# Διάφορες προσεγγίσεις στην εικασία του υπερεπιπέδου για τον όγκο των τομών κυρτών σωμάτων

Διπλωματική Εργασία

Κωνσταντίνος Πάτσαλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών

Αθήνα – 2021

# Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

# Εισαγωγή

## 1.1 Τοποθέτηση του προβλήματος

Η *εικασία του υπερεπιπέδου* (αγγλ. "hyperplane conjecture" ή "slicing problem") αποτελεί ένα ανοικτό πρόβλημα στην ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία το οποίο έχει απασχολήσει τον κλάδο αυτό τις τελευταίες δεκαετίες. Έχουν δοθεί απαντήσεις σε ειδικές περιπτώσεις και έχει επιτευχθεί σημαντική πρόοδος έως σήμερα, ωστόσο το πρόβλημα παραμένει ανοικτό. Στην εργασία αυτή θα δούμε τις προσεγγίσεις που έχουν γίνει, καθώς και κάποιες αναγωγές του προβλήματος.

Η ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία μελετά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και προσπαθεί να διαπιστώσει αν διάφορες παράμετροι των σωμάτων αυτών εξαρτώνται ή όχι από την διάσταση $n$. Γι' αυτόν ακριβώς το λόγο, η εικασία του υπερεπιπέδου, όπως θα τη δούμε, τοποθετείται στον κλάδο αυτό.

Ξεκινάμε με κάποιους βασικούς ορισμούς.

**Ορισμός 1.1.1.** Κυρτό σώμα ονομάζεται ένα συμπαγές υποσύνολο $K$ του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό, τέτοιο ώστε $\lambda x + (1-\lambda)y \in K$ για κάθε $x, y \in K$ και $\lambda \in [0,1]$. Προφανώς ένα κυρτό σώμα είναι συνεκτικό.

**Ορισμός 1.1.2.** Το βαρύκεντρο ενός κυρτού σώματος $K$ είναι το

$$\mathrm{bar}(K) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_K x\, dx \ \ (\in \mathbb{R}^n).$$

**Ορισμός 1.1.3.** Ένα κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό (ή λέμε ότι βρίσκεται σε «ισοτροπική θέση») αν $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, το βαρύκεντρο του $K$ είναι στην αρχή των αξόνων και υπάρχει μια σταθερά $L_K > 0$ (η ισοτροπική σταθερά του $K$) ώστε

$$\int_K \langle x, \vartheta \rangle^2 dx = L_K^2$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$.

**Πρόταση 1.1.4.** *Υπάρχουν επίσης οι εξής ισοδύναμοι τρόποι να οριστεί το ισοτροπικό κυρτό σώμα, με την υπόθεση ότι $\mathrm{vol}_n(K) = 1$ και $K$ κεντραρισμένο:*

(i) $\int_K \langle x,y\rangle^2 dx = a^2|y|^2 \ \forall y\in\mathbb{R}^n$, *όπου* $a=a(K)$.

(ii) *Για κάθε* $i,j=1,...,n$ *ισχύει* $\int_K \langle x,e_j\rangle\langle x,e_i\rangle = a^2\delta_{ij} = \begin{cases} a^2, & i=j \\ 0, & i\neq j, \end{cases}$ *όπου* $a$ *όπως πριν.*

(iii) *Για κάθε* $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ *γραμμική απεικόνιση ισχύει* $\int_K \langle x,Tx\rangle dx = a^2 trT$, *όπου* $a$ *όπως πριν.*

*Απόδειξη.* $K$ ισοτροπικό $\Longrightarrow$ (i): Αν $y\in\mathbb{R}^n$, τότε $y=\vartheta|y|$ όπου $\vartheta\in S^{n-1}$, άρα

$$\int_K \langle x,y\rangle^2 dx = |y|^2\int_K \langle x,\vartheta\rangle^2 dx = |y|^2 L_K^2.$$

(i)$\Longrightarrow$ (ii): Αν $i=j$, τότε

$$\int_K \langle x,e_j\rangle\langle x,e_i\rangle dx = \int_K \langle x,e_i\rangle^2 dx = a^2|e_i|^2 = a^2.$$

Αν $i\neq j$, τότε

$$\begin{aligned} 2a^2 &= \int_K \langle x,e_i+e_j\rangle^2 dx = \int_K \left(\langle x,e_i\rangle^2+\langle x,e_j\rangle^2+2\langle x,e_i\rangle\langle x,e_j\rangle\right) dx \\ &= a^2+a^2+2\int_K \langle x,e_i\rangle\langle x,e_j\rangle dx \Longrightarrow \int_K \langle x,e_i\rangle\langle x,e_j\rangle dx = 0. \end{aligned}$$

(ii)$\Longrightarrow$ (iii): Για $T=(t_{ij})_{i,j=1}^n$:

$$\int_K \langle x,Tx\rangle dx = \int_K \sum_{i,j=1}^n t_{ij}\langle x,e_i\rangle\langle x,e_j\rangle dx = \sum_{i,j=1}^n t_{ij}\int_K \langle x,e_i\rangle\langle x,e_j\rangle dx = a^2\mathrm{tr}T.$$

(iii)$\Longrightarrow$ $K$ ισοτροπικό:

$$\vartheta\in S^{n-1}\Longrightarrow \int_k \langle x,\vartheta\rangle^2 dx = \int_K \langle x,\langle x,\vartheta\rangle\vartheta\rangle dx = a^2\mathrm{tr}T,$$

όπου $T(x_1,...,x_n)=(x_1\vartheta_1+...+x_n\vartheta_n)(\vartheta_1,...,\vartheta_n)=|\vartheta|^2=1$. □

Υπενθυμίζουμε τους συμβολισμούς $S^{n-1}$ για τη σφαίρα κέντρου 0 και ακτίνας 1 στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathrm{vol}_n(K)=\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_K\,dx$ για τον όγκο του $K$ στις $n$ διαστάσεις.

Διαισθητικά ένα ισοτροπικό σώμα έχει τις ίδιες ροπές αδρανείας προς οποιαδήποτε κατεύθυνση και αν κοιτάξει ένας παρατηρητής που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων. Δεν απαιτείται το $K$ να είναι συμμετρικό, δηλαδή να ισχύει $x\in K \iff -x\in K$. Από τον ορισμό όμως πρέπει να είναι κεντραρισμένο, δηλαδή να έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων.

Μερικοί ακόμη συμβολισμοί: $|\cdot|$ η ευκλείδεια νόρμα που επάγεται από το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ του $\mathbb{R}^n$. $B_2^n$ η ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα $\{x\in\mathbb{R}^n:|x|\leqslant 1\}$, $\omega_n:=\mathrm{vol}_n(B_2^n)$, π.χ. $\omega_2=\pi$, $\sigma$ το ομοιόμορφο μέτρο στην $S^{n-1}$. Αν $A,B$ είναι υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ τότε $A+B:=\{a+b: a\in A, b\in B\}$ και $\lambda A=\{\lambda a: a\in A\}$ για κάθε $\lambda\in\mathbb{R}$, $O(n)$ το σύνολο των πινάκων ορθογώνιων γραμμικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$ και $\nu$ το μέτρο Haar σε αυτό. Υπενθυμίζουμε ότι το μέτρο Haar είναι το μοναδικό, έως μια πολλαπλασιαστική σταθερά, αριθμήσιμα προσθετικό μέτρο Borel $\nu$ σε μια τοπικά συμπαγή Hausdorff ομάδα $G$ που είναι αναλλοίωτο ως προς (αριστερές) μεταφορές

($\nu(gS) = \nu(S)$ για κάθε $S \subseteq G$ και $g \in G$), πεπερασμένο στα συμπαγή σύνολα και είναι εσωτερικά κανονικό για τα ανοιχτά σύνολα και εξωτερικά κανονικό για τα Borel, δηλ. $\nu(S) = \sup\{\nu(K) : K \subseteq S \text{ συμπαγές}\}$ για $S$ ανοιχτό και $\nu(S) = \inf\{\nu(U) : S \subseteq U, U \text{ ανοιχτό}\}$ για $S$ Borel. Είναι φανερό ότι το μέτρο Haar μπορεί να κανονικοποιηθεί ώστε να γίνει μέτρο πιθανότητας. Ως γνωστόν από τη διαφορική γεωμετρία, το σύνολο των υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $k$ αποτελεί μια διαφορική πολλαπλότητα – την λεγόμενη πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ – η οποία εφοδιάζεται με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Αν $F \in G_{n,k}$, συμβολίζουμε $P_F : \mathbb{R}^n \to F$ την ορθογώνια προβολή του $\mathbb{R}^n$ στον $F$. Δηλαδή,

$$P_F(x) = \sum_{j=1}^{k} \langle x, u_i \rangle u_i$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, όπου $\{u_1, \ldots, u_k\}$ ορθοκανονική βάση του $F$. Ορίζουμε επίσης $B_F := B_2^n \cap F$ και $S_F := S^{n-1} \cap F$.

Είμαστε τώρα έτοιμοι να τοποθετήσουμε το πρόβλημα, το οποίο σχετίζεται με τον όγκο των $(n-1)$-διάστατων τομών ενός κυρτού σώματος $K$ στον $\mathbb{R}^n$.

**Εικασία του υπερεπιπέδου:** Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\max_{\vartheta \in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) \geqslant c$$

για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα $K$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Όταν λέμε «απόλυτη σταθερά», εννοούμε ανεξάρτητη από τη διάσταση. Η ονομασία της εικασίας προέρχεται βέβαια από το γεγονός ότι ο υπόχωρος $\vartheta^{\perp}$ του $\mathbb{R}^n$ έχει διάσταση ακριβώς $n-1$, δηλαδή είναι ένα υπερεπίπεδο.

Πώς συνδέεται η εικασία αυτή με την ισοτροπικότητα; Όπως θα αποδείξουμε παρακάτω, η εικασία του υπερεπιπέδου είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη εικασία.

**Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς:** Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geqslant 2$,

$$L_n := \max\{L_K : K \text{ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant C.$$

Αν και η $L_n$ μοιάζει να είναι μια παράμετρος που αφορά μόνο στα ισοτροπικά σώματα, στην πραγματικότητα αφορά σε όλα τα κυρτά σώματα, διότι, όπως θα δείξουμε, κάθε κυρτό σώμα τοποθετείται με μοναδικό (έως ορθογώνιους μετασχηματισμούς) τρόπο σε ισοτροπική θέση μέσω ενός ομοπαραλληλικού μετασχηματισμού. Ακριβέστερα: αν ορίσουμε μια σχέση $\sim$ μεταξύ υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ ως εξής: $A \sim B \iff$ υπάρχει αφφινικός μετασχηματισμός $\varphi$, δηλαδή σύνθεση ενός γραμμικού μετασχηματισμού και μιας μεταφοράς, ώστε $B = \varphi(A)$, τότε η $\sim$ είναι σχέση ισοδυναμίας, η δε κλάση ισοδυναμίας που ορίζει (αφφινική κλάση) η $\sim$ και περιέχει το κυρτό σώμα $K$, περιέχει ακριβώς ένα (έως ορθογώνιους μετασχηματισμούς) ισοτροπικό κυρτό σώμα.

## 1.2 Σύντομη ιστορία του προβλήματος – οι μέχρι τώρα προσεγγίσεις

Την περίοδο 1985-6, ο Bourgain στο άρθρο του "On high dimensional functions associated to convex bodies" έθεσε την εικασία του υπερεπιπέδου ως ερώτημα, ενώ ενδιαφερόταν για να βρει φράγματα για την $L_p$-νόρμα μεγιστικών τελεστών που ορίζονταν μέσω τυχόντος συμμετρικού κυρτού σώματος. Η ισοδύναμη εκδοχή του ερωτήματος (η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς) έγινε ευρέως γνωστή από το άρθρο των V. Milman και Pajor, ο δε K. Ball επεξέτεινε ως ένα βαθμό το πρόβλημα στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων. Ένα πρώτο άνω φράγμα για την παράμετρο $L_n$ έδωσε ο ίδιος ο Bourgain, γύρω στο 1990, δείχνοντας συγκεκριμένα ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\log n$. Το 2006, ο B. Klartag βελτίωσε αυτό το φράγμα σε $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}$. Μάλιστα, έδωσε μια πλήρη λύση (καταφατική) της «ισομορφικής εικασίας του υπερεπιπέδου»: δοθέντος κυρτού σώματος $K$ στον $\mathbb{R}^n$ και $\varepsilon \in (0,1)$, υπάρχει κεντραρισμένο κυρτό σώμα $T \subset \mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\frac{1}{1+\varepsilon}T \subseteq K + x \subseteq (1+\varepsilon)T$$

και η ισοτροπική σταθερά $L_T$ να δέχεται άνω φράγμα ανεξάρτητο του $n$. Το άνω φράγμα που βρήκε ήταν

$$L_T \leqslant C/\sqrt{\varepsilon}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. Εννοείται ότι όταν μιλάμε για την ισοτροπική σταθερά μη ισοτροπικού (τυχόντος) σώματος, αναφερόμαστε στην ισοτροπική του τοποθέτηση. Η μέθοδος του Klartag βασίζεται στις ιδιότητες του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace του ομοιόμορφου μέτρου σε ένα κυρτό σώμα.

Καταφατικές απαντήσεις για την ύπαρξη άνω φράγματος, ανεξάρτητου του $n$, για την ισοτροπική σταθερά δόθηκαν για διάφορες ειδικές περιπτώσεις σωμάτων, λίγο μετά την πρώτη τοποθέτηση του προβλήματος. Συγκεκριμένα, τέτοια φράγματα βρέθηκαν για τα unconditional κυρτά σώματα (σώματα συμμετρικά ως προς τους υποχώρους που ορίζουν γνήσια υποσύνολα της «καρτεσιανής» βάσης του $\mathbb{R}^n$) χάρις στην ανισότητα Loomis-Whitney και επίσης χάρις στους Bobkov και Nazarov. Επίσης για σώματα των οποίων τα πολικά σώματα περιέχουν μεγάλους αφφινικούς κύβους, για μοναδιαίες μπάλες 2-κυρτών χώρων με δοθείσα σταθερά $\alpha$, για ζωνοειδή, για μοναδιαίες μπάλες κλάσεων Schatten. Φράγματα της τάξεως του $\log n$ δόθηκαν για πολύτοπα και πολύεδρα.

Μερικές νεώτερες προσεγγίσεις ανάγουν το πρόβλημα της εύρεσης άνω φραγμάτων για την ισοτροπική σταθερά στη μελέτη κυρτών σωμάτων με ισοτροπική σταθερά της μέγιστης δυνατής τάξης, δηλαδή σχεδόν ίση με $L_n$. Έτσι, οι Bourgain, Klartag και V. Milman ανήγαγαν την εικασία στην εύρεση φράγματος για την ισοτροπική σταθερά μόνο των κυρτών σωμάτων που έχουν λόγο όγκων φραγμένο από απόλυτη σταθερά. Οι Δαφνής και Παούρης βρήκαν μια αναγωγή συσχετίζοντας την εικασία με τη συμπεριφορά της παραμέτρου $I_{-p}(K)$ και οι Γιαννόπουλος, Παούρης και Βριτσίου με τη συμπεριφορά της παραμέτρου $I_1(K, Z_q^\circ(K))$. Οι Klartag, E. Milman και Βριτσίου συσχέτισαν την εικασία με τη μελέτη της ακτίνας όγκου των $L_p$-κεντροειδών σωμάτων.

Πρόσφατα, ένα άρθρο του Klartag (2018) δείχνει ότι μπορούμε, μετατοπίζοντας ελαφρά το πολικό ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος, να πάρουμε ένα άλλο σώμα με φραγμένη ισοτροπική σταθερά.

Τέλος, το 2020, ο Y. Chen προσδιόρισε ένα σχεδόν σταθερό κάτω φράγμα για τον ισοπεριμετρικό συντελεστή της εικασίας KLS, με αποτέλεσμα ένα αντίστοιχο σχεδόν σταθερό άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

# Προαπαιτούμενα από την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία

## 2.1 Γενικά περί κυρτών σωμάτων – γεωμετρικές ανισότητες

Σε αυτή την παράγραφο θα εισαγάγουμε γεωμετρικές έννοιες σχετικά με τα κυρτά σώματα και θα διατυπώσουμε κάποιες ανισότητες, τις οποίες θα χρειαστούμε παρακάτω.

Υπενθυμίζουμε ότι ένα κυρτό σώμα $K$ λέγεται κεντραρισμένο αν $\mathrm{bar}(K) = 0$. Ένας άλλος τρόπος να οριστεί το κεντραρισμένο σώμα είναι ο εξής:

$$\mathrm{bar}(K) = 0 \iff \int_K \langle x, \vartheta \rangle \, dx = 0 \text{ για κάθε } \vartheta \in S^{n-1}.$$

Πράγματι, με τον συμβολισμό $x = (x_1, \dots, x_n) \in K$ και $\vartheta = (\vartheta_1, \dots, \vartheta_n) \in S^{n-1}$, έχουμε $\mathrm{bar}(K) = (0, \dots, 0)$ αν και μόνο αν $\int_K (x_1, \dots, x_n) \, dx = 0$ δηλαδή αν και μόνο αν $\int_K x_1 \, dx = 0, \dots,$ και $\int_K x_n \, dx = 0$, απ' όπου έπεται ότι

$$\int_K \langle x, \vartheta \rangle \, dx = \int_K (\vartheta_1 x_1 + \cdots + \vartheta_n x_n) \, dx = \vartheta_1 \int_K x_1 \, dx + \cdots + \vartheta_n \int_K x_n \, dx = 0$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Για το αντίστροφο παρατηρούμε ότι αν $\int_K \langle x, \vartheta \rangle \, dx = 0$ για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ τότε επιλέγοντας $\vartheta = e_i$ έχουμε ότι $\int_K x_i \, dx = 0$ για κάθε $i = 1, \dots, n$.

Ορίζουμε επίσης την ακτινική συνάρτηση $\rho_K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^+$ ενός κυρτού σώματος $K$, το οποίο έχει το 0 ως εσωτερικό του σημείο, ως εξής:

$$\rho_K(x) = \max\{t > 0 : tx \in K\}.$$

Είναι σαφές ότι $\rho_K(x) \geqslant 1$ αν και μόνο αν $x \in K$.

Η συνάρτηση στήριξης του $K$ είναι η $h_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$,

$$h_K(y) = \max\{\langle x, y \rangle : x \in K\}.$$

Αν $\vartheta \in S^{n-1}$ και $t\vartheta \in K$ για κάποιον $t > 0$, έχουμε

$$t = t|\vartheta|^2 = \langle t\vartheta, \vartheta\rangle \leqslant \max\{\langle x, \vartheta\rangle : x \in K\} = h_K(\vartheta),$$

άρα $\rho_K(\vartheta) \leqslant h_K(\vartheta)$.

Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση στήριξης ορίζουμε την έννοια του μέσου πλάτους του $K$:

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta).$$

Ορίζουμε επίσης την ακτίνα $R$ του $K$ και αν το $0$ είναι εσωτερικό σημείο του $K$ την έσω ακτίνα $r$ του $K$:

$$R(K) = \max\{|x| : x \in A\} \quad \text{και} \quad r(K) = \max\{r > 0 : rB_2^n \subseteq K\}.$$

Ορίζουμε επίσης την ακτίνα όγκου vrad του $K$ ως εξής:

$$\mathrm{vrad}(K) = \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\omega_n}\right)^{1/n}.$$

Έτσι, ένα σώμα με όγκο μεγαλύτερο αυτού της $B_2^n$ κατά παράγοντα $\lambda^n$, έχει ακτίνα όγκου $\lambda$.

Αν $0 \in \mathrm{int}(K)$ ορίζουμε επίσης το πολικό σώμα $K^\circ$ ως εξής:

$$K^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } y \in K\}.$$

Ισχύει ότι (πάντα με την παραδοχή $0 \in \mathrm{int}(K)$) $(K^\circ)^\circ = K$.

Έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ με $0 < \mathrm{vol}_n(A) < \infty$. Κανονικοποιώντας το $A$ ώστε να έχει όγκο $1$, παίρνουμε το

$$\overline{A} := \frac{A}{\mathrm{vol}_n(A)^{1/n}}.$$

Θα χρειαστούμε κάποιες γεωμετρικές ανισότητες, τις οποίες περιγράφουμε εν συντομία. Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$:

**Θεώρημα 2.1.1** (ανισότητα Brunn-Minkowski)**.** *Έστω $K$ και $T$ δύο μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K+T)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(T)^{1/n}.$$

Στην περίπτωση που τα $K$ και $T$ είναι κυρτά σώματα, ισότητα στην ανισότητα Brunn-Minkowski μπορεί να ισχύει μόνο αν τα $K$ και $T$ είναι ομοιοθετικά (δηλαδή, αν $K = aT + x$ για κάποιον $a \geqslant 0$ και κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$). Η ανισότητα Brunn-Minkowski εκφράζει με μια έννοια το γεγονός ότι η ακτίνα όγκου είναι *κοίλη* συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν $K, T$ είναι μη κενά Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και αν $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)T)^{1/n} \geqslant \lambda \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(T)^{1/n}.$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα σε συνδυασμό με την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράφουμε:

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)T) \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{\lambda}\mathrm{vol}_n(T)^{1-\lambda}.$$

**Θεώρημα 2.1.2** (ανισότητα Blaschke-Santaló). *Αν το $K$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε για το «γινόμενο όγκων» $s(K) = \mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K^\circ)$ του $K$ ισχύει ότι*

$$\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leqslant \omega_n^2.$$

*Απόδειξη.* Θα χρησιμοποιήσουμε την συμμετρικοποίηση Steiner. Αν $K$ κυρτό σώμα και $\vartheta \in S^{n-1}$, το $S_\vartheta(K)$ (η συμμετρικοποίηση Steiner του $K$ στην κατεύθυνση του $\vartheta$) κατασκευάζεται παίρνοντας όλα τα $x \in P_{\vartheta^\perp}(K)$ και προσθέτοντας σε αυτά όλα τα $\lambda\vartheta$, όπου $|\lambda| \leqslant \frac{1}{2}$μήκος$((x+\mathbb{R}\vartheta)\cap K)$. Το $S_\vartheta(K)$ είναι επίσης κυρτό, $\mathrm{vol}_n(S_\vartheta(K)) = \mathrm{vol}_n(K)$, και

$$S_\vartheta(K) = \Big\{x + \frac{t_1 - t_2}{2}\vartheta : x \in P_{\vartheta^\perp}(K), x + t_1\vartheta \in K, x + t_2\vartheta \in K\Big\}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\vartheta = e_n$. Για $A \subseteq \mathbb{R}^n$, θέτουμε $A(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} : (x,t) \in A\}$. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα του $K$ και τον ορισμό του $K^\circ$ ελέγχουμε ότι, για κάθε $s \in \mathbb{R}$,

$$\frac{K^\circ(s) + K^\circ(-s)}{2} \subseteq K_1^\circ(s), \text{ όπου } K_1 := S_\vartheta(K)$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski, λόγω της συμμετρίας του $K^\circ$, έχουμε

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K^\circ(s)) \geqslant \mathrm{vol}_{n-1}(K^\circ(s))^{1/2}\mathrm{vol}_{n-1}(K^\circ(-s))^{1/2} = \mathrm{vol}_{n-1}(K^\circ(s)).$$

Τώρα γράφουμε

$$\mathrm{vol}_n(K^\circ) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{vol}_{n-1}(K^\circ(s))\,ds \leqslant \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{vol}_{n-1}(K_1^\circ(s))\,ds = \mathrm{vol}_n(K_1^\circ),$$

και συνεπώς,

$$\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leqslant \mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K_1^\circ) = \mathrm{vol}_n(K_1)\mathrm{vol}_n(K_1^\circ).$$

Είναι γνωστό ότι εφαρμόζοντας διαδοχικές συμμετρικοποιήσεις Steiner

$$K \longrightarrow K_1 = S_\vartheta(K) \longrightarrow K_2 = S_{\vartheta_1}(K_1) \longrightarrow \cdots$$

παίρνουμε ακολουθία κυρτών σωμάτων που συγκλίνει ως προς την μετρική Hausdorff στη μπάλα $rB_2^n$ όγκου $\mathrm{vol}_n(rB_2^n) = \mathrm{vol}_n(K)$. Από τη συνέχεια του όγκου ως προς την μετρική Hausdorff, και επειδή η ακολουθία $\mathrm{vol}_n(K_m)\mathrm{vol}_n(K_m^\circ)$ είναι όπως είδαμε αύξουσα, έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K_m)\mathrm{vol}_n(K_m^\circ) \nearrow \mathrm{vol}_n(rB_2^n)\mathrm{vol}_n\Big(\frac{1}{r}B_2^n\Big) = \omega_n^2.$$

Άρα, $\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leqslant \omega_n^2$. □

Η σκιαγράφηση της ανωτέρω απόδειξης έγινε πιο πολύ για να καταδειχθεί η σημασία της ανισότητας Brunn-Minkowski και της συμμετρικοποίησης Steiner, διότι χρησιμοποιούνται ευρέως στις αποδείξεις ανισοτήτων για όγκους κυρτών σωμάτων, όπως θα δούμε και στη συνέχεια. Οι επόμενες ανισότητες θα δοθούν χωρίς πολλές λεπτομέρειες.

Μια πολύ σημαντική ανισότητα των Bourgain και V. Milman εξασφαλίζει κάτω φράγμα για το γινόμενο όγκων οποιουδήποτε κυρτού σώματος που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Για τον λόγο αυτό είναι γνωστή και ως «αντίστροφη ανισότητα Blaschke-Santaló».

**Θεώρημα 2.1.3** (ανισότητα Bourgain–V. Milman)**.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$ και κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, ισχύει ότι*

$$\mathrm{vol}_n(K)\ \mathrm{vol}_n(K^\circ) \geqslant c^n \omega_n^2.$$

Για την επόμενη ανισότητα που θα χρειαστούμε ορίζουμε το σώμα διαφορών του κυρτού σώματος $K$:

$$K - K := \{x - y \mid x, y \in K\}.$$

Αναζητούμε άνω και κάτω φράγμα για τον $\mathrm{vol}_n(K-K)$. Κατ' αρχάς από την ανισότητα Brunn-Minkowski,

$$\mathrm{vol}_n(K-K) \geqslant \left(\mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(-K)^{1/n}\right)^n = 2^n \mathrm{vol}_n(K).$$

Άνω φράγμα, από την άλλη, μας δίνει η ανισότητα Rogers-Shephard:

**Θεώρημα 2.1.4** (ανισότητα Rogers-Shephard)**.** *Αν $K$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mathrm{vol}_n(K-K) \leqslant \binom{2n}{n} \mathrm{vol}_n(K).$$

Η απόδειξη της ανισότητας Rogers-Shephard (χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες) χρησιμοποιεί την ανισότητα Brunn-Minkowski, ως επίσης και το θεώρημα Fubini.

Η ανισότητα Urysohn, μια απόδειξη της οποίας χρησιμοποιεί συμμετρικοποίηση Steiner, λέει ότι για δεδομένο όγκο η μπάλα έχει το ελάχιστο δυνατό μέσο πλάτος.

**Θεώρημα 2.1.5** (ανισότητα Urysohn)**.** *Αν $K$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$w(K) \geqslant \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\omega_n}\right)^{1/n}.$$

Παρατηρήστε ότι, αν $\mathrm{vol}_n(K) = \lambda^n \omega_n$, τότε η ανισότητα δίνει $w(K) \geqslant \lambda$, με ισότητα να «πιάνεται» για $K = \lambda B_2^n$, αφού $w(\lambda B_2^n) = \lambda$. Άρα, για δεδομένο όγκο, η μπάλα έχει ελαχιστικό μέσο πλάτος, κάτι που περιμένει η διαίσθησή μας.

Προτού προχωρήσουμε, χρειαζόμαστε την έννοια της απόστασης Banach-Mazur δύο γραμμικών $n$-διάστατων χώρων με νόρμα. Την ορίζουμε ως

$$d(X,Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός}\}.$$

Χρειαζόμαστε επίσης την έννοια της νόρμας $\|\cdot\|_K$ που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από ένα συμμετρικό κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση $\|\cdot\|_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$,

$$\|x\|_K = \inf\{t > 0 : x \in tK\}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος με νόρμα $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ θα συμβολίζεται με $X_K$. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία μπάλα $K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ του $X$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα.

Μια ανισότητα του Pisier, σε συνδυασμό με αποτελέσματα των Lewis, Figiel και Tomczak-Jaegermann, δίνει το εξής:

**Θεώρημα 2.1.6** ($MM^*$-ανισότητα). *Αν $K$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει συμμετρικός θετικά ορισμένος $T \in GL_n$ ώστε η θέση $\tilde{K} = T(K)$ του $K$ να ικανοποιεί την*

$$w(\tilde{K})w(\tilde{K}^\circ) \leqslant c \log [d(X_K, \ell_2^n) + 1],$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά και $\ell_2^n = (\mathbb{R}^n, |\cdot|)$.*

Υπολογίζοντας τον όγκο του $\tilde{K}$ σε πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder έχουμε

$$w(\tilde{K}^\circ)^{-1} \leqslant c_1 \sqrt{n}\, \mathrm{vol}_n(\tilde{K})^{1/n}.$$

Επίσης, από το θεώρημα του John έχουμε $d(X, \ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$ για κάθε $n$-διάστατο χώρο $X$ με νόρμα. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 2.1.7** (αντίστροφη ανισότητα Urysohn). *Αν $K$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει συμμετρικός θετικά ορισμένος $T \in GL_n$ ώστε η θέση $\tilde{K} = T(K)$ του $K$ να ικανοποιεί την*

$$w(\tilde{K}) \leqslant c\sqrt{n} \log n\, \mathrm{vol}_n(\tilde{K})^{1/n}, \tag{2.1.1}$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Μάλιστα, η ανισότητα αυτή επεκτείνεται και ισχύει με την ασθενέστερη υπόθεση ότι το $K$ είναι κεντραρισμένο, όχι κατ' ανάγκη συμμετρικό.

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μία ακόμη βασική ανισότητα.

**Θεώρημα 2.1.8** ($M^*$-ανισότητα). *Αν $K$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$R(K \cap F) \leqslant c\sqrt{\frac{n}{n-k}}\, w(K)$$

*με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_2(n-k))$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

## 2.2 Quermassintegrals και τύπος Steiner

Για να παρουσιάσουμε την θεωρία του όγκου των $L_q$-κεντροειδών σωμάτων παρακάτω, θα χρειαστούμε την έννοια των quermassintegrals και τον τύπο του Steiner.

Καταρχάς συμβολίζουμε $\tilde{K}_n$ το σύνολο των μη κενών κυρτών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Σημειώστε ότι αν $A, B \in \tilde{K}_n$ τότε $A + tB \in \tilde{K}_n$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Ένα θεώρημα του Minkowski αποδεικνύει την ύπαρξη μιας απεικόνισης $V : (\tilde{K}_n)^n \to \mathbb{R}^+$ ώστε $V(K, \dots, K) = \mathrm{vol}_n(K)$,

$$V(K_1, \dots, t_1 K_{i,1} + t_2 K_{i,2}, \dots K_n) = t_1 V(K_1, \dots, K_{i,1}, \dots, K_n) + t_2 V(K_1, \dots, K_{i,2}, \dots, K_n)$$

για κάθε $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^+$ και

$$V(K_{\sigma(1)}, \dots, K_{\sigma(n)}) = V(K_1, \dots, K_n)$$

για κάθε μετάθεση $\sigma$ του $[n]$. Η τιμή $V(K_1, \dots, K_n)$ ονομάζεται και μικτός όγκος των $K_1, \dots, K_n$.

Έπεται ότι για $K, L \in \tilde{K}_n$ και $t \in \mathbb{R}^+$ ισχύει

$$\mathrm{vol}_n(K + tL) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V(K\,[n-j], L\,[j]) t^j,$$

με τον συμβολισμό $A[i] := \underbrace{(A, ..., A)}_{i \text{ φορές}}$. Ειδικότερα για $L = B_2^n$ προκύπτει

$$\mathrm{vol}_n(K + tB_2^n) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V(K\,[n-j], B_2^n\,[j]) t^j = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_j(K) t^j, \tag{2.2.1}$$

όπου $W_j(K) = V(K\,[n-j], B_2^n\,[j])$ είναι το $j$-οστό quermassintergral του $K$.

Η (2.2.1) ονομάζεται τύπος του Steiner, τα δε $W_j(K)$ εκφράζονται ως

$$W_j(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-j}} \int_{G_{n,n-j}} \mathrm{vol}_{n-j}(P_F(K))\, d\nu_{n,n-j}(F)$$

(ολοκληρωτικός τύπος του Kubota).

Η ανισότητα Alexandrov-Fenchel, που αποτελεί γενίκευση της ανισότητας Brunn-Minkowski, δείχνει ότι

$$V(K_1, K_2, K_3, \ldots, K_n)^2 \geqslant V(K_1, K_1, K_3, \ldots, K_n) V(K_2, K_2, K_3, \ldots, K_n)$$

και μαζί με τον τύπο του Steiner αποδεικνύει την οικογένεια των ανισοτήτων Alexandrov

$$\Big(\frac{W_i(K)}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n-i}} \geqslant \Big(\frac{W_j(K)}{\omega_n}\Big)^{\frac{1}{n-j}},$$

όπου $0 \leqslant j < i < n$.

## 2.3 Γεωμετρικές παράμετροι των συμμετρικών κυρτών σωμάτων

Στην παράγραφο αυτή θα εισαγάγουμε τις παραμέτρους $M_q(K)$, $k(K)$, $k_*(K)$, $w_q(K)$, $d_*(K)$ ενός συμμετρικού κυρτού σώματος. Στο υπόλοιπο της παραγράφου, το $K$ θα συμβολίζει πάντα ένα τέτοιο σώμα.

Ορίζουμε καταρχάς

$$M_q(K) = \Big(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K^q d\sigma(\vartheta)\Big)^{1/q}$$

και

$$w_q(K) = \Big(\int_{S^{n-1}} h_K^q(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta)\Big)^{1/q},$$

δηλαδή $M_q(K)$ είναι η $q$-οστή ροπή της $x \mapsto \|x\|_K$ και $w_q(K)$ η $q$-οστή ροπή της $x \mapsto h_K(x)$ στην $S^{n-1}$. Παρατηρούμε ειδικότερα ότι

$$w_1(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta) d\sigma(\vartheta) = w(K),$$

ενώ

$$M_q(K) = \Big(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K^q d\sigma(\vartheta)\Big)^{1/q} = w_q(K^\circ)$$

διότι $\|\vartheta\|_K = h_{K^\circ}(\vartheta)$. Αυτό ισχύει γιατί $t \geqslant \|\vartheta\|_K \iff \vartheta \in tK \iff \langle x, \frac{\vartheta}{t}\rangle \leqslant 1 \ \forall x \in K^\circ \iff \langle x, \vartheta\rangle \leqslant t \ \forall x \in K^\circ \iff t \geqslant h_{K^\circ}(\vartheta)$. Ειδικότερα, $M(K) := M_1(K) = w(K^\circ)$. Βλέπουμε δηλαδή ότι οι παράμετροι $M_q(K)$ και $w_q(K)$ είναι κατά κάποιο τρόπο δυϊκές ($M_q(K) = w_q(K^\circ)$ και $M_q(K^\circ) = w_q(K)$).

Μια πρώτη εκτίμηση για το $M(K)$ είναι η

$$1 \leqslant M(K)\,\mathrm{vrad}(K). \tag{2.3.1}$$

Πράγματι, αφού παρατηρήσουμε ότι $\|x\|_K = \rho_K^{-1}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, έχουμε διαδοχικά ότι η (2.3.1) είναι ισοδύναμη με την

$$1 \leqslant \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K \, d\sigma(\vartheta)\, \frac{(\mathrm{vol}_n(K))^{1/n}}{\omega_n^{1/n}},$$

δηλαδή με την

$$1 \leqslant \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K \, d\sigma(\vartheta) \Big(\int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta)\Big)^{1/n},$$

όπου έχουμε εκφράσει τον $\mathrm{vol}_n(K)$ σε πολικές συντεταγμένες. Η σχέση αυτή γράφεται, υψώνοντας στην $\frac{n}{n+1}$,

$$1 \leqslant \Big[\int_{S^{n-1}} \big(\|\vartheta_K^{\frac{n}{n+1}}\|\big)^{\frac{n+1}{n}} d\sigma(\vartheta)\Big]^{\frac{n}{n+1}} \Big[\int_{S^{n-1}} \big(\rho_K^{\frac{n}{n+1}}(\vartheta)\big)^{n+1} d\sigma(\vartheta)\Big]^{\frac{1}{n+1}}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder με τους συζυγείς εκθέτες $p = \frac{n+1}{n}$ και $q = n+1$, βρίσκουμε ότι αρκεί να ισχύει η

$$1 \leqslant \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K^{\frac{n}{n+1}} \rho_K^{\frac{n}{n+1}}(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta) = \int_{S^{n-1}} \mathbf{1}\, d\sigma(\vartheta) = \sigma(S^{n-1}) = 1.$$

Από την άλλη πλευρά, η ανισότητα Urysohn

$$w(K) \geqslant \Big(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\omega_n}\Big)^{1/n} = \mathrm{vrad}(K)$$

δίνει $M(K^\circ) \geqslant \mathrm{vrad}(K)$ και αντίστοιχα $M(K) \geqslant \mathrm{vrad}(K^\circ)$.

Γενικά τώρα για τα $M_q$, $w_q$ ισχύουν οι παρακάτω εκτιμήσεις:

**Θεώρημα 2.3.1** (Litvak, Milman, Schechtman)**.** *Έστω $K$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\max\Big\{M(K), c_1\frac{b(K)\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\Big\} \leqslant M_q(K) \leqslant \max\Big\{2M(K), c_2\frac{b(K)\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\Big\}$$

*και*

$$\max\Big\{w(K), c_1\frac{R(K)\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\Big\} \leqslant w_q(K) \leqslant \max\Big\{2w(K), c_2\frac{R(K)\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\Big\}$$

*για κάθε $q \in [1, n]$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές και*

$$b(K) = \min\{c > 0 : \|x\|_K \leqslant c|x| \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες, αναφέρουμε απλώς ότι η απόδειξη χρησιμοποιεί την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα του Lévy την οποία αναφέρουμε παρενθετικά: Αν $\alpha \in (0,1)$ και $B(x,r)$ μια μπάλα κέντρου $x$ και ακτίνας $r$ στην $S^{n-1}$ ώστε $\sigma(B(x,r)) = \alpha$, τότε για κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \alpha$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : d(x,A) \leqslant t\}) \geqslant \sigma(B(x, r+t)).$$

Παρατηρήστε ότι αυξανομένου του $q$, τόσο το κάτω όσο και το άνω φράγμα των $M_q, w_q$ αυξάνουν, η δε συμπεριφορά τους αλλάζει όταν $q \simeq n\left(\frac{M(K)}{b(K)}\right)^2$ (προκειμένου για το $M_q$) ή όταν $q \simeq n\left(\frac{w(K)}{R(K)}\right)^2$ (προκειμένου για το $w_q$). Επεξηγούμε τον συμβολισμό $a \simeq b$: έχει την έννοια ότι υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές ώστε $c_1 b \leqslant a \leqslant c_2 b$ (προφανώς είναι μία σχέση ισοδυναμίας της λογικής «περίπου ίσα»).

Ορίζουμε τώρα την διάσταση Dvoretzky (ή κρίσιμη διάσταση) $k(K)$ του $K$ ως εξής:

$$k(K) = \max\left\{k \leqslant n : \nu_{n,k}\left(F \in G_{n,k} : \frac{M(K)}{2}|x| \leqslant \|x\|_K \leqslant 2M(K)|x|,\ \forall x \in F\right) \geqslant \frac{n}{n+k}\right\}$$

και την δυϊκή της:

$$k_*(K) = \max\left\{k \leqslant n : \nu_{n,k}\left(F \in G_{n,k} : \frac{w(K)}{2}|x| \leqslant h_K(x) \leqslant 2w(K)|x|,\ \forall x \in F\right) \geqslant \frac{n}{n+k}\right\}.$$

Ένα θεώρημα των Milman και Schechtman δίνει τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

**Θεώρημα 2.3.2.** *Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε*

$$c_1 n \frac{M(K)^2}{b(K)^2} \leqslant k(K) \leqslant c_2 n \frac{M(K)^2}{b(K)^2}$$

*και, αντίστοιχα,*

$$c_1 n \frac{w(K)^2}{R(K)^2} \leqslant k_*(K) \leqslant c_2 n \frac{w(K)^2}{R(K)^2},$$

*για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$.*

Βλέπουμε λοιπόν ότι η παράμετρος $k$ (αντίστοιχα $k_*$) εκφράζει ακριβώς την κρίσιμη διάσταση $q_0 \leqslant n$ στην οποία αλλάζει συμπεριφορά η $M_q$ (αντίστοιχα $w_q$).

Τι γίνεται αν $q \geqslant n$; Πώς συμπεριφέρονται τα $M_q$, $w_q$; Καταρχάς η απεικόνιση $q \mapsto M_q(K)$ είναι αύξουσα $\forall K$, αφού $\sigma(S^{n-1}) = 1$. Δεύτερον,

$$M_q(K) = \Big(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|_K^q d\sigma(\vartheta)\Big)^{1/q} \leqslant \Big(\int_{S^{n-1}} b^q(K)|\vartheta|^q d\sigma(\vartheta)\Big)^{1/q} = b(K)$$

για κάθε $q \geqslant 1$. Τρίτον, το θεώρημα Litvak-Milman-Schechtman δίνει

$$c_1 b(K) \leqslant M_n(K) \leqslant \max\{2M_1(K), c_2 b(K)\}$$

και επειδή $M_1(K) \leqslant b(K)$, έχουμε $M_n(K) \simeq b(K)$ για κάθε $q \geqslant n$. Με έναν αντίστοιχο συλλογισμό, $w_q(K) \simeq R(K)$ για κάθε $q \geqslant n$. Για $q = n$ έχουμε λοιπόν μία δεύτερη αλλαγή συμπεριφοράς των $q \mapsto M_q(K)$ και $q \mapsto w_q(K)$.

Εισάγουμε τώρα μία ακόμη παράμετρο:

$$d_*(K)=\min\Big\{-\log\sigma\Big(\Big\{x\in S^{n-1}:h_K(x)\leqslant\frac{w(K)}{2}\Big\}\Big),n\Big\}.$$

Η $d_*$ εισήχθη και μελετήθηκε από τους Klartag και Vershynin.

Θα κάνουμε πρώτα μία γενική παρουσίαση του υποβάθρου που χρειάζεται, προκειμένου να αποδείξουμε κάποιες εκτιμήσεις σχετικά με την παράμετρο αυτή.

Ο **χώρος Gauss.** Εφοδιάζουμε τον $(\mathbb{R}^n,|\cdot|)$ με ένα μέτρο $\gamma_n$ που έχει πυκνότητα $g_n(x)=(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2)$, ορισμένο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$, δηλαδή αν $A$ Borel, τότε

$$\gamma_n(A)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_A e^{-|x|^2/2}dx.$$

Το $\gamma_n$ ονομάζεται μέτρο Gauss, ο δε χώρος Gauss $(\mathbb{R}^n,|\cdot|,\gamma_n)$ είναι ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Το $\gamma_n$ είναι μέτρο γινόμενο $\gamma_n=\gamma_1\otimes\cdots\otimes\gamma_1$ και είναι αναλλοίωτο κάτω από ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Ο **μέσος Lévy.** Αν $(X,d,\mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας ($d$ η μετρική, $\mu$ το μέτρο) και $g:X\to\mathbb{R}$, λέμε ότι ο αριθμός $\mathrm{med}(g)\in\mathbb{R}$ είναι ένας μέσος Lévy της $g$ αν $\mu(\{g\geqslant\mathrm{med}(g)\})\geqslant 1/2$ και $\mu(\{g\leqslant\mathrm{med}(g)\})\geqslant 1/2$. Σημειώστε ότι ο μέσος Lévy μιας συνάρτησης δεν είναι κατ' ανάγκη μοναδικός. Αν επιπλέον η $g$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά 1 (δηλαδή $|g(x)-g(y)|\leqslant d(x,y)$ για κάθε $x,y\in X$) τότε

$$\mu(\{x\in X:|f(x)-\mathrm{med}(g)|>t\})\leqslant 2\alpha_\mu(t).$$

Το $\alpha_\mu(t)$ εδώ είναι η συνάρτηση συγκέντρωσης του $(X,d,\mu)$, $\alpha_\mu:(0,+\infty)\to[0,1/2]$,

$$\alpha_\mu(t)=\sup\{1-\mu(A_t):A\in\mathcal{B}(X),\mu(A)\geqslant 1/2\},$$

όπου $A_t=\{x\in X:d(x,A)<t\}$ είναι η $t$-επέκταση του $A$. Ειδικότερα, έπεται το εξής: Αν $g:S^{n-1}\to\mathbb{R}$ Lipschitz συνεχής με σταθερά $a$, τότε

$$\sigma(\{\vartheta\in S^{n-1}:|g(\vartheta)-\mathrm{med}(g)|\geqslant t\})\leqslant 2\exp\big(-(n-1)t^2/2a^2\big)\tag{2.3.2}$$

για κάθε $t>0$.

Το **$B$-θεώρημα.** Σχετικά με το μέτρο Gauss ισχύει το παρακάτω θεώρημα των Cordero, Fradelizi και Maurey:

**Θεώρημα 2.3.3.** *Έστω $K$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση $\varphi:t\mapsto\gamma_n(e^tK)$ είναι λογαριθμικά κοίλη στο $\mathbb{R}$, δηλαδή*

$$\varphi((1-\lambda)x+\lambda y)\geqslant(\varphi(x))^{1-\lambda}(\varphi(y))^\lambda$$

*για κάθε $x,y\in\mathbb{R}$ και $\lambda\in[0,1]$. Ισοδύναμα,*

$$\gamma_n(a^\lambda b^{1-\lambda}K)\geqslant\gamma_n(aK)^\lambda\gamma_n(bK)^{1-\lambda}$$

*για κάθε $a,b>0$ και $\lambda\in[0,1]$.*

Επίσης, για το μέτρο Gauss ισχύει το παρακάτω:

**Λήμμα 2.3.4.** *Αν $K$ αστρόμορφο (ειδικότερα αν $K$ συμμετρικό κυρτό) υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\frac{1}{2}\sigma\big(S^{n-1}\cap \tfrac{1}{2}K\big)\leqslant \gamma_n(\sqrt{n}K)\leqslant \sigma(S^{n-1}\cap 2K)+e^{-cn},$$

*όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.*

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε κάποιες ανισότητες που αφορούν την παράμετρο $d_*$.

**Πρόταση 2.3.5** (Klartag-Vershynin)**.** *Έστω $K$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$d_*(K)\geqslant ck_*(K),$$

*όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Για $n=1$ είναι προφανές αφού $d_*(K)=k_*(K)\simeq 1$ Εφαρμόζοντας την (2.3.2) για $g\equiv h_K$ και $t=\frac{w(K)}{2}$ παίρνουμε (αφού το $K$ είναι συμμετρικό)

$$\sigma\Big(\Big\{\vartheta\in S^{n-1}:|h_K(\vartheta)-w(K)|\geqslant \frac{w(K)}{2}\Big\}\Big)\leqslant 2\exp\Big(-\frac{(n-1)w^2(K)}{8\|h_K\|_{\rm Lip}^2}\Big),$$

άρα

$$-\log\sigma\Big(\Big\{\vartheta\in S^{n-1}:h_K(\vartheta)\leqslant \frac{w(K)}{2}\Big\}\Big)\geqslant \frac{(n-1)w^2(K)}{8\|h_K\|_{\rm Lip}^2}\geqslant ck_*(K),$$

(για $n\geqslant 2$ από το Θεώρημα 2.3.2) διότι $\|h_K\|_{\rm Lip}\leqslant R(K)$. Επίσης, $n\geqslant ck_*(K)$ διότι $w(K)\leqslant R(K)$. Άρα, $d_*(K)\geqslant ck_*(K)$. □

Η παράμετρος $d_*(K)$ συνδέεται στενά με εκτιμήσεις για το μέτρο του συνόλου των διευθύνσεων στις οποίες η συνάρτηση στήριξης ενός συμμετρικού κυρτού σώματος είναι «πολύ μικρότερη» από το μέσο πλάτος του.

**Θεώρημα 2.3.6.** *Για κάθε $0<\varepsilon<e^{-4}$ ισχύει ότι*

$$\sigma(\{x\in S^{n-1}:h_K(x)<\varepsilon w(K)\})<(c_1\varepsilon)^{c_2d_*(K)}<(c_1\varepsilon)^{c_3k_*(K)},$$

*όπου $c_1,c_2,c_3>0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε $m:=\mathrm{med}(h_K)$ ένα μέσο Lévy της $h_K$, ως προς το μέτρο $\sigma$. Από τον ορισμό του μέσου Lévy έχουμε $\sigma(\{\vartheta\in S^{n-1}:h_K(\vartheta)\geqslant m\})\geqslant \frac{1}{2}$. Από την ανισότητα Markov, λαμβάνουμε

$$\frac{1}{2}m\leqslant \int_{\{\vartheta\in S^{n-1}:h_K(\vartheta)\geqslant m\}}h_K(\vartheta)\,d\sigma(\vartheta)\leqslant \int_{S^{n-1}}h_K(\vartheta)\,d\sigma(\vartheta)=w(K). \tag{2.3.3}$$

Θέτουμε $L:=m\sqrt{n}K^\circ$. Από το Λήμμα 2.3.4 προκύπτει ότι

$$\gamma_n(2L)=\gamma_n(\sqrt{n}\cdot 2mK^\circ)\geqslant \frac{1}{2}\sigma(S^{n-1}\cap mK^\circ).$$

Όμως, $\vartheta \in mK^\circ$ αν και μόνο αν $h_K(\vartheta) \leqslant m$, άρα ο ορισμός του $m$ δίνει $\sigma(S^{n-1} \cap mK^\circ) = \sigma(\{\vartheta \in S^{n-1} : h_K(\vartheta) \leqslant m\}) \geqslant \frac{1}{2}$, επομένως

$$\gamma_n(2L) \geqslant \frac{1}{4}. \tag{2.3.4}$$

Η δεύτερη ανισότητα του Λήμματος 2.3.4 επίσης δίνει

$$\begin{aligned}\gamma_n\Big(\frac{1}{8}L\Big) &= \gamma_n\Big(\sqrt{n}\frac{m}{8}K^\circ\Big) \leqslant \sigma\Big(S^{n-1} \cap \frac{m}{4}K^\circ\Big) + e^{-cn} \\ &= \sigma\Big(\Big\{\vartheta \in S^{n-1} : h_K(\vartheta) \leqslant \frac{m}{4}\Big\}\Big) + e^{-cn} \leqslant \sigma\Big(\Big\{\vartheta \in S^{n-1} : h_K(\vartheta) \leqslant \frac{w(K)}{2}\Big\}\Big) + e^{-cn} \\ &\leqslant e^{-\left(-\log\sigma\left(\left\{\vartheta\in S^{n-1}:h_K(\vartheta)\leqslant\frac{w(K)}{2}\right\}\right)\right)} + e^{-cn} \leqslant e^{-d_*(K)} + e^{-cd_*(K)} \leqslant 2e^{-c_1 d_*(K)}\end{aligned}$$

για $c_1 = \min\{1, c\}$. Έχουμε δηλαδή ότι

$$\gamma_n\Big(\frac{1}{8}L\Big) \leqslant 2e^{-c_1 d_*(K)}. \tag{2.3.5}$$

Παρατηρούμε απ' την άλλη ότι $\log\frac{1}{\varepsilon} > 0$ και $3\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1} < 3\left(\log(e^4)\right)^{-1} = \frac{3}{4} < 1$. Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το $B$-θεώρημα για το συμμετρικό σώμα $L = m\sqrt{n}K^\circ$ με $a = \varepsilon$, $b = 2$, $\lambda = 3\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}$. Δίνει, σε συνδυασμό με τις (2.3.4) και (2.3.5),

$$\begin{aligned}(\gamma_n(\varepsilon L))^{3\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}}(\gamma_n(2L))^{1-3\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}} &\leqslant \gamma_n\left(\varepsilon^{3\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}}\cdot 2^{1-3\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}}L\right) \\ &= \gamma_n(e^{-3}\cdot 2\cdot 8^{\log^{-1}\varepsilon}L) < \gamma_n\Big(\frac{1}{8}L\Big).\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\gamma_n(\varepsilon L) &\leqslant \left[\gamma_n\Big(\frac{1}{8}L\Big)\cdot\gamma_n(2L)^{3\left(\log\frac{1}{\varepsilon}\right)^{-1}-1}\right]^{-\frac{1}{3}\log\varepsilon} \leqslant (2e^{-c_1 d_*(K)})^{-\frac{\log\varepsilon}{3}}\gamma_n(2L)^{\left(\frac{\log\varepsilon}{3}+1\right)} \\ &\leqslant 2^{-\frac{\log\varepsilon}{3}}e^{\frac{c_1}{3}d_*(K)\log\varepsilon}\cdot\frac{1}{4^{1+\frac{\log\varepsilon}{3}}} = \frac{1}{4}8^{-\frac{\log\varepsilon}{3}}e^{\frac{c_1}{3}d_*(K)\log\varepsilon} \leqslant 8e^{c_2 d_*(K)\log\varepsilon}\end{aligned}$$

για κατάλληλη απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$. Άρα,

$$\gamma_n(\varepsilon L) \leqslant 8\varepsilon^{c_2 d_*(K)} \leqslant (c_3\varepsilon)^{c_2 d_*(K)}$$

για κατάλληλη απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$. Χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 2.3.4 παίρνουμε

$$\gamma_n(\sqrt{n}m\varepsilon K^\circ) \leqslant (c_3\varepsilon)^{c_2 d_*(K)},$$

άρα

$$\frac{1}{2}\sigma\Big(\Big\{\vartheta \in S^{n-1} : h_K(\vartheta) \leqslant \frac{m\varepsilon}{2}\Big\}\Big) = \frac{1}{2}\sigma\Big(S^{n-1} \cap \frac{m\varepsilon}{2}K^\circ\Big) \leqslant (c_3\varepsilon)^{c_2 d_*(K)},$$

και τελικά

$$\frac{1}{2}\sigma\Big(\Big\{\vartheta \in S^{n-1} : h_K(\vartheta) \leqslant \frac{\varepsilon w(K)}{2c_0}\Big\}\Big) \leqslant (c_3\varepsilon)^{c_2 d_*(K)},$$

διότι $w(K) \leqslant c_0 m$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$. Προσαρμόζοντας τις σταθερές και το $\varepsilon$ παίρνουμε το θεώρημα. Φυσικά το δεύτερο σκέλος $(c_1\varepsilon)^{c_2 d_*(K)} \leqslant (c_1\varepsilon)^{c_3 k_*(K)}$ είναι προφανές αφού έχουμε $\varepsilon \ll 1$ και $d_*(K) \geqslant ck_*(K)$. $\square$

Το Θεώρημα 2.3.6 έχει ως συνέπεια αντίστροφες ανισότητες Hölder.

**Πόρισμα 2.3.7.** *Αν $K$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant q \leqslant c_1 d_*(K)$, τότε*

$$w_{-q}(K) \simeq w(K).$$

*Απόδειξη.* Για να δείξουμε ότι

$$w_{-q}(K) = \Big( \int_{S^{n-1}} h_K^{-q}(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta) \Big)^{-\frac{1}{q}} \leqslant w(K)$$

εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder για τις συναρτήσεις $f(x) = (h_K(x))^{\frac{q}{q+1}}$ και $g(x) = (h_K(x))^{-\frac{q}{q+1}}$ και τους συζυγείς εκθέτες $\frac{q+1}{q}$ και $q+1$. Παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 &= \int_{S^{n-1}} f(x)g(x)\, d\sigma(x) \leqslant \Big( \int_{S^{n-1}} h_K(x)\, d\sigma(x) \Big)^{\frac{q}{q+1}} \Big( \int_{S^{n-1}} (h_K(x))^{-q} d\sigma(x) \Big)^{\frac{1}{q+1}} \\ &= (w(K))^{\frac{q}{q+1}} (w_{-q}(K))^{-\frac{q}{q+1}}, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι $w_{-q}(K) \leqslant w(K)$. Για να δείξουμε ότι $c_4 w(K) \leqslant w_{-q}(K)$ χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 2.3.6 και ολοκλήρωση κατά μέρη. □

Δεδομένου ότι $d_*(K) \geqslant c k_*(K)$, συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε το ακόλουθο:

**Πόρισμα 2.3.8.** *Αν $K$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant q \leqslant c k_*(K)$, τότε*

$$w_q(K) \simeq w_{-q}(K).$$

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.1 έχουμε $w_q(K) \simeq w(K)$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant k_*(K)$, ενώ από το Πόρισμα 2.3.7, και αφού $c k_*(K) \leqslant d_*(K)$, βλέπουμε ότι $w_{-q}(K) \simeq w(K)$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c k_*(K)$. □

Παραπέμπουμε το αναγνώστη στο βιβλίο [26] για την θεωρία των κυρτών σωμάτων και στα βιβλία [2], [20] και [24] για την θεωρία χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα και την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

# Εικασία του υπερεπιπέδου και εικασία της ισοτροπικής σταθεράς

## 3.1 Η εικασία του υπερεπιπέδου και η ισοδυναμία της με την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς

Έχοντας πλέον αναπτύξει το απαιτούμενο υπόβαθρο από πλευράς ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας, είμαστε σε θέση να εστιάσουμε στο κυρίως πρόβλημα, που είναι η εύρεση ενός ομοιόμορφου κάτω φράγματος για τον όγκο $\max\limits_{\vartheta\in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^{\perp})$, όταν $\mathrm{vol}_n(K)=1$, ανεξάρτητου του $n\in\mathbb{N}$ και του κεντραρισμένου κυρτού σώματος $K$, ή ισοδύναμα η εύρεση ενός ομοιόμορφου άνω φράγματος, ανεξάρτητου του $n$, για τις ισοτροπικές σταθερές $L_K$ όλων των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων $K$ του $\mathbb{R}^n$.

Έχουμε, ακριβέστερα, τις ακόλουθες δύο εικασίες και καλούμαστε κατ' αρχάς να αποδείξουμε ότι είναι ισοδύναμες:

**Εικασία του υπερεπιπέδου**: *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c>0$ ώστε*

$$\max_{\vartheta\in S^{n-1}} \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^{\perp}) \geqslant c$$

*για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα $K$ όγκου $\mathrm{vol}_n(K)=1$.*

**Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς** (για ισοτροπικό σώμα): *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c>0$ ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ να έχουμε $L_K\leqslant c$.*

Υπενθυμίζουμε ότι αν το $K$ είναι ισοτροπικό τότε

$$L_K^2=\int_K \langle x,\vartheta\rangle^2 dx$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$.

**Θεώρημα 3.1.1.** *Οι δύο παραπάνω εικασίες είναι ισοδύναμες, με την έννοια ότι καταφατική απάντηση για τη μία συνεπάγεται καταφατική απάντηση για την άλλη και αντίστροφα.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε κάποια πολύ σημαντικά λήμματα. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς.

**Ορισμός 3.1.2.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $0 < \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx < \infty$. Ως βαρύκεντρο της $f$ ορίζεται το σημείο

$$\mathrm{bar}(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx}.$$

Ο ορισμός είναι βέβαια ανάλογος με τον ορισμό του βαρύκεντρου κυρτού σώματος αν σκεφθούμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x) f(x)\,dx = \int_K g(x)\,dx$$

όταν $f = \mathbf{1}_K$.

**Ορισμός 3.1.3.** Έστω $f$ όπως πριν και $\mathrm{bar}(f) = 0$. Τότε λέμε ότι η $f$ είναι κεντραρισμένη. Όπως στην περίπτωση του κεντραρισμένου σώματος, δεν είναι δύσκολο να δείξουμε ότι $\mathrm{bar}(f) = 0$ αν και μόνο αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta \rangle f(x)\,dx = 0$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$.

Υπενθυμίζουμε και την έννοια της λογαριθμικά κοίλης συνάρτησης.

**Ορισμός 3.1.4.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$. Η $f$ ονομάζεται λογαριθμικά κοίλη αν για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0, 1)$ ισχύει $f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$. Παρατηρήστε ότι η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη αν και μόνο αν η $\log f$ είναι κοίλη.

**Λήμμα 3.1.5** (Fradelizi)**.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Τότε,*

$$f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0).$$

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f$ είναι γνησίως θετική, συνεχώς διαφορίσιμη και ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy = 1$. Από την ανισότητα Jensen και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η $f$ είναι κεντραρισμένη, έχουμε

$$\log f(0) = \log f\left( \int_{\mathbb{R}^n} y f(y) dy \right) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y) \log f(y) dy.$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη βλέπουμε ότι

$$-\log f(x) \geqslant -\log f(y) + \langle x - y, \nabla\left(-\log f\right)(y) \rangle .$$

Πολλαπλασιάζουμε τα δύο μέλη της προηγούμενης ανισότητας με $f(y)$, και ολοκληρώνοντας ως προς $y$ λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} -\log f(x) &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y, -\nabla f(y)\rangle\, dy \\ &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy - n, \end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει με ολοκλήρωση κατά μέρη. Συνδυάζοντας τα παραπάνω (και αφού η $f$ φθίνει εκθετικά καθώς $|y|\to\infty$) συμπεραίνουμε ότι

$$\log f(0) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dx \geqslant \log f(x) - n,$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Λαμβάνοντας το supremum πάνω από όλα τα $x$ έχουμε το συμπέρασμα. □

**Λήμμα 3.1.6.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\vartheta\in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\frac{c_1}{L_K} \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^{\perp}) \leqslant \frac{c_2}{L_K},$$

*όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές, δηλαδή $\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^{\perp}) \simeq L_K^{-1}$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε, για δοθέν $\vartheta\in S^{n-1}$, τη συνάρτηση $f(t) = f_{K,\vartheta}(t) = \mathrm{vol}_{n-1}(\{x\in K : \langle x,\vartheta\rangle = t\})$, $t\in\mathbb{R}$. Η ανισότητα Brunn-Minkowski μαζί με την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου δίνουν (βλέπε συζήτηση μετά το Θεώρημα 2.1.1)

$$\begin{aligned} &\mathrm{vol}_{n-1}(\{u\in K : \langle u,\vartheta\rangle = (1-\lambda)x+\lambda y\}) \\ &\qquad \geqslant \mathrm{vol}_{n-1}(\{u\in K : \langle u,\vartheta\rangle = x\})^{1-\lambda}\mathrm{vol}_{n-1}(\{u\in K : \langle u,\vartheta\rangle = y\})^{\lambda} \end{aligned}$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$ και $\lambda\in(0,1)$, άρα η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη. Από την άλλη πλευρά,

$$\int_{\mathbb{R}} f(t)\, dt = \mathrm{vol}_n(K) = 1,$$

και $\mathrm{bar}(f)=0$, αφού

$$\int_{\mathbb{R}} tf(t)\, dt = \int_K \langle x,\vartheta\rangle\, dx = 0$$

για κάθε $\vartheta\in S^{n-1}$ διότι το $K$ είναι κεντραρισμένο. Από το Λήμμα 3.1.5 έχουμε $\|f\|_\infty \leqslant ef(0)$, αφού $\mathrm{dom}(f)=\mathbb{R}$, άρα

$$\|f\|_\infty \leqslant e\,\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^{\perp}). \tag{3.1.1}$$

Θέτουμε $g(t) := \|f\|_\infty \mathbf{1}_{[-(2\|f\|_\infty)^{-1},(2\|f\|_\infty)^{-1}]}$: Παρατηρήστε ότι, για $s\in[0,(2\|f\|_\infty)^{-1}]$ έχουμε $f(s)\leqslant\|f\|_\infty = g(s)$, επομένως $\int_{-s}^{s} f(t)dt \leqslant \int_{-s}^{s} g(t)dt$. Απ' την άλλη

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}\setminus[-s,s]} g(t)dt &= \int_{\mathbb{R}} g(t)dt - \int_{[-s,s]} g(t)dt = 1 - \int_{[-s,s]} g(t)dt \\ &\leqslant 1 - \int_{[-s,s]} f(t)dt = \int_{\mathbb{R}\setminus[-s,s]} f(t)dt, \end{aligned}$$

κάτι που ισχύει βέβαια και για $s > (2\|f\|_\infty)^{-1}$.

Προκύπτει ότι

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)dt &= \int_0^\infty \int_{-t}^{t} |s| f(t) ds\, dt = \int_0^\infty s \int_{\mathbb{R}\setminus[-s,s]} f(t)dt\, ds \\ &\geqslant \int_0^\infty s \int_{\mathbb{R}\setminus[-s,s]} g(t)dt = \int_{\mathbb{R}} t^2 g(t)dt \\ &= \int_{[-(2\|f\|_\infty)^{-1},(2\|f\|_\infty)^{-1}]} t^2 \|f\|_\infty dt = \frac{1}{12\|f\|_\infty^2}.\end{aligned}$$

Έχουμε πλέον κάτω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά του $K$ αντιστρόφως ανάλογο του όγκου της τομής του με υπερεπίπεδο:

$$\begin{aligned}L_K &= \left(\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2 dx\right)^{1/2} = \left(\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt\right)^{1/2} \geqslant \frac{1}{\sqrt{12}\|f\|_\infty} \\ &\geqslant \frac{1}{\sqrt{12}e\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^\perp)},\end{aligned}$$

λόγω της (3.1.1), όθεν $\frac{c_1}{L_K} \leqslant \mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^\perp)$ με $c_1 = (\sqrt{12}e)^{-1}$.

Δείχνουμε τώρα την ύπαρξη ενός άνω φράγματος για την $L_K$ με τα ως άνω χαρακτηριστικά. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

(α) Αν για κάθε $t$ στον φορέα της $f$ ισχύει $f(t) > \frac{f(0)}{2}$. Επειδή ο φορέας της $f$ είναι διάστημα (συνέπεια του γεγονότος ότι το $K$ είναι φραγμένο), ισχύει

$$1 = \int_{\mathbb{R}} f(t)dt = \int_{\mathrm{supp}(f)} f(t)dt \geqslant \ell(\mathrm{supp}(f))\frac{f(0)}{2},$$

άρα $\ell(\mathrm{supp}(f)) \leqslant \frac{2}{f(0)}$. Τώρα, επειδή $0 \in \mathrm{supp}(f)$,

$$\int_{\mathbb{R}} t^2 f(t)dt \leqslant \int_{\mathrm{supp}(f)} t^2\|f\|_\infty dt \leqslant \frac{2\ell(\mathrm{supp}(f))^3}{3}\|f\|_\infty \leqslant \frac{16}{3f(0)^3}\cdot ef(0) \leqslant \frac{16e}{f(0)^2}.$$

(β) Αν υπάρχουν $s' < 0 < s$ ώστε $f(s') = f(s) = \frac{f(0)}{2}$. Θέτουμε $c_f := \int_0^\infty f(t)dt$ και $c_f' := \int_{-\infty}^0 f(t)dt$, οπότε $c_f + c_f' = 1$. Παρατηρήστε ότι:

(i) Αν $t \in [0,s]$, το γεγονός ότι η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη δίνει $f(t) \geqslant f(0)^{1-\frac{t}{s}} f(s)^{\frac{t}{s}}$, άρα $f(t) \geqslant f(s)2^{1-\frac{t}{s}} \geqslant f(s)$.

(ii) Αν $t \in (s,\infty)$, αντίστοιχα προκύπτει $f(s) \geqslant f(0)^{1-\frac{s}{t}} f(t)^{\frac{s}{t}}$, άρα $f(t) \leqslant f(0)2^{-t/s}$.

(iii) Αν $t \in [s', 0)$, αντίστοιχα προκύπτει $f(t) \geqslant f(s')$.

(iv) Αν $t \in (-\infty, s')$, αντίστοιχα προκύπτει $f(s') \geqslant f(0)^{1-\frac{s'}{t}} f(t)^{\frac{s'}{t}}$, άρα $f(t) \leqslant f(0)2^{-t/s'}$.

Από τα (i),(iii) έπεται ότι

$$\frac{sf(0)}{2} = sf(s) \leqslant \int_0^s f(t)dt \leqslant \int_0^\infty f(t)dt = c_f$$

και

$$\frac{|s'|f(0)}{2} = |s'|f(s') \leqslant \int_{-s}^{0} f(t)dt \leqslant \int_{-\infty}^{0} f(t)dt = c_f'.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με την (3.1.1) λαμβάνουμε

$$\begin{aligned} L_K^2 &= \int_K \langle x,\vartheta\rangle^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} t^2 f(t)dt \\ &= \int_{-\infty}^{s'} t^2 f(t)dt + \int_{s'}^{s} t^2 f(t)dt + \int_{s}^{\infty} t^2 f(t)dt \\ &\leqslant \int_{-\infty}^{s'} t^2 f(0)2^{-t/s'}dt + \int_{s'}^{s} t^2\|f\|_\infty dt + \int_{s}^{\infty} t^2 f(0)2^{-t/s}dt \\ &= \int_{1}^{\infty} f(0)(s')^3u^2 2^{-u}du + \int_{s'}^{s} t^2\|f\|_\infty dt + \int_{1}^{\infty} f(0)s^3u^2 2^{-u}du \\ &\leqslant f(0)(s')^3\int_{1}^{\infty} u^2 2^{-u}du + ef(0)\frac{s^3-(s')^3}{3} + f(0)s^3\int_{1}^{\infty} u2^{-u}du \\ &\leqslant c_0 f(0)(s^3+|s'|^3) \leqslant \frac{8c_0}{(f(0))^2}(c_f+c_f') = \frac{8c_0}{(f(0))^2} = \frac{8c_0}{\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^\perp)^2}. \end{aligned}$$

(γ) Τέλος, οι περιπτώσεις όπου υπάρχει $s>0$ ώστε $f(s)=\frac{f(0)}{2}$ και $f(t)>\frac{f(0)}{2}$ για κάθε $t<0$ ή υπάρχει $s'<0$ ώστε $f(s')=\frac{f(0)}{2}$ και $f(t)>\frac{f(0)}{2}$ για κάθε $t>0$ ελέγχονται ολοκληρώνοντας χωριστά στο $(-\infty,0)$ και στο $[0,\infty)$ και συνδυάζοντας τα παραπάνω επιχειρήματα.

Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε τη μία κατεύθυνση του Θεωρήματος 3.1.1. Ας υποθέσουμε ότι η εικασία του υπερεπιπέδου αληθεύει. Έστω ότι μας δίνεται ισοτροπικό (άρα και κεντραρισμένο) κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε υπάρχει $\vartheta\in S^{n-1}$ ώστε $\mathrm{vol}_{n-1}(K\cap\vartheta^\perp)\geqslant c$, επομένως – λόγω του Λήμματος 3.1.6 – $L_K\leqslant\frac{c_2}{c}$, αφού η $L_K$ δεν εξαρτάται από το $\vartheta$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θα χρησιμοποιήσουμε το άλλο σκέλος του Λήμματος 3.1.6. Θα χρειαστούμε όμως πρώτα την έννοια του ελλειψοειδούς αδρανείας του Binet.

**Ορισμός 3.1.7.** Έστω $K$ κεντραρισμένο κυρτό σώμα ώστε $\mathrm{vol}_n(K)=1$. Ο πίνακας $M_K=(m_{ij})_{i,j=1}^n$ όπου

$$m_{ij}=\int_K x_ix_j\,dx,$$

και $x_i=\langle x,e_i\rangle$ δηλ. $x_i$ είναι το προσημασμένο μήκος της προβολής του $x$ στον $i$-άξονα, ονομάζεται πίνακας αδρανείας του $K$. Παρατηρήστε ότι $m_{ij}=m_{ji}$ και

$$\langle y,M_Ky\rangle=\int_K\langle x,y\rangle^2\,dx\geqslant 0.$$

Άρα ο $M_K$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, όθεν έχει συμμετρική και θετικά ορισμένη τετραγωνική ρίζα $S_K$.

**Ορισμός 3.1.8.** Το ελλειψοειδές $\mathcal{E}_B(K) := S_K^{-1}(B_2^n)$ που προκύπτει από την παραμόρφωση της Ευκλείδειας μπάλας κάτω από το γραμμικό μετασχηματισμό $S_K^{-1}$, ονομάζεται ελλειψοειδές αδρανείας του Binet του $K$. Παρατηρήστε ότι για τη νόρμα που επάγει το $\mathcal{E}_B(K)$ ισχύει ότι, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

$$\|y\|^2_{\mathcal{E}_B(K)} = |S_K y|^2 = \langle S_K y, S_K y\rangle = \langle M_K y, y\rangle = \int_K \langle x, y\rangle^2\, dx$$

σύμφωνα με τα προηγούμενα. Το $\mathcal{E}_B(K)$ μπορεί λοιπόν να οριστεί και ως το κυρτό σώμα που επάγει τη νόρμα

$$\|\cdot\| = \left(\int_K \langle x, \cdot\rangle^2\, dx\right)^{1/2}.$$

Τι συμβαίνει αν το $K$ δεν είναι ισοτροπικό; Στο σημείο αυτό είναι αναγκαία μια παρένθεση προκειμένου να ορίσουμε την έννοια της ισοτροπικής σταθεράς τυχόντος κυρτού σώματος. Αυτή απορρέει άμεσα από το γεγονός ότι (όπως προεξοφλήσαμε στην εισαγωγή) κάθε κυρτό σώμα έχει μοναδική ισοτροπική τοποθέτηση. Αυτό θα μας επιτρέψει αφενός να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 και αφετέρου να γενικεύσουμε την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς για κάθε κυρτό σώμα.

Για να μη χαθεί η συνέχεια των συλλογισμών θα κρατήσουμε τις αποδείξεις για το τέλος του κεφαλαίου.

**Πρόταση 3.1.9.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν θεωρήσουμε την μονοσήμαντα ορισμένη κεντραρισμένη μετατόπιση $\tilde{K} = K - \mathrm{bar}(K)$ του $K$, τότε υπάρχει $T \in GL_n$ ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό.*

**Θεώρημα 3.1.10.** *Έστω $K$ κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 και*

$$\Delta(K) = \inf\Big\{\int_{TK} |x|^2\, dx : T \in SL_n\Big\}.$$

*Έστω ακόμη $K_1 = T(K)$ μια τοποθέτηση του $K$ όγκου 1, οπότε $T \in SL_n$. Τότε:*

(i) *Το $K_1$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν $\int_{K_1} |x|^2\, dx = \Delta(K)$, δηλαδή αν και μόνο αν το $\int_{K_1} |x|^2\, dx$ είναι το ελάχιστο δυνατό.*

(ii) *Αν $K_2$ είναι μια ισοτροπική τοποθέτηση του $K$, τότε υπάρχει $U$ ορθογώνιος ώστε $K_2 = U(K_1)$.*

Έτσι λοιπόν, η διαδοχική εφαρμογή μιας μετατόπισης, ώστε το $K$ να κεντραριστεί, ενός πολλαπλασιασμού με σταθερά, ώστε να κανονικοποιηθεί ως προς τον όγκο, και της δράσης ενός $T \in SL_n$ τοποθετεί το $K$ ισοτροπικά. Η τοποθέτηση αυτή είναι μοναδική έως ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

**Ορισμός 3.1.11.** Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η ισοτροπική του σταθερά ορίζεται ως η ισοτροπική σταθερά της ισοτροπικής του τοποθέτησης. Είναι καλά ορισμένη διότι αν $K$ ισοτροπικό, $U$ ορθογώνιος και $K_1 = U(K)$, τότε $L_{K_1} = L_K$. Πράγματι, για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned} L_{K_1}^2 &= \int_{U(K)} \langle x, \vartheta\rangle^2\, dx = \int_K \langle Uy, \vartheta\rangle^2\, dy = \int_K \langle x, U^t\vartheta\rangle^2\, dy \\ &= \int_K \langle x, \vartheta'\rangle^2\, dy = L_K^2, \end{aligned}$$

όπου $\vartheta' = U^t\vartheta \in S^{n-1}$.

Υπολογίζουμε τώρα τον όγκο του $\mathcal{E}_B(K)$, όπου $K$ ισοτροπικό:

$$\|y\|_{\mathcal{E}_B(K)} = \left(\int_K \langle x, y\rangle^2\, dx\right)^{1/2} = L_K|y|,$$

άρα $y \in \mathcal{E}_B(K)$ αν και μόνο αν $|y| \leqslant L_K^{-1}$, όθεν $\mathcal{E}_B(K) = L_K^{-1}B_2^n$. Επομένως,

$$\mathrm{vol}_n(\mathcal{E}_B(K)) = L_K^{-n}\omega_n.$$

**Πρόταση 3.1.12.** *Ο όγκος του $\mathcal{E}_B(K)$, όπου $K$ κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1, είναι αναλλοίωτος κάτω από τη δράση της $SL_n$, οπότε*

$$\mathrm{vol}_n(\mathcal{E}_B(K)) = L_K^{-n}\omega_n.$$

*Απόδειξη.* Ελέγχεται εύκολα ότι αν $T \in SL_n$, τότε $M_{T(K)} = TM_KT^t$. Άρα,

$$|\det M_{T(K)}| = |\det T| \cdot |\det M_K| \cdot |\det T^t| = |\det M_K|.$$

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας τον ορισμό του ελλειψοειδούς του Binet στο $T(K)$ λαμβάνουμε $\mathcal{E}_B(T(K)) = S_{T(K)}^{-1}(B_2^n)$ όπου $S_{T(K)}^2 = M_{T(K)}$. Επομένως,

$$\mathrm{vol}_n(\mathcal{E}_B(TK)) = \omega_n|\det S_{T(K)}|^{-1} = \omega_n|\det M_{T(K)}|^{-1/2} = \omega_n|\det M_K|^{-1/2} = \mathrm{vol}_n(\mathcal{E}_B(K)),$$

το ζητούμενο. □

Παρατηρήστε ότι ο όγκος του $\mathcal{E}_B(K)$ εκφράζεται σε πολικές συντεταγμένες και ως

$$\mathrm{vol}_n(\mathcal{E}_B(K)) = \omega_n \int_{S^{n-1}} \rho^n_{\mathcal{E}_B(K)}(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta) = \omega_n \int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|^{-n}_{\mathcal{E}_B(K)} d\sigma(\vartheta),$$

άρα

$$L_K = \left(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|^{-n}_{\mathcal{E}_B(K)}\, d\sigma(\vartheta)\right)^{-1/n}$$

από την Πρόταση 3.1.12. Αν υποθέσουμε ότι $\|\vartheta\|_{\mathcal{E}_B(K)} > L_K$ για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$, τότε

$$\left(\int_{S^{n-1}} \|\vartheta\|^{-n}_{\mathcal{E}_B(K)}\, d\sigma(\vartheta)\right)^{-1/n} > L_K$$

το οποίο είναι άτοπο, άρα αποδείξαμε το:

**Πόρισμα 3.1.13.** *Έστω $K$ κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1. Τότε υπάρχει $\vartheta \in S^{n-1}$ ώστε*

$$L_K^2 \geqslant \|\vartheta\|^2_{\mathcal{E}_B(K)} = \int_K \langle x, \vartheta\rangle^2 dx.$$

Μπορούμε πλέον να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 ακόμη και για μη ισοτροπικό σώμα. Αν η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς ισχύει για ισοτροπικά σώματα και το $K$ δεν είναι ισοτροπικό, αλλά απλώς κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1, τότε $\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2\, dx \leqslant L_K^2$

για κάποιο $\vartheta \in S^{n-1}$ λόγω του Πορίσματος 3.1.13, άρα $\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2\,dx \leqslant C^2$ για κάποιο $\vartheta \in S^{n-1}$. Ακολουθώντας την απόδειξη του Λήμματος 3.1.6 υπολογίζουμε ότι

$$\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) \geqslant \frac{1}{\sqrt{12eC}}.$$

Μετά την προηγούμενη συζήτηση πρέπει να έχει γίνει πλέον σαφές ότι η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς όπως την διατυπώσαμε για ισοτροπικά σώματα είναι ισοδύναμη με την παρακάτω – φαινομενικά – γενίκευσή της.

**Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς για κυρτό σώμα.** *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ να έχουμε $L_K \leqslant C$.*

Κλείνουμε αυτό το κεφάλαιο με τις αποδείξεις των προτάσεων ύπαρξης και μοναδικότητας της ισοτροπικής σταθεράς κυρτού σώματος.

*Απόδειξη της Πρότασης* 3.1.9. Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $M_{\tilde{K}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $M_{\tilde{K}}(y) = \int_{\tilde{K}} \langle x, y\rangle x\,dx$. Επειδή

$$\langle y, M_{\tilde{K}}(y)\rangle = \int_{\tilde{K}} \langle x, y\rangle^2 dx,$$

ισχύει $\langle y, M_{\tilde{K}}(y)\rangle \geqslant 0$ με ισότητα αν και μόνο αν $y = 0$, άρα ο $M_{\tilde{K}}$ είναι θετικά ορισμένος. Επειδή για $x \in \tilde{K}$ ο τελεστής $M_x : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $M_x(y) = \langle x, y\rangle x$ είναι συμμετρικός και το $\tilde{K}$ κεντραρισμένο, έπεται ότι και ο $M_{\tilde{K}}$ είναι συμμετρικός. Άρα ο $M_{\tilde{K}}$ έχει συμμετρική και θετικά ορισμένη τετραγωνική ρίζα $S$. Συμβολίζουμε $V = \mathrm{vol}_n(S^{-1}(\tilde{K}))$ και έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{S^{-1}(\tilde{K})} \langle x, y\rangle^2 dx &= \frac{1}{|\det S|}\int_{\tilde{K}} \langle S^{-1}x, y\rangle^2 dx = \frac{1}{|\det S|}\int_K \langle x, S^{-1}y\rangle^2 dx \\ &= \frac{1}{|\det S|}\Big\langle \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle x\,dx, S^{-1}y\Big\rangle = \frac{1}{|\det S|}\langle M(S^{-1}y), S^{-1}y\rangle \\ &= \frac{1}{|\det S|}\langle Sy, S^{-1}y\rangle = \frac{1}{|\det S|}|y|^2.\end{aligned}$$

Άρα το $\frac{1}{V^{1/n}}S^{-1}(\tilde{K})$ είναι ισοτροπικό. □

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 3.1.10. Έστω ότι το $K_1$ είναι ισοτροπική τοποθέτηση του $K$. Τότε υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_{K_1} \langle x, Tx\rangle\,dx = \alpha^2(\mathrm{tr}(T))$$

για κάθε γραμμικό μετασχηματισμό $T$ (θυμηθείτε τους ισοδύναμους ορισμούς της ισοτροπικότητας). Άρα για $T \in SL_n$ έχουμε

$$\int_{TK_1} |x|^2\,dx = \int_{K_1} |Tx|^2 dx = \int_{K_1} \langle Tx, Tx\rangle\,dx = \int_{K_1} \langle x, T^tTx\rangle\,dx = \alpha^2(\mathrm{tr}(T^tT)).$$

Επειδή ο $T^tT$ είναι συμμετρικός, εφαρμόζουμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στα στοιχεία της διαγωνίου του και λαμβάνουμε

$$\mathrm{tr}(T^tT) \geqslant n\,[\det(T^tT)]^{1/n},$$

άρα

$$\int_{TK_1} |x|^2 \geqslant \alpha^2 n \left[\det(T^t T)\right]^{1/n} = \alpha^2 n \left[\det(T^t) \cdot \det(T)\right]^{1/n} = \alpha^2 n = \int_{K_1} |x|^2 dx.$$

Άρα $\int_{K_1} |x|^2 dx = \Delta(K)$. Η ισότητα $\Delta(K) = \int_{TK_1} |x|^2 dx$ λαμβάνεται αν και μόνο αν $T^t T = I_n$, δηλ. $T$ ορθογώνιος. Τότε όμως το $TK_1$ είναι επίσης ισοτροπικό. Αν $K_2 = U(K)$ άλλη ισοτροπική τοποθέτηση του $K$, τότε $\int_{K_2} |x|^2 dx = \Delta(K)$, άρα σύμφωνα με τα παραπάνω ο $U$ είναι ορθογώνιος και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Παρατήρηση 3.1.14.** Ένας εναλλακτικός τρόπος για να δούμε ότι αν $K$ είναι μια λύση του παραπάνω προβλήματος ελαχιστοποίησης τότε το $K$ είναι ισοτροπικό, είναι να χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο απλό επιχείρημα λογισμού μεταβολών. Έστω $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Για μικρό $\varepsilon > 0$, ο $I + \varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, άρα ο $(I + \varepsilon T)/[\det(I + \varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τον όγκο. Συνεπώς,

$$\int_K |x|^2 dx \leqslant \int_K \frac{|x + \varepsilon Tx|^2}{[\det(I + \varepsilon T)]^{2/n}} dx.$$

Παρατηρούμε ότι $|x+\varepsilon Tx|^2 = |x|^2 + 2\varepsilon\langle x, Tx\rangle + O_{T,K}(\varepsilon^2)$ και $[\det(I+\varepsilon T)]^{2/n} = 1 + 2\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O_T(\varepsilon^2)$. Άρα, αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$, βλέπουμε ότι

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K |x|^2 dx \leqslant \int_K \langle x, Tx\rangle dx.$$

Αφού ο $T$ ήταν τυχών, η ίδια ανισότητα ισχύει με τον $-T$ στη θέση του $T$, άρα

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n} \int_K |x|^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Από αυτή τη συνθήκη βλέπουμε εύκολα ότι το $K$ είναι ισοτροπικό.

**Ορισμός 3.1.15.** Η συζήτηση που προηγήθηκε δείχνει ότι για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$, η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n} \min\left\{ \frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{TK} |x|^2 dx \;\middle|\; T \in GL(n) \right\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από την γραμμική κλάση του $K$. Επίσης, αν $\tilde{K}$ είναι μια ισοτροπική τοποθέτηση του $K$ τότε για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_{\tilde{K}} \langle x, \vartheta\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Η σταθερά $L_K$ ονομάζεται ισοτροπική σταθερά του $K$.

## 3.2 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας και $\psi_\alpha$-εκτιμήσεις

Τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας αποτελούν, όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, ένα ελαφρώς γενικότερο πλαίσιο μελέτης της εικασίας του υπερεπιπέδου από αυτό των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων. Είναι δε, όπως θα δούμε, κατά κάποιο τρόπο «συζυγή» με τις λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις, με την έννοια ότι ένα μέτρο με λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα είναι λογαριθμικά κοίλο και ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο με την επιπλέον παραδοχή ότι δεν υπάρχει υπερεπίπεδο $H$ που να το περιέχει (δηλαδή $\mu(H)=1$) έχει λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα.

Συμβολίζουμε $\mathcal{P}_n$ την κλάση των Borel μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue $\lambda$, δηλαδή αν $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ και $\lambda(A)=0$ τότε $\mu(A)=0$.

Κατ' αντιστοιχία με τις λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις ορίζουμε λοιπόν:

**Ορισμός 3.2.1.** Έστω $\mu\in\mathcal{P}_n$. Τότε το βαρύκεντρο του $\mu$ ορίζεται ως το

$$\mathrm{bar}(\mu)=\int_{\mathbb{R}^n} x\,d\mu(x).$$

Είναι άμεσο ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\vartheta\rangle\,d\mu(x)=\langle \mathrm{bar}(\mu),\vartheta\rangle$$

για κάθε $\vartheta\in S^{n-1}$.

**Ορισμός 3.2.2.** Έστω $\mu\in\mathcal{P}_n$ ώστε $\mathrm{bar}(\mu)=0$. Τότε το $\mu$ λέγεται κεντραρισμένο. Η κλάση των κεντραρισμένων $\mu\in\mathcal{P}_n$ συμβολίζεται $\mathcal{CP}_n$.

**Ορισμός 3.2.3.** Έστω $\mu\in\mathcal{P}_n$. Το $\mu$ ονομάζεται λογαριθμικά κοίλο αν για κάθε $A,B$ συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda\in(0,1)$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A+\lambda B)\geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}.$$

Συμβολίζουμε ακόμη $\mathcal{SP}_n$ την κλάση των $\mu\in\mathcal{P}_n$ που είναι συμμετρικά (δηλαδή $\mu(A)=\mu(-A)$ για κάθε $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$) και $f_\mu$ την πυκνότητα του μέτρου $\mu$, δηλαδή

$$\int_A f_\mu(x)\,dx=\mu(A)$$

για κάθε $A\in\mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$.

**Λήμμα 3.2.4** (ανισότητα Prékopa-Leindler)**.** *Έστωσαν $f,g,h:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ μετρήσιμες και $\lambda\in(0,1)$. Έστω ακόμη ότι οι $f,g$ είναι ολοκληρώσιμες και*

$$h(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant f(x)^{\lambda}g(y)^{1-\lambda}$$

*για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$. Τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h\geqslant\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f\Big)^{\lambda}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} g\Big)^{1-\lambda}.$$

Μια απόδειξη χρησιμοποιεί επαγωγή ως προς τη διάσταση $n$, ωστόσο δεν θα εισέλθουμε σε λεπτομέρειες.

**Πρόταση 3.2.5.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, δηλαδή ισχύει επιπλέον $\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx=1$. Τότε το μέτρο $\mu$ με πυκνότητα $f$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.*

*Απόδειξη.* Έστωσαν $A,B$ συμπαγή. Θέτουμε $g:=\mathbf{1}_A f$, $h:=\mathbf{1}_B f$ και $k:=\mathbf{1}_{\lambda A+(1-\lambda)B} f$. Παρατηρήστε ότι

$$k(\lambda x+(1-\lambda)y)\geqslant g(x)^{\lambda}h(y)^{1-\lambda}.$$

Το Λήμμα 3.2.4 συνεπώς δίνει

$$\int_{\mathbb{R}^n} k \geqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n} g\Big)^{\lambda}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} h\Big)^{1-\lambda},$$

επομένως $\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^{\lambda}\mu(B)^{1-\lambda}$. □

**Θεώρημα 3.2.6** (Borell). *Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ακόμη ότι για κάθε υπερεπίπεδο $H$ ισχύει $\mu(H) < 1$. Τότε $\mu \in \mathcal{P}_n$ και έχει λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα $f$.*

*Απόδειξη.* Παραλείπεται. □

Ορίζουμε τώρα την $\psi_\alpha$-νόρμα που θα χρησιμοποιήσουμε συχνά στο υπόλοιπο της εργασίας.

**Ορισμός 3.2.7.** Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ χώρος μέτρου πιθανότητας και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\alpha \geqslant 1$ ορίζουμε την $\psi_\alpha$-νόρμα της $f$ ως εξής:

$$\|f\|_{\psi_\alpha} := \inf\Big\{t > 0 : \int_{\Omega} \exp\Big[\Big(\frac{|f(\omega)|}{t}\Big)^{\alpha}\Big]\, d\mu(\omega) \leqslant 2\Big\}$$

με την προϋπόθεση βέβαια ότι τέτοια $t > 0$ υπάρχουν, κάτι που δεν ισχύει απαραίτητα.

**Ορισμός 3.2.8.** Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $\alpha \geqslant 1$ και $\vartheta \in S^{n-1}$. Θα λέμε ότι το $\mu$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$-εκτίμηση με σταθερά $b_\alpha = b_\alpha(\vartheta) > 0$ στην κατεύθυνση του $\vartheta$ αν

$$\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant b_\alpha \|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2.$$

Επιπλέον θα χαρακτηρίζουμε το $\mu$ ως ένα $\psi_\alpha$-μέτρο με σταθερά $b_\alpha > 0$ αν

$$\sup_{\vartheta \in S^{n-1}} \frac{\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_{\psi_\alpha}}{\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2} \leqslant b_\alpha.$$

**Πρόταση 3.2.9.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $\alpha \geqslant 1$ και $\vartheta \in S^{n-1}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει σταθερά $b_\alpha$ ώστε $\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_q \leqslant b_\alpha q^{1/\alpha}\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2$ για κάθε $q \geqslant \alpha$. όπου $\|f\|_q = \big(\int |f|^q d\mu\big)^{1/q}$. Τότε το $\mu$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$-εκτίμηση με σταθερά $b'_\alpha \simeq b_\alpha$ στην κατεύθυνση του $\vartheta$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω λήμμα.

**Λήμμα 3.2.10.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Έστω $\alpha \geqslant 1$ και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \simeq \sup_{p \geqslant \alpha} \frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}}, \ \text{όπου } \|f\|_p = \|f\|_{L_p(\mu)}$$

*Απόδειξη της Πρότασης 3.2.9 με την παραδοχή του Λήμματος 3.2.10.* Υποθέτουμε ότι έχουμε $\mu, \alpha, \vartheta, b_\alpha$ όπως πριν, ώστε $\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_q \leqslant b_\alpha q^{1/\alpha}\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2$ για κάθε $q \geqslant \alpha$. Τότε

$$\sup_{q \geqslant \alpha} \frac{\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_q}{q^{1/\alpha}} \leqslant b_\alpha \|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2,$$

άρα $\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant c \cdot b_\alpha \|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_2$, σύμφωνα με το λήμμα. □

*Απόδειξη του Λήμματος 3.2.10.* Για να δείξουμε κατ' αρχάς ότι $\sup_{p\geqslant\alpha}\frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}}\leqslant C\|f\|_{\psi_\alpha}$, όπου $C>0$ απόλυτη σταθερά, αρκεί να δείξουμε ότι $\|f\|_p\leqslant Cp^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}$ για κάθε $p\geqslant\alpha$. Για $t>0$, κρατώντας από το ανάπτυγμα της $e^t$ σε δυναμοσειρά μόνο τον πρώτο και τον $k$-οστό όρο, $k\in\mathbb{N}$, βλέπουμε ότι $1+\frac{t^k}{k!}\leqslant e^t$. Εφαρμόζοντας για $t=\frac{|f(\omega)|^\alpha}{\|f\|_{\psi_\alpha}^\alpha}$ παίρνουμε

$$1+\frac{|f(\omega)|^{k\alpha}}{k!\|f\|_{\psi_\alpha}^{k\alpha}}\leqslant \exp\Big[\Big(\frac{|f(\omega)|}{\|f\|_{\psi_\alpha}}\Big)^\alpha\Big],$$

απ' όπου ολοκληρώνοντας έχουμε

$$1+\int_\Omega \frac{|f(\omega)|^{k\alpha}}{k!\|f\|_{\psi_\alpha}^{k\alpha}}\,d\mu(\omega)\leqslant \int_\Omega \exp\Big[\Big(\frac{|f(\omega)|}{\|f\|_{\psi_\alpha}}\Big)^\alpha\Big]\,d\mu(\omega)\leqslant 2,$$

δηλαδή

$$\int_\Omega |f(\omega)|^{k\alpha}d\mu(\omega)\leqslant k!\|f\|_{\psi_\alpha}^{k\alpha}. \tag{3.2.1}$$

Σταθεροποιώντας τώρα ένα $p\geqslant\alpha$, υπάρχει μοναδικό $k=k(p)\in\mathbb{N}$ ώστε $k\alpha\leqslant p<(k+1)\alpha$, άρα, από γνωστό πόρισμα της ανισότητας Hölder,

$$\|f\|_p\leqslant\|f\|_{(k+1)\alpha}. \tag{3.2.2}$$

Εφαρμόζοντας την (3.2.1) για το $k+1$ αντί για το $k$ (αφού ήταν τυχόν) λαμβάνουμε

$$\|f\|_{(k+1)\alpha}^{(k+1)\alpha}\leqslant (k+1)!\|f\|_{\psi_\alpha}^{(k+1)\alpha}. \tag{3.2.3}$$

Οι (3.2.2) και (3.2.3) δίνουν

$$\|f\|_p\leqslant[(k+1)!]^{1/(k+1)\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}. \tag{3.2.4}$$

Τελικά χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling για το παραγοντικό, βρίσκουμε

$$\|f\|_p\leqslant(2k)^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}\leqslant\Big(\frac{2p}{\alpha}\Big)^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}\leqslant 2p^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha},$$

οπότε υπολογίσαμε μάλιστα $C=2$, μία τιμή για τη σταθερά $C$.

Από την άλλη πλευρά, για να δείξουμε ότι $\sup_{p\geqslant\alpha}\frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}}\geqslant c_1\|f\|_{\psi_\alpha}$, συμβολίζουμε κατ' αρχάς $\gamma:=\sup_{p\geqslant\alpha}\frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}}$. Παρατηρήστε ότι

$$\int_\Omega |f|^p d\mu\leqslant\gamma^p p^{p/\alpha}$$

για κάθε $p\geqslant\alpha$. Παρατηρήστε ακόμη ότι για κάθε $k\in\mathbb{N}$ ισχύει $k!\geqslant\left(\frac{k}{e}\right)^k$. Πράγματι, για $k=1$ είναι προφανές, ενώ αν $k!\geqslant\left(\frac{k}{e}\right)^k$ τότε

$$\Big(\frac{k+1}{e}\Big)^{k+1}=\frac{(k+1)k^k\left(1+\frac{1}{k}\right)^k}{e^{k+1}}\leqslant\frac{(k+1)!k^ke}{k!e^{k+1}}\leqslant\frac{(k+1)!k^k}{\left(\frac{k}{e}\right)^k e^k}=(k+1)!.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω και αναπτύσσοντας σε δυναμοσειρά την εκθετική, βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp\Big(\frac{|f|}{2e^{1/e}e\gamma}\Big)^\alpha d\mu &= 1+\sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(2e^{1/e}e\gamma)^{k\alpha}k!}\int_\Omega |f|^{\alpha k}\,d\mu \leqslant 1+\sum_{k=1}^\infty \frac{(ka)^k}{k!(2e)^{k\alpha}e^{k\alpha/e}} \\ &\leqslant 1+\sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{e\alpha}{2^\alpha e^\alpha e^{\alpha/e}}\Big)^k \leqslant 1+\sum_{k=1}^\infty \Big(\frac{e\alpha}{2e\alpha}\Big)^k = 2,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $(2e\alpha)^{1/\alpha} \leqslant 2e\alpha^{1/\alpha} \leqslant 2e\cdot e^{1/e}$. Άρα, $\|f\|_{\psi_\alpha} \leqslant 2e\cdot e^{1/e}\gamma$. □

Αφού παρουσιάσαμε τη συσχέτιση της $\psi_\alpha$-νόρμας με την $p$-νόρμα, αποδεικνύουμε δύο ακόμη λήμματα που προσδιορίζουν μια «εκτίμηση ουράς» για το μέτρο $\mu$ που ικανοποιεί μία $\psi_\alpha$-εκτίμηση.

**Λήμμα 3.2.11.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $\alpha \geqslant 1$ και $\vartheta \in S^{n-1}$. Αν το $\mu$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$-εκτίμηση με σταθερά $b_\alpha$ στην κατεύθυνση του $\vartheta$, τότε*

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}^n : |\langle x,\vartheta\rangle| \geqslant t\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_2\}) \leqslant 2\exp\big(-t^\alpha/b_\alpha^\alpha\big)$$

*για κάθε $t>0$.*

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της $\psi_\alpha$-νόρμας, της $\psi_\alpha$-εκτίμησης, και την ανισότητα Markov:

$$\begin{aligned}\mu(\{x\in\mathbb{R}^n : |\langle x,\vartheta\rangle| \geqslant t\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_2\}) &\leqslant \mu\Big(\Big\{x\in\mathbb{R}^n : |\langle x,\vartheta\rangle| \geqslant \frac{t\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_{\psi_\alpha}}{b_\alpha}\Big\}\Big) \\ &\leqslant e^{-(\frac{t}{b_\alpha})^\alpha}\int_\Omega \exp\Big[\Big(\frac{|\langle x,\vartheta\rangle|}{\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_{\psi_\alpha}}\Big)^\alpha\Big]\,d\mu(x) \\ &\leqslant 2\exp\Big(-\frac{t^\alpha}{b_\alpha^\alpha}\Big).\end{aligned}$$

□

**Λήμμα 3.2.12.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $\alpha \geqslant 1$ και $\vartheta \in S^{n-1}$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $b>0$ ώστε για κάθε $t>0$ να ισχύει*

$$\mu(\{x\in\mathbb{R}^n : |\langle x,\vartheta\rangle| \geqslant t\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_2\}) \leqslant 2\exp\big(-t^\alpha/b^\alpha\big).$$

*Τότε υπάρχει $c>0$ απόλυτη σταθερά ώστε το $\mu$ να ικανοποιεί μία $\psi_\alpha$-εκτίμηση με σταθερά $\leqslant cb$ στην κατεύθυνση του $\vartheta$.*

*Απόδειξη.* Υπολογίζουμε αρχικά, για $p \geqslant \alpha$:

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\vartheta\rangle|^p d\mu(x) &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(\{x\in\mathbb{R}^n : |\langle x,\vartheta\rangle| \geqslant t\})\,dt \\ &= \|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pu^{p-1}\mu(\{x\in\mathbb{R}^n : |\langle x,\vartheta\rangle| \geqslant u\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_2\})\,du \\ &\leqslant 2\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pu^{p-1}\exp\big(-u^\alpha/b^\alpha\big)\,du,\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει ξανά την «εκτίμηση ουράς» της υπόθεσης. Υπολογίζουμε

$$\int_0^\infty pu^{p-1}\exp\big(-u^\alpha/b^\alpha\big)\,du = b^p\Gamma\Big(\frac{p}{\alpha}+1\Big),$$

μετά την αλλαγή μεταβλητής $u = bs^{1/a}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω με τον τύπο του Stirling βρίσκουμε

$$\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_p \leqslant c_1bp^{1/\alpha}\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_2,$$

άρα το Λήμμα 3.2.10 δίνει $\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant c_1b\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_2$. □

Διατυπώνουμε τώρα και αποδεικνύουμε το λήμμα του Borell. Σύμφωνα με αυτό, αν $\mu \in \mathcal{P}_n$ λογαριθμικά κοίλο, και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμμετρικό κυρτό ώστε $0 < \mu(A) < 1$, τότε το μέτρο που παραμένει εκτός του $tA$, $t > 1$ φθίνει εκθετικά με το $t$ ανεξαρτήτως του $n$ και της ειδικής γεωμετρίας του $A$. Γενικεύει δε το λήμμα του Borell για κυρτά σώματα (που είναι συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski) στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

**Λήμμα 3.2.13** (Borell)**.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ λογαριθμικά κοίλο, $A \subseteq \mathbb{R}^n$ συμμετρικό κυρτό σύνολο ώστε $\mu(A) = a \in (0,1)$ και $t > 1$. Τότε*

$$\mu((tA)^c) \leqslant a\Big(\frac{1-a}{a}\Big)^{\frac{t+1}{2}}.$$

*Απόδειξη.* Έστω ότι υπάρχει $b \in A$ ώστε $b = \frac{2}{t+1}y + \frac{t-1}{t+1}a_1$ για κάποια $a_1 \in A$ και $y \notin tA$. Τότε

$$\frac{1}{t}y = \frac{t+1}{2t}b + \frac{t-1}{2t}(-a_1) \in A$$

αφού το $A$ είναι συμμετρικό και κυρτό. Άρα $y \in tA$, άτοπο. Αυτό δείχνει ότι

$$A^c \supseteq \frac{2}{t+1}(tA)^c + \frac{t-1}{t+1}A.$$

Αφού το $\mu$ είναι λογαριθμικά κοίλο, προκύπτει ότι $\mu(A^c) \geqslant \mu((tA)^c)^{\frac{2}{t+1}}\mu(A)^{\frac{t-1}{t+1}}$, όθεν

$$(1-a)^{\frac{t+1}{2}} \geqslant \mu((tA)^c)a^{\frac{t-1}{2}} = \frac{\mu((tA)^c)a^{\frac{t+1}{2}}}{a}.$$

□

**Θεώρημα 3.2.14.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ λογαριθμικά κοίλο και $f : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ μία ημινόρμα. Τότε για κάθε $q > p \geqslant 1$ ισχύει*

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^pd\mu\Big)^{1/p} \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^qd\mu\Big)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|f|^pd\mu\Big)^{1/p},$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $\|f\|_p = \big(\int|f|^pd\mu\big)^{1/p}$ όπως για το μέτρο Lebesgue. Θέτουμε $A := \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3\|f\|_p\}$, οπότε

$$tA = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3t\|f\|_p\}.$$

Το $A$ είναι συμμετρικό, κυρτό και $a := \mu(A) \geqslant 1 - 3^{-p}$. Από την άλλη πλευρά είναι προφανές ότι $3^p - 1 \geqslant e^{p/2}$. Άρα,

$$\frac{1}{a} - 1 \leqslant \frac{3^{-p}}{1 - 3^{-p}} \leqslant e^{-p/2}.$$

Το Λήμμα 3.2.13 δίνει λοιπόν, για $t > 1$:

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| > 3t\|f\|_p\}) = \mu((tA)^c) \leqslant a\Big(\frac{1-a}{a}\Big)^{\frac{t+1}{2}} < \frac{(1-a)^{\frac{t-1}{2}}}{a^{\frac{t-1}{2}}} = \Big(\frac{1}{a} - 1\Big)^{\frac{t-1}{2}} \leqslant e^{-\frac{p(t-1)}{4}}.$$

Όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.12 υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q d\mu &= \int_0^\infty q s^{q-1} \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \geqslant s\})\, ds \leqslant (3\|f\|_p)^q + (3\|f\|_p)^q \int_1^\infty q t^{q-1} e^{-\frac{p(t-1)}{4}} dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{\frac{p}{4}} (3\|f\|_p)^q \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-\frac{pt}{4}} dt \leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{\frac{p}{4}} \Big(\frac{12\|f\|_p}{p}\Big)^q \Gamma(q+1),\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την προηγούμενη ανισότητα και την αλλαγή μεταβλητής $s = 3t\|f\|_p$. Τελικά, ο τύπος του Stirling και η ανισότητα $(a+b)^{1/q} \leqslant a^{1/q} + b^{1/q}$ για κάθε $a, b > 0$ και $q \geqslant 1$, συνεπάγονται ότι $\|f\|_q \leqslant c\frac{q}{p}\|f\|_p$ για κατάλληλη $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Η αριστερή ανισότητα είναι γνωστό ότι ισχύει αφού $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$. □

**Πόρισμα 3.2.15.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$ να ισχύει $\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_q \leqslant cq\, \|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_1$. Επομένως,*

$$\|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_{\psi_1} \leqslant C \|\langle \cdot, \vartheta\rangle\|_1$$

*για κατάλληλη $C > 0$ απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Άμεση από το Λήμμα 3.2.10 και το Θεώρημα 3.2.14. □

Δείχνουμε τώρα μία ακόμη στοιχειώδη πρόταση που θα μας χρειαστεί για να αποδείξουμε το άνω φράγμα του Bourgain για την ισοτροπική σταθερά.

**Πρόταση 3.2.16.** *Έστω $f$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση σε έναν χώρο μέτρου πιθανότητας. Τότε*

$$\|f\|_{\psi_2} \leqslant \sqrt{\|f\|_{\psi_1} \cdot \|f\|_\infty},$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι σε χώρο μέτρου πιθανότητας ισχύει $\|f\|_p \leqslant \|f\|_\infty$ για κάθε $p \geqslant 1$. Άρα

$$\frac{\|f\|_p}{\sqrt{p}} \leqslant \frac{\sqrt{\|f\|_p \cdot \|f\|_\infty}}{\sqrt{p}},$$

επομένως

$$\|f\|_{\psi_2} \simeq \sup_{p \geqslant 2} \frac{\|f\|_p}{\sqrt{p}} \leqslant \sup_{p \geqslant 1} \sqrt{\frac{\|f\|_p}{p} \cdot \|f\|_\infty} \simeq \sqrt{\|f\|_{\psi_1} \cdot \|f\|_\infty},$$

από το Λήμμα 3.2.10. □

## 3.3 Το άνω φράγμα του Bourgain για την ισοτροπική σταθερά

Στην παράγραφο αυτή θα αποδείξουμε το αξιόλογο άνω φράγμα $O(\sqrt[4]{n}\log n)$ που έδωσε ο Bourgain λίγα μόλις χρόνια αφότου ο ίδιος έθεσε την εικασία του υπερεπιπέδου ως ανοιχτό ερώτημα. Η απόδειξη που θα επιχειρήσουμε, και που είναι πιο κοντά στο αρχικό επιχείρημα του Bourgain από την διαφορετική απόδειξη που έδωσε ο Dar, ανάγει την εύρεση άνω φράγματος για την ισοτροπική σταθερά τυχόντος κυρτού σώματος στην εύρεση τέτοιου φράγματος μόνο για την ισοτροπική σταθερά κυρτού σώματος με «μικρή διάμετρο». Εν συνεχεία χρησιμοποιεί το θεώρημα σύγκρισης του Talagrand. Θα χρειαστούμε όμως πρώτα κάποια προαπαιτούμενα από τη Θεωρία Πιθανοτήτων τα οποία θα εκθέσουμε εν συντομία.

Δοθέντος ενός χώρου πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{A},P)$, υπενθυμίζουμε ότι πραγματική τυχαία μεταβλητή σε αυτόν είναι μια συνάρτηση $X:\Omega\to\mathbb{R}$ ώστε για κάθε $x\in\mathbb{R}$ να ισχύει $\{\omega\in\Omega : X(\omega)\leqslant x\}\in\mathcal{A}$, δηλαδή μια πραγματική μετρήσιμη συνάρτηση ορισμένη στο $\Omega$. Η $F:\mathbb{R}\to[0,1]$, $F(x):=P(X\leqslant x)=P(\{\omega\in\Omega : X(\omega)\leqslant x\})$ ονομάζεται συνάρτηση κατανομής της $X$, η δε $f(x)=F'(x)$ πυκνότητά της. Συμβολίζουμε

$$\mathbb{E}(X):=\int_{-\infty}^{\infty} xf(x)\,dx=\int_\Omega X(\omega)\,dP(\omega)$$

τη μέση τιμή της $X$, οριζόμενη εφόσον $\int_{-\infty}^{\infty}|x|f(x)\,dx<\infty$. Επίσης,

$$\mathrm{Var}(X):=\mathbb{E}(X^2)-(\mathbb{E}(X))^2$$

είναι η διασπορά της $X$. Η γκαουσιανή μεταβλητή $g$ μέσης τιμής $\mu$ και διασποράς $\sigma^2$ έχει πυκνότητα

$$g(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\exp\Big[-(x-\mu)^2/2\sigma^2\Big].$$

**Ορισμός 3.3.1.** Έστω ότι δίνεται ένας μετρικός χώρος $(T,d)$ και μια οικογένεια $\mathcal{Y}=(\psi_t)_{t\in T}$ πραγματικών τυχαίων μεταβλητών στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Η $\mathcal{Y}$ ονομάζεται υπο-γκαουσιανή διαδικασία ως προς τη μετρική $d$ αν για κάθε $s,t\in T$ ισχύουν τα εξής:

(i) $\mathbb{E}(\psi_t)=0$.

(ii) Για κάθε $u>0$, $P(|\psi_t-\psi_s|\geqslant u)\leqslant 2\exp\big(-u^2/d^2(t,s)\big)$.

Θεωρώντας τώρα το $T$ χωρίς τη μετρική $d$, θα ορίσουμε την γκαουσιανή διαδικασία.

**Ορισμός 3.3.2.** Έστω $T\neq\varnothing$ και $\mathcal{Z}=(Z_t)_{t\in T}$ οικογένεια πραγματικών τυχαίων μεταβλητών στον $(\Omega,\mathcal{A},P)$. Η $\mathcal{Z}$ ονομάζεται γκαουσιανή διαδικασία αν για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $Q\subseteq T$ και $Z\in\mathrm{span}\{(Z_t)_{t\in Q}\}$ η $Z$ ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή με μέσο 0.

Παρατηρήστε ότι για κάθε $t\in T$, η $Z_t$ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη: $Z_t\in\mathrm{span}\{Z_t\}$, άρα η $Z_t$ είναι γκαουσιανή μέσου 0. Η $Z_t^2$ δεν είναι δύσκολο να υπολογίσουμε ότι έχει πυκνότητα $g(x)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}x^{-1/2}e^{-x/2\sigma^2}$. Άρα

$$\int_\Omega Z_t^2=\int_0^\infty x\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}x^{-1/2}e^{-x/2\sigma^2}dx<\infty.$$

Επομένως η $\mathcal{Z}$ επάγει μια μετρική $d$ στο $T$ ως εξής:

$$d(t,s) = \|Z_t - Z_s\|_{L^2(\Omega)} = \Big( \int_\Omega (Z_t - Z_s)^2 dP \Big)^{1/2}.$$

Συγκεκριμένα, η $Z_t - Z_s$ ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή με μεσο 0 και $\mathrm{Var}(Z_t - Z_s) = \mathbb{E}\left((Z_t - Z_s)^2\right) = d^2(t,s)$. Μπορούμε τώρα να δείξουμε την εξής:

**Πρόταση 3.3.3.** *Έστω $T \neq \varnothing$ και $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t\in T}$ γκαουσιανή διαδικασία στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Τότε η $\mathcal{Z}$ είναι υπο-γκαουσιανή ως προς τη μετρική $d$ που επάγει στο $T$.*

*Απόδειξη.* Για $t, s \in T$ και $u > 0$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} P(|Z_t - Z_s| \geqslant u) &= \int_u^\infty \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)dx + \int_{-\infty}^{-u} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\Big)dx \\ &= 2\int_u^\infty \frac{1}{d(t,s)\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{x^2}{2d^2(t,s)}\Big)\, dx \leqslant 2\exp\Big(-\frac{u^2}{d^2(t,s)}\Big). \end{aligned}$$

□

Η μέση τιμή της $\sup\limits_{t\in T} \psi_t$ ορίζεται ως εξής.

**Ορισμός 3.3.4.** Έστω $(T,d)$ μετρικός χώρος και $\mathcal{Y} = (\psi_t)_{t\in T}$ υπο-γκαουσιανή διαδικασία ως προς τη μετρική $d$. Τότε ορίζουμε

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T} \psi_t = \sup\Big\{ \mathbb{E}\max_{t\in F} \psi_t : F \subseteq T, F \text{ πεπερασμένο} \Big\}.$$

Η μέση τιμή $\mathbb{E}\max\limits_{t\in F} \psi_t$ είναι καλά ορισμένη αφού $F$ πεπερασμένο και μας επιτρέπει να δώσουμε τον ανωτέρω ορισμό.

Ερχόμαστε τώρα στο να ορίσουμε μια γκαουσιανή διαδικασία η οποία θα συνδέσει τα προεκτεθέντα με την γεωμετρία των κυρτών σωμάτων.

Έστωσαν $g_1, \ldots, g_n$ ανεξάρτητες πραγματικές τυχαίες μεταβλητές στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ που ακολουθούν τυπική γκαουσιανή κατανομή, δηλαδή γκαουσιανή μέσου 0 και διασποράς 1. Ορίζουμε $G = (g_1, \ldots, g_n)$ τυχαίο $n$-διάστατο διάνυσμα. Είναι τότε γνωστό ότι το $G$ έχει πυκνότητα $\frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2}\Big)$. Σημειώστε ότι η κατανομή του

$$P(G \in A) = \int_A \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} \exp\Big(-\frac{|x|^2}{2}\Big)\, dx$$

είναι ακριβώς το μέτρο Gauss του $A$. Έστω επίσης $\varnothing \neq T \subseteq \mathbb{R}^n$. Ορίζουμε μια πραγματική τυχαία μεταβλητή στον $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ για κάθε $t \in T$ ως $Z_t(\omega) = \langle t, G(\omega)\rangle$ και θεωρούμε τη διαδικασία $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t\in T}$. Παρατηρήστε ότι, αν $\{e_1, \ldots, e_n\}$ ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε $G(\omega) = \sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i$. Άρα,

$$Z_t(\omega) = \Big\langle t, \sum_{i=1}^n g_i(\omega)e_i \Big\rangle = \sum_{i=1}^n \langle t, g_i(\omega)e_i\rangle = \sum_{i=1}^n \langle t, e_i\rangle g_i(\omega).$$

Επίσης, $\|Z_t\|_{L^2(\Omega)} = \left(\sum_{i=1}^n \langle t, e_i\rangle^2\right)^{1/2} = |t|$.

Από την άλλη πλευρά, αν $t_1, \ldots, t_r \in T$ και $a_1, \ldots, a_r \in \mathbb{R}$, τότε

$$a_1 Z_{t_1}(\omega) + \cdots + a_r Z_{t_r}(\omega) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{r} \langle t_j, e_i \rangle a_j g_i(\omega)$$

που ακολουθεί γκαουσιανή κατανομή μέσου 0, άρα η $\mathcal{Z}$ είναι γκαουσιανή διαδικασία.

Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.3, η $\mathcal{Z}$ είναι υπο-γκαουσιανή ως προς τη μετρική $d$ που επάγει στο $T$. Όμως,

$$d(t,s) = \|Z_t - Z_s\|_{L^2(\Omega)} = \|Z_{t-s}\|_{L^2(\Omega)} = |t-s|$$

δηλαδή η $d$ είναι η Ευκλείδεια μετρική. Αν το $T$ είναι ένα κυρτό σώμα, έχουμε μια άμεση γεωμετρική εκτίμηση της $\mathbb{E} \sup\limits_{t \in T} Z_t$. Πράγματι, σύμφωνα με όσα είπαμε για την κατανομή του $G$, και ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες στο τέλος, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(3.3.1)\qquad \mathbb{E} \sup_{t \in T} Z_t = \mathbb{E} \sup_{t \in T} \langle t, G \rangle = \mathbb{E} h_T(G) &= \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}^n} h_T(x) e^{-\frac{|x|^2}{2}} dx \\ &\leqslant c\sqrt{n} \int_{S^{n-1}} h_T(\vartheta)\, d\sigma(\vartheta) = c\sqrt{n} w(T),\end{aligned}$$

Μπορούμε τώρα, μετά από κάποιους σύντομους ορισμούς, να διατυπώσουμε το θεώρημα κυριαρχούντος μέτρου του Talagrand και το επακόλουθό του, το θεώρημα σύγκρισης, επίσης του Talagrand. Το τελευταίο θα αποτελέσει, όπως προαναφέραμε, βασικό εργαλείο για την απόδειξη του άνω φράγματος του Bourgain.

Έστω $(T,d)$ μετρικός χώρος και $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία διαμερίσεων του $T$. Θα λέμε ότι η $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αύξουσα αν για κάθε $n \geqslant 0$ η $\mathcal{A}_{n+1}$ αποτελεί εκλέπτυνση της $\mathcal{A}_n$. Επίσης, θα λέμε ότι η $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι αποδεκτή αν $\mathcal{A}_0 = T$ και $|\mathcal{A}_n| \leqslant 2^{2^n}$ για κάθε $n \geqslant 1$. Για $n \geqslant 0$ και $t \in T$ συμβολίζουμε $\mathcal{A}_n(t)$ το μοναδικό σύνολο $B \in \mathcal{A}_n$ που περιέχει το $t$. Έχουμε λοιπόν.

**Θεώρημα 3.3.5** (Talagrand)**.** *Υπάρχει $c > 0$ σταθερά ώστε αν $\mathcal{Z} = (Z_t)_{t \in T}$ είναι μια γκαουσιανή διαδικασία, $(T,d)$ μετρικός χώρος, να υπάρχει μια αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων $\{\mathcal{A}_n\}_{n=1}^{\infty}$ του $T$ με την ιδιότητα*

$$\mathbb{E} \sup_{t \in T} Z_t \geqslant c \sup_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} \mathrm{diam}(\mathcal{A}_n(t)),$$

*όπου βέβαια, για $X \neq \varnothing$, $\mathrm{diam}(X) := \sup\{d(x,y) : x, y \in X\}$.*

Από την άλλη πλευρά, ισχύει το:

**Θεώρημα 3.3.6.** *Έστω $(T,d)$ μετρικός χώρος και $(\psi_t)_{t \in T}$ υπο-γκαουσιανή διαδικασία ως προς τη μετρική $d$. Έστω ακόμη ότι $\{T_n\}$ είναι ακολουθία υποσυνόλων του $T$ ώστε $|T_0| = 1$ και $|T_n| \leqslant 2^{2^n}$ για κάθε $n \geqslant 1$. Τότε*

$$\mathbb{E} \sup_{t \in T} \psi_t \leqslant C \sup_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/2} d(t, T_n)$$

*για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. όπου $d(t, T_n) = \inf\{d(t,x) : x \in T_n\}$.*

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.3.6 για την αύξουσα ακολουθία υποσυνόλων $\{T_n\}$ του $T$ όπου κάθε $T_n$ κατασκευάζεται παίρνοντας ένα σημείο από κάθε ένα εκ των συνόλων που απαρτίζουν την $\{\mathcal{A}_n\}$, όπου $\{\mathcal{A}_n\}$ ακολουθία διαμερίσεων του $T$, αποδεικνύουμε το:

**Πόρισμα 3.3.7.** *Έστω $(T,d)$ μετρικός χώρος και $(\psi_t)_{t\in T}$ υπο-γκαουσιανή διαδικασία ως προς τη μετρική $d$. Έστω $\{\mathcal{A}_n\}$ αύξουσα αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων του $T$. Τότε υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T}\psi_t \leqslant C\sup_{t\in T}\sum_{n=0}^{\infty}2^{n/2}\mathrm{diam}(\mathcal{A}_n(t)).$$

*Απόδειξη.* Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι υπάρχει $t'\in T_n$ ώστε $t'\in\mathcal{A}_n(t)$. Τότε $d(t,T_n)\leqslant d(t,t')\leqslant \mathrm{diam}(\mathcal{A}_n(t))$. □

Συνδυάζοντας τώρα το Θεώρημα 3.3.5 και το Πόρισμα 3.3.7, παίρνουμε:

**Θεώρημα 3.3.8** (σύγκρισης του Talagrand)**.** *Έστω $\mathcal{Z}=(Z_t)_{t\in T}$ γκαουσιανή διαδικασία και $d$ η επαγόμενη μετρική στο μη κενό σύνολο $T$. Έστω ακόμη $\mathcal{Y}=(\psi_t)_{t\in T}$ υπο-γκαουσιανή διαδικασία ως προς τη $d$. Τότε υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε*

$$\mathbb{E}\sup_{t\in T}\psi_t\leqslant C\,\mathbb{E}\sup_{t\in T}Z_t.$$

Έχοντας ολοκληρώσει αυτά τα προαπαιτούμενα από πλευράς Θεωρίας Πιθανοτήτων ερχόμαστε στους συλλογισμούς που θα αποδείξουν το:

**Θεώρημα 3.3.9** (Bourgain)**.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$L_K\leqslant c\sqrt[4]{n}\log n,$$

*όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.*

Ξεκινάμε με κάποιες βοηθητικές προτάσεις.

**Πρόταση 3.3.10.** *Έστω $K$ κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1. Έστω ακόμη ότι υπάρχουν σταθερές $a,b,L>0$ ώστε*

$$\frac{L^2}{a^2}\leqslant\int_K\langle x,\vartheta\rangle^2\,dx\leqslant b^2L^2$$

*για κάθε $\vartheta\in S^{n-1}$. Τότε $\frac{L}{a}\leqslant L_K\leqslant bL$.*

*Απόδειξη.* Η αριστερή ανισότητα είναι άμεση από το Πόρισμα 3.1.13. Για την δεξιά θεωρούμε το ελλειψοειδές αδρανείας του Binet $\mathcal{E}_B(K)$. Αυτό επάγει τη νόρμα $\|\cdot\|_{\mathcal{E}_B(K)}=\left(\int_K\langle x,\cdot\rangle^2dx\right)^{1/2}$, άρα

$$\|\vartheta\|^2_{\mathcal{E}_B(K)}=\int_K\langle x,\vartheta\rangle^2dx\leqslant b^2L^2.$$

Υπολογίζουμε τον όγκο του $\mathcal{E}_B(K)$ ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(\mathcal{E}_B(K))&=\omega_n\int_{S^{n-1}}\varrho^n_{\mathcal{E}_B(K)}(\vartheta)\,d\sigma(\vartheta)=\omega_n\int_{S^{n-1}}\|\vartheta\|^{-n}_{\mathcal{E}_B(K)}d\sigma(\vartheta)\\&\geqslant\omega_n\int_{S^{n-1}}b^{-n}L^{-n}d\sigma(\vartheta)=\frac{\omega_n}{b^nL^n},\end{aligned}$$

άρα $\mathrm{vol}_n^{1/n}(\mathcal{E}_B(K))\geqslant\omega_n^{1/n}/(bL)$. Η Πρόταση 3.1.12 τώρα δίνει $L_K^{-1}\omega_n^{1/n}\geqslant\omega_n^{1/n}/(bL)$, που μας δίνει το ζητούμενο. □

**Πρόταση 3.3.11** (αναγωγή σε μικρή διάμετρο, Bourgain). *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε μπορούμε να βρούμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα $Q$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε:*

(α) *$L_Q \simeq L_K$, δηλαδή $c_1 L_Q \leqslant L_K \leqslant c_2 L_Q$, όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.*

(β) *$R(Q) \leqslant c\sqrt{n} L_Q$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, θα παρατηρήσουμε ότι για κάθε ισοτροπικό σώμα $K$ ισχύει το φράγμα $R(K) \leqslant cnL_K$, το οποίο είναι βέβαια ασθενέστερο, γι' αυτό και αναφερόμενοι στο $Q$ μιλάμε για «αναγωγή σε μικρή διάμετρο».

Πράγματι, για $\vartheta \in S^{n-1}$ ξέρουμε ότι $\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) \geqslant \frac{c'}{L_K}$. Από την άλλη πλευρά, αν θεωρήσουμε $x_\vartheta \in K$ ώστε $\langle x_\vartheta, \vartheta \rangle = h_K(\vartheta)$ (τέτοιο $x_\vartheta$ υπάρχει από τον ορισμό της $h_K$), συμβολίζουμε $C(\vartheta) = \mathrm{conv}(K \cap \vartheta^{\perp}, x_\vartheta)$ την κυρτή θήκη των $K \cap \vartheta^{\perp}$ και $\{x_\vartheta\}$. Τότε

$$\mathrm{vol}_n(C(\vartheta)) = \frac{\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) h_K(\vartheta)}{n}$$

(π.χ. για $n = 2$: εμβαδόν τριγώνου). Όμως $C(\vartheta) \subseteq K$, άρα $\frac{\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp}) h_K(\vartheta)}{n} \leqslant 1$, όθεν $h_K(\vartheta) \leqslant \frac{n}{\mathrm{vol}_{n-1}(K \cap \vartheta^{\perp})} \leqslant \frac{nL_K}{c'}$. Τώρα,

$$R(K) = \max_{x \in K} \rho_K(x) \leqslant \max_{x \in K} h_K(x) \leqslant \frac{nL_K}{c'} = c\,nL_K, \text{ με } c := (c')^{-1}$$

το ζητούμενο.

*Αποδεικνύουμε τώρα την Πρόταση 3.3.11.* Κατ' αρχάς από ισοδύναμο ορισμό του ισοτροπικού σώματος έχουμε

$$\int_K |x|^2 dx = nL_K^2.$$

Συμβολίζουμε $K_1 := \{x \in K : |x| \leqslant 2C^2\sqrt{n} L_K\}$, όπου $C > 0$ σταθερά τέτοια ώστε $\|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_4 \leqslant C\|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_2 = CL_K$ για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Η ανισότητα του Markov δίνει

$$\mathrm{vol}_n(K_1) \geqslant 1 - \frac{1}{4C^4}.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz για την πρώτη ανισότητα, έχουμε

(3.3.2)
$$\begin{aligned}\int_{K_1} \langle x, \vartheta \rangle^2 dx &= \int_K \langle x, \vartheta \rangle^2 dx - \int_{K \setminus K_1} \langle x, \vartheta \rangle^2 dx = L_K^2 - \int_{K \setminus K_1} \langle x, \vartheta \rangle^2 dx \\ &\geqslant L_K^2 - \mathrm{vol}_n^{1/2}(K \setminus K_1) \Big( \int_K \langle x, \vartheta \rangle^4 dx \Big)^{1/2} \geqslant L_K^2 - \Big(1 - \Big(1 - \frac{1}{4C^4}\Big)\Big)^{1/2} \|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_4^2 \\ &= L_K^2 - \frac{1}{2C^2}\|\langle \cdot, \vartheta \rangle\|_4^2 \geqslant L_K^2 - \frac{1}{2C^2}(CL_K)^2 = \frac{L_K^2}{2},\end{aligned}$$

ενώ ταυτόχρονα

$$\int_{K_1} \langle x, \vartheta \rangle^2 dx \leqslant \int_K \langle x, \vartheta \rangle^2 dx = L_K^2, \tag{3.3.3}$$

και αυτά βέβαια για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$.

Θέτουμε $W := aK_1$, ώστε $\mathrm{vol}_n(W) = 1$, οπότε για τη σταθερά κανονικοποίησης $a$ ισχύει

$$1 \leqslant a^n \leqslant \Big(1 - \frac{1}{4C^4}\Big)^{-1}. \tag{3.3.4}$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες εκτιμήσεις (3.3.2), (3.3.3) και (3.3.4) παίρνουμε

$$\frac{L_K^2}{2}|y|^2 \leqslant \int_W \langle x, y\rangle^2 dx \leqslant \Big(1 - \frac{1}{4C^4}\Big)^{-2} L_K^2 |y|^2 \tag{3.3.5}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Σύμφωνα με την Πρόταση 3.3.10 ισχύει

$$\frac{\sqrt{2}}{2} L_K \leqslant L_W \leqslant \Big(1 - \frac{1}{4C^4}\Big)^{-1} L_K. \tag{3.3.6}$$

Για το $W$ δεν γνωρίζουμε αν είναι ισοτροπικό. Έστω $Q = T(W)$ ισοτροπική του τοποθέτηση, $T \in SL_n$. Ο ορισμός της ισοτροπικής σταθεράς μη ισοτροπικού σώματος και η (3.3.6) δίνουν $L_Q \simeq L_W$. Από την άλλη πλευρά η (3.3.5) μας δίνει

$$L_Q^2 = \int_Q \langle x, \vartheta\rangle^2 dx = \int_W \langle w, T^*(\vartheta)\rangle^2 dw \simeq |T^*(\vartheta)|^2 L_K^2.$$

Αφού $L_Q \simeq L_K$, η $|T^*(\vartheta)|$ είναι άνω και κάτω φραγμένη από σταθερές. Έχουμε πλέον άνω φράγμα για την ακτίνα του $Q$: αν $y \in Q$, $y = T(x)$, τότε

$$|y| \leqslant \|T : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \cdot |T^{-1}(y)| \leqslant c_1 R(W) = c_1 a R(K_1) \leqslant c_1 a \cdot 2C^2\sqrt{n} L_K \leqslant c_2 L_Q$$

για κατάλληλες απόλυτες θετικές σταθερές $c_1, c_2$. $\square$

Η Πρόταση 3.3.11 μας δίνει τη δυνατότητα να αρκεστούμε στο να αποδείξουμε το άνω φράγμα του Bourgain όχι για τυχόν ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$, αλλά για ισοτροπικό κυρτό σώμα $Q$ «μικρής ακτίνας», δηλαδή με την επιπλέον παραδοχή ότι

$$R(Q) \leqslant c\sqrt{n} L_Q.$$

*Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.9.* Σύμφωνα με την προηγούμενη συζήτηση θεωρούμε σώμα $Q$ ώστε $L_Q \simeq L_K$ και $R(Q) \leqslant c\sqrt{n}L_Q$, $Q$ ισοτροπικό. Θα χρησιμοποιήσουμε τον χαρακτηρισμό του ισοτροπικού σώματος

$$\int_Q \langle x, Tx\rangle \, dx = (\mathrm{tr}T) \cdot L_Q^2$$

για κάθε $T \in GL_n$. Υπενθυμίζουμε ότι αν ο $T \in SL_n$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος τότε $\mathrm{tr}T \geqslant n$. Έτσι λοιπόν θεωρούμε $T \in SL_n$ συμμετρικό και θετικά ορισμένο και έχουμε

$$nL_Q^2 \leqslant \mathrm{tr}T \cdot L_Q^2 = \int_Q \langle x, Tx\rangle \, dx. \tag{3.3.7}$$

Από την άλλη πλευρά, υπενθυμίζουμε ότι (Πρόταση 3.2.16) αν $f$ φραγμένη μετρήσιμη σε χώρο πιθανότητας, τότε

$$\|f\|_{\psi_2} \leqslant C\sqrt{\|f\|_{\psi_1}\|f\|_\infty}.$$

Εφαρμόζοντας την πρόταση αυτή για την $f_z = \langle \cdot, z\rangle$, όπου $z \in \mathbb{R}^n$ τυχόν, ορισμένη στο $Q$, και επειδή, για $\vartheta_z$ να είναι η προβολή του $z$ στην $S^{n-1}$,

$$\|\langle \cdot, z\rangle\|_\infty = \|\langle \cdot, \vartheta_z\rangle\|_\infty \cdot |z| \leqslant R(Q)|z| \leqslant c\sqrt{n}L_Q|z|,$$

λαμβάνουμε

$$\|\langle \cdot, z\rangle\|_{\psi_2} \leqslant \sqrt{c_1 L_Q|z| \cdot c\sqrt{n}L_Q|z|} = c_2 L_Q|z|\sqrt[4]{n},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές, όθεν

$$\left\| \frac{\langle \cdot, z\rangle}{c_2\sqrt[4]{n}L_Q|z|} \right\|_{\psi_2} \leqslant 1.$$

Από το Λήμμα 3.2.11

$$\mathrm{vol}_n(\{x \in Q : |\langle x, z\rangle| \geqslant c_2\sqrt[4]{n}L_Q t\}) \leqslant 2e^{-t^2/|z|^2}$$

για κάθε $t > 0$, $z \in \mathbb{R}^n$, $z \neq 0$. Τώρα, για $y \in TQ$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X_y : Q \to \mathbb{R}$

$$X_y(x) = \frac{\langle x, y\rangle}{c_2\sqrt[4]{n}L_Q}.$$

Θεωρούμε επίσης την διαδικασία $\mathcal{X} = (X_y)_{y\in TQ}$, δηλαδή το $Q$ παίζει το ρόλο του δειγματικού χώρου $(Q, \mathcal{B}(Q), \mathrm{P})$ και το $TQ$ του χώρου δεικτών. Έστωσαν $y \neq z \in TQ$ και $t > 0$. Τότε

$$\mathrm{P}(|X_y - X_z| \geqslant t) = \mathrm{vol}_n(\{x \in Q : \langle x, y - z\rangle \geqslant t \cdot c_2\sqrt[4]{n}L_Q\}) \leqslant 2e^{-t^2/|y-z|^2}$$

σύμφωνα με τα προηγηθέντα. Επομένως, αν εφοδιάσουμε τον χώρο δεικτών $TQ$ με την Ευκλείδεια μετρική, τότε η $\mathcal{X}$ είναι υπο-γκαουσιανή ως προς αυτήν.

Από την άλλη πλευρά, αν $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ είναι χώρος πιθανότητας και $g_1, \ldots, g_n$ τυχαίες μεταβλητές σε αυτόν που ακολουθούν τυπική γκαουσιανή κατανομή και $G = (g_1, \ldots, g_n)$, μπορούμε να θεωρήσουμε την διαδικασία $\mathcal{Z} = (Z_y)_{y\in TQ}$, όπου $Z_y(\omega) = \langle G(\omega), y\rangle$. Γνωρίζουμε βέβαια ότι η $\mathcal{Z}$ είναι γκαουσιανή, η δε μετρική που επάγει στον χώρο δεικτών $TQ$ είναι η Ευκλείδεια. Σύμφωνα με το θεώρημα σύγκρισης του Talagrand, υπάρχει σταθερά $c_3 > 0$ ώστε

$$\mathbb{E}\sup_{y\in TQ} X_y \leqslant c_3\mathbb{E}\sup_{y\in TQ} Z_y \leqslant c_4\sqrt{n}w(TQ),$$

σύμφωνα με τη σχέση (3.3.1).

Επομένως υπολογίζουμε:

$$\begin{aligned} nL_Q^2 &\leqslant \int_Q \max_{y\in TQ}\langle x, y\rangle\, dx = \mathbb{E}\sup_{y\in TQ}\langle x, y\rangle = \mathbb{E}\sup_{y\in TQ}\left(c_2\sqrt[4]{n}L_Q X_y\right) \\ &= c_2\sqrt[4]{n}L_Q\,\mathbb{E}\sup_{y\in TQ} X_y \leqslant c_2\sqrt[4]{n}L_Q\, c_4\sqrt{n}w(TQ) = c_2c_4n^{3/4}L_Q w(TQ), \end{aligned}$$

όθεν

$$L_Q \leqslant \frac{c_5 w(TQ)}{\sqrt[4]{n}},$$

όπου $c_5 = c_2 \cdot c_4$, θετική απόλυτη σταθερά. Παρατηρήστε τώρα ότι το $Q$ ικανοποιεί τις υποθέσεις της αντίστροφης ανισότητας Urysohn (Θεώρημα 2.1.7), άρα υπάρχει συμμετρικός θετικά ορισμένος $T \in SL_n$ ώστε

$$w(TQ) \leqslant c_6\sqrt{n}\log n\,(\mathrm{vol}_n(TQ))^{1/n} = c_6\sqrt{n}\log n.$$

Επιλέγοντας αυτόν τον $T$ από την αρχή της απόδειξης, συνάγουμε ότι

$$L_Q \leqslant \frac{c_5 \cdot c_6\sqrt{n}\log n}{\sqrt[4]{n}} = c_7\sqrt[4]{n}\log n,$$

όπου $c_7 = c_5 \cdot c_6$ απόλυτη θετική σταθερά. Τώρα το Θεώρημα έπεται από την αναγωγή της Πρότασης 3.3.11. □

## 3.4 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Στόχος μας σε αυτή την παράγραφο είναι να ορίσουμε την έννοια της ισοτροπικότητας στα λογαριθμικά κοίλα μέτρα και τις λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις.

Θα ορίσουμε αρχικά τα ισοτροπικά μέτρα και θα δώσουμε ισοδύναμους χαρακτηρισμούς τους, όπως κάναμε για τα ισοτροπικά κυρτά σώματα. Η ισοδυναμία των χαρακτηρισμών αποδεικνύεται με ανάλογο τρόπο.

**Ορισμός 3.4.1.** Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$. Θα λέμε ότι το $\mu$ είναι ισοτροπικό αν είναι κεντραρισμένο και για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle^2\, d\mu(x) = 1.$$

**Πρόταση 3.4.2.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ κεντραρισμένο. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το $\mu$ είναι ισοτροπικό.*

(ii) *Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle^2\, d\mu(x) = |y|^2.$$

(iii) *Για κάθε $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle\, d\mu(x) = \mathrm{tr}(T).$$

(iv) *Για κάθε $i, j = 1, \dots, n$ ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle\, d\mu(x) = \delta_{ij}.$$

Ανάλογα ορίζουμε και τις ισοτροπικές λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις.

**Ορισμός 3.4.3.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Θα λέμε ότι η $f$ είναι ισοτροπική αν είναι κεντραρισμένη και για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle^2 f(x)\, dx = 1.$$

**Πρόταση 3.4.4.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η $f$ είναι ισοτροπική.*

(ii) *Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle^2 f(x)\, dx = |y|^2.$$

(iii) *Για κάθε $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle f(x)\, dx = \mathrm{tr}(T).$$

(iv) *Για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$ ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, e_i\rangle \langle x, e_j\rangle f(x)\, dx = \delta_{ij}.$$

Όπως για τα ισοτροπικά κυρτά σώματα, ισχύουν τα παρακάτω:

**Πρόταση 3.4.5.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ ισοτροπικό, και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x)|^2\, d\mu(x) = \sum_{j=1}^{n} |T(e_j)|^2 =: \|T\|_{\mathrm{HS}}^2,$$

*όπου $\|T\|_{\mathrm{HS}}$ είναι η λεγόμενη Hilbert-Schmidt νόρμα. Ειδικότερα, για $T = I_n$ προκύπτει ότι*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2\, d\mu(x) = n.$$

**Πρόταση 3.4.6.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ ισοτροπική, και $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμική απεικόνιση. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |T(x)|^2 f(x)\, dx = \sum_{j=1}^{n} |T(e_j)|^2.$$

*Ειδικότερα,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |x|^2 f(x)\, dx = n.$$

**Πρόταση 3.4.7** (ισοτροπική τοποθέτηση μέτρου)**.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ και ας υποθέσουμε ότι δεν υπάρχει υπερεπίπεδο $H$ ώστε $\mu(H) = 1$. Αν $\tilde{\mu}$ είναι η μονοσήμαντα ορισμένη κεντραρισμένη μετατόπισή του, τότε υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ώστε το $\nu := \tilde{\mu} \circ S$ να είναι ισοτροπικό.*

*Απόδειξη.* Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.1.9, θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $M_{\tilde{\mu}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$M_{\tilde{\mu}}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle x\, d\mu(x),$$

παρατηρούμε ότι είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και θεωρούμε την τετραγωνική του ρίζα $S$. Ελέγχουμε ότι το $\nu := \tilde{\mu} \circ S$ είναι κεντραρισμένο και

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle^2\, d\nu(x) = |y|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. □

Αντίστοιχα, αν $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $0 < \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty$, θεωρούμε την κεντραρισμένη και κανονικοποιημένη $g$ με $g(x) = af(x - \mathrm{bar}(f))$, όπου $a \in \mathbb{R}$ κατάλληλο, και υπάρχει $S \in SL_n$ ώστε η $g \circ S$ να είναι ισοτροπική.

Για να συμπληρώσουμε την αντιστοιχία σωμάτων, μέτρων και συναρτήσεων ως προς την έννοια της ισοτροπικότητας, παρατηρούμε ότι:

(α) Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας ώστε $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο $H$ του $\mathbb{R}^n$, και $f_\mu$ η πυκνότητά του. Τότε το $\mu$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η $f_\mu$ είναι ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

(β) Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και $f_K$ η κανονικοποιημένη χαρακτηριστική συνάρτηση του $\frac{1}{L_K} \cdot K$, δηλαδή $f_K := L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K} \cdot K}$. Τότε το $K$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η $f_K$ είναι ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Μπορούμε τώρα να δώσουμε έναν ορισμό για την ισοτροπική σταθερά λογαριθμικά κοίλης συνάρτησης $f$ και μέτρου $\mu \in \mathcal{P}_n$. Για τον σκοπό αυτό, ορίζουμε αρχικά τον πίνακα αδρανείας ή αλλιώς πίνακα συνδιακυμάνσεων.

**Ορισμός 3.4.8.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ώστε $0 < \int f < \infty$. Τότε ορίζουμε ως πίνακα αδρανείας ή πίνακα συνδιακυμάνσεων της $f$ τον $\mathrm{Cov}(f)$, όπου

$$[\mathrm{Cov}(f)]_{i,j} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\,dx}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right)^2},$$

όπου $x_i = \langle x, e_i \rangle$, $i = 1, \ldots, n$.

Αντίστοιχα, αν $\mu \in \mathcal{P}_n$ και $f_\mu$ η πυκνότητά του, η οποία είναι λογαριθμικά κοίλη, ορίζουμε τον $\mathrm{Cov}(\mu) := \mathrm{Cov}(f_\mu)$ ως

$$[\mathrm{Cov}(\mu)]_{i,j} := \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f_\mu(x)\,dx - \int_{\mathbb{R}^n} x_i f_\mu(x)\,dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} x_j f_\mu(x)\,dx.$$

**Ορισμός 3.4.9.** Έστω $f$ όπως στον προηγούμενο ορισμό. Ορίζουμε ως ισοτροπική σταθερά της $f$ τον μη αρνητικό αριθμό

$$L_f := \left( \frac{\|f\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx} \right)^{1/n} \left( \det[\mathrm{Cov}(f)] \right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Αντίστοιχα, αν $\mu \in \mathcal{P}_n$ με λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα $f_\mu$, τότε ορίζουμε την ισοτροπική του σταθερά

$$L_\mu := \|f_\mu\|_\infty^{1/n} \left( \det[\mathrm{Cov}(\mu)] \right)^{\frac{1}{2n}}.$$

Ο Ορισμός 3.4.9 γενικεύει τον ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς κυρτού σώματος. Πράγματι, αν $K$ κυρτό σώμα και $K_1$ ισοτροπική του τοποθέτηση, τότε για την $f := \mathbf{1}_{K_1}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx = 1, \quad \|f\|_\infty = 1, \quad [\mathrm{Cov}(f)]_{i,j} = \delta_{i,j} L_{K_1}^2,$$

άρα $L_f = L_{K_1} = L_K$. Επιπλέον, από τον ορισμό προκύπτει ότι η $L_\mu$ και η $L_f$ είναι αναλλοίωτες κάτω από αφφινικούς μετασχηματισμούς, επομένως μπορούμε για δοθέν $\mu \in \mathcal{P}_n$ με τις παραδοχές της Πρότασης 3.4.7 να το τοποθετήσουμε ισοτροπικά διατηρώντας την $L_\mu$ και αντίστοιχα για συναρτήσεις.

Αντίστοιχα με το Θεώρημα 3.1.10, αποδεικνύεται ότι αν $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$L_f^2 = \frac{1}{n} \inf_{\substack{T \in SL_n \\ y \in \mathbb{R}^n}} \left[ \left( \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \right)^{2/n} \int_{\mathbb{R}^n} |Tx + y|^2 f(x)\, dx \right].$$

Είμαστε πλέον σε θέση να γενικεύσουμε την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς για λογαριθμικά κοίλα μέτρα.

**Εικασία της ισοτροπικής σταθεράς για λογαριθμικά κοίλα μέτρα:** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ ώστε $\mu(H) < 1$ για κάθε $H$ υπερεπίπεδο, ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο και έστω $f_\mu$ η ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητά του. Τότε υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε $L_\mu \leqslant C$. Ισοδύναμα, αφού $\mathrm{Cov}(\mu) = I_n$, υπάρχει απόλυτη σταθερά ώστε $\|f\|_\infty^{1/n} \leqslant C$.*

## 3.5 Τα κυρτά σώματα $K_p(f)$

Αφού παρουσιάσαμε, στην προηγούμενη παράγραφο, τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα ως γενικότερο πλαίσιο (από αυτό των κυρτών σωμάτων) θεώρησης της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς, θα δείξουμε τώρα ότι η μελέτη των λογαριθμικά κοίλων μέτρων ανάγεται στη μελέτη των κυρτών σωμάτων $K_p(f)$. Ακριβέστερα, δοθείσης $f$ μη αρνητικής μετρήσιμης συνάρτησης στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $f(0) > 0$ και δοθέντος $p > 0$, θα ορίσουμε το σύνολο $K_p(f)$ και θα δείξουμε ότι αν η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη (ειδικότερα αν είναι πυκνότητα λογαριθμικά κοίλου μέτρου) τότε το $K_p(f)$ είναι κυρτό σώμα και αντίστροφα αν το $K$ είναι κυρτό σώμα τότε $K = K_p(\mathbf{1}_K)$ $\forall p > 0$. Εν συνεχεία θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των $K_p(f)$ και θα συσχετίσουμε την ισοτροπική σταθερά $L_f$ με την $L_{K_p(f)}$ για κατάλληλο $p > 0$.

**Ορισμός 3.5.1.** Έστω $p > 0$ και $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ μετρήσιμη ώστε $f(0) > 0$. Ορίζουμε

$$K_p(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_0^\infty f(rx) r^{p-1} dr \geqslant \frac{f(0)}{p} \right\}.$$

Αντίστοιχα, αν $\mu$ μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, $f_\mu$ η πυκνότητά του και $f_\mu(0) > 0$, τότε ορίζουμε $K_p(\mu) := K_p(f_\mu)$. Παρατηρήστε ότι

$$\rho_{K_p(f)}(x) = \left( \frac{1}{f(0)} \int_0^\infty p r^{p-1} f(rx)\, dr \right)^{1/p}$$

για κάθε $x \neq 0$.

**Πρόταση 3.5.2.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα ώστε $0 \in K$ και $p > 0$. Τότε $K_p(\mathbf{1}_K) = K$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\vartheta \in S^{n-1}$ τυχόν. Υπολογίζουμε

$$\rho_{K_p(\mathbf{1}_K)}(\vartheta) = \left( \frac{1}{\mathbf{1}_K(0)} \int_0^\infty p r^{p-1} \mathbf{1}_K(r\vartheta)\, dr \right)^{1/p} = \left( \int_0^{\rho_K(\vartheta)} p r^{p-1} dr \right)^{1/p} = \rho_K(\vartheta).$$

$\square$

**Πρόταση 3.5.3.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ολοκληρώσιμη ώστε $f(0)>0$ και $p>0$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $0\in K_p(f)$.

(ii) *Το $K_p(f)$ είναι αστρόμορφο.*

(iii) *Αν η $f$ είναι άρτια, τότε το $K_p(f)$ είναι συμμετρικό.*

*Απόδειξη.* Είναι απλή. Ενδεικτικά για το (ii), αν $\lambda\in(0,1)$ και $x\in K_p(f)$, τότε

$$\int_0^\infty r^{p-1}f(r\lambda x)dr=\frac{1}{\lambda^p}\int_0^\infty u^{p-1}f(ux)du\geqslant\int_0^\infty u^{p-1}f(ux)du\geqslant\frac{f(0)}{p},$$

άρα $\lambda x\in K_p(f)$. □

**Πρόταση 3.5.4.** *Έστωσαν $f,g:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις ώστε $f(0)=g(0)>0$ και $p>0$. Συμβολίζουμε*

$$m:=\inf\left\{\frac{f(x)}{g(x)}:g(x)>0\right\}\quad\text{και}\quad M:=\left[\inf\left\{\frac{g(x)}{f(x)}:f(x)>0\right\}\right]^{-1}.$$

*Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) $m^{1/p}K_p(g)\subseteq K_p(f)\subseteq M^{1/p}K_p(g)$.

(ii) *Αν $\vartheta\in S^{n-1}$ τότε*

$$\int_{K_{n+1}(f)}\langle x,\vartheta\rangle\,dx=\frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\vartheta\rangle f(x)\,dx.$$

*Ειδικότερα, η $f$ είναι κεντραρισμένη αν και μόνο αν το $K_{n+1}(f)$ είναι κεντραρισμένο.*

(iii) *Αν $\vartheta\in S^{n-1}$ τότε*

$$\int_{K_{n+p}(f)}|\langle x,\vartheta\rangle|^p\,dx=\frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x,\vartheta\rangle|^pf(x)\,dx.$$

(iv) *Για κάθε $V$ αστρόμορφο Αν $\vartheta\in S^{n-1}$ τότε*

$$\int_{K_{n+p}(f)}\|x\|_V^p\,dx=\frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_V^pf(x)\,dx,$$

*και μάλιστα με την ασθενέστερη υπόθεση ότι $p>-n$, όπου $\|\cdot\|_V$ είναι το συναρτησοειδές Minkowski του $V$, $\|x\|_V=\inf\{t>0:x\in tK\}$.*

*Απόδειξη.* (i) Χρησιμοποιούμε τον τύπο για την $\rho_{K_p(f)}$ (βλ. μετά τον Ορισμό 3.5.1) και έχουμε

$$\rho_{K_p(g)}(x)=\left(\frac{1}{g(0)}\int_0^\infty pr^{p-1}g(rx)dr\right)^{1/p}\leqslant\left(\frac{1}{mf(0)}\int_0^\infty pr^{p-1}f(rx)dr\right)^{1/p}=\frac{1}{m^{1/p}}\rho_{K_p(f)}(x),$$

όθεν $m^{1/p}K_p(g)\subseteq K_p(f)$. Αντίστοιχα δείχνουμε και το άλλο σκέλος.

Η απόδειξη των (ii), (iii) και (iv) γίνεται με χρήση του ίδιου τύπου και ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες. □

Σκοπός μας τώρα είναι να καταδείξουμε ότι τα $K_p(f)$, $p>0$, όπου $f$ λογαριθμικά κοίλη, είναι κυρτά σώματα, η δε ισοτροπική σταθερά τους σχετίζεται άμεσα με την ισοτροπική σταθερά της $f$. Έχουμε αρχικά το ακόλουθο:

**Θεώρημα 3.5.5.** *Έστωσαν $p>0$ και $f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση τέτοια ώστε $f(0)>0$ και $0<\int f<\infty$. Τότε το $K_p(f)$ είναι κυρτό σώμα.*

Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε κάποια βασικά λήμματα. Κατ' αρχάς έχουμε το:

**Λήμμα 3.5.6** (Ball). *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ώστε $f(0)>0$. Τότε, για κάθε $p>0$, το $K_p(f)$ είναι κυρτό σύνολο.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε μια παραλλαγή της ανισότητας Prékopa-Leindler. Ορίζουμε αρχικά ως μέσο τάξης $\gamma\in\mathbb{R}$ $(\gamma\neq 0)$ με συντελεστή $\lambda\in[0,1]$ των θετικών αριθμών $a,b$ την ποσότητα

$$M_\gamma^\lambda(a,b):=(\lambda a^\gamma+(1-\lambda)b^\gamma)^{1/\gamma}.$$

Ορίζουμε επίσης $M_0^\lambda(a,b):=a^\lambda b^{1-\lambda}$ και $M_\gamma^\lambda(0,b)=M_\gamma^\lambda(a,0)=0$. Ισχύει τότε το:

**Θεώρημα 3.5.7.** *Έστωσαν $\gamma,\lambda,\mu>0$ ώστε $\lambda+\mu=1$. Έστωσαν ακόμη $w,g,h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε:*

$$h(M_{-\gamma}^\lambda(r,s))\geqslant w(r)^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}g(s)^{\frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}$$

*για κάθε $(r,s)\in\mathbb{R}^+\times\mathbb{R}^+$. Τότε*

$$\int_0^\infty h\geqslant M_{-\gamma}^\lambda\left(\int_0^\infty w,\int_0^\infty g\right).$$

*Απόδειξη.* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $w$ και $g$ είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Ορίζουμε $r,s:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ μέσω των εξισώσεων

$$\int_0^{r(t)}w=t\int_0^\infty w\quad\text{και}\quad\int_0^{s(t)}g=t\int_0^\infty g.$$

Τότε, οι $r$ και $s$ είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t\in(0,1)$ έχουμε

$$r'(t)w(r(t))=\int_0^\infty w\quad\text{και}\quad s'(t)g(s(t))=\int_0^\infty g.$$

Ορίζουμε $z:[0,1]\to\mathbb{R}^+$ θέτοντας

$$z(t)=M_{-\gamma}^\lambda(r(t),s(t)).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
z' &= z^{\gamma+1}\left(\frac{\lambda r'}{r^{\gamma+1}} + \frac{\mu s'}{s^{\gamma+1}}\right)\\
&= \lambda\frac{\int w}{w(r)}\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}} + \mu\frac{\int g}{g(s)}\left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\\
&= \frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\left(\frac{\int w}{w(r)}\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right) + \frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\left(\frac{\int g}{g(s)}\left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)\\
&\geqslant \left(\frac{\int w}{w(r)}\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}\left(\frac{\int g}{g(s)}\left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\right)^{\frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}},
\end{aligned}$$

από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητής, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty h &= \int_0^1 h(z)z'dz\\
&\geqslant \int_0^1 M_0^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}\left(\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\infty w, \left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\infty g\right).
\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $M_0^\delta(a,b) \geqslant M_{-\gamma}^\delta(a,b)$ τελικά παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty h &\geqslant \int_0^1 M_{-\gamma}^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}}\left(\left(\frac{s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\infty w, \left(\frac{r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\int_0^\infty g\right)\\
&= \int_0^1 M_{-\gamma}^\lambda\Big(\int_0^\infty w, \int_0^\infty g\Big) = M_{-\gamma}^\lambda\Big(\int_0^\infty w, \int_0^\infty g\Big).
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

*Απόδειξη του Λήμματος* 3.5.6. Έστω $p>0$ και $x,y\in K_p(f)$. Από τον Ορισμό 3.5.1,

$$p\int_0^\infty f(rx)r^{p-1}\,dr \geqslant f(0) \quad \text{και} \quad p\int_0^\infty f(ry)r^{p-1}\,dr \geqslant f(0).$$

Θεωρούμε $\lambda,\mu>0$ ώστε $\lambda+\mu=1$, θέτουμε $\gamma=1/p$ και ορίζουμε $w,g,h:\mathbb{R}^+\to\mathbb{R}^+$ ως εξής:

$$w(r)=f(r^\gamma x), \qquad g(s)=f(s^\gamma y), \qquad h(t)=f(t^\gamma(\lambda x+\mu y))$$

για κάθε $r,s,t\in\mathbb{R}^+$. Τότε, οι $w,g,h$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.5.7. Πράγματι, αφού η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη, αν $r,s\in\mathbb{R}^+$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
h(M_{-\gamma}^\lambda(r,s)) &= f\Big(\frac{1}{\lambda r^{-\gamma}+\mu s^{-\gamma}}(\lambda x+\mu y)\Big)\\
&= f\Big(\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}r^\gamma x + \frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}s^\gamma y\Big)\\
&\geqslant w(r)^{\frac{\lambda s^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}} g(s)^{\frac{\mu r^\gamma}{\lambda s^\gamma+\mu r^\gamma}},
\end{aligned}$$

όπου βέβαια χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Το Θεώρημα 3.5.7 τώρα δίνει

$$\left(\int_0^\infty f(r^\gamma(\lambda x+\mu y))dr\right)^{-\gamma} \leqslant \lambda\left(\int_0^\infty f(r^\gamma x)dr\right)^{-\gamma} + \mu\left(\int_0^\infty f(r^\gamma y)dr\right)^{-\gamma}. \tag{3.5.1}$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $t = r^\gamma$ (όπου $dt = \gamma r^{\gamma-1}dr$), η (3.5.1) δίνει (αφού και $\gamma = 1/p$)

$$\begin{aligned}&\left(p\int_0^\infty r^{p-1}f(r(\lambda x+\mu y))dr\right)^{-1/p}\\ &\qquad\leqslant \lambda\left(p\int_0^\infty r^{p-1}f(rx)dr\right)^{-1/p} + \mu\left(p\int_0^\infty r^{p-1}f(ry)dr\right)^{-1/p}\\ &\qquad\leqslant \lambda(f(0))^{-1/p} + \mu(f(0))^{-1/p} = (f(0))^{-1/p},\end{aligned}$$

χάρις στον τύπο για την $\rho_{K_p(f)}$ μετά τον Ορισμό 3.5.1. Έπεται ότι

$$p\int_0^\infty r^{p-1}f(r(\lambda x+\mu y))dr \geqslant f(0),$$

όθεν $\lambda x+\mu y \in K_p(f)$. □

**Λήμμα 3.5.8.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ μετρήσιμη ώστε $f(0)>0$. Τότε*

$$\mathrm{vol}_n(K_n(f)) = \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

*Απόδειξη.* Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(K_n(f)) &= \int_{K_n(f)}\mathbf{1}\,dx = n\omega_n\int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_{K_n(f)}(\varphi)} r^{n-1}dr d\sigma(\varphi)\\ &= \frac{n\omega_n}{f(0)}\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty r^{n-1}f(r\varphi)drd\sigma(\varphi) = \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx.\end{aligned}$$

□

Παρατηρήστε τώρα ότι αν επιπλέον η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη και $0<\int f<\infty$, τα Λήμματα 3.5.6 και 3.5.8 δίνουν άμεσα ότι το $K_n(f)$ είναι κυρτό σώμα. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.5.5, αρκεί να δείξουμε ότι και για $p\neq n$, οι παραδοχές του θεωρήματος οδηγούν στο ότι $0<\mathrm{vol}_n(K_p(f))<\infty$. Ακριβέστερα, έχουμε τα παρακάτω δύο λήμματα, τα οποία, εκτός από το ότι λύνουν το ζήτημα αυτό, δίνουν συγκεκριμένες σχέσεις εγκλεισμού μεταξύ των $K_p(f), K_q(f), 0<p\neq q<\infty$, ως επίσης και συγκεκριμένα φράγματα για τον όγκο τους.

**Λήμμα 3.5.9.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ώστε $f(0)>0$. Έστω ακόμη ότι $0<p\leqslant q$. Τότε*

$$\frac{\Gamma(p+1)^{1/p}}{\Gamma(q+1)^{1/q}}K_q(f)\subseteq K_p(f)\subseteq\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}K_q(f).$$

*Ειδικότερα, αν η $f$ είναι κεντραρισμένη, τότε $K_p(f)\subseteq e^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}K_q(f)$.*

**Λήμμα 3.5.10.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν $p > 0$, τότε*

$$e^{-1} \leqslant (f(0))^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} \mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f))^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} \leqslant \frac{e(n+p)}{n}.$$

(ii) *Αν $-n < p < 0$, τότε*

$$e^{-1} \leqslant (f(0))^{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)} \mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f))^{\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{p}\right)} \leqslant e.$$

*Απόδειξη του Λήμματος* 3.5.9. Χρειαζόμαστε την ακόλουθη αντίστροφη ανισότητα Hölder την οποία παραθέτουμε χωρίς απόδειξη: «Έστω $f$ με τις υποθέσεις του Λήμματος 3.5.9 και $G : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$G(p) := \left( \frac{1}{f(0)\Gamma(p)} \int_0^\infty r^{p-1} f(rx)\, dr \right)^{1/p}.$$

Τότε η $G$ είναι φθίνουσα». Για $q \geqslant p > 0$ υπολογίζουμε, χρησιμοποιώντας την μονοτονία της $G$ και τις ιδιότητες της συνάρτησης $\Gamma$,

$$\begin{aligned}
\rho_{K_q(f)}(x) &= \left( \frac{q}{f(0)} \int_0^\infty r^{q-1} f(rx)\, dr \right)^{1/q} = \Gamma(q+1)^{1/q} \left( \frac{1}{f(0)\Gamma(q)} \int_0^\infty r^{q-1} f(rx)\, dr \right)^{1/q} \\
&= \Gamma(q+1)^{1/q} G(q) \leqslant \frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}} \Gamma(p+1)^{1/p} G(p) \\
&= \frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}} \rho_{K_p(f)}(x),
\end{aligned}$$

όθεν

$$\frac{\Gamma(p+1)^{1/p}}{\Gamma(q+1)^{1/q}} K_q(f) \subseteq K_p(f).$$

Για τον δεξιό εγκλεισμό, χρησιμοποιούμε μια ανισότητα, αντίστοιχη με την προηγούμενη, την οποία επίσης αναφέρουμε χωρίς απόδειξη: «Έστω $f$ όπως στο Λήμμα 3.5.9 και $F : (0, \infty) \to \mathbb{R}$,

$$F(p) := \left( \frac{p}{\|f\|_\infty} \int_0^\infty r^{p-1} f(rx)\, dr \right)^{1/p}.$$

Τότε η $F$ είναι αύξουσα». Για $q \geqslant p > 0$, με έναν παρόμοιο συλλογισμό όπως πριν, υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}
\rho_{K_q(f)}(x) &= \left( \frac{q}{f(0)} \int_0^\infty r^{q-1} f(rx)\, dr \right)^{1/q} = \left( \frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{1/q} \left( \frac{q}{\|f\|_\infty} \int_0^\infty r^{q-1} f(rx)\, dr \right)^{1/q} \\
&= \left( \frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{1/q} F(q) \geqslant \left( \frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{1/q} F(p) = \left( \frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{1/q-1/p} \left( \frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{1/p} F(p) \\
&= \left( \frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{1/q-1/p} \rho_{K_p(f)}(x).
\end{aligned}$$

Τέλος, αν η $f$ είναι κεντραρισμένη, το Λήμμα 3.1.5 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

*Απόδειξη του Λήμματος* 3.5.10. Για $p>0$, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 3.5.9 και το γεγονός ότι η $f$ είναι, ειδικότερα, κεντραρισμένη. Έχουμε $K_n(f)\subseteq e^{1-\frac{n}{n+p}}K_{n+p}(f)$, άρα

$$e^{\frac{n^2}{n+p}-n}\mathrm{vol}_n(K_n(f))\leqslant \mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f)).$$

Απ' την άλλη, το Λήμμα 3.5.9 δίνει $\frac{\Gamma(n+1)^{1/n}}{\Gamma(n+p+1)^{1/(n+p)}}K_{n+p}(f)\subseteq K_n(f)$, άρα

$$\mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f))\leqslant \frac{\Gamma(n+p+1)^{n/(n+p)}}{\Gamma(n+1)}\mathrm{vol}_n(K_n(f))=\frac{\Gamma(n+p+1)^{n/(n+p)}}{\Gamma(n+1)f(0)},$$

χάρις στο Λήμμα 3.5.8 και το γεγονός ότι $\int_{\mathbb{R}^n}f(x)dx=1$. Χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 3.5.8, το γεγονός ότι $\Gamma(n+1)=n!$ βρίσκουμε την εκτίμηση

$$\frac{e^{-\frac{np}{n+p}}}{f(0)}\leqslant \mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f))\leqslant (\Gamma(n+p+1))^{\frac{n}{n+p}}\frac{1}{n!f(0)},$$

επομένως

$$\frac{1}{e}\leqslant f(0)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}\mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f))^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}\leqslant \frac{(\Gamma(n+p+1))^{\frac{1}{p}}}{(n!)^{\frac{n+p}{np}}}.$$

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες

$$\frac{(\Gamma(n+p+1))^{\frac{1}{p}}}{(n!)^{\frac{n+p}{np}}}\leqslant (n+p)\frac{(n!)^{\frac{1}{p}}}{(n!)^{\frac{n+p}{np}}}=\frac{n+p}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\leqslant e\frac{n+p}{n},$$

ολοκληρώνουμε την απόδειξη του (i). Για το (ii) δουλεύουμε με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας και την ανισότητα

$$\frac{\Gamma(q+1)^{\frac{1}{q}}}{\Gamma(p+1)^{\frac{1}{p}}}\leqslant e^{\frac{q}{p}-1}$$

που ισχύει για κάθε $0<p\leqslant q$. □

Ερχόμαστε τώρα στα κεντρικά αποτελέσματα της παραγράφου, που καταδεικνύουν την αναγωγή της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς για συναρτήσεις, και κατ' επέκταση μέτρα, στην εικασία της ισοτροπικής σταθεράς για σώματα.

**Θεώρημα 3.5.11** (Ball)**.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,+\infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ώστε $0<\int f<\infty$. Υποθέτουμε ακόμη ότι η $f$ είναι άρτια. Θέτουμε $T:=K_{n+2}(f)$. Τότε το $T$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα και $L_T\simeq L_f$.*

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 3.5.5, το $T$ είναι κυρτό σώμα. Από τον Ορισμό 3.5.1 ελέγχουμε άμεσα ότι η υπόθεση ότι η $f$ είναι άρτια συνεπάγεται την συμμετρία του $T$ ως προς το 0. Ακόμη, η $f$ έχει μέγιστο στο 0, άρα $f(0)>0$ αφού $\int f>0$. Η Πρόταση 3.5.4 (iii) δίνει

$$\int_T\langle x,\vartheta\rangle^2dx=\frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\vartheta\rangle^2f(x)dx$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_T\langle x,\vartheta\rangle\langle x,y\rangle\,dx=\frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\vartheta\rangle\langle x,y\rangle f(x)\,dx$$

για κάθε $\vartheta, y \in S^{n-1}$. Από τα σχόλια μετά τον Ορισμό 3.4.9, έχουμε $L_T = L_{\mathbf{1}_T}$. Ο Ορισμός 3.4.8 παράλληλα δίνει, σύμφωνα με τα παραπάνω και αφού $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, e_i\rangle f(x)dx = 0$ λόγω του ότι η $f$ είναι άρτια,

$$\begin{aligned}[\mathrm{Cov}(f)]_{ij} &= \frac{\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle f(x)dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx} = \frac{f(0)\int_T \langle x, e_i\rangle\langle x, e_j\rangle dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx} \\ &= \frac{f(0)L_T^2\delta_{ij}\mathrm{vol}_n(T)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx} = \frac{f(0)[\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_T)]_{ij}\mathrm{vol}_n(T)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx}.\end{aligned} \tag{3.5.2}$$

Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}L_f &= \left(\frac{\|f\|_\infty}{\int f}\right)^{1/n} \det(\mathrm{Cov}(f))^{\frac{1}{2n}} = \left(\frac{f(0)}{\int f}\right)^{1/n}\left(\frac{f(0)}{\int f}\right)^{1/2} \mathrm{vol}_n(T)^{1/2}\det(\mathrm{Cov}(f))^{\frac{1}{2n}} \\ &= \left(\frac{f(0)}{\int f}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \mathrm{vol}_n(T)^{1/2}(L_T^{2n}\mathrm{vol}_n^2(T))^{\frac{1}{2n}},\end{aligned}$$

άρα

$$L_T = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}}\left(\frac{\int f}{f(0)}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} L_f = \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K_n(f))}{\mathrm{vol}_n(T)}\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} L_f,$$

λόγω του Λήμματος 3.5.8, και της (3.5.2).

Η απόδειξη του Λήμματος 3.5.10 (i) για $p = 2$ απ' την άλλη δίνει $\mathrm{vol}_n(K_n(f)) \simeq \mathrm{vol}_n(K_{n+2}(f))$. Άρα, $L_T \simeq L_f$. □

**Πόρισμα 3.5.12.** *Έστω $f$ με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 3.5.11 και ας υποθέσουμε ότι η $f$ είναι επιπλέον ισοτροπική. Τότε το $\overline{T} := \mathrm{vol}_n^{-1/n}(T)\cdot T$, όπου $T = K_{n+1}(f)$, είναι ισοτροπικό.*

*Απόδειξη.* Άμεση από το Θεώρημα 3.5.11 και την παρατήρηση ότι

$$\begin{aligned}\int_{\overline{T}} \langle x, \vartheta\rangle^2 dx &= \int_T \left\langle \frac{y}{\mathrm{vol}_n(T)^{1/n}}, \vartheta\right\rangle^2 \det(\mathrm{vol}_n(T)^{-1/n} I_n)\, dy = \int_T \langle y, \vartheta\rangle^2 dy \cdot \frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)^{1+\frac{2}{n}}} \\ &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)^{1+\frac{2}{n}}}\cdot\frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle^2 f(x)\, dx = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)^{1+\frac{2}{n}}\cdot f(0)}.\end{aligned}$$

□

Το «αδύναμο σημείο» του Θεωρήματος 3.5.11, η υπόθεση ότι η $f$ είναι άρτια, έπαιξε ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξή του. Ωστόσο η υπόθεση μπορεί να αφαιρεθεί και να βρούμε κυρτό σώμα $T$ ώστε $L_T = L_f$. Ακριβέστερα, αν κάνουμε την ασθενέστερη παραδοχή ότι η $f$ είναι κεντραρισμένη, τότε το $T$ που θα βρούμε θα είναι επίσης, όχι βέβαια συμμετρικό, αλλά πάντως κεντραρισμένο.

**Θεώρημα 3.5.13.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ώστε $0 < \int f < \infty$. Θέτουμε $T := K_{n+1}(f)$. Τότε το $T$ είναι κεντραρισμένο κυρτό σώμα και $L_T \simeq L_f$.*

*Απόδειξη.* Το $K_{n+1}(f)$ ορίζεται διότι $f(0) > 0$ (αλλιώς το Λήμμα 3.1.5 δίνει $f \equiv 0$). Επιπλέον, είναι κεντραρισμένο από την Πρόταση 3.5.4 (ii). Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $\int f = 1$. Η Πρόταση 3.5.4 (iii) συνεπάγεται ότι

$$\int_T |\langle x, \vartheta\rangle|\, dx = \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \vartheta\rangle|\, f(x)\, dx \tag{3.5.3}$$

για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.2.14 για $p=1, q=2$, $f_y : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $f_y(x) = |\langle x,y\rangle|\,\mathbf{1}_T$, όπου έχουμε σταθεροποιήσει $y \in \mathbb{R}^n$ και $\mu \in \mathcal{P}_n$, $\mu(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(A\cap T)}{\mathrm{vol}_n(T)}$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$. Συνάγουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,y\rangle|\mathbf{1}_T(x)d\mu(x) \leqslant \left(\int_T \langle x,y\rangle^2\mathbf{1}_T(x)d\mu(x)\right)^{1/2} \leqslant 2c\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,y\rangle|\mathbf{1}_T(x)d\mu(x),$$

άρα

$$\frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)}\int_T |\langle x,y\rangle|\,dx \simeq \left(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)}\int_T \langle x,y\rangle^2 dx\right)^{1/2}. \tag{3.5.4}$$

Παρομοίως

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,y\rangle| f(x)\,dx \simeq \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,y\rangle^2 f(x)\,dx\right)^{1/2}. \tag{3.5.5}$$

(Εδώ δεν χρειάζεται κανονικοποίηση ως προς $\mathrm{vol}_n(T)$ γιατί η $f$ είναι πυκνότητα.) Συνδυάζοντας τις (3.5.3), (3.5.4), (3.5.5) παίρνουμε

$$\frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)}\int_T \langle x,y\rangle^2 dx \simeq \frac{1}{(f(0)\mathrm{vol}_n(T))^2}\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,y\rangle^2 f(x)dx. \tag{3.5.6}$$

Επειδή $T, f$ κεντραρισμένα, οι $\mathrm{Cov}(f), \mathrm{Cov}(\mathbf{1}_T)$ είναι θετικά ορισμένοι (βλ. Ορισμό 3.4.8) και η (3.5.6) δίνει

$$\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_T) \simeq \frac{1}{(\mathrm{vol}_n(T)f(0))^2}\mathrm{Cov}(f),$$

άρα

$$\det\,\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_T) \simeq (\mathrm{vol}_n(T)f(0))^{-2n}\det\,\mathrm{Cov}(f). \tag{3.5.7}$$

Μπορούμε τώρα να συνδυάσουμε τις $L_T, L_f$ με βάση τον ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς:

$$\begin{aligned} L_T &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)^{1/n}}[\det\,\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_T)]^{\frac{1}{2n}} \simeq \frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)^{1/n}}\cdot\frac{1}{\mathrm{vol}_n(T)f(0)}(\det\,\mathrm{Cov}(f))^{\frac{1}{2n}} \\ &= \mathrm{vol}_n(T)^{-\frac{1}{n}-1}f(0)^{-1}L_f\|f\|_\infty^{-1/n} \simeq (\mathrm{vol}_n(T)f(0))^{-\frac{1}{n}-1}L_f, \end{aligned}$$

λόγω του Λήμματος 3.1.5. Τελικά, από το Λήμμα 3.5.10, $e^{-1} \leqslant (\mathrm{vol}_n(T)f(0))^{\frac{1}{n}+1} \leqslant e^{\frac{n+1}{n}} \leqslant 2e$, άρα

$$L_T \simeq L_f.$$

Έστω τώρα ότι η $f$ δεν είναι πυκνότητα. Θέτουμε $g := \frac{f}{\int f}$, οπότε η $g$ είναι πυκνότητα και $L_{K_{n+1}(g)} \simeq L_g$. Όμως $K_{n+1}(g) = K_{n+1}(f)$ (άμεσο από τον Ορισμό 3.5.1) και $L_g = L_f$ (άμεσο από τον Ορισμό 3.4.9) και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Τα σώματα $K_p(f)$, εκτός του ότι παρέχουν αναγωγή της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς για μέτρα στην αντίστοιχη για σώματα, έχουν εφαρμογές στη μελέτη τους, όπως θα δούμε στα επόμενα κεφάλαια. Για παράδειγμα, ο Παούρης τα χρησιμοποίησε στην εύρεση φραγμάτων για τον όγκο $L_q$-κεντροειδών σωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

# Το άνω φράγμα του Klartag για την ισοτροπική σταθερά

Στόχος μας στο παρόν κεφάλαιο είναι κυρίως να αποδείξουμε το άνω φράγμα του Klartag $O(\sqrt[4]{n})$ για την ισοτροπική σταθερά. Θυμηθείτε ότι το άνω φράγμα του Bourgain ήταν $O(\sqrt[4]{n}\log n)$, επομένως πρόκειται για μια μέτρια βελτίωσή του.

## 4.1 Τα $L_q$-κεντροειδή σώματα

Στην παράγραφο αυτή θα εισαγάγουμε τα $L_q$-κεντροειδή σώματα $Z_q(K)$ ενός κυρτού σώματος $K$ όγκου 1, και θα μελετήσουμε τις βασικές τους ιδιότητες. Τα εργαλεία που θα αποκτήσουμε θα μας δώσουν τη δυνατότητα να αποδείξουμε την ανισότητα απόκλισης του Παούρη, που με τη σειρά της θα χρησιμοποιηθεί στην απόδειξη του φράγματος του Klartag.

**Ορισμός 4.1.1.** Για $1 \leqslant q \leqslant \infty$ ορίζουμε το $L_q$-κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του $K$ (όπου $K$ κυρτό σώμα όγκου 1) ως το (καλά ορισμένο) σώμα με συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_q(K)}(y) = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}$$

αν $1 \leqslant q < \infty$, ενώ ορίζουμε

$$Z_\infty(K) = \mathrm{conv}\{K, -K\}$$

(με conv συμβολίζουμε την κυρτή θήκη, δηλ. $\mathrm{conv}\{K, -K\} = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{ υπάρχουν } y_1 \in K, y_2 \in -K, \lambda \in [0,1] \text{ ώστε } x = \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2\}$).

Ο χαρακτηρισμός «$L_q$» προέρχεται βέβαια από το ότι

$$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_q(K)} = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}.$$

Επιπλέον, ο ορισμός του $Z_\infty$ συνάδει με τον ορισμό του $Z_p$, $1 \leqslant p < \infty$, αφού το $\mathrm{conv}\{K, -K\}$ είναι το κυρτό εκείνο σώμα που περιέχει το 0 και έχει συνάρτηση στήριξης $h_{Z_\infty(K)}(x) = \|\langle \cdot, z\rangle\|_{L_\infty(K)}$.

**Πρόταση 4.1.2.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 και $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. Τότε ισχύουν τα εξής:*

(i) *Το $Z_q(K)$ είναι συμμετρικό.*

(ii) *Για κάθε $T \in SL_n$, $Z_q(T(K)) = T(Z_q(K))$.*

(iii) *Το $K$ είναι ισοτροπικό αν είναι κεντραρισμένο και $Z_2(K) = L_K B_2^n$.*

(iv) $Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq Z_\infty(K)$.

*Απόδειξη.* (i) $\|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_q(K)} = \|\langle \cdot, -y\rangle\|_{L_q(K)}$.
(ii) Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_q(T(K))} &= \left(\int_{T(K)} |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q} = \left(\int_K |\langle Tx, y\rangle|^q dx\right)^{1/q} = \left(\int_K |\langle x, T^t y\rangle|^q dx\right)^{1/q} \\ &= \|\langle \cdot, T^t y\rangle\|_{L_q(K)}.\end{aligned}$$

(iii) Αν $Z_2(K) = L_K B_2^n$ και $\vartheta \in S^{n-1}$, τότε

$$\int_K \langle x, \vartheta\rangle^2 dx = h_{Z_2(K)}^2(\vartheta) = L_K^2.$$

(iv) $\|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_p(K)} \leqslant \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_q(K)} \leqslant \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_\infty(K)}$ από γνωστή συνέπεια της ανισότητας Hölder. □

**Πρόταση 4.1.3.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 και $1 \leqslant p < q < \infty$. Τότε*

$$Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq \frac{cq}{p} Z_p(K),$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.2.14 για $\mu$ το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο $K$, $f = \langle \cdot, y\rangle$, $y \in \mathbb{R}^n$ τυχόν και λαμβάνουμε

$$h_{Z_p(K)}(y) \leqslant h_{Z_q(K)}(y) \leqslant \frac{cq}{p} h_{Z_p(K)}(y).$$

□

**Πρόταση 4.1.4.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και ας υποθέσουμε ότι επιπλέον είναι κεντραρισμένο. Τότε για κάθε $q \geqslant n$ ισχύει $Z_q(K) \supseteq c_1 Z_\infty(K)$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το παρακάτω:

**Λήμμα 4.1.5.** *Έστω $K$ κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$,*

$$\int_K |\langle x, \vartheta\rangle|^q dx \geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(q+n+1)} \max\{h_K^q(\vartheta), h_K^q(-\vartheta)\}.$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_\vartheta : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$, $f_\vartheta(t) = \mathrm{vol}_{n-1}(\{x \in K : \langle x,\vartheta\rangle = t\})$. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή του Brunn: «Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $F$ $k$-διάστατος υπόχωρος. Τότε η $f : F^\perp \to \mathbb{R}, f(t) = \mathrm{vol}_k(K \cap (F+t))^{1/k}$ είναι κοίλη στον φορέα της». (Η απόδειξη της αρχής του Brunn βασίζεται στην εφαρμογή μίας ακολουθίας Steiner συμμετρικοποιήσεων σε κατευθύνσεις $\vartheta \in F$, ώστε να συγκλίνουν ως προς την μετρική Hausdorff σε ένα κυρτό σώμα $\tilde{K}$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x \in F^\perp$ το $\tilde{K} \cap (F+x)$ είναι μπάλα κέντρου $x$ και ακτίνας $r(x)$ με $\mathrm{vol}_k(\tilde{K} \cap (F+x)) = \mathrm{vol}_k(K \cap (F+x))$. Αφού το $\tilde{K}$ είναι κυρτό, η $r$ είναι κοίλη στον φορέα της, άρα κοίλη είναι και η $f$.)

Επανερχόμενοι στην απόδειξη του λήμματος, παρατηρούμε ότι απ' την αρχή του Brunn, αν την εφαρμόσουμε για $k = n-1$, $F = \vartheta^\perp$, παίρνουμε ότι η $f_\vartheta^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη στον φορέα της. Άρα για κάθε $t \in [0, h_K(\vartheta)]$ βρίσκουμε ότι $f_\vartheta(t) \geqslant \left(1 - \frac{t}{h_K(\vartheta)}\right)^{n-1} f_\vartheta(0)$. Μπορούμε τώρα να εκτιμήσουμε την $\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_{L_q(K)}$:

$$\begin{aligned}
\int_K |\langle x,\vartheta\rangle|^q dx &= \int_0^{h_K(\vartheta)} t^q f_\vartheta(t)dt + \int_0^{h_K(-\vartheta)} t^q f_{-\vartheta}(t)dt \\
&\geqslant \int_0^{h_K(\vartheta)} t^q \left(1 - \frac{t}{h_K(\vartheta)}\right)^{n-1} f_\vartheta(0)dt + \int_0^{h_K(-\vartheta)} t^q \left(1 - \frac{t}{h_K(-\vartheta)}\right)^{n-1} f_\vartheta(0)dt \\
&= f_\vartheta(0)h_K^{q+1}(\vartheta)\int_0^1 s^q(1-s)^{n-1}ds + f_\vartheta(0)h_K^{q+1}(-\vartheta)\int_0^1 s^q(1-s)^{n-1}ds \\
&= \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{\Gamma(q+n+1)} f_\vartheta(0)(h_K^{q+1}(\vartheta) + h_K^{q+1}(-\vartheta)) \\
&\geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{\Gamma(q+n+1)} f_\vartheta(0)\frac{h_K(\vartheta)+h_K(-\vartheta)}{2}\max\{h_K^q(\vartheta), h_K^q(-\vartheta)\},
\end{aligned}$$

όπου βέβαια έχουμε χρησιμοποιήσει την αλλαγή μεταβλητής $t = h_K(\vartheta)s$ στο πρώτο ολοκλήρωμα και $t = h_K(-\vartheta)s$ στο δεύτερο.

Απ' την άλλη, η $f_\vartheta$ είναι λογαριθμικά κοίλη (βλ. απόδειξη Λήμματος 3.1.6), άρα – αφού το $K$ είναι κεντραρισμένο – το Λήμμα 3.1.5 με $n = 1$ δίνει $\|f_\vartheta\|_\infty \leqslant e f_\vartheta(0)$. Τελικά,

$$\begin{aligned}
(h_K(\vartheta) + h_K(-\vartheta))f_\vartheta(0) &\geqslant \frac{1}{e}(h_K(\vartheta) + h_K(-\vartheta))\|f_\vartheta\|_\infty \geqslant e^{-1}\int_{-h_K(-\vartheta)}^{h_K(\vartheta)} f_\vartheta(t)dt \\
&= e^{-1}\mathrm{vol}_n(K) = e^{-1},
\end{aligned}$$

άρα

$$\int_K |\langle x,\vartheta\rangle|^q dx \geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(q+n+1)}\max\{h_K^q(\vartheta), h_K^q(-\vartheta)\}.$$

□

*Απόδειξη της Πρότασης* 4.1.4. Εφαρμόζουμε το λήμμα για $q = n$ και παίρνουμε

$$\int_K |\langle x,\vartheta\rangle|^n dx \geqslant \frac{c_2}{2e}\max\{h_K^n(\vartheta), h_K^n(-\vartheta)\},$$

όπου $c_2 > 0$ σταθερά, άρα

$$\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_n \geqslant c_3 \max\{h_K(\vartheta), h_K(-\vartheta)\}, \text{ όπου } c_3 := \min\left\{1, \frac{c_2}{2e}\right\}$$

επομένως
$$\|\langle\cdot,\vartheta\rangle\|_q \geqslant c_3 \max\{h_K(\vartheta), h_K(-\vartheta)\}$$
για $q \geqslant n$, όπου $c_3 := \min\left\{1, \frac{c_2}{2e}\right\}$. Το συμπέρασμα τώρα είναι άμεσο από τον Ορισμό 4.1.1. □

Τα $L_q$-κεντροειδή σώματα μπορούν να οριστούν και στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων συναρτήσεων πυκνότητας.

**Ορισμός 4.1.6.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα και $q \geqslant 1$. Ορίζουμε το $L_q$-κεντροειδές σώμα $Z_q(f)$ της $f$ ως το κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης
$$h_{Z_q(f)}(y) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q f(x)\, dx\right)^{1/q}.$$

Όλες οι προτάσεις που δείξαμε προηγουμένως για τα σώματα $Z_q(K)$ μεταφέρονται με φυσικό τρόπο στα $Z_q(f)$.

Θα αποδείξουμε τώρα το πρώτο σημαντικό αποτέλεσμα της παραγράφου, μία εκτίμηση του όγκου του $Z_n(f)$, του Παούρη.

**Θεώρημα 4.1.7** (Παούρης)**.** *Έστω $f$ κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε*
$$\mathrm{vol}_n(Z_n(f))^{1/n} \simeq f(0)^{-1/n}.$$

*Απόδειξη.* Αποδεικνύουμε πρώτα το ακόλουθο.

*Ισχυρισμός:* Για κάθε $p > 0$ ισχύει
$$\frac{1}{e} Z_p(\overline{K_{n+p}(f)}) \subseteq f(0)^{1/n} Z_p(f) \subseteq e\frac{n+p}{n} Z_p(\overline{K_{n+p}(f)}),$$
όπου συμβολίζουμε $\overline{K} = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^{1/n}} K$ για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$.

*Απόδειξη του ισχυρισμού.* Από την Πρόταση 3.5.4 (iii), για $\vartheta \in S^{n-1}$ ισχύει
$$\begin{aligned}\int_{\overline{K_{n+p}(f)}} |\langle x,\vartheta\rangle|^p dx &= \mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f))^{-\frac{n+p}{n}} \int_{K_{n+p}(f)} |\langle x,\vartheta\rangle|^p dx\\ &= \frac{1}{f(0)\mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f))^{n+p}n} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\vartheta\rangle|^p f(x) dx,\end{aligned}$$

άρα
$$\left(\int_{\overline{K_{n+p}(f)}} |\langle x,\vartheta\rangle|^p dx\right)^{1/p} \mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f))^{\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} f(0)^{1/p} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\vartheta\rangle|^p f(x) dx\right)^{1/p},$$

που δίνει
$$Z_p(\overline{K_{n+p}(f)}) \cdot \mathrm{vol}_n(K_{n+p}(f))^{\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} f(0)^{\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} = Z_p(f) \cdot f(0)^{1/n},$$
επομένως, λόγω του Λήμματος 3.5.10,
$$e^{-1} Z_p(\overline{K_{n+p}(f)}) \subseteq f(0)^{1/n} Z_p(f) \subseteq e\frac{n+p}{n} Z_p(\overline{K_{n+p}(f)}),$$
όπου έχουμε βέβαια χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι τα $Z_p(f)$, $Z_p(\overline{K_{n+p}(f)})$ είναι κυρτά και περιέχουν το 0. □

Η ιδέα τώρα για την απόδειξη του θεωρήματος είναι να συγκρίνουμε το $Z_n(f)$ με το $Z_n(\overline{K_{n+1}(f)})$, του οποίου ο όγκος, όπως θα δείξουμε αυξάνεται εκθετικά με το $n$.

Εφαρμόζοντας τον ισχυρισμό για $p = n$, παίρνουμε

$$e^{-1} Z_n(\overline{K_{2n}(f)}) \subseteq f(0)^{1/n} Z_n(f) \subseteq 2e Z_n(\overline{K_{2n}(f)}). \tag{4.1.1}$$

Παράλληλα, για τυχόν $\vartheta \in S^{n-1}$ έχουμε διαδοχικά, με δύο εφαρμογές του Λήμματος 3.5.9,

$$\begin{aligned}
h_{Z_n(\overline{K_{2n}(f)})}(\vartheta) &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K_{2n}(f))^{\frac{2}{n}}} \left( \int_{K_{2n}(f)} |\langle x, \vartheta\rangle|^n dx \right)^{1/n} \\
&\leqslant \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K_{2n}(f))^{\frac{2}{n}}} \left( \int_{\frac{\Gamma(2n+1)^{\frac{1}{2n}}}{\Gamma(n+2)^{\frac{1}{n+1}}} K_{n+1}(f)} |\langle x, \vartheta\rangle|^n dx \right)^{1/n} \\
&= \left( \frac{\mathrm{vol}_n(K_{n+1}(f))}{\mathrm{vol}_n(K_{2n}(f))} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\Gamma(2n+1)^{\frac{1}{2n}}}{\Gamma(n+2)^{\frac{1}{n+1}}} \right)^2 \left( \int_{\overline{K_{n+1}(f)}} |\langle x, \vartheta\rangle|^n dx \right)^{1/n} \\
&= \left( \frac{\mathrm{vol}_n(K_{n+1}(f))}{\mathrm{vol}_n(K_{2n}(f))} \right)^{\frac{2}{n}} \left( \frac{\Gamma(2n+1)^{\frac{1}{2n}}}{\Gamma(n+2)^{\frac{1}{n+1}}} \right)^2 h_{Z_n(\overline{K_{n+1}(f)})}(\vartheta) \\
&\leqslant \exp\left[ \left( \frac{n^2}{n+1} - \frac{n^2}{2n} \right) \cdot \frac{2}{n} \right] \left( \frac{\Gamma(2n+1)^{\frac{1}{2n}}}{\Gamma(n+2)^{\frac{1}{n+1}}} \right)^2 h_{Z_n(\overline{K_{n+1}(f)})}(\vartheta),
\end{aligned}$$

αφού βέβαια η $f$ είναι κεντραρισμένη. Άρα,

$$h_{Z_n(\overline{K_{2n}(f)})}(\vartheta) \leqslant \left[ \exp\left( \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(2n+1)^{\frac{1}{2n}}}{\Gamma(n+2)^{\frac{1}{n+1}}} \right]^2 h_{Z_n(\overline{K_{n+1}(f)})}(\vartheta). \tag{4.1.2}$$

Για να συγκεκριμενοποιήσουμε την ανισότητα αυτή, κάνουμε τον ακόλουθο υπολογισμό:

$$\begin{aligned}
\left[ \exp\left( \frac{n}{n+1} - \frac{1}{2} \right) \frac{\Gamma(2n+1)^{\frac{1}{2n}}}{\Gamma(n+2)^{\frac{1}{n+1}}} \right]^2 &= \exp\left( \frac{n-1}{n+1} \right) \frac{[(2n)!]^{\frac{1}{n}}}{[(n+1)!]^{\frac{2}{n+1}}} \\
&= \exp\left( \frac{n-1}{n+1} \right) \left[ \frac{(n+2)\cdots(2n)}{[(n+1)!]^{\frac{n-1}{n+1}}} \right]^{1/n} \\
&\leqslant \exp\left( \frac{n-1}{n+1} \right) \left( \frac{(2n)^{n-1}}{[(n+1)!]^{\frac{n-1}{n+1}}} \right)^{1/n} \\
&\leqslant \exp\left( \frac{n-1}{n+1} \right) \frac{(2n)^{\frac{n-1}{n}}}{\left(\frac{n+1}{e}\right)^{\frac{n-1}{n}}} \\
&= \exp\left( \frac{(2n+1)(n-1)}{n(n+1)} \right) \left( \frac{2n}{n+1} \right)^{\frac{n-1}{n}} \\
&\leqslant e^2 \frac{2n}{n+1} \leqslant 2e^2.
\end{aligned}$$

όπου για την δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την ταυτότητα $(n+1)! \geqslant \left(\frac{n+1}{e}\right)^{n+1}$. Η (4.1.2) τώρα δίνει $h_{Z_n(\overline{K_{2n}(f)})}(\vartheta) \leqslant 2e^2 h_{Z_n(\overline{K_{n+1}(f)})}(\vartheta)$, άρα

$$Z_n(\overline{K_{2n}(f)}) \subseteq 2e^2\, Z_n(\overline{K_{n+1}(f)}).$$

Με έναν ανάλογο συλλογισμό βρίσκουμε και αντίστροφο εγκλεισμό, η δε (4.1.1) πλέον δίνει

$$c_1 f(0)^{1/n} Z_n(f) \subseteq Z_n(\overline{K_{n+1}(f)}) \subseteq c_2 f(0)^{1/n} Z_n(f), \tag{4.1.3}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Για να εκτιμήσουμε τον όγκο του $Z_n(\overline{K_{n+1}(f)})$, παρατηρούμε αρχικά ότι

$$Z_n(\overline{K_{n+1}(f)}) \simeq Z_\infty(\overline{K_{n+1}(f)}) = \mathrm{conv}\{\overline{K_{n+1}(f)}, -\overline{K_{n+1}(f)}\},$$

λόγω του ότι το $\overline{K_{n+1}(f)}$ είναι κεντραρισμένο και λόγω των Προτάσεων 4.1.2 (iv) και 4.1.4. Παράλληλα,

$$\frac{1}{2}\big(\overline{K_{n+1}(f)} - \overline{K_{n+1}(f)}\big) \subseteq \mathrm{conv}\{\overline{K_{n+1}(f)}, -\overline{K_{n+1}(f)}\} \subseteq \overline{K_{n+1}(f)} - \overline{K_{n+1}(f)}$$

αφού $0 \in \overline{K_{n+1}(f)}$, ενώ γνωρίζουμε, από την ανισότητα Rogers-Shephard (Θεώρημα 2.1.4) και τα σχόλια αμέσως πριν, ότι

$$2 \leqslant \mathrm{vol}_n(\overline{K_{n+1}(f)} - \overline{K_{n+1}(f)})^{1/n} \leqslant \binom{2n}{n}^{1/n} \leqslant 4,$$

όπου η τελευταία δεξιά ανισότητα αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή. Άρα τελικά

$$\mathrm{vol}_n(Z_n(\overline{K_{n+1}(f)}))^{1/n} \simeq 1.$$

Το ζητούμενο έπεται από την (4.1.3). □

Σημειώστε ακόμη ότι το Θεώρημα 4.1.7 δίνει ότι αν $K$ είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, τότε

$$\mathrm{vrad}(Z_n(K)) \simeq \omega_n^{-1/n}.$$

Θα ορίσουμε τώρα την έννοια του περιθωρίου μίας μη αρνητικής ολοκληρώσιμης συνάρτησης στον $\mathbb{R}^n$ ως προς έναν $k$-διάστατο γραμμικό υπόχωρο. Θα την χρειαστούμε στην επόμενη παράγραφο για να αποδείξουμε την πολύ σημαντική ανισότητα απόκλισης του Παούρη.

**Ορισμός 4.1.8.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $k \in [1, n)$ και $F \in G_{n,k}$. Ορίζουμε ως περιθώριο της $f$ ως προς τον υπόχωρο $F$ την απεικόνιση $\pi_F(f) : F \to [0, \infty)$,

$$\pi_F(f)(x) = \int_{x+F^\perp} f(y)\, dy.$$

Ειδικότερα, αν η $f$ είναι η λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{P}_n$ και $A \in \mathcal{B}(F)$, παρατηρούμε ότι

$$\int_A \pi_F(f)(x) dx = \int_A \int_{x+F^\perp} f(y) dy\, dx = \int_F \int_{F^\perp} f(x+z) \mathbf{1}_A(x) dz\, dx$$

μετά από την αλλαγή μεταβλητής $y = x + z$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini βρίσκουμε συνεπώς

$$\int_A \pi_F(f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\mathbf{1}_A(P_F(x))\,dx = \mu(P_F^{-1}(A)).$$

Ο συλλογισμός αυτός μας οδηγεί στο να διευρύνουμε τον Ορισμό 4.1.6 ως εξής:

**Ορισμός 4.1.9.** Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $k \in [1, n)$ και $F \in G_{n,k}$. Ορίζουμε ως περιθώριο του $\mu$ ως προς τον υπόχωρο $F$ την απεικόνιση $\pi_F(\mu) : \mathcal{B}(F) \to [0, +\infty)$,

$$\pi_F(\mu)(A) := \mu(P_F^{-1}(A)).$$

**Πρόταση 4.1.10.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση, $k \in [1, n)$ και $F \in G_{n,k}$. Ισχύουν τότε οι παρακάτω ιδιότητες.*

(i) *Αν η $f$ είναι άρτια τότε η $\pi_F(f)$ είναι άρτια.*

(ii) *Ισχύει η ταυτότητα*
$$\int_F \pi_F(f)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

(iii) *Αν $g : F \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, τότε*
$$\int_F g(x)\pi_F(f)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(P_F x) f(x)\,dx.$$

(iv) *Αν $\vartheta \in S_F$, τότε*
$$\int_F \langle x, \vartheta\rangle \pi_F(f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \vartheta\rangle f(x)dx.$$
*(Υπενθυμίζουμε ότι $S_F := F \cap S^{n-1}$).*

(v) *Αν $f$ κεντραρισμένη, τότε $\pi_F(f)$ κεντραρισμένη.*

(vi) *Αν $p > 0$ και $\vartheta \in S_F$, τότε*
$$\int_F |\langle x, \vartheta\rangle|^p \pi_F(f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \vartheta\rangle|^p f(x)dx.$$

(vii) *Αν $f$ ισοτροπική, τότε $\pi_F(f)$ ισοτροπική.*

(viii) *Αν $f$ λογαριθμικά κοίλη, τότε $\pi_F(f)$ λογαριθμικά κοίλη.*

*Απόδειξη.* (i) Παρατηρούμε ότι

$$\pi_F(f)(-x) = \int_{-x+F^{\perp}} f(y)dy = \int_{x+F^{\perp}} f(y)dy = \pi_F(f)(x).$$

(ii) Χάρις στο θεώρημα Fubini έχουμε

$$\int_F \pi_F(f)(x)dx = \int_F \int_{x+F^{\perp}} f(y)dy\,dx = \int_F \int_{F^{\perp}} f(x+y)dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

(iii) Ξανά χάρις στο θεώρημα Fubini

$$\int_F g(x)\pi_F(f)(x)dx = \int_F g(x)\int_{x+F^\perp} f(y)dy\,dx = \int_F\int_{F^\perp} g(x)f(x+y)dy\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} g(P_F(x))f(x)\,dx.$$

(iv), (vi), (viii) Παρόμοια.

(v) Άμεση από την (iv).

(vii) Άμεση από την (vi), θέτοντας $p=2$. □

Δεν είναι δύσκολο να δειχθεί ότι οι ίδιες ιδιότητες ισχύουν και για μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$.

Αποδεικνύουμε τώρα ένα κομβικό θεώρημα του Παούρη σύμφωνα με το οποίο μπορούμε, προβάλλοντας σε έναν υπόχωρο το $L_q$-κεντροειδές σώμα μιας λογαριθμικά κοίλης πυκνότητας να πάρουμε το $L_q$-κεντροειδές σώμα του περιθωρίου της πυκνότητας ως προς τον υπόχωρο αυτό.

**Θεώρημα 4.1.11** (Παούρης)**.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Έστωσαν ακόμη $k\in[1,n)$, $F\in G_{n,k}$ και $q\geqslant 1$. Τότε*

$$P_F(Z_q(f)) = Z_q(\pi_F(f)).$$

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 4.1.10 (vi), $h_{Z_q(f)}(\vartheta) = h_{Z_q(\pi_F(f))}(\vartheta)$ για κάθε $\vartheta \in S_F$. Παράλληλα, $h_{P_F(Z_q(f))}(\vartheta) = h_{Z_q(f)}(\vartheta)$ για κάθε $\vartheta\in S_F$ (αυτό είναι γενική ιδιότητα των κυρτών σωμάτων: η συνάρτηση $\varphi_\vartheta : x\mapsto \langle x,\vartheta\rangle$ $(\vartheta\in S_F)$ ορισμένη στο $K$, λαμβάνει (ολικό) μέγιστο ίσο με $\langle x_0,\vartheta\rangle$, όπου $x_0\in P_F(K)$). Άρα, $h_{P_F(Z_q(f))} = h_{Z_q(\pi_F(f))}$ (παρατηρήστε ότι αναφερόμαστε σε σώματα στον $F$, όχι στον $\mathbb{R}^n$.) □

**Πόρισμα 4.1.12** (Παούρης)**.** *Έστω $f$ κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$, $k\in[1,n)$ και $F\in G_{n,k}$. Τότε*

$$\left[\pi_F(f)(0)\mathrm{vol}_k(P_F(Z_k(f)))\right]^{\frac{1}{k}} \simeq 1.$$

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 4.1.10 (v), (viii), η $\pi_F(f)$ είναι κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.1.7 για την $\pi_F(f)$ παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_k(Z_k(\pi_F(f)))^{1/k} \simeq (\pi_F(f)(0))^{-1/k}.$$

Το συμπέρασμα τώρα είναι άμεσο από το προηγούμενο θεώρημα. □

Θα αποδείξουμε τώρα ένα άνω φράγμα για τον όγκο των $L_q$-κεντροειδών σωμάτων $Z_q(\mu)$, όπου $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Το φράγμα αυτό χρησιμοποίησαν οι Klartag-E. Milman στη δική τους προσέγγιση στην εικασία της ισοτροπικής σταθεράς, όπως θα δούμε αργότερα.

**Θεώρημα 4.1.13.** *Έστω $\mu\in\mathcal{P}_n$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και $q\in[2,n]$. Τότε*

$$\mathrm{vol}_n(Z_q(\mu))^{1/n} \leqslant c\sqrt{\frac{q}{n}},$$

*όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.*

Πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη, παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι αν η $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ είναι ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε υπάρχει $c_1>0$ απόλυτη σταθερά ώστε $\|f\|_\infty^{1/n}\geqslant c_1$, δηλαδή οι ισοτροπικές σταθερές των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων έχουν ομοιόμορφο κάτω φράγμα.

Πράγματι, αφού η $f$ είναι ισοτροπική,

$$\begin{aligned} n &= \int_{\mathbb{R}^n}|x|^2f(x)dx=\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_0^{|x|^2}\mathbf{1}\,dt\right)f(x)dx\\ &=\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}_{\{x\in\mathbb{R}^n:|x|^2\geqslant t\}}(x)dx\right)dt=\int_0^\infty\left(\int_{\mathbb{R}^n\setminus\sqrt{t}B_2^n}f(x)dx\right)dt\\ &=\int_0^\infty\left(1-\int_{\sqrt{t}B_2^n}f(x)dx\right)dt\geqslant\int_0^{(\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}}(1-\omega_n\|f\|_\infty t^{n/2})dt\\ &=(\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}\frac{n}{n+2}\simeq\|f\|_\infty^{-2/n}\frac{n^2}{n+2}, \end{aligned}$$

άρα

$$\|f\|_\infty^{1/n}\geqslant c_2\left(\frac{n}{n+2}\right)^{1/2}\geqslant\frac{c_2}{\sqrt{3}}=:c_1. \tag{4.1.4}$$

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 4.1.13. Λόγω της Πρότασης 4.1.3 μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο $q$ είναι ακέραιος. Έστω $q\in[1,n-1]\cap\mathbb{Z}$ και $F\in G_{n,q}$ (η περίπτωση $q=n$ είναι τετριμμένη, βλέπε σχόλια πριν τον Ορισμό 4.1.8). Έστω $f$ η πυκνότητα του μέτρου $\pi_F(\mu)$. Η $f$ είναι ισοτροπική και λογαριθμικά κοίλη σύμφωνα με την Πρόταση 4.1.10 (vii), (viii). Από την (4.1.4) (υπενθυμίζουμε ότι εδώ $\dim(\mathrm{dom}(f))=q$), ισχύει

$$[f(0)]^{1/q}\geqslant\frac{\|f\|_\infty^{1/q}}{e}\geqslant\frac{c_1}{e},$$

σύμφωνα με το Λήμμα 3.1.5. Απ' την άλλη,

$$P_F(Z_q(\mu))=Z_q(\pi_F(\mu))$$

από το Θεώρημα 4.1.11 και

$$\mathrm{vol}_q(P_F(Z_q(\mu)))^{1/q}\simeq[f(0)]^{-1/q}$$

από το Πόρισμα 4.1.12. Άρα,

$$[\mathrm{vol}_q(P_F(Z_q(\mu)))]^{1/q}\leqslant\frac{c_3}{[f(0)]^{1/q}}\leqslant\frac{ec_3}{c_1}=:c_4. \tag{4.1.5}$$

Για να εκτιμήσουμε τώρα τον όγκο $\mathrm{vol}_n(Z_q(\mu))$, υπενθυμίζουμε (βλ. Παράγραφο 2.3) ότι για το $j$-οστό quermassintegral $W_j(K)$ του κυρτού σώματος $K$ ισχύει ο ολοκληρωτικός τύπος του Kubota, τον οποίο αν εφαρμόσουμε για $K=Z_q(\mu)$, $j=n-q$, παίρνουμε

$$W_{n-q}(Z_q(\mu))=\frac{\omega_n}{\omega_q}\int_{G_{n,q}}\mathrm{vol}_q(P_F(Z_q(\mu)))\,d\nu_{n,q}(F)\leqslant\frac{\omega_n}{\omega_q}c_4^q, \tag{4.1.6}$$

λόγω της (4.1.5) (υπενθυμίζουμε ότι $\nu_{n,q}$ είναι το μέτρο πιθανότητας Haar στην πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,q}$).

Παράλληλα, οι ανισότητες Alexandrov (βλ. Παράγραφο 2.3) για $K = Z_q(\mu)$, $i = n-q$ και $j=0$ δίνουν

$$\left(\frac{W_{n-q}(Z_q(\mu))}{\omega_n}\right)^{1/q} \geqslant \left(\frac{W_0(Z_q(\mu))}{\omega_n}\right)^{1/n} = \left(\frac{\mathrm{vol}_n(Z_q(\mu))}{\omega_n}\right)^{1/n},$$

επομένως

$$\omega_n^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} W_{n-q}(Z_q(\mu))^{1/q} \geqslant \mathrm{vol}_n(Z_q(\mu))^{1/n}. \tag{4.1.7}$$

Από τις (4.1.6), (4.1.7) παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(Z_q(\mu))^{1/n} \leqslant \left(\frac{\omega_n}{\omega_q}c_4^q\right)^{1/q} \omega_n^{\frac{1}{n}-\frac{1}{q}} = c_4\frac{\omega_n^{1/n}}{\omega_q^{1/q}} \leqslant c\sqrt{\frac{q}{n}}.$$

□

**Πόρισμα 4.1.14.** *Έστω $K$ κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και $q \in [2,n]$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(Z_q(K))^{1/n} \leqslant c\sqrt{q/n}\, L_K.$$

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 4.1.2 (ii) $\mathrm{vol}_n(Z_q(T(K))) = \mathrm{vol}_n(T(Z_q(K))) = \mathrm{vol}_n(Z_q(K))$ για κάθε $T \in SL_n$. Άρα αρκεί να δείξουμε τη ζητούμενη ανισότητα για $K$ ισοτροπικό. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.1.13 για το (ισοτροπικό) μέτρο $\mu$ με πυκνότητα $f_\mu = L_K^n \mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}$, οπότε

$$\begin{aligned} h_{Z_q(\mu)}(y) &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,y\rangle|^q f(x)dx\right)^{1/q} = \left(L_K^n \int_{\frac{K}{L_K}} |\langle x,y\rangle|^q dx\right)^{1/q} \\ &= \left(L_K^n \int_K \frac{1}{L_K^q}|\langle z,y\rangle|^q \frac{1}{L_K^n}dz\right)^{1/q} = \frac{1}{L_K}h_{Z_q(K)}(y), \end{aligned}$$

δηλαδή $Z_q(\mu) = L_K^{-1}Z_q(K)$ και το συμπέρασμα έπεται. □

## 4.2 Η ανισότητα απόκλισης του Παούρη

Σκοπός μας στην παράγραφο αυτή είναι να αποδείξουμε μια πολύ σημαντική ανισότητα του Παούρη, η οποία δείχνει ότι αν το $\mu$ είναι ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε είναι συγκεντρωμένο πολύ ισχυρά σε μια μπάλα ακτίνας $\sqrt{n}$ με κέντρο το 0, συγκεκριμένα το σύνολο που μένει έξω από τη μπάλα ακτίνας $t\sqrt{n}$, $t \gg 1$ έχει μέτρο που φθίνει με ρυθμό $\exp(-t\sqrt{n})$ που εξαρτάται από το $t$ και από την διάσταση $n$. Ακριβέστερα έχουμε το:

**Θεώρημα 4.2.1** (Παούρης)**.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t \geqslant 1$ ισχύει ότι*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : |x| \geqslant ct\sqrt{n}\}) \leqslant \exp(-t\sqrt{n}),$$

*όπου $c$ θετική απόλυτη σταθερά.*

Η απόδειξη θα προκύψει από μία σειρά ισχυρότερων αποτελεσμάτων. Ορίζουμε κατ' αρχάς τις $q$-οστές ροπές της συνάρτησης $x \mapsto |x|$ ως προς το μέτρο $\mu$.

**Ορισμός 4.2.2.** Έστω $q \geqslant 1$ και $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τότε την παράμετρο

$$I_q(\mu) := \left( \int_{\mathbb{R}^n} |x|^q d\mu(x) \right)^{1/q}.$$

**Λήμμα 4.2.3.** *Με τις υποθέσεις του Ορισμού* 4.2.2,

$$w_q(Z_q(\mu)) = \alpha_{n,q} \sqrt{\frac{q}{q+n}} I_q(\mu),$$

*όπου* $a_{n,q} \simeq 1$ *– το* $w_q$ *ορίζεται, αφού το* $Z_q(\mu)$ *είναι συμμετρικό, από την Πρόταση* 4.1.2 (i).

*Απόδειξη.* Για $x \in \mathbb{R}^n$, υπολογίζουμε, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες,

$$\int_{B_2^n} |\langle x, y\rangle|^q dy = n\omega_n \int_0^1 r^{n+q-1} dr \cdot \int_{S^{n-1}} |\langle x, \vartheta\rangle|^q d\sigma(\vartheta) = \frac{n\omega_n}{n+q} \int_{S^{n-1}} |\langle x, \vartheta\rangle|^q d\sigma(\vartheta). \tag{4.2.1}$$

Απ' την άλλη,

$$\begin{aligned}\int_{B_2^n} |\langle x, y\rangle|^q dy &= |x|^q \int_{B_2^n} \langle \frac{x}{|x|}, y\rangle|^q dy = |x|^q \int_{B_2^n} |\langle e_1, y\rangle|^q dy \\ &= 2\omega_{n-1} |x|^q \int_0^1 t^q (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}} dt = \omega_n |x|^q \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+q+2}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Άρα, σε συνδυασμό με την (4.2.1) παίρνουμε

$$\left( \frac{n\omega_n}{n+q} \int_{S^{n-1}} |\langle x, \vartheta\rangle|^q d\sigma(\vartheta) \right)^{1/q} = \left( \omega_{n-1} |x|^q \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+q+2}{2}\right)} \right)^{1/q},$$

και τελικά

$$\left( \int_{S^{n-1}} |\langle x, \vartheta\rangle|^q d\sigma(\vartheta) \right)^{1/q} \simeq \sqrt{\frac{q}{q+n}} |x|,$$

από τον τύπο του Stirling. Γράφουμε τώρα

$$w_q(Z_q(\mu)) = \left( \int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \vartheta\rangle|^q d\mu(x) d\sigma(\vartheta) \right)^{1/q}$$

(ορισμός στην αρχή της Παραγράφου 2.4 και Ορισμός 4.1.1). Άρα,

$$w_q(Z_q(\mu)) \simeq \left( \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{q}{q+n} \right)^q |x|^q d\mu(x) \right)^{1/q} = \sqrt{\frac{q}{q+n}} I_q(\mu).$$

□

**Θεώρημα 4.2.4.** *Έστω* $\mu$ *κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον* $\mathbb{R}^n$ *και* $q \geqslant 1$*. Τότε*

$$I_q(\mu) \leqslant c\big(I_2(\mu) + R(Z_q(\mu))\big),$$

*όπου* $c > 0$ *απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Από το Λήμμα 4.2.3, $I_q(\mu) = \frac{1}{a_{n,q}}\sqrt{1+\frac{n}{q}}w_q(Z_q(\mu))$. Θέτοντας $b_{n,q} := \frac{1}{a_{n,q}}\sqrt{1+\frac{n}{q}}$ έχουμε $\frac{1}{a_{n,q}} \leqslant b_{n,q}$, $\frac{1}{a_{n,q}}\sqrt{\frac{n}{q}} \leqslant b_{n,q}$, άρα $\max\left\{1, \sqrt{\frac{n}{q}}\right\} \simeq \frac{1}{a_{n,q}}\max\left\{1, \sqrt{\frac{n}{q}}\right\} \leqslant b_{n,q}$. Απ' την άλλη, αν $\frac{n}{q} \leqslant 1$, τότε $b_{n,q} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{a_{n,q}}$ ενώ αν $\frac{n}{q} > 1$, τότε $b_{n,q} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{a_{n,q}}\sqrt{\frac{n}{q}}$, άρα $b_{n,q} \leqslant \frac{\sqrt{2}}{a_{n,q}}\max\left\{1, \sqrt{\frac{n}{q}}\right\} \simeq \max\left\{1, \sqrt{\frac{n}{q}}\right\}$. Επομένως, $b_{n,q} \simeq \max\left\{1, \sqrt{\frac{n}{q}}\right\}$, δηλαδή

$$I_q(\mu) \simeq \max\left\{1, \sqrt{\frac{n}{q}}\right\} w_q(Z_q(\mu)). \tag{4.2.2}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

Αν $q \geqslant n$, τότε, αφού $w_q(Z_q(\mu)) \leqslant \|h_{Z_q(\mu)}\|_{L_\infty(S^{n-1})} = R(Z_q(\mu))$,

$$I_q(\mu) \leqslant c \cdot w_q(Z_q(\mu)) \leqslant c \cdot R(Z_q(\mu)) \leqslant c\,(I_2(\mu) + R(Z_q(\mu))).$$

Αν $q \in [1, n] \cap \mathbb{Z}$, τότε από το Θεώρημα 2.3.1,

$$w_q(Z_q(\mu)) \leqslant c_1 \max\left\{w(Z_q(\mu)), \sqrt{\frac{q}{n}}R(Z_q(\mu))\right\}, \tag{4.2.3}$$

όπου $c_1 \geqslant \max\{2, c_2\}$, $c_2 > 0$ η σταθερά του Θεωρήματος 2.3.1. Διακρίνουμε ξανά δύο περιπτώσεις:

Αν $n \geqslant q \geqslant k_*(Z_q(\mu))$ (υπενθυμίζουμε ότι $k_*(K)$ είναι η δυϊκή διάσταση Dvoretzky ενός συμμετρικού κυρτού σώματος), τότε, από το Θεώρημα 2.3.2, $q \geqslant c_3 n\left(\frac{w(Z_q(\mu))}{R(Z_q(\mu))}\right)^2$, όθεν

$$w(Z_q(\mu)) \leqslant \frac{1}{c_3}\sqrt{\frac{q}{n}}R(Z_q(\mu)) \leqslant \frac{1}{c_3}\sqrt{\frac{q}{n}}(I_2(\mu) + R(Z_q(\mu))).$$

Συνδυάζοντας με την (4.2.3) λαμβάνουμε

$$w_q(Z_q(\mu)) \leqslant c_1 \max\left\{\frac{1}{c_3}\sqrt{\frac{q}{n}}(I_2(\mu) + R(Z_q(\mu))), \sqrt{\frac{q}{n}}R(Z_q(\mu))\right\} \leqslant c_4\sqrt{\frac{q}{n}}(I_2(\mu) + R(Z_q(\mu))),$$

και το ζητούμενο έπεται από την (4.2.2).

Αν $q \leqslant k_*(Z_q(\mu))$, το Θεώρημα 2.3.1 δίνει ότι για $F \in G_{n,q}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_F(x)|^2 d\mu(x) \leqslant c_5 \frac{q}{n} I_2^2(\mu) \tag{4.2.4}$$

και

$$w(Z_q(\mu))B_F \subseteq c_6 P_F(Z_q(\mu)) \tag{4.2.5}$$

(υπενθυμίζουμε ότι $B_F = B_2^n \cap F$), άρα από το Θεώρημα 4.1.11 και το Πόρισμα 4.1.12 για το κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\pi_F(\mu)$ παίρνουμε (αφού $\dim(F) = q$),

$$\begin{aligned}\mathrm{vrad}(Z_q(\pi_F(\mu))) &= \left(\frac{\mathrm{vol}_q(Z_q(\pi_F(\mu)))}{\omega_q}\right)^{1/q} = \left(\frac{\mathrm{vol}_q(P_F(Z_q(\mu)))}{\omega_q}\right)^{1/q} \\ &\simeq \frac{\sqrt{q}}{[\pi_F(\mu)(0)]^{1/q}} \simeq \frac{\sqrt{q}}{\|\pi_F(\mu)\|_\infty^{1/q}},\end{aligned}$$

λόγω βέβαια και του Λήμματος 3.1.5. Άρα (Ορισμός 3.4.9)

$$\mathrm{vrad}(Z_q(\pi_F(\mu))) \simeq \frac{\sqrt{q}|\det \mathrm{Cov}(\pi_F(\mu))|^{\frac{1}{2q}}}{L_{\pi_F(\mu)}},$$

και επομένως (βλέπε σχόλια πριν την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.13)

$$\begin{aligned}(4.2.6) \qquad \mathrm{vrad}(Z_q(\pi_F(\mu))) &\leqslant c_7\sqrt{q}|\det \mathrm{Cov}(\pi_F(\mu))|^{\frac{1}{2q}} = c_7\left(\int_F |x|^2 d\pi_F(\mu)(x)\right)^{1/2} \\ &= c_7\left(\int_{\mathbb{R}^n} |P_F(x)|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} \leqslant c_7\sqrt{c_5\frac{q}{n}I_2(\mu)} = c_8\sqrt{\frac{q}{n}}I_2(\mu).\end{aligned}$$

λόγω και της (4.2.4). Από τις (4.2.5) και (4.2.6) βρίσκουμε

$$w(Z_q(\mu)) \leqslant c_6\mathrm{vrad}(P_F(Z_q(\mu))) = c_6\mathrm{vrad}(Z_q(\pi_F(\mu))) \leqslant c_9\sqrt{\frac{q}{n}}I_2(\mu) \leqslant c_9\sqrt{\frac{q}{n}}(I_2(\mu)+R(Z_q(\mu))).$$

Συνδυάζοντας ξανά την ανισότητα αυτή με την (4.2.3) παίρνουμε

$$w_q(Z_q(\mu)) \leqslant c_{10}\sqrt{\frac{q}{n}}(I_2(\mu)+R(Z_q(\mu)))$$

και το ζητούμενο έπεται από την (4.2.2). □

**Πόρισμα 4.2.5.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε $I_q(\mu) \leqslant c_{11}I_2(\mu)$ για κάθε $q \in [1, c_{12}\sqrt{n}]$, όπου $c_{11}, c_{12} > 0$ απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Από το Θεώρημα 4.2.4,

$$I_q(\mu) \leqslant 2c\max\{I_2(\mu), R(Z_q(\mu))\} \leqslant c_{11}\max\{I_2(\mu), q\}$$

αφού $R(Z_q(\mu)) \leqslant c_1 q$ (υπενθυμίζουμε ότι $Z_q(\mu) \subseteq c_1 q Z_2(\mu) = c_1 q B_2^n$). Όμως (Πρόταση 3.4.5) $I_2(\mu) = \sqrt{n}$, άρα για $q \in [1, c_{12}\sqrt{n}]$ ισχύει $I_q(\mu) \leqslant c_{11}I_2(\mu)$. □

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 4.2.1. Έστω $\mu$ που ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος και $q \geqslant 2$. Από την ανισότητα Markov,

$$I_q^q(\mu) = \int_{\mathbb{R}^n} |x|^q d\mu(x) \geqslant \mu(\{|x| \geqslant e^3 I_q(\mu)\}) \cdot e^{3q} I_q^q(\mu),$$

άρα

$$\mu(\{|x| \geqslant e^3 I_q(\mu)\}) \leqslant e^{-3q}.$$

Άρα, από το Λήμμα 3.2.13, αν το εφαρμόσουμε για το $A = \{|x| < e^3 I_q(\mu)\}$, οπότε $\alpha = \mu(A) > 1 - e^{-3q}$, έχουμε ότι για $t > 1$

$$\begin{aligned}\mu(\{|x| \geqslant e^3 t I_q(\mu)\}) &\leqslant \alpha\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{t+1}{2}} < (1-e^{-3q})\left(\frac{e^{-3q}}{1-e^{-3q}}\right)^{\frac{t+1}{2}} \leqslant \left(\frac{e^{-3q}}{1-e^{-3q}}\right)^{\frac{t+1}{2}} \\ &= e^{-qt}\left(\frac{e^{-3q}}{1-e^{-3q}}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\frac{e^{-q}}{1-e^{-q}}\right)^{\frac{t}{2}} < e^{-qt}.\end{aligned}$$

Από το Πόρισμα 4.2.5, για $q = c_{12}\sqrt{n}$ παίρνουμε

$$I_q(\mu) \leqslant c_{11} I_2(\mu),$$

άρα

$$\mu(\{|x| \geqslant c_{11}e^3 t I_2(\mu)\}) \leqslant \mu(\{|x| \geqslant e^3 t I_q(\mu)\}) < e^{-c_{12}t\sqrt{n}}$$

για κάθε $t \geqslant 1$. Τό θεώρημα τώρα έπεται από την παρατήρηση ότι $I_2(\mu) = \sqrt{n}$ (Πρόταση 3.4.5) αφού προσαρμόσουμε και τις σταθερές. □

## 4.3 Η λύση της ισομορφικής εικασίας του υπερεπιπέδου από τον Klartag

Η ισομορφική εικασία του υπερεπιπέδου ρωτάει αν, δοθέντος κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$, μπορούμε να το μετατοπίσουμε και να βρούμε ένα δεύτερο κυρτό σώμα που «σχεδόν» να συμπίπτει με το μετατοπισμένο αρχικό και να έχει ομοιόμορφα φραγμένη ισοτροπική σταθερά. Στην αρχική του προσέγγιση το 2005, ο Klartag απέδειξε ότι δοθέντος συμμετρικού κυρτού σώματος $K$ στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει συμμετρικό κυρτό σώμα $T$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $d(K,T) \leqslant c_1 \log n$ και $L_T \leqslant c_2$, όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές και $d(\cdot,\cdot)$ η απόσταση Banach-Mazur. Για να το πετύχει αυτό κατασκεύασε μία συνάρτηση $f : K \to [0,\infty)$ ώστε η $f^{\frac{1}{an}}$ να είναι κοίλη στον φορέα της, όπου $a > 0$ όσο γίνεται μικρότερο, απέδειξε ότι για μία τέτοια $f$ το $T := K_{n+2}(f)$ έχει ισοτροπική σταθερά $L_T \simeq L_f$, απέδειξε ότι $d(K,T) \leqslant ca$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά, απέδειξε ότι για τη συγκεκριμένη $f$ η $L_f$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη και πέτυχε το φράγμα $a \leqslant \log n$ χάρις στην $MM^*$-ανισότητα.

Το 2006, ο ίδιος πέτυχε να δώσει οριστική (καταφατική) απάντηση στην εικασία εκμεταλλευόμενος τις ιδιότητες του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace. Στην δεύτερη αυτή προσέγγιση (στην οποία και θα εστιάσουμε) διατύπωσε λοιπόν το παρακάτω θεώρημα, του οποίου την απόδειξη θα παρουσιάσουμε μετά από κάποια εισαγωγικά για τον λογαριθμικό μετασχηματισμό Laplace.

**Θεώρημα 4.3.1** (Klartag)**.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\varepsilon \in (0,1)$. Υπάρχει κεντραρισμένο κυρτό σώμα $T$ στον $\mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε*

$$\frac{1}{1+\varepsilon} T \subseteq K + x \subseteq (1+\varepsilon)T \quad \textit{και} \quad L_T \leqslant \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}},$$

*όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.*

**Ορισμός 4.3.2.** Έστω $\mu$ μέτρο στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ ώστε $0 < \mu(\mathbb{R}^n) < \infty$. Ορίζουμε τον λογαριθμικό μετασχηματισμό Laplace $\Lambda_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ του μέτρου $\mu$ ως

$$\Lambda_\mu(\xi) := \log\left(\frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} d\mu(x)\right).$$

**Πρόταση 4.3.3.** *Έστω $\mu$ το μέτρο Lebesgue σε ένα κυρτό σύνολο $K$ στον $\mathbb{R}^n$ και για $\xi \in \mathbb{R}^n$ έστω $\mu_\xi$ το μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα*

$$f(x) = \frac{e^{\langle \xi, x\rangle} \mathbf{1}_K(x)}{\int_K e^{\langle \xi, x\rangle} dx}.$$

*Τότε:*

(i) $\mathrm{bar}(\mu_\xi) = (\nabla\Lambda_\mu)(\xi)$.

(ii) $(\nabla\Lambda_\mu)(\mathbb{R}^n) \subseteq K$.

(iii) $(\mathrm{Hess}\Lambda_\mu)(\xi) = \mathrm{Cov}(\mu_\xi)$.

*Απόδειξη.* Εδώ για $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\Lambda_\mu(\xi) = \log\left(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)}\int_K e^{\langle \xi, x\rangle}\,dx\right).$$

Η $\Lambda_\mu$ είναι φανερά κλάσεως $C^2$, αφού το $K$ είναι συμπαγές και η $(\xi, x) \mapsto e^{\langle \xi, x\rangle}$ είναι $C^2$. Αν $\xi := (\xi_1, \dots, \xi_n)$, $x = (x_1, \dots, x_n)$, τότε

$$\frac{\partial \Lambda_\mu}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\int_K e^{\langle \xi, x\rangle}dx}\cdot\frac{\partial\int_K e^{\langle \xi, x\rangle}dx}{\partial \xi_i} = \frac{1}{\int_K e^{\langle \xi, x\rangle}dx}\int_K x_i e^{\langle \xi, x\rangle}dx,$$

άρα

$$(\nabla\Lambda_\mu)(\xi) = \frac{\int_K x e^{\langle \xi, x\rangle}\,dx}{\int_K e^{\langle \xi, x\rangle}\,dx} = \int_{\mathbb{R}^n} x\,d\mu_\xi(x) = \mathrm{bar}(\mu_\xi), \tag{4.3.1}$$

και αποδείξαμε το (i).

Για το (ii) αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\mathrm{bar}(\mu_\xi) \in K$, αφού ο φορέας του $\mu_\xi$ είναι το συμπαγές και κυρτό σύνολο $K$, και να χρησιμοποιήσουμε το (i).

Για το (iii) υπολογίζουμε τις μερικές παραγώγους δεύτερης τάξης:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Lambda_\mu}{\partial\xi_i\partial\xi_j}(\xi) &= \frac{\partial}{\partial\xi_i}\left(\frac{\int_K x_j e^{\langle \xi, x\rangle}dx}{\int_K e^{\langle \xi, x\rangle}dx}\right)\\ &= \frac{\int_K x_i x_j e^{\langle \xi, x\rangle}\,dx - \int_K x_i e^{\langle \xi, x\rangle}\,dx\int_K x_j e^{\langle \xi, x\rangle}\,dx}{\left(\int_K e^{\langle \xi, x\rangle}\,dx\right)^2}\\ &= \int x_i x_j\,d\mu_\xi(x) - \int x_i\,d\mu_\xi(x)\int x_j\,d\mu_\xi(x) = \mathrm{Cov}(\mu_\xi)_{ij}.\end{aligned}$$

□

**Πρόταση 4.3.4.** *Για $\mu, \mu_\xi$ όπως στην Πρόταση 4.3.3, $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ συνεχή συνάρτηση και $\nu$ το μέτρο με πυκνότητα $f(\xi) = \det(\mathrm{Hess}\Lambda_\mu)(\xi)$ ισχύει*

$$\int_{(\nabla\Lambda_\mu)(\mathbb{R}^n)}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\nabla\Lambda_\mu(\xi))\det(\mathrm{Hess}\Lambda_\mu)(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(\nabla\Lambda_\mu(\xi))\,d\nu(\xi).$$

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι η $\Lambda_\mu$ είναι γνησίως κυρτή, ως απόρροια της ανισότητας Cauchy-Schwarz. Επομένως η $\nabla\Lambda_\mu$ είναι 1-1. Εφαρμόζοντας λοιπόν την αλλαγή μεταβλητής $x = (\nabla\Lambda_\mu)(\xi)$, υπολογίζουμε

$$\int_{\nabla\Lambda_\mu(\mathbb{R}^n)}\varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi((\nabla\Lambda_\mu)(\xi))\det(\mathrm{Hess}\Lambda_\mu)(\xi)\,d\xi = \int_{\mathbb{R}^n}\varphi((\nabla\Lambda_\mu)(\xi))d\nu(\xi).$$

□

Έχουμε ολοκληρώσει την παρουσίαση των ιδιοτήτων του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace μέτρου που μας ενδιαφέρουν. Διατυπώνουμε τώρα και αποδεικνύουμε ένα λήμμα που σχετίζεται άμεσα με την καταφατική απάντηση στην ισομορφική εικασία του υπερεπιπέδου.

**Λήμμα 4.3.5.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\mathrm{supp}(f) = K$ και με την ιδιότητα ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε*

$$\sup_{x\in K} f(x) \leqslant (1+\varepsilon)^{n+1} \inf_{x\in K} f(x).$$

*Έστω ακόμη $\tilde{f} : \mathbb{R}^n \to (0,+\infty)$ η συνάρτηση $\tilde{f}(x) := f(x+\mathrm{bar}(f))$, δηλαδή η $\tilde{f}$ είναι η κεντραρισμένη μετατόπιση της $f$, και $T := K_{n+1}(\tilde{f})$. Τότε*

(i) $L_T \simeq L_{\tilde{f}}$, *άρα και* $L_T \simeq L_f$, *και το $T$ είναι κεντραρισμένο,*

(ii) $\frac{1}{1+\varepsilon}T \subseteq K - \mathrm{bar}(f) \subseteq (1+\varepsilon)T$.

*Απόδειξη.* Προφανώς $\mathrm{bar}(f) \in K$. Το (i) προκύπτει από το Θεώρημα 3.5.13 (αφού βέβαια $\int f < \infty$ λόγω της υπόθεσης για το φράγμα του $\sup_{x\in K} f(x)$). Υποθέτουμε ότι $\tilde{f}(0) = 1$ (η υπόθεση αυτή δεν βλάπτει τη γενικότητα, αφού αν $\tilde{f}(0) = \lambda \neq 1$ τότε η $\tilde{\tilde{f}}(x) = \frac{\tilde{f}(x)}{\lambda}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος, $K_{n+1}(\tilde{\tilde{f}}) = K_{n+1}(\tilde{f})$ και $L_{\tilde{\tilde{f}}} \simeq L_{\tilde{f}}$). Υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\inf\left\{\frac{\tilde{f}(x)}{\mathbf{1}_{K-\mathrm{bar}(f)}(x)} : \mathbf{1}_{K-\mathrm{bar}(f)}(x) > 0\right\} &= \inf_{x\in K-\mathrm{bar}(f)} \tilde{f}(x) = \inf_{x\in K} f(x)\\ &\geqslant (1+\varepsilon)^{-(n+1)} \sup_{x\in K} f(x)\\ &= (1+\varepsilon)^{-(n+1)} \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) \geqslant (1+\varepsilon)^{-(n+1)},\end{aligned}$$

από το Λήμμα 3.1.5. Από την άλλη,

$$\begin{aligned}\inf\left\{\frac{\mathbf{1}_{K-\mathrm{bar}(f)}(x)}{\tilde{f}(x)} : \tilde{f}(x) > 0\right\} &= \inf_{x\in K-\mathrm{bar}(f)} \frac{1}{\tilde{f}(x)} = \left(\sup_{x\in K} f(x)\right)^{-1}\\ &\geqslant (1+\varepsilon)^{-(n+1)} \sup_{x\in K} f(x) \geqslant (1+\varepsilon)^{-(n+1)},\end{aligned}$$

όπως πριν. Από την Πρόταση 3.5.2,

$$K_{n+1}(\mathbf{1}_{K-\mathrm{bar}(f)}) = K - \mathrm{bar}(f). \tag{4.3.2}$$

Τέλος, από την Πρόταση 3.5.4 (i) και τα φράγματα που βρήκαμε παραπάνω,

$$(1+\varepsilon)^{-1}K_{n+1}(\tilde{f}) \subseteq K_{n+1}(\mathbf{1}_{K-\mathrm{bar}(f)}) \subseteq (1+\varepsilon)K_{n+1}(\tilde{f}). \tag{4.3.3}$$

Από τις (4.3.2) και (4.3.3) έπεται το ζητούμενο. □

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 4.3.1. Είναι προφανές ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{bar}(K) = 0$ και $\mathrm{vol}_n(K) = 1$. Όπως στις Προτάσεις 4.3.3 και 4.3.4, θέτουμε $\mu$ το μέτρο Lebesgue στο $K$ και $\nu$ το μέτρο με πυκνότητα

$$\det(\mathrm{Hess}\,\Lambda_\mu)(\xi).$$

Με τις παραδοχές για το $K$, το $\nu$ εδώ είναι μέτρο πιθανότητας:

$$\nu(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}\, \det(\mathrm{Hess}\,\Lambda_\mu)(\xi)\, d\xi = \int_K \mathbf{1}\, dx = \mathrm{vol}_n(K) = 1$$

λόγω της Πρότασης 4.3.4. Έστω $\varepsilon > 0$. Ο στόχος μας είναι να βρούμε μία $f$ που να είναι ανάλογη με την πυκνότητα ενός μέτρου $\mu_{\xi_0}$ (βλ. συμβολισμό της Πρότασης 4.3.3), όπου $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ κατάλληλο, που να ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 4.3.5 και να έχει ομοιόμορφα φραγμένη ισοτροπική σταθερά.

Εφαρμόζουμε την ανισότητα Bourgain-Milman (Θεώρημα 2.1.3) στο σώμα $(\varepsilon n)^{-1}(K-K)$:

$$\mathrm{vol}_n((\varepsilon n)^{-1}(K-K)) \cdot \mathrm{vol}_n(((\varepsilon n)^{-1}(K-K))^\circ) = \mathrm{vol}_n((\varepsilon n)^{-1}(K-K)) \cdot \mathrm{vol}_n(\varepsilon n(K-K)^\circ) \geqslant c^n \omega_n^2,$$

άρα

$$(\mathrm{vol}_n(\varepsilon n(K-K)^\circ))^{1/n} \geqslant (c^n\omega_n^2)^{1/n} \varepsilon n\, (\mathrm{vol}_n(K-K))^{-1/n} \geqslant c\, \omega_n^{2/n} \varepsilon n \simeq \varepsilon, \tag{4.3.4}$$

όπου $0 < c < 1$ απόλυτη σταθερά και η τελευταία ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα Rogers-Shephard. Παράλληλα, η ανισότητα Markov δίνει

$$\mathrm{vol}_n(\varepsilon n(K-K)^\circ) \min_{\xi \in \varepsilon n(K-K)^\circ} \det \mathrm{Cov}(\mu_\xi) \leqslant \int_{\varepsilon n(K-K)^\circ} \det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)\, d\xi = \nu(\varepsilon n(K-K)^\circ) \leqslant 1, \tag{4.3.5}$$

αφού το $\nu$ είναι μέτρο πιθανότητας.

Από τις (4.3.4) και (4.3.5) παίρνουμε

$$\min_{\xi \in \varepsilon n(K-K)^\circ} \det \mathrm{Cov}(\mu_\xi) \leqslant \mathrm{vol}_n^{-1}(\varepsilon n(K-K)^\circ) \leqslant \left(\frac{1}{c_1\varepsilon}\right)^n,$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Υπάρχει λοιπόν $\xi_0 \in \varepsilon n(K-K)^\circ$ ώστε

$$\det \mathrm{Cov}(\mu_{\xi_0}) \leqslant \left(\frac{1}{c_1\varepsilon}\right)^n.$$

Η ισοτροπική σταθερά του $\mu_{\xi_0}$ είναι (βλ. Πρόταση 4.3.3 για την πυκνότητα του $\mu_{\xi_0}$ και Ορισμό 3.4.9)

$$L_{\mu_{\xi_0}} = \left(\frac{\sup_{x\in K} e^{\langle \xi_0, x\rangle}}{\int_K e^{\langle \xi_0, x\rangle} dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu_{\xi_0})]^{\frac{1}{2n}} \leqslant \left(\frac{\sup_{x\in K} e^{\langle \xi_0, x\rangle}}{\int_K e^{\langle \xi_0, x\rangle} dx}\right)^{\frac{1}{n}} \frac{1}{\sqrt{c_1\varepsilon}}. \tag{4.3.6}$$

Για να βρούμε ομοιόμορφο φράγμα για την ποσότητα

$$\left(\frac{\sup_{x\in K} e^{\langle \xi_0, x\rangle}}{\int_K e^{\langle \xi_0, x\rangle} dx}\right)^{\frac{1}{n}}$$

παρατηρούμε ότι:

(i) $K \cup (-K) \subseteq K - K$, άρα $(K-K)^\circ \subseteq (K \cup (-K))^\circ$. Επομένως, αφού $\frac{\xi_0}{\varepsilon n} \in (K-K)^\circ$, αν $x \in K$ ισχύει ότι $\left\langle \frac{\xi_0}{\varepsilon n}, \pm x\right\rangle \leqslant 1$, δηλαδή $|\langle \xi_0, x\rangle| \leqslant \varepsilon n$. Επομένως,

$$e^{-\varepsilon n} \leqslant \inf_{x\in K} e^{\langle \xi_0, x\rangle} \leqslant \sup_{x\in K} e^{\langle \xi_0, x\rangle} \leqslant e^{\varepsilon n} \leqslant e^n \tag{4.3.7}$$

αν $\varepsilon \in [0,1]$.

(ii) Από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\int_K e^{\langle \xi_0, x\rangle} dx \geqslant e^{\int_K \langle \xi_0, x\rangle\, dx} = 1, \tag{4.3.8}$$

αφού $\mathrm{vol}_n(K) = 1$ και $\int_K \langle \xi_0, x\rangle\, dx = 0$ διότι το $K$ είναι κεντραρισμένο. Από τις (4.3.6), (4.3.7) και (4.3.8),

$$L_{\mu_{\xi_0}} \leqslant \frac{e}{\sqrt{c_1 \varepsilon}} = \frac{c_2}{\sqrt{\varepsilon}}, \tag{4.3.9}$$

όπου $c_2 := \frac{e}{\sqrt{c_1}}$.

Έστω τώρα $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$, $f(x) = e^{\langle \xi_0, x\rangle} \mathbf{1}_K(x)$. Η $f$ είναι ανάλογη με την πυκνότητα του $\mu_{\xi_0}$ (με την έννοια ότι κανονικοποιείται ώστε να γίνει η πυκνότητά του). Είναι λογαριθμικά κοίλη και

$$\sup_{x\in K} f(x) \leqslant e^{\varepsilon n} \leqslant e^{2\varepsilon n} \inf_{x\in K} f(x)$$

σύμφωνα με την (4.3.7). Άρα η $f$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 4.3.5 για τον $0 < \varepsilon' = e^{2\varepsilon} - 1$. Πράγματι, $(1+\varepsilon')^{n+1} = e^{2\varepsilon(n+1)} > e^{2\varepsilon n}$. Επομένως, υπάρχει κεντραρισμένο κυρτό σώμα $T$ ώστε

$$L_T \simeq L_f = L_{\mu_{\xi_0}} \leqslant \frac{c_2}{\sqrt{\varepsilon}}$$

σύμφωνα με την (4.3.9) και

$$\frac{1}{1+\varepsilon'} T = \frac{1}{e^{2\varepsilon}} T \subseteq K - \mathrm{bar}(f) \subseteq (1+\varepsilon')T = e^{2\varepsilon} T \subseteq (1+2\varepsilon)T.$$

Προσαρμόζοντας τις σταθερές (αντικαθιστώντας για παράδειγμα το αρχικό $\varepsilon$ με $\varepsilon/2$) παίρνουμε $L_T \leqslant \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$ και $\frac{1}{1+\varepsilon} T \subseteq K - \mathrm{bar}(f) \subseteq (1+\varepsilon)T$. $\square$

## 4.4 Το άνω φράγμα του Klartag

Σκοπός μας στην παράγραφο αυτή είναι να αποδείξουμε το άνω φράγμα του Klartag $O(\sqrt[4]{n})$ για την ισοτροπική σταθερά, βελτιώνοντας επομένως κατά έναν παράγοντα $\log n$ το αντίστοιχο φράγμα του Bourgain. Η απόδειξη στηρίζεται ουσιωδώς στην ανισότητα απόκλισης του Παούρη και στην καταφατική απάντηση της ισομορφικής εικασίας του υπερεπιπέδου.

Ξεκινάμε με το παρακάτω θεώρημα, του οποίου η απόδειξη ξεφεύγει από τους σκοπούς της παρούσης.

**Θεώρημα 4.4.1** (Latała). *Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $t \in [0,1]$. Τότε*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant t\mathbb{E}_\mu(\|x\|)\}) \leqslant Ct,$$

*όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Σαν συνέπεια του Θεωρήματος 4.4.1 έχουμε το παρακάτω:

**Πόρισμα 4.4.2.** *Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, $\|\cdot\|$ νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και $q \in [-1, 0]$. Τότε*

$$\mathbb{E}_\mu(\|x\|) \leqslant \frac{C}{1+q}\big(\mathbb{E}_\mu(\|x\|^q)\big)^{1/q},$$

*όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mathbb{E}_\mu(\|x\|) = 1$. Θέτουμε $p = -q$, άρα

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\mu(\|x\|^q) &= \mathbb{E}_\mu\left(\frac{1}{\|x\|^p}\right) = p\int_0^\infty t^{p-1}\mu\left(\left\{x \in \mathbb{R}^n : \frac{1}{\|x\|} \geqslant t\right\}\right) dt \\ &\leqslant 1 + C_1 p\int_1^\infty t^{p-2}dt = 1 + \frac{C_1 p}{1-p} \leqslant \frac{1 + C_1 p}{1-p} \leqslant \frac{e^{C_1 p}}{1-p},\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει ολοκλήρωση κατά μέρη και το Θεώρημα 4.4.1.

Επομένως, αφού το $(1-p)^{1-\frac{1}{p}}$ είναι φραγμένο για $p \in (0,1)$, έχουμε

$$\big(\mathbb{E}_\mu(\|x\|^q)\big)^{1/q} \geqslant \left(\frac{1-p}{e^{C_1 p}}\right)^{1/p} = e^{-C_1}(1-p)(1-p)^{\frac{1}{p}-1} \geqslant \frac{1-p}{C},$$

όπου $C := e^{C_1}\sup\{(1-p)^{\frac{1}{p}-1} : p \in (0,1)\}$. □

Αποδεικνύουμε τώρα το κεντρικό αποτέλεσμα.

**Θεώρημα 4.4.3** (Klartag)**.** *Έστω $K$ κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει $c > 0$ απόλυτη σταθερά ώστε*

$$L_K \leqslant cn^{1/4}.$$

*Απόδειξη.* Έστω $\varepsilon = n^{-1/2}$. Από το Θεώρημα 4.3.1, υπάρχει κεντραρισμένο κυρτό σώμα $T$ στον $\mathbb{R}^n$ και $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\frac{1}{1+n^{-1/2}}T \subseteq K + x \subseteq (1+n^{-1/2})T \tag{4.4.1}$$

και $L_T \leqslant c_1 n^{1/4}$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι $L_K \leqslant c_2 L_T$ για κατάλληλο $c_2 > 0$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $T$ είναι ισοτροπικό (αλλιώς εφαρμόζουμε γραμμικούς μετασχηματισμούς ή/και μετατοπίσεις στα $K, T$ και η (4.4.1) εξακολουθεί να ισχύει). Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.2.1 με $t = 4$, $\mu$ το μέτρο με πυκνότητα $L_T^n \mathbf{1}_{\frac{T}{L_T}}$, και παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(T \setminus c_3\sqrt{n}L_T B_2^n) \leqslant \exp(-4\sqrt{n}).$$

Θέτουμε $K_1 := \frac{1}{1+n^{-1/2}}(K+x)$, οπότε $K_1 \subseteq T$ λόγω της (4.4.1), που συνεπάγεται

$$\mathrm{vol}_n(K_1 \setminus c_3\sqrt{n}L_T B_2^n) \leqslant \exp(-4\sqrt{n}). \tag{4.4.2}$$

Απ' την άλλη,

$$\mathrm{vol}_n(K_1) = (1+n^{-1/2})^{-n}\mathrm{vol}_n(K) \geqslant (1+n^{-1/2})^{-2n}\mathrm{vol}_n(T) > \exp(-2\sqrt{n}) \tag{4.4.3}$$

λόγω της (4.4.1). Από τις (4.4.2), (4.4.3) βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(K_1\cap(c_3\sqrt{n}L_TB_2^n)) &= \mathrm{vol}_n(K_1)-\mathrm{vol}_n(K_1\setminus c_3\sqrt{n}L_TB_2^n)\\ &\geqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K_1)}{2}+\frac{\exp(-2\sqrt{n})}{2}-\exp(-4\sqrt{n})\geqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K_1)}{2},\end{aligned}$$

αφού $1/2\geqslant \exp(-2\sqrt{n})$. Η ανισότητα αυτή δείχνει ότι το $K_1$ έχει τουλάχιστον το μισό του όγκο μέσα στην Ευκλείδεια μπάλα κέντρου 0 και ακτίνας $c_3\sqrt{n}L_T$. Δηλαδή $\mathrm{med}_\mu(|\cdot|)\leqslant c_3\sqrt{n}L_T$, όπου $\mu$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο $K_1$. Το $K_1$ όμως είναι κυρτό, άρα το $\mu$ είναι και λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την προφανή επέκταση $\mu(\mathbb{R}^n\setminus K_1)=0$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 4.4.2, σε συνδυασμό με το Θεώρημα 3.2.14:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K_1)}\int_{K_1}|x|^2dx\right)^{1/2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}|x|^2d\mu(x)\right)^{1/2}\\ &\leqslant 2c_4\int_{\mathbb{R}^n}|x|d\mu(x)=2c_4\mathbb{E}_\mu(|x|)\\ &\leqslant 2c_4\cdot\frac{c_5}{1-\frac12}\left(\mathbb{E}_\mu(|x|^{-1/2})\right)^{-2}\\ &= \frac{c_6}{\left(\int_{K_1}|x|^{-1/2}d\mu(x)\right)^2}\\ &\leqslant \frac{c_6}{\left(\int_{K_1\cap c_3\sqrt{n}L_TB_2^n}|x|^{-1/2}d\mu(x)\right)^2}\\ &\leqslant \frac{c_6}{\left(\frac12\cdot\frac{1}{(c_3\sqrt{n}L_T)^{1/2}}\right)^2}=c_7\sqrt{n}L_T.\end{aligned}\tag{4.4.4}$$

Μπορούμε τώρα να βρούμε το ζητούμενο άνω φράγμα της $L_K$ από την $L_T$. Από την συζήτηση στο τέλος της Παραγράφου 3.1, και τις σχέσεις (4.4.3) και (4.4.4)

$$\begin{aligned}L_K\leqslant\left(\frac{1}{n(\mathrm{vol}_n(K_1))^{1+\frac{2}{n}}}\int_{K_1}|x|^2dx\right)^{1/2} &\leqslant\left(\frac{1}{n(\mathrm{vol}_n(K_1))^{2/n}}\right)^{1/2}c_7\sqrt{n}L_T=\frac{c_7L_T}{\mathrm{vol}_n^{1/n}(K_1)}\\ &\leqslant c_2L_T,\end{aligned}$$

για $c_2:=c_7\cdot e^2$. Η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

# Η προσέγγιση της εικασίας μέσω του όγκου των κεντροειδών σωμάτων

Εκμεταλλευόμενοι ξανά τις ιδιότητες του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace, οι B. Klartag και E. Milman παρουσίασαν το 2012 μια συσχέτιση της εικασίας του υπερεπιπέδου με την ακτίνα όγκου των $L_q$-κεντροειδών σωμάτων. Τα αποτελέσματά τους (ακριβέστερα, το κάτω φράγμα $\sqrt{p/n}$ που βρήκαν για την ακτίνα όγκου του $Z_p(\mu)$, $p \in [1, q_\sharp^H(\mu)]$, όπου $q_\sharp^H(\mu)$ κατάλληλα ορισμένη παράμετρος) παρέχουν, εκτός των άλλων, μία εναλλακτική απόδειξη του φράγματος $O(\sqrt[4]{n})$ για την ισοτροπική σταθερά. Λίγο αργότερα, η Β.-Ε. Βριτσίου, εισάγοντας μία διαφορετική παράμετρο $r_\sharp^H(\mu, A)$, $A \geqslant 1$, γενίκευσε κατά τι τα αποτελέσματα αυτά.

## 5.1 Γενικά περί λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace

Στην εισαγωγική αυτή παράγραφο θα αποδείξουμε κάποιες ιδιότητες του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace ενός μέτρου $\mu$. Θα ορίσουμε επίσης τα σύνολα στάθμης του μετασχηματισμού και θα αποδείξουμε βασικές τους ιδιότητες. Έστω $\mu$ μέτρο πιθανότητας στα Borel υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Υπενθυμίζουμε ότι, για $\xi \in \mathbb{R}^n$,

$$\Lambda_\mu(\xi) = \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} d\mu(x)\right).$$

**Πρόταση 5.1.1.** *Η $\Lambda_\mu : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι κυρτή συνάρτηση, και $\Lambda_\mu(0) = 0$. Αν επιπλέον το $\mu$ είναι κεντραρισμένο, τότε $\Lambda_\mu(\xi) \geqslant 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$.*

*Απόδειξη.* Η κυρτότητα της $\Lambda_\mu$ προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Hölder ενώ η $\Lambda_\mu(0) = 0$ είναι προφανής. Παρατηρούμε τέλος ότι

$$\Lambda_\mu(\xi) = \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} d\mu(x)\right) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \log\left(e^{\langle \xi, x\rangle}\right) d\mu(x) = 0$$

από την ανισότητα Jensen. □

Στο υπόλοιπο της παραγράφου, με $\mu$ θα συμβολίζεται πάντα ένα κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε επίσης με $\mathcal{A}(\mu)$ το υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ όπου $\Lambda_\mu$ πεπερασμένο: $\mathcal{A}(\mu) = \{\xi \in \mathbb{R}^n : 0 \leqslant \Lambda_\mu(\xi) < \infty\}$. Ακόμη, για $p > 0$ θα ονομάζουμε σύνολο στάθμης του μετασχηματισμού $\Lambda_\mu$ που αντιστοιχεί στο $p$ το σύνολο

$$\Lambda_p(\mu) = \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu(x) \leqslant p \text{ και } \Lambda_\mu(-x) \leqslant p\}.$$

**Πρόταση 5.1.2.** *Το $\mathcal{A}(\mu)$ είναι ανοιχτό στον $\mathbb{R}^n$, η δε $\Lambda_\mu$ είναι $C^\infty$ και γνησίως κυρτή σε αυτό.*

*Απόδειξη.* Χρειαζόμαστε το παρακάτω λήμμα, του οποίου την απόδειξη παραλείπουμε.

**Λήμμα 5.1.3.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση ώστε $0 < \int f < \infty$. Τότε υπάρχουν θετικές σταθερές $a = a(f)$ και $b = b(f)$ ώστε να ισχύει $f(x) \leqslant a \exp(-b|x|)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.*

Αποδεικνύουμε τώρα την Πρόταση 5.1.2 με την παραδοχή του Λήμματος 5.1.3. Εφαρμόζουμε το λήμμα με $f$ να είναι η πυκνότητα του $\mu$. Λαμβάνουμε

$$\exp(\Lambda_\mu(\xi)) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} f(x)\, dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} a e^{|\xi|\cdot|x|} e^{-b|x|} dx < +\infty$$

για $|\xi| < |b|$, άρα το $\mathcal{A}(\mu)$ περιέχει μπάλα κέντρου 0. Εφαρμόζουμε ξανά το λήμμα για την $f_{\xi_0}(x) := e^{\langle \xi_0, x\rangle} f(x)$ (παρατηρήστε ότι $0 < \int_{\mathbb{R}^n} f_{\xi_0}(x)dx < \infty$) και λαμβάνουμε $f_{\xi_0}(x) \leqslant a_{\xi_0} \exp(-b_{\xi_0}|x|)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Απ' την άλλη, για $\xi \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi - \xi_0, x\rangle} e^{\langle \xi_0, x\rangle} f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi - \xi_0, x\rangle} f_{\xi_0}(x) dx.$$

Συμπεραίνουμε ότι αν $|\xi - \xi_0| < b_{\xi_0}$ τότε $\Lambda_\mu(\xi) < \infty$. Επειδή η $f_{\xi_0}$ φθίνει εκθετικά, μπορούμε να διαφορίσουμε οσοδήποτε πολλές φορές, όθεν το $\mathcal{A}(\mu)$ είναι ανοιχτό και η $\Lambda_\mu$ είναι $C^\infty$ σε αυτό. Αν τώρα $\xi_1 \neq \xi_2 \in \mathcal{A}(\mu)$, οι συναρτήσεις $\exp(\langle \xi_1, x\rangle)$, $\exp(\langle \xi_2, x\rangle)$ δεν μπορούν να γραφτούν η μία σαν πολλαπλάσιο της άλλης, ούτε $\mu$-σχεδόν παντού. Άρα, από την Cauchy-Schwarz, η $\Lambda_\mu$ είναι γνησίως κυρτή στο $\mathcal{A}(\mu)$ (πρβλ. Πρόταση 5.1.1). □

**Πρόταση 5.1.4.** *Έστω $t \geqslant 0$ και $a \geqslant 1$. Τότε*

$$\frac{1}{a}\{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu(x) \leqslant at\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu(x) \leqslant t\} \subseteq \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu(x) \leqslant at\}.$$

*Απόδειξη.* Έστω $\xi \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $\Lambda_\mu(\xi) \leqslant at$. Τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} d\mu(x) = \exp(\Lambda_\mu(\xi)) \leqslant e^{at}.$$

Άρα η ανισότητα Jensen δίνει

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi/a, x\rangle} d\mu(x) \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} d\mu(x)\right)^{1/a} \leqslant e^t,$$

επομένως $\Lambda_\mu\left(\frac{\xi}{a}\right) \leqslant t$. Ο άλλος εγκλεισμός είναι προφανής. □

Αποδεικνύουμε δύο ακόμη βοηθητικές προτάσεις για το μετασχηματισμό Laplace και τα σύνολα στάθμης.

**Πρόταση 5.1.5.** *Για κάθε* $q, r > 0$

$$\nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu(x) \leqslant q\}\right) \subseteq (q+r)\{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu(x) \leqslant r\}^\circ.$$

*Απόδειξη.* Έστω $x \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\Lambda_\mu(2x) \leqslant q$. Για να δείξουμε ότι $\nabla\Lambda_\mu(x) \in (q+r)\{\Lambda_\mu \leqslant r\}^\circ$, αρκεί να δείξουμε ότι $\langle \nabla\Lambda_\mu(x), y\rangle \leqslant q + r$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\Lambda_\mu(y) \leqslant r$. Έστω ένα τέτοιο $y$. Τότε

$$\begin{aligned}\langle \nabla\Lambda_\mu(x), y\rangle &= 2\left\langle \nabla\Lambda_\mu(x), \frac{y}{2}\right\rangle \leqslant 2\left(\Lambda_\mu(x) + \left\langle \nabla\Lambda_\mu(x), \frac{y}{2}\right\rangle\right)\\ &\leqslant 2\Lambda_\mu\left(x + \frac{y}{2}\right) \leqslant \Lambda_\mu(2x) + \Lambda_\mu(y) \leqslant q + r,\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την Πρόταση 5.1.1. □

**Πόρισμα 5.1.6.** *Για κάθε* $p > 0$,

$$\nabla\Lambda_\mu\Big(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\Big) \subseteq 2p\Lambda_p(\mu)^\circ.$$

*Απόδειξη.* Εφαρμογή της προηγούμενης πρότασης με $q = r = p$:

$$\begin{aligned}\nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right) &= \nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}(\{\Lambda_\mu \leqslant p\} \cap (-\{\Lambda_\mu \leqslant p\}))\right) \subseteq \nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\{\Lambda_\mu \leqslant p\}\right)\\ &\subseteq 2p\{\Lambda_\mu \leqslant p\}^\circ.\end{aligned}$$

Ο άλλος εγκλεισμός όμως $\Lambda_p(\mu) \subseteq \{\Lambda_\mu \leqslant p\}$ δείχνει ότι $\{\Lambda_\mu \leqslant p\}^\circ \subseteq \Lambda_p(\mu)^\circ$. □

## 5.2 Το κάτω φράγμα για την ακτίνα όγκου των κεντροειδών σωμάτων

Σκοπός μας σε αυτήν και την επόμενη παράγραφο είναι να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα των Klartag-E. Milman για την ακτίνα όγκου των $L_p$-κεντροειδών σωμάτων. Το θεώρημα αυτό την συγκρίνει με την ορίζουσα του πίνακα συνδιακυμάνσεων ενός κατάλληλα ορισμένου μέτρου πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για να το αποδείξουμε, θα βρούμε κάτω φράγμα για την ακτίνα όγκου σε αυτήν την παράγραφο και άνω φράγμα στην επόμενη. Αιτία για τον χωρισμό της απόδειξης σε δύο παραγράφους αποτελεί η μεγάλη της έκταση.

Ξεκινάμε με κάποιους εισαγωγικούς συμβολισμούς.

**Ορισμός 5.2.1.** Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, $f_\mu$ η πυκνότητά του, και $\xi \in A(\mu) = \{\Lambda_\mu < \infty\}$. Βρίσκουμε $Z_\xi > 0$ κατάλληλο ώστε $Z_\xi^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} d\mu(x) = 1$. Θέτουμε $b_\xi := Z_\xi^{-1}\int_{\mathbb{R}^n} x e^{\langle \xi, x\rangle} d\mu(x)$. Τέλος, συμβολίζουμε με $\mu_\xi$ το μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $Z_\xi^{-1} f_\mu(x + b_\xi) e^{\langle \xi, x + b_\xi\rangle}$.

**Πρόταση 5.2.2.** *Με τον παραπάνω συμβολισμό*

$$b_\xi = \nabla\Lambda_\mu(\xi) \quad \textit{και} \quad \mathrm{Cov}(\mu_\xi) = \mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi).$$

*Απόδειξη.* Η $g_\xi(x) := e^{\langle \xi, x\rangle} f_\mu(x)$ είναι λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Όπως στην Πρόταση 4.3.3 (i) υπολογίζουμε

$$\nabla\Lambda_\mu(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} x dg_\xi(x) = \mathrm{bar}(g_\xi) = b_\xi.$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό, υπολογίζουμε όπως στην Πρόταση 4.3.3 (iii), αφού παρατηρήσουμε ότι η $g_\xi(x)$ φθίνει εκθετικά και επομένως μπορούμε να παραγωγίσουμε δύο φορές μέσα στο ολοκλήρωμα. □

Διατυπώνουμε τώρα το θεώρημα που μας απασχολεί και αποδεικνύουμε – για την ώρα – το κάτω φράγμα μόνο.

**Θεώρημα 5.2.3** (Klartag–E. Milman)**.** *Έστω $\mu$ κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $p \in [1,n]$. Τότε*

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu))^{1/n} \simeq \sqrt{\frac{p}{n}} \inf_{\xi\in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \big(\det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)\big)^{\frac{1}{2n}}.$$

*Απόδειξη του κάτω φράγματος* Για τους σκοπούς της απόδειξης ορίζουμε για $p>0$ την ποσότητα

$$\Psi_p := \left(\frac{1}{\mathrm{vol}_n\left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right)} \int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det \mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(x)\, dx\right)^{1/n}.$$

Αποδεικνύουμε πρώτα τρία λήμματα:

**Λήμμα 5.2.4.** *Με τις υποθέσεις του θεωρήματος για το $\mu$ και για κάθε $p>0$ ισχύει*

$$\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu))^{1/n} \leqslant c_1\sqrt{\frac{p}{n\Psi_p}},$$

*για $c_1>0$ απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιούμε τον ορισμό της $\Psi_p$, το Πόρισμα 5.1.6 και την αλλαγή μεταβλητής $x = \nabla\Lambda_\mu(y)$ και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(2p\Lambda_p(\mu)^\circ) &\geqslant \mathrm{vol}_n\left(\nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right)\right) = \int_{\nabla\Lambda_\mu\left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right)} \mathbf{1}\, dx = \int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(y)\, dy\\ &= \mathrm{vol}_n\left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right)\Psi_p^n,\end{aligned}$$

επομένως

$$(2p)^n\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu)^\circ) \geqslant \frac{1}{2^n}\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu))\Psi_p^n,$$

που δίνει

$$\frac{4p}{\Psi_p}\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu)^\circ)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu))^{1/n}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Blaschke-Santaló (Θεώρημα 2.1.2), αφού το $\Lambda_p(\mu)$ είναι συμμετρικό, λαμβάνουμε

$$\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu))^{1/n}\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu)^\circ)^{1/n} \leqslant \omega_n^{2/n} \leqslant \frac{c_2}{n},$$

άρα σε συνδυασμό με τα προηγούμενα,

$$\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu))^{1/n} \leqslant \frac{4p}{\Psi_p}\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu)^\circ)^{1/n} \leqslant \frac{4p}{\Psi_p}\frac{c_2}{n\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu))^{1/n}},$$

όθεν

$$\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu))^{1/n} \leqslant c_1\sqrt{\frac{p}{n\Psi_p}}$$

με $c_1 := \sqrt{4c_2}$. □

**Λήμμα 5.2.5** (Grünbaum)**.** *Για $\mu$ με τις υποθέσεις του θεωρήματος και $\vartheta \in S^{n-1}$,*

$$e^{-1} \leqslant \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta\rangle \geqslant 0\}) \leqslant 1 - e^{-1}.$$

*Απόδειξη.* Μπορούμε να προσεγγίσουμε το $\mu$ με μέτρα $\nu$ που έχουν την ιδιότητα ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $\nu(\{|\langle x, \vartheta\rangle| > M\}) = 0$ για το εν λόγω $\vartheta$, οπότε χωρίς βλάβη της γενικότητας θα υποθέσουμε ότι $\mu(\{|\langle x, \vartheta\rangle| > M\}) = 0$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to [0, 1]$, $g(t) = \mu(\{\langle x, \vartheta\rangle \leqslant t\})$. Προφανώς είναι αύξουσα, $g(-\infty, -M] = \{0\}$ και $g[M, \infty) = \{1\}$. Αφού το $\mu$ είναι κεντραρισμένο,

$$\int_{-\infty}^{\infty} t\frac{d\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \vartheta\rangle \leqslant t\})}{dt}\, dt = 0,$$

άρα

$$0 = \int_{-M}^{M} tg'(t)\, dt = \Big[tg(t)\Big]_{t=-M}^{M} - \int_{-M}^{M} g(t)dt,$$

δηλαδή

$$\int_{-M}^{M} g(t)dt = M. \tag{5.2.1}$$

Ταυτόχρονα, εφόσον το $\mu$ είναι λογαριθμικά κοίλο, η $g$ είναι λογαριθμικά κοίλη, άρα

$$\frac{\log(g(t)) - \log(g(0))}{t} \leqslant (\log g)'(0)$$

που δίνει

$$g(t) \leqslant g(0)\exp\left(\frac{g'(0)t}{g(0)}\right). \tag{5.2.2}$$

Αν επιλέξουμε το $M$ ώστε $M > \frac{g(0)}{g'(0)}$, έχουμε $g(t) \leqslant 1$ για $t > \frac{g(0)}{g'(0)}$.

Συνδυάζοντάς το αυτό με τις (5.2.1), (5.2.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} M = \int_{-M}^{M} g(t)dt &\leqslant \int_{-\infty}^{\frac{g(0)}{g'(0)}} g(0)\exp\left(\frac{g'(0)t}{g(0)}\right) dt + \int_{\frac{g(0)}{g'(0)}}^{M} \mathbf{1}\, dt \\ &= \left[\exp\left(\frac{g'(0)t}{g(0)}\right)\cdot\frac{g^2(0)}{g'(0)}\right]_{t=-\infty}^{\frac{g(0)}{g'(0)}} + M - \frac{g(0)}{g'(0)} \\ &= \frac{e\cdot g^2(0)}{g'(0)} + M - \frac{g(0)}{g'(0)}, \end{aligned}$$

αφού βέβαια $g'(0) > 0$ και $g(0) > 0$. Επομένως, $g(0) \geqslant e^{-1}$.

Εντελώς ανάλογα αποδεικνύεται και το άνω φράγμα για το $g(0)$, αντικαθιστώντας το $\vartheta$ με $-\vartheta$. □

Το τελευταίο λήμμα συσχετίζει το σύνολο στάθμης $\Lambda_p(\mu)$ με το $L_p$-κεντροειδές σώμα $Z_p(\mu)$.

**Λήμμα 5.2.6.** *Για $\mu$ με τις υποθέσεις του θεωρήματος και $p \geqslant 1$ ισχύει*

$$\Lambda_p(\mu) \simeq pZ_p(\mu)^\circ.$$

*Απόδειξη.* Δείχνουμε πρώτα ότι $\Lambda_p(\mu) \subseteq 2pZ_p(\mu)^\circ$. Έστω $\xi \in \Lambda_p(\mu)$. Τότε $\Lambda_\mu(\xi) \leqslant p$ και $\Lambda_\mu(-\xi) \leqslant p$, άρα

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} dx \leqslant e^p \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle -\xi, x\rangle} dx \leqslant e^p.$$

Επομένως,

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{|\langle \xi, x\rangle|} dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x\rangle} dx + \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle -\xi, x\rangle} dx \leqslant 2e^p$$

σύμφωνα με τα παραπάνω, αφού $e^{|s|} \leqslant e^s + e^{-s}$ για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Παρατηρήστε ότι για $t \geqslant 0$, $\left(\frac{et}{p}\right)^p \leqslant et \leqslant e^t$. Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα με $t := |\langle \xi, x\rangle|$ παίρνουμε

$$h_{Z_p(\mu)}(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x\rangle|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \frac{p}{e}\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{|\langle \xi, x\rangle|} d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant 2p,$$

επομένως $\frac{\xi}{2p} \in Z_p(\mu)$, και αφού $\xi$ τυχόν, $R\left(\frac{Z_p(\mu)}{2p}\right) \leqslant 1$, που δίνει

$$\frac{\Lambda_p(\mu)}{2p} \subseteq \frac{Z_p(\mu)}{2p} \subseteq B_2^n \subseteq Z_p(\mu)^\circ.$$

Δείχνουμε τώρα ότι $pZ_p(\mu)^\circ \subseteq c\Lambda_p(\mu)$ για κατάλληλη θετική σταθερά $c$.

Έστω $\xi \in \mathbb{R}^n$ ώστε $h_{Z_p(\mu)}(\xi) \leqslant p$, δηλαδή $\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x\rangle|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant p$. Έστω ακόμη $\varphi : \mathbb{R} \to [0, \infty)$, $\varphi(t) - \mu\left(\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \xi\rangle \geqslant t\}\right)$. Τότε η $\varphi$ είναι λογαριθμικά κοίλη. Πράγματι, αν σταθεροποιήσουμε $\lambda \in [0,1]$, $u, t \in \mathbb{R}$, και θέσουμε $h(x) = \mathbf{1}_{\langle x,\xi\rangle \geqslant (1-\lambda)t+\lambda u}$, $g(x) = \mathbf{1}_{\langle x,\xi\rangle \geqslant t}$, $f(x) = \mathbf{1}_{\langle x,\xi\rangle \geqslant u}$, τότε αν $h(\lambda x + (1-\lambda)y) = 0$, θα ισχύει $\langle \lambda x + (1-\lambda)y, \xi\rangle < (1-\lambda)t + \lambda u$ άρα κατ' ανάγκην θα έχουμε $\langle x, \xi\rangle < t$ ή $\langle y, \xi\rangle < u$, οπότε $g(x) = 0$ ή $f(x) = 0$. Συνάγουμε ότι

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda g(x)^{1-\lambda},$$

άρα απ' την ανισότητα Prékopa-Leindler

$$\mu\left(\{\langle x, \xi\} \geqslant (1-\lambda)t + \lambda u\}\right) \geqslant \mu\left(\{\langle x, \xi\} \geqslant t\}\right)^{1-\lambda} \mu\left(\{\langle x, \xi\rangle \geqslant u\}\right)^\lambda$$

που αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας.

Απ' την άλλη το Λήμμα 5.2.5 δίνει

$$e^{-1} \leqslant \varphi(0) \leqslant 1 - e^{-1} \tag{5.2.3}$$

Επιπλέον,

$$\varphi(3ep) = \mu\{\langle x, \xi\rangle \geqslant 3ep\} \leqslant \mu\{|\langle x, \xi|^p \geqslant (3ep)^p\} \leqslant \frac{\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \xi\rangle|^p \, d\mu(x)}{(3ep)^p} \leqslant (3e)^{-p},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα Markov και την υπόθεση για το $\xi$.

Έστω τώρα $X$ το τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ που έχει κατανομή το $\mu$. Χρησιμοποιώντας την τελευταία ανισότητα, το γεγονός ότι η $\varphi$ είναι λογαριθμικά κοίλη και την (5.2.3) βρίσκουμε (για $t \geqslant 3ep$):

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(\langle X,\xi\rangle \geqslant t) = \varphi(t) &\leqslant \varphi(0)^{1-\frac{t}{3ep}}\varphi(3ep)^{\frac{t}{3ep}} \leqslant (1-e^{-1})\frac{(3e)^{-\frac{t}{3e}}}{e^{-\frac{t}{3ep}}} \leqslant (1-e^{-1})3^{-\frac{t}{3e}}\\ &\leqslant c_0\exp(-t/3e),\end{aligned}$$

όπου $c_0 := 1-e^{-1}$. Παρομοίως

$$\mathbb{P}(\langle X,\xi\rangle \leqslant -t) \leqslant c\exp\left(-\frac{t}{3e}\right)$$

άρα

$$\mathbb{P}(|\langle x,\xi\rangle \geqslant t) \leqslant c_1\exp\left(-\frac{t}{3e}\right),$$

όπου $c_1 = 2c_0$. Υπολογίζουμε επομένως

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\mathrm{exp}\left(\frac{|\langle X,\xi\rangle|}{6e}\right) &= \frac{1}{6e}\int_0^\infty \exp\left(\frac{t}{6e}\right)\mathbb{P}(|\langle X,\xi\rangle| \geqslant t)\,dt\\ &\leqslant \frac{1}{6e}\int_0^{3ep}\exp\left(\frac{t}{6e}\right)\,dt + c_1\int_{3ep}^\infty \exp\left(-\frac{t}{6e}\right)\,dt\\ &= \exp\left(\frac{p}{2}\right) - 1 + c_1\,6e\exp\left(-\frac{p}{2}\right) \leqslant \exp\left(\frac{p}{2}\right) - 1 + 6c_1\sqrt{e}\\ &\leqslant \exp(c_2\,p)\end{aligned}$$

για κατάλληλο $c_2 \geqslant \frac{1}{2}$.

Άρα,

$$\max\left\{\Lambda_\mu\left(\frac{7}{6e}\right), \Lambda_\mu\left(\frac{-7}{6e}\right)\right\} \leqslant \log\mathbb{E}\mathrm{exp}\left(\frac{|\langle x,\xi\rangle|}{6e}\right) \leqslant \log\exp(c_2\,p) = c_2\,p$$

Από την Πρόταση 5.1.4,

$$\max\left\{\Lambda_\mu\left(\frac{7}{6c_2e}\right), \Lambda_\mu\left(\frac{-7}{6c_2e}\right)\right\} \leqslant p.$$

Άρα (θυμηθείτε την υπόθεση $h_{Z_p(\mu)}(\xi) \leqslant p$) $pZ_p(\mu)^\circ \subseteq c\Lambda_p(\mu)$. □

Αποδεικνύουμε τώρα το κάτω φράγμα για το $\mathrm{vol}_n(z_p(\mu))^{1/n}$. Από τα Λήμματα 5.2.4 και 5.2.6 έχουμε

$$p\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu)^\circ)^{1/n} = \mathrm{vol}_n(pZ_p(\mu)^\circ)^{1/n} \leqslant c_3\mathrm{vol}_n(\Lambda_p(\mu))^{1/n} \leqslant c_4\sqrt{\frac{p}{n\Psi_p}}$$

για κατάλληλο $c_3 > 0$ και $c_4 := c_1 \cdot c_3$. Άρα, από την ανισότητα Bourgain-V. Milman (Θεώρημα 2.1.3),

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu))^{1/n} \geqslant \frac{c_5}{n\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu)^\circ)^{1/n}} \geqslant \frac{c_5 p}{n}c_4\sqrt{\frac{p}{n\Psi_p}}^{-1} = c_6\sqrt{\frac{p\Psi_p}{n}},$$

όπου $c_5 > 0$ κατάλληλη σταθερά και $c_6 := c_4 \cdot c_5$. Άρα,

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu))^{1/n} &\geqslant c_6\sqrt{\frac{p}{n}}\left(\frac{1}{\mathrm{vol}_n\left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)\right)}\int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)}\det\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi)\,d\xi\right)^{\frac{1}{2n}}\\ &= c_6\sqrt{\frac{p}{n}}\left(\mathbb{E}_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)}\det\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi)\right)^{\frac{1}{2n}}\\ &\geqslant c_6\sqrt{\frac{p}{n}}\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)}[\det\mathrm{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi)]^{\frac{1}{2n}}\\ &= c_6\sqrt{\frac{p}{n}}\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)}[\det\mathrm{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}},\end{aligned}$$

λόγω και της Πρότασης 5.2.2. □

## 5.3 Το άνω φράγμα για την ακτίνα όγκου των κεντροειδών σωμάτων

Θα ολοκληρώσουμε στην παράγραφο αυτή την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.3 αποδεικνύοντας το άνω φράγμα για την ακτίνα όγκου των $L_p$-κεντροειδών σωμάτων.

Ξεκινάμε με την $L_q$-αφφινική ισοπεριμετρική ανισότητα των Lutwak, Yang και Zhang. Όταν πρωτοεισήχθησαν τα $L_q$-κεντροειδή σώματα από τους Lutwak και Zhang, διατυπώθηκαν με μία ελαφρώς διαφορετική κανονικοποίηση: Αν $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $q \in [1,\infty)$ τότε ορίζουμε το σώμα $\Gamma_q(K)$ με

$$h_{\Gamma_q(K)}(y) = \left(\frac{1}{c_{n,q}\mathrm{vol}_n(K)}\int_K |\langle x,y\rangle|^q dx\right)^{1/q},$$

όπου $c_{n,q} = \frac{\omega_{n+q}}{\omega_2\omega_n\omega_{q-1}}$. Η επιλογή αυτή δίνει $\Gamma_q(B_2^n) = B_2^n$ για κάθε $q$.

Οι Lutwak, Yang και Zhang απέδειξαν ότι για κάθε κυρτό σώμα $K$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $q \geqslant 1$ ισχύει $\mathrm{vol}_n(\Gamma_q(K)) \geqslant 1$. Με την κανονικοποίηση που χρησιμοποιούμε για μέτρα, αυτήν δηλαδή των $Z_q(\mu)$, η ανισότητα αυτή γράφεται ως εξής:

**Θεώρημα 5.3.1** (Lutwak-Yang-Zhang). *Υπάρχει θετική σταθερά $c_1$ ώστε για κάθε κενταρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu$ στον $\mathbb{R}^n$ και $q \in [1,n]$ να ισχύει*

$$\mathrm{vol}_n(Z_q(\mu))^{1/n} \geqslant c_1\sqrt{\frac{q}{n}}\|\mu\|_\infty^{-1/n}.$$

Δεδομένου ότι $\mathrm{vol}_n(Z_2(\mu))^{1/n} \simeq 1/\sqrt{n}$, από το Θεώρημα 4.1.13 προκύπτει άμεσα ότι

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu))^{1/n} \leqslant c\sqrt{\frac{p}{n}} \leqslant c_2\sqrt{p}\,\mathrm{vol}_n(Z_2(\mu))^{1/n} \tag{5.3.1}$$

για κάθε $2 \leqslant p \leqslant n$, όπου $c_2$ θετική απόλυτη σταθερά.

Το άνω φράγμα του Θεωρήματος 5.2.3 θα ακολουθήσει σαν συνέπεια του παρακάτω λήμματος:

**Λήμμα 5.3.2.** *Έστω $\mu$ κενταρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, $p > 0$, $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$ και $\mu_\xi$ κατά τον Ορισμό 5.2.1. Τότε*

$$Z_p(\mu_\xi) \simeq Z_p(\mu).$$

*Απόδειξη του άνω φράγματος με την παραδοχή του Λήμματος* 5.3.2. Παρατηρούμε ότι, σύμφωνα με την (5.3.1),

$$\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \mathrm{vol}_n(Z_p(\mu_\xi))^{1/n} \leqslant c_2\sqrt{p}\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \mathrm{vol}_n(Z_2(\mu_\xi))^{1/n},$$

άρα από το Λήμμα 5.3.2,

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu))^{1/n} \leqslant c_2\sqrt{p}\inf_{\xi\in\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \mathrm{vol}_n(Z_2(\mu_\xi))^{1/n}.$$

Το ζητούμενο τώρα έπεται από την παρατήρηση ότι

$$\mathrm{vol}_n(Z_2(\mu_\xi))^{1/n} \simeq \frac{[\det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)]^{1/2n}}{\sqrt{n}}.$$

□

*Απόδειξη του Λήμματος* 5.3.2. Με βάση τον Ορισμό 5.2.1,

$$\Lambda_\mu(\xi) = \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle\xi,x\rangle}d\mu(x)\right) = \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle\xi,x\rangle}f_\mu(x)dx\right) = \log(Z_\xi).$$

Άρα, για $z\in\mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\Lambda_{\mu_\xi}(z) &= \log\left(\int_{\mathbb{R}^n}\frac{1}{Z_\xi}e^{\langle z,y\rangle}f_\xi(y)dy\right)\\
&= \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle z,y\rangle}e^{\langle\xi,y+b_\xi\rangle}f_\mu(y+b_\xi)dy\right) - \log Z_\xi\\
&= \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle z,b_\xi\rangle}e^{\langle z,y+b_\xi\rangle}e^{\langle\xi,y+b_\xi\rangle}f_\mu(y+b_\xi)dy\right) - \Lambda_\mu(\xi)\\
&= -\langle z,b_\xi\rangle + \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle z+\xi,y+b_\xi\rangle}f_\mu(y+b_\xi)dy\right) - \Lambda_\mu(\xi)\\
&= -\langle z,b_\xi\rangle + \Lambda_\mu(z+\xi) - \Lambda_\mu(\xi).
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας το γεγονός αυτό με την Πρόταση 5.2.2 βρίσκουμε

$$\Lambda_{\mu_\xi}(z) = -\langle z,\nabla\Lambda_\mu(\xi)\rangle + \Lambda_\mu(z+\xi) - \Lambda_\mu(\xi). \tag{5.3.2}$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι

$$\Lambda_p(\mu_\xi)\simeq\Lambda_p(\mu). \tag{5.3.3}$$

Για τον ένα εγκλεισμό, έστω $z\in\Lambda_p(\mu)$. Προφανώς $\Lambda_\mu(2\xi)\leqslant p$ λόγω της υπόθεσης για το $\xi$ και $\Lambda_\mu(-z)\leqslant p$ λόγω της υπόθεσης για το $z$. Άρα, εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.1.5 βρίσκουμε (για $q=r=p$)

$$\nabla\Lambda_\mu(\xi)\in 2p\{x\in\mathbb{R}^n:\Lambda_\mu(x)\leqslant p\}^\circ,$$

όθεν $-\langle\nabla\Lambda_\mu(\xi),z\rangle\leqslant 2p$. Συνάγεται ότι

$$\Lambda_\mu\left(\frac{z}{2}+\xi\right) - \Lambda_\mu(\xi) - \left\langle\frac{z}{2},\nabla\Lambda_\mu(\xi)\right\rangle \leqslant \Lambda_\mu\left(\frac{z}{2}+\xi\right)+p\leqslant\frac{\Lambda_\mu(z)+\Lambda_\mu(2\xi)}{2}+p\leqslant 2p$$

χρησιμοποιώντας και την Πρόταση 5.1.1. Σε συνδυασμό με την (5.3.2) εφαρμοσμένη με $\frac{z}{2}$ αντί για $z$ βρίσκουμε $\Lambda_{\mu_\xi}\left(\frac{z}{2}\right) \leqslant 2p$. Η Πρόταση 5.1.4 τώρα δίνει $\Lambda_{\mu_\xi}\left(\frac{z}{4}\right) \leqslant p$. Εντελώς ανάλογα βρίσκουμε $\Lambda_{\mu_\xi}\left(-\frac{z}{4}\right) \leqslant p$, άρα τελικά $z \in 4\Lambda_p(\mu_\xi)$, όθεν $\Lambda_p(\mu) \subseteq 4\Lambda_p(\mu_\xi)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, έστω $z \in \Lambda_p(\mu_\xi)$. Εφαρμόζουμε την (5.3.2) για $z = -2\xi$ και βρίσκουμε

$$\Lambda_{\mu_\xi}(-2\xi) = 2\langle \xi, \nabla\Lambda_\mu(\xi)\rangle + \Lambda_\mu(-\xi) - \Lambda_\mu(\xi). \tag{5.3.4}$$

Ταυτόχρονα,

$$\Lambda_\mu(-\xi) \leqslant \frac{\Lambda_\mu(0) + \Lambda_\mu(-2\xi)}{2} \leqslant \frac{0+p}{2} = \frac{p}{2}$$

λόγω της υπόθεσης για το $\xi$ και της Πρότασης 5.1.1.

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 5.1.5 για $q := p$ και $r := \frac{p}{2}$, αφού παρατηρήσουμε ότι $\xi \in \frac{1}{2}\{\Lambda_\mu \leqslant p\}$, και βρίσκουμε $\nabla\Lambda_\mu(\xi) \in \frac{3p}{2}\left\{\Lambda_\mu \leqslant \frac{p}{2}\right\}^\circ$, όθεν

$$\langle \nabla\Lambda_\mu(\xi), \xi\rangle \leqslant \frac{3p}{2}.$$

Συνδυάζοντάς τα αυτά με την (5.3.4) βρίσκουμε $\Lambda_{\mu_\xi}(-2\xi) \leqslant \frac{7p}{2}$ αφού $\Lambda_\mu(\xi) \geqslant 0$.

Τώρα η (5.3.2) εφαρμόζεται για το μέτρο $(\mu_\xi)_{-\xi} = \mu$ και το $\frac{z}{2}$ αντί για $z$ και δίνει

$$\begin{aligned}
\Lambda_\mu\left(\frac{z}{2}\right) &= -\left\langle \frac{z}{2}, \nabla\Lambda_{\mu_\xi}(-\xi)\right\rangle + \Lambda_{\mu_\xi}\left(\frac{z}{2} - \xi\right) - \Lambda_{\mu_\xi}(-\xi) \\
&\leqslant \left\langle -\frac{z}{2}, \nabla\Lambda_{\mu_\xi}(-\xi)\right\rangle + \frac{1}{2}(\Lambda_{\mu_\xi}(z) + \Lambda_{\mu_\xi}(-2\xi)) - \Lambda_{\mu_\xi}(-\xi) \\
&\leqslant \left\langle -\frac{z}{2}, \nabla\Lambda_{\mu_\xi}(-\xi)\right\rangle + \frac{1}{2}\left(p + \frac{7p}{2}\right) \\
&= \left\langle -\frac{z}{2}, \nabla\Lambda_{\mu_\xi}(-\xi)\right\rangle + \frac{9p}{4}.
\end{aligned}$$

Η Πρόταση 5.1.5 εφαρμόζεται ξανά για $q := \frac{7p}{2}$, $r := \frac{p}{2}$ και $\mu := \mu_\xi$ και δίνει $\left\langle -\frac{z}{2}, \nabla\Lambda_{\mu_\xi}(-\xi)\right\rangle \leqslant \frac{9p}{4}$, άρα τελικά $\Lambda_\mu\left(\frac{z}{2}\right) \leqslant \frac{9p}{2}$. Από την Πρόταση 5.1.4, για $a := \frac{9}{2}$, $t := p$ και $x := \frac{z}{9}$ λαμβάνουμε $\Lambda_\mu\left(\frac{z}{9}\right) \leqslant p$. Εντελώς ανάλογα, $\Lambda_\mu\left(-\frac{z}{9}\right) \leqslant p$. Τελικά $z \in 9\Lambda_p(\mu)$, όθεν $\Lambda_p(\mu_\xi) \subseteq 9\Lambda_p(\mu)$.

Έχουμε δείξει ότι $\Lambda_p(\mu_\xi) \simeq \Lambda_p(\mu)$. Το ζητούμενο τώρα έπεται από το Λήμμα 5.2.6. Εδώ ολοκληρώνεται και η απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.3. □

## 5.4 Οι παράμετροι των Klartag-E. Milman και Βριτσίου

Κύριος στόχος μας στην παράγραφο αυτή είναι να βρούμε ένα κάτω φράγμα για την ακτίνα όγκου των $L_p$-κεντροειδών σωμάτων του $\mathbb{R}^n$ το οποίο να είναι συγκεκριμένης τάξης ως προς $n$. Το φράγμα αυτό θα ισχύει για $p \in [1, \lambda]$ όπου $\lambda$ κατάλληλη παράμετρος η οποία επιθυμούμε βέβαια να είναι όσο το δυνατόν μεγαλύτερη. Θυμηθείτε ότι το Θεώρημα 5.2.3 ενέπλεκε το μέτρο $\mu_\xi$, $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, από το οποίο φυσικά θέλουμε να απαλλαγούμε. Θα περιγράψουμε λοιπόν κατ' αρχάς πολύ συνοπτικά το έργο των Klartag και E. Milman στην κατεύθυνση αυτή, και κατόπιν θα εστιάσουμε στο έργο της Βριτσίου το οποίο είναι μεταγενέστερο και γενικεύει το πρώτο.

Οι Klartag-E. Milman όρισαν λοιπόν, για $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τη συνάρτηση $\Delta_\mu : [1,\infty) \to \mathbb{R}$, $\Delta_\mu(q) = \mathrm{diam}(Z_q(\mu))$. Για $c > 0$ όρισαν

$$q_{\#,c}(\mu) := \Delta_\mu^{-1}\left(c\sqrt{n}[\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}\right) = \sup\left\{q \geqslant 1 : \mathrm{diam}(Z_q(\mu)) \leqslant c\sqrt{n}[\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}\right\}.$$

με τη σύμβαση $q_{\#,c}(\mu) = 1$ αν $\mathrm{diam}(Z_1(\mu)) \geqslant c\sqrt{n}[\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}$. Απέδειξαν την ύπαρξη σταθεράς $c_0$ ώστε

$$q_*(\mu) \geqslant q_\#(\mu) := q_{\#,c_0}(\mu) \geqslant q_{*,c_0}(\mu) := \sup\{q \geqslant 1 : k_*(Z_q(\mu)) \geqslant c_0 q\},$$

όπου $q_*(\mu) = \sup\{q \geqslant 1 : k_*(Z_q(\mu)) \geqslant q\}$ είναι μία παράμετρος που εισήχθη από τον Παούρη και έχει την ιδιότητα ότι αν το $\mu$ είναι ισοτροπικό $\psi_\alpha$-μέτρο με σταθερά $b_\alpha$ τότε

$$q_*(\mu) \geqslant \frac{Cn^{\alpha/2}}{b_\alpha^\alpha}. \tag{5.4.1}$$

Όρισαν έπειτα

$$q_\#^H(\mu) := n \inf_{1\leqslant k\leqslant n} \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{q_\#(\pi_E(\mu))}{k},$$

και απέδειξαν ότι εργαζόμενοι με την τελευταία αυτή παράμετρο μπορούμε να συναγάγουμε το κάτω φράγμα

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu))^{1/n} \geqslant c_1\sqrt{\frac{p}{n}}$$

για κάθε $p \leqslant q_\#^H(\mu)$. (Ο συλλογισμός τους είναι παρόμοιος με αυτόν που χρησιμοποίησε η Βριτσίου με τη δική της παράμετρο και στον οποίο θα εστιάσουμε παρακάτω). Η (5.4.1) δίνει ότι αν το $\mu$ είναι $\psi_\alpha$-μέτρο με σταθερά $b_\alpha$ για κάποιο $\alpha \in [1,2]$, τότε $q_\#(\mu) \geqslant \frac{c_2}{b_\alpha^\alpha} n^{\alpha/2}$, η δε ανισότητα αυτή μεταφέρεται και στα περιθώρια του $\mu$ (κάθε περιθώριο του $\mu$ είναι επίσης $\psi_\alpha$-μέτρο με σταθερά $b_\alpha$), άρα $q_\#^H(\mu) \geqslant \frac{c_2'}{b_\alpha^\alpha} n^{\alpha/2}$.

Εκμεταλλευόμενοι την ανισότητα αυτή, απέδειξαν το παρακάτω:

> «Αν $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ που επιπλέον είναι $\psi_\alpha$-μέτρο με σταθερά $b_\alpha$ για κάποιο $\alpha \in [1,2]$, τότε $L_\mu \leqslant C b_\alpha^{\alpha/2} n^{\frac{2-\alpha}{4}}$, όπου $C > 0$ σταθερά.»

Όμως κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας είναι $\psi_1$-μέτρο με κάποια απόλυτη σταθερά $b_1$, οπότε λαμβάνουμε μια εναλλακτική απόδειξη ότι $L_\mu \leqslant cn^{1/4}$. Για περισσότερα βλέπε: B. Klartag και E. Milman, "Centroid bodies and the Logarithmic Laplace Transform – A unified approach", J. Funct. Anal. 262, σελ. 10-34.

Θα ορίσουμε τώρα την παράμετρο $r_\#^H(\mu, A)$ της Βριτσίου και θα δείξουμε ότι για $p \in [1, r_\#^H(\mu, A)]$ μπορούμε να βρούμε κάτω φράγμα για τον $\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu))^{1/n}$ αντίστοιχο με αυτό των Klartag-E. Milman. Επειδή μάλιστα $q_\#(\mu) \leqslant r_\#^H(\mu, A)$ και $q_*(\mu) \leqslant r_\#^H(\mu, A)$ για κατάλληλη επιλογή της σταθεράς $A \geqslant 1$, συνάγεται ότι η $r_\#^H(\mu, A)$ κυριαρχεί την $q_\#^H(\mu)$, γι' αυτό και το αποτέλεσμα της Βριτσίου είναι γενικότερο.

Ξεκινάμε με τον ορισμό της παραμέτρου της Βριτσίου.

**Ορισμός 5.4.1.** Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και $A \geqslant 1$. Ορίζουμε

$$r_\#(\mu, A) := \max\{k \in [1, n-1] : \exists E \in G_{n,k} \text{ ώστε } L_{\pi_E(\mu)} \leqslant A\}$$

αν $n > 1$ και $r_\#(\mu, A) = 1$ αν $n = 1$.

Ορίζουμε επιπλέον μία κληρονομική εκδοχή της ως άνω παραμέτρου.

**Ορισμός 5.4.2.** Έστωσαν $\mu, A$ όπως πριν. Ορίζουμε

$$r_{\#}^{H}(\mu,A) := n \inf_{k\in[1,n]} \inf_{E\in G_{n,k}} \frac{r_{\#}(\pi_E(\mu),A)}{k}.$$

Η $r_{\#}^{H}(\mu,A)$ συνδέεται με τη συμπεριφορά όλων των περιθωρίων του $\mu$ (δηλ. ως προς κάθε υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$) σε σχέση με την παράμετρο $r_{\#}(\mu,A)$.

Θα αποδείξουμε τώρα το παρακάτω θεώρημα, που είναι και το κεντρικό αποτέλεσμα της παραγράφου. Στη μορφή αυτή απεδείχθη από την Βριτσίου, ωστόσο ο παραπλήσιος αρχικός συλλογισμός είναι των Klartag-E. Milman.

**Θεώρημα 5.4.3** (Klartag–E. Milman, Βριτσίου)**.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, $A \geqslant 1$ και $p \in [1, r_{\#}^{H}(\mu,A)]$. Τότε υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ ώστε*

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu))^{1/n} \geqslant \frac{c}{A}\sqrt{\frac{p}{n}}.$$

*Απόδειξη.* Συμβολίζουμε με $\lambda_1^{\xi}, \lambda_2^{\xi}, \ldots, \lambda_n^{\xi}$ τις (πραγματικές) ιδιοτιμές του συμμετρικού και θετικά ορισμένου πίνακα $\mathrm{Cov}(\mu_\xi)$, $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$ σε αύξουσα διάταξη. Συμβολίζουμε επίσης $E_k^{\xi}$ τον $k$-διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ που παράγεται από τα ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχούν στις $k$ μικρότερες ιδιοτιμές του $\mathrm{Cov}(\mu_\xi)$. Αρκεί τότε να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $c_1>0$ ώστε, για κάθε $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$ και $k\in[1,n]$,

$$\sqrt{\lambda_k^{\xi}} \geqslant \frac{c_1 k}{An}. \tag{5.4.2}$$

Πράγματι, αν εξασφαλίσουμε την (5.4.2) για κάθε $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, τότε

$$[\det \mathrm{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}} = \Big(\prod_{k=1}^{n}\sqrt{\lambda_k^{\xi}}\Big)^{1/n} \geqslant \Big(\prod_{k=1}^{n}\frac{c_1 k}{An}\Big)^{1/n} = \frac{c_1 (n!)^{1/n}}{An},$$

άρα από το Θεώρημα 5.2.3

$$\mathrm{vol}_n(Z_p(\mu))^{1/n} \geqslant \sqrt{\frac{p}{n}}\,\frac{c_1(n!)^{1/n}}{An} \geqslant \sqrt{\frac{p}{n}}\cdot\frac{c}{A},$$

όπου $c>0$ κατάλληλη σταθερά. □

Η (5.4.2) θα προκύψει μέσα από κάποια λήμματα. Πάντα τα $\mu, A, p$ είναι με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 5.4.3 και τα $\xi, \lambda_k^{\xi}, E_k^{\xi}$ όπως στην αρχή της απόδειξής του.

**Λήμμα 5.4.4.** *Έστωσαν $s,k\in\mathbb{Z}$ ώστε $1\leqslant s\leqslant k\leqslant n$. Τότε,*

$$\sqrt{\lambda_k^{\xi}} \geqslant c_2 \sup_{F\in G_{E_k^{\xi},s}} \mathrm{vol}_s(Z_s(\pi_F(\mu_\xi)))^{1/s},$$

*όπου $c_2>0$ απόλυτη σταθερά και $G_{E_k^{\xi},s}$ το σύνολο όλων των υποχώρων του $E_k^{\xi}$ διάστασης $s$.*

**Λήμμα 5.4.5.** *Με τον συμβολισμό* $s_k^\xi := r_\#(\pi_{E_k^\xi}(\mu), A)$*, υπάρχει* $c_3 > 0$ *απόλυτη σταθερά ώστε*

$$\sup_{F\in G_{E_k^\xi, s_k^\xi}} \mathrm{vol}_{s_k^\xi}(Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu)))^{1/s_k^\xi} \geqslant \frac{c_3}{A}.$$

**Λήμμα 5.4.6.** *Υπάρχει* $c_4 > 0$ *απόλυτη σταθερά ώστε για κάθε* $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$*,* $k \in [1,n]$ *και* $F \in G_{E_k^\xi, s_k^\xi}$ *να ισχύει*

$$Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu_\xi)) \supseteq c_4 \frac{k}{n} Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu)).$$

*Απόδειξη της* (5.4.2) *με την παραδοχή των λημμάτων.* Για $k \in [1,n]$,

$$\begin{aligned}\sqrt{\lambda_k^\xi} &\geqslant c_2 \sup_{F\in G_{E_k^\xi, s_k^\xi}} \mathrm{vol}_{s_k^\xi}(Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu_\xi)))^{1/s_k^\xi} \geqslant c_2 \cdot c_4\, \frac{k}{n} \sup_{F\in G_{E_K^\xi, s_K^\xi}} \mathrm{vol}_{s_k^\xi}(Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu)))^{1/s_k^\xi}\\ &\geqslant \frac{c_2c_3c_4k}{An}.\end{aligned}$$

□

*Απόδειξη του Λήμματος* 5.4.4. Παρατηρήστε κατ' αρχάς ότι αν $F$ γραμμικός υπόχωρος του $E_k^\xi$ και $\vartheta \in S_F \subseteq S_{E_k^\xi}$, τότε

$$\int_F \langle z,\vartheta\rangle^2 d\pi_F(\mu_\xi)(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle z,\vartheta\rangle^2 d\mu_\xi(z) = \int_{E_k^\xi} \langle z,\vartheta\rangle^2 d\pi_{E_k^\xi}(\mu_\xi)(z).$$

Όμως η $\lambda_k^\xi$ είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα $\mathrm{Cov}(\pi_{E_k^\xi}(\mu_\xi))$. Άρα,

$$\lambda_k^\xi = \max_{\vartheta\in S_{E_k^\xi}} \int_{E_k^\xi} \langle z,\vartheta\rangle^2 d\pi_{E_k^\xi}(\mu_\xi)(z) = \sup_{F\in G_{E_k^\xi, s}} \max_{\vartheta\in S_F} \int_F \langle z,\vartheta\rangle^2\, d\pi_F(\mu_\xi)(z). \tag{5.4.3}$$

Παράλληλα, για κάθε $F$ γραμμικό υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $s$, το $\pi_F(\mu_\xi)$ είναι κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας (ιδιότητα που διατηρεί από το $\mu_\xi$). Άρα, από το Θεώρημα 4.1.7 και το Λήμμα 3.1.5,

$$\mathrm{vol}_s(Z_s(\pi_F(\mu_\xi)))^{1/s} \simeq \|f_{\pi_F(\mu_\xi)}\|_\infty^{-1/s} = \frac{[\det\, \mathrm{Cov}(\pi_F(\mu_\xi))]^{\frac{1}{2s}}}{L_{\pi_F(\mu_\xi)}},$$

όπου $f_{\pi_F(\mu_\xi)}$ η πυκνότητα του $\pi_F(\mu_\xi)$.

Τώρα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για κάθε ισοτροπικό μέτρο $\nu$ στον $\mathbb{R}^s$ ισχύει $L_\nu \geqslant c_5$ όπου $c_5 > 0$ απόλυτη σταθερά. Συνεπώς,

$$\mathrm{vol}_s(Z_s(\pi_F(\mu_\xi)))^{1/s} \leqslant c_5[\det\, \mathrm{Cov}(\pi_F(\mu_\xi))]^{\frac{1}{2s}} \leqslant c_5 \max_{\vartheta\in S_F} \sqrt{\int_F \langle z,\vartheta\rangle^2 d\pi_F(\mu_\xi)(z)}$$

για κάθε $F \in G_{E_k^\xi, s}$. Μαζί με την (5.4.3) παίρνουμε

$$\sqrt{\lambda_k^\xi} \geqslant c_2 \sup_{F\in G_{E_k^\xi, s}} \mathrm{vol}_s(Z_s(\pi_F(\mu_\xi)))^{1/s}.$$

□

*Απόδειξη του Λήμματος* 5.4.5. Όπως πριν, αλλά με την «συγκεκριμένη» επιλογή $s = s_k^\xi$, και με $\mu$ αντί για $\mu_\xi$, βρίσκουμε

$$\mathrm{vol}_{s_k^\xi}(Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu)))^{1/s_k^\xi} \geqslant \frac{c_3[\det \mathrm{Cov}(\pi_F(\mu))]^{\frac{1}{2s_k^\xi}}}{L_{\pi_F(\mu)}},$$

για κάθε $F \in G_{E_k^\xi, s_k^\xi}$, όπου $c_3 > 0$ απόλυτη σταθερά. Επιπλέον, το $\pi_F(\mu)$ είναι ισοτροπικό, αφού το $\mu$ είναι ισοτροπικό, άρα η παραπάνω σχέση γράφεται

$$\mathrm{vol}_{s_k^\xi}(Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu)))^{1/s_k^\xi} \geqslant \frac{c_3}{L_{\pi_F(\mu)}}. \tag{5.4.4}$$

Θυμηθείτε τώρα ότι

$$s_k^\xi = r_\#(\pi_{E_k^\xi}(\mu), A) = \max\{\ell \in [1, k-1] : \exists F_0 \in G_{E_k^\xi, \ell} \text{ ώστε } L_{\pi_{F_0}(\mu)} \leqslant A\}.$$

Ο $F_0$ είναι λοιπόν $s_k^\xi$-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του $E_k^\xi$ και $L_{\pi_{F_0}(\mu)} \leqslant A$. Άρα, εφαρμόζοντας την (5.4.4) για $F = F_0$ βρίσκουμε

$$\mathrm{vol}_{s_k^\xi}(Z_{s_k^\xi}(\pi_{F_0}(\mu)))^{1/s_k^\xi} \geqslant \frac{c_3}{A}.$$

Το ζητούμενο συνάγεται λαμβάνοντας supremum άνω από τους $F \in G_{E_k^\xi, s_k^\xi}$. □

*Απόδειξη του Λήμματος* 5.4.6. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Αν $p \leqslant s_k^\xi$ (υπενθυμίζουμε ότι $p \in [1, r_\#^H(\mu, A)]$ σύμφωνα με τις υποθέσεις του θεωρήματος). Έστω $F \in G_{E_k^\xi, s_k^\xi}$. Τότε

$$Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu_\xi)) = P_F(Z_{s_k^\xi}(\mu_\xi)) \simeq P_F(Z_{s_k^\xi}(\mu)) = Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu)),$$

όπου για την πρώτη και την τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Θεώρημα 4.1.11 και για την μεσαία την σχέση $Z_{s_k^\xi}(\mu_\xi) \simeq Z_{s_k^\xi}(\mu)$ που απορρέει από το Λήμμα 5.3.2 αφού παρατηρήσουμε ότι $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu) \subseteq \frac{1}{2}\Lambda_{s_k^\xi}(\mu)$ σύμφωνα με την υπόθεση της απόδειξης του Θεωρήματος 5.4.3 για το $\xi$. Η ζητούμενη προκύπτει αφού $\frac{k}{n} \leqslant 1$.

(β) Αν $s_k^\xi < p$. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε

$$Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu_\xi)) \supseteq c_6 \frac{s_k^\xi}{p} Z_p(\pi_F(\mu_\xi)) \supseteq c_7 \frac{s_k^\xi}{p} Z_p(\pi_F(\mu)) \supseteq c_7 \frac{s_k^\xi}{p} Z_{s_k^\xi}(\pi_F(\mu)),$$

όπου για τον πρώτο και τον τελευταίο εγκλεισμό χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 4.1.3, ενώ για τον μεσαίο, ξανά το Λήμμα 5.3.2. Το ζητούμενο τώρα θα προκύψει αν παρατηρήσουμε ότι

$$p \leqslant r_\#^H(\mu, A) = n \inf_{k \in [1,n]} \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{r_\#(\pi_E(\mu), A)}{k} \leqslant \frac{n}{k} r_\#(\pi_{E_k^\xi}(\mu), A),$$

όθεν

$$\frac{s_k^\xi}{p} = \frac{r_\#(\pi_{E_k^\xi}(\mu), A)}{p} \geqslant \frac{k}{n}.$$

Ολοκληρώνοντας την απόδειξη του Λήμματος 5.4.6, έχουμε ολοκληρώσει και την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.3. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

# Κυρτοί κώνοι και μια παραλλαγή της ισομορφικής εικασίας του υπερεπιπέδου

Στο κεφάλαιο αυτό εξετάζουμε μια παραλλαγή της ισομορφικής εικασίας του υπερεπιπέδου που απεδείχθη από τον B. Klartag σε μια δημοσίευση του 2018 ("Isotropic constants and Mahler Volumes"). Η παραλλαγή αυτή βασίζεται σε μετατόπιση του πολικού σώματος αντί του υπό εξέταση σώματος καθ' εαυτού. Η απόδειξη στηρίζεται σε προτάσεις σχετικά με τους κυρτούς κώνους τις οποίες θα αποδείξουμε στις επόμενες παραγράφους. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης έννοιες όπως ο λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace και το γινόμενο όγκων ενός κυρτού σώματος.

## 6.1 Εισαγωγικά για το γινόμενο όγκων και τους κυρτούς κώνους

Στην παράγραφο αυτή θα ορίσουμε τους κυρτούς κώνους και θα αποδείξουμε ιδιότητές τους οι οποίες και τους συνδέουν με την έννοια του γινομένου όγκων κυρτού σώματος. Υπενθυμίζουμε ότι γινόμενο όγκων (ή αλλιώς «όγκος Mahler») ενός κυρτού σώματος $K$ στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του ονομάζεται η ποσότητα

$$s(K) = \mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ).$$

**Ορισμός 6.1.1.** Έστω $K$ κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Σχετικό εσωτερικό του $K$ ονομάζουμε το εσωτερικό του ως προς τον αφφινικό υπόχωρο που παράγεται από το $K$ (είναι γνωστό ότι το σχετικό εσωτερικό του $K$ είναι μη κενό). Θα το συμβολίζουμε με $\mathrm{rint}(K)$.

Έστω τώρα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ συμπαγές και κυρτό και έστω $p \in \mathrm{rint}(K)$. Τότε υπάρχει κυρτό σώμα $K_1 \subseteq \mathbb{R}^{n_1}$ και αφφινική απεικόνιση (υπενθυμίζουμε ότι αφφινική απεικόνιση είναι σύνθεση γραμμικής απεικόνισης και μεταφοράς) $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_1}$ ώστε να είναι 1-1 και επί από το $K$ στο $K_1$ και $T(p) = 0$.

Το γινόμενο όγκων $s(K_1)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του $K_1$ και της $T$. Σύμφωνα με αυτά δίνουμε λοιπόν τον ορισμό:

**Ορισμός 6.1.2.** Ορίζουμε ως όγκο Mahler του $K$ ως προς το σημείο $p$, την ποσότητα $s_p(K) := s(K_1)$, όπου $K_1$ ως ανωτέρω. Ειδικότερα, αν $0 \in \mathrm{int}(K)$ τότε $s_0(K) = s(K)$.

Αποδεικνύεται επίσης ότι (βλέπε π.χ. [26], παράγραφος 10.5) αν $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα, τότε υπάρχει μοναδικό σημείο $x_0 \in \mathrm{int}(K)$ ώστε $\mathrm{bar}((K - x_0)^\circ) = 0$.

**Ορισμός 6.1.3.** Το σημείο με την παραπάνω ιδιότητα ονομάζεται σημείο Santaló του $K$ και συμβολίζεται $p_K$.

**Ορισμός 6.1.4.** Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό συμπαγές σύνολο. Τότε γράφουμε $\overline{s}(K) := s_{p_K}(K)$. Είναι γνωστό ότι (βλέπε π.χ. [26], παράγραφος 10.5)

$$\overline{s}(K) = \inf_{p \in \mathrm{rint}(K)} s_p(K).$$

Επιπλέον είναι γνωστό ότι το $p_K$ είναι το μοναδικό σημείο στο $\mathrm{rint}(K)$ με αυτή την ιδιότητα.

**Ορισμός 6.1.5.** Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ κυρτό σύνολο. Το $V$ ονομάζεται κυρτός κώνος αν για κάθε $x \in V$ και $\lambda \geqslant 0$ ισχύει $\lambda x \in V$. Ειδικότερα, ο κυρτός κώνος $V$ ονομάζεται:

(α) Γνήσιος, αν είναι κλειστό σύνολο, $\mathrm{int}(V) \neq \varnothing$ και δεν υπάρχει ευθεία $\varepsilon$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε $\varepsilon \subseteq V$.

(β) Ομογενής, αν για κάθε $x, y \in \mathrm{int}(V)$ υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $T = T_{x,y} : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^{n+1}$ ώστε $T(x) = y$ και $T(V) = V$.

**Ορισμός 6.1.6.** Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος. Θα ονομάζουμε δυϊκό κώνο του $V$ το σύνολο

$$V^* := \{y \in \mathbb{R}^n : \ \forall x \in V \ \langle x, y\rangle \leqslant 0\}.$$

Προφανώς το $V^*$ είναι επίσης γνήσιος κυρτός κώνος και $(V^*)^* = V$.

Αποδεικνύουμε τώρα κάποιες προτάσεις σχετικά με τους κυρτούς κώνους.

**Λήμμα 6.1.7.** *Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος. Έστωσαν ακόμη $x_0 \in \mathrm{int}(V)$ και $y_0 \in \mathrm{int}(V^*)$ με την ιδιότητα $\langle x_0, y_0\rangle = -1$. Τέλος, ας θέσουμε $K := \{x \in V : \langle x, y_0\rangle = -1\}$ και $T := \{y \in V^* : \langle x_0, y\rangle = -1\}$. Τότε*

$$s_{x_0}(K) = s_{y_0}(T) = \frac{1}{(n!)^2} \int_V e^{\langle x, y_0\rangle} dx \cdot \int_{V^*} e^{\langle x_0, y\rangle} dy.$$

*Απόδειξη.* Το λήμμα θα αποδειχθεί πρώτα με την παραδοχή ότι $x_0 = -y_0$. Η γενική περίπτωση θα αναχθεί σε αυτήν, στο δεύτερο σκέλος της απόδειξης.

Έστω λοιπόν ότι $x_0 = -y_0$. Αφού $\langle x_0, y_0\rangle = -1$, υπάρχει $\vartheta \in S^n$ ώστε $x_0 = -y_0 = \vartheta$. Για $t \geqslant 0$ ισχύει

$$\int_{\{z \in V : \langle z, \vartheta\rangle = t\}} e^{-\langle z, \vartheta\rangle} dz = \mathrm{vol}_n(tK) \cdot e^{-t},$$

επομένως από το θεώρημα Fubini βρίσκουμε

$$\int_V e^{-\langle x,\vartheta\rangle}dx = \int_0^\infty \int_{\{z\in V:\langle z,\vartheta\rangle=t\}} e^{-\langle z,\vartheta\rangle}dz\,dt = \int_0^\infty \mathrm{vol}_n(tK)\cdot e^{-t}dt = n!\mathrm{vol}_n(K).$$

Παρομοίως,

$$\int_{V^*} e^{\langle y,\vartheta\rangle}dy = n!\mathrm{vol}_n(T).$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις λαμβάνουμε, μετατοπίζοντας και τα $K, T$ με την τοποθέτηση $K_1 := K-\vartheta$, $T_1 = T+\vartheta$,

$$\int_V e^{-\langle x,\vartheta\rangle}dx\cdot\int_{V^*} e^{\langle y,\vartheta\rangle}dy = (n!)^2\mathrm{vol}_n(K)\,\mathrm{vol}_n(T). \tag{6.1.1}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι στον $n$-διάστατο υπόχωρο $\vartheta^\perp$ ισχύει $K_1 = T_1^\circ$. Έστω $y\in T_1$. Τότε, και μόνο τότε, $\langle y-\vartheta, x\rangle\leqslant 0$ για κάθε $x\in V$. Άρα ένα σημείο $y\in E$ ανήκει στο $T_1$ αν και μόνο αν για κάθε $x\in K$ ισχύει $\langle y-\vartheta,x\rangle\leqslant 0$ (δεν χρειάζεται να εξετάζουμε για κάθε $x\in V$ αφού $x\in V$ αν και μόνο αν υπάρχει $x'\in K$ ώστε $x=\lambda x'$ για κάποιο $\lambda\geqslant 0$). Ισοδύναμα, αν και μόνο αν για κάθε $x\in K_1$ ισχύει $\langle y-\vartheta, x+\vartheta\rangle\leqslant 0$. Όμως

$$\langle y-\vartheta, x+\vartheta\rangle = \langle y,x\rangle - |\vartheta|^2 = \langle y,x\rangle - 1,$$

και αποδείξαμε ότι $K_1 = T_1^\circ$. Έτσι, η (6.1.1) δίνει

$$\frac{1}{(n!)^2}\int_V e^{-\langle x,y_0\rangle}dx\cdot\int_{V^*} e^{\langle x_0,y\rangle}dy = s(K_1) = s_{x_0}(K_1) = s(T_1) = s_{y_0}(T_1),$$

σύμφωνα και με τη συζήτηση πριν από τον Ορισμό 6.1.2.

Αποδεικνύουμε τώρα ότι η γενική περίπτωση ανάγεται στην περίπτωση $x_0 = -y_0$. Αφού $\langle x_0,y_0\rangle<0$, υπάρχει θετικά ορισμένος συμμετρικός πίνακας $P = S^tS$, όπου $S\in\mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$ αντιστρέψιμος, ώστε $Px_0=-y_0$. Θέτουμε $\vartheta := Sx_0$. Τότε $\vartheta\in S^n$. Πράγματι,

$$\langle\vartheta,\vartheta\rangle = \langle Sx_0, -(S^t)^{-1}y_0\rangle = -\langle x_0, S^t(S^t)^{-1}y_0\rangle = -\langle x_0,y_0\rangle = 1,$$

αφού

$$\vartheta = (S^t)^{-1}S^t\vartheta = (S^t)^{-1}S^tSx_0 = (S^t)^{-1}Px_0 = -(S^t)^{-1}y_0. \tag{6.1.2}$$

Θέτουμε τώρα $V_1 := S(V)$. Τότε ο $V_1$ είναι γνήσιος κυρτός κώνος. Πράγματι, αν $y = Sx\in V_1$, τότε $\lambda y = S\lambda x\in V_1$ για κάθε $\lambda\geqslant 0$, ενώ π.χ. αν $\varepsilon$ ευθεία ώστε $\varepsilon\subseteq V_1$ τότε $S^{-1}(\varepsilon)\subseteq V$. Οι λοιπές ιδιότητες επίσης διατηρούνται από την $S$.

Παρατηρούμε ακόμη ότι $V_1^* = (S^t)^{-1}V^*$. Για να το δούμε αυτό αρκεί να προσέξουμε ότι αν $x\in V_1^*$, $a = S^t(x)$ και $b\in V_1$ τότε $\langle a,b\rangle = \langle S^tx,b\rangle = \langle x,Sb\rangle\leqslant 0$ αφού $Sb\in V_1$. Με τις αλλαγές μεταβλητών $\tilde{x} = Sx$ και $\tilde{y} = (S^t)^{-1}y$ υπολογίζουμε

$$\begin{aligned}\int_V e^{\langle x,y_0\rangle}dx\cdot\int_{V^*} e^{\langle x_0,y\rangle}dy &= \int_{V_1} e^{\langle S^{-1}\tilde{x},y_0\rangle}d\tilde{x}\cdot\int_{V_1^*} e^{\langle x_0,S^t\tilde{y}\rangle}d\tilde{y}\\ &= \int_{V_1} e^{\langle\tilde{x},(S^{-1})^ty_0\rangle}d\tilde{x}\cdot\int_{V_1^*} e^{\langle Sx_0,\tilde{y}\rangle}d\tilde{y}\\ &= \int_{V_1} e^{-\langle\tilde{x},\vartheta\rangle}d\tilde{x}\cdot\int_{V_1^*} e^{\langle\vartheta,\tilde{y}\rangle}d\tilde{y}\\ &= (n!)^2 s_\vartheta(K_2) = (n!)^2 s_{-\vartheta}(T_2),\end{aligned}$$

σύμφωνα με την ειδική περίπτωση που αποδείξαμε, όπου $K_2 := \{\tilde{x} \in V_1 : \langle \tilde{x}, -\vartheta\rangle = -1\}$ και $T_2 = \{\tilde{y} \in V_1^* : \langle \vartheta, \tilde{y}\rangle = -1\}$.

Για να δείξουμε ότι $s_\vartheta(K_2) = s_{x_0}(K)$ και $s_{-\vartheta}(T_2) = s_{y_0}(T)$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $S(K) = K_2$, $S(x_0) = \vartheta$, $(S^t)^{-1}(T) = T_2$ και $(S^t)^{-1}(y_0) = -\vartheta$. Η σχέση

$$s_{x_0}(K) = s_{y_0}(T) = \frac{1}{(n!)^2}\int_V e^{\langle x, y_0\rangle}dx \cdot \int_{V^*} e^{\langle x_0, y\rangle}dy$$

έχει τώρα αποδειχθεί για κάθε $x, y$ με τις υποθέσεις του λήμματος. □

**Ορισμός 6.1.8.** Έστωσαν $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος, $x \in \mathrm{int}(V)$ και $y \in \mathrm{int}(V^*)$. Θα συμβολίζουμε $K_y := \{z \in V : \langle z, y\rangle = -1\}$ και $T_x = \{z \in V^* : \langle x, z\rangle = -1\}$.

Με το συμβολισμό αυτό έχουμε το παρακάτω Πόρισμα του Λήμματος 6.1.7.

**Πόρισμα 6.1.9.** *Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος. Έστωσαν ακόμη $x_0 \in \mathrm{int}(V)$ και $y_0 \in \mathrm{int}(V^*)$. Θεωρούμε τα σύνολα $K_{y_0}, T_{x_0} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ σύμφωνα με τον Ορισμό 6.1.8. Τότε τα $K_{y_0}, T_{x_0}$ είναι $n$-διάστατα συμπαγή και κυρτά, και*

$$s_{-\frac{x_0}{\langle x_0, y_0\rangle}}(K_{y_0}) = s_{-\frac{y_0}{\langle x_0, y_0\rangle}}(T_{x_0}) = \frac{(-\langle x_0, y_0\rangle)^{n+1}}{(n!)^2}\int_V e^{\langle x, y_0\rangle}dx \cdot \int_{V^*} e^{\langle x_0, y\rangle}dy.$$

*Απόδειξη.* Θέτουμε $u_0 = -\frac{y_0}{\langle x_0, y_0\rangle}$, οπότε $\langle x_0, u_0\rangle = -1$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.1.7 και βρίσκουμε

$$\begin{aligned}
s_{-\frac{y_0}{\langle x_0, y_0\rangle}}(T_{x_0}) = s_{u_0}(T_{x_0}) &= \frac{1}{(n!)^2}\int_V e^{\langle x, u_0\rangle}dx \cdot \int_{V^*} e^{\langle x_0, y\rangle}dy \\
&= \frac{1}{(n!)^2}\int_V e^{-\frac{1}{\langle x_0, y_0\rangle}\langle x, y_0\rangle}dx \cdot \int_{V^*} e^{\langle x_0, y\rangle}dy \\
&= \frac{(-\langle x_0, y_0\rangle)^{n+1}}{(n!)^2}\int_V e^{\langle \tilde{x}, y_0\rangle}d\tilde{x} \cdot \int_{V^*} e^{\langle x_0, y\rangle}dy
\end{aligned}$$

μετά από την αλλαγή μεταβλητής $\tilde{x} = -\frac{x}{\langle x_0, y_0\rangle}$ (παρατηρήστε ότι ο μετασχηματισμός $z \mapsto \lambda z$, $\lambda > 0$ διατηρεί τον κώνο $V$ και $\langle x_0, y_0\rangle < 0$). Παρομοίως υπολογίζουμε και τον όγκο Mahler $s_{-\frac{x_0}{\langle x_0, y_0\rangle}}(K_{y_0})$. Το ότι τα $K_{y_0}, T_{x_0}$ είναι $n$-διάστατα, συμπαγή και κυρτά είναι προφανές, αφού καθένα από αυτά είναι τομή γνήσιου κυρτού κώνου με υπερεπίπεδο.

□

## 6.2 Λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace κυρτού κώνου και μετασχηματισμός Legendre κυρτής συνάρτησης

Κατ' αντιστοιχία με τον λογαριθμικό μετασχηματισμό Laplace μέτρου ορίζεται και ο λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace κυρτού κώνου. Ο μετασχηματισμός Legendre κυρτής συνάρτησης έχει, αν εφαρμοστεί επί του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace κυρτού κώνου, ιδιαίτερο ενδιαφέρον, καθώς ικανοποιεί συγκεκριμένες ιδιότητες «περίπου δυϊκότητας» με τον λογαριθμικό μετασχηματισμό Laplace του δυϊκού κώνου. Τους παρουσιάζουμε ως θεμελιώδη εργαλεία για ό,τι θα ακολουθήσει.

**Ορισμός 6.2.1.** Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος. Ο λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace του είναι η συνάρτηση $\Lambda_V : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$\Lambda_V(y) := \log \int_V e^{\langle y,x\rangle} dx.$$

**Πρόταση 6.2.2.** *Η συνάρτηση $\Lambda_V$ έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Είναι συνεχής,*

(ii) $\Lambda_V(x) < \infty$ *αν και μόνο αν* $x \in \mathrm{int}(V^*)$,

(iii) *Είναι γνησίως κυρτή στο* $\mathrm{int}(V^*)$,

(iv) *Για κάθε* $t > 0$ *και* $y \in \mathbb{R}^{n+1}$ *ισχύει*

$$\Lambda_V(ty) = \Lambda_V(y) - (n+1)\log t,$$

(v) *Για κάθε* $y \in \mathbb{R}^{n+1}$,

$$\langle \nabla \Lambda_V(y), y\rangle = -(n+1).$$

*Απόδειξη.* (i) Άμεσο αφού η $(y,x) \mapsto e^{\langle y,x\rangle}$ είναι συνεχής.

(ii) Συνέπεια του γεγονότος ότι $\int_V e^{-\langle x,\vartheta\rangle}\, dx = n!\mathrm{vol}_n(K)$, για κάθε $\vartheta \in S^{n-1}$, όπου $K = \{x \in V : \langle x, \vartheta\rangle = 1\}$ όπως στην απόδειξη του Λήμματος 6.1.7.

(iii) Αντίστοιχα με την Πρόταση 5.1.1 (i) χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

(iv) Για $y \in V^*$, $t > 0$ ισχύει

$$\begin{aligned}\Lambda_V(ty) &= \log\left(\int_V e^{\langle ty,x\rangle} dx\right) = \log\left(\frac{1}{t^{n+1}}\int_V e^{\langle y,x\rangle} dx\right)\\ &= \log\left(\int_V e^{\langle y,x\rangle} dx\right) - (n+1)\log t = \Lambda_V(y) - (n+1)\log t,\end{aligned}$$

με την ίδια αλλαγή μεταβλητής που χρησιμοποιήσαμε στην απόδειξη του Πορίσματος 6.1.9.

(v) Παραγωγίζοντας τη σχέση που αποδείξαμε ως ιδιότητα (iv) βρίσκουμε $\frac{d}{dt}(\Lambda_V(ty)) = -\frac{n+1}{t}$, και με μία εφαρμογή του κανόνα της αλυσίδας, $\langle \nabla \Lambda_V(ty), y\rangle = -\frac{n+1}{t}$, απ' όπου έπεται το συμπέρασμα, θέτοντας $t = 1$. □

Εισάγουμε τώρα την έννοια του μετασχηματισμού Legendre κυρτής συνάρτησης.

**Ορισμός 6.2.3.** Έστω $\Phi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ κυρτή συνάρτηση. Ορίζουμε ως μετασχηματισμό Legendre της $\Phi$ τη συνάρτηση $\Phi^* : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$,

$$\Phi^*(x) = \sup_{\{y \in \mathbb{R}^{n+1} : \Phi(y) < \infty\}} \big[\langle x, y\rangle - \Phi(y)\big].$$

**Πρόταση 6.2.4.** *Η συνάρτηση $\Phi^*$ είναι κυρτή. Επίσης, αν η $\Phi$ είναι διαφορίσιμη στο $x$ και πεπερασμένη σε περιοχή του, τότε*

$$\Phi^*(\nabla \Phi(x)) + \Phi(x) = \langle x, \nabla \Phi(x)\rangle.$$

*Απόδειξη.* Οι δύο ισχυρισμοί ελέγχονται άμεσα από τους ορισμούς. □

Σκοπός μας τώρα είναι να υπολογίσουμε τον μεταθέτη των μετασχηματισμών $\Lambda_{V^*}$ (λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace του δυϊκού κώνου του $V$) και $\Lambda_V^*$ (μετασχηματισμός Legendre της κυρτής συνάρτησης $\Lambda_V$, δηλαδή του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace του $V$).

**Πρόταση 6.2.5.** *Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος. Τότε οι συναρτήσεις $\Lambda_{V^*}$ και $\Lambda_V^*$ είναι πεπερασμένες στο $\mathrm{int}(V)$, για τον δε μεταθέτη τους $J := \Lambda_{V^*} - \Lambda_V^*$ ισχύει*

$$J(x) = 2\log(n!) - (n+1)\log\left(\frac{n+1}{e}\right) + \log\overline{s}(T_x)$$

*για κάθε $x \in \mathrm{int}(V)$.*

*Απόδειξη.* Το ότι $\Lambda_{V^*}(x) < \infty$ αν και μόνο αν $x \in \mathrm{int}(V)$ είναι άμεσο από την Πρόταση 6.2.2 (ii) αφού $(V^*)^* = V$. Αν δείξουμε τη ζητούμενη σχέση τότε, αφού $\overline{s}(T_x) < \infty$ για $x \in \mathrm{int}(V)$, θα έχουμε δείξει και ότι $\Lambda_V^*(x) < \infty$ για $x \in \mathrm{int}(V)$.

Λογαριθμίζοντας τη σχέση που μας δίνει το Πόρισμα 6.1.9 για $x \in \mathrm{int}(V)$ και $y \in \mathrm{int}(V^*)$ λαμβάνουμε

$$\log s_{-\frac{x}{\langle x,y\rangle}}(K_y) = \log s_{-\frac{y}{\langle x,y\rangle}}(T_x) = \Lambda_{V^*}(x) + \Lambda_V(y) + (n+1)\log(-\langle x,y\rangle) - 2\log(n!). \tag{6.2.1}$$

Απ' την άλλη, η Πρόταση 6.2.2 (ii) και (iv) για $x \in \mathrm{int}(V)$ δίνει

$$\begin{aligned}\Lambda_V^*(x) &= \sup_{\{y\in\mathbb{R}^n:\Lambda_V(y)<\infty\}}[\langle x,y\rangle - \Lambda_V(y)] = \sup_{y\in\mathrm{int}(V^*)}[\langle x,y\rangle - \Lambda_V(y)]\\ &= \sup_{y\in\mathrm{int}(V^*),t>0}[\langle x,ty\rangle - \Lambda_V(ty)] = \sup_{y\in\mathrm{int}(V^*),t>0}[t\langle x,y\rangle - \Lambda_V(y) + (n+1)\log t].\end{aligned}$$

Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι για σταθερό $y \in \mathrm{int}(V^*)$,

$$\begin{aligned}\sup_{t>0}\big[t\langle x,y\rangle + (n+1)\log t\big] &= -\frac{n+1}{\langle x,y\rangle}\langle x,y\rangle + (n+1)\log\left(-\frac{n+1}{\langle x,y\rangle}\right)\\ &= (n+1)\log\left(\frac{n+1}{e}\right) - (n+1)\log(-\langle x,y\rangle),\end{aligned}$$

άρα τελικά

$$\Lambda_V^*(x) = (n+1)\log\left(\frac{n+1}{e}\right) + \sup_{y\in\mathrm{int}(V^*)}\big[-(n+1)\log(-\langle x,y\rangle) - \Lambda_V(y)\big]. \tag{6.2.2}$$

Από τις (6.2.1) και (6.2.2) συνάγεται ότι

$$\begin{aligned}\inf_{y\in\mathrm{int}(V^*)}\Big(\log s_{-\frac{y}{\langle x,y\rangle}}(T_x)\Big) &= \Lambda_{V^*}(x) + \inf_{y\in\mathrm{int}(V^*)}\big[\Lambda_V(y) + (n+1)\log(-\langle x,y\rangle)\big] - 2\log(n!)\\ &= \Lambda_{V^*}(x) - \left[\Lambda_V^*(x) - (n+1)\log\left(\frac{n+1}{e}\right)\right] - 2\log(n!),\end{aligned}$$

όθεν

$$J(x) = \Lambda_{V^*}(x) - \Lambda_V^*(x) = 2\log(n!) - (n+1)\log\left(\frac{n+1}{e}\right) + \inf_{y\in\mathrm{int}(V^*)}\Big(\log s_{-\frac{y}{\langle x,y\rangle}}(T_x)\Big).$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη παρατηρούμε ότι $y \in \mathrm{int}(V^*)$ αν και μόνο αν $-\frac{y}{\langle x,y\rangle} \in \mathrm{rint}(T_x)$ και το ζητούμενο έπεται από τα σχόλια στον Ορισμό 6.1.4. □

Θα υπολογίσουμε τώρα τις δύο πρώτες παραγώγους της $\Lambda_V$ (κλίση και Εσσιανή).

**Πρόταση 6.2.6.** *Έστωσαν $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος και $y \in \mathrm{int}(V^*)$. Τότε,*

$$\nabla \Lambda_V(y) = (n+1)\mathrm{bar}(K_y),$$

*όπου βέβαια θεωρούμε το $K_y$ σαν $n$-διάστατο σώμα στο $n$-διάστατο υπερεπίπεδο που το περιέχει (ως προς τον υπολογισμό του βαρυκέντρου), δηλ.*

$$\mathrm{bar}(K_y) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K_y)} \int_{K_y} x\, dx \in \mathbb{R}^{n+1}$$

*με το ολοκλήρωμα να λαμβάνεται σε $n$ διαστάσεις.*

*Απόδειξη.* Παραγωγίζοντας τη σχέση που ορίζει τον λογαριθμικό μετασχηματισμό Laplace για $y \in \mathrm{int}(V^*)$ βρίσκουμε για $i = 1, 2, \ldots, n+1$

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \Lambda_V}{\partial y_i}(y) &= \frac{\frac{\partial}{\partial y_i}\left(\int_V e^{\langle y,x\rangle} dx\right)}{\int_V e^{\langle y,x\rangle} dx} = \frac{\int_V x_i e^{\langle y,x\rangle} dx}{\int_V e^{\langle y,x\rangle} dx} \\
&= \frac{\int_0^\infty \int_{\{x\in V:\langle x,y\rangle = -t|y|\}} x_i e^{\langle y,x\rangle} dx\, dt}{\int_0^\infty \int_{\{x\in V:\langle x,y\rangle = -t|y|\}} e^{\langle y,x\rangle} dx\, dt} = \frac{\int_0^\infty (t|y|)^{n+1} e^{-t|y|} dt \cdot \int_{K_y} x_i dx}{\int_0^\infty (t|y|)^n e^{-t|y|} dt \cdot \int_{K_y} dx} \\
&= \frac{\frac{(n+1)!}{|y|} \int_{K_y} x_i dx}{\frac{n!}{|y|} \mathrm{vol}_n(K_y)} = (n+1) \frac{\int_{K_y} x_i dx}{\mathrm{vol}_n(K_y)} = (n+1)\mathrm{bar}(K_y).
\end{aligned}$$

□

**Πρόταση 6.2.7.** *Έστωσαν $V, y$ όπως στην Πρόταση 6.2.6. Τότε*

$$\mathrm{Hess}\Lambda_V(y) = (n+2)(n+1)\mathrm{Cov}(K_y) + (n+1)A_y,$$

*όπου για $K$ συμπαγές κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε $\mathrm{Cov}(K) := \mathrm{Cov}(\mathbf{1}_K)$ και $A_y := (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}$, $a_{ij} := [\mathrm{bar}(K_y)]_i \cdot [\mathrm{bar}(K_y)]_j$ με τη σύμβαση $\mathrm{bar}(K_y) = ([\mathrm{bar}(K_y)]_1, \ldots, [\mathrm{bar}(K_y)]_n)$.*

*Απόδειξη.* Παραγωγίζοντας δύο φορές τη σχέση που ορίζει τον λογαριθμικό μετασχηματισμό Laplace παίρνουμε (όπως στην απόδειξη της προηγούμενης πρότασης):

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Lambda_V}{\partial y_i \partial y_j}(y) &= \frac{\int_V x_i x_j e^{\langle y,x\rangle} dx}{\int_V e^{\langle y,x\rangle} dx} - \frac{\int_V x_i e^{\langle y,x\rangle} dx}{\int_V e^{\langle y,x\rangle} dx} \cdot \frac{\int_V x_j e^{\langle y,x\rangle} dx}{\int_V e^{\langle y,x\rangle} dx} \\
&= \frac{\frac{(n+2)!}{|y|} \int_{K_y} x_i x_j\, dx}{\frac{n!}{|y|} \int_{K_y} \mathbf{1}\, dx} - \frac{\frac{(n+1)!}{|y|} \int_{K_y} x_i\, dx}{\frac{n!}{|y|} \int_{K_y} \mathbf{1}\, dx} \cdot \frac{\frac{(n+1)!}{|y|} \int_{K_y} x_j\, dx}{\frac{n!}{|y|} \int_{K_y} \mathbf{1}\, dx} \\
&= \frac{(n+1)(n+2) \int_{K_y} x_i x_j\, dx}{\mathrm{vol}_n(K_y)} - \frac{(n+1)^2 \int_{K_y} x_i dx \cdot \int_{K_y} x_j dx}{\mathrm{vol}_n(K_y)^2} \\
&= \frac{(n+1)(n+2) \int_{K_y} x_i x_j\, dx}{\mathrm{vol}_n(K_y)} - \frac{(n+1)(n+2) \int_{K_y} x_i dx \cdot \int_{K_y} x_j dx}{\mathrm{vol}_n(K_y)^2} \\
&\qquad + \frac{(n+1) \int_{K_y} x_i dx \cdot \int_{K_y} x_j dx}{\mathrm{vol}_n(K_y)^2} \\
&= (n+1)(n+2)\mathrm{Cov}(K_y) + (n+1)[\mathrm{bar}(K_y)]_i \cdot [\mathrm{bar}(K_y)]_j.
\end{aligned}$$

□

**Πόρισμα 6.2.8.** *Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος. Τότε η απεικόνιση $\nabla\Lambda_V$ είναι αμφιδιαφόριση από το $\mathrm{int}(V^*)$ επί του $\mathrm{int}(V)$.*

*Απόδειξη.* Η $\Lambda_V$ παίρνει πεπερασμένες τιμές στο $\mathrm{int}(V^*)$ σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.2 (ii). Από την Πρόταση 6.2.6, αν $y \in \mathrm{int}(V^*)$ τότε $\nabla\Lambda_V(y) \in \mathrm{int}(V)$ αφού $\mathrm{bar}(K_y) \in \mathrm{int}(V)$ σύμφωνα με τον ορισμό του $K_y$.

Για να δείξουμε ότι η $\nabla\Lambda_V : \mathrm{int}(V^*) \to \mathrm{int}(V)$ είναι επί, θα επικαλεστούμε την θεωρία του μετασχηματισμού Legendre (βλέπε π.χ. [25]) και το γεγονός ότι $\Lambda_V^* < \infty$ στο $\mathrm{int}(V)$. Απ' την άλλη, η $\nabla\Lambda_V$ είναι 1-1 αφού η $\Lambda_V$ είναι γνησίως κυρτή στο $\mathrm{int}(V^*)$ (Πρόταση 6.2.2 (iii)). Τέλος, η παράγωγος της $\nabla\Lambda_V$ στο $y \in \mathrm{int}(V^*)$ είναι ο πίνακας $\mathrm{Hess}\Lambda_V(y)$ που είναι θετικά ορισμένος σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.7, άρα αντιστρέψιμος. □

Θα περιγράψουμε τώρα μία χρήσιμη γεωμετρική ιδιότητα της αμφιδιαφόρισης $\nabla\Lambda_V : \mathrm{int}(V^*) \to \mathrm{int}(V)$. Δίνουμε αρχικά τον παρακάτω ορισμό.

**Ορισμός 6.2.9.** Έστωσαν $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος και $y \in \mathrm{int}(V^*)$. Τότε θα ονομάζουμε περικεκομμένο κώνο του $V$ ως προς $y$ το σύνολο $C_y := \{x \in V : \langle x, y\rangle \geqslant -1\}$. Προφανώς, σύμφωνα με τους ορισμούς των $V, V^*$ ισχύει $\emptyset \neq C_y$ και $\partial C_y \subseteq \partial V$.

Έχουμε τώρα το παρακάτω γεωμετρικό αποτέλεσμα.

**Πρόταση 6.2.10.** *Για $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ και $y \in int(V^*)$ ισχύει*

$$\nabla\Lambda_V(y + V^*) \subseteq (n+1)C_y \text{ και } \nabla\Lambda_V(y - V^*) \subseteq V \setminus (n+1)C_y$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε $z \in y + \mathrm{int}(V^*)$ και $x \in K_y$. Τότε $\langle x, z - y\rangle < 0$. Επειδή δεν είναι δυνατόν να συμβαίνει $\langle x, z\rangle = \langle x, y\rangle = -1$, βρίσκουμε ότι $K_y \cap K_z = \emptyset$. Τώρα, ο κώνος $V$ διασπάται από το κυρτό σύνολο $K_y$ σε δύο συνεκτικές συνιστώσες, μία φραγμένη (τη $C_y$) και μία μη φραγμένη (τη $V \setminus C_y$), και πρέπει $K_z \subseteq C_y$. Όμως $K_z$ κυρτό, άρα $\mathrm{bar}(K_z) \in K_z \subseteq C_y$. Από την Πρόταση 6.2.6, $\nabla\Lambda_V(z) = (n+1)\mathrm{bar}(K_z) \in (n+1)C_y$. Δείξαμε ότι $\nabla\Lambda_V(y + \mathrm{int}(V^*)) \subseteq (n+1)C_y$. Αφού το $y + \mathrm{int}(V^*)$ είναι ανοιχτό, το $(n+1)C_y$ είναι κλειστό και η $\nabla\Lambda_V$ είναι συνεχής, προκύπτει και ότι $\nabla\Lambda_V(y + V^*) \subseteq (n+1)C_y$. Η απόδειξη του δεύτερου σκέλους είναι παρόμοια. □

## 6.3 Αυτοσυνέλιξη κυρτού κώνου

Εισάγουμε στην παράγραφο αυτή ένα ακόμη εργαλείο που θα μας χρειαστεί στην προσέγγιση της υπό μελέτη παραλαγής της ισομορφικής εικασίας του υπερεπιπέδου. Πρόκειται για μία ακόμη κυρτή συνάρτηση σε δοθέντα γνήσιο κυρτό κώνο, την λεγόμενη συνάρτηση αυτοσυνέλιξης. Ως γνωστόν, αν $f, g : U \subseteq \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες στο $U$, τότε αν $x \in U$ και

$$\int_U |f(x-y)g(y)|\, dy < \infty,$$

ορίζεται στο $x$ η συνέλιξη $f * g$ των $f, g$ ως

$$(f * g)(x) = \int_U f(x-y)g(y)\, dy.$$

Ορίζουμε λοιπόν τη συνάρτηση αυτοσυνέλιξης κυρτού κώνου.

**Ορισμός 6.3.1.** Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος. Η συνάρτηση αυτοσυνέλιξης του $V$ είναι η $\Psi_V : \mathrm{int}(V) \to \mathbb{R}$,

$$\Psi_V(x) := -\log(\mathbf{1}_V * \mathbf{1}_V)(x) = -\log \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (x - V))$$

για κάθε $x \in \mathrm{int}(V)$.

Η παρακάτω πρόταση παρουσιάζει τις βασικές ιδιότητες της $\Psi_V$.

**Πρόταση 6.3.2.** *Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Η $\Psi_V$ είναι κυρτή στο $\mathrm{int}(V)$.*

(ii) *Η $\Psi_V$ παίρνει πράγματι πεπερασμενες τιμές στο $\mathrm{int}(V)$.*

(iii) *Για $t > 0$ και $x \in \mathrm{int}(V)$,*
$$\Psi_V(tx) = \Psi_V(x) - (n+1)\log t$$
*(συγκρίνατε με την Πρόταση 6.2.2 (iv)).*

(iv) *Αν το σύνορο του $K_y$, $\partial K_y$, είναι ομαλό και αυστηρά κυρτό για κάθε $y \in \mathrm{int}(V^*)$, τότε και η $\Psi_V$ είναι ομαλή στο $\mathrm{int}(V)$.*

*Απόδειξη.* (i) Αφού $V$ κυρτός, αν $x, y \in \mathrm{int}(V)$, $\lambda \in [0,1]$ τότε $\lambda x + (1-\lambda)y \in \mathrm{int}(V)$ και η ανισότητα Brunn-Minkowski (Θεώρημα 2.1.1, στην τελευταία της παραλλαγή) δίνει

$$\mathrm{vol}_{n+1}(\lambda(V \cap (x-V)) + (1-\lambda)(V \cap (y-V))) \geqslant \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (x-V))^{\lambda}\mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (y-V))^{1-\lambda},$$

άρα

$$\begin{aligned}&\log \mathrm{vol}_{n+1}(\lambda(V \cap (x-V)) + (1-\lambda)(V \cap (y-V)))\\ &\qquad \geqslant \lambda \log \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (x-V)) + (1-\lambda)\log \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (y-V)),\end{aligned}$$

όθεν

$$\begin{aligned}&-\log \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (\lambda x + (1-\lambda)y - V)) =\\ &-\log \mathrm{vol}_{n+1}(\lambda(V \cap (x-V)) + (1-\lambda)(V \cap (y-V)))\\ &\qquad \leqslant -\lambda \log \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (x-V)) - (1-\lambda)\log \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (y-V)).\end{aligned}$$

(ii) Για $x \in \mathrm{int}(V)$ ισχύει $\frac{x}{2} \in \mathrm{int}(V)$ και $\frac{x}{2} \in \mathrm{int}(x - V)$, άρα $\mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (x-V)) > 0$, επομένως $\Psi_V(x) \neq +\infty$. Απ' την άλλη, $V \cap (x - V) \subseteq |x| \cdot B_2^{n+1}$, άρα $\mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (x-V)) < +\infty$, επομένως $\Psi_V(x) \neq -\infty$.

(iii) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\Psi_V(tx) &= -\log \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (tx - V)) = -\log \mathrm{vol}_{n+1}(t(V \cap (x-V)))\\ &= -\log(t^{n+1}\mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (x-V))\\ &= -(n+1)\log t - \log \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (x-V))\\ &= -(n+1)\log t + \Psi_V(x).\end{aligned}$$

□

Ο σκοπός μας τώρα είναι να συσχετίσουμε τη συνάρτηση $\Psi_V$ με την $\Lambda_V^*$, όπου $V$ γνήσιος κυρτός κώνος. Συγκεκριμένα θα δείξουμε το παρακάτω:

**Θεώρημα 6.3.3.** *Έστω $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος και $x \in \mathrm{int}(V)$. Τότε*

$$\Psi_V(x) \leqslant \Lambda_V^*(x) + cn,$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Ξεκινάμε με το παρακάτω λήμμα:

**Λήμμα 6.3.4.** *Για $V, x$ με τις παραδοχές του Θεωρήματος και $y := \frac{1}{n+1}\nabla\Lambda_V^*(x)$ ισχύει ότι $x = \mathrm{bar}(K_y)$ και το σημείο $y$ είναι το σημείο Santaló του $T_x$.*

*Απόδειξη.* Αφού $y := \frac{1}{n+1}\nabla\Lambda_V^*(x)$ και η $\nabla\Lambda_V^*$ είναι $(-1)$-ομογενής, συμπεραίνουμε ότι

$$x = \frac{1}{n+1}\nabla\Lambda_V(y).$$

Από την Πρόταση 6.2.6, το $x$ είναι το βαρύκεντρο του $K_y$. Άρα, το $y$ είναι το σημείο Santaló του $T_x$. □

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 6.3.3. Κατ' αρχάς, με $y = \frac{1}{n+1}\nabla\Lambda_V^*(x)$, το $K_y - x$ είναι κεντραρισμένο. Σύμφωνα λοιπόν με το [19], σελ. 321, ισχύει για $t \in [0,1]$ το φράγμα

$$\mathrm{vol}_n[tK_y \cap (x-(1-t)K_y)] = \mathrm{vol}_n[t(K_y - x) \cap (1-t)(x-K_y)] \geqslant t^n(1-t)^n \mathrm{vol}_n(K_y). \tag{6.3.1}$$

Απ' την άλλη,

$$\begin{aligned} \Lambda_V^*(x) + \Lambda_V(y) &= \Lambda_V^*(x) + \Lambda_V\left(\frac{1}{n+1}\nabla\Lambda_V^*(x)\right) \\ &= \Lambda_V^*(x) + \Lambda_V(\nabla\Lambda_V^*(x)) - (n+1)\log\left(\frac{1}{n+1}\right) \\ &= -(n+1) + (n+1)\log(n+1) = (n+1)\log\left(\frac{n+1}{e}\right), \end{aligned} \tag{6.3.2}$$

σύμφωνα με τις προτάσεις 6.2.2 και 6.2.4. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini και τις (6.3.1), (6.3.2) υπολογίζουμε

$$\begin{aligned} \Psi_V(x) &= -\log \mathrm{vol}_{n+1}(V \cap (x-V)) = -\log \frac{1}{|y|}\int_0^1 \mathrm{vol}_n[tK_y \cap (x-(1-t)K_y)]\,dt \\ &\leqslant -\log\frac{\mathrm{vol}_n(K_y)}{|y|}\int_0^1 t^n(1-t)^n dt = -\log\frac{n!}{(2n+1)!} - \Lambda_V(y) \\ &= -\log\frac{n!}{(2n+1)!} - (n+1)\log\left(\frac{n+1}{e}\right) + \Lambda_V^*(x) \\ &\leqslant -\log\frac{e^{n+1}}{C^n(n+1)^{n+1}} - (n+1)\log\left(\frac{n+1}{e}\right) + \Lambda_V^*(x) \\ &= \log(C^n) + \Lambda_V^*(x) = \Lambda_V^*(x) + cn, \end{aligned}$$

όπου $c := \log C$ και έχουμε αξιοποιήσει την ανισότητα $(2n+1)!e^{n+1} \leqslant C^n n!(n+1)^{n+1}$ που αποδεικνύεται εύκολα με επαγωγή. □

## 6.4 Ισομορφική εικασία του υπερεπιπέδου: μετατοπίζοντας το πολικό του κυρτού σώματος

Ερχόμαστε πλέον στο κεντρικό ζήτημα του κεφαλαίου. Θα χρησιμοποιήσουμε τα μέσα που αναπτύξαμε στις προηγούμενες παραγράφους για να αποδείξουμε την παρακάτω παραλλαγή της ισομορφικής εικασίας του υπερεπιπέδου.

**Θεώρημα 6.4.1.** *Έστωσαν $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κεντραρισμένο κυρτό σώμα και $\varepsilon \in (0,1)$. Τότε υπάρχει κυρτό σώμα $T \subseteq \mathbb{R}^n$ με τις παρακάτω τρεις ιδιότητες:*

(i) *Τα $T$ και $K$ «περίπου» συμπίπτουν: $(1-\varepsilon)K \subseteq T \subseteq (1+\varepsilon)T$.*

(ii) *Το $T^\circ$ είναι μετατόπιση του $K^\circ$: Υπάρχει $y \in \mathrm{int}(K^\circ)$ ώστε $T^\circ = K^\circ - y$.*

(iii) *Η ισοτροπική σταθερά του $T$ δέχεται ομοιόμορφο φράγμα: $L_T \leqslant \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Σκιαγραφώντας για αρχή την απόδειξη σε πολύ αδρές γραμμές, μπορούμε να πούμε τα εξής: Θα τοποθετήσουμε το $n$-διάστατο $K$ μέσα σε έναν κατάλληλο κυρτό κώνο $n+1$ διαστάσεων, θα πάρουμε $y \in \mathrm{int}(V^*)$ κατάλληλο, για το οποίο θα έχουμε δείξει ότι $L_{K_y} \leqslant \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$. Εδώ δικαιολογείται και η προτίμησή μας στο να επιλέγουμε τους κώνους να έχουν $n+1$ διαστάσεις ήδη από τις προηγούμενες παραγράφους. Έπειτα θα κατασκευάσουμε ένα $T$ αφφινικά ισοδύναμο με το $K_y$ (οπότε $L_T \leqslant C/\sqrt{\varepsilon}$) και το οποίο θα ικανοποιεί και τις υπόλοιπες ιδιότητες («εγγύτητας» με το $K$).

Το πρώτο λήμμα που θα αποδείξουμε συσχετίζει την Εσσιανή του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace κώνου στο $y$ με την ισοτροπική σταθερά του $K_y$.

**Λήμμα 6.4.2.** *Έστωσαν $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος και $y \in \mathrm{int}(V^*)$. Τότε*

$$\det \mathrm{Hess}\Lambda_V(y) = \frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^n}{(n!)^2} L_{K_y}^{2n} \cdot \exp(2\Lambda_V(y)).$$

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 6.2.7,

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)}\mathrm{Hess}\Lambda_V(y) = \mathrm{Cov}(K_y) + \frac{1}{n+2}A_y,$$

όπου $A_y = (a_{ij})$, $a_{ij} = [\mathrm{bar}(K_y)]_i \cdot [\mathrm{bar}(K_y)]_j$, $1 \leqslant i,j \leqslant n+1$. Όμως $\mathrm{rank}(\mathrm{Cov}(K_y)) = n$ ενώ το $y$ παίρνει τιμές σε όλον τον $\mathrm{Ker}(\mathrm{Cov}(K_y))$. Επομένως, για τον προσηρτημένο πίνακα του $\mathrm{Cov}(K_y)$ ισχύει

$$\mathrm{adj}(\mathrm{Cov}(K_y)) = \det{}_n\mathrm{Cov}(K_y) \cdot \frac{y \cdot y^t}{|y|^2} \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1},$$

όπου $\det_n \mathrm{Cov}(K_y)$ συμβολίζουμε το άθροισμα των κυρίων $n \times n$ υποοριζουσών του $\mathrm{Cov}(K_y) \in \mathbb{R}^{n+1} \times \mathbb{R}^{n+1}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\det \mathrm{Hess}\Lambda_V(y) &= (n+1)^{n+1}(n+2)^{n+1}\frac{\det_n \mathrm{Cov}(K_y)}{|y|^2}\,\frac{\langle y, \mathrm{bar}(K_y)\rangle^2}{n+2} \\ &= (n+1)^{n+1}(n+2)^n\frac{\det_n \mathrm{Cov}(K_y)\langle y, \mathrm{bar}(K_y)\rangle^2}{|y|^2}.\end{aligned}$$

Ωστόσο $\mathrm{bar}(K_y) \in K_y$ (αφού $K_y$ κυρτό), επομένως (θυμηθείτε τον ορισμό του $K_y$) $\langle y, \mathrm{bar}(K_y)\rangle = -1$. Άρα

$$\det \mathrm{Hess}\Lambda_V(y) = (n+1)^{n+1}(n+2)^n \frac{\det_n \mathrm{Cov}(K_y)}{|y|^2}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} L_{K_y}^{2n} = L_{\mathbf{1}_{K_y}}^{2n} &= \frac{\det_n \mathrm{Cov}(K_y)}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K_y} dx\right)^2} = \frac{\det \mathrm{Hess}\Lambda_V(y)\, |y|^2}{\left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K_y} dx\right)^2 (n+1)^{n+1}(n+2)^n} \\ &= \frac{\det \mathrm{Hess}\Lambda_V(y) \cdot (n!)^2}{(n+1)^{n+1}(n+2)^n \exp(2\Lambda_V(y))}, \end{aligned}$$

διότι

$$\begin{aligned} \exp(2\Lambda_V(y)) &= \left(\int_V e^{\langle y,x\rangle} dx\right)^2 = \left(\int_0^\infty \int_{\{x\in V : \langle x,y\rangle = -t|y|\}} e^{\langle y,x\rangle} dx\, dt\right)^2 \\ &= \left(\int_0^\infty (t|y|)^n e^{-t|y|} dt\right)^2 \left(\int_{K_y} \mathbf{1}\, dx\right)^2 = \frac{(n!)^2}{|y|^2} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{K_y} dx\right)^2. \end{aligned}$$

Επιλύοντας ως προς $\det \mathrm{Hess}\Lambda_V(y)$ καταλήγουμε στη ζητούμενη σχέση. □

Στο επόμενο λήμμα βρίσκουμε, όπως προεξοφλήσαμε στην αρχή της παραγράφου, σημείο $y \in \mathrm{int}(V^*)$ με επιπλέον υποθέσεις ώστε $L_{K_y} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}}$, όπου $C_1$ απόλυτη θετική σταθερά και $\varepsilon$ δοθέν.

**Λήμμα 6.4.3.** *Έστωσαν $V \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$ γνήσιος κυρτός κώνος, $y_0 \in \mathrm{int}(V^*)$ και $\varepsilon \in (0,1)$. Τότε υπάρχει $y \in \mathrm{int}(V^*)$ ώστε $y \in S := (y_0 + V^*) \cap ((1+\varepsilon)y_0 - V^*)$ και $L_{K_y} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}}$, όπου $C_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Αν $\varepsilon \leqslant e^{-n}$, τότε $\frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}} \geqslant C_1\sqrt{e^n} \geqslant C_1\sqrt{n} \geqslant L_{K_y}$ για κατάλληλο $C_1 > 0$ από τα γνωστά άνω φράγματα για την ισοτροπική σταθερά, οπότε θα υποθέσουμε ότι $\varepsilon > e^{-n}$. Κατ' αρχάς

$$\mathrm{vol}_{n+1}(S) = \mathrm{vol}_{n+1}(V^* \cap (\varepsilon y_0 - V^*)) = \exp(-\Psi_{V^*}(\varepsilon y_0)),$$

επομένως το Θεώρημα 6.3.3 μας δίνει το φράγμα

$$\mathrm{vol}_{n+1}(S) \geqslant \exp(-\Lambda_{V^*}^*(\varepsilon y_0) - c_2 n),$$

το οποίο συνδυαζόμενο με την Πρόταση 6.2.5 γίνεται

$$\begin{aligned} \mathrm{vol}_{n+1}(S) &\geqslant \exp\left(2\log(n!) - (n+1)\log\left(\frac{n+1}{e}\right) + \log \overline{s}(K_y) - c_2 n - \Lambda_V(\varepsilon y_0)\right) \\ &= \exp\left(\log \frac{(n!)^2 e^{n+1}}{(n+1)^{n+1}} + \log \overline{s}(K_y) - c_2 n - \Lambda_V(\varepsilon y_0)\right) \\ &\geqslant \exp(n\log n - c_3 n + \log \overline{s}(K_y) - \Lambda_V(\varepsilon y_0)). \end{aligned}$$

Απ' την άλλη, η ανισότητα Bourgain-V. Milman (Θεώρημα 2.1.3) δίνει για $K$ κυρτό σώμα $s(K) \geqslant \left(\frac{c_5}{n}\right)^n$, άρα και $\overline{s}(K_y) \geqslant \left(\frac{c_5}{n}\right)^n$ (Ορισμοί 6.1.2 και 6.1.4). Έτσι τελικά

$$\mathrm{vol}_{n+1}(S) \geqslant \exp\left(n\log n - c_3 n + n\log\frac{c_5}{n} - \Lambda_V(\varepsilon y_0)\right) = \exp(-\Lambda_V(\varepsilon y_0) - c_6 n) \tag{6.4.1}$$

με $c_6 := c_3 - \log c_5$. Παρατηρούμε τώρα ότι για $y \in S$

$$\Lambda_V(y) \geqslant \Lambda_V((1+\varepsilon)y_0). \tag{6.4.2}$$

Για να το δούμε αυτό χρησιμοποιούμε τη σχέση

$$\Lambda_V(y) \geqslant \Lambda_V((1+\varepsilon)y_0) + \langle \nabla\Lambda_V((1+\varepsilon)y_0), y - (1+\varepsilon)y_0\rangle$$

(απόρροια της κυρτότητας της $\Lambda_V$) και το γεγονός ότι (από τον τρόπο που ορίσαμε το $S$), $y-(1+\varepsilon)y_0 \in -V^*$, όθεν

$$\langle y - (1+\varepsilon)y_0, \nabla\Lambda_V((1+\varepsilon)y_0)\rangle \geqslant 0.$$

Υπολογίζουμε τώρα πως

$$\begin{aligned}\int_S e^{2\Lambda_V(y)}dy &\geqslant \int_S e^{2\Lambda_V((1+\varepsilon)y_0)}dy = \mathrm{vol}_{n+1}(S)\cdot e^{2\Lambda_V((1+\varepsilon)y_0)}\\ &\geqslant \exp(-c_6 n + 2\Lambda_V((1+\varepsilon)y_0) - \Lambda_V(\varepsilon y_0))\\ &= \exp(-c_6 n + 2\Lambda_V(y_0) - 2(n+1)\log(1+\varepsilon) - \Lambda_V(y_0) + (n+1)\log\varepsilon)\end{aligned}$$

χάρις στην Πρόταση 6.2.2 (iv), άρα τελικά

$$\int_S e^{2\Lambda_V(y)}dy \geqslant \exp(\Lambda_V(y_0) - c_6 n)\cdot\left(\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\right)^{n+1}. \tag{6.4.3}$$

Αφού η $\nabla\Lambda_V$ είναι αμφιδιαφόριση (Πόρισμα 6.2.8) μπορούμε να γράψουμε, κάνοντας αλλαγή μεταβλητών:

$$\mathrm{vol}_{n+1}(\nabla\Lambda_V(S)) = \int_{\nabla\Lambda_V(S)} \mathbf{1}\, dx = \int_S \det\,\mathrm{Hess}\Lambda_V(y)\, dy,$$

άρα σύμφωνα με την Πρόταση 6.2.10 και το Λήμμα 6.4.2,

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{n+1}((n+1)C_{y_0}) &\geqslant \mathrm{vol}_{n+1}(\nabla\Lambda_V(y_0+V^*)) \geqslant \mathrm{vol}_{n+1}(\nabla\Lambda_V(S))\\ &= \frac{(n+1)^{n+1}(n+2)^n}{(n!)^2}\int_S e^{2\Lambda_V(y)}L_{K_y}^{2n}\, dy.\end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τον όγκο του $(n+1)C_{y_0}$ παρατηρούμε ότι όπως στην αρχή της απόδειξης του Λήμματος 6.1.7,

$$e^{\Lambda_V(y_0)} = \int_V e^{\langle y_0, x\rangle}dx = \frac{n!}{|y_0|}\mathrm{vol}_n(K_{y_0}) = (n+1)!\mathrm{vol}_{n+1}(C_{y_0}),$$

άρα

$$\mathrm{vol}_{n+1}((n+1)C_{y_0}) = \frac{(n+1)^{n+1}e^{\Lambda_V(y_0)}}{(n+1)!},$$

οπότε συνάγεται ότι

$$\begin{aligned}\frac{(n+1)^{n+1}e^{\Lambda_V(y_0)}}{(n+1)!} &\geqslant \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}\frac{(n+2)^n}{n!}\int_S e^{2\Lambda_V(y)}L_{K_y}^{2n}\, dy \geqslant \int_S e^{2\Lambda_V(y)}L_{K_y}^{2n}\, dy\\ &\geqslant \inf_{y\in S} L_{K_y}^{2n}\cdot\int_S e^{2\Lambda_V(y)}dy.\end{aligned} \tag{6.4.4}$$

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (6.4.3) και (6.4.4) παίρνουμε άμεσα

$$\frac{(n+1)^n}{n!} \geqslant \left(\inf_{y\in S} L_{K_y}^{2n}\right) e^{-c_6 n} \left(\frac{\varepsilon}{(1+\varepsilon)^2}\right)^{n+1},$$

επομένως

$$\inf_{y\in S} L_{K_y}^{2n} \leqslant \frac{(n+1)^n}{n!} e^{c_6 n} \left(\frac{(1+\varepsilon)^2}{\varepsilon}\right)^{n+1} < \frac{c_7^n}{\varepsilon^{n+1}},$$

όπου $c_7 := e^{c_6}$. Άρα υπάρχει $y \in S$ ώστε

$$L_{K_y}^{2n} \leqslant \frac{c_7^n}{\varepsilon^{n+1}} \leqslant \frac{c_7^n}{e^{-n}\varepsilon^n} = \left(\frac{c_8}{\varepsilon}\right)^n,$$

με $c_8 := c_7 e$ και τελικά

$$L_{K_y} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

όπου $C_1 := \sqrt{c_8}$. □

Για να αποδείξουμε τώρα το Θεώρημα 6.4.1, θα επανέλθουμε στο σώμα $K$ στις $n$ διαστάσεις και θα το τοποθετήσουμε μέσα σε έναν κώνο $n+1$ διαστάσεων συνδέοντάς το πλέον με τα προεκτεθέντα σε αυτήν και τις προηγούμενες παραγράφους. Θα θεωρούμε σαν συνάρτηση προβολής από τον $\mathbb{R}^{n+1}$ στον $\mathbb{R}^n$ την $\pi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $\pi(t,x) = x$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$.

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 6.4.1. Έστω λοιπόν κεντραρισμένο κυρτό σώμα $K \subseteq \mathbb{R}^n$ και $\varepsilon' \in (0,1/2)$. Θεωρούμε τον γνήσιο κυρτό κώνο $V = \{(t,tx) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : t \geqslant 0, x \in K\}$. Θεωρούμε επίσης τα σημεία $e := (1,0) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n$ και $y_0 = -e$. Είναι προφανές ότι $y_0 \in \mathrm{int}(V^*)$, άρα σύμφωνα με το Λήμμα 6.4.3 υπάρχει $y \in \mathrm{int}(V^*)$ ώστε $L_{K_y} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon'}}$ και μάλιστα $y + e \in V^* \cap (-\varepsilon' e - V^*)$.

Γράφουμε $y := (y_1, \pi(y))$, $y_1 \in \mathbb{R}$, $\pi(y) \in \mathbb{R}^n$. Έτσι

$$K_y = \{(t,tx) : t \geqslant 0, x \in K, ty_1 + \langle tx, \pi(y)\rangle = -1\}.$$

Συμβολίζουμε ακόμη $T_0 := \pi(K_y) \subseteq \mathbb{R}^n$, επομένως

$$T_0 = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leqslant -\frac{1+\langle x, \pi(y)\rangle}{y_1}\right\}.$$

Τέλος, παρατηρούμε ότι $K_{y_0} = \{1\}\times K$ και $\mathrm{bar}(K_{y_0}) = (1, \mathrm{bar}(K)) = e$.

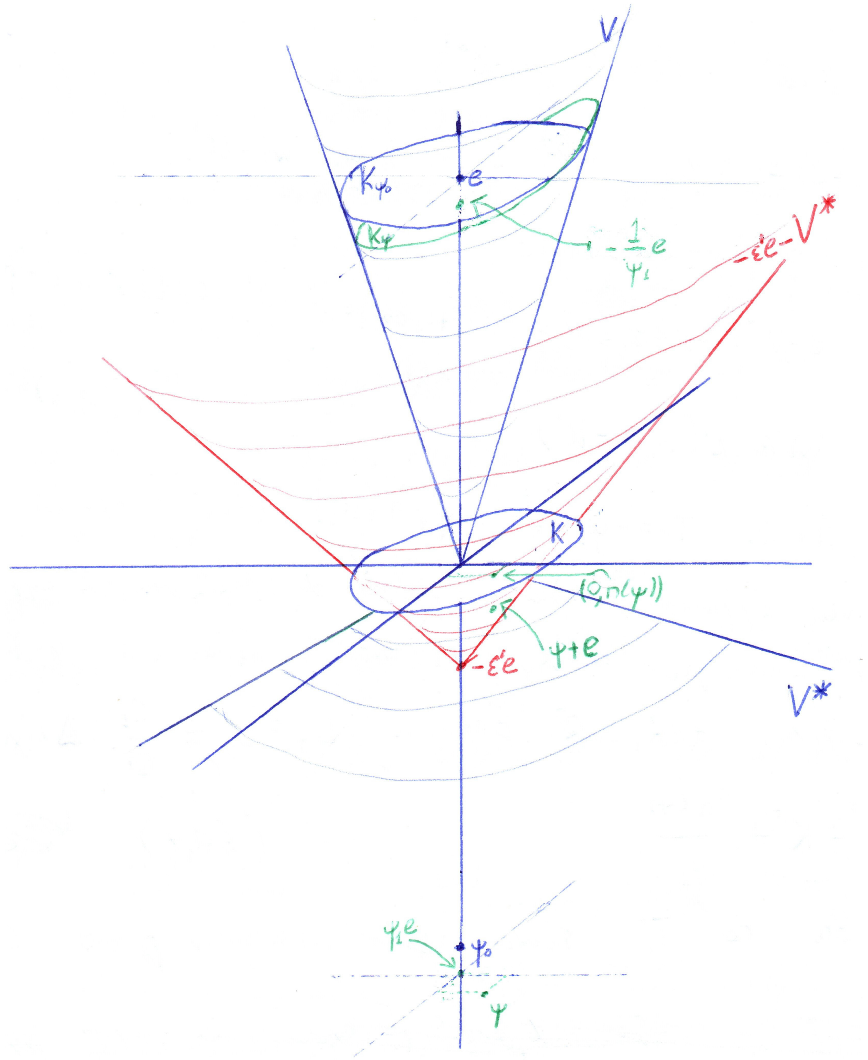
Το παρακάτω σχήμα σχεδιασμένο με $n = 2$ (οπότε $n+1 = 3$), τοποθετεί στο χώρο τα παραπάνω και θα βοηθήσει στην εποπτεία της απόδειξης.

Αφού $y+e \in V^*$, πρέπει $\langle y+e, e\rangle \leqslant 0$, άρα $y_1 = \langle y, e\rangle \leqslant -1$ και παρόμοια αφού $y+(1+\varepsilon')e \in V^*$ καταλήγουμε στην ανισότητα

$$-1-\varepsilon' \leqslant y_1 \leqslant -1. \tag{6.4.5}$$

Από την σχέση (6.4.5) απορρέουν κάποιες ιδιότητες του σημείου $y$ που θα μας οδηγήσουν στην κατασκευή του σώματος $T \subseteq \mathbb{R}^n$. Κατ' αρχάς $\pi(y) \in \varepsilon' K^\circ$. Πράγματι, σύμφωνα με την (6.4.5),

$$\begin{aligned} y+e &\in \{z \in V^* : -\varepsilon' \leqslant z_1 \leqslant 0, \text{ όπου } z = (z_1, \pi(z)) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n\} \\ &= \{(t,tw) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}^n : -\varepsilon' \leqslant t \leqslant 0, w \in -K^\circ\}, \end{aligned}$$




άρα $\pi(y) = \pi(y+e) = tw$, όπου $t \in [-\varepsilon', 0]$ και $w \in -K^\circ$.

Αντίστοιχα, $\pi(y) \in -\varepsilon' K^\circ$ αφού

$$y + e \in \{z \in -\varepsilon' e - V^* : -\varepsilon' \leqslant z_1 \leqslant 0\} = \{(-\varepsilon' + t, tw) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n : 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon', w \in -K^\circ\}.$$

Τελικά

$$\pi(y) \in \varepsilon'(K^\circ \cap -K^\circ). \tag{6.4.6}$$

Θέτουμε λοιπόν $T := -y_1 T_0 = -y_1 \pi(K_y)$. Είναι προφανές ότι το $T$ είναι αφφινικώς ισοδύναμο με το $K_y$. Μάλιστα η αφφινική απεικόνιση που απεικονίζει το $K_y$ επί του $T$ είναι η $\varphi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}^n$, $\varphi(t,x) := -y_1 x$, $t \in \mathbb{R}$, $x \in \mathbb{R}^n$. Επομένως $L_T = L_{K_y} \leqslant \frac{C_1}{\sqrt{\varepsilon'}}$. Δείχνουμε τώρα ότι

$$T^\circ = K^\circ + \frac{\pi(y)}{y_1}, \tag{6.4.7}$$

δηλαδή ότι το $T^\circ$ είναι μετατόπιση του $K^\circ$.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$T_0 = \pi(K_y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leqslant -\frac{1 + \langle x, \pi(y)\rangle}{y_1} \right\}.$$

Έπεται ότι $\|x\|_{T_0} = -y_1\|x\|_K - \langle x, \pi(y)\rangle$. Έστω τώρα $z \in \mathbb{R}^n$. Τότε $z \in T_0^\circ$ αν και μόνο αν $\langle z, x\rangle \leqslant 1$ για κάθε $x \in T_0$, δηλαδή αν και μόνο αν $\langle z, x\rangle \leqslant \|x\|_{T_0}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, που τελικά με βάση τα παραπάνω δίνει $\langle z + \pi(y), x\rangle \leqslant -y_1\|x\|_K$, ισοδύναμα $h_K(z + \pi(y)) \leqslant -y_1$, ή αλλιώς $z + \pi(y) \in -y_1 K^\circ$. Αποδείξαμε ότι $T_0^\circ = -y_1 K^\circ - \pi(y)$, άρα $-y_1 T^\circ = -y_1 K^\circ - \pi(y)$, που είναι η ζητούμενη σχέση.

Απομένει να δείξουμε και ότι το $T$ επαληθεύει και την ιδιότητα (i) του θεωρήματος. Ακριβέστερα, θα δείξουμε ότι η σχέση $(1-\varepsilon)K \subseteq T \subseteq (1+\varepsilon)K$, $\varepsilon = 2\varepsilon'$, ικανοποιείται χαλαρώνοντας τη σταθερά $C_1$ σε $C := \sqrt{2}C_1$. Το επιχείρημα είναι το εξής:

Συνδυάζουμε τις σχέσεις (6.4.5) και (6.4.6) και λαμβάνουμε

$$\frac{\pi(y)}{y_1} \in \frac{\varepsilon'}{y_1}K^\circ = \frac{\varepsilon'}{-y_1}(-K^\circ) \subseteq \varepsilon'(-K^\circ),$$

και παρόμοια $\frac{\pi(y)}{y_1} \in \varepsilon' K^\circ$, όθεν

$$\frac{\pi(y)}{y_1} \in \varepsilon'(-K^\circ) \cap \varepsilon' K^\circ.$$

Έτσι, έχοντας ήδη την (ii), και συγκεκριμένα την $T^\circ = K^\circ + \frac{\pi(y)}{y_1}$ βρίσκουμε άμεσα $T^\circ \subseteq (1+\varepsilon')K^\circ$. Αντίστοιχα, αν γράψουμε $K^\circ = T^\circ - \frac{\pi(y)}{y_1}$, βρίσκουμε άμεσα $K^\circ \subseteq T^\circ + \varepsilon' K^\circ$, άρα $(1-\varepsilon')K^\circ \subseteq T^\circ$. Τελικά έχουμε

$$(1 - \varepsilon')K^\circ \subseteq T^\circ \subseteq (1 + \varepsilon')K^\circ,$$

επομένως

$$\frac{1}{1-\varepsilon'}K = ((1 - \varepsilon')K^\circ)^\circ \supseteq T \supseteq ((1 + \varepsilon')K^\circ)^\circ = \frac{1}{1+\varepsilon'}K \supseteq (1 - \varepsilon')K.$$

Χρησιμοποιώντας και την υπόθεση ότι $\varepsilon' < \frac{1}{2}$ καταλήγουμε στη σχέση

$$(1 + 2\varepsilon')K \supseteq T \supseteq (1 - \varepsilon')K.$$

Θέτοντας $\varepsilon := 2\varepsilon'$ και $C := \sqrt{2}c_1$, έχουμε όντως δείξει ότι για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ ισχύει

$$(1 + \varepsilon)K \supseteq T \supseteq (1 - \varepsilon/2)K \supseteq (1 - \varepsilon)K$$

και $L_T \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{\varepsilon'}} = \frac{C}{\sqrt{\varepsilon}}$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

# Η εικασία KLS και το έργο του Yuansi Chen

Τον Νοέμβριο του 2020, και ενώ η εκπόνηση της παρούσης είχε ήδη ξεκινήσει, ο Yuansi Chen προσδιόρισε ένα σχεδόν σταθερό κάτω φράγμα για τον ισοπεριμετρικό συντελεστή της εικασίας KLS, σε μια δημοσίευση στη Ζυρίχη.

Η εικασία KLS (από τα αρχικά των Kannan, Lovász και Simonovits), την οποία θα παρουσιάσουμε εν συντομία, έχει πολλές εφαρμογές στην ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία, μία εκ των οποίων είναι ότι συνεπάγεται την εικασία του υπερεπιπέδου. Έτσι, η πρόοδος της γνώσης μας για την εικασία KLS επιφέρει μία αντίστοιχη πρόοδο στην γνώση μας για την εικασία του υπερεπιπέδου.

## 7.1 Η εικασία KLS και η εικασία του υπερεπιπέδου

Παραθέτουμε στην παράγραφο αυτή τα μέχρι πρότινος κεντρικά αποτελέσματα όσον αφορά στην εικασία KLS, καθώς και τη σύνδεση της εικασίας αυτής με την εικασία του υπερεπιπέδου. Υπενθυμίζουμε ότι αν $\mu$ Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $A \subseteq \mathbb{R}^n$ Borel, τότε για $t > 0$ συμβολίζουμε $A_t := \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, A) < t\}$ την $t$-επέκταση του $A$. Έτσι λοιπόν ορίζουμε το Minkowski περιεχόμενο του $A$ ως προς το μέτρο $\mu$ από τον παρακάτω τύπο:

$$\mu^+(A) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}.$$

Είναι προφανές ότι πρόκειται κατά κάποιο τρόπο για το «μέτρο» του συνόρου $\partial A$ που «επάγεται» από το μέτρο $\mu$. Ορίζουμε ακόμη, αν το $\mu$ επιπλέον είναι λογαριθμικά κοίλο, την σταθερά Cheeger του $\mu$ ως

$$\mathrm{Is}_\mu = \inf\left\{\frac{\mu^+(A)}{\min\{\mu(A), 1 - \mu(A)\}} : A \subseteq \mathbb{R}^n, A \text{ Borel}\right\}.$$

Τελικά ορίζουμε, για $n \in \mathbb{N}$, την παράμετρο

$$\mathrm{Is}_n := \min\{\mathrm{Is}_\mu : \mu \text{ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον } \mathbb{R}^n\}$$

και διατυπώνουμε την εικασία KLS:

**Εικασία 7.1.1** (Kannan-Lovász-Simonovits)**.** Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $\mathrm{Is}_n \geqslant c$. Ισοδύναμα, $\mathrm{Is}_\mu \geqslant c$ για κάθε $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$.

Η σταθερά Cheeger $\mathrm{Is}_\mu$ αποτελεί περίπτωση «ισοπεριμετρικής σταθεράς» ενός μέτρου $\mu$. Άλλες ισοπεριμετρικές σταθερές είναι η σταθερά Poincaré

$$\mathrm{Poin}_\mu := \inf\left\{\frac{1}{\mathrm{Var}_\mu(f)}\int_{\mathbb{R}^n}\|\nabla f\|_2^2 d\mu : f \text{ τοπικά Lipschitz στον } \mathbb{R}^n,\ \text{τετραγωνικά ολοκληρώσιμη}\right\},$$

η σταθερά εκθετικής συγκέντρωσης

$$\mathrm{Exp}_\mu := \inf\left\{\frac{1}{t}\big(1-\log\mu(\{x\in\mathbb{R}^n : |f(x)-\mathbb{E}_\mu(f)|\geqslant t\})\big) : t>0, f \text{ 1-Lipschitz ολοκληρώσιμη}\right\},$$

και η σταθερά πρώτης ροπής

$$\mathrm{FM}_\mu := \inf\left\{\big(\|f-\mathbb{E}_\mu(f)\|_{L_1(\mu)}\big)^{-1} : f \text{ 1-Lipschitz ολοκληρώσιμη}\right\},$$

ωστόσο ένα θεώρημα του E. Milman δείχνει ότι όλες είναι ισοδύναμες:

$$\mathrm{Is}_\mu \simeq \sqrt{\mathrm{Poin}_\mu} \simeq \mathrm{Exp}_\mu \simeq \mathrm{FM}_\mu.$$

Ακόμη, οι Kannan, Lovász και Simonovits όρισαν τον ισοπεριμετρικό συντελεστή ενός κυρτού σώματος $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ως εξής:

$$\psi(K) := \inf\left\{\frac{\mathrm{vol}_n(K)\cdot\mu_K^+(A)}{\mathrm{vol}_n(A)\cdot\mathrm{vol}_n(K\setminus A)} : A\subseteq K \text{ μετρήσιμο}\right\},$$

όπου $\mu_K$ είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στο $K$. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$\psi(K) \simeq \mathrm{Is}_{\mu_K}.$$

**Εικασία 7.1.2** (Kannan-Lovász-Simonovits για ισοτροπικά σώματα)**.** Για $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$,

$$\psi(K) \simeq \frac{1}{L_K}.$$

Οι ίδιοι οι Kannan, Lovász και Simonovits βρήκαν το φράγμα $\psi(K) \geqslant \frac{c}{\sqrt{n}L_K}$ με $c>0$ απόλυτη σταθερά και $\psi(K) \leqslant \frac{10}{L_K}$, αν το $K$ είναι ισοτροπικό.

Είναι φανερό από την τελευταία σχέση, ότι η εύρεση ομοιόμορφου κάτω φράγματος για την $\psi(K)$ συνεπάγεται καταφατική απάντηση στην εικασία της ισοτροπικής σταθεράς. Εδώ θα εργαστούμε στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων. Ακολουθώντας τον Yuansi Chen, ορίζουμε τον ισοτροπικό συντελεστή της $f$,

$$\psi(f) := \inf_{S\subseteq\mathbb{R}^n}\left(\frac{f^+(S)}{\min\{f(S), f(S^c)\}}\right),$$

με τους προφανείς συμβολισμούς

$$f(S) = \int_S f(x)\,dx \quad \text{και} \quad f^+(S) = \lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{\int_{S_\varepsilon} f(x)\,dx - \int_S f(x)\,dx}{\varepsilon}.$$

Φυσικά, είναι έννοια ταυτόσημη με τη σταθερά Cheeger. Αφαιρώντας την παραδοχή της ισοτροπικότητας, η Εικασία 7.1.1 διατυπώνεται ως εξής:

**Εικασία 7.1.3** (KLS για λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα)**.** Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε για κάθε λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα $f$ στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύει

$$\psi(f) \geqslant \frac{c}{\sqrt{\|\mathrm{Cov}(f)\|_2}},$$

όπου $\|A\|_2$ η φασματική νόρμα ενός συμμετρικού πίνακα $A$, που είναι ίση με την τετραγωνική ρίζα της φασματικής ακτίνας του $A^2$.

Ένας ακόμη τρόπος διατύπωσης της εικασίας KLS είναι ο παρακάτω:

**Εικασία 7.1.4** (διατύπωση της KLS με υπερεπίπεδα και ημιχώρους)**.** Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ κυρτό σώμα. Τότε,

$$\psi(K) = \inf\left\{\frac{\mathrm{vol}_n(K)\cdot \mu_K^+(H)}{\mathrm{vol}_n(H)\cdot \mathrm{vol}_n(K\setminus H)} : H \subseteq K \text{ ημιχώρος}\right\},$$

όπου ως ημιχώρος νοείται η μία από τις δύο συνεκτικές συνιστώσες στις οποίες χωρίζεται το $K$ από ένα υπερεπίπεδο.

Μία ακόμη παρατήρηση (βλ. [17]) είναι ότι το infimum που ορίζει την $\psi(K)$ (αντίστοιχα $\psi(f)$) μπορεί να ληφθεί προσεγγιστικά (δηλαδή έως σταθερά) πάνω από τα σύνολα $K$ (αντίστοιχα $S$) μέτρου $\frac{1}{2}\mathrm{vol}_n(K)$ (αντίστοιχα $1/2$), δηλαδή

$$\psi(K) = \inf\left\{\frac{4\mu_K^+(A)}{\mathrm{vol}_n(K)} : A \subseteq K, \mathrm{vol}_n(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(K)}{2}\right\},$$

αντίστοιχα

$$\psi(f) = \inf\left\{2f^+(S) : S \subseteq \mathbb{R}^n, \int_S f(x)\,dx = \frac{1}{2}\right\}.$$

Ποια ήταν τα γνωστά κάτω φράγματα, μέχρι στιγμής, για την παράμετρο

$$\psi_n := \inf\{\psi(f) : f \text{ λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον } \mathbb{R}^n\};$$

Ενδεικτικά αναφέρουμε τα:

(i) $\psi_n \geqslant cn^{-1/2}$, (KLS, 1995),

(ii) $\psi_n \geqslant cn^{-0.46}$, (Klartag, 2007),

(iii) $\psi_n \geqslant cn^{-7/16}$, (Fleury, 2009),

(iv) $\psi_n \geqslant cn^{-5/12}$, (Guédon-E. Milman, 2011),

(v) $\psi_n \geqslant cn^{-1/3}\log n$, (Eldan, 2013), και

(vi) $\psi_n \geqslant cn^{-1/4}$, (Lee-Vempala, 2017),

όπου η απόλυτη θετική σταθερά $c$ παίρνει ενδεχομένως διαφορετική τιμή σε κάθε ένα από αυτά.

## 7.2 Το θεώρημα του Chen

Ερχόμαστε τώρα στο έργο του Y. Chen. Δεν θα αποδείξουμε το θεώρημα που απέδειξε αυτός στη μέγιστη γενικότητα, αλλά, ακολουθώντας τις διαλέξεις του Klartag (Ιανουάριος 2021) θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη του παρακάτω αποτελέσματος, που είναι αυτό κατ' ουσίαν που μας απασχολεί.

**Θεώρημα 7.2.1** (Chen, 27/11/2020)**.** *Με τον συμβολισμό*

$$\psi_n = \inf\{\psi_\mu : \mu \text{ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον } \mathbb{R}^n\},\ \psi_\mu := \mathrm{Is}_\mu$$

*υπάρχουν $C, c > 0$ απόλυτες σταθερές τέτοιες ώστε*

$$\psi_n \geqslant C\exp(-c\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log(\log n)}).$$

Παρατηρήστε ότι αυτό το φράγμα είναι καλύτερο από οποιοδήποτε φράγμα της μορφής $c_1 n^{-p}$, όπου $c_1, p$ θετικές σταθερές. Πράγματι,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{C\exp(-c\sqrt{\log n}\cdot\sqrt{\log(\log n)})}{c_1 n^{-p}} = \frac{C}{c_1}\exp\Big(\lim_{u\to\infty} -c\sqrt{u}\cdot\sqrt{\log u}+pu\Big) = +\infty.$$

Επομένως πρόκειται για πολύ σημαντικό βήμα προόδου.

Προτού προχωρήσουμε στην περιγραφή της απόδειξης, θα διατυπώσουμε χωρίς απόδειξη κάποια προαπαιτούμενα. Υπενθυμίζουμε ότι αν $A, B$ είναι συμμετρικοί $n\times n$ πίνακες τότε $A \geqslant B$ αν $\langle Ax, x\rangle \geqslant \langle Bx, x\rangle$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$.

**Θεώρημα 7.2.2** (Bakry-Ledoux)**.** *Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα $\frac{d\mu}{dx} = e^{-\rho}$, όπου $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\mathrm{Hess}(\rho)(x) \geqslant t\cdot I_n$ για κάποιον $t > 0$. Τότε*

$$\psi_\mu \geqslant c\sqrt{t}.$$

*Σημείωση:* Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι το $\mu$ είναι «πιο λογαριθμικά κοίλο από γκαουσιανό».

Θυμίζουμε τώρα την έννοια του martingale.

**Ορισμός 7.2.3.** Αν $(X_t)_{t\geqslant 0}$ είναι μια συνεχής στοχαστική διαδικασία και $\mathcal{F}_t$ είναι η $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται από το $\{X_s : 0\leqslant s\leqslant t\}$, θα λέμε ότι η $(X_t)_{t\geqslant 0}$ είναι ένα martingale αν $\mathbb{E}(X_t|\mathcal{F}_t) = X_t$. Αντίστοιχα ορίζεται το martingale για διακριτή στοχαστική διαδικασία.

Σχετικά με τα martingales ισχύει το παρακάτω θεώρημα:

**Θεώρημα 7.2.4** (θεώρημα βέλτιστης διακοπής)**.** *Έστω $(X_t)_{t\geqslant 0}$ ένα martingale και $\tau > 0$. Ορίζουμε $\Psi_t^{(\tau)} = X_t$ αν $t\leqslant\tau$ και $\Psi_t^{(\tau)} = X_\tau$ αν $t > \tau$ (η παράμετρος $\tau$ ονομάζεται στιγμή της διακοπής). Τότε η στοχαστική διαδικασία $(\Psi_t^{(\tau)})_{t\geqslant 0}$ είναι επίσης martingale.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1 στηρίζεται σε μία παραλλαγή του σχήματος στοχαστικής τοπικοποίησης του Eldan, από τους Lee και Vempala. Θα ξεκινήσουμε κατασκευάζοντας μια διακριτή στοχαστική διαδικασία $(p_t(x))_{t\geqslant 0}$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, όπου $p_0$ η (λογαριθμικά κοίλη) πυκνότητα του $\mu$. Η διαδικασία θα είναι «τυχαία»: θα μετατοπίζουμε την κατανομή μάζας του $\mu$ προς μία τυχαία κατεύθυνση κάθε φορά. Το χρονικό βήμα της διαδικασίας αρχικά θα είναι σταθερό $\Delta t = \varepsilon > 0$, ωστόσο παρακάτω θα αφήσουμε $\varepsilon \to 0$ και η διαδικασία θα γίνει «συνεχής».

Ακριβέστερα: θεωρούμε για αρχή $Z_0, Z_\varepsilon, Z_{2\varepsilon}, \dots$ μια ακολουθία τυχαίων διανυσμάτων με ομοιόμορφη κατανομή στην $\sqrt{n}S^{n-1}$ και για $t \in \varepsilon\mathbb{N}$ θέτουμε

$$p_{t+\varepsilon}(x) = (1 + \langle x - \mathrm{bar}(p_t), \sqrt{\varepsilon} Z_t\rangle) p_t(x).$$

Για κάθε $k \in \mathbb{N}$, το μέτρο με πυκνότητα $p_{k\varepsilon}$ είναι λογαριθμικά κοίλο. Επειδή τα $Z_t$ έχουν συμμετρική κατανομή, ισχύει

$$\mathbb{E} p_{k\varepsilon}(x) = p_0(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $k \in \mathbb{N}$. Μάλιστα η στοχαστική διαδικασία $(p_t)_{t\in\varepsilon\mathbb{N}}$ είναι ένα martingale. Τα αυτά ισχύουν αν απαιτήσουμε τα $Z_t$ να ακολουθούν τυπική γκαουσιανή κατανομή. Προτιμάμε αυτή την επιλογή για να θέσουμε $\sqrt{\varepsilon} Z_t = W_{t+\varepsilon} - W_\varepsilon =: \Delta W_t$, όπου $(W_t)_{t\geqslant 0}$ διανύσματα που ακολουθούν την κίνηση Brown στον $\mathbb{R}^n$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0$ παίρνουμε τη στοχαστική διαφορική εξίσωση

$$dp_t(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{p_{t+\varepsilon}(x) - p_t(x)}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left\langle x - \mathrm{bar}(p_t), \sqrt{\varepsilon} Z_t \right\rangle p_t(x) = \langle x - \mathrm{bar}(p_t), dW_t\rangle p_t(x) \tag{7.2.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $t > 0$.

Η ομαλότητα της $p_t$ μας εξασφαλίζει ύπαρξη και μοναδικότητα της λύσης της εξίσωσης αυτής. Η $p_t(x)$ εξακολουθεί να είναι martingale και στη συνεχή περίπτωση, σύμφωνα με τον Ορισμό 7.2.3. Επίσης, σχεδόν βεβαίως, η $p_t$ είναι συνεχής πυκνότητα πιθανότητας στο $\mathrm{supp}(p_0)$.

**Λήμμα 7.2.5.** *Για $x \in \mathbb{R}^n$ και την στοχαστική διαδικασία $(p_t(x))_{t\geqslant 0}$ που κατασκευάσαμε, το μέτρο με πυκνότητα $p_t$ είναι σχεδόν βεβαίως πιο λογαριθμικά κοίλο από γκαουσιανό. Ακριβέστερα, αν $p_t = \exp(-\rho_t)$, τότε $\mathrm{Hess}(\rho_t)(x) = \mathrm{Hess}(\rho_0)(x) + t\cdot I_n \geqslant t\cdot I_n$, με την ανισότητα να προκύπτει από το γεγονός ότι το $\mu$ είναι λογαριθμικά κοίλο.*

**Πόρισμα 7.2.6.** *Για κάθε $E \subseteq \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο,*

$$p_t^+(E) \geqslant c_2\sqrt{t}\min\{p_t(E), 1 - p_t(E)\},$$

*όπου $c_2 = \sqrt{2/\pi}$, με τον γνωστό συμβολισμό $p_t(E) = \int_E p_t(x)\,dx$.*

*Απόδειξη.* Άμεση από τον ορισμό του ισοπεριμετρικού συντελεστή, το Θεώρημα 7.2.2 και το Λήμμα 7.2.5. □

Αποδεικνύουμε τώρα άλλο ένα κεντρικό λήμμα.

**Λήμμα 7.2.7.** *Έστω $T \in (0,1]$ και $(p_t(x))_{t\geqslant 0}$ όπως πριν. Υποθέτουμε ακόμη ότι*

$$\int_0^T \mathbb{E}\,\|\mathrm{Cov}(p_t)\|\,dt \leqslant \frac{1}{8}.$$

*Τότε $\psi_{p_t} \geqslant c_3\sqrt{T}$, όπου $c_3 > 0$ απόλυτη σταθερά και η $\|\cdot\|$ έχει την έννοια της νόρμας τελεστών:*

$$\|\mathrm{Cov}(p_t)\| = \sup_{\vartheta\in S^{n-1}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \langle x - \mathrm{bar}(p_t), \vartheta\rangle^2 p_t(x)\,dx \right)^{1/2}.$$

*Απόδειξη.* Σύμφωνα με το Πόρισμα 7.2.6 και το γεγονός ότι η $(p_t)_{t\geqslant 0}$ είναι martingale, γνωρίζουμε ότι αν $E\subseteq \mathbb{R}^n$ μετρήσιμο τότε για κάθε $t>0$

$$p_0^+(E)=\mathbb{E}p_t^+(E)\geqslant c_2\sqrt{t}\mathbb{E}\min\{p_t(E),1-p_t(E)\}\geqslant c_2\sqrt{t}\mathbb{E}(p_t(E)(1-p_t(E))). \tag{7.2.2}$$

Απ' την άλλη, σύμφωνα με τα σχόλια μετά την Εικασία 7.1.4, μπορούμε να απαιτήσουμε $p_0(E)=\frac{1}{2}$. Για κάθε τέτοιο $E$, η $(p_t(E))_{t\geqslant 0}$ είναι martingale και λόγω της (7.2.1) ισχύει

$$d(p_t(E))=\int_E\langle x-\mathrm{bar}(p_t),dW_t\rangle p_t(x)dx=\Big\langle \int_E (x-\mathrm{bar}(p_t))p_t(x)dx,dW_t\Big\rangle.$$

Με τον συμβολισμό $V_t(E):=\int_E (x-\mathrm{bar}(p_t))p_t(x)dx$, έχουμε

$$\begin{aligned}|V_t(E)|&=\sup_{\vartheta\in S^{n-1}}\int_E\langle x-\mathrm{bar}(p_t),\vartheta\rangle p_t(x)dx\leqslant \sup_{\vartheta\in S^{n-1}}\left(\int_E\langle x-\mathrm{bar}(p_t),\vartheta\rangle^2 p_t(x)dx\right)^{1/2}\\&=\|\mathrm{Cov}(p_t)\|^{1/2}\end{aligned}$$

χάρις στην ανισότητα Cauchy-Schwarz. Παράλληλα, ο τύπος του Itô στη συνάρτηση $f(x)=x(1-x)$ δίνει

$$\begin{aligned}d(p_t(E)(1-p_t(E)))&=(1-2p_t(E))d(p_t(E))+\frac{1}{2}(-2)|V_t(E)|^2dt\\&=(1-2p_t(E))d(p_t(E))-|V_t(E)|^2dt\\&\geqslant (1-2p_t(E))d(p_t(E))-\|\mathrm{Cov}(p_t)\|.\end{aligned}$$

Λαμβάνοντας μέσες τιμές για $t=T$ και χρησιμοποιώντας ξανά την ιδιότητα martingale βρίσκουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(p_T(E)(1-p_T(E)))&\geqslant p_0(E)(1-p_0(E))-\mathbb{E}\int_0^T\|\mathrm{Cov}(p_t)\|\,dt\\&=\frac{1}{4}-\mathbb{E}\int_0^T\|\mathrm{Cov}(p_t)\|\,dt\geqslant\frac{1}{8},\end{aligned}$$

όπου για το τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση του λήμματος. Συνδυάζοντας με την (7.2.2) βρίσκουμε

$$p_0^+(E)\geqslant\frac{c_2}{8}\sqrt{T},$$

άρα τελικά $\psi_{p_0}\geqslant c_3\sqrt{T}$. □

Επόμενο βήμα είναι να αποδείξουμε ότι για $q\geqslant 3$ η ποσότητα

$$\Gamma_{t,q}:=\mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(p_t)^q)$$

δεν μεγαλώνει υπερβολικά καθώς το $t$ μεγαλώνει. Θυμίζουμε ότι $\Gamma_{0,q}=n$ για κάθε $q\geqslant 3$, αφού το $\mu$ είναι ισοτροπικό.

Μπορεί κανείς να δείξει τις παρακάτω ιδιότητες των $\Gamma_{t,q}$.

**Πρόταση 7.2.8.** *Για το στοχαστικό διαφορικό $d\Gamma_{t,q}$ ισχύουν τα φράγματα*

$$d\Gamma_{t,q}\leqslant\frac{2q^2\Gamma_{t,q}dt}{t}+M_t$$

*και*

$$d\Gamma_{t,q} \leqslant \frac{c_4 q^2 \|\mathrm{Cov}(p_t)\| \Gamma_{t,q} dt}{\psi_n^2} + N_t,$$

*όπου* $c_4 > 0$ *απολύτη σταθερά και οι στοχαστικές διαδικασίες* $(M_t)_{t\geqslant 0}$ *και* $(N_t)_{t\geqslant 0}$ *είναι martingales.*

Δεν θα υπεισέλθουμε στις λεπτομέρειες της απόδειξης, απλά αναφέρουμε περιληπτικά ότι γράφουμε

$$d\Gamma_{t,q} = \delta_t dt + \langle V_t, dW_t\rangle$$

(ο τελευταίος όρος είναι martingale) και δείχνουμε ότι

$$\delta_t \leqslant 2q^2 \min\left\{\frac{1}{t}, \frac{c_5\|\mathrm{Cov}(p_t)\|}{\psi_n^2}\right\}\Gamma_{t,q},$$

όπου $c_5 > 0$ απόλυτη σταθερά. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε κατά ουσιώδη τρόπο το πλεονέκτημα ότι το $p_t$ είναι πιο λογαριθμικά κοίλο από γκαουσιανό.

**Πόρισμα 7.2.9.** *Με τους παραπάνω συμβολισμούς και για κάθε* $t > s > 0$ *ισχύει η εκτίμηση*

$$\mathbb{E}\,\Gamma_{t,q}^{1/q} \leqslant \left(\frac{t}{s}\right)^{2q} \mathbb{E}\Gamma_{s,q}^{1/q}.$$

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε τον τύπο του Itô για την $f(x) = x^{1/q}$ και λαμβάνουμε

$$d\Gamma_{t,q}^{1/q} \leqslant \frac{1}{q}\Gamma_{t,q}^{1/q-1} d\Gamma_{t,q} + \text{martingale},$$

αφού $f''(x) < 0$ για κάθε $x > 0$. Συνδυάζοντας την ανισότητα αυτή με την Πρόταση 7.2.8 βρίσκουμε

$$d\Gamma_{t,q}^{1/q} \leqslant \frac{\Gamma_{t,q}^{1/q} 2q dt}{t} + \text{martingale},$$

άρα, παίρνοντας μέσες τιμές,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}\Gamma_{t,q}^{1/q} \leqslant \frac{2q}{t}\mathbb{E}\Gamma_{t,q}^{1/q},$$

επομένως

$$\frac{d}{dt}\log \mathbb{E}\Gamma_{t,q}^{1/q} = \frac{\frac{d}{dt}\mathbb{E}\Gamma_{t,q}^{1/q}}{\mathbb{E}\Gamma_{t,q}^{1/q}} \leqslant \frac{2q}{t},$$

και τελικά

$$\begin{aligned}\log\frac{\mathbb{E}\Gamma_{t,q}^{1/q}}{\mathbb{E}\Gamma_{s,q}^{1/q}} &= \log \mathbb{E}\Gamma_{t,q}^{1/q} - \log \mathbb{E}\Gamma_{s,q}^{1/q} = \int_s^t \frac{d}{d\tau}\log \mathbb{E}\Gamma_{\tau,q}^{1/q}\, d\tau \\ &\leqslant \int_s^t \frac{2q}{\tau}\, d\tau = \log\left(\left(\frac{t}{s}\right)^{2q}\right),\end{aligned}$$

που είναι ακριβώς η ζητούμενη σχέση. □

**Πόρισμα 7.2.10.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $0 < c_6 < 1$ *ώστε: αν για τον χρόνο* $T$ *ισχύει* $T \leqslant c_6 \frac{\psi_n^2}{\log n}$ *τότε* $\mathbb{E}\,\|\mathrm{Cov}(p_t)\| \leqslant 3$ *και* $\mathbb{E}\Gamma_{t,q}^{1/q} \leqslant 3n^{1/q}$ *για κάθε* $t \in (0, T)$.

*Απόδειξη.* Για την πρώτη ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\|\mathrm{Cov}(p_t)\| \leqslant 2\right) \geqslant 1 - \frac{1}{n^{10}} \tag{7.2.3}$$

για κάθε $t \in (0,T)$. Πράγματι, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mathrm{supp}(p_0) \subseteq n^5 B_2^n$, οπότε και $\mathrm{supp}(p_t) \subseteq n^5 B_2^n$ για κάθε $t > 0$, το οποίο συνεπάγεται ότι $\|\mathrm{Cov}(p_t)\| \leqslant n^{10}$, άρα θα ισχύει

$$\mathbb{E}\,\|\mathrm{Cov}(p_t)\| \leqslant 2 + \mathbb{P}\big(\|\mathrm{Cov}(p_t)\| > 2\big) \cdot n^{10} \leqslant 3.$$

Για να αποδείξουμε την (7.2.3), θεωρούμε μία χρονική στιγμή $\tau$ διακοπής της στοχαστικής διαδικασίας ως εξής:

$$\tau := \inf\{t > 0 : \|\mathrm{Cov}(p_t)\| = 2\}.$$

Θεωρούμε τώρα τη στοχαστική διαδικασία $(X_t)_{t\geqslant 0}$ με $X_t = \Gamma_t$ αν $t \leqslant \tau$ και $X_t = \Gamma_\tau$ αν $t > \tau$, όπου $\Gamma_t := \Gamma_{t,q}$ για $q = \lfloor 40 \log n \rfloor$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 7.2.4, η $(X_t)_{t\geqslant 0}$ είναι επίσης martingale.

Από την Πρόταση 7.2.8 βρίσκουμε

$$d\Gamma_t \leqslant c_7 \left( \frac{q^2 \|\mathrm{Cov}(p_t)\| \Gamma_t \, dt}{\psi_n^2} + dM_t \right),$$

άρα

$$\Gamma_t - \Gamma_s \leqslant c_7 \left( \int_s^t \frac{q^2 \|\mathrm{Cov}(p_u)\| \Gamma_u}{\psi_n^2} du + M_t - M_s \right)$$

και τελικά

$$dX_t \leqslant \frac{c_8 q^2 X_t}{\psi_n^2} dt + \text{martingale}.$$

Παίρνοντας μέσες τιμές,

$$\frac{d}{dt}\mathbb{E}X_t \leqslant \frac{c_8 q^2}{\psi_n^2}\mathbb{E}X_t \leqslant \frac{c_8 \log^2 n}{\psi_n^2}\mathbb{E}X_t,$$

άρα για κάθε $t \in (0,T)$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}X_t &\leqslant X_0 \cdot \exp\left(\frac{c_8 \log^2 n}{\psi_n^2} t\right) = n \cdot \exp\left(\frac{c_8 \log^2 n}{\psi_n^2} t\right) \leqslant n \cdot \exp\left(\frac{c_8 \log^2 n}{\psi_n^2} T\right) \\ &\leqslant n \cdot \exp(\log n) = n^2,\end{aligned}$$

λόγω της υπόθεσης για το $T$. Απ' την άλλη,

$$\mathbb{E}X_t \geqslant \mathbb{P}(\tau < t) 2^q \geqslant \mathbb{P}(\tau < t) n^{20}.$$

Επομένως,

$$\mathbb{P}\left(\exists t \in [0,T] : \|\mathrm{Cov}(p_t)\| \geqslant 2\right) = \mathbb{P}(\tau < T) \leqslant \frac{\mathbb{E}X_t}{n^{20}} \leqslant \frac{1}{n^{18}},$$

που συνεπάγεται ότι για κάθε $t \in [0,T]$

$$\mathbb{P}\left(\|\mathrm{Cov}(p_t)\| \leqslant 2\right) \geqslant 1 - \frac{1}{n^{18}} \geqslant 1 - \frac{1}{n^{10}}.$$

Αντίστοιχα δείχνουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\Gamma_{t,q}^{1/q} \leqslant 2n^{1/q}\right) \geqslant 1 - \frac{1}{n^{18}}.$$

$\square$

*Απόδειξη του θεωρήματος του Chen.* Παρατηρούμε κατ' αρχάς ότι, αφού για κάθε $t > 0$ ο $\mathrm{Cov}(p_t)$ είναι συμμετρικός πίνακας, ισχύει ότι

$$\Gamma_{t,q}^{1/q} = \left[\mathrm{tr}(\mathrm{Cov}(p_t)^q)\right]^{1/q} = \|\mathrm{Cov}(p_t)\|_q.$$

Από το Πόρισμα 7.2.10, αν συμβολίσουμε $T_0 := c_6\frac{\psi_n^2}{\log n}$, τότε για κάθε $t \in (0, T_0)$,

$$\mathbb{E}\,\|\mathrm{Cov}(p_t)\| \leqslant 3 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}\,\|\mathrm{Cov}(p_{T_0})\|_q \leqslant 3n^{1/q}.$$

Αν $t > T_0$ τότε το Πόρισμα 7.2.9 δίνει, σε συνδυασμό με τα παραπάνω,

$$\mathbb{E}\,\|\mathrm{Cov}(p_t)\|_q \leqslant \left(\frac{t}{T_0}\right)^{2q} \mathbb{E}\,\|\mathrm{Cov}(p_{T_0})\|_q \leqslant \left(\frac{t}{T_0}\right)^{2q} 3n^{1/q}.$$

Για να μπορέσουμε να εκμεταλλευτούμε το Λήμμα 7.2.7, πρέπει να φράξουμε το ολοκλήρωμα της $\|\mathrm{Cov}(p_t)\|$ στο διάστημα $[0, T_1]$ ακόμη και για κάποιο $T_1 \gg T_0$. Έστω λοιπόν ένα τέτοιο $T_1$. Προσπαθούμε να πετύχουμε το φράγμα

$$\mathbb{E}\int_0^{T_1} \|\mathrm{Cov}(p_t)\|\,dt \leqslant \frac{1}{8}.$$

Προς την κατεύθυνση αυτή γράφουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\int_0^{T_1} \|\mathrm{Cov}(p_t)\|\,dt &\leqslant \mathbb{E}\int_0^{T_0} \|\mathrm{Cov}(p_t)\|\,dt + \mathbb{E}\int_{T_0}^{T_1} \|\mathrm{Cov}(p_t)\|_q\,dt \\ &\leqslant 3T_0 + \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2q} 3n^{1/q}(T_1 - T_0).\end{aligned}$$

Μπορούμε να απαιτήσουμε $T_0 < \frac{1}{100}$, οπότε τελικά

$$\mathbb{E}\int_0^{T_1} \|\mathrm{Cov}(p_t)\|\,dt \leqslant \frac{3}{100} + \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2q} 3n^{1/q}T_1.$$

Η κατάλληλη επιλογή για το $T_1$ είναι $T_1 = c_9 n^{-\frac{1}{q(2q+1)}} T_0^{\frac{2q}{2q+1}}$, όπου $c_9$ μικρή θετική σταθερά. Πράγματι, σε αυτή την περίπτωση,

$$\begin{aligned}\frac{3}{100} + \left(\frac{T_1}{T_0}\right)^{2q} 3n^{1/q}T_1 &= \frac{3}{100} + \left(\frac{c_9 n^{-\frac{1}{q(2q+1)}} T_0^{\frac{2q}{2q+1}}}{T_0}\right)^{2q} 3n^{1/q} c_9 n^{-\frac{1}{q(2q+1)}} T_0^{\frac{2q}{2q+1}} \\ &= \frac{3}{100} + 3c_9^{2q+1},\end{aligned}$$

οπότε για $c_9$ αρκετά μικρή, $\mathbb{E}\int_0^{T_1} \|\mathrm{Cov}(p_t)\|\,dt \leqslant \frac{1}{8}$ και το Λήμμα 7.2.7 δίνει

$$\psi_{p_0} \geqslant c_3\sqrt{T_1} \simeq n^{-\frac{1}{2q(2q+1)}} T_0^{\frac{q}{2q+1}} = \frac{n^{-\frac{1}{2q(2q+1)}} c_6^{\frac{q}{2q+1}} \psi_n^{\frac{2q}{2q+1}}}{(\log n)^{\frac{q}{2q+1}}}.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu$, παίρνουμε

$$\psi_n \geqslant \left(\frac{c_{10}}{\log n}\right)^q n^{-\frac{1}{2q}}.$$

Επιλέγουμε $q \simeq \sqrt{\frac{\log n}{\log(\log n)}}$ και μετά από πράξεις έχουμε $\psi_n \geqslant C \cdot \exp(-c\sqrt{\log n \cdot \log(\log n)})$. $\square$

# Βιβλιογραφία


[1] S. Alesker, *$\psi_2$-estimate for the Euclidean norm on a convex body in isotropic position*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Oper. Theory Adv. Appl. **77** (1995), 1-4.

[2] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs **202** (2015).

[3] K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbb{R}^n$*, Studia Math. **88** (1988), 69–84.

[4] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467-1476.

[5] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1469** (1991), 127–137.

[6] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Amer. Math. Society, Mathematical Surveys and Monographs **196** (2014).

[7] Y. Chen, *An Almost Constant Lower Bound of the Isoperimetric Coefficient in the KLS Conjecture*, Geom. Funct. Anal. **31** (2021), 34-61.

[8] S. Dar, *Remarks on Bourgain's problem on slicing of convex bodies*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Operator Theory: Advances and Applications **77** (1995), 61-66.

[9] B. Klartag, *An isomorphic version of the slicing problem*, J. Funct. Anal. **218** (2005), 372-394.

[10] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1274-1290.

[11] B. Klartag, *Isotropic constants and Mahler volumes*, Adv. Math. **330** (2018), 74–108.

[12] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform - A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10-34.

[13] B. Klartag and R. Vershynin, *Small ball probability and Dvoretzky theorem*, Israel J. Math. **157** (2007), 193-207.

[14] A. Litvak, V. D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95–124.

[15] E. Lutwak and G. Zhang, *Blaschke-Santaló inequalities*, J. Differential Geom. **47** (1997), 1-16.

[16] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *$L_p$ affine isoperimetric inequalities*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111-132.

[17] E. Milman, *On the role of convexity in isoperimetry, spectral gap and concentration*, Invent. Math. **177** (2009), no. 1, 1-43.

[18] V. D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed $n$-dimensional space*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1376** (1989), 64–104.

[19] V. D. Milman and A. Pajor, *Entropy and asymptotic geometry of non-symmetric convex bodies*, Adv. Math. 152 (2000), no. 2, 314–335.

[20] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[21] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1021-1049.

[22] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287-308.

[23] G. Pisier, *A new approach to several results of V. Milman*, J. Reine Angew. Math. **393** (1989), 115–131.

[24] G. Pisier, *The volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[25] R. T. Rockafellar, *Convex analysis*, Princeton Mathematical Series **28**, Princeton University Press, Princeton, NJ (1970).

[26] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[27] B-H. Vritsiou, *Further unifying two approaches to the hyperplane conjecture*, International Math. Research Notices (2014), no. 6, 1493-1514.