Big(\int_{0\leq|x|\leq 1}\Psi_{2^{-i}}(x)dx\Big)_i\right\|_{C\to\ell^2} = \sup_{|a|=1}\left\|\Big(\int_{0\leq|x|\leq 1}\Psi_{2^{-i}}(x)(a)dx\Big)_i\right\|_{\ell^2}\\
&= \sup_{|a|=1}\Big(\sum_i\left|\int_{0\leq|x|\leq 1}\Psi_{2^{-i}}(x)(a)dx\right|^2\Big)^{\frac{1}{2}} \leq \sup_{|a|=1}\Big(\sum_i\Big(\int_{0\leq|x|\leq 1}|\Psi_{2^{-i}}(x)(a)|\,dx\Big)^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\
&\overset{(*)}{\leq} \sup_{|a|=1}\Big(\int_{0\leq|x|\leq 1}\Big(\sum_i|\Psi_{2^{-i}}(x)(a)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}dx\Big)\\
&= \sup_{|a|=1}\Big(\int_{0\leq|x|\leq 1}\left\|\Big(\Psi_{2^{-i}}(x)(a)\Big)_i\right\|_{\ell^2}dx\Big) = \sup_{|a|=1}\Big(\int_{0\leq|x|\leq 1}\left\|\overrightarrow{K}(x)(a)\right\|_{\ell^2}dx\Big)\\
&\leq \sup_{|a|=1}\Big(\int_{0\leq|x|\leq 1}\left\|\overrightarrow{K}(x)\right\|_{\mathbb{C}\to\ell^2}\|a\|_{\mathbb{C}}\,dx\Big) = \int_{0\leq|x|\leq 1}\left\|\overrightarrow{K}(x)\right\|_{\mathbb{C}\to\ell^2}dx < \infty
\end{aligned}$$

καθώς ο $\overrightarrow{K}(x)$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον $\mathbb{C}$ στον ℓ^2. Στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε τη γενικευμένη ανισότητα Minkowski.

Έστω τώρα $|x| \geq 2\,|y|$. Καθώς η Ψ είναι $\mathscr{C}^1$ από θεώρημα μέσης τιμής υπάρχει $\vartheta \in [0,1]$ ώστε

$$\begin{aligned}
|\Psi_{2^{-i}}(x-y) - \Psi_{2^{-i}}(x)| &= \left|2^{in}\Psi(2^i(x-y)) - 2^{in}\Psi(2^i x)\right| \leq 2^{(n+1)i}\left|\nabla\Psi(2^i(x-\vartheta y))\right| |y| \\
&\leq B2^{(n+1)i}(1+2^i\,|x-\vartheta y|)^{-(n+1)}\,|y| \\
&\overset{(*)}{\leq} B2^{ni}(1+2^{i-1}\,|x|)^{-(n+1)}2^i\,|y|\,,
\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ανισότητα έπεται από την (6.1.1) και η $(*)$ από την $|x-\vartheta y| \geq |x| - |y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} \geq \frac{|x|}{2}$.

Υπολογίζουμε επίσης

$$\begin{aligned}
|\Psi_{2^{-i}}(x-y) - \Psi_{2^{-i}}(x)| &\leq 2^{in}\left|\Psi(2^i(x-y))\right| + 2^{in}\left|\Psi(2^i x)\right| \\
&\leq B2^{in}(1+2^i\,|x-y|)^{-(n+1)} + B2^{in}(1+2^i\,|x|)^{-(n+1)} \\
&\overset{(*)}{\leq} B2^{in}(1+2^{i-1}\,|x|)^{-(n+1)} + B2^{in}(1+2^i\,|x|)^{-(n+1)} \\
&\leq 2B2^{in}(1+2^{i-1}\,|x|)^{-(n+1)},
\end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα έπεται από την (6.1.1) και η $(*)$ από την $|x-y| \geq |x| - |y| \geq |x| - \frac{|x|}{2} \geq \frac{|x|}{2}$.

Παίρνοντας το γεωμετρικό μέσο των δυο τελευταίων σχέσεων που αποδείξαμε, για $\gamma \in [0,1]$ έχουμε

$$|\Psi_{2^{-i}}(x-y) - \Psi_{2^{-i}}(x)| \leq 2^{1-\gamma}(2^i\,|y|)^{\gamma}B2^{in}(1+2^{i-1}\,|x|)^{-(n+1)}.$$

Με βάση αυτό, για $|x| \geq 2\,|y|$, υπολογίζουμε χρησιμοποιώντας $\gamma = 1$ και $\gamma = \frac{1}{2}$ αντίστοιχα

$$\begin{aligned}
\sum_{2^i < 2|x|^{-1}} |\Psi_{2^{-i}}(x-y) - \Psi_{2^{-i}}(x)| &\leq \sum_{2^i < 2|x|^{-1}} 2^i\,|y|\,B2^{in}(1+2^{i-1}\,|x|)^{-(n+1)} \\
&\overset{(*)}{\leq} \sum_{2^i < 2|x|^{-1}} 2^i\,|y|\,B2^{in}2^{-i(n+1)}\,|x|^{-(n+1)} \\
&\leq \sum_{2^i < 2|x|^{-1}} |y|\,B\,|x|^{-(n+1)} = C_n\,|y|\,B\,|x|^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

για κατάλληλη σταθερά C_n καθώς το άθροισμα είναι πεπερασμένο. [Για την $(*)$ παρατηρούμε ότι $2^i < 2\,|x|^{-1} \Longrightarrow 2^{i-1}\,|x| < 1 \Longrightarrow 2^i\,|x| < 2^{i-1}\,|x| + 1 \Longrightarrow (2^{i-1}\,|x| + 1)^{-(n+1)} < 2^{-i(n+1)}\,|x|^{-(n+1)}$.] Επίσης,

$$\begin{aligned}
\sum_{2^i \geq 2|x|^{-1}} |\Psi_{2^{-i}}(x-y) - \Psi_{2^{-i}}(x)| &\leq \sum_{2^i \geq 2|x|^{-1}} \sqrt{2}(2^i\,|y|)^{\frac{1}{2}}B2^{in}(1+2^{i-1}\,|x|)^{-(n+1)} \\
&\leq \sum_{2^i \geq 2|x|^{-1}} \sqrt{2}(2^i\,|y|)^{\frac{1}{2}}B2^{in}(2^{i-1}\,|x|)^{-(n+1)} \\
&= \Big(\sum_{2^i \geq 2|x|^{-1}} 2^{-i}\Big)\sqrt{2}\,|y|^{\frac{1}{2}}\,B2^{n+1}\,|x|^{-(n+1)} \\
&= C_n B\,|x|^{-(n+1)}
\end{aligned}$$

για κατάλληλη σταθερά C_n καθώς το άθροισμα συγκλίνει.

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left\|\vec{K}(x-y)-\vec{K}(x)\right\|_{\mathbb{C}\to\ell^2} &= \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|\Psi_{2^{-i}}(x-y)-\Psi_{2^{-i}}(x)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\\ &\le \sum_{i\in\mathbb{Z}}|\Psi_{2^{-i}}(x-y)-\Psi_{2^{-i}}(x)| \le C_nB\,|x|^{-(n+1)}\,.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν

$$\sup_{y\neq 0}\int_{|x|\ge 2|y|}\left\|\vec{K}(x-y)-\vec{K}(x)\right\|_{\mathbb{C}\to\ell^2}dx \le C_nB\sup_{y\neq 0}\int_{|x|\ge 2|y|}|x|^{-(n+1)}\,dx.$$

Άρα,

$$\sup_{y\neq 0}\int_{|x|\ge 2|y|}\left\|\vec{K}(x-y)-\vec{K}(x)\right\|_{\mathbb{C}\to\ell^2}dx \le C_nB \tag{6.1.9}$$

για κατάλληλη σταθερά C_n.

Καθώς ισχύουν όλες οι απαραίτητες προϋποθέσεις, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 5.2.3 και παίρνουμε την (6.1.7).

Συνεχίζουμε με την αντίστροφη κατεύθυνση του θεωρήματος. Θα δείξουμε αρχικά ότι για $f\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ ισχύει $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}}\Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)\in\mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Έστω $m>n$ και $g\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Τότε,

$$\begin{aligned}&\left|\left\langle\sum_{|i|\le m}\Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)\Big|\,g\right\rangle-\left\langle\sum_{|i|\le n}\Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)\Big|\,g\right\rangle\right|\\ &\quad=\left|\left\langle\sum_{n<|i|\le m}\Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)\Big|\,g\right\rangle\right|\\ &\quad=\left|\sum_{n<|i|\le m}\left\langle\Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)\Big|\,g\right\rangle\right|\\ &\quad=\left|\sum_{n<|i|\le m}\Big\langle\Delta_i(f)\Big|\Delta_i(g)\Big\rangle\right|=\left|\sum_{n<|i|\le m}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta_i(f)\overline{\Delta_i(g)}dx\right|\\ &\quad=\left|\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{n<|i|\le m}\Delta_i(f)\overline{\Delta_i(g)}dx\right|\\ &\quad\overset{(*)}{\le}\left|\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{n<|i|\le m}|\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\Big(\sum_{n<|i|\le m}|\Delta_i(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}dx\right|\\ &\quad\overset{(**)}{\le}\left\|\Big(\sum_{n<|i|\le m}|\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\left\|\Big(\sum_{n<|i|\le m}|\Delta_i(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p'}}\end{aligned}$$

όπου για την $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και για την $(**)$ την ανισότητα Hölder.

Από τις υποθέσεις του θεωρήματος έχουμε

$$\left\| \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} < \infty.$$

Καθώς $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^{p'}(\mathbb{R}^n)$, από την (6.1.2) έχουμε $\left\| \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(g)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}} < \infty$ επομένως η $\left\| \Big(\sum_{n<|i|\leq m} |\Delta_i(g)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}}$ μπορεί να γίνει οσοδήποτε μικρή καθώς $m, n \to \infty$. Συμπεραίνουμε έτσι ότι η $\left\langle \sum_{|i|\leq m} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big) \middle| \, g \right\rangle$ είναι βασική και άρα συγκλίνει σε κάποια $\Lambda(g)$. Μένει να δείξουμε ότι $\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$.

Έχουμε

$$\begin{aligned}
|\Lambda(g)| &= \lim_{m\to\infty} \left| \left\langle \sum_{|i|\leq m} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big) \middle| \, g \right\rangle \right| \\
&\leq \lim_{m\to\infty} \left\| \Big(\sum_{0<|i|\leq m} |\Delta_i(f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \left\| \Big(\sum_{0<|i|\leq m} |\Delta_i(g)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}} \\
&= \left\| \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \left\| \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(g)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}} \\
&\leq \left\| \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} C_n B \max\left\{ p', \frac{1}{p'-1} \right\} \|g\|_{L^{p'}} \\
&\leq \left\| \Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} C_n B \max\left\{ p', \frac{1}{p'-1} \right\} C_{p',n} \sum_{|\alpha|\leq [\frac{n+1}{p'}]+1} \rho_{\alpha,0}(g),
\end{aligned}$$

όπου η προτελευταία ανισότητα προκύπτει από την (6.1.2) και η τελευταία από την (2.1.1). Επομένως, $\Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$. Δείξαμε λοιπόν ότι $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big) = \Lambda \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n)$ Αυτό μας δίνει

$$f - \sum_{|i|\leq n} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big) \xrightarrow{\mathscr{S}'} f - \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big),$$

επομένως

$$\widehat{f - \sum_{|i|\leq n} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)} \xrightarrow{\mathscr{S}'} \widehat{f - \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι για τον συζυγή Δ_i^* του Δ_i ισχύει $\widehat{\Delta_i^*}(f) = \widehat{f\widetilde{\Psi_{2^{-i}}}}$. Πράγματι, από την ταυτότητα Parseval έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle \widehat{f} | \widehat{\Delta_i^*}(g) \rangle &= \langle f | \Delta_i^*(g) \rangle = \langle \Delta_i(f) | g \rangle = \langle \widehat{\Delta_i}(f) | \widehat{g} \rangle \\
&= \langle \widehat{f\Psi_{2^{-i}}} | \widehat{g} \rangle = \langle \widehat{f} | \widehat{g} \widehat{\widetilde{\Psi_{2^{-i}}}} \rangle.
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή τη σχέση υπολογίζουμε

$$\widehat{\sum_{|i|\le n} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)} = \sum_{|i|\le n} \widehat{\Delta_i^*}\big(\Delta_i(f)\big) = \sum_{|i|\le n} \widehat{\Delta_i}(f)\overline{\widehat{\Psi_{2^{-i}}}} = \sum_{|i|\le n} \widehat{f}\widehat{\Psi_{2^{-i}}}\overline{\widehat{\Psi_{2^{-i}}}} = \widehat{f}\sum_{|i|\le n}\left|\widehat{\Psi_{2^{-i}}}\right|^2.$$

Επομένως για την περίπτωση

«$\widehat{\Psi}(0) = 0$ και $\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\widehat{\Psi}(2^{-i}\xi)|^2 = 1$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$»

έχουμε

$$\widehat{f - \sum_{|i|\le n} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)} = \widehat{f} - \widehat{\sum_{|i|\le n} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

για κάθε $\xi \neq 0$.

Δείξαμε ότι

$$\widehat{f - \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)} \overset{\mathscr{S}'}{=} 0 \text{ για κάθε } \xi \neq 0.$$

Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει πολυώνυμο Q ώστε $f - \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big) \overset{\mathscr{S}'}{=} Q$, δηλαδή

$$f - Q \overset{\mathscr{S}'}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, την ανισότητα Holder και την (6.1.2) όπως πριν, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\big|\langle f - Q |\ g\ \rangle\big| &= \left\langle \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i^*\big(\Delta_i(f)\big)\right|\ g\ \left.\vphantom{\sum_{i}}\right\rangle \le \left\|\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \left\|\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(g)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p'}} \\ &\le \left\|\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} C_n B \max\left\{p', \frac{1}{p'-1}\right\} \|g\|_{L^{p'}}.\end{aligned}$$

Άρα,

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} |(f-Q)(g)| \le \left\|\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} C_n B \max\left\{p', \frac{1}{p'-1}\right\} < \infty,$$

δηλαδή το $f-Q$ είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές στον $L^{p'}$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz το $f-Q$ είναι μια L^p συνάρτηση με

$$\|f-Q\|_{L^p} = \|f-Q\|_{L^{p'}} \le \left\|\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2\Big)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} C_n B \max\left\{p', \frac{1}{p'-1}\right\}.$$

Μένει να δείξουμε ότι το πολυώνυμο Q είναι μοναδικό. Έστω Q_1 ένα άλλο πολυώνυμο με $f-Q \in L^p$. Τότε $Q - Q_1 \in L^p$. Ομως το μόνο πολυώνυμο που ανήκει στον L^p είναι το μηδενικό, δηλαδή $Q_1 = Q$. □

Πόρισμα 6.1.3. *Αν για την Ψ ισχύει επιπλέον ότι $\Psi(x) = \Psi(y)$ για κάθε $|x| = |y|$ και ότι η $\widehat{\Psi}$ είναι πραγματική συνάρτηση, τότε*

$$\left\| \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i(f_i) \right\|_{L^p} \leq C_n B \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |f_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Απόδειξη. Για $\widehat{\Psi}$ πραγματική ισχύει $\Delta_i^* = \Delta_i$ Πράγματι, έχουμε

$$\langle \Delta_i(f)|g\rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \Delta_i(f)\bar{g}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{\Delta_i(f)}\widehat{\bar{g}}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f\Psi_{2^{-i}}}\widehat{\bar{g}}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}\overline{\widehat{\Psi_{2^{-i}}}\widehat{g}}dx = \langle f|\Delta_i(g)\rangle .$$

Όταν επιπλέον $\Psi(x) = \Psi(y)$ για κάθε $|x| = |y|$, για g πραγματική είναι $\langle \Delta_i(f), g\rangle = \langle f, \Delta_i(g)\rangle$, δηλαδή $\Delta_i^t = \Delta_i$.

Θέτουμε τώρα $\overrightarrow{T}(f) = (\Delta_i(f))_i$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \left\langle f, \overrightarrow{T}^*((g_i)_i)\right\rangle &= \left\langle \overrightarrow{T}(f), (g_i)_i\right\rangle = \langle (\Delta_i(f))_i, (g_i)_i\rangle = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \langle \Delta_i(f), g_i\rangle \\ &= \sum_{i\in\mathbb{Z}} \langle f, \Delta_i(g_i)\rangle = \left\langle f, \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i(g_i)\right\rangle . \end{aligned}$$

Δηλαδή $\overrightarrow{T}^*((g_i)_i) = \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i(g_i)$.

Η ανισότητα (6.1.2) για p' γράφεται ως

$$\left\| \overrightarrow{T}(f) \right\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,\ell^2)} \leq C_n B \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} \|f\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})},$$

και το δυϊκό αυτής μας δίνει

$$\left\| \overrightarrow{T}^*((g_i)_i) \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\mathbb{C})} \leq C_n B \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} \|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)},$$

που είναι ακριβώς η ζητούμενη ανισότητα. □

Το θεώρημα Littlewood-Paley επεκτείνεται σε διανύσματα όπως φαίνεται στο ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.1.4. *Εστω $\Psi \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R}^n)$ ολοκληρώσιμη με $\int_{\mathbb{R}^n} \Psi(x)dx = 0$ ώστε*

$$|\Psi(x)| + |\nabla\Psi(x)| \leq B(1 + |x|)^{-n-1}.$$

Τότε υπάρχει σταθερά $C_n < \infty$ τέτοια ώστε, για κάθε $1 < p, r < \infty$ και για κάθε $(f_i)_i \subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ ισχύει

$$\left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |\Delta_k(f_i)|^2 \right)^{\frac{r}{2}} \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \tag{6.1.10}$$

$$\leq C_n B \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} \max\left\{r, \frac{1}{r-1}\right\} \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |f_i|^r \right)^{\frac{1}{r}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.1.11}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\overrightarrow{T}(f) = (\Delta_k(f))_{k\in\mathbb{Z}}$. Στο ευθύ της απόδειξης του Θεωρήματος 6.1.2 δείξαμε ότι ο $\overrightarrow{T}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.3 για $\mathscr{B}_1 = \mathbb{C}$ και $\mathscr{B}_2 = \ell^2$. Επομένως, γι' αυτούς τους χώρους έπεται η ανισότητα του Θεωρήματος 5.2.4 που είναι ακριβώς η ζητούμενη ανισότητα. □

6.2 Το θεώρημα Littlewood-Paley για δυαδικά ορθογώνια

Θα δούμε τώρα κάποιες παραλλαγές του θεωρήματος Littlewood-Paley όπου η χαρακτηριστική $\mathbb{1}_{(-2,-1]\cup[1,2)}$ αντικαθιστά την $\widehat{\Psi}$.

Ορισμός 6.2.1. Έστω $i \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε τον *μη-λείο τελεστή Littlewood-Paley* ως $\Delta_i^{\#}(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i}\right)^{\vee}$ όπου $I_i = (-2^{i+1}, -2^i] \cup [2^i, 2^{i+1})$.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\widehat{\Delta_i(f)}(\xi) = (\widehat{f * \Psi_{2^{-i}}})(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\Psi_{2^{-i}}}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{\Psi}(2^{-i}\xi)$$

και παρατηρούμε ότι

$$\widehat{\Delta_i^{\#}(f)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{I_i}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{(-2,1]\cup[1,2)}(2^{-i}\xi).$$

Θεώρημα 6.2.2. *Υπάρχει σταθερά C ώστε για κάθε $1 < p < \infty$ και κάθε $f \in L^p(\mathbb{R})$ να ισχύει*

$$\frac{1}{C\left(p+\frac{1}{p-1}\right)^2}\|f\|_{L^p(\mathbb{R})} \le \left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_i^{\#}(f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} \le C\left(p+\frac{1}{p-1}\right)^2\|f\|_{L^p(\mathbb{R})}. \tag{6.2.1}$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε με τη δεύτερη ανισότητα. Επιλέγουμε $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ με $\operatorname{supp}(\widehat{\Psi}) = [-2^2, -2^{-1}] \cup [2^{-1}, 2^2]$ και $\widehat{\Psi}(\xi) = 1$ για κάθε $1 \le |\xi| \le 2$.

Παρατηρούμε ότι $\Delta_i^{\#} \circ \Delta_i = \Delta_i^{\#} \circ \Delta_i = \Delta_i^{\#}$. Πράγματι έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\Delta_i}\left(\Delta_i^{\#}(f)\right) &= \widehat{\Delta_i^{\#}}(f)\widehat{\Psi_{2^{-i}}}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{Ii}(\xi)\widehat{\Psi_{2^{-i}}}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{[1,2]}\left(\left|2^{-i}\xi\right|\right)\widehat{\Psi}(2^{-i}\xi)\\ &= \begin{cases}\widehat{f}(\xi) & 1 \le \left|2^{-i}\xi\right| \le 2\\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{cases} = \widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{[1,2]}\left(\left|2^{-i}\xi\right|\right) = \widehat{\Delta_i^{\#}}(f),\end{aligned}$$

και παίρνοντας $^{\vee}$ καταλήγουμε στην παραπάνω σχέση.

Θέτουμε $T_i(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}\right)^{\vee}$ και $S_i(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{(-2^{i+1},-2^i]}\right)^{\vee}$. Τότε, $\Delta_i^{\#} = T_i + S_i$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_i^{\#}(f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} &= \left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_i^{\#}(\Delta_i(f))\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}\\ &\le \left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|T_i(\Delta_i(f))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})} + \left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}|S_i(\Delta_i(f))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 5.3.1 (i) για τους τελεστές T_i και S_i και για τις ακολουθίες $g_i = \Delta_i(f)$ βλέπουμε ότι το παραπάνω άθροισμα φράσσεται από

$$c \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R})},$$

το οποίο απο το θεώρημα Littlewood-Paley φράσσεται από

$$c \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}^2 \|f\|_{L^p(\mathbb{R})}.$$

Συνεχίζουμε με την πρώτη ανισότητα. Εδώ η $\mathbb{1}_{I_i}$ αντικαθιστά την $\widehat{\Psi_{2^{-i}}}$ επομένως οι σχέσεις $\widehat{\Delta_i}(f) = \widehat{f}\widehat{\Psi_{2^{-i}}}$, $\widehat{\Delta_i^*}(f) = \widehat{f}\overline{\widehat{\Psi_{2^{-i}}}}$ που είχαμε δει στην απόδειξη του αντίστροφου του θεωρήματος Littlewood-Paley, αντικαθίστανται από τις $\widehat{(\Delta_i^{\#})^*}(f) = \widehat{\Delta_i^{\#}}(f) = \widehat{f}\mathbb{1}_{I_i}$.

Ξεκινάμε με την περίπτωση $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Θα δείξουμε ότι $f \overset{\mathscr{S}'}{=} \sum_{i\in\mathbb{Z}} \Delta_i^{\#}\Delta_i^{\#} f$. Πράγματι, καθώς $\mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^2(\mathbb{R})$, από την ταυτότητα Plancherel έχουμε $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R})$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{|i|\le n} \Delta_i^{\#}\Delta_i^{\#} f - f \right\|_{L^2} &= \left\| \left(\sum_{|i|\le n} \Delta_i^{\#}\Delta_i^{\#} f - f \right)^{\wedge} \right\|_{L^2} = \left\| \left(\sum_{|i|\le n} \Delta_i^{\#}\Delta_i^{\#} f \right)^{\wedge} - \widehat{f} \right\|_{L^2} \\ &= \left\| \sum_{|i|\le n} \left(\Delta_i^{\#}\Delta_i^{\#} f \right)^{\wedge} - \widehat{f} \right\|_{L^2} = \left\| \widehat{f} \left(1 - \sum_{|i|\le n} \mathbb{1}_{I_i} \right) \right\|_{L^2}. \end{aligned}$$

Για κάθε $\xi \neq 0$ υπάρχει μοναδικό j ώστε $\xi \in I_j$ επομένως $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \mathbb{1}_{I_i}(\xi) = 1$ για κάθε $\xi \neq 0$. Έχουμε λοιπόν

$$\widehat{f} \left(1 - \sum_{|i|\le n} \mathbb{1}_{I_i} \right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

και αφού

$$\left| \widehat{f} \left(1 - \sum_{|i|\le n} \mathbb{1}_{I_i} \right) \right| \le 2 \left| \widehat{f} \right| \in L^2,$$

από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε $\left\| \widehat{f} \left(1 - \sum_{|i|\le n} \mathbb{1}_{I_i} \right) \right\|_{L^2} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, δηλαδή

$$\sum_{|i|\le n} \Delta_i^{\#}\Delta_i^{\#} f \overset{L^2}{\longrightarrow} f.$$

Η $\mathscr{S}'$ σύγκλιση έπεται από την L^2 σύγκλιση.

Έστω τώρα $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
|\langle f, \bar{g}\rangle| = |\langle f|g\rangle| &= \lim_{n\to\infty}\left|\left\langle \sum_{|i|\le n} \Delta_i^{\#}\Delta_i^{\#} f \,\middle|\, g \right\rangle\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{|i|\le n}\left\langle \Delta_i^{\#}\Delta_i^{\#} f \,\middle|\, g \right\rangle\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{|i|\le n}\left\langle \Delta_i^{\#} f \middle| \Delta_i^{\#} g\right\rangle\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\sum_{|i|\le n}\int_{\mathbb{R}} \Delta_i^{\#} f\overline{\Delta_i^{\#} g}dx\right| \\
&= \lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}\sum_{|i|\le n} \Delta_i^{\#} f\overline{\Delta_i^{\#} g}dx\right| \overset{(*)}{=} \lim_{n\to\infty}\left|\int_{\mathbb{R}}\left(\sum_{|i|\le n}\left|\Delta_i^{\#} f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{|j|\le n}\left|\Delta_j^{\#} g\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}dx\right| \\
&\le \lim_{n\to\infty}\int_{\mathbb{R}}\left|\left(\sum_{|i|\le n}\left|\Delta_i^{\#} f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|\left|\left(\sum_{|j|\le n}\left|\Delta_j^{\#} g\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|dx \\
&= \int_{\mathbb{R}}\left|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_i^{\#} f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|\left|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_j^{\#} g\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right|dx \\
&\overset{(**)}{\le} \left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_i^{\#} f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\left\|\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_j^{\#} g\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^{p'}},
\end{aligned}$$

όπου για την $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και για την $(*)$ την ανισότητα Hölder.

Είναι $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}) \subseteq L^{p'}(\mathbb{R})$ επομένως από την δεύτερη ανισότητα παίρνουμε

$$|\langle f, \bar{g}\rangle| \leqslant \left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_i^{\#} f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} C\left(p + \frac{1}{p-1}\right)^2 \|g\|_{L^{p'}}.$$

Έπεται ότι

$$\|f\|_{L^p} = \sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} |\langle f, \bar{g}\rangle| \le \left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_i^{\#} f\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} C\left(p + \frac{1}{p-1}\right)^2.$$

Έτσι έχουμε αποδείξει τη ζητούμενη σχέση για $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$.

Για τη γενική περίπτωση, όπου $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο $\mathscr{S}(\mathbb{R})$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R})$. Έστω $(f_k)_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ με $f_k \overset{\|\cdot\|_{L^p}}{\longrightarrow} f$. Από την ανισότητα Minkowski έχουμε

$$|\|f\|_{L^p} - \|g\|_{L^p}| \le \|f - g\|_{L^p}$$

και

$$|\|(f_i)_i\|_{\ell^2} - \|(g_i)_i\|_{\ell^2}| \le \|(f_i - g_i)_i\|_{\ell^2},$$

άρα

$$\left|\|(f_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R},\ell^2)} - \|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R},\ell^2)}\right| \le \|(f_i - g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R},\ell^2)}.$$

Με βάση την τελευταία σχέση, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\left|\left\|\left(\Delta_i^{\#}(f_k)\right)_i\right\|_{L^p(\mathbb{R},\ell^2)} - \left\|\left(\Delta_i^{\#}(f)\right)_i\right\|_{L^p(\mathbb{R},\ell^2)}\right| &\leq \left\|\left(\Delta_i^{\#}(f_k) - \Delta_i^{\#}(f)\right)_i\right\|_{L^p(\mathbb{R},\ell^2)} \\ &= \left\|\left(\Delta_i^{\#}(f_k - f)\right)_i\right\|_{L^p(\mathbb{R},\ell^2)} \\ &\overset{(*)}{\leq} C_n\left(p + \frac{1}{p-1}\right)^2 \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R})} \to 0,\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την δεύτερη ανισότητα.

Δείξαμε ότι

$$\left\|\left(\Delta_i^{\#}(f_k)\right)_i\right\|_{L^p(\mathbb{R},\ell^2)} \longrightarrow \left\|\left(\Delta_i^{\#}(f)\right)_i\right\|_{L^p(\mathbb{R},\ell^2)}.$$

Παίρνοντας $\lim\limits_{k\to\infty}$ στην πρώτη ανισότητα για την f_k παίρνουμε την πρώτη ανισότητα για την f. □

Επεκτείνουμε το Θεώρημα 6.2.2 στον $\mathbb{R}^n$ αντικαθιστώντας τα δυαδικά διαστήματα I_i με τα ανίστοιχα δυαδικά ορθογώνια $\boldsymbol{I_i} = \boldsymbol{I}_{i_1\times\cdots\times i_n} = I_{i_1} \times \cdots \times I_{i_n}$ και τον τελεστή $\Delta_i^{\#}(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i}\right)^{\vee}$ με τον $\boldsymbol{\Delta_i^{\#}}(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}}\right)^{\vee}$.

Πριν δούμε το θεώρημα θα παρατηρήσουμε ότι το θεώρημα Littlewood-Paley ισχύει και για δυαδικά ορθογώνια αντί για δυαδικούς δακτύλιους.

Πρόταση 6.2.3. *Έστω $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ με $\int_{\mathbb{R}} \Psi(x)dx = 0$. Ορίζουμε τον τελεστή*

$$\boldsymbol{\Delta_i}(f) = \left(\widehat{f}(\xi)\widehat{\Psi_{2^{-i_1}}}(\xi_1)\cdots\widehat{\Psi_{2^{-i_n}}}(\xi_n)\right)^{\vee},$$

όπου $\boldsymbol{i} = (i_1, \cdots, i_n) \in \mathbb{Z}^n$. Δηλαδή,

$$\boldsymbol{\Delta_i}(f) = \Delta_{i_1} \circ \cdots \circ \Delta_{i_n} \circ f.$$

Τότε υπάρχει σταθερά C_n ώστε

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_i}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n\left(p + \frac{1}{p-1}\right)^n \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.2.2}$$

Αντίστροφα, έστω $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $0 \notin \operatorname{supp}(\widehat{\Psi})$, με τον φορέα $\operatorname{supp}(\widehat{\Psi})$ του $\widehat{\Psi}$ συμπαγή και $\sum_{i\in\mathbb{Z}} \widehat{\psi}(2^{-i}\xi) = 1$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$. Τότε υπάρχει σταθερά C_n ώστε για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ με $\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_i}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \in L^p(\mathbb{R}^n)$ να ισχύει

$$\|f\|_{L^p} \leq C_n\left(p + \frac{1}{p-1}\right)^n \left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_i}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}. \tag{6.2.3}$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε με το ευθύ. Θα δείξουμε την ανισότητα για $n=2$. Η γενική περίπτωση έπεται εύκολα με επαγωγή. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^2}|\boldsymbol{\Delta_i}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left\|\left(\sum_{i_1\in\mathbb{Z}}\sum_{i_2\in\mathbb{Z}}|\Delta_{i_1}(\Delta_{i_2}(f))|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\overset{(*)}{\le} 2C_nB\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}\left\|\left(\sum_{i_2\in\mathbb{Z}}|\Delta_{i_2}(f)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}\\ &\overset{(**)}{\le} 2C_n^2B^2\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}^2\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)},\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την (6.1.10) και στην $(**)$ την (6.1.2).

Συνεχίζουμε με την αντίστροφη κατεύθυνση. Ξεκινάμε με την περίπτωση $f\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Θα δείξουμε ότι $\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\boldsymbol{\Delta_i}(f)\overset{\mathscr{S}'}{\longrightarrow}f$. Πράγματι, καθώς $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)\subseteq L^2(\mathbb{R}^n)$, από το θεώρημα Plancherel έχουμε $\widehat{f}\in L^2(\mathbb{R}^n)$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\boldsymbol{\Delta_i}(f)-f\right\|_{L^2} &= \left\|\left(\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\boldsymbol{\Delta_i}(f)-f\right)^{\wedge}\right\|_{L^2} = \left\|\left(\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\boldsymbol{\Delta_i}(f)\right)^{\wedge}-\widehat{f}\right\|_{L^2}\\ &= \left\|\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\widehat{\boldsymbol{\Delta_i}}(f)-\widehat{f}\right\|_{L^2} = \left\|\widehat{f}\left(1-\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\widehat{\Psi_{2^{-i_1}}}\dots\widehat{\Psi_{2^{-i_n}}}\right)\right\|_{L^2}.\end{aligned}$$

Από την $\sum_{i\in\mathbb{Z}}\widehat{\Psi_{2^{-i}}}(\xi)=1$, $\xi\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$, έχουμε

$$\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}\widehat{\Psi_{2^{-i_1}}}\cdots\widehat{\Psi_{2^{-i_n}}}=\left(\sum_{i_1\in\mathbb{Z}}\widehat{\Psi_{2^{-i_1}}}\right)\dots\left(\sum_{i_n\in\mathbb{Z}}\widehat{\Psi_{2^{-i_n}}}\right)=1\cdots1=1,$$

άρα

$$\widehat{f}\left(1-\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\widehat{\Psi_{2^{-i_1}}}\dots\widehat{\Psi_{2^{-i_n}}}\right)\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Επιπλέον είναι

$$\left|\widehat{f}\left(1-\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\widehat{\Psi_{2^{-i_1}}}\dots\widehat{\Psi_{2^{-i_n}}}\right)\right|\le 2|\widehat{f}|\in L^2.$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε

$$\left\|\widehat{f}\left(1-\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\widehat{\Psi_{2^{-i_1}}}\dots\widehat{\Psi_{2^{-i_n}}}\right)\right\|_{L^2}\overset{n\to\infty}{\longrightarrow}0,$$

δηλαδή $\sum_{|\boldsymbol{i}|<n}\boldsymbol{\Delta_i}(f)\overset{L^2}{\longrightarrow}f$. Η $\mathscr{S}'$ σύγκλιση έπεται από την L^2 σύγκλιση. Δείξαμε λοιπόν ότι $\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}\boldsymbol{\Delta_i}(f)\overset{\mathscr{S}'}{=}f$.

Έστω $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ Υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
|\langle f, \bar{g}\rangle| &= \left| \left\langle \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \boldsymbol{\Delta_i}(f), \bar{g} \right\rangle \right| = \left| \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \langle \boldsymbol{\Delta_i}(f), \bar{g}\rangle \right| \\
&= \left| \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n \\ \exists k: |i_k - j_k| \le 1}} \left\langle \boldsymbol{\Delta_i}(f), \overline{\boldsymbol{\Delta_j}(g)} \right\rangle \right| \\
&\le \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \sum_{\substack{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n \\ \exists k: |i_k - j_k| \le 1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\boldsymbol{\Delta_i}(f)|\, |\boldsymbol{\Delta_j}(g)|\, dx.
\end{aligned}
$$

Σταθεροποιούμε τη συντεταγμένη k για την οποία $|i_k - j_k| \le 1$. Εχουμε τρία αθροίσματα για $j_k = i_k - 1$, $j_k = i_k$ και $j_k = i_k + 1$. Για καθένα από αυτά τα τρία αθροίσματα εφαρμόζουμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz ως προς την k-οστή συντεταγμένη. Καθώς $k \in \{1, 2, \dots, n\}$, έχουμε συνολικά 3^n αθροίσματα, επομένως το παραπάνω άθροισμα φράσσεται από

$$
\begin{aligned}
&3^n \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_i}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_j}(g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx \\
&\quad \le 3^n \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_i}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\boldsymbol{j}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_j}(g)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^{p'}} \quad \text{από Hölder} \\
&\quad \le 3^n \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_i}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} C_n \left(p' + \frac{1}{p'-1} \right)^n \|g\|_{L^{p'}},
\end{aligned}
$$

όπου για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την (6.2.2) για την $g \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \subseteq L^{p'}(\mathbb{R}^n)$.

Η σχέση αυτή μας δίνει

$$
\sup_{\|g\|_{L^{p'}}=1} |f(g)| \le 3^n \left\| \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_i}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} C_n \left(p' + \frac{1}{p'-1} \right)^n,
$$

και καθώς $\sup\limits_{\|g\|_{L^{p'}}=1} |f(g)| = \|f\|_{L^p}$ έπεται η ζητούμενη σχέση, όταν $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Για τη γενική περίπτωση, όπου $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι ο $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ είναι πυκνός στον $L^p(\mathbb{R}^n)$. Έστω $(f_k)_k \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ με $f_k \overset{\|\cdot\|_{L^p}}{\longrightarrow} f$. Από την ανισότητα Minkowski έχουμε

$$
\left| \|f\|_{L^p} - \|g\|_{L^p} \right| \le \|f - g\|_{L^p}
$$

και

$$
\left| \|(f_i)_i\|_{\ell^2} - \|(g_i)_i\|_{\ell^2} \right| \le \|(f_i - g_i)_i\|_{\ell^2},
$$

άρα

$$
\left| \|(f_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} - \|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} \right| \le \|(f_i - g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)}.
$$

Με βάση την τελευταία σχέση, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\Big| \|(\boldsymbol{\Delta_i}(f_k))_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} - \|(\boldsymbol{\Delta_i}(f))_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} \Big| &\le \|(\boldsymbol{\Delta_i}(f_k) - \boldsymbol{\Delta_i}(f))_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} \\ = \|(\boldsymbol{\Delta_i}(f_k - f))_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} &\overset{(*)}{\le} C_n \left(p + \frac{1}{p-1}\right)^n \|f_k - f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \to 0,\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα (6.2.2).

Δείξαμε ότι

$$\|(\boldsymbol{\Delta_i}(f_k))_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} \to \|(\boldsymbol{\Delta_i}(f))_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)}.$$

Παίρνοντας $\lim\limits_{k\to\infty}$ στην (6.2.3) για την f_k καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα για την f. □

Θεώρημα 6.2.4. *Υπάρχει σταθερά C_n ώστε για κάθε $1 < p < \infty$ και κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ να ισχύει*

$$\frac{\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}}{C_n\left(p + \frac{1}{p-1}\right)^{2n}} \le \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \left|\boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}}(f)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le C_n \left(p + \frac{1}{p-1}\right)^{2n} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}. \tag{6.2.4}$$

Απόδειξη. Ξεκινάμε με τη δεύτερη ανισότητα. Επιλέγουμε $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ με $\mathrm{supp}(\widehat{\Psi}) = [-2^2, -2^{-1}] \cup [2^{-1}, 2^2]$ και $\widehat{\Psi}(\xi_k) = 1$ για κάθε $1 \le |\xi_k| \le 2$.

Παρατηρούμε ότι

$$\boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}} \circ \boldsymbol{\Delta_i} = \boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}} \circ \boldsymbol{\Delta_i} = \boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}}.$$

Πράγματι, γράφοντας $2^{-\boldsymbol{i}}\xi = (2^{-i_1}\xi_1, \ldots, 2^{-i_n}\xi_n)$ και $\left|2^{-\boldsymbol{i}}\xi\right| = (\left|2^{-i_1}\xi_1\right|, \ldots, \left|2^{-i_n}\xi_n\right|)$, έχουμε

$$\begin{aligned}\widehat{\boldsymbol{\Delta_i}}\left(\boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}}(f)\right) &= \widehat{\boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}}}(f)\widehat{\Psi_{2^{-i_1}}}(\xi_1)\cdots\widehat{\Psi_{2^{-i_n}}}(\xi_n) \\ &= \widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{\boldsymbol{Ii}}(\xi)\widehat{\Psi_{2^{-i_1}}}(\xi_1)\cdots\widehat{\Psi_{2^{-i_n}}}(\xi_n) \\ &= \widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{[1,2]^n}\left(\left|2^{-\boldsymbol{i}}\xi\right|\right)\widehat{\Psi}(2^{-i_1}\xi_1)\cdots\widehat{\Psi}(2^{-i_n}\xi_n) \\ &= \begin{cases}\widehat{f}(\xi) & 1 \le \left|2^{-\boldsymbol{i}}\xi\right| \le 2 \\ 0 & \text{διαφορετικά}\end{cases} = \widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{[1,2]^n}\left(\left|2^{-\boldsymbol{i}}\xi\right|\right) \\ &= \widehat{\boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}}}(f),\end{aligned}$$

και παίρνοντας $^\vee$ καταλήγουμε στην παραπάνω σχέση.

Θέτουμε $I_i^+ = [2^i, 2^{i+1})$, $I_i^- = (-2^{i+1}, -2^i]$, και $\boldsymbol{J_i} = \boldsymbol{J}_{(i_1,\ldots,i_n)} = J_{i_1} \times \cdots \times J_{i_n}$, όπου $J_i \in \{I_i^+, I_i^-\}$. Θεωρούμε επίσης τον τελεστή $\boldsymbol{T_{i}}_k(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{J_i}}\right)^\vee$, $k = 1, 2, \ldots, 2^n$ για κάθε επιλογή του ορθογωνίου $\boldsymbol{J_i}$. Τότε ο τελεστής $\boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}}$ δίνεται από το άθροισμα των 2^n διαφορετικών τελεστών $\boldsymbol{T_{i}}_k$.

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 5.3.1 (ii) για τον τελεστή $\boldsymbol{T_{i}}_k$ και για την ακολουθία $g_i = \boldsymbol{\Delta_i}(f)$ έχουμε ότι

$$\left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{T_{i}}_k(\boldsymbol{\Delta_i}(f))|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \le c \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}^n \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} |\boldsymbol{\Delta_i}(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \left| \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}(f) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} &= \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \left| \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}(f)) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq \sum_{k=1}^{2^n} \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \left| \boldsymbol{T}_{\boldsymbol{i}k}(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}(f)) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \\ &\leq 2^n c \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^n \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \left| \boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}(f) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .\end{aligned}$$

Από το ευθύ της Πρότασης 6.2.3 η ποσότητα αυτή φράσσεται από

$$2^n c \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^{2n} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} .$$

Για την πρώτη ανισότητα, ακολουθούμε την απόδειξη της πρώτης ανισότητας του Θεωρήματος 6.2.2, για τα $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}$ αντί για τα $\Delta_i^{\#}$. Έπεται ότι

$$\left\| \left(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}(f_k) \right)_i \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} \longrightarrow \left\| \left(\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}(f) \right)_i \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^2)} .$$

Παίρνοντας $\lim\limits_{k\to\infty}$ στην πρώτη ανισότητα για την f_k καταλήγουμε στην πρώτη ανισότητα για την f. □

6.3 Αντιπαραδείγματα

Κλείνουμε το κεφάλαιο βλέποντας κάποια αντιπαραδείγματα για την σχέση των

$$\left\| \sum_i f_i \right\|_{L^p}^p \quad \text{και} \quad \sum_i \|f_i\|_{L^p}^p .$$

Θα δούμε ότι για $p > 2$ δεν ισχύει η ανισότητα

$$\left\| \sum_i f_i \right\|_{L^p}^p \leq C_p \sum_i \|f_i\|_{L^p}^p$$

ενώ για $p < 2$ δεν ισχύει η ανισότητα

$$C_p \left\| \sum_i f_i \right\|_{L^p}^p \geq \sum_i \|f_i\|_{L^p}^p .$$

Παράδειγμα 6.3.1. Έστω $\zeta \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ με $\widehat{\zeta} > 0$ και $\operatorname{supp}(\widehat{\zeta}) = [-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$. Ορίζουμε $f_j(x) = e^{2\pi i j x}\zeta(x)$. Παρατηρούμε ότι $\widehat{f_j}(\xi) = \widehat{\zeta}(\xi - j)$ και $\operatorname{supp}(\widehat{f_j}) = \operatorname{supp}(\widehat{\zeta}) + j$, δηλαδή οι $\widehat{f_j}$ έχουν ξένους φορείς. Είναι

$$\sum_{j=0}^N \|f_j\|_{L^p}^p = \sum_{j=0}^N \int_{\mathbb{R}} \left| e^{2\pi i j x} \right|^p |\zeta(x)|^p \, dx = \sum_{j=0}^N \|\zeta\|_{L^p}^p = (N+1) \|\zeta\|_{L^p}^p$$

και
$$\left|\frac{e^{2\pi i(N+1)x}-1}{e^{2\pi ix}-1}\right| = \left|\frac{\sin \pi(N+1)x}{\sin \pi x}\right| \geqslant \frac{2(N+1)|x|}{\pi|x|} = \frac{2(N+1)}{\pi}$$
όταν $\pi(N+1)|x| \leq \pi/2$, άρα
$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=0}^{N} f_j\right\|_{L^p}^p &= \int_{\mathbb{R}} \left|\frac{e^{2\pi i(N+1)x}-1}{e^{2\pi ix}-1}\right|^p |\zeta(x)|^p\,dx \\ &\geq \int_{2\pi(N+1)|x|\leq 1} \left|\frac{2(N+1)}{\pi}\right|^p |\zeta(x)|^p\,dx \\ &= (2/\pi)^p (N+1)^p \int_{2\pi(N+1)|x|\leq 1} |\zeta(x)|^p\,dx \\ &= (2/\pi)^p (N+1)^{p-1} \int_{2\pi|x|\leq 1} \left|\zeta\left(\frac{x}{N+1}\right)\right|^p dx \\ &= C_p C_\zeta (N+1)^{p-1}.\end{aligned}$$
Για μεγάλο N και $p>2$ έχουμε $C_p C_\zeta (N+1)^{p-1} > (N+1)\|\zeta\|_{L^p}^p$.

Παράδειγμα 6.3.2. Έστω Ψ λεία και άρτια με $\widehat{\Psi} \geq 0$, $\operatorname{supp}(\widehat{\Psi}) = [\frac{7}{8}, \frac{17}{8}]$ και $\widehat{\Psi}|_{[\frac{9}{8},\frac{15}{8}]} = \mathbb{1}$, με την ιδιότητα ότι για κάθε $\xi > 0$ ικανοποιείται η
$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} \widehat{\Psi}(2^{-j}\xi)^2 = 1.$$
Έστω επίσης $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ με $\widehat{\varphi} \geq 0$ και $\operatorname{supp}(\widehat{\varphi}) = [\frac{11}{8}, \frac{13}{8}]$. Θέτουμε
$$f_j(x) = e^{2\pi i \frac{12}{8} 2^j x}\varphi(x).$$
Παρατηρούμε ότι $\widehat{f_j}(\xi) = \widehat{\varphi}(\xi - \frac{12}{8}2^j)$ και επομένως $\operatorname{supp}(\widehat{f_j}) = [\frac{11}{8} + \frac{12}{8}2^j, \frac{13}{8} + \frac{12}{8}2^j] \subseteq [\frac{9}{8}2^j, \frac{15}{8}2^j]$ για $j \geq 3$. Καθώς $\widehat{\Psi}_{2^{-j}}|_{[\frac{9}{8}2^j, \frac{15}{8}2^j]} = \mathbb{1}$, έχουμε
$$\Delta_j(f_j) = f_j * \Psi_{2^{-j}} = (\widehat{f_j}\widehat{\Psi_{2^{-j}}})^\vee = (\widehat{f_j})^\vee = f_j$$
για $j \geq 3$. Είναι επίσης
$$\int_{\mathbb{R}} \Psi(x)dx = \widehat{\Psi}(0) = 0,$$
δηλαδή η Ψ πληροί τις προϋποθέσεις του (6.1.3) άρα
$$\begin{aligned}\left\|\sum_{j=3}^{N} f_j\right\|_{L^p}^p &= \left\|\sum_{j=3}^{N} \Delta_j(f_j)\right\|_{L^p}^p \leq C_p \left\|\left(\sum_{j=3}^{N} |f_i|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}^p \\ &= C_p \left\|\left(\sum_{j=3}^{N} |\varphi(x)|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}^p = C_p \|\varphi\|_{L^p}^p (N-2)^{\frac{p}{2}}.\end{aligned}$$

Υπολογίζουμε και το
$$\sum_{j=3}^{N} \|f_j\|_{L^p}^p = \sum_{j=3}^{N} \|\varphi\|_{L^p}^p = \|\varphi\|_{L^p}^p (N-2).$$
Για μεγάλο N και $p<2$ έχουμε $C_p \|\varphi\|_{L^p}^p (N-2)^{\frac{p}{2}} < \|\varphi\|_{L^p}^p (N-2)$.

Τέλος θα δούμε δύο αντιπαραδείγματα που δείχνουν την αναγκαιότητα της L^2 νόρμας στο θεώρημα Littlewood–Paley. Θα δούμε ότι για $q<2$ δεν ισχύει η ανισότητα
$$\left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p} \le C_{p,q} \|f\|_{L^p},$$
ενώ για $q>2$ δεν ισχύει η ανισότητα
$$\|f\|_{L^p} \le C_{p,q} \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p}.$$

Παράδειγμα 6.3.3. Για την Ψ και τις f_i του προηγούμενου παραδείγματος, θέτουμε $f=\sum_{j=3}^{N} f_i$. Παρατηρούμε ότι
$$\begin{aligned}\operatorname{supp}(\widehat{f_j}) &= \left[\frac{11}{8}+\frac{12}{8}2^j, \frac{13}{8}+\frac{12}{8}2^j\right] \subseteq \left[\frac{7}{8}2^j, \frac{17}{8}2^j\right] \\ &= \operatorname{supp}(\widehat{\Psi_{2^{-j}}})\end{aligned}$$
και $\operatorname{supp}(\widehat{f_j}) \bigcap \operatorname{supp}(\widehat{\Psi_{2^{-i}}}) = \varnothing$ για κάθε $i\neq j$. Υπενθυμίζουμε επίσης ότι $\Delta_j(f_j)=f_j$ για $j\ge 3$. Καθώς
$$\widehat{\Delta_i(f_j)} = (f_j * \Psi_{2^{-i}})^\wedge = \widehat{f_j}\widehat{\Psi_{2^{-i}}} = \begin{cases} \widehat{\Delta_j(f_j)} & , i=j \\ 0 & , i\neq j \end{cases},$$
για $i\ge 3$ έχουμε
$$\Delta_i(f_j) = \begin{cases} f_j & , i=j \\ 0 & , i\neq j \end{cases}.$$
Τότε,
$$\begin{aligned}\Delta_i(f) &= \Delta_i\Big(\sum_{j=3}^{N} f_j\Big) = \Big(\sum_{j=3}^{N} f_j\Big) * \Psi_{2^{-i}} = \sum_{j=3}^{N} (f_j * \Psi_{2^{-i}}) = \sum_{j=3}^{N} \Delta_i(f_j) \\ &= \begin{cases} f_j & , \quad 3\le i\le N \\ 0 & , \quad \text{διαφορετικά} \end{cases}.\end{aligned}$$
Υπολογίζουμε
$$\begin{aligned}\left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p} &= \left\| \left(\sum_{j=3}^{N} |f_j(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p} = \left\| \left(\sum_{j=3}^{N} |\varphi(x)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p} \\ &= (N-2)^{\frac{1}{q}} \|\varphi\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα είχαμε δείξει ότι

$$\left\| \sum_{j=3}^{N} f_j \right\|_{L^p}^p \leq C_p \|\varphi\|_{L^p}^p (N-2)^{\frac{p}{2}},$$

επομένως

$$\|f\|_{L^p} = \left\| \sum_{j=3}^{N} f_j \right\|_{L^p} \leq C_p^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^p} (N-2)^{\frac{1}{2}}.$$

Για μεγάλο N και $q < 2$ έχουμε

$$(N-2)^{\frac{1}{q}} \|\varphi\|_{L^p} > C_p^{\frac{1}{p}} \|\varphi\|_{L^p} (N-2)^{\frac{1}{2}}.$$

Παράδειγμα 6.3.4. Για Ψ και f_i όπως πριν, έστω ότι ισχύει

$$\|f\|_{L^p} \leq C_{p,q} \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\Delta_j(f)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p}$$

για $q > 2$. Καθώς η $\widehat{\Psi}$ είναι πραγματική, έχουμε ότι $\Delta_i^* = \Delta_i$ όπως στην απόδειξη του Πορίσματος 6.1.3. Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{i \in \mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right\|_{L^{p'}} &= \|(\Delta_i(f))_i\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^n, \ell^{q'})} = \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} |\langle (\Delta_i(f))_i | (g_i)_i \rangle| \\
&= \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle \Delta_i(f) | g_i \rangle \right| \\
&= \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} \left| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \langle f | \Delta_i(g_i) \rangle \right| \\
&= \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} \left| \left\langle f \Big| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i(g_i) \right\rangle \right| \\
&= \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} \left| \int_{\mathbb{R}^n} f \sum_{i \in \mathbb{Z}} \overline{\Delta_i(g_i)} dx \right| \\
&\leq \|f\|_{L^{p'}} \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} \left\| \sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i(g_i) \right\|_{L^p},
\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Hölder. Από την υπόθεση ότι ισχύει η ανισότητα για $q > 2$, η ποσότητα αυτή φράσσεται από

$$C_{p,q} \|f\|_{L^{p'}} \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} \left\| \left(\sum_{j \in \mathbb{Z}} \left| \Delta_j \Big(\sum_{i \in \mathbb{Z}} \Delta_i(g_i) \Big) \right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p}.$$

Από την $\operatorname{supp}(\widehat{\Psi_{2^{-j}}}) = [\frac{7}{8}2^j, \frac{17}{8}2^j]$ έχουμε ότι $\Delta_i \circ \Delta_j \neq 0$ όταν $i \in \{j-1, j, j+1\}$. Άρα το παραπάνω ισούται με

$$C_{p,q} \|f\|_{L^{p'}} \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} \left\| \left(\sum_{l=-1}^{1} \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(\Delta_{j+l}(g_{j+l}))|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p}$$

$$\leq C_{p,q} \|f\|_{L^{p'}} \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} \sum_{l=-1}^{1} \left\| \left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\Delta_j(\Delta_{j+l}(g_{j+l}))|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p}.$$

Από το Θεώρημα 6.1.4 για $i = k$ και $r = q$ έχουμε

$$\left\| \left(\sum_i |\Delta_i(f_i)|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p} \leq C_{p,q,n} \left\| \left(\sum_i |f_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p}.$$

Εφαρμόζοντας δύο φορές τη σχέση αυτή, παίρνουμε το άνω φράγμα

$$C_{p,q,n}^2 C_{p,q} \|f\|_{L^{p'}} \sup_{\|(g_i)_i\|_{L^p(\mathbb{R}^n,\ell^q)}=1} \sum_{l=-1}^{1} \left\| \left(\sum_j |g_{j+l}|^q \right)^{\frac{1}{q}} \right\|_{L^p}$$

$$= 3C_{p,q,n}^2 C_{p,q} \|f\|_{L^{p'}}.$$

Δείξαμε ότι

$$\left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} |\Delta_i(f)|^{q'} \right)^{\frac{1}{q'}} \right\|_{L^{p'}} \leq c \|f\|_{L^{p'}}.$$

Όμως, $q' < 2$ διότι $q > 2$, και στο προηγούμενο παράδειγμα δείξαμε ότι η σχέση αυτή δεν μπορεί να ισχύει για $q' < 2$. Καταλήγουμε έτσι σε άτοπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Δύο θεωρήματα για πολλαπλασιαστές Fourier

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δούμε ικανές συνθήκες ώστε συναρτήσεις του $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ να ανήκουν στους χώρους $\mathscr{M}_p$. Θα μελετήσουμε δύο θεμελιώδη θεωρήματα τα οποία δίνουν τέτοιες ικανές συνθήκες: το θεώρημα του Marcinkiewicz και το θεώρημα Hörmander-Mihlin.

7.1 Χαρακτηρισμός της κλάσης $\mathscr{M}_p$

Υπενθυμίζουμε τον συμβολισμό των δυαδικών ορθογωνίων του προηγούμενου κεφαλαίου: Γράφουμε

$$\boldsymbol{I_i} = \boldsymbol{I}_{i_1\times\cdots\times i_n} = I_{i_1}\times\cdots\times I_{i_n}, \quad I_i = (-2^{i+1}, -2^i]\cup[2^i, 2^{i+1}).$$

Για συναρτήσεις $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ θέτουμε $m_{\boldsymbol{i}} = m\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}}$ και έχουμε $m = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} m\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} = \sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} m_{\boldsymbol{i}}$. Χρησιμοποιώντας τις ιδέες που έχουμε αναπτύξει ως τώρα, μπορούμε να αποδείξουμε τον ακόλουθο χαρακτηρισμό της κλάσης $\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ μέσω μιας διανυσματικής ανισότητας.

Πρόταση 7.1.1. *Έστω $m\in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $1<p<\infty$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *$m\in\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$, δηλαδή υπάρχει $C_p>0$ ώστε $\left\|(\widehat{f}m)^\vee\right\|_{L^p}\leq C_p\|f\|_{L^p}$ για κάθε $f\in L^p$.*

(ii) *Υπάρχει $C_p>0$ ώστε για κάθε $(f_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}}\subseteq L^p(\mathbb{R}^n)$ να ισχύει*

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}\left|\left(\widehat{f_{\boldsymbol{i}}}m_{\boldsymbol{i}}\right)^\vee\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\leq C_p\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}|f_{\boldsymbol{i}}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}.$$

Απόδειξη. (ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω $f\in L^p(\mathbb{R}^n)$. Από την υπόθεση, για την ακολουθία $(f_{\boldsymbol{i}})_{\boldsymbol{i}} = \left((\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}})^\vee\right)_{\boldsymbol{i}}$ ισχύει

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}\left|\left(\widehat{f}m_{\boldsymbol{i}}\right)^\vee\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\leq C_p\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}\left|(\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}})^\vee\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}.$$

Παρατηρούμε ότι $\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}\left((\widehat{f}m)^{\vee}\right) = \left(\widehat{f}m\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}}\right)^{\vee} = \left(\widehat{f}m_{\boldsymbol{i}}\right)^{\vee}$, επομένως η σχέση αυτή γράφεται ως

$$\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}\left|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}\left((\widehat{f}m)^{\vee}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \leq C_p\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}\left|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}(f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}.$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 6.2.4 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\left\|(\widehat{f}m)^{\vee}\right\|_{L^p}}{C_n\left(p+\frac{1}{p-1}\right)^{2n}} &\leq \left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}\left|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}\left((\widehat{f}m)^{\vee}\right)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \leq C_p\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n}\left|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}(f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\\ &\leq C_n\left(p+\frac{1}{p-1}\right)^{2n}\|f\|_{L^p},\end{aligned}$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι $\left\|(\widehat{f}m)^{\vee}\right\|_{L^p} \leq C_p\|f\|_{L^p}$. Δηλαδή ο τελεστής $T(f) = (\widehat{f}m)^{\vee}$ είναι φραγμένος στον L^p. Επομένως $m \in \mathscr{M}_p$. $\square$

7.2 Το θεώρημα Marcinkiewicz

Σύμφωνα με την Πρόταση 7.1.1, αν θέλουμε να αποφασίσουμε αν μια φραγμένη συνάρτηση m είναι L^p-πολλαπλασιαστής, είναι χρήσιμο να γνωρίζουμε τη συμπεριφορά της m στα δυαδικά διαστήματα. Όπως θα δούμε, το θεώρημα Marcinkiewicz στο $\mathbb{R}$ δίνει ακριβώς ικανές συνθήκες που αρκεί να ισχύουν για τον περιορισμό της m σε κάθε δυαδικό διάστημα. Η βασική ιδέα φαίνεται από το ακόλουθο παράδειγμα. Έστω m μια φραγμένη συνάρτηση που μηδενίζεται κοντά στο $-\infty$, είναι παραγωγίσιμη σε κάθε σημείο, και η παράγωγός της είναι ολοκληρώσιμη. Τότε μπορούμε να γράψουμε

$$m(\xi) = \int_{-\infty}^{\xi} m'(t)dt = \int_{-\infty}^{\infty}\mathbb{1}_{[t,\infty)}(\xi)m'(t)dt,$$

απ' όπου έπεται ότι, για κάθε f στην κλάση Schwartz,

$$(\widehat{f}m)^{\vee} = \int_{\mathbb{R}}(\widehat{f}\mathbb{1}_{[t,\infty)})^{\vee}m'(t)dt.$$

Αφού οι τελεστές $f \mapsto (\widehat{f}\mathbb{1}_{[t,\infty)})^{\vee}$ απεικονίζουν τον $L^p(\mathbb{R})$ στον $L^p(\mathbb{R})$ ανεξάρτητα από το t, συμπεραίνουμε ότι

$$\|(\widehat{f}m)^{\vee}\|_{L^p} \leq C_p\|m'\|_{L^1}\|f\|_{L^p},$$

και έπεται ότι $m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$. Το επόμενο θεώρημα βελτιώνει το παραπάνω αποτέλεσμα και βασίζεται στο θεώρημα Littlewood-Paley. Το αποδεικνύουμε αρχικά στη μονοδιάστατη περίπτωση.

Θεώρημα 7.2.1 (θεώρημα Marcinkiewicz)**.** *Έστω $m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ φραγμένη, με $m\mathbb{1}_{I_i^{\circ}} \in \mathscr{C}^1(\mathbb{R})$ για κάθε $i \in \mathbb{Z}$, όπου $I_i^{\circ} = (-2^{i+1}, -2^i) \cup (2^i, 2^{i+1})$. Υποθέτουμε επίσης ότι*

$$\sup_{i\in\mathbb{Z}}\int_{I_i^{\circ}}|m'(x)|\,dx \leq A < \infty. \tag{7.2.1}$$

Τότε, για κάθε $1 < p < \infty$ είναι $m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ και μάλιστα υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\|m\|_{\mathscr{M}_p(\mathbb{R})} \leq C\max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}^6(\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R})} + A).$$

Απόδειξη. Καθώς $m' \in \mathscr{C}^1$ στο $(2^i, 2^{i+1})$, έπεται ότι η m έχει φραγμένη κύμανση στο διάστημα αυτό και επομένως είναι διαφορά δύο αυξουσών συναρτήσεων. Δηλαδή υπάρχει το πλευρικό όριο της m από δεξιά στο σημείο 2^i. Αλλάζοντας την τιμή της f στο σημείο αυτό, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι δεξιά συνεχής στο 2^i και όμοια, αριστερά συνεχής στο -2^i.

Θέτουμε

$$\Delta_I^{\#}(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_I\right)^{\vee}, \quad m_+(x) = m(x)\mathbb{1}_{x\geq 0}, \quad m_-(x) = m(x)\mathbb{1}_{x<0}.$$

Θα δείξουμε ότι $m_+, m_- \in \mathscr{M}_p$.

Καθώς η m' είναι ολοκληρώσιμη στο $[2^i, x]$ για κάθε $2^i \leq x < 2^{i+1}$, από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε

$$m(x) = m(2^i) + \int_{2^i}^{x} m'(t)dt$$

για $2^i \leq x < 2^{i+1}$. Επομένως για $f \in \mathscr{S}(\mathbb{R})$ έχουμε

$$\begin{aligned} m(x)\widehat{f}(x)\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x) &= m(2^i)\widehat{f}(x)\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x) + \int_{2^i}^{x} \widehat{f}(x)\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x)m'(t)dt \\ &= m(2^i)\widehat{f}(x)\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x) + \int_{2^i}^{2^{i+1}} \widehat{f}(x)\mathbb{1}_{[t,\infty)}(x)\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x)m'(t)dt. \end{aligned}$$

Θέτουμε $e_x(\xi) = e^{2\pi i\xi x}$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i}m_+\right)^{\vee} &= \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}m\right)^{\vee} \\ &= \left(m(2^i)\widehat{f}(x)\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x) + \int_{2^i}^{2^{i+1}} \widehat{f}(x)\mathbb{1}_{[t,\infty)}(x)\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x)m'(t)dt\right)^{\vee} \\ &= m(2^i)\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}\right)^{\vee} + \int_{\mathbb{R}}\int_{2^i}^{2^{i+1}} \widehat{f}(x)\mathbb{1}_{[t,\infty)}(x)\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x)m'(t)dte_x dx \\ &= m(2^i)\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f) + \int_{2^i}^{2^{i+1}}\int_{\mathbb{R}} \widehat{f}(x)\mathbb{1}_{[t,\infty)}(x)\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x)e_x dx m'(t)dt \\ &= m(2^i)\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f) + \int_{2^i}^{2^{i+1}} \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{[t,\infty)}\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}\right)^{\vee} m'(t)dt \\ &= m(2^i)\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f) + \int_{2^i}^{2^{i+1}} \Delta^{\#}_{[t,\infty)} \circ \Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)m'(t)dt. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \left|\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i}m_+\right)^{\vee}\right| &\leq \|m\|_\infty \left|\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right| + \int_{2^i}^{2^{i+1}} \left|\Delta^{\#}_{[t,\infty)} \circ \Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right| |m'(t)|\, dt \\ &= \|m\|_\infty \left|\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right| + \int_{2^i}^{2^{i+1}} \left(\left|\Delta^{\#}_{[t,\infty)} \circ \Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right| |m'(t)|^{\frac{1}{2}}\right)\left(|m'(t)|^{\frac{1}{2}}\right) dt \\ &\leq \|m\|_\infty \left|\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right| + A^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2^i}^{2^{i+1}} \left|\Delta^{\#}_{[t,\infty)} \circ \Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right|^2 |m'(t)|\, dt\right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

όπου για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz και την υπόθεση (7.2.1).

Υπολογίζουμε

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i}m_+)^\vee\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} = \left\|(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i}m_+)^\vee\right\|_{\ell^2}\\
&\leq \left\|\|m\|_\infty\left|\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right|\right\|_{\ell^2} + \left\|A^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2^i}^{2^{i+1}}\left|\Delta^{\#}_{[t,\infty)}\circ\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right|^2|m'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{\ell^2}\\
&= \|m\|_{L^\infty}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_{2^i}^{2^{i+1}}\left|\Delta^{\#}_{[t,\infty)}\circ\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right|^2|m'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\leq \|m\|_{L^\infty}\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + A^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty\left|\Delta^{\#}_{[t,\infty)}\circ\Delta^{\#}_{[\log_2 t]}(f^+)\right|^2|m'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}
$$

όπου για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f) = \Delta^{\#}_{[\log_2 t]}(f^+)$ για $2^i \leq t < 2^{i+1}$, όπου $f^+ = (\widehat{f}\mathbb{1}_{(0,\infty)})^\vee$.

Πράγματι, αν $2^i \leq t < 2^{i+1}$ τότε $i \leq \log_2 t < i+1$ άρα $[\log_2 t] = i$, επομένως για $2^i \leq t < 2^{i+1}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f) &= \left(\mathbb{1}_{[2^i,2^{i+1})}(x)\widehat{f}(x)\right)^\vee = \left(\mathbb{1}_{(0,\infty)}(x)\mathbb{1}_{(-2^{i+1},-2^i]\cup[2^i,2^{i+1})}(x)\widehat{f}(x)\right)^\vee\\
&= \left(\mathbb{1}_{Ii}(x)\widehat{f^+}(x)\right)^\vee = \Delta^{\#}_i(f^+) = \Delta^{\#}_{[\log_2 t]}(f^+).
\end{aligned}
$$

Από την Πρόταση 5.3.2 έχουμε

$$
\begin{aligned}
&A^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\int_0^\infty\left|\Delta^{\#}_{[t,\infty)}\circ\Delta^{\#}_{[\log_2 t]}(f^+)\right|^2|m'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\\
&\qquad\leq C\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}A^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\int_0^\infty\left|\Delta^{\#}_{[\log_2 t]}(f^+)\right|^2|m'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\\
&\qquad= C\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}A^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_{2^i}^{2^{i+1}}\left|\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right|^2|m'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\\
&\qquad= C\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}A^{\frac{1}{2}}\left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right|^2\int_{2^i}^{2^{i+1}}|m'(t)|\,dt\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\\
&\qquad\leq C\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}A\left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}}\left|\Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p},
\end{aligned}
$$

όπου για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση (7.2.1).

Επομένως,

$$
\begin{aligned}
&\left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left| (\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i} m_+)^{\vee} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\leq \left(\|m\|_{L^\infty} + C \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\} A \right) \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left| \Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\leq C \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\} (\|m\|_{L^\infty} + A) \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left| \Delta^{\#}_{[2^i,2^{i+1})}(f) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&= C \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\} (\|m\|_{L^\infty} + A) \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left| \Delta^{\#}_{i}(f^+) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\leq C \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^3 (\|m\|_{L^\infty} + A) \left\| \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{(0,\infty)} \right)^{\vee} \right\|_{L^p} \\
&\leq C \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^4 (\|m\|_{L^\infty} + A) \|f\|_{L^p},
\end{aligned}
$$

όπου για την προτελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την δεύτερη ανισότητα του Θεωρήματος 6.2.2, και για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το Πόρισμα 4.2.2.

Καθώς $(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i} m_+)^{\vee} = \Delta^{\#}_i \left((\widehat{f} m_+)^{\vee} \right)$, από την πρώτη ανισότητα του ίδιου θεωρήματος έχουμε

$$
\begin{aligned}
\left\| (\widehat{f} m_+)^{\vee} \right\|_{L^p} &\leq C \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^2 \left\| \left(\sum_{i\in\mathbb{Z}} \left| (\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i} m_+)^{\vee} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\leq C \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^6 (\|m\|_{L^\infty} + A) \|f\|_{L^p}.
\end{aligned}
$$

Δείξαμε ότι $m_+ \in \mathscr{M}_p$ με

$$
\|m_+\|_{\mathscr{M}_p} \leq C \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^6 (\|m\|_{L^\infty} + A).
$$

Όμοια δείχνουμε την ίδια σχέση για την m_- και αθροίζοντας τις m_+, m_- παίρνουμε την ζητούμενη σχέση για την m, με σταθερά την $C' = 2C$. □

Το θεώρημα Marcinkiewicz επεκτείνεται στον $\mathbb{R}^n$ όπως φαίνεται στο παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 7.2.2. *Εστω $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη ώστε για κάθε $0 \leq k \leq n$ και $\{j_1, \ldots, j_n\} = \{1, \cdots, n\}$ για τα $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ με $\alpha_{j_1}, \ldots, \alpha_{j_k} = 1$ και τις υπόλοιπες συντεταγμένες ίσες με μηδέν η $\partial^\alpha m$ είναι συνεχής στο*

$$
\overline{\boldsymbol{I_i}} = \left([-2^{i_1+1}, -2^{i_1}] \cup [2^{i_1}, 2^{i_1+1}] \right) \times \cdots \times \left([-2^{i_n+1}, -2^{i_n}] \cup [2^{i_n}, 2^{i_n+1}] \right)
$$

για κάθε $\boldsymbol{i}$ και

$$
\sup_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^n} \sup_{\xi_{j_{k+1}}\in I_{i_{j_{k+1}}}} \cdots \sup_{\xi_{j_n}\in I_{i_{j_n}}} \int_{I_{i_{j_1}}} \cdots \int_{I_{i_{j_k}}} |(\partial^\alpha m)(\xi_1, \ldots, \xi_n)| \, d\xi_{j_1} \cdots d\xi_{j_k} \leq A < \infty. \tag{7.2.2}
$$

Τότε για κάθε $1 < p < \infty$ είναι $m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ και μάλιστα υπάρχει $C_n > 0$ ώστε

$$\|m\|_{\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)} \le C_n \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}^{6n} (\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + A).$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε το θεώρημα για $n = 2$. Η γενική περίπτωση έπεται με επαγωγή.

Θέτουμε $m_{++}(x) = m(x)\mathbb{1}_{x_1\ge 0}\mathbb{1}_{x_2\ge 0}$, $m_{+-}(x) = m(x)\mathbb{1}_{x_1\ge 0}\mathbb{1}_{x_2<0}$ και ανάλογα ορίζουμε τις $m_{-+}(x)$, $m_{--}(x)$. Θα δείξουμε το θεώρημα για την m_{++}. Όπως και στη μονοδιάστατη περίπτωση, αυτό αρκεί για να ισχύει το θεώρημα για την m. Θέτουμε επίσης $f_{++} = \Big(\widehat{f}\mathbb{1}_{(0,\infty)^2}\Big)^\vee$, $\Delta_I^{\#(1)}(f) := \Delta_I^{\#(1)}(x_2)(f) = \Big(\widehat{f}(x_1,x_2)\mathbb{1}_I(x_1)\Big)^\vee$ και όμοια ορίζουμε την $\Delta_I^{\#(2)}(f)$.

Εφαρμόζοντας το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού ως προς x_1 και x_2 για $2^{i_1} \le x_1 < 2^{i_1+1}$ και $2^{i_2} \le x_2 < 2^{i_2+1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} m(x_1,x_2) &= m(x_1,2^{i_2}) + \int_{2^{i_2}}^{x_2} (\partial_2 m)(x_1,t_2)dt_2 \\ &= m(2^{i_1},2^{i_2}) + \int_{2^{i_1}}^{x_1} (\partial_1 m)(t_1,2^{i_2})dt_1 + \int_{2^{i_2}}^{x_2} (\partial_2 m)(x_1,t_2)dt_2 \\ &= m(2^{i_1},2^{i_2}) + \int_{2^{i_1}}^{x_1} (\partial_1 m)(t_1,2^{i_2})dt_1 + \int_{2^{i_2}}^{x_2} (\partial_2 m)(2^{i_1},t_2)dt_2 \\ &\qquad + \int_{2^{i_1}}^{x_1}\int_{2^{i_2}}^{x_2} (\partial_1\partial_2 m)(t_1,t_2)dt_1dt_2. \end{aligned}$$

Θέτουμε $\boldsymbol{I_i}^+ = [2^{i_1},2^{i_1+1}) \times [2^{i_2},2^{i_2+1})$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} &\Big(\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} m_{++}\Big)^\vee = \Big(\widehat{f_{++}}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} m\Big)^\vee = \Big(\widehat{f_{++}}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} m(2^{i_1},2^{i_2})\Big)^\vee + \Big(\widehat{f_{++}}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} \int_{2^{i_1}}^{x_1}(\partial_1 m)(t_1,2^{i_2})dt_1\Big)^\vee \\ &+ \Big(\widehat{f_{++}}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} \int_{2^{i_2}}^{x_2}(\partial_2 m)(2^{i_1},t_2)dt_2\Big)^\vee + \Big(\widehat{f_{++}}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} \int_{2^{i_1}}^{x_1}\int_{2^{i_2}}^{x_2}(\partial_1\partial_2 m)(t_1,t_2)dt_1dt_2\Big)^\vee \\ &\overset{(*)}{=} m(2^{i_1},2^{i_2})\Delta_{i_1}^{\#(1)}\Delta_{i_2}^{\#(2)}(f_{++}) + \int_{2^{i_1}}^{2^{i_1+1}} \Delta_{[t_1,\infty)}^{\#(1)} \circ \Delta_{i_1}^{\#(1)}\Delta_{i_2}^{\#(2)}(f_{++})(\partial_1 m)(t_1,2^{i_2})dt_1 \\ &+ \int_{2^{i_2}}^{2^{i_2+1}} \Delta_{i_1}^{\#(1)}\Delta_{[t_2,\infty)}^{\#(2)} \circ \Delta_{i_2}^{\#(2)}(f_{++})(\partial_2 m)(2^{i_1},t_2)dt_2 \\ &+ \int_{2^{i_1}}^{2^{i_1+1}}\int_{2^{i_2}}^{2^{i_2+1}} \Delta_{[t_1,\infty)}^{\#(1)} \circ \Delta_{i_1}^{\#(1)}\Delta_{[t_2,\infty)}^{\#(2)} \circ \Delta_{i_2}^{\#(2)}(f_{++})(\partial_1\partial_2 m)(t_1,t_2)dt_1dt_2, \end{aligned}$$

με την $(*)$ όπως στη μονοδιάστατη περίπτωση.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz για τους τρεις τελευταίους όρους και την υπόθεση (7.2.2) όπως στη μονοδιάστατη περίπτωση παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
&\left|\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} m_{++}\right)^{\vee}\right| \leq \|m\|_{L^\infty}\left|\Delta_{i_1}^{\#(1)}\Delta_{i_2}^{\#(2)}(f_{++})\right| \\
&+A^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2^{i_1}}^{2^{i_1+1}}\left|\Delta_{[t_1,\infty)}^{\#(1)}\circ\Delta_{i_1}^{\#(1)}\Delta_{i_2}^{\#(2)}(f_{++})\right|^2\left|(\partial_1 m)(t_1,2^{i_2})\right|dt_1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+A^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2^{i_2}}^{2^{i_2+1}}\left|\Delta_{i_1}^{\#(1)}\Delta_{[t_2,\infty)}^{\#(2)}\circ\Delta_{i_2}^{\#(2)}(f_{++})\right|^2\left|(\partial_2 m)(2^{i_1},t_2)\right|dt_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+A^{\frac{1}{2}}\left(\int_{2^{i_1}}^{2^{i_1+1}}\int_{2^{i_2}}^{2^{i_2+1}}\left|\Delta_{[t_1,\infty)}^{\#(1)}\circ\Delta_{i_1}^{\#(1)}\Delta_{[t_2,\infty)}^{\#(2)}\circ\Delta_{i_2}^{\#(2)}(f_{++})\right|^2\left|(\partial_1\partial_2 m)(t_1,t_2)\right|dt_1dt_2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Παίρνουμε ℓ^2 νόρμες και χρησιμοποιώντας τα $i_1=[\log_2 t_1]$, $i_2=[\log_2 t_2]$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^2}\left|\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} m_{++}\right)^{\vee}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq \|m\|_{L^\infty}\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^2}\left|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}(f_{++})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+A^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty\sum_{i_2\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_{[t_1,\infty)}^{\#(1)}\circ\Delta_{[\log_2 t_1]}^{\#(1)}\Delta_{[\log_2 t_2]}^{\#(2)}(f_{++})\right|^2\left|(\partial_1 m)(t_1,2^{[\log_2 t_2]})\right|dt_1\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+A^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i_1\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty\left|\Delta_{[\log_2 t_1]}^{\#(1)}\Delta_{[t_2,\infty)}^{\#(2)}\circ\Delta_{[log_2 t_2]}^{\#(2)}(f_{++})\right|^2\left|(\partial_2 m)(2^{[\log_2 t_1]},t_2)\right|dt_2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&+A^{\frac{1}{2}}\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\left|\Delta_{[t_1,\infty)}^{\#(1)}\circ\Delta_{[\log_2 t_1]}^{\#(1)}\Delta_{[t_2,\infty)}^{\#(2)}\circ\Delta_{[\log_2 t_2]}^{\#(2)}(f_{++})\right|^2\left|(\partial_1\partial_2 m)(t_1,t_2)\right|dt_1dt_2\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Χρησιμοποιούμε την Πρόταση 5.3.2 όπως στην μονοδιάστατη περίπτωση, για τους τρεις τελευταίους όρους ως προς $\Delta_{[t_1,\infty)}^{\#(1)}$, $\Delta_{[t_2,\infty)}^{\#(2)}$ και $\Delta_{[t_1,\infty)}^{\#(1)}\Delta_{[t_2,\infty)}^{\#(2)}$ αντίστοιχα. Στους πρώτους δύο όρους εμφανίζονται οι σταθερές $C_2\max\{p,\frac{1}{p-1}\}$ και στον τρίτο η $C_2\max\{p,\frac{1}{p-1}\}^2$, επομένως μπορούμε να φράξουμε όλους τους όρους από την $C_2\max\{p,\frac{1}{p-1}\}^2$.

Έχουμε λοιπόν

$$
\begin{aligned}
&\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^2}\left|\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} m_{++}\right)^{\vee}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \leq \|m\|_{L^\infty}\left\|\left(\sum_{\boldsymbol{i}\in\mathbb{Z}^2}\left|\boldsymbol{\Delta}_{\boldsymbol{i}}^{\#}(f_{++})\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \\
&+C_2\max\Big\{p,\frac{1}{p-1}\Big\}^2 A^{\frac{1}{2}} \\
&\times\Bigg\{\left\|\left(\int_0^\infty\sum_{i_2\in\mathbb{Z}}\left|\Delta_{[\log_2 t_1]}^{\#(1)}\Delta_{[\log_2 t_2]}^{\#(2)}(f_{++})\right|^2\left|(\partial_1 m)(t_1,2^{[\log_2 t_2]})\right|dt_1\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \\
&+\left\|\left(\sum_{i_1\in\mathbb{Z}}\int_0^\infty\left|\Delta_{[\log_2 t_1]}^{\#(1)}\Delta_{[\log_2 t_2]}^{\#(2)}(f_{++})\right|^2\left|(\partial_2 m)(2^{[\log_2 t_1]},t_2)\right|dt_2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \\
&+\left\|\left(\int_0^\infty\int_0^\infty\left|\Delta_{[\log_2 t_1]}^{\#(1)}\Delta_{[\log_2 t_2]}^{\#(2)}(f_{++})\right|^2\left|(\partial_1\partial_2 m)(t_1,t_2)\right|dt_1dt_2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}\Bigg\}.
\end{aligned}
$$

Όπως στη μονοδιάστατη περίπτωση μπορούμε να βγάλουμε τα $\Delta^{\#(1)}_{[\log_2 t_1]}$, $\Delta^{\#(2)}_{[\log_2 t_2]}$ από το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας την υπόθεση (7.2.2) έχουμε, για τον πρώτο όρο,

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\int_0^\infty \sum_{i_2 \in \mathbb{Z}} \left| \Delta^{\#(1)}_{[\log_2 t_1]} \Delta^{\#(2)}_{[\log_2 t_2]} (f_{++}) \right|^2 \left| (\partial_1 m)(t_1, 2^{[\log_2 t_2]}) \right| dt_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&= \left\| \left(\sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \int_{2^{i_1}}^{2^{i_1+1}} \sum_{i_2 \in \mathbb{Z}} \left| \Delta^{\#(1)}_{i_1} \Delta^{\#(2)}_{i_2} (f_{++}) \right|^2 \left| (\partial_1 m)(t_1, 2^{i_2}) \right| dt_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&= \left\| \left(\sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{i_2 \in \mathbb{Z}} \left| \Delta^{\#(1)}_{i_1} \Delta^{\#(2)}_{i_2} (f_{++}) \right|^2 \int_{2^{i_1}}^{2^{i_1+1}} \left| (\partial_1 m)(t_1, 2^{i_2}) \right| dt_1 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\leq A^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^2} \left| \boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}} (f_{++}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p},
\end{aligned}$$

και για τον τρίτο όρο

$$\begin{aligned}
&\left\| \left(\int_0^\infty \int_0^\infty \left| \Delta^{\#(1)}_{[\log_2 t_1]} \Delta^{\#(2)}_{[\log_2 t_2]} (f_{++}) \right|^2 \left| (\partial_1 \partial_2 m)(t_1, t_2) \right| dt_1 dt_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&= \left\| \left(\sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{i_2 \in \mathbb{Z}} \int_{2^{i_1}}^{2^{i_1+1}} \int_{2^{i_2}}^{2^{i_2+1}} \left| \Delta^{\#(1)}_{i_1} \Delta^{\#(2)}_{i_2} (f_{++}) \right|^2 \left| (\partial_1 \partial_2 m)(t_1, t_2) \right| dt_1 dt_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&= \left\| \left(\sum_{i_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{i_2 \in \mathbb{Z}} \left| \Delta^{\#(1)}_{i_1} \Delta^{\#(2)}_{i_2} (f_{++}) \right|^2 \int_{2^{i_1}}^{2^{i_1+1}} \int_{2^{i_2}}^{2^{i_2+1}} \left| (\partial_1 \partial_2 m)(t_1, t_2) \right| dt_1 dt_2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \\
&\leq A^{\frac{1}{2}} \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^2} \left| \boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}} (f_{++}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.
\end{aligned}$$

Επομένως φράσσουμε όλο το άθροισμα από

$$\left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^2} \left| \left(\widehat{f} \mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} m_{++} \right)^{\vee} \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p} \leq C_2 \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^2 \left(\|m\|_{L^\infty} + A \right) \left\| \left(\sum_{\boldsymbol{i} \in \mathbb{Z}^2} \left| \boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}} (f_{++}) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}.$$

Χρησιμοποιώντας την δεύτερη ανισότητα του Θεωρήματος 6.2.4 φράσσουμε το παραπάνω από

$$C_2 \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^6 \left(\|m\|_{L^\infty} + A \right) \left\| \left(\widehat{f} \mathbb{1}_{(0,\infty)^2} \right)^{\vee} \right\|_{L^p}$$

και από την Πρόταση 4.2.1 αυτό φράσσεται από

$$C_2 \max\left\{ p, \frac{1}{p-1} \right\}^8 \left(\|m\|_{L^\infty} + A \right) \|f\|_{L^p}.$$

Τέλος παρατηρούμε ότι $\left(\widehat{f} \mathbb{1}_{\boldsymbol{I_i}} m_{++} \right)^{\vee} = \boldsymbol{\Delta}^{\#}_{\boldsymbol{i}} \left((\widehat{f} m_{++})^{\vee} \right)$, επομένως από την πρώτη ανισότητα του

Θεωρήματος 6.2.4 παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left\|\left(\widehat{f}m_{++}\right)^{\vee}\right\|_{L^p} &\leq C_2 \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}^4 \left\|\left(\sum_{i\in\mathbb{Z}^2}\left|\left(\widehat{f}\mathbb{1}_{I_i}m_{++}\right)^{\vee}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \\ &\leq C_2 \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}^{12} \left(\|m\|_{L^\infty} + A\right)\|f\|_{L^p}.\end{aligned}$$

Δείξαμε ότι $m_{++} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^2)$ με

$$\|m_{++}\|_{\mathscr{M}_p} \leq C_2 \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}^{12} \left(\|m\|_{L^\infty} + A\right).$$

Ανάλογα έπεται η σχέση για τις m_{+-}, m_{-+}, m_{--} και θέτοντας $C_2' = 4C_2$ παίρνουμε τη ζητούμενη σχέση για την m. □

Η επόμενη πρόταση μας πιτρέπει να αντικαταστήσουμε την (7.2.2) με μια συνθήκη που ικανοποιείται σε πολλές χρήσιμες περιπτώσεις και είναι πιο εύκολο να ελεγχθεί, οπότε μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα του Marcinkiewicz.

Πόρισμα 7.2.3. *Έστω $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση που ορίζεται μακριά από τους άξονες συντεταγμένων στον $\mathbb{R}^n$ και είναι $\mathscr{C}^n$ στο πεδίο ορισμού της. Υποθέτουμε επίσης ότι για κάθε $0 \leq k \leq n$ και $j_1, \dots, j_k \in \{1, \cdots, n\}$ και όλα τα $\xi_r \in \mathbb{R}$ για $r \notin \{j_1, \dots, j_k\}$ ισχύει*

$$|(\partial_{j_1}\cdots\partial_{j_k}m)(\xi_1,\dots,\xi_n)| \leq A|\xi_{j_1}|^{-1}\cdots|\xi_{j_k}|^{-1}. \tag{7.2.3}$$

Τότε για κάθε $1 < p < \infty$ είναι $m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ και υπάρχει σταθερά $C_n > 0$ ώστε

$$\|m\|_{\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}^{6n}(\|m\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + A).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι η (7.2.2) είναι συνέπεια της (7.2.3). □

7.3 Το θεώρημα Hörmander–Mihlin

Θεώρημα 7.3.1 (θεώρημα Hörmander-Mihlin)**.** *Έστω $m : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ φραγμένη με την εξής ιδιότητα: για κάθε $R > 0$ και $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}] + 1$ ισχύει*

$$\left(\int_{R<|\xi|<2R} |\partial^\alpha m(x)|^2\, d\xi\right)^{\frac{1}{2}} \leq AR^{\frac{n}{2}-|\alpha|} < \infty. \tag{7.3.1}$$

Τότε για κάθε $1 < p < \infty$ είναι $m \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)$ και μάλιστα υπάρχει σταθερά $C_n > 0$ ώστε

$$\|m\|_{\mathscr{M}_p(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}(A + \|m\|_{L^\infty}).$$

Παρατήρηση 7.3.2. Η υπόθεση (7.3.1) είναι η υπόθεση του Hörmander που εξασφαλίζει το συμπέρασμα του θεωρήματος. Η υπόθεση του Mihlin, η οποία εξασφαλίζει επίσης το συμπέρασμα, είναι η εξής: για κάθε $|\alpha| \leq [\frac{n}{2}] + 1$ ισχύει

$$|\partial_\xi^\alpha m(\xi)| \leq A|\xi|^{-|\alpha|}. \tag{7.3.2}$$

Μπορούμε όμως εύκολα να ελέγξουμε ότι αν ικανοποιείται η (7.3.2) τότε ισχύει και η (7.3.1), άρα η εκδοχή του θεωρήματος που έχουμε διατυπώσει και θα αποδείξουμε είναι ισχυρότερη.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.1. Θέτουμε $T(f) = f * m^{\vee}$. Παρατηρούμε ότι $T(f) = (\widehat{f}m)^{\vee}$, επομένως $\|T\|_{L^p \to L^p} = \|m\|_{\mathscr{M}_p}$. Επίσης για $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ είναι

$$\|T(f)\|_{L^2} = \left\|(\widehat{f}m)^{\vee}\right\|_{L^2} \overset{(*)}{=} \left\|\widehat{f}m\right\|_{L^2} \leq \|m\|_{L^\infty} \left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} \overset{(*)}{=} \|m\|_{L^\infty} \|f\|_{L^2},$$

όπου στις $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα Parseval. Επομένως, $\|T\|_{L^2 \to L^2} \leq \|m\|_{L^\infty} < \infty$.

Αρκεί να δείξουμε ότι ο T πληροί τις προϋποθέσεις του Θεωρήματος 5.2.5 για $r = 2$. Τότε έπεται ότι

$$\begin{aligned}\|m\|_{\mathscr{M}_p} = \|T\|_{L^p \to L^p} &\leq C_n \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}(A_2 + \|T\|_{L^2 \to L^2}) \\ &\leq C_n \max\Big\{p, \frac{1}{p-1}\Big\}(A + \|m\|_{L^\infty}).\end{aligned}$$

Έστω $\widehat{\Psi}$ λεία συνάρτηση με $\operatorname{supp}(\widehat{\Psi}) = [-2, -\frac{1}{2}] \cup [\frac{1}{2}, 2]$ και

$$\sum_{i \in \mathbb{Z}} \widehat{\Psi}(2^{-i}\xi) = 1, \text{ για } \xi \neq 0.$$

Θέτουμε $m_i(\xi) = m(\xi)\widehat{\Psi}(2^{-i}\xi)$ και $K_i(\xi) = m_i^{\vee}(\xi)$.

Είναι $\sum\limits_{i \in \mathbb{Z}} K_i \overset{\mathscr{S}'}{=} m^{\vee}$. Πράγματι, για τυχούσα $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\Big\langle \sum_{|i| \leq n} K_i, \varphi \Big\rangle &= \Big\langle \Big(\sum_{|i| \leq n} K_i\Big)^{\wedge}, \widehat{\varphi} \Big\rangle = \Big\langle \sum_{|i| \leq n} \widehat{K_i}, \widehat{\varphi} \Big\rangle = \Big\langle \sum_{|i| \leq n} \widehat{\Psi_{2^{-i}}} m, \widehat{\varphi} \Big\rangle \\ &\overset{n \to \infty}{\longrightarrow} \langle m, \widehat{\varphi} \rangle = \langle m^{\vee}, \varphi \rangle.\end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} \int_{\mathbb{R}^n} |K_i(x)| \, (1 + 2^i |x|)^{\frac{1}{4}} dx \leq C_n A \tag{7.3.3}$$

και

$$\sup_{i \in \mathbb{Z}} 2^{-i} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla K_i(x)| \, (1 + 2^i |x|)^{\frac{1}{4}} dx \leq C_n A. \tag{7.3.4}$$

Για την πρώτη σχέση, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |K_i(x)| \, (1 + 2^i |x|)^{\frac{1}{4}} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \Big(|K_i(x)| \, (1 + 2^i |x|)^{[\frac{n}{2}]+1}\Big) \Big((1 + 2^i |x|)^{-[\frac{n}{2}] - \frac{3}{4}}\Big) dx \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K_i(x)|^2 \Big((1 + 2^i |x|)^{[\frac{n}{2}]+1}\Big)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (1 + 2^i |x|)^{-2[\frac{n}{2}] - \frac{3}{2}} dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $[\frac{n}{2}] \geq \frac{n}{2} - \frac{1}{2}$, επομένως $-2[\frac{n}{2}] - \frac{3}{2} \leq -n - \frac{1}{2} < -n$. Άρα, το δεύτερο ολοκλήρωμα φράσσεται από $c 2^{-\frac{in}{2}}$ για κάποια σταθερά $c > 0$. Από την (2.1.4) έχουμε

$$(1 + 2^i |x|)^{[\frac{n}{2}]+1} \leq C_n \sum_{|\gamma| \leq [\frac{n}{2}]+1} \left|(2^i x)^{\gamma}\right|.$$

Επίσης, από (vi) της Πρότασης 2.2.2 είναι $(\partial^\gamma m_i)^\vee(x) = (2\pi i x)^\gamma (m_i)^\vee(x) = (2\pi i)^\gamma x^\gamma K_i(x)$.

Επομένως το παραπάνω γινόμενο ολοκληρωμάτων φράσσεται από

$$\begin{aligned}
& c2^{-\frac{in}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K_i(x)|^2 \left(C_n \sum_{|\gamma| \le [\frac{n}{2}]+1} \left| (2^i x)^\gamma \right| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= c2^{-\frac{in}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{|\gamma| \le [\frac{n}{2}]+1} |K_i(x)| \, C_n \left| (2^i x)^\gamma \right| \right)^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(*)}{\le} c2^{-\frac{in}{2}} \sum_{|\gamma| \le [\frac{n}{2}]+1} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |K_i(x)|^2 C_n^2 \left| (2^i x)^\gamma \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \sum_{|\gamma| \le [\frac{n}{2}]+1} (2\pi i)^{-\gamma} 2^{i\gamma} C_n c 2^{-\frac{in}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(2\pi i)^\gamma x^\gamma K_i(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le C_n' 2^{-\frac{in}{2}} \sum_{|\gamma| \le [\frac{n}{2}]+1} 2^{i\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\gamma m_i)^\vee(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\overset{(**)}{=} C_n' 2^{-\frac{in}{2}} \sum_{|\gamma| \le [\frac{n}{2}]+1} 2^{i\gamma} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\gamma m_i)(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Minkowski και στην $(**)$ την ταυτότητα Plancherel.

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\left(\partial^\alpha \widehat{\Psi_{2^{-i}}} \right)(x) = 2^{-i\alpha} \left(\partial^\alpha \widehat{\Psi} \right)(2^{-i} x).$$

Πράγματι, από την (v) της Πρότασης 2.2.2 έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\partial^\alpha \widehat{\Psi_{2^{-i}}} \right)(x) &= \left((-2\pi i y)^\alpha \Psi_{2^{-i}}(y) \right)^\wedge (x) = \left((-2\pi i y)^\alpha 2^{in} \Psi(2^i y) \right)^\wedge (x) \\
&= 2^{-i\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i (2^i y))^\alpha 2^{in} \Psi(2^i y) e^{-2\pi i (2^i y)(2^{-i} x)} dy \\
&= 2^{-i\alpha} \int_{\mathbb{R}^n} (-2\pi i z)^\alpha \Psi(z) e^{-2\pi i (z)(2^{-i} x)} dz \\
&= 2^{-i\alpha} \left((-2\pi i z)^\alpha \Psi(z) \right)^\wedge (2^{-i} x) \\
&= 2^{-i\alpha} \left(\partial^\alpha \widehat{\Psi} \right)(2^{-i} x).
\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον κανόνα του Leibniz για την $m_i = m\widehat{\Psi_{2^{-i}}}$ και αυτή τη σχέση έχουμε

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} |(\partial^\gamma m_i)(x)|^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{\beta \le \gamma} C_{\beta\gamma} (\partial^\beta m)(x) (\partial^{\gamma-\beta} \widehat{\Psi_{2^{-i}}})(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \sum_{\beta \le \gamma} C_{\beta\gamma} (\partial^\beta m)(x) 2^{-i(\gamma-\beta)} (\partial^{\gamma-\beta} \widehat{\Psi})(2^{-i} x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Από την υπόθεση για το $\operatorname{supp}(\widehat{\Psi})$ έχουμε ότι $(\partial^{\gamma-\beta}\widehat{\Psi})(2^{-i}x)=0$ όταν δεν ισχύει $2^{i-1}\leq|x|\leq 2^{i+1}$, επομένως μπορούμε να περιορίσουμε το ολοκλήρωμα στο διάστημα αυτό. Καθώς η $\widehat{\Psi}$ είναι λεία με συμπαγή φορέα, έπεται ότι κάθε παράγωγός της είναι φραγμένη, επομένως υπάρχει c_γ ώστε $\left|(\partial^{\gamma-\beta}\widehat{\Psi})(2^{-i}x)\right|\leq c_\gamma$ για κάθε $\beta\leq\gamma$. Παρατηρούμε επίσης ότι

$$\begin{aligned}\left|2^{-i(\gamma-\beta)}\right| &= \left|2^{-i(\gamma_1-\beta_1)}\cdots 2^{-i(\gamma_n-\beta_n)}\right| = 2^{i(\beta_1-\gamma_1)}\cdots 2^{i(\beta_n-\gamma_n)}\\ &= 2^{i[(\beta_1+\cdots+\beta_n)-(\gamma_1+\cdots+\gamma_n)]} = 2^{i(|\beta|-|\gamma|)} = 2^{i|\beta|}2^{-i|\gamma|}.\end{aligned}$$

Φράσσουμε το παραπάνω ολοκλήρωμα από

$$\begin{aligned}&\left(\int_{2^{i-1}\leq|x|\leq 2^{i+1}}\left|\sum_{\beta\leq\gamma}c_\gamma C_{\beta\gamma}2^{-i(\gamma-\beta)}(\partial^\beta m)(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\overset{(*)}{\leq}\sum_{\beta\leq\gamma}\left(\int_{2^{i-1}\leq|x|\leq 2^{i+1}}\left|c_\gamma C_{\beta\gamma}2^{-i(\gamma-\beta)}(\partial^\beta m)(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq\sum_{\beta\leq\gamma}c_\gamma C_{\beta\gamma}2^{-i|\gamma|}2^{i|\beta|}\left(\int_{2^{i-1}\leq|x|\leq 2^{i+1}}\left|(\partial^\beta m)(x)\right|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\overset{(**)}{\leq}\sum_{\beta\leq\gamma}c_\gamma C_{\beta\gamma}2^{-i|\gamma|}2^{i|\beta|}\left(A(2^{i-1})^{\frac{n}{2}-|\beta|}+A(2^i)^{\frac{n}{2}-|\beta|}\right)\\ &\leq\sum_{\beta\leq\gamma}c_\gamma C_{\beta\gamma}2^{-i|\gamma|}2^{i|\beta|}2A2^{\frac{in}{2}}2^{-i|\beta|}=C'_\gamma A2^{-i|\gamma|}2^{\frac{in}{2}},\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα Minkowski και στην $(**)$ την (7.3.1).

Έχουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}|K_i(x)|\,(1+2^i|x|)^{\frac{1}{4}}dx &\leq C'_n2^{-\frac{in}{2}}\sum_{|\gamma|\leq[\frac{n}{2}]+1}2^{i\gamma}C'_\gamma A2^{-i|\gamma|}2^{\frac{in}{2}}\\ &= C'_n\sum_{|\gamma|\leq[\frac{n}{2}]+1}C'_\gamma A=C_nA.\end{aligned}$$

Για τη δεύτερη σχέση, ακολουθούμε ανάλογη διαδικασία για κάθε ∂_jK_i, $j=1,2,\ldots,n$. Το 2^{-i} χρειάζεται στον τύπο καθώς η σχέση $(\partial^\gamma m_i)^\vee(x)=(2\pi i)^\gamma x^\gamma K_i(x)$ αντικαθίσταται από την $(\partial^\gamma\widetilde{m_i})^\vee(x)=-(2\pi i)^{\gamma-1}x^\gamma 2^{-i}\partial_jK_i(x)$ με $\widetilde{m_i}=m\widehat{J_{2^{-i}}}$ όπου $\widehat{J_{2^{-i}}}(x)=2^{-i}x_j\widehat{\Psi_{2^{-i}}}(x)$ (δηλαδή $\widehat{J}(x)=x_j\widehat{\Psi}(x)$).

Παρατηρούμε ότι $\partial_j=\partial^{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}$ επομένως $x^{(0,\ldots,0,1,0,\ldots,0)}=x_j$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}-(2\pi i)^{\gamma-1}x^\gamma 2^{-i}\partial_jK_i(x) &= -(2\pi i)^{\gamma-1}x^\gamma 2^{-i}\partial_j(m_i)^\vee(x)\\ &\overset{(*)}{=}-(2\pi i)^{\gamma-1}x^\gamma 2^{-i}[(-2\pi iy_j)m_i(y)]^\vee(x)\\ &=(2\pi ix)^\gamma[2^{-i}y_jm_i(y)]^\vee(x)(2\pi ix)^\gamma(\widetilde{m_i})^\vee(x)\\ &\overset{(**)}{=}(\partial^\gamma\widetilde{m_i})^\vee(x),\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την (v) και στην $(**)$ την (vi) της Πρότασης 2.2.2. Είναι εύκολο να δούμε ότι η $\widehat{J}$ έχει τις ίδιες ιδιότητες με την $\widehat{\Psi}$, επομένως μπορούμε να ακολουθήσουμε τα ίδια βήματα απόδειξης.

Χρησιμοποιώντας την (7.3.3), για κάθε $\delta > 0$ έχουμε

$$(1+2^i\delta)^{\frac{1}{4}} \int_{\delta<|x|<2\delta} |K_i(x)|\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |K_i(x)|\, (1+2^i\,|x|)^{\frac{1}{4}} dx \leq C_n A.$$

Επομένως,

$$\int_{\delta<|x|<2\delta} \sum_{i\geq 0} |K_i(x)|\, dx \leq \sum_{i\geq 0} C_n A (1+2^i\delta)^{-\frac{1}{4}} < \infty,$$

άρα και $\sum\limits_{i\geq 0} |K_i(x)| < \infty$ για σ.χ. x.

Θέτουμε τώρα $A = \{x \in \mathbb{R}^n : \delta < |x| < 2\delta\}$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\delta<|x|<2\delta} |K_i(x)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} |K_i(x)|\, \mathbb{1}_A(x) dx \leq \|K_i\|_{L^2}\, \lambda_n(A) \\
&= \|m_i^{\vee}\|_{L^2}\, \lambda_n(A) \\
&\overset{(*)}{=} \|m_i\|_{L^2}\, \lambda_n(A) \\
&= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| m(x) \widehat{\Psi_{2^{-i}}}(x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \lambda_n(A) \\
&\leq \lambda_n(A)\, \|m\|_{L^\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{\Psi}(2^{-i}x) \right|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lambda_n(A)\, \|m\|_{L^\infty}\, 2^{\frac{in}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\widehat{\Psi}(y)|^2 dy \right)^{\frac{1}{2}} \\
&= \lambda_n(A)\, \|m\|_{L^\infty} \left\| \widehat{\Psi} \right\|_{L^2} 2^{\frac{in}{2}},
\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα Plancherel. Επομένως,

$$\int_{\delta<|x|<2\delta} \sum_{i<0} |K_i(x)|\, dx \leq \lambda_n(A)\, \|m\|_{L^\infty} \left\| \widehat{\Psi} \right\|_{L^2} \sum_{i<0} 2^{\frac{in}{2}} < \infty,$$

άρα και $\sum\limits_{i<0} |K_i(x)| < \infty$ για σ.χ. x.

Δείξαμε ότι $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |K_i(x)| < \infty$ για σ.χ. x και καθώς είδαμε ότι $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} K_i \overset{\mathscr{S}'}{=} m^{\vee}$ έπεται ότι $\sum\limits_{i\in\mathbb{Z}} |K_i(x)| = m^{\vee}(x)$ για σ.χ. x.

Επομένως, για κάθε $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$,

$$\langle m^{\vee}, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \int_{|x|\geq\varepsilon} m^{\vee}(x) \varphi(x) dx$$

και

$$\int_A m^{\vee}(x) dx = \int_{\delta<|x|<2\delta} \sum_{i\in\mathbb{Z}} |K_i(x)|\, dx < \infty,$$

όπου A συμπαγές με $0 \notin A$.

Μένει να δείξουμε ότι

$$\sup_{y\neq 0}\int_{|x|\geq 2|y|}|m^\vee(x-y)-m^\vee(x)|dx \leq 2C_nA<\infty.$$

Είναι

$$\int_{|x|\geq 2|y|}|m^\vee(x-y)-m^\vee(x)|dx = \sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_{|x|\geq 2|y|}\left|\,|K_i(x-y)|-|K_i(x)|\,\right|dx,$$

άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}}\int_{|x|\geq 2|y|}|K_i(x-y)-K_i(x)|\,dx \leq 2C_nA.$$

Σταθεροποιούμε ένα $y\neq 0$ και επιλέγουμε $k\in\mathbb{Z}$ με $2^{-k}\leq |y|\leq 2^{-k+1}$. Παρατηρούμε ότι για $|x|\geq 2\,|y|$ είναι

$$|x+y|+|y|\geq |x-y+y|\geq 2\,|y|$$

και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i>k}\int_{|x|\geq 2|y|}|K_i(x-y)-K_i(x)|\,dx &\leq \sum_{i>k}\int_{|x|\geq 2|y|}|K_i(x-y)|+|K_i(x)|\,dx\\
&\leq \sum_{i>k}2\int_{|x|\geq |y|}|K_i(x)|\,dx\\
&= \sum_{i>k}2\int_{|x|\geq |y|}|K_i(x)|\,(1+2^i\,|x|)^{\frac14}(1+2^i\,|x|)^{-\frac14}dx\\
&\leq \sum_{i>k}2\int_{|x|\geq |y|}|K_i(x)|\,(1+2^i\,|x|)^{\frac14}(1+2^i\,|y|)^{-\frac14}dx\\
&\leq \sum_{i>k}2C_nA(1+2^i\,|y|)^{-\frac14}\leq \sum_{i>k}2C_nA(1+2^i2^{-k})^{-\frac14}\\
&= C_n'A,
\end{aligned}$$

όπου στην προτελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (7.3.1).

Παρατηρούμε ότι για $|x|\geq 2\,|y|$ και $0\leq z\leq 1$ ισχύει $|x-zy|\geq |x|-|y|\geq |y|$ και υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{i\leq k}\int_{|x|\geq 2|y|}|K_i(x-y)-K_i(x)|\,dx\\
&\qquad\leq \sum_{i\leq k}\int_{|x|\geq 2|y|}\int_0^1|-y\cdot\nabla K_j(x-zy)|\,dzdx\\
&\qquad\leq \int_0^1\sum_{i\leq k}2^{-k+1}2^i2^{-i}\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla K_j(x-zy)|\,(1+2^i(|x-zy|))^{\frac14}dxdz\\
&\qquad\leq \int_0^1\sum_{i\leq k}2^{-k+1}2^iC_nAdz = C_nA\sum_{i\leq k}2^{-k+1}2^i = C_n'A,
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε τη σχέση (7.3.3). □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Εφαρμογές της θεωρίας Littlewood–Paley

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποιες σημαντικές εφαρμογές της θεωρίας Littlewood-Paley. Συνήθως, ο στόχος είναι να δώσουμε φράγματα για ιδιάζοντες και μεγιστικούς τελεστές, και επιτυγχάνουμε αυτά τα φράγματα ελέγχοντας τους τελεστές από τετραγωνικές παραστάσεις.

8.1 Εκτιμήσεις για μεγιστικούς τελεστές

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε φράγματα για μεγιστικούς τελεστές χρησιμοποιώντας τετραγωνικές παραστάσεις. Ένας τρόπος για να φράξουμε τον μεγιστικό τελεστή $\sup\limits_k |T_k(f)|$ είναι να εισαγάγουμε κατάλληλη συνάρτηση φ και να γράψουμε

$$\begin{aligned}\sup_k |T_k(f)| &\leqslant \sup_k |T_k(f) - f * \varphi_{2^{-k}}| + \sup_k |f * \varphi_{2^{-k}}| \\ &\leqslant \left(\sum_k |T_k(f) - f * \varphi_{2^{-k}}|^2\right)^{\frac{1}{2}} + C_\varphi M(f)\end{aligned}$$

όπου $M(f)$ είναι η μεγιστική συνάρτηση της f, για κατάλληλη σταθερά C_φ που εξαρτάται από την φ. Θα εφαρμόσουμε αυτή την ιδέα για την απόδειξη του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 8.1.1. *Εστω $m : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ φραγμένη συνάρτηση, $\mathscr{C}^1$ σε περιοχή του μηδενός, με $m(0) = 1$ και $|m(\xi)| \leq C\,|\xi|^{-\varepsilon}$ για κάθε $\xi \neq 0$ για κάποιες σταθερές $C, \varepsilon > 0$. Θέτουμε*

$$T_k(f)(x) = \left(\widehat{f}(\xi) m(2^{-k}\xi)\right)^{\vee}(x).$$

Τότε υπάρχει $C_n > 0$ ώστε

$$\left\|\sup_{k\in\mathbb{Z}} |T_k(f)|\right\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C_n \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

για κάθε $f \in L^2(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έστω $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ με $\widehat{\Psi}(0) = 1$.

Ξεκινάμε δείχνοντας ότι

$$\left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |T_k(f) - f * \Psi_{2^{-k}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2}^2 \leq c \, \|f\|_{L^2}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$. Από το Λήμμα 2.1.4 έχουμε

$$|\xi|^{\varepsilon} \left| \widehat{\Psi}(\xi) \right| \leq C_{n,\varepsilon} \sum_{|\alpha|=\varepsilon} \left| \xi^{\alpha} \widehat{\Psi(\xi)} \right| = C_{n,\varepsilon} (2\pi)^{-\varepsilon} \sum_{|\alpha|=\varepsilon} \left| \widehat{\partial^{\alpha}\Psi}(\xi) \right| \overset{|\xi|\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

διότι $\Psi \in \mathscr{S}$ επομένως $\partial^{\alpha}\Psi \in \mathscr{S} \subseteq L^1$ και άρα ο μετασχηματισμός Fourier συγκλίνει στο μηδέν καθώς $|\xi| \to \infty$. Από τη σχέση αυτή έπεται ότι $\left| m(\xi) - \widehat{\Psi}(\xi) \right| \leq C_1 \, |\xi|^{-\varepsilon}$ για ξ μακριά από το μηδέν, για κάποια σταθερά $C_1 > 0$.

Παρατηρούμε ότι η $m - \widehat{\Psi}$ είναι $\mathscr{C}^1$ κοντά στο μηδέν, καθώς $\Psi \in \mathscr{S}$ άρα $\widehat{\Psi} \in \mathscr{S} \subseteq \mathscr{C}^{\infty}$, και από την $(m - \widehat{\Psi})(0) = 1 - 1 = 0$ έχουμε ότι

$$\left| \frac{m(\xi) - \widehat{\Psi}(\xi)}{\xi} \right| \overset{|\xi|\to 0}{\longrightarrow} (m - \widehat{\Psi})'(0)$$

για την μονοδιάστατη περίπτωση, και ανάλογα έπεται και για την γενική περίπτωση. Έχουμε λοιπόν $\left| m(\xi) - \widehat{\Psi}(\xi) \right| \leq C_2 \, |\xi|$ κοντά στο μηδέν, για κάποια σταθερά $C_2 > 0$.

Με βάση τις δύο σχέσεις που μόλις δείξαμε, έχουμε ότι

$$\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| m(2^{-k\xi}) - \widehat{\Psi}(2^{-k\xi}) \right|^2 \leq \sum_{k\geq 0} C_2^2 \left| 2^{-k}\xi \right|^2 + \sum_{k<0} C_1^2 \left| 2^{-k}\xi \right|^{-2\varepsilon} := C_3 < \infty.$$

Θέτουμε τώρα $g_k = T_k(f) - f * \Psi_{2^{-k}}$ και παρατηρούμε ότι

$$\widehat{g_k} = \widehat{T_k}(f) - (f * \Psi_{2^{-k}})^{\wedge} = \widehat{f}(\xi) m(2^{-k}\xi) - \widehat{f}(\xi) \widehat{\Psi_{2^{-k}}}(\xi) = \widehat{f}(\xi)(m(2^{-k}\xi) - \widehat{\Psi}(2^{-k}\xi)).$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\left\| \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{k\in\mathbb{Z}} |g_k|^2 \, dx = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|g_k\|_{L^2}^2 = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \|\widehat{g_k}\|_{L^2}^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left\| \widehat{f}(\xi)(m(2^{-k}\xi) - \widehat{\Psi}(2^{-k}\xi)) \right\|_{L^2}^2 \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \widehat{f}(\xi) \right|^2 \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left| m(2^{-k}\xi) - \widehat{\Psi}(2^{-k}\xi) \right|^2 dx \\
&\leq C_3 \left\| \widehat{f} \right\|_{L^2}^2 = C_3 \, \|f\|_{L^2}^2 .
\end{aligned}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$\left\| \sup_k |f * \Psi_{2^{-k}}| \right\|_{L^2} \leq c \, \|f\|_{L^2}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sup_k |f * \Psi_{2^{-k}}| \leq C_\Psi M(f),$$

όπου

$$M(f)(x) = \sup_{\varepsilon > 0} \frac{1}{|B(0,1)|\,\varepsilon^n} \int_{|y|<\varepsilon} |f(x-y)|\,dy$$

η μεγιστική συνάρτηση των Hardy-Littlewood, καθώς είναι γνωστό ότι υπάρχει $c > 0$ ώστε $\|M(f)\|_{L^2} \leq c\|f\|_{L^2}$.

Θέτουμε $\Psi_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-n}\Psi(\varepsilon^{-1}x)$ για κάθε $\varepsilon > 0$ και έχουμε ότι

$$|\Psi_\varepsilon(x)| = \varepsilon^{-n}\left|\Psi(\varepsilon^{-1}x)\right| \leq \frac{c\varepsilon^{-n}}{(1+|\varepsilon^{-1}x|)^{n+1}}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$, διότι $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$.

Υπολογίζουμε

$$|(f * \Psi_{2^{-k}})(0)| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,|\Psi_\varepsilon(-y)|\,dy \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f(y)|\,\frac{c\varepsilon^{-n}}{(1+|\varepsilon^{-1}y|)^{n+1}}dy,$$

και χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με

$$I := \int_0^\infty \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(r\vartheta)|\,\frac{c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}} r^{n-1}d\vartheta dr.$$

Θέτουμε $\int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(r\vartheta)|\,r^{n-1}d\vartheta = F(r)$ και γράφουμε

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^\infty F(r)\frac{c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}}dr \\
&= \left[\int_0^r F(s)ds\frac{c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}}\right]_0^\infty - \int_0^\infty \int_0^r F(s)ds\left(\frac{c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}}\right)' dr \\
&= 0 - \int_0^\infty \int_0^r F(s)ds\left(\frac{c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}}\right)' dr \\
&= \int_0^\infty \int_0^r F(s)ds\left(\frac{-c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}}\right)' dr.
\end{aligned}$$

Είναι

$$\int_0^r F(s)ds = \int_0^r \int_{\mathbb{S}^{n-1}} |f(r\vartheta)|\,r^{n-1}d\vartheta ds = \int_{|y|<r} |f(y)|\,dy \leq |B_n(0,1)|\,r^n M(f)(0).$$

Επομένως, το παραπάνω ολοκλήρωμα φράσσεται από

$$\begin{aligned}
I &\leqslant |B_n(0,1)|\, M(f)(0) \int_0^\infty r^n \left(\frac{-c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}} \right)' dr \\
&= |B_n(0,1)|\, M(f)(0) \left(\left[r^n \frac{-c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}} \right]_0^\infty - \int_0^\infty n r^{n-1} \frac{-c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}} dr \right) \\
&= 0 - |B_n(0,1)|\, M(f)(0) \int_0^\infty n r^{n-1} \frac{-c\varepsilon^{-n}}{(1+\varepsilon^{-1}r)^{n+1}} dr \\
&= ncM(f)(0) \int_{\mathbb{R}^n} \frac{-\varepsilon^{-n}}{(1+|\varepsilon^{-1}y|)^{n+1}} dy \\
&= nc \left\| \frac{-\varepsilon^{-n}}{(1+|\varepsilon^{-1}y|)^{n+1}} \right\|_{L^1} M(f)(0).
\end{aligned}$$

Δείξαμε την ζητούμενη ανισότητα για $x = 0$. Για τη γενική περίπτωση, έστω τυχόν x. Θέτουμε $g(y) = f(y + x)$. Είναι

$$|(f * \Psi_{2^{-k}})(x)| = |(g * \Psi_{2^{-k}})(0)| \leq cM(g)(0) = cM(f)(x).$$

Τέλος γράφοντας

$$\begin{aligned}
\sup_{k\in\mathbb{Z}} |T_k(f)| &\leq \sup_{k\in\mathbb{Z}} |T_k(f) - f * \Psi_{2^{-k}}| + \sup_{k\in\mathbb{Z}} |f * \Psi_{2^{-k}}| \\
&\leq \left(\sum_{k\in\mathbb{Z}} |T_k(f) - f * \Psi_{2^{-k}}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + cM(f)
\end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$\left\| \sup_{k\in\mathbb{Z}} |T_k(f)| \right\|_{L^2} \leq c \|f\|_{L^2}.$$

□

Για $m(\xi) = \mathbb{1}_{\boldsymbol{I}}(\xi)$ όπου $\boldsymbol{I} = I_1 \times \cdots \times I_n$ για διαστήματα I_j, $j = 1, \cdots, n$ το προηγούμενο θεώρημα επεκτείνεται στον L^p όπως φαίνεται παρακάτω.

Θεώρημα 8.1.2. *Έστω $1 < p < \infty$ και $\boldsymbol{I} = I_1 \times \cdots \times I_n$ για ανοιχτά διαστήματα $I_j \ni 0$, $j = 1, \cdots, n$. Θέτουμε*

$$T_k(f)(x) = \left(\widehat{f}(\xi) \mathbb{1}_{\boldsymbol{I}}(2^{-k}\xi) \right)^{\vee} (x).$$

Τότε υπάρχει $C_{p,n} > 0$ ώστε

$$\left\| \sup_{k\in\mathbb{Z}} |T_k(f)| \right\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq C_{p,n} \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}$$

για κάθε $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Επιλέγουμε έναν ανοιχτό δακτύλιο A με $\bar{\boldsymbol{I}} \setminus \boldsymbol{I}^\circ \subseteq A$ και μια λεία συνάρτηση $\widehat{\varphi}$ με συμπαγή φορέα ώστε $\widehat{\varphi}|_{B_n(0,\delta)} = 0$ για κάποιο $\delta > 0$ και $\widehat{\varphi}|_A = 1$. Θέτουμε επίσης $\widehat{\Psi} = (1 - \widehat{\varphi})\mathbb{1}_{\boldsymbol{I}}$

και παρατηρούμε ότι $\widehat{\Psi} \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Πράγματι, είναι

$$\widehat{\Psi}(x) = \begin{cases} 1 & , x \in B_n(0,\delta) \\ 1 - \widehat{\varphi} & , x \in \boldsymbol{I} \setminus (A \cup B_n(0,\delta)) \\ 0 & , x \in \boldsymbol{I} \cap A \\ 0 & , x \in \boldsymbol{I}^c \end{cases}$$

και

$$\partial^\alpha \widehat{\Psi}(x) = \begin{cases} -\partial^\alpha \widehat{\varphi}(x) & , x \in \boldsymbol{I} \setminus (A \cup B_n(0,\delta)) \\ 0 & , \text{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Καθώς η $\widehat{\varphi}$ είναι λεία, έπεται ότι στο $\boldsymbol{I}$ κάθε $\partial^\alpha \widehat{\varphi}$ είναι φραγμένη από κάποιο $M_\alpha > 0$ και η $1-\widehat{\varphi}$ είναι φραγμένη από κάποιο M_0. Επίσης έχουμε $(1+|x|)^{-N} > C_N$ για κάποιο $C_N > 0$ όταν $x \in \boldsymbol{I} \setminus A$. Θέτοντας $C_{\alpha,N} = M_\alpha C_N^{-1}$ έχουμε

$$\left|\partial^\alpha \widehat{\Psi}(x)\right| \leq C_{\alpha,N}(1+|x|)^{-N}$$

για κάθε N. Από την Πρόταση 2.1.5 η $\widehat{\Psi}$ είναι στην κλάση Schwartz.

Χρησιμοποιώντας τη σχέση $\mathbb{1}_{\boldsymbol{I}} = \mathbb{1}_{\boldsymbol{I}}\widehat{\varphi} + \widehat{\Psi}$ έχουμε

$$\begin{aligned} T_k(f) &= \left(\widehat{f}(\xi)\mathbb{1}_{\boldsymbol{I}}(2^{-k}\xi)\right)^\vee = \left(\widehat{f}(\xi)\widehat{\varphi_{2^{-k}}}(\xi)\mathbb{1}_{\boldsymbol{I}}(2^{-k}\xi)\right)^\vee + \left(\widehat{f}(\xi)\widehat{\Psi_{2^{-k}}(\xi)}\right)^\vee \\ &= \left((\widehat{f * \varphi_{2^{-k}}})(\xi)\mathbb{1}_{\boldsymbol{I}}(2^{-k}\xi)\right)^\vee + \left((\widehat{f * \Psi_{2^{-k}}})(\xi)\right)^\vee \\ &= T_k(f * \varphi_{2^{-k}}) + f * \Psi_{2^{-k}}. \end{aligned}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \sup_k |T_k(f)| &\leq \sup_k |T_k(f * \varphi_{2^{-k}})| + \sup_k |f * \Psi_{2^{-k}}| \\ &\leq \sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|T_k(f * \varphi_{2^{-k}})|^2\right)^{\frac{1}{2}} + cM(f), \end{aligned}$$

όπου για την τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\sup_k |f * \Psi_{2^{-k}}| \leq cM(f)$, το οποίο έπεται όπως στο Θεώρημα 8.1.1 διότι $\widehat{\Psi} \in \mathscr{S}$.

Θέτουμε $\boldsymbol{I_k} = 2^k \boldsymbol{I} = \{2^k x : x \in \boldsymbol{I}\}$. Τότε $T_k(f) = \left(\widehat{f}\mathbb{1}_{\boldsymbol{I_k}}\right)^\vee$, και από το Πόρισμα 5.3.1 (ii) έχουμε

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|T_k(f * \varphi_{2^{-k}})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \leq c \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\}^n \left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|f * \varphi_{2^{-k}}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p}.$$

Είναι $f * \varphi_{2^{-k}} = \Delta_k(f)$ όπου Δ_k ο τελεστής Littlewood-Paley. Επομένως από την (6.1.2) είναι

$$\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}} \left(|f * \varphi_{2^{-k}}|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} \leq C_n B \max\left\{p, \frac{1}{p-1}\right\} \|f\|_{L^p}.$$

Τελικά,

$$\begin{aligned}\left\|\sup_k |T_k(f)|\right\|_{L^p} &\leq [\left\|\sum_{k\in\mathbb{Z}}\left(|T_k(f*\varphi_{2^{-k}})|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\|_{L^p} + c\,\|M(f)\|_{L^p}\\ &\leq cC_nB\max\left\{p,\frac{1}{p-1}\right\}^{n+1}\|f\|_{L^p}+cc'\,\|f\|_{L^p} := C_{p,n}\,\|f\|_{L^p}\,.\end{aligned}$$

□

8.2 Μια αρχή σχεδόν ορθογωνιότητας στον L^p

Θεωρούμε τους πολλαπλασιαστές Fourier m_i και τους τελεστές $T_i(f) = (\widehat{f}m_i)^{\vee}$. Θέλουμε να εξετάσουμε εάν ο τελεστής $T = \sum_i T_i$ είναι φραγμένος κάτω από κάποιες κατάλληλες προϋποθέσεις. Ξεκινάμε με $p = 2$ και έχουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Παρατήρηση 8.2.1. *Εάν οι πολλαπλασιαστές Fourier m_i είναι ομοιόμορφα φραγμένοι από κάποια σταθερά $c > 0$ και έχουν ξένους φορείς, τότε ο T είναι φραγμένος στον $L^2(\mathbb{R}^n)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε αρχικά ότι

$$\big(\sum_i T_i(f)\big)^{\wedge} = \sum_i \widehat{T}_i(f).$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\sum_i T_i(f) &= \sum_i (\widehat{f}m_i)^{\vee} = \sum_i \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)m_i(x)e_x dx = \sum_i \int_{\mathrm{supp} m_i}\widehat{f}(x)m_i(x)e_x dx\\ &= \sum_i \int_{\mathrm{supp}\, m_i}\widehat{f}(x)\sum_j m_j(x)e_x dx = \int_{\bigcup_i \mathrm{supp}\, m_i}\widehat{f}(x)\sum_j m_j(x)e_x dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\widehat{f}(x)\sum_j m_j(x)e_x dx = \big(\widehat{f}\sum_j m_j\big)^{\vee} = \big(\sum_j \widehat{T_j}(f)\big)^{\vee},\end{aligned}$$

και η ζητούμενη σχέση προκύπτει παίρνοντας $^{\wedge}$. Χρησιμοποιώντας τη σχέση αυτή και την ταυτότητα Parseval έχουμε

$$\begin{aligned}\|T(f)\|_{L^2} &= \left\|\sum_i T_i(f)\right\|_{L^2} = \left\|\Big(\sum_i T_i(f)\Big)^{\wedge}\right\|_{L^2}\left\|\sum_i \widehat{T}_i(f)\right\|_{L^2}\\ &= \left\|\widehat{f}\sum_i m_i\right\|_{L^2} \leq c\left\|\widehat{f}\right\|_{L^2} = c\,\|f\|_{L^2}\,.\end{aligned}$$

□

Το παρακάτω θεώρημα δίνει το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τον L^p.

Θεώρημα 8.2.2. *Έστω $1 < p \leq 2 \leq q < \infty$ και $m_i \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ με*

$$\mathrm{supp}(m_i) = \{\xi : 2^{i-1} \leq |\xi| \leq 2^{i+1}\}.$$

Αν οι T_i είναι ομοιόμορφα φραγμένοι από τον L^p στον L^q με $\sup_i \|T_i\|_{L^p\to L^q} \leq A$, τότε ο T είναι φραγμένος από τον L^p στον L^q.

Απόδειξη. Έστω $\Psi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ με $\Psi(x) = \Psi(y)$ για κάθε $|x| = |y|$, $\widehat{\Psi}$ πραγματική συνάρτηση με $\operatorname{supp}(\widehat{\Psi}) = \{\xi : \frac{1}{4} \leq |\xi| \leq 4\}$ και $\widehat{\Psi}(\xi) = 1$ όταν $\frac{1}{2} \leq |\xi| \leq 2$.

Από το τελευταίο έχουμε ότι $\widehat{\Psi_{2^{-i}}}(\xi) = 1$ όταν $\xi \in \operatorname{supp}(m_i)$, δηλαδή $\widehat{\Psi_{2^{-i}}} m_i = m_i$. Με βάση αυτή την παρατήρηση, για τον τελεστή Littlewood-Paley $\Delta_i(f) = f * \Psi_{2^{-i}}$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\Delta_i T_i \Delta_i(f) &= \Delta_i T_i(f * \Psi_{2^{-i}}) = \Delta_i \left((\widehat{f * \Psi_{2^{-i}}} m_i)^\vee \right) = \Delta_i \left((\widehat{f} \widehat{\Psi_{2^{-i}}} m_i)^\vee \right) \\ &= \Delta_i \left((\widehat{f} m_i)^\vee \right) = (\widehat{f} m_i)^\vee * \Psi_{2^{-i}} = \left(\widehat{f} m_i \widehat{\Psi_{2^{-i}}} \right)^\vee = \left(\widehat{f} m_i \right)^\vee \\ &= T_i(f).\end{aligned}$$

Δηλαδή $T_i = \Delta_i T_i \Delta_i$. Θέτουμε $T^N = \sum_{|i| \leq N} \Delta_i T_i \Delta_i$ και έχουμε

$$T = \sum_i T_i = \sum_i \Delta_i T_i \Delta_i = \lim_{N \to \infty} \sum_{|i| \leq N} \Delta_i T_i \Delta_i = \lim_{N \to \infty} T^N.$$

Για $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ από την (6.1.3) υπολογίζουμε

$$\left\| T^N(f) \right\|_{L^q} = \left\| \sum_{|i| \leq N} \Delta_i T_i \Delta_i(f) \right\|_{L^q} \leq C_{q,n} \left\| \left(\sum_{|i| \leq N} |T_i \Delta_i(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Minkowski για τον $\frac{q}{2} \geq 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} C_{q,n} \left\| \left(\sum_{|i| \leq N} |T_i \Delta_i(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^q} &= C_{q,n} \left\| \sum_{|i| \leq N} |T_i \Delta_i(f)|^2 \right\|_{L^{\frac{q}{2}}}^{\frac{1}{2}} \\ &\leq C_{q,n} \left(\sum_{|i| \leq N} \left\| |T_i \Delta_i(f)|^2 \right\|_{L^{\frac{q}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} \\ &= C_{q,n} \left(\sum_{|i| \leq N} \| T_i \Delta_i(f) \|_{L^q}^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη σύγκλιση των T_i φράσσουμε την τελευταία ποσότητα από

$$\leq C_{q,n} A \left(\sum_{|i| \leq N} \| \Delta_i(f) \|_{L^p}^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Από την αντίστροφη ανισότητα Minkowski για τον $\frac{p}{2} \leq 1$ η ποσότητα αυτή είναι

$$\begin{aligned} = C_{q,n} A \left(\sum_{|i| \leq N} \left\| |\Delta_i(f)|^2 \right\|_{L^{\frac{p}{2}}} \right)^{\frac{1}{2}} &\leq C_{q,n} A \left\| \sum_{|i| \leq N} |\Delta_i(f)|^2 \right\|_{L^{\frac{p}{2}}}^{\frac{1}{2}} \\ &= C_{q,n} A \left\| \left(\sum_{|i| \leq N} |\Delta_i(f)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \right\|_{L^p}. \end{aligned}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας το ευθύ του θεωρήματος Littlewood-Paley, βλέπουμε ότι η τελευταία ποσότητα φράσσεται από

$$C_{p,n}C_{q,n}A\,\|f\|_{L^p}\,.$$

Δηλαδή, οι T^N είναι ομοιόμορφα φραγμένοι από τον L^p στον L^q με $\left\|T^N\right\|_{L^p\to L^q} \leq C_{p,n}C_{q,n}A$. Έπεται ότι ο $T = \lim_N T^N$ είναι φραγμένος από τον L^p στον L^q. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] Grafakos, L., *Classical Fourier analysis*, Third edition. Graduate Texts in Mathematics, 249. Springer, New York, 2014.

[2] Benedek, A., Calderón, A.-P., Panzone, R., *Convolution operators on Banach-space valued functions*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. 48 (1962), 356–365.

[3] Bennett, C., Sharpley, R., *Interpolation of Operators*, Pure and Applied Mathematics, 129 Academic Press, Inc., Boston, MA, 1988.

[4] Bergh, J., Löfström, J., *Interpolation Spaces, An Introduction*, Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, No. 223, Springer-Verlag, Berlin-New York, 1976.

[5] Calderón, A. P., *On the theorems of M. Riesz and Zygmund*, Proc. Amer.Math. Soc. 1 (1950), 533–535.

[6] Cotlar, M., *A unified theory of Hilbert transforms and ergodic theorems*, Rev. Mat. Cuyana, 1 (1955), 105–167.

[7] Hörmander, L., *Estimates for translation invariant operators in L_p spaces*, Acta Math. 104 (1960), no. 1-2, 93–140.

[8] Littlewood, J. E., Paley, R. E. A. C., *Theorems on Fourier series and power series*, J. London Math. Soc. 6 (1931), no. 3, 230–233.

[9] Littlewood, J. E., Paley, R. E. A. C., *Theorems on Fourier series and power series (II)*, Proc. London Math. Soc. 42 (1936), no. 1, 52–89.

[10] Littlewood, J. E., Paley, R. E. A. C., *Theorems on Fourier series and power series (III)*, Proc. London Math. Soc. 43 (1937), no. 2, 105–126.

[11] Marcinkiewicz, J., *Sur les multiplicateurs des séries de Fourier*, Studia Math. 8 (1939), 78–91.

[12] Mihlin, S. G., *On the multipliers of Fourier integrals*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR (N.S.) 109 (1956), 701–703.

[13] Stein, E. M., *On the functions of Littlewood-Paley, Lusin, and Marcinkiewicz*, Trans. Amer. Math. Soc. 88 (1958), 430–466.

[14] Stein, E. M., *Topics in Harmonic Analysis Related to the Littlewood-Paley Theory*, Annals of Mathematics Studies, No. 63, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.

[15] Stein, E. M., *Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions*, Princeton Mathematical Series, No. 30, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1970.