



ΕΘΝΙΚΟ ΜΕΤΣΟΒΙΟ ΠΟΛΥΤΕΧΝΕΙΟ

ΣΧΟΛΗ ΕΦΑΡΜΟΣΜΕΝΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΦΥΣΙΚΩΝ ΕΠΙΣΤΗΜΩΝ

ΤΟΜΕΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

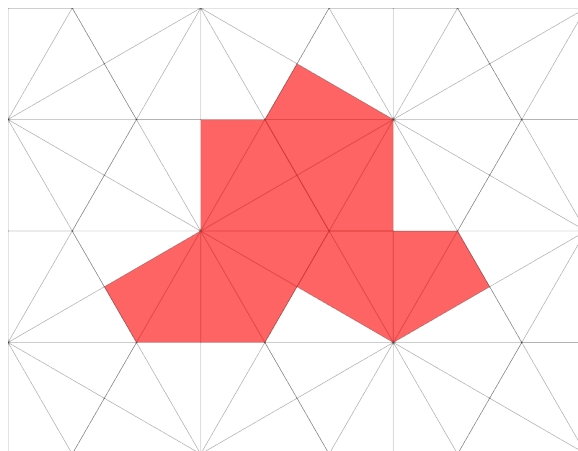
Απεριοδικές Πλακοστρώσεις και Θεωρία Απεριοδικότητας

Λύση στο πρόβλημα του απεριοδικού μονοπλακιδίου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Γ. ΧΜΑΝΤΙ



Επιβλέπων: Δημήτριος Κοντοκώστας
Αναπληρωτής Καθηγητής

Αθήνα, Μάιος 2025



Απεριοδικές Πλακοστρώσεις και Θεωρία Απεριοδικότητας

Λύση στο πρόβλημα του απεριοδικού μονοπλακιδίου

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΟΥ

ΑΝΤΩΝΙΟΥ Γ. ΧΜΑΝΤΙ

Επιβλέπων: Δημήτριος Κοντοκώστας
Αναπληρωτής Καθηγητής

Εγκρίθηκε από την τριμελή εξεταστική επιτροπή την 22α Μαΐου 2025.

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

(Υπογραφή)

.....
Δημήτριος Κοντοκώστας
Αναπληρωτής Καθηγητής

.....
Σοφία Λαμπροπούλου
Καθηγήτρια

.....
Παναγιώτης Ψαρράκος
Καθηγητής

Αθήνα, Μάιος 2025

Περίληψη

Η παρούσα εργασία εξετάζει τη μαθηματική θεωρία των πλακοστρώσεων, με έμφαση στη διακριτή γεωμετρία και τη συνδυαστική. Ξεκινώντας από τις βασικές τοπολογικές και γεωμετρικές έννοιες που διέπουν τις πλακοστρώσεις, μελετώνται οι ισομετρίες, οι συμμετρίες και τα κριτήρια ταξινόμησης τόσο για μεμονωμένα πλακίδια όσο και για ολόκληρες διατάξεις. Ακολούθως, παρουσιάζονται θεμελιώδη θεωρήματα επέκτασης και εξετάζονται συνθήκες υπό τις οποίες συγκεκριμένα σχήματα δύνανται να πλακοστρώσουν το ευκλείδειο επίπεδο. Ιδιαίτερη έμφαση δίνεται στις απεριοδικές πλακοστρώσεις και την κατασκευή απεριοδικών πρωτοσυνόλων, με αναφορά σε σημαντικές συνεισφορές όπως των Robinson, Penrose και Taylor-Socolar. Η εργασία κορυφώνεται με τη μελέτη του απεριοδικού μονοπλακιδίου «Καπέλο», από πρόσφατο (2023) δημοσιευμένο άρθρο των Smith, Myers, Kaplan και Goodman-Strauss, το οποίο επιλύει ένα μέχρι πρόσφατα ανοικτό πρόβλημα της θεωρίας, επιβεβαιώνοντας τη δυνατότητα απεριοδικής πλακόστρωσης με ένα μόνο πλακίδιο. Αναλύονται οι γεωμετρικές και υπολογιστικές ιδιότητες του σχήματος, καθώς και οι μεθοδολογίες απόδειξης της απεριοδικότητάς του. Η μελέτη εντάσσεται στο ευρύτερο πλαίσιο της αλληλεπίδρασης τέχνης, γεωμετρίας και υπολογισιμότητας, αναδεικνύοντας τη διεπιστημονική φύση της σύγχρονης μαθηματικής έρευνας στον τομέα των πλακοστρώσεων.

Λέξεις Κλειδιά

Πλακόστρωση, Απεριοδικότητα, Πρωτοπλακίδιο, Συμμετρίες, Ισομετρίες, Διακριτή Γεωμετρία, Συνδυαστική, Υπολογισιμότητα, Μονοπλακίδιο, Πολύγωνα, Καπέλο, Απεριοδικό Μονοπλακίδιο, Ψευδοκρύσταλλοι, Ομάδες συμμετρίας

Abstract

This thesis investigates the mathematical theory of tilings, with an emphasis on discrete geometry and combinatorics. Beginning with the fundamental topological and geometric concepts underlying tilings, we explore isometries, symmetries, and classification criteria for both individual tiles and entire configurations. We then present key extension theorems and examine the conditions under which specific shapes can tile the Euclidean plane. Particular attention is devoted to aperiodic tilings and the construction of aperiodic protosets, with reference to significant contributions by Robinson, Penrose, and Taylor-Socolar. The study culminates in the analysis of the aperiodic monotile (the "Hat"), from a recently (2023) published paper by Smith, Myers, Kaplan and Goodman-Strauss, which resolves a long-standing open problem in tiling theory by demonstrating the possibility of aperiodic tiling using a single tile. We analyze the geometric and computational properties of this shape, along with the proof techniques that establish its aperiodicity. This research is framed within the broader context of the interplay between art, geometry and computability, emphasizing the interdisciplinary nature of contemporary mathematical inquiry into tilings.

Keywords

Tiling, Aperiodicity, Prototile, Symmetries, Isometries, Discrete Geometry, Combinatorics, Computability, Monotile, Polygons, Hat, Aperiodic Monotile, Quasicrystals, Symmetry Groups

MSC Classification Codes:

- 52C20 (Tilings in 2 dimensions)
- 52C23 (Quasicrystals, aperiodic tilings)
- 05B45 (Combinatorial aspects of tilings)

στα όνειρα αυτών που ταξιδέψανε

αν η μαθηματική σκέψη είναι ένας τρόπος να αναγνωρίζουμε μορφές μέσα στο χάος,
η αναζήτηση απεριοδικότητας εκφράζει την επιθυμία για δημιουργία,
για κατανόηση χωρίς βεβαιότητες, για μια μορφή ελευθερίας
εκεί που η κανονικότητα σταματά, αρχίζει ο χώρος του νέου
εκεί που η επανάληψη σταματά, γεννιέται το πρωτόγνωρο

αυτή η εργασία αφιερώνεται στα όνειρα αυτών που ταξιδέψανε·
στους μαθηματικούς και στους ποιητές, στους ανθρώπους μου,
σε όσους πορεύονται εντός ή εκτός, κάτω από βροχές ή ενάντια στον άνεμο
με προσδοκίες, αβεβαιότητες κι ένα πικρό χαμόγελο,
με πίστη στην κίνηση και στη δυνατότητα του νέου

Ευχαριστίες

Η ολοκλήρωση των σπουδών μου, και ειδικότερα της παρούσας εργασίας, δε θα ήταν δυνατή χωρίς κάποιους συγκεκριμένους ανθρώπους στη ζωή μου. Ευχαριστώ από καρδιάς τους δικούς μου ανθρώπους, τον Κωστή και τον Jean-Louis, για την αγάπη τους όλα αυτά τα χρόνια, για όσα μου προσέφεραν και για την υπομονή τους. Ευχαριστώ τους γονείς μου, Μαρία και Γιούσεφ, οι οποίοι παρά τις αντίξοες συνθήκες συνέχισαν να με στηρίζουν οικονομικά και συναισθηματικά. Ευχαριστώ την αδελφή μου Μάγδα για την κατανόηση και τη στήριξή της. Ευχαριστώ τη Μελίνα και τον Ιάκωβο για τη φιλία, τις συζητήσεις και τις κοινές μας στιγμές. Ευχαριστώ τον Νικόλα, τον Κώστα, τη Φένια και τη Δάφνη για τη συνεχή παρουσία τους στον Τομέα Μαθηματικών, τη συναδελφικότητα και το ενδιαφέρον τους στα μαθηματικά και στο πρόσωπό μου. Ευχαριστώ τον Θοδωρή για τις πολιτικές μας συζητήσεις και το κουράγιο του. Ευχαριστώ ακόμα όλα τα άτομα που συνέλαβαν *λόγους ή έργους* στο να γίνει η καθημερινότητά μου πιο ευχάριστη.

Ευχαριστώ τον επιβλέποντα καθηγητή μου κύριο Δημήτρη Κοντοκώστα, που δέχτηκε να με αναλάβει, για τη στήριξή του στην εργασία αυτή, και για τον διαρκή του αγώνα υπέρ της Γεωμετρίας σε χαλεπούς καιρούς για τα Μαθηματικά. Ευχαριστώ τα μέλη ΔΕΠ της Σχολής κυρία Σοφία Λαμπροπούλου και κύριο Παναγιώτη Ψαρράκο που αποδέχθηκαν να είναι μέλη της τριμελούς εξεταστικής επιτροπής.

Για τη καλλιτεχνική και γλωσσική επιμέλεια καθώς και την επιμέλεια των μεταφράσεων αυτής της εργασίας ευχαριστώ από καρδιάς τον Κωστή. Για τις εύστοχες παρατηρήσεις τους στη διόρθωση αυτού του κειμένου ευχαριστώ ιδιαίτερα τον Νικόλα, τη Φένια και τον Κώστα.

Τέλος, οφείλω ευχαριστίες στο Ίδρυμα Κρατικών Υποτροφιών Κύπρου με την οικονομική στήριξη του οποίου κατάφερα να ολοκληρώσω τις σπουδές μου.

Αθήνα, Μάιος 2025

Αντώνιος Χμάντι

Περιεχόμενα

Περίληψη	1
Abstract	3
Ευχαριστίες	7
Πρόλογος	25
I Εισαγωγή	27
1 Εισαγωγή	29
1.1 Μαθηματικά και Τέχνη	29
1.1.1 Μαθηματικά: η επιστήμη των μοτίβων	29
1.1.2 Συμμετρία και Γεωμετρική Αφαίρεση	31
1.1.3 Πολύεδρα και Τοπολογία στην Τέχνη	35
1.2 Γενεσιουργός Τέχνη και πλακοστρώσεις	46
1.2.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή	46
1.2.2 Ισλαμική τέχνη	54
1.3 Αισθητική στα Μαθηματικά	59
II Κύριο Μέρος	63
2 Βασικές Έννοιες	65
2.1 Πλακίδια, Πλακοστρώσεις και Μπαλώματα	65
2.2 Συμμετρίες Πλακιδίων	78
2.3 Συμμετρίες Πλακοστρώσεων	85
2.4 Οι πιθανές ομάδες συμμετρίας πλακοστρώσεων	89
3 Θεωρήματα Επέκτασης Πλακοστρώσεων	105
3.1 Πλακόστρωση με Μπαλώματα	105
3.2 Το Θεώρημα Επέκτασης	116
3.3 Περιοδικές Πλακοστρώσεις	126
3.4 Ποια κυρτά πολύγωνα πλακοστρώνουν;	134

4 Απεριοδικά Πρωτοπλακίδια	143
4.1 Ψευδοκρύσταλλοι και Απεριοδικά Πρωτοσύνολα	143
4.2 Πλακοστρώσεις με Αντικατάσταση	153
4.3 Το Απεριοδικό Πρωτοσύνολο του Robinson	161
4.4 Το Απεριοδικό Πρωτοσύνολο του Penrose	168
4.5 Το Απεριοδικό Πρωτοπλακίδιο Taylor-Socolar	176
5 Απεριοδικό Μονοπλακίδιο: το Καπέλο Πολυχαρταετός	187
5.1 Εισαγωγικά	187
5.1.1 Προσπάθειες επίλυσης του einstein	188
5.1.2 Κύρια Αποτελέσματα	190
5.1.3 Υπολειπόμενη ορολογία	194
5.2 Το Καπέλο Πολυχαρταετός και οι πλακοστρώσεις του	195
5.3 Απεριοδικότητα με ενώσεις τριγωνικών πολυομίνων	207
5.4 Συσσωματώματα πλακιδίων	213
5.5 Σύστημα αντικατάστασης τεσσάρων πλακιδίων	217
5.5.1 Περιπτώσεις που αφορούν το T	219
5.5.2 Περιπτώσεις που το H δεν είναι γειτονικό του T	220
5.5.3 Τα υπερπλακίδια	224
5.6 Μια οικογένεια απεριοδικών μονοπλακιδίων	228
5.7 Συμπεράσματα	231
Παραρτήματα	235
Α' Κώδικας που χρησιμοποιήθηκε	237
Α.1 Τυχαίο πολύεδρο σε ελλειψοειδές	237
Β' Πρόσθετο φωτογραφικό υλικό	239
Γ' Λίγα λόγια για τον Grothendieck	259
Δ' Η Σημειογραφία Τροπιοτήτων για Ομάδες Συμμετρίας	265
Ε' Επιπρόσθετα Λήμματα	269
Βιβλιογραφία	282
Συντομογραφίες - Αρκτικόλεξα - Ακρωνύμια	283
Απόδοση ξενόγλωσσων όρων	285

Κατάλογος Σχημάτων

1.1	Κυρτό πολύεδρο του οποίου οι 100 κορυφές είναι τυχαία κατανεμμένες στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς. Ο κώδικας Mathematica στο Παράρτημα Α'	41
1.2	Rulpidon από το στερεό Steinmetz [150] και [23]	44
1.3	2-πολλαπλότητες γένους 0,1,2 και 3 [3]	44
1.4	Μεσαιωνικές πλακοστρώσεις, 15ος αι. [63, σελ. 7]	50
2.1	Παραδείγματα συνόλων που δεν θέλουμε να θεωρήσουμε ως πλακίδια	66
2.2	Οι ισομετρίες του επιπέδου	67
2.3	Άμεσες και έμμεσες ισομετρίες που διατηρούν ή αντιστρέφουν τον προσανατολισμό τριγώνων.	68
2.4	Ένα παράδειγμα κάλυψης και ένα παράδειγμα συσκευασίας	69
2.5	Μια πλακόστρωση με τρία πρωτοπλακίδια	70
2.6	Οι κανονικές πλακοστρώσεις του επιπέδου	71
2.7	Οι n κορυφές στο σύνορο ενός πλακιδίου χωρίζουν το σύνορο σε ακριβώς n ακμές.	71
2.8	Οι γωνίες δεν συμπίπτουν απαραίτητα με κορυφές.	72
2.9	Μη αριθμήσιμο πλήθος μονοεδρικών πλακοστρώσεων με τετράγωνα. .	73
2.10	Τα μη κυρτά πολυγωνικά πλακίδια μπορεί να τέμνονται σε μη συνεκτικά σύνολα.	74
2.11	Δύο από τα τρία πλακίδια που μοιράζονται τρεις κορυφές.	76
2.12	Ορισμός μπαλώματος για έναν δίσκο $D(p, R)$	77
2.13	Μπαλώματα στην τετραγωνική πλακόστρωση.	77
2.14	Μια μονοεδρική πλακόστρωση στην οποία η γειτονιά του μαύρου πλακιδίου δεν είναι ένα μπάλωμα.	78
2.15	(α) Κυκλικές συμμετρίες (β) Διεδρικές συμμετρίες	79
2.16	Συμμετρίες τροχών.	80
2.17	Το γινόμενο δύο ανακλάσεων σε παράλληλες ευθείες είναι μεταφορά. .	81
2.18	Το γινόμενο δύο ανακλάσεων σε τεμνόμενες ευθείες είναι στροφή. . .	82
2.19	Η απεικόνιση σε δύο σημεία και το αν η ισομετρία είναι άμεση ή έμμεση καθορίζουν την ισομετρία.	83
2.20	Σύνθεση δύο στροφών δίνει στροφή	84

2.21	Η σύνθεση $\sigma = R_{-2\pi/n,s} \circ R_{2\pi/n,p}$ είναι μεταφορά.	85
2.22	Μια πλακόστρωση με ποικιλία συμμετριών.	86
2.23	Η τροχιά του σημείου p υπό τις μεταφορικές συμμετρίες περιέχει ένα σημείο σε κάθε πλακίδιο.	87
2.24	(α) Η τροχιά στροφών συγκλίνει στο p . (β) Η τροχιά μεταφορών επίσης συγκλίνει στο p	87
2.25	Το διάστημα γωνιών που αντιστοιχεί σε πλακίδιο T	88
2.26	Απόδειξη ότι η ομάδα συμμετρίας μιας πλακόστρωσης είναι διακριτή.	89
2.27	Σημειογραφία για συμμετρίες πλακοστρώσεων.	91
2.28	Τρία ισομορφικά διαγράμματα ομάδων, τα οποία σχετίζονται με α-φινικούς μετασχηματισμούς. Όλες οι πλακοστρώσεις είναι του ίδιου τύπου συμμετρίας.	91
2.29	Παραδείγματα πλακοστρώσεων χωρίς μεταφορική συμμετρία	92
2.30	Πλακόστρωση με μόνο παράλληλες μεταφορές.	93
2.31	Η σύνθεση μιας μεταφοράς με στροφή κατά γωνία θ είναι μεταφορά κατά γωνία θ σε σχέση με την αρχική.	94
2.32	Αναπαράσταση ομάδας ζωφόρου πάνω σε άπειρο κατακόρυφο κύλινδρο.	95
2.33	Πλακοστρώσεις με τις επτά ομάδες ζωφόρου, με τα διαγράμματα ομάδων.	96
2.34	Το πλέγμα με τετράγωνα και το πλέγμα ισόπλευρων τριγώνων, με πιθανά παραλληλόγραμμα περιόδου με κόκκινο.	97
2.35	Μια περιοδική πλακόστρωση επάγει πλακόστρωση στον τόρο.	98
2.36	Η ύπαρξη στροφών γωνίας $2\pi/n$ με $n \geq 7$ συνεπάγεται συντομότερες μεταφορές.	99
2.37	Στην περίπτωση $n = 5$, το άθροισμα δύο μεταφορών δίνει συντομότερο διάνυσμα.	100
2.38	Παραδείγματα πλακοστρώσεων για οκτώ από τις 17 ομάδες ταπετσαρίας.	101
2.39	Παραδείγματα πλακοστρώσεων για τις υπόλοιπες εννιά ομάδες ταπετσαρίας.	103
3.1	(αριστερά) Ένα μπάλωμα που περικλείει ένα άλλο. (δεξιά) Ένα μπάλωμα που επεκτείνει χωρίς να περικλείει.	106
3.2	Εύρεση της ελάχιστης απόστασης μεταξύ πλευράς και μη γειτονικής γωνίας.	106
3.3	Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο μη τεμνόμενων ευθυγράμμων τμημάτων εμφανίζεται πάντα σε άκρο.	107
3.4	Η απόσταση μεταξύ $\partial\mathcal{A}_i$ και $\partial\mathcal{A}_{i+1}$ είναι τουλάχιστον δ	107
3.5	Ένα πλακίδιο που περικλείεται πλήρως από αντίγραφα του χωρίς να είναι δυνατή η επέκταση σε πλακόστρωση επιπέδου.	108
3.6	Κορώνες γύρω από διάφορα πλακίδια.	109

3.7	Πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με 2.	110
3.8	Πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με 3.	110
3.9	Ένα πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με 6.	111
3.10	Ένα πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με 5.	111
3.11	Ένα πλακίδιο με αριθμό περικύκλωσης 3.	112
3.12	Ένα τριγωνικό πλακίδιο περιβαλλόμενο από τρία αντίγραφα.	113
3.13	Ένα πλακίδιο περιβαλλόμενο από δύο αντίγραφα του εαυτού του.	113
3.14	Πλακόστρωση με το πλακίδιο Voderberg.	114
3.15	Πλακίδιο τέτοιο ώστε n αντίγρατά του να περιβάλλονται από δύο μόνο αντίγραφα.	114
3.16	Τροποποίηση του πλακιδίου Voderberg ώστε να προκύψει πλακίδιο με αριθμό περικύκλωσης 2.	116
3.17	Πλακίδιο του οποίου η πρώτη κορώνα αποτελείται από δύο αντίγρατά του.	116
3.18	Πλακίδιο τέτοιο ώστε δύο αντίγραφα (μπλε και ροζ) να περικλείουν δύο άλλα (κίτρινο και πράσινο).	117
3.19	Αν και το μπάλωμα μεγαλώνει, δεν δημιουργεί πλακόστρωση του επιπέδου.	117
3.20	Αυθαίρετα μεγάλα μπαλώματα που δεν περιέχουν το ένα το άλλο.	118
3.21	Αν ένα πεπερασμένο πρωτοσύνολο πλακοστρώνει τομέα του επιπέδου, τότε πλακοστρώνει και ολόκληρο το επίπεδο.	118
3.22	Η ακολουθία συγκλίνει στο $(1, 0)$, καθώς D είναι συμπαγής.	119
3.23	Υπολογισμός της απόστασης Hausdorff μεταξύ δύο πλακιδίων.	120
3.24	Η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα ενός πλακιδίου T	122
3.25	Κάθε δίσκος ακτίνας μ περιέχει σημείο του πλέγματος Λ	122
3.26	Καταγραφή όλων των σημείων του πλέγματος Λ	123
3.27	Ορισμός του T_{rs} μέσα στο μπάλωμα $\mathcal{A}_r$	124
3.28	Τα πλακίδια T_{10} και T_{20} που περιέχουν το L_0	124
3.29	Επιλογή του L_m (σε αυτήν την περίπτωση L_{17}), όπου m είναι ο μεγαλύτερος δείκτης σημείου πλέγματος εντός του $D(p, U)$	126
3.30	Αποδεικνύοντας το Θεώρημα Περιοδικότητας	127
3.31	Προκύπτουσα περιοδική πλακόστρωση από το μπάλωμα $\mathcal{A}$	129
3.32	Πρέπει να υπάρχει ένα πλακίδιο T που τέμνει το σύνορο του $\mathcal{A}$ μόνο σε μία ακμή.	130
3.33	Το κόψιμο ενός τόρου κατά μήκος δύο μονοπατιών ακμών α και β οδηγεί σε ένα μπάλωμα.	131
3.34	$V_P = 5$, $E_P = 10$ και $T_P = 5$ για αυτό το παραλληλόγραμμο περιόδου ελάχιστης επιφάνειας.	132
3.35	Μονοεδρική πλακόστρωση με μη κυρτό εξάγωνο.	134
3.36	Απόδειξη ότι τα n -γωνα για $n \geq 7$ δεν μπορούν να πλακοστρώσουν.	135

3.37	Οι τρεις οικογένειες εξαγωνικών πλακοστρώσεων.	138
3.38	Οι 15 οικογένειες πενταγωνικών πλακοστρώσεων.	139
3.39	Οι πλακοστρώσεις του Cairo και η πρισματική πλακόστρωση από πεντάγωνα έχουν ελάχιστο σύνορο.	140
3.40	Μικτή πλακόστρωση Cairo/πρισματική.	140
3.41	Μικτή πλακόστρωση Cairo/πρισματική.	141
3.42	Μικτή πλακόστρωση Cairo/πρισματική.	141
4.1	Ένα κρυσταλλικό στερεό έχει μία διάταξη ατόμων που σχηματίζει πλέγμα με περιοδική δομή.	143
4.2	Ένα πρότυπο περίθλασης ακτίνων X που δεν ταιριάζει ούτε σε διατεταγμένες ούτε σε άτακτες ουσίες.	144
4.3	Μια μη μεταφορική πλακόστρωση.	145
4.4	Ένα σύνολο πλακιδίων που εκτελούν την πράξη της πρόσθεσης δύο άνισων φυσικών.	148
4.5	Μια πλακόστρωση που δείχνει την ακολουθία Fibonacci	149
4.6	Μια πλακόστρωση στην οποία τα πλακίδια με P και Σ εμφανίζονται σε θέσεις πρώτων και σύνθετων αριθμών αντίστοιχα.	150
4.7	Ένα μη περιοδικό σύνολο από 11 πλακίδια Wang, με το χρώμα πλευράς να παίρνει όλο το τεταρτημόριο.	152
4.8	Πρότυπο περίθλασης ακτίνων X του ψευδοκρυστάλλου $Al_{63}Cu_{24}Fe_{13}$, εικοσαεδρίτη.	153
4.9	Το πλακίδιο καρέκλα μπορεί να πλακοστρωθεί με τέσσερις σμικρμένες εκδοχές του εαυτού του. Έπειτα, η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί.	154
4.10	Η πλακόστρωση που δημιουργείται από το πλακίδιο καρέκλα.	155
4.11	Ένα τρίγωνο που είναι 5-αντιγραφο-πλακίδιο και η πλακόστρωση που δημιουργείται.	156
4.12	Η πλακόστρωση pinwheel σε πρόσοψη κτιρίου στο Federation Square στη Μελβούρνη.	157
4.13	Ένα T-πλακίδιο αποσυντίθεται σε τέσσερα τετράγωνα. Ένα τετράγωνο αποσυντίθεται σε τέσσερα T-πλακίδια. Άρα, η διπλή αποσύνθεση δείχνει ότι είναι και τα δύο αντιγραφο-πλακίδια.	157
4.14	Σύνθεση τετραγώνων δημιουργεί ξανά την τετραγωνική πλακόστρωση, αλλά μεγεθυμένη.	158
4.15	2 από τις πλακοστρώσεις Laves	159
4.16	Κανόνες αντικατάστασης για πολλαπλά πλακίδια.	160
4.17	Πλακόστρωση αντικατάστασης με ομάδα συμμετρίας D_5 και πυκνό σύνολο προσανατολισμών.	161
4.18	Απεριοδικό πρωτοσύνολο του Robinson.	162

4.19	Υπάρχουν τρεις δυνατές διατάξεις των πλακιδίων με και χωρίς γωνίες.	162
4.20	Αναπαράσταση των πλακιδίων με βέλη και τεταρτοκύκλια.	163
4.21	Ένα μπλοκ 3×3 .	164
4.22	Μια επέκταση ενός μπλοκ 3×3 οδηγεί σε μπλοκ 7×7 .	165
4.23	Η επιλογή της ακολουθίας των κατευθύνσεων για τα κεντρικά πλακίδια των μπλοκ $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ καθορίζει αν η τελική πλακόστρωση καλύπτει ένα τέταρτο επιπέδου, ένα ημιεπίπεδο ή ολόκληρο το επίπεδο.	167
4.24	Συγκόλληση πλακοστρώσεων τεταρτημορίων και ημιεπιπέδων ώστε να προκύψει πλακόστρωση ολόκληρου του επιπέδου.	167
4.25	Τετράγωνα που δημιουργούνται από πλακόστρωση με αντικριστά σταυροειδή πλακίδια στις γωνίες και βραχίονες κατά μήκος των πλευρών.	168
4.26	Τα πρωτοπλακίδια «χαρταετός και βέλος».	169
4.27	Μια πλακόστρωση με χαρταετούς και βέλη.	169
4.28	Αντικαθιστώντας τις πλευρές με καμπύλες, επιβάλλονται οι συνθήκες ταύτισης.	170
4.29	Μια πλακόστρωση Penrose με βατράχια και φρύνους.	171
4.30	Κόβοντας τους χαρταετούς και τα βέλη σε τρίγωνα.	172
4.31	Σύνθεση τριγώνων για την παραγωγή πλακόστρωσης με αντικατάσταση.	172
4.32	Το ζεύγος ρόμβων του Penrose που δημιουργεί ένα απεριοδικό πρωτοσύνολο. $(\vartheta = \frac{\pi}{5})$	174
4.33	Μια πλακόστρωση από το πρωτοσύνολο ρόμβων.	174
4.34	Το απεριοδικό σύνολο δύο πλακιδίων του Ammann.	175
4.35	Το εξαγωνικό πλακίδιο των Taylor-Socolar, η ανάκλασή του και ένας κανόνας αντιστοίχισης.	176
4.36	Μια πλακόστρωση Taylor-Socolar.	177
4.37	Εναλλακτικές διακοσμήσεις της πλακόστρωσης Taylor-Socolar.	178
4.38	Μια πλακόστρωση που δημιουργείται από τα εναλλακτικά διακοσμημένα πλακίδια Taylor-Socolar.	178
4.39	Πρέπει να υπάρχουν μικροί δακτύλιοι.	179
4.40	Τα πλακίδια που συμμετέχουν σε μικρούς δακτυλίους αφήνουν χώρο μόνο για μονά πλακίδια.	179
4.41	Δύο περιπτώσεις που οδηγούν σε τρίγωνο επιπέδου ένα.	180
4.42	Γέμισμα οπών με πλακίδια που αντιστοιχούν στα άγκιστρα των τριγώνων πρώτου επιπέδου.	181
4.43	Γέμισμα οπών με πλακίδια που αντιστοιχούν στα άγκιστρα των τριγώνων πρώτου επιπέδου.	182
4.44	Γέμισμα οπών με πλακίδια που αντιστοιχούν στα άγκιστρα των τριγώνων επιπέδου n .	182

4.45	Ένα μοναδικό πλακίδιο Taylor-Socolar που είναι μη συνεκτικό, αλλά δεν χρειάζεται κανόνες αντιστοίχισης για να παράγει μόνο μη μεταφορικές πλακοστρώσεις.	183
4.46	Μια πλακόστρωση από το μη συνεκτικό πλακίδιο.	184
4.47	Ένα συνεκτικό πλακίδιο που προέρχεται από το πρωτοσύνολο Taylor-Socolar και πλακοστρώνει τον τρισδιάστατο χώρο.	184
5.1	Το Καπέλο Πολυχαρταετός	188
5.2	Η Αρχιμήδεια πλακόστρωση (3.4.6.4) (αριστερά) και η δυϊκή της πλακόστρωση Laves [3.4.6.4] (δεξιά)	191
5.3	Η δομή της πρώτης απόδειξης απειριοδικότητας	192
5.4	Η δομή της δεύτερης απόδειξης απειριοδικότητας	193
5.5	Μπάλωμα 10 στρώσεων με 391 καπέλα που δείχνει αραιά ανακλασμένα πλακίδια, το καθένα περικυκλωμένο από τρία μη ανακλασμένα.	196
5.6	Τα ανακλασμένα πλακίδια βρίσκονται σε αλυσίδες κατά έξι κατευθύνσεις (αριστερά). Η συγχώνευσή τους με γειτονικά πλακίδια (κέντρο) δίνει δομή αντίστοιχη εξαγωνικής πλακόστρωσης (δεξιά).	197
5.7	Συνεχές πλήθος σχημάτων καπέλων από μεταβολή δύο πλευρών.	198
5.8	Συμπλέγματα πλακιδίων στο μπάλωμα.	198
5.9	Τα τέσσερα μεταπλακίδια που προκύπτουν από απλοποιημένα σύνορα συμπλεγμάτων.	199
5.10	Διαδικασία συναρμολόγησης υπερπλακιδίων και προσδιορισμού των περιγραμμάτων τους από προσανατολισμένα μεταπλακίδια.	200
5.11	Οι πρώτες γενιές υπερπλακιδίων H και τα αντίστοιχα μπαλώματα από καπέλα.	201
5.12	Τα συγκλίνοντα πλακίδια και οι κανόνες αντικατάστασης τους.	202
5.13	Σχέση ανάμεσα στο ϕ και το $\sqrt{2}$ μέσα από ισόπλευρα τρίγωνα που προκύπτουν από τα κέντρα τρισκελίων.	203
5.14	Πιθανά υποσυσσωματώματα που προηγούνται των μεταπλακιδίων.	204
5.15	Εναλλακτικό σύστημα αντικατάστασης βασισμένο σε δύο καπέλα.	205
5.16	Μεγάλο μπάλωμα πλακιδίων που αποδεικνύει την πλακόστρωση από το καπέλο.	206
5.17	Μπάλωμα της πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ (κέντρο), με τα αντίστοιχα μπαλώματα από $\mathcal{T}_4$ (αριστερά) και $\mathcal{T}_8$ (δεξιά).	207
5.18	Οι τέσσερις προσανατολισμοί του καπέλου που ανήκουν στην ίδια κλάση, καθώς και οι προερχόμενες μορφές πλακιδίων τύπου V (κέντρο) και τύπου κομήτης (δεξιά).	209
5.19	Αριστερά: Οι 1-σκόληκες στην $\mathcal{T}'_4$. Δεξιά: Οι 1-λωρίδες στην $\mathcal{T}_4$	210
5.20	Αντιστοιχίες μεταφορών για τα πλακίδια τύπου V και κομήτες.	212
5.21	Τα τέσσερα συσσωματώματα.	214

5.22	Μεταπλακίδια T, H, P και F .	217
5.23	Διχοτόμηση των πλακιδίων P και F .	217
5.24	Η διάταξη δύο μεταπλακιδίων P (PP) που οδηγεί σε αντίφαση.	219
5.25	Περίπτώσεις $T1$ και $T2$.	219
5.26	Περίπτωση $T1P$.	220
5.27	Περίπτωση $T2P$, απορρίπτεται επειδή εμφανίζεται PP στο σημείο που υποδεικνύεται.	221
5.28	Περίπτωση $T1H$, απορρίπτεται επειδή εμφανίζεται PP στο σημείο που υποδεικνύεται.	221
5.29	Περίπτωση $T2H$, απορρίπτεται επειδή εμφανίζεται PP στο σημείο που υποδεικνύεται.	222
5.30	Περίπτωση $T1PF$.	222
5.31	Περίπτωση $T1PP$, απορρίπτεται επειδή εμφανίζεται PP στο σημείο που υποδεικνύεται.	223
5.32	Περίπτωση HPP .	223
5.33	Περίπτωση HPF .	223
5.34	Περίπτωση HFP .	224
5.35	Περίπτωση HFF .	224
5.36	Υπερπλακίδιο T' , μαζί με το αντίστοιχο T .	224
5.37	Υπερπλακίδιο H' , μαζί με το αντίστοιχο H .	225
5.38	Υπερπλακίδιο P' , μαζί με το αντίστοιχο P .	225
5.39	Υπερπλακίδιο F' , μαζί με το αντίστοιχο F .	225
5.40	Αδύνατη γειτνίαση δύο πλακιδίων F .	226
5.41	Ένα απεριοδικό δεκάπλευρο πλακίδιο τύπου χελώνα.	229
5.42	Περιοδική πλακόστρωση με το Tile $(1, 1)$.	229
5.43	Το 14-πλευρο πολύγωνο Tile $(1, 1)$	232
5.44	Ένα μπάλωμα από μια μη περιοδική πλακόστρωση με φαντάσματα	233
Ε'.1	Η προέκταση μιας πλευράς του πολυχαρταετού από οποιαδήποτε κορυφή που δεν είναι ανακλαστική ούτε γειτονική σε ανακλαστική.	270

Κατάλογος Εικόνων

1.1	Σχέδια του da Vinci στο βιβλίο του Pacioli [112]	30
1.2	Σχέδια του Dürer	31
1.3	Πλακοστρώσεις του υπερβολικού επιπέδου στο μοντέλο του δίσκου του Poincaré. Σχέδια του Escher από [45, σελ. 126].	32
1.4	Σχέδια του Escher	33
1.5	Έργα από το ρεύμα της γεωμετρικής αφαίρεσης, αρχές 20ου αι. . . .	35
1.6	Σχέδια του Kepler στο [84, Βιβ. II, σελ. 62,64]	36
1.7	Μαρμάρινο ψηφιδωτό του μικρού αστεροειδούς δωδεκαέδρου Βασιλική του Αγίου Μάρκου, Βενετία	38
1.8	Κόλουρο τριγωνικό τραπεζόεδρο [149] στο χαρακτηριστικό Melencolia I, 1514 [42]	38
1.9	Πεπλατυσμένος κύβος [110, σελ. 78] και το ανάπτυγμά του [43, σελ. 155]	39
1.10	Έργα του Escher με πολύεδρα	42
1.11	Έργα σύγχρονων εμπνευσμένα από πολύεδρα	42
1.12	Rulpidon [88]	43
1.13	Πλήρης χάρτης 9 χρωμάτων του Carlo Séquin στο Rulpidon [23] . . .	45
1.14	Blombos [47, σελ. 159, Christopher Henshilwood]	47
1.15	Ρωμαϊκά ψηφιδωτά, Οικία Διονύσου, Κάτω Πάφος, Κύπρος, τέλη 2ου αι. μ.Χ.	48
1.16	Ρωμαϊκά ψηφιδωτά, Οικία Ευστολίου, Κούριον, Κύπρος, τέλη 4ου - αρχές 5ου αι. μ.Χ.	49
1.17	Ρωμαϊκά ψηφιδωτά, Οικία Αιώνα, Κάτω Πάφος, Κύπρος, 4ος αι. μ.Χ. .	50
1.18	Πλακοστρώσεις από την Basilica di San Clemente al Laterano, Ρώμη, 13ος αι. [18]	51
1.19	Πλακοστρώσεις στη φύση	52
1.20	Σχέδια πλακοστρώσεων του Kepler στο [84]	52
1.21	Σχέδια μωσαϊκών του Bourgoïn	53
1.22	Πλακόστρωση (λεπτομέρεια), Παλάτι Αλάμπρας, Ανδαλουσία, Ισπανία, 13ος αι. [11]	54
1.23	Μνημεία από την εποχή του Χαλιφάτου των Ομαγιαδών	55
1.24	Ψηφιδωτά σε θρησκευτικά μνημεία	56

1.25	Πλακοστρώσεις με το ισλαμικό άστρο [89, σελ. 300]	58
3.1	Nu descendant un escalier n° 2, Marcel Duchamp	115
4.1	Ο Roger Penrose με τον Robert Ammann, 21 Μαρτίου 1991 , φωτο- γραφία: Ludwig Danzer[127]	175
Β'.1	Τάφος Προφήτη Δανιήλ, Σούσα, Ιράν, 14ος αι.[12]	239
Β'.2	Πλακοστρωμένες αίθουσες, Παλάτι Αλάμπρας, Ανδαλουσία, Ισπανία, 13ος αι.	240
Β'.3	Πλακοστρώσεις (λεπτομέρεια), Παλάτι Αλάμπρας, Ανδαλουσία, Ισπα- νία, 13ος αι.	241
Β'.4	Πλακοστρώσεις (λεπτομέρεια), Παλάτι της Αλάμπρας, Ανδαλουσία, Ι- σπανία, 13ος αι.	242
Β'.5	Πλακοστρώσεις (λεπτομέρεια), Παλάτι Αλάμπρας, Ανδαλουσία, Ισπα- νία, 13ος αι.	243
Β'.6	Σχέδια του Escher αντίγραφα πλακοστρώσεων του Παλατιού της Α- λάμπρας, 1936	244
Β'.7	Gravity, 1952, Λιθογραφία και νερομπογιά (εδώ σε αποχρώσεις του γκρίζου λόγω σκαναρίσματος) [91, Εικ. 178]	245
Β'.8	Snakes, 1969, Έγχρωμη ξυλογραφία (εδώ σε αποχρώσεις του γκριζου λόγω σκαναρίσματος) [91, Εικ. 270]	246
Β'.9	Πλακοστρώσεις με εμφανή τα πλέγματα [45, σελ. 108]	247
Β'.10	Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας pg [44, Εικ. 3]	247
Β'.11	Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας $p3m1$ [44, Εικ. 9]	248
Β'.12	Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας $???$ [44, Εικ. 12]	249
Β'.13	Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας pgg [44, Εικ. 21]	250
Β'.14	Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας $???$ [44, Εικ. 35]	251
Β'.15	Πλακόστρωση με πολυχρωματική συμμετρία [44, Εικ. 39]	252
Β'.16	Πλακόστρωση με πολυχρωματική συμμετρία [44, Εικ. 40]	253
Β'.17	Πλακόστρωση με πολυχρωματική συμμετρία [44, Εικ. 41]	254
Β'.18	Σχέδια πλακοστρώσεων του Kepler στο [84]	255
Β'.19	Σχέδια πλακοστρώσεων του Kepler στο [84]	256
Β'.20	Σχέδια μοτίβων του Bourgoïn, 1868 [26, Εικ. 6.3]	257
Β'.21	Σχέδιο εξώστη δεξιού τμήματος τζαμιού Soultân Barkouk στο Κάιρο (15ος αι.) του Bourgoïn, 1892 [26, Εικ. 13.1]	258
Γ'.1	Ο Grothendieck με συναδέλφους του	259
Γ'.2	Ο Grothendieck διδάσκοντας στο IHÉS	260
Γ'.3	Ο Grothendieck την δεκαετία του 1970	261
Γ'.4	Ο δύο τελευταίες (γνωστές) φωτογραφίες του Grothendieck	262

Κατάλογος Πινάκων

2.1	Οι ομάδες συμμετρίας ζωφόρου και ταπετσαρίας	101
2.1	Οι ομάδες συμμετρίας ζωφόρου και ταπετσαρίας	102

Πρόλογος

Η παρούσα εργασία εκπονήθηκε στο πλαίσιο των υποχρεώσεων για την απόκτηση του Διπλώματος της Σχολής.

Στόχος της διπλωματικής είναι, μέσα από την εξερεύνηση των πλακοστρώσεων και της μαθηματικής θεωρίας που τις διέπει, να αναδείξει τη σύγχρονη μαθηματική έρευνα στον τομέα της Διακριτής Γεωμετρίας και της Συνδυαστικής, με έμφαση στη Θεωρία Πλακοστρώσεων. Το πεδίο αυτό συνδυάζει την τέχνη με την ομορφιά των μαθηματικών, με τις πλακοστρώσεις να αποτελούν χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της σύνδεσης.

Αρχικά, παρουσιάζεται ένα ιστορικό πλαίσιο που αποτυπώνει τη στενή αλληλεπίδραση μεταξύ τέχνης και μαθηματικών, όπως αυτή διαφαίνεται μέσα από τα έργα καλλιτεχνών και μαθηματικών διαχρονικά. Αυτό το υπόβαθρο συμβάλλει στην κατανόηση του τρόπου με τον οποίο η τέχνη έχει επηρεάσει την εξέλιξη των μαθηματικών και αντιστρόφως.

Στη συνέχεια, θεμελιώνονται οι βασικοί ορισμοί και έννοιες που σχετίζονται με τις πλακοστρώσεις. Εξετάζονται οι διάφορες κατηγορίες πλακοστρώσεων και επισημαίνονται οι σημαντικότερες ιδιότητές τους. Μέσα από αυτήν την ανάλυση, εκτιμάται ο τρόπος με τον οποίο η μαθηματική θεωρία περιγράφει αυτά τα πολύπλευρα καλλιτεχνήματα και συμβάλλει στην απάντηση ερωτημάτων σχετικών με αυτά.

Αφού εδραιωθεί η βασική θεωρία, παρουσιάζονται ορισμένα Θεωρήματα Επέκτασης, τα οποία θα αποτελέσουν χρήσιμα εργαλεία για την ανάπτυξη της Θεωρίας Απεριοδικών Πλακοστρώσεων, με αναφορά στις κατασκευές απεριοδικών πρωτοσυνόλων των Robinson, Penrose και Taylor-Socolar.

Ακολούθως, εξετάζεται αναλυτικά η λύση ενός μέχρι πρότινος ανοιχτού προβλήματος στον τομέα των απεριοδικών πλακοστρώσεων: η εύρεση απεριοδικού μονοπλακιδίου. Η ανάλυση αυτή αναδεικνύει τις μεθόδους που χρησιμοποιήθηκαν για την επίλυση του προβλήματος, του οποίου η λύση δημοσιεύτηκε μόλις τον Μάρτιο του 2023 [132], και αποτέλεσε την κύρια αφορμή για την επιλογή του θέματος της παρούσας εργασίας.

Γίνεται, επίσης, αναφορά στη βαθιά σύνδεση μεταξύ πλακοστρώσεων και της Θεωρίας Υπολογισιμότητας, ενός βασικού κλάδου της Μαθηματικής Λογικής και της Επιστήμης των Υπολογιστών. Η προσέγγιση αυτή αναδεικνύει τους απροσδόκητους αλλά γόνιμους δεσμούς μεταξύ φαινομενικά ανόμοιων πεδίων και υπογραμμίζει τη

διεπιστημονική φύση της σύγχρονης μαθηματικής σκέψης.

Κύρια πηγή αναφοράς στην εργασία είναι το βιβλίο *Tilings and Patterns* [63] των Branko Grünbaum (1929–2018) και Geoffrey Shephard (1927–2016), ένα μνημειώδες έργο στην περιοχή των πλακοστρώσεων, το οποίο συγκέντρωσε σε ενιαίο τόμο την έως τότε διασκορπισμένη βιβλιογραφία περί μοτίβων και πλακοστρώσεων. Επίσης, βασική πηγή αποτελεί το πρόσφατο σύγγραμμα *The tiling book: An introduction to the mathematical theory of tilings* [1] του Colin Adams (1956–), από το οποίο προέρχονται και τα περισσότερα σχήματα που παρουσιάζονται στην εργασία.

Τέλος, σημειώνεται ότι τα διαγράμματα πλακοστρώσεων που παρουσιάζονται στην εργασία αποτελούν αποσπάσματα — ενδεικτικά δείγματα των αντίστοιχων πλακοστρώσεων. Συνεπώς, πρέπει να ερμηνευθούν ως τυχόντα επιλεγμένα μέρη που ο αναγνώστης μπορεί να επεκτείνει θεωρητικά επ’ άπειρον προς όλες τις κατευθύνσεις. Η δυνατότητα αυτής της επέκτασης δεν είναι, ωστόσο, καθόλου προφανής στην περίπτωση των απεριοδικών πλακοστρώσεων που θα μελετήσουμε στη συνέχεια.

Μέρος Ι

Εισαγωγή

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

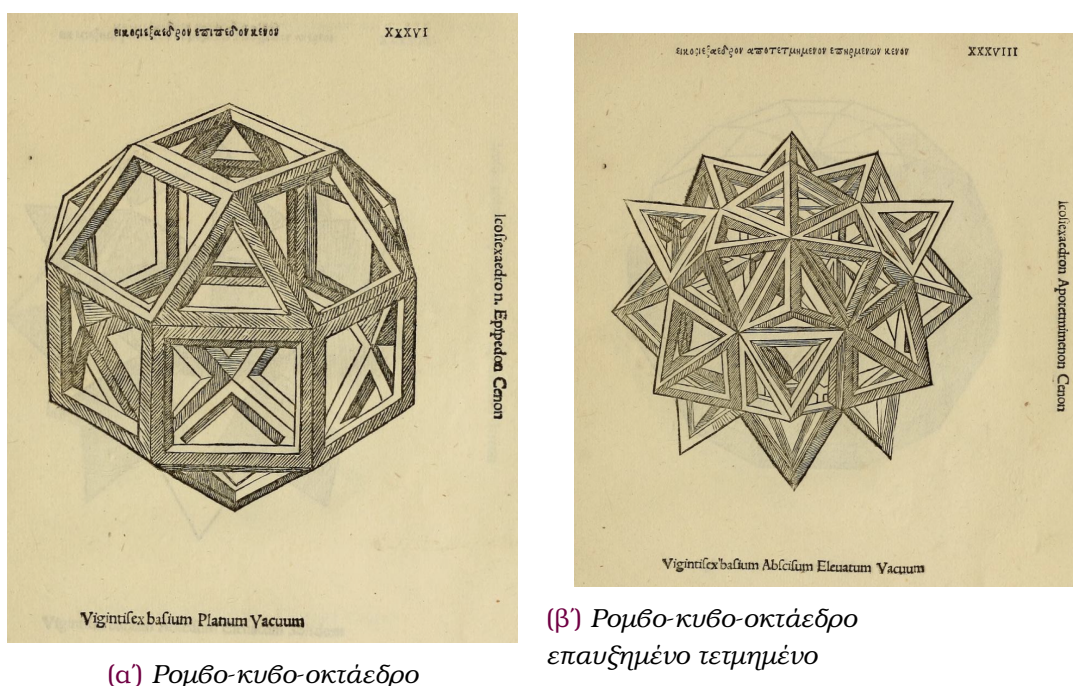
1.1 Μαθηματικά και Τέχνη

Η αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης είναι μια συναρπαστική και πολύπλοκη σχέση που περιλαμβάνει ποικίλες πτυχές της ανθρώπινης εφευρετικότητας και έκφρασης. Οι άνθρωποι διαθέτουν μια ξεχωριστή ικανότητα να διακρίνουν μοτίβα και να εκτιμούν την αισθητική στο περιβάλλον τους. Η διερεύνηση των μοτίβων χρησιμεύει ως θεμελιώδης πυλώνας των μαθηματικών, ενώ οι λάτρεις της τέχνης συχνά διενεργούν αναζητήσεις για να αποκαλύψουν τα μοτίβα μέσα στα έργα τέχνης και τα εξελισσόμενα θέματα που διαπλέκουν το έργο ενός καλλιτέχνη.

1.1.1 Μαθηματικά: η επιστήμη των μοτίβων

Ακριβώς όπως τα μοτίβα διαπλέκονται με τα πεδία των μαθηματικών και της τέχνης, παίζουν επίσης βαθύτατο ρόλο στην αρχιτεκτονική του κόσμου μας. Τα μαθηματικά, που συχνά αναφέρονται ως η επιστήμη των μοτίβων ([122, σελ. 76] και [139]) γίνονται ο φακός μέσω του οποίου μπορούμε να κατανοήσουμε και να ερμηνεύσουμε τις περίπλοκες δομές που μας περιβάλλουν. Η αναζήτηση ενός μαθηματικού περιλαμβάνει τη διάκριση μοτίβων στους αριθμούς, στο χώρο, στην επιστήμη και στη φαντασία. Αυτά τα μοτίβα συνδέονται μεταξύ τους μέσω συναρτήσεων, τελεστών και μορφισμών, σχηματίζοντας μόνιμες μαθηματικές δομές. Οι μαθηματικές θεωρίες εξηγούν τις σχέσεις μεταξύ των μοτίβων, επιτρέποντας την εξήγηση και την πρόβλεψη των φυσικών φαινομένων. Η έλευση των υπολογιστών διευρύνει την εξερεύνηση αυτών των μοτίβων, κατ' αναλογία με τα τηλεσκόπια και τα μικροσκόπια για την επιστήμη. Η μαθηματική ανακάλυψη ξεκινά με τον εντοπισμό μοτίβων στα δεδομένα, που οδηγεί στη γενίκευση και την αφαίρεση, σχηματίζοντας θεωρίες που συνδέουν μοτίβα σε διαφορετικούς τομείς. Αυτή η εγγενής εστίαση στα μοτίβα συμβάλλει στην αξιοσημείωτη αποτελεσματικότητα των μαθηματικών στην επιστημονική έρευνα [139, σελ. 616].

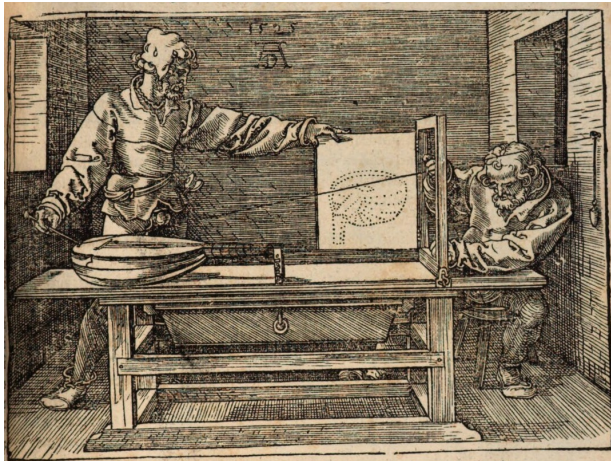
Τα αρχιτεκτονικά σχέδια απ' την άλλη, που καθοδηγούνται από μοτίβα και αρχές, είναι κάτι περισσότερο από χρηστικές κατασκευές- ενσαρκώνουν την ίδια την ουσία της ανθρώπινης σκέψης και καινοτομίας. Από τις σχολαστικές συμμετρίες που κοσμούν τα αρχαία μνημεία μέχρι τις γοητευτικές γεωμετρίες που κοσμούν τους σύγχρονους ουρανοξύστες, τα μοτίβα δίνουν το έναυσμα για αρχιτεκτονικά αριστουργήματα που αποτελούν απόδειξη της ανθρώπινης εφευρετικότητας. Αυτά τα αρχιτεκτονικά μοτίβα, όπως τα νήματα που υφαίνονται στον ιστό του οικοδομημένου μας περιβάλλοντος, αντικατοπτρίζουν όχι μόνο τη μαθηματική ακρίβεια αλλά και τις πολιτιστικές αφηγήσεις και τις κοινωνικές αξίες. Γεφυρώνουν το χάσμα μεταξύ του αφηρημένου και του απτού, υπερβαίνοντας την απλή λειτουργικότητα για να προκαλέσουν συναισθήματα, να διηγηθούν ιστορίες και να εμπνεύσουν δέος.



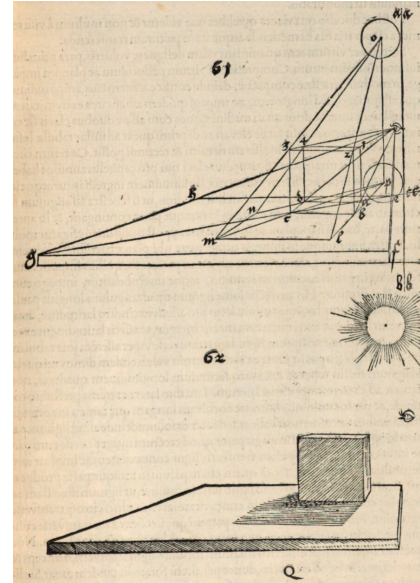
Εικόνα 1.1: Σχέδια του da Vinci στο βιβλίο του Pacioli [112]

Επανερχόμενοι τώρα στο δίπτυχο μαθηματικά-τέχνη, ο ορισμός της τέχνης και η χάραξη των ορίων της αποδεικνύεται μια πολύπλευρη και ενίοτε αμφιλεγόμενη προσπάθεια. Ενώ μπορεί να υπάρχουν ερωτήματα σχετικά με το κατά πόσον συγκεκριμένα φυσικά φαινόμενα, όπως οι μελωδικοί ήχοι που εκπέμπουν οι φάλαινες, μπορούν να χαρακτηριστούν ως τέχνη, ο ρόλος της τέχνης ως διάυλος επικοινωνίας για την ανθρωπότητα παραμένει αδιαμφισβήτητος. Η τέχνη συχνά διαπλέκεται με τις έννοιες της ομορφιάς, της συναισθηματικής απήχησης και της μετάδοσης αληθειών, απηχώντας τα ίδια τα κίνητρα που ωθούν τους μαθηματικούς στην εξερεύνηση των μαθηματικών πεδίων [138][95, σελ. 468].

Τα μαθηματικά έχουν αναμφισβήτητα αφήσει το αποτύπωμά τους στο χώρο της τέχνης, προσφέροντας βοήθεια στους καλλιτέχνες με ποικίλους τρόπους. Οραματιστές όπως ο Luca Bartolomeo de Pacioli (π. 1447 – 1517) με τον Leonardo di



(α) [43, σελ. 185]



(β) [43, σελ. 181]

Εικόνα 1.2: Σχέδια του Dürer

ser Piero da Vinci (1452 – 1519) (βλ. Εικ. 1.1), ο Albrecht Dürer (1471 – 1528) (βλ. Εικ. 1.2) και ο Maurits Cornelis Escher (1898 – 1972) (βλ. Εικόνες 1.3, 1.4) ενσωμάτωσαν απρόσκοπτα τη μαθηματική σκέψη στις δημιουργικές τους διαδικασίες. Επιπλέον, οι μαθηματικοί έχουν συνεισφέρει εργαλεία ζωτικής σημασίας για την εργαλειοθήκη του καλλιτέχνη, συμπεριλαμβανομένων θεωρημάτων που καθορίζουν τα όρια της καλλιτεχνικής αναπαράστασης. Για παράδειγμα, η εισαγωγή της γραμμικής προοπτικής έδωσε τη δυνατότητα στους καλλιτέχνες να απεικονίζουν τρισδιάστατα αντικείμενα σε επίπεδες επιφάνειες με αυξημένο ρεαλισμό.

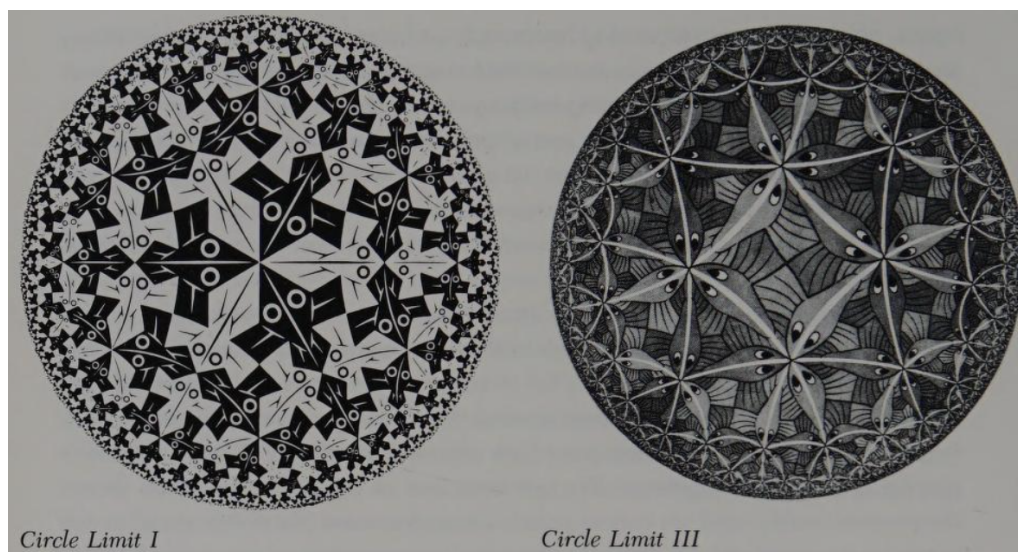
1.1.2 Συμμετρία και Γεωμετρική Αφαίρεση

Η συμμετρία, ένα άλλο μαθηματικό οικοδόμημα, συντονίζεται αρμονικά με τον κόσμο της τέχνης, αποτελώντας ένα αναπόσπαστο κομμάτι της γεωμετρίας και της μαθηματικής αισθητικής. Οι προσπάθειες του διακεκριμένου μαθηματικού Felix Klein (1849 – 1925) για την ταξινόμηση των γεωμετρικών μετασχηματισμών σε διάφορες γεωμετρίες έριξαν φως στην έννοια της συμμετρίας και αναδείχθηκαν σε μια αναγκαία γέφυρα μεταξύ των μαθηματικών και της τέχνης. Οι πολυδιάστατες συμμετρίες του εικοσαέδρου, όπως παρουσιάστηκαν στο κλασικό έργο του *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree* [87], αντανakλούν τον υπέροχο κόσμο των μορφών και των υποδομών που εμπνέουν τους καλλιτέχνες.

Η εμβάθυνση στη σφαίρα των ομάδων και των συμμετριών, όπως παρουσιάζεται στο έργο του Klein, διευκόλυνε την κατανόηση και την κατηγοριοποίηση μοτίβων στη γεωμετρία και την τέχνη. Οι ανακαλύψεις του αποτέλεσαν σημαντικό βήμα προς την ανάπτυξη της θεωρίας των ομάδων και επηρέασαν βαθύτατα την κρυσταλλογραφία,

καθώς και άλλους τομείς της μαθηματικής έρευνας.

Οι επαγγελματίες της τέχνης, της αρχιτεκτονικής και του σχεδιασμού αξιοποιούν συστηματικά τη συμμετρία και τα μοτίβα στις προσπάθειές τους, χρησιμοποιώντας επαναλαμβανόμενα μοτίβα για να υφάνουν περίπλοκα ταπισερί σχεδιασμού. Ωστόσο, είναι σκόπιμο να αναγνωρίσουμε ότι δεν εμπλουτίζουν συνειδητά όλοι οι καλλιτέχνες τις δημιουργίες τους με μαθηματικές έννοιες. Ο σύνδεσμος μεταξύ μαθηματικών και τέχνης αποτελεί γόνιμο έδαφος για εξερεύνηση και ανάπτυξη της έμπνευσης και στους δύο τομείς.



Εικόνα 1.3: Πλακοστρώσεις του υπερβολικού επιπέδου στο μοντέλο του δίσκου του Poincaré. Σχέδια του Escher από [45, σελ. 126].

Μέσα από την οπτική γωνία των μαθηματικών, ακόμη και τα φαινομενικά πολύπλοκα «μοτίβα ζωφόρου» (μοτίβα που επαναλαμβάνονται επάπειρον σε μια διάσταση) μπορούν να κατηγοριοποιηθούν σε διακριτούς τύπους. Αυτή η ανακάλυψη, που χρονολογείται από τις συνεργατικές προσπάθειες των George Pólya (1887 - 1985) [117], Paul Niggli (1888 - 1953) [107] και Andreas Speiser (1885 - 1970) [137] και παρουσιάζεται συγκεντρωτικά στο *The Symmetries of Things* [37, σελ. 67-68], έδειξε πώς η μαθηματική θεωρία ομάδων μπορεί να ταξινομήσει τα διάφορα μοτίβα ζωφόρου σε 7 θεμελιώδεις κατηγορίες τις οποίες θα μελετήσουμε στην συνέχεια στο Κεφάλαιο 2.4. Αυτή η αλλαγή προτύπου δείχνει πώς η διάκριση μοναδικών ιδιοτήτων μπορεί να διαφοροποιήσει φαινομενικά παρόμοια σχέδια, οδηγώντας σε μια βαθύτερη κατανόηση των μαθηματικών συμμετριών.

Στα τέλη του 19ου αι. σημειώθηκε επίσης σημαντική πρόοδος στην ταξινόμηση των ομάδων δισδιάστατης και τρισδιάστατης κρυσταλλογραφίας, η οποία έπαιξε καθοριστικό ρόλο στην κατανόηση των επαναλαμβανόμενων μοτίβων [77]. Η ταξινόμηση αυτή, με επικεφαλής τους αξιόλογους επιστήμονες Evgraf Fedorov (1853 - 1919), Arthur Moritz Schoenflies (1853 - 1928) και William Barlow (1845 - 1934) -που έδρασαν ανεξάρτητα-, οδήγησε στον προσδιορισμό 17 ομάδων ταπετοαρίας στις δύο

διαστάσεις και 230 ομάδων κρυσταλλογραφίας στις τρεις διαστάσεις. Οι 17 ομάδες ταπετσαρίας παρουσιάζονται συγκεντρωτικά στο *Tessellations* [46, σελ. 60-65] και θα τις συζητήσουμε επίσης στη συνέχεια στο Κεφάλαιο 2.4.

Το πρόβλημα της κατανόησης των κρυσταλλογραφικών ομάδων υψηλότερων διαστάσεων πρέπει να ήταν αρκετά σημαντικό, διότι αποτελούσε ένα μέρος του προβλήματος 18 των προβλημάτων που έθεσε ο David Hilbert (1862 – 1943) στο Διεθνές Συνέδριο Μαθηματικών στο Παρίσι το 1900. Είχε προτείνει 23 προβλήματα για την εστίαση της μαθηματικής έρευνας. Το ερώτημά του στο 18ο πρόβλημα ήταν [71, σελ. 467]:

Υπάρχει στον n -διάστατο Ευκλείδειο χώρο μόνο ένας πεπερασμένος αριθμός ουσιαστικά διαφορετικών ειδών ομάδων κινήσεων με μια θεμελιώδη περιοχή;

Οι περιπτώσεις δύο και τριών διαστάσεων ήταν γνωστές, αλλά καμία περίπτωση μεγαλύτερης διάστασης. Το πρόβλημα λύνεται το 1910 από τον (μετέπειτα ναζί¹) μαθηματικό Ludwig Bieberbach (1886 – 1982), ο οποίος αποδεικνύει την ύπαρξη μόνο πεπερασμένου πλήθους τέτοιων ομάδων σε οποιαδήποτε διάσταση. Χωρίς όμως να προσδιορίζει τον ακριβή αριθμό τους για κάθε διάσταση.



(α') Κόμβοι *trefoil* [91, Εικ. 264] (β') Λωρίδες του Möbius, παράδειγμα μη προσανατολισμένης επιφάνειας [45, σελ. 64]

Εικόνα 1.4: Σχέδια του Escher

¹Το 1933 εντάσσεται στα Τάγματα Εφόδου και το 1937 στο Ναζιστικό Κόμμα. Συμμετείχε ενεργά στις προσπάθειες αποπομπής από τις θέσεις τους των Εβραίων συναδέλφων του Edmund Landau (1877 – 1938) και Issai Schur (1875 – 1941)· με τον τελευταίο είχαν συνεργαστεί για πάνω από μια δεκαετία και είχαν συγγράψει άρθρο το 1928 [123, σελ. 130]. Το 1936 ιδρύει με τον επίσης ναζί μαθηματικό Theodor Vahlen (1869 – 1945) το μαθηματικό περιοδικό “*Deutsche Mathematik*” όπου εκτός των μαθηματικών άρθρων είχε σαφείς ιδεολογικές προκυρήξεις [123, σελ. 133]. Το 1945 ο Bieberbach απολύθηκε από όλες τις ακαδημαϊκές του θέσεις λόγω της υποστήριξής του στο ναζισμό. Παρόλα αυτά το 1949 ο Alexander Ostrowski (1893 – 1986) συνηγορώντας υπέρ της συμβολής του στον τομέα των μαθηματικών τον προσκαλεί ως επισκέπτη καθηγητή για ένα εξάμηνο στο Πανεπιστήμιο της Βασιλείας στο τέλος του οποίου διοργανώνει σεμινάριο [49, σελ. 263].

Η γεωμετρική τέχνη, με την ισορροπία των σχημάτων και των χρωμάτων της, πα-
ρέχει έναν καμβά για μαθηματική εξερεύνηση. Ο M.C. Escher, που προαναφέραμε,
μια φωτεινή προσωπικότητα σε αυτόν τον τομέα, προσέγγισε το έργο του με μαθημα-
τική περιέργεια, δημιουργώντας οπτικά συναρπαστικά έργα που έπαιζαν με απίθανα
αντικείμενα και περίπλοκα ψηφιδωτά. Η συνεργασία του με τον μαθηματικό Harold
Scott MacDonald Coxeter (1907 – 2003) είχε ως αποτέλεσμα καινοτόμες έννοιες,
όπως τις πλακοστρώσεις του υπερβολικού επιπέδου (βλ. Εικ. 1.3), που γεφύρω-
σαν την τέχνη και τη γεωμετρία. Ο Escher απεικόνισε επίσης κι άλλα ενδιαφέροντα
μαθηματικά αντικείμενα όπως τον κόμβο trefoil (βλ. Εικ. 1.4α'), τον πιο απλό μη
τετριμμένο κόμβο, ή την λωρίδα του Möbius (βλ. Εικ. 1.4β') ένα πολύ ενδιαφέρον
παράδειγμα μη προσανατολίσιμης επιφάνειας. Ο ίδιος ο καλλιτέχνης γράφει [44,
σελ. 6]:

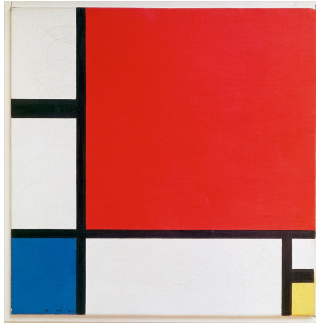
Οι βασικές ιδέες στα έργα μου μαρτυρούν συχνά την έκπληξη και τον
θαυμασμό μου για τους νόμους της φύσης που εκδηλώνονται στον κόσμο
γύρω μας. Όποιος διερωτάται θαυμάζοντας διαπιστώνει ότι η ίδια αυτή
διαδικασία είναι θαύμα. Αντιμετωπίζοντας με πάθος τα περιρρέοντα αι-
νίγματα και εξετάζοντας και αναλύοντας τις παρατηρήσεις μου, κατέληξα
στον τομέα των μαθηματικών. Αν και δεν έχω γνώσεις ούτε τριβή με τις α-
κριβείς επιστήμες, συχνά διαπιστώνω ότι ταυτίζομαι περισσότερο με τους
μαθηματικούς παρά με τους συναδέλφους μου καλλιτέχνες.

Η επιρροή των έργων του Escher, μέχρι και τις μέρες μας, εμπνέει τους καλλιτέχνες
να δημιουργήσουν έργα που αντανakλούν και ανταποκρίνονται στις μαθηματικές
ιδέες.

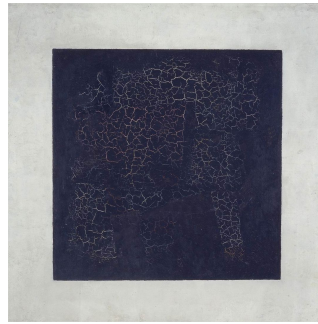
Η σύνδεση μεταξύ τέχνης και μαθηματικών επεκτείνεται σε ποικίλα καλλιτεχνικά
ρεύματα. Η εμφάνιση της γεωμετρικής αφαίρεσης τον 20ο αιώνα εγκαινίασε μια
νέα εποχή όπου καλλιτέχνες όπως μεταξύ άλλων ο Piet Mondrian (1872 – 1944), ο
Kazimir Malevich (1879 – 1935) και ο Wassily Kandinsky (1866 – 1944) αγκάλιασαν
τις γεωμετρικές μορφές και τη συμμετρία (ή την έλλειψη αυτής).

Οι συνθέσεις του Mondrian για παράδειγμα (βλ. Εικ. 1.5α'), με επίκεντρο τα ορ-
θογώνια και τις ακριβείς διατάξεις τους, προκάλεσαν το ενδιαφέρον της μαθηματικής
έρευνας σε έννοιες όπως τον τετραγωνισμό του τετραγώνου (*squaring the square*) -
ένα παζλ που εξετάζει την ανάλυση ενός τετραγώνου με πλευρά N σε μικρότερα τε-
τράγωνα με πλευρά φυσικό αριθμό. Αναφέρουμε ενδεικτικά και όχι αποκλειστικά
το *Mrs Perkins's quilt* [36]. Αυτή η ενσωμάτωση της γεωμετρίας στην τέχνη επιτρέπει
μια βαθιά εξερεύνηση της εσωτερικής αρμονίας και της συναισθηματικής απήχησης
με μέσο την οπτική αφαίρεση.

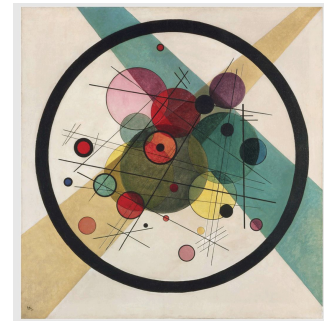
Ο Malevich δημιούργησε το κίνημα του Σουπρεματισμού, το οποίο περιλάμβανε
αφηρημένες γεωμετρικές μορφές, βλ. το γνωστό έργο του Εικ. 1.5β'. Ο Kandin-
sky (βλ. Εικ. 1.5γ'), πρωτοπόρος στο χώρο της αφηρημένης τέχνης, αναγνώρισε ότι



(α) *Composition II in Red, Blue, and Yellow*, 1930 [103]



(β) *Black Suprematic Square*, 1915 [93]



(γ) *Circles in a Circle*, 1923 [78]

Εικόνα 1.5: Έργα από το ρεύμα της γεωμετρικής αφαίρεσης, αρχές 20ου αι.

οι γεωμετρικές μορφές διαθέτουν μια μοναδική ικανότητα να επικοινωνούν συναισθηματικές αντιδράσεις, υπερβαίνοντας τα όρια της συμβατικής αναπαράστασης [79, σελ. 65]. Πίστευε ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρικών στοιχείων και καλλιτεχνικής έκφρασης θα μπορούσε να ξεκλειδώσει νέες διαστάσεις δημιουργικότητας και να προκαλέσει βαθιά συναισθήματα, όπως η μουσικότητα που ενυπάρχει στις δικές του αφηρημένες συνθέσεις [79, σελ. 115].

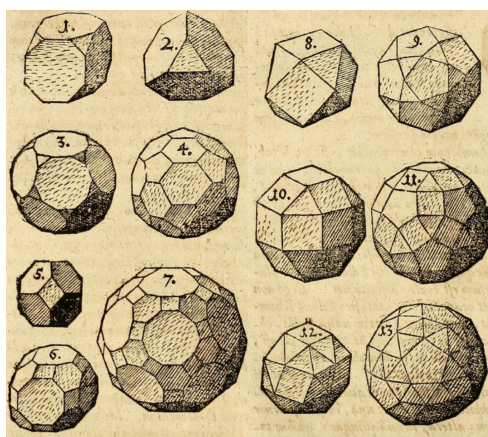
Συνολικά, η γεωμετρική αφαίρεση αντιπροσώπευε μια αφαίρεση περίτεχνων λέξεων και εκφράσεων. Ο Kandinsky [79, σελ. 108], απηχώντας τις απόψεις του για τη σύγκλιση της τέχνης και των μαθηματικών, υποστήριξε ότι η πραγματική δύναμη της γεωμετρικής αφαίρεσης έγκειται στην ικανότητά της να αποστάζει πολύπλοκες ιδέες σε κομψές οπτικές διατάξεις, προωθώντας την απλότητα, τη συμμετρία και την αίσθηση δυναμικής ισορροπίας στη φυσική αναπαράσταση.

Αυτή η δυναμική αλληλεπίδραση μεταξύ μαθηματικών και τέχνης έχει σφυρηλατήσει ένα πλούσιο μωσαϊκό δημιουργικότητας, αποκαλύπτοντας τους ποικίλους τρόπους με τους οποίους οι μαθηματικές αρχές μπορούν να εμπνεύσουν και να διαμορφώσουν την καλλιτεχνική έκφραση. Αυτή η συγχώνευση των κλάδων έχει ως αποτέλεσμα μια αρμονική συμφωνία όπου οι μαθηματικές έννοιες και τα καλλιτεχνικά οράματα διαπλέκονται, καλλιεργώντας έναν βαθύ διάλογο που εμπλουτίζει και τα δύο πεδία και προσφέρει νέες προοπτικές ευφάνταστης εξερεύνησης.

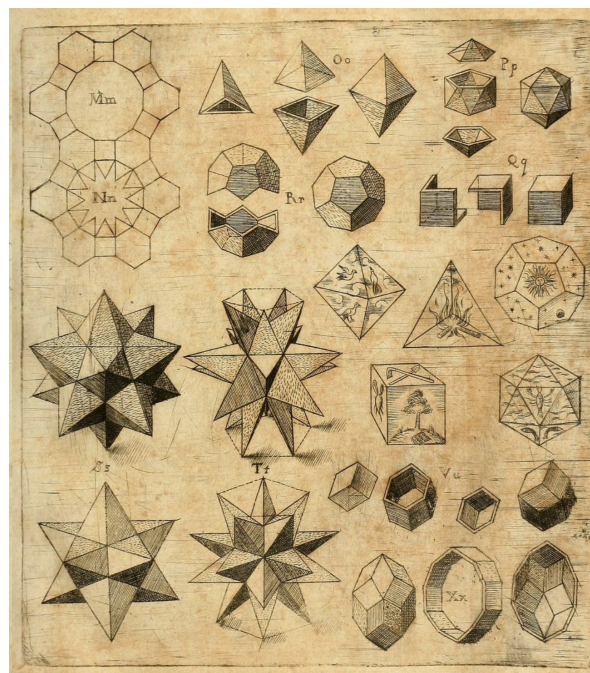
1.1.3 Πολύεδρα και Τοπολογία στην Τέχνη

Τα πολύεδρα, τρισδιάστατα σχήματα που χαρακτηρίζονται από επίπεδες επιφάνειες που τέμνονται σε ευθείες ακμές, τα οποία γοήτευσαν τη φαντασία τόσο των αρχαίων γεωμετρών όσο και των καλλιτεχνών της Αναγέννησης αναδύονται ως μια ακόμη πτυχή αυτής της περίπλοκης σχέσης, γεφυρώνοντας τον κόσμο της τέχνης και της γεωμετρίας. Τα Αρχιμήδεια στερεά, μια συλλογή κυρτών πολυέδρων με κανονικές πολυγωνικές έδρες, αποτελούν ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα. Ενώ

ιστορικά έχουν τις ρίζες τους σε έργο του Αρχιμήδη του Συρακούσιου (π. 287 – π. 212 π.Χ.) -που δεν σώζεται- και του Πάππου του Αλεξανδρινού (4ος αι. μ.Χ.) -όπου τα αναφέρει-, η πλήρης αναπαράστασή τους προέκυψε πολύ αργότερα μέσω των σχολαστικών προσπαθειών του Johannes Kepler (1571 – 1630) [128][94, σελ. 56,58] (βλ. Εικ. 1.6α').



(α') Τα 13 Αρχιμήδεια στερεά



(β') Τα 5 Πλατωνικά στερεά
και άλλα σχέδια

Εικόνα 1.6: Σχέδια του Kepler στο [84, Βιβ. II, σελ. 62,64]

Ο όρος Πλατωνικά στερεά αποδίδεται στα πολύεδρα με κανονικές και ίδιες έδρες, ονομασία που προέρχεται από τον Πλάτωνα (427-347 π.Χ.), ο οποίος τα απαθανάτισε στο έργο του «Τίμαιος». Στο πλαίσιο αυτού του διαλόγου, ο Πλάτωνας εξέθεσε την αντίληψή του για τα θεμελιώδη «στοιχεία» που συνθέτουν το σύμπαν: γη, αέρας, φωτιά και νερό. Ο «Τίμαιος» του Πλάτωνα πρότεινε ότι οι γεωμετρικές δομές που διέπουν τα μικρότερα σωματίδια αυτών των στοιχείων αντιστοιχούν στον κύβο, το οκτάεδρο, το τετράεδρο και το εικοσάεδρο, αντίστοιχα. Το πέμπτο κανονικό στερεό, το δωδεκάεδρο, το απέδωσε στον αιθέρα (ή αλλιώς στον κόσμο, λατ. quinta essentia: «πέμπτη ουσία») [129, σελ. 5]. Αυτή η αντιστοίχιση των κανονικών στερεών με τα θεμελιώδη στοιχεία κατάφερε να διεγείρει τη φαντασία καλλιτεχνών, από την εποχή του Πλάτωνα μέχρι τη σύγχρονη εποχή.

Η βαθιά περιέργεια του Kepler για τις έννοιες αυτές φαίνεται έντονα στην έκδοση [84] του 1619, η οποία διαθέτει μια διάσημη εικονογράφηση. Στην Εικ. 1.6β', το ανώτερο τμήμα (Mm) απεικονίζει την προσπάθειά του να γεμίσει το επίπεδο χρησιμοποιώντας ποικίλα πολύγωνα, συμπεριλαμβανομένου ενός δωδεκαγώνου που περικλείεται από εξάγωνα και τετράγωνα. Αμέσως μετά, παρουσιάζεται η αναπαράσταση

ενός τετραέδρου, το οποίο διαδέχονται τα διπλά ημίσεα ενός οκταέδρου (Oo), αποδεικνύοντας ουσιαστικά τη σύνθεση του οκταέδρου ως δύο τετραγωνικές πυραμίδες ενωμένες βάση με βάση. Ο Kepler παρουσιάζει επιδέξια το δωδεκάεδρο (Rr), χωρισμένο σε δύο τμήματα κατά μήκος δέκα ακμών. Ο κύβος (Qq) διαιρείται από ένα λοξό εζάγωνο, και με έξυπνο τρόπο, αυτά τα δύο ημίσεα ανασυνθέτουν αρμονικά τον κύβο. Ο Kepler απεικονίζει επίσης οπτικά το εικοσάεδρο (Pp), με την αφαίρεση του άνω και του κάτω καπακιού του, αποκαλύπτοντας ένα πενταγωνικό αντιπρίσμα που φωλιάζει ανάμεσα σε δύο πενταγωνικές πυραμίδες. Εναλλακτικά, ο συνδυασμός του αντιπρίσματος με τις πυραμίδες αναδημιουργεί πλήρως το εικοσάεδρο.

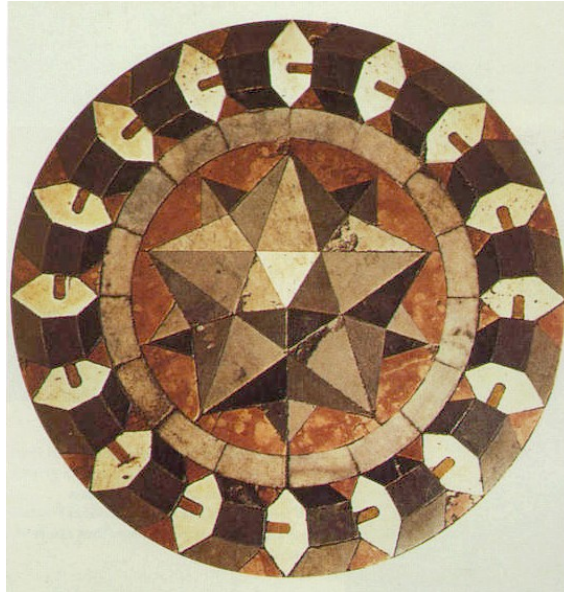
Μια από τις αξιοσημείωτες γνώσεις που άντλησε ο Kepler από την αρχαία ελληνική γραμματεία ήταν η σύνδεση των τεσσάρων πλατωνικών στερεών με τα κλασικά στοιχεία που αναφέραμε παραπάνω. Όπως απεικονίζεται στην Εικ. 1.66':

- το τετράεδρο, που συμβολίζει τη φωτιά, κοσμείται από μια απεικόνιση φλογών,
- το οκτάεδρο, που αντιπροσωπεύει τον αέρα, διαθέτει την παρουσία πτηνών,
- το εικοσάεδρο φέρει έναν αστακό και ένα ψάρι, που συμβολίζουν το νερό και
- ο κύβος, που συνδέεται με τη γη, παρουσιάζει ένα φτυάρι, μια τσάπα, ένα καρότο και ένα δέντρο

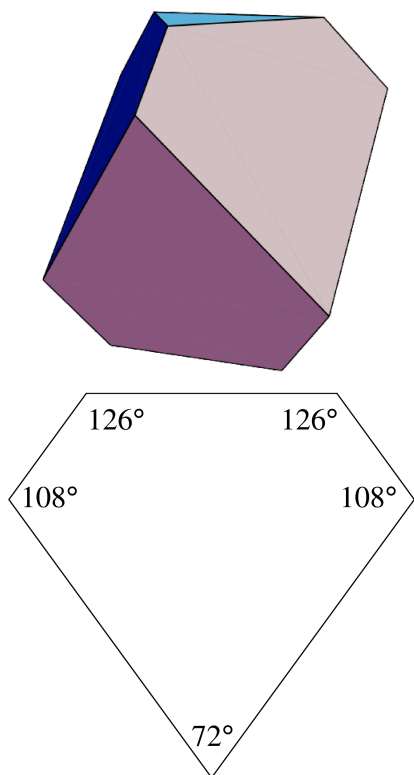
Είναι ενδιαφέρον ότι το δωδεκάεδρο, χωρίς άμεση συσχέτιση με τα στοιχεία, σχεδιάστηκε για να συμβολίζει ολόκληρο το σύμπαν. Αυτή η ενδιαφέρουσα ιδέα βρίσκει ένα παράλληλο στην ιαπωνική παράδοση, εμφανές σε ένα μοντέλο που κοσμείται με τα δώδεκα ιαπωνικά ζώδια, καθένα από τα οποία κοσμεί μια ξεχωριστή όψη [39, σελ. 42].

Η απεικόνιση στην Εικ. 1.66' παρουσιάζει επιπλέον δύο αστεροειδή δωδεκάεδρα, τα οποία προκύπτουν από την επέκταση των όψεων του κυρτού δωδεκάεδρου. Παρόλο που οι αναπαραστάσεις του Kepler για το μεγάλο αστεροειδές δωδεκάεδρο (Tt) μπορεί να παρουσιάζουν μικρές αποκλίσεις, μεταφέρουν αποτελεσματικά τη θεμελιώδη έννοια. Επιπλέον, το απλούστερο μικρό αστεροειδές δωδεκάεδρο (Ss) παρουσιάζεται από δύο διαφορετικές οπτικές γωνίες. Αξίζει να σημειωθεί το ψηφιδωτό δάπεδο στην Ιταλία (βλ. Εικ. 1.7) που χρονολογείται από το 1420, το οποίο απεικονίζει αυτό το πολυέδρο, ενδεχομένως προγενέστερο της ανακάλυψης του Kepler κατά δύο αιώνες και αποδίδεται στον Paolo Uccello (1397-1475) [68].

Το θεμελιώδες έργο του Dürer για τη γεωμετρία, που δημοσιεύθηκε το 1525, με τον εύστοχο τίτλο «Περί διδασκαλίας της μέτρησης με κανόνα και διαβήτη» [43], αποτελεί απόδειξη του πολύπλευρου ταλέντου του. Το τέταρτο τμήμα αυτού του έργου επικεντρώνεται στα πολυέδρα, περιλαμβάνοντας τα γνωστά Πλατωνικά στερεά, τα Αρχιμήδεια στερεά και μια σειρά πολυέδρων που αποδίδονται μοναδικά στον ίδιο τον Dürer. Η συμβολή αυτή αποτελεί ακρογωνιαίο λίθο στη μελέτη των πολυέδρων [110,



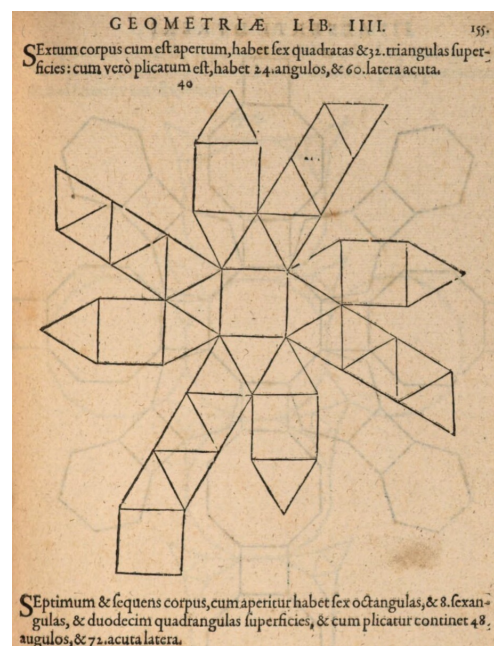
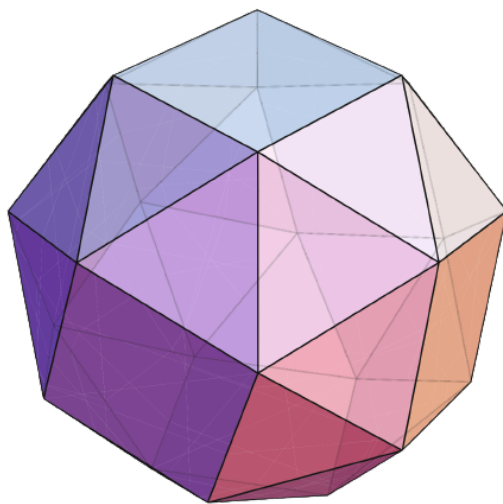
Εικόνα 1.7: Μαρμάρινο ψηφιδωτό του μικρού αστεροειδούς δωδεκαέδρου Βασιλική του Αγίου Μάρκου, Βενετία



Εικόνα 1.8: Κόβλουρο τριγωνικό τραπεζόεδρο [149] στο χαρακτηριστικό Melencolia I, 1514 [42]

σελ. 77]. Είναι αξιοσημείωτο ότι η γοητεία των πολυέδρων στον Dürer εμφανίστηκε μια δεκαετία νωρίτερα, κυρίως μέσω της χρήσης ενός πρωτότυπου πολυέδρου στο

περίφημο χαρακτηριστικό του Melencolia, βλ. Εικ. 1.8. Πρόκειται για το κόλουμερο τριγωνικό τραπεζόεδρο ή αλλιώς επωνομαζόμενο «στερεό του Dürer» και αποτελείται από 6 πεντάγωνα (όπως αυτό που φαίνεται στην Εικ. 1.8) και 2 τρίγωνα. Στο βιβλίο του παρουσίασε κάθε πολυέδρο σχεδιάζοντας ένα ανάπτυγμα για αυτό: ένα ξεδίπλωμα της επιφάνειας σε μια επίπεδη διάταξη. Το ανάπτυγμα καθιστά τη γεωμετρία των όψεων και τον αριθμό κάθε τύπου όψης άμεσα σαφή στο μάτι με τρόπο που δεν το κάνει ένα τρισδιάστατο σχέδιο, το οποίο αναγκαστικά κρύβει το μισό πολυέδρο. Παράδειγμα αναπτύγματος από το βιβλίο του αποτελεί το σχέδιο στην Εικ. 1.9. Είναι το ανάπτυγμα ενός πεπλατυσμένου κύβου το οποίο αποτελείται από έξι τετράγωνα και 32 ισόπλευρα τρίγωνα.



Εικόνα 1.9: Πεπλατυσμένος κύβος [110, σελ. 78] και το ανάπτυγμά του [43, σελ. 155]

Για να καταφέρουμε να εκτιμήσουμε ένα ενδιαφέρον ανοικτό πρόβλημα που συναντάται στο βιβλίο του Dürer θα χρειαστούμε δύο ορισμούς: ανάπτυγμα πολυέδρου και κυρτό πολυέδρο. Αν θέλαμε να ορίσουμε λίγο καλύτερα τι συνιστά το ανάπτυγμα ενός πολυέδρου θα λέγαμε όπως στο *Dürer's Problem* [110, σελ. 78] ότι είναι ένα ξεδίπλωμα της επιφάνειας του πολυέδρου που παράγεται με την κοπή του πολυέδρου κατά μήκος ορισμένων ακμών του και την ισοπέδωσή του σε ένα ενιαίο, μη επικαλυπτόμενο κομμάτι στο επίπεδο. Οι βασικές πτυχές αυτού του ορισμού είναι οι εξής:

- το ανάπτυγμα είναι επίπεδο,
- είναι ένα ενιαίο κομμάτι,

- είναι το αποτέλεσμα της κοπής των ακμών του πολυέδρου: είναι ένα ξεδίπλωμα των ακμών,
- είναι μη αυτο-επικαλυπτόμενο: τα μη κομμένα σημεία δεν ξεδιπλώνονται το ένα πάνω στο άλλο

Αυτές οι τέσσερις ιδιότητες σημαίνουν ότι μπορεί κανείς να κόψει ένα ανάπτυγμα σχεδιασμένο στο χαρτί με ψαλίδι, να το τσακίσει κατά μήκος των ακμών και να φτιάξει το τρισδιάστατο πολύεδρο. Είναι λογικό να επιτρέπουμε την επαφή των ορίων του σχήματος, η οποία δεν εμποδίζει την αποκοπή του αναπτύγματος με ψαλίδι. Αυτό που απαγορεύεται είναι η ουσιαστικότερη επικάλυψη, όταν σημεία που δεν βρίσκονται στο σύνορο του σχήματος επικαλύπτονται στο επίπεδο.

Ένα σχήμα ονομάζεται κυρτό όταν δεν έχει ένα ευθύγραμμο τμήμα με τα δύο ακραία σημεία του εντός του σχήματος και κάποιο σημείο εκτός αυτού. Ένα κυρτό πολύγωνο για παράδειγμα είναι ένα κλειστό σχήμα στις δύο διαστάσεις αποτελούμενο από ευθείες ακμές, με την ιδιότητα ότι αν περπατούσαμε πάνω στο σύνορο, αντίθετα προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού, θα κάναμε μόνο αριστερές στροφές σε κάθε κορυφή. Μια δεξιά στροφή θα αποτελούσε ένα «βαθούλωμα» που θα επέτρεπε την κατασκευή του απαγορευμένου ευθυγράμμου τμήματος. Ένας άλλος τρόπος να το δούμε αυτό είναι ότι η εσωτερική γωνία σε κάθε κορυφή ενός κυρτού πολυγώνου είναι μικρότερη από π . Εάν η γωνία υπερβαίνει το π λέγεται κοίλη η κορυφή. Ακριβώς όπως ένα κυρτό πολύγωνο δεν έχει κοίλες κορυφές, ένα κυρτό πολύεδρο δεν έχει κοίλες ακμές: η εσωτερική διέδρη γωνία μεταξύ των δύο επιφανειών που συναντώνται σε κάθε ακμή ενός κυρτού πολυέδρου είναι μικρότερη από π . Για τον κύβο, αυτή η διέδρη γωνία είναι $\pi/2$ σε κάθε ακμή. Όλα τα Πλατωνικά και Αρχιμήδεια στερεά για παράδειγμα είναι κυρτά.

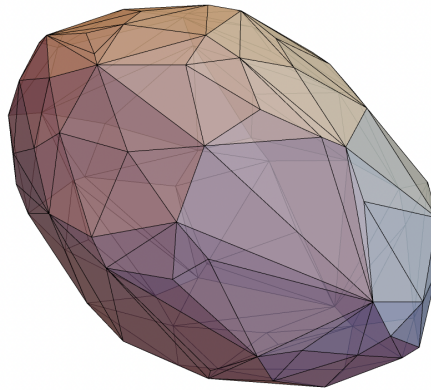
Τώρα μπορούμε να διατυπώσουμε το άλυτο ερώτημα, επονομαζόμενο [110, σελ. 78] ως «πρόβλημα του Dürer», παρόλο που δεν υπάρχει καμία ένδειξη ότι το αναγνώριζε ως ισχυρισμό που χρειαζόταν απόδειξη:

Πρόβλημα του Dürer / Εικασία του Shephard:

Κάθε κυρτό πολύεδρο έχει ένα ανάπτυγμα;

Αυτό το πρόβλημα αποτελεί τρανό παράδειγμα της επιρροής και της στενής σύνδεσης της τέχνης με τα μαθηματικά, αφού μέσα από μια δημιουργική διαδικασία καταφέρνει να γεννήσει ενδιαφέροντα ερωτήματα. Παρά τα σχεδόν 500 χρόνια που πολλοί άνθρωποι σχεδιάζουν αναπτύγματα για κυρτά πολύεδρα, κανείς δεν αντιμετώπισε παράδειγμα που δεν έχει ανάπτυγμα. Από την άλλη πλευρά, δεν υπάρχει καμία απόδειξη ότι κάθε κυρτό πολύεδρο έχει ανάπτυγμα, παρά τις χρόνιες προσπάθειες από τότε που το πρόβλημα διατυπώθηκε για πρώτη φορά ως αιχμηρό μαθηματικό ερώτημα στο *Convex polytopes with convex nets* [130, σελ. 390]. Αξιομνημόνευτα αποτελέσματα περί του προβλήματος είναι τα *Affine unfoldings of*

convex polyhedra[50] και *Every Combinatorial Polyhedron Can Unfold with Overlap*[111]. Στο [50] αποδεικνύεται ότι κάθε κυρτό πολύεδρο έχει ένα ανάπτυγμα μετά από έναν αφινικό μετασχηματισμό, συγκεκριμένα υποστηρίζεται ότι δεν υπάρχει κανένα συνδυαστικό εμπόδιο σε μια θετική επίλυση του προβλήματος του Dürer, και στο [111] με εφαρμογή του Θεωρήματος που αποδεικνύει (κάθε συνδυαστικό πολύεδρο έχει μια υλοποίηση και ένα δέντρο αποκοπής που ξεδιπλώνει το πολύεδρο με επικάλυψη, σε συνδυασμό με το προηγούμενο αποτέλεσμα αναφέρεται ότι η επίλυση του προβλήματος του Dürer πρέπει να εστιάζει στη γεωμετρία και όχι στη συνδυαστική δομή των κυρτών πολυέδρων.

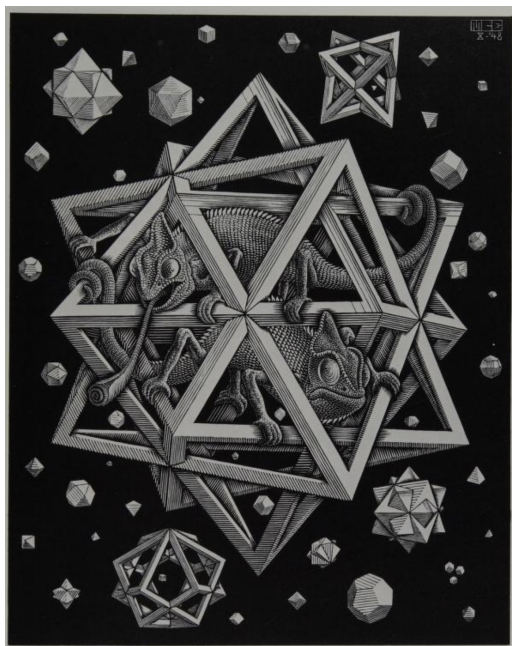


Σχήμα 1.1: Κυρτό πολύεδρο του οποίου οι 100 κορυφές είναι τυχαία κατανομημένες στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς. Ο κώδικας Mathematica στο Παράρτημα Α'.

Μπορεί να φαίνεται σαν προφανές ότι ένα κυρτό πολύεδρο έχει ανάπτυγμα, επειδή όταν η επιφάνεια κόβεται και ισοπεδώνεται, «απλώνεται» και έτσι θα πρέπει να υπάρχει άφθονος χώρος στο επίπεδο. Αυτό ισχύει σίγουρα για τα Πλατωνικά και Αρχιμήδεια πολύεδρα που έχουν αποτελέσει το επίκεντρο της προσοχής για εκατοντάδες χρόνια. Αλλά αυτή η διαίσθηση αποδυναμώνεται όταν εξετάζουμε πιο περίπλοκα και ακανόνιστα κυρτά πολύεδρα, όπως για παράδειγμα ένα κυρτό πολύεδρο του οποίου οι 100 κορυφές είναι τυχαία κατανομημένες στην επιφάνεια ενός ελλειψοειδούς (βλ. Σχήμα 1.1). Θα μπορούσαμε να ισχυριστούμε ότι σίγουρα κάθε τετράεδρο -δηλαδή κάθε κυρτό πολύεδρο με τέσσερις κορυφές- έχει ένα ανάπτυγμα. Αυτό είναι αλήθεια (έχει αποδειχθεί [110, σελ. 79]), αλλά ακόμη και με αυτή τη γνώση δεν μπορούμε να πούμε κάτι πιο γενικό για όλα τα κυρτά πολύεδρα.

Συνεχίζοντας το ταξίδι στον κόσμο των αναπαραστάσεων των πολυέδρων, ειδικότερα ο Escher παρουσίασε δημιουργικά τα Πλατωνικά στερεά με διάφορους τρόπους. Η Εικ. 1.10α', που εύστοχα αποκαλείται και «Πλατωνικό παζλ», ενσωματώνει ευφυώς μεταξύ άλλων και τα πέντε πλατωνικά στερεά [67]. Επιπλέον, η Εικ. 1.10β' απεικονίζει ένα εικοσαεδρικό κουτί καραμέλας που κοσμεύεται με την καλλιτεχνική διάθεση του Escher με χρήση ενός μοτίβου που είχε σχεδιάσει το 1941 [92, σελ. 27,28, Εικ. 13]. Γράφει ο ίδιος σχετικά με τα Πλατωνικά στερεά [91, σελ. 51]:

Συμβολίζουν την επιθυμία του ανθρώπου για αρμονία και τάξη, αλλά



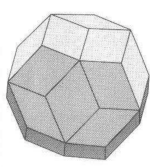
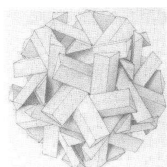
(α') *Stars*, 1948, ξυλογραφία [91, Εικ. 152]



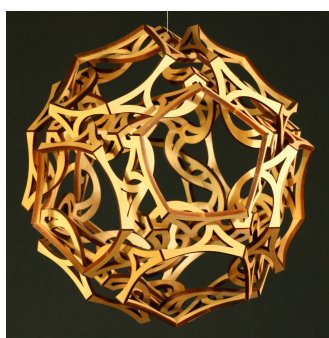
(β') *Εικοσάεδρο διακοσμημένο*, 1963
κουτί για γλυκά [124, σελ. 295]

Εικόνα 1.10: Έργα του Escher με πολύεδρα

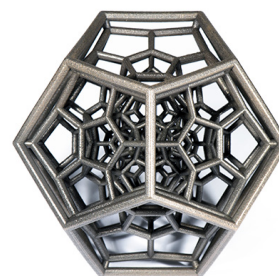
ταυτόχρονα με την τελειότητά τους του προκαλούν δέος στην συνειδητοποίηση της δικής του ανικανότητας. Τα κανονικά πολύεδρα δεν είναι εφευρέσεις του ανθρώπινου μυαλού, προϋπήρχαν της ανθρωπότητας.



(α') Παζλ ρομβικό τριακοντάεδρο [35, Εικ. 151]



(β') Γλυπτό δωδεκάεδρο από
βλεφα [69]



(γ') 4-διάστατο ανάλογο του
δωδεκαέδρου, που προβάλλεται
στον 3-χώρο [59]

Εικόνα 1.11: Έργα σύγχρονων εμπνευσμένα από πολύεδρα

Στη σύγχρονη εποχή, η γοητεία των πολυέδρων συνεχίζει να γεφυρώνει τα πεδία της τέχνης και των μαθηματικών. Τα πολύπλοκα σχέδια παζλ του Stewart Coffin (1930-) (βλ. Εικ. 1.11α'), κατασκευασμένα από σπάνια ξύλα, ενσωματώνουν τόσο την εφευρετική επίλυση προβλημάτων όσο και την αισθητική ομορφιά, αντικατοπτρίζοντας τη γοητεία των ίδιων των πολυεδρικών μορφών. Παρομοίως, ο διπλός ρόλος του George Hart (1955-) (βλ. Εικ. 1.11β') ως μαθηματικού και καλλιτέχνη αναδεικνύει την ικανότητά του να συμβάλλει στη θεωρία των πολυέδρων, δημιουργώντας

γώντας παράλληλα τέχνη εμπνευσμένη από αυτές τις δομές. Η συνέργεια των συναρπαστικών παζλ και των μαθηματικών εννοιών προκαλεί θαυμασμό, απηχώντας την επίδραση της κληρονομιάς του Escher. Η Bathsheba Grossman (1966-) (βλ. Εικ. 1.11γ), μια άλλη καλλιτέχνης που έλκεται από τα πολύεδρα, τη συμμετρία και την τοπολογία, παρουσιάζει τη μοναδική καλλιτεχνική της οπτική, αναδεικνύοντας τη διαρκή αλληλεπίδραση μεταξύ γεωμετρίας και καλλιτεχνικής έκφρασης.



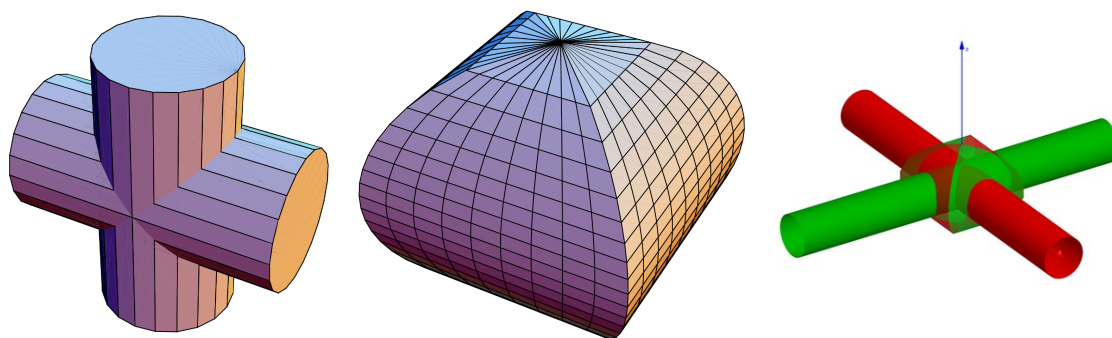
Εικόνα 1.12: *Rulpidon* [88]

Το Rulpidon (βλ. Εικ. 1.12), ένα μοναδικό έργο τέχνης που δημιούργησε ο καλλιτέχνης Ulysse Lacoste (1981-), είναι κάτι πολύ περισσότερο από ένα αντικείμενο που γοητεύει οπτικά. Κάτω από το αινιγματικό του εξωτερικό, αυτό το αντικείμενο συνδυάζει την αρχιτεκτονική, τα μαθηματικά, ακόμη και στοιχεία ζαχαροπλαστικής και υψηλής ραπτικής [20], δημιουργώντας μια πολυδιάστατη οπτική και πνευματική εμπειρία.

Στο επίκεντρο αυτού του καλλιτεχνικού έργου βρίσκονται οι γεωμετρικές έννοιες των κυλίνδρων και των διατομών. Μέσα από μια μοναδική προσέγγιση, ο καλλιτέχνης διερευνά πώς η γλυπτική και η αρχιτεκτονική μοιράζονται την ιστορία των κυλίνδρων, τονίζοντας ιδιαίτερα τους κάθετα τεμνόμενους κυλίνδρους. Αυτή η διαμόρφωση μεταφράζεται οπτικά σε ένα τετράγωνο σε κάτοψη, ενώ σε πλάγια όψη δημιουργείται μια ψευδαίσθηση στρογγυλότητας. Ωστόσο, από διάφορες οπτικές γωνίες, αναδύονται ωσειδή μοτίβα, δημιουργώντας μια μοναδική οπτική εμπειρία.

Από γεωμετρική άποψη, το έργο βασίζεται στο στερεό Steinmetz, το στερεό που προκύπτει από την τομή δύο κυλίνδρων ίσης ακτίνας (r_1) σε ορθές γωνίες. Εμβαθύνοντας σε αυτές τις έννοιες, ο καλλιτέχνης μετατρέπει το στερεό Steinmetz σε ένα γλυπτό έργο, παίζοντας με τις διαστάσεις, τις τομές και τα σχήματα. Για να αποκτήσουμε το Rulpidon τρυπάμε το στερεό του Steinmetz με δύο ορθογώνιους κυλίνδρους ίσης ακτίνας (r_2) με $r_2 < r_1$ όπως στο Σχ. 1.2.

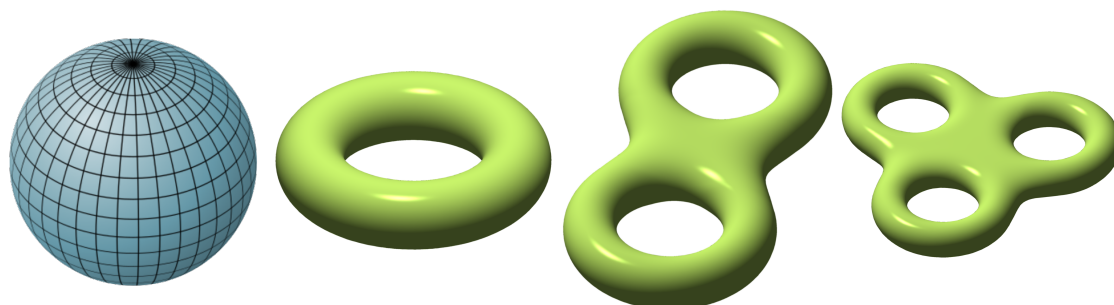
Ως επιφάνεια μπορούμε να το αποκτήσουμε κολλώντας τα κομμάτια που φαίνονται στην Εικ. 1.13 και προφανώς είναι μια προσανατολίσιμη 2-πολλαπλότητα. Στην



Σχήμα 1.2: *Rulpidon* από το στερεό Steinmetz [150] και [23]

τοπολογία όταν λέμε ότι μια προσανατολίσιμη επιφάνεια είναι γένους n εννοούμε ότι η επιφάνεια στην οποία αναφερόμαστε είναι το συνδεδεμένο άθροισμα n τόρων [99, σελ. 33]. Εξ ορισμού η σφαίρα S^2 είναι γένους 0 (βλ. Σχ. 1.3).

Από τοπολογική άποψη, οι οπές που δημιουργούνται στο *Rulpidon* από τους εσωτερικούς κυλίνδρους το καθιστούν πιο ενδιαφέρον από ένα απλό στερεό Steinmetz. Όπως ένας τόρος με τρεις οπές (βλ. Εικ. 1.3), το *Rulpidon* είναι μια επιφάνεια γένους τρία. Με μια πρώτη απρόσεχτη ματιά ίσως δεν βλέπουμε αμέσως ότι το *Rulpidon* είναι μια επιφάνεια γένους τρία. Αντίθετα, τείνουμε να δούμε τέσσερις οπές σε αυτήν. Αυτές οι φαινομενικές οπές που λανθασμένα βλέπουμε αντιστοιχούν στα σημεία όπου οι εσωτερικοί κύλινδροι συνδέονται με τους εξωτερικούς κυλίνδρους. Για να μετρήσουμε με ακρίβεια τον πραγματικό αριθμό των οπών, χρησιμοποιούμε μια νοητική διαδικασία θεωρώντας ολόκληρη την επιφάνεια σαν να ήταν εύπλαστος πηλός. Τώρα μεγαλώνοντας ένα από αυτά τα «σημεία εξόδου» το τεντώνουμε τοποθετώντας το γύρω από την υπόλοιπη επιφάνεια κι ύστερα το συνθλίβουμε και παίρνουμε τον τόρο με τρεις οπές.

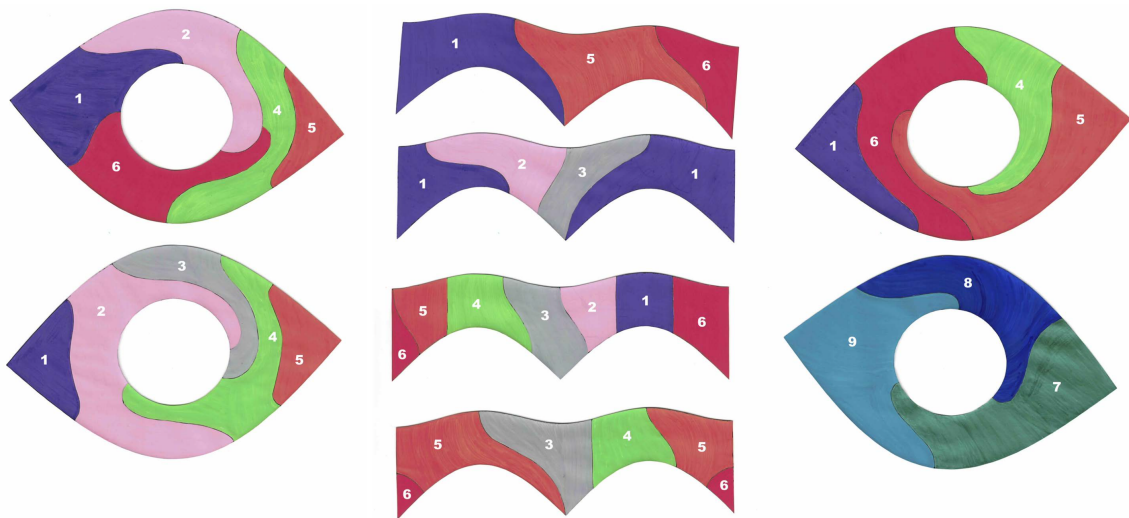


Σχήμα 1.3: 2-πολλαπλότητες γένους 0, 1, 2 και 3 [3]

Η μαθηματικός Sylvie Benzoni-Gavage, ως διευθύντρια του Ινστιτούτου Henri Poincaré (IHP), ασχολήθηκε με τον χρωματισμό του *Rulpidon* [23] για να χρησιμοποιηθεί ως το σήμα του Ινστιτούτου. Για να το κάνει ήθελε να χρησιμοποιήσει το μικρότερο δυνατό πλήθος χρωμάτων έτσι ώστε όποιες και να ήταν οι περιοχές στις οποίες θα διαμέριζε την επιφάνεια καμία από δύο γειτονικές περιοχές δεν θα είχε το

ίδιο χρώμα και κάθε περιοχή θα γειτόνευε με όλες τις άλλες. Το πρόβλημα είναι γνωστό στην Θεωρία Γράφων και ως Χρωματισμός Χάρτη, στην συγκεκριμένη περίπτωση ήθελε να κατασκευάσει ένα πλήρη χάρτη. Σε οποιαδήποτε επιφάνεια, ένας χάρτης είναι μια συλλογή μη επικαλυπτόμενων περιοχών που καλύπτουν ολόκληρη την επιφάνεια. Δύο περιοχές ονομάζονται γειτονικές μεταξύ τους όταν μοιράζονται μια οριακή γραμμή και όχι απλώς ένα σημείο. Ένας χάρτης είναι πλήρης εάν όλες οι περιοχές του είναι γειτονικές με όλες τις άλλες. Ο χρωματισμός του χάρτη συνίσταται στο να δοθεί ένα χρώμα σε κάθε περιοχή, έτσι ώστε δύο γειτονικές περιοχές να έχουν διαφορετικό χρώμα [23, σελ. 554].

Ίσως η πιο γνωστή περίπτωση του προβλήματος Χρωματισμού Χάρτη είναι στην επιφάνεια της σφαίρας, για την οποία έχουμε το Θεώρημα τεσσάρων χρωμάτων που αποδείχτηκε το 1976 από τους Kenneth Appel (1932 - 2013) και Wolfgang Haken (1928 - 2022): σε μια επιφάνεια γένους 0 κάθε χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ 4 χρώματα. Η αρχική εικασία έγινε από τον Francis Guthrie (1831 - 1899) το 1852 ως ερώτηση στον καθηγητή του Auguste De Morgan (1806 - 1871). Αργότερα το 1890 ο Percy John Heawood (1861 - 1955) έκανε την εικασία για επιφάνειες μεγαλύτερου γένους. Η εικασία έχει ως εξής: έστω $f(g) = \left\lfloor \frac{7 + \sqrt{1 + 48g}}{2} \right\rfloor$, σε μια επιφάνεια γένους $g \geq 1$ ο ελάχιστος αριθμός χρωμάτων που χρειάζεται για να χρωματιστεί κάθε χάρτης είναι $f(g)$. Ο Lothar Heffter (1862 - 1962) αποδεικνύει το 1891 ότι σε οποιαδήποτε επιφάνεια γένους $g \geq 1$ κάθε χάρτης μπορεί να χρωματιστεί με το πολύ $f(g)$ χρώματα και για $1 \leq g \leq 7$ υπάρχει πλήρης χάρτης $f(g)$ χρωμάτων. Η απόδειξη της εικασίας ολοκληρώθηκε από τους Gerhard Ringel (1919 - 2008) και John William Theodore Youngs (1910 - 1970) το 1968 όπου απέδειξαν ότι σε οποιαδήποτε επιφάνεια γένους $g \geq 1$ υπάρχουν χάρτες που χρειάζονται $f(g)$ χρώματα [22, σελ. 13].



Εικόνα 1.13: Πλήρης χάρτης 9 χρωμάτων του Carlo Séquin στο Rulpidon [23]

Οπότε για το Rulpidon, και για κάθε επιφάνεια γένους 3, χρειαζόμαστε με βάση

τον τύπο $f(3) = 9$ χρώματα. Όπως φαίνεται και στο *Un genre d'arc-en-ciel, le Rulpidon enneachrome*[22] η Benzoni-Gavage διαμέρισε και χρωμάτισε πρώτα τον 3-τόρο ακολουθώντας τα διαγράμματα του Heffter και ακολούθως τον μετέτρεψε με την αντίστροφη διαδικασία που περιγράψαμε προηγουμένως στο Rulpidon. Το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό και μπορεί να βρεθεί ψηφιοποιημένο στο [21].

Τελικά, το Rulpidon ενσαρκώνει την αρμονική σύγκλιση της τέχνης και των μαθηματικών. Αποκαλύπτει πώς φαινομενικά σύνθετες γεωμετρικές και τοπολογικές έννοιες και αφηρημένες ιδέες μπορούν να ενσωματωθούν σε μια καλλιτεχνική δημιουργία, προσφέροντας στους φιλότεχνους μια ξεχωριστή οπτική και πνευματική εμπειρία. Χάρη στην εφευρετικότητα του καλλιτέχνη και της μαθηματικού, το Rulpidon γίνεται κάτι περισσότερο από ένα απλό γλυπτό ή ένα χρωματιστό σήμα, αναδεικνύει την αλληλεπίδραση μεταξύ των δύο πεδίων και πώς μπορούν να συνδυαστούν για να δημιουργηθεί ένα έργο τέχνης που προσκαλεί σε βαθύτερη σκέψη και αναζήτηση νοήματος.

1.2 Γενεσιουργός Τέχνη και πλακοστρώσεις

1.2.1 Σύντομη ιστορική αναδρομή

Στα χρονικά της ιστορίας της τέχνης, η έννοια της γενεσιουργού τέχνης έχει ξεπεράσει τις εποχές, αντηχώντας μέσα στους αιώνες ως μια εγγενής πτυχή της ανθρώπινης δημιουργικής εφευρετικότητας.

Η γενεσιουργός τέχνη αναφέρεται σε κάθε καλλιτεχνική πρακτική κατά την οποία ο καλλιτέχνης παραχωρεί τον έλεγχο σε ένα σύστημα με λειτουργική αυτονομία που συμβάλλει ή καταλήγει σε ένα ολοκληρωμένο έργο τέχνης. Τα συστήματα μπορεί να περιλαμβάνουν οδηγίες φυσικής γλώσσας, βιολογικές ή χημικές διεργασίες, προγράμματα υπολογιστών, μηχανές, αυτοοργανώσιμα υλικά, μαθηματικές πράξεις και άλλες διαδικαστικές εφευρέσεις [47, σελ. 154][113].

Ένα ταξίδι στο χρόνο συνυφαίνει έναν τάπητα με συμμετρία, μοτίβα και γεωμετρικά σχέδια, που κοσμούν αντικείμενα πέρα από τις απλές ανάγκες της επιβίωσης. Μεταξύ διαφορετικών πολιτισμών, ακόμη και εκείνων που συχνά αναφέρονται ως «πρωτόγονοι», περίπλοκα γεωμετρικά μοτίβα κοσμούν υφάσματα και συμμετρικές διατάξεις εξελίσσονται γύρω από κομβικά σημεία, εκδηλώνοντας μια κοινή παρόρμηση για οπτική αρμονία. Ειδικότερα, η καλλιτεχνική ενσωμάτωση των πλακοστρώσεων αναδύεται ως μια σαγηνευτική εφαρμογή αφηρημένων συστημάτων που κοσμούν σχολαστικά συγκεκριμένες επιφάνειες και εντάσσεται στα πλαίσια της υψηλά διατεταγμένης γενεσιουργού τέχνης [47, σελ. 158-159].



Εικόνα 1.14: *Blombos* [47, σελ. 159, Christopher Henshilwood]

Η ιστορική συνέχεια της γενεσιουργού τέχνης συναντά μια αξιοσημείωτη καμπή στις αρχαιολογικές αποκαλύψεις του σπηλαίου Blombos, στη Νότια Αφρική. Από το 1999 έως το 2000, μια πρωτοποριακή αποστολή, με επικεφαλής τον αρχαιολόγο Christopher Henshilwood, αποκάλυψε αρχαία αντικείμενα που αποπνέουν μια γεωμετρική γοητεία [17]. Σκαλισμένα σε θραύσματα κόκκινης ώχρας, αυτά τα χαρακτηριστικά (βλ. Εικ. 1.14), ηλικίας άνω των 70.000 ετών, έχουν μια αδιαμφισβήτητη ομοιότητα με ένα σχέδιο πλέγματος που αποτελείται από τριγωνικά πλακίδια - μια εντυπωσιακή απόδειξη της διαρκούς αισθητικής γλώσσας που έχει τις ρίζες της στην αφαίρεση.

Αυτή η πρώιμη εκδήλωση συστηματικής γεωμετρικής σκέψης, ηθελημένα χαρακτηρισμένη σε επιφάνειες, προσφέρει μια ενδιαφέρουσα ματιά στη γένεση της γενεσιουργού τέχνης. Αξίζει να σημειωθεί ότι η αλληλεπίδραση περίπλοκων σχεδίων και αλγοριθμικής εκτέλεσης εκτείνεται πέρα από την αρχαιότητα, καθώς σύγχρονα παραδείγματα από τη χρυσή εποχή του Ισλάμ και καλλιτεχνικές προσωπικότητες του 20ού αιώνα μαρτυρούν την αλληλένδετη κληρονομιά της μαθηματικής εξερεύνησης και της δημιουργικής έκφρασης. Έτσι, το ιστορικό ταξίδι της γενεσιουργού τέχνης μάς καλεί να διερευνήσουμε τον διαρκή διάλογο μεταξύ των μαθηματικών αρχών και της ανεξίτηλης αναζήτησης του καλλιτέχνη για οπτική ομορφιά.

Σε αυτή τη συναρπαστική οδύσσεια, ανακαλύπτουμε τις ρίζες της πλακοστρώσης - μιας αρχαίας πρακτικής παλαιάς όσο και η ανθρώπινη κατοικία. Με τη γέννηση της αρχιτεκτονικής, οι πέτρες στόλιζαν τα δάπεδα και τους τοίχους των κατοικιών, μια απόδειξη της έμφυτης ανθρώπινης επιθυμίας για δημιουργία. Καθώς τα χέρια κοσκινίζουν τις πέτρες, επιλέγοντας σχήματα και αποχρώσεις για να δημιουργήσουν περίπλοκα μοτίβα, γεννήθηκε η τέχνη της πλακοστρώσης, συνυφασμένη με τον ιστό του πολιτισμού. Μια συμφωνία μοτίβων αναδύθηκε, απηχώντας την παγκόσμια γλώσσα της τέχνης σε όλους τους πολιτισμούς και τις εποχές, αναδεικνύοντας τους ποικίλους τρόπους με τους οποίους η ανθρωπότητα προσπάθησε να αποτυπώσει την ομορφιά στον απτό κόσμο.

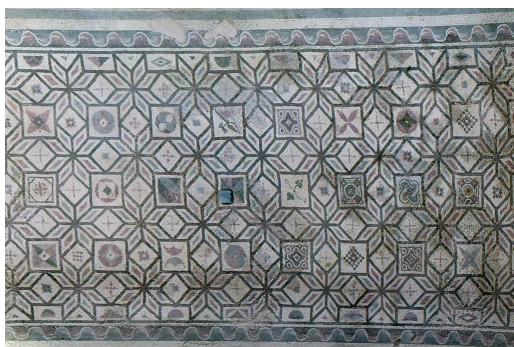
Σε κάθε ανθρώπινη κοινωνία συναντάμε τη χρήση πλακοστρώσεων ή μοτίβων με



(α') [5, σελ. 3]



(γ') [5, σελ. 6]



(β') [5, σελ. 4]



(δ) [13]

Εικόνα 1.15: Ρωμαϊκά ψηφιδωτά, Οικία Διονύσου, Κάτω Πάφος, Κύπρος, τέλη 2ου αι. μ.Χ.

τον έναν ή τον άλλο τρόπο αλλά κάθε πολιτισμός δίνει έμφαση σε κάποιο άλλο χαρακτηριστικό. Οι Ρωμαίοι και κάποιοι άλλοι Μεσογειακοί λαοί έκαναν ανθρωπόμορφα πορτρέτα και σκηνές φύσης σε μωσαϊκά, όπως στις Εικόνες 1.16 της Οικίας του Ευστολίου από τον Αρχαιολογικό Χώρο Κουρίου ή έκαναν ακόμη πιο περίτεχνα γεωμετρικά σχήματα όπως στις Εικόνες 1.15 της Οικίας του Διονύσου και στις Εικόνες 1.17 της Οικίας του Αιώνα από τον Αρχαιολογικό Χώρο Νέας Πάφου. Οι Μαυριτανοί και οι Άραβες μετέφρασαν την καλλιτεχνική τους παρόρμηση σε πολύπλοκα γεωμετρικά σχέδια με τη χρήση πλακιδίων. Από τη μεγαλοπρεπή Αλάμπρα στην Ισπανία (βλ. Εικ. Β'.2-Β'.5) μέχρι τις περίπλοκες προσόψεις των θρησκευτικών κτιρίων των μουσουλμάνων (βλ. Εικ. Β'.1), μια εκθαμβωτική σειρά γεωμετρικών σχεδίων κοσμούσε τοίχους και δάπεδα, αντικατοπτρίζοντας την μέθεξη των μαθηματικών και της τέχνης. Σε όλες τις περιπτώσεις οι πλακοστρώσεις εφαρμόστηκαν από την σύλληψη έως την εκτέλεσή τους από επιδέξιους και ευρηματικούς τεχνίτες γοητευμένοι από την εξειδικευμένη τεχνογνωσία και την αισθητική τους.

Τα μοτίβα, μια απόδειξη της ροής της ανθρωπότητας προς το ρυθμό και την αρμονία, απαντώνται σε όλους τους πολιτισμούς και τις εποχές. Υφάσματα, χαλιά, σκεύη και όπλα μαρτυρούν τη συμφωνία των μοτίβων που κοσμούν τη ζωή μας. Στην τέχνη της υφαντουργικής και της καλαθοπλεκτικής, τα νήματα πλέκονται μεταξύ τους για να δημιουργήσουν μαγευτικά διαχρονικά σχέδια. Αυτά τα σχέδια,



(α) [40]



(β) [142]



(γ) [41]

Εικόνα 1.16: Ρωμαϊκά ψηφιδωτά, Οικία Ευστολίου, Κούριον, Κύπρος, τέλη 4ου - αρχές 5ου αι. μ.Χ.

αναπαραστατικά, στυλιζαρισμένα ή αφηρημένα, απηχούν τις γεωμετρικές αρμονίες που ενώνουν πολιτισμούς που διαχωρίζονται από γεωγραφία και εποχή. Ακόμη πιο εκπληκτικό είναι ότι συχνά η δομική σύνθεση αυτών των μοτίβων παρουσιάζει συγγένεια, απόδειξη των παγκόσμιων (γεωμετρικών) αρχών που διέπουν την αλληλεπίδραση των σχημάτων και της συμμετρίας.

Καθώς εξελίσσεται η ιστορία, αναδύεται μια ποικίλη σειρά από σχήματα πλακιδίων, οβήνοντας τα όρια μεταξύ πλακοστρώσεων και μοτίβων. Μεσαιωνικά πεζοδρόμια, τοίχοι και οροφές παρουσίαζαν μια πλούσια παλέτα δυνατοτήτων, που απεικονίζονταν μέσα από περίπλοκα σχέδια (βλ. Εικ. 1.4). Τα τετράγωνα και ορθογώνια

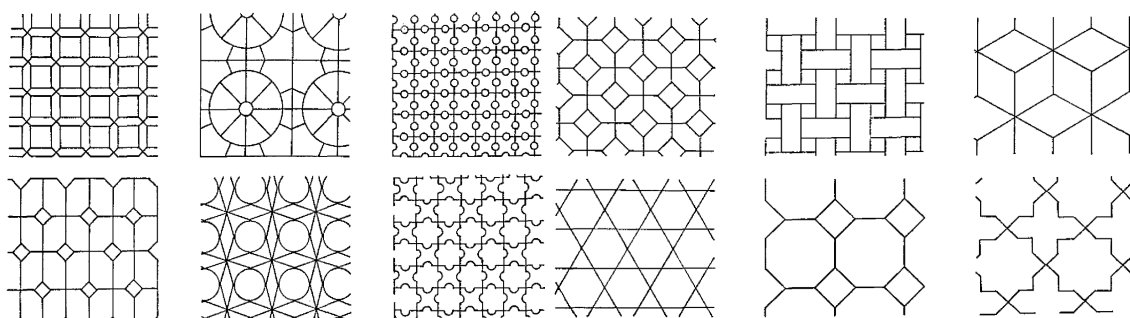


(α) [8]



(β) [7]

Εικόνα 1.17: Ρωμαϊκά ψηφιδωτά, Οικία Αιώνα, Κάτω Πάφος, Κύπρος, 4ος αι. μ.Χ.



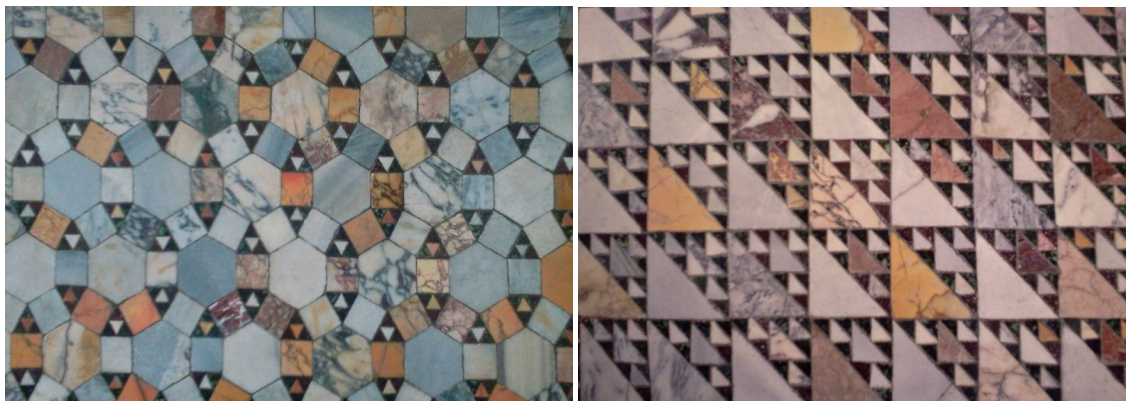
Σχήμα 1.4: Μεσαιωνικές πλαιοστρώσεις, 15ος αι. [63, σελ. 7]

πλακίδια, σήμερα πανταχού πλέον παρόντα, μαρτυρούν την προτίμηση της νεωτερικότητας για δομημένα και μινιμαλιστικά σχέδια που δεν απαιτούν πολυπλοκότητα. Ωστόσο, ακόμη και μέσα σε αυτή τη συμμετρία, η δημιουργικότητα ευδοκίμει, καθώς οι δρόμοι είναι στρωμένοι με καινοτόμα σχήματα πλακιδίων που προσκαλούν σε μαθηματική εξερεύνηση.

Η γοητεία των πλακιδίων δεν περιορίζεται μόνο στο σχήμα, το χρώμα και οι σημαντικές διαπλέκονται για να αιχμαλωτίσουν τις αισθήσεις. Αυτές οι αισθητικές επιλογές είναι κάτι περισσότερο από οπτική απόλαυση, έχουν μια μαθηματική σημασία που διαφαίνεται σε όλο το καλλιτεχνικό μωσαϊκό. Χαρακτηριστική στην αρχιτεκτονική είναι η τεχνοτροπία γεωμετρικής διακόσμησης Cosmatesque ανεπτυγμένη στην Μεσαιωνική Ιταλία από την οικογένεια τεχνιτών Cosmati για διακόσμηση των εκκλησιών (βλ. Εικ. 1.18).

Πέρα από την αισθητική, η χρήση των πλακοστρώσεων επεκτείνεται και στο πεδίο της μηχανικής, όπου η διάταξη των φυσικών αντικειμένων, είτε πρόκειται για ξύλο, μέταλλο ή πλαστικό, βρίσκει απήχηση στην τέχνη της πλακόστρωσης εξαιτίας του ότι δεν γίνεται σπατάλη υλικού. Το πάντρεμα της μορφής και της λειτουργικότητας γίνεται εμφανές, καθώς τα σχέδια που ταιριάζουν άψογα χωρίς κενά αναδεικνύονται ως η ενσάρκωση της αποτελεσματικότητας.

Αυτό το ταξίδι στον κόσμο των πλακοστρώσεων μας καλεί να υιοθετήσουμε μια ευρύτερη οπτική γωνία, όπου η έννοια των πλακοστρώσεων ξεπερνά τα όρια του



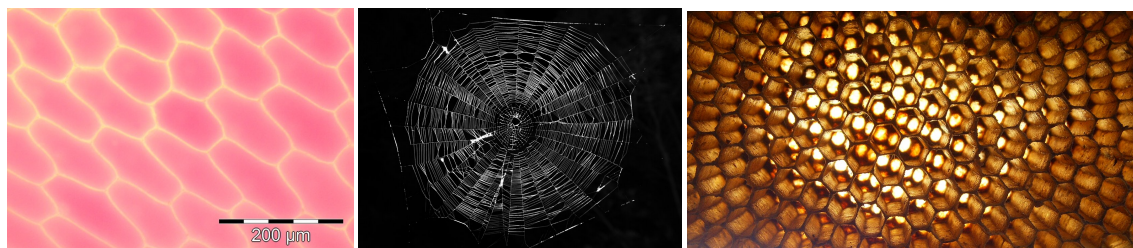
Εικόνα 1.18: Πλακοστρώσεις από την *Basilica di San Clemente al Laterano*, Ρώμη, 13ος αι. [18]

απτού και οδηγούμεστε σε μια αφηρημένη έννοια για να αναπτύξουμε το θεωρητικό μας μοντέλο. Άτυπα και για λίγο ακόμα θεωρούμε πλακόστρωση οποιαδήποτε “διαμέριση” του επιπέδου σε “περιοχές” (τα πλακίδια), ασχέτως αν αυτή η διαμέριση είναι εφικτή ή όχι με πραγματικά υλικά. Οι απεικονίσεις στο χαρτί, οι ενσαρκώσεις ιδεών και τα ψηφιδωτά υφασμένα στον ιστό του φυσικού κόσμου ανάγονται στην αφηρημένη έννοια των πλακοστρώσεων. Ακριβώς όπως οι καλλιτέχνες έχουν αποτυπώσει σχέδια που συνάδουν με τις αρχές των πλακοστρώσεων, ένα αδιάσπαστο νήμα υφαίνεται μέσα στο χρόνο, συνδέοντας την ανθρώπινη εφευρετικότητα σε όλες τις εποχές καταφέροντας να ξεφύγει από τα όρια του υλικού κόσμου και να φτάσει στην απαιτούμενη αφαίρεση.

Ένας από τους κύριους εκπροσώπους του σχεδιασμού πλακοστρώσεων είναι ο Escher. Καταγράφοντας τις πλακοστρώσεις της Αλάμπρας (βλ. Εικ. B'.6) που αποτέλεσαν ξεκάθαρη πηγή έμπνευσης για αυτόν, άφησε πίσω του σπουδαίο αυθεντικό έργο (βλ. Εικ. B'.9-B'.17). Στα σχέδιά του, η διάκριση μεταξύ του φυσικού και του μαθηματικού κόσμου γίνεται δυσδιάκριτη, παρουσιάζοντας μια συναρπαστική αλληλεπίδραση μεταξύ αυτών των δύο φαινομενικά διαφορετικών τομέων. Μια ενδιαφέρουσα ανάλυση των συμμετριών στις πλακοστρώσεις του Escher και πιο επεκτεταμένη συζήτηση περί των έργων του μπορεί κάποιος να βρει στο *Visions of Symmetry: Notebooks, Periodic Drawings, and Related Work of M.C. Escher* [124].

Υπ' αυτή την διευρυμένη έννοια του ορισμού των πλακοστρώσεων, η ίδια η φύση αναδεικνύεται ως ο κύριος τεχνίτης, υφαίνοντας τα περίπλοκα μοτίβα της στα κύτταρα βολβού του κρεμμυδιού (βλ. Εικ. 1.19α'), στον ιστό της αράχνης (βλ. Εικ. 1.196'), στην κηρήθρα της μέλισσας (βλ. Εικ. 1.19γ').

Οι πλακοστρώσεις που συχνά αναφέρονται ως “τυχαίες παλκοστρώσεις” ή “τυχαία δίκτυα” έχουν ευρεία εφαρμογή στα πεδία της επιστήμης και της μηχανικής. Η μεταλλουργία και η γεωλογία μέσω της μελέτης των κρυσταλλικών δομών, η βιολογία μέσω της μελέτης της οργάνωσης των κυττάρων και η θεωρία της επικοινωνίας μέσω της μελέτης για βελτίωση και κωδικοποίηση εικόνας, συγκλίνουν αποκαλύπτοντας



(α) Φλούδα κρεμμυδιού [73]

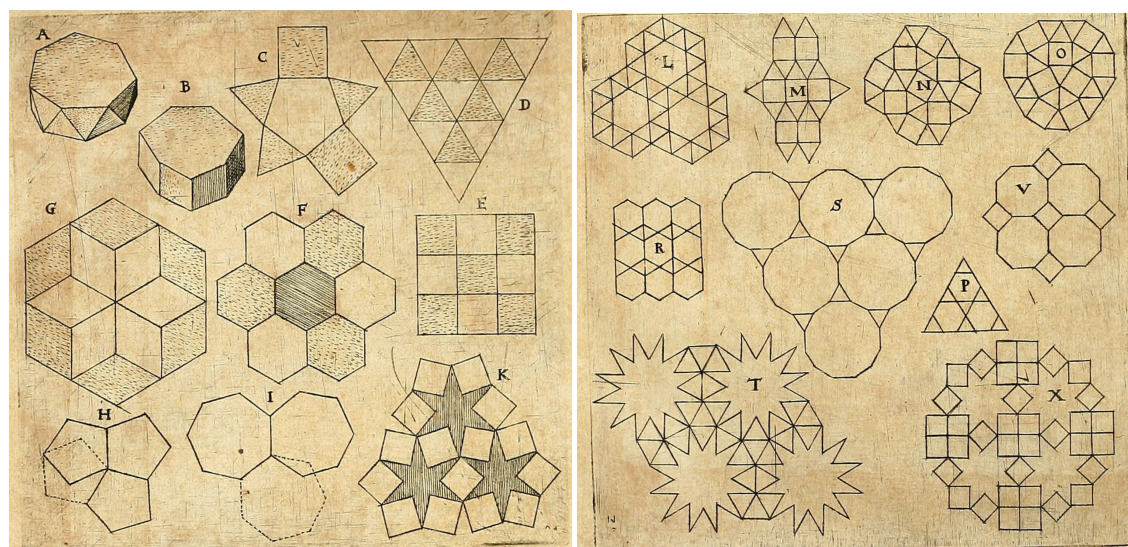
(β) Ιστός αράχνης [90]

(γ) Κυρήθρα μέλισσας [72]

Εικόνα 1.19: Πλακοστρώσεις στη φύση

τον ζωτικό ρόλο των πλακοστρώσεων στη διαμόρφωση του ιστού του τεχνολογικού μας κόσμου. Μια συνήθης διαδικασία κατασκευής τυχαίων πλακοστρώσεων είναι η τυχαία κατανομή των σημείων στο επίπεδο από τα οποία κατασκευάζεται μια πλακοστρώση Dirichlet.

Ενώ η ιστορία αποκαλύπτει την καλλιτεχνική μαεστρία των πλακοστρώσεων, η επιστήμη των μαθηματικών τους βάσεων παραμένει ένα πεδίο γόνιμο για εξερεύνηση. Στη συμφωνία της καλλιτεχνικής έκφρασης και της μαθηματικής πολυπλοκότητας, βλέπουμε έναν κόσμο όπου η καινοτομία, η δημιουργικότητα και η σχολαστική έρευνα συμπλέκονται. Κατά την περιήγησή μας σε αυτό το ταξίδι μέσα στο χρόνο, συναντούμε διαχρονικά λάθη και αβεβαιότητες των πλακοστρώσεων και των μοτίβων που οφείλονται σε κακά διατυπωμένους ορισμούς ή σε έλλειψη μαθηματικής αυστηρότητας. Ωστόσο, αυτές οι ατέλειες δεν είναι παρά μια απόδειξη της άσβεστης δίψας για γνώση που μας ωθεί προς τα εμπρός.

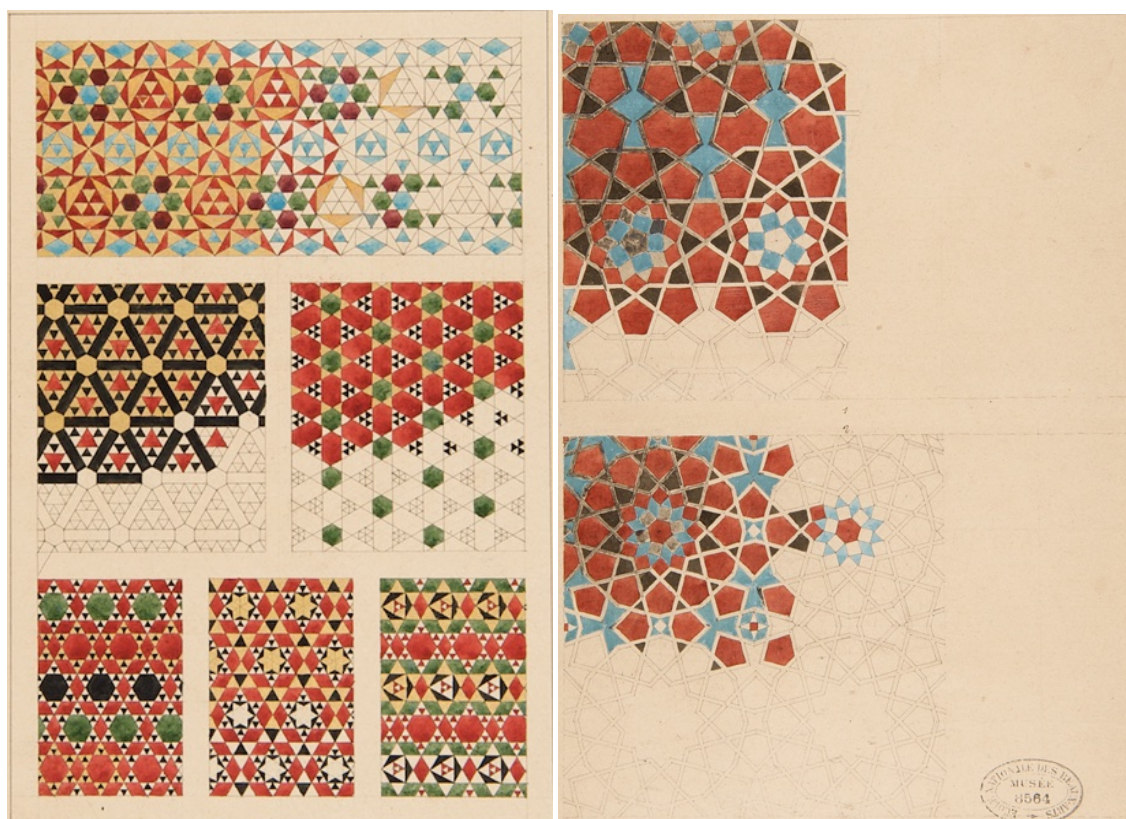


Εικόνα 1.20: Σχέδια πλακοστρώσεων του Kepler στο [84]

Μια από τις πρώτες μελέτες στην γεωμετρία των πλακοστρώσεων εμφανίζεται το 1619 στο "Harmonice Mundi" [84] του Kepler που προαναφέραμε (βλ. Εικ. 1.20, Β'.18, Β'.19). Προσπαθεί να πλακοστρώσει το επίπεδο με κανονικά πολύγωνα σε συνδυασμό με αστεροειδή πολύγωνα. Αυτές οι μελέτες του Kepler "ξεχάστηκαν"

μέχρι τα τέλη του 19ου, αρχές του 20ου αιώνα οπότε και ξεκίνησαν να δημοσιεύονται έργα που αφορούσαν τις πλακοστρώσεις. Άρα μπορούμε να πούμε ότι η μαθηματική μελέτη των πλακοστρώσεων είναι ηλικίας 150 χρόνων περίπου.

Μια αξιομνημόνευτη προσωπικότητα που ασχολήθηκε με τις πλακοστρώσεις αυτό το διάστημα είναι ο Jules Bourgoïn (1838 - 1908) Γάλλος θεωρητικός της διακοσμητικής, αρχιτέκτονας και σχεδιαστής. Μετά από ένα τριετές ταξίδι στην Αίγυπτο και στα Ιεροσόλυμα δημοσιεύει τα ευρήματά του το 1868 στο έργο “Αραβικές τέχνες, αρχιτεκτονική, ξυλουργική, χαλκοτεχνία, οροφές, επιστρώσεις, πλακοστρώσεις, βιτρό, κ.λπ.” (Les Arts arabes, architecture, menuiserie, bronzes, plafonds, revêtements, pavements, vitraux, etc.) με περιγραφικό και επεξηγηματικό κείμενο για την αραβική τέχνη [26, σελ. 6]. Οι καταγραφές που έκανε φαίνονται στις Εικ. 1.21, Β'.20 και Β'.21. Στην Εικ. 1.21α' είναι μωσαϊκά από την Ιταλία και στην Εικ. 1.21β' είναι δύο σχέδια, το πρώτο από το τζαμί Altoûn-Boghâ-el-Mordâny (14ος αι.) και το δεύτερο, από το Μεγάλο Τζαμί της Δαμασκού. Η επίμονη διερεύνησή του για τις αφηρημένες αρχές που δομούν κάθε διακοσμητική σύνθεση, η οποία εγκαινιάστηκε με το έργο του “Θεωρία της διακόσμησης” (Théorie de l'ornement, 1873), τον οδήγησε στο να οραματιστεί τη θεμελίωση μιας νέας επιστήμης που θα έδινε τον τίτλο στο τελευταίο του έργο, “Γραφιστική” (La Graphique, 1905) [26, σελ. 7].



(α) 1877 [26, Εικ. 8.1]

(β) 1879 [26, Εικ. 9.2]

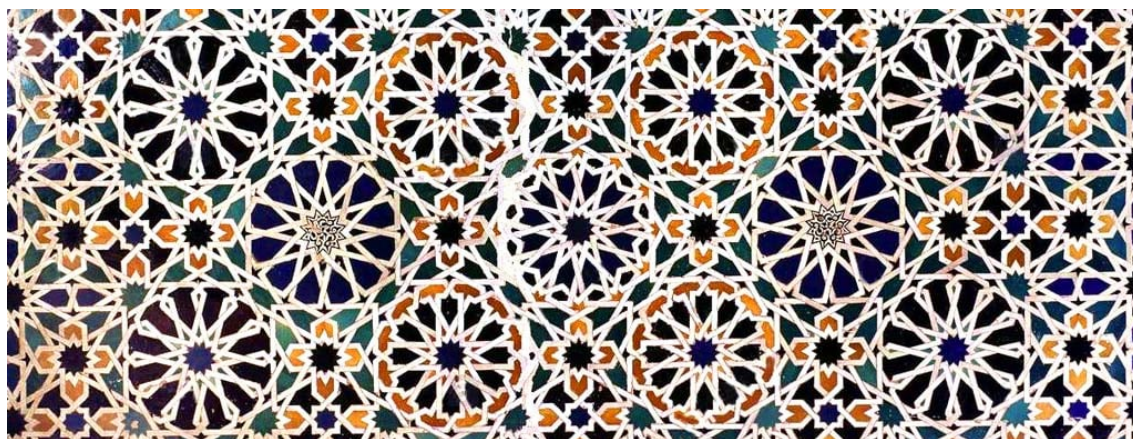
Εικόνα 1.21: Σχέδια μωσαϊκών του Bourgoïn

Η παρούσα διπλωματική εργασία θα προσπαθήσει να εμβαθύνει στο συναρπα-

στικό πεδίο των πλακοστρώσεων και των μοτίβων, αποκαλύπτοντας τις μαθηματικές τους ιδιότητες και παρέχοντας μια βάση για την εξερεύνηση αυτών των γοητευτικών θεμάτων. Με οδηγό την ευφυΐα των μελετητών που άνοιξαν το δρόμο, ταξιδεύουμε στο επίκεντρο των πλακοστρώσεων, των μοτίβων και της μαθηματικής τους ουσίας. Το ταξίδι μόλις άρχισε, και τα περιστρεφόμενα μοτίβα εμπρός μας μάς καλούν να τα αποκρυπτογραφήσουμε, να τα κατανοήσουμε και να τα εκτιμήσουμε σε όλο τους το περίτεχνο μεγαλείο.

1.2.2 Ισλαμική τέχνη

Η τέχνη των πλακοστρώσεων φτάνει στο αποκορύφωμά της στα αριστουργήματα του ισλαμικού κόσμου όπου η μαθηματική καινοτομία ευδοκίμουσε. Δεν είναι τυχαίο ότι, ο ίδιος ο όρος «αλγόριθμος» προέρχεται από το όνομα του άραβα μαθηματικού Al-Khwārizmī (π. 780 - π. 850). Τα αριστουργήματα αυτά είναι η πνευματική γέφυρα μεταξύ της τέχνης της πλακόστρωσης και των μαθηματικών βάσεων που την προώθησαν.



Εικόνα 1.22: Πλακόστρωση (βλεπομέρεια), Παλάτι Αλάμπρας, Ανδαλουσία, Ισπανία, 13ος αι. [11]

Η εξέχουσα θέση σύνθετων γεωμετρικών μοτίβων και εξαιρετικά συμμετρικών διατάξεων στην ισλαμική τέχνη και αρχιτεκτονική εγείρει ερωτήματα σχετικά με την προέλευση και το υποκείμενο ήθος αυτού του ξεχωριστού τρόπου. Αν και τα αρχαιολογικά στοιχεία είναι ελάχιστα, η διαρκής χρήση ισχυρών συμμετρικών διατάξεων και περίπλοκων γεωμετρικών διακοσμήσεων στην ισλαμική επικράτεια για πάνω από μια χιλιετία απαιτεί εξέταση. Έχουν προταθεί διάφορες ερμηνείες, συμπεριλαμβανομένης της άποψης ότι τα ισλαμικά γεωμετρικά και αραβουργικά μοτίβα προέκυψαν αποκλειστικά λόγω των περιορισμών του Κορανίου για τη δημιουργία εικόνων ή ότι έχουν συμβολικές σημασίες ή ότι θεωρητικοί μαθηματικοί συμμετείχαν στη δημιουργία τους. Ωστόσο, οι ερμηνείες αυτές δεν μπορούν να επεξηγήσουν πλήρως τις περίπλοκες μορφές που υιοθετούνται σε συνδυασμό με την απουσία προσωπο-

γραφίας [151, σελ. 2562]. Ο Escher φαίνεται να πείστηκε με την ερμηνεία περί απαγορεύσεων του Κορανίου όπως αναφέρει στο *The Graphic Work of M. C. Escher* [44, σελ. VII] αναγνωρίζοντας την τεχνική δεινότητα των μαστόρων που έκαναν τις πλακοστρώσεις στην Αλάμπρα.

Η εκτεταμένη ποικιλομορφία των παραδειγμάτων που καλύπτουν αιώνες ισλαμικής τέχνης αποκλείει τις σαρωτικές γενικεύσεις, καθιστώντας αναγκαία τη διαφοροποιημένη εξέταση. Οι εγγενείς ιδιότητες αυτής της μορφής τέχνης δικαιολογούν μια πιο σχολαστική αξιολόγηση από αυτή που συχνά έχουν λάβει. Οι συνήθειες παρανοήσεις περιλαμβάνουν την απόδοση των γεωμετρικών μοτίβων αποκλειστικά σε θρησκευτικές απαγορεύσεις ή την υποδόσκουσα συμβολική σημασία. Επιπλέον, αμφισβητείται από μερικούς ο ρόλος των θεωρητικών μαθηματικών στη δημιουργία τους. Ενώ η επιρροή του Κορανίου είναι σχετική, εξηγεί ανεπαρκώς τις ακριβείς μορφές που υιοθετήθηκαν. Επιπλέον, υπάρχουν περιορισμένες αποδείξεις για συμβολισμό στα ισλαμικά γεωμετρικά και φυτικά σχέδια και η σύνδεση με τα “καθαρά” μαθηματικά είναι ισχνή [151, σελ. 2563]. Παραμένει πρόκληση να προσδιοριστεί πότε και πού αναδύθηκε ο διακριτικός ισλαμικός διακοσμητικός κανόνας και σε ποιο βαθμό επηρεάστηκε από εξωτερικές μορφές ή δογματικές ενώσεις.



(α') Θόλος του Βράχου, Ιερουσαλήμ, 7ος αι. [6] (β') Μέγα Τζαμί, Δαμασκός, 8ος αι. [131]

Εικόνα 1.23: Μνημεία από την εποχή του Χαλιφάτου των Ομαγιαδών

Η γενική παραδοχή του ισλαμικού γεωμετρικού σχεδιασμού υποδηλώνει μια μορφή τέχνης που στηρίζεται στην εξειδικευμένη χειροτεχνική δημιουργικότητα και όχι στην επίσημη μαθηματική καθοδήγηση. Οι περίπλοκες γεωμετρίες και τα αραβουργήματα με πτυχώσεις επινοήθηκαν συχνά από μεμονωμένους καλλιτέχνες-τεχνίτες που προσπαθούσαν να εντυπωσιάσουν με τη δημιουργική τους δεινότητα. Η τεχνική δεξιοτεχνία έχαιρε μεγάλης εκτίμησης στις ισλαμικές τέχνες και χειροτεχνίες και η καινοτομία στο σχεδιασμό αναπτύχθηκε μάλλον οργανικά από το επίπεδο του τεχνίτη προς τα πάνω. Αν και ορισμένα στοιχεία υποδηλώνουν τη συμβολή μαθηματικών μέσω γεωμετρικών εγχειριδίων, ο επικρατέστερος τρόπος δημιουργίας βασιζόταν στην άτυπη γνώση του καλλιτέχνη για την επίπεδη γεωμετρία. Η πλούσια καλλιτεχνική κληρονομιά των ισλαμικών γεωμετρικών, αραβουργικών και καλλιγρα-

φικών σχεδίων προκύπτει από τις παραδόσεις των εργαστηρίων που περνούν από γενιά σε γενιά, αντανakλώντας τα εμπορικά μυστικά αυτών των περίπλοκων μορφών τέχνης. Αυτή η βαθιά ριζωμένη παράδοση αψηφά την ακριβή κατηγοριοποίηση, με τις πολύπλοκες δυναμικές της εξειδίκευσης και των δημιουργικών διαδικασιών να συμβάλλουν στο περίπλοκο μωσαϊκό της ισλαμικής διακοσμητικής τέχνης.

Η πρώιμη ισλαμική τέχνη και αρχιτεκτονική από την εποχή του δεύτερου Ισλαμικού Χαλιφάτου, αυτού των Ομαγιάδων (661 - 750) με πρωτεύουσα τη Δαμασκό, μπορεί να φαίνεται ανοίκεια και ξένη από τη μεταγενέστερη ισλαμική τέχνη. Αυτό οφείλεται στη σταδιακή ανάπτυξη των πολιτιστικών και καλλιτεχνικών αξιών παράλληλα με τις θρησκευτικές πτυχές. Οι Ομαγιάδες, αφού κατέκτησαν βυζαντινά εδάφη, υιοθέτησαν στοιχεία βυζαντινής διοίκησης και πολιτικών πρακτικών. Μνημεία όπως ο Θόλος του Βράχου στην Ιερουσαλήμ (βλ. Εικ. 1.23α') και το Μεγάλο Τζαμί στη Δαμασκό (βλ. Εικ. 1.23β') παρουσίαζαν εντυπωσιακά ψηφιδωτά τοίχων με περίπλοκες φυτικές μορφές (βλ. Εικ. 1.24), που αντανakλούσαν μια εξιδανικευμένη αναπαράσταση του παραδείσου [151, σελ. 2567]. Τα σχέδια αυτά, που στερούνταν απεικονίσεων ανθρώπων ή ζώων, τόνιζαν την πνευματική απόκοσμη φύση μέσω αρχιτεκτονικών και διακοσμητικών συμμετριών, οι οποίες επηρεάστηκαν από τις νεοπλατωνικές αντιλήψεις που υπήρχαν στην περιοχή.



(α') Θόλος του Βράχου, Ιερουσαλήμ [108]



(β') Μέγα Τζαμί, Δαμασκός [4]

Εικόνα 1.24: Ψηφιδωτά σε θρησκευτικά μνημεία

Ο ισλαμικός κόσμος γνώρισε μια βαθιά επιρροή ελληνικής γνώσης κατά τη διάρκεια της "Χρυσής Εποχής" του τρίτου Ισλαμικού Χαλιφάτου, των Αββασιδών (750 - 1258), στη Βαγδάτη [151, σελ. 2569]. Χρήσιμο είναι να τονιστεί ότι από όλες τις περιοχές που κυριαρχούσαν οι Ομαγιάδες μόνο η Ανδαλουσία δεν πέρασε στα χέρια των Αββασιδών. Ένα μεταφραστικό κίνημα στόχευε στη απόδοση ελληνικών, ινδικών, περσικών και άλλων έργων στα αραβικά, διευκολύνοντας τη διάδοση της ελληνικής επιστήμης, φιλοσοφίας και μαθηματικών. Έργα επιστημόνων όπως ο Ευκλείδης, ο Απολλώνιος και ο Αρχιμήδης απέκτησαν τεράστιο σεβασμό, συμβάλλοντας στην πρόοδο της αστρονομίας, των μαθηματικών και της ιατρικής. Η εισροή της ελληνικής σκέψης προκάλεσε μια πνευματική αφύπνιση και επηρέασε τις ισλαμικές

πολιτιστικές συμπεριφορές. Η τάση για περίπλοκα γεωμετρικά μοτίβα στην ισλαμική τέχνη, που φημίζονται για την πολυπλοκότητα και την ακρίβειά τους, έγινε έκφραση αυτού του κοινού ενθουσιασμού.

Ωστόσο, σημειώθηκε μια αλλαγή στην ισλαμική επιστημολογία, με κινητήρια δύναμη τον θεολόγο Al-Ġazzālīy (π. 1058 – 1111), ο οποίος αμφισβήτησε την ελληνική φιλοσοφική παράδοση και έδωσε έμφαση στην πίστη έναντι της λογικής [151, σελ. 2571]. Αυτό σηματοδότησε την παρακμή των επιστημονικών αναζητήσεων, παρά τη διαρκή κληρονομιά της νεοπλατωνικής σκέψης που επηρέασε τον ισλαμικό πολιτισμό και την τέχνη.

Τα έργα του, όπως η “Αναβίωση των Θρησκευτικών Επιστημών” (Ihya’ Ulum al-Din, αρχές 12ου αι.), αποπροσανατόλισαν τις ισλαμικές προοπτικές προς την πίστη και την προκατάληψη, επηρεάζοντας τους μυστικιστές Σούφι, τους θεολόγους και τους νομικούς [151, σελ. 2572]. Ενώ η επιρροή του οδήγησε σε παρακμή της επιστημονικής εξερεύνησης, η κληρονομιά των νεοπλατωνικών ιδεών παρέμεινε στην ισλαμική τέχνη. Τα πολύπλοκα γεωμετρικά και συμμετρικά μοτίβα, που συχνά συναντώνται στην ισλαμική αρχιτεκτονική, ήταν εμβληματικά αυτής της κληρονομιάς και μετέδιδαν μια απόκοσμη και πνευματική ουσία. Παρά την απομάκρυνση από τις εκτεταμένες επιστημονικές αναζητήσεις, η αλληλεπίδραση μεταξύ λογικής και πίστης παρέμεινε καθοριστικό χαρακτηριστικό του ισλαμικού πολιτισμού, αφήνοντας ανεξίτηλο το στίγμα της στις καλλιτεχνικές του εκφράσεις.

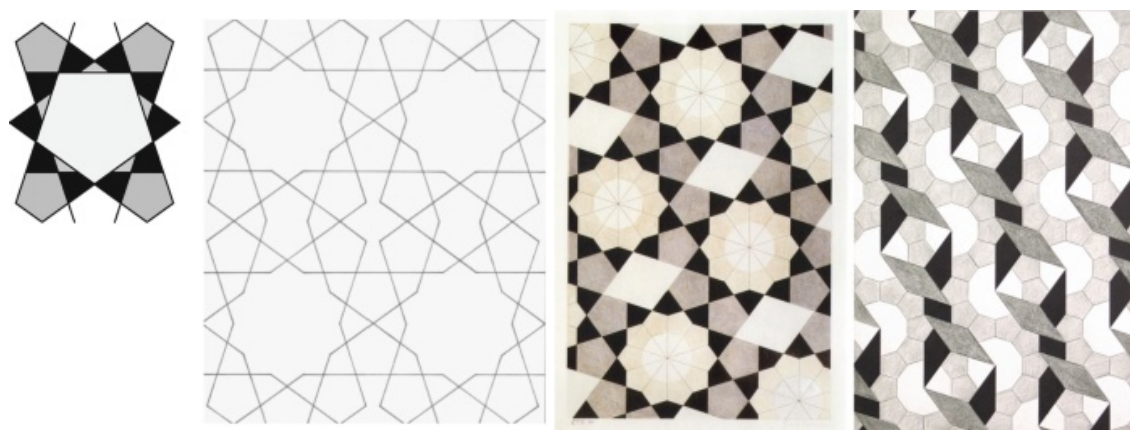
Η σχέση μεταξύ της θεωρητικής γεωμετρίας και της χειροτεχνικής πρακτικής στον ισλαμικό κόσμο είναι ένα θέμα που έχει συγκεντρώσει το ενδιαφέρον λόγω των επιπτώσεών του στην ανάπτυξη της ισλαμικής τέχνης και του πολιτισμού. Στο πλαίσιο της ξυλουργικής και άλλων χειροτεχνιών, η γεωμετρία έπαιξε καθοριστικό ρόλο στη μετάφραση των εννοιολογικών σχεδίων σε απτές δημιουργίες. Οι αρχαίοι Έλληνες γεωμέτρες, οι οποίοι συχνά ήταν και οι ίδιοι ειδικευμένοι τεχνίτες, έθεσαν τα θεμέλια για αυτή την αλληλεπίδραση. Σχήματα όπως αυτά των Ευκλείδη, Απολλώνιου και Μενελάου δεν ήταν σεβαστά μόνο για τις θεωρητικές τους συνεισφορές, αλλά αναγνωρίζονταν και για την πρακτική τους εξειδίκευση. Οι παρατηρήσεις του φιλοσόφου και ιστορικού Ibn Khaldūn (1332 – 1406) από το έργο του “Προλεγόμενα” (Muqaddimah, 1377) αποδεικνύουν τα παραπάνω [85, σελ. 479]:

Λόγω της προέλευσής της, η ξυλουργική χρειάζεται αρκετή γεωμετρία κάθε είδους. Απαιτεί είτε γενική είτε εξειδικευμένη γνώση της αναλογίας και της μέτρησης, προκειμένου να μεταφέρει τις μορφές από τη θεωρία στην πράξη με τον κατάλληλο τρόπο, και για τη γνώση των αναλογιών πρέπει να καταφύγει κανείς στον γεωμέτρη. Ως εκ τούτου, οι κορυφαίοι Έλληνες γεωμέτρες ήταν όλοι αρχιξυλουργοί. Ο Ευκλείδης, ο συγγραφέας του βιβλίου “Στοιχεία”, για τη γεωμετρία, ήταν ξυλουργός και ήταν γνωστός ως τέτοιος. Το ίδιο συνέβαινε και με τον Απολλώνιο, τον συγγραφέα του βιβλίου “Κωνικά”, τον Μενέλαο και άλλους . . .

Στο ίδιο έργο του ο Ibn Khaldūn ρίχνει φως στη συγχώνευση γεωμετρίας και χειροτεχνίας, υποδηλώνοντας μια κοινή σχέση μεταξύ της ακαδημαϊκής γεωμετρίας και της εφαρμογής της στα χέρια των τεχνιτών [151, σελ. 2572].

Ενώ ορισμένοι εικάζουν για συνεργασίες μεταξύ μαθηματικών και τεχνιτών στη δημιουργία διακοσμητικών πλαισίων, τα στοιχεία υποδηλώνουν διακριτούς κλάδους και στόχους, με τη θεωρητική και την πρακτική γεωμετρία να παραμένουν εξειδικευμένες και ξεχωριστές [151, σελ. 2573]. Παρά την απουσία εκτεταμένων τεκμηριωμένων συνεργασιών, η χρήση πολύπλοκων γεωμετρικών μοτίβων από τον ισλαμικό κόσμο παρέμεινε αναπόσπαστο μέρος του ήθους του. Τα μοτίβα αυτά, ενώ εξελίσσονταν με διαφορετικά στυλ και προσεγγίσεις, απέδιδαν μια βαθιά εκτίμηση για τις υποκείμενες γεωμετρικές αρχές. Ενώ οι αλληλεπιδράσεις μεταξύ θεωρητικών μαθηματικών και χειροτεχνών γεωμετρών ήταν περιορισμένες, το αμοιβαίο ενδιαφέρον τους για τη γεωμετρία άφησε ένα μόνιμο αποτύπωμα στην ισλαμική τέχνη. Η διαρκής απήχηση της ισλαμικής γεωμετρικής διακόσμησης, που έχει τις ρίζες της σε μια σύνθεση πλατωνικών ιδεωδών και πολιτιστικής έκφρασης, υπογραμμίζει τη σημασία της γεωμετρίας ως μιας δυναμικής ενέργειας που διαμορφώνει την καλλιτεχνική κληρονομιά του ισλαμικού κόσμου.

Μοναδικό χαρακτηριστικό πολλών μοτίβων πλακιδίων είναι η παρουσία ενός μεγάλου κεντρικού αστεριού, το οποίο συχνά περιβάλλεται από συμπληρωματικά μοτίβα. Είναι ενδιαφέρον ότι οι γωνίες σε πολλά ισλαμικά μοτίβα είναι συχνά πολλαπλάσια των 36 μοιρών, επιτρέποντας τη συμπερίληψη πολυγώνων αστερών με 10 σημεία [151, σελ. 2580]. Αυτή η μαθηματική αρμονία στηρίζει τα μαγευτικά μοτίβα που παρατηρούνται στην ισλαμική τέχνη και αρχιτεκτονική.



(α) Κατασκευή ισλαμικού αστεριού από κανονικά πεντάγωνα

(β) Έργα του Gerard Caris εμπνευσμένα από το ισλαμικό άστρο, 1999 και 2014

Εικόνα 1.25: Πλακοστρώσεις με το ισλαμικό άστρο [89, σελ. 300]

1.3 Αισθητική στα Μαθηματικά

Κλείνοντας αυτή την εισαγωγή θα ήταν καλό να διερωτηθούμε και να συζητήσουμε γιατί ασχολούμαστε με τις πλακοστρώσεις, τι το ενδιαφέρον έχουν. Οδηγούμαστε τότε στην ερώτηση: γιατί κάνουμε έρευνα στα μαθηματικά ή ακόμα καλύτερα γιατί κάνουμε μαθηματικά; Τι δικαιολογεί άραγε τις κοπιώδεις προσπάθειες τόσων μαθηματικών σε όλες τις εποχές να εικάζουν και να αποδεικνύουν;

Η μαθηματική δραστηριότητα μπορεί να χωριστεί σε δύο περιοχές: σε αυτήν που αφορά τα μαθηματικά που ήδη γνωρίζουμε (την διδασκαλία και την εμπέδωσή τους) και σε αυτήν που αφορά τα μαθηματικά που πιθανόν να γνωρίσουμε στο μέλλον (έρευνα). Εφόσον μπορούμε να εκτιμήσουμε και να δικαιολογήσουμε τον όγκο της γνώσης και της κατανόησης που μας προσφέρουν τα μαθηματικά που ήδη γνωρίζουμε τότε σίγουρα μπορούμε να αιτιολογήσουμε την θέλησή μας για αύξηση αυτού του όγκου με την έρευνα. Πώς αιτιολογεί όμως κανείς τα μαθηματικά;

Κάποιοι θα έλεγαν ότι η αξία των μαθηματικών έγκειται στα ίδια τα μαθηματικά. Κάνουμε δηλαδή μαθηματικά για τα μαθηματικά, κατ' αναλογία με την αντίληψη για την τέχνη *l'art pour l'art* (art for art's sake, τέχνη για την τέχνη)². Άλλοι δε θα έλεγαν ότι η αξία τους φαίνεται στις εφαρμογές τους σε άλλους τομείς (ή ακόμα και στα ίδια τα μαθηματικά). Για έναν μαθηματικό η απάντηση είναι προφανής. Δεν χρειάζεται να δικαιολογήσει (στον εαυτό του) γιατί ασχολείται με το αντικείμενό του. Το κάνει γιατί το αγαπά, έχει πάθος για αυτό. Συνήθως όμως η επικρατέστερη αντίληψη στο ευρύ κοινό είναι ότι κάνουμε μαθηματικά για να μειώσουμε το κόστος κατασκευής μηχανών ή εγκαταστάσεων ή για να βελτιώσουμε την ποιότητα ζωής μας. Το τελευταίο είναι ένα μέρος του αφηγήματος βέβαια, και για έναν μαθηματικό είναι ένα πολύ μικρό μέρος.

Κατά τον Penrose [115] τα κίνητρα που μας οδηγούν να μελετήσουμε τα μαθηματικά είναι καθαρά αισθητικά. Μελετάμε το αντικείμενό μας για την ευχαρίστηση που μας δίνει η ενασχόλησή μας με αυτό. Το κύριο κίνητρο ενός μαθηματικού δεν είναι απλά η αναζήτηση της Αλήθειας, αλλά η αναζήτηση μιας "γοητευτικής" αλήθειας που συμβαδίζει με την αισθητική του. Τα κύρια κίνητρα λοιπόν των μαθηματικών δεν είναι ούτε γνωσιολογικά, ούτε μεταφυσικά ούτε επιστημολογικά αλλά

²Η αρχική διατύπωση οφείλεται στον Théophile Gautier (1811 - 1872) "Το μόνο πραγματικά όμορφο είναι το άχρηστο, οτιδήποτε χρήσιμο είναι άσχημο επειδή είναι η έκφραση κάποιας ανάγκης, και αυτές του ανθρώπου είναι ποταπές και απεχθείς, όπως η φτώχη και ασθενής φύση του." (Πρόλογος του *Mademoiselle de Maupin*, 1835) επαναδιατυπωμένη από τον Edgar Allan Poe (1809 - 1849) "Έχουμε βάλει στο μυαλό μας ότι το να γράφουμε ένα ποίημα απλά και μόνο για το ποίημα και να αναγνωρίσουμε ότι αυτό ήταν το σχέδιό μας εξ αρχής, θα ήταν σαν να ομολογούσαμε ότι μας λείπει ριζικά η αληθινή ποιητική αξιοπρέπεια και δύναμη, αλλά αν επιτρέπαμε στον εαυτό μας να κάνει μια ενδοσκόπηση, θα ανακαλύπταμε αμέσως ότι κάτω από τον ήλιο δεν υπάρχει ούτε μπορεί να υπάρξει κανένα έργο πιο απόλυτα αξιοπρεπές, πιο εξαιρετικά ευγενές, από αυτό το ποίημα, αυτό το ποίημα *per se*, αυτό το ποίημα που είναι ένα ποίημα και τίποτα περισσότερο, αυτό το ποίημα που γράφτηκε μόνο για το ποίημα..." (*The Poetic Principle*, 1850) ο απότερος σκοπός δηλαδή της τέχνης είναι η αισθητική.

αισθητικά! Όπως ακριβώς με τις καλές τέχνες. Σίγουρα υπάρχουν εικαστικά έργα που δημιουργήθηκαν για παράδειγμα με μεταφυσικά κίνητρα (οντολογικά/ ταυτοτικά/ χωροχρονικά ερωτήματα) αλλά και πάλι κύριο μέλημα του εικαστικού είναι η αισθητική αρτιότητα του έργου του.

Στις μαθηματικές επιστήμες βέβαια τα αισθητικά κριτήρια δεν μπορούν ποτέ να εξασφαλίσουν κάποια χρηματοδότηση, λόγω του πολύ περιορισμένου κοινού στα οποία απευθύνεται η σύγχρονη έρευνα. Θα μπορούσαμε να παραλληλίσουμε την σύγχρονη έρευνα στα μαθηματικά με την σύγχρονη (*avant-garde*) τέχνη όπου λίγοι μπορούν να κατανοήσουν τι πραγματικά συμβαίνει παρόλα αυτά η σύγχρονη τέχνη έχει κοινό σε μουσεία, εκθεσιακούς αλλά και δημόσιους χώρους -που με τον καιρό διευρύνεται- σε αντίθεση με την σύγχρονη μαθηματική έρευνα που παραμένει αρκετά περιορισμένη στον ακαδημαϊκό χώρο. Αν και δημιουργούνται, με αργούς ρυθμούς, Μουσεία Μαθηματικών³ και η διάδοση κάποιων μαθηματικών εννοιών γίνεται με ευχάριστο τρόπο στο ευρύ κοινό μέσω βίντεο στο διαδίκτυο εντούτοις δεν είναι αντιπροσωπευτικά όλης της σύγχρονης έρευνας που γίνεται στα μαθηματικά.

Ευτυχώς, οι μαθηματικές επιστήμες συχνά δίνουν εφαρμογές, είτε άμεσα είτε έμμεσα, μερικές φορές με απροσδόκητους τρόπους. Κατά συνέπεια πρέπει να αποδεχτούμε και τις πιθανές εφαρμογές των μαθηματικών εάν θέλουμε να είμαστε αισιόδοξοι για κάποια χρηματοδότηση. Βέβαια εδώ προκύπτουν ερωτήματα ως προς το σε τι είδους εφαρμογές δεχόμαστε να γίνουν χρήση τα μαθηματικά εργαλεία που αναπτύσσουμε. Η συζήτηση είναι εκτενής και ενδιαφέρουσα, αν και όχι του παρόντος να την αναπτύξουμε θα ήταν καλό να κάνουμε μερικά σχόλια.

Σε άρθρο του [15, σελ. 54] ο Αρβανιτάκης τονίζει τη σημασία της χρήσης των ερευνητικών αποτελεσμάτων για τη βελτίωση της ανθρωπότητας και αποθαρρύνει τις εφαρμογές που προωθούν την απληστία ή τη βία, τονίζοντας την ανάγκη οι ερευνητές να εκφράζουν τις προτιμήσεις τους όσον αφορά τη χρήση του έργου τους. Η συνάντηση τέτοιων ηθικών διακηρύξεων στις σελίδες των επιστημονικών δημοσιεύσεων είναι ενθαρρυντική και εποικοδομητική, καθώς περιορίζουν την χρήση της νέας γνώσης για αθέμιτους σκοπούς. Δείχνει την επίγνωση της επιστημονικής κοινότητας για την ανάγκη να αναλογιστούμε τις επιπτώσεις της έρευνάς μας και τον τρόπο που τα αποτελέσματα μπορούν να επηρεάσουν την κοινωνία. Αυτό αν και είναι θετικό βήμα προς την κατεύθυνση της διαφάνειας και της υπευθυνότητας στην επιστημονική κοινότητα δυστυχώς δεν παρατηρείται συχνά. Επιπλέον, τέτοιου είδους δηλώσεις αντικατοπτρίζουν την ανάγκη για ανοικτή συζήτηση και συνεργασία μεταξύ ερευνητών και κοινωνίας γενικότερα. Η επιστημονική κοινότητα πρέπει να είναι προσιτή και σε διάλογο με το κοινό, προκειμένου να εξηγήσει τη σημασία της έρευνάς της και το πώς αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί.

³Το πιο αξιοσημείωτο είναι το National Museum of Mathematics (ξεκίνησε τη λειτουργία του το 2012) στην Νέα Υόρκη που προτείνει πολλές δραστηριότητες για το ευρύ κοινό παράλληλα με εξειδικευμένα σεμινάρια, και το τελευταίο είναι το Μουσείο Maison Poincaré στο Παρίσι (που ξεκίνησε τη λειτουργία του τον Σεπτέμβριο του 2023).

Μνημειώδες παράδειγμα αυτού του ήθους αποτέλεσε ένας από τους σπουδαιότερους μαθηματικούς του 20ου αιώνα, ο Alexander Grothendieck (1928 – 2014). Η μαθηματική ιδιοφυΐα του Grothendieck συνδυάστηκε με την ακλόνητη δέσμευσή του στις ηθικές αρχές της έρευνας (για περισσότερα βλ. Παράρτημα Γ').

Επιστρέφοντας στην αισθητική των μαθηματικών, παρατηρούμε ότι υπάρχουν δι-άφορες έννοιες του ωραίου στα μαθηματικά. Δεν χαρακτηρίζουμε για τον ίδιο λόγο ένα θεώρημα ωραίο ή μια απόδειξη ωραία. Συνήθως το θεώρημα το κρίνουμε για το περιεχόμενο που χαρακτηρίζει (το αποτέλεσμα που δίνει) και δεν έχουμε πολλά περισσότερα να πούμε ενώ την απόδειξη την κρίνουμε για την διάρθρωση του συλλογισμού της, κατά πόσο καταφέρνει να δια φωτίσει περισσότερο το αποτέλεσμα, αν είναι πλήρως τεχνική ή πως γενικεύεται.

Άλλη έννοια του ωραίου συναντάμε στα μαθηματικά “παράδοξα” στην λογική, με πιο χαρακτηριστικά τα παραδείγματα που χρησιμοποιούν την αυτοαναφορά. Οι ρίζες της αποδίδονται στον Ευβουλίδη τον Μιλήσιο (της Μεγαρικής Σχολής· 4ος π.Χ. αι.) με το παράδοξο του ψεύτη: «Κάποιος που λέει ότι αυτή τη στιγμή ψεύδεται, λέει άραγε την αλήθεια;»[28]. Η αυτοαναφορά οδήγησε τον Bertrand Russel (1872 – 1970) στις αρχές του 20ου αιώνα να κριτικάρει το έργο του Gottlob Frege (1848 – 1925) στη συνολοθεωρία [32]. Αυτή η κριτική οδήγησε τελικά στο περίφημο Παράδοξο του Russel (ή Αντινομία του Russel), ένα παράδοξο που αμφισβήτησε τα ίδια τα θεμέλια των μαθηματικών.

Το Παράδοξο του Russel κινείται γύρω από την ιδέα ενός συνόλου που περιέχει όλα τα σύνολα που δεν περιέχουν τον εαυτό τους. Αν ένα τέτοιο σύνολο υπήρχε, θα οδηγούσε σε μια παράδοξη κατάσταση. Αν περιείχε τον εαυτό του, με βάση τον ορισμό του δεν θα έπρεπε, άτοπο. Αλλά αν δεν περιείχει τον εαυτό του, πάλι με βάση τον ορισμό του θα έπρεπε, πάλι άτοπο. Αυτός ο παράδοξος βρόχος αμφισβήτησε την ιδέα των συνόλων και της κατασκευής τους, που ήταν θεμελιώδης για τη μαθηματική λογική.

Αυτό το παράδοξο όχι μόνο ανέδειξε τις περιπλοκές της αυτοαναφοράς, αλλά ανάγκασε επίσης τους μαθηματικούς και τους λογικούς να επανεκτιμήσουν τις θεμελιώδεις αρχές της επιστήμης τους. Απέφερε σημαντικές εξελίξεις στον τομέα της θεωρίας συνόλων, οδηγώντας τελικά στην αξιωματική θεωρία συνόλων⁴, όπου τα σύνολα ορίζονται με τρόπο που αποφεύγει τέτοια παράδοξα.

Στο πεδίο της μαθηματικής αισθητικής, παράδοξα όπως το Παράδοξο του Russel εκτιμώνται συχνά για την ικανότητά τους να προκαλούν την κατανόηση των μαθηματικών εννοιών και να διευρύνουν τα όρια του τι είναι δυνατό στο πλαίσιο των τυπικών συστημάτων. Η ομορφιά αυτών των παραδόξων έγκειται στην ικανότητά τους να προκαλούν βαθιά σκέψη και να πυροδοτούν νέους δρόμους έρευνας.

Ακόμα πιο ενδιαφέροντα αποτελέσματα, που στηρίζονται στην έννοια της αυτοαναφοράς και ανάγονται στα μεταμαθηματικά είναι τα Θεωρήματα μη πληρότητας

⁴Με πιο χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτό των Zermelo–Fraenkel

[118] του Kurt Gödel (1906 – 1978), ίσως τα δύο σπουδαιότερα αποτελέσματα στην μαθηματική λογική του 20ου αιώνα. Για να κατανοηθούν χρειάζεται η επεξήγηση τριών όρων: “τυπικό σύστημα”, “συνέπεια” και “πληρότητα”. Ένα τυπικό σύστημα είναι ένα αξιωματικό σύστημα εφοδιασμένο με κανόνες συμπερασματολογίας, που επιτρέπουν την παραγωγή νέων θεωρημάτων. Απαιτούμε τα αξιώματα και οι κανόνες παραγωγής να είναι πεπερασμένα ή το πολύ αποκρίσιμα⁵. Ένα τυπικό σύστημα καλείται πλήρες αν και μόνο αν για κάθε πρόταση στη γλώσσα αυτού του συστήματος είτε η ίδια η πρόταση είτε η άρνησή της είναι αποδείξιμη στο σύστημα. Ένα συνεπές τυπικό σύστημα είναι αυτό στο οποίο δεν υπάρχει πρόταση για την οποία μπορούμε να αποδείξουμε και την ίδια και την άρνησή της⁶. Το πρώτο Θεώρημα λέει ότι κάθε συνεπές τυπικό σύστημα F στο οποίο μπορεί να εκφραστεί κάποια στοιχειώδης αριθμητική (π.χ. αριθμητική Peano) είναι μη πλήρες, δηλαδή υπάρχουν προτάσεις της γλώσσας F που δεν μπορούν αποδειχθούν αλλά ούτε μπορεί να αποδειχθεί η άρνησή τους. Το δεύτερο Θεώρημα λέει ότι για κάθε συνεπές τυπικό σύστημα F στο οποίο μπορεί να εκφραστεί κάποια στοιχειώδης αριθμητική, η συνέπεια αυτού του συστήματος δεν μπορεί να αποδειχθεί μέσα στο ίδιο το σύστημα.

Στην ουσία, η αισθητική των μαθηματικών περιλαμβάνει όχι μόνο την κομψότητα των θεωρημάτων και των αποδείξεων αλλά και την ενδιαφέρουσα προσέγγιση και μερικές φορές αμηχανία των παραδόξων και των ερωτημάτων που εγείρουν. Μαθηματικοί και φιλόσοφοι συνεχίζουν να εξερευνούν αυτές τις πτυχές της μαθηματικής ομορφιάς, προσθέτοντας πλούτο και βάθος στο διαρκώς εξελισσόμενο τοπίο των μαθηματικών.

⁵Ένα σύνολο S λέγεται αποκρίσιμο αν και μόνο αν υπάρχει ένας αλγόριθμος που σταματάει ή μια υπολογιστική μηχανή που δίνει έξοδο “ναι” για κάθε είσοδο $a \in S$ και έξοδο “όχι” για κάθε είσοδο $a \notin S$.

⁶Μας ενδιαφέρουν μόνο τα συνεπή συστήματα αφού αν ένα σύστημα δεν είναι συνεπές, τότε μπορούμε να αποδείξουμε κάθε πρότασή του, οπότε είναι σίγουρα πλήρες

Μέρος II

Κύριο Μέρος

Κεφάλαιο 2

Βασικές Έννοιες

2.1 Πλακίδια, Πλακοστρώσεις και Μπαλώματα

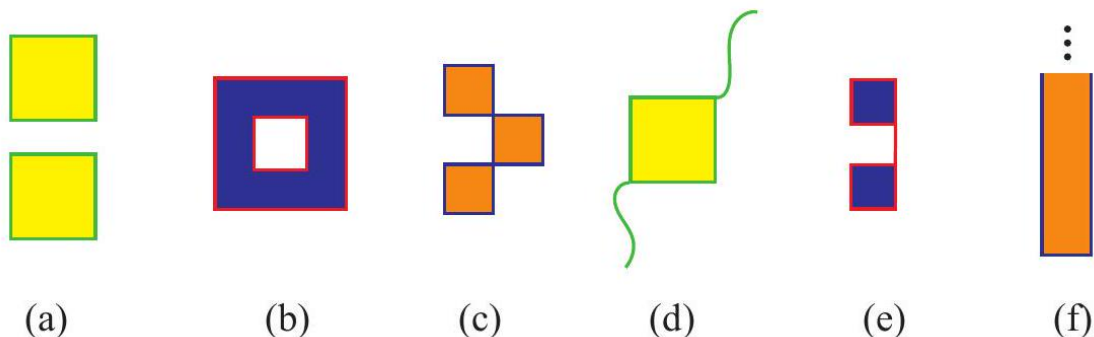
Στα πλαίσια της παρούσας εργασίας θα μας απασχολήσουν οι πλακοστρώσεις του Ευκλείδειου Επιπέδου $\mathbb{E}^2$. Όλοι έχουν μια διαίσθηση για το τι πρέπει να είναι μια πλακόστρωση. Είναι μια συλλογή από περιοχές στο επίπεδο που μαζί το καλύπτουν ολόκληρο και που δεν επικαλύπτονται παρά μόνο στο σύνορό τους. Στην πραγματικότητα όμως αυτό αφήνει πολλά περιθώρια. Για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας δεν θα ασχοληθούμε με πλακίδια που :

- δεν είναι συνεκτικά, βλ. Σχ. 2.1(a), δηλ. αποτελούνται από δύο ή περισσότερα ξεχωριστά κομμάτια,
- δεν είναι απλά συνεκτικά, βλ. Σχ. 2.1(b), δηλ. περιέχουν τουλάχιστον μια τρύπα,
- που είναι εν μέρει φτιαγμένα από ευθύγραμμα τμήματα ή καμπύλες, ή άλλα σχήματα μηδενικού μέτρου, βλ. Σχ. 2.1(c, d, e),
- που είναι μη φραγμένα, βλ. Σχ. 2.1(f), δηλ. δεν μπορούν να είναι υποσύνολο κανενός πεπερασμένου δίσκου, οσοδήποτε μεγάλος κι αν είναι αυτός.

Ουσιαστικά από τα παραπάνω προκύπτει ότι θέλουμε να ασχοληθούμε με πλακίδια που είναι κλειστοί τοπολογικοί δίσκοι. Αν επιχειρήσουμε να δώσουμε έναν μη αυστηρό ορισμό του κλειστού τοπολογικού δίσκου θα λέγαμε ότι είναι το σύνολο που το σύνορό του είναι μία απλή κλειστή καμπύλη. Απλή με την εξής έννοια: μια καμπύλη που τα άκρα της συναντώνται για να κάνουν έναν βρόχο (θηλιά) και δεν έχει άλλα σημεία αυτοτομής παρά μόνο τα άκρα της. Ακόμα κι αυτός ο μη αυστηρός ορισμός μάς επιτρέπει να αγνοήσουμε όσα πλακίδια μας ενοχλούν στο Σχήμα 2.1, σε αυτό το σημείο εστιάζουμε αποκλειστικά σε προβλήματα που αφορούν το σύνορο των πλακιδίων:

- a, b: το σύνορο δεν είναι μία καμπύλη,

- c,d,e: το σύνορο δεν είναι απλή καμπύλη,
- f: το σύνορο δεν είναι κλειστή καμπύλη.



Σχήμα 2.1: Παραδείγματα συνόλων που δεν θέλουμε να θεωρήσουμε ως πηλακίδια

Ορισμός 2.1 (Ομοιομορφισμός ή τοπολογικός μετασχηματισμός). Μια απεικόνιση $\phi : X \rightarrow Y$ μεταξύ τοπολογικών χώρων, καλείται **ομοιομορφισμός** ή **τοπολογικός μετασχηματισμός** αν είναι ένα-προς-ένα και συνεχής και η ϕ^{-1} είναι επίσης συνεχής.

Για λόγους πληρότητας εξηγούμε τις έννοιες:

- **ένα-προς-ένα**: για οποιαδήποτε δύο σημεία P, Q στο επίπεδο ισχύει

$$\phi(P) = \phi(Q) \Leftrightarrow P = Q$$

και αυτό συνεπάγεται την ύπαρξη αντίστροφου μετασχηματισμού ϕ^{-1} τέτοιου ώστε

$$\phi^{-1}(\phi(P)) = P \Leftrightarrow \phi(\phi^{-1}(R)) = R$$

- **συνεχής**: με την γνωστή από τον απειροστικό λογισμό έννοια, που εδώ σημαίνει απλά ότι μπορούμε να κάνουμε τα $\phi(P)$ και $\phi(Q)$ όσο κοντά θέλουμε παίρνοντας τα P και Q αρκούντως κοντά.

Οπότε τώρα είμαστε έτοιμοι για τον αυστηρό ορισμό του τοπολογικού δίσκου:

Ορισμός 2.2 (Τοπολογικός δίσκος). Κάθε υποσύνολο του επιπέδου που είναι εικόνα ενός κλειστού (αντίστοιχα ανοιχτού) κυκλικού δίσκου μέσω ενός ομοιομορφισμού, καλείται **κλειστός** (αντίστοιχα **ανοιχτός**) **τοπολογικός δίσκος**.

Κάθε τοπολογικός δίσκος, είτε ανοιχτός είτε κλειστός, είναι φραγμένος, συνεκτικός και απλά συνεκτικός.

Δύο πλακοστρώσεις (που θα τις ορίσουμε σε λίγο αυστηρώς) λέμε ότι είναι του ίδιου **τοπολογικού τύπου** (ή **τοπολογικώς ισοδύναμες**) εάν υπάρχει ομοιομορφισμός του επιπέδου που απεικονίζει την μία πλακόστρωση στην άλλη. Το γεγονός ότι

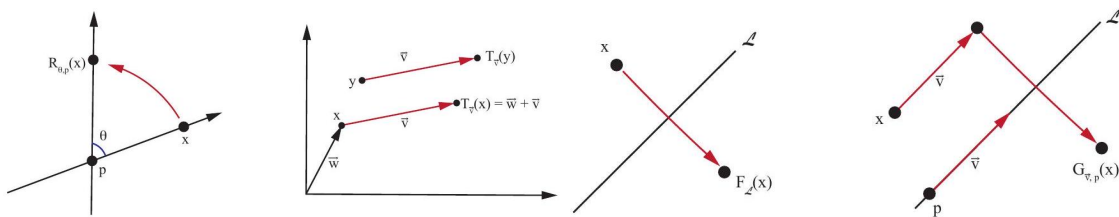
η σύνθεση δύο ομοιομορφισμών και ο αντίστροφος ενός ομοιομορφισμού είναι και αυτοί ομοιομορφισμοί δείχνει ότι η τοπολογική ισοδυναμία είναι όντως μια σχέση ισοδυναμίας (είναι δηλαδή ανακλαστική, συμμετρική και μεταβατική). Οπότε διαμερίζει το σύνολο των πλακοστρώσεων σε “τοπολογικούς τύπους”.

Ορισμός 2.3 (Ισομετρία). Έστω X και Y υποσύνολα του $\mathbb{E}^2$. Μια **ισομετρία** από το X στο Y είναι μια απεικόνιση $\sigma : X \rightarrow Y$ που διατηρεί τις αποστάσεις του X στο Y . Δηλ. αν p και q σημεία του $\mathbb{E}^2$, τότε $d(\sigma(p), \sigma(q)) = d(p, q)$.

Το γεγονός ότι η σ διατηρεί τις αποστάσεις συνεπάγεται ότι είναι και ένα-προς-ένα, αφού αν $\sigma(p) = \sigma(q)$ τότε $d(p, q) = d(\sigma(p), \sigma(q)) = 0$, οπότε $p = q$.

Μας ενδιαφέρουν ιδιαίτερος οι ισομετρίες από το $\mathbb{E}^2$ στο $\mathbb{E}^2$. Αποδεικνύεται [1, σελ. 32] ότι, κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι μια από τις εξής πέντε:

1. Ταυτοτική ισομετρία που διατηρεί όλα τα σημεία στη θέση τους, συμβολίζεται με I ,
2. Στροφή ως προς κέντρο p και κατά γωνία θ , συμβολίζεται με $R_{\theta,p}$,
3. Μεταφορά κατά δεδομένη απόσταση σε δεδομένη κατεύθυνση, συμβολίζεται με $T_{\vec{v}}$,
4. Ανάκλαση ως προς ευθεία $\mathcal{L}$ του επιπέδου, συμβολίζεται με $F_{\mathcal{L}}$,
5. Ολισθανάκλαση ως προς ευθεία $\mathcal{L}$ κατά δεδομένη απόσταση (ανάκλαση ως προς $\mathcal{L}$ και μεταφορά κατά δεδομένη απόσταση παράλληλα με την $\mathcal{L}$), συμβολίζεται με $G_{p,\vec{v}}$.

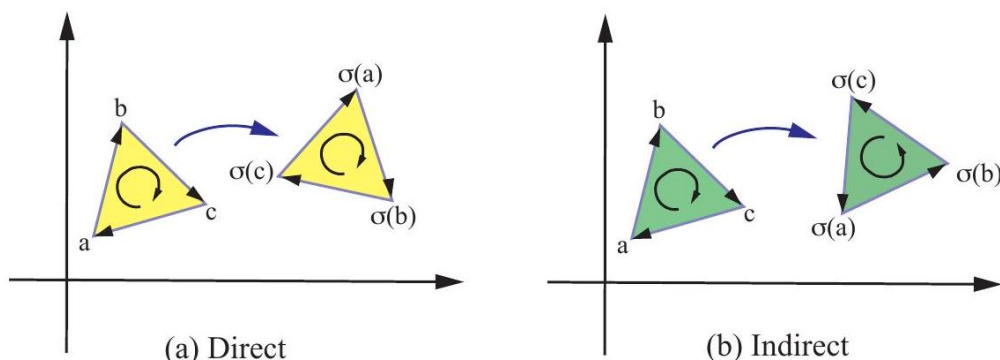


Σχήμα 2.2: Οι ισομετρίες του επιπέδου

Θα μιλάμε συχνά για τη **σύνθεση** δύο ισομετριών, που αποδεικνύεται ότι είναι ισομετρία. Συχνά καλούμε αυτή τη σύνθεση ως το γινόμενο των δύο ισομετριών και για τη σύνθεση σ_1 και σ_2 γράφουμε $\sigma_2 \circ \sigma_1$ εννοώντας ότι εφαρμόζουμε πρώτα την ισομετρία σ_1 και μετά την ισομετρία σ_2 . Αποδεικνύεται επίσης [38, σελ. 46] ότι κάθε ισομετρία του επιπέδου είναι μια σύνθεση από 0, 1, 2 ή 3 ανακλάσεις¹.

¹Σύνθεση από 0 ανακλάσεις εννοούμε την ταυτοτική ισομετρία και σύνθεση από 1 ανακλάσεις εννοούμε απλά μια ανάκλαση

Ορισμός 2.4 (Άμεση και έμμεση ισομετρία). Μια ισομετρία ονομάζεται **άμεση** ή **διατηρούσα τον προσανατολισμό** αν απεικονίζει ένα τρίγωνο με ακμές προσανατολισμένες δεξιόστροφα σε ένα τρίγωνο με επίσης δεξιόστροφα προσανατολισμένες ακμές, όπως στο Σχήμα 2.3(a). Ονομάζεται **έμμεση** ή **αντιστρέφουσα τον προσανατολισμό** αν απεικονίζει ένα τρίγωνο με ακμές δεξιόστροφα προσανατολισμένες σε ένα τρίγωνο με ακμές αριστερόστροφα προσανατολισμένες, όπως στο Σχήμα 2.3(b).



Σχήμα 2.3: Άμεσες και έμμεσες ισομετρίες που διατηρούν ή αντιστρέφουν τον προσανατολισμό τριγώνων.

Η επιλογή του τριγώνου είναι αδιάφορη. Αν μια ισομετρία αντιστρέφει τον προσανατολισμό σε ένα τρίγωνο, το ίδιο κάνει και σε όλα τα τρίγωνα.

Παρατηρούμε ότι μπορούμε να διακρίνουμε τους πέντε τύπους ισομετριών μόνο γνωρίζοντας το σύνολο των σταθερών σημείων της ισομετρίας και αν είναι άμεση ή έμμεση:

- Όλα τα σημεία σταθερά $\rightarrow$ ταυτοτική.
- Ένα σταθερό σημείο $\rightarrow$ στροφή.
- Μία ευθεία από σταθερά σημεία $\rightarrow$ ανάκλαση.
- Κανένα σταθερό σημείο και η ισομετρία είναι άμεση $\rightarrow$ μεταφορά.
- Κανένα σταθερό σημείο και η ισομετρία είναι έμμεση $\rightarrow$ ολισθανάκλαση.

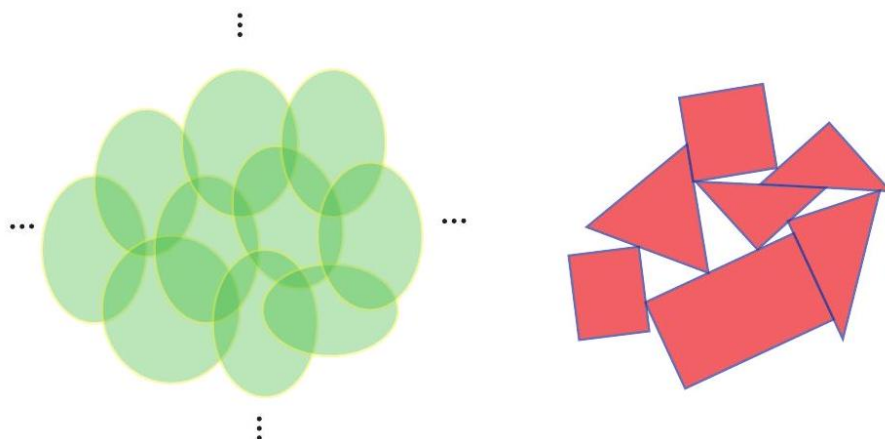
Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε αυτή την ταξινόμηση για να αποδείξουμε ότι το σύνολο των ισομετριών του επιπέδου εφοδιασμένο με την πράξη της σύνθεσης, με ουδέτερο στοιχείο την ταυτοτική ισομετρία I , και με αντίστροφα τα $R_{\partial,p}^{-1} = R_{\partial,p}$, $T_{\vec{v}}^{-1} = T_{-\vec{v}}$, $F_{\mathcal{L}}^{-1} = F_{\mathcal{L}}$, $G_{p,\vec{v}}^{-1} = G_{p,-\vec{v}}$ είναι ομάδα.

Δύο υποσύνολα του $\mathbb{E}^2$ λέγονται **ταυτόσημα** εάν υπάρχει ισομετρία από το ένα στο άλλο. Θα μιλάμε για ταυτόσημα πλακάκια αλλά και για ταυτόσημες πλακοστρώσεις.

Έστω C μια συλλογή υποσυνόλων του επιπέδου.

Ορισμός 2.5 (Κάλυψη). Λέμε ότι η C είναι μια **κάλυψη** του $\mathbb{E}^2$ αν $\mathbb{E}^2 = \bigcup_{C \in C} C$.

Ορισμός 2.6 (Συσκευασία). Λέμε ότι η C είναι μια **συσκευασία** του $\mathbb{E}^2$ αν για κάθε ζεύγος υποσυνόλων στη συλλογή C τα εσωτερικά τους δεν τέμνονται.



Σχήμα 2.4: Ένα παράδειγμα κάλυψης και ένα παράδειγμα συσκευασίας

Ορισμός 2.7 (Πλακόστρωση). Μια **πλακόστρωση** του επιπέδου $\mathbb{E}^2$ είναι μια συλλογή $\mathcal{T} = \{T_i\}_{i \in I}$ από κλειστά υποσύνολα του $\mathbb{E}^2$, τα οποία ονομάζονται **πλακίδια** (ή πλακάκια), τέτοια ώστε:

1. $\bigcup_{i \in I} T_i = \mathbb{E}^2$ ($\mathcal{T}$ είναι κάλυψη.),
2. $\overset{\circ}{T}_i \cap \overset{\circ}{T}_j = \emptyset$ για κάθε $i \neq j$ ($\mathcal{T}$ είναι συσκευασία).
3. Λέμε ότι η πλακόστρωση $\mathcal{T}$ έχει **πρωτοσύνολο** $\mathcal{P} = \{P_1, \dots, P_n\}$ αν κάθε πλακίδιο $T_i \in \mathcal{T}$ είναι ταυτόσημο (μετασχηματιζόμενο μέσω ευκλείδειας ισομετρίας) με ακριβώς ένα από τα $P_k \in \mathcal{P}$.
4. Τα στοιχεία του $\mathcal{P}$ είναι πεπερασμένα και ονομάζονται **πρωτοπλακίδια**, και κάθε ένα από αυτά υποθέτουμε ότι είναι τοπολογικώς ισοδύναμο με δίσκο.

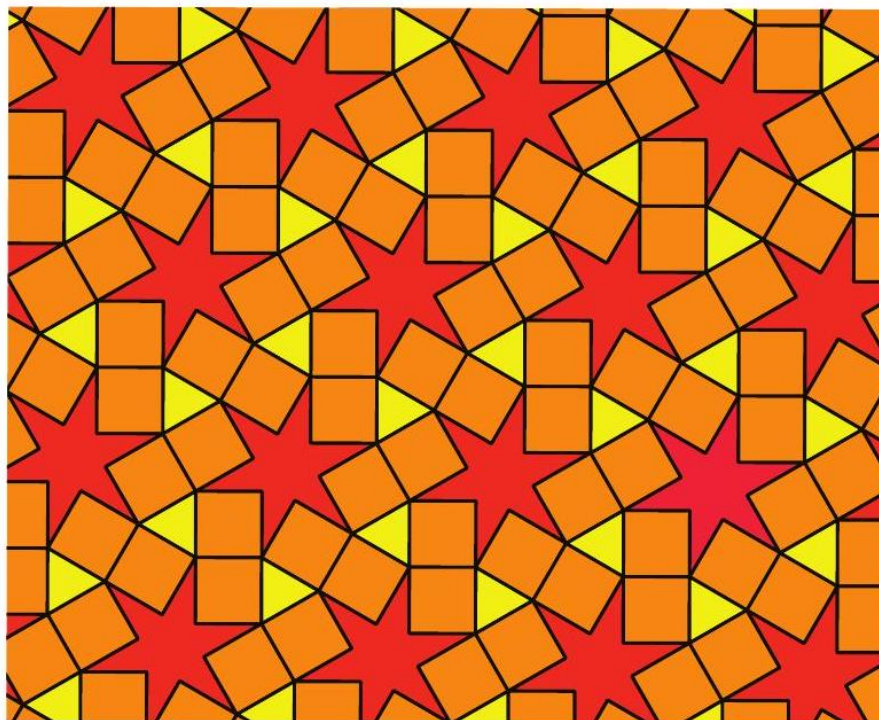
Λέμε ότι ένα πρωτοσύνολο **δημιουργεί μία πλακόστρωση**² $\mathcal{T}$ αν υπάρχει μια πλακόστρωση $\mathcal{T}$ του επιπέδου που αντιστοιχεί σε αυτό το πρωτοσύνολο.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.5, βλέπουμε μια πλακόστρωση με πρωτοσύνολο που αποτελείται από ένα ισόπλευρο τρίγωνο, ένα τετράγωνο και ένα αστρικό πολύγωνο.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, η Συνθήκη 1 του ορισμού υπάρχει για να αποφευχθούν ορισμένες παθολογικές περιπτώσεις.

Η Συνθήκη 2 περιορίζει τον αριθμό των σχημάτων των πλακιδίων στην πεπερασμένη συλλογή των πρωτοπλακιδίων, κανένα εκ των οποίων δεν είναι ταυτόσημο με άλλο.

²Σημείωση μετάφρασης: admitted by = δημιουργείται από, admits = δημιουργεί



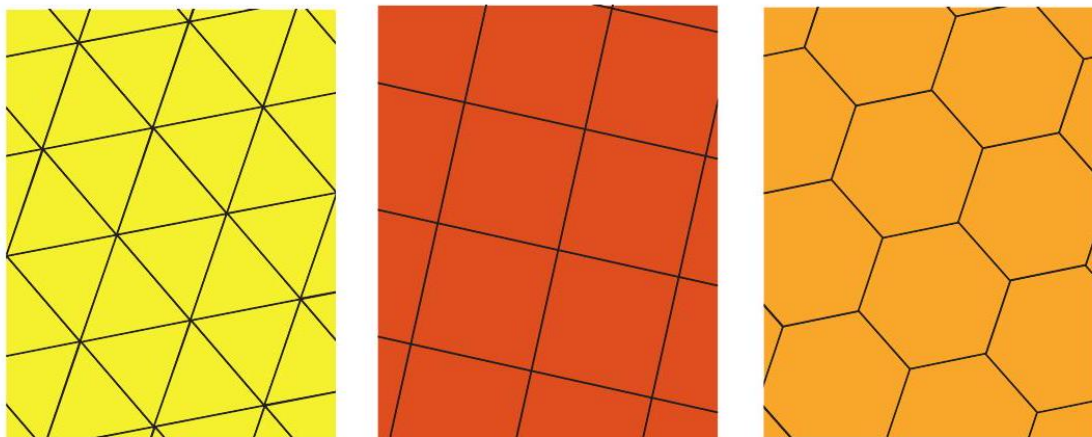
Σχήμα 2.5: Μια πλακόστρωση με τρία πρωτοπλακίδια

Μπορεί επίσης να θεωρηθεί άπειρο σύνολο πρωτοπλακιδίων, αλλά δεν θα ασχοληθούμε με αυτό. Οι Συνθήκες 3 και 4 εξασφαλίζουν ότι τα πλακίδια καλύπτουν το επίπεδο και ότι επικαλύπτονται μόνο στα σύνορά τους.

Βλέπουμε ότι αυτές οι συνθήκες ικανοποιούνται για κάποιες από τις κλασικές πλακοστρώσεις με τις οποίες είμαστε εξοικειωμένοι. Για παράδειγμα, οι πλακοστρώσεις του επιπέδου με τετράγωνα, ισόπλευρα τρίγωνα και κανονικά εξάγωνα στο Σχήμα 2.6 καλύπτουν προφανώς το επίπεδο, έτσι ώστε τα εσωτερικά των πλακιδίων να μην τέμνονται. Οποιαδήποτε δύο πλακίδια τέμνονται το πολύ στα σύνορά τους και κάθε πλακίδιο είναι τοπολογικά ένας δίσκος. Αυτές τις πλακοστρώσεις τις αποκαλούμε **κανονικές πλακοστρώσεις** του επιπέδου, καθώς σε κάθε μία, το πρωτοπλακίδιο είναι ένα κανονικό πολύγωνο.

Ορισμός 2.8 (n -εδρική πλακόστρωση). Μια πλακόστρωση $\mathcal{T}$ είναι **μονοεδρική** αν κάθε πλακίδιο στην $\mathcal{T}$ είναι ταυτόσημο με ένα και μοναδικό πλακίδιο. Με άλλα λόγια, υπάρχει μόνο ένα πρωτοπλακίδιο στο πρωτοσύνολο $\mathcal{P}$ που παράγει την $\mathcal{T}$. Μια πλακόστρωση είναι **διεδρική** αν υπάρχουν δύο πρωτοπλακίδια στο πρωτοσύνολο $\mathcal{P}$ που παράγουν την $\mathcal{T}$. Γενικότερα, η $\mathcal{T}$ είναι **n -εδρική** αν υπάρχουν συνολικά n πρωτοπλακίδια στο $\mathcal{P}$ που παράγουν την $\mathcal{T}$.

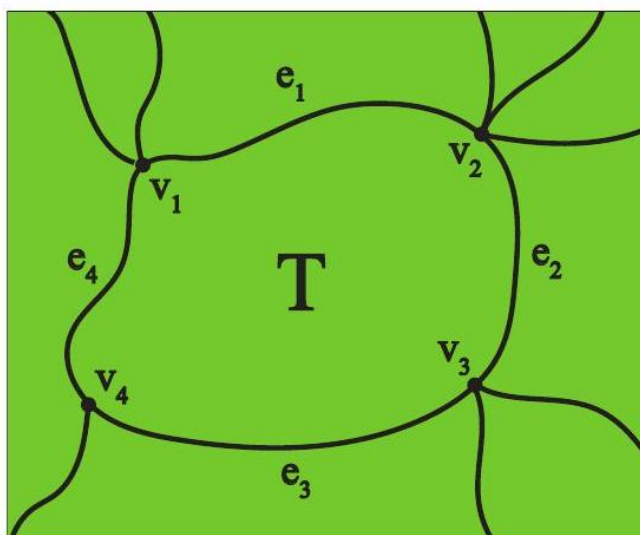
Έτσι, για παράδειγμα, και οι τρεις κανονικές πλακοστρώσεις είναι μονοεδρικές, ενώ η πλακόστρωση του Σχήματος 2.5 είναι τριεδρική. Ένα από τα θεμελιώδη προβλήματα στη θεωρία πλακοστρώσεων είναι, δοθέντος ενός πλακιδίου, ο καθορισμός ύπαρξης μονοεδρικής πλακόστρωσης με αυτό ως πρωτοπλακίδιο.



Σχήμα 2.6: Οι κανονικές πλακοστρώσεις του επιπέδου

Ορισμός 2.9 (Κορυφές και ακμές). Δοθείσης μιας πλακόστρωσης, **κορυφή** της πλακόστρωσης είναι σημείο στο οποίο τέμνονται τρία ή περισσότερα πλακίδια. **Ακμή** είναι ένα συνεκτικό υποσύνολο του συνόρου ενός πλακιδίου που δεν περιέχει κορυφές στο εσωτερικό του και έχει σύνορο ακριβώς δύο κορυφές.

Καθώς ένα πλακίδιο T είναι τοπολογικά ισοδύναμο με δίσκο, το σύνορό του είναι τοπολογικά κύκλος. Άρα, όπως στο Σχήμα 2.7, μόλις δείξουμε ότι υπάρχουν πεπερασμένες κορυφές στο σύνορο (βλ. Λήμμα 2.3), το σύνολο αυτών των n κορυφών χωρίζει το σύνορο σε ακριβώς n ακμές.



Σχήμα 2.7: Οι n κορυφές στο σύνορο ενός πλακιδίου χωρίζουν το σύνορο σε ακριβώς n ακμές.

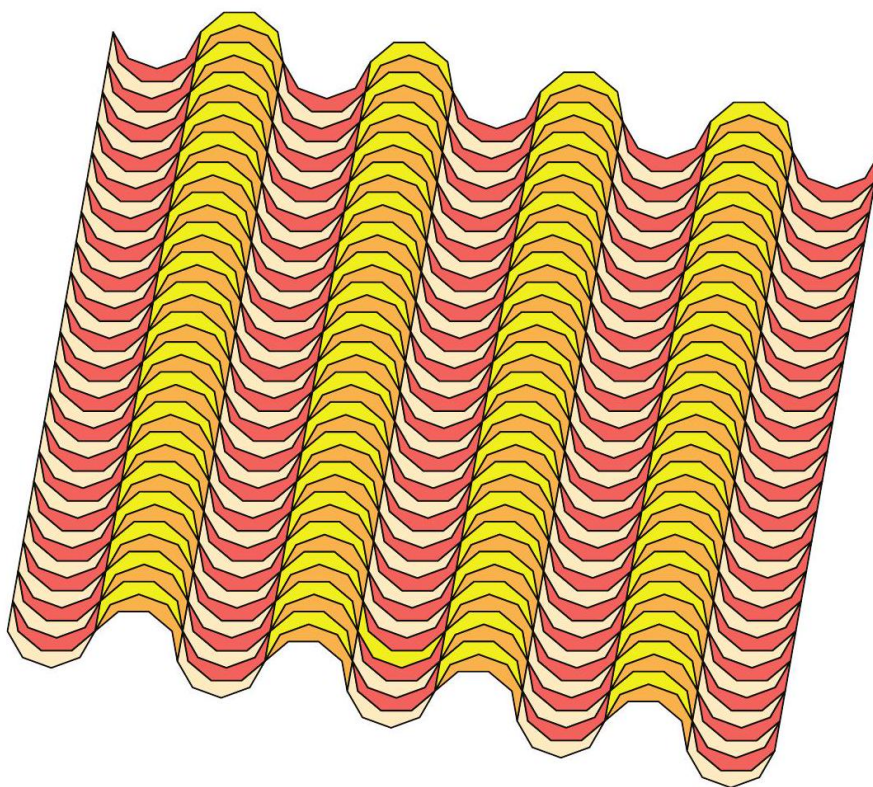
Για να καλύπτει η πλακόστρωση το επίπεδο, κάθε σημείο στο σύνορο ενός πλακιδίου πρέπει να ανήκει τουλάχιστον σε δύο πλακίδια. Τα σημεία που ανήκουν σε τρία ή περισσότερα πλακίδια είναι κορυφές. Συνεπώς, κάθε σημείο που ανήκει

στο εσωτερικό μιας ακμής (δηλαδή εκτός των άκρων της) ανήκει ακριβώς σε δύο πλακίδια.

Για να δείξουμε ότι ολόκληρη μια ακμή είναι κοινή σε ακριβώς δύο πλακίδια, παρατηρούμε το εξής: κάθε ακμή είναι από κατασκευή συνεκτικό υποσύνολο του συνόρου ενός πλακιδίου, χωρίς κορυφές στο εσωτερικό της. Επομένως, για κάθε σημείο στο εσωτερικό της ακμής, υπάρχουν ακριβώς δύο πλακίδια που το περιέχουν.

Επιπλέον, καθώς το σύνολο των σημείων της ακμής είναι συνεκτικό και η ιδιότητα «ανήκει σε ακριβώς δύο πλακίδια» είναι τοπική (ανοιχτή), δεν μπορεί να αλλάζει καθώς κινούμαστε συνεχώς κατά μήκος της ακμής. Άρα, τα ίδια δύο πλακίδια συνορεύουν σε όλη την ακμή. Συνεπώς, κάθε ακμή είναι κοινή σε ακριβώς δύο πλακίδια.

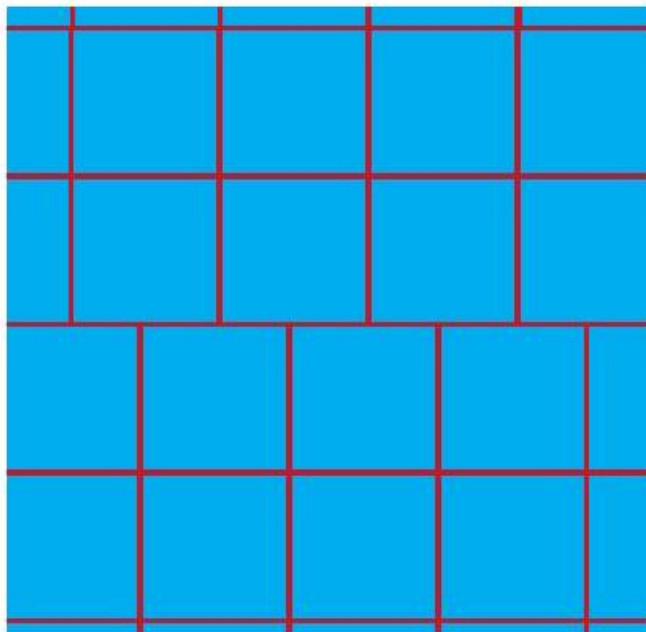
Σημειώνουμε ότι αν ένα πλακίδιο είναι πολύγωνο, δεν είναι απαραίτητο κάθε κορυφή του να είναι κορυφή της πλακόστρωσης, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στην πλακόστρωση του Σχήματος 2.8. Έτσι, όταν αναφερόμαστε σε πολυγωνικά πλακίδια, μιλάμε για τις γωνίες και τις πλευρές τους ώστε να μην συγχέονται με τις κορυφές και ακμές της πλακόστρωσης.



Σχήμα 2.8: Οι γωνίες δεν συμπίπτουν απαραίτητα με κορυφές.

Ορισμός 2.10. Στην περίπτωση πλακοστρώσεων με πολύγωνα όπου οι γωνίες και οι πλευρές των πολυγώνων συμπίπτουν με τις κορυφές και τις ακμές της πλακοστρώσεως, λέμε ότι η πλακόστρωση είναι **ακμή-προς-ακμή**.

Αν δεν περιοριστούμε σε ακμή-προς-ακμή πλακοστρώσεις, ακόμα και στην απλή περίπτωση μονοεδρικών πλακοστρώσεων με τετράγωνα, μπορούμε να κατασκευάσουμε υπεραριθμήσιμες σε πλήθος διαφορετικές πλακοστρώσεις. Για να το κάνουμε αυτό, μετακινούμε το κάτω μισό της κανονικής πλακοστρώσεως προς τα αριστερά κατά απόσταση x , όπου x είναι οποιοσδήποτε πραγματικός αριθμός στο υπεραριθμήσιμο διάστημα $[0, \frac{1}{2}]$, όπως στο Σχήμα 2.9. Όλες αυτές οι πλακοστρώσεις θα είναι διαφορετικές.



Σχήμα 2.9: Μη αριθμήσιμο πλήθος μονοεδρικών πλακοστρώσεων με τετράγωνα.

Ωστόσο, αποδεικνύεται ότι όταν περιοριζόμαστε σε μονοεδρικές ακμή-προς-ακμή πλακοστρώσεις με κανονικά πολύγωνα, οι τρεις κανονικές πλακοστρώσεις που είδαμε είναι οι μόνες δυνατές.

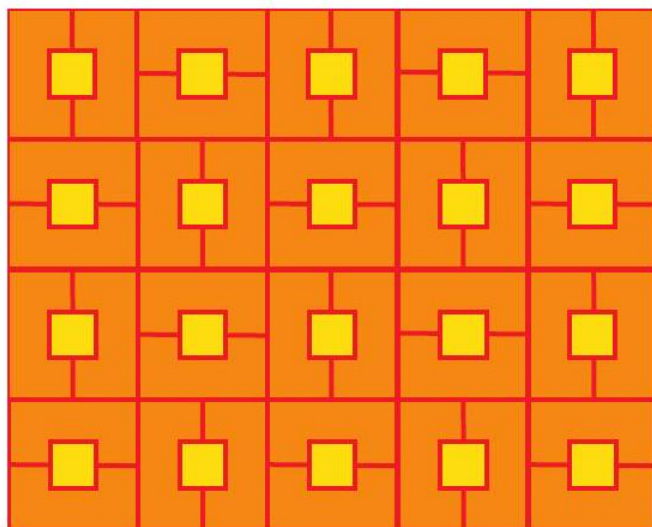
Ορισμός 2.11. Ο **βαθμός** μιας κορυφής είναι ο αριθμός των ακμών που την μοιράζονται. Μια πλακόστρωση λέγεται **j-βαθμωτή** αν κάθε κορυφή έχει βαθμό j .

Έτσι, οι κανονικές πλακοστρώσεις με τετράγωνα, τρίγωνα και εξάγωνα είναι αντίστοιχα 4-βαθμωτές, 6-βαθμωτές και 3-βαθμωτές αντίστοιχα.

Ορισμός 2.12. Δύο πλακίδια είναι **συνορεύοντα** αν μοιράζονται μια ακμή. Δύο πλακίδια είναι **γειτονικά** αν τέμνονται. Η γειτονιά ενός πλακιδίου T , σημειώνεται ως $N(T)$, είναι η ένωση του T με όλα τα γειτονικά του.

Ορισμός 2.13. Μια ακμή **συμπίπτει** με μια κορυφή αν αυτή η κορυφή είναι ένα από τα άκρα της. Ένα πλακίδιο **συμπίπτει** με μια ακμή αν αυτή η ακμή ανήκει στο σύνορό του.

Σημειώνουμε ότι αν όλα τα πρωτοπλακίδια στο πρωτοσύνολο είναι κυρτά πολύγωνα, τότε δύο πλακίδια μπορούν να τέμνονται σε μία μόνο ακμή ή μία μόνο κορυφή. Αν όμως δεν είναι όλα κυρτά, αυτό δεν ισχύει, όπως για παράδειγμα συμβαίνει στην διεδρική πλακόστρωση του Σχήματος 2.10.



Σχήμα 2.10: Τα μη κυρτά πολυγωνικά πλακίδια μπορεί να τέμνονται σε μη συνεκτικά σύνολα.

Ολοκληρώνουμε αυτή την ενότητα με ορισμένες ιδιότητες των πλακοστρώσεων που προκύπτουν από τους ορισμούς μας.

Λήμμα 2.1. Κάθε δίσκος στο επίπεδο τέμνει μόνο πεπερασμένο πλήθος πλακιδίων σε μία πλακόστρωση.

Απόδειξη. Ορίζουμε ως **διάμετρο ενός πλακιδίου** τη μέγιστη απόσταση ανάμεσα σε δύο σημεία του. Δεδομένου ότι το πρωτοσύνολο $\mathcal{P}$ είναι πεπερασμένο, υπάρχει ένα άνω φράγμα, έστω d_p , για τη διάμετρο των πρωτοπλακιδίων, και συνεπώς για τη διάμετρο κάθε πλακιδίου στην πλακόστρωση.

Υπάρχει επίσης ένα κάτω φράγμα, έστω a_p , για τα εμβαδά των πρωτοπλακιδίων, αφού υπάρχουν πεπερασμένα από αυτά. Είναι άμεσο ότι το a_p αποτελεί κάτω φράγμα και για το εμβαδόν κάθε πλακιδίου στην πλακόστρωση.

Δοθέντος ενός δίσκου D στο επίπεδο με ακτίνα R , κάθε πλακίδιο που τέμνει το D περιέχεται εξ ολοκλήρου στον δίσκο D' με το ίδιο κέντρο και ακτίνα $R + d_p$. Κάθε πλακίδιο εντός του D' έχει εμβαδόν τουλάχιστον a_p , και τα εμβαδά δεν επικαλύπτονται. Όμως το συνολικό εμβαδόν του D' είναι $\pi(R + d_p)^2$, το οποίο είναι πεπερασμένο. Άρα υπάρχει χώρος μέσα στο D' για το πολύ πεπερασμένο πλήθος πλακιδίων (συγκεκριμένα λιγότερα από $\pi(R + d_p)^2 / a_p$). Συνεπώς, ο D που είναι υποσύνολο του D' , ομοίως τέμνει μόνο πεπερασμένο πλήθος πλακιδίων. $\square$

Πόρισμα 2.1. Ένα πλακίδιο T σε μια πλακόστρωση μπορεί να εφάπτεται μόνο με πεπερασμένο πλήθος άλλων πλακιδίων.

Απόδειξη. Περικλείουμε το T σε έναν δίσκο D ακτίνας d_T με κέντρο οποιοδήποτε σημείο του T . Τότε κάθε πλακίδιο που εφάπτεται του T επίσης τέμνει τον D . Όμως από το Λήμμα 2.1, μόνο πεπερασμένα πλακίδια μπορούν να τέμνουν τον D , και συνεπώς μόνο πεπερασμένα μπορούν να εφάπτονται του T . $\square$

Για να αποδείξουμε το επόμενο Λήμμα, χρειαζόμαστε ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα από την τοπολογία, το οποίο περιλαμβάνουμε εδώ χωρίς απόδειξη. Με τον όρο απλή κλειστή καμπύλη, διαισθητικά εννοούμε έναν βρόχο χωρίς αυτοτομές.

Θεώρημα 2.1 (Θεώρημα Καμπυλών του Jordan). *Αφαιρώντας μια απλή κλειστή καμπύλη από το επίπεδο απομένουν δύο συνεκτικές περιοχές, η μία φραγμένη (την αποκαλούμε εσωτερικό της καμπύλης) και η άλλη μη φραγμένη (το εξωτερικό της καμπύλης)*

Αυτό σημαίνει, ισοδυνάμως, ότι κάθε διαδρομή από σημείο της εσωτερικής περιοχής προς σημείο της εξωτερικής περιοχής πρέπει να τέμνει την καμπύλη. Αν και το αποτέλεσμα φαίνεται προφανές, οι γνωστές αποδείξεις του είναι *εξαιρετικά μη τετριμμένες*.

Λήμμα 2.2. *Τρία πλακίδια σε μια πλακοστρώση δεν μπορούν να μοιράζονται τρεις ή περισσότερες κορυφές.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι τα T_1 , T_2 και T_3 μοιράζονται τις κορυφές v_1 , v_2 και v_3 . Θεωρούμε τη διάταξη, όπως στο Σχήμα 2.11, των κορυφών v_1 , v_2 , v_3 κατά μήκος του συνόρου κάθε πλακιδίου, έτσι ώστε πηγαίνοντας από το v_1 προς το v_3 , να περνάμε πρώτα από το v_2 . Λέμε τότε ότι το v_2 είναι **ενδιάμεση** κορυφή ως προς τα v_1 και v_3 .

Επιλέγουμε ένα τόξο που διέρχεται από το εσωτερικό του T_1 και ενώνει τα v_1 και v_2 , και ένα άλλο από το εσωτερικό του T_2 με ίδια άκρα. Η ένωσή τους είναι μια απλή κλειστή καμπύλη C_{12} που εφάπτεται του T_3 το πολύ στα σημεία v_1 και v_2 .

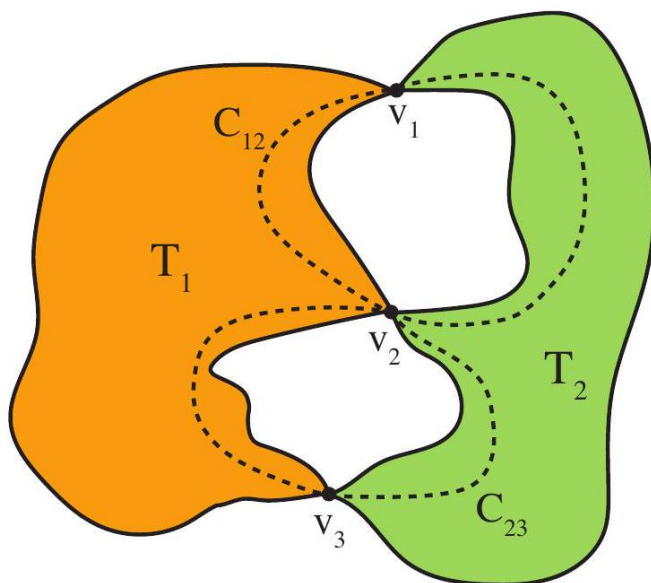
Σύμφωνα με το Θεώρημα Jordan, το επίπεδο χωρίζεται από το C_{12} σε δύο περιοχές, το εσωτερικό και το εξωτερικό της καμπύλης. Τότε το εσωτερικό $\overset{\circ}{T}_3$ του T_3 βρίσκεται είτε στο εσωτερικό είτε στο εξωτερικό του C_{12} . Αν το $\overset{\circ}{T}_3$ ήταν στο εσωτερικό του C_{12} , τότε το T_3 δεν θα μπορούσε να εφάπτεται στο v_3 , άτοπο. Άρα το T_3 βρίσκεται στο εξωτερικό του C_{12} .

Αντίστοιχα, σχηματίζουμε καμπύλη C_{23} από τόξα μέσω των T_1 και T_2 που ενώνουν τα v_2 και v_3 . Με ανάλογο συλλογισμό, το εσωτερικό του T_3 πρέπει να βρίσκεται στο εξωτερικό και του C_{23} . Άρα το εσωτερικό του T_3 βρίσκεται εκτός του $T_1 \cup T_2$ και των περιοχών που περικλείονται από τις C_{12} και C_{23} .

Όμως τότε το T_3 δεν μπορεί να εφάπτεται στο v_2 , άτοπο. $\square$

Σημείωση. Παρατηρούμε ότι στη χρήση του Θεωρήματος του Jordan στην απόδειξη αρκεί ο διαχωρισμός του επιπέδου σε δύο συνεκτικές περιοχές. Η ιδιότητα του εσωτε-

ρικού ως φραγμένου και του εξωτερικού ως μη φραγμένου δεν αξιοποιείται άμεσα στο συλλογισμό.



Σχήμα 2.11: Δύο από τα τρία πλακίδια που μοιράζονται τρεις κορυφές.

Λήμμα 2.3. Ένα πλακίδιο σε μια πλακόστρωση έχει πεπερασμένο πλήθος κορυφών και συνεπώς πεπερασμένο πλήθος ακμών.

Απόδειξη. Υποθέτουμε το αντίθετο. Έστω ότι υπάρχει πλακίδιο T_1 σε πλακόστρωση $\mathcal{T}$ με άπειρες κορυφές. Τότε, από το Πόρισμα 2.1, υπάρχει τουλάχιστον ένα πλακίδιο T_2 που εφάπτεται άπειρες φορές με το T_1 ώστε να προκύψουν οι άπειρες κορυφές. (Εδώ χρησιμοποιούμε την Αρχή του Περιστερώνα.)

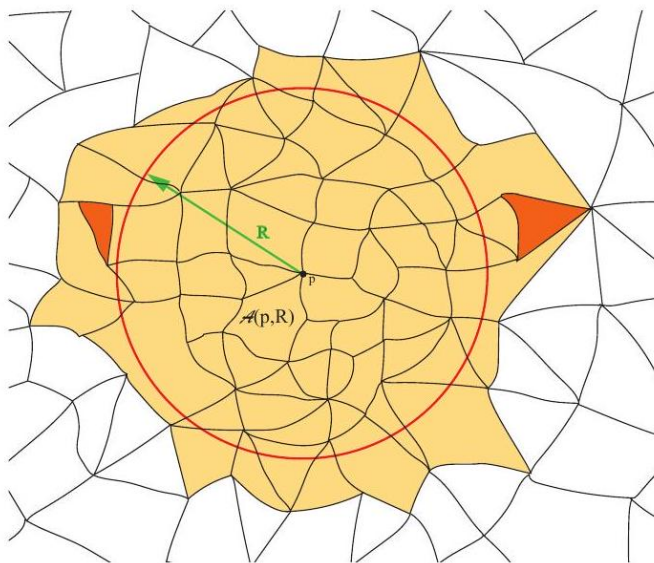
Μάλιστα, άλλο πλακίδιο T_3 πρέπει να εφάπτεται και αυτό σε άπειρες κοινές κορυφές των T_1 και T_2 , αφού κάθε κορυφή του $T_1 \cap T_2$ πρέπει να εφάπτεται σε τουλάχιστον άλλο ένα πλακίδιο, και υπάρχουν μόνο πεπερασμένα. Έτσι έχουμε τρία πλακίδια που μοιράζονται τρεις ή περισσότερες κορυφές, άτοπο από το Λήμμα 2.2. $\square$

Λήμμα 2.4. Το σύνολο των πλακιδίων σε μια πλακόστρωση $\mathcal{T}$ είναι αριθμήσιμο.

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ όλων των σημείων με ρητές συντεταγμένες στο επίπεδο. Είναι γνωστό ότι αυτό είναι αριθμήσιμο σύνολο και πυκνό στο επίπεδο, δηλαδή κάθε ανοικτός δίσκος περιέχει τέτοιο σημείο.

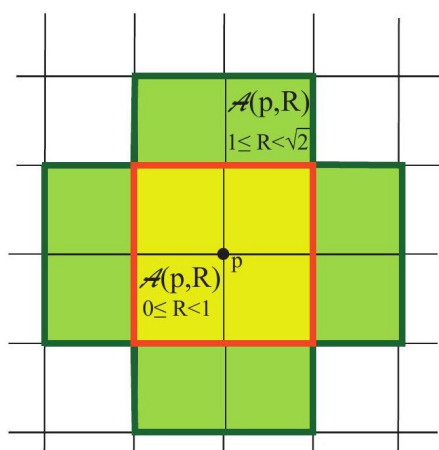
Κάθε πλακίδιο είναι τοπολογικός δίσκος, άρα έχει μη κενό εσωτερικό, που είναι ένα ανοικτό σύνολο του επιπέδου. Συνεπώς κάθε πλακίδιο περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

Για κάθε πλακίδιο στην $\mathcal{T}$ επιλέγουμε ένα σημείο από το $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Αυτό δίνει μια 1-1 απεικόνιση από το σύνολο των πλακιδίων της $\mathcal{T}$ στο $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$. Άρα είναι υποσύνολο αριθμήσιμου συνόλου, και επομένως αριθμήσιμο. $\square$



Σχήμα 2.12: Ορισμός μπαλώματος για έναν δίσκο $D(p, R)$.

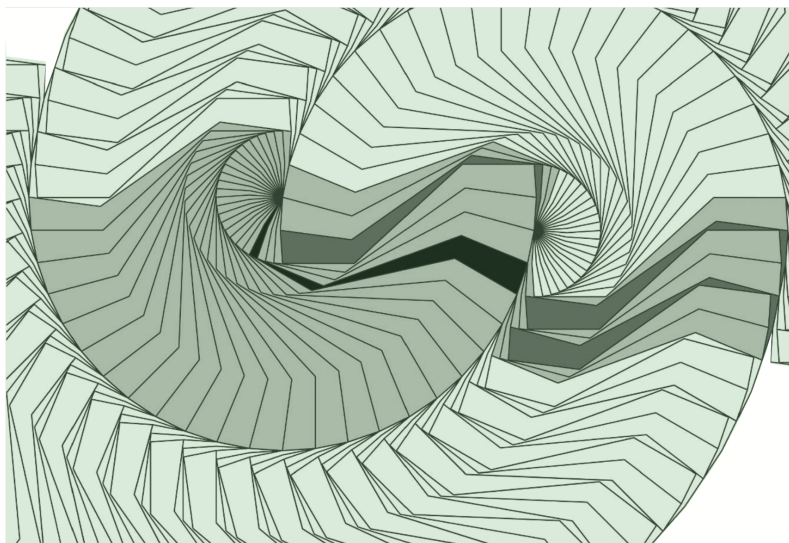
Ορισμός 2.14. Δοθείσης μιας πλακόστρωσης $\mathcal{T}$, ορίζουμε ως **μπαλώμα** μια συλλογή από πλακίδια της $\mathcal{T}$ των οποίων η ένωση είναι τοπολογικός δίσκος. Δοθέντος ενός δίσκου $D(p, R)$ με κέντρο p και ακτίνα R , το αντίστοιχο μπαλώμα $\mathcal{A}(p, R)$ αποτελείται από όλα τα πλακίδια που τέμνουν τον δίσκο, καθώς και από όλα τα επιπλέον πλακίδια της $\mathcal{T}$ που απαιτούνται ώστε η ένωση να είναι συνεκτική και απλώς συνεκτική (δηλαδή να μη δημιουργούνται τοπολογικές «τρύπες»), όπως υποδεικνύεται στο Σχήμα 2.12. Γενικότερα, για κάθε υποσύνολο S του $\mathcal{T}$, το μπαλώμα $\mathcal{A}(S)$ αποτελείται από όλα τα πλακίδια που τέμνουν το S , μαζί με τα αναγκαία πλακίδια ώστε η ένωση να παραμένει τοπολογικός δίσκος.



Σχήμα 2.13: Μπαλώματα στην τετραγωνική πλακόστρωση.

Έστω για παράδειγμα ότι σταθεροποιούμε μία κορυφή p στην τετραγωνική μοναδιαία πλακόστρωση, όπως στο Σχήμα 2.13. Για $R < 1$, το $\mathcal{A}(p, R)$ είναι η ένωση των τεσσάρων πλακιδίων που περιέχουν το p . Για $1 \leq R < \sqrt{2}$ προστίθενται άλλα

δύο πλακίδια για κάθε μία από τις τέσσερις πλευρές. Για $R = \sqrt{2}$ προστίθενται τα τέσσερα γωνιακά πλακίδια.



Σχήμα 2.14: Μια μονοεδρική πλακόστρωση στην οποία η γειτονιά του μαύρου πλακιδίου δεν είναι ένα μπάλωμα.

Μια ερώτηση που έμεινε ανοιχτή μέχρι πρόσφατα ήταν αν, για κάθε πλακίδιο T σε μια μονοεδρική πλακόστρωση, η γειτονιά του T είναι ίση με το μπάλωμα του T . Αποδείχθηκε ψευδής από προπτυχιακούς φοιτητές σε συνεργασία με τον Casey Mann, δημιουργώντας ένα αντιπαράδειγμα βασισμένο σε παραλλαγή του πλακιδίου Voderberg (βλ. Σχήμα 2.14).

2.2 Συμμετρίες Πλακιδίων

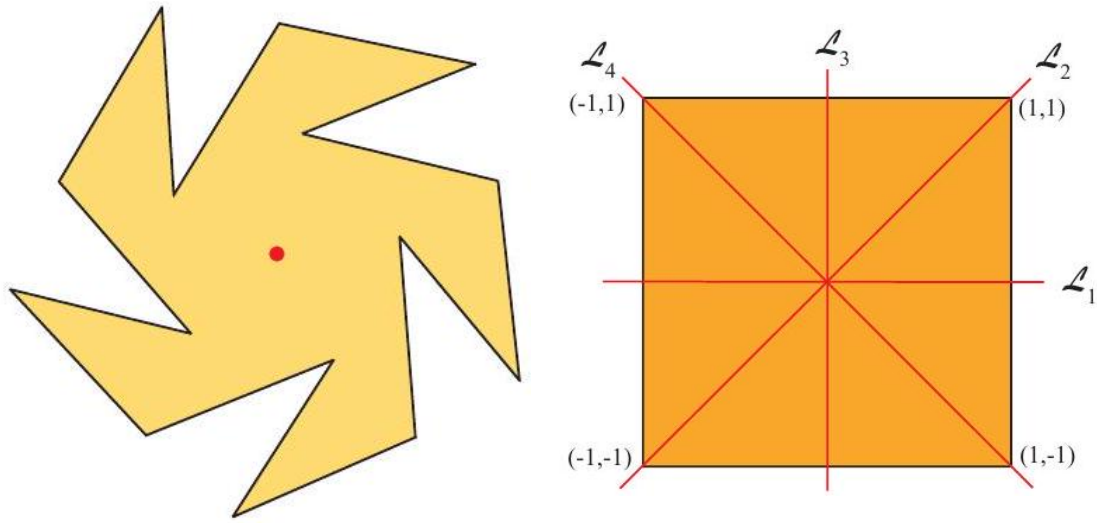
Οι συμμετρίες παίζουν καθοριστικό ρόλο στη θεωρία πλακοστρώσεων.

Ορισμός 2.15. Έστω Q ένα σχήμα στο επίπεδο. Μία ισομετρία σ που απεικονίζει το Q στον εαυτό του λέγεται συμμετρία του Q .

Προφανώς, η ταυτοτική ισομετρία είναι συμμετρία κάθε σχήματος. Επιπλέον, η σύνθεση δύο συμμετριών ενός δεδομένου Q αποδίδει μία νέα συμμετρία του Q . Και για κάθε συμμετρία υπάρχει μια αντίστροφη, η οποία λαμβάνεται ως η αντίστροφη ισομετρία. Συνεπώς, το σύνολο των συμμετριών ενός σχήματος Q σχηματίζει μία ομάδα, η οποία ονομάζεται ομάδα συμμετρίας του Q και συμβολίζεται με $S(Q)$.

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η ομάδα συμμετρίας $S(Q)$ όταν το σχήμα Q είναι ένα πλακίδιο. Στην περίπτωση του πλακιδίου του Σχήματος 2.15(a), παρατηρούμε ότι υπάρχουν συμμετρίες που προκύπτουν από στροφή γύρω από το κέντρο κατά γωνίες $\frac{2\pi}{5}$, $\frac{4\pi}{5}$, $\frac{6\pi}{5}$ και $\frac{8\pi}{5}$. Στην πραγματικότητα, όλες οι ισομετρίες εμφανίζονται ως $R_{2\pi/5, p}^n$ για $n = 0, 1, 2, 3, 4$. Αυτή η συγκεκριμένη ομάδα ισομετριών ονομάζεται

κυκλική ομάδα τάξης 5 και λέμε ότι παράγεται από την στροφή $R_{2\pi/5,p}$, καθώς όλα τα στοιχεία της ομάδας είναι δυνάμεις αυτού του στοιχείου.



Σχήμα 2.15: (α) Κυκλικές συμμετρίες (β) Διεδρικές συμμετρίες

Ορισμός 2.16. Για κάθε ακέραιο $n \geq 1$, η ομάδα ισομετριών που παράγεται από την στροφή $R_{2\pi/n,p}$ ονομάζεται **κυκλική ομάδα τάξης n** και συμβολίζεται με C_n .

Η ομάδα C_1 είναι η τετριμμένη ομάδα που περιέχει μόνο την ταυτοτική ισομετρία I .

Από την άλλη, αν θεωρήσουμε ένα τετράγωνο όπως στο Σχήμα 2.15(β), η κυκλική ομάδα C_4 είναι υποομάδα της ομάδας συμμετρίας του. Ωστόσο, υπάρχουν και ανακλάσεις ως προς κάθετο, οριζόντιο και διαγώνιο άξονα. Αυτές οι συμμετρίες μπορούν επίσης να συντεθούν. Για παράδειγμα, μπορούμε να στρέψουμε κατά $\pi/2$ αριστερόστροφα και στη συνέχεια να ανακλάσουμε ως προς την οριζόντια ευθεία $\mathcal{L}_1$. Η προκύπτουσα ισομετρία είναι έμμεση και διατηρεί το κεντρικό σημείο (ενώ οι ολισθανακλάσεις δεν διατηρούν κανένα σημείο). Συνεπώς, είναι ανάκλαση. Παρατηρώντας τι κάνει στο σημείο $(1,0)$, βλέπουμε ότι πρόκειται για ανάκλαση ως προς τη διαγώνιο βορειοδυτικά-νοτιοανατολικά $\mathcal{L}_4$.

Άρα, το σύνολο των τεσσάρων στροφών (συμπεριλαμβανομένης της ταυτοτικής) και των τεσσάρων ανακλάσεων αποτελεί ολόκληρη την ομάδα συμμετρίας του τετραγώνου, η οποία ονομάζεται **διεδρική ομάδα τάξης 8** και συμβολίζεται με D_4 .

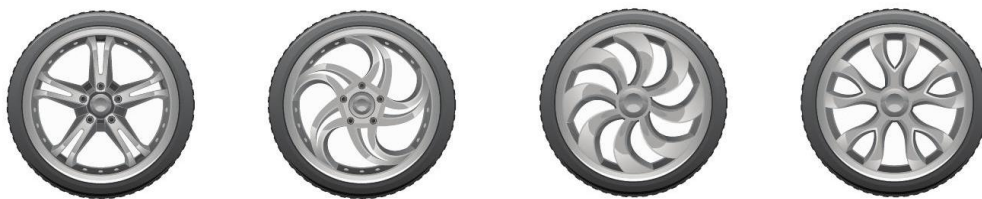
Δεδομένου οποιουδήποτε κανονικού πολυγώνου, μπορούμε να επιχειρηματολογήσουμε παρομοίως για να προσδιορίσουμε την ομάδα συμμετρίας του.

Ορισμός 2.17. Η ομάδα ισομετριών που περιλαμβάνει τις στροφές $R_{2\pi/n,p}^i$ για $i = 0, 1, \dots, n-1$ και τις ανακλάσεις σε n ισαπέχουσες (ως προς τη γωνία) ευθείες που διέρχονται από το p , ονομάζεται **διεδρική ομάδα τάξης $2n$** και συμβολίζεται με D_n . Ισοδύναμα, ορίζεται ως η ομάδα συμμετρίας ενός κανονικού n -γώνου.³

³Στη σύγχρονη άλγεβρα, η ομάδα αυτή συχνά συμβολίζεται ως D_{2n} .

Στην πραγματικότητα, μπορούμε να παράγουμε την ομάδα D_n χρησιμοποιώντας μόνο την στροφή $R_{2\pi/n,p}$ και την ανάκλαση $F_{\mathcal{L}}$ ως προς μία μόνο ευθεία που διέρχεται από το p . Οι υπόλοιπες ανακλάσεις προκύπτουν ως $R_{2\pi/n,p}^i \circ F_{\mathcal{L}}$. Σημειώνουμε ότι η ομάδα D_1 αποτελείται από δύο ισομετρίες: την ταυτοτική και μία ανάκλαση ως προς μία ευθεία.

Οι τροχοί στο Σχήμα 2.16 προσφέρουν καλά παραδείγματα συμμετρικών αντικειμένων στο επίπεδο. Κάθε ένας έχει ως ομάδα συμμετρίας του είτε C_n είτε D_n , κάτι που δεν προκαλεί έκπληξη όταν αποδειχθεί το ακόλουθο.



Σχήμα 2.16: Συμμετρίες τροχών.

Λήμμα 2.5. Οι μόνες πεπερασμένες ομάδες ισομετριών του επιπέδου που σταθεροποιούν ένα σημείο p είναι οι C_n και D_n .

Για να το αποδείξουμε θα χρειαστούμε τα εξής Λήμματα:

Λήμμα 2.6. Μια ισομετρία σ του επιπέδου προσδιορίζεται πλήρως από τη δράση της σε τρία μη συνευθειακά σημεία.

Απόδειξη. Έστω a , b και c τρία μη συνευθειακά σημεία. Τότε, το τρίγωνο που ορίζεται από τα a , b και c απεικονίζεται στο ταυτόσημο τρίγωνο που ορίζεται από τα $\sigma(a)$, $\sigma(b)$ και $\sigma(c)$. Έστω τώρα ένα σημείο x στο επίπεδο. Η απόστασή του από τα a και b , δηλαδή οι $d(x, a)$ και $d(x, b)$, είναι σταθερές. Άρα το σημείο $\sigma(x)$ πρέπει να έχει τις ίδιες αποστάσεις από τα $\sigma(a)$ και $\sigma(b)$, αφού η ισομετρία διατηρεί αποστάσεις. Όμως στο επίπεδο υπάρχουν το πολύ δύο σημεία που ικανοποιούν αυτή την ιδιότητα. Από αυτά, μόνο ένα έχει επίσης τη σωστή απόσταση από το $\sigma(c)$. Συνεπώς, η ισομετρία σ καθορίζεται πλήρως από τη δράση της στα τρία σημεία a , b και c . $\square$

Σημείωση. Παρατηρούμε ότι η μη συνευθειακότητα των a , b και c είναι απαραίτητη. Αν γνωρίζουμε μόνο τη δράση της σ σε τρία συνευθειακά σημεία, τότε η ισομετρία προσδιορίζεται μόνο μέχρι δύο δυνατές επιλογές. Δηλαδή, αν γνωρίζουμε ότι τρία σημεία πάνω σε μια ευθεία $\mathcal{L}_1$ απεικονίζονται σε τρία σημεία πάνω σε μια άλλη ευθεία $\mathcal{L}_2$, τότε μπορούμε να προσθέσουμε μια ανάκλαση ως προς τη $\mathcal{L}_2$, χωρίς να αλλιάξει το γεγονός ότι τα τρία πρώτα σημεία μεταφέρονται στα τρία δεύτερα. Αυτό σημαίνει πως δεν υπάρχει μοναδικότητα.

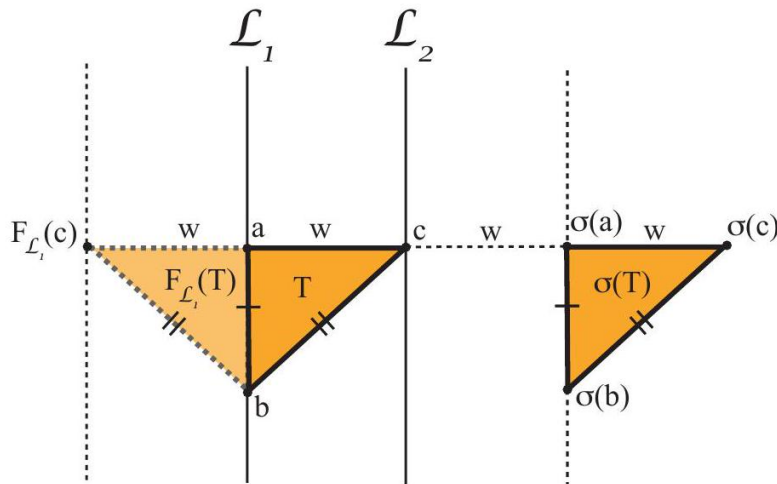
Λήμμα 2.7. Το γινόμενο δύο ανακλάσεων είναι μεταφορά αν οι ευθείες ανάκλασης είναι παράλληλες, ή στροφή αν οι ευθείες τέμνονται.

Απόδειξη. Γνωρίζουμε ότι κάθε ανάκλαση είναι έμμεση ισομετρία, άρα το γινόμενο δύο ανακλάσεων είναι άμεση ισομετρία. Εξετάζουμε τις δύο περιπτώσεις:

Περίπτωση 1. Οι ευθείες ανάκλασης είναι παράλληλες. Έστω $\mathcal{L}_1$ η πρώτη ευθεία και $\mathcal{L}_2$ η δεύτερη. Έστω w η απόστασή τους. Επιλέγουμε σημεία a και b της $\mathcal{L}_1$ και σημείο c της $\mathcal{L}_2$ τέτοιο ώστε το ac να είναι κάθετο στις δύο ευθείες. Άρα $d(a, c) = w$.

Η ανάκλαση ως προς $\mathcal{L}_1$ αφήνει τα a και b σταθερά. Η ανάκλαση ως προς $\mathcal{L}_2$ στέλνει τα a και b σε σημεία σε απόσταση $2w$ δεξιά (βλ. Σχήμα 2.17). Από την άλλη η ανάκλαση ως προς $\mathcal{L}_1$ μεταφέρει το c $2w$ πίσω και μετά ανάκλαση ως προς $\mathcal{L}_2$ το μεταφέρει $4w$ εμπρός, άρα συνολικά προχωράει $2w$ δεξιά. Άρα και τα τρία σημεία μεταφέρονται προς τα δεξιά κατά απόσταση $2w$.

Όπως αποδείχθηκε παραπάνω μία ισομετρία καθορίζεται από τη δράση της σε τρία μη συνευθειακά σημεία (Λήμμα 2.6), άρα η $\sigma = F_{\mathcal{L}_2} \circ F_{\mathcal{L}_1}$ είναι μεταφορά κατά διάνυσμα μήκους $2w$ προς τη διεύθυνση της κάθετου.

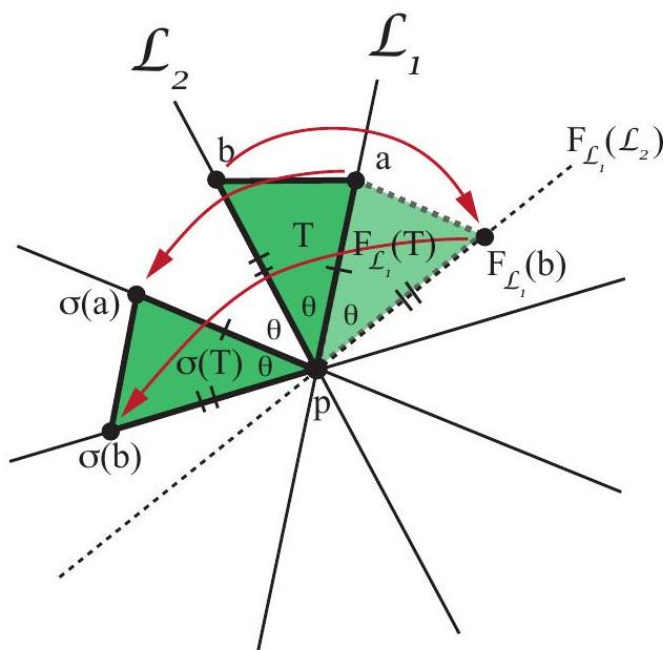


Σχήμα 2.17: Το γινόμενο δύο ανακλάσεων σε παράλληλες ευθείες είναι μεταφορά.

Περίπτωση 2. Οι ευθείες τέμνονται. Έστω $\mathcal{L}_1$ και $\mathcal{L}_2$ οι δύο ευθείες και p το σημείο τομής τους (βλ. Σχήμα 2.18). Έστω θ η μικρότερη γωνία μεταξύ τους. Ορίζουμε την ισομετρία $\sigma = F_{\mathcal{L}_2} \circ F_{\mathcal{L}_1}$.

Είναι φανερό ότι το σημείο p παραμένει σταθερό από την σ .

Επιλέγουμε σημεία a στην $\mathcal{L}_1$ και b στην $\mathcal{L}_2$, με $a, b \neq p$. Η ανάκλαση ως προς την $\mathcal{L}_1$ αφήνει το a σταθερό, ενώ η ανάκλαση ως προς $\mathcal{L}_2$ στέλνει το a σε σημείο που προκύπτει με στροφή κατά 2θ γύρω από το p . Αντίστοιχα, το b στρέφεται πρώτα κατά -2θ και μετά κατά 4θ , άρα συνολικά κατά 2θ .



Σχήμα 2.18: Το γινόμενο δύο ανακλάσεων σε τεμνόμενες ευθείες είναι στροφή.

Άρα η σ είναι στροφή του τριγώνου pab γύρω από το p κατά 2θ . Αφού μία ισομετρία καθορίζεται από τη δράση της σε τρία μη συνευθειακά σημεία, συμπεραίνουμε ότι η σ είναι στροφή γύρω από το p κατά 2θ . $\square$

Σημείωση. Δεδομένης μιας μεταφοράς $T_{\vec{v}}$, μπορούμε να τη γράψουμε ως σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς ευθείες κάθετες στο $\vec{v}$ και σε απόσταση $\frac{|\vec{v}|}{2}$. Η φορά της μεταφοράς εξαρτάται από τη σειρά των ανακλάσεων. Ομοίως, μια στροφή $R_{\theta,p}$ μπορεί να εκφραστεί ως σύνθεση δύο ανακλάσεων ως προς ευθείες που διέρχονται από το p και σχηματίζουν γωνία $\frac{\theta}{2}$. Η σειρά των ανακλάσεων καθορίζει αν η στροφή είναι κατά θ ή $-\theta$.

Απόδειξη Λήμματος 2.5. Έστω G μία τέτοια ομάδα. Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση όπου όλες οι ισομετρίες στο G είναι άμεσες. Τότε πρέπει να είναι όλες στροφές γύρω από το p , αφού οι μεταφορές δεν μπορούν να σταθεροποιούν το p . Έστω ϕ η μικρότερη από τις γωνίες στροφής κάθε στοιχείου του G .

Ισχυριζόμαστε ότι κάθε στοιχείο του G είναι της μορφής $R_{\phi,p}^i$. Έστω ότι δεν ισχύει αυτό. Τότε υπάρχει μία στροφή $R_{a,p} \in G$ που δεν είναι δύναμη του $R_{\phi,p}$ για κανένα ακέραιο i . Άρα $a \neq i\phi$ για κάθε $i = 0, 1, \dots, n-1$. Τότε υπάρχει j τέτοιο ώστε $j\phi < a < (j+1)\phi$ για κάποιο $j = 0, 1, \dots, n-1$. Άρα η σύνθεση $R_{a,p} \circ R_{\phi,p}^{-j}$ είναι στροφή στο G με γωνία μικρότερη της ϕ , άτοπο. Συνεπώς όλα τα στοιχεία του G είναι της μορφής $R_{\phi,p}^i$.

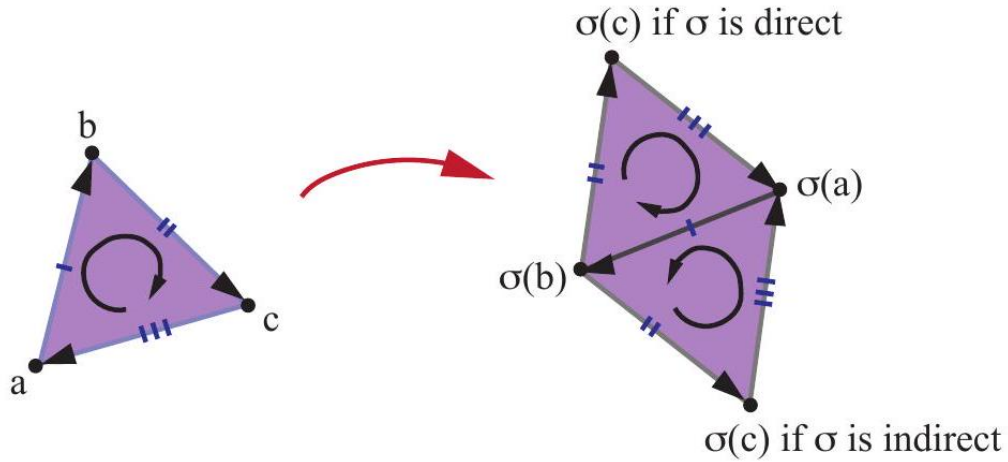
Αφού η ομάδα είναι πεπερασμένη, υπάρχει n τέτοιο ώστε $R_{\phi,p}^n = R_{0,p} = I$. Άρα $\phi = \frac{2\pi}{n}$ και $G = C_n$.

Τώρα, αν υπάρχουν έμμεσες ισομετρίες στο G , τότε πρέπει να υπάρχει τουλάχιστον μία ανάκλαση F_L , αφού οι ολισθανακλάσεις δεν έχουν σταθερό σημείο. Αν αυτή

η ανάκλαση είναι το μόνο μη τετριμμένο στοιχείο της ομάδας, τότε $G = D_1$.

Έστω H το σύνολο όλων των στροφών του G . Είναι υποομάδα του G και άρα, όπως αποδείχθηκε, είναι C_n . Η προσθήκη της ανάκλασης $F_{\mathcal{L}}$ δημιουργεί την υποομάδα D_n της G .

Αν αυτή η υποομάδα D_n δεν είναι όλο το G , τότε υπάρχει άλλη ανάκλαση $F_{\mathcal{L}'}$ που δεν ανήκει στην D_n . Όμως τότε $F_{\mathcal{L}'} \circ F_{\mathcal{L}}$ είναι στροφή (Λήμμα 2.7) και όλες οι στροφές ανήκουν στην C_n , άρα $F_{\mathcal{L}'} \circ F_{\mathcal{L}} = R_{2\pi/n,p}^i$ για κάποιο i και συνεπώς $F_{\mathcal{L}'} = R_{2\pi/n,p}^i \circ F_{\mathcal{L}} \in D_n$, άτοπο. $\square$



Σχήμα 2.19: Η απεικόνιση σε δύο σημεία και το αν η ισομετρία είναι άμεση ή έμμεση καθορίζουν την ισομετρία.

Τώρα θα θέλαμε να προσδιορίσουμε όλες τις δυνατότητες για πεπερασμένες ομάδες συμμετρίας πλακιδίων. Αλλά πρώτα, χρειαζόμαστε ένα λήμμα που μας επιτρέπει να ξέρουμε τι συμβαίνει όταν παίρνουμε τη σύνθεση μιας στροφής με μια άλλη.

Λήμμα 2.8. Αν $R_{\partial,p}$ και $R_{\phi,q}$ είναι στροφές με $p \neq q$, τότε η $\sigma = R_{\partial,p} \circ R_{\phi,q} \circ R_{-\partial,p}$ είναι στροφή γύρω από το σημείο $s = R_{\partial,p}(q)$ κατά γωνία ϕ .

Απόδειξη. Έστω d η απόσταση μεταξύ p και q . Εφόσον οι στροφές είναι άμεσες ισομετρίες, η σ είναι επίσης άμεση. Αρκεί να δούμε τι κάνει σε δύο σημεία.

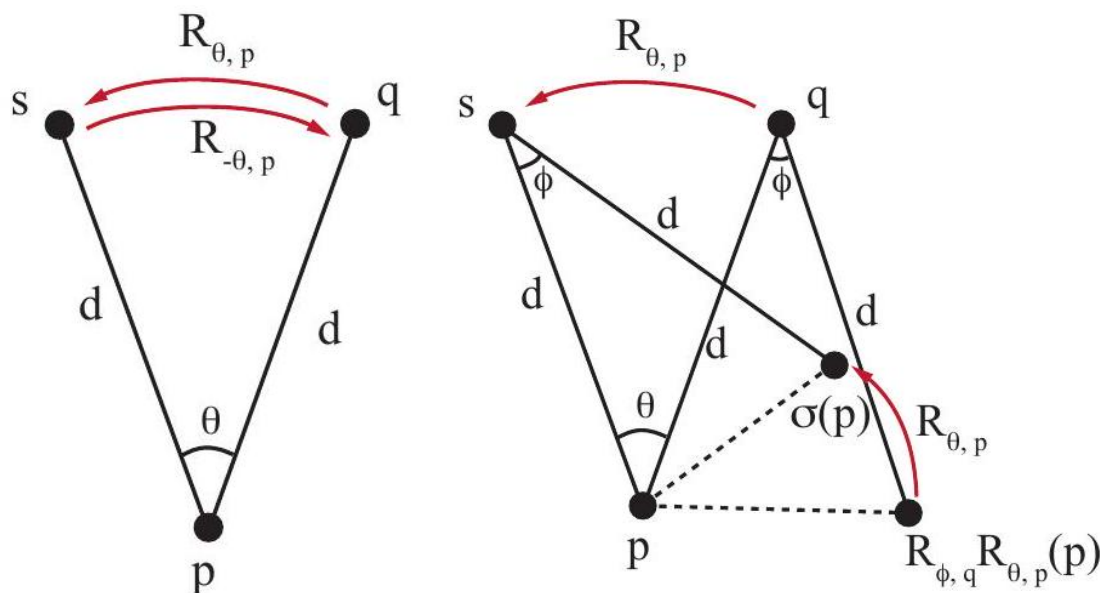
Αρχικά, για το σημείο s :

$$\sigma(s) = R_{\partial,p} \circ R_{\phi,q} \circ R_{-\partial,p}(s) = R_{\partial,p} \circ R_{\phi,q}(q) = R_{\partial,p}(q) = s$$

Άρα η σ σταθεροποιεί το s . Συνεπώς είναι είτε η ταυτοτική ισομετρία είτε στροφή. Ας δούμε τι κάνει στο p :

$$\sigma(p) = R_{\partial,p} \circ R_{\phi,q} \circ R_{-\partial,p}(p) = R_{\partial,p} \circ R_{\phi,q}(p)$$

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.20, η $R_{\phi,q}$ στρέφει το p γύρω από το q κατά ϕ , και μετά η $R_{\theta,p}$ στρέφει το q στο s , και άρα στρέφει το $R_{\phi,q}(p)$ γύρω από το s κατά θ . Συνεπώς η σ είναι στροφή γύρω από το s κατά ϕ . $\square$



Σχήμα 2.20: Σύθεση δύο στροφών δίνει στροφή

Αυτό το τελευταίο λήμμα θα είναι χρήσιμο για τον προσδιορισμό των ομάδων συμμετρίας των πλακιδίων. Ωστόσο, επειδή όλα τα πλακίδια είναι τοπολογικοί δίσκοι, οι οποίοι επομένως είναι συμπαγείς (δηλαδή κλειστοί και φραγμένοι), θα αποδείξουμε ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2. Αν $\mathcal{Q}$ είναι συμπαγές σύνολο στο επίπεδο με πεπερασμένη ομάδα συμμετριών $S(\mathcal{Q})$ τότε αυτή είναι της μορφής C_n ή D_n για κάποιο $n \geq 1$.

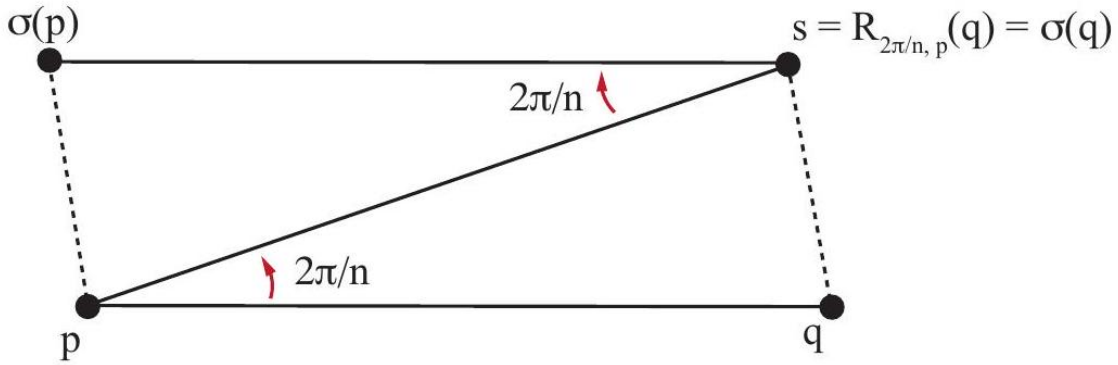
Απόδειξη. Καμία μεταφορά ή ολισθαίνουσα συμμετρία δεν μπορεί να περιλαμβάνεται στο $S(\mathcal{Q})$, διότι τότε η ομάδα θα ήταν άπειρη και το $\mathcal{Q}$ θα μεταφερόταν έξω από τον εαυτό του.

Άρα οι ισομετρίες στο $S(\mathcal{Q})$ είναι μόνο στροφές και ανακλάσεις.

Πρώτα αποδεικνύουμε ότι όλες οι στροφές στο $S(\mathcal{Q})$ πρέπει να έχουν κοινό σταθερό σημείο. Έστω προς άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει. Έστω $R_{2\pi/n,p}$ και $R_{2\pi/m,q}$ με $p \neq q$. Από το Λήμμα 2.8, η σύθεση των στροφών δίνει στροφή γύρω από το $s = R_{2\pi/n,p}(q) \neq p$. Τότε η συμμετρία $\sigma = R_{2\pi/n,s} \circ R_{2\pi/n,p}$ είναι μεταφορά, βλ. Σχήμα 2.21, άτοπο.

Άρα όλες οι στροφές έχουν κοινό σταθερό σημείο και άρα από το Λήμμα 2.5 σχηματίζουν την κυκλική ομάδα C_n τάξης n για κάποιο $n \geq 1$.

Αν υπάρχουν ανακλάσεις, πρέπει να περνούν από το κέντρο στροφής, αλλιώς θα υπήρχαν δύο κέντρα, άτοπο. Άρα προκύπτει η διεδρική ομάδα D_n .



Σχήμα 2.21: Η σύνθεση $\sigma = R_{-2\pi/n, s} \circ R_{2\pi/n, p}$ είναι μεταφορά.

Αν δεν υπάρχουν στροφές, τότε αφού από το Λήμμα 2.7 δύο τεμνόμενες ευθείες ανάκλασης δίνουν στροφή, όλες οι ανακλάσεις πρέπει να είναι σε παράλληλες ευθείες, αλλά δύο τέτοιες δίνουν μια μεταφορά που δεν την επιτρέπουμε. Άρα το πολύ μία ανάκλαση, και $S(Q) = D_1$. $\square$

Συζητήσαμε υποθέτοντας πεπερασμένη ομάδα συμμετριών. Αν όμως Q είναι δίσκος με κέντρο p , τότε κάθε στροφή ή ανάκλαση μέσω ευθείας που περνά από το p είναι συμμετρία. Άρα η ομάδα συμμετρίας είναι υπεραριθμήσιμη: το D_∞ .

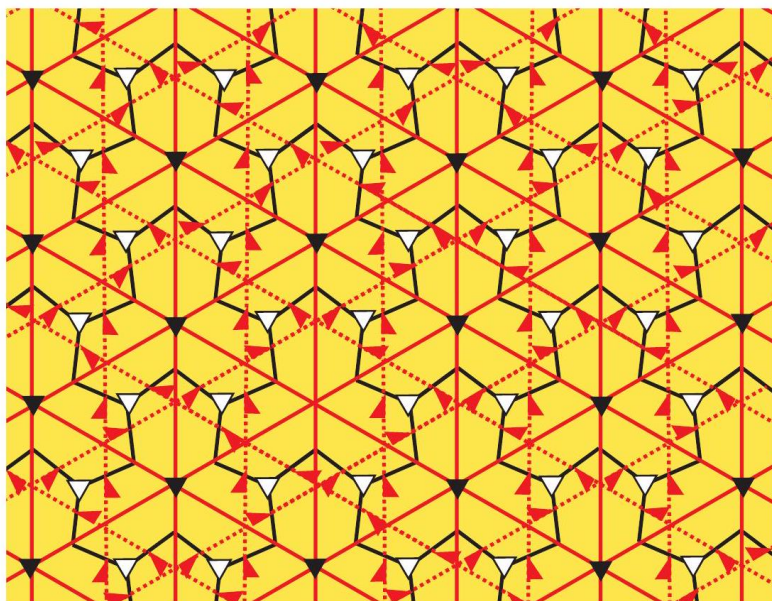
Σημείωση. Το επιχείρημα του θεωρήματος δείχνει επίσης ότι όλες οι συμμετρίες άπειρης ομάδας συμμετριών συμπαγούς συνόλου έχουν κοινό σταθερό σημείο και είναι είτε στροφές γύρω από αυτό είτε ανανκλάσεις μέσω ευθείας που περνά από αυτό.

2.3 Συμμετρίες Πλακοστρώσεων

Ορισμός 2.18. Λέμε **συμμετρία μιας πλακόστρωσης** $\mathcal{T}$ μια ισομετρία σ του Ευκλείδειου επιπέδου που απεικονίζει κάθε πλακίδιο της $\mathcal{T}$ σε ένα ταυτόσημο πλακίδιο της $\mathcal{T}$. Η ομάδα συμμετρίας της πλακόστρωσης συμβολίζεται με $S(\mathcal{T})$.

Το ότι το σύνολο των συμμετριών $S(\mathcal{T})$ μιας πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ αποτελεί ομάδα αποδεικνύεται ακριβώς όπως και το ότι η ομάδα συμμετρίας ενός σχήματος Q είναι ομάδα. Για κάθε συμμετρία της ομάδας υπάρχει και η αντίστροφη συμμετρία, η οποία λειτουργεί ως το αντίστροφο στοιχείο της ομάδας.

Για παράδειγμα, η μονοεδρική πλακόστρωση στο Σχήμα 2.22 διαθέτει ποικιλία συμμετριών, συμπεριλαμβανομένων στροφών, μεταφορών, ανακλάσεων και ολισθανακλάσεων. Κέντρα στροφής τάξης 3 σημειώνονται με μικρά τρίγωνα: γεμάτα όταν αντιστοιχούν σε υποομάδα συμμετρίας D_3 που σταθεροποιεί το σημείο, και κενά όταν αντιστοιχούν σε υποομάδα C_3 . Οι ανακλάσεις απεικονίζονται ως κόκκινες ευθείες χωρίς σήμανση, ενώ οι ολισθανακλάσεις ως διακεκομμένες κόκκινες ευθείες με μισά βέλη.



Σχήμα 2.22: Μια πλακόστρωση με ποικιλία συμμετριών.

Θα θέλαμε να κατανοήσουμε τις δυνατές μορφές που μπορεί να λάβουν οι ομάδες συμμετρίας των πλακοστρώσεων. Ας ξεκινήσουμε δείχνοντας ότι συμπεριφέρονται με “καλό” τρόπο.

Ορισμός 2.19. Δοθέντος ενός συνόλου H ισομετριών και ενός σημείου p , η τροχιά του p είναι το σύνολο όλων των εικόνων του p υπό τις ισομετρίες του H . Δηλαδή, η τροχιά του p , που συμβολίζεται με $\text{orb}_H(p)$, δίνεται από τον τύπο

$$\text{orb}_H(p) = \{\sigma(p) \mid \sigma \in H\}.$$

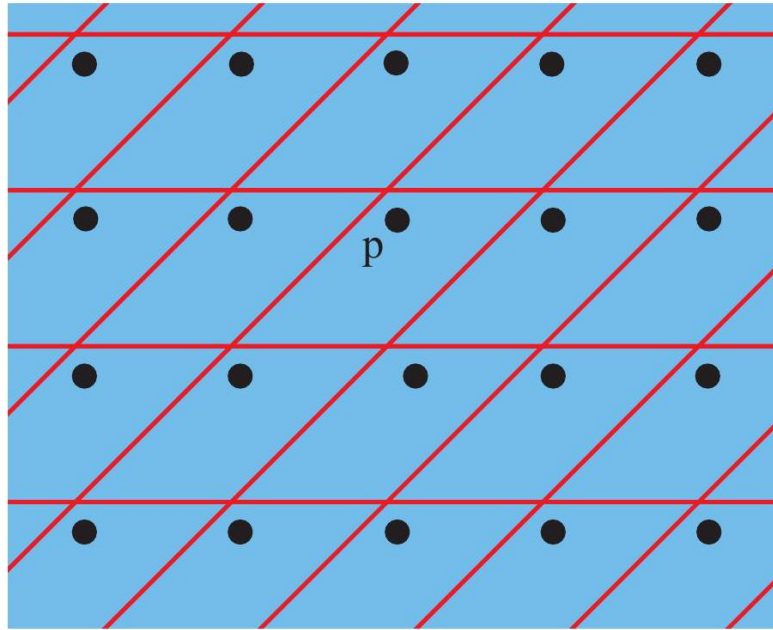
Για παράδειγμα, έστω η υποομάδα H που αποτελείται από τις μεταφορές στην ομάδα συμμετρίας της πλακόστρωσης στο Σχήμα 2.23. Για ένα σημείο p , παρατηρούμε ότι η $\text{orb}_H(p)$ περιέχει ένα σημείο σε κάθε πλακίδιο.

Για τις ομάδες συμμετρίας πλακοστρώσεων, θα δείξουμε ότι οι τροχίες δεν μπορούν να έχουν σημεία συσσώρευσης.

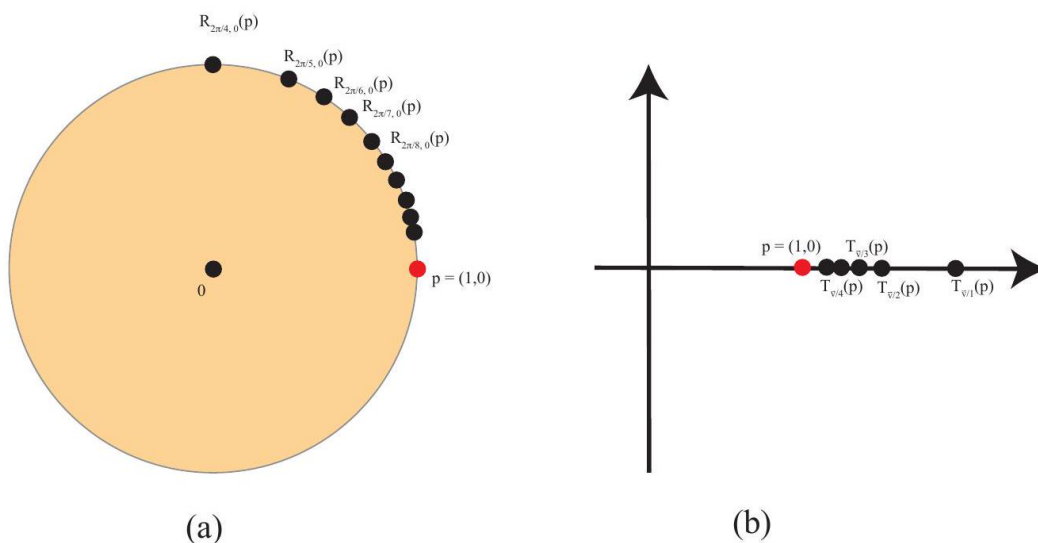
Ορισμός 2.20. Ένα σύνολο ισομετριών H είναι διακριτό αν η τροχιά $\text{orb}_H(p)$ δεν έχει σημεία συσσώρευσης για κάθε $p \in \mathbb{E}^2$.

Για παράδειγμα, έστω $H = \{R_{2\pi/n,p} : n = 1, 2, \dots\}$. αυτό το σύνολο δεν είναι διακριτό. Το βλέπουμε στο Σχήμα 2.24(α), καθώς, αν πάρουμε το σημείο $p = (1, 0)$, τότε η $\text{orb}_H(p)$ περιέχει σημεία που συγκλίνουν στο p (σε κόκκινο). Παρομοίως, αν $\bar{v} = \langle 1, 0 \rangle$, τότε το σύνολο $J = \{T_{\bar{v}/n} \mid n = 1, 2, \dots\}$ δεν είναι διακριτό, καθώς — όπως φαίνεται στο Σχήμα 2.24(β) — το p είναι σημείο συσσώρευσης της $\text{orb}_J(p)$.

Λήμμα 2.9. Η υποομάδα συμμετριών μιας πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ που διατηρεί σταθερό ένα δεδομένο σημείο p είναι της μορφής C_n ή D_n για κάποιο $n = 1, 2, \dots$.



Σχήμα 2.23: Η τροχιά του σημείου p υπό τις μεταφορικές συμμετρίες περιέχει ένα σημείο σε κάθε πλακίδιο.



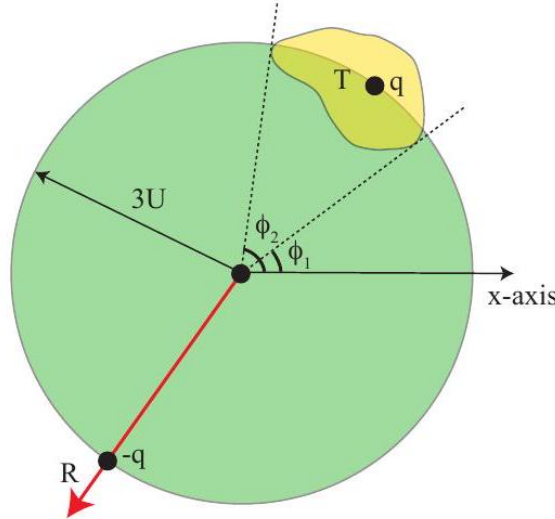
Σχήμα 2.24: (α) Η τροχιά στροφών συγκλίνει στο p . (β) Η τροχιά μεταφορών επίσης συγκλίνει στο p .

Απόδειξη. Σύμφωνα με το Λήμμα 2.5, αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο των συμμετριών που διατηρούν το p σταθερό δεν είναι άπειρο. Έστω λοιπόν ότι υπάρχουν άπειρες τέτοιες συμμετρίες. Εφόσον οι μοναδικές ισομετρίες που διατηρούν σταθερό ένα σημείο p είναι οι στροφές ως προς το p και οι ανακλάσεις ως προς ευθεία που περνά από το p , η Αρχή του Περιστερώνα υποδεικνύει ότι ένα από αυτά τα δύο σύνολα είναι άπειρο. Όμως άπειρες ανακλάσεις παράγουν άπειρες στροφές, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχουν άπειρες στροφές $R_1, R_2, \dots$, όλες με κέντρο

το p . Για ευκολία, ταυτίζουμε το p με την αρχή των αξόνων 0 .

Έστω $\mathcal{P}$ το πρωτοσύνολο της πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ και d_p η μέγιστη διάμετρος οποιουδήποτε πρωτοπλακιδίου στο $\mathcal{P}$. Θεωρούμε τον δίσκο D με κέντρο το 0 και ακτίνα $3d_p$.

Έστω T ένα πλακίδιο που τέμνει τον κύκλο $C = \partial D$, και q σημείο του $T \cap C$, όπως στο Σχήμα 2.25. Επειδή το T έχει διάμετρο το πολύ d_p , δεν μπορεί να περιέχει την αρχή των αξόνων.



Σχήμα 2.25: Το διάστημα γωνιών που αντιστοιχεί σε πλακίδιο T .

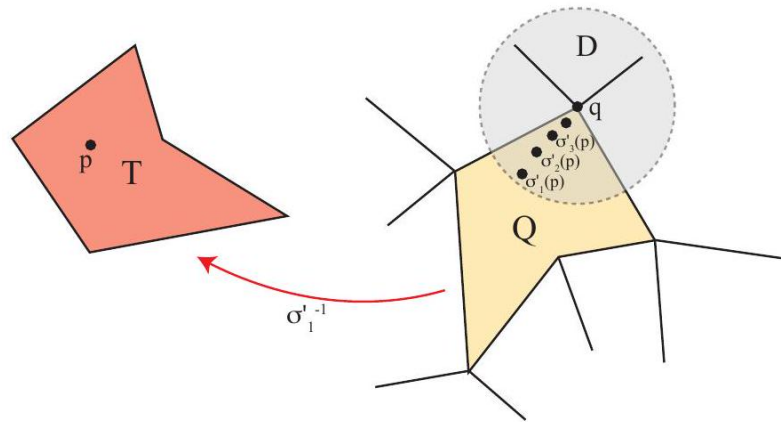
Έστω R η ημιευθεία από την αρχή προς το $-q$. Εφόσον κάθε σημείο του T απέχει το πολύ d_p από το q , και κάθε σημείο της R απέχει τουλάχιστον $3d_p$, το T δεν μπορεί να τέμνει την R . Άρα υπάρχουν γωνίες ϕ_1 και ϕ_2 τέτοιες ώστε όλα τα σημεία του T έχουν γωνιακή θέση εντός του διαστήματος $[\phi_1, \phi_2]$, και κανένα μικρότερο διάστημα δεν καλύπτει το T . Τότε κάθε μη τετριμμένη στροφή μεταφέρει το T σε ένα διαφορετικό πλακίδιο. Όμως τότε ο δίσκος D τέμνει άπειρα πλακίδια, άτοπο. $\square$

Θεώρημα 2.3. Η ομάδα συμμετρίας $S(\mathcal{T})$ μιας πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ είναι διακριτή.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε το αντίθετο. Τότε υπάρχει πλακόστρωση $\mathcal{T}$ τέτοια ώστε η ομάδα συμμετρίας $S(\mathcal{T})$ να μην είναι διακριτή. Τότε υπάρχει σημείο p τέτοιο ώστε η τροχιά $\text{orb}_{S(\mathcal{T})}(p)$ να έχει σημείο συσσώρευσης q . Άρα υπάρχει άπειρη ακολουθία σημείων $(\sigma_1(p), \sigma_2(p), \dots)$ της τροχιάς που συγκλίνει στο q .

Έστω T ένα πλακίδιο που περιέχει το p . Έστω $\varepsilon > 0$. Ο ανοικτός δίσκος ακτίνας ε με κέντρο το q περιέχει όλα τα σημεία της τροχιάς εκτός από κάποια, πεπερασμένα στο πλήθος. Κάθε τέτοιο σημείο $\sigma_i(p)$ αντιστοιχεί σε μια συμμετρία σ_i που μεταφέρει το T σε κάποιο από τα πεπερασμένα το πλήθος πλακίδια που τέμνουν τον δίσκο βλ. Σχήμα 2.26. Επειδή τα πλακίδια που τέμνουν τον δίσκο είναι πεπερασμένα, η Αρχή του Περιστερώνα εγγυάται ότι άπειρες συμμετρίες στέλνουν το T στο ίδιο πλακίδιο

$\mathcal{Q}$, έστω η υποακολουθία $(\sigma'_1, \sigma'_2, \dots)$. Εφόσον τα πλακίδια είναι κλειστά, το q ανήκει στο $\mathcal{Q}$.



Σχήμα 2.26: Απόδειξη ότι η ομάδα συμμετρίας μιας πλακοστρώσεως είναι διακριτή.

Θέλουμε να αντικαταστήσουμε αυτή την υποακολουθία με συμμετρίες που διατηρούν το $\mathcal{Q}$ σταθερό. Αφού η σ'_1 στέλνει το T στο $\mathcal{Q}$, η αντίστροφή της στέλνει το $\mathcal{Q}$ στο T . Οπότε θέτουμε $\gamma_i = \sigma'_i \circ \sigma_1^{-1}$. Αυτές είναι άπειρες διακεκριμένες συμμετρίες που στέλνουν το $\mathcal{Q}$ στο εαυτό του. Κάθε τέτοια συμμετρία πρέπει να μεταφέρει τις κορυφές του $\mathcal{Q}$, που είναι πεπερασμένες. Άρα, μόνο πεπερασμένες δυνατές μεταφορές υπάρχουν. Η Αρχή του Περιστερώνα συνεπάγεται ότι άπειρες συμμετρίες έχουν ίδια δράση στις κορυφές. Αφού κάθε συμμετρία είναι είτε άμεση είτε έμμεση, και το $\mathcal{Q}$ έχει τουλάχιστον δύο κορυφές (αποδεικνύεται), τότε άπειρες συμμετρίες ταυτίζονται σε τουλάχιστον δύο σημεία (τις κορυφές) και είναι του ίδιου είδους (άμεσες ή έμμεσες). Αφού η ισομετρία καθορίζεται από την δράση της σε δύο διακριτά σημεία και το είδος της, αυτές οι συμμετρίες ταυτίζονται, που είναι άτοπο αφού η συλλογή ήταν άπειρη και διακεκριμένη. $\square$

2.4 Οι πιθανές ομάδες συμμετρίας πλακοστρώσεων

Έχουμε δει ότι οι ομάδες συμμετρίας των πλακιδίων είναι αρκετά περιορισμένες. Το ίδιο ισχύει και για τις πλακοστρώσεις. Σε αυτήν την ενότητα καθορίζουμε όλες τις πιθανές ομάδες συμμετρίας πλακοστρώσεων.

Το πρόβλημα προσδιορισμού των ομάδων συμμετρίας τέθηκε αρχικά από χημικούς, οι οποίοι χρειαζόταν να γνωρίζουν τις πιθανές ομάδες συμμετρίας τρισδιάστατων κρυστάλλων. Η ταξινόμηση αυτών των κρυσταλλογραφικών ομάδων έγινε ένα σημαντικό μαθηματικό πρόβλημα.

Το 1891, ο Evgraf Fedorov (1853–1919) προσδιόρισε τις διοδιάστατες κρυσταλλογραφικές ομάδες, τις οποίες θα αποκαλούμε συνοπτικά ομάδες ταπετσαρίας, αποδεικνύοντας ότι υπάρχουν ακριβώς 17 τέτοιες ομάδες. Προηγουμένως, ο Fedorov

είχε δείξει ότι υπάρχουν 230 κρυσταλλογραφικές ομάδες για τη διάσταση τρία, λύνοντας πρώτα αυτό το πρόβλημα λόγω της εφαρμογής του στους κρυστάλλους.

Στο πρώτο μέρος του Ερωτήματος 18 από τη λίστα των προβλημάτων του το 1900, ο Hilbert ρώτησε: «Υπάρχουν πεπερασμένες κρυσταλλογραφικές ομάδες σε κάθε διάσταση;» Το ερώτημα αυτό απαντήθηκε θετικά από τον Ludwig Bieberbach το 1910. Ωστόσο, η απόδειξη δεν ήταν κατασκευαστική, επομένως δεν απαντούσε στο ερώτημα πόσες είναι σε κάθε διάσταση. Μόλις το 1973, με τη βοήθεια του υπολογιστή, προσδιορίστηκε ότι στη διάσταση τέσσερα υπάρχουν 4783 κρυσταλλογραφικές ομάδες. Το 2000, ο αριθμός για τη διάσταση πέντε προσδιορίστηκε σε 222 018, και το 2012, για τη διάσταση έξι, βρέθηκε ότι υπάρχουν 28 927 922.

Ανοικτά Ερωτήματα. *Να προσδιοριστεί ο αριθμός των κρυσταλλογραφικών ομάδων για κάθε διάσταση μεγαλύτερη του έξι.*

Όσο ενδιαφέρουσες κι αν είναι οι ομάδες υψηλότερων διαστάσεων, θα περιοριστούμε στη διάσταση δύο. Αρχικά παρέχουμε μια σημειογραφία για τις συμμετρίες που μπορούν να εμφανιστούν σε μια πλακόστρωση του επιπέδου, όπως στο Σχήμα 2.27. Παραθέτουμε μόνο κέντρα περιστροφής τάξης 2, 3, 4 και 6. Θα δούμε σύντομα ότι αυτά επαρκούν για οποιαδήποτε πλακόστρωση με μεταφορικές συμμετρίες.

Ορισμός 2.21. Ένα διάγραμμα ομάδας για την ομάδα συμμετρίας $S(\mathcal{T})$ μιας πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ είναι ένα σύνολο συμβόλων που εμφανίζονται στην πλακόστρωση και αντιπροσωπεύουν τις συμμετρίες της $S(\mathcal{T})$.

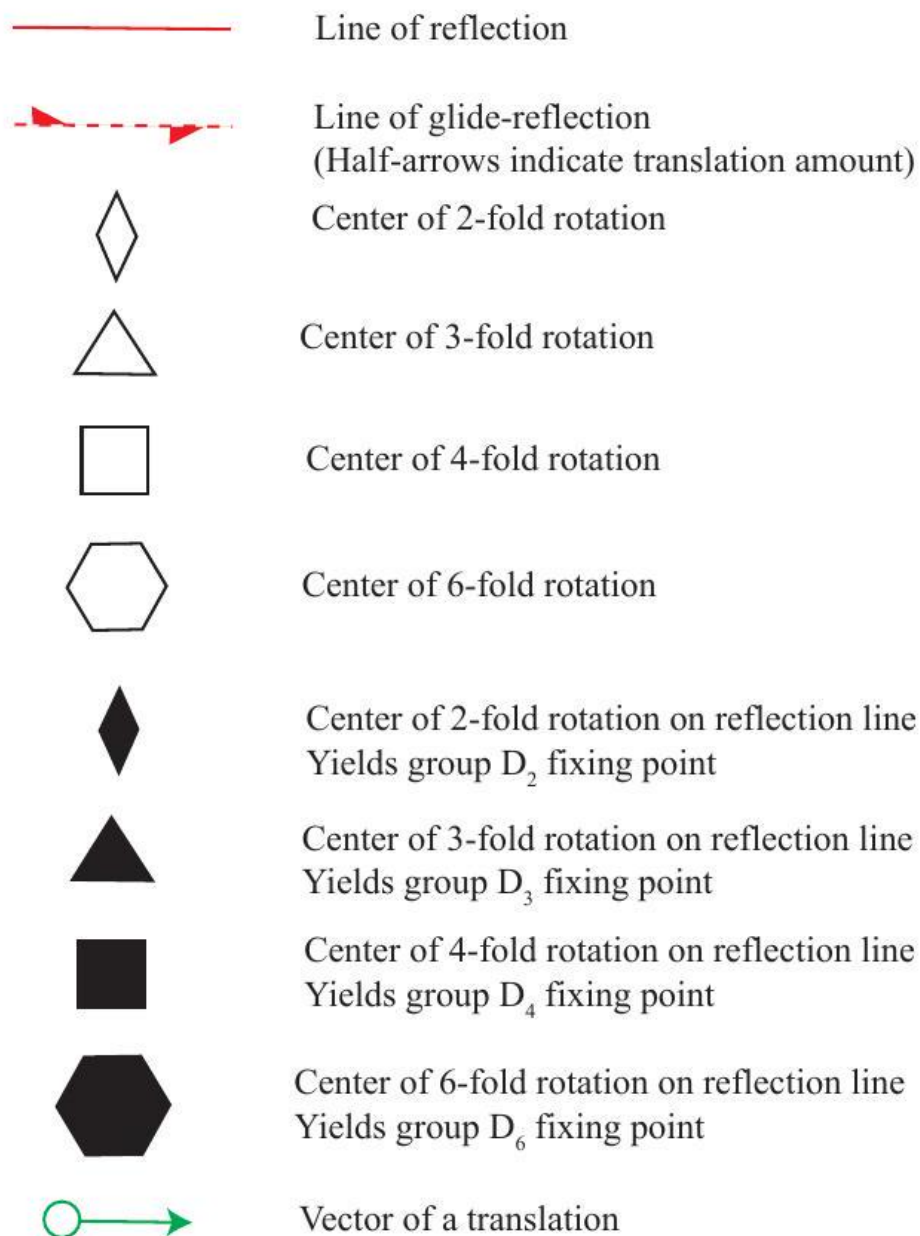
Το διάγραμμα ομάδας μιας πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ πρέπει να διατηρείται από κάθε συμμετρία της πλακόστρωσης. Αν υπάρχει ένα σύμβολο συμμετρίας s σε ένα σημείο p του επιπέδου, τότε μια συμμετρία σ που απεικονίζει την $\mathcal{T}$ στον εαυτό της και είναι ισομετρία, θα απεικονίσει το p στο $\sigma(p)$, το οποίο πρέπει να έχει τις ίδιες συμμετρίες και άρα τα ίδια σύμβολα συμμετρίας.

Θα θέλαμε να μπορούμε να συγκρίνουμε τα διαγράμματα ομάδων διαφορετικών πλακοστρώσεων. Με τον όρο αφινικός μετασχηματισμός εννοούμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό ακολουθούμενο από μια ενδεχόμενη μεταφορά. Μπορούμε να γράψουμε έναν τέτοιο μετασχηματισμό που απεικονίζει το $p = (x, y)$ στο $q = (x', y')$ ως:

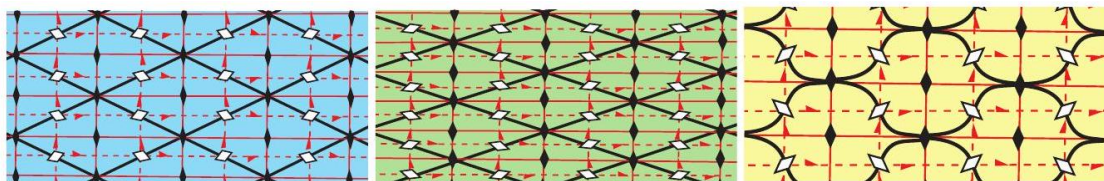
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$$

όπου η ορίζουσα $ad - bc \neq 0$.

Ορισμός 2.22. Τα διαγράμματα ομάδων για τις ομάδες συμμετρίας $S(\mathcal{T}_1)$ και $S(\mathcal{T}_2)$ των πλακοστρώσεων $\mathcal{T}_1$ και $\mathcal{T}_2$ είναι ισομορφικά αν υπάρχει αφινικός μετασχηματισμός που απεικονίζει το διάγραμμα ομάδας της $\mathcal{T}_1$ σε αυτό της $\mathcal{T}_2$. Όταν δύο διαγράμματα ομάδων είναι ισομορφικά με αυτήν την έννοια, λέμε ότι οι δύο πλακοστρώσεις είναι του ίδιου τύπου συμμετρίας.



Σχήμα 2.27: Σημειογραφία για συμμετρίες πλακοστρώσεων.



Σχήμα 2.28: Τρία ισομορφικά διαγράμματα ομάδων, τα οποία σχετίζονται με αφινικούς μετασχηματισμούς. Όλες οι πλακοστρώσεις είναι του ίδιου τύπου συμμετρίας.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 2.28 βλέπουμε τρεις πλακοστρώσεις για τις οποίες υπάρχει αφινικός μετασχηματισμός που απεικονίζει οποιοδήποτε διάγραμμα ομάδας σε οποιοδήποτε άλλο. Για παράδειγμα, ο μετασχηματισμός από την πρώτη στη δε-

ύτερη απλώς συμπίεζει κάθετα. Δεν υπάρχει ουσιαστική διάκριση μεταξύ των τριών διαγραμμάτων ομάδων, επομένως λέμε ότι είναι ισομορφικά. Όμως, να σημειώσουμε ότι ο αφινικός μετασχηματισμός δεν χρειάζεται να απεικονίζει πλακόστρωση σε πλακόστρωση, αρκεί να απεικονίζει διάγραμμα ομάδας σε διάγραμμα ομάδας.

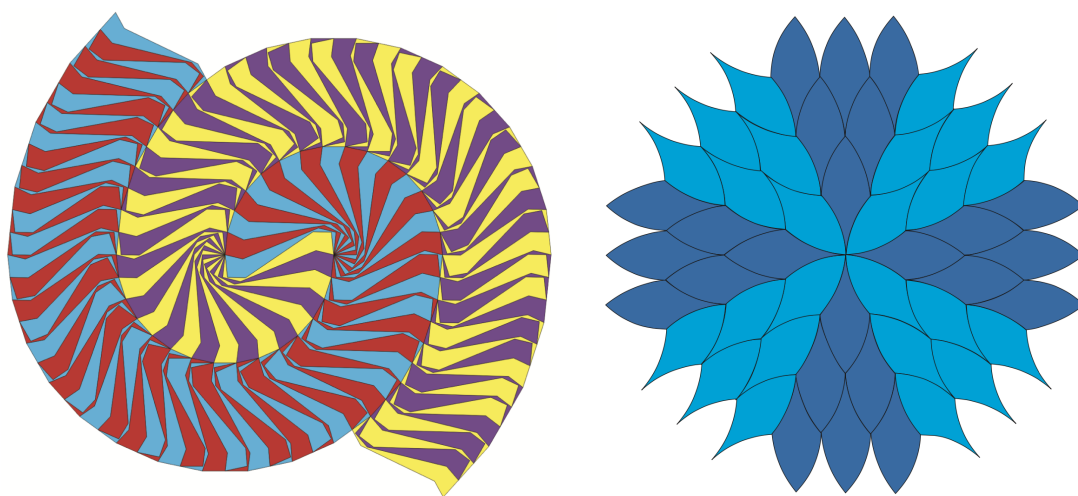
Όταν δύο διαγράμματα ομάδων είναι ισομορφικά με την έννοια που μόλις ορίσαμε, τότε και οι αντίστοιχες ομάδες συμμετρίας είναι ισομορφικές με την έννοια της Θεωρίας Ομάδων. Όμως το αντίστροφο δεν ισχύει. Για παράδειγμα, μια ομάδα συμμετρίας που αποτελείται μόνο από την ταυτότητα και μια στροφή κατά π είναι ισομορφική με την ομάδα που αποτελείται από την ταυτότητα και μια ανάκλαση, καθώς και οι δύο έχουν ένα μη τριμμένο στοιχείο του οποίου το τετράγωνο είναι η ταυτότητα. Όμως δεν είναι ισομορφικές με τη νέα έννοια, καθώς τα διαγράμματα ομάδων τους έχουν διαφορετικά σύμβολα. Κανένας αφινικός μετασχηματισμός δεν μπορεί να μετασχηματίσει το ένα στο άλλο.

Τώρα είμαστε έτοιμοι να καθορίσουμε τα δυνατά διαγράμματα ομάδων για ομάδες συμμετρίας πλακοστρώσεων, έως ισομορφισμό. Εξετάζουμε ξεχωριστά τρεις περιπτώσεις για την $S(\mathcal{T})$, όπου:

1. δεν υπάρχουν μεταφορές,
2. υπάρχουν μόνο παράλληλες μεταφορές και
3. υπάρχουν μη παράλληλες μεταφορές.

Ομάδες συμμετρίας χωρίς μεταφορές

Παραδείγματα πλακοστρώσεων χωρίς μεταφορές εμφανίζονται στα Σχήματα 2.29. Η πρώτη έχει τριμμένη ομάδα συμμετρίας, ενώ η δεύτερη έχει ομάδα συμμετρίας D_8 .

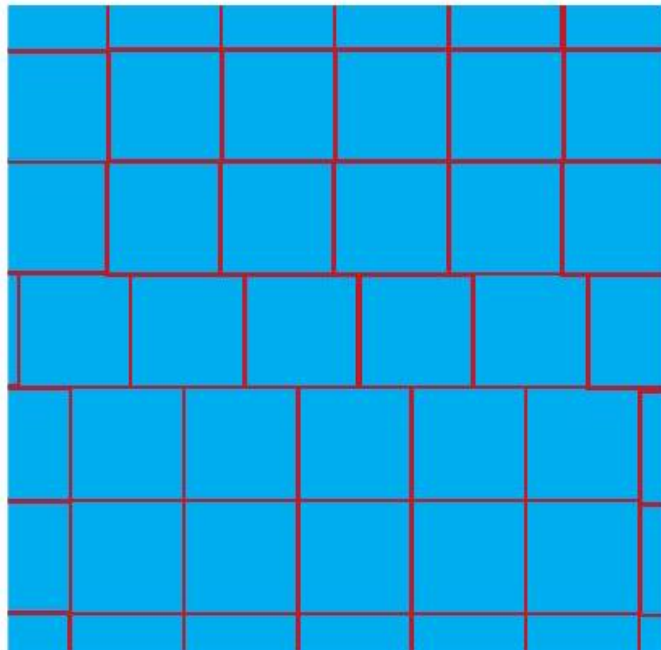


Σχήμα 2.29: Παραδείγματα πλακοστρώσεων χωρίς μεταφορική συμμετρία

Λήμμα 2.10. Αν δεν υπάρχουν μεταφορές στο $S(\mathcal{T})$, τότε η ομάδα συμμετρίας της πλακοστρώσης πρέπει να είναι της μορφής C_n ή D_n για κάποιο $n \geq 1$.

Απόδειξη. Αυτή η απόδειξη μιμείται την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2, το οποίο δήλωνε ότι η πεπερασμένη ομάδα συμμετρίας ενός συμπαγούς συνόλου στο επίπεδο είναι είτε η C_n είτε η D_n . Όπως είδαμε εκεί, αν υπάρχει περισσότερο από ένα κέντρο περιστροφής p , μπορούμε να συνθέσουμε μία περιστροφή με μία άλλη για να πάρουμε μία μεταφορά, άτοπο. Επιπλέον, η ύπαρξη ευθείας ανάκλασης που δεν τέμνει το p συνεπάγεται δεύτερο κέντρο περιστροφής. Άρα, όλες οι ευθείες ανάκλασης πρέπει να διέρχονται από το p , και από το Λήμμα 2.9 έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Αποδεικνύεται ότι όλες οι δυνατές ομάδες συμμετρίας C_n και D_n χωρίς μεταφορές μπορούν να πραγματοποιηθούν από μονοεδρικές ακμή-προς-ακμή πλακοστρώσεις.



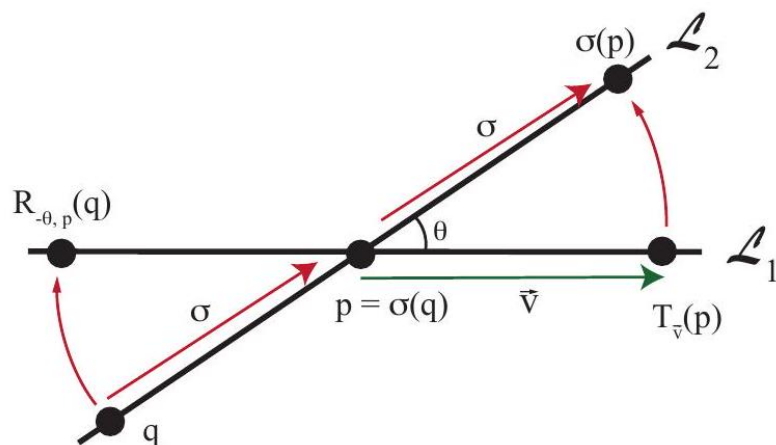
Σχήμα 2.30: Πλακόστρωση με μόνο παράλληλες μεταφορές.

Ομάδες συμμετρίας με μόνο παράλληλες μεταφορές

Ορισμός 2.23. Μια ομάδα συμμετρίας πλακοστρώσης που περιέχει μόνο παράλληλες μεταφορές ονομάζεται ομάδα ζωφόρου.

Ένα παράδειγμα πλακοστρώσης με τέτοια ομάδα συμμετρίας φαίνεται στο Σχήμα 2.30. Οι μόνες συμμετρίες της συγκεκριμένης πλακοστρώσης είναι οι μεταφορές, όλες στην οριζόντια διεύθυνση. Τις λέμε ομάδες ζωφόρου, καθώς αντιστοιχούν στις συμμετρίες διακοσμητικών ταινιών που συχνά εμφανίζονταν ως λωρίδες κατά μήκος της κορυφής ενός κτιρίου.⁴

⁴Η ζωφόρος, γνωστή και ως ζωοφόρος, είναι ένα διακοσμητικό και αρχιτεκτονικά σημαντικό στοιχείο-



Σχήμα 2.31: Η σύνθεση μιας μεταφοράς με στροφή κατά γωνία θ είναι μεταφορά κατά γωνία θ σε σχέση με την αρχική.

Λήμμα 2.11. Η σύνθεση μιας μεταφοράς με μία μη τετριμμένη στροφή κατά γωνία θ δίνει μία μεταφορά ίδιου μήκους κατά γωνία θ ως προς την αρχική διεύθυνση.

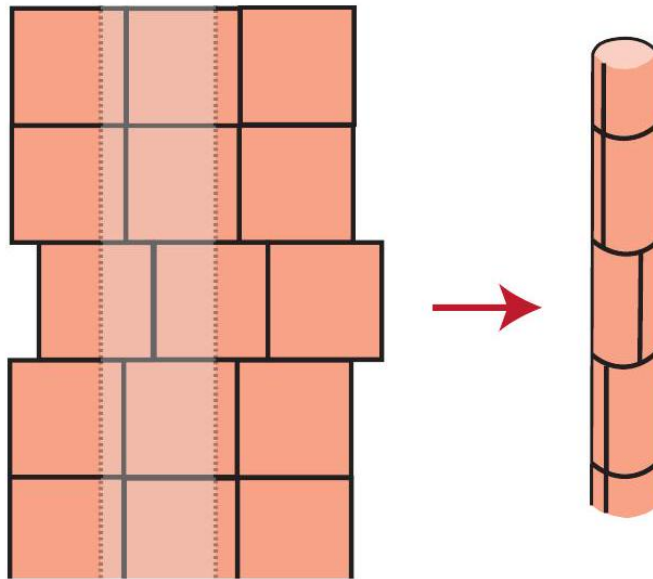
Απόδειξη. Έστω $T_{\vec{v}}$ μια μεταφορά και $R_{\theta,p}$ μια μη τετριμμένη στροφή. Δείχνουμε ότι η σύνθεση $\sigma = R_{\theta,p} \circ T_{\vec{v}} \circ R_{-\theta,p}$ είναι μεταφορά κατά γωνία θ ως προς την αρχική διεύθυνση.

Έστω $\mathcal{L}_1$ η ευθεία που περνά από το p και έχει διεύθυνση $\vec{v}$. Έστω $\mathcal{L}_2$ η ευθεία που σχηματίζει γωνία θ με την $\mathcal{L}_1$, όπως στο Σχήμα 2.31. Τότε η στροφή $R_{\theta,p}$ μεταφέρει την $\mathcal{L}_1$ στην $\mathcal{L}_2$. Εξετάζουμε τη δράση της σ στο p . Η $R_{-\theta,p}$ αφήνει το p αμετάβλητο, κατόπιν η $T_{\vec{v}}$ το μεταφέρει κατά απόσταση $|\vec{v}|$ πάνω στην $\mathcal{L}_1$ και τέλος η $R_{\theta,p}$ το στρέφει σε σημείο της $\mathcal{L}_2$ σε απόσταση $|\vec{v}|$ από το p .

Έστω τώρα q το σημείο στην $\mathcal{L}_2$ που βρίσκεται στην αντίθετη πλευρά του p και σε απόσταση $|\vec{v}|$. Η $R_{-\theta,p}$ το μεταφέρει σε σημείο της $\mathcal{L}_1$ σε απόσταση $|\vec{v}|$ από το p , η $T_{\vec{v}}$ το μετατοπίζει στο p και η $R_{\theta,p}$ το αφήνει αμετάβλητο. Άρα $\sigma(q) = p$. Συνεπώς, η σ είναι άμεση ισομετρία που δρα σαν μεταφορά με διάνυσμα που προκύπτει από την στροφή του $\vec{v}$ κατά γωνία θ . Άρα είναι όντως αυτή η μεταφορά. $\square$

Εξετάζουμε τώρα τις δυνατές περιπτώσεις για τις ομάδες ζωφόρου. Εφόσον όλες οι μεταφορές πρέπει να είναι παράλληλες, το Λήμμα 2.11 συνεπάγεται ότι δεν μπορούν να υπάρχουν στροφές με γωνία διαφορετική από π . Άρα οι μόνες μη τετριμμένες υποομάδες που διατηρούν σταθερό ένα σημείο είναι οι C_2 και D_1 ή D_2 .

ίο που συναντάται πάνω από το επιστύλιο στους αρχαίους ελληνικούς ναούς. Αποτελεί μια οριζόντια ζώνη η οποία συχνά κοσμείται με γλυπτές παραστάσεις, αν και όχι απαραίτητα, και διατρέχει περιμετρικά το κτήριο, προσδίδοντάς του ρυθμική ενότητα και αφηγηματική διάσταση. Ο ρόλος της υπερβαίνει τον διακοσμητικό, καθώς εντάσσεται στο ευρύτερο μορφολογικό και τυπολογικό σύστημα της ναοδομίας, και η χρήση της συνεχίστηκε σε διάφορες μορφές και σε μεταγενέστερες περιόδους της μνημειακής αρχιτεκτονικής. Ετυμολογικά, η λέξη δηλώνει ‘αυτό που φέρει ζωή’, υποδηλώνοντας τον αφηγηματικό ή συμβολικό χαρακτήρα της.



Σχήμα 2.32: Αναπαράσταση ομάδας ζωφόρου πάνω σε άπειρο κατακόρυφο κύλινδρο.

Οι άξονες ανάκλασης πρέπει να είναι είτε παράλληλοι είτε κάθετοι προς τη διεύθυνση μεταφοράς, ώστε να μην παραχθούν μη παράλληλες μεταφορές. Μπορεί να υπάρχει το πολύ ένας άξονας ανάκλασης παράλληλος προς τη διεύθυνση μεταφοράς, αλλιώς θα είχαμε μη παράλληλες μεταφορές.

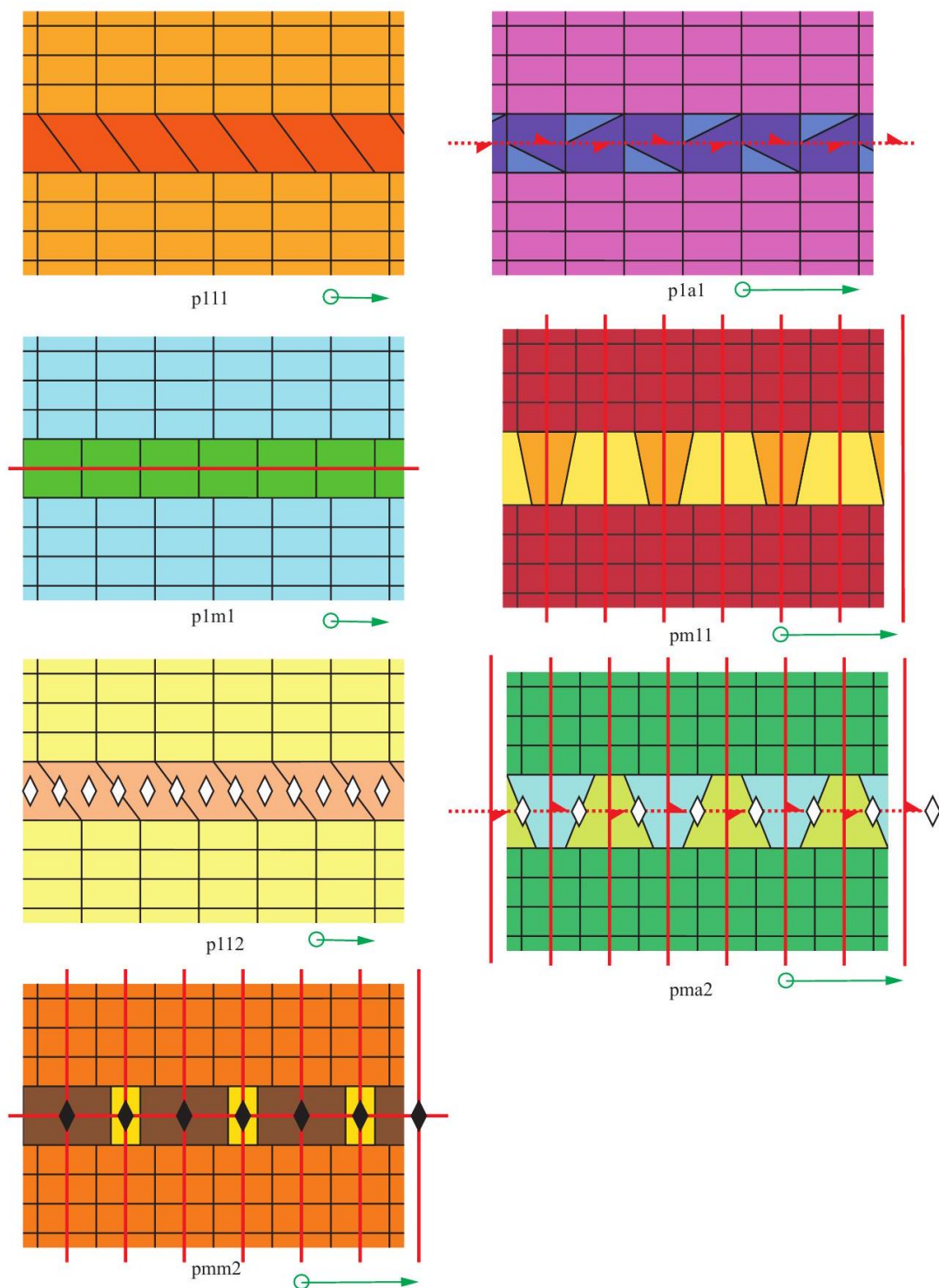
Οποιαδήποτε ολισθανάκλαση πρέπει επίσης να είναι στη διεύθυνση της μεταφοράς, ώστε το τετράγωνό της, που είναι μεταφορά, να έχει τη σωστή διεύθυνση. Δεν μπορεί να υπάρχουν δύο παράλληλες ολισθανακλάσεις, γιατί το γινόμενο τους θα ήταν μεταφορά σε άλλη διεύθυνση. Επίσης, όλα τα κέντρα στροφής πρέπει να βρίσκονται σε ευθεία παράλληλη προς τη διεύθυνση μεταφοράς.

Επειδή οι ομάδες συμμετρίας είναι διακριτές, υπάρχει και μία ελάχιστη μεταφορά, της οποίας οι δυνάμεις παράγουν όλες τις άλλες μεταφορές της ομάδας συμμετρίας. Έτσι κάθε ομάδα ζωφόρου αποτελείται από μία επιλογή έως τεσσάρων συμμετριών: ανάκλαση σε οριζόντια ευθεία, ολισθανάκλαση σε οριζόντια διεύθυνση, ανάκλαση σε κατακόρυφες ευθείες και στροφές τάξης δύο με κέντρα σε οριζόντια ευθεία.

Αναλύοντας τους πιθανούς συνδυασμούς αυτών, καταλήγουμε ότι υπάρχουν επτά δυνατές ομάδες ζωφόρου, όπως στο Σχήμα 2.33.

Σε όλες τις περιπτώσεις, το μοτίβο επαναλαμβάνεται σε κατακόρυφες λωρίδες, που αντιγράφονται η μία δίπλα στην άλλη μέσω μεταφορών. Αν γνωρίζουμε πώς είναι η πλακόστρωση σε μία τέτοια λωρίδα, γνωρίζουμε πώς είναι σε όλο το επίπεδο.

Μια γεννήτρια μεταφοράς για την ομάδα συμμετρίας ταυτίζει το αριστερό σύνορο της λωρίδας με το δεξί της σύνορο, χωρίς όμως να ταυτίζει άλλα σημεία στο εσωτερικό της λωρίδας. Μπορούμε να φανταστούμε αυτή την ταύτιση σαν την επικόλληση των δύο ακμών, σχηματίζοντας έναν άπειρο κατακόρυφο κύλινδρο, όπως στο Σχήμα 2.32,



Σχήμα 2.33: Πλακοστρώσεις με τις επτά ομάδες ζωφόρου, με τα διαγράμματα ομάδων.

πάνω στον οποίο τοποθετείται η πλακόστρωση. Αν παίρναμε αυτό τον κύλινδρο, του βάζαμε μελάνι και τον κυλούσαμε πάνω στο επίπεδο, θα αποτυπωνόταν το μοτίβο της πλακόστρωσης.

Ομάδες συμμετρίας με μεταφορές που δεν είναι όλες παράλληλες

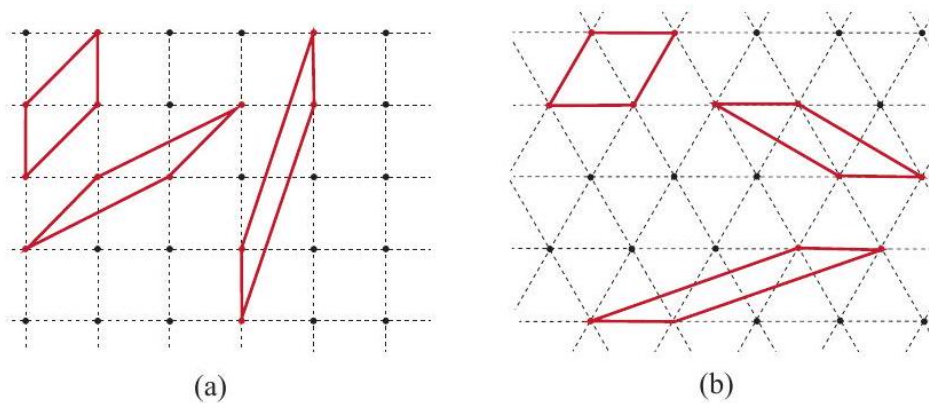
Ορισμός 2.24. Μια πλακόστρωση $\mathcal{T}$ είναι περιοδική αν η ομάδα συμμετρίας της διαδέτει τουλάχιστον δύο μη παράλληλες μεταφορές.

Παραδείγματα περιλαμβάνουν τις τρεις κανονικές πλακοστρώσεις στο Σχήμα 2.6 και τις πλακοστρώσεις στα Σχήματα 2.8, 2.10 και 2.22.

Δεδομένης μιας περιοδικής πλακόστρωσης $\mathcal{T}$, έστω $\mathcal{F}$ το σύνολο όλων των μεταφορών στο $S(\mathcal{T})$. Τότε το $\mathcal{F}$ είναι υποομάδα του $S(\mathcal{T})$, αφού η σύνθεση δύο μεταφορών είναι και αυτή μεταφορά και το αντίστροφο μιας μεταφοράς $T_{\vec{v}}$ είναι η μεταφορά $T_{-\vec{v}}$, που επίσης είναι συμμετρία.

Ορισμός 2.25. Έστω ένα οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου, το οποίο για ευκολία θεωρούμε ως την αρχή των αξόνων, σημειούμενη ως 0 .

Η τροχιά $\text{orb}_{\mathcal{F}}(0)$ του 0 υπό το $\mathcal{F}$ καλείται πλέγμα που αντιστοιχεί στο $\mathcal{F}$.



Σχήμα 2.34: Το πλέγμα με τετράγωνα και το πλέγμα ισόπλευρων τριγώνων, με πιθανά παραλληλόγραμμα περιόδου με κόκκινο.

Στο Σχήμα 2.34(α), βλέπουμε το πλέγμα που αντιστοιχεί στις μεταφορές της πλακόστρωσης με τετράγωνα. Στο Σχήμα 2.34(β), βλέπουμε το πλέγμα που αντιστοιχεί στις μεταφορές της πλακόστρωσης με ισόπλευρα τρίγωνα.

Μπορούμε πάντα να επιλέξουμε δύο μη παράλληλες μεταφορές $T_{\vec{v}}$ και $T_{\vec{w}}$ που να παράγουν ολόκληρη την υποομάδα των μεταφορών $\mathcal{F}$. Δηλαδή, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathcal{F} = \{T_{\vec{v}}^m \circ T_{\vec{w}}^n : m, n \in \mathbb{Z}\}$$

Σημειώνουμε ότι $T_{\vec{v}}^m \circ T_{\vec{w}}^n = T_{m\vec{v}+n\vec{w}}$.

Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε το $T_{\vec{v}}$ ως τη συντομότερη μεταφορά και το $T_{\vec{w}}$ ως τη συντομότερη μεταφορά που δεν είναι παράλληλη με το $T_{\vec{v}}$. Το γεγονός ότι υπάρχουν συντομότερες μεταφορές προκύπτει από το ότι η ομάδα συμμετρίας

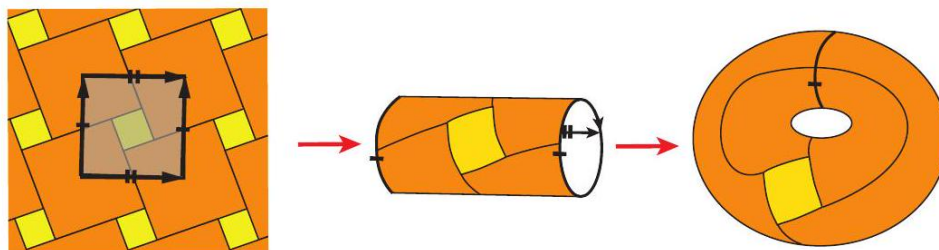
είναι διακριτή. Σημειώνουμε όμως ότι για κάποιες ομάδες συμμετρίας, μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία μη παράλληλες συντομότερες μεταφορές. Υπάρχουν επίσης πολλές διαφορετικές επιλογές για έγκυρους γεννήτορες.

Ορισμός 2.26. Δεδομένης μιας επιλογής μη παραλληλίων μεταφορών $T_{\vec{v}}$ και $T_{\vec{w}}$ που παράγουν την $\mathcal{F}$, ορίζουμε το αντίστοιχο παραλληλόγραμμο περιόδου $P_{\vec{v}, \vec{w}}$ ως το παραλληλόγραμμο που εκτείνεται από τα διανύσματα $\vec{v}$ και $\vec{w}$ με κορυφές στο πλέγμα που ορίζεται από αυτά. (Βλ. Σχήμα 2.34.)

Όταν μεταφέρουμε το $P_{\vec{v}, \vec{w}}$ με τις μεταφορές στο $\mathcal{F}$ ώστε να δημιουργήσουμε ταυτόσημα αντίγραφα, η προκύπτουσα συλλογή παραλληλογράμμων πλακοστρώνει το επίπεδο. Κάθε πλέγμα έχει πολλές διαφορετικές επιλογές για $T_{\vec{v}}$ και $T_{\vec{w}}$ και άρα πολλές διαφορετικές περιόδους, καθεμία από τις οποίες πλακοστρώνει το επίπεδο υπό την επίδραση του $\mathcal{F}$. Στο Σχήμα 2.34 απεικονίζονται μερικά από αυτά. Κάθε παραλληλόγραμμο στο δεδομένο πλέγμα έχει ακριβώς το ίδιο εμβαδόν και κανένα από αυτά δεν μπορεί να περιέχει σημείο του πλέγματος στο εσωτερικό ή στην περίμετρό του πέρα από τις κορυφές του.

Αφού επιλέξουμε ένα παραλληλόγραμμο περιόδου P , αρκεί να προσδιορίσουμε το διάγραμμα της ομάδας συμμετρίας για το P . Η υπόλοιπη πλακόστρωση κληρονομεί τα σύμβολά της μέσω μεταφορών των συμβόλων που εμφανίζονται στο P .

Δεδομένης μιας περιοδικής πλακόστρωσης, μπορούμε να επάγουμε μια πλακόστρωση στον τόρο, δηλαδή στην επιφάνεια ενός ντόνατ. Παίρνουμε ένα παραλληλόγραμμο $P_{\vec{v}, \vec{w}}$ και ενώνουμε την πάνω με την κάτω πλευρά του μέσω της $T_{\vec{v}}$, σχηματίζοντας έναν κύλινδρο. Κατόπιν ενώνουμε την αριστερή (τόρα κυκλική) πλευρά με τη δεξιά πλευρά (επίσης κυκλική), δημιουργώντας τον τόρο, όπως στο Σχήμα 2.35. Τα πλακίδια που τέμνουν το $P_{\vec{v}, \vec{w}}$ ενώνονται με συνέπεια υπό αυτή τη συγκόλληση ώστε να παράγουν μια πλακόστρωση στον τόρο. Στην εικόνα, οι ακμές φαίνονται κυρτές λόγω της αναγκαίας παραμόρφωσης για να κλείσει ο κύλινδρος σε τόρο. Αλλά αν φανταστούμε το παραλληλόγραμμο επίπεδο με τις συγκολλήσεις των αντίθετων πλευρών, μπορούμε να το θεωρήσουμε έγκυρη πλακόστρωση του τόρου.



Σχήμα 2.35: Μια περιοδική πλακόστρωση επάγει πλακόστρωση στον τόρο.

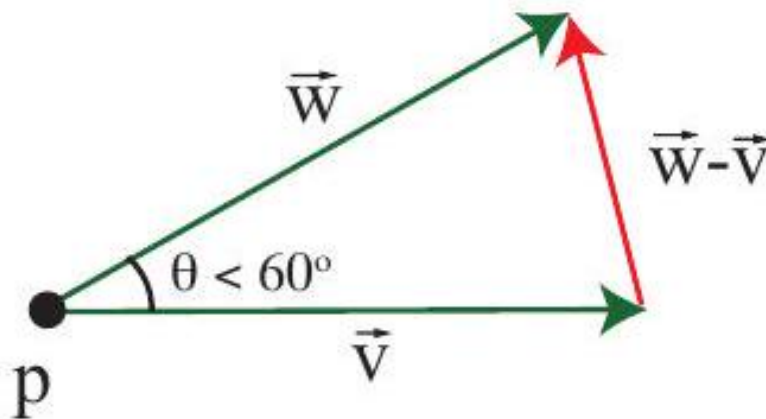
Αποδεικνύουμε τώρα το κάπως εκπληκτικό γεγονός ότι όταν το $\mathcal{T}$ είναι περιοδικό, οι υποομάδες του $S(\mathcal{T})$ που σταθεροποιούν ένα σημείο είναι πολύ περιορισμένες.

Λήμμα 2.12 (Ο Κρυσταλλογραφικός Περιορισμός). Αν το $\mathcal{T}$ είναι περιοδική πλακοστρώση, τότε τα μόνα υποσύνολα της $S(\mathcal{T})$ που σταθεροποιούν ένα σημείο είναι τα C_n και D_n για $n = 1, 2, 3, 4$ και 6 .

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει σταθερό σημείο υπό την επίδραση μιας συμμετρίας C_n ή D_n με $n \geq 7$. Τότε υπάρχουν στροφές γωνίας $2\pi/n < 60^\circ$. Έστω $T_{\vec{v}}$ η μικρότερη δυνατή μεταφορά στην ομάδα συμμετρίας. Γνωρίζουμε ότι υπάρχουν ελάχιστες μεταφορές επειδή το $S(\mathcal{T})$ είναι διακριτό. Αν συνθέσουμε την $T_{\vec{v}}$ με μια στροφή $R_{2\pi/n, p}$, το Λήμμα 2.11 μας λέει ότι προκύπτει μια δεύτερη μεταφορά $T_{\vec{w}}$ όπου η $\vec{w}$ σχηματίζει γωνία $2\pi/n$ με τη $\vec{v}$. Όπως στο Σχήμα 2.36, αυτό οδηγεί σε μεταφορά $T_{\vec{w}-\vec{v}}$ μικρότερου μήκους από την $T_{\vec{v}}$, άτοπο.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $n = 5$, υποθέτοντας ξανά ότι η $\vec{v}$ είναι ελάχιστης απόστασης. Όπως στο Σχήμα 2.37, έχουμε πέντε διανύσματα μεταφοράς γύρω από το σημείο p με γωνία $2\pi/5 = 72^\circ$ μεταξύ τους. Το άθροισμα του πρώτου και του τρίτου δίνει διάνυσμα μικρότερου μήκους από τη $\vec{v}$, πράγμα που είναι ξανά άτοπο.

Συνεπώς, οι μόνες επιτρεπτές τιμές για το n είναι $1, 2, 3, 4$ και 6 . $\square$



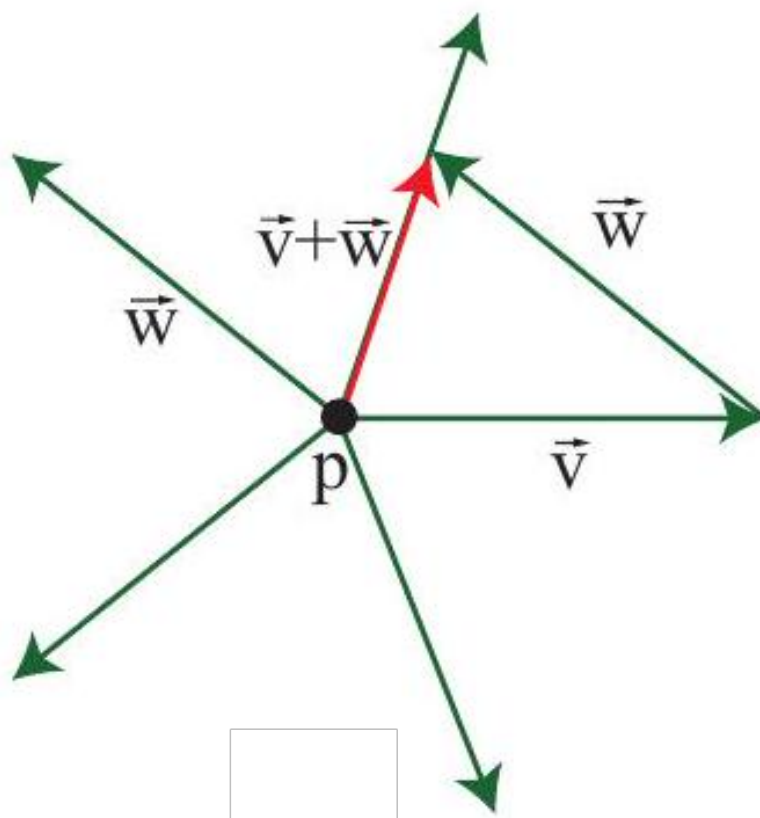
Σχήμα 2.36: Η ύπαρξη στροφών γωνίας $2\pi/n$ με $n \geq 7$ συνεπάγεται συντομότερες μεταφορές.

Θα δούμε ότι στην πραγματικότητα, όλες αυτές οι επιλογές εμφανίζονται, αν και, για δεδομένες πλακοστρώσεις, μόνο σε ορισμένους συνδυασμούς. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.12, μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα, το οποίο διατυπώθηκε για πρώτη φορά από τον Johannes Kepler το 1619.[84]

Θεώρημα 2.4. Υπάρχουν 17 ομάδες συμμετρίας πλακοστρώσεων με μη παράλληλες μεταφορές.

Δεν θα αποδείξουμε αναλυτικά αυτό το θεώρημα, παρότι προκύπτει από τη συμβολική σημειογραφία τροπιοτήτων που επεξηγούμε στο Παράρτημα Δ'.

Ορισμός 2.27. Μέχρι ισομορφισμού, οι 17 ομάδες συμμετρίας των περιοδικών πλακοστρώσεων ονομάζονται **ομάδες ταπεισαρίας**.

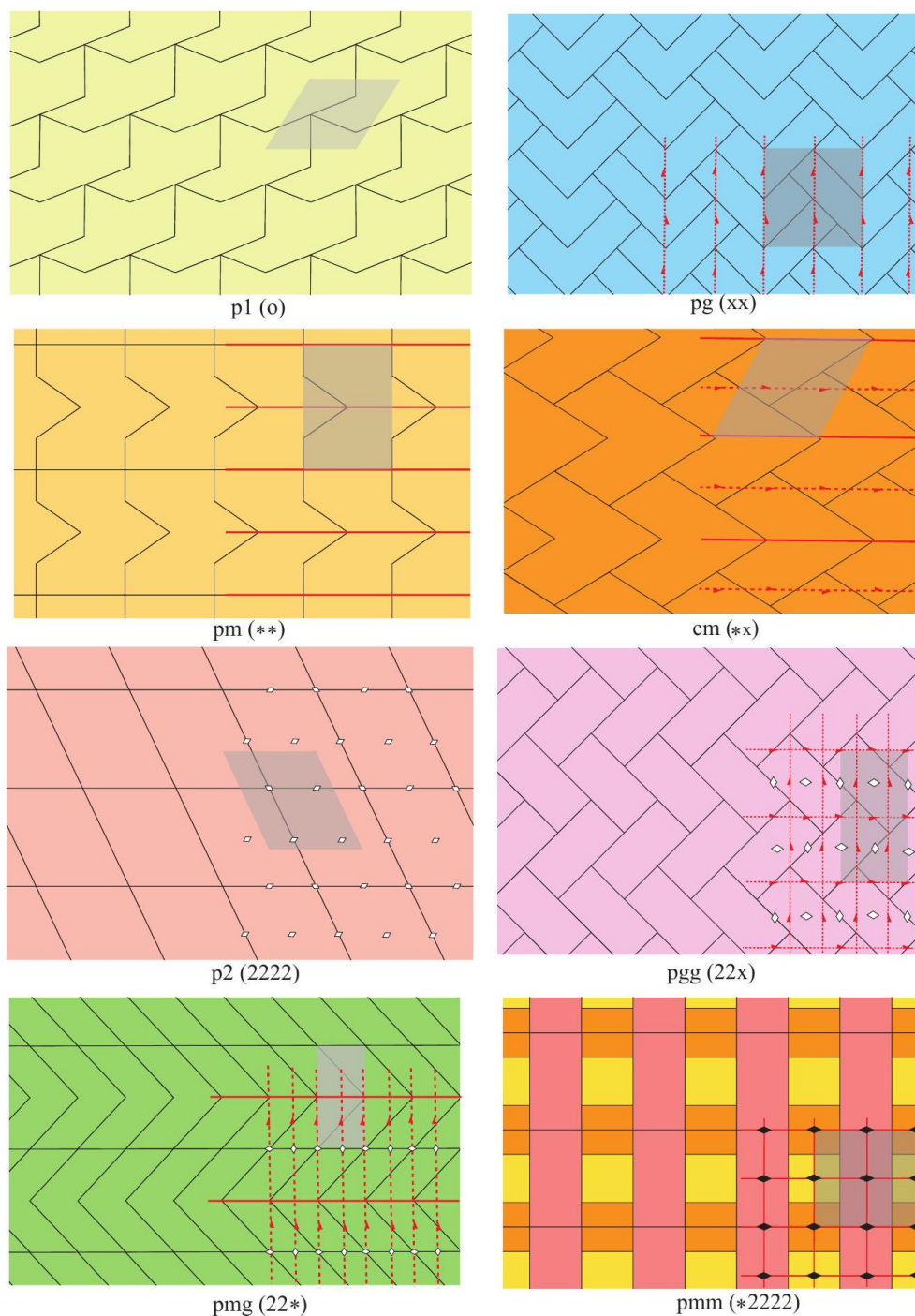


Σχήμα 2.37: Στην περίπτωση $n = 5$, το άθροισμα δύο μεταφορών δίνει συντομότερο διάνυσμα.

Στα Σχήματα 2.38 και 2.39, βλέπουμε παραδείγματα όλων των δυνατών πλακοστρώσεων ταπετσαρίας, παρουσιάζοντας το διάγραμμα ομάδας σε ένα τμήμα του πλακιδίου σε κάθε περίπτωση. Με γκρι χρώμα φαίνεται ένα παραλληλόγραμμα περιόδου. Για κάθε ομάδα συμμετρίας δίνεται τόσο ο συμβολισμός της Διεθνούς Ένωσης Κρυσταλλογραφίας (IUCr) όσο και, σε παρένθεση, ο συμβολισμός τροπιοτήτων, όπως εξηγείται στο Παράρτημα Δ'. Δίνεται και συγκεντρωτικός πίνακας με όλες τις ομάδες ζωφόρου και ταπετσαρίας, βλ. Πίνακας 2.1.

Αν και δώσαμε συγκεκριμένα παραδείγματα, οι δύο ομάδες ταπετσαρίας $p1$ και $p2$ επιτρέπουν παραλληλόγραμμα περιόδου χωρίς περιορισμούς στις γωνίες ή τα μήκη ακμών. Οι υπόλοιπες ομάδες έχουν προκαθορισμένες γωνίες: είτε ορθές είτε 60° και 120° . Σε ορθογώνια παραλληλόγραμμα οι λόγοι πλευρών είναι ελεύθεροι, αλλά στα τετράγωνα παραλληλόγραμμα όχι. Κάθε ομάδα έχει συγκεκριμένους περιορισμούς ως προς τη γεωμετρία του πλακιδίου περιόδου.

Αν παρατηρήσουμε διακοσμητικά μοτίβα, μπορούμε να εντοπίσουμε και τις 17 ομάδες ταπετσαρίας, πολλές από αυτές εμφανίζονται στους τοίχους του παλατιού της Αλάμπρας στη Γρανάδα της Ισπανίας. Υπάρχουν επιχειρήματα υπέρ και κατά αυτής της παρουσίας, ανάλογα με το πώς εφαρμόζει κανείς τους κανόνες για τα χρώματα και τα μοτίβα.



Σχήμα 2.38: Παραδείγματα πλακοστρώσεων για οκτώ από τις 17 ομάδες ταπετσαρίας.

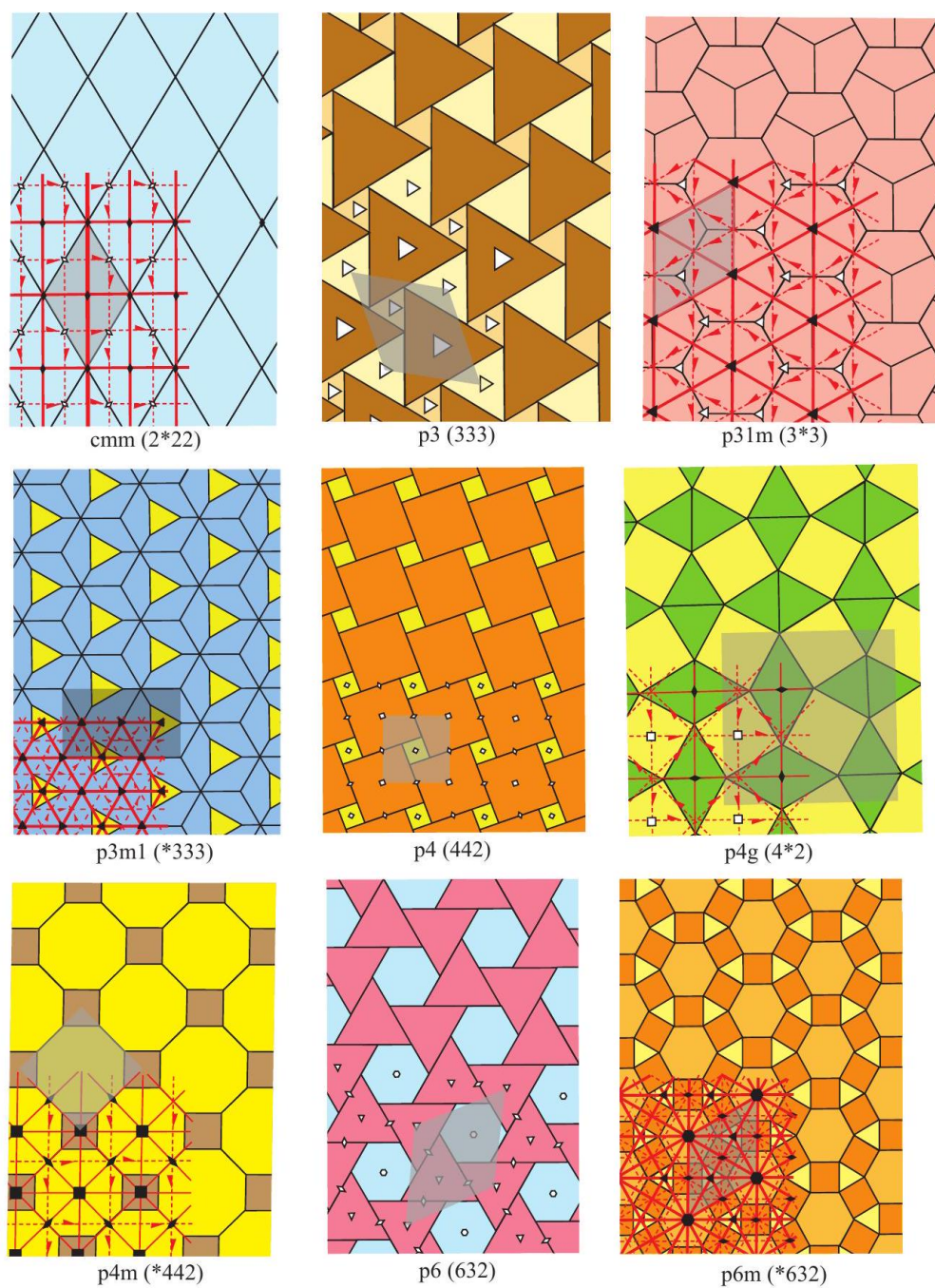
Πίνακας 2.1: Οι ομάδες συμμετρίας ζωφόρου και ταπετσαρίας

Σύμβολο		ζ ή τ	Αριθμός κλάσεων μεταθετικότητας					
IUCr	Τροπλότητα		Ολισθ.	Ανακλ.	Στροφές περιόδου			
					2	3	4	6
p111	∞∞	ζ	0	0	0	0	0	0

Πίνακας 2.1: Οι ομάδες συμμετρίας ζωφόρου και ταπετσαρίας

Σύμβολο		ζ ή τ	Αριθμός κλάσεων μεταθετικότητας					
IUCr	Τροπλότητα		Ολισθ.	Ανακλ.	Στροφές περιόδου			
					2	3	4	6
pla1	$\infty \times$	ζ	1	0	0	0	0	0
plm1	∞^*	ζ	0	1	0	0	0	0
pm11	$^*\infty\infty$	ζ	0	2	0	0	0	0
pl12	22∞	ζ	0	0	2	0	0	0
pma2	$2^*\infty$	ζ	1	1	1	0	0	0
pmm2	$^*22\infty$	ζ	0	3	2	0	0	0
p1	ο	τ	0	0	0	0	0	0
pg	$\times \times$	τ	2	0	0	0	0	0
pm	**	τ	0	2	0	0	0	0
cm	$^*\times$	τ	1	1	0	0	0	0
p2	2222	τ	0	0	4	0	0	0
pgg	$22\times$	τ	2	0	2	0	0	0
pmg	22^*	τ	1	1	2	0	0	0
pmm	*2222	τ	0	4	4	0	0	0
cmm	2^*22	τ	2	2	2	0	0	0
p3	333	τ	0	0	0	3	0	0
p31m	3^*3	τ	1	1	0	2	0	0
p3m1	*333	τ	1	1	0	1	0	0
p4	442	τ	0	0	1	0	2	0
p4g	4^*2	τ	2	1	1	0	1	0
p4m	*442	τ	1	3	1	0	2	0
p6	632	τ	0	0	1	1	0	1
p6m	*632	τ	2	2	1	1	1	1

Σημείωση. Για μια πιο διεξοδική μελέτη και αναλυτική απόδειξη των παραπάνω παραπέμπουμε στο [19, Κεφάλαιο 3].



Σχήμα 2.39: Παραδείγματα πλακοστρώσεων για τις υπόλοιπες εννιά ομάδες ταπετοστροφίας.

Θεωρήματα Επέκτασης Πλακοστρώσεων

3.1 Πλακόστρωση με Μπαλώματα

Μία μέθοδος για την κατασκευή μιας πλακόστρωσης είναι να ξεκινήσουμε με μια συλλογή από πλακίδια που ταιριάζουν μεταξύ τους ώστε να πλακοστρώσουν μια πεπερασμένη περιοχή, και στη συνέχεια να προσθέσουμε πλακίδια έτσι ώστε τελικά να καλύψουμε όλο το επίπεδο. Για να δώσουμε όμως ακριβές νόημα σε αυτή τη διαδικασία, χρειάζεται να γενικεύσουμε τον προηγούμενο ορισμό του μπαλώματος.

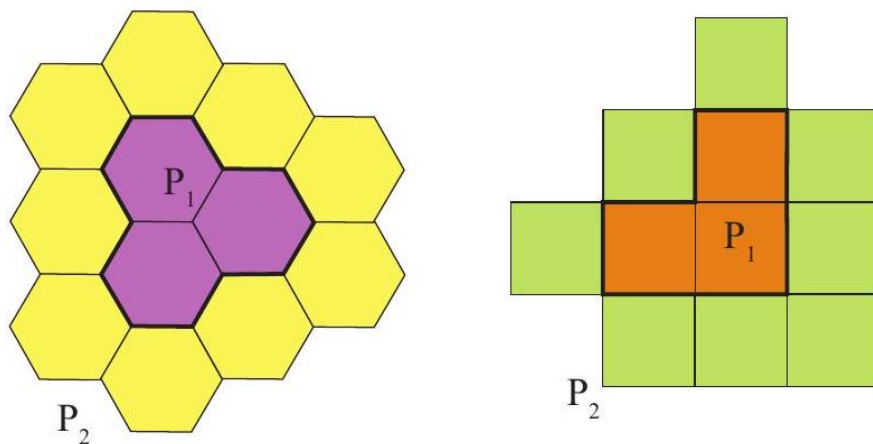
Ορισμός 3.28. Έστω πρωτοσύνολο $\mathcal{P}$. Ένα **μπάλωμα** $\mathcal{A}$ που δημιουργείται από το $\mathcal{P}$ είναι μια πεπερασμένη συλλογή από πλακίδια $T_1, T_2, \dots, T_n$ στο επίπεδο τέτοια ώστε:

1. Κάθε πλακίδιο είναι ταυτόσημο με κάποιο πλακίδιο του πρωτοσυνόλου.
2. Για κάθε $i \neq j$, $\text{int}(T_i) \cap \text{int}(T_j) = \emptyset$.
3. $\bigcup_{i=1}^n T_i$ είναι τοπολογικός δίσκος.

Παρατηρούμε ότι αυτός ο ορισμός γενικεύει τον αρχικό μας ορισμό, στον οποίο υποθέταμε ότι το μπάλωμα ήταν τμήμα μιας πλακόστρωσης του επιπέδου. Πλέον δεν απαιτείται αυτό. Όμως, κάθε μπάλωμα που ικανοποιεί τον προηγούμενο ορισμό ικανοποιεί και τον παρόντα.

Ορισμός 3.29. Λέμε ότι ένα μπάλωμα $\mathcal{A}'$ **επεκτείνει** ένα μπάλωμα $\mathcal{A}$ αν μπορούμε να το πάρουμε από το $\mathcal{A}$ με την προσθήκη πλακιδίων. Λέμε ότι ένα μπάλωμα $\mathcal{A}$ **επεκτείνεται σε πλακόστρωση του επιπέδου** αν το $\mathcal{A}$ εμφανίζεται σε πλακόστρωση του επιπέδου. Λέμε ότι ένα μπάλωμα $\mathcal{A}'$ **περικλείει** ένα μπάλωμα $\mathcal{A}$ αν το $\mathcal{A}'$ επεκτείνει το $\mathcal{A}$ και το σύνορο του $\mathcal{A}'$ δεν εφάπτεται με το σύνορο του $\mathcal{A}$.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.1, αριστερά βλέπουμε το μπάλωμα P_2 να περικλείει το μπάλωμα P_1 , ενώ δεξιά το P_2 το επεκτείνει χωρίς να το περικλείει

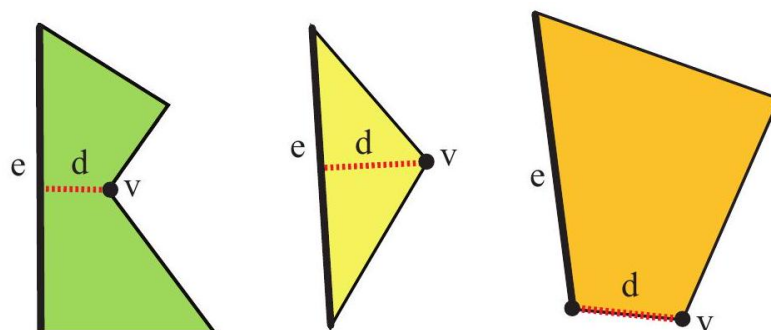


Σχήμα 3.1: (αριστερά) Ένα μπάλωμα που περικλείει ένα άηλο. (δεξιά) Ένα μπάλωμα που επεκτείνει χωρίς να περικλείει.

Λήμμα 3.13 (Επέκτασης με Μπαλώματα). Έστω $\mathcal{P}$ πρωτοσύνολο από πολυγωνικά πρωτοπλακίδια. Έστω $\mathcal{A}_0$ μπάλωμα που δημιουργείται από το $\mathcal{P}$. Αν για κάθε $i = 1, 2, \dots$ υπάρχει μπάλωμα $\mathcal{A}_i$ που δημιουργείται από το $\mathcal{P}$ και περικλείει το $\mathcal{A}_{i-1}$, τότε η ένωση $\cup_{i=0}^{\infty} \mathcal{A}_i$ αποτελεί πλακόστρωση του επιπέδου.

Απόδειξη. Επιλέγουμε ένα σημείο στο εσωτερικό του αρχικού μπαλώματος $\mathcal{A}_0$ ώστε να παίζει τον ρόλο της αρχής των αξόνων $(0, 0)$ στο επίπεδο. Υπάρχει δίσκος D_0 με ακτίνα r_0 και κέντρο το σημείο αυτό, που περιέχεται πλήρως στο $\mathcal{A}_0$.

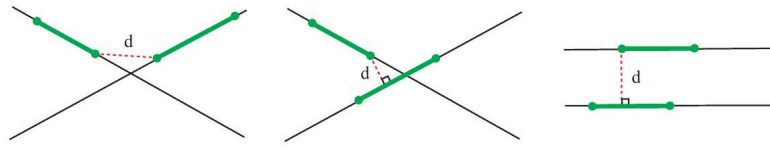
Θα δείξουμε ότι καθώς το μπάλωμα $\mathcal{A}_i$ περικλείεται από το μπάλωμα $\mathcal{A}_{i+1}$, υπάρχει δίσκος D_{i+1} με ακτίνα r_{i+1} που περιέχεται πλήρως στο $\mathcal{A}_{i+1}$ και έχει $r_{i+1} \geq r_i + \delta$ για κάποια θετική σταθερά δ . Επαναλαμβάνοντας αυτή τη διαδικασία, οι δίσκοι θα γίνονται αυθαίρετα μεγάλοι. Για κάθε σημείο του επιπέδου, θα υπάρχει κάποιο i τέτοιο ώστε το σημείο να περιέχεται στον δίσκο $D_i \subseteq \mathcal{A}_i$. Άρα, υπάρχει πλακίδιο που περιέχει το σημείο και συνεπώς έχουμε πλακόστρωση του επιπέδου.



Σχήμα 3.2: Εύρεση της ελάχιστης απόστασης μεταξύ πλευράς και μη γειτονικής γωνίας.

Αφού υπάρχουν πεπερασμένα πρωτοπλακίδια, μπορούμε για κάθε ένα να υπολογίσουμε την ελάχιστη απόσταση μεταξύ κάποιας πλευράς και μιας μη γειτονικής

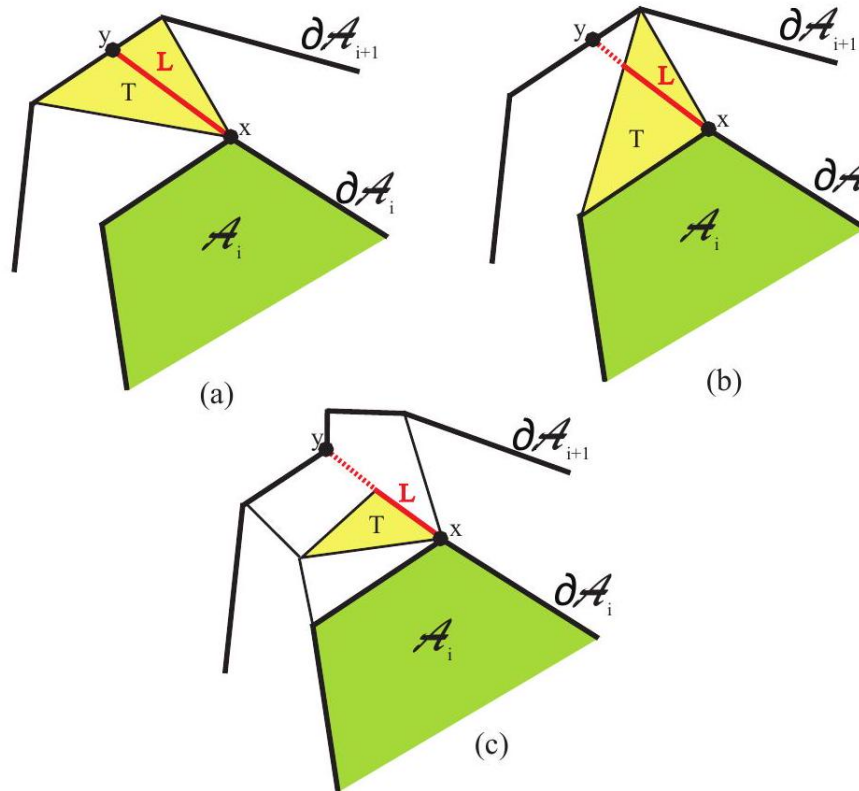
κορυφής του, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.2. Αυτή η ποσότητα είναι θετική, καθώς κάθε πρωτοπλακίδιο είναι τοπολογικά ισοδύναμο με δίσκο.



Σχήμα 3.3: Η ελάχιστη απόσταση μεταξύ δύο μη τεμνόμενων ευθυγράμμων τμημάτων εμφανίζεται πάντα σε άκρο.

Για δύο μη τεμνόμενα ευθύγραμμα τμήματα στο επίπεδο, η ελάχιστη απόσταση d μεταξύ τους επιτυγχάνεται όταν μετράμε από το άκρο του ενός, όπως στο Σχήμα 3.3. Έτσι, το ελάχιστο μήκος μεταξύ μη γειτονικών πλευρών είναι επίσης θετικό. Έστω δ το ελάχιστο τέτοιο μήκος μεταξύ όλων των πρωτοπλακιδίων.

Δοθέντος μπαλώματος $\mathcal{A}_i$ με δίσκο D_i στο εσωτερικό του, και κέντρο την αρχή, το επόμενο μπάλωμα $\mathcal{A}_{i+1}$ προκύπτει με προσθήκη πλακιδίων. Καθώς τα σύνορα των δύο μπαλωμάτων είναι ξένα, το καθένα πρέπει να αποτελείται από συλλογές ακμών που είναι ασύνδετες μεταξύ τους. Ισχυριζόμαστε ότι η απόσταση ανάμεσα σε σημεία x και y των δύο συνόρων είναι τουλάχιστον δ .



Σχήμα 3.4: Η απόσταση μεταξύ $\partial\mathcal{A}_i$ και $\partial\mathcal{A}_{i+1}$ είναι τουλάχιστον δ .

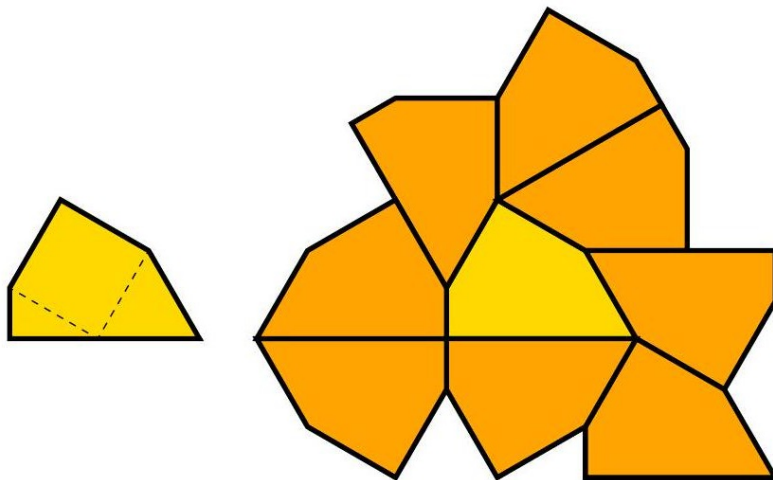
Χωρίς βλάβη της γενικότητας, ας είναι το x κορυφή πλακιδίου. Όπως φαίνεται

στο Σχήμα 3.4, θεωρούμε το ευθύγραμμο τμήμα L που ενώνει τα x και y , και πλακίδιο $T \in \mathcal{A}_{i+1} \setminus \mathcal{A}_i$ που περιέχει το x και τέμνει το L σε αρχικό τμήμα που περιέχει το x . Αν το T καθορίζεται μοναδικά, τότε το L τέμνει το σύνορο του T σε πλευρά μη γειτονική με το x , άρα το μήκος $L \cap T \geq \delta$ άρα και το μήκος $L \geq \delta$.

Από την άλλη, αν το L ταυτίζεται αρχικά με πλευρά του T , τότε το αρχικό τμήμα αυτό ανήκει σε δύο πλακίδια, και για το ένα από αυτά, η τομή του με το L περιέχει κορυφή διαφορετική από το x . Άρα και πάλι το αρχικό τμήμα έχει μήκος τουλάχιστον δ και η απόσταση μεταξύ x και y είναι τουλάχιστον δ .

Συνεπώς, αν $\mathcal{A}_0$ περιέχει τον δίσκο $D(0, r_0)$, τότε το $\mathcal{A}_i$ περιέχει τον δίσκο $D(0, r_0 + i\delta)$, και επομένως η πλακόστρωση επεκτείνεται σε όλο το επίπεδο. $\square$

Ακόμα κι αν ένα πλακίδιο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να παραγάγει μια μονοεδρική πλακόστρωση, μπορεί παρ' όλα αυτά να είναι δυνατόν να κατασκευάσουμε ένα σχετικά μεγάλο μπάλωμα από αντίγραφα του πλακιδίου. Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.5, βλέπουμε ένα πλακίδιο που μπορεί να περικλειστεί πλήρως από αντίγραφα του εαυτού του. Ωστόσο, δεν μπορούμε να επεκτείνουμε αυτό το αρχικό μπάλωμα σε πλακόστρωση του επιπέδου.



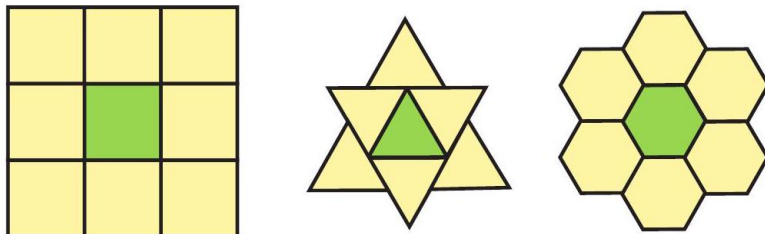
Σχήμα 3.5: Ένα πλακίδιο που περικλείεται πλήρως από αντίγραφά του χωρίς να είναι δυνατή η επέκταση σε πλακόστρωση επιπέδου.

Αυτό μας οδηγεί στον παρακάτω ορισμό

Ορισμός 3.30. Δεδομένου ενός πρωτοσυνόλου $\mathcal{P}$ και ενός μπαλώματος $\mathcal{A}$ που δημιουργείται από το $\mathcal{P}$, μια **κορώνα** για το $\mathcal{A}$ είναι ένα σύνολο επιπλέον πλακιδίων $\{T_1, \dots, T_n\}$ τέτοιο ώστε κάθε πλακίδιο T_i να τέμνει το $\mathcal{A}$ και το $\mathcal{A}' = \mathcal{A} \cup (T_1 \cup T_2 \cup \dots \cup T_n)$ να είναι μπάλωμα που περικλείει το $\mathcal{A}$. Ένα μεμονωμένο πλακίδιο αποκαλείται **μηδενική κορώνα**. Μια κορώνα για το μπάλωμα που αποτελείται από αυτό το μεμονωμένο πλακίδιο, αν υπάρχει, ονομάζεται **πρώτη κορώνα** αυτού του πλακιδίου. Αφού σχηματιστεί ένα μπάλωμα $\mathcal{A}_n$ από το αρχικό πλακίδιο και η κορώνες γύρω του, η κορώνα

αυτού του μπαλώματος, εφόσον υπάρχει, ονομάζεται η $n + 1$ -οστή κορώνα του πλακιδίου.

Με άλλα λόγια, η ένωση της κορώνας και του μπαλώματος που περικλείει αποτελεί νέο μπαλώμα που περικλείει το προηγούμενο. Επιπλέον, κάθε νέο πλακίδιο πρέπει να εφάπτεται του προηγούμενου μπαλώματος. Στο Σχήμα 3.6, βλέπουμε παραδείγματα πρώτης κορώνας γύρω από ένα πλακίδιο.



Σχήμα 3.6: Κορώνες γύρω από διάφορα πλακίδια.

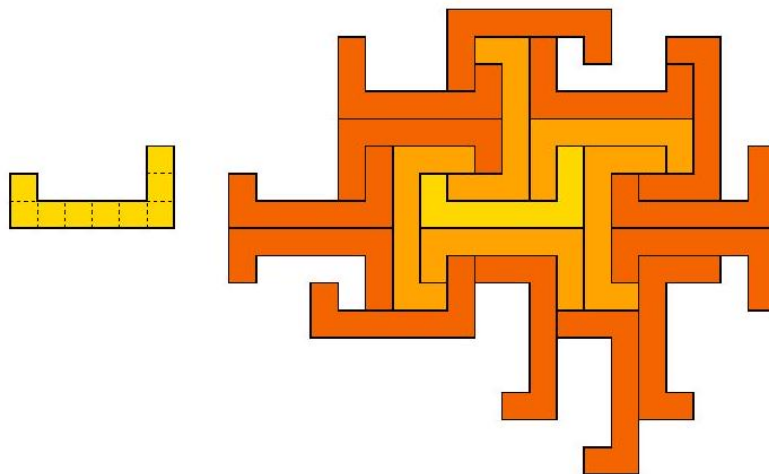
Αν ξεκινώντας από ένα μόνο πλακίδιο, μπορούμε να συνεχίσουμε να κατασκευάζουμε κορώνες διαδοχικά, τότε, βάσει του Λήμματος 3.13, έχουμε μια πλακόστρωση του επιπέδου. Όμως, μπορεί να συμβαίνει το εξής: για ένα συγκεκριμένο πλακίδιο η διαδικασία δημιουργίας κορώνων να μην συνεχίζεται επ' άπειρον. Οι προσπάθειες να κατασκευαστεί πλακόστρωση χρησιμοποιώντας αυτό το πλακίδιο ως πρωτοπλακίδιο μοιάζουν επιτυχείς αρχικά, αλλά σε κάποιο σημείο το μπαλώμα δεν μπορεί να επεκταθεί σε επόμενη κορώνα.

Ορισμός 3.31. Ο **αριθμός Heesch** $H(T)$ ενός πλακιδίου T είναι το μέγιστο πλήθος φορών που μπορούμε να προσθέσουμε διαδοχικά κορώνες ξεκινώντας από ένα μόνο αντίγραφο του πλακιδίου.

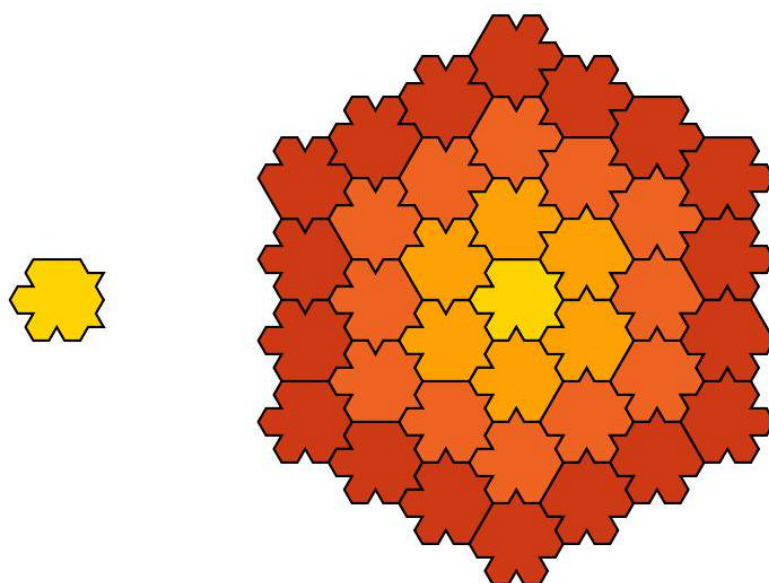
Για το πλακίδιο στο Σχήμα 3.5, ο αριθμός Heesch είναι 1. Εφόσον το κανονικό εξάγωνο πλακοστρώνει ολόκληρο το επίπεδο, ο αριθμός Heesch του είναι ∞ . Αντίθετα, επειδή το κανονικό πεντάγωνο δεν μπορεί καν να περικλειστεί μία φορά από αντίγραφά του, ο αριθμός Heesch του είναι 0. Το φυσικό ερώτημα που προκύπτει είναι αν κάθε φυσικός εμφανίζεται ως αριθμός Heesch για κάποιο σχήμα πλακιδίου.

Στο Σχήμα 3.7, βλέπουμε ένα πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με 2. Και στο Σχήμα 3.8, βλέπουμε ένα πλακίδιο που σχηματίζεται προσθέτοντας τρεις εσοχές σε τρεις διαδοχικές πλευρές ενός εξαγώνου και δύο προεξοχές σε δύο γειτονικές πλευρές. Είναι εύκολο να διαπιστωθεί ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε μπαλώμα που περιλαμβάνει τρεις κορώνες.

Σε αυτή την περίπτωση, ας αποδείξουμε ότι το μπαλώμα δεν μπορεί να επεκταθεί σε τέταρτη κορώνα. Αν προσπαθήσουμε να το κάνουμε, ο αριθμός των επιπλέον πλακιδίων θα ήταν 24, και ο συνολικός αριθμός των πλακιδίων στο μπαλώμα θα γινόταν 61.



Σχήμα 3.7: Πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με 2.

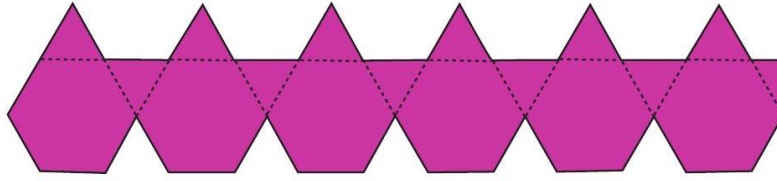


Σχήμα 3.8: Πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με 3.

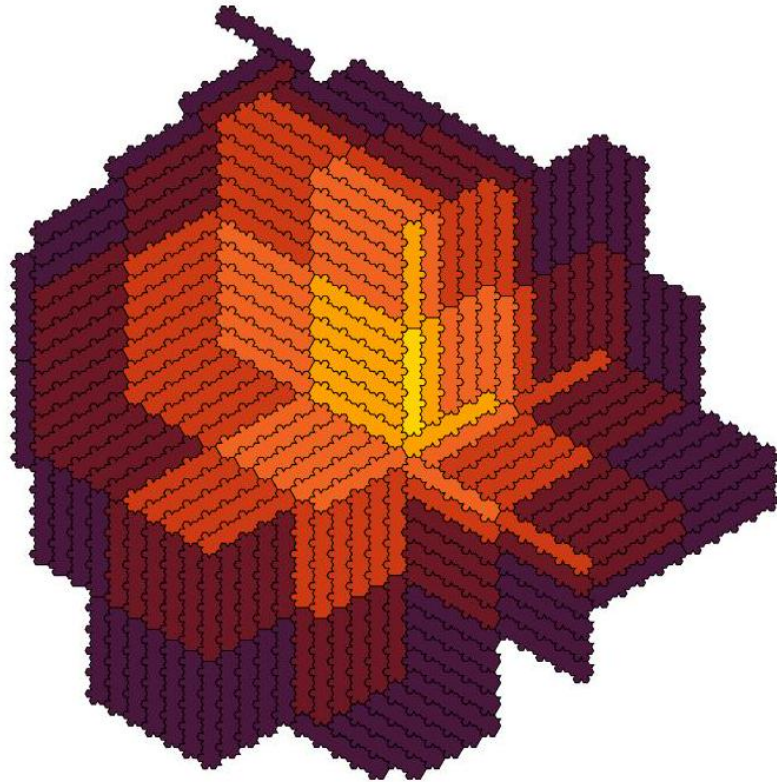
Επομένως, ο συνολικός αριθμός προεξοχών σε αυτά τα 61 εξάγωνα θα ήταν 122, ενώ ο αριθμός των εσοχών θα ήταν 183. Εφόσον κάθε εσωτερική προεξοχή πρέπει να αντιστοιχεί σε μια εσωτερική εσοχή, θα έμεναν τουλάχιστον 61 εσοχές στο σύνορο του μπαλώματος. Όμως, υπάρχει το πολύ μία εσοχή ανά πλευρά εξαγώνου και το σύνορο του μπαλώματος έχει ακριβώς 51 πλευρές εξαγώνων, που προέρχονται από δύο πλευρές για 18 από τα πλακίδια του συνόρου και τρεις πλευρές για τα υπόλοιπα 6. Άρα, παραμένουν τουλάχιστον 10 εσοχές στο εσωτερικό του μπαλώματος, καθιστώντας το άκυρο ως μπάλωμα.

Στο Σχήμα 3.10 βλέπουμε ένα παράδειγμα, που ανακαλύφθηκε από τον Casey Mann του 2001 [97], πλακιδίου με αριθμό Heesch ίσο με 5.

Αν και το 5 αποτελούσε τον μεγαλύτερο γνωστό πεπερασμένο αριθμό Heesch για 20 χρόνια, το 2021 ο Bojan Babić ανακοίνωσε την ανακάλυψη του πλακιδίου που



Σχήμα 3.9: Ένα πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με 6.



Σχήμα 3.10: Ένα πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με 5.

φαίνεται στο Σχ. 3.9, το οποίο έχει αριθμό Heesch ίσο με 6 [30].

Ανοικτά Ερωτήματα. Για τον αριθμό Heesch παραμένουν τα εξής:

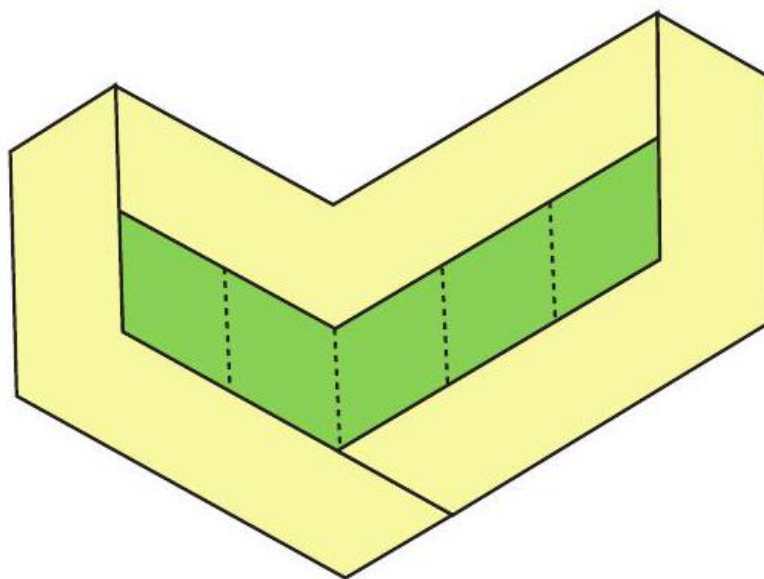
1. Να βρεθεί πλακίδιο με αριθμό Heesch μεγαλύτερο του 6.
2.
 - Να αποδειχθεί ότι υπάρχει πλακίδιο με αριθμό Heesch ίσο με n για κάθε φυσικό n , ή
 - Να αποδειχθεί ότι υπάρχει ένα άνω φράγμα για τον αριθμό Heesch οποιουδήποτε πλακιδίου, ή
 - Να αποδειχθεί ότι υπάρχουν πλακίδια με αυθαίρετα μεγάλο αριθμό Heesch.
3. Να βρεθεί ένα κυρτό πολύγωνο με αριθμό Heesch μεγαλύτερο του 1.

Αν επιτραπούν επιπλέον πρωτοπλακίδια, τότε ο Băsić απέδειξε το 2015 ότι για κάθε $n \geq 1$ και $k \geq 3$, υπάρχει πρωτοσύνολο από k πρωτοπλακίδια ώστε ένα μόνο πλακίδιο να έχει ακριβώς n κορώνες. [29]

Αν ένα πλακίδιο έχει πρώτη κορώνα, μπορούμε να ρωτήσουμε πόσα αντίγραφα του πλακιδίου χρειάζονται για να κατασκευαστεί η πρώτη κορώνα.

Ορισμός 3.32. Έστω T ένα πλακίδιο με πρώτη κορώνα. Ο **αριθμός περικύκλωσης** είναι ο ελάχιστος αριθμός πλακιδίων που χρειάζονται για να κατασκευαστεί η πρώτη κορώνα.

Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε ένα πλακίδιο με αριθμό περικύκλωσης 4. Στο Σχ. 3.11, βλέπουμε ένα πλακίδιο με αριθμό περικύκλωσης 3.



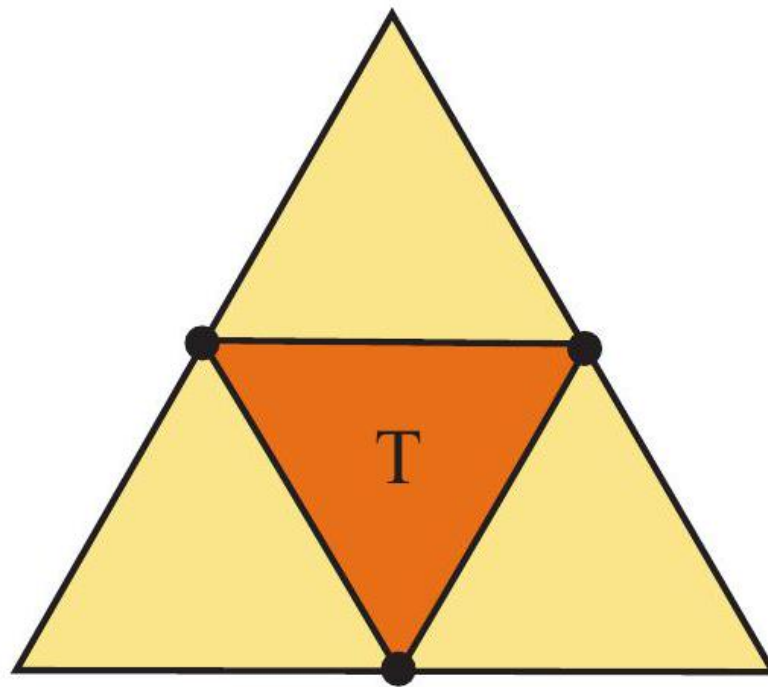
Σχήμα 3.11: Ένα πλακίδιο με αριθμό περικύκλωσης 3.

Είχε διατυπωθεί η εικασία ότι δεν υπάρχουν πλακίδια με αριθμό περικύκλωσης 2, αλλά ο Casey Mann κατασκεύασε ένα παράδειγμα το 2002 [96]. Βασίζεται σε μια καταπληκτική κατασκευή του Voderberg από το 1936 [143], την οποία εξετάζουμε τώρα.

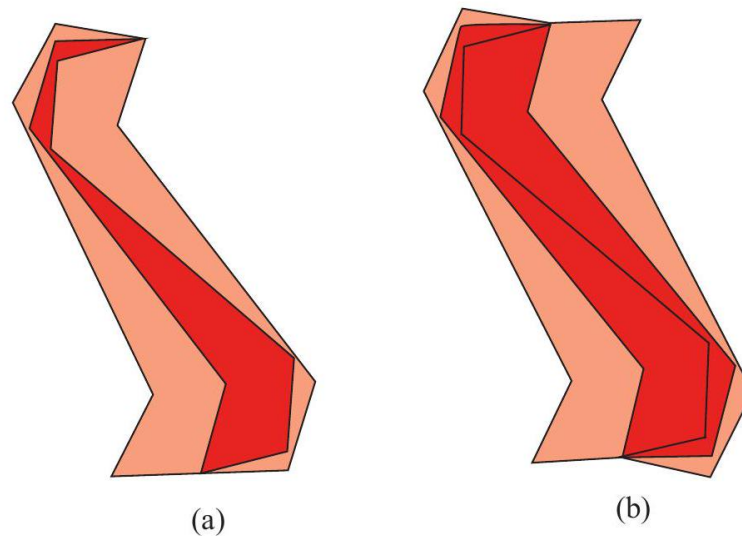
Ορισμός 3.33. Λέμε ότι ένα σύνολο από πολυγωνικά πλακίδια **περιβάλλει** ένα δεδομένο πολυγωνικό πλακίδιο T αν η ένωση του T με τα πλακίδια σχηματίζει ένα μπάλωμα $\mathcal{A}$, τέτοιο ώστε επιτρέπεται οι γωνίες του T να βρίσκονται στο σύνορο $\partial\mathcal{A}$ αλληλά όχι σημεία από το εσωτερικό των πλευρών του T να τέμνουν το $\partial\mathcal{A}$.

Άρα, δεν είναι απαραίτητο το $\mathcal{A}$ να περικλείει το T . Για παράδειγμα το Σχ. 3.12 απεικονίζει ένα τριγωνικό πλακίδιο T το οποίο περιβάλλεται από τρία αντίγραφα του τριγώνου.

Είχε διατυπωθεί η εικασία ότι για να περιβληθεί ένα πλακίδιο με αντίγραφα του εαυτού του, χρειαζόμαστε τουλάχιστον τρία αντίγραφα. Αλλά όπως βλέπουμε στο Σχ. 3.13, (α), υπάρχει πλακίδιο που περιβάλλεται από δύο αντίγραφα του εαυτού του. Ακόμα πιο εντυπωσιακά, το ίδιο αυτό πλακίδιο μπορεί να περιβάλλει ακόμα και



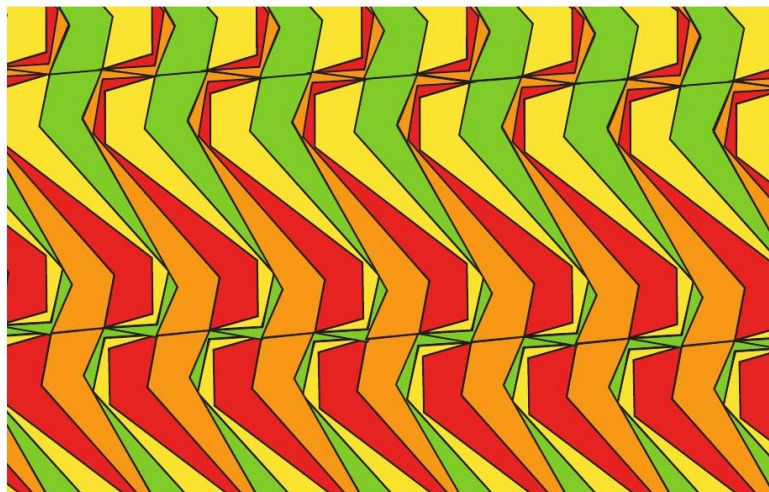
Σχήμα 3.12: Ένα τριγωνικό πλακίδιο περιβαλλόμενο από τρία αντίγραφα.



Σχήμα 3.13: Ένα πλακίδιο περιβαλλόμενο από δύο αντίγραφα του εαυτού του.

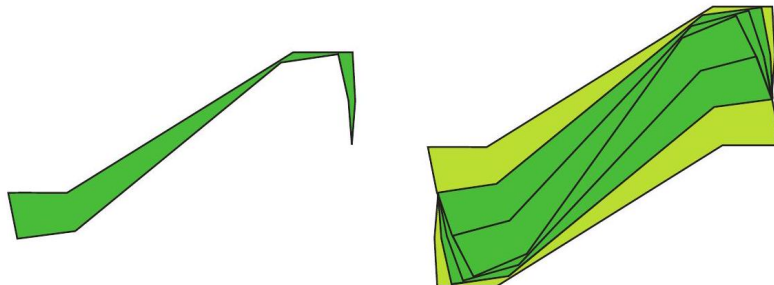
δύο αντίγραφά του, όπως στο Σχ. 3.13, (β). Πρόκειται για αξιοσημείωτο πλακίδιο. Το ίδιο πλακίδιο δημιουργεί μια περιοδική μονοεδρική πλακόστρωση, όπως στο Σχ. 3.14. Δημιουργεί επίσης την σπειροειδή πλακόστρωση που φαίνεται στο Σχ. 2.29 (αριστερά).

Η κατασκευή αυτή γενικεύτηκε στο [52], όπου αποδεικνύεται ότι μπορούμε να κατασκευάσουμε πλακίδιο τέτοιο ώστε n αντίγραφά του να περιβάλλονται από δύο μόνο αντίγραφα, όπως στο Σχ. 3.15. Αυτό φαίνεται αντιδραστικό, αφού η περιοχή που περιβάλλεται από τα δύο πλακίδια πρέπει να είναι n φορές η περιοχή του



Σχήμα 3.14: Πλακόστρωση με το πλακίδιο Voderberg.

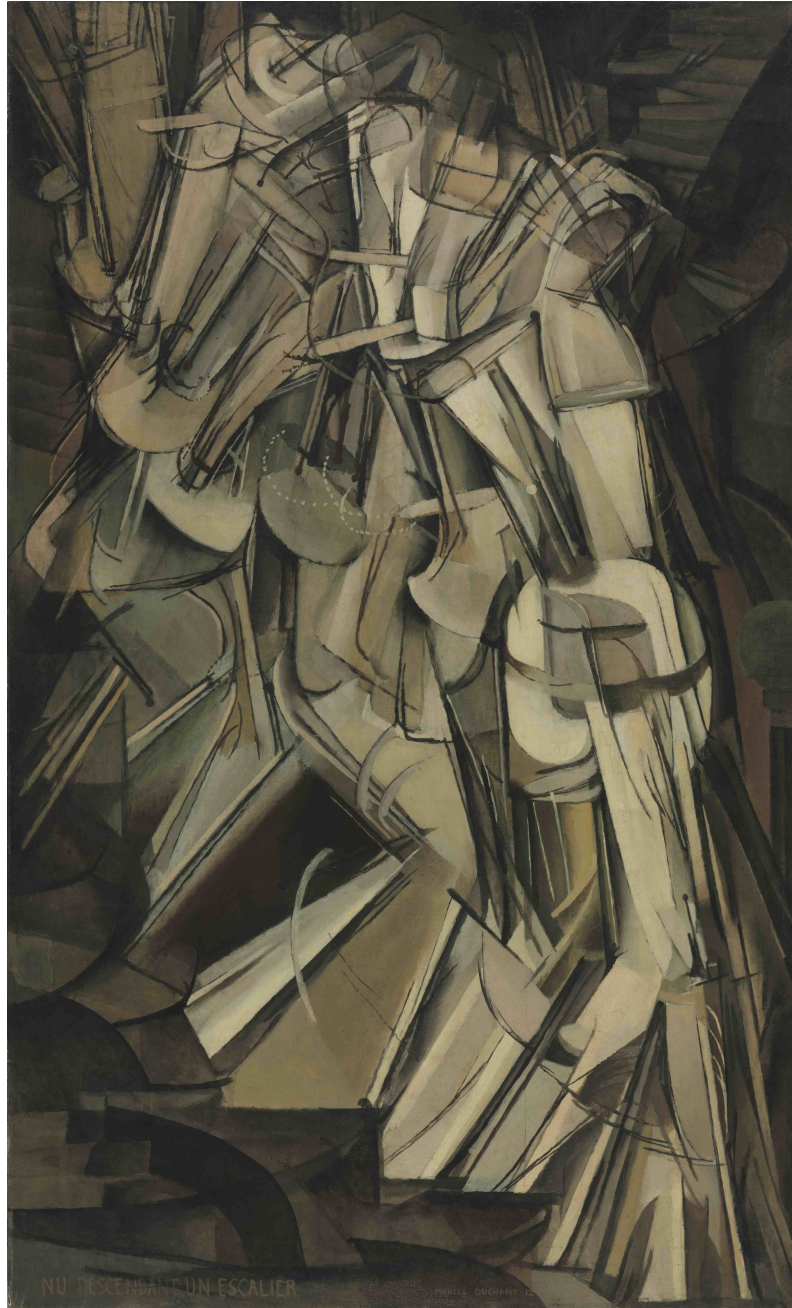
αρχικού. Ωστόσο, στην κατασκευή, τα πλακίδια γίνονται λεπτότερα όσο αυξάνει το n , έτσι η περιοχή τους μειώνεται, επιτρέποντας την επιτυχία της κατασκευής. Η πλακόστρωση με ένα τέτοιο πλακίδιο, και οι μορφές που δημιουργεί στο επίπεδο, έχουν μια φοβερή ομοιότητα και αναλογία με το έργο *Nu descendant un escalier n° 2* του Marcel Duchamp, βλ. Εικ. 3.1.



Σχήμα 3.15: Πλακίδιο τέτοιο ώστε η αντίγραφά του να περιβάλλονται από δύο μόνο αντίγραφα.

Πρόκειται επίσης για το πλακίδιο που προσφέρει ένα αντιπαράδειγμα στην μακροχρόνια εικασία ότι για κάθε πλακίδιο σε μονοεδρική πλακόστρωση, η γειτονιά του είναι μπάλωμα, ανακαλυφθέν από τον Casey Mann και τους φοιτητές του [2]. Στο Σχ. 2.14, βλέπουμε σπειροειδή πλακόστρωση με ένα μαύρο πλακίδιο. Τα πιο ανοιχτόχρωμα πλακίδια αποτελούν τη γειτονιά του, αλλά για να βρούμε το μικρότερο μπάλωμα που την περιέχει, πρέπει να προσθέσουμε τα τρία πιο σκουρόχρωμα πλακίδια.

Μάς ενδιαφέρει η περίπτωση του αρχικού πλακιδίου Voderberg, που μπορεί να περιβληθεί από δύο αντίγραφα του εαυτού του. Θέλουμε ένα πλακίδιο που να περικλείεται από δύο αντίγραφά του και όχι απλώς να περιβάλλεται. Ο Mann τροποποιεί το πλακίδιο όπως στο Σχ. 3.16. Έπειτα, όπως στο Σχ. 3.17, αποκτά ένα πλακίδιο

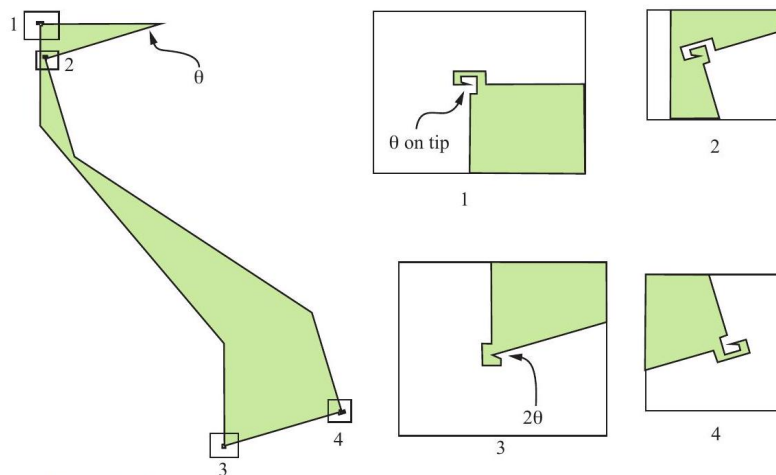


Εικόνα 3.1: *Nu descendant un escalier n° 2*, Marcel Duchamp

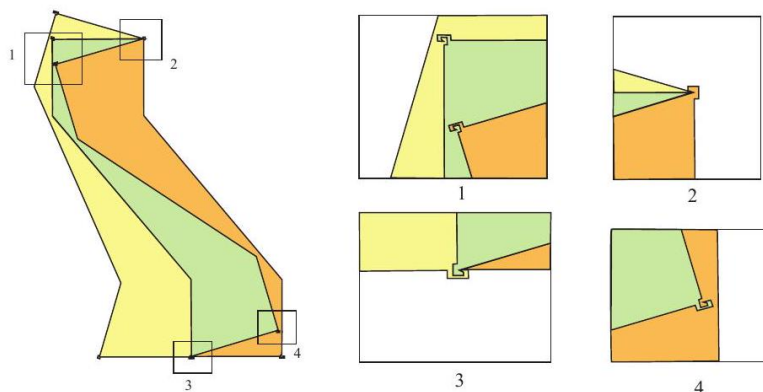
με πρώτη κορώνα που αποτελείται μόνο από δύο πλακίδια.

Σε αδημοσίευτη εργασία διαθέσιμη στο διαδίκτυο, ο Walter Trump τροποποιεί και απλοποιεί περαιτέρω το παράδειγμα ώστε να προκύψει πλακίδιο τέτοιο ώστε δύο αντίγραφα του (μπλε και ροζ) να περικλείουν δύο άλλα αντίγραφα (κίτρινο και πράσινο), όπως στο Σχ. 3.18. Το πλακίδιο αυτό, το οποίο έχει 20 ακμές, όντως πλακοστρώνει το επίπεδο.

Ανοικτά Ερωτήματα. 1. Υπάρχει πρωτοπλακίδιο με αριθμό περικύκλωσης 2 που να δημιουργεί πλακόστρωση του επιπέδου;



Σχήμα 3.16: Τροποποίηση του πλακιδίου Voderberg ώστε να προκύψει πλακίδιο με αριθμό περικύκλωσης 2.



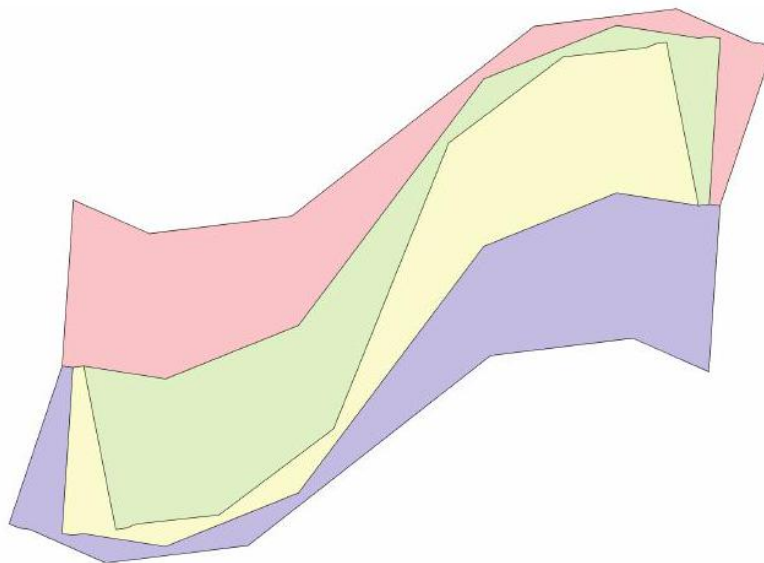
Σχήμα 3.17: Πλακίδιο του οποίου η πρώτη κορώνα αποτελείται από δύο αντίγραφα του.

2. Υπάρχει τρισδιάστατο πλακίδιο με αριθμό περικύκλωσης 2 ή 3;

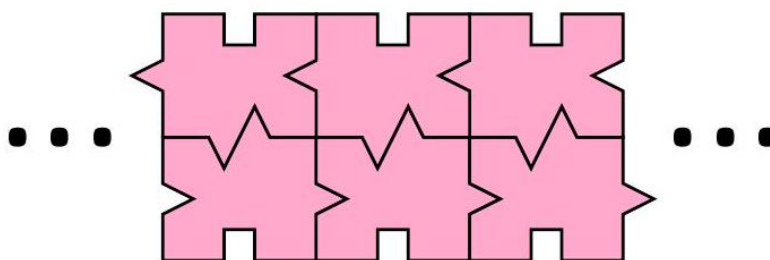
3.2 Το Θεώρημα Επέκτασης

Σε αυτή την ενότητα, ισχυροποιούμε το Λήμμα 3.13, το οποίο έλεγε πως εφόσον έχουμε ένα άπειρο σύνολο από μπαλώματα, καθένα από τα οποία περικλείει το προηγούμενο, τότε η ένωση αυτών των μπαλωμάτων δίνει μια πλακόστρωση του επιπέδου. Στο λήμμα αυτό, ήταν σημαντικό τα επόμενα μπαλώματα να περικλείουν το ένα το άλλο. Δεν αρκούσε απλώς να αυξάνεται ο αριθμός των πλακιδίων μέσα στα μπαλώματα.

Για παράδειγμα, στο Σχήμα 3.19, βλέπουμε ένα πλακίδιο που μπορεί να δημιουργήσει μπαλώματα με αυθαίρετα πολλά πλακίδια και κάθε μπάλωμα να περιβάλλει το προηγούμενο. Όμως είναι φανερό πως αυτό το πλακίδιο δεν μπορεί να δημιουργήσει πλακόστρωση του επιπέδου.



Σχήμα 3.18: Πλακίδιο τέτοιο ώστε δύο αντίγραφα (μπλε και ροζ) να περικλείουν δύο άλλα (κίτρινο και πράσινο).



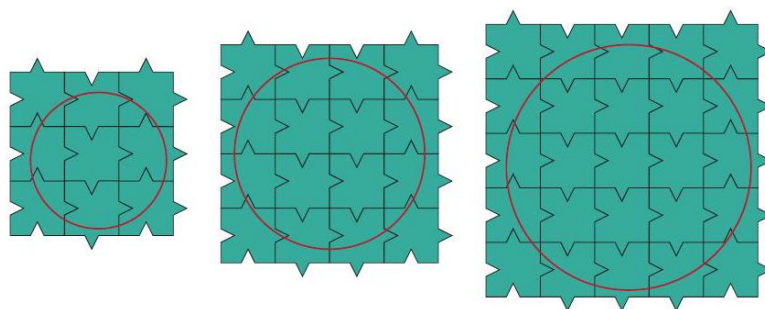
Σχήμα 3.19: Αν και το μπάλωμα μεγαλώνει, δεν δημιουργεί πλακόστρωση του επιπέδου.

Μπορούμε επίσης να έχουμε περίπτωση όπου μια ακολουθία από μπαλώματα περιέχει αυθαίρετα μεγάλους δίσκους, αλλά τα μπαλώματα δεν περιέχουν το ένα το άλλο, όπως στο Σχήμα 3.20. Τα μπαλώματα έχουν κατασκευαστεί έτσι ώστε τα πλακίδια σε κάθε στήλη να έχουν μια ακίδα στραμμένη προς τα πάνω ή προς τα κάτω, σύμφωνα με το μοτίβο $UDU, UDDU, UDDDU, \dots$ ¹, εμποδίζοντας τα μπαλώματα να περιέχουν το ένα το άλλο. Αν και είναι αλήθεια πως το αντίστοιχο πρωτοπλακίδιο δημιουργεί πλακόστρωση, το Λήμμα 3.13 δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε αυτά τα μπαλώματα για να το αποδείξει.

Ορισμός 3.34. Έστω $\mathcal{P}$ ένα σύνολο από πρωτοπλακίδια και έστω D ένας δίσκος στο επίπεδο. Λέμε ότι το $\mathcal{P}$ **πυλακοστρώνει** τον D αν μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα μπάλωμα από αντίγραφα πυλακιδίων του πρωτοσυνόλου που να περιέχει τον δίσκο D .

Θεώρημα 3.5 (Επέκτασης). Έστω $\mathcal{P}$ ένα πεπερασμένο πρωτοσύνολο. Αν το $\mathcal{P}$ πυλακοστρώνει αυθαίρετα μεγάλους δίσκους, τότε το $\mathcal{P}$ δημιουργεί πλακόστρωση ολόκληρου του επιπέδου.

¹U: up, D: down



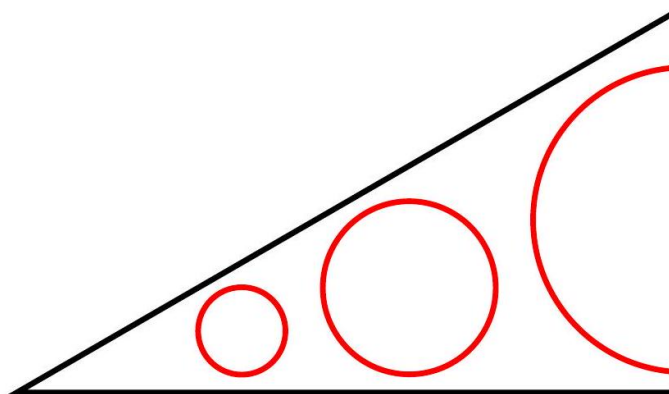
Σχήμα 3.20: Αυθαίρετα μεγάλα μπαλώματα που δεν περιέχουν το ένα το άλλο.

Το αποτέλεσμα αυτό είναι κάπως απρόσμενο. Δεν είναι καθόλου προφανές ότι η ύπαρξη άσχετων μπαλωμάτων που περιέχουν αυθαίρετα μεγάλους δίσκους οδηγεί σε πλακόστρωση.

Πριν αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα, εξετάζουμε κάποιες συνέπειες.

Πόρισμα 3.2. *Αν ένα πεπερασμένο πρωτοσύνολο μπορεί να πλακοστρώσει έναν τομέα του επιπέδου, τότε δημιουργεί πλακόστρωση όλου του επιπέδου.*

Απόδειξη. Αυτό είναι άμεσο, καθώς κάθε τομέας του επιπέδου περιέχει μπαλώματα που πλακοστρώνουν αυθαίρετα μεγάλους δίσκους, όπως στο Σχήμα 3.21. $\square$



Σχήμα 3.21: Αν ένα πεπερασμένο πρωτοσύνολο πλακοστρώνει τομέα του επιπέδου, τότε πλακοστρώνει και ολόκληρο το επίπεδο.

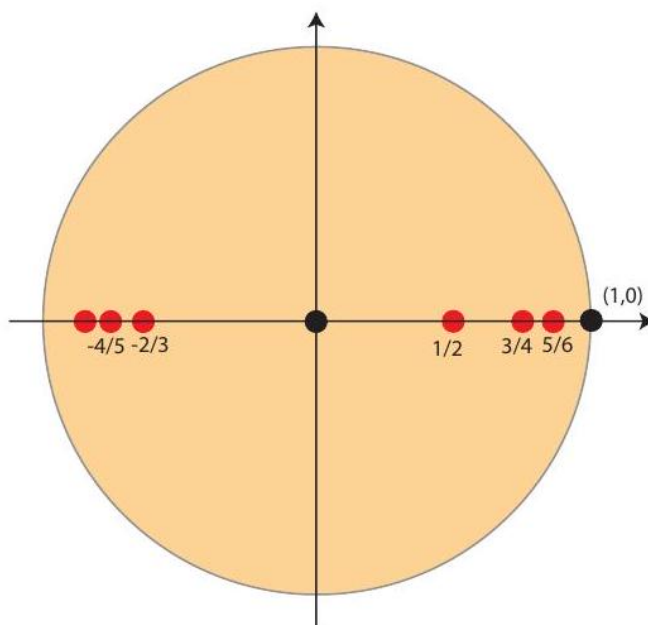
Γενικά η προσθήκη λίγων επιπλέον πλακιδίων (σε αντίθεση με νέα πρωτοπλακίδια) μπορεί να αλλάξει δραστικά τις επιλογές πλακόστρωσης ενός πρωτοσυνόλου. Όμως το επόμενο πόρισμα μας λέει πως μια τέτοια προσθήκη δεν δημιουργεί πλακόστρωση αν το αρχικό πρωτοσύνολο δεν την δημιουργούσε ήδη.

Πόρισμα 3.3. *Αν ένα πρωτοσύνολο $\mathcal{P}$ δεν δημιουργεί μια πλακόστρωση, τότε η προσθήκη πεπερασμένου πλήθους επιπλέον πλακιδίων δεν μπορεί να αλλάξει αυτό το γεγονός.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι τα πλακίδια $T_1, T_2, \dots, T_n$ μαζί με πλακίδια ταυτόσημα με τα πλακίδια του $\mathcal{P}$ δημιουργούν μια πλακόστρωση. Εφόσον υπάρχουν μόνο n επιπλέον πλακίδια, μπορούμε να βρούμε αυθαίρετα μεγάλα μπαλώματα στην πλακόστρωση που αποφεύγουν αυτό το πεπερασμένο σύνολο. Το Θεώρημα Επέκτασης (Θεώρημα 3.5) τότε συνεπάγεται ότι το $\mathcal{P}$ δημιουργεί πλακόστρωση, άτοπο. $\square$

Η απόδειξη του Θεωρήματος Επέκτασης είναι κρίσιμη για την συνέχεια. Για να το αποδείξουμε, χρειαζόμαστε ένα γνωστό θεώρημα από την ανάλυση.

Θεώρημα 3.6 (Bolzano–Weierstrass). *Αν Q είναι ένα συμπαγές σύνολο στο επίπεδο, τότε κάθε ακολουθία σημείων του Q έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει σε ένα σημείο $p \in Q$.*



Σχήμα 3.22: Η ακολουθία συγκλίνει στο $(1, 0)$, καθώς D είναι συμπαγής.

Για παράδειγμα, εφόσον ο μοναδιαίος δίσκος D είναι συμπαγής, γνωρίζουμε ότι κάθε ακολουθία σημείων του D έχει μια υπακολουθία που συγκλίνει σε κάποιο σημείο $p \in D$. Έστω τώρα η ακολουθία $S = \{((-1)^n(1 - 1/n), 0) : n \in \mathbb{Z}^+\}$, όπως στο Σχήμα 3.22. Τότε υπάρχει υπακολουθία της που συγκλίνει στο σημείο $(1, 0)$.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Επέκτασης, χρειαζόμαστε επίσης μερικούς ακόμη ορισμούς.

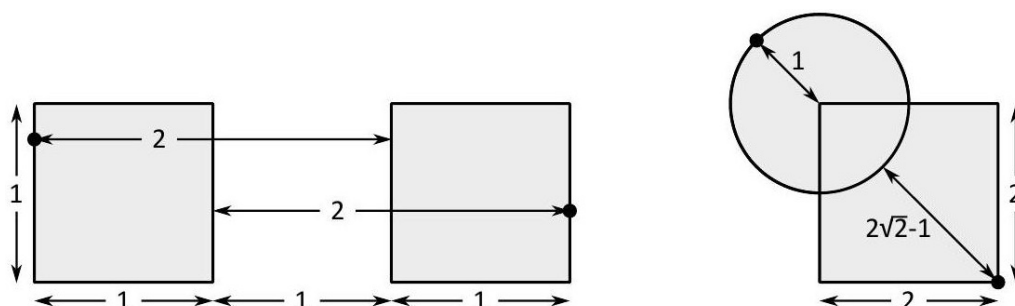
Ορισμός 3.35. Έστω δύο πλακίδια T_1 και T_2 στο επίπεδο. Ορίζουμε την **απόσταση Hausdorff** μεταξύ τους, $\delta(T_1, T_2)$, ως το μέγιστο από τις αποστάσεις:

- d_{12} : η μέγιστη απόσταση σημείου του T_1 από το πλακίδιο T_2 ,
- d_{21} : η μέγιστη απόσταση σημείου του T_2 από το πλακίδιο T_1 .

Δηλαδή, $\delta(T_1, T_2) = \max\{d_{12}, d_{21}\}$.

Για παράδειγμα, στο Σχ. 3.23(αριστερά), έχουμε δύο τετράγωνα στο επίπεδο. Το πιο απομακρυσμένο σημείο του T_1 από το T_2 βρίσκεται στην αριστερή πλευρά του T_1 και έχει απόσταση $d_{12} = 2$. Ομοίως, το πιο απομακρυσμένο σημείο του T_2 από το T_1 είναι στη δεξιά του πλευρά και έχει απόσταση $d_{21} = 2$. Άρα, $\delta(T_1, T_2) = 2$.

Στο Σχ. 3.23(δεξιά), έχουμε επικαλυπτόμενα πλακίδια, ένα κύκλο T_1 και ένα τετράγωνο T_2 . Η μέγιστη απόσταση από σημείο του T_1 προς το T_2 είναι $d_{12} = 1$, ενώ από σημείο του T_2 προς το T_1 είναι $d_{21} = 2\sqrt{2} - 1 \approx 1.818$. Επομένως, $\delta(T_1, T_2) = 2\sqrt{2} - 1$.



Σχήμα 3.23: Υπολογισμός της απόστασης Hausdorff μεταξύ δύο πλακιδίων.

Σημείωση. $\delta(T_1, T_2) = 0$ αν και μόνο αν τα δύο πλακίδια είναι ταυτόσημα

Ορισμός 3.36. Μια ακολουθία πλακιδίων $\{T_i\}$ **συγκλίνει σε ένα πλακίδιο** T αν ισχύει $\lim_{i \rightarrow \infty} \delta(T_i, T) = 0$.

Για παράδειγμα, αν θεωρήσουμε την ακολουθία μοναδιαίων τετραγώνων $\{S_i\}$ με πλευρές παράλληλες στους άξονες και κέντρο το σημείο $(1/i, 0)$, τότε αυτή συγκλίνει στο μοναδιαίο τετράγωνο με κέντρο το $(0, 0)$.

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα Επέκτασης, χρειαζόμαστε το εξής λήμμα:

Λήμμα 3.14 (Επιλογής). Έστω άπειρη ακολουθία πλακιδίων $\{T_i\}$, όλα ταυτόσημα σε ένα πρωτοπλακίδιο T , και όλα μοιράζονται ένα σημείο p . Τότε υπάρχει υποακολουθία που συγκλίνει σε ένα πλακίδιο T' που περιέχει το p και είναι επίσης ταυτόσημο με το T .

Απόδειξη. Θεωρούμε το T ως δεδομένο πλακίδιο στο επίπεδο. Έστω (x_i, y_i) το κέντρο βάρους του T_i και (x, y) το κέντρο βάρους του T .² Εφόσον T_i είναι ταυτόσημο με το T , υπάρχει ισομετρία που μεταφέρει το T_i στο T : μεταφορά ώστε $(x_i, y_i) \mapsto (x, y)$, ανάκλαση ως προς οριζόντια ευθεία που περνά από (x, y) , και στροφή κατά γωνία θ_i ώστε να ευθυγραμμιστούν.

²Κέντρο βάρους, εννοούμε το σημείο ως προς το οποίο το πλακίδιο θα ισορροπούσε αν το στηρίζαμε εκεί. Στην περίπτωση όμως ενός μη κυρτού πλακιδίου, το κέντρο βάρους δεν είναι απαραίτητο να βρίσκεται εντός του πλακιδίου.

Από την Αρχή του Περιστερώνα, υπάρχει υπακολουθία $\{T'_i\}$ πλακιδίων τέτοια ώστε είτε όλα χρειάζονται είτε κανένα δεν χρειάζεται ανάκλαση στην ισομετρία. Αντιστοιχίζουμε κάθε T'_i στο σημείο $q_i = (x_i, y_i, \theta_i)$. Αν και μπορούμε να φανταστούμε ότι αυτά τα σημεία-αντιπρόσωποι ανήκουν στο $\mathbb{R}^3$, στην πραγματικότητα ανήκουν στο $\mathbb{R}^2 \times S^1$, όπου το S^1 είναι ο κύκλος που προκύπτει αν ταυτίσουμε τη γωνία 2π με τη γωνία 0.

Ορίζουμε το X ως το σύνολο όλων των σημείων-αντιπροσώπων q_i (όχι μόνο του $\{T'_i\}$) που αντιστοιχούν σε πλακίδια που περιέχουν το p και είναι ταυτόσημα με το T . Το X είναι φραγμένο, καθώς όλα τα κέντρα βάρους βρίσκονται εντός απόστασης d από το p , όπου d είναι η μέγιστη απόσταση σημείου του T από το (x, y) .

Για να δείξουμε ότι το X είναι κλειστό, δείχνουμε ότι το συμπλήρωμά του είναι ανοικτό. Αν ένα (x, y, θ) δεν ανήκει στο X , τότε το αντίστοιχο πλακίδιο $\{T\}$ δεν περιέχει το p . Υπάρχει θετική απόσταση του πλακιδίου από το p . Συγκεκριμένα, μπορούμε να μεταβάλουμε ελαφρώς τόσο το κέντρο βάρους του T όσο και τη γωνία του, και τα πλακίδια που προκύπτουν συνεχίζουν να μην περιέχουν το σημείο p . Επομένως, υπάρχει μια μικρή περιοχή γύρω από το (x, y, θ) που δεν ανήκει στο X . Άρα το συμπλήρωμα του X είναι ανοικτό και συνεπώς το X είναι κλειστό.

Εφόσον το X είναι κλειστό και φραγμένο, είναι συμπαγές (Θ. Heine–Borel). Η ακολουθία $\{T_i\}$ παράγει άπειρη ακολουθία σημείων $S \subseteq X$. Από το Θεώρημα Bolzano–Weierstrauss, υπάρχει υπακολουθία που συγκλίνει σε σημείο $(x_0, y_0, \theta_0) \in X$. Άρα τα κέντρα βάρους συγκλίνουν στο (x_0, y_0) και οι γωνίες στο θ_0 . Τότε το πλακίδιο T' που αντιστοιχεί στο (x_0, y_0, θ_0) είναι τέτοιο ώστε η υπακολουθία συγκλίνει σε αυτό κατά την απόσταση Hausdorff. $\square$

Ορισμός 3.37. Δοθέντος ενός πλακιδίου T , ορίζουμε ως **εσωτερική ακτίνα** u την μεγαλύτερη ακτίνα ενός δίσκου που περιέχεται στο T , και ως **εξωτερική ακτίνα** U την μικρότερη ακτίνα ενός δίσκου που περιέχει το T , όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.24.

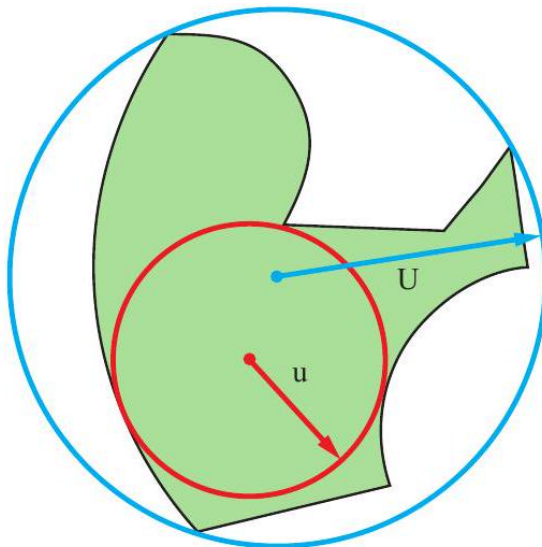
Όταν έχουμε ένα πεπερασμένο πρωτοσύνολο $\mathcal{P}$, τότε υπάρχει μια ελάχιστη εσωτερική ακτίνα ανάμεσα σε όλα τα πρωτοπλακίδια, την οποία ονομάζουμε **εσωτερική ακτίνα του $\mathcal{P}$** και την συμβολίζουμε επίσης με u , καθώς και μια μέγιστη εξωτερική ακτίνα, την οποία ονομάζουμε **εξωτερική ακτίνα του $\mathcal{P}$** και την συμβολίζουμε με U .

Άρα κάθε πρωτοπλακίδιο περιέχει έναν δίσκο ακτίνας u και περιέχεται μέσα σε έναν δίσκο ακτίνας U .

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το Θεώρημα Επέκτασης.

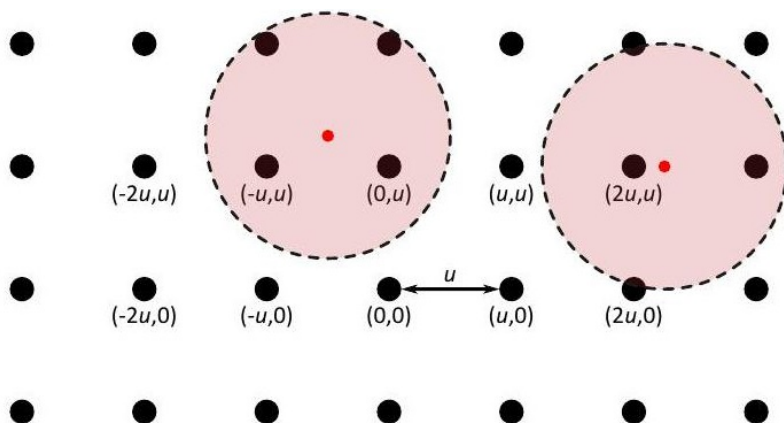
Απόδειξη Θεωρήματος Επέκτασης. Δεδομένου ενός πρωτοσυνόλου $\mathcal{P}$ με εσωτερική ακτίνα u και εξωτερική ακτίνα U , κατασκευάζουμε πρώτα ένα πλέγμα σημείων στο επίπεδο που δίνεται από το

$$\Lambda = \{(nu, mU) : n, m \in \mathbb{Z}\}$$



Σχήμα 3.24: Η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα ενός πλακιδίου T .

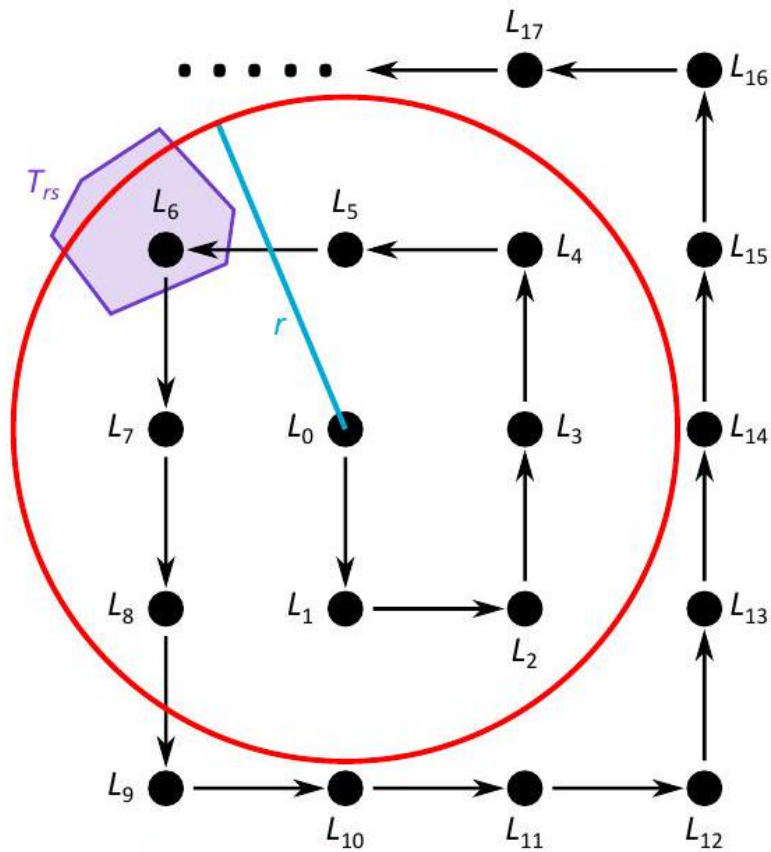
Πρόκειται απλώς για το πλέγμα των ακεραίων πολλαπλασιασμένο με u , όπως φαίνεται στο Σχ. 3.25. Παρατηρούμε ότι, σε αυτό το πλέγμα, κάθε δίσκος ακτίνας u περιέχει τουλάχιστον ένα από αυτά τα σημεία του πλέγματος. Καθώς κάθε πρωτοπλακίδιο περιέχει έναν δίσκο ακτίνας u , αυτό σημαίνει ότι κάθε πλακίδιο ταυτόσημο με κάποιο πρωτοπλακίδιο περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του πλέγματος.



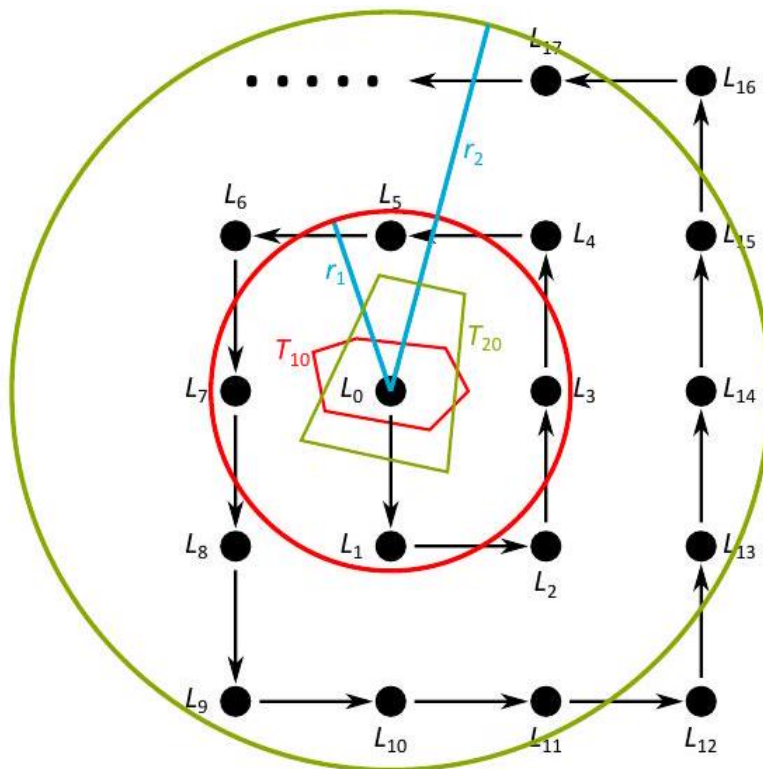
Σχήμα 3.25: Κάθε δίσκος ακτίνας u περιέχει σημείο του πλέγματος Λ .

Θα μας διευκολύνει να δημιουργήσουμε μια λίστα με όλα τα σημεία του πλέγματος. Ξεκινάμε από την αρχή των αξόνων και προχωράμε σπειροειδώς γύρω από αυτή, όπως φαίνεται στο Σχ. 3.26, καταγράφοντας διαδοχικά τα σημεία της σπείρας στη λίστα μας (η ιδέα αυτή χρησιμοποιείται για να αποδείξουμε ότι οι ρητοί αριθμοί είναι αριθμήσιμοι). Στόχος μας είναι να δημιουργήσουμε μια πλακόστρωση όλου του επιπέδου, τοποθετώντας κάθε φορά ένα πλακίδιο, ώστε το n -οστό πλακίδιο να περιέχει το σημείο L_{n-1} .

Έστω $D(L_0, r)$ ο κλειστός δίσκος ακτίνας r με κέντρο το L_0 , όπου $r = 1, 2, 3, \dots$. Τότε, σύμφωνα με τις υποθέσεις μας, για κάθε r μπορούμε να κατασκευάσουμε ένα



Σχήμα 3.27: Ορισμός του T_{rs} μέσα στο μπάθωμα $\mathcal{A}_r$.



Σχήμα 3.28: Τα πλακίδια T_{10} και T_{20} που περιέχουν το L_0 .

βάνουμε μόνο τις τιμές του r που εμφανίζονταν στην τελική υπακολουθία S_0'' από το προηγούμενο βήμα. Εκ κατασκευής, κάθε τέτοιο πλακίδιο περιέχει το L_1 . Όπως πριν, παίρνουμε υπακολουθία S_1' με πλακίδια όλα ταυτόσημα με το πρωτοπλακίδιο T_1 . Και πάλι, από το Λήμμα 3.14, έχουμε υπακολουθία S_1'' που συγκλίνει σε πλακίδιο T_1' ταυτόσημο προς το T_1 και περιέχον το L_1 .

Από εδώ και πέρα συνεχίζουμε επαγωγικά. Στο m -οστό βήμα, θεωρούμε την ακολουθία πλακιδίων $S_m = \{T_m\}$, όπου r λαμβάνει τιμές που είναι αρκετά μεγάλες ώστε το L_m να περιέχεται στον αντίστοιχο δίσκο και ανήκουν στην προηγούμενη υπακολουθία S_{m-1}'' . Προκύπτει υπακολουθία S_m' από ταυτόσημα πλακίδια με κάποιο πρωτοπλακίδιο T_m , και έπεται υπακολουθία S_m'' που συγκλίνει σε πλακίδιο T_m' ταυτόσημο προς το T_m και περιέχον το L_m .

Ισχυρισμός. Το σύνολο $\mathcal{T}' = \{T_0', T_1', T_2', \dots\}$ αποτελεί πηλακόστρωση του επιπέδου η οποία δημιουργείται από το πρωτοσύνολο $\mathcal{P}$.

Απόδειξη Ισχυρισμού. Ενδέχεται να υπάρχουν επαναλήψεις πλακιδίων στη λίστα. Αν συμβαίνει αυτό, για λόγους ευκολίας, αγνοούμε τις επαναλήψεις ώστε κάθε πλακίδιο της ακολουθίας να είναι μοναδικό. Έχουμε ήδη δείξει ότι κάθε πλακίδιο είναι ταυτόσημο με κάποιο από τα πλακίδια του πρωτοσυνόλου $\mathcal{P}$. Συνεπώς, απομένει να δείξουμε ότι το σύνολο των πλακιδίων είναι ταυτόχρονα κάλυψη και συσκευασία του επιπέδου.

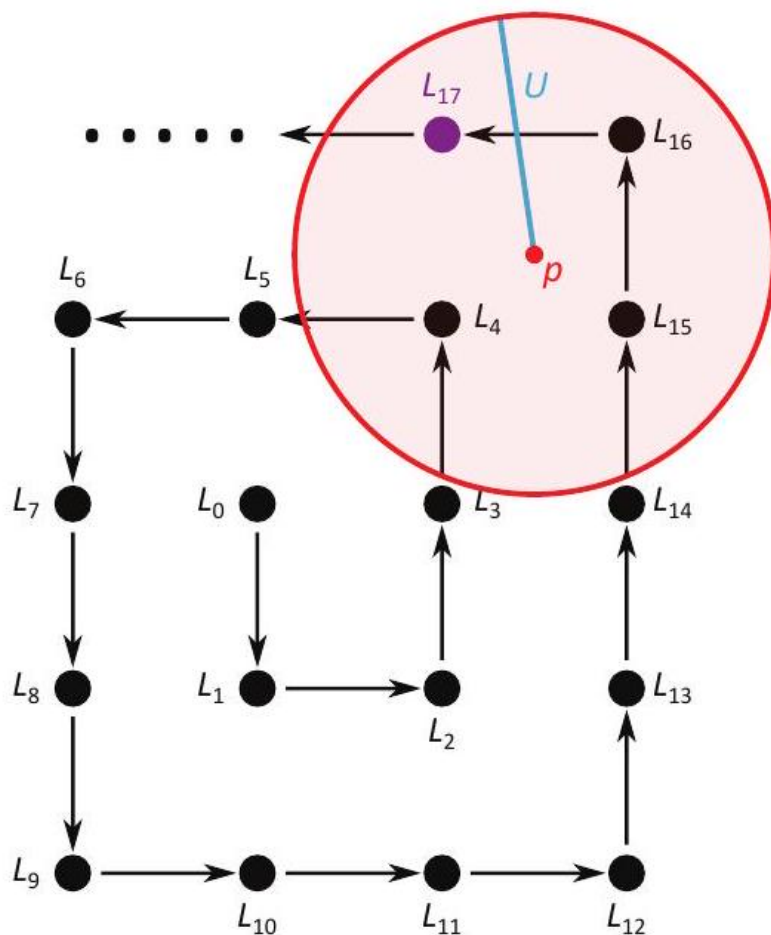
Για να δείξουμε ότι πρόκειται για κάλυψη, έστω p ένα σημείο στο επίπεδο. Αρκεί να δείξουμε ότι ανήκει σε τουλάχιστον ένα πλακίδιο του $\mathcal{T}'$.

Θεωρούμε τον δίσκο $D(p, U)$, όπου U είναι η εξωτερική ακτίνα του πρωτοσυνόλου $\mathcal{P}$. Καθώς κάθε σημείο του επιπέδου απέχει το πολύ $u/\sqrt{2} < U$ από κάποιο σημείο του πλέγματος, ο δίσκος αυτός περιέχει τουλάχιστον ένα σημείο του πλέγματος. Έστω L_m το σημείο του πλέγματος μέσα στον δίσκο $D(p, U)$ με τον μεγαλύτερο δείκτη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.29.

Εξετάζουμε τώρα τα μπαλώματα $\mathcal{A}_r$ που καλύπτουν τους δίσκους $D(L_0, r)$, για τιμές του r που αντιστοιχούν στην ακολουθία S_m'' . Υποθέτουμε επίσης ότι το r είναι αρκετά μεγάλο ώστε τόσο το p όσο και το L_m να περιέχονται στο $\mathcal{A}_r$.

Για κάθε τέτοιο r , θεωρούμε το σύνολο πλακιδίων $\mathcal{T}_r = \{T_{r0}, T_{r1}, \dots, T_{rm}\}$, τα οποία ανήκουν όλα στο μπαλώμα $\mathcal{A}_r$. Τουλάχιστον ένα από αυτά περιέχει το σημείο p , και κανένα δεν επικαλύπτεται εσωτερικά με κάποιο άλλο.

Καθώς αφήνουμε το r να τείνει στο ∞ διατρέχοντας τις τιμές της S_m'' , κάθε πλακίδιο της $\mathcal{T}_r$ τείνει προς ένα πλακίδιο της $\mathcal{T}'_m = \{T'_0, T'_1, \dots, T'_m\}$. Άρα η ένωση των πλακιδίων της $\mathcal{T}_r$ συγκλίνει στην ένωση των πλακιδίων της $\mathcal{T}'_m$. Εφόσον για κάθε r η ένωση αυτή περιέχει το p , το ίδιο ισχύει και για το όριο. Άρα υπάρχει πλακίδιο του $\mathcal{T}'$ που περιέχει το p .



Σχήμα 3.29: Επιλογή του L_m (σε αυτήν την περίπτωση L_{17}), όπου m είναι ο μεγαλύτερος δείκτης σημείου πλέγματος εντός του $D(p, U)$.

Για να δείξουμε ότι το $\mathcal{T}'$ αποτελεί συσκευασία, αρκεί να δείξουμε ότι κανένα σημείο του επιπέδου δεν μπορεί να ανήκει στο εσωτερικό δύο διαφορετικών πλακιδίων. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι κάποιο σημείο p ανήκει στο εσωτερικό δύο πλακιδίων T'_i και T'_j του $\mathcal{T}'$. Τότε υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε ο ανοιχτός ε -δίσκος $D(p, \varepsilon)$ να περιέχεται και στα δύο πλακίδια. Όμως για αρκετά μεγάλο r , ώστε οι αποστάσεις $\delta(T_{ri}, T'_i)$ και $\delta(T_{rj}, T'_j)$ να είναι αρκετά μικρές, και καθώς τα T_{ri} και T_{rj} είναι ταυτόσημα με τα T'_i και T'_j αντίστοιχα, τότε τα T_{ri} και T_{rj} θα επικαλύπτονταν στο εσωτερικό τους στο σημείο p . Όμως αυτό έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι προέρχονται από το ίδιο μπάλωμα $\mathcal{A}_r$, άρα είναι εσωτερικά ξένα. Το άτοπο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος Επέκτασης. $\square$

3.3 Περιοδικές Πλακοστρώσεις

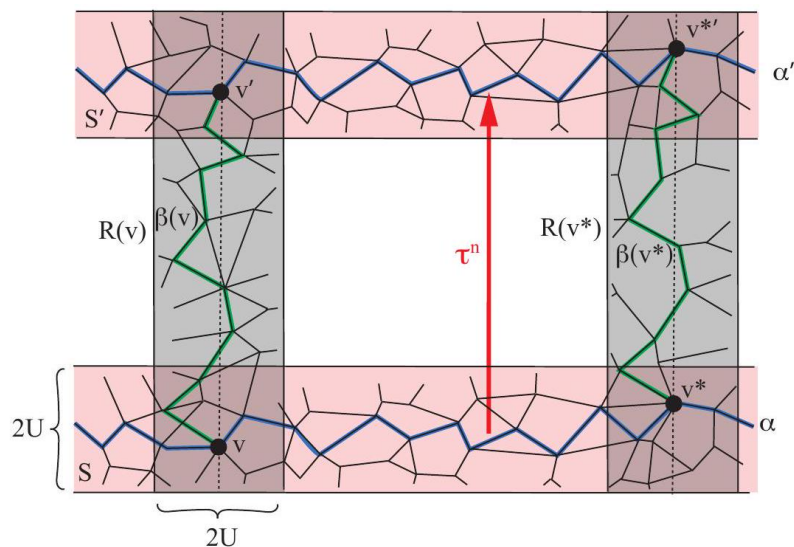
Στην Ενότητα 2.4, εξετάσαμε τις ομάδες ζωφόρου, δηλαδή τις ομάδες συμμετρίας που περιλαμβάνουν μεταφορές, αλλά μόνο προς μία διεύθυνση. Είδαμε επίσης τις ομάδες ταπετοαρίας, δηλαδή τις ομάδες συμμετρίας που περιλαμβάνουν μεταφορές

σε περισσότερες από μία μη παράλληλες διευθύνσεις. Μια πλακόστρωση που έχει ομάδα συμμετρίας με μεταφορές σε περισσότερες από μία μη παράλληλες διευθύνσεις ονομάζεται **περιοδική πλακόστρωση**. Για αυτές, ορίσαμε ένα παραλληλόγραμμο περιόδου που περικλείει όλες τις πληροφορίες της πλακόστρωσης.

Σε αυτή την ενότητα, αποδεικνύουμε το αναπάντεχο αποτέλεσμα ότι ένα πολυγωνικό πρωτοσύνολο που δημιουργεί μια πλακόστρωση με ομάδα συμμετρίας που είναι ομάδα ζωφόρου, πρέπει επίσης να δημιουργεί μια πλακόστρωση με ομάδα συμμετρίας που είναι ομάδα ταπετσαρίας, έχοντας υπόψη ότι δεν απαιτείται να χρησιμοποιούνται όλα τα πρωτοπλακίδια του πρωτοσυνόλου.

Θεώρημα 3.7 (Περιοδικότητα). Έστω $\mathcal{P}$ ένα πρωτοσύνολο που αποτελείται από πολυγωνικά πλακίδια. Αν δημιουργεί μια ακμή-προς-ακμή πλακόστρωση $\mathcal{T}$ με μεταφορικές συμμετρίες, τότε το $\mathcal{P}$ δημιουργεί μια ακμή-προς-ακμή περιοδική πλακόστρωση $\mathcal{T}'$.

Απόδειξη. Έστω τ μια μεταφορά στην ομάδα συμμετρίας της $\mathcal{T}$ που μεταφέρει κατά απόσταση x . Για ευκολία στην απεικόνιση, θεωρούμε ότι είναι κατακόρυφη. Έστω U η εξωτερική ακτίνα του $\mathcal{P}$ όπως ορίστηκε στην προηγούμενη ενότητα, και ορίζουμε μια άπειρη λωρίδα S πλάτους $2U$ κάθετη στη διεύθυνση της τ , όπως στο Σχήμα 3.30.



Σχήμα 3.30: Αποδεικνύοντας το Θεώρημα Περιοδικότητας

Εφόσον το S είναι αρκετά πλατύ ώστε κανένα πλακίδιο να μην τέμνει και τις δύο γραμμές του συνόρου του, μπορούμε να βρούμε μια άπειρη διαδρομή a εντός του S η οποία να ανήκει στις ακμές των πλακιδίων, όπως φαίνεται στο σχήμα. Επιλέγουμε φυσικό n αρκούντως μεγάλο ώστε $S \cap \tau^n(S) = \emptyset$. Θέτουμε $S' = \tau^n(S)$. Τότε, $a' = \tau^n(a)$ είναι μονοπάτι ακμών στο S' και ξένο με το a .

Έστω v μία σταθερή κορυφή της a . Τότε $v' = \tau^n(v)$ είναι κορυφή της πλακόστρωσης στο $a' \subset S'$.

Κατασκευάζουμε το σκιασμένο ορθογώνιο $R(v)$ στο Σχήμα 3.30 τέτοιο ώστε να έχει το v (και συνεπώς το v') στη μεσοκάθειό του, πλάτος $2U$ και πάνω/κάτω πλευρές στα σύνορα των S και S' . Παρατηρούμε ότι το ύψος του $R(v)$ είναι $n\kappa + 2U$. Επειδή τα πλακίδια δεν επεκτείνονται πέρα από απόσταση $2U$, υπάρχει διαδρομή ακμών στο $R(v)$ από το v στο v' . Ονομάζουμε μία τέτοια διαδρομή $\beta(v)$.

Αν αλλάξουμε το σημείο v , όλα τα ορθογώνια $R(v)$ θα έχουν το ίδιο μέγεθος και θα τέμνουν μόνο πεπερασμένο πλήθος πλακιδίων από την $\mathcal{T}$.

Ισχυρισμός. Για όλες τις κορυφές της a , υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες μη ταυτόσημες διαδρομές $\beta(v)$ μέσα στα αντίστοιχα $R(v)$.

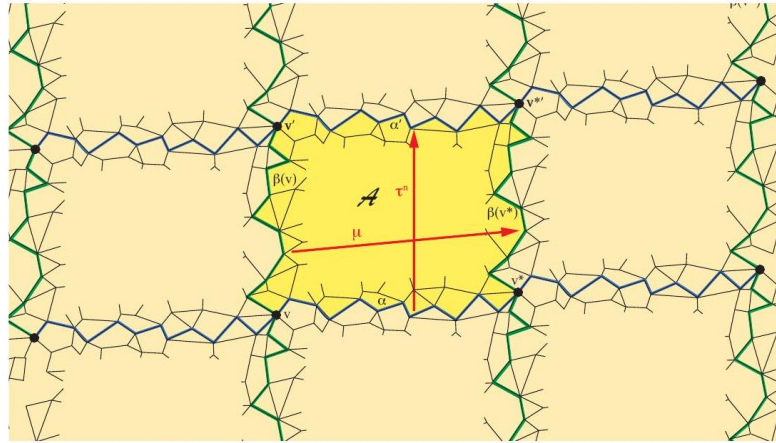
Απόδειξη. Ανεξάρτητα από τη συγκεκριμένη πλακόστρωση, ξεκινάμε με κορυφή v στο κέντρο ενός δίσκου D ακτίνας $n\kappa + 3U$. Το $R(v)$ με τις δεδομένες διαστάσεις βρίσκεται εξολοκλήρου εντός του D . Με το καθορισμένο πρωτοσύνολο, δημιουργούμε μπάλωμα που περιέχει το D .

Τοποθετώντας ένα πλακίδιο T με γωνία στο v , υπάρχουν πεπερασμένοι τρόποι να συγκολληθεί ένα δεύτερο πλακίδιο ακμή-προς-ακμή με το T . Αυτό παραμένει αληθές όσο επεκτείνουμε το μπάλωμα. Αν θεωρήσουμε δύο μπαλώματα ισοδύναμα αν το ένα είναι στροφή του άλλου γύρω από το v , τότε υπάρχουν πεπερασμένες τέτοιες κλάσεις ισοδυναμίας.

Μέσα σε ένα τέτοιο μπάλωμα γύρω από το v που περιέχει το D , υπάρχουν πεπερασμένες διαδρομές ακμών μεταξύ v και οποιασδήποτε άλλης κορυφής v' εντός του D . Τώρα, αν τοποθετήσουμε το ορθογώνιο $R(v)$ οπουδήποτε μέσα στο D , με τρόπο ώστε να περιέχει το v και μια άλλη κορυφή v' πάνω στη μεσοκάθειό του, τότε υπάρχουν το πολύ πεπερασμένες διαδρομές ακμών μεταξύ v και v' μέσα στο $R(v)$, για αυτό το συγκεκριμένο μπάλωμα. Εφόσον υπάρχουν το πολύ πεπερασμένα τέτοια μπαλώματα, προκύπτει ότι υπάρχουν και μόνο πεπερασμένες διακεκριμένες επιλογές για τη $\beta(v)$ σε όλες τις πλακοστρώσεις που δημιουργούνται από το πρωτοσύνολο αυτό και για όλες τις κορυφές v της a . $\square$

Επιστρέφοντας στη συγκεκριμένη πλακόστρωση $\mathcal{T}$, επειδή η a έχει άπειρες κορυφές, η Αρχή Περιστερώνα εγγυάται ότι υπάρχουν δύο κορυφές v και v^* ώστε $\beta(v)$ και $\beta(v^*)$ να είναι ταυτόσημες, με τη ταυτόσημη απεικόνιση να στέλνει το v στο v^* και το v' στο v'^* . Εφόσον κάθε β συνδέεται με τη μεταφορά τ^n , η ταυτόσημη απεικόνιση μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω μεταφοράς μ του επιπέδου.

Έστω $\mathcal{A}$ το μπάλωμα πλακιδίων της $\mathcal{T}$ που φράσσεται από τις διαδρομές $\beta(v), \beta(v^*)$, το κομμάτι της a μεταξύ v και v^* και το αντίστοιχο κομμάτι της a' από v' έως $v'^* = \tau^n(v^*)$, όπως στο Σχήμα 3.31. Τότε, με επαναληπτικές μεταφορές του $\mathcal{A}$ με τις τ^n, μ και τους γραμμικούς συνδυασμούς τους, λαμβάνουμε μια περιοδική πλακόστρωση του επιπέδου. $\square$



Σχήμα 3.31: Προκύπτουσα περιοδική πλακόστρωση από το μπάλλωμα $\mathcal{A}$.

Ανοικτά Ερωτήματα. Ισχύει το Θεώρημα Περιοδικότητας αν παραλείψουμε τις υποθέσεις ότι όλα τα πρωτοπληακίδια είναι ποβύγωνα ή/και ότι η πηακόστρωση είναι ακμή-προς-ακμή;

Ασχολούμαστε τώρα με τη σχέση ανάμεσα σε κορυφές, ακμές και πλακίδια σε μια περιοδική πλακόστρωση. Για να το κάνουμε αυτό, πρέπει να εξετάσουμε το χαρακτηριστικό του Euler.

Η Χαρακτηριστική του Euler

Η χαρακτηριστική του Euler είναι μια τοπολογική αναλλοίωτη, που σημαίνει ότι δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη γεωμετρία ενός αντικειμένου, αλλά μόνο από την τοπολογία του. Αρχικά εξετάζουμε τη χαρακτηριστική του Euler για ένα μπάλωμα. Όταν μιλάμε για κορυφές ενός μπαλώματος, εκτός από τις κορυφές στο εσωτερικό του, συμπεριλαμβάνουμε και τα σημεία στο σύνορό του που μοιράζονται δύο ή περισσότερα πλακίδια. Και για τις ακμές, εκτός από αυτές στο εσωτερικό του μπαλώματος, συμπεριλαμβάνουμε και συνεκτικά υποσύνολα του συνόρου που οριοθετούνται από δύο κορυφές και δεν περιέχουν άλλες κορυφές στο εσωτερικό τους.

Ορισμός 3.38. Έστω μπάλλωμα $\mathcal{A}$ που δημιουργείται από ένα πρωτοσύνολο, έστω V ο αριθμός των κορυφών στο μπάλλωμα, E ο αριθμός των ακμών, και T ο αριθμός των πηλακιδίων. Ορίζουμε τη **χαρακτηριστική του Euler**, που συμβολίζεται με $\chi(\mathcal{A})$, ως εξής:

$$\chi(\mathcal{A}) = V - E + T$$

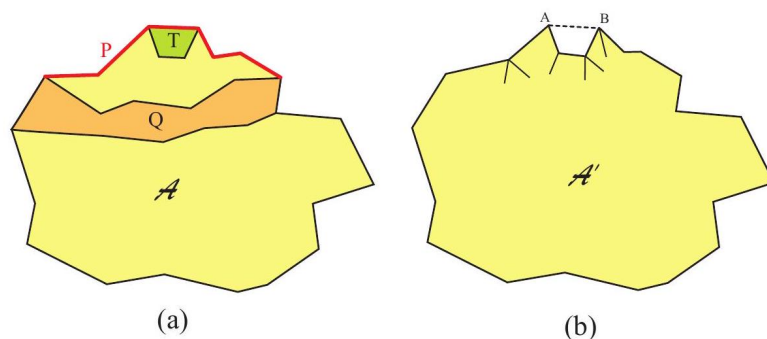
Το επόμενο θεώρημα είναι του Leonhard Euler (1707–1783).

Θεώρημα 3.8. Για κάθε μπάλιωμα $\mathcal{A}$, έχουμε $\chi(\mathcal{A}) = 1$.

Απόδειξη. Το σύνορο του μπαλώματος $\mathcal{A}$ αποτελείται από ακμές, καθεμία από τις οποίες ανήκει σε κάποιο πλακίδιο του μπαλώματος. Πρώτα θα δείξουμε ότι υπάρχει ένα πλακίδιο T που τέμνει το σύνορο του $\mathcal{A}$ σε ακριβώς μία ακμή.

Κάθε πλακίδιο τέμνει το σύνορο σε μια συλλογή από ξένες μεταξύ τους ακμές ή/και κορυφές (επίσης ξένες προς τις ακμές). Υποθέτουμε ότι κανένα πλακίδιο δεν τέμνει το σύνορο σε ακριβώς μία ακμή. Τότε κάθε πλακίδιο Q που τέμνει το σύνορο το κάνει σε περισσότερες από μία συνεκτικές συνιστώσες, και έτσι αντιστοιχεί τουλάχιστον σε ένα μη τετριμμένο μονοπάτι πάνω στο σύνορο του $\mathcal{A}$ ανάμεσα στα σημεία τομής του με αυτό. Για το Q , μπορούμε να αντιστοιχίσουμε ένα τέτοιο μονοπάτι στο $\partial\mathcal{A}$ που να περιέχει τον ελάχιστο αριθμό ακμών μεταξύ όλων των τέτοιων μονοπατιών για το Q , όπως στο Σχήμα 3.32(αριστερά).

Τώρα, επιλέγουμε το πλακίδιο Q έτσι ώστε να έχει τέτοιο μονοπάτι P με τον ελάχιστο αριθμό ακμών από όλα τα πλακίδια στο $\mathcal{A}$. Τότε, κάθε πλακίδιο T που έχει ακμή μέσα στο P πρέπει να τέμνει το σύνορο του $\mathcal{A}$ μόνο σε αυτήν την ακμή. Αυτό συμβαίνει επειδή δεν μπορεί να τέμνει το Q στο εσωτερικό του, όπως στο Σχήμα 3.32, οπότε μπορεί να τέμνει το σύνορο μόνο μέσω του P . Αν όμως τέμνει σε περισσότερες συνεκτικές συνιστώσες, τότε θα υπήρχαν λιγότερες ακμές στο σύνορο μεταξύ των σημείων τομής του T απ' ό,τι για το Q , άτοπο. Άρα υπάρχει πλακίδιο T που τέμνει το σύνορο μόνο σε μία ακμή.



Σχήμα 3.32: Πρέπει να υπάρχει ένα πλακίδιο T που τέμνει το σύνορο του $\mathcal{A}$ μόνο σε μία ακμή.

Έστω $\mathcal{A}'$ το μπάλωμα που προκύπτει από την αφαίρεση του T από το $\mathcal{A}$, όπως στο Σχήμα 3.32(δεξιά). Το μπάλωμα αυτό εξακολουθεί να είναι τοπολογικά ισοδύναμο με δίσκο. Επίσης, αφαιρείται η ακμή που το T μοιραζόταν με το σύνορο του $\mathcal{A}$.

Τώρα, εξετάζουμε τις δύο κορυφές που το T άγγιζε στο σύνορο του $\mathcal{A}$. Αν κάποια από αυτές αγγίζει άλλα δύο πλακίδια του $\mathcal{A}$, παραμένει κορυφή στο $\mathcal{A}'$, όπως η κορυφή B στο Σχήμα 3.32(δεξιά). Αν κάποια αγγίζει μόνο ένα άλλο πλακίδιο, όπως η κορυφή A , τότε παύει να είναι κορυφή στο σύνορο του $\mathcal{A}'$. Όμως αυτό μειώνει κατά ένα και τον αριθμό ακμών, αφού αυτή η κορυφή δεν είναι πια διαθέσιμη για να διαιρέσει το σύνορο του $\mathcal{A}'$ σε ακμές. Όλες οι άλλες κορυφές του T παραμένουν, διότι αν ήταν στο εσωτερικό του $\mathcal{A}$, μοιραζόταν με τουλάχιστον τρία πλακίδια, και

μόλις αφαιρεθεί το T περιέρχονται στο σύνορο και μοιράζονται ακόμη με τουλάχιστον δύο.

Άρα, χάνουμε $c = 0, 1$ ή 2 κορυφές, και αντίστοιχα, $c = 1, 2$ ή 3 ακμές. Χάνεται επίσης και ένα πλακίδιο. Επομένως,

$$\chi(\mathcal{A}') = \chi(\mathcal{A}) - c + (c + 1) - 1 = \chi(\mathcal{A})$$

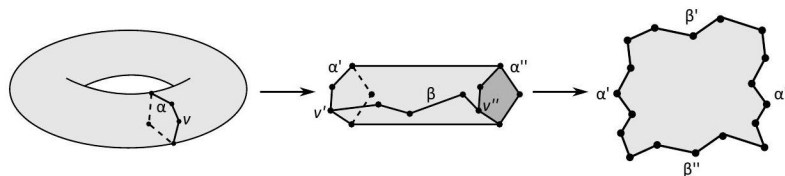
Συνεχίζουμε να αφαιρούμε πλακίδια, ένα κάθε φορά, χωρίς να αλλάζει η χαρακτηριστική του Euler, μέχρι να απομείνουν μόνο δύο πλακίδια. Εφόσον το μπάλωμα παραμένει τοπολογικά δίσκος, τα δύο αυτά πλακίδια μπορούν να τέμνονται μόνο κατά μήκος μιας ακμής. Τότε, ο αριθμός των κορυφών είναι $V = 2$, των ακμών $E = 3$ και των πλακιδίων $T = 2$. Άρα,

$$\chi(\mathcal{A}) = 2 - 3 + 2 = 1$$

Στην πραγματικότητα, αυτό το θεώρημα συνεπάγεται ποικίλα αποτελέσματα και η διατύπωση και η απόδειξή του συχνά θεωρούνται ως η απαρχή της τοπολογίας. Για παράδειγμα, αποδεικνύεται ότι για κάθε πλακόστρωση της σφαίρας, η χαρακτηριστική του Euler είναι 2 . Τώρα αποδεικνύουμε το ακόλουθο χρήσιμο αποτέλεσμα.

Πόρισμα 3.4. *Αν η $\mathcal{T}$ είναι μια πηλακόστρωση στον τόρο, τότε η χαρακτηριστική του Euler για τη συγκεκριμένη πηλακόστρωση είναι 0 .*

Απόδειξη. Επιλέγουμε οποιαδήποτε κορυφή της πηλακόστρωσης v . Τότε, πρέπει να υπάρχει ένας βρόχος a , που περιέχεται στις ακμές της $\mathcal{T}$, δεν περικλείει δίσκο στον τόρο και επιστρέφει στην ίδια κορυφή, όπως στο Σχήμα 3.33. Κόβοντας τον τόρο και την πηλακόστρωση κατά μήκος της a , προκύπτει μια πηλακόστρωση $\mathcal{T}'$ σε κύλινδρο C , με δύο αντίγραφα κάθε ακμής της a και δύο αντίγραφα κάθε κορυφής της a που απαρτίζουν το σύνορό του, όπως στο Σχήμα 3.33. Έστω v' και v'' το ζεύγος των κορυφών που αντιστοιχούν στο v . Τώρα, βρίσκουμε ένα μονοπάτι ακμών β στη $\mathcal{T}'$ από το v' στο v'' . Κόβοντας τον C και την πηλακόστρωση $\mathcal{T}'$ κατά μήκος της β , προκύπτει ένα μπάλωμα $\mathcal{A}$, όπως στο Σχήμα 3.33.



Σχήμα 3.33: Το κόψιμο ενός τόρου κατά μήκος δύο μονοπατιών ακμών a και β οδηγεί σε ένα μπάλωμα.

Γνωρίζουμε από το Θεώρημα 3.8 ότι $\chi(\mathcal{A}) = 1$. Ωστόσο, αν αντιστρέψουμε τα βήματα που κάναμε για να προκύψει η $\mathcal{A}$, παρατηρούμε ότι ο αριθμός των πλακιδίων

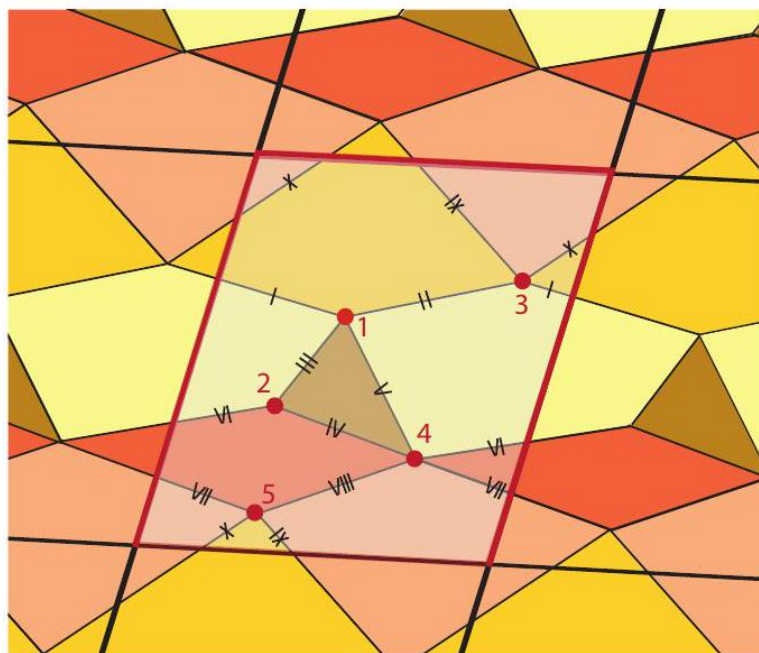
παραμένει ίδιος με αυτόν της πλακόστρωσης στον τόρο. Όταν ταυτίζουμε τα δύο αντίγραφα β' και β'' της β , ο αριθμός των ακμών μειώνεται κατά τον αριθμό των ακμών στη β . Αλλά ο αριθμός των κορυφών επίσης μειώνεται κατά τον αριθμό των κορυφών στη β , που είναι μία περισσότερες από τις ακμές. Επομένως:

$$\chi(\mathcal{T}') = \chi(\mathcal{A}) - 1 = 0$$

Όταν επανακολλούμε τα δύο αντίγραφα a' και a'' της a ώστε να ανακτήσουμε την πλακόστρωση $\mathcal{T}$, ο αριθμός των ακμών και των κορυφών μειώνονται αντίστοιχα, χωρίς επίδραση στη χαρακτηριστική του Euler. Άρα, $\chi(\mathcal{T}) = \chi(\mathcal{T}') = 0$. $\square$

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, για μια περιοδική πλακόστρωση, μπορούμε να ορίσουμε ένα παραλληλόγραμμο περιόδου $\mathcal{P}$. Εάν εφαρμόσουμε τις μεταφορικές συμμετρίες της πλακόστρωσης, τότε αυτό το παραλληλόγραμμο πλακοστρώνει όλο το επίπεδο. Επομένως, αρκεί να γνωρίζουμε την πλακόστρωση μέσα στο $\mathcal{P}$.

Ορισμός 3.39. Δοθείσης μιας περιοδικής πλακόστρωσης $\mathcal{T}$, επιλέγουμε ένα παραλληλόγραμμο περιόδου ελάχιστης επιφάνειας $\mathcal{P}$, του οποίου οι πλευρές αποφεύγουν όλες τις κορυφές της $\mathcal{T}$, όπως στο Σχήμα 3.34. Τότε ορίζουμε τους αριθμούς κορυφών, ακμών και πλακιδίων ως V_P, E_P και T_P , οι οποίοι είναι οι αριθμοί της πλακόστρωσης που κληρονομούνται από τον αντίστοιχο τόρο.



Σχήμα 3.34: $V_P = 5, E_P = 10$ και $T_P = 5$ για αυτό το παραλληλόγραμμο περιόδου ελάχιστης επιφάνειας.

Από τον ορισμό και το Πόρισμα 3.4 έπεται άμεσα ότι:

$$V_P - E_P + T_P = 0$$

Ιδιαίτερα, αυτό συνεπάγεται ότι αν γνωρίζουμε δύο από τους V_P, E_P και T_P , μπορούμε να υπολογίσουμε και τον τρίτο. Αυτοί οι αριθμοί μπορούν να υπολογιστούν άμεσα από το παραλληλόγραμμο, χωρίς αναφορά στον τόρο. Εξετάζοντας την τομή της αρχικής πλακόστρωσης με το παραλληλόγραμμο, μπορούμε να σκεφτούμε τη συγκόλληση των σπασμένων ακμών και πλακιδίων που προκύπτουν, ώστε να σχηματιστούν οι πλήρεις ακμές και τα πλήρη πλακίδια στον τόρο, και ισχύει το ίδιο αποτέλεσμα. Έτσι, στο Σχήμα 3.34, βλέπουμε ότι τα κομμάτια των πλακιδίων με το ίδιο χρώμα μέσα στο παραλληλόγραμμο συγκολλώνται μεταξύ τους για να σχηματίσουν ένα ενιαίο πλακίδιο στον τόρο. Συνολικά, υπάρχουν πέντε πλακίδια στον τόρο, ένα για κάθε χρώμα. Ομοίως, τα κομμάτια ακμών με το ίδιο ρωμαϊκό σύμβολο μέσα στον παραλληλόγραμμο συγκολλώνται ώστε να σχηματίσουν μία ενιαία ακμή στον τόρο. Έτσι, υπάρχουν δέκα ακμές. Τέλος, βλέπουμε πέντε κορυφές μέσα στο παραλληλόγραμμο που επίσης θα εμφανιστούν στον τόρο. Άρα, $V_P - E_P + T_P = 0$, όπως αναμέναμε.

Όπως αναφέραμε στην αρχή της ενότητας, ένα παραλληλόγραμμο περιόδου ελάχιστης επιφάνειας μπορεί να παραχθεί από τη μικρότερη μεταφορική συμμετρία $T_{\bar{v}}$ και τη μικρότερη μη παράλληλη προς αυτή $T_{\bar{w}}$.

Λήμμα 3.15. *Για μια περιοδική πλακόστρωση $\mathcal{T}$, οι τιμές των V_P, E_P και T_P δεν αλληλάζουν αν αλληλάξουμε την επιλογή του παραλληλογράμμου περιόδου ελάχιστης επιφάνειας.*

Απόδειξη. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι η πλακόστρωση που κληρονομείται από τον τόρο είναι ίδια σε όλες τις περιπτώσεις. $\square$

Ένα μη ελάχιστο παραλληλόγραμμο περιόδου P' έχει εμβαδόν ακέραιο πολλαπλάσιο k αυτού του ελάχιστου P . Τότε οι τιμές $V_{P'}, E_{P'}, T_{P'}$ είναι k φορές οι αντίστοιχες του P . Άρα, οι λόγοι V_P/T_P και E_P/T_P είναι ανεξάρτητοι της επιλογής.

Ορισμός 3.40. *Για μια περιοδική πλακόστρωση $\mathcal{T}$, ορίζουμε το μέσο πλήθος κορυφών ανά πλακίδιο ως $\bar{v}(\mathcal{T}) = V_P/T_P$ και το μέσο πλήθος ακμών ανά πλακίδιο ως $\bar{e}(\mathcal{T}) = E_P/T_P$, για οποιονδήποτε παραλληλόγραμμο περιόδου P .*

Δεδομένου ότι $V_P - E_P + T_P = 0$, τότε:

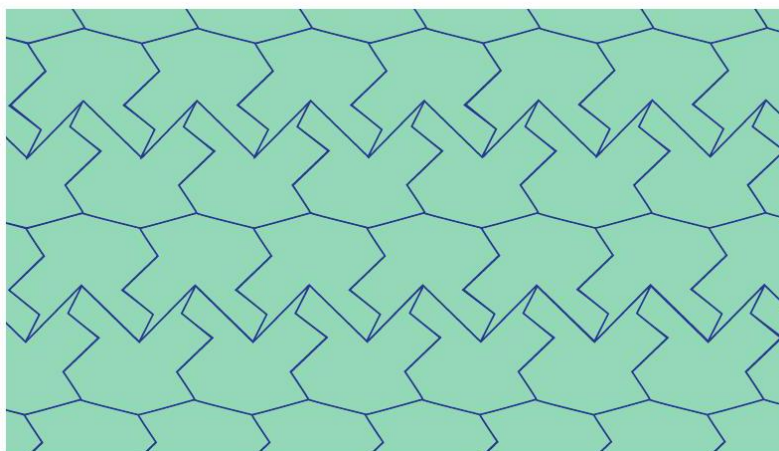
$$\frac{V_P}{T_P} - \frac{E_P}{T_P} + 1 = 0 \Rightarrow \bar{e}(\mathcal{T}) = \bar{v}(\mathcal{T}) + 1$$

Για παράδειγμα, στην κανονική πλακόστρωση με εξάγωνα, κάθε πλακίδιο έχει έξι κορυφές, αλλά κάθε κορυφή ανήκει σε τρία πλακίδια, άρα $\bar{v}(\mathcal{T}) = 6/3 = 2$. Παρομοίως, κάθε πλακίδιο έχει έξι ακμές, καθεμία από τις οποίες ανήκει σε δύο πλακίδια, άρα $\bar{e}(\mathcal{T}) = 6/2 = 3$. Πράγματι, $\bar{e}(\mathcal{T}) = \bar{v}(\mathcal{T}) + 1$.

Στο παράδειγμα του Σχήματος 3.34, είδαμε $V_P = 5, E_P = 10$ και $T_P = 5$, άρα $\bar{v}(\mathcal{T}) = 1$ και $\bar{e}(\mathcal{T}) = 2$, με $\bar{e}(\mathcal{T}) = \bar{v}(\mathcal{T}) + 1$.

3.4 Ποια κυρτά πολύγωνα πλακοστρώνουν;

Θα θέλαμε να γνωρίζουμε ποια πολύγωνα δημιουργούν μονοεδρικές πλακοστρώσεις του επιπέδου. Ωστόσο, αν επιτρέψουμε μη κυρτά πλακίδια, υπάρχουν αμέτρητες πλακοστρώσεις, μία εκ των οποίων φαίνεται στο Σχήμα 3.35. Συνεπώς, θα περιοριστούμε σε κυρτά πλακίδια και θα κάνουμε μερικές παρατηρήσεις.



Σχήμα 3.35: Μονοεδρική πλακόστρωση με μη κυρτό εξάγωνο.

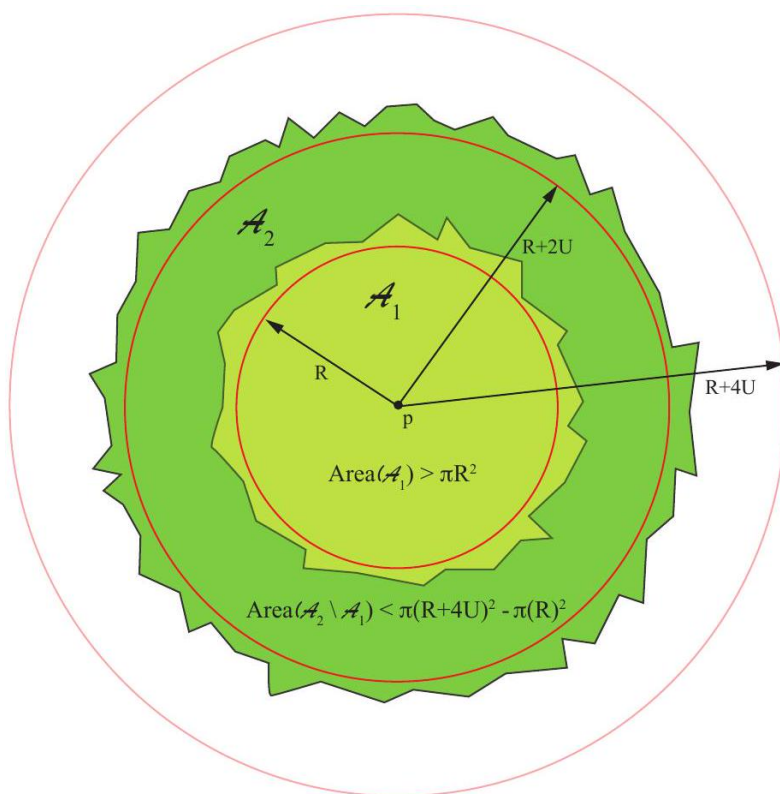
Έχουμε ήδη δει ότι κάθε τρίγωνο και κάθε τετράπλευρο δημιουργεί πλακοστρώσεις. Για ένα τρίγωνο, μπορούμε να στρέψουμε ένα αντίγραφο γύρω από το μέσο μιας πλευράς ώστε να αποκτήσουμε ένα δεύτερο αντίγραφο, το οποίο μαζί με το πρώτο σχηματίζει ένα παραλληλόγραμμο. Έπειτα, μπορούμε να καλύψουμε το επίπεδο με τέτοια παραλληλόγραμμα μέσω μεταφορών. Για το τετράπλευρο, η περιστροφή γύρω από το μέσο μιας πλευράς δημιουργεί ένα εξάγωνο με αντίθετες παράλληλες ακμές ίσου μήκους. Όπως έχουμε δει, ένα τέτοιο πλακίδιο μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να καλύψει το επίπεδο μέσω μεταφορών, μιας πλευράς στην παράλληλή της. Έτσι, περιορίζουμε το πρόβλημα στο να εξετάσουμε μόνο πεντάγωνα και εξάγωνα, αποδεικνύοντας το επόμενο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.9. Ένα πρωτοσύνολο $\mathcal{P}$ που αποτελείται από κυρτά πολύγωνα, όλα με επτά ή περισσότερες πλευρές, δεν μπορεί να δημιουργήσει πλακόστρωση του επιπέδου.

Απόδειξη. Έστω ότι ένα τέτοιο πρωτοσύνολο $\mathcal{P}$ δημιουργεί μια πλακόστρωση $\mathcal{T}$. Εφόσον όλα τα πλακίδια είναι κυρτά, κάθε γωνία ενός πλακιδίου αντιστοιχεί σε κορυφή. Ωστόσο, καθώς δεν υποθέτουμε ότι η πλακόστρωση είναι ακμή-προς-ακμή, μπορεί να υπάρχουν κορυφές που βρίσκονται στο εσωτερικό των πλευρών των πλακιδίων. Θα προσθέσουμε αυτά τα σημεία ως επιπλέον γωνίες στα πλακίδια κατά την

καταμέτρηση, παρόλο που η γωνία σε αυτά τα σημεία είναι π . Αυτό μόνο θα αυξήσει τον αριθμό των πλευρών των πολυγώνων, συνεπώς παραμένει αληθές ότι όλα έχουν τουλάχιστον επτά πλευρές.

Έστω p οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου και R οποιοσδήποτε θετικός αριθμός. Έστω U η εξωτερική ακτίνα του πρωτοσυνόλου $\mathcal{P}$. Θεωρούμε τους δύο δίσκους $D_1 = D(p, R)$ και $D_2 = D(p, R + 2U)$, όπως στο Σχήμα 3.36. Μπορούμε να πάρουμε ελάχιστα μπαλώματα $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2$ που να καλύπτουν καθέναν από τους δίσκους, με $\mathcal{A}_1 \subset \mathcal{A}_2$. Έστω V_1, E_1, T_1 ο αριθμός κορυφών, ακμών και πλακιδίων στο $\mathcal{A}_1$ και V_2, E_2, T_2 τα αντίστοιχα στο $\mathcal{A}_2$. Επιπλέον, έστω $T_{2 \setminus 1}$ ο αριθμός των πλακιδίων που ανήκουν στο $\mathcal{A}_2$ αλλά όχι στο $\mathcal{A}_1$. Άρα $T_2 = T_1 + T_{2 \setminus 1}$. Επειδή U είναι η εξωτερική ακτίνα του πρωτοσυνόλου, κανένα πλακίδιο δεν μπορεί να τέμνει και τα δύο σύνορα ∂D_1 και ∂D_2 , άρα $T_{2 \setminus 1} > 0$.



Σχήμα 3.36: Απόδειξη ότι τα n -γωνα για $n \geq 7$ δεν μπορούν να πλακοστρώσουν.

Έστω a_L το μέγιστο εμβαδόν ενός πρωτοπλακιδίου και a_S το ελάχιστο. Εφόσον το εμβαδόν του μπαλώματος $\mathcal{A}_1$ είναι το πολύ $a_L \cdot T_1$ και το $\mathcal{A}_1$ περιέχει τον δίσκο D_1 , γνωρίζουμε ότι

$$a_L \cdot T_1 > \pi R^2 \quad (3.1)$$

Όλα τα πλακίδια στο $\mathcal{A}_2$ που δεν ανήκουν στο $\mathcal{A}_1$ ($T_{2 \setminus 1}$ στο πλήθος) βρίσκονται εκτός του δίσκου D_1 . Ωστόσο, βρίσκονται όλα εντός του δίσκου $D(p, R + 4U)$. Συνε-

πώς, βρίσκονται στο δακτύλιο μεταξύ των δύο αυτών δίσκων. Άρα, τα εμβαδά τους είναι μικρότερα από το εμβαδόν του δακτυλίου, και έχουμε:

$$a_S \cdot T_{2 \setminus 1} < \pi(R + 4U)^2 - \pi R^2 = 8\pi(RU + 2U^2) \quad (3.2)$$

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτές τις δύο ανισότητες σε λίγο, αλλά πρώτα ας εξετάσουμε το μέτρο των γωνιών των πλακιδίων στις κορυφές. Κάθε πλακίδιο με n γωνίες μπορεί να διαμεριστεί σε $n - 2$ τρίγωνα, οπότε το άθροισμα του μέτρου των γωνιών στις n γωνίες (συμπεριλαμβανομένων και γωνιών με μέτρο π) είναι $(n - 2)\pi$. Δεδομένου ότι $n \geq 7$, το άθροισμα του μέτρου των γωνιών κάθε πλακιδίου είναι τουλάχιστον 5π . Ειδικότερα, αυτό σημαίνει ότι το συνολικό άθροισμα των γωνιών στο μπάλωμα $\mathcal{A}_1$ είναι τουλάχιστον $5\pi \cdot T_1$.

Από την άλλη, κάθε κορυφή στο εσωτερικό του $\mathcal{A}_1$ συνεισφέρει γωνία 2π . Και οι κορυφές στο σύνορο συνεισφέρουν γωνία μικρότερη από 2π . Εφόσον υπάρχουν τέτοιες κορυφές, έχουμε:

$$2\pi V_1 > 5\pi T_1$$

$$2V_1 > 5T_1 \quad (3.3)$$

Τώρα εξετάζουμε το μπάλωμα $\mathcal{A}_2$. Από τη χαρακτηριστική του Euler, γνωρίζουμε ότι $V_2 - E_2 + T_2 = 1$. Επομένως,

$$V_2 + T_2 > E_2 \quad (3.4)$$

Ας υπολογίσουμε τις πλευρές στο $\mathcal{A}_2$. Κάθε κορυφή που ανήκει στο $\mathcal{A}_1$ συμπίπτει σε τουλάχιστον τρεις ακμές στο $\mathcal{A}_2$. Και κάθε κορυφή που βρίσκεται στο $\mathcal{A}_2$ αλλά όχι στο $\mathcal{A}_1$ συμπίπτει σε τουλάχιστον δύο ακμές. Ωστόσο, κάθε ακμή μετράται δύο φορές, μία για κάθε άκρο της. Άρα:

$$E_2 \geq \frac{3V_1 + 2(V_2 - V_1)}{2} = V_2 + \frac{V_1}{2}$$

Από την Ανισότητα 3.4, έχουμε:

$$\begin{aligned} V_2 + T_2 &> V_2 + \frac{V_1}{2} \\ 2T_2 &> V_1 \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας αυτή την ανισότητα με 2 και εφαρμόζοντας την Ανισότητα 3.3, παίρνουμε:

$$4T_2 > 2V_1 > 5T_1 \quad (3.5)$$

Τότε, πολλαπλασιάζοντας το $T_{2\setminus 1} = T_2 - T_1$ με 4 και εφαρμόζοντας την Ανισότητα 3.5, παίρνουμε:

$$4T_{2\setminus 1} = 4T_2 - 4T_1 > 5T_1 - 4T_1 = T_1$$

$$T_{2\setminus 1} > \frac{T_1}{4}$$

Από αυτή την ανισότητα και τις Ανισότητες 3.2 και 3.1, συμπεραίνουμε ότι:

$$8\pi(RU + 2U^2) > a_S \cdot T_{2\setminus 1} > \frac{a_S \cdot T_1}{4} = \frac{a_S}{4a_L} a_L \cdot T_1 > \frac{a_S}{4a_L} \pi R^2$$

Διαιρώντας και τα δύο μέλη με πR^2 , προκύπτει:

$$8\left(\frac{U}{R} + \frac{2U^2}{R^2}\right) > \frac{a_S}{4a_L}$$

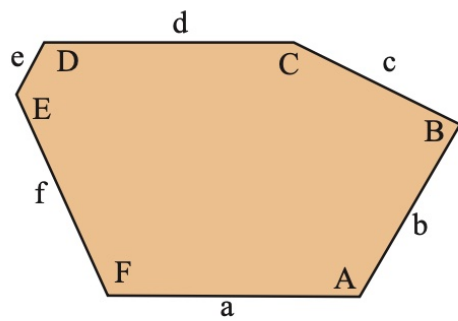
Όμως καθώς το R αυξάνεται, το αριστερό μέλος τείνει στο 0, ενώ το δεξιό μέλος είναι θετική σταθερά — άτοπο. $\square$

Αν κοιτάξουμε πίσω στο Πρόρισμα 3.3, γνωρίζουμε επίσης ότι η προσθήκη πεπερασμένου αριθμού πλακιδίων με λιγότερες από επτά πλευρές δεν επιλύει το πρόβλημα. Οποιαδήποτε πλακόστρωση του επιπέδου με κυρτά πολύγωνα πρέπει να περιέχει άπειρο πλήθος πλακιδίων με έξι ή λιγότερες πλευρές.

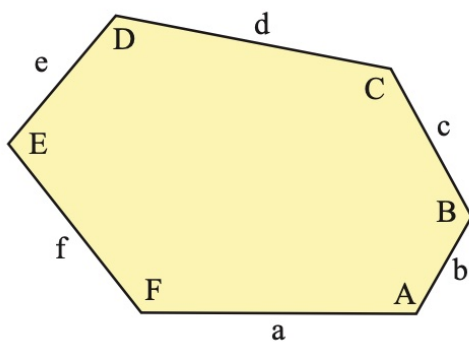
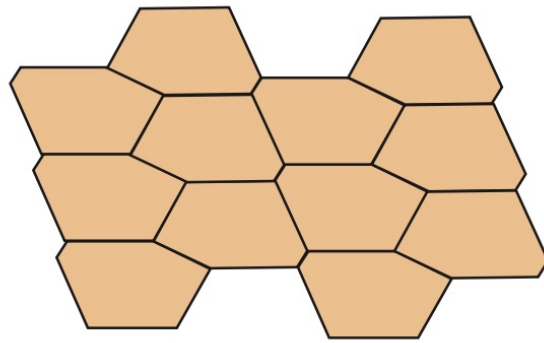
Το Θεώρημα 3.9 ανάγει το πρόβλημα του καθορισμού ποια κυρτά πολύγωνα δημιουργούν μονοεδρικές πλακοστρώσεις του επιπέδου στον καθορισμό ποια πεντάγωνα και εξαγωνα το κάνουν.

Στην περίπτωση των εξαγώνων, ο K. Reinhardt έδειξε στη διδακτορική του διατριβή το 1918 [120] ότι υπάρχουν τρεις οικογένειες εξαγώνων που δημιουργούν πλακοστρώσεις, όπως φαίνεται στο Σχήμα 3.37. Βρήκε επίσης πέντε οικογένειες πενταγώνων που δημιουργούν πλακοστρώσεις.

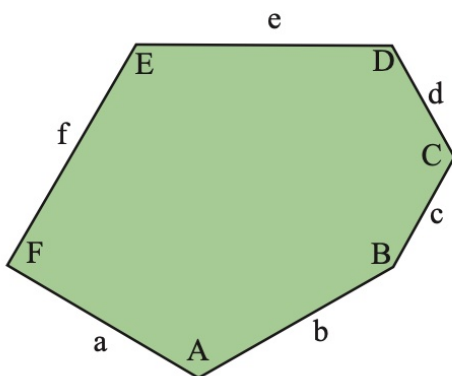
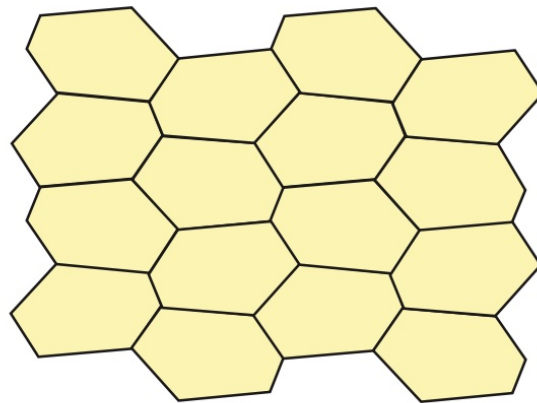
Το 1968, ο Richard Kerschner του Πανεπιστημίου Johns Hopkins βρήκε ακόμη τρεις οικογένειες πενταγώνων και ισχυρίστηκε ότι αυτή ήταν η πλήρης λίστα. Το 1977, στη στήλη του για ψυχαγωγικά μαθηματικά στο Scientific American, ο Martin Gardner έγραψε για το πρόβλημα του καθορισμού όλων των οικογενειών πλακοστρώσεων με κυρτά πεντάγωνα. Έχοντας διαβάσει το άρθρο, ένας μηχανικός λογισμικού με το όνομα Richard James βρήκε μια ακόμη οικογένεια. Έπειτα, η Marjorie Rice, μια αυτοπροσδιοριζόμενη νοικοκυρά, η οποία είχε κάνει μόνο έναν χρόνο μαθηματικών στο λύκειο, ανακάλυψε τέσσερις επιπλέον οικογένειες. Μία δέκατη τέταρτη οικογένεια εντοπίστηκε από τον Rolf Stein το 1985. Εκεί έμεινε το θέμα για 30 χρόνια, έως το 2015, όταν οι Casey Mann και Jennifer McLoud-Mann, δύο καθηγητές στο Πανεπιστήμιο Washington-Bothell, μαζί με τον προπτυχιακό φοιτητή David Von Derau, χρησιμοποίησαν υπολογιστική αναζήτηση για να βρουν μία δέκατη πέμπτη οικογένεια πενταγωνικών πλακοστρώσεων. Βλ. Σχήμα 3.38.



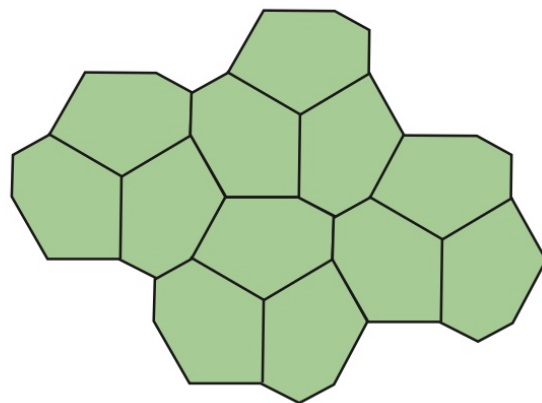
$$A + B + C = 2\pi, a = d$$



$$A + B + D = 2\pi, a = d, c = e$$



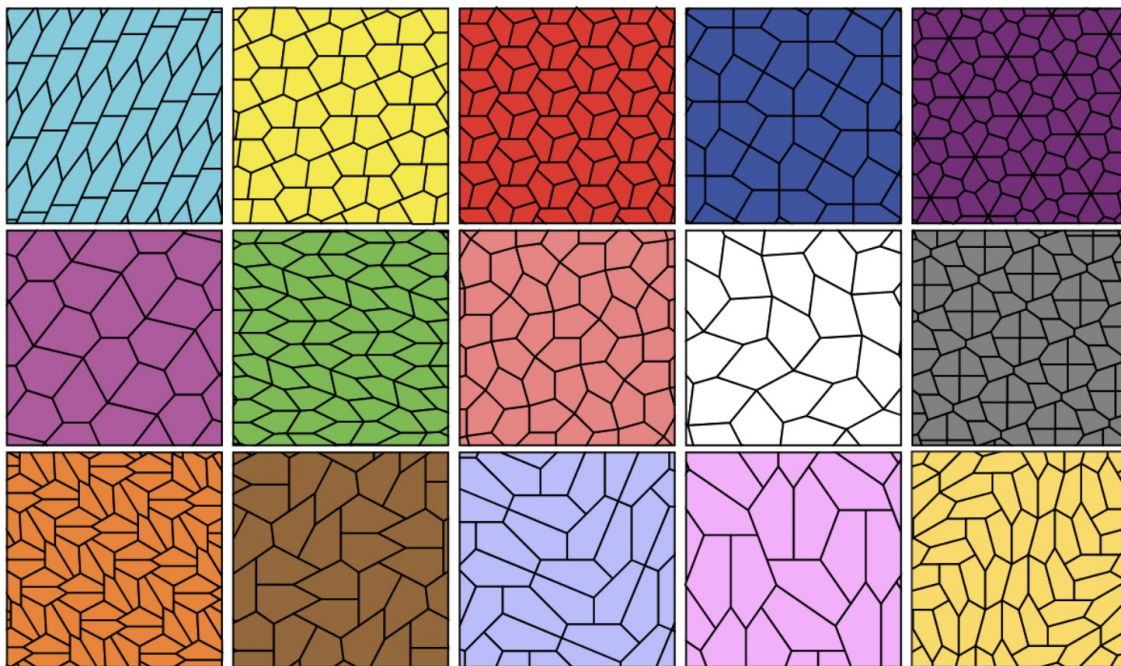
$$A = C = E = 2\pi/3, a = b, c = d, e = f$$



Σχήμα 3.37: Οι τρεις οικογένειες εξαγωνικών πλακοστρώσεων.

Το 2017, ο Γάλλος μαθηματικός Mich  el Rao ανακοίνωσε μια υπολογιστικά υποβοηθούμενη απόδειξη   τι αυτή είναι η πλήρης λίστα των πενταγωνικών πλακοστρώσεων. Αν και το   ρθρο δεν   χει   κόμη δημοσιευθεί, εφόσον επιβεβαιωθεί, θα κλείσει το εκατονταετές πρόβλημα του καθορισμού   λων των κυρτών πολυγώνων που δημιουργούν μονοεδρική πλακόστρωση.

Αν υποθέσουμε   τι το αποτέλεσμα του Rao είναι σωστό, το παρακάτω αποτέλεσμα



Σχήμα 3.38: Οι 15 οικογένειες πενταγωνικών πλακοστρώσεων.

Θα μας φανεί εξαιρετικά χρήσιμο σε επόμενο κεφάλαιο :

Πόρισμα 3.5. *Αν ένα κυρτό πολυγωνικό πλακίδιο δημιουργεί μονοεδρική πλακόστρωση, τότε δημιουργεί και περιοδική πλακόστρωση.*

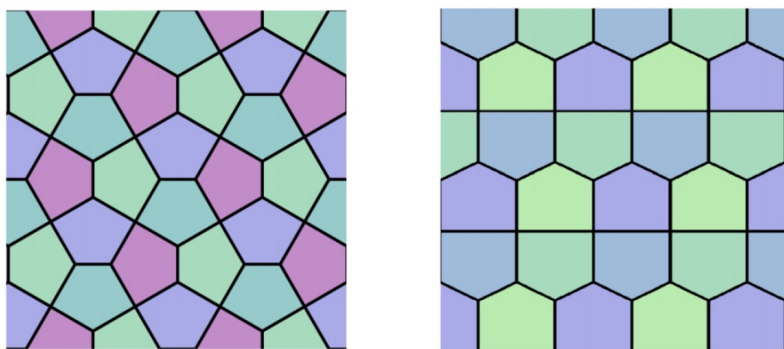
Απόδειξη. Έχουμε αποκλείσει κυρτά πολύγωνα με επτά ή περισσότερες πλευρές. Γνωρίζουμε ότι αυτό ισχύει για τρίγωνα και τετράπλευρα. Άρα, αρκεί να εξετάσουμε εξαγωνα και πεντάγωνα. Όμως, σε καθεμία από τις τρεις οικογένειες εξαγώνων και τις 15 οικογένειες πενταγώνων που δημιουργούν πλακοστρώσεις, κάθε μία δημιουργεί περιοδική πλακόστρωση, όπως φαίνεται στα Σχήμα 3.37 και Σχήμα 3.38. $\square$

Τι συμβαίνει όμως αν, αντί να ρωτήσουμε για την ύπαρξη πλακόστρωσης με δεδομένο σχήμα πλακιδίου, θέλουμε να βρούμε ένα σχήμα πλακιδίου που να δημιουργεί πλακόστρωση, αλλά να ελαχιστοποιεί την ποσότητα αρμόστοκου που χρησιμοποιούμε; Με άλλα λόγια, να βρούμε το πλακίδιο, το οποίο για λόγους ευκολίας θεωρούμε ότι έχει εμβαδόν 1, που δημιουργεί μονοεδρική πλακόστρωση και έχει το μικρότερο δυνατό μήκος συνόρου.

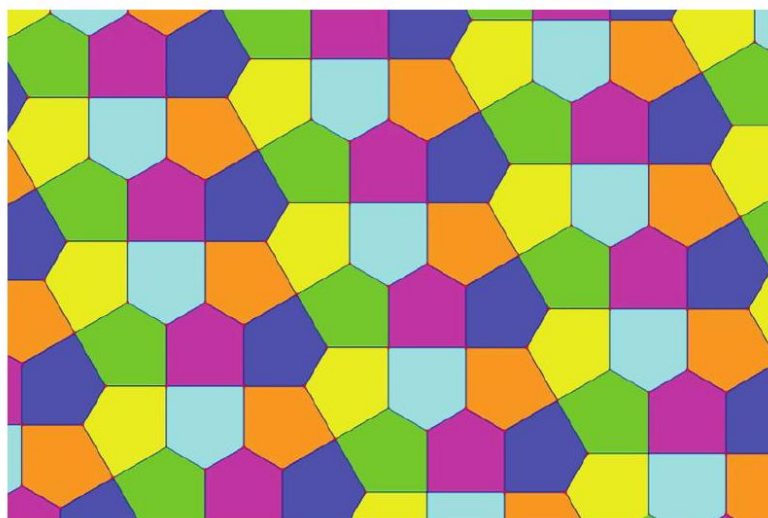
Η λεγόμενη Εικασία της Κηρήθρας, η οποία εμφανίστηκε για πρώτη φορά το 36 π.Χ., πρότεινε ότι η κανονική εξαγωνική πλακόστρωση έχει αυτό το ελάχιστο μήκος συνόρου. Αυτό μπορεί να εξηγηθεί γιατί οι μέλισσες κατασκευάζουν εξαγωνικές κηρήθρες, ελαχιστοποιώντας την ποσότητα κεριού που πρέπει να παράγουν για να διαιρέσουν το χώρο σε θαλάμους. Η Εικασία της Κηρήθρας αποδείχθηκε τελικά το 1999 από τον Thomas Hales [65]. Χρειάστηκαν μόνο κάτι παραπάνω από 2000 χρόνια...

Μπορούμε επίσης να θέσουμε την ίδια ερώτηση, να βρούμε το πλακίδιο με εμβαδόν μονάδα και το μικρότερο δυνατό σύνορο που δημιουργεί πλακόστρωση, αλλά περιοριζόμενοι στα πενταγωνικά πλακίδια. Το κανονικό πεντάγωνο, το οποίο έχει το μικρότερο σύνορο για δοσμένο εμβαδόν, δεν δημιουργεί πλακόστρωση· άρα πρέπει να αναζητήσουμε αλλού.

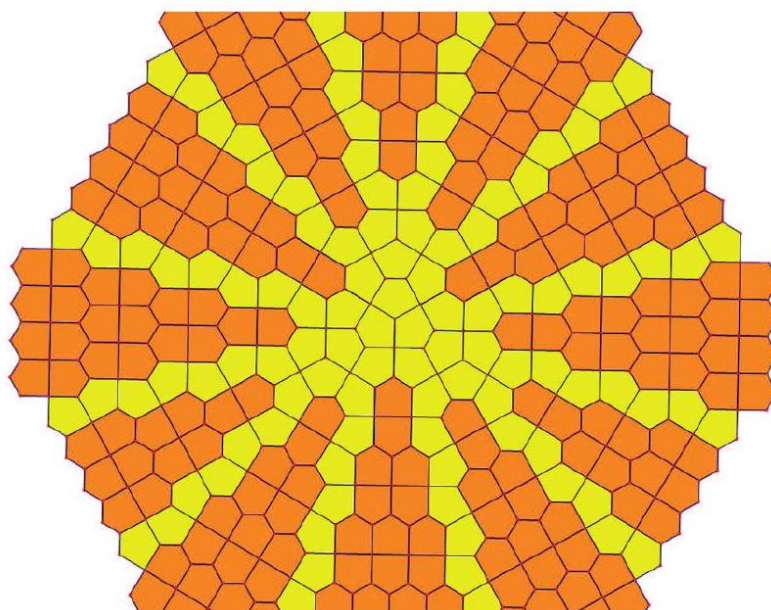
Στο [34], οι Frank Morgan και οι φοιτητές του απέδειξαν ότι τόσο η πλακόστρωση του Cairo όσο και η πρισματική πλακόστρωση, δύο από τις πλακοστρώσεις Laves που φαίνονται στο Σχήμα 3.39, είναι πενταγωνικές πλακοστρώσεις ελαχίστου συνόρου, αποδίδοντας ακριβώς την ίδια περίμετρο για πλακίδιο με εμβαδόν μονάδα. Επιπλέον, οποιαδήποτε πλακόστρωση που αντιστοιχεί σε μίξη αυτών των δύο πλακιδίων είναι επίσης ελαχιστοποιητική ως προς το σύνορο. Στη συνέχεια άρχισαν να δημιουργούν ενδιαφέρουσες εκδοχές αυτών των πλακοστρώσεων, κάποιες από τις οποίες εμφανίζονται στα Σχήμα 3.40, Σχήμα 3.41 και Σχήμα 3.42. Έκτοτε έχουν ανακαλυφθεί πολλές ακόμη.



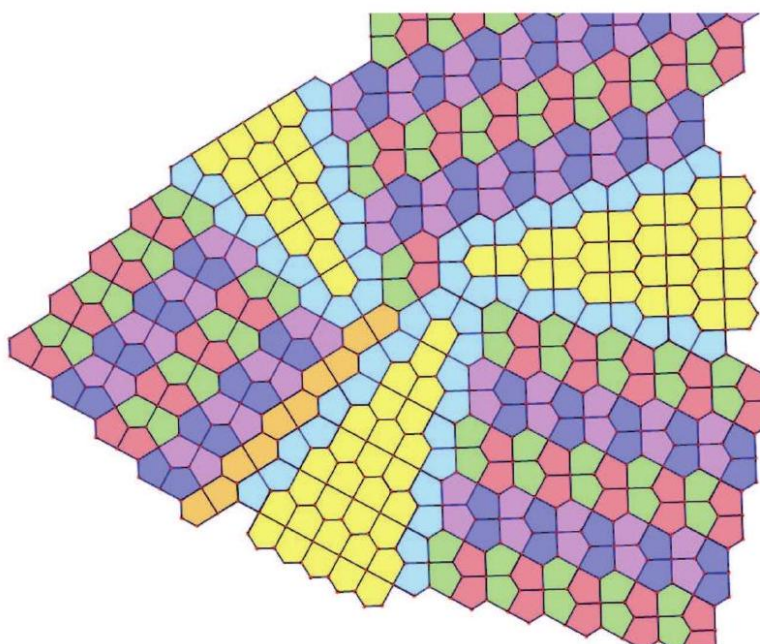
Σχήμα 3.39: Οι πλακοστρώσεις του Cairo και η πρισματική πλακόστρωση από πεντάγωνα έχουν ελάχιστο σύνορο.



Σχήμα 3.40: Μικτή πλακόστρωση Cairo/πρισματική.



Σχήμα 3.41: Μικτή πλακόστρωση Cairo/πρισματική.



Σχήμα 3.42: Μικτή πλακόστρωση Cairo/πρισματική.

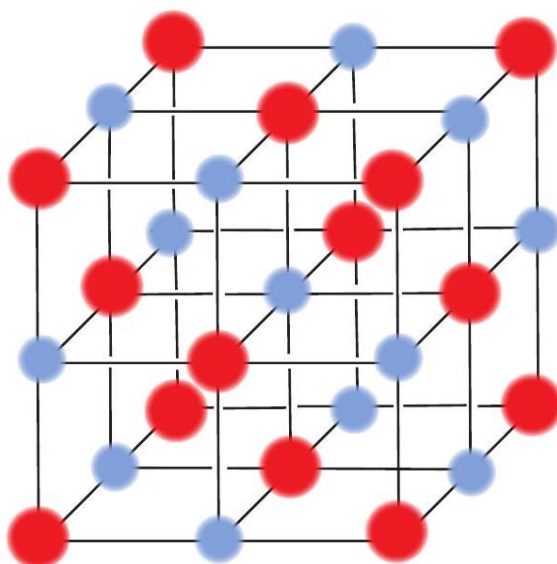
Ανοικτά Ερωτήματα. Ποιές ομάδες ταπετσαρίας μπορούν να είναι ομάδες συμμετρίας τέτοιων μικτών πλακοστρώσεων Cairo/πρισματικών;

Κεφάλαιο 4

Απεριοδικά Πρωτοπλακίδια

4.1 Ψευδοκρύσταλλοι και Απεριοδικά Πρωτοσύνο- λα

Πριν το 1984, οι επιστήμονες πίστευαν ότι τα στερεά υλικά διακρίνονται σε δύο τύπους. Υπήρχαν τα διατεταγμένα στερεά, κρυσταλλικής φύσεως, τα οποία είχαν δομή τύπου πλέγματος, όπως στο Σχήμα 4.1. Υπήρχαν επίσης και τα άτακτα άμορφα υλικά, όπως το γυαλί, στα οποία δεν υπήρχε μακροσκοπική τάξη ούτε τοπικοί κανόνες για τον σχηματισμό τους. Όλες οι κρυσταλλικές δομές ήταν περιοδικές με την έννοια ότι είχαν συμμετρίες μεταφοράς. Όπως συζητήσαμε και για τις ομάδες ταπετσαρίας στο επίπεδο, οι ομάδες συμμετρίας έπρεπε να ανήκουν σε μία από τις 230 τρισδιάστατες ομάδες συμμετρίας που είχαν ταξινομηθεί το 1891.



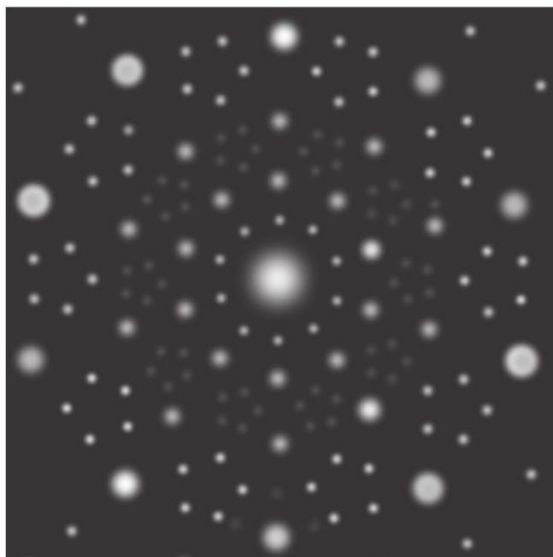
Σχήμα 4.1: Ένα κρυσταλλικό στερεό έχει μία διάταξη ατόμων που σχηματίζει πλέγμα με περιοδική δομή.

Μία από τις μεθόδους για τον προσδιορισμό της ομάδας συμμετρίας που αντιστοιχεί σε μια ουσία είναι η περίθλαση ακτίνων X. Όταν μια ακτίνα X προσπέσει

σε ένα υλικό, εμφανίζονται συγκεκριμένα πρότυπα περίθλασης τα οποία περιέχουν κάποιες από τις ίδιες συμμετρίες που παρατηρούνται στον κρύσταλλο.

Όπως είδαμε ότι οι υποομάδες στροφών που επιτρέπονται στις επίπεδες ομάδες συμμετρίας περιορίζονται σε τάξεις 2, 3, 4 και 6, το ίδιο ισχύει και για τις τρισδιάστατες ομάδες συμμετρίας. Έτσι, επικράτησε μεγάλη σύγχυση όταν το 1982 ο Dan Schechtman ανακάλυψε ένα πρότυπο περίθλασης ακτίνων X για ένα κράμα αλουμινίου-μαγνανίου που εμφάνιζε συμμετρία τάξης 10, όπως στο Σχήμα 4.2. Αυτό σήμαινε ότι το υλικό είχε συμμετρία πενταπλής τάξης.

Αυτό ερχόταν σε αντίθεση με την επικρατούσα θεωρία των υλικών της εποχής. Πολλοί σημαντικοί επιστήμονες απέρριψαν τα ευρήματα ως ανοησίες, θεωρώντας ότι τα αποτελέσματα οφείλονταν σε πειραματικό σφάλμα. Όμως, ευτυχώς, οι νέες εξελίξεις στη θεωρία των πλακοστρώσεων προετοίμασαν το έδαφος για την εξήγηση αυτών των νέων ουσιών, οι οποίες ονομάστηκαν ψευδοκρύσταλλοι (quasicrystals).

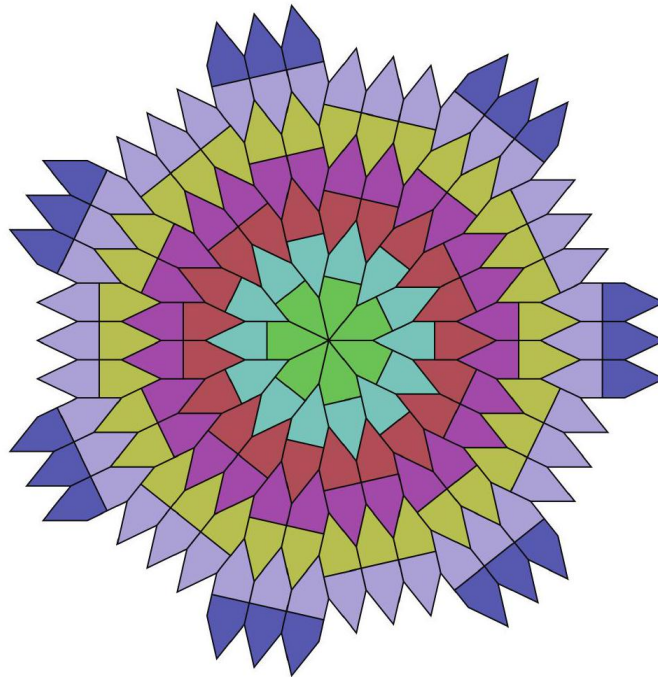


Σχήμα 4.2: Ένα πρότυπο περίθλασης ακτίνων X που δεν ταιριάζει ούτε σε διατεταγμένες ούτε σε άτακτες ουσίες.

Ορισμός 4.41. Μια πολυγωνική πλακόστρωση είναι **μη μεταφορική** αν η ομάδα συμμετρίας της δεν περιέχει καμία ισομετρία μεταφοράς.

Έχουμε δει ποικιλία από μη μεταφορικές πλακοστρώσεις. Βλ. το Σχήμα 4.3 για ένα επιπλέον παράδειγμα. Ωστόσο, μπορούμε να διαπιστώσουμε ότι τα πρωτοσύνολα για όλα τα παραδείγματα που είδαμε δημιουργούν επίσης πλακοστρώσεις με συμμετρία μεταφοράς. Αν ένα πολυγωνικό πρωτοσύνολο δημιουργεί μια πλακόστρωση με συμμετρία μεταφοράς, τότε, σύμφωνα με το Θεώρημα 3.7, δημιουργεί μια περιοδική πλακόστρωση, δηλαδή μία με μη παράλληλες μεταφορές.

Ενδιαφερόμαστε να βρούμε πρωτοσύνολα που δημιουργούν μόνο μη μεταφορικές πλακοστρώσεις. Για μεγάλο χρονικό διάστημα, θεωρούταν ότι δεν υπήρχαν τέτοια πρωτοσύνολα.



Σχήμα 4.3: Μια μη μεταφορική πλακόστρωση.

Ορισμός 4.42. Ένα πρωτοσύνολο είναι **απεριοδικό** (*aperiodic*) αν δημιουργεί πλακοστρώσεις που όλες είναι μη μεταφορικές.

Ένα πρόβλημα απόκρισης (decision problem) είναι ένα υπολογιστικό πρόβλημα του οποίου οι δυνατές εισόδοι είναι συμβολοσειρές από κάποιο αλφάβητο Σ και η ζητούμενη έξοδος είναι ΝΑΙ ή ΟΧΙ, ανάλογα με το αν η είσοδος ικανοποιεί μία συγκεκριμένη ιδιότητα. Κάθε πρόβλημα απόκρισης μπορεί να ταυτιστεί με μία **γλώσσα** $L \subseteq \Sigma^*$, η οποία περιλαμβάνει όλες τις συμβολοσειρές που πρέπει να απαντώνται καταφατικά (ΝΑΙ) από τον αλγόριθμο που επιλύει το πρόβλημα.

Ορισμός 4.43 (Αποκρισιμότητα). Μία γλώσσα L λέγεται **αποκρίσιμη** (*decidable*) αν υπάρχει αλγόριθμος—ή, ισοδύναμα, μία μηχανή Turing—ο οποίος, για κάθε είσοδο $w \in \Sigma^*$:

- τερματίζει μετά από πεπερασμένο αριθμό βημάτων, και
- απαντά ΝΑΙ αν $w \in L$ και ΟΧΙ αν $w \notin L$.

Η παραπάνω συνθήκη ισοδυναμεί με το ότι η μηχανή Turing **σταματά για κάθε είσοδο**, δηλαδή δεν κολλάει σε άπειρο υπολογισμό. Οι γλώσσες για τις οποίες αυτό συμβαίνει λέγονται **αποκρίσιμες** (*decidable languages*).

Το γενικό **Πρόβλημα Αποκρισιμότητας** είναι τότε το εξής:

Δοθέντος ενός προβλήματος απόκρισης (ή ισοδύναμα, μιας περιγραφής του ως γλώσσας L), υπάρχει αλγόριθμος που να αποφασίζει αν L είναι αποκρίσιμη;

Το πρόβλημα αυτό είναι θεμελιώδες στην Υπολογισσιμότητα και συνδέεται άμεσα με την ικανότητα αλγορίθμων να επιλύουν προβλήματα. Η απάντηση είναι γενικά αρνητική: **δεν υπάρχει αλγόριθμος** που, για κάθε περιγραφή προβλήματος απόφασης, να αποφασίζει αν αυτό είναι αποκρίσιμο. Έτσι, το ίδιο το πρόβλημα της αποκρισιμότητας είναι **μη αποκρίσιμο**.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η απόδειξη της μη αποκρισιμότητας του προβλήματος της αποκρισιμότητας παρουσιάζει μια εντυπωσιακή αναλογία με την απαγόρευση ύπαρξης του συνόλου όλων των συνόλων στη θεωρία συνόλων. Όπως το υποτιθέμενο σύνολο όλων των συνόλων που δεν ανήκουν στον εαυτό τους οδηγεί σε αντινομία (το γνωστό παράδοξο του Russell), έτσι και η υπόθεση ότι μπορεί να υπάρξει ένας καθολικός αλγόριθμος που αποφασίζει την αποκρισιμότητα όλων των προβλημάτων απόφασης οδηγεί σε λογική αντίφαση.

Η αντιστοιχία δεν είναι τυχαία: και στις δύο περιπτώσεις επιχειρείται η καθολική μετα-περιγραφή ενός συστήματος απόφασης ή κατηγοριοποίησης που όμως υπερβαίνει τα ίδια του τα όρια. Με άλλα λόγια, επιχειρείται η πλήρης περιγραφή ενός χώρου μέσα στον οποίο περιλαμβάνεται και η ίδια η πράξη της περιγραφής. Το πρόβλημα αυτό, στην περίπτωση των υπολογισμών, εκδηλώνεται ως το πρόβλημα της μη αποκρισιμότητας του ίδιου του ερωτήματος της αποκρισιμότητας.

Η σύνδεση με τις πλακοστρώσεις του Wang έγκειται στο ότι μπορούμε να διατυπώσουμε το ερώτημα:

Δοθέντος ενός πεπερασμένου συνόλου από πλακίδια Wang, υπάρχει τρόπος να πλακοστρωθεί το επίπεδο σύμφωνα με τους κανόνες του συστήματος;

ως πρόβλημα απόφασης

Στις αρχές της δεκαετίας του 1960, ο Hao Wang, καθηγητής στο Harvard, προσπαθούσε να επιλύσει το Πρόβλημα της Αποκρισιμότητας (Decidability). Το ζητούμενο ήταν να βρεθεί ένας αλγόριθμος που να απαντάει στο ερώτημα αν ένα δοσμένο πεπερασμένο πρωτοσύνολο δημιουργεί πλακόστρωση. Δηλαδή, να υπάρχει μια μεθοδική, μηχανική διαδικασία η οποία, για οποιοδήποτε τέτοιο σύνολο, να καταλήγει μέσα σε πεπερασμένο χρόνο σε ένα από τα δύο συμπεράσματα: είτε ότι το σύνολο πλακοστρώνει το επίπεδο είτε ότι δεν το πλακοστρώνει.

Ο Wang είχε ήδη έναν αλγόριθμο που μπορούσε να καθορίσει αν μια πλακόστρωση ήταν περιοδική. Είχε διατυπώσει την εικασία ότι αν ένα πρωτοσύνολο δημιουργεί πλακόστρωση, τότε δημιουργεί και περιοδική πλακόστρωση. Αν ίσχυε αυτό, τότε ο αλγόριθμός του θα αρκούσε για να λύσει το Πρόβλημα της Αποκρισιμότητας: το να αποφασίσουμε δηλαδή αλγοριθμικά για κάθε πρωτοσύνολο αν μπορεί να πλακοστρώσει ή όχι το επίπεδο.

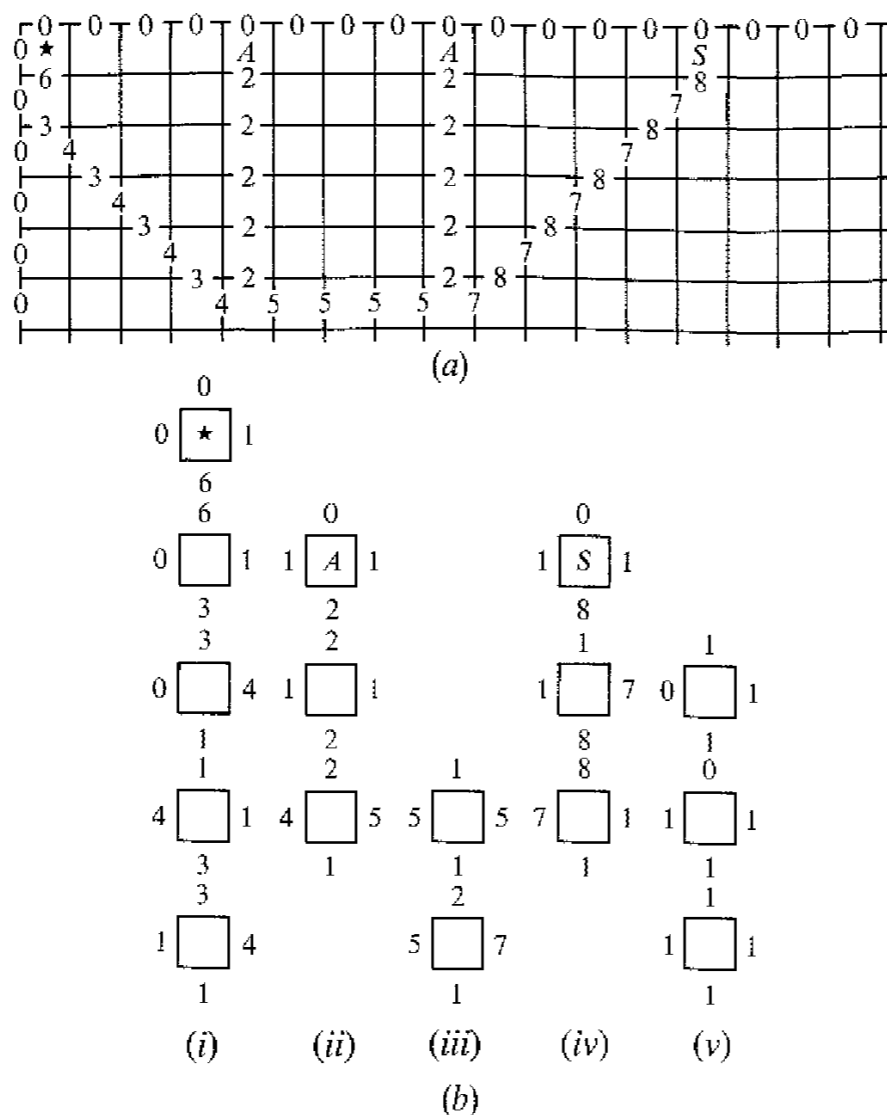
Όμως το 1966, ο διδακτορικός φοιτητής του Wang, Robert Berger, κατασκεύασε ένα σύνολο από πρωτοπλακίδια που ήταν απεριοδικά [24]. Περιείχε 20,426 πλακίδια

Wang. Ένα πλακίδιο Wang είναι τετράγωνο μοναδιαίου μήκους, του οποίου οι πλευρές έχουν χρώμα και επιτρέπεται η συγκόλληση μόνο πλευρών με το ίδιο χρώμα. Επιπλέον, δεν επιτρέπεται η ανάκλαση ή η στροφή των πλακιδίων. Έτσι, όλα τα αντίγραφα ενός δοσμένου πρωτοπλακιδίου πρέπει να είναι μεταφορές του αρχικού, αν και αυτές οι μεταφορές δεν χρειάζεται να είναι συμμετρίες της πλακόστρωσης. Οι κανόνες ταύτισης που επιβάλλονται από τα χρώματα των πλευρών μπορούν επίσης να αναπαρασταθούν αντικαθιστώντας τις πλευρές με κυματοειδείς καμπύλες σε σχήμα S.

Αυτή η κατασκευή του Berger δεν αποτέλεσε μόνο αντεπιχείρημα στην εικασία του Wang, αλλά αποκάλυψε και μία βαθύτερη σχέση μεταξύ γεωμετρικών δομών και θεωρητικών μοντέλων υπολογισμού. Η δυνατότητα δημιουργίας απεριοδικών πλακοστρώσεων μέσω πεπερασμένων κανόνων έθεσε το ερώτημα αν τέτοιες δομές θα μπορούσαν να ενσωματώνουν διαδικασίες υπολογισμού. Εδώ εισέρχεται η έννοια της Μηχανής Turing, η οποία είναι μία πρωτόγονη μορφή υπολογιστή. Μπορεί να περιγραφεί ως μία συσκευή η οποία είναι ικανή να διαβάζει σύμβολα από μία άπειρη ‘ταινία μνήμης’ και να ενεργεί επάνω σε αυτά τα σύμβολα σύμφωνα με ένα καθορισμένο ‘πρόγραμμα’, είτε γράφοντας νέα σύμβολα στην ταινία είτε μετακινώντας την ταινία προς τα πίσω ή προς τα εμπρός. Η θεωρία των μηχανών Turing παίζει σημαντικό ρόλο στη μαθηματική λογική, καθώς μπορεί να αποδειχθεί ότι μία τέτοια μηχανή μπορεί να υπολογίσει όλες τις *αναδρομικές* συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις των οποίων οι τιμές μπορούν να υπολογιστούν σε πεπερασμένο αριθμό βημάτων. Αυτές περιλαμβάνουν όλες τις γνωστές συναρτήσεις της αριθμητικής όπως η πρόσθεση, ο πολλαπλασιασμός, η ύψωση σε δύναμη κ.λπ. Στην πραγματικότητα, παρά την απλότητα και την φαινομενική αναποτελεσματικότητα, μία μηχανή Turing είναι το ίδιο ευέλικτη όσο οποιοσδήποτε ψηφιακός υπολογιστής που έχει κατασκευαστεί ή μπορεί ποτέ να κατασκευαστεί. Υπάρχει εκτενής βιβλιογραφία για το θέμα, στην οποία περιλαμβάνεται το έργο του Kleene [86].

Ο Wang[148] επεσήμανε ότι είναι δυνατό να προσομοιωθεί η λειτουργία οποιασδήποτε μηχανής Turing μέσω κατάλληλης πλακόστρωσης—στην ουσία, μπορεί να βρεθεί ένα σύνολο από πλακίδια το οποίο να εκτελεί οποιονδήποτε υπολογισμό που είναι δυνατός από μία μηχανή Turing. Η βασική ιδέα είναι να χρησιμοποιηθούν σειρές από πλακίδια για την προσομοίωση της ταινίας της μηχανής, όπου κάθε διαδοχική σειρά αντιστοιχεί σε διαδοχικές «καταστάσεις» της μηχανής.

Αντί να περιγράψουμε λεπτομερώς αυτήν την προσομοίωση, φαίνεται πιο ενδιαφέρον να παρουσιάσουμε το υλικό υπό τη μορφή παραδειγμάτων που εικονογραφούν τις σχετικές αρχές. Χρησιμοποιούμε πλακίδια Wang και η πλακόστρωση θα καταλαμβάνει μόνο το ένα τέταρτο του επιπέδου—θα υπάρχει ένα άνω και ένα αριστερό όριο όπως φαίνεται στα Σχ. 4.4(α) και 4.5(α). Θα υποθέσουμε ότι αυτά τα όρια είναι χρωματισμένα με το χρώμα που δηλώνεται ως 0, ώστε κάθε πλακίδιο που εφάπτεται με κάποιο όριο να φέρει το χρώμα 0 στη σχετική του πλευρά.



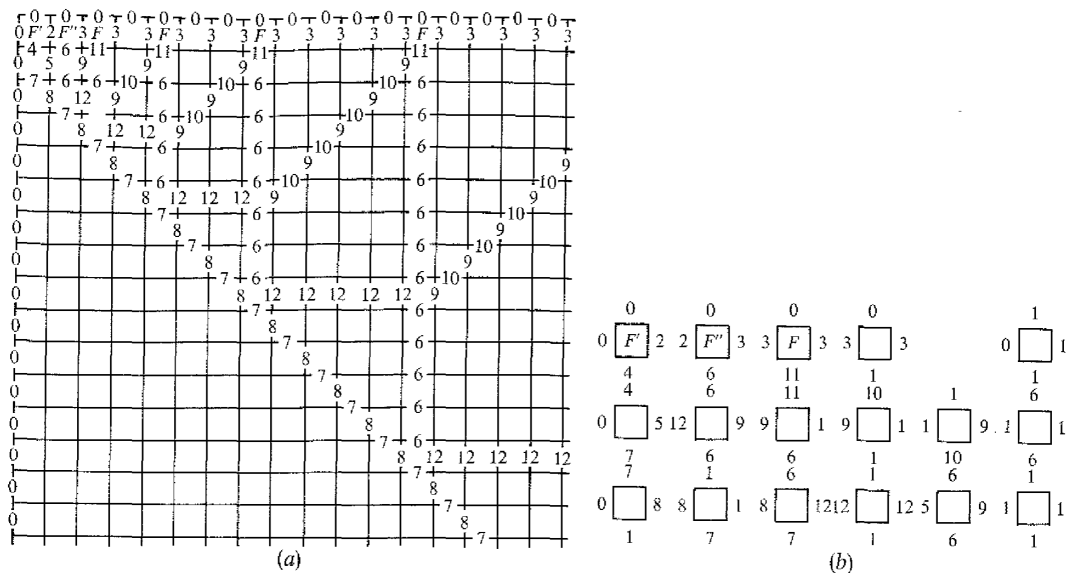
Σχήμα 4.4: Ένα σύνολο πλακιδίων που εκτελούν την πράξη της πρόσθεσης δύο άνισων φυσικών.

Το πρώτο μας παράδειγμα είναι πολύ απλό—δείχνουμε πώς τα πλακίδια μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να πραγματοποιήσουν την πρόσθεση φυσικών a , b , όπου, για ευκολία, υποθέτουμε ότι $2 \leq a < b$. Στην Σχ. 4.4(β) δείχνουμε ένα σύνολο από 16 πρωτοπλακίδια που πραγματοποιούν αυτήν την πράξη. Η εισαγωγή των αριθμών a και b στην πλακόστρωση γίνεται με την τοποθέτηση δύο πλακιδίων με σήμανση A στις θέσεις a και b της ανώτερης σειράς. (Βλ. Σχ. 4.4(a) για την περίπτωση $a = 5$, $b = 9$. Για να απλοποιήσουμε το διάγραμμα, έχουμε σημειώσει τα χρώματα επάνω στις ακμές της πλακόστρωσης αντί για τις ακμές των πλακιδίων, και έχουμε παραλείψει το χρώμα 1. Κάθε πλευρά χωρίς ένδειξη θεωρείται ότι φέρει το χρώμα 1.) Αν δεν χρησιμοποιηθούν άλλα πλακίδια A , τότε επιβάλλεται μία μοναδική πλακόστρωση, και αυτή θα περιέχει ένα και μόνο πλακίδιο S στην ανώτερη σειρά. Αν το πλακίδιο S βρίσκεται στη θέση s , τότε $s = a + b$, και επομένως δηλώνει το

άθροισμα των δοθέντων ακεραίων.

Η αρχή πάνω στην οποία βασίζεται η κατασκευή της πλακόστρωσης μπορεί να περιγραφεί εν συντομία ως εξής. Το πλακίδιο *, το οποίο αναγκαστικά τοποθετείται στην επάνω αριστερή γωνία, ξεκινά ένα 'σήμα' το οποίο μεταδίδεται διαγώνια προς τα κάτω και δεξιά χρησιμοποιώντας τα πλακίδια της πρώτης στήλης (i) του Σχ.4.4(β). Αυτό το σήμα υποδηλώνεται από τα χρώματα 3 και 4. Τα πλακίδια A στέλνουν σήματα (με χρήση του χρώματος 2) κατακόρυφα προς τα κάτω. Όταν το σήμα από το αριστερό πλακίδιο A συναντήσει το διαγώνιο σήμα, στρέφεται οριζόντια χρησιμοποιώντας το χαμηλότερο πλακίδιο της στήλης (ii) και στη συνέχεια μεταδίδεται με χρήση του χρώματος 5. Όταν αυτό το οριζόντιο σήμα συναντήσει το κατακόρυφο σήμα από το δεξί πλακίδιο A, στρέφεται διαγώνια προς τα επάνω (χρησιμοποιώντας το χαμηλότερο πλακίδιο της στήλης (iii)) και στη συνέχεια διαδίδεται διαγώνια προς τα επάνω (με χρήση των πλακιδίων της στήλης (iv)) έως ότου συναντήσει το ανώτερο όριο, όπου και απορροφάται από το πλακίδιο S. Έτσι, το S υποχρεωτικά καταλήγει στη σωστή θέση όπως φαίνεται. Τα υπόλοιπα τρία πλακίδια, στη στήλη (v), μπορούν να θεωρηθούν ουδέτερα καθώς απλώς γεμίζουν τα κενά ανάμεσα στα πλακίδια που μεταφέρουν τα σήματα.

Σε αυτό το παράδειγμα δεν προσπαθήσαμε να ελαχιστοποιήσουμε ούτε τον αριθμό των πλακιδίων, ούτε τον αριθμό των χρωμάτων. Ο κύριος σκοπός μας ήταν να δείξουμε πώς η χρήση «σημάτων» στην πλακόστρωση μπορεί να εκτελέσει τις απαραίτητες πράξεις.



Σχήμα 4.5: Μια πλακόστρωση που δείχνει την ακολουθία Fibonacci

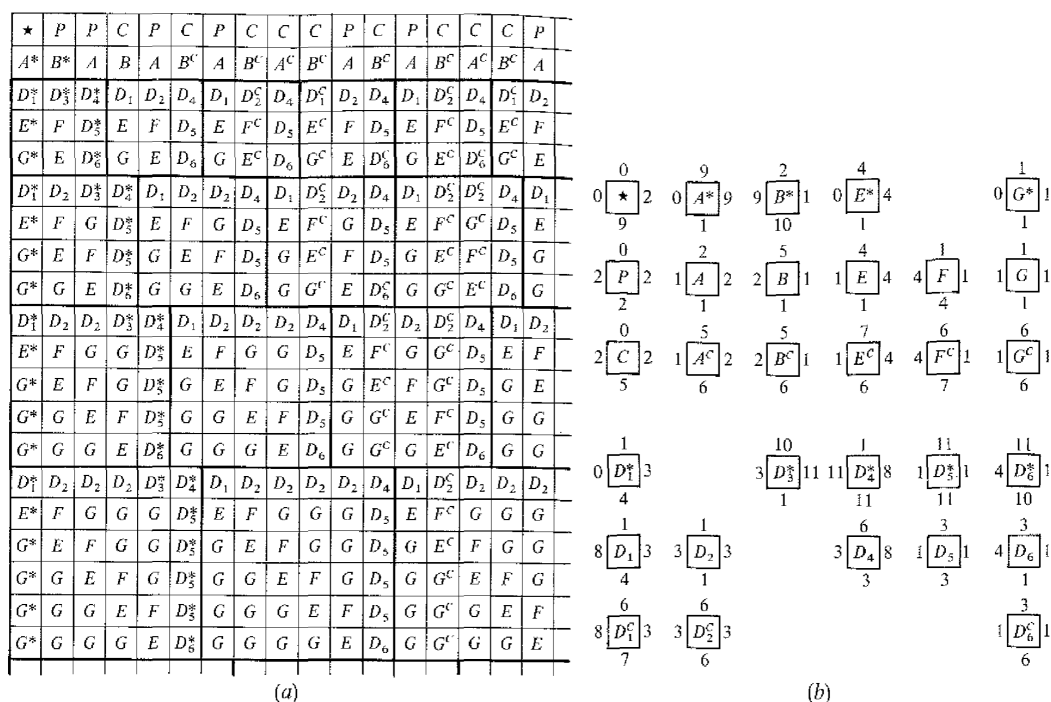
Διάφορες τροποποιήσεις και επεκτάσεις αυτού του παραδείγματος προκύπτουν άμεσα. Ειδικότερα, είναι απλό να βρεθεί ένα σύνολο πλακιδίων που να επιβάλλει μία πλακόστρωση που 'οπτικοποιεί' οποιαδήποτε ακολουθία φυσικών οριζόμενη μέσω πρόσθεσης ή επαναλαμβανόμενης πρόσθεσης. Οπτικοποιούμε αυτήν τη διαπίστωση

με το δεύτερό μας παράδειγμα (Σχ. 4.5(α)), στο οποίο οι θέσεις των πλακιδίων F στην ανώτερη σειρά είναι

$$1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, \dots$$

Πρόκειται για την γνωστή ακολουθία Fibonacci. Τα 17 πρωτοπλακίδια που φαίνονται στο Σχ. 4.5(β) επιβάλλουν τη μοναδική πλακόστρωση του Σχ. 4.5(α).

Σε μια τέτοια περίπτωση, είναι απαραίτητο να προσδιοριστούν οι πρώτοι όροι της ακολουθίας ώστε οι υπόλοιποι να καθοριστούν από την αναδρομή. Για την ακολουθία Fibonacci, οι δύο πρώτοι όροι επιβάλλονται από τα πλακίδια F' , F'' τα οποία μπορούν να τοποθετηθούν μόνο στις θέσεις που φαίνονται. Από εκεί και πέρα, τα πλακίδια F καθορίζονται από μία τροποποίηση της διαδικασίας πρόσθεσης που περιγράφηκε παραπάνω. Τα διάφορα σήματα που χρησιμοποιούνται είναι εμφανή από την εξέταση του διαγράμματος.



Σχήμα 4.6: Μια πλακόστρωση στην οποία τα πλακίδια με P και Σ εμφανίζονται σε θέσεις πρώτων και σύνθετων αριθμών αντίστοιχα.

Το τρίτο και τελευταίο παράδειγμά μας οφείλεται στους E. F. Moore και M. Fieldhouse· μεταδόθηκε στους B. Grünbaum και G.C. Shephard από τον H. Wang. Εδώ, 30 πρωτοπλακίδια (Σχ. 4.6(β)) επιβάλλουν μία μοναδική πλακόστρωση του τεταρτημορίου, στην οποία τα πλακίδια P και C εμφανίζονται στις θέσεις με πρώτους και σύνθετους αριθμούς της άνω σειράς αντίστοιχα. Η μονάδα 1 υποδεικνύεται από ένα ειδικό πλακίδιο $\star$ στην πρώτη θέση.

Η πλακόστρωση φαίνεται στο Σχ. 4.6(α). Εδώ τα διάφορα πλακίδια χαρακτηρίζονται με γράμματα (αντί να δηλώνονται τα χρώματα των ακμών τους με αριθμούς),

και φαίνεται πώς δημιουργούν σειρές από τετράγωνα μπλοκ τα οποία αυξάνονται σε μέγεθος καθώς κινούμαστε προς τα κάτω. Αυτά τα μπλοκ επισημαίνονται με παχύτερες γραμμές. Τα πλακίδια με αστερίσκο χρησιμοποιούνται για να δημιουργήσουν τα μπλοκ κατά μήκος του αριστερού ορίου, και τα πλακίδια με εκθέτη C μεταδίδουν σήμα προς τα αριστερά ότι ο αριθμός είναι σύνθετος. Αυτά τα 'σύνθετα' σήματα δημιουργούνται από τα πλακίδια B^* (το οποίο χρησιμοποιείται μόνο μία φορά) και D_4 (το οποίο εμφανίζεται στην πάνω δεξιά γωνία κάθε τετραγωνικού μπλοκ που δεν εφάπτεται με το αριστερό όριο της πλακόστρωσης). Απορροφώνται από τα πλακίδια C στην ανώτερη σειρά και από το D_6 στη κάτω δεξιά γωνία ορισμένων μπλοκ. Όταν το σήμα απορροφάται με αυτόν τον τρόπο, αναπαράγεται σε ψηλότερο σημείο από ένα πλακίδιο D_4 .

Τα αυξανόμενα μπλοκ πλακιδίων σηματοδοτούν στην άνω σειρά όταν ένας αριθμός έχει διαιρέτη μεγαλύτερο του 2. Η διαιρετότητα με το 2 καλύπτεται από τα εναλλάξ πλακίδια A και B της δεύτερης σειράς. Οποιοδήποτε από τα δύο μπορεί να μεταδώσει το σύνθετο σήμα. Το ειδικό πλακίδιο B^* εισάγεται απλώς για να διασφαλιστεί ότι ένα πρώτο πλακίδιο P θα εμφανιστεί στη θέση 2.

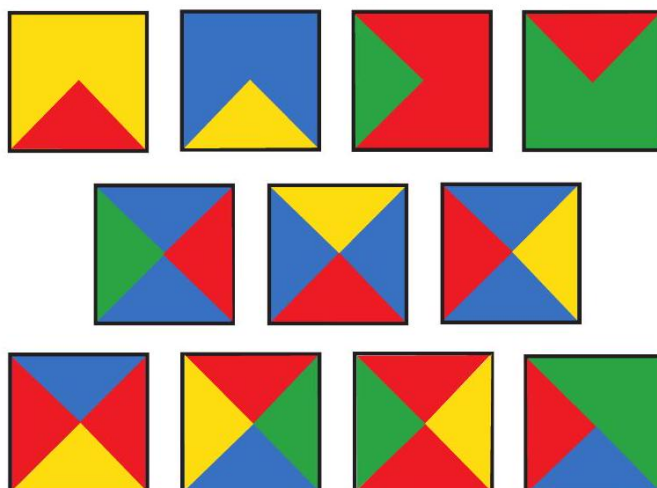
Ο σχεδιασμός αυτής και παρόμοιων πλακοστρώσεων απαιτεί σαφώς μεγάλη ευρηματικότητα, ιδίως αν κάποιος προσπαθήσει να είναι οικονομικός και να χρησιμοποιήσει μικρό αριθμό πρωτοπλακιδίων για να επιτύχει το επιθυμητό αποτέλεσμα.

Για περισσότερες πληροφορίες που σχετίζονται με τα θέματα αυτής της ενότητας, ο αναγνώστης μπορεί να συμβουλευτεί τα άρθρα του Wang [145],[146], [148]. Μία πιο εκλαϊκευμένη παρουσίαση, που περιλαμβάνει και εξήγηση της σχέσης μεταξύ πλακοστρώσεων και Turing Machines, δίνεται στο [147]. Σχετικό υλικό μπορεί να βρεθεί στα έργα των Hanf [66], Myers[105] και Heidler [70].

Σχετικά με το υλικό αυτής της ενότητας είναι και το μαθηματικά και αισθητικά ελκυστικό έργο του Miller [100], [101], [102], και του ApSimon[14] πάνω σε 'δάση πεπνωκότων δέντρων'.

Επιστρέφοντας τώρα στη συζήτηση για την απεριοδικότητα ενός πρωτοσυνόλου, ο Berger κατάφερε να μειώσει τον αριθμό των απαραίτητων πλακιδίων Wang σε 104. Ο αριθμός αυτός συνέχισε να μειώνεται και σήμερα έχει φτάσει στα 11, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.7 [75].

Το 1971, ο Raphael Robinson, καθηγητής στο Berkeley, βρήκε ένα μη περιοδικό πρωτοσύνολο από έξι πλακίδια, καθένα από τα οποία ήταν τροποποιημένο τετράγωνο. Το πρωτοσύνολο αυτό θα το εξετάσουμε σε επόμενη ενότητα. Έπειτα, το 1974, ο Roger Penrose ανακάλυψε πολλά σύνολα από δύο πρωτοπλακίδια που είναι μη περιοδικά. Θα τα εξετάσουμε και αυτά σε επόμενη ενότητα. Μέχρι το 2023 παρέμενε ακόμη ανοικτό το ερώτημα αν υπάρχει ένα μόνο μη περιοδικό πρωτοπλακίδιο. Αυτό είναι το λεγόμενο πρόβλημα του einstein, καθώς στα γερμανικά, "ein stein" σημαίνει 'μία πέτρα'. Παρατηρούμε ότι το Πόρισμα 3.5 μας λέει ότι δεν αξίζει να αναζητούμε λύση στο πρόβλημα του einstein μεταξύ των κυρτών πολυγώνων, καθώς



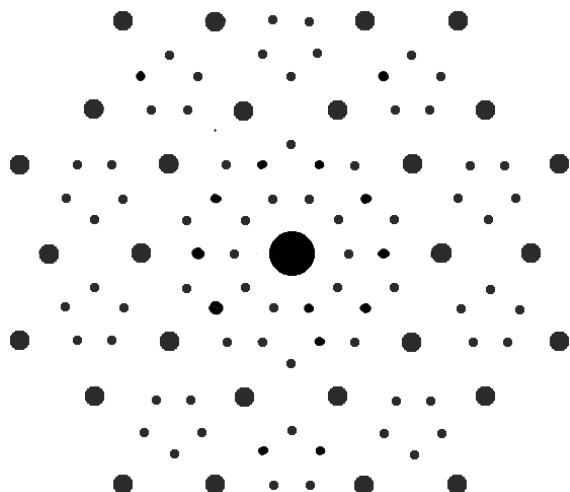
Σχήμα 4.7: Ένα μη περιοδικό σύνολο από 11 πλακίδια Wang, με το χρώμα πλευράς να παίρνει όλο το τεταρτημόριο.

αυτά δημιουργούν μόνο περιοδικές πλακοστρώσεις.

Το 2023, όμως, υπήρξε μια σημαντική ανακάλυψη: ο David Smith, μαζί με τους Joseph Samuel Myers, Craig Kaplan και Chaim Goodman-Strauss, παρουσίασαν ένα κυρτό δωδεκάπλευρο σχήμα, γνωστό πλέον ως ‘καπέλο’ (the hat), το οποίο λειτουργεί ως einstein. Δηλαδή, κάθε πλακόστρωση που κατασκευάζεται αποκλειστικά με αντίγραφα αυτού του σχήματος είναι αναγκαστικά μη περιοδική. Λίγο αργότερα, οι ίδιοι ερευνητές βρήκαν μια παραλλαγή του ίδιου σχήματος, το λεγόμενο ‘φάντασμα καπέλο’ (spectre), το οποίο είναι ένα einstein με ακόμη πιο αυστηρή ιδιότητα: δεν πλακοστρώνει καθόλου αν επιτραπεί ανάκλαση. Οι εξελίξεις αυτές έλυσαν οριστικά το πρόβλημα του einstein στο επίπεδο, και φιλοδοξούμε να τις παρουσιάσουμε στο επόμενο κεφάλαιο.

Τελικά, οι επιστήμονες κατανόησαν ότι τα ψευδοκρυσταλλικά υλικά είναι τρισδιάστατα ανάλογα των μη περιοδικών πλακοστρώσεων. Ακολουθούν τοπικούς κανόνες για τον σχηματισμό τους, δηλαδή ποιες έδρες επιτρέπεται να συγκολληθούν μεταξύ τους, αλλά στην πραγματικότητα δεν είναι περιοδικά. Μπορούν να έχουν στροφικές συμμετρίες διαφορετικές από 2, 3, 4 ή 6.

Το 2009, ανακαλύφθηκε ο πρώτος φυσικός ψευδοκρύσταλλος, $Al_{63}Cu_{24}Fe_{13}$, γνωστός πλέον ως εικοσαεδρίτης, βλ. Σχ. 4.8. Πιστεύεται ότι έχει εξωγήινη προέλευση, προερχόμενο από μετεωρίτη. Πλέον, έχουν αναγνωριστεί πολλά υλικά ως ψευδοκρύσταλλοι. Το 2011, ο Schechtman τιμήθηκε με το Nobel Χημείας για την συμβολή του στην ανακάλυψή τους.



Σχήμα 4.8: Πρότυπο περίθλασης ακτίνων X του ψευδοκρυστάλλου $Al_{63}Cu_{24}Fe_{13}$, εικοσαεδρίτη.

4.2 Πλακοστρώσεις με Αντικατάσταση

Σε αυτή την ενότητα, εξετάζουμε μια ισχυρή μέθοδο για τη δημιουργία πλακοστρώσεων. Αυτή αποτελεί τη βάση για τη δημιουργία πολλών μη μεταφορικών πλακοστρώσεων.

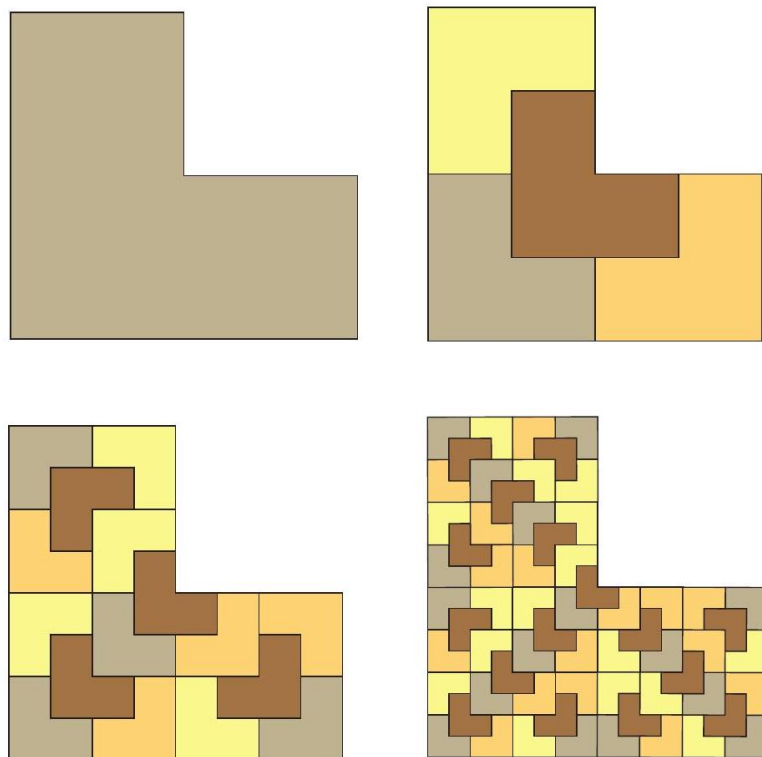
Ορισμός 4.44. Ένα αντιγραφο-πλακίδιο ή k -αντιγραφο-πλακίδιο είναι ένα πλακίδιο που μπορεί να πλακοστρωθεί με k σμικρυμένα αντίγραφα του εαυτού του, όλα ταυτόσημα μεταξύ τους.

Για παράδειγμα, στο πάνω αριστερό μέρος του Σχήματος 4.9, βλέπουμε το πλακίδιο καρέκλα. Μπορούμε εύκολα να δούμε ότι μπορεί να αποσυντεθεί σε τέσσερα αντίγραφά του, το καθένα σμικρυμένο κατά έναν παράγοντα 2. Έπειτα, μπορούμε να επαναλάβουμε τη διαδικασία για κάθε πλακίδιο στη νέα πλακόστρωση. Καθώς συνεχίζουμε αυτή τη διαδικασία αποσύνθεσης, αποκτούμε ένα μπάλωμα με όλο και μικρότερα πλακίδια.

Εφόσον το εμβαδόν των k μικρότερων πλακιδίων ισούται με το εμβαδόν του αρχικού πλακιδίου, γνωρίζουμε ότι τα νέα πλακίδια πρέπει να είναι σμικρυμένες εκδοχές του αρχικού, σμικρυμένα κατά έναν παράγοντα $\sqrt{k}$.

Εάν, σε κάθε στάδιο, μεγεθύνουμε το αποτέλεσμα κατά $\sqrt{k}$, διαδικασία που ονομάζεται **διόγκωση**, τα νέα πλακίδια έχουν το ίδιο μέγεθος με το αρχικό πλακίδιο. Αποκτούμε πλακοστρώσεις όλο και μεγαλύτερων μπαλωμάτων, το καθένα αποτελούμενο από k φορές περισσότερα πλακίδια από το προηγούμενο. Σε κάθε στάδιο, όλα τα πλακίδια είναι ταυτόσημα με το αρχικό πλακίδιο.

Με αυτόν τον τρόπο, κατασκευάζουμε μπαλώματα που περιέχουν αυθαίρετα πολλά αντίγραφα του αρχικού πλακιδίου. Εάν μπορέσουμε να δείξουμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε μπαλώματα που περικλείουν το ένα το άλλο, τότε από το Λήμ-



Σχήμα 4.9: Το πλακίδιο καρέκλα μπορεί να πλακοστρωθεί με τέσσερις σμικρυμένες εκδοχές του εαυτού του. Έπειτα, η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί.

μα 3.13, δημιουργούμε μια πλακόστρωση του επιπέδου που περιέχει όλα τα μπαλώματα, καθένα από τα οποία περιέχεται στο επόμενο.

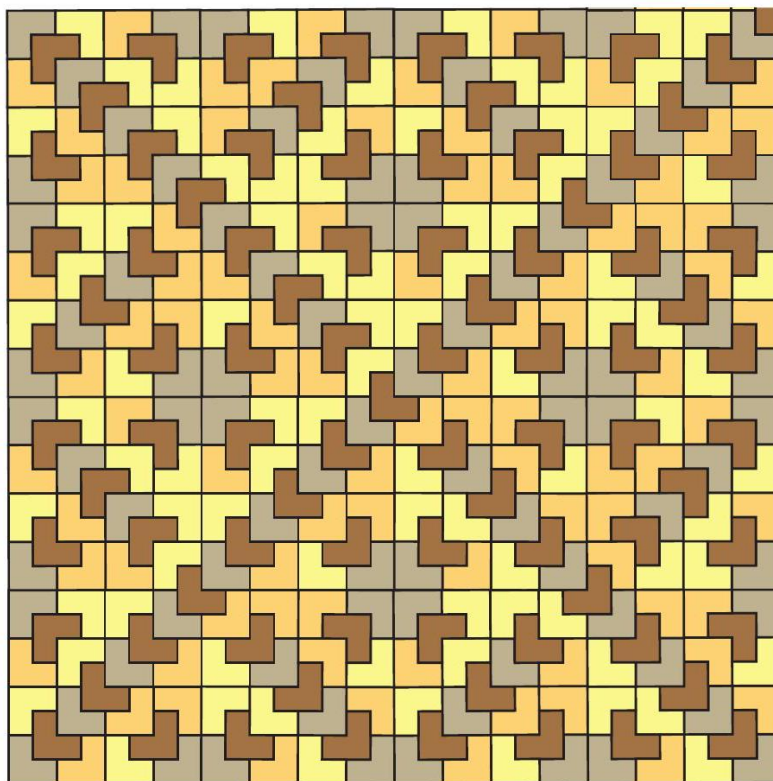
Στο Σχήμα 4.10, βλέπουμε μέρος της πλακόστρωσης με το πλακίδιο καρέκλα.

Λήμμα 4.16. Ένα αντιγραφο-πλακίδιο δημιουργεί πλακόστρωση του επιπέδου μέσω επαναλαμβανόμενης αποσύνθεσης και διόγκωσης.

Απόδειξη. Για να γνωρίζουμε ότι αυτή η μέθοδος οδηγεί σε πλακόστρωση του επιπέδου, θα δείξουμε ότι κατασκευάζουμε μπαλώματα που περικλύουν το ένα το άλλο. Ξεκινάμε με το k -αντιγραφο-πλακίδιο T τοποθετημένο σταθερά στο επίπεδο. Υποθέτουμε ότι έχει εσωτερική ακτίνα u και εξωτερική ακτίνα U . Αποσυνθέτουμε το T σε k μικρότερες εκδοχές και στη συνέχεια διογκώνουμε κατά $k^{1/2}$. Έπειτα, επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία n φορές, όπου $k^{n/2}u > 2U$. Εφόσον το T περικλείει έναν δίσκο ακτίνας u , το αποτέλεσμα περιέχει έναν δίσκο ακτίνας $k^{n/2}u$.¹

Επιλέγουμε το πλακίδιο Q στο μπάλωμα $\mathcal{A}_n$ που περιέχει το κέντρο του δίσκου, επιλέγοντας οποιοδήποτε πλακίδιο περιέχει το σημείο αν ανήκει σε περισσότερα από ένα πλακίδια. Παρατηρούμε ότι αυτό το πλακίδιο δεν μπορεί να αγγίζει το σύνορο του δίσκου ακτίνας $k^{n/2}u > 2U$ και επομένως το πλακίδιο Q περικλύεται από το $\mathcal{A}_n$.

¹Σε αυτό το σημείο, θα μπορούσαμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Επέκτασης (Θεώρημα 3.5) για να γνωρίζουμε ότι υπάρχει πλακόστρωση με το αντιγραφο-πλακίδιο. Ωστόσο, θέλουμε να διασφαλίσουμε ότι τα όλο και μεγαλύτερα μπαλώματα που προκύπτουν από την αποσύνθεση και τη διόγκωση πράγματι εμφανίζονται στην πλακόστρωση.



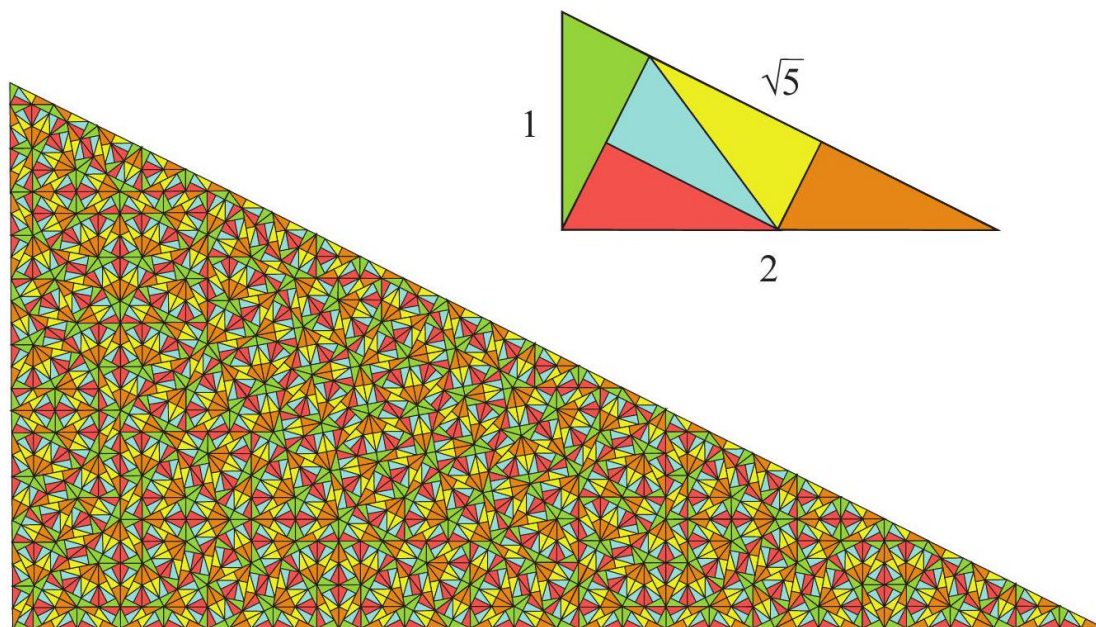
Σχήμα 4.10: Η πλακοστρώση που δημιουργείται από το πλακίδιο καρέκλα.

Μεταφέρουμε και στρέφουμε το $\mathcal{A}_n$ έτσι ώστε η κίνηση να τοποθετεί το $\mathcal{Q}$ στη θέση του αρχικού πλακιδίου T στο επίπεδο. Τώρα, έχουμε ένα μπάλωμα που περικλύει το αρχικό πλακίδιο στη θέση του στο επίπεδο. Όταν επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία, αποσυνθέτοντας κάθε πλακίδιο του μπαλώματος σε k μικρότερα αντίγραφα και διογκώνοντας, και το κάνουμε αυτό n φορές, το νέο μπάλωμα, μόλις προσανατολιστεί εκ νέου, θα περικλύει το προηγούμενο μπάλωμα. Εφόσον δεν υπάρχει όριο στον αριθμό επαναλήψεων αυτής της διαδικασίας, από το Λήμμα 3.13 έπεται ότι αυτό δημιουργεί πλακοστρώση του επιπέδου, και κάθε μπάλωμα που χρησιμοποιείται στην κατασκευή πράγματι εμφανίζεται στην πλακοστρώση. $\square$

Ορισμός 4.45. Έστω $\mathcal{T}$ μια πλακοστρώση. Αν δύο ταυτόσημα πλακίδια μπορούν να ταυτιστούν μέσω μιας μεταφοράς, λέμε ότι έχουν τον ίδιο **προσανατολισμό**. Η μεταφορά δεν είναι απαραίτητο να αποτελεί συμμετρία της $\mathcal{T}$. Αν δεν ταυτίζονται μέσω μεταφοράς, τότε έχουν διαφορετικούς προσανατολισμούς.

Αυτό χωρίζει το σύνολο των ταυτόσημων πλακιδίων σε κλάσεις ισοδυναμίας, καθεμία από τις οποίες περιέχει όλα τα πλακίδια με τον ίδιο προσανατολισμό. Παρατηρούμε ότι δύο πλακίδια έχουν διαφορετικούς προσανατολισμούς αν, μετά από μεταφορά, για να ταυτιστούν χρειάζεται μια στροφή, μια ανάκλαση ή και τα δύο.

Ορισμός 4.46. Μια πλακοστρώση που δημιουργείται από επανειλημμένη αποσύνθεση και διόγκωση ενός αντιγραφο-πλακιδίου ονομάζεται **πλακοστρώση αντικατάστασης**.



Σχήμα 4.11: Ένα τρίγωνο που είναι 5-αντιγραφο-πλακίδιο και η πλακόστρωση που δημιουργείται.

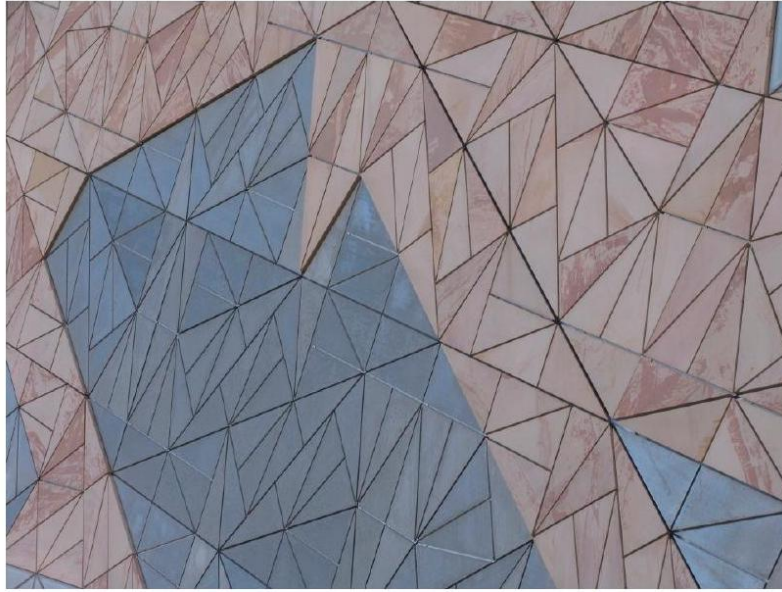
Η πλακόστρωση pinwheel (χάρτινου ανεμόμυλου) των Conway-Radin [119] είναι ένα ιδιαίτερα ενδιαφέρον παράδειγμα πλακόστρωσης αντικατάστασης. Ξεκινάμε με ένα ορθογώνιο τρίγωνο με μήκη πλευρών 1, 2 και $\sqrt{5}$. Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.11, αυτό είναι ένα 5-αντιγραφο-πλακίδιο. Κάτω από αυτό, βλέπουμε ένα τμήμα της πλακόστρωσης που προκύπτει. Αυτό είναι το πρώτο γνωστό παράδειγμα μονοεδρικής πλακόστρωσης στην οποία τα πλακίδια έχουν άπειρους διαφορετικούς προσανατολισμούς (σχετικές γωνίες μεταξύ των πλακιδίων), παράγοντας έτσι μια εμφανή τυχαιότητα στην πλακόστρωση. Στην πραγματικότητα, οι προσανατολισμοί των πλακιδίων είναι πυκνοί στον κύκλο όλων των πιθανών γωνιών πλακιδίων. Όμως, γνωρίζοντας τον κανόνα δημιουργίας της, η πλακόστρωση δεν είναι καθόλου τυχαία.

Στο Σχήμα 4.12, βλέπουμε την πλευρά ενός κτιρίου στο συγκρότημα Federation Square στη Μελβούρνη της Αυστραλίας, η οποία φέρει την πλακόστρωση pinwheel.

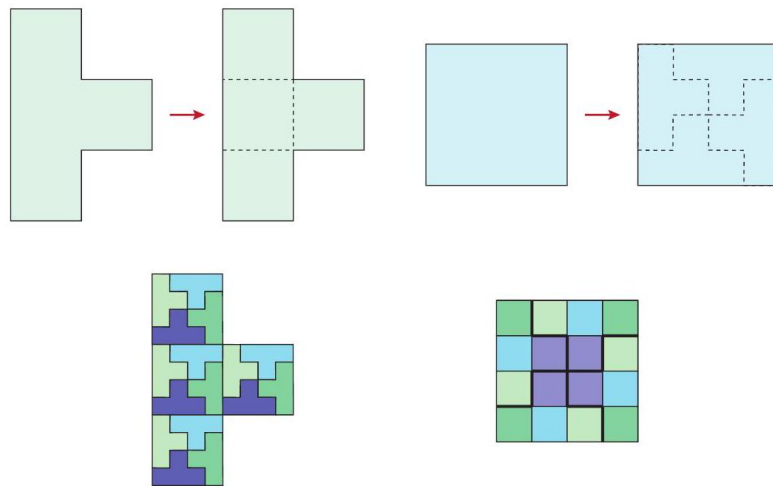
Υπάρχει παράδειγμα πλακιδίου που είναι ταυτόχρονα 2-αντιγραφο-πλακίδιο και 4-αντιγραφο-πλακίδιο, καθώς και άλλο παράδειγμα που είναι ταυτόχρονα 3-αντιγραφο-πλακίδιο και 4-αντιγραφο-πλακίδιο. Όμως το παρακάτω παραμένει άγνωστο.

Ανοικτά Ερωτήματα. Μπορεί ένα πλακίδιο να είναι ταυτόχρονα 2-αντιγραφο-πλακίδιο και 3-αντιγραφο-πλακίδιο;

Υπάρχουν διάφοροι τρόποι να βρούμε αντιγραφο-πλακίδια. Για παράδειγμα, έστω M και N δύο πλακίδια. Υποθέτουμε ότι το M αποσυντίθεται σε m μικρότερα πλακίδια, που είναι ταυτόσημα μεταξύ τους και είναι σμικρυμένα αντίγραφα του N . Υποθέτουμε επίσης ότι το N αποσυντίθεται σε n μικρότερα πλακίδια, που είναι ταυτόσημα μεταξύ τους και είναι σμικρυμένα αντίγραφα του M . Τότε, εφαρμόζοντας



Σχήμα 4.12: Η πλακόστρωση pinwheel σε πρόσοψη κτιρίου στο Federation Square στη Μελβούρνη.



Σχήμα 4.13: Ένα T-πλακίδιο αποσυντίθεται σε τέσσερα τετράγωνα. Ένα τετράγωνο αποσυντίθεται σε τέσσερα T-πλακίδια. Άρα, η διπλή αποσύνθεση δείχνει ότι είναι και τα δύο αντιγραφο-πλακίδια.

τη διαδικασία αποσύνθεσης πρώτα στο M και μετά σε κάθε N εντός του M , βλέπουμε ότι το M είναι k -αντιγραφο-πλακίδιο, όπου $k = mn$. Το ίδιο ισχύει και για το N . Ένα παράδειγμα αυτής της διαδικασίας φαίνεται στο Σχήμα 4.13.

Ορισμός 4.47. Μια πλακόστρωση $\mathcal{T}_1$ προκύπτει από σύνθεση της πλακόστρωσης $\mathcal{T}_2$ εάν κάθε πλακίδιο της $\mathcal{T}_1$ είναι ένωση πλακιδίων της $\mathcal{T}_2$.

Για παράδειγμα, η πλακόστρωση με τετράγωνα είναι σύνθεση του εαυτού της, υπό την έννοια ότι μπορούμε να πάρουμε ενώσεις από τέσσερα πλακίδια για να δημιουργήσουμε ξανά την ίδια πλακόστρωση, αλλά με μεγαλύτερα πλακίδια. Δίνουμε ιδιαίτερη ονομασία στις πλακοστρώσεις που είναι συνθέσεις του εαυτού τους. Δύο

πλακοστρώσεις θεωρούνται ισοδύναμες αν η μία είναι σμίκρυνση ή μεγέθυνση της άλλης.

Ορισμός 4.48. Μια πλακόστρωση που είναι σύνθεση μιας ισοδύναμης πλακόστρωσης ονομάζεται πλακόστρωση ομοιότητας.

Κάθε φορά που έχουμε πλακόστρωση ομοιότητας, με σύνθεση πλακιδίων, προκύπτει μια μεγεθυμένη πλακόστρωση. Αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί απεριορίστα. Έτσι, η πλακόστρωση ομοιότητας περιλαμβάνει αριθμήσιμο πλήθος ισοδύναμων πλακοστρώσεων, μία για κάθε επίπεδο σύνθεσης.

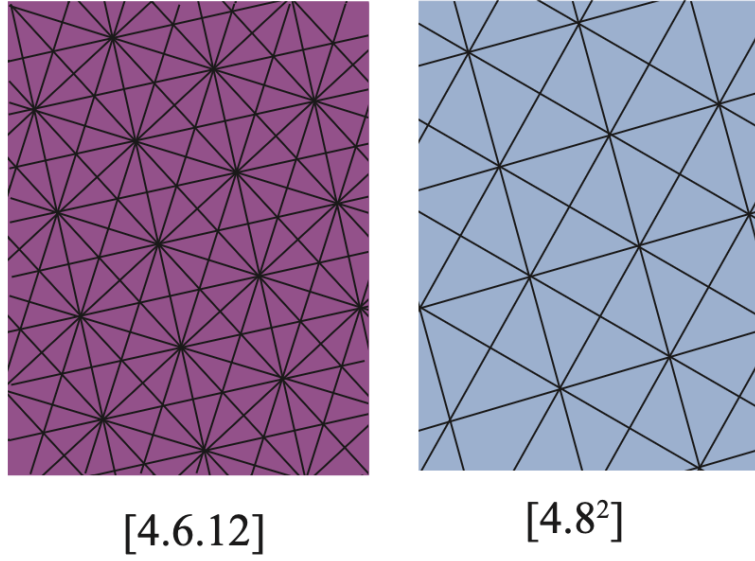


Σχήμα 4.14: Σύνθεση τετραγώνων δημιουργεί ξανά την τετραγωνική πλακόστρωση, αλλιά μεγεθυμένη.

Το βλέπουμε αυτό εύκολα στην περίπτωση της πλακόστρωσης με τετράγωνα, όπου συνθέτουμε τέσσερα τετράγωνα για να προκύψει μια νέα πλακόστρωση με τετράγωνα μεγαλύτερου μεγέθους, μεγεθυμένη κατά παράγοντα δύο. Επαναλαμβάνοντας, προκύπτει πλακόστρωση με πλακίδια μεγεθυμένα κατά παράγοντα τέσσερα, όπως στο Σχήμα 4.14. Η διαδικασία μπορεί να συνεχιστεί επ' άπειρον. Άλλες πλακοστρώσεις ομοιότητας περιλαμβάνουν την κανονική πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα και τις πλακοστρώσεις Laves [4.6.12] και [4.8²] στο Σχήμα 4.15.

Λήμμα 4.17. Μια πλακόστρωση αντικατάστασης $\mathcal{T}$ είναι πλακόστρωση ομοιότητας.

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε ότι η $\mathcal{T}$ είναι πλακόστρωση ομοιότητας, πρέπει να δείξουμε ότι μπορούμε να διαμερίσουμε τα πλακίδια της $\mathcal{T}$ σε σύνολα από k πλακίδια, έτσι ώστε η ένωση κάθε συνόλου να είναι μια μεγεθυμένη εκδοχή του πρωτοπλακιδίου, και η προκύπτουσα πλακόστρωση, παρόλο που είναι μεγαλύτερη, να είναι ισοδύναμη με την αρχική. Όμως, όπως έχουμε δει, μια πλακόστρωση αντικατάστασης $\mathcal{T}$ περιέχει ένα άπειρο σύνολο από μπαλώματα $\{\mathcal{A}_i\}$, όπου το καθένα περικλύει το προηγούμενο. Για οποιοδήποτε δεδομένο πλακίδιο T στην $\mathcal{T}$, μπορούμε να επιλέξουμε ένα μπάλωμα $\mathcal{A}_i$ αρκετά μεγάλο ώστε να το περιέχει. Τότε το $\mathcal{A}_{i+1}$ θα περιέχει το $\mathcal{A}_i$ και συνεπώς το T . Από τον ορισμό του $\mathcal{A}_{i+1}$, μπορεί να διαμεριστεί σε σύνολα από k πλακίδια τα οποία συντίθενται σε μεγαλύτερα αντίγραφα που καλύπτουν όλο το $\mathcal{A}_{i+1}$. Ένα από αυτά τα σύνολα περιέχει το T . Για όλα τα επόμενα



Σχήμα 4.15: 2 από τις πλακοστρώσεις Laves

μπαλώματα, τα σύνολα των k πλακιδίων δεν αλλάζουν. Έτσι μπορούμε να προσδιορίσουμε ποιο σύνολο από k πλακίδια περιέχει κάθε δοσμένο πλακίδιο T στην $\mathcal{T}$ και συνεπώς η $\mathcal{T}$ είναι πλακόστρωση ομοιότητας. $\square$

Δεδομένης μιας πλακόστρωσης αντικατάστασης, μπορούμε να δουλέψουμε προς τα πίσω, να συνθέσουμε τα πλακίδια σε μεγαλύτερα πλακίδια και στη συνέχεια να τα συρρικνώσουμε, ώστε να επανέλθουν στο αρχικό τους μέγεθος. Επειδή ξεκινάμε με πλακόστρωση του επιπέδου, η διαδικασία αυτή δεν σταματά ποτέ. Αν για μια δοσμένη πλακόστρωση υπάρχει μόνο ένας τρόπος να συνθέσουμε τα πλακίδια ώστε να προκύψει ισοδύναμη πλακόστρωση, τότε αυτό περιορίζει δραστικά την πλακόστρωση.

Θεώρημα 4.10. Έστω $\mathcal{T}$ μια μονοεδρική πλακόστρωση αντικατάστασης. Αν η διαδικασία σύνθεσης είναι μοναδική, τότε η $\mathcal{T}$ δεν μπορεί να έχει μεταφορική συμμετρία.

Βλέπουμε ότι αυτό ισχύει στην περίπτωση της πλακόστρωσης καρέκλας στο Σχήμα 4.10. Δεν υπάρχουν μεταφορικές συμμετρίες σε αυτήν την πλακόστρωση.

Απόδειξη. Έστω ότι υπάρχει μια μεταφορική συμμετρία F με μήκος μεταφοράς d . Έστω u η εσωτερική ακτίνα του μοναδικού πρωτοπλακιδίου.

Μπορούμε να πάρουμε τη μοναδική διαμέριση της $\mathcal{T}$ σε σύνολα από k πλακίδια. Οι ενώσεις τους μας δίνουν ισοδύναμη πλακόστρωση, με κάθε πλακίδιο μεγεθυμένο κατά $\sqrt{k}$. Η προκύπτουσα πλακόστρωση πρέπει να έχει την ίδια μεταφορική συμμετρία, διότι διαφορετικά, εφαρμόζοντας το F στην αποσύνθεση, θα παραγόταν νέα αποσύνθεση, πράγμα αντιφατικό με την υπόθεση της μοναδικότητας. Επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία σύνθεσης n φορές μέχρι το $k^{n/2}u > d$. Τότε κάθε πλακίδιο στην προκύπτουσα πλακόστρωση περιέχει δίσκο ακτίνας μεγαλύτερης από d . Άρα η

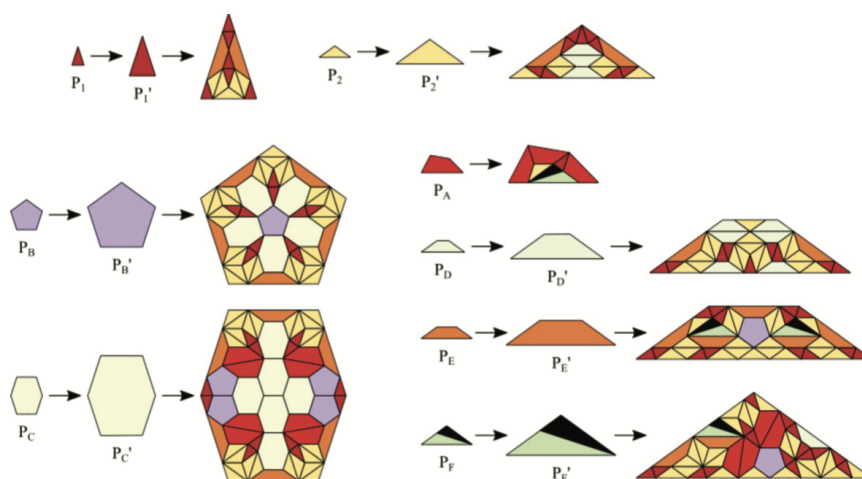
μεταφορά F δεν μπορεί να μετακινήσει πλακίδιο εκτός του εαυτού του, και συνεπώς δεν μπορεί να είναι συμμετρία της πλακόστρωσης, άτοπο. $\square$

Σημειώνουμε ότι η υπόθεση της μοναδικότητας της αποσύνθεσης είναι κρίσιμη. Για παράδειγμα, η τετραγωνική πλακόστρωση είναι πλακόστρωση αντικατάστασης αλλά έχει προφανώς μεταφορικές συμμετρίες. Η μοναδικότητα αποτυγχάνει γιατί μπορούμε να επιλέξουμε οποιαδήποτε τέσσερα τετράγωνα που μοιράζονται μια κορυφή και να αρχίσουμε την αποσύνθεση με αυτό το σύνολο.

Από την άλλη πλευρά, για τις περισσότερες πλακοστρώσεις αντικατάστασης, η μοναδικότητα αποσύνθεσης είναι εύκολο να αποδειχθεί. Πρέπει απλώς να δείξουμε ότι για ένα δεδομένο πλακίδιο, μπορεί να εμφανιστεί μόνο σε μία συλλογή k πλακιδίων που συντίθενται σε μεγαλύτερο πλακίδιο.

Για παράδειγμα, αν πάρουμε το κεντρικό γκρι πλακίδιο που εφάπτεται της αρχής των αξόνων στην πλακόστρωση καρέκλας στο Σχήμα 4.10, βλέπουμε ότι μπορεί να εμφανιστεί ως κάτω αριστερή γωνία ενός μεγαλύτερου πλακιδίου καρέκλας στη σύνθεση. Και δεν υπάρχει τρόπος να επιλέξουμε άλλα τρία γειτονικά πλακίδια που η ένωση τους να δίνει διογκωμένη καρέκλα. Επομένως, η αποσύνθεση της πλακόστρωσης είναι μοναδική και άρα η πλακόστρωση δεν μπορεί να έχει μεταφορές.

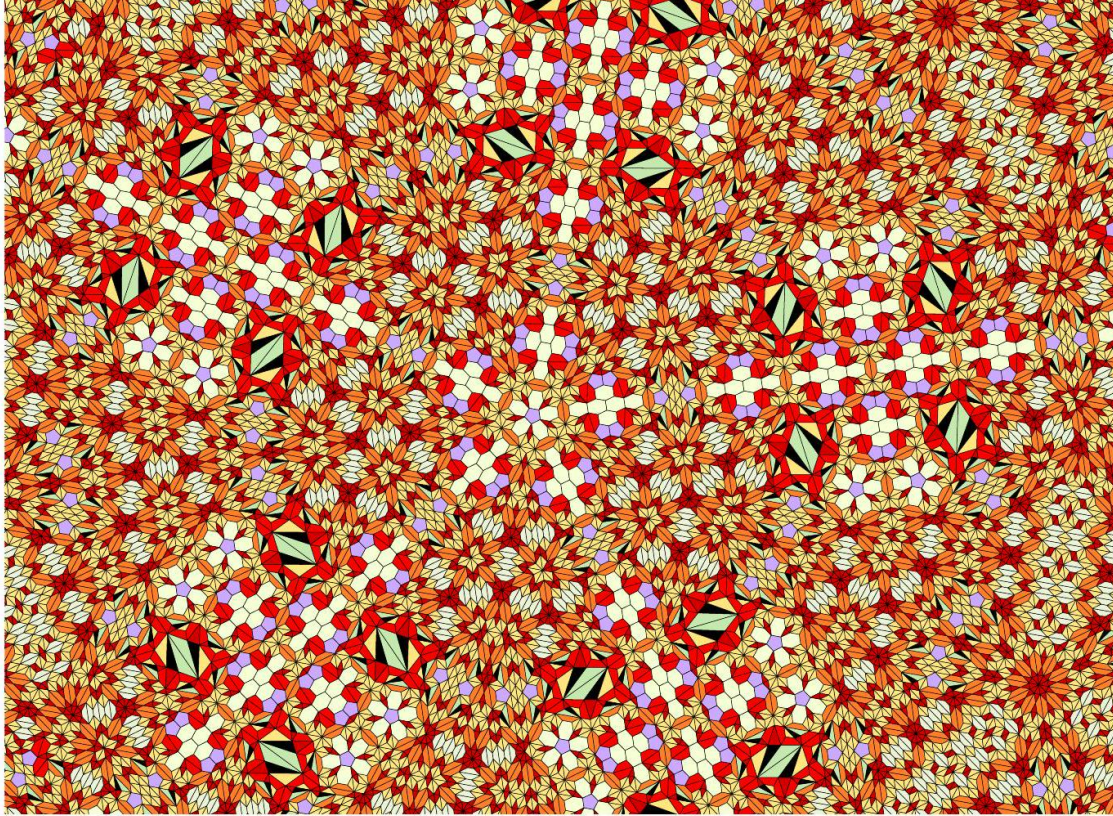
Μπορούμε επίσης να ορίσουμε πλακοστρώσεις αντικατάστασης που δημιουργούνται από πρωτοσύνολα με περισσότερα από ένα πρωτοπλακίδια. Σε αυτή την περίπτωση, υποθέτουμε ότι κάθε πρωτοπλακίδιο μπορεί να αποσυντεθεί σε συλλογή από πλακίδια ταυτόσημα με αντίγραφα των πρωτοπλακιδίων, όλα σμικρυσμένα με τον ίδιο λόγο. Και πάλι, μπορεί να χρησιμοποιηθεί η ίδια απόδειξη για να δείξουμε ότι αν η διαδικασία σύνθεσης είναι μοναδική, η προκύπτουσα πλακόστρωση είναι μη μεταφορική.



Σχήμα 4.16: Κανόνες αντικατάστασης για πολλαπλά πλακίδια.

Στο Σχήμα 4.16 βλέπουμε ένα πρωτοσύνολο από εννέα πλακίδια και τους αντίστοιχους κανόνες αντικατάστασης. Δημιουργούν την περίτεχνη πλακόστρωση στο

Σχήμα 4.17, από τον Stefan Pautze[114]. Όπως και η πλακόστρωση pinwheel των Conway-Radin, αυτή η πλακόστρωση έχει πυκνό προσανατολισμό. Έχει επίσης ομάδα συμμετρίας D_5 .²



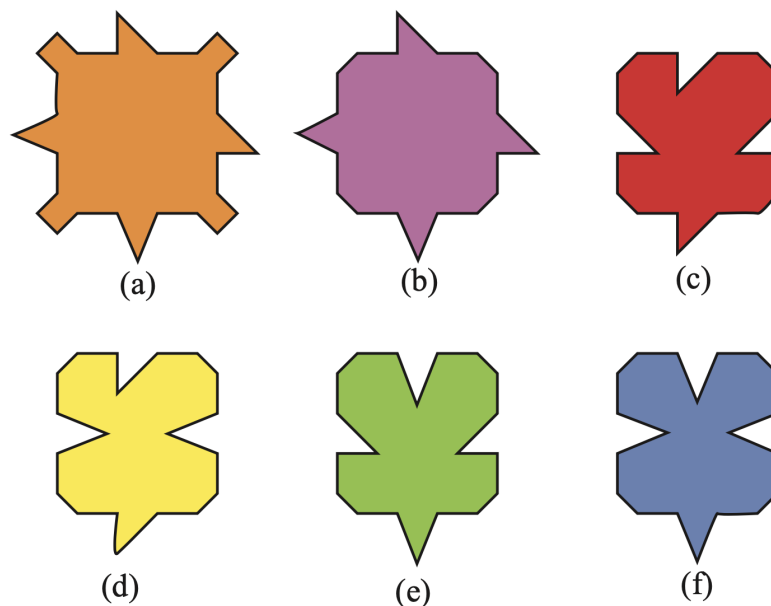
Σχήμα 4.17: Πλακόστρωση αντικατάστασης με ομάδα συμμετρίας D_5 και πυκνό σύνολο προσανατολισμών.

Ένα πανομοιότυπο επιχείρημα με αυτό της απόδειξης του Θεωρήματος 4.10 δείχνει ότι μια τέτοια πλακόστρωση αντικατάστασης με μοναδικό τρόπο σύνθεσης των πλακιδίων σε μεγαλύτερα, είναι και η ίδια μη μεταφορική. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα σε επόμενη Ενότητα για να δείξουμε απεριοδικότητα πρωτοσύνολου.

4.3 Το Απεριοδικό Πρωτοσύνολο του Robinson

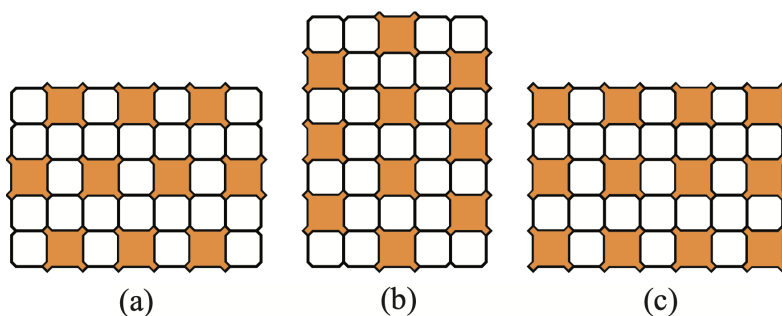
Το 1971, ο Raphael Robinson πρότεινε το σύνολο των έξι τροποποιημένων τετραγώνων στο Σχήμα 4.18 και έδειξε ότι δημιουργούν ένα απεριοδικό πρωτοσύνολο [121]. Συνεπώς, δημιουργούν πλακοστρώσεις του επιπέδου, αλλά κάθε τέτοια πλακόστρωση είναι μη μεταφορική.

²Παραπέμπουμε στην ιστοσελίδα Tilings Encyclopedia στο tilings.math.uni-bielefeld.de/, όπου εμφανίζονται αυτή και πολλές άλλες όμορφες παραστάσεις.



Σχήμα 4.18: Απεριοδικό πρωτοσύνολο του Robinson.

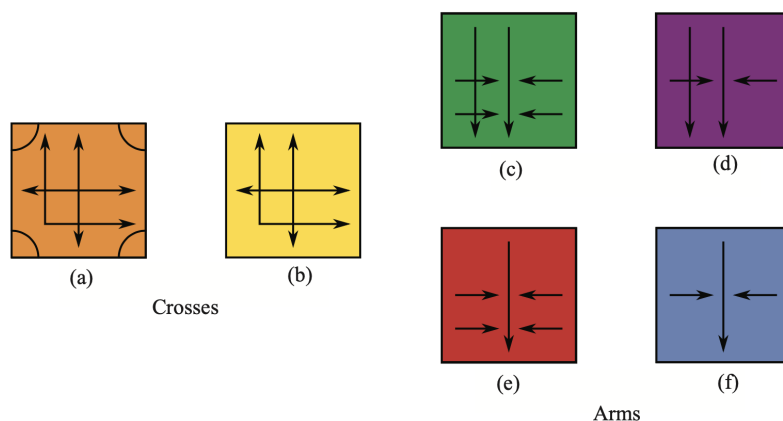
Παρατηρούμε ότι υπάρχουν δύο είδη τροποποιήσεων στα τετράγωνα. Οι τροποποιήσεις πλευρών και οι τροποποιήσεις γωνιών. Για τις πλευρές, υπάρχουν συμμετρικές προεξοχές (ισοσκελές τρίγωνο) και αντίστοιχες εσοχές, καθώς και ασύμμετρες προεξοχές (ορθογώνιο τρίγωνο) και αντίστοιχες εσοχές. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι ο συνολικός αριθμός των προεξοχών κάθε τύπου στο πρωτοσύνολο, που είναι έξι ισοσκελή και έξι ορθογώνια τρίγωνα, είναι ίσος με τον αριθμό των αντιστοιχών εσοχών.



Σχήμα 4.19: Υπάρχουν τρεις δυνατές διατάξεις των πλακιδίων με και χωρίς γωνίες.

Επιπλέον, έχουμε και τροποποιήσεις στις γωνίες. Σε πέντε από τα πρωτοπλακίδια, ισοσκελή ορθογώνια τρίγωνα έχουν αφαιρεθεί από κάθε γωνία. Αλλά στο πρώτο πλακίδιο, έχουν προστεθεί τρία από αυτά τα τρίγωνα σε κάθε γωνία ώστε να σχηματιστεί αυτή η προέκταση της γωνίας που μοιάζει με τετράγωνο. Λέμε ότι ένα πλακίδιο χωρίς γωνίες είναι αυτό του οποίου και οι τέσσερις γωνίες έχουν αφαιρεθεί, ενώ το πλακίδιο (a) ονομάζεται πλακίδιο με γωνίες. Έτσι, σε κάθε κορυφή της αντιστοιχίας τετραγωνικής πλακόστρωσης, πρέπει να συναντώνται τρία πλακίδια χωρίς

γωνίες και ένα με γωνίες. Από αυτό προκύπτει άμεσα ότι υπάρχουν τρεις δυνατότητες για το πώς εμφανίζονται τα πλακίδια με γωνίες σε μία πλακόστρωση: είτε εμφανίζονται εναλλάξ ανά γραμμή, είτε εναλλάξ ανά στήλη, είτε και τα δύο ταυτόχρονα, δηλαδή εναλλάξ ανά γραμμή και ανά στήλη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.19. Στην πραγματικότητα, θα δούμε σύντομα ότι μόνο η τρίτη περίπτωση συμβαίνει.



Σχήμα 4.20: Αναπαράσταση των πλακιδίων με βέλη και τεταρτοκύκλια.

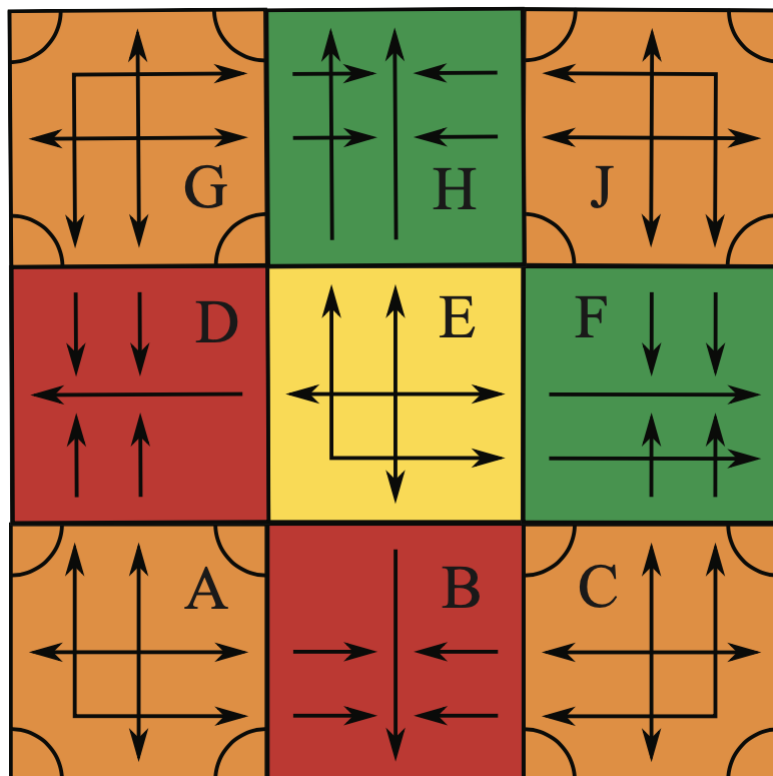
Για λόγους ευκολίας, αναπαριστούμε κάθε πλακίδιο ως τετράγωνο και τις τροποποιήσεις τους με σύμβολα πάνω στα πλακίδια, όπως στο Σχήμα 4.20. Οι γωνίες ενός πλακιδίου με γωνίες αναπαριστώνται με τεταρτοκύκλια. Έτσι, σε μια πλακόστρωση με αυτά τα πλακίδια, κάθε κορυφή πρέπει να έχει ακριβώς ένα τεταρτοκύκλιο.

Οι αιχμές των βελών αντιστοιχούν στις προεξοχές: μία αιχμή αντιστοιχεί σε συμμετρική προεξοχή, ενώ ένα ζεύγος αιχμών αντιστοιχεί σε ασύμμετρη προεξοχή, με τη μία αιχμή στο κέντρο της πλευράς και τη δεύτερη στην μεριά που η προεξοχή έχει την ορθή γωνία. Ομοίως, οι ουρές των βελών αντιστοιχούν στις αντίστοιχες εσοχές των προεξοχών. Για να εφαρμόζονται τα πλακίδια μεταξύ τους, αυτό σημαίνει ότι κάθε αιχμή σε μία πλευρά ενός πλακιδίου πρέπει να αντιστοιχεί σε ουρά βέλους στην αντίστοιχη πλευρά του γειτονικού πλακιδίου. Ονομάζουμε τα πλακίδια τύπου (a) ή (b) σταυρούς και τα πλακίδια τύπου (c), (d), (e) ή (f) βραχίονες.

Ένας σταυρός λέγεται ότι κοιτάζει Βορειοανατολικά (BA) αν τα διπλά βέλη του δείχνουν πάνω δεξιά, όπως φαίνεται στο σχήμα. Εναλλακτικά, μπορούν να κοιτούν προς τις κατευθύνσεις ΒΔ, ΝΑ ή ΝΔ. Οι βραχίονες κοιτούν προς μία από τις Βόρεια, Νότια, Ανατολικά ή Δυτικά, και αυτό προσδιορίζεται από τα βέλη που δεν δείχνουν προς την κεντρική γραμμή του πλακιδίου.

Λέμε ότι δύο σταυροί σε μία γραμμή ή στήλη είναι αντικριστοί αν διαχωρίζονται από μία ακολουθία βραχιόνων και τα διπλά βέλη τους στην εν λόγω γραμμή ή στήλη δείχνουν προς το άλλο πλακίδιο. Αντιθέτως, αν τα διπλά βέλη δείχνουν σε αντίθετες κατευθύνσεις, λέμε ότι είναι πλάτη με πλάτη. Σημειώνουμε ότι δύο σταυροί διαχωρισμένοι από βραχίονες σε γραμμή ή στήλη πρέπει είτε είναι αντικριστοί είτε να είναι πλάτη με πλάτη, καθώς ο αριθμός των βελών στη σειρά των μεσαίων πλακιδίων

διατηρείται.



Σχήμα 4.21: Ένα μπλοκ 3×3 .

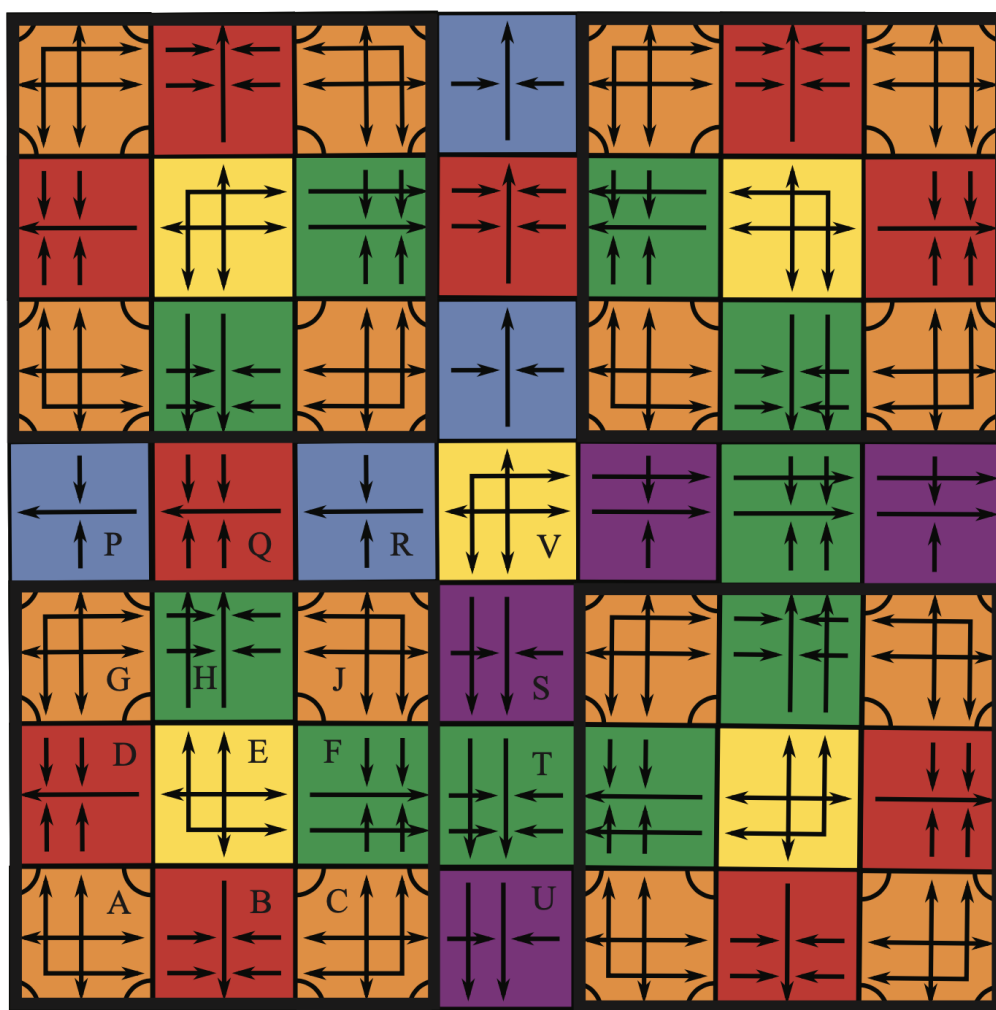
Σε κάθε μία από τις τρεις διατάξεις του Σχήματος 4.19, υπάρχει μια γραμμή ή στήλη με εναλλάξ πλακίδια με και χωρίς γωνίες. Έστω λοιπόν ότι πρόκειται για γραμμή και ότι ένα πλακίδιο με γωνίες κοιτάζει βορειοανατολικά. Τότε, το ανατολικό του πλακίδιο πρέπει να είναι βραχίονας τύπου (c), (d) ή (e). Αλλά το επόμενο ανατολικό πλακίδιο πρέπει πάλι να έχει γωνίες, άρα είναι σταυρός που κοιτάζει βορειοδυτικά. Το ενδιάμεσο πλακίδιο πρέπει να είναι τύπου (c) ή (e) και να κοιτάζει νότια. Έτσι, αυτό το σύνολο των τριών πλακιδίων μοιάζει με την κατώτερη σειρά που φέρει την ετικέτα ABC στο Σχήμα 4.21, με την δυνατότητα το πλακίδιο τύπου (e) στο σημείο B να αντικατασταθεί από πλακίδιο τύπου (c) ή την ανάκλασή του.

Τα πλακίδια D βόρεια του A και F βόρεια του C πρέπει και τα δύο να είναι βραχίονες, καθώς πρέπει να έχουν διπλές αιχμές στραμμένες προς τα μέσα, εκεί όπου συγκολλούνται με τα A και C. Επιπλέον, το D δείχνει προς τα δυτικά και το F προς τα ανατολικά. Αυτό αναγκάζει το E να έχει αιχμές στραμμένες προς τα έξω στις δυτικές και ανατολικές του πλευρές, πράγμα που σημαίνει ότι είναι σταυρός, και συγκεκριμένα σταυρός χωρίς γωνία, αφού οι δύο κάτω γωνίες του βρίσκονται σε κορυφές που ήδη έχουν τεταρτοκύκλια. Άρα πρέπει να είναι Τύπου (b). Αλλά τότε η βόρεια πλευρά του E έχει μία ή δύο αιχμές στραμμένες προς βορρά, αναγκάζοντας το πλακίδιο H στα βόρεια του να είναι βραχίονας.

Αφού οι βορειοδυτικές και βορειοανατολικές κορυφές του E συμπίπτουν τώρα

με τρία πλακίδια χωρίς γωνία, τα G και J πρέπει να είναι και τα δύο πλακίδια με γωνία. Συγκεκριμένα, αυτό συνεπάγεται ότι η μόνη πιθανή από τις τρεις διατάξεις που παρουσιάσαμε στο Σχήμα 4.19 είναι αυτή που εμφανίζεται στο (c). Οι άλλες δύο δεν μπορούν να συμβούν.

Επιπλέον, η μόνη δυνατή διάταξη για αυτό το μπάλωμα 3×3 είναι αυτή που απεικονίζεται στο Σχήμα 4.21, εκτός από τον κεντρικό σταυρό E που μπορεί να δείχνει προς οποιαδήποτε από τις τέσσερις κατευθύνσεις. Η επιλογή της κατεύθυνσης καθορίζει τους τέσσερις γειτονικούς βραχίονες. Άρα ένα τέτοιο μπλοκ 3×3 είναι είτε αυτό του Σχήματος 4.21 είτε μία από τις τρεις δυνατές στροφές του.



Σχήμα 4.22: Μια επέκταση ενός μπλοκ 3×3 οδηγεί σε μπλοκ 7×7 .

Τώρα θέτουμε το ερώτημα πώς μπορούμε να κατασκευάσουμε μπλοκ 7×7 . Έστω ότι ξεκινάμε με ένα μπλοκ 3×3 με τον κεντρικό σταυρό να δείχνει βορειοανατολικά, όπως στο κάτω αριστερό μέρος του Σχήματος 4.22. Τότε τα τρία πλακίδια P, Q και R πρέπει να είναι βραχίονες, αφού πρέπει να έχουν αιχμές στραμμένες προς τα μέσα, και πρέπει όλες να έχουν είτε διπλές αιχμές προς τα δυτικά είτε μονές αιχμές προς τα δυτικά (παρουσιάζουμε μονές αιχμές).

Ομοίως, τα τρία πλακίδια S, T και U στα ανατολικά του 3×3 μπλοκ μας πρέπει επίσης να είναι βραχίονες και να έχουν είτε διπλές είτε μονές αιχμές στραμμένες προς νότο (παρουσιάζουμε διπλές αιχμές). Όποια από αυτές τις περιπτώσεις κι αν ισχύει, το πλακίδιο V πρέπει να είναι σταυρός, αφού τα R και S δείχνουν μακριά του. Επιπλέον, πρέπει να είναι σταυρός χωρίς γωνία. Και η επιλογή του αν τα σύνολα των τριών αυτών πλακιδίων έχουν διπλές ή μονές αιχμές καθορίζει την κατεύθυνση του σταυρού.

Με βάση αυτές τις πληροφορίες, ο κεντρικός σταυρός καθορίζει τα σύνολα τριών βραχιόνων που δείχνουν προς τις κατευθύνσεις Βορρά και Ανατολή. Αυτοί καθορίζουν με τη σειρά τους τα σύνολα 3×3 μπλοκ σε κάθε τεταρτημόριο του μπλοκ 7×7 .

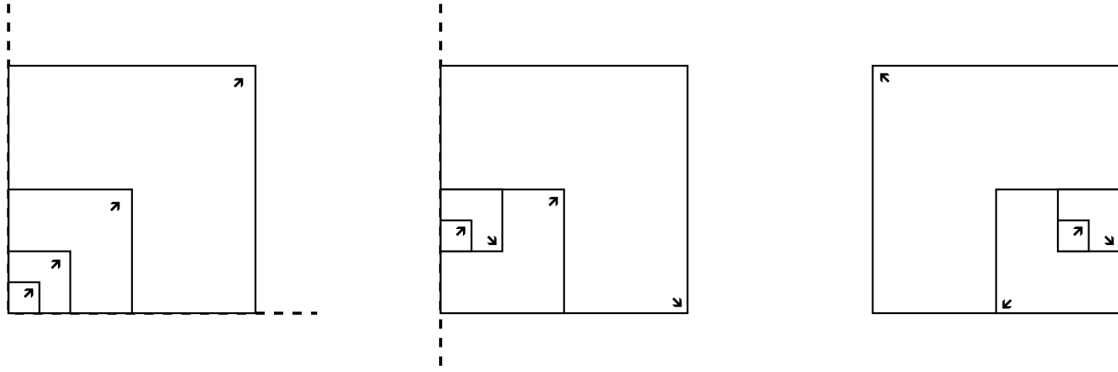
Το τελικό αποτέλεσμα είναι ότι ολόκληρο το μπλοκ 7×7 καθορίζεται από τον κεντρικό σταυρό και την κατεύθυνσή του: BA, BD, NA ή ND. Οι κεντρικοί σταυροί κάθε ενός από τα 3×3 μπλοκ που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή του 7×7 μπλοκ είναι αντικριστοί και δείχνουν προς την κατεύθυνση του κεντρικού σταυρός. Άρα, και πάλι, οι επιλογές για αυτό το μπλοκ 7×7 είναι αυτό που φαίνεται στο Σχήμα 4.22 ή μία από τις τρεις δυνατές στροφές του.

Μπορούμε κατόπιν να επεκτείνουμε το μπλοκ 7×7 σε μπλοκ 15×15 , σημειώνοντας ότι η επέκταση γίνεται προς την κατεύθυνση που δείχνει ο κεντρικός σταυρός του 7×7 μπλοκ. Άρα, αν το 7×7 μπλοκ δείχνει προς NA, η επέκταση προς 15×15 γίνεται προς αυτή την κατεύθυνση, και το αρχικό 7×7 μπλοκ εμφανίζεται στο BD τεταρτημόριο του 15×15 μπλοκ. Και πάλι, θα υπάρχουν τέσσερις επιλογές για την κατεύθυνση του κεντρικού σταυρού στο 15×15 μπλοκ. Οι κεντρικοί σταυροί κάθε ενός από τα 7×7 μπλοκ που χρησιμοποιούνται στην κατασκευή του 15×15 μπλοκ είναι αντικριστοί.

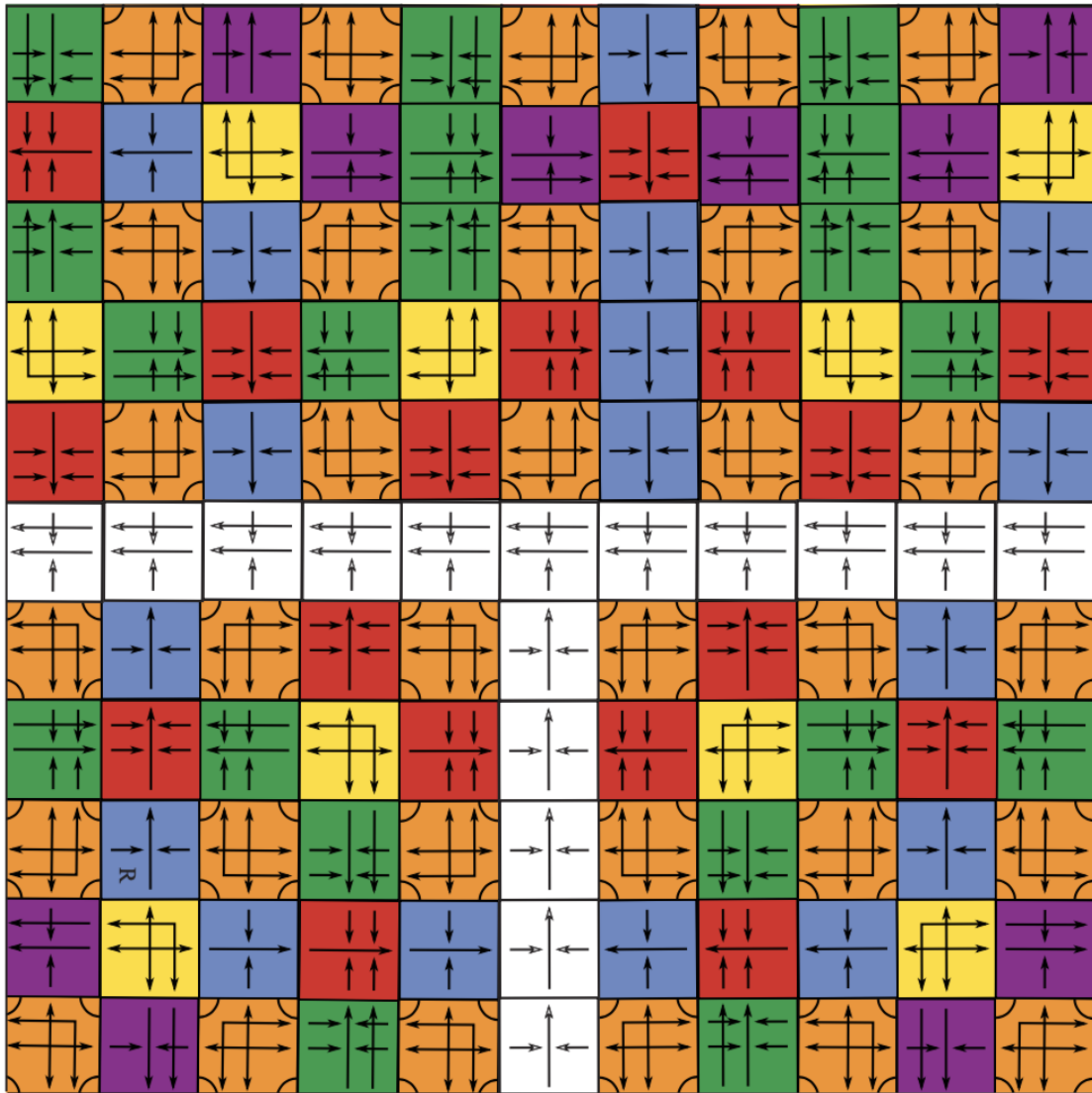
Συνεχίζοντας με αυτόν τον τρόπο, μπορούμε να κατασκευάσουμε όλο και μεγαλύτερα μπλοκ μεγέθους $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$. Αν επιλέξουμε ο σταυρός του κέντρου κάθε τέτοιου μπλοκ να δείχνει προς την ίδια κατεύθυνση, BA, BD, NA, ND, τότε δημιουργείται μια πλακόστρωση του ενός τετάρτου του επιπέδου, όπως στο Σχήμα 4.23 a. Αν εναλλάσσουμε μεταξύ BA και BD (ή οποιουδήποτε ζεύγους μη αντιθέτων κατευθύνσεων) άπειρες φορές, προκύπτει πλακόστρωση ενός ημιεπιπέδου όπως στο Σχήμα 4.23 b. Και αν εναλλάσσουμε άπειρες φορές μεταξύ όλων των κατευθύνσεων, προκύπτει πλακόστρωση ολόκληρου του επιπέδου όπως στο Σχήμα 4.23 c.

Όταν δεν προκύπτει πλακόστρωση ολόκληρου του επιπέδου, μπορούμε παρ' όλα αυτά να συγκολλήσουμε πλακοστρώσεις τεταρτημορίων ή ημιεπιπέδων για να κατασκευάσουμε μια πλακόστρωση ολόκληρου του επιπέδου. Ενσωματώνουμε γραμμές ασυνέχειας, όπως φαίνεται στα λευκά πλακίδια του Σχήματος 4.24, τα οποία αποτελούνται από πλακίδια τύπου (d) και (f).

Οι πλακοστρώσεις που περιγράψαμε είναι όλες οι δυνατές πλακοστρώσεις με τα πλακίδια του Robinson. Η ακολουθία κατευθύνσεων $x_1, x_2, \dots$ για τα κεντρικά



Σχήμα 4.23: Η επιλογή της ακολουθίας των κατευθύνσεων για τα κεντρικά πλακίδια των μπλοκ $(2^n - 1) \times (2^n - 1)$ καθορίζει αν η τελική πλακόστρωση καλύπτει ένα τέταρτο επιπέδου, ένα ημιεπίπεδο ή ολόκληρο το επίπεδο.



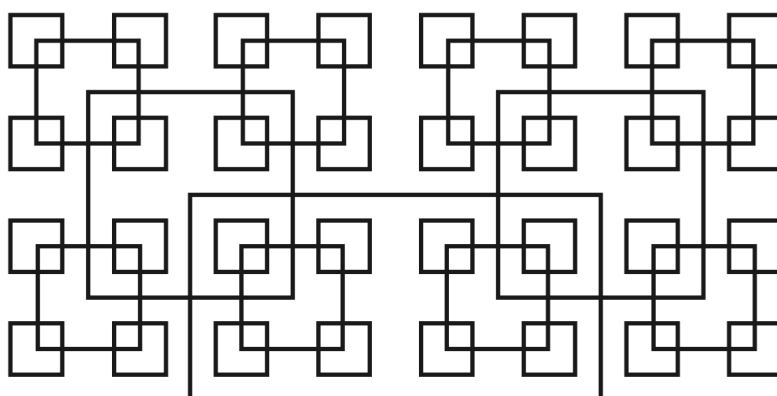
Σχήμα 4.24: Συγκόλληση πλακοστρώσεων τεταρτημορίων και ημιεπιπέδων ώστε να προκύψει πλακόστρωση ολόκληρου του επιπέδου.

πλακίδια των ολοένα και μεγαλύτερων μπλοκ καθορίζει την πλακόστρωση, όπου κάθε x_i είναι μία εκ των BA, BΔ, NA και NΔ.

Θεώρημα 4.11. *Το σύνολο των έξι πρωτοπλακιδίων του Robinson αποτελεί απεριοδικό πρωτοσύνολο.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι υπάρχει πλακόστρωση που δημιουργείται από αυτά τα πρωτοπλακίδια και παρουσιάζει μεταφορική συμμετρία.

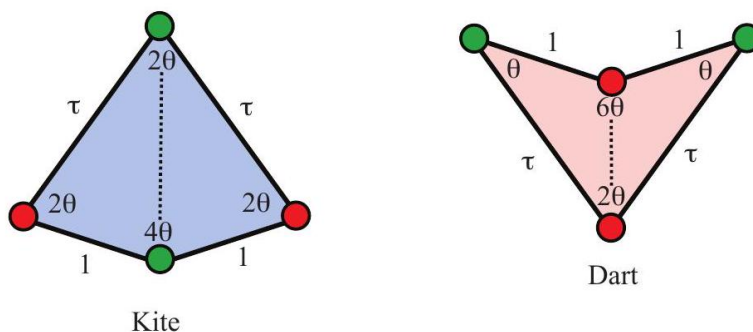
Μπορούμε να σχεδιάσουμε μια εικόνα όπως στο Σχήμα 4.25, όπου κάθε τετράγωνο έχει σταυροειδές πλακίδιο στις τέσσερις γωνίες του και βραχίονες στις πλευρές. Κάθε μικρότερο τετράγωνο αντιστοιχεί σε μπλοκ 7×7 , με κάθε γωνία να αποτελεί το κέντρο ενός από τα 3×3 μπλοκ που συναποτελούν το 7×7 μπλοκ. Τα μεγαλύτερα τετράγωνα αντιστοιχούν σε μεγαλύτερα μπλοκ. Εφόσον τα μπλοκ γίνονται αυθαίρετα μεγάλα, τα τετράγωνα γίνονται επίσης αυθαίρετα μεγάλα. Και επειδή κάθε μεταφορά πρέπει να μετακινεί κάθε τετράγωνο ενός δεδομένου μεγέθους σε άλλο τετράγωνο ίδιου μεγέθους, κάθε μεταφορά πρέπει να είναι αυθαίρετα μεγάλη, πράγμα που έρχεται σε αντίφαση με το γεγονός ότι μια μεταφορά μπορεί να μετακινήσει σημεία μόνο κατά πεπερασμένη απόσταση. $\square$



Σχήμα 4.25: Τετράγωνα που δημιουργούνται από πλακόστρωση με αντικριστά σταυροειδή πλακίδια στις γωνίες και βραχίονες κατά μήκος των πλευρών.

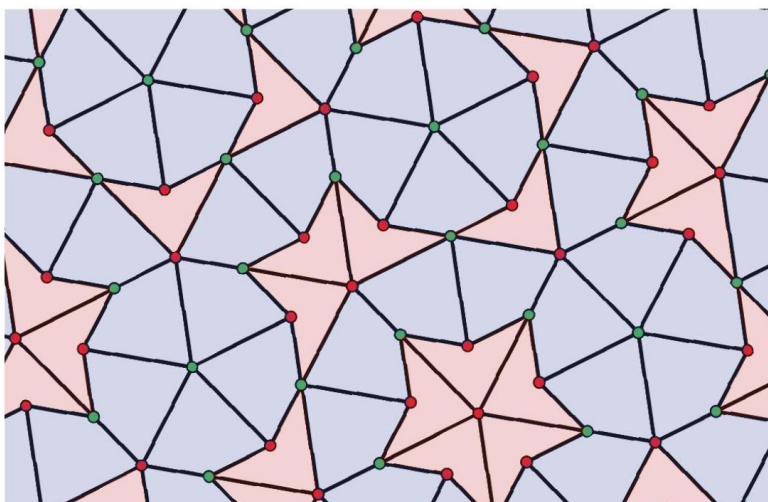
4.4 Το Απεριοδικό Πρωτοσύνολο του Penrose

Το 1973 και 1974, ο Sir Roger Penrose από το Πανεπιστήμιο της Οξφόρδης ανακάλυψε τρία διαφορετικά απεριοδικά πρωτοσύνολα, ανάμεσά τους δύο που περιέχουν μόνο δύο πρωτοπλακίδια. Σε αυτή την ενότητα εξετάζουμε αυτά τα δύο πρωτοσύνολα. Το πρώτο ονομάζεται «χαρταετός και βέλος» και φαίνεται στο Σχήμα 4.26. Κάθε πρωτοπλακίδιο έχει δύο πλευρές μήκους 1 και δύο πλευρές μήκους $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, που είναι η χρυσή τομή. Η γωνία θ ισούται με $\pi/5$.



Σχήμα 4.26: Τα πρωτοπλακίδια «χαρταετός και βέλος».

Ο κανόνας μας για τη συγκόλληση των πλακιδίων κατά μήκος μιας πλευράς είναι ότι τα μήκη των πλευρών πρέπει να συμπίπτουν και τα χρώματα των γωνιών που ταυτίζονται να ταιριάζουν. Αυτό ονομάζεται **συνθήκη ταύτισης**.

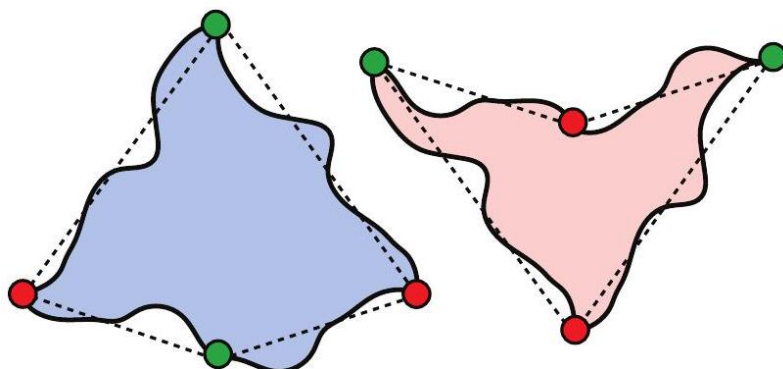


Σχήμα 4.27: Μια πλακόστρωση με χαρταετούς και βέλη.

Στο Σχήμα 4.27 βλέπουμε μια πλακόστρωση με χαρταετούς και βέλη. Αν προτιμούσαμε να μην χρησιμοποιούμε χρωματιστές κορυφές, θα μπορούσαμε εύκολα να επιβάλουμε αυτή τη συγκεκριμένη συνθήκη ταύτισης αντικαθιστώντας κάθε ευθύγραμμη πλευρά στον χαρταετό και το βέλος με κατάλληλη καμπύλη, όπως στο Σχήμα 4.28, επιβάλλοντας έτσι τη συνθήκη ταύτισης απλώς με βάση τα σχήματα των πλακιδίων.

Με τις τροποποιημένες πλευρές έχουμε όμορφες πλακοστρώσεις από αμφίβια, συγκεκριμένα βατράχια και φρύνους, όπως στο Σχήμα 4.29. Ωστόσο, η τροποποίηση των ευθειών πλευρών για να επιβληθούν συνθήκες ταύτισης καθιστά τις πλακοστρώσεις σημαντικά δυσκολότερες στο σχεδιασμό και την ανάλυση. Συνεπώς, θα παραμείνουμε στις χρωματιστές κορυφές.

Θα αναλύσουμε τις πλακοστρώσεις «χαρταετός και βέλος» χρησιμοποιώντας μια μέθοδο του Robinson. Κόβουμε κάθε πρωτοπλακίδιο κατά μήκος της κεντρικής δια-



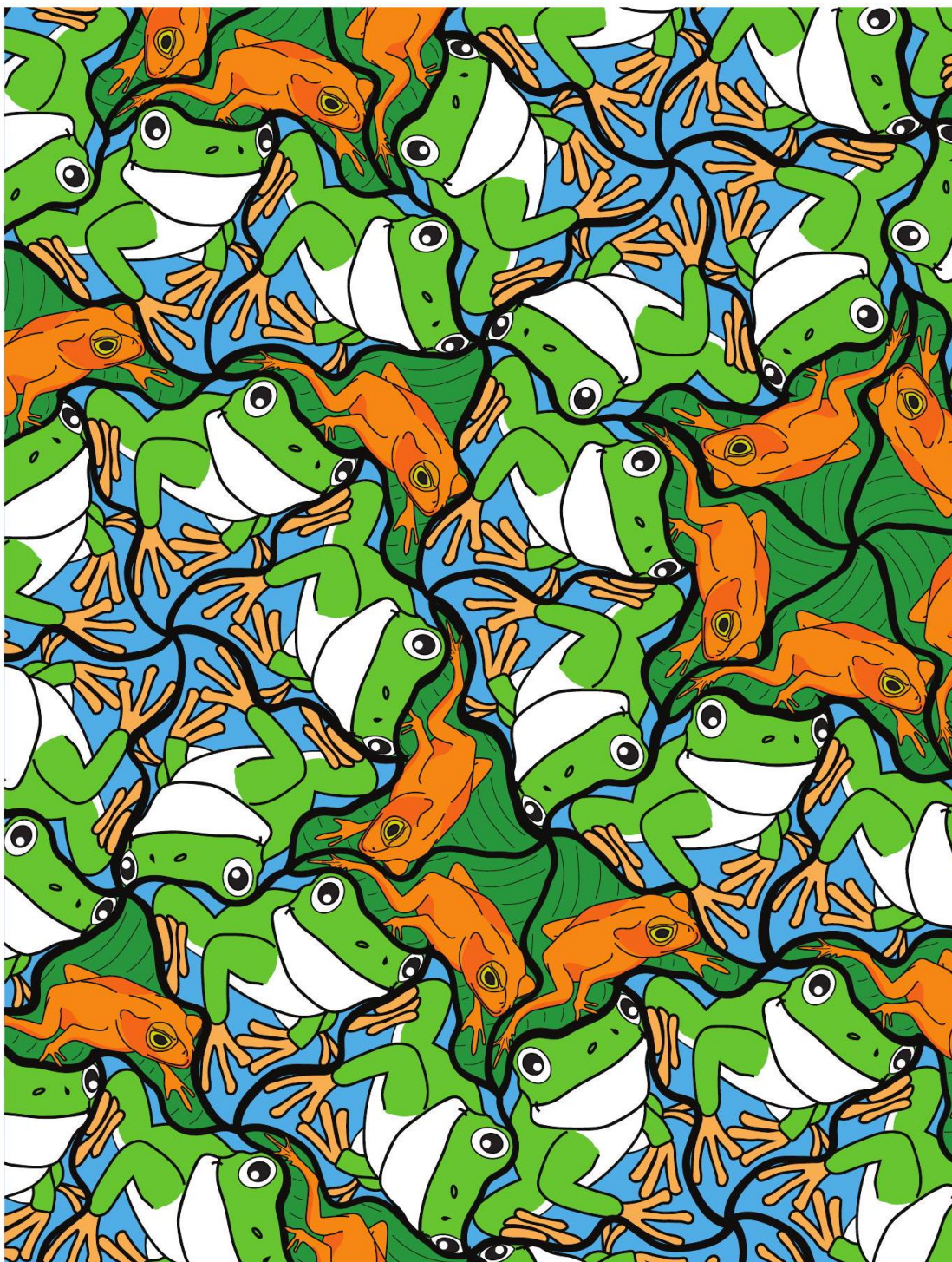
Σχήμα 4.28: Αντικαθιστώντας τις πλευρές με καμπύλες, επιβάλλονται οι συνθήκες ταύτισης.

κεκομμένης γραμμής ώστε να προκύψουν τρίγωνα όπως στο Σχήμα 4.30(α). Στην περίπτωση του χαρταετού, και τα δύο τρίγωνα που προκύπτουν είναι ταυτόσημα με το τρίγωνο L_A , με την ετικέτα όπως δίνεται και το ένα είναι ανάκλαση του άλλου. Στην περίπτωση του βέλους, τα δύο τρίγωνα που προκύπτουν είναι ταυτόσημα με το S_A , ξανά με το ένα να είναι ανάκλαση του άλλου. Επειδή θέλουμε κάθε φορά τα τρίγωνα να επανασυντίθενται σε χαρταετούς και βέλη, ετικετοποιούμε την πλευρά της τομής με ένα βέλος και ζητάμε μόνο δύο πλευρές ίσου μήκους με άκρα ίδιου χρώματος και ταυτόσημη κατεύθυνση βέλους να μπορούν να συγκολληθούν. Τότε κάθε πλακόστρωση με χαρταετούς και βέλη μπορεί να αποσυντεθεί κατά μήκος αυτών των κεντρικών πλευρών ώστε να προκύψει πλακόστρωση με τα δύο τρίγωνα, και κάθε τέτοια πλακόστρωση με την επιπλέον συνθήκη ταύτισης μπορεί να συγκολληθεί εκ νέου σε πλακόστρωση με χαρταετούς και βέλη. Σημειώνουμε ότι αυτή η επιπλέον συνθήκη δεν μπορεί να επιβληθεί μέσω τροποποίησης των πλευρών.

Το πλεονέκτημα χρήσης των δύο τριγώνων ως πρωτοσύνολο είναι ότι από κοινού σχηματίζουν ένα πρωτοσύνολο αντικατάστασης ως εξής. Ξεκινώντας με τα L_A και S_A , δημιουργούμε αντίγραφα ώστε να πάρουμε ένα νέο ζεύγος τριγώνων. Αν συγκολλήσουμε το L_A με το S_A κατά μήκος των πλευρών μήκους 1 που δεν έχουν βέλος, παίρνουμε το L_B , το οποίο είναι όμοιο με το S_A , αλλά με λόγο ομοιότητας τ , όπως στο Σχήμα 4.30(β).

Εδώ χρησιμοποιούμε τις ιδιότητες της χρυσής τομής. Εφόσον $\tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, ικανοποιεί την εξίσωση $\tau^2 - \tau - 1 = 0$. Άρα $\tau^2 = \tau + 1$, πράγμα που μας επιτρέπει να ετικετοποιήσουμε την κάτω πλευρά του L_B με μήκος $\tau + 1$. Σημειώνουμε επίσης ότι τα χρώματα των γωνιών του L_B είναι αντίστροφα από αυτά του S_A . Ως δεύτερο τρίγωνο παίρνουμε το S_B , το οποίο είναι στην πραγματικότητα ταυτόσημο με το L_A , χωρίς να το συγκολλήσουμε με άλλα αντίγραφα.

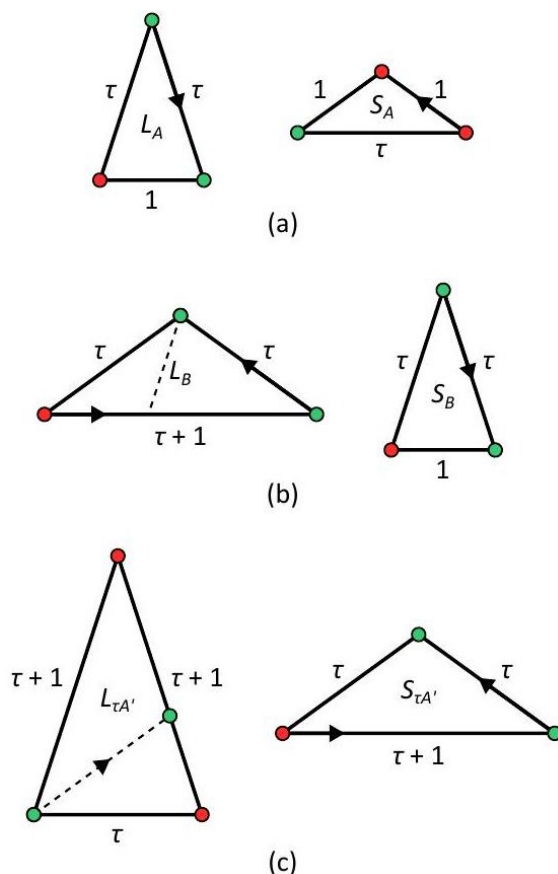
Τώρα επαναλαμβάνουμε τη διαδικασία ώστε να σχηματίσουμε δύο νέα τρίγωνα από τα L_B και S_B . Το πρώτο, σημειωμένο ως $L_{TA'}$ στο Σχήμα 4.30(γ), προκύπτει συγκολλώντας αντίγραφα των L_B και S_B κατά μήκος των πλευρών με βέλη μήκους



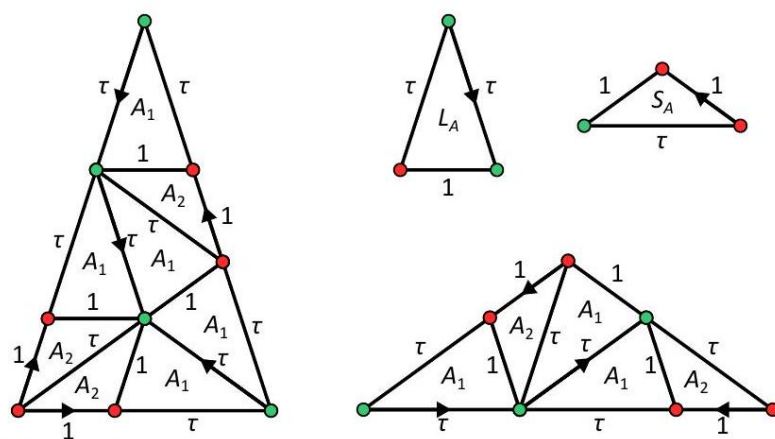
Σχήμα 4.29: Μια πλακόστρωση Penrose με βατράχια και φρύνους.

τ. Το αποτέλεσμα είναι ένα τρίγωνο όμοιο με το αρχικό τρίγωνο L_A , αλλά με λόγο ομοιότητας τ . Το δεύτερο, σημειωμένο ως $S_{LA'}$, είναι ταυτόσημο με το L_B , δηλαδή όμοιο με το S_A και επίσης με λόγο ομοιότητας τ . Και τα δύο αυτά τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους χρωματισμένες αντίστροφα από τα αντίστοιχα αρχικά τρίγωνα, κάτι που δηλώνεται με την τονούμενη σημειογραφία.

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία άλλη μία φορά ώστε να προκύψει ένα



Σχήμα 4.30: Κόδοντας τους χαρταετούς και τα βέλη σε τρίγωνα.



Σχήμα 4.31: Σύνθεση τριγώνων για την παραγωγή πλάκωσής με αντικατάσταση.

ζεύγος τριγώνων, σημειωμένα ως $L_{\tau^2 B'}$ και $S_{\tau^2 B'}$, τα οποία έχουν αντίστροφα χρωματισμένες γωνίες σε σχέση με τα L_B και S_B . Τέλος, επαναλαμβάνουμε άλλη μία φορά ώστε να προκύψει το ζεύγος $L_{\tau^2 A}$ και $S_{\tau^2 A}$, τα οποία έχουν τις ίδιες χρωματισμένες γωνίες με τα L_A και S_A , αλλά έχουν μεγεθυνθεί κατά $\tau^2 = \tau + 1$. Εάν συμπεριλάβουμε όλες τις αποσυνθέσεις σε μία εικόνα, βλέπουμε ότι τα αρχικά πλακίδια, μετά από αποσύνθεση και διόγκωση, εμφανίζονται όπως στο Σχήμα 4.31.

Όπως ακριβώς αναπτύξαμε τον συλλογισμό για τις πλακοστρώσεις με αντικα-

τάσταση στην Ενότητα 4.2, μπορούμε να επαναλαμβάνουμε αποσυνθέσεις και διογκώσεις ώστε να παράγουμε αυθαίρετα μεγάλα μπαλώματα. Όπως είδαμε και προηγουμένως, ισχύει ότι τα διαδοχικά μπαλώματα, μετά από στροφή και μεταφορά, περικλείουν το ένα το άλλο. Επομένως, σύμφωνα με το Λήμμα 3.13, γνωρίζουμε ότι μπορούμε να δημιουργήσουμε πλακοστρώσεις, οι οποίες περιέχουν καθένα από τα μπαλώματα που έχουμε κατασκευάσει.

Θεώρημα 4.12. *Κάθε ένα από τα πρωτοσύνολα που αποτελούνται από τα L_A και S_A με συνθήκες αντιστοίχισης, ή από τα L_B και S_B με συνθήκες αντιστοίχισης, είναι απεριοδικό.*

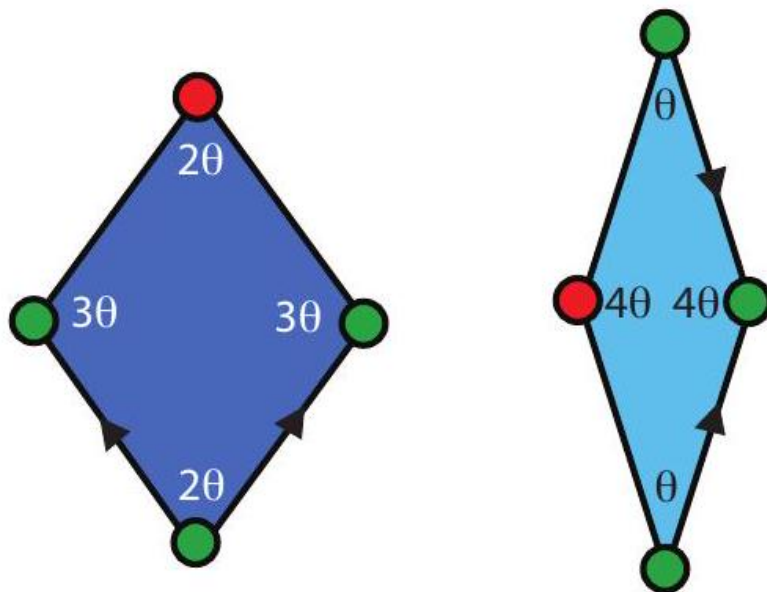
Απόδειξη. Η ύπαρξη πλακοστρώσεων από το πρωτοσύνολο που αποτελείται από τα L_A και S_A αποδεικνύεται μέσω της αντικατάστασης που φαίνεται στο Σχήμα 4.31. Παρόμοια αντικατάσταση υπάρχει και για τα L_B και S_B .

Για οποιαδήποτε πλακόστρωση με τα ζεύγη των τριγώνων τύπου A ή τύπου B , μπορούμε να εξαλείψουμε ακμές, όπως οι εσωτερικές ακμές στο Σχήμα 4.31, ώστε τελικά να προκύψει πλακόστρωση με το ίδιο πρωτοσύνολο, αλλά μεγεθυμένο κατά τ^2 . Επομένως, κάθε τέτοια πλακόστρωση είναι πλακόστρωση ομοιότητας. Η διαδικασία σύνθεσης που περιγράφηκε είναι μοναδική, και επομένως κάθε τέτοια πλακόστρωση δεν διαθέτει μεταφορές, άρα και τα δύο πρωτοσύνολα είναι απεριοδικά. $\square$

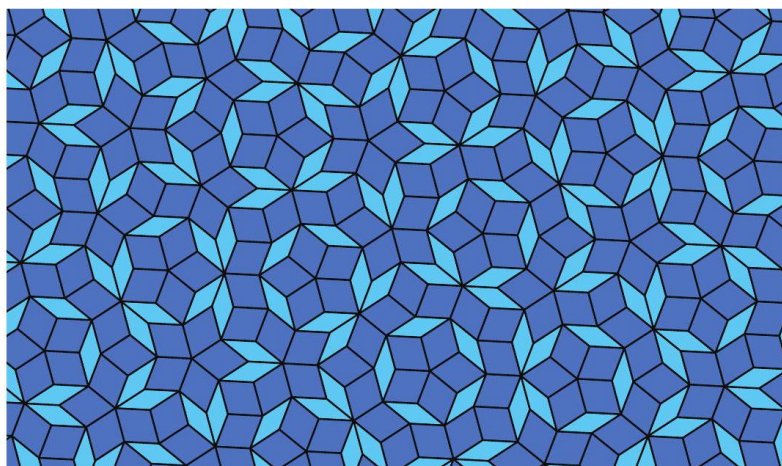
Πόρισμα 4.6. *Το πρωτοσύνολο των χαρταετών και των βελών είναι απεριοδικό.*

Απόδειξη. Αυτό προκύπτει άμεσα διότι κάθε πλακόστρωση από το πρωτοσύνολο των L_A και S_A μπορεί να μετατραπεί σε πλακόστρωση από χαρταετούς και βέλη, απαλείφοντας τις κατάλληλες ακμές μεταξύ ζευγών τριγώνων. Συνεπώς, υπάρχουν πλακοστρώσεις από χαρταετούς και βέλη. Αντίστροφα, οποιαδήποτε πλακόστρωση με χαρταετούς και βέλη μπορεί να μετατραπεί σε πλακόστρωση με τα δύο τρίγωνα, διαιρώντας κάθε χαρταετό και κάθε βέλος σε δύο τρίγωνα. Αν η πλακόστρωση με χαρταετούς και βέλη είχε μεταφορική συμμετρία, τότε και η πλακόστρωση με τρίγωνα θα είχε, πράγμα που αντιφάσκει με το γεγονός ότι το ζεύγος των τριγώνων είναι απεριοδικό πρωτοσύνολο. $\square$

Τώρα εξετάζουμε ένα άλλο σύνολο πρωτοπλακιδίων που προκύπτει από τα L_B και S_B . Σε οποιαδήποτε πλακόστρωση από αυτά τα δύο τρίγωνα, κάθε αντίτυπο του L_B που εμφανίζεται πρέπει να είναι συγκολλημένο με ένα δεύτερο ανεστραμμένο αντίτυπο κατά μήκος μιας ακμής μήκους $\tau + 1$, αφού αυτό το μήκος εμφανίζεται μόνο μία φορά στα δύο πρωτοπλακίδια. Εξαλείφοντας αυτή τη μεγάλη ακμή, τα δύο αντίτυπα σχηματίζουν έναν ρόμβο. Παρομοίως, κάθε αντίτυπο του S_B πρέπει να είναι συγκολλημένο με ένα δεύτερο ανεστραμμένο αντίτυπο κατά μήκος της ακμής μήκους 1, αφού αυτό το μήκος εμφανίζεται μόνο μία φορά στα δύο πρωτοπλακίδια. Εξαλείφοντας αυτή την ακμή, προκύπτει ένας δεύτερος ρόμβος, όπως στο Σχήμα 4.32.



Σχήμα 4.32: Το ζεύγος ρόμβων του Penrose που δημιουργεί ένα απεριοδικό πρωτοσύνολο. ($\theta = \frac{\pi}{5}$)

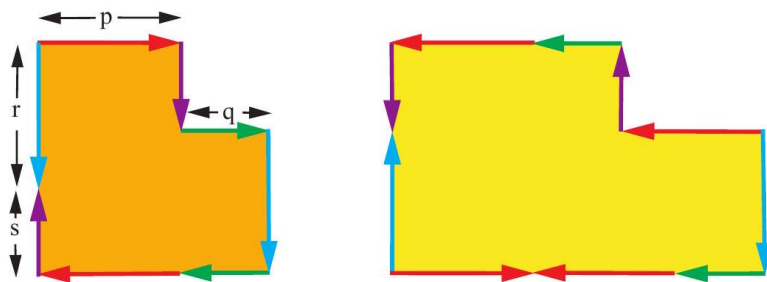


Σχήμα 4.33: Μια πλακόστρωση από το πρωτοσύνολο ρόμβων.

Συνεπώς, μπορούμε να δημιουργήσουμε ολόκληρη την πλακόστρωση από αυτούς τους ρόμβους, ένα παράδειγμα της οποίας φαίνεται στο Σχήμα 4.33. Και κάθε πλακόστρωση με τα τρίγωνα L_B και S_B αντιστοιχεί σε μια πλακόστρωση με τους δύο αυτούς ρόμβους και αντιστρόφως. Επομένως, αυτοί οι ρόμβοι δημιουργούν ένα ακόμη απεριοδικό πρωτοσύνολο δύο πλακιδίων.

Σημείωση. Το 1981, ο Ολλανδός μαθηματικός Nicolaas Gouert de Bruijn έδειξε ότι μπορούμε να πάρουμε τις ρομβικές πλακοστρώσεις του Penrose ως προβολές μιας τομής του πενταδιάστατου κυβικού πλέγματος πάνω σε ένα δισδιάστατο επίπεδο. Δεν θα ασχοληθούμε σε αυτή την εργασία με τις πλακοστρώσεις από απεριοδικά πρωτοσύνολα ως προβολές, αν και έχουν πολύ ενδιαφέρον.

Αναφέρουμε επίσης ένα άλλο απεριοδικό σύνολο δύο πρωτοπλακιδίων του Robert



Σχήμα 4.34: Το απεριοδικό σύνολο δύο πλακιδίων του Ammann.

Ammann από το 1977, που αποτελείται από δύο L -σχήματος πλακίδια όπως στο Σχήμα 4.34. Η συνθήκη ταύτισης είναι ότι κάθε πλευρά πρέπει να ενώνεται με πλευρά του ίδιου χρώματος, έτσι ώστε οι κατευθύνσεις των αιχμών να συμφωνούν.

Αν και το πρωτοσύνολο είναι απεριοδικό για οποιαδήποτε θετική επιλογή των p, q, r και s , αποδεικνύεται ότι όταν $p/q = r/s = \tau = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$, μπορούμε να συνθέσουμε αντίγραφα των πλακιδίων του πρωτοσυνόλου ώστε να προκύψουν όμοια αντίγραφα, τα οποία έχουν διογκωθεί κατά παράγοντα τ .

Ο Robert Ammann συνέβαλε σημαντικά στη θεωρία των απεριοδικών πλακοστρώσεων. Αν και δεν αποφοίτησε ποτέ από το πανεπιστήμιο, διάβασε για τα απεριοδικά πρωτοσύνολα του Penrose στη στήλη μαθηματικών του Martin Gardner στο Scientific American και άρχισε να εργάζεται πάνω σε αυτά. Έστειλε επιστολή στον Gardner, η οποία οδήγησε σε αλληλογραφία με κορυφαίους ερευνητές της εποχής. Αν και συνήθως δεν παρουσίαζε επίσημες αποδείξεις, οι ιδέες του υπήρξαν θεμελιώδεις.



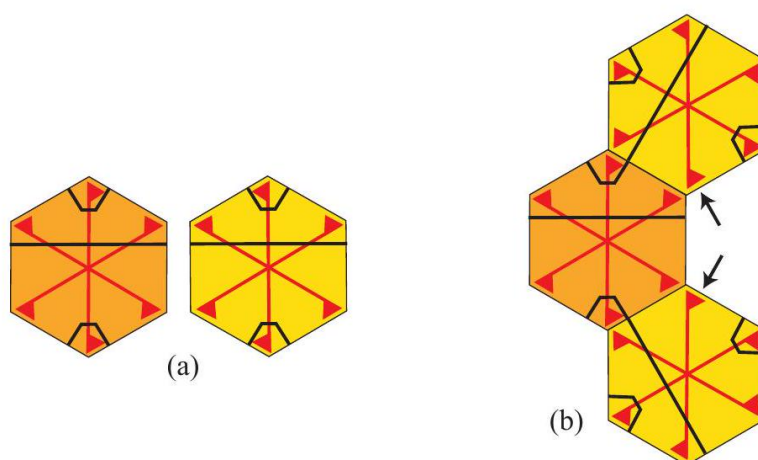
Εικόνα 4.1: Ο Roger Penrose με τον Robert Ammann, 21 Μαρτίου 1991, φωτογραφία: Ludwig Danzer[127]

Το μεγαλύτερο μέρος της καριέρας του εργάστηκε ως διαχωριστής αλληλογραφίας στο ταχυδρομείο. Ήταν μοναχικός και, παρά τις πολλές προσκλήσεις, έδωσε

μόνο δύο επιστημονικές ομιλίες. Μόνο αρκετά χρόνια μετά τον θάνατό του από καρδιακή προσβολή σε ηλικία 46 ετών έμαθαν οι ερευνητές ότι είχε φύγει από τη ζωή. (Βλ. το άρθρο της *Marjorie Senechal* [127] για την ενδιαφέρουσα ιστορία του.)

Σημείωση. Για μια πιο εκλαϊκευμένη παρουσίαση των πλακοστρώσεων Penrose καθώς και άλλων μαθηματικών που μπορούν να παρουσιαστούν εις τύπον «παιχνιδιού» παραπέμπουμε στη σειρά άρθρων του *Martin Gardner* στο *Scientific American* [48].

4.5 Το Απεριοδικό Πρωτοπλακίδιο Taylor-Socolar



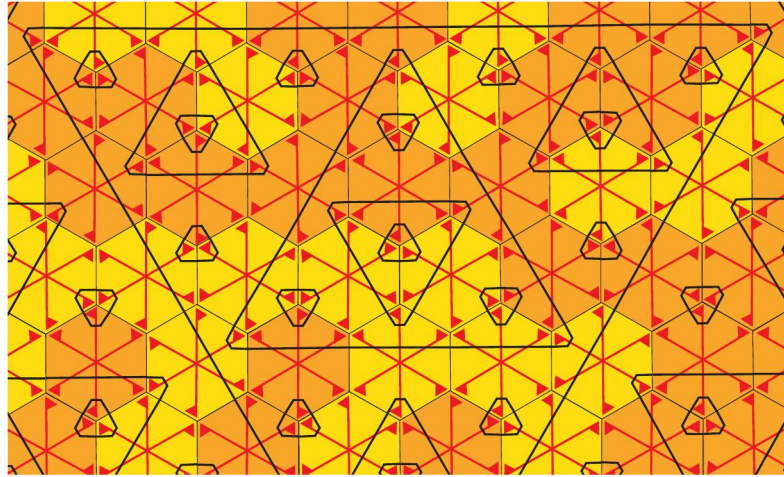
Σχήμα 4.35: Το εξαγωνικό πλακίδιο των Taylor-Socolar, η ανάκλασή του και ένας κανόνας αντιστοίχισης.

Το 1990, η Joan Taylor, μια ερασιτέχνης μαθηματικός από την Tasmania, είδε για πρώτη φορά μια ρομβική πλακόστρωση του Penrose και αμέσως γοητεύτηκε. Το 2009, μετά από μεγάλη προσπάθεια, κατάφερε να βρει ένα και μόνο εξαγωνικό πλακίδιο, το οποίο μαζί με κατάλληλες συνθήκες αντιστοίχισης είναι απεριοδικό. Επεξεργάστηκε τις λεπτομέρειες με τον Joshua Socolar από το Πανεπιστήμιο Duke και μαζί δημοσίευσαν τα αποτελέσματά τους στο [134] (βλ. επίσης [135]). Στο Σχήμα 4.35 (α) βλέπουμε το πλακίδιο με πορτοκαλί χρώμα και την ανάκλασή του με κίτρινο, και τα δύο επιτρέπονται στην πλακόστρωση.

Οι κανόνες αντιστοίχισης για μια πλακόστρωση που δημιουργείται από αυτό το πρωτοσύνολο και την ανάκλασή του έχουν ως εξής:

1. Τα άκρα των μαύρων τόξων πρέπει να ταυτίζονται σε γειτονικά πλακίδια.
2. Όπως στο Σχήμα 4.35 (β), αν επεκτείνουμε μια ακμή στα δύο πλακίδια που ενώνει, τότε οι σημαίες που συναντάμε αμέσως μόλις εισέλθουμε σε αυτά τα δύο πλακίδια πρέπει να δείχνουν προς την ίδια κατεύθυνση, είτε και οι δύο προς τη μία μεριά της ακμής είτε και οι δύο προς την άλλη.

Με αυτές τις συνθήκες, η πλακόστρωση που προκύπτει έχει τη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 4.36. Παρατηρεί κανείς αμέσως τα μαύρα τρίγωνα διαφόρων μεγεθών, τα οποία θυμίζουν τα τετράγωνα διαφορετικών μεγεθών που εμφανίστηκαν στο Σχήμα 4.25 και τα οποία μας επέτρεψαν να αποδείξουμε ότι το πρωτοσύνολο του Robinson με έξι πλακίδια είναι πράγματι απεριοδικό.



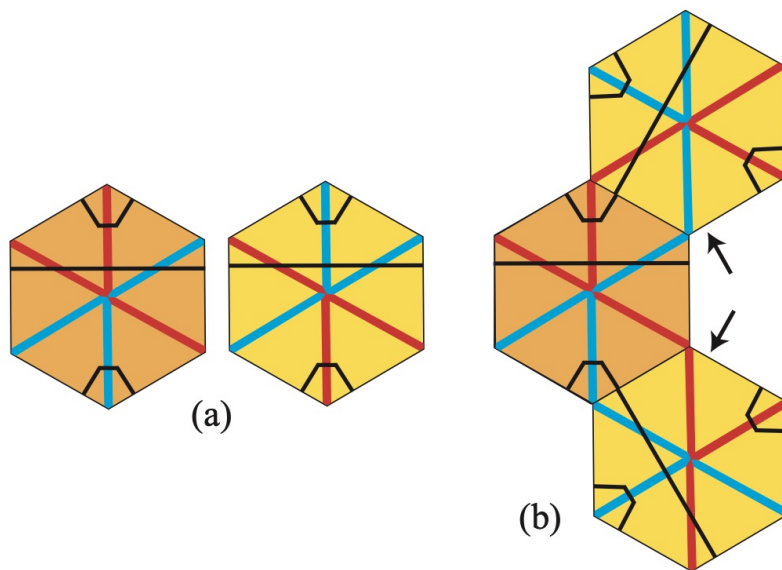
Σχήμα 4.36: Μια πλακόστρωση Taylor-Socolar.

Μια δεύτερη εκδοχή των διακοσμημένων πλακιδίων θα μας βοηθήσει να παρακολουθούμε ευκολότερα τις σημαίες και να ελέγχουμε ότι ικανοποιείται ο δεύτερος κανόνας αντιστοίχισης. Αντικαθιστούμε κάθε σημαία που δείχνει δεξιόστροφα με μια κόκκινη ράβδο και κάθε σημαία που δείχνει αριστερόστροφα με μια μπλε ράβδο, όπως στο Σχήμα 4.37 (α). Παρατηρούμε ότι αν σκεφτούμε αυτά απλώς ως πλακίδια με έγχρωμες ρίγες, δεν είναι ανακλάσεις το ένα του άλλου. Γι' αυτό χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε τις σημαίες για να προσδιορίσουμε τα χρώματα. Ο δεύτερος κανόνας αντιστοίχισης δηλώνει τότε ότι οι ράβδοι στα πλακίδια που βρίσκονται στις δύο άκρες μιας πλευράς πρέπει να έχουν αντίθετα χρώματα, όπως στο Σχήμα 4.37 (β).

Θεώρημα 4.13. Το πρωτοσύνολο Taylor-Socolar με τις συνθήκες ταύτισης δημιουργεί πλακοστρώσεις, αλληλά όλες είναι μη μεταφορικές.

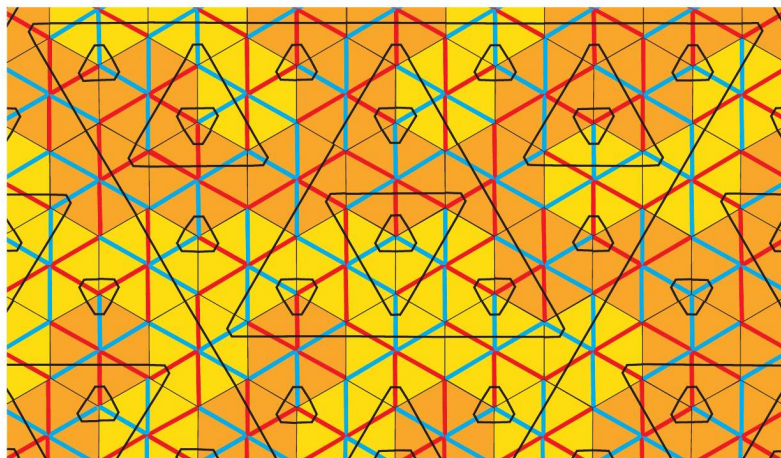
Απόδειξη. Πρώτα αποδεικνύουμε ότι όλες οι δημιουργούμενες πλακοστρώσεις είναι μη μεταφορικές. Αυτό το κάνουμε μέσω μιας σειράς ισχυρισμών, των οποίων οι αποδείξεις δεν δίνονται εδώ με κάθε λεπτομέρεια γιατί δεν είναι διαφωτιστικές αλλά υπάρχουν στην βιβλιογραφία. Γνωρίζουμε ότι ένα κανονικό εξάγωνο πλακοστρώνει το επίπεδο, οπότε χρειάζεται να δούμε πώς οι κανόνες ταύτισης καθορίζουν τις διακοσμήσεις στις πλακοστρώσεις.

Ορίζουμε δύο τύπους μαύρων τόξων που εμφανίζονται σε ένα πλακίδιο: είτε ως ευθύγραμμο είτε ως γάντζο. Έστω $\mathcal{T}$ μια πλακόστρωση που δημιουργείται από αυτό το πλακίδιο και τους κανόνες ταύτισης του.



Σχήμα 4.37: Εναλθλακτικές διακοσμήσεις της πλακόστρωσης Taylor-Socolar.

Ισχυρισμός (1). Αν δύο γειτονικά πλακίδια μοιράζονται έναν γάντζο σε μία κορυφή, τότε και το τρίτο πλακίδιο στη συγκεκριμένη κορυφή πρέπει επίσης να έχει γάντζο.



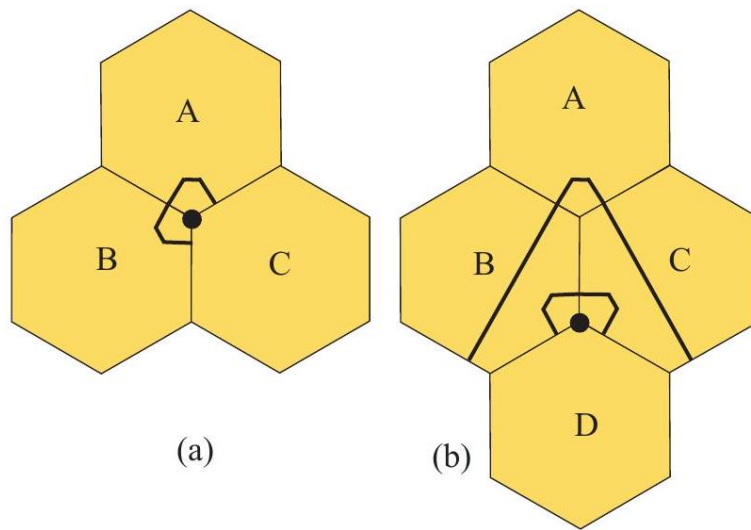
Σχήμα 4.38: Μια πλακόστρωση που δημιουργείται από τα εναλθλακτικά διακοσμημένα πλακίδια Taylor-Socolar.

Όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.38, αυτό είναι προφανές, αλλιώς τα άκρα των μαύρων τόξων δεν θα ταυτίζονταν. Όταν υπάρχουν τρεις γάντζοι που συναντώνται σε μία κορυφή, τότε σχηματίζουν ένα μικρό δακτύλιο, γνωστό και ως τρίγωνο επιπέδου μηδέν.

Ισχυρισμός (2). Πρέπει να υπάρχει μικρός δακτύλιος στην πλακόστρωση.

Αν έχουμε μια κορυφή που δεν αντιστοιχεί σε μικρό δακτύλιο, αλλά έχει γάντζο, όπως στο κάτω μέρος του πλακιδίου A στο Σχήμα 4.39(β), τότε πρέπει τα B και C να έχουν ευθύγραμμο τόξα στα άκρα αυτού του γάντζου. Αυτό συνεπάγεται ότι δύο

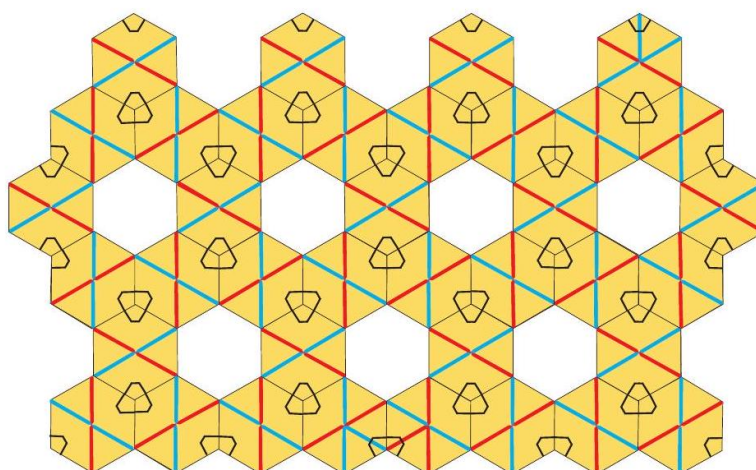
γάντζοι συναντώνται στην επισημασμένη κορυφή. Επομένως πρέπει να υπάρχει και τρίτος στο πλακίδιο D , άρα υπάρχει μικρός δακτύλιος.



Σχήμα 4.39: Πρέπει να υπάρχουν μικροί δακτύλιοι.

Ισχυρισμός (3). Αν υπάρχει μικρός δακτύλιος σε μια κορυφή, τότε υπάρχει και στις απέναντι γωνίες καθενός από τα τρία πλακίδια που συναντώνται στην κορυφή.

Η απόδειξη χρησιμοποιεί και τον δεύτερο κανόνα ταύτισης, δεν την δίνουμε. Παρατηρούμε τώρα ότι μεγάλο μέρος της δομής της πλακόστρωσης καθορίζεται: έχουμε ένα πλέγμα από πλακίδια που περιέχουν τους γάντζους που σχηματίζουν τους μικρούς δακτυλίους, με κενά για μονά πλακίδια, όπως στο Σχήμα 4.40.

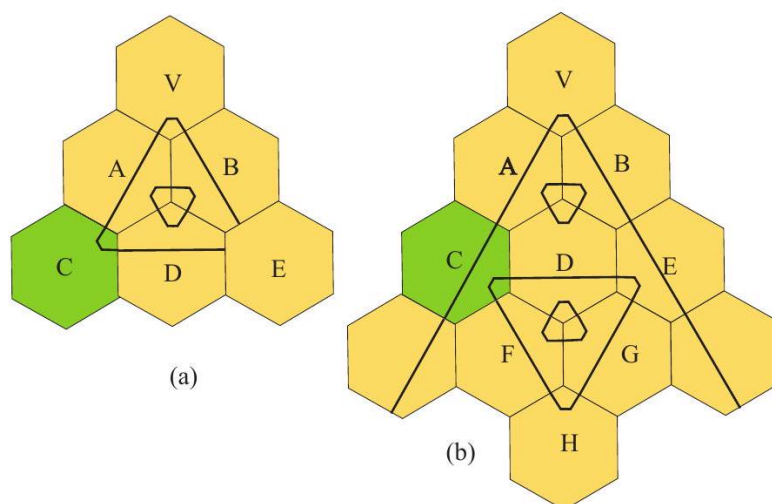


Σχήμα 4.40: Τα πλακίδια που συμμετέχουν σε μικρούς δακτυλίους αφήνουν χώρο μόνο για μονά πλακίδια.

Ονομάζουμε **τρίγωνο επιπέδου ένα** ένα τρίγωνο από μαύρα τόξα που αποτελείται από τρία ευθύγραμμα τόξα συνδεδεμένα στα άκρα τους με τρεις γάντζους.

Ισχυρισμός (4). Υπάρχουν τρίγωνα επιπέδου ένα.

Για κάθε δοσμένο κενό, υπάρχουν τρεις δυνατές θέσεις για τα αντίθετα ζεύγη γαντζωτών τόξων στο πλακίδιο που το καλύπτει. Ονομάζουμε V το πλακίδιο που καλύπτει το κενό και εξετάζουμε ένα γάντζο στο κάτω μέρος του V . Τα γειτονικά πλακίδια A και B πρέπει να έχουν ευθύγραμμο τόξα που συνεχίζουν το γάντζο στο κάτω μέρος του V για να αποφευχθεί μικρός δακτύλιος κάτω από το V , όπως στο Σχήμα 4.41. Για το πλακίδιο C , υπάρχουν δύο επιλογές: στο (α), έχει γάντζο στη συνέχεια, οπότε το D πρέπει να συνεχίσει με ευθύγραμμο και το E με γάντζο. Αυτό σχηματίζει τρίγωνο επιπέδου ένα. Αντίθετα, στο (β), το C έχει ευθύγραμμο τόξο που συνεχίζει το ανωτέρω ευθύγραμμο τόξο. Τότε το C έχει γάντζο στην κοινή γωνία με τα D και F . Ο μικρός δακτύλιος που σχηματίζεται από D, F και G αναγκάζει τα F και D να έχουν ευθύγραμμο τόξα, και στη συνέχεια τα E, G και H εμφανίζονται όπως φαίνεται. Επομένως, υπάρχει επίσης τρίγωνο επιπέδου ένα.



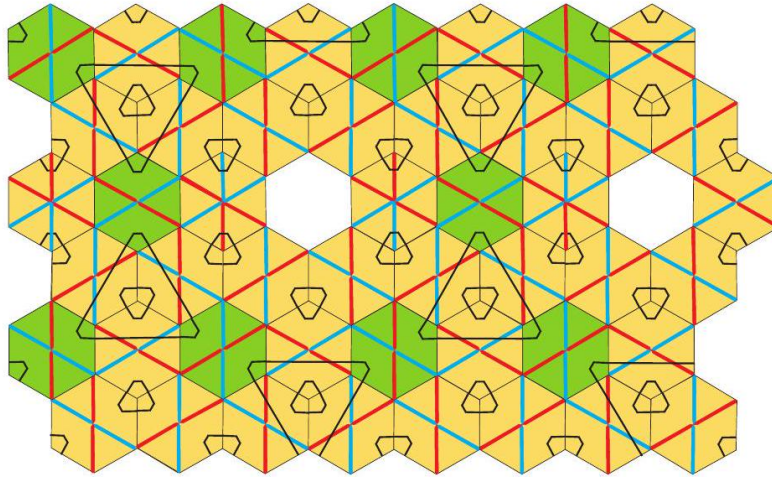
Σχήμα 4.41: Δύο περιπτώσεις που οδηγούν σε τρίγωνο επιπέδου ένα.

Ισχυρισμός (5). Αν ένα πλακίδιο έχει γάντζο σε τρίγωνο επιπέδου ένα, τότε και ο αντίθετός του γάντζος πρέπει επίσης να ανήκει σε τρίγωνο επιπέδου ένα.

Δεν δίνουμε ούτε αυτή την απόδειξη.

Μόλις γνωρίζουμε και αυτό, βλέπουμε ότι όταν γεμίζουμε μια οπή με ένα πλακίδιο που έχει γάντζο πάνω σε ένα τρίγωνο επιπέδου 1, αυτό εξαναγκάζει ένα πλέγμα από πλακίδια, καθένα από τα οποία εμφανίζεται ως πράσινο πλακίδιο για να γεμίσει τις οπές που αντιστοιχούν στα γάντζα των τριγώνων πρώτου επιπέδου. Αυτά τα νέα πράσινα πλακίδια θα καλύψουν τα $3/4$ των οπών, όπως φαίνεται στο Σχήμα 4.42.

Μόλις τοποθετήσουμε ένα πράσινο πλακίδιο σε μια οπή, τότε τα γύρω πλακίδια εμφανίζονται όπως στο Σχήμα 4.43. Μπορούμε να σκεφτούμε ότι αντικαθιστούμε το πράσινο πλακίδιο και το μισό από κάθε γειτονικό του με ένα μεγαλύτερο εξαγωνικό πλακίδιο. Αυτά τα μεγαλύτερα πλακίδια αποδεικνύεται ότι ικανοποιούν το



Σχήμα 4.42: Γέμισμα οπών με πλακίδια που αντιστοιχούν στα άγκιστρα των τριγώνων πρώτου επιπέδου.

ίδιο ζεύγος συνθηκών ταύτισης που ικανοποιούσαν τα αρχικά πλακίδια. Έτσι, στην πλακόστρωση με αυτά τα νέα μεγαλύτερα εξάγωνα, τα τρίγωνα πρώτου επιπέδου από την προηγούμενη πλακόστρωση γίνονται τρίγωνα επιπέδου μηδέν, και μπορούμε να δείξουμε ότι θα υπάρξει ένα ακόμη επίπεδο τριγώνων.

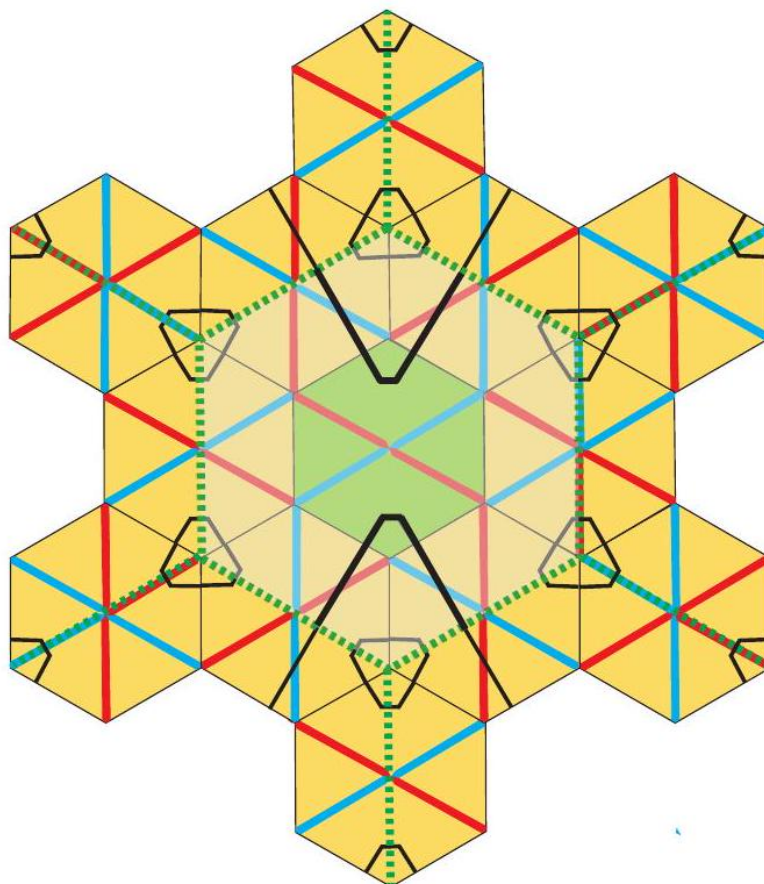
Συνεπώς, το αρχικό πλέγμα τριγώνων πρώτου επιπέδου με γάντζα πάνω στα πράσινα πλακίδια, όπως στο Σχήμα 4.44, εξαναγκάζει ένα πλέγμα τριγώνων δεύτερου επιπέδου με γάντζα πάνω στα μωβ πλακίδια. Αυτό στη συνέχεια δημιουργεί ένα πλέγμα τριγώνων τρίτου επιπέδου με γάντζα πάνω στα μπορντό πλακίδια. Και μόλις έχουμε ένα πλέγμα τριγώνων επιπέδου $n - 1$, πρέπει να υπάρχει πλέγμα τριγώνων επιπέδου n .

Συγκεκριμένα, αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν πλέγματα από ξένα τρίγωνα με αυθαίρετα μεγάλο μήκος πλευράς. Όπως συνέβη και στην περίπτωση του απεριοδικού πρωτοσυνόλου του Robinson, αυτό είναι αρκετό για να δείξει ότι οποιαδήποτε τέτοια πλακόστρωση είναι μη μεταφορική. Δεν μπορεί να υπάρχει μεταφορά πεπερασμένου μήκους που να μεταφέρει αυθαίρετα μεγάλα τρίγωνα πάνω στον εαυτό τους, όπως θα απαιτούσε μια συμμετρία. Αυτό δείχνει ότι όλες οι πλακοστρώσεις που δημιουργούνται από το πλακίδιο των Taylor-Socolar με κανόνες ταύτισης είναι μη μεταφορικές.

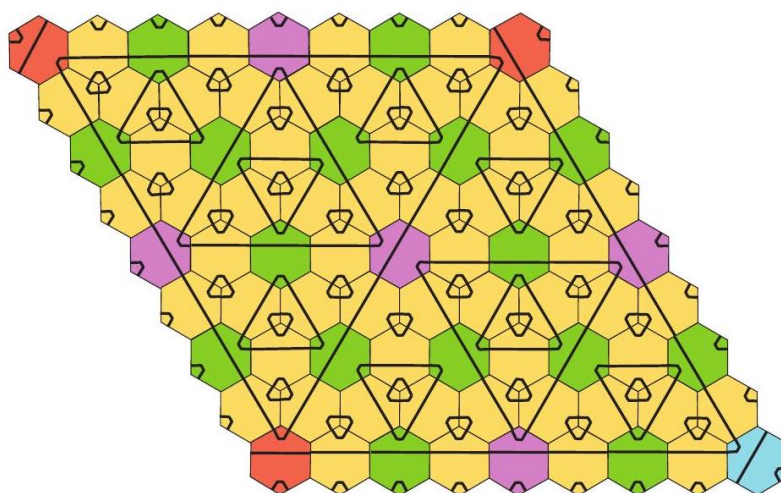
Δεν θα αναλωθούμε στο να αποδείξουμε ότι υπάρχουν πλακοστρώσεις που δημιουργούνται από αυτό το πρωτοπλακίδιο με τους κανόνες ταύτισής του, αλλά το επιχείρημα χρησιμοποιεί μεγάλο μέρος της δομής που μόλις περιγράψαμε. Βλ. [134].

□

Αν και δεν μπορούμε να πραγματοποιήσουμε τους κανόνες αντιστοίχισης τροποποιώντας τις πλευρές του πρωτοσυνόλου μας, μπορούμε να τους πραγματοποιήσουμε αν είμαστε διατεθειμένοι να γενικεύσουμε την έννοια της έγκυρης πλακόστρωσης,



Σχήμα 4.43: Γέμισμα οπών με πλακίδια που αντιστοιχούν στα άγκιστρα των τριγώνων πρώτου επιπέδου.

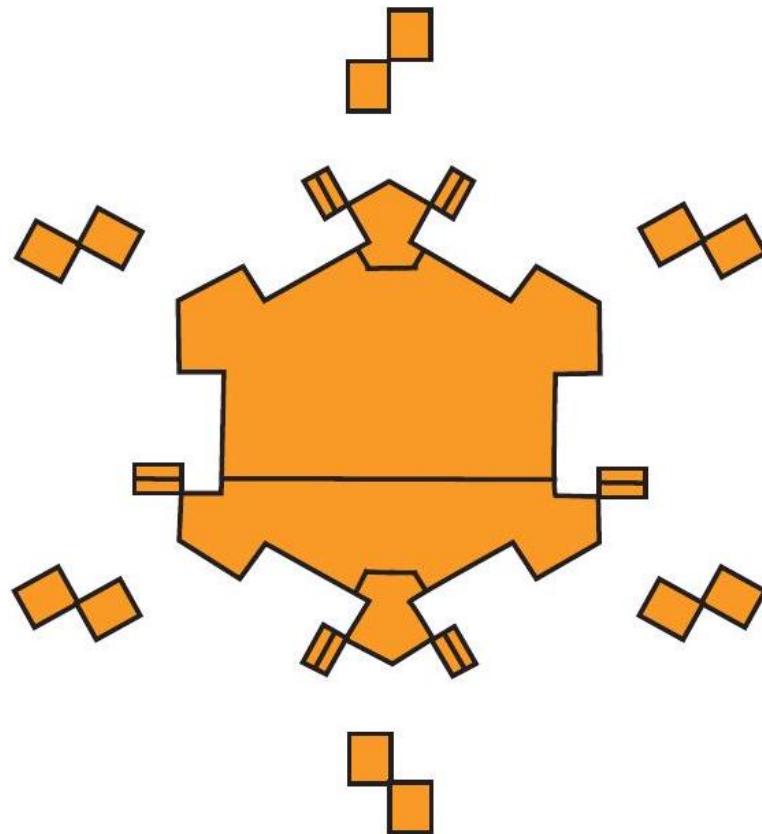


Σχήμα 4.44: Γέμισμα οπών με πλακίδια που αντιστοιχούν στα άγκιστρα των τριγώνων επιπέδου n .

ώστε να επιτρέψουμε μη συνεκτικά πλακίδια, που δεν είναι απαραίτητα τοπολογικός δίσκος (έτσι δύο από τις αρχικές προϋποθέσεις για τα πλακίδια αποτυγχάνουν εδώ). Βλ. Σχήμα 4.45. Αν και έχουμε συμπεριλάβει τα μαύρα τόξα, αυτά υπάρχουν μόνο

για να μας βοηθήσουν να δούμε πώς αυτό το πλακίδιο σχετίζεται με το αρχικό. Δεν είναι απαραίτητα για την επίτευξη του αντίστοιχου κανόνα αντιστοίχισης.

Είναι συναρπαστικό να βλέπει κανείς πώς αυτά τα πλακίδια συνενώνονται για να δημιουργήσουν πλακοστρώσεις, όπως στο Σχήμα 4.46. Αν επιτρέψουμε στα πλακίδια μας να έχουν κάποιο πάχος κατά τη διεύθυνση z , μπορούμε να επιδιορθώσουμε το γεγονός ότι το πλακίδιο είναι μη συνεκτικό, όπως στο Σχήμα 4.47. Πλέον, οι μη συνεκτικές έδρες του πλακιδίου μπορούν να συνδεθούν μεταξύ τους «κάτω» από το επίπεδο.

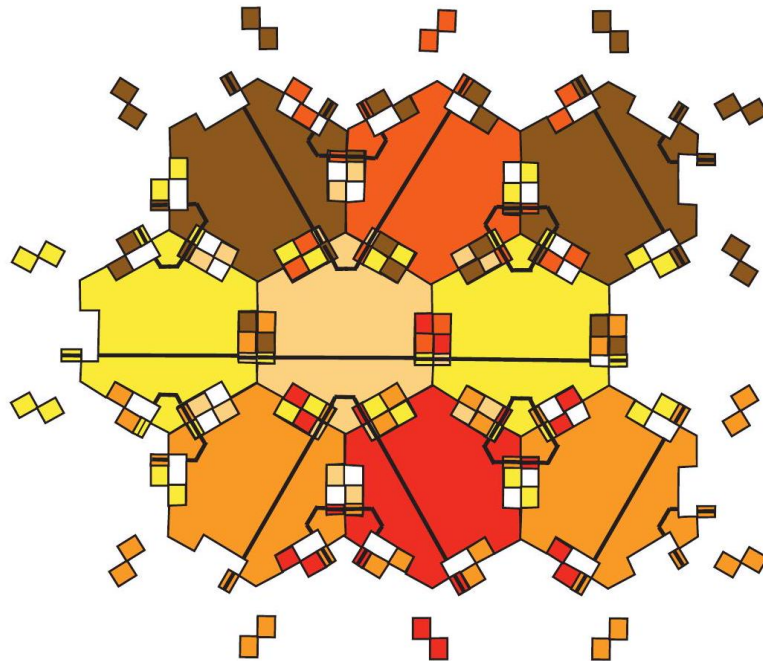


Σχήμα 4.45: Ένα μοναδικό πλακίδιο Taylor-Socolar που είναι μη συνεκτικό, αλλά δεν χρειάζεται κανόνες αντιστοίχισης για να παράγει μόνο μη μεταφορικές πλακοστρώσεις.

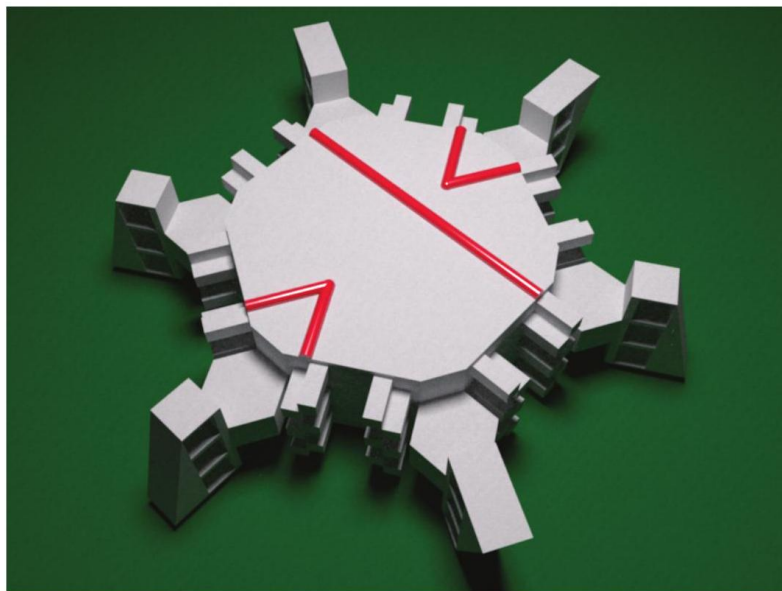
Αυτό το τρισδιάστατο πλακίδιο είναι ενδιαφέρον με διάφορους τρόπους. Πρώτα, σημειώστε ότι για να δημιουργηθεί πλακόστρωση με το μη συνεκτικό πλακίδιο Taylor-Socolar, χρειάστηκε τόσο το πλακίδιο όσο και η ανάκλασή του. Όμως, μία ανάκλαση ενός πλακιδίου στο επίπεδο μπορεί να πραγματοποιηθεί μέσω στροφής 180° γύρω από ευθεία εντός του επιπέδου. Επομένως, για αυτό το πλακίδιο, δεν χρειάζεται και το πλακίδιο και η ανάκλασή του. Απλώς στρέφουμε το πλακίδιο όταν θέλουμε την αντεστραμμένη έκδοση.

Αν και αυτό το πλακίδιο είναι απεριοδικό υπό την έννοια ότι δεν υπάρχουν μεταφορές στην οριζόντια διεύθυνση, δεν είναι απεριοδικό στον Ευκλείδειο τρισδιάστατο

χώρο, αφού δημιουργεί πλακοστρώσεις στον τρισδιάστατο χώρο που έχουν μεταφορική συμμετρία στην κάθετη διεύθυνση.



Σχήμα 4.46: Μια πλακόστρωση από το μη συνεκτικό πλακίδιο.



Σχήμα 4.47: Ένα συνεκτικό πλακίδιο που προέρχεται από το πρωτοσύνολο Taylor-Socolar και πλακοστρώνει τον τρισδιάστατο χώρο.

Ανοικτά Ερωτήματα. Παραμένουν τα παρακάτω:

1. Υπάρχει κάποιο μοναδικό πλακίδιο στον $\mathbb{E}^3$ που να πλακοστρώνει την περιοχή μεταξύ δύο παραλληλίων επιπέδων εντός του $\mathbb{E}^3$, αλλιά μόνο κατά μη-μεταφορικό τρόπο; Αυτό είναι ευκολότερο πρόβλημα από το να βρεθεί einstein στο επίπεδο.

2. Η πλακόστρωση Taylor-Socolar βασίζεται στην κανονική εξαγωνική πλακόστρωση. Να βρεθεί μια εκδοχή βασισμένη είτε στην τετραγωνική είτε στην ισόπλευρη τριγωνική πλακόστρωση.

Κεφάλαιο 5

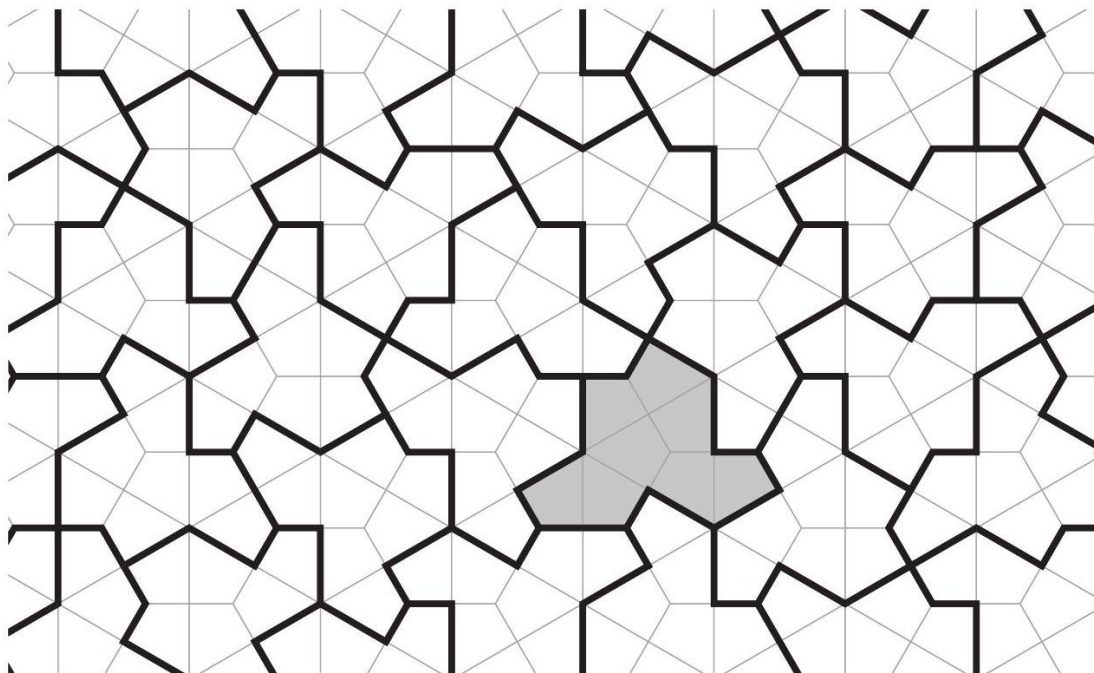
Απεριοδικό Μονοπλακίδιο: το Καπέλο Πολυχαρταετός

Όπως ήδη αναφέραμε ένα μέχρι πρότεινος ανοιχτό πρόβλημα αφορά την ύπαρξη ενός απεριοδικού μονοπλακιδίου, γνωστού και ως “einstein”: ενός σχήματος που δημιουργεί πλακοστρώσεις του επιπέδου, αλλά ποτέ περιοδικές πλακοστρώσεις. Στο [132] δίνεται απάντηση σε αυτό το πρόβλημα για πλακίδια που είναι τοπολογικοί δίσκοι, παρουσιάζοντας ένα συνεχές από συνδυαστικώς ισοδύναμα απεριοδικά πολύγωνα. Αρχικά αποδεικνύεται ότι ένα αντιπροσωπευτικό παράδειγμα, το καπέλο πολυχαρταετός, μπορεί να σχηματίσει συμπλέγματα που ονομάζονται μεταπλακίδια, για τα οποία μπορούν να οριστούν κανόνες αντικατάστασης. Εφόσον τα μεταπλακίδια δημιουργούν πλακοστρώσεις του επιπέδου, το ίδιο ισχύει και για το καπέλο. Στη συνέχεια αποδεικνύεται ότι γενικότερα τα μέλη του συνεχούς είναι απεριοδικά, μέσω ενός νέου τύπου γεωμετρικού επιχειρήματος ασυμμετρίας. Ξεχωριστά, δίνεται μια συνδυαστική, υποβοηθούμενη από υπολογιστή απόδειξη ότι το καπέλο δημιουργεί ιεραρχικές, και συνεπώς απεριοδικές πλακοστρώσεις, αλλά δεν θα ασχοληθούμε με την δεύτερη απόδειξη.

5.1 Εισαγωγικά

Η μελέτη πλακοστρώσεων μέσω συνόλων δισδιάστατων πλακιδίων φανερώνει μια περίπλοκη αλληλεξάρτηση μεταξύ τοπικών κανόνων και καθολικών δομών. Οι περιορισμοί που διέπουν τη συνένωση δύο γειτονικών πλακιδίων μπορεί να έχουν σημαντικές συνέπειες για την καθολική μορφή της πλακόστρωσης, επηρεάζοντας τη συμπεριφορά της σε πολλαπλές κλίμακες. Αυτοί οι τοπικοί περιορισμοί, ενσωματωμένοι στην κατασκευή του εκάστοτε συνόλου πλακιδίων, καθορίζουν με λεπτούς τρόπους το σύνολο των επιτρεπτών πλακοστρώσεων.

Ανάμεσα στα πιο εντυπωσιακά φαινόμενα της θεωρίας βρίσκονται τα απεριοδικά σύνολα πλακιδίων: σύνολα που επιτρέπουν την πλήρη κάλυψη του επιπέδου, αλλά μόνο κατά μη περιοδικό τρόπο. Η πρώτη σημαντική σύνδεση μεταξύ της θεωρίας



Σχήμα 5.1: Το Καπέλο Πολυχαρταετός

πλακοστρώσεων και της λογικής προέκυψε από τη δουλειά του Wang, στο πλαίσιο της έρευνάς του για ανοιχτά προβλήματα του Entscheidungsproblem του Hilbert όπως ήδη αναφέραμε.

Παρότι δεν θα παρουσιάσουμε πλήρη επισκόπηση, αξίζει να σημειωθεί ότι, παρά την έντονη ερευνητική δραστηριότητα, οι γνωστές μέθοδοι απόδειξης απεριοδικότητας παραμένουν λίγες και εν μέρει ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Η σταδιακή μείωση του πλήθους πλακιδίων, όπως το πρωτοσύνολο του Robinson, οδήγησε σε πρωτοσύνολα με μόλις δύο πρωτοπλακίδια, όπως εκείνα του Penrose. Η έσχατη μορφή αυτής της πορείας είναι το απεριοδικό μονοπλακίδιο: ένα μεμονωμένο πλακίδιο ικανό να καλύψει το επίπεδο αποκλειστικά με μη περιοδικό τρόπο. Εδώ χρησιμοποιούμε τον όρο αυτόν για να περιγράψουμε δισδιάστατα σχήματα που καλύπτουν το επίπεδο χωρίς περιοδικότητα, βασιζόμενα αποκλειστικά στη γεωμετρία τους, χωρίς πρόσθετους περιορισμούς γειτνίασης ή χρωματικές συνθήκες. Για πολλά χρόνια, η ύπαρξη ενός τέτοιου σχήματος παρέμενε ανοιχτό πρόβλημα. Είναι δυνατόν ένα και μόνο γεωμετρικό σχήμα να επιβάλει τόσο πολύπλοια καθολική συμπεριφορά ώστε να αποκλείει κάθε μορφή περιοδικότητας;

5.1.1 Προσπάθειες επίλυσης του einstein

Μια ποικιλία υποψηφίων έχει προταθεί ως λύσεις στο λεγόμενο πρόβλημα einstein, ωστόσο πολλοί από αυτούς περιλαμβάνουν επανερμηνείες ή επεκτάσεις του παραδοσιακού νοήματος των όρων «πλακίδιο», «πλακόστρωση» ή «απεριοδικότητα».

Μία τέτοια προσέγγιση περιλαμβάνει τη χρήση επικαλυπτόμενων πλακιδίων. Ο

Gummelt [64], μαζί με τους Jeong και Steinhardt [140], [76], εισήγαγαν μία μέθοδο που χρησιμοποιεί ένα μόνο κανονικό δεκάγωνο το οποίο καλύπτει το επίπεδο μη περιοδικά μέσω συγκεκριμένων κανόνων επικάλυψης που σχετίζονται στενά με τις πλακοστρώσεις Penrose. Παρομοίως, η Senechal διερεύνησε συνθήκες υπό τις οποίες τα βέλη του Penrose μπορούν να επικαλύπτονται με μη επαναλαμβανόμενο τρόπο. Αν και αυτές οι κατασκευές εμφανίζουν απεριοδική δομή, δεν αποτελούν πλακοστρώσεις με την κλασική έννοια που ορίσαμε, όπου τα πλακίδια δεν επικαλύπτονται.

Στα περισσότερα προβλήματα πλακόστρωσης, τα πλακίδια συνοδεύονται από κανόνες ταύτισης, περιορισμούς που καθορίζουν πώς τα πλακίδια μπορούν να τοποθετηθούν το ένα σε σχέση με το άλλο. Αυτοί οι κανόνες ποικίλλουν σημαντικά σε πολυπλοκότητα. Μερικές φορές αποσκοπούν στην απομίμηση τοπικής γεωμετρικής συμβατότητας, ενώ σε άλλες περιπτώσεις κωδικοποιούν πιο περίπλοκους περιορισμούς. Το μονοπλακίδιο των Taylor-Socolar [134], που παρουσιάσαμε, αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα αυτής της πολυπλοκότητας: είναι ένα κανονικό εξάγωνο διακοσμημένο με εσωτερικά σημάδια που επιβάλλουν απεριοδικότητα μέσω συνθηκών που απαιτούν ‘επικοινωνία’ μεταξύ μη γειτονικών πλακιδίων. Αυτή η αλληλεξάρτηση δεν μπορεί να εκφραστεί μέσω κανενός σχήματος που να είναι απλός τοπολογικός δίσκος. Για να κωδικοποιηθούν αυτοί οι περιορισμοί γεωμετρικά, πρέπει να γίνει αποδοχή πλακιδίων που είναι μη συνεκτικά, περιλαμβάνουν σημεία τομής ή εκτείνονται σε μια τρισδιάστατη πάχυνση του επιπέδου $\mathbb{R}^2 \times [0, 1]$ [ST12].

Η υποκείμενη δομή της κατασκευής των Taylor-Socolar σχετίζεται στενά με την πλακόστρωση $1 + \epsilon + \epsilon^2$ του Penrose [116], [16], [141], καθώς και με τα πλακίδια Trilobite και Crab [53]. Όλες αυτές μπορούν να ρυθμιστούν έτσι ώστε το μεγαλύτερο μέρος της περιοχής να καταλαμβάνεται από αντίγραφα ενός πρωτεύοντος πλακιδίου. Παρ’ όλα αυτά, η παρουσία άλλων βοηθητικών τύπων πλακιδίων παραμένει απαραίτητη, ανεξαρτήτως του πόσο μικρά ή λεπτά είναι.

Γενικά, η πολυπλοκότητα μπορεί να κατανέμεται είτε στο σχήμα των πλακιδίων είτε στους κανόνες ταύτισης. Για παράδειγμα, με την αποδοχή μιας πεπερασμένης συλλογής επιτρεπτών τοπικών διαμορφώσεων, ενός λεγόμενου άτλαντα, ακόμη και ένα ορθογώνιο 2×1 μπορεί να λειτουργήσει ως απεριοδικό μονοπλακίδιο. Η ιδέα είναι να μεταφραστεί μια γνωστή απεριοδική πλακόστρωση (με γεωμετρικούς κανόνες) σε ένα χάρτη-κωδικοποίηση, και έπειτα να εξαχθούν κανόνες ταύτισης βασισμένοι σε διατάξεις εικονοστοιχείων. Κάθε μαύρο ή λευκό εικονοστοιχείο υποδιαιρείται σε ορθογώνια, σχηματίζοντας τα δομικά στοιχεία ενός νέου συστήματος όπου το ορθογώνιο, σε συνδυασμό με τον άτλαντα, επιβάλλει απεριοδικότητα. Οι Walton και Whittaker [144] παρουσίασαν πρόσφατα ένα εξαγωνικό πλακίδιο που, όπως και το πλακίδιο των Taylor-Socolar, βασίζεται σε σημάδια προσανατολισμού για να προκαλέσει απεριοδικότητα. Αν και αυτά τα σημάδια αφορούν μόνο τοπική γειτνίαση, η προκύπτουσα δομή δεν μπορεί να περιοριστεί σε έναν καθαρά γεωμετρικό περιο-

ρισμό στο σχήμα του πλακιδίου.

Οι χώροι υψηλότερων διαστάσεων επιτρέπουν πιο λεπτοφυείς μορφές απεριοδικής συμπεριφοράς. Το πλακίδιο των Schmitt-Conway-Danzer [126] είναι ένα τρισδιάστατο σχήμα που πλακοστρώνει τον $\mathbb{R}^3$ με τέτοιον τρόπο ώστε καμία πλακόστρωση να μην παραδέχεται μεταφορική συμμετρία. Ωστόσο, μερικές από αυτές τις πλακοστρώσεις περιέχουν ελικοειδής συμμετρίες, παράγοντας άπειρες κυκλικές υποομάδες κινήσεων ελικώσεως, επομένως τέτοιο πλακίδιο ταξινομείται ως ασθενώς απεριοδικό. Ο όρος είναι κατάλληλος, καθώς η ασθενής απεριοδικότητα εμφανίζεται συχνά σε μη Ευκλείδειες περιοχές όπως το υπερβολικό επίπεδο. Πράγματι, ο Bödöczky εισήγαγε ένα ασθενώς απεριοδικό μονοπλακίδιο στο υπερβολικό επίπεδο ήδη από το 1974 [31], θεμελιώνοντας την οικογένεια των «δυσδικών πλακοστρώσεων» [27], [54], [98], [104].

Αντιθέτως, η ισχυρή απεριοδικότητα, έννοια που εισήγαγε ο Mozes [104], αναφέρεται σε πρωτοσύνολα πλακιδίων των οποίων οι πλακοστρώσεις δεν έχουν καμία άπειρη κυκλική συμμετρία. Είναι ενδιαφέρον ότι, για ‘φυσιολογικά’ πλακίδια στο Ευκλείδειο επίπεδο, οι έννοιες της ασθενούς και της ισχυρής απεριοδικότητας είναι ισοδύναμες, ενοποιώντας έτσι την έννοια σε αυτό το πλαίσιο.

Πρόσφατες εξελίξεις σε υψηλότερες διαστάσεις έχουν επεκτείνει την εμβέλεια των απεριοδικών μονοπλακιδίων. Οι Greenfeld και Tao [56] έδειξαν ότι σε επαρκώς υψηλές διαστάσεις πλέγματος $\mathbb{Z}^n$, είναι δυνατή η κατασκευή ενός μονοπλακιδίου που πλακοστρώνει απεριοδικά χρησιμοποιώντας μόνο μεταφορές. Οι Greenfeld και Κολουτζάκης [55] επέκτειναν αυτό το αποτέλεσμα δείχνοντας ότι το πλακίδιο μπορεί ακόμη να είναι συνεκτικό. Επιπλέον, οι Greenfeld και Tao [58], [57] απέδειξαν ότι το πρόβλημα του να προσδιοριστεί αν τέτοιο μεταφορικό μονοπλακίδιο πλακοστρώνει περιοδικό υποσύνολο του $\mathbb{Z}^n$ (για μεταβλητό n) είναι μη αποκρίσιμο.

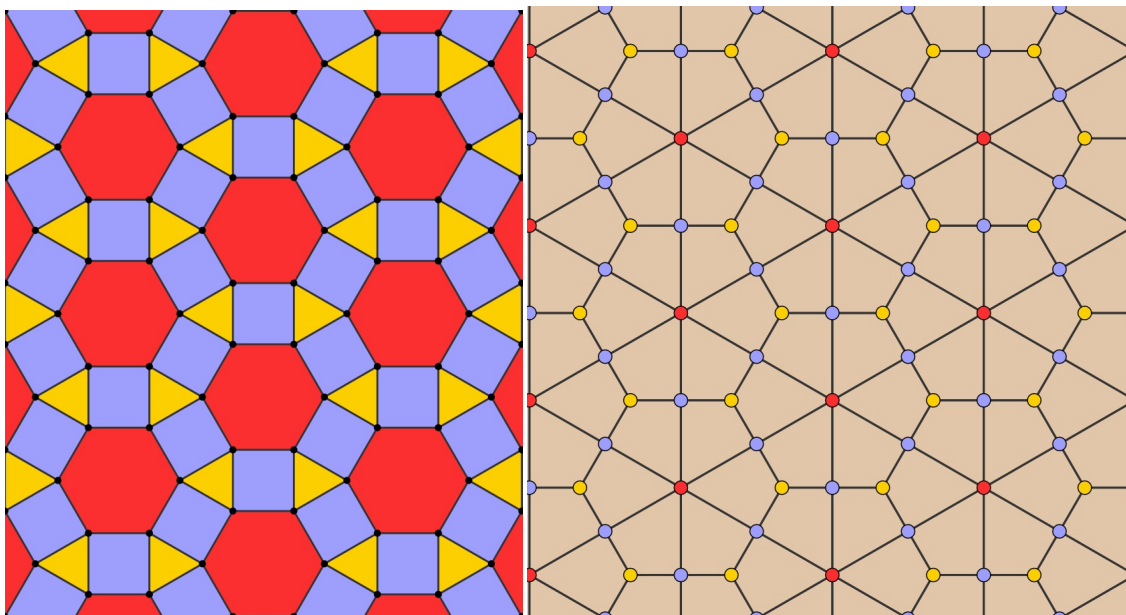
Αντίθετα, η μεταφορική απεριοδικότητα στο $\mathbb{R}^2$ είναι αποδεδειγμένα αδύνατη. Ο Kenyon [81], [82], [83], βασιζόμενος σε αποτελέσματα των Girault-Beauquier και Nivat [51], απέδειξε ότι κάθε απλώς συνεκτική περιοχή (δηλ. τοπολογικός δίσκος) που πλακοστρώνει το $\mathbb{R}^2$ μέσω μεταφοράς, παραδέχεται επίσης περιοδική πλακόστρωση. Ο Bhattacharya [25] επιβεβαίωσε αργότερα το ανάλογο αποτέλεσμα για πεπερασμένα υποσύνολα του $\mathbb{Z}^2$.

5.1.2 Κύρια Αποτελέσματα

Στόχος μας είναι να δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 5.14. *Το σκιασμένο σχήμα στο Σχήμα 5.1, ένας πολυχαρταετός που αποκαλούμε «καπέλο», είναι απεριοδικό μονοπλακίδιο.*

Το σχήμα είναι σχεδόν κοινότοπο στην απλότητά του. Είναι ένας πολυχαρταετός: η ένωση οκτώ χαρταετών στην πλακόστρωση του Laves [3.4.6.4] (σχεδιασμένοι



Σχήμα 5.2: Η Αρχιμήδεια πλακόστρωση (3.4.6.4) (αριστερά) και η δυϊκή της πλακόστρωση Laves [3.4.6.4] (δεξιά)

με λεπτές γραμμές στο Σχήμα 5.1), η δυϊκή της (3.4.6.4) Αρχιμήδειας πλακόστρωσης, που επίσης φαίνεται στο Σχήμα 5.2. Δεν απαιτούνται ειδικές προϋποθέσεις ή πρόσθετοι κανόνες αντιστοίχισης: όπως φαίνεται, το σχήμα αυτό πλακοστρώνει το επίπεδο, αλλά -όπως φαίνεται και θα αποδείξουμε στη συνέχεια- ποτέ με μεταφορικές συμμετρίες.

Παρέχουμε λεπτομερώς την πρώτη από τις δύο διαφορετικές αποδείξεις της απειριοδικότητας που δίνονται στο άρθρο, και οι δύο με καινοτόμα στοιχεία. Η πρώτη απόδειξη ακολουθεί τη δομή του Σχήματος 5.3, και βασίζεται σε μία νέα προσέγγιση στο Τμήμα 3 για την απόδειξη της απειριοδικότητας στο επίπεδο. Παρατηρούμε ότι κάθε πλακόστρωση με το καπέλο αντιστοιχεί σε δύο διαφορετικές πλακοστρώσεις με τριγωνικά πολυόμινο¹, εκ των οποίων η μία έχει τα δύο τρίτα της επιφάνειας της άλλης. Αν υπήρχε ισχυρά περιοδική πλακόστρωση με το καπέλο, τότε και οι δύο άλλες πλακοστρώσεις θα ήταν ισχυρά περιοδικές. Αποδεικνύουμε ότι τότε τα πλέγματα μεταφορών στις πλακοστρώσεις με τριγωνικά πολυόμινο θα έπρεπε να σχετίζονται με μία ομοιότητα· αλλά καμία ομοιότητα μεταξύ πλεγμάτων μεταφορών στην κανονική τριγωνική πλακόστρωση δεν μπορεί να έχει λόγο κλίμακας $\sqrt{2}$, όπως απαιτείται από την αναλογία των επιφανειών. Το επιχείρημα αυτό δεν αποδεικνύει την ύπαρξη πλακόστρωσης και πρέπει να συνδυαστεί με ρητή κατασκευή πλακόστρωσης για να ολοκληρωθεί η απόδειξη της απειριοδικότητας.

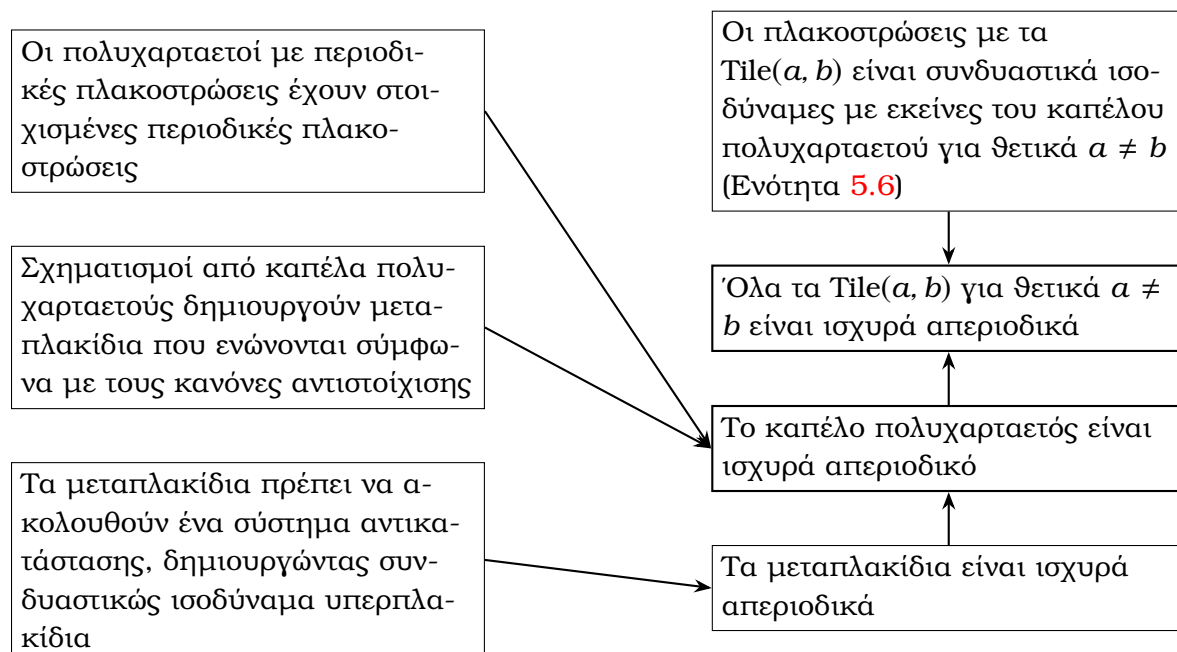
Η δεύτερη απόδειξη, που δεν παρουσιάζεται εδώ λεπτομερώς, ακολουθεί τη δομή του Σχήματος 5.4. Εδώ οι συγγραφείς ακολουθούν γενικά την προσέγγιση του Berger, αλλά πρέπει να ξεκινήσουν με ένα καινοτόμο βήμα ώστε να φτάσουν στο

¹polyomino:πολυόμινο, όπως το domino:ντόμινο



Σχήμα 5.3: Η δομή της πρώτης απόδειξης απεριοδικότητας

σημείο όπου μια τέτοια απόδειξη είναι δυνατόν να εφαρμοστεί. Πρώτα αποδεικνύεται ότι σε κάθε πλακόστρωση με το καπέλο πολυχαρταετό, κάθε πλακίδιο ανήκει μοναδικά σε μία από τέσσερις διακριτές συστάδες που ονομάζονται μεταπλακίδια, οι οποίες κληρονομούν κανόνες αντιστοίχισης από τη γεωμετρία των καπέλων που τις συνθέτουν. Τα μεταπλακίδια αφαιρούν τις λεπτομέρειες των επιμέρους καπέλων και υποστηρίζουν μία τυπική ιεραρχική κατασκευή. Έπειτα, οι συγγραφείς προχωρούν σε μία επαγωγική απόδειξη απεριοδικότητας τύπου Berger. Αποδεικνύεται ότι κάθε πλακίδιο σε οποιαδήποτε πλακόστρωση με τα τέσσερα μεταπλακίδια ανήκει μοναδικά σε μία ιεραρχία υπερπλακιδίων — ουσιαστικά συνδυαστικά αντίγραφα των μεταπλακιδίων — σε όλο και μεγαλύτερες κλίμακες. Η απόδειξη είναι κατασκευαστική. Αποδεικνύεται ότι κάθε μεταπλακίδιο ανήκει μοναδικά σε ένα υπερπλακίδιο πρώτου επιπέδου, και ότι αυτά τα υπερπλακίδια έχουν την ίδια συνδυαστική δομή με τα μεταπλακίδια. Συνεπώς, τα υπερπλακίδια πρώτου επιπέδου βρίσκονται μοναδικά μέσα σε υπερπλακίδια δευτέρου επιπέδου με την ίδια συνδυαστική δομή,



Σχήμα 5.4: Η δομή της δεύτερης απόδειξης απεριοδικότητας

και ούτω καθεξής για τα επόμενα επίπεδα. Αυτή η κατασκευή αποδεικνύει ότι μία πλακόστρωση με αντίγραφα των μεταπλακιδίων πρέπει να είναι απεριοδική, διότι αν υπήρχε μεταφορική συμμετρία, τότε αυτές οι ιεραρχίες υπερπλακιδίων δεν θα μπορούσαν να είναι μοναδικές. Επίσης δείχνει ότι τα μεταπλακίδια (και άρα τα καπέλα) δημιουργούν πλακοστρώσεις του επιπέδου, διότι κατασκευάζουμε συστάδες αυθαίρετα μεγάλου μεγέθους (Θεώρημα Επέκτασης). Δεν γνωρίζουμε προηγούμενη εργασία που να χρησιμοποιεί μία μεταπλακιδιοειδή κατασκευή ως ενδιάμεσο στάδιο σε απόδειξη απεριοδικότητας.

Λόγω της συνδυαστικής πολυπλοκότητας του καπέλου πολυχαρταετού, σημαντικό μέρος της δεύτερης απόδειξης βασίζεται σε εξαντλητική απαρίθμηση περιπτώσεων, την οποία οι συγγραφείς πραγματοποίησαν και διασταύρωσαν με δύο ανεξάρτητες υλοποιήσεις λογισμικού, αναπτυγμένες από δύο εκ των συγγραφέων ανεξάρτητα. Οι υπολογισμοί αυτοί είναι αναγκαστικά ειδικής χρήσης και ουσιαστικά μη διαφωτιστικοί. Αυτή η ανάλυση περιπτώσεων είναι αναγκαία μόνο για να δείξει ότι όλες οι πλακοστρώσεις ακολουθούν τη δομή αντικατάστασης· δεν είναι απαραίτητη για να αποδειχθεί η ύπαρξη πλακόστρωσης και άρα δεν είναι απαραίτητη για να αποδειχθεί ότι το πλακίδιο είναι απεριοδικό, δεδομένης της απόδειξης στην Ενότητα 5.3 ότι δεν υπάρχει περιοδική πλακόστρωση.

Στην Ενότητα 5.4 βλέπουμε ότι κάθε πλακόστρωση με καπέλα περιέχει αναγκαστικά μείγμα από ανεστραμμένα και μη ανεστραμμένα πλακίδια. Συνεπώς, η ιδιότητα του καπέλου ως μονοπλακίδιο εξαρτάται από το αν θεωρεί κανείς ένα σχήμα και την ανάκλασή του ως ταυτόσημα. Κατά τη μακροχρόνια παράδοση της βιβλιογραφίας περί πλακοστρώσεων (ήδη από τα Στοιχεία του Ευκλείδη), τα σχήματα θεωρούνται

ταυτόσημα αν ταυτίζονται υπό οποιαδήποτε ευκλείδεια ισομετρία, συμπεριλαμβανομένων αυτών που αντιστρέφουν τον προσανατολισμό. Συνεπώς, το καπέλο θεωρείται δικαίως μονοπλακίδιο. Ωστόσο, αυτή η πιθανή επιφύλαξη υπογραμμίζει τη σημασία του να λαμβάνεται υπόψη το πλαίσιο στο οποίο τίθεται το πρόβλημα της πλακόστρωσης: ο γεωμετρικός χώρος στον οποίο εργαζόμαστε, οι συνθήκες στα πλακίδια και τους κανόνες αντιστοίχισης, και οι συγκεκριμένες οικογένειες ισομετριών που επιτρέπεται να χρησιμοποιούμε. Η ποικιλία των ιδεών που συζητήθηκαν στην αρχή αυτής της ενότητας καταδεικνύει το πώς το πλαίσιο μπορεί να επηρεάσει το πρόβλημα της απεριοδικότητας.

5.1.3 Υπολειπόμενη ορολογία

Συμπληρώνουμε όση ορολογία δεν αναφέρθηκε σε προηγούμενα κεφάλαια και θα μας χρειαστεί:

Ορισμός 5.49. Δεδομένης μιας πλακόστρωσης $\mathcal{T}$, ένα **πολύ-πλακίδιο- $\mathcal{T}$** είναι ένας κλειστός τοπολογικός δίσκος που είναι ένωση πεπερασμένου πλήθους πλακιδίων από την $\mathcal{T}$ · με άλλα λόγια, είναι η ένωση των πλακιδίων ενός μπαλιώματος εντός της $\mathcal{T}$. Τα πολύ-πλακίδια- $\mathcal{T}$ αναφέρονται επίσης γενικά ως **πολύμορφα**. Μπορούν επίσης να οριστούν ώστε να επιτρέπεται να έχουν οπές. Επειδή μας ενδιαφέρουν κυρίως πλακίδια που δημιουργούν μονοεδρικές πλακοστρώσεις, δεν είναι γενικά σημαντικό για τους σκοπούς του παρόντος κειμένου αν επιτρέπονται ή όχι σχήματα με οπές.

Ορισμός 5.50. Μια πλακόστρωση είναι **ασθενώς περιοδική** αν η ομάδα συμμετρίας της περιέχει στοιχείο απείρου τάξεως· στο επίπεδο αυτό σημαίνει ότι περιέχει μία μη μηδενική μεταφορά. Μια πλακόστρωση είναι **ισχυρώς περιοδική** αν η ομάδα συμμετρίας της έχει διακριτή υποομάδα με συμπαγή τροχιά στον πλακοστρωμένο χώρο. Στον Ευκλείδειο χώρο, όλες οι ισχυρώς περιοδικές πλακοστρώσεις είναι επίσης ασθενώς περιοδικές.

Ορισμός 5.51. Ένα σύνολο από πλακίδια (ή ένα μόνο πλακίδιο) είναι **ασθενώς α-περιοδικό** αν δημιουργεί πλακόστρωση αλληλά δεν δημιουργεί ισχυρώς περιοδική πλακόστρωση, και **ισχυρώς απεριοδικό** αν δημιουργεί πλακόστρωση αλληλά δεν δημιουργεί ασθενώς περιοδική πλακόστρωση.

Κάθε πεπερασμένο σύνολο πολυγώνων στο επίπεδο που δημιουργεί μια ασθενώς περιοδική πλακόστρωση ακμής-προς-ακμή δημιουργεί επίσης μια ισχυρώς περιοδική πλακόστρωση [63, Θεώρημα 3.7.1]. Ένα παρόμοιο αλλά απλούστερο επιχείρημα δείχνει ότι το ίδιο ισχύει για ένα πεπερασμένο σύνολο πολύ-πλακιδίων- $\mathcal{T}$, όπου η $\mathcal{T}$ είναι η ίδια μια ισχυρώς περιοδική πλακόστρωση και η ασθενώς περιοδική πλακόστρωση αποτελείται από αντίγραφα των πλακιδίων όλα ευθυγραμμισμένα με το ίδιο υποκείμενο αντίγραφο της $\mathcal{T}$, αντί να είναι ακμής-προς-ακμή. Έτσι, σε τέτοια

συμφραζόμενα δεν είναι απαραίτητο να διακρίνουμε την ασθενή από την ισχυρή απεριοδικότητα και αναφερόμαστε στα πλακίδια και στα σύνολα πλακιδίων απλώς ως απεριοδικά.

Ορισμός 5.52. Μια **ομοιόμορφη** ή **Αρχιμήδεια πλακόστρωση** είναι μία πλακόστρωση ακμή-προς-ακμή με κανονικά πολύγωνα και ομάδα συμμετρίας μεταθετική ως προς τις κορυφές. Στο Ευκλείδειο επίπεδο, μια ομοιόμορφη πλακόστρωση μπορεί να περιγραφεί απαριθμώντας τη σειρά των κανονικών πολυγώνων γύρω από κάθε κορυφή, αποδίδοντας συμβολισμό όπως (3.4.6.4).

Ορισμός 5.53. Μια **πλακόστρωση Laves** είναι μία πλακόστρωση ακμή-προς-ακμή, μονοεδρική, με κυρτά πολύγωνα, με κανονικές κορυφές (όλες οι γωνίες μεταξύ διαδοχικών πλευρών σε μία κορυφή είναι ίσες) και ομάδα συμμετρίας μεταθετική ως προς τα πλακίδια. Χρησιμοποιείται ανάλογος συμβολισμός, όπως [3.4.6.4], ο οποίος απαριθμεί τη σειρά των βαθμών των κορυφών γύρω από κάθε πλακίδιο, και με την κατάλληλη έννοια, οι πλακοστρώσεις Laves είναι δυϊκές προς τις ομοιόμορφες πλακοστρώσεις.

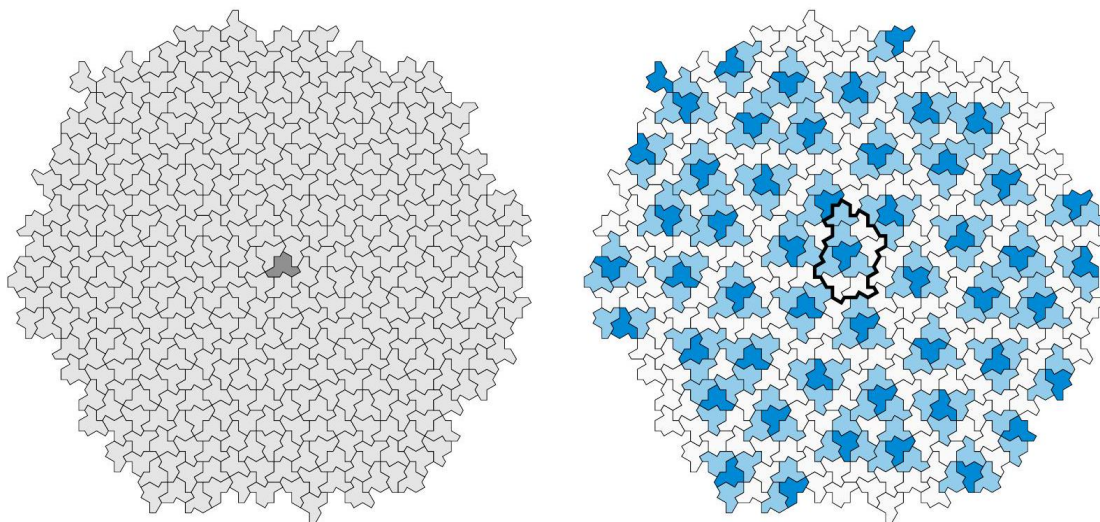
5.2 Το Καπέλο Πολυχαρταετός και οι πλακοστρώσεις του

Πριν προχωρήσουμε στην πλήρη απόδειξη της απεριοδικότητας, παρουσιάζουμε πρώτα μια λιγότερο επίσημη εισαγωγή στο πλακίδιο-καπέλο, συμπεριλαμβανομένης και μιας ρητής κατασκευής μιας πλακόστρωσης. Η ενότητα αυτή εξυπηρετεί τρεις στόχους. Πρώτον, προσφέρει αφθονία οπτικής διαίσθησης, που παρέχει πλαίσιο για την τεχνική φύση των αποδείξεων που θα ακολουθήσουν. Δεύτερον, δίνει μια αίσθηση της διαδικασίας ανακάλυψης και ανάλυσης των συγγραφέων, αν και δεν πρέπει να εκληφθεί ως γραμμική αφήγηση. Τρίτον, περιλαμβάνει κάποιες παρατηρήσεις που δεν θα εξεταστούν περαιτέρω στην παρούσα εργασία, αλλά ίσως προσφέρουν ευκαιρίες για μελλοντική μελέτη από άλλους.

Ο πρώτος συγγραφέας (Smith) ξεκίνησε τη μελέτη του καπέλου πολυχαρταετού στο πλαίσιο μιας ανοιχτής οπτικής διερεύνησης σχημάτων και των ιδιοτήτων πλακόστρωσής τους. Εργαζόμενος κυρίως με το χέρι και με τη βοήθεια του λογισμικού PolyForm Puzzle Solver του Scherphuis (jaapsch.net/puzzles/polysolver.htm), δεν εντόπισε προφανή εμπόδια στην κατασκευή μεγάλων μπαλωμάτων, αλλά ούτε και κάποιο ξεκάθαρο σύνολο πλακιδίων που να καλύπτει περιοδικά το επίπεδο.

Επειδή το καπέλο είναι πολύμορφο, ήταν φυσικό να επιχειρηθεί μια αρχική διάγνωση των ιδιοτήτων πλακόστρωσής του με υπολογιστικά μέσα. Τροποποιήθηκε το λογισμικό του Kaplan βασισμένο στο SAT για αριθμούς Heesch [80], και προσδιόρισε ότι αν το καπέλο δεν καλύπτει το επίπεδο, τότε ο αριθμός Heesch του είναι τουλάχιστον 16. Αντίστοιχα, τροποποιήθηκε το λογισμικό πλακόστρωσης πολυμορφών του Myers [106] ώστε να διαπιστώσουν ότι αν το καπέλο δημιουργεί περιοδικές

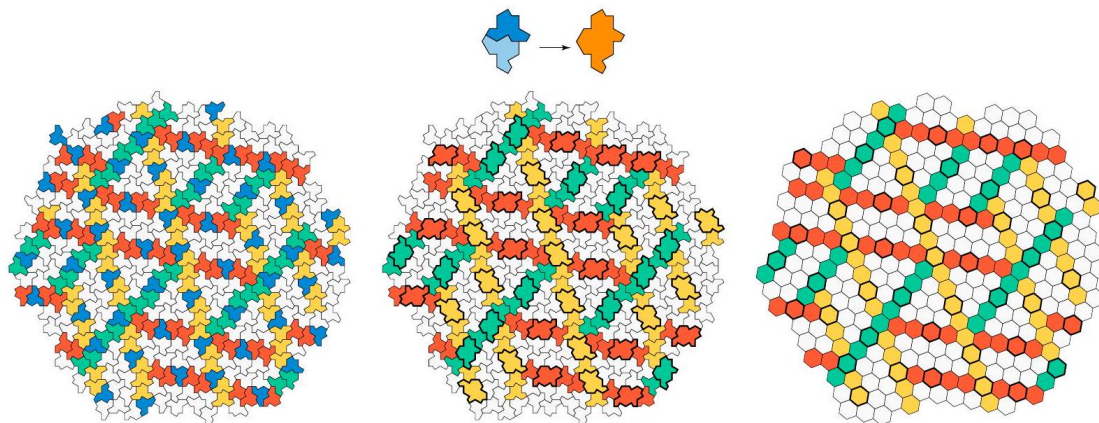
πλακοστρώσεις, τότε ο ισοεδρικός αριθμός του είναι τουλάχιστον 64. Αυτοί οι δύο υπολογισμοί ήδη αποδεικνύουν ότι το καπέλο παρουσιάζει εξαιρετικό ενδιαφέρον—αν αποδεικνυόταν ότι δεν είναι einstein, θα είχε καταρρίψει είτε το ρεκόρ των αριθμών Heesch είτε των ισοεδρικών αριθμών, και στις δύο περιπτώσεις με μεγάλη διαφορά.



Σχήμα 5.5: Μπάλωμα 10 στρώσεων με 391 καπέλα που δείχνει αραιά ανακλασμένα πλακίδια, το καθένα περικυκλωμένο από τρία μη ανακλασμένα.

Το Σχήμα 5.5 δείχνει ένα υπολογιστικά παραγόμενο μπάλωμα 10 στρώσεων (δηλαδή, δέκα ομόκεντρους δακτυλίους πλακιδίων γύρω από ένα σκιασμένο κεντρικό, όπου κάθε πλακίδιο ενός δακτυλίου εφάπτεται στον εσωτερικό του σε τουλάχιστον ένα σημείο). Δημιουργήθηκε επιτρέποντας στο λογισμικό του Karlan να εργαστεί προς τα έξω μέχρι αυτή την ακτίνα, και έπειτα διακόπτοντάς το χειροκίνητα. Αρχικά, είναι δύσκολο να εντοπιστεί οποιαδήποτε δομή στο μπάλωμα. Ωστόσο, με το χρωματισμό των πλακιδίων με διαφορετικούς τρόπους, εμφανίζονται σαφή «χαρακτηριστικά». Φυσικά, δεν μπορούμε να συναγάγουμε οριστικά χαρακτηριστικά άπειρων πλακοστρώσεων από ένα πεπερασμένο μπάλωμα. Πρέπει να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί με τα πλακίδια κοντά στην περιφέρεια, όπου τα χαρακτηριστικά ενδέχεται να αλλοιώνονται λόγω της εγγύτητας με το κενό χώρο. Ωστόσο, για ένα επαρκώς μεγάλο μπάλωμα, μπορούμε να ελπίζουμε ότι τα πλακίδια κοντά στο κέντρο θα είναι αντιπροσωπευτικά των διαμορφώσεων που εμφανίζονται σε γενικές πλακοστρώσεις.

Ο σημαντικότερος χρωματισμός για τους σκοπούς της παρούσας εργασίας είναι αυτός που φαίνεται δεξιά στο Σχήμα 5.5. Ένα μεμονωμένο καπέλο είναι ασύμμετρο, οπότε σε οποιοδήποτε μπάλωμα μπορούμε να διακρίνουμε ανάμεσα σε «μη ανακλασμένα» και «ανακλασμένα» προσανατολισμένα πλακίδια. Στα μπαλώματα που υπολογίστηκαν, τα ανακλασμένα πλακίδια (σε σκούρο μπλε) κατανέμονται πάντα αραιά και ομοιόμορφα εντός πεδίου μη ανακλασμένων πλακιδίων. Κάθε ανακλασμένο πλακίδιο περιέχεται σε ταυτόσημο σύμπλεγμα εννέα πλακιδίων, όπου τα υπόλοιπα οκτώ είναι μη ανακλασμένα. Ένα τέτοιο σύμπλεγμα διακρίνεται με έντονο περίγραμμα

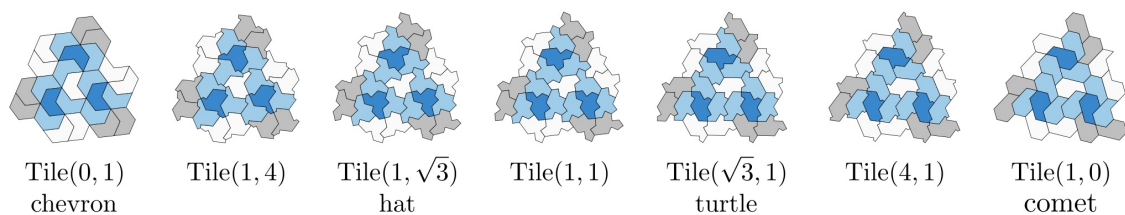


Σχήμα 5.6: Τα ανακλασμένα πλακίδια βρίσκονται σε αλυσίδες κατά έξι κατευθύνσεις (αριστερά). Η συγχώνευσή τους με γειτονικά πλακίδια (κέντρο) δίνει δομή αντίστοιχη εξαγωνικής πλακοστρώσης (δεξιά).

στην εικόνα. Το εσωτερικό του μπαλώματος μπορεί να καλυφθεί πλήρως με επικαλυπτόμενα αντίγραφα του συμπλέγματος. Στο εσωτερικό κάθε συμπλέγματος, μας ενδιαφέρει ιδιαίτερα το «κέλυφος» από τρία γαλάζια πλακίδια δίπλα σε κάθε ανακλασμένο. Κάθε ανακλασμένο πλακίδιο βρίσκεται σε ταυτόσημο, μη επικαλυπτόμενο αντίγραφο του κελύφους αυτού.

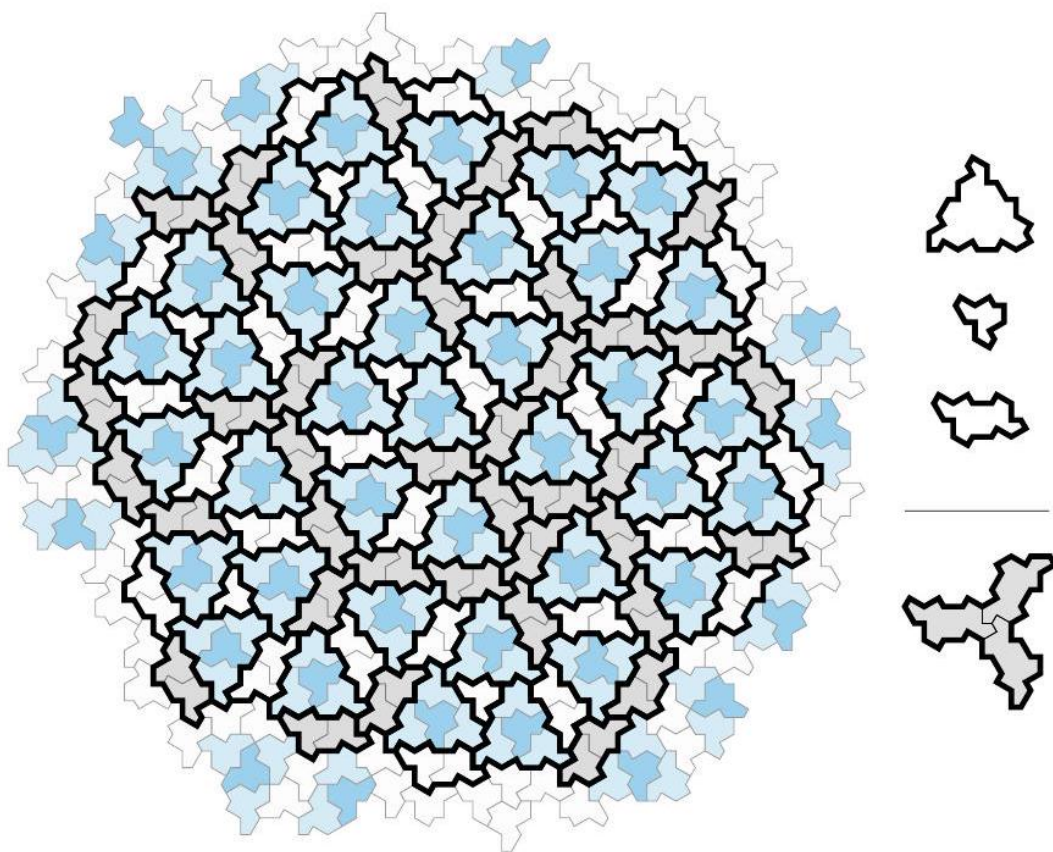
Οι συγγραφείς παρατήρησαν επίσης ότι τα μη ανακλασμένα πλακίδια τείνουν να σχηματίζουν μακρές «αλυσίδες» όμοιου προσανατολισμού, οι οποίες διακόπτονται περιστασιακά από ανακλασμένα πλακίδια. Οι αλυσίδες του παραδείγματος χρωματίζονται στο Σχήμα 5.6 (αριστερά). Επειδή τα καπέλα ευθυγραμμίζονται με το υποκείμενο πλέγμα ρόμβων, τα μη ανακλασμένα πλακίδια εμφανίζονται σε έξι προσανατολισμούς, που αντιστοιχούν στις έξι κατευθύνσεις των αλυσίδων. Οι αλυσίδες μπορεί να τερματίζουν σε ανακλασμένα πλακίδια ή να περνούν μέσα από αυτά, αλλά κάθε ανακλασμένο είναι κόμβος για τουλάχιστον δύο και το πολύ πέντε ακτίνες. Μακρές αλυσίδες εμφανίζουν σύνορα με συμμετρία ημιστροφής. Είναι δελεαστικό να αναζητήσουμε αναλογίες με γραμμικά χαρακτηριστικά άλλων απεριοδικών πλακοστρώσεων, όπως οι ράβδοι Ammann [63, Ενότητα 10.6] και τα σκουλίκια Conway [63, Ενότητα 10.5]. Τέλος, παρατήρησαν ότι οι αλυσίδες αυτές προσδίδουν μια αδρή εξαγωνική διάταξη στα καπέλα, η οποία φαίνεται ιδίως στις τριγωνικές και παραλληλόγραμμες δομές που περιβάλλονται από αλυσίδες. Αν συγχωνεύσουμε κάθε ανακλασμένο πλακίδιο με τον άμεσο γείτονά του όπως στο Σχήμα 5.6 (κέντρο), τότε όλα τα πλακίδια ενός μπαλώματος μπορούν να αντιστοιχηθούν ένα προς ένα με εξαγωνα, όπως φαίνεται δεξιά. Το εξαγωνικό πλέγμα μπορεί να χρησιμεύσει ως βολικό υπόβαθρο για υπολογισμούς στη συνδυαστική δομή των πλακοστρώσεων με καπέλα.

Κατά τη διάρκεια των διερευνήσεων του, ο πρώτος συγγραφέας ανακάλυψε ένα δεύτερο πολυχαρταετό που δεν φαινόταν να έχει πεπερασμένους ισοεδρικό αριθμό ή αριθμό Heesch, ένα σχήμα που ονομάζουμε «χελώνα» και αποτελεί ένωση δέκα



Σχήμα 5.7: Συνεχές πλήθος σχημάτων καπέλων από μεταβολή δύο πλευρών.

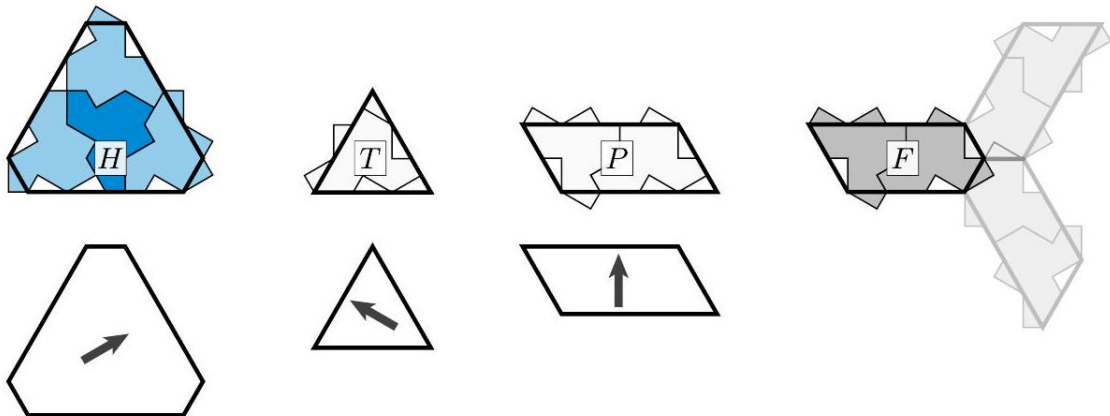
ρόμβων. Η ιδέα της ανακάλυψης δύο einsteins μαζί ήταν συναρπαστική! Ήταν ανακουφιστικό όταν διαπιστώθηκε ότι όχι μόνο σχετίζονταν το καπέλο και η χελώνα, αλλά ήταν σημεία ενός συνεχούς σχημάτων που καλύπτουν το επίπεδο με τον ίδιο τρόπο. Το καπέλο προκύπτει από το πλέγμα $[3, 4, 6, 4]$, άρα οι πλευρές του έχουν δύο μήκη, τα οποία μπορούμε να θεωρήσουμε ως 1 και $\sqrt{3}$ (με πλευρά μήκους 2 να θεωρείται ως δύο διαδοχικές πλευρές μήκους 1). Αυτές οι πλευρές έρχονται σε παράλληλα ζεύγη, επιτρέποντάς μας να επιλέξουμε ανεξάρτητα τα δύο μήκη ως οποιουσδήποτε μη αρνητικούς αριθμούς. Χρησιμοποιούμε τη σημειογραφία $\text{Tile}(a, b)$ με a, b όχι και τα δύο μηδέν, για το σχήμα που προκύπτει όταν οι πλευρές έχουν μήκος a και b αντί των 1 και $\sqrt{3}$ αντίστοιχα. Σημειώνουμε ότι $\text{Tile}(a, b) \sim \text{Tile}(ka, kb)$ για κάθε $k \neq 0$.



Σχήμα 5.8: Συμπλέγματα πλακιδίων στο μπάλωμα.

Δεδομένου του χρωματισμού στο Σχήμα 5.6, ο οποίος απεικονίζει μη επικαλυπτόμενα συμπλέγματα ανακλώμενων πλακιδίων και τα περιβλήματά τους, είναι φυσικό να αναρωτηθούμε αν τα υπόλοιπα μη συσχετισμένα πλακίδια στο μπάλωμα σχηματίζουν με αξιόπιστο τρόπο συμπλέγματα άλλου τύπου. Το Σχήμα 5.8 δείχνει ότι μπορούμε να καταλογίσουμε όλα τα υπόλοιπα πλακίδια χρησιμοποιώντας δύο επιπλέον τύπους συμπλεγμάτων (που φαίνονται ξεχωριστά δεξιά). Πρώτον, όπου τρία περιβλήματα συναντώνται, περικλείουν ένα μοναδικό απομονωμένο πλακίδιο, το οποίο πρέπει να συμπεριληφθεί ως σύμπλεγμα μεγέθους ένα. Στη συνέχεια, τα υπόλοιπα πλακίδια ομαδοποιούνται σε αντίγραφα ενός συμπλέγματος παραλληλογράμμου σχήματος και μεγέθους δύο. Αυτά εμφανίζονται σε δύο ποικιλίες, ανάλογα με τη τοπική διάταξη των συμπλεγμάτων γύρω τους. Στην πρώτη περίπτωση, χρωματισμένη λευκή στο σχέδιο, το παραλληλόγραμμο εφάπτεται σε δύο περιβλήματα κατά μήκος των μακριών του πλευρών. Στη δεύτερη περίπτωση, χρωματισμένη γκρι, η μία άκρη του παραλληλογράμμου ενώνεται με ένα τοπικό κέντρο τριπλής στροφής, συνδέοντας έξι καπέλα σε ένα σχήμα προπέλας με τρεις βραχίονες που ονομάζεται τρισκέλιο. Ένα τρισκέλιο φαίνεται απομονωμένο στο κάτω δεξί μέρος του Σχήματος 5.8.

Αυτά τα συμπλέγματα αποτελούν το σημείο εκκίνησης για τον ορισμό ενός συστήματος αντικατάστασης, το οποίο μπορεί να επαναληφθεί ώστε να παραχθούν μπαλώματα καπέλων αυθαίρετου μεγέθους. Οι κανόνες αντικατάστασης δεν εφαρμόζονται απευθείας στα καπέλα. Αντ' αυτού, προκύπτουν νέα μεταπλακίδια από τα συμπλέγματα, και κατασκευάζεται ένα σύστημα αντικατάστασης βασισμένο σε αυτά. Τα αρχικά καπέλα απλώς ακολουθούν την πορεία.

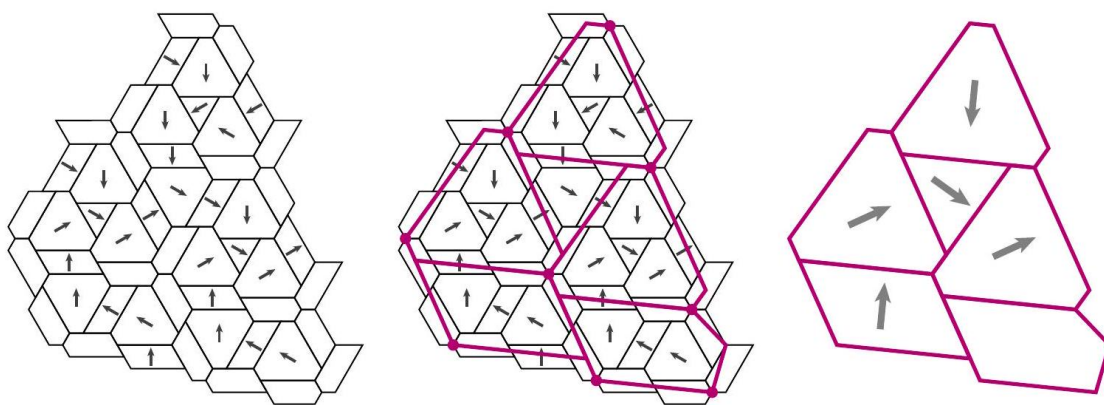


Σχήμα 5.9: Τα τέσσερα μεταπλακίδια που προκύπτουν από απλοποιημένα σύνορα συμπλεγμάτων.

Το Σχήμα 5.9 δείχνει τα σχήματα των μεταπλακιδίων. Κάθε ένα κατασκευάζεται απλοποιώντας το σύνορο ενός από τα συμπλέγματα καπέλων του Σχήματος 5.8. Για να διασφαλίσουμε ότι τα μεταπλακίδια δεν επικαλύπτονται, πρέπει να διακρίνουμε ανάμεσα στις δύο ποικιλίες παραλληλογράμμων δύο καπέλων που συζητήθηκαν πα-

ραπάνω. Συγκεκριμένα, αφαιρούμε μια τριγωνική εγκοπή από το παραλληλόγραμμο που συνδέεται με κάθε βραχίονα ενός τρισκελίου. Έτσι, τα τρία συμπλέγματα αποδίδουν τέσσερα μεταπλακίδια: ένα εξάγωνο (H), ένα ισόπλευρο τρίγωνο (T), ένα παραλληλόγραμμο (P) και ένα πεντάγωνο τρισκέλιο (F). Τα αρχικά συμπλέγματα πλέον μπορούν να θεωρηθούν ότι προσδίδουν στα μεταπλακίδια κανόνες αντιστοίχισης κατά μήκος των πλευρών τους· αυτοί οι κανόνες θα διατυπωθούν με ακρίβεια σε επόμενη ενότητα.

Τα μεταπλακίδια H , T και P διαθέτουν στροφικές συμμετρίες. Στην κάτω σειρά του Σχήματος 5.9, σημειώνουμε τα πλακίδια με βέλη που δείχνουν τον επιθυμητό προσανατολισμό τους. Σε κάθε περίπτωση, το βέλος δείχνει προς την (μοναδική) πλευρά του μεταπλακιδίου από την οποία προεξέχουν δύο γειτονικοί χαρταετοί. Τα βέλη επαρκούν για να διακρίνουμε τις συμμετρικές στροφές και η κατασκευή μας δεν θα χρησιμοποιεί ανακλάσεις. (Δεν θα χρειαστούμε αυτά τα βέλη σε επόμενες ενότητες, καθώς ο προσανατολισμός των μεταπλακιδίων θα προκύπτει από τις ετικέτες στις πλευρές τους.)

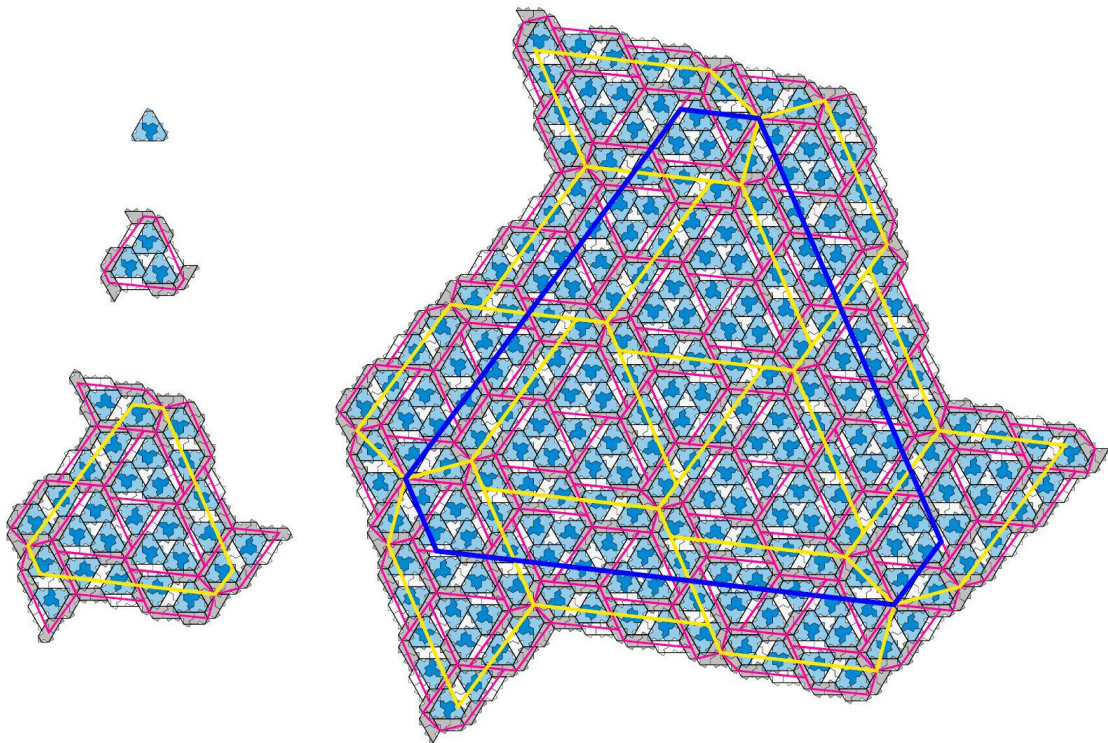


Σχήμα 5.10: Διαδικασία συναρμολόγησης υπερπλακιδίων και προσδιορισμού των περιγραμμάτων τους από προσανατολισμένα μεταπλακίδια.

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε μία οικογένεια υπερπλακιδίων που είναι ανάλογα με τα μεταπλακίδια, ακολουθώντας τη διαδικασία που απεικονίζεται στο Σχήμα 5.10. Αρχικά συναρμολογούμε το μπάλωμα από προσανατολισμένα μεταπλακίδια που φαίνεται στα αριστερά. Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι τα αθέατα καπέλα που φέρουν αυτά τα πλακίδια συναρμόζουν χωρίς κενά και χωρίς επικαλύψεις. Αυτό το μπάλωμα είναι αρκετά μεγάλο ώστε να περιλαμβάνει ένα ή περισσότερα αντίγραφα κάθε υπερπλακιδίου, τα οποία επισημαίνονται με κόκκινο χρώμα στο κεντρικό διάγραμμα. Τα σχήματα των υπερπλακιδίων καθορίζονται πλήρως από δύο περιορισμούς: οι κόκκινες τελείες συμπίπτουν με τα κέντρα των τρισκελίων, και όλες οι εσωτερικές γωνίες των εξαγωνικών περιγραμμάτων είναι 120° . Το διάγραμμα στα δεξιά δείχνει τα περιγράμματα των υπερσυμπλεγμάτων απομονωμένα, με τους κληρονομημένους προσανατολισμούς. Εδώ, κάθε βέλος δείχνει προς τη μοναδική πλευρά του υπερπλακιδίου που διέρχεται από ένα πλακίδιο τύπου P με φορά προς τα έξω από την

προηγούμενη γενιά.

Μια πρώτη ματιά, δείχνει ότι αυτά τα υπερπλακίδια είναι μεγεθυμένα αντίγραφα των μεταπλακιδίων. Αν ήταν έτσι, θα μπορούσαμε ίσως να προχωρήσουμε στον ορισμό μιας τυπικής πλακόστρωσης αντικατάστασης, όπου κάθε μεγεθυμένο υπερπλακίδιο θα συσχετιζόταν με ένα σύνολο από ευκλείδια μετασχηματισμένα πλακίδια. Ωστόσο, με την προφανή εξαίρεση του T , κανένα από τα υπερπλακίδια δεν είναι όμοιο με το αντίστοιχο μεταπλακίδιο. Παρ' όλα αυτά, τα υπερπλακίδια είναι πλήρως συμβατά με την κατασκευή του Σχήματος 5.10 — μπορούν να διαταχθούν στην ίδια διάταξη που φαίνεται αριστερά και να χρησιμοποιηθούν ως σκαλωσιά για την παραγωγή περιγραμμάτων υπερπλακιδίων 2ου επιπέδου (που συνεπάγεται την παραγωγή ενός πολύ μεγαλύτερου μπαλώματος από καπέλα). Πράγματι, η κατασκευή μπορεί να επαναληφθεί απεριόριστα πολλές φορές, με ελαφρώς διαφορετικά περιγράμματα σε κάθε γενιά. Συστήματα αντικατάστασης αυτού του τύπου, όπου οι διαδοχικές γενιές είναι συνδυαστικά αλλά όχι γεωμετρικά συμβατές, είναι σπάνια στον κόσμο των απεριόριστων πλακοστρώσεων. Εδώ αναγκαζόμαστε να εργαστούμε με τις ιδιότητες ενός σχήματος που ανακαλύφθηκε στη φύση, αντί να σχεδιάσουμε ένα πρωτοσύνολο ώστε να ανταποκρίνεται στις επιθυμίες μας. Για να δει κανείς αυτήν την κατασκευή σε δράση, μπορεί να δοκιμάσει το διαδραστικό εργαλείο απεικόνισης στο: cs.uwaterloo.ca/~csk/hat/.



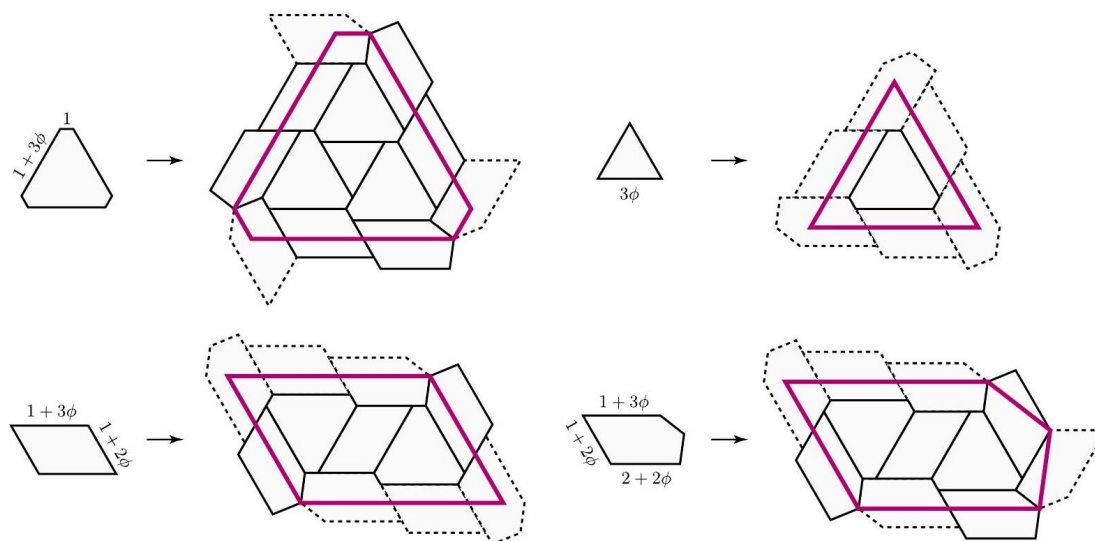
Σχήμα 5.11: Οι πρώτες γενιές υπερπλακιδίων H και τα αντίστοιχα μπαλώματα από καπέλα.

Γνωρίζουμε από το Σχήμα 5.9 ότι κάθε ένα από τα τέσσερα μεταπλακίδια μπορεί

να συσχετιστεί με ένα σύμπλεγμα από καπέλα. Η κατασκευή του Σχήματος 5.10 μπορεί τότε να επαναληφθεί απεριόριστα πολλές φορές ώστε να προκύψουν όλο και μεγαλύτερα μπαλώματα από μεταπλακίδια, και συνεπώς από καπέλα. Μπορούμε, για παράδειγμα, να εξετάσουμε τα υπερπλακίδια H που προκύπτουν μέσω αυτής της διαδικασίας επανάληψης, και το μπαλώμα από καπέλα που περιλαμβάνει το καθένα. Οι πρώτες γενιές των υπερπλακιδίων H απεικονίζονται στο Σχήμα 5.11. Αυτά τα μπαλώματα σχηματίζουν μία ακολουθία που αυξάνει την ακτίνα της απεριόριστα, κάθε μπαλώμα υποσύνολο του επόμενου. Το Θεώρημα Επέκτασης μας επιτρέπει να συνεχίσουμε αυτή τη διαδικασία επ' άπειρον, οδηγώντας στο ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 5.15. *Το καπέλο πολυχαρταετός δημιουργεί πλακοστρώσεις του επιπέδου.*

Φυσικά, αυτό το θεώρημα δεν είναι από μόνο του επαρκές για να αποδείξει την απεριοδικότητα —πρέπει επίσης να δείξουμε ότι το καπέλο δεν δημιουργεί καμία περιοδική πλακόστρωση. Σε επόμενη ενότητα επανεξετάζουμε αυτήν τη διαδικασία αντικατάστασης, παρακολουθώντας τους κανόνες αντιστοίχισης στις πλευρές των υπερπλακιδίων μετά από κάθε βήμα. Εκεί δείχνουμε ότι κάθε πλακόστρωση από καπέλα αναγκαστικά υπακούει στους κανόνες αντικατάστασης που δίνονται εδώ. Η κατασκευή εκείνης της ενότητας παρέχει επίσης μία πιο λεπτομερή απόδειξη ότι το καπέλο πλακοστρώνει το επίπεδο.

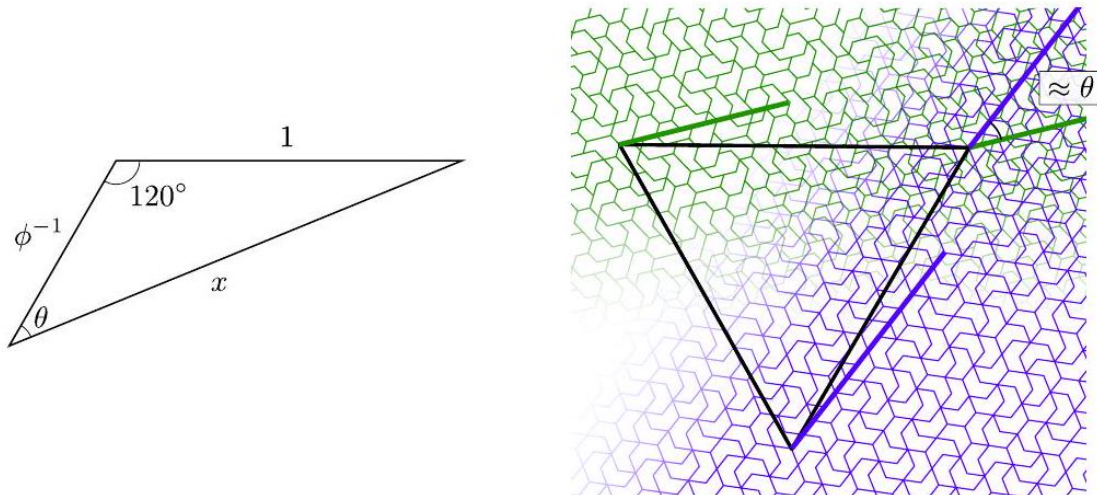


Σχήμα 5.12: Τα συγκλίνοντα πλακίδια και οι κανόνες αντικατάστασης τους.

Τα σχήματα κάθε γενιάς υπερπλακιδίων διαφέρουν από αυτά της προηγούμενης. Ωστόσο, κανονικοποιώντας τα πλακίδια ως προς το μέγεθος, έχουμε υπολογίσει ότι συγκλίνουν σε ένα σταθερό σημείο—ένα σύνολο πλακιδίων που πραγματικά δημιουργούν μεγεθυμένα αντίγραφα τους βάσει της κατασκευής του Σχήματος 5.10. Αυτά τα συγκλίνοντα σχήματα είναι ιδιαίτερα ενδιαφέροντα διότι μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να ορίσουν ένα γεωμετρικό σύστημα αντικατάστασης που λειτουργεί μέσω διόγκωσης και αντικατάστασης. Τα συγκλίνοντα πλακίδια, μαζί με τους

κανόνες αντικατάστασης, φαίνονται στο Σχήμα 5.12. Λόγω της σύνδεσής τους με τα αρχικά μεταπλακίδια του Σχήματος 5.9, γνωρίζουμε ότι αυτή η πλακόστρωση αντικατάστασης είναι απειριοδική όταν τα πλακίδια φέρουν κατάλληλους κανόνες αντιστοίχισης στις πλευρές τους. Μπορούμε επίσης να χρησιμοποιήσουμε αυτό το σύστημα ως εναλλακτικό μέσο κατασκευής μπαλωμάτων από καπέλα. Δεν μπορούμε απλώς να συσχετίσουμε ένα σύμπλεγμα καπέλων με κάθε συγκλίνον πλακίδιο, αλλά ένα μπάλωμα από συγκλίνοντα πλακίδια είναι συνδυαστικά ισοδύναμο με το αντίστοιχο μπάλωμα από μεταπλακίδια, τα οποία φέρουν καπέλα.

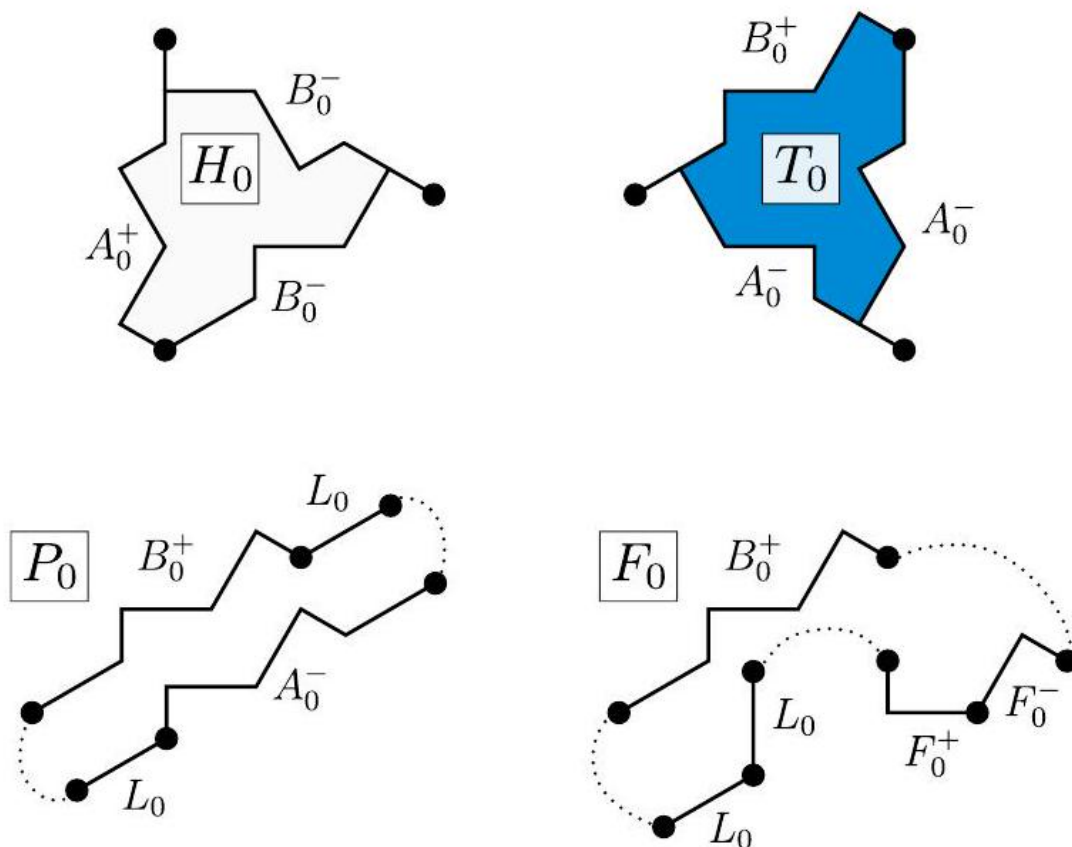
Αν αλλάξουμε κλίμακα στα συγκλίνοντα πλακίδια ώστε οι κοντές πλευρές των H να έχουν μήκος 1, τότε όλες οι πλευρές των πλακιδίων —εκτός από τις δύο F που είναι προσκείμενες σε ένα κέντρο τρισκελίου— θα έχουν μήκος στο σύνολο $\mathbb{Z}[\phi]$, όπου ϕ είναι η χρυσή τομή. Επιπλέον, το σύστημα αντικατάστασης έχει συντελεστή διόγκωσης ίσο με ϕ^2 . Ο παράγοντας ϕ^2 μπορεί επίσης να προκύψει αλγεβρικά, μέσω υπολογισμού ιδιοτιμής στον πίνακα αντικατάστασης που αντιστοιχεί στο σύστημα που παρουσιάζεται σε αυτή την ενότητα.



Σχήμα 5.13: Σχέση ανάμεσα στο ϕ και το $\sqrt{2}$ μέσα από ισόπλευρα τρίγωνα που προκύπτουν από τα κέντρα τρισκελίων.

Μια πρώτη ματιά, ίσως δείχνει ένα παράδοξο αφού εμφανίζεται το ϕ σε μια πλακόστρωση που συνδέεται στενά με την πλακόστρωση του Laves [3.4.6.4]· ενώ συνήθως εμφανίζεται πιο φυσικά σε περιβάλλοντα όπως οι πλακοστρώσεις του Penrose, οι οποίες χαρακτηρίζονται από γωνίες που προέρχονται από το κανονικό πεντάγωνο. Η παρουσία του ϕ φαίνεται να σχετίζεται άμεσα με την εμφάνιση του $\sqrt{2}$ στο επιχείρημα της επόμενης ενότητας. Αυτός ο αριθμός επίσης δεν αναμένεται σε κανονικές τριγωνικές πλακοστρώσεις ή σε συναφή πλαίσια (οι αποστάσεις είναι τετραγωνικές ρίζες ακέραιων που εκφράζονται μέσω της τετραγωνικής μορφής $x^2 + xy + y^2$, άρα οι αναμενόμενες ρίζες είναι του 3 και πρώτων της μορφής $6k + 1$). Ωστόσο, ισχύει ότι $1 + \phi^{-1} + \phi^{-2} = 2$, απ' όπου προκύπτει ότι τρίγωνο με γωνία 120° μεταξύ πλευρών

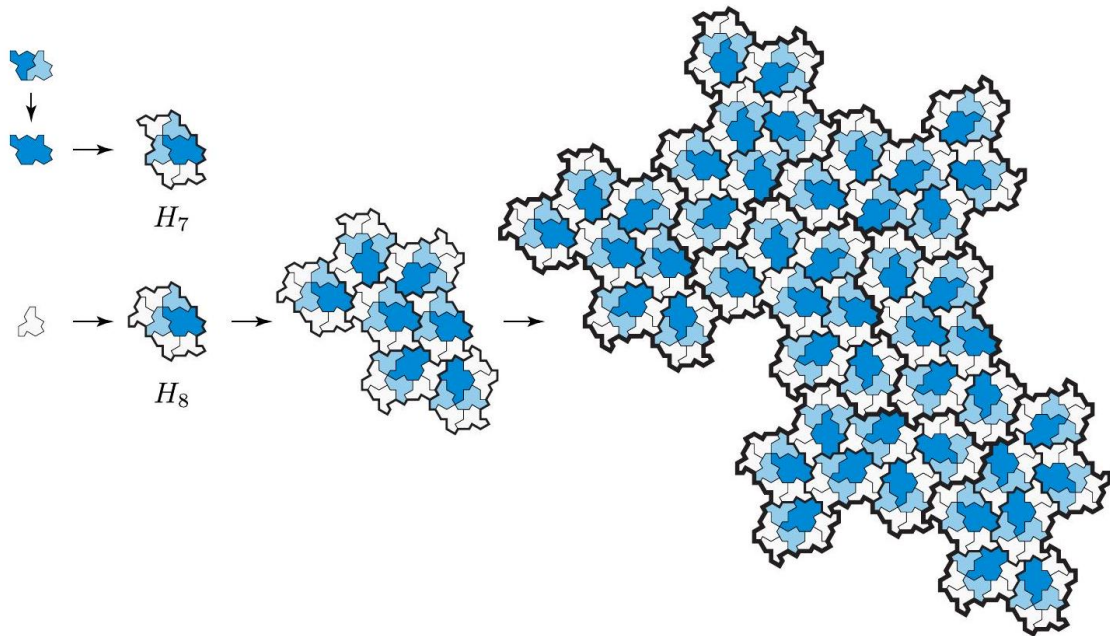
μήκους 1 και ϕ^{-1} έχει τρίτη πλευρά μήκους $\sqrt{2}$ (Σχήμα 5.13, αριστερά). Παρατηρούμε ότι σε οποιαδήποτε πλακόστρωση με $\text{Tile}(a, b)$ μπορούμε να κατασκευάσουμε διαρκώς μεγαλύτερα ισόπλευρα τρίγωνα των οποίων οι κορυφές συμπίπτουν με τα κέντρα των τρισκελίων (αυτά τα τρίγωνα αντιστοιχούν σε εναλλάξ γωνίες των H -μεταπλακιδίων και των υπερπλακιδίων τους). Τότε μπορούμε να επικαλύψουμε μία πλακόστρωση με πλακίδιο $\text{Tile}(1, 0)$ με μία στροφή και μεταφορά της πλακόστρωσης με $\text{Tile}(0, \sqrt{2})$ ώστε δύο τέτοια ισόπλευρα τρίγωνα να ευθυγραμμιστούν. Διαπιστώνουμε ότι τα πλέγματα των ισόπλευρων τριγώνων που υποστηρίζουν αυτές τις δύο πλακοστρώσεις μετατοπίζονται κατά γωνία που προσεγγίζει την $\tan^{-1} \sqrt{3/5}$, η οποία είναι μία από τις γωνίες του τριγώνου με πλευρές 1, ϕ^{-1} και $\sqrt{2}$, και ότι αυτή η προσέγγιση φαίνεται να συγκλίνει καθώς ευθυγραμμίζουμε μεγαλύτερα τρίγωνα (Σχήμα 5.13, δεξιά).



Σχήμα 5.14: Πιθανά υποσυσσωματώματα που προηγούνται των μεταπλακιδίων.

Η διάταξη τριών πλακιδίων H και ενός πλακιδίου T εντός ενός υπερπλακιδίου H μιμείται τη διάταξη ενός ανακλασμένου καπέλου και των τριών μη ανακλασμένων γειτόνων του μέσα σε ένα μεταπλακίδιο H . Φυσικά γεννάται η απορία εάν τα συσσωματώματα από καπέλα που απαρτίζουν τα μεταπλακίδια είναι πρωτογενή ή αν προηγούνται από ένα σύνολο «υποσυσσωματωμάτων» που εκκινούν τη διαδικασία αντικατάστασης ένα βήμα νωρίτερα. Μια πιθανή μορφή για τέτοια υποσυσσωμα-

τώματα παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.14. Οι ετικέτες στα σύνορα δηλώνουν κανόνες ταύτισης, οι οποίοι θα εξηγηθούν αναλυτικά σε επόμενη ενότητα. Παρατηρούμε ότι τα υποσυσσωματώματα P_0 και F_0 έχουν μηδενικό εμβαδό· τα σύνορά τους εμφανίζονται χωρισμένα σε πολλά τμήματα ώστε να καταστεί σαφής η αλληλουχία των πλευρών (στην περίπτωση του F_0 , μερικές από αυτές τις πλευρές τέμνουν άλλες). Ο καθορισμός του τι ακριβώς σημαίνει η διαμέριση μιας πλακοστρώσης σε υποσυσσωματώματα βάσει κανόνων ταύτισης —όταν ορισμένα υποσυσσωματώματα έχουν μηδενικό εμβαδό και κάποιες πλευρές έχουν μήκος μηδέν αλλά πρέπει παρ' όλα αυτά να εφάπτονται με σωστό προσανατολισμό— φαίνεται πιο δυσχερές από το αντίστοιχο επιχείρημα που βασίζεται στα μεταπλακίδια, και έτσι δεν προχωρούμε περαιτέρω με τα υποσυσσωματώματα.

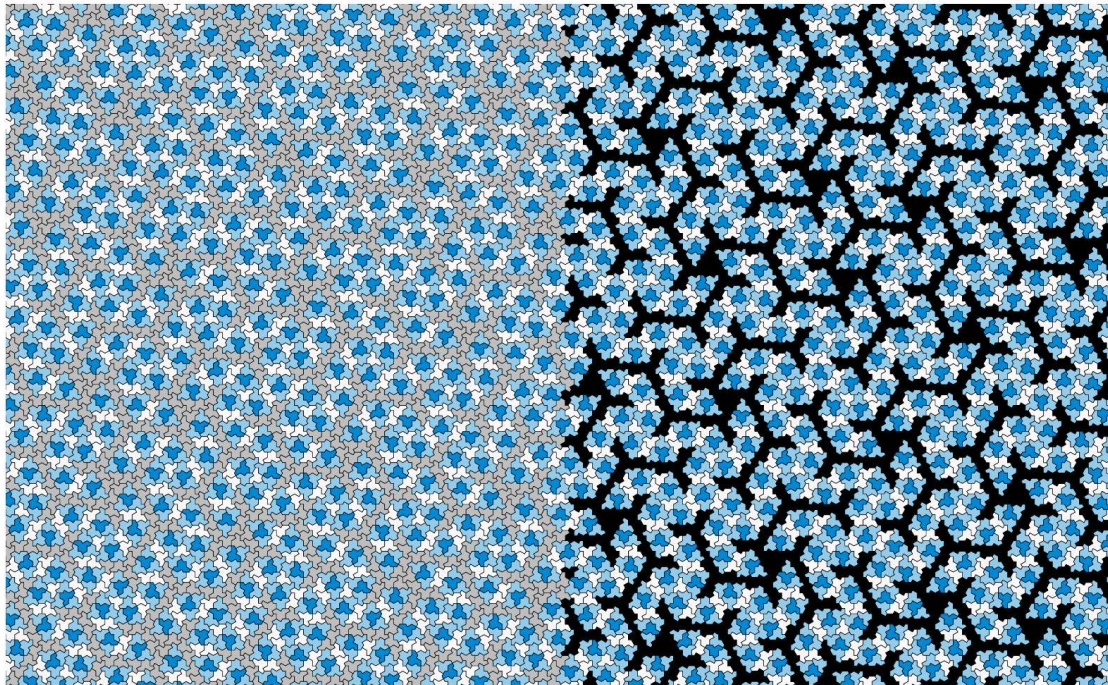


Σχήμα 5.15: Εναλλακτικό σύστημα αντικατάστασης βασισμένο σε δύο καπέλα.

Τέλος, στο Σχήμα 5.15 παρουσιάζεται ένα εναλλακτικό σύστημα αντικατάστασης βασισμένο σε διαφορετικό σύνολο συσσωματωμάτων. Εδώ κάθε ανακλασμένο καπέλο συγχωνεύεται με έναν συγκεκριμένο γείτονα από το κέλυφός του, κατά τρόπο παρόμοιο με το Σχήμα 5.6, ώστε να σχηματίσει την ένωση δύο καπέλων που φαίνεται πάνω αριστερά. Μπορούμε τότε να ορίσουμε μόνο δύο συνδυαστικούς κανόνες αντικατάστασης: ο πρώτος αντικαθιστά μια την ένωση δύο καπέλων με ένα συσσωμάτωμα που αποτελείται από ένα τέτοιο ζεύγος και πέντε καπέλα (επισημασμένο ως H_7 στο σχήμα), και ο δεύτερος αντικαθιστά ένα μεμονωμένο καπέλο με ένα συσσωμάτωμα που αποτελείται από ένα τέτοιο ζεύγος και έξι καπέλα (επισημασμένο ως H_8).

Όπως και με τα αρχικά μεταπλακίδια, αυτή η διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί για να παραχθεί μπάλωμα οποιουδήποτε μεγέθους, και έπειτα κάθε ένωση από δύο καπέλα μπορεί να διαχωριστεί πίσω στα δύο του καπέλα. Το σύστημα αυτό είναι

ελκυστικό λόγω του μινιμαλισμού του, αν και ίσως είναι πιο δύσχρηστο για την απόδειξη της απεριοδικότητας.



Σχήμα 5.16: Μεγάλο μπάλωμα πλακιδίων που αποδεικνύει την πλακόστρωση από το καπέλο.

Οι ιδέες που παρουσιάστηκαν σε αυτή την ενότητα είναι επαρκείς για να αποδείξουν ότι το καπέλο πράγματι δημιουργεί πλακοστρώσεις του επιπέδου. Το Σχήμα 5.16 προσφέρει ένα τελευταίο μεγάλο μπάλωμα ως επίδειξη. Στη δεξιά πλευρά της απεικόνισης παρατηρούμε ότι τα πλακίδια που ανήκουν στα τρισκέλια φαίνεται να σχηματίζουν μια συνεκτική δενδρική δομή που περιπλέκεται με μια άλλη δενδρική δομή των υπόλοιπων πλακιδίων. Η δομή αυτή θυμίζει εκείνες που εμφανίζονται σε άλλες απεριοδικές πλακοστρώσεις, όπως των Taylor-Socolar και της $1 + \epsilon + \epsilon^2$.

Ωστόσο, η επίδειξη μιας πλακόστρωσης είναι συνήθως το εύκολο μέρος της απόδειξης της απεριοδικότητας· πρέπει επίσης να αποδειχθεί ότι καμία από τις πλακοστρώσεις που δημιουργούνται από το καπέλο δεν μπορεί να είναι περιοδική. Στην ακριβώς επόμενη ενότητα παρουσιάζεται μια νέα γεωμετρική απόδειξη της απεριοδικότητας. Έπειτα, στις επόμενες, στρεφόμαστε σε ένα πιο τυπικό συνδυαστικό επιχείρημα που δείχνει ότι οι κανόνες αντιστοίχισης που προκύπτουν από το σύστημα αντικατάστασης που παρουσιάστηκε προηγουμένως δημιουργούν τις πλακοστρώσεις από το καπέλο.

5.3 Απεριοδικότητα με ενώσεις τριγωνικών πολυομίων

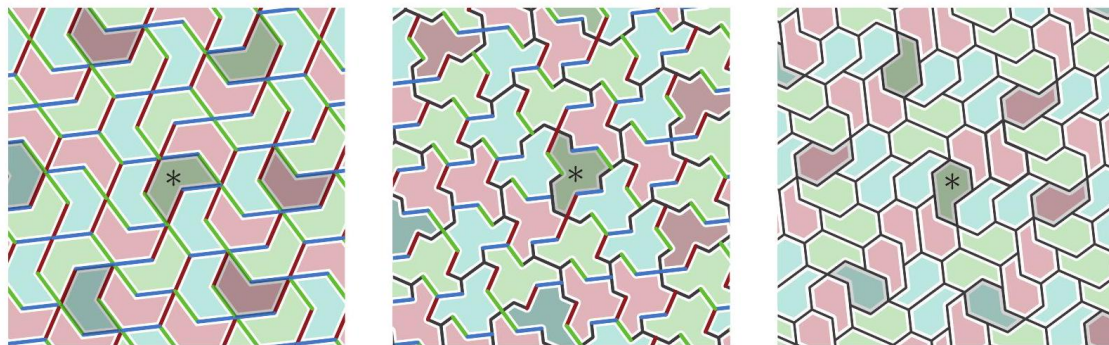
Στο Θεώρημα 5.15 αποδείξαμε ότι το καπέλο πολυχαρταετός είναι μονοπλακίδιο : δημιουργεί πλακοστρώσεις του επιπέδου. Η απόδειξη χρησιμοποίησε το σύστημα αντικατάστασης με μεταπλακίδια της Ενότητας 5.2, το οποίο περιγράφεται λεπτομερώς στις Ενότητες 5.4 και 5.5.

Σε αυτή την ενότητα δίνεται μια πιο άμεση απόδειξη της απεριοδικότητας που αξιοποιεί το γεγονός ότι το καπέλο ανήκει στο συνεχές $\text{Tile}(a, b)$ που εισήχθη στην Ενότητα 5.2. Όπως σημειώθηκε στο στην Ενότητα 5.1.3, ένα επίπεδο πλακίδιο που δεν δημιουργεί ισχυρά περιοδικές πλακοστρώσεις δεν μπορεί επίσης να δημιουργεί ασθενώς περιοδικές πλακοστρώσεις. Βασιζόμενοι σε αυτό το γεγονός και στο Θεώρημα 5.15, το επόμενο εδραιώνει το Θεώρημα 5.14.

Θεώρημα 5.16. Έστω $\mathcal{T}$ μια πλακόστρωση από το καπέλο πολυχαρταετός. Τότε η $\mathcal{T}$ δεν είναι ισχυρά περιοδική.

Απόδειξη. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι υπάρχει μια ισχυρά περιοδική πλακόστρωση $\mathcal{T}$ από το καπέλο πολυχαρταετός, το οποίο περιγράφεται ως $\text{Tile}(1, \sqrt{3})$ στην Ενότητα 5.2.

Στη πλακόστρωση $\mathcal{T}$, τα πλακίδια είναι αναγκαστικά ευθυγραμμισμένα με μια υποκείμενη πλακόστρωση Laves τύπου [3.4.6.4]. Αυτό το επιχείρημα θεμελιώνεται από το Λήμμα 5.19, το οποίο δείχνει ότι όλες οι πλακοστρώσεις με το καπέλο είναι ευθυγραμμισμένες κατ' αυτόν τον τρόπο.



Σχήμα 5.17: Μπάλωμα της πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ (κέντρο), με τα αντίστοιχα μπαλώματα από $\mathcal{T}_4$ (αριστερά) και $\mathcal{T}_8$ (δεξιά).

Συστέλλοντας τις πλευρές μήκους 1 ή 2 σε μήκος 0 στη $\mathcal{T}$ προκύπτει μια ισχυρά περιοδική πλακόστρωση $\mathcal{T}_4$ από πλακίδια τύπου «V», δηλαδή πλακίδια της μορφής $\text{Tile}(0, \sqrt{3})$. Κάθε τέτοιο πλακίδιο είναι ένωση τεσσάρων ισόπλευρων τριγώνων με πλευρά μήκους $\sqrt{3}$ και έχει συνεπώς εμβαδό $3\sqrt{3}$. Ομοίως, συστέλλοντας τις πλευρές μήκους $\sqrt{3}$ σε μήκος 0, λαμβάνουμε μια ισχυρά περιοδική πλακόστρωση

$\mathcal{T}_8$ από πλακίδια τύπου Tile $(1, 0)$, που έχουν εμβαδό $2\sqrt{3}$. (Επειδή αυτή η διαδικασία συστολής είναι καλώς ορισμένη γύρω από κάθε πλακίδιο, ακμή ή κορυφή, παράγει μια συνδυαστική πλακόστρωση του επιπέδου, και μια τέτοια συνδυαστική πλακόστρωση αντιστοιχεί σε μια γεωμετρική πλακόστρωση όλου του επιπέδου· βλ. [54, Λήμμα 1.1]). Το Σχήμα 5.17 (στο κέντρο) απεικονίζει ένα μπάλωμα της πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ (κέντρο), με τα αντίστοιχα μπαλώματα από $\mathcal{T}_4$ (αριστερά) και $\mathcal{T}_8$ (δεξιά). Αυτή η απεικόνιση των πλακιδίων σε διαφορετικά μήκη πλευρών συζητείται λεπτομερέστερα στην Ενότητα 5.6.

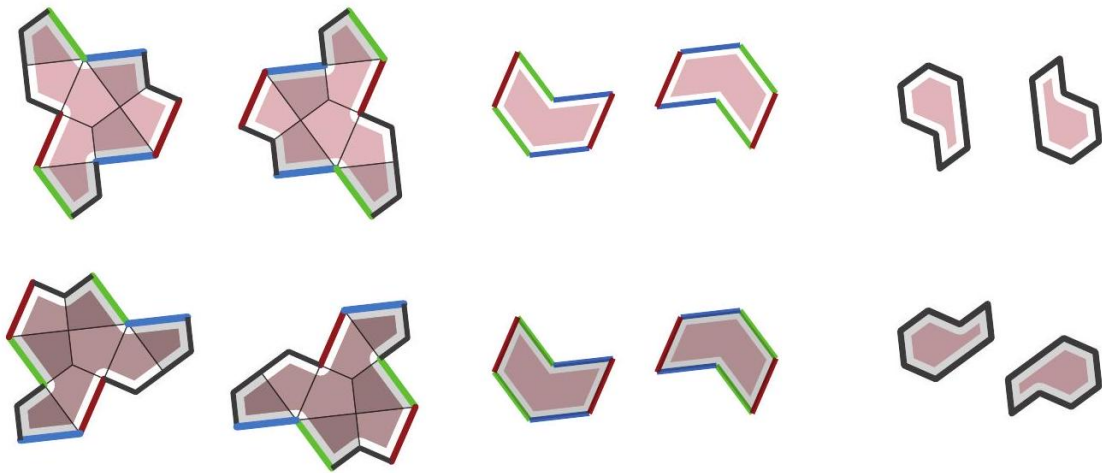
Εφόσον τόσο η $\mathcal{T}_4$ όσο και η $\mathcal{T}_8$ είναι ισχυρά περιοδικές, πρέπει να υπάρχει μια αφινική απεικόνιση g που να δρα ως 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των συμμετριών μεταφοράς της $\mathcal{T}_4$ και της $\mathcal{T}_8$. Υπενθυμίζεται ότι μια ομοιότητα είναι μια αφινική απεικόνιση που διατηρεί το σχήμα αλλά όχι αναγκαστικά τα μήκη (δηλαδή διαστέλλει ομοιόμορφα προς κάθε κατεύθυνση). Θα δείξουμε πρώτα ότι η g δεν είναι ομοιότητα. Έπειτα θα αποδείξουμε ότι πρέπει να είναι, οδηγούμενοι σε άτοπο.

Οι πλακοστρώσεις $\mathcal{T}$, $\mathcal{T}_4$ και $\mathcal{T}_8$ είναι συζευγμένες, με την έννοια ότι υπάρχουν 1-1 αντιστοιχίσεις μεταξύ των πλακιδίων τους, με αντίστοιχα πλακίδια να βρίσκονται σε αντίστοιχους προσανατολισμούς και οι μεταφορικές συμμετρίες οποιασδήποτε από αυτές να αντιστοιχούν άμεσα σε μεταφορικές συμμετρίες των υπολοίπων. Διατηρούν επίσης στενές συνδυαστικές σχέσεις: κάθε ζεύγος γειτονικών πλακιδίων στην αρχική πλακόστρωση με πολυχαρταετούς αντιστοιχεί σε γειτονικά πλακίδια και στις δύο πλακοστρώσεις με πολυόμινα. Η αφινική απεικόνιση g που ορίστηκε παραπάνω μετασχηματίζει κάθε μεταφορική συμμετρία της $\mathcal{T}_4$ σε αντίστοιχη μεταφορική συμμετρία της $\mathcal{T}_8$ (μεταξύ αντίστοιχων ζευγών πλακιδίων). Δεδομένων των εμβαδών των πλακιδίων τύπου V και κομήτη, η g πρέπει να μεγεθύνει τα εμβαδά κατά $2/3$.

Αν η g ήταν ομοιότητα, τότε θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε άμεσα ότι μεγεθύνει τα μήκη σε κάθε κατεύθυνση κατά $\sqrt{2/3}$. Ωστόσο, μια ομοιότητα με αυτόν τον συντελεστή μεγέθυνσης δεν μπορεί να μετασχηματίζει και τις μεταφορές της $\mathcal{T}_4$ σε μεταφορές της $\mathcal{T}_8$. Ας εξετάσουμε την κανονική πλακόστρωση με ισόπλευρα τρίγωνα, τοποθετημένη ώστε να περιέχει ακμή μοναδιαίου μήκους από το $(0, 0)$ στο $(1, 0)$. Κάθε κορυφή αυτής της πλακόστρωσης δίνεται από $m(1, 0) + n(1/2, \sqrt{3}/2)$ για ακέραιους m και n , που σημαίνει ότι τα διανύσματα που ενώνουν κορυφές (συμπεριλαμβανομένων όλων των δυνατών διανυσμάτων μεταφορικής συμμετρίας) πρέπει να έχουν αυτή τη μορφή. Συνεπώς, κάθε απόσταση d μεταξύ δύο κορυφών έχει τετράγωνο της μορφής $m^2 + mn + n^2$, οπότε το d^2 έχει άρτιο αριθμό παραγόντων 2. Επομένως, ένας συντελεστής μεγέθυνσης $\sqrt{2}$ δεν είναι δυνατός μεταξύ μεταφορών δύο τριγωνικών πλακοστρώσεων με ίσες ακμές, και ένας συντελεστής μεγέθυνσης $\sqrt{2/3}$ δεν είναι δυνατός μεταξύ μεταφορών δύο τέτοιων πλακοστρώσεων με λόγο ακμών $\sqrt{3}$ προς 1.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι έξι μεταφορικές κλάσεις των χαρταετών εμφανίζονται με ίση συχνότητα σε κάθε ευθυγραμμισμένη πλακόστρωση με πολυχαρταε-

τούς, προχωρούμε τώρα στην απόδειξη ότι η g είναι ομοιότητα, γεγονός που οδηγεί στην επιθυμητή αντίφαση.



Σχήμα 5.18: Οι τέσσερις προσανατολισμοί του καπέλου που ανήκουν στην ίδια κλάση, καθώς και οι προερχόμενες μορφές πλακιδίων τύπου V (κέντρο) και τύπου κομήτης (δεξιά).

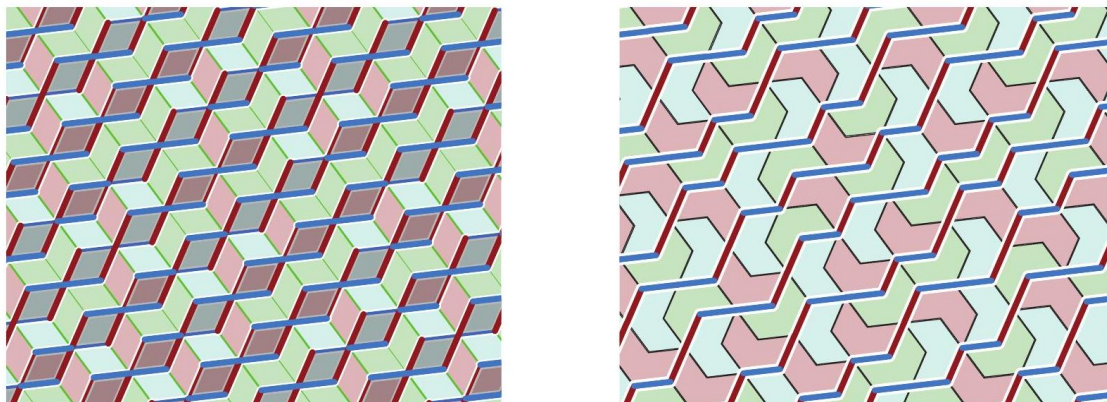
Ένας πολυχαρταετός είναι ένωση χαρταετών από την πλακόστρωση Laves τύπου [3.4.6.4], και συνεπώς οι επιμέρους χαρταετοί περιορίζονται σε έξι δυνατούς προσανατολισμούς. Συμβαίνει το καπέλο να χρησιμοποιεί τέσσερις από αυτούς τους έξι προσανατολισμούς μία φορά, και τους άλλους δύο προσανατολισμούς (οι οποίοι σχετίζονται με στροφή κατά 180°) από δύο φορές. Σε κάθε ευθυγραμμισμένη πλακόστρωση με καπέλα, υπάρχουν δώδεκα δυνατοί προσανατολισμοί πλακιδίων. Τα πλακίδια μπορούν συνεπώς να διαμεριστούν σε τρεις «κλάσεις» των τεσσάρων προσανατολισμών, βασισμένες στους προσανατολισμούς των επαναλαμβανόμενων χαρταετών τους. Το Σχήμα 5.18 (αριστερά) δείχνει τους τέσσερις προσανατολισμούς του καπέλου που συνθέτουν μία τέτοια κλάση· εντός κάθε καπέλου, οι χαρταετοί σε επαναλαμβανόμενους προσανατολισμούς σκιάζονται πιο σκούρα. Λόγω αυτών των επαναλήψεων, τα καπέλα κάθε κλάσης καταλαμβάνουν τους χαρταετούς της πλακόστρωσης Laves με άνισο τρόπο, προτιμώντας δύο προσανατολισμούς χαρταετών έναντι των άλλων τεσσάρων. Σε μία άπειρη πλακόστρωση με καπέλα, όλοι οι προσανατολισμοί χαρταετών πρέπει να εμφανίζονται με ίση αναλογία, και έτσι για να αποκατασταθεί η ισορροπία, η πλακόστρωση πρέπει να χρησιμοποιεί πλακίδια και από τις τρεις κλάσεις με ίση αναλογία (δηλαδή, σε κάθε μπάλωμα με περίμετρο x , η ανισορροπία στον αριθμό πολυχαρταετών με προσανατολισμούς από οποιαδήποτε δύο από τα σύνολα είναι $O(x)$). Στο Σχήμα 5.17 (κέντρο), αντίγραφο του καπέλου στην ίδια κλάση προσανατολισμού χρωματίζονται με τον ίδιο τρόπο.

Στο κέντρο του Σχήματος 5.18, συστέλλουμε τις πλευρές του καπέλου μήκους 1 και 2, οι οποίες εμφανίζονται με μαύρο χρώμα, ώστε να σχηματιστούν πλακίδια τύπου V στους ίδιους προσανατολισμούς. (Το πλακίδιο τύπου V είναι συμμετρικό, ο-

πότε δύο προσανατολισμοί του πολυχαρταετού εντός αυτών των συνόλων μπορούν να δώσουν πανομοιότυπα πλακίδια τύπου V. Αυτά πρέπει παρόλα αυτά να θεωρούνται ως διαφορετικοί προσανατολισμοί του πλακιδίου τύπου V, σαν να υπήρχε ασύμμετρη σήμανση.) Δεξιά, συστέλλουμε τις πλευρές μήκους $\sqrt{3}$, οι οποίες εμφανίζονται χρωματισμένες, ώστε να προκύψουν πλακίδια τύπου κομήτης. Στα Σχήματα 5.17 και 5.19, αυτά τα πλακίδια χρωματίζονται με βάση τον προσανατολισμό, σε αντιστοιχία με τα καπέλα από τα οποία προήλθαν.

Παρατηρούμε ότι δεδομένων δύο πλευρών πλακιδίου τύπου V στην $\mathcal{T}_4$, το αντίστοιχο διάνυσμα στην $\mathcal{T}_8$ μεταξύ αυτών των δύο πλευρών είναι καλά ορισμένο: μία πλευρά πλακιδίου στην $\mathcal{T}_4$ αντιστοιχεί σε σημείο του συνόρου του αντίστοιχου πλακιδίου στην $\mathcal{T}_8$ (και συνεχόμενες πλευρές σε γειτονικά πλακίδια αντιστοιχούν στο ίδιο σημείο των συνόρων δύο γειτονικών πλακιδίων στην $\mathcal{T}_8$), άρα το διάνυσμα είναι απλώς το διάνυσμα μεταξύ αυτών των αντίστοιχων σημείων.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης μία πλακόστρωση $\mathcal{T}'_4$, η οποία προκύπτει από την $\mathcal{T}_4$ διαιρώντας κάθε πλακίδιο τύπου V σε δύο ταυτόσημους ρόμβους. Όλα τα πλακίδια τύπου V που σχετίζονται με μία συγκεκριμένη κλάση προσανατολισμού των καπέλων διασπώνται στους ίδιους δύο προσανατολισμούς ρόμβων, όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.18 (κέντρο). Η ισορροπία των κλάσεων προσανατολισμού στην $\mathcal{T}$ συνεπάγεται ότι οι προσανατολισμοί ρόμβων θα εμφανίζονται με ίση αναλογία στην $\mathcal{T}'_4$. (Στην πραγματικότητα, βασισμένοι στις γειτνιάσεις πλακιδίων σε πλακοστρώσεις με καπέλα, μπορούμε να δείξουμε ότι η $\mathcal{T}'_4$ είναι η πλακόστρωση Laves [3.6.3.6].)



Σχήμα 5.19: Αριστερά: Οι 1-σκάληκες στην $\mathcal{T}'_4$. Δεξιά: Οι 1-flowerides στην $\mathcal{T}_4$.

Για να δείξουμε ότι η διατηρούσα την περιοδικότητα αφινική απεικόνιση g πρέπει να είναι ομοιότητα, και έτσι να προκύψει άτοπο, εξετάζουμε τη συμπεριφορά της g επί των διαμερίσεων της $\mathcal{T}_4$ σε δομές που ονομάζουμε « i -λωρίδες». Οι πλευρές των ισόπλευρων τριγώνων της κανονικής τριγωνικής πλακόστρωσης στην οποία βασίζονται οι $\mathcal{T}_4$ και $\mathcal{T}'_4$ βρίσκονται σε τρία σύνολα παραλλήλων ευθειών. Ονομάζουμε αυτά τα σύνολα $\mathcal{L}_1$, $\mathcal{L}_2$ και $\mathcal{L}_3$. Τμήματα προς αυτές τις κατευθύνσεις χρωματίζονται πράσινα, κόκκινα και μπλε αντίστοιχα στα σχήματα. Για κάθε $i \in \{1, 2, 3\}$ μπο-

ρούμε τώρα να προσδιορίσουμε ένα σύνολο από « i -σκώληκες» στην $\mathcal{T}_4'$. Πρόκειται για ανά δύο ξένες, δύο κατευθύνσεων άπειρες ακολουθίες ρομβοειδών πλακιδίων, στις οποίες τα διαδοχικά ρομβοειδή σε έναν σκώληκα είναι γειτονικά κατά μήκος πλευράς παράλληλης προς τις ευθείες της $\mathcal{L}_i$. Το Σχήμα 5.19 (αριστερά) απεικονίζει τους 1-σκώληκες στην $\mathcal{T}_4'$. Σημειώνουμε ότι οι i -σκώληκες για κάθε δεδομένο i καταλαμβάνουν συνολικά τα $2/3$ των ρομβοειδών στην $\mathcal{T}_4'$.

Είναι σαφές ότι οι i -σκώληκες για ένα συγκεκριμένο i δεν μπορούν να τέμνονται, και οποιαδήποτε ευθεία παράλληλη προς τις ευθείες της $\mathcal{L}_i$ διαπερνά τους i -σκώληκες με την ίδια σειρά όπως κάθε άλλη τέτοια ευθεία. Επιπλέον, οποιαδήποτε συμμετρία μεταφοράς διατηρεί τόσο τους ίδιους τους i -σκώληκες όσο και τη διάταξή τους.

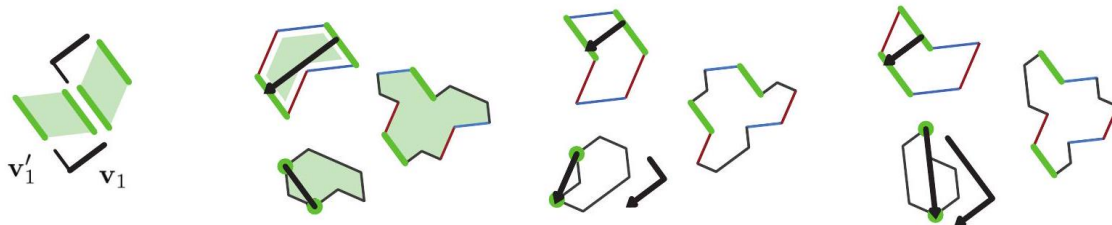
Κάθε i -σκώληκας στην $\mathcal{T}_4'$ ορίζει μία i -λωρίδα στην $\mathcal{T}_4$, αντιστοιχίζοντας κάθε πλακίδιο τύπου V στη λωρίδα ενός εκ των ρομβοειδών του. Αν και τα δύο ρομβοειδή ενός πλακιδίου τύπου V ανήκουν σε i -σκώληκες για κάποιο δεδομένο i στην $\mathcal{T}_4'$, τότε αυτά πρέπει να ανήκουν στην ίδια i -λωρίδα στην $\mathcal{T}_4$, διότι το ευθύγραμμο τμήμα που τα ενώνει κείται σε ευθεία της $\mathcal{L}_i$. Αυτή η αντιστοίχιση συνεπάγεται διαμέριση των πλακιδίων στην $\mathcal{T}_4$. Το Σχήμα 5.19 (δεξιά) απεικονίζει τις 1-λωρίδες στην $\mathcal{T}_4$.

Έστω $\mathbf{v}_i$ ένα διάνυσμα μεταξύ δύο διαδοχικών ευθειών στην $\mathcal{L}_i$, κάθετο σε αυτές, επιλεγμένο έτσι ώστε οι γωνίες ανάμεσα στα $\mathbf{v}_i$ να είναι όλες 120° . Έστω $\mathbf{v}'_i$ διάνυσμα κάθετο στο $\mathbf{v}_i$ και με μήκος $1/\sqrt{3}$ φορές το μήκος του $\mathbf{v}_i$, επιλεγμένο επίσης έτσι ώστε οι γωνίες μεταξύ των $\mathbf{v}'_i$ να είναι όλες 120° . Σημειώνουμε ότι ισχύει $\sum_i \mathbf{v}_i = 0$ και $\sum_i \mathbf{v}'_i = 0$. Εξετάζοντας τις πλευρές των ρομβοειδών σε έναν i -σκώληκα στην $\mathcal{T}_4'$ που κείνται σε διαδοχικές ευθείες της $\mathcal{L}_i$, το διάνυσμα μεταξύ των μέσων αυτών των πλευρών είναι $\mathbf{v}_i \pm \mathbf{v}'_i$, όπου το πρόσημο εξαρτάται από τον προσανατολισμό του ρομβοειδούς. Συνεπώς, αν το διάνυσμα μεταξύ των μέσων δύο $\mathcal{L}_i$ -παράλληλων πλευρών ρομβοειδών σε έναν i -σκώληκα είναι $a\mathbf{v}_i + b\mathbf{v}'_i$, τότε μεταξύ αυτών των δύο πλευρών υπάρχουν $(a+b)/2$ ρομβοειδή με έναν προσανατολισμό και $(a-b)/2$ με τον αντίθετο προσανατολισμό.

Οι συμμετρίες μεταφοράς της ισχυρά περιοδικής πλακόστρωσης $\mathcal{T}$ αντιστοιχούν σε μία υποομάδα των συμμετριών της $\mathcal{T}_4'$. Υπάρχουν μόνο πεπερασμένες τροχιές ρομβοειδών υπό τη δράση αυτής της υποομάδας, οπότε σε κάθε i -σκώληκα $\mathcal{S}$ πρέπει να υπάρχουν δύο ρόμβοι στην ίδια τροχιά. Η μεταφορά που απεικονίζει τον έναν ρόμβο στον άλλον είναι συμμετρία μεταφοράς της $\mathcal{T}_4'$ και επομένως απεικονίζει i -σκώληκες σε i -σκώληκες. Επειδή απεικονίζει την $\mathcal{S}$ στον εαυτό της και διατηρεί τη σειρά των i -σκώληκων, πρέπει να απεικονίζει κάθε i -σκώληκα στον εαυτό του. Αν αυτή η μεταφορά είναι μέσω του διανύσματος $a\mathbf{v}_i + b\mathbf{v}'_i$, προκύπτει ότι $b = 0$, διότι διαφορετικά ρόμβοι των δύο προσανατολισμών που απαρτίζουν αυτούς τους i -σκώληκες θα εμφανίζονταν στην πλακόστρωση σε διαφορετικές αναλογίες.

Έτσι, για κάθε i έχουμε κάποιο θετικό ακέραιο a_i , τέτοιο ώστε μία μεταφορά κατά $a_i\mathbf{v}_i$ να είναι συμμετρία τόσο της $\mathcal{T}_4'$ όσο και της $\mathcal{T}_4$. Στην $\mathcal{T}_4$, η μεταφορά

κατά αυτό το διάνυσμα πρέπει να απεικονίζει κάθε i -λωρίδα στον εαυτό της. Έστω a το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των a_i . Η μεταφορά κατά $αν_i$ είναι επίσης συμμετρία της $\mathcal{T}_4$ που απεικονίζει κάθε i -λωρίδα στον εαυτό της.



Σχήμα 5.20: Αντιστοιχίες μεταφορών για τα πλακίδια τύπου V και κομήτες.

Από κατασκευής, η μεταφορά κατά $αν_i$ στην $\mathcal{T}_4$ αντιστοιχεί σε μία συμμετρία μεταφοράς της $\mathcal{T}$ και συνεπώς και σε κάποια συμμετρία μεταφοράς της $\mathcal{T}_8$. Μπορούμε να υπολογίσουμε τα ακριβή διανύσματα μεταφοράς στην $\mathcal{T}$ που αντιστοιχούν σε κάθε $αν_i$, με βάση τα πλακίδια σε οποιαδήποτε i -λωρίδα στην $\mathcal{T}_4$ (ανάμεσα σε δύο οποιεσδήποτε ευθείες της $\mathcal{L}_i$ που συνδέονται με μεταφορά κατά αυτό το διάνυσμα). Κάθε τέτοια i -λωρίδα (και επιλογή ευθειών) πρέπει να παράγει το ίδιο διάνυσμα στην $\mathcal{T}_8$. Το Σχήμα 5.20 δείχνει τις αντίστοιχες μεταφορές ανάμεσα σε ζεύγη πλευρών από πλακίδια τύπου V , προσανατολισμένα ενδεικτικά ώστε να είναι παράλληλα με την $\mathcal{L}_1$. Για κάθε τέτοιο ζεύγος, πρώτα σημειώνεται το διάνυσμα εντός του πλακιδίου τύπου V , κατόπιν το αντίστοιχο διάνυσμα κομήτη ανάμεσα σε σημεία στο σύνορο του κομήτη, και τέλος αυτό το διάνυσμα αποσυντίθεται σε συνιστώσες παράλληλες και κάθετες προς τις πλευρές του πλακιδίου τύπου V μεταξύ των οποίων σχεδιάζεται. Τα αντίστοιχα καπέλα απεικονίζονται ώστε να διευκολύνεται η επαλήθευση του υπολογισμού. Η στροφή, ανάκλαση ή αντιστροφή της κατεύθυνσης του διανύσματος του πλακιδίου τύπου V έχει το ίδιο αποτέλεσμα στο διάνυσμα του κομήτη.

Παρατηρούμε ότι στην πρώτη περίπτωση, το διάνυσμα του κομήτη είναι παράλληλο προς τις πλευρές μεταξύ των οποίων σχεδιάζεται το διάνυσμα του πλακιδίου τύπου V : η δεύτερη και τρίτη περίπτωση έχουν ίσες συνιστώσες κάθετες προς αυτές τις πλευρές. Για να είναι οι κάθετες συνιστώσες των αντίστοιχων μεταφορών στην $\mathcal{T}_8$ ίσες για όλες τις i -λωρίδες, πρέπει κάθε i -λωρίδα να έχει την ίδια αναλογία της δεύτερης και τρίτης περίπτωσης ως προς την πρώτη. Δεδομένου ότι η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί ακριβώς σε ένα από τα τρία σύνολα προσανατολισμών που εμφανίζονται σε ίσες αναλογίες σε οποιαδήποτε πλακόστρωση, η πρώτη περίπτωση πρέπει να αποτελεί το ένα τρίτο των πλακιδίων τύπου V σε κάθε i -λωρίδα, ενώ η δεύτερη και τρίτη περίπτωση (που αντιστοιχούν στα άλλα δύο σύνολα προσανατολισμών — αν και καθμία δεν αντιστοιχεί αποκλειστικά σε ένα από αυτά) πρέπει συνολικά να αποτελούν τα δύο τρίτα των πλακιδίων τύπου V .

Τα πλακίδια τύπου V της πρώτης περίπτωσης έχουν κάθετη μεταφορά $2\mathbf{v}_i$ στην $\mathcal{T}_4$ και μηδενική στην $\mathcal{T}_8$. Τα υπόλοιπα δύο τρίτα έχουν κάθετη μεταφορά $\mathbf{v}_i$ και

στις δύο. Έτσι, αν το av_i είναι περίοδος των i -λωρίδων της $\mathcal{T}_4$, τότε κάθε i -λωρίδα περιέχει $a/4$ πλακίδια τύπου V της πρώτης περίπτωσης και $a/2$ στις άλλες δύο. Αυτή η περίοδος αντιστοιχεί σε μεταφορά $(a/2)v_i$ στην $\mathcal{T}_8$. Εφόσον το άθροισμα των v_i για $i = 1, 2, 3$ είναι μηδέν (όπως προαναφέρθηκε), το άθροισμα των τριών κάθετων συνιστωσών μεταφοράς στην $\mathcal{T}_8$ είναι επίσης μηδέν.

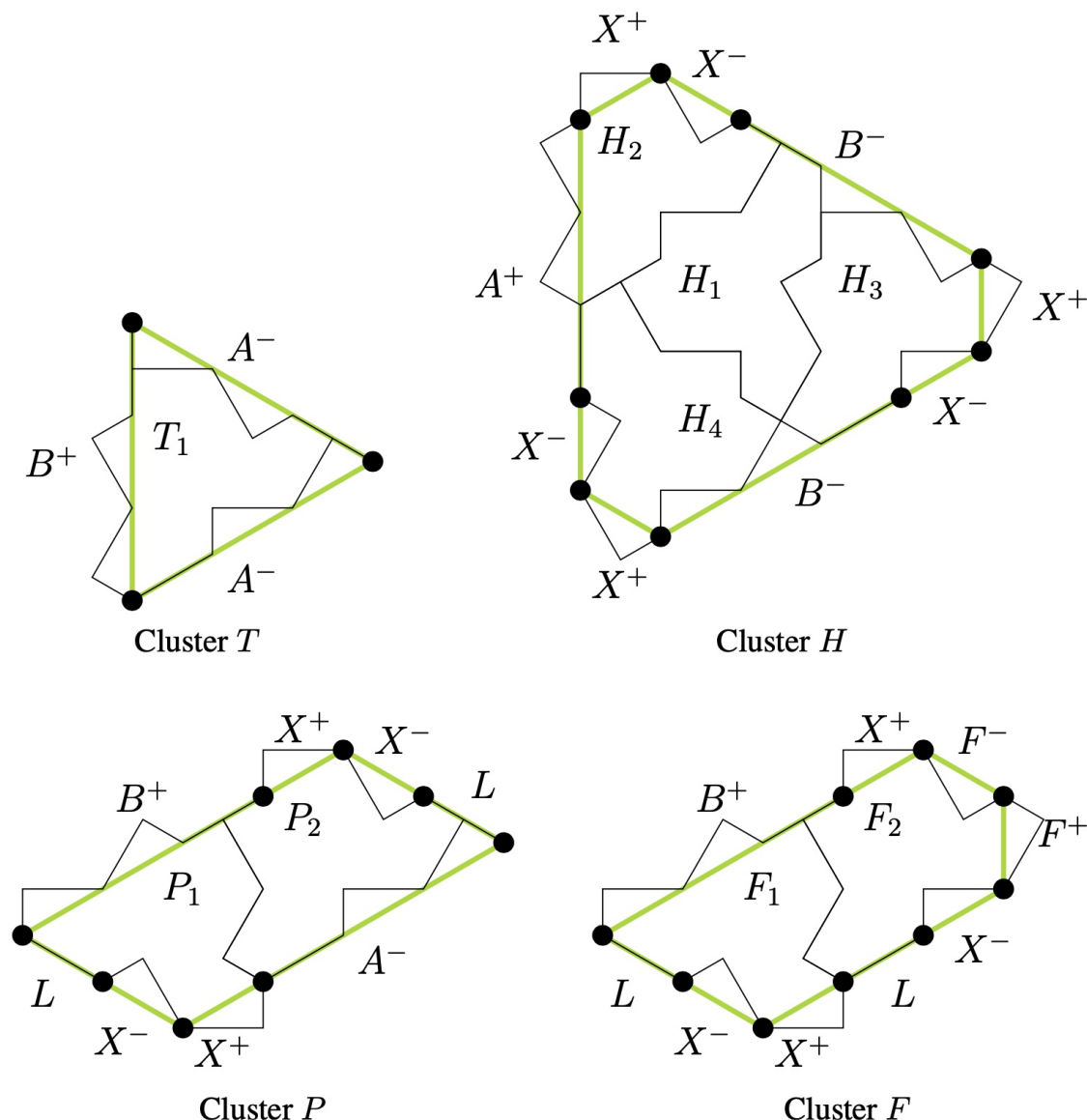
Άρα και οι παράλληλες συνιστώσες πρέπει να αθροίζονται στο μηδέν. Όμως $\sum_i b_i v'_i = 0$ αν και μόνο αν όλα τα b_i είναι ίσα· έστω ότι όλα είναι ίσα με b . Αυτό σημαίνει ότι τα τρία διανύσματα μεταφοράς στην $\mathcal{T}_8$ (που είναι $\frac{a}{2}v_i + bv'_i$) σχηματίζουν γωνίες 120° μεταξύ τους. Σε αυτή την περίπτωση, η αφινική απεικόνιση g που διατηρεί τις περιόδους πρέπει να διαστέλλει ομοιόμορφα προς όλες τις κατευθύνσεις, και επομένως είναι ομοιότητα. Όμως, από την προηγούμενη συζήτηση γνωρίζουμε ότι η g δεν μπορεί να είναι ομοιότητα, και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο, αποκλείοντας την αρχική υπόθεση ότι η $\mathcal{T}$ ήταν ισχυρά περιοδική. $\square$

5.4 Συσσωματώματα πλακιδίων

Όπως συζητήθηκε στην Ενότητα 5.2, οι πλακοστρώσεις με το καπέλο πολυχαρταετό αποτελούνται από ορισμένα συσσωματώματα πλακιδίων. Αυτά τα συσσωματώματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για τον ορισμό απλοποιημένων σχημάτων πλακιδίων, τα οποία αποκαλούμε μεταπλακίδια. Τα μεταπλακίδια κληρονομούν κανόνες ταύτισης από τα σύνορα των καπέλων που περιέχουν. Επιπλέον, μέσω ενός συνόλου κανόνων αντικατάστασης, σχηματίζουν μεγαλύτερα, συνδυαστικά ισοδύναμα υπερπλακίδια που ενώνονται ακολουθώντας τους ίδιους κανόνες ταύτισης. Σε αυτή την ενότητα, δίνουμε μια ιδέα για το πώς τα πλακίδια ανατίθενται σε συσσωματώματα. Στο άρθρο [132] οι συγγραφείς δίνουν μια απόδειξη με τη βοήθεια υπολογιστή και ανάλυση κατά περίπτωση ότι αυτή η ανάθεση όντως οδηγεί στα αναφερόμενα συσσωματώματα, τα οποία ενώνονται σύμφωνα με τους δοσμένους κανόνες ταύτισης.

Τα συσσωματώματα και τα αντίστοιχα μεταπλακίδιά τους φαίνονται στο Σχήμα 5.21. Κάθε μεταπλακίδιο είναι ένα κυρτό τριγωνικό πολύμνο, περιγραμμένο με πράσινο χρώμα· τα καπέλα του προβάλλονται και το καθένα φέρει μοναδική ετικέτα. Η ένωση των πολυχαρταετών σε ένα συσσωμάτωμα προσεγγίζει το σχήμα του μεταπλακιδίου, αλλά με ορισμένες τριγωνικές εσοχές και προεξοχές κατά μήκος του συνόρου του. Σε δύο γωνίες του συσσωματώματος T και μία του P , έχει σχεδιαστεί μια επιπλέον γραμμή από γωνία ενός πολυχαρταετού έως τη γωνία του συνόρου του τριγωνικού πολύμνου· η γραμμή αυτή διευκρινίζει πώς μια εσοχή σε γωνία του τριγωνικού πολύμνου συσχετίζεται μοναδικά με μία από τις πλευρές του.

Τα σύνορα των τεσσάρων μεταπλακιδίων χωρίζονται σε ετικετοποιημένα τμήματα από σεσημασμένα σημεία. Οι ετικέτες αναπαριστούν κανόνες ταύτισης που πρέπει να τηρούνται σε πλακοστρώσεις με τα μεταπλακίδια. Για να ικανοποιούνται οι κανόνες ταύτισης, τα τέσσερα μεταπλακίδια πρέπει να σχηματίζουν πλακόστρωση χρησιμο-



Σχήμα 5.21: Τα τέσσερα συσσωματώματα.

ποιώντας αντίγραφα που έχουν υποστεί μόνο στροφή και όχι ανάκλαση· τα τμήματα πλευρών σημειωμένα με A^+ και A^- πρέπει να ενώνονται σε γειτονικά πλακίδια της πλακόστρωσης· το ίδιο ισχύει για τα τμήματα B^+ και B^- , X^+ και X^- , F^+ και F^- , και L και L .

Θα δείξουμε στην Ενότητα 5.5 ότι κάθε πλακόστρωση με τα μεταπλακίδια έχει δομή αντικατάστασης: τα πλακίδια μπορούν να ομαδοποιηθούν (μετά από διχοτόμηση ορισμένων πλακιδίων) σε υπερπλακίδια που ικανοποιούν συνδυαστικά ισοδύναμους κανόνες ταύτισης.

Αυτή η διαδικασία ομαδοποίησης συνεπάγεται ότι καμία πλακόστρωση με τα μεταπλακίδια δεν είναι περιοδική. Επιπλέον, η δομή αντικατάστασης επιτρέπει στα μεταπλακίδια να πλακοστρώνουν αυθαίρετα μεγάλες περιοχές του επιπέδου, και συνεπώς ολόκληρο το επίπεδο, πράγμα που υποδηλώνει ότι σχηματίζουν ένα

απεριοδικό σύνολο.

Μπορεί να αποδειχθεί με τη βοήθεια υπολογιστή ότι

Θεώρημα 5.17. *Κάθε πλακόστρωση με το καπέλο πολυχαρταετό μπορεί να διαμεριστεί σε συσσωματώματα όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.21 (ή σε ανακλίσεις αυτών, χωρίς όμως να αναμειγνύονται ανακλασμένες και μη ανακλασμένα συσσωματώματα), τα οποία ικανοποιούν τους δοσμένους κανόνες αντιστοίχισης, και η προκύπτουσα πλακόστρωση με μεταπλακίδια έχει τις ίδιες συμμετρίες με την αρχική πλακόστρωση με πολυχαρταετούς.*

Από τη στιγμή που η παρατήρηση των σχημάτων των συσσωματωμάτων δείχνει ότι κάθε πλακόστρωση με μεταπλακίδια δημιουργεί μία με το καπέλο πολυχαρταετό (για παράδειγμα, τα A^+ και A^- είναι ίσες και αντίθετες τροποποιήσεις του σχήματος μιας πλευράς και είναι συνεπείς όπου κι αν εμφανίζονται στα συσσωματώματα), η διαμέριση σε συσσωματώματα επαρκεί ως μέρος της απόδειξης ότι το καπέλο πολυχαρταετούς είναι ένα απεριοδικό μονοπλακίδιο.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.17 είναι υποβοηθούμενη από υπολογιστή. Οι συγγραφείς ορίζουν κανόνες [132, 4.1] για την απόδοση των ετικετών από το Σχήμα 5.21 στα πλακίδια κάθε πλακόστρωσης με το καπέλο πολυχαρταετό. Αυτοί οι κανόνες αποδίδουν μια ετικέτα σε ένα πλακίδιο βασιζόμενοι μόνο στους άμεσους γείτονές του. Επειδή οι κανόνες δεν περιλαμβάνουν αυθαίρετες επιλογές, διατηρούν όλες τις συμμετρίες της πλακόστρωσης. Απομένει λοιπόν να δειχθεί ότι

- (α) οι αποδιδόμενες ετικέτες πράγματι δημιουργούν διαμέριση στα συσσωματώματα που παρουσιάζονται, και
- (β) τα συσσωματώματα γειτνιάζουν μεταξύ τους σύμφωνα με τους κανόνες αντιστοίχισης.

Δεδομένου ότι οι κανόνες αντιστοίχισης δεν επιτρέπουν σε ένα ανακλασμένο συσσωμάτωμα να γειτνιάζει με ένα μη ανακλασμένο, έπεται ότι είτε όλα τα συσσωματώματα είναι ανακλασμένα είτε κανένα τους δεν είναι. Χωρίς απώλεια γενικότητας, υποθέτουμε στην Ενότητα 5.2 ότι κανένα συσσωματώματα δεν είναι ανακλασμένο.

Τόσο το (α) όσο και το (β) μπορούν να αποδειχθούν μέσω ανάλυσης περιπτώσεων 2-μπαλωμάτων με καπέλα. Ιδανικά, θα περιορίζαμε την ανάλυση μόνο στα 2-μπαλώματα που πράγματι εμφανίζονται σε πλακοστρώσεις με καπέλα. Ωστόσο, μια τέτοια προσέγγιση δεν είναι ρεαλιστική, καθώς προϋποθέτει προγενέστερη γνώση του χώρου των πλακοστρώσεων που προσπαθούμε να κατανοήσουμε. Στην πράξη, η λίστα των 2-μπαλωμάτων μπορεί να περιλαμβάνει και ψευδώς θετικά (δηλαδή σχήματα που δεν εμφανίζονται σε καμία πλακόστρωση), αρκεί η ανάλυσή μας να δίνει έγκυρα αποτελέσματα και για αυτά (και φυσικά η λίστα να περιέχει κάθε 2-μπάλωμα που μπορεί να εμφανιστεί σε μια πλακόστρωση).

Για τους σκοπούς της απόδειξής τους, οι συγγραφείς εργάστηκαν με τα 188 «περιβαλλόμενα 2-μπαλώματα»: 2-μπαλώματα που μπορούν να περιβληθούν τουλάχιστον μία φορά ακόμη ώστε να σχηματίσουν ένα 3-μπαλώμα. Δημιούργησαν αυτό το σύνολο των 188 μπαλωμάτων υπολογιστικά. Συγκεκριμένα, τροποποίησαν το λογισμικό του Karlan βασισμένο σε SAT [80] για να απαριθμήσουν όλα τα διακριτά 3-μπαλώματα από καπέλα, και εξήγαγαν τα μοναδικά 2-μπαλώματα στο κέντρο τους. Επικύρωσαν αυτή τη λίστα δημιουργώντας μια ανεξάρτητη υλοποίηση βασισμένη σε εξαντλητική αναζήτηση με backtracking· ο πηγαίος κώδικας αυτής της υλοποίησης είναι διαθέσιμος μαζί με το άρθρο τους. Αυτή η λίστα περιλαμβάνει σίγουρα ψευδώς θετικά αποτελέσματα — μία πιο εξελιγμένη ανάλυση περιπτώσεων δείχνει ότι το πολύ 63 από τα 188 περιβαλλόμενα 2-μπαλώματα μπορούν πράγματι να εμφανιστούν σε μια πλακοστρώση με καπέλα. Ωστόσο, όλα τα 188 ικανοποιούν τις συνθήκες που δίνονται σε αυτήν την ενότητα, επιτρέποντας να εξάγουμε τα αποτελέσματα που χρειαζόμαστε με απλούστερους και πιο διαφανείς αλγόριθμους.

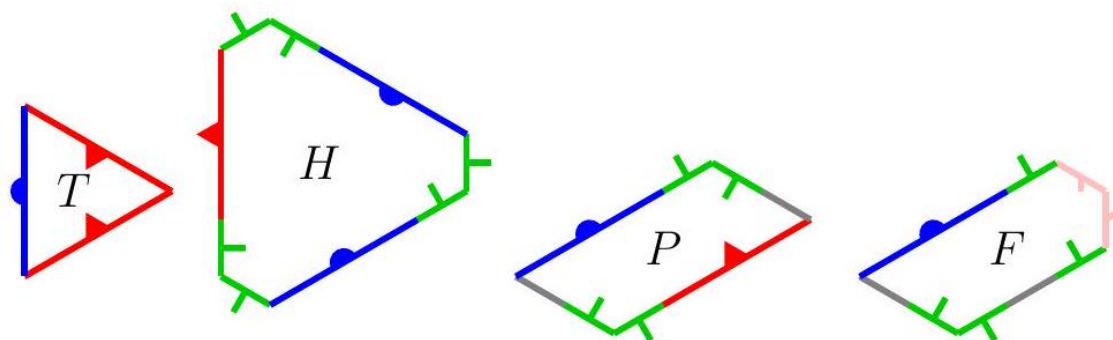
Είναι επίσης δυνατό να αποδειχθούν οι συνθήκες (α) και (β) με μια συντομότερη ανάλυση περιπτώσεων που χρησιμοποιεί μόνο 1-μπαλώματα. Ωστόσο, μια ανάλυση βασισμένη σε 1-μπαλώματα είναι πιο περίπλοκη επειδή οι κανόνες ταξινόμησης στην Ενότητα [132, 4.1] προϋποθέτουν ότι είναι γνωστοί όλοι οι γείτονες ενός πλακιδίου. Επομένως, οι κανόνες αυτοί δεν μπορούν να εφαρμοστούν άμεσα στα εξωτερικά πλακίδια ενός 1-μπαλώματος, καθιστώντας αναγκαία την εργασία με μερική πληροφορία για το ποιες ετικέτες είναι συνεπείς με ένα τέτοιο πλακίδιο.

Μια ανάλυση των πλακοστρώσεων βασισμένη στην απαρίθμηση μπαλωμάτων εξαρτάται από την υπόθεση ότι είναι αναγκαίο να εξεταστούν μόνο πλακοστρώσεις όπου όλοι οι πολυχαρταετοί είναι ευθυγραμμισμένοι με την ίδια υποκείμενη πλακοστρώση [3.4.6.4] του Laves. Αυτή η υπόθεση δεν είναι προφανής γενικά για πλακοστρώσεις με πολυχαρταετούς ή άλλα πολυσχήματα· αιτιολογείται στο [132, Παράρτημα Α].

Για καθένα από τα 188 περιβαλλόμενα 2-μπαλώματα, οι κανόνες ταξινόμησης του [132, 4.1] καθορίζουν ετικέτες για τα πλακίδια στο εσωτερικό του μπαλώματος (αποτελούμενο από το κεντρικό πλακίδιο και τους γείτονές του). Τότε, η συνθήκη (α) μπορεί να αποδειχθεί επαληθεύοντας ότι όταν το κεντρικό πλακίδιο ενός μπαλώματος έχει μια δοθείσα ετικέτα από ένα από τα συσσωματώματα που εμφανίζονται στο Σχήμα 5.21, οι γείτονές του σε αυτό το συσσωμάτωμα εμφανίζονται με τις σωστές ετικέτες στις αναμενόμενες θέσεις και προσανατολισμούς μέσα στο μπάλωμα. Αυτή η διαδικασία επαλήθευσης «εντός συσσωματώματος» εξηγείται αναλυτικά στο [132, 4.2]. Αντίστοιχα, στο [132, 4.3] οι συγγραφείς περιγράφουν μια διαδικασία επαλήθευσης «μεταξύ συσσωματωμάτων» που αποδεικνύει τη συνθήκη (β). Συγκεκριμένα, δείχνουν ότι όταν το κεντρικό πλακίδιο ενός μπαλώματος είναι γειτονικό με ένα πλακίδιο με ετικέτα από διαφορετικό συσσωμάτωμα, η σχέση γειτνίασης είναι συνεπής με τα επισημασμένα τμήματα πλευρών που ορίζουν τους κανόνες αντιστο-

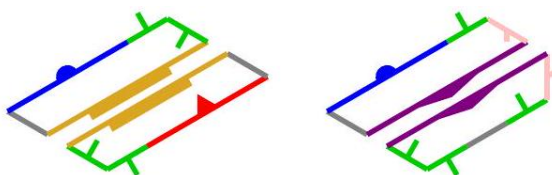
ίχησης για τα συσσωματώματα. Το αναφερόμενο λογισμικό εκτελεί όλους αυτούς τους ελέγχους στα 188 περιβαλλόμενα 2-μπαλώματα.

5.5 Σύστημα αντικατάστασης τεσσάρων πλακιδίων



Σχήμα 5.22: Μεταπλακίδια T , H , P και F .

Ας θεωρήσουμε τα τέσσερα μεταπλακίδια, με κανόνες ταύτισης όπως στο Σχήμα 5.21, τα οποία απεικονίζονται σε αυτήν την ενότητα στη μορφή που φαίνεται στο Σχήμα 5.22. Οι πλευρές A είναι κόκκινες, οι B μπλε, οι X πράσινες, οι F ροζ, και οι L γκρι. Οι πλευρές σημειώνονται με μικρά γεωμετρικά διακοσμητικά για να δηλώνεται το πρόσημο (προς τα έξω στην πλευρά $+$, προς τα μέσα στην πλευρά $-$): ισόπλευρα τρίγωνα για τις A , ημικύκλια για τις B , κάθετα ευθύγραμμα τμήματα για τις X , και κοντά λοξά τμήματα για τις F . Σημειώνεται ότι οι πλευρές A και B στο H έχουν αντίθετα πρόσημα σε σχέση με τα T , P , και F . Επίσης, σημειώνεται ότι τα πλακίδια σε αυτό το σύστημα αντικατάστασης δεν επιτρέπεται να υφίστανται ανάκλαση, παρά μόνο στροφή.



Σχήμα 5.23: Διχοτόμηση των πλακιδίων P και F .

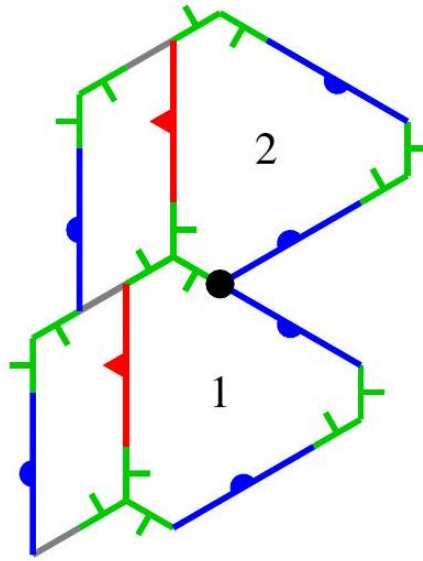
Αργότερα στη συλλογιστική που αναπτύσσεται, είναι βολικό να διχοτομήσουμε μερικά πλακίδια P και F , όπως φαίνεται στο Σχήμα 5.23. Αναφερόμαστε στις πλευρές που προκύπτουν από τη διχοτόμηση του P ως P^+ (στο υπο-πλακίδιο που έχει πλευρά B^+) και P^- , με χρώμα κίτρινο και διακόσμηση με ορθογώνιο. Οι πλευρές από τη διχοτόμηση του F είναι G^+ (στο υπο-πλακίδιο με πλευρά B^+) και G^- , με χρώμα βιολετί και διακόσμηση με αμβλυγώνιο τρίγωνο. Αναφερόμαστε επίσης στα μισά με πλευρά B^+ ως άνω μισά, και στα υπόλοιπα ως κάτω μισά. Θα δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 5.18. Σε κάθε πλακόστρωση με τα τέσσερα μεταπλακίδια, μετά τη διχοτόμηση των μεταπλακιδίων P και F όπως περιγράφηκε παραπάνω, τα μεταπλακίδια ενώνονται ώστε να σχηματίσουν μεγαλύτερα, συνδυαστικώς ισοδύναμα υπερπλακίδια, σχηματίζοντας έτσι ένα σύστημα αντικατάστασης. Η πλακόστρωση με τα υπερπλακίδια έχει τις ίδιες συμμετρίες με την πλακόστρωση με τα μεταπλακίδια.

Η διχοτόμηση των πλακιδίων δεν είναι απολύτως απαραίτητη, καθώς οι γραμμές διχοτόμησης μπορούν να είναι αυθαίρετες καμπύλες—και, συγκεκριμένα, μπορούν να ακολουθούν πλήρως τη μία ή την άλλη πλευρά των πλακιδίων F ή P (διατηρώντας τα ίδια άκρα), κατανέμοντας ουσιαστικά ένα ολόκληρο πλακίδιο σε ένα από τα δύο γειτονικά υπερπλακίδια. Ωστόσο, τα διχοτομημένα πλακίδια είναι χρήσιμα για την απόδειξη ότι τα υπερπλακίδια υπακούουν σε κανόνες ταύτισης ισοδύναμους με αυτούς των αρχικών πλακιδίων. Συγκεκριμένα, η διχοτόμηση κάνει τις γειννιάσεις μεταξύ υπερπλακιδίων να καταγράφονται σαφέστερα στα σύνορά τους, χωρίς να βασίζονται σε πληροφορία για πλακίδια που προκύπτουν αναγκαστικά και δεν ανήκουν στα υπερπλακίδια. Σε κάποιες περιπτώσεις, μπορεί να είναι χρησιμότερο να αποδίδονται ολόκληρα πλακίδια στα υπερπλακίδια σε κάθε επίπεδο αντικατάστασης, χωρίς διχοτόμηση. Για παράδειγμα, αυτά τα πλήρη πλακίδια μπορεί να είναι πιο κατάλληλα για ανάλυση μεγεθών ή ρυθμών ανάπτυξης συσσωματωμάτων κατά τη διαδικασία διόγκωσης. Αν χρειαστεί, μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση ένα προς ένα, που διατηρεί τις συμμετρίες, μεταξύ των υπερπλακιδίων που παρουσιάζονται εδώ και οποιασδήποτε εναλλακτικής επιλογής υπερπλακιδίων που αποφεύγει τη διχοτόμηση.

Οι Υποενότητες 5.5.1 και 5.5.2 παρουσιάζουν ένα διακλαδούμενο δίκτυο περιπτώσεων υπό διαγραμματική μορφή, που καταλήγει σε επιμέρους μπαλώματα τα οποία συναντώνται σε πλακοστρώσεις με μεταπλακίδια. Τα διαγράμματα ερμηνεύονται ως εξής: υπάρχουν μερικά μη αριθμημένα πλακίδια τα οποία ορίζουν την περίπτωση που εξετάζεται, ακολουθούμενα από κάποια αριθμημένα πλακίδια τα οποία εξαναγκάζονται να τοποθετηθούν με τη σειρά που υποδεικνύεται από τους αριθμούς τους. Αν στη συνέχεια είναι αναγκαίο να γίνει διακλάδωση σε περισσότερα επόμενα βήματα, τότε η θέση στην οποία πρέπει να εξεταστούν πολλαπλές επιλογές πλακιδίων σημειώνεται στο διάγραμμα με έναν γεμάτο κύκλο· και κατόπιν παρουσιάζονται ξεχωριστά διαγράμματα για κάθε επιλογή (στα οποία τα προηγούμενα εξαναγκασμένα πλακίδια πλέον παρουσιάζονται χωρίς αρίθμηση, ενώ τα νέα εξαναγκασμένα πλακίδια είναι αριθμημένα).

Η διάταξη δύο μεταπλακιδίων P που φαίνεται στο Σχήμα 5.24, και συμβολίζεται ως PP , εμφανίζεται συχνά στην ανάλυση περιπτώσεων. Τα δύο γειτονικά αντίγραφα του P , στην ίδια προσανατολισμένη θέση, οδηγούν σε αντίφαση: μετά την προσθήκη των δύο εξαναγκασμένων πλακιδίων H , καμία άλλη τοποθέτηση πλακιδίου δεν είναι εφικτή στο σημείο που έχει σημειωθεί. Συνεπώς, όταν εντοπίζονται εξαναγκασμένα πλακίδια, εκτός από την περίπτωση κατά την οποία υπάρχει μόνο ένα πλακίδιο που

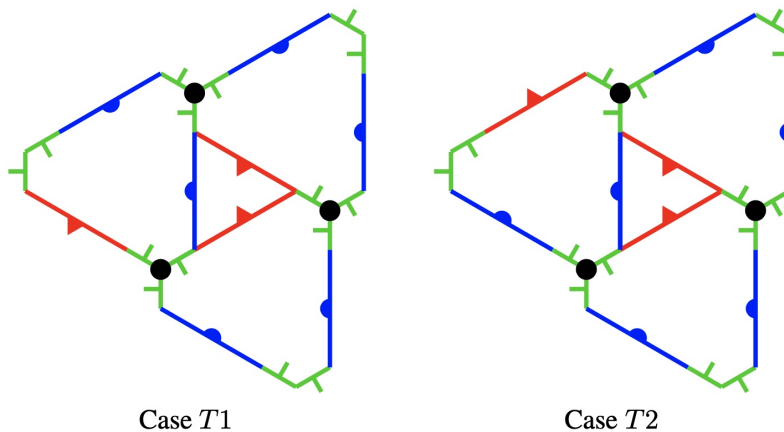


Σχήμα 5.24: Η διάταξη δύο μεταπλακιδίων P (PP) που οδηγεί σε αντίφαση.

μπορεί να τοποθετηθεί σε συγκεκριμένη θέση σύμφωνα με τους κανόνες ταύτισης, θεωρούμε επίσης ότι ένα πλακίδιο είναι εξαναγκασμένο όταν η μόνη εναλλακτική που συμβαδίζει με τους κανόνες ταύτισης θα οδηγούσε στην εμφάνιση αυτής της διάταξης PP .

5.5.1 Περιπτώσεις που αφορούν το T

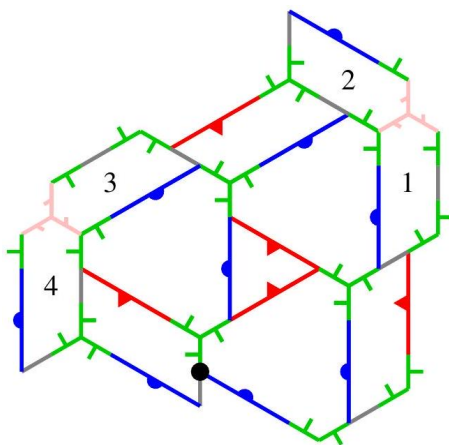
Τα δύο A^- σύνορα του T πρέπει να είναι γειτονικά με το A^+ σύνορο του H , ενώ το B^+ σύνορο του T μπορεί να είναι γειτονικό με οποιοδήποτε από τα B^- σύνορα του H . Συνεπώς, υπάρχουν δύο περιπτώσεις για τη διάταξη γύρω από ένα πλακίδιο T , τις οποίες αποκαλούμε $T1$ και $T2$.



Σχήμα 5.25: Περιπτώσεις $T1$ και $T2$.

Μια ακολουθία συλλογισμών δείχνει ότι κάθε T σε μια πλακόστρωση πρέπει να εμφανίζεται στην περίπτωση $T1PF$ (Σχήμα 5.30).

Ας εξετάσουμε τις τρεις σημειωμένες θέσεις σε καθεμία από τις $T1$ και $T2$ στο Σχήμα 5.25. Αυτές μπορούν να συμπληρωθούν είτε με P είτε με H . Στη μεριά του σχήματος όπου υπάρχουν δύο B^- ακμές, στο σημείο που υποδεικνύεται δεν μπορεί να συμπληρωθεί με H , γιατί τότε θα προέκυπτε γωνία 60° μεταξύ δύο B^- ακμών, κάτι που δεν μπορεί να συμπληρωθεί. Άρα και οι δύο αυτές πλευρές πρέπει να έχουν P στη σημειωμένη θέση, ενώ η τρίτη πλευρά μπορεί να έχει είτε H (προσανατολισμένο έτσι ώστε να αποφεύγεται μια τέτοια 60° γωνία μεταξύ δύο B^- συνόρων — από εδώ και στο εξής, όταν προκύπτει η ίδια κατάσταση, θεωρούμε απλώς ότι ο προσανατολισμός του H είναι εξαναγκασμένος χωρίς περαιτέρω σχολιασμό) είτε P . Αυτό οδηγεί σε τέσσερις περιπτώσεις, τις οποίες ονομάζουμε $T1P$ (Σχήμα 5.26), $T2P$ (Σχήμα 5.27), $T1H$ (Σχήμα 5.28) και $T2H$ (Σχήμα 5.29), και συνεχίζουμε σχεδιάζοντας επιπλέον εξαναγκασμένα πλακίδια σε καθεμία από αυτές τις περιπτώσεις.



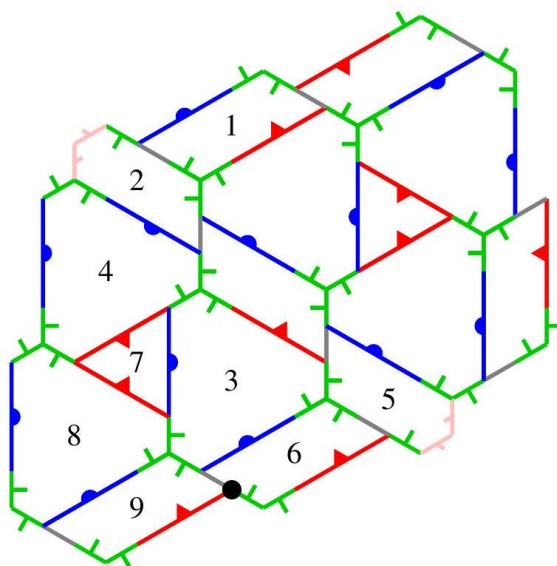
Σχήμα 5.26: Περίπτωση $T1P$.

Η σημειωμένη θέση στο Σχήμα 5.26 μπορεί να συμπληρωθεί είτε με F είτε με P , δημιουργώντας τις περιπτώσεις που αποκαλούμε $T1PF$ (Σχήμα 5.30) και $T1PP$ (Σχήμα 5.31).

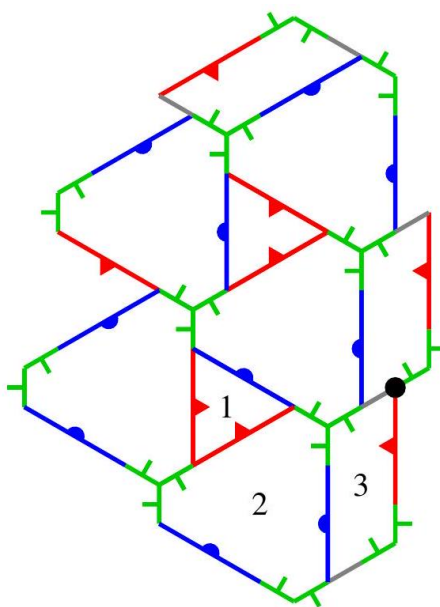
Κάθε T σε πλακόστρωση πρέπει να εμφανίζεται στην περίπτωση του Σχήματος 5.30. Η διχοτόμηση των πλακιδίων P και F σε αυτή την περίπτωση οδηγεί στο Σχήμα 5.37, που αποκαλούμε H' και που συμπεριφέρεται συνδυαστικά όπως το H (με τα σημειωμένα τμήματα των πλευρών να υπακούουν στους κανόνες ταύτισης) σε μια πλακόστρωση μαζί με τις διαμορφώσεις T' , P' και F' .

5.5.2 Περιπτώσεις που το H δεν είναι γειτονικό του T

Κάθε H που δεν είναι γειτονικό με ένα πλακίδιο T , πρέπει να έχει ένα πλακίδιο P γειτονικό προς το A^+ σύνορό του, ενώ τα B^- σύνορα μπορεί να είναι το καθένα γειτονικό είτε με P είτε με F . Αυτό οδηγεί σε τέσσερις περιπτώσεις, τις οποίες αποκαλούμε HPP (Σχήμα 5.32), HPF (Σχήμα 5.33), HFP (Σχήμα 5.34) και HFF (Σχήμα 5.35), και συνεχίζουμε σχεδιάζοντας επιπλέον εξαναγκασμένα πλακίδια σε καθεμία



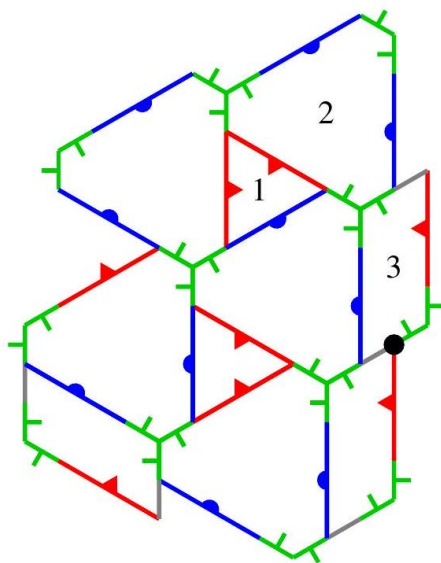
Σχήμα 5.27: Περίπτωση T2P, απορρίπτεται επειδή εμφανίζεται PP στο σημείο που υποδεικνύεται.



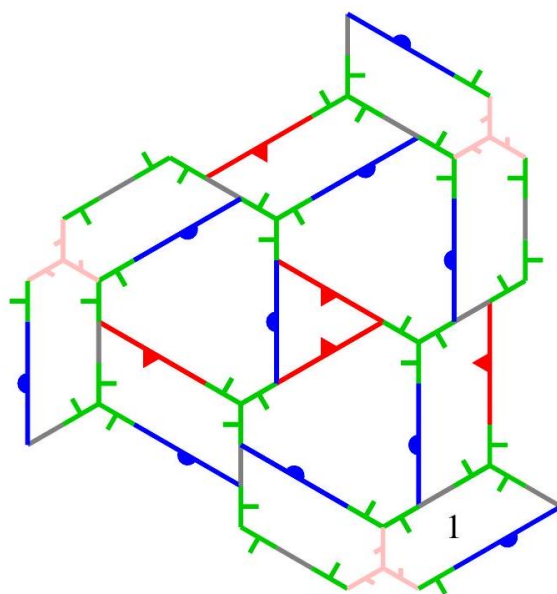
Σχήμα 5.28: Περίπτωση T1H, απορρίπτεται επειδή εμφανίζεται PP στο σημείο που υποδεικνύεται.

από αυτές τις περιπτώσεις.

Στην διάταξη 5.32, η διχοτόμηση των πλακιδίων P και η αφαίρεση των εξαναγκασμένων πλακιδίων F δημιουργεί τη διάταξη του Σχήματος 5.36, την οποία αποκαλούμε T' και η οποία συμπεριφέρεται συνδυαστικά όπως το T (με τα σημειωμένα τμήματα των πλευρών να υπακούουν στους κανόνες ταύτισης) σε μια πλακόστρωση με τα υπόλοιπα υπερπλακίδια. Παρόλο που τα εξαναγκασμένα πλακίδια F δεν περιλαμβάνονται στο T' , το γεγονός ότι είναι εξαναγκασμένα θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη ότι τα υπερπλακίδια πρέπει να ακολουθούν τους κανόνες ταύτισης όταν



Σχήμα 5.29: Περίπτωση $T2H$, απορρίπτεται επειδή εμφανίζεται PP στο σημείο που υποδεικνύεται.

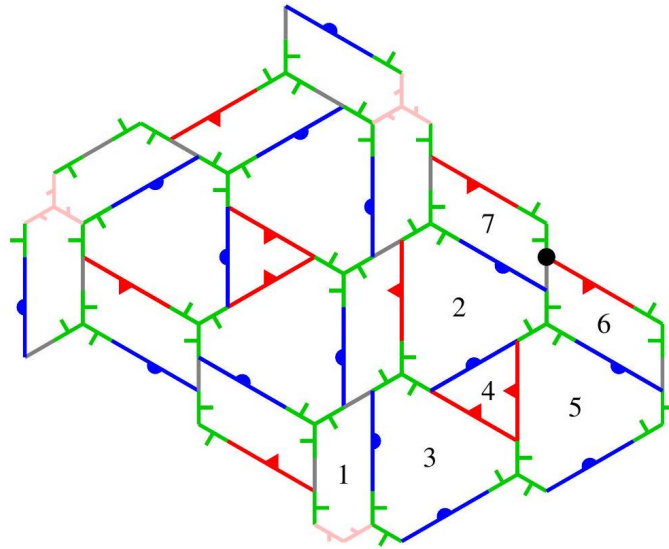


Σχήμα 5.30: Περίπτωση $T1PF$.

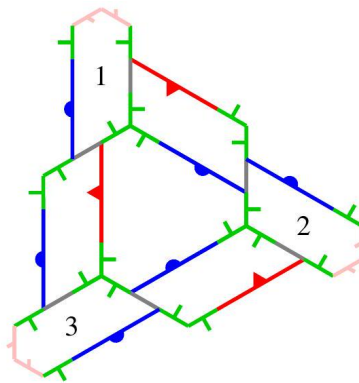
είναι γειτονικά μεταξύ τους.

Στο Σχήμα 5.33, το νέο πλακίδιο H που προστίθεται δεν μπορεί να είναι γειτονικό με T . Άρα πρέπει το ίδιο να βρίσκεται στην περίπτωση HFP (Σχήμα 5.34) ή HFF (Σχήμα 5.35). Επειδή τα πλακίδια του αρχικού συσσωματώματος HPF είναι τα ίδια εξαναγκασμένα στις δύο αυτές περιπτώσεις, αυτές καλύπτουν όλα τα πιθανά μπαλώματα που μπορούν να προκύψουν εδώ.

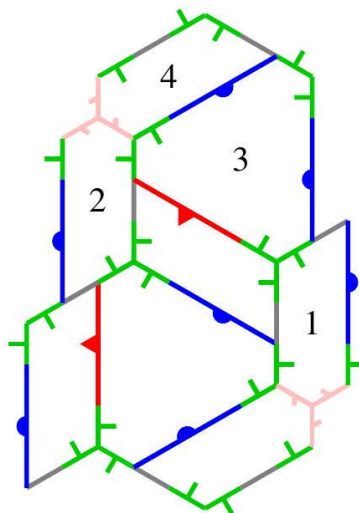
Στο Σχήμα 5.34, η διχοτόμηση όλων των πλακιδίων P και F δημιουργεί τη δι-άταξη του Σχήματος 5.38, την οποία αποκαλούμε P' και η οποία συμπεριφέρεται συνδυαστικά όπως το P (με τα σημειωμένα τμήματα των πλευρών να υπακούουν



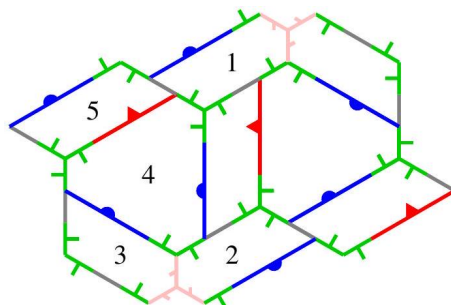
Σχήμα 5.31: Περίπτωση T1PP, απορρίπτεται επειδή εμφανίζεται PP στο σημείο που υποδεικνύεται.



Σχήμα 5.32: Περίπτωση HPP.

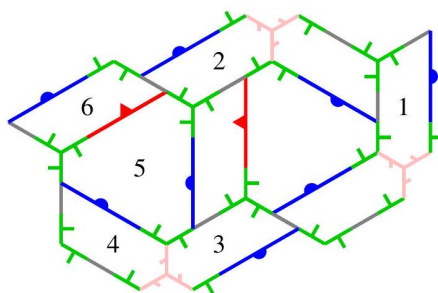


Σχήμα 5.33: Περίπτωση HPF.



Σχήμα 5.34: Περίπτωση HFP.

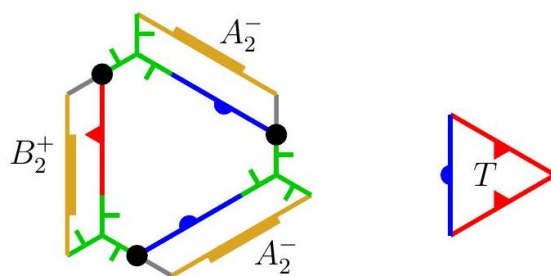
στους κανόνες ταύτισης) σε μια πλακόστρωση με τα υπόλοιπα υπερπλακίδια.



Σχήμα 5.35: Περίπτωση HFF.

Στο Σχήμα 5.35, η διχοτόμηση όλων των πλακιδίων P και F δημιουργεί τη διάταξη του Σχήματος 5.39, την οποία αποκαλούμε F' και η οποία συμπεριφέρεται συνδυαστικά όπως το F (με τα σημειωμένα τμήματα των πλευρών να υπακούουν στους κανόνες ταύτισης) σε μια πλακόστρωση με τα υπόλοιπα υπερπλακίδια.

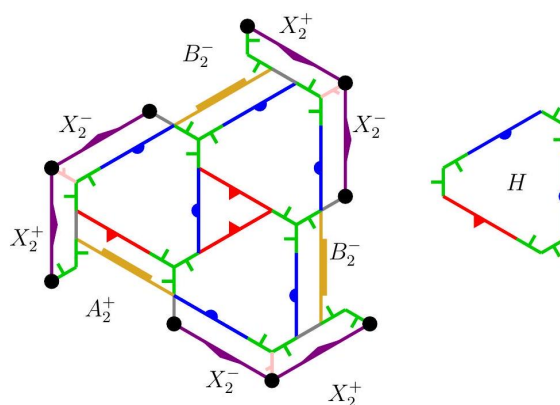
5.5.3 Τα υπερπλακίδια



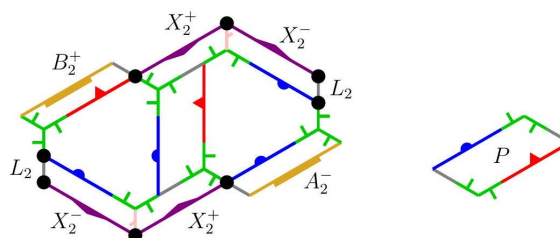
Σχήμα 5.36: Υπερπλακίδιο T' , μαζί με το αντίστοιχο T .

Τα προηγούμενα επιχειρήματα έχουν δείξει ότι κάθε πλακίδιο H ή T εμφανίζεται σε μια διάταξη που αντιστοιχεί στα υπερπλακίδια T', H', P' ή F' . Παρέχουμε τώρα λεπτομερέστερους κανόνες για την κατανομή κάθε πλακιδίου H ή T , καθώς και των ημισέων κάθε διχοτομημένου πλακιδίου P ή F , σε συσσωματώματα πλακιδίων.

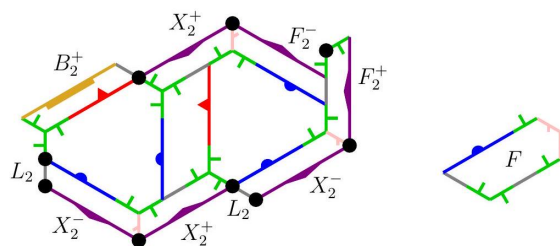
Αυτή η διαδικασία εξασφαλίζει ότι κάθε πλακίδιο κατανέμεται ακριβώς σε ένα συσσωμάτωμα, ότι τα συσσωμάτωμα έχουν όλα τη μορφή ενός από τα υπερπλακίδια, και ότι όλες οι συμμετρίες της αρχικής πλακόστρωσης είναι επίσης συμμετρίες της πλακόστρωσης με τα υπερπλακίδια (αυτή η ιδιότητα προκύπτει άμεσα από τη μορφή των κανόνων, οι οποίοι δεν περιλαμβάνουν αυθαίρετες επιλογές που θα μπορούσαν να διαταράζουν τη συμμετρία). Όπως φαίνεται στα Σχήματα 5.36-5.39, επισημαίνουμε επίσης τα εκτεθειμένα σύνορα των διχοτομημένων πλακιδίων P και F . Θα δείξουμε ότι τα υπερπλακίδια τοποθετούνται το ένα δίπλα στο άλλο σύμφωνα με τους υποδηλούμενους κανόνες ταύτισης (A_2^+ με A_2^- , B_2^+ με B_2^- , X_2^+ με X_2^- , F_2^+ με F_2^- , και L_2 με L_2).



Σχήμα 5.37: Υπερπλακίδιο H' , μαζί με το αντίστοιχο H .



Σχήμα 5.38: Υπερπλακίδιο P' , μαζί με το αντίστοιχο P .

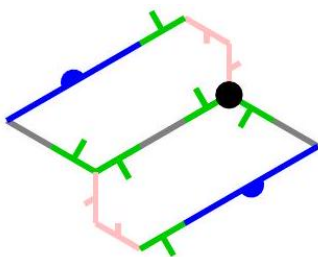


Σχήμα 5.39: Υπερπλακίδιο F' , μαζί με το αντίστοιχο F .

Χρησιμοποιούμε τους εξής κανόνες κατανομής για την κατασκευή συσσωματωμάτων από υπερπλακίδια :

- Κάθε πλακίδιο T κατανέμεται σε ένα υπερπλακίδιο H' , μαζί με όλα τα πλακίδια H που είναι γειτονικά σε αυτό το T .
- Κάθε πλακίδιο H στην περίπτωση HPP κατανέμεται σε ένα υπερπλακίδιο T' .
- Κάθε πλακίδιο H στην περίπτωση HFP κατανέμεται σε ένα υπερπλακίδιο P' , μαζί με το πλακίδιο H στην περίπτωση HPF που φαίνεται στο Σχήμα 5.34.
- Κάθε πλακίδιο H στην περίπτωση HFF κατανέμεται σε ένα υπερπλακίδιο F' , μαζί με το πλακίδιο H στην περίπτωση HPF που φαίνεται στο Σχήμα 5.35.
- Κάθε πλακίδιο H στην περίπτωση HPF έχει ήδη κατανεμηθεί σε υπερπλακίδιο από έναν από τους δύο προηγούμενους κανόνες.
- Κάθε ήμισυ ενός πλακιδίου P και το άνω ήμισυ κάθε πλακιδίου F είναι γειτονικά ακριβώς σε ένα πλακίδιο H κατά μήκος του συνόρου A^- ή B^+ , και κατανέμονται στο ίδιο υπερπλακίδιο με αυτό το πλακίδιο H . (Απλοποιούμε τα Σχήματα 5.38 και 5.39 παραλείποντας τη διχοτόμηση στο κεντρικό πλακίδιο P .)
- Απομένει η κατανομή των κάτω ημίσεων των πλακιδίων F . Κάθε τέτοιο κάτω ήμισυ έχει ένα σύνορο X^- μεταξύ ενός συνόρου L και ενός F^+ , και κατανέμεται στο ίδιο υπερπλακίδιο με το πλακίδιο H που είναι γειτονικό σε αυτό το X^- . Για να είναι αυτός ο κανόνας κατανομής καλώς ορισμένος, πρέπει να δείξουμε ότι το X^- είναι πράγματι γειτονικό σε ένα πλακίδιο H . Η μόνη άλλη πιθανότητα χωρίς παραβίαση των κανόνων ταύτισης μεταπλακιδίων θα ήταν η διάταξη που φαίνεται στο Σχήμα 5.40. Αυτή η διάταξη δεν μπορεί να προκύψει σε μια πλακόστρωση με υπερπλακίδια, διότι κανένα πλακίδιο δεν μπορεί να τοποθετηθεί στο σημείο που έχει σημειωθεί.

Το σύνορο X^- που αναφέρεται στον τελευταίο κανόνα κατανομής δεν μπορεί να είναι γειτονικό σε κανένα από τα εκτεθειμένα σύνορα X^+ των πλακιδίων H στα υπερπλακίδια T', P' ή F' χωρίς να παραβιαστούν οι κανόνες ταύτισης. Συνεπώς, όλα τα κάτω ημίσεια των πλακιδίων F είναι αυτά που εμφανίζονται στα διαγράμματα των μεταπλακιδίων, και έχουμε δείξει ότι η πλακόστρωση διαμερίζεται στα υπερπλακίδια.



Σχήμα 5.40: Αδύνατη γειννίαση δύο πλακιδίων F .

Θα δείξουμε τώρα ότι τα υπερπλακίδια πρέπει να ενώνονται μεταξύ τους σύμφωνα με τους υποδηλούμενους κανόνες ταύτισης. Πρώτα, εξετάζουμε τις ακμές P^+ (που εμφανίζονται στα A_2^- και B_2^-) και τις ακμές P^- (που εμφανίζονται στα A_2^+ και B_2^+). Τα B_2^- και A_2^+ εμφανίζονται μόνο στο H' , όπου οι ακμές P^+ και P^- δεν μπορούν να συναντηθούν χωρίς να τέμνονται πλακίδια. Άρα, το B_2^- μπορεί να ενωθεί μόνο με B_2^+ και το A_2^+ μόνο με A_2^- .

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο: το A_2^- μπορεί να ενωθεί μόνο με A_2^+ και το B_2^+ μόνο με B_2^- . Για να οδηγηθούμε σε άτοπο, ας υποθέσουμε ότι ενώνονται οι ακμές P^+ και P^- κάποιων A_2^- και B_2^+ . Αν το B_2^+ προέρχεται από υπερπλακίδιο P' , τότε το σύνορο P^- τέμνει το πλακίδιο 5 στην περίπτωση HFP . Τα γειτονικά πλακίδια 5 και 1 στη διάταξη αυτή έχουν και τα δύο σύνορα B^+ , τα οποία πρέπει να γειτνιάζουν με πλακίδια H . Αυτά τα πλακίδια H είναι γειτονικά μεταξύ τους, τοποθετώντας αυτή τη διάταξη εντός ενός υπερπλακιδίου H' , το οποίο δεν διαθέτει ακμή A_2^- . Το ίδιο επιχείρημα ισχύει και για την περίπτωση υπερπλακιδίου F' , εξετάζοντας τα πλακίδια 6 και 2 στην περίπτωση HFF . Αν το P^+ σε ένα A_2^- από P' ενωθεί με B_2^+ , τότε εφαρμόζεται ανάλογο επιχείρημα (εξετάζοντας το πλακίδιο 2 και ένα γειτονικό μη αριθμημένο πλακίδιο στην περίπτωση HFP). Άρα η μόνη εναπομένουσα περίπτωση θα ήταν αν και τα δύο σύνορα προέρχονται από υπερπλακίδιο T' , όμως αυτή η πιθανότητα είναι ασύμβατη με τα πλακίδια F που εξαναγκάζονται στην περίπτωση HPP .

Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα A_2^+ , A_2^- , B_2^+ και B_2^- πρέπει να υπακούουν στους κανόνες ταύτισης των υπερπλακιδίων, παρατηρούμε ότι οι μόνες ακμές μεταπλακιδίων X^+ και X^- στα σύνορα των μεταπλακιδίων που δεν αποτελούν μέρος των A_2^+ , A_2^- , B_2^+ ή B_2^- είναι εκείνες που αποτελούν μέρος των F_2^+ και F_2^- . Συνεπώς, τα F_2^+ και F_2^- πρέπει επίσης να ενώνονται μεταξύ τους. Οι μόνες ακμές μεταπλακιδίων G^+ και G^- που δεν έχουν ακόμη ταυτιστεί είναι εκείνες που σχηματίζουν οι ακμές X_2^- και X_2^+ των υπερπλακιδίων, που σημαίνει ότι και αυτές πρέπει να ταιριάζουν. Τέλος, οι εναπομείνουσες ακμές L σχηματίζουν το L_2 , το οποίο επίσης πρέπει να ταυτίζεται.

Για να δείξουμε ότι τα υπερπλακίδια είναι πλήρως συνδυαστικά ισοδύναμα με τα αρχικά πλακίδια, πρέπει να ελεγχθεί ακόμη κάτι: ότι οι ίδιες συνδυαστικές διατάξεις υπερπλακιδίων ταιριάζουν στις κορυφές, όπως οι αντίστοιχες διατάξεις των πλακιδίων. Κάθε υπερπλακίδιο έχει σχεδιαστεί μαζί με ένα αντίγραφο του αντίστοιχου πλακιδίου, στον αντίστοιχο προσανατολισμό. Παρατηρούμε ότι αν πάρουμε οποιαδήποτε κλάση ακμών των μεταπλακιδίων, περιλαμβάνοντας και τις δύο πλευρές της κάθε ακμής (για παράδειγμα, A^+ και A^-), και πάρουμε οποιοδήποτε ευθύγραμμο τμήμα στις αντίστοιχες ακμές των υπερπλακιδίων, η (κατευθυνόμενη) γωνία μεταξύ των (κατευθυνόμενων) ακμών στο πλακίδιο και στο υπερπλακίδιο είναι σταθερή σε όλα τα διαγράμματα.

Αυτή η σταθερότητα των γωνιών μεταξύ ακμών των μεταπλακιδίων και των υπερπλακιδίων σημαίνει ότι οι γωνίες στις κορυφές των υπερπλακιδίων γύρω από ένα

σημείο, κάθε διαδοχικό ζεύγος των οποίων έχει ταυτιζόμενες πλευρές, αθροίζονται στο ίδιο ποσό με τις αντίστοιχες γωνίες για τα αντίστοιχα μεταπλακίδια (μια γωνία σε κορυφή υπερπλακιδίου ισούται με τη γωνία στην αντίστοιχη κορυφή του μεταπλακιδίου, συν τη διαφορά μεταξύ των γωνιών μεταπλακιδίου–υπερπλακιδίου για τις δύο πλευρές, και αυτές οι διαφορές αλληλοαναιρούνται όταν αθροίζονται γύρω από το σημείο).

Τα υπερπλακίδια είναι επομένως συνδυαστικά ισοδύναμα με τα μεταπλακίδια, και έτσι τα παραπάνω επιχειρήματα εφαρμόζονται επαγωγικά ώστε να διασφαλίζεται ότι η σύνθεση των πλακιδίων σε υπερπλακίδια μπορεί να εφαρμοστεί n φορές για κάθε n . Δεδομένου ότι η ακτίνα μιας μπάλας που περικλείεται στα υπερπλακίδια τείνει στο άπειρο με το n (γεγονός που δεν εξαρτάται από τη γεωμετρία που χρησιμοποιείται για τη διχοτόμηση των μεταπλακιδίων P και F , αλλά που μπορεί να αποδειχθεί ευκολότερα με εναλλακτικά υπερπλακίδια που αποφεύγουν τη διχοτόμηση), και οι πλακοστρώσεις με υπερπλακίδια έχουν όλες τις συμμετρίες της αρχικής πλακοστρώσεως, προκύπτει ότι η αρχική πλακοστρώση δεν μπορεί να έχει μια μεταφορά ως συμμετρία. Επιπλέον, η δομή αντικατάστασης συνεπάγεται ότι τα μεταπλακίδια επιστρώνουν αυθαίρετα μεγάλες πεπερασμένες περιοχές του επιπέδου, και άρα ολόκληρο το επίπεδο.

Λόγω της αντιστοιχίας που διατηρεί τις συμμετρίες μεταξύ πλακοστρώσεων με μεταπλακίδια και πλακοστρώσεων με καπέλα πολυχαρταετούς, ολοκληρώσαμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.15.

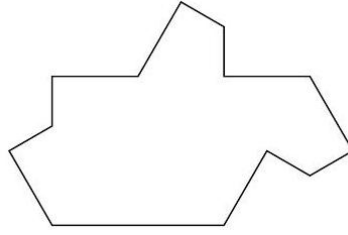
5.6 Μια οικογένεια απεριοδικών μονοπλακιδίων

Στις προηγούμενες ενότητες, δείξαμε ότι το καπέλο πολυχαρταετός είναι ένα απεριοδικό μονοπλακίδιο. Αυτός ο πολυχαρταετός σχηματίζεται από οκτώ χαρταετούς της πλακοστρώσεως Laves τύπου [3.4.6.4]. Ομοίως, ο πολυχαρταετός τύπου χελώνα, ο οποίος σχηματίζεται από δέκα χαρταετούς και παρουσιάζεται στο Σχήμα 5.41, είναι επίσης απεριοδικός. Έχει επαληθευτεί μέσω υπολογιστικής αναζήτησης ότι δεν υπάρχουν άλλα απεριοδικά n -πλακίδια για $n \leq 24$.

Αυτοί οι δύο απεριοδικοί πολυχαρταετοί είναι παραδείγματα μιας οικογένειας απεριοδικών μονοπλακιδίων, που όλα τα μέλη της οικογένειας έχουν συνδυαστικώς ισοδύναμο σύνολο πλακοστρώσεων και καθορίζονται από την επιλογή δύο μηκών πλευρών.

Το καπέλο πολυχαρταετός έχει πλευρές μήκους 1, 2 και $\sqrt{3}$ · για τους σκοπούς αυτής της ενότητας, θεωρούμε την πλευρά μήκους 2 ως δύο διαδοχικές πλευρές μήκους 1 με γωνία 180° μεταξύ τους. Το πλακίδιο του Σχήματος 5.41 έχει ίδιες γωνίες, αλλά τα μήκη πλευρών 1 και $\sqrt{3}$ είναι αντιστραμμένα.

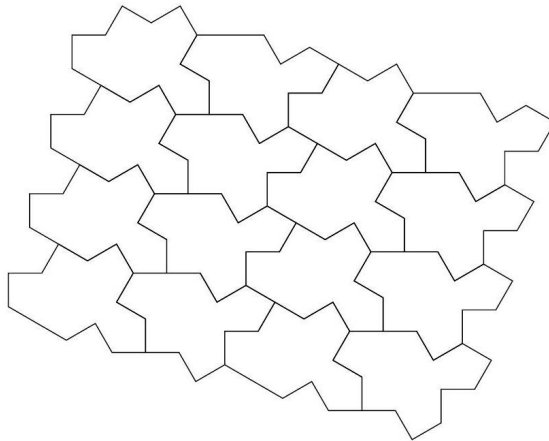
Έστω a και b μη αρνητικοί πραγματικοί αριθμοί, όχι και οι δύο μηδέν, και αν $a \neq 0$ έστω $r = b/a$. Ορίζουμε το $\text{Tile}(a, b)$ ως το πολύγωνο που προκύπτει



Σχήμα 5.41: Ένα απεριοδικό δεκάπλευρο πλακίδιο τύπου χελώνα.

αντικαθιστώντας τις πλευρές μήκους 1 του καπέλου με πλευρές μήκους a (τις οποίες αποκαλούμε 1-πλευρές) και τις πλευρές μήκους $\sqrt{3}$ με πλευρές μήκους b (τις οποίες αποκαλούμε r -πλευρές). Έτσι, το καπέλο είναι το $\text{Tile}(1, \sqrt{3})$ και το πλακίδιο τύπου χελώνα είναι το $\text{Tile}(\sqrt{3}, 1)$. Αυτή η διαδικασία παράγει μια κλειστή καμπύλη (καθώς τα διανύσματα των 1-πλευρών και των r -πλευρών αθροίζονται σε 0), η οποία εύκολα μπορεί ναδειχθεί ότι δεν έχει αυτοτομές. Το σχήμα είναι ένα 13-γωνο (ή λιγότερων πλευρών αν a ή b είναι μηδέν), το οποίο όμως θεωρείται ως 14-γωνο για τους σκοπούς αυτής της ενότητας. Το εμβαδόν του $\text{Tile}(a, b)$ είναι $\sqrt{3}(2a^2 + \sqrt{3}ab + b^2)$.

Για μη μηδενικό a , η τιμή του r καθορίζει το πλακίδιο μέχρι ομοιότητα. Αναγνωρίζοντας αυτές τις κλάσεις ομοιότητας, γράφουμε $\text{Tile}(r)$ ως συντομογραφία του $\text{Tile}(1, r)$. Θα δείξουμε ότι αυτό το πλακίδιο είναι απεριοδικό για κάθε θετικό $r \neq 1$. Μάλιστα, τα $\text{Tile}(1, k\sqrt{3})$ και $\text{Tile}(k\sqrt{3}, 1)$ είναι πολυχαρταετοί για κάθε περιττό θετικό ακέραιο k , πράγμα που σημαίνει ότι αυτό το συνεχές σύνολο απεριοδικών μονοπλακιδίων περιέχει μια αριθμήσιμη άπειρη οικογένεια απεριοδικών πολυχαρταετών.



Σχήμα 5.42: Περιοδική πλακόστρωση με το $\text{Tile}(1, 1)$.

Ορίζουμε μια έννοια συνδυαστικής ισοδυναμίας μεταξύ πλακοστρώσεων με τα συγκεκριμένα πλακίδια, για δύο θετικές τιμές των r , ως εξής:

Ορισμός 5.54. Δύο *πλακοστρώσεις* είναι *συνδυαστικά ισοδύναμες* αν υπάρχει

- μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των πλακιδίων τους και

- μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ των μέγιστων ευθύγραμμων τμημάτων στις ενώσεις των συνόρων των πλακιδίων,

τέτοιες ώστε

- τα αντίστοιχα πλακίδια και ευθύγραμμα τμήματα στις δύο πλακοστρώσεις να έχουν τον ίδιο προσανατολισμό,
- τα αντίστοιχα πλακίδια να ενώνονται στα αντίστοιχα ευθύγραμμο τμήματα από την ίδια πλευρά αυτών των τμημάτων και
- τα αντίστοιχα πλακίδια στις αντίστοιχες πλευρές των αντίστοιχων ευθυγράμμων τμημάτων να εμφανίζονται με την ίδια σειρά κατά μήκος αυτών των τμημάτων.

Όλες οι εσωτερικές γωνίες του πλακιδίου είναι τουλάχιστον ορθές, και κανένα ζεύγος ορθών γωνιών δεν εμφανίζεται διαδοχικά, άρα κάθε μέγιστο ευθύγραμμο τμήμα έχει το πολύ δύο πλευρές πλακιδίων σε κάθε πλευρά του (και συγκεκριμένα είναι πεπερασμένο).

Αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 5.19. Έστω $r \neq 1$ και $r' \neq 1$ θετικοί. Τότε υπάρχει μια 1-1 αντιστοιχία μεταξύ συνδυαστικά ισοδύναμων πλακοστρώσεων για το $\text{Tile}(r)$ και το $\text{Tile}(r')$, η οποία δίνεται μεταβάλλοντας τα μήκη όλων των r -πλευρών από r σε r' , διατηρώντας τις γωνίες, τους προσανατολισμούς και τις γεινιάσεις στα μέγιστα ευθύγραμμο τμήματα.

Απόδειξη. Έστω αρχικά ότι το r είναι άρρητος αριθμός. Αν ένα μέγιστο ευθύγραμμο τμήμα στο ενωμένο σύνορο των πλακιδίων έχει p 1-πλευρές και q r -πλευρές στη μία πλευρά του ευθυγράμμου τμήματος, τότε έχει επίσης p 1-πλευρές και q r -πλευρές στην άλλη πλευρά του ευθυγράμμου τμήματος. Επειδή κάθε μέγιστο ευθύγραμμο τμήμα έχει το πολύ δύο πλευρές πλακιδίων σε κάθε πλευρά του, το ίδιο επιχείρημα ισχύει και για κάθε ρητό r , εκτός ίσως από τις τιμές $\frac{1}{2}$, 1 και 2.

Αν $r = 2$, υπάρχει η επιπλέον δυνατότητα δύο 1-πλευρές να ευθυγραμμίζονται με μία r -πλευρά. Όταν υπάρχουν δύο διαδοχικές 1-πλευρές στη μία πλευρά μιας ευθείας, με 90° γωνίες των δύο πλακιδίων μεταξύ αυτών των πλευρών (ή μια 180° γωνία ενός πλακιδίου), τα άλλα άκρα αυτών των πλευρών έχουν γωνίες 120° ή 240° . Όμως, για κάθε r -πλευρά, η μία γωνία είναι 90° ή 270° , και οι γωνίες του πλακιδίου δεν επιτρέπουν την εμφάνιση 120° ή 240° στην ίδια κορυφή μιας πλακόστρωσης μαζί με 90° ή 270° .

Παρομοίως, στην περίπτωση $r = \frac{1}{2}$, η μόνη επιπλέον δυνατότητα είναι ότι δύο r -πλευρές ευθυγραμμίζονται με μία 1-πλευρά. Οι εξωτερικές γωνίες των δύο r -πλευρών έχουν μέτρα 120° ή 240° , ενώ μία από τις γωνίες κάθε 1-πλευράς έχει μέτρο 90° , 180° ή 270° , και αυτές δεν μπορούν να εμφανίζονται στην ίδια κορυφή.

Συνεπώς, για κάθε θετικό $r \neq 1$, έχουμε δείξει ότι αν ένα μέγιστο ευθύγραμμο τμήμα στο ενωμένο σύνορο των πλακιδίων έχει p 1-πλευρές και q r -πλευρές από

τη μία πλευρά του, τότε έχει επίσης p 1-πλευρές και q r -πλευρές και από την άλλη πλευρά του ευθύγραμμου τμήματος. Μπορούμε πλέον να κατασκευάσουμε την επιθυμητή αντιστοιχία. Επειδή τα διανύσματα των πλευρών γύρω από κάθε πλακίδιο αθροίζονται στο μηδέν, και οι πλευρές των πλακιδίων και στις δύο πλευρές ενός μέγιστου ευθύγραμμου τμήματος έχουν το ίδιο συνολικό μήκος, η διαδικασία που περιγράφηκε μετατρέπει μία πλακόστρωση με $\text{Tile}(r)$ σε μία πλακόστρωση με $\text{Tile}(r')$ που είναι συνδυαστικώς ισοδύναμη [54, Λήμμα 1.1]. (Αυτό το επιχείρημα βασίζεται στο γεγονός ότι το επίπεδο είναι απλά συνεκτικό. Μια πλακόστρωση με $\text{Tile}(r)$ σε περιοχή με τρύπα που δεν μπορεί να καλυφθεί με πλακίδια ίσως να μην μπορεί να μετατραπεί σε πλακόστρωση με $\text{Tile}(r')$ της ίδιας περιοχής με συνδυαστικώς ισοδύναμη τρύπα. Πράγματι, για ορισμένα διανύσματα που ορίζουν τις πλευρές της τρύπας, μπορεί να μην υπάρχει καμία συνδυαστικώς ισοδύναμη τρύπα αν τα διανύσματα των 1-πλευρών της τρύπας δεν αθροίζονται στο μηδέν.)

Όπως φαίνεται στο Λήμμα 5.19, όλες οι πλακοστρώσεις με $\text{Tile}(\sqrt{3})$ είναι ευθυγραμμισμένες με μία υποκείμενη πλακόστρωση Laves τύπου [3.4.6.4], οπότε κάθε μέγιστο ευθύγραμμο τμήμα αποτελείται μόνο από 1-πλευρές ή μόνο από r -πλευρές.

Τέλος, το $\text{Tile}(1)$ —ή γενικότερα το $\text{Tile}(a, a)$ — δεν είναι απεριοδικό, όπως φαίνεται από την περιοδική πλακόστρωση στο Σχήμα 5.42. Τα τριγωνικά πολυόμινα $\text{Tile}(a, 0)$ και $\text{Tile}(0, b)$ επίσης δεν είναι απεριοδικά. Μια πλακόστρωση με $\text{Tile}(r)$ για θετικό $r \neq 1$ μπορεί ακόμα να απεικονιστεί σε αντίστοιχη πλακόστρωση με $\text{Tile}(a, a)$, $\text{Tile}(a, 0)$ ή $\text{Tile}(0, b)$ ακολουθώντας τη διαδικασία που περιγράφηκε παραπάνω, αλλά η απεικόνιση δεν είναι 1-1. $\square$

5.7 Συμπεράσματα

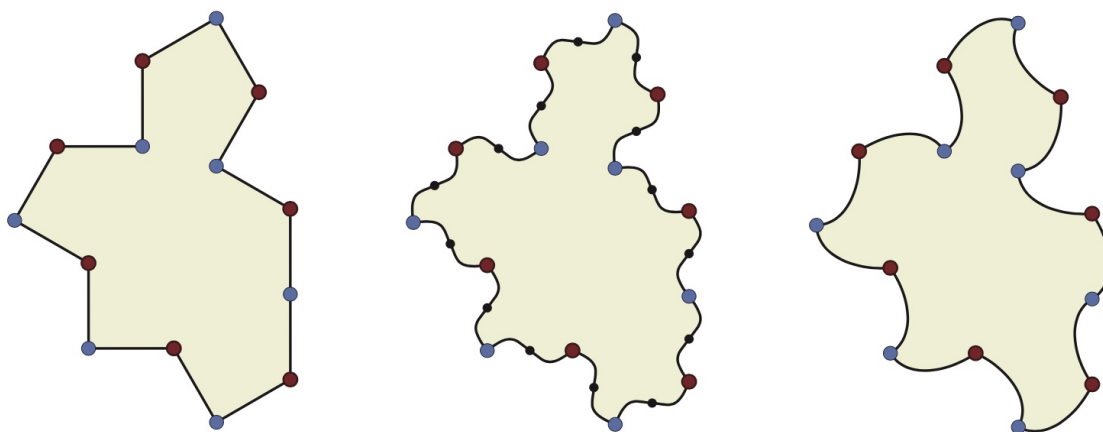
Παρουσιάστηκε ένα einstein, ο πρώτος τοπολογικός δίσκος που πλακοστρώνει απεριοδικά το ευκλείδιο επίπεδο χωρίς πρόσθετους περιορισμούς ή κανόνες αντιστοίχισης. Το καπέλο πολυχαρταετός είναι στην πραγματικότητα μέλος μιας συνεχούς οικογένειας απεριοδικών μονοπλακιδίων που δημιουργούν ταυτόσημες (από πλευράς συνδυαστικής) πλακοστρώσεις. Το καπέλο εξαναγκάζει πλακοστρώσεις με ιεραρχική δομή, όπως συμβαίνει και με πολλά άλλα απεριοδικά σύνολα πλακιδίων στο επίπεδο· ωστόσο, μια νέα μέθοδος που παρουσιάζεται στην Ενότητα 5.3 επαρκεί για να αποδείξει την απουσία περιοδικών πλακοστρώσεων, χωρίς την ανάγκη της ιεραρχικής δομής, πέρα από την επίδειξη της ύπαρξης μιας πλακόστρωσης.

Το σύστημα αντικατάστασης που παρουσιάστηκε ικανοποιεί τις σχετικά ήπιες συνθήκες που απαιτούνται ώστε να εξασφαλιστεί ένα υπεραριθμήσιμο πλήθος συνδυαστικά διακεκριμένων πλακοστρώσεων, όλες ιεραρχικές [126, 7.6.2]. Ωστόσο, δεν δημιουργείται κάθε πλακόστρωση με καπέλα αποκλειστικά μέσω αντικατάστασης. Όπως με το απεριοδικό σύνολο έξι σχημάτων του Robinson, είναι κατανοητό τα καπέλα να πλακοστρώνουν άπειρους τομείς του επιπέδου, οι οποίοι θα μπορού-

ύσαν κατόπιν να συνδυαστούν σε πλακοστρώσεις με άπειρες «γραμμές ρήξης», που βρίσκονται στα σύνορα υπερπλακιδίων σε όλα τα επίπεδα. Μελλοντική εργασία πρέπει να εξετάσει τη δυνατότητα πλακοστρώσεων με γραμμές ρήξης, ως μέρος του χαρακτηρισμού του πλήρους χώρου των πλακοστρώσεων με καπέλα. Συγκεκριμένα, πρέπει να διαπιστωθεί αν κάθε πεπερασμένο μπάλωμα που εμφανίζεται σε κάποια πλακόστρωση με καπέλα πρέπει να εμφανίζεται άπειρες φορές σε όλες τις πλακοστρώσεις, ή αν υπάρχουν μπαλώματα που εμφανίζονται μόνο σε γραμμές ρήξης και όχι στο εσωτερικό ενός υπερπλακιδίου.

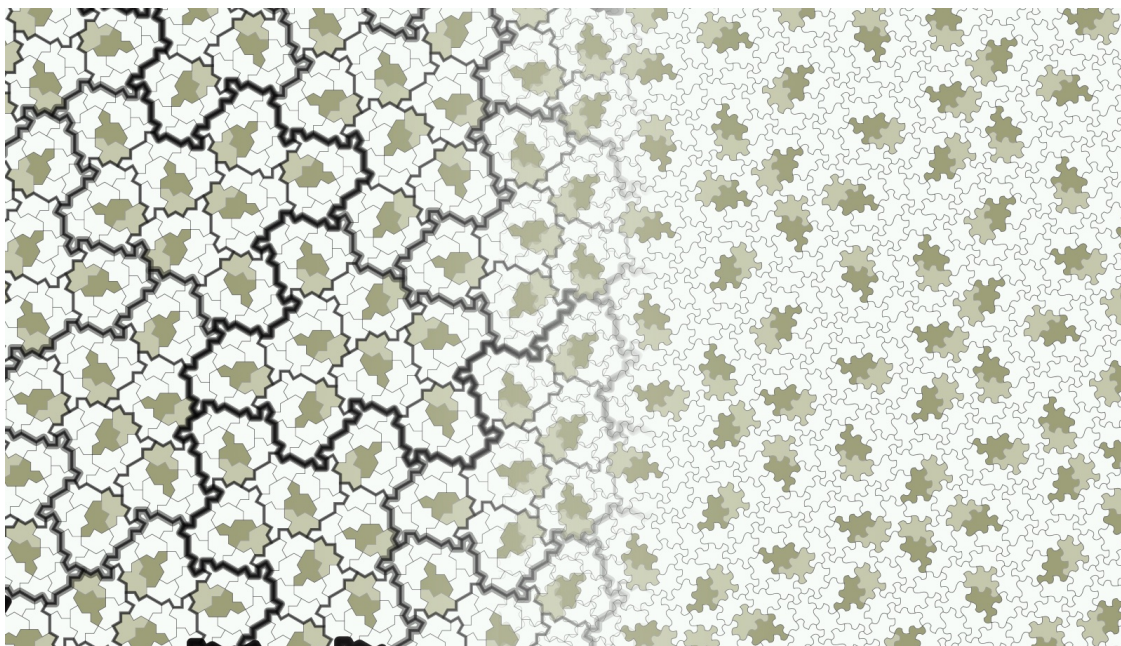
Το καπέλο είναι ένα μη κυρτό πολύγωνο με 13 πλευρές. Ένα κυρτό πολύγωνο δεν μπορεί να είναι απεριοδικό μονοπλακίδιο, και όλα τα μη κυρτά τετράπλευρα μπορούν εύκολα να αποδειχθούν ότι πλακοστρώνουν περιοδικά. Επομένως, ως προς τον αριθμό πλευρών, το «απλούστερο» απεριοδικό n -γωνο πρέπει να έχει $5 \leq n \leq 13$. Μελλοντική έρευνα μπορεί να μειώσει αυτό το εύρος, είτε ανακαλύπτοντας απεριοδικά n -γωνα για $n < 13$, είτε αποκλείοντας την ύπαρξή τους για $n \geq 5$.

Οι πλακοστρώσεις με το καπέλο περιλαμβάνουν αναγκαστικά τόσο πλακίδια με ανάκλαση όσο και χωρίς. Μπορεί επομένως κανείς δικαίως να αναρωτηθεί αν υπάρχει κάποιο απεριοδικό μονοπλακίδιο για το οποίο δεν απαιτούνται ανακλάσεις, είτε επειδή το πλακίδιο έχει αμφιπλευρική συμμετρία είτε επειδή καλύπτει το επίπεδο χρησιμοποιώντας μόνο μεταφορές και στροφές. Σε επόμενη εργασία [133], οι ίδιοι συγγραφείς δείχνουν ότι το Tile (1, 1) είναι τέτοιο πλακίδιο, αν το σύνορό του τροποποιηθεί ώστε να αποκλείσει τη χρήση ανακλάσεων.



Σχήμα 5.43: Το 14-πλευρο πολύγωνο Tile (1, 1)

Στο Σχήμα 5.43 στα αριστερά, είναι ένα ασθενώς απεριοδικό μονοπλακίδιο: αν επιβληθεί απαγόρευση των πλακοστρώσεων που συνδυάζουν ανακλασμένα και μη ανακλασμένα πλακίδια, τότε αυτό δημιουργεί μόνο μη περιοδικές πλακοστρώσεις. Τροποποιώντας τις ακμές του, όπως φαίνεται στο κέντρο και δεξιά για παράδειγμα, προκύπτουν ισχυρώς απεριοδικά μονοπλακίδια που ονομάζεται «φάντασμα», το οποίο δημιουργεί μόνο μη περιοδικές πλακοστρώσεις ακόμη και όταν επιτρέπονται οι ανακλάσεις.



Σχήμα 5.44: Ένα μπάλλωμα από μια μη περιοδική πλακόστρωση με φαντάσματα

Στο Σχήμα 5.44 στα αριστερά, τα πλακίδια σχεδιάζονται ως αντίγραφα του Tile (1, 1) και τα παχιά περιγράμματα δείχνουν την ιεραρχία των υπερπλακιδίων στα οποία αποδεικνύεται ότι ανήκουν αυτά τα πλακίδια. Στα δεξιά, τα σύνορα των πλακιδίων έχουν τροποποιηθεί με τρόπο παρόμοιο με το Σχήμα 5.43 (δεξιά).

Ανοικτά Ερωτήματα. Η εύρεση ενός τέτοιου μονοπλακιδίου επεκτείνει τα όρια της πολυπλοκότητας που είναι γνωστό ότι μπορούν να επιτευχθούν μέσω της συμπεριφοράς πλακόστρωσης ενός μοναδικού κλειστού τοπολογικού δίσκου. Δεν επιλύει, ωστόσο, άλλα αναπάντητα ερωτήματα σχετικά με αυτή την πολυπλοκότητα. Για παράδειγμα, όλα τα ακόλουθα ερωτήματα παραμένουν ανοικτά.

- Είναι οι αριθμοί Heesch μη φραγμένοι; Δηλαδή, υπάρχει για κάθε φυσικό n ένας τοπολογικός δίσκος που δεν πλακοστρώνει το επίπεδο και έχει αριθμό Heesch τουλάχιστον n ; Υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει άνω φράγμα για τους αριθμούς Heesch.
- Είναι οι ισοεδρικοί αριθμοί μη φραγμένοι; Δηλαδή, υπάρχει για κάθε φυσικό n ένας τοπολογικός δίσκος που πλακοστρώνει περιοδικά το επίπεδο, αλλά δημιουργεί μόνο πλακοστρώσεις με τουλάχιστον n κλάσεις μεταθετικότητας; Και εδώ υποθέτουμε ότι δεν υπάρχει άνω φράγμα. Αν απαλειφθεί η απαίτηση της περιοδικότητας, τότε το καπέλο πολυχαρταετός απαιτεί άπειρες κλάσεις μεταθετικότητας σε οποιαδήποτε πλακόστρωση. Ο Socolar [136] έδειξε ότι αν δεν απαιτείται το πλακίδιο να είναι κλειστός τοπολογικός δίσκος, τότε υπάρχουν πλακίδια με κάθε θετικό ισοεδρικό αριθμό.
- Είναι υπολογιστικά μη αποκρίσιμο αν ένα πολύγωνο (ή γενικότερα ένα ενιαίο

πλακίδιο στο επίπεδο) δημιουργεί μια πλακόστρωση; Και εδώ είναι εύλογο να υποθέσουμε καταφατική απάντηση, η οποία επίσης θα σήμαινε ότι οι αριθμοί Heesch είναι μη φραγμένοι. Οι Greenfeld και Tao [57, 58] απέδειξαν την μη αποκρισιμότητα σε πιο γενικό πλαίσιο. Για σύνολα πλακιδίων στο επίπεδο, ο Ollinger [109] απέδειξε την μη αποκρισιμότητα για σύνολα πέντε πολυόμινο.

- Είναι υπολογιστικά μη αποκρίσιμο αν ένα πολύγωνο (ή γενικότερα ένα ενιαίο πλακίδιο στο επίπεδο) δημιουργεί περιοδική πλακόστρωση; Και εδώ είναι εύλογο να υποθέσουμε καταφατική απάντηση. Μια τέτοια απάντηση θα σήμαινε ότι οι ισοεδρικοί αριθμοί είναι μη φραγμένοι.

Αν και έχει δοθεί μια περιγραφή των πλακοστρώσεων με το καπέλο πολυχαρταετό και τα συγγενικά πλακίδια που περιγράφονται εδώ (όλες αυτές οι πλακοστρώσεις προκύπτουν από το σύστημα αντικατάστασης της Ενότητας 5.5, όπως εφαρμόζεται στα συσσωματώματα πλακιδίων της Ενότητας 5.4, με την επιφύλαξη της δυνατότητας πλακοστρώσεων με γραμμές ασυνέχειας, όπου κάθε τομέας παράγεται μέσω του συστήματος αντικατάστασης), υπάρχουν διάφορες ανεπίσημες παρατηρήσεις στην Ενότητα 5.2 που δεν έχουν πλήρως διερευνηθεί ή διατυπωθεί με ακρίβεια. Αυτές οι παρατηρήσεις θα μπορούσαν να αποτελέσουν αφετηρία για μελλοντική διερεύνηση των πλακιδίων που περιγράφονται εδώ και των πλακοστρώσεών τους, των μεταπλακιδίων που χρησιμοποιούνται στην ταξινόμηση των πλακοστρώσεων με το καπέλο πολυχαρταετό, καθώς και άλλων σχετικών πλακοστρώσεων αντικατάστασης.

Η προσέγγιση που παρουσιάζεται στην Ενότητα 5.3, δηλαδή η σύζευξη δύο χωριστών πλακοστρώσεων προκειμένου να δείξουμε ότι μια τρίτη πλακόστρωση δεν μπορεί να είναι περιοδική, αποτελεί έναν νέο τρόπο απόδειξης ότι ένα σύνολο πλακιδίων είναι απεριοδικό. Θα άξιζε να διερευνηθεί κατά πόσο αυτή η μέθοδος μπορεί να εφαρμοστεί σε άλλα συμφραζόμενα. Ειδικότερα, οι πολυχαρταετοί (και γενικότερα τα πολυ-[4.6.12]-πλακίδια) ενδέχεται να είναι εξαιρετικά κατάλληλα για αυτόν τον τύπο απόδειξης, επειδή οι πλευρές τους βρίσκονται σε ευθείες γραμμές που ανήκουν σε δύο κανονικές πλακοστρώσεις με τρίγωνα. Η μέθοδος αυτή ενδέχεται επίσης να μπορεί να εφαρμοστεί και σε ορισμένα πολυ-[4.8.8]-πλακίδια. Αυτού του τύπου η απόδειξη μπορεί να συμβάλει στην εξήγηση του γιατί οι μικροί πολυχαρταετοί αποδείχθηκαν απεριοδικοί, ενώ τα πολυόμινο, τα τριγωνικά πολυόμινο και τα εξαγωνικά πολυόμινο υψηλής τάξης δεν απέδωσαν κανένα einstein. Ωστόσο, όπως σημειώθηκε στην Ενότητα 5.6, έρευνες στους πολυχαρταετούς δεν έχουν εντοπίσει άλλες απεριοδικές περιπτώσεις πέραν της οικογένειας που περιγράφεται στο παρόν κεφάλαιο.

Παραρτήματα

Κώδικας που χρησιμοποιήθηκε

A'.1 Τυχαίο πολύεδρο σε ελλειψοειδές

```
1 (*Number of vertices*)
2 n = 500;
3
4 (*Define ellipsoid parameters*)
5 ellipsoid = Ellipsoid[{0, 0, 0}, {3, 4, 5}];
6
7 (*Generate random points on the surface of the ellipsoid*)
8 points = RandomPoint[ellipsoid, n];
9
10 (*Create a convex hull from the points*)
11 convexHull = ConvexHullMesh[points];
12
13 (*Get the triangles from the convex hull*)
14 triangles = MeshPrimitives[convexHull, 2];
15
16 (*Extract the net coordinates from the MeshRegion*)
17 netCoordinates = MeshCoordinates[convexHull];
18
19 (*Create a Graphics object to visualize the net*)
20 netGraphics = Graphics3D[{EdgeForm[Black], LightGray, Opacity[0.8], triangles},
    Boxed -> False, ImageSize -> Large];
21
22 (*Display the net visualization*)
23 Show[netGraphics]
```


Παράρτημα Β΄

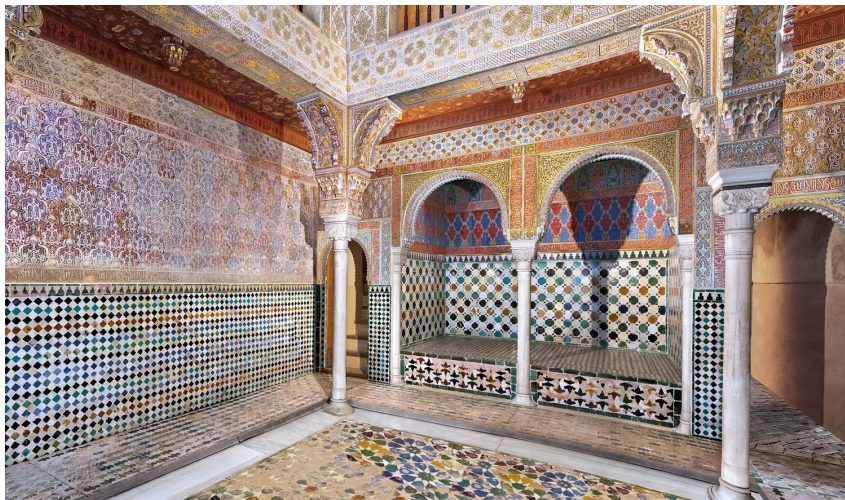
Πρόσθετο φωτογραφικό υλικό



Εικόνα Β΄.1: Τάφος Προφήτη Δανιήλ, Σούσα, Ιράν, 14ος αι.[12]



(α') [10]

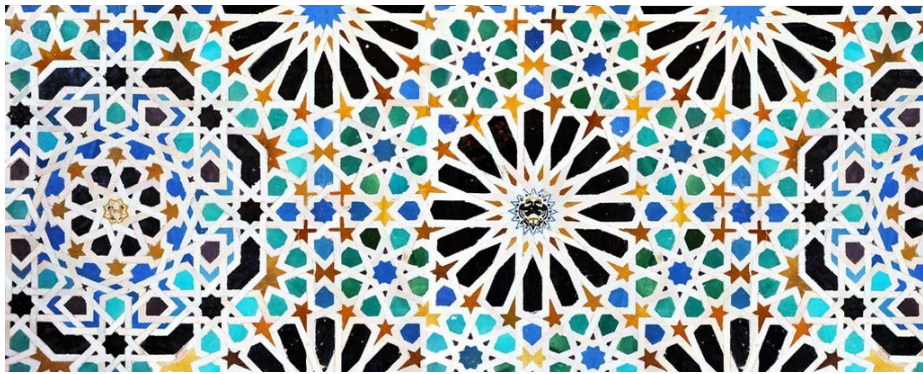


(β') [9]

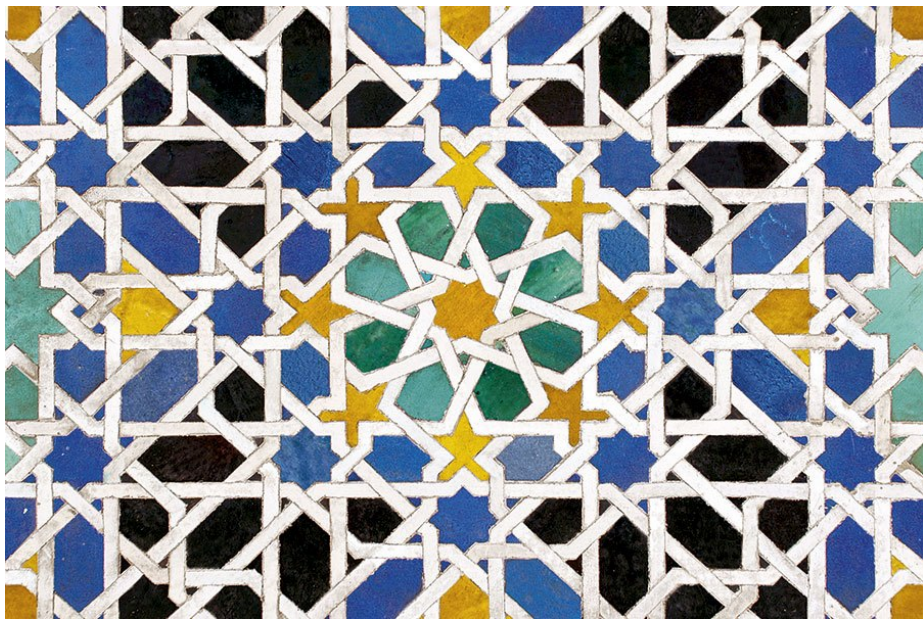


(γ') [9]

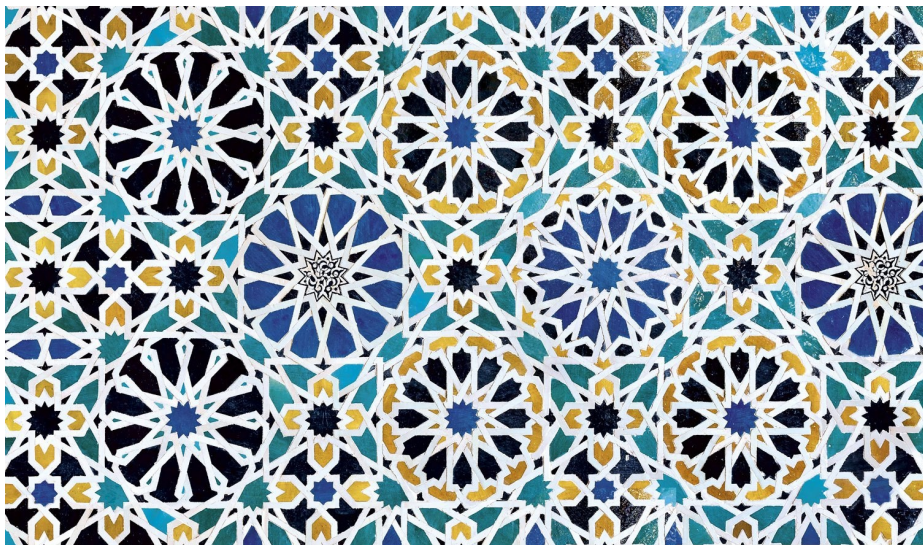
Εικόνα Β'.2: Πηλακοστρωμένες αίθουσες, Παλάτι Αλάμπρας, Ανδαλουσία, Ισπανία, 13ος αι.



(α) [11]



(β) [10]



(γ) [9]

Εικόνα Β'.3: Πλακοστρώσεις (λεπτομέρεια), Παλάτι Αλάμπρας, Ανδαλουσία, Ισπανία, 13ος αι.



(α) [10]

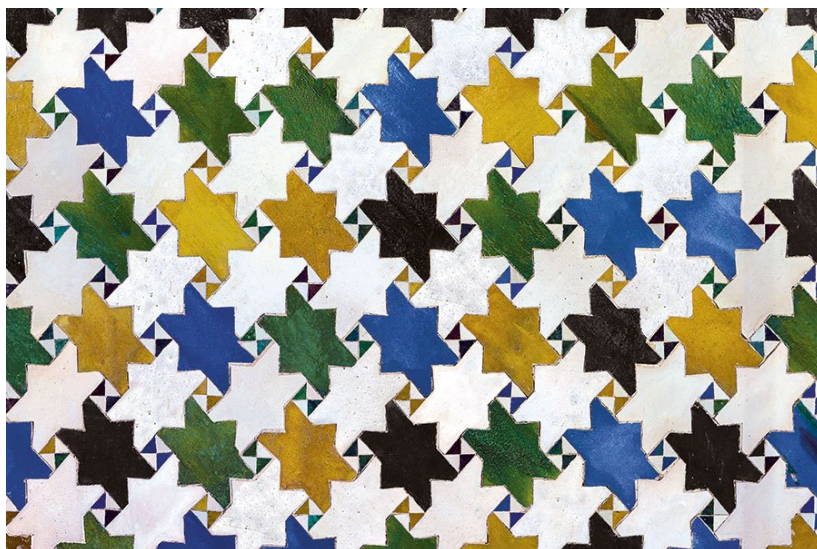


(β) [9]



(γ) [10]

Εικόνα Β'.4: Πλακοστρώσεις (λεπτομέρεια), Παλάτι της Αλιάμπρας, Ανδαλουσία, Ισπανία, 13ος αι.



(α) [10]

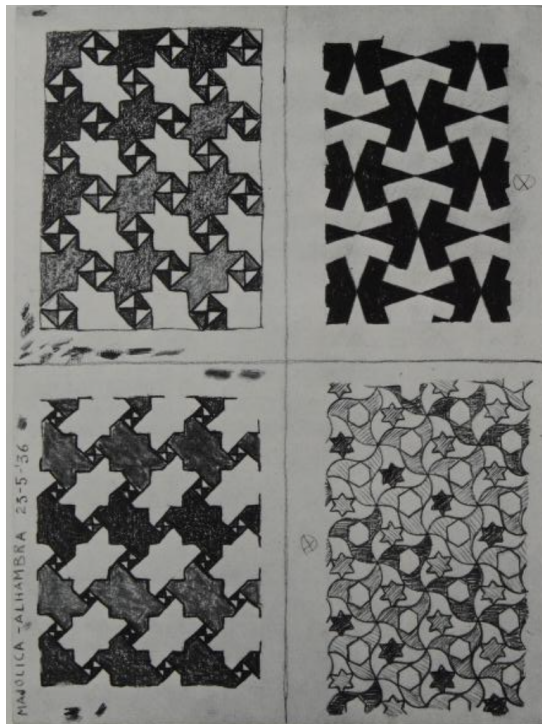


(β) [11]

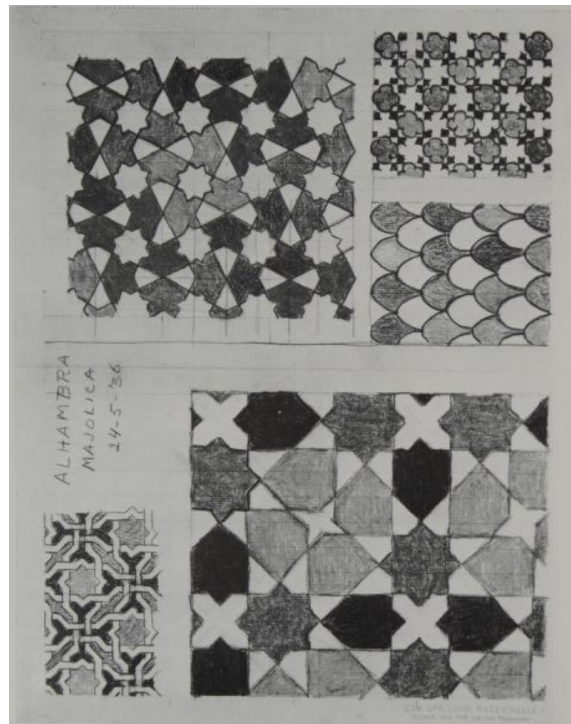


(γ) [11]

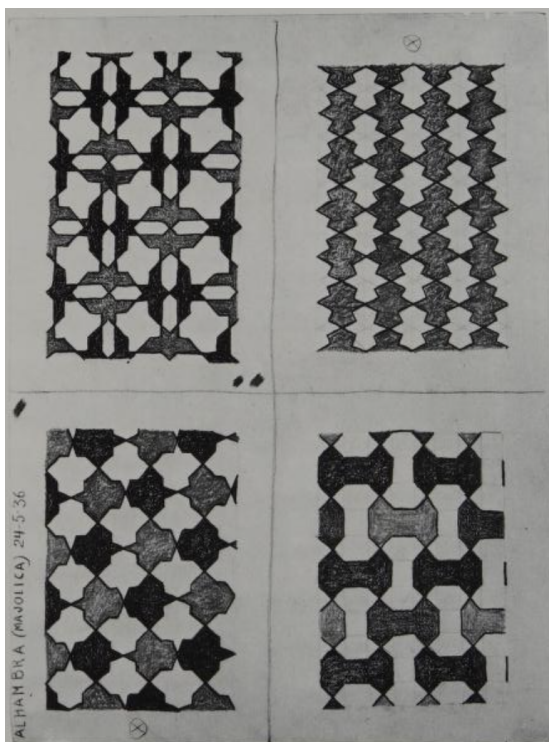
Εικόνα Β'.5: Πλακοστρώσεις (λεπτομέρεια), Παλάτι Αλάμπρας, Ανδαλουσία, Ισπανία, 13ος αι.



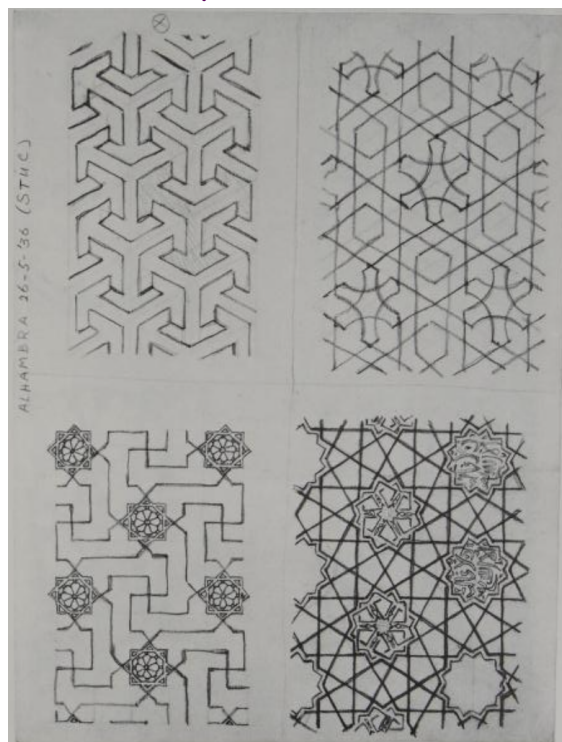
(α) [91, Εικ. 83]



(γ) [91, Εικ. 84]



(β) [91, Εικ. 83]

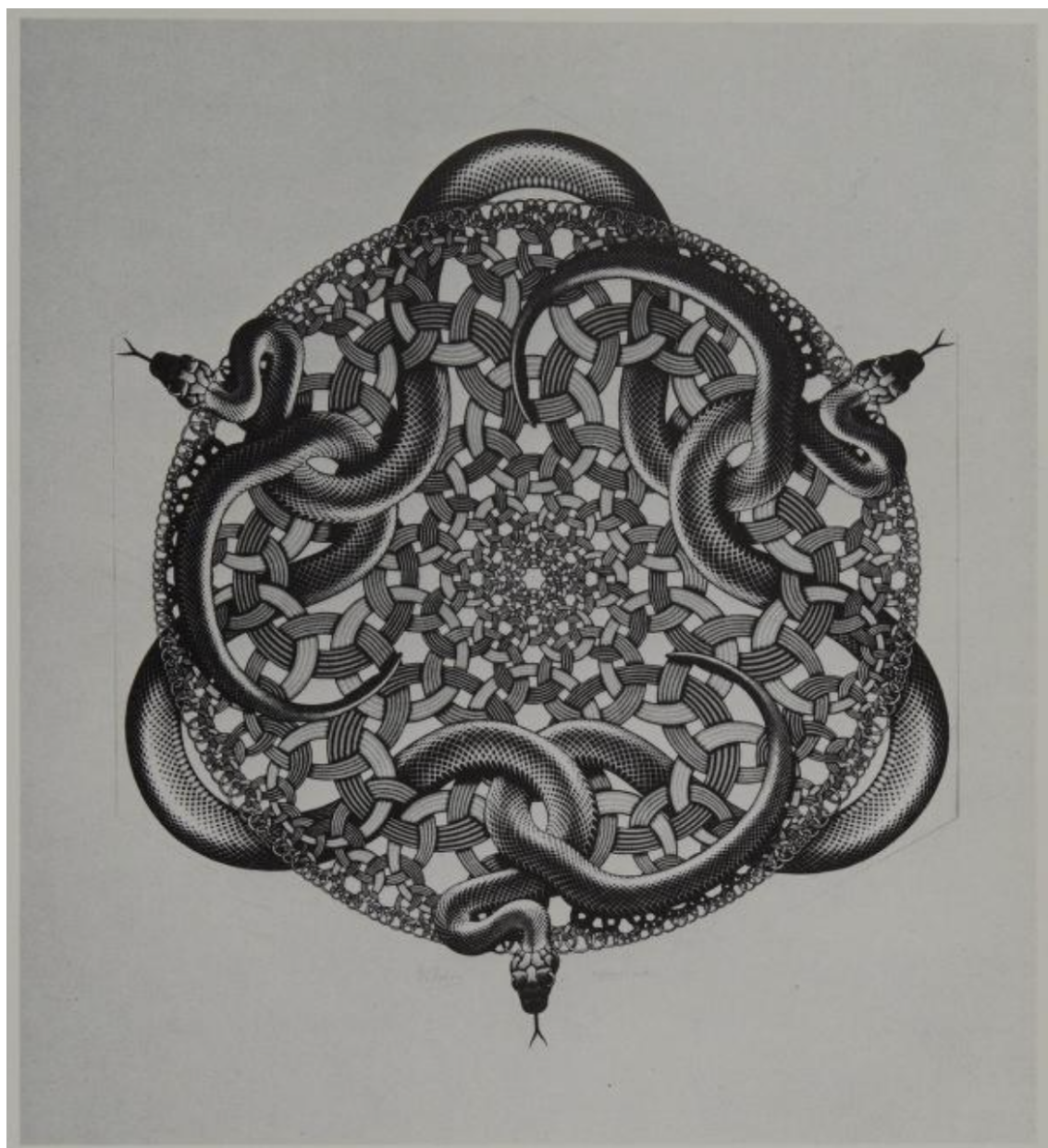


(δ) [91, Εικ. 84]

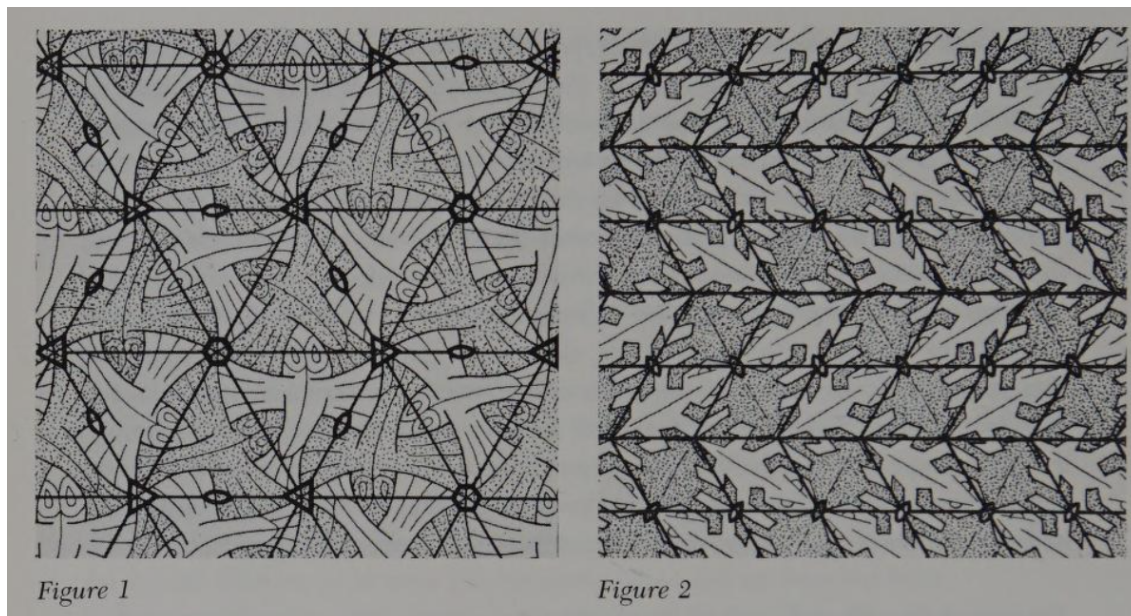
Εικόνα Β'.6: Σχέδια του Escher αντίγραφα πηλακοστρώσεων του Παλατιού της Α-λάμπρας, 1936



Εικόνα Β'.7: *Gravity*, 1952, Λιθογραφία και νερομπογιά (εδώ σε αποχρώσεις του γκριζου λόγω σκαναρίσματος) [91, Εικ. 178]



Εικόνα Β'.8: *Snakes*, 1969, Έγχρωμη ξυλογραφία (εδώ σε αποχρώσεις του γκριζου λόγω σκαναρίσματος) [91, Εικ. 270]



Εικόνα Β'.9: Πλακοστρώσεις με εμφανή τα πλέγματα [45, σελ. 108]



Εικόνα Β'.10: Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας pg [44, Εικ. 3]



Εικόνα Β'.11: Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας $p3m1$ [44, Εικ. 9]



Εικόνα Β'.12: Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας ??? [44, Εικ. 12]



Εικόνα Β'.13: Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας pgg [44, Εικ. 21]



Εικόνα Β'.14: Πλακόστρωση με την ομάδα συμμετρίας ??? [44, Εικ. 35]



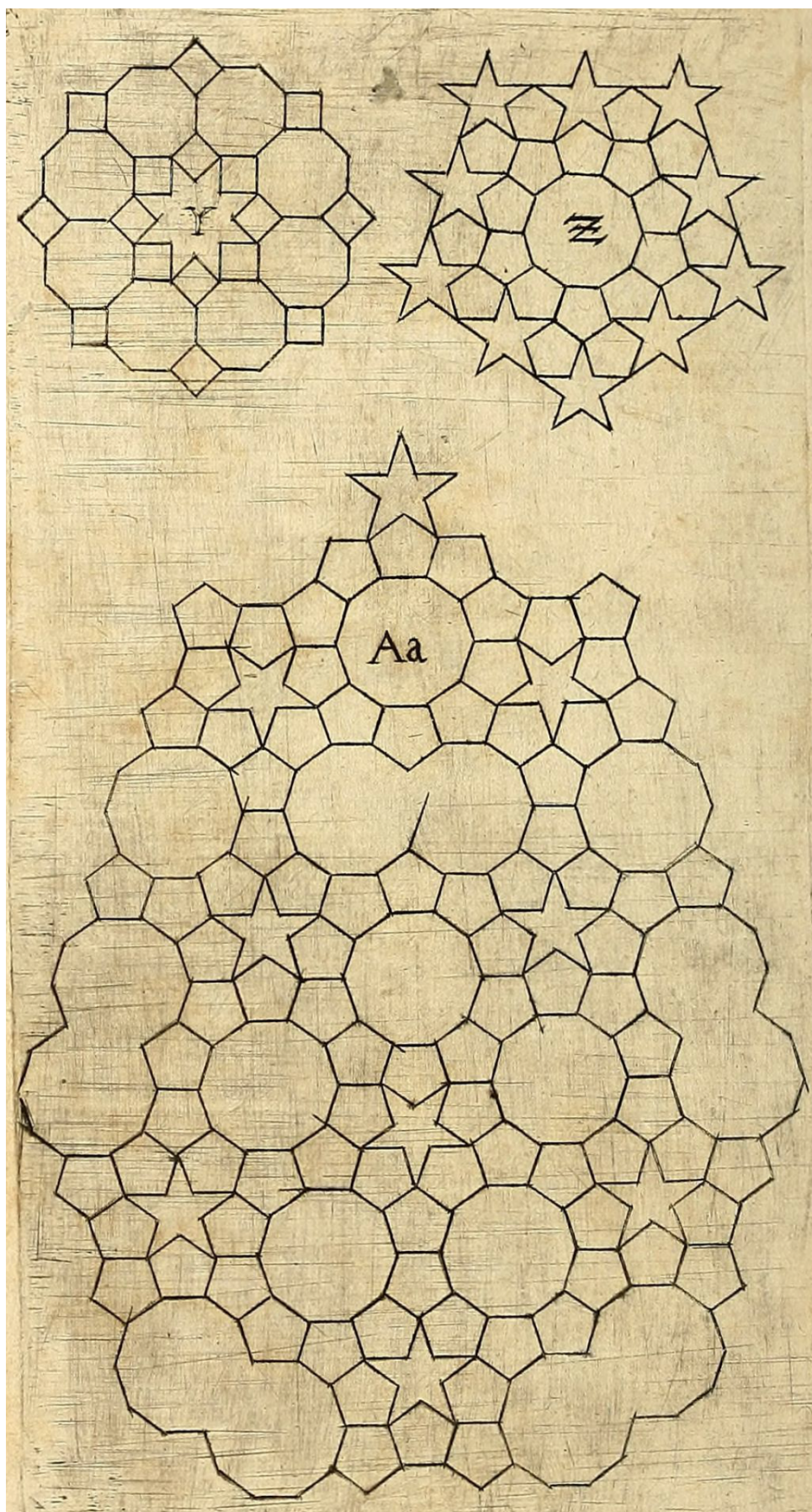
Εικόνα Β'.15: Πλακόστρωση με πολυχρωματική συμμετρία [44, Εικ. 39]



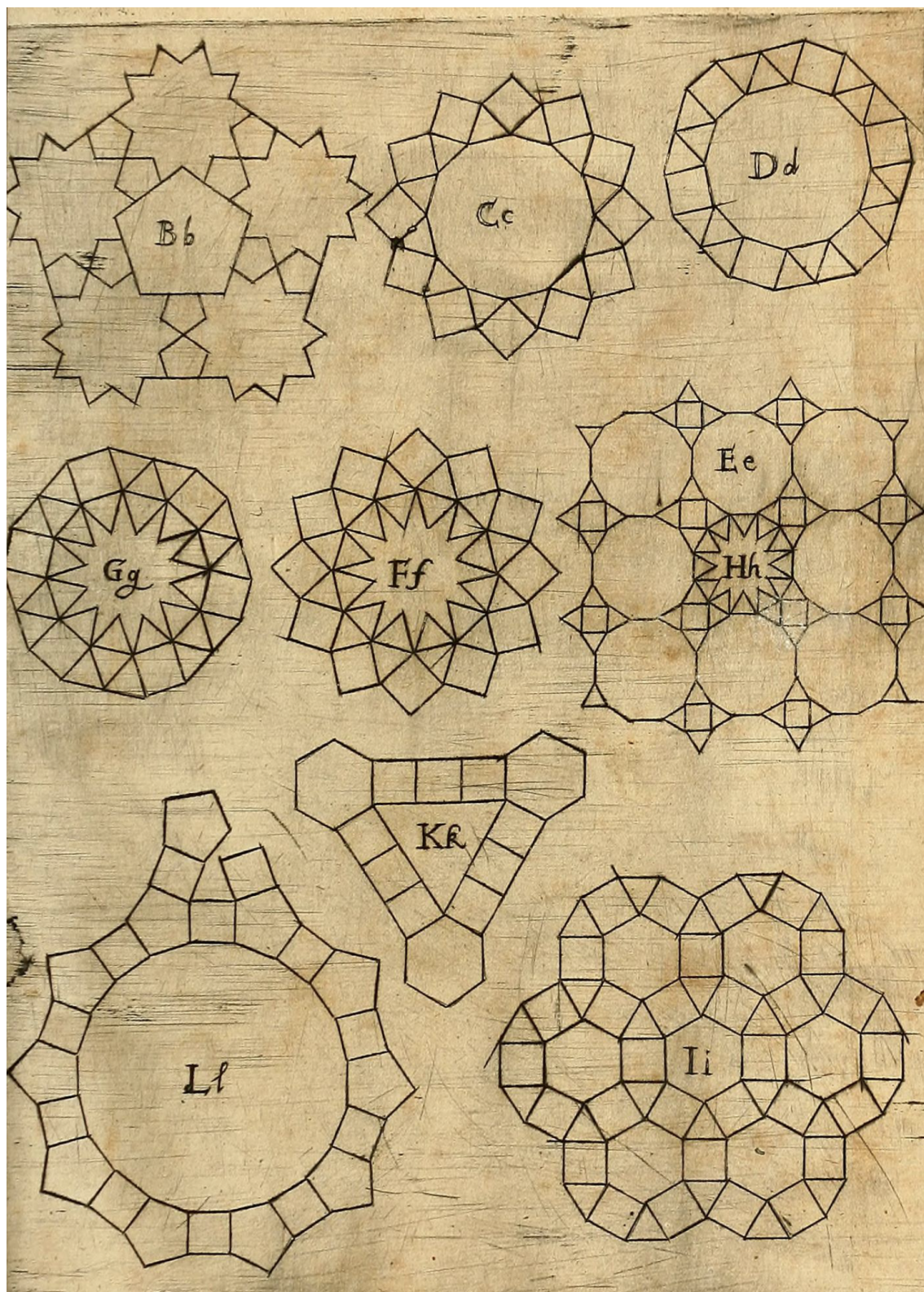
Εικόνα Β'.16: Πλακόστρωση με πολυχρωματική συμμετρία [44, Εικ. 40]



Εικόνα Β'.17: Πλακόστρωση με πολυχρωματική συμμετρία [44, Εικ. 41]



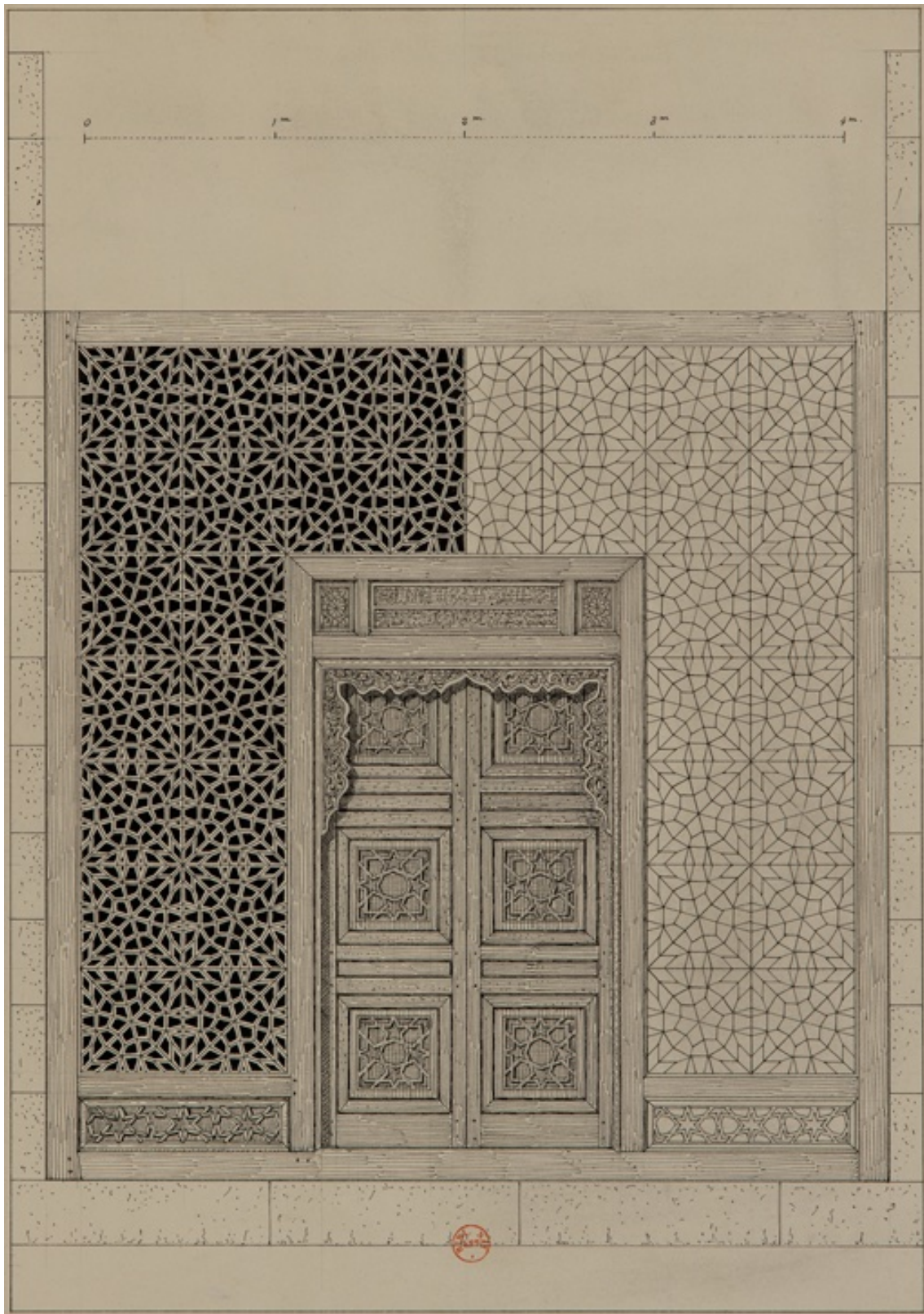
Εικόνα Β'.18: Σχέδια πλακοστρώσεων του Kepler στο [84]



Εικόνα Β'.19: Σχέδια πηλακοσπρώσεων του Kepler στο [84]



Εικόνα Β'.20: Σχέδια μοτίβων του Bourgoïn, 1868 [26, Εικ. 6.3]



Εικόνα Β'.21: Σχέδιο εξώστη δεξιού τμήματος ιζαμιού Soultân Barkouk στο Κάιρο (15ος αι.) του Bourgoïn, 1892 [26, Εικ. 13.1]

Λίγα λόγια για τον Grothendieck

Ο Alexander Grothendieck¹ γιός αναρχικών ζει δύσκολα παιδικά χρόνια. Γεννήθηκε το 1928 στο Βερολίνο από ουκρανο-εβραίο πατέρα και γερμανίδα μητέρα όπου ζουν μέχρι το 1933. Οι γονείς του αγωνίζονται στις τάξεις του αναρχικού κινήματος κατά την Ισπανική Επανάσταση του 1936 αφήνοντάς τον στο Αμβούργο όπου τελειώνει το δημοτικό και το γυμνάσιο. Το 1939 η οικογένειά του εγκαθίσταται στη Γαλλία όπου το 1942 το Καθεστώς του Vichy (1940 – 1944) απελαύνει τους εβραίους, μεταξύ των οποίων και τον πατέρα του, στα στρατόπεδα συγκέντρωσης της ναζιστικής Γερμανίας. Ο πατέρας του πεθαίνει στο Auschwitz και ο ίδιος με την μητέρα του μένουν στη Γαλλία. Ο Grothendieck -που παίρνει το επίθετο της μητέρας του- θα παραμείνει άπατρις μέχρι το 1971. Όταν κάποια στιγμή του προτάθηκε η γαλλική υπηκοότητα που τον υποχρέωνε να εκτίσει στρατιωτική θητεία την αρνήθηκε για να μην συμμετάσχει στον πόλεμο της Αλγερίας (1954 – 1962).



(α) Με τον Michael Atiyah (1929 - 2019) το 1958



(β) Με τον Laurent Schwartz

Εικόνα Γ'.1: Ο Grothendieck με συναδέλφους του

Το 1945 εγκαθίσταται με την μητέρα του σε ένα χωριό στην Νότια Γαλλία όπου παίρνει το πτυχίο του στα μαθηματικά το 1948 από το Πανεπιστήμιο του Montpellier.

¹Όλα τα στοιχεία για τη ζωή και το έργο του τα αντλούμε από το εξαιρετικό άρθρο [33] του Pierre Cartier (1932 –). Για τις χρονολογίες καθώς και για όλο το φωτογραφικό υλικό σε αυτό το παράρτημα καταφύγαμε στο [125].

Το 1949 μεταβαίνει στο Παρίσι όπου παρακολουθεί διαλέξεις ανωτέρων μαθηματικών, γνωρίζει τον Henri Cartan (1904 – 2008) και κατόπιν συμβουλής του κάνει το διδακτορικό του με τον Laurent Schwartz (1915 – 2002) στο Nancy. Στο διάστημα 1953 – 1955 διδάσκει στο Sao Paulo της Βραζιλίας και επισκέπτεται το Kansas και το Chicago των ΗΠΑ.

Με την επιστροφή του στην Γαλλία εντάσσεται στην διάσημη ομάδα μαθηματικών, την επονομαζόμενη Bourbaki στην οποία συμμετείχε από το 1952. Το 1958 όταν ιδρύεται το Institut des hautes études scientifiques (IHÉS) στο Παρίσι από τους Léon Motchane (1900 – 1990), Robert Oppenheimer² (1904 – 1967) και Jean Dieudonné (1906 – 1992) με στόχο να συγκεντρώσει τους καλύτερους ερευνητές, για να μην εγκαταλείψουν τη Γαλλία για τις ΗΠΑ μετά τον Β' Π.Π. όπως είχε συμβεί στη Γερμανία [74] ο Grothendieck είναι το πρώτο μέλος που διορίζεται³. Ο διορισμός του έπαιξε σημαντικό ρόλο στην εδραίωση του ονόματος του Ινστιτούτου και όχι το αντίθετο. Δρούσε άνετα εν πλήρη ελευθερία σε ένα μικρό «επιστημονικό γκέτο» (όπως θα το περιγράψει ο ίδιος αργότερα [61]), μοιραζόμενος με τον Dieudonné, τον στενότερο συνεργάτη του, μια εξαιρετικά ελιτίστικη ιδεολογία την οποία θα εγκαταλείψει στη συνέχεια.



Εικόνα Γ'.2: Ο Grothendieck διδάσκοντας στο IHÉS

Η συνεισφορά του σε πολλούς τομείς των μαθηματικών ήταν πρωτοποριακή, ιδίως στον τομέα της αλγεβρικής γεωμετρίας. Οι καινοτομίες του έθεσαν τα θεμέλια για πολλές σημαντικές εξελίξεις στα μαθηματικά και το έργο του εξακολουθεί να επηρεάζει βαθιά τον τομέα μέχρι τις μέρες μας. Είναι εντυπωσιακό να ακούσει κανείς με τι θαυμασμό μιλάνε γι' αυτόν μέχρι και σήμερα οι μαθηματικοί που τον γνώρισαν (βλ. οπτικοακουστικό υλικό στο τέλος του Παραρτήματος). Ωστόσο, αυτό που

²Που τότε διηύθυνε το Institute for Advanced Study (IAS) στο Princeton.

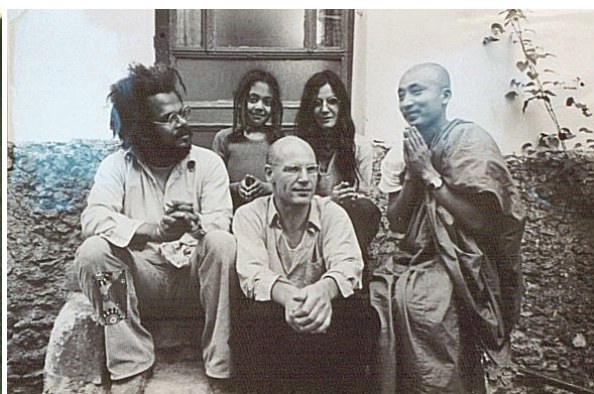
³Λέγεται δε ότι το Ινστιτούτο ιδρύθηκε ειδικά για να τον διορίσουν, αφού με την κατάστασή του ως άπατρις δεν ήταν δυνατόν να διοριστεί αλλού.

πραγματικά διαφοροποιούσε τον Grothendieck ήταν η απόλυτη προσήλωσή του στις ηθικές και κοινωνικές επιπτώσεις της έρευνάς του.

Στη δεκαετία του 1960, στο απόγειο της μαθηματικής του καριέρας, ο Grothendieck άρχισε να προβληματίζεται όλο και περισσότερο από την πιθανή κακόβουλη χρήση του έργου του, ιδίως σε στρατιωτικές εφαρμογές. Ήταν κάθετα αντίθετος με τη χρήση των μαθηματικών για μιλιταριστικούς σκοπούς και εξέφραζε τις ανησυχίες του με σφοδρότητα. Αυτή η ηθική του στάση τον οδήγησε να αποσυρθεί για ένα διάστημα από τα ακαδημαϊκά μαθηματικά και να ξεκινήσει ένα ακτιβιστικό έργο. Πιο συγκεκριμένα το 1966 αρνείται να μεταβεί στη Μόσχα για να παραλάβει το Μετάλλιο Fields που κέρδισε και ένα χρόνο αργότερα το αφιερώνει στο Βόρειο Βιετνάμ ως ένδειξη διαμαρτυρίας για τους βομβαρδισμούς των ΗΠΑ στον Βιετναμικό Πόλεμο (1955 – 1975). Στη συνέχεια μέσα στο πνεύμα του Μάη του '68 και της Άνοιξης της Πράγας θα προχωρήσει στην παραίτησή του το 1970 από το IHÉS σε ένδειξη διαμαρτυρίας για τη μερική χρηματοδότηση του ινστιτούτου από το Υπουργείο Άμυνας.



(α') Σε επίσκεψη στο Viêt Nam



(β') Στο σπίτι του στο Massy, Palaiseau

Εικόνα Γ'.3: Ο Grothendieck την δεκαετία του 1970

Μετά την παραίτησή του, ο Grothendieck συνεχίζει να γράφει, αλλά το ενδιαφέρον του μετατοπίζεται από τα μαθηματικά σε ευρύτερα φιλοσοφικά και ηθικά ζητήματα. Θα γράψει μια σειρά επιστολών και δοκιμίων στα οποία θα διατυπώσει τις απόψεις του σχετικά με τις ηθικές ευθύνες των επιστημόνων και των μαθηματικών τονίζοντας τη σημασία της χρήσης της επιστημονικής γνώσης για τη βελτίωση της ανθρωπότητας και της αποφυγής της εκμετάλλευσής της για επιβλαβείς σκοπούς.

Την περίοδο 1970 – 1973, του δίνεται μια προσωρινή θέση στην έδρα μαθηματικών του Collège de France στο Παρίσι, αλλά επειδή χρησιμοποιεί πολλές από τις διαλέξεις του για να μιλήσει για θέματα οικολογίας και ειρήνης δεν ανανεώνεται. Από το 1973 μέχρι να πάρει την σύνταξή του το 1988 εργάζεται ως καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Montpellier. Από τότε μέχρι τον θάνατό του το 2014 ζει απομονωμένος στο απόμακρο χωριό Lasserre στα Πυρηναία όρη ως ερημίτης αρνούμενος κάθε ανθρώπινη επικοινωνία.

Το 1970 με τους Claude Chevalley (1909 – 1984) και Pierre Samuel (1921

– 2009) ιδρύει την οικολογική και πολιτική ομάδα “Survivre et vivre” και εκδίδει μέχρι τη διάλυσή της το 1975 το ομώνυμο περιοδικό με στόχο τη διάδοση αντιμιλιταριστικών και οικολογικών ιδεών. Εκεί, συναντά μαθηματικούς με ριζοσπαστικές απόψεις και αναρχικές πεποιθήσεις και συνειδητοποιεί τον καταπιεστικό ρόλο που είχε διαδραματίσει μέχρι τότε και ο ίδιος ως μεγάλος επιστήμονας. Υιοθετώντας το κριτικό πνεύμα του '68, αναλύει την έρευνα ως καταπιεστική δραστηριότητα, τόσο για τους τεχνικούς και τους “μέσους επιστήμονες” όσο και για τους απλούς ανθρώπους. Μέσα από το περιοδικό υποστηρίζει ότι η διεκδίκηση της οικουμενικότητας από την επιστήμη και η μονοπώληση της αλήθειας στέρησε αποτελεσματικά από τα άτομα εναλλακτικές μορφές γνώσης, διαβρώνοντας τούς μη τεχνοβιομηχανικούς πολιτισμούς και υποτάσσοντας την κοινωνία στην εξουσία διαφόρων ειδικών. Ως αποτέλεσμα, πρωταρχικός στόχος της ομάδας είναι η απομυθοποίηση της επιστημονικής διαδικασίας, με ιδιαίτερη έμφαση στην κατάρριψη του μύθου περί καθαρής επιστήμης, αποκαλύπτοντας έτσι τον κομβικό ρόλο της στην υποστήριξη της ολέθριας πορείας της βιομηχανικής ανάπτυξης.



(α) Το 2011



(β) Το 2013

Εικόνα Γ'.4: Ο δύο τελευταίες (γνωστές) φωτογραφίες του Grothendieck

Χαρακτηριστική είναι η ομιλία του το 1972 στο Centre européen de recherches nucléaires (CERN) με τίτλο “Θα συνεχίσουμε την επιστημονική έρευνα;” [60]. Ξεκινώντας με μια εποικοδομητική αυτοκριτική προσκαλεί τους εργαζόμενους της επιστημονικής έρευνας να σκεφτούν σχετικά με τις επαγγελματικές τους ευθύνες. Επι-

πλέον, εκφράζει τις ανησυχίες του σχετικά με τη γενική δυσφορία της επιστημονικής κοινότητας, την οποία αποδίδει εν μέρει σε ένα ιδιαίτερα ανταγωνιστικό περιβάλλον και στη συνεχή πίεση για την παραγωγή αποτελεσμάτων. Αμφισβητεί την κοινωνική αξία της επιστημονικής έρευνας, σημειώνοντας ότι τα οικονομικά κίνητρα συχνά υπερσχύουν της ικανοποίησης πραγματικών ανθρώπινων αναγκών. Επιδιώκει επίσης να διερευνήσει πώς τα μαθηματικά θα μπορούσαν να συμβάλουν στην ικανοποίηση ευρύτερων κοινωνικών αναγκών, ενώ τονίζει την ανάγκη να συζητούνται κρίσιμα ζητήματα στις μαθηματικές διαλέξεις. Στο τέλος καταλήγει επιμένοντας στην ανάγκη αλλαγής με την κατάργηση του βιομηχανικού και προντουκτιβιστικού πολιτισμού και την μετάβαση σε ένα νέο μεταβιομηχανικό και εναρμονισμένο με τη φύση πολιτισμό, εδώ και τώρα βιώσιμο, και δεσμεύεται να είναι ένας από τους φορείς αυτής της αλλαγής στο πλαίσιο της ομάδας “Survivre et vivre”.

Η αυτοβιογραφία του [62] που γράφτηκε το 1985, μια ογκώδης ενδοσκόπηση, μένει ανέκδοτη μέχρι το 2022. Εδώ ο αναγνώστης μπορεί να βρει λεπτομερώς αναλυμένες τις σκέψεις του και την καυστική κριτική του για την ηθική στην μαθηματική έρευνα και τις ιδέες του για την ριζοσπαστική οικολογία. Η εργοβιογραφία του λειτουργεί ως ισχυρή υπενθύμιση ότι τα μαθηματικά επιτεύγματα δεν είναι αποκομμένα από ηθικούς προβληματισμούς. Η απόφασή του να εγκαταλείψει την μαθηματική κοινότητα αποδεικνύει έντονα την ουσιαστική βίωση των αρχών του. Αν και οι ενέργειές του ίσως φαντάζουν ακραίες σε κάποιους από την μαθηματική κοινότητα, υπογραμμίζουν παρόλα αυτά τα βαθιά ηθικά διλήμματα που προκύπτουν κατά την μαθηματική μας έρευνα και τη σημασία του ενσυνείδητου προβληματισμού σχετικά με τις κοινωνικές επιπτώσεις του έργου μας.

Σήμερα, καθώς οι επιστημονικές εξελίξεις συνεχίζουν να αναδιαμορφώνουν την κοινωνία, το παράδειγμα του Grothendieck παραμένει σύμβολο ηθικής ευθύνης για τους ερευνητές. Το έργο του χρησιμεύει ως παρακαταθήκη και είναι έκκληση προς τους επιστήμονες και τους μαθηματικούς να ευαισθητοποιούν σε θέματα ηθικής, να μοιράζονται ανοιχτά τις ανησυχίες τους και να δρουν ώστε να διασφαλίζουν ότι οι γνώσεις τους θα λειτουργούν μόνο προς όφελος της ανθρωπότητας στο σύνολό της.

Οπτικοακουστικό υλικό:

- Διάλεξη του Alain Connes το 2016 στο Collège de France για τον Grothendieck:

<https://youtu.be/r06Be3PbPi0>

- Συζήτηση μεταξύ του Alain Connes και του Jean-Pierre Serre το 2018 στην Fondation Hugot du Collège de France για την αλληλογραφία του τελευταίου με τον Grothendieck:

<https://youtu.be/p0v-ygSynRI>

- Συζήτηση μεταξύ των Alain Connes, Jean-Pierre Serre, Pierre Cartier και Jacques Dixmier στην Fondation Hugot du Collège de France το 2018 για την ομάδα Bourbaki το διάστημα 1945-1975:

<https://youtu.be/QqR459KxDVU>

- Σεμινάριο στην École normale supérieure (ENS) το 2017-2018 με τίτλο “Lectures grothendieckiennes” (Αναγνώσεις του Grothendieck) αποτελούμενο από διαλέξεις 9 μαθηματικών:

https://youtube.com/playlist?list=PLt6rik8WDbuRC4pwgKQ0nb7NPGG1oJ4Fo&si=KL BfmT_n8Mm0Wzpz

- Συνέντευξη του Pierre Cartier το 2014 στο Universität Potsdam για το έργο του Grothendieck:

<https://youtu.be/-Rlt-3PiilK>

- Συνέντευξη του Pierre Cartier το 2014 στο IHÉS για τα ερευνητικά του ενδιαφέροντα με μακρές αναφορές για τον Grothendieck:

<https://youtu.be/eZ85Fyl8jrk>

Η Σημειογραφία Τροπλοτήτων για Ομάδες Συμμετρίας

Η πρώτη σημειογραφία για κάθε τύπο ομάδας συμμετρίας που εμφανίζεται στις Εικόνες 2.38 και 2.39 είναι η σημειογραφία της Διεθνούς Ένωσης Κρυσταλλογραφίας (IUCr). Η δεύτερη σημειογραφία (σε παρένθεση) βασίζεται στη θεωρία των τροχιακών πολλαπλοτήτων (καταχρηστικά τροπλοτήτων, κατά το orbifolds από το orbit-manifolds) και οφείλεται στον John Conway, επεκτείνοντας ιδέες των William Thurston και Murray MacBeath. Αυτή η σημειογραφία εφαρμόζεται τόσο σε ομάδες συμμετρίας πλακοστρώσεων όσο και σε ομάδες συμμετρίας ζωφόρου. Ξεκινάμε με τις ομάδες πλακοστρώσεων και στη συνέχεια επεκτείνουμε τη συζήτηση στις ομάδες ζωφόρου.

Για να προσδιορίσουμε τη σημειογραφία τροπλοτήτων μιας συγκεκριμένης ομάδας πλακόστρωσης, πρώτα καθορίζουμε τα διακεκριμένα κέντρα στροφής και διεδρικά κέντρα, μέχρις ταύτισης από την ομάδα συμμετρίας. Δηλαδή, αν υπάρχει κέντρο στροφής που ταυτίζεται με άλλο μέσω μιας συμμετρίας, μετράμε μόνο μία φορά το κέντρο στροφής. Το ίδιο ισχύει και για τα διεδρικά κέντρα. Ένα κέντρο στροφής C_n αναπαρίσταται από τον ακέραιο n , ενώ ένα διεδρικό κέντρο D_n επίσης από τον ακέραιο n . Επιπλέον χρησιμοποιούνται τρία σύμβολα: ένας κύκλος $\circ$, ένας αστερίσκος $*$ και ένας σταυρός χ .

Ο κύκλος $\circ$ εμφανίζεται μόνος του και υποδηλώνει ότι υπάρχουν μόνο μεταφορικές συμμετρίες. Αν υπάρχουν ανακλάσεις, τότε χρησιμοποιούμε έναν αστερίσκο $*$. Αν υπάρχουν κέντρα στροφής και διεδρικά κέντρα, τότε καταγράφουμε πρώτα τους ακέραιους των κέντρων περιστροφής από το μεγαλύτερο στο μικρότερο αριστερά του $*$, και τους ακέραιους των διεδρικών κέντρων δεξιά του $*$. Αν δεν υπάρχουν γραμμές ανάκλασης, τότε δεν υπάρχουν διεδρικά κέντρα και καταγράφουμε μόνο τους ακέραιους των κέντρων στροφής χωρίς αστερίσκο. Αν δεν υπάρχουν κέντρα στροφής ή διεδρικά κέντρα, αλλά υπάρχουν δύο ασύμπτωτες μεταξύ τους γραμμές ανάκλασης, τότε γράφουμε $**$. Αν υπάρχει ολισθανάκλαση που μετακινεί οποιοδήποτε σημείο του επιπέδου σε άλλο σημείο χωρίς να μεσολαβεί κόκκινη συνεχής γραμμή ανάκλα-

σης, τότε προσθέτουμε ένα x στο τέλος της σημειογραφίας. Αν υπάρχουν δύο τέτοιες μη ταυτιζόμενες ολισθανάκλασεις, τότε γράφουμε xx .

Για παράδειγμα, ας εξετάσουμε το διάγραμμα συμμετρίας $p4m$ στην κάτω αριστερή γωνία της Εικόνας 2.39. Η τετραπλή στροφή που αντιστοιχεί στην υποομάδα συμμετρίας D_4 με κέντρο στο κέντρο ενός κίτρινου οκταγώνου ταυτίζει τα τέσσερα σημεία σταθεροποίησης του D_2 μεταξύ τους. Επίσης, ταυτίζει τα τέσσερα κέντρα D_4 στις γωνίες του διαγράμματος. Όμως, δεν υπάρχει συμμετρία που να ταυτίζει το κεντρικό σταθερό σημείο D_4 με κάποιο από τα ακριανά. Άρα, συνολικά έχουμε ένα κέντρο D_2 και δύο κέντρα D_4 . Καμία ολισθανάκλαση δεν μετακινεί σημείο χωρίς να το διαχωρίζει γραμμή ανάκλασης. Επομένως, η σημειογραφία είναι $*442$.

Ως δεύτερο παράδειγμα, ας δούμε το διάγραμμα συμμετρίας $p31m$ στην πάνω δεξιά γωνία της Εικόνας 2.39. Όλα τα κέντρα C_3 ταυτίζονται μεταξύ τους μέσω ανακλάσεων. Τα κέντρα D_3 ταυτίζονται μέσω των στροφών τάξης τρία. Οι ολισθανάκλασεις μεταφέρουν σημεία σε άλλα που διαχωρίζονται από γραμμές ανάκλασης, άρα δεν προσθέτουμε x . Συνεπώς, η σημειογραφία είναι $3 * 3$.

Το διάγραμμα συμμετρίας pg στην πάνω δεξιά γωνία της Εικόνας 2.38 έχει δύο διαφορετικές ολισθανάκλασεις που δεν είναι ισοδύναμες μέσω μεταφορών της ομάδας συμμετρίας. Καθεμία μετακινεί οποιοδήποτε σημείο σε άλλο που δεν διαχωρίζεται από γραμμή ανάκλασης. Δεν υπάρχουν γραμμές ανάκλασης ούτε κέντρα στροφής ή διεδρικά. Άρα, η σημειογραφία είναι xx .

Το ακόλουθο καταπληκτικό θεώρημα του John H. Conway (1937–2020) καθορίζει πότε ακριβώς μια σημειογραφία τροπιοτήτων αντιστοιχεί σε πραγματική ομάδα συμμετρίας πλακόστρωσης του ευκλείδειου επιπέδου. Σε κάθε σύμβολο της σημειογραφίας αποδίδεται μια ρητή τιμή:

σύμβολο	$\circ$	$*$	κυκλικό n	διαεδρικό n	x
τιμή	2	1	$\frac{n-1}{n}$	$\frac{n-1}{2n}$	1

Εφόσον γνωρίζουμε ότι οι μοναδικές επιτρεπτές στροφές στις ομάδες πλακόστρωσης είναι τάξης 2, 3, 4 και 6, αρκεί να εξετάσουμε τις εξής τιμές:

n	2	3	4	6
κυκλικό	1/2	2/3	3/4	5/6
διαεδρικό	1/4	1/3	3/8	5/12

Θεώρημα 4.20. Δοθείσης μιας τροπιοτήτας αυτή αντιστοιχεί σε μια ομάδα συμμετρίας του Ευκλείδειου επιπέδου με μεταφορές αν και μόνον αν το άθροισμα των τιμών των συμβόλων της είναι ίσο με 2.

Για παράδειγμα, η ομάδα $*442$ έχει άθροισμα:

$$1 + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4} = 2$$

Η ομάδα $3 * 3$ έχει άθροισμα :

$$\frac{2}{3} + 1 + \frac{1}{3} = 2$$

Η ομάδα xx έχει άθροισμα $1 + 1 = 2$.

Το θεώρημα αυτό επεκτείνεται πέρα από τη διατύπωσή του όσον αφορά τις ομάδες συμμετρίας πλακοστρώσεων του επιπέδου. Μπορεί επίσης να χρησιμοποιηθεί για τον προσδιορισμό των τροπιότητων που αντιστοιχούν στα διαγράμματα συμμετρίας πλακοστρώσεων της σφαίρας, όπου τότε το άθροισμα των τιμών είναι μικρότερο από 2. Αντίστοιχα, για πλακοστρώσεις του υπερβολικού επιπέδου, το άθροισμα θα είναι μεγαλύτερο από 2.

Η απόδειξη είναι πέρα από το εύρος του παρόντος κειμένου, για λεπτομέρειες, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο [37]. Ωστόσο, δεδομένου του θεωρήματος, είναι απλή άσκηση να προσδιοριστούν οι 17 δυνατές περιπτώσεις για τις ομάδες ταπετσαρίας.

Στην περίπτωση των ζωφόρων της Εικόνας 2.33, αρκεί να προσθέσουμε ένα ακόμη σύμβολο. Θεωρούμε το ∞^+ ως σημείο πολύ ψηλά πάνω από το διάγραμμα συμμετρίας στον θετικό άξονα y , και το ∞^- ως σημείο πολύ χαμηλά κάτω από το διάγραμμα συμμετρίας στον αρνητικό άξονα y . Αν υπάρχει κάποια συμμετρία που μεταφέρει το ένα σημείο στο άλλο, όπως ανάκλαση σε οριζόντια ευθεία, ολισθανάκλαση σε οριζόντια ευθεία ή στροφή κατά π , τότε θεωρούμε ότι τα δύο σημεία ∞^+ και ∞^- είναι ισοδύναμα. Αν όχι, τα θεωρούμε διακριτά σημεία, και αποδίδουμε σε καθένα το δικό του σύμβολο ∞ .

Αν υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες ανάκλασης, τότε θεωρούμε ότι αυτές τέμνουν τα σημεία στο άπειρο, και δημιουργούν ένα ή δύο διεδρικά σημεία στο άπειρο, το καθένα με τιμή $\frac{n-1}{2n} = \frac{\infty-1}{2\infty} = \frac{1}{2}$. Αν δεν υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες ανάκλασης, τότε θεωρούμε τα σημεία στο άπειρο ως σημεία στροφής με τιμή $\frac{n-1}{n} = \frac{\infty-1}{\infty} = 1$. Περιλαμβάνουμε το σύμβολο ∞ αν τα ∞^+ και ∞^- ταυτίζονται μέσω συμμετρίας, και το $\infty\infty$ αν δεν ταυτίζονται. Αυτά τα σύμβολα τα προσθέτουμε είτε στο τέλος της λίστας των κέντρων στροφής (αν είναι σημεία στροφής), είτε στη λίστα με τα διεδρικά σημεία (αν είναι τέτοια). Σημειώνουμε ότι κάθε ομάδα ζωφόρου θα έχει τουλάχιστον ένα σύμβολο ∞ στην τροπιότητά της.

Για παράδειγμα, η ομάδα ζωφόρου $pm2$ της Εικόνας 2.33 διαθέτει σημεία στροφής που ταυτίζουν το ∞^+ με το ∞^- . Άρα, περιλαμβάνεται ένα σύμβολο ∞ . Υπάρχουν κατακόρυφες ευθείες ανάκλασης, επομένως το ∞ είναι διεδρικό σημείο. Η ύπαρξη ευθειών ανάκλασης συνεπάγεται την παρουσία ενός $*$. Υπάρχει επίσης ένα στροφής τάξης 2. Η ολισθανάκλαση μεταφέρει σημεία πέρα από μια ευθεία ανάκλασης, επομένως δεν έχουμε κανένα x . Η τροπιότητά μας είναι λοιπόν $2 * \infty$. Και πράγματι, το άθροισμα των τιμών των συμβόλων είναι :

$$\frac{1}{2} + 1 + \frac{1}{2} = 2$$

Επιπρόσθετα Λήμματα

Λήμμα 5.18. *Αν το $\mathcal{P}$ είναι ένα πεπερασμένο σύνολο πολυχαρταετών που είναι κλειστοί τοπολογικοί δίσκοι και προέρχονται όλοι από την ίδια υποκείμενη πλακόστρωση Laves, και αν το $\mathcal{P}$ δημιουργεί πλακόστρωση με ιδιότητα H , τότε δημιουργεί πλακόστρωση με ιδιότητα H στην οποία όλοι οι πολυχαρταετοί είναι ευθυγραμμισμένοι με την ίδια υποκείμενη πλακόστρωση Laves, εκτός ίσως από την περίπτωση όπου το $\mathcal{P}$ περιέχει τον μονοχαρταετό και η H είναι «ισοεδρική πλακόστρωση μέσω στροφής 180° ».*

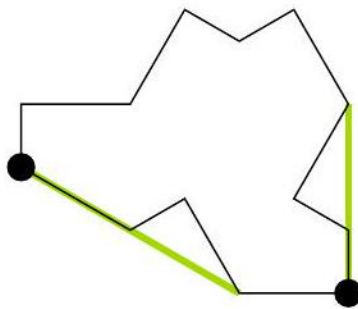
Απόδειξη. Αν η πλακόστρωση ακμή-με-ακμή με ιδιότητα H («ευθυγραμμισμένη» με την ευρύτερη έννοια) είναι η πλακόστρωση μέσω στροφής 180° με τον μονοχαρταετό, τότε τελειώσαμε διότι ο μονοχαρταετός δημιουργεί ισοεδρική πλακόστρωση. Διαφορετικά, παίρνοντας ένα ελάχιστο μπάλωμα από διαδοχικές σειρές ισόπλευρων τριγώνων που γεμίζουν ακριβώς με πλακίδια από το $\mathcal{P}$ και μεταφέροντάς το έτσι ώστε να ευθυγραμμιστεί με την υποκείμενη πλακόστρωση Laves, παράγουμε πλακόστρωση με ιδιότητα H . $\square$

Λήμμα 5.19. *Όλες οι πλακοστρώσεις με το καπέλο πολυχαρταετός είναι ευθυγραμμισμένες με μια υποκείμενη πλακόστρωση Laves τύπου [3.4.6.4].*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι κάθε μέγιστο ευθύγραμμο τμήμα στην ένωση των συνόρων των πλακιδίων σε μια τέτοια πλακόστρωση δεν μπορεί να περιέχει περισσότερες από δύο πλευρές πλακιδίων, καθώς κάθε γωνία 90° γειτνεύει και από τις δύο πλευρές με γωνίες μεγαλύτερες των 90° . Ειδικότερα, δεν υπάρχουν άπειρες ημιευθείες που να περιέχονται στην ένωση των συνόρων των πλακιδίων.

Αυτός ο περιορισμός αποκλείει αμέσως την περίπτωση ευθυγραμμισμένων πλακοστρώσεων που αποσυντίθενται σε σειρές ισόπλευρων τριγώνων που έχουν ολισθήσει μεταξύ τους, και κανένα ζεύγος γειτονικών χαρταετών στο πολυχαρταετό δεν είναι συμβατό με την πλακόστρωση με στροφή 180° του μονοχαρταετού. Επομένως, κάθε πλακόστρωση που δεν είναι ευθυγραμμισμένη με μια υποκείμενη [3.4.6.4] είναι επίσης μη ευθυγραμμισμένη με την ευρύτερη έννοια, και εξετάζουμε ευθυγραμμισμένες συνιστώσες. Δεδομένου ότι δεν υπάρχουν άπειρες ημιευθείες ανάμεσα στα

σύνορα των πλακιδίων, τέτοια ευθυγραμμισμένες συνιστώσες πρέπει να είναι φραγμένα κυρτά σύνολα. Οι γωνίες αυτών των συνόλων πρέπει να είναι γωνίες ενός μοναδικού πολυχαρταετού (καθώς κάθε ζεύγος γωνιών του πολυχαρταετού αθροίζεται σε τουλάχιστον 180°). Όμως καμία γωνία του πολυχαρταετού δεν μπορεί να είναι γωνία κυρτού συνόλου που πλακοστρώνεται από πολυχαρταετούς: τέσσερις είναι ανακλαστικές, επτά γειτονεύουν με ανακλαστική γωνία, και για τις υπόλοιπες δύο, η προέκταση μιας από τις πλευρές από εκείνη την κορυφή αποκόπτει περιοχή πολύ μικρή για να γεμίσει με πολυχαρταετούς (βλ. Σχήμα Ε'.1). $\square$



Σχήμα Ε'.1: Η προέκταση μιας πλευράς του πολυχαρταετού από οποιαδήποτε κορυφή που δεν είναι ανακλαστική ούτε γειτονική σε ανακλαστική.

Βιβλιογραφία

- [1] Colin Adams. *The tiling book: An introduction to the mathematical theory of tilings*. American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1η έκδοση, 2022.
- [2] Jadie Adams, Gabriel Lopez, Casey Mann και Nhi Tran. *Your Friendly Neighborhood Voderberg Tile*. *Mathematics Magazine*, 93(2):83–90, 2020.
- [3] Oleg Alexandrov. *Genus g surface*. https://en.wikipedia.org/wiki/Genus_g_surface, (n.d.). Για τα σχήματα. Ημερομηνία πρόσβασης: 24-08-2023.
- [4] american rugbier. *Umayyad Mosque Mosaics, Damascus*. <https://flic.kr/p/8A3mMQ>, 2009. Ημερομηνία πρόσβασης: 28-08-2023.
- [5] (Anon.). *The House of Dionysus*. <https://www.paphoslife.com/blog/the-house-of-dionysus>, 2020. Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.
- [6] (Anon.). *Places of Worship - Dome of the Rock*. <https://www.reviewofreligions.org/34651/places-of-worship-dome-of-the-rock/>, 2021. Ημερομηνία πρόσβασης: 28-08-2023.
- [7] (Anon.). *House of Aion Mosaic, Geometric pattern, 3rd-5th cent. CE*. <https://www.worldkindlearning.com/p/42268rnm/29261984604/cyprus-antiquity-archaeology-art>, (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.
- [8] (Anon.). *House of Aiona*. <https://cyprus.terrabook.com/cyprus/page/house-of-aiona/>, (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.
- [9] (Anon.). *Imágenes Alicatados de la Alhambra*. <https://www.dosde.com/alicatados-de-la-alhambra.html>, (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.
- [10] (Anon.). *Los alicatados de la Alhambra de Granada*. <https://www.dosde.com/discover/alicatados-de-la-alhambra-de-granada/>, (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.
- [11] (Anon.). *Texturas, color y simbolismo. Los azulejos de la Alhambra. El arte de la simetría*. <https://www.andalucia360travel.com/descubrir/azulejos-de-la-alhambra/>, (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.

- [12] (Anon.). *Tomb of Prophet Daniel*. [https://www.persiantourismguide.com/2016/11/04/tomb-of-prophet-daniel/#prettyPhoto\[pp_gal\]/1/](https://www.persiantourismguide.com/2016/11/04/tomb-of-prophet-daniel/#prettyPhoto[pp_gal]/1/), (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 28-08-2023.
- [13] (Anon.). *Οικία του Διονύσου*. <https://www.explorepafos.org/place/%CE%BF%CE%B9%CE%BA%CE%AF%CE%B1-%CF%84%CE%BF%CF%85-%CE%B4%CE%B9%CE%BF%CE%BD%CF%8D%CF%83%CE%BF%CF%85/>, (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.
- [14] Hugh E. ApSimon. *Periodic forests whose largest clearings are of size 3*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 266:113–121, 1970.
- [15] Alexandros D. Arvanitakis. *Recursion, evolution and conscious self*. <https://arxiv.org/abs/2001.11825v4>, 2023. Ημερομηνία πρόσβασης: 16-09-2023.
- [16] Michael Baake, Franz Gähler και Uwe Grimm. *Hexagonal Inflation Tilings and Planar Monotiles*. *Symmetry*, 4(4):581–602, 2012.
- [17] Michael Balter. *From a Modern Human's Brow-or Doodling?* *Science*, 295(5553):247–249, 2002.
- [18] Anna Battista. *Cosmatesque Moods*. https://www.irenebrination.com/irenebrination_notes_on_a/2012/09/cosmatesque-moods.html, 2012. Ημερομηνία πρόσβασης: 27-08-2023.
- [19] Ehrhard Behrends. *Tilings of the Plane*. Springer Fachmedien Wiesbaden, 1η έκδοση, 2022.
- [20] Sylvie Benzoni-Gavage. *le Rulpidon*. <https://images.math.cnrs.fr/Le-Rulpidon-5845.html?lang=fr#nb1>, 2021. Ημερομηνία πρόσβασης: 22-08-2023.
- [21] Sylvie Benzoni-Gavage. *Rulpidon 3D - 9 couleurs*. <https://patrimoine.ihp.fr/page/rulpidon3d>, 2022. Ημερομηνία πρόσβασης: 23-08-2023.
- [22] Sylvie Benzoni-Gavage. *Un genre d'arc-en-ciel, le Rulpidon enneachrome*. <http://math.univ-lyon1.fr/~benzoni/Arc-en-ciel.pdf>, 2022. Ημερομηνία πρόσβασης: 23-08-2023.
- [23] Sylvie Benzoni-Gavage. *The Rulpidon and 9-Color Maps*. *Proceedings of Bridges 2023: Mathematics, Art, Music, Architecture, Culture*. Judy Holde-ner, Eve Torrence, Chamberlain Fong και Katherine Seaton, επιμελητές, σελίδες 553–558, Phoenix, Arizona, 2023. Tessellations Publishing.
- [24] Robert Berger. *The Undecidability of the Domino Problem*, τόμος 66 στο *Memoirs of the American Mathematical Society*. American Mathematical So-ciety, 1966.

- [25] Siddhartha Bhattacharya. *Periodicity and decidability of tilings of $\mathbb{Z}^2$* . *American Journal of Mathematics*, 142(1):255–266, 2020.
- [26] Maryse Bideault, Sébastien Chauffour, Estelle Thibault και Mercedes Volait, επιμελητές. *Jules Bourgoïn (1838-1908)*. Publications de l’Institut national d’histoire de l’art, 2012.
- [27] Jonathan Block και Shmuel Weinberger. *Aperiodic Tilings, Positive Scalar Curvature and Amenability of Spaces*. *Journal of the American Mathematical Society*, 5(4):907–918, 1992.
- [28] Thomas Bolander. *Self-Reference*. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* Edward N. Zalta, επιμελητής. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2017.
- [29] Bojan Băsić. *The Heesch Number for Multiple Prototiles is Unbounded*. *Comptes Rendus Mathématique*, 353(8):665–669, 2015.
- [30] Bojan Băsić. *A Figure with Heesch Number 6: Pushing a Two-Decade-Old Boundary*. *The Mathematical Intelligencer*, 43:50–53, 2021.
- [31] Károly Böröczky. *Gömbkitöltések állandó görbületű terekben I*. *Matematikai Lapok*, 25(3–4):265–306, 1974.
- [32] Andrea Cantini και Riccardo Bruni. *Paradoxes and Contemporary Logic*. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* Edward N. Zalta, επιμελητής. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2021.
- [33] Pierre Cartier. *Alexander Grothendieck; Un pays dont on ne connaîtrait que le nom*. *Inference: International Review of Science*, 1(1), 2014.
- [34] Ping Ngai Chung, Miguel A. Fernandez, Yifei Li, Michael Mara, Frank Morgan, Isamar Rosa Plata, Niralee Shah, Luis Sordo Vieira και Elena Wikner. *Isoperimetric Pentagonal Tilings*, 2011.
- [35] Stewart T. Coffin. *The Puzzling World of Polyhedral Dissections*. Oxford University Press, New York, 1η έκδοση, 1990.
- [36] John Horton Conway. *Mrs Perkins's quilt*. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 60(3):363–368, 1964.
- [37] John Horton Conway, Heidi Burgiel και Chaim Goodman-Strauss. *The Symmetries of Things*. CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, 1η έκδοση, 2008.

- [38] Harold Scott MacDonald Coxeter. *Introduction to Geometry*. Wiley Classics Library. John Wiley & Sons, Nashville, TN, 2η έκδοση, 1969.
- [39] Harold Scott MacDonald Coxeter. *Regular and Semiregular Polyhedra*. Στο Senechal [128], σελίδες 41–52.
- [40] Diego Delso. *Casa de Eustolios, Antigua Curio, Chipre, DD32*. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=122653477>, 2021. Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.
- [41] Diego Delso. *Casa de Eustolios, Antigua Curio, Chipre, DD35*. <https://commons.wikimedia.org/w/index.php?curid=122653485>, 2021. Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.
- [42] Albrecht Dürer. *Melencolia I*. <https://collections.artsmia.org/art/113568/melencolia-i-albrecht-duerer>, 1514. Ημερομηνία πρόσβασης: 20-08-2023.
- [43] Albrecht Dürer. *Unterweisung der Messung mit dem Zirkel und Richtscheit*. <https://www.digitale-sammlungen.de/view/bsb10863150?>, 1606. Επανέκδοση της πρώτης έκδοσης του 1525. Ημερομηνία πρόσβασης: 16-08-2023.
- [44] Maurits Cornelis Escher. *The Graphic Work of M. C. Escher*. Ballantine Books, New York, 1975.
- [45] Maurits Cornelis Escher και Jan Willem Vermeulen. *Escher on Escher: Exploring the Infinite*. Μετάφραση: Karin Ford. Harry N. Abrams, New York, 1η έκδοση, 1989.
- [46] Robert Fathauer. *Tessellations*. CRC Press Taylor & Francis Group, Boca Raton, 1η έκδοση, 2021.
- [47] Philip Galanter. *Generative Art Theory*. Στο Paul [113], σελίδες 146–180. Κεφάλαιο 5.
- [48] Martin Gardner. *Spectrum: Penrose tiles to trapdoor ciphers: And the return of Dr matrix*. Mathematical Association of America, Washington, D.C., DC, 1997.
- [49] Walter Gautschi. *Alexander M. Ostrowski (1893–1986): His life, work, and students*. math.ch/100, σελίδες 257–278. EMS Press, 2010.
- [50] Mohammad Ghomi. *Affine unfoldings of convex polyhedra*. *Geometry & Topology*, 18(5):3055–3090, 2014.

- [51] D. Girault-Beauquier και M. Nivat. *Tiling the plane with one tile*. *Topology and Category Theory in Computer Science (Oxford, 1989)*, Oxford Science Publications, σελίδες 291–333. Oxford University Press, New York, 1991.
- [52] Michael Goldberg. *Central Tessellations*. *Scripta Mathematica*, 21:253–260, 1955.
- [53] Chaim Goodman-Strauss. *A Small Aperiodic Set of Planar Tiles*. *European Journal of Combinatorics*, 20(5):375–384, 1999.
- [54] Chaim Goodman-Strauss. *Regular Production Systems and Triangle Tilings*. *Theoretical Computer Science*, 410(16):1534–1549, 2009.
- [55] Rachel Greenfeld και Mihail N. Kolountzakis. *Tiling, spectrality and aperiodicity of connected sets*, 2023.
- [56] Rachel Greenfeld και Terence Tao. *A counterexample to the periodic tiling conjecture*, 2022.
- [57] Rachel Greenfeld και Terence Tao. *Undecidability of translational monotilings*, 2023.
- [58] Rachel Greenfeld και Terence Tao. *Undecidable Translational Tilings with Only Two Tiles, or One Nonabelian Tile*. *Discrete & Computational Geometry*, 70(4):1652–1706, 2023.
- [59] Bathsheba Grossman. *120-cell*. <https://bathsheba.com/math/120cell/>, (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 23-08-2023.
- [60] Alexander Grothendieck. *Allons-nous continuer la recherche scientifique?* <https://archive.org/details/AlexandreGrothendieck-UneVieDigneDtreVcue>, 1972. Ημερομηνία πρόσβασης: 16-09-2023.
- [61] Alexander Grothendieck. *Allons-nous continuer la recherche scientifique? Ecologie & politique*, 52(1):159–169, 2016.
- [62] Alexander Grothendieck. *Récoltes et Semailles I, II. Réflexions et témoignage sur un passé de mathématicien*. Collection Tel. Gallimard, Paris, 2022.
- [63] Branko Grünbaum και Geoffrey Colin Shephard. *Tilings and Patterns*. W.H. Freeman and Company, New York, 1η έκδοση, 1987.
- [64] Petra Gummelt. *Penrose Tilings as Coverings of Congruent Decagons*. *Geometriae Dedicata*, 62(1):1–17, 1996.
- [65] Thomas Hales. *The Honeycomb Conjecture*. *Discrete & Computational Geometry*, 25:1–22, 2001.

- [66] William Hanf. *Nonrecursive tilings of the plane, I*. *Journal of Symbolic Logic*, 39:283–285, 1974.
- [67] George William Hart. *The Polyhedra of M.C. Escher*. <https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/escher.html>, 1996. Ημερομηνία πρόσβασης: 20-08-2023.
- [68] George William Hart. *Paolo Uccello's Polyhedra*. <https://www.georgehart.com/virtual-polyhedra/uccello.html>, 1998. Ημερομηνία πρόσβασης: 20-08-2023.
- [69] George William Hart. *Dodecahedron Sculpture*. <https://www.georgehart.com/sculpture/Dodecahedron/dodecahedron.html>, 2016. Ημερομηνία πρόσβασης: 23-08-2023.
- [70] Klaus Heidler. *Die Unentscheidbarkeit des Eck-Dominoproblems*. *Mathematisch-Physikalische Semesterberichte*, 23:237–250, 1976.
- [71] David Hilbert. *Mathematical problems*. *Bulletin of the American Mathematical Society*, 8(10):437–479, 1902.
- [72] Sean Hoyland. *Apis florea nest closeup*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Apis_florea_nest_closeup2.jpg#/media/File:Apis_florea_nest_closeup2.jpg, 2007. Ημερομηνία πρόσβασης: 29-08-2023.
- [73] Adrian J. Hunter. *Pigmented cells from an epidermal peel from the bulb of a red onion, Allium cepa*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Cells_from_a_red_onion_epidermal_peel.tif#/media/File:Cells_from_a_red_onion_epidermal_peel.tif, 2014. Ημερομηνία πρόσβασης: 29-08-2023.
- [74] Allyn Jackson. *The IHÉS at Forty*. *Notices of the American Mathematical Society*, 46(3):329–337, 1999.
- [75] Emmanuel Jeandel και Michaël Rão. *An aperiodic set of 11 Wang tiles*, 2015.
- [76] Hyeong Chai Jeong και Paul J. Steinhardt. *Constructing Penrose-like Tilings from a Single Prototile and the Implications for Quasicrystals*. *Physical Review B*, 55:3520–3532, 1997.
- [77] David E. Joyce. *History of crystallographic groups and related topics*. <http://www2.clarku.edu/faculty/djoyce/wallpaper/history.html>, 1997. Ημερομηνία πρόσβασης: 30-08-2023.

- [78] Vassily Kandinsky. *Circles in a Circle*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Vassily_Kandinsky,_1923_-_Circles_in_a_Circle.jpg#/media/File:Vassily_Kandinsky,_1923_-_Circles_in_a_Circle.jpg, 1923. Ημερομηνία πρόσβασης: 17-08-2023.
- [79] Vassily Kandinsky. *Concerning the Spiritual in Art*. Μετάφραση: Michael T. H. Sadler. The Floating Press, Auckland, New Zealand, 2008. Τίτλος πρωτοτύπου: *Über das Geistige in der Kunst*, 1911.
- [80] Craig S. Kaplan. *Heesch numbers of unmarked polyforms*. *Contributions to Discrete Mathematics*, 17(2):150–171, 2022.
- [81] Richard Kenyon. *Rigidity of planar tilings*. *Inventiones Mathematicae*, 107(3):637–651, 1992.
- [82] Richard Kenyon. *Erratum: "Rigidity of planar tilings"*. *Inventiones Mathematicae*, 112(1):223, 1993.
- [83] Richard Kenyon. *A group of paths in $\mathbb{R}^2$* . *Transactions of the American Mathematical Society*, 348(8):3155–3172, 1996.
- [84] Ioannis Kepler. *Harmonices mundi*. <https://archive.org/details/ioanniskeplerih00kepl/>, 1619. Ημερομηνία πρόσβασης: 19-08-2023.
- [85] Ibn Khaldûn. *The Muqaddimah*. Μετάφραση: Franz Rosenthal. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1967. Έκδοση πρωτοτύπου: 1377.
- [86] Stephen C. Kleene. *Introduction to Mathematics*. North-Holland, Amsterdam, 1967.
- [87] Felix Klein. *Lectures on the Icosahedron and the Solution of Equations of the Fifth Degree*. Μετάφραση: George Gavin Morrice. Kegan Paul, Trench, Trübner & Co, London, 2η έκδοση, 1913.
- [88] Ulysse Lacoste. *le Rulpidon*. <https://www.ulysselacoste.com/oeuvres/mobiles/le-rulpidon/>, 2018. Ημερομηνία πρόσβασης: 22-08-2023.
- [89] Cornelia Leopold. *Geometric and Aesthetic Concepts Based on Pentagonal Structures*. Στο Sriraman [138], σελίδες 291–316. Κεφάλαιο 11.
- [90] Chen Pan Liao. *A typical orb web constructed by an Araneus (family Araneidae) spider*. <https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Typical-orb-web-photo.jpg#/media/File:Typical-orb-web-photo.jpg>, 2011. Ημερομηνία πρόσβασης: 29-08-2023.

- [91] Johannes Lodewijk Locher, επιμελητής. *The world of M.C. Escher*. Abradale Press/Harry N. Abrams, Inc., Publishers, New York, 1η έκδοση, 1988.
- [92] Caroline Henriette MacGillavry, επιμελητής. *Fantasy & symmetry : the periodic drawings of M. C. Escher*. Harry N. Abrams, Inc., Publishers, New York, 2η έκδοση, 1976.
- [93] Kazimir Malevich. *Black Suprematic Square*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Kazimir_Malevich,_1915,_Black_Suprematic_Square,_oil_on_linen_canvas,_79.5_x_79.5_cm,_Tretyakov_Gallery,_Moscow.jpg#/media/File:Kazimir_Malevich,_1915,_Black_Suprematic_Square,_oil_on_linen_canvas,_79.5_x_79.5_cm,_Tretyakov_Gallery,_Moscow.jpg, 1915. Ημερομηνία πρόσβασης: 17-08-2023.
- [94] Joseph Malkevitch. *Milestones in the History of Polyhedra*. Στο Senechal [128], σελίδες 53–63.
- [95] Joseph Malkevitch. *Mathematics and Art: Connecting Mathematicians and Artists*. Στο Sriraman [138], σελίδες 467–496. Κεφάλαιο 17.
- [96] Casey Mann. *A Tile with Surround Number 2*. *The American Mathematical Monthly*, 109(4):383–388, 2002.
- [97] Casey Mann. *Heesch's Tiling Problem*. *The American Mathematical Monthly*, 111:509–517, 2004.
- [98] G. A. Margulis και S. Mozes. *Aperiodic tilings of the hyperbolic plane by convex polygons*. *Israel Journal of Mathematics*, 107:319–325, 1998.
- [99] William S. Massey. *Algebraic topology : an introduction*, τόμος 56 στο *Graduate Texts in Mathematics*. Springer, New York, 1967.
- [100] Jeffrey Charles Percy Miller. *Periodic forests of stunted trees*. *Computers in Mathematical Research* R. F. Churchhouse και J. C. Herz, επιμελητές, σελίδες 149–167. North-Holland, Amsterdam, 1968.
- [101] Jeffrey Charles Percy Miller. *Periodic forests of stunted trees*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 266:63–111, 1970.
- [102] Jeffrey Charles Percy Miller. *On rotational tessellations and copses*. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, 293:599–641, 1980.

- [103] Piet Mondriaan. *Mondrian Composition II in Red, Blue, and Yellow*. https://commons.wikimedia.org/wiki/File:Piet_Mondriaan,_1930_-_Mondrian_Composition_II_in_Red,_Blue,_and_Yellow.jpg#/media/File:Piet_Mondriaan,_1930_-_Mondrian_Composition_II_in_Red,_Blue,_and_Yellow.jpg, 1930. Ημερομηνία πρόσβασης: 17-08-2023.
- [104] Shahar Mozes. *Aperiodic tilings*. *Inventiones Mathematicae*, 128(3):603–611, 1997.
- [105] Dale Myers. *Nonrecursive tilings of the plane, II*. *Journal of Symbolic Logic*, 39:286–294, 1974.
- [106] Joseph Myers. *Polyomino, polyhex and polydiamond tiling, 2000-2019*. <https://www.polyomino.org.uk/mathematics/>, 2019. Τελευταία προσπέλαση: 3 Μαρτίου 2024.
- [107] Paul Niggli. *XV. Die regelmäßige Punktverteilung längs einer Geraden in einer Ebene. (Symmetrie von Bordürenmuster.)*. *Zeitschrift für Kristallographie - Crystalline Materials*, 63(1-6):255–274, 1926.
- [108] Said Nuseibeh. *Dome of the Rock, Jerusalem, detail of the interior mosaics showing hanging crowns, jewelry, and inscriptions*. <https://www.metmuseum.org/exhibitions/listings/2012/byzantium-and-islam/blog/where-in-the-world/posts/dome-of-the-rock>, 2012. Ημερομηνία πρόσβασης: 28-08-2023.
- [109] Nicolas Ollinger. *Tiling the plane with a fixed number of polyominoes*. *Language and Automata Theory and Applications*, τόμος 5457 στο *Lecture Notes in Computer Science*, σελίδες 638–647, Berlin, 2009. Springer.
- [110] Joseph O'Rourke. *Dürer's Problem*. Στο Senechal [128], σελίδες 77–86.
- [111] Joseph O'Rourke. *Every Combinatorial Polyhedron Can Unfold with Overlap*. <https://arxiv.org/abs/2212.14721>, 2022.
- [112] Luca Pacioli. *Divina proportione*. <https://archive.org/details/divinapropor00paci/>, 1509. Ημερομηνία πρόσβασης: 16-08-2023.
- [113] Christiane Paul, επιμελήτης. *A Companion to Digital Art*. Wiley, 2016.
- [114] S. Pautze. *Cyclotomic aperiodic substitution tilings with dense tile orientations*, 2019.
- [115] Roger Penrose. *The role of aesthetics in pure and applied mathematical research*. *Bulletin of the Institute of Mathematics and Its Applications*, 10:266–271, 1974.

- [116] Roger Penrose. *Remarks on Tiling: Details of a $(1 + \epsilon + \epsilon^2)$ -Aperiodic Set*. *The Mathematics of Long-Range Aperiodic Order* R. V. Moody, επιμελητής, τόμος 489 στο *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C: Math. Phys. Sci.*, σελίδες 467–497. Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, 1997. ὄνφερενξε ηελδ ιν Ωατερλοο, ON, 1995.
- [117] George Pólya. *XII. Über die Analogie der Kristallsymmetrie in der Ebene*. *Zeitschrift für Kristallographie - Crystalline Materials*, 60(1-6):278–282, 1924.
- [118] Panu Raatikainen. *Gödel's Incompleteness Theorems*. *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* Edward N. Zalta, επιμελητής. Metaphysics Research Lab, Stanford University, 2022.
- [119] Charles Radin. *The Pinwheel Tilings of the Plane*. *Annals of Mathematics*, 139(3):661–702, 1994.
- [120] Karl Reinhardt. *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone*. Dissertation, Universität Frankfurt am Main, Borna, 1918. Naturwissenschaftliche Fakultät.
- [121] Raphael Robinson. *Undecidability and nonperiodicity of tilings of the plane*. *Inventiones Mathematicae*, 12:177–209, 1971.
- [122] Nikos A. Salingaros. *Architecture, Patterns, and Mathematics*. *Nexus Network Journal*, 1(1-2):75–86, 1999.
- [123] Norbert Schappacher. *The Nazi era: the Berlin way of politicizing mathematics*. *Mathematics in Berlin*, σελίδες 127–136. Birkhäuser Basel, 1998.
- [124] Doris Schattschneider. *Visions of Symmetry: Notebooks, Periodic Drawings, and Related Work of M.C. Escher*. W.H. Freeman and Company, New York, 1η έκδοση, 1990.
- [125] Leila Schneps. *A website devoted to the life and works of Alexandre Grothendieck*. <https://webusers.imj-prg.fr/~leila.schneps/grothendieckcircle/>. Ημερομηνία πρόσβασης: 17-09-2023.
- [126] Marjorie Senechal. *Quasicrystals and Geometry*. Cambridge University Press, Cambridge, 1996.
- [127] Marjorie Senechal. *The Mysterious Mr. Ammann*. *The Mathematical Intelligencer*, 26:10–21, 2004.
- [128] Marjorie Senechal, επιμελητής. *Shaping Space*. Springer New York, 2013.

- [129] Marjorie Senechal. *Introduction to the Polyhedron Kingdom*. Στο Senechal [128], σελίδες 3–11.
- [130] Geoffrey Colin Shephard. *Convex polytopes with convex nets*. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 78(3):389–403, 1975.
- [131] Erik Shin. *The Great Mosque of Damascus*. <https://flic.kr/p/9zRdH9>, 2011. Ημερομηνία πρόσβασης: 28-08-2023.
- [132] David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan και Chaim Goodman-Strauss. *An aperiodic monotile*. *Combinatorial Theory*, 4(1), 2024.
- [133] David Smith, Joseph Samuel Myers, Craig S. Kaplan και Chaim Goodman-Strauss. *A chiral aperiodic monotile*. *Combinatorial Theory*, 4(2), 2024.
- [134] Joshua Socolar και Joan Taylor. *An Aperiodic Hexagonal Tile*. *Journal of Combinatorial Theory, Series A*, 118:2207–2231, 2011.
- [135] Joshua Socolar και Joan Taylor. *Forcing Nonperiodicity with a Single Tile*. *The Mathematical Intelligencer*, 34:18–28, 2012.
- [136] Joshua E. S. Socolar. *More ways to tile with only one shape polygon*. *The Mathematical Intelligencer*, 29(2):33–38, 2007.
- [137] Andreas Speiser. *Die Theorie der Gruppen von Endlicher Ordnung*. Springer Berlin Heidelberg, 1927.
- [138] Bharath Sriraman, επιμελητής. *Handbook of the Mathematics of the Arts and Sciences*. Springer International Publishing, 2021.
- [139] Lynn Arthur Steen. *The Science of Patterns*. *Science*, 240(4852):611–616, 1988.
- [140] Paul J. Steinhardt και Hyeong Chai Jeong. *A Simpler Approach to Penrose Tiling with Implications for Quasicrystal Formation*. *Nature*, 382:431–433, 1996.
- [141] Joan M. Taylor. *Aperiodicity of a Functional Monotile*. <http://sfb701.math.uni-bielefeld.de/preprints/sfb10015.pdf>, 2010. Πρεπριντ.
- [142] Marie Hélène Valliez. *Chypre le site de Kourion, la villa d'Eustolios*. <https://marie-helene-valliez.over-blog.com/2021/12/chypre-le-site-de-kourion-la-villa-d-eustolios-le-theatre-antique-septembre-2019.html>, 2019. Ημερομηνία πρόσβασης: 30-07-2023.

- [143] Heinz Voderberg. *Zur Zerlegung der Umgebung eines ebenen Bereiches in kongruente Teile*. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung, 46:229–231, 1936.
- [144] James J. Walton και Michael F. Whittaker. *An Aperiodic Tile with Edge-to-Edge Orientational Matching Rules*. Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu, σελίδες 1–29, 2021.
- [145] Hao Wang. *Proving theorems by pattern recognition. II*. Bell System Technical Journal, 40:1–42, 1961.
- [146] Hao Wang. *Dominoes and the AEA case of the decision problem*. Proceedings of the Symposium on Mathematical Theory of Automata, σελίδες 23–56, New York, 1963. Polytechnic Press. Conference held in 1962.
- [147] Hao Wang. *Games, Logic and Computers*. Scientific American, σελίδες 98–106, 1965.
- [148] Hao Wang. *Notes on a class of tiling problems*. Fundamenta Mathematicae, 82:295–305, 1975.
- [149] Eric Weisstein. *Dürer's Solid*. <https://mathworld.wolfram.com/DuerersSolid.html>, (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 20-08-2023.
- [150] Eric Weisstein. *Steinmetz Solid*. <https://mathworld.wolfram.com/SteinmetzSolid.html>, (n.d.). Ημερομηνία πρόσβασης: 24-08-2023.
- [151] Brian Wichmann και David Wade. *Islamic Design and Its Relation to Mathematics*. Στο Sriraman [138], σελίδες 2561–2586. Κεφάλαιο 97.

Συντομογραφίες - Αρκτικόλεξα - Ακρωνύμια

βλ.	βλέπε
κλπ.	και λοιπά
κ.ο.κ	και ούτω καθεξής
π.	περίπου
σελ.	σελίδα
Εικ.	Εικόνα
Σχ.	Σχήμα

Απόδοση ξενόγλωσσων όρων

Απόδοση

αιχμή
ακμή
άμεσο
ανάκλαση
ανάπτυγμα
αντιγραφο-πλακίδιο
αντικατάσταση
αντιμεταθετικότητα
απεριοδικό
αποσύνθεση
αριθμήσιμο
Αρχή Περιστερώνα
βαθμός κορυφής
βραχίονας
γειτονικά
γενεσιουργό
γένος
γεωμετρική αφαίρεση
γραφιστική
γωνία
δημιουργεί
δημιουργείται από
διακόσμηση
διακριτό
διαμέριση
διεδρικό
διόγκωση
δίσκος
εγκυρότητα
εμβαδόν
έμμεσο

Ξενόγλωσσος όρος

arrowhead
edge
direct
reflection
net
reptile
substitution
commutativity
aperiodic
decomposition
countable
Pigeonhole Principle
valency / degree
arm
neighbors
generative
genus
geometric abstraction
graphique
corner
admits
admitted by
ornament / ornement
discrete
partition
dihedral
inflation
disk
validity
area
indirect

ένα-προς-ένα	one-to-one
ένωση	union
εξωτερική ακτίνα	outradius
επεκτείνει	extends
επί	onto
εσωτερική ακτίνα	inradius
ζωφόρος	frieze
ισοδύναμο	equivalent
ισομετρία	isometry
ισομορφισμός	isomorphism
καθαρό	pure
κάλυψη	covering
κανονικό	regular
κοίλο	concave
κόμβος	knot
κορυφή	vertex
κορώνα	corona
κρυσταλλογραφία	crystallography
κυκλικό	cyclic
κυρτό	convex
μεταφορά	translation
μέτρο γωνίας	angle
μη συνευθειακά	noncollinear
μονοεδρικό	monohedral
μονοπλακίδιο	monotile
μοτίβο	pattern
μπάλωμα	patch
ολισθανάκλαση	glide reflection
ομοιομορφισμός	homeomorphism
ομοιόμορφο	uniform
ομοιότητα	similarity
ουρά	tail
περιβάλλει	envelops
περικλύει	engulfs
περιοδικό	periodic
περιοχή	region
πλακάκι / πλακίδιο	tile
πλακόστρωση	tiling
πλευρά	side
πλήρες	complete

πολυγωνικό	polygonal
πολύμορφο	polyform
πολυόμινο / ν-όμινο	polyomino / n-omino
προσανατολισμός	aspect
πρωτοπλακίδιο	prototile
πρωτοσύνολο	protoset
πυκνό	dense
Σουπρεματισμός	Suprematism
σταυρός	cross
στροφή	rotation
συμμετρία	symmetry
συμπαγές	compact
συμπίπτει	incident
συνεκτικό	connected
σύνθεση	composition
σύνορο	boundary
συνορεύοντα	adjacent
συρρίκνωση	diflation
συσκευασία	packing
ταπετσαρία	wallpaper
ταυτόσημο	congruent
τόρος	torus
τροπλότητα	orbifold
τροχιά	orbit
υπεραριθμήσιμο	uncountable
υπολογισιμότητα	computability
φραγμένο	bounded
Χαλιφάτο	Caliphate
χαρακτηριστική	characteristic
χάρτης	map
ψηφιοποίηση	tesselation

