Εμφυτεύσεις υποχώρων του L_p στον ℓ_1^N

Διπλωματική Εργασία

Πέτρος Βαλέττας

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα 2009

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Σε αυτή την εργασία περιγράφουμε τα ως τώρα γνωστά αποτελέσματα σχετικά με το πρόβλημα της σχεδόν ισομετρικής ή ισομορφικής εμφύτευσης n–διάστατων υποχώρων των χώρων L_p, $1 \leq p < 2$ στον ℓ_1^N.

§1. Αφετηρία αυτής της περιοχής προβλημάτων είναι το κλασικό θεώρημα του Dvoretzky για την διάσταση των «σχεδόν σφαιρικών» τομών συμμετρικών κυρτών σωμάτων. Η διατύπωση του θεωρήματος στη γλώσσα της συναρτησιακής ανάλυσης φανερώνει ότι πρόκειται για ένα θεώρημα που εξασφαλίζει την ύπαρξη σχεδόν ισομετρικής εμφύτευσης του ℓ_2^k σε τυχόντα n–διάστατο χώρο με νόρμα, με την προϋπόθεση ότι $k \leq c(\varepsilon)\log n$:

Θεώρημα 1. (Dvoretzky, 1961) *Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $c(\varepsilon) > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ τότε ο E περιέχει υπόχωρο F διάστασης $k = [c(\varepsilon)\log n]$, ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$–ισομορφικός με τον ℓ_2^k.*

Υπάρχουν διάφορες αποδείξεις του Θεωρήματος 1. Η αρχική απόδειξη του Dvoretzky εξασφάλιζε διάσταση του F της τάξης της $\sqrt{\log n}$. Η βέλτιστη ως προς n εξάρτηση του k ($k \geq c(\varepsilon)\log n$) εξασφαλίστηκε για πρώτη φορά από τον Milman (1971) ο οποίος χρησιμοποίησε τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Μεταξύ άλλων, ο Pisier (1985) έδωσε απόδειξη του θεωρήματος του Dvoretzky χρησιμοποιώντας μεθόδους από τη θεωρία των ανελίξεων Gauss.

Παρουσιάζουμε αυτή την απόδειξη στο Κεφάλαιο 2: αν $X = \sum_{i=1}^N g_i z_i$, όπου $(g_i)_{i\leq N}$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές και $z_i \in \mathbb{R}^n$, είναι μια Gaussian τυχαία μεταβλητή, τότε η X έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης, δηλαδή: $\mathbb{E}\|X\|^p < \infty$ για κάθε $0 < p < \infty$. Αν $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ θέτουμε

$$\sigma(X) = \sup\{(\mathbb{E}|\xi(X)|^2)^{1/2} : \xi \in E^*, \|\xi\| \leq 1\}.$$

Τότε, η διάσταση της X είναι η ποσότητα

$$d(X) = \left(\frac{\mathbb{E}\|X\|^2}{\sigma^2(X)}\right).$$

Είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι $1 \leq d(X) \leq \dim(E)$. Το ανάλογο της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας σε αυτό το πλαίσιο είναι η επόμενη πρόταση, η οποία εξασφαλίζει τη «συγκέντρωση» των τιμών της νόρμας $\|\cdot\|$ του E γύρω από τη μέση τιμή της:

Πρόταση 2. *Για κάθε $t > 0$ ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{P}\left(\big|\|X\| - \mathbb{E}\|X\|\big| > t\right) \leq 2\exp(-Kt/\sigma(X)^2),$$

όπου $K = 2\pi^{-2}$.

Κατόπιν, το θεώρημα του Pisier διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 3. (Pisier) *Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $\eta(\varepsilon) > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν X είναι μια Gaussian μεταβλητή στον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, τότε υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$, διάστασης $k = [\eta(\varepsilon)d(X)]$ ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$–ισομορφικός με τον ℓ_2^k.*

Η απόδειξη του θεωρήματος 3 βασίζεται στην πιθανοθεωρητική μέθοδο: θεωρούμε μια ακολουθία $X_1, \ldots, X_k$ ανεξάρτητων και ισόνομων αντιγράφων της μεταβλητής X σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Έστω $M = \mathbb{E}\|X\|$. Δείχνουμε ότι υπάρχει $\Omega_0 \subset \Omega$ με $\mathbb{P}(\Omega_0) > 0$ ώστε για κάθε $\omega \in \Omega_0$, να ισχύει

$$(1+\varepsilon)^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{M}\left\|\sum_{i=1}^k \alpha_i X_i(\omega)\right\| \leq (1+\varepsilon)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right)^{1/2}$$

για κάθε ακολουθία συντελεστών $(\alpha_i)_{i\leq k}$. Μπορούμε τότε να θεωρήσουμε τον υπόχωρο $F_\omega := \{X_1(\omega), \ldots, X_k(\omega)\}$ για $\omega \in \Omega_0$. Συνεπώς, για την απόδειξη του θεώρηματος του Dvoretzky αρκεί να αποδείξουμε την ύπαρξη Gaussian μεταβλητής X με τιμές στον $\mathbb{R}^n$ για την οποία η διάσταση $d(X)$ να είναι όσο γίνεται μεγαλύτερη. Αυτό είναι δυνατόν, με χρήση του θεωρήματος του John και του λήμματος Dvoretzky–Rogers (τα συστατικά αυτά υπάρχουν και στο επιχείρημα του Milman).

§2. Στην περίπτωση που $E = \ell_1^N$, ο ελάχιστος N ώστε ο ℓ_2^n να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$ ισομορφικά στον ℓ_1^N είναι της τάξης του n (θεώρημα Figiel–Lindenstrauss–Milman, 1977). Στα πλαίσια της τοπικής θεωρίας χώρων Banach είναι φυσιολογικό να εξετάσει κανείς το ίδιο πρόβλημα για την εμφύτευση των χώρων ℓ_p^n $(1 < p < 2)$ στον ℓ_1^N. Το πρόβλημα αυτό παρουσιάζει σημαντικές τεχνικές δυσκολίες αφού δεν έχουμε πια στη διάθεσή μας τα ισοπεριμετρικά εργαλεία (στη σφαίρα ή στον χώρο του Gauss) που παίζουν κεντρικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος του Dvoretzky. Όμως, η απάντηση είναι και σ' αυτή την περίπτωση ότι ο ελάχιστος N ώστε ο ℓ_p^n να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$ ισομορφικά στον ℓ_1^N είναι της τάξης του n:

Θεώρημα 4. (Johnson–Schechtman, 1982) *Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $1 < p < 2$ υπάρχει σταθερά $\beta = \beta(\varepsilon, p) > 0$ ώστε ο ℓ_p^m να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον ℓ_1^n αν $m \leq \beta n$.*

Βασικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος 4 παίζουν οι p–stable τυχαίες μεταβλητές $(0 < p \leq 2)$: είναι εκείνες οι τυχαίες μεταβλητές g που έχουν χαρακτηριστική συνάρτηση

$$\mathbb{E}e^{itg} = e^{-c_p|t|^p}$$

για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Για $p = 2$ παίρνουμε τις γνωστές τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές. Οι p–stable μεταβλητές μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εμφυτεύσουμε τον ℓ_p, $1 < p \leq 2$ στον L_1. Πράγματι: αν $g_1, g_2, \dots$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων και ισόνομων τυχαίων p–stable μεταβλητών και $(a_j)_{1\leq j\leq n}$ πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\mathbb{E}\exp(it\sum_{j=1}^{n} a_j g_j) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\exp(ita_j g_j) = \mathbb{E}\exp(-c|t|^p \sum_{j=1}^{n} |a_j|^p).$$

Έπεται ότι οι μεταβλητές $\sum_{j=1}^{n} a_j g_j$ και $(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p)^{1/p} g_1$ έχουν την ίδια κατανομή. Άρα,

$$\left\| \sum_{j=1}^{n} a_j g_j \right\|_1 = \left(\sum_{j=1}^{n} |a_j|^p \right)^{1/p} \|g_1\|_1,$$

για κάθε n και για κάθε n–άδα συντελεστών $(a_j)_{j\leq n}$. Με άλλα λόγια, ο υπόχωρος που παράγουν οι $(g_j)_{j=1}^{\infty}$ μέσα στον L_1 είναι ισομετρικός με τον ℓ_p.

Για το πρόβλημα της εμφύτευσης του ℓ_p^n στον ℓ_1^N, ακολουθώντας τους Johnson και Schechtman, χρησιμοποιούμε κατάλληλη διακριτοποίηση των p–stable μεταβλητών: Έστω $1 < p < 2$ και $\varepsilon > 0$. Έστω g μια p–stable μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ με $\|g\|_1 = 1$, όπου $\lambda(\cdot)$ το μέτρο Lebesgue. Έστω g^* η φθίνουσα αναδιάταξη της g και $a_i = g^*(i/n)$ για $i = 1, \dots, n$. Τότε, υπάρχει $\alpha = \alpha(\varepsilon, p) > 0$ με $m \leq \alpha n$ ώστε, αν $y_1, \dots, y_m$ είναι συμμετρικές, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κάθε $|y_i|$ να έχει την ίδια κατανομή με τη μεταβλητή

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i \chi_{(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]},$$

τότε

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p \right)^{1/p} \leq \left\| \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \right\|_1 \leq (1+\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p \right)^{1/p}$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $b_1, \dots, b_m$.

Κατόπιν, θεωρούμε το χώρο πιθανότητας $\Omega = \{-1,1\}^{nm} \times [S_n]^m$, δηλαδή το χώρο των ζευγών $(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi})$, όπου $\bar{\varepsilon}$ είναι ένας πίνακας $(\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{mn}$ με ± 1 στοιχεία και $\bar{\pi}$ είναι ένα διάνυσμα $(\pi_1, \dots, \pi_m)$ όπου κάθε π_i είναι μια μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \dots, n\}$, με το κανονικοποιημένο αριθμητικό μέτρο πιθανότητας

$$P(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) = \frac{1}{2^{mn}(n!)^m},$$

για όλα τα $(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) \in \Omega$. Σταθεροποιούμε $1 < p < 2$, $\varepsilon > 0$ και $m \leq \alpha n$ (α όπως παραπάνω). Για κάθε $(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) \in \Omega$ ορίζουμε μια τυχαία m–άδα διανυσμάτων $x_1(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}), \dots, x_m(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi})$ του ℓ_1^n

όπου
$$x_i(\bar{\varepsilon},\bar{\pi}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{i,j} a_j e_{\pi_i(j)},\ i=1,\dots,m$$
όπου $a_j = g^*(j/n)$ και e_i είναι η συνήθης βάση του ℓ_1^n. Δείχνουμε ότι υπάρχει $(\bar{\varepsilon},\bar{\pi})\in\Omega$ ώστε
$$\left\| \sum_{i=1}^{m} b_i x_i(\bar{\varepsilon},\bar{\pi}) \right\|_{\ell_1^n} \approx \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p \right)^{1/p}$$
για όλους τους $b_1,\dots,b_m$, με το m όσο γίνεται μεγαλύτερο. Αυτό επιτυγχάνεται σε δυο βήματα: Πρώτα δείχνουμε ότι, για σταθερά $b_1,\dots,b_m$, αυτό είναι σωστό για τη μέση τιμή της ποσότητας
$$\left\| \sum_{i=1}^{m} b_i x_i(\bar{\varepsilon},\bar{\pi}) \right\|_{\ell_1^n}.$$
Στη συνέχεια χρησιμοποιείται η ακόλουθη ανισότητα απόκλισης (η οποία αποδεικνύεται με τη μέθοδο των martingales που χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στην τοπική θεωρία χώρων Banach από τον Maurey:

Πρόταση 5. (Johnson–Schechtman) *Έστω $1<p<2$, $b=(b_1,\dots,b_m)\in\mathbb{R}^m$ και $a_1\geq a_2\geq\cdots\geq a_n\geq 0$. Ορίζουμε $f:\Omega=\{-1,1\}^{nm}\times[S_n]^m\to\mathbb{R}$ με*
$$f(\bar{\varepsilon},\bar{\pi}) = \left\| \sum_{j=1}^{m} b_j \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_{ij} a_i e_{\pi_j(i)} \right\|_1.$$
Τότε,
$$\mathbb{P}\left(|f-\mathbb{E}\,f|\geq t\right) \leq 2\exp\left(-4^q \delta_p\, t^q \|(a_i b_j)\|_{p,\infty}^{-q}\right)$$
για κάθε $t>0$, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ και $\delta_p=(2-p)/8p(q+1)^q$ και $\|\cdot\|_{p,\infty}$ είναι η ασθενής ℓ_p–νόρμα.

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 5 δείχνουμε ότι με μεγάλη πιθανότητα η $f(\bar{\varepsilon},\bar{\pi})$ είναι κοντά στη μέση τιμή της. Ένα κλασικό επιχείρημα δικτύου συμπληρώνει την απόδειξη.

§3. Στο Κεφάλαιο 3 ασχολούμαστε με το δυϊκό πρόβλημα: ενώ στο Κεφάλαιο 2 ενδιαφερόμασταν να δούμε πόσο μικρό μπορεί να επιλεγεί το N ώστε να μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον ℓ_p^n, $1<p<2$ στον ℓ_1^N $(1+\varepsilon)$-ισομετρικά, τώρα εξετάζουμε αν μπορούμε να εμφυτεύσουμε «καλά» τον ℓ_p^n στον $\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$. Λέγοντας «καλά» εννοούμε: αν υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $\ell_p^n\to\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$ με σταθερά ισομορφισμού η οποία να εξαρτάται από το ε αλλά να είναι ανεξάρτητη από τη διάσταση. Με άλλα λόγια το ερώτημα είναι το εξής:

> *Έστω $1<p<2$ και $\varepsilon>0$. Είναι σωστό ότι υπάρχουν σταθερά $C=C(\varepsilon,p)$ και υπόχωρος Y του $\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$ ώστε $d(\ell_p^n,Y)\leq C$;*

Το ερώτημα αυτό, το οποίο τέθηκε από τους Milman και Schechtman, έχει ως αφετηρία το θεώρημα του Kashin το οποίο απαντά καταφατικά στο αντίστοιχο ερώτημα όταν $p = 2$. Στην αρχή του Κεφαλαίου περιγράφουμε μια απόδειξη του θεωρήματος του Kashin, η οποία οφείλεται στον Szarek και βασίζεται στην παρατήρηση ότι οι ℓ_1^N έχουν ομοιόμορφα φραγμένο *λόγο όγκων*.

Η πρώτη απόπειρα για την απάντηση στο ερώτημα όταν $1 < p < 2$, έγινε από τους Naor και Zvavitch. Η προσέγγισή τους είναι πιθανοθεωρητική και βασίζεται στη μέθοδο των τυχαίων τελεστών: Σταθεροποιούμε $n < m \leq 2n$ και θεωρούμε κατάλληλη οικογένεια τυχαίων γραμμικών τελεστών $T_\omega : \ell_p^n \to \ell_1^m$, όπου $\omega \in \Omega$ και $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ο χώρος πιθανότητας στον οποίο δουλεύουμε. Αποδεικνύουμε ότι, με θετική πιθανότητα, ο $S = T_\omega : \ell_p^n \to \ell_1^m$ ικανοποιεί τις

$$\|x\|_p \leq \|Sx\|_1 \leq (K \log n)^{\frac{1}{q}\left(\frac{m/n}{m/n-1}\right)} \|x\|_p$$

για κάθε $x \in \ell_p^n$. Με άλλα λόγια ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 6. (Naor–Zvavitch, 2001) *Για κάθε $1 < p < 2$ υπάρχει σταθερά $K = K(p) > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $n < m \leq 2n$ υπάρχει n-διάστατος υπόχωρος W του ℓ_1^m ώστε*

$$d(W, \ell_p^n) \leq (K \log n)^{\frac{1}{q}\left(\frac{m/n}{m/n-1}\right)}$$

όπου $d(\cdot,\cdot)$ είναι η απόσταση Banach–Mazur.

Θέτοντας $m = (1+\varepsilon)n$ παίρνουμε το ζητούμενο. Η τυχαία εμφύτευση που χρησιμοποιείται στην απόδειξη είναι διαφορετική από τις εμφυτεύσεις που έχουμε δει ως τώρα και περιγράφεται εύκολα από ένα τυχαίο πίνακα $m \times n$ του οποίου τα στοιχεία είναι ανεξάρτητες και ισόνομες τυχαίες μεταβλητές X_{ij} στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο (τυχαίο) πίνακα

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{m}\begin{bmatrix} X_{11}(\omega) & X_{12}(\omega) & \dots & X_{1n}(\omega) \\ X_{21}(\omega) & X_{22}(\omega) & \dots & X_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_{m1}(\omega) & X_{m2}(\omega) & \dots & X_{mn}(\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\big(X_{ij}(\omega)\big)_{i,j}^{m,n}.$$

Κάθε X_{ij} είναι αντίγραφο μιας συμμετρικής τυχαίας μεταβλητής X, η οποία ορίζεται μέσω μιας κατάλληλα «κομμένης» συμμετρικής κανονικοποιημένης p-stable: Θεωρούμε μια συμμετρική κανονικοποιήμενη p-stable τυχαία μεταβλητή g και βάσει αυτής ορίζουμε τη συμμετρική τυχαία μεταβλητή X ως εξής:

$$\mathbb{P}(X < t) = \begin{cases} 0 & t < -m^{1/p} \\ \frac{\mathbb{P}(-m^{1/p} \leq g \leq t)}{\mathbb{P}(|g| \leq m^{1/p})} & |t| \leq m^{1/p} \\ 1 & t > m^{1/p} \end{cases}$$

Συνεπώς, οι X_{ij} είναι mn ανεξάρτητα ισοκατανεμημένα αντίγραφα της X. Έτσι, ορίζεται ο τυχαίος πίνακας Γ_ω και, μέσω αυτού, ο τυχαίος τελεστής T_ω. Για κάθε $b = (b_1, \dots, b_n) \in$

ℓ_p^n ισχύει

$$T_\omega(b) = \frac{1}{m}\Gamma_\omega b = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X_{ij}\right) e_i,$$

όπου e_i είναι τα κανονικά βασικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Αυτό που μας ενδιαφέρει είναι η νόρμα $\|T_\omega\| = \sup\{\|T_\omega(b)\|_1 : \|b\|_p = 1\}$. Η εκτίμησή της είναι αρκετά τεχνική και βασίζεται σε εκτιμήσεις για τις πιθανότητες

$$\mathbb{P}(\omega : \|T_\omega(b)\|_1 < t\|b\|_p)$$

και

$$\mathbb{P}(\omega : \|T_\omega(b)\|_1 > s\|b\|_p)$$

για τις οποίες χρησιμοποιούνται οι ιδιότητες και η ανεξαρτησία των X_{ij}.

§4. Οριστική καταφατική απάντηση στο πρόβλημα της §3 δόθηκε το 2003 από τους Johnson και Schechtman, οι οποίοι απέδειξαν το εξής:

Θεώρημα 7. (Johnson–Schechtman, 2003) *Έστω $1 < p < 2$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $C = C(\varepsilon, p) > 0$ ώστε ο ℓ_p^n να είναι C-εμφυτεύσιμος στον ℓ_1^m με $m \leq (1+\varepsilon)n$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος 7 χρησιμοποιεί τα εξής τεχνικά εργαλεία:

(i) Το $(1+\varepsilon)$–ισομορφικό αποτέλεσμα των Johnson–Schechtman που παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 2.

(ii) Το θεώρημα του Elton: Για κάθε $\delta \in (0,1)$ υπάρχουν σταθερές $c \equiv c(\delta) > 0$ και $\beta \equiv \beta(\delta) > 0$ ώστε: αν $(e_i)_{i=1}^n$ είναι διανύσματα στη μοναδιαία μπάλα ενός χώρου Banach X με την ιδιότητα

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i e_i\right\| \geq \delta n,$$

τότε υπάρχει $\sigma \subseteq \{1,\dots,n\}$ με $|\sigma| = m \geq cn$ ώστε

$$\left\|\sum_{i\in\sigma}\alpha_i e_i\right\| \geq \beta\sum_{i\in\sigma}|\alpha_i|$$

για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma}$.

(iii) Ένα αποτέλεσμα για χώρους πηλίκο του ℓ_1^n των Bourgain–Kalton–Tzafriri: υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ ώστε, αν E είναι ένας υπόχωρος του ℓ_1^n συνδιάστασης k και $F = \ell_1^n/E$ είναι ο χώρος πηλίκο, τότε

$$\int_{E_2^n}\left\|\sum_{i=1}^{n}\varepsilon_i Q e_i\right\|_F d\varepsilon \geq c^{n/k} n,$$

όπου $(e_i)_{i=1}^n$ η κανονική βάση του ℓ_1^n και $Q : \ell_1^n \to F$ η φυσιολογική απεικόνιση.

Οι αποδείξεις των δύο τελευταίων αποτελεσμάτων παρουσιάζονται λεπτομερώς. Έχοντας τα παραπάνω στη διάθεσή μας, μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 7:

(i) Από το θεώρημα των Johnson–Schechtman μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον ℓ_p^n στον $\ell_1^{\beta n}$, όπου $\beta = \beta(p) > 0$, με σταθερά ισομορφισμού ίση με 2.

(ii) Χρησιμοποιώντας το θεώρημα των B-K-T σε συνδυασμό με το θεώρημα του Elton, δείχνουμε ότι κάθε d-διάστατος υπόχωρος του ℓ_1^m είναι $(1+c^{-\alpha})$-εμφυτεύσιμος στον $\ell_1^{(1-c^{\alpha})m}$, για κάποια απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ και $\alpha = \frac{m}{m-d}$.

(iii) Με διαδοχικές εφαρμογές του προηγούμενου αποτελέσματος, μπορούμε να πετύχουμε μείωση της διάστασης με αντίστοιχο κόστος στη σταθερά ισομορφισμού, πετυχαίνοντας όμως αυτή να παραμένει ανεξάρτητη του m.

(iv) Στο τελευταίο βήμα, συνδυάζοντας τα προηγούμενα, αποδεικνύουμε την εξής πρόταση: Έστω $1 < p < 2$ και $\lambda > 0$. Υπάρχουν σταθερές $\beta = \beta(p) > 0$ και $K = K(\lambda) < \infty$ ώστε αν X είναι υπόχωρος του ℓ_p^n τότε ο X είναι K-ισομορφικός με έναν υπόχωρο του ℓ_1^r, όπου $r \leq \dim X + \lambda\beta n$.

Από την τελευταία πρόταση μπορούμε να συνάγουμε το κεντρικό αποτέλεσμα ως εξής. Έστω $1 < p < 2$ και $\varepsilon > 0$. Θεωρώντας, στη θέση του X, όλο το χώρο ℓ_p^n και επιλέγοντας $\lambda = \frac{\varepsilon}{\beta(p)}$, βλέπουμε ότι υπάρχει σταθερά $C = C(\varepsilon, p) = K(\lambda)$ ώστε ο ℓ_p^n να είναι C-ισομορφικός με έναν υπόχωρο του ℓ_1^r, όπου $r \leq n + \varepsilon n$.

§5. Το τελευταίο πρόβλημα που μελετάμε γενικεύει τα προβλήματα των προηγούμενων Κεφαλαίων: Δίνονται ένας n-διάστατος υπόχωρος X του L_1 και $\varepsilon > 0$. Το ερώτημα είναι να βρεθεί ο μικρότερος $N = N(X, \varepsilon)$ για τον οποίο υπάρχει n-διάστατος υπόχωρος Y του ℓ_1^N ώστε $d(X, Y) \leq 1 + \varepsilon$. Ακριβέστερα, η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η

$$N(\varepsilon) = \max\{N(X, \varepsilon) : X \leq L_1, \, \dim(X) = n\}.$$

Περιγράφουμε δυο προσεγγίσεις στο πρόβλημα:

(i) Η πρώτη οφείλεται στον Schechtman και περιέχει την πρώτη χρονικά μέθοδο αντιμετώπισης του προβλήματος. Στηρίζεται στη μέθοδο της εμπειρικής κατανομής και δείχνει, με απλό και κομψό τρόπο, ότι μπορούμε να εμφυτεύσουμε σχεδόν ισομετρικά κάθε n-διάστατο υπόχωρο του L_1 στον ℓ_1^N, αρκεί το N να επιλεγεί ανάλογο του n^2.

(ii) Η δεύτερη είναι το καλύτερο μέχρι στιγμής αποτέλεσμα και οφείλεται στον Talagrand. Η μέθοδός του δίνει φράγμα για την ποσότητα $N(X, \varepsilon)$ συναρτήσει της σταθεράς K–κυρτότητας ενός χώρου Banach.

Το πρόβλημα παραμένει ανοικτό: δεν είναι γνωστό αν ο λογαριθμικός ως προς n παράγοντας στην εκτίμηση του Talagrand είναι απαραίτητος. Παρακάτω δίνουμε μια σύντομη περιγραφή των δύο αποτελεσμάτων:

§5.1 Ο Schechtman εισάγει σε αυτή την εργασία τη μέθοδο της εμπειρικής κατανομής. Θεωρούμε χώρο $L_1(\Omega,\mu)$ και έναν n–διάστατο υπόχωρό του X. Επιλέγουμε τυχαία και ανεξάρτητα $x_1,\dots,x_N$ στο χώρο πιθανότητας (Ω,μ) και ορίζουμε τυχαίο γραμμικό τελεστή $T : X \to \ell_1^N$ θέτοντας $T(f) = \frac{1}{N}(f(x_1),\dots,f(x_N))$. Θέλουμε για κάθε $\varepsilon > 0$ (μικρό) να βρούμε N (αρκετά μεγάλο) ώστε για κάθε $f \in L_1(\mu)$ να ισχύει

$$(1-\varepsilon)\|f\|_{L_1} \leq \|Tf\|_{\ell_1^N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |f(x_i)| \leq (1+\varepsilon)\|f\|_{L_1}$$

ή, ισοδύναμα,

$$\sup\left\{\left|1-\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |f(x_i)|\right| : f\in X, \|f\|_{L_1}=1\right\} \leq \varepsilon.$$

Διακριτοποιούμε το πρόβλημα αποδεικνύοντας αντίστοιχη εκτίμηση για όλες τις f σε ένα δίκτυο της σφαίρας S_X του X και ολοκληρώνουμε την απόδειξη με ένα σύνηθες επιχείρημα προσέγγισης. Το βασικό εργαλείο που χρησιμοποιείται είναι μια ανισότητα τύπου Bernstein από την κλασική θεωρία πιθανοτήτων:

> Έστω $(g_i)_{i=1}^N$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω,μ), οι οποίες ικανοποιούν τις
>
> $$\mathbb{E}g_i = 0, \quad \|g_i\|_{L_1} \leq 2, \quad \|g_i\|_\infty \leq M, \quad 1 \leq i \leq N,$$
>
> για κάποια σταθερά $M > 0$. Τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ ισχύει η ανισότητα
>
> $$\mathrm{Prob}\left(\left|\sum_{i=1}^N g_i\right| \geq N\varepsilon\right) \leq 2\exp(-\varepsilon^2 N/8M).$$

Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε την ανισότητα Bernstein για τις τυχαίες μεταβλητές $g_i(x_1,\dots,x_N) = |f(x_i)|-1$, όπου $f \in L_1(\mu)$ με $\|f\|_{L_1} = 1$. Το πρόβλημα με την εφαρμογή της ανισότητας Bernstein είναι η απαίτηση ότι οι $\{g_i\}_{i=1}^N$ πρέπει να είναι φραγμένες και να έχουν σχετικά μικρή νόρμα στον $L_\infty(\mu)$. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιείται το ακόλουθο λήμμα «αλλαγής πυκνότητας»:

> Έστω (Ω,μ) χώρος πιθανότητας και X n-διάστατος υπόχωρος του $L_1(\Omega,\mu)$. Τότε, υπάρχουν μέτρο πιθανότητας ν στον Ω και γραμμικός τελεστής $S : L_1(\Omega,\mu) \to L_1(\Omega,\nu)$ με τις εξής ιδιότητες: ο περιορισμός του S στον X είναι ισομετρία και
>
> $$\|Sf\|_{L_\infty(\nu)} \leq n\|f\|_{L_1(\mu)}$$
>
> για κάθε $f \in X$. Ειδικότερα, $\|Sf\|_{L_\infty(\nu)} \leq n$ για κάθε $f \in X$ με $\|f\|_{L_1(\mu)} = 1$.

Σύμφωνα με το λήμμα, χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_{L_\infty(\mu)} \le n$ για κάθε $f \in X$ με $\|f\|_{L_1(\mu)} = 1$, όπου X ο υπόχωρος που είχαμε θεωρήσει αρχικά. Ακολουθώντας την πορεία που περιγράψαμε, οδηγούμαστε στο εξής:

Θεώρημα 8. **(Schechtman, 1987)** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ και κάθε n-διάστατο υπόχωρο X του L_1 να ισχύει $N(X,\varepsilon) \le c\varepsilon^{-2}\log\varepsilon^{-1}n^2$.*

§5.2. Η εκτίμηση του Talagrand είναι η εξής: υπάρχουν απόλυτες σταθερές C και $\varepsilon_0 > 0$ ώστε: αν X είναι ένας n-διάστατος υπόχωρος του L_1 και αν $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, τότε

$$N(X,\varepsilon) \le C\varepsilon^{-2}n\log(n+1).$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί την έννοια της K-κυρτότητας. Ακριβέστερα, αποδεικνύεται το εξής:

Θεώρημα 9. **(Talagrand, 1990)** *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές C και $\varepsilon_0 > 0$ ώστε: αν X είναι ένας n-διάστατος υπόχωρος του L_1 και αν $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, τότε*

$$N(X,\varepsilon) \le C\varepsilon^{-2}K^2(X)n.$$

Είναι γνωστό ότι, αν X είναι ένας n-διάστατος υπόχωρος του L_1 τότε $K(X) \le c\sqrt{\log(n+1)}$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, η γενική εκτίμηση είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 9.

Για την απόδειξη, μπορούμε κατ΄ αρχήν να υποθέσουμε ότι ο X είναι n-διάστατος υπόχωρος του ℓ_1^M για κάποιον $M \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο (για παράδειγμα, από το προηγούμενο αποτέλεσμα του Schechtman γνωρίζουμε ήδη ότι ο X εμφυτεύεται σχεδόν ισομετρικά στον ℓ_1^N, όπου $N = O(n^2)$).

Θεωρούμε ακολουθία $\varepsilon = (\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_M)$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Rademacher και ορίζουμε τον τυχαίο τελεστή $S_\varepsilon : \ell_1^M \to \ell_1^M$ με

$$S_\varepsilon(x) = ((1+\varepsilon_1)x_1,\dots,(1+\varepsilon_M)x_M).$$

Παρατηρούμε ότι ο $S_\varepsilon(\ell_1^M)$ είναι ισομετρικός με τον $\ell_1^{M'}$, όπου $M' = \mathrm{card}\{i : \varepsilon_i = 1\}$ και με πιθανότητα τουλάχιστον $1/2$ έχουμε ότι $M' \le M/2$. Για κάθε $x \in \ell_1^M$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Z_x = \|S_\varepsilon(x)\|_1 - \|x\|_1$ και θέτουμε

$$A := \sup_{x\in X,\, \|x\|_1 \le 1} |Z_x|.$$

Τότε, ο T_ε ικανοποιεί τις $\|T_\varepsilon\| \le 1 + A$, $\|T_\varepsilon^{-1}\| \le (1-A)^{-1}$. Έτσι, αν $A \le 1/2$, έχουμε ότι $d(X, T_\varepsilon(X)) \le 1 + 3A$.

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το κριτήριο σύγκρισης για ανελίξεις Rademacher και τη σύγκριση της μέσης τιμής του supremum μιας ανέλιξης Rademacher και της αντίστοιχης ανέλιξης Gauss, καταλήγουμε στο εξής:

> Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $\alpha, C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν X είναι υπόχωρος του ℓ_1^M και
>
> $$H := \mathbb{E} \sup_{x \in X,\, \|x\|_1 \leq 1} \left| \sum_{i \leq M} g_i x_i \right| < \alpha$$
>
> τότε υπάρχουν $M' \leq M/2$ και Y υπόχωρος του $\ell_1^{M'}$ με $d(X,Y) \leq 1 + CH$.

Για να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα την παραπάνω πρόταση θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η ποσότητα H είναι μικρή. Αυτό επιτυγχάνεται με χρήση της K–κυρτότητας:

> Έστω X υπόχωρος του ℓ_1^M διάστασης n. Τότε, υπάρχουν $M' \leq 3M/2$ και υπόχωρος Y του $\ell_1^{M'}$ ισομετρικός με τον X ώστε
>
> $$\mathbb{E} \sup_{x \in Y,\, \|x\|_1 \leq 1} \left| \sum_{i \leq M} g_i x_i \right| \leq CK(X) \left(\frac{n}{M} \right)^{1/2}.$$

Με διαδοχικές εφαρμογές αυτών των δύο προτάσεων παίρνουμε το ακόλουθο:

> Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $\alpha, C > 0$ ώστε: αν ο X είναι υπόχωρος του ℓ_1^M διάστασης n, για τον οποίο ισχύει $K(X)(n/M)^{1/2} \leq \alpha$, τότε υπάρχουν $M' \leq 3M/4$ και υπόχωρος Y του $\ell_1^{M'}$ για τον οποίο
>
> $$d(X,Y) \leq 1 + CK(X)(n/M)^{1/2}.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώνεται με διαδοχικές επαναλήψεις της τελευταίας πρότασης.

Κεφάλαιο 1

Εργαλεία από τη θεωρία πιθανοτήτων

1.1 Φθίνουσα αναδιάταξη τυχαίων μεταβλητών

Ορισμός 1.1.1 (αναδιάταξη συνόλου). Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και $A \in \mathcal{A}$. Η αναδιάταξη του A στο $[0,1]$ είναι το σύνολο $A^* = [0, P(A)]$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $* : \mathcal{A} \to \mathcal{B}([0,1])$ είναι μονότονη συνολοσυνάρτηση: αν $A, B \in \mathcal{A}$ και $A \subseteq B$, τότε $A^* \subseteq B^*$.

Σκοπός μας είναι να ορίσουμε τη φθίνουσα αναδιάταξη μιας τυχαίας μεταβλητής. Γι' αυτό το σκοπό ορίζουμε πρώτα τη φθίνουσα αναδιάταξη μιας χαρακτηριστικής συνάρτησης.

Ορισμός 1.1.2. Έστω $A \in \mathcal{A}$. Η φθίνουσα αναδιάταξη της χ_A είναι η $\chi_A^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $\chi_A^* = \chi_{A^*}$. Για τη γενική περίπτωση τώρα: αν $f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι τυχαία μεταβλητή ορίζουμε $f^* : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$f^*(x) = \int_0^\infty \chi^*_{\{|f|>t\}}(x)\, dt = \int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}^*}(x)\, dt, \tag{1.1}$$

όπου το ολοκλήρωμα υπάρχει εφόσον για σταθερό $x \in [0,1]$ η συνάρτηση $t \mapsto \chi_{\{|f|>t\}^*}(x)$ είναι φθίνουσα και άρα Borel μετρήσιμη.

Οι ιδιότητες της f^* περιγράφονται στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 1.1.3. *Έστω $f, g : (\Omega, \mathcal{A}, P) \to \mathbb{R}$ τυχαίες μεταβλητές. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) $f^* \geq 0$.

(β) *Η f^* είναι φθίνουσα.*

(γ) $\{x : f^*(x) > s\} = \{x : |f(x)| > s\}^*$ *και άρα η* f^* *είναι μετρήσιμη.*
(δ) *Αν* $|f| \leq |g|$ *τότε* $f^* \leq g^*$.
(ε) *Αν* $1 \leq p < \infty$, *τότε* $\|f\|_p = \|f^*\|_p$.
(στ) $\int_\Omega |fg|\, dP \leq \int_0^1 f^* g^*\, d\lambda$.

Απόδειξη. (α) Άμεσο από τον ορισμό.
(β) Έστω $0 \leq x < y \leq 1$. Αν $t > 0$ και $y \in \{|f| > t\}^*$, τότε $x \in \{|f| > t\}^*$. Άρα,

$$\chi_{\{|f|>t\}^*}(y) \leq \chi_{\{|f|>t\}^*}(x),$$

για κάθε $t > 0$.
(γ) Ισχύει η ισοδυναμία:

$$f^*(x) > s \Longleftrightarrow \int_0^\infty \chi_{\{|f|>t\}^*}(x)\, dt > s \Longleftrightarrow x \in \{|f| > s\}^*.$$

(δ) Έπεται άμεσα από το (γ).
(ε) Αν $1 \leq p < \infty$ έχουμε διαδοχικά με πράξεις:

$$\|f\|_p^p = \int_0^\infty p t^{p-1} P(|f| > t)\, dt = \int_0^\infty p t^{p-1} \lambda(f^* > t)\, dt = \|f^*\|_p^p.$$

(στ) Γράφουμε

$$\int_\Omega |fg|\, dP = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_\Omega \chi_{\{|f|>t\}}(\omega) \chi_{\{|g|>s\}}(\omega)\, dP(\omega) dt ds.$$

Όμοια παίρνουμε

$$\int_0^1 f^* g^*\, d\lambda = \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^1 \chi_{\{f^*>t\}}(x) \chi_{\{f^*>s\}}(x)\, d\lambda(x) dt ds.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $t, s > 0$ ισχύει:

$$\lambda\left(\{f^* > t\} \cap \{g^* > s\}\right) \geq P\left(\{|f| > t\} \cap \{|g| > s\}\right).$$

Αλλά είναι $\{f^* > t\} = \{|f| > t\}^*$, οπότε τα $\{f^* > t\}$, $\{g^* > s\}$ είναι διαστήματα της μορφής $[0, a]$ άρα κάποιο περιέχεται στο άλλο. Έτσι,

$$\begin{aligned} \lambda(\{f^* > t\} \cap \{g^* > s\}) &= \min\{\lambda(f^* > t), \lambda(g^* > s)\} \\ &= \min\{P(|f| > t), P(|g| > s)\} \\ &\geq P\left(\{|f| > t\} \cap \{|g| > s\}\right). \end{aligned}$$

Η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. $\square$

1.2 Martingales

Σε αυτή την Παράγραφο δίνουμε πρώτα τους βασικούς ορισμούς της δεσμευμένης μέσης τιμής και του martingale σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε μια γνωστή ανισότητα για martingales, την ανισότητα του Azuma. Τέλος, παρουσιάζουμε σαν εφαρμογή της, μια ανισότητα συγκέντρωσης του Maurey για τη συμμετρική ομάδα.

Στο Κεφάλαιο 2 θα χρησιμοποιήσουμε δύο παραλλαγές αυτών των αποτελεσμάτων. Η πρώτη οφείλεται στον Pisier και δίνει βελτιωμένη έκδοση της ανισότητας του Azuma, ενώ η δεύτερη είναι μια ανισότητα απόκλισης από τη μέση τιμή, στο πνεύμα του θεωρήματος του Maurey, που θα παίξει βασικό ρόλο στο θεώρημα εμφύτευσης των Johnson–Schechtman. Παρουσιάζουμε εδώ τις αποδείξεις αυτών των δύο Προτάσεων.

Ορισμός 1.2.1 (δεσμευμένη μέση τιμή). Έστω $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Αν $\mathcal{G}$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{F}$ και αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{F}, P)$, τότε η συνολοσυνάρτηση

$$\mu(A) = \int_A f dP, \quad A \in \mathcal{G} \tag{1.2}$$

ορίζει ένα μέτρο στην $\mathcal{G}$, το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το $P|_{\mathcal{G}}$. Από το θεώρημα Radon–Nikodym, υπάρχει μοναδική $h \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ με την ιδιότητα

$$\int_A h dP = \int_A f dP \tag{1.3}$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Η h ονομάζεται δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς την $\mathcal{G}$ και συμβολίζεται με $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.

Βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι οι εξής:

Λήμμα 1.2.2. (α) *Ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός, γραμμικός και έχει νόρμα 1 σε κάθε L_p, $1 \leq p \leq \infty$.*

(β) *Αν $\mathcal{G}_1$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{G}$, τότε $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.*

(γ) *Αν $g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$ τότε $\mathbb{E}(f \cdot g|\mathcal{G}) = g \cdot \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.*

(δ) *Αν $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα, τότε η $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι σταθερή και ισούται με τη μέση τιμή της f:*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \mathbb{E}f = \int f dP. \tag{1.4}$$

Απόδειξη. (α) Η γραμμικότητα έπεται άμεσα από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Δείχνουμε ότι είναι θετικός: Αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και $f \geq 0$, τότε υπάρχει $h \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ώστε

$$\int_A h\, dP = \int_A f\, dP \geq 0$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Αν θεωρήσουμε $E_n = \{\omega : h(\omega) \leq -\frac{1}{n}\}$ έχουμε ότι $E_n \in \mathcal{G}$ και

$$0 \leq \int_{E_n} f\, dP = \int_{E_n} h\, dP \leq -\frac{1}{n} P(E_n),$$

απ' όπου έπεται ότι $P(E_n) = 0$. Άρα,

$$P(\omega : h(\omega) < 0) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0.$$

Από το γεγονός ότι ο τελεστής $T(f) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός και γραμμικός έπεται ότι είναι μονότονος: αν $f, g \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ με $f \leq g$, τότε $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(g|\mathcal{G})$. Ειδικότερα, έπεται ότι

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|f||\mathcal{G}) \tag{1.5}$$

για κάθε $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Τότε, η δεσμευμένη μέση τιμή $T : L_1 \to L_1$ είναι φραγμένος τελεστής νόρμας 1. Πράγματι·

$$\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_1 = \int |\mathbb{E}(F|\mathcal{G})|\, dP \leq \int \mathbb{E}(|f||\mathcal{G})\, dP = \int |f|\, dP = \|f\|_1, \tag{1.6}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Επίσης, είναι $\mathbb{E}(\mathbf{1}|\mathcal{G}) = \mathbf{1}$. Από την ανισότητα Hölder έπεται ότι $L_p \subseteq L_1$ για κάθε $1 \leq p \leq \infty$. Επομένως, αν $f \in L_\infty$, τότε

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})| \leq \mathbb{E}(|f||\mathcal{G}) \leq \mathbb{E}(\|f\|_\infty|\mathcal{G}) = \|f\|_\infty. \tag{1.7}$$

Συνεπώς, για κάθε $f \in L_\infty$ έπεται ότι και $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \in L_\infty$ και μάλιστα $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_\infty \leq \|f\|_\infty$. Μ' άλλα λόγια η δεσμευμένη μέση τιμή $T : L_\infty \to L_\infty$ είναι καλά ορισμένος τελεστής νόρμας 1. Τέλος, αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι ο $T : L_p \to L_p$ είναι επίσης καλά ορισμένος. Αυτό έπεται από τον ακόλουθο ισχυρισμό[1]:

Ισχυρισμός. Έστω $f \in L_1$ και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή ώστε $\mathbb{E}|\varphi(f)| < \infty$. Τότε ισχύει

$$\varphi(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}). \tag{1.8}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν ακολουθίες πραγματικών αριθμών (a_n), (b_n) ώστε $\varphi(x) = \sup_n(a_n x + b_n)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$a_n f(x) + b_n \leq \varphi(f(x))$$

σχεδόν παντού. Έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $E_n \in \mathcal{G}$ με $P(E_n) = 0$ και

$$a_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) + b_n \leq \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G})$$

[1] Το συμπέρασμα αυτό προκύπτει και από το θεώρημα παρεμβολής του Marcinkiewicz (πρβλ. [3]).

για κάθε $x \in \Omega \setminus E_n$. Αν θέσουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε $P(E) = 0$ και αν $x \in \Omega \setminus E$ είναι

$$a_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) + b_n \leq \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G})$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε παίρνοντας supremum ως προς n έχουμε ότι

$$\varphi(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})) \leq \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G})$$

σχεδόν για κάθε $x \in \Omega$. Εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα για την $\varphi(t) = |t|^p$ έχουμε ότι

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|^p \leq \mathbb{E}(|f|^p|\mathcal{G})$$

και ολοκληρώνοντας βρίσκουμε ότι $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_p \leq \|f\|_p$ για κάθε $f \in L_p$.

(β) Έστω $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{G}$ ισχύει $\int_A f\, dP = \int_A g\, dP$. Αν $B \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}$ τότε έχουμε $\int_B g\, dP = \int_B f\, dP$. Από τον ορισμό έπεται ότι $\mathbb{E}(g|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.

(γ) Αρκεί να το δείξουμε για χαρακτηριστικές συναρτήσεις που είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμες. Για $g = \chi_A$ και $A, B \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\int_B \mathbb{E}(fg|\mathcal{G})\, dP = \int_B fg\, dP = \int_{A\cap B} f\, dP = \int_{A\cap B} \mathbb{E}(f|\mathcal{G})\, dP = \int_B g\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\, dP.$$

Έτσι, $\mathbb{E}(fg|\mathcal{G}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$, εφόσον $\chi_A \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

(δ) Άμεσο από τον ορισμό. □

Ορισμός 1.2.3 (martingale). Έστω $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}$ μια ακολουθία σ-αλγεβρών. Μια ακολουθία $f_0, f_1, \ldots$ συναρτήσεων $f_i \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$ λέγεται martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_i\}$ αν $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{F}_{i-1}) = f_{i-1}$ για κάθε $i \geq 1$.

1.2.1 Ανισότητα του Azuma

Η ανισότητα του Azuma δίνει εκτίμηση της πιθανότητας απόκλισης μιας φραγμένης συνάρτησης από την μέση τιμή της.

Πρόταση 1.2.4. *Έστω $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ μια ακολουθία σ-αλγεβρών. Θέτουμε $d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geq t) \leq 2\exp\left(-t^2/4\sum_{i=1}^{n} \|d_i\|_\infty^2\right). \tag{1.9}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)\}_{i=0}^n$ είναι martingale ως προς $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^n$. Πράγματι, έχουμε

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) \tag{1.10}$$

και $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$ από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Επιπλέον, έχουμε $\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) = 0$ για κάθε $i \geq 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\big) = \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\big) \\ &= \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) = 0.\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις δυναμοσειρές των e^x και $e^{x^2/2}$ βλέπουμε ότι $e^x \leq x + e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ είναι θετικός, συμπεραίνουμε οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_k}|\mathcal{F}_{k-1}) \leq \mathbb{E}(\lambda d_k|\mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_k^2} \mid \mathcal{F}_{k-1}). \tag{1.11}$$

Από τη γραμμικότητα της $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{k-1})$ έχουμε $\mathbb{E}(\lambda d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \lambda\mathbb{E}(d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$. Επίσης, έχουμε υποθέσει ότι $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, άρα κάθε $d_k \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_k}|\mathcal{F}_{k-1}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_k^2} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leq \mathbb{E}(e^{\lambda^2 \|d_k\|_\infty^2}|\mathcal{F}_{k-1}) = e^{\lambda^2 \|d_k\|_\infty^2}. \tag{1.12}$$

Ισχυρισμός. Ισχύει η ανισότητα

$$\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^n \lambda d_i}\right) \leq e^{\lambda^2 \sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}. \tag{1.13}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή δείχνουμε ότι $\mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum_{j=1}^k d_j}\right) \leq e^{\sum_{j=1}^k \lambda^2 \|d_j\|^2}$ για κάθε $k \leq n$: Για $k = 1$ έχουμε $\mathbb{E}\left(e^{\lambda d_1}\right) = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{\lambda d_1}|F_0\right)\right] \leq e^{\lambda^2 \|d_1\|_\infty^2}$. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum_{j=1}^k d_j}\right) \leq e^{\sum_{j=1}^k \lambda^2 \|d_j\|^2} \tag{1.14}$$

για κάποιον $k < n$. Αφού $e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$, από το Λήμμα 1.2.2(γ) παίρνουμε

$$\mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} e^{\lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k) = e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j}\mathbb{E}(e^{\lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k). \tag{1.15}$$

Χρησιμοποιώντας και την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left(e^{\lambda \sum_{j=1}^{k+1} d_j}\right) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left(e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} e^{\lambda d_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k\right)\right] \\ &= \mathbb{E}\left[e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j}\mathbb{E}\left(e^{\lambda d_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k\right)\right] \\ &\leq \mathbb{E}\left[e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} e^{\lambda^2 \|d_{k+1}\|_\infty^2}\right] \\ &= e^{\lambda^2 \|d_{k+1}\|_\infty^2}\mathbb{E}\left(e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j}\right) \\ &\leq e^{\lambda^2 \|d_{k+1}\|_\infty^2} e^{\lambda^2 \sum_{j=1}^k \|d_i\|_\infty^2} \\ &= e^{\lambda^2 \sum_{j=1}^{k+1} \|d_j\|_\infty^2}.\end{aligned}$$

Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} P(f - \mathbb{E}f \geq t) &= P(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_0) \geq t) \\ &= P\left(\sum_{j=1}^{n} d_j \geq t\right) \\ &\leq \mathbb{E}\, e^{\lambda \sum_{j=1}^{n} d_j - \lambda t} \\ &\leq e^{\lambda^2 \sum_{j=1}^{n} \|d_j\|_\infty^2 - \lambda t}. \end{aligned}$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς λ βλέπουμε ότι

$$P(f - \mathbb{E}f \geq t) \leq \exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{n} \|d_j\|_\infty^2\right). \tag{1.16}$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για την $-f$, παίρνουμε

$$P(-f + \mathbb{E}f \geq t) \leq \exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{n} \|d_j\|_\infty^2\right). \tag{1.17}$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$.

Θα χρησιμοποιήσουμε μια βελτιωμένη έκδοση της ανισότητας του Azuma (η παρατήρηση αυτή οφείλεται στον Pisier).

Ορισμός 1.2.5 (ασθενής ℓ_p-νόρμα). Για κάθε $1 \leq p < \infty$ και για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$\|x\|_{p,\infty} = \max_{1\leq i\leq n} \left(x_i^* i^{1/p}\right), \tag{1.18}$$

όπου $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ είναι η φθίνουσα αναδιάταξη της $(|x_i|)_{i=1}^n$.

Πρόταση 1.2.6. *Έστω $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ μια ακολουθία σ-αλγεβρών. Θέτουμε $d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε, για κάθε $1 < p < 2$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geq t) \leq 2\exp\left(-\delta_p t^q/\|\mathbf{d}\|_{p,\infty}^q\right), \tag{1.19}$$

όπου $\mathbf{d} = (\|d_i\|_\infty)_{i=1}^n$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $\delta_p = (2-p)/8p(q+1)^q$.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|\mathbf{d}\|_{p,\infty} = 1$ και επιλέγουμε μετάθεση $\pi : [n] \to [n]$ ώστε

$$\|d_{\pi(i)}\|_\infty = \mathbf{d}_i^*, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{1.20}$$

Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_{p,\infty}$ έπεται ότι

$$\|d_{\pi(i)}\|_\infty \le i^{-1/p}, \qquad i=1,\dots,n. \tag{1.21}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $N\le n$,

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^n d_i\right| \ge (q+1)N^{1/q}\right) \le P\left(\left|\sum_{i=1}^N d_{\pi(i)}\right| \ge qN^{1/q}\right) + P\left(\left|\sum_{i=N+1}^n d_{\pi(i)}\right| \ge N^{1/q}\right)$$

και

$$\left|\sum_{i=1}^N d_{\pi(i)}\right| \le \sum_{i=1}^N \|d_{\pi(i)}\|_\infty \le \sum_{i=1}^N i^{-1/p} < \int_0^N x^{-1/p}dx = qN^{1/q}. \tag{1.22}$$

Από την Πρόταση 1.2.4 έπεται ότι

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{i=1}^n d_i\right| \ge (q+1)N^{1/q}\right) &\le P\left(\left|\sum_{i=N+1}^n d_{\pi(i)}\right| \ge N^{1/q}\right)\\ &\le 2\exp\left(-N^{2/q}\Big/\left[4\sum_{k=N+1}^n \|d_{\pi(i)}\|_\infty^2\right]\right)\\ &\le 2\exp\left(-N^{2/q}(2/p-1)/\big[4N^{1-2/p}\big]\right)\\ &= 2\exp\left(-(2-p)N/(4p)\right). \end{aligned}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (α) Αν $t\ge q+1$ επιλέγουμε $N=\left[\left(\frac{t}{q+1}\right)^q\right]$. Τότε,

$$N \le \left(\frac{t}{q+1}\right)^q \le 2N, \tag{1.23}$$

και

$$\begin{aligned} P\left(\left|\sum_{i=1}^n d_i\right| \ge t\right) &\le P\left(\left|\sum_{i=1}^n d_i\right| \ge (q+1)N^{1/q}\right)\\ &\le 2\exp\left(-(2-p)N/(4p)\right) \le 2\exp\left(-(2-p)t^q/(8p(q+1)^q)\right). \end{aligned}$$

(β) Αν $t\le q+1$ τότε

$$2\exp\left(-(2-p)t^q/(8p(q+1)^q)\right) \ge 2\exp\left(-(2-p)/(8p)\right) \ge 2e^{-1/8} > 1, \tag{1.24}$$

οπότε η ανισότητα της Πρότασης ισχύει ούτως ή άλλως κατά τετριμμένο τρόπο. □

1.2.2 Συγκέντρωση του μέτρου στην S_n

Θεωρούμε την οικογένεια S_n των μεταθέσεων του συνόλου $[n] := \{1, 2, \dots, n\}$ με μετρική την $d(\sigma, \tau) = \frac{1}{n}|\{i : \sigma(i) \neq \tau(i)\}|$ και με το ομοιόμορφο μέτρο P που δίνει μάζα $\frac{1}{n!}$ σε κάθε μετάθεση.

Πρόταση 1.2.7. *Έστω $f : S_n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1. Τότε,*

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geq t) \leq 2e^{-t^2 n/16}$$

για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{F}_j$ η άλγεβρα που παράγεται απο τα σύνολα

$$A_{i_1,\dots,i_j} = \{\sigma : \sigma(1) = i_1, \dots, \sigma(j) = i_j\}$$

όπου $i_1, \dots, i_j$ διακεκριμένα στοιχεία του $\{1, \dots, n\}$. Θεωρούμε την ακολουθία

$$\{\emptyset, S_n\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{F}_n = 2^{S_n}.$$

Τότε, $\mathcal{F}_j \subseteq \mathcal{F}_{j+1}$ για κάθε $j = 0, 1, \dots, n-1$. Πράγματι, κάθε άτομο της $\mathcal{F}_j$ γράφεται στη μορφή

$$A_{i_1,i_2,\dots,i_j} = \bigcup_{k \in [n] \setminus \{i_1 \dots, i_j\}} A_{i_1,i_2,\dots,i_j,k},$$

δηλαδή ανήκει στην $\mathcal{F}_{j+1}$.

Έστω $f : S_n \to \mathbb{R}$ συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1 και έστω $(f_j)_{j=0}^n$ το martingale $f_j = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_j)$ που επάγεται απο την f.

Λήμμα 1.2.8. *Για κάθε άτομο $A = A_{i_1,i_2,\dots,i_j}$ της $\mathcal{F}_j$ και κάθε ζευγάρι ατόμων $B = A_{i_1,i_2,\dots,i_j,r}$ και $C = A_{i_1,\dots,i_j,s}$ της $\mathcal{F}_{j+1}$ που περιέχονται στο A, μπορούμε να βρούμε μια $1-1$ και επί απεικόνιση $\phi : B \to C$ ώστε $d(b, \phi(b)) \leq \frac{2}{n}$ για κάθε $b \in B$.*

Απόδειξη. Έστω π η μετάθεση που αντιμεταθέτει τα r και s και αφήνει αμετάβλητα τα υπόλοιπα στοιχεία του $\{1, \dots, n\}$. Ορίζουμε $\phi : B \to C$ με $\phi(\sigma) = \pi \circ \sigma$.

Τότε, $\phi(\sigma)(i) = \sigma(i)$ για $i \neq j+1$ και $i \neq \sigma^{-1}(s)$. Αν $i = j+1$ τότε $\phi(\sigma)(j+1) = \pi \circ \sigma(j+1) = \pi(r) = s$ και αν $i = \sigma^{-1}(s)$ τότε $\phi(\sigma)(i) = \pi(s) = r$. Άρα,

$$d(b, \phi(b)) \leq \frac{2}{n}. \tag{1.25}$$

Η ϕ είναι εξ ορισμού 1-1 και αφού $|B| = |C|$ έπεται οτι η ϕ είναι επί. □

Σταθεροποιούμε A, B, C όπως στο Λήμμα 1.2.8. Αφού τα B, C είναι άτομα της $\mathcal{F}_{j+1}$, η f_{j+1} είναι σταθερή στα B, C. Έχουμε

$$\int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{j+1}) dP = \int_B f dP = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in B} f(\sigma). \tag{1.26}$$

Όμως η $f_{j+1} = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{j+1})$ είναι σταθερή στο B, άρα

$$f_{j+1}|B \equiv \frac{1}{P(B)}\frac{1}{n!}\sum_{\sigma\in B} f(\sigma) = \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} f(\sigma). \tag{1.27}$$

Όμοια δείχνουμε οτι $f_{j+1}|C = \frac{1}{|C|}\sum_{\sigma\in C} f(\sigma)$. Γράφουμε

$$f_{j+1}|C = \frac{1}{|C|}\sum_{\sigma\in C} f(\sigma) = \frac{1}{|\phi(B)|}\sum_{\sigma\in B} f(\phi(\sigma)) = \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} f(\phi(\sigma)), \tag{1.28}$$

όπου ϕ η συνάρτηση του Λήμματος 1.2.8. Αφού η f είναι συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1,

$$\begin{aligned} |f_{j+1}|B - f_{j+1}|C| &\leq \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} |f(\sigma) - f(\phi(\sigma))| \leq \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B} d(\sigma,\phi(\sigma)) \\ &\leq \frac{1}{|B|}\sum_{\sigma\in B}\frac{2}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $|f_{j+1}|B - f_j|A| \leq \frac{2}{n}$. Πράγματι, έχουμε

$$|A| = \left|\bigcup_{s\notin\{i_1,\dots,i_j\}} A_{i_1,\dots,i_j,s}\right| = \sum_{s\notin\{i_1,\dots,i_j\}} |A_{i_1,i_2,\dots,i_j,s}| = (n-j)|C|. \tag{1.29}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} f_j|A &= \frac{1}{|A|}\sum_{\sigma\in A} f(\sigma) = \frac{1}{(n-j)|C|}\sum_{s\notin\{i_1,\dots,i_j\}}\ \sum_{\sigma\in A_{i_1,\dots,i_j,s}} f(\sigma) \\ &= \frac{1}{(n-j)|C|}\sum_{C\subseteq A}\sum_{\sigma\in C} f(\sigma) = \frac{1}{n-j}\sum_{C\subseteq A} f_{j+1}|C. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned} |f_{j+1}|B - f_j|A| &= \left| f_{j+1}|B - \frac{1}{n-j}\sum_{C\subseteq A} f_{j+1}|C\right| = \left|\sum_{C\subseteq A}\frac{1}{n-j}(f_{j+1}|B - f_{j+1}|C)\right| \\ &\leq \sum_{C\subseteq A}\frac{1}{n-j}|f_{j+1}|B - f_{j+1}|C| \leq \sum_{C\subseteq A}\frac{1}{n-j}\frac{2}{n} = \frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Έχουμε $\Omega = \bigcup B_i$ όπου $B_i \in \mathcal{F}_{j+1}$. Θα δείξουμε οτι $|d_{j+1}|B_i| \leq \frac{2}{n}$, όπου οι d_j ορίζονται όπως στην ανισότητα του Azuma. Πράγματι,

$$|d_{j+1}|B_i| = |f_{j+1}|B_i - f_j|B_i| = |f_{j+1}|B_i - f_j|A_i| \leq \frac{2}{n} \tag{1.30}$$

όπου A_i το άτομο της F_j που περιέχει το B_i. Άρα,

$$\|d_{j+1}\|_\infty \leq \frac{2}{n}. \tag{1.31}$$

Η f προφανώς ανήκει στον $L_\infty(S_n, \mathcal{F}_n, P)$, άρα η προηγούμενη ανισότητα και η ανισότητα του Azuma δίνουν

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geq t) \leq 2e^{-t^2 n/16} \tag{1.32}$$

για κάθε $t > 0$. □

Οι Johnson–Schechtman χρησιμοποιούν μια παραλλαγή αυτού του επιχειρήματος για να δείξουν αντίστοιχη ανισότητα απόκλισης για συναρτήσεις f οι οποίες ορίζονται στον χώρο πιθανότητας $\Omega = \{-1,1\}^{nm} \times [S_n]^m$ (με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας) και έχουν συγκεκριμένη μορφή.

Πρόταση 1.2.9 (Johnson–Schechtman, 1981). *Έστω $1 < p < 2$, $b = (b_1, \ldots, b_m) \in \mathbb{R}^m$ και $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_n \geq 0$. Ορίζουμε $f : \Omega = \{-1,1\}^{nm} \times [S_n]^m \to \mathbb{R}$ με*

$$f(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) = \left\| \sum_{j=1}^m b_j \sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij} a_i e_{\pi_j(i)} \right\|_1 . \tag{1.33}$$

Τότε,

$$P\left(|f - \mathbb{E}\, f| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-4^q \delta_p\, t^q \|(a_i b_j)\|_{p,\infty}^{-q}\right) \tag{1.34}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και $\delta_p = (2-p)/8p(q+1)^q$.

Απόδειξη. Θέτουμε $L = [n] \times [m]$ και ορίζουμε την δεξιά λεξικογραφική γραμμική διάταξη στο $\{0\} \cup L$:

$$0 < (1,1) < (2,1) < \cdots < (n,1) < (1,2) < \cdots < (n,2) < (1,3) < \cdots$$

Δηλαδή, $(l,k) < (i,j)$ αν $k < j$ ή $k = j$ και $l < i$.

Ορίζουμε τώρα μια αύξουσα ακολουθία αλγεβρών στο Ω με δείκτες στο L, ως εξής: θέτουμε $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$ και για κάθε $(i,j) \in L$ θεωρούμε την άλγεβρα $\mathcal{F}_{(i,j)}$ που έχει σαν άτομα εκείνα τα υποσύνολα του Ω που έχουν στοιχεία με σταθερή τιμή για τα ε_{lk} και $\pi_k(l)$ όταν $(l,k) \leq (i,j)$. Η οικογένεια $\{\mathcal{F}_u : u \in \{0\} \cup L\}$ είναι αύξουσα (ως προς την $\leq$) και $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_{(n,m)} = 2^\Omega$.

Για κάθε $(i,j) \in L$ συμβολίζουμε με $(i,j)'$ το αμέσως προηγούμενο στοιχείο του (i,j) στο $\{0\} \cup L$ και ορίζουμε

$$d_{ij} = \mathbb{E}\,(f \mid \mathcal{F}_{(i,j)}) - \mathbb{E}\,(f \mid \mathcal{F}_{(i,j)'}). \tag{1.35}$$

Λήμμα 1.2.10. *Για κάθε* $(i,j)\in L$,

$$\|d_{(i,j)}\|_\infty \le 4|a_ib_j|. \tag{1.36}$$

Απόδειξη. Έστω $(i,j)\in L$. Σταθεροποιούμε ένα άτομο A της $\mathcal{F}_{(i,j)'}$ και θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{A}$ όλων των ατόμων της $\mathcal{F}_{(i,j)}$ που περιέχονται στο A. Στο A έχουμε $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_{(i,j)'}) = \mathrm{Ave}\{f(\bar\varepsilon,\bar\pi) : (\bar\varepsilon,\bar\pi)\in A\}$ και σε κάθε $B\in\mathcal{A}$ έχουμε $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_{(i,j)}) = \mathrm{Ave}\{f(\bar\varepsilon,\bar\pi) : (\bar\varepsilon,\bar\pi)\in B\}$. Συνεπώς, αν δείξουμε ότι

$$|\mathrm{Ave}_B f - \mathrm{Ave}_C f| \le 4|a_ib_j| \tag{1.37}$$

για κάθε $B,C\in\mathcal{A}$, τότε στο A θα έχουμε

$$|\mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_{(i,j)}) - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{F}_{(i,j)'})| \le 4|a_ib_j| \tag{1.38}$$

(με ένα επιχείρημα παρόμοιο με εκείνο της απόδειξης της Πρότασης 1.2.8). Έστω $B,C\in\mathcal{A}$. Τα B και C περιέχονται στο A, άρα τα στοιχεία τους έχουν την ίδια σταθερή τιμή για τα ε_{lk} και $\pi_k(l)$ όταν $(l,k)\le(i,j)$. Επίσης, υπάρχουν $\varepsilon_B,\varepsilon_C\in\{-1,1\}$ και $s,t\in[n]$ ώστε: για κάθε $(\bar\varepsilon,\bar\pi)\in B$ έχουμε

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_B \quad \text{και} \quad \pi_j(i) = s,$$

ενώ για κάθε $(\varepsilon,\pi)\in C$ έχουμε

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_C \quad \text{και} \quad \pi_j(i) = t.$$

Ορίζουμε $\phi : B\to C$ με $\phi(\bar\varepsilon,\bar\pi) = (\bar\varepsilon^*,\bar\pi^*)$, όπου:

- $\varepsilon^*_{uv} = \varepsilon_{uv}$ αν $(u,v)\neq(i,j)$ και $\varepsilon^*_{ij} = \varepsilon_C$,
- (i) $\pi^*_j(i) = t$, (ii) $\pi^*_v(u) = s$ αν $v=j$ και $\pi_j(u) = t$, (iii) $\pi^*_v(u) = \pi_v(u)$ αλλιώς.

Έστω $(\bar\varepsilon,\bar\pi)\in B$. Υπάρχει μοναδικός $z\in[n]$ ώστε $\pi_j(z)=t$. Αν $t=s$ τότε $z=i$ ενώ αν $t\neq s$ τότε $z>i$ (διότι $\pi^*_j(y) = \pi_j(y)$ αν $y<i$ και $\pi^*_j(i)=t$). Έχουμε υποθέσει ότι $a_1\ge a_2\ge\cdots\ge a_n\ge 0$, άρα $a_i\ge a_z\ge 0$. Από την τριγωνική ανισότητα βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
|f(\bar\varepsilon,\bar\pi) - f(\phi(\bar\varepsilon,\bar\pi))| &= \left\| \sum_{w=1}^m\sum_{y=1}^n (b_w\varepsilon_{yw}a_ye_{\pi_w(y)} - b_w\varepsilon^*_{yw}a_ye_{\pi^*_w(y)}) \right\|_1 \\
&= \|b_j\varepsilon_Ba_ie_s - b_j\varepsilon_Ca_ie_i + b_j\varepsilon_{zj}a_ze_t - b_j\varepsilon_{zj}a_ze_s\|_1 \\
&\le 2|b_j|\big(a_i + a_z\big) \le 4|b_j|\,a_i = 4|a_ib_j|.
\end{aligned}$$

Παίρνοντας τον μέσο όρο πάνω από όλα τα $(\bar\varepsilon,\bar\pi)\in B$ καταλήγουμε στην (1.33). □

Από το Λήμμα 1.2.10 και την Πρόταση 1.2.6 συμπεραίνουμε ότι

$$P\left(|f - \mathbb{E} f| \ge t\right) \le 2\exp\left(-\delta_p t^q/\|\mathbf{d}\|^q_{p,\infty}\right), \tag{1.39}$$

όπου

$$\|\mathbf{d}\|_{p,\infty} \le 4\|(a_ib_j)\|_{p,\infty}. \tag{1.40}$$

Αυτό αποδεικνύει την (1.34). □

1.3 Τυχαίες μεταβλητές σε χώρους με νόρμα

1.3.1 p–stable μεταβλητές

Ορισμός 1.3.1. Μια τυχαία μεταβλητή g σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ λέγεται *συμμετρική p–stable*, για κάποιο $0 < p \leq 2$, αν

$$\mathbb{E}e^{itg} = \int_\Omega \exp(it \cdot g(\omega))\, dP(\omega) = e^{-c_p|t|^p}$$

για κάποιο $c_p > 0$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$.

Η απόδειξη της ύπαρξης p–stable μεταβλητών στηρίζεται σε μεθόδους ανάλυσης Fourier και οφείλεται στον Levy (1923). Στην πραγματικότητα, υπάρχουν τέτοιες τυχαίες μεταβλητές μόνον για τις τιμές $p \in (0, 2]$, ενώ από το κριτήριο του Pólya για χαρακτηριστικές συναρτήσεις αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχουν τέτοιες για $p > 2$.

Για $p = 2$, η 2-stable τυχαία μεταβλητή είναι η γνωστή τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή, ενώ για $p = 1$ είναι η γνωστή τυχαία μεταβλητή του Cauchy.

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο βασικές ιδιότητες των p–stable μεταβλητών:

(α) Υπάρχει σταθερά $C > 0$ που εξαρτάται μόνο από το c και το p, ώστε

$$P(|g| > t) \leq Ct^{-p}, t > 0.$$

(β) Κάθε συμμετρική p–stable μεταβλητή ανήκει στον $L_r(\Omega)$ για όλα τα $0 < r < p$, αλλά όχι στον $L_p(\Omega)$.

Οι p–stable μεταβλητές αυτές παίζουν βασικό ρόλο στη μελέτη των χώρων L_p, $1 < p \leq 2$. Ειδικότερα, μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να εμφυτεύσουμε ισομετρικά τον ℓ_p, $1 < p \leq 2$ στον L_1. Πράγματι: αν $g_1, g_2, \ldots$ είναι ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων p–stable μεταβλητών με την ίδια κατανομή (αυτό σημαίνει ότι το c_p στον ορισμό είναι το ίδιο για όλες τις g_i) και $(a_j)_{1\leq j\leq n}$ πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\mathbb{E}\exp(it\sum_{j=1}^n a_j g_j) = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\exp(ita_j g_j) = \prod_{j=1}^n \exp(-c_p|t|^p|a_j|^p) = \mathbb{E}\exp(-c_p|t|^p\sum_{j=1}^n |a_j|^p).$$

Από το γεγονός ότι η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής είναι πλήρως καθορισμένη από την χαρακτηριστική της συνάρτηση έπεται ότι οι μεταβλητές $\sum_{j=1}^n a_j g_j$ και $(\sum_{j=1}^n |a_j|^p)^{1/p} g_1$ έχουν την ίδια κατανομή. Άρα, είναι

$$\left\|\sum_{j=1}^n a_j g_j\right\|_1 = \left(\sum_{j=1}^n |a_j|^p\right)^{1/p} \|g_1\|_1,$$

για κάθε n και για κάθε n–άδα συντελεστών $(a_j)_{j\leq n}$. Μ' άλλα λόγια ο υπόχωρος που παράγουν οι $(g_j)_{j=1}^\infty$ μέσα στον L_1 είναι ισομετρικός με τον ℓ_p.

Απ' αυτό έπεται (με κάποια τεχνικά επιχειρήματα) ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $k \in \mathbb{N}$, υπάρχουν $n = n(\varepsilon, k, p)$ και k–διάστατος υπόχωρος Y του ℓ_1^n με $d(\ell_p^k, Y) < 1 + \varepsilon$. Η εκτίμηση που προκύπτει για τη διάσταση n, με αυτού του είδους τα επιχειρήματα, είναι εκθετική ως προς k και δεν είναι ικανοποιητική. Όπως θα δούμε αργότερα, το n μπορεί να επιλεγεί της τάξης του k.

1.3.2 Gaussian μεταβλητές

Ορισμός 1.3.2. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και E χώρος Banach. Μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to E$ λέγεται Gaussian αν για κάθε $\xi \in E^*$, η πραγματική τυχαία μεταβλητή $\xi^*(X)$ είναι κανονική (συμμετρική).

Είναι γνωστό ότι μια Gaussian τυχαία μεταβλητή X έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης, δηλαδή: $\mathbb{E}\|X\|^p < \infty$ για κάθε $0 < p < \infty$. Μια επίσης σημαντική έννοια για τη μελέτη των Gaussian τυχαίων μεταβλητών είναι αυτή των *ασθενών ροπών*:

$$\sigma(X) = \sup\{(\mathbb{E}|\xi(X)|^2)^{1/2} : \xi \in E^*,\ \|\xi\| \leq 1\}.$$

Επίσης, μια ακόμη έννοια, η οποία θα παίξει σημαντικό ρόλο στην πιθανοθεωρητική απόδειξη του θεωρήματος του Dvoretzky είναι η έννοια της *διάστασης* της X:

$$d(X) = \left(\frac{\mathbb{E}\|X\|^2}{\sigma^2(X)}\right).$$

Είναι προφανές από τον τρόπο ορισμού ότι ισχύει $\sigma(X) \leq (\mathbb{E}\|X\|^2)^{1/2}$ και άρα για τη διάσταση ισχύει $d(X) \geq 1$. Επίσης, είναι εύκολο να ελεγχθεί ότι $d(X) \leq \dim(E)$.

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω $X : (\Omega, \mathbb{P}) \to E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ μια Gaussian τυχαία μεταβλητή της μορφής $X = \sum_{i=1}^m g_i z_i$, όπου $(g_i)_{i \leq m}$ ανεξάρτητες, τυπικές, κανονικές τ.μ και $z_i \in \mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ ισχύει η ανισότητα*

$$\mathbb{P}\left(\big|\|X\| - \mathbb{E}\|X\|\big| > t\right) \leq 2\exp(-Kt^2/\sigma(X)^2),$$

όπου $K = 2\pi^{-2}$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η μεταβλητή X είναι μη εκφυλισμένη, ώστε η κατανομή της είναι ισοδύναμη με το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ένα γραμμικό τελεστή $u : \ell_2^m \to E$ με $u(x) = \sum_{i=1}^m x_i z_i$.

Αν γ_m είναι το m–διάστατο μέτρο Gauss στον ℓ_2^m τότε η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\gamma_m\left(x \in \mathbb{R}^m : \left|\|u(x)\| - \int \|u(x)\|\, d\gamma_m(x)\right| > t\right) \leq \exp(-Kt^2/\|u\|^2)$$

αφού είναι $\sigma(X) = \|u^*\| = \|u\|$. Για να αποδείξουμε την τελευταία θα δουλέψουμε στον $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$ εφοδιασμένο με το μέτρο γινόμενο $\gamma_m \times \gamma_m$. Έστω (x, y) τυχόν σημείο στον $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^m$. Για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$ έχουμε

$$\begin{aligned} x(\theta) &= x \sin\theta + y \cos\theta \\ x'(\theta) &= x \cos\theta - y \sin\theta \end{aligned}$$

Θέτουμε $F : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με $F(x) = \|u(x)\|$ και παρατηρούμε ότι η F είναι Lipschitz, άρα, από το θεώρημα του Rademacher, είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού. Έστω x, y σταθερά και έστω ότι η F είναι διαφορίσιμη στο $x(\theta)$ σχεδόν για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} F(x) - F(y) &= F(x(\pi/2)) - F(x(0)) \\ &= \int_0^{\pi/2} \frac{d}{d\theta} F(x(\theta))\, d\theta \\ &= \int_0^{\pi/2} F'(x(\theta)) \cdot x'(\theta)\, d\theta \end{aligned}$$

Για σταθερό λ αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $t \overset{\Phi_\lambda}{\longmapsto} e^{\lambda t}$ τότε από την ανισότητα Jensen έχουμε:

$$\exp(\lambda(F(x) - F(y))) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \exp(\lambda \frac{\pi}{2} F'(x(\theta)) \cdot x'(\theta))\, d\theta.$$

Θα θέλαμε τώρα να ολοκληρώσουμε την τελευταία ως προς x, y με το μέτρο $\gamma_m \times \gamma_m$. Παρατηρήστε ότι εφόσον η $F'(x)$ υπάρχει σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$, τότε σχεδόν για κάθε ζεύγος (x, y) η $F'(x(\theta))$ υπάρχει σχεδόν για κάθε $\theta \in [0, 2\pi]$. Ολοκληρώνοντας λοιπόν έχουμε:

$$\iint \Phi_\lambda(F(x) - F(y))\, d\gamma_m(x) d\gamma_m(y) \leq \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \iint \Phi_\lambda(F'(x(\theta)) \cdot x'(\theta))\, d\gamma_m(x) d\gamma_m(y)\, d\theta$$

Πάλι από την κυρτότητα της Φ_λ και την ανισότητα του Jensen έχουμε ότι

$$\int \Phi_\lambda \left(F(x) - \int F\, d\gamma_m \right) d\gamma_m(x) \leq \iint \Phi_\lambda(F(x) - F(y))\, d\gamma_m(x) d\gamma_m(y).$$

Επίσης, από το αναλλοίωτο του μέτρου Gauss ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς έχουμε ότι

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \iint \Phi_\lambda(F'(x(\theta)) \cdot x'(\theta))\, d\gamma_m(x) d\gamma_m(y)\, d\theta = \iint \Phi_\lambda(F'(x) \cdot y)\, d\gamma_m(x) d\gamma_m(y)$$

αφού η απεικόνιση $(x, y) \mapsto (x(\theta), x'(\theta))$ είναι τέτοια. Από την άλλη είναι γνωστό ότι για κάθε γραμμικό συναρτησοειδές $\xi : \ell_2^m \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int \exp(\xi(y))\, d\gamma_m(y) = \exp(\frac{1}{2} \|y\|_2^2).$$

Οπότε, προκύπτει ότι

$$\int \Phi_\lambda(F'(x)\cdot y)\,d\gamma_m(y) = \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \|F'(x)\|_2^2\lambda^2\right).$$

Από το γεγονός ότι η F είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού και ότι έχει σταθερά Lipschitz $\|u\|$ έχουμε ότι

$$\|F'(x)\|_2 \leq \|u\|$$

σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^m$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$\int \Phi_\lambda\left(F(x) - \int F\,d\gamma_m\right) d\gamma_m(x) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \|u\|^2\lambda^2\right).$$

Από την ανισότητα του Markov βρίσκουμε ότι

$$\gamma_m\left(x : F(x) - \int F\,d\gamma_m > t\right) \leq \exp\left(\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 \|u\|^2\lambda^2 - \lambda t\right).$$

Διαλέγουμε $\lambda = (\frac{\pi}{2}\|u\|)^{-2}t$ και η τελευταία δίνει:

$$\gamma_m\left(x : F(x) - \int F\,d\gamma_m > t\right) \leq \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{2}\|u\|\right)^{-2} t^2\right).$$

Εφαρμόζοντας την ίδια ανισότητα για την $-F$ στη θέση της F και συνδυάζοντας τις δύο εκτιμήσεις έχουμε το ζητούμενο. □

Το θεώρημα 1.3.3 μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τις ροπές κάθε τάξης για μια Gaussian μεταβλητή X της παραπάνω μορφής.

Πόρισμα 1.3.4. *Έστω X όπως στο προηγούμενο θεώρημα και $p > 1$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\|X\| \leq (\mathbb{E}\|X\|^p)^{1/p} \leq C(p)\mathbb{E}\|X\|,$$

όπου $C(p)$ θετική σταθερά, η οποία εξαρτάται μόνο από το p.

Απόδειξη. Η πρώτη ανισότητα είναι άμεση ενώ για τη δεύτερη μπορούμε να υποθέσουμε (λόγω ομογένειας) ότι $\mathbb{E}\|X\| = 1$. Κάνοντας χρήση της χαρακτηριστικής συνάρτησης της $\xi(X)$ για $\xi \in E^*$ βρίσκουμε ότι

$$\left(\mathbb{E}|\xi(X)|^2\right)^{1/2} = \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2} \mathbb{E}|\xi(X)|,$$

οπότε είναι:

$$\sigma(X) \leq (\pi/2)^{1/2}\mathbb{E}\|X\|.$$

Έτσι, η ανισότητα του προηγούμενου θεωρήματος γίνεται

$$\mathbb{P}(\|X\| > t+1) \leq 2e^{-4\pi^{-3}t^2}, \quad t > 0.$$

Όμως,

$$\mathbb{E}\|X\|^p = \int_0^\infty ps^{p-1}\mathbb{P}(\|X\| > s)\, ds \leq 1 + \int_0^\infty p(t+1)^{p-1}\mathbb{P}(\|X\| > t+1)\, dt,$$

οπότε έχουμε το ζητούμενο. □

Από την $\mathbb{E}\,\|X\| \simeq \left(\mathbb{E}\,\|X\|^2\right)^{1/2}$ έπεται άμεσα ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε να ισχύει

$$cd(X) \leq \left(\frac{\mathbb{E}\|X\|}{\sigma(X)}\right)^2 \leq d(X).$$

Άρα, και το πηλίκο $\left(\frac{\mathbb{E}\|X\|}{\sigma(X)}\right)^2$ παριστάνει κατά κάποιο τρόπο τη διάσταση της μεταβλητής.

Πρόταση 1.3.5. *Έστω $g_1, g_2, \ldots, g_n$ ανεξάρτητες, τυπικές, κανονικές μεταβλητές. Τότε, υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε*

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n}|g_i| \geq c(\log n)^{1/2}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $\delta > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\max_{i\leq n}|g_i| &\geq \int_0^\delta \mathbb{P}\left(\max_{i\leq n}|g_i| > t\right) dt \\ &\geq \int_0^\delta \{1 - [\mathbb{P}(|g_1| \leq t)]^n\}\, dt\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την ανεξαρτησία των g_i. Συνεπώς, είναι

$$\mathbb{E}\max_{i\leq n}|g_i| \geq \int_0^\delta [1 - (1 - \mathbb{P}(|g_1| > t))^n]\, dt \geq \delta[1 - (1 - \mathbb{P}(|g_1| > \delta))^n],$$

για κάθε $\delta > 0$. Ισχύει όμως

$$\mathbb{P}(|g_1| > \delta) = \sqrt{2/\pi}\int_\delta^\infty e^{-s^2/2}\, ds.$$

Επιπλέον, για κάθε $\delta > 0$ έχουμε

$$\frac{\delta}{1+\delta^2}e^{-\delta^2/2} \leq \int_\delta^\infty e^{-s^2/2}\, ds \leq \frac{1}{\delta}e^{-\delta^2/2}.$$

Οπότε, υπάρχει ένα $\alpha > 0$ ώστε για το $\delta_n = (2\alpha \log n)^{1/2}$ να ισχύει

$$\frac{\delta_n}{1+\delta_n^2} e^{-\delta_n^2/2} \geq 1/n$$

για $n = 1, 2, \ldots$. Έτσι, για $\delta = \delta_n$ ισχύει

$$\mathbb{E} \max_{i \leq n} |g_i| \geq \delta_n (1 - 1/e) = c\sqrt{\log n}$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

1.3.3 Rademacher μεταβλητές

Ορισμός 1.3.6. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος πιθανότητας και $r : \Omega \to \mathbb{R}$ τυχαία μεταβλητή. Η r λέγεται Rademacher αν $P(\omega : r(\omega) = 1) = P(\omega : r(\omega) = -1) = \frac{1}{2}$.

Το επόμενο θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός ανεξάρτητων μεταβλητών Rademacher είναι *υποκανονική* τυχαία μεταβλητή.

Θεώρημα 1.3.7 (subgaussian εκτίμηση). *Έστω $(\varepsilon_i)_{i \leq n}$ μια πεπερασμένη ακολουθία ανεξάρτητων, ισοκατανεμημένων Rademacher μεταβλητών. Αν $(\alpha_i)_{i \leq n}$ πεπερασμένη ακολουθία πραγματικών συντελεστών, για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i \right| > t \right) \leq 2 \exp\left(-t^2 / 2\|\alpha\|_2^2 \right),$$

όπου $\|\alpha\|_2^2 = \sum_{i=1}^n \alpha_i^2$.

Απόδειξη. Για κάθε $\lambda > 0$ από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\sum_i \alpha_i \varepsilon_i > t \right) &\leq e^{-\lambda t} \mathbb{E} \exp\left(\lambda \sum_i \alpha_i \varepsilon_i \right) \\ &= e^{-\lambda t} \prod_i \mathbb{E} e^{\lambda \alpha_i \varepsilon_i} \\ &= e^{-\lambda t} \prod_i \cosh(\lambda \alpha_i). \end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τα αναπτύγματα Taylor βρίσκουμε ότι $\cosh x \leq e^{x^2/2}$, $x \in \mathbb{R}$. Άρα, έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\sum_i \alpha_i \varepsilon_i > t \right) \leq \exp\left(-\lambda t + \frac{1}{2} \lambda^2 \sum_i \alpha_i^2 \right)$$

Βελτιστοποιώντας ως προς λ το δεξιό μέλος βρίσκουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\sum_i \alpha_i \varepsilon_i > t\right) \leq \exp\left(-t^2/2\|\alpha\|_2^2\right).$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για τα $-\alpha_i$ στη θέση των α_i έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Θεώρημα 1.3.8 (contraction principle). *Έστω $F : [0,\infty) \to [0,\infty)$ κυρτή και αύξουσα. Αν $x_1, \ldots, x_n$ είναι διανύσματα σε ένα χώρο Banach B και α_i πραγματικοί συντελεστές με $|\alpha_i| \leq 1$ για $i = 1, 2, \ldots, n$, τότε ισχύει*

$$\mathbb{E}F\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i x_i\Big\|\Big) \leq \mathbb{E}F\Big(\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i x_i\Big\|\Big).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με

$$\phi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathbb{E}F\Big(\Big\|\sum_i \varepsilon_i \alpha_i x_i\Big\|\Big).$$

Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι κυρτή εφόσον η F και η $\|\cdot\|$ είναι κυρτές συναρτήσεις και η F είναι αύξουσα. Τότε η ϕ περιορισμένη στο κυρτό συμπαγές $[-1,1]^n$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή σε ένα ακραίο σημείο $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ όπου $\alpha_i = \pm 1$. Λόγω συμμετρίας των $(\varepsilon_i)_{i\leq n}$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Η επόμενη πρόταση αποτελεί μια άλλη μορφή του contraction principle.

Πρόταση 1.3.9. *Έστω $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ κυρτή, αύξουσα και έστω (η_i) μια ακολουθία πραγματικών, συμμετρικών τυχαίων μεταβλητών με $\mathbb{E}|\eta_i| < \infty$ για κάθε i. Τότε, για κάθε ακολουθία (x_i) σε ένα χώρο Banach E ισχύει,*

$$\mathbb{E}F\left(\inf_i \mathbb{E}|\eta_i| \left\|\sum_i \varepsilon_i x_i\right\|\right) \leq \mathbb{E}F\left(\left\|\sum_i \eta_i x_i\right\|\right).$$

Πόρισμα 1.3.10. *Έστω $(g_i)_{i\leq N}$ ακολουθία ανεξάρτητων κανονικών τυχαίων μεταβλητών και $(x_i)_{i\leq N}$ ακολουθία διανυσμάτων σε ένα χώρο Banach E. Τότε, ισχύει η ανισότητα*

$$\left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \mathbb{E}\left\|\sum_i \varepsilon_i x_i\right\| \leq \mathbb{E}\left\|\sum_i g_i x_i\right\| \leq K(\log N)^{1/2}\mathbb{E}\left\|\sum_i \varepsilon_i x_i\right\|,$$

όπου K είναι μια αριθμητική σταθερά.

Θεώρημα 1.3.11 (σύγκρισης για Rademacher ανελίξεις). *Έστω* $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ *κυρτή και αύξουσα. Έστω* $\phi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \ldots, N$ *συστολές ώστε* $\phi_i(0) = 0$. *Τότε, για κάθε φραγμένο σύνολο* $T \subseteq \mathbb{R}^N$ *ισχύει*

$$\mathbb{E}F\left(\frac{1}{2}\left\|\sum_i \varepsilon_i \phi(t_i)\right\|_T\right) \leq \mathbb{E}F\left(\left\|\sum_i \varepsilon_i t_i\right\|_T\right),$$

όπου για μια συνάρτηση $h : T \to \mathbb{R}$ *συμβολίζουμε* $\|h\|_T = \sup_{t\in T} |h(t)|$.

Για αποδείξεις των παραπάνω θεωρημάτων πρβλ. [12].

Κεφάλαιο 2

Σχεδόν ισομετρικές εμφυτεύσεις

2.1 Η αφετηρία: το θεώρημα του Dvoretzky

Θεώρημα 2.1.1 (Dvoretzky, 1961). *Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $c(\varepsilon) > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ τότε ο E περιέχει υπόχωρο F διάστασης $k = [c(\varepsilon)\log n]$, ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$–ισομορφικός με τον ℓ_2^k.*

Το 1985, ο Pisier (βλ. [16]) έδωσε πιθανοθεωρητική απόδειξη του θεωρήματος του Dvoretzky με Gaussian μεθόδους (μερικές από τις οποίες έχουμε περιγράψει στην παράγραφο 1.3.2). Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε αυτή τη μορφή του θεωρήματος.

Θεώρημα 2.1.2 (Pisier). *Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $\eta(\varepsilon) > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν X είναι μια Gaussian μεταβλητή στον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και $d(X)$ είναι η διάσταση της X, τότε υπάρχει υπόχωρος F του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $k = [\eta(\varepsilon)d(X)]$ ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$–ισομορφικός με τον ℓ_2^k.*

Έτσι, το θεώρημα του Dvoretzky ανάγεται στην παραγωγή Gaussian μεταβλητής X με τιμές στον $\mathbb{R}^n$, η οποία να έχει όσο γίνεται μεγαλύτερη διάσταση $d(X)$.

Η απόδειξη του θεωρήματος χρησιμοποιεί την «πιθανοθεωρητική μέθοδο»: Θεωρούμε μια ακολουθία $X_1, \ldots, X_k$ ανεξάρτητων και ισόνομων αντιγράφων της μεταβλητής X σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Θέτουμε $M = \mathbb{E}\|X\|$. Δείχνουμε ότι υπάρχει $\Omega_0 \subset \Omega$ με $\mathbb{P}(\Omega_0) > 0$ ώστε: αν $\omega \in \Omega_0$ τότε, για κάθε ακολουθία συντελεστών $(\alpha_i)_{i\leq k}$,

$$(1+\varepsilon)^{-1/2}\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right)^{1/2} \leq \frac{1}{M}\left\|\sum_{i=1}^k \alpha_i X_i(\omega)\right\| \leq (1+\varepsilon)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^n |\alpha_i|^2\right)^{1/2}.$$

Μπορούμε τότε να θεωρήσουμε τον υπόχωρο $F := F_\omega := \mathrm{span}\{X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)\}$ για $\omega \in \Omega_0$.

Το πρώτο βήμα της απόδειξης του θεωρήματος είναι η διακριτοποίηση του προβλήματος εύρεσης σχεδόν Ευκλειδείου υποχώρου. Για το σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την έννοια του δικτύου.

Ορισμός 2.1.3 (δ–δικτύου). Έστω $(E, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα, $0 < \delta < 1$ και $A \subseteq E$. Ένα σύνολο $\mathcal{N} \subseteq A$ λέγεται δ-δίκτυο για το A αν για κάθε $a \in A$ υπάρχει $x \in \mathcal{N}$ ώστε $\|x - a\| < \delta$.

Το επόμενο λήμμα μας εξασφαλίζει ότι σε κάθε χώρο E πεπερασμένης διάστασης υπάρχει δ-δίκτυο για τη μοναδιαία σφαίρα του, με πληθάριθμο που δεν ξεπερνά το $(1+2/\delta)^{\dim E}$.

Λήμμα 2.1.4. *Έστω $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $S_E = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ η μοναδιαία σφαίρα του E. Αν $0 < \delta < 1$ τότε υπάρχει δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S_E με πληθάριθμο $|\mathcal{N}| \leq (1 + \frac{2}{\delta})^n$.*

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα μεγιστικό υποσύνολο $\mathcal{N}$ της S_E ως προς τη σχέση $\|x - y\| \geq \delta$, $x, y \in S_E$. Αυτό είναι πεπερασμένο, από τη συμπάγεια της S_E. Επιπλέον, λόγω μεγιστικότητας, είναι δ-δίκτυο. Από την άλλη πλευρά, οι μπάλες $B_i = x_i + \frac{\delta}{2} B_E$, $x_i \in \mathcal{N}$ έχουν ξένα εσωτερικά και ισχύει

$$\bigcup_{x_i \in \mathcal{N}} \left(x_i + \frac{\delta}{2} B_E \right) \subseteq \left(1 + \frac{\delta}{2} \right) B_E$$

όπου $B_E = \{x : \|x\| \leq 1\}$. Από το αναλλοίωτο ως προς μεταφορές και την προσθετικότητα του όγκου, έχουμε

$$|\mathcal{N}| \left(\frac{\delta}{2} \right)^n \leq \left(1 + \frac{\delta}{2} \right)^n$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο. □

Το επόμενο λήμμα μας εξασφαλίζει ουσιαστικά ότι κάθε σημείο στη σφαίρα του E μπορεί να «παρασταθεί» από στοιχεία του δικτύου.

Λήμμα 2.1.5. *Έστω E χώρος με νόρμα και $\mathcal{N}$ ένα δ-δίκτυο ($0 < \delta < 1$) στη μοναδιαία σφαίρα $S_E = \{x \in E : \|x\| = 1\}$ του X. Τότε κάθε $x \in S_X$ γράφεται στη μορφή*

$$x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$$

με $(x_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{N}$ και $0 \leq t_n \leq \delta^n$, $n = 1, 2, \dots$.

Απόδειξη. Έστω $x \in S_E$. Τότε υπάρχει $x_0 \in \mathcal{N}$ ώστε $\|x-x_0\| < \delta$. Θέτουμε $t_1 = \|x-x_0\|$. Αν $t_1 = 0$ τότε θέτουμε $t_n = 0$ για $n \geq 1$ και έχουμε το ζητούμενο. Αν $0 < t_1 < \delta$ τότε το $t_1^{-1}(x - x_0) \in S_X$, άρα υπάρχει $x_1 \in \mathcal{N}$ ώστε $\|t_1^{-1}(x - x_0) - x_1\| < \delta$. Ισοδύναμα, $\|x-x_0-t_1x_1\| < \delta t_1 < \delta^2$. Θέτουμε $t_2 = \|x-x_0-t_1x_1\|$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Έτσι, προκύπτει μια ακολουθία $(x_n)_{n=0}^{\infty}$ από στοιχεία του $\mathcal{N}$ και $0 \leq t_n \leq \delta^n$, $n = 1, 2, \ldots$ ώστε $x = x_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n x_n$. □

Άμεσο πόρισμα του προηγούμενου λήμματος είναι η ακόλουθη πρόταση:

Πρόταση 2.1.6. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ που ικανοποιεί το εξής: έστω $E = (\mathbb{R}^n, |||\cdot|||)$ και έστω δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ στην S_E ώστε*

$$1 - \delta \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leq 1 + \delta \tag{2.1}$$

για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathcal{N}$, όπου $x_1, \ldots, x_n$ διανύσματα σε ένα χώρο Banach $(B, \|\cdot\|)$. Τότε,

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} |||\alpha||| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leq (1 + \varepsilon)^{1/2} |||\alpha||| \tag{2.2}$$

για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in E$. Ειδικότερα, ο υπόχωρος F του B, που παράγουν τα x_i είναι $(1 + \varepsilon)$-ισομορφικός με τον E.

Απόδειξη. Λόγω ομογένειας της σχέσης αρκεί να δείξουμε ότι

$$(1 + \varepsilon)^{-1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \leq (1 + \varepsilon)^{1/2}$$

για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in S_E$. Για $0 < \delta < 1$ και $\alpha \in S_E$ από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι υπάρχουν $(z_j)_{j\geq 0}$ στην S_E και $0 \leq t_j \leq \delta^j$, $j = 1, 2, \ldots$ με $\alpha = z_0 + \sum_{j=1}^{\infty} t_j z_j$, όπου $z_j = (z_{j,1}, \ldots, z_{j,n})$. Έτσι, προκύπτει

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=0}^{\infty} t_j z_{i,j} x_i \right\| \leq \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j \left\| \sum_{i=1}^{n} z_{j,i} x_i \right\| \leq (1 + \delta) \sum_{j=0}^{\infty} \delta^j = \frac{1 + \delta}{1 - \delta}.$$

Από την άλλη πλευρά, έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \right\| \geq \left\| \sum_{i=1}^{n} z_{0,i} x_i \right\| - \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j \left\| \sum_{i=1}^{n} z_{j,i} x_i \right\| \geq (1 - \delta) + (1 + \delta) \sum_{j=1}^{\infty} \delta^j = \frac{1 - 3\delta}{1 + \delta}.$$

Επιλέγοντας το δ αρκετά μικρό ώστε $\frac{1+\delta}{1-\delta} < (1 + \varepsilon)^{1/2}$ και $\frac{1-3\delta}{1-\delta} > (1 + \varepsilon)^{-1/2}$, έχουμε το ζητούμενο. □

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος του Dvoretzky.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2. Έστω $\varepsilon > 0$ και $\delta = \delta(\varepsilon)$ όπως προσδιορίζεται στην πρόταση 2.1.6. Έστω X μια Gaussian μεταβλητή στο χώρο Banach $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ όπως στο Θεώρημα 1.3.3. Θεωρούμε ανεξάρτητα και ισόνομα αντίγραφα $X_1, X_2 \dots, X_k$ της X. Θα αποδείξουμε ότι με θετική πιθανότητα τα διανύσματα $X_1(\omega), \dots, X_k(\omega)$ παράγουν έναν k–διάστατο υπόχωρο F_ω, ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$–ισομορφικός με τον ℓ_2^k. Για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k) \in \mathbb{R}^k$ με $\sum_{i=1}^k \alpha_i^2 = 1$, παρατηρούμε ότι η μεταβλητή $Z_\alpha = \sum_{i=1}^k \alpha_i X_i$ έχει την ίδια κατανομή με την X. Επομένως, είναι

$$\mathbb{E}\|Z_\alpha\| = \mathbb{E}\|X\| = M.$$

Από το Θεώρημα 1.3.3, τον ορισμό των ασθενών ροπών και το πόρισμα 1.3.4. έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\big|\|Z_\alpha\| - \mathbb{E}\|X\|\big| > t\mathbb{E}\|X\|\Big) \leq 2\exp(-Ct^2 d(X))$$

για κάθε $t > 0$. Θεωρούμε ένα δ–δίκτυο $\mathcal{N}$ στη σφαίρα $\{x \in \mathbb{R}^k : \|x\|_2 = 1\}$, όπως στο λήμμα 2.1.4. και την πρόταση 2.1.6. Τότε, από την προηγούμενη ανισότητα για $t = \delta$ έχουμε

$$\mathbb{P}(\exists \alpha \in \mathcal{N} : |M^{-1}\|Z_\alpha\| - 1| > \delta) \leq 2|\mathcal{N}|e^{-C\delta^2 d(X)} \leq 2\exp\left(\frac{2k}{\delta} - C\delta^2 d(X)\right).$$

Αν λοιπόν είναι $2k/\delta < \frac{C}{2}\delta^2 d(X)$, ή ισοδύναμα, αν

$$k \leq \frac{1}{4}C\delta^3 d(X)$$

τότε η πιθανότητα δεν είναι μεγαλύτερη από $2\exp(-\frac{1}{2}C\delta^2 d(X))$ και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $d(X)$ είναι αρκετά μεγάλο (διαφορετικά δεν έχουμε να αποδείξουμε κάτι) ώστε $2\exp(-\frac{1}{2}C\delta^2 d(X)) < 1$. Τότε, υπάρχει $\omega \in \Omega$ ώστε για κάθε $\alpha \in \mathcal{N}$ να ισχύει

$$1 - \delta \leq \|Z_\alpha\| \leq 1 + \delta.$$

Άρα, τα $x_i = X_i(\omega)$ ικανοποιούν την (2.1). Από την πρόταση 2.1.6 έχουμε ότι ισχύει

$$(1+\varepsilon)^{-1/2}\|\alpha\|_2 \leq \frac{1}{M}\left\|\sum_{i=1}^k \alpha_i x_i\right\| \leq (1+\varepsilon)^{1/2}\|\alpha\|_2$$

κι αυτό συμβαίνει αν ικανοποιείται η $k \leq 4^{-1}C\delta^3 d(X)$. Συνεπώς, μπορούμε να θεωρήσουμε το $k = [4^{-1}C\delta^3(\varepsilon)d(X)]$. Τότε, ο $F_\omega = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_k\}$ είναι $(1+\varepsilon)$–ισομορφικός με τον ℓ_2^k κι έχουμε το συμπέρασμα του θεωρήματος 2.1.2. □

Το επόμενο βήμα είναι να κατασκευάσουμε σε τυχόντα n–διάστατο χώρο μια Gaussian μεταβλητή με όσο το δυνατόν μεγαλύτερη διάσταση. Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε την ακόλουθη εκτίμηση:

Πρόταση 2.1.7. *Έστω $E = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα. Υπάρχει Gaussian μεταβλητή $X : \Omega \to E$ με διάσταση*

$$d(X) \geq c \log n.$$

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρειαστούμε την εξής ασθενή μορφή του γνωστού λήμματος των Dvoretzky-Rogers από το 1950.

Λήμμα 2.1.8. *Έστω E ένας n–διάστατος χώρος με νόρμα. Αν $N = [n/2]$, τότε υπάρχουν διανύσματα $(x_i)_{i\leq N}$ του E που ικανοποιούν τα εξής:*

$$\left\| \sum_{i\leq N} \alpha_i x_i \right\| \leq \left(\sum_{i\leq N} |\alpha_i|^2 \right)^{1/2} \tag{2.3}$$

για κάθε $(\alpha_i)_{i\leq N} \in \mathbb{R}^N$, και

$$\|x_i\| \geq 1/2 \tag{2.4}$$

για $i \leq N$.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα του Lewis που βασίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Υπάρχει γραμμικός τελεστής $u : \ell_2^n \to E$ ώστε $\|u\| \leq 1$ και για κάθε υπόχωρο F του ℓ_2^n να ισχύει

$$\|u|_F\| \geq \frac{\dim F}{n}.$$

Ειδικότερα, $\|u\| = 1$. Πράγματι· θεωρούμε το σύνολο

$$S = \{v \in \mathcal{L}(\ell_2^n, E) : \|v\| \leq 1\}.$$

Το S είναι συμπαγές, οπότε η συνάρτηση $v \mapsto \det(v)$ παρουσιάζει μέγιστη τιμή περιορισμένη στο S. Έστω u ένας τελεστής ώστε

$$\det(u) = \max\{\det(v) : v \in S\}.$$

Σ' αυτό το σημείο παρατηρήστε ότι $\det u > 0$. Χρησιμοποιώντας τη μέθοδο των μικρών διαταραχών βρίσκουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε $v : \ell_2^n \to E$ ισχύει

$$\det(u + \varepsilon v) \leq \det(u)\|u + \varepsilon v\|^n.$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \det(u + \varepsilon v) &= \det(u) \det(1 + \varepsilon u^{-1} v) \\ &= \det(u)(1 + \varepsilon \mathrm{tr}(u^{-1} v) + o(\varepsilon)) \end{aligned}$$

Τότε, συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\begin{aligned}(1+\varepsilon\mathrm{tr}(u^{-1}v)+o(\varepsilon)) &\leq (\|u\|+\varepsilon\|v\|)^n \\ &\leq (1+n\varepsilon\|v\|+o(\varepsilon)).\end{aligned}$$

Τελικά, έχουμε

$$\mathrm{tr}(u^{-1}v)\leq n\|v\|,$$

για κάθε $v\in\mathcal{L}(\ell_2^n,E)$. Αν $F\subseteq\ell_2^n$ είναι υπόχωρος του ℓ_2^n και $P:\ell_2^n\to F$ η ορθογώνια προβολή στον F τότε θέτοντας $v=uP$ έχουμε ότι

$$\dim F=\mathrm{tr}(P)=\mathrm{tr}(u^{-1}v)\leq n\|uP\|$$

και έχουμε ολοκληρώσει την απόδειξη του ισχυρισμού. Τώρα, η απόδειξη του λήμματος ολοκληρώνεται ως εξής: Έστω u ο τελεστής του ισχυρισμού. Επιλέγουμε $y_1\in\ell_2^n$ ώστε $\|y_1\|_2=1$ και $\|u(y_1)\|=\|u\|=1$. Στη συνέχεια επιλέγουμε $y_2\in\{y_1\}^\perp$ με $\|y_2\|_2=1$ και $\|u(y_2)\|=\|uP\|\geq 1-1/n$, όπου P η ορθογώνια προβολή στον $\{y_1\}^\perp$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο προσδιορίζουμε ακολουθία $(y_i)_{i\leq n}$ ώστε $y_i\in\{y_1,\dots,y_{i-1}\}^\perp$, $\|y_i\|_2=1$ και $\|u(y_i)\|\geq 1-\frac{i-1}{n}$. Αν θέσουμε $x_i=u(y_i)$ για $i=1,\dots,N$ έχουμε ότι $\|x_i\|\geq 1/2$ και επιπλέον είναι

$$\left\|\sum_{i=1}^N\alpha_ix_i\right\|\leq\left\|\sum_{i=1}^N\alpha_iy_i\right\|_2=\left(\sum_{i=1}^N|\alpha_i|^2\right)^{1/2}$$

για κάθε $(\alpha_i)_{i\leq N}$ στον $\mathbb{R}^N$. □

Απόδειξη της πρότασης 2.1.7. Έστω $N=[n/2]$ και $g_1,\dots,g_N$, ανεξάρτητες και ισόνομες, τυπικές κανονικές μεταβλητές. Θεωρούμε τα διανύσματα $(x_i)_{i\leq N}$ που μας δίνει το λήμμα 2.1.8 και ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή

$$X=\sum_{i\leq N}g_ix_i.$$

Από την (2.3) έπεται ότι $\sigma(X)\leq 1$. Πράγματι· από δυϊσμό έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^N|\xi(x_i)|^2\right)^{1/2}:\xi\in E^*,\ \|\xi\|\leq 1\right\}\\ &= \sup\left\{\sup\left\{\left|\sum_{i=1}^N\alpha_i\xi(x_i)\right|:\sum_{i=1}^N|\alpha_i|^2\leq 1\right\}:\xi\in E^*,\ \|\xi\|\leq 1\right\}\\ &= \sup\left\{\sup\left\{\left|\xi\left(\sum_{i=1}^N\alpha_ix_i\right)\right|:\xi\in E^*,\|\xi\|\leq 1\right\}:\sum_{i=1}^N\alpha_i^2\leq 1\right\}\\ &= \sup\left\{\left\|\sum_{i=1}^N\alpha_ix_i\right\|:\sum_{i=1}^N|\alpha_i|^2\leq 1\right\}.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Ισχύει η ανισότητα

$$\mathbb{E}\max_{i\leq N}\|g_ix_i\| \leq \mathbb{E}\|X\|.$$

Πράγματι· Γράφουμε $B_j = \{\omega : |g_j(\omega)|\|x_j\| = \max_{i\leq N}\|g_i(\omega)x_i\|\}$. Προφανώς είναι $\bigcup_j B_j = \Omega$ και άρα τα $A_j = B_j \setminus (\bigcup_{k<j} B_k)$ αποτελούν διαμέριση του χώρου Ω, όπου $A_j \subseteq B_j$ για $j = 1, 2, \ldots, N$. Τότε ισχύει

$$\max_{i\leq N}\|g_ix_i\| = \left\|\sum_j g_j\chi_{A_j}x_j\right\|$$

Θέτοντας $Y = \sum_{j=1}^N g_j(1-2\chi_{A_j})x_j$ παρατηρούμε ότι λόγω συμμετρίας οι X και Y έχουν την ίδια κατανομή, άρα $\mathbb{E}\|X\| = \mathbb{E}\|Y\|$. Επιπλέον, είναι $X - Y = 2\sum_j g_j\chi_{A_j}x_j$, οπότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\max_{i\leq N}\|g_ix_i\| &= \mathbb{E}\left\|\sum_j g_j\chi_{A_j}x_j\right\| \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}\|X-Y\| \\ &\leq \mathbb{E}\|X\|.\end{aligned}$$

Σε συνδυασμό με τη (2.4) συμπεραίνουμε ότι $\mathbb{E}\|X\| \geq \frac{1}{2}\mathbb{E}\max_{i\leq N}|g_i|$. Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz και την πρόταση 1.3.5. έπεται ότι $\mathbb{E}\|X\|^2 \geq c'\log n$. Έτσι, είναι $d(X) \geq c'\log n$. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Το θεώρημα 2.1.1 είναι τώρα άμεσο πόρισμα του θεωρήματος 2.1.2 και της πρότασης 2.1.7. □

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μια ειδική περίπτωση του θεωρήματος 2.1.2. Αν θέλουμε να εμφυτεύσουμε $(1+\varepsilon)$–ισομορφικά τον ℓ_2^n στον ℓ_1^N τότε μπορούμε να πετύχουμε «γραμμική εξάρτηση» του n από το N:

Θεώρημα 2.1.9. *Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\beta(\varepsilon) > 0$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο ℓ_2^n εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$–ισομορφικά στον ℓ_1^N, αν $N \geq \beta(\varepsilon)n$.*

Για την απόδειξη θα ακολουθήσουμε τη μέθοδο που αναπτύχθηκε ως εδώ. Θα προσπαθήσουμε να παράγουμε μια τυχαία μεταβλητή $X : \Omega \to \ell_1^N$ αρκετά μεγάλης διάστασης, στην προκειμένη περίπτωση, ανάλογης του N.

Απόδειξη. Έστω $(e_i)_{i\leq N}$ η κανονική βάση του ℓ_1^N και $(g_i)_{i\leq N}$ τυπικές κανονικές τ.μ. Θεωρούμε την $X = \sum_{i\leq N} g_ie_i$ και θα δείξουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε

$d(X) \geq cN$. Υπολογίζουμε αρχικά την $\mathbb{E}\|X\|_1$. Έχουμε:

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i\leq N}|g_i|\right) = N\mathbb{E}|g_1| = N\sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz παίρνουμε $\mathbb{E}\|X\|_1^2 \geq \frac{2}{\pi}N^2$. Από την άλλη μεριά είναι

$$\begin{aligned}\sigma^2(X) &= \sup\left\{\sum_{i\leq N}|x^*(e_i)|^2 : \|x^*\|_\infty \leq 1\right\}\\ &= \sup\left\{\sum_{i\leq N}|x_i|^2 : \max_{i\leq N}|x_i| \leq 1\right\} \leq N.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω ανισότητες και λαμβάνοντας υπόψιν τον ορισμό της διάστασης παίρνουμε $d(X) \geq cN$. $\square$

2.2 Εμφύτευση του ℓ_p^n στον ℓ_1^m

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ο ελάχιστος N ώστε ο ℓ_2^n να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$ ισομορφικά στον ℓ_1^N είναι της τάξης του n. Στη συνέχεια εξετάζουμε το ίδιο πρόβλημα για τους χώρους ℓ_p^n με $1 < p < 2$. Και σ' αυτήν την περίπτωση η εξάρτηση του n από το N είναι γραμμική:

Θεώρημα 2.2.1 (Johnson–Schechtman, 1982). *Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $1 < p < 2$ υπάρχει σταθερά $\beta = \beta(\varepsilon, p) > 0$ ώστε ο ℓ_p^m να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον ℓ_1^n αν $m \leq \beta n$.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος έχει γίνει αρκετή προεργασία στην παράγραφο 1.2.2. Πρώτα απ' όλα θα χρειαστούμε ένα λήμμα το οποίο θα μας επιτρέψει να αντικαταστήσουμε τις p–stable μεταβλητές από διακριτές.

Λήμμα 2.2.2 (διακριτοποίηση των p–stable μεταβλητών). *Έστω $1 < p < 2$ και $\varepsilon > 0$. Έστω g μια p–stable μεταβλητή στο χώρο πιθανότητας $([0,1], \mathcal{B}([0,1]), \lambda)$ με $\|g\|_1 = 1$, όπου $\lambda(\cdot)$ το μέτρο Lebesgue. Θεωρούμε τη φθίνουσα αναδιάταξη g^* της g. Θέτουμε $a_i = g^*(i/n)$ για $i = 1, \ldots, n$. Τότε, υπάρχει $\alpha = \alpha(\varepsilon, p) > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $m \leq \alpha n$ και αν $y_1, \ldots, y_m$ είναι συμμετρικές, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές ώστε κάθε $|y_i|$ έχει την ίδια κατανομή με τη μεταβλητή*

$$y = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{(\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}]},$$

τότε ισχύει

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p\right)^{1/p} \leq \left\|\sum_{i=1}^m b_i y_i\right\|_1 \leq (1+\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p\right)^{1/p}$$

για κάθε επιλογή συντελεστών $b_1, \ldots, b_m$.

Απόδειξη. Αρχικά εκτιμούμε την $\|g^* - y\|_1$. Από τη μονοτονία της g^* έχουμε:

$$\|g^* - y\|_1 = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} |g^* - a_i|\, d\lambda = \sum_{i=1}^n \int_{\frac{i-1}{n}}^{\frac{i}{n}} g^*\, d\lambda - \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n a_i \leq \int_0^{1/n} g^*\, d\lambda.$$

Επίσης για κάθε $t > 0$ ισχύει $g^*(t) \leq (c/t)^{1/p}$. Πράγματι: αν $t > 0$ και s με $s < g^*(t)$ έχουμε $P(g^* > s) \geq t$ εφόσον η g^* είναι φθίνουσα. Άρα,

$$t \leq P(g^* > s) = P(|g| > s) \leq cs^{-p}.$$

Μ' άλλα λόγια είναι $s \leq (c/t)^{1/p}$ για κάθε $s < g^*(t)$. Έπεται ότι $g^*(t) \leq (c/t)^{1/p}$. Άρα, είναι

$$\|g^* - y\|_1 \leq \int_0^{1/n} g^*\, d\lambda \leq c^{1/p}\int_0^{1/n} t^{-1/p}\, dt = c^{1/p}\left(\frac{p}{p-1}\right) n^{1/p-1}.$$

Θεωρούμε ανεξάρτητα αντίγραφα $g_1, \ldots, g_m$ της g και ορίζουμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$z_j = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{sgn}(g_j)\chi_{\{a_i \leq |g_j| \leq a_{i-1}\}},\ j = 1, 2, \ldots, m$$

οι οποίες ακολουθούν την ίδια κατανομή με τις y_j. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\|g_j - z_j\|_1 = \|g^* - y\|_1 \leq c^{1/p}\left(\frac{p}{p-1}\right) n^{1/p-1}.$$

Οπότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder βρίσκουμε:

$$\left\|\sum_{j=1}^m b_j(g_j - z_j)\right\|_1 \leq \left(\frac{m}{n}\right)^{\frac{p-1}{p}} c^{1/p}\left(\frac{p}{p-1}\right)\left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p\right)^{1/p}.$$

Αν λοιπόν επιλέξουμε $\alpha > 0$ ώστε $\alpha^{\frac{p-1}{p}} c^{1/p}(\frac{p}{p-1}) < \varepsilon$ παίρνουμε:

$$\left\|\sum_{j=1}^m b_j z_j\right\|_1 \leq \varepsilon\left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p\right)^{1/p} + \left\|\sum_{j=1}^m b_j g_j\right\|_1 = (1+\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^m |b_j|^p\right)^{1/p}.$$

Όμοια, βρίσκουμε ότι $\|\sum_j b_j z_j\|_1 \geq (1-\varepsilon)(\sum_j |b_j|^p)^{1/p}$. $\square$

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα εργαστούμε στο ακόλουθο πλαίσιο: Θεωρούμε το χώρο πιθανότητας $\Omega = \{-1,1\}^{nm} \times [S_n]^m$, δηλαδή το χώρο των ζευγών $(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi})$, όπου $\bar{\varepsilon}$ είναι ένας πίνακας $(\varepsilon_{ij})_{i,j=1}^{mn}$ με ± 1 στοιχεία και $\bar{\pi}$ είναι ένα διάνυσμα $(\pi_1, \ldots, \pi_m)$ όπου κάθε π_i είναι μια μετάθεση του συνόλου $\{1, 2, \ldots, n\}$, με το κανονικοποιημένο αριθμητικό μέτρο πιθανότητας

$$P(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) = \frac{1}{2^{mn}(n!)^m},$$

για όλα τα $(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) \in \Omega$. Επίσης, σταθεροποιούμε $1 < p < 2$, $\varepsilon > 0$ και θεωρούμε $m \leq \alpha n$ (α όπως στο Λήμμα 2.2.2). Τότε, για κάθε $(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) \in \Omega$ ορίζουμε μια τυχαία m–άδα διανυσμάτων $x_1(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}), \ldots, x_m(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi})$ του ℓ_1^n όπου

$$x_i(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{i,j} a_j e_{\pi_i(j)},\ i = 1, \ldots, m$$

όπου τα a_j ορίσθηκαν στο Λήμμα 2.2.2 και e_i είναι η συνήθης βάση του ℓ_1^n. Θα βρούμε ένα $(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) \in \Omega$ έτσι ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} b_i x_i(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) \right\|_{\ell_1^n} \approx \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p \right)^{1/p}$$

για όλους τους $b_1, \ldots, b_m$ και το m όσο το δυνατόν μεγαλύτερο. Αυτό θα γίνει σε δυο βήματα: Πρώτα θα δείξουμε ότι, για σταθερά $b_1, \ldots, b_m$, αυτό είναι σωστό για το μέσο όρο της ποσότητας

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} b_i x_i(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) \right\|_{\ell_1^n}.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.2.9. θα δείξουμε ότι με μεγάλη πιθανότητα η παραπάνω ποσότητα είναι κοντά στη μέση τιμή της. Στη συνέχεια με ένα κλασικό επιχείρημα δικτύου θα έχουμε το συμπέρασμα.

Λήμμα 2.2.3. *Έστω $(b_1, \ldots, b_m)$ στη σφαίρα του ℓ_p^m, δηλαδή $\sum_{i=1}^m |b_i|^p = 1$. Τότε,*

$$1 - \varepsilon \leq \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^{m} b_i x_i(\bar{\varepsilon}, \bar{\pi}) \right\|_{\ell_1^n} \leq 1 + \varepsilon.$$

Απόδειξη. Έχουμε διαδοχικά

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^m b_i x_i(\bar{\varepsilon},\bar{\pi})\right\|_{\ell_1^n} &= \frac{1}{n}\mathbb{E}\left\|\sum_{j=1}^n\sum_{i=1}^m a_j\varepsilon_{ij}b_i e_{\pi_i(j)}\right\| \\
&= \frac{1}{n}\left\|\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^m b_i\varepsilon_{i\pi_i^{-1}(k)}a_{\pi_i^{-1}(k)}e_k\right\|_{\ell_1^n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^m b_i\varepsilon_{i\pi_i^{-1}(k)}a_{\pi_i^{-1}(k)}\right|.
\end{aligned}$$

Για σταθερό $1\leq k\leq n$ θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές $u_1,\ldots,u_m$ στον Ω με

$$u_i(\bar{\varepsilon},\bar{\pi}) = \varepsilon_{i\pi_i^{-1}(k)}\cdot a_{\pi_i^{-1}(k)},\ i=1,\ldots,m.$$

Αυτές είναι συμμετρικές και ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή όπως οι $y_1,\ldots,y_m$ στο λήμμα. Άρα, θα είναι

$$1-\varepsilon\leq\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^m b_i u_i\right|\leq 1+\varepsilon.$$

Αν πάρουμε μέσο όρο, η ανισότητα εξακολουθεί να ισχύει. □

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, χρησιμοποιώντας την πρόταση 1.2.9. και το επιχείρημα δικτύου που είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο προκύπτει το θεώρημα 2.2.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1. Έστω $1<p<2$ και $\varepsilon>0$. Θεωρούμε τον (τυχαίο) γραμμικό τελεστή $T:\ell_p^m\to\ell_1^n$ με $T(b)=\sum_{j=1}^m b_j x_j(\bar{\varepsilon},\bar{\pi})$, για $b=(b_1,\ldots,b_m)\in\mathbb{R}^m$, όπου

$$x_j(\bar{\varepsilon},\bar{\pi}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \varepsilon_{ij}a_i e_{\pi_j(i)}$$

με a_i όπως στο Λήμμα 2.2.2 Θα δείξουμε ότι με θετική πιθανότητα ο T είναι $(1+\varepsilon)-$ ισομορφισμός στον ℓ_1^m για $n\geq\beta m$, όπου β σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από το p και το ε.

Από το Λήμμα 2.2.2 σε συνδυασμό με το Λήμμα 2.2.3 έπεται ότι υπάρχει σταθερά $\alpha=\alpha(\varepsilon,p)>0$ ώστε αν $m\leq\alpha n$ τότε

$$(1-\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^m|b_j|^p\right)^{1/p}\leq\mathbb{E}\left\|T(b)\right\|_{\ell_1^n}\leq(1+\varepsilon)\left(\sum_{j=1}^m|b_j|^p\right)^{1/p}. \tag{2.5}$$

Κατόπιν, από την πρόταση 1.2.9 έχουμε

$$P(|\|T(b)\|_{\ell_1^n}-\mathbb{E}\|T(b)\|_{\ell_1^n}|\geq t)\leq 2\exp(-4^q\delta_p n^q t^q\|(a_ib_j)\|_{p,\infty}^{-q}) \tag{2.6}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $\delta_p = (2-p)/[8p(q+1)^q]$ και q ο συζυγής εκθέτης του p. Χρειαζόμαστε μια εκτίμηση για την ποσότητα $\|(a_i b_j)\|_{p,\infty}$. Ισχύει

$$\|(a_i b_j)_{i,j}^{n,m}\|_{p,\infty} \leq \left(\sum_{j=1}^{m} \|(a_i b_j)_{i=1}^{n}\|_{p,\infty}^{p} \right)^{1/p} = \|(a_i)_{i=1}^{n}\|_{p,\infty} \left(\sum_{j=1}^{m} |b_j|^p \right)^{1/p}.$$

Είναι όμως $|a_i| = g^*(i/n) \leq C^{-1/p}(n/i)^{1/p}$, άρα $\|(a_i)\|_{p,\infty} \leq (n/C)^{1/p}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, για κάθε $b = (b_1, \ldots, b_m) \in S_{\ell_p^m}$ έχουμε:

$$1 - \varepsilon \leq \mathbb{E}\|T(b)\|_{\ell_1^n} \leq 1 + \varepsilon$$

και

$$P(|\|T(b)\| - \mathbb{E}\|T(b)\|| \geq t) \leq 2e^{-\zeta_p n t^q}$$

για κάθε $t > 0$, όπου ζ_p μια θετική σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από το p. Στη συνέχεια θεωρούμε ένα θ–δίκτυο $\mathcal{N}$ στη σφαίρα του ℓ_p^m. Τότε, αν η πιθανότητα

$$P(\exists y \in \mathcal{N} : |\|T(y)\| - \mathbb{E}\|T(y)\|| \geq \varepsilon) \leq 2|\mathcal{N}|e^{-\zeta_p n \varepsilon^q} \leq 2e^{2m/\theta - \zeta_p n \varepsilon^q}$$

είναι μικρότερη του 1 έχουμε ότι: με θετική πιθανότητα ισχύει

$$1 - 2\varepsilon \leq \|T(y)\| \leq 1 + 2\varepsilon$$

για κάθε $y \in \mathcal{N}$ και από την πρόταση 2.1.6 έπεται ότι μια παρόμοια ανισότητα ισχύει σ' όλη τη σφαίρα του ℓ_p^m αρκεί το θ να επιλεγεί μικρό συναρτήσει του ε. Τέλος, για να ισχύει το ζητούμενο με θετική πιθανότητα αρκεί να είναι $n \geq (2m/\theta + 1)\varepsilon^{-q}\zeta_p^{-1} = c(\varepsilon, p)m$. Αν λοιπόν θέσουμε $\beta(\varepsilon, p) = \max\{\alpha(\varepsilon, p), (\varepsilon, p)\} > 0$ βλέπουμε ότι αν $n \geq \beta m$, τότε ισχύει το συμπέρασμα. $\square$

Κεφάλαιο 3

Ισομορφικές εμφυτεύσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε το «δυϊκό» του προβλήματος του προηγούμενου κεφαλαίου. Ενώ μέχρι τώρα ενδιαφερόμασταν να δούμε πόσο μικρής τάξης μπορεί να επιλεγεί το N ώστε να είμαστε σε θέση να εμφυτεύσουμε τον ℓ_p^n, $1 < p < 2$ στον ℓ_1^N $(1+\varepsilon)$–ισομορφικά, τώρα εξετάζουμε αν μπορούμε να εμφυτεύσουμε «καλά» τον ℓ_p^n στον $\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$. Λέγοντας «καλά» εννοούμε αν υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $\ell_p^n \to \ell_1^{(1+\varepsilon)n}$ με σταθερά ισομορφισμού ανεξάρτητη από τη διάσταση. Μ' άλλα λόγια το ερώτημα είναι το εξής:

> **Πρόβλημα**: *Έστω $1 < p < 2$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $C = C(\varepsilon, p) > 0$ και υπόχωρος Y του $\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$ ώστε $d(\ell_p^n, Y) \leq C$;*

Το αυτό ερώτημα τέθηκε από τους Milman και Schechtman, με αφετηρία το θεώρημα του Kashin, και απαντήθηκε καταφατικά μόλις το 2003 από τους Johnson και Schechtman. Η προσέγγισή τους περιγράφεται αναλυτικά στην παράγραφο 3.3.

Μια πρώτη μερική απάντηση δόθηκε λίγο νωρίτερα από τους Naor και Zvavitch. Παρουσιάζουμε το επιχείρημά τους στην παράγραφο 3.2.

Η απάντηση στο ίδιο ερώτημα για τον Ευκλείδειο χώρο ℓ_2^n είναι καταφατική και πάει πίσω στο 1977 και το θεώρημα του Kashin [11]. Ο Kashin απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα:

(**Kashin, 1977**) *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχουν n-διάστατοι υπόχωροι F_1, F_2 του ℓ_1^{2n} οι οποίοι είναι ορθογώνιοι (στον ℓ_2^{2n}) και ισχύει $d(F_i, \ell_2^n) \leq C$ για $i = 1, 2$.*

Το θεώρημα του Kashin χρησιμοποιήθηκε στη θεωρία προσεγγίσεων για την επίλυση κάποιων προβλημάτων και έπειτα χρησιμοποιήθηκε για την κατασκευή n-διάστατου χώρου του οποίου η σταθερά της τοπικά unconditional δομής του να είναι της τάξης του $\sqrt{n}$ (η μεγαλύτερη δυνατή). Η απόδειξη του Kashin ήταν πολύπλοκη και το 1978 ο Szarek [8] έδωσε μια άλλη απόδειξη του θεωρήματος εισάγοντας μια νέα έννοια, αυτήν του *λόγου όγκων*, η οποία βρήκε αρκετές εφαρμογές στην τοπική θεωρία χώρων Banach (πρβλ. [9]).

3.1 Η μέθοδος του Szarek για το θεώρημα του Kashin

Ο Szarek ([19],[20]) το 1978 εισήγαγε για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, μια αφινικά αναλλοίωτη παράμετρο την οποία ονόμασε *λόγο όγκων (volume ratio)* και ορίζεται ως εξής:

$$vr(X) = \min_{E \in \mathcal{E}} \left(\frac{|B|}{|E|} \right)^{1/n}$$

όπου $\mathcal{E}$ είναι η οικογένεια όλων των ελλειψοειδών που περιέχονται στο B και $B = \{x \in X : \|x\| \leq 1\}$ η μοναδιαία μπάλα του χώρου. Χρησιμοποιώντας αυτή την έννοια απέδειξε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 3.1.1 (Szarek, 1978). *Έστω $c > 0$ και $0 < \theta < 1$ σταθερές. Υπάρχει θετική σταθερά $C(\theta, c)$ ώστε για κάθε n-διάστατο χώρο E με $vr(E) \leq c$ και για κάθε θετικό ακέραιο $k \leq \theta n$ να υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του E με $d(F, \ell_2^k) \leq C(\theta)$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος 3.1.1 χρησιμοποιεί την πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ και το αναλλοίωτο, ως προς την ομάδα ορθογώνιων μετασχηματισμών, μέτρο Haar $\nu_{n,k}$. Έτσι, ως προς την έννοια του μέτρου Haar το παραπάνω θεώρημα μας εξασφαλίζει ότι οι «περισσότεροι» k-διάστατοι υπόχωροι F του E έχουν την ιδιότητα $d(E, \ell_2^k) \leq C(\theta c)$. Έχοντας το παραπάνω θεώρημα, το θεώρημα του Kashin είναι άμεσο πόρισμα αυτού, της παρατήρησης ότι $vr(\ell_1^n) \leq \sqrt{2\pi/e}$ και του γεγονότος ότι η συνάρτηση $F \mapsto F^{\perp}$ όταν δρα στην $G_{2n,n}$ διατηρεί το μέτρο.

Θα αποδείξουμε το θεώρημα στην ειδική περίπτωση όπου $E = \ell_1^n$. Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 3.1.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $1 \leq k \leq n$ να υπάρχει υπόχωρος F του ℓ_1^n με $\dim F = k$ και*

$$d(E, \ell_2^k) \leq C^{\frac{n}{n-k+1}}.$$

Αν, για δοθέν $0 < \theta < 1$, θέσουμε $k = [\theta n]$ τότε έχουμε το εξής:

Πόρισμα 3.1.3. *Για κάθε $0 < \theta < 1$ υπάρχει σταθερά $C(\theta) > 0$ ώστε: για κάθε n υπάρχει k-διάστατος υπόχωρος F του ℓ_1^n με $k = [\theta n]$ και $d(F, \ell_2^k) \leq C(\theta)$.*

Έτσι, έχουμε θετική απάντηση στο πρόβλημα του κεφαλαίου στην περίπτωση του Ευκλειδείου χώρου ($p = 2$). Η απόδειξη του θεωρήματος 3.1.2 ακολουθεί σε γενικές γραμμές αυτή του [20] και βασίζεται στο ακόλουθο απλό γεωμετρικό λήμμα:

Λήμμα 3.1.4. *Έστω S^{n-1} η μοναδιαία σφαίρα του ℓ_2^n. Για κάθε $x \in S^{n-1}$ και $r > 0$ γράφουμε $B(x, r) = \{\theta \in S^{n-1} : \|x - \theta\|_2 \leq r\}$. Αν $0 < r < \sqrt{2}$ ισχύει*

$$\sigma(B(x, r)) \geq \frac{1}{2} \left(\frac{r}{2} \right)^{n-1}$$

όπου σ το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στη σφαίρα S^{n-1}.

Επιπλέον, χρήσιμη θα φανεί η ταυτότητα της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση 3.1.5. *Έστω $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $1 \le k \le n$ ισχύει*

$$\int_{S^{n-1}} f(\theta)\, d\sigma(\theta) = \int_{G_{n,k}} \int_{S_F} f(\theta)\, d\sigma_F(\theta)\, d\nu_{n,k}(F)$$

όπου S_F η μοναδιαία Ευκλείδεια σφαίρα στον k-διάστατο υπόχωρο F και σ_F το ομοιόμορφο (επιφανειακό) μέτρο πιθανότητας στην S_F.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.1.2. Παρατηρούμε ότι $\|x\|_1 \le n^{1/2}\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Κανονικοποιούμε την $\|\cdot\|_1$ θέτοντας $\|x\| = n^{-1/2}\|x\|_1$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε έχουμε $\|x\| \le \|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε τον όγκο της B_1^n σε πολικές συντεταγμένες χρησιμοποιώντας τη νόρμα $\|\cdot\|$. Έχουμε, διαδοχικά,

$$\begin{aligned}
|B_1^n| &= \int_{\mathbb{R}^n} \chi_{B_1^n}(x)\, dx \\
&= n|B_2^n| \int_{S^{n-1}} \int_0^{\infty} t^{n-1} \chi_{B_1^n}(t\theta)\, dt\, d\sigma(\theta) \\
&= n|B_2^n| \int_{S^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{\|\theta\|_1}} t^{n-1}\, dt\, d\sigma(\theta) \\
&= |B_2^n| \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_1^{-n}\, d\sigma(\theta) \\
&= n^{-n/2}|B_2^n| \int_{S^{n-1}} \|\theta\|^{-n}\, \sigma(\theta).
\end{aligned}$$

Ισοδύναμα,

$$\int_{S^{n-1}} \|\theta\|^{-n}\, d\sigma(\theta) = n^{n/2}\frac{|B_1^n|}{|B_2^n|}.$$

Κάνοντας χρήση του τύπου του Stirling βρίσκουμε $n^{n/2}\frac{|B_1^n|}{|B_2^n|} \sim (\frac{2\pi}{e})^{n/2}\sqrt{n\pi}$. Άρα, υπάρχει αριθμητική σταθερά $A > 1$ ώστε

$$\int_{S^{n-1}} \frac{1}{\|\theta\|^n}\, d\sigma(\theta) \le A^n$$

Χρησιμοποιώντας την πρόταση 3.1.5 βλέπουμε ότι

$$\int_{G_{n,k}} \int_{S_F} \|\theta\|^{-n}\, d\sigma_F(\theta)\, d\nu_{n,k}(F) \le A^n$$

Από την ανισότητα του Markov έπεται ότι

$$\nu_{n,k}\left(F \in G_{n,k} : \int_{S_F} \|\theta\|^{-n}\, d\sigma_F(\theta) \ge (2A)^n\right) \le \frac{1}{2^n}$$

Άρα, με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - 1/2^n \geq 1/2$ υπάρχει $F \in G_{n,k}$ ώστε

$$\int_{S_F} \|\theta\|^{-n} \, d\sigma_F(\theta) < (2A)^n$$

και $\|x\| \leq \|x\|_2$ για κάθε $x \in F$. Για κάθε $r > 0$, πάλι από την ανισότητα του Markov, έχουμε

$$\sigma_F(\theta \in S_F : \|\theta\| \leq r) \leq r^n \int_{S_F} \|\theta\|^{-n} \, d\sigma_F(\theta) \leq (2rA)^n \tag{3.1}$$

Παρατηρούμε ότι αν βρούμε $r > 0$ αρκετά μικρό ώστε για κάθε $x \in S_F$ να ισχύει

$$B(x, r/2) \cap \{\theta \in S_F : \|\theta\| > r\} \neq \emptyset \tag{$*$}$$

τότε για κάθε $x \in S_F$ θα υπάρχει $\theta \in S_F$ με $\|\theta - x\|_2 \leq r/2$ και $\|\theta\| > r$. Άρα

$$\|x\| \geq \|\theta\| - \|x - \theta\| \geq r - \|x - \theta\|_2 \geq r/2$$

και λόγω ομογένειας της νόρμας θα έχουμε $\|x\| \geq \frac{r}{2}\|x\|_2$ για κάθε $x \in F$. Έτσι, θα έχουμε βρει ένα υπόχωρο $F \in G_{n,k}$ στον οποίο οι δυο νόρμες συγκρίνονται «καλά», δηλαδή:

$$\frac{r}{2}\|x\|_2 \leq \|x\| \leq \|x\|_2$$

για κάθε $x \in F$. Για να ισχύει η $(*)$ αρκεί να είναι $\sigma_F(B(x, r/2)) > \sigma_F(\{\theta : \|\theta\| \leq r\})$. Όμως από το λήμμα 3.1.4 έχουμε ότι $\sigma_F(B(x, r/2)) \geq \frac{1}{2}\left(\frac{r}{4}\right)^{k-1}$ και από την (3.1) ότι $\sigma_F(\theta : \|\theta\| \leq r) \leq (2rA)^n$. Οπότε, αρκεί να είναι $\frac{1}{2}\left(\frac{r}{4}\right)^{k-1} > (2rA)^n$ ή $r = (20A)^{-\frac{n}{n-k+1}}$. Τότε, ισχύει

$$\frac{rn^{1/2}}{2}\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq n^{1/2}\|x\|_2$$

για κάθε $x \in F$. Από αυτήν έπεται ότι

$$d(F, \ell_2^k) \leq \frac{2}{r}$$

για τον k-διάστατο υπόχωρο F του ℓ_1^n. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

3.2 Το θεώρημα των Naor και Zvavitch

Το 2001 οι Naor και Zvavitch έδωσαν μερική απάντηση στο πρόβλημα δείχνοντας ότι η σταθερά ισομορφισμού φράσσεται από $(C(p)\log n)^{\frac{1}{q}(\frac{1}{\varepsilon}+1)}$, όπου $q = \frac{p}{p-1}$ και $C(p)$ θετική σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από το p.

3.2.1 Περιγραφή της απόδειξης

Η προσέγγιση των Naor και Zvavitch είναι πιθανοθεωρητική και βασίζεται στη μέθοδο των τυχαίων τελεστών: Σταθεροποιούμε $n < m \leq 2n$ (η συνθήκη $m \leq 2n$ δεν είναι περιοριστική, θυμηθείτε ότι θα φέρουμε το m όσο κοντά θέλουμε στο n: θέλουμε $m = (1+\varepsilon)n$) και θεωρούμε κατάλληλη οικογένεια τυχαίων γραμμικών τελεστών $T_\omega : \ell_p^n \to \ell_1^m$, όπου $\omega \in \Omega$ και $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ο χώρος πιθανότητας στον οποίο δουλεύουμε. Θα αποδείξουμε ότι με θετική πιθανότητα υπάρχει ένας τελεστής $S : \ell_p^n \to \ell_1^m$ (από τους T_ω, $\omega \in \Omega$) ώστε να ισχύει

$$\|x\|_p \leq \|Sx\|_1 \leq (K \log n)^{\frac{1}{q}\left(\frac{m/n}{m/n-1}\right)} \|x\|_p$$

για κάθε $x \in \ell_p^n$, όπου $K = K(p)$ θετική σταθερά. Μ' άλλα λόγια ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.2.1 (Naor–Zvavitch, 2001). *Για κάθε $1 < p < 2$ υπάρχει σταθερά $K = K(p) > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n < m \leq 2n$ υπάρχει n-διάστατος υπόχωρος W του ℓ_1^m ώστε*

$$d(W, \ell_p^n) \leq (K \log n)^{\frac{1}{q}\left(\frac{m/n}{m/n-1}\right)}$$

όπου $d(\cdot,\cdot)$ η απόσταση Banach–Mazur.

Απ' αυτό το θεώρημα, παίρνοντας $m = (1+\varepsilon)n$ έχουμε το ζητούμενο.

Η τυχαία εμφύτευση που χρησιμοποιείται στην απόδειξη είναι διαφορετική από τις εμφυτεύσεις που έχουμε δει ως τώρα και περιγράφεται εύκολα από ένα τυχαίο πίνακα $m \times n$ του οποίου τα στοιχεία είναι ανεξάρτητες, ισοκατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές X_{ij} στο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. Πιο συγκεκριμένα έχουμε τον ακόλουθο (τυχαίο) πίνακα

$$\Gamma(\omega) = \frac{1}{m} \begin{bmatrix} X_{11}(\omega) & X_{12}(\omega) & \dots & X_{1n}(\omega) \\ X_{21}(\omega) & X_{22}(\omega) & \dots & X_{2n}(\omega) \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ X_{m1}(\omega) & X_{m2}(\omega) & \dots & X_{mn}(\omega) \end{bmatrix} = \frac{1}{m}\big(X_{ij}(\omega)\big)_{i,j}^{m,n} \tag{3.2}$$

όπου κάθε X_{ij} είναι αντίγραφο μιας συμμετρικής τυχαίας μεταβλητής X, η οποία ορίζεται μέσω μιας κατάλληλα «κομμένης» συμμετρικής κανονικοποιημένης p-stable τυχαίας μεταβλητής. Θεωρούμε μια συμμετρική κανονικοποιημένη p-stable τυχαία μεταβλητή g και βάσει αυτής ορίζουμε τη συμμετρική τυχαία μεταβλητή X ως εξής:

$$\mathbb{P}(X < t) = \begin{cases} 0 & t < -m^{1/p} \\ \frac{\mathbb{P}(-m^{1/p} \leq g \leq t)}{\mathbb{P}(|g| \leq m^{1/p})} & |t| \leq m^{1/p} \\ 1 & t > m^{1/p} \end{cases} \tag{3.3}$$

Τώρα, οι X_{ij} είναι mn ανεξάρτητα ισοκατανεμημένα αντίγραφα της X. Έτσι, ορίζεται ο τυχαίος πίνακας Γ_ω και ως εκ τούτου ο τυχαίος τελεστής T_ω. Παρατηρούμε ότι για κάθε

$b = (b_1, \ldots, b_n) \in \ell_p^n$ ισχύει

$$T_\omega(b) = \frac{1}{m}\Gamma_\omega b = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{j=1}^{n} b_j X_{ij}\right) e_i, \tag{3.4}$$

όπου e_i τα κανονικά βασικά διανύσματα του $\mathbb{R}^n$. Αυτό που κυρίως μας ενδιαφέρει είναι η νόρμα $\|T_\omega\| = \sup\{\|T_\omega(b)\|_1 : \|b\|_p = 1\}$ και συγκεκριμένα εκτιμήσεις για τις πιθανότητες

$$\mathbb{P}(\omega : \|T_\omega(b)\|_1 < t\|b\|_p) \tag{3.5}$$

και

$$\mathbb{P}(\omega : \|T_\omega(b)\|_1 > s\|b\|_p). \tag{3.6}$$

Συνεπώς, η ποσότητα

$$Z_b(\omega) = \|T_\omega(b)\|_1 = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{n} b_j X_{ij}(\omega)\right| = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|Y_i(\omega)|, \tag{3.7}$$

όπου $Y_i = \sum_{j=1}^{n} b_j X_{ij} = \langle X_{(i)}, b\rangle$ με $X_{(i)} = (X_{i1}, \ldots, X_{in})$ η i-γραμμή του πίνακα Γ, θα είναι το κύριο αντικείμενο μελέτης στη συνέχεια.

3.2.2 Τα βασικά λήμματα

Αρχικά εκτιμούμε την πιθανότητα (3.5). Λόγω της ομογένειας αρκεί να υπολογίσουμε την παραπάνω πιθανότητα στην περίπτωση όπου $\|b\|_p = 1$.

Πρόταση 3.2.2. *Υπάρχει σταθερά $C = C(p) > 0$ ώστε για κάθε $t > 0$ και για κάθε $b \in \ell_p^n$ με $\|b\|_p = 1$ να ισχύει*

$$\mathbb{P}(Z_b < t) \leq (Ct)^m. \tag{3.8}$$

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρειαστούμε δύο λήμματα. Από την μορφή της Z_b βλέπουμε ότι πρέπει να εκτιμήσουμε μια small ball probability για το μέσο όρο των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $|Y_i|, i = 1, 2, \ldots, m$. Προς τούτο πρέπει πρώτα να γνωρίζουμε μια εκτίμηση για την πιθανότητα $\mathbb{P}(|Y| < t)$ όπου Y είναι τυχαία μεταβλητή ισόνομη με τις Y_i. Έτσι έχουμε το ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 3.2.3. *Υπάρχει σταθερά $C = C(p) > 0$ με την εξής ιδιότητα: Αν $b = (b_1, \ldots, b_n) \in \ell_p^n$ με $\|b\|_p = 1$ και $Y = \sum_{j=1}^{n} b_j X_j$, όπου $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητα ισόνομα αντίγραφα της X, τότε ισχύει*

$$\mathbb{P}(|Y| < t) \leq Ct \tag{3.9}$$

για κάθε $t > 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι κάθε X_j έχει πυκνότητα $f_{X_j} \equiv f_X$ και άρα η Y έχει πυκνότητα f_Y. Λόγω της ανεξαρτησίας έχουμε

$$\begin{aligned} f_Y(u) = f_{\sum_{j=1}^n b_j X_j}(u) &= (f_{b_1 X_1} * \cdots * f_{b_n X_n})(u) \\ &= \left(\frac{f_X(\frac{\cdot}{|b_1|})}{|b_1|} \right) * \cdots * \left(\frac{f_X(\frac{\cdot}{|b_n|})}{|b_n|} \right)(u). \end{aligned}$$

Επίσης, από τον τρόπο ορισμού της X έχουμε ότι

$$f_X \leq \frac{f_g}{\mathbb{P}(|g| \leq m^{1/p})} \leq \frac{f_g}{1 - c_p/m} \tag{3.10}$$

όπου στην τελευταία ανισοτική σχέση έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $\mathbb{P}(|g| > t) \leq \frac{c_p}{t^p}$ για την ουρά της κατανομής της g. Οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} f_Y(u) &\leq \frac{1}{(1 - \frac{c_p}{m})^n} \left(\frac{f_g(\frac{\cdot}{|b_1|})}{|b_1|} \right) * \dots * \left(\frac{f_g(\frac{\cdot}{|b_n|})}{|b_n|} \right)(u) \\ &= \frac{1}{(1 - \frac{c_p}{m})^n} f_{\sum_{j=1}^n b_j g_j}(u) \\ &\leq C f_g(u) \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι η ποσότητα $(1 - c_p/m)^n$ είναι κάτω φραγμένη όταν $n < m \leq 2n$ και ακόμη ότι η $\sum_{j=1}^n b_j g_j$ έχει την ίδια κατανομή με την g εφόσον $\|b\|_p = 1$. Επίσης, η f_g είναι φραγμένη αφού $f_g(x) = \int e^{-itx} \varphi_g(t)\, dt$. Εδώ, με $\varphi_g(t) = e^{-c_p |t|^p}$ συμβολίζουμε τη χαρακτηριστική συνάρτηση της p-stable (πρβλ. [4]). Έτσι, παίρνουμε την εκτίμηση

$$\mathbb{P}(|Y| < t) = \int_{-t}^{t} f_Y(u)\, du \leq C \int_{-t}^{t} f_g(u)\, du \leq C' t$$

η οποία είναι και η ζητούμενη. □

Το επόμενο λήμμα αποτελεί μια κλασική εκτίμηση για small ball probability όταν έχουμε το μέσο όρο ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $Y_1, \ldots, Y_m$ με συνάρτηση κατανομής F_{Y_i} όπου $F_{Y_i}(t) \leq Ct$ για $i = 1, \ldots, m$.

Λήμμα 3.2.4. *Έστω $Y_1, \ldots, Y_m$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{P}(|Y_i| < t) \leq Ct$ για $i = 1, \ldots, m$. Τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{m} \sum_{i=1}^m |Y_i| < t \right) \leq (Kt)^m \tag{3.11}$$

όπου $K = eC$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Markov, για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|Y_i| < t\right) &\leq e^{\lambda mt}\mathbb{E}e^{-\lambda\sum_{i=1}^{m}|Y_i|}\\ &= e^{\lambda mt}\prod_{i=1}^{m}\mathbb{E}e^{-\lambda|Y_i|}\\ &= e^{\lambda mt}\prod_{i=1}^{m}\left(\int_0^\infty e^{-s}\mathbb{P}(\lambda|Y_i|\leq s)\,ds\right).\end{aligned}$$

Από την υπόθεση έχουμε ότι

$$\int_0^\infty e^{-s}\mathbb{P}(|Y_i|\leq s/\lambda)\,ds \leq \frac{C}{\lambda}\int_0^\infty se^{-s}\,ds = \frac{C}{\lambda}.$$

Έτσι, προκύπτει

$$\mathbb{P}(\tfrac{1}{m}\sum_{i=1}^{m}|Y_i| < t) \leq e^{\lambda mt}(C/\lambda)^m. \tag{3.12}$$

Επιλ·εγονταω $\lambda = 1/t$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Συνδυάζοντας τα παραπάνω λήμματα παίρνουμε την Πρόταση 3.2.2. Το επόμενο βήμα είναι να εκτιμήσουμε την πιθανότητα (3.6). Γι' αυτό το σκοπό θα είναι χρήσιμη η ακόλουθη εκτίμηση:

Λήμμα 3.2.5. *Υπάρχει σταθερά $C = C(p) > 0$ ώστε για κάθε $t > 0$ να ισχύει*

$$\mathbb{E}e^{tX} \leq 1 + \frac{1}{m}(\cosh(Ctm^{1/p}) - 1). \tag{3.13}$$

Απόδειξη. Από το θεώρημα Beppo-Levi και το γεγονός ότι η X είναι συμμετρική, παίρνουμε

$$\mathbb{E}e^{tX} = \mathbb{E}\cosh(tX) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathbb{E}X^{2k} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^{2k}}{(2k)!}\mathbb{E}X^{2k}. \tag{3.14}$$

Επομένως, χρειαζόμαστε μια εκτίμηση για τις άρτιες ροπές της X. Αν $k \geq 1$, τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X^{2k} &= 2k\int_0^\infty t^{2k-1}\mathbb{P}(|X|>t)\,dt\\ &= 2k\int_0^{m^{1/p}} t^{2k-1}\frac{\mathbb{P}(|g|>t)}{\mathbb{P}(|g|\leq m^{1/p})}\,dt\\ &\leq \frac{2kc_p}{1-c_p/m}\int_0^{m^{1/p}} t^{2k-1-p}\,dt\\ &\leq C'\frac{m^{2k/p}}{m}.\end{aligned}$$

Συνεπώς, έχουμε την ανισότητα

$$\mathbb{E}e^{tX} \leq 1 + \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(Ctm^{1/p})^{2k}}{(2k!)} = 1 + \frac{1}{m}(\cosh(Ctm^{1/p}) - 1) \tag{3.15}$$

η οποία είναι η ζητούμενη. □

Στη συνέχεια θα εκτιμήσουμε τη μέση τιμή $\mathbb{E}e^{t|Y_i|}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, m$.

Λήμμα 3.2.6. *Υπάρχει σταθερά $C = C(p) > 0$ ώστε αν $b \in \ell_p^n$ και $Y = \sum_{j=1}^n b_j X_j$, όπου $X_1, \ldots, X_n$ ανεξάρτητα και ισόνομα αντίγραφα της X, τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$\mathbb{E}e^{t|Y|} \leq 1 + Ct + 2\left\{\exp\left(\frac{\|b\|_1}{m\|b\|_\infty}[\cosh(Ct\|b\|_\infty m^{1/p}) - 1]\right) - 1\right\}. \tag{3.16}$$

Απόδειξη. Όπως και στο λήμμα 3.2.3 εύκολα δείχνουμε ότι υπάρχει σταθερά $c = c_p$ ώστε $f_{|Y|} \leq cf_{|g|}$, άρα έχουμε $\mathbb{E}|Y| \leq C_1$. Από τη στοιχειώδη ανισότητα $e^x \leq 1+x+2(\cosh x-1)$ και το γεγονός ότι η cosh είναι άρτια, παίρνοντας μέση τιμή βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}e^{t|Y|} &\leq 1 + C_1 t + 2(\mathbb{E}e^{tY} - 1) \\
&= 1 + C_1 t + 2\left(\prod_{j=1}^n \mathbb{E}e^{t|b_j|X} - 1\right)
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την ανεξαρτησία των X_j και τη συμμετρία της X. Χρησιμοποιώντας τώρα το προηγούμενο λήμμα, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\prod_{j=1}^n \mathbb{E}e^{t|b_j|X} &\leq \prod_{j=1}^n \left(1 + \frac{1}{m}[\cosh(C_2 t|b_j|m^{1/p}) - 1]\right) \\
&\leq \exp\left(\frac{1}{m}\sum_{j=1}^n(\cosh(C_2 t|b_j|m^{1/p}) - 1)\right)
\end{aligned} \tag{3.17}$$

Από την κυρτότητα της συνάρτησης $x \mapsto \cosh x - 1$ έχουμε:

$$\cosh(C_2 t|b_j|m^{1/p}) - 1 \leq \frac{|b_j|}{\|b\|_\infty}(\cosh(C_2 t\|b\|_\infty m^{1/p}) - 1). \tag{3.18}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.17) και (3.18) έχουμε την (3.16). □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε τη δεύτερη βασική πρόταση, η οποία είναι μια ανισότητα για την ουρά της μεταβλητής Z_b με $\|b\|_p = 1$.

Πρόταση 3.2.7. *Υπάρχει σταθερά $C_0 = C_0(p) > 0$ ώστε για κάθε $s > C_0$ και για κάθε $b \in \ell_p^n$ με $\|b\|_p = 1$ να ισχύει*

$$\mathbb{P}(Z_b > s) \leq \exp\left(\frac{-sm^{1/q}}{C_0\|b\|_\infty}\right), \tag{3.19}$$

όπου $1/p + 1/q = 1$.

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Markov, για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(Z_b > s) &\leq e^{-\lambda s}\mathbb{E}e^{\lambda Z_b} \\ &= e^{-\lambda s}\prod_{i=1}^m \mathbb{E}e^{\frac{\lambda}{m}|Y_i|} \\ &= e^{-\lambda s}\left(\mathbb{E}e^{\frac{\lambda}{m}|Y|}\right)^m. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.2.6 και τη στοιχειώδη ανισότητα $1 + x \leq e^x$ παίρνουμε

$$\left(\mathbb{E}e^{\frac{\lambda}{m}|Y|}\right)^m \leq \exp\left\{C\lambda + 2m\left[\exp\left(\frac{\|b\|_1}{m\|b\|_\infty}[\cosh(C\lambda\|b\|_\infty m^{-1/q}) - 1]\right) - 1\right]\right\}$$

Αν επιλέξουμε $\lambda = \frac{m^{1/q}}{C\|b\|_\infty}$ τότε έχουμε

$$\frac{\|b\|_1}{m\|b\|_\infty}[\cosh(C\lambda\|b\|_\infty m^{-1/q}) - 1] = \frac{(e-1)^2}{2e}\frac{\|b\|_1}{m\|b\|_\infty} < \frac{2\|b\|_1}{em\|b\|_\infty} < 1.$$

Όμως για κάθε $0 \leq x < 1$ ισχύει $e^x - 1 \leq 2x$, άρα είναι

$$\mathbb{P}(Z_b > s) \leq e^{-\lambda s}\exp\left(\frac{m^{1/q}}{\|b\|_\infty} + 4\frac{\|b\|_1}{\|b\|_\infty}\right) \tag{3.20}$$

Από την ανισότητα του Hölder και το γεγονός ότι $n < m$ έχουμε $\|b\|_1 \leq n^{1/q}\|b\|_p < m^{1/q}$. Έτσι, παίρνουμε

$$\mathbb{P}(Z_b > s) \leq \exp\left(-\frac{sm^{1/q}}{C\|b\|_\infty} + 5\frac{m^{1/q}}{\|b\|_\infty}\right).$$

Θέτοντας $C_0 := 6C$ βλέπουμε ότι, αν $s > C_0$ τότε

$$\mathbb{P}(Z_b > s) \leq e^{-\frac{sm^{1/q}}{C_0\|b\|_\infty}}$$

και η απόδειξη της πρότασης είναι πλήρης. □

Τέλος, αποδεικνύουμε ένα κλασικό γεωμετρικό αποτέλεσμα που αφορά σε ειδικού τύπου υποσύνολα της μοναδιαίας σφαίρας του ℓ_p^n: Ορίζουμε το σύνολο

$$\mathcal{F} = \left\{\frac{\varepsilon\mathbf{1}_A}{|A|^{1/p}} : A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}, A \neq \emptyset, \varepsilon \in \{-1, 1\}^n\right\} \tag{3.21}$$

όπου ο πολλαπλασιασμός $\varepsilon\mathbf{1}_A$ είναι κατά σημείο. Το σύνολο $\mathcal{F}$ έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

Πρόταση 3.2.8. *Υπάρχει σταθερά $C = C(p) > 0$ ώστε να ισχύει*

$$B_p^n \subseteq C(\log n)^{1/q}\mathrm{conv}(\mathcal{F}). \tag{3.22}$$

όπου $1/p + 1/q = 1$.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $\|b\|_p = 1$ γράφεται ως (κατάλληλο) πολλαπλάσιο κυρτού συνδυασμού στοιχείων του $\mathcal{F}$. Έστω $b \in S_{\ell_p^n}$. Θα προσπαθήσουμε να γράψουμε το b ως κυρτό συνδυασμό των $\frac{1}{k^{1/p}}\sum_{i=1}^k e_i \in \mathcal{F}$ για $k = 1, \dots, n$ επί μια κατάλληλη σταθερά. Αναζητούμε $t_k \geq 0$ με $\sum_{k=1}^n t_k = 1$ ώστε

$$b = c(b)\sum_{k=1}^n \frac{t_k}{k^{1/p}}\sum_{i=1}^k e_i \tag{3.23}$$

όπου $c(b)$ κατάλληλη θετική σταθερά. Αλλάζοντας την άθροιση στο δεξιό μέλος βρίσκουμε ότι

$$b = c(b)\sum_{i=1}^n\sum_{k=i}^n \frac{t_k}{k^{1/p}}e_i$$

Οπότε αν $b = (b_1, b_2, \dots, b_n)$ τότε είναι $b_i = c(b)\sum_{k=i}^n \frac{t_k}{k^{1/p}}$ για $i = 1, 2, \dots, n$. Άρα,

$$b_i - b_{i+1} = c(b)\frac{t_i}{i^{1/p}} \Rightarrow t_i = \frac{i^{1/p}(b_i - b_{i+1})}{c(b)}$$

για $1 \leq i \leq n-1$ και $t_n = \frac{n^{1/p}b_n}{c(b)}$. Εφόσον, θέλουμε $t_i \geq 0$ πρέπει να είναι $b_1 \geq \dots \geq b_n \geq 0$ και από τη συνθήκη $\sum_{i=1}^n t_i = 1$ προσδιορίζεται η σταθερά $c(b)$: θέτουμε $c(b) = \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1})i^{1/b}$, όπου $b_{n+1} \equiv 0$. Σ' αυτήν την περίπτωση λοιπόν έχουμε ότι: για τη σταθερά $c(b)$ υπάρχουν $t_1, \dots t_n \geq 0$ με $\sum_{k=1}^n t_k = 1$ (όπως ορίσθηκαν) ώστε να ισχύει η (3.23).

Για τη γενική περίπτωση παρατηρούμε ότι το σύνολο $\mathcal{F}$ είναι αναλλοίωτο ως προς αλλαγές προσήμων και αναδιατάξεις. Άρα, σε κάθε περίπτωση ισχύει η (3.23) με την ίδια σταθερά $c(b)$.

Για τη σταθερά $c(b)$ παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} c(b) &= \sum_{i=1}^n (b_i - b_{i+1})i^{1/p} = \sum_{i=1}^n [i^{1/p} - (i-1)^{1/p}]b_i \\ &\leq \|b\|_p \left(\sum_{i=1}^n [i^{1/p} - (i-1)^{1/p}]^q\right)^{1/q} \end{aligned}$$

Για κάθε $i > 1$ ισχύει $i^{1/p} - (i-1)^{1/p} < \frac{1}{p}i^{-1/q}$ οπότε είναι

$$[i^{1/p} - (i-1)^{1/p}]^q < \frac{p^{-q}}{i}.$$

Επόμενως,

$$c(b) \leq \left(1 + p^{-q} \sum_{i=2}^{n} \frac{1}{i}\right)^{1/q} \leq \left(1 + \frac{1}{p^q} \int_1^n \frac{1}{x}\, dx\right)^{1/q} \leq \frac{c}{p} (\log n)^{1/q}$$

όπου $c > 0$ αριθμητική σταθερά. □

3.2.3 Απόδειξη του θεωρήματος και σχόλια

Έχοντας όλα τα βασικά εργαλεία στα χέρια μας μπορούμε τώρα να προχωρήσουμε στο επιχείρημα της απόδειξης. Αρχικά χρειαζόμαστε ένα άνω φράγμα για την πιθανότητα

$$\mathbb{P}(\exists u \in \mathcal{F} : Z_u > s),$$

όπου $\mathcal{F}$ η οικογένεια που ορίσθηκε στην (3.21) και στη συνέχεια για την πιθανότητα

$$\mathbb{P}(\exists b \in \mathcal{N} : Z_b < t),$$

όπου το $\mathcal{N}$ θα είναι ένα κατάλληλο δίκτυο στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_p^n.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1. Από την υποπροσθετικότητα της πιθανότητας και την εκτίμηση (3.19) έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(u \in \mathcal{F} : Z_u > s) &\leq \sum_{u \in \mathcal{F}} \mathbb{P}(Z_u > s) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{u = \varepsilon \mathbf{1}_A / |A|^{1/p} \\ |A| = k, \varepsilon \in \{-1,1\}^n}} \mathbb{P}(Z_u > s) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \sum_{\substack{u = \varepsilon \mathbf{1}_A / |A|^{1/p} \\ |A| = k, \varepsilon \in \{-1,1\}^n}} \exp\left(\frac{-sCm^{1/q}}{\|u\|_\infty}\right) = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} 2^k e^{-sCm^{1/q}k^{1/p}} \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} e^{-sC'm^{1/q}k^{1/p}}
\end{aligned}$$

για κάποιο $s > 1/C$, όπου C' μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $k < n/2$ τότε θέτοντας $x = \frac{k}{n}$ έχουμε $x \in [1/n, 1/2)$ και

$$\begin{aligned}
\binom{n}{k} e^{-sC'm^{1/q}k^{1/p}} &= \binom{n}{nx} e^{-sC'm^{1/q}(nx)^{1/p}} \\
&\leq \left[x^x (1-x)^{(1-x)}\right]^{-n} e^{-sC'nx^{1/p}} \\
&= e^{-n(h(x) + sC'x^{1/p})}
\end{aligned}$$

όπου $h(x)=x\log x+(1-x)\log(1-x)$ η συνάρτηση *εντροπίας*. Αναζητούμε κάτω φράγμα για τη συνάρτηση $H(x)=h(x)+sC'x^{1/p}$. Παραγωγίζοντας βρίσκουμε

$$\begin{aligned} x^{1/q}H'(x) &= x^{1/q}\log\left(\frac{x}{1-x}\right)+\frac{sC'}{p} \\ &\geq x^{1/q}\log x+\frac{sC'}{p} \\ &\geq -\frac{q}{e}+\frac{sC'}{p} \end{aligned}$$

όπου στη τελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει τη στοιχειώδη ανισότητα $x^{1/q}\log x\geq -q/e$ για κάθε $x>0$. Συμπεραίνουμε ότι για όλα τα $s>s_1:=\max\{1/C,pq/(eC')\}$, η H είναι αύξουσα άρα είναι

$$H(x)\geq H(1/n)=(1/n)\log(1/n)+(1-1/n)\log(1-1/n)+sC'n^{-1/p}$$

ή ισοδύναμα

$$-nH(x)\leq \log n+(n-1)\log\left(1+\frac{1}{n-1}\right)-sC'n^{1/q}$$

Οπότε, παίρνουμε

$$\binom{n}{k}e^{-sC'm^{1/q}k^{1/p}}\leq e^{-nH(x)}\leq e^{-sC_1n^{1/q}} \tag{3.24}$$

για όλα τα $s>s_2$, όπου C_1 μια σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από το p και $s_2=s_2(p)$ κατάλληλη θετική σταθερά.

(β) Αν $k\geq n/2$ μπορούμε να φράξουμε ως εξής:

$$\binom{n}{k}e^{-sC'm^{1/q}k^{1/p}}\leq\binom{n}{[n/2]}e^{-sC'm^{1/q}(n/2)^{1/p}}\leq 2^ne^{-sC_2n}\leq e^{-sC_3n},$$

αν $s>2/c_2$ και C_3 θετική σταθερά η οποία εξαρτάται μόνο από το p. Έτσι, σε κάθε περίπτωση είναι $\binom{n}{k}e^{-sC'm^{1/q}k^{1/p}}\leq e^{-sC''n^{1/q}}$ οπότε παίρνουμε

$$\mathbb{P}(\exists u\in\mathcal{F}:Z_u>s)\leq ne^{-sC''n^{1/q}} \tag{3.25}$$

για όλα τα $s>s_3=s_3(p)$, όπου s_3 κατάλληλη σταθερά. Σταθεροποιούμε ένα τέτοιο s ώστε $ne^{-sC''n^{1/q}}<1/2$.

Για την άλλη πιθανότητα θεωρούμε ένα δ-δίκτυο $\mathcal{N}$ στη μοναδιαία σφαίρα του ℓ_p^n με πληθάριθμο $|\mathcal{N}|\leq(3/\delta)^n$. Έχουμε διαδοχικά

$$\mathbb{P}(\exists b\in\mathcal{N}:Z_b<t)\leq|\mathcal{N}|\mathbb{P}(Z_b<t)\leq\left(\frac{3}{\delta}\right)^n(C_4t)^m.$$

Επιλέγουμε $\delta = 6C_4^2 t^{m/n}$ οπότε είναι $\mathbb{P}(\exists b \in \mathcal{N} : Z_b < t) < 1/2$ για κάθε $t > 0$.

Απ' όλα τα παραπάνω προκύπτει ότι υπάρχει $\omega \in \Omega$ ώστε $Z_u(\omega) \leq s$ για κάθε $u \in \mathcal{F}$ και $Z_b(\omega) \geq t$ για κάθε $b \in \mathcal{N}$. Επομένως,

$$\sup \left\{ \|T_\omega(b)\|_1 : b \in \frac{1}{C_5(\log n)^{1/q}} B_p^n \right\} \leq \sup \left\{ \|T_\omega(u)\|_1 : u \in \mathrm{conv}(\mathcal{F}) \right\} \leq s$$

διότι η Z_u είναι γραμμική ως προς u. Άρα,

$$\|T_\omega(b)\|_1 \leq sC_5(\log n)^{1/q} \tag{3.26}$$

για κάθε $b \in B_p^n$. Από την άλλη πλευρά έχουμε: αν $x \in S_{\ell_p^n}$ τότε υπάρχει $y \in \mathcal{N}$ με $\|x - y\|_p < \delta$, άρα

$$\begin{aligned} \|T_\omega(x)\|_1 &\geq \|T_\omega(y)\|_1 - \|T\| \cdot \|x - y\|_p \\ &\geq t - sA(\log n)^{1/q} t^{m/n}, \end{aligned}$$

όπου $A = 6C_5C_4^2$. Επιλέγουμε $t > 0$ τέτοιο ώστε $t^{m/n} sA(\log n)^{1/q} = t/2$, δηλαδή $t = [2sA(\log n)^{1/q}]^{n/(n-m)}$, οπότε ισχύει

$$\frac{t}{2} \leq \|T_\omega(x)\|_1 \leq sC_5(\log n)^{1/q}$$

για κάθε $x \in S_{\ell_p^n}$. Αν θέσουμε $W = T_\omega(\ell_p^n) \subseteq \ell_1^m$, τότε

$$d(\ell_p^n, W) \leq \frac{2}{t} sC_5(\log n)^{1/q} \leq [K(p)\log n]^{\frac{1}{q}\left(\frac{m}{m-n}\right)}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατηρήσεις 3.2.9. Αξίζει τον κόπο να προσέξουμε κάποιες τεχνικές δυσκολίες του επιχειρήματος που περιγράψαμε: αυτές αναγκάζουν τους Naor και Zvavitch να ακολουθήσουν την παραπάνω πορεία και να καταλήξουν σε μια τελική εκτίμηση που δεν αποφεύγει την (λογαριθμική) εξάρτηση από το n.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε X'_{ij} ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές, οι οποίες έχουν την ίδια κατανομή με μια συμμετρική τυχαία μεταβλητή X', $b = (b_1, b_2, \ldots, b_n)$ με $\|b\|_p = 1$ και έστω $Z'_b = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^m |\sum_{j=1}^n b_j X'_{ij}|$. Αν γνωρίζουμε (με κάποιο τρόπο, όπως στο λήμμα 3.2.3) ότι $\mathbb{P}(Z'_b < t) \leq (Ct)^m$ τότε έχουμε

$$\mathbb{E}Z'_b \geq \int_{\{Z'_b \geq \frac{1}{2C}\}} Z'_b \, d\mathbb{P} \geq \frac{1}{2C}\mathbb{P}\left(Z'_b \geq \frac{1}{2C}\right) \geq \frac{1}{2C}\left(1 - \frac{1}{2^m}\right) \geq C'. \tag{3.27}$$

Από την ανισότητα Cauchy–Schwarz και την ανεξαρτησία των X'_{ij} παίρνουμε

$$C' \leq \mathbb{E}Z'_b = \mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n b_j X'_{ij}\right| \leq \left(\mathbb{E}\left|\sum_{j=1}^n b_j X'_{ij}\right|^2\right)^{1/2} = \|b\|_2 (\mathbb{E}|X'|^2)^{1/2}. \tag{3.28}$$

Εφόσον, η τελευταία ισχύει για κάθε $\|b\|_p = 1$ θα ισχύει και για το $b = (n^{-1/p}, \ldots, n^{-1/p})$. Οπότε, προκύπτει η εξής ανισότητα

$$\mathbb{E}|X'|^2 \geq C'' n^{2/p-1}. \tag{3.29}$$

Από την ανισότητα του Lyapounov και την (3.29) έπεται ότι για κάθε $k \geq 2$ ισχύει

$$\left(\mathbb{E}|X'|^k\right)^{1/k} \geq \left(\mathbb{E}|X'|^2\right)^{1/2} \geq C_1 n^{1/p-1/2}. \tag{3.30}$$

Από την ανεξαρτησία και τη συμμετρία των X'_{ij}, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{tZ'_b} &= \mathbb{E}e^{t|\sum_{j=1}^n b_j X'_{ij}|} \geq \mathbb{E}e^{t\sum_{j=1}^n b_j X'_{ij}} \\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}e^{t|b_j|X'} = \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\cosh(t|b_j|X') \\ &\geq \prod_{j=1}^n \cosh(t|b_j|C_1 n^{1/p-1/2}) \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την (3.30). Ειδικότερα, αν $b = (1, 0, \ldots, 0)$ τότε έχουμε

$$\mathbb{E}e^{tZ'_b} \geq \cosh(tC_1 n^{1/p-1/2})$$

και άρα οι ουρές της Z'_b δε μπορεί να είναι εκθετικές ως προς n και s. Έτσι, το σύνηθες επιχείρημα δικτύου δεν εφαρμόζεται και αυτός είναι ο λόγος που χρησιμοποιείται η πρόταση 3.2.8.

3.3 Το ℓ_1^n θεώρημα του Elton

Θεώρημα 3.3.1 (Elton, 1983). *Έστω X πραγματικός χώρος Banach και $\delta \in (0,1)$. Τότε, υπάρχουν σταθερές $c \equiv c(\delta) > 0$ και $\beta \equiv \beta(\delta) > 0$ ώστε: αν $(e_i)_{i=1}^n$ είναι διανύσματα στη μοναδιαία μπάλα του X με την ιδιότητα*

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \right\| \geq \delta n \tag{3.31}$$

τότε υπάρχει $\sigma \subseteq [n]$ με $|\sigma| = m \geq cn$ ώστε

$$\left\| \sum_{i \in \sigma} \alpha_i e_i \right\| \geq \beta \sum_{i \in \sigma} |\alpha_i| \tag{3.32}$$

για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $(\alpha_i)_{i \in \sigma}$.

Σχόλια 3.3.2. (α) Το θεώρημα του Elton έδωσε θετική απάντηση σε ένα ερώτημα του Rosenthal: το αρχικό ερώτημα ήταν αν μπορεί να ισχύει το συμπέρασμα του θεωρήματος με την υπόθεση ότι $\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i \| \geq \delta n$ *για κάθε* επιλογή προσήμων $(\varepsilon_i) \in \{-1, 1\}^n$. Όπως θα φανεί από την απόδειξη, για να μπορέσουμε να δείξουμε κάτι τέτοιο πρέπει να έχουμε στην ευχέρειά μας μια υπόθεση για πολλές επιλογές προσήμων και όχι απλώς για το μέσο όρο. Όμως, από την υπόθεση για το μέσο όρι μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το ίδιο ισχύει για κάποιο αρκετά «μεγάλο» υποσύνολο των κορυφών του n-διαστάτου κύβου.

(β) Λίγο αργότερα, ο Pajor απέδειξε ότι το αποτέλεσμα ισχύει και για μιγαδικούς χώρους Banach. Στη συνέχεια το θεώρημα του Elton μελετήθηκε και από τον Talagrand (1992) ο οποίος απέδειξε το βέλτιστο των σταθερών $c(\delta), \beta(\delta)$ στο συμπέρασμα.

(γ) Το θεώρημα του Elton εξασφαλίζει ότι αν σε κάποιον πραγματικό χώρο Banach έχουμε n διανύσματα στη μοναδιαία του μπάλα και ο μέσος όρος τους ως προς όλα τα δυνατά πρόσημα είναι ανάλογος του n τότε υπάρχει ένα υποσύνολό τους, μεγέθους m ανάλογο του n, το οποίο είναι ισοδύναμο με την κανονική βάση του ℓ_1^m. Έτσι, έχουμε ότι ο X περιέχει υπόχωρο διάστασης $m \sim n$, ο οποίος είναι ισόμορφος με τον ℓ_1^m. Μ' άλλα λόγια το θεώρημα του J.Elton έχει έναν *ισομορφικό χαρακτήρα*.

(δ) Στο ίδιο άρθρο, ο Elton προσθέτει μια *σχεδόν ισομετρική* έκδοση του θεωρήματος, αποδεικνύοντας ότι αν $\delta \uparrow 1$ τότε μπορούμε να επιλέξουμε $\beta \uparrow 1$ και $c \to 1/2$. Σε μια πιο απλή γλώσσα ο σχεδόν ισομετρικός χαρακτήρας του θεωρήματος διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα. *Έστω $\theta \in (0, \frac{1}{2})$ και $\varepsilon \in (0,1)$. Τότε υπάρχει $\delta := \delta(\varepsilon, \theta) < 1$ τέτοιο ώστε αν $(e_i)_{i=1}^{n}$ είναι διανύσματα στη μοναδιαία μπάλα ενός πραγματικού χώρου Banach με*

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i e_i \right\| \geq \delta n \ ,$$

τότε υπάρχει σύνολο $\tau \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ με $|\tau| \geq \theta n$ ώστε

$$\left\| \sum_{i \in \tau} \alpha_i e_i \right\| \geq (1 - \varepsilon) \sum_{i \in \tau} |\alpha_i|$$

για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $(\alpha_i)_{i \in \tau}$.

Το 2002 οι Dilworth και Patterson απέδειξαν την σχεδόν ισομετρική έκδοση του θεωρήματος για μιγαδικούς χώρους Banach, όπου η ποσότητα θ πλέον εξαρτάται από το ε, οι ανεξάρτητες μεταβλητές Rademacher $\varepsilon_i = \pm 1$ δεν αρκούν και αντικαθίστανται από ανεξάρτητες μιγαδικές τυχαίες μεταβλητές Steinhaus ενώ το συνδυαστικό κομμάτι της απόδειξης απαιτεί ένα πιο ισχυρό λήμμα απ' αυτό των Sauer και Shelah (που χρησιμοποιεί ο Elton), την γενίκευσή του από τους Karpovsky και Milman.

Θα αποδείξουμε την ισομορφική έκδοση του θεωρήματος του Elton. Πριν περάσουμε στο κύριο μέρος της απόδειξης, παρουσιάζουμε κάποια λήμματα πιθανοθεωρητικού και συνδυαστικού χαρακτήρα, τα οποία θα παίξουν βασικό ρόλο. Το πρώτο λήμμα είναι μια ανισότητα συγκέντρωσης στον ομοιόμορφο χώρο πιθανότητας $(E_2^n, \mathbb{P})$ για τη συνάρτηση $f_t : E_2^n \to \mathbb{R}$ με $f_t(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n t_i\varepsilon_i := \langle t, \varepsilon\rangle$ όπου $\varepsilon = (\varepsilon_i) \in E_2^n = \{-1, 1\}^n$ και $t = (t_i) \in \mathbb{R}^n$.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω* $(\varepsilon_i)_{i\leq n}$ *ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Rademacher και* $|c_i| \leq 1$ *για* $i = 1, \ldots, n$. *Τότε για κάθε* $\alpha > 0$ *ισχύει η ανισότητα απόκλισης*

$$\mathbb{P}\left(\frac{c_1\varepsilon_1 + \ldots + c_n\varepsilon_n}{n} \geq \alpha\right) \leq \exp\left(-\frac{n\alpha^2}{2}\right). \tag{3.33}$$

Απόδειξη. Από το πρώτο μέρος του θεωρήματος 1.3.3 για $t = n\alpha$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^n c_i\varepsilon_i \geq n\alpha\right) \quad \leq \quad \exp\left(-n^2\alpha^2/2\sum_i c_i^2\right)$$

Κατόπιν χρησιμοποιούμε την ανισότητα $\sum_i c_i^2 \leq n$ και προκύπτει το ζητούμενο. □

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ένα φράγμα για αθροίσματα διωνυμικών συντελεστών. Πιο συγκεκριμένα ισχύει το ακόλουθο:

Λήμμα 3.3.4. *Έστω* $0 < \alpha \leq \frac{1}{2}$. *Τότε ισχύει η ανισότητα*

$$\sum_{i=0}^{\alpha n-1} \binom{n}{i} \leq [\alpha^\alpha(1-\alpha)^{(1-\alpha)}]^{-n} \tag{3.34}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο αn είναι ακέραιος. Τότε το άθροισμα στο πρώτο μέλος εκφράζεται ως πιθανότητα για ανεξάρτητες τυχαίες δοκιμές Bernoulli $\varepsilon_j \in \{0, 1\}$ με παράμετρο $\frac{1}{2}$. Συγκεκριμένα,

$$\sum_{i=0}^{\alpha n-1} \binom{n}{i} = 2^n\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \leq \alpha n\right)$$

Κατόπιν εκτιμούμε την πιθανότητα ακολουθώντας παρόμοιο επιχείρημα όπως πριν με τη μόνη διαφορά ότι αυτή η πιθανότητα είναι μια small ball probability. Έχουμε διαδοχικά, για κάθε $\lambda \geq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(-\lambda\sum_{j=1}^n \varepsilon_j \geq -\lambda n\alpha\right) &\leq e^{\lambda n\alpha}\mathbb{E}\exp(-\sum_{j=1}^n \lambda\varepsilon_j) \\ &= e^{\lambda n\alpha}\prod_{j=1}^n \frac{1+e^{-\lambda}}{2} \\ &= 2^{-n}(e^{\lambda\alpha}(1+e^{-\lambda}))^n\end{aligned}$$

Ελαχιστοποιούμε την ποσότητα $e^{\lambda\alpha}(1+e^{-\lambda})$ επιλέγοντας $\lambda = \log(\frac{1}{\alpha}-1)$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Το τελευταίο λήμμα το οποίο είναι πολύ γνωστό στην περιοχή της συνδυαστικής αποδείχτηκε ανεξάρτητα από τους Sauer (1972) και Perles και Shelah (1972) δίνοντας αρνητική απάντηση σε ένα ερώτημα που έθεσε ο Paul Erdös το 1970. Έκτοτε έχουν υπάρξει γενικεύσεις του από τους Karpovsky και Milman (1978), από τον Alon (1983) κ.ά.

Λήμμα 3.3.5. *Έστω X ένα σύνολο με πληθάριθμο $|X| = n$ και $1 \leq k \leq n$. Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια υποσυνόλων του X με*

$$|\mathcal{F}| > \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i}$$

τότε υπάρχει $A \subseteq X$ με $|A| \geq k$ και $A \cap \mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$.

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο $n+k$. Αν $n+k=1$ τότε δεν έχουμε τίποτα να αποδείξουμε. Υποθέτουμε ότι $n+k \geq 2$ και ότι το συμπέρασμα ισχύει για όλες τις μικρότερες τιμές του $n+k$. Έστω $x \in X$. Θεωρούμε την οικογένεια

$$\mathcal{F}_x = \mathcal{F} \cap (X \setminus \{x\}) = \{F \setminus \{x\} : F \in \mathcal{F}\}$$

Τότε η συνάρτηση $\varphi_x : \mathcal{F} \to \mathcal{F}_x$ με $\varphi_x(A) = A \setminus \{x\}$, $A \in \mathcal{F}$ είναι επί του $\mathcal{F}_x$. Μάλιστα, αν $|\varphi_x^{-1}(B)| \geq 2$ τότε $\varphi_x^{-1}(B) = \{B, B \cup \{x\}\}$ με $B \in \mathcal{F}$ και $x \notin B$. Έτσι αν θεωρήσουμε τις οικογένειες

$$\mathcal{A}_x = \{A \in \mathcal{F} : x \notin A, A \cup \{x\} \in \mathcal{F}\}$$
$$\mathcal{B}_x = \{B \in \mathcal{F} : x \in B, B \setminus \{x\} \in \mathcal{F}\}$$

τότε ισχύουν οι ακόλουθες ισότητες[1] πληθαρίθμων

$$|\mathcal{F}| - |\mathcal{F}_x| = |\mathcal{A}_x| = |\mathcal{B}_x| \tag{3.35}$$

Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $|\mathcal{F}_x| > \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}$ τότε από την επαγωγική υπόθεση, για το σύνολο $X \setminus \{x\}$ υπάρχει $A \subseteq X \setminus \{x\}$ με $|A| \geq k$ ώστε $A \cap \mathcal{F}_x = \mathcal{P}(A)$. Ειδικότερα, $A \subseteq X$ και $A \cap \mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$.

[1] Η συνάρτηση $\varphi_x|_{\mathcal{F}\setminus\mathcal{A}_x} : \mathcal{F} \setminus \mathcal{A}_x \to \mathcal{F}_x$ είναι 1-1 και επί. Πράγματι· ισχύει $\mathcal{F} \setminus \mathcal{A}_x = \{F \in \mathcal{F} : x \in F\} \cup \{F \in \mathcal{F} : x \notin F, F \cup \{x\} \notin \mathcal{F}\}$. Για το επί: αν $C \in \mathcal{F}_x$, τότε υπάρχει $A \in \mathcal{F}$ με $C = A \setminus \{x\}$. Αν $x \in A$, τότε $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{A}_x$ με $\varphi_x(A) = A \setminus \{x\}$. Αν $x \notin A$, τότε είτε $A \cup \{x\} \notin \mathcal{F}$, άρα $A \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{A}_x$ με $\varphi_x(A) = A \setminus \{x\} = A$ ή $A \cup \{x\} \in \mathcal{F}$, άρα $A \cup \{x\} \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{A}_x$ με $\varphi_x(A \cup \{x\}) = A = A \setminus \{x\}$. Για το 1-1: Αν $A, B \in \mathcal{F} \setminus \mathcal{A}_x$, $A \neq B$ με $A \setminus \{x\} = B \setminus \{x\}$, τότε είτε $A \cup \{x\} = B$ με $x \notin A$ ή $B \cup \{x\} = A$ με $x \notin B$. Σε κάθε περίπτωση υπάρχει σύνολο στην $\mathcal{F} \setminus \mathcal{A}_x$ που δεν περιέχει το x αλλά επισυνάπτοντάς το ανήκει στην $\mathcal{F}$. Αυτό αντιφάσκει στον ορισμό της $\mathcal{F} \setminus \mathcal{A}_x$. Ομοίως για την άλλη περίπτωση.

(β) Αν $|\mathcal{F}_x| \leq \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}$, τότε από την ισότητα των πληθάριθμων (3.35) και την υπόθεση του επαγωγικού βήματος έχουμε

$$|\mathcal{A}_x| > \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{k-2} \binom{n-1}{i}$$

Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχει $Y \subseteq X$ με $|Y| \geq k-1$ ώστε $Y \cap \mathcal{A}_x = \mathcal{P}(Y)$. Θεωρούμε το σύνολο $Z = Y \cup \{x\}$ (διότι $x \notin Y$) και παρατηρούμε ότι $(\mathcal{A}_x \cup \mathcal{B}_x) \cap Z = \mathcal{P}(Z)$. Πράγματι· αν $D \subseteq Z$ τότε διακρίνουμε τις υποπεριπτώσεις:

– Αν $x \in D$, τότε $D \setminus \{x\} \subseteq Y$. Έτσι, υπάρχει $A \in \mathcal{A}_x$ ώστε $D \setminus \{x\} = A \cap Y = Z \cap A$. Άρα, $D = Z \cap (A \cup \{x\}) \in Z \cup \mathcal{B}_x$.

– Αν $x \notin D$, τότε $D \subseteq Y$. Άρα, υπάρχει $A \in \mathcal{A}_x$ ώστε $D = Y \cap A = A \cap Z \in Z \cap \mathcal{A}_x$.

Τελικά είναι $Z \cap (\mathcal{A}_x \cup \mathcal{B}_x) = \mathcal{P}(Z)$, οπότε και $Z \cap \mathcal{F} = \mathcal{P}(Z)$. Δηλαδή, το σύνολο Z έχει πληθάριθμο $|Z| \geq k$ και $Z \cap \mathcal{F} = \mathcal{P}(Z)$.

Σε κάθε περίπτωση λοιπόν, υπάρχει $A \subseteq X$ με $|A| \geq k$ και $A \cap \mathcal{F} = \mathcal{P}(A)$. Από την αρχή της μαθηματικής επαγωγής έπεται το συμπέρασμα. □

Είμαστε τώρα σε θέση να προχωρήσουμε στο κύριο μέρος της απόδειξης του θεωρήματος.

Απόδειξη του θεωρήματος 3.2.1. Πρώτα απ' όλα παρατηρούμε ότι μπορούμε να απαλλαγούμε από το μέσο όρο μεταβαίνοντας σε ένα υποσύνολο των κορυφών του κύβου αρκεί να θεωρήσουμε ένα μικρότερο δ. Πιο συγκεκριμένα, αν $0 < \delta' < \delta$ τότε υπάρχει $\mathcal{S} \subseteq \{-1,1\}^n$ με

$$|\mathcal{S}| \geq 2^n \left(\frac{\delta - \delta'}{1-\delta'}\right) \tag{3.36}$$

ώστε για κάθε $(\varepsilon_i) \in \mathcal{S}$ να ισχύει

$$\left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \right\| \geq \delta' n. \tag{3.37}$$

Πράγματι· αν δε συνέβαινε αυτό, τότε θα είχαμε $\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \| < \delta' n$ για $2^n \left(1 - \frac{\delta-\delta'}{1-\delta'}\right)$ διανύσματα προσήμων από το $\{-1,1\}^n$. Οπότε,

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i = \pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i \right\| \leq \left(1 - \frac{\delta - \delta'}{1-\delta'}\right) \delta' n + n \left(\frac{\delta-\delta'}{1-\delta'}\right) = \delta n,$$

κάτι που αντιφάσκει προς την υπόθεση. Από το θεώρημα Hahn–Banach, για κάθε $\varepsilon \in \mathcal{S}$ υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές f^ε στη μοναδιαία μπάλα του δυϊκού X^* του X, ώστε $f^\varepsilon(\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i) = \|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i e_i\| \geq \delta' n$. Θέτουμε $f_i^\varepsilon = f^\varepsilon(e_i)$ έτσι το διάνυσμα $(f_i^\varepsilon)_{i=1}^n$ ανήκει στη μοναδιαία μπάλα του ℓ_∞^n.

Το επόμενο βήμα είναι να «απορρίψουμε» μερικά από τα συναρτησοειδή (f_i^ε) ώστε τα υπόλοιπα να μπορούν να ομαδοποιηθούν σε πολλές κλάσεις, οι οποίες να διαχωρίζονται από ένα συγκεκριμένο πλήθος διανυσμάτων στον ℓ_∞^n. Αυτό θα επιτευχθεί διαμερίζοντας κατάλληλα το διάστημα $[-1,1]$. Για ευκολία υποθέτουμε ότι $\delta' = 2^{-p}$, όπου $p \in \mathbb{N}$. Διαμερίζουμε το διάστημα $[-1,1]$ σε διαδοχικά ισομήκη διαστήματα J_k μήκους $\frac{\delta'}{2}$. Έτσι, είναι $[-1,1] = \bigcup_{k=1}^{2^{p+2}} J_k$. Στη συνέχεια υποδιαμερίζουμε όλα τα εσωτερικά διαστήματα της προηγούμενης διαμέρισης σε ισομήκη διαστήματα μήκους $\frac{(\delta')^3}{64}$. Έτσι, για κάθε $1 < k < 2^{p+2}$ έχουμε διαστήματα $L_{k,m}$ με $J_k = \bigcup_m L_{k,m}$ όπου το $\lambda(L_{k,m}) = \frac{(\delta')^2}{32}\lambda(J_k)$ (εδώ με $\lambda(\cdot)$ συμβολίζουμε το μέτρο Lebesgue, δηλαδή το μήκος του διαστήματος). Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω διαμέριση για να ορίσουμε επαγωγικά μια φθίνουσα, πεπερασμένη ακολουθία $\mathcal{S} = \mathcal{S}^0 \supseteq \mathcal{S}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{S}^n$ υποσυνόλων του $\mathcal{S}$, όπου ο τελευταίος όρος της θα μας εξασφαλίσει ότι έχουμε αρκετά πρόσημα ώστε να περιορισθούμε στα αντίστοιχα συναρτησοειδή $(f_i^\varepsilon)_{\varepsilon \in \mathcal{S}^n}$. Αυτά με τη σειρά τους θα ομαδοποιηθούν στις προαναφερόμενες κλάσεις.

Η επαγωγική κατασκευή επιτυγχάνεται ως εξής: Θέτουμε $\mathcal{S}^0 = \mathcal{S}$ και κοιτάμε τα πρόσημα $\varepsilon \in \mathcal{S}$ εκείνα για τα οποία το αντίστοιχο συναρτησοειδές νορμαρίσματος απεικονίζει το e_1 στο J_k. Έτσι ορίζεται η οικογένεια των $\mathcal{S}_k^1$ για $k = 1, \ldots, 2^{p+2}$, δηλαδή είναι

$$\mathcal{S}_k^1 = \{\varepsilon \in \mathcal{S} : f_1^\varepsilon \in J_k\}, \quad 1 \leq k \leq 2^{p+2}$$

και με παρόμοιο τρόπο ορίζουμε

$$\mathcal{S}_{k,m}^1 = \{\varepsilon \in \mathcal{S} : f_1^\varepsilon \in L_{k,m}\}, \quad 1 < k < 2^{p+2}$$

Μ' αυτόν τον τρόπο έχουμε διαμερίσει το $\mathcal{S}$ σύμφωνα με τις διαμερίσεις του $[-1,1]$ γυρνώντας τις πίσω μέσω των f^ε εφαρμόζοντάς τα στο συγκεκριμένο e_1. Έτσι, είναι

$$\mathcal{S} = \bigcup_{k=1}^{2^{p+2}} \mathcal{S}_k^1, \quad \mathcal{S}_k^1 = \bigcup_m \mathcal{S}_{k,m}^1 \quad \text{για } 1 < k < 2^{p+2}$$

και οι παραπάνω ενώσεις είναι ξένες. Για κάθε $1 < k < 2^{p+2}$ υπάρχει $m(1,k)$ ώστε

$$|\mathcal{S}_{k,m(1,k)}^1| \leq \frac{(\delta')^2}{32} |\mathcal{S}_k^1|$$

(αυτό επιτυγχάνεται επιλέγοντας εκείνο το διάστημα $L_{k,m}$ στο οποίο το e_1 απεικονίζεται από το ελάχιστο δυνατό πλήθος των $\varepsilon \in \mathcal{S}$), επομένως

$$\left| \bigcup_k \mathcal{S}_{k,m(1,k)}^1 \right| \leq \frac{(\delta')^2}{32} |\mathcal{S}|.$$

Θέτουμε
$$\mathcal{S}^1 = \mathcal{S} \setminus \bigcup_k \mathcal{S}^1_{k,m(1,k)}$$
και παρατηρούμε ότι το $\mathcal{S}^1$ έχει πληθάριθμο
$$|\mathcal{S}^1| \geq \left(1 - \frac{(\delta')^2}{32}\right)|\mathcal{S}|$$
Συνεχίζοντας με το ίδιο τρόπο, αν έχουμε ορίσει τα $\mathcal{S}^0 \supseteq \mathcal{S}^1 \supseteq \cdots \supseteq \mathcal{S}^{n-1}$ τότε θεωρούμε τα σύνολα
$$\mathcal{S}^n_k = \{\varepsilon \in \mathcal{S}^{n-1} : f_n^\varepsilon \in J_k\}, \quad 1 \leq k \leq 2^{p+2}$$
και
$$\mathcal{S}^n_{k,m} = \{\varepsilon \in \mathcal{S}^{n-1} : f_n^\varepsilon \in L_{k,m}\}, \quad 1 < k < 2^{p+2}.$$
Όπως πριν ισχύουν οι ξένες ενώσεις
$$\mathcal{S}^{n-1} = \bigcup_{k=1}^{2^{p+2}} \mathcal{S}^n_k, \qquad \mathcal{S}^n_k = \bigcup_m \mathcal{S}^n_{k,m}$$
και για κάθε $1 < k < 2^{p+2}$ υπάρχει $m(n,k)$ ώστε
$$|\mathcal{S}^n_{k,m(n,k)}| \leq \frac{(\delta')^2}{32}|\mathcal{S}^n_k|$$
άρα,
$$\left|\bigcup_k \mathcal{S}^n_{k,m(n,k)}\right| \leq \frac{(\delta')^2}{32}|\mathcal{S}^{n-1}|.$$
Θέτουμε
$$\mathcal{S}^n = \mathcal{S}^{n-1} \setminus \bigcup_k \mathcal{S}^n_{k,m(n,k)}$$
και παρατηρούμε ότι το $\mathcal{S}^n$ έχει πληθάριθμο $|\mathcal{S}^n| \geq (1 - \frac{(\delta')^2}{32})|\mathcal{S}^{n-1}|$ ή, σε σχέση με τον πληθάριθμο του $\mathcal{S}$, ισχύει

(3.38)
$$|\mathcal{S}^n| \geq \left(1 - \frac{(\delta')^2}{32}\right)^n |\mathcal{S}|.$$

Έστω $I_{i,k}$ το (τετριμμένο ενδεχομένως) διάστημα μεταξύ των $L_{k,m(i,k)}$ και $L_{k+1,m(i,k+1)}$ για $k = 1, \dots, 2^{p+2}-1$ και $i = 1, \dots, n$ (για απλότητα στο συμβολισμό θέτουμε $L_{1,m} = \{-1\}$ και $L_{2^{p+2},m} = \{1\}$). Σε κάθε περίπτωση ισχύει $\lambda(I_{i,k}) < \delta'$ διότι τα διαστήματα J_k έχουν μήκος $\frac{\delta'}{2}$ και τα $L_{k,m(i,k)}, L_{k+1,m(i,k+1)}$ περιέχονται στα διαδοχικά J_k, J_{k+1} αντίστοιχα.

Κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(k_i)_{i=1}^n$ μήκους n από τους αριθμούς $1, 2, \ldots, 2^{p+2}-1$ ορίζει μια γειτονιά στη μοναδιαία μπάλα του ℓ_∞^n ως εξής:

$$\mathcal{N}(k_i) = \{(x_i) \in \ell_\infty^n : x_i \in I_{i,k_i},\ i = 1, \ldots, n\}.$$

Επειδή κάθε I_{i,k_i} είναι διάστημα με μήκος μικρότερο του δ' το σύνολο $\mathcal{N}(k_i)$ μπορεί να θεωρηθεί υποσύνολο μπάλας του ℓ_∞^n με ακτίνα $r \leq \frac{\delta'}{2}$. Αυτά τα σύνολα είναι εκείνα που θα ορίσουν τις κλάσεις των συναρτησοειδών που θα διαχωρίζονται. Γι' αυτό το λόγο θα πρέπει να εκτιμήσουμε τον πληθάριθμο του συνόλου

$$\{\varepsilon \in \mathcal{S}^n : (f_i^\varepsilon) \in \mathcal{N}(k_i)\}$$

όπου η ακολουθία $(k_i)_{i=1}^n$ είναι όπως περιγράψαμε. Προς τούτο θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα 3.3.3.

Ισχυρισμός. Έστω $(k_i)_{i=1}^n$ ακολουθία ακεραίων με πεδίο τιμών το σύνολο $\{1, 2, \ldots, 2^{p+2}-1\}$. Τότε ισχύει η ανισότητα

$$|\{\varepsilon \in \mathcal{S}^n : (f_i^\varepsilon) \in \mathcal{N}(k_i)\}| \leq 2^n \exp\left(-\frac{n(\delta')^2}{16}\right)$$

Απόδειξη ισχυρισμού. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το σύνολο $\mathcal{N}(k_i)$ είναι μπάλα ακτίνας $0 < r \leq \frac{\delta'}{2}$ με κέντρο κάποιο $c = (c_i)_{i=1}^n$, όπου $-1 \leq c_i \leq 1$, δηλαδή $\mathcal{N}(k_i) = B_\infty(c, r)$. Παρατηρούμε ότι

$$\{\varepsilon \in \mathcal{S}^n : (f_i^\varepsilon) \in B_\infty(c, r)\} \subseteq \left\{\varepsilon \in \mathcal{S}^n : \sum_{i=1}^n c_i\varepsilon_i \geq \frac{n\delta'}{2}\right\}$$

Πράγματι· αν $\varepsilon \in \mathcal{S}^n$ ώστε $(f_i^\varepsilon) \in B(c, r)$ τότε αφενός $\max_{1\leq i\leq n} |f_i^\varepsilon - c_i| \leq r$, αφετέρου $\sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i^\varepsilon \geq \delta' n$, διότι $\varepsilon \in \mathcal{S}^n \subseteq \mathcal{S}$. Έτσι, προκύπτει

$$\sum_{i=1}^n c_i\varepsilon_i \geq \sum_{i=1}^n \varepsilon_i f_i^\varepsilon - \left|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i c_i - \varepsilon_i f_i^\varepsilon\right| \geq n\delta' - nr \geq n\frac{\delta'}{2}$$

Κατόπιν, από τη μονοτονία της πιθανότητας και το λήμμα 3.3.3 έχουμε

$$\mathbb{P}\big(\varepsilon \in \mathcal{S}^n : (f_i^\varepsilon) \in \mathcal{N}(k_i)\big) \leq \exp\left(-\frac{n(\delta')^2}{16}\right)$$

ή ισοδύναμα

$$|\{\varepsilon \in \mathcal{S}^n : (f_i^\varepsilon) \in \mathcal{N}(k_i)\}| \leq 2^n e^{-\frac{n(\delta')^2}{16}}.$$

Επιστρέφοντας στην απόδειξη, από την αρχή του περιστερεώνα έπεται ότι ο αριθμός των διαφορετικών (k_i) για τις οποίες $(f_i^\varepsilon) \in \mathcal{N}(k_i)$ για κάποιο $\varepsilon \in \mathcal{S}^n$ είναι τουλάχιστον

$$\begin{aligned} |\mathcal{S}^n| 2^{-n} \exp\left(\frac{n(\delta')^2}{16}\right) &\geq \left(1 - \frac{(\delta')^2}{32}\right)^n |\mathcal{S}| 2^{-n} \exp\left(\frac{n(\delta')^2}{16}\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{(\delta')^2}{32}\right)^n 2^n \left(\frac{\delta - \delta'}{1-\delta'}\right) 2^{-n} \exp\left(\frac{n(\delta')^2}{16}\right) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $e^{-x} \leq 1 - \frac{3}{4}x$ για $0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ παίρνουμε $(1 - (\delta')^2/32)^n \geq e^{-n(\delta')^2/24}$. Η παραπάνω σειρά των ανισοτήτων τότε, δίνει

$$|\mathcal{S}^n| 2^{-n} \exp\left(\frac{n(\delta')^2}{16}\right) \geq \left(\frac{\delta - \delta'}{1-\delta'}\right) \exp\left(\frac{n(\delta')^2}{48}\right) \geq \exp\left(\frac{n(\delta')^2}{64}\right)$$

αν $n > \frac{192}{(\delta')^2} \log\left(\frac{1-\delta'}{\delta-\delta'}\right)$.
Ορίζουμε

$$\mathcal{A} = \{(k_i) : (f_i^\varepsilon) \in \mathcal{N}(k_i) \text{ για κάποιο } \varepsilon \in \mathcal{S}^n\}.$$

Τότε, οι γειτονιές $\{\mathcal{N}(k_i) : (k_i) \in \mathcal{A}\}$ ορίζουν τις κλάσεις των συναρτησοειδών που διαχωρίζονται αυστηρά και έχουν πληθάριθμο $|\mathcal{A}| \geq \exp(n(\delta')^2/64)$.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα των Sauer - Shelah, $p+2$ φορές αν χρειαστεί, ώστε να παράγουμε ένα «μεγάλο» (δηλαδή, ανάλογο του n) υποσύνολο δεικτών του $\{1, 2, \ldots, n\}$ βάσει του οποίου θα μπορούμε πάντοτε να βρούμε ένα ζεύγος συναρτησοειδών, διακεκριμένων δεικτών, των οποίων οι διαφορές θα έχουν οποιαδήποτε επιλογή θετικού ή αρνητικού προσήμου σ' αυτούς τους δείκτες. Παρουσιάζουμε αναλυτικά το επιχείρημα:
Για κάθε $(k_i) \in \mathcal{A}$ θέτουμε

$$I(k_i) = \left\{ i : 0 < k_i \leq \frac{2^{p+2}}{2} \right\}, \qquad \mathcal{I} = \{I(k_i) : (k_i) \in \mathcal{A}\}.$$

Έτσι, κάθε κλάση συναρτησοειδών ορίζει σύνολο δεικτών, στο οποίο τα αντίστοιχα συναρτησοειδή της κλάσης παίρνουν τιμές στο πρώτο μισό από τις δυνατές τιμές. Ενδέχεται διαφορετικά (k_i) να ορίζουν ίδια $I(k_i)$, έτσι το $\mathcal{I}$ μπορεί να είναι πληθαριθμικά μικρό. Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε το συνδυαστικό λήμμα πρέπει ο πληθάριθμος $|\mathcal{I}|$ να είναι «μεγάλος». Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

- Αν είναι
$$|\mathcal{I}| \geq |\mathcal{A}|^{1/(p+2)} \geq \exp(n(\delta')^2/64(p+2))$$
τότε χρησιμοποιώντας το λήμμα 3.3.5 θα δείξουμε ότι υπάρχει $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$ με
$$|\sigma| \geq \alpha n, \qquad \alpha = \frac{(\delta')^2}{128(p+2)\log(\frac{64(p+2)}{(\delta')^2})}$$

ώστε για κάθε $B \subseteq \sigma$ να υπάρχει $I \in \mathcal{I}$ ώστε $B = \sigma \cap I$. Για να έχουμε το παραπάνω αρκεί να είναι $|\mathcal{I}| \geq \sum_{i=0}^{\alpha n-1} \binom{n}{i}$. Από το λήμμα 3.3.4 έχουμε ότι για κάθε $0 < \alpha \leq 1/2$ ισχύει

$$\sum_{i=0}^{\alpha n-1} \binom{n}{i} \leq [\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}]^{-n}.$$

Αρκεί λοιπόν να προσδιορίσουμε το μεγαλύτερο δυνατό $\alpha \leq 1/2$ ώστε

$$\exp\left(\frac{n(\delta')^2}{64(p+2)}\right) > [\alpha^\alpha (1-\alpha)^{1-\alpha}]^{-n}$$

Ισοδύναμα, λύνοντας την ανισότητα

$$\frac{(\delta')^2}{64(p+2)} > h(a),$$

όπου $h(x) = -x \log x - (1-x)\log(1-x)$ η συνάρτηση εντροπίας, βρίσκουμε ότι η τιμή

$$\alpha = \frac{(\delta')^2}{128(p+2)\log\left[\frac{64(p+2)}{(\delta')^2}\right]} \tag{3.39}$$

είναι αποδεκτή.

Αν τώρα $(\alpha_i)_{i\in\sigma}$ είναι πραγματικοί συντελεστές θέτουμε $B = \{i \in \sigma : \alpha_i < 0\}$. Έστω $(k_i) \in \mathcal{A}$ ώστε $I(k_i) \cap \sigma = B$ και $(k_i') \in \mathcal{A}$ ώστε $I(k_i') \cap \sigma = (\sigma \setminus B)$. Έστω $f_i^\varepsilon \in \mathcal{N}(k_i)$ και $f_i^{\varepsilon'} \in \mathcal{N}(k_i)$ με $\varepsilon,\ \varepsilon' \in \mathcal{S}^n$. Τότε ισχύει

$$f_i^\varepsilon - f_i^{\varepsilon'} \leq -\frac{(\delta')^3}{64}, \qquad i \in B,$$
$$f_i^\varepsilon - f_i^{\varepsilon'} \geq \frac{(\delta')^3}{64}, \qquad i \in \sigma \setminus B$$

διότι τα διαστήματα I_{i,k_i} έχουν μεταξύ τους κενά με μήκος τουλάχιστον $\frac{(\delta')^3}{64}$. Έτσι,

$$\left\|\sum_{i\in\sigma}\alpha_i e_i\right\| \geq \frac{f^\varepsilon - f^{\varepsilon'}}{\|f^\varepsilon - f^{\varepsilon'}\|_*}\sum_{i\in\sigma}\alpha_i e_i = \frac{1}{\|f^\varepsilon - f^{\varepsilon'}\|_*}\sum_{i\in\sigma}\alpha_i(f_i^\varepsilon - f_i^{\varepsilon'}) \geq \frac{(\delta')^3}{128}\sum_{i\in\sigma}|\alpha_i|.$$

Σ' αυτήν την περίπτωση έχουμε το συμπέρασμα του θεωρήματος με $\beta = \frac{(\delta')^3}{128}$.

- Αν είναι $|\mathcal{I}| < |\mathcal{A}|^{\frac{1}{p+2}}$, τότε υπάρχουν[2] σύνολα $\sigma \subseteq \{1, 2, \ldots, n\}$ και $\mathcal{A}^1 \subseteq \mathcal{A}$ με

$$|\mathcal{A}^1| \geq |\mathcal{A}|^{\frac{p+1}{p+2}} \geq \exp[n(\delta')^2(p+1)/64(p+2)]$$

[2] Θεωρούμε την απεικόνιση $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{I}$ με $(k_i) \mapsto I(k_i)$. Τότε είναι $\mathcal{A} = \bigcup_{I\in\mathcal{I}} \phi^{-1}(I)$. Άρα, $|\mathcal{A}| \leq |\mathcal{I}| \max_{I\in\mathcal{I}} |\phi^{-1}(I)|$. Οπότε, $\max|\phi^{-1}(I)| \geq \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{I}|}$ και δεδομένου ότι $|\mathcal{I}| < |\mathcal{A}|^{1/(p+2)}$ προκύπτει ότι $\max|\phi^{-1}(I)| \geq \frac{|\mathcal{A}|}{|\mathcal{A}|^{1/(p+2)}} = |\mathcal{A}|^{\frac{p+1}{p+2}}$. Θέτουμε σ εκείνο το σύνολο I για το οποίο έχουμε $|\phi^{-1}(I)| = \max$ και $\mathcal{A}^1 = \phi^{-1}(I)$.

ώστε $I(k_i) = \sigma$ για κάθε $(k_i) \in \mathcal{A}^1$. Θέτουμε $l_i^1 = 0$ και $u_i^1 = 2^{p+1}$ αν $i \in \sigma$, ενώ $l_i^1 = 2^{p+1}$ και $u_i^1 = 2^{p+2}$ αν $i \notin \sigma$. Σε κάθε περίπτωση, είναι $l_i^1 < k_i \leq u_i^1$ για $i = 1, \ldots, n$ και κάθε $(k_i) \in \mathcal{A}^1$. Επιπλέον, ισχύει $u_i^1 - l_i^1 = 2^{p+1}$ για κάθε i. Για κάθε $(k_i) \in \mathcal{A}^1$ θέτουμε

$$I^1(k_i) = \left\{ i : l_i^1 < k_i \leq \frac{l_i^1 + u_i^1}{2} \right\}, \qquad \mathcal{I}^1 = \{I^1(k_i) : (k_i) \in \mathcal{A}^1\}.$$

Είμαστε έτοιμοι για το δεύτερο επαναληπτικό επιχείρημα: Αν ισχύει

$$|\mathcal{I}^1| \geq |\mathcal{A}^1|^{\frac{1}{p+1}} \geq |\mathcal{A}|^{\frac{1}{p+2}}$$

τότε πάλι από το λήμμα 3.2.5 καταλήγουμε στο συμπέρασμα με τις ίδιες σταθερές, όπως πριν. Αν όχι, εργαζόμαστε ανάλογα.

Αν ισχύει $|\mathcal{I}^1| < |\mathcal{A}^1|^{\frac{1}{p+1}}$ τότε υπάρχουν σύνολα $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$ και $\mathcal{A}^2 \subseteq \mathcal{A}^1$ με

$$|\mathcal{A}^2| \geq |\mathcal{A}^1|^{\frac{p}{p+1}} \geq \exp[n(\delta')^2 p/64(p+2)]$$

ώστε $I^1(k_i) = \sigma$ για κάθε $(k_i) \in \mathcal{A}^2$. Θέτουμε $l_i^2 = l_i^1$ και $u_i^2 = \frac{l_i^1 + u_i^1}{2}$ αν $i \in \sigma$, ενώ $l_i^2 = \frac{l_i^1 + u_i^1}{2}$ και $u_i^2 = u_i^1$ αν $i \notin \sigma$. Τότε ισχύει $l_i^2 < k_i \leq u_i^2$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και κάθε $(k_i) \in \mathcal{A}^2$, όπου $u_i^2 - l_i^2 = 2^p$. Συνεχίζουμε όπως πριν. Αν σε κανένα βήμα μέχρι την $p+1$ επανάληψη δεν έχουμε

$$|\mathcal{I}^j| \geq |\mathcal{A}^j|^{\frac{1}{p+2-j}} \geq \exp[n(\delta')^2(p+2-j)/64(p+2)]$$

για κάποιο $1 \leq j \leq p$, αυτό σημαίνει ότι ολοκληρώνοντας την $p+1$ διαδοχική επανάληψη, έχουμε $|\mathcal{I}^p| < |\mathcal{A}^p|^{1/2}$. Τότε, υπάρχουν $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$ και $\mathcal{A}^{p+1} \subseteq \mathcal{A}^p$ με

$$|\mathcal{A}^{p+1}| \geq |\mathcal{A}^p|^{1/2} \geq \exp[n(\delta')^2/64(p+2)]$$

ώστε $I^p(k_i) = \sigma$ για κάθε $(k_i) \in \mathcal{A}^{p+1}$. Θέτουμε $l_i^{p+1} = l_i^p$ και $u_i^{p+1} = \frac{l_i^p + u_i^p}{2}$ αν $i \in \sigma$, ενώ $l_i^{p+1} = \frac{l_i^p + u_i^p}{2}$ και $u_i^{p+1} = u_i^p$ αν $i \notin \sigma$. Παρατηρούμε ότι $u_i^{p+1} - l_i^{p+1} = \frac{u_i^p - l_i^p}{2} = 2$ και $l_i^{p+1} < k_i \leq u_i^{p+1}$ για κάθε $(k_i) \in \mathcal{A}^{p+1}$. Έτσι, αν για κάθε $(k_i) \in \mathcal{A}^{p+1}$ θέσουμε

$$I^{p+1}(k_i) = \left\{ i : l_i^{p+1} < k_i \leq \frac{l_i^{p+1} + u_i^{p+1}}{2} \right\}, \qquad \mathcal{I}^{p+1} = \{I^{p+1}(k_i) : (k_i) \in \mathcal{A}^{p+1}\}$$

παρατηρούμε ότι τα $I^{p+1}(k_i)$ είναι το πολύ μονοσύνολα. Πολύ περισσότερο, τα διαστήματα $(l_i^{p+1}, \frac{l_i^{p+1} + u_i^{p+1}}{2}]$ είναι ακέραια, μήκους 1. Επομένως, για κάθε $(k_i), (k_i') \in$

$\mathcal{A}^{p+1}$ ισχύει $(k_i) = (k_i')$ αν και μόνον αν $I^{p+1}(k_i) = I^{p+1}(k_i')$. Αυτό αποδεικνύει[3] ότι $|\mathcal{I}^{p+1}| = |\mathcal{A}^{p+1}|$, άρα

$$|\mathcal{I}^{p+1}| = |\mathcal{A}^{p+1}| \geq |\mathcal{A}^p|^{1/2} \geq |\mathcal{A}^{p-1}|^{(2/3)(1/2)} \geq \cdots \geq |\mathcal{A}|^{1/(p+2)}$$

έτσι βρίσκουμε ένα σύνολο σ το οποίο ικανοποιεί το συμπέρασμα του θεωρήματος, όπως κάναμε στο πρώτο επιχείρημα.

Έτσι έχουμε καταφέρει να αποδείξουμε το θεώρημα για κάποιο $0 < \delta' < \delta$ της μορφής $\delta' = 2^{-p}$ και για $n > \frac{192}{(\delta')^2}\log(\frac{1-\delta'}{\delta-\delta'})$. Στη γενική περίπτωση, θεωρούμε ένα θετικό ακέραιο p ώστε να είναι $\frac{\delta}{4} < 2^{-p} \leq \frac{\delta}{2}$ και έχουμε το συμπέρασμα με σταθερά

$$\beta(\delta) \geq 2^{-13}\delta^3,$$

δεδομένου ότι $\delta' = 2^{-p} > \frac{\delta}{4}$. Λαμβάνοντας υπόψιν ότι $\delta' = 2^{-p}$ και $\delta' > \frac{\delta}{4}$, υπολογίζουμε τη σταθερά α και βρίσκουμε ότι μπορούμε να την αντικαταστήσουμε από τη

$$c(\delta) \geq 2^{-19}\frac{\delta^2}{\left[\log(\frac{4}{\delta})\right]^2}.$$

Τέλος, αυτή η τιμή για τη σταθερά c, επαληθεύει τετριμμένα την περίπτωση όπου $n \leq \frac{192}{(\delta')^2}\log[(1-\delta')/(\delta-\delta')]$ χρησιμοποιώντας τον περιορισμό $\delta' \leq \frac{\delta}{2}$. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. $\square$

3.4 Πολύ σφιχτές εμφυτεύσεις

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζεται η τελική απάντηση στο ερώτημα των Milman–Schechtman (και, φυσικά, βελτιώνεται η μερική απάντηση των Naor και Zvavitch). Το 2003 οι Johnson και Schechtman απέδειξαν το ακόλουθο θεώρημα, κλείνοντας το ερώτημα που αφορά σε ισομορφικές εμφυτεύσεις του ℓ_p^n, $1 < p < 2$ στον $\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$ με τη σταθερά ισομορφισμού *ανεξάρτητη* της διάστασης.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $1 < p < 2$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $C = C(\varepsilon, p) > 0$ τέτοια ώστε ο ℓ_p^n είναι C-εμφυτεύσιμος στον ℓ_1^m με $m \leq (1+\varepsilon)n$.*

Η απόδειξη του θεωρήματος βασίζεται στο πρώτο αποτέλεσμα των Johnson–Schechtman, στο θεώρημα του Elton και σ' ένα αποτέλεσμα για χώρους πηλίκο του ℓ_1^n των Bourgain–Kalton–Tzafriri. Το αποτέλεσμά τους παρουσιάζεται σε μια εκτενή μελέτη με θέμα τη γεωμετρία πεπερασμένης διάστασης υποχώρων και πηλίκων των χώρων L_p, η οποία δημοσιεύτηκε το 1988. Το διατυπώνουμε παρακάτω:

[3] Μ' άλλα λόγια, η αντίστοιχη συνάρτηση ϕ της υποσημείωσης, όταν περιορισθεί στο $\mathcal{A}^{p+1}$ γίνεται ένα προς και επί του $\mathcal{I}^{p+1}$.

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω E υπόχωρος του ℓ_1^n συνδιάστασης k και έστω $F = \ell_1^n/E$ ο χώρος πηλίκο. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ ώστε αν $Q : \ell_1^n \to F$ είναι η φυσιολογική απεικόνιση, τότε*

$$\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Q e_i \right\|_F d\varepsilon \geq c^{n/k} n, \tag{3.40}$$

όπου $(e_i)_{i=1}^n$ η κανονική βάση του ℓ_1^n.

Απόδειξη. Παρουσιάζουμε την απόδειξη σε πέντε βήματα:

(α) Ισχύει η ανισότητα

$$\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Q e_i \right\|_F d\varepsilon \geq \frac{1}{2^n} \int_{C_n} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i Q e_i \right\|_F d\alpha \tag{3.41}$$

όπου $C_n = [-1,1]^n$. Πράγματι· αν $|\alpha_i| \leq |\beta_i|$, τότε

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1} \| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i y_i \| \leq \mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \beta_i \varepsilon_i y_i \right\|$$

Αυτό συμβαίνει διότι η συνάρτηση $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = \mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1} \| \sum_{i=1}^n \alpha_i \varepsilon_i y_i \|$ είναι κυρτή και unconditional δηλαδή, ισχύει $f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) = f(|\alpha_1|, \ldots, |\alpha_n|)$ για κάθε $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in C_n$. Επομένως, στο ορθογώνιο $\prod_{i=1}^n [-|\beta_i|, |\beta_i|]$ η f παρουσιάζει ακρότατο σε κάποια κορυφή, δηλαδή

$$f(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \leq f(\beta_1, \ldots, \beta_n)$$

Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για $|\beta_i| = 1$ (δηλαδή, το ορθογώνιο είναι ο κύβος C_n) και $y_i = Q e_i$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{C_n} \int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i Q e_i \right\|_F d\varepsilon \, d\alpha &\leq \int_{C_n} \mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Q e_i \right\|_F d\alpha \\ &= 2^n \int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i Q e_i \right\|_F d\varepsilon. \end{aligned}$$

Όμως είναι

$$\int_{E_2^n} \left(\int_{C_n} \left\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \alpha_i Q e_i \right\|_F d\alpha \right) d\varepsilon = \int_{C_n} \left\| \sum_{i=1}^n \alpha_i Q e_i \right\|_F d\alpha$$

Από τις δυο τελευταίες σχέσεις έπεται η (3.41).

(β) Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Markov για να μεταβούμε από το ολοκλήρωμα στον όγκο:

$$\frac{1}{2^n}\int_{C_n}\left\|\sum_{i=1}^n \alpha_i Qe_i\right\|_F d\alpha \geq \frac{\rho}{2^n}\mathrm{vol}_n(\alpha\in C_n : \|Q\alpha\|_F\geq\rho)$$

Εφόσον αναζητούμε κάτω φράγμα αρκεί να υπολογίσουμε ένα άνω φράγμα για το συμπληρωματικό σύνολο.

(γ) Λαμβάνοντας υπόψιν την $C_n\subseteq nB_1^n$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(\alpha\in C_n:\|Q\alpha\|_F<\rho) &= \mathrm{vol}_n(C_n\cap Q^{-1}(\rho B_F))\\ &\leq \mathrm{vol}_n(nB_1^n\cap Q^{-1}(\rho B_F))\\ &= n^n\mathrm{vol}_n\left(B_1^n\cap Q^{-1}\left(\tfrac{\rho}{n}B_F\right)\right)\end{aligned}$$

Στη συνέχεια θέτοντας $\frac{\rho}{n}=\frac{\theta}{1-\theta}$ για $0<\theta<1$ βλέπουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(B_1^n\cap Q^{-1}(\tfrac{\rho}{n}B_F)) = \left(1+\frac{\rho}{n}\right)^n\mathrm{vol}_n((1-\theta)B_1^n\cap Q^{-1}(\theta B_F))$$

Έτσι, έχουμε να εκτιμήσουμε τον όγκο του σώματος $K_\theta=(1-\theta)B_1^n\cap Q^{-1}(\theta B_F)$.

(δ) Θεωρούμε ένα θ-δίκτυο $\{v_1,\dots,v_N\}$ στην B_E με πληθάριθμο $N\leq\left(1+\frac{2}{\theta}\right)^{n-k}\leq\left(\frac{3}{\theta}\right)^{n-k}$. Αν $x\in K_\theta$, τότε υπάρχει $w\in E$ με $\|x-w\|_1\leq\theta$ (διότι $\|Qx\|_F\leq\theta$). Τότε, $\|w\|_E\leq\|x-w\|_1+\|x\|_1\leq\theta+(1-\theta)=1$. Ώστε, $w\in B_E$. Άρα, υπάρχει $j\in\{1,\dots,N\}$ ώστε $\|w-v_j\|_E\leq\theta$. Ισχύει,

$$\|x-v_j\|_1\leq\|x-w\|_1+\|w-v_j\|_1\leq\theta+\theta=2\theta\ ,$$

δηλαδή $K_\theta\subseteq\bigcup_{j=1}^N(v_j+2\theta B_1^n)$.

(ε) Παίρνοντας όγκους στην τελευταία σχέση συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(K_\theta)\leq N(2\theta)^n\mathrm{vol}_n(B_1^n).$$

Από τα βήματα (γ) και (δ) έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_n(\alpha\in C_n:\|Q\alpha\|_F<\rho)\leq n^n\left(1+\frac{\rho}{n}\right)^n\left(\frac{3}{\theta}\right)^{n-k}(2\theta)^n\frac{2^n}{n!}.$$

Θέτουμε $\frac{\rho}{n}=t$, άρα $\theta=\frac{t}{1+t}$. Από την ανισότητα $\frac{n^n}{n!}<e^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(\alpha\in C_n:\|Q\alpha\|_F<\rho) &\leq (1+t)^n(12e)^n\left(\frac{t}{1+t}\right)^k\\ &\leq (1+t)^n(12e)^nt^k\\ &\leq e^{nt}(12e)^nt^k\\ &\leq (12e^2)^nt^k\end{aligned}$$

υποθέτοντας ότι $t < 1$. Επιλέγουμε t τέτοιο ώστε $(12e^2)^n t^k = 1$. Τότε, προκύπτει

$$\frac{1}{2^n}\int_{C_n}\left\|\sum_{i=1}^{n}\alpha_i Qe_i\right\|_F d\alpha \geq \frac{1}{2}n\left(\frac{1}{12e^2}\right)^{n/k} \geq n\left(\frac{1}{24e^2}\right)^{n/k}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Έχοντας στη διάθεσή μας το αποτέλεσμα του Elton και αυτό των Bourgain–Kalton–Tzafriri, μπορούμε να προχωρήσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος 3.4.1. Η απόδειξη δε δανείζεται κανένα από τα επιχειρήματα των Naor και Zvavitch και δεν είναι «τελείως» πιθανοθεωρητική. Περιγράφουμε συνοπτικά τα βήματα που θα ακολουθήσουμε:

- Από το θεώρημα των Johnson–Schechtman μπορούμε να εμφυτεύσουμε με σταθερά 2 τον ℓ_p^n στον $\ell_1^{\beta n}$, όπου $\beta = \beta(p) > 0$.

- Στο δεύτερο βήμα, χρησιμοποιώντας το θεώρημα των Bourgain–Kalton–Tzafriri σε συνδυασμό με το θεώρημα του Elton, δείχνουμε ότι κάθε d-διάστατος υπόχωρος του ℓ_1^m είναι $(1 + c^{-\alpha})$-εμφυτεύσιμος στον $\ell_1^{(1-c^\alpha)m}$, για κάποια απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ και $\alpha = \frac{m}{m-d}$. Αυτό το βήμα είναι καθοριστικό, διότι είναι εκείνο που θα μας επιτρέψει με διαδοχικές επαναλήψεις να πετύχουμε μείωση της διάστασης με το κόστος να μεγαλώσουμε αρκετά τη σταθερά ισομορφισμού, η οποία όμως παραμένει ανεξάρτητη του m.

- Στο τελευταίο βήμα συνδυάζουμε τα δυο προηγούμενα. Χρησιμοποιώντας κυρίως το πόρισμα του δεύτερου βήματος συμπεραίνουμε την εξής γενικότερη πρόταση

Πρόταση 3.4.3. *Έστω $1 < p < 2$ και $\lambda > 0$. Τότε υπάρχουν σταθερές $\beta = \beta(p) > 0$ και $K = K(\lambda) < \infty$ ώστε αν X είναι υπόχωρος του ℓ_p^n τότε ο X είναι K–ισομορφικός με έναν υποχώρο του ℓ_1^r, όπου $r \leq \dim X + \lambda\beta n$.*

Από την πρόταση 3.4.3 μπορούμε να συνάγουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της παραγράφου:

Απόδειξη του θεωρήματος 3.4.1. Έστω $1 < p < 2$ και $\varepsilon > 0$. Παίρνοντας $X = \ell_p^n$ στην πρόταση 3.4.3, και για $\lambda = \frac{\varepsilon}{\beta(p)}$, βλέπουμε ότι υπάρχει σταθερά $C = C(\varepsilon, p) = K(\lambda)$ ώστε ο ℓ_p^n να είναι C-ισομορφικός με έναν υπόχωρο του ℓ_1^r, όπου $r \leq n + \varepsilon n$. □

Σκοπός μας λοιπόν είναι να αποδείξουμε την πρόταση 3.4.3. Προς τούτο θα χρειασθούμε ένα θεώρημα που οφείλεται επίσης στους Bourgain–Kalton–Tzafriri και θα χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε το λήμμα μείωσης της διάστασης.

Θεώρημα 3.4.4. *Έστω E υπόχωρος του ℓ_1^m και $F = \ell_1^m/E$ ο χώρος πηλίκο. Αν $Q : \ell_1^m \to F$ η φυσιολογική απεικόνιση και $\alpha > 1$ με $\alpha \dim F \geq m$, τότε υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ και $\sigma \subseteq \{1, \ldots, m\}$ με πληθάριθμο $|\sigma| \geq c^\alpha m$ ώστε η $Q|_{[e_i]_{i\in\sigma}}$ να είναι $c^{-\alpha}$-ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Έστω $\dim F = k$. Από το θεώρημα 3.4.2 υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c_1 < 1$ ώστε να ισχύει

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i Q e_i\right\|_F \geq c_1^{m/k} m$$

Από την $\alpha k \geq m$ έπεται ότι

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{m}\varepsilon_i Q e_i\right\|_F \geq c_1^{\alpha} m.$$

Κατόπιν, από το θεώρημα του Elton υπάρχει $\sigma \subseteq \{1, \ldots, m\}$ με

$$|\sigma| \geq 2^{-19} m \frac{(c_1^{\alpha})^2}{[\log(\frac{4}{c_1^{\alpha}})]^2} \geq 2^{-23} m (c_1^4)^{\alpha} \geq m[(2^{-6}c_1)^4]^{\alpha}$$

ώστε για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $(\alpha_i)_{i\in\sigma}$ να ισχύει

$$\beta \sum_{i\in\sigma}|\alpha_i| \leq \left\|\sum_{i\in\sigma}\alpha_i Q e_i\right\|_F \leq \sum_{i\in\sigma}|\alpha_i| \tag{3.42}$$

όπου $\beta = 2^{-13}(c_1^{\alpha})^3 \geq [(2^{-5}c_1)^3]^{\alpha}$. Θέτοντας $c = (2^{-6}c_1)^4$ παρατηρούμε ότι $\beta \geq c^{\alpha}$ και από την (3.42) έπεται ότι ο $Q|_{[e_i]_{i\in\sigma}}$ είναι $c^{-\alpha}$-ισομορφισμός. Η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε το λήμμα ελάττωσης της διάστασης.

Πόρισμα 3.4.5. *Έστω X (γνήσιος) d-διάστατος υπόχωρος του ℓ_1^m. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ ώστε ο X να είναι $(1+c^{-\alpha})$-ισομορφικός με έναν υπόχωρο του $\ell_1^{(1-c^{\alpha})m}$, όπου $\alpha = \frac{m}{m-d}$.*

Απόδειξη. Έστω $F = \ell_1^m/X$ και $Q : \ell_1 \to F$ η απεικόνιση πηλίκο. Θέτουμε $\alpha = \frac{m}{m-d}$ και παρατηρούμε ότι $\alpha \dim F \geq m$. Από το προηγούμενο θεώρημα υπάρχουν απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ και $\sigma \subseteq \{1, 2, \ldots, m\}$ με $|\sigma| \geq c^{\alpha} m$ ώστε η $Q|_{[e_i]_{i\in\sigma}}$ να είναι $c^{-\alpha}$ ισομορφισμός. Θέτουμε $\tilde{\sigma}$ το συμπληρωματικό σύνολο του σ ως προς το $\{1, \ldots, m\}$ και θεωρούμε τη φυσική προβολή $P : X \to [e_i]_{i\in\tilde{\sigma}}$. Λαμβάνοντας υπόψιν την $\ker Q = X$ παίρνουμε το εξής: αν $x \in X$

$$\|Px\|_1 = \|x - (x - Px)\|_1 \geq \|Q(x - Px)\|_F \geq c^{\alpha}\|x - Px\|_1$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από το γεγονός ότι $x - Px \in [e_i]_{i\in\sigma}$ και ο Q εκεί είναι $c^{-\alpha}$ ισομορφισμός. Οπότε, ισχύει

$$\|x\|_1 \leq \|P_x\|_1 + \|x - Px\|_1 \leq (1 + c^{-\alpha})\|Px\|_1.$$

Συμπεραίνουμε ότι ο X είναι ισομορφικός με έναν υπόχωρο του $[e_i]_{i\in\tilde{\sigma}}$. Επειδή δε, $|\tilde{\sigma}| \leq (1-c^{\alpha})m$ έχουμε ότι ο $[e_i]_{i\in\tilde{\sigma}}$ είναι ισομετρικός με ένα υπόχωρο του $\ell_1^{(1-c^{\alpha})m}$. Συνεπώς, ο X είναι $(1+c^{-\alpha})$-ισομορφικός μ' έναν υπόχωρο του $\ell_1^{(1-c^{\alpha})m}$. $\square$

Έχοντας τελειώσει την απαραίτητη προεργασία είμαστε έτοιμοι να αποδείξουμε την πρόταση.

Απόδειξη της πρότασης 3.4.3. Έστω $1 < p < 2$ και $\lambda > 0$. Θεωρούμε έναν d-διάστατο υπόχωρο X του ℓ_p^n. Από το θεώρημα 2.2.1 υπάρχει $\beta = \beta(p) > 0$ ώστε ο ℓ_p^n να είναι 2-ισομορφικός μ' ένα υπόχωρο του $\ell_1^{\beta n}$. Θέτουμε $m = \beta n > n$ και Y την εικόνα του X μέσα στον $\ell_1^{\beta n}$ μέσω του ισομορφισμού. Παρατηρούμε ότι, αν $m \geq k > d + \lambda m$, τότε $\frac{k}{k-d} \leq \frac{1}{\lambda}$ και αν ο Y είναι 1-ισομορφικός μ' ένα υπόχωρο του ℓ_1^k τότε από το πόρισμα 3.4.5 έπεται ότι είναι $(1+c^{-\frac{1}{\lambda}})$-ισομορφικός με έναν υπόχωρο του $\ell_1^{(1-c^{\frac{1}{\lambda}})k}$. Επαναλαμβάνοντας το ίδιο επιχείρημα s φορές, κάθε φορά για τον τελικό χώρο, όπου s είναι ο ελάχιστος θετικός ακέραιος με $(1-c^{1/\lambda})^s m \leq d + \lambda m$, βρίσκουμε ότι ο Y είναι $(1+c^{-1/\lambda})^s$-ισομορφικός με έναν υπόχωρο του ℓ_1^r, με $r := (1-c^{1/\lambda})^s k \leq d + \lambda m \leq d + \lambda\beta n$. Εφόσον, ο s υπολογίζεται συναρτήσει του λ (π.χ. $s = [\frac{\log\lambda}{\log(1-c^{1/\lambda})}] + 1$) έπεται το συμπέρασμα με σταθερά ισομορφισμού $K(\lambda) = 2(1+c^{-1/\lambda})^{[\frac{\log\lambda}{\log(1-c^{1/\lambda})}]+1}$, ανεξάρτητη της διάστασης. $\square$

Κεφάλαιο 4

Εμφυτεύσεις υποχώρων του L_1

Το πρόβλημα που μελετάμε σε αυτό το Κεφάλαιο είναι γενικότερο από αυτά των προηγούμενων Κεφαλαίων: Δίνονται ένας n-διάστατος υπόχωρος X του L_1 και $\varepsilon > 0$. Το ερώτημα είναι να βρεθεί ο μικρότερος $N = N(X, \varepsilon)$ για τον οποίο υπάρχει n-διάστατος υπόχωρος Y του ℓ_1^N ώστε $d(X,Y) \leq 1+\varepsilon$.

Ακριβέστερα, η ποσότητα που μας ενδιαφέρει είναι η

$$N(\varepsilon) = \max\{N(X,\varepsilon) : X \leq L_1,\, \dim(X) = n\}.$$

Θα περιγράψουμε δυο προσεγγίσεις στο πρόβλημα:

- Η πρώτη οφείλεται στον Schechtman και στηρίζεται στη μέθοδο της εμπειρικής κατανομής, η οποία παρουσιάζεται αναλυτικά στην επομένη παράγραφο. Το αποτέλεσμα του Schechtman δίνει ότι μπορούμε να εμφυτεύσουμε σχεδόν ισομετρικά κάθε n-διάστατο υπόχωρο του L_1 στον ℓ_1^N, αρκεί το N να επιλεγεί ανάλογο του n^2.

- Η δεύτερη είναι το καλύτερο μέχρι στιγμής αποτέλεσμα και οφείλεται στον Talagrand. Η μέθοδός του εξελίσσει αυτήν του Schechtman και χρησιμοποιεί την έννοια της K–κυρτότητας ενός χώρου Banach.

Το πρόβλημα παραμένει ανοικτό: δεν είναι γνωστό αν ο λογαριθμικός ως προς n παράγοντας στην εκτίμηση του Talagrand είναι απαραίτητος.

Ασχολούμαστε επίσης με το ισομορφικό πρόβλημα για τον L_1: Δίνονται n–διάστατος υπόχωρος X του L_1 και $\varepsilon > 0$. Το ερώτημα είναι αν υπάρχουν σταθερά $C = C(\varepsilon) > 0$ που εξαρτάται μόνο από το ε και υπόχωρος Y του $\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$ ώστε $d(X,Y) \leq C(\varepsilon)$. Η καλύτερη εκτίμηση εδώ οφείλεται στους Johnson–Schechtman, οι οποίοι δείχνουν ότι το αποτέλεσμα είναι «σωστό» αν επιτρέψουμε έναν όρο λογαριθμικό ως προς τη διάσταση στη σταθερά ισομορφισμού. Δεν είναι γνωστό αν αυτός ο όρος είναι απαραίτητος.

Στο τέλος του κεφαλαίου εξετάζουμε τα δυο παραπάνω προβλήματα για υποχώρους του L_p, $1 < p < 2$. Σε αυτήν την περίπτωση οι απαντήσεις είναι βέλτιστες και αντίστοιχες με αυτές των προηγούμενων Κεφαλαίων.

4.1 Αλλαγή πυκνότητας και μια πρώτη εκτίμηση

Η πρώτη παρατήρηση που κάνει κάποιος σχετικά με το πρόβλημα είναι η εξής: αν $N_p(X,\varepsilon)$ είναι ο ελάχιστος φυσικός N ώστε ο $X \leq L_p$ να είναι $(1+\varepsilon)$–ισομορφικός με έναν υπόχωρο του ℓ_1^N, τότε ο N εξαρτάται μόνο από τη διάσταση του X. Έτσι, ισχύει

$$N_p(k,\varepsilon) = \sup\{N_p(X,\varepsilon) : X \leq L_p, \dim X = k\} < \infty.$$

Αυτό είναι χρήσιμο στην πράξη αφού μπορούμε πάντοτε να υποθέτουμε ότι αν έχουμε $X \leq L_p$ τότε $X \subseteq \ell_p^M$ για κάποιο μεγάλο $M \in \mathbb{N}$. Βέβαια, η πιο εύκολη εκτίμηση που παίρνει κανείς είναι (μεγαλύτερη από) εκθετική ως προς τη διάσταση. Το επόμενο επιχείρημα δείχνει ότι κάθε n–διάστατος υπόχωρος X του L_p εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$–ισομορφικά στον ℓ_p^N για $N \gg (2/\varepsilon)^n$.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω X n–διάστατος υπόχωρος του $L_p(\mu)$ και $\varepsilon > 0$. Τότε, $N_p(X,\varepsilon) \leq \exp(n\log(2M_n/\varepsilon))$, όπου M_n θετική σταθερά, η οποία εξαρτάται μόνο από το n.*

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε το εξής: υπάρχει σταθερά $C_n > 1$ ώστε: για κάθε $f \in X$ με $\|f\|_p = 1$ ισχύει $\|f\|_\infty \leq C_n$.

Αν δεν συμβαίνει αυτό τότε εργαζόμαστε ως εξής: αν $\{x_1,\ldots,x_n\}$ είναι μια βάση του X τότε η συνάρτηση $\varphi = 1 + \sum_{i=1}^n |x_i|$ είναι θετική. Θεωρούμε το μέτρο ν με πυκνότητα $d\nu = \varphi^p d\mu$. Τότε, υπάρχει γραμμική ισομετρία από τον $L_p(\mu)$ στον $L_p(\nu)$: η $T : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ με $T(f) = \frac{1}{\varphi}\cdot f$. Στη συνέχεια βλέπουμε ότι αν $g \in T(X)$ τότε υπάρχουν $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}$ ώστε $\varphi \cdot g = \sum_{i=1}^n t_i x_i$. Οπότε, έχουμε:

$$|g| \leq \frac{1}{\varphi}\sum_{i=1}^n |t_i|\cdot|x_i| \leq \max_{1\leq i\leq n}|t_i|,$$

δηλαδή $g \in L_\infty(\nu)$. Άρα, ορίζεται και η νόρμα $\|\cdot\|_\infty$ στον $T(X)$. Έτσι, υπάρχει σταθερά $C_n > 1$ ώστε $\|g\|_\infty \leq C_n\|g\|_p$ για κάθε $g \in T(X)$. Ταυτίζοντας τον X με τον $T(X)$ έχουμε την αρχική υπόθεση χωρίς περιορισμό της γενικότητας.

Σταθεροποιούμε μια βάση $\{x_1,\ldots,x_n\}$ του X που αποτελείται από μοναδιαία διανύσματα και προσεγγίζουμε κάθε στοιχείο της με κατάλληλη απλή συνάρτηση. Επιπλέον, υπάρχει σταθερά $K_n > 1$ με την ιδιότητα: για κάθε $t_1,\ldots,t_n \in \mathbb{R}$ με $\|\sum_{i=1}^n t_i x_i\|_p = 1$ έπεται ότι $\sum_{i=1}^n |t_i| \leq K_n$. Στη συνέχεια θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε $N > \frac{2K_nC_n}{\varepsilon}$ και για κάθε $1 \leq i \leq n$ ορίζουμε τα σύνολα

$$A_{i,k} = \{\omega : a_{k-1} \leq x_i(\omega) < a_k\}$$

για $k = 1, 2, \ldots, N$, όπου $a_k = -C_n + 2C_n \frac{k}{N}$. Θεωρούμε επίσης τις απλές συναρτήσεις

$$s_i = \sum_{k=1}^{N} a_{k-1} \chi_{A_{i,k}}, \quad 1 \leq i \leq N.$$

Γράφουμε $\Sigma \equiv \Sigma(n, N)$ για το σύνολο των συναρτήσεων $\sigma : [n] \to [N]$ και θεωρούμε την οικογένεια των συνόλων $(E_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$, όπου $E_\sigma = \bigcap_{i=1}^{n} A_{i,\sigma(i)}$. Στη συνέχεια ορίζουμε τον τελεστή $U : X \to \ell_p^{|\Sigma|}$ με

$$U\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) = \sum_{\sigma \in \Sigma} \left\{ (\mu(E_\sigma))^{1/p} \left(\sum_{i=1}^{n} t_i s_i\right)\bigg|_{E_\sigma} \right\} e_\sigma,$$

όπου με (e_σ) συμβολίζουμε τη συνήθη βάση του $\ell_p^{|\Sigma|}$. Παρατηρήστε ότι ο U είναι καλά ορισμένος αφού η συνάρτηση $\omega \mapsto (\sum_{i=1}^{n} t_i s_i(\omega))\chi_{E_\sigma}(\omega)$ είναι σταθερή για κάθε $\sigma \in \Sigma$. Εύκολα ελέγχεται ότι ο U είναι γραμμικός, εφόσον ο περιορισμός ενός γραμμικού συνδυασμού συναρτήσεων σε ένα υποσύνολο E_σ είναι ο γραμμικός συνδυασμός των περιορισμών σε αυτό το σύνολο. Επίσης, παρατηρώντας ότι τα σύνολα $(E_\sigma)_{\sigma \in \Sigma}$ αποτελούν διαμέριση του Ω παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\left\| U\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \right\|_{\ell_p^{|\Sigma|}}^p &= \sum_{\sigma \in \Sigma} \mu(E_\sigma) \left| \left(\sum_{i=1}^{n} t_i s_i\right)\bigg|_{E\sigma} \right|^p = \sum_{\sigma \in \Sigma} \int_{E_\sigma} \left| \sum_{i=1}^{n} t_i s_i \right|^p d\mu \\
&= \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i s_i \right\|_{L_p(\mu)}^p .
\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ με $\|\sum_{i=1} t_i x_i\|_p = 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\left| \left\| U\left(\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\right) \right\|_{\ell_p^{|\Sigma|}} - 1 \right| &= \left| \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i s_i \right\|_p - \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i x_i \right\|_p \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} t_i (s_i - x_i) \right\|_p \\
&\leq \sum_{i=1}^{n} |t_i| \cdot \|x_i - s_i\|_p \leq \frac{\varepsilon}{K_n} \sum_{i=1}^{n} |t_i| < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Αυτό μας δίνει ότι $1 - \varepsilon < \|U(x)\|_{\ell_p^{|\Sigma|}} < 1 + \varepsilon$ για κάθε $x \in X$ με $\|x\|_p = 1$. Δηλαδή, ο X εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$–ισομορφικά στον $\ell_p^{|\Sigma|}$. Τέλος, βλέπουμε ότι $|\Sigma| = N^n \simeq e^{n \log(2K_n C_n/\varepsilon)}$. $\square$

Η παραπάνω διαδικασία «αλλαγής πυκνότητας» είναι συχνή και θα εφαρμόζεται τακτικά σε πολλά επιχειρήματα αυτού του Κεφαλαίου. Η βασική ιδέα είναι η εξής: με τον όρο *πυκνότητα* σε ένα χώρο μέτρου (Ω, μ) εννοούμε μια (γνήσια) θετική μ–μετρήσιμη συνάρτηση f στον Ω με την ιδιότητα $\int f\,d\mu = 1$. Μια τέτοια πυκνότητα επάγει, για σταθερό $0 < p < \infty$ μια ισομετρία $S = S_{f,p} : L_p(\mu) \to L_p(\nu)$ επί, με $Sx = f^{-1/p}x$ και $d\nu = fd\mu$. Πολλές φορές (όπως θα διαπιστώσουμε και στη συνέχεια) το κέρδος από μια αλλαγή πυκνότητας, δηλαδή την ταύτιση του $L_p(\mu)$ με το ισομετρικό του αντίγραφο $L_p(\nu)$, είναι μεγάλο. Το πλεονέκτημα με αυτόν τον τρόπο είναι ότι για κάποιο υπόχωρο X του $L_p(\mu)$ και για κάποια τιμή $r \neq p$ ο χώρος $S(X)$ εχει «καλύτερη θέση» στο χώρο $L_r(\nu)$.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το επιχείρημα στο προηγούμενο θεώρημα. Στη συνέχεια θα αναφέρουμε κάποια λήμματα αλλαγής πυκνότητας τα οποία θα χρησιμοποιηθούν ουσιαστικά στη συνέχεια. Το πρώτο που αναφέρουμε αφορά σε υποχώρους του L_1 και εξασφαλίζεται από την ύπαρξη νορμαρισμένου διορθογώνιου συστήματος. Αναφέρουμε τους απαραίτητους ορισμούς.

Ορισμός 4.1.2 (διορθογώνιο σύστημα). Έστω $(X, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και $(x_i, x_i^*)_{i\in I}$ μια οικογένεια στο $X \times X^*$. Η οικογένεια (x_i, x_i^*) καλείται διορθογώνιο σύστημα του X αν

$$x_i^*(x_j) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{4.1}$$

Το σύστημα καλείται επιπλέον νορμαρισμένο, αν $\|x_i\| = \|x_j^*\| = 1$ για κάθε $i, j \in I$.

Βασικές ιδιότητες ενός διορθογώνιου συστήματος είναι οι ακόλουθες:

(α) Τα $(x_i)_{i\in I}$ αποτελούν γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο και

(β) για κάθε $i \in I$ ισχύει $\|x_i\| \cdot \|x_i^*\| \geq 1$.

Το λήμμα του Auerbach μας εξασφαλίζει ότι σε κάθε χώρο πεπερασμένης διάστασης με νόρμα υπάρχει νορμαρισμένο διορθογώνιο σύστημα.

Λήμμα 4.1.3 (Auerbach). *Αν X είναι n–διάστατος χώρος με νόρμα, τότε υπάρχει νορμαρισμένο διορθογώνιο σύστημα $(x_i, x_j^*)_{i,j=1}^n$ στον X. Επιπλέον, τα $(x_i)_{i=1}^n$ αποτελούν βάση του X.*

Απόδειξη. Έστω $e_1, e_2, \ldots, e_n$ μια βάση του X. Τότε κάθε $y \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Για κάθε επιλογή n διανυσμάτων $y_1, \ldots, y_n \in X$, γράφουμε

$$y_k = \sum_{i=1}^n y_{ki} e_i, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Τότε, τα $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$|\det(y_{ki})_{i,k=1}^n| > 0.$$

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, και ορίζουμε $f : S_X \times \cdots \times S_X \to \mathbb{R}$ με

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \det(y_{ki}).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής: Αν $y_k^{(m)} \in S_X$, και $y_k^{(m)} \to y_k$, τότε

$$\|\sum_{i=1}^{n}(y_{ki} - y_{ki}^{(m)})e_i\| \geq c\sum_{i=1}^{n}|y_{ki} - y_{ki}^{(m)}|$$

για κάποια σταθερά $c > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα e_i. Άρα, $y_{ki}^{(m)} \to y_{ki}$ για κάθε $i, k \leq n$. Τότε,

$$f(y_1^{(m)}, \dots, y_n^{(m)}) = \det(y_{ki}^{(m)}) \to \det(y_{ki}) = f(y_1, \dots, y_m),$$

δηλαδή η f είναι συνεχής. Αφού η f ορίζεται στο συμπαγές $S_X \times \cdots \times S_X$, έπεται ότι παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποια n-άδα $(x_1, \dots, x_n) \in S_X \times \cdots \times S_X$. Η f είναι περιττή ως προς κάθε y_k, και προφανώς υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητες n-άδες $(y_1, \dots, y_n)$ στο πεδίο ορισμού της. Άρα, στο σημείο μεγίστου έχουμε

$$f(x_1, \dots, x_n) > 0.$$

Τότε, ορίζουμε

$$x_i^*(x) = \frac{f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)}{f(x_1, \dots, x_n)}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι σταθερός και διάφορος του μηδενός, ενώ ο αριθμητής είναι ορίζουσα της οποίας μεταβάλεται μόνο η στήλη του x. Επίσης,

(α) $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, άρα $\|x_i^*\| \geq x_i^*(x_i) = 1$, και

(β) Αν $\|x\| = 1$, τότε

$$|x_i^*(x)| = \frac{|f(x_1, \dots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \dots, x_n)|}{|f(x_1, \dots, x_n)|} \leq 1,$$

άρα $\|x_i^*\| \leq 1$. Τα (α) και (β) δίνουν το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Auerbach θα δείξουμε ότι αν X είναι υπόχωρος του $L_1(\Omega, \mu)$ με $\dim X = k$, τότε υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν στον Ω ώστε το σύνολο $\{f : \|f\|_{L_1(\nu)} \leq 1\}$ να είναι ομοιόμορφα φραγμένο στον $L_\infty(\nu)$.

Λήμμα 4.1.4. *Έστω (Ω, μ) χώρος μέτρου και X n-διάστατος υπόχωρος του $L_1(\Omega, \mu)$. Τότε, υπάρχουν μέτρο πιθανότητας ν στον Ω και γραμμικός τελεστής $S : L_1(\Omega, \mu) \to L_1(\Omega, \nu)$, με την εξής ιδιότητα: ο S περιορισμένος στον X είναι ισομετρία και*

$$\|Sf\|_{L_\infty(\nu)} \leq n\|f\|_{L_1(\mu)} \tag{4.2}$$

για κάθε $f \in X$. Ειδικότερα, $\|g\|_{L_\infty(\nu)} \leq n$ για κάθε $g \in S(X)$ με $\|g\|_{L_1(\nu)} \leq 1$.

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα διορθογώνιο σύστημα $(f_i, f_j^*)_{i,j=1}^n$ του X (υπάρχει, από το λήμμα του Auerbach). Τότε, για κάθε επιλογή πραγματικών συντελεστών $(t_i)_{i=1}^n$ έχουμε

$$\max_{1\le i\le n} |t_i| \le \int_\Omega \left|\sum_{i=1}^n t_i f_i\right| \le \sum_{i=1}^n |t_i|. \tag{4.3}$$

Πράγματι· η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα από τριγωνική ανισότητα και από το γεγονός ότι $\|f_i\|_{L_1(\mu)} = 1$, ενώ για την αριστερή παρατηρούμε ότι

$$\left\|\sum_{i=1}^n t_i f_i\right\|_{L_1(\mu)} \ge \left|f_j^*\left(\sum_{i=1}^n t_i f_i\right)\right| = |t_j|$$

για κάθε $1 \le j \le n$. Θέτουμε $F = \sum_{i=1}^n |f_i|$ και ορίζουμε μέτρο ν με πυκνότητα $d\nu = \frac{F}{n} d\mu$. Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

- $\|F\|_{L_1(\mu)} = n$ και
- το ν είναι μέτρο πιθανότητας στον Ω.

Κατόπιν, ορίζουμε τον τελεστή $S : L_1(\mu) \to L_1(\nu)$ ως εξής: για κάθε f θεωρούμε την $Sf \in L_1(\nu)$ με

$$(Sf)(t) = \begin{cases} \frac{n}{F(t)} \cdot f(t), & F(t) \neq 0 \\ 0, & F(t) = 0 \end{cases}$$

Ο S είναι προφανώς γραμμικός, καλά ορισμένος και ισομετρία στον X: Αν $f \in X$ τότε,

$$\int_\Omega |Sf|\, d\nu = \int_{\{t:F(t)\neq 0\}} \frac{n}{F}|f|\, d\nu = \int_{\{t:F(t)\neq 0\}} |f|\, d\mu = \int_\Omega |f|\, d\mu \tag{4.4}$$

διότι $\{t : F(t) = 0\} \subseteq \{t : f(t) = 0\}$. Τέλος, αποδεικνύουμε τη ζητούμενη εκτίμηση: Αν $f \in X$ με $\|f\|_{L_1(\mu)} \le 1$ τότε επειδή η f γράφεται $f = \sum_{i=1}^n t_i f_i$ για κάποιους συντελεστές (t_i), από τη σχέση (4.3) έπεται ότι $\max_{1\le i\le n} |t_i| \le 1$. Άρα, είναι

$$|f(t)| \le \sum_{i=1}^n |t_i| \cdot |f_i| \le F(t).$$

Συνεπώς,

$$|Sf(t)| \le \frac{n}{F(t)}|f(t)| \le n \tag{4.5}$$

για κάθε $t \in \Omega$ με $F(t) > 0$. Έπεται, ότι $\|Sf\|_{L_\infty(\nu)} \le n\|f\|_{L_1(\mu)}$ για κάθε $f \in X$. □

Χρησιμοποιώντας αυτή την πυκνότητα και ακολουθώντας την ίδια πορεία με αυτή του Θεωρήματος 4.1.1 μπορούμε να δώσουμε μια πιο ακριβή εκτίμηση του N υπολογίζοντας ακριβώς τις σταθερές C_n, K_n που υπεισέρχονται στο επιχείρημα για την περίπτωση $p = 1$. Πράγματι· θεωρώντας αρχικά την αλλαγή πυκνότητας που μας δίνει το παραπάνω λήμμα έχουμε ότι $C_n \leq n$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ με $\| \sum_{i \leq n} t_i f_i \|_{L_1(\nu)} = 1$ παίρνουμε ότι $\max |t_i| \leq 1$, άρα $K_n \leq n$. Οπότε έχουμε την εκτίμηση $N \geq (\frac{2n^2}{\varepsilon})^n$.

Ακόμη και στη γενική περίπτωση όπου $1 \leq p \leq 2$ μπορούμε να έχουμε ένα λήμμα αλλαγής πυκνότητας με την ιδιότητα

$$\sup\{\|f\|_\infty : f \in X,\ \|f\|_p \leq 1\} \leq (2 \dim X)^{1/p}.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από το ακόλουθο:

Λήμμα 4.1.5 (Schechtman, 1987). *Έστω (Ω, μ) χώρος πιθανότητας, $1 \leq p \leq 2$ και X ένας k–διάστατος υπόχωρος του $L_p(\mu)$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Υπάρχουν μέτρο πιθανότητας ν στον Ω και υπόχωρος Y του $L_p(\Omega, \nu)$ ισομετρικός με τον X ώστε*

$$\sup\{\|y\|_{L_\infty(\nu)} : y \in Y,\ \|y\|_{L_1(\nu)} \leq 1\} \leq (2k)^{1/2} d(X, \ell_2^k)$$

και

(β) $d(X, \ell_2^k) \leq (2k)^{1/p - 1/2}$,

όπου $d(X, \ell_2^k)$ η απόσταση Banach–Mazur του X από τον ℓ_2^k.

Απόδειξη. Από τον ορισμό της απόστασης Banach–Mazur υπάρχει μια βάση $\{x_1, \ldots, x_k\}$ του X ώστε για κάθε $t_1, \ldots, t_k \in \mathbb{R}$ να ισχύει

$$\left(\sum_{i=1}^k t_i^2 \right)^{1/2} \leq \left\| \sum_{i=1}^n t_i x_i \right\|_{L_p(\mu)} \leq d(X, \ell_2^k) \cdot \left(\sum_{i=1}^n t_i^2 \right)^{1/2}.$$

Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας ν στον Ω με πυκνότητα

$$d\nu = \frac{f^p}{\|f\|_{L_p(\mu)}^p} \, d\mu,$$

όπου $f = (\sum_{i=1}^k |x_i|^2)^{1/2}$. Ορίζουμε τον τελεστή $T : X \to L_p(\nu)$ με

$$(Tx)(\omega) = \begin{cases} \frac{x(\omega)}{f(\omega)} \|f\|_{L_p(\mu)}, & f(\omega) \neq 0 \\ 0, & f(\omega) = 0 \end{cases}$$

Τώρα, εύκολα βλέπουμε ότι ο T είναι γραμμική ισομετρία, εφόσον $\{\omega : f(\omega) = 0\} \subseteq \bigcap_{i=1}^k \{\omega : x_i(\omega) = 0\}$. Έστω, $x = \sum_{i=1}^k t_i x_i \in X$ με $\|x\|_{L_p(\mu)} = 1$. Τότε, για $\omega \in \Omega$ με

$f(\omega) \neq 0$ συνδυάζοντας την ανισότητα Cauchy–Schwarz, την ανισότητα του Khintchine, την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα που ικανοποιεί η βάση παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} |Tx| &= \frac{|x|}{f}\|f\|_{L_p(\mu)} \leq \left(\sum_{i=1}^{k} t_i^2\right)^{1/2} \|f\|_{L_p(\mu)} \\ &\leq \|f\|_{L_p(\mu)} \leq \sqrt{2}\mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm 1}\left\|\sum_{i=1}^{k}\varepsilon_i x_i\right\|_{L_p(\mu)} \\ &\leq (2k)^{1/2} d(X, \ell_2^k). \end{aligned}$$

Για το (β) παρατηρούμε ότι

$$\|y\|_p \leq \|y\|_2 \leq \|y\|_\infty^{1-p/2} \cdot \|y\|_p^{p/2} \leq [(2k)^{1/2} d(X, \ell_2^k)]^{1-p/2}\|y\|_p$$

για κάθε $y \in T(X)$, όπου στην τελευταία ανισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει την εκτίμηση από το (α). Άρα, από τον ορισμό της απόστασης Banach–Mazur παίρνουμε ότι

$$d(X, \ell_2^k) = d(T(X), \ell_2^k) \leq [(2k)^{1/2} d(X, \ell_2^k)]^{1-p/2}.$$

Από την τελευταία έπεται το ζητούμενο. □

Τώρα χρησιμοποιώντας το παραπάνω λήμμα μπορεί κανείς να έχει ακριβέστερη εκτίμηση στο θεώρημα 4.1.1 υπολογίζοντας τις σταθερές C_n, K_n. Θεωρώντας την πυκνότητα του παραπάνω λήμματος μπορούμε να έχουμε $C_n = (2n)^{1/p}$ και $K_n = \sqrt{n}$. Έτσι, το θεώρημα 4.1.1 ισχύει με $N \geq (\frac{2^{1/p} n^{1/p+1/2}}{\varepsilon})^n$.

Για την περίπτωση $p > 2$ χρησιμοποιούμε αντίστοιχο αποτέλεσμα, το οποίο οφείλεται στον Lewis:

Λήμμα 4.1.6 (Lewis, 1978). *Έστω $p > 2$ και X ένας k–διάστατος υπόχωρος του L_p. Τότε, υπάρχουν μέτρο πιθανότητας ν και υπόχωρος Y του $L_p(\nu)$ ισομετρικός με τον X ώστε $\sup\{\|y\|_{L_\infty(\nu)} : y \in Y, \|y\|_{L_1(\nu)} \leq 1\} \leq k^{1/2}$.*

Η αρχική απόδειξη του Lewis χρησιμοποιούσε ουσιαστικά την έννοια του *δυϊσμού ως προς το ίχνος*, ένα θεώρημα παραγοντοποίησης τελεστών των Kwapien–Maurey, καθώς και τη θεωρία των *p–απολύτως αθροιζόντων τελεστών*. Το 1999, οι Schechtman και Zvavitch βρήκαν μια στοιχειώδη απόδειξη, του ίδιου λήμματος, η οποία είναι κοινή για όλα τα $0 < p < \infty$. Το επιχείρημά τους μοιάζει πολύ με αυτό που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του λήμματος του Auerbach: το μέτρο ν επάγεται από πυκνότητα που προκύπτει ως λύση κατάλληλου προβλήματος μεγιστοποίησης. Διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε τη γενική μορφή του λήμματος στη συνέχεια.

Λήμμα 4.1.7 (Schechtman–Zvavitch, 1999). *Έστω (Ω, μ) χώρος μέτρου, $0 < p < \infty$ και X ένας n–διάστατος υπόχωρος του $L_p(\mu)$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Υπάρχει μια βάση* $\{f_1, \ldots, f_n\}$ *στον* X *με την ιδιότητα*

$$\int f^{p-2} f_i f_j \, d\mu = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} ,$$

όπου $f = (\sum_{k=1}^{n} f_k^2)^{1/2}$.

(β) *Υπάρχουν μέτρο πιθανότητας* ν *στον* Ω *και υπόχωρος* Y *του* $L_p(\nu)$ *ώστε: ο* X *είναι ισομετρικός με τον* Y *και υπάρχει μια βάση* $\{h_1, \ldots, h_n\}$ *του* Y *η οποία είναι ορθοκανονική στον* $L_2(\nu)$, *με* $\sum_{i=1}^{n} h_i^2 \equiv n$.

(γ) *Για κάθε* $f \in Y$ *ισχύει* $\|f\|_{L_\infty(\nu)} \leq c(n,p) \|f\|_{L_p(\nu)}$, *όπου*

$$c(n,p) = \begin{cases} n^{1/p}, & 0 < p \leq 2 \\ n^{1/2}, & 2 < p < \infty \end{cases} .$$

Πριν περάσουμε στην απόδειξη του λήμματος παρατηρήστε ότι γενικεύει τα δυο προηγούμενα λήμματα και επιπλέον ισχύει και στην περίπτωση όπου $0 < p < 1$. Μάλιστα η εξάρτηση της σταθεράς που προκύπτει στο (γ) είναι βέλτιστη ως προς n, p.

Απόδειξη του λήμματος 4.1.7. (α) Υποθέτουμε πρώτα ότι ο Ω είναι πεπερασμένος. Επίσης, χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο X έχει μεγιστικό φορέα, δηλαδή για κάθε $\omega \in \Omega$ υπάρχει $x \in X$ ώστε $x(\omega) \neq 0$ (Διαφορετικά, θεωρούμε $N_X = \{\omega : x(\omega) = 0 \; \forall x \in X\}$ και δουλεύουμε στο $\Omega' = \Omega \setminus N_X$, το οποίο εξακολουθεί να είναι πεπερασμένο). Σταθεροποιούμε μια βάση $\{x_1, \ldots, x_n\}$ του X. Για κάθε πίνακα $B = (b_{ij})$ θεωρούμε ένα τελεστή $B : \mathbb{R}^k \to X$ ώστε $Be_i := \sum_{j=1}^{k} t_{ij} x_j$, όπου $e_1, \ldots, e_k$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^k$. Έστω τώρα $A = (a_{ij})$ ένας πίνακας ο οποίος μεγιστοποιεί την $\det(B)$ ως προς τη συνθήκη $\|(\sum_{i=1}(Be_i)^2)^{1/2}\|_p \leq 1$. Παρατηρούμε ότι σ' αυτήν την περίπτωση τα $(Ae_i)_{i=1}^{k}$ είναι κατ' ανάγκην γραμμικώς ανεξάρτητα (άρα βάση του X) και μάλιστα $\sum_{i=1}^{k} (Ae_i)(\omega)^2 > 0$ για κάθε $\omega \in \Omega$ (εφόσον υποθέσαμε ότι ο X έχει μεγιστικό φορέα). Επίσης, για κάθε $\omega \in \Omega$, η συνάρτηση $B = (b_{ij}) \mapsto (\sum_{i=1}^{k} (Be_i)(\omega)^2)^{p/2}$ είναι συνεχώς παραγωγίσιμη με

$$\frac{\partial}{\partial b_{ml}} \sum_{\omega \in \Omega} \left(\sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{j=1}^{k} b_{ij} x_j(\omega)^2 \right)^{p/2} \right) =$$
$$p \sum_{\omega \in \Omega} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{k} (\sum_{j=1}^{k} b_{ij} x_j(\omega)^2) \right)^{p/2-1} \left(\sum_{j=1}^{k} b_{mj} x_j(\omega) \right) x_l(\omega) \right\}$$

Όπως είναι γνωστό από τη γραμμική άλγεβρα (αναπτύξτε την ορίζουσα $\det(B)$ ως προς την m στήλη) το $\frac{\partial}{\partial ml} \det(B)$ είναι το lm στοιχείο του πίνακα $\det(B) \cdot B$. Επίσης, από τους πολλαπλασιαστές Lagrange παίρουμε ότι ο πίνακας $C = (\frac{\partial}{\partial} a_{ml} (\sum_{i=1} (Ae_i)^2)^{p/2})_{m,l}^{k}$ είναι πολλαπλάσιο του $(\frac{\partial}{\partial a_{ml}} \det(A))_{m,l}^{k}$, ο οποίος από την προηγούμενη παρατήρηση ισούται με $(A^t)^{-1}$. Μ' άλλα λόγια ο $A^t C$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού. Αν λοιπόν θέσουμε

$f_i = \sum_{j=1}^k a_{ij}x_j$, τότε έπεται από τα παραπάνω ότι για κάποιο $\lambda \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int \Big(\sum_{i=1}^k f_i^2 \Big)^{p/2-1} f_i f_j \, d\mu = \lambda \delta_{ij}.$$

Κανονικοποιώντας έχουμε το ζητούμενο. Αυτό τελειώνει την απόδειξη στην περίπτωση που το μέτρο μ έχει πεπερασμένο φορέα. Ουσιαστικά αυτή είναι η μορφή στην οποία θα χρησιμοποιηθεί το λήμμα στη συνέχεια αυτής της εργασίας, γι' αυτό απλώς σκιαγραφούμε την απόδειξη στη γενική περίπτωση. Κάνοντας πρώτα μια αλλαγή πυκνότητας όπως στο θεώρημα 4.1.1, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε συνάρτηση νόρμας 1 στον X είναι φραγμένη από μια σταθερά K η οποία εξαρτάται από τη διάσταση. Τώρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει υπόχωρος X_ε του ίδιου χώρου L_p, ο οποίος αποτελείται από απλές συναρτήσεις και είναι ε–κοντά στον X με την ακόλουθη έννοια: για κάθε $f \in X$ με $\|f\|_p = 1$ υπάρχει $g \in\in X_\varepsilon$ ώστε $\|f - g\|_p < \varepsilon$. Από το πρώτο μέρος της απόδειξης υπάρχει μια βάση $\{f_1^\varepsilon, \ldots, f_k^\varepsilon\}$ στον X_ε η οποία ικανοποιεί το ζητούμενο. Οποιοδήποτε όριο αυτών των βάσεων, μέσω κάποια υπακολουθίας καθώς το $\varepsilon \to 0$ θα ικανοποιεί επίσης το συμπέρασμα και θα είναι επίσης στον X.

(β) Θεωρούμε τις (f_i) και f του πρώτου ερωτήματος και ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας ν με πυκνότητα $d\nu = f^p \|f\|_p^{-p} d\mu$. Ορίζουμε τη γραμμική ισομετρία $T : X \to L_p(\nu)$ με $Tx = (x/f)k^{1/p}$. Σε αυτό το σημείο παρατηρήστε ότι $\|f\|_p^p = k$. Τέλος, οι συναρτήσεις $h_i = n^{1/2}(f_i/f)$ αποτελούν ορθοκανονική βάση στον $L_2(\nu)$ και ισχύει $\sum_i^k h_i^2 \equiv k$.

(γ) Αν $f \in Y$ και $f = \sum_{i=1}^k t_i h_i$ τότε

$$\|f\|_\infty \leq \Big(\sum_{i=1}^k t_i^2 \Big)^{1/2} \Big\| \Big(\sum_{i=1}^k h_i^2 \Big)^{1/2} \Big\|_\infty = n^{1/2} \|f\|_2$$

και αν $0 < p < 2$ τότε

$$\|f\|_2^2 \leq \|f\|_\infty^{2-p} \|f\|_p^p \leq n^{(2-p)/2} \|f\|_2^{2-p} \|f\|_p^p.$$

Από αυτά έπεται στο συμπέρασμα. Η περίπτωση $2 \leq p < \infty$ είναι άμεση. □

Σε επόμενη παράγραφο θα αναφέρουμε άλλα δυο λήμματα αλλαγής πυκνότητας τα οποία είναι άμεσο πόρισμα ενός θεωρήματος του Pisier [18] για παραγοντοποίηση τελεστών μέσω *ασθενών χώρων συναρτήσεων*.

4.2 Η μέθοδος του Schechtman

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε το αποτέλεσμα του Schechtman. Η μέθοδος εκτίμησης είναι πιθανοθεωρητική και εισάγει τη «μέθοδο της εμπειρικής κατανομής». Το επιχείρημα περιγράφεται για υποχώρους του L_1, όπως όμως θα δούμε στη συνέχεια περνάει και στο γενικότερο πλαίσιο υποχώρων του L_p, $1 \le p < 2$. Η απόδειξη που παραθέτουμε στη συνέχεια ακολουθεί τους Bourgain–Lindenstrauss–Milman [2].

Θεωρούμε χώρο $L_1(\Omega, \mu)$ και έναν υπόχωρό του X διάστασης n. Επιλέγουμε τυχαία και ανεξάρτητα $x_1, \dots, x_N$ στο χώρο πιθανότητας (Ω, μ). Κατόπιν θεωρούμε τον τυχαίο γραμμικό τελεστή $T : X \to \ell_1^N$ που ορίζεται από την

$$T(f) = \frac{1}{N}(f(x_1), \dots, f(x_N)) \tag{4.6}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\|T(f)\|_{\ell_1^N} = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |f(x_i)| \approx \int_\Omega |f|\, d\mu = \|f\|_{L_1(\mu)} \tag{4.7}$$

όπου η ακριβής έννοια της προσέγγισης $\approx$ θα φανεί στη συνέχεια. Θέλουμε για κάθε $\varepsilon > 0$ (μικρό) να βρούμε N (αρκετά μεγάλο) ώστε για κάθε $f \in L_1(\mu)$ να ισχύει

$$(1-\varepsilon)\|f\|_{L_1} \le \|Tf\|_{\ell_1^N} \le (1+\varepsilon)\|f\|_{L_1},$$

ή ισοδύναμα, θέλουμε η ποσότητα

$$\sup\left\{\left|1 - \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}|f(x_i)|\right| : f \in X, \|f\|_{L_1} = 1\right\} \tag{4.8}$$

να είναι μικρότερη του ε για αρκετά μεγάλο N. Έτσι, περιοριζόμαστε στη μοναδιαία σφαίρα του X. Στη συνέχεια διακριτοποιούμε το πρόβλημα αποδεικνύοντας μια αντίστοιχη εκτίμηση για ένα δίκτυο της σφαίρας του. Ένα σύνηθες επιχείρημα προσεγγίσεων θα μας δώσει την εκτίμηση σε όλη τη σφαίρα.

Το βασικό εργαλείο για να δείξουμε μια σχέση σαν την (4.3) αλλά και για να δώσουμε μια πιο αυστηρή έννοια της προσέγγισης στην (4.2) είναι μια ανισότητα τύπου Bernstein από την κλασική θεωρία πιθανοτήτων. Η γνωστή ανισότητα του Bernstein είναι μια ανισότητα απόκλισης του μέσου όρου ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli από τη μέση τιμή τους. Το επόμενο λήμμα γενικεύει αυτή τη θεώρηση.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω $(g_i)_{i=1}^N$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω, μ), οι οποίες ικανοποιούν τις σχέσεις*

$$\mathbb{E}g_i = 0, \quad \|g_i\|_{L_1} \le A, \quad \|g_i\|_\infty \le M, \quad 1 \le i \le N, \tag{4.9}$$

για κάποια θετική σταθερά M. Τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < 2A$ ισχύει η ανισότητα

$$\mathrm{Prob}\left(\left|\sum_{i=1}^{N} g_i\right| \ge N\varepsilon\right) \le 2\exp(-\varepsilon^2 N/(4AM)) \tag{4.10}$$

Απόδειξη. Έστω $\lambda > 0$. Από την ανισότητα του Markov και την ανεξαρτησία των g_i έχουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\left(\sum_{i=1}^N g_i \geq \varepsilon N\right) &\leq e^{-\lambda\varepsilon N}\mathbb{E}\exp\left(\lambda\sum_{i=1}^N g_i\right) \\ &= e^{-\lambda\varepsilon N}\prod_{i=1}^N \mathbb{E}\exp(\lambda g_i) \end{aligned}$$

Για κάθε $x \leq 1$ ισχύει η στοιχειώδης ανισότητα $e^x \leq 1 + x + x^2$. Χρησιμοποιώντας τις σχέσεις (4.9) για $0 < \lambda < \frac{1}{M}$ βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}\exp(\lambda g_i) \leq 1 + \lambda^2 \int g_i^2\, d\mu \leq 1 + \lambda^2\|g_i\|_\infty\|g_i\|_1 \leq \exp(\lambda^2 AM) \tag{4.11}$$

Τελικά παίρνουμε

$$\mathrm{Prob}\left(\sum_{i=1}^N g_i \geq N\varepsilon\right) \leq e^{-\lambda N\varepsilon}e^{2\lambda^2 MN}$$

Επιλέγοντας $\lambda = \frac{\varepsilon}{2AM}$ (παρατηρήστε ότι ικανοποιείται η συνθήκη $0 < \lambda M < 1$) παίρνουμε

$$\mathrm{Prob}\left(\sum_{i=1}^N g_i \geq N\varepsilon\right) \leq \exp(-\varepsilon^2 N/4AM). \tag{4.12}$$

Θεωρώντας τις $-g_i$ στη θέση των g_i παίρνουμε

$$\mathrm{Prob}\left(-\sum_{i=1}^N g_i \geq \varepsilon N\right) \leq \exp(-\varepsilon^2 N/4AM). \tag{4.13}$$

Το συμπέρασμα έπεται από τις (4.12) και (4.13). $\square$

Παρατηρούμε ότι για την εφαρμογή της ανισότητας Bernstein πρέπει οι $\{g_i\}_{i=1}^N$ να ανήκουν και στον $L_\infty(\mu)$, κάτι το οποίο μπορεί, για τον τυχόντα υπόχωρο X του $L_1(\Omega,\mu)$, να μην ισχύει γενικά.

Όπως ήδη περιγράψαμε, στην προηγούμενη παράγραφο, αυτό είναι εφικτό μέσω αλλαγής πυκνότητας. Έτσι, κατά την απόδειξη του θεωρήματος θεωρούμε ότι το μέτρο μ έχει την ιδιότητα που εξασφαλίζει το λήμμα 4.1.4.

Στη συνέχεια διατυπώνουμε αυστηρά το θεώρημα του Schechtman και περνάμε στην απόδειξή του.

Θεώρημα 4.2.2 (Schechtman, 1987). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε για κάθε $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ και κάθε n-διάστατο υπόχωρο X του L_1 να ισχύει $N(X,\varepsilon) \leq c\varepsilon^{-2}\log\varepsilon^{-1}n^2$.*

Πιο συγκεκριμένα θα δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 4.2.3. *Έστω $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ και X n-διάστατος υπόχωρος του L_1. Τότε, υπάρχει γραμμικός τελεστής $T : X \to \ell_1^N$ ώστε*

$$(1-\varepsilon)\|f\|_{L_1(\mu)} \leq \|Tf\|_{\ell_1^N} \leq (1+\varepsilon)\|f\|_{L_1(\mu)}$$

για κάθε $f \in X$, αν $N \geq cn^2\varepsilon^{-2}\log(\varepsilon^{-1})$. Άρα, υπάρχει υπόχωρος Y του ℓ_1^N με $d(X,Y) \leq \frac{1+\varepsilon}{1-\varepsilon}$.

Απόδειξη. Κατ΄ αρχήν μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μέτρο μ είναι τέτοιο ώστε $\|f\|_{L_\infty(\mu)} \leq n$ για κάθε $f \in X$ με $\|f\|_{L_1(\mu)} = 1$. Θεωρούμε τον Ω^N και σαν μέτρο πιθανότητας στον Ω^N παίρνουμε το μέτρο γινόμενο $\mu^N := \otimes^N \mu$. Δηλαδή, ο χώρος πιθανότητας στον οποίο δουλεύουμε είναι ο (Ω^N, μ^N). Για κάθε $\omega \in \Omega^N$ ορίζουμε τον τυχαίο τελεστή $T = T_\omega : X \to \ell_1^N$ με

$$Tf = \frac{1}{N}(f(\omega_1), \ldots, f(\omega_N)). \tag{4.14}$$

Κύριος σκοπός μας είναι να επιτύχουμε η ποσότητα (4.8) να είναι αρκετά μικρή (μικρότερη του ε) τουλάχιστον για ένα πεπερασμένο, «καλό» σύνολο της μοναδιαίας σφαίρας του X. Για $\theta = \frac{\varepsilon}{3} \in (0, 1/3)$ Θεωρούμε ένα θ-δίκτυο $\mathcal{N}$ στη σφαίρα του X με $|\mathcal{N}| \leq (\frac{3}{\theta})^N$. Για κάθε $g \in \mathcal{N}$ ορίζουμε $h_j : \Omega^N \to \mathbb{R}$ με $h_j(\omega) = |g(\omega_j)| - 1$, για $j = 1, 2, \ldots, N$. Οι h_j έχουν τις εξής ιδιότητες:

- $\mathbb{E}h_j = 0$
- $\|h_j\|_{L_1(\mu)} \leq 2$ και
- $\|h_j(\omega)\| \leq n + 1$ για κάθε $\omega \in \Omega^N$

Έτσι, πληρούνται οι υποθέσεις του λήμματος 4.2.1. Άρα, για κάθε $g \in \mathcal{N}$ ισχύει η εκτίμηση

$$\mathrm{Prob}\left(\omega : \left|\sum_{i=1}^N h_j(\omega)\right| \geq N\theta\right) \leq 2\exp(-N\theta^2/8(n+1)). \tag{4.15}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\left(\omega : \exists g \in \mathcal{N},\ \left|\sum_{i=1}^N h_j(\omega)\right| \geq N\theta\right) &\leq \sum_{g\in\mathcal{N}} 2\exp(-N\theta^2/8(n+1)) \\ &= 2e^{-N\theta^2/8(n+1)}(3/\theta)^n \end{aligned}$$

Απαιτούμε να ισχύει η

$$2\exp(-N\theta^2/8(n+1))(3/\theta)^n < 1,$$

δηλαδή

$$8\log 2(n+1) + (n^2+n)\log(3/\theta) < N\theta^2.$$

Δεδομένου ότι $\theta < 1/3$, αρκεί να πάρουμε

$$N \geq (16\log 2 + 4)n^2\theta^{-2}\log(1/\theta)$$

Καθώς $\theta = \varepsilon/3$ και $\varepsilon < 1/2$, η συνθήκη παίρνει τη μορφή

$$N \geq 3^3(2^4\log 2 + 4)n^2\varepsilon^{-2}\log(\varepsilon^{-1}) = cn^2\varepsilon^{-2}\log(\varepsilon^{-1})$$

Τότε η πιθανότητα

$$\mathrm{Prob}\left(\omega : \forall g \in \mathcal{N}, \left|\sum_{j=1}^{N} h_j(\omega)\right| < N\theta\right)$$

είναι θετική, άρα υπάρχει $\omega \in \Omega^N$ ώστε για κάθε $g \in \mathcal{N}$ να ισχύει

$$\left|1 - \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} g(\omega_j)\right| < \theta \tag{4.16}$$

Συνεπώς, η σχέση (4.8) ισχύει για το δίκτυο $\mathcal{N}$ της σφαίρας του X:

$$1 - \theta \leq \|Tg\| \leq 1 + \theta \tag{4.17}$$

για κάθε $g \in \mathcal{N}$. Η απόδειξη ολοκληρώνεται με ένα κλασικό επιχείρημα προσέγγισης στοιχείων της σφαίρας από στοιχεία του δικτύου.

Χρησιμοποιώντας το λήμμα 2.1.5 έχουμε ότι κάθε $f \in X$ με $\|f\|_{L_1(\mu)} = 1$ γράφεται στη μορφή $f = g_0 + \sum_{n=1}^{\infty} t_n g_n$ με $0 \leq t_n \leq \theta^n$ και $(g_n)_{n=0}^{\infty} \subseteq \mathcal{N}$. Τότε, παίρνουμε

$$\big|\|Tf\| - \|Tg_0\|\big| \leq \|T(f - g_0)\| \leq \sum_{n=1}^{\infty} t_n\|Tg_n\| \leq (1+\theta)\frac{\theta}{1-\theta}. \tag{4.18}$$

Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\big|1 - \|Tg_0\|\big| \leq \theta$, οπότε από τη σχέση (4.18) παίρνουμε

$$\frac{1-3\theta}{1-\theta} \leq \|Tf\|_{\ell_1^N} \leq \frac{(1+\theta)^2}{1-\theta}. \tag{4.19}$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $\theta = \varepsilon/3$ βλέπουμε ότι $\frac{(1+\theta)^2}{1-\theta} \leq 1 + \varepsilon$ και $\frac{1-3\theta}{1-\theta} \geq 1 - \varepsilon$, οπότε έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Ο προσεκτικός αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι αυτού του είδους το επιχείρημα δίνει και μια εκτίμηση στην περίπτωση όπου $X \leq L_p$, $1 \leq p < 2$. Πράγματι, στην παραπάνω πορεία αυτό που έπαιξε ουσιώδη ρόλο ήταν το γεγονός ότι

$$M_{L_p(\nu)} = \sup\{\|x\|_{L_\infty(\nu)} : \|x\|_{L_p(\nu)} \leq 1\} < \infty$$

για $p = 1$ και κάποιο μέτρο πιθανότητας ν. Στην περίπτωση λοιπόν όπου $1 < p < 2$ βλέπουμε ότι μπορούμε να υποθέσουμε $X \subseteq L_1$ (είναι γνωστό αποτέλεσμα στην ισομορφική θεωρία χώρων Banach ότι ο $L_p[0,1]$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον $L_1[0,1]$, για $1 \leq p < 2$). Επομένως, προκύπτουν τα εξής:

(α) Ο X εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$–ισομορφικά στον ℓ_1^N αν $N \geq c\varepsilon^{-2}\log(\varepsilon^{-1})nM_p$.

(β) Από την άλλη μεριά είδαμε (Λήμμα 4.1.5) ότι υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν στον Ω ώστε $M_p \leq (2n)^{1/p}$.

Έτσι, συνάγουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Θεώρημα 4.2.4 (Schechtman, 1987). *Εστω $\varepsilon > 0$ και $1 \leq p < 2$. Υπάρχει σταθερά $c = c(\varepsilon) > 0$ με την ιδιότητα: κάθε k–διάστατος υπόχωρος X του L_p εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$–ισομορφικά στον ℓ_1^N, αν $N \geq c(\varepsilon)k^{1+1/p}$.*

4.3 K-κυρτότητα

4.3.1 Συναρτήσεις Rademacher και Walsh

Ορισμοί 4.3.1. (α) Εστω $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $E_2^n = \{-1,1\}^n$. Το σύνολο $\{-1,1\}$ είναι πολλαπλασιαστική ομάδα, επομένως και ο E_2^n είναι ομάδα με πράξη τον πολλαπλασιασμό κατά συντεταγμένες.
(β) Για κάθε $i = 1,\ldots,n$ ορίζουμε $r_i : E_2^n \to \{-1,1\}$ με

$$r_i(\varepsilon) = r_i(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_i,\ldots,\varepsilon_n) = \varepsilon_i.$$

Οι r_i, $i = 1,\ldots,n$, είναι οι *συναρτήσεις Rademacher.*
(γ) Εστω $\emptyset \neq A \subseteq \{1,\ldots,n\}$. Ορίζουμε $w_A : E_2^n \to \{-1,1\}$ με

$$w_A(\varepsilon) = \prod_{i\in A} r_i(\varepsilon).$$

Αν $A = \emptyset$, θέτουμε $w_A(\varepsilon) = 1$. Οι w_A, $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$, είναι οι *συναρτήσεις Walsh.* Παρατηρήστε οτι $r_i = w_{\{i\}}$.

Οι συναρτήσεις Walsh ικανοποιούν τα παρακάτω:

Πρόταση 4.3.2. (α) *Κάθε w_A είναι ομοιομορφισμός ομάδων.*
(β) *Για κάθε A και κάθε $\varepsilon \in E_2^n$, $w_A^2(\varepsilon) = 1$.*
(γ) *Ισχύουν οι συνθήκες ορθογωνιότητας*

$$\sum_A w_A(\varepsilon)w_A(\zeta) = 2^n\delta_{\varepsilon\zeta}$$

και

$$\sum_\varepsilon w_A(\varepsilon)w_B(\varepsilon) = 2^n\delta_{AB},$$

όπου $\delta_{xy} = 1$ αν $x = y$ και $\delta_{xy} = 0$ αν $x \neq y$.

Θεωρούμε τον E_2^n σαν χώρο πιθανότητας με το ομοιόμορφο διακριτό μέτρο πιθανότητας P. Θα συμβολίζουμε $d\varepsilon = dP(\varepsilon)$. Αν $f : E_2^n \to \mathbb{R}$, τότε

$$\int_{E_2^n} f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in E_2^n} f(\varepsilon).$$

Πιό γενικά, αν X χώρος Banach και $f : E_2^n \to X$, τότε ορίζουμε

$$\int_{E_2^n} f(\varepsilon)d\varepsilon = \frac{1}{2^n}\sum_{\varepsilon\in E_2^n} f(\varepsilon) \in X.$$

Ο χώρος των συναρτήσεων $f : E_2^n \to X$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L_2(X;E_2^n)} = \|f\|_{L_2(X)} = \left(\int_{E_2^n} \|f(\varepsilon)\|^2 d\varepsilon\right)^{1/2}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε και την νόρμα

$$\|f\|_{L_1(X;E_2^n)} = \|f\|_{L_1(X)} = \int_{E_2^n} \|f(\varepsilon)\| d\varepsilon.$$

Πρόταση 4.3.3. *Κάθε $f : E_2^n \to X$ γράφεται κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή*

$$f(\varepsilon) = \sum_A w_A(\epsilon)x_A,$$

για κάποια $x_A \in X$.

Απόδειξη. Για κάθε $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$ ορίζουμε

$$x_A = \int_{E_2^n} w_A(\epsilon)f(\epsilon)d\epsilon.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.2.(γ) βλέπουμε οτι για κάθε $\varepsilon \in E_2^n$

$$\begin{aligned}\sum_A w_A(\varepsilon)x_A &= \sum_A w_A(\varepsilon)\left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta)f(\zeta)d\zeta\right) = \int_{E_2^n} f(\zeta)\left(\sum_A w_A(\varepsilon)w_A(\zeta)\right)d\zeta \\ &= f(\varepsilon).\end{aligned}$$

Για την μοναδικότητα, ας υποθέσουμε οτι $f(\varepsilon) = \sum_A w_A(\epsilon)y_A$ για κάποια $y_A \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned} x_A &= \int_{E_2^n} w_A(\zeta)f(\zeta)d\zeta = \int_{E_2^n}\left(\sum_B w_B(\zeta)y_B\right)w_A(\zeta)d\zeta \\ &= \frac{1}{2^n}\sum_B y_B\left(\sum_{\zeta\in E_2^n} w_B(\zeta)w_A(\zeta)\right) = y_A,\end{aligned}$$

πάλι από την Πρόταση 4.3.2.(γ). □

Ορισμός 4.3.4. (α) Αν $f : E_2^n \to X$ και $g : E_2^n \to \mathbb{R}$, ορίζουμε την *συνέλιξη* $f * g : E_2^n \to X$ των f και g ως εξής:

$$(f * g)(\epsilon) = \int_{E_2^n} f(\varepsilon\zeta)g(\zeta)d\zeta.$$

(β) Η *Rademacher προβολή* της $f : E_2^n \to X$ είναι η συνάρτηση $Rad_n f : E_2^n \to X$ με

$$Rad_n f(\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\varepsilon)x_{\{i\}},$$

όπου $f = \sum w_A x_A$.

Πρόταση 4.3.5. *Ορίζουμε* $g : E_2^n \to \mathbb{R}$ *με* $g(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon)$. *Τότε, για κάθε* $f : E_2^n \to X$, *ισχύει*

$$Rad_n f = f * g.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}(f * g)(\varepsilon) &= \int_{E_2^n} \left(\sum_A w_A(\varepsilon\zeta)x_A\right)\left(\sum_{i=1}^n r_i(\zeta)\right) d\zeta \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_A x_A w_A(\varepsilon)\left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta)r_i(\zeta)d\zeta\right) \\ &= \sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon)x_{\{i\}} = Rad_n f(\varepsilon).\end{aligned}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

4.3.2 Η εκτίμηση του Pisier για τη Rademacher προβολή

Η $Rad_n : L^2(X) \to L^2(X)$ με $f \mapsto Rad_n f$ είναι γραμμικός τελεστής. Όπως θα δούμε, ο Rad_n είναι φραγμένος τελεστής. Η νόρμα $\|Rad_n(X)\|$ ενός n–διάστατου χώρου X λέγεται σταθερά *K–κυρτότητας* του χώρου και συμβολίζεται με $K(X)$. Ο Pisier απέδειξε το ακόλουθο για τη νόρμα $\|Rad_n(X)\|$ της Rademacher προβολής Rad_n:

Θεώρημα 4.3.6. *Έστω* X *n-διάστατος χώρος με νόρμα. Αν* $f : E_2^n \to X$, *τότε*

$$\|Rad_n f\|_{L^2(X)} \leq c \log n \, \|f\|_{L^2(X)},$$

όπου $c > 0$ *απόλυτη σταθερά. Δηλαδή,* $\|Rad_n(X)\| \leq c\log n$ *ή* $K(X) \leq c\log n$.

Για διάφορους χώρους η εκτίμηση είναι πολύ καλύτερη: Αν θεωρήσουμε το χώρο $X = \ell_1^n$ τότε $K(\ell_1^n) \simeq \sqrt{\log n}$. Αυτό το αποτέλεσμα θα μας χρειασθεί στην επόμενη παράγραφο για την εκτίμηση του Talagrand.

Επίσης, πολύ σημαντική είναι η ακόλουθη παρατήρηση η οποία οφείλεται στην Tomczak–Jaegermann: Αν ορίσουμε όλα τα παραπάνω στο Gaussian πλαίσιο, δηλαδή αν αντικαταστήσουμε τις μεταβλητές Rademacher από κανονικές και ορίσουμε με ανάλογο τρόπο την Gaussian προβολή $\Gamma_n : L_2(X) \to L_2(X)$, όπου $\Gamma_n(f) = \sum_{i=1}^n g_i \int g_i f \, d\mu$ τότε, η αντίστοιχη έννοια «σταθεράς κυρτότητας» (ορίζοντας $\tilde{K}(X) = \|\Gamma_n\|$) που προκύπτει για τον χώρο X με αυτόν τον τρόπο, είναι ισοδύναμη με την προηγούμενη. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.3.7. *Αν X είναι n–διάστατος χώρος με νόρμα, τότε*

$$\frac{2}{\pi} K(X) \leq \tilde{K}(X) \leq K(X).$$

4.4 Το θεώρημα του Talagrand

Θεώρημα 4.4.1 (Talagrand, 1990). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές C και $\varepsilon_0 > 0$ ώστε: αν X είναι ένας n-διάστατος υπόχωρος του L_1 και αν $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, τότε*

$$N(X, \varepsilon) \leq C\varepsilon^{-2} n \log(n+1).$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1 χρησιμοποιεί την K-κυρτότητα. Ακριβέστερα, θα αποδείξουμε το εξής:

Θεώρημα 4.4.2 (Talagrand, 1990). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές C και $\varepsilon_0 > 0$ ώστε: αν X είναι ένας n-διάστατος υπόχωρος του L_1 και αν $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, τότε*

$$N(X, \varepsilon) \leq C\varepsilon^{-2} K^2(X) n.$$

Όπως είδαμε στην προηγούμενη Παράγραφο, αν X είναι ένας n-διάστατος υπόχωρος του L_1 τότε $K(X) \leq c\sqrt{\log(n+1)}$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, το Θεώρημα 4.4.1 είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.4.2.

Για την απόδειξη, μπορούμε κατ' αρχήν να υποθέσουμε ότι ο X είναι n-διάστατος υπόχωρος του ℓ_1^M για κάποιον $M \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλον, τον οποίο σταθεροποιούμε (θυμηθείτε ότι στην §4.1 έχουμε ήδη αποδείξει ότι ο X εμφυτεύεται σχεδόν ισομετρικά στον ℓ_1^N, όπου $N = O(n^2)$).

Θεωρούμε ακολουθία $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_M)$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Rademacher και ορίζουμε τον τυχαίο τελεστή $S_\varepsilon : \ell_1^M \to \ell_1^M$ με

$$S_\varepsilon(x) = ((1+\varepsilon_1)x_1, \ldots, (1+\varepsilon_M)x_M).$$

Θα προσπαθήσουμε να δώσουμε ικανές συνθήκες κάτω από τις οποίες, με μεγάλη πιθανότητα ο $T_\varepsilon = S_\varepsilon|_X$ είναι σχεδόν ισομετρία. Παρατηρούμε ότι ο $S_\varepsilon(\ell_1^M)$ είναι ισομετρικός με τον $\ell_1^{M'}$, όπου $M' = \text{card}\{i : \varepsilon_i = 1\}$ και με πιθανότητα τουλάχιστον $1/2$ έχουμε ότι $M' \le M/2$.

Για κάθε $x \in \ell_1^M$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $Z_x = \|S_\varepsilon(x)\|_1 - \|x\|_1$ και έστω

$$A := \sup_{x \in X,\, \|x\|_1 \le 1} |Z_x|.$$

Τότε, ο T_ε ικανοποιεί τις $\|T_\varepsilon\| \le 1 + A$, $\|T_\varepsilon^{-1}\| \le (1-A)^{-1}$. Έτσι, αν $A \le 1/2$, έχουμε ότι $d(X, T_\varepsilon(X)) \le 1 + 3A$.

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι αν $x \in \ell_1^M$ τότε:

$$Z_x \quad = \quad \|T_\varepsilon(x)\|_1 - \|x\|_1 = \sum_{i \le M} (1+\varepsilon_i)|x_i| - \sum_{i \le M} |x_i| = \sum_{i \le M} \varepsilon_i |x_i|.$$

Οπότε, από το κριτήριο σύγκρισης για ανελίξεις Rademacher παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E}A = \mathbb{E} \sup_{x \in X,\, \|x\|_1 \le 1} \left| \sum_{i \le M} \varepsilon_i |x_i| \right| \le 2\mathbb{E} \sup_{x \in X,\, \|x\|_1 \le 1} \left| \sum_{i \le M} \varepsilon_i x_i \right|.$$

Από την άλλη πλευρά, είναι γνωστό ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\mathbb{E} \sup_{x \in X,\, \|x\|_1 \le 1} \left| \sum_{i \le M} \varepsilon_i x_i \right| \le C\, \mathbb{E} \sup_{x \in X, \|x\|_1 \le 1} |\sum_{i \le M} g_i x_i|$$

όπου $(g_i)_{i \le M}$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές.

Εφόσον $P(A \le 3\mathbb{E}A) \ge 2/3$ και $P(M' \le M/2) \ge 1/2$, έχουμε δείξει το εξής:

Πρόταση 4.4.3. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $\alpha, C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν X είναι υπόχωρος του ℓ_1^M και*

$$H := \mathbb{E} \sup_{x \in X,\, \|x\|_1 \le 1} \left| \sum_{i \le M} g_i x_i \right| < \alpha$$

τότε υπάρχουν $M' \le M/2$ και Y υπόχωρος του $\ell_1^{M'}$ με $d(X,Y) \le 1 + CH$.

Για να χρησιμοποιήσουμε κατάλληλα την παραπάνω πρόταση θα πρέπει να εξασφαλίσουμε ότι η ποσότητα H είναι μικρή. Αν γράψουμε $y = (g_1, \ldots, g_M) \in \ell_1^M$ τότε η

$$H = \int \sup_{x \in X,\, \|x\|_1 \le 1} \langle x, y \rangle \, d\gamma_M(y)$$

όπου γ_M είναι το M–διάστατο μέτρο Gauss στον $\mathbb{R}^M$. Επίσης, αν $y_1, \ldots, y_n$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $X \subseteq \ell_2^M$ τότε:

$$H = \mathbb{E} \sup_{x \in X\, \|x\|_1 \le 1} \langle x, \sum_{i \le n} g_i y_i \rangle.$$

Πρόταση 4.4.4. *Έστω X υπόχωρος του ℓ_1^M διάστασης n. Τότε, υπάρχουν $M' \le 3M/2$ και ένας υπόχωρος Y του $\ell_1^{M'}$ ισομετρικός με τον X ώστε*

$$\mathbb{E} \sup_{x\in Y,\, \|x\|_1\le 1} \left| \sum_{i\le M} g_i x_i \right| \le CK(X) \left(\frac{n}{M}\right)^{1/2}.$$

Για την απόδειξη της πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα αλλαγής πυκνότητας 4.1.7:

Έστω X ένας n–διάστατος υπόχωρος του $L_1(\Omega,\mu)$ για κάποιο πεπερασμένο χώρο πιθανότητας (Ω,μ). Τότε, υπάρχουν μέτρο πιθανότητας ν στον Ω και υπόχωρος Y του $L_1(\Omega,\nu)$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) *Ο Y είναι ισομετρικός με τον X.*

(β) *Ο Y δέχεται ορθοκανονική βάση $\{h_1,\dots,h_n\}$ στον $L_2(\Omega,\nu)$, έτσι ώστε $\sum_{i=1}^n h_i^2 \equiv n$.*

Απόδειξη της πρότασης 4.4.4. Εφαρμόζουμε το λήμμα για τον χώρο πιθανότητας $\Omega = \{1,2,\dots,M\}$ με το μέτρο αρίθμησης μ. Υπάρχουν μέτρο πιθανότητας ν στο $\{1,2,\dots,M\}$, υπόχωρος Y του $L_1(\nu)$ ισομετρικός με τον X και μια βάση $(\psi_i)_{i\le n}$ του Y, η οποία είναι ορθογώνια στον $L_2(\nu)$ και ικανοποιεί τις

$$\sum_{i=1}^n \psi_i^2 = 1, \quad \|\psi_i\|_{L_2(\nu)} = n^{-1/2}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε άτομο του ν έχει μάζα $\le 2/M$ (διαφορετικά κάθε άτομο με μάζα $a \ge 2/M$ το χωρίζουμε σε $1+\lfloor aM/2\rfloor$ ίσα κομμάτια) και τότε το ν φέρεται στο $\{1,2,\dots,M'\}$ με $M' \le 3M/2$. Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu(\{i\}) > 0$ για κάθε $i \le M'$. Γράφουμε $\langle\cdot,\cdot\rangle$ για το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $L_2(\nu)$. Υπάρχει $f \in Y \cap L_\infty(\nu)$ με $\|f\|_\infty \le 1$ ώστε να ισχύει:

$$\sup_{x\in Y,\, \|x\|_1\le 1} \left\langle \sum_{i\le n} g_i\psi_i, x \right\rangle = \left\langle \sum_{i\le n} g_i\psi_i, f \right\rangle = \left\langle \sum_{i\le n} \psi_i, g_i f \right\rangle.$$

Οπότε, παίρνουμε

$$\mathbb{E} \sup_{x\in Y,\, \|x\|_1\le 1} \left\langle \sum_{i\le n} g_i\psi_i \right\rangle = \sum_{i\le n} \langle \psi_i, \mathbb{E}(g_i f)\rangle.$$

Θέτοντας $x_i = \mathbb{E}(g_i f)$ και χρησιμοποιώντας την παρατήρηση της Tomczak-Jaegermann στην προηγούμενη παράγραφο, έχουμε $\| \sum_{i\le n} g_i x_i\|_{L_2(X)} \le K(Y)\|f\|_{L_2(Y)} = \|f\|_{L_2(X)}$. Επίσης, είναι

$$\Big\| \sum_{i\le n} g_i x_i \Big\|_{L_2(X)}^2 = \mathbb{E} \int \left(\sum_{i\le n} g_i x_i(t) \right)^2 d\nu(t) = \int \left(\sum_{i\le n} x_i^2(t) \right) d\nu(t).$$

Τώρα, από την $\sum_{i\leq n}\psi_i^2 = 1$ και από την ανισότητα Cauchy–Schwarz προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n \langle\psi_i, x_i\rangle &= \int\sum_{i\leq n}\psi_i(t)x_i(t)\,d\nu(t) \leq \int\left(\sum_{i\leq n}x_i^2(t)\right)^{1/2} d\nu(t)\\ &\leq \left\|\sum_{i\leq n} g_i x_i\right\|_{L_2(X)} \leq K(X).\end{aligned}$$

Για κάθε $i \leq M'$ θέτουμε $a_i = \nu(\{i\})$ και $v_i = \chi_{\{i\}}$. Τότε, η $(a_i^{-1/2}u_i)$ είναι ορθοκανονική βάση του $L_2(\nu)$. Όπως, παρατηρήσαμε νωρίτερα, ισχύει

$$\mathbb{E}\sup_{x\in(Y),\|x\|\leq 1}\left\langle\sum_{i\leq M'} g_i a_i^{-1/2} v_i, x_x\right\rangle = \mathbb{E}\sup_{x\in Y,\,\|x\|_1\leq 1}\left\langle\sum_{i\leq n} g_i n^{1/2}\psi_i, x\right\rangle \leq n^{1/2}K(X).$$

Θεωρούμε την ισομετρία $T : L_1(\nu)\to \ell_1^{M'}$ με $T(x) = \sum_{i\leq M'}\langle v_i, x\rangle e_i$, όπου (e_i) η συνήθης βάση του $\ell_1^{M'}$, και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\sup_{x\in T(Y),\,\|x\|_1\leq 1}\left\langle\sum_{i\leq M'} g_i e_i, x\right\rangle &= \mathbb{E}\sup_{x\in Y,\,\|x\|_1\leq 1}\left\langle\sum_{i\leq M'} g_i v_i, x\right\rangle\\ &\leq \max_{i\leq M'} a_i^{1/2}\mathbb{E}\sup_{x\in Y,\,\|x\|_1\leq 1}\left\langle\sum_{i\leq M'} g_i a_i^{-1/2} v_i, x\sum\right\rangle\\ &\leq C\left(\frac{n}{M}\right)^{1/2} K(X)\end{aligned}$$

από το γεγονός ότι $a_i \leq 2/M$ για $i \leq M'$. □

Με διαδοχικές εφαρμογές των προτάσεων 4.4.3 και 4.4.4 παίρνουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα:

Πρόταση 4.4.5. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $\alpha, C > 0$ ώστε αν ο X είναι υπόχωρος του ℓ_1^M διάστασης n, για τον οποίο ισχύει $K(X)(n/M)^{1/2} \leq \alpha$, τότε υπάρχουν $M' \leq 3M/4$ και υπόχωρος Y του $\ell_1^{M'}$ για τον οποίο ισχύει*

$$d(X,Y) \leq 1 + CK(X)(n/M)^{1/2}.$$

Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώνεται με διαδοχικές επαναλήψεις της πρότασης 4.4.6 σε συνδυασμό με την παρατήρηση ότι $K(Y) \leq d(X,Y)K(X)$.

4.5 Εμφυτεύσεις υποχώρων του L_p

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε το βασικό αποτέλεσμα των Bourgain–Lindenstrauss–Milman [2] το οποίο βελτιώνει αυτό του Schechtman (Θεώρημα 4.2.4) και είναι βέλτιστο ως προς την εξάρτηση από τη διάσταση:

Θεώρημα 4.5.1. *Έστω $1 < p < 2$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $c = c(\varepsilon, p) > 0$ με την εξής ιδιότητα: κάθε n–διάστατος υπόχωρος X του $L_p(\mu)$ εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$–ισομορφικά στον ℓ_1^N αν $N \geq cn$. Άρα, $N_p(n,\varepsilon) \leq cn$.*

Στη συνέχεια, από το Θεώρημα 4.5.1 (για $\varepsilon = 1$) σε συνδυασμό με την Πρόταση 3.4.3 μπορούμε να δείξουμε ότι το πρόβλημα σε ότι αφορά τις ισομορφικές εμφυτεύσεις υποχώρων του L_p έχει θετική απάντηση, αποδεικνύοντας ότι:

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $\varepsilon > 0$ και $1 < p < 2$. Υπάρχει σταθερά $C = C(p,\varepsilon) > 0$ με την ιδιότητα: κάθε n–διάστατος υπόχωρος του $L_p(\mu)$ είναι C–εμφυτεύσιμος στον $\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος 4.5.1 θα χρειασθούμε την έννοια του *type* ενός χώρου Banach:

Ορισμός 4.5.3 (type–p). Έστω X ένας χώρος Banach και $1 \leq p \leq 2$. Λέμε ότι ο X έχει (Rademacher) *type–p* αν υπάρχει μια σταθερά $C = C_p$ ώστε

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\| \leq \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^p\right)^{1/p}$$

για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $x_1, \ldots, x_n \in X$. Η μικρότερη σταθερά $C > 0$ για την οποία ισχύει η παραπάνω ανισότητα (ανεξαρτήτως επιλογής των $x_1, \ldots, x_n$) συμβολίζεται με $T_p(X)$ και λέγεται *σταθερά type–p* του X.

Είναι άμεση συνέπεια της τριγωνικής ανισότητας ότι κάθε χώρος Banach X έχει *type*–1 με $T_1(X) = 1$. Εύκολα βλέπουμε, κάνοντας χρήση της ταυτότητας του παραλληλογράμμου, ότι κάθε χώρος Hilbert X έχει type-2 με $T_2(X) = 1$. Επίσης, η περιοριστική συνθήκη $1 \leq p \leq 2$ προκύπτει από το γεγονός ότι, θέτοντας $x_1 = \cdots = x_n = x \neq 0$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Khintchine βλέπουμε ότι ένας απειροδιάστατος χώρος δεν μπορεί να έχει *type–p* αν $p > 2$. Τέλος, είναι αξιοσημείωτο το γεγονός ότι στον ορισμό, ο L_1–μέσος όρος στα αριστερά μπορεί να ανικατασταθεί από οποιοδήποτε άλλο L_q–μέσο όρο με αλλαγή φυσικά στη σταθερά *type–p* του χώρου. Αυτό είναι άμεση συνέπεια των ανισοτήτων του Kahane, σύμφωνα με την οποία, για κάθε p, q, οι L_p και L_q μέσοι όροι είναι μεταξύ τους συγκρίσιμοι.

Θεώρημα 4.5.4 (Kahane). *Έστω $0 < p < \infty$. Υπάρχει μια σταθερά C_p με την ιδιότητα: Για κάθε χώρο Banach X και για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $x_1, \ldots, x_n$ στοιχείων του X ισχύει:*

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\| \leq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|^p\right)^{1/p} \leq C_p \mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i x_i\right\|.$$

Αυτό που θα μας χρειασθεί στη συνέχεια είναι το εξής:

Θεώρημα 4.5.5. *Αν $1 \le p \le 2$, ο $L_p(\mu)$ έχει type p.*

Επίσης, θα μας χρειασθεί η έννοια των *ασθενών* L_p χώρων. Θυμίζουμε ότι μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : (\Omega, \mathcal{A}, \mu) \to \mathbb{R}$ ανήκει στον *ασθενή* L_p (συμβ. $L_{p,\infty}(\mu)$) αν ισχύει

$$\sup_{t>0}\{t\mu(\omega : |f(\omega)| > t)^{1/p}\} < +\infty.$$

Το παραπάνω supremum συμβολίζεται με $\|f\|_{p,\infty}$. Εύκολα ελέγχεται ότι ο $L_{p,\infty}(\mu)$ είναι γραμμικός χώρος, αλλά η παραπάνω ποσότητα δεν είναι νόρμα (δεν ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα). Παρ' όλα αυτά μπορεί να ορισθεί στο χώρο αυτό μια ισοδύναμη ποσότητα, η οποία είναι νόρμα και με την οποία γίνεται πλέον πλήρης χώρος με νόρμα. Γι' αυτό, λέμε ότι ο χώρος $L_{p,\infty}(\mu)$ είναι *quasi*–Banach. Παρατηρήστε επίσης ότι $L_p(\mu) \subseteq L_{p,\infty}(\mu)$, αφού αν $f \in L_p(\mu)$ από την ανισότητα του Chebyshev έχουμε $\|f\|_{p,\infty} \le \|f\|_p$.

Αυτό που θα δείξουμε στην πραγματικότητα είναι το ακόλουθο:

Θεώρημα 4.5.6 (Johnson–Schechtman, 2001). *Έστω $0 < p < q < 2$ και $0 < \varepsilon, t < \infty$. Υπάρχει μια σταθερά $C = C(\varepsilon, p, q, t)$ ώστε για όλους τους k–διάστατους υπόχωρους X του L_p με $T_q(X) \le t$ ισχύει $N_p(X, \varepsilon) \le Ck$.*

Τώρα το Θεώρημα 4.5.1 έπεται από τα θεωρήματα 4.5.5 και 4.5.6. Στην απόδειξη παρακάτω ακολουθούμε τους Johnson–Schechtman [10].

Το πρώτο λήμμα που θα χρειαστούμε είναι ένα λήμμα αλλαγής πυκνότητας, το οποίο οφείλεται στον Pisier [18]:

Λήμμα 4.5.7 (Pisier). *Αν X είναι υπόχωρος του $L_p(\mu)$ με type $q > p$, τότε υπάρχει μια μη αρνητική συνάρτηση $f \in L_1(\mu)$ ώστε*

$$\|f\|_{L_1(\mu)} = 1, \quad \{\omega : f(\omega) = 0\} \subseteq \{\omega : x(\omega) = 0 \; \forall x \in X\}$$

και ακόμη για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\|x/f\|_{L_{q,\infty}(\nu)} \le C(p,q)\|x\|_{L_p(\mu)},$$

όπου ν το μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $d\nu = f d\mu$.

Απόδειξη του θεωρήματος 4.5.6. Αρχικά μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X \subseteq \ell_p^m$ (για κάποιο μεγάλο m). Από το προηγούμενο Λήμμα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X \subseteq L_p(\{1, \dots, m\}, \nu)$ για κάποιο μέτρο πιθανότητας ν ώστε

$$\|x\|_{L_{q,\infty}(\nu)} \le C_1\|x\|_{L_p(\nu)}$$

για κάθε $x \in X$. Επίσης, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\nu(i) \ge 1/2m$ (αντικαθιστώντας την πυκνότητα f του μέτρου από την $(1+f)/2$ κι αυτό θα επηρρεάσει απλώς τη σταθερά

C_1, αντικαθιστώντας την από μια άλλη απόλυτη σταθερά). Όπως στην Πρόταση 4.4.4 μπορούμε να χωρίσουμε τα άτομα του ν με μέτρο μεγαλύτερο του $4/m$ και τότε η διάσταση θα αντικατασταθεί από $m' \leq 3m/2$ και $\nu(i) \leq 4/m$ για $1 \leq i \leq 3m/2$. Για $r = q/p$ έχουμε:

$$\|\{\nu_i|x_i|^p\}_{i=1}^{3m/2}\|_{r,\infty} = \max_{t>0} t(\mathrm{card}\{i : \nu_i|x_i|^p \geq t\})^{1/r}.$$

Από το γεγονός ότι κάθε $\nu_i = O(1/m)$ έχουμε ότι

$$\|x\|_{q,\infty} = \max_{t>0}(\nu(i : |x_i| \geq t))^{1/q} \approx \max_{t>0}\left[tm^{-1/q}(\mathrm{card}(i : |x_i| \geq t))^{1/q}\right].$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$\|\{\nu_i|x_i|^p\}_{i=1}^{3m/2}\|_{r,\infty} \leq C_2 m^{1/r-1}$$

για κάποια σταθερά C_2 η οποία εξαρτάται μόνο από τα $p, q, T_q(X)$. Από την ανισότητα του Pisier για martingales (Πρόταση 1.2.6) και λαμβάνοντας υπόψιν την παραπάνω εκτίμηση βλέπουμε ότι:

$$P\left(|\sum_{i=1}^{3m/2} \varepsilon_i\nu_i|x_i|^p| > t\right) \leq 2\exp(-\delta' t^s m),$$

όπου s ο συζυγής εκθέτης του r (και δεδομένου ότι $r = q/p < 2$). Αυτό όμως δεν περιορίζει το αποτέλεσμα. Από ένα κλασικό επιχείρημα t–δικτύου σε συνδυασμό με την παραπάνω ανισότητα κατανομής βρίσκουμε ότι

$$P\left(\sup_{x\in X, \|x\|\leq 1}\left|\sum_{i=1}^{3m/2} \varepsilon_i\nu_i|x_i|^p\right| > t\right) \leq 2\exp(k\log(3/t) - \delta' t^s m).$$

Έπεται ότι αν $\delta' t^s m(\log(3/t))^{-1} > 2k$ τότε μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο του $\{1, \ldots, 3m/2\}$ με πληθάριμο το πολύ $3m/4$ ώστε ο περιορισμός του παραπάνω τελεστή σε αυτό να είναι $(1+2t)$–ισομορφισμός. Επιλέγοντας $t \simeq (\frac{k}{m}\log\frac{m}{k})^{1/s}$ παίρνουμε ότι υπάρχει ένα σύνολο με το πολύ $3m/4$ συντεταγμένες ώστε ο περιορισμός του τελεστή εκεί να είναι $(1 + C(\frac{k}{m}\log\frac{m}{k})^{1/s})^{1/p}$–ισομορφισμός, όπου η σταθερά C εξαρτάται μόνο από τα $q, p, T_q(X)$. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα όσο εξακολουθεί να ισχύει η

$$\prod_i^l \left(1 + C(\frac{k}{m(3/4)^i}\log(\frac{m}{k(3/4)^i}))^{1/s}\right)^{1/p} \leq 1 + \varepsilon,$$

βλέπουμε ότι ο X εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$–ισομορφικά στον ℓ_p^N για κάποιο $N \leq m(3/4)^{l+1}$. Παρατηρήστε ότι σε κάθε επαναληπτικό επιχείρημα παίρνουμε ένα χώρο ο οποίος είναι το πολύ 2–ισομορφικός με τον X. Εφόσον ο χώρος αυτός έχει σταθερά *type–q* το πολύ διπλάσια αυτής του αρχικού χώρου, το επαναληπτικό επιχείρημα είναι εφικτό. Τώρα έπεται εύκολα το συμπέρασμα. □

4.6 Ισομορφικές εμφυτεύσεις υποχώρων του L_1

Σε αυτή την ενότητα θεωρούμε έναν n–διάστατο υπόχωρο X του L_1 και ασχολούμαστε με το ακόλουθο ερώτημα: Αν δοθεί $\varepsilon > 0$ υπάρχει σταθερά $C = C(\varepsilon) > 0$ ανεξάρτητη της διάστασης ώστε ο X να εμφυτεύεται στον $\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$ με σταθερά ισομορφισμού C;

Με άλλα λόγια, το ερώτημα που εξετάζουμε σε αυτή την παράγραφο γενικεύει αυτό του Κεφαλαίου 3 και συγκεκριμένα της §3.4. Η καλύτερη απάντηση εδώ είναι της μορφής $C \log n$ και οφείλεται στους Johnson–Schechtman.

Θα χρειασθούμε αρχικά ένα λήμμα, το οποίο είναι «γεωμετρική» μετάφραση ενός θεωρήματος του Pisier [18].

Λήμμα 4.6.1. *Εστω $0 < r < p < \infty$. Υπάρχουν σταθερά $C = C(p, r) > 0$ και $y \in \mathbb{R}^n$ με $\|y\|_1 = 1$ ώστε: για κάθε $\sigma \subseteq [n]$ και για κάθε $x \in B_r^n$ ισχύει*

$$\|P_\sigma x\|_r \leq C\|P_\sigma y\|_1^{\frac{1}{r}-\frac{1}{p}},$$

όπου P_σ η προβολή στον υπόχωρο $[e_i]_{i\in\sigma}$.

Στη συνέχεια κάνουμε την εξής αναγωγή: ταυτίζουμε κάθε χώρο ℓ_r^n με τον χώρο συναρτήσεων $L_r(\Omega, \mu)$, όπου $\Omega = \{1, 2, \ldots, n\}$ και $\mu(\cdot)$ το μέτρο αρίθμησης στον $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$. Τότε, από το παραπάνω λήμμα έπεται το εξής:

Πρόταση 4.6.2. *Εστω $0 < r < p < \infty$. Υπάρχει μέτρο πιθανότητας ν στον $(\Omega, \mathcal{P}(\Omega))$, ώστε οι χώροι $L_{p,\infty}(\nu)$ και $L_r(\mu)$ να είναι ισομορφικοί.*

Απόδειξη. Θεωρούμε το $y \in \mathbb{R}^n$ με $\|y\|_1 = 1$ όπως στο προηγούμενο λήμμα και ορίζουμε το μέτρο ν στον Ω με πυκνότητα $d\nu = |y| d\mu$, δηλαδή $\nu(i) = |y_i|$ για κάθε $1 \leq i \leq n$. Επιπλέον, ο τελεστής $T : L_r(\mu) \to L_r(\nu)$ με $(Tx)_i = |y_i|^{-1/r} x_i$ είναι γραμμική ισομετρία. (παρατηρήστε ότι $y_i \neq 0$). Συνεπώς, για να δείξουμε το συμπέρασμα αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχουν σταθερές $c = c(p, r)$ και $C = C(p, r) > 0$ ώστε να ισχύει

$$c\|x\|_r \leq \|x\|_{p,\infty} \leq C\|x\|_r$$

για κάθε $x : (\Omega, \nu) \to \mathbb{R}$. Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι το ν είναι μέτρο πιθανότητας, ενώ η δεύτερη από την ανισότητα του προηγούμενου λήμματος. Πράγματι: έχουμε

$$\begin{aligned}
\|x\|_r^r = \int_\Omega |x|^r \, d\nu &= \int_0^\infty r t^{r-1} \nu(i : |x_i| > t) \, dt \\
&\leq \int_0^{\|x\|_{p,\infty}} r t^{r-1} \, dt + \int_{\|x\|_{p,\infty}}^\infty r t^{r-p-1} \|x\|_{p,\infty}^p \, dt \\
&= \|x\|_{p,\infty}^r + \frac{r}{p-r} \|x\|_{p,\infty}^p \|x\|_{p,\infty}^{r-p} \\
&= \left(1 + \frac{r}{p-r}\right) \|x\|_{p,\infty}^r.
\end{aligned}$$

Έτσι, η ζητούμενη σταθερά είναι η $c(p,r) = (1+\frac{r}{p-r})^{-1/r}$. Για την άλλη ανισότητα έχουμε:

$$\begin{aligned} \|x\|_{p,\infty} &= \sup_{t>0}\left\{t\left[\nu(i\in \mathrm{supp}(y) : |y_i|^{-1/r}|x_i| > t)\right]^{1/p}\right\} \\ &\leq \sup_{t>0}\left\{t\left[\nu(i : |x_i| > t|y_i|^{1/r})\right]^{1/p}\right\}. \end{aligned}$$

Θέτουμε $E_{t,x} = \{i : |x_i| > t|y_i|^{1/r}\}$, οπότε $\nu(E_{t,x}) = \sum_{i\in E_{t,x}} |y_i|$. Από τον ορισμό του $E_{t,x}$ έχουμε

$$\nu(E_{t,x}) = \sum_{i\in E_{t,x}} |y_i| \leq \frac{1}{t^r}\sum_{i\in E_{t,x}} |x_i|^r.$$

Αν λοιπόν $\|x\|_r \leq 1$, από το λήμμα έπεται ότι

$$\sum_{i\in E_{t,x}} |x_i|^r \leq C^r\left(\sum_{i\in E_{t,x}} |y_i|\right)^{1-r/p} = C^r[\nu(E_{t,x})]^{1-r/p}.$$

Συνδυάζοντας τις δυο παραπάνω σχέσεις συμπεραίνουμε ότι

$$t(\nu(E_{t,x}))^{1/p} \leq C$$

για κάθε $t > 0$ και για κάθε $\|x\|_r \leq 1$. Αυτό αποδεικνύει ότι $\|x\|_{p,\infty} \leq C\|x\|_r$ για κάθε x.
$\square$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να αποδείξουμε το κεντρικό αποτέλεσμα της παραγράφου. Η περίπτωση που μας ενδιαφέρει κυρίως είναι για $p = 1$, παρ' όλα αυτά αποδεικνύουμε το γενικότερο:

Θεώρημα 4.6.3 (Johnson–Schechtman, 2003). *Έστω $1 \leq p < 2$ και $\varepsilon > 0$. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C = C(p,\varepsilon) > 0$ ώστε: κάθε n–διάστατος υπόχωρος X του L_p είναι $C(\log(2+n))^{1/p}$–εμφυτεύσιμος στον $\ell_p^{(1+\varepsilon)n}$.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda > 1$ και $X \subseteq L_p$ με $\dim X = n$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $C = C(p,\lambda) > 0$ ώστε ο X να εμφυτεύεται $C(\log(\lambda n))^{1/p}$–ισομορφικά στον $\ell_p^{\lfloor \lambda n\rfloor}$. Από την Πρόταση 3.4.3 έπεται ότι αρκεί να το αποδείξουμε για κάποιο $\lambda = \lambda(p)$. Έπεται από το Θεώρημα 4.5.6 ότι ο X εμφυτεύεται 2–ισομορφικά στον $\ell_r^{\lambda n}$ για $0 < r < p$ και κάποιο λ που εξαρτάται από το p και r. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο λn είναι φυσικός. Από την προηγούμενη πρόταση έχουμε ότι υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας ν στον $\{1,2,\ldots,\lambda n\}$ ώστε οι χώροι $\ell_r^{\lambda n}$ και $L_{p,\infty}(\nu)$ να είναι ισομορφικοί. Έπεται ότι, ο X είναι ισομορφικός με έναν υπόχωρο Y του $L_{p,\infty}(\nu)$ για τον οποίο ισχύει

$$c\|y\|_r \leq \|y\|_{p,\infty} \leq C\|y\|_r$$

για κάθε $y \in Y$. Στη συνέχεια δείχνουμε ότι υπάρχει $A \subseteq [n]$ με κατάλληλα μικρό μέτρο ώστε η προβολή στον $[e_i]_{i\in A^c}$ να είναι ισομορφισμός. Πράγματι· αν θεωρήσουμε ένα σύνολο A θετικού μέτρου, τότε παρατηρούμε ότι για τον χώρο πιθανότητας $(A, \frac{\nu|_A}{\nu(A)})$ ισχύει

$$\|x|_A\|_r \leq c^{-1}(\nu(A))^{1/r-1/p}\|x|_A\|_{p,\infty} \leq \frac{C}{c}(\nu(A))^{1/r-1/p}\|x\|_r.$$

Οπότε, αν επιλέξουμε ένα $M > 0$ ώστε $(C/c)M^{1/p-1/r} < 1/2$ έπεται ότι για το σύνολο $A_M = \{i : \nu(i) \leq 1/(M\lambda n)\}$ έχουμε $\nu(A_M) \leq 1/M$. Έτσι, η προβολή στο συμπλήρωμα του A_M είναι 2–ισομορφισμός. Παρατηρήστε ότι το M εξαρτάται μόνο από τα p, r. Επίσης, η ανισότητα $c\|x\|_r \leq \|x\|_{p,\infty} \leq C\|x\|_r$ εξακολουθεί να ισχύει αν περιοριστούμε εκεί, αντικαθιστώντας τις c, C από άλλες απόλυτες σταθερές. Έτσι, για κάθε $i \notin A_M$ έχουμε $\nu(i) \geq 1/(M\lambda n)$. Τώρα, είναι εύκολο να δούμε ότι ο $L_p(\nu|_{A_M^c})$ είναι ισομετρικός με τον $\ell_p^{\lambda n}$ (αφού το μέτρο $\nu|_{A_M^c}$ είναι άκρως ατομικό). Τέλος, η (φυσική) απόσταση μεταξύ των $L_{p,\infty}(\nu|_{A^c})$ και $L_p(\nu|_{A^c})$ είναι της τάξης $(\log(\lambda n))^{1/p}$. Πράγματι: ισχύει πάντοτε $\|\cdot\|_{p,\infty} \leq \|\cdot\|_p$, επομένως αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $c = c(p) > 0$ ώστε

$$\|x\|_p \leq c(\log(\lambda n))^{1/p}\|x\|_{p,\infty},$$

για κάθε x περιορισμένο στο A^c. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
\|x\|_p^p &= \int_0^\infty pt^{p-1}\nu(i : |x_i| > t)\, dt \\
&\leq \int_0^{\|x\|_{p,\infty}} pt^{p-1}\, dt + \int_{\|x\|_{p,\infty}}^{\|x\|_\infty} pt^{-1}\|x\|_{p,\infty}^p\, dt \\
&= \|x\|_{p,\infty}^p + p\|x\|_{p,\infty}^p \log\left(\frac{\|x\|_\infty}{\|x\|_{p,\infty}}\right).
\end{aligned}$$

Από το γεγονός ότι έχουμε απαλείψει τα μικρά άτομα έπεται ότι $\|x\|_\infty \leq (\lambda n M)^{1/p}\|x\|_{p,\infty}$ και αντικαθιστώντας έχουμε το ζητούμενο. □

Βιβλιογραφία

[1] Bollobás, B., *Combinatorics.* Cambridge University Press, (1986).

[2] Bourgain, J., Lindenstrauss, J., Milman, V., *Approximation of zonoids by zonotopes.* Acta math. 162 (1989), no. 1-2, p. 73-141.

[3] Carothetrs, N.L., *A Short Course on Banach Space Theory.* London Mathematical Society, Cambridge University Press, (2005).

[4] Durrett, R., *Probability: Theory and Examples.* Duxbury Press, (1996).

[5] Dvoretzky, A., *Some results on convex bodies and Banach spaces.* 1961, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960) pp. 123–160 Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon, Oxford.

[6] Elton, J., *Sign embeddings of ℓ_1^n.* Trans. Amer. Math. Soc. 279 (1983), no. 1, p. 113-124.

[7] Figiel, T., Lindenstrauss, J., Milman, V.D., *The dimension of almost spherical sections of convex bodies.* Acta Math. 139 (1977) 53-94.

[8] Johnson, W.B., Schechtman, G., *Embedding ℓ_p^m into ℓ_1^n.* Acta Math. 149 (1982), no. 1-2, p. 71-85.

[9] Johnson, W.B., Schechtman, G., *Very tight embeddings of subspaces of L_p, $1 \leq p < 2$, into ℓ_p^n.* Geometric and Funct. Anal. 13 (2003), p. 845-851.

[10] Johnson, W.B., Schechtman, G., *Finite Dimensional Subspaces of L_p.* Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol.I, p. 837–870, North–Holland, Amsterdam, (2001).

[11] Kashin, B.S. *Sections of some finite dimensional sets and classes of smooth functions.* Izv. Acad. Nauk SSSR, ser. mat. 41 (1977), p. 334-351 (Russian).

[12] Ledoux, M., Talagrand, M., *Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes.* Springer–Verlag (1991).

[13] Milman, V.D., *A new proof of A. Dvoretzky's theorem on cross-sections of convex bodies.* (Russian), Funkcional. Anal. i Prilozhen. 5 (1971), no. 4, p. 28–37.

[14] Milman, V., Schechtman, G., *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces.* Lecture Notes in Mathematics, 1200 (1986), Springer-Verlag, Berlin.

[15] Naor, A., Zvavitch, A., *Isomorphic embedding of* ℓ_p^n, $1 < p < 2$, *into* $\ell_1^{(1+\varepsilon)n}$. Israel J. Math. 122 (2001), p. 371-380.

[16] Pisier, G., *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces.* Lecture Notes in Mathematics, 1206 (1986), p. 167-241.

[17] Pisier, G., *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry.* Cambridge Tracts in Mathematics, 94, (1989).

[18] Pisier, G., *Factorization of Operators Through* $L_{p,\infty}$ *or* $L_{p,1}$ *and Non-Commutative Generalizations.* Math. Ann. 276, (1986), p. 105–136.

[19] Szarek, S.Z., *On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of* ℓ_1^n. Bull. Acad. Sc. Polon. 26 (1978).

[20] Szarek, S.Z., *Volume estimates and nearly Euclidean decompositions of normed spaces.* Séminaire d' analyse fonctionnelle (Polytechnique) (1979-1980), exp. no. 25, p. 1-8.

[21] Talagrand, M., *Embedding subspaces of* L_1 *into* ℓ_1^N. Proc. Amer. Math. Soc. 108 (1990), p. 363–369.