# Προβλήματα Ασυμπτωτικής Γεωμετρικής Ανάλυσης

Διδακτορική Διατριβή

Πέτρος Βαλέττας

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα 2012

Εισηγητής: Α. Γιαννόπουλος

# Περιεχόμενα

# Πρόλογος

Η διδακτορική αυτή διατριβή εντάσσεται στην περιοχή της Ασυμπτωτικής Κυρτής Γεωμετρίας. Τελείως σχηματικά, αντιμετωπίζουμε τρία βασικά προβλήματα:

- Υποκανονικές διευθύνσεις σε κυρτά σώματα του $n$-διάστατου Ευκλειδείου χώρου.
- Εκτίμηση του μέσου πλάτους στην ισοτροπική θέση, καθώς και την σύνδεσή του με την κατανομή των υποκανονικών διευθύνσεων.
- Γεωμετρία των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας που ικανοποιούν την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με δεδομένη σταθερά $\kappa$.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε για την προσέγγιση των προβλημάτων είναι κυρίως πιθανοθεωρητικές, αλλά και γεωμετρικές. Βασικό ζητούμενο των εκτιμήσεων είναι η ακριβής εξάρτηση από την διάσταση του χώρου, όταν αυτή μεγαλώνει.

Σε αυτό το εισαγωγικό κομμάτι, παραθέτουμε το βασικό συμβολισμό, κάποια κλασικά εργαλεία της θεωρίας των κυρτών σωμάτων και της ασυμπτωτικής θεωρίας χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα, και δίνουμε μια σύντομη περιγραφή των αποτελεσμάτων της διατριβής.

*Σε αυτό το σημείο θα ήθελα να ευχαριστήσω πολύ το δάσκαλό μου κ. Γιαννόπουλο, ο οποίος με μύησε στον ελκυστικό κόσμο της «Κυρτής Γεωμετρικής Ανάλυσης», που έμαθε όλα αυτά τα σύγχρονα και ενδιαφέροντα Μαθηματικά και συνεχίζει ακόμη να μου μαθαίνει.*

# Βασικές έννοιες

## 1. Κυρτά σώματα και συμβολισμός

**§1.1.** Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, γράφουμε $B_2^n$ για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και $S^{n-1}$ για την μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται με $|\cdot|$. Γράφουμε $\omega_n$ για τον όγκο της $B_2^n$ και $\sigma$ για το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην $S^{n-1}$. Η πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των $k$-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Έστω $k\leqslant n$ και $F\in G_{n,k}$. Συμβολίζουμε με $P_F$ την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ στον $F$. Επίσης, ορίζουμε $B_F := B_2^n\cap F$ και $S_F := S^{n-1}\cap F$.

Τα γράμματα $c, c', c_1, c_2$ κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές, οι οποίες μπορεί να αλλάζουν από γραμμή σε γραμμή. Οποτεδήποτε γράφουμε $a\simeq b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2>0$ έτσι ώστε $c_1a\leqslant b\leqslant c_2a$. Επίσης, αν $K, L\subseteq\mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K\simeq L$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2>0$ έτσι ώστε $c_1K\subseteq L\subseteq c_2K$.

**§1.2.** Ένα *κυρτό σώμα* στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο $C$ του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το $C$ είναι συμμετρικό αν $x\in C$ αν και μόνον αν $-x\in C$. Λέμε ότι το $C$ έχει *κέντρο βάρους* το 0 (ή στην αρχή των αξόνων), αν $\int_C\langle x,\theta\rangle\,dx = 0$ για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_C:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^+$ του κυρτού σώματος $C$ με $0\in\mathrm{int}(C)$ ορίζεται ως

$$\rho_C(x)=\max\{t>0: tx\in C\}$$

και η *συνάρτηση στήριξης* του $C$ ορίζεται ως

$$h_C(y)=\max\{\langle x,y\rangle : x\in C\}.$$

Παρατηρήστε ότι σε κάθε διευθύνση $\theta\in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_C(\theta)\leqslant h_C(\theta)$. Το *μέσο πλάτος* του

$C$ είναι η ποσότητα
$$w(C) = \int_{S^{n-1}} h_C(\theta)\sigma(d\theta).$$
Η *περιγεγραμμένη ακτίνα* του $C$ είναι η
$$R(C) = \max\{\|x\|_2 : x \in C\}.$$
Πολλές φορές, για σώματα $C$ με $0 \in \mathrm{int}(C)$ λέμε την παραπάνω ποσότητα διάμετρο του σώματος. Ο λόγος είναι ότι αυτές οι δυο ποσότητες είναι ισοδύναμες:
$$R(C) \leqslant \mathrm{diam}(C) \leqslant 2R(C),$$
όπου $\mathrm{diam}(C)$ είναι η συνήθης διάμετρος $\mathrm{diam}(C) = \sup\{\|x-y\|_2 : x, y \in C\}$. Το πολικό σώμα $C^\circ$ του $C$ ορίζεται να είναι το σώμα
$$C^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \forall y \in C\}.$$
Βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι ακόλουθες:

- $0 \in C^\circ$.
- Αν $0 \in \mathrm{int}(C)$, τότε $(C^\circ)^\circ = C$.
- Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_{C^\circ}(\theta) = 1/h_C(\theta)$.
- Για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.

Για κάθε $-\infty < p < \infty$, $p \neq 0$, ορίζουμε το *$p$-μέσο πλάτος* του $C$ ως
$$w_p(C) = \left(\int_{S^{n-1}} h_C^p(\theta)\, d\sigma(\theta)\right)^{1/p}.$$
Επίσης, γράφουμε για κάθε $-(n-1) \leqslant p \neq 0$
$$I_p(C) = \left(\int_C \|x\|_2^p\, dx\right)^{1/p},$$
για την $p$–ροπή της Ευκλείδειας νόρμας πάνω στο σώμα $C$. Τέλος, γράφουμε $\overline{C}$ για την *ομοιοθετική εικόνα* όγκου 1 του κυρτού σώματος $C \subseteq \mathbb{R}^n$, δηλαδή $\overline{C} := \frac{C}{|C|^{1/n}}$.

**§1.3.** Κάποιες βασικές ανισότητες για όγκους κυρτών σωμάτων οι οποίες θα φανούν χρήσιμες είναι οι ακόλουθες:

(α) Η ανισότητα του Urysohn. Αν $C$ είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$w(C) \geqslant \left(\frac{|C|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}.$$

(β) Η ανισότητα Blaschke–Santaló. Αν $K$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ή γενικότερα αν το $K$ έχει κέντρο βάρους το 0, τότε

$$|K| \cdot |K^\circ| \leqslant |B_2^n|^2.$$

(γ) Η ανισότητα των Bourgain–Milman. Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ ώστε: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, ισχύει

$$|K| \cdot |K^\circ| \geqslant c^n |B_2^n|.$$

Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή και ως αντίστροφη ανισότητα Santaló.

(δ) Η ανισότητα των Rogers–Shephard. Αν $K$ είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|K - K| \leqslant \binom{2n}{n} |K|.$$

**§1.4.** Το θεώρημα του Minkowski, το οποίο ταυτόχρονα εισάγει τους μεικτούς όγκους, λέει ότι για κάθε δυο κυρτά σώματα $K_1, K_2$ στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχουν συντελεστές $V(K_{i_1}, \ldots K_{i_n})$, $1 \leqslant i_1, \ldots, i_n \leqslant 2$, οι οποίοι καλούνται *μεικτοί όγκοι*, είναι συμμετρικοί ως προς τους δείκτες και επιπλέον

$$|t_1K_1 + t_2K_2| = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{2} V(K_{i_1}, \ldots, K_{i_n}) t_{i_1} \cdot \ldots \cdot t_{i_n}$$

για κάθε $t_1, t_2 \geqslant 0$. Γράφουμε απλούστερα

$$|K + tL| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V_j(K, L) t^{n-j},$$

όπου με $V_j(K, L)$ συμβολίζουμε τον μεικτό όγκο στον οποίο το σώμα $K$ επαναλαμβάνεται $j$ φορές ενώ το $L$ εμφανίζεται $n - j$ φορές· για να το δηλώσουμε αυτό γράφουμε $V_j(K, L) = V(K; j, L; n - j)$.

Η ανισότητα Alexandrov-Fenchel λέει ότι

$$V_j(K, L)^2 \geqslant V_{j-1}(K, L) V_{j+1}(K, L)$$

για $j = 1, 2, \ldots, n-1$. Άμεση συνέπεια αυτής είναι ότι η πεπερασμένη ακολουθία $(V_j/V_0)^{1/j}$ για $j = 1, \ldots, n$ είναι φθίνουσα. Παρατηρήστε ότι $V_0(K, L) = |L|$.

Θα μας χρειασθεί η περίπτωση όπου το σώμα $L$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα $B_2^n$. Σε αυτήν την περίπτωση ο μεικτός όγκος $V_j(K, B_2^n)$ είναι γνωστός ως το $(n-j)$-quermassintegral του $K$ και συμβολίζεται με $W_{[n-j]}(K)$. Έτσι, ο παραπάνω τύπος δίνει τον κλασικό τύπο του Steiner

$$|K + tB_2^n| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} W_{[n-j]}(K) t^{n-j}$$

για κάθε $t > 0$. Σε αυτήν την περίπτωση, η ανισότητα Alexandrov-Fenchel δείχνει ότι η πεπερασμένη ακολουθία $(W_{[n-j]}(K)/\omega_n)^{1/j}$ είναι φθίνουσα. Τέλος, θα μας χρειασθεί ο τύπος του Kubota, ο οποίος εκφράζει το quermassintegral ως την μέση τιμή των όγκων των προβολών του σώματος $K$ πάνω από την $G_{n,k}$:

$$W_{[n-j]}(K) = \frac{\omega_n}{\omega_j} \int_{G_{n,j}} |P_F(K)| \, d\nu_{n,j}(F),$$

για $1 \leqslant j \leqslant n-1$.

**§1.5.** Έστω $A, B$ δύο συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ο *αριθμός κάλυψης του $A$ από το $B$* είναι ο αριθμός

$$N(A, B) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \ \exists x_1, \ldots, x_N \in A \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B) \right\}.$$

Μια παραλλαγή του παραπάνω αριθμού κάλυψης είναι ο ακόλουθος αριθμός:

$$\overline{N}(A, B) = \min \left\{ N \in \mathbb{N} : \ \exists x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B) \right\}.$$

Είναι άμεσο από τον ορισμό ότι $\overline{N}(A, B) \leqslant N(A, B)$. Μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $N(A, B - B) \leqslant \overline{N}(A, B)$. Ειδικότερα, αν το $B$ είναι συμμετρικό και κυρτό, τότε $N(A, 2B) \leqslant \overline{N}(A, B)$. Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των αριθμών κάλυψης: Αν $A, B, C$ είναι κυρτά σώματα, τότε:

- $N(A, B) \leqslant N(A, C)$ αν $B \supseteq C$, ενώ $N(A, C) \leqslant N(B, C)$ αν $A \subseteq B$.
- $\overline{N}(A, C) \leqslant \overline{N}(A, B) \cdot \overline{N}(B, C)$.

- $N(A-A, B-B) \leqslant N(A,B)^2$.
- $N(A+B, B+C) \leqslant N(A,B)\cdot N(B,C)$.
- $2^{-n}\frac{|A+B|}{|B|} \leqslant N(A,B)$. Αν το $B$ είναι συμμετρικό, τότε $N(A,2B) \leqslant \frac{|A+B|}{|B|}$.
- $\frac{|A|}{|A\cap B|} \leqslant N(A,B)$.

Έστω $A, B$ κυρτά σώματα με το $B$ συμμετρικό. Για κάθε $t>0$ ορίζουμε

$$S_t(A,B) = \max\{m \in \mathbb{N} :\ \exists\, x_1,\dots,x_m \in A \text{ ώστε } \|x_i - x_j\|_B > t \text{ για } i \neq j\}.$$

Από τον ορισμό ελέγχουμε εύκολα ότι

$$N(A,tB) \leqslant S_t(A,B) \leqslant N(A, \tfrac{t}{2}B).$$

Τέλος, θα χρειαστούμε δύο βασικά θεωρήματα για αριθμούς κάλυψης. Το πρώτο είναι η ανισότητα του Sudakov (πρβλ. [36]):

**Θεώρημα (Sudakov).** Αν $K$ είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $t>0$ ισχύει

$$N(K, tB_2^n) \leqslant 2\exp\left(cn\left(\frac{w(K)}{t}\right)^2\right),$$

όπου $c>0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Το επόμενο θεώρημα αποδείχθηκε από τους Artstein-Milman-Szarek [2] και εκφράζει τον δυϊσμό των αριθμών κάλυψης, όταν ένα από τα δυο σώματα είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα.

**Θεώρημα (Artstein-Milman-Szarek, 2004).** Έστω $K$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\log N(K, B_2^n) \leqslant c_1 \log N(B_2^n, c_2K^\circ),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

## 2. Χώροι πεπερασμένης διάστασης με νόρμα

Έστω $K$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$\|x\|_K = \inf\{t>0 : x \in tK\}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ συμβολίζεται με $X_K$. Αντίστροφα· αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένα χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία μπάλα $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ του

$X$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Έστω $X, Y$ δύο $n$-διάστατοι χώροι με νόρμα. Η *απόσταση Banach–Mazur* του $X$ από τον $Y$ ορίζεται ως

$$d(X,T) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός}\}.$$

Σε γεωμετρική γλώσσα η απόσταση Banach–Mazur περιγράφεται ως εξής: Αν $X = X_K$ και $Y = X_L$ (δηλαδή οι μοναδιαίες μπάλες των $X, Y$ είναι τα κυρτά σώματα $K, L$ αντίστοιχα) τότε ο $d(X,Y)$ είναι ο μικρότερος $d > 0$ ώστε

$$L \subseteq T(K) \subseteq dL$$

για κάποιον αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό $T$. Είναι προφανές ότι $d(X,Y) \geqslant 1$ για κάθε δύο $n$-διάστατους χώρους, με ισότητα αν και μόνον αν οι χώροι είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Έτσι, η απόσταση Banach–Mazur μετράει πόσο διαφέρουν δύο χώροι από το να είναι ισομετρικοί.

Το πολύ γνωστό θεώρημα του Dvoretzky [14] (βλέπε [42] για τη βέλτιστη εξάρτηση ως προς τη διάσταση) μας πληροφορεί ότι κάθε $n$-διάστατος χώρος με νόρμα περιέχει υπόχωρο «μεγάλης διάστασης» που είναι σχεδόν Ευκλείδειος με την έννοια της απόστασης Banach–Mazur.

**Θεώρημα (Dvoretzky, 1960).** Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει σταθερά $c(\varepsilon) > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n$-διάστατο χώρο με νόρμα $X$ υπάρχει υπόχωρος $Y$ με διάσταση $k \geqslant c(\varepsilon)\log n$ ώστε $d(Y, \ell_2^k) < 1 + \varepsilon$.

Θα χρειαστούμε την ισομορφική εκδοχή του παραπάνω Θεωρήματος έτσι όπως διαμορφώθηκε από τους Litvak-Milman-Schechtman [38] και [45].

Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_C)$ χώρος με νόρμα. Ορίζουμε τον αριθμό Dvoretzky $k_*(C)$ του $C$ (ή του $X$) να είναι το

$$\max\left\{1 \leqslant k \leqslant n : \nu_{n,k}\big(\{F \in G_{n,k} : (w(C)/2)B_F \subseteq P_F(C) \subseteq 2w(C)B_F\}\big) \geqslant \frac{n}{n+k}\right\}.$$

Δηλαδή, $k_*(C)$ είναι η μεγαλύτερη διάσταση $k$ για την οποία οι «περισσότερες» $k$-διάστατες προβολές του συμμετρικού κυρτού σώματος $C$, με την έννοια του μέτρου Haar, είναι «4-ισόμορφες» με την Ευκλείδεια μπάλα.

Οι Milman–Schechtman [45] έδειξαν ότι ο αριθμός Dvoretzky δύναται να περιγραφεί από κάποιες καθολικές παραμέτρους του σώματος $C$. Πιο συγκεκριμένα έδειξαν ότι:

$$c_1 n\left(\frac{w(C)}{R(C)}\right)^2 \leqslant k_*(C) \leqslant c_2 n\left(\frac{w(C)}{R(C)}\right)^2,$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$. Ειδικότερα, το κάτω φράγμα έπεται από την απόδειξη του Milman [42] για το θεώρημα του Dvoretzky.

Αργότερα, οι Litvak-Milman-Schechtman [38, Statement 3.1] απέδειξαν, ότι ο αριθμός είναι καθοριστικός για την συμπεριφορά των $q$-μέσων πλατών του σώματος $C$ καθώς το $q$ μεγαλώνει. Το ακριβές αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο:

**Θεώρημα (Litvak-Milman-Schechtman, 1998).** Έστω $C$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, ισχύει

$$w_q(C) \simeq \begin{cases} w(C), & 1 \leqslant q \leqslant k_*(C) \\ \sqrt{q/n}R(C), & k_*(C) \leqslant q \leqslant n \\ R(C), & q \geqslant n \end{cases}.$$

Ειδικότερα, έχουμε ότι τα $w_q$ παραμένουν σταθερά και ίσα με $w$, όσο το $q \leqslant k_*(C)$.

Το ανάλογο αυτής της παρατήρησης για αρνητικές τιμές του $q$ αποδείχθηκε από τους Klartag-Vershynin [32, Theorem 1.2] και παραδόξως δείχνει ότι τα αρνητικά $q$-μέσα πλάτη έχουν κάτι παραπάνω από συμμετρική συμπεριφορά σε ό,τι αφορά την ευστάθειά τους: Το διάστημα στο οποίο μένουν σταθερά είναι εν γένει μεγαλύτερο από το $(-k_*, 0)$.

Ορίζουμε μια καινούργια παράμετρο ως εξής: Έστω $C$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο αριθμός $d_*(C)$ είναι η ποσότητα

$$d_*(C) = \min\left\{-\log\sigma\left(\left\{\theta \in S^{n-1} : h_C(\theta) \leqslant \frac{w(C)}{2}\right\}\right), n\right\}.$$

Από την ισοπεριμετρική ανισότητα στην $S^{n-1}$ μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι $d_*(C) \geqslant ck_*(C)$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα (Klartag-Vershynin, 2007).** Έστω $C$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $0 < q < c_1 d_*(C)$ ισχύει:

$$c_2 w(C) \leqslant w_{-q}(C) \leqslant c_3 w(C),$$

όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

# Σύντομη περιγραφή της εργασίας

**Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας.** Στο Κεφάλαιο 1 παρουσιάζουμε την γενίκευση των κυρτών σωμάτων στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων και τις διάφορες αντιστοιχίες μεταξύ τους. Πολλά από αυτά τα εργαλεία θα φανούν χρήσιμα στην συνέχεια για να μπορούμε με ευκολία να μεταβαίνουμε από τη θεωρία των κυρτών σωμάτων σε αυτήν των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας και αντίστροφα.

Χρησιμοποιούμε πιθανοθεωρητικές και γεωμετρικές μεθόδους για να αντιμετωπίσουμε τα ακόλουθα προβλήματα:

**Προβολές λογαριθμικά κοίλων μέτρων.** Στο Κεφάλαιο 2 μελετούμε την $\psi_\alpha$ συμπεριφορά τυχαίων προβολών λογαριθμικά κοίλων μέτρων. Ο συνήθης ορισμός για την $\psi_\alpha$ εκτίμηση ενός μέτρου $\mu$ είναι ο ακόλουθος: Έστω $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$. Λέμε ότι το $\mu$ είναι $\psi_\alpha$ στη διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ με σταθερά $b_\alpha = b_\alpha(\theta) > 0$ αν ισχύει

$$\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant b_\alpha \|\langle \cdot, \theta \rangle\|_2,$$

όπου $\|\cdot\|_{\psi_\alpha}$ είναι η νόρμα που ορίζεται ως εξής

$$\|f\|_{\psi_\alpha} = \inf \left\{ t > 0 : \int \exp(|f|/t)^\alpha \, d\mu \leqslant 2 \right\},$$

για κάθε $f$ Borel μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Επίσης, λέμε ότι το μέτρο $\mu$ είναι $\psi_\alpha$ με σταθερά $B_\alpha$, αν ισχύει $B_\alpha := \sup_{\theta \in S^{n-1}} b_\alpha(\theta) < \infty$.

Μια ισοδύναμη περιγραφή της $\psi_\alpha$ νόρμας δύναται να δοθεί από τις $q$ ροπές της συνάρτησης όπως δείχνει η ακόλουθη έκφραση:

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \simeq \sup_{q \geqslant \alpha} \frac{\|f\|_{L_q(\mu)}}{q^{1/\alpha}}.$$

Στην ειδική περίπτωση όπου το μέτρο $\mu$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο $\mu_K$ ενός κυρτού σώματος $K$ στον $\mathbb{R}^n$, όγκου 1, με κέντρο βάρους το 0, έχουμε:

$$\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{\psi_\alpha(K)} \simeq \sup_{a \leqslant q \leqslant n} \frac{\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{L_q(K)}}{q^{1/\alpha}}.$$

Γι' αυτό το λόγο ορίζουμε μια παραλλαγή $\psi'_\alpha$ της $\psi_\alpha$-νόρμας για τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα, η οποία στην περίπτωση των ομοιόμορφων μέτρων σε κυρτά σώματα είναι ταυτόσημες:

$$\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{\psi'_\alpha} = \sup_{\alpha \leqslant q \leqslant n} \frac{\|\langle \cdot, \theta \rangle\|_{L_q(\mu)}}{q^{1/\alpha}}.$$

Με αυτόν τον ορισμό αποδεικνύουμε το εξής αποτέλεσμα (Θεώρημα 2.4.2):

**Θεώρημα Α.** Έστω $\mu$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Γράφουμε $\pi_F(\mu)$ για την προβολή (marginal) του $\mu$ στον υπόχωρο $F$.

(α) Αν $k \leqslant \sqrt{n}$ τότε υπάρχει $A_k \subseteq G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(A_k) > 1 - \exp(-c\sqrt{n})$ τέτοιο ώστε, για κάθε $F \in A_k$, το $\pi_F(\mu)$ είναι $\psi'_2$-μέτρο με σταθερά $C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

(β) Αν $k = n^\delta$, $\frac{1}{2} < \delta < 1$ τότε υπάρχει $A_k \subseteq G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(A_k) > 1 - \exp(-ck)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $F \in A_k$, το $\pi_F(\mu)$ είναι $\psi'_{\alpha(\delta)}$-μέτρο με σταθερά $C$, όπου $\alpha(\delta) = \frac{2\delta}{3\delta - 1}$ και $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε χρησιμοποιεί το Θεώρημα του Dvoretzky, το αποτέλεσμα των Litvak-Milman-Schechtman [38] για την συμπεριφορά των $q$-μέσων πλατών και το θεώρημα του Παούρη [49], ότι οι ροπές της Ευκλείδειας νόρμας ως προς ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu$ παραμένουν σταθερές ως την κρίσιμη τιμή $q_*$:

$$I_2(\mu) \leqslant I_q(\mu) \leqslant c_1 I_2(\mu)$$

για $2 \leqslant q \leqslant c_2 q_*(\mu)$, όπου $q_*(\mu)$ είναι η μεγαλύτερη τιμή των $q \geqslant 2$ για την οποία ο αριθμός Dvoretzky του $L_p$-κεντροειδούς σώματος του $\mu$ είναι τουλάχιστον $p$ για όλα τα $p$ στο διάστημα $[2, q]$.

Στο δεύτερο μέρος δείχνουμε πώς μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Α ώστε να δώσουμε κάτω φράγματα για τις αρνητικές ροπές της Ευκλείδειας νόρμας ως προς το $\mu$. Δείχνουμε το εξής:

**Θεώρημα Β.** Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, ισχύουν τα εξής:

(α) Αν $k \leqslant \sqrt{n}$, τότε $I_{-k}(\mu) \geqslant c_1\sqrt{n}$.

(β) Αν $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$ και $k = n^{\delta}$, τότε $I_{-k}(\mu) \geqslant c_2 n^{1/2-s/2}$, όπου $s = \frac{\delta(2\delta-1)}{(3\delta-1)}$ και $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Επίσης, δείχνουμε ότι το $\psi_2$-σώμα του μέτρου $\mu$, το οποίο ορίζεται μέσω της συνάρτησης στήριξής του

$$h_{\Psi_2(\mu)}(\theta) = \sup_{2\leqslant q\leqslant n} \frac{\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_q(\mu)}}{\sqrt{q}}$$

και συμβολίζεται με $\Psi_2(\mu)$, έχει «μικρό μέσο πλάτος». Έχουμε το ακόλουθο (Θεώρημα 2.5.8):

**Θεώρημα Γ.** Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$w(\Psi_2(\mu)) \leqslant c\sqrt[4]{n},$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Ως συνέπεια παίρνουμε ότι το μέσο πλάτος ισοτροπικού κυρτού σώματος $K$ είναι $O(n^{3/4}L_K)$.

**Ύπαρξη $\psi_2$-διεύθυνσης σε ισοτροπικά κυρτά σώματα.** Στο Κεφάλαιο 3 μελετούμε το πρόβλημα ύπαρξης μιας τουλάχιστον $\psi_2$-διεύθυνσης σε κυρτά σώματα. Το ερώτημα οφείλεται στον V. Milman και διατυπώνεται ως εξής:

> *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 υπάρχει $y \neq 0$ ώστε*
>
> $$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{\psi_2(K)} \leqslant C\|\langle \cdot, y\rangle\|_{L_2(K)}.$$

Είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Brunn-Minkowski ότι κάθε κυρτό σώμα $K$ όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων είναι $\psi_1$-σώμα σε όλες τις διευθύνσεις: Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_1(K)} \leqslant C\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(K)}.$$

Επιπλέον, είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2(K)} \leqslant C\sqrt{n}\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_2(K)}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Παρατηρήστε ότι από την διατύπωση του προβλήματος μπορούμε να δουλέψουμε με οποιονδήποτε αντιπρόσωπο της αφινικής κλάσης του σώματος $K$.

Το ενδιαφέρον για την υπάρξη $\psi_2$-διευθύνσεων ξεκινά από την δουλειά του Bourgain [6] (και [7]) για να δώσει άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά $L_K$ ενός ισοτροπικού σώματος $K$. Στο επιχείρημά του φαίνεται ότι αν ξέραμε την ύπαρξη «αρκετών» $\psi_2$ διευθύσεων με απόλυτη σταθερά, τότε θα ήταν πιθανόν να επιτύχουμε την εκτίμηση $L_K = O(\log n)$. Επιπλέον, ύπαρξη $\psi_2$-διεύθυνσης με σταθερά $b > 0$ θα μας έδινε πληροφορίες για την κατανομή του όγκου του κυρτού σώματος $K$ έξω από συμμετρικές λωρίδες πλάτους $2t\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2$:

$$|\{x \in K : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant t\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2\}| \leqslant 2e^{-t^2/b^2}.$$

Το επιχείρημα που χρησιμοποιούμε για να εξασφαλίσουμε την ύπαρξη μιας τουλάχιστον $\psi_2$ διεύθυνσης με «καλή σταθερά» είναι ένα επιχείρημα σύγκρισης όγκων που χρησιμοποιήθηκε στα [30] και [21]: Παίρνουμε το σώμα $K$ στην ισοτροπική θέση και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι είναι $\psi_2$ στην διεύθυνση $\theta$ με σταθερά $b > 0$ αν και μόνον αν ισχύει:

$$(*) \qquad \left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q\, dx\right)^{1/q} \leqslant cb\sqrt{q}L_K$$

για όλα τα $2 \leqslant q \leqslant n$. Ορίζοντας $h_{Z_q(K)}(y)$ να είναι η συνάρτηση

$$y \longmapsto \left(\int_K |\langle x,y\rangle|^q\, dx\right)^{1/q},$$

βλέπουμε ότι είναι υποπροσθετική και θετικά ομογενής, άρα ορίζεται κυρτό σώμα που την έχει συνάρτηση στήριξης – ονομάζουμε αυτό το σώμα $Z_q(K)$. Κατόπιν, βασιζόμαστε στην εξής παρατήρηση: Αν $T$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα, τότε υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ ώστε $h_T(\theta) \leqslant \rho$ αν $|T| \leqslant |\rho B_2^n|$. Αφού θέλουμε να ικανοποιείται η $(*)$ για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$ αρκεί να εφαρμόσουμε την παραπάνω παρατήρηση για το σώμα

$$T = \Psi_2(K) = \mathrm{conv}\left(\left\{\frac{Z_q(K)}{\sqrt{q}} : 2 \leqslant q \leqslant n\right\}\right)$$

και για κάποιο $\rho = cbL_K$. Τέλος, βασιζόμενοι στην απλή παρατήρηση $|T|/|B| \leqslant N(T,B)$, προσπαθούμε να δώσουμε άνω φράγματα για αριθμούς κάλυψης της μορφής $N(T, sL_K B_2^n)$.

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο (Πρόταση 3.4.7):

**Θεώρημα Δ.** Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t \geqslant 1$ ισχύει

$$\log N(\Psi_2(K), c_1 t\sqrt{\log n}L_K B_2^n) \leqslant \frac{c_2 n}{t},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Αυτό εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας τουλάχιστον $\psi_2$ διεύθυνσης με σταθερά $O(\sqrt{\log n})$.

**Κατανομή $\psi_2$ διευθύνσεων σε ισοτροπικά κυρτά σώματα.** Στο Κεφάλαιο 4 ασχολούμαστε με το πόσο πολλές είναι οι $\psi_2$ διευθύνσεις σε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα. Καμιά από τις προηγούμενες προσεγγίσεις δεν εξασφαλίζει μέτρο για τις $\psi_2$ διευθύνσεις του σώματος με δεδομένη σταθερά. Ο B. Klartag στο [30] δείχνει ότι υπάρχει σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) \geqslant 4/5$ ώστε

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2(K_1)} \leqslant C(\log n)^3 \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_2(K_1)}$$

για κάθε $\theta \in A$, όμως το σώμα $K_1$ είναι η $\ell$ θέση του σώματος $K$: αυτή είναι ουσιαστικά η θέση που ελαχιστοποιεί το μέσο πλάτος.

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο (Θεώρημα 4.2.1):

**Θεώρημα Ε.** Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t \geqslant 1$ έχουμε

$$\psi_K(t) := \sigma\Big(\Big\{\theta \in S^{n-1} : \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant t\sqrt{\log n}L_K\Big\}\Big) \geqslant \exp(-cn/t^2),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για να αποδείξουμε το αποτέλεσμα τροποποιούμε το επιχείρημα του προηγούμενου Κεφαλαίου: αποδεικνύουμε εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης των προβολών των σωμάτων $Z_q(K)$ σε κάθε υπόχωρο κάθε διάστασης. Με αυτόν τον τρόπο, σε κάθε υπόχωρο βρίσκουμε διευθύνσεις με «σχετικά μικρή» $\psi_2$-νόρμα. Συγκεντρώνοντάς τις, βρίσκουμε ένα υποσύνολο της σφαίρας «σχετικά μεγάλου μέτρου» στο οποίο η συνάρτηση στήριξης του $\Psi_2(K)$ είναι μικρή.

Επιπλέον, δείχνουμε ότι όταν το $t$ είναι σχετικά μεγάλο, έχουμε πιο ικανοποιητική εκτίμηση στο μέτρο των $\psi_2$-διευθύνσεων (Πρόταση 4.2.2):

**Θεώρημα ΣΤ.** Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t \geqslant \sqrt[4]{n}/\sqrt{\log n}$ έχουμε:

$$\psi_K(t) \geqslant 1 - e^{-ct^2 \log n}.$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα και την εκτίμηση για το μέσο πλάτος του $\psi_2$-σώματος του $K$ (Θεώρημα Γ).

Στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου δείχνουμε πώς μπορούμε να εκμεταλλευτούμε την πληροφορία που έχουμε για τη συνάρτηση $\psi_K(t)$ ώστε να εκτιμήσουμε το μέσο πλάτος στην ισοτροπική θέση. Το επιχείρημα βασίζεται στην εκτίμηση των αρνητικών μέσων πλατών του $\psi_2$-σώματος του $K$ και στο αποτέλεσμα ευστάθειας των αρνητικών ροπών μιας νόρμας, που οφείλεται στους Klartag και Vershynin [32].

**Εκτίμηση μέσου πλάτους στην ισοτροπική θέση.** Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε τα γνωστά επιχειρήματα για την μέχρι στιγμής καλύτερη εκτίμηση του μέσου πλάτους στην ισοτροπική θέση. Στο τέλος του Κεφαλαίου δείχνουμε πώς μπορεί κανείς να παράγει ένα επιχείρημα διχοτομίας για την εκτίμηση του μέσου πλάτους στην ισοτροπική θέση, λαμβάνοντας υπόψιν τις εκτιμήσεις για την συνάρτηση $\psi_K$.

Για ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ και για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$ ορίζουμε

$$k_*(q) := n \left( \frac{w(Z_q(K))}{R(Z_q(K))} \right)^2 .$$

Αυτός είναι ουσιαστικά ο αριθμός Dvoretzky του συμμετρικού κυρτού σώματος $Z_q(K)$. Ορίζουμε την παράμετρο

$$\rho_* = \rho_*(K) := \min_{2 \leqslant q \leqslant n} k_*(q).$$

Χρησιμοποιώντας ουσιωδώς την πληροφορία που έχουμε για την κατανομή των $\psi_2$-διευθύνσεων αποδεικνύουμε το ακόλουθο (Θεώρημα 5.5.4):

**Θεώρημα Ζ.** Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στο $\mathbb{R}^n$. Τότε, ισχύει

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n} \min\{\sqrt{\rho_*}, \sqrt{n \log n / \rho_*}\} L_K,$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Παρατηρήστε ότι το θεώρημα αυτό περιγράφει την διχοτομία που αναφέραμε, ως προς το μέγεθος της παραμέτρου $\rho_*(K)$. Τέλος, παρουσιάζουμε ένα τεχνικό επιχείρημα που μας επιτρέπει να απαλείψουμε τον λογαριθμικό παράγοντα στην παραπάνω εκτίμηση.

**Λογαριθμική ανισότητα Sobolev.** Στο Κεφάλαιο 6 ασχολούμαστε με ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας που ικανοποιούν την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με δεδομένη σταθερά. Λέμε ότι το λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu$ στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa$, αν για κάθε Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\kappa \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu,$$

όπου

$$\mathrm{Ent}_\mu(g) = \int g \log g \, d\mu - \int g \, d\mu \log \int g \, d\mu$$

είναι η εντροπία της $g$. Συμβολίζουμε την κλάση αυτών των μέτρων με $\mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$. Η βασική παρατήρηση ότι ένα τέτοιο μέτρο είναι $\psi_2$ με σταθερά $O(\sqrt{\kappa})$, έπεται από το κλασικό επιχείρημα του Herbst και μας επιτρέπει να αποδείξουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα (Θεώρημα 6.2.10):

**Θεώρημα Η.** Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ανήκει στην $\mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$. Τότε,

(i) Όλες οι διευθύνσεις είναι υποκανονικές: Το $\mu$ είναι $\psi_2$-μέτρο με σταθερά $c_1\sqrt{\kappa}$.

(ii) Η ισοτροπική σταθερά του $\mu$ είναι φραγμένη: $L_\mu \leqslant c_2\sqrt{\kappa}$.

(iii) Έστω $I_q(\mu) = \left(\int \|x\|_2^q d\mu\right)^{1/q}$, $-n < q < \infty$, $q \neq 0$. Τότε,

$$I_q(\mu) \leqslant I_2(\mu) + \sqrt{\kappa}\sqrt{q}$$

για κάθε $2 \leqslant q < \infty$. Ειδικότερα,

$$I_q(\mu) \leqslant c_3\sqrt{n}$$

για όλα τα $q \leqslant c_4 n/\kappa$. Επίσης,

$$I_{-q}(\mu) \geqslant c_5\sqrt{n}$$

για κάθε $q \leqslant c_6 n/\kappa$.

(iv) Οι περισσότερες διευθύνσεις είναι «κανονικές» και υπερ-Gaussian: Υπάρχει ένα υποσύνολο $A$ της $S^{n-1}$ με μέτρο $\sigma(A) > 1 - e^{-c_7 n/\kappa}$ έτσι ώστε για κάθε $\theta \in A$ να έχουμε

$$\left(\int |\langle x,\theta\rangle|^q \, d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant c_8\sqrt{\kappa}\sqrt{q/p}\left(\int |\langle x,\theta\rangle|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}$$

για κάθε $1 \leqslant p \leqslant c_9 n/\kappa$ και κάθε $q \geqslant p$, και, επιπλέον,

$$\mu(x : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant t) \geqslant e^{-c_{10}t^2/\kappa},$$

για κάθε $1 \leqslant t \leqslant c_{11}\sqrt{n}/\kappa$.

Επίσης, χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα για μέτρα που ικανοποιούν την λογαριθμική ανισότητα Sobolev μπορούμε να δώσουμε μια βελτιωμένη εκτίμηση για την συνάρτηση κατανομής της φθίνουσας αναδιάταξης τυχαίου διανύσματος που αποδείχθηκε από τον R. Latała στο [33]. Το ακριβές αποτέλεσμα είναι το εξής (Πρόταση 6.2.11):

**Θεώρημα Θ.** Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ανήκει στην κλάση $\mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$. Για κάθε $1 \leqslant m \leqslant n$ και για κάθε $t \geqslant C\sqrt{\kappa\log(en/m)}$, έχουμε

$$\mu(x : x_m^* \geqslant t) \leqslant e^{-cmt^2/\kappa}.$$

Τέλος, δείχνουμε ότι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας που ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa > 0$ ικανοποιεί την ιδιότητα $(\tau)$ με συνάρτηση κόστους $\varphi(y) = c(\kappa)\|y\|_2^2, \; y \in \mathbb{R}^n$. Έχουμε το ακόλουθο (Θεώρημα 6.3.6):

**Θεώρημα I.** Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa > 0$. Τότε, το ζεύγος $(\mu, \varphi)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$, δηλαδή για κάθε $f$ φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$\int e^{\varphi \Box f} \, d\mu \int e^{-f} \, d\mu \leqslant 1,$$

όπου $(f \Box \varphi)(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \{f(x-y) + \varphi(y)\}$ είναι η ελαχιστική συνέλιξη της $f$ με τη $\varphi$ και $\varphi(y) = \frac{c}{\kappa}\|y\|_2^2$, όπου $c > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Για να αποδείξουμε το παραπάνω αποτέλεσμα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η λογαριθμική ανισότητα Sobolev και η Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα είναι ισοδύναμες για λογαριθμικά κοίλα μέτρα, γεγονός που αποδείχθηκε από τους Bakry και Ledoux στο [3].

# Κεφάλαιο 1

# Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

## 1.1 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_{[n]}$ την κλάση των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Γράφουμε $\mathcal{A}_n$ για την Borel $\sigma$-άλγεβρα του $\mathbb{R}^n$. Η πυκνότητα ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ συμβολίζεται με $f_\mu$.

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$. Λέμε ότι το $\mu$ έχει βαρύκεντρο το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ και γράφουμε $\mathrm{bar}(\mu) = x_0$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle \, d\mu(x) = \langle x_0, \theta \rangle \tag{1.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Η υποκλάση $\mathcal{CP}_{[n]}$ της $\mathcal{P}_{[n]}$ αποτελείται από όλα τα $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ που έχουν βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων. Δηλαδή, $\mu \in \mathcal{CP}_{[n]}$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle d\mu(x) = 0 \tag{1.2}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Η υποκλάση $\mathcal{SP}_{[n]}$ της $\mathcal{P}_{[n]}$ αποτελείται από όλα τα άρτια (συμμετρικά) μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$: το $\mu$ λέγεται άρτιο αν $\mu(A) = \mu(-A)$ για κάθε σύνολο Borel $A$ στον $\mathbb{R}^n$.

**Ορισμός 1.1.1.** Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλο* αν για κάθε ζεύγος συνόλων Borel $A, B$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}. \tag{1.3}$$

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλη* αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda} \tag{1.4}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$.

Όπως και στην περίπτωση των μέτρων, το βαρύκεντρο της $f$ ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{bar}(f) = \int_{\mathbb{R}^n} x f(x)\, dx. \tag{1.5}$$

Ειδικότερα, λέμε ότι η $f$ έχει βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x)\, dx = 0 \tag{1.6}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Αν ισχύει αυτό, θα λέμε ότι η $f$ είναι *κεντραρισμένη*.

*Σημείωση.* Ένα θεώρημα του Borell (βλέπε [11] και [12]) δείχνει ότι κάθε μη εκφυλισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_{[n]}$.

**Θεώρημα 1.1.2.** *Έστω $\mu$ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο $H$. Τότε, το $\mu$ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα $f$, δηλαδή $d\mu(x) = f(x)\, dx$.*

## 1.2 Ανισότητες για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις

Σε αυτήν την παράγραφο παραθέτουμε κάποια τεχνικά λήμματα για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις τα οποία θα χρησιμοποιούνται συχνά στην συνέχεια. Το επόμενο Λήμμα αποδείχθηκε στο [4].

**Λήμμα 1.2.1.** *Έστω $p \geqslant 1$ και έστω $\phi : [0, \infty) \to [0, \infty)$ μια κυρτή συνάρτηση με $\phi(0) = 0$ και $g : [0, \infty) \to [0, \infty)$ μια φθίνουσα ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε*

$$\int_0^{\infty} g(\phi(x)) x^{p-1}\, dx = \int_0^{\infty} g(x) x^{p-1}\, dx. \tag{1.7}$$

*Τότε, για κάθε $t \geqslant 0$ έχουμε*

$$\int_t^\infty g(\phi(x))x^{p-1}\,dx \leqslant \int_t^\infty g(x)x^{p-1}\,dx. \tag{1.8}$$

**Λήμμα 1.2.2.** *Έστω $h : [0,\infty) \to [0,\infty)$ μια φθίνουσα συνάρτηση και έστω $\phi : [0,\infty) \to [0,\infty)$ με $\phi(0) = 0$ ώστε η $\phi(x)/x$ να είναι αύξουσα. Τότε, η*

$$G(p) = \left(\frac{\int_0^\infty h(\phi(x))x^{p-1}\,dx}{\int_0^\infty h(x)x^{p-1}\,dx}\right)^{1/p} \tag{1.9}$$

*είναι φθίνουσα συνάρτηση του $p$ στο $(0,\infty)$.*

Για μια απόδειξη βλέπε [43]. Αν $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα για τις $h(x) = e^{-x}$ και $\phi(x) = -\log\frac{f(x)}{f(0)}$, παίρνουμε το εξής:

**Πόρισμα 1.2.3.** *Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση*

$$G(p) := \left[\frac{1}{f(0)\Gamma(p)}\int_0^\infty f(x)x^{p-1}\,dx\right]^{1/p} \tag{1.10}$$

*είναι φθίνουσα συνάρτηση του $p$ στο $[1,\infty)$.*

Το επόμενο Λήμμα έχει παρόμοια απόδειξη με το [43, Lemma 2.1.]

**Λήμμα 1.2.4.** *Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η*

$$F(p) := \left(\frac{p}{\|f\|_\infty}\int_0^\infty t^{p-1}f(t)\,dt\right)^{1/p} \tag{1.11}$$

*είναι αύξουσα συνάρτηση του $p$ στο $[1,\infty)$.*

Το επόμενο Λήμμα αποδείχθηκε στο [17].

**Λήμμα 1.2.5.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\mathrm{bar}(f) = 0$. Τότε,*

$$f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0). \tag{1.12}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Borell [12] θα δούμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ ικανοποιεί αντίστροφες ανισότητες Hölder (ανισότητες τύπου Khintchine) για ειδικού τύπου συναρτήσεις.

**Λήμμα 1.2.6** (Borell)**.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ το οποίο είναι λογαριθμικά κοίλο. Τότε, για κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο $A$ στον $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = \alpha \in (0,1)$ και για κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$1 - \mu(tA) \leqslant \alpha \left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{t+1}{2}}. \tag{1.13}$$

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας την συμμετρία και την κυρτότητα του $A$ ελέγχουμε ότι

$$\frac{2}{t+1}\mathbb{R}^n \setminus (tA) + \frac{t-1}{t+1}A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A. \tag{1.14}$$

για κάθε $t > 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το $\mu$ είναι λογαριθμικά κοίλο για να φτάσουμε στο συμπέρασμα. □

**Θεώρημα 1.2.7.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ το οποίο είναι λογαριθμικά κοίλο. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια ημινόρμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $1 \leqslant p < q$, έχουμε*

$$\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int |f|^p \, d\mu\right)^{1/p}, \tag{1.15}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Γράφουμε $\|f\|_p^p := \int |f|^p \, d\mu$. Τότε, το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3\|f\|_p\} \tag{1.16}$$

είναι συμμετρικό και κυρτό. Επίσης, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$tA = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3t\|f\|_p\} \tag{1.17}$$

και $\mu(A) \geqslant 1 - 3^{-p} \geqslant \frac{2}{3}$. Από το Λήμμα του Borell βλέπουμε ότι

$$\mu(x : |f(x)| \geqslant 3t\|f\|_p) \leqslant \frac{1}{3}e^{-c_1 p(t-1)} \tag{1.18}$$

για κάθε $t > 1$, όπου $c_1 = \frac{\ln 2}{2}$. Τώρα, μπορούμε να γράφουμε

$$\begin{aligned} \int |f|^q \, d\mu &= \int_0^\infty q s^{q-1} \mu(x : |f(x)| \geqslant s) \, ds \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + \frac{1}{3}(3\|f\|_p)^q \int_1^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p(t-1)} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + \frac{e^{c_1 p}}{3}(3\|f\|_p)^q \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p t} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + \frac{e^{c_1 p}}{3}\left(\frac{3\|f\|_p}{c_1 p}\right)^q \Gamma(q+1). \end{aligned} \tag{1.19}$$

Από τον τύπο του Stirling και από την $(a+b)^{1/q} \leqslant a^{1/q}+b^{1/q}$ για κάθε $a,b>0$ και $q \geqslant 1$, έπεται ότι $\|f\|_{L_q(\mu)} \leqslant c\frac{q}{p}\|f\|_{L_p(\mu)}$. □

**Παρατηρήσεις 1.2.8.** (α) Τα γραμμικά συναρτησοειδή είναι ημινόρμες στον $\mathbb{R}^n$, άρα ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.7. Συνεπώς, αν $\theta \in S^{n-1}$ τότε,

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \leqslant c\frac{q}{p}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_p, \tag{1.20}$$

για $1 \leqslant p < q$. Ειδικότερα, έχουμε

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \leqslant cq\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1 \tag{1.21}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το γεγονός αυτό παίζει πολύ βασικό ρόλο στα επόμενα.

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $n$-διάστατο μέτρο Gauss είναι λογαριθμικά κοίλο, βλέπουμε ότι αν $f$ είναι μια ημινόρμα, τότε η $f$ ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 1.2.7. Από την άλλη πλευρά, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες παίρνουμε

$$\left(\int |f(x)|^q\, d\gamma_n(x)\right)^{1/q} \simeq \sqrt{n+q}\left(\int_{S^{n-1}} |f(\theta)|^q\, d\sigma(\theta)\right)^{1/q}, \tag{1.22}$$

για κάθε $q \geqslant 1$. Συνδυάζοντας αυτές τις ανισότητες, έχουμε:

$$\left(\int_{S^{n-1}} |f|^q\, d\sigma\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\sqrt{\frac{n+p}{n+q}}\left(\int_{S^{n-1}} |f|^p\, d\sigma\right)^{1/p}, \tag{1.23}$$

για κάθε $1 \leqslant p \leqslant q$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

## 1.3 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

**Ορισμός 1.3.1.** Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει βαρύκεντρο το 0 και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^2\, d\mu(x) = 1 \tag{1.24}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν το $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ έχει βαρύκεντρο το 0 τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Το $\mu$ είναι ισοτροπικό.

(β) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle \, d\mu(x) = \mathrm{tr}(T). \tag{1.25}$$

(γ) Ισχύουν οι $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu(x) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

**Παρατήρηση 1.3.2.** Αν το $\mu$ είναι ισοτροπικό, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 \, d\mu(x) = n. \tag{1.26}$$

Επίσης, για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 \, d\mu(x) = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2, \tag{1.27}$$

όπου $\|T\|_{\mathrm{HS}} = \left(\sum_{j=1}^n \|Te_j\|_2^2\right)^{1/2}$ είναι η Hilbert–Schmidt νόρμα του $T$.

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι κάθε μη εκφυλισμένο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ με βαρύκεντρο το 0 έχει μια ισοτροπική γραμμική εικόνα.

**Πρόταση 1.3.3.** *Έστω $\mu$ ένα μέτρο στην $\mathcal{P}_{[n]}$ που έχει βαρύκεντρο το 0 και ο φορέας του δεν περιέχεται σε υπερεπίπεδο. Τότε, υπάρχει αντιστρέψιμη γραμμική απεικόνιση $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ώστε το $\nu = S(\mu)$ να είναι ισοτροπικό, όπου $S(\mu)(A) := \mu(S^{-1}(A))$ για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$Ty = \int \langle x, y\rangle x \, d\mu(x). \tag{1.28}$$

Παρατηρήστε ότι ο $T$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος: έχουμε

$$\langle Ty, y\rangle = \int \langle x, y\rangle^2 \, d\mu(x) > 0, \tag{1.29}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n, y \neq 0$. Συνεπώς, υπάρχει συμμετρικός θετικά ορισμένος $S \in GL(n)$ ώστε $T^{-1} = S^2$. Ορίζουμε $\nu = \mu \circ S^{-1}$. Τότε, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int \langle x, y\rangle^2 \, d\nu(x) &= \int \langle Sx, y\rangle^2 \, d\mu(x) = \int \langle x, Sy\rangle^2 \, d\mu(x) \\ &= \langle TSy, Sy\rangle = \langle S^{-1}y, Sy\rangle = \|y\|_2^2. \end{aligned} \tag{1.30}$$

Επιπλέον, αν το $\mu$ έχει βαρύκεντρο το 0 τότε το $\nu$ έχει την ίδια ιδιότητα. □

**Ορισμός 1.3.4.** Έστω $f$ μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Δηλαδή, η $f$ έχει βαρύκεντρο το 0, είναι λογαριθμικά κοίλη και $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$. Τότε, η $f$ λέγεται *ισοτροπική* αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 f(x)\, dx = 1 \tag{1.31}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Όπως πριν, ελέγχουμε εύκολα ότι η $f$ είναι ισοτροπική αν και μόνο αν ισχύει κάποιο από τα παρακάτω:

(i) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle f(x)\, dx = \mathrm{tr}(T). \tag{1.32}$$

(ii) Ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\, dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{1.33}$$

Πάλι, αν η $f$ είναι ισοτροπική, τότε $\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 f(x)\, dx = n$, και γενικότερα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 f(x)\, dx = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2 \tag{1.34}$$

για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Τέλος, ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu$ στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο δεν φέρεται από υπερεπίπεδο είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν έχει ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα $f_\mu$.

**Παρατήρηση 1.3.5.** Παρατηρήστε ότι ένα κυρτό σώμα $K$ με όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η συνάρτηση $L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K}K}$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

**Ορισμός 1.3.6.** Έστω $f$ μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Τότε, ο *πίνακας συνδιακυμάνσεων* $\mathrm{Cov}(f)$ της $f$ είναι ο πίνακας με συντεταγμένες

$$\mathrm{Cov}(f)_{i,j} = \mathrm{Cov}_f(x_i, x_j) = \int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\, dx \int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\, dx. \tag{1.35}$$

Παρατηρήστε ότι η $f$ είναι ισοτροπική αν και μόνο αν ο $\mathrm{Cov}(f)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Αν $f$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με $\mathrm{bar}(f) = 0$, τότε η ισοτροπική σταθερά της $f$ ορίζεται μέσω της

$$L_f = (f(0))^{1/n} (\det \mathrm{Cov}(f))^{\frac{1}{2n}}. \tag{1.36}$$

Στην περίπτωση που η $f$ είναι επιπλέον ισοτροπική, έχουμε

$$L_f = (f(0))^{1/n}. \tag{1.37}$$

Ο ορισμός αυτός είναι συνεπής με τον ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς ενός κυρτού σώματος, με την έννοια ότι

$$L_f = L_K, \tag{1.38}$$

όπου $f = L_K^n \mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι $L_f = L_{f\circ T}$ για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, και $L_f = L_{tf}$ για κάθε $t > 0$.

Τέλος, για ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu$ στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{bar}(\mu) = 0$ ορίζουμε $L_\mu := L_{f_\mu}$, όπου $f_\mu$ η πυκνότητά του.

**Πρόταση 1.3.7.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Τότε,*

$$f(0)^{1/n} \geqslant c, \tag{1.39}$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Αφού η $f$ είναι ισοτροπική, μπορούμε να γράφουμε

$$\begin{aligned} n = \int \|x\|_2^2 f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left( \int_0^{\|x\|_2^2} \mathbf{1}\,dt \right) f(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{x:\|x\|_2^2 \geqslant t\}}(t) f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus \sqrt{t}B_2^n} f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \left( 1 - \int_{\sqrt{t}B_2^n} f(x)dx \right) dt \\ &\geqslant \int_0^{(\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}} [1 - \omega_n \|f\|_\infty t^{n/2}]\,dt \\ &= (\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n} \frac{n}{n+2}. \end{aligned} \tag{1.40}$$

Παίρνοντας υπ' όψιν μας την $\omega_n^{-1/n} \simeq \sqrt{n}$ έχουμε το ζητούμενο. □

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο με την έννοια του σχεδόν ισοτροπικού μέτρου.

**Ορισμός 1.3.8.** Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Το $\mu$ λέγεται *σχεδόν ισοτροπικό* αν για την ισοτροπική του εικόνα $S(\mu)$ ισχύει ότι ο $S$ είναι σχεδόν ισομετρία. Δηλαδή, αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε $c_1\|x\|_2 \leqslant \|Sx\|_2 \leqslant c_2\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Το επόμενο Λήμμα περιγράφει την ευστάθεια της ισοτροπικής εικόνας $\mu$.

**Λήμμα 1.3.9.** *Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ώστε για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ να ισχύει:*

$$b^{-2}\|y\|_2^2 \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, y\rangle^2 \, d\mu(x) \leqslant a^{-2}\|y\|_2^2. \tag{1.41}$$

*Τότε, αν $\nu = S(\mu)$ είναι ισοτροπική εικόνα του $\mu$ έχουμε ότι $a \leqslant \|S\theta\|_2 \leqslant b$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Επιπλέον, για την ισοτροπική σταθερά του $\nu$ (ή του $\mu$) ισχύει:*

$$b^{-1} f_\mu(0)^{1/n} \leqslant L_\nu \leqslant a^{-1} f_\mu(0)^{1/n}. \tag{1.42}$$

*Απόδειξη.* Έστω $\nu = S(\mu)$ ισοτροπική εικόνα του $\mu$. Τότε, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ γράφουμε:

$$1 = \int \langle x, \theta\rangle^2 \, d\nu(x) = \int \langle Sx, \theta\rangle^2 \, d\mu(x) \leqslant a^{-2}\|S^*\theta\|_2^2,$$

από την υπόθεση. Όμοια δείχνουμε ότι $\|S^*\theta\|_2 \leqslant b$ και έπεται το πρώτο μέρος του Λήμματος.

Εύκολα βλέπουμε ότι αν $f_\mu$ είναι η πυκνότητα του $\mu$, τότε $f_\nu = (\det(S))^{-1} f \circ S^{-1}$, οπότε

$$L_\mu = L_\nu = f_\nu(0)^{1/n} = \frac{f_\mu(0)^{1/n}}{[\det(S)]^{1/n}}.$$

Αλλά,

$$b^{-2}\|y\|_2^2 \leqslant \langle Ty, y\rangle \leqslant a^{-2}\|y\|_2^2,$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, από την Πρόταση 1.3.3 και την υπόθεση. Καθώς, ο $S$ είναι η τετραγωνική ρίζα του $T^{-1}$, έπεται ότι

$$aB_2^n \subseteq S(B_2^n) \subseteq bB_2^n.$$

Παίρνοντας όγκους, βλέπουμε ότι $a \leqslant \det(S)^{1/n} \leqslant b$. Αυτό αποδεικνύει και την δεύτερη εκτίμηση του Λήμματος. $\square$

## 1.4 Κυρτά σώματα που αντιστοιχούν σε μέτρα

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε κάποιες μεθόδους με τις οποίες μπορεί κανείς να μελετήσει ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας χρησιμοποιώντας αντίστοιχες πληροφορίες για κυρτά σώματα. Για τον σκοπό αυτό, θα αντιστοιχίσουμε σε κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μια οικογένεια από κυρτά σώματα, ορίζοντάς τα μέσω της συνάρτησης στήριξης ή της ακτινικής τους συνάρτησης.

### 1.4.1 Τα σώματα του K.Ball

**Ορισμός 1.4.1.** Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $p > 0$ ορίζουμε ένα σώμα $K_p(f)$ ως εξής:

$$K_p(f) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \int_0^\infty f(rx) r^{p-1}\, dr \geqslant \frac{f(0)}{p} \right\}. \tag{1.43}$$

Αν $\mu$ είναι ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue τότε ορίζουμε

$$K_p(\mu) := K_p(f_\mu) = \left\{ x : \int_0^\infty r^{p-1} f_\mu(rx)\, dr \geqslant \frac{f(0)}{p} \right\}, \tag{1.44}$$

όπου $f_\mu$ είναι η πυκνότητα του $\mu$.

**Λήμμα 1.4.2.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K$. Τότε, έχουμε $K_p(\mathbf{1}_K) = K$ για κάθε $p > 0$.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \rho^p_{K_p(\mathbf{1}_K)}(\theta) &= \frac{1}{\mathbf{1}_K(0)} \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\, \mathbf{1}_K(t\theta)\, dt \\ &= \int_0^{\rho_K(\theta)} pt^{p-1}\, dt = \rho^p_K(\theta). \end{aligned} \tag{1.45}$$

Έπεται ότι $K_p(\mathbf{1}_K) = K$. □

Υποθέτοντας ότι η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα σώματα $K_p(f)$ είναι κυρτά. Για τον σκοπό αυτό χρειαζόμαστε το επόμενο Λήμμα το οποίο θυμίζει την ανισότητα Prékopa–Leindler (πρβλ. [4]).

**Λήμμα 1.4.3.** *Έστω $f, g, h : [0, \infty) \to [0, \infty)$ μετρήσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την*

$$h\left(\frac{2}{\frac{1}{r}+\frac{1}{s}}\right) \geqslant f(r)^{\frac{s}{r+s}} g(s)^{\frac{r}{r+s}} \tag{1.46}$$

*για κάθε $r, s > 0$. Θεωρούμε $p > 0$ και θέτουμε*

$$\begin{aligned} A &= \left(\int_0^\infty f(r) r^{p-1}\, dr\right)^{1/p}, \\ B &= \left(\int_0^\infty g(r) r^{p-1}\, dr\right)^{1/p}, \\ C &= \left(\int_0^\infty h(r) r^{p-1}\, dr\right)^{1/p}. \end{aligned} \tag{1.47}$$

*Τότε,*

$$C \geqslant \frac{2}{\frac{1}{A}+\frac{1}{B}}. \tag{1.48}$$

**Θεώρημα 1.4.4.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση και έστω $p > 0$. Τότε, το $K_p(f)$ είναι κυρτό σύνολο.*

*Απόδειξη.* Αρκεί να δείξουμε ότι αν $x, y \in K_p(f)$ τότε $\frac{x+y}{2} \in K_p(f)$. Αν ορίσουμε

$$g(r) = f(rx), \quad h(r) = f(ry) \quad \text{και} \quad m(r) = f(r\frac{x+y}{2}), \tag{1.49}$$

θα θέλαμε να δείξουμε ότι αν $A, B \geqslant f(0)/p$ τότε $C \geqslant f(0)/p$. Αφού

$$\frac{2}{A^{-1}+B^{-1}} \geqslant \frac{f(0)}{p}, \tag{1.50}$$

αρκεί να δείξουμε ότι η υπόθεση του προηγούμενου Λήμματος ικανοποιείται από τις $m, g, h$. Αυτό ελέγχεται εύκολα, διότι η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη. □

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει κάποιες βασικές ιδιότητες των σωμάτων $K_p(f)$.

**Πρόταση 1.4.5.** *Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $m = \inf_{g(x)>0} \frac{f(x)}{g(x)}$, $M = \sup_{g(x)>0} \frac{f(x)}{g(x)}$ και $f(0) = g(0) > 0$ και έστω $p > 0$. Έστω $V$ ένα αστρόμορφο σώμα και έστω $\|\cdot\|_V$ το συναρτησοειδές Minkowski του $V$. Τότε,*

(i) $0 \in K_p(f)$.

(ii) *Το* $K_p(f)$ *είναι αστρόμορφο.*

(iii) *Το* $K_p(f)$ *είναι συμμετρικό αν η* $f$ *είναι άρτια.*

(iv) $m^{1/p}K_p(g) \subseteq K_p(f) \subseteq M^{1/p}K_p(g)$.

(v) *Για κάθε* $\theta \in S^{n-1}$ *έχουμε*

$$\int_{K_{n+1}(f)} \langle x,\theta\rangle \, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle f(x)\, dx. \tag{1.51}$$

*Συνεπώς, η* $f$ *έχει βαρύκεντρο το* $0$ *αν και μόνο αν το* $K_{n+1}(f)$ *έχει βαρύκεντρο το* $0$.

(vi) *Για κάθε* $\theta \in S^{n-1}$ *και για κάθε* $p > 0$ *έχουμε*

$$\int_{K_{n+p}(f)} |\langle x,\theta\rangle|^p \, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p \, f(x)\, dx. \tag{1.52}$$

(vii) *Αν* $p > -n$ *τότε*

$$\int_{K_{n+p}(f)} \|x\|_V^p \, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_V^p f(x)\, dx. \tag{1.53}$$

(viii) *Ο όγκος του* $K_n(f)$ *είναι ίσος με*

$$|K_n(f)| = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx. \tag{1.54}$$

*Απόδειξη.* Οι (i), (ii) και (iii) ελέγχονται άμεσα. Για την (iv) συγκρίνουμε τις ακτινικές συναρτήσεις των $K_p(f)$ και $K_p(g)$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \rho^p_{K_p(f)}(x) &= \frac{p}{f(0)} \int_0^\infty r^{p-1} f(rx)\, dx \leqslant M \frac{p}{g(0)} \int_0^\infty r^{p-1} g(rx)\, dx \\ &= (M^{1/p}\rho_{K_p(g)}(x))^p, \end{aligned} \tag{1.55}$$

και όμοια, $(m^{1/p}\rho_{K_p(g)}(x))^p \leqslant \rho^p_{K_p(f)}(x)$.

(v) Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \int_{K_{n+1}(f)} \langle x,\theta\rangle dx &= n\omega_n \int_{S^{n-1}} \langle \phi,\theta\rangle \int_0^{1/\|\phi\|_{K_{n+1}(f)}} r^n dr d\sigma(\phi) \\ &= \frac{n\omega_n}{f(0)} \int_{S^{n-1}} \langle \phi,\theta\rangle \int_0^\infty r^n f(r\theta) dr d\sigma(\phi) \\ &= \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle f(x) dx. \end{aligned} \tag{1.56}$$

Συνεπώς, αν η $f$ έχει βαρύκεντρο το 0 τότε το $K_{n+1}(f)$ έχει επίσης βαρύκεντρο το 0.

(vi) Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι, για κάθε $p > -n$ και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned} \int_{K_{n+p}(f)} |\langle x, \theta \rangle|^p dx &= n\omega_n \int_{S^{n-1}} |\langle \phi, \theta \rangle|^p \int_0^{1/\|\phi\|_{K_{n+p}(f)}} r^{n+p-1} dr d\sigma(\phi) \\ &= \frac{n\omega_n}{f(0)} \int_{S^{n-1}} |\langle \phi, \theta \rangle|^p \int_0^{\infty} r^{n+p-1} f(r\theta) dr d\sigma(\phi) \\ &= \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta \rangle|^p f(x) dx. \end{aligned} \tag{1.57}$$

(vii) Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, αν $-n < p$ τότε

$$\begin{aligned} \int_{K_{n+p}(f)} \|x\|_V^p dx &= n\omega_n \int_{S^{n-1}} \|\phi\|_V^p \int_0^{1/\|\phi\|_{K_{n+p}(f)}} r^{n+p-1} dr d\sigma(\phi) \\ &= \frac{n\omega_n}{f(0)} \int_{S^{n-1}} \|\phi\|_V^p \int_0^{\infty} r^{n+p-1} f(r\theta) dr d\sigma(\phi) \\ &= \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_V^p f(x) dx. \end{aligned} \tag{1.58}$$

(viii) Εντελώς ανάλογα,

$$\begin{aligned} |K_n(f)| &= \int_{K_n(f)} \mathbf{1}\, dx \\ &= n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{1/\|\phi\|_{K_n(f)}} r^{n-1} dr d\sigma(\phi) \\ &= \frac{n\omega_n}{f(0)} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\infty} r^{n-1} f(r\theta) dr d\sigma(\phi) \\ &= \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx. \end{aligned} \tag{1.59}$$

Έχουμε έτσι όλες τις ιδιότητες (i)–(viii). □

Στο επόμενο Θεώρημα αποδεικνύουμε σχέσεις εγκλεισμού ανάμεσα στα σώματα $K_p(f)$.

**Θεώρημα 1.4.6.** *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.*

(α) *Αν $1 \leqslant p \leqslant q$ τότε*

$$\frac{\Gamma(p+1)^{1/p}}{\Gamma(q+1)^{1/q}} K_q(f) \subseteq K_p(f) \subseteq \left( \frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} K_q(f). \tag{1.60}$$

(β) *Αν* $\mathrm{bar}(f)=0$ *τότε για κάθε* $1\leqslant p\leqslant q$,

$$\frac{\Gamma(p+1)^{1/p}}{\Gamma(q+1)^{1/q}}K_q(f)\subseteq K_p(f)\subseteq e^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}K_q(f). \tag{1.61}$$

*Απόδειξη.* Παρατηρήστε ότι το (β) είναι άμεση συνέπεια του (α) αν χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 1.2.5: γνωρίζουμε ότι αν $\mathrm{bar}(f)=0$ τότε $f(0)\leqslant\|f\|_\infty\leqslant e^nf(0)$. Συνεπώς,

$$\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}\leqslant e^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}}. \tag{1.62}$$

Για τον δεξιό εγκλεισμό στην (1.60) χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.2.4: για κάθε $x\neq 0$ η

$$F(p):=\left(\frac{p}{\|f\|_\infty}\int_0^\infty r^{p-1}f(rx)\,dr\right)^{1/p} \tag{1.63}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του $p$ στο $[1,\infty)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\rho_{K_q(f)}(x)&=\left(\frac{q}{f(0)}\int_0^\infty r^{q-1}f(rx)\,dx\right)^{1/q}\\ &=\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q}\left(\frac{q}{\|f\|_\infty}\int_0^\infty r^{q-1}f(rx)\,dr\right)^{1/q}\\ &=\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q}F(q)\\ &\geqslant\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q}F(p)\\ &=\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q-1/p}\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/p}F(p)\\ &=\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q-1/p}\rho_{K_p(f)}(x).\end{aligned} \tag{1.64}$$

Για τον αριστερό εγκλεισμό στην (1.60) χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 1.2.3: για κάθε $x\neq 0$ η συνάρτηση

$$G(p):=\left(\frac{1}{f(0)\Gamma(p)}\int_0^\infty r^{p-1}f(rx)\,dr\right)^{1/p} \tag{1.65}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του $p$ στο $[1,\infty)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}(1.66)\qquad \rho_{K_q(f)}(x) &= \left(\frac{q}{f(0)}\int_0^\infty r^{q-1}f(rx)\,dx\right)^{1/q}\\ &= \Gamma(q+1)^{1/q}\left(\frac{1}{f(0)\Gamma(q)}\int_0^\infty r^{q-1}f(rx)\,dr\right)^{1/q}\\ &= \Gamma(q+1)^{1/q}G(q)\\ &\leqslant \frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}}\Gamma(p+1)^{1/p}F(p)\\ &= \frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}}\rho_{K_p(f)}(x),\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

**Πρόταση 1.4.7.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με $\mathrm{bar}(f)=0$. Τότε, για κάθε $p>0$ έχουμε*

$$(1.67)\qquad e^{-1}\leqslant f(0)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}|K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}\leqslant e\frac{n+p}{n}.$$

*Στην περίπτωση $p=0$ έχουμε ήδη δείξει ότι $f(0)^{1/n}|K_n(f)|^{1/n}=1$.*

*Απόδειξη.* Αρχικά, χρησιμοποιώντας την (1.61) παίρνουμε

$$(1.68)\qquad e^{\frac{n^2}{q}-\frac{n^2}{p}}|K_p(f)|\leqslant|K_q(f)|\leqslant\left(\frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}}\right)^n|K_p(f)|.$$

Στην συνέχεια, εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα για το ζεύγος $(n,n+p)$ και συνδυάζοντάς την με την (1.54) βλέπουμε ότι, για κάθε $p>0$,

$$(1.69)\qquad \frac{e^{-\frac{np}{n+p}}}{f(0)}\leqslant|K_{n+p}(f)|\leqslant((n+p)!)^{\frac{n}{n+p}}\frac{1}{n!f(0)},$$

άρα,

$$(1.70)\qquad \frac{1}{e}\leqslant f(0)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}|K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}\leqslant\frac{((n+p)!)^{\frac{1}{p}}}{(n!)^{\frac{n+p}{np}}}.$$

Παρατηρώντας ότι

$$(1.71)\qquad \frac{((n+p)!)^{\frac{1}{p}}}{(n!)^{\frac{n+p}{np}}}\leqslant(n+p)\frac{(n!)^{\frac{1}{p}}}{(n!)^{\frac{n+p}{np}}}=\frac{n+p}{(n!)^{\frac{1}{n}}}\leqslant e\frac{n+p}{n},$$

έχουμε την Πρόταση. □

### 1.4.2 $L_q$–κεντροειδή σώματα

**Ορισμός 1.4.8.** Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το $L_q$-κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του $K$ να είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα που έχει συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_q(K)}(y) = \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L^q(K)} = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}. \tag{1.72}$$

Παρατηρήστε ότι $Z_q(T(K)) = T(Z_q(K))$ για κάθε $T \in SL(n)$ και για κάθε $q \geqslant 1$. Επίσης, ένα κυρτό σώμα $K$ που έχει όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 είναι ισοτροπικό αν το $Z_2(K)$ είναι πολλαπλάσιο της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας.

Ο ορισμός επεκτείνεται φυσιολογικά στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int f = 1$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το $L_q$-κεντροειδές σώμα $Z_q(f)$ της $f$ να είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_q(f)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q f(x)\, dx\right)^{1/q}. \tag{1.73}$$

Αντίστοιχα, αν $\mu$ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q\, d\mu(x)\right)^{1/q}. \tag{1.74}$$

Παρατηρήστε ότι αν το $\mu$ έχει πυκνότητα $f_\mu$ ως προς το μέτρο Lebesgue τότε $Z_q(\mu) = Z_q(f_\mu)$.

Όπως και στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων, έχουμε $Z_q(T(\mu)) = T(Z_q(\mu))$ για κάθε $T \in L(n)$ και για κάθε $q \geqslant 1$, όπου $T(\mu)$ είναι η μεταφορά του μέτρου $\mu$ μέσω του $T$, δηλαδή $T(\mu)(A) := \mu(T^{-1}(A))$ για κάθε Borel σύνολο $A$ στον $\mathbb{R}^n$. Επίσης, για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις ισχύει $Z_q(f \circ T) = T^{-1}(Z_q(f))$ για κάθε $T \in SL(n)$. Μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα $f$ είναι ισοτροπική αν $Z_2(f) = B_2^n$.

**Λήμμα 1.4.9.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $q \geqslant 1$,*

$$\int_K |\langle x, \theta\rangle|^q dx \geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(q+n+1)} \max\left\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\right\}. \tag{1.75}$$

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $f_\theta(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|$. Από την αρχή του Brunn η $f_\theta^{1/(n-1)}$ είναι κοίλη στον φορέα της. Έπεται ότι

$$f_\theta(t) \geqslant \left(1 - \frac{t}{h_K(\theta)}\right)^{n-1} f_\theta(0) \tag{1.76}$$

για κάθε $t \in [0, h_K(\theta)]$. Συνεπώς,

$$
\begin{aligned}
(1.77)\quad \int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx &= \int_0^{h_K(\theta)} t^q f_\theta(t)dt + \int_0^{h_K(-\theta)} t^q f_{-\theta}(t)dt \\
&\geqslant \int_0^{h_K(\theta)} t^q \left(1 - \frac{t}{h_K(\theta)}\right)^{n-1} f_\theta(0)dt \\
&\quad + \int_0^{h_K(-\theta)} t^q \left(1 - \frac{t}{h_K(-\theta)}\right)^{n-1} f_\theta(0)dt \\
&= f_\theta(0)\left(h_K^{q+1}(\theta) + h_K^{q+1}(-\theta)\right)\int_0^1 s^q(1-s)^{n-1}ds \\
&= \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{\Gamma(q+n+1)} f_\theta(0)\left(h_K^{q+1}(\theta) + h_K^{q+1}(-\theta)\right) \\
&\geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2\Gamma(q+n+1)} f_\theta(0)\left(h_K(\theta) + h_K(-\theta)\right)\cdot \max\left\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\right\}.
\end{aligned}
$$

Αφού το $K$ έχει βαρύκεντρο το 0, έχουμε $\|f_\theta\|_\infty \leqslant e f_\theta(0)$, άρα

$$(1.78)\qquad 1 = |K| = \int_{-h_K(-\theta)}^{h_K(\theta)} f_\theta(t)dt \leqslant e\left(h_K(\theta) + h_K(-\theta)\right) f_\theta(0).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Πόρισμα 1.4.10.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $q \geqslant n$,*

$$(1.79)\qquad \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \simeq \max\{h_K(\theta), h_K(-\theta)\}.$$

*Απόδειξη.* Από το Λήμμα 1.4.9 ελέγχουμε εύκολα ότι $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_n \simeq \max\{h_K(\theta), h_K(-\theta)\}$.
□

Υποθέτουμε ότι $K$ είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα Hölder είναι φανερό ότι

$$(1.80)\qquad Z_1(K) \subseteq Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq Z_\infty(K)$$

για κάθε $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$, όπου $Z_\infty(K) = \mathrm{conv}\{K, -K\}$.

Από το Θεώρημα 1.2.7, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $q > p > 1$ έχουμε

$$(1.81)\qquad \|\langle\cdot, y\rangle\|_q \leqslant \frac{cq}{p}\|\langle\cdot, y\rangle\|_p.$$

Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι το $K$ έχει βαρύκεντρο το 0, τότε το Πόρισμα 1.4.10 ισχυρίζεται ότι

$$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{L^n(K)} \simeq \max\{h_K(y), h_K(-y)\}. \tag{1.82}$$

Στην γλώσσα των $L_q$-κεντροειδών σωμάτων, αυτά τα δύο αποτελέσματα παίρνουν την ακόλουθη μορφή.

**Πρόταση 1.4.11.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε*

$$Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq \frac{c_1 q}{p} Z_p(K), \tag{1.83}$$

*όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αν το $K$ έχει βαρύκεντρο το 0, τότε*

$$Z_q(K) \supseteq c_2 Z_\infty(K) \tag{1.84}$$

*για κάθε $q \geqslant n$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Εντελώς ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για λογαριθμικά κοίλα μέτρα.

**Πρόταση 1.4.12.** *Έστω $\mu$ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα $f$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε*

$$Z_p(f) \subseteq Z_q(f) \subseteq \frac{cq}{p} Z_p(f), \tag{1.85}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

### 1.4.3 $L_q$–κεντροειδή σώματα των $K_p(\mu)$

Σε αυτήν την Παράγραφο συζητάμε την σχέση της οικογένειας των $L_q$-κεντροειδών σωμάτων ενός κεντραρισμένου λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας $\mu$ με την οικογένεια των σωμάτων $K_p(\mu)$.

**Πρόταση 1.4.13.** *Έστω $f$ λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με $\mathrm{bar}(f) = 0$ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p \geqslant 1$,*

$$Z_p(\overline{K_{n+p}}(f))|K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{n}} f(0)^{1/p} = Z_p(f). \tag{1.86}$$

*Απόδειξη.* Έστω $p \geqslant 1$. Από την Πρόταση 1.4.5 (vi) γνωρίζουμε ότι

$$\int_{K_{n+p}(f)} |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^p \, f(x) \, dx \tag{1.87}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Αφού

$$\int_{K_{n+p}(f)} |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx = |K_{n+p}|^{1+\frac{p}{n}} \int_{\overline{K_{n+p}}(f)} |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx, \tag{1.88}$$

παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Τώρα, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 1.4.7. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $p > 0$ ισχύει

$$e^{-1} \leqslant f(0)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} \leqslant e\frac{n+p}{n}. \tag{1.89}$$

Από την Πρόταση 1.4.13 παίρνουμε:

**Πρόταση 1.4.14.** *Έστω $f$ μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p \geqslant 1$,*

$$\frac{1}{e} Z_p(\overline{K_{n+p}}(f)) \subseteq f(0)^{1/n} Z_p(f) \subseteq e\frac{n+p}{n} Z_p(\overline{K_{n+p}}(f)). \tag{1.90}$$

Δουλεύοντας με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να συγκρίνουμε τα συμμετρικά κυρτά σώματα $Z_q(\overline{K_{n+r_1}}(f))$ και $Z_q(\overline{K_{n+r_2}}(f))$ για $-(n-1) < r_1 \leqslant r_2 < \infty$ και $q \geqslant 1$.

**Λήμμα 1.4.15.** *Έστω $f$ μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότηατ στον $\mathbb{R}^n$ μϵ κέντρο βάρους το 0. Τότϵ, για κάθϵ $-(n-1) < r_1 \leqslant r_2 < \infty$ έχουμϵ*

$$A^{-1}_{q,r_1,r_2,n} Z_q(\overline{K_{n+r_2}}(f)) \subseteq Z_q(\overline{K_{n+r_1}}(f)) \subseteq A_{q,r_1,r_2,n} Z_q(\overline{K_{n+r_2}}(f)), \tag{1.91}$$

*όπου*

$$A_{q,r_1,r_2,n} := e^{\frac{n(r_2-r_1)(n+q)}{q(n+r_1)(n+r_2)}} \frac{(\Gamma(n+r_2))^{\frac{n+q}{q(n+r_2)}}}{(\Gamma(n+r_1))^{\frac{n+q}{q(n+r_1)}}}. \tag{1.92}$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{h^q_{Z_q(\overline{K_{n+r_1}}(f))}(\theta)}{h^q_{Z_q(\overline{K_{n+r_2}}(f))}(\theta)} &= \left(\frac{|K_{n+r_2}|}{|K_{n+r_1}|}\right)^{1+\frac{q}{n}} \frac{\int_{K_{n+r_1}} |\langle x, \theta\rangle|^q dx}{\int_{K_{n+r_2}} |\langle x, \theta\rangle|^q dx} \\ &= \left(\frac{|K_{n+r_2}|}{|K_{n+r_1}|}\right)^{1+\frac{q}{n}} \frac{\frac{n\omega_n}{n+q}\int_{S^{n-1}} |\langle \phi, \theta\rangle|^q \|\phi\|^{-(n+q)}_{K_{n+r_1}} d\sigma(\phi)}{\frac{n\omega_n}{n+q}\int_{S^{n-1}} |\langle \phi, \theta\rangle|^q \|\phi\|^{-(n+q)}_{K_{n+r_2}} d\sigma(\phi)}. \end{aligned} \tag{1.93}$$

Από το Θεώρημα 1.4.6, για κάθε $1 \leqslant p \leqslant q$ παίρνουμε

$$\|x\|_{K_p(f)} \leqslant \frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}} \|x\|_{K_q(f)} \tag{1.94}$$

και

$$\|x\|_{K_q(f)} \leqslant e^{\frac{n}{p}-\frac{n}{q}} \|x\|_{K_p(f)}. \tag{1.95}$$

Χρησιμοποιώντας τις (1.94) και (1.95) παίρνουμε

$$\frac{(\Gamma(n+r_1))^{\frac{n+q}{n+r_1}}}{(\Gamma(n+r_2))^{\frac{n+q}{n+r_2}}} \leqslant \frac{\|\phi\|_{K_{n+r_1}(f)}^{-(n+q)}}{\|\phi\|_{K_{n+r_2}(f)}^{-(n+q)}} \leqslant e^{n\frac{(r_2-r_1)(n+q)}{(n+r_1)(n+r_2)}}. \tag{1.96}$$

Επίσης, η Πρόταση 1.4.7 δίνει

$$e^{-n^2\frac{r_2-r_1}{(n+r_1)(n+r_2)}} \leqslant \frac{|K_{n+r_2}|}{|K_{n+r_1}|} \leqslant \frac{(\Gamma(n+r_2))^{\frac{n}{n+r_2}}}{(\Gamma(n+r_1))^{\frac{n}{n+r_1}}}. \tag{1.97}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned} e^{-\frac{n(r_2-r_1)(n+q)}{q(n+r_1)(n+r_2)}} \frac{(\Gamma(n+r_1))^{\frac{n+q}{q(n+r_1)}}}{(\Gamma(n+r_2))^{\frac{n+q}{q(n+r_2)}}} &\leqslant \frac{h_{Z_q(\overline{K_{n+r_1}}(f))}(\theta)}{h_{Z_q(\overline{K_{n+r_2}}(f))}(\theta)} \\ &\leqslant e^{\frac{n(r_2-r_1)(n+q)}{q(n+r_1)(n+r_2)}} \frac{(\Gamma(n+r_2))^{\frac{n+q}{q(n+r_2)}}}{(\Gamma(n+r_1))^{\frac{n+q}{q(n+r_1)}}}. \end{aligned} \tag{1.98}$$

Για $n \in \mathbb{N}$, $q > 0$ και $-n < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \infty$ ορίζουμε

$$A_{q,r_1,r_2,n} := e^{\frac{n(r_2-r_1)(n+q)}{q(n+r_1)(n+r_2)}} \frac{(\Gamma(n+r_2))^{\frac{n+q}{q(n+r_2)}}}{(\Gamma(n+r_1))^{\frac{n+q}{q(n+r_1)}}}. \tag{1.99}$$

Έτσι, έχουμε δείξει ότι αν $f$ είναι μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $q \geqslant 1$, για κάθε $-(n-1) < r_1 \leqslant r_2 \leqslant \infty$ και για όλα τα $\theta \in S^{n-1}$, έχουμε

$$A_{q,r_1,r_2,n}^{-1} \leqslant \frac{h_{Z_q(\overline{K_{n+r_1}}(f))}(\theta)}{h_{Z_q(\overline{K_{n+r_2}}(f))}(\theta)} \leqslant A_{q,r_1,r_2,n}, \tag{1.100}$$

ή ισοδύναμα

$$A_{q,r_1,r_2,n}^{-1} Z_q(\overline{K_{n+r_2}}(f)) \subseteq Z_q(\overline{K_{n+r_1}}(f)) \subseteq A_{q,r_1,r_2,n} Z_q(\overline{K_{n+r_2}}(f)). \tag{1.101}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Λήμματος. □

Ιδιαίτερα ενδιαφερόμαστε για τις περιπτώσεις $r_2 = q$ και $r_1 = 1$ ή $r_1 = 2$. Έχουμε ότι

$$A_{q,1,q,n} = e^{\frac{n(q-1)}{q(n+1)}} \frac{(\Gamma(n+q))^{\frac{1}{q}}}{(\Gamma(n+1))^{\frac{n+q}{q(n+1)}}} = \left( \frac{e^{\frac{n(q-1)}{n+1}}(n+1)\dots(n+q-1)}{(n!)^{\frac{q-1}{n+1}}} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant \left( e^{2\frac{n(q-1)}{n+1}} \frac{(n+q-1)^{q-1}}{n^{q-1}} \right)^{\frac{1}{q}} \leqslant e^2 \frac{n+q}{n}. \tag{1.102}$$

Ένας παρόμοιος υπολογισμός δείχνει ότι $A_{q,2,q,n} \leqslant e^2 \frac{n+q}{n}$. Έτσι, παίρνουμε ότι για $r = 1$ ή $r = 2$,

$$\frac{n}{e^2(n+q)} Z_q(\overline{K_{n+q}}(f)) \subseteq Z_q(\overline{K_{n+r}}(f)) \subseteq e^2 \frac{n+q}{n} Z_q(\overline{K_{n+q}}(f)). \tag{1.103}$$

Τότε για κάθε $q \leqslant n$, συνδυάζοντας την Πρόταση 1.4.14 με την (1.101) έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 1.4.16.** *Έστω $f$ μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$, έχουμε*

$$c_1 f(0)^{1/n} Z_q(f) \subseteq Z_q(\overline{K_{n+1}}(f)) \subseteq c_2 f(0)^{1/n} Z_q(f) \tag{1.104}$$

*και*

$$c_3 f(0)^{1/n} Z_q(f) \subseteq Z_q(\overline{K_{n+2}}(f)) \subseteq c_4 f(0)^{1/n} Z_q(f), \tag{1.105}$$

*όπου $c_1, c_2, c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

**Πρόταση 1.4.17.** *Έστω $f$ μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{c_1}{f(0)^{1/n}} \leqslant |Z_n(f)|^{1/n} \leqslant \frac{c_2}{f(0)^{1/n}}, \tag{1.106}$$

*όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Αφού η $f$ είναι κεντραρισμένη, το $K_{n+1}(f)$ έχει βαρύκεντρο το 0. Από την Πρόταση 1.4.11 βλέπουμε ότι

$$|Z_n(\overline{K_{n+1}}(f))|^{1/n} \simeq 1. \tag{1.107}$$

Τότε, από το Θεώρημα 1.4.16 παίρνουμε

$$f(0)^{1/n}|Z_n(f)|^{1/n} \simeq |Z_n(\overline{K_{n+1}}(f))|^{1/n} \simeq 1. \tag{1.108}$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

## 1.5 Συνελίξεις μέτρων

**Ορισμός 1.5.1.** Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δυο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Ορίζουμε την συνέλιξη $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y)g(y)\,dy. \tag{1.109}$$

Αντίστοιχα, αν $\mu, \nu$ είναι δυο μέτρα πιθανότητα στον $\mathbb{R}^n$ απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue, με πυκνότητες $f_\mu$ και $f_\nu$ αντίστοιχα, τότε εύκολα ελέγχουμε ότι η συνάρτηση $f_\mu * f_\nu$ είναι πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε το μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που αντιστοιχεί σε αυτήν με $\mu * \nu$. Δηλαδή, έχουμε

$$(\mu * \nu)(A) = \int_A (f_\mu * f_\nu)(x)\,dx = \int_A \int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x-y)f_\nu(y)\,dy\,dx, \tag{1.110}$$

για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, παρατηρήστε ότι για κάθε Borel μετρήσιμη συνάρτηση $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,d(\mu * \nu)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} h(x+y)\,d\mu(x)\,d\nu(y). \tag{1.111}$$

Τέλος, παρατηρήστε ότι αν οι $f, g$ έχουν κέντρο βάρος το 0, το ίδιο ισχύει για την $f * g$ κι αν οι $f, g$ είναι άρτιες, τότε και η $f * g$ είναι άρτια.

Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι η πράξη της συνέλιξης διατηρεί τις λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις.

**Λήμμα 1.5.2.** *Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ δυο λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις. Τότε, η συνάρτηση $f * g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι επίσης λογαριθμικά κοίλη.*

*Απόδειξη.* Άμεση εφαρμογή της ανισότητας Prékopa–Leindler: Έστω $\lambda \in (0,1)$ και $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$H(y) = f((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2 - y)g(y),\ F(y) = f(x_1 - y)g(y),\ G(y) = f(x_2 - y)g(y).$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι $f, g$ είναι λογαριθμικά κοίλες και μη αρνητικές δείχνουμε ότι για κάθε $y_1, y_2 \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$H((1-\lambda)y_1 + \lambda y_2) \geqslant F(y_1)^{1-\lambda} G(y_2)^{\lambda}.$$

Από την ανισότητα των Prékopa–Leindler (πρβλ. [51]) για τις συναρτήσεις $H, F$ και $G$ παίρνουμε:

$$\int_{\mathbb{R}^n} H(y)\, dy \geqslant \left( \int_{\mathbb{R}^n} F(y)\, dy \right)^{1-\lambda} \left( \int_{\mathbb{R}^n} G(y)\, dy \right)^{\lambda},$$

ή ισοδύναμα

$$(f * g)((1-\lambda)x_1 + \lambda x_2) \geqslant (f * g)(x_1)^{1-\lambda} (f * g)(x_2)^{\lambda}.$$

Καθώς, τα $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$ ήταν τυχόντα έχουμε το ζητούμενο. □

**Πρόταση 1.5.3.** *Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ δύο λογαριθμικά κοίλες πυκνότητες με τουλάχιστον μία από τις δύο να είναι άρτια. Τότε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ ισχύει:*

$$\frac{Z_{2k}(f) + Z_{2k}(g)}{2} \subseteq Z_{2k}(f * g) \subseteq Z_{2k}(f) + Z_{2k}(g). \tag{1.112}$$

*Ειδικότερα, για $k = 1$ έχουμε:*

$$h^2_{Z_2(f*g)} = h^2_{Z_2(f)} + h^2_{Z_2(g)}. \tag{1.113}$$

*Απόδειξη.* Έστω $\theta \in S^{n-1}$. Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
h^{2k}_{Z_{2k}(f*g)}(\theta) &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^{2k} (f * g)(x)\, dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^{2k} f(x - y) dx dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} g(y) \int_{\mathbb{R}^n} (\langle y, \theta \rangle + \langle z, \theta \rangle)^{2k} f(z) dz dy \\
&= \sum_{s=0}^{2k} \binom{2k}{s} \left( \int_{\mathbb{R}^n} \langle z, \theta \rangle^{s} f(z) dz \right) \left( \int_{\mathbb{R}^n} \langle y, \theta \rangle^{2k-s} g(y) dy \right).
\end{aligned}$$

Εφόσον, μία τουλάχιστον από τις $f, g$ είναι άρτια συμπεραίνουμε ότι

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle z, \theta \rangle^s f(z)dz\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle y, \theta \rangle^{2k-s} g(y)dy\right) = 0$$

για τους περιττούς $s$. Επομένως, έχουμε:

$$\sum_{s=0}^{2k} \binom{2k}{s} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle z, \theta \rangle^s f(z)dz\right)\left(\int_{\mathbb{R}^n} \langle y, \theta \rangle^{2k-s} g(y)dy\right) \geqslant h^{2k}_{Z_{2k}(f)}(\theta) + h^{2k}_{Z_{2k}(g)}(\theta).$$

Έπεται ότι $h_{Z_{2k}(f*g)}(\theta) \geqslant \frac{1}{2}(h_{Z_{2k}(f)(\theta)} + h_{Z_{2k}(g)}(\theta))$ για το τυχόν $\theta$ και έπεται ο αριστερός εγκλεισμός.

Για τον δεξιό εγκλεισμό, για όλα τα $0 \leqslant s \leqslant 2k$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle z, \theta \rangle^s f(z)dz \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle z, \theta \rangle|^{2k} f(z)dz\right)^{s/2k} = h^s_{Z_{2k}(f)}(\theta)$$

και όμοια,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle y, \theta \rangle^{2k-s} g(y)dy \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle y, \theta \rangle|^{2k} g(y)dy\right)^{(2k-s)/2k} = h^{2k-s}_{Z_{2k}(g)}(\theta).$$

Αυτό δίνει

$$h^{2k}_{Z_{2k}(f*g)}(\theta) \leqslant \sum_{s=0}^{2k} \binom{2k}{s} h^s_{Z_{2k}(f)}(\theta) h^{2k-s}_{Z_{2k}(g)}(\theta) = \left(h_{Z_{2k}(f)}(\theta) + h_{Z_{2k}(g)}(\theta)\right)^{2k}.$$

Συνεπώς, $Z_{2k}(f * g) \subseteq Z_{2k}(f) + Z_{2k}(g)$. □

**Πρόταση 1.5.4.** *Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ δύο λογαριθμικά κοίλες, ισοτροπικές πυκνότητες με τουλάχιστον μία από τις δύο να είναι άρτια. Τότε, υπάρχει ένα κυρτό σώμα $C$ στον $\mathbb{R}^n$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) *Το σώμα $C$ έχει όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0.*

(β) *Για την ισοτροπική σταθερά του $C$ ισχύει $L_C \leqslant c_1 \min\{L_f, L_g\}$.*

(γ) *Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ ισχύει $\frac{c_2}{L_C} Z_q(C) \subseteq Z_q(f) + Z_q(g) \subseteq \frac{c_3}{L_C} Z_q(C)$,*

*όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Έστω $C := \overline{K_{n+1}}(f*g)$. Από το Λήμμα 1.5.2 έπεται ότι η $f*g$ είναι λογαριθμικά κοίλη κι άρα από το Θεώρημα 1.4.4 το $C$ είναι κυρτό. Εφόσον οι $f, g$ έχουν κέντρο βάρους το 0, η $f*g$ έχει κι αυτή κέντρο βάρους το 0, άρα το $C$ έχει κέντρο βάρους το 0.

Από την σχέση (1.104) για $q=2$ και από την Πρόταση 1.5.3 έπεται ότι

$$Z_2(\overline{K_{n+1}}(f*g)) \simeq (f*g)(0)^{1/n} Z_2(f*g) \simeq (f*g)(0)^{1/n}(Z_2(f)+Z_2(g)). \tag{1.114}$$

Εφόσον οι $f, g$ είναι ισοτροπικές, έπεται ότι $Z_2(f)=Z_2(g)=B_2^n$. Επιπλέον, είναι

$$(f*g)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(-y)g(y)\,dy \leqslant \|f\|_\infty \int_{\mathbb{R}^n} g(y)\,dy \leqslant e^n f(0), \tag{1.115}$$

αφού η $f$ είναι λογαριθμικά κοίλη με κέντρο βάρους το 0. Έπεται ότι $(f*g)(0)^{1/n} \leqslant ef(0)^{1/n}$. Όμοια, δείχνουμε ότι $(f*g)(0)^{1/n} \leqslant eL_g$. Από το Λήμμα 1.3.9 παίρνουμε

$$L_C \simeq (f*g)(0)^{1/n} \leqslant c_1 \min\{L_f, L_g\}, \tag{1.116}$$

το οποίο αποδεικνύει τον δεύτερο ισχυρισμό.

Τέλος, πάλι από την σχέση (1.104) και από την Πρόταση 1.5.3 έχουμε:

$$Z_q(C) \simeq (f*g)(0)^{1/n} Z_q(f*g) \simeq (f*g)(0)^{1/n}(Z_q(f)+Z_q(g)).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων έχουμε το ακόλουθο Πόρισμα.

**Πόρισμα 1.5.5.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, υπάρχει ένα κυρτό σώμα $C$ όγκου 1 με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) *Το $C$ είναι σχεδόν ισοτροπικό και $L_C \leqslant c_1$.*

(β) *Για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ ισχύει: $c_2 Z_q(C) \subseteq \frac{Z_q(K)}{L_K} + \sqrt{q}B_2^n \subseteq c_3 Z_q(C)$,*

*όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Έστω $g = a_n \mathbf{1}_{b_n B_2^n}$, όπου $a_n = (n+2)^{-n/2}\omega_n^{-1}$ και $b_n = (n+2)^{1/2}$. Θεωρούμε επίσης την $f = L_K^n \mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}$. Παρατηρούμε ότι οι $f, g$ είναι λογαριθμικά κοίλες ισοτροπικές πυκνότητες στον $\mathbb{R}^n$, με την $g$ άρτια. Ορίζουμε $C := \overline{K_{n+1}(f*g)}$. Τότε, από το προηγούμενη Πρόταση και από το Λήμμα 1.3.9, το $C$ είναι σχεδόν ισοτροπικό με $L_C \leqslant c_1$, διότι $L_g = g(0)^{1/n} \simeq 1$. Τέλος, ελέγχουμε εύκολα ότι $Z_q(f) = \frac{Z_q(K)}{L_K}$ και ότι $Z_q(g) \simeq \sqrt{q}B_2^n$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

# Κεφάλαιο 2

# $\psi_\alpha$-εκτιμήσεις για προβολές λογαριθμικά κοίλων μέτρων

## 2.1 $\psi_\alpha$–εκτιμήσεις

**Ορισμός 2.1.1.** Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $\alpha \geqslant 1$ ορίζουμε την $\psi_\alpha$ νόρμα της $f$ ως εξής:

$$\|f\|_{\psi_\alpha} := \inf\left\{t > 0 : \int_\Omega \exp\left(\frac{|f(\omega)|}{t}\right)^\alpha d\mu(\omega) \leqslant 2\right\}. \tag{2.1}$$

Αν δεν υπάρχει τέτοιος $t > 0$, ορίζουμε $\|f\|_{\psi_\alpha} = +\infty$.

Το επόμενο Λήμμα δίνει μια ισοδύναμη έκφραση για την $\psi_\alpha$ νόρμα μέσω των $L_q$-νορμών.

**Λήμμα 2.1.2.** *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας, έστω $\alpha \geqslant 1$ και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$(2e\alpha)^{-1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha} \leqslant \sup_{p\geqslant\alpha} \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/\alpha}} \leqslant (2/\alpha)^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}. \tag{2.2}$$

*Απόδειξη.* Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $p \geqslant \alpha$ να έχουμε

$$\|f\|_p \leqslant Cp^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}. \tag{2.3}$$

Πράγματι, θέτουμε $A := \|f\|_{\psi_\alpha}$ και χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη ανισότητα $1+\frac{t^k}{k!} < e^t$ (η οποία ισχύει για κάθε $t > 0$), παίρνουμε

$$1 + \int_\Omega \frac{|f(\omega)|^{k\alpha}}{k!A^{k\alpha}}\, d\mu \leqslant \int_\Omega \exp(|f|/A)^\alpha\, d\mu = 2, \tag{2.4}$$

ή ισοδύναμα,

$$\int_\Omega |f|^{k\alpha}\, d\mu \leqslant k!A^{k\alpha}, \tag{2.5}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Έστω $p \geqslant \alpha$. Υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{N}$ ώστε $k\alpha \leqslant p < (k+1)\alpha$. Τότε, από την ανισότητα Hölder και από την $(k+1)! \leqslant (2k)^{k+1}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \|f\|_p &\leqslant \|f\|_{(k+1)\alpha} \leqslant [(k+1)!]^{\frac{1}{(k+1)\alpha}} A \leqslant 2^{1/\alpha} k^{1/\alpha} A \\ &\leqslant 2^{1/\alpha}\left(\frac{p}{\alpha}\right)^{1/\alpha} A \leqslant 2p^{1/\alpha} A. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Αντίστροφα, αν $\gamma := \sup_{p\geqslant\alpha} \frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}}$, τότε $\int_\Omega |f|^p\, d\mu \leqslant \gamma^p p^{p/\alpha}$ για κάθε $p \geqslant \alpha$. Συνεπώς, για κάποια σταθερά $c > 0$ (την οποία θα ορίσουμε κατάλληλα) έχουμε

$$\begin{aligned} \int_\Omega \exp(|f|/c\gamma)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(c\gamma)^{k\alpha} k!} \int_\Omega |f|^{\alpha k}\, d\mu \leqslant 1 + \sum_{k=1} \frac{(k\alpha)^k}{k! c^{k\alpha}} \\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{e\alpha}{c^\alpha}\right)^k, \end{aligned} \tag{2.7}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την στοιχειώδη ανισότητα $k! \geqslant (k/e)^k$. Αν επιλέξουμε $c := (2e\alpha)^{1/\alpha}$, τότε έχουμε $\|f\|_{\psi_\alpha} \leqslant c\gamma$. □

**Ορισμός 2.1.3.** Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$, $\alpha \geqslant 1$ και $\theta \in S^{n-1}$. Λέμε ότι το $\mu$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$ *εκτίμηση στην διεύθυνση του* $\theta$ *με σταθερά* $b_\alpha = b_\alpha(\theta)$ αν

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant b_\alpha \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2. \tag{2.8}$$

Λέμε ότι το $\mu$ είναι $\psi_\alpha$-μέτρο με σταθερά $B_\alpha > 0$ αν

$$B_\alpha := \sup_{\theta\in S^{n-1}} b_\alpha(\theta) = \sup_{\theta\in S^{n-1}} \frac{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_\alpha}}{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2} < \infty. \tag{2.9}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1.2 βλέπουμε ότι το $\mu$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$ εκτίμηση στην διεύθυνση του $\theta \in S^{n-1}$ με σταθερά $b_\alpha$ αν

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \leqslant cb_\alpha q^{1/\alpha} \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2 \tag{2.10}$$

για κάθε $q \geqslant \alpha$.

Το επόμενο Λήμμα δίνει ακόμα μία ισοδύναμη περιγραφή της $\psi_\alpha$-νόρμας.

**Λήμμα 2.1.4.** *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$, $\alpha \geqslant 1$ και $\theta \in S^{n-1}$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το $\mu$ ικανοποιεί $\psi_\alpha$-εκτίμηση στην διεύθυνση του $\theta$ με σταθερά $b$.*

(β) *Για κάθε $t > 0$ έχουμε $\mu(x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2) \leqslant 2e^{-t^\alpha/b^\alpha}$.*

*Απόδειξη.* Η συνεπαγωγή (α)⇒(β) είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας του Markov. Για την αντίστροφη συνεπαγωγή, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant cp^{1/\alpha} b \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2, \tag{2.11}$$

για κάθε $p \geqslant \alpha$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Γράφουμε

$$\begin{aligned} \int |\langle x, \theta\rangle|^p \, d\mu(x) &= \int_0^\infty pt^{p-1} \mu(x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t) \, dt \\ &\leqslant \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1} \mu(x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2) \, dt \\ &\leqslant 2\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1} e^{-t^\alpha/b^\alpha} \, dt, \end{aligned} \tag{2.12}$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση (β). Αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $s = (t/b)^\alpha$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int |\langle x, \theta\rangle|^p \, d\mu(x) &\leqslant 2(b\|\langle , \theta\rangle\|_2)^p \int_0^\infty \frac{p}{\alpha} s^{p/\alpha - 1} e^{-s} \, ds \\ &= 2(b\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2)^p \Gamma\left(\frac{p}{\alpha} + 1\right). \end{aligned} \tag{2.13}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling έχουμε το συμπέρασμα. □

**Πόρισμα 2.1.5.** *Κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$ είναι $\psi_1$-μέτρο (σε κάθε διεύθυνση) με μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Άμεση από την (1.21) και το Λήμμα 2.1.2. □

## 2.2 Περιθώριες κατανομές και προβολές

**Ορισμός 2.2.1.** Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω ακέραιος $1\leqslant k<n$ και έστω $F\in G_{n,k}$. Η *περιθώρια συνάρτηση* $\pi_F(f):F\to[0,\infty)$ της $f$ ως προς $F$ ορίζεται ως εξής:

$$\pi_F(f)(x):=\int_{x+F^\perp}f(y)dy. \tag{2.14}$$

Γενικότερα, για κάθε $\mu\in\mathcal{P}_{[n]}$ ορίζουμε την περιθώρια κατανομή του $\mu$ ως προς τον $k$-διάστατο υπόχωρο $F$ θέτοντας

$$\pi_F(\mu)(A):=\mu(P_F^{-1}(A)) \tag{2.15}$$

για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $F$. Αν το $\mu$ έχει (λογαριθμικά κοίλη) πυκνότητα $f_\mu$ τότε οι δύο ορισμοί συμφωνούν. Μπορούμε να δούμε ότι

$$f_{\pi_F(\mu)}=\pi_F(f_\mu) \tag{2.16}$$

σχεδόν παντού. Πράγματι, για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $F$, έχουμε

$$\begin{aligned}\pi_F(\mu)(A)=\mu(P_F^{-1}(A))&=\int f_\mu(x)\mathbf{1}_A(P_Fx)\,dx\\&=\int_F\int_{F^\perp}f_\mu(x+y)\mathbf{1}_A(x)\,dy\,dx,\end{aligned} \tag{2.17}$$

από το θεώρημα Fubini. Με μια αλλαγή μεταβλητής βλέπουμε ότι

$$\pi_F(\mu)(A)=\int_A\left(\int_{x+F^\perp}f_\mu(y)\,dy\right)dx=\int_A\pi_F(f_\mu)(x)\,dx. \tag{2.18}$$

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει κάποιες βασικές ιδιότητες των περιθώριων κατανομών.

**Πρόταση 2.2.2.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $F\in G_{n,k}$.*

(i) *Αν η $f$ είναι άρτια, τότε και η $\pi_F(f)$ είναι άρτια.*

(ii) *Έχουμε*

$$\int_F\pi_F(f)(x)\,dx=\int_{\mathbb{R}^n}f(x)\,dx. \tag{2.19}$$

(iii) *Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g:F\to\mathbb{R}$ έχουμε*

$$\int_{\mathbb{R}^n}g(P_Fx)f(x)\,dx=\int_F g(x)\pi_F(f)(x)\,dx. \tag{2.20}$$

(iv) *Για κάθε* $\theta \in S_F$,

$$\int_F \langle x,\theta\rangle \pi_F(f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle f(x)dx. \tag{2.21}$$

*Ειδικότερα, αν η* $f$ *είναι κεντραρισμένη τότε, για κάθε* $F \in G_{n,k}$ *η* $\pi_F(f)$ *είναι κεντραρισμένη.*

(v) *Για κάθε* $p > 0$ *και για κάθε* $\theta \in S_F$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p f(x)dx = \int_F |\langle x,\theta\rangle|^p \pi_F(f)(x)dx. \tag{2.22}$$

*Ειδικότερα, αν η* $f$ *είναι ισοτροπική, τότε και η* $\pi_F(f)$ *είναι ισοτροπική.*

(vi) *Αν η* $f$ *είναι λογαριθμικά κοίλη, τότε και η* $\pi_F(f)$ *είναι λογαριθμικά κοίλη.*

*Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε για οποιοδήποτε μέτρο* $\mu \in \mathcal{P}_{[n]}$.

*Απόδειξη.* Η πρώτη ιδιότητα είναι προφανής. Οι ισχυρισμοί (ii)-(v) είναι άμεσες συνέπειες του θεωρήματος Fubini.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε την ανισότητα Prékopa-Leindler. □

**Θεώρημα 2.2.3.** *Έστω* $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *πυκνότητα στον* $\mathbb{R}^n$. *Για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *και για κάθε* $F \in G_{n,k}$ *και* $q \geqslant 1$, *έχουμε*

$$P_F(Z_q(f)) = Z_q(\pi_F(f)). \tag{2.23}$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $q \geqslant 1$ και για κάθε $\theta \in S_F$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^q f(x)dx = \int_F |\langle x,\theta\rangle|^q \pi_F(f)(x)dx, \tag{2.24}$$

διότι $\langle x,\theta\rangle = \langle P_F(x),\theta\rangle$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. □

Έστω $f$ μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $F \in G_{n,k}$, η συνάρτηση $\pi_F(f)$ είναι μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $F$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την Πρόταση 1.4.17 για την $\pi_F(f)$. Έπεται ότι

$$\frac{c_1}{\pi_F(f)(0)^{1/k}} \leqslant |Z_k(\pi_F(f))|^{1/k} \leqslant \frac{c_2}{\pi_F(f)(0)^{1/k}}. \tag{2.25}$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την (2.23) έχουμε αποδείξει το εξής.

**Θεώρημα 2.2.4.** *Έστω $f$ μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με $\mathrm{bar}(f)=0$ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1\leqslant k<n$ και για κάθε $F\in G_{n,k}$, έχουμε*

$$c_1 \leqslant [\pi_F(f)(0)]^{\frac{1}{k}} |P_F(Z_k(f))|^{\frac{1}{k}} \leqslant c_2, \tag{2.26}$$

*όπου $c_1, c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Επιλέγοντας $f=\mathbf{1}_K$ και παρατηρώντας ότι $\pi_F(f)(0)=|K\cap F^\perp|$ παίρνουμε την ακόλουθη γεωμετρική ανισότητα, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν μια $L_q$ εκδοχή της ανισότητας Rogers-Shephard.

**Θεώρημα 2.2.5.** *Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant k<n$ και για κάθε $F\in G_{n,k}$, έχουμε*

$$c_1 \leqslant |K\cap F^\perp|^{\frac{1}{k}} |P_F(Z_k(K))|^{\frac{1}{k}} \leqslant c_2, \tag{2.27}$$

*όπου $c_1, c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

## 2.3 Τα σώματα $B_p(\mu, F)$

Σε αυτήν την ενότητα ορίζουμε κυρτά σώματα σε υποχώρους του $\mathbb{R}^n$. Η διαδικασία αυτή είναι συνδυασμός των περιθώριων κατανομών ενός μέτρου και των σωμάτων του K. Ball. Δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 2.3.1.** Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση, $F$ υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ και έστω $p>0$. Ορίζουμε το αστρόμορφο σώμα $B_p(f,F)$ στον $F$ ως εξής:

$$B_p(f,F) := K_p(\pi_F(f)). \tag{2.28}$$

Στην περίπτωση ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου $\mu$ στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται αντίστοιχα το $B_p(\mu,F)$ ως $B_p(\mu,F):=K_p(\pi_F(\mu))$. Αν $K$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, τότε γράφουμε απλούστερα $B_p(K,F)$ αντί για $B_p(L_K^n \mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}, F)$.

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει μερικές από τις ιδιότητες που κληρονομούν τα σώματα $B_p(\mu,F)$ από το μέτρο $\mu$.

**Πρόταση 2.3.2.** *Έστω $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Έστω $1\leqslant k<n$ και $E\in G_{n,k}$. Τότε, ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Το σώμα $B_p(f,E)$ είναι κυρτό σώμα στον $E$ για κάθε $p>0$.*

(β) *Το σώμα $B_p(f,E)$ είναι συμμετρικό, αν η $f$ είναι άρτια.*

(γ) *Το σώμα $B_{k+1}(f,E)$ έχει κέντρο βάρους το 0, αν* $\mathrm{bar}(f)=0$.

(δ) *Αν η $f$ είναι ισοτροπική και αν $\mathrm{bar}(f)=0$, το σώμα $\overline{B_{k+1}}(f,E)$ είναι σχεδόν ισοτροπικό και ισχύει*

$$L_{\overline{B_{k+1}}(f,E)} \simeq \pi_E(f)(0)^{1/k}. \tag{2.29}$$

*Ειδικότερα, αν $K$ είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$L_{\overline{B_{k+1}}(K,E)} \simeq L_K|K\cap E^{\perp}|^{1/k}. \tag{2.30}$$

(ε) *Αν $\mathrm{bar}(f)=0$ τότε για $1\leqslant q\leqslant k$ έχουμε:*

$$Z_q(\overline{B_{k+1}}(f,E)) \simeq \pi_E(f)(0)^{1/k} Z_q(\pi_E(f)) \simeq \pi_E(f)(0)^{1/k} P_E(Z_q(f)). \tag{2.31}$$

*Απόδειξη.* (α) Άμεσο από το Θεώρημα 1.4.4 και την Πρόταση 2.2.2. Για τα (β) και (γ) χρησιμοποιούμε τις Πρότασεις 2.2.2 και 1.4.5. Για το (δ) χρησιμοποιούμε διαδοχικά την (1.104) για $q=2$, την Πρόταση 2.2.2 και το Λήμμα 1.3.9. Ο δεύτερος ισχυρισμός είναι άμεσος από τον πρώτο και το γεγονός ότι $B_{k+1}(K,E)\equiv B_{k+1}(f,E)$, όπου $f=L_K^n\mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}$ είναι ισοτροπική, λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με κέντρο βάρους του 0. Τέλος, για το (ε) χρησιμοποιούμε πάλι το Θεώρημα 1.4.16. □

## 2.4 $\psi_\alpha$–εκτιμήσεις τυχαίων περιθώριων κατανομών

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να αποδείξουμε ότι προβάλλοντας ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο, για τους «περισσότερους» υποχώρους η $\psi_\alpha$ συμπεριφορά του βελτιώνεται.

Επειδή, σε αντίθεση με τα ομοιόμορφα μέτρα σε ένα κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$, τα τυχόντα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας ενδέχεται να μην έχουν συμπαγή φορέα ορίζουμε μια παραλλαγή της $\psi_\alpha$ νόρμας, η οποία όμως στην περίπτωση του ομοιόμορφου μέτρου στο $K$ είναι ταυτόσημη.

Ξεκινάμε με την γνωστή εκτίμηση $\|u\|_{\psi_\alpha}\simeq \sup\left\{\frac{\|u\|_q}{q^{1/\alpha}} : q\geqslant\alpha\right\}$. Αν $\mu$ είναι το μέτρο Lebesgue $\mu_K$ σε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ και αν $u$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές, τότε

$$\|u\|_{\psi_\alpha}\simeq \sup_{q\geqslant\alpha}\frac{\|u\|_q}{q^{1/\alpha}} \simeq \sup_{\alpha\leqslant q\leqslant n}\frac{\|u\|_q}{q^{1/\alpha}}. \tag{2.32}$$

Έτσι, οδηγούμαστε φυσιολογικά στον ακόλουθο ορισμό:

**Ορισμός 2.4.1.** *Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θεωρούμε την $u = u_\theta = \langle \cdot, \theta \rangle$ και ορίζουμε*

$$\|u\|_{\psi'_\alpha} = \sup_{\alpha \leqslant q \leqslant n} \frac{\|u\|_q}{q^{1/\alpha}}. \tag{2.33}$$

Είναι φανερό ότι $\|u\|_{\psi'_\alpha} \leqslant c\|u\|_{\psi_\alpha}$. Λόγω της (2.32) αυτός είναι ένα φυσιολογικός ορισμός «$\psi_\alpha$-νόρμας» όταν μελετούμε την συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών ως προς ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$· αυτό θα γίνει πιο κατανοητό από τις εφαρμογές στην Παράγραφο 2.5.

Το πρώτο μας αποτέλεσμα παρέχει εκτιμήσεις της $\psi'_\alpha$-συμπεριφοράς των τυχαίων περιθώριων κατανομών του $\mu$. Πιο συγκεκριμένα θα αποδείξουμε το εξής:

**Θεώρημα 2.4.2.** *Έστω $\mu$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Αν $k \leqslant \sqrt{n}$ τότε υπάρχει $A_k \subseteq G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(A_k) > 1 - \exp(-c\sqrt{n})$ τέτοιο ώστε, για κάθε $F \in A_k$, το $\pi_F(\mu)$ είναι $\psi'_2$-μέτρο με σταθερά $C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

(β) *Αν $k = n^\delta$, $\frac{1}{2} < \delta < 1$ τότε υπάρχει $A_k \subseteq G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(A_k) > 1 - \exp(-ck)$ τέτοιο ώστε, για κάθε $F \in A_k$, το $\pi_F(\mu)$ είναι $\psi'_{\alpha(\delta)}$-μέτρο με σταθερά $C$, όπου $\alpha(\delta) = \frac{2\delta}{3\delta - 1}$ και $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mu$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Πρώτα αποδεικνύουμε το Θεώρημα 2.4.2(α). Γι' αυτό θα χρειασθούμε έναν τύπο που συνδέει τις ροπές της Ευκλείδειας νόρμας με τις ροπές της συνάρτησης στήριξης των $L_q$-σωμάτων στην σφαίρα.

**Λήμμα 2.4.3.** *Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $q \geqslant 1$. Τότε,*

$$I_q(\mu) \simeq \sqrt{\frac{n+q}{q}}\, w_q(Z_q(\mu)). \tag{2.34}$$

*Απόδειξη.* Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες δείχνουμε ότι για κάθε $q \geqslant 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:

$$\left( \int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta \rangle|^q \, d\sigma(\theta) \right)^{1/q} \simeq \sqrt{\frac{q}{n+q}} \|x\|_2.$$

Ολοκληρώντας ως προς $\mu$ έχουμε το ζητούμενο. □

§1. *Η περίπτωση* $k \leqslant \sqrt{n}$. Από την Πρόταση 1.4.12 βλέπουμε ότι $Z_q(\mu) \subseteq cqZ_2(\mu)$ για όλα τα $q \geqslant 2$. Εφόσον, το $\mu$ είναι ισοτροπικό, έχουμε $Z_2(\mu) = B_2^n$, επομένως, $R(Z_q(\mu)) \leqslant cq$ για όλα τα $q \geqslant 1$.

Έστω $d(q) = n\frac{w^2(Z_q(\mu))}{R^2(Z_q(\mu))}$ και $D(\mu) = \{q \geqslant 2 : q \leqslant d(q)\}$. Έστω $q_0$ το μέγιστο του συνόλου των $q \geqslant 2$ για τα οποία $[2, q] \subseteq D(\mu)$. Τότε, από την συνέχεια της $d(q)$, έχουμε ότι $q_0 = d(q_0)$. Ειδικότερα, από ένα αποτέλεσμα των Litvak–Milman–Schechtman (πρβλ. [38, Statement 3.1]) και το Λήμμα 2.4.3 προκύπτει

$$w(Z_{q_0}(\mu)) \simeq w_{q_0}(Z_{q_0}(\mu)) \simeq \sqrt{q_0/n}\, I_{q_0}(\mu) \geqslant c_1\sqrt{q_0}. \tag{2.35}$$

Έπεται ότι

$$q_0 = n\frac{w^2(Z_{q_0}(\mu))}{R^2(Z_{q_0}(\mu))} \geqslant \frac{c_1^2 n q_0}{q_0^2} = \frac{c_1^2 n}{q_0}, \tag{2.36}$$

επομένως $q_0 \geqslant c_1\sqrt{n}$. Από τον ορισμό του $q_0$, για όλα τα $q \leqslant c_1\sqrt{n}$ έχουμε $q \leqslant d(q)$, και το προηγούμενο επιχείρημα, αν το εφαρμόσουμε για το $q$, δείχνει ότι

$$w(Z_q(\mu)) \geqslant c_2\sqrt{q} \;\text{ και }\; k_*(Z_q(\mu)) \geqslant c_2 n/q. \tag{2.37}$$

Τώρα, θεωρούμε $k \leqslant \sqrt{n}$. Από το [49, Θεώρημα 1.2] βλέπουμε ότι για κάθε $1 \leqslant q \leqslant k$ έχουμε $I_q(\mu) \leqslant CI_2(\mu) = C\sqrt{n}$, κι από την (2.35),

$$w(Z_q(\mu)) \leqslant w_q(Z_q(\mu)) \leqslant C\sqrt{q}. \tag{2.38}$$

Έτσι, αν σταθεροποιήσουμε $q \leqslant k$, το Θεώρημα του Dvoretzky (πρβλ. [44]) δίνει ότι

$$\frac{1}{2}w(Z_q(\mu))(B_2^n \cap F) \subseteq P_F(Z_q(\mu)) \subseteq 2w(Z_q(\mu))(B_2^n \cap F) \tag{2.39}$$

για όλους τους $F$ σε ένα υποσύνολο $B_{k,q}$ της $G_{n,k}$ μέτρου

$$\nu_{n,k}(B_{k,q}) \geqslant 1 - e^{-c_3 k_*(Z_q(\mu))} \geqslant 1 - e^{-c_4\sqrt{n}}. \tag{2.40}$$

Εφαρμόζοντας αυτό το επιχείρημα για $q = 2^i$, $i = 1, \ldots, \log_2 k$ και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι, από την Πρόταση 1.4.12, $Z_p(\mu) \subseteq Z_q(\mu) \subseteq 2cZ_p(\mu)$ αν $p < q \leqslant 2p$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $B_k \subset G_{n,k}$ με $\nu_{n,k}(B_k) \geqslant 1 - e^{-c_5\sqrt{n}}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $F \in B_k$ και για κάθε $1 \leqslant q \leqslant k$,

$$\frac{1}{2}w(Z_q(\mu))(B_2^n \cap F) \subseteq Z_q(\pi_F(\mu)) = P_F(Z_q(\mu)) \subseteq 2w(Z_q(\mu))(B_2^n \cap F). \tag{2.41}$$

Από την (2.38) και την (2.37) παίρνουμε $w(Z_q(\mu)) \simeq \sqrt{q}$ για όλα τα $q \leqslant \sqrt{n}$. Οπότε, η τελευταία σχέση μπορεί να ξαναγραφεί στην μορφή:

$$h_{Z_q(\pi_F(\mu))}(\theta) \simeq \sqrt{q} \tag{2.42}$$

για όλους τους $F \in B_k$ και όλα τα $\theta \in S_F$ και $1 \leqslant q \leqslant k$.

Από την ανισότητα

$$\sup_{1\leqslant q\leqslant k} \frac{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_q(\pi_F(\mu))}}{\sqrt{q}} = \sup_{1\leqslant q\leqslant k} \frac{h_{Z_q(\pi_F(\mu))}(\theta)}{\sqrt{q}} \leqslant C, \quad \theta \in S_F \tag{2.43}$$

παίρνουμε αμέσως το Θεώρημα 2.4.2(α).

§2. *Η περίπτωση* $k > \sqrt{n}$. Σταθεροποιούμε $k = n^\delta$, όπου $\delta \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)$, και θεωρούμε $1 \leqslant q \leqslant k$. Πρώτα αποδεικνύουμε το ακόλουθο γενικό Λήμμα.

**Λήμμα 2.4.4.** *Έστω $\mu$ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και $q \geqslant 1$,*

$$\left(\int_{G_{n,k}} R^k(Z_q(\pi_F(\mu)))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} \simeq w_k(Z_q(\mu)). \tag{2.44}$$

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας πάλι το αποτέλεσμα [38, Statement 3.1], βλέπουμε ότι, για κάθε $F \in G_{n,k}$,

$$R(Z_q(\pi_F(\mu)) \simeq w_k(Z_q(\pi_F(\mu))) = w_k(P_F(Z_q(\mu))). \tag{2.45}$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}\left(\int_{G_{n,k}} R^k(Z_q(\pi_F(\mu)))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} &\simeq \left(\int_{G_{n,k}} w_k^k(P_F(Z_q(\mu)))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k} \\ &= \left(\int_{G_{n,k}} \int_{S_F} h^k_{P_F(Z_q(\mu))}(\theta)\, d\sigma_F(\theta)\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k},\end{aligned}$$

όπου $\sigma_F$ είναι το αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο πιθανότητας στη $S_F := S^{n-1} \cap F$. Εφόσον

$$h_{P_F(Z_q(\mu))}(\theta) = h_{Z_q(\mu)}(\theta), \qquad \theta \in S_F, \tag{2.46}$$

και

$$\int_{G_{n,k}}\int_{S_F} h^k_{Z_q(\mu)}(\theta)\,d\sigma_F(\theta)\,d\nu_{n,k}(F)=\int_{S^{n-1}} h^k_{Z_q(\mu)}(\theta)\,d\sigma(\theta)=w_k^k(Z_q(\mu)), \tag{2.47}$$

παίρνουμε το ζητούμενο. □

Το επόμενο Λήμμα μας παρέχει φράγματα για το $w_k(Z_q(\mu))$.

**Λήμμα 2.4.5.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Αν $k=n^\delta$, $\delta\in\left(\frac{1}{2},1\right)$ και $1\leqslant q\leqslant k$, τότε*

$$w_k(Z_q(\mu))\leqslant c_3q^{1/\alpha(\delta)}, \tag{2.48}$$

*όπου $\alpha(\delta)=\frac{2\delta}{3\delta-1}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $1\leqslant q\leqslant k$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Υποθέτουμε ότι $k\leqslant n/q$. Τότε, έχουμε $q\leqslant n/q$ και η (2.37) δείχνει ότι $k_*(Z_q(\mu))\geqslant cn/q$. Οπότε, $k\leqslant ck_*(Z_q(\mu))$ και μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$w_k(Z_q(\mu))\simeq w(Z_q(\mu))\leqslant w_q(Z_q(\mu))\simeq\sqrt{q}. \tag{2.49}$$

(ii) Υποθέτουμε ότι $k>n/q$. Από το [38, Statement 3.1] έχουμε ότι $w_k(Z_q(\mu))\simeq w(Z_q(\mu))$ αν $k\leqslant k_*(Z_q(\mu))$ και $w_k(Z_q(\mu))\simeq\sqrt{k/n}R(Z_q(\mu))$ αν $k\geqslant k_*(Z_q(\mu))$. Εφόσον $q\leqslant k$, χρησιμοποιώντας την (2.38) παίρνουμε ότι $w_k(Z_q(\mu))\leqslant f(q,k)$, όπου $f(q,k)\leqslant c\sqrt{q}$ αν $q\leqslant k\leqslant k_*(Z_q(\mu))$ και $f(q,k)\leqslant cq\sqrt{k/n}$ αν $k\geqslant k_*(Z_q(\mu))$. Παρατηρήστε ότι $k_*(Z_q(\mu))\geqslant n/k$. Συνεπώς, έχουμε

$$f(q,k)\leqslant c\sqrt{q}\ \text{ αν }\ q\leqslant n/k \text{ και } f(q,k)\leqslant q\sqrt{k/n}\text{ αν }\ n/k\leqslant q. \tag{2.50}$$

Θέλουμε $q^{1-\frac{1}{\alpha}}\sqrt{k}\leqslant C\sqrt{n}$ για όλα τα $q\leqslant k$. Αυτό αληθεύει αν $k^{\frac{3}{2}-\frac{1}{\alpha}}\simeq n^{1/2}$. Εφόσον $k=n^\delta$, η βέλτιστη τιμή του $\alpha$ είναι

$$\alpha(\delta)=\frac{2\delta}{3\delta-1}. \tag{2.51}$$

Από την (i) ελέγχουμε ότι η (2.48) ισχύει και για $k\leqslant n/q$. Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

*Απόδειξη του θεωρήματος* 2.4.2(β). Εφαρμόζουμε την ανισότητα του Markov για $q=2^i$, $i=1,\dots,\log_2 k$ στο Λήμμα 2.4.4, και παίρνουμε υπόψιν το γεγονός ότι $Z_p(\mu)\subseteq Z_q(\mu)\subseteq cZ_p(\mu)$ αν $p<q\leqslant 2p$. Συμπεραίνουμε ότι

$$\sup_{1\leqslant q\leqslant k}\frac{R(Z_q(\pi_F(\mu)))}{w_k(Z_q(\mu))}\leqslant C, \tag{2.52}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, για κάθε $F$ σε ένα υποσύνολο $A_k$ της $G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(A_k) \geqslant 1 - (\log_2 k)e^{-2k} \geqslant 1 - e^{-k}$.

Τώρα χρησιμοποιούμε τις εκτιμήσεις από το Λήμμα 2.4.5: για κάθε $F \in A_k$ έχουμε

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi'_{\alpha(\delta)}} = \sup_{1\leqslant q\leqslant k} \frac{\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L_q(\pi_F(\mu))}}{q^{1/\alpha(\delta)}} \leqslant C_1 \sup_{1\leqslant q\leqslant k} \frac{R(Z_q(\pi_F(\mu)))}{w_k(Z_q(\mu))} \leqslant C_2 \tag{2.53}$$

για όλα τα $\theta \in S_F$, όπου $C_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

## 2.5 Εφαρμογές

### 1. Εκτιμήσεις αρνητικών ροπών

Χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης Παραγράφου μπορούμε να δώσουμε κάτω εκτιμήσεις για τις αρνητικές ροπές της Ευκλείδειας νόρμας ως προς ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$.

Το επόμενο θεώρημα αποδείχθηκε στο [50, Theorem 1.4].

**Θεώρημα 2.5.1.** *Έστω $\mu$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$I_{-q}(\mu) \geqslant c_1 I_2(\mu) \tag{2.54}$$

*για κάθε $2 \leqslant q \leqslant c_2\sqrt{n}$, όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.*

Εφαρμόζοντας τις τεχνικές που παρουσιάσαμε στην προηγούμενη ενότητα, μπορούμε να δώσουμε μια εναλλακτική απόδειξη για μια ασθενή μορφή του παραπάνω θεωρήματος, καθώς και κάτω εκτιμήσεις για τα $I_{-q}(\mu)$ με $q \gg \sqrt{n}$.

**Θεώρημα 2.5.2.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, ισχύουν τα εξής:*

(α) *Αν $k \leqslant \sqrt{n}$, τότε $I_{-k}(\mu) \geqslant c_1 \frac{\sqrt{n}}{\log k}$.*

(β) *Αν $\delta \in (\frac{1}{2}, 1)$ και $k = n^\delta$, τότε $I_{-k}(\mu) \geqslant c_2 \frac{n^{1/2-s}}{\log n}$, όπου $s = \frac{\delta(2\delta-1)}{2(3\delta-1)}$ και $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.*

Θα χρειαστούμε δυο αποτελέσματα: Το πρώτο είναι μια ταυτότητα, η οποία αποδείχθηκε στο [50] και το δεύτερο μια εκτίμηση για την ισοτροπική σταθερά ενός $\psi_\alpha$–σώματος (πρβλ. [18, Theorem 2.5.4]).

**Λήμμα 2.5.3.** *Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ισχύει:*

$$I_{-k}(\mu) = c_{n,k} \left( \int_{G_{n,k}} \pi_F(\mu)(0)\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-1/k}, \tag{2.55}$$

*όπου $c_{n,k} = \left(\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n}\right)^{1/k} \simeq \sqrt{n}$.*

*Απόδειξη.* Έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}
I_{-k}^{-k}(\mu) &= \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^{-k} f_\mu(x)\, dx \\
&= n\omega_n \int_0^\infty \int_{S^{n-1}} r^{n-k-1} f_\mu(r\theta)\, d\sigma(\theta) dr \\
&= n\omega_n \int_{G_{n,n-k}} \int_{S_F} \int_0^\infty r^{n-k-1} f_\mu(r\theta)\, dr\, d\sigma_F(\theta)\, d\nu_{n,n-k} \\
&= \frac{n\omega_n}{(n-k)\omega_{n-k}} \int_{G_{n,n-k}} \int_F f_\mu(y)\, dy\, d\nu_{n,n-k}(F) \\
&= \frac{n\omega_n}{(n-k)\omega_{n-k}} \int_{G_{n,k}} \int_{F^\perp} f_\mu(y)\, dy\, d\nu_{n,k}(F) \\
&= \frac{n\omega_n}{(n-k)\omega_{n-k}} \int_{G_{n,k}} \pi_F(\mu)(0)\, d\nu_{n,k}(F),
\end{aligned}$$

από τον ορισμό της προβολής του μέτρου $\mu$ με πυκνότητα $f_\mu$. □

**Θεώρημα 2.5.4.** *Έστω $T$ (σχεδόν) ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^k$, το οποίο είναι $\psi_\alpha$, $1 \leqslant \alpha < 2$ με σταθερά $b_\alpha$. Τότε,*

$$L_T \leqslant c b_\alpha^{\alpha/2} (2-\alpha)^{-\alpha/2} k^{1/2-\alpha/4} \log k,$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα αποδείχθηκε από τον Bourgain στο [7] για $\psi_2$-σώματα.

**Θεώρημα 2.5.5.** *Έστω $T$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στο $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι $\psi_2$ με σταθερά $b$. Τότε,*

$$L_T \leqslant c b \log b,$$

*όπου $c > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.*

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.5.3, το Θεώρημα 2.5.5 και την (2.29) μπορούμε να αποδείξουμε το πρώτο μέρος του Θεωρήματος:

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 2.5.2 (α). Έστω $k \leqslant \sqrt{n}$. Γράφουμε,

$$\begin{aligned} I_{-k}(\mu) &\simeq \sqrt{n}\left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(\mu)(0)^{1/k}\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/k} \\ &\simeq \sqrt{n}\left(\int_{G_{n,k}} L^k_{B_{k+1}(\mu,F)}\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{-1/k}. \end{aligned}$$

Θα χρειαστεί να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα από πάνω. Γι' αυτόν τον σκοπό αποδεικνύουμε το ακόλουθο:

*Ισχυρισμός.* Για κάθε $s > 1$ υπάρχει υποσύνολο $B_{k,s}$ της $G_{n,k}$ με $\nu_{n,k}(B_{k,s}) > 1 - s^{-k}$ ώστε για κάθε $F \in B_{k,s}$ η $\psi_2$-σταθερά του $\overline{B_{k+1}}(\mu, F)$ να είναι μικρότερη από $c_1 s$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Πράγματι· από το Λήμμα 2.4.4 και την ανισότητα του Markov έπεται ότι για κάθε $s > 1$ η πιθανότητα ως προς $F \in G_{n,k}$ να συμβαίνει $R(Z_q(\overline{B_{k+1}}(\mu, F))) > cs\sqrt{q}L_{B_{k+1}(\mu,F)}$ είναι μικρότερη από $s^{-k}$. Άρα, υπάρχει υποσύνολο $B_{k,s}$ της $G_{n,k}$ με $\nu_{n,k}(B_{k,s}) > 1 - s^{-k}$ ώστε για κάθε $F \in B_{k,s}$ να ισχύει:

$$\sup_{\theta \in S_F} \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2(\overline{B_{k+1}}(\mu,F))} \leqslant c_2 s.$$

Έπεται από το Θεώρημα 2.5.5 ότι

$$L_{\overline{B_{k+1}}(\mu,F)} \leqslant c_3 s \log s,$$

για κάθε $F \in B_{k,s}$.

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη. Θέτοντας $u(s) = s \log s$ και θεωρώντας $A > 1$ μπορούμε αν γράψουμε:

$$\begin{aligned}
\int_{G_{n,k}} L_{B_{k+1}(\mu,F)}^k \, d\nu_{n,k}(F) &= \int_0^\infty kt^{k-1}\nu_{n,k}(F : L_{B_{k+1}(\mu,F)} \geqslant t)\, dt \\
&\leqslant A^k + \int_A^{\sqrt{k}} kt^{k-1}\nu_{n,k}(F : L_{B_{k+1}(\mu,F)} \geqslant t)\, dt \\
&= A^k \left[ 1 + \int_{u^{-1}(A)}^{u^{-1}(\sqrt{k})} ku(s)^{k-1}\nu_{n,k}(F : L_{B_{k+1}(\mu,F)} \geqslant u(s))u'(s)\, ds \right] \\
&\leqslant A^k \left[ 1 + c_2 k \int_{u^{-1}(A)}^{\sqrt{k}} s^{k-1}(\log s)^k s^{-k}\, ds \right] \\
&\simeq A^k \left[ 1 + k \int_{\log u^{-1}(A)}^{\log k} v^k e^{-v}\, dv \right].
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι η $v \mapsto v^k e^{-v}$ είναι αύξουσα στο $(0,k)$, άρα επιλέγοντας $A \simeq 1$ προκύπτει ότι:

$$\int_{G_{n,k}} L_{B_{k+1}(\mu,F)}^k \, d\nu_{n,k}(F) \leqslant (C \log k)^{k+1},$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. Αυτό αποδεικνύει το πρώτο μέρος του Θεωρήματος.

Δουλεύοντας παρόμοια μπορούμε να αποδείξουμε αντίστοιχα κάτω φράγματα για το $I_{-q}(\mu)$ με $q \gg \sqrt{n}$.

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 2.5.2 (β). Έστω $\delta \in (1/2,1)$ και έστω $k = n^\delta$. Θέτουμε $\alpha = \alpha(\delta)$. Όπως πριν έχουμε:

*Ισχυρισμός.* Για κάθε $s > 1$ υπάρχει υποσύνολο $C_{k,s}$ της $G_{n,k}$ με $\nu_{n,k}(C_{k,s}) > 1 - s^{-k}$ ώστε για κάθε $F \in C_{k,s}$ η $\psi_\alpha$-σταθερά του $\overline{B_{k+1}}(\mu,F)$ να είναι μικρότερη από $c_1 s$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Κατ' επέκτασιν, από το Θεώρημα 2.5.4 ισχύει

$$L_{B_{k+1}(\mu,F)} \leqslant c_2 s^{\frac{\alpha}{2}} k^{\frac{2-\alpha}{4}} \log k,$$

για κάθε $F \in C_{k,s}$. Θέτουμε $m(k) = c_2 k^{\frac{2-\alpha}{4}} \log k$. Τότε, μπορούμε να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα όπως πριν:

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,k}} L^k_{B_{k+1}(\mu,F)}\,d\nu_{n,k}(F) &= \int_0^\infty kt^{k-1}\nu_{n,k}(F : L_{B_{k+1}(\mu,F)} \geqslant t)\,dt \\ &\leqslant m^k(k) + \int_{m(k)}^\infty kt^{k-1}\nu_{n,k}(F : L_{B_{k+1}(\mu,F)} \geqslant t)\,dt \\ &= m^k(k)\left[1 + \frac{\alpha}{2}\int_1^\infty ks^{\frac{(k-1)\alpha}{2}} s^{\frac{\alpha}{2}-1}\nu_{n,k}(F : L_{B_{k+1}(\mu,F)} \geqslant m(k)s^{\frac{\alpha}{2}})\,ds\right] \\ &\leqslant m^k(k)\left[1 + \frac{k\alpha}{2}\int_1^\infty s^{\frac{(k-1)\alpha}{2}} s^{\frac{\alpha}{2}-1}s^{-k}ds\right] \\ &= m^k(k)\left[1 + \frac{k\alpha}{2}\int_1^\infty s^{-1-k\left(1-\frac{\alpha}{2}\right)}ds\right] \\ &\simeq m^k(k) \simeq \left(k^{\frac{2-\alpha}{4}}\log k\right)^k.\end{aligned}$$

Έτσι, παίρνουμε

$$I_{-k}(\mu) \geqslant c\frac{\sqrt{n}}{m(k)} \geqslant c\frac{\sqrt{n}}{n^{\frac{\delta(2\delta-1)}{2(3\delta-1)}}\log n},$$

αντικαθιστώντας το $k = n^\delta$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Σημείωση 2.5.6.** Πρόσφατα, οι B. Klartag και E. Milman έδειξαν ότι αν ένα κυρτό σώμα $K$ με κέντρο βάρους το 0 είναι $\psi_\alpha$ σώμα με σταθερά $b_\alpha$ για κάποιο $\alpha \in [1,2]$, τότε $L_K \leqslant cb_\alpha^{\frac{\alpha}{2}} n^{\frac{1}{2}-\frac{\alpha}{4}}$.

Χρησιμοποιώντας αυτήν την εκτίμηση μπορούμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση στο Θεώρημα 2.5.2: Αν $k = n^\delta$ με $\delta \in [\frac{1}{2}, 1)$ τότε,

$$I_{-k}(\mu) \geqslant cn^{\frac{1-s}{2}}, \tag{2.56}$$

όπου $s = \frac{\delta(2\delta-1)}{3\delta-1}$.

## 2. Μέσο πλάτος ισοτροπικού σώματος

Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σώμα $\Psi_2(\mu)$ το οποίο έχει συνάρτηση στήριξης $h_{\Psi_2(\mu)}(\theta) := \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2}$, $\theta \in S^{n-1}$. Παρατηρήστε ότι αν το $\mu$ είναι το ομοιόμορφο μέτρο στο σώμα $K$ με $|K| = 1$ και κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων, τότε ισχύει:

$$h_{\Psi_2(K)}(\theta) = \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \simeq \sup_{2\leqslant q\leqslant n}\frac{h_{Z_q(K)}(\theta)}{\sqrt{q}},\ \theta \in S^{n-1}. \tag{2.57}$$

Έτσι, όπως και στην προηγούμενη παράγραφο ορίζουμε μια παραλλαγή του $\Psi_2(\mu)$ που στην περίπτωση των σωμάτων είναι το ίδιο. Γράφουμε $\Psi_2'(\mu)$ για το σώμα με συνάρτηση στήριξης

$$h_{\Psi_2'(\mu)}(\theta) = \sup_{2\leqslant q\leqslant n} \frac{h_{Z_q(\mu)}(\theta)}{\sqrt{q}} \tag{2.58}$$

για $\theta \in S^{n-1}$. Χρησιμοποιώντας το βασικό αποτέλεσμα του Κεφαλαίου μπορούμε να δείξουμε ότι το $\Psi_2'(\mu)$ έχει σχετικά μικρό μέσο πλάτος. Ως Πόρισμα παίρνουμε μια ακόμη απόδειξη της μέχρι στιγμής γνωστής εκτίμησης για το μέσο πλάτος ισοτροπικού σώματος.

Ξεκινάμε με το ακόλουθο Λήμμα που συγκρίνει την τυχούσα προβολή του $\Psi_2'(\mu)$ με το $\psi_2$-σώμα του $\overline{B}_{k+1}(\mu,F)$.

**Λήμμα 2.5.7.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $1\leqslant k\leqslant n-1$ και $F\in G_{n,k}$. Τότε,*

$$P_F(\Psi_2'(\mu)) \subseteq C\frac{\sqrt{n/k}}{L_{\overline{B_{k+1}}(\mu,F)}}\Psi_2(\overline{B_{k+1}}(\mu,F)), \tag{2.59}$$

*όπου $C>0$ είναι απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2.3 μπορούμε να γράψουμε για κάθε $\theta\in S_F$:

$$\begin{aligned} h_{P_F(\Psi_2'(\mu))}(\theta) = h_{\Psi_2'(\mu)}(\theta) &\leqslant \sup_{2\leqslant q\leqslant k}\frac{h_{Z_q(\mu)}(\theta)}{\sqrt{q}} + \sup_{k\leqslant q\leqslant n}\frac{h_{Z_q(\mu)}(\theta)}{\sqrt{q}} \\ &= \sup_{2\leqslant q\leqslant k}\frac{h_{P_F(Z_q(\mu))}(\theta)}{\sqrt{q}} + \sup_{k\leqslant q\leqslant n}\frac{h_{P_F(Z_q(\mu))}(\theta)}{\sqrt{q}} \\ &= \sup_{2\leqslant q\leqslant k}\frac{h_{Z_q(\pi_F(\mu))}(\theta)}{\sqrt{q}} + \sup_{k\leqslant q\leqslant n}\frac{h_{Z_q(\pi_F(\mu))}(\theta)}{\sqrt{q}}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.4.12 και την Πρόταση 1.4.5 παίρνουμε:

$$\begin{aligned} h_{P_F(\Psi_2'(\mu))}(\theta) &\leqslant \sup_{2\leqslant q\leqslant k}\frac{h_{Z_q(\pi_F(\mu))}(\theta)}{\sqrt{q}} + c_1\sup_{k\leqslant q\leqslant n}\frac{q}{k}\frac{h_{Z_k(\pi_F(\mu))}(\theta)}{\sqrt{q}} \\ &\leqslant c_2\sqrt{\frac{n}{k}}\sup_{2\leqslant q\leqslant k}\frac{h_{Z_q(\pi_F(\mu))}(\theta)}{\sqrt{q}} \\ &\leqslant c_3\sqrt{\frac{n}{k}}\frac{1}{\pi_F(\mu)(0)^{1/n}}\sup_{2\leqslant q\leqslant k}\frac{h_{Z_q(\overline{B}_{k+1}(\mu,F))}(\theta)}{\sqrt{q}} \\ &\leqslant c_4\sqrt{\frac{n}{k}}\frac{1}{L_{\overline{B}_{k+1}(\mu,F)}}h_{\Psi_2(\overline{B}_{k+1}(\mu,F))}(\theta), \end{aligned}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Για το επόμενο Θεώρημα θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, στην περίπτωση που $k \leqslant \sqrt{n}$, το $\overline{B}_{k+1}(\mu, F)$ για τυχαίο υπόχωρο $F \in G_{n,k}$ είναι $\psi_2$ σώμα (με απόλυτη σταθερά).

**Θεώρημα 2.5.8.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, ισχύει:*

$$w(\Psi_2'(\mu)) \leqslant c\sqrt[4]{n}, \tag{2.60}$$

*όπου $c > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Λήμμα μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} w(\Psi_2'(\mu)) &= \int_{G_{n,k}} w(P_F(\Psi_2'(\mu)))\, d\nu_{n,k}(F) \\ &\leqslant C\sqrt{\frac{n}{k}} \int_{G_{n,k}} \frac{1}{L_{\overline{B}_{k+1}(\mu,F)}} w(\Psi_2(\overline{B}_{k+1}(\mu, F)))\, d\nu_{n,k}(F). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το βασικό αποτέλεσμα του Κεφαλαίου βλέπουμε ότι, αν $k \leqslant \sqrt{n}$, για τον τυχαίο υπόχωρο $F \in G_{n,k}$ το $\overline{B}_{k+1}(\mu, F)$ είναι $\psi_2$ σώμα με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-ck}$. Επομένως,

$$w(\Psi_2(\overline{B}_{k+1}(\mu, F))) \leqslant c_1 L_{\overline{B}_{k+1}(\mu,F)}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-ck}$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε ισοτροπικό σώμα $C$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι εύκολο να δούμε ότι ισχύει $w(\Psi_2(C)) \leqslant c_2\sqrt{n}L_C$. Έτσι, παίρνουμε

$$w(\Psi_2'(\mu)) \leqslant C\sqrt{\frac{n}{k}} \left[c_2\sqrt{k}e^{-ck} + c_1(1 - e^{-ck})\right] \leqslant C'\sqrt{n/k},$$

για όλα τα $k \leqslant \sqrt{n}$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Εφαρμόζοντας το προηγούμενο αποτέλεσμα για το ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu$ με συνάρτηση πυκνότητας $f_\mu = L_K^n \mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}$, όπου $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $w(K) \leqslant c\sqrt{n}w(\Psi_2(K))$ καταλήγουμε στο ακόλουθο:

**Πόρισμα 2.5.9.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$w(K) \leqslant cn^{3/4}L_K, \tag{2.61}$$

*όπου $c > 0$ μια απόλυτη σταθερά.*

Στο Κεφάλαιο 4 θα δούμε μια άλλη απόδειξη για το μέσο πλάτος του $\psi_2$-σώματος και πώς αυτή σχετίζεται με την κατανομή των $\psi_2$ διευθύνσεων και το πρόβλημα εκτίμησης του μέσου πλάτους στην ισοτροπική θέση.

# Κεφάλαιο 3

# Υποκανονικές διευθύνσεις σε κυρτά σώματα

## 3.1 Περιγραφή του προβλήματος

Έστω $\mu$ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο βάρους το 0. Λέμε ότι η διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ είναι υποκανονική (subgaussian ή $\psi_2$) για το $\mu$ με σταθερά $r > 0$ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant r\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2. \tag{3.1}$$

Το πρόβλημα με το οποίο ασχολούμαστε σε αυτό το Κεφάλαιο τέθηκε από τον V. Milman στο πλαίσιο των κυρτών σωμάτων:

> *Είναι σωστό ότι κάθε κυρτό σώμα $K$ έχει τουλάχιστον μια υποκανονική διεύθυνση (με σταθερά $r = O(1)$);*

Καταφατική απάντηση δόθηκε αρχικά για ειδικές κλάσεις σωμάτων. Στην γενική περίπτωση, ο B. Klartag στο [30] απέδειξε την ύπαρξη μιας «υποκανονικής» διεύθυνσης παρά ένα λογαριθμικό παράγοντα. Πιο συγκεκριμένα, έδειξε ότι υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ έτσι ώστε

$$\mu\left(\{x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant ct\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2\}\right) \leqslant e^{-\frac{t^2}{\log^{2\alpha}(t+1)}}, \tag{3.2}$$

για όλα τα $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}\log^{\alpha} n$, όπου $\alpha = 3$. Την εκτίμηση βελτίωσαν οι Γιαννόπουλος - Παούρης - Pajor σε $\alpha = 1$ στο [21]. Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι δείξουμε ότι μπορούμε να πετύχουμε $\alpha = 1/2$.

Μια φυσιολογική προσέγγιση για την αντιμετώπιση του προβλήματος είναι να ορίσουμε το συμμετρικό κυρτό σύνολο $\Psi_2(\mu)$ με συνάρτηση στήριξης

$$h_{\Psi_2(\mu)}(\theta) := \sup_{2\leqslant q\leqslant n} \frac{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_q(\mu)}}{\sqrt{q}}, \tag{3.3}$$

και να εκτιμήσουμε τον όγκο του. Ουσιαστικά, αυτή ήταν η στρατηγική στα [30] και [21]. Παρατηρήστε ότι το $\Psi_2(\mu)$ περιέχει το ελλειψοειδές $\frac{1}{\sqrt{2}}Z_2(\mu)$, όπου

$$h_{Z_2(\mu)}(\theta) := \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{L_2(\mu)}. \tag{3.4}$$

Θα ήταν επιθυμητό, στην περίπτωση των κεντραρισμένων λογαριθμικά κοίλων μέτρων, το $\Psi_2(\mu)$ να είναι σώμα με «φραγμένο λόγο όγκων», δηλαδή

$$\left(\frac{|\Psi_2(\mu)|}{|Z_2(\mu)|}\right)^{1/n} \leqslant C, \tag{3.5}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το κύριο αποτέλεσμα του Κεφαλαίου είναι η άνω εκτίμηση αυτού του λόγου όγκων (ακριβής, με την πιθανή εξαίρεση του παράγοντα $\sqrt{\log n}$).

**Θεώρημα 3.1.1.** *Έστω $\mu$ λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το $0$. Τότε,*

$$\frac{c_1}{\sqrt{n}} \leqslant |\Psi_2(\mu)|^{1/n} \leqslant \frac{c_2\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}}, \tag{3.6}$$

*όπου $c_1, c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 3.1.1 είναι η ύπαρξη μιας τουλάχιστον υποκανονικής διεύθυνσης για το $\mu$ με σταθερά $r=O(\sqrt{\log n})$. Μια παραλλαγή της απόδειξης οδηγεί στο ακόλουθο:

**Θεώρημα 3.1.2.** (α) *Αν $K$ είναι κυρτό σώμα όγκου 1 με κέντρο βάρους το $0$ στον $\mathbb{R}^n$, τότε υπάρχει $\theta\in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε*

$$|\{x\in K : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant cth_{Z_2(K)}(\theta)\}| \leqslant e^{-\frac{t^2}{\log(t+1)}} \tag{3.7}$$

*για όλα τα $t\geqslant 1$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

(β) *Αν $\mu$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το $0$, τότε υπάρχει $\theta\in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε*

$$\mu\left(\{x\in\mathbb{R}^n : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant ct\mathbb{E}|\langle\cdot,\theta\rangle|\}\right) \leqslant e^{-\frac{t^2}{\log(t+1)}} \tag{3.8}$$

*για όλα τα $1\leqslant t\leqslant \sqrt{n\log n}$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

## 3.2 Αποτελέσματα για ειδικές κλάσεις σωμάτων

Οι Bobkov και Nazarov (πρβλ. [9] και [10]) απέδειξαν το εξής:

**Θεώρημα 3.2.1.** *Αν $K$ είναι ένα ισοτροπικό 1–unconditional κυρτό σώμα, τότε*

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant c\sqrt{n}\|\theta\|_\infty \tag{3.9}$$

*για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου $c > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.*

Συνέπεια αυτού του αποτελέσματος είναι ότι η διαγώνια διεύθυνση $\theta = \frac{e_1+\cdots+e_n}{\sqrt{n}}$ είναι υποκανονική με σταθερά $O(1)$.

Στο [47], ο Γ. Παούρης απέδειξε ότι κάθε ζωνοειδές έχει τουλάχιστον μία υποκανονική διεύθυνση με απόλυτη σταθερά. Ένα άλλο μερικό αποτέλεσμα αποδείχθηκε από τον ίδιο στο [48] για «σώματα μικρής διαμέτρου»:

**Θεώρημα 3.2.2.** *Αν $K$ είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $K \subseteq (\gamma\sqrt{n}L_K)B_2^n$ για κάποιο $\gamma > 0$, τότε*

$$\sigma\big(\theta \in S^{n-1} : \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \geqslant c_1\gamma t L_K\big) \leqslant \exp(-c_2\sqrt{n}t^2/\gamma) \tag{3.10}$$

*για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $\sigma$ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο στην $S^{n-1}$ και $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

Μια παραλλαγή της απόδειξης, μπορεί να οδηγήσει στο ακόλουθο γενικό αποτέλεσμα για σώματα μικρής διαμέτρου:

**Θεώρημα 3.2.3.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο βάρους το 0. Αν $K \subseteq \alpha\sqrt{n}B_2^n$ για κάποιο $\alpha > 0$, τότε για κάθε $t > 2$ ισχύει:*

$$\sigma(\theta \in S^{n-1} : \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \geqslant ct\alpha) < \frac{2}{t}, \tag{3.11}$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

## 3.3 Αριθμοί κάλυψης των $L_q$-κεντροειδών σωμάτων

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το ακόλουθο Θεώρημα.

**Θεώρημα 3.3.1.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant q \leqslant n$. Τότε, για κάθε $t \geqslant 1$ ισχύει:*

$$\log N(Z_q(K), c_1 t\sqrt{q}L_K B_2^n) \leqslant c_2\frac{n}{t^2} + c_3\frac{\sqrt{nq}}{t}. \tag{3.12}$$

Γι' αυτό το θεώρημα παραθέτουμε δύο αποδείξεις: η πρώτη χρησιμοποιεί μια παραλλαγή του επιχειρήματος του Talagrand για τη δυϊκή ανισότητα Sudakov και την έννοια των $p$–μέσων, ενώ η δεύτερη τον τύπο του Steiner για τον όγκο αθροίσματος συναρτήσει των μεικτών όγκων, τον τύπο του Kubota για τα Quermassintegrals κι ένα Λήμμα για αριθμούς κάλυψης προβολών.

## 3.3.1 Πρώτη απόδειξη

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα δυϊσμού για τους αριθμούς κάλυψης [2] αρκεί να υπολογίσουμε αριθμούς κάλυψης της μορφής: $N(B_2^n, tC)$. Για το σκοπό αυτό δίνουμε ένα ορισμό:

**Ορισμός 3.3.2** ($p$–μέσος). *Έστω $C$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p > 0$ ορίζουμε $m_p(C)$ τον θετικό αριθμό $m_p$ για τον οποίο $\gamma_n(m_pC) = 2^{-p}$.*

**Παρατηρήσεις 3.3.3.** 1. Η συνάρτηση $p \mapsto m_p(C)$ είναι φθίνουσα και κυρτή, διότι το $\gamma_n$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο. Αν επιπλέον χρησιμοποιήσουμε το $B$–θεώρημα των Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey [13], τότε μπορούμε να δείξουμε ότι είναι και λογαριθμικά κυρτή.

2. Ο $m_1(C)$ είναι ο κλασικός μέσος Lévy της νόρμας $\|\cdot\|_C$ ως προς το μέτρο του Gauss.

3. Από την ανισότητα του Markov βλέπουμε ότι $m_p(C) \geqslant \frac{1}{2}I_{-p}(\gamma_n, C)$, για $0 < p < n$, όπου $I_q(\gamma_n, C) = (\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_C^q \, d\gamma_n(x))^{1/q}$ για $-n < q \neq 0$. Πράγματι· γράφουμε

$$\gamma_n\left(\frac{1}{2}I_{-p}C\right) = \gamma_n\left(\left\{x : \|x\|_C \leqslant \frac{1}{2}I_{-p}\right\}\right) \leqslant 2^{-p} = \gamma_n(m_pC), \tag{3.13}$$

οπότε $\frac{1}{2}I_{-p}(\gamma_n, C) \leqslant m_p(C)$.

4. Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι οι αρνητικές ροπές του $C$ ως προς το μέτρο $\gamma_n$ ικανοποιούν αντίστροφες Hölder εκτιμήσεις με σταθερά $\alpha > 0$, τότε μπορούμε να έχουμε και κάποιο είδος αντιστρόφου. Πιο συγκεκριμένα, αν $I_{-p}(\gamma_n, C) \leqslant \alpha I_{-2p}(\gamma_n, C)$ για κάποιο $\alpha > 2$ και $1 \leqslant p < n$, τότε χρησιμοποιώντας την ανισότητα Paley–Zygmund γράφουμε:

$$\gamma_n(x : \|x\|_C \leqslant 2I_{-p}) \geqslant (1 - t^{-p})^2 \frac{I_{-p}^{-2p}}{I_{-2p}^{-2p}} \geqslant (1 - 2^{-p})^2 \alpha^{-2p} \geqslant (2\alpha)^{-2p} = 2^{-8p \log \alpha}. \tag{3.14}$$

Δηλαδή, $m_{8p \log \alpha}(C) \leqslant 2I_{-p}(\gamma_n, C)$.

5. Τέλος, παρατηρούμε ότι το $I_{-p}(\gamma_n, C)$ μπορεί να εκφραστεί συναρτήσει των αρνητικών ροπών της $\|\cdot\|_C$ ως προς το μέτρο $\sigma(\cdot)$ στην $S^{n-1}$: Για κάθε $1 \leqslant p \leqslant n-1$ έχουμε

$$I_{-p}(\gamma_n, C) = c_{n,p} M_{-p}(C), \tag{3.15}$$

όπου $M_{-p}(C) = \left(\int_{S^{n-1}} \|\theta\|_C^{-p} \, d\sigma(\theta)\right)^{-1/p}$ και $c_{n,p}$ μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα $n$ και $p$, με $c_{n,p} \simeq \sqrt{n}$. Επομένως, οι αντίστροφες ανισότητες Hölder για τα $I_{-p}$ είναι ισοδύναμες με αντίστροφες Hölder για τα $M_{-p}$. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του τύπου ολοκλήρωσης σε πολικές συντεταγμένες.

Το επόμενο Λήμμα είναι μια παραλλαγή του επιχειρήματος του Talagrand για την απόδειξη της δυϊκής ανισότητας Sudakov.

**Λήμμα 3.3.4.** *Έστω $p > 0$ και έστω $C$ συμμετρικό κυρτό σώμα στο $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\log N\left(B_2^n, \frac{m_p(C)}{\sqrt{p}} C\right) \leqslant 3p. \tag{3.16}$$

*Απόδειξη.* Έστω $t > 0$ το οποίο θα επιλεγεί κατάλληλα στην συνέχεια. Θεωρούμε υποσύνολο $\{z_1, \ldots, z_N\}$ της $B_2^n$ μεγιστικό ως προς την $\|z_i - z_j\|_C \geqslant t$ για $i \neq j$. Τότε, $B_2^n \subseteq \bigcup_{j \leqslant N}(z_j + tC)$ από την μεγιστικότητα του συνόλου, επομένως $N(B_2^n, tC) \leqslant N$. Επιπλέον, τα $z_i + \frac{t}{2}C$ έχουν ξένα εσωτερικά και, για κάθε $\lambda > 0$, το ίδιο ισχύει για τα $\lambda z_j + \frac{\lambda t}{2}C$. Έτσι, παίρνουμε:

$$1 \geqslant \gamma_n\left(\bigcup_{j=1}^N \left(\lambda z_j + \frac{\lambda t}{2}C\right)\right) = \sum_{j=1}^N \gamma_n\left(\lambda z_j + \frac{\lambda t}{2}C\right) \geqslant \sum_{j=1}^N e^{-\lambda^2\|z_j\|_2^2/2}\gamma_n\left(\frac{\lambda t}{2}C\right), \tag{3.17}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το γεγονός ότι $\gamma_n(x + A) \geqslant e^{-\|x\|_2^2/2}\gamma_n(A)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σύνολο $A$ στον $\mathbb{R}^n$ (ανισότητα του Anderson). Έχουμε λοιπόν, $N \leqslant e^{\lambda^2/2}(\gamma_n(\frac{\lambda t}{2}C))^{-1}$. Επιλέγουμε, $\lambda = 2m_p(C)/t$, οπότε παίρνουμε

$$N \leqslant \exp\left(p + 2\frac{m_p^2}{t^2}\right),$$

και επιλέγοντας $t = \frac{m_p}{\sqrt{p}}$ έχουμε το συμπέρασμα. □

Επίσης, θα χρειαστούμε την $L_p$ εκδοχή της ανισότητας Blaschke–Santaló που αποδείχθηκε από τους Lutwak–Yang–Zhang [40], στην ασυμπτωτική της μορφή:

**Θεώρημα 3.3.5.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ ισχύει:*

$$|Z_q(K)|^{1/n} \geqslant c_1\sqrt{\frac{q}{n}}, \tag{3.18}$$

*όπου $c_1 > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.*

Το επόμενο Λήμμα αποδείχθηκε στο [50]. Μπορεί να θεωρηθεί ως το «αρνητικό ανάλογο» της ασυμπτωτικής ταυτότητας του Λήμματος 2.4.3.

**Λήμμα 3.3.6.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο βάρους το 0. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n-1$ ισχύει:*

$$I_{-q}(K) \simeq \sqrt{\frac{n}{q}} w_{-q}(Z_q(K)). \tag{3.19}$$

*Απόδειξη.* Από το Λήμμα 2.5.3 έχουμε:

$$I_{-q}(K) \simeq \sqrt{n} \left( \int_{G_{n,q}} |K \cap F^{\perp}| \, d\nu_{n,q}(F) \right)^{-1/q}. \tag{3.20}$$

Με παρόμοιο τρόπο μπορούμε να δείξουμε ότι:

$$w_{-q}(Z_q(K)) = \omega_q^{1/q} \left( \int_{G_{n,q}} |(P_F(Z_q(K)))^{\circ}| \, d\nu_{n,q}(F) \right)^{-1/q}. \tag{3.21}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Santaló και την αντίστροφη ανισότητα Santaló (πρβλ. [51] και [25]) παίρνουμε (για τους σκοπούς μας αρκεί η αντίστροφη Santaló αφού θα χρησιμοποιήσουμε μόνο το άνω φράγμα):

$$w_{-q}(Z_q(K)) \simeq \omega_q^{-1/q} \left( \int_{G_{n,q}} \frac{1}{|P_F(Z_q(K))|} \, d\nu_{n,q}(F) \right)^{-1/q}. \tag{3.22}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.2.4, και λαμβάνοντας υπόψιν την $\omega_q^{1/q} \simeq \frac{1}{\sqrt{q}}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα. □

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 3.3.1. Πρώτα θεωρούμε την περίπτωση όπου το ισοτροπικό σώμα $K$ έχει φραγμένη ισοτροπική σταθερά: $L_K \simeq 1$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι $r$–μέσοι του σώματος $Z_q^{\circ}(K)$ παραμένουν σταθεροί και ίσοι με $\sqrt{nq}$ για $q \leqslant r \leqslant n$. Πράγματι· πρώτα δείχνουμε ότι οι $M_{-r}(Z_q^{\circ}(K)) = w_{-r}(Z_q(K))$ ικανοποιούν αντίστροφες ανισότητες Hölder εκτιμήσεις: Αν $1 \leqslant q \leqslant n$ έπεται ότι

$$w_{-n}(Z_q(K)) = \left( \frac{|Z_q^{\circ}(K)|}{|B_2^n|} \right)^{-1/n} \geqslant \left( \frac{|Z_q(K)|}{|B_2^n|} \right)^{1/n} \geqslant c_2 \sqrt{q},$$

χρησιμοποιώντας την κλασική ανισότητα Blaschke–Santaló και το Θεώρημα 3.3.5. Επιπλέον, αν $1 \leqslant q \leqslant r \leqslant n$ έπεται από το Λήμμα 3.3.6 και την ανισότητα Hölder ότι:

$$w_{-r}(Z_q(K)) \leqslant w_{-q}(Z_q(K)) \leqslant c_3\sqrt{\frac{q}{n}}I_{-q}(K) \leqslant c_3\sqrt{\frac{q}{n}}I_2(K) = c_3\sqrt{q}L_K, \tag{3.23}$$

και, λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι η $L_K$ έχει υποτεθεί φραγμένη, καταλήγουμε στην $w_{-r}(Z_q(K)) \leqslant c_4\sqrt{q}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι $w_{-r}(Z_q(K)) \simeq \sqrt{q}$ για $q \leqslant r \leqslant n$. Όμως, είναι

$$I_{-r}(\gamma_n, Z_q^\circ(K)) \simeq \sqrt{n}w_{-r}(Z_q(K)).$$

Άρα, για τα $q \leqslant r \leqslant n$ οι $I_{-r}(\gamma_n, Z_q^\circ(K))$ ικανοποιούν αντίστροφες ανισότητες Hölder και μάλιστα

$$I_{-r}(\gamma_n, Z_q^\circ(K)) \simeq m_r(Z_q^\circ(K)).$$

Από το Λήμμα 3.3.4 έπεται ότι

$$\log N\left(B_2^n, \frac{m_r(Z_q^\circ(K))}{\sqrt{r}}Z_q^\circ(K)\right) \leqslant c_2 r. \tag{3.24}$$

Από τις παραπάνω εκτιμήσεις έχουμε:

$$\log N\left(B_2^n, c_1\sqrt{\frac{n}{r}}\sqrt{q}Z_q^\circ(K)\right) \leqslant c_2 r. \tag{3.25}$$

Θέτοντας $t = \sqrt{n/r}$ έχουμε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n/q}$ και

$$\log N(B_2^n, c_1 t\sqrt{q}Z_q^\circ(K)) \leqslant c_2\frac{n}{t^2}. \tag{3.26}$$

Χρησιμοποιώντας το θεώρημα δυϊσμού, για τους αριθμούς κάλυψης, των Artstein–Milman–Szarek [2] καταλήγουμε στην

$$\log N(Z_q(K), c_1' t\sqrt{q}B_2^n) \leqslant c_2'\frac{n}{t^2}, \tag{3.27}$$

για $1 \leqslant q \leqslant n$ και $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n/q}$, δεδομένου ότι το $K$ έχει φραγμένη σταθερά ισοτροπίας.

Για την γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 1.5.5: Υπάρχει σχεδόν ισοτροπικό σώμα $C$ στον $\mathbb{R}^n$ με $L_C \leqslant c_1$ και

$$\frac{Z_q(K)}{L_K} + \sqrt{q}B_2^n \subseteq c_2 Z_q(C),$$

για $1 \leqslant q \leqslant n$. Επομένως, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\log N\left(\frac{Z_q(K)}{L_K}, t\sqrt{q}B_2^n\right) &\leqslant \log N\left(\frac{Z_q(K)}{L_K} + \sqrt{q}B_2^n, t\sqrt{q}B_2^n\right)\\ &\leqslant \log N(Z_q(C), c_3t\sqrt{q}B_2^n) \leqslant c_4\frac{n}{t^2},\end{aligned}$$

από το πρώτο μέρος της απόδειξης, για $1 \leqslant q \leqslant n$ και $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n/q}$. Έτσι, έχουμε δείξει το Θεώρημα για τα $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n/q}$.

Έστω τώρα $t > \sqrt{n/q}$. Θέτουμε $p := \frac{\sqrt{nq}}{t}$. Τότε, $1 \leqslant p < q$ και χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.4.11 μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\log N(Z_q(K), t\sqrt{q}L_KB_2^n) &\leqslant \log N\left(c\frac{q}{p}Z_p(K), t\sqrt{q}L_KB_2^n\right)\\ &\leqslant \log N\left(Z_p(K), c't\sqrt{\frac{p}{q}}\sqrt{p}L_KB_2^n\right)\\ &= \log N(Z_p(K), c's\sqrt{p}L_KB_2^n),\end{aligned}$$

για $s := t\sqrt{p/q} = \sqrt{n/p}$. Άρα, από την προηγούμενη περίπτωση παίρνουμε

$$\log N(Z_p(K), c's\sqrt{p}B_2^n) \leqslant c_2n/s^2 = c_2p = c_2\frac{\sqrt{nq}}{t}. \tag{3.28}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.4.16 μπορούμε να επεκτείνουμε το αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων:

**Πόρισμα 3.3.7.** *Έστω $\mu$ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant q \leqslant n$ και $t \geqslant 1$. Τότε,*

$$\log N\left(Z_q(\mu), c_1t\sqrt{q}B_2^n\right) \leqslant c_2\frac{n}{t^2} + c_3\frac{\sqrt{n}\sqrt{q}}{t}. \tag{3.29}$$

*Επιπλέον, αν ο $\beta \geqslant 1$ οριστεί μέσω της $q = n^{1/\beta}$ και αν θέσουμε $\alpha = \min\{\beta, 2\}$, τότε*

$$\log N\left(Z_q(\mu), c_1t\sqrt{q}B_2^n\right) \leqslant c_2\frac{n}{t^\alpha}, \tag{3.30}$$

*όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

### 3.3.2 Δεύτερη απόδειξη

Η απόδειξη που παραθέτουμε εδώ παρουσιάσθηκε στα [21] και [24].

Θα χρειαστούμε τον τύπο του Steiner: Αν $C$ είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$|C + tB_2^n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_{[n-k]}(C) t^{n-k}, \tag{3.31}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $W_{[n-k]}(C)$ είναι το $(n-k)$-τάξης quermassintegral του $C$. Ισχύει δε ότι το $W_{[n-k]}(C)$ ισούται με τον μεικτό όγκο $V(C; k, B_2^n; n-k)$ του $C$ με την $B_2^n$. Επίσης, θα χρειαστούμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Kubota που εκφράζει τα quermassintegrals του $C$ ως μέσους όρους των όγκων των $k$–διάστατων προβολών του $C$: Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ισχύει

$$W_{[n-k]}(C) = \frac{\omega_n}{\omega_k} \int_{G_{n,k}} |P_F(C)| \, d\nu_{n,k}(F). \tag{3.32}$$

Το επιχείρημα βασίζεται στην εξής ιδέα: Χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη ανισότητα

$$|tB_2^n| N(C, 2tB_2^n) \leqslant |C + tB_2^n|, \;\; t > 0 \tag{3.33}$$

για να εκτιμήσουμε τον αριθμό κάλυψης του $Z_q(\mu)$ από την $B_2^n$ αρκεί να υπολογίσουμε τον όγκο του αθροίσματος $C + tB_2^n$. Κατόπιν, από τον τύπο του Kubota αρκεί να εκτιμήσουμε τον όγκο των προβολών του $Z_q(\mu)$.

**Ορισμός 3.3.8.** Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το *κανονικοποιήμενο $L_q$-κεντροειδές σώμα* του $\mu$ ως εξής:

$$K_q(\mu) := \frac{Z_q(\mu)}{\sqrt{q}}. \tag{3.34}$$

Σύμφωνα με αυτόν τον ορισμό έχουμε το ακόλουθο.

**Λήμμα 3.3.9.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k, q \leqslant n$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$ ισχύει*

$$|P_F(K_q)|^{1/k} \leqslant c \max\{1, \sqrt{q/k}\} |B_2^k|^{1/k}, \tag{3.35}$$

*όπου $c > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Έστω $1 \leqslant q \leqslant k$. Τότε,

$$|P_F(K_q)|^{1/k} = \frac{1}{\sqrt{q}}|P_F(Z_q)|^{1/k} = \frac{1}{\sqrt{q}}|Z_q(\pi_F(\mu))|^{1/k}.$$

Όμως, το $\pi_F(\mu)$ είναι ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $F$ και $\dim F = k$. Επομένως, είναι $|Z_q(\pi_F(\mu))|^{1/k} \leqslant c_1\sqrt{q/k}$ για $1 \leqslant q \leqslant k$ (πρβλ. [49]). Έτσι, στην πρώτη περίπτωση έχουμε $|P_F(K_q)|^{1/k} \leqslant c_2/\sqrt{k}$.

(β) Έστω $1 \leqslant k < q \leqslant n$. Τότε, είναι $Z_q(\pi_F(\mu)) \subseteq c_3\frac{q}{k}Z_k(\pi_F(\mu))$. Άρα,

$$|P_F(K_q)|^{1/k} \leqslant c_3\frac{q}{k}\frac{1}{\sqrt{q}}|Z_k(\pi_F(\mu))|^{1/k} \leqslant c_4\frac{\sqrt{q}}{k}.$$

Οι παραπάνω εκτιμήσεις, μαζί με το γεγονός ότι $|B_2^k|^{1/k} \simeq \frac{1}{\sqrt{k}}$, ολοκληρώνουν την απόδειξη του λήμματος. $\square$

Στην συνέχεια αποδεικνύουμε μια ασθενή μορφή του Πορίσματος 3.3.7 (πρβλ. [21]).

**Πρόταση 3.3.10.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ και για κάθε $t > 0$ ισχύει:*

$$N(K_q(\mu), 2tB_2^n) \leqslant 2\exp\left(c_1\frac{n}{t} + c_2\frac{\sqrt{qn}}{\sqrt{t}}\right), \tag{3.36}$$

*όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Από τον τύπο του Kubota σε συνδυασμό με το προηγούμενο Λήμμα βλέπουμε ότι

$$W_{[n-k]}(K_q) \leqslant \omega_n(c\max\{1, \sqrt{q/k}\})^k, \; 1 \leqslant k \leqslant n-1. \tag{3.37}$$

Για κάθε $t > 0$ γράφουμε:

$$|K_q + tB_2^n| \leqslant \omega_n \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(c\max\{1, \sqrt{q/k}\})^k t^{n-k}. \tag{3.38}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν και την (3.33) παίρνουμε
(3.39)

$$N(K_q, 2tB_2^n) \leqslant \sum_{k\leqslant q}\binom{n}{k}\left(\frac{cq^{1/2}}{tk^{1/2}}\right)^k + \sum_{k>q}\binom{n}{k}\left(\frac{c}{t}\right)^k \leqslant \sum_{k\leqslant q}\left(\frac{c_1nq^{1/2}}{k^{3/2}t}\right)^k + \sum_{k>q}\left(\frac{c_1n}{kt}\right)^k,$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα $\binom{n}{k} \leqslant (en/k)^k$. Παρατηρήστε ότι για $1 \leqslant k \leqslant q$ έχουμε

$$\left(\frac{c_1 n q^{1/2}}{k^{3/2} t}\right)^k \leqslant \left(\frac{c_1 n q}{t k^2}\right)^k \leqslant \frac{(c_2\sqrt{nq}/\sqrt{t})^{2k}}{(2k)!} \tag{3.40}$$

και για $q \leqslant k \leqslant n$ έχουμε

$$\left(\frac{c_1 n}{kt}\right)^k \leqslant \frac{(c_2 n/t)^k}{k!}. \tag{3.41}$$

Χρησιμοποιούμε τις προηγούμενες εκτιμήσεις, το ανάπτυγμα Taylor της εκθετικής συνάρτησης, την στοιχειώδη ανισότητα $u + v \leqslant 2uv$ για $u, v \geqslant 1$ και καταλήγουμε στην

$$N(K_q, 2tB_2^n) \leqslant 2\exp\left(C\frac{\sqrt{nq}}{\sqrt{t}} + C\frac{n}{t}\right), \tag{3.42}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. □

Θα χρειαστούμε επίσης μια εκτίμηση τύπου «small ball probability» που υπάρχει στο [46, Fact 3.2(c)]:

**Λήμμα 3.3.11.** *Έστω $\theta \in S^{n-1}$, $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και $r \geqslant e$. Τότε,*

$$\nu_{n,k}\left(\left\{F \in G_{n,k} : \|P_F(\theta)\|_2 \leqslant \frac{1}{r}\sqrt{\frac{k}{n}}\right\}\right) \leqslant \left(\frac{\sqrt{e}}{r}\right)^k. \tag{3.43}$$

Υπό τον περιορισμό $\log N(C, tB_2^n) \leqslant k$, το Λήμμα μας επιτρέπει να συγκρίνουμε τους αριθμούς κάλυψης $N(C, tB_2^n)$ ενός κυρτού σώματος $C$ με τους αριθμούς κάλυψης των τυχαίων $k$–διάστατων προβολών του.

**Λήμμα 3.3.12.** *Έστω $C$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, έστω $r \geqslant \sqrt{e}$, $s > 0$ και $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Αν $N_s := N(C, sB_2^n)$, τότε υπάρχει $\mathcal{F} \subseteq G_{n,k}$ τέτοιο ώστε $\nu_{n,k}(\mathcal{F}) \geqslant 1 - N_s^2 e^{k/2} r^{-k}$ και*

$$N\left(P_F(C), \frac{s}{2r}\sqrt{\frac{k}{n}}\, B_F\right) \geqslant N_s \tag{3.44}$$

*για κάθε $F \in \mathcal{F}$.*

*Απόδειξη.* Έστω $N_s = N(C, sB_2^n)$. Από τον ορισμό του αριθμού κάλυψης έπεται ότι υπάρχουν $z_1, \ldots, z_{N_s} \in C$ έτσι ώστε $\|z_i - z_j\|_2 \geqslant s$ για $1 \leqslant i, j \leqslant N_s$, $i \neq j$. Θεωρούμε το σύνολο $\{w_m : 1 \leqslant m \leqslant N_s(N_s-1)\}$ όλων των διαφορών $z_i - z_j$ $(i \neq j)$. Παρατηρήστε ότι $\|w_m\|_2 \geqslant s$ για κάθε $m$. Το προηγούμενο Λήμμα δίνει ότι:

$$\nu_{n,k}\left(\left\{F \in G_{n,k} : \|P_F(w_m)\|_2 \leqslant \frac{1}{r}\sqrt{\frac{k}{n}}\|w_m\|_2\right\}\right) \leqslant \left(\frac{\sqrt{e}}{r}\right)^k, \tag{3.45}$$

και έτσι,

$$\nu_{n,k}\left(\left\{F : \|P_F(w_m)\|_2 \geqslant \frac{1}{r}\sqrt{\frac{k}{n}}\|w_m\|_2 \ \text{ για κάθε } m\right\}\right) \geqslant 1 - N_s^2 e^{k/2} r^{-k}. \tag{3.46}$$

Έστω $\mathcal{F}$ το υποσύνολο της $G_{n,k}$ που περιγράφεται στην προηγούμενη σχέση. Τότε, για κάθε $F \in \mathcal{F}$ και για κάθε $i \neq j$,

$$\|P_F(z_i) - P_F(z_j)\|_2 \geqslant \frac{1}{r}\sqrt{\frac{k}{n}}\|z_i - z_j\|_2 \geqslant \frac{s}{r}\sqrt{\frac{k}{n}}. \tag{3.47}$$

Εφόσον $P_F(z_i) \in P_F(C)$, έπεται ότι

$$N\left(P_F(C), \frac{s}{2r}\sqrt{\frac{k}{n}}B_F\right) \geqslant N_s, \tag{3.48}$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

**Δεύτερη απόδειξη του Πορίσματος 3.3.7.** Θεωρούμε $1 \leqslant q \leqslant n$ και θέτουμε $N_t := N(K_q(\mu), tB_2^n)$. Λόγω της Πρότασης 3.3.10, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $3 \leqslant N_t \leqslant e^{cn}$ και τότε, επιλέγουμε $1 \leqslant k \leqslant n$ έτσι ώστε $\log N_t \leqslant k \leqslant 2\log N_t$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(α) Υποθέτουμε ότι $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n/q}$. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο Λήμμα με $r = e^3$, όποτε έχουμε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - N_t^2 e^{-5k/2} \geqslant 1 - e^{-k/2}$, ότι ένας τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την

$$\frac{k}{2} \leqslant \log N_t \leqslant \log N\left(P_F(K_q(\mu)), c_1 t\sqrt{\frac{k}{n}}B_F\right), \tag{3.49}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Αν $\log N_t \leqslant q$ τότε τετριμμένα έχουμε $\log N_t \leqslant n/t^2$ διότι $q \leqslant n/t^2$. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\log N_t \geqslant q$ και ειδικότερα ότι $q \leqslant k$. Τότε, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{k}{2} \leqslant \log N\left(K_q(\pi_F(\mu)), ct\sqrt{\frac{k}{n}}B_F\right). \tag{3.50}$$

Παρατηρούμε ότι $t\sqrt{k/n} \leqslant \sqrt{k/q} \leqslant k/q$. Συνεπώς, εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.3.10 για το $k$–διάστατο ισοτροπικό μέτρο $\pi_F(\mu)$, παίρνουμε

$$\frac{k}{2} \leqslant c\frac{k}{t\sqrt{k/n}} = c\frac{\sqrt{kn}}{t}, \tag{3.51}$$

το οποίο μας δίνει

$$\log N(K_q(\mu), tB_2^n) = \log N_t \leqslant k \leqslant c_2\frac{n}{t^2}, \tag{3.52}$$

όπου $c_2 = 4c^2$.

(β) Υποθέτουμε ότι $t \geqslant \sqrt{n/q}$. Εργαζόμαστε όπως στην πρώτη απόδειξη: Θέτουμε $p := \frac{\sqrt{n}\sqrt{q}}{t} \leqslant q$. Τότε, από την Πρόταση 1.4.12 έχουμε

$$\begin{aligned} N\left(Z_q(\mu), t\sqrt{q}B_2^n\right) &\leqslant N\left(c\frac{q}{p}Z_p(\mu), t\sqrt{q}B_2^n\right) \\ &\leqslant N\left(Z_p(\mu), t\sqrt{\frac{p}{q}}\sqrt{p}B_2^n\right) \\ &= N\left(Z_p(\mu), \sqrt{\frac{n}{p}}\sqrt{p}B_2^n\right). \end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα της περίπτωσης (α) για το $Z_p(\mu)$ με $t = \sqrt{n/p}$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} N\left(Z_q(\mu), t\sqrt{q}B_2^n\right) &\leqslant N\left(Z_p(\mu), \sqrt{\frac{n}{p}}\sqrt{p}B_2^n\right) \\ &\leqslant e^{cp} = \exp\left(c\frac{\sqrt{qn}}{t}\right), \end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

## 3.4 Λόγος όγκων του $\psi_2$–σώματος

Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο βάρους το 0. Υπενθυμίζουμε τον ορισμό του $\Psi_2(K)$: είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης

$$h_{\Psi_2(K)}(\theta) = \sup_{1\leqslant p\leqslant n} \frac{h_{Z_p(K)}(\theta)}{\sqrt{p}}. \tag{3.53}$$

Από τον ορισμό, έχουμε ότι $Z_p(K) \subseteq \sqrt{p}\Psi_2(K)$ για όλα τα $1 \leqslant p \leqslant n$. Ειδικότερα, $Z_2(K) \subseteq \sqrt{2}\Psi_2(K)$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$|\Psi_2(K)|^{1/n} \geqslant c\frac{L_K}{\sqrt{n}}. \tag{3.54}$$

Σκοπός μας είναι να δώσουμε άνω φράγμα για τον όγκο του $\Psi_2(K)$. Η εκτίμησή μας είναι η ακόλουθη:

**Θεώρημα 3.4.1.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου $1$ στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο βάρους το $0$. Τότε,*

$$|\Psi_2(K)|^{1/n} \leqslant c\frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}}L_K. \tag{3.55}$$

*Επιπέλον, υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε*

$$|\{x \in K : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant cth_{Z_2(K)}(\theta)\}| \leqslant e^{-\frac{t^2}{\log(t+1)}} \tag{3.56}$$

*για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.*

Η πρώτη παρατήρηση είναι ότι, από τον ορισμό του σώματος, έχουμε

$$\Psi_2(K) = \mathrm{conv}\left\{\frac{Z_p(K)}{\sqrt{p}}, p \in [1, n]\right\}, \tag{3.57}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $Z_{2p}(K) \simeq Z_p(K)$, μπορούμε να γράψουμε

$$\Psi_2(K) \simeq \mathrm{conv}\left\{\frac{Z_p(K)}{\sqrt{p}}, p = 2^k,\ k = 1, \dots, \log_2 n\right\}. \tag{3.58}$$

Θέτουμε

$$m_1 := \log_2(\sqrt{n}), \quad m_2 := \log_2\left(\frac{n}{\log n}\right), \quad m_3 := \log_2 n = 2m_1, \tag{3.59}$$

και ορίζουμε τα συμμετρικά κυρτά σώματα $C_1, C_2, C_{2,1}, C_3$ και $C_{3,1}$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
C_1 &:= \mathrm{conv}\left\{\frac{Z_p(K)}{\sqrt{p}}, p \in [1, \sqrt{n}]\right\}, \\
C_2 &:= \mathrm{conv}\left\{\frac{Z_p(K)}{\sqrt{p}}, p = 2^k, k = m_1, \dots, m_2\right\}, \\
C_{2,1} &:= \mathrm{conv}\left\{\frac{Z_p(K)}{\sqrt{p}\sqrt{\log p}}, p = 2^k, k = m_1, \dots, m_2\right\}, \\
C_3 &:= \mathrm{conv}\left\{\frac{Z_p(K)}{\sqrt{p}}, p = 2^k, k = m_2 + 1, \dots, m_3\right\}, \\
C_{3,1} &:= \mathrm{conv}\left\{\frac{Z_p(K)}{\sqrt{p}\sqrt{\log p}}, p = 2^k, k = m_2 + 1, \dots, m_3\right\}.
\end{aligned}$$

Είναι άμεσο ότι

$$\Psi_2(K) \simeq \mathrm{conv}\{C_1, C_2, C_3\}. \tag{3.60}$$

Επίσης, ορίζουμε

$$V := \mathrm{conv}\{C_1, C_{2,1}, C_{3,1}\}. \tag{3.61}$$

Θα δώσουμε άνω φράγματα για τους αριθμούς κάλυψης των σωμάτων $C_1, C_2, C_{2,1}, C_3, C_{3,1}$ από την μπάλα $L_K B_2^n$.

**(α) Αριθμοί κάλυψης του $C_1$.**

Θα χρειαστούμε μερικές προκαταρκτικές παρατηρήσεις.

**Λήμμα 3.4.2.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0 και έστω $1 \leqslant q \leqslant n$. Έστω $A$ ένα υποσύνολο του $K$ με όγκο $|A| \geqslant 1 - e^{-q}$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant p \leqslant c_1 q$, ισχύει*

$$Z_p(K) \subseteq 2Z_p(\overline{A}), \tag{3.62}$$

*όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Υπενθυμίζουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 1$ τέτοια ώστε $h_{Z_{2p}(K)}(\theta) \leqslant c h_{Z_p(K)}(\theta)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $p \geqslant 1$.

Σταθεροποιούμε απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε $e^{-q/2} c^{c_1 q} \leqslant \frac{1}{2}$. Τότε, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_K |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx &= \int_A |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx + \int_{K\setminus A} |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx \\
&\leqslant |A|^{1+\frac{p}{n}} \int_{\bar{A}} |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx + |K \setminus A|^{\frac{1}{2}} \left( \int_K |\langle x, \theta\rangle|^{2p} \, dx \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leqslant \int_{\bar{A}} |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx + e^{-\frac{q}{2}} c^p \int_K |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx \\
&\leqslant \int_{\bar{A}} |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx + \frac{1}{2} \int_K |\langle x, \theta\rangle|^p \, dx.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Επίσης, θα χρειαστούμε το ακόλουθο (πρβλ. [48, Theorem 2.1] για την απόδειξη):

**Λήμμα 3.4.3.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $R(K) \leqslant a\sqrt{n} L_K$. Τότε,*

$$\left( \frac{|\Psi_2(K)|}{|B_2^n|} \right)^{1/n} \leqslant w(\Psi_2(K)) \leqslant w_{\sqrt{n}}(\Psi_2(K)) \leqslant c(a) L_K, \tag{3.63}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

**Πρόταση 3.4.4.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\left(\frac{|C_1|}{|B_2^n|}\right)^{1/n} \leqslant w(C_1) \leqslant w_{\sqrt{n}}(C_1) \leqslant cL_K, \tag{3.64}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επιπλέον, για κάθε $t \geqslant 1$,*

$$N\left(C_1, c_1 t L_K B_2^n\right) \leqslant e^{\frac{c_2 n}{t^2}}, \tag{3.65}$$

*όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Είναι γνωστό ότι $|K \cap s\sqrt{n} L_K B_2^n| \geqslant 1 - e^{-s\sqrt{n}}$ για $s \geqslant c'$, όπου $c' > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (αυτό είναι το βασικό αποτέλεσμα στο [49]). Θέτουμε $s = \max\{c_1^{-1}, c'\}$ όπου $c_1 > 0$ είναι η σταθερά από το Λήμμα 3.4.2. Έστω $A = K \cap c_1^{-1}\sqrt{n} L_K B_2^n$. Τότε, $R(\overline{A}) \leqslant c'\sqrt{n} L_K$ και το $\overline{A}$ είναι σχεδόν ισοτροπικό. Επίσης, από το Λήμμα 3.4.2, για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \sqrt{n}$, έχουμε $Z_p(K) \subseteq 2Z_p(\overline{A})$. Επομένως,

$$C_1 \subseteq 2C_1(\overline{A}) \subseteq 2\Psi_2(\overline{A}). \tag{3.66}$$

Τώρα, το συμπέρασμα έπεται από το προηγούμενο Λήμμα και από την ανισότητα του Sudakov. □

### (β) Αριθμοί κάλυψης των σωμάτων $C_2$ και $C_3$.

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο Λήμμα από το [21].

**Λήμμα 3.4.5.** *Έστω $A_1, \ldots, A_s$ υποσύνολα της $RB_2^k$. Για κάθε $0 < t < R$,*

$$N(\mathrm{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_s), 2tB_2^k) \leqslant \left(\frac{cR}{t}\right)^s \prod_{i=1}^{s} N(A_i, tB_2^k). \tag{3.67}$$

*Απόδειξη.* Έστω $t > 0$ και $N_i$ υποσύνολα των $A_i$ αντίστοιχα με πληθάριθμο $|N_i| = N(A_i, tB_2^k)$. Κάθε $u \in \mathrm{conv}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_s)$ γράφεται στην μορφή $z = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \cdots + \lambda_s u_s$, όπου $u_i \in A_i$ και $\lambda_i \geqslant 0$ με $\sum_{i=1}^s \lambda_i = 1$, οπότε, μπορούμε να ταυτίσουμε το σύνολο των συντελεστών $\lambda_i$ με ένα υποσύνολο της μοναδιαίας σφαίρας $S_{\ell_1^s} = \{\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) : \sum_{i=1}^s |\lambda_i| = 1\}$ του $\ell_1^s$. Θεωρούμε υποσύνολο $Z$ της $S_{\ell_1^s}$, μεγιστικό ως προς την σχέση $\|y_i - y_j\|_1 \geqslant \frac{t}{R}$ $(i \neq j)$. Γνωρίζουμε ότι $|Z| \leqslant (3R/t)^s$ για $0 < t < R$ (πρβλ. [51]).

*Ισχυρισμός.* Το σύνολο

$$N := \{v = z_1 x_1 + z_2 x_2 + \cdots + z_s x_s : z = (z_i)_{i=1}^s \in Z,\, x_i \in N_i\},$$

είναι $2t$–δίκτυο του $\mathrm{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_s)$ ως προς την $B_2^k$.

Πράγματι· έστω $u \in \mathrm{conv}(A_1 \cup \cdots \cup A_s)$. Τότε, υπάρχουν $t_i \geqslant 0$ με $\sum t_i = 1$ και $u_i \in A_i$ ώστε $u = \sum_{i=1}^s t_i u_i$. Υπάρχει $z = (z_1, \ldots, z_s) \in Z$ ώστε $\sum_{i=1}^s |t_i - z_i| \leqslant t/R$. Επίσης, υπάρχουν $x_i \in N_i$ ώστε $\|u_i - x_i\|_2 \leqslant t$. Τότε, $\sum_{i=1}^s z_i x_i \in N$ και έχουμε

$$\left\| u - \sum_{i=1}^s z_i x_i \right\|_2 \leqslant \left( \max_{1 \leqslant i \leqslant s} \|u_i\|_2 \right) \sum_{i=1}^s |t_i - z_i| + \sum_{i=1}^s |z_i| \cdot \|u_i - x_i\|_2 \leqslant 2t.$$

Τέλος, παρατηρήστε ότι

$$N(\mathrm{conv}(A_1 \cup \ldots \cup A_s), 2tB_2^k) \leqslant |N| \leqslant |Z| \prod_{i=1}^N (A_i, tB_2^k),$$

που δίνει τη ζητούμενη εκτίμηση. □

**Πρόταση 3.4.6.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t \geqslant 1$,*

$$\max\left\{ N(C_2, c_1 t\sqrt{\log n} L_K B_2^n), N(C_3, c_2 t(\log\log n) L_K B_2^n) \right\} \leqslant e^{c_3 \frac{n}{t}} \tag{3.68}$$

*και*

$$\max\{N\left(C_{2,1}, c_1 L_K B_2^n\right), N\left(C_{3,1}, c_2 L_K B_2^n\right)\} \leqslant e^{c_3 n}, \tag{3.69}$$

*όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Πρώτα θεωρούμε τα σώματα $C_2$ και $C_{2,1}$. Θέτουμε $s := m_2 - m_1$ και ορίζουμε

$$A_i := \frac{1}{2^{\frac{m_1+i}{2}}} Z_{2^{m_1+i}}(K) \text{ και } A_{i,1} := \frac{1}{2^{\frac{m_1+i}{2}} \sqrt{m_1+i}} Z_{2^{m_1+i}}(K), \tag{3.70}$$

για $i = 0, \ldots, s$. Παρατηρήστε ότι $\max\{R(A_i), R(A_{i,1})\} \leqslant \sqrt{n} L_K$ για $0 \leqslant i \leqslant s$. Από το Θεώρημα 3.3.1 έχουμε ότι, για κάθε $r \geqslant 1$,

$$\log N\left(A_i, crL_K B_2^n\right) \leqslant \frac{c'n}{r^2} + \frac{c'n}{r\sqrt{\log n}} \tag{3.71}$$

και

$$\log N\left(A_{i,1}, cL_K B_2^n\right) \leqslant \frac{c'n}{m_1+i} + \frac{c'n}{\sqrt{m_1+i}\sqrt{\log n}} \leqslant c'' \frac{c'n}{m_1+i}. \tag{3.72}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.4.5, βλέπουμε ότι

$$\log N\left(C_2, 2crL_K B_2^n\right) \leqslant \log^2 n + \frac{c'n\log n}{r^2} + \frac{c'n\log n}{r\sqrt{\log n}}. \tag{3.73}$$

Εφόσον $R(C_2) \leqslant \sqrt{n}L_K$, θεωρούμε $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$. Τότε, $\log^2 n \leqslant \frac{n}{t}$. Θέτοντας $r = t\sqrt{\log n}$ συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $t \geqslant 1$,

$$\log N\left(C_2, 2ct\sqrt{\log n}L_K B_2^n\right) \leqslant \frac{3c'n}{t}. \tag{3.74}$$

Όμοια, βλέπουμε ότι

$$\log N\left(C_{2,1}, 2cL_K B_2^n\right) \leqslant \log^2 n + c'n\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{m_1+i} \leqslant c''n\sum_{j=m_1+1}^{2m_1}\frac{1}{j} \leqslant c'''n. \tag{3.75}$$

Τώρα, θεωρούμε τα σώματα $C_3$ και $C_{3,1}$. Θέτουμε $s := m_3 - m_2 = \log\log n$ και ορίζουμε

$$A_i := \frac{1}{2^{\frac{m_2+i}{2}}}Z_{2^{m_2+i}}(K),\ A_{i,1} := \frac{1}{2^{\frac{m_2+i}{2}}\sqrt{m_2+i}}Z_{2^{m_2+i}}(K), \tag{3.76}$$

για $i = 1, \ldots, s$. Παρατηρήστε ότι $\max\{R(A_i), R(A_{i,1})\} \leqslant \sqrt{n}L_K$ για $1 \leqslant i \leqslant s$. Το Θεώρημα 3.3.1 δείχνει ότι, για κάθε $r \geqslant 1$,

$$\log N\left(A_i, crL_K B_2^n\right) \leqslant \frac{c'n}{r} \text{ και } \log N\left(A_{i,1}, cL_K B_2^n\right) \leqslant \frac{c'n}{m_2+i} \leqslant \frac{c''n}{\log n}. \tag{3.77}$$

Πάλι από το Λήμμα 3.4.5, παίρνουμε

$$\log N\left(C_3, 2crL_K B_2^n\right) \leqslant \log^2 n + \frac{c'n(\log\log n)}{r}. \tag{3.78}$$

Τώρα, θέτουμε $t := \frac{r}{(\log\log n)}$. Όπως πριν, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $1 \leqslant t \leqslant \sqrt{n}$, και έτσι, $\log^2 n \leqslant \frac{n}{t}$. Θέτοντας $r = t\log\log n$ συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $t \geqslant 1$,

$$\log N\left(C_3, 2ct(\log\log n)L_K B_2^n\right) \leqslant \frac{3c'n}{t}. \tag{3.79}$$

Επίσης, από το Λήμμα 3.4.5,

$$\log N\left(C_{3,1}, 2cL_K B_2^n\right) \leqslant c'\frac{n(\log\log n)}{\log n} \leqslant cn. \tag{3.80}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Πρόταση 3.4.7.** *Έστω $K$ ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t \geqslant 1$,*

$$N\left(\Psi_2(K), c_1 t\sqrt{\log n}L_K B_2^n\right) \leqslant e^{c_2\frac{n}{t}} \tag{3.81}$$

*και*

$$N\left(V, c_3 L_K B_2^n\right) \leqslant e^{c_2 n}, \tag{3.82}$$

*όπου $c_1, c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.4.5 για $A_1 := C_1$, $A_2 := C_2$ και $A_3 := C_3$ και χρησιμοποιούμε την Πρόταση 3.4.4. Δουλεύουμε παρόμοια για το $V$. □

**Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1.** Ο πρώτος ισχυρισμός έπεται απευθείας από την Πρόταση 3.4.7 (για $t = 1$) και το γεγονός ότι για οποιοδήποτε ζευγάρι συμπαγών συνόλων $A$ και $B$ του $\mathbb{R}^n$, έχουμε $|A| \leqslant N(A, B)|B|$.

Το ίδιο επιχείρημα δίνει ότι $|V|^{1/n} \leqslant cL_K|B_2^n|^{1/n}$. Θεωρούμε τα συμμετρικά κυρτά σώματα

$$V_1 := \mathrm{conv}\left\{\frac{Z_p(K)}{\sqrt{p}\sqrt{\log p}},\ p \in [2, n]\right\} \text{ και } V_2 := \mathrm{conv}\left\{\frac{Z_p(K)}{\sqrt{p}\sqrt{\log p}},\ p \geqslant 2\right\}. \tag{3.83}$$

Παρατηρήστε ότι από την Πρόταση 1.4.11, έχουμε $V_1 \simeq V_2$. Τότε, $V_1 \subseteq cV$ και $|V_2|^{1/n} \leqslant cL_K|B_2^n|^{1/n}$. Έτσι, υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ ώστε $h_{V_2}(\theta) \leqslant cL_K$. Αυτό συνεπάγεται ότι για κάθε $p \geqslant 1$,

$$h_{Z_p(K)}(\theta) \leqslant c\sqrt{p}\sqrt{\log p}L_K. \tag{3.84}$$

Από την ανισότητα του Markov έχουμε ότι, για κάθε $p > 0$,

$$|\{x \in K : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant e h_{Z_p(K)}(\theta)\}| \leqslant e^{-p}. \tag{3.85}$$

Έστω $t \geqslant 1$. Αν ορίσουμε $p$ μέσω της $\sqrt{p} = \frac{t}{\sqrt{\log(t+1)}}$, τότε οι (3.84) και (3.85) συνεπάγονται την (3.56). □

**Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1.** Το πρώτο μέρος έπεται απευθείας από το Θεώρημα 3.4.1, την (1.104) και τον ορισμό του $\psi_2$–σώματος. Το δεύτερο μέρος έχει παρόμοια απόδειξη με αυτήν του Θεωρήματος 3.4.1 γι' αυτό και παραλείπουμε τις λεπτομέρειες. □

# Κεφάλαιο 4

# Κατανομή $\psi_2$-διευθύνσεων σε ισοτροπικά κυρτά σώματα

Στην προηγούμενη Παράγραφο συζητήσαμε το πρόβλημα της ύπαρξης υποκανονικών διευθύνσεων σε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα και είδαμε ότι μπορούμε να πετύχουμε $\psi_2$-εκτίμηση με σταθερά $O(\sqrt{\log n})$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που γεννάται είναι πόσο πολλές είναι οι διευθύνσεις αυτές με την έννοια του μέτρου $\sigma$ στην σφαίρα.

Δυστυχώς καμιά από τις προηγούμενες προσεγγίσεις [30], [21] και [22] δεν παρέχει εκτιμήσεις για το μέτρο των $\psi_2$ διευθύνσεων με δοθείσα σταθερά $r$ για ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα. Ο Klartag λαμβάνει κάποια πληροφορία στο ερώτημα αυτό αλλά για διαφορετική θέση του σώματος $K$. Πιο συγκεκριμένα, στο [30] αποδεικνύει ότι αν το $K$ έχει κέντρο βάρους το 0 και όγκο 1 τότε υπάρχει $T \in SL(n)$ έτσι ώστε το σώμα $K_1 = T(K)$ να έχει την ακόλουθη ιδιότητα: υπάρχει $A \subseteq S^{n-1}$ με μέτρο $\sigma(A) \geqslant \frac{4}{5}$ ώστε, για κάθε $\theta \in A$ και για κάθε $t \geqslant 1$,

$$|\{x \in K_1 : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant ct\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1\}| \leqslant e^{-\frac{ct^2}{\log^2 n \log^5(t+1)}} \tag{4.1}$$

Σε αυτό το αποτέλεσμα, το σώμα $K_1$ είναι η $\ell$–θέση του $K$ (αυτή είναι ουσιαστικά η θέση που ελαχιστοποιεί το μέσο πλάτος του σώματος· βλέπε Κεφάλαιο 5). Ο σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να δώσει κάποια εκτίμηση για το μέτρο των $\psi_2$ διευθύνσεων στην ισοτροπική θέση. Γι' αυτόν τον σκοπό εισάγουμε την συνάρτηση

$$\psi_K(t) := \sigma\left(\left\{\theta \in S^{n-1} : h_{\Psi_2(K)}(\theta) \leqslant ct\sqrt{\log n}L_K\right\}\right). \tag{4.2}$$

Το πρόβλημα λοιπόν είναι να δώσουμε κάτω φράγματα για την $\psi_K(t)$, $t \geqslant 1$. Παρουσιάζουμε ένα γενικό κάτω φράγμα στην Παράγραφο 4.2 (Θεώρημα 4.2.1)

Η προσέγγιση που ακολουθούμε είναι η εξής: Πρώτα παίρνουμε κάποια πληροφορία για την $\psi_2$ συμπεριφορά των διευθύνσεων σε τυχόντα $k$–διάστατο υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$. Αυτό είναι το περιέχομενο του Θεωρήματος 4.1.1 στην επόμενη Παράγραφο.

Το Θεώρημα 4.1.1 κατόπιν συνδυάζεται με ένα απλό επιχείρημα, το οποίο βασίζεται στο ότι η $\psi_2$-νόρμα είναι Lipschitz συνάρτηση με σταθερά $O(\sqrt{n}L_K)$ και έτσι είναι σχεδόν σταθερή σε κατάλληλης ακτίνας γεωδαισιακή μπάλα της σφαίρας.

Βαθύτερη κατανόηση της συνάρτησης $\psi_K(t)$ θα είχε σημαντικές εφαρμογές. Η σημασία της πληροφορίας που έχουμε για την κατανομή των $\psi_2$-διευθύνσεων μπορεί να φανεί από τον ρόλο της στο πρόβλημα του άνω φράγματος για το μέσο πλάτος ισοτροπικού κυρτού σώματος. Παρουσιάζουμε αυτήν την σύνδεση στην Παράγραφο 4.3 και στο επόμενο Κεφάλαιο.

## 4.1 $\psi_2$–διευθύνσεις σε υποχώρους

Σε αυτήν την Παράγραφο αποδεικνύουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 4.1.1.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.*

(i) *Για κάθε $\log^2 n \leqslant k \leqslant n/\log n$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$ υπάρχει $\theta \in S_F$ έτσι ώστε*

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant C\sqrt{n/k}\, L_K. \tag{4.3}$$

(ii) *Για κάθε $n/\log n \leqslant k \leqslant n$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$ υπάρχει $\theta \in S_F$ έτσι ώστε*

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant C\sqrt{\log n}\, L_K. \tag{4.4}$$

(iii) *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant \log^2 n$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$ υπάρχει $\theta \in S_F$ έτσι ώστε*

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant C\sqrt{n/k}\sqrt{\log 2k}\, L_K, \tag{4.5}$$

*όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Η τακτική για την απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος είναι να προσαρμόσουμε το επιχείρημα του προηγούμενου Κεφαλαίου ώστε να εφαρμόζεται σε υποχώρους χαμηλότερης διάστασης. Με άλλα λόγια, θα αποδείξουμε εκτιμήσεις για αριθμούς κάλυψης προβολών των $L_q$-κεντροειδών σωμάτων.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.3.1 και την Πρόταση 2.3.2 μπορούμε να αποδείξουμε ανάλογες εκτιμήσεις για τους αριθμούς των $P_F(Z_q(K))$, όπου $F \in G_{n,k}$. Για την απόδειξη θα χρειασθούμε το ακόλουθο Λήμμα που οφείλεται στην Μ.Χαρτζουλάκη [28]:

**Λήμμα 4.1.2.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ ισχύει:*

$$N(K, t\sqrt{n}L_K B_2^n) \leqslant 2e^{\frac{cn}{t}}. \tag{4.6}$$

*Επιπλέον,*

$$N(K - K, 2t\sqrt{n}L_K B_2^n) \leqslant 4e^{\frac{c'n}{t}}, \tag{4.7}$$

*για κάθε $t > 0$, όπου $c, c' > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

*Απόδειξη.* Έστω $d\mu(x) = c_K^{-1} e^{-\|x\|_K}\, dx$ το Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ όπου $c_K$ είναι ο παράγοντας κανονικοποίησης: $c_K = \int e^{-\|x\|_K}\, dx = n!|K|$. Έστω $\{z_1, \dots, z_N\}$ ένα μεγιστικό υποσύνολο του $K$ ως προς τη συνθήκη $\|z_i - z_j\|_2 \geqslant t$ για $i \neq j$. Τότε, $N \leqslant N(K, tB_2^n)$ και τα $z_j + \frac{t}{2}B_2^n$ έχουν ξένα εσωτερικά. Για κάθε $\lambda > 0$ το ίδιο ισχύει για τα $\lambda z_j + \frac{\lambda t}{2}B_2$. Επομένως,

$$1 \geqslant \mu\left(\bigcup_{j\leqslant N} \lambda z_j + \frac{\lambda t}{2}B_2^n\right) = \sum_{j=1}^{N} \mu\left(\lambda z_j + \frac{\lambda t}{2}B_2^n\right) \geqslant N e^{-\lambda} \mu\left(\frac{\lambda t}{2}B_2^n\right). \tag{4.8}$$

Επιλέγουμε $\lambda = 4J/t$, όπου

$$J = \int \|x\|_2\, d\mu(x) = \frac{1}{n!}\int \|x\|_2 e^{-\|x\|_K}\, dx = \frac{(n+1)!}{n!}\int_K \|x\|_2\, dx = (n+1)I_2(K).$$

. Από την ανισότητα του Markov έχουμε $\mu(2JB_2^n) \geqslant 1/2$. Καταλήγουμε έτσι στην

$$N(K, tB_2^n) \leqslant 2e^{4J/t}. \tag{4.9}$$

Αντικαθιστώντας το $J$ στην τελευταία εκτίμηση και λαμβάνοντας υπόψιν την ισοτροπική συνθήκη καταλήγουμε στο συμπέρασμα. Για το δεύτερο μέρος χρησιμοποιούμε την γενική ιδιότητα: $N(A - A, B - B) \leqslant N(A, B)^2$ . □

**Πρόταση 4.1.3.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant q < k \leqslant n$, για κάθε $F \in G_{n,k}$ και για κάθε $t \geqslant 1$, έχουμε*

$$\log N\left(P_F(Z_q(K)), t\sqrt{q}L_K B_F\right) \leqslant \frac{c_1 k}{t^2} + \frac{c_2\sqrt{qk}}{t}, \tag{4.10}$$

*όπου* $c_1, c_2 > 0$ *είναι απόλυτες σταθερές. Επίσης, για κάθε* $k \leqslant q \leqslant n$ *και για κάθε* $F \in G_{n,k}$ *και* $t \geqslant 1$,

$$\log N\left(P_F(Z_q(K)), t\sqrt{q}L_K B_F\right) \leqslant \frac{c_3\sqrt{qk}}{t}, \tag{4.11}$$

*όπου* $c_3 > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 2.3.2 βλέπουμε ότι $Z_q(\overline{B_{k+1}}(K,F)) \simeq \frac{L_{\overline{B_{k+1}}(K,F)}}{L_K} P_F(Z_q(K))$ για κάθε $F \in G_{n,k}$.

(i) Έστω $1 \leqslant q \leqslant k$, $F \in G_{n,k}$ και $t \geqslant 1$. Γράφουμε

$$\log N\left(P_F(Z_q(K)), t\sqrt{q}L_K B_F\right) \leqslant \log N\left(Z_q(\overline{B}_{k+1}(K,F)), ct\sqrt{q}L_{\overline{B}_{k+1}(K,F)}B_F\right), \tag{4.12}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Εφόσον το $\overline{B}_{k+1}(K,F)$ είναι ισοτροπικό, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.3.1 για το $\overline{B}_{k+1}(K,F)$ στον $F$: Έχουμε

$$\log N\left(Z_q(\overline{B}_{k+1}(K,F)), ct\sqrt{q}L_{\overline{B}_{k+1}(K,F)}B_F\right) \leqslant \frac{c_1 k}{t^2} + \frac{c_2\sqrt{qk}}{t}, \tag{4.13}$$

και έτσι,

$$\log N\left(P_F(Z_q(K)), t\sqrt{q}L_K B_F\right) \leqslant \frac{c_1 k}{t^2} + \frac{c_2\sqrt{qk}}{t}. \tag{4.14}$$

(ii) Υποθέτουμε ότι $k \leqslant q \leqslant n$ και $F \in G_{n,k}$. Τότε, για κάθε $t \geqslant 1$, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 1.4.11 μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\log N\left(P_F(Z_q(K)), t\sqrt{q}L_K B_F\right) &\leqslant \log N\left(\frac{cq}{k}D_{k+1}(K,F), t\sqrt{q}L_{\overline{B}_{k+1}(K,F)}B_F\right)\\
&\leqslant \log N\left(D_{k+1}(K,F), t\sqrt{\frac{k}{q}}\sqrt{k}L_{\overline{B}_{k+1}(K,F)}B_F\right)\\
&\leqslant c_3\frac{\sqrt{qk}}{t},
\end{aligned}$$

όπου $D_{k+1}(K,F) := \overline{B}_{k+1}(K,F) - \overline{B}_{k+1}(K,F)$ και έχουμε χρησιμοποιήσει το Λήμμα 4.1.2 για το ισοτροπικό κυρτό σώμα $\overline{B}_{k+1}(K,F)$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκτιμήσεις μπορούμε να αποδείξουμε την ύπαρξη διευθύνσεων με σχετικά μικρή $\psi_2$-νόρμα σε κάθε υπόχωρο του $\mathbb{R}^n$. Η εξάρτηση βελτιώνεται όσο η διάσταση αυξάνεται.

**Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1.** Για κάθε ακέραιο $q \geqslant 1$ ορίζουμε το *κανονικοποιήμενο $L_q$–κεντροειδές σώμα* $K_q$ του $K$ ως

$$K_q = \frac{1}{\sqrt{q}L_K} Z_q(K), \tag{4.15}$$

και θεωρούμε το κυρτό σώμα

$$T = \mathrm{conv}\left( \bigcup_{i=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} K_{2^i} \right). \tag{4.16}$$

Τότε, για κάθε $F \in G_{n,k}$ έχουμε

$$P_F(T) = \mathrm{conv}\left( \bigcup_{i=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} P_F(K_{2^i}) \right). \tag{4.17}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.4.5 για τα σύνολα $A_i = P_F(K_{2^i})$. Παρατηρούμε ότι $K_{2^i} \subseteq c_1 2^{i/2} B_2^n$, και έτσι, $N(A_i, tB_F) = 1$ αν $c_1 2^{i/2} \leqslant t$. Επίσης, $A_i \subseteq c_2\sqrt{n}B_F$ για κάθε $i$.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.1.3, για κάθε $t \geqslant 1$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} N(P_F(T), 2tB_F) &\leqslant (c_2\sqrt{n})^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \left[ \prod_{i=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} N(P_F(K_{2^i}), tB_F) \right] \\ &\leqslant e^{c_3 \log^2 n} \exp\left( C \sum_{i=1}^{\lfloor \log_2 n \rfloor} \frac{2^{i/2}\sqrt{k}}{t} + C \sum_{t^2 \leqslant 2^i \leqslant k} \frac{k}{t^2} \right) \\ &\leqslant e^{c_3 \log^2 n} \exp\left( C\frac{\sqrt{nk}}{t} + C\frac{k}{t^2}\log(k/t^2) \right), \end{aligned}$$

όπου ο δεύτερος όρος εμφανίζεται μόνον αν $k \geqslant ct^2$.

Τώρα, διακρίνουμε περιπτώσεις:

(i) Αν $\log^2 n \leqslant k \leqslant n/\log n$ επιλέγουμε $t_0 = \sqrt{n/k}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{\sqrt{nk}}{t_0} = k$ και

$$\frac{k}{t_0^2}\log\left(\frac{k}{t_0^2}\right) = \frac{k^2}{n}\log\left(\frac{k^2}{n}\right) \leqslant \frac{k}{\log n}\log\left(\frac{k^2}{n}\right) \leqslant k. \tag{4.18}$$

Αυτό δείχνει ότι $N(P_F(T), \sqrt{n/k}B_F) \leqslant e^{ck}$. Έπεται ότι

$$|P_F(T)| \leqslant |C\sqrt{n/k}\, B_F|. \tag{4.19}$$

Οπότε, υπάρχει $\theta \in S_F$ έτσι ώστε

$$h_T(\theta) = h_{P_F(T)}(\theta) \leqslant C\sqrt{n/k}, \tag{4.20}$$

το οποίο συνεπάγεται την

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{2^i} \leqslant C\, 2^{i/2}\sqrt{n/k}\, L_K \tag{4.21}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \lfloor \log_2 n \rfloor$. Αυτό αποδεικνύει το πρώτο μέρος του Θεωρήματος.

(ii) Αν $n/\log n \leqslant k \leqslant n$ επιλέγουμε $t_0 = \sqrt{\log n} \simeq \sqrt{\log k}$. Παρατηρούμε ότι $\frac{\sqrt{nk}}{t_0} = k\sqrt{\frac{n}{k\log n}} \leqslant k$ και

$$\frac{k}{t_0^2}\log\left(\frac{k}{t_0^2}\right) = \frac{k}{\log n}\log\left(\frac{k}{\log n}\right) \leqslant \frac{k}{\log n}\log\left(\frac{n}{\log n}\right) \leqslant k. \tag{4.22}$$

Αυτό δίνει ότι $N(P_F(T), \sqrt{\log n} B_F) \leqslant e^{ck}$ και, όπως στην περίπτωση (i), βλέπουμε ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{2^i} \leqslant C\, 2^{i/2}\sqrt{\log n}\, L_K \tag{4.23}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, \lfloor \log_2 n \rfloor$. Το αποτέλεσμα έπεται.

(iii) Για τα $1 \leqslant k \leqslant \log^2 n$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι το $\overline{B}_{k+1}(K,F)$ είναι ισοτροπικό σώμα για κάθε $F \in G_{n,k}$. Άρα, από το βασικό αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 3, έχουμε ότι υπάρχει $\theta \in S_F$ ώστε $h_{\psi_2(\overline{B}_{k+1}(K,F))}(\theta) \leqslant c\sqrt{\log 2k} L_{\overline{B}_{k+1}(K,F)}$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.5.7 παίρνουμε

$$\frac{h_{\Psi_2(K)}(\theta)}{L_K} \leqslant c\frac{\sqrt{n/k}}{L_{\overline{B}_{k+1}(K,F)}} h_{\psi_2(\overline{B}_{k+1}(K,F))}(\theta) \leqslant c'\sqrt{\frac{n}{k}}\sqrt{\log 2k}, \tag{4.24}$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο. □

**Παρατήρηση 4.1.4.** Θυμηθείτε ότι για τον τυχαίο υπόχωρο $F \in G_{n,k}$ με $k \leqslant \sqrt{n}$ το σώμα $\overline{B_{k+1}}(K,F)$ είναι $\psi_2$ με απόλυτη σταθερά. Αυτό δίνει $\psi_2$-εκτίμηση με σταθερά $O(\sqrt{n/k})$.

## 4.2 Συνάρτηση κατανομής της $\psi_2$–νόρμας

Εδώ αποδεικνύουμε την εκτίμηση για την συνάρτηση κατανομής της $\psi_2$-νόρμας.

**Θεώρημα 4.2.1.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t \geqslant 1$ έχουμε*

$$\psi_K(t) \geqslant \exp(-cn/t^2), \tag{4.25}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Είναι γνωστό (πρβλ. [18]) ότι κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ περιέχεται στην $[(n+1)L_K]B_2^n$, και έτσι έχουμε $\psi_K(t) = 1$ αν $t \geqslant c\sqrt{n/\log n}$. Οπότε, το φράγμα του Θεωρήματος 4.2.1 έχει νόημα μόνον όταν $1 \leqslant t \leqslant c\sqrt{n/\log n}$. Στην πραγματικότητα, αν $t \geqslant c\sqrt[4]{n}/\sqrt{\log n}$ τότε έχουμε καλύτερη εκτίμηση:

**Πρόταση 4.2.2.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t \geqslant c_1\sqrt[4]{n}/\sqrt{\log n}$ έχουμε*

$$\psi_K(t) \geqslant 1 - e^{-c_2 t^2 \log n}, \tag{4.26}$$

*όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.*

Αναβάλλουμε την απόδειξη της Πρότασης 4.2.2 για την επόμενη Παράγραφο, όπου θα γίνει φανερή και η σύνδεσή της με το πρόβλημα του μέσου πλάτους.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1.1 μπορούμε να δώσουμε εκτίμηση για το μέτρο των διευθύνσεων που ικανοποιούν δοθείσα $\psi_2$-εκτίμηση. Ξεκινάμε με ένα απλό Λήμμα:

**Λήμμα 4.2.3.** *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$ και έστω $A$ υποσύνολο της $S^{n-1}$ το οποίο ικανοποιεί την $A \cap F \neq \emptyset$ για κάθε $F \in G_{n,k}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε*

$$\sigma(A_\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1}, \tag{4.27}$$

*όπου*

$$A_\varepsilon = \big\{y \in S^{n-1} : \inf\{\|y-\theta\|_2 : \theta \in A\} \leqslant \varepsilon\big\}. \tag{4.28}$$

*Απόδειξη.* Γράφουμε

$$\sigma(A_\varepsilon) = \int_{S^{n-1}} \chi_{A_\varepsilon}(y)\, d\sigma(y) = \int_{G_{n,k}} \int_{S_F} \chi_{A_\varepsilon}(y)\, d\sigma_F(y)\, d\nu_{n,k}(F), \tag{4.29}$$

και παρατηρούμε ότι, εφόσον $A \cap S_F \neq \emptyset$, το σύνολο $A_\varepsilon \cap S_F$ περιέχει γεωδαισιακή μπάλα $C_F(\varepsilon) = \{y \in S_F : \|y - \theta_0\|_2 \leqslant \varepsilon\}$ Ευκλείδειας ακτίνας $\varepsilon$ στην $S_F$. Έπεται ότι

$$\int_{S_F} \chi_{A_\varepsilon}(y)\, d\sigma_F(y) \geqslant \sigma_F(C_F(\varepsilon)) \geqslant \frac{1}{2}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{k-1}, \tag{4.30}$$

από γνωστές εκτιμήσεις για γεωδαισιακές μπάλες (βλέπε [5]), και το αποτέλεσμα έπεται.
□

**Παρατήρηση 4.2.4.** Όπως δείχνει η απόδειξη του Λήμματος, η ισχυρή υπόθεση ότι $A\cap F\neq\emptyset$ για κάθε $F\in G_{n,k}$ δεν χρειάζεται στην πραγματικότητα για την εκτίμηση του $\sigma(A_\varepsilon)$. Θα είχαμε πρακτικά το ίδιο κάτω φράγμα για το $\sigma(A_\varepsilon)$ υπό την ασθενέστερη υπόθεση ότι $A\cap F\neq\emptyset$ για κάθε $F$ σε ένα σύνολο $\mathcal{F}_{n,k}$ της $G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(\mathcal{F}_{n,k})\geqslant c^{-k}$.

**Θεώρημα 4.2.5.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\log^2 n\leqslant k\leqslant n$ υπάρχει $A_k\subseteq S^{n-1}$ τέτοιο ώστε*

$$\sigma(A_k)\geqslant e^{-c_1k\log k} \tag{4.31}$$

*όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, και*

$$\|\langle\cdot,y\rangle\|_{\psi_2}\leqslant C\,\max\left\{\sqrt{n/k},\sqrt{\log n}\right\}L_K \tag{4.32}$$

*για κάθε $y\in A_k$.*

*Απόδειξη.* Σταθεροποιούμε $k\leqslant n/\log n$ και ορίζουμε $A$ το σύνολο των $\theta\in S^{n-1}$ που ικανοποιούν την (4.3). Από το Θεώρημα 4.1.1 έχουμε $A\cap S_F\neq\emptyset$ για κάθε $F\in G_{n,k}$. Οπότε, μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 4.2.3 με $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{k}}$. Αν $y\in A_\varepsilon$ τότε υπάρχει $\theta\in A$ τέτοιο ώστε $\|y-\theta\|_2\leqslant\varepsilon$, το οποίο δίνει

$$\|\langle\cdot,y-\theta\rangle\|_{\psi_2}\leqslant\left(\|\langle\cdot,y-\theta\rangle\|_\infty\|\langle\cdot,y-\theta\rangle\|_{\psi_1}\right)^{1/2}\leqslant c\varepsilon\sqrt{n}\,L_K, \tag{4.33}$$

αν λάβουμε υπόψιν το γνωστό $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_1}\leqslant c\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_1\leqslant cL_K$ (βλέπε (1.21) ). Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\|\langle\cdot,y\rangle\|_{\psi_2}&\leqslant\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2}+\|\langle\cdot,y-\theta\rangle\|_{\psi_2}\\&\leqslant\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2}+c\sqrt{n/k}\,L_K.\end{aligned}$$

Εφόσον το $\theta$ ικανοποιεί την (4.3), παίρνουμε το συμπέρασμα – με διαφορετική απόλυτη σταθερά $C$ – για κάθε $y\in A_k$. Τέλος, το Λήμμα 4.2.3 δείχνει ότι

$$\sigma(A_k)\geqslant\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2\sqrt{k}}\right)^{k-1}\geqslant e^{-c_1k\log k}, \tag{4.34}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη για τα $k$ σε αυτό το διάστημα. Ένα παρόμοιο επιχείρημα δουλεύει για $k\geqslant n/\log n$: σε αυτήν την περίπτωση εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.2.3 με $\varepsilon=\sqrt{\log n/n}$ και η εκτίμηση του μέτρου για το $A_k$ είναι η ίδια. □

**Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1**: Έστω $t\geqslant 1$ και έστω $k$ ο ελάχιστος ακέραιος για τον οποίο ισχύει $\sqrt{n/k}\leqslant t\sqrt{\log n}$. Τότε,

$$\frac{n}{t^2}\simeq k\log n\geqslant k\log k, \tag{4.35}$$

και έτσι, $e^{-c_1 k\log k} \geqslant e^{-c_2 n/t^2}$. Το Θεώρημα 4.2.5 δείχνει ότι

$$\psi_K(t) \geqslant \sigma(A_k) \geqslant e^{-c_2 n/t^2}. \tag{4.36}$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

## 4.3 Το μέσο πλάτος του $\psi_2$–σώματος

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2.1 μπορούμε να δώσουμε εκτιμήσεις για το μέσο πλάτος του σώματος $\Psi_2(K)$. Ξεκινάμε με το ακόλουθο:

**Πρόταση 4.3.1.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $t \geqslant 1$. Τότε,*

$$w_{-\frac{n}{t^2}}(\Psi_2(K)) \leqslant ct\sqrt{\log n}L_K. \tag{4.37}$$

*Απόδειξη.* Από την ανισότητα του Markov παίρνουμε

$$\sigma\left(\left\{\theta \in S^{n-1} : h_{\Psi_2(K)}(\theta) \leqslant \frac{1}{e}w_{-\frac{n}{t^2}}(\Psi_2(K))\right\}\right) \leqslant e^{-\frac{n}{t^2}}. \tag{4.38}$$

Από το Θεώρημα 4.2.1 ξέρουμε ότι

$$e^{-\frac{n}{t^2}} \leqslant \sigma\left(\left\{\theta \in S^{n-1} : h_{\Psi_2(K)}(\theta) \leqslant ct\sqrt{\log n}L_K\right\}\right), \tag{4.39}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$ και το συμπέρασμα έπεται. □

Χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα των Klartag–Vershynin για τις αρνητικές ροπές νορμών πάνω στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα (βλέπε [32]) μπορούμε να δώσουμε άνω εκτίμηση για το μέσο πλάτος του σώματος $\Psi_2(K)$, η οποία είναι ελαφρώς χειρότερη από αυτήν του Θεωρήματος 2.5.8:

**Πρόταση 4.3.2.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$w(\Psi_2(K)) \leqslant c\sqrt[4]{n\log n}L_K. \tag{4.40}$$

*Απόδειξη.* Έστω $w := w(\Psi_2(K))$. Εφόσον $R(\Psi_2(K)) \leqslant c\sqrt{n}L_K$, χρησιμοποιώντας την [32, Πρόταση 1.2] βλέπουμε ότι

$$d_*(\Psi_2(K)) \equiv d(\Psi_2^\circ(K)) \geqslant ck(\Psi_2^\circ(K)) \geqslant c\frac{w^2}{L_K^2}. \tag{4.41}$$

Επιλέγουμε $t$ τέτοιο ώστε $\frac{n}{t^2} = c\frac{w^2}{L_K^2}$, δηλαδή

$$t = \frac{c\sqrt{n}L_K}{w} \geqslant 1. \tag{4.42}$$

Τότε,

$$\begin{aligned} w &\leqslant cw_{-d_*}(\Psi_2(K)) \leqslant w_{-\frac{cw^2}{L_K^2}}(\Psi_2(K)) = w_{-\frac{n}{t^2}}(\Psi_2(K)) \\ &\leqslant c_1\frac{\sqrt{n}}{w}\sqrt{\log n}L_K^2, \end{aligned}$$

και το συμπέρασμα έπεται. □

**Απόδειξη της Πρότασης 4.2.2.** Εφόσον η συνάρτηση $h_{\Psi_2(K)}$ είναι $\sqrt{n}L_K$–Lipschitz, χρησιμοποιώντας τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα (πρβλ. [44]) έχουμε

$$\sigma\left(\{\theta \in S^{n-1} : h_{\Psi_2(K)}(\theta) - w(\Psi_2(K)) \geqslant sw(\Psi_2(K))\}\right) \leqslant e^{-cns^2\left(\frac{w(\Psi_2(K))}{\sqrt{n}L_K}\right)^2}. \tag{4.43}$$

Έστω $u \geqslant 2w(\Psi_2(K))$. Τότε, $u = (1+s)w(\Psi_2(K))$ για κάποιο $s \geqslant 1$ και $sw(\Psi_2(K)) \geqslant u/2$. Έτσι, έχουμε

$$\sigma\left(\{\theta \in S^{n-1} : h_{\Psi_2(K)}(\theta) \geqslant u\}\right) \leqslant \exp\left(-cu^2/L_K^2\right). \tag{4.44}$$

Αν $t \geqslant c_1\sqrt[4]{n}/\sqrt[4]{\log n}$, τότε η Πρόταση 4.3.2 δείχνει ότι $u = t\sqrt{\log n}L_K \geqslant 2w(\Psi_2(K))$.

Αν χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση του Θεωρήματος 2.5.8 στην θέση της Πρότασης 4.3.2, τότε μπορούμε να μεγαλώσουμε ελαφρώς το διάστημα των $t$ για τα οποία ισχύει η εκτίμηση σε $t \geqslant \sqrt[4]{n}/\sqrt{\log n}$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατηρήστε ότι η παραπάνω εκτίμηση αληθεύει για όλα τα $t \geqslant cw(\Psi_2(K))/\sqrt{\log n}L_K$· αυτό ουσιαστικά φαίνεται από την απόδειξης της Πρότασης. Το επιχείρημα που παρουσιάσαμε εδώ ήδη δείχνει την σύνδεση της $\psi_K(t)$ με το πρόβλημα του μέσου πλάτους: Καλύτερα κάτω φράγματα για την $\psi_K(t)$ θα συνεπάγονταν καλύτερα άνω φράγματα για το $w(\Psi_2(K))$ και αντίστροφα.

# Κεφάλαιο 5

# Μέσο πλάτος στην ισοτροπική θέση

Σκοπός αυτής της παραγράφου είναι να παρουσιάσει διάφορες προσεγγίσεις που αφορούν στο πρόβλημα εκτίμησης του μέσου πλάτους στην ισοτροπική θέση.

## 5.1 Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους

Έστω $K$ κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, με κέντρο βάρους το 0. Λέμε ότι το σώμα είναι σε θέση *ελάχιστου μέσου πλάτους* αν ισχύει $w(K) \leqslant w(TK)$ για κάθε $T \in SL(n)$.

Στο [20] οι Γιαννόπουλος – Milman απέδειξαν έναν ισοτροπικό χαρακτηρισμό για την θέση ελάχιστου μέσου πλάτους.

**Θεώρημα 5.1.1.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το $K$ είναι σε θέση ελάχιστου μέσου πλάτους.*

(β) *Για κάθε $u \in S^{n-1}$ ισχύει:*

$$\frac{w(K)}{n} = \int_{S^{n-1}} \langle u, \theta \rangle^2 h_K(\theta)\, d\sigma(\theta). \tag{5.1}$$

Επίσης, συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των Lewis [37], Figiel, Tomczak-Jaegermann [16] και Pisier [52] για την $\ell$–νόρμα και την Rademacher προβολή, μπορούμε να δείξουμε ότι κάθε κυρτό σώμα $K$ έχει μια γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ όγκου 1, η οποία έχει «ελάχιστο μέσο πλάτος». Πιο συγκεκριμένα έχουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 5.1.2.** *Έστω $K$ συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει γραμμική εικόνα (όγκου 1) $\tilde{K}$ του $K$ ώστε*

$$w(\tilde{K})M(\tilde{K}) \leqslant c \log d(X_K, \ell_2^n), \tag{5.2}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Υπενθυμίζουμε ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $M(K)$ το μέσο όρο της επαγόμενης νόρμας του $K$ πάνω στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα, δηλαδή

$$M(K) = \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K \, d\sigma(\theta) \tag{5.3}$$

και με $d(X_K, \ell_2^n)$ συμβολίζουμε την απόσταση Banach–Mazur του χώρου με μοναδιαία μπάλα το $K$, από τον $n$–διάστατο Ευκλείδειο χώρο.

Μπορούμε να δείξουμε ότι η παράπανω θέση (γνωστή και ως $\ell$-θέση) «ελαχιστοποιεί» το μέσο πλάτος του σώματος $K$. Πράγματι, από την ανισότητα Hölder έχουμε

$$M(C) \geqslant \left(\frac{|B_2^n|}{|C|}\right)^{1/n}, \tag{5.4}$$

για κάθε κυρτό σώμα $C$ στον $\mathbb{R}^n$. Εφαρμόζοντας αυτό για το $\tilde{K}$ και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι έχει όγκο 1, παίρνουμε $M(\tilde{K}) \geqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}}$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα του John [29] και το προηγούμενο Θεώρημα καταλήγουμε στην

$$w(\tilde{K}) \leqslant c_2 \sqrt{n} \log n. \tag{5.5}$$

Στην περίπτωση που το $K$ δεν είναι συμμετρικό θεωρούμε το σώμα διαφορών $K - K$ του $K$ και εφαρμόζουμε το Θεώρημα σε αυτό. Σε συνδυασμό με την ανισότητα Rogers–Shephard [54] βρίσκουμε γραμμική εικόνα όγκου 1 που ικανοποιεί το συμπέρασμα. Παραλείπουμε τις λεπτομέρειες.

Από την ανισότητα του Urysohn (πρβλ. [51]) έχουμε ότι

$$w(\tilde{K}) \geqslant \left(\frac{|\tilde{K}|}{|B_2^n|}\right)^{1/n} \simeq \sqrt{n}. \tag{5.6}$$

Με αυτήν την έννοια, και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι $w(\overline{B_1^n}) \simeq \sqrt{n \log n}$, η εικόνα $\tilde{K}$ του $K$ μπορεί να θεωρηθεί ουσιαστικά ως «θέση ελάχιστου μέσου πλάτους» δεδομένου ότι θεωρούμε «μικρούς» τους λογαριθμικούς ως προς την διάσταση παράγοντες.

Μελετώντας τις ιδιότητες των ισοτροπικών σωμάτων, θα θέλαμε να ξέρουμε αν η ισοτροπική θέση είναι «ελαχιστική» ως προς το μέσο πλάτος θέση. Δηλαδή, θα επιθυμούσαμε να έχουμε μια εκτίμηση του τύπου

$$w(K) \leqslant c\sqrt{n}(\log n)^{\gamma} L_K, \tag{5.7}$$

για κάποιο $\gamma > 0$ και για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$. Η καλύτερη μέχρι στιγμής εκτίμηση στο πρόβλημα είναι η ακόλουθη:

**Θεώρημα 5.1.3.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$w(K) \leqslant cn^{3/4} L_K, \tag{5.8}$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Παρ' όλα αυτά υπάρχουν κλάσεις ισοτροπικών σωμάτων για τα οποία, η ζητούμενη εκτίμηση αληθεύει στην βέλτιστη μορφή της:

**Θεώρημα 5.1.4.** *Έστω $K$ ισοτροπικό 1–unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$w(K) \leqslant c\sqrt{n \log n}, \tag{5.9}$$

*όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι άμεση από τα αποτέλεσματα των Bobkov και Nazarov (πρβλ. [9] και [10]). Η δε εκτίμηση είναι βέλτιστη όπως δείχνει το παράδειγμα της $\overline{B_1^n}$.

Στις επόμενες Παραγράφους δίνουμε διάφορες αποδείξεις για την μέχρι στιγμής γνωστή εκτίμηση του μέσου πλάτους στην γενική περίπτωση.

## 5.2 Η μέθοδος της εντροπίας

Το πρώτο επιχείρημα εκτίμησης του μέσου πλάτους στην ισοτροπική θέση οφείλεται στην Μ. Χαρτζουλάκη (2003) (πρβλ. [28]) και χρησιμοποιεί τους αριθμούς εντροπίας ενός ισοτροπικού σώματος (Λήμμα 4.1.2) καθώς και τη διάσπαση Dudley-Fernique.

*Διάσπαση Dudley-Fernique.* Έστω $K$ ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K$. Συμβολίζουμε με $R = R(K)$ την περιγεγραμμένη ακτίνα του $K$, δηλαδή $R(K) = \max\{\|x\|_2 : x \in K\}$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $0 \leqslant j \leqslant m$ θεωρούμε τους αριθμούς κάλυψης $N(K, \frac{R}{2^j} B_2^n)$. Γνωρίζουμε ότι υπάρχει $N_j \subseteq K$ με $|N_j| = N(K, R/2^j B_2^n)$ τέτοιο ώστε για κάθε $x \in K$ να υπάρχει $u_j \in N_j$ ώστε $\|x - u_j\|_2 \leqslant R/2^j$. Θέτουμε $N_0 = \{0\}$. Τότε έχουμε το ακόλουθο:

**Λήμμα 5.2.1.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K$. Τότε, υπάρχουν $Z_j \subseteq \frac{3R}{2^j} B_2^n$ με $|Z_j| \leqslant |N_j||N_{j-1}|$, για $j = 1, 2, \dots$, με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in K$ υπάρχουν $z_j \in Z_j$ για $j = 1, 2, \dots, m$ και $w_m \in R/2^m B_2^n$ έτσι ώστε*

$$x = z_1 + z_2 + \cdots + z_m + w_m. \tag{5.10}$$

*Απόδειξη.* Ορίζουμε $Z_j := (N_j - N_{j-1}) \cap \frac{3R}{2^j} B_2^n$, όπου $N_j - N_{j-1} = \{u - v : u \in N_j, v \in N_{j-1}\}$ και $N_j$ είναι τα σύνολα που ορίσαμε προηγουμένως. Προφανώς, $|Z_j| \leqslant |N_j||N_{j-1}|$. Επίσης, για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για τυχόν $x \in K$ υπάρχουν $u_j \in N_j$ τέτοια ώστε $\|x - u_j\|_2 \leqslant R/2^j$ για $j = 1, \dots, m$. Παρατηρήστε ότι

$$\|u_j - u_{j-1}\|_2 \leqslant \|x - u_j\|_2 + \|x - u_{j-1}\|_2 \leqslant \frac{R}{2^j} + \frac{R}{2^{j-1}} = \frac{3R}{2^j},$$

οπότε $u_j - u_{j-1} \in Z_j$. Γράφουμε

$$x = u_0 + (u_1 - u_0) + \cdots + (u_m - u_{m-1}) + (x - u_m).$$

Εφόσον, $u_0 = 0$, αν θέσουμε $z_j = u_j - u_{j-1}$ και $w_m = x - u_m$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα. □

Το ακόλουθο Λήμμα βασίζεται στο γεγονός ότι το $n$-διάστατο μέτρο του Gauss είναι $\psi_2$–μέτρο.

**Λήμμα 5.2.2.** *Έστω $z_1, \dots, z_N \in \mathbb{R}^n$. Τότε, έχουμε:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \max_{j \leqslant N} |\langle x, z_j \rangle| \, d\gamma_n(x) \leqslant c\sqrt{\log N} \max_{j \leqslant N} \|z_j\|_2. \tag{5.11}$$

*Απόδειξη.* Πρώτα παρατηρήστε ότι για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ έχουμε:

$$\gamma_n(x : |\langle x, z \rangle| \geqslant t\|z\|_2) = \gamma_n(x : |x_1| \geqslant t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_t^\infty e^{-u^2/2} \, du \leqslant c_1 e^{-c_2 t^2},$$

για $t > 0$. Αυτό προκύπτει άμεσα από το αναλλοίωτο του μέτρου Gauss ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Ολοκληρώντας κατά μέρη με $A = \lambda \max_{j \leqslant N} \|z_j\|_2$ (όπου το $\lambda > 1$ θα προσδιοριστεί αργότερα) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \int \max_{j \leqslant N} |\langle x, z_j \rangle| \, d\gamma_n(x) &\leqslant A + \int_A^\infty \gamma_n(x : \max_{j \leqslant N} |\langle x, z_j \rangle| \geqslant t) \, dt \\ &\leqslant A \left( 1 + \sum_{j=1}^N \int_1^\infty \gamma_n(x : |\langle x, z_j \rangle| \geqslant t\lambda \|z_j\|_2) \, dt \right) \\ &\leqslant A \left( 1 + c_1 N \int_1^\infty e^{-c_2 \lambda^2 t^2} \, dt \right) \\ &\leqslant A(1 + c_3 N e^{-\lambda^2}). \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $\lambda = \sqrt{\log N}$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

**Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3.** Για κάθε $y \in K$ και $m \in \mathbb{N}$ υπάρχουν $z_j \in Z_j$ και $w_m \in R/2^m B_2^n$ με $y = z_1 + \cdots + z_m + w_m$. Έπεται ότι για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\max_{y\in K} |\langle y, x\rangle| \leqslant \sum_{j=1}^{m} \max_{z\in Z_j} |\langle x, z\rangle| + \max_{w\in R/2^m B_2^n} |\langle x, w\rangle|.$$

Παρατηρήστε ότι από τα Λήμματα 5.2.1 και 4.1.2 έχουμε

$$\log |Z_j| \leqslant \log N(K, \frac{R}{2^j} B_2^n) + \log N(K, \frac{R}{2^{j-1}} B_2^n) \leqslant c\frac{2^j}{R} n^{3/2} L_K. \tag{5.12}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς το μέτρο του Gauss και χρησιμοποιώντας το προηγούμενο Λήμμα παίρνουμε:

$$\begin{aligned}
\int h_K(x)\, d\gamma_n(x) &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \int \max_{z\in Z_j} |\langle x, z\rangle|\, d\gamma_n(x) + \frac{R}{2^m} \int \|x\|_2\, d\gamma_n(x) \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \sqrt{\log |Z_j|} \max_{z\in Z_j} \|z\|_2 + c_1 \frac{R}{2^m} \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{m} \frac{3R}{2^j} c n^{3/4} \sqrt{L_K} \frac{2^{j/2}}{\sqrt{R}} + c_1 \frac{R}{2^m}\sqrt{n} \\
&\leqslant c_2 n^{3/4} \sqrt{R}\sqrt{L_K} + c_1 \frac{R}{2^m}\sqrt{n}.
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $m$ με $R \simeq 2^m$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $R(K) \leqslant c_3 n L_K$ καταλήγουμε στο συμπέρασμα. $\square$

## 5.3 Η μέθοδος των $L_q$–κεντροειδών σωμάτων

Το επιχείρημα που παρουσιάζουμε εδώ οφείλεται στον Γ. Παούρη (2006) και στο βασικό αποτέλεσμα ότι οι ροπές της Ευκλείδειας νόρμας παραμένουν σταθερές μέχρι την κρίσιμη τιμή $q_*$. Παρακάτω παραθέτουμε τα βασικά εργαλεία που χρησιμοποιούνται στην απόδειξη.

*1. Ροπές και μέσα πλάτη.* Γνωρίζουμε ότι για κάθε κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ ισχύει η:

$$I_q(K) \simeq \sqrt{\frac{n}{q}} w_q(Z_q(K)). \tag{5.13}$$

*2. Σταθερότητα των μέσων πλατών.* Από το θεώρημα του Παούρη έχουμε $I_q(K) \leqslant CI_2(K)$ για όλα τα $2 \leqslant q \leqslant q_*$. Έπεται από τον προηγούμενο τύπο και από την ανισότητα Hölder ότι

$$w(Z_q(K)) \leqslant w_q(Z_q(K)) \leqslant c_1\sqrt{\frac{q}{n}}I_2(K). \tag{5.14}$$

Θεωρώντας το $K$ στην ισοτροπική θέση καταλήγουμε στην

$$w(Z_q(K)) \leqslant c_1\sqrt{q}L_K \tag{5.15}$$

για $2 \leqslant q \leqslant q_*$. Θυμηθείτε ότι για κάθε ισοτροπικό σώμα $K$ έχουμε $q_*(K) \geqslant c\sqrt{n}$.

*3. Ανισότητες τύπου Khintchine.* Από την Πρόταση 1.4.11 γνωρίζουμε ότι: αν $1 \leqslant p < q$ τότε

$$Z_q(K) \subseteq c_2\frac{q}{p}Z_p(K), \tag{5.16}$$

και επιπλέον $Z_n(K) \supseteq c_3\mathrm{conv}(K, -K)$.

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω μπορούμε να δώσουμε μια δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3.

**Δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος 5.1.3.** Έχουμε ότι για κάθε $q \leqslant q_*$ ισχύει

$$w(K) \leqslant c_4w(Z_n(K)) \leqslant c_4c_2\frac{n}{q}w(Z_q(K)) \leqslant c_4c_2c_1\frac{n}{\sqrt{q}}L_K. \tag{5.17}$$

Εφόσον, $q_* \geqslant c\sqrt{n}$ επιλέγοντας $q \simeq \sqrt{n}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

## 5.4 Η μέθοδος των τυχαίων πολυτόπων

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε μια τρίτη απόδειξη, η οποία οφείλεται στον P. Pivovarov (2009) (πρβλ. [53]). Τα βασικά εργαλεία είναι η ανισότητα του Γ. Παούρη για την κατανομή της Ευκλείδειας νόρμας ως προς ένα ισοτροπικό μέτρο και κάτω εκτιμήσεις καπακιών ως προς το πλάτος του σώματος που οφείλονται στους Γιαννόπουλο–Milman [19].

**Θεώρημα 5.4.1.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $t > 1$ ισχύει*

$$|\{x \in K : \|x\|_2 \geqslant Ct\sqrt{n}L_K\}| \leqslant e^{-t\sqrt{n}}. \tag{5.18}$$

Χρησιμοποιώντας αυτήν την ανισότητα κατανομής θα κατασκευάσουμε ένα τυχαίο πολύτοπο μέσα στο $K$ το οποίο θα έχει «μικρό» μέσο πλάτος. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του επόμενου Λήμματος για καπάκια θα συγκρίνουμε το μέσο πλάτος του τυχαίου πολυτόπου με αυτό του αρχικού σώματος.

**Λήμμα 5.4.2.** *Έστω $C$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το $0$. Έστω $\theta \in S^{n-1}$ και $\varepsilon \in (0,1)$. Τότε,*

$$|\{x \in C : \langle x, \theta\rangle \geqslant \varepsilon h_C(\theta)\}| \geqslant e^{-1}(1-\varepsilon)^n |C|. \tag{5.19}$$

*Απόδειξη.* Έστω $x_0 \in C$ ώστε $h_C(\theta) = \langle x_0, \theta\rangle$. Παρατηρούμε ότι,

$$\{x \in C : \langle x, \theta\rangle \geqslant \varepsilon h_C(\theta)\} = \{x \in C : \langle x, \theta\rangle \geqslant \varepsilon\langle x_0, \theta\rangle\} \supseteq \varepsilon x_0 + (1-\varepsilon)C^+, \tag{5.20}$$

όπου $C^+ = \{x \in C : \langle x, \theta\rangle \geqslant 0\}$. Επομένως, παίρνουμε

$$|\{x \in C : \langle x, \theta\rangle \geqslant \varepsilon h_C(\theta)\}| \geqslant |\varepsilon x_0 + (1-\varepsilon)C^+| = (1-\varepsilon)^n |C^+|. \tag{5.21}$$

Από ένα αποτέλεσμα του Grünbaum [27] γνωρίζουμε ότι $|C^+| \geqslant \frac{1}{e}|C|$ και έχουμε το ζητούμενο. □

Επιλέγουμε ομοιόμορφα σημεία $X_1, \dots, X_N$ στο $K$ και θεωρούμε το τυχαίο πολύτοπο $K_N := \mathrm{conv}\{X_1, \dots, X_N\}$ μέσα στο $K$. Τότε, από την ανισότητα κατανομής έχουμε

$$\mathrm{Prob}\left(\max_{j \leqslant N} \|X_j\|_2 \geqslant Ct\sqrt{n}L_K\right) \leqslant Ne^{-t\sqrt{n}}. \tag{5.22}$$

Αν υποθέσουμε ότι $N < e^{t\sqrt{n}}$ καταλήγουμε στο ακόλουθο:

**Λήμμα 5.4.3.** *Έστω $N < e^{t\sqrt{n}}$. Τότε, για το τυχαίο πολύτοπο $K_N$ που κατασκευάζεται με τον παραπάνω τρόπο παίρνουμε:*

$$w(K_N) \leqslant C_1 t\sqrt{\log N} L_K, \tag{5.23}$$

*με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - Ne^{-t\sqrt{n}}$.*

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι για κάθε $z_1, \dots, z_n$ ισχύει:

$$\int_{S^{n-1}} \max_{j \leqslant N} |\langle \theta, z_j\rangle|\, d\sigma(\theta) \leqslant c_1 \frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{n}} \max_{j \leqslant N} \|z_j\|_2. \tag{5.24}$$

Καθώς, $N < e^{t\sqrt{N}}$ με θετική πιθανότητα έχουμε ότι $\|X_j\|_2 \leqslant Ct\sqrt{n}L_K$ για $j = 1, 2, \ldots, N$ κι εφόσον $h_{K_N}(\theta) = \max_{j \leqslant N}\langle X_j, \theta\rangle$ προκύπτει ότι

$$\begin{aligned} w(K_N) = \int_{S^{n-1}} \max_{j \leqslant N}\langle X_j, \theta\rangle \, d\sigma(\theta) &\leqslant \int_{S^{n-1}} \max_{j \leqslant N} |\langle X_j, \theta\rangle| \, d\sigma(\theta) \\ &\leqslant c_1 \frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{n}} \max_{j \leqslant N} \|X_j\|_2 \\ &\leqslant c_1 Ct\sqrt{\log N} L_K, \end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την εκτίμηση για τις τυχαίες μεταβλητές $(X_j)$ και την (5.24). □

Υποθέτοντας επιπλέον ότι τα $X_j$ έχουν επιλεγεί ανεξάρτητα και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.4.2 παίρνουμε το ακόλουθο:

**Λήμμα 5.4.4.** *Έστω $K$ κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $X_1, \ldots, X_N$ ανεξάρτητες, ομοιόρφα κατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές ως προς το $K$. Τότε, για το τυχαίο πολύτοπο $K_N = \mathrm{conv}\{X_1, \ldots, X_N\}$ έχουμε: αν $\theta \in S^{n-1}$ και $\varepsilon \in (0, 1)$*

$$\mathrm{Prob}\,(h_{K_N}(\theta) \leqslant \varepsilon h_K(\theta)) \leqslant \exp(-Nv(\varepsilon, \theta)), \tag{5.25}$$

*όπου $v(\varepsilon, \theta) = |\{x \in K : \langle x, \theta\rangle \geqslant \varepsilon h_K(\theta)\}|$.*

*Απόδειξη.* Ισχύει ότι:

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\,(h_{K_N}(\theta) \leqslant \varepsilon h_K(\theta)) &= \mathrm{Prob}\left(\max_{j \leqslant N}\langle X_j, \theta\rangle \leqslant \varepsilon h_K(\theta)\right) \\ &= |\{x \in K : \langle x, \theta\rangle \leqslant \varepsilon h_K(\theta)\}|^N \\ &= (1 - v(\varepsilon, \theta))^N \leqslant e^{-Nv(\varepsilon, \theta)}. \end{aligned}$$

□

Τώρα μπορούμε να περάσουμε στην απόδειξη του θεωρήματος.

**Τρίτη απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.3**. Έστω $t > 1$ και $\varepsilon \in (0, 1/2)$ τα οποία θα οριστούν στην συνέχεια. Επιλέγουμε ανεξάρτητα και ομοιόμορφα $X_1, \ldots, X_N$ από το $K$ με $N < e^{t\sqrt{n}}$. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $w(K_N) \leqslant C_1 t\sqrt{\log N} L_K$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - Ne^{-t\sqrt{n}}$,
- για σταθερό $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει: $\mathrm{Prob}(h_{K_N}(\theta) \leqslant \varepsilon h_K(\theta)) \leqslant \exp(-Nv(\varepsilon, \theta))$ και

- $L_K B_2^n \subseteq K \subseteq cnL_K B_2^n$, δηλαδή $L_K \leqslant h_K(\theta) \leqslant cnL_K$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Θεωρούμε $\delta \in (0,1)$ και ένα $\delta$-δίκτυο στην $\mathcal{N}$ στην $S^{n-1}$ με πληθάριθμο $|\mathcal{N}| \leqslant (3/\delta)^n$.

*Ισχυρισμός.* Ισχύει

$$\mathrm{Prob}\left(\exists\, \theta \in S^{n-1} : h_{K_N}(\theta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} h_K(\theta)\right) \leqslant \mathrm{Prob}(\exists\, z \in \mathcal{N} : h_{K_N}(z) \leqslant \varepsilon h_K(z)).$$

Πράγματι· έστω ότι υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ ώστε $h_{K_N(\theta)} \leqslant \frac{\varepsilon}{2} h_K(\theta)$. Επιλέγουμε $z \in \mathcal{N}$ ώστε $\|z-\theta\|_2 < \delta$. Τότε, λαμβάνοντας υπόψιν την τρίτη ιδιότητα και την υποπροσθετικότητα της συνάρτησης στήριξης παίρνουμε:

$$\begin{aligned} h_{K_N}(z) &\leqslant h_{K_N}(\theta) + h_{K_N}(z-\theta) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} h_K(\theta) + h_K(z-\theta) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} h_K(z) + \frac{\varepsilon}{2} h_K(\theta - z) + h_K(z-\theta) \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} h_K(z) + \left(\frac{\varepsilon}{2} + 1\right) cn\delta L_K \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2} h_K(z) + 2cn\delta h_K(z). \end{aligned}$$

Επιλέγοντας $0 < \delta \leqslant \frac{\varepsilon}{4cn}$ έχουμε το ζητούμενο. Συμπεραίνουμε ότι

(5.26)
$$\mathrm{Prob}\left(\exists\, \theta \in S^{n-1} : h_{K_N}(\theta) \leqslant \frac{\varepsilon}{2} h_K(\theta)\right) \leqslant |\mathcal{N}| exp(-Nv(\varepsilon)) \leqslant (3/\delta)^n \exp(-Nv(\varepsilon)),$$

όπου $v(\varepsilon) = \inf_{z\in\mathcal{N}} v(\varepsilon, z) \geqslant e^{-1}(1-\varepsilon)^n \geqslant e^{-3\varepsilon n}$ από την δεύτερη ιδιότητα και από το Λήμμα 5.4.2, για $\frac{1}{n} < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Εξασφαλίζοντας ότι η τελευταία πιθανότητα είναι μικρή έχουμε: $h_K(\theta) \leqslant \frac{2}{\varepsilon} h_{K_N}(\theta)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned} w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\theta)\, d\sigma(\theta) &\leqslant \frac{2}{\varepsilon} \int_{S^{n-1}} h_{K_N}(\theta)\; d\sigma(\theta) \\ &\leqslant \frac{2}{\varepsilon} C_1 t \sqrt{\log N} L_K, \end{aligned}$$

όσο ισχύει $N > ne^{3\varepsilon n}\log(3/\delta)$. Για το τελευταίο αρκεί να είναι $N > e^{4\varepsilon n}\log(\frac{4cn}{\varepsilon})$ για $\frac{\log n}{n} < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Καθώς, $N < e^{t\sqrt{n}}$ (και δεδομένου ότι θέλουμε το $t$ μικρό) βλέπουμε ότι το $\varepsilon$ δε μπορεί να επιλεγεί μικρότερης τάξης από $n^{-1/2}$. Επιλέγοντας $\varepsilon = 1/\sqrt{n}$ έχουμε $e^{4\varepsilon n}\log(\frac{4cn}{\varepsilon}) < e^{c_2\sqrt{n}}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_2 > 1$. Επιλέγουμε $N = e^{c_2\sqrt{n}}$ και $t = 2c_2 > 1$, οπότε καταλήγουμε γι' αυτές τις επιλογές στην εκτίμηση $w(K) \leqslant C' n^{3/4} L_K$, όπου $C' = 4c_2^{3/2} C_2$. □

## 5.5 $\psi_2$–διευθύνσεις και μέσο πλάτος

Σε αυτήν την Παράγραφο παρουσιάζουμε ένα επιχείρημα διχοτομίας για το πρόβλημα του μέσου πλάτους στην ισοτροπική θέση. Βασικό συστατικό της προσέγγισης είναι για ακόμα μια φορά η πληροφορία που έχουμε για την συνάρτηση κατανομής $\psi_K(t)$.

Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$ ορίζουμε

$$k_*(q) = n\left(\frac{w(Z_q(K))}{R(Z_q(K))}\right)^2. \tag{5.27}$$

Εφόσον $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \leqslant cqL_K$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, έχουμε $R(Z_q(K)) \leqslant cqL_K$. Οπότε,

$$w(Z_q(K)) \leqslant cqL_K\,\frac{\sqrt{k_*(q)}}{\sqrt{n}}. \tag{5.28}$$

Τότε, από την Πρόταση 1.4.11 βλέπουμε ότι

$$w(K) \simeq w(Z_n(K)) \leqslant \frac{cn}{q} w(Z_q(K)) \leqslant c\sqrt{n}\sqrt{k_*(q)}\,L_K. \tag{5.29}$$

Ορίζουμε

$$\rho_* = \rho_*(K) := \min_{2\leqslant q\leqslant n} k_*(q). \tag{5.30}$$

Εφόσον το $q$ ήταν τυχόν στην (5.29), παίρνουμε το ακόλουθο:

**Πρόταση 5.5.1.** *Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$w(K) \leqslant c\sqrt{n}\sqrt{\rho_*(K)}\,L_K. \tag{5.31}$$

Η επόμενη παρατήρησή μας είναι η εξής: από την ισοπεριμετρική ανισότητα στη $S^{n-1}$, για κάθε $q \geqslant 1$ έχουμε

$$\sigma\left(\Big|\ \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q - w(Z_q)\ \Big| \geqslant \frac{w(Z_q)}{2}\right) \leqslant \exp(-ck_*(q)) \leqslant \exp(-2c\rho_*) \tag{5.32}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Υποθέτουμε ότι $\log n \leqslant e^{c\rho_*}$. Τότε,

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \simeq w(Z_q) \tag{5.33}$$

για κάθε $\theta$ σε ένα σύνολο $A_q$ της $S^{n-1}$ μέτρου $\sigma(A_q) \geqslant 1-\exp(-c\rho_*)$. Παίρνοντας $q_i = 2^i$, $i \leqslant \log_2 n$ και θέτοντας $A = \bigcap A_{q_i}$, έχουμε το ακόλουθο:

**Λήμμα 5.5.2.** *Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ με $\rho_*(K) \geqslant C \log\log n$ μπορούμε να βρούμε $A \subset S^{n-1}$ με $\sigma(A) \geqslant 1 - e^{-c\rho_*}$, τέτοιο ώστε*

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \simeq w(Z_q) \tag{5.34}$$

*για κάθε $\theta \in A$ και για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$. Ειδικότερα,*

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \simeq \max_{2\leqslant q\leqslant n} \frac{w(Z_q)}{\sqrt{q}} \tag{5.35}$$

*για κάθε $\theta \in A$.*

Το Λήμμα 5.5.2 δείχνει ότι αν η παράμετρος $\rho_*(K)$ είναι «μεγάλη» και η νόρμα $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2}$ καλά φραγμένη σε ένα «σχετικά μεγάλο» υποσύνολο της σφαίρας, τότε παρόμοιο φράγμα ισχύει για «σχεδόν όλες» τις διευθύνσεις. Ως συνέπεια, παίρνουμε καλό φράγμα για το μέσο πλάτος του σώματος $K$. Το ακριβές αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο:

**Πρόταση 5.5.3.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ικανοποιεί τις ακόλουθες δυο συνθήκες:*

(i) $\rho_*(K) \geqslant C \log\log n$.

(ii) *Για κάποιον $b_n > 0$ έχουμε $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant b_n L_K$ για κάθε $\theta$ σε ένα σύνολο $B \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(B) > e^{-c\rho_*}$.*

*Τότε,*

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant C b_n L_K \tag{5.36}$$

*για κάθε $\theta$ σε ένα σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) > 1 - e^{-c\rho_*}$. Επίσης,*

$$w(Z_q(K)) \leqslant c\sqrt{q} b_n\, L_K \tag{5.37}$$

*για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$ και*

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n} b_n\, L_K. \tag{5.38}$$

*Απόδειξη.* Μπορούμε να βρούμε $u \in A \cap B$, όπου $A$ είναι το σύνολο στο Λήμμα 5.5.2. Εφόσον, $u \in B$ έχουμε

$$\|\langle \cdot, u\rangle\|_q \leqslant C_1\sqrt{q} b_n\, L_K \tag{5.39}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$, και η (5.34) δίνει ότι

$$w(Z_q(K)) \leqslant C_2\sqrt{q}b_n\, L_K \tag{5.40}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$. Πάλι από το Λήμμα 5.5.2, έχουμε ότι αν $\theta \in A$ τότε

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \leqslant cw(Z_q) \leqslant C_3\sqrt{q}b_n\, L_K \tag{5.41}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$. Για $q = n$ έχουμε το πρώτο συμπέρασμα.

Τέλος, για κάθε $\theta \in A$ παίρνουμε

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \simeq \max_{2\leqslant q\leqslant n} \frac{\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q}{\sqrt{q}} \leqslant Cb_n\, L_K. \tag{5.42}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Οι Προτάσεις 5.5.1 και 5.5.3 παρέχουν μια διχοτομία: Αν η παράμετρος $\rho_*(K)$ είναι μικρή τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 5.5.1 για να δώσουμε άνω φράγμα για το $w(K)$. Αν το $\rho_*(K)$ είναι μεγάλο, τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 5.5.3 δεδομένου ότι υπάρχει κάποια ικανοποιητική εκτίμηση για την κατανομή των $\psi_2$ διευθύνσεων μέσω της $\psi_K(t)$: αυτό που έχουμε είναι το Θεώρημα 4.2.1, επομένως

$$\psi_K(t) \geqslant e^{-c_1 n/t^2} \geqslant e^{-c\rho_*}, \tag{5.43}$$

αν $t \simeq \sqrt{n/\rho_*}$. Οπότε, παίρνουμε την εκτίμηση,

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n\log n}\sqrt{n/\rho^*}\, L_K. \tag{5.44}$$

Συνδυάζοντας τα προηγούμενα αποτελέσματα, παίρνουμε ένα ακόμη γενικό άνω φράγμα για το μέσο πλάτος του $K$.

**Θεώρημα 5.5.4.** *Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα $K$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n}\min\left\{\sqrt{\rho_*}, \sqrt{n\log n/\rho_*}\right\} L_K, \tag{5.45}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Έτσι, όπως είναι η εκτίμηση στο Θεώρημα 5.5.4. μπορούμε μόνο να συμπεράνουμε φράγμα της τάξης $O(n^{3/4}L_K)$ για το μέσο πλάτος γενικού ισοτροπικού σώματος $K$ στον $\mathbb{R}^n$. Στην πραγματικότητα, ο λογαριθμικός παράγοντας στην (5.45) το κάνει λίγο ασθενέστερο αφού ακριβέστερα δίνει $w(K) \leqslant Cn^{3/4}\sqrt[4]{\log n}$. Παρ' όλα αυτά, το σχέδιο της απόδειξης δείχνει ότι καλύτερη εκτίμηση θα μπορούσε να δοθεί, αν κάποιος μπορούσε να εξασφαλίσει καλύτερα κάτω φράγματα για την $\psi_K(t)$.

Κλείνουμε την Παράγραφο με ένα επιχείρημα που δείχνει ότι στο παραπάνω Θεώρημα ο λογάριθμος μπορεί να απαλειφθεί.

Ξεκινάμε με μια εκτίμηση για το μέσο πλάτος του $L_q$-κεντροειδούς σώματος του $K$ η οποία ισχύει για όλα τα $1 \leqslant q \leqslant n$.

**Πρόταση 5.5.5.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$ ισχύει*

$$w(Z_q(K)) \leqslant c\sqrt{q}L_K\left(1+\sqrt{\frac{q}{k_*(Z_q(K))}}\right), \tag{5.46}$$

*όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Έστω $1 \leqslant q \leqslant n$. Θέτουμε $d_*(q) := d_*(Z_q(K))$. Γνωρίζουμε από το Θεώρημα των Klartag–Vershynin ότι $w(Z_q(K)) \leqslant c_1 w_{-r}(Z_q(K))$ για κάθε $r \leqslant d_*(q)$ κι ακόμη ότι $d_*(q) \geqslant c_2 k_*(q)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Είναι $q \leqslant d_*(q)$. Τότε,

$$w(Z_q(K)) \leqslant c_1 w_{-q}(Z_q(K)) \leqslant c_3\sqrt{\frac{q}{n}}I_{-q}(K) \leqslant c_3\sqrt{q}L_K. \tag{5.47}$$

(β) Είναι $q > d_*(q)$. Επιλέγουμε $t > 1$ ώστε $\frac{q}{t^2} = d_*(q)$. Τότε, όπως πριν προκύπτει:

$$\begin{aligned} w(Z_q(K)) &\leqslant ct^2 w(Z_{q/t^2}(K)) \leqslant c_1ct^2 w_{-\frac{q}{t^2}}(Z_{q/t^2}(K)) \\ &\leqslant c_4t^2\sqrt{\frac{q/t^2}{n}}I_{-q/t^2}(K) \\ &\leqslant c_4t\sqrt{q}L_K, \end{aligned} \tag{5.48}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την Πρόταση 1.4.11.

Λαμβάνοντας υπόψιν την τιμή του $t$ καταλήγουμε στην

$$w(Z_q(K)) \leqslant c_5\frac{q}{\sqrt{d_*(q)}}L_K. \tag{5.49}$$

Συνδυάζοντας τις (5.47), (5.49) και το γεγονός ότι $d_*(q) \geqslant k_*(q)$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας την παραπάνω Πρόταση μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 5.5.6.** *Έστω $K$ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, ισχύει*

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n}\min\{\sqrt{\rho_*}, \sqrt{n/\rho_*}\}L_K, \tag{5.50}$$

*όπου $C > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Λόγω της Πρότασης 5.5.1 αρκεί να δείξουμε την εκτίμηση

$$w(K) \leqslant c\frac{n}{\sqrt{\rho_*}}L_K. \tag{5.51}$$

Έστω $q_0 \in [2,n]$ ώστε $k_*(q_0) = \rho_*$. Από την προηγούμενη Πρόταση και την Πρόταση 1.4.11 παίρνουμε:

$$w(K) \leqslant c_1\frac{n}{q}w(Z_q) \leqslant c_2\sqrt{n}L_K\left(\sqrt{\frac{n}{q}} + \sqrt{\frac{n}{k_*(q)}}\right), \tag{5.52}$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$. Υπενθυμίζουμε ότι $q_*(K) = \max\{q \in [1,n] : k_*(q) \geqslant q\}$.

Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

(α) Είναι $q_0 \leqslant q_*(K)$. Τότε, εφαρμόζοντας την (5.52) για $q_* = q_*(K)$ και λαμβάνοντας υπόψιν ότι $q_* = k_*(q_*)$ καταλήγουμε στην

$$w(K) \leqslant 2c_2\sqrt{n}L_K\sqrt{\frac{n}{q_*}} \leqslant 2c_2\sqrt{n}L_K\sqrt{\frac{n}{\rho_*}}, \tag{5.53}$$

από τον ορισμό του $\rho_*$.

(β) Είναι $q_0 > q_*(K)$. Τότε, $q_0 \geqslant k_*(q_0) = \rho_*$. Εφαρμόζοντας την (5.52) για τον $q_0$ παίρνουμε

$$w(K) \leqslant 2c_2\sqrt{n}L_K\sqrt{\frac{n}{k_*(q_0)}} = 2c_2\sqrt{n}L_K\sqrt{\frac{n}{\rho_*}}. \tag{5.54}$$

Έτσι, σε κάθε περίπτωση έχουμε $w(K) \leqslant c\frac{n}{\sqrt{\rho_*}}L_K$ και το συμπέρασμα έπεται. □

# Κεφάλαιο 6

# Λογαριθμική ανισότητα Sobolev

Σε αυτό το Κεφάλαιο μελετούμε τις ιδιότητες των λογαριθμικά κοίλων μέτρων που ικανοποιούν την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με δεδομένη σταθερά $\kappa$. Δίνουμε πρώτα κάποιους βασικούς ορισμούς.

## 6.1 Βασικοί ορισμοί

**Ορισμός 6.1.1.** Έστω $\mu$ μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ μια συνάρτηση. Η *εντροπία* της $f$ ως προς το μέτρο $\mu$ είναι η ποσότητα

$$\mathrm{Ent}_\mu(f) = \mathbb{E}_\mu(f \log f) - \mathbb{E}_\mu(f) \cdot \log \mathbb{E}_\mu(f), \tag{6.1}$$

όπου με $\mathbb{E}_\mu(f)$ συμβολίζουμε την μέση τιμή της $f$ ως προς το μέτρο $\mu$, δηλαδή

$$\mathbb{E}_\mu(f) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, d\mu(x). \tag{6.2}$$

Λέμε ότι το μέτρο $\mu$ ικανοποιεί την *λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά* $\kappa > 0$ αν ισχύει

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\kappa \int \|\nabla f\|_2^2\, d\mu, \tag{6.3}$$

για κάθε (τοπικά) Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Συμβολίζουμε την κλάση αυτών των μέτρων με $\mathcal{LS}(\kappa)$. Για τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα $\mu$ που ανήκουν στην κλάση αυτή γράφουμε $\mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$.

Είναι γνωστό αποτέλεσμα του L.Gross [26] ότι το $n$-διάστατο μέτρο του Gauss ανήκει στην $\mathcal{LS}_{lc}(1)$.

**Θεώρημα 6.1.2.** *Για κάθε Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_{\gamma_n}(f^2) \leqslant 2 \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 \, d\gamma_n. \tag{6.4}$$

Για μια απόδειξη του παραπάνω Θεωρήματος παραπέμπουμε στο [35].

Έστω $\mu$ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε την επιφάνειά του ως εξής:

$$\mu^+(A) = \liminf_{t \to 0^+} \frac{\mu(A_t) - \mu(A)}{t}, \tag{6.5}$$

όπου $A_t = A + tB_2^n$ είναι η $t$-επέκταση του $A$ ως προς την Ευκλείδεια μετρική $\|\cdot\|_2$. Με άλλα λόγια,

$$A_t \equiv A + tB_2^n = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \inf_{a \in A} \|x - a\|_2 < t \right\}. \tag{6.6}$$

Λέμε ότι το $\mu$ ικανοποιεί *Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα με σταθερά* $c > 0$ αν

$$\mu^+(A) \geqslant cI(\mu(A)) \tag{6.7}$$

για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$, όπου $I$ είναι η Gaussian ισοπεριμετρική συνάρτηση

$$I(x) = \phi \circ \Phi^{-1}(x). \tag{6.8}$$

Εδώ, $\Phi$ είναι η τυπική συνάρτηση κατανομής

$$\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2} \, dt \tag{6.9}$$

και $\phi = \Phi'$ η πυκνότητά της.

Το επόμενο Λήμμα περιγράφει μια ισοδύναμη μορφή της ισοπεριμετρικής ανισότητας:

**Λήμμα 6.1.3.** *Έστω $\mu$ Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Το $\mu$ ικανοποιεί Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα με σταθερά $c > 0$,*

(β) *Για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\mu(A + tB_2^n) \geqslant \Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) + ct), \tag{6.10}$$

*για κάθε $t > 0$.*

*Απόδειξη.* Θεωρούμε την συνάρτηση $h(t) := \Phi^{-1}(\mu(A_t))$ και παρατηρούμε ότι

$$h'(t) = \frac{\mu^+(A_t)}{I(\mu(A))}.$$

Έτσι, αν το $\mu$ ικανοποιεί Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα με σταθερά $c > 0$, τότε

$$h(t) = h(0) + \int_0^t h'(s)\, ds \geqslant c \int_0^t ds,$$

το οποίο αποδεικνύει την συνεπαγωγή από το (α) στο (β). Το αντίστροφο είναι άμεσο. □

Η σχέση της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev με την Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα είναι η εξής: Αν ένα μέτρο $\mu$ ικανοποιεί Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα με σταθερά $c > 0$, τότε $\mu \in \mathcal{LS}(1/c^2)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει εν γένει. Όμως, στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων μπορούμε να εξασφαλίσουμε την ισοδυναμία. Παρουσιάζουμε αυτήν την σύνδεση στην Παράγραφο 6.3.

## 6.2 Log-Sobolev και $\psi_2$ μέτρα

Χρησιμοποιώντας το κλασικό επιχείρημα του Herbst μπορούμε να αποδείξουμε ότι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας, το οποίο ανήκει στην $\mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$ είναι $\psi_2$ με σταθερά $\sqrt{\kappa}$.

**Πρόταση 6.2.1.** *Έστω $\mu$ μέτρο στην $\mathcal{LS}(\kappa)$. Τότε, για κάθε $1-$Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει:*

$$\mu(\{x : |f(x) - \mathbb{E}_\mu(f)| \geqslant t\}) \leqslant 2e^{-t^2/(2\kappa)}, \tag{6.11}$$

*για κάθε $t > 0$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε τον ορισμό του συναρτησοειδούς Laplace:

**Ορισμός 6.2.2** (συναρτησοειδές Laplace)**.** Έστω $\mu$ Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μετρήσιμη συνάρτηση. Ορίζουμε το *συναρτησοειδές Laplace* $L_f$ *της* $f$ μέσω της

$$L_f(u) = \log \int_{\mathbb{R}^n} e^{uf}\, d\mu, \ u \in \mathbb{R}. \tag{6.12}$$

Προκειμένου να αποδείξουμε την Πρόταση 6.2.1 δείχνουμε το ακόλουθο:

**Λήμμα 6.2.3.** *Έστω* $\mu \in \mathcal{LS}(\kappa)$*. Τότε, για κάθε* $1-$*Lipschitz συνάρτηση* $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *με* $\mathbb{E}_\mu(f) = 0$ *ισχύει*

$$L_f(u) \leqslant \frac{\kappa}{2}u^2, \tag{6.13}$$

*για κάθε* $u \in \mathbb{R}$.

*Απόδειξη (Herbst).* Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f$ είναι αρκετά λεία ώστε $\|\nabla f\|_2 \leqslant 1$ παντού. Τότε, εφαρμόζουμε την λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την $g = e^{uf/2}, \ u > 0$. Παίρνουμε λοιπόν, μετά από πράξεις,

$$u\int e^{uf} f\, d\mu - e^{L_f(u)}L_f(u) \leqslant \frac{\kappa u^2}{2}\int \|\nabla f\|_2^2 e^{uf}\, d\mu \tag{6.14}$$

και λόγω της υπόθεσης καταλήγουμε στην

$$u\frac{g'(u)}{g(u)} - \log g(u) \leqslant \frac{\kappa u^2}{2}, \tag{6.15}$$

όπου $g(u) = e^{L_f(u)}, \ u > 0$. Η τελευταία μας δείχνει ότι η παράγωγος της $u \mapsto \frac{\log g(u)}{u}$ φράσσεται από $\kappa/2$. Άρα, για κάθε $0 < v < u$ έχουμε

$$\frac{\log g(u)}{u} - \frac{\log g(v)}{v} \leqslant \frac{\kappa}{2}(u - v). \tag{6.16}$$

Λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι $\mathbb{E}_\mu(f) = 0$ παίρνουμε ότι $\lim_{u\to 0^+}\frac{\log g(u)}{u} = \mathbb{E}_\mu(f) = 0$. Έτσι, καταλήγουμε στην $L_f(u) \leqslant \frac{\kappa u^2}{2}$ για κάθε $u > 0$. Εφαρμόζοντας το ίδιο για την $-f$ συμπεραίνουμε ότι ισχύει για κάθε $u \in \mathbb{R}$.

**Απόδειξη της Πρότασης 6.2.1.** Έστω $f$ μια 1-Lipschitz συνάρτηση. Ορίζουμε $F(x) = f(x) - \mathbb{E}_\mu(f)$ οπότε η $F$ είναι 1-Lipschitz και ισχύει $\mathbb{E}_\mu(F) = 0$. Έτσι, από την ανισότητα του Markov, για κάθε $u > 0$ έχουμε

$$\mu(x : F(x) \geqslant t) \leqslant e^{-ut} e^{L_F(u)} \leqslant e^{-ut + \frac{\kappa u^2}{2}},$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει το Λήμμα για τα φράγματα Laplace. Ελαχιστοποιώντας την τελευταία ποσότητα ως προς $u$ βλέπουμε ότι

$$\mu(x : F(x) \geqslant t) \leqslant e^{-\frac{t^2}{2\kappa}}. \tag{6.17}$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο για την $-F$ παίρνουμε

$$\mu(x : |F(x)| \geqslant t) \leqslant 2 \exp\left(-\frac{t^2}{2\kappa}\right), \tag{6.18}$$

το οποίο είναι το ζητούμενο. □

Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι η εξής:

**Πόρισμα 6.2.4.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό μέτρο στην $\mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$. Τότε, το $\mu$ είναι $\psi_2$ με σταθερά $O(\sqrt{\kappa})$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\theta \in S^{n-1}$ και $f(x) = \langle x, \theta \rangle$. Η $f$ είναι 1-Lipschitz και μάλιστα $\mathbb{E}_\mu(f) = 0$. Άρα, από την Πρόταση 6.2.1 έχουμε ότι

$$\mu(x : |\langle x, \theta \rangle| \geqslant t) \leqslant 2e^{-ct^2/\kappa}, \ t > 0.$$

Από το Λήμμα 2.1.4 έπεται το ζητούμενο.

Μπορούμε να δώσουμε και μια απευθείας εκτίμηση της $\psi_2$-νόρμας του $\mu$, χρησιμοποιώντας μια παραλλαγή του επιχειρήματος του Herbst που οφείλετε στους Aida, Masuda και Shigekawa [1].

**Λήμμα 6.2.5.** *Έστω $\mu \in \mathcal{LS}(\kappa)$. Τότε, για κάθε 1-Lipschitz συνάρτησηη $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $\mathbb{E}_\mu(f) = 0$ ισχύει*

$$L_{f^2}(u) \leqslant \frac{u}{1 - 2\kappa u} \|f\|^2_{L_2(\mu)}, \tag{6.19}$$

*για $0 \leqslant u < \frac{1}{2\kappa}$.*

**2η Απόδειξη του Πορίσματος 6.2.4.** Έστω $f(x) = \langle x, \theta\rangle$. Εφόσον, το $\mu$ είναι ισοτροπικό έχουμε $\|f\|^2_{L_2(\mu)} = 1$. Άρα, από το Λήμμα έχουμε

$$\int \exp\left(\frac{|\langle x,\theta\rangle|}{u}\right)^2 d\mu(x) \leqslant \frac{1}{u^2 - 2\kappa},$$

για $u > \sqrt{2\kappa}$. Έπεται ότι $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant \sqrt{2\kappa + \frac{1}{2}}$. □

Δεν είναι γνωστό αν ισχύει το αντίστροφο: Αν $\mu$ είναι ισοτροπικό, $\psi_2$, λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε είναι σωστό ότι

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant C \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu$$

για κάθε Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά;

Είναι λογικό να ρωτήσουμε ποιά είναι η σχέση των $\psi_2$ μέτρων με αυτήν την κλάση. Πιο συγκεκριμένα, ποιά είναι η σωστή τάξη $m(b, n)$ – ως προς το $b$ και τη διάσταση $n$ της log-Sobolev σταθεράς ενός λογαριθμικά κοίλου, ισοτροπικού μέτρου με $\psi_2$ σταθερά $b$;

Ο S. Bobkov απέδειξε ουσιαστικά στο [8] ότι κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu$ στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa = O(n)$. Επίσης, οι Latala και Wojtaszczyk έδειξαν στο [34] ότι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας $\mu_{q,n}$ στην $B_q^n$ για $q \geqslant 2$ ικανοποιεί Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα με απόλυτη σταθερά και ως εκ τούτου λογαριθμική ανισότητα Sobolev με απόλυτη σταθερά. Οι μπάλες $\overline{B}_q^n$ είναι $\psi_2$ σώματα για $q \geqslant 2$. Στην πραγματικότητα ο κατάλογος των $\psi_2$ μέτρων είναι πολύ περιορισμένος.

Εδώ δείχνουμε πώς μπορούμε να αποδείξουμε απευθείας ότι τα $\mu_{q,n}$ για $q \geqslant 2$ ικανοποιούν τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev με απόλυτη σταθερά, χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα μεταφοράς του μέτρου.

**Ορισμός 6.2.6.** Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $(Y, \mathcal{B}, \nu)$ δύο χώροι πιθανότητας και έστω $T : X \to Y$ μια $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$-μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι η $T$ μεταφέρει το $\mu$ στον $\nu$ και γράφουμε $\nu = T(\mu)$ αν για κάθε $B \in \mathcal{B}$ ισχύει:

$$\nu(B) = \mu(T^{-1}(B)). \tag{6.20}$$

Ισοδύναμα, αν για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : Y \to [0, \infty)$ ισχύει

$$\int_X f(Tx)\, d\mu(x) = \int_Y f(y)\, d\nu(y). \tag{6.21}$$

Θα χρειαστούμε το ακόλουθο απλό Λήμμα:

**Λήμμα 6.2.7.** *Έστω $\mu, \nu$ δύο Borel μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το $\mu$ ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa$ και ότι υπάρχει Lipschitz απεικόνιση $T : (\mathbb{R}^n, \mu) \to (\mathbb{R}^n, \nu)$, ως προς την Ευκλείδεια μετρική, που μεταφέρει το $\mu$ στο $\nu$. Τότε, το $\nu$ ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa\|T\|_{\mathrm{Lip}}^2$.*

*Απόδειξη.* Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια Lipschitz συνάρτηση. Τότε, η $f \circ T$ είναι Lipschitz. Εφόσον, το $\mu$ ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa$, παίρνουμε:

$$\mathrm{Ent}_\mu((f \circ T)^2) \leqslant 2\kappa \int \|\nabla(f \circ T)\|_2^2 \, d\mu. \tag{6.22}$$

Έπεται από τον ορισμό της μεταφοράς ότι:

$$\mathrm{Ent}_\mu((f \circ T)^2) = \mathrm{Ent}_\nu(f^2), \tag{6.23}$$

ενώ για το δεξιό μέλος έχουμε:

$$\int \|\nabla(f \circ T)\|_2^2 \, d\mu \leqslant \|T\|_{\mathrm{Lip}}^2 \int \|(\nabla f) \circ T\|_2^2 \, d\mu = \|T\|_{\mathrm{Lip}}^2 \int \|\nabla f\|_2^2 \, d\nu. \tag{6.24}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο συμπέρασμα. □

Η βασική ιδέα είναι να μεταφέρουμε το $\mu_{q,n}$, μέσω ενός Lipschitz μετασχηματισμού, σε ένα μέτρο που ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με απόλυτη σταθερά και ταυτόχρονα να πετύχουμε η Lipschitz σταθερά του μετασχηματισμού να είναι $O(1)$.

Γι' αυτόν τον σκοπό θα χρεισθούμε μια Lipschitz απεικόνιση μεταφοράς που κατασκευάστηκε στο [34] και απεικονίζει το μέτρο του Gauss στο ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στην $B_q^n$:

Έστω $1 \leqslant q < \infty$. Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας $\nu_q$ στο $\mathbb{R}$ με πυκνότητα

$$(2\delta_q)^{-1} \exp(-|x|^q),$$

όπου $\delta_q = \Gamma(1 + 1/q)$, και γράφουμε $\nu_q^n$ για το μέτρο γινόμενο $\nu_q^{\otimes n}$ στον $\mathbb{R}^n$, με πυκνότητα $(2\delta_q)^{-n} \exp(-\|x\|_q^q)$. Ορίζουμε μια συνάρτηση $w_q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μέσω της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_x^\infty e^{-t^2/2} \, dt = \frac{1}{2\delta_q} \int_{w_q(x)}^\infty e^{-|t|^q} \, dt. \tag{6.25}$$

Επίσης, ορίζουμε $W_{q,n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μέσω της $W_{q,n}(x_1, \ldots, x_n) = (w_q(x_1), \ldots, w_q(x_n))$. Αποδεικνύεται στο [34] ότι η $W_{q,n}$ μεταφέρει το $\gamma_n$ στο $\nu_q^n$: για κάθε Borel σύνολο $A$ στον

$\mathbb{R}^n$ έχουμε $\gamma_n(W_{q,n}^{-1}(A)) = \nu_q^n(A)$. Επιπλέον, η $W_{q,n}$ ειναι Lipschitz: για κάθε $r \geqslant 1$ και για όλα τα $x, y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|W_{q,n}(x) - W_{q,n}(y)\|_r \leqslant \frac{2\delta_q}{\sqrt{2\pi}}\|x-y\|_r. \tag{6.26}$$

Κατόπιν, θεωρούμε τον ακτινικό μετασχηματισμό $T_{q,n}$, ο οποίος μεταφέρει το $\nu_q^n$ στο $\mu_{q,n}$– το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στην $\overline{B}_q^n$, την κανονικοποιημένη μπάλα του $\ell_q^n$. Για κάθε $1 \leqslant q < \infty$ και $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_{q,n} : [0,\infty) \to [0,\infty)$ μέσω της ολοκληρωτικής εξίσωσης

$$\frac{1}{(2\delta_q)^n}\int_0^s r^{n-1}e^{-r^q}\,dr = \int_0^{f_{q,n}(s)} r^{n-1}\,dr \tag{6.27}$$

και $T_{q,n} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ μέσω της $T_{q,n}(x) = f_{q,n}(\|x\|_q)\frac{x}{\|x\|_q}$. Εύκολα, ελέγχουμε ότι ο $T_{q,n}$ μεταφέρει το μέτρο πιθανότητας $\nu_q^n$ στο μέτρο $\mu_{q,n}$.

Στην περίπτωση που $2 \leqslant q < \infty$, η σύνθεση $S_{q,n} = T_{q,n} \circ W_{q,n}$ μεταφέρει το μέτρο του Gauss $\gamma_n$ στο $\mu_{q,n}$ και είναι Lipschitz απεικόνιση ως προς την Ευκλείδεια μετρική, με Lipschitz νόρμα, η οποία είναι φραγμένη από απόλυτη σταθερά [34, Proposition 5.21]:

**Θεώρημα 6.2.8.** *Για κάθε Borel σύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ έχουμε $\gamma_n(S_{q,n}^{-1}(A)) = \mu_q^n(A)$, και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει:*

$$\|S_{q,n}(x) - S_{q,n}(y)\|_2 \leqslant C\|x-y\|_2, \tag{6.28}$$

*όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω θεώρημα, το Λήμμα 6.2.7 και το γεγονός ότι το μέτρο του Gauss ανήκει στην $\mathcal{LS}_{lc}(1)$ μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 6.2.9.** *Έστω $2 \leqslant q < \infty$ και έστω $\mu_{q,n}$ το ομοιόμορφο μέτρο στην $\overline{B_q^n}$. Τότε, για κάθε Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\mathrm{Ent}_{\mu_{q,n}}(f^2) \leqslant C_1 \int \|\nabla f\|_2^2\, d\mu_{q,n}, \tag{6.29}$$

*όπου $C_1 > 0$ μια απόλυτη σταθερά.*

Κλείνουμε αυτήν την Παράγραφο παρουσιάζοντας κάποιες ιδιότητες που έχουν τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα με φραγμένη log-Sobolev σταθερά. Τα επιχειρήματα ουσιαστικά χρησιμοποιούν το γεγονός ότι αυτά τα μέτρα είναι $\psi_2$.

**Θεώρημα 6.2.10.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο ανήκει στην $\mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$. Τότε,*

(i) *Όλες οι διευθύνσεις είναι υποκανονικές: Το $\mu$ είναι $\psi_2$-μέτρο με σταθερά $c_1\sqrt{\kappa}$.*

(ii) *Η ισοτροπική σταθερά του $\mu$ είναι φραγμένη: $L_\mu \leqslant c_2\sqrt{\kappa}$.*

(iii) *Έστω $I_q(\mu) = \left(\int \|x\|_2^q d\mu\right)^{1/q}$, $-n < q < \infty$, $q \neq 0$. Τότε,*

$$I_q(\mu) \leqslant I_2(\mu) + \sqrt{\kappa}\sqrt{q}$$

*για κάθε $2 \leqslant q < \infty$. Ειδικότερα,*

$$I_q(\mu) \leqslant c_3\sqrt{n}$$

*για όλα τα $q \leqslant c_4 n/\kappa$. Επίσης,*

$$I_{-q}(\mu) \geqslant c_5\sqrt{n}$$

*για κάθε $q \leqslant c_6 n/\kappa$.*

(iv) *Οι περισσότερες διευθύνσεις είναι «κανονικές» και υπερ-Gaussian: Υπάρχει ένα υποσύνολο $A$ της $S^{n-1}$ με μέτρο $\sigma(A) > 1 - e^{-c_7 n/\kappa}$ έτσι ώστε για κάθε $\theta \in A$ να έχουμε*

$$\left(\int |\langle x, \theta\rangle|^q \, d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant c_8\sqrt{\kappa}\sqrt{q/p}\left(\int |\langle x, \theta\rangle|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \tag{6.30}$$

*για κάθε $1 \leqslant p \leqslant c_9 n/\kappa$ και κάθε $q \geqslant p$, και επιπλέον,*

$$\mu(x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t) \geqslant e^{-c_{10}t^2/\kappa}, \tag{6.31}$$

*για κάθε $1 \leqslant t \leqslant c_{11}\sqrt{n}/\kappa$.*

*Απόδειξη.* Ο πρώτος ισχυρισμός έχει ουσιαστικά αποδειχθεί. Αποδεικνύουμε τους υπόλοιπους:

(ii). Είναι γνωστό ότι τα $\psi_2$-ισοτροπικά μέτρα έχουν φραγμένη ισοτροπική σταθερά. Στην πραγματικότητα αποδείχθηκε πρόσφατα από τους Klartag-Milman στο [31] ότι η εξάρτηση από την $\psi_2$-σταθερά είναι γραμμική. Εφόσον, το $\mu$ είναι $\psi_2$-μέτρο με σταθερά $c_1\sqrt{\kappa}$, παίρνουμε $L_\mu \leqslant c_2\sqrt{\kappa}$.

(iii). Αποδεικνύουμε ένα πιο γενικό αποτέλεσμα ακολουθώντας το [1]: αν το $\mu$ ικανοποιεί λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa > 0$ τότε, για κάθε Lipschitz συνάρτηση $f$ στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $2 \leqslant p \leqslant q$, έχουμε

$$\|f\|_q^2 - \|f\|_p^2 \leqslant \kappa\|f\|_{\mathrm{Lip}}^2(q-p). \tag{6.32}$$

Για την απόδειξη μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_{\mathrm{Lip}} = 1$. Θέτουμε $g(p) = \|f\|_p$. Παραγωγίζοντας την $g$, και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Sobolev και κάποιες πράξεις, ελέγχουμε ότι

$$\frac{g'(p)}{g(p)} \leqslant \frac{\kappa}{2} \frac{g(p-2)^{p-2}}{g^p(p)}. \tag{6.33}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder παίρνουμε

$$2g'(p)g(p) \leqslant \kappa \tag{6.34}$$

για κάθε $p > 2$. Έτσι, για κάθε $2 \leqslant p \leqslant q$ παίρνουμε $g(q)^2 - g(p)^2 \leqslant \kappa(q-p)$.

Επιλέγοντας$f(x) = \|x\|_2$ και χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη ανισότητα $\sqrt{a+b} \leqslant \sqrt{a} + \sqrt{b}$, βλέπουμε ότι

$$I_q(\mu) \leqslant I_2(\mu) + \sqrt{\kappa}\sqrt{q} \tag{6.35}$$

για κάθε $2 \leqslant q < \infty$. Ειδικότερα, $I_q(\mu) \leqslant cI_2(\mu)$ για $q \leqslant cn/\kappa$.

Για τις αρνητικές τιμές του $q$ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $q_*(\mu) \geqslant c_6 n/\kappa$. Αυτό έπεται από το γεγονός ότι το $\mu$ είναι $\psi_2$-μέτρο με σταθερά $O(\sqrt{\kappa})$ – βλέπε [49] και [50]. Έτσι, $I_{-q}(\mu) \geqslant C^{-1} I_q(\mu) \geqslant c_5\sqrt{n}$ για κάθε $2 \leqslant q \leqslant c_6 n/\kappa$.

(iv). Κάτω από την ασθενέστερη υπόθεση ότι το $\mu$ είναι ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο $\psi_2$-μέτρο με σταθερά $b$ στον $\mathbb{R}^n$, δείχνουμε ότι υπάρχει σύνολο $A$ της $S^{n-1}$ με μέτρο $\sigma(A) > 1 - e^{-c_1 n/b^2}$ έτσι ώστε για κάθε $\theta \in A$ και για κάθε $1 \leqslant p \leqslant c_2 n/b^2$ να έχουμε:

$$\left( \int |\langle x, \theta\rangle|^p \, d\mu(x) \right)^{1/p} \simeq \sqrt{p}. \tag{6.36}$$

Το επιχείρημα είναι το ίδιο με αυτό της Παραγράφου 2.3. (βλέπε επίσης [50]). Εφόσον το $\mu$ έχει $\psi_2$ σταθερά $b$, έχουμε ότι $q_*(\mu) \geqslant cn/b^2$. Έστω $k \leqslant cn/b^2$. Τότε, αν σταθεροποιήσουμε $p \leqslant k$, από το θεώρημα του Dvoretzky προκύπτει ότι

$$\frac{1}{2} w(Z_p(\mu))(B_2^n \cap F) \subseteq P_F(Z_p(\mu)) \subseteq 2w(Z_p(\mu))(B_2^n \cap F) \tag{6.37}$$

για όλους τους $F$ σε ένα σύνολο $B_{k,p}$ της $G_{n,k}$ με μέτρο

$$\nu_{n,k}(B_{k,p}) \geqslant 1 - e^{-c_3 k_*(Z_p(\mu))} \geqslant 1 - e^{-c_4 n/b^2}. \tag{6.38}$$

Εφαρμόζουμε αυτό το επιχείρημα για $p = 2^i$, $i = 1, \dots, \lfloor \log_2 k \rfloor$, και λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι $Z_q(\mu) \subseteq cZ_p(\mu)$ για $p < q \leqslant 2p$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $B_k \subset G_{n,k}$ με

$\nu_{n,k}(B_k) \geqslant 1 - e^{-c_5 n/b^2}$ έτσι ώστε οι παραπάνω εγκλεισμοί να ισχύουν για κάθε $F \in B_k$ και για κάθε $1 \leqslant p \leqslant k$. Από την άλλη πλευρά, εφόσον $I_p(\mu) \simeq I_2(\mu) = \sqrt{n}$ για κάθε $2 \leqslant p \leqslant q_*(\mu)$, βλέπουμε ότι

$$w(Z_p(\mu)) \simeq \sqrt{p} \tag{6.39}$$

για κάθε $p \leqslant cn/b^2$. Επομένως, μπορούμε να ξαναγράψουμε

$$h_{Z_p(\mu)}(\theta) \simeq \sqrt{p} \tag{6.40}$$

για κάθε $F \in B_k$, $\theta \in S_F$ και $1 \leqslant p \leqslant k$. Για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα, επιλέγουμε $k = \lfloor cn/b^2 \rfloor$. Τότε, αν θέσουμε $A = \{\theta \in S^{n-1} : h_{Z_p}(\theta) \simeq \sqrt{p}, \text{ για κάθε } 1 \leqslant p \leqslant k\}$ το θεώρημα Fubini δίνει:

$$\begin{aligned}\sigma(A) &= \int_{G_{n,k}} \sigma_F(A \cap F)\, d\nu_{n,k}(F) \geqslant \int_{B_k} \sigma_F(A \cap F)\, d\nu_{n,k}(F) \\ &\geqslant 1 - e^{-cn/b^2}.\end{aligned} \tag{6.41}$$

Έστω τώρα $\theta \in A$, $p \leqslant cn/b^2$ και $q \geqslant p$. Θα έχουμε $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_p \simeq \sqrt{p}$. Εφόσον το $\mu$ είναι $\psi_2$ μέτρο, παίρνουμε $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \leqslant cb\sqrt{q}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και όλα τα $q \geqslant 1$. Αυτό δείχνει ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \leqslant cb\sqrt{q/p}\, \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_p. \tag{6.42}$$

Στην περίπτωση όπου $\mu \in \mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$ ξέρουμε ότι $b = O(\sqrt{\kappa})$, και αυτό αποδεικνύει το πρώτο μέρος του ισχυρισμού (iv).

Για το δεύτερο μέρος χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα που ουσιαστικά παρουσιάστηκε στο [22]. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για όλα τα $\theta \in A$ και για κάθε $1 \leqslant q \leqslant cn/b^2$ έχουμε $h_{Z_q(\mu)}(\theta) \simeq \sqrt{q}$, γράφουμε

$$\mu\left(x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant \frac{1}{2}\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q\right) \geqslant (1 - 2^{-q})^2 \frac{\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q^{2q}}{\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{2q}^{2q}} \geqslant e^{-cq}, \tag{6.43}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την ανισότητα Paley-Zygmund. Επομένως, για κάθε $\theta \in A$ και για κάθε $q \leqslant cn/b^2$, παίρνουμε

$$\mu(x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant c_1\sqrt{q}) \geqslant e^{-c_2 q}. \tag{6.44}$$

Γράφοντας $c_1\sqrt{q} = t$ έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant t \leqslant c_3\sqrt{n}/b$ ισχύει $\mu(x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t) \geqslant e^{-ct^2}$ για κάθε $\theta \in A$, και $\sigma(A) \geqslant 1 - e^{-cn/b^2}$. □

*Σημείωση.* Για ένα γενικό μέτρο $\mu \in \mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$ δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι κάθε διεύθυνση $\theta$ θα είναι υπερ-Gaussian (με σταθερά που εξαρτάται από το $\kappa$). Για να το δούμε αυτό, θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο $\mu_{\infty,n}$ στον μοναδιαίο κύβο $C_n = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]^n$. Αυτό είναι μέτρο γινόμενο, λογαριθμικά κοίλο, επομένως ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με απόλυτη σταθερά $\kappa$ (βλέπε [35, Corollary 5.7]). Από την άλλη πλευρά, είναι άμεσο ότι δεν είναι υπερ-Gaussian στις διευθύνσεις $e_i$, επειδή $h_{C_n}(e_i) \simeq 1$. Το ίδιο ισχύει για όλες τις διευθύνσεις $\theta \in S^{n-1}$ για τις οποίες ισχύει $h_{C_n}(\theta)/\sqrt{n} = o_n(1)$.

Η ακόλουθη ανισότητα κατανομής για φθίνουσες αναδιατάξεις συντεταγμένων τυχαίων διανυσμάτων αποδείχθηκε από τον R. Latała στο [33]:

Αν $\mu$ είναι ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\mu(x : x_m^* \geqslant t) \leqslant \exp(-\sqrt{m}t/c) \tag{6.45}$$

για κάθε $1 \leqslant m \leqslant n$ και $t \geqslant \log(en/m)$, όπου $(x_1^*, \ldots, x_n^*)$ είναι η φθίνουσα αναδιάταξη των $(|x_1|, \ldots, |x_n|)$. Θα δείξουμε ότι αν το $\mu \in \mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$ τότε ισχύει καλύτερη εκτίμηση. Η ιδέα της απόδειξης προέρχεται από το [33, Proposition 2].

**Πρόταση 6.2.11.** *Έστω $\mu$ ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιαθνότητας στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο ανήκει στην κλάση $\mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$. Για κάθε $1 \leqslant m \leqslant n$ και για κάθε $t \geqslant C\sqrt{\kappa \log(en/m)}$, έχουμε*

$$\mu(x : x_m^* \geqslant t) \leqslant e^{-cmt^2/\kappa}. \tag{6.46}$$

Για την απόδειξη θα χρειασθούμε το ακόλουθο:

**Λήμμα 6.2.12.** *Έστω $\mu \in \mathcal{LS}(\kappa)$. Τότε, για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$1 - \mu(A + tB_2^n) \leqslant \exp\left(-\frac{t^2 \mu(A)^2}{2\kappa}\right), \tag{6.47}$$

*για κάθε $t > 0$.*

*Απόδειξη.* Έστω $A$ Borel και $t > 0$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f_t(x) = \min\{\mathrm{dist}(x, A), t\}$ η οποία είναι 1-Lipschitz και

$$\int f_t \, d\mu \leqslant t(1 - \mu(A)) \Longrightarrow t \geqslant t\mu(A) + \int f_t \, d\mu. \tag{6.48}$$

Παρατηρήστε ότι

$$x \notin A + tB_2^n \Longrightarrow f_t(x) \geqslant t. \tag{6.49}$$

Οπότε, μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\mu(x \notin A + tB_2^n) &\leqslant \mu(x : f_t(t) \geqslant t) \\ &\leqslant \mu\left(x : f_t(x) - \int f_t\, d\mu \geqslant t\mu(A)\right) \\ &\leqslant \exp\left(-\frac{t^2(\mu(A)^2)}{2\kappa}\right),\end{aligned}$$

όπου έχουμε χρησιμοποιήσει την Πρόταση 6.2.1. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

**Απόδειξη της Πρότασης 6.2.11.** Εφόσον το $\mu$ ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa$, ισχύει η ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα: αν $\mu(A) \geqslant 1/2$, τότε για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$1 - \mu(A + tB_2^n) \leqslant e^{-t^2/8\kappa}. \tag{6.50}$$

Εφόσον το $\mu$ είναι ισοτροπικό, έχουμε $\mathbb{E}_\mu(x_i^2) = 1$. Τότε, η ανισότητα του Markov δείχνει ότι $\mu(x : |x_i| \leqslant 2) \geqslant 3/4$ για $i = 1, 2, \ldots, n$. Χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα παίρνουμε $\mu(|x_i| \geqslant 2 + t) \leqslant e^{-t^2/8\kappa}$ για κάθε $t > 0$. Δοθέντων $1 \leqslant m \leqslant n$, για κάθε $t > 0$ ορίζουμε το σύνολο

$$A(t) := \{x : \mathrm{card}(i : |x_i| \geqslant t) < m/2\}. \tag{6.51}$$

*Ισχυρισμός.* Για κάθε $t \geqslant \max\{4, 8\sqrt{\kappa \log(en/m)}\}$ έχουμε $\mu(A(t)) \geqslant 1/2$.

Πράγματι· χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov παίρνουμε:

$$\begin{aligned}1 - \mu(A(t)) &= \mu(x : \mathrm{card}(i : |x_i| \geqslant t) \geqslant m/2) \\ &= \mu\Big(x : \sum_{i=1}^n \mathbf{1}_{\{|x_i| \geqslant t\}}(x) \geqslant m/2\Big) \\ &\leqslant \frac{2}{m} \sum_{i=1}^n \mu(x : |x_i| \geqslant t) \\ &\leqslant \frac{2n}{m} e^{-\frac{t^2}{32\kappa}} \leqslant \frac{2n}{m}\left(\frac{en}{m}\right)^{-2} < \frac{1}{2}.\end{aligned} \tag{6.52}$$

Έστω τώρα $t_0 := \max\{4, 8\sqrt{\kappa \log(en/m)}\}$. Για κάθε $s > 0$, αν γράψουμε $z = x + y \in A(t_0) + s\sqrt{m}B_2^n$ τότε λιγότερα από $m/2$ από τα $|x_i|$ είναι μεγαλύτερα από $t_0$ και λιγότερα από $m/2$ από τα $|y_i|$ είναι μεγαλύτερα από $s\sqrt{2}$. Χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα ακόμη μια φορά, παίρνουμε:

$$\mu(x : x_m^* \geqslant t_0 + \sqrt{2}s) \leqslant 1 - \mu(A(t_0) + s\sqrt{m}B_2^n) \leqslant e^{-ms^2/8\kappa}. \tag{6.53}$$

Επιλέγοντας $s \geqslant 4t_0$ έχουμε το συμπέρασμα. □

## 6.3 Ελαχιστική συνέλιξη

**Ορισμός 6.3.1** (ελαχιστική συνέλιξη)**.** Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ δυο κάτω φραγμένες συναρτήσεις. Ορίζουμε την *ελαχιστική συνέλιξη* της $f$ με την $g$ ως εξής:

$$(f\Box g)(x) := \inf\{f(x-y)+g(y) : y \in \mathbb{R}^n\}. \tag{6.54}$$

**Ορισμός 6.3.2.** Έστω $\mu$ Borel μέτρο πιθανότητατας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\varphi : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μετρήσιμη συνάρτηση. Λέμε ότι το ζεύγος $(\mu, \varphi)$ έχει την *ιδιότητα* $(\tau)$ αν για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ ισχύει

$$\int e^{f\Box\varphi}\, d\mu \int e^{-f}\, d\mu \leqslant 1. \tag{6.55}$$

Ο ορισμός αυτός δόθηκε από τον B.Maurey στο [41], όπου χρησιμοποιήθηκε για να δώσει μια εναλλακτική απόδειξη της ακόλουθης ανισότητας συγκέντρωσης του M. Talagrand:

**Θεώρημα 6.3.3** (Talagrand)**.** *Έστω $\xi_n$ το $n$-διάστατο εκθετικό μέτρο πιθανότητας. Τότε, για κάθε $t > 0$ και για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ ισχύει:*

$$\xi_n(x \notin A + 6\sqrt{t}B_2^n + 9tB_1^n) \leqslant \frac{1}{\xi_n(A)} e^{-t}. \tag{6.56}$$

Η ιδιότητα $(\tau)$ διερευνήθηκε και μελετήθηκε περαιτέρω από τους Latala και Wojtaszczyk στο [34] όπου και διατύπωσαν την «εικασία της ελαχιστικής συνέλιξης»:

Εφόσον η (6.55) προφανώς ικανοποιείται με $\varphi \equiv 0$, το ερώτημα είναι να βρούμε την μεγιστική συνάρτηση κόστους $\varphi$ για την οποία αυτή αληθεύει. Στο [34] αποδεικνύεται ότι αν το $\mu$ είναι συμμετρικό και το ζεύγος $(\mu, \varphi)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$ για κάποια κυρτή συνάρτηση κόστους $\varphi$, τότε

$$\varphi(y) \leqslant 2\Lambda_\mu^*(y/2) \leqslant \Lambda_\mu^*(y), \tag{6.57}$$

όπου

$$\Lambda_\mu^*(y) = \mathcal{L}\Lambda_\mu(y) = \sup_{x\in\mathbb{R}^n} \left\{ \langle x, y\rangle - \log \int e^{\langle x,z\rangle} d\mu(z) \right\} \tag{6.58}$$

είναι ο μετασχηματισμός Legendre του λογαριθμικού μετασχηματισμού Laplace $\Lambda_\mu$ του $\mu$. Οπότε, ο $\Lambda_\mu^*$ είναι η καλύτερη συνάρτηση κόστους η οποία μπορεί να ικανοποιεί την $(\tau)$ για ένα δοθέν μέτρο $\mu$. Οι Latała και Wojtaszczyk έκαναν την εικασία ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $b > 0$ τέτοια ώστε το ζεύγος $(\mu, \Lambda_\mu^*(\frac{\cdot}{b}))$ να έχει την ιδιότητα $(\tau)$ για κάθε συμμετρικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu$ στον $\mathbb{R}^n$. Αυτή είναι μια πολύ ισχυρή εικασία. Αν είναι σωστή σε πλήρη γενικότητα αυτή η βέλτιστη ανισότητα ελαχιστικής συνέλιξης, αυτό θα συνεπαγόταν καταφατική απάντηση στην εικασία των Kannan-Lovasz-Simonovits και στην εικασία του υπερεπιπέδου.

Μελετάμε αυτήν την εικασία για την κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας με log-Sobolev σταθερά $\kappa$. Έπεται από το Λήμμα 6.2.3 ότι $\Lambda_\mu^*(y) \geqslant \frac{\|y\|_2^2}{2\kappa}$. Επομένως, μια ασθενέστερη απάντηση θα ήταν να δείξουμε ότι για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f$ έχουμε την (6.55) για μια συνάρτηση $\varphi$ η οποία είναι πολλαπλάσιο της $\|y\|_2^2$. Μπορούμε να δώσουμε μια απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, χρησιμοποιώντας την ισοδυναμία της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev και της Gaussian ισοπεριμετρικής ανισότητας στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων, που πρωτοαποδείχθηκε από τους Bakry και Ledoux (βλέπε [3]):

Υποθέτοντας ότι το $\mu$ ικανοποιεί την (6.7) με σταθερά $c = c(\kappa)$ θα δείξουμε ότι το ζεύγος $(\mu, \varphi)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$, όπου $\varphi(x) = \frac{c^2}{4}\|x\|_2^2$. Παρατηρήστε ότι αυτή η συνθήκη είναι εν γένει ισχυρότερη από την $\mu \in \mathcal{LS}_{lc}(\kappa)$: Είναι γνωστό ότι αν το $\mu$ ικανοποιεί την (6.7) με σταθερά $c > 0$ τότε $\mu \in \mathcal{LS}(1/c^2)$ (βλέπε [8]). Παρ' όλα αυτά όμως, στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, (6.7) και η λογαριθμική ανισότητα Sobolev είναι ισοδύναμες. Σκιαγραφούμε το επιχείρημα των Bakry-Ledoux.

Υποθέτουμε ότι το $\mu$ είναι λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η πυκνότητα του $\mu$ ως προς το μέτρο Lebesgue είναι της μορφής $e^{-U}$, όπου $U : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση. Αν θεωρήσουμε τον διαφορικό τελεστή $L(\cdot) = \Delta(\cdot) - \langle \nabla U, \nabla(\cdot)\rangle$, χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η λογαριθμική ανισότητα Sobolev μπορεί να γραφεί στην μορφή

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\kappa \int f(-Lf)\, d\mu. \tag{6.59}$$

Χρησιμοποιώντας ένα αποτέλεσμα του Gross [26] για την υπερσυσταλτότητα και επιχειρήματα ημιομάδων τελεστών μπορούμε να καταλήξουμε στην ακόλουθη παραμετρικοποιημένη λογαριθμική ανισότητα Sobolev:

**Θεώρημα 6.3.4** (Bakry–Ledoux, 1996). *Έστω $\mu$ ένα μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $e^{-U}$ ως προς το μέτρο Lebesgue, όπου $U : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση. Αν το $\mu$ ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa > 0$ τότε, για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε λεία συνάρτηση $f$, έχουμε*

$$\|f\|_2^2 - \|f\|_{p(t)}^2 \leqslant \sqrt{2t}\|f\|_\infty \int \|\nabla f\|_2\, d\mu, \tag{6.60}$$

όπου $p(t) = 1 + e^{-t/\kappa}$.

Χρησιμοποιώντας αυτό το Θεώρημα μπορούμε να συμπεράνουμε την Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα με σταθερά $c = O(\kappa^{-1/2})$.

**Πρόταση 6.3.5.** *Έστω $\mu$ ένα μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα $e^{-U}$ ως προς το μέτρο Lebesgue, όπου $U : \mathbb{R}^n \to [-\infty, \infty)$ είναι μια κυρτή συνάρτηση. Αν το $\mu$ ικανοποιεί log-Sobolev με σταθερά $\kappa > 0$ τότε, για κάθε Borel σύνολο $A$ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mu^+(A) \geqslant c(\kappa) I(\mu(A)). \tag{6.61}$$

*Επιπλέον, έχουμε $c(\kappa) = c/\sqrt{\kappa}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Έστω $A$ ένα Borel σύνολο στον $\mathbb{R}^n$. Αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση $0 < \mu(A) \leqslant 1/2$. Για κάθε $t \geqslant 0$, προσεγγίζοντας την $\chi_A$ με λείες συναρτήσεις $f_\varepsilon : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ και περνώντας στο όριο, από το προηγούμενο παίρνουμε

$$\mu(A)\left(1 - \mu(A)^{\frac{2}{p(t)} - 1}\right) \leqslant \sqrt{2t}\mu^+(A). \tag{6.62}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\frac{2}{p(t)} - 1 = \tanh\left(\frac{t}{2\kappa}\right) \geqslant \frac{t}{2\kappa}\tanh(1), \tag{6.63}$$

για κάθε $0 \leqslant t \leqslant 2\kappa$. Επομένως, έχουμε

$$\mu(A)\left(1 - e^{-\frac{c_1 t}{2\kappa}\log(1/\mu(A))}\right) \leqslant \sqrt{2t}\mu^+(A). \tag{6.64}$$

Υπολογίζοντας σε χρόνο $t_0 = \frac{\kappa}{\log(1/\mu(A))} \in (0, 2\kappa)$ βλέπουμε ότι

$$\mu^+(A) \geqslant \frac{1 - e^{-c_1/2}}{\sqrt{2}} \frac{1}{\sqrt{\kappa}} \mu(A) \sqrt{\log \frac{1}{\mu(A)}}. \tag{6.65}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $I(x) \leqslant c_2 x \sqrt{\log(1/x)}$ για κάθε $x \in (0, 1/2)$ και κάποια απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$, έχουμε το αποτέλεσμα με σταθερά $c = \frac{1 - e^{-c_1/2}}{2c_2}\kappa^{-1/2}$. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο:

**Θεώρημα 6.3.6.** *Έστω $\mu$ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας που ικανοποιεί την λογαριθμική ανισότητα Sobolev με σταθερά $\kappa > 0$. Τότε, το ζεύγος $(\mu, \varphi)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$, όπου $\varphi(y) = \frac{c}{\kappa}\|y\|_2^2$ και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

*Απόδειξη.* Έστω $\gamma$ το τυπικό 1-διάστατο μέτρο του Gauss. Είναι γνωστό ότι το ζεύγος $(\gamma, w)$ έχει την ιδιότητα $(\tau)$, όπου $w(x) = x^2/4$ – βλέπε [41]. Έστω $f$ μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την συνάρτηση $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία είναι αύξουσα, δεξιά συνεχής και τέτοια ώστε, για κάθε $t \in \mathbb{R}$,

$$\mu(f < t) = \gamma(g < t). \tag{6.66}$$

Τότε, για την απόδειξη της (6.55) χρειάζεται απλώς να δείξουμε ότι

$$\int e^{f\Box\varphi}\, d\mu \leqslant \int e^{g\Box w}\, d\gamma. \tag{6.67}$$

Γι' αυτόν τον σκοπό, αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε $u > 0$,

$$\mu(f\Box\varphi < u) \geqslant \gamma(g\Box w < u). \tag{6.68}$$

Εφόσον η $g$ είναι αύξουσα παίρνουμε ότι η $g\Box w$ είναι επίσης αύξουσα, και έτσι το $D_u = \{x : (g\Box w)(x) < u\}$ είναι ημιευθεία. Για κάθε $x \in D_u$ υπάρχουν $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $x_1 + x_2 = x$ και $g(x_1) + w(x_2) < u$. Χρησιμοποιώντας ένα οριακό επιχείρημα βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in D_u$ και για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $g(x_1) + w(x_2) < u$ έχουμε

$$\mu(f\Box\varphi < u) \geqslant \gamma(-\infty, x_1 + x_2] = \Phi(x_1 + x_2). \tag{6.69}$$

Για κάθε $g(x_1) < s_1 < u - w(x_2)$ από τον ορισμό της $g$ έπεται ότι: $\mu(f < s_1) = \gamma(g < s_1) \geqslant \gamma(-\infty, x_1] = \Phi(x_1)$. Επιπλέον, ο εγκλεισμός

$$\{f < s_1\} + \beta\frac{|x_2|}{2}B_2^n \subseteq \{f\Box\varphi < u\} \tag{6.70}$$

ισχύει με $\varphi(x) = \|x\|_2^2/\beta^2$ για κάθε $\beta > 0$.

Για να καταλήξουμε στο συμπέρασμα πρέπει να επαληθεύσουμε μια ανισότητα της ακόλουθης μορφής: αν $\mu(A) \geqslant \Phi(x_1)$ τότε $\mu(A + \frac{\beta}{2}|x_2|B_2^n) \geqslant \Phi(x_1 + x_2)$. Ισοδύναμα, για κάθε $t > 0$ και κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ θα θέλαμε να έχουμε $\mu(A + tB_2^n) \geqslant \Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) + \frac{2}{\beta}t)$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, απλώς παρατηρούμε ότι οι υποθέσεις μας είναι ισοδύναμες με το ότι $\mu^+(A) \geqslant c(\kappa)I(\mu(A))$ για κάθε Borel σύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ και αυτό με τη σειρά του με το γεγονός ότι για κάθε Borel υποσύνολο $A$ του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\mu(A + tB_2^n) \geqslant \Phi(\Phi^{-1}(\mu(A)) + tc(\kappa)). \tag{6.71}$$

Έτσι, έχουμε το θεώρημα με $\varphi(y) = \frac{c(\kappa)^2}{4}\|y\|_2^2 = \frac{c}{\kappa}\|y\|_2^2$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. $\square$

# Βιβλιογραφία


[1] S. Aida, T. Masuda and I. Shigekawa, *Logarithmic Sobolev inequalities and exponential integrability*, J. Func. Anal., **126** (1994), 83–101.

[2] S. Artstein, V. Milman and S. Szarek, *Duality of metric entropy*, Annals of Math. **159** (2004), 1313–1328.

[3] D. Bakry and M. Ledoux, *Lévy–Gromov's isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator*, Invent. Math. **123** (1996), 259–281.

[4] K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in* $\mathbb{R}^n$, Studia Math. **88** (1988), 69–84.

[5] K. M. Ball, *An elementary introduction to modern convex geometry*, Flavors of Geometry, MSRI Publications, Volume **31** (1997).

[6] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Lecture Notes in Math. **1469** (1991), 127–137.

[7] J. Bourgain, *On the isotropy constant problem for* $\psi_2$*-bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 114–121.

[8] S. G. Bobkov, *Isoperimetric and analytic inequalities for log-concave probability measures*, Ann. Prob. **27** (1999), 1903–1921.

[9] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 53–69.

[10] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. **56**, Birkhauser, Basel (2003), 3–13.

[11] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Period. Math. Hungar. **6** no. 2 (1975), 111–136.

[12] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Arkiv för Matematik, **12**, No. 1-2 (1974), 239–252.

[13] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi and B. Maurey, *The (B) conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problem*, J. Funct. Anal. **214** (2004), 410–427.

[14] A. Dvoretzky, *Some results on convex bodies and Banach spaces.* 1961, Proc. Internat. Sympos. Linear Spaces (Jerusalem, 1960) pp. 123–160 Jerusalem Academic Press, Jerusalem; Pergamon, Oxford.

[15] T. Figiel, J. Lindenstrauss and V.D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977) 53–94.

[16] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[17] M. Fradelizi, *Sections of convex bodies through their centroid*, Arch. Math. **69** (1997), 515–522.

[18] A. Giannopoulos, *Notes on isotropic convex bodies*, Warsaw University Notes (2003).

[19] A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Concentration property on probability spaces*, Advances in Mathematics **156** (2000), 77–106.

[20] A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Extremal problems and isotropic positions of convex bodies*, Israel J. Math. **117** (2000), 29–60.

[21] A. Giannopoulos, A. Pajor and G. Paouris, *A note on subgaussian estimates for linear functionals on convex bodies*, Proc. Amer. Math. Soc. **135** (2007), 2599–2606.

[22] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the existence of subgaussian directions for log-concave measures*, Contemporary Mathematics **545** (2011), 103–122.

[23] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *$\Psi_\alpha$-estimates for marginals of log-concave probability measures*, Proc. Amer. Math. Soc. **140** (2012), 1297–1308.

[24] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the distribution of the $\psi_2$-norm of linear functionals on isotropic convex bodies*, GAFA Seminar Volume (to appear).

[25] A. Giannopoulos, G. Paouris and B-H. Vritsiou, *The isotropic position and the reverse Santaló inequality*, Israel J. Math. (to appear).

[26] L. Gross, *Logarithmic Sobolev inequalities*, Amer. J. Math. **97** (1975), pp. 1061–1083.

[27] B. Grünbaum, *Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes*, Pacific J. Math., **10**, 1257–1261, 1960.

[28] M. Hartzoulaki, *Probabilistic Methods in the Theory of Convex Bodies*, (in Greek) PhD Thesis, University of Crete, 2003.

[29] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187–204.

[30] B. Klartag, *Uniform almost sub-gaussian estimates for linear functionals on convex sets*, Algebra i Analiz (St. Petersburg Math. Journal) **19** (2007), 109–148.

[31] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform - A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10–34.

[32] B. Klartag and R. Vershynin, *Small ball probability and Dvoretzky Theorem*, Israel J. Math. **157** (2007), no.1, 193–207.

[33] R. Latała, *Order statistics and concentration of $\ell_r$-norms for log-concave vectors*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 681–696.

[34] R. Latała and J. O. Wojtaszczyk, *On the infimum convolution inequality*, Studia Math. **189** (2008), 147–187.

[35] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs **89**, American Mathematical Society, Providence, RI, 2001.

[36] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces: Isoperimetry and Processes*, Springer–Verlag (1991).

[37] D.R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18-29.

[38] A. Litvak, V. D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95–124.

[39] E. Lutwak and G. Zhang, *Blaschke-Santaló inequalities*, J. Differential Geom. **47** (1997), 1–16.

[40] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *$L^p$ affine isoperimetric inequalities*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111–132.

[41] B. Maurey, *Some deviation inequalities*, Geom. Funct. Anal. **1** (1991), 188–197.

[42] V.D. Milman, *A new proof of A. Dvoretzky's theorem on cross-sections of convex bodies.* (Russian), Funkcional. Anal. i Prilozhen. **5** (1971), no. 4, p. 28–37.

[43] V.D. Milman and A. Pajor, *Isotropic positions and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed $n$-dimensional space*, GAFA Seminar 87-89, Springer Lecture Notes in Math. **1376** (1989), pp. 64–104.

[44] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[45] V. D. Milman and G. Schechtman, *Global versus Local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces*, Duke Math. Journal **90** (1997), 73–93.

[46] V. D. Milman, S. J. Szarek, *A geometric lemma and duality of entropy.* GAFA Seminar Notes, Lectures Notes in Math. **1745** (2000), 191–222.

[47] G. Paouris, *$\Psi_2$-estimates for linear functionals on zonoids*, Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 211–222.

[48] G. Paouris, *On the $\Psi_2$-behavior of linear functionals on isotropic convex bodies*, Studia Math. **168** (2005), no. 3, 285–299.

[49] G. Paouris, *Concentration of mass on convex bodies*, Geometric and Functional Analysis **16** (2006), 1021–1049.

[50] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287–308.

[51] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics, 94, (1989).

[52] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Annals of Math. **115** (1982), 375–392.

[53] P. Pivovarov, *On the volume of caps and bounding the mean-width of an isotropic convex body*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **149** (2010), 317–331.

[54] C. Rogers and G. Shephard, *The difference body of a convex body*, Arch. Math. **8** (1957), 220–233.

[55] P. Stavrakakis and P. Valettas, *On the geometry of log-concave probability measures with bounded log-Sobolev constant*, preprint.

## ABSTRACT

The main theme of this Ph.D. Thesis is the use of geometric and probabilistic methods for the study of the geometry of logarithmically concave measures in high dimensions. We discuss the following topics of the theory:

**1. $\psi_\alpha$-estimates for random marginals.** Let $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ be a probability space. For any function $f : (\Omega, \mu) \to \mathbb{R}$ which is $\mathcal{A}$-measurable, we define the $\psi_\alpha$-norm of $f$ ($1 \leqslant \alpha \leqslant 2$) as follows:

$$\|f\|_{\psi_\alpha} = \inf\left\{ t > 0 : \int_\Omega \exp\left(\frac{|f(\omega)|}{t}\right)^\alpha d\mu(\omega) \leqslant 2 \right\}.$$

Let $\mu$ be a log-concave Borel probability measure on $\mathbb{R}^n$ and let $\alpha \in [1,2]$. We say that $\mu$ satisfies a $\psi_\alpha$ estimate in the direction of $\theta \in S^{n-1}$ if there exists a constant $b_\alpha = b_\alpha(\theta) > 0$ such that $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant b_\alpha \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2$. We say that $\mu$ is a $\psi_\alpha$ measure with constant $B_\alpha$ if $B_\alpha := \sup_{\theta \in S^{n-1}} b_\alpha(\theta) < \infty$.

For any subspace $F$ of $\mathbb{R}^n$ we define the projection (marginal) $\pi_F(\mu)$ of $\mu$ with $\pi_F(\mu)(A) := \mu(P_F^{-1}(A))$ for any Borel set $A$ in $F$. It is known that every log-concave probability measure $\mu$ is a $\psi_1$-measure with constant $B_1(\mu) \leqslant C$, where $C > 0$ is an absolute constant. We show that a random marginal $\pi_F(\mu)$ of an isotropic log-concave probability measure $\mu$ on $\mathbb{R}^n$ exhibits better $\psi_\alpha$-behavior. For a natural variant $\psi'_\alpha$ of the standard $\psi_\alpha$-norm we show the following:

(i) If $k \leqslant \sqrt{n}$, then for a random $F \in G_{n,k}$ we have that $\pi_F(\mu)$ is a $\psi'_2$-measure. We complement this result by showing that a random $\pi_F(\mu)$ is, at the same time, supergaussian.

(ii) If $k = n^\delta$, $\frac{1}{2} < \delta < 1$, then for a random $F \in G_{n,k}$ we have that $\pi_F(\mu)$ is a $\psi'_{\alpha(\delta)}$-measure, where $\alpha(\delta) = \frac{2\delta}{3\delta - 1}$.

**2. Subgaussian directions of log-concave measures.** Let $\mu$ be a log-concave probability measure on $\mathbb{R}^n$. A direction $\theta \in S^{n-1}$ is called subgaussian (with constant $b > 0$) for $\mu$ if the following estimate holds:

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant b \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2.$$

We show that if $\mu$ is a centered log-concave probability measure on $\mathbb{R}^n$ then,

$$\frac{c_1}{\sqrt{n}} \leqslant |\Psi_2(\mu)|^{1/n} \leqslant \frac{c_2\sqrt{\log n}}{\sqrt{n}},$$

where $\Psi_2(\mu)$ is the $\psi_2$-body of $\mu$ defined by its support function $h_{\psi_2(\mu)}(\theta) := \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2}$, $\theta \in S^{n-1}$ and $c_1, c_2 > 0$ are absolute constants. A direct consequence of the previous volumetric estimate is the existence of subgaussian directions for $\mu$ with constant $r = O(\sqrt{\log n})$.

Using the basic argument of the proof "hereditarily", we can gain some extra information on the distribution of the $\psi_2$-norm of linear functionals on isotropic convex bodies. In particular, we can show the following measure estimate: If $K$ is an isotropic convex body on $\mathbb{R}^n$ then

$$\sigma(\{\theta \in S^{n-1} : \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_2} \leqslant ct\sqrt{\log n} L_K\}) \geqslant e^{-cn/t^2},$$

for all $t \geqslant 1$, where $c > 0$ is an absolute constant. For larger values of $t$ a better estimate is provided. As an application we provide a dichotomy result for the problem of giving an upper bound for the mean width of an isotropic convex body: For any $2 \leqslant q \leqslant n$ we define the Dvoretzky numbers of the $L_q$-centroid bodies of $K$:

$$k_*(q) := n\left(\frac{w(Z_q(K))}{R(Z_q(K))}\right)^2.$$

We set $\rho_* = \rho_*(K) := \min_{2\leqslant q\leqslant n} k_*(q)$ and we prove that

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n}\min\{\sqrt{\rho_*}, \sqrt{n/\rho_*}\}L_K,$$

where $C > 0$ is an absolute constant. From the above estimate we recover the, presently, best (general) upper bound for the mean width of an isotropic convex body.

**3. Log-concave measures satisfying logarithmic Sobolev inequality.** Let $\mu$ be a Borel probability measure on $\mathbb{R}^n$. We say that $\mu$ satisfies the log-Sobolev inequality with constant $\kappa > 0$ if for any (locally) Lipschitz function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ we have

$$\mathrm{Ent}_\mu(f^2) \leqslant 2\kappa \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu,$$

where $\mathrm{Ent}_\mu(g)$ is the entropy of $g$ with respect to $\mu$: for any $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ we define

$$\mathrm{Ent}_\mu(g) := \mathbb{E}_\mu(g \log g) - \mathbb{E}_\mu(g) \log \mathbb{E}_\mu(g).$$

Starting with the observation that a log-concave isotropic measure $\mu$ on $\mathbb{R}^n$ which satisfies the log-Sobolev inequality with constant $\kappa$ is $\psi_2$ with constant $b = O(\sqrt{\kappa})$, we prove that it shares many of the geometric properties discussed in the previous Chapters. Finally, we show that a log-concave measure $\mu$ which satisfies the log-Sobolev inequality with constant $\kappa$, also has property $(\tau)$ with cost function $w(x) = \frac{c}{\kappa}\|x\|_2^2$, i.e. for any bounded measurable function $f$ on $\mathbb{R}^n$ one has

$$\int_{\mathbb{R}^n} e^{f \Box w} \, d\mu \int_{\mathbb{R}^n} e^{-f} \, d\mu \leqslant 1,$$

where $f \Box w$ is the minimal convolution of $f$ and $w$ defined by

$$(f \Box w)(x) := \inf\{f(y) + w(x-y) : y \in \mathbb{R}^n\}.$$