

Γεωμετρία τῶν ἰσοτροπικῶν λογαριθμικά-κοίλων μέτρων

Διδακτορική Διατριβή

Βεατρίκη-Ἐλένη Βριτσίου

Τμήμα Μαθηματικῶν ΕΚΠΑ

Ἀθήνα 2013

Εισηγητής: Άποστολος Γιαννόπουλος

Περιεχόμενα

Εύχαριστίες	v
Άποτελέσματα τῆς διατριβῆς	vii
1 Εἰσαγωγή καὶ βασικὲς ἔννοιες	1
1.1 Κυρτὰ σώματα καὶ χώροι πεπερασμένης διαστάσεως μὲ νόρμα	3
1.2 Βασικὰ ἀποτελέσματα καὶ ἐργαλεῖα τῆς θεωρίας τῶν κυρτῶν σωμάτων	7
1.3 Λογαριθμικά-κοῖλα μέτρα	13
1.3.1 Γενικὸς ὀρισμὸς τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς	17
1.3.2 Σύνδεσις μέτρων καὶ σωμάτων	20
1.4 Βασικὰ ἀποτελέσματα καὶ ἐργαλεῖα τῆς θεωρίας τῶν ἰσοτροπικῶν σωμάτων καὶ μέτρων	27
1.4.1 Τὰ L_q -κεντροειδῆ σώματα καὶ οἱ ῥοπὲς τῆς Εὐκλείδειας νόρμας	27
1.4.2 Ὁ λογαριθμικὸς μετασχηματισμὸς Laplace	33
1.4.3 Σύνδεσις τῶν δύο μεθόδων	34
2 Μία ἀναγωγή τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου σὲ ὀλοκληρώματα νορμῶν τῶν κεντροειδῶν σωμάτων	39
2.1 Ἡ παράμετρος $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ καὶ κάποιες πρῶτες ἐκτιμήσεις	39
2.2 Ἡ ἀναγωγή	45
2.3 2-κανονικὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα μὲ μεγιστικὴ ἰσοτροπικὴ σταθερά	50
2.4 Ἡ μέθοδος τῶν Δαφνῆ καὶ Παύρη	57
2.5 Μία παραλλαγή τῆς ἀναγωγῆς	60
2.6 Τελικὲς παρατηρήσεις	63
3 Ὁ ὄγκος τῶν κεντροειδῶν σωμάτων καὶ μία δεύτερη ἀναγωγή τῆς εἰκα-	

σίας του ὑπερεπιπέδου	67
3.1 Συνδυάζοντας τις μεθόδους τῶν Δαφνῆ και Παούρη και τῶν Klartag και Milman	67
3.2 Κάτω φράγμα για τὸν ὄγκο τοῦ $Z_p(\mu)$ για κάθε $p \leq r_{\frac{p}{2}}^H(\mu, A)$	74
3.3 Σύγκρισις τῶν βασικῶν παραμέτρων και ἄλλες παρατηρήσεις	77
4 Μία γεωμετρικὴ ἀπόδειξις τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló	85
4.1 Ἡ ἱστορία τῆς ἀνισότητος και ἡ σχέσις της με τὴν M -θέσι τοῦ Milman	85
4.2 Ἄριθμοι καλύψεως στὴν ἰσοτροπικὴ θέσι	90
4.3 Ἡ μέθοδος τῶν κυρτῶν διαταραχῶν τοῦ Klartag	93
4.4 Ἀπόδειξις τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló	95
4.5 Ὑπαρξις M -ἔλλειψοειδῶν και ἡ ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski	98
Ἄναφορές	103

Εὐχαριστίες

Εὐχαριστῶ πολὺ τὸν ἐπιβλέποντα καθηγητὴ μου κ. Ἀπόστολο Γιαννόπουλο γιὰ τὴν ἀδιάκοπη βοήθειά του σὲ ὅλα τὰ στάδια τοῦ διδακτορικοῦ, καὶ κυρίως γιὰ τὴν καθοδήγησί του στὶς πρώτες μου ἐρευνητικὲς προσπάθειες στὸν κλάδο τῆς Ἀσυμπτωτικῆς Κυρτῆς Γεωμετρίας. Τὸν εὐχαριστῶ ἐπειδὴ μοῦ δίδαξε πόσο ἐνδιαφέρουσα, πλούσια ἀλλὰ καὶ δύσκολη μπορεῖ νὰ εἶναι ἡ ἔρευνα σὲ αὐτὸν τὸν κλάδο καὶ γενικότερα στὰ Μαθηματικά.

Εὐχαριστῶ ἐπίσης ὅλους τοὺς καθηγητὲς μου στὸ Τμῆμα Μαθηματικῶν γιὰ ὅσα μοῦ ἔμαθαν.

Τέλος, θὰ ἤθελα νὰ εὐχαριστήσω τοὺς γονεῖς μου καὶ τὴν ἀδερφή μου ποὺ μὲ στηρίζαν σὲ εὐκόλες καὶ δύσκολες στιγμὲς κατὰ τὴν διάρκειά τοῦ διδακτορικοῦ καὶ νὰ τοὺς ἀφιερῶσω αὐτὴν τὴν διατριβή.

Άποτελέσματα τῆς διατριβῆς

Τὰ ἀποτελέσματα ποὺ παρουσιάζονται σὲ αὐτὴν τὴν διατριβὴ ἀνήκουν στὴν θεωρία τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων ἢ, πιὸ γενικά, τῶν ἰσοτροπικῶν λογαριθμικά-κοίλων μέτρων. Κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n θὰ λέμε ἕνα ὑποσύνολο K τοῦ \mathbb{R}^n τὸ ὁποῖο εἶναι κυρτὸ, συμπαγὲς καὶ μὲ μὴ κενὸ ἔσωτερικό. Ἐνα κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n λέμε ὅτι εἶναι ἰσοτροπικὸ ἂν ἔχει ὄγκο 1, ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, δηλαδὴ ἰσχύει $\int_K \langle x, y \rangle dx = 0$ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, καὶ ἂν ὑπάρχει μία θετικὴ σταθερὰ L_K τέτοια ὥστε

$$\int_K \langle x, y \rangle^2 dx = L_K^2 \|y\|_2^2$$

γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Ἡ σταθερὰ L_K ὀνομάζεται ἰσοτροπικὴ σταθερὰ τοῦ σώματος K . Ἀντίστοιχα, ἕνα Borel μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n λέγεται λογαριθμικά-κοῖλο ἂν, γιὰ κάθε δύο μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα A, B τοῦ \mathbb{R}^n καὶ γιὰ κάθε $\lambda \in (0, 1)$, ἰσχύει

$$\mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}.$$

Ἐνα πεπερασμένο λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο μ εἶναι ἀπολύτως συνεχὲς ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue καὶ ἔχει μία λογαριθμικά-κοίλη πυκνότητα $f_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$, δηλαδὴ μία πυκνότητα γιὰ τὴν ὁποία ἰσχύει

$$f_\mu(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq (f_\mu(x))^\lambda (f_\mu(y))^{1-\lambda}$$

γιὰ κάθε δύο σημεία $x, y \in \mathbb{R}^n$ καὶ γιὰ κάθε $\lambda \in (0, 1)$. Λέμε ἕνα πεπερασμένο λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n ἰσοτροπικὸ, καὶ γράφουμε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$, ἂν τὸ μ εἶναι μέτρο πιθανότητος, δηλαδὴ $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$, ἂν ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, δηλαδὴ ἰσχύει $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle d\mu(x) = 0$ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, καὶ ἂν ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle^2 d\mu(x) = \|y\|_2^2$$

γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Στὴν περίπτωσι τῶν ἰσοτροπικῶν λογαριθμικά-κοίλων μέτρων, ὀρίζουμε τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_μ τοῦ μέτρου μ στὸν \mathbb{R}^n θέτοντας

$$L_\mu := \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f_\mu(x) \right)^{1/n},$$

ὅπου f_μ ἡ λογαριθμικά-κοίλη πυκνότητα τοῦ μ ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue.

Ένα από τα γνωστότερα προβλήματα της θεωρίας των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων ή λογαριθμικά-κοίλων μέτρων είναι η εικάσια του υπερεπιπέδου ή το πρόβλημα της ισοτροπικής σταθεράς, δηλαδή το έρώτημα του αν υπάρχει μία σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $n \geq 1$ να ισχύει

$$L_n := \sup\{L_\mu : \mu \text{ ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο στον } \mathbb{R}^n\} \leq C.$$

Παρατηρούμε ότι, αν K είναι ισοτροπικό κυρτό σῶμα στον \mathbb{R}^n , τότε, εξαιτίας της ανισότητας Brunn-Minkowski, το μέτρο μ_K με πυκνότητα $x \mapsto L_K^n \mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}(x)$, όπου $\mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}$ είναι η χαρακτηριστική συνάρτησις του κυρτού σώματος $\frac{1}{L_K}K$, είναι ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο στον \mathbb{R}^n και $L_{\mu_K} = L_K$. Από αυτό προκύπτει ότι

$$\sup\{L_K : K \text{ ισοτροπικό κυρτό σῶμα στον } \mathbb{R}^n\} \leq L_n.$$

Είναι όμως γνωστό (βλέπε [2]) ότι υπάρχει και μία απόλυτη σταθερά C_1 ώστε για κάθε $n \geq 1$ να έχουμε

$$L_n \leq C_1 \sup\{L_K : K \text{ ισοτροπικό κυρτό σῶμα στον } \mathbb{R}^n\}.$$

Ο Bourgain [9] έχει δείξει ότι $L_n \leq C \sqrt[n]{n} \log n$ για κάποια απόλυτη σταθερά C , και ο Klartag [27] ότι $L_n \leq C \sqrt[n]{n}$ (βλέπε επίσης [29]).

Κύριος σκοπός του Κεφαλαίου 2 είναι να παρουσιάσουμε μία αναγωγή της εικάσιος του υπερεπιπέδου στην μελέτη μίας παραμέτρου η οποία μπορεί να οριστεί για κάθε κυρτό σῶμα ὄγκου 1 ή για κάθε λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας· η αναγωγή αυτή είναι κοινή δουλειά με τους Γιαννόπουλο και Παούρη [21]. Για να ορίσουμε την βασική παράμετρο, υπενθυμίζουμε πρώτα τον ὄρισμό των L_q -κεντροειδῶν σωμάτων ἑνὸς κυρτοῦ σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$ ὄγκου 1 ή ἑνὸς λογαριθμικά-κοίλου μέτρου πιθανότητας μ στον \mathbb{R}^n : για κάθε $q \geq 1$, τὸ L_q -κεντροειδῆς σῶμα $Z_q(K)$ τοῦ K ὀρίζεται ὡς τὸ κυρτὸ σῶμα στον \mathbb{R}^n πὸν ἔχει συνάρτησι στήριξεως

$$h_{Z_q(K)}(y) := \left(\int_K |\langle x, y \rangle|^q dx \right)^{1/q}, \quad y \in \mathbb{R}^n,$$

ἐνῶ ἀντίστοιχα τὸ L_q -κεντροειδῆς σῶμα $Z_q(\mu)$ τοῦ μ ὀρίζεται ὡς τὸ κυρτὸ σῶμα με συνάρτησι στήριξεως

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y \rangle|^q d\mu(x) \right)^{1/q}, \quad y \in \mathbb{R}^n.$$

Υπενθυμίζουμε ἐπίσης τὸν ἐξῆς συμβολισμό: ἂν C εἶναι ἕνα συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στον \mathbb{R}^n καὶ $p \in (-n, +\infty)$, $p \neq 0$, γράφουμε

$$I_p(K, C) := \left(\int_K \|x\|_C^p dx \right)^{1/p} \quad \text{καὶ} \quad I_p(\mu, C) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_C^p d\mu(x) \right)^{1/p}.$$

Ἡ παράμετρος πὸν μελετοῦμε στὸ Κεφάλαιο 2 τῆς παρούσας διατριβῆς εἶναι ἕνα ὀλοκλήρωμα τῆς παραπάνω μορφῆς: για κάθε $q \geq 1$ καὶ για κάθε κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1 θέτουμε

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) := \int_K h_{Z_q(K)}(x) dx,$$

όπου ο συμβολισμός δικαιολογείται από το γεγονός ότι η συνάρτησις στηρίζεως του $Z_q(K)$ ταυτίζεται με την νόρμα που επάγεται από το πολικό του $Z_q(K)$. Περιγράφουμε τώρα τα κύρια αποτελέσματα του Κεφαλαίου 2.

Όρισμός Α. Έστω παράμετροι $\kappa, \tau > 0$. Θα λέμε ότι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n είναι (κ, τ) -κανονικό αν

$$\log N(K, tD_n) \leq \frac{\kappa n \log^4 n}{t^2} \text{ για κάθε } t \geq \tau \log^{3/2} n,$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα στον \mathbb{R}^n όγκου 1.

Στο [14] οί Δαφνής και Παούρης έχουν δείξει ότι, για κάποιες απόλυτες σταθερές $\kappa, \tau, \delta > 0$ και για κάθε $n \geq 1$, υπάρχουν (κ, τ) -κανονικά ισοτροπικά κυρτά σώματα K στον \mathbb{R}^n με την πρόσθετη ιδιότητα ότι $L_K \geq \delta L_n$. Η αναγωγή στο Κεφάλαιο 2 στηρίζεται στην ύπαρξη αυτών των σωμάτων.

Θεώρημα Α. Υπάρχει μία απόλυτη σταθερά $\rho \in (0, 1)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $\kappa, \tau \geq 1$, για κάθε (κ, τ) -κανονικό ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n , όπου $n \geq n_0(\kappa, \tau)$, και για κάθε $q \in [2, n]$ με την ιδιότητα

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq \rho n L_K^2,$$

έχουμε ότι

$$L_K \leq C \sqrt{\kappa} \sqrt[4]{\frac{n}{q}} \log^2 n \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn} L_K^2}} \right\},$$

όπου C είναι μία απόλυτη σταθερά.

Έφ' όσον από το αποτέλεσμα των Δαφνής και Παούρη γνωρίζουμε ότι υπάρχουν (κ, τ) -κανονικά ισοτροπικά κυρτά σώματα K στον \mathbb{R}^n με $L_K \geq \delta L_n$, το παραπάνω θεώρημα δίνει ένα άνω φράγμα και για την σταθερά L_n το οποίο εξαρτάται από το πώς συμπεριφέρεται ο λόγος $I_1(K, Z_q^\circ(K))/\sqrt{qn} L_K^2$. Για παράδειγμα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα Α για ένα τέτοιο ισοτροπικό κυρτό σώμα K και για $q = 2$, και δεδομένου ότι $I_1(K, Z_2^\circ(K)) \leq \sqrt{n} L_K^2$ από την ισοτροπική συνθήκη για το K , λαμβάνουμε ότι $L_n \leq \delta^{-1} L_K \leq C' \sqrt[4]{n} \log^2 n$ για κάποια απόλυτη σταθερά C' . Η συμπεριφορά όμως του $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ θα μπορούσε ίσως να μας επιτρέψει να χρησιμοποιήσουμε και μεγαλύτερα q . Παρακάτω αναφέρουμε κάποιες πρώτες εκτιμήσεις για το $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, η γενικότερα το $I_1(K, Z_q^\circ(M))$ όπου $M \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 επίσης.

Θεώρημα Β. Έστω K, M ισοτροπικά κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n . Τότε υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2, c_3 > 0$ ώστε, για κάθε $2 \leq q \leq n$,

$$c_1 \max \{ \sqrt{n} L_K L_M, \sqrt{qn}, R(Z_q(M)) L_K \} \leq I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leq c_2 q \sqrt{n} L_K L_M$$

(όπου $R(C) := \max \{ \|x\|_2 : x \in C \}$ είναι η ακτίνα ενός σώματος C), και ταυτόχρονα, για κάθε $2 \leq q \leq \sqrt{n}$,

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) \geq c_3 \max \{ \sqrt{n} L_K L_M, \sqrt{qn} L_M \}.$$

Επιπλέον, όταν M είναι μία ορθογώνια εικόνα του K , έχουμε ότι

$$\left(\int_{O(n)} I_1^q(K, Z_q^\circ(U(K))) d\nu(U) \right)^{1/q} \leq c_4 \max\{\sqrt{qn}, q^{5/2}/\sqrt{n}\} L_K^2$$

για κάποια απόλυτη σταθερά c_4 , όπου $O(n)$ είναι η ομάδα των ορθογωνίων μετασχηματισμών και ν το μέτρο πιθανότητας Haar σε αυτήν, επομένως $I_1(K, Z_q^\circ(U(K))) \leq c'_4 \sqrt{qn} L_K^2$ για κάθε $2 \leq q \leq \sqrt{n}$ με πιθανότητα $\geq 1 - e^{-q}$.

Τέλος, αν τα K, M είναι unconditional σώματα, τότε, για κάποιες απόλυτες σταθερές c_5, c_6 και για κάθε $2 \leq q \leq n$,

$$c_5 \sqrt{qn} \leq I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leq c_6 \sqrt{qn} \log n.$$

Στο Κεφάλαιο 3 παραλλάσσουμε μία μέθοδο των Klartag και E. Milman από το [29], την οποία χρησιμοποίησαν για να δώσουν κάτω φράγματα για τον όγκο των L_q -κεντροειδών σωμάτων $Z_q(\mu)$ ενός λογαριθμικά-κοίλου μέτρου πιθανότητας μ με κέντρο βάρους το 0, και, συνδυάζοντάς την με αποτελέσματα από το [53] καθώς και την κύρια παράμετρο της ανάγωγής των Δαφνή και Παούρη στο [14], δείχνουμε πώς μπορεί κάποιος να επεκτείνει το διάστημα των q για τα οποία ισχύει το επιθυμητό κάτω φράγμα και ταυτόχρονα, υπό προϋποθέσεις, να βελτιώσει κατά έναν λογαριθμικό όρο το άνω φράγμα για την L_n που δίνει η ανάγωγή των Δαφνή και Παούρη. Έπενθυμίζουμε πρώτα σύντομα το τί δίνουν οι μέθοδοι των Klartag και E. Milman στο [29] και των Δαφνή και Παούρη στο [14]. Προς τοῦτο, χρειάζεται να θυμηθούμε τις παραμέτρους $q_*(\mu)$ και $q_{-c}(\mu, \delta)$, $\delta \geq 1$, που μπορεί κάποιος να αντιστοιχίσει με κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$, δηλαδή κάθε ιστροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n : η πρώτη ορίζεται από τον Παούρη (βλέπε π.χ. [52]) ως

$$q_*(\mu) := \sup\{1 \leq q \leq n : k_*(Z_q(\mu)) \geq q\}$$

όπου $k_*(Z_q(\mu))$ είναι η δυϊκή διάσταση Dvoretzky του συμμετρικού κυρτού σώματος $Z_q(\mu)$ (βλέπε αναλυτικούς ορισμούς στο Κεφάλαιο 1), ενώ η δεύτερη εισάγεται από τους Δαφνή και Παούρη στο [14] ως

$$q_{-c}(\mu, \delta) := \max\{1 \leq q \leq n - 1 : I_{-q}(\mu, B_2^n) \geq \delta^{-1} I_2(\mu, B_2^n) = \delta^{-1} \sqrt{n}\}.$$

Ένα από τα κύρια αποτελέσματα στο [14] είναι ότι, για κάθε $\delta \geq 1$,

$$L_n \leq C\delta \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{q_{-c}(\mu, \delta)}} \log^2\left(\frac{en}{q_{-c}(\mu, \delta)}\right).$$

Από την άλλη πλευρά, οι Klartag και E. Milman ορίζουν μία κληρονομική παραλλαγή της παραμέτρου $q_*(\mu)$ ως εξής:

$$q_*^H(\mu) := n \inf_k \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{q_*(\pi_E \mu)}{k},$$

όπου $\pi_E \mu$ είναι τὸ περιθώριο μέτρο τοῦ μ ὡς πρὸς τὸν k -διάστατο ὑπόχωρο E τοῦ \mathbb{R}^n , καὶ ἀποδεικνύουν ὅτι ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$ ὥστε νὰ ἰσχύει

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \geq c \sqrt{\frac{p}{n}}$$

γιὰ κάθε $p \leq q_*^H(\mu)$ καὶ γιὰ κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$. Ἔπεται ὕστερα, λόγῳ καὶ ἐνὸς ἀποτελέσματος τοῦ Παούρη στὸ [53], ὅτι

$$L_\mu \simeq \frac{1}{|Z_n(\mu)|^{1/n}} \leq \frac{1}{|Z_{q_*^H(\mu)}(\mu)|^{1/n}} \leq C \sqrt{\frac{n}{q_*^H(\mu)}}$$

γιὰ κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$, ἀπὸ ὅπου προκύπτει ἓνα ἄνω φράγμα καὶ γιὰ τὴν L_n . Θυμόμαστε ἐπίσης τὰ ἀκόλουθα.

Παρατήρησις Α. (α) Ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τοῦ Παούρη στὰ [52] καὶ [53], γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n καὶ γιὰ κάθε $\delta \geq \delta_0$, ὅπου $\delta_0 \geq 1$ μία ἀπόλυτη σταθερὰ, ἰσχύει

$$c_1 \sqrt{n} \leq q_*^H(\mu) \leq q_*(\mu) \leq c_2 q_{-c}(\mu, \delta),$$

ὅπου $c_1, c_2 > 0$ ἀπόλυτες σταθερές.

(β) Ὑπάρχουν ἰσοτροπικά λογαριθμικά-κοῖλα μέτρα μ στὸν \mathbb{R}^n γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει $q_*(\mu) \simeq q_*^H(\mu) \simeq \sqrt{n}$, ἐνῶ, ὅπως προκύπτει ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη στὸ [14], ἀκόμη καὶ γιὰ αὐτὰ τὰ μέτρα θὰ μπορούσε τὸ $q_{-c}(\mu, \delta_1)$, γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $\delta_1 \geq 1$, νὰ εἶναι ἀνάλογο τοῦ n .

Στὸ Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε δύο νέες κληρονομικὲς παραμέτρους ἀπὸ τὸ [67]. Ἡ πρώτη παράμετρος προκύπτει, κατὰ τὸν τρόπο τῶν Klartag καὶ Milman, ὡς μία «κληρονομικὴ» παραλλαγή τῆς παραμέτρου $q_{-c}(\mu, \delta)$ ποὺ ὅρισαν οἱ Δαφνῆ καὶ Παούρης: θέτουμε

$$q_{-c}^H(\mu, \delta) := n \inf_k \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{[q_{-c}(\pi_E \mu, \delta)]}{k}$$

Γιὰ νὰ ὀρίσουμε τὴν δευτέρη κληρονομικὴ παράμετρο, ὀρίζουμε πρῶτα τὴν ἐξῆς παράμετρο

$$r_\#(\mu, A) := \max\{1 \leq k \leq n-1 : \exists E \in G_{n,k} \text{ τέτοιος ὥστε } L_{\pi_E \mu} \leq A\}$$

γιὰ κάθε λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν \mathbb{R}^n καὶ γιὰ κάθε σταθερὰ $A \geq 1$. Στὴν συνέχεια θέτουμε

$$r_\#^H(\mu, A) := n \inf_k \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{r_\#(\pi_E \mu, A)}{k}$$

(ὅπου συμφωνοῦμε ὅτι $r_\#(\pi_{\mathbb{R}\theta} \mu, A) = q_{-c}(\pi_{\mathbb{R}\theta} \mu, A) = 1$ γιὰ ὅλα τὰ μονοδιάστατα περιθώρια μέτρα). Τὸ ἀκόλουθο θεώρημα ἀπὸ τὸ [67] ἰσχύει γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n .

Θεώρημα Γ. Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερές $C_1, C_2 > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$ καὶ κάθε $A \geq 1$, νὰ ἰσχύει

$$r_\#^H(\mu, A) \leq q_{-c}^H(\mu, C_1 A) \leq r_\#^H(\mu, C_2 A).$$

Έπιπροσθέτως, για κάθε $p \leq r_{\sharp}^H(\mu, A)$ έχουμε ότι

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \geq \frac{c}{A} \sqrt{\frac{p}{n}},$$

όπου $c > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

Πόρισμα Α. Όπως και πριν, για κάθε $A \geq 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$L_n = \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} L_\mu \leq CA \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{r_{\sharp}^H(\mu, A)}} \leq CA \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{q_{-c}^H(\mu, \frac{C_1}{C_2}A)}}.$$

Αυτό σημαίνει ότι το Θεώρημα Γ οδηγεί σε μία δεύτερη αναγωγή της εικάσιος του υπερεπιπέδου στην μελέτη των παραμέτρων $r_{\sharp}^H(\mu, A)$ και $q_{-c}^H(\mu, A)$, και άρα και των αρχικών παραμέτρων $r_{\sharp}(\mu, A)$ και $q_{-c}(\mu, A)$, η οποία λειτουργεί συμπληρωματικά προς την αναγωγή των Δαφνής και Παούρη [14] στην μελέτη της παραμέτρου $q_{-c}(\mu, A)$. Προς την άλλη κατεύθυνση, ένα «κακό» άνω φράγμα για τις παραμέτρους $r_{\sharp}(\mu, A)$ και $q_{-c}(\mu, A)$ δίδεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση Β. Υπάρχουν ισοτροπικά λογαριθμικά-κοίλα μέτρα μ στον \mathbb{R}^n με $L_\mu \simeq L_n$ τα οποία έχουν την ιδιότητα, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ και για κάθε θετικό άκεραιο $k = \lambda n$, να ισχύει

$$(0.0.1) \quad L_{\pi_E \mu} \geq C^{-\frac{1}{\lambda}} L_\mu$$

για όποιονδήποτε υπόχωρο $E \in G_{n,k}$, όπου $C \geq 1$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

Τέλος, στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε μία καθαρά γεωμετρική απόδειξη της αντίστροφης ανισότητας Santaló η οποία είναι κοινή δουλειά με τους Γιαννόπουλο και Παούρη [22]. Άς θυμηθούμε ότι η αντίστροφη ανισότητα Santaló, η ανισότητα Bourgain-Milman [12], λέει ότι υπάρχει μία απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε, για κάθε κυρτό σῶμα K στον \mathbb{R}^n που περιέχει το 0 στο έσωτερικό του, να ισχύει

$$s(K) := |K| \cdot |K^\circ| \geq c^n |B_2^n|^2.$$

Είναι γνωστό ότι αρκεί να δείξουμε την παραπάνω ανισότητα για κυρτά σώματα K με κέντρο βάρους το 0, και είναι επίσης γνωστό ότι το γινόμενο όγκων $s(K) = |K| \cdot |K^\circ|$ δεν μεταβάλλεται αν εφαρμόσουμε έναν αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό στο K . Έπομένως, για την απόδειξη που παρουσιάζουμε στο Κεφάλαιο 4 υποθέτουμε αρχικῶς ότι το K είναι σε ιστροπική θέση. Έπικαλούμενοι ένα λήμμα της Χατζζουλάκη [25] το οποίο μᾶς δίνει ἄνω φράγματα για τους αριθμούς καλύψεως $N(K, tB_2^n)$, $t > 0$, όταν το K είναι ιστροπικό, δείχνουμε το ἐξῆς αποτέλεσμα.

Θεώρημα Δ. Έστω K ένα κυρτό σῶμα στον \mathbb{R}^n που περιέχει το 0 στο έσωτερικό του. Τότε, για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, έχουμε ότι

$$2n(s(K))^{1/n} \geq n(s(K - K))^{1/n} \geq \frac{c_1}{L_K},$$

όπου L_K είναι η ιστροπική σταθερά οποιασδήποτε ιστροπικής εικόνας του K (είναι γνωστό ότι όλες αυτές οι ιστροπικές σταθερές ταυτίζονται). Η πρώτη ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα *Rogers-Shephard* [59].

Έπειτα, χρησιμοποιώντας την μέθοδο των κυρτών διαταραχών μέσω του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace ενός μέτρου μ , την οποία εισήγαγε ο Klartag στο [27], δείχνουμε το ακόλουθο

Θεώρημα Ε. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n . Υπάρχει ένα κυρτό σώμα Q στον \mathbb{R}^n τέτοιο ώστε (α) $c_2 K \subseteq Q - Q \subseteq c_3 K$ και (β) $L_Q \leq c_4 / \sqrt{n(s(K))^{1/n}}$, όπου $c_2, c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Δεδομένου ότι τα K και $Q - Q$ έχουν απόλυτως φραγμένη γεωμετρική απόσταση, προκύπτει ότι $(s(K))^{1/n} \simeq (s(Q - Q))^{1/n}$. Μπορούμε έπειτα να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Δ για να συμπεράνουμε ότι $L_Q \geq c'_1 / (n(s(K))^{1/n})$. Συνδυάζοντάς το αυτό με το (β) του Θεωρήματος Ε, λαμβάνουμε την αντίστροφη ανισότητα Santaló για τα συμμετρικά κυρτά σώματα K , και έπομένως από την ανισότητα *Rogers-Shephard* και για όλα τα σώματα K .

Συμπληρώνουμε αυτήν την παρουσίαση δείχνοντας στην Παράγραφο 4.5 πώς, από την αντίστροφη ανισότητα Santaló όπως αυτή αποδεικνύεται στην Παράγραφο 4.4, την κλασική ανισότητα Blaschke-Santaló, και βασικές ιδιότητες των αριθμών καλύψεως, μπορούμε να δείξουμε την ύπαρξη M -έλλειψοειδών και την αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski του V. Milman. Η αντίστροφη πορεία είναι γνωστή στον κλάδο: η ύπαρξη M -έλλειψοειδών μαζί με βασικές ιδιότητες των αριθμών καλύψεως συνεπάγονται την αντίστροφη ανισότητα Santaló και μία αντίστοιχη άσυμπτωτική έκδοχή της ανισότητας Blaschke-Santaló.

Το εισαγωγικό Κεφάλαιο 1 δέν περιέχει καινούρια αποτελέσματα. Για τις αποδείξεις αυτών των αποτελεσμάτων, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στα βιβλία [47], [56], [62] και [13]. Επίσης, η Παράγραφος 2.3 περιέχει την απόδειξη των Δαφνῆ και Παούρη για το [14, Θεώρημα 5.7] μεταφρασμένη στην γλώσσα των κυρτών σωμάτων, και στην Παράγραφο 2.4 περιγράφουμε επιγραμματικά την μέθοδό τους στο [14].

Εἰσαγωγή καὶ βασικὲς ἔννοιες

Ἐργαζόμεστε στὸν \mathbb{R}^n , ὁ ὁποῖος εἶναι ἐφοδιασμένος μὲ μία Εὐκλείδεια δομή, $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Συμβολίζουμε μὲ $\|\cdot\|_2$ τὴν ἀντίστοιχη Εὐκλείδεια νόρμα, μὲ B_2^n τὴν Εὐκλείδεια μοναδιαία μπάλα καὶ μὲ S^{n-1} τὴν μοναδιαία σφαῖρα. Γράφουμε $GL(n)$ γιὰ τὴν ὁμάδα τῶν ἀντιστρεψίμων γραμμικῶν μετασχηματισμῶν τοῦ \mathbb{R}^n , καὶ (καταχρηστικὰ) $SL(n)$ γιὰ τοὺς μετασχηματισμοὺς ἐκείνους ποὺ ἔχουν ὀρίζουσα ± 1 , δηλαδὴ $SL(n) = \{T \in GL(n) : |\det T| = 1\}$. Ἐπίσης μὲ $O(n)$ συμβολίζουμε τὴν ὁμάδα τῶν ὀρθογωνίων μετασχηματισμῶν τοῦ \mathbb{R}^n , δηλαδὴ τῶν ἀντιστρεψίμων ἐκείνων μετασχηματισμῶν ποὺ ὁ συζυγῆς τους καὶ ὁ ἀντίστροφός τους ταυτίζονται. Τὸ ἀναλλοίωτο ὡς πρὸς ὀρθογωνίους μετασχηματισμοὺς μέτρο πιθανότητας στὴν S^{n-1} συμβολίζεται μὲ σ , ἐνῶ ἡ πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ τῶν k -διαστάτων ὑποχώρων τοῦ \mathbb{R}^n εἶναι ἐφοδιασμένη μὲ τὸ μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Ἐστω $k \leq n$ καὶ $F \in G_{n,k}$: συμβολίζουμε μὲ Proj_F τὴν ὀρθογώνια προβολὴ ἀπὸ τὸν \mathbb{R}^n στὸν F · ἐπίσης, θέτουμε $B_F := B_2^n \cap F$ καὶ $S_F := S^{n-1} \cap F$.

Ὁ ὄγκος (μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται μὲ $|\cdot|$. Τὶς περισσότερες φορές, ὅταν γράφουμε $|A \cap F|$ ἢ $|\text{Proj}_F(A)|$ γιὰ κάποιον ὑποσύνολο A τοῦ \mathbb{R}^n καὶ κάποιον k -διάστατο ὑπόχωρό του F , θὰ ἐννοοῦμε τὸν ὄγκο ποὺ ἔχουν τὰ $A \cap F$ καὶ $\text{Proj}_F(A)$ μέσα στὸν ὑπόχωρο F καὶ ὄχι ὡς ὑποσύνολα τοῦ \mathbb{R}^n . Ὄρισμένες φορές, γιὰ νὰ μὴν ὑπάρχει κίνδυνος συγχύσεως, θὰ γράφουμε καὶ $|A \cap F|_k$ ἢ $|\text{Proj}_F(A)|_k$. Ἄν $A \subseteq \mathbb{R}^n$ μὲ θετικὸ πεπερασμένο ὄγκο, γράφουμε \bar{A} γιὰ τὴν ὁμοιοθετικὴ εἰκόνα ὄγκου 1 τοῦ A , δηλαδὴ τὸ σύνολο $\frac{A}{|A|^{1/n}}$. Ἐπίσης, γράφουμε ω_n γιὰ τὸν ὄγκο τῆς B_2^n καὶ θυμόμαστε ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες (δηλαδὴ ἀνεξάρτητες τῆς διαστάσεως) θετικὲς σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$ ἔτσι ὥστε $c_1 \sqrt{n} \leq \omega_n^{1/n} \leq c_2 \sqrt{n}$. Ἐπομένως ἡ Εὐκλείδεια μπάλα ὄγκου 1, τὴν ὁποία ἐκτὸς ἀπὸ \bar{B}_2^n θὰ συμβολίζουμε καὶ μὲ D_n , ἔχει ἀκτῖνα περίπου ἴση μὲ \sqrt{n} .

Μὲ τὰ γράμματα c, c', c_1, c_2 , κλπ., θὰ συμβολίζουμε ἀπόλυτες θετικὲς σταθερὲς, τῶν ὁποίων οἱ τιμὲς μπορεῖ νὰ ἀλλάζουν ἀπὸ γραμμὴ σὲ γραμμὴ. Ὅποτεδήποτε γράφουμε $a \simeq b$ γιὰ κάποιες ποσότητες a καὶ b ποὺ σχετίζονται μὲ κυρτὰ σώματα ἢ μέτρα στὸν \mathbb{R}^n , ἐννοοῦμε ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $c_1, c_2 > 0$, ἀνεξάρτητες τῆς διαστάσεως ἢ ὁποιασδήποτε ἄλλης παραμέτρου, τέτοιες ὥστε $c_1 a \leq b \leq c_2 a$ · θὰ χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης τοὺς συμβολισμοὺς $a \lesssim b$ καὶ $a \gtrsim b$ ἐννοῶντας $a \leq c_1 b$ καὶ $b \leq c_2 a$ ἀντιστοίχως. Παρομοίως, ἂν $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$, θὰ γράφουμε $K \simeq L$ ἂν ὑπάρχουν ἀπόλυτες

σταθερές $c_1, c_2 > 0$ έτσι ώστε $c_1 K \subseteq L \subseteq c_2 K$.

Κυρτό σῶμα στὸν \mathbb{R}^n θὰ λέμε ἓνα ὑποσύνολο K τοῦ \mathbb{R}^n τὸ ὁποῖο εἶναι κυρτό, συμπαγὲς καὶ μὲ μὴ κενὸ ἐσωτερικό. Λέμε ὅτι τὸ K εἶναι συμμετρικό ἂν γιὰ κάθε $x \in K$ ἔχουμε καὶ ὅτι $-x \in K$. Λέμε ὅτι ἓνα κυρτὸ σῶμα K ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, δηλαδὴ τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων, ἂν ἰσχύει $\int_K \langle x, y \rangle dx = 0$ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσι λέμε ἐπίσης ὅτι τὸ K ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0 ἢ ὅτι εἶναι κεντραρισμένο. Γενικά, τὸ κέντρο βάρους ἑνὸς κυρτοῦ σώματος K μπορεῖ νὰ ὀριστῆ ὡς τὸ διάνυσμα

$$\text{bar}(K) := \frac{1}{|K|} \int_K x dx = \left(\frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_1 \rangle dx, \dots, \frac{1}{|K|} \int_K \langle x, e_n \rangle dx \right),$$

ὅπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ εἶναι ἡ συνήθης ὀρθοκανονικὴ βάση στὸν \mathbb{R}^n .

Κύριο ἀντικείμενο σχεδὸν ὅλων τῶν προβλημάτων καὶ ἀποτελεσμάτων ποὺ θὰ ἐξετάσουμε σὲ αὐτὴν τὴν διατριβὴ εἶναι μία εἰδικὴ κατηγορία κυρτῶν σωμάτων, τὰ *ισοτροπικὰ κυρτὰ σώματα*. Ἐνα κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n λέμε ὅτι εἶναι *ισοτροπικό*, ἢ ὅτι βρίσκεται σὲ *ισοτροπικὴ θέσι*, ἂν ἔχει ὄγκο 1, ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0 καὶ ὑπάρχει μία θετικὴ σταθερὰ L_K τέτοια ὥστε

$$(1.0.1) \quad \int_K \langle x, y \rangle^2 dx = L_K^2 \|y\|_2^2$$

γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Εἶναι γνωστὸ ὅτι γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n ὑπάρχει μία μεταφορὰ κατὰ ἓνα σημεῖο $x \in \mathbb{R}^n$ καὶ ἓνας μετασχηματισμὸς $T \in GL(n)$ ὥστε τὸ $\tilde{K} = T(K + x)$ νὰ εἶναι *ισοτροπικό*. Μάλιστα κάθε ἄλλη *ισοτροπικὴ εἰκόνα* τοῦ K εἶναι ἓνας ὀρθογώνιος μετασχηματισμὸς τοῦ \tilde{K} , ἐνῶ ἀπὸ τὴν *ισοτροπικὴ συνθήκη* (1.0.1) βλέπουμε ὅτι, ἂν ἐφαρμόσουμε στὸ *ισοτροπικό* σῶμα \tilde{K} ἓναν ὀρθογώνιο μετασχηματισμὸ U , ἢ εἰκόνα $U(\tilde{K})$ ποὺ προκύπτει εἶναι ἐπίσης *ισοτροπικό* σῶμα καὶ μάλιστα ἔχει τὴν ἴδια *ισοτροπικὴ σταθερὰ* μὲ τὸ \tilde{K} . Ἐπομένως, θὰ μπορούσαμε χωρὶς κίνδυνο συγχύσεως νὰ ἀντιστοιχίσουμε τὴν *ισοτροπικὴ σταθερὰ* ἑνὸς *ισοτροπικοῦ* κυρτοῦ σώματος σὲ ὅλη του τὴν ἀφινικὴ κλάση, καὶ γι' αὐτὸ συχνὰ θὰ ἀναφερόμαστε στὴν *ισοτροπικὴ σταθερὰ* ἑνὸς κυρτοῦ σώματος χωρὶς νὰ ὑποθέτουμε ὅτι αὐτὸ τὸ σῶμα βρίσκεται σὲ *ισοτροπικὴ θέσι* (οὔτε καν ὅτι ἔχει ὄγκο 1 ἢ βαρύκεντρο τὸ 0). Στὴν συνέχεια θὰ δοῦμε καὶ ἓναν ἄλλον τρόπο ὀρισμοῦ τῆς *ισοτροπικῆς σταθερᾶς*, ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει, δοθέντος ἑνὸς κυρτοῦ σώματος, νὰ ὑπολογίσουμε τὴν *ισοτροπικὴ* του *σταθερὰ* χωρὶς νὰ τὸ φέρουμε σὲ *ισοτροπικὴ θέσι*, ἐνῶ ταυτόχρονα, καὶ εἶναι αὐτὸ ἴσως ποὺ ἔχει μεγαλύτερη σημασία, μᾶς ἐπιτρέπει νὰ γενικεύσουμε κατὰ ἓνα φυσιολογικὸ τρόπο τὴν ἔννοια τῆς *ισοτροπικῆς σταθερᾶς* καὶ στὸν χῶρο τῶν μέτρων.

Ἐνα ἀκόμη ἐνδιαφέρον χαρακτηριστικὸ ποὺ ἔχουν τὰ *ισοτροπικὰ κυρτὰ σώματα* προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀκόλουθη παρατήρησι: ἂν K εἶναι ἓνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν \mathbb{R}^n , τότε γιὰ κάθε μοναδιαία διεύθυνσι $\theta \in S^{n-1}$ ἰσχύει ὅτι

$$(1.0.2) \quad \left(\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \right)^{1/2} \simeq \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|},$$

ὅπου μὲ θ^\perp συμβολίζουμε τὸν ὑπόχωρο ποὺ εἶναι κάθετος στὸ διάνυσμα θ καὶ, ὅπως ἐξηγήσαμε καὶ πρὶν, μὲ τὸ $|K \cap \theta^\perp|$ ἐννοοῦμε τὸν ὄγκο σὲ $n - 1$ διαστάσεις. Ἐπετα λοιπὸν ὅτι, ἂν τὸ K βρίσκεται

σέ ισοτροπική θέσι, τότε όλες του οί τομές με υπερεπίπεδα που διέρχονται από το 0 (δηλαδή από το κέντρο βάρους του) έχουν περίπου τον ίδιο όγκο, και αυτό το «περίπου», δηλαδή το πόσο κοντά στο 1 είναι ο λόγος $|K \cap \theta_1^\perp|/|K \cap \theta_2^\perp|$ για δύο $\theta_1, \theta_2 \in S^{n-1}$, δεν εξαρτάται από το K ούτε από την διάστασι του χώρου. Ένα από τα σημαντικότερα προβλήματα της θεωρίας των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων, και γενικότερα της Άσυμπτωτικής Κυρτής Γεωμετρίας, είναι η *είκασία του υπερεπιπέδου*, η οποία διευτώθη από τον Bourgain το 1986 [8] σε ένα άρθρο αρμονικής ανάλυσεως: στο άρθρο αυτό ο Bourgain μελετούσε την maximal συνάρτησι σε περιπτώσεις που αυτή όρίζεται ως προς αυθαίρετα κυρτά σώματα και όχι μόνον ως προς τα κλασσικά σώματα, όπως η Εύκλειδεια μπάλα ή ο n -διάστατος κύβος $[-1, 1]^n$, και χρειάστηκε το γεγονός ότι κάθε σώμα μπορούμε να το φέρουμε σε μία θέσι όπου όλες οι τομές του με υπερεπίπεδα που διέρχονται από το 0 έχουν περίπου τον ίδιο $(n - 1)$ -διάστατο όγκο. Το πρόβλημα του αν αυτός ο όγκος φράσσεται από κάτω από σταθερά ανεξάρτητη της διαστάσεως έγινε ιδιαίτερος γνωστό εξαιτίας ενός άρθρου των V. Milman και PaJOR [44], στο όποιο μελετούν την ισοτροπική θέσι και δίνουν και αρκετές ισοδύναμες διατυπώσεις της είκασίας του υπερεπιπέδου, με την πιο γνωστή να προκύπτει από την σχέση (1.0.2): δεδομένου ότι, όταν το σώμα K είναι σε ισοτροπική θέσι, το άριστερο μέρος της (1.0.2) είναι πάντα ίσο με L_K , το να βρούμε ένα κάτω φράγμα για τον όγκο των $(n - 1)$ -διαστάτων κεντρικών τομών του K είναι ισοδύναμο με το να φράζουμε την ισοτροπική σταθερά από πάνω.

Είκασία. Υπάρχει μία απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \geq 1$ και κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n , να ισχύει $L_K \leq C$.

Στα Κεφάλαια 2 και 3 της παρούσας διατριβής θα αναφερθοΰμε και σε αναγωγές του προβλήματος της ισοτροπικής σταθεράς, δηλαδή της παραπάνω είκασίας, στην μελέτη κάποιων παραμέτρων οι όποιες μπορούν να μάς δώσουν και άλλου είδους πληροφορίες για την γεωμετρία των κυρτών σωμάτων. Στην Παράγραφο 2.1 θα αναφέρουμε και κάποιες πρόσθετες πληροφορίες για την ιστορία του προβλήματος.

1.1 Κυρτά σώματα και χώροι πεπερασμένης διαστάσεως με νόρμα

Υπενθυμίζουμε πρώτα κάποιες βασικές παραμέτρους ή συναρτήσεις που σχετίζονται με ένα κυρτό σώμα. Έστω K κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n που περιέχει το 0 στο έσωτερικό του. Το *συναρτησοειδές Minkowski* $p_K : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ που επάγεται από το K στον \mathbb{R}^n όρίζεται ως

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto p_K(x) := \inf\{t > 0 : x \in tK\},$$

ένω η *άκτινική συνάρτησις* $\rho_K : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \rightarrow [0, +\infty)$ του K όρίζεται ως

$$x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \mapsto \rho_K(x) := \max\{t > 0 : tx \in K\}.$$

Προφανώς, για κάθε $x \neq 0$ έχουμε ότι $p_K(x) = 1/\rho_K(x)$, ενώ, αν το K είναι συμμετρικό, τότε το p_K είναι νόρμα στον \mathbb{R}^n και θα το συμβολίζουμε και ως $\|\cdot\|_K$. Η συνάρτηση *στηριξέως* $h_K : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ του K ορίζεται ως

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto h_K(x) := \max\{\langle z, x \rangle : z \in K\}.$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_K(\theta) \leq h_K(\theta)$, ενώ, αν το K είναι συμμετρικό, τότε και η h_K είναι νόρμα στον \mathbb{R}^n . Συχνά μάλιστα ενδιαφέρει να μελετήσουμε ολοκληρώματα νορμών ως προς κάποιο ομοιόμορφο μέτρο πάνω σε ένα κυρτό σώμα ή ως προς το μέτρο πιθανότητας σ στην S^{n-1} . Για παράδειγμα, μία από τις σημαντικότερες παραμέτρους ενός κυρτού σώματος K είναι το μέσο πλάτος του, δηλαδή η ποσότητα

$$w(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(\theta) d\sigma(\theta),$$

ενώ αντίστοιχα, για κυρτά σώματα K που περιέχουν το 0 στο έσωτερικό τους, ορίζεται και η ποσότητα

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} p_K(\theta) d\sigma(\theta).$$

Παρομοίως, για κάθε $p \in \mathbb{R}$, $p \neq 0$, μπορεί να οριστεί το p -μέσο πλάτος του K

$$w_p(K) := \left(\int_{S^{n-1}} h_K^p(\theta) d\sigma(\theta) \right)^{1/p},$$

καθώς και η ποσότητα

$$M_p(K) := \left(\int_{S^{n-1}} p_K^p(\theta) d\sigma(\theta) \right)^{1/p}.$$

Επιπλέον, για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον \mathbb{R}^n και για κάθε $p > -n$, $p \neq 0$, ορίζουμε την p -ρόπη της Εὐκλείδειας νόρμας πάνω στο σώμα K ως εξής:

$$I_p(K) := \left(\int_K \|x\|_2^p dx \right)^{1/p}.$$

Πιο γενικά, αν $C \subset \mathbb{R}^n$ είναι οποιοδήποτε συμμετρικό κυρτό σώμα, θέτουμε

$$I_p(K, C) := \left(\int_K \|x\|_C^p dx \right)^{1/p}.$$

Στο Κεφάλαιο 2, κύριο αντικείμενο μελέτης μας θα είναι παράμετροι της μορφής $I_1(K, C)$ για κάποια συμμετρικά σώματα C τα οποία συνδέονται άμεσα με την γεωμετρία του ίδιου του σώματος K .

Η *περιγεγραμμένη ακτίνα* ενός κυρτού σώματος K στον \mathbb{R}^n είναι η ελάχιστη ακτίνα μίας Εὐκλείδειας μπάλας με κέντρο το 0 που περιέχει ολόκληρο το σώμα K , και μπορεί να οριστεί ως

$$R(K) = \max\{\|x\|_2 : x \in K\} = \max\{h_K(\theta) : \theta \in S^{n-1}\}.$$

Στην περίπτωση που $0 \in K$, θα λέμε συχνά την παραπάνω ποσότητα και διάμετρο του σώματος· αυτό επειδή, όπως εύκολα μπορεί να ελέγξει κάποιος,

$$R(K) \leq \text{diam}(K) \leq 2R(K),$$

όπου $\text{diam}(K) = \sup\{\|x - y\|_2 : x, y \in K\}$ είναι η συνήθης διάμετρος του K . Η *άκτινα όγκων* $v.\text{rad.}(K)$ του κυρτού σώματος $K \subset \mathbb{R}^n$ ορίζεται ως η άκτινα που πρέπει να έχει μία Ευκλείδεια μπάλα με κέντρο το 0 ώστε να έχει τον ίδιο όγκο με το K , δηλαδή

$$v.\text{rad.}(K) := \left(\frac{|K|}{|B_2^n|} \right)^{1/n}.$$

Προφανώς $v.\text{rad.}(K) \leq R(K)$. Αν $0 \in \text{int}(K)$, το πολικό σώμα K° του K ορίζεται να είναι το κυρτό σύνολο

$$K^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y \rangle \leq 1 \ \forall y \in K\}.$$

Βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι ακόλουθες:

- $0 \in \text{int}(K^\circ)$.
- Το K° είναι κυρτό σώμα και $(K^\circ)^\circ = K$.
- Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_{K^\circ}(\theta) = 1/h_K(\theta)$. Ίσοδύναμα το συναρτησοειδές Minkowski του K° ταυτίζεται με την συνάρτησι στηρίζεως του K . Έτσι $M(K^\circ) = w(K)$.
- Για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$, όπου $(T^{-1})^*$ είναι ο συζυγής μετασχηματισμός του αντίστροφου του T .

Μερικές από τις πιο βασικές γεωμετρικές ιδιότητες των κυρτών σωμάτων έπονται σχεδόν άμέσως από την, θεμελιώδη για την Κυρτή Γεωμετρική Ανάλυσι, *άνισότητα Brunn-Minkowski*. Αυτή μπορεί να διατυπωθεί με δύο τρόπους. Ως *αρχή του Brunn* μάς δίνει πληροφορίες για το πώς συμπεριφέρονται οι συναρτήσεις $x \in F^\perp \mapsto |K \cap (x + F)|$, όπου F υπόχωρος του \mathbb{R}^n και F^\perp ο κάθετος σε αυτόν υπόχωρος.

Θεώρημα 1.1.1 (Αρχή του Brunn). Έστω κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n και έστω F ένας k -διάστατος υπόχωρος του \mathbb{R}^n . Η συνάρτησις $f : F^\perp \rightarrow [0, +\infty)$ που ορίζεται ως

$$x \in F^\perp \mapsto f(x) := |K \cap (x + F)|^{1/k},$$

περιορισμένη στον φορέα της $\text{Proj}_{F^\perp}(K)$, είναι κοίλη συνάρτησις.

Ίσοδύναμα μπορεί να διατυπωθεί ως *άνισότητα* που συνδέει τον όγκο του άθροίσματος Minkowski $K + L := \{x + y : x \in K, y \in L\}$ δύο κυρτών σωμάτων K, L στον \mathbb{R}^n με τον όγκο των ιδίων των σωμάτων. Μάλιστα με αυτήν την μορφή ισχύει πιο γενικά.

Θεώρημα 1.1.2 (Άνισότητα Brunn-Minkowski). Έστω K, L μη κενά, συμπαγή υποσύνολα του \mathbb{R}^n . Τότε,

$$(1.1.1) \quad |K + L|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |L|^{1/n},$$

όπου εδώ ο όγκος όλων των συνόλων έννοείται στον \mathbb{R}^n .

Εναλλακτικά, μπορούμε να γράψουμε την (1.1.1) ως έξης: για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ έχουμε ότι

$$|\lambda K + (1 - \lambda)L|^{1/n} \geq \lambda|K|^{1/n} + (1 - \lambda)|L|^{1/n} \geq |K|^{\lambda/n} \cdot |L|^{(1-\lambda)/n}.$$

Κρατώντας το πρώτο και το τρίτο μέρος της τελευταίας σχέσεως, παίρνουμε μία μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski ή όποια είναι ανεξάρτητη της διαστάσεως:

$$(1.1.2) \quad |\lambda K + (1 - \lambda)L| \geq |K|^\lambda \cdot |L|^{1-\lambda}$$

για κάθε δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα K, L του \mathbb{R}^n και κάθε $\lambda \in (0, 1)$.

Μία πρώτη συνέπεια της άρχης του Brunn είναι η (1.0.2). Στα επόμενα κεφάλαια θα αναφέρουμε και θα χρησιμοποιήσουμε και άλλες βασικές συνέπειες της ανισότητας Brunn-Minkowski.

Στρεφόμαστε τώρα στην σύνδεση κυρτών σωμάτων και χώρων πεπερασμένης διαστάσεως με νόρμα. Όπως αναφέραμε πριν, όταν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n , η απεικόνιση $\|\cdot\|_K : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ με

$$\|x\|_K := \inf\{t > 0 : x \in tK\}$$

είναι νόρμα στον \mathbb{R}^n . Θα συμβολίζουμε τον χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ με X_K . Αντιστρόφως, παρατηρούμε ότι, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος πεπερασμένης διαστάσεως με νόρμα, τότε η μοναδιαία μπάλα $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ του X είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n . Έτσι, υπάρχει μία φυσική αντιστοιχία μεταξύ κυρτών σωμάτων και χώρων πεπερασμένης διαστάσεως με νόρμα. Άς σημειώσουμε επίσης ότι ο δυϊκός χώρος του $X_K = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ έχει νόρμα την συνάρτηση στηρίζεως h_K του K και μοναδιαία μπάλα το πολικό σώμα K° του K .

Έστω X, Y δύο n -διάστατοι χώροι με νόρμα. Η απόσταση Banach-Mazur του X από τον Y ορίζεται ως

$$d_{BM}(X, Y) := \inf\{\|T\|_{X \rightarrow Y} \cdot \|T^{-1}\|_{Y \rightarrow X} \mid T : X \rightarrow Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός}\},$$

όπου $\|T\|_{X \rightarrow Y}$ και $\|T^{-1}\|_{Y \rightarrow X}$ είναι οι συνήθεις νόρμες των τελεστών T και T^{-1} αντιστοίχως. Στην γλώσσα των κυρτών σωμάτων η απόσταση Banach-Mazur μπορεί να περιγραφεί ως έξης: έστω ότι $X = X_K$ και $Y = Y_L$ (δηλαδή οι μοναδιαίες μπάλες των X, Y είναι τα κυρτά σώματα K, L αντιστοίχως), τότε ο αριθμός $d_{BM}(X, Y)$ είναι ο μικρότερος $d > 0$ ώστε

$$(1.1.3) \quad L \subseteq T(K) \subseteq dL$$

για κάποιον αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T . Είναι προφανές ότι $d_{BM}(X, Y) \geq 1$ για κάθε δύο n -διάστατους χώρους, με ισότητα αν και μόνον αν οι χώροι είναι ισομετρικά ισομορφοί. Άρα η απόσταση Banach-Mazur μετράει πόσο απέχουν δύο χώροι από το να είναι ισομετρικοί. Στην συνέχεια θα μιλάμε και απευθείας για απόστασι Banach-Mazur δύο συμμετρικών, ή ακόμη και κεντραρισμένων, κυρτών σωμάτων $K, L \subset \mathbb{R}^n$, εννοώντας και πάλι τον μικρότερο $d > 0$ με

τὸν ὁποῖο ἱκανοποιεῖται ἡ (1.1.3) γιὰ κάποιον $T \in GL(n)$. Θὰ ἀναφερόμαστε ἐπίσης στὴν γεωμετρικὴ ἀπόστασι μετὰξὺ δύο κυρτῶν σωμάτων K, L στὸν \mathbb{R}^n (ὄχι ἀναγκαστικὰ συμμετρικῶν ἢ κεντραρισμένων ἐδῶ), ἡ ὁποία ὀρίζεται ὡς

$$d_G(K, L) := \min \left\{ ab : \frac{1}{a}K \subseteq L \subseteq bK \right\},$$

ἐφ' ὅσον τὸ παραπάνω σύνολο εἶναι μὴ κενό. Προφανῶς $d_G(K, L) \geq 1$ πάντοτε, μὲ ἰσότητα ἂν καὶ μόνον ἂν τὰ δύο σώματα ταυτίζονται.

1.2 Βασικὰ ἀποτελέσματα καὶ ἐργαλεῖα τῆς θεωρίας τῶν κυρτῶν σωμάτων

Κάποιες βασικὲς ἀνισότητες γιὰ ὄγκους κυρτῶν σωμάτων, οἱ ὁποῖες θὰ φανοῦν χρήσιμες στὴν συνέχεια, εἶναι οἱ παρακάτω:

- Ἡ ἀνισότητα *Blaschke-Santaló* [3], [61]: ἂν K εἶναι συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n ἢ, γενικότερα, ἂν τὸ K ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τότε

$$|K| \cdot |K^\circ| \leq |B_2^n|^2.$$

- Ἡ ἀνισότητα τῶν *Bourgain* καὶ *V. Milman* [12]: ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $c \in (0, 1)$ ὥστε, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$ καὶ γιὰ ὁποιοδήποτε κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n μὲ $0 \in \text{int}(K)$, νὰ ἰσχύει

$$|K| \cdot |K^\circ| \geq c^n |B_2^n|^2.$$

Ἡ ἀνισότητα αὐτὴ, δικαιολογημένα, εἶναι γνωστὴ καὶ ὡς *ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló*. Τὸ Κεφάλαιο 4 εἶναι κατὰ βᾶσι ἀφιερωμένο στὴν παρουσίασι μίας ὅσο τὸ δυνατὸν αὐτοτελοῦς καὶ στοιχειώδους ἀποδείξεώς της, κοινῆς δουλειᾶς μὲ τοὺς Γιαννόπουλο καὶ Παοῦρη, ἡ ὁποία στηρίζεται σὲ συνέπειες τῆς ἀνισότητος *Brunn-Minkowski* καὶ ιδιότητες τῶν *ισοτροπικῶν* κυρτῶν σωμάτων οἱ ὁποῖες εἶναι ἀρκετὰ ἀπλές. Μεταξὺ τῶν ἐργαλείων ποὺ θὰ μᾶς χρειαστοῦν θὰ εἶναι καὶ ἡ ἀνισότητα (1.2.3) ποὺ εἶναι ἄμεση συνέπεια τῆς ἀκόλουθης ἀνισότητος τῶν *Rogers* καὶ *Shephard* καὶ συχνὰ φέρει καὶ τὸ ἴδιο ὄνομα.

- Ἀνισότητα τῶν *Rogers* καὶ *Shephard* [59]: γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n , κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ (ὅπου $1 \leq k < n$) καὶ κάθε $x \in F^\perp$, ἔχουμε ὅτι

$$(1.2.1) \quad |K \cap (x + F)|_k \cdot |Proj_{F^\perp}(K)|_{n-k} \leq \binom{n}{k} |K|_n.$$

Ἐχοντας τώρα δύο κυρτὰ σώματα K, L στὸν \mathbb{R}^n , μπορούμε νὰ θεωρήσουμε τὸ κυρτὸ σῶμα $C = K \times L \subset \mathbb{R}^{2n}$ καὶ νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν ἀνισότητα (1.2.1) γιὰ τὸ C καὶ τὸν n -διάστατο ὑπόχωρο $F = \{(x, x) : x \in \mathbb{R}^n\}$ τοῦ \mathbb{R}^{2n} : συμπεραίνουμε ὅτι

$$(1.2.2) \quad |K \cap L| \cdot |K - L| \leq \binom{2n}{n} |K| \cdot |L|,$$

όπου ἐδῶ ὁ ὄγκος ὄλων τῶν συνόλων ἐννοεῖται στὸν \mathbb{R}^n . Ἄν μάλιστα ἔχουμε καὶ $K = L$, τότε λαμβάνουμε ὅτι γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n ἰσχύει

$$(1.2.3) \quad |K - K| \leq \binom{2n}{n} |K|,$$

ὅπου $K - K$ εἶναι τὸ σῶμα διαφορῶν τοῦ K , $K - K := \{z \in \mathbb{R}^n : \exists x, y \in K \text{ ὡστε } z = x - y\}$. Ἀντίστοιχη ἀνισότητα μὲ τὴν (1.2.2) εἶναι καὶ

- *Μία ἀνισότητα τῶν V. Milman καὶ Pajor* [46]: ἂν K, L εἶναι κυρτὰ σώματα στὸν \mathbb{R}^n τὰ ὁποῖα ἔχουν τὸ ἴδιο κέντρο βάρους, τότε

$$(1.2.4) \quad |K| \cdot |L| \leq |K - L| \cdot |K \cap L|$$

(ὅταν καὶ τὰ δύο σώματα εἶναι συμμετρικά, ἡ ἀνισότητα εἶχε ἤδη ἀποδειχθεῖ ἀπὸ τοὺς Rogers καὶ Shephard). Ἐχοντας ἓνα κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n ποὺ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, μπορούμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν παραπάνω ἀνισότητα γιὰ $L = -K$ καὶ νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$(1.2.5) \quad |K \cap (-K)| \geq 2^{-n} |K|.$$

Ἐξαιτίας τῶν (1.2.1) καὶ (1.2.5), βλέπουμε ὅτι κάθε κυρτὸ σῶμα μὲ κέντρο βάρους τὸ 0 περιέχει καὶ περιέχεται σὲ συμμετρικὰ κυρτὰ σώματα ποὺ ἔχουν περίπου τὴν ἴδια ἀκτίνα ὄγκων. Ἐχουμε τέλος, πρὸς τὴν ἀντίθετη κατεύθυνσι ἀπὸ αὐτὴν τῆς (1.2.1), τὴν ἀκόλουθη

- *Ἀνισότητα τοῦ Springarn* [63]: ἔστω K κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n καὶ ἔστω $x_0 = \text{bar}(K)$ τὸ κέντρο βάρους του, τότε γιὰ κάθε $1 \leq k < n$ καὶ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ ἰσχύει

$$(1.2.6) \quad |K|_n \leq |K \cap (x_0 + F)|_k \cdot |Proj_{F^\perp}(K)|_{n-k}.$$

Ἐστω $A, B \neq \emptyset$ δύο ὑποσύνολα τοῦ \mathbb{R}^n . Ὁ ἀριθμὸς καλύψεως τοῦ A ἀπὸ τὸ B ὀρίζεται νὰ εἶναι ὁ ἀριθμὸς

$$N(A, B) := \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \exists x_1, \dots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ὡστε } A \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i + B) \right\}.$$

(ἐφ' ὅσον βεβαίως ὑπάρχει τέτοια κάλυψις τοῦ συνόλου A ἀπὸ μεταφορὲς τοῦ B). Μία παραλλαγή τοῦ παραπάνω ἀριθμοῦ καλύψεως εἶναι ὁ ἀκόλουθος ἀριθμὸς:

$$\bar{N}(A, B) := \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \exists x_1, \dots, x_N \in A \text{ ὡστε } A \subseteq \bigcup_{i=1}^N (x_i + B) \right\}$$

Εἶναι ἄμεσο ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς ὅτι $N(A, B) \leq \bar{N}(A, B)$. Ἐπίσης μπορούμε εὐκόλα νὰ ἐλέγξουμε ὅτι $\bar{N}(A, B - B) \leq N(A, B)$. Ἐπομένως, ἂν τὸ B εἶναι συμμετρικὸ καὶ κυρτὸ σύνολο, τότε $\bar{N}(A, 2B) \leq N(A, B)$. Θὰ χρησιμοποιήσουμε κάποιες βασικὲς ιδιότητες τῶν ἀριθμῶν καλύψεως: γιὰ κάθε τρία κυρτὰ σώματα A, B, C στὸν \mathbb{R}^n ἔχουμε ὅτι

- $N(A, B) \leq N(A, C)$ αν $B \supseteq C$, ενῶ $N(A, C) \leq N(B, C)$ αν $A \subseteq B$.
- Για κάθε $T \in GL(n)$, $N(T(A), T(B)) = N(A, B)$ και $\bar{N}(T(A), T(B)) = \bar{N}(A, B)$.
- $N(A, C) \leq N(A, B) \cdot N(B, C)$.
- $N(A - A, B - B) \leq N(A, B)^2$ και $\bar{N}(A - A, B - B) \leq \bar{N}(A, B)^2$.
- $N(A + C, B + C) \leq N(A, B)$ και $\bar{N}(A + C, B + C) \leq \bar{N}(A, B)$.
- $2^{-n} \frac{|A+B|}{|B|} \leq N(A, B) \leq \bar{N}(A, B)$, ενῶ, αν το B είναι και συμμετρικό, τότε επιπλέον

$$\bar{N}(A, B) \leq \frac{|A+B/2|}{|B/2|} \leq 2^n \frac{|A+B|}{|B|}.$$

Αν το B δεν είναι κατ' ανάγκη συμμετρικό, τότε $N(A, B) \leq 4^n \frac{|A+B|}{|B|}$.

- Για κάθε $r \geq 1$, $N(rA, A) \leq 4^n \frac{|rA+A|}{|A|} = (2(2r+1))^n$.
- $\frac{|A|}{|A \cap B|} \leq N(A, B)$.

Σχεδόν όλες αυτές οι ιδιότητες προκύπτουν κατευθείαν από τους ορισμούς. Για λόγους πληρότητας, στο Κεφάλαιο 4 θα εξηγήσουμε πώς μπορεί κάποιος να δείξει το ἔκτο σημείο. Αναφέρουμε και δύο βασικά θεωρήματα για αριθμούς καλύψεως. Το πρώτο είναι ἡ ἀνισότητα τοῦ Sudakov [65].

Θεώρημα 1.2.1 (Sudakov, 1971). Δοθέντος κυρτοῦ σώματος K στὸν \mathbb{R}^n , ἔχουμε, γιὰ κάθε $t > 0$, ὅτι

$$N(K, tB_2^n) \leq 2 \exp\left(\frac{cnw^2(K)}{t^2}\right),$$

ὅπου $c > 0$ εἶναι ἀπόλυτη σταθερά.

Τὸ ἐπόμενο θεώρημα ἀπεδείχθη ἀπὸ τοὺς Artstein, V. Milman καὶ Szarek [1], καὶ ἐπιβεβαιώνει ὅτι οἱ ἀριθμοὶ καλύψεως ικανοποιοῦν κάποιου εἴδους διῦισμό στις περιπτώσεις πὸν τὸ ἓνα ἀπ' τὰ δύο σώματα εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα.

Θεώρημα 1.2.2 (Artstein-V. Milman-Szarek, 2004). Ἐστω K συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n καὶ ἔστω D ἑλλειψοειδὲς τοῦ \mathbb{R}^n (δηλαδὴ γραμμικὴ εἰκόνα τῆς Εὐκλείδειας μοναδιαίας μπάλας). Τότε

$$c_1^{-1} \log N(D^\circ, c_2^{-1}K^\circ) \leq \log N(K, D) \leq c_1 \log N(D^\circ, c_2K^\circ),$$

ὅπου $c_1, c_2 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.

Έστω κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n με κέντρο βάρους το 0 και έστω D έλλειψοειδές στον \mathbb{R}^n με $|D| = |K|$. Λέμε ότι το D είναι ένα M -έλλειψοειδές για το K με σταθερά β αν ισχύει

$$\max\{\log N(K, D), \log N(D, K), \log N(K^\circ, D^\circ), \log N(D^\circ, K^\circ)\} \leq \beta n.$$

(έξαιτίας του θεωρήματος των Artstein, V. Milman και Szarek και των ιδιοτήτων των αριθμών καλύψεως, μάς αρκεί βέβαια να ελέγξουμε τους δύο πρώτους αριθμούς). Λέμε ότι το K είναι σε M -θέσι με σταθερά β αν ένα M -έλλειψοειδές για το K είναι ή Ευκλείδεια μπάλα που έχει τον ίδιο όγκο με το K . Προφανώς, αν K είναι ένα κυρτό σώμα με κέντρο βάρους το 0 και D είναι ένα M -έλλειψοειδές για το K με σταθερά β , όπου $D = T(B_2^n)$ για κάποιον $T \in GL(n)$, τότε το $\tilde{K} = T^{-1}(K)$ (όπως και κάθε πολλαπλάσιό του) είναι μία M -θέσις του σώματος K με σταθερά β . Ο V. Milman [42], [43] απέδειξε την ύπαρξη M -έλλειψοειδών, και άρα την ύπαρξη M -θέσεως, με μία σταθερά $\beta \simeq 1$ για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0.

Ένας άλλος τρόπος να ορίσουμε την M -θέσι ή τα M -έλλειψοειδή είναι ο ακόλουθος. Έστω K κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n με κέντρο βάρους το 0. Τότε μπορούμε να λέμε ένα έλλειψοειδές $D \subset \mathbb{R}^n$ M -έλλειψοειδές για το K με σταθερά β αν ισχύει $|D| = |K|$ και

$$\begin{aligned} \frac{1}{\beta}|D + L|^{1/n} &\leq |K + L|^{1/n} \leq \beta|D + L|^{1/n}, \\ \frac{1}{\beta}|D^\circ + L|^{1/n} &\leq |K^\circ + L|^{1/n} \leq \beta|D^\circ + L|^{1/n} \end{aligned}$$

για κάθε κυρτό σώμα L στον \mathbb{R}^n . Επιπλέον, κάθε γραμμική εικόνα \tilde{K} του K ή όποια ικανοποιεί τα παραπάνω με D κάποιο πολλαπλάσιο της Ευκλείδειας μπάλας λέγεται M -θέσις του K . Οί δύο τρόποι ορισμού είναι ισοδύναμοι όπως θα υπενθυμίσουμε στο Κεφάλαιο 4. Θα εξηγήσουμε επίσης ότι, για κάθε δύο κυρτά σώματα K_1, K_2 στον \mathbb{R}^n και για όποιεσδήποτε M -θέσεις τους \tilde{K}_1, \tilde{K}_2 (με κάποια σταθερά β), ισχύει

$$|t_1\tilde{K}_1 + t_2\tilde{K}_2|^{1/n} \leq c\beta(t_1|\tilde{K}_1|^{1/n} + t_2|\tilde{K}_2|^{1/n})$$

για όλα τους θετικούς αριθμούς $t_1, t_2 > 0$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Η ίδια ανισότητα μάλιστα συνεχίζει να ισχύει αν αντικαταστήσουμε το \tilde{K}_1 ή το \tilde{K}_2 (ή και τα δύο) με τα πολικά τους σώματα. Αυτή είναι ή αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski, που ήταν ο σκοπός του άρθρου [42] (και ή όποια φυσικά δεν ισχύει για όλα τα κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n , αλλά όταν αυτά βρίσκονται σε συγκεκριμένη θέση).

Ο Pisier (βλέπε [55] ή [56, Κεφάλαιο 7]) πρότεινε μία διαφορετική προσέγγιση για την M -θέσι και την αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski δείχνοντας κάτι ισχυρότερο: για κάθε συμμετρικό σώμα K , υπάρχουν M -έλλειψοειδή \mathcal{E}_K για τα όποια μπορούμε να ελέγξουμε και το πώς μειώνονται οι αριθμοί καλύψεως $N(K, t\mathcal{E}_K)$ και $N(\mathcal{E}_K, tK)$ καθώς το t αυξάνεται. Συγκεκριμένα, απέδειξε το ακόλουθο θεώρημα, το όποιο θα χρησιμοποιήσουμε στο Κεφάλαιο 2.

Θεώρημα 1.2.3 (Pisier, 1989). Για κάθε $0 < \alpha < 2$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σῶμα K στον \mathbb{R}^n , μπορούμε να βρούμε ένα έλλειψοειδές \mathcal{E}_K τέτοιο ὥστε να ισχύει

$$\max \log \{N(K, t\mathcal{E}_K), N(\mathcal{E}_K, tK), N(K^\circ, t\mathcal{E}_K^\circ), N(\mathcal{E}_K^\circ, tK^\circ)\} \leq \frac{c(\alpha)n}{t^\alpha}$$

για κάθε $t \geq 1$, όπου $c(\alpha)$ είναι μία σταθερά που εξαρτάται μόνον από το α . Έχουμε μάλιστα ότι $c(\alpha) \lesssim (2 - \alpha)^{-\alpha/2}$ καθώς $\alpha \rightarrow 2$.

Όρολογία. Ένα τέτοιο έλλειψοειδές λέγεται α -κανονικό M -έλλειψοειδές για το κυρτό σῶμα K . Επιπλέον, αν μπορούμε να θεωρήσουμε ως \mathcal{E}_K ένα πολλαπλάσιο της Εὐκλείδειας μπάλας, λέμε τότε ότι το K βρίσκεται σε α -κανονική M -θέσι.

Το θεώρημα του Dvoretzky [16] μάς πληροφορεί ότι κάθε n -διάστατος χώρος με νόρμα περιέχει υπόχωρο «μεγάλης διαστάσεως» που είναι σχεδόν Εὐκλείδειος, δηλαδή υπόχωρο που έχει μικρή, ανεξάρτητη της διαστάσεως n του χώρου, απόστασι Banach-Mazur από Εὐκλείδειο χώρο.

Θεώρημα 1.2.4 (Dvoretzky, 1960). Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ υπάρχει σταθερά $c(\varepsilon) > 0$ τέτοια ὥστε: αν X είναι n -διάστατος χώρος με νόρμα, τότε μπορούμε να βρούμε υπόχωρο Y του X με διάστασι $k \geq c(\varepsilon) \log n$ ὥστε $d_{BM}(Y, l_2^k) < 1 + \varepsilon$.

Στα επόμενα μάς αρκεί η ισομορφική έκδοχή του παραπάνω θεωρήματος. Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ χώρος με νόρμα και ἄς συμβολίσουμε με C τὴν μοναδιαία μπάλα του X . Ορίζουμε τὸν ἀριθμὸ Dvoretzky $k(C)$ τοῦ κυρτοῦ σώματος C (ἢ τοῦ χώρου X) ὡς τὸ

$$\max \left\{ 1 \leq k \leq n : \nu_{n,k} \left(\left\{ F \in G_{n,k} : \frac{1}{2M(C)} B_F \subseteq C \cap F \subseteq \frac{2}{M(C)} B_F \right\} \right) \geq \frac{n}{n+k} \right\}.$$

Δηλαδή $k(C)$ είναι η μεγαλύτερη διάστασις k με τὴν ιδιότητα οἱ περισσότερες, με τὴν ἔννοια τοῦ μέτρου Haar, τομές τοῦ συμμετρικοῦ κυρτοῦ σώματος C με k -διαστάτους υπόχωρους να είναι «4-ισόμορφες» με τὴν Εὐκλείδεια μπάλα. Ἀντίστοιχα, ὀρίζεται ὁ δυϊκὸς ἀριθμὸς Dvoretzky $k_*(C)$ τοῦ C (ἢ τοῦ χώρου X) ὡς τὸ

$$\max \left\{ 1 \leq k \leq n : \nu_{n,k} \left(\left\{ F \in G_{n,k} : \frac{w(C)}{2} B_F \subseteq Proj_F(C) \subseteq 2w(C) B_F \right\} \right) \geq \frac{n}{n+k} \right\}.$$

Ὁ χαρακτηρισμὸς «δυϊκὸς» προέρχεται ἀπὸ τὸ γεγονός ὅτι, για κάθε υπόχωρο F , τὸ συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα $Proj_F(C)$ είναι τὸ πολικὸ σῶμα τοῦ $C^\circ \cap F$, ἐνῶ ταυτόχρονα $w(C) = M(C^\circ)$. ἐπομένως $k_*(C) = k(C^\circ)$.

Οἱ V. Milman καὶ Schechtman [48] ἔδειξαν ὅτι ὁ ἀριθμὸς Dvoretzky καὶ ὁ δυϊκὸς ἀριθμὸς Dvoretzky είναι δυνατὸν νὰ περιγραφοῦν ἀπὸ κάποιες «καθολικὲς» παραμέτρους τοῦ σώματος C . Πιο συγκεκριμένα, αν θέσουμε $b(C) := \max \{\|\theta\|_C : \theta \in S^{n-1}\}$, οἱ Milman καὶ Schechtman ἔδειξαν ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ὥστε

$$c_1 n \left(\frac{M(C)}{b(C)} \right)^2 \leq k(C) \leq c_2 n \left(\frac{M(C)}{b(C)} \right)^2.$$

Ἀντίστοιχα, γιὰ τὸν δυϊκὸ ἀριθμὸ Dvoretzky, καὶ ἀφοῦ ἔχουμε ὅτι $M(C^\circ) = w(C)$ καὶ $b(C^\circ) = \max\{h_C(\theta) : \theta \in S^{n-1}\} = R(C)$, ἰσχύει ὅτι

$$(1.2.7) \quad c_1 n \left(\frac{w(C)}{R(C)} \right)^2 \leq k_*(C) \leq c_2 n \left(\frac{w(C)}{R(C)} \right)^2.$$

Ἄς σημειώσουμε ὅτι τὰ κάτω φράγματα ἐμφανίζονται ἤδη στὴν ἀπόδειξι πὺ ἔδωσε ὁ V. Milman [41] γιὰ τὸ θεώρημα τοῦ Dvoretzky.

Ἀργότερα, οἱ Litvak, V. Milman καὶ Schechtman [36] ἀπέδειξαν ὅτι οἱ ἀριθμοὶ $k(C)$ καὶ $k_*(C)$ ἔχουν κι ἄλλη σημασία, καθὼς εἶναι σημεία ἀλλαγῆς συμπεριφορᾶς τῶν q -μέσων καὶ τῶν q -μέσων πλατῶν τοῦ σώματος C . Τὸ ἀκριβὲς ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ ἀκόλουθο:

Θεώρημα 1.2.5 (Litvak-V. Milman-Schechtman, 1998). Ἔστω C συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n . Τότε ἰσχύει ὅτι

$$M_q(C) \simeq \begin{cases} M(C), & \text{ἂν } 1 \leq q \leq k(C), \\ \sqrt{q/n} b(C), & \text{ἂν } k(C) \leq q \leq n, \\ b(C), & \text{γιὰ κάθε } q \geq n \end{cases}.$$

Εἰδικότερα, βλέπουμε ὅτι τὰ $M_q(C)$ παραμένουν σχεδὸν σταθερὰ καὶ ἴσα μὲ $M(C)$ ὅσο $q \leq k(C)$. Ἀντίστοιχα, γιὰ τὰ μέσα πλάτη ἔχουμε ὅτι

$$w_q(C) \simeq \begin{cases} w(C), & \text{ἂν } 1 \leq q \leq k_*(C), \\ \sqrt{q/n} R(C), & \text{ἂν } k_*(C) \leq q \leq n, \\ R(C), & \text{γιὰ κάθε } q \geq n \end{cases},$$

ἐπομένως τὰ $w_q(C)$ παραμένουν σχεδὸν σταθερὰ καὶ ἴσα μὲ τὸ $w(C)$ ὅσο $q \leq k_*(C)$.

Τὸ ἀνάλογο αὐτῆς τῆς παρατηρήσεως γιὰ ἀρνητικὲς τιμὲς τοῦ q ἀπεδείχθη ἀπὸ τοὺς Klartag καὶ Vershynin [31] καὶ δείχνει ὅτι οἱ ἀρνητικοὶ q -μέσοι καὶ τὰ ἀρνητικὰ q -μέσα πλάτη ἔχουν κάτι παρὰ πᾶνω ἀπὸ συμμετρικὴ συμπεριφορὰ ὅσον ἀφορᾶ στὴν εὐστάθειά τους: οἱ τιμὲς τους παραμένουν σταθερὲς σὲ διάστημα κατ' οὐσίαν μεγαλύτερο τοῦ $(-k, 0)$ ἢ τοῦ $(-k_*, 0)$ ἀντιστοίχως. Γιὰ νὰ διατυπώσουμε τὸ ἀποτέλεσμα τῶν Klartag καὶ Vershynin, ὀρίζουμε μιὰ καινούρια παράμετρο ὡς ἑξῆς: ἔστω C συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n . ὁ ἀριθμὸς $d(C)$ εἶναι ἡ ποσότητα

$$d(C) := \min \left\{ -\log \sigma \left(\left\{ \theta \in S^{n-1} : \|\theta\|_C \leq \frac{M(C)}{2} \right\} \right), n \right\}.$$

Ἀντίστοιχα θέτουμε

$$d_*(C) := d(C^\circ) = \min \left\{ -\log \sigma \left(\left\{ \theta \in S^{n-1} : h_C(\theta) \leq \frac{w(C)}{2} \right\} \right), n \right\}.$$

Ἐπικαλούμενοι τὴν ἰσοπεριμετρικὴ ἀνισότητα στὴν σφαῖρα S^{n-1} γιὰ τὶς Lipschitz συναρτήσεις $\|\cdot\|_C : S^{n-1} \rightarrow (0, +\infty)$ καὶ $h_C : S^{n-1} \rightarrow (0, +\infty)$, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ γεγονός ὅτι ὁ μέσος Lévy

(που εμφανίζεται στην διατύπωση της ισοπεριμετρικής ανισότητας) και το ολοκλήρωμα μίας νόρμας στην σφαίρα είναι περίπου ίσα, μπορούμε να ελέγξουμε ότι $d(C) \geq c_1 k(C)$ και ότι $d_*(C) \geq c_1 k_*(C)$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ (υπενθυμίζουμε ότι μέσο Lévy μίας συναρτήσεως $f : S^{n-1} \rightarrow \mathbb{R}$ ονομάζουμε όποιονδήποτε αριθμό $\text{med}(f)$ έχει την ιδιότητα $\min\{\sigma(\{\theta : f(\theta) \geq \text{med}(f)\}), \sigma(\{\theta : f(\theta) \leq \text{med}(f)\})\} \geq 1/2$). Έχουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.2.6 (Klartag-Vershynin, 2007). Έστω C συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n . Για κάθε $q \in (0, c_1 d(C))$ ισχύει ότι

$$M(C) \geq M_{-q}(C) \geq c_2 M(C),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Προφανώς, από τους ορισμούς, έχουμε επίσης για κάθε $q \in (0, c_1 d_*(C))$ ότι

$$w(C) \geq w_{-q}(C) \geq c_2 w(C).$$

1.3 Λογαριθμικά-κοίλα μέτρα

Γενίκευσις των κυρτών σωμάτων είναι τα λογαριθμικά-κοίλα μέτρα. Ένα Borel μέτρο μ στον \mathbb{R}^n λέγεται λογαριθμικά-κοίλο αν, για κάθε δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα A, B του \mathbb{R}^n και για κάθε $\lambda \in (0, 1)$, ισχύει

$$(1.3.1) \quad \mu(\lambda A + (1 - \lambda)B) \geq \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda}.$$

Αντίστοιχα, μία συνάρτησις $f : C \rightarrow [0, +\infty)$ με πεδίο ορισμού ένα κυρτό υποσύνολο C του \mathbb{R}^n λέγεται λογαριθμικά-κοίλη αν, για κάθε $x, y \in C$ και κάθε $\lambda \in (0, 1)$, ισχύει

$$f(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x)^\lambda f(y)^{1-\lambda}.$$

Από την (1.1.2) βλέπουμε ότι το μέτρο Lebesgue είναι λογαριθμικά-κοίλο μέτρο. Άλλα και ο περιορισμός του πάνω σε κάποιο κυρτό υποσύνολο του \mathbb{R}^n είναι λογαριθμικά-κοίλο μέτρο αφού, αν $K \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι κυρτό, τότε, για κάθε δύο μη κενά, συμπαγή υποσύνολα $A, B \subset \mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0, 1)$, έχουμε ότι

$$|(\lambda A + (1 - \lambda)B) \cap K| \geq |\lambda(A \cap K) + (1 - \lambda)(B \cap K)| \geq |A \cap K|^\lambda |B \cap K|^{1-\lambda},$$

πάλι από την ανισότητα Brunn-Minkowski. Έπεται ότι η χαρακτηριστική συνάρτησις $\mathbf{1}_K$ ενός κυρτού σώματος K είναι πυκνότητα (ως προς το μέτρο Lebesgue) ενός πεπερασμένου λογαριθμικά-κοίλου μέτρου με συμπαγή φορέα. Υπάρχουν όμως και πεπερασμένα λογαριθμικά-κοίλα μέτρα στον \mathbb{R}^n που δεν έχουν συμπαγή φορέα: για παράδειγμα, τα εκθετικά μέτρα με πυκνότητα (ως προς το μέτρο Lebesgue) την $x \in \mathbb{R}^n \mapsto a_1 \exp(-a_2 \|x\|_1) = a_1 \exp(-a_2 \sum_{1 \leq i \leq n} |x_i|)$, όπου $a_1, a_2 > 0$ θετικές παράμετροι, ή τα μέτρα του Gauss με πυκνότητα την $x \in \mathbb{R}^n \mapsto b_1 \exp(-b_2 \|x\|_2^2)$, όπου

$b_1, b_2 > 0$. Καί οί δύο αὐτές οἰκογένειες μέτρων ἔχουν τὸ χαρακτηριστικὸ τὰ μέτρα ποὺ ἀνήκουν σὲ αὐτές νὰ εἶναι ἀπολύτως συνεχῆ ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue καὶ μάλιστα ἡ πυκνότητά τους νὰ εἶναι λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις. Αὐτό, ὅπως δείχνουν τὰ ἐπόμενα δύο θεωρήματα, ἰσχύει γιὰ ὅλα τὰ πεπερασμένα λογαριθμικά-κοῖλα μέτρα.

Θεώρημα 1.3.1 (Ἄνισότητα Prékopa-Leindler). Ἐστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ μετρήσιμες συναρτήσεις, καὶ ἔστω $\lambda \in (0, 1)$. Ὑποθέτουμε ὅτι οἱ f, g εἶναι ὀλοκληρώσιμες καὶ ὅτι γιὰ κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ἰσχύει

$$h(\lambda x + (1 - \lambda)y) \geq f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}.$$

Τότε,

$$(1.3.2) \quad \int_{\mathbb{R}^n} h \geq \left(\int_{\mathbb{R}^n} f \right)^\lambda \left(\int_{\mathbb{R}^n} g \right)^{1-\lambda}.$$

Παρατήρησις 1.3.2. Συνέπειες τῆς ἀνισότητος Prékopa-Leindler εἶναι τόσο ἡ ἀνισότητα Brunn-Minkowski (στὴν μορφή τῆς (1.1.2)), ἀπὸ τὴν ὁποία ὅμως μπορούμε ἔπειτα νὰ συμπεράνουμε καὶ τὴν (1.1.1) ὅσο καὶ τὸ γεγονός ὅτι ἓνα πεπερασμένο μέτρο στὸν \mathbb{R}^n μὲ λογαριθμικά-κοίλη πυκνότητα ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue εἶναι λογαριθμικά-κοῖλο. Πράγματι,

- γιὰ νὰ λάβουμε τὴν (1.1.2), θεωροῦμε δύο μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα K, L τοῦ \mathbb{R}^n καὶ $\lambda \in (0, 1)$, καὶ παρατηροῦμε ὅτι οἱ $f = \mathbf{1}_K$, $g = \mathbf{1}_L$ καὶ $h = \mathbf{1}_{\lambda K + (1-\lambda)L}$ ἱκανοποιοῦν τὶς ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος 1.3.1. Ὅμως, τὸ συμπέρασμα (1.3.2) γιὰ αὐτὲς τὶς f, g, h εἶναι ἀκριβῶς ἡ (1.1.2).
- ὅταν ἡ πυκνότητα f_μ ἑνὸς πεπερασμένου μέτρου μ στὸν \mathbb{R}^n εἶναι λογαριθμικά-κοίλη, τότε, γιὰ κάθε δύο μὴ κενά, συμπαγῆ ὑποσύνολα A, B τοῦ \mathbb{R}^n καὶ γιὰ κάθε $\lambda \in (0, 1)$, μπορούμε νὰ θέσουμε $f = \mathbf{1}_A f_\mu$, $g = \mathbf{1}_B f_\mu$ καὶ $h = \mathbf{1}_{\lambda A + (1-\lambda)B} f_\mu$ καί, ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα 1.3.1, νὰ δείξουμε ὅτι ἱκανοποιεῖται ἡ συνθήκη (1.3.1) γιὰ τὸ μ .

Τὸ ἀντίστροφο, δηλαδή ὅτι κάθε πεπερασμένο λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο ἔχει μίαν λογαριθμικά-κοίλη πυκνότητα, ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Borell [7]. Θὰ λέμε ὅτι ἓνα πεπερασμένο Borel μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n εἶναι μὴ ἐκφυλισμένο ἂν γιὰ κάθε ὑπερεπίπεδο H τοῦ \mathbb{R}^n ἰσχύει $\mu(H) < \mu(\mathbb{R}^n)$, ἂν δηλαδή ὁ φορέας τοῦ μ δὲν περιέχεται σὲ κάποιο γνήσιο ἀφινικὸ ὑπόχωρο τοῦ \mathbb{R}^n .

Θεώρημα 1.3.3 (Borell, 1975). Ἐστω μ ἓνα μὴ ἐκφυλισμένο, πεπερασμένο, λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο στὸν \mathbb{R}^n . Τότε τὸ μ εἶναι ἀπολύτως συνεχὲς ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue καὶ ἔχει μίαν λογαριθμικά-κοίλη πυκνότητα $f_\mu(x) = d\mu/dx$.

Ἐξαιτίας τῶν Θεωρημάτων 1.3.1 καὶ 1.3.3, στὸ ἐξῆς δὲν θὰ κάνουμε ἓν γένει διάκρισι μεταξὺ λογαριθμικά-κοίλων μέτρων καὶ λογαριθμικά-κοίλων συναρτήσεων, ἐνῶ, ὅταν θεωροῦμε (πεπερασμένο, μὴ ἐκφυλισμένο) λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n , θὰ συμβολίζουμε μὲ f_μ τὴν πυκνότητά

του ως προς τὸ μέτρο Lebesgue. Ἡ ἐπομένη πρότασις δείχνει ὅτι κάθε λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὀλοκλήρωμα (καὶ ἄρα, ἐξαιτίας τῶν παραπάνω, καὶ κάθε πεπερασμένο λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο) ἔχει ῥοπέδες ὅλων τῶν τάξεων (γιὰ τὴν ἀπόδειξί της βλέπε π.χ. [13, Λήμμα 2.2.1]).

Πρότασις 1.3.4. Ἐστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὀλοκλήρωμα. Τότε μπορούμε νὰ βροῦμε θετικὲς σταθερὲς A, B (ποῦ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν f) ὥστε νὰ ἔχουμε $f(x) \leq A \exp(-B\|x\|_2)$ γιὰ ὅλα τὰ $x \in \mathbb{R}^n$.

Λέμε ὅτι ἓνα Borel μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n εἶναι ἄρτιο ἂν ἰσχύει $\mu(A) = \mu(-A)$ γιὰ κάθε Borel ὑποσύνολο A τοῦ \mathbb{R}^n , ἐνῶ λέμε μία συνάρτησις $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ἄρτια ἂν ἰσχύει $f(x) = f(-x)$ γιὰ κάθε x . Ἐνα πεπερασμένο λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n θὰ λέμε ὅτι ἔχει κέντρο βάρους (ἢ βαρύκεντρο) τὸ 0 ἂν ἰσχύει $\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle d\mu(x) = 0$ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. ἀντίστοιχα γιὰ μία ὀλοκληρώσιμη λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$. Θὰ χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης τὶς φράσεις «κεντραρισμένο μέτρο» ἢ «κεντραρισμένη συνάρτησις». Γενικά, ὅπως καὶ γιὰ τὰ κυρτὰ σώματα, τὸ κέντρο βάρους ἑνὸς πεπερασμένου λογαριθμικά-κοῖλου μέτρου μ στὸν \mathbb{R}^n (ἢ μίας ὀλοκληρώσιμης λογαριθμικά-κοίλης συναρτήσεως $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$) ὀρίζεται ὡς τὸ διάνυσμα

$$\text{bar}(\mu) := \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} x d\mu(x) = \left(\frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, e_1 \rangle d\mu(x), \dots, \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, e_n \rangle d\mu(x) \right),$$

(ἢ ἀντίστοιχα τὸ διάνυσμα $\text{bar}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} x f(x) d(x) / \int_{\mathbb{R}^n} f$). Τὸ ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα, ποῦ συγκρίνει τὴν τιμὴ στὸ κέντρο βάρους καὶ τὸ supremum μίας λογαριθμικά-κοίλης συναρτήσεως, ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Fradelizi [17].

Θεώρημα 1.3.5 (Fradelizi, 1997). Ἐστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ μία λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὀλοκλήρωμα, καὶ ἔστω $x_0 = \text{bar}(f)$. Τότε

$$f(x_0) \leq \|f\|_\infty \leq e^n f(x_0).$$

Ἐπίσης τὰ λογαριθμικά-κοῖλα μέτρα ἔχουν καὶ τὴν παρακάτω ιδιότητα.

Λήμμα 1.3.6 (Λήμμα τοῦ Grünbaum, [24]). Ἐστω μ ἓνα λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν \mathbb{R}^n μὲ κέντρο βάρους τὸ 0. Τότε,

$$\frac{1}{e} \leq \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, \theta \rangle\}) \leq 1 - \frac{1}{e}$$

γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Ἄν ἔχουμε μία ὀλοκληρώσιμη συνάρτησις $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ καὶ ἓναν ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ γιὰ κάποιον $1 \leq k < n$, μπορούμε νὰ ὀρίσουμε τὴν περιθώρια συνάρτησις $\pi_F f : F \rightarrow [0, \infty)$ τῆς f ὡς πρὸς τὸν ὑπόχωρο F θέτοντας

$$(1.3.3) \quad \pi_F f(x) := \int_{x+F^\perp} f(y) dy.$$

Επίσης, αν έχουμε ένα Borel μέτρο μ στον \mathbb{R}^n , ορίζουμε το περιθώριο μέτρο του μ ως προς τον υπόχωρο F θέτοντας

$$\pi_F \mu(A) := \mu(\text{Proj}_F^{-1}(A))$$

για όλα τα Borel υποσύνολα του F . Φυσικά, αν το μ είναι πεπερασμένο και απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, και έχει πυκνότητα f_μ , τότε το περιθώριο μέτρο του μ ως προς κάποιο υπόχωρο F ορίζεται και μέσω του πρώτου ορισμού, αφού θα είναι απολύτως συνεχές και θα έχει πυκνότητα $f_{\pi_F(\mu)} = \pi_F f_\mu$.

Κάποιες βασικές ιδιότητες των περιθωρίων συναρτήσεων και μέτρων συνοψίζονται στην παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 1.3.7. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ μία ολοκληρώσιμη συνάρτησις, έστω άκέραιος $1 \leq k < n$ και έστω $F \in G_{n,k}$. Τότε:

1. Αν ή f είναι άρτια, τó ίδιο ισχύει και για τήν περιθώρια συνάρτησι $\pi_F f$.

2. Έχουμε ότι

$$\int_F \pi_F f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

3. Για οποιαδήποτε μετρήσιμη συνάρτησι $g : F \rightarrow \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(\text{Proj}_F(x)) f(x) dx = \int_F g(x) \pi_F f(x) dx.$$

4. Για κάθε $\theta \in S_F$,

$$(1.3.4) \quad \int_F \langle x, \theta \rangle \pi_F f(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x) dx.$$

Ειδικότερα, αν ή f έχει κέντρο βάρους τó 0, τότε τó ίδιο ισχύει και για τήν περιθώρια συνάρτησι $\pi_F f$.

5. Για όλα τά $p > 0$ και $\theta \in S_F$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta \rangle|^p f(x) dx = \int_F |\langle x, \theta \rangle|^p \pi_F f(x) dx.$$

6. Αν ή f είναι λογαριθμικά-κοίλη, τότε και ή $\pi_F f$ είναι λογαριθμικά-κοίλη.

Επιπλέον, αντίστοιχες ιδιότητες ισχύουν και για τά περιθώρια μέτρα ενός μέτρου μ στον \mathbb{R}^n τó οποίó είναι πεπερασμένο και απολύτως συνεχές ως προς τó μέτρο Lebesgue.

Σε πολλά προβλήματα τής Άσυμπτωτικής Κυρτής Γεωμετρίας, συμπεριλαμβανομένου και τού προβλήματος τής ισοτροπικής σταθεράς, είναι πολύ χρήσιμο νά γνωρίζουμε τήν συμπεριφορά τών L_p -νορμών (ως προς κάποιο λογαριθμικά-κοίλο μέτρο) τών γραμμικών συναρτησοειδών ή διαφορών ήμινορμών, συμπεριφορά για τήν οποία μπορούμε νά εξαγάγουμε πληροφορίες από τó παρακάτω λήμμα, τó οποίό άπεδείχθη από τόν Borell [6].

Λήμμα 1.3.8 (Λήμμα του Borell, 1974). Έστω μ ένα λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας στον \mathbb{R}^n και έστω $A \subset \mathbb{R}^n$ ένα κυρτό και συμμετρικό σύνολο. Υποθέτουμε ότι ισχύει $\mu(A) \geq 2/3$ και θέτουμε $a = \mu(A)$. Τότε για κάθε $t > 1$ έχουμε ότι

$$\mu((tA)^c) \leq a \left(\frac{1-a}{a} \right)^{\frac{t+1}{2}} \leq \exp(-ct),$$

όπου $(tA)^c$ είναι το συμπλήρωμα του tA και $c = \log 2/2$ (αυτό σημαίνει ότι ο όγκος του συμπληρώματος του tA φθίνει έκθετικά καθώς το t αυξάνεται).

Μία πολύ σημαντική συνέπεια του λήμματος του Borell είναι οι ακόλουθες αντίστροφες ανισότητες Hölder που ικανοποιούν οι L_p -νόρμες των γραμμικών συναρτησοειδών (ως προς οποιοδήποτε λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας μ).

Πρόταση 1.3.9. Έστω μ ένα λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας στον \mathbb{R}^n και έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ μία ήμινόρμα. (π.χ. $f = |\langle \cdot, y \rangle|$ για κάποιο $y \in \mathbb{R}^n$ ή f είναι κάποια νόρμα στον \mathbb{R}^n). Τότε, για κάθε $q > p \geq 1$, έχουμε ότι

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leq \beta_1 \frac{q}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p},$$

όπου $\beta_1 > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

Γενικά λέμε ότι ένα λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον \mathbb{R}^n είναι ψ_α με σταθερά β_α , όπου $\alpha \in [1, 2]$, αν ισχύει

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y \rangle|^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leq \beta_\alpha q^{1/\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle^2 d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

Η παραπάνω πρόταση δείχνει επομένως ότι όλα τα λογαριθμικά-κοίλα μέτρα πιθανότητας, και άρα, πιό ειδικά, όλα τα κυρτά σώματα όγκου 1, είναι ψ_1 με μία απόλυτη σταθερά β_1 .

1.3.1 Γενικός όρισμός τής ισοτροπικής σταθεράς

Γενικεύοντας τον όρισμό ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος, λέμε ότι ένα πεπερασμένο λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n είναι ισοτροπικό αν το μ είναι μέτρο πιθανότητας, δηλαδή $\mu(\mathbb{R}^n) = 1$, αν έχει κέντρο βάρους το 0 και αν ικανοποιεί την *ισοτροπική συνθήκη*

$$(1.3.5) \quad \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 d\mu(x) = 1$$

για όλα τα $\theta \in S^{n-1}$ (όποτε τότε είναι και μη έκφυλισμένο). Αντίστοιχα, μία λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα θα λέγεται *ισοτροπική* αν $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$, αν το κέντρο βάρους τής f είναι το 0 και αν ικανοποιείται η *ισοτροπική συνθήκη*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 f(x) d(x) = 1$$

για όλα τα $\theta \in S^{n-1}$. Παρατηρούμε ότι ένα (πεπερασμένο, μη έκφυλισμένο) λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n είναι ισοτροπικό αν και μόνον αν η λογαριθμικά-κοίλη πυκνότητά του f_μ είναι ισοτροπική. Σε αυτήν την περίπτωση γράφουμε $\mu \in \mathcal{IL}[n]$. Επίσης, για κάθε τέτοιο μ έχουμε, εξαιτίας των ιδιοτήτων 4. και 5. της Προτάσεως 1.3.7, ότι και κάθε περιθώριο μέτρο $\pi_F \mu$ του μ είναι ισοτροπικό.

Όπως ισχύει και για τα κυρτά σώματα, όταν έχουμε ένα λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n , το οποίο είναι πεπερασμένο και μη έκφυλισμένο, η μία λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησι $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα, μπορούμε πάντα να τα φέρουμε σε ισοτροπική θέση. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε έναν μετασχηματισμό $T \in GL(n)$, ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ και έναν θετικό αριθμό $a > 0$ ώστε το μέτρο $\nu = a \cdot [\mu \circ (x + T)]$ να είναι ισοτροπική εικόνα του μ , η h συνάρτησις $g = a \cdot [f \circ (x + T)]$ να είναι ισοτροπική εικόνα της f . Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι έχουμε ήδη μετασχηματίσει το μ ώστε να είναι μέτρο πιθανότητας με κέντρο βάρους το 0, μπορούμε να ορίσουμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό $T \in GL(n)$ θέτοντας

$$T(y) := \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle x d\mu(x).$$

Αφοῦ $\langle T(y_1), y_2 \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y_1 \rangle \cdot \langle x, y_2 \rangle d\mu(x)$, ο T είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα υπάρχει συμμετρικός μετασχηματισμός $S \in GL(n)$ ώστε $T = S^2$ και γι' αυτόν τον S έχουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle^2 d(\mu \circ S)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, S^{-1}(y) \rangle^2 d\mu(x) = \langle T(S^{-1}(y)), S^{-1}(y) \rangle = \|y\|_2^2,$$

δηλαδή το $\mu \circ S$ ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη (1.3.5).

Παρατήρησης 1.3.10. Όπως εξηγήσαμε παραπάνω, για κάθε πεπερασμένο και μη έκφυλισμένο λογαριθμικά-κοίλο μέτρο υπάρχει $S \in GL(n)$ ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle^2 d\mu(x) = \langle S(y), S(y) \rangle = \|y\|_{S^{-1}(B_2^n)}^2,$$

και άρα υπάρχει ένα έλλειψοειδές $\mathcal{E}_B(\mu)$ με την ιδιότητα, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, να ισχύει

$$\|y\|_{\mathcal{E}_B(\mu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle^2 d\mu(x) \right)^{1/2}.$$

Το έλλειψοειδές αυτό λέγεται έλλειψοειδές *Binet* του μ . Με τον ίδιο τρόπο ορίζεται το έλλειψοειδές *Binet* μίας λογαριθμικά-κοίλης συναρτήσεως $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα, η το έλλειψοειδές *Binet* ενός κυρτού σώματος στον \mathbb{R}^n . Άς σημειώσουμε ότι ισχύει

$$(1.3.6) \quad \mathcal{E}_B(a \cdot (\mu \circ T)) = \sqrt{a^{-1}} \cdot T^*(\mathcal{E}_B(\mu)), \quad \mathcal{E}_B(a \cdot (f \circ T)) = \sqrt{a^{-1} |\det T|} \cdot T^*(\mathcal{E}_B(f))$$

$$\text{και} \quad \mathcal{E}_B(T(K)) = \sqrt{|\det T|} \cdot (T^*)^{-1}(\mathcal{E}_B(K))$$

για κάθε $T \in GL(n)$ και $a > 0$.

Παρατηρούμε ότι για τὰ λογαριθμικά-κοίλα μέτρα μ καὶ τὶς λογαριθμικά-κοίλες συναρτήσεις f ἐπιλέγουμε τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη λίγο διαφορετικὴ ἀπὸ ὅ,τι για τὰ κυρτὰ σώματα, ἀφοῦ ζητᾶμε οἱ δευτέρους ῥοπές τῶν γραμμικῶν συναρτησοειδῶν ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ μοναδιαῖες διευθύνσεις νὰ εἶναι ἴσες μὲ 1 καὶ ὄχι μὲ μία σταθερὰ ποὺ ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὸ μ ἢ τὴν f . Μάλιστα, σύμφωνα μὲ τοὺς ὁρισμούς μας, ἓνα κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n εἶναι ἰσοτροπικὸ ἂν καὶ μόνον ἂν ἡ λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις $f_K := L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K}K}$ εἶναι ἰσοτροπικὴ. Αὐτὴ ἡ μικρὴ διαφορὰ στὸ τί σημαίνει «ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα» καὶ τί «ἰσοτροπικὸ μέτρο» δὲν ἔχει καμμία σημασία για τὰ ἀποτελέσματα (παρὰ μόνον μᾶς ἀναγκάζει νὰ εἴμαστε κάπως προσεκτικοὶ στὶς διατυπώσεις τους), ἀφοῦ, ὅπως θὰ δοῦμε ἀμέσως τώρα, μὲ τὸν τρόπο ποὺ ὀρίζεται ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ, παραμένει ἀμετάβλητη ἀπὸ ἀφινικοὺς μετασχηματισμούς καὶ ἔτσι μποροῦμε νὰ μιλάμε χωρὶς κανέναν κίνδυνο συγχύσεως για τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ἑνὸς μέτρου, μίας συναρτήσεως ἢ ἑνὸς σώματος χωρὶς νὰ ὑποθέτουμε ὅτι αὐτὰ βρίσκονται σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι.

Ὁρισμός 1.3.11 (Γενικὸς ὁρισμὸς τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς). Ἐστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, +\infty)$ μία λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὀλοκλήρωμα. Τότε μποροῦμε νὰ ὀρίσουμε τὸν πίνακα συνδιακυμάνσεων $\text{Cov}(f)$ τῆς f ὡς τὸν πίνακα μὲ στοιχεῖα

$$[\text{Cov}(f)]_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x) dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx}.$$

Σημειώνουμε ὅτι ὁ $\text{Cov}(f)$ εἶναι ἓνας συμμετρικὸς, θετικὰ ὀρισμένος πίνακας καὶ, ἂν ἡ f εἶναι ἰσοτροπικὴ, τότε ὁ $\text{Cov}(f)$ εἶναι ὁ ταυτοτικὸς πίνακας Id_n .

Δοθεῖσης μίας λογαριθμικά-κοίλης συναρτήσεως f μὲ πεπερασμένο, θετικὸ ὀλοκλήρωμα, ὀρίζουμε τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ τῆς f ὡς

$$(1.3.7) \quad L_f := \left(\frac{\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx} \right)^{\frac{1}{n}} [\det \text{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Στὴν συνέχεια, δοθέντος πεπερασμένου καὶ μὴ ἐκφυλισμένου λογαριθμικά-κοίλου μέτρου μ στὸν \mathbb{R}^n , τὸ ὁποῖο ἔχει πυκνότητα f_μ ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue, ὀρίζουμε τὴν ἰσοτροπικὴ του σταθερὰ θέτοντας $L_\mu := L_{f_\mu}$, δηλαδὴ ὡς ἐξῆς:

$$(1.3.8) \quad L_\mu := \left(\frac{\|\mu\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x) dx} \right)^{\frac{1}{n}} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}},$$

ὅπου χρησιμοποιοῦμε ἐπίσης τοὺς συμβολισμούς

$$\|\mu\|_\infty := \sup_{x \in \mathbb{R}^n} f_\mu(x)$$

καὶ $\text{Cov}(\mu) := \text{Cov}(f_\mu)$.

Κάνοντας σχετικὰ ἀπλοὺς ὑπολογισμούς μπορεῖ κάποιος τώρα νὰ ἐλέγξει ὅτι, σύμφωνα μὲ τὸν παραπάνω ὀρισμὸ, ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ δὲν μεταβάλλεται ἀπὸ ἀφινικοὺς μετασχηματισμούς, δηλαδὴ ἰσχύει ὅτι $L_\mu = L_{a(\mu \circ A)}$ καὶ $L_f = L_{a(f \circ A)}$ για κάθε ἀντιστρέψιμο ἀφινικὸ μετασχηματισμὸ A τοῦ \mathbb{R}^n καὶ κάθε θετικὸ ἀριθμὸ a . Ἐπιπλέον, ἰσχύουν τὰ ἐξῆς:

- Ο αρχικός όρισμός που δώσαμε για την ισοτροπική σταθερά κυρτών σωμάτων είναι συνεπής με τον Όρισμό 1.3.11 με την έννοια ότι $L_{\mathbf{1}_K} = L_K$ για όποιοδήποτε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n . Ένας εύκολος τρόπος να το δοῦμε αυτό είναι να θεωρήσουμε ότι το K είναι σε ισοτροπική θέση και έπειτα, κατά τετριμμένο τρόπο, να παρατηρήσουμε ότι $\|\mathbf{1}_K\|_\infty = 1$, $\int \mathbf{1}_K(x) dx = 1$ και $\text{Cov}(\mathbf{1}_K) = L_K^2 \text{Id}_n$.
- Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο στον \mathbb{R}^n , τότε $\int f_\mu = 1$ και $\text{Cov}(\mu) = \text{Id}_n$, από τα όποια έπεται ότι $L_\mu = \|\mu\|_\infty^{1/n}$. Επιπροσθέτως, εφ' όσον εξ όρισμοῦ το μ είναι κεντραρισμένο, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.3.5 και να παρατηρήσουμε ότι ισχύει $e^{-1}L_\mu \leq (f_\mu(0))^{1/n} \leq L_\mu$, άρα μπορούμε εν γένει στις εκφράσεις στις όποιες εμφανίζεται ή ισοτροπική σταθερά τοῦ μ να γράφουμε αντί αὐτῆς τὸ $(f_\mu(0))^{1/n}$. Στὴν ἐπομένη παράγραφο και στὸ Κεφάλαιο 3 θὰ ἐκμεταλλευθοῦμε ἀρκετὲς φορὲς αὐτὴν τὴν παρατήρησι.

1.3.2 Σύνδεσις μέτρων και σωμάτων

Ο Ball (βλέπε [2]) πρότεινε έναν πολὺ χρήσιμο τρόπο να συνδέουμε κάθε μὴ ἀρνητική, ὀλοκληρώσιμη λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησι f με συγκεκριμένα κυρτά σώματα που κληρονομοῦν διάφορες ἀπὸ τὶς ιδιότητες τῆς f . ὁ σκοπὸς αὐτῆς τῆς συνδέσεως εἶναι ὅτι πολὺ συχνὰ σὲ προβλήματα πολὺ διατυπώνονται για κυρτά σώματα χρειάζεται να χρησιμοποιήσουμε λογαριθμικά-κοίλα μέτρα και λογαριθμικά-κοίλες συναρτήσεις ἀλλὰ στὸ τέλος θέλουμε πάλι να διατυπώσουμε τὰ συμπεράσματα και ἀποτελέσματά μας στὴν γλώσσα τῶν κυρτῶν σωμάτων. Ἀλλὰ και ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἐρωτήματα που φαίνονται πὸ γενικὰ ὅταν διατυπωθοῦν για λογαριθμικά-κοίλα μέτρα ἀπὸ ὅ,τι ὅταν ἀρχικῶς διευτυπώθηκαν για κυρτά σώματα ἀποδεικνύεται ὀρισμένες φορὲς, μέσω τῆς κατασκευῆς τοῦ Ball, ὅτι εἶναι ἰσοδύναμα με τὶς ἀρχικὲς τὸς μορφές. Μία τέτοια περίπτωση, ὅπως θὰ ἐξηγήσουμε σὲ αὐτὴν τὴν παράγραφο, εἶναι και τὸ πρόβλημα τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς: τὸ συμπέρασμα που προκύπτει ἐξαιτίας τῶν Προτάσεων 1.3.19 και 1.3.21, οἱ όποιες κλείνουν αὐτὴν τὴν παράγραφο, εἶναι ἕνα ἀπὸ τὰ πὸ βασικὰ στὴν θεωρία τῶν ἰσοτροπικῶν σωμάτων και μέτρων και μᾶς λέει ὅτι

$$(1.3.9) \quad L_n := \sup\{L_\mu : \mu \text{ πεπερασμένο, μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικά-κοίλο μέτρο στὸν } \mathbb{R}^n\} \\ \simeq \max\{L_K : K \text{ κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n\} \\ \simeq \max\{L_K : K \text{ συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n\}.$$

Αὐτὸ μᾶς ἐπιτρέπει ἀρκετὴ εὐελιξία στις ὑπάρχουσες προσεγγίσεις για τὴν μελέτη τοῦ προβλήματος, ὅπως για παράδειγμα θὰ δοῦμε και σὲ αὐτὴν τὴν διατριβή, ὅπου στὸ Κεφάλαιο 2 θὰ ἀναφερθοῦμε σὲ κυρτά σώματα με μεγιστικὴ ἰσοτροπικὴ σταθερά για να χρησιμοποιήσουμε ἀριθμοὺς καλύψεως στὰ ἐπιχειρήματα, ἐνῶ στὸ Κεφάλαιο 3 θὰ ἀναφερόμαστε σὲ μέτρα ἀφοῦ θὰ χρειαστεῖ να μελετήσουμε περιθώριες κατανομές, οἱ όποιες, ἀκόμη και ἂν ἔχουμε ἕνα ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω σὲ ἕνα κυρτὸ σῶμα, δὲν εἶναι ἐν γένει ὁμοιόμορφα μέτρα.

Όρισμός 1.3.12. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ μία μετρήσιμη συνάρτησις με την ιδιότητα $f(0) > 0$. Για κάθε $p > 0$ ορίζουμε το σύνολο $K_p(f)$ ως

$$K_p(f) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_0^\infty f(rx)r^{p-1} dr \geq \frac{f(0)}{p} \right\}.$$

Από τον όρισμό είναι φανερό ότι η άκτινική συνάρτησις του $K_p(f)$ δίδεται από την

$$(1.3.10) \quad \rho_{K_p(f)}(x) = \left(\frac{1}{f(0)} \int_0^\infty r^{p-1} f(rx) dr \right)^{1/p}.$$

Επίσης, αν μ είναι ένα μέτρο στον \mathbb{R}^n το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue, και αν γράψουμε f_μ για την πυκνότητα του μ και ισχύει $f_\mu(0) > 0$, τότε μπορούμε να ορίσουμε

$$K_p(\mu) := K_p(f_\mu) = \left\{ x : \int_0^\infty r^{p-1} f_\mu(rx) dr \geq \frac{f_\mu(0)}{p} \right\},$$

Λήμμα 1.3.13. Έστω K ένα κυρτό σῶμα στον \mathbb{R}^n το οποίο περιέχει την αρχή τῶν αξόνων 0 . Τότε ορίζονται τὰ σύνολα $K_p(\mathbf{1}_K)$ και έχουμε ότι $K_p(\mathbf{1}_K) = K$ για κάθε $p > 0$.

Στην ἐπομένη πρότασι συγκεντρώνονται κάποιες βασικές ιδιότητες τῶν συνόλων $K_p(f)$.

Πρότασις 1.3.14. Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f(0) = g(0) > 0$. Θέτουμε

$$m = \inf \left\{ \frac{f(x)}{g(x)} : g(x) > 0 \right\} \quad \text{και} \quad M^{-1} = \inf \left\{ \frac{g(x)}{f(x)} : f(x) > 0 \right\}.$$

Έστω επίσης ότι V είναι ένα αστρόμορφο σῶμα στον \mathbb{R}^n ως προς την αρχή τῶν αξόνων και ἄς συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_V$ τὸ συναρτησοειδές Minkowski πὸν ἐπάγει τὸ V . Τότε, για κάθε $p > 0$ ισχύουν τὰ ἀκόλουθα:

1. $0 \in K_p(f)$.
2. Τὸ $K_p(f)$ είναι ένα αστρόμορφο σύνολο.
3. Τὸ $K_p(f)$ είναι συμμετρικὸ ἂν ἡ f είναι ἄρτια.
4. $m^{1/p} K_p(g) \subseteq K_p(f) \subseteq M^{1/p} K_p(g)$.
5. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε ὅτι

$$\int_{K_{n+1}(f)} \langle x, \theta \rangle dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x) dx.$$

Ἐπομένως, ἡ συνάρτησις f ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0 ἂν και μόνον ἂν τὸ σύνολο $K_{n+1}(f)$ ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0 .

6. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $p > 0$, έχουμε ότι

$$\int_{K_{n+p}(f)} |\langle x, \theta \rangle|^p dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta \rangle|^p f(x) dx.$$

7. Αν $p > -n$ τότε

$$(1.3.11) \quad \int_{K_{n+p}(f)} \|x\|_V^p dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_V^p f(x) dx.$$

Όταν η συνάρτησις f είναι λογαριθμικά-κοίλη, τὰ σύνολα $K_p(f)$, $p \geq 1$, είναι κυρτά.

Θεώρημα 1.3.15 (Ball, [2]). Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ μία λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις με $f(0) > 0$. Για κάθε $p \geq 1$, τὸ $K_p(f)$ είναι ένα κυρτὸ ὑποσύνολο τοῦ \mathbb{R}^n .

Χρειάζεται επίσης νὰ ἐλέγξουμε ὅτι, σὲ περιπτώσεις πού ἡ f ἔχει πεπερασμένο θετικό ὀλοκλήρωμα, τὰ (κλειστά) κυρτά σύνολα $K_p(f)$, $p \geq 1$, είναι καὶ κυρτά σώματα, δηλαδή εἶναι συμπαγῆ με μὴ κενὸ ἐσωτερικό. Χρησιμοποιώντας τὴν (1.3.10) καὶ ὀλοκλήρωσι σὲ πολικὲς συντεταγμένες, προκύπτει τὸ ἀκόλουθο

Λήμμα 1.3.16. Για κάθε μετρήσιμη συνάρτησι $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ με τὴν ιδιότητα $f(0) > 0$, ἰσχύει ὅτι

$$|K_n(f)| = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx.$$

Εἰδικότερα, ἂν ἡ f εἶναι λογαριθμικά-κοίλη καὶ τέτοια ὥστε $0 < \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty$, τότε, χρησιμοποιώντας καὶ τὸ Θεώρημα 1.3.15, καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ $K_n(f)$ εἶναι ἓνα κλειστὸ κυρτὸ ὑποσύνολο τοῦ \mathbb{R}^n πὸ ἔχει πεπερασμένο, μὴ μηδενικὸ ὄγκο, ἄρα εἶναι ἓνα κυρτὸ σῶμα.

Ἐπειτα, μπορούμε νὰ ἐπικαλεστοῦμε σχέσεις ἐγκλεισμῶν μεταξύ ὁποιοδήποτε δύο ἀπὸ τὰ σύνολα $K_p(f)$, γιὰ νὰ δείξουμε ὅτι, ἂν ἡ f εἶναι λογαριθμικά-κοίλη με πεπερασμένο, θετικό ὀλοκλήρωμα, τότε κάθε $K_p(f)$ ἔχει μὴ κενὸ ἐσωτερικό (γιὰ τὶς ἀποδείξεις τῶν σχέσεων στὴν ἐπομένη πρότασι, βλέπε π.χ. [44] καὶ [53]).

Πρότασις 1.3.17. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ μία λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις με $f(0) > 0$.

1. Αν $0 < p \leq q$, τότε

$$\frac{\Gamma(p+1)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(q+1)^{\frac{1}{q}}} K_q(f) \subseteq K_p(f) \subseteq \left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} K_q(f).$$

2. Αν ἐπιπλέον ἡ f εἶναι ὀλοκληρώσιμη καὶ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τότε, γιὰ κάθε $0 < p \leq q$,

$$(1.3.12) \quad \frac{\Gamma(p+1)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(q+1)^{\frac{1}{q}}} K_q(f) \subseteq K_p(f) \subseteq e^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} K_q(f).$$

Χρησιμοποιώντας και την $|K_n(f)| f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = \|f\|_1$ μαζί με την (1.3.12), συμπεραίνουμε επίσης τα εξής:

3. Για κάθε $p > 0$,

$$e^{-1} \leq \left(\frac{f(0)}{\|f\|_1} \right)^{\frac{1}{n} + \frac{1}{p}} |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n} + \frac{1}{p}} \leq e^{\frac{n+p}{n}}.$$

4. Αν $-n < p < 0$, τότε

$$e^{-1} \leq \left(\frac{f(0)}{\|f\|_1} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{n}} |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{p} - \frac{1}{n}} \leq e.$$

Όπως είπαμε και παραπάνω, τα σώματα $K_p(f)$ μās επιτρέπουν να περνάμε από την μελέτη τών λογαριθμικά-κοίλων μέτρων στην μελέτη τών κυρτών σωμάτων, όπως και να αποδεικνύουμε ιδιότητες τών κυρτών σωμάτων χρησιμοποιώντας εργαλεία τής θεωρίας τών λογαριθμικά-κοίλων μέτρων. Ένα πρώτο παράδειγμα δίδεται από τις επόμενες προτάσεις, οι οποίες δείχνουν ότι το πρόβλημα τής ισοτροπικής σταθεράς στον χώρο τών λογαριθμικά-κοίλων μέτρων είναι ισοδύναμο με το ίδιο πρόβλημα περιορισμένο στον υπόχωρο τών κυρτών σωμάτων, η ακόμη περισσότερο περιορισμένο στον υπόχωρο τών συμμετρικών κυρτών σωμάτων. Έξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που έχουμε ένα άρτιο λογαριθμικά-κοίλο μέτρο.

Πρόταση 1.3.18 (Ball, [2]). Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ μία άρτια λογαριθμικά-κοίλη συνάρτηση που έχει πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε το σύνολο $Q = K_{n+2}(f)$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα με την ιδιότητα

$$c_1 L_f \leq L_Q \leq c_2 L_f$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$. Επιπλέον, αν η f είναι ισοτροπική, τότε το \bar{Q} είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα.

Απόδειξις. Αφοϋ η f είναι άρτια και λογαριθμικά-κοίλη, βλέπουμε ότι $f(x) = \sqrt{f(x)f(-x)} \leq f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και άρα $f(0) > 0$. Έχουμε επομένως ότι το σύνολο $Q = K_{n+2}(f)$ ορίζεται καλά και, όπως έχουμε δει, είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n . Μάλιστα, εφ' όσον ισχύει $K_{n+2}(\lambda f) = K_{n+2}(f)$ και $L_{\lambda f} = L_f$ για κάθε $\lambda > 0$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$. Για να δείξουμε ότι $L_Q \simeq L_f$, ένας σχετικά γρήγορος τρόπος είναι να χρησιμοποιήσουμε τις ιδιότητες τών έλλειψοειδών Binet του Q και τής f . Από το 4. τής Προτάσεως 1.3.14 λαμβάνουμε ότι

$$\left(\int_{\bar{Q}} \langle x, y \rangle^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}} \left(\int_Q \langle x, y \rangle^2 dx \right)^{1/2} = \frac{1}{|Q|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}}} \left(\frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle^2 f(x) dx \right)^{1/2}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, και άρα εξ' όρισμοϋ

$$\mathcal{E}_B(f) = \left(|Q|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} f(0)^{\frac{1}{2}} \right)^{-1} \cdot \mathcal{E}_B(\bar{Q}).$$

Εφαρμόζοντας και το 3. της Προτάσεως 1.3.17 για $p = 2$, και αφού έχουμε υποθέσει ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$, βλέπουμε ότι $\left(|Q|^{\frac{1}{2} + \frac{1}{n}} f(0)^{\frac{1}{2}}\right)^{-1} \simeq (f(0))^{1/n}$, επομένως

$$(1.3.13) \quad \mathcal{E}_B(f) \simeq (f(0))^{1/n} \cdot \mathcal{E}_B(\bar{Q}).$$

Είναι δυνατόν τώρα να εκφράσουμε τον όγκο των $\mathcal{E}_B(f)$ και $\mathcal{E}_B(\bar{Q})$ συναρτήσει των ισοτροπικών σταθερών L_f και L_Q ώστε, μέσω της (1.3.13), να τις συγκρίνουμε. Αν επιλέξουμε $S_1 \in SL(n)$ ώστε το $S_1(\bar{Q})$ να είναι σε ισοτροπική θέση, θα έχουμε ότι

$$(1.3.14) \quad L_Q^{-1} |B_2^n|^{1/n} = |\mathcal{E}_B(S_1(\bar{Q}))|^{1/n} = |\mathcal{E}_B(\bar{Q})|^{1/n} \simeq (f(0))^{-1/n} \cdot |\mathcal{E}_B(f)|^{1/n}.$$

Από την άλλη πλευρά, και αφού η f είναι άρτια, μπορούμε να βρούμε έναν γραμμικό μετασχηματισμό $S_2 \in GL(n)$ και κάποιο $a > 0$ ώστε η $\tilde{f} = a \cdot (f \circ S_2)$ να είναι ισοτροπική. Σε αυτήν την περίπτωση θα έχουμε ότι

$$L_f = \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) \right)^{1/n} = (\tilde{f}(0))^{1/n} = [a \cdot f(S_2(0))]^{1/n} = (a \cdot f(0))^{1/n},$$

και επίσης

$$B_2^n = \mathcal{E}_B(\tilde{f}) = \sqrt{a^{-1} |\det S_2|} \cdot S_2^*(\mathcal{E}_B(f)).$$

Επιπλέον, αφού και η f και η \tilde{f} έχουν ολοκλήρωμα ίσο με 1, μπορούμε να γράψουμε

$$1 = \int_{\mathbb{R}^n} \tilde{f}(x) dx = a \int_{\mathbb{R}^n} f(S_2(x)) dx = a |\det S_2|^{-1}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω για τη f με την (1.3.14), συμπεραίνουμε ότι

$$|B_2^n|^{1/n} = \sqrt{a^{-1} |\det S_2|} \cdot |\det S_2|^{1/n} |\mathcal{E}_B(f)|^{1/n} \simeq \frac{(af(0))^{1/n}}{L_Q} |B_2^n|^{1/n} = \frac{L_f}{L_Q} |B_2^n|^{1/n},$$

από όπου προκύπτει το ζητούμενο.

Αν τώρα η f είναι έζαρχής ισοτροπική, δηλαδή ικανοποιεί τις συνθήκες

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx = 1 \text{ και } \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 f(x) dx = 1 \text{ για κάθε } \theta \in S^{n-1},$$

τότε

$$\int_{\bar{Q}} \langle x, \theta \rangle^2 dx = \frac{1}{|Q|^{1 + \frac{2}{n}} f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 f(x) dx = \frac{1}{|Q|^{1 + \frac{2}{n}} f(0)}$$

για κάθε μοναδιαία διεύθυνση θ , που σημαίνει ότι το \bar{Q} είναι σε ισοτροπική θέση. □

Με την επόμενη πρόταση, από το [26], βλέπουμε ότι αρκεί να μελετήσουμε το πρόβλημα της ισοτροπικής σταθερῆς ἀναζητῶντας ἄνω φράγματα μόνον για τὰ συμμετρικὰ κυρτὰ σώματα.

Πρόταση 1.3.19. Για κάθε κυρτό σώμα K στὸν \mathbb{R}^n μπορούμε να βρούμε ἕνα δεύτερο, συμμετρικὸ κυρτὸ σώμα Q στὸν \mathbb{R}^n μετὴν ιδιότητα

$$L_Q \simeq L_K.$$

Ἀπόδειξις. Ἀφοῦ ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ παραμένει ἀμετάβλητη ἀπὸ ἀφινικούς μετασχηματισμούς, μπορούμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ σῶμα K ἔχει ὄγκο 1 καὶ βαρύκεντρο τὴν ἀρχὴ τῶν ἀξόνων. Ὁρίζουμε μία συνάρτησι f μὲ φορέα τὸ $K - K$ ὡς ἐξῆς:

$$f(x) = (\mathbf{1}_K * \mathbf{1}_{-K})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(y) \mathbf{1}_{-K}(x-y) dy = |K \cap (x+K)|.$$

Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Brunn-Minkowski ἡ f εἶναι λογαριθμικά-κοίλη, ἐνῶ, ἐφ' ὅσον γιὰ κάθε x

$$|K \cap (x+K)| = |-x + (K \cap (x+K))| = |(-x+K) \cap K|,$$

ἔχουμε ἐπίσης ὅτι ἡ f εἶναι ἄρτια. Ἐπιπλέον, εὐκόλα μπορούμε νὰ ἐλέγξουμε ὅτι $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$ καὶ ὅτι $f(x) \leq f(0) = |K| = 1$ γιὰ κάθε x . Ἐπομένως,

$$L_f = [\det \text{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι γιὰ κάθε $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, z \rangle^2 f(x) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \langle y + (x-y), z \rangle^2 \mathbf{1}_K(y) \mathbf{1}_{-K}(x-y) dy dx \\ &= \int_K \langle y, z \rangle^2 \left(\int_{-K+y} dx \right) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(y) \left(\int_{-K} \langle w, z \rangle^2 dw \right) dy \\ &\quad + 2 \int_{\mathbb{R}^n} \langle y, z \rangle \mathbf{1}_K(y) \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y, z \rangle \mathbf{1}_{-K}(x-y) dx \right) dy \\ &= \int_K \langle x, z \rangle^2 dx + \int_{-K} \langle x, z \rangle^2 dx, \end{aligned}$$

ἀφοῦ τὸ K εἶναι κεντραρισμένο (ἄρα καὶ τὸ $-K$). Ἔπεται ὅτι

$$\text{Cov}(f) = \text{Cov}(K) + \text{Cov}(-K) = 2 \text{Cov}(K),$$

καὶ ἄρα

$$L_f = [\det \text{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{2} [\det \text{Cov}(K)]^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{2} L_K.$$

Εὐκόλα ἐλέγχουμε πλέον ὅτι τὸ $Q := K_{n+2}(f)$ ἔχει τὶς ἐπιθυμητὲς ιδιότητες: τὸ Q εἶναι συμμετρικὸ ἀφοῦ ἡ f εἶναι ἄρτια, καὶ $L_Q \simeq L_f = \sqrt{2} L_K$. \square

Ὅταν ἔχουμε μία λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησι $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ ἡ ὁποία δὲν εἶναι συμμετρικὴ ἀλλὰ ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0, δουλεύουμε μὲ τὸ σῶμα $K_{n+1}(f)$ ἀντὶ τοῦ $K_{n+2}(f)$, δεδομένου ὅτι τὸ $K_{n+1}(f)$ ἔχει καὶ αὐτὸ βαρύκεντρο τὸ 0 ὅταν ἡ f ἔχει αὐτὴν τὴν ιδιότητα. Ἐπιπλέον, ὅταν ἡ f εἶναι ἰσοτροπικὴ, τότε τὸ $K_{n+1}(f)$ εἶναι καὶ «σχεδὸν ἰσοτροπικό» (βλέπε π.χ. [27] καὶ [53] γιὰ τὶς ἀποδείξεις ἢ [13, Παράγραφος 2.5]).

Ὁρισμός 1.3.20. Ἐστω K ἕνα κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν \mathbb{R}^n μὲ κέντρο βάρους τὸ 0. Λέμε ὅτι τὸ K εἶναι *σχεδὸν ἰσοτροπικό* μὲ σταθερὰ $C > 0$ ἔάν, γιὰ κάθε $S \in SL(n)$ μὲ τὴν ιδιότητα τὸ $S(K)$ νὰ εἶναι ἰσοτροπικό, ἔχουμε ὅτι

$$\frac{1}{C} B_2^n \subseteq S(B_2^n) \subseteq C B_2^n.$$

Πρόταση 1.3.21. Έστω $f : \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ μία λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα και βαρύκεντρο τὸ 0. Τότε τὸ $Q = K_{n+1}(f)$ εἶναι ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n μὲ τὴν ιδιότητα

$$c_1 L_f \leq L_Q \leq c_2 L_f,$$

ὅπου $c_1, c_2 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές. Ἐπιπλέον ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $C > 0$ ἔτσι ὥστε, ἂν ἡ f εἶναι ἰσοτροπική, τότε τὸ $\bar{K}_{n+1}(f)$ νὰ εἶναι σχεδὸν ἰσοτροπικὸ μὲ σταθερὰ C .

Ἀπόδειξις. Ὅπως καὶ στὴν Πρότασι 1.3.18, ἐχμεταλλευόμαστε τὶς ιδιότητες τῶν ἑλλειψοειδῶν Binet τοῦ Q καὶ τῆς f . Παρατηροῦμε ὅτι, ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Fradelizi (Θεώρημα 1.3.5), ἀφοῦ ἡ f ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0, ἀναγκαστικὰ ἔχουμε ὅτι $f(0) > 0$: ἔτσι, τὸ $K_{n+1}(f)$ ὀρίζεται καί, ὅπως εἶδαμε στὴν Πρότασι 1.3.14, εἶναι ἕνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα. Ἐπίσης, μποροῦμε καὶ πάλι νὰ ὑποθέσουμε ὅτι $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$. Ἐφαρμόζοντας τὸ 4. τῆς Προτάσεως 1.3.14 σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν Πρότασι 1.3.9, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} \left(\int_{\bar{Q}} \langle x, y \rangle^2 dx \right)^{1/2} &\simeq \int_{\bar{Q}} |\langle x, y \rangle| dx = \frac{1}{|Q|^{1+\frac{1}{n}}} \int_Q |\langle x, y \rangle| dx \\ &= \frac{1}{|Q|^{1+\frac{1}{n}} f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y \rangle| f(x) dx \simeq \frac{1}{|Q|^{1+\frac{1}{n}} f(0)} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y \rangle^2 f(x) dx \right)^{1/2} \end{aligned}$$

γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Συνεπῶς ἔχουμε ὅτι

$$\mathcal{E}_B(\bar{Q}) \simeq \left(|Q|^{1+\frac{1}{n}} f(0) \right) \cdot \mathcal{E}_B(f).$$

Ἐφαρμόζοντας καὶ τὸ 3. τῆς Προτάσεως 1.3.17 γιὰ $p = 1$, συμπεραίνουμε ὅτι

$$(1.3.15) \quad \mathcal{E}_B(f) \simeq (f(0))^{1/n} \cdot \mathcal{E}_B(\bar{Q}).$$

Ἀπὸ ἐκεῖ καὶ ἔπειτα, καὶ δεδομένου ὅτι $(\sup f(T(x)))^{1/n} \simeq (f(T(0)))^{1/n} = (f(0))^{1/n}$ γιὰ κάθε $T \in GL(n)$ ἀπὸ τὸ θεώρημα τοῦ Fradelizi, χρησιμοποιοῦμε τὸ ἴδιο ἀκριβῶς ἐπιχείρημα ποὺ εἶδαμε καὶ στὴν Πρότασι 1.3.18.

Ἐπιπλέον ὑποθέτουμε τώρα ὅτι ἡ f εἶναι ἰσοτροπική, πράγμα τὸ ὁποῖο συνεπάγεται ὅτι $\mathcal{E}_B(f) = B_2^n$ καὶ ὅτι $(f(0))^{1/n} \simeq L_f$. Ἄν $S \in SL(n)$ εἶναι τέτοιος ὥστε τὸ $S(\bar{Q})$ νὰ εἶναι ἰσοτροπικὸ, μποροῦμε, χρησιμοποιῶντας καὶ τὶς (1.3.6) καὶ (1.3.15), νὰ γράψουμε

$$L_Q^{-1} B_2^n = \mathcal{E}_B(S(\bar{Q})) = (S^*)^{-1}(\mathcal{E}_B(\bar{Q})) \simeq (S^*)^{-1}((f(0))^{-1/n} \cdot \mathcal{E}_B(f)),$$

τὸ ὁποῖο, ἐφ' ὅσον $(f(0))^{-1/n} \cdot \mathcal{E}_B(f) \simeq L_f^{-1} B_2^n \simeq L_Q^{-1} B_2^n$, συνεπάγεται ὅτι

$$c_1 B_2^n \subseteq (S^*)^{-1}(B_2^n) \subseteq c_2 B_2^n$$

γιὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$. Θεωρῶντας τὰ ἀντίστοιχα πολικὰ σώματα, καταλήγουμε στοὺς ζητούμενους ἐγκλεισμοὺς μεταξὺ τῶν B_2^n καὶ $S(B_2^n)$, καὶ τελικῶς στὸ συμπέρασμα ὅτι τὸ $\bar{Q} = \bar{K}_{n+1}(f)$ εἶναι σχεδὸν ἰσοτροπικὸ μὲ μία ἀπόλυτη σταθερὰ C . \square

1.4 Βασικά αποτελέσματα και εργαλεία της θεωρίας τῶν ισοτροπικῶν σωμάτων και μέτρων

1.4.1 Τὰ L_q -κεντροειδῆ σώματα και οἱ ροπές τῆς Εὐκλείδειας νόρμας

Ἡ συμπεριφορὰ τῶν L_q -νορμῶν τῶν γραμμικῶν συναρτησοειδῶν ὡς πρὸς κάποιο λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο μᾶς ἐνδιαφέρει κατὰ τὴν μελέτη πολλῶν προβλημάτων τῆς Ἀσυμπτωτικῆς Κυρτῆς Γεωμετρίας. Μία πολὺ χρήσιμη ιδέα τοῦ Παούρη ἦταν τὸ νὰ μελετήσῃ τις ιδιότητες μίας οἰκογενείας σωμάτων, τὰ ὁποῖα μπορούμε νὰ συσχετίσουμε μὲ ὁποιοδήποτε κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1 ἢ ὁποιοδήποτε λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο πιθανότητας μ , και τῶν ὁποίων οἱ συναρτήσεις στηρίζεως εἶναι ἀκριβῶς αὐτὲς οἱ L_q -νόρμες· τὰ σώματα αὐτὰ λέγονται L_q -κεντροειδῆ σώματα τοῦ K ἢ τοῦ μ και ὀρίστηκαν ἀπὸ τοὺς Lutwak, Yang και Zhang [37], ἐνῶ στὰ πλαίσια τῆς θεωρίας τῶν ισοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων χρησιμοποιήθηκαν γιὰ πρώτη φορὰ ἀπὸ τὸν Παούρη (βλέπε [51]). Γιὰ κάθε $q \geq 1$ τὸ L_q -κεντροειδὲς σῶμα $Z_q(K)$ τοῦ K , ἢ τὸ L_q -κεντροειδὲς σῶμα $Z_q(\mu)$ τοῦ μ , ὀρίζεται νὰ εἶναι τὸ σῶμα μὲ συνάρτησι στηρίζεως

$$h_{Z_q(K)}(y) := \|\langle \cdot, y \rangle\|_{L_q(K)} = \left(\int_K |\langle x, y \rangle|^q dx \right)^{1/q},$$

$$\text{ἢ } h_{Z_q(\mu)}(y) := \|\langle \cdot, y \rangle\|_{L_q(\mu)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y \rangle|^q d\mu(x) \right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y \rangle|^q f_\mu(x) dx \right)^{1/q}$$

ἀντιστοίχως. Ἀπὸ τὸν παραπάνω ὀρισμὸ και τὸν ὀρισμὸ τῆς συναρτήσεως στηρίζεως, βλέπουμε ὅτι τὰ L_q -κεντροειδῆ σώματα εἶναι συμμετρικά κυρτὰ σώματα, ἐνῶ ἰσχύει $Z_q(T(K)) = T(Z_q(K))$ γιὰ κάθε $T \in SL(n)$ και $Z_q(\mu \circ T) = T^{-1}(Z_q(\mu))$ γιὰ κάθε ἀντιστρέψιμο γραμμικὸ μετασχηματισμὸ T . Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι τὰ σώματα $Z_2(K)$ και $Z_2(\mu)$ εἶναι τὰ πολικά τῶν ἀντιστοίχων ἐλλειψοειδῶν Binet, ἐνῶ τὸ κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1, ἢ τὸ λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο πιθανότητας μ , εἶναι ισοτροπικὸ ἂν και μόνον ἂν ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0 και $Z_2(K) = L_K B_2^n$, ἢ $Z_2(\mu) = B_2^n$ ἀντιστοίχως.

Ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.3.9 ἔχουμε γιὰ κάθε $q > p \geq 1$ ὅτι

$$(1.4.1) \quad Z_p(\mu) \subseteq Z_q(\mu) \subseteq \beta_1 \frac{q}{p} Z_p(\mu),$$

ὅπου β_1 μία ἀπόλυτη σταθερά. Ἐπιπλέον, γιὰ τὰ κυρτὰ σώματα K ὄγκου 1 ἔχουμε ὅτι

$$(1.4.2) \quad Z_q(K) \subseteq \text{conv}\{K, -K\},$$

ὅπου $\text{conv}\{K, -K\}$ εἶναι ἡ κυρτὴ θήκη τῶν K και $-K$, δεδομένου ὅτι $h_{Z_q(K)} \leq \max\{h_K, h_{-K}\}$ γιὰ κάθε q . Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἐξαιτίας τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski (βλέπε ἐπόμενο λήμμα), γιὰ κάθε κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1 στὸν \mathbb{R}^n ἔχουμε ὅτι

$$(1.4.3) \quad Z_n(K) \supseteq c \text{conv}\{K, -K\},$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$, και ἐπομένως τὸ $Z_n(K)$, ὅπως και κάθε $Z_q(K)$ γιὰ $q \geq n$, εἶναι περίπου ἴσο μὲ τὴν κυρτὴ θήκη τῶν K και $-K$.

Λήμμα 1.4.1 ([19], [50]). Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σῶμα ὄγκου 1 στὸν \mathbb{R}^n . Τότε γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$ καὶ γιὰ κάθε $q \geq 1$,

$$\int_K |\langle x, \theta \rangle|^q dx \geq \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(q+n+1)} \max\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\}.$$

Εἰδικότερα, γιὰ κάθε $q \geq n$,

$$\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_q \simeq \max\{h_K(\theta), h_K(-\theta)\}.$$

Ὅπως εἶδαμε, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (1.2.3) τῶν Rogers καὶ Shephard ἔχουμε, γιὰ κάθε κυρτό σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$ ὄγκου 1, ὅτι

$$|\operatorname{conv}\{K, -K\}| \leq |K - K| \leq \binom{2n}{n} \leq 4^n.$$

Συνεπῶς, ἂν τὸ K εἶναι καὶ κεντραρισμένο, συμπεραίνουμε ὅτι

$$|Z_n(K)|^{1/n} \simeq |\operatorname{conv}\{K, -K\}|^{1/n} \simeq 1.$$

Τὸ ἀντίστοιχο γιὰ κεντραρισμένα λογαριθμικά-κοῖλα μέτρα παρέχεται ἀπὸ τὴν ἐπομένη παρατήρησι τοῦ Παούρη [53], ἡ ὁποία συνδέει τὰ L_q -κεντροειδῆ σῶματα ἑνὸς μέτρου μ μὲ τὰ L_q -κεντροειδῆ σῶματα τοῦ $\bar{K}_{n+1}(\mu)$: τὸ συμπέρασμα ἔπεται ἄμεσα μὲ χρῆσι τοῦ 6. τῆς Προτάσεως 1.3.14 καὶ τῶν 2. καὶ 3. τῆς Προτάσεως 1.3.17.

Πρότασις 1.4.2. Έστω μ ἓνα μὴ ἐκφυλισμένο, κεντραρισμένο λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο πιθανότητας μ στὸν \mathbb{R}^n . Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ὥστε, γιὰ κάθε $q \in [1, n]$, νὰ ἔχουμε

$$c_1(f_\mu(0))^{1/n} Z_q(\mu) \subseteq Z_q(\bar{K}_{n+1}(\mu)) \subseteq c_2(f_\mu(0))^{1/n} Z_q(\mu).$$

Εἰδικότερα, γιὰ $q = n$ ἰσχύει

$$(f_\mu(0))^{1/n} |Z_n(\mu)|^{1/n} \simeq |Z_n(\bar{K}_{n+1}(\mu))|^{1/n} \simeq 1,$$

καὶ ἄρα $|Z_n(\mu)|^{1/n} \simeq (f_\mu(0))^{-1/n} \simeq \|\mu\|_\infty^{-1/n}$.

Παρατήρησις 1.4.3. Μὲ ἀντίστοιχο τρόπο, χρησιμοποιῶντας τὸ 7. τῆς Προτάσεως 1.3.14 καὶ τὰ 2. καὶ 3. τῆς Προτάσεως 1.3.17, βλέπουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε (μὴ ἐκφυλισμένο) κεντραρισμένο λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο πιθανότητας μ καὶ κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα V στὸν \mathbb{R}^n , νὰ ἰσχύει

$$\frac{c_1}{(f_\mu(0))^{1/n}} I_q(\bar{K}_{n+1}(\mu), V) \leq I_q(\mu, V) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_V^q d\mu(x) \right)^{1/q} \leq \frac{c_2}{(f_\mu(0))^{1/n}} I_q(\bar{K}_{n+1}(\mu), V)$$

γιὰ κάθε $q \in [-n/2, n]$, $q \neq 0$. Εἰδικότερα, ἂν $V = B_2^n$, ἔχουμε ὅτι

$$I_q(\bar{K}_{n+1}(\mu)) \simeq (f_\mu(0))^{1/n} I_q(\mu)$$

γιὰ κάθε $q \in [-n/2, n]$, $q \neq 0$. (Σημειώνουμε ὅτι τὸ $-n/2$ δὲν ἔχει κάποια εἰδικὴ σημασία, καὶ μπορούμε νὰ ποῦμε κάτι ἀνάλογο καὶ γιὰ $q \in [-cn, n]$, $q \neq 0$, ὅπου c εἶναι ἓνας ὁποιοσδήποτε σταθερὸς ἀριθμὸς $\in (0, 1)$, ἀρκεῖ νὰ ἀφήσουμε τὶς σταθερές c_1, c_2 νὰ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ c .)

Τὰ L_q -κεντροειδή σώματα συμπεριφέρονται πολύ καλά ως πρὸς τις προβολές: ἐξαιτίας τοῦ 5. τῆς Προτάσεως 1.3.7 καὶ τοῦ γεγονότος ὅτι, γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα L , γιὰ κάθε ὑπόχωρο F καὶ γιὰ κάθε $\theta \in S_F$, ἰσχύει ὅτι $h_{\text{Proj}_F(L)}(\theta) = h_L(\theta)$, λαμβάνουμε τὴν ἰσότητα $\text{Proj}_F(Z_q(\mu)) = Z_q(\pi_F\mu)$ γιὰ κάθε q . Ἐπομένως, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν Πρότασι 1.4.2, ἔχουμε τὸ ἀκόλουθο ἀποτέλεσμα.

Πρότασις 1.4.4. Ἔστω μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν \mathbb{R}^n . Γιὰ κάθε $q \geq 1$ καὶ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$, ὅπου $1 \leq k < n$, ἔχουμε ὅτι

$$(1.4.4) \quad \text{Proj}_F(Z_q(\mu)) = Z_q(\pi_F\mu).$$

Κατὰ συνέπεια, ἂν τὸ μ εἶναι καὶ κεντραρισμένο,

$$\text{Proj}_F(Z_q(\mu)) \simeq (f_{\pi_F\mu}(0))^{1/k} Z_q(\overline{K}_{k+1}(\pi_F\mu)),$$

ἐνῶ, ἂν τὸ μ εἶναι τὸ μέτρο Lebesgue πάνω σὲ ἓνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1, τότε

$$\text{Proj}_F(Z_q(K)) \simeq |K \cap F^\perp|^{1/k} Z_q(\overline{K}_{k+1}(\pi_F \mathbf{1}_K)).$$

Ἐπενθυμίζουμε τώρα τὸ κύριο ἀποτέλεσμα τοῦ Παούρη στὰ [52] καὶ [53] γιὰ τὸ ὁποῖο χρησιμοποίησε τὰ L_q -κεντροειδή σώματα. Σημειώνουμε ὅτι, ἂν ἔχουμε ἓνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n , τότε

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_K \langle x, e_i \rangle^2 dx = nL_K^2,$$

καὶ ἀντίστοιχα, ἂν ἔχουμε ἓνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n , $\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 d\mu(x) = n$. Ὁ Παούρης ἔδειξε ὅτι οἱ ῥοπές τῆς Εὐκλείδειας νόρμας ὡς πρὸς κάποιο ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n , οἱ ὁποῖες γιὰ κάθε $q \in (-n, +\infty)$, $q \neq 0$, ὀρίζονται ὡς

$$I_q(\mu) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x) \right)^{1/q} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x) \right)^{1/q},$$

παραμένουν σταθερὲς καὶ (περίπου) ἴσες μὲ $I_2(\mu) = \sqrt{n}$ γιὰ τουλάχιστον ὅλα τὰ $q \geq 1$ μέχρι \sqrt{n} . Αὐτὸ ἔπειτα, σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν ἀνισότητα Markov, ὀδηγεῖ σὲ πολὺ ἰσχυρὲς ἀνισότητες συγκεντρώσεως τοῦ μέτρου σὲ μία μπάλα ἀκτίνας περίπου \sqrt{n} :

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geq CtI_2(\mu)\}) = \mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geq Ct\sqrt{n}\}) \leq \exp(-t\sqrt{n})$$

γιὰ κάθε $t \geq 1$, ὅπου $C \geq 1$ εἶναι ἀπόλυτη σταθερά.

Μελέτησε ἐπίσης καὶ τὴν συμπεριφορὰ τῶν ἀρνητικῶν ῥοπῶν τῆς Εὐκλείδειας νόρμας καὶ κατέληξε στὸ συμπέρασμα ὅτι καὶ οἱ ἀρνητικὲς ῥοπές παραμένουν σταθερὲς καὶ (περίπου) ἴσες μὲ $I_2(\mu)$ σὲ ἓνα ἀρχικὸ διάστημα πού περιέχει τὸ $(0, c_1\sqrt{n})$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_1 > 0$. Αὐτὸ μὲ τὴν σειρά του ὀδηγεῖ πάλι σὲ ἀνισότητες συγκεντρώσεως ἐνὸς ἰσοτροπικοῦ λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου μ στὸν \mathbb{R}^n ἔξω ἀπὸ Εὐκλείδειες μπάλες πού ἔχουν μικρὴ ἀκτίνα: γιὰ κάθε $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$ ἔχουμε ὅτι

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \leq \varepsilon\sqrt{n}\}) \leq \varepsilon^{c\sqrt{n}},$$

όπου τὰ $c > 0$ καὶ $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.

Γιὰ τὴν ἀπόδειξι τῶν παραπάνω συνέδεσε τὶς ῥοπές μὲ τὰ μέσα πλάτη τῶν κεντροειδῶν σωμάτων.

Λήμμα 1.4.5. Ἔστω μ ἓνα μὴ ἐκφυλισμένο, λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητας στὸν \mathbb{R}^n . Γιὰ κάθε $q \geq 1$ ἔχουμε ὅτι

$$w_q(Z_q(\mu)) = a_{n,q} \sqrt{\frac{q}{n}} I_q(\mu)$$

ὅπου $a_{n,q} \simeq 1$.

Ἀπόδειξις. Τὸ ζητούμενο ἔπεται μὲ χρῆσι τοῦ θεωρήματος Fubini σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ γεγονός ὅτι

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta \rangle|^q d\sigma(\theta) \right)^{1/q} = a'_{n,q} \|x\|_2$$

γιὰ κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, ὅπου

$$a'_{n,q} = \left(\frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{q+n}{n} \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+2}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{q+n+2}{2}\right)} \right)^{1/q} \simeq \sqrt{\frac{q}{n}}$$

ἀπὸ τὸν τύπο τοῦ Stirling. □

Θεώρημα 1.4.6. Ἔστω μ μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητας στὸν \mathbb{R}^n . Τότε γιὰ κάθε ἀκέραιο $1 \leq k \leq n-1$ ἔχουμε ὅτι

$$(1.4.5) \quad I_{-k}(\mu) = c_{n,k} \left(\int_{G_{n,k}} \pi_F f_\mu(0) d\nu_{n,k}(F) \right)^{-1/k},$$

ὅπου $c_{n,k} = ((n-k)\omega_{n-k}/(n\omega_n))^{1/k} \simeq \sqrt{n}$. Ἐπίσης, γιὰ κάθε ἀκέραιο $1 \leq k \leq n-1$,

$$w_{-k}(Z_k(\mu)) \simeq \sqrt{k} \left(\int_{G_{n,k}} |\text{Proj}_F(Z_k(\mu))|^{-1} d\nu_{n,k}(F) \right)^{-1/k}.$$

Ἄν ἐπιπλέον τὸ μ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τότε, συνδυάζοντας αὐτὰ μὲ τὶς Προτάσεις 1.4.2 καὶ 1.4.4, οἱ ὁποῖες μᾶς δίνουν ὅτι $(\pi_F f_\mu(0))^{1/k} \simeq (f_{\pi_F \mu}(0))^{1/k} \simeq |\text{Proj}_F(Z_k(\mu))|^{-1/k}$ γιὰ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ καὶ γιὰ ὅλα τὰ κεντραρισμένα περιθώρια μέτρα $\pi_F \mu$ τοῦ μ , καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι

$$I_{-k}(\mu) \simeq \sqrt{\frac{n}{k}} w_{-k}(Z_k(\mu)).$$

Ἡ ἰσοδυναμία μπορεῖ μετὰ, λόγῳ τῆς (1.4.1), νὰ ἐπεκταθεῖ καὶ σὲ μὴ ἀκέραιες τιμές τοῦ $k \leq n-1$.

Ἀπόδειξις. Γιὰ νὰ δείξουμε τὴν (1.4.5) χρησιμοποιοῦμε ὀλοκλήρωσι σὲ πολικὲς συντεταγμένες. Ἐστω ἀκέραιος $1 \leq k \leq n-1$, τότε μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_{G_{n,k}} \pi_F f_\mu(0) d\nu_{n,k}(F) &= \int_{G_{n,n-k}} \pi_{E^\perp} f_\mu(0) d\nu_{n,n-k}(E) \\ &= \int_{G_{n,n-k}} \int_E f_\mu(y) dy d\nu_{n,n-k}(E) \\ &= \int_{G_{n,n-k}} (n-k)\omega_{n-k} \int_{S_E} \int_0^\infty r^{n-k-1} f_\mu(r\theta) dr d\sigma_E(\theta) d\nu_{n,n-k}(E) \\ &= \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n} n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-k-1} f_\mu(r\theta) dr d\sigma(\theta) \\ &= \frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^{-k} f_\mu(x) dx = c_{n,k} I_{-k}^{-k}(\mu). \end{aligned}$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, γιὰ νὰ δείξουμε τὴν (1.4.6) χρησιμοποιοῦμε τὸ γεγονός ὅτι, γιὰ κάθε συμμετρικὸ σῶμα C στὸν \mathbb{R}^n καὶ γιὰ κάθε $x \neq 0$, ἰσχύει ὅτι $h_C^{-1}(x) = \rho_{C^\circ}(x)$, ὅπου ρ_{C° ἡ ἀκτινικὴ συνάρτησις τοῦ πολικοῦ σώματος τοῦ C , καὶ ταυτόχρονα ἰσχύει, γιὰ κάθε ὑπόχωρο F καὶ κάθε $x \in F$, ὅτι $\rho_{C^\circ}(x) = \rho_{C^\circ \cap F}(x)$. Ἐπεταὶ ὅτι

$$\begin{aligned} w_{-k}^{-1}(Z_k(\mu)) &= \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_{Z_k(\mu)}^k(\theta)} d\sigma(\theta) \right)^{1/k} \\ &= \left(\frac{1}{\omega_k} \int_{G_{n,k}} \omega_k \int_{S_F} [\rho_{(Z_k(\mu))^\circ \cap F}(\theta)]^k d\sigma_F(\theta) d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k} \\ &= \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|(Z_k(\mu))^\circ \cap F|}{|B_2^k|} d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k} \end{aligned}$$

Ἐπειτα χρησιμοποιοῦμε τὴν ἀνισότητα Blaschke-Santaló καὶ τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló γιὰ τὰ σώματα $(Z_k(\mu))^\circ \cap F$ καὶ $\text{Proj}_F(Z_k(\mu))$, πού εἶναι πολικὰ τὸ ἓνα τοῦ ἄλλου, γιὰ νὰ καταλήξουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι

$$w_{-k}^{-1}(Z_k(\mu)) = \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|(Z_k(\mu))^\circ \cap F|}{|B_2^k|} d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k} \simeq \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|B_2^k|}{|\text{Proj}_F(Z_k(\mu))|} d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k},$$

πού ἦταν τὸ ζητούμενό μας. □

Ὁρισμός 1.4.7. Ἐστω μ ἓνα μὴ ἐκφυλισμένο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος στὸν \mathbb{R}^n . Θέτουμε

$$q_*(\mu) := \sup\{1 \leq q \leq n : k_*(Z_q(\mu)) \geq q\}.$$

Χρησιμοποιῶντας τὸ Λήμμα 1.4.5, τὸ Θεώρημα 1.4.6 καὶ τὰ Θεωρήματα 1.2.5 καὶ 1.2.6 γιὰ τὴν συμπεριφορὰ τῶν μέσων πλατῶν, ὁ Παούρης ἔδειξε ὅτι, ὅταν τὸ μ εἶναι ἰσοτροπικὸ, ἰσχύει $I_q(\mu) \leq CI_{-q}(\mu)$ γιὰ κάθε $q \leq c_1 q_*(\mu)$, ὅπου $C \geq 1, c_1 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές. Ἐδῶσε ἐπίσης ἓνα, ἀκριβὲς γιὰ ὀρισμένα μέτρα μ , κάτω φράγμα γιὰ τὴν παράμετρο $q_*(\mu)$.

Πρόταση 1.4.8. Για κάθε κεντραρισμένο, μη έκφυλισμένο λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον \mathbb{R}^n έχουμε ότι

$$q_*(\mu) \geq c\sqrt{k_*(Z_2(\mu))}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Ειδικότερα, αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε $q_*(\mu) \geq c\sqrt{n}$ αφού $k_*(Z_2(\mu)) = k_*(B_2^n) = n$.

Απόδειξις. Συνδυάζοντας το Θεώρημα 1.2.5 με το Λήμμα 1.4.5 βλέπουμε ότι, αν q είναι τέτοιο ώστε $k_*(Z_q(\mu)) \geq q$, τότε

$$w(Z_q(\mu)) \simeq w_q(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{\frac{q}{n}}I_q(\mu) \gtrsim \sqrt{\frac{q}{n}}I_2(\mu) \simeq \sqrt{q}w(Z_2(\mu)).$$

Επιλέγουμε ένα τέτοιο q με την πρόσθετη ιδιότητα $2q > q_*(\mu)$ και παρατηρούμε ότι, λόγω της (1.4.1), ισχύει $w(Z_{2q}(\mu)) \simeq w(Z_q(\mu)) \gtrsim \sqrt{q}w(Z_2(\mu))$ και

$$R(Z_{2q}(\mu)) \leq \beta_1 q R(Z_2(\mu)).$$

Μπορούμε επομένως να γράψουμε

$$2q > k_*(Z_{2q}(\mu)) \geq c_1 n \left(\frac{w(Z_{2q}(\mu))}{R(Z_{2q}(\mu))} \right)^2 \geq c_2 n \frac{q}{(\beta_1 q)^2} \frac{w^2(Z_2(\mu))}{R^2(Z_2(\mu))} = c_3 \frac{1}{q} k_*(Z_2(\mu)),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και την (1.2.7) για τα $k_*(Z_{2q}(\mu))$ και $k_*(Z_2(\mu))$. Τελικά έχουμε $q_*(\mu) \geq q \geq c_4 \sqrt{k_*(Z_2(\mu))}$ όπως θέλαμε. \square

Παρατήρηση 1.4.9. Πιο γενικά, ο Παούρης έδειξε ότι $q_*(\mu) \geq c_1 n^{\alpha/2} / \beta_\alpha^\alpha$ για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n το οποίο είναι ψ_α με σταθερά β_α .

Συνοψίζοντας τα παραπάνω, έχουμε το ακόλουθο θεμελιώδες αποτέλεσμα περί της συμπεριφοράς των ροπών της Εύκλειδεια νόρμας.

Θεώρημα 1.4.10 (Παούρης, [52], [53]). Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο στον \mathbb{R}^n . Τότε υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε για κάθε $q \in (0, c_1 \sqrt{n})$ να ισχύει

$$c_2^{-1} I_q(\mu) \leq I_2(\mu) = \sqrt{n} \leq c_2 I_{-q}(\mu).$$

Επιπλέον, για όλα αυτά τα $q \geq 1$ έχουμε ότι

$$w(Z_q(\mu)) \simeq w_q(Z_q(\mu)) \simeq w_{-q}(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{q},$$

και επίσης ότι $k_*(Z_q(\mu)) \simeq n[w(Z_q(\mu))/R(Z_q(\mu))]^2 \gtrsim q$.

Παρατήρηση 1.4.11. Ο Παούρης παρατήρησε επίσης ότι $I_q(\mu) \simeq R(Z_q(\mu))$ για όλα τα $q > q_*(\mu)$ και ότι μπορούμε να γράψουμε

$$I_q(\mu) \simeq \max\{I_2(\mu), R(Z_q(\mu))\}$$

για όλες τις θετικές ροπές. Σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.3.9, αυτό μάς δίνει ότι

$$I_q(\mu) \lesssim \max\{\sqrt{n}, q\} \quad \text{για κάθε } q \geq 1.$$

1.4.2 Ὁ λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace

Ἐστω μ πεπερασμένο Borel μέτρο στὸν \mathbb{R}^n . Ὁ λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace $\Lambda_\mu : \mathbb{R}^n \rightarrow (-\infty, +\infty]$ τοῦ μέτρου μ δίδεται ἀπὸ τὴν

$$x \in \mathbb{R}^n \mapsto \log \left(\frac{1}{\mu(\mathbb{R}^n)} \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\langle y, x \rangle) d\mu(y) \right).$$

Ὁ λογαριθμικός μετασχηματισμός Laplace χρησιμοποιήθηκε γιὰ πρώτη φορά στὰ πλαίσια τῆς θεωρίας τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων καὶ λογαριθμικὰ-κοίλων μέτρων ἀπὸ τὸν Klartag [27], καὶ ἔχει ἀποδειχθεῖ ἕνα πολὺ χρήσιμο ἐργαλεῖο αὐτῆς τῆς θεωρίας. Οἱ ἐπόμενες προτάσεις συνοψίζουν κάποιες ἀπὸ τὶς βασικὲς ιδιότητές του ὅταν τὸ μέτρο μ εἶναι λογαριθμικὰ-κοῖλο, τὶς ὁποῖες θὰ ἐπικαλεστοῦμε στὰ Κεφάλαια 3 καὶ 4.

Πρόταση 1.4.12 ([28]). Ἐστω μ ἕνα n -διάστατο λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητας. Τὸ σύνολο $A(\mu) := \{\Lambda_\mu < \infty\}$ εἶναι ἀνοιχτὸ καὶ ὁ περιορισμὸς τοῦ μετασχηματισμοῦ Λ_μ πάνω στὸ $A(\mu)$ εἶναι C^∞ καὶ γνησίως κυρτὴ συνάρτησις. Γιὰ κάθε $x \in A(\mu)$ συμβολίζουμε μὲ μ'_x τὸ μέτρο πιθανότητας στὸν \mathbb{R}^n τοῦ ὁποῖου ἡ πυκνότητα $d\mu'_x(y)$ ὡς πρὸς τὸ μέτρο μ εἶναι πολλαπλάσιο τῆς $e^{\langle y, x \rangle} d\mu(y)$. Ἐχουμε τότε ὅτι

$$(1.4.6) \quad \text{bar}(\mu'_x) = \nabla \Lambda_\mu(x) \quad \text{καὶ} \quad \text{Hess}(\Lambda_\mu)(x) = \text{Cov}(\mu'_x).$$

Ἐπιπλέον ἂν τὸ μέτρο μ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τότε ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Jensen ἔχουμε ὅτι $\Lambda_\mu(x) \geq 0$ γιὰ κάθε x . Τέλος, γιὰ κάθε $t \geq 0$ καὶ $\alpha \geq 1$, ἰσχύει ὅτι

$$(1.4.7) \quad \frac{1}{\alpha} \{\Lambda_\mu \leq \alpha t\} \subseteq \{\Lambda_\mu \leq t\} \subseteq \{\Lambda_\mu \leq \alpha t\}.$$

Ὁρισμός 1.4.13. Ἄν f_μ εἶναι ἡ λογαριθμικὰ-κοῖλη πυκνότητα τοῦ μέτρου μ , τότε γιὰ κάθε $x \in A(\mu)$ τὸ μέτρο μ'_x ἔχει πυκνότητα ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue τὴν

$$f_{\mu'_x}(y) := \frac{1}{\int e^{\langle y, x \rangle} d\mu(y)} e^{\langle y, x \rangle} f_\mu(y),$$

ἡ ὁποία εἶναι λογαριθμικὰ-κοῖλη ἐπίσης ὡς γινόμενο λογαριθμικὰ-κοίλων συναρτήσεων. Στὴν ἐπόμενη παράγραφο καὶ στὸ Κεφάλαιο 3 θὰ ἀναφερόμαστε πολὺ συχνὰ στὶς κεντραρισμένες μεταφορὲς τῶν μέτρων μ'_x , δηλαδὴ τὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα πιθανότητας μ_x τῶν ὁποίων ἡ πυκνότητα δίδεται ἀπὸ τὴν

$$f_{\mu_x}(y) := f_{\mu'_x}(y) = \frac{1}{\int e^{\langle y, x \rangle} d\mu(y)} \exp(\langle y + \text{bar}(\mu'_x), x \rangle) f_\mu(y + \text{bar}(\mu'_x)).$$

Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι οἱ δευτέρας τάξεως ῥοπὲς τοῦ μ'_x καὶ τοῦ μ_x ταυτίζονται, δηλαδὴ ἰσχύει ὅτι

$$\text{Cov}(\mu_x) = \text{Cov}(\mu'_x) = \text{Hess}(\Lambda_\mu)(x).$$

Ἄν τὸ μέτρο μ ἔχει καὶ συμπαγὴ φορέα, τότε τὸ σύνολο $A(\mu) := \{\Lambda_\mu < \infty\}$ εἶναι ὅλο τὸ \mathbb{R}^n . Μάλιστα, στὴν περίπτωσι πού $f_\mu = \mathbf{1}_K$ γιὰ κάποιο κυρτὸ σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$, τότε ὁ μετασχηματισμὸς Λ_μ ἔχει καὶ τὶς ἀκόλουθες ιδιότητες.

Πρόταση 1.4.14 ([27]). Ἐὰς συμβολίσουμε μὲ $\mu = \mu_K$ τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω σὲ ἕνα κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n . Τότε,

$$(1.4.8) \quad (\nabla \Lambda_\mu)(\mathbb{R}^n) = \text{int}(K).$$

Ἐπιπλέον, ὁ μετασχηματισμὸς $\nabla \Lambda_\mu$, ὁ ὁποῖος εἶναι $1-1$, μεταφέρει τὸ μέτρο ν ποὺ ἔχει πυκνότητα $\det \text{Hess}(\Lambda_\mu)$ στὸ μέτρο μ . Αὐτὸ ἐξ ὀρισμοῦ σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε συνεχῆ, μὴ ἀρνητικὴ συνάρτησι $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ἰσχύει

$$\int_K \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\nabla \Lambda_\mu(\xi)) \det \text{Hess}(\Lambda_\mu(\xi)) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\nabla \Lambda_\mu(\xi)) d\nu(\xi).$$

1.4.3 Σύνδεσις τῶν δύο μεθόδων

Στὸ [29] οἱ Klartag καὶ E. Milman χρησιμοποιοῦν ιδιότητες τόσο τοῦ λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace ὅσο καὶ τῶν L_q -κεντροειδῶν σωμάτων ἐνὸς λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου πιθανότητος, γιὰ νὰ μπορέσουν νὰ προσδιορίσουν τὴν σωστὴ τάξι μεγέθους τῆς ἀκτίνας ὄγκων τῶν κεντροειδῶν σωμάτων. Οἱ ἐπόμενες δύο προτάσις δίνουν μία ἐξήγησι ὡς πρὸς τὸ γιὰτί οἱ δύο μέθοδοι συνδυάζονται πολὺ φυσιολογικά.

Ὅρισμὸς 1.4.15. Γιὰ κάθε $p \geq 0$ ὀρίζουμε

$$\Lambda_p(\mu) = \{\Lambda_\mu \leq p\} \cap (-\{\Lambda_\mu \leq p\}).$$

Γιὰ τὰ σύνολα $\Lambda_p(\mu)$ ἔχουμε τὴν ἀκόλουθη πρότασι, μία δυϊκὴ ἐκδοχὴ τῆς ὁποίας ἐμφανίζεται καὶ στὸ [34].

Πρόταση 1.4.16 ([29]). Ἐστω ὅτι μ εἶναι ἕνα λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μὲ κέντρο βάρους $\text{bar}(\mu) = 0$. Τότε, γιὰ κάθε $p \geq 1$,

$$\Lambda_p(\mu) \simeq pZ_p(\mu)^\circ.$$

Ἀπόδειξις. Ἀρχικῶς, ἄς ὑποθέσουμε ὅτι $\xi \in \Lambda_p(\mu)$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp(|\langle \xi, x \rangle|) d\mu(x) \leq \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\langle \xi, x \rangle) d\mu(x) + \int_{\mathbb{R}^n} \exp(\langle -\xi, x \rangle) d\mu(x) \leq 2e^p.$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν ἀνισότητα $t^p/p! \leq e^t$, ἡ ὁποία ἰσχύει γιὰ κάθε $t \geq 0$, βλέπουμε ὅτι

$$h_{Z_p(\mu)}(\xi) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x \rangle|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq (2e^p p!)^{\frac{1}{p}} \leq Cp.$$

Ἀφοῦ τὸ $\xi \in \Lambda_p(\mu)$ ἦταν τυχόν, ἔχουμε δεῖξει ὅτι $\Lambda_p(\mu) \subseteq Cp(Z_p(\mu))^\circ$, δηλαδὴ τὸν πρῶτο ἀπὸ τοὺς ζητούμενους ἐγκλεισμούς.

Για τὸν ἄλλον ἐγκλεισμό, θεωροῦμε $\xi \in \mathbb{R}^n$ μὲ τὴν ιδιότητα $h_{Z_p(\mu)}(\xi) \leq p$, δηλαδή ξ τέτοιο ὥστε

$$(1.4.9) \quad \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle \xi, x \rangle|^p d\mu(x) \right)^{\frac{1}{p}} \leq p.$$

Γράφουμε ἐπίσης X γιὰ τὸ τυχαῖο διάνυσμα στὸν \mathbb{R}^n τὸ ὁποῖο κατανέμεται σύμφωνα μὲ τὸ μέτρο μ , δηλαδή τὸ τυχαῖο διάνυσμα ποὺ ἔχει τὴν ιδιότητα $\mathbb{P}(X \in A) = \mu(A)$ γιὰ κάθε Borel ὑποσύνολο A τοῦ \mathbb{R}^n . Τότε ἡ συνάρτησις

$$\phi(t) := \mu(\langle X, \xi \rangle \geq t), \quad t \in \mathbb{R},$$

εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη σύμφωνα μὲ τὴν ἀνισότητα Prékopa-Leindler. Ἐπιπροσθέτως, ἀφοῦ τὸ βαρύνκентρο τοῦ μ εἶναι τὸ 0, ἀπὸ τὸ λήμμα τοῦ Grünbaum (βλέπε Λήμμα 1.3.6) ἔχουμε ὅτι $1/e \leq \phi(0) \leq 1 - 1/e$. Χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν ἀνισότητα Markov, ὀδηγοῦμαστε ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (1.4.9) στὴν

$$\phi(3ep) \leq (3e)^{-p}.$$

Ἐφ' ὅσον ἡ ϕ εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη, ἔχουμε ὅτι

$$\mathbb{P}(\langle X, \xi \rangle \geq t) = \phi(t) \leq \phi(0) \left(\frac{\phi(3ep)}{\phi(0)} \right)^{\frac{t}{3ep}} \leq C \exp(-t/(3e))$$

γιὰ ὅλα τὰ $t \geq 3ep$, ἐνῶ μποροῦμε νὰ δείξουμε τὸ ἀκριβῶς ἴδιο φράγμα καὶ γιὰ τὸ ἐνδεχόμενο $\mathbb{P}(\langle X, \xi \rangle \leq -t)$. Ἐπομένως, συνδυάζοντας καὶ τὰ δύο φράγματα, καταλήγουμε ὅτι

$$\mathbb{P}(|\langle X, \xi \rangle| \geq t) \leq C \exp(-t/(3e))$$

γιὰ ὅλα τὰ $t \geq 3ep$. Τότε ὅμως

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \exp\left(\frac{|\langle \xi, X \rangle|}{6e}\right) &= \frac{1}{6e} \int_0^\infty \exp\left(\frac{t}{6e}\right) \mathbb{P}(|\langle X, \xi \rangle| \geq t) dt \\ &\leq \frac{1}{6e} \int_0^{3ep} \exp\left(\frac{t}{6e}\right) dt + C \int_{3ep}^\infty \exp(-t/(6e)) dt \\ &\leq \exp(\tilde{C}p), \end{aligned}$$

καὶ ἄρα

$$\max \left\{ \Lambda_\mu \left(\frac{1}{6e} \xi \right), \Lambda_\mu \left(-\frac{1}{6e} \xi \right) \right\} \leq \log \mathbb{E} \exp\left(\frac{|\langle \xi, X \rangle|}{6e}\right) \leq Cp$$

γιὰ κάποια σταθερὰ $C \geq 1$. Χρησιμοποιῶντας καὶ τὴν (1.4.7), προκύπτει ὅτι

$$\max \left\{ \Lambda_\mu \left(\frac{1}{6eC} \xi \right), \Lambda_\mu \left(-\frac{1}{6eC} \xi \right) \right\} \leq p$$

γιὰ κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει $h_{Z_p(\mu)}(\xi) \leq p$. Ὅμως αὐτὸς εἶναι ὁ δεῦτερος ἐγκλεισμός $p(Z_p(\mu))^\circ \subseteq C' \Lambda_p(\mu)$ ποὺ θέλαμε νὰ δείξουμε, ἄρα ἔχουμε ἀποδείξει τὴν πρότασι. \square

Υπάρχει επίσης μία σύνδεση του λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace Λ_μ ἑνὸς λογαριθμικά-κοίλου μέτρου μ μὲ τὸν ἀντίστοιχο μετασχηματισμὸ τοῦ κεντραρισμένου μέτρου μ_ξ ποὺ ὀρίζεται μὲ τὸν τρόπο ποὺ εἶδαμε στὸν Ὁρισμὸ 1.4.13 γιὰ κάθε $\xi \in A(\mu) = \{\Lambda_\mu < \infty\}$, οὐσιαστικὰ μέσῳ τοῦ Λ_μ . Αὐτὴ δίδεται ἀπὸ τὴν ἐπομένη ταυτότητα:

$$\Lambda_{\mu_\xi}(z) = \Lambda_\mu(z + \xi) - \Lambda_\mu(\xi) - \langle z, \nabla \Lambda_\mu(\xi) \rangle.$$

Γιὰ τὴν ἀπόδειξιν αὐτῆς, γράφουμε πρῶτα

$$Z_\xi = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x \rangle} d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x \rangle} f_\mu(x) dx \quad \text{καὶ} \quad b_\xi = \text{bar}(\mu'_\xi),$$

καὶ παρατηροῦμε ἔπειτα ὅτι

$$\log Z_\xi = \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x \rangle} f_\mu(x) dx = \Lambda_\mu(\xi)$$

καὶ

$$\langle z, b_\xi \rangle = \langle z, \nabla \Lambda_\mu(\xi) \rangle.$$

Συνεπῶς, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} \Lambda_{\mu_\xi}(z) &= \log \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{Z_\xi} e^{\langle z, y \rangle} f_{\mu_\xi}(y) dy \\ &= \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle z, y \rangle} e^{\langle \xi, y + b_\xi \rangle} f_\mu(y + b_\xi) dy - \log Z_\xi \\ &= \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\langle z, b_\xi \rangle} e^{\langle z, y + b_\xi \rangle} e^{\langle \xi, y + b_\xi \rangle} f_\mu(y + b_\xi) dy - \Lambda_\mu(\xi) \\ &= -\langle z, b_\xi \rangle + \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle z + \xi, y + b_\xi \rangle} f_\mu(y + b_\xi) dy - \Lambda_\mu(\xi) \\ &= -\langle z, b_\xi \rangle + \Lambda_\mu(z + \xi) - \Lambda_\mu(\xi). \end{aligned}$$

Οἱ Klartag καὶ E. Milman χρησιμοποιοῦν αὐτὴν τὴν ταυτότητα γιὰ νὰ δείξουν τὴν ἀκόλουθη πρόταση.

Πρόταση 1.4.17 ([29]). Ἐστω μ ἕνα λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μὲ $\text{bar}(\mu) = 0$. Γιὰ κάθε $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, ἔχουμε ὅτι

$$(1.4.10) \quad Z_p(\mu_\xi) \simeq Z_p(\mu).$$

Γιὰ τὴν ἀπόδειξιν τῆς μᾶς χρειάζεται καὶ τὸ παρακάτω

Λήμμα 1.4.18. Ἐστω μ ἕνα λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μὲ $\text{bar}(\mu) = 0$. Γιὰ κάθε δύο θετικὸς ἀριθμοὺς $q, r > 0$, ἰσχύει ὅτι

$$\nabla \Lambda_\mu \left(\frac{1}{2} \{ \Lambda_\mu \leq q \} \right) \subseteq (q + r) \{ \Lambda_\mu \leq r \}^\circ.$$

Άποδειξις. Θεωρούμε $x \in \frac{1}{2}\{\Lambda_\mu \leq q\}$. Τότε ἐξ ὀρισμοῦ ἰσχύει ὅτι $\Lambda_\mu(2x) \leq q$. Ἐπίσης, γιὰ κάθε $z \in \{\Lambda_\mu \leq r\}$, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} \langle \nabla \Lambda_\mu(x), \frac{z}{2} \rangle &\leq \Lambda_\mu(x) + \langle \nabla \Lambda_\mu(x), \frac{z}{2} \rangle \leq \Lambda_\mu\left(x + \frac{z}{2}\right) \\ &\leq \frac{\Lambda_\mu(2x) + \Lambda_\mu(z)}{2} \leq \frac{q + r}{2}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ γεγονός ὅτι $\Lambda_\mu(x) \geq 0$, ἀφοῦ $\text{bar}(\mu) = 0$, ὅπως καὶ ὅτι ἡ Λ_μ εἶναι κυρτὴ συνάρτησις. Ἄφοῦ

$$\langle \nabla \Lambda_\mu(x), z \rangle \leq q + r$$

γιὰ κάθε $z \in \{\Lambda_\mu \leq r\}$, καταλήγουμε ὅτι $x \in (q + r)\{\Lambda_\mu \leq r\}^\circ$. \square

Άποδειξις τῆς Προτάσεως 1.4.17: Λόγω τῆς Προτάσεως 1.4.16, ἀρκεῖ νὰ δείξουμε ὅτι, γιὰ κάθε $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$,

$$\Lambda_p(\mu_\xi) \simeq \Lambda_p(\mu).$$

Ἰσχυρισμός. Ἐστω $D, p > 0$. Ἄν ἰσχύει $\Lambda_\mu(2y) \leq Dp$ καὶ $z \in \Lambda_p(\mu)$, τότε

$$\Lambda_\mu(z + y) - \Lambda_\mu(y) + \langle z, \nabla \Lambda_\mu(y) \rangle \leq (D + 1)p.$$

Άποδειξις τοῦ Ἰσχυρισμοῦ. Ἐφαρμόζουμε τὸ Λήμμα 1.4.18 μὲ $q = Dp$ καὶ $r = p$. Ἐχουμε ὅτι $\Lambda_\mu(2y) \leq Dp$ καὶ $\Lambda_\mu(z) \leq p$, ἄρα, ἀπὸ τὸ λήμμα,

$$\langle \nabla \Lambda_\mu(y), z \rangle \leq (D + 1)p.$$

Ὅμως τότε,

$$\begin{aligned} \Lambda_\mu(z/2 + y) - \Lambda_\mu(y) + \langle z/2, \nabla \Lambda_\mu(y) \rangle &\leq \Lambda_\mu(z/2 + y) + \frac{(D + 1)p}{2} \\ &\leq \frac{\Lambda_\mu(z) + \Lambda_\mu(2y)}{2} + \frac{(D + 1)p}{2} \\ &\leq (D + 1)p. \end{aligned}$$

Συνέχεια τῆς ἀποδείξεως τῆς Προτάσεως 1.4.17: Δείχνουμε διαδοχικὰ ὅτι $\Lambda_p(\mu) \subseteq 4\Lambda_p(\mu_\xi)$ καὶ ὅτι $\Lambda_p(\mu_\xi) \subseteq 11\Lambda_p(\mu)$.

(α) Θεωροῦμε τυχὸν $z \in \Lambda_p(\mu)$. Ἐφαρμόζοντας τὸν παραπάνω ἰσχυρισμὸ μὲ $D = 1$ καὶ $y = \xi$ βλέπουμε ὅτι

$$\Lambda_{\mu_\xi}(z/2) = \Lambda_\mu(z/2 + \xi) - \Lambda_\mu(\xi) + \langle z/2, \nabla \Lambda_\mu(\xi) \rangle \leq 2p.$$

Τότε, ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.4.12, ἔπεται ὅτι $\Lambda_{\mu_\xi}(z/4) \leq p$, καὶ ἄρα $z \in 4\Lambda_p(\mu_\xi)$. Λόγω συμμετρίας, μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ ἴδιο ἐπιχείρημα καὶ γιὰ τὸ $-z \in \Lambda_p(\mu)$, καὶ νὰ καταλήξουμε ὅτι

$$\Lambda_p(\mu) \subseteq 4\Lambda_p(\mu_\xi).$$

(β) Τώρα θεωρούμε τυχόν $z \in \Lambda_p(\mu_\xi)$. Δεδομένου ότι $(\mu_\xi)_{-\xi} = \mu$, μπορούμε να εφαρμόσουμε το έπιχείρημα στο (α), άρκεί να έξασφαλίσουμε ότι $\Lambda_{\mu_\xi}(-2\xi) \leq Dp$ για κάποια άπόλυτη σταθερά $D > 0$. Γνωρίζουμε ότι

$$\Lambda_{\mu_\xi}(-2\xi) = \Lambda_\mu(-\xi) - \Lambda_\mu(\xi) + 2\langle \xi, \nabla \Lambda_\mu(\xi) \rangle,$$

ένῶ από το Λήμμα 1.4.18 έχουμε ότι

$$\langle \xi, \nabla \Lambda_\mu(\xi) \rangle \leq 2p.$$

Άφοῦ $\Lambda_\mu(\xi) \geq 0$ και

$$\Lambda_\mu(-\xi) \leq \frac{\Lambda_\mu(-2\xi) + \Lambda_\mu(0)}{2} \leq \frac{p + 0}{2} = \frac{p}{2},$$

συμπεραίνουμε ότι

$$\Lambda_{\mu_\xi}(-2\xi) \leq \frac{9p}{2},$$

και άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε τον ισχυρισμό με $D = \frac{9}{2}$. Όπως και στο βήμα (α), καταλήγουμε ότι $\Lambda_\mu(z/11) \leq 11$, ένῶ μπορούμε να δείξουμε το ίδιο και για το $-z$. Τελικῶς, βλέπουμε ότι

$$\Lambda_p(\mu_\xi) \subseteq 11\Lambda_p(\mu),$$

που ήταν το ζητούμενό μας. □

Θά έξηγήσουμε την συνέχεια τής μεθόδου τῶν Klartag και E. Milman στο Κεφάλαιο 3.

Μία αναγωγή τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου σὲ ὀλοκληρώματα νορμῶν τῶν κεντροειδῶν σωμάτων

2.1 Ἡ παράμετρος $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ καὶ κάποιες πρῶτες ἐκτιμήσεις

Εἶδαμε στὴν Εἰσαγωγή ὅτι ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου, σὲ μίᾳ ἰσοδύναμη διατύπωσί της, ρωτᾶει ἂν μποροῦμε νὰ φράξουμε τὶς ἰσοτροπικὲς σταθερὲς ὄλων τῶν κυρτῶν σωμάτων, ἄρα καὶ ὄλων τῶν λογαριθμικῶν-κοίλων μέτρων, ἀπὸ μίᾳ σταθερᾷ ἀνεξάρτητῆ τῆς διαστάσεως τοῦ χώρου. Τὰ μέχρι τώρα γνωστὰ φράγματα ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν διάστασι: ὁ Bourgain [9] ἔχει δείξει ὅτι $L_n \lesssim \sqrt[4]{n} \log n$, τὸ ὁποῖο ὁ Klartag [27] βελτίωσε σὲ $L_n \lesssim \sqrt[4]{n}$.

Ἡ προσέγγισις τοῦ Bourgain βασιζόταν στὴν ψ_1 -συμπεριφορὰ τῶν λογαριθμικῶν-κοίλων μέτρων, ἡ ὁποία προκύπτει ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.3.9. Ὁ Bourgain ἔδειξε ἐπίσης [10] ὅτι μποροῦμε νὰ ποῦμε κάτι καλύτερο γιὰ τὰ μέτρα πὺ ἐμφανίζουσι ψ_2 -συμπεριφορὰ.

Θεώρημα 2.1.1 (Bourgain, 2003). *Ἐστω μ ἓνα ἰσοτροπικὸ λογαριθμικῶν-κοῖλο μέτρο τὸ ὁποῖο εἶναι ψ_2 μὲ κάποια σταθερὰ $b \geq 1$. Τότε ἔχουμε ὅτι*

$$L_\mu \leq cb \log(b + 1),$$

ὅπου c εἶναι μίᾳ ἀπόλυτη σταθερά.

Οἱ Klartag καὶ E. Milman γενίκευσαν αὐτὸ τὸ ἀποτέλεσμα, δίνοντας ἄνω φράγμα γιὰ τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ κάθε ψ_α -μέτρου, $\alpha \in [1, 2)$, μέσῳ τῆς ψ_α -σταθερᾶς του, χρησιμοποιῶντας τὴν μέθοδο πὺ θὰ δοῦμε στὸ Κεφάλαιο 3 καθῶς καὶ τὸ γεγονός πὺ ἀναφέραμε στὴν Παρατήρησι 1.4.9, ὅτι $q_*(\mu) \gtrsim n^{\alpha/2}/b_\alpha^\alpha$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικῶν-κοῖλο μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n τὸ ὁποῖο εἶναι ψ_α μὲ σταθερὰ b_α .

Θεώρημα 2.1.2 (Klartag-E. Milman, 2012). Έστω μ ένα ιστροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο τὸ ὁποῖο εἶναι ψ_α με κάποια σταθερά $b_\alpha \geq 1$. Τότε ἔχουμε ὅτι

$$L_\mu \leq C b_\alpha n^{\frac{1}{2} - \frac{\alpha}{4}},$$

ὅπου C εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἄφοῦ κάθε λογαριθμικά-κοίλο μέτρο εἶναι ψ_1 με μία ἀπόλυτη σταθερά β_1 , τὸ παραπάνω θεώρημα μᾶς δίνει πάλι τὸ καλύτερο γνωστὸ φράγμα γιὰ τὸ L_n : $L_n \leq C' \sqrt[4]{n}$. Δείχνει ταυτόχρονα ὅτι $L_\mu \leq C b_2$ γιὰ κάθε ιστροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ ποὺ ἔχει ψ_2 -σταθερά b_2 . Εἶναι γνωστὸ βέβαια, ὅπως δείχνει τὸ παράδειγμα τοῦ ὁμοιομόρφου μέτρου στὴν μπάλα $B_1^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i |x_i| \leq 1\}$ τοῦ l_1^n , ὅτι ὑπάρχουν οἰκογένειες μέτρων τὰ ὁποῖα δὲν εἶναι ψ_α γιὰ κανένα $\alpha > 1$ με κάποια σταθερά ποὺ νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διάστασι. Σκοπὸς αὐτοῦ τοῦ κεφαλαίου εἶναι νὰ παρουσιάσουμε μίαν ἀναγωγή [21] τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου στὴν μελέτη τῶν ὁλοκληρωμάτων $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, ὅπου $q \geq 1$ καὶ K ιστροπικό κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n . Τὰ ὁλοκληρώματα αὐτὰ θὰ μπορούσαμε νὰ ποῦμε ὅτι μᾶς δίνουν πιὸ ἀναλυτικὲς πληροφορίες γιὰ τὸ πῶς καὶ πόσο ἐπηρεάζει τὴν γεωμετρία τοῦ K ἡ ψ_α ($\alpha \in [1, 2]$) συμπεριφορά του. Θυμόμαστε ὅτι, σύμφωνα με τοὺς συμβολισμούς μας,

$$I_1(K, C) = \int_K \|x\|_C dx$$

γιὰ κάθε συμμετρικό κυρτὸ σῶμα C στὸν \mathbb{R}^n , καὶ ἄρα, γιὰ κάθε $q \geq 1$,

$$I_1(K, Z_q^\circ(K)) = \int_K \|x\|_{Z_q^\circ(K)} dx = \int_K h_{Z_q(K)}(x) dx.$$

Ἄν τὸ ιστροπικό κυρτὸ σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$ εἶναι ψ_α με σταθερά $b_\alpha(K)$, ἔχουμε ὅτι

$$(2.1.1) \quad \begin{aligned} I_1(K, Z_q^\circ(K)) &= \int_K h_{Z_q(K)}(x) dx \leq b_\alpha(K) q^{1/\alpha} \int_K h_{Z_2(K)}(x) dx \\ &= b_\alpha(K) q^{1/\alpha} \int_K LK \|x\|_2 dx \leq b_\alpha(K) q^{1/\alpha} \sqrt{n} L_K^2. \end{aligned}$$

Ὅμως γιὰ παράδειγμα, ὅπως θὰ δοῦμε παρακάτω, $I_1(\overline{B}_1^n, Z_q^\circ(\overline{B}_1^n)) \leq \sqrt{qn} \log n$ λόγω ἑνὸς ἀποτελέσματος τῶν Bobkov καὶ Nazarov (βλέπε [5]), παρότι $b_2(\overline{B}_1^n) \simeq \sqrt{n}$.

Πρὶν ἀναφερθοῦμε πιὸ ἀναλυτικὰ στὴν ἀναγωγή καὶ τὶς διαφορὲς ἐκτιμήσεις ποὺ ἔχουμε γιὰ τὴν παράμετρο $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, ὑπενθυμίζουμε δύο ἀκόμη ἐνδιαφέροντα ἀποτελέσματα ἀπὸ τὴν θεωρία τῶν ιστροπικῶν σωμάτων καὶ μέτρων, τὰ ὁποῖα θὰ χρησιμοποιήσουμε καὶ στὴν συνέχεια. Τὸ πρῶτο ἀποτέλεσμα δείχνει ὅτι, γιὰ νὰ βρεῖ κάποιος ἄνω φράγματα γιὰ τὴν L_n , θὰ ἄρκοῦσε νὰ μελετήσει ιστροπικά κυρτὰ σώματα «μικρῆς διαμέτρου», δηλαδὴ ιστροπικά κυρτὰ σώματα $K \subset \mathbb{R}^n$ με ἀκτῖνα $R(K)$ ὅσο πιὸ μικρὴ γίνεται, $R(K) \lesssim \sqrt{n} L_K$.

Πρόταση 2.1.3 (Bourgain, [9]). Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερές $c_1, c_2, c_3 > 0$ ὥστε, γιὰ κάθε (συμμετρικό) ιστροπικό κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n , νὰ μπορούμε νὰ βροῦμε ἕνα δεύτερο (συμμετρικό) ιστροπικό κυρτὸ σῶμα $Q \subset \mathbb{R}^n$ τέτοιο ὥστε $c_1 L_K \leq L_Q \leq c_2 L_K$ καὶ $R(Q) \leq c_3 \sqrt{n} L_Q$.

Το δεύτερο αποτέλεσμα, το οποίο αποδείχθη από τους Bourgain, Klartag και V. Milman [11], δείχνει ότι η ακολουθία $(L_n)_{n \geq 1}$ είναι κατ' ουσίαν αϋξουσα.

Θεώρημα 2.1.4 (Bourgain-Klartag-V. Milman, 2005). *Υπάρχει μία απόλυτη σταθερά c_0 τέτοια ώστε, για κάθε δύο φυσικούς m, n με $m < n$, να ισχύει $L_m \leq c_0 L_n$.*

Το έπιχείρημα της αναγωγής δίδεται στην επομένη παράγραφο. Για την απόδειξί της, θα δοϋμε ότι χρειάζεται να θεωρήσουμε μία συγκεκριμένη κλάση σωμάτων, η οποία αποτελείται από τα ισοτροπικά κυρτά σώματα που είναι ταυτόχρονα σε κάποιου τύπου 2-κανονική M -θέσι. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε τον ακόλουθο όρισμό.

Όρισμός 2.1.5. Έστω παράμετροι $\kappa, \tau > 0$. Σε αυτό το κεφάλαιο θα λέμε ότι ένα ισοτροπικό κυρτό σῶμα K στον \mathbb{R}^n είναι (κ, τ) -κανονικό αν

$$(2.1.2) \quad \log N(K, tD_n) \leq \frac{\kappa n \log^4 n}{t^2} \text{ για κάθε } t \geq \tau \log^{3/2} n,$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα στον \mathbb{R}^n ὄγκου 1 (και ακτίνας $\omega_n^{-1/n} \simeq \sqrt{n}$).

Στην Παράγραφο 2.3 αποσαφηνίζουμε και μεταφράζουμε στην γλώσσα τῶν σωμάτων την απόδειξί του [14, Θεωρήματος 5.7], το οποίο εξασφαλίζει την ὕπαρξι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, (κ, τ) -κανονικῶν ισοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων K στον \mathbb{R}^n με ισοτροπική σταθερά $L_K \geq \delta L_n$ για κάποιες απόλυτες σταθερές $\delta > 0$ και $\kappa, \tau \geq 1$. Στην Παράγραφο 2.4 σχιαγραφοῦμε την αναγωγή τῆς εικασίας του ὑπερεπιπέδου που πρότειναν οἱ Δαφνῆς και Παούρης στο [14] και για την οποία χρειάζονταν την ὕπαρξι (κ, τ) -κανονικῶν ισοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων K με μεγιστική ισοτροπική σταθερά.

Ἄς δοϋμε τώρα την ἀκριβῆ διατύπωσι τῆς αναγωγῆς αὐτοῦ του κεφαλαίου. Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σῶμα K στον \mathbb{R}^n και για κάθε $q \in [2, n]$ θέτουμε

$$r_q(K) = \max \left\{ 1, \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn} L_K^2} \right\},$$

και ἀποδεικνύουμε τὸ ἐξῆς

Θεώρημα 2.1.6. *Υπάρχει μία απόλυτη σταθερά $\rho \in (0, 1)$ με την ἀκόλουθη ιδιότητα: για κάθε $\kappa, \tau \geq 1$, για κάθε (κ, τ) -κανονικό ισοτροπικό κυρτό σῶμα K στον \mathbb{R}^n και για κάθε $q \in [2, \rho^2 n]$ με την ιδιότητα*

$$(2.1.3) \quad I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq \rho n L_K^2,$$

ἔχουμε ὅτι

$$(2.1.4) \quad L_K \leq C \max\{\sqrt{\kappa}, \tau\} \sqrt{r_q(K)} \sqrt[4]{\frac{n}{q}} \log^2 n,$$

όπου C είναι μία απόλυτη σταθερά.

Άφου, όπως είπαμε, υπάρχουν (κ, τ) -κανονικά ισοτροπικά κυρτά σώματα K στον \mathbb{R}^n με $L_K \geq \delta L_n$, για κάποιες απόλυτες σταθερές κ, τ και δ , χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα με $q = 2$, και δεδομένου ότι $I_1(K, Z_2^\circ(K)) \leq \sqrt{n}L_K^2$ για κάθε ισοτροπικό $K \subset \mathbb{R}^n$, καταλήγουμε σχεδόν στο ίδιο φράγμα με τον Bourgain για την L_n : $L_n \lesssim \sqrt[4]{n} \log^2 n$. Η συμπεριφορά όμως της παραμέτρου $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, άρα και του $r_q(K)$, θα μπορούσε ενδεχομένως να μας επιτρέψει να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.1.6 και με μεγαλύτερα q και να πετύχουμε καλύτερα άνω φράγματα. Αν αυτό δεν είναι δυνατόν (πλην του να διώξουμε ίσως τον λογαριθμικό όρο), τότε παρατηρούμε ότι θα πρέπει να ισχύει

$$c_1 q \sqrt{n} L_K^2 \leq I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq c_2 q \sqrt{n} L_K^2$$

για κάθε $q \leq n$ και για κάθε (κ, τ) -κανονικό ισοτροπικό κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ με $L_K \simeq L_n$ για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ (το άνω φράγμα το έχουμε ήδη εξαιτίας της (2.1.1) και του γεγονότος ότι κάθε κυρτό σώμα είναι ψ_1). Σχετικά με το κάτω φράγμα όμως αξίζει να σημειώσουμε ότι ακόμη και η εκτίμησις $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \gtrsim \sqrt{qn} L_K^2$ για κάθε $q \in [1, n]$ και κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n δεν είναι γνωστή αυτήν την στιγμή (στα κάτω φράγματα για το $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ που θα δοῦμε παρακάτω λείπει πάντα ένας από τους όρους της ποσότητας $\sqrt{qn} L_K^2$), και γι' αυτό αναγκαζόμαστε στο Θεώρημα 2.1.6 να εισάγουμε την βοηθητική παράμετρο $r_q(K)$.

Στην συνέχεια αναφέρουμε κάποια απλά άνω και κάτω φράγματα που γνωρίζουμε ήδη για την παράμετρο $I_1(K, Z_q^\circ(K))$, ή, πιο γενικά, για την παράμετρο $I_1(K, Z_q^\circ(M))$ όπου M μπορεί να είναι ένα διαφορετικό από το K κυρτό σώμα όγκου 1 στον \mathbb{R}^n . Όπως είδαμε και πριν,

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) = \int_K h_{Z_q(M)}(x) dx \leq \int_K R(Z_q(M)) \|x\|_2 dx \simeq R(Z_q(M)) \sqrt{n} L_K,$$

όποτε, αν το M βρίσκεται και αυτό σε ισοτροπική θέση και είναι ψ_α με σταθερά $b_\alpha(M)$, έχουμε ότι $I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leq b_\alpha(M) q^{1/\alpha} \sqrt{n} L_K L_M$. Αν τώρα το M είναι εικόνα του K μέσω ενός ορθογωνίου μετασχηματισμού, τότε μπορούμε εν γένει να ποῦμε κάτι καλύτερο.

Λήμμα 2.1.7. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον \mathbb{R}^n . Για κάθε $1 \leq q \leq n$,

$$(2.1.5) \quad \left(\int_{O(n)} I_1^q(K, Z_q^\circ(U(K))) d\nu(U) \right)^{1/q} \leq c \sqrt{q/n} I_q^2(K),$$

όπου $c > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

Απόδειξις. Χρησιμοποιώντας την

$$\|x\|_2 \simeq \sqrt{n/q} \left(\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta \rangle|^q d\sigma(\theta) \right)^{1/q}$$

ὅπως καὶ στὸ Λήμμα 1.4.5, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned}
 \int_{O(n)} I_1^q(K, Z_q^\circ(U(K))) d\nu(U) &\leq \int_{O(n)} I_q^q(K, Z_q^\circ(U(K))) d\nu(U) \\
 &= \int_{O(n)} \int_K \int_{U(K)} |\langle x, y \rangle|^q dy dx d\nu(U) \\
 &= \int_K \int_K \int_{O(n)} |\langle x, Uy \rangle|^q d\nu(U) dy dx \\
 &= \int_K \int_K \|y\|_2^q \int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta \rangle|^q d\sigma(\theta) dy dx \\
 &= a_{n,q}^q \int_K \int_K \|y\|_2^q \|x\|_2^q dy dx \\
 &= a_{n,q}^q I_q^{2q}(K),
 \end{aligned}$$

ὅπου $a_{n,q} \simeq \sqrt{q/n}$. □

Στὴν περίπτωσι πὺ τὸ K εἶναι ἰσοτροπικὸ ἔχουμε, ὅπως ἐξηγήσαμε στὴν Παρατήρησι 1.4.11, τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ Παούρη [52] γιὰ τὰ $I_q(K)$: $I_q(K) \simeq \max\{I_2(K), R(Z_q(K))\} \lesssim \max\{\sqrt{n}L_K, qL_K\}$ γιὰ κάθε $q \geq 1$. Ἄρα τὸ παραπάνω λήμμα μᾶς δίνει ὅτι

$$\left(\int_{O(n)} I_1^q(K, Z_q^\circ(U(K))) d\nu(U) \right)^{1/q} \leq c \max\{\sqrt{qn}, q^2 \sqrt{q/n}\} L_K^2$$

γιὰ κάθε $2 \leq q \leq n$, ὅπου $c > 0$ εἶναι μίᾳ ἀπόλυτη σταθερά. Εἰδικότερα, γιὰ κάθε $1 \leq q \leq \sqrt{n}$, μποροῦμε νὰ βροῦμε ἕνα σύνολο $A_q \subseteq O(n)$ μὲ μέτρο Haar $\nu(A_q) \geq 1 - e^{-q}$ ὥστε νὰ ἰσχύει $I_1(K, Z_q^\circ(U(K))) \leq c_1 \sqrt{qn} L_K^2$ γιὰ ὅλους τοὺς μετασχηματισμοὺς $U \in A_q$.

Στρεφόμαστε τώρα σὲ κάτω φράγματα παρουσιάζοντας τρία ἀπλὰ ἐπιχειρήματα. Γιὰ τὸ πρῶτο δὲν χρειάζεται νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὰ K καὶ M βρίσκονται σὲ ἰσοτροπικὴ θέση, μόνον ὅτι ἔχουν ὄγκο 1 καὶ κέντρο βάρους τὸ 0. Λόγω τοῦ [44, Πρόρισμα 2.2.α] μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) = \int_K h_{Z_q(M)}(x) dx \geq \frac{n}{n+1} \frac{1}{|Z_q^\circ(M)|^{1/n}}.$$

Ἐπειτα, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα Blaschke-Santaló ἔχουμε ὅτι

$$(2.1.6) \quad I_1(K, Z_q^\circ(M)) \geq c_1 n |Z_q(M)|^{1/n}.$$

Ὅμως, ἀπὸ ἕνα ἀποτέλεσμα τῶν Klartag καὶ E. Milman [29] τὸ ὁποῖο θὰ δοῦμε στὸ Κεφάλαιο 3, $|Z_q(M)|^{1/n} \geq c_2 \sqrt{q/n} L_M$ γιὰ κάθε $1 \leq q \leq \sqrt{n}$, καὶ ἄρα τὸ δεξιὸ μέλος στὴν (2.1.6) φράσσεται ἀπὸ κάτω ἀπὸ $c_2' \sqrt{qn} L_M$ γιὰ αὐτὰ τὰ q . Γενικά, γιὰ κάθε $2 \leq q \leq n$ ἔχουμε μίᾳ ἀνισότητα τῶν Lutwak, Yang καὶ Zhang (βλέπε [37]), ἡ ὁποία μᾶς δίνει τὸ ἀσθενέστερο φράγμα $|Z_q(M)|^{1/n} \geq c_3 \sqrt{q/n}$, ἄρα καὶ τὸ φράγμα $I_1(K, Z_q^\circ(M)) \geq c_3' \sqrt{qn}$.

Γιὰ τὸ δεύτερο ἐπιχείρημα, ἀπαιτοῦμε τὸ K νὰ εἶναι σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι καὶ γράφουμε

$$\begin{aligned} I_1(K, Z_q^\circ(M)) &= \int_K h_{Z_q(M)}(x) dx = \int_K \max_{z \in Z_q(M)} |\langle x, z \rangle| dx \\ &\geq \max_{z \in Z_q(M)} \int_K |\langle x, z \rangle| dx \simeq \max_{z \in Z_q(M)} \|z\|_2 L_K \\ &= R(Z_q(M)) L_K, \end{aligned}$$

ἐπικαλούμενοι καὶ τὴν Πρότασι 1.3.9 στὴν προτελευταία γραμμὴ.

Τέλος, ἂν καὶ τὸ M εἶναι ἰσοτροπικό, τότε, καὶ πάλι ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.3.9, βλέπουμε ὅτι

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) = \int_K h_{Z_q(M)}(x) dx \geq \int_K h_{Z_2(M)}(x) dx = \int_K \|x\|_2 L_M dx \simeq \sqrt{n} L_K L_M.$$

Συνοψίζουμε τὶς παραπάνω ἐκτιμήσεις στὴν ἀκόλουθη πρότασι.

Πρότασις 2.1.8. Ἔστω K, M ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα στὸν \mathbb{R}^n . Γιὰ κάθε $1 \leq q \leq n$ ἔχουμε ὅτι

$$(2.1.7) \quad c_1 \max \{ \sqrt{n} L_K L_M, \sqrt{qn}, R(Z_q(M)) L_K \} \leq I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leq c_2 q \sqrt{n} L_K L_M.$$

Ἐπίσης, ἂν $1 \leq q \leq \sqrt{n}$, τότε

$$I_1(K, Z_q^\circ(M)) \geq c_3 \max \{ \sqrt{n} L_K L_M, \sqrt{qn} L_M \}.$$

Οἱ ἐκτιμήσεις μας μποροῦν νὰ γίνουν πολὺ πιὸ ἀκριβεῖς στὴν περίπτωσι ποὺ τὰ K καὶ M εἶναι unconditional σώματα, ὅπου unconditional λέμε ἕνα σῶμα K ἂν, γιὰ κάθε $(x_1, \dots, x_n) \in K$ καὶ κάθε ἐπιλογὴ προσήμων $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in \{-1, 1\}^n$, ἰσχύει $(\epsilon_1 x_1, \dots, \epsilon_n x_n) \in K$. Γιὰ παράδειγμα, unconditional εἶναι τὰ σώματα $\overline{B}_2^n, \overline{B}_1^n$ καὶ $Q_n := [-1, 1]^n$, τὰ ὁποῖα μάλιστα βρίσκονται ταυτόχρονα σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι. Στὴν περίπτωσι ἑνὸς unconditional σώματος K ἔχουμε ὅτι $L_K \simeq 1$ (βλέπε π.χ. [4]), καὶ ἄρα ἡ (2.1.7) γίνεται

$$c_1 \sqrt{qn} \leq I_1(K, Z_q^\circ(M)) \leq c_2 q \sqrt{n}.$$

Μάλιστα, ἐξαιτίας ἑνὸς ἀποτελέσματος τῶν Bobkov καὶ Nazarov [5], εἶναι δυνατὸν νὰ ἔχουμε γιὰ ὅλα τὰ q ἄνω φράγμα σχεδὸν τῆς ἰδίας τάξεως μὲ τὸ κάτω φράγμα. Πράγματι, οἱ Bobkov καὶ Nazarov ἔχουν δείξει ὅτι, ὅταν τὸ $K \subset \mathbb{R}^n$ εἶναι unconditional καὶ ἰσοτροπικό, τότε, γιὰ κάθε $q \geq 1$ καὶ γιὰ κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, ἰσχύει $h_{Z_q(K)}(y) \lesssim \sqrt{qn} \|y\|_\infty$. Ἐπετα ὅτι, γιὰ κάθε δύο unconditional ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα K, M στὸν \mathbb{R}^n ,

$$\begin{aligned} I_1(K, Z_q^\circ(M)) &= \int_K h_{Z_q(M)}(x) dx \lesssim \int_K \sqrt{qn} \|x\|_\infty dx \\ &= \sqrt{qn} \int_K \max_{1 \leq i \leq n} |\langle x, e_i \rangle| dx \lesssim \sqrt{qn} \log n \end{aligned}$$

(βλέπε Παρατήρησι 2.2.2 γιὰ τὴν τελευταία ἀνισότητα, ἢ τὸ Λῆμμα 2.2.1 σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν Πρότασι 1.3.9).

2.2 Ἡ ἀναγωγή

Σὲ αὐτὴν τὴν παράγραφο θὰ περιγράψουμε τὸ ἐπιχείρημα τῆς ἀναγωγῆς. Ξεκινᾶμε μὲ δύο βασικὰ λήμματα, τὸ πρῶτο ἐκ τῶν ὁποίων μᾶς δίνει ἓνα χρήσιμο ἄνω φράγμα γιὰ τὸ ὀλοκλήρωμα τοῦ maximum ἑνὸς πεπερασμένου συνόλου γραμμικῶν συναρτησοειδῶν.

Λήμμα 2.2.1. Ἔστω K ἓνα κυρτὸ σῶμα ὀγκοῦ 1 στὸν \mathbb{R}^n . Θεωροῦμε σημεῖα $z_1, z_2, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$. Τότε, ἂν $q \geq 1$ καὶ $p \geq \max\{\log N, q\}$, ἔχουμε ὅτι

$$(2.2.1) \quad \left(\int_K \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, z_i \rangle|^q dx \right)^{1/q} \leq \bar{\beta}_1 \max_{1 \leq i \leq N} h_{Z_p(K)}(z_i),$$

ὅπου $\bar{\beta}_1 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Ἔστω $p \geq 1$ καὶ $\theta \in S^{n-1}$. Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Markov λαμβάνουμε ὅτι

$$(2.2.2) \quad |\{x \in K : |\langle x, \theta \rangle| e^3 h_{Z_p(K)}(\theta)\}| \leq e^{-3p}.$$

Ἀφοῦ ἡ ἀπεικόνισις $x \mapsto |\langle x, \theta \rangle|$ εἶναι ἡμινόρμα, μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὸ Λήμμα τοῦ Borell (Λήμμα 1.3.8) τὸ ὁποῖο μᾶς δίνει ὅτι

$$|\{x \in K : |\langle x, \theta \rangle| \geq e^3 t h_{Z_p(K)}(\theta)\}| \leq (1 - e^{-3p}) \left(\frac{e^{-3p}}{1 - e^{-3p}} \right)^{\frac{t+1}{2}} \leq e^{-pt}$$

γιὰ κάθε $t \geq 1$. Θετούμε $S := e^3 \max_{1 \leq i \leq N} h_{Z_p(K)}(z_i)$. Τότε, γιὰ κάθε $t \geq 1$ ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned} |\{x \in K : \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, z_i \rangle| \geq St\}| &\leq \sum_{i=1}^N |\{x \in K : |\langle x, z_i \rangle| \geq e^3 t h_{Z_p(K)}(z_i)\}| \\ &\leq N e^{-pt}. \end{aligned}$$

Ἔπεται ὅτι

$$\begin{aligned} \int_K \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, z_i \rangle|^q dx &= q \int_0^\infty s^{q-1} |\{x \in K : \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, z_i \rangle| \geq s\}| ds \\ &\leq S^q + q \int_S^\infty s^{q-1} |\{x \in K : \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, z_i \rangle| \geq s\}| ds \\ &= S^q \left(1 + q \int_1^\infty t^{q-1} |\{x \in K : \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, z_i \rangle| \geq St\}| dt \right) \\ &\leq S^q \left(1 + qN \int_1^\infty t^{q-1} e^{-pt} dt \right) \\ &= S^q \left(1 + \frac{qN}{p^q} \int_p^\infty t^{q-1} e^{-t} dt \right) \\ &\leq S^q \left(1 + \frac{qN}{p^q} e^{-p} p^q \right) \\ &\leq (eS)^q, \end{aligned}$$

όπου έχουμε επίσης χρησιμοποιήσει το ότι ισχύει

$$\int_p^\infty t^{q-1} e^{-t} dt \leq e^{-p} p^q$$

για κάθε $p \geq q \geq 1$ (ή ανισότητα ανάγεται στο να δείξει κάποιος ότι, για κάθε $q \geq 1$, ισχύει $\int_1^\infty f_q(t) dt = \int_1^\infty t^{q-1} e^{q(1-t)} dt \leq 1$, και αυτό προκύπτει άμεσα αν παρατηρήσουμε ότι $f_q(t) \leq f_1(t)$ για κάθε $t \geq 1$). Έτσι έχουμε αποδείξει το ζητούμενο (με την σταθερά $\bar{\beta}_1 = e^4$). \square

Παρατήρησης 2.2.2. Ένα πολύ χρήσιμο αποτέλεσμα, που ισχύει για όποιεσδήποτε μη αρνητικές, φραγμένες συναρτήσεις f_i , $1 \leq i \leq N$, που ορίζονται πάνω σε ένα κυρτό σώμα K όγκου 1, είναι ότι

$$(2.2.3) \quad \int_K \max_{1 \leq i \leq N} f_i(x) dx \leq C(\log N)^{1/\alpha} \max_{1 \leq i \leq N} \|f_i\|_{\psi_\alpha(K)},$$

όπου $\|\cdot\|_{\psi_\alpha(K)}$ είναι η νόρμα Orlicz τάξεως $\alpha > 0$ ως προς το ομοιόμορφο μέτρο στο K και $C > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά (βλέπε π.χ. [18, Πρόταση 2.5.1], και γενικά [18] ή [13] για τον όρισμό και ιδιότητες των νορμών Orlicz). Είναι επίσης γνωστό ότι τα γραμμικά συναρτησοειδή ικανοποιούν την ανισότητα

$$(2.2.4) \quad \|\langle \cdot, z_i \rangle\|_{\psi_1(K)} \leq c \|\langle \cdot, z_i \rangle\|_{L_1(K)} = ch_{Z_1(K)}(z_i)$$

(αυτή είναι απλώς μία επαναδιατύπωση της (1.4.1) όταν $p = 1$), άρα ικανοποιούν και την εκτίμησι

$$\|\|\langle \cdot, z_i \rangle\|^q\|_{\psi_{1/q}(K)} \leq c \|\|\langle \cdot, z_i \rangle\|^q\|_{L_1(K)} = ch_{Z_q(K)}^q(z_i),$$

για κάθε $1 \leq q \leq n$, από την οποία, σε συνδυασμό με την (2.2.3), προκύπτει η

$$\left(\int_K \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, z_i \rangle|^q dx \right)^{1/q} \leq C \log N \max_{1 \leq i \leq N} h_{Z_q(K)}(z_i).$$

Την τελευταία ανισότητα μπορούμε να την συμπεράνουμε και άπευθείας μέσω του Λήμματος 2.2.1 και μάλιστα βελτιωμένη όταν $q > 1$: για $q \leq \log N$, χρησιμοποιώντας και την Πρόταση 1.3.9, βλέπουμε ότι

$$\left(\int_K \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, z_i \rangle|^q dx \right)^{1/q} \leq \bar{\beta}_1 \max_{1 \leq i \leq N} h_{Z_{\log N}(K)}(z_i) \leq C \frac{\log N}{q} \max_{1 \leq i \leq N} h_{Z_q(K)}(z_i),$$

ένω, για $q > \log N$, έχουμε

$$\left(\int_K \max_{1 \leq i \leq N} |\langle x, z_i \rangle|^q dx \right)^{1/q} \simeq \max_{1 \leq i \leq N} \left(\int_K |\langle x, z_i \rangle|^q dx \right)^{1/q}.$$

Το δεύτερο λήμμα έχει να κάνει με τα L_q -κεντροειδή σώματα υποσυνόλων του K και πώς αυτά σχετίζονται με τα κεντροειδή σώματα του ίδιου του K .

Λήμμα 2.2.3. Έστω K ένα κυρτό σῶμα ὀγκου 1 στὸν \mathbb{R}^n καὶ ἄς θεωρήσουμε $q, r \in [1, n]$. Ὑπάρχει ἀπόλυτη σταθερὰ $\bar{\beta}_2 > 0$ τέτοια ὥστε, ἂν A εἶναι ὁποιοδήποτε (Lebesgue μετρήσιμο) ὑποσύνολο τοῦ K μὲ τὴν ιδιότητα $|A| \geq 1 - e^{-\bar{\beta}_2 q}$, τότε

$$(2.2.5) \quad Z_p(K) \subseteq 2Z_p(\bar{A})$$

γὰ κάθε $1 \leq p \leq q$. Ἐπιπλέον, γὰ νὰ ἔχουμε ἐγκλεισμό τῆς ἀντίθετης φοράς, μᾶς ἀρκεῖ νὰ ἔχουμε $|A| \geq 2^{-\frac{r}{2}}$, καὶ τότε ἰσχύει

$$(2.2.6) \quad Z_p(\bar{A}) \subseteq 2Z_p(K)$$

γὰ κάθε $r \leq p \leq n$.

Ἀπόδειξις. Ἐστω $\theta \in S^{n-1}$. Παρατηροῦμε ὅτι

$$h_{Z_p(\bar{A})}(\theta) = \left(\int_{\bar{A}} |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p} = \frac{1}{|A|^{\frac{1}{p} + \frac{1}{n}}} \left(\int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p}.$$

Δείχνουμε πρῶτα τὴν (2.2.6): δεδομένου ὅτι $A \subseteq K$ καὶ ἐπίσης ὑποθέτοντας ὅτι $|A| \geq 2^{-\frac{r}{2}}$, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} h_{Z_p(K)}(\theta) &= \left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p} \geq \left(\int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p} \\ &\geq 2^{-\frac{r}{2p} - \frac{r}{2n}} \left(\int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{1/p} \geq \frac{1}{2} h_{Z_p(\bar{A})}(\theta) \end{aligned}$$

γὰ κάθε $r \leq p \leq n$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ὑποθέτοντας ὅτι $|A| \geq 1 - e^{-\bar{\beta}_2 q}$ καὶ χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ γεγονός ὅτι $\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{L^{2p}(K)} \leq 2\bar{\beta}_2 \|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{L^p(K)}$, συμπεραίνουμε ὅτι

$$\begin{aligned} \int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx &= \int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx + \int_{K \setminus A} |\langle x, \theta \rangle|^p dx \\ &\leq |A|^{1 + \frac{p}{n}} \int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx + |K \setminus A|^{1/2} \left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^{2p} dx \right)^{1/2} \\ &\leq \int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx + e^{-\bar{\beta}_2 q/2} c^p \int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx \\ &\leq \int_A |\langle x, \theta \rangle|^p dx + \frac{1}{2} \int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx \end{aligned}$$

γὰ κάθε $p \in [1, q]$, ἐφ' ὅσον βεβαίως ἐπιλέξουμε τὴν σταθερὰ $\bar{\beta}_2 > 0$ ἀρκετὰ μεγάλη. Ἔτσι ἔχουμε ἀποδείξει καὶ τὴν (2.2.5). \square

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 2.1.6. Ἐστω ὅτι ἔχουμε σταθερὲς $\kappa, \tau \geq 1$ καὶ ἓνα (κ, τ) -κανονικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n , δηλαδή ἓνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα ποὺ ικανοποιεῖ τὴν (2.1.2).

Έστω επίσης ότι για κάποιο $q \in [2, \rho^2 n]$ ισχύει $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq \rho n L_K^2$, όπου η τιμή της σταθεράς ρ θα προσδιοριστεί σε λίγο. Ορίζουμε ένα κυρτό σῶμα $W \subseteq K$ θέτοντας

$$W := \{x \in K : h_{Z_q(K)}(x) \leq C_1 I_1(K, Z_q^\circ(K))\},$$

όπου $C_1 = e^{2\bar{\beta}_2}$ και $\bar{\beta}_2 > 0$ είναι η σταθερά που εμφανίζεται στο Λήμμα 2.2.3. Από την ανισότητα Markov βλέπουμε ότι $|W| \geq 1 - e^{-2\bar{\beta}_2}$, και άρα ότι $|W| \geq 2^{-1} \geq 2^{-\frac{q}{2}}$ επίσης (άρκει να έχουμε επιλέξει $\bar{\beta}_2 \geq 1$). Θέτουμε έπειτα

$$K_1 := \bar{W}$$

και εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.2.3 τόσο για $p = 2$ όσο και για $p = q$: βλέπουμε ότι

$$(2.2.7) \quad \frac{1}{2} Z_2(K_1) \subseteq Z_2(K) \subseteq 2Z_2(K_1)$$

και ότι

$$(2.2.8) \quad Z_q(K_1) \subseteq 2Z_q(K).$$

Έξαιτίας της (2.2.7) έχουμε ότι

$$\frac{1}{4} L_K^2 = \frac{1}{4} \int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx \leq \int_{K_1} \langle x, \theta \rangle^2 dx \leq 4 \int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = 4L_K^2$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, και άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{nL_K^2}{4} \leq \sum_{i=1}^n \int_{K_1} \langle x, e_i \rangle^2 dx = \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx \leq 4nL_K^2.$$

Έχουμε επίσης

$$K_1 = |W|^{-1/n} W \subseteq 2W \subseteq 2K,$$

επομένως για κάθε $x \in K_1$ ισχύει ότι $x/2 \in W$, το οποίο σε συνδυασμό με την (2.2.8) μάς δίνει ότι

$$(2.2.9) \quad h_{Z_q(K_1)}(x) \leq 2h_{Z_q(K)}(x) = 4h_{Z_q(K)}(x/2) \leq 4C_1 I_1(K, Z_q^\circ(K)).$$

Τέλος, η $K_1 \subseteq 2K$ συνεπάγεται επίσης ότι

$$\log \bar{N}(K_1, tD_n) \leq \log N(K_1, 2^{-1}tD_n) \leq \log N(2K, 2^{-1}tD_n) \leq \frac{16\kappa' n \log^4 n}{t^2}$$

για όλα τα $t \geq 4\tau \log^{3/2} n$, όπου $\kappa' := \max\{\kappa, \tau^2\}$. Επομένως, για κάθε τέτοιο t μπορούμε να βρούμε $z_1, \dots, z_{N_t} \in K_1$ τέτοια ώστε να ισχύει $K_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_t} (z_i + tD_n)$, όπου $|N_t| \leq \exp\left(\frac{16\kappa' n \log^4 n}{t^2}\right)$.

Γράφουμε τώρα

$$nL_K^2 \leq 4 \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx \leq 4 \int_{K_1} \max_{z \in K_1} |\langle x, z \rangle| dx,$$

και παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\max_{z \in K_1} |\langle x, z \rangle| \leq \max_{1 \leq i \leq N_t} |\langle x, z_i \rangle| + \max_{w \in tD_n} |\langle x, w \rangle| = \max_{1 \leq i \leq N_t} |\langle x, z_i \rangle| + t\omega_n^{-1/n} \|x\|_2,$$

συνεπώς

$$(2.2.10) \quad nL_K^2 \leq 4 \int_{K_1} \max_{1 \leq i \leq N_t} |\langle x, z_i \rangle| dx + 4t\omega_n^{-1/n} \int_{K_1} \|x\|_2 dx \leq 4 \int_{K_1} \max_{1 \leq i \leq N_t} |\langle x, z_i \rangle| dx + ctnL_K.$$

Επιλέγουμε

$$(2.2.11) \quad t_0 = 8\sqrt{C_2\kappa'} \sqrt{r_q(K)} \sqrt[4]{\frac{n}{q}} \log^2 n,$$

όπου $C_2 = 16C_1\beta_1\bar{\beta}_1$ με την σταθερά β_1 να είναι αυτή που μάς δίνει η Πρόταση 1.3.9 και $\bar{\beta}_1$ ή σταθερά από το Λήμμα 2.2.1. Από τον όρισμό του $r_q(K)$ και του κ' , βλέπουμε ότι για αυτό το t_0 ισχύει

$$t_0 \geq 8\sqrt{C_2\kappa'} \sqrt[4]{\frac{n}{q}} \log^2 n \geq 4\tau \log^2 n$$

άρα η (2.2.10) ισχύει και για $t = t_0$, ενώ επίσης

$$(2.2.12) \quad t_0^2 \geq 64C_2\kappa' \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{qL_K^2} \log^4 n.$$

Θέτουμε $p_0 := \frac{16\kappa'n \log^4 n}{t_0^2}$ και παρατηρούμε ότι $p_0 \geq q$: από τις υποθέσεις $q \leq \rho^2 n$ και $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq \rho nL_K^2$ του Θεωρήματος 2.1.6, βλέπουμε ότι

$$t_0^2 = 64C_2\kappa' r_q(K) \sqrt{\frac{n}{q}} \log^4 n \leq 64C_2\kappa' \max \left\{ \sqrt{\frac{n}{q}}, \rho \frac{n}{q} \right\} \log^4 n = 64C_2\kappa' \rho \frac{n}{q} \log^4 n,$$

και άρα

$$p_0 = \frac{16\kappa'n \log^4 n}{t_0^2} \geq q$$

αν επιλέξουμε $\rho < 1/(4C_2)$. Επομένως, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2.2.1 με $q' = 1$, και να γράψουμε

$$(2.2.13) \quad \int_{K_1} \max_{1 \leq i \leq N_{t_0}} |\langle x, z_i \rangle| dx \leq \bar{\beta}_1 \max_{1 \leq i \leq N_{t_0}} h_{Z_{p_0}(K_1)}(z_i) \leq \bar{\beta}_1 \beta_1 \frac{p_0}{q} \max_{1 \leq i \leq N_{t_0}} h_{Z_q(K_1)}(z_i),$$

επικαλούμενοι και την Πρόταση 1.3.9. Συνδυάζοντας αυτό το τελευταίο με την (2.2.10), την (2.2.9) και τον όρισμό της σταθεράς C_2 , βλέπουμε ότι

$$(2.2.14) \quad nL_K^2 \leq C_2 \frac{p_0}{q} I_1(K, Z_q^\circ(K)) + ctnL_K.$$

Επιπλέον, από την (2.2.12) και τον όρισμό του p_0 , προκύπτει ότι

$$C_2 \frac{p_0}{q} I_1(K, Z_q^\circ(K)) = \frac{16C_2\kappa' I_1(K, Z_q^\circ(K))}{qt_0^2} n \log^4 n \leq \frac{1}{4} nL_K^2,$$

και άρα η (2.2.14) οδηγεί στην

$$nL_K^2 \leq C_3 t_0 nL_K.$$

Συμπεραίνουμε τελικώς ότι

$$L_K \leq C_4 t_0 = C \max\{\sqrt{\kappa}, \tau\} \max \left\{ 1, \sqrt{\frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}L_K^2}} \right\} \sqrt[4]{\frac{n}{q}} \log^2 n,$$

το οποίο ήταν το ζητούμενο φράγμα. □

2.3 2-κανονικά ισοτροπικά κυρτά σώματα με μεγιστική ισοτροπική σταθερά

Για να μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε το έπιχείρημα της προηγούμενης παραγράφου και να φράξουμε την L_n , χρειάζεται να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη (κ, τ) -κανονικών ισοτροπικών κυρτών σωμάτων, δηλαδή ισοτροπικών κυρτών σωμάτων που ικανοποιούν την (2.1.2), τα όποια έχουν ταυτόχρονα ισοτροπική σταθερά όσο πιο «κοντά» γίνεται στην L_n . Το ακόλουθο θεώρημα, διατυπωμένο πιο γενικά για λογαριθμικά-κοίλα μέτρα, απέδειχθη στο [14].

Θεώρημα 2.3.1. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές κ, τ και $\delta > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, να μπορούμε να βρούμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(a) $L_K \geq \delta L_n$.

(β) $\log N(K, tD_n) \leq \frac{\kappa n \log^4 n}{t^2}$ για κάθε $t \geq \tau \log^{3/2} n$, όπου D_n είναι η Εύκλειδεια μπάλα όγκου 1 στον \mathbb{R}^n .

Στην πραγματικότητα ισχύει κάτι γενικότερο.

Θεώρημα 2.3.2 (Δαφνής-Παούρης, 2010). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές κ, τ και $\delta > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\alpha \in [1, 2)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει ισοτροπικό κυρτό σώμα K_α στον \mathbb{R}^n τέτοιο ώστε*

(a) $L_{K_\alpha} \geq \delta L_n$,

(β) $\log N(K_\alpha, tD_n) \leq \frac{\kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha} t^\alpha}$ για κάθε $t \geq \tau(2-\alpha)^{-3/2}$.

Για λόγους πληρότητας θα σχηματίσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.2. Χρειαζόμαστε αρχικώς το ακόλουθο πόρισμα του Θεωρήματος 1.2.3 του Pisier.

Θεώρημα 2.3.3 (Pisier, 1989). *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n . Για κάθε $\alpha \in [1, 2)$ μπορούμε να βρούμε ένα έλλειψοειδές \mathcal{E}_α τέτοιο ώστε:*

- $|\mathcal{E}_\alpha| = |K|$,
- για κάθε $t \geq ec(\alpha)^{1/\alpha} \geq 1$,

$$(2.3.1) \quad \log N(K, t\mathcal{E}_\alpha) \leq \frac{\kappa(\alpha)n}{t^\alpha},$$

όπου $c(\alpha)$ είναι η σταθερά από το Θεώρημα 1.2.3 και $1 \leq \kappa(\alpha) \leq (ec(\alpha))^2 \leq \kappa_1(2-\alpha)^{-\alpha}$ με κ_1 μία απόλυτη σταθερά (που δεν εξαρτάται ούτε από την διάστασι του χώρου ούτε από το α).

Χρησιμοποιώντας έπειτα την ανισότητα *Rogers-Shephard*, μπορούμε να συμπεράνουμε τα παραπάνω για κάθε κυρτό σῶμα K στον \mathbb{R}^n , απλῶς ἀλλάζοντας λίγο την τιμή τῆς σταθερᾶς κ_1 και θεωρώντας $t \geq 4ec(\alpha)^{1/\alpha}$ στην (2.3.1).

Όρολογία. Καταχρηστικά στην παράγραφο αὐτή θὰ λέμε ἓνα ἔλλειψοειδές \mathcal{E}_α πὸν ἔχει τὶς παραπάνω ιδιότητες α -κανονικὸ M -ἔλλειψοειδές γιὰ τὸ K .

Χρειαζόμαστε ἐπίσης κάποια βασικὰ ἀποτελέσματα γιὰ ἔλλειψοειδῆ στὸν \mathbb{R}^n (ὁ ἀναγνώστης μπορεῖ νὰ βρεῖ τὶς ἀποδείξεις τους στὰ [14], [30] καὶ [68]).

Λήμμα 2.3.4. Ἐστω \mathcal{E} ἓνα ἔλλειψοειδές στὸν \mathbb{R}^n . Ἐξ ὀρισμοῦ, ὑπάρχει $T \in GL(n)$ ἔτσι ὥστε $\mathcal{E} = T(B_2^n)$. Συμβολίζουμε μὲ $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ τὶς ιδιοτιμὲς τοῦ πίνακα $\sqrt{TT^*}$ (ὑπενθυμίζουμε ὅτι ὁ TT^* εἶναι συμμετρικὸς καὶ θετικὰ ὀρισμένος). Τότε, γιὰ κάθε $1 \leq k \leq n-1$,

$$(2.3.2) \quad \max_{F \in G_{n,k}} |\mathcal{E} \cap F| = \max_{F \in G_{n,k}} |\text{Proj}_F(\mathcal{E})| = \omega_k \prod_{i=1}^k \lambda_i$$

καὶ

$$(2.3.3) \quad \min_{F \in G_{n,k}} |\mathcal{E} \cap F| = \min_{F \in G_{n,k}} |\text{Proj}_F(\mathcal{E})| = \omega_k \prod_{i=n-k+1}^n \lambda_i.$$

Ἐπιπλέον, ἂν $n = 2m$ ἢ $n = 2m-1$, μπορούμε, γιὰ κάθε $k \leq m$, νὰ βροῦμε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$ τέτοιον ὥστε $\text{Proj}_F(\mathcal{E}) = \lambda_m B_F (= \lambda_m B_2^n \cap F)$.

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 2.3.2. Ἐστω $n \geq 2$. Γράφουμε $n = 2m$ ἢ $n = 2m-1$ γιὰ κάποιο $m \geq 1$ καὶ θεωροῦμε ἓνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_0 μὲ τὴν ιδιότητα $L_{K_0} \geq \delta_0 L_n$ γιὰ κάποιο $\delta_0 \in (0, 1)$. Τότε ἰσχύουν τὰ ἀκόλουθα ἄνω φράγματα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν τομῶν τοῦ K_0 μὲ ὑποχώρους τοῦ \mathbb{R}^n .

Λήμμα 2.3.5. Γιὰ κάθε $1 \leq k \leq n-1$ καὶ γιὰ κάθε ὑπόχωρο E τοῦ \mathbb{R}^n πὸν ἔχει συνδιάστασι k , ἰσχύει $|K_0 \cap E|^{1/k} \leq c_1(\delta_0)$, ὅπου $c_1(\delta_0) > 0$ εἶναι μία σταθερὰ πὸν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ δ_0 .

Ἀπόδειξις. Ἐστω E ὑπόχωρος τοῦ \mathbb{R}^n πὸν ἔχει συνδιάστασι k . Γράφουμε μ_0 γιὰ τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο στὸ K_0 καὶ F γιὰ τὸ ὀρθογώνιο συμπλήρωμα τοῦ E . Ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα πὸν εἶδαμε στὴν Παράγραφο 1.3, γνωρίζουμε ὅτι

$$L_{\pi_F \mu_0} = \left(\sup_{x \in F} f_{\pi_F \mu_0}(x) \right)^{1/k} L_{K_0} \simeq |K_0 \cap E|^{1/k} L_{K_0}$$

Ἐπεταὶ ὅτι

$$|K_0 \cap E|^{1/k} \leq c_1 \frac{L_{\pi_F \mu_0}}{L_{K_0}} \leq c_1 \frac{L_k}{\delta_0 L_n}$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_1 > 0$. Ὅμως ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.1.4 ἔχουμε, γιὰ κάθε $k \leq n$, ὅτι $L_k \leq c_0 L_n$, ἐπομένως τὸ ζητούμενο ἔπεται μὲ τὴν σταθερὰ $c_1(\delta_0) = c_1 c_0 / \delta_0$. \square

Θὰ χρησιμοποιήσουμε τώρα τὸ Θεώρημα 2.3.3 γιὰ νὰ δώσουμε καὶ ἓνα κάτω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν τομῶν τοῦ K_0 .

Λήμμα 2.3.6. *Γιὰ κάθε $1 \leq k \leq n-1$ καὶ γιὰ κάθε ὑπόχωρο $E \in G_{n,n-k}$, ἔχουμε ὅτι $|K_0 \cap E|^{1/k} \geq (c_2(\delta_0))^{n/k}$, ὅπου $c_2(\delta_0) > 0$ εἶναι μία σταθερὰ ποὺ ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὸ δ_0 .*

Ἀπόδειξις. Θεωροῦμε ἓνα α -κανονικὸ M -ἔλλειψοειδὲς \mathcal{E}_α γιὰ τὸ K_0 (γιὰ αὐτὸ τὸ λήμμα θὰ μπορούσαμε νὰ ἐπιλέξουμε κατευθεῖαν $\alpha = 1$ · παραταῦτα, κάποια βήματα τοῦ πιὸ γενικοῦ ἐπιχειρήματος θὰ μᾶς χρειαστοῦν καὶ στὴν συνέχεια). Θέτουμε $t_\alpha = \max\{4e[c(\alpha)]^{1/\alpha}, [\kappa(\alpha)]^{1/\alpha}\}$. Τότε,

$$(2.3.4) \quad |\text{Proj}_F(K_0)| \leq N(K_0, t_\alpha \mathcal{E}_\alpha) |\text{Proj}_F(t_\alpha \mathcal{E}_\alpha)| \leq e^n |\text{Proj}_F(t_\alpha \mathcal{E}_\alpha)|$$

γιὰ κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{n,k}$. Θὰ χρησιμοποιήσουμε τὴν ἀνισότητα (1.2.1) τῶν Rogers καὶ Shephard καὶ τὴν ἀνισότητα (1.2.6): ἐφ' ὅσον $|\mathcal{E}_\alpha| = |K_0| = 1$, ἔχουμε ὅτι

$$(2.3.5) \quad 1 \leq |\mathcal{E}_\alpha \cap F|^{\frac{1}{n-k}} |\text{Proj}_{F^\perp}(\mathcal{E}_\alpha)|^{\frac{1}{n-k}} \leq \binom{n}{n-k}^{\frac{1}{n-k}} \leq e \frac{n}{n-k},$$

καὶ οἱ ἴδιες ἐκτιμήσεις ἰσχύουν γιὰ τὶς τομὲς καὶ τὶς προβολὲς τοῦ K_0 . Ἡ ἰδέα πίσω ἀπὸ τὸ ἐπιχείρημα εἶναι ἡ ἑξῆς: ἡ ἀνισότητα (2.3.5) μᾶς βοηθᾶ νὰ συγκρίνουμε τὸν ὄγκο τῶν k -διαστάτων τομῶν τοῦ K_0 (ἢ τοῦ \mathcal{E}_α) μὲ τὸν ὄγκο τῶν $(n-k)$ -διαστάτων προβολῶν τοῦ K_0 (ἢ τοῦ \mathcal{E}_α ἀντιστοίχως): ἓνα ἄνω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν τομῶν ὀδηγεῖ σὲ ἓνα κάτω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν προβολῶν καὶ ἀντιστρόφως. Ἐπίσης ἡ ἀνισότητα (2.3.4) μᾶς ἐπιτρέπει νὰ συγκρίνουμε τὸν μέγιστο (ἢ τὸν ἐλάχιστο) ὄγκο τῶν $(n-k)$ -διαστάτων προβολῶν τοῦ K_0 μὲ τὸν μέγιστο (ἢ τὸν ἐλάχιστο) ὄγκο τῶν $(n-k)$ -διαστάτων προβολῶν τοῦ \mathcal{E}_α . Ὅμως, ὅπως εἶδαμε στὸ Λήμμα 2.3.4, ὁ μέγιστος ὄγκος τῶν $(n-k)$ -διαστάτων προβολῶν ἐνὸς ἔλλειψοειδοῦς ταυτίζεται μὲ τὸν μέγιστο ὄγκο τῶν $(n-k)$ -διαστάτων τομῶν, καὶ ἄρα μπορούμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὶς ἀνισότητες (2.3.4) καὶ (2.3.5) ἄλλη μία φορὰ γιὰ νὰ περάσουμε ἀπὸ τὰ ἄνω φράγματα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν τομῶν τοῦ K_0 , ποὺ μᾶς δίνει τὸ Λήμμα 2.3.5, σὲ κάτω φράγματα.

Ἄς δοῦμε τώρα τὸ ἀκριβὲς ἐπιχείρημα: συνδυάζοντας τὴν (2.3.5) μὲ τὸ συμπέρασμα τοῦ Λήμματος 2.3.5, βλέπουμε ὅτι $\min_{F \in G_{n,k}} |\text{Proj}_{F^\perp}(K_0)|^{\frac{1}{n-k}} \geq c_3(\delta_0)$. Τότε ὅμως προκύπτει ἀπὸ τὴν (2.3.4)

ὅτι $\min_{F \in G_{n,k}} |\text{Proj}_{F^\perp}(t_\alpha \mathcal{E}_\alpha)|^{\frac{1}{n-k}} \geq e^{-\frac{n}{n-k}} c_3(\delta_0)$. Ἐπειτα, χρησιμοποιῶντας τὴν (2.3.5) γιὰ τὸ \mathcal{E}_α , λαμβάνουμε ὅτι $|\mathcal{E}_\alpha \cap F|^{\frac{1}{n-k}} \leq e^{\frac{2n}{n-k}} c_4(\delta_0) t_\alpha$ γιὰ κάθε $F \in G_{n,k}$. Ἀλλὰ ἀπὸ τὴν (2.3.2) ἔχουμε ὅτι

$$(2.3.6) \quad \max_{F \in G_{n,k}} |\text{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)| = \max_{F \in G_{n,k}} |\mathcal{E}_\alpha \cap F| \leq e^{2n} (c_4(\delta_0))^{n-k} t_\alpha^{n-k}.$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν (2.3.4) καὶ πάλι, βλέπουμε ὅτι $|\text{Proj}_F(K_0)|^{\frac{1}{k}} \leq e^{\frac{2n}{k}} (c_4(\delta_0))^{\frac{n-k}{k}} t_\alpha^{\frac{n}{k}}$ γιὰ κάθε $F \in G_{n,k}$, καὶ ἄρα, συνδυάζοντας αὐτὴν τὴν ἐκτίμησι μὲ τὴν (2.3.5), συμπεραίνουμε ὅτι $|K_0 \cap E|^{\frac{1}{k}} \geq c_5(\delta_0)^{\frac{n}{k}} / t_\alpha^{\frac{n}{k}}$ γιὰ κάθε $E \in G_{n,n-k}$. Μποροῦμε τελικὰ νὰ ἐπιλέξουμε $\alpha = 1$, καὶ νὰ φτάσουμε στὸ ζητούμενο τοῦ λήμματος ἔχοντας $c_2(\delta_0) = c_5(\delta_0) / t_1$. \square

Παρατήρησης 2.3.7. Συνδυάζοντας τὰ Λήμματα 2.3.5 καὶ 2.3.6, βλέπουμε ὅτι ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερές $c'_1(\delta_0)$ καὶ $c'_2(\delta_0)$, οἱ ὁποῖες ἐξαρτῶνται μόνον ἀπὸ τὸ δ_0 , ἔτσι ὥστε γιὰ κάθε m -διάστατο ἢ $(n - m)$ -διάστατο ὑπόχωρο F τοῦ \mathbb{R}^n νὰ ἰσχύει

$$(2.3.7) \quad c'_2(\delta_0) \leq \frac{L_{\pi_F \mu_0}}{L_{K_0}} \simeq |K_0 \cap F^\perp|^{1/\dim F} \leq c'_1(\delta_0)$$

(ὑπενθυμίζουμε ὅτι $n = 2m$ ἢ $n = 2m - 1$, ἄρα $\frac{n}{m} \simeq \frac{n}{n-m} \simeq 1$).

Ἔχουμε τώρα ὅλα τὰ ἐργαλεῖα πὺν χρειάζομαστε γιὰ νὰ κατασκευάσουμε, μέσῳ τοῦ ἰσοτροπικοῦ κυρτοῦ σώματος $K_0 \subset \mathbb{R}^n$, ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα K_α πὺν ἔχουν τὶς ιδιότητες (α) καὶ (β) τοῦ Θεωρήματος 2.3.2. Ἐστω $\alpha \in [1, 2)$ καὶ ἔστω ὅτι \mathcal{E}_α εἶναι ἕνα α -κανονικὸ M -ἔλλειψοειδὲς γιὰ τὸ K_0 . Θυμόμαστε ὅτι $|\mathcal{E}_\alpha| = 1$, ὅπως ἐπίσης καὶ ὅτι, ἂν $\mathcal{E}_\alpha = T(B_2^n)$ καὶ $\lambda_1 \geq \dots \geq \lambda_n > 0$ εἶναι οἱ ιδιοτιμὲς τοῦ πίνακα $\sqrt{TT^*}$, τότε, ἀπὸ τὸ Λήμμα 2.3.4,

$$|B_2^m| \prod_{i=n+1-m}^n \lambda_i = \min_{F \in G_{n,m}} |\text{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)| \leq \max_{F \in G_{n,m}} |\text{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)| = |B_2^m| \prod_{i=1}^m \lambda_i.$$

Χρησιμοποιῶντας τὴν (2.3.4) καὶ τὸ συμπέρασμα τοῦ Λήμματος 2.3.6, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} |B_2^m|^{1/m} \lambda_m &\geq \min_{F \in G_{n,m}} |\text{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)|^{1/m} \geq \frac{e^{-2}}{t_\alpha} \min_{F \in G_{n,m}} |\text{Proj}_F(K_0)|^{1/m} \\ &\geq \frac{e^{-2}}{t_\alpha} \min_{F \in G_{n,m}} |K_0 \cap F|^{1/m} \geq \frac{(c_6(\delta_0))^{\frac{n-m}{m}}}{t_\alpha}, \end{aligned}$$

καὶ ἄρα

$$\lambda_m \geq \frac{c_7(\delta_0)}{t_\alpha} \sqrt{n}.$$

Μὲ παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιῶντας τὴν (2.3.6), μπορούμε νὰ συμπεράνουμε ὅτι $|B_2^m|^{1/m} \lambda_m \leq \max_{F \in G_{n,m}} |\text{Proj}_F(\mathcal{E}_\alpha)|^{1/m} \leq c_8(\delta_0) t_\alpha$, ἀπὸ τὸ ὁποῖο προκύπτει ὅτι $\lambda_m \leq c_9(\delta_0) t_\alpha \sqrt{n}$. Ἀλλά, ἀπὸ τὸ τελευταῖο σημεῖο τοῦ Λήμματος 2.3.4, γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχουν ὑπόχωροι $F_1 \in G_{n,m}$ καὶ $F_2 \in G_{n,n-m}$ τέτοιοι ὥστε $\text{Proj}_{F_i}(\mathcal{E}_\alpha) = \lambda_m B_{F_i}$, $i = 1, 2$. Κατὰ συνέπεια,

$$(2.3.8) \quad \frac{c_7(\delta_0)}{t_\alpha} \sqrt{n} B_{F_i} \subseteq \text{Proj}_{F_i}(\mathcal{E}_\alpha) \subseteq c_9(\delta_0) t_\alpha \sqrt{n} B_{F_i}.$$

Θέτουμε $W_1 := \overline{K}_{m+1}(\pi_{F_1} \mu_0)$, $W_2 := \overline{K}_{n-m+1}(\pi_{F_2} \mu_0)$ καὶ $K_\alpha := W_1 \times U(W_2)$, ὅπου μ_0 εἶναι τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω στὸ K_0 καὶ $U \in O(n)$ εἶναι ἕνας ὀρθογώνιος μετασχηματισμὸς μὲ τὴν ιδιότητα $U(F_2) = F_1^\perp$. Παρατηροῦμε ὅτι, ἐξαιτίας τοῦ 5. τῆς Προτάσεως 1.3.7, γιὰ $i = 1$ ἢ 2 τὸ κεντραρισμένο περιθώριο μέτρο πιθανότητος $\pi_{F_i} \mu_0$ ἱκανοποιεῖ τὴν ἰσοτροπικὴ συνθήκη

$$Z_2(\pi_{F_i} \mu_0) = L_{K_0} B_{F_i},$$

ἄρα, ἀπὸ τὴν Πρότασι 1.3.21, προκύπτει ὅτι τὰ W_i εἶναι σχεδὸν ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα (μὲ μία ἀπόλυτη σταθερὰ C). Ἐπεταὶ ὅτι καὶ τὸ $K_\alpha = W_1 \times U(W_2)$ εἶναι ἕνα σχεδὸν ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n , καὶ ἐπίσης ὅτι

$$(2.3.9) \quad L_{K_\alpha} = L_{W_1}^{m/n} \cdot L_{U(W_2)}^{(n-m)/n} \simeq L_{\pi_{F_1} \mu_0}^{m/n} \cdot L_{\pi_{F_2} \mu_0}^{(n-m)/n}$$

(για την πρώτη σχέση, βλέπε π.χ. [18, Λήμμα 1.6.6]). Θα δείξουμε ότι το K_α ικανοποιεί τις ιδιότητες (α) και (β). Θα μπορούμε έπειτα να συμπεράνουμε το ίδιο (φυσικά με κάπως διαφορετικές απόλυτες σταθερές για την ιδιότητα (β)) για κάθε ισοτροπική εικόνα $S(K_\alpha)$ του K_α . Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, για κάθε τέτοια εικόνα $S(K_\alpha)$ του K_α , θα ισχύει

$$\frac{1}{C}B_2^n \subseteq S(B_2^n) \subseteq CB_2^n,$$

και επομένως

$$N(S(K_\alpha), tB_2^n) \leq N\left(S(K_\alpha), \frac{t}{C}S(B_2^n)\right) \cdot N(S(B_2^n), CB_2^n) = N\left(K_\alpha, \frac{t}{C}B_2^n\right)$$

για κάθε $t > 0$.

Απόδειξις της ιδιότητας (α): Από την αρχική υπόθεση ότι $L_{K_0} \geq \delta_0 L_n$ και τις (2.3.7) και (2.3.9), συμπεραίνουμε ότι

$$L_{K_\alpha} \gtrsim |K_0 \cap F_1^\perp|^{1/n} \cdot |K_0 \cap F_2^\perp|^{1/n} \cdot L_{K_0} \geq c_2'(\delta_0)L_{K_0} \geq \delta L_n,$$

όπου $\delta \simeq \delta_0 c_2'(\delta_0)$.

Απόδειξις της ιδιότητας (β): Θυμόμαστε ότι ισχύει $N(A_1 \times A_2, B_1 \times B_2) \leq N(A_1, B_1) \cdot N(A_2, B_2)$ για οποιαδήποτε μη κενά σύνολα $A_i, B_i, i = 1, 2$, όπως επίσης και ότι $B_2^m \times B_2^{n-m} \subseteq \sqrt{2}B_2^n$. Άρα, για κάθε $s > 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$N(K_\alpha, s\sqrt{2n}B_2^n) \leq N(W_1 \times U(W_2), s\sqrt{n}(B_{F_1} \times B_{F_1^\perp})) \leq \prod_{i=1}^2 N(W_i, s\sqrt{n}B_{F_i}).$$

Από την Πρόταση 1.4.4 γνωρίζουμε ότι

$$Z_n(W) \simeq |K_0 \cap F_i^\perp|^{1/\dim F_i} \text{Proj}_{F_i}(Z_n(K_0)).$$

και από το Λήμμα 1.4.1 ότι $\text{conv}(C, -C) \simeq Z_n(C)$ για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σῶμα C ὄγκου 1 που περιέχεται στον υπόχωρο $F_i, i = 1$ ἢ 2 , ἢ στον \mathbb{R}^n . Επομένως, ἐξαιτίας και τῶν Λημμάτων 2.3.5 και 2.3.6, ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned} \text{conv}(W_i, -W_i) &\simeq Z_n(W_i) \simeq |K_0 \cap F_i^\perp|^{1/\dim F_i} \text{Proj}_{F_i}(Z_n(K_0)) \\ &\simeq_{\delta_0} \text{Proj}_{F_i}(\text{conv}(K_0, -K_0)). \end{aligned}$$

Ἐπικαλούμενοι τὴν (2.3.8) ἐπίσης, βλέπουμε ὅτι, για κάθε $r > 0$,

$$\begin{aligned} N(W_i, c_9(\delta_0)t_\alpha r\sqrt{n}B_{F_i}) &\leq N(\text{conv}(W_i, -W_i), c_9(\delta_0)t_\alpha r\sqrt{n}B_{F_i}) \\ &\leq N(\text{conv}(W_i, -W_i), r\text{Proj}_{F_i}(\mathcal{E}_\alpha)) \\ &\leq N(c_{10}(\delta_0)\text{Proj}_{F_i}(\text{conv}(K_0, -K_0)), r\text{Proj}_{F_i}(\mathcal{E}_\alpha)) \\ &\leq N(c_{10}(\delta_0)\text{conv}(K_0, -K_0), r\mathcal{E}_\alpha) \\ &\leq N(K_0 - K_0, c_{11}(\delta_0)r(\mathcal{E}_\alpha - \mathcal{E}_\alpha)) \\ &\leq N(K_0, c_{12}(\delta_0)r\mathcal{E}_\alpha)^2. \end{aligned}$$

Προκύπτει τελικώς ότι

$$(2.3.10) \quad N(K_\alpha, t\sqrt{n}B_2^n) \leq N\left(K_0, \frac{c_{12}(\delta_0)t}{\sqrt{2}c_9(\delta_0)t_\alpha} \mathcal{E}_\alpha\right)^4$$

για κάθε $t > 0$. Αφοῦ τὸ \mathcal{E}_α εἶναι ἓνα α -κανονικὸ M -ἔλλειψοειδές για τὸ K_0 , ἀρκεῖ πλέον νὰ θεωρήσουμε ἀρκετὰ μεγάλα $t \geq \tau(\delta_0, \alpha)$, ὅπου

$$\tau(\delta_0, \alpha) := \sqrt{32}c_9(\delta_0)t_\alpha e^{[c(\alpha)]^{1/\alpha}}/c_{12}(\delta_0),$$

για νὰ συμπεράνουμε, συνδυάζοντας τὶς (2.3.1) καὶ (2.3.10), ὅτι

$$\log N(K_\alpha, t\sqrt{n}B_2^n) \leq 4 \log N\left(K_0, \frac{c_{13}(\delta_0)t}{t_\alpha} \mathcal{E}_\alpha\right) \leq \frac{4\kappa(\alpha)t_\alpha^\alpha n}{c_{13}^\alpha(\delta_0) t^\alpha}.$$

Αὐτὸ ὁλοκληρώνει τὴν ἀπόδειξι τοῦ θεωρήματος. \square

Στὴν διατύπωσι τοῦ Θεωρήματος 2.3.2, ἄρα καὶ τοῦ Θεωρήματος 2.3.1, μπορούμε νὰ ζητήσουμε τὸ σῶμα K ποὺ ἀναζητοῦμε νὰ ἔχει δύο ἀκόμη ιδιότητες: μπορούμε νὰ ἐπιτύχουμε τὸ σῶμα K νὰ εἶναι συμμετρικὸ καὶ νὰ ἔχει ἐπιπλέον τὴν ιδιότητα $R(K) \leq \gamma\sqrt{n}L_K$ για μία ἀπόλυτη σταθερὰ $\gamma > 0$. Πρὸς τοῦτο, θυμόμαστε τὶς Προτάσεις 1.3.19 [26] καὶ 2.1.3 [9], οἱ ὁποῖες σὲ συνδυασμὸ δείχνουν ὅτι ἀρκεῖ για τὴν εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου νὰ μελετήσουμε συμμετρικὰ ἰσοτροπικὰ σῶματα με μικρὴ διάμετρο, δηλαδὴ συμμετρικὰ ἰσοτροπικὰ σῶματα $K \subset \mathbb{R}^n$ με $R(K) \lesssim \sqrt{n}L_K$:

Λήμμα 2.3.8. Ὑπάρχει συμμετρικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_0 στὸν \mathbb{R}^n με $L_{K_0} \geq \delta_0 L_n$ καὶ $R(K_0) \leq \gamma_0\sqrt{n}L_{K_0}$, ὅπου $\delta_0, \gamma_0 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.

Ἐπειτα, ἐπαναλαμβάνουμε τὴν ἀπόδειξι τοῦ Θεωρήματος 2.3.2 ξεκινῶντας με τὸ σῶμα $K_0 \subset \mathbb{R}^n$ ποὺ δίνεται ἀπὸ τὸ παραπάνω λήμμα. Μπορούμε νὰ ἐλέγξουμε ὅτι τὰ σῶματα W_1, W_2 ποὺ προκύπτουν κατὰ τὴν ἀπόδειξι τοῦ Θεωρήματος 2.3.2 εἶναι συμμετρικὰ καὶ ἔχουν τὴν ιδιότητα $R(W_i) \leq c(\delta_0)\gamma_0\sqrt{n}L_{K_0}$, $i = 1, 2$. Πράγματι, για τὸ δεύτερο ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι

$$\begin{aligned} R(W_i) &= R(\overline{K}_{\dim F_i+1}(\pi_{F_i}\mu_0)) \leq c_1|K_0 \cap F_i^\perp|^{1/\dim F_i} R(\text{Proj}_{F_i}(Z_n(K_1))) \\ &\leq c_2(\delta_0)R(\text{conv}(K_0, -K_0)) = c_2(\delta_0)R(K_0) \leq c_2(\delta_0)\gamma_0\sqrt{n}L_{K_0}. \end{aligned}$$

Στὴν συνέχεια εὐκολα ἐλέγχουμε ὅτι $R(K) = R(W_1 \times U(W_2)) \simeq \max\{R(W_1), R(W_2)\}$, καὶ ἄρα $R(K) \leq \gamma\sqrt{n}L_K$ για κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $\gamma > 0$. Ἐπομένως, μπορούμε νὰ ἐπαναδιατυπώσουμε τὸ Θεώρημα 2.3.2 ὡς ἑξῆς:

Θεώρημα 2.3.9. Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερές κ, τ, γ καὶ $\delta > 0$ με τὴν ἑξῆς ιδιότητα: για κάθε $\alpha \in [1, 2)$ καὶ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ὑπάρχει συμμετρικὸ ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_α στὸν \mathbb{R}^n τέτοιο ὥστε $L_{K_\alpha} \geq \delta L_n$, $R(K) \leq \gamma\sqrt{n}L_K$ καὶ

$$\log N(K_\alpha, tD_n) \leq \frac{\kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha} t^\alpha} \quad \text{για κάθε } t \geq \tau(2-\alpha)^{-3/2},$$

ὅπου D_n εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα ὄγκου 1 στὸν \mathbb{R}^n .

Παρατήρησης 2.3.10. Ένας άλλος τρόπος να φτάσουμε στην παραπάνω επαναδιατύπωση του Θεωρήματος 2.3.2 είναι να ξεκινήσουμε με ένα (συμμετρικό) ισοτροπικό σῶμα K_{α} , όπου $\alpha \in [1, 2)$ τυχόν, και να εφαρμόσουμε ὕστερα τὴν Πρόταση 2.1.3 τοῦ Bourgain στὸ K_{α} . Ἄν ἀνατρέξει κάποιος στὴν ἀπόδειξη τοῦ Bourgain, θὰ δεῖ ὅτι τὸ (συμμετρικό) ισοτροπικό κυρτὸ σῶμα Q_{α} ποὺ ὀρίζεται μέσω αὐτῆς τῆς διαδικασίας, καὶ ἔχει τὴν ἴδια περίπου ισοτροπική σταθερὰ μετὰ τὸ K_{α} καὶ διάμετρο $\lesssim \sqrt{n}L_{Q_{\alpha}}$, θὰ ικανοποιεῖ καὶ τὴν ιδιότητα (β) τοῦ Θεωρήματος 2.3.2 (με λίγες διαφορετικές ἀπόλυτες σταθερές κ καὶ τ). Πράγματι, ὁ Bourgain ὀρίζει τὸ Q_{α} θεωρῶντας πρῶτα ἕνα κυρτὸ σῶμα

$$W_{\alpha} := \{x \in K_{\alpha} : \|x\|_2 \leq r\sqrt{n}L_K\}$$

γιὰ κάποιο $r > 0$ (κατάλληλα μεγάλο, ἀλλὰ ἀνεξάρτητο τῆς διαστάσεως ἢ τοῦ σώματος K_{α}) καὶ δείχνοντας γιὰ τὸ W_{α} τὰ ἑξῆς:

- ὅτι $Z_2(\overline{W}_{\alpha}) \simeq Z_2(K_{\alpha})$ (γιὰ παράδειγμα, $2^{-1}Z_2(K_{\alpha}) \subseteq Z_2(\overline{W}_{\alpha}) \subseteq 2Z_2(K_{\alpha})$, ὅπως εἶδαμε στὸ Λήμμα 2.2.3, ἂν $r = e^{\beta_2}$),
- ἄρα ὅτι, γιὰ κάθε ισοτροπική εἰκόνα $Q_{\alpha} = S(\overline{W}_{\alpha})$ ($S \in SL(n)$) τοῦ \overline{W}_{α} , ἰσχύει

$$L_{Q_{\alpha}}|B_2^n|^{1/n} = |Z_2(S(\overline{W}_{\alpha}))|^{1/n} = |Z_2(\overline{W}_{\alpha})|^{1/n} \simeq |Z_2(K_{\alpha})|^{1/n} = L_{K_{\alpha}}|B_2^n|^{1/n},$$

ἀπὸ ὅπου προκύπτει ὅτι $L_{Q_{\alpha}} \simeq L_{K_{\alpha}}$.

(παρατηροῦμε ὅτι ἡ ιδέα εἶναι ἡ ἴδια μετὰ αὐτὴν τῶν ἐπιχειρημάτων ποὺ εἶδαμε στὶς Προτάσεις 1.3.18 καὶ 1.3.21, ἀπλῶς ἀντὶ τοῦ ἐλλειψοειδοῦς Binet ποὺ χρησιμοποιοῦσε ὁ Bourgain στὴν ἀπόδειξί του ἀναφερόμαστε στὸ πολικό του σῶμα $Z_2(K)$). Ἀπὸ τὰ παραπάνω συμπεραίνουμε ἐπίσης, ὅπως καὶ στὴν Πρόταση 1.3.21, ὅτι

$$L_{Q_{\alpha}}B_2^n \simeq L_{K_{\alpha}}B_2^n \simeq Z_2(\overline{W}_{\alpha}) = S^{-1}(Z_2(S(\overline{W}_{\alpha}))) = S^{-1}(L_{Q_{\alpha}}B_2^n)$$

γιὰ κάθε ισοτροπική εἰκόνα $Q_{\alpha} = S(\overline{W}_{\alpha})$ τοῦ \overline{W}_{α} , τὸ ὁποῖο σημαίνει ὅτι τὸ \overline{W}_{α} εἶναι σχεδὸν ισοτροπικό κατὰ τὸν Ὁρισμὸ 1.3.20. Ταυτόχρονα, ἔχουμε ὅτι $\overline{W}_{\alpha} = |\overline{W}_{\alpha}|^{-1/n} \cdot \overline{W}_{\alpha} \subset 2K_{\alpha}$ ἂν τὸ r εἶναι ἀρκετὰ μεγάλο, ἐπομένως, ὅπως πρὶν, μπορούμε νὰ συγκρίνουμε, γιὰ κάθε ισοτροπική εἰκόνα Q_{α} τοῦ W_{α} , τοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως $N(Q_{\alpha}, tD_n)$ μετὰ τοὺς $N(\overline{W}_{\alpha}, tD_n)$, καὶ αὐτοὺς μετὰ τοὺς $N(K_{\alpha}, tD_n)$, καὶ νὰ συμπεράνουμε τελικῶς ὅτι κάθε τέτοια εἰκόνα θὰ ικανοποιεῖ τὶς ἀπαιτήσεις τοῦ Θεωρήματος 2.3.9.

Σημειώνουμε ἐπίσης ὅτι καὶ τὸ σχεδὸν ισοτροπικό (συμμετρικό) \overline{W}_{α} ικανοποιεῖ τὶς ἀπαιτήσεις τοῦ Θεωρήματος 2.3.9 πλὴν τοῦ νὰ εἶναι ισοτροπικό, μία ιδιότητα ποὺ μπορούμε νὰ ἀντικαταστήσουμε μετὰ τὴν

$$\frac{1}{2}L_K B_2^n \subseteq Z_2(\overline{W}_{\alpha}) \subset 2L_K B_2^n.$$

Ἄξιζει νὰ παρατηρήσουμε τώρα ὅτι μπορούμε νὰ εφαρμόσουμε τόσο τὴν ἀναγωγή τοῦ Θεωρήματος 2.1.6 ὅσο καὶ μία παραλλαγή της ποὺ θὰ δοῦμε στὴν Παράγραφο 2.5 καὶ γιὰ κυρτὰ σώματα ὅπως

τὸ \overline{W}_α . Μάλιστα, ἂν ἔχουμε ἐπιλέξει τὸ r κατάλληλα μεγάλο, τότε ἰσχύει τὸ ἐξῆς σχετικά μὲ τὶς παραμέτρους $I_1(\overline{W}_\alpha, Z_q^\circ(\overline{W}_\alpha))$: ἀφοῦ $|W_\alpha| \geq 1/2$, βλέπουμε, ἐφαρμόζοντας τὸ Λήμμα 2.2.3, ὅτι

$$Z_q(\overline{W}_\alpha) \subseteq 2Z_q(K_\alpha)$$

γιὰ κάθε $q \geq 2$, καὶ μπορούμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} I_1(\overline{W}_\alpha, Z_q^\circ(\overline{W}_\alpha)) &= \int_{\overline{W}_\alpha} h_{Z_q(\overline{W}_\alpha)}(x) dx \\ &\leq \int_{W_\alpha} |\overline{W}_\alpha|^{-1} h_{Z_q(\overline{W}_\alpha)}(|\overline{W}_\alpha|^{-1/n} x) \leq |\overline{W}_\alpha|^{-1-\frac{1}{n}} \int_{W_\alpha} 2h_{Z_q(K_\alpha)}(x) dx \\ &\leq 8 \int_{K_\alpha} h_{Z_q(K_\alpha)}(x) dx = 8I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)). \end{aligned}$$

Ἡ παραπάνω ἀνισότητα γίνεται ἰσοδυναμία, τουλάχιστον γιὰ τὰ $q \in [2, \sqrt{n}]$, ἂν ἐπικαλεστοῦμε καὶ τὸ θεώρημα τοῦ Παούρη (Θεώρημα 1.4.10), τὸ ὁποῖο μᾶς ἐξασφαλίζει ὅτι, γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $r > 0$, τὸ $W_\alpha = \{x \in K_\alpha : \|x\|_2 \leq r\sqrt{n}L_K\}$ ἔχει ὄγκο $|W_\alpha| \geq 1 - e^{-\beta_2\sqrt{n}}$: γιὰ αὐτὰ τὰ q ,

$$Z_q(\overline{W}_\alpha) \simeq Z_q(K_\alpha), \text{ καὶ ἄρα } I_1(\overline{W}_\alpha, Z_q^\circ(\overline{W}_\alpha)) \simeq I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)),$$

αὐτὸ ὅμως μπορεῖ νὰ μὴν ἰσχύει γιὰ τὰ μεγαλύτερα q . Συμπεραίνουμε τελικῶς ὅτι τὸ μικρῆς διαμέτρου (σχεδὸν ἰσοτροπικὸ) \overline{W}_α παρουσιάζει τὴν ἴδια ἢ καὶ καλύτερη συμπεριφορὰ ἀπὸ τὸ ἀρχικὸ σῶμα K_α ὡς πρὸς τὴν παράμετρο $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει γιὰ τὴν ἀναγωγὴ τοῦ [21].

2.4 Ἡ μέθοδος τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη

Σὲ αὐτὴν τὴν παράγραφο περιγράφουμε πολὺ σύντομα τὸ γιατί οἱ Δαφνῆ καὶ Παούρη χρειάζονταν ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σώματα μὲ μεγιστικὴ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ καὶ κανονικοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως: στὸ [14] προτείνουν μία ἀναγωγὴ τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου στὴν μελέτη τῆς συμπεριφορᾶς τῶν ἀρνητικῶν ῥοπῶν τῆς Εὐκλείδειας νόρμας ὡς πρὸς τὰ ἰσοτροπικὰ λογαριθμικὰ-κοῖλα μέτρα μ . Ἄς θυμηθοῦμε ὅτι τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ Παούρη (Θεώρημα 1.4.10) δὲν μᾶς δίνει πληροφορίες γιὰ τὸ πόσο γρήγορα μειώνονται τὰ $I_{-q}(\mu)$ ὅταν $q > q_*(\mu)$. Γιὰ αὐτὸν τὸν λόγο, οἱ Δαφνῆ καὶ Παούρη εἰσάγουν μία καινούρια παράμετρο ὡς ἐξῆς: δοθέντων $\zeta \geq 1$ καὶ ἰσοτροπικοῦ λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου μ στὸν \mathbb{R}^n , ὀρίζουν

$$(2.4.1) \quad q_{-c}(\mu, \zeta) := \max\{1 \leq p \leq n-1 : I_{-p}(\mu) \geq \zeta^{-1}I_2(\mu) = \zeta^{-1}\sqrt{n}\},$$

καὶ ἀντίστοιχα, δοθέντος ἰσοτροπικοῦ κυρτοῦ σώματος K στὸν \mathbb{R}^n ,

$$(2.4.2) \quad q_{-c}(K, \zeta) := \max\{1 \leq p \leq n-1 : I_{-p}(K) \geq \zeta^{-1}I_2(K) = \zeta^{-1}\sqrt{n}L_K\}.$$

Τὸ κύριο ἀποτέλεσμά τους στὸ [14] μπορεῖ ἔπειτα νὰ διατυπωθεῖ ὡς ἐξῆς: ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἰσοδύναμη μὲ τὴν πρότασι

«Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $C, \xi > 0$ έτσι ώστε,
για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n , $q_{-c}(K, \xi) \geq Cn$ ».

Η μία κατεύθυνσις τῆς ισοδυναμίας δίδεται ἀπὸ τὸ ἀκόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.1 (Δαφνής-Παούρης, 2010). Ὑποθέτουμε ὅτι $q_{-c}(K, \zeta) \geq \beta n$ γιὰ κάποιον $\zeta \geq 1$, κάποιον $\beta \in (0, 1)$ καὶ κάθε ισοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n . Τότε

$$(2.4.3) \quad L_n \leq 3e^2 \zeta \max\{\kappa, \tau^2\} \delta^{-1} \sqrt{\frac{1}{\beta}} \log^2\left(\frac{e}{\beta}\right),$$

ὅπου κ, τ καὶ δ εἶναι οἱ ἀπόλυτες σταθερές πὺν προκύπτουν ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.3.2.

Τὸ πρῶτο βῆμα στὴν ἀπόδειξι τοῦ θεωρήματος αὐτοῦ εἶναι τὸ ἀκόλουθο

Λήμμα 2.4.2 (Δαφνής-Παούρης, 2010). Ἐστω K ἓνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 στὸν \mathbb{R}^n . Ἄς ὑποθέσουμε ὅτι, γιὰ κάποιον $s > 0$,

$$(2.4.4) \quad r_s := \log N(K, sB_2^n) < n.$$

Τότε,

$$I_{-r_s}(K) \leq 3es.$$

Ἀπόδειξις. Ἐστω σημεῖο $z_0 \in \mathbb{R}^n$ μὲ τὴν ιδιότητα $|K \cap (-z_0 + sB_2^n)| \geq |K \cap (z_0 + sB_2^n)|$ γιὰ κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Ἐπεταὶ ὅτι

$$(2.4.5) \quad |(K + z_0) \cap sB_2^n| \cdot N(K, sB_2^n) \geq |K| = 1.$$

Θέτουμε $q = r_s$. Τότε, κάνοντας χρῆσι τῆς ἀνισότητος τοῦ Markov, τοῦ ὀρισμοῦ τῆς ῥοπῆς $I_{-q}(K + z_0)$ καὶ τῆς ὑποθέσεως (2.4.4), συμπεραίνουμε ὅτι

$$|(K + z_0) \cap 3^{-1}I_{-q}(K + z_0)B_2^n| \leq 3^{-q} < e^{-q} = e^{-r_s} \leq \frac{1}{N(K, sB_2^n)}.$$

Λόγω τῆς (2.4.5) βλέπουμε ὅτι

$$|(K + z_0) \cap 3^{-1}I_{-q}(K + z_0)B_2^n| < |(K + z_0) \cap sB_2^n|,$$

τὸ ὁποῖο συνεπάγεται ὅτι

$$3^{-1}I_{-q}(K + z_0) \leq s.$$

Ἀφοῦ ὅμως τὸ K ἔχει τὸ κέντρο βάρους του στὸ 0, ἔπεται ὡς ἐφαρμογὴ τοῦ θεωρήματος τοῦ Fradelizi (Θεώρημα 1.3.5) ὅτι $I_{-k}(K + z) \geq \frac{1}{e}I_{-k}(K)$ γιὰ κάθε $1 \leq k < n$ καὶ $z \in \mathbb{R}^n$. Πράγματι, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσουμε τὴν λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησι $f = \mathbf{1}_K$, νὰ θέσουμε $f_z(y) := f(y + z)$ καὶ ἔπειτα, χρησιμοποιῶντας τὸν τύπο 1.4.5 τοῦ Παούρη, νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} I_{-k}(K + z) &= I_{-k}(fz) = c_{n,k} \left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(fz)(0) d\mu(F) \right)^{-1/k} \\ &\geq \frac{c_{n,k}}{e} \left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0) d\mu(F) \right)^{-1/k} = \frac{1}{e} I_{-k}(f) = \frac{1}{e} I_{-k}(K). \end{aligned}$$

Ἐτσι ὀλοκληρώνεται ἡ ἀπόδειξις τοῦ λήμματος. □

Ἀπόδειξις τοῦ Θεωρήματος 2.4.1. Θέτουμε $\alpha := 2 - \log(e/\beta)^{-1}$ καὶ μὲ αὐτὸ τὸ α ἐφαρμόζουμε τὸ Θεώρημα 2.3.2. Βρίσκουμε ἔτσι ἓνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_α τὸ ὁποῖο ἱκανοποιεῖ τὰ ἐξῆς: $L_{K_\alpha} \geq \delta L_n$ καὶ

$$\log N(K_\alpha, t\sqrt{n}B_2^n) \leq \frac{\kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha}t^\alpha} \quad \text{γιὰ κάθε } t \geq \tau \log^{3/2}\left(\frac{e}{\beta}\right),$$

ὅπου $\kappa, \tau \geq 1$ καὶ $\delta > 0$ εἶναι οἱ ἀπόλυτες σταθερὲς τοῦ Θεωρήματος 2.3.2. Ἐπιλέγουμε ἔπειτα

$$t_1 = (e\kappa)^{1/\alpha} \frac{1}{\sqrt{\beta}} \log^2\left(\frac{e}{\beta}\right),$$

καὶ παρατηροῦμε ὅτι $t_1^\alpha = e\kappa(2-\alpha)^{-2\alpha}(\sqrt{\beta})^{-\alpha}$. Ἀφοῦ μπορούμε ἐξαρχῆς νὰ ἔχουμε ὑποθέσει ὅτι οἱ σταθερὲς κ, τ ἱκανοποιοῦν καὶ τὴν σχέσι $\tau \leq \sqrt{e\kappa} \leq (e\kappa)^{1/\alpha}$, βλέπουμε ὅτι μὲ αὐτὴν τὴν ἐπιλογή τοῦ t_1 ἰσχύει $t_1 \geq \tau(2-\alpha)^{-3/2} = \tau \log^{3/2}(e/\beta)$. Κατὰ συνέπεια,

$$r_1 := \log N(K_\alpha, t_1\sqrt{n}B_2^n) \leq \frac{\kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha}t_1^\alpha} \leq \frac{1}{e}(\sqrt{\beta})^\alpha n \leq \beta n,$$

καὶ ἄρα μπορούμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὸ Λήμμα 2.4.2 καὶ νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$I_{-r_1}(K_\alpha) \leq 3et_1\sqrt{n}.$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἀφοῦ $r_1 \leq \beta n$ καὶ ταυτοχρόνως $q_{-c}(K_\alpha, \zeta) \geq \beta n$, βλέπουμε ὅτι

$$\sqrt{n}L_{K_\alpha} = I_2(K_\alpha) \leq \zeta I_{-r_1}(K_\alpha).$$

Ἐπετα τελικὰ ὅτι

$$L_{K_\alpha} \leq 3e\zeta t_1 = 3e\zeta(e\kappa)^{1/\alpha} \sqrt{\frac{1}{\beta}} \log^2\left(\frac{e}{\beta}\right) \leq 3e^2\zeta\kappa \sqrt{\frac{1}{\beta}} \log^2\left(\frac{e}{\beta}\right),$$

καὶ ἐφ' ὅσον $L_{K_\alpha} \geq \delta L_n$, ἔχουμε ἀποδείξει τὸ ζητούμενο. \square

Πρὸς τὴν ἄλλη κατεύθυνσι, ἂν ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἀληθῆς, μπορούμε νὰ βροῦμε ἀπόλυτες σταθερὲς $\sigma, \xi > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n , νὰ ἰσχύει $q_{-c}(K, \xi) \geq \sigma n$. Πιὸ συγκεκριμένα ἔχουμε τὸ ἀκόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.3 (Δαφνής-Πασούρης, 2010). *Μποροῦμε νὰ βροῦμε ἀπόλυτη σταθερὰ $C > 0$ τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε n καὶ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n , νὰ ἰσχύει*

$$q_{-c}(K, CL_n) \geq n - 1.$$

Ἀπόδειξις. Ξεκινᾶμε ἀπὸ τὸν τύπο

$$I_{-s}(K) \simeq \sqrt{n} \left(\int_{G_{n,s}} |K \cap F^\perp| d\nu_{n,s}(F) \right)^{-1/s},$$

ὁ ὁποῖος ἰσχύει γιὰ κάθε $1 \leq s \leq n - 1$. Ἐπειτα θυμόμαστε ὅτι, ἂν K εἶναι ἓνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n , τότε

$$|K \cap F^\perp|^{1/s} \simeq \frac{L_{\bar{K}_{s+1}(\pi_F \mu_K)}}{L_K}$$

για κάθε υπόχωρο $F \in G_{n,s}$. Έπεται ότι

$$I_{-s}(K) \geq c_1 \sqrt{n} \left(\int_{G_{n,s}} \left(\frac{L_{\overline{K}_{s+1}(\pi_F \mu_K)}}{L_K} \right)^s d\nu_{n,s}(F) \right)^{-1/s}$$

και άρα, αφού κάθε σῶμα $\overline{K}_{s+1}(\pi_F \mu_K)$ περιέχεται σὲ ἕναν s -διάστατο χῶρο,

$$I_{-s}(K) \geq c_1 \sqrt{n} \left(\int_{G_{n,s}} \left(\frac{L_s}{L_K} \right)^s d\nu_{n,s}(F) \right)^{-1/s} = c_1 \sqrt{n} \frac{L_K}{L_s}.$$

Ἐπικαλούμαστε τώρα τὸ Θεώρημα 2.1.4 τῶν Bourgain, Klartag καὶ V. Milman, καὶ καταλήγουμε στὸ συμπέρασμα ὅτι

$$q_{-c}(K, c_1^{-1} c_0 L_n) := \max\{1 \leq p < n : I_{-p}(K) \geq c_1 (c_0 L_n)^{-1} I_2(K)\} \geq n - 1,$$

δεδομένου ὅτι $I_2(K) = \sqrt{n} L_K$. □

Παρατήρησης 2.4.4. Στὸ ἐπόμενο κεφάλαιο θὰ δοῦμε πῶς, ἀπὸ τὴν μέθοδο τῶν Klartag καὶ E. Milman ἢ ὁποία μᾶς δίνει ἕναν τύπο γιὰ τὸν ὄγκο τῶν L_q -κεντροειδῶν σωμάτων, προκύπτει σχετικὰ ἄμεσα ὅτι $q_{-c}(K, CL_K) \geq n - 1$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n , γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $C > 0$. Αὐτὸ ἰσχυροποιεῖ τὸ παραπάνω θεώρημα. Ἀξίζει νὰ σημειώσουμε ὅτι αὐτὴ ἢ ἰσχυρότερη ἐκδοχὴ προκύπτει ὡς συνέπεια καὶ ἀπὸ τὰ ἀποτελέσματα τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη στὸ [15], ὅπου μὲ διαφορετικὰ ἐργαλεῖα δείχνουν, μεταξύ ἄλλων, τὴν πολὺ ἰσχυρὴ ἐκτίμησι

$$\nu_{n,s}(\{F \in G_{n,s} : L_{\overline{K}_{s+1}(\pi_F \mu_K)} \leq CL_K\}) \geq 1 - e^{-c_1 s^n},$$

γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n καὶ $1 \leq s \leq n - 1$, ὅπου $C \geq 1$ καὶ $c_1 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές.

2.5 Μία παραλλαγή τῆς ἀναγωγῆς

Μὲ ἀντίστοιχο τρόπο ὅπως στὴν ἀναγωγὴ τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη, μπορούμε, χρησιμοποιῶντας τὴν πλήρη ἰσχὺ τοῦ Θεωρήματος 2.3.2 (ἢ τοῦ Θεωρήματος 2.3.9), νὰ παραλλάξουμε τὸ ἐπιχείρημα στὴν Παράγραφο 2.2 καὶ νὰ πετύχουμε ἢ παράμετρος $q \in [2, n]$ νὰ ἐμφανίζεται καὶ μέσα στὸν λογάριθμο τοῦ ἄνω φράγματος στὴν (2.1.4). Αὐτὸ δὲν ἔχει ἰδιαίτερη σημασία, ἀπλῶς κάνει σαφέστερη μίᾱ ἀναλογία τῆς ἀναγωγῆς ἀπὸ τὸ [21] καὶ μὲ τὸ ἀποτέλεσμα τοῦ Bourgain (Θεώρημα 2.1.1) ὅτι τὰ ψ_2 -σῶματα ἔχουν φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερά: ἐνῶ εἶναι γνωστὸ ὅτι πολλὰ κυρτὰ σῶματα δὲν εἶναι ψ_2 (μὲ κάποια σταθερὰ πὺ νὰ μὴν ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν διάστασι), σύμφωνα μὲ τὴν παρακάτω πρότασι ἢ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου θὰ ἔπετο ἂν ὅλα τὰ ἰσοτροπικὰ κυρτὰ σῶματα παρουσίαζαν μίᾱ ψ_2 -συμπεριφορὰ «κατὰ μέσο ὄρο», ἂν δηλαδὴ ὑπῆρχε μίᾱ ἀπόλυτη σταθερὰ $C > 0$ ὥστε, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n (ἢ τουλάχιστον γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K «μικρῆς

διαμέτρου» και για κάθε $q \in [2, n]$, να ισχύει $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq C\sqrt{qn}L_K^2$. Αυτό δὲν ἀποκλείεται ἀπὸ τὰ μέχρι τώρα γνωστὰ ἀποτελέσματα τῆς θεωρίας.

Ἐπενθυμίζουμε ὅτι, για κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n και για κάθε $q \in [2, n]$, γράφουμε

$$r_q(K) = \max \left\{ 1, \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}L_K^2} \right\}.$$

Θεώρημα 2.5.1. Ἐπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $\rho \in (0, 1/e)$ με τὴν ἀκόλουθη ιδιότητα: ἂν $n \geq 2$ και $2 \leq q \leq \rho n$, και ἂν θέσουμε

$$(2.5.1) \quad \alpha = 2 - \frac{1}{\log\left(\frac{n}{q}\right)},$$

τότε, για κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_α στὸν \mathbb{R}^n ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν ιδιότητα (β) τοῦ Θεωρήματος 2.3.2, καθῶς και τὴν ιδιότητα

$$(2.5.2) \quad I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)) \leq \sqrt{\rho n}L_{K_\alpha}^2,$$

ἰσχύει ὅτι

$$(2.5.3) \quad L_{K_\alpha} \leq C\sqrt{r_q(K_\alpha)} \sqrt[4]{\frac{n}{q}} \log^2\left(\frac{n}{q}\right),$$

ὅπου C εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά. Ἄν θεωρήσουμε ἓνα σῶμα K_α ποὺ ἱκανοποιεῖ ἐπιπλέον και τὴν ιδιότητα (a) τοῦ Θεωρήματος 2.3.2, τότε τὸ δεξιὸ μέλος τῆς (2.5.3) φράσσει και τὴν L_n .

Ἀπόδειξις. Προσαρμόζουμε τὸ ἐπιχείρημα τῆς Παραγράφου 2.2. Ἐστω ὅτι ἔχουμε q, α και ἓνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K_α ποὺ ἱκανοποιοῦν τὶς ὑποθέσεις τοῦ Θεωρήματος 2.5.1 (με τὴν σταθερὰ ρ νὰ ἔχει μία ἀρκετὰ μικρὴ τιμὴ ποὺ θὰ καθορίσουμε σὲ λίγο). Ὅπως και στὴν Παράγραφο 2.2, ὀρίζουμε ἓνα κυρτὸ σῶμα $W \subseteq K_\alpha$ θέτοντας

$$W := \{x \in K_\alpha : h_{Z_q(K_\alpha)}(x) \leq C_1 I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha))\},$$

ὅπου $C_1 = e^{2\bar{\beta}_2}$ και $\bar{\beta}_2$ εἶναι ἡ σταθερὰ ποὺ ἐμφανίζεται στὸ Λήμμα 2.2.3. Ἐχουμε πάλι τοὺς ἐγκλεισμοὺς

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Z_2(K_\alpha) &\subseteq Z_2(\bar{W}) \subseteq 2Z_2(K_\alpha), \\ Z_q(\bar{W}) &\subseteq 2Z_q(K_\alpha) \end{aligned}$$

και

$$\bar{W} = |W|^{-1/n}W \subseteq 2W \subseteq 2K_\alpha.$$

Ἐξαιτίας αὐτῶν ἔχουμε ὅτι $x/2 \in W$ για κάθε $x \in \bar{W}$, και ἄρα

$$(2.5.4) \quad h_{Z_q(\bar{W})}(x) \leq 2h_{Z_q(K_\alpha)}(x) = 4h_{Z_q(K_\alpha)}(x/2) \leq 4C_1 I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)),$$

ένῳ ταυτόχρονα

$$\log \bar{N}(\bar{W}, tD_n) \leq \log N(\bar{W}, 2^{-1}tD_n) \leq \log N(2K_\alpha, 2^{-1}tD_n) \leq \frac{4^\alpha \kappa n}{(2-\alpha)^{2\alpha} t^\alpha} \leq \frac{16\kappa' n}{(2-\alpha)^4 t^\alpha},$$

για ὅλα τὰ $t \geq 4\tau(2-\alpha)^{-3/2}$, ὅπου $\kappa' := \max\{\kappa, \tau^2\}$. Για κάθε τέτοιο t βρίσκουμε $z_1, \dots, z_{N_t} \in \bar{W}$ μὲ $N_t \leq \exp\left(\frac{16\kappa' n}{(2-\alpha)^4 t^\alpha}\right)$ ἔτσι ὥστε

$$\bar{W} \subseteq \bigcup_{i=1}^{N_t} (z_i + tD_n),$$

καὶ ἔπειτα γράφουμε

$$\begin{aligned} (2.5.5) \quad nL_{K_\alpha}^2 &\leq 4 \int_{\bar{W}} \|x\|_2^2 dx \leq 4 \int_{\bar{W}} \max_{z \in \bar{W}} |\langle x, z \rangle| dx \\ &\leq 4 \int_{\bar{W}} \max_{1 \leq i \leq N_t} |\langle x, z_i \rangle| dx + 4 \int_{\bar{W}} \max_{u \in tD_n} |\langle x, u \rangle| dx \\ &= 4 \int_{\bar{W}} \max_{1 \leq i \leq N_t} |\langle x, z_i \rangle| dx + 4t\omega_n^{1/n} \int_{\bar{W}} \|x\|_2 dx \\ &\leq 4 \int_{\bar{W}} \max_{1 \leq i \leq N_t} |\langle x, z_i \rangle| dx + c'tnL_{K_\alpha}. \end{aligned}$$

Ἐπιλέγουμε

$$t_0 = 8\sqrt{C_2\kappa'}\sqrt{r_q(K_\alpha)}\sqrt[4]{\frac{n}{q}}(2-\alpha)^{-2},$$

ὅπου $C_2 = 16C_1\beta_1\bar{\beta}_1$, β_1 εἶναι ἡ σταθερὰ πὺ μᾶς δίνει τὸ λήμμα τοῦ Borell (βλέπε Πρόταση 1.3.9) καὶ $\bar{\beta}_1$ ἡ σταθερὰ ἀπὸ τὸ Λήμμα 2.2.1. Παρατηροῦμε ὅτι γιὰ αὐτὸ τὸ t_0 ἰσχύει ὁ περιορισμὸς $t_0 \geq 4\tau(2-\alpha)^{-3/2}$, ἄρα ἡ (2.5.5) εἶναι ἀληθὴς καὶ γιὰ $t = t_0$, ἐνῳ ταυτόχρονα

$$(2.5.6) \quad t_0^2 \geq t_0^\alpha \geq \frac{1}{e}t_0^2.$$

Πράγματι, γιὰ τὴν δεύτερη ἀνισότητα στὴν (2.5.6) ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι $t_0^\alpha = \frac{t_0^2}{t_0^{1/\log(\frac{n}{q})}}$ καὶ ὅτι ἰσχύει

$$e \geq t_0^{1/\log(\frac{n}{q})} = \exp\left(\frac{\log(8\sqrt{C_2\kappa'}) + \log(\sqrt{r_q(K_\alpha)}) + \log(\sqrt[4]{\frac{n}{q}}) + \log \log(\frac{n}{q})}{\log(\frac{n}{q})}\right)$$

ἂν τὸ $\rho \geq (\frac{n}{q})^{-1}$ ἐπιλεγεῖ κατάλληλα μικρὸ ὥστε νὰ ἰσχύουν καὶ οἱ ἀνισότητες

$$\log(8\sqrt{C_2\kappa'}) \leq \frac{1}{4} \log\left(\frac{1}{\rho}\right) \leq \frac{1}{4} \log\left(\frac{n}{q}\right) \quad \text{καὶ} \quad \log \log\left(\frac{n}{q}\right) \leq \frac{1}{4} \log\left(\frac{n}{q}\right)$$

Θέτουμε $p_0 := \frac{16\kappa' n}{(2-\alpha)^4 t_0^\alpha}$ καὶ παρατηροῦμε ὅτι $p_0 \geq q$ (ἴσως ἀφοῦ μειώσουμε καὶ ἄλλο τὴν τιμὴ τῆς σταθερᾶς ρ ἂν χρειάζεται): πράγματι, ἀπὸ τὴν ὑπόθεσι (2.5.2) ἔχουμε ὅτι

$$\sqrt{r_q(K_\alpha)} \leq \sqrt{\frac{I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha))}{\sqrt{qn}L_{K_\alpha}^2}} \leq \sqrt[4]{\frac{\rho n}{q}},$$

καὶ ἄρα

$$t_0^2 \leq 64C_2\kappa'\sqrt{\rho}\frac{n}{q}(2-\alpha)^{-4},$$

συνεπῶς

$$p_0 = \frac{16\kappa'n}{(2-\alpha)^4 t_0^\alpha} \geq \frac{16\kappa'n}{(2-\alpha)^4 t_0^2} \geq \frac{q}{4C_2\sqrt{\rho}}.$$

Χρησιμοποιῶντας τὸ Λήμμα 2.2.1 μὲ $q' = 1$, λαμβάνουμε ὅτι

$$\int_{\overline{W}} \max_{1 \leq i \leq N_{t_0}} |(x, z_i)| dx \leq \overline{\beta}_1 \max_{1 \leq i \leq N_{t_0}} h_{Z_{p_0}(\overline{W})}(z_i) \leq \overline{\beta}_1 \beta_1 \frac{p_0}{q} \max_{1 \leq i \leq N_{t_0}} h_{Z_q(\overline{W})}(z_i).$$

Συνδυάζοντας αὐτὸ μὲ τὶς (2.5.5), (2.5.4) καὶ τὸν ὀρισμὸ τῆς σταθερᾶς C_2 , βλέπουμε ὅτι

$$(2.5.7) \quad nL_{K_\alpha}^2 \leq C_2 \frac{p_0}{q} I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)) + c't_0 nL_{K_\alpha}.$$

Επίσης, ἀπὸ τὴν (2.5.6) καὶ τὸν ὀρισμὸ τῶν t_0 καὶ p_0 , ἔπεται ὅτι

$$C_2 \frac{p_0}{q} I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha)) \leq \frac{16C_2\kappa'n I_1(K_\alpha, Z_q^\circ(K_\alpha))}{q(2-\alpha)^4 t_0^2/e} \leq \frac{e}{4} nL_{K_\alpha}^2,$$

τὸ ὁποῖο σὲ συνδυασμὸ μὲ τὴν (2.5.7) ὀδηγεῖ στὸ ζητούμενο ἄνω φράγμα γιὰ τὴν L_{K_α} . \square

2.6 Τελικὲς παρατηρήσεις

Οἱ Βαλέττας, Γιαννόπουλος καὶ Παούρης ἔχουν δείξει [20, Παράγραφος 3] ὅτι, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K , μπορούμε νὰ βροῦμε ἕνα δεῦτερο ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα C , μὲ ἀπολύτως φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_C , τὸ ὁποῖο ἐμφανίζει τὴν ἴδια κατὰ βάσι συμπεριφορὰ μὲ τὸ K ὡς πρὸς τὶς L_q -νόρμες τῶν γραμμικῶν συναρτησοειδῶν.

Θεώρημα 2.6.1 (Βαλέττας-Γιαννόπουλος-Παούρης, 2011). Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς c_i , $i = 1, \dots, 5$, ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n , νὰ μπορούμε νὰ βροῦμε ἕνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα C στὸν \mathbb{R}^n μὲ τὶς ἀκόλουθες ιδιότητες:

(α) $L_C \leq c_1$.

(β) $c_2 Z_q(C) \subseteq \frac{Z_q(K)}{L_K} + \sqrt{q} B_2^n \subseteq c_3 Z_q(C)$ γιὰ κάθε $q \in [1, n]$.

(γ) $c_4 I_q(C, W) \leq \frac{I_q(K, W)}{L_K} + I_q(D_n, W) \leq c_5 I_q(C, W)$ γιὰ κάθε $q \in [1, n]$ καὶ κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα W στὸν \mathbb{R}^n .

Τὸ σῶμα C ὀρίζεται ὡς «συνέλιξις» τοῦ K μὲ ἕνα κατάλληλο πολλαπλάσιο τῆς B_2^n . Ἄν ἐπιπλέον ὑποθέσουμε ὅτι τὸ K εἶναι συμμετρικὸ, τότε καὶ τὸ σῶμα C , μὲ τὸν τρόπο πού κατασκευάζεται στὸ [20], θὰ εἶναι συμμετρικὸ. Ὅμως τότε, χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ γεγονός ὅτι $Z_n(C) \simeq \text{conv}\{C, -C\} = C$ καὶ $Z_n(K) \simeq \text{conv}\{K, -K\} = K$, βλέπουμε ὅτι

$$(2.6.1) \quad C \simeq \frac{K}{L_K} + D_n.$$

Όπως είδαμε, συνδυάζοντας το Θεώρημα 2.3.9 και την Παρατήρησι 2.3.10 που έπεται αυτού, μάς αρκεί για την αναγωγή του Θεωρήματος 2.1.6 ή του Θεωρήματος 2.5.1 να μελετήσουμε την συμπεριφορά της παραμέτρου $I_1(K, Z_q^\circ(K))$ για τα συμμετρικά, ισοτροπικά (ή σχεδόν ισοτροπικά) κυρτά σώματα K που έχουν μικρή διάμετρο, για τα όποια δηλαδή ισχύει $R(K) \leq \gamma\sqrt{n}L_K$ για κάποια σταθερά $\gamma \simeq 1$. Η έπομένη πρότασι δείχνει ότι αρκεί για τον ίδιο σκοπό να περιοριστούμε και σε σώματα K τα όποια είναι $c(\gamma)$ -ισομορφικά με την Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1.

Πρότασις 2.6.2. Έστω K ένα συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα στον \mathbb{R}^n με ακτίνα $R(K) \leq \gamma\sqrt{n}L_K$. Τότε, υπάρχει ένα δεύτερο συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα C στον \mathbb{R}^n έτσι ώστε να ισχύει:

$$(\alpha) \quad L_C \leq c_6.$$

$$(\beta) \quad c_7D_n \subseteq C \subseteq c_8\gamma D_n, \text{ και}$$

$$(\gamma) \quad I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq c_9I_1(C, Z_q^\circ(C))L_K^2 \text{ για όλα τα } 1 \leq q \leq n,$$

όπου οι $c_6, c_7, c_8, c_9 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξις. Θυμόμαστε το Λήμμα 1.4.5, σύμφωνα με το όποιο έχουμε $w_q(Z_q(K)) \simeq \sqrt{q/n}I_q(K)$ για κάθε $q \geq 1$, και γράφουμε έπομένως

$$\begin{aligned} c'_1\sqrt{q}L_K &= c'_1\sqrt{\frac{q}{n}}I_2(K) \leq c'_1\sqrt{\frac{q}{n}}I_q(K) \leq w_q(Z_q(K)) \\ &\leq c'_2\sqrt{\frac{q}{n}}I_q(K) \leq c'_2\sqrt{\frac{q}{n}}R(K) \leq c'_2\gamma\sqrt{q}L_K. \end{aligned}$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c'_1, c'_2 > 0$. Θεωρούμε έπειτα το κυρτό σώμα C που μάς δίνει το Θεώρημα 2.6.1, και για το όποιο έχουμε ήδη ότι $L_C \simeq 1$. Δεδομένου ότι $\frac{1}{L_K}Z_q(K) \subseteq c_3Z_q(C)$, μπορούμε να γράψουμε $c_3L_KZ_q^\circ(K) \supseteq Z_q^\circ(C)$, και άρα

$$I_1(C, Z_q^\circ(C)) \geq I_1(C, c_3L_KZ_q^\circ(K)) = \frac{1}{c_3L_K}I_1(C, Z_q^\circ(K)).$$

Έφαρμόζοντας και την ανισότητα $c_5I_1(C, W) \geq \frac{I_1(K, W)}{L_K}$ για $W = Z_q^\circ(K)$, λαμβάνουμε ότι

$$I_1(C, Z_q^\circ(C)) \geq c_9 \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{L_K^2},$$

όπου $c_9 = (c_3c_5)^{-1}$. Τέλος, από την (2.6.1) και το γεγονός ότι $\frac{K}{L_K} \subseteq \gamma\sqrt{n}B_2^n$, βλέπουμε ότι $c_7D_n \subseteq C \subseteq c_8\gamma D_n$. \square

Συνοψίζουμε τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου ξεκινώντας με τον ακόλουθο όρισμό.

Όρισμός 2.6.3. Για κάθε $\alpha \in [1, 2)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ἄς συμβολίζουμε με $\mathcal{IK}_\alpha(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta)$ τὴν κλάση τῶν (συμμετρικῶν) ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων K_α στὸν \mathbb{R}^n ποὺ ἔχουν τὶς ἰδιότητες ποὺ ἀναφέρει τὸ Θεώρημα 2.3.9. Για εὐκολία, θέτουμε $\alpha_n = 2 - 1/\log n$. Ἐστω ἐπίσης $\rho > 0$ ἢ σταθερὰ ποὺ ἀναφέρεται στὸ Θεώρημα 2.1.6 ἢ στὸ Θεώρημα 2.5.1. Ὅρίζουμε $A(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta)$ νὰ εἶναι τὸ σύνολο ὄλων τῶν $q \in [2, n]$ γιὰ τὰ ὁποῖα ὑπάρχει κάποιον σῶμα $K \in \mathcal{IK}_{\alpha_n}(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta)$ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὴν $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq \rho n L_K^2$. Παρατηροῦμε ὅτι ἤδη, ἀπὸ τὸ ἄνω φράγμα στὴν (2.1.7), μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι τὸ σύνολο $A(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta)$ περιέχει ἓνα διάστημα τῆς μορφῆς $[2, c\sqrt{n}]$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$, καὶ ὅτι ὁποιαδήποτε βελτίωσις στὸ ἄνω φράγμα τῆς (2.1.7) θὰ μᾶς ἔδινε αὐτομάτως καὶ ὅτι τὸ $A(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta)$ περιέχει ἓνα ἀκόμη μεγαλύτερο κομμάτι τοῦ $[2, n]$. Γιὰ αὐτὰ τὰ q θέτουμε ἔπειτα

$$B(q) = \inf \left\{ \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn} L_K^2} : K \in \mathcal{IK}_{\alpha_n}(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta) \right\},$$

καὶ θυμόμαστε ὅτι ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.1.6 ἔχουμε ὅτι

$$\delta L_n \leq C\sqrt{\kappa} \sqrt[4]{n/q} \log^2 n \max \{1, \sqrt{B(q)}\}.$$

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ὀρίζουμε $A'(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta)$ νὰ εἶναι τὸ σύνολο ὄλων τῶν $q \in [2, \rho^2 n]$ τὰ ὁποῖα ἔχουν τὴν ἐξῆς ἰδιότητα: ὑπάρχει κάποιον σῶμα $K \in \mathcal{IK}_\alpha(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta)$, ὅπου $\alpha = \alpha(q) = 2 - 1/\log(n/q)$, τὸ ὁποῖο ἱκανοποιεῖ τὴν $I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq \rho n L_K^2$. Καὶ πάλι, ἐξαιτίας τοῦ ἄνω φράγματος στὴν (2.1.7), τὸ σύνολο $A'(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta)$ περιέχει τουλάχιστον ἓνα ὑποδιάστημα τῆς μορφῆς $[2, c\sqrt{n}]$, ἐνῶ γιὰ κάθε $q \in A'(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta)$ μποροῦμε νὰ θέσουμε

$$B'(q) = \inf \left\{ \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn} L_K^2} : K \in \mathcal{IK}_{\alpha(q)}(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta), I_1(K, Z_q^\circ(K)) \leq \rho n L_K^2 \right\},$$

καὶ νὰ θυμηθοῦμε ὅτι ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.5.1 ἰσχύει

$$\delta L_n \leq C\sqrt{\kappa} \sqrt[4]{n/q} \log^2(n/q) \max \{1, \sqrt{B'(q)}\}.$$

Ἔχουμε καταλήξει ἐπομένως στὸ ἐξῆς

Θεώρημα 2.6.4. Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς κ, τ, γ καὶ $\delta > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, νὰ ἰσχύει

$$L_n \leq \min \left\{ \frac{C\sqrt{\kappa}}{\delta} \sqrt[4]{n/q} \log^2 n \max \{1, \sqrt{B(q)}\} : q \in A(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta) \right\}$$

καὶ

$$L_n \leq \min \left\{ \frac{C\sqrt{\kappa}}{\delta} \sqrt[4]{n/q} \log^2(n/q) \max \{1, \sqrt{B'(q)}\} : q \in A'(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta) \right\},$$

ὅπου C εἶναι ἀπόλυτη σταθερά.

Ἐξαιτίας τῆς Προτάσεως 2.6.2, μπορούμε νὰ δώσουμε καὶ μία ἀκόμη ἐκδοχὴ τῆς ἀναγωγῆς ποὺ περιέχεται στὸ παραπάνω θεώρημα.

Ὁρισμός 2.6.5. Γιὰ κάθε σταθερὰ $\gamma \geq 1$, ἂς συμβολίζουμε μὲ $\mathcal{IK}_{sd}(n, \gamma)$ τὴν κλάση τῶν ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων C στὸν \mathbb{R}^n γιὰ τὰ ὁποῖα ἰσχύει

$$(\alpha) \quad L_C \leq c_6 \text{ καὶ}$$

$$(\beta) \quad c_7 D_n \subseteq C \subseteq c_8 \gamma D_n,$$

ὅπου $c_i > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές (γιὰ παράδειγμα, αὐτὲς ποὺ μᾶς δίνει ἡ Πρότασις 2.6.2). Γιὰ κάθε $2 \leq q \leq n$, θέτουμε

$$\Gamma(q) = \sup \left\{ \frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}} : K \in \mathcal{IK}_{sd}(n, \gamma) \right\}.$$

Τότε, τὸ Θεώρημα 2.3.9 καὶ ἡ Πρότασις 2.6.2 συνεπάγονται τὸ ἀκόλουθο

Θεώρημα 2.6.6. Ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερές κ, τ, γ καὶ $\delta > 0$ ἔτσι ὥστε, γιὰ κάθε $n \in \mathbb{N}$, νὰ ἰσχύει

$$L_n \leq \inf \left\{ \frac{C\sqrt{\kappa}}{\delta} \sqrt[4]{n/q} \log^2 n \sqrt{\Gamma(q)} : q \in A(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta) \right\}$$

καὶ

$$L_n \leq \inf \left\{ \frac{C\sqrt{\kappa}}{\delta} \sqrt[4]{n/q} \log^2(n/q) \sqrt{\Gamma(q)} : q \in A'(n, \kappa, \tau, \gamma, \delta) \right\}$$

(ἐδῶ δὲν χρειάζεται νὰ γράψουμε $\max\{1, \Gamma(q)\}$ ἐπειδὴ ἀπὸ τὴν (2.1.7) ἔχουμε ἤδη ὅτι $\Gamma(q) \gtrsim 1$).

Προκύπτει τελικῶς ὅτι, ἂν θέλουμε νὰ κατανοήσουμε τὸ κατὰ πόσον ἡ συμπεριφορὰ τῶν ποσοτήτων $B(q)$ καὶ $B'(q)$ θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ ὀδηγήσει σὲ καλύτερα ἄνω φράγματα γιὰ τὴν L_n , μπορούμε καὶ νὰ περιοριστοῦμε στὴν κλάση $\mathcal{IK}_{sd}(n, \gamma)$ μελετῶντας τὴν παράμετρο $\frac{I_1(K, Z_q^\circ(K))}{\sqrt{qn}}$ ἐκεῖ.

Ὁ ὄγκος τῶν κεντροειδῶν σωμάτων καὶ μία δεύτερη ἀναγωγή τῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου

3.1 Συνδυάζοντας τὶς μεθόδους τῶν Δαφνῆ καὶ Παούρη καὶ τῶν Klartag καὶ Milman

Ὅπως εἶπαμε στὴν Παράγραφο 1.4.1, τὰ L_q -κεντροειδῆ σώματα ὀρίστηκαν ἀπὸ τοὺς Lutwak, Yang καὶ Zhang [37], οἱ ὁποῖοι, χρησιμοποιῶντας ἓνα ἐπιχείρημα συμμετριοποιήσεως, ἔδωσαν ἐπίσης ἓνα κάτω φράγμα γιὰ τὸν ὄγκο τους. Συγκεκριμένα ἔδειξαν ὅτι

$$(3.1.1) \quad |Z_q(K)|^{1/n} \geq |Z_q(\bar{B}_2^n)|^{1/n} \simeq \sqrt{\frac{q}{n}}$$

γιὰ κάθε $1 \leq q \leq n$ καὶ γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα K ὄγκου 1 στὸν \mathbb{R}^n . Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ὁ Παούρης στὸ [52] ἔδωσε ἓνα ἄνω φράγμα γιὰ αὐτὸν τὸν ὄγκο στὶς περιπτώσεις πού τὸ K εἶναι ἓνα κυρτὸ σῶμα ὄγκου 1 πού ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0: ἔδειξε ὅτι, γιὰ κάθε $q \geq 1$,

$$(3.1.2) \quad |Z_q(K)|^{1/n} \leq C \sqrt{\frac{q}{n}} L_K$$

ὅπου $C > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά. Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι δὲν χρειάζεται νὰ υποθέσουμε ὅτι τὸ K εἶναι ἰσοτροπικὸ ἢ ἔχει κάποια ἄλλη εἰδικὴ ιδιότητα, ἀφοῦ γιὰ κάθε $S \in SL(n)$ ἰσχύει $Z_q(S(K)) = S(Z_q(K))$, καὶ ἄρα $|Z_q(K)| = |Z_q(S(K))|$.

Συνδυάζοντας τώρα αὐτὰ τὰ φράγματα μὲ τὶς Προτάσεις 1.3.21 καὶ 1.4.2 καὶ τὸν ὀρισμὸ τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς ἑνὸς μέτρου, λαμβάνουμε ἄνω καὶ κάτω φράγματα γιὰ τὸν ὄγκο τῶν κεντροειδῶν σωμάτων ὁποιοῦδήποτε n -διαστάτου λογαριθμικὰ-κοίλου μέτρου πιθανότητος πού ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0.

Πρόταση 3.1.1 (Lutwak-Yang-Zhang, Παούρης). Έστω μ ένα μη έκφυλισμένο λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας στον \mathbb{R}^n με $\text{bar}(\mu) = 0$. Τότε, για κάθε $q \in [1, n]$ έχουμε ότι

$$(3.1.3) \quad \frac{c_1}{(f_\mu(0))^{1/n}} \sqrt{\frac{q}{n}} \simeq \frac{c_1}{\|\mu\|_\infty^{1/n}} \sqrt{\frac{q}{n}} \leq |Z_q(\mu)|^{1/n} \leq c_2 \sqrt{\frac{q}{n}} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}},$$

όπου οι $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα, αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε

$$\frac{c_1}{L_\mu} \sqrt{\frac{q}{n}} \leq |Z_q(\mu)|^{1/n} \leq c_2 \sqrt{\frac{q}{n}}.$$

Προφανώς, αφού δεν γνωρίζουμε το αν η εικόasia του υπερεπιπέδου είναι αληθής ή όχι, δεν μπορούμε να γνωρίζουμε εν γένει και ποιά από τις (3.1.1) και (3.1.2) (ή ποιό μέλος της (3.1.3)) δίνει την σωστή τάξι μεγέθους για το $|Z_q(K)|^{1/n}$ (ή το $|Z_q(\mu)|^{1/n}$ αντίστοιχα) και σε ποιές περιπτώσεις. Στο [29] οι Klartag και E. Milman προτείνουν μία διαφορετική προσέγγισι δίνοντας μία εκτίμησι για τον όγκο του $Z_q(\mu)$ μέσω του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace του μέτρου μ , εκτίμησι ή οποία είναι ακριβής ανεξαρτήτως του αν ισχύει η εικόasia του υπερεπιπέδου ή όχι.

Θυμόμαστε ότι, σύμφωνα με τους Όρισμούς 1.4.13 και 1.4.15,

$$\Lambda_q(\mu) := \{x \in \mathbb{R}^n : \Lambda_\mu(x) \leq q \text{ και } \Lambda_\mu(-x) \leq q\}$$

για κάθε q , ενώ για κάθε $x \in A(\mu) := \{\Lambda_\mu < \infty\}$ συμβολίζουμε με μ_x το κεντραρισμένο μέτρο πιθανότητας που έχει πυκνότητα

$$f_{\mu_x}(y) := \frac{1}{\int e^{\langle y, x \rangle} d\mu(y)} \exp(\langle y + \nabla \Lambda_\mu(x), x \rangle) f_\mu(y + \nabla \Lambda_\mu(x)).$$

Επίσης, για κάθε τέτοιο μέτρο έχουμε ότι

$$\text{Cov}(\mu_x) = \text{Hess}(\Lambda_\mu)(x).$$

Θεώρημα 3.1.2 (Klartag-E. Milman, [29]). Έστω μ ένα μη έκφυλισμένο λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας στον \mathbb{R}^n με $\text{bar}(\mu) = 0$. Τότε, για κάθε $q \in [1, n]$ έχουμε ότι

$$(3.1.4) \quad |Z_q(\mu)|^{1/n} \simeq \sqrt{\frac{q}{n}} \inf_{\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_q(\mu)} [\det \text{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Για την απόδειξι της παρατηρούμε πρώτα ότι συνέπεια του Λήμματος 1.4.18 είναι και το εξής

Πόρισμα 3.1.3. Έστω μ ένα λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας με $\text{bar}(\mu) = 0$. Για κάθε $p > 0$, ισχύει

$$\nabla \Lambda_\mu \left(\frac{1}{2} \Lambda_p(\mu) \right) \subseteq 2p \Lambda_p(\mu)^\circ.$$

Απόδειξι. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 1.4.18 με $q = r = p$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \nabla \Lambda_\mu \left(\frac{1}{2} \Lambda_p(\mu) \right) &\subseteq \nabla \Lambda_\mu \left(\frac{1}{2} \{\Lambda_\mu \leq p\} \right) \subseteq 2p \{\Lambda_\mu \leq p\}^\circ \\ &\subseteq 2p \Lambda_p(\mu)^\circ, \end{aligned}$$

αφού ο έγκλεισμός $\{\Lambda_\mu \leq p\} \supseteq \Lambda_p(\mu)$ συνεπάγεται τον έγκλεισμο $\{\Lambda_\mu \leq p\}^\circ \subseteq \Lambda_p(\mu)^\circ$. \square

Όρισμός 3.1.4. Για κάθε $p > 0$ θέτουμε

$$\Psi_p := \left(\frac{1}{|\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)|} \int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det \text{Hess}(\Lambda_\mu)(x) dx \right)^{1/n}.$$

Πρόταση 3.1.5. Για κάθε $p > 0$, ισχύει ότι

$$|\Lambda_p(\mu)|^{1/n} \leq C \sqrt{\frac{p}{n}} \frac{1}{\sqrt{\Psi_p}}.$$

Απόδειξις. Εφαρμόζοντας το Πρόσμμα 3.1.3 και την αλλαγή μεταβλητών $x = \nabla \Lambda_\mu(y)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |2p\Lambda_p(\mu)^\circ| &\geq \left| \nabla \Lambda_\mu \left(\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu) \right) \right| = \int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det \text{Hess}(\Lambda_\mu)(y) dy \\ &= \left| \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu) \right| \Psi_p^n. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, έχουμε ότι

$$|\Lambda_p(\mu)^\circ|^{1/n} \geq \frac{\Psi_p}{4p} |\Lambda_p(\mu)|^{1/n}.$$

Ταυτόχρονα, από την ανισότητα Blaschke-Santaló, προκύπτει ότι

$$|\Lambda_p(\mu)^\circ|^{1/n} \leq \frac{c}{n} \frac{1}{|\Lambda_p(\mu)|^{1/n}},$$

και άρα

$$|\Lambda_p(\mu)|^{2/n} \leq \frac{C^2 p}{n} \frac{1}{\Psi_p},$$

όπου $C^2 = 4c$. □

Απόδειξις του κάτω φράγματος στην (3.1.4). Από τις Προτάσεις 1.4.16 και 3.1.5, λαμβάνουμε ότι

$$|\Lambda_p(\mu)|^{1/n} \leq C \sqrt{\frac{p}{n}} \frac{1}{\sqrt{\Psi_p}}$$

και ότι

$$\Lambda_p(\mu) \simeq pZ_p(\mu)^\circ.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} |Z_p(\mu)|^{1/n} &\geq \frac{c_1}{n|Z_p(\mu)^\circ|^{1/n}} \geq \frac{c_2 p}{n|\Lambda_p(\mu)|^{1/n}} \geq c_3 \frac{p}{n} \sqrt{\frac{n}{p}} \sqrt{\Psi_p} = c_3 \sqrt{\frac{p}{n}} \sqrt{\Psi_p} \\ &= c_3 \sqrt{\frac{p}{n}} \left(\frac{1}{|\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)|} \int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det \text{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi) d\xi \right)^{\frac{1}{2n}} \\ &\geq c_3 \sqrt{\frac{p}{n}} \inf_{\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \text{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi)]^{\frac{1}{2n}} \\ &= c_3 \sqrt{\frac{p}{n}} \inf_{\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \text{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιούμε και την αντίστροφη ανισότητα Santaló. \square

Για να ολοκληρώσουν την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2, οι Klartag και E. Milman χρησιμοποιούν και το άνω φράγμα του Παούρη στην (3.1.3), καθώς και την Πρόταση 1.4.17 που είδαμε στην Παράγραφο 1.4.3, σύμφωνα με την οποία, αν $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, τότε

$$(3.1.5) \quad Z_q(\mu) \simeq Z_q(\mu_x) \quad \text{για κάθε } q \geq p.$$

Απόδειξις του άνω φράγματος στην (3.1.4). Το άνω φράγμα στην (3.1.3) συνεπάγεται ότι

$$\inf_{\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} |Z_p(\mu_\xi)|^{1/n} \leq C \sqrt{\frac{p}{n}} \inf_{\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \text{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Επιπλέον, από την Πρόταση 1.4.17 γνωρίζουμε ότι $Z_p(\mu_\xi) \simeq Z_p(\mu)$ για όλα τα $\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, και επομένως

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \leq C \sqrt{\frac{p}{n}} \inf_{\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \text{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.2. \square

Μία άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1.2 είναι το ακόλουθο

Θεώρημα 3.1.6. Έστω μ ένα λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας στον \mathbb{R}^n με $\text{bar}(\mu) = 0$.

Για κάθε $1 \leq p \leq q \leq n$,

$$\frac{|Z_p(\mu)|^{1/n}}{\sqrt{p}} \geq c \frac{|Z_q(\mu)|^{1/n}}{\sqrt{q}},$$

όπου $c > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

Απόδειξις. Δεδομένου ότι εξ' ορισμού ισχύει $\Lambda_p(\mu) \subseteq \Lambda_q(\mu)$, έχουμε ότι

$$\inf_{\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \text{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}} \geq \inf_{\xi \in \frac{1}{2}\Lambda_q(\mu)} [\det \text{Cov}(\mu_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Άρα, για το ζητούμενο, αρκεί να επικαλεστούμε τον τύπο του Θεωρήματος 3.1.2. \square

Έχοντας δείξει το Θεώρημα 3.1.2, οι Klartag και E. Milman χρησιμοποιούν τον τύπο για τον όγκο των κεντροειδών σωμάτων που μάς δίνει ως εξής: ορίζουν μία «κληρονομική» παραλλαγή της παραμέτρου $q_*(\mu)$ (βλέπε Παράγραφο 1.4.1) θέτοντας

$$q_*^H(\mu) := n \inf_k \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{q_*(\pi_E \mu)}{k},$$

όπου $\pi_E \mu$ είναι το περιθώριο μέτρο του μ που φέρεται στον υπόχωρο E , και αποδεικνύουν ότι

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \geq c \sqrt{\frac{p}{n}} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}} = c \sqrt{\frac{p}{n}}$$

για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n και για κάθε $p \leq q_*^H(\mu)$. Ειδικότερα, αν θυμηθούμε και ότι $L_\mu \cdot |Z_n(\mu)|^{1/n} \simeq 1$ από την Πρόταση 1.4.2, αυτό συνεπάγεται ότι

$$(3.1.6) \quad L_\mu \simeq \frac{1}{|Z_n(\mu)|^{1/n}} \leq \frac{1}{|Z_{q_*^H(\mu)}(\mu)|^{1/n}} \leq C \sqrt{\frac{n}{q_*^H(\mu)}}.$$

Όμως, όπως είδαμε στην Πρόταση 1.4.8, ο Παούρης έχει δείξει ότι $q_*(\nu) \gtrsim \sqrt{m}$ για κάθε $\nu \in \mathcal{IL}_{[m]}$, και άρα $q_*^H(\mu) \gtrsim \sqrt{n}$ για το τυχόν ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n , πράγμα που σημαίνει ότι η (3.1.6) οδηγεί σε μία δεύτερη απόδειξη του καλύτερου γνωστού φράγματος για την L_n : $L_n \leq C \sqrt[4]{n}$. Επίσης, όπως εξηγήσαμε στην Παρατήρησι 1.4.9, αν το μ είναι ψ_α με σταθερά b_α , τότε ισχύει ότι $q_*(\mu) \gtrsim n^{\alpha/2}/\beta_\alpha^\alpha$. Αφού και όλα τα περιθώρια μέτρα του μ θα είναι επίσης ψ_α με σταθερά b_α , θα έχουμε και ότι $q_*^H(\mu) \gtrsim n^{\alpha/2}/\beta_\alpha^\alpha$, από όπου προκύπτει τελικώς το γενικό φράγμα του Θεωρήματος 2.1.2 για την ισοτροπική σταθερά των ψ_α μέτρων.

Από την άλλη πλευρά, στο προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι οι Δαφνης και Παούρης [14] κάνουν την έξιης ενδιαφέρουσα παρατήρησι: ένας τρόπος να βρούμε άνω φράγματα για την L_n είναι να μελετήσουμε την συμπεριφορά της συναρτήσεως $q \mapsto I_q(\mu)$, $q \in (-n, 0)$, όπου

$$I_q(\mu) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q f_\mu(x) dx \right)^{1/q}$$

για κάθε $q > -n$, $q \neq 0$. Δοθέντος n -διαστάτου ισοτροπικού λογαριθμικά-κοίλου μέτρου μ και κάποιου $\delta \geq 1$, ορίζουν την παράμετρο

$$q_{-c}(\mu, \delta) := \max\{1 \leq p \leq n-1 : I_{-p}(\mu) \geq \delta^{-1} I_2(\mu) = \delta^{-1} \sqrt{n}\}.$$

και έπειτα αποδεικνύουν το Θεώρημα 2.4.1: για κάθε $\delta \geq 1$ ισχύει ότι

$$(3.1.7) \quad L_n \leq C \delta \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} \sqrt{\frac{n}{q_{-c}(\mu, \delta)}} \log^2 \left(\frac{en}{q_{-c}(\mu, \delta)} \right),$$

όπου C είναι μία απόλυτη σταθερά. Η προσέγγισίς τους έχει άμεση σχέση με τα αποτελέσματα στο [53], κάποια από τα όποια αναφέραμε στην Παράγραφο 1.4.1, όπως για παράδειγμα τον τύπο

$$I_{-k}(\mu) \simeq \left(\int_{G_{n,k}} \pi_F f_\mu(0) d\nu_{n,k}(F) \right)^{-1/k}$$

του Θεωρήματος 1.4.6. Βάσει αυτού προκύπτει, όπως είδαμε στο Θεώρημα 2.4.3, ότι $I_{-p}(\mu) \geq c_0 \sqrt{n}/L_n$ για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ και κάθε $p \leq n-1$, και άρα ότι

$$(3.1.8) \quad \inf_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} q_{-c}(\mu, c_0^{-1} L_n) = n-1$$

(όπου $c_0 > 0$ είναι μία αρκετά μικρή απόλυτη σταθερά).

Σε αυτό το κεφάλαιο θα παρουσιάσουμε δύο ακόμη κληρονομικές παραμέτρους, οι όποιες, όπως τελικώς θα δείξουμε, είναι ισοδύναμες, και στην συνέχεια θα δείξουμε ότι τα αποτελέσματα των

Δαφνής και Παούρης από το [14] και των Klartag και Milman από το [29] ισχύουν και για κάθε p μέχρι αυτές τις παραμέτρους. Η πρώτη παράμετρος προκύπτει άμέσως, κατά τον τρόπο των Klartag και Milman, ως μία «κληρονομική» παραλλαγή της παραμέτρου $q_{-c}(\mu, \delta)$ που όρισαν οι Δαφνής και Παούρης: θέτουμε

$$q_{-c}^H(\mu, \delta) := n \inf_k \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{[q_{-c}(\pi_E \mu, \delta)]}{k}$$

(σημειώνουμε ότι η χρήση των άκεραίων μερών στον όρισμό δεν έχει ειδική σημασία, απλώς μάς επιτρέπει να διατυπώσουμε κάποια αποτελέσματα πιό εύκολα). Για να ορίσουμε την δεύτερη κληρονομική παράμετρο, ορίζουμε πρώτα την εξής παράμετρο

$$(3.1.9) \quad r_{\sharp}(\mu, A) := \max\{1 \leq k \leq n-1 : \exists E \in G_{n,k} \text{ τέτοιος ώστε } L_{\pi_E \mu} \leq A\}$$

για κάθε λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον \mathbb{R}^n και για κάθε σταθερά $A \geq 1$. Στην συνέχεια θέτουμε, όπως και πριν,

$$r_{\sharp}^H(\mu, A) := n \inf_k \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{r_{\sharp}(\pi_E \mu, A)}{k}$$

(όπου συμφωνούμε ότι $r_{\sharp}(\pi_{\mathbb{R}\theta} \mu, A) = q_{-c}(\pi_{\mathbb{R}\theta} \mu, A) = 1$ για όλα τα μονοδιάστατα περιθώρια μέτρα).

Το ακόλουθο θεώρημα ισχύει για κάθε n -διάστατο ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ .

Θεώρημα 3.1.7. Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $C_1, C_2 > 0$ έτσι ώστε, για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n και κάθε $A \geq 1$, να ισχύει

$$(3.1.10) \quad r_{\sharp}^H(\mu, A) \leq q_{-c}^H(\mu, C_1 A) \leq r_{\sharp}^H(\mu, C_2 A).$$

Επιπροσθέτως, για κάθε $p \leq r_{\sharp}^H(\mu, A)$ έχουμε ότι

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \geq \frac{c}{A} \sqrt{\frac{p}{n}},$$

όπου $c > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

Παρατήρησης. Άς παρατηρήσουμε ότι, όπως στην (3.1.6), το Θεώρημα 3.1.7 συνεπάγεται ότι

$$(3.1.11) \quad L_{\mu} \leq CA \sqrt{\frac{n}{r_{\sharp}^H(\mu, A)}} \leq CA \sqrt{\frac{n}{q_{-c}^H(\mu, \frac{C_1}{C_2} A)}}$$

(για την ακρίβεια, η δεύτερη ανισότητα στην (3.1.11) έχει νόημα εφ' όσον υποθέσουμε ότι το A είναι μεγαλύτερο από κάποιο $A_0 \simeq 1$).

Ένα από τα κύρια αποτελέσματα του [53] (βλέπε Θεώρημα 1.4.10) είναι ότι, αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο στον \mathbb{R}^n , τότε

$$(3.1.12) \quad q_{-c}(\mu, \delta_0) \gtrsim q_*(\mu) \geq c_1 \sqrt{n},$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά και $\delta_0 \simeq 1$. Άφου κάθε περιθώριο μέτρο $\pi_{E\mu}$ ενός ισοτροπικού μέτρου μ είναι επίσης ισοτροπικό, η ανισότητα (3.1.12) συνεπάγεται ότι $q_{-c}(\pi_{E\mu}, \delta_0) \gtrsim q_*(\pi_{E\mu}) \geq c_1 \sqrt{k}$ για κάθε $E \in G_{n,k}$, και άρα ότι

$$(3.1.13) \quad q_{-c}^H(\mu, \delta_0) \gtrsim q_*^H(\mu) \geq c_1 \sqrt{n}.$$

Όμως τότε το Θεώρημα 3.1.7 μάς λέει ότι η παράμετρος $r_{\#}^H(\mu, A_1)$ είναι και αυτή τουλάχιστον της τάξεως του \sqrt{n} για κάποιο $A_1 \simeq 1$ και για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n . Παρατηρούμε επίσης ότι, άφου η (3.1.11) ισχύει γενικά, αρκεί η σταθερά A να είναι μεγαλύτερη κάποιου $A_0 \simeq 1$, μπορούμε αντικαθιστώντας το $q_{-c}(\mu, A)$ με το $q_{-c}^H(\mu, A)$ να διώξουμε τον λογαριθμικό όρο στην ανισότητα (3.1.7), βελτιώνοντας έτσι λίγο τα φράγματα για την L_n που μάς δίνει η μέθοδος των Δαφνής και Παούρη (σε εκείνες τις περιπτώσεις βεβαίως που οι εκτιμήσεις που έχουμε για τις δύο παραμέτρους είναι της ίδιας τάξεως, όπως συμβαίνει για παράδειγμα στις (3.1.12) και (3.1.13)).

Άπο την άλλη πλευρά, το παράδειγμα (ένος καταλλήλου πολλαπλασίου) του όμοιομόρφου μέτρου στην B_1^n , δηλαδή την μοναδιαία μπάλα του χώρου ℓ_1^n , μάς δείχνει ότι υπάρχουν ισοτροπικά λογαριθμικά-κοίλα μέτρα μ στον \mathbb{R}^n για τα οποία ισχύει ότι $q_*(\mu) \simeq \sqrt{n}$, και άρα ότι $q_*^H(\mu) \simeq \sqrt{n}$. Τίποτε από όσα γνωρίζουμε μέχρι τώρα δεν αποκλείει όμως, ακόμη και για τέτοια μέτρα, η παράμετρος $q_{-c}^H(\mu, \delta_0)$ να είναι πολύ μεγαλύτερη του \sqrt{n} . Μάλιστα, αν η εικόνα του υπερεπιπέδου είναι αληθής, βλέπουμε από την (3.1.8) ότι η παράμετρος $q_{-c}^H(\mu, \delta_1)$ πρέπει να είναι της τάξεως του n για κάποιο $\delta_1 \simeq c_0^{-1} L_n \simeq 1$. Αυτό δείχνει ότι η επιλογή των παραμέτρων $r_{\#}^H(\mu, \cdot)$ και $q_{-c}^H(\mu, \cdot)$ είναι συμβατή με μία προσπάθεια να επεκτείνουμε την μέθοδο των Klartag και Milman και το διάστημα των p για τα οποία εφαρμόζεται, και ταυτοχρόνως να δώσουμε μία αναγωγή της εικόνας του υπερεπιπέδου. Επιπλέον, η παράμετρος $r_{\#}(\mu, A)$, δηλαδή η μεγαλύτερη διάσταση $k \leq n - 1$ στην οποία μπορούμε να βρούμε περιθώριες κατανομές του μέτρου μ που έχουν ισοτροπική σταθερά όχι μεγαλύτερη από A , εμφανίζει ενδιαφέρον από μόνη της. Στην Παράγραφο 3.3 θα αναφέρουμε κάποια πράγματα που γνωρίζουμε ήδη σχετικά με το πόσο μεγάλη ή μικρή μπορεί να είναι αυτή η διάσταση. Για παράδειγμα, έχουμε την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 3.1.8. *Υπάρχουν ισοτροπικά λογαριθμικά-κοίλα μέτρα μ στον \mathbb{R}^n με $L_\mu \simeq L_n$ τα οποία έχουν την ιδιότητα, για κάθε $\lambda \in (0, 1)$ και κάθε θετικό άκεραιο $k = \lambda n$, να ισχύει*

$$(3.1.14) \quad L_{\pi_{E\mu}} \geq C^{-\frac{1}{\lambda}} L_\mu$$

για οποιονδήποτε υπόχωρο $E \in G_{n,k}$, όπου $C \geq 1$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

3.2 Κάτω φράγμα για τον όγκο του $Z_p(\mu)$ για κάθε $p \leq r_{\sharp}^H(\mu, A)$

Όπως είδαμε, ο βασικός τύπος για τον όγκο των L_q -κεντροειδών σωμάτων στον όποιον καταλήγουν οι Klartag και Milman έχει ως εξής: αν μ είναι ένα λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας στον \mathbb{R}^n με βαρύκεντρο το 0, τότε για κάθε $p \in [1, n]$ έχουμε ότι

(3.2.1)

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \simeq \sqrt{\frac{p}{n}} \left(\frac{1}{|\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)|} \int_{\frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} \det \text{Cov}(\mu_x) dx \right)^{\frac{1}{2n}} \simeq \sqrt{\frac{p}{n}} \inf_{x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \text{Cov}(\mu_x)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Ένα αρχικό συμπέρασμα στο οποίο μπορούμε να οδηγηθούμε χρησιμοποιώντας αυτόν τον τύπο είναι ότι, αν $x_0 \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$ είναι ένα σημείο που έχει την ιδιότητα

$$[\det \text{Cov}(\mu_{x_0})]^{\frac{1}{2n}} \simeq \inf_{x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)} [\det \text{Cov}(\mu_x)]^{\frac{1}{2n}},$$

τότε, χρησιμοποιώντας και την Πρόταση 1.4.17 των Klartag και Milman που είδαμε στην Παράγραφο 1.4.3, σύμφωνα με την οποία, αν $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$, τότε

$$(3.2.2) \quad Z_q(\mu) \simeq Z_q(\mu_x) \quad \text{για κάθε } q \geq p,$$

συμπεραίνουμε ότι

$$|Z_p(\mu_{x_0})|^{1/n} \simeq \sqrt{\frac{p}{n}} [\det \text{Cov}(\mu_{x_0})]^{\frac{1}{2n}}.$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε μία παρόμοια ισοδυναμία για το μέτρο μ αντί του μ_{x_0} , και για να το επιτύχουμε αυτό πρέπει σύμφωνα με τον τύπο (3.2.1) να μπορέσουμε να δείξουμε ότι

$$(3.2.3) \quad [\det \text{Cov}(\mu_{x_0})]^{\frac{1}{2n}} \geq \frac{1}{A} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}$$

για κάποια, όσο πιο μικρή γίνεται, σταθερά $A \geq 1$. Προς τοῦτο, θα ανατρέξουμε τώρα στα τελευταία βήματα του επιχειρήματος των Klartag και Milman και θα εξηγήσουμε γιατί μπορούμε να δείξουμε την ανισότητα (3.2.3) για κάθε $p \leq r_{\sharp}^H(\mu, cA)$ (όπου $c > 0$ είναι μία σταθερά ανεξάρτητη του μέτρου μ , τῆς διαστάσεως n του χώρου ἢ τῆς παραμέτρου A).

Το πρώτο πράγμα που έχουμε να δείξουμε είναι ότι, όταν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο στον \mathbb{R}^n και $p \leq r_{\sharp}^H(\mu, A)$, τότε

$$[\det \text{Cov}(\mu_x)]^{\frac{1}{2n}} \geq \frac{c'}{A}$$

για κάθε $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$. Στο υπόλοιπο τῆς παραγράφου, θα συμβολίζουμε τις θετικές ιδιοτιμές του πίνακα $\text{Cov}(\mu_x)$ ως $\lambda_1^x \leq \lambda_2^x \leq \dots \leq \lambda_n^x$, και θα γράφουμε E_k για τον k -διάστατο υπόχωρο που έχει ως βάση του ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχοῦν στις πρώτες k ιδιοτιμές του $\text{Cov}(\mu_x)$. Ξεκινούμε με το ακόλουθο λήμμα που είναι ουσιαστικά το Λήμμα 5.2 του [29].

Λήμμα 3.2.1. Για κάθε δύο άκεραίους $1 \leq s \leq k \leq n$ έχουμε ότι

$$(3.2.4) \quad \sqrt{\lambda_k^x} \geq c_1 \sup_{F \in G_{E_k, s}} |Z_s(\pi_F \mu_x)|^{1/s},$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

Απόδειξις. Παρατηρούμε ότι

$$(3.2.5) \quad \lambda_k^x = \max_{\theta \in S_{E_k}} \int_{E_k} \langle z, \theta \rangle^2 d\pi_{E_k} \mu_x(z) = \sup_{F \in G_{E_k, s}} \max_{\theta \in S_F} \int_F \langle z, \theta \rangle^2 d\pi_F \mu_x(z).$$

Αυτό ισχύει επειδή, για κάθε υπόχωρο F του E_k και κάθε $\theta \in S_F \subseteq S_{E_k}$, έχουμε ότι

$$\int_F \langle z, \theta \rangle^2 d\pi_F \mu_x(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle z, \theta \rangle^2 d\mu_x(z) = \int_{E_k} \langle z, \theta \rangle^2 d\pi_{E_k} \mu_x(z),$$

ένω η λ_k^x είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμή του πίνακα $\text{Cov}(\pi_{E_k} \mu_x)$.

Από την άλλη πλευρά, έφ' όσον το μ_x είναι ένα κεντραρισμένο, λογαριθμικά-κοίλο μέτρο πιθανότητας, απ' όπου έπεται ότι τέτοια είναι και όλα τα s -διάστατα περιθώρια μέτρα του $\pi_F \mu_x$, λαμβάνουμε από την Πρόταση 1.4.2 και τον όρισμό της ισοτροπικής σταθεράς ότι

$$(3.2.6) \quad |Z_s(\pi_F \mu_x)|^{1/s} \simeq \frac{1}{\|f_{\pi_F \mu_x}\|_\infty^{1/s}} = \frac{[\det \text{Cov}(\pi_F \mu_x)]^{\frac{1}{2s}}}{L_{\pi_F \mu_x}}.$$

Όμως $L_\nu \geq c$ για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο ν , για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, και έπομένως

$$|Z_s(\pi_F \mu_x)|^{1/s} \leq c' [\det \text{Cov}(\pi_F \mu_x)]^{\frac{1}{2s}} \leq c' \max_{\theta \in S_F} \sqrt{\int_F \langle z, \theta \rangle^2 d\pi_F \mu_x(z)}$$

για κάθε $F \in G_{E_k, s}$, το οποίο σε συνδυασμό με την (3.2.5) μάς δίνει την (3.2.4). \square

Για να φράξουμε την δεξιά πλευρά της (3.2.4) από μία έκφρασι που περιέχει την $\det \text{Cov}(\mu)$, πρέπει να συγκρίνουμε τον όγκο του $Z_s(\pi_F \mu_x)$ με τον όγκο του $Z_s(\pi_F \mu)$. αυτό είμαστε σε θέση να το επιτύχουμε εξαιτίας της (3.2.2). Η έπιλογή του s που κάνουμε τελικά δικαιολογείται από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.2.2. Έστω ότι μ είναι το n -διάστατο ισοτροπικό, λογαριθμικά-κοίλο μέτρο που έχουμε θεωρήσει. Θυμόμαστε ότι, για οποιοδήποτε $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$ και για κάθε φυσικό $k \leq n$, συμβολίζουμε με E_k τον k -διάστατο υπόχωρο του \mathbb{R}^n που έχει ως βάση του ιδιοδιανύσματα που αντιστοιχοϋν στις k πρώτες ιδιοτιμές του πίνακα $\text{Cov}(\mu_x)$. Για εύκολία, θέτουμε επίσης $s_k^x := r_{\sharp}(\pi_{E_k} \mu, A)$. Τότε

$$(3.2.7) \quad \sup_{F \in G_{E_k, s_k^x}} |Z_{s_k^x}(\pi_F \mu)|^{1/s_k^x} \geq \frac{c_2}{A} [\det \text{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}} = \frac{c_2}{A},$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Ὅπως καὶ στὴν (3.2.6), μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$|Z_{s_k^x}(\pi_F \mu)|^{1/s_k^x} \geq \frac{c_2}{\|f_{\pi_F \mu}\|_\infty^{1/s_k^x}} = \frac{c_2 [\det \text{Cov}(\pi_F \mu)]^{\frac{1}{2s_k^x}}}{L_{\pi_F \mu}}$$

γὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_2 > 0$ καὶ γὰν κάθε $F \in G_{E_k, s_k^x}$. Ἀφοῦ τὸ μ εἶναι ἰσοτροπικό, ἰσχύει ὅτι $\det \text{Cov}(\pi_F \mu) = \det \text{Cov}(\mu) = 1$. Ἐπίσης, ἀπὸ τὸν ὀρισμὸ τοῦ $s_k^x = r_\#(\pi_{E_k} \mu, A)$, γνωρίζουμε ὅτι ὑπάρχει τουλάχιστον ἓνας ὑπόχωρος τοῦ E_k διαστάσεως s_k^x , ἄς ποῦμε ὁ F_0 , μὲ τὴν ἰδιότητα τὸ περιθώριο μέτρο $\pi_{F_0}(\pi_{E_k} \mu) \equiv \pi_{F_0} \mu$ νὰ ἔχει ἰσοτροπικὴ σταθερὰ πὺ φράσσεται ἀπὸ A . Συνδυάζοντας ὅλα τὰ παραπάνω, καταλήγουμε στὴν

$$\sup_{F \in G_{E_k, s_k^x}} |Z_{s_k^x}(\pi_F \mu)|^{1/s_k^x} \geq |Z_{s_k^x}(\pi_{F_0} \mu)|^{1/s_k^x} \geq \frac{c_2}{A},$$

πὺ εἶναι τὸ ζητούμενο τοῦ λήμματος. □

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, γὰν νὰ συγκρίνουμε τὰ $Z_{s_k^x}(\pi_F \mu_x)$ καὶ $Z_{s_k^x}(\pi_F \mu)$ γὰν κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{E_k, s_k^x}$, ἀρκεῖ νὰ διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

- Ἐὰν $p \leq s_k^x = r_\#(\pi_{E_k} \mu, A)$, τότε ἀπὸ τὴν (3.2.2) ἔχουμε ὅτι $Z_{s_k^x}(\mu_x) \simeq Z_{s_k^x}(\mu)$, ἐπομένως καὶ γὰν κάθε $F \in G_{E_k, s_k^x}$ ἰσχύει ὅτι

$$Z_{s_k^x}(\pi_F \mu_x) = \text{Proj}_F(Z_{s_k^x}(\mu_x)) \simeq \text{Proj}_F(Z_{s_k^x}(\mu)) = Z_{s_k^x}(\pi_F \mu).$$

- Ἐὰν $s_k^x < p$, τότε χρησιμοποιῶντας τὴν (1.4.1) καὶ τὴν (3.2.2) μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$Z_{s_k^x}(\pi_F \mu_x) \supseteq c_0 \frac{s_k^x}{p} Z_p(\pi_F \mu_x) \supseteq c_0' \frac{s_k^x}{p} Z_p(\pi_F \mu) \supseteq c_0' \frac{s_k^x}{p} Z_{s_k^x}(\pi_F \mu)$$

γὰ κάποιες ἀπόλυτες σταθερὲς $c_0, c_0' > 0$. Θυμόμαστε ἐπιπλέον ὅτι, ἀφοῦ

$$p \leq r_\#^H(\mu, A) = n \inf_k \inf_{E \in G_{n,k}} \frac{r_\#(\pi_E \mu, A)}{k} \leq \frac{n}{k} r_\#(\pi_{E_k} \mu, A),$$

θὰ ἰσχύει ὅτι $s_k^x/p = r_\#(\pi_{E_k} \mu, A)/p \geq k/n$.

Συνοψίζοντας τὰ παραπάνω, βλέπουμε ὅτι σὲ κάθε περίπτωσι καὶ γὰν κάθε ὑπόχωρο $F \in G_{E_k, s_k^x}$ ἰσχύει ὅτι

$$(3.2.8) \quad Z_{s_k^x}(\pi_F \mu_x) \supseteq c_0'' \min\left\{1, \frac{s_k^x}{p}\right\} Z_{s_k^x}(\pi_F \mu) \supseteq c_0'' \frac{k}{n} Z_{s_k^x}(\pi_F \mu),$$

ὅπου $c_0'' > 0$ εἶναι μία ἀρκετὰ μικρὴ ἀπόλυτη σταθερά. Ἔχουμε πλέον ὅ,τι μᾶς χρειάζεται γὰν νὰ φράξουμε τὸ $|Z_p(\mu)|^{1/n}$ ἀπὸ κάτω.

Θέωρημα 3.2.3. Ἐστω ὅτι μ εἶναι ἓνα n -διάστατο ἰσοτροπικό, λογαριθμικὰ-κοῖλο μέτρο καὶ ἔστω $A \geq 1$. Τότε, γὰν κάθε $p \in [1, r_\#^H(\mu, A)]$, ἔχουμε ὅτι

$$|Z_p(\mu)|^{1/n} \geq \frac{c}{A} \sqrt{\frac{p}{n}},$$

ὅπου $c > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Συνδυάζοντας τὰ Λήμματα 3.2.1 καὶ 3.2.2 μὲ τὴν (3.2.8), ἔχουμε ὅτι, γιὰ κάθε $p \in [1, r_{\sharp}^H(\mu, A)]$ καὶ γιὰ κάθε $x \in \frac{1}{2}\Lambda_p(\mu)$,

$$[\det \text{Cov}(\mu_x)]^{1/2} = \prod_{k=1}^n \sqrt{\lambda_k^x} \geq \prod_{k=1}^n \frac{c}{A} \frac{k}{n} = \frac{c^n}{A^n} \frac{n!}{n^n}.$$

Θεωρῶντας n -οστές ρίζες, βλέπουμε ὅτι τὸ ζητούμενο ἔπεται ἀπὸ τὴν (3.2.1). \square

3.3 Σύγκρισις τῶν βασικῶν παραμέτρων καὶ ἄλλες παρατηρήσεις

Ἀπὸ τὸ Θεώρημα 3.1.7 μένει νὰ δείξουμε τὴν (3.1.10). Τὸ πρῶτο βῆμα εἶναι ἡ ἀκόλουθη συνέπεια τοῦ Θεωρήματος 3.2.3.

Πόρισμα 3.3.1. Ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $C_1 > 0$ τέτοια ὥστε, γιὰ κάθε n -διάστατο ἰσοτροπικὸ λογαριθμικὰ-κοῦλο μέτρο μ καὶ κάθε $A \geq 1$,

$$r_{\sharp}^H(\mu, A) \leq \lfloor q_{-c}(\mu, C_1 A) \rfloor.$$

Μὲ ἄλλα λόγια, ἔχουμε ὅτι

$$I_{-p}(\mu) \geq \frac{1}{C_1 A} I_2(\mu) = \frac{1}{C_1 A} \sqrt{n}$$

γιὰ κάθε $p \leq \lceil r_{\sharp}^H(\mu, A) \rceil$.

Ἀπόδειξις. Ἄς θέσουμε $p_A := r_{\sharp}^H(\mu, A)$ καὶ ἄς παρατηρήσουμε ὅτι

$$|Z_{\lceil p_A \rceil}(\mu)|^{1/n} \geq |Z_{p_A}(\mu)|^{1/n} \geq \frac{c'}{A} \sqrt{\frac{\lceil p_A \rceil}{n}}.$$

Ἀπὸ τὴς ἀνισότητες Hölder καὶ Santaló, ἔπεται ὅτι

$$w_{-\lceil p_A \rceil}(Z_{\lceil p_A \rceil}(\mu)) \geq w_{-n}(Z_{\lceil p_A \rceil}(\mu)) \geq \frac{|Z_{\lceil p_A \rceil}(\mu)|^{1/n}}{\omega_n^{1/n}} \geq \frac{c''}{A} \sqrt{\lceil p_A \rceil}.$$

Ἐφ' ὅσον $r_{\sharp}^H(\mu, A) \leq r_{\sharp}(\mu, A) \leq n - 1$ ἐξ ὀρισμοῦ, ἔχουμε ὅτι $\lceil p_A \rceil \leq n - 1$, καὶ ἄρα μποροῦμε, ἐφαρμόζοντας τὸ Θεώρημα 1.4.6 ποὺ συνδέει τὴς ἀρνητικὲς ῥοπὲς τῆς Εὐκλείδειας νόρμας μὲ τὰ ἀρνητικὰ μέσα πλάτη τῶν κεντροειδῶν σωμάτων, νὰ συμπεράνουμε ὅτι

$$I_{-\lceil p_A \rceil}(\mu) \geq \frac{1}{C_1 A} \sqrt{n}$$

γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $C_1 > 0$. \square

Ἀπόδειξις τῆς (3.1.10). Για τὴν ἀριστερὴ ἀνισότητα χρησιμοποιοῦμε τὸ Πόρισμα 3.3.1 γιὰ κάθε περιθώριο μέτρο $\pi_{E\mu}$ τοῦ μ : λαμβάνουμε ὅτι $r_{\#}^H(\pi_{E\mu}, A) \leq \lfloor q_{-c}(\pi_{E\mu}, C_1A) \rfloor$. Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι

$$\begin{aligned} r_{\#}^H(\mu, A) &= n \inf_k \inf_{F \in G_{n,k}} \frac{r_{\#}(\pi_F \mu, A)}{k} \\ &\leq n \inf_{s \leq \dim E} \inf_{F \in G_{E,s}} \frac{r_{\#}(\pi_F \mu, A)}{s} = \frac{n}{\dim E} r_{\#}^H(\pi_{E\mu}, A), \end{aligned}$$

τὸ ὁποῖο σημαίνει ὅτι γιὰ κάθε ἀκέραιο k , καὶ γιὰ κάθε ὑπόχωρο $E \in G_{n,k}$,

$$r_{\#}^H(\mu, A) \leq \frac{n}{k} r_{\#}^H(\pi_{E\mu}, A) \leq \frac{n}{k} \lfloor q_{-c}(\pi_{E\mu}, C_1A) \rfloor.$$

Ἰσοδύναμα ἔχουμε ὅτι $r_{\#}^H(\mu, A) \leq q_{-c}^H(\mu, C_1A)$.

Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, γιὰ τὸ δεξιὸ μέρος τῆς (3.1.10) χρησιμοποιοῦμε τὸν τύπο (1.4.5) τοῦ Παούρη γιὰ τὶς ἀρνητικὲς ῥοπές, ἀπὸ τὸν ὁποῖο συνεπάγεται ὅτι, ἂν k εἶναι κάποιος ἀκέραιος τέτοιος ὥστε

$$I_{-k}(\mu) \simeq \sqrt{n} \left(\int_{G_{n,k}} f_{\pi_{E\mu}}(0) d\nu_{n,k}(E) \right)^{-1/k} \geq \frac{1}{C_1A} I_2(\mu) = \frac{1}{C_1A} \sqrt{n},$$

δηλαδή ἂν $k \leq \lfloor q_{-c}(\mu, C_1A) \rfloor$, τότε πρέπει νὰ ὑπάρχει τουλάχιστον ἓνας ὑπόχωρος $E \in G_{n,k}$ ἔτσι ὥστε $f_{\pi_{E\mu}}(0) \leq (C_1A)^k$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ C_1' (ἢ ὁποία ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴν σταθερὰ C_1). Ἀφοῦ ὁμως τὸ περιθώριο μέτρο $\pi_{E\mu}$ εἶναι ἰσοτροπικό, ἔχουμε ὅτι

$$L_{\pi_{E\mu}} = \|f_{\pi_{E\mu}}\|_{\infty}^{1/k} \leq e(f_{\pi_{E\mu}}(0))^{1/k} \leq C_2A.$$

Προκύπτει συνεπῶς ὅτι

$$r_{\#}(\mu, C_2A) \geq \lfloor q_{-c}(\mu, C_1A) \rfloor,$$

καὶ ἡ ἴδια ἀνισότητα θὰ ἰσχύει καὶ γιὰ κάθε περιθώριο μέτρο $\pi_F \mu$ τοῦ μ . Ἡ δεξιὰ ἀνισότητα τῆς (3.1.10) ἔπεται τώρα ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν $r_{\#}^H(\mu, C_2A)$ καὶ $q_{-c}^H(\mu, C_1A)$. \square

Συνοψίζουμε στὴν παρακάτω πρότασι τὶς σχέσεις ποὺ ἰσχύουν μεταξὺ τῶν παραμέτρων ποὺ εἶδαμε σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο.

Πρότασις 3.3.2. Ἐστω μ ἓνα ἰσοτροπικό λογαριθμικά-κοῖλο μέτρο στὸν \mathbb{R}^n . Τότε ὑπάρχουν ἀπόλυτες σταθερὲς $A_0, C_1 \geq 1$ καὶ $c_1, c_2 > 0$ ὥστε γιὰ κάθε $A \geq A_0$ νὰ ἔχουμε

$$(3.3.1) \quad r_{\#}(\mu, C_1A) \geq q_{-c}(\mu, A) \geq c_1 q_*(\mu) \geq c_2 \sqrt{n}.$$

Ἀνάλογες ἀνισότητες ἰσχύουν γιὰ τὶς ἀντίστοιχες κληρονομικὲς παραμέτρους δεδομένου ὅτι κάθε περιθώριο μέτρο τοῦ ἰσοτροπικοῦ, λογαριθμικά-κοίλου μ εἶναι ἰσοτροπικό καὶ λογαριθμικά-κοῖλο:

$$r_{\#}^H(\mu, C_1A) \geq q_{-c}^H(\mu, A) \geq c_1 q_*^H(\mu) \geq c_2 \sqrt{n}.$$

Προφανώς επίσης κάθε κληρονομική παράμετρος είναι μικρότερη σε τάξι μεγέθους από την αντίστοιχη κανονική παράμετρο. Τέλος, υπάρχει μία σταθερά $C_2 \geq 1$ ώστε για κάθε $A \geq 1$ να ισχύει

$$q_{-c}^H(\mu, C_2 A) \geq r_{\sharp}^H(\mu, A),$$

το οποίο δείχνει ότι οι κληρονομικές παράμετροι $r_{\sharp}^H(\cdot, A)$ και $q_{-c}^H(\cdot, A)$ είναι κατ' ουσίαν ισοδύναμες.

Το Θεώρημα 3.1.7 μᾶς επιτρέπει να διώξουμε τὸν λογαριθμικὸ ὄρο ἀπὸ τὸ φράγμα (3.1.7) στὶς περιπτώσεις ἐκεῖνες πὸν τὰ κάτω φράγματα πὸν ἔχουμε γιὰ τὶς παραμέτρους $q_{-c}(\mu, \delta)$ καὶ $q_{-c}^H(\mu, \delta)$ εἶναι τῆς ἰδίας τάξεως (αὐτὸ μπορεῖ νὰ συμβαίνει γιὰ παράδειγμα ἂν ἔχουμε κάτω φράγμα τῆς μορφῆς

$$\inf_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} q_{-c}(\mu, \delta) \geq h_{\delta}(n)$$

γιὰ κάποια συνάρτησι h_{δ} μετὴν ἰδιότητα ὁ λόγος $h_{\delta}(n)/n$ νὰ φθίνει ὅταν τὸ n αὐξάνεται). Μία βελτίωσις στὰ κάτω φράγματα πὸν γνωρίζουμε θὰ μποροῦσε νὰ ἔρθει μέσω τῆς μελέτης τῆς παραμέτρου $r_{\sharp}(\mu, A)$. στὴν πραγματικότητα τὰ ἀποτελέσματα σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο δείχνουν ὅτι ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἰσοδύναμη μετὴν φαινομενικὰ ἀσθενέστερη ἀπαίτησι κάθε ἰσοτροπικὸ λογαριθμικᾶ-κοῖλο μέτρο μ στὸν \mathbb{R}^n νὰ ἔχει περιθώρια μέτρα διαστάσεως ἀνάλογης τοῦ n πὸν ἔχουν φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερά. Παρότι φαίνεται ἀκόμη πολὺ δύσκολο νὰ ἐπιβεβαιώσῃ ἢ νὰ διαφεύσῃ κάποιος μία τέτοια ἰδιότητα τῶν ἰσοτροπικῶν μέτρων, καὶ παρότι ἡ μόνη ἐκτίμησις πὸν ἔχουμε τώρα γιὰ τὸ $r_{\sharp}(\mu, A)$ γιὰ ἕνα τυχὸν μέτρο μ προκύπτει ἀπὸ τὴν (3.3.1), μποροῦμε νὰ ἀναφέρουμε κάποια ἐνδιαφέροντα στοιχεῖα πὸν γνωρίζουμε ἤδη γιὰ τὴν συμπεριφορὰ τῆς ἰσοτροπικῆς σταθερᾶς περιθωρίων μέτρων.

Πρῶτα, χρησιμοποιῶντας τὶς ἀνισότητες Hölder καὶ Santaló, καθὼς καὶ τὸ Θεώρημα 1.4.6, βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} (3.3.2) \quad I_{-k}(\mu) &\geq c_1 \sqrt{\frac{n}{k}} w_{-k}(Z_k(\mu)) \geq c_1 \sqrt{\frac{n}{k}} w_{-n}(Z_k(\mu)) \\ &\geq c_1 \sqrt{\frac{n}{k}} \frac{|Z_k(\mu)|^{1/n}}{\omega_n^{1/n}} \geq c_2 \frac{n}{\sqrt{k}} |Z_k(\mu)|^{1/n} \end{aligned}$$

γιὰ κάθε φυσικὸ $k \leq n-1$, γιὰ κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικᾶ-κοῖλο μέτρο πιθανότητος μ στὸν \mathbb{R}^n , ὅπου $c_1, c_2 > 0$ εἶναι ἀπόλυτες σταθερές. Ἀπὸ τὴν (1.4.1) ἔχουμε ἐπίσης ὅτι

$$Z_{n-1}(\mu) \subseteq Z_n(\mu) \subseteq c Z_{n-1}(\mu),$$

ἐπομένως, χρησιμοποιῶντας τὴν Πρότασι 1.4.2 καὶ τὸ Θεώρημα 1.3.5 τοῦ Fradelizi, καταλήγουμε στὴν $|Z_{n-1}(\mu)|^{1/n} \simeq \|\mu\|_{\infty}^{-1/n}$. Ἔπεται ὅτι

$$(3.3.3) \quad I_{-p}(\mu) \geq I_{-(n-1)}(\mu) \gtrsim \sqrt{n} |Z_{n-1}(\mu)|^{1/n} \gtrsim \sqrt{n} / \|\mu\|_{\infty}^{1/n}$$

γιὰ κάθε $p \leq n-1$. Τότε ὅμως, ἐφ' ὅσον μιλάμε γιὰ ἕνα ἰσοτροπικὸ μέτρο μ , πὸν συνεπάγεται ὅτι ἰσοτροπικὰ θὰ εἶναι καὶ ὅλα τὰ περιθώρια μέτρα του, βλέπουμε ὅτι ἀπὸ τὸν τύπο (1.4.5) καὶ τὸ

Θεώρημα 1.3.5 προκύπτει ότι

$$(3.3.4) \quad I_{-k}(\mu) \simeq \sqrt{n} \left(\int_{G_{n,k}} [(f_{\pi_E \mu}(0))^{1/k}]^k d\nu_{n,k}(E) \right)^{-1/k} \simeq \sqrt{n} \left(\int_{G_{n,k}} L_{\pi_E \mu}^k d\nu_{n,k}(E) \right)^{-1/k}$$

για κάθε φυσικό $k \leq n - 1$. Συνδυάζοντάς το αυτό με την (3.3.3), καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι

$$\left(\int_{G_{n,k}} L_{\pi_E \mu}^k d\nu_{n,k}(E) \right)^{1/k} \leq C_0 \|\mu\|_\infty^{1/n} = C_0 L_\mu$$

και άρα ότι

$$(3.3.5) \quad \nu_{n,k}(\{E \in G_{n,k} : L_{\pi_E \mu} \leq C_1 L_\mu\}) \geq 1 - e^{-k}$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές C_0, C_1 (άκόμη καλύτερες εκτιμήσεις για το μέτρο τῶν παραπάνω συνόλων έχουν βρεθεί, όπως αναφέραμε και στην Παρατήρησι 2.4.4, από τους Δαφνή και Παούρη [15] στην περίπτωση που το μέτρο μ είναι το ομοιόμορφο μέτρο πάνω σε ένα ισοτροπικό κυρτό σῶμα).

Στην συνέχεια, έχουμε να αναφέρουμε την Πρότασι 3.1.8, ή οποία μᾶς δίνει ένα «κακό» κάτω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά τῶν περιθωρίων μέτρων κάποιων περιπτώσεων μέτρων που έχουν μεγιστική ισοτροπική σταθερά. Τὰ μέτρα που θεωρούμε είναι τὰ ισοτροπικά λογαριθμικά-κοίλα που κατανέμονται ομοιόμορφα σε κυρτά σώματα. Υπενθυμίζουμε ότι, σύμφωνα με τους όρισμούς μας, κάθε τέτοιο ισοτροπικό μέτρο μ έχει φορέα ένα κεντραρισμένο, κυρτό σῶμα K που ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 \mathbf{1}_K(x) dx = |K| \quad \text{για κάθε } \theta \in S^{n-1},$$

(είναι γνωστό ότι μπορούμε να φέρουμε κάθε κυρτό σῶμα στὸν \mathbb{R}^n σε μία τέτοια θέση μέσω ἑνὸς ἀφινικοῦ μετασχηματισμοῦ), καὶ τότε ἡ πυκνότητα τοῦ $\mu \equiv \mu_K$ δίδεται ἀπὸ τὴν

$$f_\mu(x) := |K|^{-1} \cdot \mathbf{1}_K(x).$$

Προφανῶς, ἕνα τέτοιο μέτρο μ ἀνήκει στὴν κλάση $\mathcal{IL}_{[n]}$ τῶν ισοτροπικῶν λογαριθμικά-κοίλων μέτρων καὶ $L_\mu = |K|^{-1/n}$. Θὰ συμβολίζουμε αὐτὴν τὴν ὑποκλάση τῆς $\mathcal{IL}_{[n]}$ μὲ $\mathcal{IK}_{[n]}$, καὶ θὰ κάνουμε χρῆσι τοῦ ἀποτελέσματος τοῦ Ball ποὺ εἶδαμε στὴν Παράγραφο 1.3.2:

$$L_n = \sup_{\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}} L_\mu \leq C \sup_{\mu_K \in \mathcal{IK}_{[n]}} L_{\mu_K}$$

για κάποια ἀπόλυτη σταθερά C . Στὴν ἀπόδειξι ποὺ ἀκολουθεῖ ἐπανερχόμαστε πιὸ λεπτομερῶς στὸ ἐπιχείρημα μὲ τὸ ὁποῖο προκύπτει τὸ Λήμμα 2.3.6· ἡ κύρια ἰδέα πίσω ἀπὸ αὐτὸ τὸ ἐπιχείρημα εἶναι νὰ δουλέψουμε μὲ κυρτά σώματα ποὺ ἔχουν μεγιστική ισοτροπική σταθερά καὶ τὰ M -ἔλλειψοειδή τους, καὶ ἐμφανίζεται γιὰ πρώτη φορὰ στὸ [11].

Ἀπόδειξις τῆς Προτάσεως 3.1.8. Ἐστω $\alpha \in (0, 1]$ καὶ ἔστω ἰσοτροπικὸ μέτρο $\mu \in \mathcal{IK}_{[n]}$ μὲ τὴν ιδιότητα $L_\mu \geq \alpha L_n$. Θεωροῦμε τὸ σῶμα K ποὺ εἶναι ὁ φορέας τοῦ μ (αὐτὸ σημαίνει ὅτι $f_\mu = |K|^{-1} \cdot \mathbf{1}_K$), καὶ βρῖσκουμε ἕνα M -ἔλλειψοειδὲς \mathcal{E}_K γιὰ τὸ K , δηλαδὴ ἕνα ἔλλειψοειδὲς τέτοιο ὥστε $|\mathcal{E}_K| = |K|$ καὶ $N(K, \mathcal{E}_K) \leq e^{b_0 n}$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ b_0 . Ὅπως εἶδαμε καὶ στὸ Λήμμα 2.3.6, χρησιμοποιοῦμε ἐπανειλημμένα τὸ γεγονός ὅτι, ἀπὸ τὴν ἀνισότητα (1.2.1) τῶν Rogers καὶ Shephard καὶ τὴν ἀνισότητα (1.2.6) τοῦ Spingarn ποὺ εἶδαμε στὴν Εἰσαγωγή,

$$(3.3.6) \quad |K| \leq |K \cap E^\perp| |\text{Proj}_E(K)| \leq \binom{n}{k} |K|$$

γιὰ κάθε ὑπόχωρο $E \in G_{n,k}$ (καὶ τὸ ἀντίστοιχο ἂν βάλουμε \mathcal{E}_K στὴν θέση τοῦ K). Θὰ ἐπικαλεστοῦμε ἐπίσης τὶς ιδιότητες ποὺ ἀναφέραμε στὸ Λήμμα 2.3.4 γιὰ τὸν ὄγκο τῶν προβολῶν καὶ τῶν τομῶν ἑνὸς ἔλλειψοειδοῦς. Ξεκινοῦμε ἐφαρμόζοντας τὸ ἀριστερὸ μέρος τῆς (3.3.6) γιὰ κάποιον τυχόντα ὑπόχωρο $F \in G_{n,n-k}$: βλέπουμε τότε ὅτι ἰσχύει

$$|\text{Proj}_F(K)| \geq \frac{1}{|K|^{-1} |K \cap F^\perp|}.$$

Ἐξ ὀρισμοῦ ὁμως

$$|K|^{-1} |K \cap F^\perp| = |K|^{-1} \int_{F^\perp} \mathbf{1}_K(y) dy = \int_{F^\perp} f_\mu(y) dy = f_{\pi_F \mu}(0) \leq (L_{\pi_F \mu})^{n-k}.$$

Ἐφ' ὅσον $L_{\pi_F \mu} \leq L_{(n-k)} \leq b_1 L_n$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ b_1 ἀπὸ τὸ Θεώρημα 2.1.4 τῶν Bourgain, Klartag καὶ V. Milman ([11]), προκύπτει ὅτι

$$\min_{F \in G_{n,n-k}} |\text{Proj}_F(K)| \geq \frac{1}{(b_1 L_n)^{n-k}} \geq \left(\frac{\alpha}{b_1 L_\mu} \right)^{n-k}.$$

Παρατηροῦμε ἐπίσης ὅτι $N(\text{Proj}_F(K), \text{Proj}_F(\mathcal{E}_K)) \leq N(K, \mathcal{E}_K) \leq e^{b_0 n}$, καὶ ἐπομένως

$$\min_{F \in G_{n,n-k}} |\text{Proj}_F(\mathcal{E}_K)| \geq e^{-b_0 n} \min_{F \in G_{n,n-k}} |\text{Proj}_F(K)|.$$

Ἀλλὰ τότε, ἀπὸ τὴν δεξιὰ ἀνισότητα στὴν (3.3.6) βλέπουμε ὅτι

$$(3.3.7) \quad \begin{aligned} \max_{E \in G_{n,k}} |\mathcal{E}_K \cap E| &= \max_{F \in G_{n,n-k}} |\mathcal{E}_K \cap F^\perp| \\ &\leq \binom{n}{n-k} e^{b_0 n} \left(\frac{b_1 L_\mu}{\alpha} \right)^{n-k} |\mathcal{E}_K| = \binom{n}{k} e^{b_0 n} \left(\frac{b_1 L_\mu}{\alpha} \right)^{n-k} |K|. \end{aligned}$$

Θυμόμαστε τώρα ὅτι, ὅπως ἀναφέραμε στὴν Παράγραφο 2.3, κάθε ἔλλειψοειδὲς \mathcal{E} ἔχει τὴν ιδιότητα

$$\max_{H \in G_{n,s}} |\text{Proj}_H(\mathcal{E})| = \max_{H \in G_{n,s}} |\mathcal{E} \cap H|$$

γιὰ κάθε $1 \leq s \leq n$, καὶ ἄρα ἀπὸ τὴν (3.3.7) λαμβάνουμε τὴν

$$\max_{E \in G_{n,k}} |\text{Proj}_E(K)| \leq e^{b_0 n} \max_{E \in G_{n,k}} |\text{Proj}_E(\mathcal{E}_K)| \leq \binom{n}{k} e^{2b_0 n} (\alpha^{-1} b_1 L_\mu)^{n-k} |K|.$$

Χρειάζεται να εφαρμόσουμε μία τελευταία φορά την άριστερη άνισότητα στην (3.3.6) για να καταλήξουμε στην

$$\min_{E \in G_{n,k}} |K \cap E^\perp| \geq \binom{n}{k}^{-1} e^{-2b_0 n} (\alpha^{-1} b_1 L_\mu)^{-(n-k)},$$

ή ισοδύναμα στην

$$(3.3.8) \quad \min_{E \in G_{n,k}} ((L_\mu)^n |K \cap E^\perp|) \geq \binom{n}{k}^{-1} \frac{(e^{-2b_0} \alpha b_1^{-1})^n}{(\alpha b_1^{-1})^k} (L_\mu)^k.$$

Άλλα δεδομένου ότι $(L_\mu)^n = |K|^{-1}$ και $|K|^{-1} |K \cap E^\perp| = f_{\pi_{E\mu}}(0) \leq (L_{\pi_{E\mu}})^k$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (3.3.8) ως

$$\min_{E \in G_{n,k}} (L_{\pi_{E\mu}})^k \geq \left(\frac{en}{k}\right)^{-k} \frac{(e^{-2b_0} \alpha b_1^{-1})^n}{(\alpha b_1^{-1})^k} (L_\mu)^k,$$

και μετά, θεωρώντας k -οστές ρίζες, να συμπεράνουμε ότι

$$(3.3.9) \quad \begin{aligned} \min_{E \in G_{n,k}} L_{\pi_{E\mu}} &\geq \frac{k}{en} \frac{\alpha^{\frac{n}{k}} (e^{-2b_0} b_1^{-1})^{\frac{n}{k}}}{\alpha b_1^{-1}} L_\mu \\ &= \lambda \alpha^{\frac{1}{\lambda}-1} \frac{e^{-1} b_1}{(e^{2b_0} b_1)^{1/\lambda}} L_\mu \end{aligned}$$

δηλαδή το ζητούμενο. Άξίζει να σημειώσουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν για κάθε ισοτροπικό μέτρο $\mu \in \mathcal{IK}_{[n]}$ με την ιδιότητα $L_\mu \geq \alpha L_n$. \square

Η Πρόταση 3.1.8 φανερώνει ένδεχομένως και κάποιους περιορισμούς των δύο μεθόδων που εξετάσαμε σε αυτό το κεφάλαιο. Παρατηρούμε ότι, από την (3.3.9) και την (3.3.4), μπορούμε να γράψουμε

$$(3.3.10) \quad I_{-k}(\mu) \leq \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\sqrt{n}}{L_\mu} = \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{I_2(\mu)}{L_\mu}$$

για όλους τους θετικούς άκεραίους $k = \lambda n \leq n - 1$ και για όλα τα ισοτροπικά μέτρα $\mu \in \mathcal{IK}_{[n]}$ για τα όποια ισχύει $L_\mu \geq \alpha L_n$, όπου C_0 είναι μία απόλυτη σταθερά. Στην γλώσσα των σωμάτων, μπορούμε να γράψουμε ότι

$$(3.3.11) \quad I_{-k}(K) \leq \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}} \sqrt{n} = \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}} \frac{I_2(K)}{L_K}$$

για όλους τους θετικούς άκεραίους $k = \lambda n \leq n - 1$ και για όλα τα ισοτροπικά κυρτά σώματα K στον \mathbb{R}^n . Χρησιμοποιώντας την Παρατήρησι 1.4.3, μπορούμε να γενικεύσουμε την (3.3.10) για κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$.

Πόρισμα 3.3.3. Έστω $\alpha \in (0, 1]$ και έστω ισοτροπικό λογαριθμικά-κοίλο μέτρο μ στον \mathbb{R}^n με $L_\mu \geq \alpha L_n$. Τότε για κάθε θετικό άκέραιο $k = \lambda n \leq n/2$ έχουμε ότι

$$I_{-k}(\mu) \leq \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_1^{\frac{1}{\lambda}} \frac{\sqrt{n}}{L_\mu},$$

Άρα, χρησιμοποιώντας και την ανισότητα Hölder, λαμβάνουμε ένα ανάλογο φράγμα για όλα τα $p \in [1, n/2]$ και το φράγμα

$$I_{-p}(\mu) \leq \sqrt{\alpha} C_2 \frac{\sqrt{n}}{L_\mu}$$

για τα $p \in [n/2, n)$, όπου C_1, C_2 είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξις. Από την Παρατήρησι 1.4.3, και αφού το μ είναι ισοτροπικό, έχουμε για κάθε $p \in [-n/2, -1]$, $p \neq 0$, ότι

$$(3.3.12) \quad I_p(\overline{K}_{n+1}(\mu)) \simeq (f_\mu(0))^{1/n} I_p(\mu) \simeq L_\mu I_p(\mu).$$

Θέτουμε $Q = \overline{K}_{n+1}(\mu)$ και υπενθυμίζουμε ότι, από την Πρότασι 1.3.21, έχουμε $L_Q \simeq L_\mu$, άρα $L_Q \geq c_1 \alpha L_n$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, και ότι το Q είναι σχεδόν ισοτροπικό με μία απόλυτη σταθερά C . Έξ ορισμού αυτό σημαίνει ότι, αν $S(Q)$ είναι μία ισοτροπική εικόνα του Q , όπου $S \in SL(n)$, τότε $C^{-1}B_2^n \subseteq S(B_2^n) \subseteq CB_2^n$. Όμως τότε, για κάθε $p \neq 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} I_p(S(Q)) &= \left(\int_{S(Q)} \|x\|_2^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_Q \|S(x)\|_{B_2^n}^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_Q \|x\|_{S^{-1}(B_2^n)}^p dx \right)^{1/p} \\ &\leq \left(\int_Q \|x\|_{C^{-1}B_2^n}^p dx \right)^{1/p} = \left(\int_Q C^p \|x\|_{B_2^n}^p dx \right)^{1/p} = C I_p(Q). \end{aligned}$$

Με όμοιο τρόπο, βλέπουμε ότι $I_p(S(Q)) \geq C^{-1} I_p(Q)$ για κάθε $p \neq 0$, και άρα μπορούμε να επικαλεστούμε την (3.3.11), η οποία ισχύει για το ισοτροπικό κυρτό σῶμα $S(Q)$, για να φράξουμε και τις ροπές $I_{-k}(Q)$ του σώματος Q , όπου $k = \lambda n \leq n - 1$ θετικός άκεραίος. Συμπεραίνουμε ότι

$$I_{-k}(Q) \leq C(c_1 \alpha)^{1-\frac{1}{\lambda}} C_0^{\frac{1}{\lambda}} \sqrt{n} \leq \alpha^{1-\frac{1}{\lambda}} C_1^{\frac{1}{\lambda}} \sqrt{n}.$$

Συνδυάζοντας αυτό με την (3.3.12), παίρνουμε το ζητούμενο. \square

Από την άλλη πλευρά, έχουμε ότι ισχύει η (3.3.3) για κάθε $\mu \in \mathcal{IL}_{[n]}$, και επίσης έχουμε το κάτω φράγμα για τον όγκο των $Z_p(\mu)$ που προκύπτει από την ανισότητα των Lutwak, Yang και Zhang [37] σε συνδυασμό με την Πρότασι 1.4.2 από το [53]: $|Z_p(\mu)|^{1/n} \gtrsim \sqrt{p/n} L_\mu^{-1}$ για κάθε $p \geq 1$. Καταλήγουμε επομένως στην

$$(3.3.13) \quad c_1 \frac{\sqrt{n}}{L_\mu} \leq \frac{n}{\sqrt{p}} |Z_p(\mu)|^{1/n} \leq c_2 I_{-p}(\mu) \leq C_3^{\frac{n}{p}} \frac{\sqrt{n}}{L_\mu},$$

η οποία ισχύει για κάθε $1 \leq p \leq n - 1$ και για κάθε λογαριθμικά-κοίλο ισοτροπικό μέτρο μ στον \mathbb{R}^n με την ιδιότητα $L_\mu \simeq L_n$, όπου $c_1, c_2, C_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές (η δεύτερη ανισότητα είναι συνέπεια της (3.3.2)). Προφανώς, η (3.3.13) είναι βέλτιστη (έκτος από την τιμή των σταθερών) όταν το p είναι ανάλογο του n .

Μία γεωμετρική απόδειξις τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló

4.1 Ἡ ἱστορία τῆς ἀνισότητος καὶ ἡ σχέσηις τῆς μὲ τὴν M - θέσι τοῦ Milman

Ὅπως εἶδαμε στὴν Εἰσαγωγή, ἡ ἀνισότητα Blaschke-Santaló μᾶς λέει ὅτι, μεταξὺ ὄλων τῶν κυρτῶν σωμάτων ποὺ ἔχουν κέντρο βάρους τὸ 0, αὐτὸ ποὺ μεγιστοποιεῖ τὸ γινόμενο ὄγκων $s(K) := |K| \cdot |K^\circ|$ εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα. Ἡ ἀνισότητα μπορεῖ νὰ διατυπωθεῖ πιὸ ἀναλυτικὰ ὡς ἑξῆς: γιὰ κάθε $z \in \text{int}(K)$ ὀρίζεται τὸ πολικὸ σῶμα τοῦ $K \subset \mathbb{R}^n$ ὡς πρὸς τὸ σημεῖο z ὡς τὸ σύνολο

$$(K - z)^\circ := \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y - z \rangle \leq 1 \ \forall y \in K\},$$

καὶ ἔχουμε ὅτι

$$|(K - z)^\circ| = \omega_n \int_{S^{n-1}} (h_K(\theta) - \langle \theta, z \rangle)^{-n} d\sigma(\theta).$$

Ἄρα παραγωγίζοντας μποροῦμε νὰ ἐλέγξουμε ὅτι ἡ $z \in \text{int}(K) \mapsto |(K - z)^\circ|$ εἶναι γνησίως κυρτὴ καὶ συνεπῶς ὑπάρχει ἓνα μοναδικὸ σημεῖο $z_0 \in \text{int}(K)$ γιὰ τὸ ὁποῖο ἰσχύει

$$|(K - z_0)^\circ| = \min_{z \in \text{int}(K)} |(K - z)^\circ|.$$

Τότε ἡ ἀνισότητα Blaschke-Santaló μᾶς λέει ὅτι γιὰ αὐτὸ τὸ σημεῖο, τὸ ὁποῖο ὀνομάζουμε *σημεῖο Santaló* τοῦ σώματος K , ἰσχύει ὅτι $|K| \cdot |(K - z_0)^\circ| \leq |B_2^n|^2$ μὲ ἰσότητα ἂν καὶ μόνον ἂν τὸ K εἶναι ἐλλειψοειδές. Σημειώνουμε ἐπίσης ὅτι μία ἀκόμη ἀπὸ τὶς συνέπειες τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski εἶναι ὅτι τὸ σημεῖο Santaló τοῦ K χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὴν ιδιότητα ὅτι τὸ $(K - z_0)^\circ$ ἔχει κέντρο βάρους τὸ 0, τὸ ὁποῖο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ διατυπώσουμε τὴν ἀνισότητα καὶ ὅπως κάναμε στὴν ἀρχὴ δεδομένου ὅτι

$$\begin{aligned} & \{s(K) : K \text{ κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n\} \\ &= \{|K| \cdot |(K - z_0)^\circ| : K \text{ κυρτὸ σῶμα στὸν } \mathbb{R}^n, z_0 \text{ τὸ σημεῖο Santaló τοῦ } K\}. \end{aligned}$$

Ἡ ἀνισότητα ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Blaschke [3] τὸ 1917 στὸν \mathbb{R}^2 καὶ στὸν \mathbb{R}^3 καὶ ἀπὸ τὸν Santaló [61] τὸ 1949 σὲ ὅλες τὶς διαστάσεις. Ἐπιπλέον, τὸ γεγονός ὅτι μόνον τὰ ἐλλειψοειδῆ μεγιστοποιοῦν τὸ γινόμενο ὄγκων ἀπεδείχθη ἀπὸ τὸν Saint Raymond [60] τὸ 1981 στὴν περίπτωσηί τῶν συμμετρικῶν σωμάτων καὶ ἀπὸ τὸν Petty [54] τὸ 1985 στὴν γενική περίπτωσηί. Μεταγενέστερες καὶ ἀπλούστερες ἀποδείξεις τῆς ἀνισότητος δόθηκαν ἀπὸ τὸν Saint Raymond [60], καὶ τοὺς Meyer καὶ Pajor [40].

Πρὸς τὴν ἄλλη κατεύθυνσι, ὁ Mahler [38] διετύπωσε τὴν εἰκασία ὅτι, μεταξὺ τῶν συμμετρικῶν κυρτῶν σωμάτων στὸν \mathbb{R}^n , ὁ n -διάστατος κύβος $Q_n := [-1, 1]^n$ ἐλαχιστοποιεῖ τὸ γινόμενο ὄγκων, ἐνῶ, μεταξὺ ὄλων τῶν κυρτῶν σωμάτων στὸν \mathbb{R}^n μὲ κέντρο βάρους τὸ 0, αὐτὸ μὲ τὸ ἐλάχιστο γινόμενο ὄγκων εἶναι τὸ κεντραρισμένο n -διάστατο simplex S_n . Αὐτὸ σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$, πρέπει νὰ ἰσχύει $s(K) = |K| \cdot |K^\circ| \geq 4^n/n!$, καὶ ἀντίστοιχα, γιὰ κάθε κεντραρισμένο σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$, νὰ ἰσχύει $s(K) \geq (n+1)^{n+1}/(n!)^2$. Ὁ Mahler ἀπέδειξε τὸ 1949 καὶ τὶς δύο ὑποθέσεις στὸν \mathbb{R}^2 , σὲ μεγαλύτερες διαστάσεις ὅμως αὐτὲς παραμένουν ἀνοιχτὲς καὶ ἔχουν ἐπιβεβαιωθεῖ μόνον γιὰ εἰδικὲς κλάσεις σωμάτων (βλέπε π.χ. [60], [39], [57], [58], [23]). Παρατηροῦμε ἐδῶ ὅτι τὸ γινόμενο ὄγκων $s(K)$ παραμένει ἀμετάβλητο ἀπὸ ἀντιστρεψίμους γραμμικοὺς μετασχηματισμούς, δηλαδὴ $s(T(K)) = |T(K)| \cdot |(T(K))^\circ| = |T(K)| \cdot |(T^{-1})^*(K^\circ)| = s(K)$ γιὰ κάθε $T \in GL(n)$. Μία ἀπὸ τὶς δυσκολίες ποὺ παρουσιάζει ἡ εἰκασία τοῦ Mahler σὲ σχέσηί μὲ τὴν ἀνισότητα Blaschke-Santaló εἶναι ὅτι, τουλάχιστον στὴν συμμετρική περίπτωσηί, τὰ σῶματα ποὺ ἐλαχιστοποιοῦν τὸ γινόμενο ὄγκων δὲν ἀνήκουν σὲ μία μοναδική ἀφινική κλάση, ὅπως τὰ σῶματα ποὺ ἀντίστοιχα μεγιστοποιοῦν τὸ $s(K)$, τὰ ὁποῖα εἶναι μόνον ἐλλειψοειδῆ: γιὰ παράδειγμα στὸν \mathbb{R}^{2n} , τὸ ἴδιο γινόμενο ὄγκων μὲ τὸν $2n$ -διάστατο κύβο Q_{2n} ἔχει καὶ τὸ σῶμα $Q_n \times B_1^n$, ὅπου $B_1^n := \{x \in \mathbb{R}^n : \sum_i |x_i| \leq 1\}$, ὅπως καὶ ἄλλοι ἀνάλογοι συνδυασμοὶ σωμάτων.

Σὲ πολλὲς ἀπὸ τὶς ἐφαρμογὲς βέβαια τόσο τῆς ἀνισότητος Blaschke-Santaló ὅσο καὶ τῆς εἰκασμένης ἀντίστροφῆς τῆς δὲν μᾶς ἐνδιαφέρουν οἱ ἀκριβεῖς μορφὲς τῶν ἀνισοτήτων ἀλλὰ τὸ πῶς συμπεριφέρεται τὸ $(s(K))^{1/n}$. Παρατηροῦμε ὅτι $(s(Q_n))^{1/n} \simeq (s(S_n))^{1/n} \simeq (s(B_2^n))^{1/n}$, ὁπότε γιὰ πολλὰ προβλήματα τῆς Ἀσυμπτωτικῆς Κυρτῆς Γεωμετρίας θὰ μᾶς ἀρκοῦσε νὰ ξέρουμε ὅτι $(s(K))^{1/n} \gtrsim (s(B_2^n))^{1/n}$ γιὰ κάθε κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n , καὶ ἄρα καὶ γιὰ κάθε σῶμα $K \subset \mathbb{R}^n$ μὲ $0 \in \text{int}(K)$. Τὸ γεγονός ὅτι ὑπάρχει ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$ ὥστε γιὰ κάθε τέτοιο σῶμα K νὰ ἰσχύει

$$(4.1.1) \quad s(K) \geq c^n s(B_2^n)$$

ἀπεδείχθη τὸ 1987 ἀπὸ τοὺς Bourgain καὶ V. Milman [12]. Ὁ Milman [43] ἔδωσε μία δεύτερη ἀπόδειξι τὸ 1988 χρησιμοποιῶντας μία τεχνική ἣ ὁποία τοῦ ἐπέτρεπε νὰ ἀποδείξει καὶ τὴν ὑπαρξί M -ἐλλειψοειδῶν γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα μὲ κέντρο βάρους τὸ 0 (βλέπε Παράγραφο 1.2 γιὰ τὴν ὀρολογία). Μάλιστα, ὅπως θὰ ἐξηγήσουμε παρακάτω, κάθε ἀπόδειξι τῆς ὑπάρξεως M -θέσεως γιὰ τὰ συμμετρικὰ ἢ κεντραρισμένα κυρτὰ σῶματα (βλέπε π.χ. [42], [43], [55]) συνεπάγεται, μέσφ βασικῶν ιδιοτήτων τῶν ἀριθμῶν καλύψεως, καὶ τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló. Πιὸ πρόσφατες ἀποδείξεις τῆς ἀνισότητος δόθηκαν ἀπὸ τὸν Kuperberg [33], ὁ ὁποῖος χρησιμοποίησε ἐργαλεῖα

διαφορικής γεωμετρίας, και από τον Nazarov [49], ο οποίος στηρίχθηκε σε πολυμεταβλητή μιγαδική ανάλυση. Αυτές οι αποδείξεις οδηγούν και στα καλύτερα κάτω φράγματα για την σταθερά c στην (4.1.1): ο Kuperberg έδειξε ότι $c \geq 1/2$ στην συμμετρική περίπτωση (και άρα, όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω, $c \geq 1/4$ γενικά), ενώ ο Nazarov κατέληξε στο φράγμα $c \geq \pi^2/32$ για τα συμμετρικά K .

Στο κεφάλαιο αυτό θα περιγράψουμε την απόδειξη της αντίστροφης ανισότητας Santaló που δόθηκε στο [22] και η οποία στηρίζεται σε άπλες γεωμετρικές ιδιότητες της ισοτροπικής θέσεως ενός κυρτού σώματος K . Στην Παράγραφο 4.2 θα αναφερθούμε σε εκτιμήσεις από το [25] για τους αριθμούς καλύψεως ενός ισοτροπικού σώματος K στον \mathbb{R}^n από την Ευκλείδεια μπάλα, εκτιμήσεις οι οποίες μās επιτρέπουν, όπως θα δοῦμε στην Παράγραφο 4.4, να δείξουμε μία ασθενέστερη έκδοχή της (4.1.1) στην οποία εμφανίζεται και η ισοτροπική σταθερά L_K του K . Για να επιτύχουμε να μην εμφανίζεται η L_K , δηλαδή να καταλήξουμε στην (4.1.1), θα συνδυάσουμε αυτήν την ασθενέστερη έκδοχή με την μέθοδο των κυρτών διαταραχών που εισήγαγε ο Klartag για να λύσει την *ισομορφική εικόσσία* του *υπερεπιπέδου* τα επιχειρήματα παρουσιάζονται πλήρως στην Παράγραφο 4.4, ενώ πληροφορίες για την ισομορφική εικόσσία του υπερεπιπέδου και την μέθοδο του Klartag δίδονται στην Παράγραφο 4.3. Τέλος, στην Παράγραφο 4.5 περιγράφουμε πώς, από τις εκτιμήσεις για τους αριθμούς καλύψεως στην ισοτροπική θέση, την αντίστροφη ανισότητα Santaló έτσι όπως προκύπτει από τα επιχειρήματα της Παραγράφου 4.4, καθώς και την κλασική ανισότητα Blaschke-Santaló, μπορούμε να δείξουμε την ύπαρξη M -θέσεως για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όπως και την αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski (βλέπε πάλι Παράγραφο 1.2 για την όρολογία).

Στα επιχειρήματα που ακολουθούν θα μās χρειαστούν και δύο ανισότητες που είδαμε στην Εισαγωγή, ή ανισότητα (1.2.5) των V. Milman και Pajor και, κυρίως, η ανισότητα (1.2.3) των Rogers και Shephard, οι οποίες είναι άπλες συνέπειες της ανισότητας Brunn-Minkowski. Λόγω της ανισότητας Rogers-Shephard παρατηρούμε ότι, για κάθε κυρτό σώμα $K \subset \mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0 στο έσωτερικό του, ισχύουν τα εξής:

- $|K - K| \leq \binom{2n}{n}|K| \leq 4^n|K|$, και ταυτόχρονα
- $K \subset K - K$, το οποίο συνεπάγεται ότι $K^\circ \supset (K - K)^\circ$.

Συμπεραίνουμε ότι $(s(K))^{1/n} \geq 4^{-1}(s(K - K))^{1/n}$, πράγμα που σημαίνει ότι αρκεί να δείξουμε την (4.1.1) για τα συμμετρικά σώματα K και κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, και θα έχουμε έπειτα την αντίστροφη ανισότητα Santaló για όλα τα σώματα με σταθερά $c/4$. Σημειώνουμε εδώ ότι αυτό μπορεί να βελτιωθεί κι άλλο, και να έχουμε σταθερά $c/2$ στην γενική περίπτωση, είτε χρησιμοποιώντας μία ανάλογη ανισότητα των Rogers και Shephard [59] για την κυρτή θήκη $\text{conv}\{K, -K\}$ ενός σώματος K που περιέχει το 0, σύμφωνα με την οποία $|\text{conv}\{K, -K\}| \leq 2^n|K|$, είτε χρησιμοποιώντας το ακόλουθο επίχειρημα. Θέτουμε $C = (K - K)/2$ και παρατηρούμε ότι $|C| = 2^{-n}|K - K| \leq 2^n|K|$, ενώ ταυτόχρονα $\|\cdot\|_{C^\circ} = h_C = (h_K + h_{-K})/2$, άρα, εκμεταλλευόμενοι την κυρτότητα της

συναρτήσεως $t > 0 \mapsto t^{-n}$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |C^\circ| &= \omega_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{h_K(\theta) + h_{-K}(\theta)}{2} \right)^{-n} d\sigma(\theta) \\ &\leq \frac{\omega_n}{2} \int_{S^{n-1}} (h_K(\theta))^{-n} d\sigma(\theta) + \frac{\omega_n}{2} \int_{S^{n-1}} (h_{-K}(\theta))^{-n} d\sigma(\theta) = |K^\circ|. \end{aligned}$$

Υπενθυμίζουμε τώρα ξανά κάποιες από τις βασικές ιδιότητες των αριθμών καλύψεως που αναφέραμε στην Είσαγωγή.

Λήμμα 4.1.1. Έστω K, L κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n . Στην περίπτωση που το L είναι συμμετρικό, έχουμε ότι

$$(4.1.2) \quad N(K, L) \leq \frac{|K + L/2|}{|L/2|} \leq 2^n \frac{|K + L|}{|L|},$$

ένω στην γενική περίπτωση

$$(4.1.3) \quad N(K, L) \leq 4^n \frac{|K + L|}{|L|}.$$

Επιπλέον,

$$(4.1.4) \quad \frac{|K + L|}{|L|} \leq 2^n N(K, L).$$

Απόδειξις. Για την τρίτη ανισότητα αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, για κάθε πεπερασμένο υποσύνολο Z τέτοιο ώστε $K \subseteq Z + L$, ισχύει ότι

$$|K + L| \leq |(Z + L) + L| \leq \text{card}(Z)|2L|,$$

όπου $\text{card}(Z)$ είναι το πλήθος των στοιχείων του Z . Για να δείξουμε την (4.1.2), θεωρούμε ένα μεγιστικό υποσύνολο N του K ως προς την ιδιότητα

$$x, y \in N \text{ και } x \neq y \Rightarrow \|x - y\|_L \geq 1,$$

και παρατηρούμε ότι τότε $K \subseteq \bigcup_{x \in N} (x + L)$, άρα $N(K, L) \leq \text{card}(N)$. Επιπλέον, τα έσωτερικά οίωδηποτε δύο από τα σύνολα $x + L/2, y + L/2$ ($x, y \in N$) δεν τέμνονται όταν $x \neq y$, επομένως

$$\text{card}(N)|L/2| = |N + L/2| \leq |K + L/2|.$$

Τέλος, όταν το L δεν είναι κατ' ανάγκη συμμετρικό, παρατηρούμε ότι $N(K + x, L + y) = N(K, L)$ για οποιαδήποτε $x, y \in \mathbb{R}^n$, ένω και ο λόγος $|K + L|/|L|$ παραμένει άμετάβλητος αν μεταφέρουμε το K ή το L . Μπορούμε επομένως να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα (1.2.5) των V. Milman και Pajor (ή ένα αποτέλεσμα του Stein [64], σύμφωνα με το οποίο, για κάθε κυρτό σῶμα L στον \mathbb{R}^n , υπάρχει τουλάχιστον ένα σημείο $x \in L$ και ένα κυρτό σῶμα $C \subseteq L$ τέτοιο ώστε το $C - x$ να είναι συμμετρικό και τέτοιο ώστε $|C| > 2^{-n}|L|$): μεταφέρουμε κατάλληλα το L κατά ένα σημείο x και βρίσκουμε ένα συμμετρικό κυρτό σῶμα $C_0 \subseteq L + x$ με

$$|C_0| \geq 2^{-n}|L|.$$

Άλλα τότε, χρησιμοποιώντας την (4.1.2) για το K και το συμμετρικό C_0 , βλέπουμε ότι

$$N(K, L) \leq N(K, C_0) \leq 2^n \frac{|K + C_0|}{|C_0|} \leq 4^n \frac{|K + L|}{|L|}.$$

Έτσι έχουμε αποδείξει και την (4.1.3). □

Πόρισμα 4.1.2. Έστω K, L κυρτά σώματα στον \mathbb{R}^n . Τότε,

$$N(K, L)^{1/n} \simeq \frac{|K + L|^{1/n}}{|L|^{1/n}}.$$

Επίσης, αν τα K και L έχουν τον ίδιο όγκο, τότε

$$N(K, L)^{1/n} \leq 8N(L, K)^{1/n}.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1.1 μπορούμε πλέον να εξηγήσουμε πώς η άσυμπτωτική έκδοχη της ανισότητας Santaló και της αντίστροφής της προκύπτουν ως συνέπειες της ύπαρξεως M -θέσεως για κάθε κυρτό σώμα. Ακριβέστερα, αν γνωρίζουμε ότι για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K υπάρχει ένα έλλειψοειδές \mathcal{E}_K τέτοιο ώστε

$$\max \{ \log N(K, \mathcal{E}_K), \log N(\mathcal{E}_K, K), \log N(K^\circ, \mathcal{E}_K^\circ), \log N(\mathcal{E}_K^\circ, K^\circ) \} \leq cn$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, τότε μπορούμε να δείξουμε ότι

$$e^{-2(c+\log 8)n} s(B_2^n) \leq s(K) \leq e^{2(c+\log 8)n} s(B_2^n)$$

για όλα τα σώματα K με βαρύκεντρο το 0. Πράγματι, έστω ότι \mathcal{E}_K είναι ένα M -έλλειψοειδές για το τυχόν σώμα K με την παραπάνω έννοια, τότε από το Λήμμα 4.1.1 θα έχουμε ότι

$$\frac{|\mathcal{E}_K + K|^{1/n}}{|K|^{1/n}} \leq 2N(\mathcal{E}_K, K)^{1/n} \leq 2e^c \leq 2e^c N(K, \mathcal{E}_K)^{1/n} \leq 8e^c \frac{|\mathcal{E}_K + K|^{1/n}}{|\mathcal{E}_K|^{1/n}},$$

και άρα θα ισχύει $|\mathcal{E}_K|^{1/n} \leq 8e^c |K|^{1/n}$. Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$\max \left\{ \frac{|K|^{1/n}}{|\mathcal{E}_K|^{1/n}}, \frac{|\mathcal{E}_K^\circ|^{1/n}}{|K^\circ|^{1/n}}, \frac{|K^\circ|^{1/n}}{|\mathcal{E}_K^\circ|^{1/n}} \right\} \leq 8e^c,$$

επομένως καταλήγουμε στο ζητούμενο:

$$\frac{1}{64e^{2c}} \leq \frac{|K|^{1/n} |K^\circ|^{1/n}}{|\mathcal{E}_K|^{1/n} |\mathcal{E}_K^\circ|^{1/n}} = \left(\frac{s(K)}{s(B_2^n)} \right)^{1/n} \leq 64e^{2c}.$$

Σημειώνουμε τέλος ότι η M -θέσις έχει κάποια σχέση και με την ισοτροπική θέσι, και μάλιστα μπορούμε υπό μίαν έννοια να ταυτίσουμε τις δύο θέσεις αν η εικασία του υπερεπιπέδου είναι αληθής. Όπως θα δούμε στην επομένη παράγραφο, κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα που έχει φραγμένη ισοτροπική σταθερά είναι ταυτόχρονα και σε M -θέσι (με μία σταθερά που εξαρτάται γραμμικά από την ισοτροπική σταθερά του σώματος). Έδω πρέπει να προσέξουμε φυσικά ότι, ενώ η ισοτροπική θέσι είναι μοναδικά ορισμένη αν αγνοήσουμε τους όρθογωνίους μετασχηματισμούς, η M -θέσις δεν είναι σε καμία περίπτωση μοναδική. Προς την άλλη κατεύθυνση μπορούμε να αναφέρουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα των Bourgain, Klartag και V. Milman [11].

Πρόταση 4.1.3. Υποθέτουμε ότι για κάποια σταθερά $C \geq 1$ ισχύει το εξής: για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε κυρτό σώμα K στον \mathbb{R}^n το οποίο βρίσκεται σε ιστροπική θέση, ισχύει η ανισότητα

$$|K + D_n|^{1/n} \leq 2C = C(|K|^{1/n} + |D_n|^{1/n}),$$

όπου με D_n συμβολίζουμε την Εύκλειδεια μπάλα όγκου 1 (δηλαδή ισχύει μία αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski στην ιστροπική θέση). Τότε έχουμε ότι $L_n \leq c_1 C^4$ για κάθε n , όπου c_1 είναι μία απόλυτη σταθερά.

4.2 Αριθμοί καλύψεως στην ιστροπική θέση

Έστω ότι μας δίνονται δύο κυρτά σώματα K, B στον \mathbb{R}^n με το B συμμετρικό. Μπορούμε να βρούμε ένα, όχι τετριμμένο σε πολλές περιπτώσεις, άνω φράγμα για τους αριθμούς καλύψεως $N(K, tB)$, $t > 0$, στο οποίο να εμφανίζεται η ποσότητα

$$I_1(K, B) = \frac{1}{|K|} \int_K \|x\|_B dx.$$

Λήμμα 4.2.1. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον \mathbb{R}^n που περιέχει το 0 στο έσωτερικό του. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα B στον \mathbb{R}^n και κάθε $t > 0$, έχουμε ότι

$$\log N(K, tB) \leq \frac{c_1 n I_1(K, B)}{t} + \log 2,$$

όπου c_1 είναι μία απόλυτη σταθερά.

Απόδειξις. Ορίζουμε ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον \mathbb{R}^n ως εξής:

$$\mu(A) = \frac{1}{c_K} \int_A e^{-p_K(x)} dx$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του \mathbb{R}^n , όπου p_K είναι το συναρτησοειδές Minkowski του K και $c_K = \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-p_K(x)) dx$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\{x \in \mathbb{R}^n : p_K(x) \leq t\} = tK$ για κάθε $t > 0$, καθώς και το θεώρημα Fubini, μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε ότι $c_K = n!$.

Θεωρούμε ένα υποσύνολο $\{x_1, \dots, x_N\}$ του K το οποίο είναι μεγιστικό ως προς την συνθήκη $\|x_i - x_j\|_B \geq t$ αν $i \neq j$. Παρατηρούμε τότε ότι $K \subseteq \bigcup_{i \leq N} (x_i + tB)$, και άρα ότι $N(K, tB) \leq N$. Έστω τυχόν $\alpha > 0$. Αν θέσουμε $y_i = (2\alpha/t)x_i$, από την υποπροσθετικότητα του p_K και το γεγονός ότι $p_K(x_i) \leq 1$, προκύπτει ότι

$$\mu(y_i + \alpha B) \geq \frac{1}{c_K} \int_{\alpha B} e^{-p_K(x)} e^{-p_K(y_i)} dx \geq e^{-2\alpha/t} \mu(\alpha B).$$

Επιπλέον, τα σώματα $y_i + \alpha B$ έχουν ζένα έσωτερικά, επομένως $N e^{-2\alpha/t} \mu(\alpha B) \leq 1$. Καταλήγουμε στην ανισότητα

$$N(K, tB) \leq 2e^{2\alpha/t} (\mu(\alpha B))^{-1}.$$

Μένει νὰ ἐπιλέξουμε α τέτοιο ὥστε $\mu(\alpha B) \geq 1/2$. Μὲ ἀπλοὺς ὑπολογισμοὺς βλέπουμε ὅτι

$$J := \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K d\mu(x) = (n+1)I_1(K, B).$$

Ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Markov προκύπτει ὅτι $\mu(2JB) \geq 1/2$, καὶ ἔτσι, ἂν ἐπιλέξουμε $\alpha = 2J$, ἔχουμε ὅτι

$$N(K, tB) \leq 2 \exp(4J/t) \leq 2 \exp(4(n+1)I_1(K, B)/t)$$

γιὰ κάθε $t > 0$. □

Παρατήρησις 4.2.2. (α) Ἐξαιτίας τῆς (1.0.2), μποροῦμε σχετικὰ εὐκόλα νὰ δείξουμε ὅτι ὑπάρχει μία ἀπόλυτη σταθερὰ $c > 0$ ἔτσι ὥστε νὰ ἰσχύει $K \subseteq cnL_K B_2^n$ γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n . Πράγματι, ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι, γιὰ κάθε $\theta \in S^{n-1}$, ἡ κυρτὴ θήκη $C(\theta)$ τοῦ συνόλου $\{\rho_K(\theta) \cdot \theta\} \cup (K \cap \theta^\perp)$ περιέχεται ὁλόκληρη στὸ K , καὶ ἄρα

$$1 = |K| \geq |C(\theta)| = \frac{\rho_K(\theta) \cdot |K \cap \theta^\perp|}{n} \simeq \frac{\rho_K(\theta)}{nL_K}.$$

Ἐφαρμόζοντας ἐπομένως τὸ Λήμμα 4.2.1 στὴν περίπτωσι πού B εἶναι ἡ Εὐκλείδεια μπάλα B_2^n καὶ K ἓνα ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα, καὶ λαμβάνοντας ὑπ' ὄψιν μας ὅτι γιὰ $t \gtrsim nL_K$ ἰσχύει $N(K, tB_2^n) = 1$, καταλήγουμε στὶς ἐκτιμήσεις

$$(4.2.1) \quad \log N(K, tB_2^n) \leq \frac{c_1 n^{3/2} L_K}{t} \quad \text{γιὰ κάθε } t > 0$$

(ὅπου χρησιμοποιοῦμε καὶ τὸ γεγονός ὅτι $I_1(K, B_2^n) \leq \sqrt{n}L_K$). Μὲ αὐτὴν τὴν διατύπωσι τὸ λήμμα ἐμφανίζεται στὴν διδακτορικὴ διατριβὴ τῆς Χατζουλάκη [25], ἡ ἀπόδειξις ὅμως, πού μοιάζει μὲ τὸ ἐπιχείρημα τοῦ Talagrand γιὰ τὴν δυϊκὴ ἀνισότητα Sudakov, παραμένει ἡ ἴδια καὶ στὴν γενικὴ περίπτωσι. Σημειώνουμε ἐπίσης ὅτι ἡ ἰδέα νὰ χρησιμοποιηθεῖ ἡ παράμετρος $I_1(K, B_2^n)$ σὲ ἐκτιμήσεις γιὰ ἀριθμοὺς καλύψεως ἰσοτροπικῶν κυρτῶν σωμάτων ἐμφανίζεται γιὰ πρώτη φορὰ στὸ [45].

(β) Γιὰ κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n προκύπτει, ἀπὸ τὴν (4.2.1) σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ Πόρισμα 4.1.2, ὅτι

$$\log N(D_n, K) \simeq \log N(K, D_n) \simeq \log N(K, \sqrt{n}B_2^n) \lesssim nL_K.$$

Αὐτὸ σημαίνει ὅτι τὸ ἰσοτροπικὸ σῶμα K εἶναι καὶ σὲ M -θέσι μὲ σταθερὰ cL_K (γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ c). Ἐπομένως, ἂν ἡ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου εἶναι ἀληθής, θὰ ἔχουμε ὅτι ἡ ἰσοτροπικὴ θέσις εἶναι ταυτόχρονα καὶ M -θέσις.

(γ) Δεδομένου ὅτι γιὰ κάθε σύνολο S ἰσχύει

$$N(S - S, 2B_2^n) = N(S - S, B_2^n - B_2^n) \leq N(S, B_2^n)^2,$$

μποροῦμε νὰ χρησιμοποιήσουμε τὶς ἐκτιμήσεις (4.2.1) πού μᾶς δίνει τὸ Λήμμα 4.2.1 γιὰ νὰ καταλήξουμε σὲ ἓνα ἄνω φράγμα καὶ γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως τοῦ σώματος διαφορῶν ἑνὸς ἰσοτροπικοῦ

σώματος K από Εὐκλείδειες μπάλες:

$$(4.2.2) \quad \log N(K - K, tB_2^n) \leq \frac{c'_1 n^{3/2} L_K}{t} \quad \text{για κάθε } t > 0.$$

Στην συνέχεια θα κάνουμε χρήσι τῶν ἐκτιμήσεων (4.2.1) καὶ (4.2.2) μέσω τοῦ ἐπομένου λήμματος, τὸ ὁποῖο μᾶς ἐπιτρέπει νὰ φράξουμε τοὺς δυϊκοὺς ἀριθμοὺς καλύψεως $N(B_2^n, tK^\circ)$.

Λήμμα 4.2.3. Ἐστω K ἓνα κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n ποὺ περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του. Για κάθε $t > 0$ θέτουμε $A(t) := t \log N(K, tB_2^n)$ καὶ $B(t) := t \log N(B_2^n, tK^\circ)$. Τότε

$$\sup_{t>0} B(t) \leq 16 \sup_{t>0} A(t).$$

Παρατήρησις. Σὲ συνδυασμὸ μὲ τὸ Λήμμα 4.2.1 καὶ τὴν παρατήρησι ποὺ ἔπεται αὐτοῦ, βλέπουμε ὅτι για κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n (ἢ ἀκόμη καὶ για μεταφορὰ ἰσοτροπικοῦ κυρτοῦ σώματος, στὸ ἐσωτερικὸ τῆς ὁποίας περιέχεται τὸ 0) ἰσχύει ὅτι

$$(4.2.3) \quad \log N(B_2^n, tK^\circ) \leq \log N(B_2^n, t(K - K)^\circ) \leq \frac{c_2 n^{3/2} L_K}{t} \quad \text{για κάθε } t > 0,$$

ὅπου c_2 εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Θὰ χρησιμοποιήσουμε μία πολὺ γνωστὴ ιδέα ἀπὸ τὸ [66] (δὲς ἐπίσης [35, Παράγραφος 3.3]). Για κάθε $t > 0$ μπορούμε νὰ γράψουμε $(t^2 K^\circ) \cap (4K) \subseteq 2tB_2^n$. Περνῶντας στὰ πολικὰ σώματα, βλέπουμε ὅτι

$$B_2^n \subseteq \text{conv} \left(\frac{t}{2} K^\circ, \frac{2}{t} K \right) \subseteq \frac{t}{2} K^\circ + \frac{2}{t} K.$$

Ἐπομένως, μπορούμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} N(B_2^n, tK^\circ) &\leq N \left(\frac{t}{2} K^\circ + \frac{2}{t} K, tK^\circ \right) \leq N \left(\frac{2}{t} K, \frac{t}{2} K^\circ \right) \leq N \left(\frac{2}{t} K, \frac{1}{4} B_2^n \right) N \left(\frac{1}{4} B_2^n, \frac{t}{2} K^\circ \right) \\ &= N \left(K, \frac{t}{8} B_2^n \right) N(B_2^n, 2tK^\circ). \end{aligned}$$

Λογαριθμίζοντας βλέπουμε ὅτι

$$B(t) \leq 8A(t/8) + \frac{1}{2} B(2t)$$

για κάθε $t > 0$, καὶ ἄρα

$$\sup_{t>0} B(t) \leq 16 \sup_{t>0} A(t),$$

τὸ ὁποῖο εἶναι αὐτὸ ποὺ ζητούσαμε. □

4.3 Ἡ μέθοδος τῶν κυρτῶν διαταραχῶν τοῦ Klartag

Στὸ [27] ὁ Klartag ἔδωσε καταφατικὴ ἀπάντησι στὴν ἀκόλουθη ἐρώτησι τοῦ V. Milman: δοθέντος κυρτοῦ σώματος K στὸν \mathbb{R}^n , μποροῦμε, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ ἂν γνωρίζουμε ἂν κάθε κυρτὸ σῶμα ἔχει φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερά, νὰ βροῦμε κάποιον κυρτὸ σῶμα Q μὲ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ $L_Q \simeq 1$ τὸ ὁποῖο νὰ εἶναι (ὅσο τὸ δυνατόν πιό) «κοντὰ γεωμετρικά» στὸ K ; Μὲ ἄλλα λόγια, μποροῦμε νὰ ποῦμε ὅτι τὰ κυρτὰ σώματα μὲ φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερὰ εἶναι «πυκνὰ» στὸν χῶρο ὅλων τῶν κυρτῶν σωμάτων; Πρέπει φυσικὰ νὰ ὀρίσουμε καὶ τί ἐννοοῦμε μὲ τὴν φράσι «γεωμετρικά κοντά». Μία ἐννοια ἀποστάσεως μεταξὺ τῶν συμμετρικῶν κυρτῶν σωμάτων εἶναι, ὅπως ἔχουμε δεῖ, ἡ ἀπόστασις Banach-Mazur. Μάλιστα, ἡ ἀρχικὴ διατύπωσις τῆς ἰσομορφικῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου, ὅπως μπορεῖ νὰ ὀνομαστῆ ἢ παραπάνω ἐρώτησις, εἶχε νὰ κάνει μόνον μὲ συμμετρικὰ σώματα καὶ ἡ ἐννοια ἀποστάσεως ποὺ ἐχρησιμοποιεῖτο ἦταν ἡ ἀπόστασις Banach-Mazur. Σὲ αὐτὴν τὴν περίπτωσι ὁ Klartag [26] ἔδωσε τὴν ἐξῆς ἀπάντησι: γιὰ κάθε συμμετρικὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n μποροῦμε νὰ βροῦμε ἓνα συμμετρικὸ σῶμα Q στὸν \mathbb{R}^n μὲ $L_Q \simeq 1$ καὶ $d_{BM}(K, Q) \leq c \log n$, ὅπου c εἶναι μίᾳ ἀπόλυτη σταθερά. Ὅπως εἶδαμε καὶ στὴν εἰσαγωγή, τὸ ὅτι $d_{BM}(K, Q) \leq c \log n$ σημαίνει ὅτι ὑπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ὥστε

$$K \subseteq T(Q) \subseteq (c \log n)K.$$

Ἄφοῦ δὲν μᾶς ἐνδιαφέρει ἡ θέσις τῶν K καὶ Q , δεδομένου ὅτι ἡ ἴδια ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ἀντιστοιχεῖ σὲ ὅλη τὴν ἀφινικὴ κλάσι ἑνὸς κυρτοῦ σώματος, μποροῦμε νὰ ἐπαναδιατυπώσουμε τὰ παραπάνω ὡς ἐξῆς: γιὰ κάθε συμμετρικὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n μποροῦμε νὰ βροῦμε ἓνα συμμετρικὸ σῶμα Q' στὸν \mathbb{R}^n τέτοιο ὥστε $L_{Q'} \simeq 1$ καὶ

$$K \subseteq Q' \subseteq (c \log n)K.$$

Ὅπως παρατηρεῖ ὁ Klartag, ἂν θέλαμε καὶ τὰ δύο σώματα K καὶ Q' νὰ εἶναι ταυτόχρονα στὴν ἰσοτροπικὴ θέσι, καὶ θέλαμε νὰ ἀντικαταστήσουμε καὶ τὸ φράγμα $c \log n$ ἀπὸ μίᾳ ἀπόλυτη σταθερὰ c' , τότε αὐτὴ ἡ ἐκδοχὴ τῆς ἰσομορφικῆς εἰκασίας τοῦ ὑπερεπιπέδου θὰ ἦταν ἰσοδύναμη μὲ τὴν κανονικὴ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου. Πράγματι, τότε ἀπὸ τὴν Παρατήρησι 4.2.2(β) θὰ εἶχαμε ὅτι τὸ Q' εἶναι σὲ M -θέσι, καὶ ἔτσι σὲ M -θέσι θὰ ἦταν καὶ τὸ K (ἐφ' ὅσον θὰ εἶχαμε δεῖξει ὅτι εἶναι c' -κοντὰ στὸ Q'). Τότε ὅμως θὰ ἀρκοῦσε νὰ θυμηθοῦμε τὴν Πρότασι 4.1.3 ἀπὸ τὸ [11], ἡ ὁποία μᾶς λέει ὅτι κάθε ἰσοτροπικὸ κυρτὸ σῶμα K ποὺ εἶναι ταυτόχρονα σὲ M -θέσι μὲ σταθερὰ β , δηλαδὴ ἔχει τὴν ιδιότητα $N(K, \overline{B}_2^n) \leq e^{\beta n}$, ἔχει ἰσοτροπικὴ σταθερὰ $L_K \lesssim e^{4\beta}$.

Στὸ [27] ὁ Klartag ἔδωσε πλήρη ἀπάντησι στὴν ἰσομορφικὴ εἰκασία τοῦ ὑπερεπιπέδου χρησιμοποιῶντας μίᾳ ἄλλη ἐννοια ἀποστάσεως μεταξὺ τῶν κυρτῶν σωμάτων, ποὺ θὰ μπορούσαμε νὰ ὀνομάσουμε ἀφινικὴ ἀπόστασις Banach-Mazur. Γιὰ ὁποιαδήποτε κυρτὰ σώματα K, Q στὸν \mathbb{R}^n αὐτὴ ἡ ἀπόστασις ὀρίζεται ὡς ἐξῆς:

$$d_{BM}^{aff}(K, Q) := \inf \left\{ \alpha \in \mathbb{R} : \frac{1}{\alpha}(K + x) \subseteq T(Q) + y \subseteq \alpha(K + x) \text{ ὅπου } T \in GL(n), x, y \in \mathbb{R}^n \right\}.$$

Ἡ μέθοδος τοῦ Klartag βασίζεται σὲ δύο σημαντικὲς παρατηρήσεις. Ἡ πρώτη παρατήρηση εἶναι ὅτι, γιὰ νὰ βροῦμε ἓνα σῶμα Q κοντὰ στὸ K μὲ τὴν παραπάνω ἔννοια, ἀρκεῖ πρῶτα νὰ ὀρίσουμε μίαν λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησι f μὲ φορέα τὸ K , ἡ ὁποία θὰ ἔχει φραγμένη ἰσοτροπικὴ σταθερὰ καὶ τῆς ὁποίας οἱ τιμὲς δὲν θὰ ἔχουν μεγάλο εὖρος (μὲ τὴν ἔννοια τῆς (4.3.1)), καὶ μετὰ νὰ θεωρήσουμε τὸ σῶμα $K_{n+1}(f)$.

Πρότασις 4.3.1 ([27]). Ἐστω K κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n καὶ ἔστω $f : K \rightarrow (0, \infty)$ μίαν λογαριθμικά-κοίλη συνάρτησις τέτοια ὥστε

$$(4.3.1) \quad \sup_{x \in K} f(x) \leq m^n \inf_{x \in K} f(x)$$

γιὰ κάποιον $m > 1$. Γράφουμε x_0 γιὰ τὸ βαρύκεντρο τῆς f , δηλαδὴ $x_0 = \int_{\mathbb{R}^n} x f(x) dx / \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx$, καὶ θέτουμε $g(x) = f(x + x_0)$. Τότε, ἀπὸ τὸ Λήμμα 1.3.13 καὶ τὶς Προτάσεις 1.3.14(4) καὶ 1.3.21, ἔχουμε γιὰ τὸ κεντραρισμένο σῶμα $Q := K_{n+1}(g)$ τὰ ἐξῆς: $L_f \simeq L_Q$ καὶ

$$\frac{1}{m}Q \subseteq K - x_0 \subseteq mQ.$$

Ἡ δευτέρη βασικὴ παρατήρησις τοῦ Klartag ἦταν ὅτι ὑποψήφιες συναρτήσεις γιὰ τὴν συνάρτησι f ποὺ χρειαζόμαστε θὰ μπορούσαν νὰ ὀριστοῦν μὲσω τοῦ λογαριθμικοῦ μετασχηματισμοῦ Laplace τοῦ σώματος K . Ὑπενθυμίζουμε ὅτι ὁ λογαριθμικὸς μετασχηματισμὸς Laplace ἑνὸς πεπερασμένου μέτρου Borel στὸν \mathbb{R}^n ὀρίζεται ἀπὸ τὴν

$$\xi \in \mathbb{R}^n \mapsto \Lambda_\mu(\xi) := \log \left(\int_{\mathbb{R}^n} e^{\langle \xi, x \rangle} \frac{d\mu(x)}{\mu(\mathbb{R}^n)} \right).$$

Γιὰ τὴν μέθοδο τῶν κυρτῶν διαταραχῶν τοῦ Klartag χρειάζεται νὰ θυμηθοῦμε τὶς ἀκόλουθες ιδιότητες τοῦ Λ_μ .

Πρότασις 4.3.2. Ἄς συμβολίσουμε μὲ $\mu = \mu_K$ τὸ ὁμοιόμορφο μέτρο πάνω σὲ ἓνα κυρτὸ σῶμα K στὸν \mathbb{R}^n . Τότε,

$$(4.3.2) \quad (\nabla \Lambda_\mu)(\mathbb{R}^n) = \text{int}(K)$$

(καὶ μάλιστα γιὰ τὰ ἐπιχειρήματα στὸ [27] καὶ γιὰ τὴν ἀπόδειξι τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló σὲ αὐτὸ τὸ κεφάλαιο, μᾶς ἀρκεῖ νὰ ξέρομε ὅτι $(\nabla \Lambda_\mu)(\mathbb{R}^n) \subseteq K$). Ἄν μὲ μ'_ξ συμβολίσουμε τὸ μέτρο πιθανότητος στὸν \mathbb{R}^n ποὺ ἔχει πυκνότητα ἓνα πολλαπλάσιο τῆς συναρτήσεως $e^{\langle \xi, x \rangle} \mathbf{1}_K(x)$, τότε

$$(4.3.3) \quad \text{bar}(\mu'_\xi) = \nabla \Lambda_\mu(\xi) \quad \text{καὶ} \quad \text{Hess}(\Lambda_\mu)(\xi) = \text{Cov}(\mu'_\xi).$$

Ἐπιπλέον, ὁ μετασχηματισμὸς $\nabla \Lambda_\mu$, ὁ ὁποῖος εἶναι 1-1, μεταφέρει τὸ μέτρο ν ποὺ ἔχει πυκνότητα $\det \text{Hess}(\Lambda_\mu)$ στὸ μέτρο μ . Αὐτὸ ἐξ ὀρισμοῦ σημαίνει ὅτι, γιὰ κάθε συνεχῆ, μὴ ἀρνητικὴ συνάρτησι $\phi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, ἰσχύει

$$\int_K \phi(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\nabla \Lambda_\mu(\xi)) \det \text{Hess}(\Lambda_\mu(\xi)) d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(\nabla \Lambda_\mu(\xi)) d\nu(\xi).$$

4.4 Απόδειξις τῆς ἀντίστροφης ἀνισότητος Santaló

Σὲ αὐτὴν τὴν παράγραφο ἀποδεικνύουμε τὴν ἀντίστροφη ἀνισότητα Santaló χρησιμοποιῶντας τὰ ἀποτελέσματα τῶν προηγουμένων παραγράφων. Ἡ ἀπόδειξις ποὺ παρουσιάζεται ἐδῶ χωρίζεται σὲ τρία ἀπλὰ βήματα τὰ ὁποῖα μποροῦν νὰ περιγραφοῦν ὡς ἐξῆς: (α) βρίσκουμε ἓνα κάτω φράγμα γιὰ τὸ γινόμενο ὄγκων $s(K)$ στὸ ὁποῖο ἐμφανίζεται καὶ ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_K τοῦ K , (β) προσαρμόζοντας τὸ κύριο ἐπιχείρημα τοῦ Klartag ἀπὸ τὸ [27] δείχνουμε ὅτι κάθε συμμετρικὸ κυρτὸ σῶμα ἔχει φραγμένη ἀπόστασι (μὲ τὴν ἀφινικὴ ἔννοια ποὺ εἶδαμε παραπάνω) ἀπὸ ἓνα κυρτὸ σῶμα Q τοῦ ὁποῖου ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_Q μπορεῖ νὰ φραχθεῖ ἀπὸ μία ποσότητα στὴν ὁποῖαν ἐμφανίζεται καὶ τὸ $s(K)$, καὶ τέλος (γ) χρησιμοποιῶντας τὸ κάτω φράγμα γιὰ τὸ $s(Q)$ στὸ ὁποῖο ἐμφανίζεται ἡ L_Q , καὶ τὸ γεγονός ὅτι τὰ γινόμενα ὄγκων $s(K)$ καὶ $s(Q)$ εἶναι συγκρίσιμα καθὼς τὰ K, Q εἶναι «γεωμετρικὰ κοντά», καταλήγουμε σὲ ἓνα κάτω φράγμα γιὰ τὸ $s(K)$ τῆς ζητουμένης μορφῆς.

Κάτω φράγμα στὸ ὁποῖο ἐμφανίζεται ἡ ἰσοτροπικὴ σταθερὰ

Τὸ πρῶτο βῆμα στὴν ἀπόδειξι εἶναι ἡ ἀκόλουθη πρότασις.

Πρότασις 4.4.1. Ἐστω K ἓνα κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n τὸ ὁποῖο περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικὸ του. Τότε

$$(4.4.1) \quad 2|K|^{1/n}|nK^\circ|^{1/n} \geq |K - K|^{1/n}|n(K - K)^\circ|^{1/n} \geq \frac{c_1}{L_K},$$

ὅπου $c_1 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερὰ.

Ἀπόδειξις. Ἡ πρώτη ἀνισότητα ἔχει ἤδη ἐξηγηθεῖ, ὁπότε μένει νὰ δείξουμε τὴν δεξιὰ ἀνισότητα στὴν (4.4.1). Παρατηροῦμε ὅτι ἰσχύει

$$|A(K) - A(K)| |(A(K) - A(K))^\circ| = |K - K| |(K - K)^\circ|$$

γιὰ κάθε ἀντιστρέψιμο ἀφινικὸ μετασχηματισμὸ $A = x + T$, ὅπου $T \in GL(n)$, $x \in \mathbb{R}^n$, ἄρα μποροῦμε νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ K βρίσκεται σὲ ἰσοτροπικὴ θέσι. Χρησιμοποιῶντας τὴν (4.2.3) μὲ $t = \sqrt{n}L_K$, συμπεραίνουμε ὅτι ὑπάρχει ἓνα πεπερασμένο ὑποσύνολο Z τοῦ \mathbb{R}^n τέτοιο ὥστε $\text{card}(Z) \leq \exp(cn)$ καὶ

$$B_2^n \subseteq \bigcup_{x \in Z} (x + \sqrt{n}L_K(K - K)^\circ).$$

Ἐπομένως,

$$|B_2^n| \leq \text{card}(Z) |\sqrt{n}L_K(K - K)^\circ| \leq \exp(cn) |\sqrt{n}L_K(K - K)^\circ|,$$

ἢ ἀλλιῶς

$$|(K - K)^\circ|^{1/n} \geq \frac{e^{-c}}{L_K} \frac{|B_2^n|^{1/n}}{\sqrt{n}}.$$

Δεδομένου ὅτι ὑπάρχει ἀπόλυτη σταθερὰ $c_1 > 0$ τέτοια ὥστε $|B_2^n|^{1/n}/\sqrt{n} \geq c_1/n$, τὸ ζητούμενο τῆς προτάσεως ἔπεται. \square

Μία παραλλαγή του επιχειρήματος του Klartag

Στο δεύτερο βήμα της αποδείξεως θέλουμε να δείξουμε ότι κάθε κυρτό σῶμα στον \mathbb{R}^n έχει απόλυτως φραγμένη (άφινική) γεωμετρική απόστασι από ένα κυρτό σῶμα Q με ισοτροπική σταθερά L_Q ή οποία δὲν μπορεί να ξεπερνᾷ μία ἔκφρασι-συνάρτησι τοῦ γινομένου ὄγκων $s(K-K)$.

Πρότασις 4.4.2. Ἔστω K ἕνα κυρτό σῶμα στον \mathbb{R}^n . Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ μπορούμε να βροῦμε ἕνα κεντραρισμένο κυρτό σῶμα $Q \subset \mathbb{R}^n$ και ἕνα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ὥστε

$$(4.4.2) \quad \frac{1}{1+\varepsilon}Q \subseteq K+x \subseteq (1+\varepsilon)Q \quad \text{και} \quad L_Q \leq \frac{c_2}{\sqrt{\varepsilon n s(K-K)^{1/n}}},$$

ὅπου $c_2 > 0$ εἶναι ἀπόλυτη σταθερά.

Ἀπόδειξις. Μποροῦμε να ὑποθέσουμε ὅτι τὸ K ἔχει βαρύκεντρο τὸ 0 και ὅτι $|K| = 1$. Αὐτὸ γιατί, ἂν δείξουμε τὴν πρότασι για $\tilde{K} := (K - \text{bar}(K))/|K|^{1/n}$ και κάποιο $\varepsilon \in (0, 1)$, και ἂν βροῦμε ἕνα κυρτό σῶμα Q ποὺ ικανοποιεῖ τὴν (4.4.2) με τὸ \tilde{K} στὴν θέσι τοῦ K , θὰ ἔχουμε ἀμέσως ὅτι και τὸ ζευγάρι $(K, |K|^{1/n}Q)$ ικανοποιεῖ τὶς ζητούμενες ιδιότητες, ἀφοῦ και ἡ ισοτροπική σταθερά L_Q και τὸ γινόμενο ὄγκων $s(K-K)$ παραμένουν ἀμετάβλητα ἀπὸ ἀφινικούς μετασχηματισμούς.

Ἄς θυμηθοῦμε ἀπὸ τὴν Πρότασι 4.3.2 ὅτι, ἂν $\mu = \mu_K$ εἶναι ὁ περιορισμὸς τοῦ μέτρου Lebesgue στὸ K , τότε ὁ 1-1 μετασχηματισμὸς $\nabla \Lambda_\mu$ μεταφέρει τὸ μέτρο ν ποὺ ἔχει πυκνότητα (ὡς πρὸς τὸ μέτρο Lebesgue)

$$\frac{d\nu}{d\xi} = \det \text{Hess}(\Lambda_\mu(\xi)) \equiv \det \text{Cov}(\mu_\xi)$$

στὸ μ . Κατὰ συνέπεια

$$\nu(\mathbb{R}^n) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1} \det \text{Hess}(\Lambda_\mu(\xi)) d\xi = \int_K \mathbf{1} dx = |K| = 1,$$

και ἄρα, για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να γράψουμε

$$|\varepsilon n(K-K)^\circ| \min_{\xi \in \varepsilon n(K-K)^\circ} \det \text{Cov}(\mu_\xi) \leq \int_{\varepsilon n(K-K)^\circ} \det \text{Cov}(\mu_\xi) d\xi = \nu(\varepsilon n(K-K)^\circ) \leq 1.$$

Τὸ τελευταῖο σημαίνει ὅτι ὑπάρχει $\xi \in \varepsilon n(K-K)^\circ$ τέτοιο ὥστε

$$\det \text{Cov}(\mu_\xi) = \min_{\xi' \in \varepsilon n(K-K)^\circ} \det \text{Cov}(\mu_{\xi'}) \leq |\varepsilon n(K-K)^\circ|^{-1} \leq \left(\frac{4}{\varepsilon n s(K-K)^{1/n}} \right)^n.$$

Παρατηροῦμε τώρα ὅτι, ἀπὸ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν μέτρων μ'_ξ και τὸν ὁρισμὸ τῆς ισοτροπικῆς σταθερᾶς, ἔχουμε ὅτι

$$L_{\mu'_\xi} = \left(\frac{\sup_{x \in K} e^{\langle \xi, x \rangle}}{\int_K e^{\langle \xi, x \rangle} dx} \right)^{\frac{1}{n}} [\det \text{Cov}(\mu'_\xi)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Ἀφοῦ τὸ ξ ποὺ ἔχουμε βρεῖ ἀνήκει στὸ $\varepsilon n(K-K)^\circ$, και ἀφοῦ $K \cup (-K) \subset K-K$, βλέπουμε ἀμέσως ὅτι $|\langle \xi, x \rangle| \leq \varepsilon n$ για ὅλα τὰ $x \in K$, και ἄρα $\sup_{x \in K} e^{\langle \xi, x \rangle} \leq \exp(\varepsilon n)$. Ἀπὸ τὴν ἄλλη πλευρά, ἀφοῦ τὸ βαρύκεντρο τοῦ K εἶναι τὸ 0 και $|K| = 1$, προκύπτει ἀπὸ τὴν ἀνισότητα τοῦ Jensen ὅτι

$$\int_K e^{\langle \xi, x \rangle} dx \geq \exp \left(\int_K \langle \xi, x \rangle dx \right) = 1.$$

Συνδυάζοντας τὰ παραπάνω, λαμβάνουμε τὸ ἄνω φράγμα

$$L_{\mu'_\xi} \leq \frac{2e^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon n s(K-K)^{1/n}}}.$$

Μένει νὰ παρατηρήσουμε ὅτι ἡ συνάρτησις $f_\xi(x) = e^{\langle \xi, x \rangle} \mathbf{1}_K(x)$ (ἢ ὁποία εἶναι πολλαπλάσιο τῆς πυκνότητος τοῦ μέτρου μ'_ξ) εἶναι λογαριθμικὰ-κοίλη (ὡς γινόμενο τέτοιων) καὶ ἱκανοποιεῖ τὴν

$$\sup_{x \in \text{supp}(f_\xi)} f_\xi(x) \leq e^{2\varepsilon n} \inf_{x \in \text{supp}(f_\xi)} f_\xi(x)$$

(ἐξαιτίας τοῦ ὅτι $|\langle \xi, x \rangle| \leq \varepsilon n$ γιὰ ὅλα τὰ $x \in K$). Ἐπομένως, μποροῦμε νὰ ἐφαρμόσουμε τὴν Πρότασι 4.3.1 καὶ νὰ βροῦμε ἓνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα Q_ξ στὸν \mathbb{R}^n τέτοιο ὥστε

$$L_{Q_\xi} \simeq L_{f_\xi} = L_{\mu'_\xi} \leq \frac{2e^\varepsilon}{\sqrt{\varepsilon n s(K-K)^{1/n}}}$$

καὶ

$$\frac{1}{e^{2\varepsilon}} Q_\xi \subseteq K - b_\xi \subseteq e^{2\varepsilon} Q_\xi,$$

ὅπου b_ξ εἶναι τὸ βαρύκεντρο τῆς f_ξ . Ἀφοῦ γιὰ μικρὰ ε ἰσχύει ὅτι $e^{2\varepsilon} \leq 1 + c\varepsilon$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ c , τὸ ζητούμενο ἔπεται. \square

Διώχνοντας τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ ἀπὸ τὸ κάτω φράγμα

Συνδυάζοντας τὰ ἀποτελέσματα τῶν δύο προηγουμένων βημάτων, μποροῦμε τώρα νὰ διώξουμε τὴν ἰσοτροπικὴ σταθερὰ L_K ἀπὸ τὸ κάτω φράγμα γιὰ τὸ $s(K)^{1/n}$.

Θεώρημα 4.4.3. Ἐστω K ἓνα κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n τὸ ὁποῖο περιέχει τὸ 0 στὸ ἐσωτερικό του. Τότε

$$|K|^{1/n} |nK^\circ|^{1/n} \geq c_3,$$

ὅπου $c_3 > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερὰ.

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον $|K|^{1/n} |nK^\circ|^{1/n} \geq \frac{1}{2} |K - K|^{1/n} |n(K - K)^\circ|^{1/n}$, μποροῦμε στὸ ὑπόλοιπο τῆς ἀποδείξεως νὰ ὑποθέσουμε ὅτι τὸ K εἶναι καὶ συμμετρικό. Χρησιμοποιώντας τὴν Πρότασι 4.4.2 μὲ $\varepsilon = 1/2$, βρίσκουμε ἓνα κυρτὸ σῶμα $Q \subset \mathbb{R}^n$ καὶ ἓνα σημεῖο $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ὥστε

$$(4.4.3) \quad \frac{2}{3} Q \subseteq K + x \subseteq \frac{3}{2} Q$$

καὶ $L_Q \leq c_0 / \sqrt{ns(K-K)^{1/n}} = c_0 / \sqrt{ns(K)^{1/n}}$ γιὰ κάποια ἀπόλυτη σταθερὰ $c_0 > 0$. Ἀπὸ τὴν Πρότασι 4.4.1 βλέπουμε ὅτι

$$|Q - Q|^{1/n} |n(Q - Q)^\circ|^{1/n} \geq \frac{c_1}{L_Q},$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά. Παρατηρούμε τώρα ότι $\frac{2}{3}(Q - Q) \subseteq K - K = 2K \subseteq \frac{3}{2}(Q - Q)$, και ως εκ τούτου $K^\circ \supseteq \frac{4}{3}(Q - Q)^\circ$. Έπομένως, συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} ns(K)^{1/n} &= |nK^\circ|^{1/n}|K|^{1/n} \geq \frac{4}{9}|n(T - T)^\circ|^{1/n}|T - T|^{1/n} \\ &\geq \frac{c'_1}{L_T} \geq c_2 \sqrt{ns(K)^{1/n}}, \end{aligned}$$

από το οποίο προκύπτει ότι

$$s(K)^{1/n} \geq \frac{c_3}{n}$$

με σταθερά $c_3 = c_2^2$, όπως ζητούσαμε. \square

Έχοντας πλέον δείξει την αντίστροφη ανισότητα Santaló, επιστρέφουμε στην Πρότασι 4.4.2 και αντικαθιστούμε το $s(K - K)$ με το κάτω φράγμα που έχουμε για αυτό. Αυτό είναι το τελευταίο βήμα στην λύσι που έδωσε ο Klartag ως προς την ισομορφική εικόσιά του υπερεπιπέδου.

Θεώρημα 4.4.4 (Klartag, 2006). Έστω K ένα κυρτό σῶμα στὸν \mathbb{R}^n . Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ μπορούμε νὰ βροῦμε ένα κεντραρισμένο κυρτό σῶμα $Q \subset \mathbb{R}^n$ και ένα σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ὥστε

$$(4.4.4) \quad \frac{1}{1+\varepsilon}Q \subseteq K + x \subseteq (1+\varepsilon)Q \quad \text{και} \quad L_Q \leq \frac{c_4}{\sqrt{\varepsilon}},$$

όπου $c_4 > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά.

4.5 Ὑπαρξις M -έλλειψοειδῶν και ἡ αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski

Μπορούμε τώρα νὰ ἀποδείξουμε τὴν ὕπαρξι M -έλλειψοειδῶν για κάθε κυρτό σῶμα και, ὡς συνέπεια αὐτοῦ, τὴν αντίστροφη ανισότητα Brunn-Minkowski.

Ὑπαρξις M -έλλειψοειδῶν

Έστω K ένα κεντραρισμένο σῶμα στὸν \mathbb{R}^n . Θα ἀποδείξουμε παρακάτω, χρησιμοποιώντας τὰ ἐργαλεία τῶν προηγούμενων παραγράφων, ὅτι ὑπάρχει ένα M -έλλειψοειδές για τὸ K (με σταθερά $\beta \simeq 1$). Ἡ ἐπομένη πρότασις είναι τὸ πρῶτο βήμα.

Πρότασις 4.5.1. Έστω K ένα κυρτό σῶμα στὸν \mathbb{R}^n με βαρύκεντρο τὸ 0. Τότε ὑπάρχει ένα ἔλλειψοειδές \mathcal{E}_K τέτοιο ὥστε $|K| = |\mathcal{E}_K|$ και

$$\max\{\log N(K, t\mathcal{E}_K), \log N(\mathcal{E}_K^\circ, tK^\circ)\} \leq \frac{cn}{t}$$

για κάθε $t > 0$, όπου c είναι μία απόλυτη σταθερά.

Απόδειξις. Εφαρμόζοντας την Πρότασι 4.4.4, μπορούμε να βρούμε ένα κεντραρισμένο κυρτό σῶμα Q με ισοτροπική σταθερά $L_Q \leq C$ για κάποια απόλυτη σταθερά C και με την ιδιότητα

$$\frac{2}{3}Q \subseteq K + x \subseteq \frac{3}{2}Q$$

για κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$. Άς υποθέσουμε ότι $T(Q)$, $T \in GL(n)$, είναι μία ισοτροπική εικόνα του Q . Από την Παρατήρησι 4.2.2(γ) και το Λήμμα 4.2.3 ξέρουμε ότι

$$(4.5.1) \quad \max\{\log N(T(Q) - T(Q), t\sqrt{n}B_2^n), \log N(B_2^n, t\sqrt{n}(T(Q) - T(Q))^\circ)\} \leq \frac{cn}{t}$$

για κάθε $t > 0$. Δεδομένου ότι

$$\frac{2}{3}(T(Q) - T(Q)) \subseteq T(K) - T(K) \subseteq \frac{3}{2}(T(Q) - T(Q)),$$

ὅπως επίσης και ότι $T(K) \subseteq T(K) - T(K)$, $(T(K) - T(K))^\circ \subseteq (T(K))^\circ$, ἔπεται ἀπὸ τὴν (4.5.1) ὅτι

$$(4.5.2) \quad \max\{\log N(T(K), t\sqrt{n}B_2^n), \log N(B_2^n, t\sqrt{n}(T(K))^\circ)\} \leq \frac{c'n}{t}$$

για κάθε $t > 0$. Θέτουμε $\mathcal{E}_K := T^{-1}(a\sqrt{n}B_2^n)$, ὅπου τὸ a τὸ ἐπιλέγουμε ἔτσι ὥστε $|T(K)| = |a\sqrt{n}B_2^n|$ (ισοδύναμα, ἔτσι ὥστε $|\mathcal{E}_K| = |K|$). Ἀπὸ τὴν (4.5.1) βλέπουμε τότε ὅτι

$$(4.5.3) \quad \max\{\log N(K, t\mathcal{E}_K), \log N(\mathcal{E}_K^\circ, tK^\circ)\} \leq \frac{c'an}{t}$$

για κάθε $t > 0$. Γιὰ νὰ ἔχουμε δείξει πλήρως τὸ ζητούμενο, ἀρκεῖ πλέον νὰ παρατηρήσουμε ὅτι

$$|\sqrt{n}B_2^n|^{1/n} \simeq 1 = |T(Q)|^{1/n} \simeq |T(K+x)|^{1/n} = |T(K)|^{1/n},$$

ἀπὸ ὅπου ἔπεται ὅτι $a \simeq 1$ καὶ ὅτι τὸ $c'a$ στὴν (4.5.3) φράσσεται ἀπὸ ἀπόλυτη σταθερά. \square

Συνδυάζοντας τὴν Πρότασι 4.5.1 με τὴν κλασσικὴ ἀνισότητα Santaló καὶ τὸ Πόρισμα 4.1.2, δείχνουμε τώρα τὴν ὑπαρξί M -ἔλλειψοειδῶν γιὰ κάθε κεντραρισμένο κυρτό σῶμα στὸν \mathbb{R}^n .

Θεώρημα 4.5.2. Ἐστω K ἓνα κυρτό σῶμα στὸν \mathbb{R}^n με κέντρο βάρους τὸ 0. Μποροῦμε νὰ βροῦμε ἓνα ἔλλειψοειδῆς \mathcal{E}_K τέτοιο ὥστε $|K| = |\mathcal{E}_K|$ καὶ

$$\max\{\log N(K, \mathcal{E}_K), \log N(\mathcal{E}_K, K), \log N(K^\circ, \mathcal{E}_K^\circ), \log N(\mathcal{E}_K^\circ, K^\circ)\} \leq cn,$$

ὅπου $c > 0$ εἶναι μία ἀπόλυτη σταθερά.

Απόδειξις. Ἐστω ὅτι \mathcal{E}_K εἶναι τὸ ἔλλειψοειδῆς ποὺ ὀρίστηκε στὴν Πρότασι 4.5.1. Ἐπεται ἀμέσως ὅτι

$$\max\{N(K, \mathcal{E}_K), N(\mathcal{E}_K^\circ, K^\circ)\} \leq \exp(cn).$$

Γιὰ νὰ δείξουμε τὸ ἴδιο ἄνω φράγμα καὶ γιὰ τοὺς ἄλλους δύο ἀριθμοὺς καλύψεως, ἐπικαλούμαστε τὸ Λήμμα 4.1.1: $N(\mathcal{E}_K, K) \leq 8^n N(K, \mathcal{E}_K)$, τὸ ὁποῖο σημαίνει ὅτι $\log N(\mathcal{E}_K, K) \leq (\log 8)n + \log N(K, \mathcal{E}_K)$, καὶ παρομοίως

$$N(K^\circ, \mathcal{E}_K^\circ) \leq 2^n \frac{|K^\circ + \mathcal{E}_K^\circ|}{|\mathcal{E}_K^\circ|} \leq 2^n \frac{|K^\circ + \mathcal{E}_K^\circ|}{|K^\circ|} \leq 4^n N(\mathcal{E}_K^\circ, K^\circ),$$

ὅπου βεβαίως χρησιμοποιήσαμε καὶ τὸ γεγονός ὅτι $|K| = |\mathcal{E}_K| \Rightarrow |K^\circ| \leq |\mathcal{E}_K^\circ|$ ἐξαιτίας τῆς κλασσικῆς ἀνισότητος Santaló. \square

Ἡ ἀντίστροφη ἀνισότητα Brunn-Minkowski

Σὰν συνέπεια τοῦ Θεωρήματος 4.5.2 καὶ τοῦ Πορίσματος 4.1.2, παίρνουμε τὴν «ἀντίστροφη» ἀνισότητα Brunn-Minkowski.

Θεώρημα 4.5.3. Ἔστω K ἓνα κυρτὸ σῶμα στὸν \mathbb{R}^n μὲ βαρύκεντρο τὸ 0. Τότε ὑπάρχει ἓνα ἔλλειψοειδῆς \mathcal{E}_K μὲ ὄγκο $|\mathcal{E}_K| = |K|$ καὶ τέτοιο ὥστε, γιὰ κάθε κυρτὸ σῶμα L στὸν \mathbb{R}^n ,

$$(4.5.4) \quad e^{-(c+\log 8)} |\mathcal{E}_K + L|^{1/n} \leq |K + L|^{1/n} \leq e^{c+\log 8} |\mathcal{E}_K + L|^{1/n},$$

$$(4.5.5) \quad e^{-(c+\log 8)} |\mathcal{E}_K^\circ + L|^{1/n} \leq |K^\circ + L|^{1/n} \leq e^{c+\log 8} |\mathcal{E}_K^\circ + L|^{1/n},$$

ὅπου c εἶναι ἡ σταθερὰ πὺ βρήκαμε στὸ Θεώρημα 4.5.2.

Ἀπόδειξις. Ἔστω ὅτι \mathcal{E}_K εἶναι τὸ ἔλλειψοειδῆς τὴν ὑπαρξί τοῦ ὁποῖου μᾶς ἐξασφαλίζει ἡ Πρόταση 4.5.1. Χρησιμοποιῶντας καὶ τὸ Λήμμα 4.1.1, μποροῦμε νὰ γράψουμε

$$\begin{aligned} |\mathcal{E}_K + T|^{1/n} &\leq 2|T|^{1/n} N(\mathcal{E}_K, T)^{1/n} \leq 2|T|^{1/n} N(\mathcal{E}_K, K)^{1/n} N(K, T)^{1/n} \\ &\leq 2e^c |T|^{1/n} N(K, T)^{1/n} \leq 8e^c |K + T|^{1/n}. \end{aligned}$$

Μὲ τὸν ἴδιο τρόπο δείχνουμε καὶ τὸ δεύτερο μέρος τῆς (4.5.4), καθῶς καὶ τὴν (4.5.5). \square

Παρατήρησις 4.5.4. Ἔχει ἐπικρατήσει νὰ λέμε ὅτι ἓνα κεντραρισμένο κυρτὸ σῶμα K βρίσκεται σὲ M -θέσι ἂν ἓνα ἀπὸ τὰ ἔλλειψοειδῆ \mathcal{E}_K πὺ ψάχνουμε στὸ Θεώρημα 4.5.2 γίνεται νὰ εἶναι μία Εὐκλείδεια μπάλα (κατάλληλης ἀκτίνος ὥστε ὁ ὄγκος τῆς νὰ εἶναι ἴσος μὲ τοῦ K). Προφανῶς, ἂν θέσουμε $r_K := |K|^{1/n} / |B_2^n|^{1/n}$ καὶ $\mathcal{E}_K = T_K(r_K B_2^n)$ γιὰ κάποιον μετασχηματισμὸ T_K πὺ δὲν μεταβάλλει τοὺς ὄγκους, τότε ἡ γραμμικὴ εἰκόνα $\tilde{K} := T_K^{-1}(K)$ τοῦ K , πὺ ἔχει τὸν ἴδιο ὄγκο μὲ τὸ K , βρίσκεται σὲ M -θέσι. Ἄς ὑποθέσουμε τώρα ὅτι \tilde{K}_1 καὶ \tilde{K}_2 εἶναι τέτοιες εἰκόνες δύο κυρτῶν σωμάτων K_1 καὶ K_2 στὸν \mathbb{R}^n , καὶ ὅτι γράφοντας K'_i ἐννοοῦμε εἴτε τὸ \tilde{K}_i εἴτε τὸ πολικὸ του $(\tilde{K}_i)^\circ$. Χρησιμοποιῶντας τῆς (4.5.4) καὶ (4.5.5), βλέπουμε ὅτι

$$\begin{aligned} (4.5.6) \quad |K'_1 + K'_2|^{1/n} &\leq c|K'_1 + r_{K'_2} B_2^n|^{1/n} \leq c^2 |r_{K'_1} B_2^n + r_{K'_2} B_2^n|^{1/n} \\ &= c^2 (r_{K'_1} + r_{K'_2}) |B_2^n|^{1/n} = c^2 (|K'_1|^{1/n} + |K'_2|^{1/n}). \end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι έχουμε ένα μερικὸ ἀντίστροφο τῆς ἀνισότητος Brunn-Minkowski τὸ ὁποῖο ἰσχύει γιὰ συγκεκριμένες ἀφινικὲς εἰκόνες τῶν τυχαίων κυρτῶν σωμάτων K_1, K_2 στὸν \mathbb{R}^n , καθὼς καὶ γιὰ τὰ πολικὰ σώματα αὐτῶν τῶν εἰκόνων. Ἄμεση συνέπεια τῆς (4.5.6) καὶ τοῦ Πορίσματος 4.1.2 εἶναι τὸ ἀκόλουθο

Πόρισμα 4.5.5. Ἐστω K, L δύο κυρτὰ σώματα στὸν \mathbb{R}^n ποὺ ἔχουν τὸν ἴδιο ὄγκο καὶ βρίσκονται σὲ M -θέσι. Τότε, γιὰ κάθε $t > 0$,

$$N(K, tL)^{1/n} \simeq N(L, tK)^{1/n}.$$

Ἀπόδειξις. Ἐφ' ὅσον τὰ πολλαπλάσια tL καὶ tK εἶναι ἐπίσης σὲ M -θέσι γιὰ κάθε $t > 0$, ἔχουμε ὅτι

$$\begin{aligned} N(K, tL)^{1/n} &\simeq \frac{|K + tL|^{\frac{1}{n}}}{|tL|^{\frac{1}{n}}} \simeq \frac{|K|^{\frac{1}{n}} + t|L|^{\frac{1}{n}}}{t|L|^{\frac{1}{n}}} \\ &= \frac{t|K|^{\frac{1}{n}} + |L|^{\frac{1}{n}}}{t|K|^{\frac{1}{n}}} \simeq \frac{|tK + L|^{\frac{1}{n}}}{|tK|^{\frac{1}{n}}} \simeq N(L, tK)^{1/n}. \quad \square \end{aligned}$$

Ἡ πορεία ποὺ περιγράψαμε σὲ αὐτὴν τὴν τελευταία παράγραφο εἶναι ἡ ἀντίστροφη ἀπὸ αὐτὴν ποὺ ἐμφανίζεται στὴν βιβλιογραφία καὶ τὴν ὁποία ἐξηγήσαμε στὴν Παράγραφο 4.1, κατὰ τὴν ὁποία ἡ ὑπαρξίς M -ἐλλειψοειδῶν συνεπάγεται τόσο τὴν ἀσυμπτωτικὴ ἐκδοχὴ τῆς κλασσικῆς ἀνισότητος Santaló ὅσο καὶ τὴν ἀντίστροφή της. Μποροῦμε ἐπομένως νὰ ποῦμε ὅτι τὰ ἀποτελέσματα αὐτὰ εἶναι ἰσοδύναμοι τρόποι νὰ ἀναφερθοῦμε στὴν ἴδια γεωμετρικὴ ιδιότητα τῶν κυρτῶν σωμάτων ποὺ ἔχουν κέντρο βάρους τὸ 0, νὰ συμπεριφέρονται ὡς πρὸς τὸν ὄγκο σὰν ἐλλειψοειδῆ.

Ἀναφορές

- [1] Artstein-Avidan, S., V. Milman and S. J. Szarek. “Duality of metric entropy.” *Annals of Mathematics* **159** (2004): 1313-1328.
- [2] Ball, K. M. “Logarithmically concave functions and sections of convex sets in \mathbb{R}^n .” *Studia Mathematica* **88** (1988): 69-84.
- [3] Blaschke, W. “Über affine Geometrie VII: Neue Extremeigenschaften von Ellipse und Ellipsoid.” *Berichte über die Verhandlungen der Königlich-Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig, Mathematisch-Physische Klasse* **69** (1917): 306-318.
- [4] Bobkov, S. G. and F. L. Nazarov. “On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis.” *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1807**: 53-69. Springer, 2003.
- [5] Bobkov, S. G. and F. L. Nazarov. “Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis.” *Stochastic Inequalities and Applications*, Progress in Probability **56**: 3-13. Basel: Birkhäuser, 2003.
- [6] Borell, C. “Convex measures on locally convex spaces.” *Arkiv för Matematik* **12** (1974): 239-252.
- [7] Borell, C. “Convex set functions in d -space.” *Periodica Mathematica Hungarica* **6** (1975): 111-136.
- [8] Bourgain, J. “On high dimensional maximal functions associated to convex bodies.” *American Journal of Mathematics* **108** (1986): 1467-1476.
- [9] Bourgain, J. “On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets.” *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1469**: 127-137. Springer, 1991.
- [10] Bourgain, J. “On the isotropy constant problem for ψ_2 -bodies.” *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1807**: 114-121. Springer, 2003.

- [11] Bourgain, J., B. Klartag and V. D. Milman. “Symmetrization and isotropic constants of convex bodies.” *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1850**: 101-116. Springer, 2004.
- [12] Bourgain, J. and V. D. Milman. “New volume ratio properties for convex symmetric bodies in \mathbb{R}^n .” *Inventiones mathematicae* **88** (1987): 319-340.
- [13] Brazitikos, S., A. Giannopoulos, P. Valettas and B.-H. Vritsiou. *Notes on Isotropic Convex Bodies*. Book in preparation. <http://users.uoa.gr/~apgiannop/>.
- [14] Dafnis, N. and G. Paouris. “Small ball probability estimates, ψ_2 -behavior and the hyperplane conjecture.” *Journal of Functional Analysis* **258** (2010): 1933-1964.
- [15] Dafnis, N. and G. Paouris. “Estimates for the affine and dual affine quermassintegrals of convex bodies.” *Illinois Journal of Mathematics* (to appear).
- [16] Dvoretzky, A. “Some results on convex bodies and Banach spaces.” *Proceedings of the International Symposium on Linear Spaces, Jerusalem*: 123-160. Jerusalem Academic Press, 1960.
- [17] Fradelizi, M. “Sections of convex bodies through their centroid,” *Archiv der Mathematik* **69** (1997): 515-522.
- [18] Giannopoulos, A. *Notes on isotropic convex bodies*. Lecture Notes, Warsaw 2003. <http://users.uoa.gr/~apgiannop/>.
- [19] Giannopoulos, A. and V. D. Milman. “Concentration property on probability spaces.” *Advances in Mathematics* **156** (2000): 77-106.
- [20] Giannopoulos, A., G. Paouris and P. Valettas. “On the existence of subgaussian directions for log-concave measures.” *Contemporary Mathematics* **545** (2011): 103-122.
- [21] Giannopoulos, A., G. Paouris and B.-H. Vritsiou. “A remark on the slicing problem.” *Journal of Functional Analysis*, **262** (2012): 1062-1086.
- [22] Giannopoulos, A., G. Paouris and B.-H. Vritsiou. “The isotropic position and the reverse Santaló inequality.” *Israel Journal of Mathematics*, 2013. Doi:10.1007/s11856-012-0173-2.
- [23] Gordon, Y., M. Meyer and S. Reisner. “Zonoids with minimal volume product - a new proof.” *Proceedings of the American Mathematical Society* **104** (1988), 273-276.
- [24] Grünbaum, B. “Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes.” *Pacific Journal of Mathematics* **10** (1960): 1257-1261.

- [25] Hartzoulaki, M. *Probabilistic Methods in the Theory of Convex Bodies*. Ph.D. Thesis (March 2003). University of Crete.
- [26] Klartag, B. “An isomorphic version of the slicing problem.” *Journal of Functional Analysis* **218** (2005): 372-394.
- [27] Klartag, B. “On convex perturbations with a bounded isotropic constant.” *Geometric and Functional Analysis* **16** (2006): 1274-1290.
- [28] Klartag, B. “Uniform almost sub-gaussian estimates for linear functionals on convex sets.” *Algebra i Analiz* (St. Petersburg Mathematical Journal) **19** (2007): 109-148.
- [29] Klartag, B. and E. Milman. “Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform - A Unified Approach.” *Journal of Functional Analysis* **262** (2012): 10-34.
- [30] Klartag B. and V. D. Milman. “Rapid Steiner Symmetrization of most of a convex body and the slicing problem.” *Combinatorics, Probability and Computing* **14** (2005): 829-843.
- [31] Klartag, B. and R. Vershynin. “Small ball probability and Dvoretzky theorem.” *Israel Journal of Mathematics* **157** (2007): 193-207.
- [32] Kuperberg, G. “A low-technology estimate in convex geometry.” *International Mathematics Research Notices* **9** (1992): 181-183.
- [33] Kuperberg, G. “From the Mahler conjecture to Gauss linking integrals.” *Geometric and Functional Analysis* **18** (2008): 870-892.
- [34] Łatała, R. and J. O. Wojtaszczyk. “On the infimum convolution inequality.” *Studia Mathematica* **189** (2008): 147-187.
- [35] Ledoux, M. and M. Talagrand. “Probability in Banach spaces.” *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, 3. Folge*, **23**. Berlin: Springer, 1991.
- [36] Litvak, A. E., V. D. Milman and G. Schechtman. “Averages of norms and quasi-norms.” *Mathematische Annalen* **312** (1998): 95-124.
- [37] Lutwak, E., D. Yang and G. Zhang. “ L_p affine isoperimetric inequalities.” *Journal of Differential Geometry* **56** (2000): 111-132.
- [38] Mahler, K. “Ein Übertragungsprinzip für konvexe Körper.” *Časopis pro Pěstování Matematiky a Fysiky* **68** (1939): 93-102.
- [39] Meyer, M. “Une caractérisation volumique de certains espaces normés.” *Israel Journal of Mathematics* **55** (1986): 317-326.

- [40] Meyer, M. and A. Pajor. “On the Blaschke-Santaló inequality.” *Archiv der Mathematik* **55** (1990): 82-93.
- [41] Milman, V. D. “A new proof of A. Dvoretzky’s theorem on cross-sections of convex bodies.” *Funkcional. Anal. i Priložen.* (in Russian) **5** no. 4 (1971): 28–37.
- [42] Milman, V. D. “Inégalité de Brunn-Minkowski inverse et applications à la théorie locale des espaces normés.” *Comptes Rendus de l’Académie des sciences, Série I, Mathématique* **302** no. 1 (1986): 25-28.
- [43] Milman, V. D. “Isomorphic symmetrization and geometric inequalities.” *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988): 107-131.
- [44] Milman, V. D. and A. Pajor. “Isotropic positions and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n -dimensional space.” *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1376**: 64-104. Springer, 1989.
- [45] Milman, V. D. and A. Pajor. “Cas limites dans les inégalités du type de Khinchine et applications géométriques.” *Comptes Rendus de l’Académie des sciences, Série I, Mathématique* **308** no. 4 (1989), 91-96.
- [46] Milman, V. D. and A. Pajor. “Entropy and Asymptotic Geometry of Non-Symmetric Convex Bodies.” *Advances in Mathematics* **152** (2000): 314-335.
- [47] Milman, V. D. and G. Schechtman. *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*. Lecture Notes in Mathematics **1200**. Berlin: Springer, 1986.
- [48] Milman, V. D. and G. Schechtman. “Global versus local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces.” *Duke Mathematical Journal* **90** no. 1 (1997): 73-93.
- [49] Nazarov, F. “The Hörmander proof of the Bourgain-Milman theorem.” *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **2050** (2012): 335-343.
- [50] Paouris, G. “ ψ_2 -estimates for linear functionals on zonoids.” *Geometric Aspects of Functional Analysis*, Lecture Notes in Mathematics **1807** (2003): 211-222.
- [51] Paouris, G. “On the ψ_2 -behavior of linear functionals on isotropic convex bodies.” *Studia Mathematica* **168** (2005): 285-299.
- [52] Paouris, G. “Concentration of mass in convex bodies.” *Geometric and Functional Analysis* **16** (2006): 1021-1049.
- [53] Paouris, G. “Small ball probability estimates for log-concave measures.” *Transactions of the American Mathematical Society* **364** (2012): 287-308.

- [54] Petty, C. M. “Affine isoperimetric problems.” *Annals of the New York Academy of Sciences* **440** (1985): 113-127.
- [55] Pisier, G. “A new approach to several results of V. Milman.” *Journal für die reine und angewandte Mathematik* **393** (1989): 115-131.
- [56] Pisier, G. *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*. Cambridge Tracts in Mathematics **94**. Cambridge: Cambridge University Press, 1989.
- [57] Reisner, S. “Random polytopes and the volume-product of symmetric convex bodies.” *Mathematica Scandinavica* **57** (1985): 386-392.
- [58] Reisner, S. “Zonoids with minimal volume product.” *Mathematische Zeitschrift* **192** (1986): 339-346.
- [59] Rogers, C. A. and G. C. Shephard. “Convex bodies associated with a given convex body.” *Journal of the London Mathematical Society* **33** (1958): 270-281.
- [60] Saint Raymond, J. “Sur le volume des corps convexes symétriques.” *Séminaire d’Initiation à l’Analyse, 20e Année* (1980-1981), Exposé no. 11. Paris: Université Paris VI, 1981.
- [61] Santaló, L. A. “An affine invariant for convex bodies of n -dimensional space.” *Portugaliae Mathematica* (Spanish) **8** (1949): 155-161.
- [62] Schneider, R. *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**. Cambridge: Cambridge University Press, 1993.
- [63] Spingarn, J. “An inequality for sections and projections of a convex set.” *Proceedings of the American Mathematical Society* **118** (1993): 1219-1224.
- [64] Stein, S. “The symmetry function in a convex body.” *Pacific Journal of Mathematics* **6** (1956): 145-148.
- [65] Sudakov, V. N. “Gaussian random processes and measures of solid angles in Hilbert spaces.” *Soviet Mathematics - Doklady* **12** (1971): 412-415.
- [66] Tomczak-Jaegermann, N. “Dualité des nombres d’entropie pour des opérateurs a valeurs dans un espace de Hilbert.” *Comptes Rendus de l’Académie des sciences, Série I, Mathématique* **305** no. 7 (1987): 299-301.
- [67] Vritsiou, B.-H. “Further unifying two approaches to the hyperplane conjecture.” *International Mathematics Research Notices*, 2012. Doi:10.1093/imrn/rns263.
- [68] Zong, C. *Strange Phenomena in Convex and Discrete Geometry*. Universitext. Springer, 2003.