Το πρόγραμμα Ribe

Διπλωματική Εργασία
ΔΠΜΣ «Εφαρμοσμένες Μαθηματικές Επιστήμες»

Γιώργος Χασάπης

Επιβλέπων: Απόστολος Γιαννόπουλος

Εθνικο Μετσοβιο Πολυτεχνειο
Σχολη Εφαρμοσμενων Μαθηματικων και Φυσικων Επιστημων
Τομεας Μαθηματικων
Αθηνα, 2014

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Το πρόγραμμα Ribe . . . 1

1.2 Περιγραφή της δομής της εργασίας . . . 7

2 Το Θεώρημα του Ribe **17**

2.1 Το Θεώρημα του Ribe . . . 17

3 Τύπος και Συντύπος χώρων Banach **25**

3.1 Συναρτήσεις Rademacher και συναρτήσεις Walsh . . . 25

3.2 Η ανισότητα του Pisier για την προβολή Rademacher . . . 28

3.3 Τύπος και συντύπος . . . 36

3.4 Θεώρημα Maurey-Pisier: Η περίπτωση του τύπου . . . 43

3.4.1 p-ευσταθείς τυχαίες μεταβλητές . . . 43

3.4.2 Αναπαράσταση διανυσματικών ευσταθών τυχαίων μεταβλητών . . . 44

3.4.3 Βοηθητικά αποτελέσματα . . . 46

3.4.4 Ευσταθής τύπος p . . . 48

3.4.5 Απόδειξη του θεωρήματος Maurey-Pisier . . . 51

4 Μετρικός τύπος **53**

4.1 Σταθερά μετρικού τύπου p . . . 53

4.2 Απόδειξη του θεωρήματος των Bourgain, Milman και Wolfson . . . 55

4.3 Τύπος και μετρικός τύπος σε χώρους Banach . . . 61

4.4 Ο ορισμός του Enflo για τον μετρικό τύπο p . . . 67

5 Μετρικός συντύπος **71**

5.1 Ορισμοί και βοηθητικά αποτελέσματα . . . 71

5.2 Η ισοδυναμία μετρικού και Rademacher συντύπου . . . 78

5.2.1 Χώροι Hilbert . . . 78

5.2.2 K-κυρτοί χώροι Banach . . . 80

5.2.3 Από μετρικό σε Rademacher συντύπο 85
5.2.4 Από Rademacher σε μετρικό συντύπο 88
5.3 Ένα μετρικό ανάλογο του Θεωρήματος Maurey-Pisier 102

6 Εμφυτεύσεις μετρικών χώρων σε χώρους με νόρμα 115
6.1 Εμφυτεύσεις τυπου Fréchet 115
6.1.1 ℓ_∞-εμφυτεύσεις 117
6.1.2 Ευκλείδειες εμφυτεύσεις 119
6.2 Θεώρημα Dvoretzky για μετρικούς χώρους 123
6.2.1 Μια κατασκευή 129

7 Μη γραμμική θεωρία Dvoretzky 131
7.1 Η δομή των υπερμετρικών χώρων 131
7.2 Ένα θεώρημα εμφύτευσης με βάρη 135
7.3 Ο υπερμετρικός σκελετός ενός μετρικού χώρου 141
7.3.1 Αναγωγή του προβλήματος στην πεπερασμένη περίπτωση 142
7.3.2 Δένδρα και απεικονίσεις κατακερματισμού 145
7.3.3 Μια πρώτη απεικόνιση διαμέρισης 147
7.3.4 Αραιωμένα υποδένδρα 151
7.3.5 Φτιάχνοντας τη βέλτιστη απεικόνιση 158
7.3.6 Από απεικονίσεις κατακερματισμού σε θεωρήματα κάλυψης 164
7.4 Εφαρμογές 174
7.4.1 Πεπερασμένοι μετρικοί χώροι 174
7.4.2 Υπερμετρικά υποσύνολα μεγάλης Hausdorff διάστασης 176
7.4.3 Majorising measures 177

Α′ Συγκέντρωση του μέτρου στον διακριτό κύβο 183
Α′.1 Η ανισότητα του Talagrand 183
Α′.2 Ανισότητα του Azuma 189
Α′.3 Ανισότητα του Khintchine 193
Α′.4 Ανισότητα Kahane-Khintchine 196

Β′ Μέτρα και διάσταση Hausdorff 199
Β′.1 Η κατασκευή του Καραθεοδωρή 199
Β′.2 Μέτρα Hausdorff 200
Β′.3 Η διάσταση Hausdorff 202
Β′.4 Το λήμμα του Frostman 202

Βιβλιογραφία 209

Ευρετήριο 213

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

1.1 Το πρόγραμμα Ribe

Οι χώροι Banach είναι τοπολογικοί διανυσματικοί χώροι. Στη γραμμική θεωρία, μελετώνται οι ιδιότητες της τοπολογικής, της μετρικής και της γραμμικής δομής τους, και βασικό ρόλο παίζουν οι γραμμικές και συνεχείς απεικονίσεις: δύο χώροι Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ στην ουσία ταυτίζονται αν είναι γραμμικά ισομετρικοί, αν υπάρχει δηλαδή ένας γραμμικός και επί τελεστής $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε $\|Tx\|_Y = \|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Το 1932, οι Mazur και Ulam έδειξαν στο [46] ότι αν μια (όχι απαραίτητα γραμμική) συνάρτηση f απεικονίζει ισομετρικά τον X επί του Y, τότε η f είναι αφινική απεικόνιση (απλές αποδείξεις του γεγονότος αυτού μπορούν να βρεθούν στα [59], [72]). Σύμφωνα με ένα μεταγενέστερο αποτέλεσμα του Figiel [21], αν η $f : X \to Y$ είναι ισομετρία και $f(0) = 0$, τότε υπάρχει μοναδικός γραμμικός τελεστής $T : \overline{\mathrm{span}}(f(X)) \to X$ τέτοιος ώστε $\|T\| = 1$ και $T(f(x)) = x$, για κάθε $x \in X$. Τα αποτελέσματα αυτού του τύπου δείχνουν πως η γραμμική δομή των χώρων Banach παραμένει αναλλοίωτη κάτω από τη δράση (μη-γραμμικών) ισομετριών.

Από την άλλη μεριά, ο πλούτος της δομής των χώρων Banach καταρρέει αν κανείς αφαιρέσει κάθε ποσοτική παράμετρο και τους θεωρήσει απλώς και μόνο σαν τοπολογικούς χώρους: Συγκεκριμένα, κάθε δύο διαχωρίσιμοι απειροδιάστατοι χώροι Banach είναι ομοιομορφικοί (Kadec, [33]). Φαίνεται έτσι ότι ενώ ή γραμμική δομή ενός χώρου Banach καθορίζεται πλήρως από τη δομή που αυτός έχει σαν μετρικός χώρος, η τοπολογική δομή του από μόνη της δεν μπορεί να δώσει πληροφορίες για τις γραμμικές του ιδιότητες.

Στο μέσο των δύο αυτών άκρων, μπορεί κανείς να εστιάσει στους ομοιομορφισμούς μεταξύ χώρων Banach που είναι «ποσοτικά συνεχείς»: Αν $(\mathcal{M}, d_{\mathcal{M}})$ και $(\mathcal{N}, d_{\mathcal{N}})$ είναι δύο μετρικοί χώροι, θα λέμε ότι μια αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $f : \mathcal{M} \to \mathcal{N}$ είναι *uniform-ομοιομορφισμός*, αν τόσο η f όσο και η f^{-1} είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Η κατάσταση τότε αποκτά περισσότερο ενδιαφέρον: Το 1964 ο Lindenstrauss [38] έδειξε ότι, σε αντίθεση με το θεώρημα του Kadec, υπάρχουν πολλά ζεύγη διαχωρίσιμων απειροδιάστατων χώρων Banach, συμπεριλαμβανομένων των $L_p(\mu)$ και $L_q(\nu)$ αν $p \neq q$ και $\max\{p, q\} \geqslant 2$, που δεν είναι uniform-ομοιομορφικοί. Στο [14] ο Enflo συμπληρώνει τη δουλειά του Lindenstrauss, δείχνοντας ότι οι $L_p(\mu)$ και $L_q(\nu)$ δεν είναι uniform-ομοιομορφικοί αν $p \neq q$ και $p, q \in [1, 2]$, και στο [16] αποδεικνύει ότι ένας χώρος Banach X που είναι uniform-ομοιομορφικός με ένα χώρο Hilbert H, είναι αναγκαστικά και γραμμικά ισομορφικός με τον H. Μεταγενέστερη δουλειά των Johnson, Lindenstrauss και Schechtman [32] δίνει το ίδιο αποτέλεσμα για τους χώρους ℓ_p, $p \in (0, \infty)$ στη θέση του H. Από την άλλη μεριά, είναι γνωστό, από δουλειές των Aharoni και Lindenstrauss [1] και Ribe [64], ότι υπάρχουν ζεύγη uniform-ομοιομορφικών χώρων Banach, που όμως δεν είναι γραμμικά ισομορφικοί. Το να είναι λοιπόν δύο χώροι Banach uniform-ομοιομορφικοί είναι ένα γεγονός που μπορεί να εγγυηθεί ομοιότητες στη γραμμική τους δομή, χωρίς όμως εν γένει να συνεπάγεται την ύπαρξη ενός γραμμικού ισομορφισμού μεταξύ τους.

Το 1976 ο Martin Ribe δείχνει στο [63] ότι αν δύο χώροι Banach είναι uniform-ομοιομορφικοί, τότε έχουν τους «ίδιους» πεπερασμένης διάστασης υπόχωρους. Για να γίνουμε πιο συγκεκριμένοι, θα λέμε παρακάτω ότι, δεδομένων δύο χώρων Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$, ο X είναι *πεπερασμένα αναπαραστάσιμος* στον Y αν υπάρχει σταθερά $K \geqslant 1$ τέτοια ώστε, για κάθε πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο F του X υπάρχει ένας γραμμικός τελεστής $T : F \to Y$ που ικανοποιεί την $\|x\|_X \leqslant \|Tx\|_Y \leqslant K\|x\|_X$, για κάθε $x \in F$. Χρησιμοποιώντας αυτή την ορολογία, έχουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.1 (M. Ribe, 1976). *Αν δύο χώροι Banach X και Y είναι uniform-ομοιομορφικοί, τότε ο X είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y και ο Y είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.*

Εναλλακτικές αποδείξεις του Θεωρήματος 1.1.1 (από τους Heinrich και Mankiewicz [26], και Bourgain [10]) έκαναν την εμφάνισή τους αργότερα. Σημειώνουμε ότι το αντίστροφο του θεωρήματος του Ribe δεν ισχύει, καθώς για παράδειγμα για $p \in [1, \infty)\setminus\{2\}$ οι $L_p(\mathbb{R})$ και ℓ_p είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμοι ο ένας στον άλλο, αλλά όχι uniform-ομοιομορφικοί: Η περίπτωση $p = 1$ αποδείχθηκε από τον Enflo, η περίπτωση $p \in (1, 2)$ από τον Bourgain [10], και η περίπτωση $p \in (2, \infty)$ από τον Gorelik [23].

Το Θεώρημα 1.1.1 λέει, κάπως άτυπα, ότι οι ιδιότητες των πεπερασμένης διάστασης χώρων Banach που δεν αλλοιώνονται από γραμμικούς ισομορφισμούς, διατηρούνται μέσω των uniform-ομοιομορφισμών, όντας έτσι στην ουσία «μετρικές ιδιότητες». Το 1985, ο Bourgain [9], εγκαινιάζει αυτό που αργότερα ονομάστηκε «The Ribe program» από τους Ball και Naor, και αποτελεί μέχρι σήμερα μια σειρά από έρευνες πάνω στο παραπάνω φαινόμενο: Αν κομμάτια της τοπικής θεωρίας χώρων Banach είναι στην πραγματικότητα μια «μεταμφιεσμένη μη-γραμμική θεωρία», τότε καταφέρνοντας κανείς να τα μεταφράσει σωστά χρησιμοποιώντας μονό τη μετρική δομή, θα ήταν δυνατό να μελετηθούν πλέον στο γενικότερο πλαίσιο των μετρικών χώρων. Προτείνοντας μια τέτοια οπτική, ο Bourgain στο [9] κάνει την αρχή δίνοντας ένα μετρικό χαρακτηρισμό της υπερανακλαστικότητας. Λέμε ότι ένας χώρος Banach X είναι *υπερανακλαστικός*, αν κάθε χώρος Banach Y που είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X είναι ανακλαστικός. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα του Bourgain, ένας χώρος Banach X δεν είναι υπερανακλαστικός αν και μόνο αν περιέχει κόπιες από αυθαίρετα μεγάλα δυαδικά δένδρα (με άλλα λόγια: το άπειρο δυαδικό δένδρο T είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμο στον X σαν μετρικός χώρος – όπου τον ρόλο των γραμμικών ισομορφισμών αναλαμβάνουν πια οι εμφυτεύσεις $T \hookrightarrow X$).

Δύο άλλες ιδιότητες των χώρων Banach που εμπίπτουν στο πλαίσιο που περιγράψαμε παραπάνω είναι αυτές του τύπου και του συντύπου. Λέμε ότι ένας χώρος Banach X έχει *τύπο-p*, για κάποιο $p \in [1,2]$, αν υπάρχει σταθερά $T > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\mathop{\mathbb{E}}_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|_X^2 \right)^{1/2} \leqslant T \cdot \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^p \right)^{1/p}, \tag{1.1.1}$$

για κάθε $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq X$, ενώ αντίστοιχα ο X έχει *συντύπο-q*, για κάποιο $q \in [2,\infty)$, αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|_X^q \right)^{1/q} \leqslant C \cdot \left(\mathop{\mathbb{E}}_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} \left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|_X^2 \right)^{1/2}, \tag{1.1.2}$$

για κάθε $\{x_i\}_{i=1}^n \subseteq X$. Οι ανισότητες (1.1.1) και (1.1.2) μαζί, μπορούν να ιδωθούν σαν ένας γενικευμένος κανόνας του παραλληλογράμμου – εύκολα βλέπει κανείς ότι και οι δύο ισχύουν για $p = q = 2$, αν ο X είναι χώρος Hilbert. Οι ιδιότητες του τύπου και του συντύπου παίζουν καθοριστικό ρόλο στη γεωμετρία του χώρου. Είναι μια απλή παρατήρηση ότι ο ℓ_p έχει τύπο $\min\{p,2\}$ και συντύπο $\max\{2,p\}$. Το 1976, οι Maurey και Pisier δείχνουν στο [45] ότι οι ιδιότητες του τύπου και συντύπου χαρακτηρίζουν την παρουσία των χώρων ℓ_p μέσα σε έναν χώρο X:

Θεώρημα 1.1.2 (Maurey–Pisier, 1976)**.** *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Θέτουμε*

$$p_X = \sup\{p : \text{ ο } X \text{ έχει τύπο-}p\} \quad \text{και} \quad q_X = \inf\{q : \text{ ο } X \text{ έχει συντύπο-}q\}.$$

Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και κάθε $\varepsilon > 0$, ο X περιέχει n-διάστατους υπόχωρους $(1+\varepsilon)$-ισομορφικούς με τους $\ell_{p_X}^n$, $\ell_{q_X}^n$.

Από τον ορισμό τους, οι έννοιες του τύπου και του συντύπου έχουν να κάνουν με πεπερασμένες ακολουθίες στοιχείων του χώρου. Επιπλέον αν X και Y είναι δύο χώροι Banach και $T : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός ισομορφισμός, εύκολα φαίνεται ότι αν ο X έχει τύπο ή συντύπο p για κάποιο p, το ίδιο θα ισχύει και για τον $T(X)$, με μια διαφορετική ίσως σταθερά. Με αφορμή το θεώρημα του Ribe λοιπόν, θα αναρωτιόταν κανείς αν οι έννοιες αυτές μπορούν να επαναπροσδιοριστούν με τρόπο τέτοιο, ώστε να βρίσκουν ισχύ, και να δίνουν αντίστοιχες πληροφορίες για τη γεωμετρία σε έναν μετρικό χώρο, όχι απαραίτητα εφοδιασμένο με τη γραμμική δομή μιας νόρμας.

Σύντομα κάτι τέτοιο φάνηκε πιθανό. Μπορούμε να προσεγγίσουμε την ιδέα ορισμού ενός «μετρικού ανάλογου» του τύπου ως εξής: Δεδομένων $x_1, \ldots, x_n \in X$, μπορούμε να ορίσουμε $f : \{-1,1\}^n \to X$ μέσω της $f(\epsilon) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i$. Θέτουμε $-\epsilon = (-\epsilon_1, \ldots, -\epsilon_n)$ και, για $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\epsilon^{-i} = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_{i-1}, -\epsilon_i, \epsilon_{i+1}, \ldots, \epsilon_n)$. Με μια εφαρμογή της ανισότητας Hölder και χρησιμοποιώντας τον παραπάνω συμβολισμό, η ανισότητα (1.1.1) παίρνει τη μορφή
(1.1.3)

$$\left(\mathop{\mathbb{E}}_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} \|f(\epsilon) - f(-\epsilon)\|_X^2 \right)^{1/2} \leqslant T \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mathop{\mathbb{E}}_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} \|f(\epsilon) - f(\epsilon^{-i})\|_X^2 \right)^{1/2} .$$

Η ανισότητα (1.1.3) φαίνεται τώρα να σχετίζεται καθαρά με αποστάσεις μεταξύ σημείων του χώρου Banach X, με τον περιορισμό ότι ισχύει για τη συγκεκριμένη, γραμμική συνάρτηση f. Απαιτώντας η (1.1.3) να ισχύει *για κάθε* $f : \{-1,1\}^n \to X$, φτάνουμε στον ορισμό που οι Bourgain, Milman και Wolfson έδωσαν το 1986, στο [12].

Ορισμός 1.1.3 (Μετρικός τύπος). *Έστω $(\mathcal{M}, d)$ ένας μετρικός χώρος. Λέμε ότι ο $\mathcal{M}$ έχει μετρικό τύπο-p, $p \in [1,2]$, αν υπάρχει σταθερά T τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathcal{M}$,*

$$\left(\mathop{\mathbb{E}}_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^2 \right)^{1/2} \leqslant T \cdot n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \cdot \left(\sum_{i=1}^n \mathop{\mathbb{E}}_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} d(f(\epsilon), f(\epsilon^{-i}))^2 \right)^{1/2} . \tag{1.1.4}$$

Από παλιότερη δουλειά του Enflo (βλ. [14], [16]), πριν ακόμη το θεώρημα του Ribe κάνει την εμφάνισή του, συναντάται συχνά στη βιβλιογραφία και η παρακάτω παραλλαγή του Ορισμού 1.1.3: Λέμε ότι ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ έχει E-τύπο p, αν υπάρχει σταθερά T τέτοια ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathcal{M}$,

$$\mathop{\mathbb{E}}_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^p \leqslant T^p \cdot \sum_{i=1}^n \mathop{\mathbb{E}}_{\epsilon \in \{-1,1\}^n} d(f(\epsilon), f(\epsilon^{-i}))^p.$$

Το ερώτημα που γεννάται φυσιολογικά, είναι κατά πόσο οι παραπάνω ορισμοί συνάδουν με τον κλασικό ορισμό του τύπου στους χώρους Banach. Το ζήτημα αυτό, που ετέθη το 1976 από τον Enflo (για την περίπτωση του E-τύπου), παραμένει, στην πλήρη γενικότητά του, ανοικτό.

Πρόβλημα 1.1.4. *Είναι αλήθεια ότι αν ένας χώρος Banach X έχει τύπο-p, τότε έχει και E-τύπο p;*

Στο [12], οι Bourgain, Milman, Wolfson αποδεικνύουν ότι, με τον ορισμό 1.1.3, αν ένας χώρος Banach έχει τύπο-p, τότε έχει μετρικό τύπο p_1, για κάθε $p_1 < p$, και αντιστρόφως, αν έχει μετρικό τύπο p, τότε έχει και τύπο p_1, για κάθε $p_1 < p$. Σύντομα ο Pisier [62] δίνει μια νέα απόδειξη του γεγονότος αυτού, και απαντά σχεδόν στο ερώτημα του Enflo, αποδεικνύοντας ότι αν ένας χώρος Banach έχει τύπο-p, τότε έχει E-τύπο p_1, για κάθε $1 \leqslant p_1 < p$. Πέραν της συμφωνίας των δύο ορισμών, οι Bourgain, Milman και Wolfson, καταφέρνουν να αποδείξουν και ένα αποτέλεσμα ανάλογο με το θεώρημα των Maurey-Pisier, για την ειδικότερη περίπτωση $p = 1$. Συγκεκριμένα, ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ δεν έχει μετρικό τύπο-p για κανένα $p > 1$, αν και μόνο αν $c_{\mathcal{M}}(\{-1,1\}^n, \|\cdot\|_1) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου με $c_{\mathcal{M}}(\mathcal{N})$ συμβολίζουμε την ελάχιστη παραμόρφωση με την οποία ο μετρικός χώρος $\mathcal{N}$ εμφυτεύεται στον $\mathcal{M}$.

Από το [10] ακόμα, ο Bourgain είχε προαναγγείλει τα αποτελέσματα του [12], όπως επίσης είχε ασχοληθεί με τις δυσκολίες που ανέκυπταν στις προσπάθειες να δοθεί και ένας ανάλογος ορισμός του συντύπου σε γενικούς μετρικούς χώρους. Σε αντίθεση με τη γραμμική περίπτωση, η αντιστροφή της ανισότητας στην (1.1.4) δεν μπορεί να λειτουργήσει αποτελεσματικά στο γενικότερο πλαίσιο, με αποτέλεσμα να πρέπει να αναζητηθεί ένας πιο περίπλοκος ορισμός. Στην πραγματικότητα χρειάστηκε να περάσουν πάνω από 20 χρόνια, μέχρι το 2008 οπότε οι Mendel και Naor καταφέρνουν να ορίσουν την έννοια του συντύπου σε μετρικούς χώρους [51], με τρόπο τέτοιο ώστε να συμβαδίζει με τον αντίστοιχο ορισμό στους χώρους με νόρμα, αλλά και να δίνει ακόμη ένα μετρικό ανάλογο του θεωρήματος Maurey-Pisier, για την περίπτωση του τετριμμένου ($q = \infty$) συντύπου.

Ορισμός 1.1.5 (Μετρικός συντύπος). *Λέμε ότι ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ έχει μετρικό συντύπο-q, αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in 2\mathbb{N}$, έτσι ώστε για κάθε $f : \mathbb{Z}_m^n \to \mathcal{M}$ να ικανοποιείται η*

$$(1.1.5) \qquad \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \frac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^q \leqslant C^q m^q \mathop{\mathbb{E}}_{\delta \in \{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\delta), f(x))^q,$$

όπου με $\{e_i\}_{i=1}^n$ συμβολίζουμε τη συνήθη βάση του διακριτού τόρου $\mathbb{Z}_m^n$ και η πρόσθεση γίνεται modulo m.

Εναλλακτικοί ορισμοί του τύπου και του συντύπου, με συγκεκριμένες εφαρμογές, έχουν δοθεί τα τελευταία χρόνια από τους K. Ball (Markov type και cotype, βλ. [4],[5]), και Mendel-Naor (scaled Enflo type, [49]).

Όπως γίνεται αντιληπτό, ο επαναπροσδιορισμός πτυχών της θεωρίας χώρων Banach σε ένα καθαρά μετρικό πλαίσιο είναι μόνο η αρχή. Ο επόμενος σημαντικός στόχος του «προγράμματος Ribe» είναι, από τη μία η διερεύνηση του εύρους στο οποίο οι ιδιότητες των χώρων Banach μπορούν, μετά από την κατάλληλη «μετάφραση», να ρίξουν φως στη γεωμετρία των μετρικών χώρων, αλλά και η αποκάλυψη μετρικών φαινομένων που καθρεφτίζουν αντίστοιχα αποτελέσματα της γραμμικής θεωρίας, χωρίς τα πρώτα να βασίζονται, αυστηρά μιλώντας, σε «μετρικές μεταφράσεις» αντίστοιχων γραμμικών ιδιοτήτων.

Ένα τέτοιο παράδειγμα είναι το θεώρημα εμφύτευσης πεπερασμένων μετρικών χώρων σε χώρο Hilbert του Bourgain (1985), που γεννήθηκε μέσα από την διερεύνηση ενός μετρικού ανάλογου του θεωρήματος του John. Συγκεκριμένα, στο [8] ο Bourgain, χρησιμοποιώντας την πιθανοθεωρητική μέθοδο και μια εμφύτευση τύπου Fréchet, δείχνει ότι κάθε μετρικός χώρος με n σημεία εμφυτεύεται στον ℓ_2 με παραμόρφωση $O(\log n)$. Ένα χρόνο αργότερα, οι Bourgain, Figiel και Milman στο [11] μελετάνε για πρώτη φορά ένα πρόβλημα τύπου Dvoretzky για μετρικούς χώρους, δείχνοντας ότι ένας μετρικός χώρος με n σημεία έχει υποσύνολο πληθικότητας $\Omega(\log n)$ που εμφυτεύεται «σχεδόν ισομετρικά» σε χώρο Hilbert, με την παραπάνω λογαριθμική τάξη μεγέθους να είναι γενικά η βέλτιστη δυνατή.

Με την πάροδο των χρόνων, η εύρεση «μεγάλων» και «σχεδόν Ευκλείδειων» υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου αποτέλεσε αντικείμενο έρευνας και στη θεωρία αλγορίθμων: Σύνολα δεδομένων είναι συνήθως εφοδιασμένα με μια μετρική δομή, η οποία όμως σπανίως είναι γραμμική. Μια αποτελεσματική διαδικασία αντιμετώπισης ορισμένων αλγοριθμικών προβλημάτων είναι, εμφυτεύοντας κανείς με σχετικά μικρή παραμόρφωση ένα σύνολο δεδομένων σε μια γνωστή γραμμική γεωμετρία, να απολαμβάνει τη δυνατότητα χρήσης της γραμμικής δομής για την ανάλυσή του. Μια δομή ισομετρικά ισόμορφη με χώρο Hilbert (βλ. [70]), η οποία εμφανίζει πρόσθετες σημαντικές συνδυαστικές ιδιότητες και εμφανίζεται συχνά σε αυτήν την ερευνητική περιοχή, είναι αυτή του υπερμετρικού χώρου: Ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ λέγεται *υπερμετρικός*, αν η d ικανοποιεί μια ισχυρότερη μορφή της τριγωνικής ανισότητας, συγκεκριμένα

$$d(x,y) \leqslant \max\{d(x,z), d(x,y)\},$$

για κάθε $x, y, z \in \mathcal{M}$. Άρχισε να διαφαίνεται μάλιστα ότι αν κανείς αφήσει την παραμόρφωση της ζητούμενης εμφύτευσης να μεγαλώσει, το μέγεθος των «Ευκλείδειων» (ή «υπερμετρικών») υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου μπορεί να είναι τελικά σημαντικά μεγαλύτερο. Συμπληρώνοντας μια σειρά σχετικών ερευνών, ένα θεώρημα τύπου Dvoretzky για πεπερασμένους μετρικούς χώρους των Naor και Tao εξασφαλίζει ότι το παραπάνω είναι αλήθεια για κάθε παραμόρφωση $D > 2$.

Θεώρημα 1.1.6 (Naor, Tao [58]). *Έστω $D > 2$ και (X, d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Τότε υπάρχει υποσύνολο S του X τέτοιο ώστε $|S| \geqslant n^{\theta(D)}$ και το S εμφυτεύεται σε υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση D, όπου με $\theta(D)$ παραπάνω συμβολίζουμε τη μοναδική λύση της εξίσωσης*

$$\frac{2}{D} = (1-\theta)\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}.$$

Σε μια νέα κατεύθυνση, ο Tao προτείνει το 2006 μια παραλλαγή του μη-γραμμικού προβλήματος Dvoretzky, αντιστοιχίζοντας στην έννοια του «μεγέθους» όχι το πλήθος των στοιχείων, αλλά τη διάσταση Hausdorff ενός μετρικού χώρου, που αποτελεί μια γενίκευση της έννοιας της γραμμικής διάστασης στο πλαίσιο των χώρων με νόρμα. Λίγα χρόνια αργότερα, οι Mendel και Naor δίνουν μια απάντηση και σε αυτό το πρόβλημα, με το παρακάτω γενικό θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.7 (Mendel, Naor [54]). *Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $C_\varepsilon \in (0,\infty)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον X. Τότε υπάρχει συμπαγές σύνολο $S \subseteq X$ με τις ιδιότητες:*

(1) *Το S εμφυτεύεται με παραμόρφωση $O(1/\varepsilon)$ σε υπερμετρικό χώρο.*

(2) *Υπάρχει ένα Borel μέτρο πιθανότητας ν με* $\operatorname{supp}(\nu) = S$ *που ικανοποιεί τη σχέση*

$$\nu(B_d(x,r)) \leqslant (\mu(B_d(x, C_\varepsilon r)))^{1-\varepsilon}$$

για κάθε $x \in X$ *και* $r \in [0, \infty)$.

Έχοντας μεν ξεπηδήσει μέσα από το «πρόγραμμα Ribe» και τη σύνδεση γραμμικών και μετρικών ιδιοτήτων, αποτελέσματα σαν τα παραπάνω είναι ωστόσο πλέον καθαρά «μη-γραμμικά», εμπλέκοντας συχνά έννοιες που δεν έχουν κοντινούς συγγενείς στη θεωρία χώρων Banach. Είναι λοιπόν τουλάχιστον ενδιαφέρον πώς, σαράντα σχεδόν χρόνια μετά το θεώρημα του Ribe, έρευνες που γονιμοποιήθηκαν από το αποτέλεσμα αυτό έχουν αφήσει πια ένα σημαντικό αντίκτυπο σε ποικίλους τομείς των μαθηματικών από τη γεωμετρία χώρων Banach και τις πιθανότητες, μέχρι τη γεωμετρική θεωρία ομάδων ή τη θεωρητική επιστήμη των υπολογιστών.

1.2 Περιγραφή της δομής της εργασίας

Η παρούσα εργασία έχει σκοπό να παρουσιάσει ορισμένες πτυχές διαφορετικών ερευνών που έχουν λάβει χώρα τα τελευταία τριάντα χρόνια και έχουν σήμερα μπει κάτω από τη σκεπή του «προγράμματος Ribe». Έτσι, κάθε κεφάλαιο καταφέρνει να διατηρήσει μια σχετική αυτονομία. Κρίθηκε σκόπιμο ένα εισαγωγικό κεφάλαιο να πραγματεύεται τις έννοιες του τύπου και συντύπου χώρων Banach, προτού καταπιαστούμε με τους αντίστοιχους ορισμούς σε μετρικούς χώρους. Ακολουθεί μια σύντομη περιγραφή των περιεχομένων του κειμένου.

Κεφάλαιο 2. Το κεφάλαιο αυτό είναι αφιερωμένο στο θεώρημα του Ribe (Θεώρημα 1.1.1). Παρουσιάζουμε μια απόδειξη που μένει κοντά στο πνεύμα της αρχικής, κάνοντας χρήση συνδυαστικών και γεωμετρικών επιχειρημάτων. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι αν $\phi : X \to Y$ είναι ένας uniform-ομοιομορφισμός, τότε είναι συνάρτηση Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις, συγκεκριμένα για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει σταθερά $K > 0$ τέτοια ώστε

$$\|x-y\|_X \geqslant \delta \Longrightarrow \|\phi(x) - \phi(y)\|_Y \leqslant K \cdot \|x-y\|_X, \qquad x, y \in X.$$

Για τυχόντα υπόχωρο X_1 του X διάστασης n χρησιμοποιούμε το παραπάνω γεγονός βρίσκοντας μια βάση $\{x_i\}_{i=1}^n \in X_1$ τέτοια ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^n k_i x_i \right\|_X \geqslant 1,$$

για κάθε επιλογή ακεραίων $\{k_i\}_{i=1}^n$, και θεωρούμε τα σύνολα

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{i=1}^n k_i x_i \,\middle|\, k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, n \right\},$$

και για δεδομένα $u \in \mathcal{M}$, $s > 0, m \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(u,s,m) = \left\{ u + s\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \;\middle|\; k_i \in \mathbb{Z},\ \max_{1\leqslant i\leqslant n} |k_i| \leqslant m \right\}.$$

Για κάθε $\mathcal{L}$ ορίζουμε έπειτα $\phi_{\mathcal{L}} : s\mathcal{M} \to Y$ μέσω της ϕ, με

$$\phi_{\mathcal{L}}(y) = |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{z\in\mathcal{L}} \left(\phi(z+y) - \phi(z)\right).$$

και δείχνουμε ότι είναι K-Lipschitz και «σχεδόν γραμμική», αν αφήσουμε το μέγεθος του $\mathcal{L}$ να μεγαλώσει αυθαίρετα – οπότε και μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι τα κανονικοποιημένα σημεία του $\mathcal{L}$ σχηματίζουν ένα αρκετά πυκνό δίκτυο στη μοναδιαία σφαίρα του X_1. Μπορούμε τότε να βρούμε γραμμικό τελεστή $T_{\mathcal{L}} : X_1 \to Y$ με $\|T_{\mathcal{L}}\| \leqslant 2K$. Για να εξασφαλίσουμε τέλος ότι υπάρχει ο ζητούμενος ισομορφισμός, πρέπει να περάσουμε στην εύρεση ενός κατάλληλου $\mathcal{L}_1 \subseteq \mathcal{L}$ για το οποίο χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα δυϊσμού εξασφαλίζουμε ότι $\|T_{\mathcal{L}_1}\| \geqslant 1/4$. Έχουμε δείξει τότε ότι για τον τυχαίο πεπερασμένης διάστασης υπόχωρο X_1 του X υπάρχει υπόχωρος $Y_1 = T_{\mathcal{L}_1}(X_1)$ του Y ώστε $d(X_1, Y_1) \leqslant 8K$.

Κεφάλαιο 3. Χρησιμοποιούμε στοιχεία από τη θεωρία πιθανοτήτων και την αρμονική ανάλυση σε χώρους Banach. Ξεκινάμε έτσι στην παράγραφο 3.1 με τις βασικές ιδιότητες των συναρτήσεων Rademacher $\{r_i\}_{i=1}^n$ και Walsh $\{w_A\}_{A\subseteq[n]}$. Αν X είναι ένας χώρος Banach, η Rademacher προβολή μιας συνάρτησης $f : E_2^n := \{-1,1\}^n \to X$ ορίζεται στην παράγραφο 3.2 ως εξής: Θεωρούμε τον γραμμικό τελεστή $Rad_n : L_2(E_2^n; X) \to \mathrm{span}(\{r_i : i = 1,\ldots,n\} \otimes X)$ με

$$Rad_n f(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon) x_{\{i\}},$$

όπου $x_{\{i\}} = \int_{E_2^n} r_i f$. Θέτουμε τότε

$$K_r^{(n)}(X) := \|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)},$$

και αναζητούμε άνω φράγμα για την $K_r^{(n)}(X)$ στην περίπτωση που ο X είναι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Βλέποντας την $Rad_n f$ σαν τη συνέλιξη της f με την πραγματική συνάρτηση $g_r(\epsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)$, μπορούμε να δείξουμε ότι $K_r^{(n)}(X) \leqslant \sqrt{n}$. Ο Pisier στο [60] έδωσε μια καλύτερη εκτίμηση.

Θεώρημα 1.2.1 (Pisier)**.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά C τέτοια ώστε, για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X,*

$$K_r^{(n)}(X) \leqslant C\log(n+1).$$

Η παράγραφος 3.2 είναι αφιερωμένη στην απόδειξη του παραπάνω αποτελέσματος.

Στην παράγραφο 3.3 δίνουμε τους ορισμούς του τύπου και του συντύπου χώρων Banach και εξετάζουμε τις βασικές τους ιδιότητες. Συγκεκριμένα, αν X είναι ένας χώρος Banach, τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $1 \leqslant p \leqslant 2$ ονομάζουμε $T_p(X,n)$ τη μικρότερη σταθερά T τέτοια ώστε, για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$,

$$\left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 d\epsilon \right)^{1/2} \leqslant T \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p}. \tag{1.2.1}$$

Ακόμη, για κάθε $2 \leqslant q < \infty$ ονομάζουμε $C_q(X,n)$ τη μικρότερη σταθερά C για την οποία

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 d\epsilon \right)^{1/2}, \tag{1.2.2}$$

για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$. Αν

$$T_p(X) = \sup_m T_p(X,m) \quad \text{και} \quad C_q(X) = \sup_m C_q(X,m),$$

λέμε ότι ο X έχει *τύπο-p* (αντ. *συντύπο-q*) αν $T_p(X) < \infty$ (αντ. $C_q(X) < \infty$). Εύκολα προκύπτει ότι αν ένας χώρος Banach έχει τύπο-$p > 1$, τότε έχει και τύπο-p_1 για κάθε $1 \leqslant p_1 < p$, ενώ αν έχει συντύπο-$q < \infty$, τότε έχει και συντύπο-q_1 για κάθε $q < q_1 \leqslant \infty$, ενώ κάθε χώρος Banach ισομορφικός με χώρο Hilbert έχει τύπο και συντύπο-2 (στην πραγματικότητα ισχύει και το αντίστροφο, βλ. Kwapien [35]). Ισχύει ακόμη για ένα χώρο Banach X ότι, αν ο X^* έχει τύπο-p για κάποιο $p > 1$, τότε ο X έχει συντύπο-q, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p. Το αντίστροφο είναι αλήθεια μόνο στην περίπτωση που ο X είναι K-κυρτός, ισχύει δηλαδή ότι $\sup_n K_r^{(n)}(X) < \infty$. Συγκεκριμένα, αποδεικνύουμε το παρακάτω

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και για κάθε $m \geqslant 1$ έχουμε*

$$C_q(X,m) \leqslant T_p(X^*,m) \leqslant K_r^{(m)}(X)\, C_q(X,m).$$

Αποδεικνύουμε στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Kahane-Khintchine, ότι οι χώροι L_p έχουν τύπο-$\min\{p,2\}$ και συντύπο-$\max\{2,p\}$ και τίποτα καλύτερο. Το ότι το ίδιο ισχύει και για τους ℓ_p είναι μια απλή παρατήρηση. Αν θέσουμε $p_X = \sup\{p :$ ο X έχει τύπο-$p\}$ και $q_X = \inf\{q :$ ο X έχει συντύπο-$q\}$, το Θεώρημα των Maurey-Pisier λέει ότι τόσο ο ℓ_{p_X} όσο και ο ℓ_{q_X} είναι πεπερασμένα αναπαραστάσιμοι στον X.

Στην παράγραφο 3.4 παρουσιάζουμε μία μεταγενέστερη απόδειξη του Pisier του γεγονότος αυτού για την περίπτωση του τύπου. Για τις ανάγκες της απόδειξης χρησιμοποιούνται εργαλεία από τις πιθανότητες και εισάγονται οι έννοιες της p-ευσταθούς τυχαίας μεταβλητής και του p-ευσταθούς τύπου χώρων Banach: Λέμε ότι μια τυχαία μεταβλητή θ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ είναι p-ευσταθής για κάποιο $p \in [1,2]$, αν

$$\mathbb{E}(e^{it\theta}) = e^{-\sigma_p^p |t|^p/2},$$

για μια σταθερά $\sigma_p > 0$ που εξαρτάται μόνο από το p. Ο X έχει ευσταθή τύπο-p αν ο παραπάνω ορισμός του τύπου ικανοποιείται όταν αντικαταστήσουμε τις ϵ_i από μια ακολουθία $\{\theta_i\}$ ανεξάρτητων, συμμετρικών p-ευσταθών τυχαίων μεταβλητών. Μπορούμε να δείξουμε ότι αν ο X έχει ευσταθή τύπο-p, τότε έχει και τύπο-p, για κάθε $p > 1$. Από την άλλη, αν ο X έχει τύπο-p, τότε έχει ευσταθή τύπο-r, για κάθε $1 \leqslant r < p$. Το βασικό αποτέλεσμα της παραγράφου είναι το παρακάτω θεώρημα του Pisier

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω $1 < p < 2$ και έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ ώστε κάθε χώρος Banach X ευσταθούς τύπου p να περιέχει υπόχωρο διάστασης $k = \lfloor \delta(ST_p(X))^q \rfloor$ ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικός με τον ℓ_p^k.*

Κεφάλαιο 4. Εισάγουμε τον ορισμό των Bourgain, Milman και Wolfson για τον τύπο ενός μετρικού χώρου: Ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ έχει μετρικό τύπο-p αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε, για κάθε n και για κάθε $f : \{-1,1\} \to \mathcal{M}$ ισχύει

$$\left(\int_{E_2^n} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^2 d\mu(\epsilon) \right)^{1/2} \leqslant C n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^n \int_{E_2^n} (\Delta_i f(\epsilon))^2 d\mu(\epsilon) \right)^{1/2},$$

όπου

$$\Delta_i f(\epsilon) = d(f(\epsilon), f(\epsilon_1, \ldots, -\epsilon_i, \ldots, \epsilon_n)).$$

Με τον παραπάνω ορισμό και γράφοντας C_p^n για τον κύβο E_2^n εφοδιασμένο με την ℓ_p-μετρική, έχουμε το θεώρημα

Θεώρημα 1.2.4. *Ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ δεν έχει μετρικό τύπο-p για κανένα $p > 1$ αν και μόνον αν για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ο $\mathcal{M}$ περιέχει $(1+\varepsilon)$-ισομορφικές κόπιες του C_1^n.*

Η απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος παρουσιάζεται στην παράγραφο 4.2. Στην 4.3 εξετάζουμε την ισοδυναμία των ορισμών του μετρικού τύπου και του τύπου σε χώρους Banach:

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω $1 \leqslant p < 2$ και έστω X ένας χώρος Banach.*

(i) *Αν ο X έχει τύπο p τότε ο X έχει μετρικό τύπο p_1 για κάθε $p_1 < p$.*

(ii) *Αντίστροφα, αν ο X έχει μετρικό τύπο p τότε ο X έχει τύπο p_1 για κάθε $p_1 < p$.*

Η απόδειξη που παρουσιάζουμε εδώ οφείλεται στον Pisier, [62], και στηρίζεται στην απόδειξη της παρακάτω ανισότητας

Λήμμα 1.2.6. *Έστω X ένας χώρος Banach και έστω $f : \{-1,1\}^n \to X$. Για κάθε $p \geqslant 1$ και για κάθε $n \geqslant 1$,*

$$\left(\int \left\| f - \int f d\mu \right\|^p d\mu \right)^{1/p} \leqslant 2e \log n \left(\int \left\| \sum_{i=1}^n \zeta_i D_i f(\epsilon) \right\|^p d\mu(\epsilon) d\mu(\zeta) \right)^{1/p},$$

όπου

$$D_i f(\epsilon) = \frac{1}{2}\big(f(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_i, \ldots, \epsilon_n) - f(\epsilon_1, \ldots, -\epsilon_i, \ldots, \epsilon_n)\big).$$

Στην παράγραφο 4.4 τέλος, παρουσιάζουμε ένα αντίστοιχο αποτέλεσμα για μια παραλλαγή του παραπάνω ορισμού του μετρικού τύπου, που έχει τις ρίζες της στον Enflo:

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω X ένας χώρος Banach. Αν ο X έχει τύπο-$p > 1$, τότε υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $f : \{-1,1\}^n \to X$,*

$$\int d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^r d\mu \leqslant C \sum_{i=1}^{n} \int \Delta_i(f)^r d\mu,$$

για κάθε $1 \leqslant r < p$.

Κεφάλαιο 5. Παρουσιάζουμε εδώ τη δουλειά των Mendel και Naor [51] πάνω στον ορισμό του συντύπου σε μετρικούς χώρους. Δεδομένων ενός μετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$, $n \in \mathbb{N}$, $m \in 2\mathbb{N}$ και $1 \leqslant p \leqslant q$, συμβολίζουμε με $\Gamma_q^{(p)}(X; n, m)$ το infimum των $\Gamma > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $f : \mathbb{Z}_m^n \to \mathcal{M}$,

(1.2.3)
$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \frac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^p \leqslant \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \mathop{\mathbb{E}}_{\delta \in \{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\delta), f(x))^p.$$

Λέμε ότι ο μετρικός χώρος $\mathcal{M}$ έχει μετρικό συντύπο-q, αν

$$\Gamma_q^{(q)}(X) := \sup_{n \in \mathbb{N}} \inf_{m \in 2\mathbb{N}} \Gamma_q^{(q)}(X; n, m) < \infty.$$

Στην παράγραφο 5.1 εξετάζουμε κάποιες βασικές ιδιότητες που απορρέουν από τον παραπάνω ορισμό και θα φανούν χρήσιμες παρακάτω. Στην παράγραφο 5.2 καταπιανόμαστε με τη σχέση του νέου ορισμού με το συντύπο σε χώρους με νόρμα, δείχνοντας ότι ένας χώρος Banach X έχει συντύπο-q αν και μόνον αν έχει μετρικό συντύπο-q, συγκεκριμένα

$$\frac{1}{2\pi} C_q(X) \leqslant \Gamma_q^{(q)}(X) \leqslant 108 C_q(X).$$

Η αριστερή ανισότητα αποδεικνύεται εύκολα – αρκεί να εφαρμόσουμε τον ορισμό του μετρικού συντύπου σε μια κατάλληλη, γραμμική συνάρτηση $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$. Για την αντίστροφη μεριά της ισοδυναμίας χρησιμοποιείται με ουσιαστικό τρόπο η γεωμετρία του $\mathbb{Z}_m^n$, στον οποίο έχουμε δώσει μετρική δομή βλέποντάς τον σαν ένα ℓ_∞-γράφημα Cayley. Η απόδειξη των παραπάνω εκτείνεται στα εδάφια 5.2.3 και 5.2.4. Προηγουμένως, στο 5.2.1 ασχολούμαστε ξεχωριστά με την περίπτωση των χώρων Hilbert. Χρησιμοποιώντας εργαλεία αρμονικής ανάλυσης στον $\mathbb{Z}_m^n$, δείχνουμε ότι κάθε χώρος Hilbert έχει μετρικό συντύπο-2. Στο 5.2.2 καταπιανόμαστε με την περίπτωση που ο X είναι ένας K-κυρτός χώρος Banach με συντύπο-q, δίνοντας τότε και μια βέλτιστη εκτίμηση για την τάξη μεγέθους του μικρότερου $m \in 2\mathbb{N}$ για το οποίο η (1.2.3) ικανοποιείται, για δεδομένα $n \in \mathbb{N}$ και $\Gamma > 0$. Συγκεκριμένα,

Θεώρημα 1.2.8. *Έστω X ένας K-κυρτός χώρος Banach με Rademacher συντύπο q. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $m \in 4\mathbb{N}$ ισχύει ότι*

$$m \geqslant \frac{n^{1/q}}{C_q^{(p)}(X)K_r^{(p)}(X)} \Longrightarrow \Gamma_q^{(p)}(X;n,m) < \infty.$$

Η παράγραφος 5.3 τέλος, είναι αφιερωμένη στην απόδειξη του παρακάτω θεωρήματος, τύπου Maurey-Pisier.

Θεώρημα 1.2.9. *Έστω $(\mathcal{M},d)$ ένας μετρικός χώρος. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(α) $\Gamma_q^{(2)}(\mathcal{M}) = \infty$, *για κάθε* $q < \infty$.

(β) *Για κάθε $m,n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\varepsilon > 0$, ο μετρικός χώρος*

$$[m]_\infty^n = (\{0,1,\ldots,m-1\}^n, \|\cdot\|_\infty)$$

εμφυτεύεται με παραμόρφωση $1+\varepsilon$ στον $\mathcal{M}$.

Κεφάλαιο 6. Αντικείμενο του κεφαλαίου αυτού είναι προβλήματα εμφύτευσης πεπερασμένων μετρικών χώρων σε χώρους με νόρμα, και συγκεκριμένα τους ℓ_∞ και ℓ_2. Στην παράγραφο 6.1 ασχολούμαστε με εμφυτεύσεις τύπου Fréchet. Στο εδάφιο 6.1.1 παρουσιάζουμε ένα θεώρημα του Matoušek [42] σχετικά με τη μεγαλύτερη δυνατή διάσταση m για την οποία ένας μετρικός χώρος με n σημεία εμφυτεύεται στον ℓ_∞^m:

Θεώρημα 1.2.10 (Matoušek)**.** *Έστω $\gamma = 2q-1 \geqslant 3$ ένας περιττός φυσικός αριθμός και έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Υπάρχουν $m = O(qn^{1/q}\log n)$ και γ-εμφύτευση του X στον ℓ_∞^m.*

Στο εδάφιο 6.1.2 δείχνουμε το θεώρημα εμφύτευσης του Bourgain, [8]

Θεώρημα 1.2.11 (Bourgain)**.** *Κάθε μετρικός χώρος $(\mathcal{M},d)$ με n σημεία εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο με παραμόρφωση $O(\log n)$.*

Σημειώνουμε ότι, από το Λήμμα των Johnson-Lindenstrauss, έπεται τότε ότι μπορούμε να βρούμε $m = O(\log n)$ έτσι ώστε ο Ευκλείδειος χώρος του θεωρήματος να είναι ο ℓ_2^m. Το Θεώρημα 1.2.11 προηγήθηκε χρονολογικά του 1.2.10, οι τεχνικές των αποδείξεων όμως παραμένουν κοντά, κάνοντας χρήση συγγενών πιθανοθεωρητικών τεχνικών.

Στην επόμενη παράγραφο καταπιανόμαστε για πρώτη φορά με το ζήτημα εύρεσης ενός «μεγάλου» και «Ευκλείδειου» υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου. Συγκεκριμένα παρουσιάζουμε το ακόλουθο μετρικό ανάλογο του θεωρήματος του Dvoretzky, των Bourgain, Figiel και Milman, [11]:

Θεώρημα 1.2.12. *Για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε μετρικός χώρος (X,d) έχει υποσύνολο Y πληθικότητας $|Y| \geqslant C_\varepsilon \log|X|$ που εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον ℓ_2, όπου C_ε παραπάνω είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το ε.*

Αποδεικνύεται επιπλέον στο εδάφιο 6.2.1 ότι το παραπάνω αποτέλεσμα είναι βέλτιστο, όσον αφορά το μέγεθος του συνόλου Y, υπό την εξής έννοια: Μπορούμε να εφοδιάσουμε το σύνολο $[n] = \{1, \cdots, n\}$ με μια μετρική d, έτσι ώστε κανένα υποσύνολο X του $[n]$ με $n \geqslant |X| \geqslant 3 + 2\log_2 n$ να μην εμφυτεύεται με παραμόρφωση μικρότερη από $1+\varepsilon_0$ στον ℓ_2, για κάποιο $\varepsilon_0 > 0$.

Κεφάλαιο 7. Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε κάποια πρόσφατα αποτελέσματα της μη-γραμμικής θεωρίας Dvoretzky. Στην παράγραφο 7.1 κάνουμε μια εισαγωγή στις ιδιότητες των υπερμετρικών χώρων οι οποίοι παίζουν βασικό ρόλο παρακάτω. Ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{U}, d)$ λέγεται υπερμετρικός αν

$$d(x,y) \leqslant \max\{d(x,z), d(z,y)\},$$

για κάθε $x, y, z \in \mathcal{U}$, και η d λέγεται τότε υπερμετρική. Βλέπουμε πώς, χάρη στην παραπάνω ισχυρή μορφή της τριγωνικής ανισότητας, ορίζεται μέσω της d μια σχέση ισοδυναμίας στα στοιχεία κάθε υπερμετρικού χώρου $\mathcal{U}$, διαμερίζοντάς τον έτσι σε επιμέρους υπερμετρικά (με την επαγόμενη μετρική) σύνολα. Μπορεί έτσι κανείς να βρει μια ακολουθία όλο και λεπτότερων διαμερίσεων του $\mathcal{U}$, και να αντιστοιχίσει καθεμιά από αυτές με τα διαδοχικά επίπεδα ενός γραφοθεωρητικού δένδρου, το σύνολο των φύλλων του οποίου ταυτίζεται τελικά με τον $\mathcal{U}$. Η εικόνα αυτή χρησιμοποιείται για να δείξουμε με επαγωγή ότι ένας πεπερασμένος υπερμετρικός χώρος είναι ισομετρικά ισόμορφος με μια σφαίρα χώρου Hilbert.

Η παράγραφος 7.2 αφιερώνεται στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.6, η οποία χρησιμοποιεί πιθανοθεωρητικά επιχειρήματα. Στην πραγματικότητα αποδεικνύουμε το παρακάτω ισχυρότερο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 1.2.13. *Έστω $(\mathcal{M}, d)$ πεπερασμένος μετρικός χώρος και $w_1, w_2 : X \to [0,\infty)$ δύο μη αρνητικές συναρτήσεις βάρους. Τότε για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $S \subseteq X$ που εμφυτεύεται σε κάποιον υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση*

$$D = \frac{2}{\varepsilon(1-\varepsilon)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} \tag{1.2.4}$$

ενώ ταυτόχρονα ικανοποιεί την

$$\left(\sum_{x \in S} w_1(x)\right) \cdot \left(\sum_{x \in X} w_2(x)\right)^{\varepsilon} \geqslant \sum_{x \in X} w_1(x) \cdot w_2(x)^{\varepsilon}. \tag{1.2.5}$$

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 1.1.6 δεν είναι παρά η περίπτωση $w_1 = w_2 = 1$ παραπάνω, το γενικότερο επιχείρημα όμως θα μας φανεί χρήσιμο στη συνέχεια. Στην παράγραφο 7.3 παρουσιάζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.7, η οποία ανάγεται στην απόδειξη του εξής:

Θεώρημα 1.2.14 (Mendel, Naor). *Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $c_\varepsilon \in (0,\infty)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Κάθε μετρικός χώρος μέτρου $(\mathcal{M},d,\mu)$ έχει κλειστό υποσύνολο $S \subseteq \mathcal{M}$ τέτοιο ώστε ο (S,d) να εμφυτεύεται με παραμόρφωση $9/\varepsilon$ σε υπερμετρικό χώρο και επιπλέον, για κάθε $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ και $\{r_i\}_{i\in I} \subseteq [0,\infty)$ τέτοια ώστε οι μπάλες $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ να καλύπτουν το S, να έχουμε*

$$\sum_{i\in I} \mu(B(x_i, c_\varepsilon r_i))^{1-\varepsilon} \geqslant \mu(X)^{1-\varepsilon}.$$

Σε αντίθεση με την προηγούμενη παράγραφο, η μέθοδος που χρησιμοποιείται εδώ είναι κατά βάση ντετερμινιστική και βασίζεται στην κατασκευή κατάλληλου υποσυνόλου S του $\mathcal{M}$ που ικανοποιεί τις ζητούμενες ιδιότητες. Η κατασκευή στηρίζεται στην εύρεση μιας «δενδροειδούς» ακολουθίας διαμερίσεων του $\mathcal{M}$ με συγκεκριμένα χαρακτηριστικά. Περνώντας στη συνέχεια σε ένα κατάλληλο υποδένδρο και χρησιμοποιώντας και το Θεώρημα 1.2.13 βρίσκουμε τελικά το ζητούμενο σύνολο S.

Κλείνοντας, στην παράγραφο 7.4 παρουσιάζουμε συνοπτικά την πορεία των τελευταίων χρόνων στο πεδίο των μη-γραμμικών Ευκλείδειων εμφυτεύσεων. Δίνουμε μέσω του Θεωρήματος 1.1.7 μια απάντηση στο μη-γραμμικό πρόβλημα Dvoretzky για πεπερασμένους μετρικούς χώρους (εδάφιο 7.4.1), για την περίπτωση που αφήνουμε την παραμόρφωση D να είναι οσοδήποτε μεγαλύτερη από το 2. Για παραμορφώσεις $D \in [1,2)$ η λογαριθμική τάξη μεγέθους των Ευκλείδειων υποσυνόλων που μας δίνει το θεώρημα των Bourgain-Figiel-Milman είναι γενικά η καλύτερη δυνατή. Εδώ βλέπουμε ότι για $D > 2$ μπορούμε να περάσουμε σε πολυωνυμικής τάξης (ως προς την πληθικότητα του $\mathcal{M}$) «υπερμετρικά» υποσύνολα. Στην τιμή $D = 2$ ωστόσο, όπου παρατηρείται το παραπάνω φαινόμενο μετάβασης, δεν είναι ακόμη γνωστό αν μπορουμε να έχουμε ένα κάτω φράγμα καλύτερο από $\log|\mathcal{M}|$.

Πέρα από την πεπερασμένη περίπτωση, το Θεώρημα 1.2.14 έχει να δώσει πολλά περισσότερα. Στο εδάφιο 7.4.2 συμβολίζουμε με $\dim_H(X)$ τη διάσταση Hausdorff ενός μετρικου χώρου X και παρουσιάζουμε μια απάντηση στο πρόβλημα του Tao μέσα από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.15. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ και $a > 0$, κάθε μετρικός χώρος X με $\dim_H(X) \geqslant a$ έχει κλειστό υποσύνολο $S \subseteq X$ με $\dim_H(S) \geqslant (1-\varepsilon)a$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση C/ε σε υπερμετρικό χώρο.*

Σαν μια τρίτη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.2.14, παρουσιάζουμε τέλος στο εδάφιο 7.4.3 ένα αποτέλεσμα που δίνει μια απλή απόδειξη του majorising measures θεωρήματος του M. Talagrand (βλ. [67],[69]). Συγκεκριμένα, αν $\{G_x\}_{x\in X}$ είναι μια γκαουσιανή ανέλιξη, μπορούμε να δώσουμε δομή μετρικού χώρου στο σύνολο δεικτών X, εφοδιάζοντάς το με τη μετρική

$$d(x,y) = \left(\mathbb{E}[(G_x - G_y)^2]\right)^{1/2}.$$

Αν $\mathcal{P}_X$ είναι η οικογένεια των Borel μέτρων πιθανότητας στον μετρικό χώρο (X,d), συμ-

βολίζουμε
$$\gamma_2(X,d)=\inf_{\mu\in\mathcal{P}_X}\sup_{x\in X}\int_0^\infty\sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B_d(x,r))}\right)}\,dr.$$
Από παλιότερη δουλειά του Fernique είναι γνωστό ότι $\gamma_2(X,d)\leqslant c\cdot\mathbb{E}[\sup_{x\in X}G_x]$ για κάποια σταθερά c, ενώ επιπλέον το αντίστροφο ισχύει στην περίπτωση που ο X είναι ένας υπερμετρικός χώρος. Το 1985 ο Talagrand μέσω ενός θεωρήματος τύπου Dvoretzky, έδειξε τελικά ότι αυτό είναι αλήθεια και στη γενικότερη περίπτωση, εξασφαλίζοντας έτσι την «ισοδυναμία» των $\gamma_2(X,d)$ και $\mathbb{E}[\sup_{x\in X}G_x]$. Παρουσιάζουμε εδώ την απόδειξη του ενδιάμεσου αυτού βήματος.

Θεώρημα 1.2.16. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c,D\in(0,\infty)$ τέτοιες ώστε κάθε πεπερασμένος μετρικός χώρος (X,d) έχει υποσύνολο $S\subseteq X$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε υπερμετρικό χώρο, και επιπλέον*
$$\gamma_2(S,d)\geqslant c\cdot\gamma_2(X,d).$$

Κλείνουμε το κείμενο με δύο παραρτήματα: Στο **Παράρτημα Α′** παραθέτουμε την ανισότητα του Talagrand στο διακριτό κύβο και την ανισότητα του Azuma, πριν αποδείξουμε με τη μέθοδο των martingales την ανισότητα Khintchine και την ανισότητα Kahane-Khintchine. Στο **Παράρτημα Β′** δίνονται οι ορισμοί του μέτρου και της διάστασης Hausdorff, και μια απόδειξη του Λήμματος του Frostman, ενός αποτελέσματος που εγγυάται την ύπαρξη συγκεκριμένων μέτρων Borel σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο θετικής διάστασης Hausorff, γεγονός που παίζει ουσιαστικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.15.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Το Θεώρημα του Ribe

2.1 Το Θεώρημα του Ribe

Θα λέμε ότι δύο χώροι Banach X και Y είναι *uniform-ομοιομορφικοί* αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : X \to Y$ τέτοιος ώστε οι ϕ και ϕ^{-1} να είναι και ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Λέμε ακόμη ότι ο X είναι *αδρά πεπερασμένα αναπαραστάσιμος* στον Y αν υπάρχει σταθερά $C \geqslant 1$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε υπόχωρο X_1 του X με $\dim X_1 = n$, υπάρχει Y_1 υπόχωρος του Y έτσι ώστε $d(X_1, Y_1) \leqslant C$, όπου με $d(X_1, Y_1)$ συμβολίζουμε την απόσταση Banach-Mazur των X_1, Y_1.

Θεώρημα 2.1.1 (Ribe)**.** *Έστω X, Y δύο uniform-ομοιομορφικοί χώροι Banach. Τότε ο X είναι αδρά πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον Y και ο Y είναι αδρά πεπερασμένα αναπαραστάσιμος στον X.*

Αν (X, d), (Y, σ) είναι δύο μετρικοί χώροι, θα λέμε παρακάτω ότι μια συνάρτηση $f : X \to Y$ *ικανοποιεί συνθήκη Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις* (ή ότι *είναι Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις*), αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει σταθερά $K_\delta > 0$ τέτοια ώστε

$$\text{αν } x, y \in X \text{ και } d(x,y) \geqslant \delta \ \text{ τότε } \ \sigma(f(x), f(y)) \leqslant K_\delta \cdot d(x,y).$$

Ξεκινάμε με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω X, Y δύο χώροι Banach. Αν μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις.*

Απόδειξη. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f, υπάρχει $d > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $u, v \in X$,

$$\|u - v\|_X < d \Longrightarrow \|f(u) - f(v)\|_Y < 1.$$

Έστω $\delta > 0$, και έστω $x, y \in X$ με $\|x - y\|_X \geqslant \delta$. Θέτουμε $m = \lceil 2\|x-y\|_X/d \rceil$ και επιλέγουμε $x = a_0, a_1, \dots, a_m = y$ σημεία τέτοια ώστε

$$\|a_i - a_{i-1}\|_X = \frac{\|x-y\|_X}{m} \leqslant \frac{d}{2} < d$$

για κάθε $i = 1, \dots, m$ (συγκεκριμένα, επιλέγουμε $a_i = x + \frac{i}{m}(y - x)$). Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|f(a_i) - f(a_{i-1})\|_Y \leqslant m \leqslant \frac{2\|x-y\|_X}{d} + 1 \leqslant \left(\frac{2}{d} + \frac{1}{\delta}\right) \|x - y\|_X,$$

όπου, για την τελευταία ανισότητα, χρησιμοποιούμε την $\|x - y\|_X \geqslant \delta$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο με $K_\delta = \frac{2}{d} + \frac{1}{\delta}$. □

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1. Έστω $\phi : X \to Y$ ένας uniform-ομοιομορφισμός. Τότε από την Πρόταση 2.1.2, οι ϕ και ϕ^{-1} είναι Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις. Πολλαπλασιάζοντας την ϕ με κατάλληλη σταθερά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $K > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $\|x - y\|_X \geqslant 1$ να ισχύει

$$\|x - y\|_X \leqslant \|\phi(x) - \phi(y)\|_Y \leqslant K \cdot \|x - y\|_X. \tag{2.1.1}$$

Έστω X_1 υπόχωρος του X με $\dim X_1 = n$. Επιλέγουμε μια Auerbach βάση $\{x_i\}_{i=1}^n$ του X_1. Δηλαδή, τα $x_1, \dots, x_n$ ικανοποιούν την

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_X \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

για κάθε ακολουθία $\{a_i\}_{i=1}^n$ πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \right\|_X \geqslant 1$$

για κάθε επιλογή ακεραίων $\{k_i\}_{i=1}^n$ που δεν είναι όλοι ίσοι με μηδέν. Ορίζουμε

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \;\middle|\; k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Επίσης, για σταθερό $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\mathcal{M}_m = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \;\middle|\; k_i \in \mathbb{Z}, |k_i| \leqslant m, i = 1, \dots, n \right\}.$$

Έστω $m, s \in \mathbb{N}$. Κάθε σύνολο $\mathcal{L}$ της μορφής $u + s\mathcal{M}_m$, όπου $u \in \mathcal{M}$, θα λέγεται πεπερασμένο lattice μεγέθους $(2m+1)^n$ και βήματος s.

Για κάθε πεπερασμένο lattice $\mathcal{L}$ βήματος s, ορίζουμε $\phi_{\mathcal{L}} : s\mathcal{M} \to Y$ με

$$\phi_{\mathcal{L}}(y) = |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{L}} (\phi(z+y) - \phi(z)).$$

Κάθε $\phi_{\mathcal{L}}$ είναι K-Lipschitz: αν $x \neq y \in s\mathcal{M}$ τότε

$$\begin{aligned}
\|\phi_{\mathcal{L}}(x) - \phi_{\mathcal{L}}(y)\|_Y &= |\mathcal{L}|^{-1} \left\| \sum_{z \in \mathcal{L}} (\phi(z+x) - \phi(z)) - \sum_{z \in \mathcal{L}} (\phi(z+y) - \phi(z)) \right\|_Y \\
&= |\mathcal{L}|^{-1} \left\| \sum_{z \in \mathcal{L}} (\phi(z+x) - \phi(z+y)) \right\|_Y \\
&\leqslant |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{L}} \|\phi(z+x) - \phi(z+y)\|_Y \\
&\leqslant |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{L}} K \cdot \|x-y\|_X = K \cdot \|x-y\|_X,
\end{aligned}$$

γιατί η ϕ είναι K-Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις, και $\|x-y\|_X \geqslant 1$.

Επιπλέον, η $\phi_{\mathcal{L}}$ είναι σχεδόν προσθετική, με την εξής έννοια: αν $y, z \in s\mathcal{M}$ τότε

$$\begin{aligned}
\phi_{\mathcal{L}}(y+z) &= |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{x \in \mathcal{L}} (\phi(x+y+z) - \phi(x)) \\
&= |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{x \in \mathcal{L}} (\phi(x+y+z) - \phi(x+y)) + |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{x \in \mathcal{L}} (\phi(x+y) - \phi(x)) \\
&= \phi_{y+\mathcal{L}}(z) + \phi_{\mathcal{L}}(y).
\end{aligned}$$

Η επόμενη παρατήρηση είναι ότι, αν θεωρήσουμε πως $|\mathcal{L}| = (2m+1)^n$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, σταθεροποιήσουμε $y, z \in s\mathcal{M}$ και αφήσουμε το m να μεγαλώσει αυθαίρετα, τότε τα περισσότερα στοιχεία των συνόλων $\mathcal{L}$ και $y + \mathcal{L}$ – άρα και οι περισσότεροι όροι των $\phi_{\mathcal{L}}(z)$ και $\phi_{y+\mathcal{L}}(z)$ – συμπίπτουν: Αν $y = s\sum_{i=1}^n k_i^{(y)} x_i$, θέτουμε $m_y = \max_{i=1,\dots,n} |k_i^{(y)}|$, ώστε να έχουμε $|k_i^{(y)}| \leqslant m_y$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αν για κάποιο x υποθέσουμε ότι $x = s\sum_{i=1}^n k_i^{(x)} x_i \in \mathcal{L} \setminus (y+\mathcal{L})$, τότε $x - y \notin \mathcal{L}$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ ώστε

$$m < |k_{i_0}^{(z)} - k_{i_0}^{(y)}| \leqslant |k_{i_0}^{(z)}| + |k_{i_0}^{(y)}| \leqslant m + |k_{i_0}^{(y)}|,$$

δηλαδή ώστε $m - |k_{i_0}^{(y)}| < |k_{i_0}^{(z)}| \leqslant m$. Υπάρχουν λοιπόν $|k_{i_0}^{(y)}|$ το πλήθος δυνατές επιλογές για το $|k_{i_0}^{(z)}|$ και άρα το πλήθος των z με αυτή την ιδιότητα για κάποια συντεταγμένη i_0 θα είναι $2|k_{i_0}^{(y)}|(2m+1)^{n-1} \leqslant 2m_y(2m+1)^{n-1}$. Έπεται έτσι ότι

$$|\mathcal{L} \setminus (y+\mathcal{L})| \leqslant \sum_{i=1}^n 2|k_i^{(y)}|(2m+1)^{n-1} \leqslant \sum_{i=1}^n 2m_y(2m+1)^{n-1} = 2nm_y(2m+1)^{n-1}.$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε επίσης ότι

$$|(y+\mathcal{L})\setminus\mathcal{L}|\leqslant 2nm_y(2m+1)^{n-1},$$

οπότε $|(y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}|\leqslant 4nm_y(2m+1)^{n-1}$.

Από τα παραπάνω, μπορούμε τελικά να ισχυριστούμε ότι για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει κατάλληλο $m=m(\varepsilon,K,\|y\|_X)\in\mathbb{N}$ ώστε

$$|\mathcal{L}|>(2m+1)^n\Rightarrow\frac{|(y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}|}{|\mathcal{L}|}\leqslant\frac{\varepsilon}{K}.$$

Επιπλέον, για κάθε $z\neq 0$, $z\in s\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\|\phi_{y+\mathcal{L}}(z)-\phi_{\mathcal{L}}(z)\|_Y&=|\mathcal{L}|^{-1}\Bigg\|\sum_{x\in(y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}}(\phi(x+z)-\phi(x))\Bigg\|_Y\\&\leqslant|\mathcal{L}|^{-1}\sum_{x\in(y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}}\|\phi(x+z)-\phi(x)\|_Y\\&\leqslant|\mathcal{L}|^{-1}\sum_{x\in(y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}}K\cdot\|z\|_X,\end{aligned}$$

αφού

$$\|x+z-x\|_X=\|z\|_X=\|s\sum_{i=1}^n k_i^{(z)}x_i\|_X\geqslant s\geqslant 1$$

και η ϕ είναι K-Lipschitz για αποστάσεις $\geqslant 1$. Έχουμε δείξει έτσι ότι

$$\begin{aligned}\|\phi_{\mathcal{L}}(y+z)-\phi_{\mathcal{L}}(y)-\phi_{\mathcal{L}}(z)\|_Y=\|\phi_{y+\mathcal{L}}(z)-\phi_{\mathcal{L}}(z)\|_Y&\leqslant\frac{|(y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}|}{|\mathcal{L}|}K\cdot\|z\|_X\\&\leqslant\varepsilon\|z\|_X.\end{aligned}$$

Με ένα επαγωγικό επιχείρημα βλέπουμε ότι, για κάθε $m_0\in\mathbb{N}$, για κάθε $x=s\sum_{i=1}^n k_ix_i\in s\mathcal{M}_{m_0}$ και για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει $m=m(\varepsilon,m_0,K,s)\in\mathbb{N}$ ώστε

$$\|\phi_{\mathcal{L}}(x)-\sum_{i=1}^n k_i\phi_{\mathcal{L}}(sx_i)\|_Y\leqslant\varepsilon\|x\|_X. \tag{2.1.2}$$

Θα χρειαστούμε στη συνέχεια και την ακόλουθη παρατήρηση:

Ισχυρισμός 2.1.3. *Αν $m_0>2n/\varepsilon$, τότε το σύνολο $\{\frac{x}{\|x\|}:x\in s\mathcal{M}_{m_0}\}$ είναι ε-πυκνό στη μοναδιαία σφαίρα S_{X_1} του X_1.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $s = 1$. Έστω $y \in S_{X_1}$. Μπορούμε να γράψουμε $y = \frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{\|\sum_{i=1}^n t_i x_i\|}$, για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $\{t_i\}_{i=1}^n$ κατάλληλα επιλεγμένους ώστε να ισχύει η $\max|k_i - t_i| \leqslant 1$ (το $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ να είναι «κοντά» σε κάποιο σημείο του $\mathcal{M}_{m_0}$) για κάποια $\{k_i\} \subset \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $\max|k_i| = m_0$ (ο «κύβος» στον οποίο ανήκει το $\sum_{i=1}^n t_i x_i$ να βρίσκεται στο «σύνορο» του lattice). Προσθαφαιρώντας τον όρο $\frac{\sum_{i=1}^n t_i x_i}{\|\sum_{i=1}^n k_i x_i\|}$ και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\left\|\frac{\sum_{i=1}^n k_i x_i}{\|\sum_{i=1}^n k_i x_i\|} - y\right\| \leqslant \frac{2\sum_{i=1}^n |k_i - t_i|}{\|\sum_{i=1}^n k_i x_i\|} \leqslant \frac{2\sum_{i=1}^n |k_i - t_i|}{\max|k_i|} \leqslant \frac{2n}{m_0},$$

οπότε επιλέγοντας $m_0 > 2n/\varepsilon$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Ορίζουμε τώρα τον γραμμικό τελεστή $T_{\mathcal{L}} : X_1 \to Y$ μέσω των $T_{\mathcal{L}}(sx_i) = \phi_{\mathcal{L}}(sx_i)$, για κάθε $i = 1, \dots, n$. Από την ανισότητα (2.1.2) έχουμε τότε ότι, για κάθε $x \in s\mathcal{M}_{m_0}$,

$$\|\phi_{\mathcal{L}}(x) - T_{\mathcal{L}}(x)\|_Y \leqslant \varepsilon\|x\|_X, \quad x \in s\mathcal{M}_{m_0}, \tag{2.1.3}$$

και άρα

$$\left\|T_{\mathcal{L}}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \frac{\|\phi_{\mathcal{L}}(x)\|}{\|x\|} + \varepsilon < K + \varepsilon.$$

Έστω τώρα $u \in S_{X_1}$. Από τον Ισχυρισμό 2.1.3 μπορούμε τότε να βρούμε $\{u_j\}_{j=0}^\infty \in \{\frac{x}{\|x\|} : x \in s\mathcal{M}_{m_0}\}$ τέτοια ώστε $u = \sum_{j=0}^\infty \varepsilon^j u_j$. Επιλέγοντας $\varepsilon < \frac{K}{2K+1}$, έχουμε τότε ότι

$$\|T_{\mathcal{L}}(u)\| \leqslant \sum_{j=0}^\infty \varepsilon^j \|T_{\mathcal{L}}(u_j)\| < \frac{K+\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2K.$$

Για να εξασφαλίσουμε περαιτέρω ότι ο τελεστής $T_{\mathcal{L}}$ είναι αντιστρέψιμος και να βρούμε ένα φράγμα για την $\|T_{\mathcal{L}}^{-1}\|$, θα πρέπει να κάνουμε μια ιδιαίτερη επιλογή του συνόλου $\mathcal{L}$.

Ισχυρισμός 2.1.4. *Έστω $l \in \mathbb{Z}^+$ και $y \in \mathcal{M}$. Τότε υπάρχει $M = M(l, y) > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε πεπερασμένο lattice $\mathcal{L}_1$ μεγέθους $(2m+1)^n$, όπου $m > M$, υπάρχουν sublattice $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$ μεγέθους $(2l+1)^n$ και βήματος $s \in \mathbb{N}$, και $u^* \in Y^*$ με $\|u\|_* = 1$, τέτοια ώστε*

$$\langle u^*, \phi(x + sy) - \phi(x)\rangle \geqslant \frac{s\|y\|_X}{2},$$

για κάθε $x \in \mathcal{L}_2$.

Δεχόμενοι προς στιγμή την αλήθεια του παραπάνω ισχυρισμού, προχωρούμε ως εξής: Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ και $m_0 \in \mathbb{N}$ όπως παραπάνω, και θεωρούμε μια αρίθμηση $\{y_i\}_{i=1}^p$, $p = (2m_0+1)^n - 1$, των μη μηδενικών στοιχείων του $\mathcal{M}_{m_0}$. Επιλέγουμε ένα πολύ μεγάλο $m_1 = m_1(\varepsilon, m_0, p)$ και θέτουμε $\mathcal{L}_1 = \mathcal{M}_{m_1}$. Εφαρμόζουμε τότε το επιχείρημα του ισχυρισμού p

φορές διαδοχικά για κάθε y_i για να βρούμε sublattices $\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{L}_{p+1} = \mathcal{L}$ και μοναδιαία $u_i^* \in Y^*$ τέτοια ώστε

$$\langle u_i^*, \phi(x+sy_i) - \phi(x)\rangle \geqslant \frac{s\|y_i\|_X}{2},$$

για κάθε $i = 1, \ldots, p$ και κάθε $x \in \mathcal{L}$, όπου s το βήμα του $\mathcal{L}$. Σημειώνουμε ότι το m_1 μπορεί να επιλεγεί αρκετά μεγάλο ώστε για το $\mathcal{L}$ να μην παύει η ισχύς της (2.1.3), καθώς και ότι $\|T_{\mathcal{L}}\| \leqslant 2K$.

Έχουμε πλέον ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, p$,

$$\begin{aligned}\|\phi_{\mathcal{L}}(sy_i)\|_Y &= |\mathcal{L}|^{-1}\left\|\sum_{x\in\mathcal{L}}(\phi(x+sy_i)-\phi(x))\right\|_Y \\ &= |\mathcal{L}|^{-1}\|u_i^*\|_*\left\|\sum_{x\in\mathcal{L}}(\phi(x+sy_i)-\phi(x))\right\|_Y \\ &\geqslant |\mathcal{L}|^{-1}\sum_{x\in\mathcal{L}}\langle u_i^*, \phi(x+sy_i)-\phi(x)\rangle \geqslant \frac{s\|y_i\|_Y}{2}.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $\varepsilon < \frac{1}{6}$. Από την (2.1.3) και την παραπάνω σχέση για $s = 1$ ισχύει ότι

$$\|\phi_{\mathcal{L}}(y_i) - T_{\mathcal{L}}(y_i)\|_Y \leqslant \frac{\|y_i\|_X}{6} \leqslant \frac{\|\phi_{\mathcal{L}}(y_i)\|_Y}{3},$$

απ΄ όπου έπεται ότι

$$\|T_{\mathcal{L}}(y_i)\|_Y \geqslant 2\frac{\|\phi_{\mathcal{L}}(y_i)\|_Y}{3} \geqslant \frac{\|y_i\|_X}{3},$$

για κάθε $i = 1, \ldots, p$. Για κάθε μοναδιαίο $z \in X_1$ τέλος, μπορούμε να επιλέξουμε $i \in \{1, \ldots, p\}$ ώστε $\|z - \frac{y_i}{\|y_i\|_X}\|_X < \varepsilon$, οπότε

$$\|T_{\mathcal{L}}(z)\|_Y \geqslant \left\|T_{\mathcal{L}}(\frac{y_i}{\|y_i\|_X})\right\|_Y - \left\|T_{\mathcal{L}}(z - \frac{y_i}{\|y_i\|_X})\right\|_Y \geqslant \frac{1}{3} - 2K\varepsilon \geqslant \frac{1}{4},$$

αν $\varepsilon < \frac{1}{24K}$. Έχουμε δείξει έτσι ότι ο $T_{\mathcal{L}}$ είναι αντιστρέψιμος, και $\|T_{\mathcal{L}}^{-1}\| \leqslant 4$, οπότε

$$d(X_1, Y_1) \leqslant \|T_{\mathcal{L}}\| \cdot \|T_{\mathcal{L}}^{-1}\| \leqslant 8K,$$

όπου $Y_1 := T_{\mathcal{L}}(X_1)$. □

Απόδειξη του Ισχυρισμού 2.1.4. Μπορούμε χάριν απλότητας να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{L}_1$ έχει βήμα ίσο με 1, και θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$, $N > l$. Θέτουμε επιπλέον

$$a_j = \sup\left\{2^{-j}\frac{\|\phi(x+2^jy) - \phi(x)\|_Y}{\|y\|_X} : x \in \mathcal{L}_1 \text{ τέτοιο ώστε } x + 2^jy \in \mathcal{L}_1\right\}.$$

Ισχύει τότε, από την (2.1.1), ότι $1 \leqslant a_j \leqslant K$ για κάθε j. Ακόμη, για $x, x + 2^{j-1}y \in \mathcal{L}_1$,

$$\begin{aligned}
&2^{-j} \frac{\|\phi(x+2^j y) - \phi(x)\|_Y}{\|y\|_X} \\
&\quad \leqslant 2^{-j} \frac{\|\phi(x+2^j y) - \phi(x+2^{j-1}y)\|_Y + \|\phi(x+2^{j-1}y) - \phi(x)\|_Y}{\|y\|_X} \\
&\quad = 2^{-j} \frac{\|\phi((x+2^{j-1}y) + 2^{j-1}y) - \phi(x+2^{j-1}y)\|_Y + \|\phi(x+2^{j-1}y) - \phi(x)\|_Y}{\|y\|_X} \\
&\quad \leqslant 2^{-1}(a_{j-1} + a_{j-1}),
\end{aligned}$$

οπότε $a_j \leqslant a_{j-1}$. Επιλέγουμε τέλος $M > 0$ με την ιδιότητα: Αν $m > M$, τότε τα σύνολα στον ορισμό των a_j παραπάνω είναι μη κενά για έναν αριθμό από j αρκετά μεγάλο, ώστε να μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει j_0 τέτοιο ώστε $a_{j_0} \leqslant a_{j_0+N} + 2^{-N}$. Αυτό είναι συνέπεια της αρχής του περιστερώνα: Αν το m είναι αρκετά μεγάλο, τότε θα μπορούμε να βρούμε $j_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{j_0+N} \in [\sup(a_j) - 2^{-N}, \sup(a_j)]$. Αν υποθέσουμε τότε ότι $a_{j_0} > a_{j_0+N} + 2^{-N}$, έπεται ότι $a_{j_0} > \sup(a_j)$, που είναι άτοπο.

Έστω τώρα το $z \in \mathcal{L}_1$ εκείνο, για το οποίο ισχύει ότι

$$a_{j_0+N} = 2^{-j_0-N} \frac{\|\phi(z + 2^{j_0+N}y) - \phi(z)\|_Y}{\|y\|_X}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z = 0$ (αλλιώς εργαζόμαστε στον $\mathcal{L}_1 - z$) καθώς και, περνώντας στο sublattice $\mathcal{L}_1 \cap 2^{j_0}\mathcal{L}_1$ και με επαναπροσαρμογή της κλίμακας, ότι $j_0 = 0$. Έχουμε τότε ότι

$$a_0 - 2^N \leqslant a_N = \frac{2^{-N}\|\phi(2^N y) - \phi(0)\|_Y}{\|y\|_X}.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει μοναδιαίο $u^* \in Y^*$ ώστε $\langle u^*, \phi(2^N y) - \phi(0)\rangle = 2^N a_N \|y\|_X$. Θεωρούμε $v \in \mathcal{M}_m$, και θέτουμε $C = 1 + 2K \cdot \max\left\{\frac{\|v\|_X}{\|y\|_X} : v \in \mathcal{M}_m\right\}$. Μετά από κατάλληλες πράξεις είναι φανερό ότι,

$$\begin{aligned}
&\langle u^*, \phi(v + 2^N y) - \phi(v)\rangle \geqslant \\
&\qquad \geqslant \langle u^*, \phi(2^N y) - \phi(0)\rangle - \|\phi(v+2^N y) - \phi(2^N y)\|_Y - \|\phi(v) - \phi(0)\|_Y \\
&\qquad \geqslant 2^N a_N \|y\|_X - 2K\|v\|_X \geqslant 2^N(a_0 - 2^{-N})\|y\|_X - 2K\|v\|_X \\
&\qquad \geqslant (2^N a_0 - C)\|y\|_X. \qquad (2.1.4)
\end{aligned}$$

Λόγω γραμμικότητας ισχύει επιπλέον ότι

$$\langle u^*, \phi(v + 2^N y) - \phi(v)\rangle = \sum_{k=0}^{2^N-1} \langle u^*, \phi(v + (k+1)y) - \phi(v + ky)\rangle, \qquad (2.1.5)$$

όπου για κάθε έναν από τους όρους του παραπάνω αθροίσματος έχουμε

$$\begin{aligned}\langle u^*, \phi(v+(k+1)y) - \phi(v+ky)\rangle &= \langle u^*, \phi((v+ky)+y) - \phi(v+ky)\rangle \\ &\leqslant \|\phi((v+ky)+y) - \phi(v+ky)\|_Y \leqslant a_0\|y\|_X. \end{aligned} \tag{2.1.6}$$

Έστω $v \in \mathcal{M}_m$. Ορίζουμε

$$J_v = \left\{ k \in \{0, 1, \ldots, 2^N - 1\} : \langle u^*, \phi(v+(k+1)y) - \phi(v+ky)\rangle < \frac{\|y\|_X}{2} \right\}.$$

Από τις (2.1.4), (2.1.5), (2.1.6) και τον παραπάνω ορισμό έπεται τότε ότι

$$\begin{aligned}|J_v|\frac{\|y\|_X}{2} + (2^N - |J_v|)a_0\|y\|_X &= \sum_{k\in J_v} \frac{\|y\|_X}{2} + \sum_{k\notin J_v} a_0\|y\|_X \\ &> \langle u^*, \phi(v+2^N y) - \phi(v)\rangle \geqslant (2^N a_0 - C)\|y\|_X,\end{aligned}$$

και από την παραπάνω και το γεγονός ότι $a_0 \geqslant 1$, είναι άμεσο ότι

$$C > |J_v|\left(a_0 - \frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{|J_v|}{2}.$$

Έχουμε έτσι ότι $|J_v| < 2C$, για κάθε $v \in \mathcal{M}_m$. Έπεται τότε ότι, επιλέγοντας $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left| \bigcup_{v\in\mathcal{M}_m} J_v \right| < (2m+1)^n \cdot 2C \leq 2^N,$$

αναγκαστικά υπάρχει $k_0 \in \{0, \ldots, 2^N - 1\}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in \mathcal{M}_m$,

$$\langle u^*, \phi(v+(k_0+1)y) - \phi(v+k_0y)\rangle \geq \frac{\|y\|_X}{2}.$$

Θέτοντας $\mathcal{L}_2 = k_0y + \mathcal{M}_m$ έχουμε $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ και $\langle u^*, \phi(x+y) - \phi(x)\rangle \geqslant \frac{\|y\|_X}{2}$ για κάθε $x \in \mathcal{L}_2$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Τύπος και Συντύπος χώρων Banach

3.1 Συναρτήσεις Rademacher και συναρτήσεις Walsh

Ορισμός 3.1.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τον διακριτό κύβο $E_2^n = \{-1,1\}^n$ και για κάθε $i = 1, \dots, n$ ορίζουμε $r_i : E_2^n \to \{-1,1\}$ με

$$r_i(\epsilon) = r_i(\epsilon_1, \dots, \epsilon_i, \dots, \epsilon_n) = \epsilon_i.$$

Οι r_i είναι οι συναρτήσεις Rademacher.

Βλέπουμε τον E_2^n σαν χώρο πιθανότητας με το ομοιόμορφο μέτρο μ_n: για κάθε $f : E_2^n \to \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\int_{E_2^n} f(\epsilon) d\mu_n(\epsilon) = \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon \in E_2^n} f(\epsilon).$$

Γενικότερα, αν X είναι ένας χώρος Banach, για κάθε $f : E_2^n \to X$ ορίζουμε

$$\int_{E_2^n} f(\epsilon) d\mu_n(\epsilon) = \frac{1}{2^n} \sum_{\epsilon \in E_2^n} f(\epsilon) \in X.$$

Για κάθε $q \geqslant 1$ ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f : E_2^n \to X$ είναι χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L_q(E_2^n;X)} := \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|_X^q d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/q}.$$

Οι συναρτήσεις Rademacher αποτελούν ένα ορθοκανονικό σύστημα του $L_2(E_2^n;\mathbb{R})$, γεγονός που για κάθε $a_1,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ μας δίνει την ταυτότητα

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right\|_{L_2(E_2^n;\mathbb{R})}=\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2}. \tag{3.1.1}$$

Πιο γενικά, έχουμε το παρακάτω κλασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 3.1.2 (ανισότητα του Khintchine). *Έστω $0<p<\infty$. Τότε υπάρχουν σταθερές $A_p,B_p>0$ τέτοιες ώστε για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $a=(a_1,\dots,a_n)\in\ell_2^n(\mathbb{R})$,*

$$A_p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2}\leqslant\left\|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right\|_{L_p(E_2^n;\mathbb{R})}\leqslant B_p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} \tag{3.1.2}$$

Παρατήρηση 3.1.3. Από την ανισότητα Hölder προκύπτει ότι για $p\geqslant 2$ η αριστερή ανισότητα στην (3.1.2) ισχύει με $A_p=1$, ενώ για $p\leqslant 2$ η δεξιά ανισότητα ικανοποιείται με $B_p=1$.

Η ανισότητα του Khintchine δείχνει ότι όλες οι L_p-νόρμες είναι ισοδύναμες στον χώρο $\mathrm{span}\{r_i|i=1,\dots,n\}$. Το γεγονός αυτό τελικά έχει ισχύ και σε κάθε χώρο Banach X:

Θεώρημα 3.1.4 (ανισότητα Kahane–Khintchine). *Για κάθε $1\leqslant p<\infty$ υπάρχει σταθερά $C_p>0$ τέτοια ώστε, για κάθε χώρο Banach X και για κάθε πεπερασμένη ακολουθία $(x_i)_{i=1}^n\subset X$,*

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|\leqslant\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^p\right)^{1/p}\leqslant C_p\cdot\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|. \tag{3.1.3}$$

Στο Παράρτημα Α′ παρουσιάζουμε αποδείξεις των Θεωρημάτων 3.1.2 και 3.1.4.

Ορισμός 3.1.5. Για καθε $\emptyset\neq A\subseteq\{1,\dots,n\}$, ορίζουμε $w_A:E_2^n\to\{-1,1\}$ με

$$w_A(\epsilon)=\prod_{i\in A} r_i(\epsilon).$$

Θέτουμε επιπλέον $w_\emptyset\equiv 1$. Οι συναρτήσεις w_A, $A\subseteq\{1,\dots,n\}$, είναι οι συναρτήσεις Walsh. Παρατηρούμε ότι $r_i=w_{\{i\}}$.

Όπως θα δούμε παρακάτω, οι συναρτήσεις Walsh αποτελούν ορθοκανονική βάση του $L_2(E_2^n;\mathbb{R})$, και κάθε συνάρτηση $f:E_2^n\to X$ μπορεί να αναπαρασταθεί σαν άθροισμα στοιχείων του συνόλου $\big\{w_A\,|\,A\subseteq\{1,\dots,n\}\big\}\otimes X$.

Πρόταση 3.1.6. *Κάθε $w_A : E_2^n \to \{-1,1\}$ είναι ομομορφισμός ομάδων τάξης 2, δηλαδή $w_A^2 \equiv 1$. Επιπλέον, ισχύουν οι σχέσεις ορθογωνιότητας*

$$\sum_{\epsilon} w_A(\epsilon)w_B(\epsilon) = 2^n \delta_{AB} \tag{3.1.4}$$

και

$$\sum_{A} w_A(\epsilon)w_A(\zeta) = 2^n \delta_{\epsilon\zeta}, \tag{3.1.5}$$

όπου $\delta_{xy} = 1$ αν $x = y$ και $\delta_{xy} = 0$ αν $x \neq y$.

Απόδειξη. Οι σχέσεις ορθογωνιότητας είναι απλές - η πρώτη προκύπτει από το γεγονός ότι $w_A w_B = w_{A\triangle B}$ και το ότι $\sum_\epsilon w_{A\triangle B}(\epsilon) = 0$ εκτός αν $A\triangle B = \emptyset$. Για την δεύτερη, αν $\epsilon = \zeta$ τότε προφανώς $w_A(\epsilon\zeta) = 1$, οπότε $\sum_A w_A(\epsilon)w_A(\zeta) = 2^n$. Αν πάλι υποθέσουμε ότι υπάρχει $j \in \{1,\dots,n\}$ τέτοιο ώστε $\epsilon_j \neq \zeta_j$, τότε

$$\sum_{A} w_A(\epsilon\zeta) = \sum_{\substack{A\\ j\in A}} w_A(\epsilon\zeta) + \sum_{\substack{A\\ j\notin A}} w_A(\epsilon\zeta) = \sum_{\substack{A\\ j\in A}} -w_{A\setminus\{j\}}(\epsilon\zeta) + \sum_{\substack{A\\ j\notin A}} w_A(\epsilon\zeta) = 0.$$

□

Πρόταση 3.1.7. *Κάθε $f : E_2^n \to X$ μπορεί να γραφεί κατά μοναδικό τρόπο στη μορφή*

$$f(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon)x_A,$$

για κάποια $x_A \in X$.

Απόδειξη. Για κάθε $A \subseteq \{1,\dots,n\}$ θέτουμε

$$x_A = \int_{E_2^n} w_A(\epsilon)f(\epsilon)d\mu_n(\epsilon).$$

Βλέπουμε τότε, χρησιμοποιώντας την (3.1.5), ότι για κάθε $\epsilon \in E_2^n$

$$\begin{aligned}\sum_A w_A(\epsilon)x_A &= \sum_A w_A(\epsilon)\left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta)f(\zeta)d\mu_n(\zeta)\right)\\ &= \int_{E_2^n} f(\zeta)\left(\sum_A w_A(\epsilon)w_A(\zeta)\right)d\mu_n(\zeta) = f(\epsilon).\end{aligned}$$

Για τη μοναδικότητα, υποθέτουμε ότι $f(\epsilon) = \sum_B w_B(\epsilon) y_B$ για κάποια $y_B \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned} x_A &= \int_{E_2^n} w_A(\zeta) f(\zeta) d\mu_n(\zeta) = \int_{E_2^n} w_A(\zeta) \left(\sum_B w_B(\zeta) y_B \right) d\mu_n(\zeta) \\ &= \frac{1}{2^n} \sum_B y_B \left(\sum_{\zeta \in E_2^n} w_A(\zeta) w_B(\zeta) \right) = y_A, \end{aligned}$$

όπου αυτή τη φορά χρησιμοποιήσαμε την (3.1.4). □

3.2 Η ανισότητα του Pisier για την προβολή Rademacher

Ορισμός 3.2.1. Έστω X χώρος Banach. Η προβολή Rademacher μιας συνάρτησης $f : E_2^n \to X$ είναι η συνάρτηση $Rad_n f : E_2^n \to X$ που ορίζεται μέσω της

$$Rad_n f(\epsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) x_{\{i\}},$$

όπου $f = \sum w_A x_A$. Έχουμε ορίσει με αυτό τον τρόπο έναν γραμμικό τελεστή από τον $L_2(E_2^n; X)$ στον υπόχωρό του $\{r_i \mid i = 1, \ldots, n\} \otimes X$, και αν αυτός ο τελεστής είναι φραγμένος, θέτουμε

$$K_r^{(n)}(X) := \|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X) \to L_2(E_2^n;X)}. \tag{3.2.1}$$

Στην περίπτωση που ο X είναι χώρος διάστασης n, θέλουμε να βρούμε την καλύτερη δυνατή εκτίμηση για την $K_r^{(n)}(X)$. Η αναζήτηση αυτή απλουστεύεται γράφοντας κατ' αρχάς την $Rad_n f$ σαν συνέλιξη της f με το άθροισμα των συναρτήσεων Rademacher, όπου η συνέλιξη μιας $f : E_2^n \to X$ και μιας $g : E_2^n \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$(f * g)(\epsilon) = \int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) g(\zeta) d\mu_n(\zeta). \tag{3.2.2}$$

Λήμμα 3.2.2. *Ορίζουμε $g_r : E_2^n \to \mathbb{R}$ με $g_r(\epsilon) = \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)$. Τότε, για κάθε $f : E_2^n \to X$ έχουμε*

$$Rad_n f = f * g_r.$$

Απόδειξη. Άμεσοι υπολογισμοί δείχνουν ότι

$$\begin{aligned} (f * g_r)(\epsilon) &= \int_{E_2^n} \left(\sum_A w_A(\epsilon\zeta) x_A \right) \left(\sum_{i=1}^n r_i(\zeta) \right) d\mu_n(\zeta) \\ &= \sum_{i=1}^n \sum_A x_A w_A(\epsilon) \left(\int_{E_2^n} w_A(\zeta) r_i(\zeta) d\mu_n(\zeta) \right) = \sum_{i=1}^n r_i(\epsilon) x_{\{i\}} = Rad_n f(\epsilon), \end{aligned}$$

που είναι και το ζητούμενο. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει στην ουσία ότι ο $L_2(E_2^n; X^*)$ είναι ο δυϊκός του $L_2(E_2^n; X)$.

Πρόταση 3.2.3. *Έστω X χωρος Banach, X^* ο δυϊκός του, και H ένας χώρος Hilbert. Για κάθε $f : E_2^n \to X$, $\phi : E_2^n \to X^*$ και $h : E_2^n \to H$, ισχύουν τα κάτωθι:*

(α) *Υπάρχει $\psi : E_2^n \to X^*$ τέτοια ώστε $\|\psi\|_{L_2(E_2^n;X^*)} = 1$ και*

$$\|f\|_{L_2(E_2^n;X)} = \langle \psi, f\rangle = \int_{E_2^n} [\psi(\epsilon)](f(\epsilon))d\mu_n(\epsilon).$$

(β) *Το γραμμικό συναρτησοειδές που αντιστοιχεί στην ϕ και ορίζεται στον $L_2(E_2^n; X)$ μέσω της*

$$\langle \phi, f\rangle := \int_{E_2^n} [\phi(\epsilon)](f(\epsilon))d\mu_n(\epsilon) \tag{3.2.3}$$

είναι φραγμένο και έχει νόρμα ίση με $\|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)}$.

(γ) *Αν $h = \sum_A w_A x_A$ είναι η αναπαράσταση της h, τότε*

$$\|h\|^2_{L_2(E_2^n;H)} = \sum_A \|x_A\|^2_H.$$

Απόδειξη. (α) Για την L_2 νόρμα της f, ισχύει ότι

$$\|f\|_{L_2(E_2^n;X)} = \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|^2\, d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2} = \left(\frac{1}{2^n}\sum_\epsilon \|f(\epsilon)\|^2\right)^{1/2} = \frac{\sum_\epsilon \|f(\epsilon)\|a_\epsilon}{2^{n/2}},$$

για κάποια ακολουθία πραγματικών αριθμών (a_ϵ) με $\sum_\epsilon a_\epsilon^2 = 1$ (μπορούμε να πάρουμε $a_\epsilon = \frac{\|f(\epsilon)\|}{\left(\sum_\epsilon \|f(\epsilon)\|^2\right)^{1/2}}$). Από το θεώρημα Hahn-Banach, μπορούμε για κάθε $\epsilon \in E_2^n$ να βρούμε $\tilde{\psi}(\epsilon) \in X^*$ τέτοιο ώστε $\|\tilde{\psi}(\epsilon)\|_* = 1$ και $[\tilde{\psi}(\epsilon)](f(\epsilon)) = \|f(\epsilon)\|$. Θέτουμε $\psi(\epsilon) = 2^{n/2}a_\epsilon\tilde{\psi}(\epsilon)$. Ισχύει τότε ότι

$$\|\psi\|^2_{L_2(E_n^2;X^*)} = \frac{\sum_\epsilon 2^n a_\epsilon^2 \|\tilde{\psi}(\epsilon)\|_*^2}{2^n} = \sum_\epsilon a_\epsilon^2 = 1,$$

ενώ επιπλέον,

$$\begin{aligned}\langle \psi, f\rangle &= \frac{1}{2^n}\sum_\epsilon [\psi(\epsilon)](f(\epsilon)) = \frac{1}{2^{n/2}}\sum_\epsilon [\tilde{\psi}(\epsilon)](f(\epsilon))a_\epsilon \\ &= \frac{1}{2^{n/2}}\sum_\epsilon \|f(\epsilon)\|a_\epsilon = \|f\|_{L_2(E_2^n;X)}.\end{aligned}$$

(β) Από τον ορισμό της νόρμας στον X^* και κάνοντας χρήση της ανισότητας Cauchy-Schwarz βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}|\langle \phi, f\rangle| &\leqslant \int_{E_2^n} |[\phi(\epsilon)](f(\epsilon))|\, d\mu_n(\epsilon) \leqslant \int_{E_2^n} \|\phi(\epsilon)\|_{X^*}\|f(\epsilon)\|_X\, d\mu_n(\epsilon)\\ &\leqslant \left(\int_{E_2^n} \|\phi(\epsilon)\|_{X^*}^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2}\left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|_X^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2}\\ &= \|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)}\|f\|_{L_2(E_2^n;X)},\end{aligned}$$

οπότε $\|\langle \phi, \cdot\rangle\|_{(L_2(E_2^n;X))^*} \leqslant \|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)}$. Για την ισότητα, δουλεύοντας όπως στο (α) μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $f_\delta : E_2^n \to X$ τέτοια ώστε $\|f_\delta\|_{L_2(E_2^n;X)} = 1$ και

$$\|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)} = \langle \phi, f_\delta\rangle + \delta \leqslant \|\langle \phi, \cdot\rangle\|_{(L_2(E_2^n;X))^*} + \delta.$$

(γ) Παρατηρούμε ότι, από την (3.1.4),

$$\begin{aligned}\int_{E_2^n} \|h(\epsilon)\|_H^2 d\mu_n(\epsilon) &= \int_{E_2^n} \Big\| \sum_A w_A(\epsilon)x_A\Big\|_H^2 d\mu_n(\epsilon)\\ &= \int_{E_2^n} \Big\langle \sum_A w_A(\epsilon)x_A, \sum_B w_B(\epsilon)x_B\Big\rangle_H d\mu_n(\epsilon)\\ &= \sum_A\sum_B \langle x_A, x_B\rangle_H \int_{E_2^n} w_A(\epsilon)w_B(\epsilon)d\mu_n(\epsilon)\\ &= \sum_A \langle x_A, x_A\rangle_H = \sum_A \|x_A\|_H^2,\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έχει δειχθεί. □

Χρησιμοποιώντας τώρα τον τύπο για την Rad_n που μας δίνει το Λήμμα 3.2.2, βλέπουμε ότι η Rademacher προβολή $Rad_n : L^2(E_2^n;X) \to L^2(E_2^n;X)$ είναι πάντα φραγμένη, με νόρμα $\leqslant \sqrt{n}$.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω X χώρος Banach, $f : E_2^n \to X$, $g : E_2^n \to \mathbb{R}$, και έστω $g(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon)c_A$ η αναπαράσταση της g. Τότε,*

(α) $\|f * g\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)}\|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})}$.

(β) *Αν ο $X = H$ είναι χώρος Hilbert, τότε*

$$\|f * g\|_{L_2(E_2^n;H)} \leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;H)} \max_A |c_A|.$$

(γ) *Αν $d(X,H)$ ειναι η απόσταση Banach-Mazur του X από ένα χώρο Hilbert H, τότε*

$$\|f*g\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant \max_A |c_A| d(X,H)\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}.$$

Απόδειξη. (α) Εφόσον $f*g : E_2^n \to X$, από την Πρόταση 3.2.3 (α) μπορούμε να βρούμε $\phi : E_2^n \to X^*$ τέτοια ώστε $\|\phi\|_{L_2(E_2^n;X^*)} = 1$ και

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L_2(E_2^n;X)} &= \int_{E_2^n} [\phi(\epsilon)]\big((f*g)(\epsilon)\big) d\mu_n(\epsilon)\\ &= \int_{E_2^n} g(\zeta) \int_{E_2^n} [\phi(\epsilon)]\big(f(\epsilon\zeta)\big) d\mu_n(\epsilon) d\mu_n(\zeta)\end{aligned}$$

ενώ η παραπάνω έκφραση ειναι προφανώς

$$\begin{aligned}&\leqslant \int_{E_2^n} |g(\zeta)| \int_{E_2^n} \|\phi(\epsilon)\|_{X^*} \|f(\epsilon\zeta)\|_X d\mu_n(\epsilon) d\mu_n(\zeta)\\ &\leqslant \int_{E_2^n} |g(\zeta)| \left(\int_{E_2^n} \|\phi(\epsilon)\|_{X^*}^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon\zeta)\|_X^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{\frac{1}{2}} d\mu_n(\zeta)\\ &= \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})}.\end{aligned}$$

(β) Παρατηρούμε ότι αν $f = \sum_A w_A x_A$ και $g = \sum_A c_A w_A$ είναι οι αναπαραστάσεις των f και g αντίστοιχα, τότε $f*g = \sum_A c_A x_A w_A$. Αυτό γίνεται σαφές με έναν απ' ευθείας υπολογισμό:

$$\begin{aligned}(f*g)(\epsilon) &= \int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta)\Big(\sum_A w_A(\zeta) c_A\Big) d\mu_n(\zeta) = \sum_A \Big(\int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) w_A(\zeta) d\mu_n(\zeta)\Big) c_A\\ &= \sum_A \Big(\int_{E_2^n} f(\epsilon\zeta) w_A(\epsilon\zeta) d\mu_n(\zeta)\Big) c_A w_A(\epsilon) = \sum_A x_A c_A w_A(\epsilon).\end{aligned}$$

Από την Πρόταση 3.2.3 (γ) έχουμε

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L_2(E_2^n;H)} &= \left(\sum_A \|c_A x_A\|_H^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \max_A |c_A| \left(\sum_A \|x_A\|_H^2\right)^{1/2} = \Big(\max_A |c_A|\Big) \|f\|_{L_2(E_2^n;H)}.\end{aligned}$$

(γ) Δοθέντος $\varepsilon > 0$, από τον ορισμό της απόστασης Banach-Mazur υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to H$ τέτοιος ώστε $\|T\|\|T^{-1}\| \leqslant (1+\varepsilon) d(X,H)$. Αφού $f*g = \sum_A c_A x_A w_A$, ισχύει λόγω γραμμικότητας ότι

$$T[(f*g)(\epsilon)] = \sum_A w_A(\epsilon) c_A T(x_A).$$

Από τον ορισμό των νορμών και την Πρόταση 3.2.3 (γ) ισχύει τότε ότι,

$$\begin{aligned}\|f*g\|_{L_2(E_2^n;X)} &= \|(T^{-1}\circ T)(f*g)\|_{L_2(E_2^n;X)}\\ &\leqslant \|T^{-1}\|\|T(f*g)\|_{L^2(E_2^n;H)}\\ &= \|T^{-1}\|\left(\sum_A \|c_A T(x_A)\|_H^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \max_A |c_A|\,\|T^{-1}\|\|Tf\|_{L^2(E_2^n;H)}\\ &\leqslant \max_A |c_A|\,\|T^{-1}\|\|T\|\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}\\ &= \|f\|_{L_2(E_2^n;X)}\max_A |c_A|(1+\varepsilon)d(X,H),\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 3.2.5. Το Λήμμα 3.2.2 δείχνει ότι $Rad_n f = f * g_r$, όπου $g_r = \sum_{i=1}^n r_i$. Λόγω της ορθογωνιότητας των συναρτήσεων Rademacher ισχύει ότι

$$\|g\|_{L^1(E_2^n;\mathbb{R})} \leqslant \|g\|_{L^2(E_2^n;\mathbb{R})} = \sqrt{n},$$

οπότε η Πρόταση 3.2.4 (α) δίνει

$$\|Rad_n f\|_{L^2(E_2^n;X)} \leqslant \sqrt{n}\|f\|_{L^2(E_2^n;X)}.$$

Το (γ) της ίδιας πρότασης δίνει μία τουλάχιστον το ίδιο καλή εκτίμηση στην περίπτωση που ο X είναι ισομορφικός με ένα χώρο Hilbert H και $d(X,H)\leqslant\sqrt{n}$ (κάτι που ισχύει για τους n-διάστατους χώρους με νόρμα, από το Θεώρημα του John): αφού $\max_A |c_A(g_r)| = 1$, έχουμε

$$\|Rad_n f\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant d(X,H)\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}. \tag{3.2.4}$$

Τέλος, αν ο $X = H$ είναι χώρος Hilbert, το (β) της πρότασης δείχνει ότι

$$\|Rad_n\|_{L_2(H)\to L_2(H)} = 1.$$

Το παρακάτω θεώρημα ωστόσο, μας δίνει ένα πολύ καλύτερο φράγμα για την $\|Rad_n\|$.

Θεώρημα 3.2.6 (Pisier)**.** *Υπάρχει απόλυτη σταθερά C τέτοια ώστε, για κάθε χώρο με νόρμα X που είναι ισομορφικός με ένα χώρο Hilbert H, έχουμε*

$$\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)} \leqslant C\log[d(X,H)+1]. \tag{3.2.5}$$

Συγκεκριμένα, για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X,

$$\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)} \leqslant C\log(n+1).$$

Για την απόδειξη του θεωρήματος, θα επικαλεστούμε μια κλασική ανισότητα του Bernstein για τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα:

Λήμμα 3.2.7 (ανισότητα Bernstein). *Αν Q είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n, τότε*

$$\|Q'\|_\infty \leqslant 2n\|Q\|_\infty. \tag{3.2.6}$$

Έστω $P(t) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} z_k t^k$ ένα πολυώνυμο βαθμού n με μιγαδικούς συντελεστές. Θεωρούμε το πολυώνυμο

$$Q(t) := P\big(\tfrac{1}{2}\sin t\big) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} \frac{z_k}{2^k}\sin^k t$$

Το $Q(t)$ είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n (κάθε k-οστή δύναμη του $\sin t$ μπορεί να γραφεί σαν τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού k), οπότε εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.2.7 έχουμε

$$\Big|\frac{1}{2}P'(0)\Big| = |Q'(0)| \leqslant 2n\|Q\|_\infty = 2n\sup_{|t|\leqslant\frac{1}{2}}|P(t)|.$$

Για κάθε πολυώνυμο $P(t) = \sum_{0\leqslant k\leqslant n} z_k t^k$ με μιγαδικούς συντελεστές, ισχύει δηλαδή ότι

$$|P'(0)| \leqslant 4n \max_{|t|\leqslant 1/2}|P(t)|. \tag{3.2.7}$$

Κάνοντας χρήση της παραπάνω ανισότητας, έχουμε την ακόλουθη πρόταση που είναι το κρίσιμο βήμα για την απόδειξη της εκτίμησης του Pisier για τη Rademacher προβολή.

Πρόταση 3.2.8. *Έστω $l\in\mathbb{N}$, $l\geqslant 2$. Υπάρχει ένα προσημασμένο μέτρο μ στο $[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$ με κύμανση $\|\mu\|\leqslant 4l$, το οποίο ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

$$\int_{-1/2}^{1/2} t\,d\mu(t) = 1 \quad , \quad \int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) = 0 \quad , \quad k = 0,2,\ldots,l. \tag{3.2.8}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_l$ τον χώρο όλων των πολυωνύμων με πραγματικούς συντελεστές βαθμού το πολύ ίσου με l, και ορίζουμε το συναρτησιακό $F:\mathcal{P}_l\to\mathbb{R}$ με

$$F(p) = p'(0).$$

Από την ανισότητα (3.2.7) παίρνουμε τότε ότι

$$|F(p)| = |p'(0)| \leqslant 4l \max_{t\in[-1/2,1/2]}|p(t)| \quad , \quad p\in\mathcal{P}_l.$$

Από το θεώρημα Hahn-Banach, η F επεκτείνεται σε μια $\tilde{F}\in\big(C[-1/2,1/2]\big)^*$ με $\|\tilde{F}\|\leqslant 4l$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει προσημασμένο μέτρο μ στο $[-1/2,1/2]$ με $\|\mu\|\leqslant 4l$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) = \tilde{F}(t^k) = (t^k)'|_{t=0} \quad , \quad k = 0,1,\ldots,l,$$

με άλλα λόγια τις (3.2.8). $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.6. Θεωρούμε το μέτρο μ της προηγούμενης Πρότασης, και ορίζουμε

$$g(\epsilon) = \int_{-1/2}^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + tr_i(\epsilon)\big) d\mu(t).$$

Επειδή $\prod_{i=1}^{n} \big(1 + tr_i(\epsilon)\big) = \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon)$, έχουμε

$$\begin{aligned} g(\epsilon) &= \int_{-1/2}^{1/2} \sum_{k=0}^{n} t^k \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon) d\mu(t) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left(\left(\int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon) \right) \\ &= \sum_{i=1}^{n} r_i(\epsilon) + \sum_{k=l+1}^{n} \left(\left(\int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) \right) \sum_{|A|=k} w_A(\epsilon) \right), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τις ιδιότητες του μ.

Θέτουμε $g_1 = g_r = \sum_{i=1}^{n} r_i$, $g_2 = \sum_{k=l+1}^{n} \big[\big(\int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) \big) \sum_{|A|=k} w_A \big]$, και βλέπουμε ότι $g = g_1 + g_2$. Έχουμε επιπλέον

$$\begin{aligned} \|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})} &= \int_{E_2^n} \Big| \int_{-1/2}^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + tr_i(\epsilon)\big) d\mu(t) \Big| d\mu_n(\epsilon) \\ &\leqslant \int_{E_2^n} \left(\int_{-1/2}^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + tr_i(\epsilon)\big) d\mu^+(t) + \int_{-1/2}^{1/2} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + tr_i(\epsilon)\big) d\mu^-(t) \right) d\mu_n(\epsilon) \\ &= \int_{-1/2}^{1/2} \left(\int_{E_2^n} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + tr_i(\epsilon)\big) d\mu_n(\epsilon) \right) d|\mu|(t). \end{aligned}$$

Από την Πρόταση 3.1.6 έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{E_2^n} \prod_{i=1}^{n} \big(1 + tr_i(\epsilon)\big) d\mu_n(\epsilon) &= \sum_{k=0}^{n} t^k \left(\sum_{|A|=k} \int_{E_2^n} w_A(\epsilon) d\mu_n(\epsilon) \right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} t^k \left(\sum_{|A|=k} \int_{E_2^n} w_A(\epsilon) w_\emptyset(\epsilon) d\mu_n(\epsilon) \right) = 1. \end{aligned}$$

Έπεται έτσι ότι

$$\|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})} \leqslant \|\mu\| \leqslant 4l$$

και άρα

$$\|f * g\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \|g\|_{L_1(E_2^n;\mathbb{R})} \leqslant 4l \|f\|_{L_2(E_2^n;X)}. \tag{3.2.9}$$

Παρατηρούμε εν συνεχεία ότι αν $g_2 = \sum_A w_A c_A^{g_2} = \sum_{k=l+1}^n \sum_{|A|=k} w_A c_A^{g_2}$, τότε

$$c_A^{g_2} = \int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) \quad \text{όπου } k = |A|,$$

οπότε από την Πρόταση 3.2.4 (γ) έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|f * g_2\|_{L_2(E_2^n;X)} &\leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \max_A |c_A^{g_2}|\, d(X,H) \\ &= \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \max_{l<k\leqslant n} \Big| \int_{-1/2}^{1/2} t^k d\mu(t) \Big|\, d(X,H) \\ &\leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \frac{1}{2^{l+1}} \|\mu\|\, d(X,H) \\ &\leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \frac{4l}{2^{l+1}}\, d(X,H). \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Από τις (3.2.9) και (3.2.10), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} \|Rad_n f\|_{L_2(E_2^n;X)} &= \|f * (g - g_2)\|_{L_2(E_2^n;X)} \\ &= \|(f * g) - (f * g_2)\|_{L_2(E_2^n;X)} \\ &\leqslant \|(f * g)\|_{L_2(E_2^n;X)} + \|(f * g_2)\|_{L_2(E_2^n;X)} \\ &\leqslant \|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \left(4l + 4l \frac{d(X,H)}{2^{l+1}}\right). \end{aligned}$$

Το παραπάνω αποτέλεσμα ισχύει για κάθε $l \in \mathbb{N}$, $l \geqslant 2$. Για να δείξουμε το ζητούμενο εργαζόμαστε ως εξής: Έστω s ο μικρότερος μη αρνητικός ακέραιος για τον οποίο ισχύει ότι

$$2^s \leqslant d(X,H) < 2^{s+1}.$$

Θέτουμε $l = s+2$, οπότε $l \geqslant 2$ και

$$2^l \leqslant 4 \cdot d(X,H) < 2^{l+1}.$$

Ισχύει τότε ότι

$$\left(4l + 4l \frac{d(X,H)}{2^{l+1}}\right) < 5l$$

ενώ ταυτόχρονα,

$$l = s + 2 \leqslant \log_2(d(X,H)) + 2 \leqslant c_0 \log[d(X,H)+1]$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_0 > 0$. Έπεται ότι

$$\|Rad_n f\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant 5l\|f\|_{L_2(E_2^n;X)} \leqslant c \log[d(X,H)+1] \|f\|_{L_2(E_2^n;X)}$$

όπου $c = 5c_0$. □

3.3 Τύπος και συντύπος

Ορισμός 3.3.1. Έστω X ένας χώρος με νόρμα. Για κάθε ακέραιο $n \geqslant 1$ και $1 \leqslant p \leqslant 2$ ονομάζουμε $T_p(X,n)$ τη μικρότερη σταθερά T για την οποία η σχέση

$$\left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2} \leqslant T \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p \right)^{1/p} \tag{3.3.1}$$

ικανοποιείται για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$. Ακόμη, για κάθε $2 \leqslant q < \infty$ ονομάζουμε $C_q(X,n)$ τη μικρότερη σταθερά C για την οποία η σχέση

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q \right)^{1/q} \leqslant C \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2} \tag{3.3.2}$$

ισχύει για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$. Για $q = \infty$, ονομάζουμε $C_\infty(X,n)$ τη μικρότερη σταθερά για την οποία η σχέση

$$\max_{i=1,\ldots,n} \|x_i\| \leqslant C \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2} \tag{3.3.3}$$

ισχύει για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$.

Τέλος, θέτουμε

$$T_p(X) = \sup_m T_p(X,n) \quad \text{και} \quad C_q(X) = \sup_n C_q(X,n).$$

Θα λέμε ότι ο X έχει *τύπο-p* αν $T_p(X) < \infty$ (οπότε και η $T_p(X)$ θα καλείται *σταθερά τύπου-p* του X), και ότι ο X έχει *συντύπο-q* αν $C_q(X) < \infty$ (οπότε και η $C_q(X)$ είναι η *σταθερά συντύπου-q* του X). Παρατηρούμε ότι αν $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant 2$, τότε $T_{p_1}(X) \leqslant T_{p_2}(X)$, ενώ αν $2 \leqslant q_1 \leqslant q_2 < \infty$, τότε $C_{q_2}(X) \leqslant C_{q_1}(X)$.

Παρατηρήσεις 3.3.2. (α) Οι περιορισμοί $1 \leqslant p \leqslant 2$ για την περίπτωση του τύπου και $q \geqslant 2$ για την περίπτωση του συντύπου είναι φυσιολογικοί. Ένας χώρος Banach δεν μπορεί να έχει τύπο $p > 2$ ή συντύπο $q < 2$. Πράγματι, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, για κάθε n, αν επιλέξουμε $x_1 = \cdots = x_n = x \in X$ με $\|x\| = 1$, τότε

$$\begin{aligned} \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \right\|^2 d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2} &= \left(\int_{E_2^n} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i \right|^2 d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \int_{E_2^n} |\epsilon_i|^2 \, d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2} = n^{1/2} \end{aligned}$$

ενώ

$$\left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p\right)^{1/p} = n^{1/p}.$$

Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι $p>2$ βλέπουμε ότι $T_p(X,n)\geqslant n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\to\infty$. Όμοια, αν υποθέσουμε ότι $q<2$ παίρνουμε $C_q(X,n)\geqslant n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}\to\infty$.

Από την άλλη πλευρά, κάθε χώρος Banach έχει τύπο-1: από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|^2 \leqslant (\sum_{i=1}^n \|x_i\|)^2$, οπότε παίρνοντας το μέσο όρο πάνω από όλα τα $\epsilon\in E_2^n$ έχουμε

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2\right)^{1/2} \leqslant \sum_{i=1}^n \|x_i\|.$$

Τέλος, κάθε χώρος Banach έχει συντύπο-∞: Έστω $x_1,\dots,x_n\in X$ και έστω $\|x_j\| = \max_{i=1,\dots,n}\|x_i\|$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $x^*\in X^*$ με $\|x^*\|_*=1$ τέτοιο ώστε $\langle x^*, x_j\rangle = \|x_j\|$, οπότε από την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων Rademacher και από την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned}\max_{i=1,\dots,n}\|x_i\| = \|x_j\| &= \int_{E_2^n}\left\langle \epsilon_j x^*, \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\rangle d\mu_n(\epsilon)\\ &\leqslant \int_{E_2^n}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\| d\mu_n(\epsilon) \leqslant \left(\int_{E_2^n}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Με βάση τα παραπάνω, θα λέμε ότι ο X έχει *μη-τετριμμένο τύπο-p* αν έχει τύπο-p για κάποιο $1<p\leqslant 2$ και *μη-τετριμμένο συντύπο-q* αν έχει συντύπο-q για κάποιο $2\leqslant q<\infty$.

(β) Αν H είναι ένας χώρος Hilbert με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, τότε από την ορθογωνιότητα των συναρτήσεων Rademacher παίρνουμε τον γενικευμένο κανόνα του παραλληλογράμμου

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\right\|^2 &= \int_{E_2^n}\left\langle \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i, \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j\right\rangle d\mu_n(\epsilon)\\ &= \sum_{i,j}\langle x_i, x_j\rangle \int_{E_2^n}\epsilon_i\epsilon_j\, d\mu_n(\epsilon) = \sum_{i=1}^n \|x_i\|^2.\end{aligned}\tag{3.3.4}$$

Έπεται έτσι ότι κάθε χώρος Hilbert έχει τύπο-2 και συντύπο-2, με $T_2(H)=C_2(H)=1$. Επιπλέον, αν X είναι ένας χώρος Banach ισομετρικά ισομορφικός με ένα χώρο Hilbert, τότε η (3.3.4) ισχύει και στον X, οπότε $T_2(X)=C_2(X)=1$. Το επόμενο θεώρημα του Kwapień δείχνει ότι ισχύει και το αντίστροφο. Μάλιστα, αν απλώς υποθέσουμε ότι ο X έχει τύπο-2 και συντύπο-2 τότε ο X είναι ισομορφικός με χώρο Hilbert.

Θεώρημα 3.3.3 (Kwapień). *Έστω X χώρος Banach με τύπο-2 και συντύπο-2. Τότε,*

$$d(X,H) \leqslant T_2(X)C_2(X)$$

για κάποιον χώρο Hilbert H.

(γ) Από την ανισότητα Kahane-Khintchine (3.1.3), έπεται ότι ο Ορισμός 3.3.1 θα μπορούσε να διατυπωθεί ισοδύναμα γράφοντας $\left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|^r \, d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/r}$ αντί για $\left(\int_{E_2^n} \|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|^2 \, d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2}$, για οποιονδήποτε $1 \leqslant r < \infty$.

(δ) Αν X είναι ένας χώρος Banach και Y ένας κλειστός υπόχωρός του, τότε αν ο X έχει τύπο-p και συντύπο-q το ίδιο ισχύει και για τον Y, και μάλιστα

$$T_p(Y) \leqslant T_p(X) \qquad \text{και} \qquad C_q(Y) \leqslant C_q(X).$$

(ε) Αν X, Y είναι ισομορφικοί χώροι Banach, τότε ο X έχει τύπο-p (αντίστοιχα, συντύπο-q) αν και μόνον αν ο Y έχει τύπο-p (αντίστοιχα, συντύπο-q).

(στ) Έστω $\{e_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ η συνήθης βάση στον ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$. Για οποιαδήποτε επιλογή προσήμων $(\epsilon_j)_{j=1}^m \in E_2^m$ έχουμε

$$\left\| \sum_{j=1}^m \epsilon_j e_j \right\|_p = m^{\frac{1}{p}}, \text{ και } \left\| \sum_{j=1}^m \epsilon_j e_j \right\|_\infty = 1,$$

οπότε ο ℓ_p δεν μπορεί να έχει τύπο μεγαλύτερο από p, αν $p \in [1,2]$, και συντύπο μικρότερο από p, αν $p \in [2,\infty)$ (για παράδειγμα ο ℓ_1 δεν έχει μη-τετριμμένο τύπο), ενώ ο ℓ_∞ δεν έχει μη-τετριμμένο συντύπο.

Ισχύει επιπλέον το ακόλουθο «αποτέλεσμα δυϊσμού».

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω X χώρος με νόρμα. Για κάθε $1 < p \leqslant 2 \leqslant q < \infty$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ και για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε*

$$C_q(X,n) \leqslant T_p(X^*,n) \leqslant K_r^{(n)}(X)\, C_q(X,n).$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $T_p(X^*,n)$, για κάθε $x_1^*,\dots,x_n^* \in X^*$, αν ορίσουμε $g(\epsilon) = \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*$, τότε

$$\|g\|_2 = \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^* \right\|_*^2 d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2} \leqslant T_p(X^*,n) \left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_*^p \right)^{1/p}.$$

Έστω $x_1,\dots,x_n\in X$. Επιλέγουμε $x_1^*,\dots,x_n^*\in X^*$ έτσι ώστε $x_i^*(x_i)=\|x_i^*\|_*\|x_i\|$ και $\|x_i^*\|_*^p=\|x_i\|^q$. Τότε,

$$\begin{aligned}\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{i=1}^n\|x_i^*\|_*^p\right)^{1/p} &= \sum_{i=1}^n\|x_i^*\|_*\|x_i\| = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i)\\ &= \mathbb{E}_\epsilon\left\langle\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i^*,\sum_{j=1}^n\epsilon_j x_j^*\right\rangle\\ &\leqslant \left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i^*\right\|_{L_2(E_2^n;X^*)}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i\right\|_{L_2(E_2^n;X)}\\ &\leqslant T_p(X^*,n)\left(\sum_{i=1}^n\|x_i^*\|_*^p\right)^{1/p}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i\right\|_{L_2(E_2^n;X)}.\end{aligned}$$

Δείξαμε έτσι ότι

$$\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^q\right)^{1/q}\leqslant T_p(X^*,n)\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i\right\|_{L_2(E_2^n;X)},$$

και άρα

$$C_q(X,n)\leqslant T_p(X^*,n).$$

Για τη δεξιά ανισότητα, έστω $x_1^*,\dots,x_n^*\in X^*$. Από την Πρόταση 3.2.3 υπάρχει $f:E_2^n\to X$ τέτοια ώστε $\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}=1$ και

$$\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i^*\right\|_{L_2(E_2^n;X^*)}=\left\langle\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i^*,f\right\rangle.$$

Η f γράφεται στη μορφή

$$f(\varepsilon)=\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i+\sum_{|A|\neq 1}w_A(\epsilon)x_A$$

για κάποια $x_A\in X$, και

$$\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}\geqslant\frac{1}{K_r^{(n)}(X)}\left\|\sum_{i=1}^n\epsilon_i x_i\right\|_{L_2(E_2^n;X)}\geqslant\frac{1}{K_r^{(n)}(X)}\,\frac{1}{C_q(X,n)}\left(\sum_{i=1}^n\|x_i\|^q\right)^{1/q}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*\Big\|_{L_2(E_2^n;X^*)} &= \Big\langle \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i^*, f\Big\rangle = \sum_{i=1}^n x_i^*(x_i)\\ &\leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|x_i\|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_*^p\right)^{1/p}\\ &\leqslant K_r^{(n)}(X)C_q(X,n)\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}\left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_*^p\right)^{1/p}\\ &= K_r^{(n)}(X)C_q(X,n)\left(\sum_{i=1}^n \|x_i^*\|_*^p\right)^{1/p},\end{aligned}$$

το οποίο δείχνει ότι $T_p(X^*,n) \leqslant K_r^{(n)}(X)\,C_q(X,n)$. □

Παρατήρηση 3.3.5. Από το παραπάνω θεώρημα, κάθε χώρος Banach X έχει συντύπο-q αν ο X^* έχει τύπο-p, όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Το αντίστροφο δεν ισχύει πάντα: ο ℓ_1, δυϊκός του c_0, έχει συντύπο-2, ενώ ο c_0 δεν έχει μη-τετριμμένο τύπο. Η ανωμαλία αυτή απουσιάζει στην περίπτωση που ο X έχει συντύπο-q *και* μη-τετριμμένο τύπο. Δίνουμε έναν ορισμό.

Ορισμός 3.3.6. Έστω X ένας χώρος Banach. Θέτουμε

$$K(X) := \sup_{n\in\mathbb{N}} K_r^{(n)}(X) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)},$$

και λέμε ότι ο X είναι *K-κυρτός* αν $K(X)<\infty$.

Σύμφωνα με ένα βαθύ αποτέλεσμα του Pisier [60], η ιδιότητα του μη-τετριμμένου τύπου χαρακτηρίζει αυτή της K-κυρτότητας: ένας χώρος Banach είναι K-κυρτός αν και μόνον αν έχει τύπο-$p>1$.

Θα εξετάσουμε στη συνέχεια τον τύπο και τον συντύπο των χώρων L_p, $1\leqslant p<\infty$. Συγκεκριμένα, θα αποδείξουμε το παρακάτω:

Θεώρημα 3.3.7. *Έστω (Ω,μ) ένας χώρος μέτρου.*

(α) *Αν $1\leqslant p\leqslant 2$, τότε ο $L_p(\mu)$ έχει τύπο-p και συντύπο-2.*

(β) *Αν $2\leqslant q<\infty$, τότε ο $L_q(\mu)$ έχει τύπο-2 και συντύπο-q.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος, θα χρειαστούμε την παρακάτω Πρόταση.

Πρόταση 3.3.8. *Για κάθε* $(f_i)_{i=1}^n$ *στον* $L_p(\mu)$, $1 \leqslant p < \infty$,

$$A_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p \leqslant \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right\|_p^p \right)^{1/p} \leqslant B_p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p ,$$

όπου A_p, B_p *είναι οι σταθερές στην ανισότητα Khintchine* (3.1.2).

Απόδειξη. Από την ανισότητα του Khintchine έχουμε

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right|^p \right)^{1/p},$$

οπότε

$$\begin{aligned} A_p^p \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p &= \left\| A_p \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p^p \leqslant \left\| \left(\mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right|^p \right)^{1/p} \right\|_p^p \\ &= \int_\Omega \mathbb{E} \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right|^p d\mu = \mathbb{E} \left(\int_\Omega \left| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right|^p d\mu \right) \\ &= \mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right\|_p^p . \end{aligned}$$

Για τη δεξιά ανισότητα εργαζόμαστε με τον ίδιο τρόπο. □

Θα χρησιμοποιήσουμε ακόμη δύο κλασικές ανισότητες.

Λήμμα 3.3.9. *Έστω* $a_1, \ldots, a_n \geqslant 0$. *Για* $0 < r \leqslant 1$ *έχουμε τότε ότι* $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^r \leqslant \sum_{i=1}^n a_i^r$, *ενώ για* $r \geqslant 1$, $\left(\sum_{i=1}^n a_i\right)^r \geqslant \sum_{i=1}^n a_i^r$.

Λήμμα 3.3.10. *Έστω* $r \in (0,1)$, $f, g \in L_r(\mu)$ *και* $f, g \geqslant 0$. *Τότε*

$$\|f+g\|_r \geqslant \|f\|_r + \|g\|_r .$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.7. (α) Από την Πρόταση 3.3.8 και το Λήμμα 3.3.10 έχουμε:

$$\begin{aligned} A_p^{-1} \left(\mathbb{E} \left\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i \right\|_p^p \right)^{1/p} &\geqslant \left\| \left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right)^{1/2} \right\|_p = \left\| \sum_{i=1}^n |f_i|^2 \right\|_{p/2}^{1/2} \\ &\geqslant \left(\sum_{i=1}^n \|f_i^2\|_{p/2} \right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_p^2 \right)^{1/2} , \end{aligned}$$

οπότε η ανισότητα για τον συντύπο έπεται από την ανισότητα Kahane-Khintchine. Το ότι ο $L_p(\mu)$ έχει τύπο-p προκύπτει με τον ίδιο τρόπο από την Πρόταση 3.3.8 και το Λήμμα 3.3.9:

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i\right\|_p^p\right)^{1/p} &\leqslant B_p \left\|\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{1/2}\right\|_p = B_p \left\|\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right\|_{p/2}^{1/2} \\ &\leqslant B_p \left\|\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right\|_{p/2}^{1/2} = B_p\left(\int_\Omega \sum_{i=1}^n |f_i|^p \, d\mu\right)^{1/p} \\ &= B_p \left(\sum_{i=1}^n \|f\|_p^p\right)^{1/p}.\end{aligned}$$

(β) Από την Πρόταση 3.3.8 και την ανισότητα Kahane-Khintchine υπάρχει σταθερά $C = C(p)$, τέτοια ώστε

$$\left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i f_i\right\|_q^2\right)^{1/2} \leqslant C \left\|\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{1/2}\right\|_q,$$

και αφού $\frac{q}{2} > 1$, από το Λήμμα 3.3.9 έπεται ότι

$$\left\|\left(\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right)^{1/2}\right\|_q = \left\|\sum_{i=1}^n |f_i|^2\right\|_{q/2}^{1/2} \leqslant \left(\sum_{i=1}^n \|f_i^2\|_{q/2}\right)^{1/2} = \left(\sum_{i=1}^n \|f_i\|_q^2\right)^{1/2},$$

οπότε ο $L_q(\mu)$ έχει τύπο-2. Τέλος, από το (α) του Θεωρήματος και το Θεώρημα 3.3.4 έπεται ότι ο $L_q(\mu)$ έχει συντύπο-q. □

Έχουμε ήδη δει (Παρατηρήσεις 3.3.2(στ)) ότι για $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ο ℓ_p έχει τύπο $\min\{p, 2\}$ και συντύπο $\max\{2, p\}$ και τίποτα καλύτερο, και άρα το ίδιο ισχύει και για κάθε χώρο Banach X που περιέχει ισομορφικά αντίγραφα του ℓ_p^n για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Στην πραγματικότητα το αντίστροφο είναι επίσης αληθές, χάρη σε ένα κλασικό αποτέλεσμα των Maurey και Pisier, [45]. Αν ο X είναι ένας χώρος Banach, θέτουμε

$$p_X = \sup\{p : \text{ ο } X \text{ έχει τύπο-}p\} \quad \text{και} \quad q_X = \inf\{q : \text{ ο } X \text{ έχει συντύπο-}q\}.$$

Θεώρημα 3.3.11 (Maurey–Pisier). *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, και κάθε $\varepsilon > 0$, ο X περιέχει n-διάστατους υπόχωρους $(1+\varepsilon)$-ισομορφικούς με τους $\ell_{p_X}^n$, $\ell_{q_X}^n$.*

Στην επόμενη παράγραφο δίνουμε μια μεταγενέστερη απόδειξη του παραπάνω θεωρήματος για την περίπτωση του τύπου.

3.4 Θεώρημα Maurey-Pisier: Η περίπτωση του τύπου

Σκοπός μας εδώ είναι να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω X ένας απειροδιάστατος χώρος Banach. Για κάθε ακέραιο $k \geqslant 1$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν k-διάστατοι υπόχωροι του X οι οποίοι είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικοί με τον $\ell_{p_X}^k$.*

Στην απόδειξη θα ακολουθήσουμε τον Pisier, [61]. Ξεκινάμε δίνοντας την έννοια της p-ευσταθούς τυχαίας μεταβλητής.

3.4.1 p-ευσταθείς τυχαίες μεταβλητές

Ορισμός 3.4.2. Μια συμμετρική τυχαία μεταβλητή θ σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ λέγεται *p-ευσταθής με παράμετρο* σ_p, για κάποιον $0 < p \leqslant 2$, αν η χαρακτηριστική της συνάρτηση ικανοποιεί την

$$\mathbb{E}(e^{it\theta}) = \int_\Omega \exp(it\cdot\theta(\omega))\, d\mathbb{P}(\omega) = e^{-\sigma_p^p |t|^p/2}$$

για κάποια σταθερά $\sigma_p > 0$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$. Αν $\sigma_p = 1$ τότε λέμε ότι η θ είναι *κανονικοποιημένη*.

Η ύπαρξη p-ευσταθών τυχαίων μεταβλητών αποδείχτηκε από τον Lévy. Μάλιστα, οι μόνες δυνατές τιμές του p είναι ακριβώς αυτές που ανήκουν στο $(0,2]$. Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Pólya μπορούμε να ελέγξουμε ότι δεν υπάρχουν p-ευσταθείς τυχαίες μεταβλητές όταν $p > 2$. Στην περίπτωση $p = 2$, παίρνουμε τις Gaussian τυχαίες μεταβλητές, ενώ για $p = 1$ έχουμε τις γνωστές Cauchy τυχαίες μεταβλητές.

Έστω θ μια συμμετρική p-ευσταθής τυχαία μεταβλητή με παράμετρο σ_p. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}(\{|\theta| > t\}) = c_p \sigma_p^p, \tag{3.4.1}$$

όπου η σταθερά $c_p > 0$ εξαρτάται μόνο από το p. Αυτό δείχνει ότι η θ δεν ανήκει στον L_p, αλλά

$$\|\theta\|_{p,\infty} := \Big(\sup_{t>0} t^p \mathbb{P}\left(\{|\theta| > t\}\right)\Big)^{1/p} < \infty,$$

συνεπώς η θ έχει ροπές τάξης r για κάθε $r < p$.

Αν $\theta_1, \theta_2, \dots$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων κανονικοποιημένων p-ευσταθών τυχαίων μεταβλητών και αν $(a_j)_{j\leqslant n}$ είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big[\exp(it\sum_{j=1}^n a_j\theta_j)\Big] &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left(\exp(ita_j\theta_j)\right) = \prod_{j=1}^n \exp(-|t|^p|a_j|^p/2)\\ &= \mathbb{E}\Big[\exp\Big(-|t|^p\sum_{j=1}^n |a_j|^p/2\Big)\Big].\end{aligned}$$

Αφού η κατανομή μιας τυχαίας μεταβλητής προσδιορίζεται πλήρως από την χαρακτηριστική της συνάρτηση, βλέπουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\sum_{j=1}^n a_j\theta_j$ και $(\sum_{j=1}^n |a_j|^p)^{1/p}\theta_1$ έχουν την ίδια κατανομή. Ειδικότερα,

$$\Big\| \sum_j a_j\theta_j \Big\|_r = c_{p,r}\Big(\sum_j |a_j|^p \Big)^{1/p}$$

για κάθε $r < p$. Αυτό σημαίνει ότι ο υπόχωρος που παράγεται από την ακολουθία $(\theta_j)_{j=1}^{\infty}$ στον L_r, $r < p$, είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον ℓ_p.

3.4.2 Αναπαράσταση διανυσματικών ευσταθών τυχαίων μεταβλητών

Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Μια συμμετρική τυχαία μεταβλητή S με τιμές στον X λέγεται p-ευσταθής αν η $x^*(S)$ είναι p-ευσταθής για κάθε $x^* \in X^*$. Βλέπουμε πάλι ότι αν $\{S_j\}$ είναι μια ακολουθία από ανεξάρτητα αντίγραφα της S τότε η

$$\sum_{i=1}^k a_iS_i \ \text{ έχει την ίδια κατανομή με την } \ \Big(\sum_{i=1}^k |a_i|^p \Big)^{1/p} S$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Ειδικότερα, αν $r < p$ έχουμε

$$\Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^k a_iS_i \Big\|^r \Big)^{1/r} = \Big(\sum_{i=1}^k |a_i|^p \Big)^{1/p} \left(\mathbb{E}\, \|S\|^r \right)^{1/r}. \tag{3.4.2}$$

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το Θεώρημα 3.4.4 το οποίο δίνει μια χρήσιμη αναπαράσταση των p-ευσταθών τυχαίων μεταβλητών S με τιμές σε έναν n-διάστατο χώρο με νορμα X.

Για την διατύπωσή του χρειάζεται κάποια προετοιμασία. Θεωρούμε αρχικά μια ακολουθία $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ ανεξάρτητων εκθετικών τυχαίων μεταβλητών: δηλαδή, για κάθε i έχουμε $\mathbb{P}(\{A_i > t\}) = e^{-t}$, $t > 0$. Ορίζουμε

$$\Gamma_j = \sum_{i=1}^j A_i.$$

Η ακολουθία $\{\Gamma_j\}_{j\geqslant 1}$ προσδιορίζει τους διαδοχικούς χρόνους των αλμάτων μιας τυπικής διαδικασίας Poisson. Μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\{\Gamma_j \leqslant t\}\right) = \int_0^t \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} e^{-s} ds, \qquad t > 0. \tag{3.4.3}$$

Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι για κάθε $d > 0$ και για κάθε $j > d$,

$$\mathbb{E}\,(\Gamma_j^{-d}) = \frac{\Gamma(j-d)}{\Gamma(j)} \sim \frac{1}{j^d}. \tag{3.4.4}$$

Λήμμα 3.4.3. *Έστω $\{\Gamma_{1j}\}$ και $\{\Gamma_{2j}\}$ δύο ανεξάρτητα αντίγραφα της ακολουθίας $\{\Gamma_j\}$. Αν $a_1, a_2 > 0$, θεωρούμε την αύξουσα αναδιάταξη $\{\phi_j : j \geqslant 1\}$ του συνόλου*

$$T = \Big\{\frac{1}{a_1}\Gamma_{1j} : j \geqslant 1\Big\} \cup \Big\{\frac{1}{a_2}\Gamma_{2j} : j \geqslant 1\Big\}.$$

Τότε, η $\{\phi_j\}$ έχει την ίδια κατανομή με την $\Big\{\frac{1}{a_1+a_2}\Gamma_j : j \geqslant 1\Big\}$.

Απόδειξη. Για $i = 1, 2$ ορίζουμε $N_i(t) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbf{1}_{\{\Gamma_{ij} < ta_i\}})$. Τότε, η N_i είναι διαδικασία Poisson με παράμετρο a_i. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι, αφού οι N_1 και N_2 είναι ανεξάρτητες, το άθροισμά τους $N = N_1 + N_2$ είναι κι αυτό διαδικασία Poisson με παράμετρο $a_1 + a_2$. Τότε, η $\{\phi_j\}$ είναι η ακολουθία των διαδοχικών χρόνων των αλμάτων της $N_1 + N_2 = N$, άρα έχει την ίδια κατανομή με την $\Big\{\frac{1}{a_1+a_2}\Gamma_j\Big\}$. □

Θεώρημα 3.4.4. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω μ ένα συμμετρικό μέτρο πιθανότητας στον X με $\mathbb{E}_\mu(\|x\|^p) < \infty$. Έστω $\{Y_j\}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών με τιμές στον X και κατανομή το μ. Τότε, αν η σειρά*

$$S = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p} Y_j \tag{3.4.5}$$

συγκλίνει σχεδόν βεβαίως, ορίζει μια p-ευσταθή τυχαία μεταβλητή με τιμές στον X. Επιπλέον,

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}(\{|x^*(S)| > t\}) = \mathbb{E}|x^*(Y_1)|^p = \int |x^*(x)|^p d\mu(x). \tag{3.4.6}$$

Απόδειξη. Αντικαθιστώντας την Y με την $x^*(Y)$, $x^* \in X^*$, βλέπουμε ότι αρκεί να εξετάσουμε την μονοδιάστατη περίπτωση. Υποθέτουμε λοιπόν ότι S παίρνει πραγματικές τιμές. Θα δείξουμε ότι αν S_1 και S_2 είναι δύο ανεξάρτητα αντίγραφα της S τότε η

$$(b_1 S_1 + b_2 S_2) \text{ έχει την ίδια κατανομή με την } (|b_1|^p + |b_2|^p)^{1/p} S$$

για κάθε $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$. Αυτό αρκεί για να συμπεράνουμε ότι η S είναι p-ευσταθής.

Θεωρούμε δύο ανεξάρτητα αντίγραφα $\{(\Gamma_{ij})_j, (Y_{ij})_j\}$, $i = 1, 2$, της $\{(\Gamma_j)_j, (Y_j)_j\}$ και ορίζουμε $S_i = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_{ij}^{-1/p} Y_{ij}$. Τότε, οι S_1 και S_2 είναι ανεξάρτητα αντίγραφα της S. Θέτουμε $a_i = |b_i|^p$ και θεωρούμε την ακολουθία $\{\phi_j\}$ του Λήμματος 3.4.3. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $\{\phi_j\}$ και $\{\Gamma_j\}$ είναι ανεξάρτητες. Έχουμε ότι η $b_1 S_1 + b_2 S_2$ έχει την ίδια κατανομή με την $\sum \phi_j^{-1/p} Y_j$, και εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.4.3 βλέπουμε ότι αυτή έχει την ίδια κατανομή με την

$$(|b_1|^p + |b_2|^p)^{1/p} \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p} Y_j = (|b_1|^p + |b_2|^p)^{1/p} S.$$

Στην συνέχεια ελέγχουμε ότι η

$$Z = S - \Gamma_1^{-1/p} Y_1 = \sum_{j=2}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p} Y_j$$

ικανοποιεί την

$$\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}\left(\{|Z| > t\}\right) = 0,$$

άρα

$$\begin{aligned}\lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}(\{|S| > t\}) &= \lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}\left(\{|\Gamma_1^{-1/p} Y_1| > t\}\right) = \lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{P}\left(\{\Gamma_1 < t^{-p}|Y_1|^p\}\right) \\ &= \lim_{t\to\infty} t^p \mathbb{E}(1 - \exp(-t^{-p}|Y_1|^p)) = \mathbb{E}|Y_1|^p.\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 3.4.5. Έστω Z μια p-ευσταθής τυχαία μεταβλητή με τιμές στον X. Υπάρχει ένα συμμετρικό μέτρο πιθανότητας μ στον X ώστε η χαρακτηριστική συνάρτηση της Z να ικανοποιεί την

$$\mathbb{E}\Big(\exp(ix^*(Z))\Big) = \exp\Big(-\int |x^*(x)|^p d\mu(x)\Big)$$

για κάθε $x^* \in X^*$, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μ φέρεται από την μοναδιαία σφαίρα του X. Αν θεωρήσουμε την p-ευσταθή τυχαία μεταβλητή S του Θεωρήματος 3.4.4 τότε οι Z και $(2c_p)^{1/p}S$ αντιστοιχούν στο ίδιο μέτρο, άρα έχουν την ίδια κατανομή.

3.4.3 Βοηθητικά αποτελέσματα

Το επόμενο λήμμα θα μας επιτρέψει να συγκρίνουμε την $S := \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p} Y_j$ με την τυχαία μεταβλητή $\tilde{S} := \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p} Y_j$.

Λήμμα 3.4.6. *Έστω $1 < p < 2$. Τότε,*

$$B_p := \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{E}\,|\Gamma_j^{-1/p} - j^{-1/p}| < \infty$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\mathbb{P}\left(\{\Gamma_j < t\}\right) = \int_0^t \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} e^{-s} ds,$$

γράφουμε

$$B_p = \int \sum_{j=1}^{\infty} |s^{-1/p} - j^{-1/p}| \frac{s^{j-1}}{(j-1)!} e^{-s} ds$$

και ελέγχουμε ότι το τελευταίο ολοκλήρωμα συγκλίνει. □

Θα χρειαστούμε επίσης μια εκτίμηση για την κατανομή της $\|S\| - \mathbb{E}\|S\|$, όπου S είναι ένα άθροισμα από διανυσματικές τυχαίες μεταβλητές S_i. Έστω $\{S_i\}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ με τιμές σε έναν χώρο με νόρμα X. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{E}\|S_i\| < \infty$ για κάθε i. Έστω $\mathcal{F}_i$ η σ-άλγεβρα που παράγεται από τις $\{S_1, \ldots, S_i\}$ και έστω $\mathcal{F}_0$ η τετριμμένη σ-άλγεβρα. Θέτουμε $S = \sum_{i=1}^n S_i$. Τότε,

$$\|S\| - \mathbb{E}\,\|S\| = \sum_{i=1}^n d_i,$$

όπου $d_i = \mathbb{E}(\|S\| \mid \mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(\|S\| \mid \mathcal{F}_{i-1})$. Παρατηρούμε ότι

$$|d_i(\omega)| \leqslant \int \|S_i(\omega) - S_i(\omega')\|\, d\mathbb{P}(\omega'). \tag{3.4.7}$$

Αυτό φαίνεται με τον εξής τρόπο: μπορούμε να υποθέσουμε ότι η S_j είναι συνάρτηση του ω_j στον χώρο γινόμενο $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})^{\mathbb{N}}$, και κατόπιν να γράψουμε

$$\begin{aligned} d_i(\omega) = d_i(\omega_1, \ldots, \omega_i) &= \int \Big\| \sum_j S_j(\omega_j) \Big\|\, d\mathbb{P}(\omega_{i+1}) \cdots d\mathbb{P}(\omega_n) \\ &\quad - \int \Big\| \sum_{j<i} S_j(\omega_j) + S_i(\omega_i') + \sum_{j>i} S_j(\omega_j) \Big\|\, d\mathbb{P}(\omega_i') d\mathbb{P}(\omega_{i+1}) \cdots d\mathbb{P}(\omega_n). \end{aligned} \tag{3.4.8}$$

Αφού

$$\Big| \Big\| \sum S_j(\omega_j) \Big\| - \Big\| \sum_{j<i} S_j(\omega_j) + S_i(\omega_i') + \sum_{j>i} S_j(\omega_j) \Big\| \Big| \leqslant \|S_i(\omega_i) - S_i(\omega_i')\|,$$

από την (3.4.8) παίρνουμε την (3.4.7). Έπεται ότι

$$|d_i(\omega)| \leqslant \|S_i(\omega)\| + \mathbb{E}\|S_i\|. \tag{3.4.9}$$

Αφού η $\{d_i\}$ είναι ακολουθία διαφορών ενός martingale, παίρνουμε

$$\mathbb{E}\Big| \sum d_i \Big|^2 = \mathbb{E}\Big(\sum d_i^2 \Big) \leqslant 4 \sum \mathbb{E}\|S_i\|^2.$$

Επίσης, από την (3.4.9) έχουμε $\|d_i\|_\infty \leqslant 2\|S_i\|_\infty$, άρα η ανισότητα του Azuma μας δίνει

$$\mathbb{P}\Big(\Big| \Big\| \sum S_i \Big\| - \mathbb{E}\Big\| \sum S_i \Big\| \Big| > t \Big) \leqslant 2 \exp\Big(- \frac{t^2}{8 \sum \|S_i\|_\infty^2} \Big) \tag{3.4.10}$$

για κάθε $t > 0$. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν την ανισότητα στην εξής μορφή.

Πρόταση 3.4.7. *Έστω $1 < p < 2$ και έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Αν $S_1, \dots S_n$ είναι ανεξάρτητες φραγμένες τυχαίες μεταβλητές με τιμές σε έναν χώρο με νόρμα X τότε, για κάθε $t > 0$,*

$$\mathbb{P}\Big(\Big| \Big\| \sum_{i=1}^n S_i \Big\| - \mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^n S_i \Big\| \Big| > t \Big) \leqslant 2 \exp \Big(- D_p \Big(\frac{t}{\sup_{i \geqslant 1} i^{1/p} \|X_i\|_\infty} \Big)^q \Big),$$

όπου $D_p > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sup_{i \geqslant 1} i^{1/p} \|X_i\|_\infty = 1$. Θεωρούμε $t > 0$ της μορφής $t_m = \sum_{k=1}^m k^{-1/p} \simeq q m^{1/q}$. Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned} \Big\| \sum_{i=1}^n S_i \Big\| - \mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^n S_i \Big\| &\leqslant \Big\| \sum_{i=m+1}^n S_i \Big\| - \mathbb{E} \Big\| \sum_{i=m+1}^n S_i \Big\| + \Big\| \sum_{i=1}^m S_i \Big\| + \mathbb{E} \Big\| \sum_{i=1}^m S_i \Big\| \\ &\leqslant \Big\| \sum_{i=m+1}^n S_i \Big\| - \mathbb{E} \Big\| \sum_{i=m+1}^n S_i \Big\| + 2t_m. \end{aligned}$$

Αν $S = \sum S_i$ και $R_m = \sum_{i>m} S_i$, από την (3.4.10) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(| \|S\| - \mathbb{E}\|S\| | > 3t_m) &\leqslant \mathbb{P}(| \|R_m\| - \mathbb{E}\|R_m\| | > t_m) \\ &\leqslant 2 \exp \Big(- \frac{t_m^2}{8} \Big(\sum_{i>m} i^{-2/p} \Big)^{-1} \Big), \end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sum_{i>m} i^{-2/p} \leqslant C m^{1-2/p}$ για κάποια σταθερά $C > 0$, βλέπουμε ότι η τελευταία πιθανότητα φράσσεται από $2\exp(-C_1 t_m^q)$ για κάποια άλλη σταθερά $C_1 > 0$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο για $t = t_m$. Για το τυχόν $t > 0$ βρίσκουμε m ώστε $t_m < t \leqslant t_{m+1}$ και εύκολα ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ειδική περίπτωση: αν $\|S_k\|_\infty \leqslant 1$ και αν $\{b_k\}$ είναι μια ακολουθία πραγματικών αριθμών με $|b_k| \leqslant k^{-1/p}$ για κάθε k, τότε η $Z = \sum b_k S_k$ ικανοποιεί την

$$\mathbb{P}(| \|Z\| - \mathbb{E}\|Z\| | > t) \leqslant 2\exp(-D_p t^q) \tag{3.4.11}$$

για κάθε $t > 0$, όπου D_p είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

3.4.4 Ευσταθής τύπος p

Ορισμός 3.4.8. Έστω $1 \leqslant p < 2$. Λέμε ότι ένας χώρος Banach X έχει ευσταθή τύπο p αν για κάθε $r < p$ υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\Big(\mathbb{E} \Big\| \sum_i \theta_i x_i \Big\|^r \Big)^{1/r} \leqslant C \Big(\sum_i \|x_i\|^p \Big)^{1/p} \tag{3.4.12}$$

για όλες τις πεπερασμένες ακολουθίες $\{x_i\}$ στον X, όπου $\{\theta_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία κανονικοποιημένων ανεξάρτητων p-ευσταθών τυχαίων μεταβλητών. Για $p > 1$, η σταθερά $ST_p(X)$ ευσταθούς τύπου p ορίζεται να είναι η μικρότερη σταθερά C για την οποία η (3.4.12) ισχύει με $r = 1$. Για $p = 1$ ορίζουμε την σταθερά ευσταθούς τύπου 1 του X με παρόμοιο τρόπο, ζητώντας η (3.4.12) να ισχύει με $r = 1/2$.

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το εξής θεώρημα του Pisier.

Θεώρημα 3.4.9 (Pisier). *Έστω $1 < p < 2$ και έστω q ο συζυγής εκθέτης του p. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ ώστε κάθε χώρος Banach X ευσταθούς τύπου p να περιέχει υπόχωρο διάστασης $k = \lfloor \delta(ST_p(X))^q \rfloor$ ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικός με τον ℓ_p^k.*

Απόδειξη. Από τον ορισμό της $ST_p(X)$ μπορούμε να βρούμε $x_1, \ldots, x_n \in X$ με $\sum_{i=1}^n \|x_i\|^p = 1$ και

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \Big\| \geqslant \frac{1}{2} ST_p(X),$$

όπου $\{\theta_j\}$ είναι μια ακολουθία κανονικοποιημένων ανεξάρτητων p-ευσταθών τυχαίων μεταβλητών. Έστω μ το μέτρο στον X που δίνει μάζα $\|x_i\|^p/2$ στα διανύσματα $\pm x_i/\|x_i\|$, και έστω $\{Y_j\}_{j=1}^{\infty}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με κατανομή μ. Η Παρατήρηση 3.4.5 δείχνει ότι η $S = \sum_{j=1}^{\infty} \Gamma_j^{-1/p} Y_j$ έχει την ίδια κατανομή με την $(2c_p)^{-1/p} \sum_{i=1}^n \theta_i x_i$, όπου c_p είναι η σταθερά στην (3.4.1). Έχουμε επίσης

$$\mathbb{E}\|S\| = (2c_p)^{-1/p} \mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^n \theta_i x_i \Big\| \geqslant \frac{(2c_p)^{-1/p}}{2} ST_p(X).$$

Ορίζουμε $\tilde{S} = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-1/p} Y_j$ και και θεωρούμε δύο ακολουθίες $\{S_i\}$ και $\{\tilde{S}_i\}$ από ανεξάρτητα αντίγραφα των S και $\tilde{S}$ αντίστοιχα. Αφού οι Y_j παίρνουν τις τιμές τους στην μοναδιαία σφαίρα S_X του X, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.4.6 και να γράψουμε

$$\mathbb{E}\, \|S_k - \tilde{S}_k\| \leqslant B_p = \mathbb{E} \sum_{j=1}^{\infty} |\Gamma_j^{-1/p} - j^{-1/p}|. \tag{3.4.13}$$

Σταθεροποιούμε $a = (a_1, \ldots, a_k) \in \ell_p^k$ με $\|a\|_p = 1$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i = \sum_{j=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k a_i j^{-1/p} Y_{ji}$$

όπου $\{Y_{ji}\}$, $i = 1, \ldots, k$ είναι ανεξάρτητα αντίγραφα της ακολουθίας $\{Y_j\}$. Αφού οι τυχαίες μεταβλητές Y_{ji} είναι συμμετρικές, ανεξάρτητες και έχουν την ίδια κατανομή, βλέπουμε ότι η $\sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i$ έχει την ίδια κατανομή με την $\sum_{k=1}^{\infty} b_k Y_k$, όπου $\{b_k\}$ είναι η φθίνουσα αναδιάταξη της διπλής ακολουθίας $\{|a_i|j^{-1/p} : j \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant k\}$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^k |a_i|^p = 1$ μπορούμε να ελέγξουμε ότι για κάθε $k \geqslant 1$,

$$\mathrm{card}\{(i,j) : |a_i|j^{-1/p} > k^{-1/p}\} \leqslant \sum_i |a_i|^p k = k,$$

άρα $b_k \leqslant k^{-1/p}$. Τότε, η Πρόταση 3.4.7 δείχνει ότι, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big| \Big\| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \Big\| - \mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \Big\| \Big| > t \Big) \leqslant 2\exp(-D_p t^q), \tag{3.4.14}$$

όπου $D_p > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το p.

Τώρα, χρησιμοποιώντας την (3.4.13) γράφουμε

$$\Big| \mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^k a_i S_i \Big\| - \mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \Big\| \Big| \leqslant B_p \sum_{i=1}^k |a_i| \leqslant B_p n^{1/q}. \tag{3.4.15}$$

Θεωρούμε $\eta > 0$ και υποθέτουμε ότι

$$B_p n^{1/q} \leqslant \frac{1}{4c_p^{1/p}} \eta\, ST_p(X). \tag{3.4.16}$$

Αφού

$$\mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^k a_i S_i \Big\| = \mathbb{E}\|S\| > \frac{1}{2c_p^{1/p}} ST_p(X),$$

βλέπουμε ότι

$$\Big| \mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \Big\| - \mathbb{E}\|S\| \Big| \leqslant \frac{1}{2}\eta\, \mathbb{E}\|S\|. \tag{3.4.17}$$

Εφαρμόζοντας την (3.4.14) με $t = \frac{1}{2}\eta\, \mathbb{E}\|S\|$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\Big| \mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \Big\| - \mathbb{E}\|S\| \Big| > \eta\, \mathbb{E}\|S\| \right) &\leqslant 2\exp(-(\eta\, \mathbb{E}\|S\|)^q / 2^q C_q) \\ &\leqslant 2\exp(-\eta^q ST_p(X)^q / 4^q c_p^{q/p} C_q). \end{aligned}$$

Στην συνέχεια, θεωρούμε ένα η-δίκτυο $\mathcal{N}$ της μοναδιαίας σφαίρας του ℓ_p^k με πληθάριθμο $|\mathcal{N}| \leqslant \exp(2k/\eta)$. Έχουμε

$$(1-\eta)\mathbb{E}\,\|S\| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^k a_i \tilde{S}_i \Big\| \leqslant (1+\eta)\mathbb{E}\|S\|$$

για κάθε $a \in \mathcal{N}$, με πιθανότητα

$$P \geqslant 1 - 2\exp\Big(\frac{2k}{\eta} - \frac{\eta^q ST_p(X)^q}{4^q c_p^{q/p} C_q}\Big). \tag{3.4.18}$$

Το τέλος της απόδειξης είναι το αναμενόμενο: για δοθέν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $\delta = \delta(\eta) = \delta(\varepsilon, p) > 0$ τόσο μικρό ώστε αν θέσουμε $k = \lfloor \delta ST_p(X)^q \rfloor$ να ικανοποιείται η (3.4.17) και η πιθανότητα P στην (3.4.18) να είναι θετική. Κατόπιν, επιβάλλοντας επίσης μια συνθήκη $\delta < \delta(\eta)$ όπως στην απόδειξη του θεωρήματος του Dvoretzky, βλέπουμε ότι υπάρχει ω ώστε για κάθε $a \in \ell_p^k$

$$\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon}}\Big(\sum_{i=1}^k |a_i|^p\Big)^{1/p} \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^k a_i \frac{\tilde{S}_i(\omega)}{\mathbb{E}\|S\|}\Big\| \leqslant \sqrt{1+\varepsilon}\Big(\sum_{i=1}^k |a_i|^p\Big)^{1/p}.$$

Αυτό δείχνει ότι, αν θέσουμε $z_i = \tilde{S}_i(\omega)/\mathbb{E}\|S\|$ τότε ο $(\mathrm{span}\{z_1, \dots, z_k\}, \|\cdot\|)$ είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικός με τον ℓ_p^k. □

Παρατήρηση 3.4.10. Η απόδειξη του Milman για το θεώρημα του Dvoretzky δείχνει ότι η ελάχιστη τιμή του n για την οποία ο ℓ_2^m εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον ℓ_1^n είναι της τάξης του m. Οι Johnson και Schechtman απέδειξαν ότι το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον ℓ_2^m με τον ℓ_p^m, $1 < p < 2$.

Θεώρημα 3.4.11 (Johnson-Schechtman)**.** *Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $1 < p < 2$ υπάρχει σταθερά $\beta = \beta(\varepsilon, p) > 0$ ώστε: αν $n \geqslant \beta m$ τότε ο ℓ_p^m εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον ℓ_1^n.*

Το Θεώρημα 3.4.11) προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.4.9. Παρατηρήστε ότι αν $\{\theta_j\}$ είναι μια ακολουθία κανονικοποιημένων ανεξάρτητων p-ευσταθών τυχαίων μεταβλητών, τότε

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{j=1}^n |\theta_j|\Big) = n\mathbb{E}\,|\theta_1|,$$

άρα, $ST_p(\ell_1^n) \geqslant (\mathbb{E}|\theta_1|)n^{1/q}$. Έπεται ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ και $1 < p < 2$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, p) >$ ώστε ο ℓ_1^n να έχει υπόχωρο διάστασης $k = \lfloor \delta(ST_p(X))^q \rfloor \geqslant c\delta n$ ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικός με τον ℓ_p^k.

3.4.5 Απόδειξη του θεωρήματος Maurey-Pisier

Για την απόδειξη του θεωρήματος Maurey-Pisier (στην περίπτωση του τύπου) χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.4.9 του Pisier: αν $1 < p < 2$ και αν q είναι ο συζυγής εκθέτης του p τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon, p) > 0$ ώστε αν ένας χώρος Banach X ικανοποιεί την

$$k < \delta(ST_p(X))^q,$$

τότε ο X περιέχει υπόχωρο ο οποίος είναι $(1+\varepsilon)$-ισομορφικός με τον ℓ_p^k.

Παρατήρηση 3.4.12. Για κάθε $1 < p \leqslant 2$ ισχύει

$$T_p(X) \leqslant C \cdot ST_p(X). \tag{3.4.19}$$

Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι αν $\{\epsilon_i\}_{i=1}^n$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli η οποία είναι ανεξάρτητη από την $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, τότε η $\{\epsilon_i|\theta_i|\}_{i=1}^n$ έχει την ίδια κατανομή με την $\{\theta_i\}_{i=1}^n$, και από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\Big\|\sum_i \epsilon_i x_i\Big\| &= \mathbb{E}_\epsilon\Big\|\mathbb{E}_\theta \sum_i \epsilon_i|\theta_i|x_i\Big\| \leqslant \mathbb{E}_{\epsilon,\theta}\Big\|\sum_i \epsilon_i|\theta_i|x_i\Big\| \\ &= \mathbb{E}_\theta\Big\|\sum_i \theta_i x_i\Big\|.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι αν $p_X < 2$ τότε

$$p_X = \inf\{1 < p < 2 : ST_p(X) = \infty\}. \tag{3.4.20}$$

Τώρα, διακρίνουμε δύο περιπτώσεις. Αν $p_X = 2$ τότε ο ισχυρισμός του θεωρήματος Maurey-Pisier έπεται από το θεώρημα Dvoretzky. Αλλιώς, έχουμε $ST_p(X) = \infty$ για κάθε $p > p_X$, άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 3.4.9 και να συμπεράνουμε ότι ο X περιέχει $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά αντίγραφα του ℓ_p^k για κάθε k, ε και $p > p_X$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Μετρικός τύπος

4.1 Σταθερά μετρικού τύπου p

Η έννοια του τύπου για μετρικούς χώρους ορίστηκε από τους Bourgain, Milman και Wolfson στο [12]. Η αρχική παρατήρηση είναι ότι μπορούμε να εκφράσουμε κλασικές ανισότητες για χώρους με νόρμα, όπως η ανισότητα του παραλληλογράμμου

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \leqslant 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 \tag{4.1.1}$$

(η οποία ισχύει σαν ισότητα στους χώρους Hilbert και τους χαρακτηρίζει), χρησιμοποιώντας μόνο την μετρική d που επάγεται από τη νόρμα $\|\cdot\|$. Για παράδειγμα, η (4.1.1) είναι ισοδύναμη με την εξής πρόταση: αν $(x_{\epsilon_1,\epsilon_2})$ είναι μια τετράδα σημείων με δείκτες από το σύνολο $E_2^2 = \{-1,1\}^2$ τότε

$$\sum_{\epsilon_1,\epsilon_2} d(x_{\epsilon_1,\epsilon_2}, x_{-\epsilon_1,-\epsilon_2})^2 \leqslant \sum_{\epsilon_1,\epsilon_2} \big(d(x_{\epsilon_1,\epsilon_2}, x_{-\epsilon_1,\epsilon_2})^2 + d(x_{\epsilon_1,\epsilon_2}, x_{\epsilon_1,-\epsilon_2})^2\big). \tag{4.1.2}$$

Το αριστερό μέλος αντιστοιχεί στο άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των κυρίων διαγωνίων του διδιάστατου κύβου με κορυφές τα $\{x_{\epsilon_1,\epsilon_2} : \epsilon_1 = \pm 1, \epsilon_2 = \pm 1\}$ και το δεξιό μέλος αντιστοιχεί στο άθροισμα των τετραγώνων των μηκών των ακμών του.

Γενικεύοντας, θα μελετήσουμε την (4.1.2) για n-διάστατους κύβους, και με εκθέτη p .

Ορισμός 4.1.1 (n-διάστατος κύβος)**.** Έστω (T,d) ένας μετρικός χώρος. Ένας **n-διάστατος κύβος** στον T είναι μια συνάρτηση $f : E_2^n = \{-1,1\}^n \to T$.

Στον E_2^n θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n. Για κάθε $\epsilon \in E_2^n$, συμβολίζουμε με ϵ_i την i-στή συντεταγμένη του ϵ και θέτουμε $-\epsilon = (-\epsilon_1, \dots, -\epsilon_n)$. Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to T$ και για κάθε $i = 1, \dots, n$ ορίζουμε

$$\Delta_i f(\epsilon) = d(f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_i, \dots, \epsilon_n), f(\epsilon_1, \dots, -\epsilon_i, \dots, \epsilon_n)).$$

Ορισμός 4.1.2 (μετρικός τύπος p)**.** Έστω $1 \leqslant p \leqslant 2$. Λέμε ότι ο μετρικός χώρος (T,d) έχει μετρικό τύπο p αν υπάρχει σταθερά C τέτοια ώστε, για κάθε n και για κάθε $f:\{-1,1\}^n \to T$ ισχύει

$$\left(\int_{E_2^n} d(f(\epsilon),f(-\epsilon))^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2} \leqslant Cn^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^n \int_{E_2^n} (\Delta_i f(\epsilon))^2 d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2}. \tag{4.1.3}$$

Από τον ορισμό έπεται άμεσα ότι αν $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant 2$ και ο (T,d) έχει μετρικό τύπο p_2, τότε ο (T,d) έχει μετρικό τύπο p_1. Είναι επίσης εύκολο να ελέγξουμε ότι κάθε μετρικός χώρος έχει (μετρικό) τύπο 1 με σταθερά $C=1$. Πράγματι, έστω $f:\{-1,1\}^n \to T$. Θέτουμε $f_0 = f$ και

$$f_i(\epsilon) = f(-\epsilon_1,\dots,-\epsilon_i,\epsilon_{i+1},\dots,\epsilon_n) \qquad i=1,\dots,n.$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$d(f(\epsilon),f(-\epsilon)) \leqslant \sum_{i=1}^n d(f_{i-1}(\epsilon),f_i(\epsilon)) \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n d(f_{i-1}(\epsilon),f_i(\epsilon))^2\right)^{1/2}. \tag{4.1.4}$$

Υψώνουμε στο τετράγωνο αυτήν την ανισότητα και την ολοκληρώνουμε στον E_2^n. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι $d(f_{i-1},f_i)$ και $\Delta_i f$ έχουν την ίδια κατανομή, βλέπουμε ότι ο T ικανοποιεί την (4.1.3) με $p=C=1$.

Σκοπός μας στην επόμενη παράγραφο είναι, κατ' αναλογία προς την γραμμική θεωρία, να χαρακτηρίσουμε τους μετρικούς χώρους που έχουν μη τετριμμένο τύπο με ένα θεώρημα τύπου Maurey-Pisier. Πριν διατυπώσουμε το αποτέλεσμα δίνουμε έναν ακόμα ορισμό.

Ορισμός 4.1.3. Γράφουμε C_p^n για το σύνολο $\{-1,1\}^n$ εφοδιασμένο με την μετρική d_p η οποία επάγεται από τη νόρμα του ℓ_p^n. Δηλαδή, για κάθε $\epsilon,\epsilon' \in \{-1,1\}^n$ έχουμε

$$d_p(\epsilon,\epsilon') = \left(\sum_{i=1}^n |\epsilon_i - \epsilon_i'|^p\right)^{1/p} = 2|\{i:\epsilon_i \neq \epsilon_i'\}|^{1/p}.$$

Λέμε ότι ένας μετρικός χώρος (T,d) *περιέχει* $(1+\varepsilon)$-*ομοιόμορφα τους* C_p^n αν για κάθε n μπορούμε να βρούμε $T_n \subset T$ και μια 1-1 και επί απεικόνιση $\phi_n : C_p^n \to T_n$ τέτοια ώστε

$$\|\phi_n\|_{\mathrm{Lip}}\|\phi_n^{-1}\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1+\varepsilon,$$

όπου, για μια απεικόνιση $\phi: X \to Y$ μεταξύ δύο μετρικών χώρων X και Y,

$$\|\phi\|_{\mathrm{Lip}} = \sup_{s\neq t}\frac{d_Y(\phi(s),\phi(t))}{d_X(s,t)}$$

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το βασικό αποτέλεσμα.

Θεώρημα 4.1.4 (Bourgain, Milman και Wolfson)**.** *Έστω (T,d) ένας μετρικός χώρος. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες:*

(i) *Υπάρχει $p>1$ τέτοιος ώστε ο (T,d) να έχει μετρικό τύπο p.*

(ii) *Για κάθε $\varepsilon>0$ ο (T,d) δεν περιέχει $(1+\varepsilon)$-ομοιόμορφα τους C_1^n.*

(iii) *Υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιος ώστε ο (T,d) να μην περιέχει $(1+\varepsilon)$-ομοιόμορφα τους C_1^n.*

4.2 Απόδειξη του θεωρήματος των Bourgain, Milman και Wolfson

Αποδεικνύουμε πρώτα την συνεπαγωγή (i) $\Longrightarrow$ (ii). Έστω ότι η (ii) δεν ισχύει. Τότε, μπορούμε να βρούμε $\varepsilon>0$, υποσύνολα T_n του T και αμφιμονοσήμαντες απεικονίσεις $f_n : C_1^n \to T_n$ τέτοιες ώστε

$$\|f_n\|_{\mathrm{Lip}}\|f_n^{-1}\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Θέτουμε $a=\|f_n\|_{\mathrm{Lip}}$ και $b=\|f_n^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}$, οπότε $ab\leqslant 1+\varepsilon$. Έχουμε

$$d(f_n(\epsilon),f_n(-\epsilon)) \geqslant \frac{1}{b}d_1(\epsilon,-\epsilon)=\frac{2n}{b}$$

και

$$\Delta_i f(\epsilon)\leqslant 2a \quad \text{για κάθε } \epsilon\in\{-1,1\}^n.$$

Αφού ο T έχει μετρικό τύπο p για κάποιον $p>1$, η (4.1.3) μας δίνει

$$2n\leqslant bC2an^{1/p}\leqslant 2C(1+\varepsilon)n^{1/p},$$

το οποίο οδηγεί σε άτοπο αν επιλέξουμε το n αρκετά μεγάλο. Αυτό αποδεικνύει την (i) $\Longrightarrow$ (ii).

Η συνεπαγωγή (ii) $\Longrightarrow$ (iii) είναι προφανής. Μένει λοιπόν να αποδείξουμε την συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i). Συμβολίζουμε αρχικά με t_n την μικρότερη σταθερά C που ικανοποιεί το εξής: για κάθε $f:\{-1,1\}^n\to T$,

$$\int_{E_2^n} d(f(\epsilon),f(-\epsilon))^2 d\mu_n(\epsilon)\leqslant C^2\sum_{i=1}^n\int_{E_2^n}(\Delta_i f(\epsilon))^2 d\mu_n(\epsilon).$$

Από την (4.1.4) βλέπουμε ότι $t_n\leqslant\sqrt{n}$. Για $n\in\mathbb{N}$ ισχύει επιπλέον $t_n\leqslant t_{n+1}$: Δεδομένης μιας $f:\{-1,1\}^n\to T$ μπορούμε να ορίσουμε $g:\{-1,1\}^n\times\{-1,1\}\to X$ με $g(\epsilon,\epsilon_{n+1})=$

$f(\epsilon)$. Από τον ορισμό του t_{n+1} τότε έχουμε, για κάθε $C > t_{n+1}$,

$$\begin{aligned}\int_{E_2^n} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^2 \, d\mu_n(\epsilon) &= \int_{E_2^{n+1}} d(g(\epsilon, \epsilon_{n+1}), g(-\epsilon, -\epsilon_{n+1}))^2 \, d\mu_{n+1}(\epsilon, \epsilon_{n+1}) \\ &\leqslant C^2 \sum_{i=1}^{n+1} \int_{E_2^{n+1}} (\Delta_i g(\epsilon, \epsilon_{n+1}))^2 \, d\mu_{n+1}(\epsilon, \epsilon_{n+1}) \\ &= C^2 \sum_{i=1}^{n} \int_{E_2^n} (\Delta_i f(\epsilon))^2 \, d\mu_n(\epsilon).\end{aligned}$$

Η ακολουθία (t_n) έχει επιπλέον την ακόλουθη ιδιότητα.

Λήμμα 4.2.1. *Ισχύει* $t_{nk} \leqslant t_n t_k$ *για κάθε* $n, k \geqslant 1$.

Απόδειξη. Έστω $f : \{-1,1\}^{nk} \to T$ και $\epsilon \in \{-1,1\}^{nk}$. Για κάθε $(\xi_1, \ldots, \xi_k) \in \{-1,1\}^k$ ορίζουμε

$$F_\epsilon(\xi_1, \ldots, \xi_k) = f(\epsilon_1 \xi_1, \ldots, \epsilon_n \xi_1, \epsilon_{n+1} \xi_2, \ldots, \epsilon_{2n} \xi_2, \ldots, \epsilon_{n(k-1)+1} \xi_k, \ldots, \epsilon_{nk} \xi_k).$$

Έχουμε

$$\int_{E_2^k} d(F_\epsilon(\xi), F_\epsilon(-\xi))^2 d\mu_k(\xi) \leqslant t_k^2 \sum_{i=1}^{k} \int_{E_2^k} (\Delta_i F_\epsilon(\xi))^2 d\mu_k(\xi) \tag{4.2.1}$$

για κάθε ϵ. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{E_2^{nk}} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^2 d\mu_{nk}(\epsilon) = \int_{E_2^{nk}} d(F_\epsilon(\xi), F_\epsilon(-\xi))^2 d\mu_{nk}(\xi, \epsilon).$$

Επιπλέον, για κάθε $i \in \{1, \cdots, k\}$ έχουμε, από τον ορισμό της t_n,

$$\begin{aligned}&\int_{E_2^n} (\Delta_i F_\epsilon(\xi))^2 d\mu_n(\epsilon_{(i-1)n+1} \xi_i, \ldots, \epsilon_{ni} \xi_i) \\ &\qquad\qquad \leqslant t_n^2 \sum_{(i-1)n < j \leqslant in} \int_{E_2^n} (\Delta_j f(\epsilon))^2 d\mu_n(\epsilon_{(i-1)n+1}, \ldots, \epsilon_{ni}),\end{aligned}$$

οπότε, ολοκληρώνοντας την (4.2.1) ως προς ϵ καταλήγουμε στην

$$\int_{E_2^{nk}} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^2 d\mu_{nk}(\epsilon) \leqslant t_n^2 t_k^2 \sum_{j=1}^{nk} \int_{E_2^{nk}} (\Delta_j f(\epsilon))^2 d\mu_{nk}(\epsilon).$$

Από τον ορισμό της t_{nk} έχουμε το συμπέρασμα. □

Ολοκληρώνουμε τώρα την απόδειξη της (iii) $\Longrightarrow$ (i) (και του Θεωρήματος 4.1.4). Δεδομένου ότι $t_n \leqslant t_{n+1}$ για κάθε n, το Λήμμα 4.2.1 εξασφαλίζει την ακόλουθη διχοτομία. Είτε $t_n = \sqrt{n}$ για κάθε n ή υπάρχει $n_0 > 1$ τέτοιος ώστε $t_{n_0} < \sqrt{n_0}$. Στην δεύτερη περίπτωση, ορίζουμε p μέσω της εξίσωσης $t_{n_0} = (n_0)^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$. Παρατηρήστε ότι $1 < p \leqslant 2$. Αν θέσουμε $\alpha = \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, από το Λήμμα 4.2.1 έχουμε $t_{n_0^k} \leqslant n_0^{k\alpha}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Ακόμη, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $k \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n_0^{k-1} \leqslant n \leqslant n_0^k$. Επειδή $t_n \leqslant t_{n+1}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ισχύει τότε ότι

$$t_n \leqslant t_{n_0^k} \leqslant n_0^{k\alpha} = n_0^{\alpha} \cdot n_0^{(k-1)\alpha} \leqslant n_0^{\alpha} \cdot n^{\alpha} = n_0^{\alpha} \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}.$$

Συνεπώς, η δεύτερη περίπτωση έχει σαν συνέπεια ότι ο T έχει μετρικό τύπο p για κάποιον $p > 1$. Απομένει λοιπόν να οδηγηθούμε σε άτοπο υποθέτοντας ότι ισχύει η (iii) και ότι $t_n = \sqrt{n}$ για κάθε n.

Με άλλα λόγια, αρκεί να δείξουμε ότι αν $t_n = \sqrt{n}$ για κάθε n τότε ο T περιέχει τους C_1^n ομοιόμορφα. Από τον ορισμό της t_n, για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $f : \{-1,1\}^n \to T$ και $a > 0$ τέτοια ώστε

$$\left(\sum_{i=1}^{n} \int_{E_2^n} (\Delta_i f)^2 d\mu_n \right)^{1/2} \leqslant a\sqrt{n}(1+\delta)^{1/2} \tag{4.2.2}$$

και

$$\left(\int_{E_2^n} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^2 d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2} \geqslant an. \tag{4.2.3}$$

Πράγματι, από τον ορισμό του t_n έχουμε ότι για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $f : \{-1,1\}^n \to X$ τέτοια ώστε

$$\left(\frac{\int_{E_2^n} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^2 d\mu_n(\epsilon)}{\sum_{i=1}^{n} \int_{E_2^n} (\Delta_i f)^2 d\mu_n} \right)^{1/2} > \frac{t_n}{(1+\delta)^{1/2}} = \frac{\sqrt{n}}{(1+\delta)^{1/2}}.$$

Επιλέγοντας $a = \frac{1}{n} \left(\int_{E_2^n} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^2 d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/2}$ παίρνουμε τότε τις (4.2.2) και (4.2.3). Θα δείξουμε ότι αν το δ είναι αρκετά μικρό τότε η f είναι $(1+\varepsilon)$-εμφύτευση του C_1^n στον T. Για τον σκοπό αυτό χρησιμοποιούμε την (4.1.4). Αν ορίσουμε

$$\phi_i(\epsilon) = \frac{1}{a} d(f_{i-1}(\epsilon), f_i(\epsilon)),$$

τότε από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\begin{aligned}\left\|\sum_{i=1}^n \phi_i\right\|_2^2 &= \int_{E_2^n}\left(\sum_{i=1}^n \phi_i(\epsilon)\right)^2 d\mu_n(\epsilon) = \int_{E_2^n}\left(\sum_{i=1}^n a^{-1}d(f_{i-1}(\epsilon),f_i(\epsilon))\right)^2 d\mu_n(\epsilon)\\ &= a^{-2}\int_{E_2^n}\left(\sum_{i=1}^n d(f_{i-1}(\epsilon),f_i(\epsilon))\right)^2 d\mu_n(\epsilon) \geqslant a^{-2}\int_{E_2^n} d(f(\epsilon),f(-\epsilon))^2\,d\mu_n(\epsilon)\\ &\geqslant a^{-2}a^2n^2 = n^2,\end{aligned}$$

άρα

$$\left\|\sum_{i=1}^n \phi_i\right\|_2 \geqslant n, \tag{4.2.4}$$

και αφού οι ϕ_i και $\frac{1}{a}\Delta_i f$ έχουν την ίδια κατανομή,

$$\begin{aligned}\left\|\left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2\right)^{1/2}\right\|_2 &= \left(\int_{E_2^n}\sum_{i=1}^n \phi_i^2(\epsilon)\,d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2}\\ &= \left(a^{-2}\sum_{i=1}^n\int_{E_2^n} d(f_{i-1}(\epsilon),f_i(\epsilon))^2\,d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2}\\ &= \left(a^{-2}\sum_{i=1}^n\int_{E_2^n}(\Delta_i f(\epsilon))^2\,d\mu_n(\epsilon)\right)^{1/2} \leqslant \sqrt{n}\,(1+\delta)^{1/2}. \end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Παρατηρήστε ότι $\sum_{i=1}^n \phi_i \leqslant \sqrt{n}\left(\sum_{i=1}^n \phi_i^2\right)^{1/2}$ κατά σημείο. Θα δείξουμε ότι από τις (4.2.4) και (4.2.5) προκύπτουν οι κατά σημείο ανισότητες

$$\sum_{i=1}^n \phi_i \geqslant n - \psi(\delta)$$

και

$$|\phi_i - 1| \leqslant \psi(\delta)$$

όπου $\psi(\delta)$ είναι μια συνάρτηση του δ με $\lim_{\delta\to 0}\psi(\delta) = 0$ (εδώ το n είναι σταθερό και η ψ εξαρτάται από το n).

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^n(\phi_i-\phi_j)^2 = n\sum_{i=1}^n \phi_i^2 - \left(\sum_{i=1}^n \phi_i\right)^2. \tag{4.2.6}$$

Θέτουμε $S_1 = \left(\sum_{i=1}^n \phi_i\right)^2$ και $S_2 = n\sum_{i=1}^n \phi_i^2$. Παρατηρήστε ότι $S_1 \leqslant S_2$. Από τις (4.2.4) και (4.2.5) έχουμε

$$\int_{E_2^n} S_2 d\mu_n \leqslant \int_{E_2^n} S_1(1+\delta) d\mu_n,$$

άρα

$$\int_{E_2^n} (S_2 - S_1) d\mu_n \leqslant \delta \int_{E_2^n} S_1 d\mu_n \leqslant \delta \int_{E_2^n} S_2 d\mu_n \leqslant \delta(1+\delta)n^2.$$

Από την (4.2.6) έπεται ότι

$$\int_{E_2^n} (\phi_i - \phi_j)^2 d\mu_n \leqslant \delta(1+\delta)n^2.$$

Αφού το πλήθος των σημείων του $\{-1,1\}^n$ είναι ίσο με 2^n, συμπεραίνουμε ότι

$$\sup_{\epsilon} |\phi_i(\epsilon) - \phi_j(\epsilon)|^2 \leqslant \delta(1+\delta)n^2 2^n,$$

άρα

$$\|\phi_i - \phi_j\|_\infty \leqslant \psi_1(\delta) \quad \text{για κάθε } i,j = 1,\ldots,n, \tag{4.2.7}$$

όπου $\psi_1(\delta) = (\delta(1+\delta)n^2 2^n)^{1/2}$.

Από τα παραπάνω, αν υποθέταμε ότι οι (4.2.4) και (4.2.5) ισχύουν με $\delta = 0$ τότε θα είχαμε ότι $\phi_i = \phi_j$ για κάθε i και j. Αφού η ϕ_i δεν εξαρτάται από το ϵ_i, αυτό θα έδειχνε ότι όλες οι ϕ_i είναι σταθερές, και λόγω της κανονικοποίησης που έχουμε κάνει, αναγκαστικά θα είχαμε $\phi_i \equiv 1$.

Ορίζουμε τώρα $\phi = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \phi_i$. Τότε, από την (4.2.7) έχουμε

$$\|\phi_i - \phi\|_\infty \leqslant \psi_1(\delta) \quad \text{για κάθε } i = 1,\ldots,n. \tag{4.2.8}$$

Συμβολίζουμε με $\mathbb{E}_i$ την δεσμευμένη μέση τιμή ως προς $\{\epsilon_1,\ldots,\epsilon_i\}$. Αφού η ϕ_i δεν εξαρτάται από το ϵ_i, έχουμε

$$\mathbb{E}_i(\phi_i) = \mathbb{E}_{i-1}(\phi_i) \tag{4.2.9}$$

και από την (4.2.8)

$$\|\mathbb{E}_k(\phi_i) - \mathbb{E}_k(\phi)\|_\infty \leqslant \psi_1(\delta) \quad \text{για κάθε } i,k = 1,\ldots,n.$$

Άρα, από την (4.2.9),

$$\|\mathbb{E}_i(\phi) - \mathbb{E}_{i-1}(\phi)\|_\infty \leqslant 2\psi_1(\delta)$$

το οποίο, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, μας δίνει

$$\left\|\phi - \int_{E_2^n} \phi d\mu_n\right\|_\infty \leqslant 2n\psi_1(\delta). \tag{4.2.10}$$

Από τις (4.2.4) και (4.2.5) γνωρίζουμε ότι

$$1 \leqslant \|\phi\|_2 \leqslant (1+\delta)^{1/2}.$$

Από την (4.2.10) έχουμε

$$\left| \|\phi\|_2 - \int_{E_2^n} \phi d\mu_n \right| \leqslant \left\| \phi - \int_{E_2^n} \phi d\mu_n \right\|_2 \leqslant 2n\psi_1(\delta),$$

άρα

$$\left| \int_{E_2^n} \phi d\mu_n - 1 \right| \leqslant \psi_2(\delta),$$

όπου

$$\psi_2(\delta) = [(1+\delta)^{1/2} - 1] + 2n\psi_1(\delta),$$

και χρησιμοποιώντας πάλι την (4.2.10) παίρνουμε

$$\|\phi - 1\|_\infty \leqslant \psi_3(\delta) = 2n\psi_1(\delta) + \psi_2(\delta),$$

Από την άλλη πλευρά, από την (4.2.8) έχουμε $\|\phi_i - 1\|_\infty \leqslant \psi_1(\delta) + \psi_2(\delta)$. Έχουμε έτσι ολοκληρώσει την απόδειξη του ισχυρισμού, διότι η $\psi(\delta) = n(\psi_1(\delta) + \psi_3(\delta))$ τείνει στο 0 όταν $\delta \to 0$, ενώ ταυτόχρονα για κάθε $i \in \{1, \cdots, n\}$ ισχύει η

$$|\phi_i - 1| \leqslant \psi_1(\delta) + \psi_3(\delta) \leqslant \psi(\delta)$$

από την οποία έπεται ότι

$$\phi_i \geqslant 1 - \psi_1(\delta) - \psi_3(\delta),$$

οπότε $\sum_{i=1}^n \phi_i \geqslant n - \psi(\delta)$.

Ορίζουμε τώρα $\chi(\epsilon) = \frac{1}{a} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))$. Έχουμε $\|\chi\|_2 \geqslant n$ και $\chi \leqslant n + n\psi(\delta)$ κατά σημείο. Έστω m η ελάχιστη τιμή της χ. Έχουμε

$$n^2 \leqslant \|\chi\|_2^2 \leqslant \frac{1}{2^n} m^2 + \left(1 - \frac{1}{2^n}\right) [n + n\psi(\delta)]^2,$$

άρα

$$m^2 \geqslant n^2 - (2^n - 1)(2n^2\psi(\delta) + n^2\psi^2(\delta)).$$

Έτσι, παίρνουμε την κατά σημείο ανισότητα

$$\chi \geqslant n - \psi_4(\delta) \tag{4.2.11}$$

για κάποια συνάρτηση $\psi_4(\delta)$ με $\lim_{\delta \to 0} \psi_4(\delta) = 0$.

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.4. Έστω $\epsilon, \epsilon' \in \{-1,1\}^n$. Θέτουμε $\Delta_1(\epsilon,\epsilon') = |\{i : \epsilon_i \neq \epsilon_i'\}|$. Παρατηρήστε ότι $d_1(\epsilon,\epsilon') = 2\Delta_1(\epsilon,\epsilon')$. Αφού $\phi_i \leqslant 1+\psi(\delta)$ κατά σημείο, από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\frac{1}{a} d(f(\epsilon), f(\epsilon')) \leqslant (1+\psi(\delta))\Delta_1(\epsilon,\epsilon'). \tag{4.2.12}$$

Από την άλλη πλευρά, λόγω της (4.2.11) έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{a} d(f(\epsilon), f(\epsilon')) &\geqslant \frac{1}{a} d(f(\epsilon), f(-\epsilon)) - \frac{1}{a} d(f(-\epsilon), f(\epsilon'))\\ &\geqslant n - \psi_4(\delta) - \frac{1}{a} d(f(-\epsilon), f(\epsilon'))\\ &\geqslant n - \psi_4(\delta) - (1+\psi(\delta))\Delta_1(\epsilon,\epsilon')\\ &\geqslant \Delta_1(\epsilon,\epsilon') - \psi_4(\delta) - n\psi(\delta)\\ &\geqslant \Delta_1(\epsilon,\epsilon')(1 - \psi_4(\delta) - n\psi(\delta)),\end{aligned}$$

παίρνοντας υπ' όψιν μας και την (4.2.12). Αν λοιπόν T_n είναι η εικόνα της απεικόνισης $f : C_1^n \to T$, η τελευταία ανισότητα μας δίνει

$$\|(f|_{T_n})^{-1}\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \frac{2}{a(1-\psi_4(\delta) - n\psi(\delta))},$$

και από την (4.2.12)

$$\|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant \frac{a}{2}(1+\psi(\delta)).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\|(f|_{T_n})^{-1}\|_{\mathrm{Lip}} \|f\|_{\mathrm{Lip}} \leqslant 1 + \psi_5(\delta)$$

για κάποια συνάρτηση $\psi_5(\delta)$ με $\lim_{\delta\to 0} \psi_5(\delta) = 0$.

Σταθεροποιώντας το n και επιλέγοντας το δ αρκετά μικρό, συμπεραίνουμε ότι αν $t_n = \sqrt{n}$ για κάθε n τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ ο T περιέχει $(1+\varepsilon)$-ομοιόμορφα τους C_1^n. Έτσι έχουμε δείξει την συνεπαγωγή (iii) $\Longrightarrow$ (i), και η απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.4 είναι πλήρης. □

4.3 Τύπος και μετρικός τύπος σε χώρους Banach

Σε αυτήν την παράγραφο συγκρίνουμε την έννοια του τύπου με αυτήν του μετρικού τύπου στην περίπτωση που ο χώρος $T = X$ είναι χώρος Banach. Το αποτέλεσμα των Bourgain, Milman και Wolfson είναι το εξής.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω $1 \leqslant p < 2$ και έστω X ένας χώρος Banach.*

(i) *Αν ο X έχει τύπο p τότε ο X έχει μετρικό τύπο p_1 για κάθε $p_1 < p$.*

(ii) *Αντίστροφα, αν ο X έχει μετρικό τύπο p τότε ο X έχει τύπο p_1 για κάθε $p_1 < p$.*

(iii) *Αν ο X περιέχει τους C_p^n ομοιόμορφα τότε ο X περιέχει τους ℓ_p^n. Φυσικά, ισχύει και το αντίστροφο.*

Η απόδειξη θα βασιστεί στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.3.2. *Έστω X ένας χώρος Banach και έστω $f : \{-1,1\}^n \to X$. Ορίζουμε*

$$\partial_i f(\epsilon) = \frac{1}{2}\big(f(\epsilon_1,\dots,\epsilon_i,\dots,\epsilon_n) - f(\epsilon_1,\dots,-\epsilon_i,\dots,\epsilon_n)\big).$$

Τότε, για κάθε $p \geqslant 1$ και για κάθε $n \geqslant 1$,

$$\left(\int_{E_2^n} \left\| f(x) - \int_{E_2^n} f(y)d\mu_n(y)\right\|^p d\mu_n(x)\right)^{1/p}$$
$$\leqslant 2e\log n \left(\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n y_i\partial_i f(x)\right\|^p d\mu_n(x)d\mu_n(y)\right)^{1/p}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε $(L_p(X))^* = L_q(X^*)$, όπου q είναι ο συζυγής εκθέτης του p. Για κάθε $i \in \{1,\dots,n\}$ ορίζουμε τον τελεστή $D_i : L_2(E_2^n;\mathbb{R}) \to L_2(E_2^n;\mathbb{R})$ με

$$D_i w_A = \begin{cases} w_{A\setminus\{i\}}, & \text{αν } i \in A \\ 0, & \text{αν } i \notin A. \end{cases}$$

Ο συζυγής του D_i είναι ο τελεστής

$$D_i^* w_A = \begin{cases} w_{A\cup\{i\}}, & \text{αν } i \notin A \\ 0, & \text{αν } i \notin A. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι $D_i^*D_iw_A = w_A$ αν $i \in A$ και $D_i^*D_iw_A = 0$ αν $i \notin A$, οπότε

$$\left(\sum_{i=1}^n D_i^*D_i\right) w_A = |A|w_A.$$

Επειδή οι συναρτήσεις Walsh $\{w_A\}_{A\subseteq\{1,\dots,n\}}$, είναι ορθοκανονική βάση του $L_2(E_2^n,\mathbb{R})$, για κάθε $f : E_2^n \to \mathbb{R}$ έχουμε τότε

$$\left(\sum_{i=1}^n D_i^*D_i\right) f = \sum_{A\subseteq\{1,\dots,n\}} |A|w_Ax_A,$$

όπου

$$f = \sum_A w_Ax_A \quad \text{με} \quad x_A = \int_{E_2^n} w_Af.$$

Έστω τώρα $0 \leqslant \varepsilon \leqslant 1$. Θεωρούμε τον τελεστή $T(\varepsilon) : L_2(E_2^n) \to L_2(E_2^n)$ που ορίζεται από τις

$$T(\varepsilon)(w_A) = \varepsilon^{|A|} w_A, \qquad A \subseteq \{1, \ldots, n\},$$

καθώς και την «παράγωγό» του,

$$T'(\varepsilon) w_A = |A| \varepsilon^{|A|-1} w_A.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $T(\varepsilon)$ είναι θετικός, και είναι συστολή στον $L_p(E_2^n)$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Η επόμενη παρατήρηση είναι ότι $\sum_{i=1} D_i^* T(\varepsilon) D_i = T'(\varepsilon)$. Πράγματι, ισχύει ότι

$$D_i^* T(\varepsilon) D_i w_A = \begin{cases} \varepsilon^{|A|-1} w_A, \text{ αν } i \in A, \\ 0, \text{ αν } i \notin A, \end{cases}$$

οπότε $\sum_{i=1} D_i^* T(\varepsilon) D_i w_A = |A| \varepsilon^{|A|-1} w_A$.

Θα θεωρήσουμε την επέκταση των παραπάνω τελεστών στον $L_2(E_2^n; Q)$, όπου $Q \in \{X, X^*\}$, μέσω των $D_i \otimes I_Q$, $T(\varepsilon) \otimes I_Q$ και $T'(\varepsilon) \otimes I_Q$. Κάπως καταχρηστικά, θα συνεχίσουμε να χρησιμοποιούμε τους συμβολισμούς D_i, $T(\varepsilon)$ και $T'(\varepsilon)$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $f : E_2^n \to X$,

$$D_i f(\zeta) = \frac{1}{2} \left(f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, 1, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n) - f(\zeta_1, \ldots, \zeta_{i-1}, -1, \zeta_{i+1}, \ldots, \zeta_n) \right).$$

Ακόμη, $\partial_i f(\zeta) = \zeta_i D_i f(\zeta)$, οπότε

$$\int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n y_i \partial_i f(x) \right\|^p d\mu_n(x) d\mu_n(y) = \int_{E_2^n} \left\| \sum_{i=1}^n y_i' D_i f(x) \right\|^p d\mu_n(x) d\mu_n(y').$$

Θεωρούμε τυχούσα συνάρτηση $g : \{-1, 1\}^n \to X^*$. Μέσω του μετασχηματισμού Fourier, η g γράφεται στη μορφή

$$g = \sum_A w_A x_A^* \quad \text{όπου} \quad x_A^* = \int_{E_2^n} w_A g \, d\mu_n.$$

Ορίζουμε τώρα $g_\varepsilon : E_2^n \times E_2^n \to X^*$ με

$$g_\varepsilon(\zeta, \xi) = \sum_A x_A^* \prod_{i \in A} (\varepsilon \zeta_i + (1 - \varepsilon) \xi_i).$$

Θα χρησιμοποιήσουμε δύο ανισότητες, τις

$$\|g_\varepsilon\|_{L_q(E_2^n \times E_2^n; X^*)} \leqslant \|g\|_q. \tag{4.3.1}$$

και

$$\varepsilon^n \|g\|_{L_q(E_2^n; X^*)} \leqslant \|T(\varepsilon) g\|_{L_q(E_2^n; X^*)} \tag{4.3.2}$$

οι οποίες αποδεικνύονται με το ίδιο επιχείρημα, πρώτα για $n = 1$ και έπειτα επαγωγικά για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ενδεικτικά, για την απόδειξη της (4.3.1), στην περίπτωση $n = 1$ αρκεί να δείξουμε ότι, για $x, y \in X^*$,

$$\frac{\|x+y\|^q + \|x-y\|^q + \|x+(2\varepsilon-1)y\|^q + \|x-(2\varepsilon-1)y\|^q}{4} \leqslant \frac{\|x+y\|^q + \|x-y\|^q}{2},$$

το οποίο ισχύει, καθώς η συνάρτηση $s \mapsto \|x+sy\|^q + \|x-sy\|^q$ είναι κυρτή και άρτια, και άρα αύξουσα στο $[0,\infty)$. Υποθέτοντας ότι το ζητούμενο ισχύει για $n-1$, ορίζουμε στη συνέχεια, για δεδομένα $\zeta_n, \xi_n \in \{-1, 1\}$, την $g^{\zeta_n,\xi_n} : E_2^{n-1} \to X^*$ μέσω της

$$g^{\zeta_n,\xi_n} = \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n-1\}} x_A^* w_A + (\varepsilon\zeta_n + (1-\varepsilon)\xi_n) \sum_{A \subseteq \{1,\dots,n-1\}} x_{A\cup\{n\}}^* w_A.$$

Ισχύει τότε για κάθε $\zeta, \xi \in E_2^n$ ότι

$$g_\varepsilon(\zeta,\xi) = g_\varepsilon^{\zeta_n,\xi_n}((\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1}),(\xi_1,\dots,\xi_{n-1})).$$

Χρησιμοποιώντας την επαγωγική υπόθεση, έχουμε τότε

$$\begin{aligned}
\|g_\varepsilon\|_{L_q(E_2^n\times E_2^n;X)}^q &= \int_{E_2^1\times E_2^1}\int_{E_2^{n-1}\times E_2^{n-1}} \left\|g_\varepsilon^{\zeta_n,\xi_n}((\zeta_1,\dots,\zeta_{n-1}),(\xi_1,\dots,\xi_{n-1}))\right\|^q \\
&= \int_{E_2^1\times E_2^1} \left\|g_\varepsilon^{\zeta_n,\xi_n}\right\|_{L_q(E_2^{n-1}\times E_2^{n-1};X)}^q \\
&\leqslant \int_{E_2^1\times E_2^1} \left\|g^{\zeta_n,\xi_n}\right\|_{L_q(E_2^{n-1};X)}^q .
\end{aligned}$$

Γράφοντας , για $\delta \in E_2^{n-1}$,

$$x(\delta) = \sum_{A\subseteq\{1,\dots,n-1\}} x_A^* w_A(\delta)$$

και

$$y(\delta) = \sum_{A\subseteq\{1,\dots,n-1\}} x_{A\cup\{n\}}^* w_A(\delta),$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{E_2^1\times E_2^1} \left\|g^{\zeta_n,\xi_n}\right\|_{L_q(E_2^{n-1};X)}^q &= \int_{E_2^{n-1}}\int_{E_2^1\times E_2^1} \|x(\delta) + (\varepsilon\zeta_{n-1} + (1-\varepsilon)\xi_{n-1})y(\delta)\|^q \\
&= \int_{E_2^{n-1}} \frac{1}{4}\Big(\|x(\delta)+y(\delta)\|^q + \|x(\delta)-y(\delta)\|^q + \\
&\qquad + \|x(\delta)+(2\varepsilon-1)y(\delta)\|^p + \|x(\delta)-(2\varepsilon-1)y(\delta)\|^p\Big) \\
&\leqslant \int_{E_2^{n-1}} \frac{1}{2}\left(\|x(\delta)+y(\delta)\|^q + \|x(\delta)-y(\delta)\|^q\right) = \|f\|_{L_q(E_2^n;X)}^q,
\end{aligned}$$

ολοκληρώνοντας έτσι την απόδειξη της (4.3.1).

Μια ακόμη βασική παρατήρηση είναι ότι ισχύει η ταυτότητα

$$g_\varepsilon(\zeta,\xi) = (1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\xi_i T(\varepsilon)D_i g(\zeta) + \Phi(\zeta,\xi), \tag{4.3.3}$$

όπου η Φ ικανοποιεί τις $\int_{E_2^n}\Phi\xi_i\,d\mu_n(\xi) = 0,\ i = 1,\ldots,n$. Για να δείξουμε την (4.3.3) αρκεί, λόγω γραμμικότητας, να δούμε ότι ισχύει στην περίπτωση που $g = w_A$ για κάποιο $A \subseteq \{1,\ldots,n\}$. Ισχύει τότε ότι

$$g_\epsilon(\zeta,\xi) = \prod_{i\in A}(\varepsilon\zeta_i + (1-\varepsilon)\xi_i),$$

και αναπτύσσοντας το παραπάνω γινόμενο βλέπουμε ότι ο μόνος όρος που δε μηδενίζεται μετά τον πολλαπλασιασμό με ξ_i και ολοκλήρωση ως προς ξ είναι της μορφής

$$(1-\epsilon)\sum_{i\in A}\xi_i\epsilon^{|A|-1}w_{A\setminus\{i\}}.$$

Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to X$ θεωρούμε το ολοκλήρωμα

$$I_\varepsilon = \int_{E_2^n\times E_2^n}[g_\varepsilon(\zeta,\xi)]\Big(\sum_{i=1}^{n}\xi_i D_i f(\zeta)\Big)d\mu(\zeta,\xi).$$

Χρησιμοποιώντας την έκφραση (4.3.3) για την g_ε και ολοκληρώνοντας ως προς ξ έχουμε, με το συμβολισμό που εισάγαμε στην αρχή της απόδειξης,

$$I_\varepsilon = (1-\varepsilon)\sum_{i=1}^{n}\langle T(\varepsilon)D_i g, D_i f\rangle, \tag{4.3.4}$$

όπου για $\phi \in L_2(E_2^n;X^*)$, $f \in L_2(E_2^n;X)$ συμβολίζουμε $\langle \phi, f\rangle = \int_{E_2^n}[\phi(\zeta)](f(\zeta))\,d\mu_n(\zeta)$. Από την παραπάνω και το γεγονός ότι ο $T'(\epsilon)$ είναι αυτοσυζυγής, έπεται ότι

$$I_\varepsilon = (1-\varepsilon)\langle g, T'(\varepsilon)f\rangle. \tag{4.3.5}$$

Από το θεώρημα Hahn-Banach (θυμίζουμε ότι $(L_p(X))^* = L_q(X^*)$), υπάρχει $g \in L_q(X^*)$ που ικανοποιεί τις

$$\|g\|_q \leqslant 1 \quad \text{και} \quad \langle g, T'(\varepsilon)f\rangle = \|T'(\varepsilon)f\|_p.$$

Από τις (4.3.5) και (4.3.1) βλέπουμε ότι

$$\|T'(\varepsilon)f\|_p \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}|I_\varepsilon| \leqslant \frac{1}{1-\varepsilon}\|g\|_q\left\|\sum_{i=1}^{n}\xi_i D_i f\right\|_{L_p(E_2^n\times E_2^n;X)}.$$

Αφού

$$T(\varepsilon) - T(0) = \int_0^{\varepsilon} T'(u)du,$$

έπεται ότι, για κάθε $0 < \varepsilon < 1$,

$$\|(T(\varepsilon) - T(0))f\|_p \leqslant \log\left(\frac{1}{1-\varepsilon}\right) \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i D_i f \right\|_{L_p(E_2^n \times E_2^n; X)}.$$

Έχουμε $T(0)f = x_{\emptyset} = \int_{E_2^n} f\, d\mu_n$, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι αυτή η ποσότητα μηδενίζεται. Έτσι, για κάθε $n > 1$ παίρνουμε

$$\left\|T\big(1 - \tfrac{1}{n}\big)f\right\|_p \leqslant \log n \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i D_i f \right\|_p$$

και χρησιμοποιώντας την (4.3.2) έχουμε

$$\big(1 - \tfrac{1}{n}\big)^n \|f\|_p \leqslant \log n \left\| \sum_{i=1}^{n} \xi_i D_i f \right\|_p,$$

απ' όπου προκύπτει το συμπέρασμα του λήμματος. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. (i) Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 4.3.2. Αν ο X έχει τύπο p, υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to X$ με $\int_{E_2^n} f\, d\mu_n = 0$ να ισχύει

$$\|f\|_2 \leqslant 2e \log n \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i f\|^p \right)^{1/p} \right\|_2 \leqslant 2eC(\log n) n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \|D_i f\|^2 \right)^{1/2} \right\|_2.$$

Από την τελευταία ανισότητα προκύπτει άμεσα ότι ο X έχει μετρικό τύπο p_1 για κάθε $p_1 < p$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι

$$\|f(\epsilon) - f(-\epsilon)\|_2 \leqslant 2\|f\|_2.$$

(ii) Έστω $x_1, \ldots, x_n \in X$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i$. Τότε $D_i f = x_i$, και αφού ο X έχει μετρικό τύπο p παίρνουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \right\|_2 \leqslant C n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2 \right)^{1/2} \tag{4.3.6}$$

για κάποια σταθερά $C > 0$. Αυτό δείχνει ότι για κάθε $p_1 < p$ ο X δεν μπορεί να περιέχει τους ℓ_p^n ομοιόμορφα, και τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 δείχνουν ότι ο X έχει τύπο p_1

(μπορεί μάλιστα να δείξει κανείς απευθείας ότι αν ο X ικανοποιεί την (4.3.6) τότε έχει τύπο p_1 για κάθε $p_1 < p$).

(iii) Είναι εύκολο να δούμε ότι αν ο X περιέχει τους C_p^n ομοιόμορφα τότε δεν μπορεί να έχει μετρικό τύπο r για κανένα $r > p$. Άρα, από το (i), δεν μπορεί να έχει τύπο r για κανένα $r > p$, και αυτό συνεπάγεται ότι ο X περιέχει τους ℓ_p^n ομοιόμορφα. □

4.4 Ο ορισμός του Enflo για τον μετρικό τύπο p

Ο Enflo πρότεινε (βλ. Παρατηρήσεις 4.4.2) έναν διαφορετικό ορισμό για την έννοια του μετρικού τύπου, τον οποίο περιγράφουμε εν συντομία. Λέμε ότι ο μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ έχει Enflo-τύπο p (θα γράφουμε E-τύπο p) αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $f : \{-1,1\}^n \to \mathcal{M}$,

$$\int_{E_2^n} d(f(\epsilon), f(-\epsilon))^p d\mu_n \leqslant C \sum_{i=1}^n \int_{E_2^n} \Delta_i(f)^p d\mu_n.$$

Παρατηρούμε ότι αν ο $\mathcal{M}$ περιέχει τους C_q^n ομοιόμορφα για κάποιον $q < p$ τότε ο $\mathcal{M}$ δεν μπορεί να έχει E-τύπο p. Το θεώρημα της προηγούμενης παραγράφου δείχνει λοιπόν ότι αν ο $\mathcal{M}$ έχει E-τύπο p τότε έχει μετρικό τύπο p_1 για κάθε $p_1 < p$. Η αντίστροφη κατεύθυνση δεν έχει αποσαφηνιστεί.

Μπορούμε όμως να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω X ένας χώρος Banach. Αν ο X έχει τύπο $p > 1$ τότε έχει E-τύπο p_1 για κάθε $p_1 < p$.*

Απόδειξη. Έστω $1 < p_1 < p$. Θα δείξουμε ένα ισχυρότερο αποτέλεσμα. Για κάθε $1 < r < \infty$ υπάρχει σταθερά $\beta > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε n και για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to X$ με $\int_{E_2^n} f \, d\mu_n = 0$ ισχύει

$$\|f\|_r \leqslant \beta \left\| \left(\sum_{i=1}^n \|D_i f\|^{p_1} \right)^{1/p_1} \right\|_r .$$

Παίρνοντας $r = p_1$ έχουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος.

Θα χρησιμοποιήσουμε ένα επιχείρημα δυϊσμού, όπως και στην απόδειξη του Λήμματος 4.3.2. Παρακάτω, συμβολίζουμε με s' τον συζυγή εκθέτη του s.

Σταθεροποιούμε $1 < q < \infty$. Αφού ο X έχει τύπο p, υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $z_1, \ldots, z_n \in X^*$ και για κάθε $\Phi \in L_2(X^*)$ με $\int_{E_2^n} \Phi \xi_i d\mu_n(\xi) = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, ισχύει

$$\left(\sum_{i=1}^n \|z_i\|^q \right)^{1/q} \leqslant C \left\| \sum_{i=1}^n \xi_i z_i + \Phi \right\|_{L_q(E_2^n; X^*)} .$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.3.3) και (4.3.1) βλέπουμε ότι, για κάθε $g \in L_q(X^*)$ (που εξαρτάται μόνο από το $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$) ισχύει

$$(1-\varepsilon)\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(\varepsilon)D_i g\|^q \right)^{1/q} \right\|_q \leqslant C\|g\|_q. \tag{4.4.1}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού ο $T(\varepsilon)$ είναι θετικός, έχουμε

$$\|T(\varepsilon)D_i g\|_\infty \leqslant \|D_i g\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty,$$

άρα

$$\left\| \sup_{1\leqslant i\leqslant n} \|T(\varepsilon)D_i g\| \right\|_\infty \leqslant \|g\|_\infty. \tag{4.4.2}$$

Ένα επιχείρημα παρεμβολής δείχνει ότι από τις (4.4.1) και (4.4.2) έπεται το εξής: αν ορίσουμε $\theta \in (0,1)$ μέσω της $\frac{1}{p_1} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{1}$ (δηλαδή $\theta = \frac{p'}{p_1'}$) και αν $\frac{1}{r'} = \frac{\theta}{q}$, τότε

$$\left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(\varepsilon)D_i g\|^{p_1'} \right)^{1/p_1'} \right\|_{r'} \leqslant C^\theta (1-\varepsilon)^{-\theta}\|g\|_{r'}. \tag{4.4.3}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε τις (4.3.4) και (4.3.5). Για κάθε $f : \{-1,1\}^n \to X$ έχουμε

$$\int_{E_2^n} \langle g, T'(\varepsilon)f\rangle d\mu_n = \sum_{i=1}^{n} \int_{E_2^n} \langle T(\varepsilon)D_i g, D_i f\rangle\, d\mu_n.$$

Άρα, αν $\left\| \left(\sum_{i=1}^n \|D_i f\|^{p_1}\right)^{1/p_1} \right\|_r \leqslant 1$ και αν η g ικανοποιεί τις $\|T'(\varepsilon)f\|_r = \int_{E_2^n} \langle g, T'(\varepsilon)f\rangle\, d\mu_n$ και $\|g\|_{r'} \leqslant 1$, τότε από την (4.4.3) παίρνουμε

$$\|T'(\varepsilon)f\|_r \leqslant \left\| \left(\sum_{i=1}^{n} \|T(\varepsilon)D_i g\|^{p_1'} \right)^{1/p_1'} \right\|_{r'} \leqslant C^\theta (1-\varepsilon)^{-\theta}.$$

Ολοκληρώνοντας, και κάνοντας την υπόθεση ότι $T(0)f = \int_{E_2^n} f\, d\mu_n = 0$, έχουμε

$$\|f\|_r = \|T(1)f\|_r \leqslant \int_0^1 C^\theta (1-\varepsilon)^{-\theta} d\varepsilon < \infty.$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα, αφού μπορούμε να επιλέξουμε κατάλληλα τον q έτσι ώστε ο r να παίρνει οποιαδήποτε τιμή στο $(1, \infty)$. $\square$

Παρατηρήσεις 4.4.2. Χρονολογικά, η πρώτη έννοια συγγενής του μετρικού τύπου εισήχθη από τον Enflo μέσα από τη μελέτη του 5ου προβλήματος του Hilbert στην άπειρη διάσταση ([15], [16], πριν ακόμα από τον ορισμό του γραμμικού τύπου) και ήταν αυτή της *στρογγυλότητας* (roundness): Λέμε ότι ένας μετρικός χώρος $(\mathcal{M}, d)$ έχει στρογγυλότητα $1 \leqslant p < \infty$ αν για κάθε $a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathcal{M}$,

$$d(a_1, a_3)^p + d(a_2, a_4)^p \leqslant d(a_1, a_2)^p + d(a_2, a_3)^p + d(a_3, a_4)^p + d(a_4, a_1)^p.$$

Αν για ένα n-διάστατο κύβο $C = \{x_\epsilon\}_{\epsilon \in E_2^n}$ στον $\mathcal{M}$ συμβολίσουμε με $diag(C) = \{\{x_\epsilon, x_{-\epsilon} : \epsilon \in E_2^n\}$ το σύνολο των διαγωνίων και με $edge(C) = \{\{x_\epsilon, x_{\epsilon'}\} : |\{i : \epsilon_i \neq \epsilon'_i\}| = 1, \epsilon \in E_2^n\}$ το σύνολο των ακμών του, εύκολα βλέπουμε ότι αν ο $(\mathcal{M}, d)$ έχει στρογγυλότητα p, τότε για κάθε n-διάστατο κύβο C στον $\mathcal{M}$,

$$\sum_{\{\alpha,\beta\} \in diag(C)} d(\alpha, \beta)^p \leqslant \sum_{\{\gamma,\delta\} \in edge(C)} d(\gamma, \delta)^p.$$

Στο [17] ο Enflo γενίκευσε την παραπάνω έννοια σε αυτό που εδώ ορίσαμε σαν E-τύπο, και ρώτησε αν για τους χώρους Banach η μη-γραμμική αυτή έννοια είναι ισοδύναμη με την έννοια του τύπου.

Το Λήμμα 4.3.2 αποδείχθηκε από τον Pisier στο [62], απαντώντας σχεδόν στο παραπάνω ερώτημα. Η αφαίρεση του παράγοντα $\log n$ από την ανισότητα του Pisier θα έδινε βέβαια οριστική λύση στο πρόβλημα του Enflo. Ωστόσο, ο Talagrand [68] έδειξε ότι ο παράγοντας $\log n$ δεν μπορεί να απαλειφθεί στη γενική περίπτωση, αλλά κάτι τέτοιο είναι δυνατό όταν $X = \mathbb{R}$. Ο Wagner [73] έδειξε αργότερα ότι το ίδιο συμβαίνει στην περίπτωση $p = \infty$, και οι Naor, Schechtman [57] αντικατέστησαν το λογάριθμο από μια σταθερά ανεξάρτητη της διάστασης για μια κλάση χώρων Banach που περιλαμβάνει τους $L_p(\mu)$, $p \in (0, \infty)$. Η πιο πρόσφατη εικασία σε αυτή την κατεύθυνση (Naor [56]) είναι ότι αυτό ισχύει για κάθε χώρο Banach X που έχει τύπο-p, για $p > 1$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Μετρικός συντύπος

5.1 Ορισμοί και βοηθητικά αποτελέσματα

Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την προσθετική (modulo m) ομάδα $\mathbb{Z}_m$, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε με $\mathbb{Z}_m^n$ το ευθύ γινόμενο n αντιγράφων της $\mathbb{Z}_m$. Θεωρούμε το ℓ_∞-γράφημα Cayley της $\mathbb{Z}_m^n$ που έχει σαν ακμή το $\{x, y\}$ αν και μόνο αν τα $x, y \in \mathbb{Z}_m^n$ είναι διαφορετικά και $x - y \in \{-1, 0, 1\}^n$, όπου η αφαίρεση γίνεται modulo m. Η μετρική που θεωρούμε στο $\mathbb{Z}_m^n$ είναι αυτή του συντομότερου μονοπατιού, την οποία συμβολίζουμε με $d_{\mathbb{Z}_m^n}(\cdot, \cdot)$: για δύο $x, y \in \mathbb{Z}_m^n$, η $d_{\mathbb{Z}_m^n}(x, y)$ είναι το πλήθος των ακμών του συντομότερου μονοπατιού που ενώνει τους κόμβους x και y στο γράφημα Cayley της $\mathbb{Z}_m^n$. Θα συμβολίζουμε, για $r > 0$, με $B_{\mathbb{Z}_m^n}(x, r)$ την μπάλα με κέντρο το $x \in \mathbb{Z}_m^n$ και ακτίνα r.

Η $\mathbb{Z}_m^n$ είναι μια πεπερασμένη, αβελιανή ομάδα. Ορίζεται λοιπόν σε αυτήν το μέτρο Haar μ, κατάλληλα κανονικοποιημένο ώστε $\mu(\mathbb{Z}_m^n) = 1$. Λόγω του αναλλοίωτου ως προς τις μεταφορές, το μέτρο μ ταυτίζεται με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στην $\mathbb{Z}_m^n$ – μπορούμε να βλέπουμε έτσι τον $(\mathbb{Z}_m^n, \mu)$ και σαν χώρο πιθανότητας.

Θα χρειαστούμε κάποια στοιχεία από την ανάλυση Fourier στην ομάδα $\mathbb{Z}_m^n$. Για κάθε $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{Z}_m^n$ ορίζουμε $w_k : \mathbb{Z}_m^n \to \mathbb{T}$ με

$$w_k(x) = \exp\left(\frac{2\pi i}{m} \sum_{j=1}^{n} k_j x_j\right).$$

Το σύνολο $\widehat{\mathbb{Z}_m^n} = \{w_k : k \in \mathbb{Z}_m^n\}$ είναι το σύνολο των χαρακτήρων της $\mathbb{Z}_m^n$. Έστω X ένας χώρος Banach επί του $\mathbb{C}$ (σε ολόκληρο το εύρος του κεφαλαίου θα αναφερόμαστε σε μιγαδικούς χώρους Banach, τα αποτελέσματα ωστόσο μεταφέρονται και στην πραγματική περίπτωση) και έστω $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$. Ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι η συνάρτηση

$\hat{f} : \widehat{\mathbb{Z}_m^n} \to X$ που ορίζεται από την

$$\hat{f}(k) = \int_{\mathbb{Z}_m^n} f(y)\overline{w_k(y)}\, d\mu(y).$$

Από το *θεώρημα αντιστροφής*, για την f έχουμε τότε την αναπαράσταση

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_m^n} w_k(x)\hat{f}(k). \tag{5.1.1}$$

Αν επιπλέον ο X είναι χώρος Hilbert, τότε ισχύει η ταυτότητα του Parseval,

$$\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x)\|_X^2 \, d\mu(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_m^n} \|\hat{f}(k)\|_X^2. \tag{5.1.2}$$

Συμβολίζουμε σε όλη την έκταση του κεφαλαίου με $\{e_j\}_{j=1}^n$ τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$ και με σ το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στον $\{-1,0,1\}^n$. Χρησιμοποιούμε γενικά το σύμβολο $\mathbb{E}_\epsilon$ για να συμβολίσουμε την ολοκλήρωση ως προς σ πάνω από όλα τα $\epsilon \in \{-1,0,1\}^n$. Τα σημεία όπου με τον ίδιο τρόπο συμβολίζεται ο μέσος όρος πάνω από τα $\epsilon \in \{-1,1\}^n$ θα διακρίνονται με σαφήνεια.

Ορισμός 5.1.1. Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Για κάθε $1 \leqslant p \leqslant q$, $n \in \mathbb{N}$ και $m \in 2\mathbb{N}$ ορίζουμε $\Gamma_q^{(p)}(X;n,m)$ το infimum πάνω από όλα τα $\Gamma > 0$ με την παρακάτω ιδιότητα: για κάθε $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \tfrac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^p \, d\mu(x) \\ \leqslant \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f(x+\epsilon), f(x)\right)^p \, d\mu(x)\, d\sigma(\epsilon). \end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Όταν $p = q$ (αντ. $p < q$), θα αναφερόμαστε στην (5.1.3) με τον όρο ανισότητα *συντύπου* q *με σταθερά* Γ (αντ. ανισότητα *συντύπου* q *τάξης* p*, με σταθερά* Γ). Θέτουμε

$$\Gamma_q^{(p)}(X) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{m \in 2\mathbb{N}} \Gamma_q^{(p)}(X;n,m).$$

και στην περίπτωση $p = q$ γράφουμε $\Gamma_q(X;n,m) := \Gamma_q^{(q)}(X;n,m)$ και $\Gamma_q(X) := \Gamma_q^{(q)}(X)$. Λέμε ότι ο μετρικός χώρος (X,d) έχει *μετρικό συντύπο* q, αν $\Gamma_q(X) < \infty$.

Συμβολίζουμε τέλος με $m_q^{(p)}(X;n,\Gamma)$ τον μικρότερο $m \in 2\mathbb{N}$ για τον οποίο η (5.1.3) ισχύει, για δεδομένα n, Γ. Όπως πριν, θα γράφουμε $m_q(X;n,\Gamma) := m_q^{(q)}(X;n,\Gamma)$.

Το ακόλουθο Λήμμα δείχνει ότι για κάθε μη τετριμμένο μετρικό χώρο X, το $m_q(X;n,\Gamma)$ είναι αναγκαστικά «μεγάλο».

Λήμμα 5.1.2. *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος με τουλάχιστον δύο σημεία. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $\Gamma > 0$ και για κάθε $p,q > 0$,*

$$m_q^{(p)}(X;n,\Gamma) \geqslant \frac{n^{1/q}}{\Gamma}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $u,v \in X$ με $u \neq v$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (πολλαπλασιάζοντας με μια κατάλληλη σταθερά), μπορούμε να υποθέσουμε ότι $d(u,v) = 1$. Θέτουμε $m = m_q^{(p)}(X;n,\Gamma)$. Θεωρούμε τυχαία απεικόνιση $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{Z}_m^n$ να ισχύει

$$\Pr[f(x) = u] = \Pr[f(x) = v] = \tfrac{1}{2}$$

και οι $\{f(x)\}_{x \in \mathbb{Z}_m^n}$ να είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές. Τότε, για κάθε $x,y \in \mathbb{Z}_m^n$ με $x \neq y$ ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[d(f(x),f(y))^p] = \frac{1}{2}.$$

Εφαρμόζοντας την (5.1.3) στην f και παίρνοντας μέση τιμή παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^n \frac{1}{2} \leqslant \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \frac{1}{2},$$

απ᾽ όπου έπεται το ζητούμενο. □

Λήμμα 5.1.3. *Για κάθε $n,k \in \mathbb{N}$ και για κάθε $m \in 2\mathbb{N}$,*

$$\Gamma_q^{(p)}(X;n,km) \leqslant \Gamma_q^{(p)}(X;n,m).$$

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{Z}_{km}^n \to X$. Για κάθε $y \in \mathbb{Z}_k^n$ ορίζουμε $f_y : \mathbb{Z}_m^n \to X$ με $f_y(x) = f(kx+y)$. Σταθεροποιούμε $\Gamma > \Gamma_q^{(p)}(X;n,m)$. Από τον ορισμό του $\Gamma_q^{(p)}(X;n,m)$ έχουμε τότε, για κάθε $y \in \mathbb{Z}_k^n$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} & d\left(f\left(kx + \tfrac{km}{2} e_j + y\right), f(kx+y)\right)^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^n}(x) \\ & \leqslant \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(kx+k\epsilon+y), f(kx+y))^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^n}(x)\, d\sigma(\epsilon).\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας τώρα πάνω στα $y \in \mathbb{Z}_k^n$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_{km}^n} d\left(f\left(z + \tfrac{km}{2} e_j\right), f(z)\right)^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_{km}^n}(z) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_k^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(kx + \tfrac{km}{2} e_j + y\right), f(kx+y)\right)^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^n}(x) \, d\mu_{\mathbb{Z}_k^n}(y) \\
&\leqslant \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_k^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(k(x+\epsilon)+y), f(kx+y))^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^n}(x) \, d\mu_{\mathbb{Z}_k^n}(y) \, d\sigma(\epsilon) \\
&= \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_{km}^n} d(f(z+k\epsilon), f(z))^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_{km}^n}(z) \, d\sigma(\epsilon) \\
&\leqslant \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_{km}^n} k^{p-1} \sum_{s=1}^{k} d(f(z+s\epsilon), f(z+(s-1)\epsilon))^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_{km}^n}(z) \, d\sigma(\epsilon) \\
&= \Gamma^p (km)^p n^{1-\frac{p}{q}} \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_{km}^n} d(f(z+\epsilon), f(z))^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_{km}^n}(z) \, d\sigma(\epsilon),
\end{aligned}
$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την

$$
\begin{aligned}
d(f(z+k\epsilon), f(z))^p &\leqslant \left(\sum_{s=1}^{k} d(f(z+s\epsilon), f(z+(s-1)\epsilon)) \right)^p \\
&\leqslant k^{p/q} \sum_{s=1}^{k} d(f(z+s\epsilon), f(z+(s-1)\epsilon))^p \\
&= k^{p-1} \sum_{s=1}^{k} d(f(z+s\epsilon), f(z+(s-1)\epsilon))^p
\end{aligned}
$$

(όπου $q = p/(p-1)$) και την

$$
\sum_{s=1}^{k} \int_{\mathbb{Z}_{km}^n} d(f(z+s\epsilon), f(z+(s-1)\epsilon))^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_{km}^n}(z) = k \int_{\mathbb{Z}_{km}^n} d(f(z+\epsilon), f(z))^p d\mu_{\mathbb{Z}_{km}^n}(z)
$$

που προκύπτει από το αναλλοίωτο του $\mu_{\mathbb{Z}_{km}^n}$ ως προς μεταφορές. $\square$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με μερικά ακόμα λήμματα που θα φανούν χρήσιμα στη συνέχεια.

Λήμμα 5.1.4. *Έστω $k, n \in \mathbb{N}$ με $k \leqslant n$, και έστω $m \in 2\mathbb{N}$. Τότε,*

$$
\Gamma_q^{(p)}(X; k, m) \leqslant \left(\frac{n}{k}\right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \Gamma_q^{(p)}(X; n, m).
$$

Απόδειξη. Δοθείσης $f : \mathbb{Z}_m^k \to X$, ορίζουμε $g : \mathbb{Z}_m^k \times \mathbb{Z}_m^{n-k} \cong \mathbb{Z}_m^n \to X$ μέσω της $g(x,y) = f(x)$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του $\Gamma_q^{(p)}(X; n, m)$ για την g έχουμε τότε, για κάθε $\Gamma > \Gamma_q^{(p)}(X; n, m)$,

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{Z}_m^k} d\left(f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right), f(x)\right)^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^k}(x) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(g\left((x,y) + \tfrac{m}{2} e_j\right), g(x,y)\right)^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^n}(x,y) \\
&\leqslant \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(g((x,y)+\epsilon), g(x,y))^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^n}(x,y) \, d\sigma(\epsilon) \\
&= \left(\binom{n}{k}^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}} \Gamma \right)^p m^p k^{1-\frac{p}{q}} \int_{\{-1,0,1\}^k} \int_{\mathbb{Z}_m^k} d(f(x+\epsilon), f(x))^p \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^k}(x) \, d\sigma(\epsilon). \qquad \square
\end{aligned}$$

Λήμμα 5.1.5. *Έστω (X,d) μετρικός χώρος. Για κάθε $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$,*

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+e_j), f(x))^p \, d\mu(x) \\
&\qquad\qquad \leqslant 3 \cdot 2^{p-1} n \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\epsilon), f(x))^p \, d\mu(x) \, d\sigma(\epsilon).
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Για κάθε $x \in \mathbb{Z}_m^n$ και για κάθε $\epsilon \in \{-1,0,1\}^n$ έχουμε

$$d(f(x+e_j), f(x))^p \leqslant 2^{p-1} \left(d(f(x+e_j), f(x+\epsilon))^p + d(f(x+\epsilon), f(x))^p \right).$$

Παρατηρούμε ότι, αφού $|\{\epsilon : \epsilon_j = -1\}| = 3^{n-1}$, είναι $\sigma(\{\epsilon : \epsilon_j \neq -1\}) = 2/3$, οπότε

$$\begin{aligned}
&\frac{2}{3} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+e_j), f(x))^p \, d\mu(x) \\
&= \sigma(\{\epsilon : \epsilon_j \neq -1\}) \cdot \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+e_j), f(x))^p \, d\mu(x) \\
&\leqslant 2^{p-1} \int_{\{\epsilon : \epsilon_j \neq -1\}} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left(d(f(x+e_j), f(x+\epsilon))^p + d(f(x+\epsilon), f(x))^p \right) d\mu(x) \, d\sigma(\epsilon) \\
&\overset{(*)}{\leqslant} 2^{p-1} \int_{\{\epsilon : \epsilon_j \neq 1\}} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(y), f(y+\epsilon))^p \, d\mu(y) \, d\sigma(\epsilon) + \\
&\qquad\qquad + 2^{p-1} \int_{\{\epsilon : \epsilon_j \neq -1\}} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\epsilon), f(x))^p \, d\mu(x) \, d\sigma(\epsilon) \\
&\leqslant 2^p \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\epsilon), f(x))^p \, d\mu(x) \, d\sigma(\epsilon),
\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ παραπάνω θεωρήσαμε την αλλαγή μεταβλητής $y = x + e_j$. Αθροίζοντας πάνω από όλα τα $j = 1, \dots, n$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 5.1.6. *Έστω (X, d) μετρικός χώρος. Υποθέτουμε ότι για κάποιον $n \in \mathbb{N}$ και κάποιον $m \in 2\mathbb{N}$ ισχύει ότι: για κάθε $l \leqslant n$ και κάθε $f : \mathbb{Z}_m^l \to X$,*

$$\sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbb{Z}_m^l} d\left(f\left(x + \tfrac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^p \, d\mu(x)$$
$$\leqslant C^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \left(\mathbb{E}_{\epsilon'} \int_{\mathbb{Z}_m^l} d(f(x+\epsilon'), f(x))^p \, d\mu(x) + \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbb{Z}_m^l} d(f(x+e_j), f(x))^p \, d\mu(x) \right)$$

για κάποια σταθερά $C > 0$, και $\epsilon' \in \{-1, 1\}^l$. Τότε,

$$\Gamma_q^{(p)}(X; n, m) \leqslant 6C.$$

Απόδειξη. Έστω $\emptyset \neq A \subseteq \{1, \dots, n\}$, με $A = \{j_1, \dots, j_l\}$, όπου $l = |A|$. Δοθείσης $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$, ορίζουμε $g : \mathbb{Z}_m^l \to X$, με $g(y) = f(x)$, αν $x = (x_1, \dots, x_n)$, και $y = \sum_{i=1}^{l} x_{j_i} e_i$. Από την υπόθεσή μας τότε,

$$\sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbb{Z}_m^l} d\left(g\left(y + \tfrac{m}{2}e_j\right), g(y)\right)^p \, d\mu(y)$$
$$\leqslant C^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \left(\mathbb{E}_{\epsilon'} \int_{\mathbb{Z}_m^l} d(g(y+\epsilon'), g(y))^p \, d\mu(y) + \frac{1}{l} \sum_{j=1}^{l} \int_{\mathbb{Z}_m^l} d(g(y+e_j), g(y))^p \, d\mu(x) \right),$$

όπου $\epsilon' \in \{-1, 1\}^l$. Ολοκληρώνοντας έπειτα πάνω και από τις υπόλοιπες συντεταγμένες των $x \in \mathbb{Z}_m^n$ και $\epsilon \in \{-1, 1\}^n$, παίρνουμε τελικά

$$\begin{aligned} &\sum_{j \in A} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \tfrac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^p \, d\mu(x) \\ &\qquad \leqslant C^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \left(\mathbb{E}_{\epsilon} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \sum_{j \in A} \epsilon_j e_j \right), f(x) \right)^p d\mu(x) + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \frac{1}{|A|} \sum_{j \in A} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+e_j), f(x))^p \, d\mu(x) \right). \end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Χρησιμοποιώντας για $x \in \mathbb{Z}_m^n$ τον συμβολισμό $a_j := d\left(f\left(x + \frac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^p$, το επόμενο βήμα είναι να παρατηρήσουμε ότι

$$\sum_{\emptyset \neq A \subseteq \{1, \dots, n\}} \frac{2^{|A|}}{3^n} \sum_{j \in A} a_j = \frac{2}{3} \sum_{j=1}^{n} a_j. \tag{5.1.5}$$

Αυτό συμβαίνει γιατί, μετρώντας για κάθε $j \in \{1,\dots,n\}$ πόσες φορές εμφανίζεται ο όρος a_j στο αριστερό άθροισμα παραπάνω, έχουμε

$$\sum_{\emptyset \neq A \subseteq \{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{3^n} \sum_{j\in A} a_j = \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^n} \binom{n-1}{k-1} \right) a_j,$$

και επιπλέον,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^n} \binom{n-1}{k-1} = \frac{2}{3^n} \sum_{k=1}^{n} 2^{k-1} \cdot 1^{n-k} \binom{n-1}{k-1} = \frac{2}{3^n} (2+1)^{n-1} = \frac{2}{3}.$$

Σημειώνουμε ακόμη ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{k \cdot 3^n} \binom{n-1}{k-1} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{2^k}{3^n \cdot n} \binom{n}{k} \\ &\leqslant \frac{1}{3^n \cdot n} \sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = \frac{1}{3^n \cdot n} \cdot 3^n = \frac{1}{n}, \end{aligned} \tag{5.1.6}$$

ώστε από την (5.1.4) να πάρουμε τελικά,

$$\begin{aligned} &\frac{2}{3} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right), f(x)\right)^p \, d\mu(x) \\ &\overset{(5.1.5)}{=} \sum_{\emptyset \neq A \subseteq \{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{3^n} \sum_{j\in A} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right), f(x)\right)^p \, d\mu(x) \\ &\leqslant C^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \Bigg(\sum_{\emptyset \neq A \subseteq \{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{3^n} \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \sum_{j\in A} \epsilon_j e_j \right), f(x) \right)^p d\mu(x) + \\ &\qquad + \sum_{\emptyset \neq A \subseteq \{1,\dots,n\}} \frac{2^{|A|}}{|A| 3^n} \sum_{j\in A} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+e_j), f(x))^p \, d\mu(x) \Bigg) \\ &\overset{(5.1.6)}{\leqslant} C^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \Bigg(\mathbb{E}_\delta \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\delta), f(x))^p \, d\mu(x) + \\ &\qquad + \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+e_j), f(x))^p \, d\mu(x) \Bigg), \end{aligned}$$

όπου τώρα $\delta \in \{-1,0,1\}^n$. Από το Λήμμα 5.1.5 έπεται τότε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \tfrac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^p d\mu(x) \\ \leqslant \frac{3}{2}(3^p+1)C^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \mathbb{E}_\delta \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\delta), f(x))^p \, d\mu(x),$$

οπότε

$$\Gamma_q^{(p)}(X;n,m) \leqslant \left(\frac{3}{2}(3^p+1)C^p\right)^{1/p} \leqslant 6C.$$

□

5.2 Η ισοδυναμία μετρικού και Rademacher συντύπου

Η έννοια του συντύπου σε μετρικούς χώρους όπως ορίστηκε παραπάνω είναι συμβατή με την έννοια του Rademacher συντύπου ενός χώρου Banach. Θα εξετάσουμε παρακάτω αυτή την ισοδυναμία.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω X ένας χώρος Banach και $q \in [2,\infty)$. Ο X έχει μετρικό συντύπο q αν και μόνον αν έχει Rademacher συντύπο q. Ειδικότερα*

$$\frac{1}{2\pi} C_q(X) \leqslant \Gamma_q(X) \leqslant 90 C_q(X).$$

Πριν την απόδειξη του θεωρήματος θα ασχοληθούμε ξεχωριστά με τις απλούστερες περιπτώσεις που ο X είναι χώρος Hilbert ή K-κυρτός χώρος Banach.

5.2.1 Χώροι Hilbert

Κάθε χώρος Hilbert έχει μετρικό συντύπο 2. Συγκεκριμένα ισχύει το παρακάτω αποτέλεσμα.

Πρόταση 5.2.2. *Έστω H ένας χώρος Hilbert. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $m \in \mathbb{N}$ πολλαπλάσιο του 4 τέτοιο ώστε $m \geqslant \frac{2}{3}\pi\sqrt{n}$,*

$$\Gamma_2(H;n,m) \leqslant \frac{\sqrt{6}}{\pi}.$$

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{Z}_m^n \to H$. Θεωρούμε το ανάπτυγμα Fourier (5.1.1) της f. Για κάθε $j = 1,2,\ldots,n$ έχουμε

$$f\left(x + \tfrac{m}{2}e_j\right) - f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_m^n} w_k(x)(e^{\pi i k_j} - 1)\hat{f}(k).$$

Από την ταυτότητα του Parseval (5.1.2), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f\left(x+\tfrac{m}{2}e_j\right) - f(x)\|_H^2 \, d\mu(x) &= \sum_{k\in\mathbb{Z}_m^n} \left(\sum_{j=1}^n |e^{\pi i k_j} - 1|^2\right) \|\hat{f}(k)\|_H^2 \\ &= 4\sum_{k\in\mathbb{Z}_m^n} |\{j : k_j \equiv 1 \mod 2\}| \cdot \|\hat{f}(k)\|_H^2.\end{aligned}$$

Επιπλέον, για κάθε $\epsilon \in \{-1,0,1\}^n$ έχουμε

$$f(x+\epsilon) - f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_m^n} w_k(x)(w_k(\epsilon)-1)\hat{f}(k),$$

οπότε

$$\mathbb{E}_{\epsilon,x}\left[\|f(x+\epsilon) - f(x)\|_H^2\right] = \sum_{k\in\mathbb{Z}_m^n} \left(\int_{\{-1,0,1\}^n} |w_k(\epsilon) - 1|^2 \, d\sigma(\epsilon)\right) \|\hat{f}(k)\|_H^2.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{\{-1,0,1\}^n} |w_k(\epsilon)-1|^2 \, d\sigma(\epsilon) &= \int_{\{-1,0,1\}^n} \left|\exp\left(\frac{2\pi i}{m}\sum_{j=1}^n k_j\epsilon_j\right) - 1\right|^2 d\sigma(\epsilon) \\ &= 2 - 2\mathrm{Re}\prod_{j=1}^n \int_{\{-1,0,1\}^n} \exp\left(\frac{2\pi i}{m}k_j\epsilon_j\right) d\sigma(\epsilon) \\ &= 2 - 2\prod_{j=1}^n \frac{1+2\cos\left(\frac{2\pi}{m}k_j\right)}{3} \\ &\geqslant 2 - 2\prod_{\{j:k_j\equiv 1 \mod 2\}} \frac{1+2\left|\cos\left(\frac{2\pi}{m}k_j\right)\right|}{3}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $|\cos 2y| \leqslant 1 - y^2$ για $|y| \leqslant \pi/4$, βλέπουμε ότι αν ο m είναι πολλαπλάσιο του 4 και ο $l \in \{0,\dots,m-1\}$ περιττός, τότε

$$\left|\cos\left(\frac{2\pi l}{m}\right)\right| \leqslant \left|\cos\left(\frac{2\pi}{m}\right)\right| \leqslant 1 - \frac{\pi^2}{m^2}.$$

Αν επιπλέον επιλέξουμε $m \geqslant \frac{2}{3}\pi\sqrt{n}$, τότε παρατηρούμε ότι

$$\frac{2|\{j : k_j \equiv 1 \mod 2\}|\pi^2}{3m^2} \leqslant \frac{3}{2},$$

οπότε

$$\begin{aligned}\int_{\{-1,0,1\}^n} |w_k(\epsilon)-1|^2\,d\sigma(\epsilon) &\geqslant 2\left(1-\left(1-\frac{2\pi^2}{3m^2}\right)^{|\{j:k_j\equiv 1 \mod 2\}|}\right)\\ &\overset{(*)}{\geqslant} 2\left(1-e^{-\frac{2|\{j:k_j\equiv 1 \mod 2\}|\pi^2}{3m^2}}\right)\\ &\overset{(**)}{\geqslant} |\{j:k_j\equiv 1 \mod 2\}|\cdot\frac{2\pi^2}{3m^2},\end{aligned}$$

όπου στην $(*)$ παραπάνω χρησιμοποιήσαμε την $e^t \geqslant 1+t$ και στην $(**)$ την $e^{-t}\leqslant 1-\frac{t}{2}$, που ισχύει για $t\leqslant \frac{3}{2}$. Με τα παραπάνω έχουμε πλέον δείξει ότι

$$\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_x\left[\left\|f\left(x+\tfrac{m}{2}e_j\right)-f(x)\right\|_H^2\right]\leqslant 4\cdot\frac{3m^2}{2\pi^2}\mathbb{E}_{\epsilon,x}\left[\|f(x+\epsilon)-f(x)\|_H^2\right],$$

άρα $\Gamma_2(H;n,m)\leqslant \frac{\sqrt{6}}{\pi}$. □

5.2.2 K-κυρτοί χώροι Banach

Θυμίζουμε τον Ορισμό 3.3.6 της σταθεράς K-κυρτότητας ενός χώρου Banach X,

$$K(X)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|Rad_n\|_{L_2(E_2^n;X)\to L_2(E_2^n;X)}.$$

Θα δείξουμε παρακάτω την «δύσκολη» κατεύθυνση του Θεωρήματος 5.2.1, ότι δηλαδή αν ο X έχει Rademacher συντύπο q τότε θα έχει και μετρικό συντύπο q, στην περίπτωση που ο X είναι K-κυρτός χώρος Banach. Πέρα από το γεγονός ότι η απόδειξη τότε είναι απλούστερη απ' ότι στην γενικότερη περίπτωση, μπορούμε επιπλέον να πάρουμε ένα βέλτιστο φράγμα για το m. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε ότι αν ο X είναι K-κυρτός χώρος Banach που έχει Rademacher συντύπο q, τότε για κάθε $1\leqslant p\leqslant q$ ισχύει $m_q^{(p)}(X;n,\Gamma)=O(n^{1/q})$ για κάποια σταθερά $\Gamma=\Gamma(X)$.

Χρησιμοποιούμε παρακάτω τον συμβολισμό, για $p\geqslant 1$,

$$K^{(p)}(X):=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|Rad_n\|_{L_p(E_2^n;X)\to L_p(E_2^n;X)}.$$

Παρατηρούμε ότι, από την ανισότητα Kahane-Khintchine,

$$\begin{aligned}\left(\mathbb{E}_\epsilon\left\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)x_{\{i\}}\right\|^p\right)^{1/p} &\leqslant C_p\cdot\left(\mathbb{E}_\epsilon\left\|\sum_{i=1}^n r_i(\epsilon)x_{\{i\}}\right\|^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant C_p\cdot K(X)\cdot\|f\|_{L_2(E_2^n;X)}\leqslant C_p\cdot K(X)\cdot\|f\|_{L_p(E_2^n;X)},\end{aligned}$$

όπου με $\mathbb{E}_\epsilon$ συμβολίζουμε τώρα τον μέσο όρο πάνω από όλα τα $\epsilon \in E_2^n$. Έχουμε έτσι ότι $K^{(p)}(X) \leqslant C_p K(X)$.

Συμβολίζουμε τέλος με $C_q^{(p)}(X)$ το infimum πάνω από όλες τις σταθερές $C > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\{x_j\}_{j=1}^n \subset X$,

$$\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|^q\right)^{1/q} \leqslant C \cdot \left(\mathbb{E}_\epsilon \left\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j\right\|_X^p\right)^{1/p}.$$

Και πάλι από την ανισότητα Kahane-Khintchine, έπεται ότι αν ο X έχει Rademacher συντύπο q, τότε για κάθε $p \geqslant 1$, $C_q^{(p)}(X) = O_{p,q}(C_q(X))$.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω X ένας K-κυρτός χώρος Banach με Rademacher συντύπο q. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $m \in 4\mathbb{N}$ ισχύει ότι*

$$m \geqslant \frac{n^{1/q}}{C_q^{(p)}(X) K^{(p)}(X)} \Longrightarrow \Gamma_q^{(p)}(X; n, m) \leqslant 36 C_q^{(p)}(X) K^{(p)}(X).$$

Απόδειξη. Για $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$, $j \in \{1, \ldots, n\}$ και $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in E_2^n$ ορίζουμε τους τελεστές

$$\tilde{\partial}_j f(x) = f(x + e_j) - f(x - e_j)$$

$$\mathcal{E}_j f(x) = \mathbb{E}_\epsilon f\Big(x + \sum_{l \neq j} \epsilon_l e_l\Big)$$

και για $\epsilon \in \{-1, 0, 1\}^n$,

$$\partial_\epsilon f(x) = f(x + \epsilon) - f(x).$$

Οι τελεστές αυτοί δρουν στο σύνολο των χαρακτήρων $\{w_k\}_{k \in \mathbb{Z}_m^n}$ του $\mathbb{Z}_m^n$ ως εξής:

$$\tilde{\partial}_j w_k = (w_k(e_j) - w_k(-e_j)) w_k = 2i \sin\left(\frac{2\pi k_j}{m}\right) w_k, \tag{5.2.1}$$

$$\mathcal{E}_j w_k = \left(\mathbb{E}_\epsilon \prod_{l \neq j} \exp\left(\frac{2\pi i}{m} \epsilon_l k_l\right)\right) w_k = \left(\prod_{l \neq j} \cos\left(\frac{2\pi k_l}{m}\right)\right) w_k \tag{5.2.2}$$

και για $\epsilon \in E_2^n$,

$$
\begin{aligned}
\partial_\epsilon w_k = (w_k(\epsilon) - 1) w_k &= \left(\prod_{j=1}^n e^{\frac{2\pi i}{m}\epsilon_j k_j} - 1 \right) w_k \\
&= \left(\prod_{j=1}^n \left(\cos\left(\frac{2\pi}{m}\epsilon_j k_j\right) + i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{m}\epsilon_j k_j\right) \right) - 1 \right) w_k \\
&= \left(\prod_{j=1}^n \left(\cos\left(\frac{2\pi}{m} k_j\right) + i \cdot \epsilon_j \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{m} k_j\right) \right) - 1 \right) w_k, \qquad (5.2.3)
\end{aligned}
$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\epsilon_j = \pm 1$ διότι $\epsilon \in E_2^n$, σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η cos είναι άρτια συνάρτηση ενώ η sin περιττή. Θεωρώντας τώρα την $\partial_\epsilon w_k$ ως συνάρτηση του $\epsilon \in E_2^n$, από τον ορισμό της Rademacher προβολής έχουμε

$$
Rad_n(\partial_\epsilon w_k) = \sum_{j=1}^n \epsilon_j \cdot \int_{E_2^n} \epsilon_j \partial_\epsilon w_k \, d\epsilon,
$$

και από την (5.2.3) έπεται ότι

$$
\begin{aligned}
\int_{E_2^n} \epsilon_j \partial_\epsilon w_k \, d\epsilon &= \int_{E_2^n} \epsilon_j \left(\prod_{l=1}^n \exp\left(\epsilon_l \frac{2\pi i}{m} k_l\right) - 1 \right) d\epsilon \cdot w_k \\
&= \int_{E_2^{n-1}} \left(\int_{\epsilon_j \in \{-1,1\}} \epsilon_j \cdot e^{\epsilon_j \frac{2\pi i}{m} k_j} \right) \prod_{l \neq j} e^{\epsilon_l \frac{2\pi i}{m} k_l} \, d\epsilon \cdot w_k \\
&= i \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{m} k_j\right) \cdot \prod_{l \neq j} \cos\left(\frac{2\pi}{m} k_l\right) \cdot w_k,
\end{aligned}
$$

οπότε, χρησιμοποιώντας και τις (5.2.1), (5.2.2), έχουμε

$$
\begin{aligned}
Rad_n(\partial_\epsilon w_k) &= i \cdot \left(\sum_{j=1}^n \epsilon_j \cdot \sin\left(\frac{2\pi k_j}{m}\right) \cdot \prod_{l \neq j} \cos\left(\frac{2\pi k_l}{m}\right) \right) w_k \\
&= \frac{i}{2} \cdot \left(\sum_{j=1}^n \epsilon_j \tilde{\partial}_j \mathcal{E}_j \right) w_k.
\end{aligned}
$$

Από την γραμμικότητα του τελεστή Rad_n και την αναπαράσταση (5.1.1), για κάθε $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$ και $x \in \mathbb{Z}_m^n$, έχουμε

$$
Rad_n(\partial_\epsilon f(x)) = \frac{i}{2} \left(\sum_{j=1}^n \epsilon_j \tilde{\partial}_j \mathcal{E}_j \right) f(x).
$$

Έπεται έτσι ότι

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_m^n} \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j (\mathcal{E}_j f(x+e_j) - \mathcal{E}_j f(x-e_j)) \right\|_X^p d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{Z}_m^n} \mathbb{E}_\epsilon \left\| \left(\sum_{j=1}^n \epsilon_j \tilde{\partial}_j \mathcal{E}_j \right) f(x) \right\|_X^p d\mu(x) \\
&= 2^p \int_{\mathbb{Z}_m^n} \mathbb{E}_\epsilon \left\| Rad_n(\partial_\epsilon f(x)) \right\|_X^p d\mu(x) \\
&\leqslant [2K^{(p)}(X)]^p \int_{\mathbb{Z}_m^n} \mathbb{E}_\epsilon \left\| \partial_\epsilon f(x) \right\|_X^p d\mu(x). \qquad (5.2.4)
\end{aligned}
$$

Από την (5.2.4) και από τον ορισμό της σταθεράς $C_q^{(p)}$, για κάθε $C > C_q^{(p)}$ έχουμε

$$
\begin{aligned}
(2K^{(p)}(X) \cdot C)^p \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} \| f(x+\epsilon) - f(x) \|_X^p d\mu(x) \\
&\geqslant C^p \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j \left(\mathcal{E}_j f(x+e_j) - \mathcal{E}_j f(x-e_j) \right) \right\|_X^p d\mu(x) \\
&\geqslant \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left(\sum_{j=1}^n \| \mathcal{E}_j f(x+e_j) - \mathcal{E}_j f(x-e_j) \|_X^q \right)^{p/q} d\mu(x) \\
&\geqslant \frac{1}{n^{1-\frac{p}{q}}} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \| \mathcal{E}_j f(x+e_j) - \mathcal{E}_j f(x-e_j) \|_X^p d\mu(x) \qquad (5.2.5)
\end{aligned}
$$

όπου στην τελευταία ανισότητα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε και την ανισότητα του Hölder. Και πάλι με χρήση της ανισότητας Hölder, της τριγωνικής ανισότητας και του αναλλοίωτου του μέτρου Haar ως προς τις μεταφορές έχουμε, για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \mathcal{E}_j f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - \mathcal{E}_j f(x) \right\|_X^p d\mu(x) \\
&\leqslant \left(\frac{m}{4} \right)^{p-1} \sum_{s=1}^{m/4} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \| \mathcal{E}_j f(x+2se_j) - \mathcal{E}_j f(x+2(s-1)e_j) \|_X^p d\mu(x) \\
&= \left(\frac{m}{4} \right)^p \int_{\mathbb{Z}_m^n} \| \mathcal{E}_j f(x+e_j) - \mathcal{E}_j f(x-e_j) \|_X^p d\mu(x). \qquad (5.2.6)
\end{aligned}
$$

Από την (5.2.5), χρησιμοποιώντας την (5.2.6), έχουμε

$$
\begin{aligned}
&\left(\frac{m}{4}\right)^p n^{1-\frac{p}{q}}(2K^{(p)}(X)\cdot C)^p\mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)\\
&\quad\geqslant \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\|\mathcal{E}_j f\left(x+\tfrac{m}{2}e_j\right)-\mathcal{E}_j f(x)\right\|_X^p \, d\mu(x)\\
&\quad\overset{(*)}{\geqslant} \frac{1}{3^{p-1}}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\|f\left(x+\tfrac{m}{2}e_j\right)-f(x)\right\|_X^p \, d\mu(x)\\
&\qquad\qquad\qquad - 2\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|\mathcal{E}_j f(x)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)\\
&\quad= \frac{1}{3^{p-1}}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\|f\left(x+\tfrac{m}{2}e_j\right)-f(x)\right\|_X^p \, d\mu(x)\\
&\qquad\qquad\qquad - 2\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\|\mathbb{E}_\epsilon\left[f\left(x+\sum_{l\neq j}\epsilon_l e_l\right)\right]-f(x)\right\|_X^p d\mu(x)\\
&\quad\geqslant \frac{1}{3^{p-1}}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\|f\left(x+\tfrac{m}{2}e_j\right)-f(x)\right\|_X^p \, d\mu(x)\\
&\qquad\qquad\qquad - 2\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\epsilon\left[\int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\|f\left(x+\sum_{l\neq j}\epsilon_l e_l\right)-f(x)\right\|_X^p d\mu(x)\right]\\
&\quad\overset{(**)}{\geqslant} \frac{1}{3^{p-1}}\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\|f\left(x+\tfrac{m}{2}e_j\right)-f(x)\right\|_X^p \, d\mu(x)\\
&\qquad\qquad\qquad - 2^p n\mathbb{E}_\epsilon\left[\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)\right]\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad - 2^p\sum_{j=1}^n \mathbb{E}_\epsilon\left[\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon_j e_j)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)\right],
\end{aligned}
\tag{5.2.7}
$$

όπου στις $(*)$ και $(**)$ παραπάνω χρησιμοποιήσαμε και πάλι την τριγωνική ανισότητα, την ανισότητα Hölder και το αναλλοίωτο του μ ως προς τις μεταφορές. Για τον ίδιο λόγο μάλιστα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\epsilon\left[\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon_j e_j)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)\right] &= \frac{1}{2^n}\Bigg(\sum_{\epsilon_j=1}\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)+ \\
&\qquad + \sum_{\epsilon_j=-1}\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x-e_j)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)\Bigg) \\
&= \frac{1}{2^n}\cdot 2\sum_{\epsilon_j=1}\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x) \\
&= \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x). \qquad (5.2.8)
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε τέλος ότι

$$m \geqslant \frac{n^{1/q}}{C_q^{(p)}(X)\cdot K^{(p)}(X)} \Longrightarrow 2^p \leqslant (2C_q^{(p)}(X)\cdot K^{(p)}(X))^p m^p n^{-\frac{p}{q}},$$

οπότε από τις (5.2.7) και (5.2.8) έχουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\|f\left(x+\frac{m}{2}e_j\right)-f(x)\right\|_X^p \, d\mu(x) \\
&\quad\leqslant 3^{p-1}\left(\frac{1}{4^p}+1\right)(2K^{(p)}\cdot C)^p m^p n^{1-\frac{p}{q}}\mathbb{E}_\epsilon\left[\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)\right]+ \\
&\qquad + 3^{p-1}(2K^{(p)}\cdot C)^p m^p n^{1-\frac{p}{q}}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x) \\
&\quad\leqslant (3\cdot 2K^{(p)}\cdot C)^p m^p n^{1-\frac{p}{q}}\Bigg(\mathbb{E}_\epsilon\left[\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)\right]+ \\
&\qquad + \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p \, d\mu(x)\Bigg).
\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 5.1.6 τότε, παίρνουμε το ζητούμενο. □

5.2.3 Από μετρικό σε Rademacher συντύπο

Προχωρώντας προς την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1, θα ξεκινήσουμε δείχνοντας πως αν ένας χώρος Banach X έχει μετρικό συντύπο q, τότε έχει και Rademacher συντύπο q. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή συστολής (βλ. για παράδειγμα [34], παράγραφος 2.6), την οποία αποδεικνύουμε για λόγους πληρότητας.

Θεώρημα 5.2.4 (αρχή συστολής του Kahane). *Έστω $1 \leqslant p < \infty$ και $\{x_i\}_{i=1}^n$ μια πεπερασμένη ακολουθία διανυσμάτων σε έναν χώρο Banach X. Τότε, για κάθε $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$,*

$$\mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n a_j \epsilon_j x_j \right\|_X^p \leqslant \left(2 \max_{1 \leqslant j \leqslant n} |a_j| \right)^p \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j \right\|_X^p,$$

όπου ο μέσος όρος λαμβάνεται πάνω από όλα τα $\epsilon \in E_2^n$. Αν επιπλέον $a_j \in \mathbb{R}$ για κάθε $j = 1, \ldots, n$, τότε η σταθερά 2 στην παραπάνω ανισότητα παραλείπεται.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$, και, χωρίς βλάβη της γενικότητας, ότι $|a_j| \leqslant 1$ για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$. Μπορούμε να γράψουμε το διάνυσμα $(a_1, \ldots, a_n)$ σαν ένα κυρτό συνδυασμό

$$(a_1, \ldots, a_n) = \sum_{k=1}^{2^n} \lambda^{(k)} \zeta^{(k)},$$

όπου $\zeta^{(k)} = (\zeta_1^{(k)}, \ldots, \zeta_n^{(k)}) \in E_2^n$. Χρησιμοποιώντας τότε διαδοχικά την κυρτότητα της $\|\cdot\|_X^p$, την ανισότητα Jensen και το γεγονός ότι οι $\{\zeta_j^{(k)} \epsilon_j x_j\}_{j=1}^n$ και $\{\epsilon_j x_j\}_{j=1}^n$ έχουν την ίδια κατανομή, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n a_j \epsilon_j x_j \right\|_X^p &= \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{k=1}^{2^n} \lambda^{(k)} \sum_{j=1}^n \zeta_j^{(k)} \epsilon_j x_j \right\|_X^p \\
&\leqslant \mathbb{E}_\epsilon \left[\sum_{k=1}^{2^n} \lambda^{(k)} \left\| \sum_{j=1}^n \zeta_j^{(k)} \epsilon_j x_j \right\|_X^p \right] \\
&\leqslant \sum_{k=1}^{2^n} \lambda^{(k)} \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n \zeta_j^{(k)} \epsilon_j x_j \right\|_X^p \\
&= \sum_{k=1}^{2^n} \lambda^{(k)} \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j \right\|_X^p = \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j \right\|_X^p,
\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο για την περίπτωση $\{a_j\}_{j=1}^n \subset \mathbb{R}$. Αν πάλι τα a_j είναι μιγαδικοί αριθμοί, ο παράγοντας 2 προκύπτει από το γεγονός ότι $a_j = a_j^{(1)} + i \cdot a_j^{(2)}$, όπου $a_j^{(1)}, a_j^{(2)} \in \mathbb{R}$. □

Έστω X ένας χώρος Banach, και υποθέτουμε ότι $\Gamma_q^{(p)}(X) < \infty$ για κάποιο $1 \leqslant p \leqslant q$. Σταθεροποιούμε $\Gamma > \Gamma_q^{(p)}(X)$, $v_1, \ldots, v_n \in X$ και $m \in 2\mathbb{N}$. Ορίζουμε $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$ μέσω της

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^n e^{\frac{2\pi i x_k}{m}} v_k.$$

Παρατηρούμε τότε ότι

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - f(x) \right\|_X^p \, d\mu(x) = 2^p \sum_{j=1}^{n} \|v_j\|_X^p \tag{5.2.9}$$

και, για $\delta \in \{-1, 0, 1\}^n$,

$$\mathbb{E}_{\delta,x} \|f(x+\delta) - f(x)\|_X^p = \mathbb{E}_{\delta,x} \left\| \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi i x_j}{m}} \left(e^{\frac{2\pi i \delta_j}{m}} - 1 \right) v_j \right\|_X^p . \tag{5.2.10}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του μέτρου Haar ως προς τις μεταφορές, έχουμε, για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in E_2^n$,

$$\begin{aligned}
&\int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi i x_j}{m}} \left(e^{\frac{2\pi i \delta_j}{m}} - 1 \right) v_j \right\|_X^p d\mu(x)\, d\sigma(\delta) \\
&\qquad = \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi i}{m}\left(x_j + \frac{m(1-\epsilon_j)}{4}\right)} \left(e^{\frac{2\pi i \delta_j}{m}} - 1 \right) v_j \right\|_X^p d\mu(x)\, d\sigma(\delta) \\
&\qquad = \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j e^{\frac{2\pi i}{m} x_j} \left(e^{\frac{2\pi i \delta_j}{m}} - 1 \right) v_j \right\|_X^p d\mu(x)\, d\sigma(\delta).
\end{aligned}$$

Παίρνοντας τη μέση τιμή πάνω από όλα τα $\epsilon \in E_2^n$ και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.4 έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \sum_{j=1}^{n} e^{\frac{2\pi i x_j}{m}} \left(e^{\frac{2\pi i \delta_j}{m}} - 1 \right) v_j \right\|_X^p d\mu(x)\, d\sigma(\delta) \\
&\qquad = \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j e^{\frac{2\pi i}{m} x_j} \left(e^{\frac{2\pi i \delta_j}{m}} - 1 \right) v_j \right\|_X^p d\mu(x)\, d\sigma(\delta) \\
&\qquad \leqslant \int_{\{-1,0,1\}^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} 2^p \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \left| e^{\frac{2\pi i \delta_j}{m}} - 1 \right| \right)^p \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j v_j \right\|_X^p d\mu(x)\, d\sigma(\delta) \\
&\qquad \leqslant \left(\frac{4\pi}{m} \right)^p \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j v_j \right\|_X^p , \qquad (5.2.11)
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα κάναμε χρήση της $|e^{i\theta}-1| \leqslant |\theta|$. Από τις (5.2.9), (5.2.10), (5.2.11) και τον ορισμό του $\Gamma_q^{(p)}(X)$ τότε, έχουμε

$$2^p \sum_{j=1}^n \|v_j\|_X^p \leqslant \Gamma^p m^p n^{1-\frac{p}{q}} \left(\frac{4\pi}{m}\right)^p \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j v_j \right\|_X^p = (4\pi\Gamma)^p n^{1-\frac{p}{q}} \mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j v_j \right\|_X^p .$$

Βλέπουμε έτσι ότι αν $q = p$, τότε $C_q(X) \leqslant 2\pi\Gamma_q(X)$, όπως έπρεπε να δειχθεί.

Παρατήρηση 5.2.5. Δείξαμε επιπλέον παραπάνω ότι αν $p < q$, τότε για κάθε $\|v_1\|_X = \cdots = \|v_n\|_X = 1$ έχουμε

$$\left(\mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j v_j \right\|_X^q \right)^{1/q} \geqslant \left(\mathbb{E}_\epsilon \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j v_j \right\|_X^p \right)^{1/p} = \Omega\left(\frac{n^{1/q}}{\Gamma}\right),$$

δηλαδή ο ορισμός του συντύπου q ισχύει στον X αν περιοριστούμε στις πεπερασμένες ακολουθίες $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ με $\|x_1\|_X = \cdots = \|x_n\|_X$. Όταν αυτό ισχύει λέμε ότι ο X έχει *ισονορμικό συντύπο* q. Εύκολα βλέπουμε ότι

$$\inf\{q : \text{ ο } X \text{ έχει ισονορμικό συντύπο } q\} = \inf\{q : \text{ ο } X \text{ έχει συντύπο } q\},$$

οπότε αν ο X έχει ισονορμικό συντύπο q, τότε έχει συντύπο q' για κάθε $q' > q$. Επιπλέον, στην ειδικότερη περίπτωση $q = 2$ έπεται ότι ο X έχει συντύπο 2 (βλ. [71]).

5.2.4 Από Rademacher σε μετρικό συντύπο

Η ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος 5.2.1 θα βασιστεί σε δύο Λήμματα. Έστω $k \in \mathbb{N} \setminus 2\mathbb{N}$, $k < \frac{m}{2}$ και έστω $1 \leqslant p \leqslant q$. Για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ ορίζουμε $S(j,k) \subseteq \mathbb{Z}_m^n$ μέσω της

$$S(j,k) := \{y \in [-k,k]^n \subseteq \mathbb{Z}_m^n : y_j \equiv 0 \mod 2 \text{ και } y_l \equiv 1 \mod 2 \text{ για κάθε } l \neq j\}.$$

Ακόμη, για $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$ ορίζουμε

$$\mathcal{E}_j^{(k)} f(x) = \left(f * \frac{\mathbb{1}_{S(j,k)}}{\mu(S(j,k))} \right)(x) = \frac{1}{\mu(S(j,k))} \int_{S(j,k)} f(x+y)\, d\mu(y).$$

Λήμμα 5.2.6. *Για κάθε $p \geqslant 1$, για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ και για κάθε $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$,*

$$\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|\mathcal{E}_j^{(k)} f(x) - f(x)\|_X^p \, d\mu(x) \leqslant 2^p k^p \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon) - f(x)\|_X^p \, d\mu(x) + \\ + 2^{p-1} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j) - f(x)\|_X^p \, d\mu(x).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι, από την κυρτότητα της $\|\cdot\|_X^p$ και την ανισότητα Jensen, ισχύει, για κάθε $x \in \mathbb{Z}_m^n$, η σχέση

$$\begin{aligned}\|\mathcal{E}_j^{(k)} f(x) - f(x)\|_X^p &= \left\| \frac{1}{\mu(S(j,k))} \int_{S(j,k)} (f(x+y) - f(x))\, d\mu(y) \right\|_X^p \\ &\leqslant \frac{1}{\mu(S(j,k))} \int_{S(j,k)} \|f(x+y) - f(x)\|_X^p \, d\mu(y). \end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Έστω $x \in \{0, \dots, k\}^n$ τέτοιο ώστε για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$ η συντεταγμένη x_j να είναι περιττός αριθμός. Ορίζουμε $\gamma_x : \{0, 1, \dots, \|x\|_\infty\} \to \mathbb{Z}_m^n$ ως εξής: θέτουμε $\gamma_x(0) = (0, \dots, 0)$, $\gamma_x(1) = (1, \dots, 1)$ και αν ο $t \geqslant 2$ είναι άρτιος, τότε ορίζουμε

$$\gamma_x(t) = \gamma_x(t-1) + \sum_{s=1}^n e_s \quad \text{και} \quad \gamma_x(t+1) = \gamma_x(t-1) + 2 \sum_{\substack{s \in \{1,\dots,n\} \\ \gamma_x(t-1)_s < x_s}} e_s.$$

Από τον παραπάνω ορισμό έχουμε ότι, για κάθε $t \in \{1, \dots, \|x\|_\infty\}$, $\gamma_x(t) - \gamma_x(t-1) \in \{-1, 1\}^n$. Έχουμε έτσι ορίσει μια γεωδαισιακή στον $\mathbb{Z}_m^n$. Επιπλέον, επειδή όλες οι συντεταγμένες του x είναι περιττοί αριθμοί, μπορούμε να γράψουμε

$$x = \gamma_x(1) + \sum_{\substack{t=1 \\ t \equiv 1 \mod 2}}^{\|x\|_\infty - 2} 2 \sum_{\substack{s=1 \\ \gamma_x(t)_s < x_s}}^n e_s,$$

απ' όπου έπεται ότι $\gamma_x(\|x\|_\infty) = x$. Για $x \in (\mathbb{Z}_m \setminus \{0\})^n$ χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $|x| = (|x_1|, \dots, |x_n|)$ και $\mathrm{sign}(x) = (\mathrm{sign}(x_1), \dots, \mathrm{sign}(x_n))$. Αν κάποιο $x \in [-k, k]^n$ είναι τέτοιο ώστε όλες οι συντεταγμένες του να είναι περιττές, μπορούμε έτσι να γράφουμε $\gamma_x = \mathrm{sign}(x) \cdot \gamma_{|x|}$ (όπου με $\cdot$ συμβολίζουμε τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό).

Αν $y \in S(j,k)$, τότε όλες οι συντεταγμένες του $y \pm e_j$ είναι περιττοί αριθμοί. Μπορούμε έτσι να ορίσουμε, για $x \in \mathbb{Z}_m^n$, δύο νέες γεωδαισιακές

$$\gamma_{x,y}^{+1} = x + e_j + \gamma_{y-e_j} \quad \text{και} \quad \gamma_{x,y}^{-1} = x - e_j + \gamma_{y+e_j}$$

(συμβολίζοντας εδώ με $+$ την κατά σημείο πρόσθεση). Για $z \in \mathbb{Z}_m^n$ και $\epsilon \in E_2^n$ ορίζουμε ακόμη

$$\begin{aligned} F^{+1}(z,\epsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_m^n \times S(j,k) :\ &\text{υπάρχει } t \in \{1, \dots, \|y - e_j\|_\infty\} \text{ τέτοιο ώστε} \\ &\gamma_{x,y}^{+1}(t-1) = z \text{ και } \gamma_{x,y}^{+1}(t) = z + \epsilon\} \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} F^{-1}(z,\epsilon) = \{(x,y) \in \mathbb{Z}_m^n \times S(j,k) :\ &\text{υπάρχει } t \in \{1, \dots, \|y + e_j\|_\infty\} \text{ τέτοιο ώστε} \\ &\gamma_{x,y}^{-1}(t-1) = z \text{ και } \gamma_{x,y}^{-1}(t) = z + \epsilon\}. \end{aligned}$$

Ισχυρισμός 5.2.7. *Για κάθε $z, w \in \mathbb{Z}_m^n$ και $\epsilon, \delta \in E_2^n$,*

$$|F^{+1}(z,\epsilon)| + |F^{-1}(z,\epsilon)| = |F^{+1}(w,\delta)| + |F^{-1}(w,\delta)|.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $\psi : \mathbb{Z}_m^n \times S(j,k) \to \mathbb{Z}_m^n \times S(j,k)$ μέσω της

$$\psi(x,y) = (w - \epsilon\delta z + \epsilon\delta x, \epsilon\delta y)$$

και ισχυριζόμαστε ότι η ψ είναι μια ένα προς ένα απεικόνιση του συνόλου $F^{+1}(z,\epsilon)$ επί του $F^{\epsilon_j\delta_j}(w,\delta)$. Πράγματι, έστω $(x,y) \in F^{+1}(z,\epsilon)$. Τότε υπάρχει $t \in \{1,\ldots,\|y-e_j\|_\infty\}$ τέτοιο ώστε $\gamma_{x,y}^{+1}(t-1) = z$ και $\gamma_{x,y}^{+1}(t) = z+\epsilon$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\gamma_{\psi(x,y)}^{\epsilon_j\delta_j} &= w - \epsilon\delta z + \epsilon\delta x + \epsilon_j\delta_j e_j + \gamma_{\epsilon\delta y - \epsilon_j\delta_j e_j} \\ &= w - \epsilon\delta z + \epsilon\delta\gamma_{x,y}^{+1},\end{aligned}$$

και άρα, από τον ορισμό της $\gamma_{x,y}^{+1}$ έπεται ότι $\gamma_{\psi(x,y)}^{\epsilon_j\delta_j}(t-1) = w$ και $\gamma_{\psi(x,y)}^{\epsilon_j\delta_j}(t) = w+\delta$, οπότε $\psi(x,y) \in F^{\epsilon_j\delta_j}(w,\delta)$. Επειδή η ψ είναι αντιστρέψιμη, παίρνουμε το ζητούμενο. Ομοίως δείχνει κανείς την αμφιμονοσήμαντη, μέσω της ψ, αντιστοιχία των συνόλων $F^{-1}(z,\epsilon)$ και $F^{-\epsilon_j\delta_j}(w,\delta)$, που ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού. □

Ισχυρισμός 5.2.8. *Θέτουμε $N := |F^{+1}(z,\epsilon)| + |F^{-1}(z,\epsilon)|$, που από τον Ισχυρισμό 5.2.7 είναι μια ποσότητα ανεξάρτητη από την επιλογή των $z \in \mathbb{Z}_m^n$ και $\epsilon \in E_2^n$. Τότε,*

$$N \leqslant \frac{k \cdot |S(j,k)|}{2^{n-1}}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\begin{aligned}N \cdot m^n \cdot 2^n &= \sum_{(z,\epsilon)\in\mathbb{Z}_m^n\times E_2^n} \left(|F^{+1}(z,\epsilon)| + |F^{-1}(z,\epsilon)|\right) \\ &= \sum_{(z,\epsilon)\in\mathbb{Z}_m^n\times E_2^n} \left(\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} \mathbb{1}_{\{\gamma_{x,y}^{+1}(t-1)=z \wedge \gamma_{x,y}^{+1}(t)=z+\epsilon\}}(t) \right) + \\ &\quad + \sum_{(z,\epsilon)\in\mathbb{Z}_m^n\times E_2^n} \left(\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty} \mathbb{1}_{\{\gamma_{x,y}^{-1}(t-1)=z \wedge \gamma_{x,y}^{-1}(t)=z+\epsilon\}}(t) \right) \\ &= \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \|y-e_j\|_\infty + \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \|y+e_j\|_\infty \leqslant 2k \cdot m^n \cdot |S(j,k)|.\end{aligned}$$

□

Ολοκληρώνουμε τώρα την απόδειξη του Λήμματος 5.2.6 ως εξής: Κάνοντας χρήση της τριγωνικής ανισότητας και της ανισότητας Hölder (δύο φορές) έχουμε, για $x \in \mathbb{Z}_m^n$ και $y \in S(j,k)$,

$$\begin{aligned}\frac{\|f(x)-f(x+y)\|_X^p}{2^{p-1}} &\leqslant \|f(x)-f(x+e_j)\|_X^p + \\ &\quad + \|y-e_j\|_\infty^{p-1} \sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} \|f(\gamma_{x,y}^{+1}(t)) - f(\gamma_{x,y}^{+1}(t-1))\|_X^p \\ &\leqslant \|f(x)-f(x+e_j)\|_X^p + \\ &\quad + k^{p-1} \sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} \|f(\gamma_{x,y}^{+1}(t)) - f(\gamma_{x,y}^{+1}(t-1))\|_X^p \end{aligned} \tag{5.2.13}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{\|f(x)-f(x+y)\|_X^p}{2^{p-1}} &\leqslant \|f(x)-f(x-e_j)\|_X^p + \\ &\quad + \|y+e_j\|_\infty^{p-1} \sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty} \|f(\gamma_{x,y}^{-1}(t)) - f(\gamma_{x,y}^{-1}(t-1))\|_X^p \\ &\leqslant \|f(x)-f(x-e_j)\|_X^p + \\ &\quad + k^{p-1} \sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty} \|f(\gamma_{x,y}^{-1}(t)) - f(\gamma_{x,y}^{-1}(t-1))\|_X^p. \end{aligned} \tag{5.2.14}$$

Παρατηρούμε επιπλέον ότι

$$\begin{aligned}&\sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \left(\sum_{t=1}^{\|y-e_j\|_\infty} \|f(\gamma_{x,y}^{+1}(t)) - f(\gamma_{x,y}^{+1}(t-1))\|_X^p + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \sum_{t=1}^{\|y+e_j\|_\infty} \|f(\gamma_{x,y}^{-1}(t)) - f(\gamma_{x,y}^{-1}(t-1))\|_X^p \right) \\ &\quad = \sum_{(x,y)\in\mathbb{Z}_m^n\times S(j,k)} \left(\sum_{\substack{(z,\epsilon)\in\mathbb{Z}_m^n\times E_2^n \\ (x,y)\in F^{+1}(z,\epsilon)}} \|f(z+\epsilon)-f(z)\|_X^p + \right. \\ &\qquad\qquad \left. + \sum_{\substack{(z,\epsilon)\in\mathbb{Z}_m^n\times E_2^n \\ (x,y)\in F^{-1}(z,\epsilon)}} \|f(z+\epsilon)-f(z)\|_X^p \right)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sum_{(z,\epsilon)\in\mathbb{Z}_m^n\times E_2^n}\Bigg(\sum_{(x,y)\in F^{+1}(z,\epsilon)}\|f(z+\epsilon)-f(z)\|_X^p+\\
&\qquad\qquad+\sum_{(x,y)\in F^{-1}(z,\epsilon)}\|f(z+\epsilon)-f(z)\|_X^p\Bigg)\\
&= N\cdot\sum_{(z,\epsilon)\in\mathbb{Z}_m^n\times E_2^n}\|f(z+\epsilon)-f(z)\|_X^p,
\end{aligned}$$

οπότε παίρνοντας τους μέσους όρους στις (5.2.13), (5.2.14) και ολοκληρώνοντας ως προς $x\in\mathbb{Z}_m^n$ έχουμε τελικά,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{\mu(S(j,k))}\int_{\mathbb{Z}_m^n}\int_{S(j,k)}\|f(x)-f(x+y)\|_X^p\,d\mu(y)\,d\mu(x)\\
&\quad\leqslant 2^{p-1}\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p\,d\mu(x)+\\
&\qquad\qquad+(2k)^{p-1}\frac{N\cdot 2^n}{|S(j,k)|}\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(z+\epsilon)-f(z)\|_X^p\,d\mu(z)\\
&\quad\leqslant 2^{p-1}\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p\,d\mu(x)+(2k)^p\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(z+\epsilon)-f(z)\|_X^p\,d\mu(z),
\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε και τον Ισχυρισμό 5.2.8. Από την (5.2.12), η απόδειξη του Λήμματος έχει ολοκληρωθεί. □

Λήμμα 5.2.9. *Για κάθε $f:\mathbb{Z}_m^n\to X$, κάθε $n\in\mathbb{N}$, κάθε $m\in 2\mathbb{N}$, κάθε $\epsilon\in\{-1,1\}^n$, κάθε περιττό ακέραιο $k<\frac{m}{2}$ και κάθε $p\geqslant 1$,*

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_m^n}\left\|\sum_{j=1}^n\epsilon_j\left[\mathcal{E}_j^{(k)}f(x+e_j)-\mathcal{E}_j^{(k)}f(x-e_j)\right]\right\|_X^p\,d\mu(x)\\
&\qquad\leqslant 3^{p-1}\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+\epsilon)-f(x-\epsilon)\|_X^p\,d\mu(x)+\\
&\qquad\qquad+\frac{24^p n^{2p-1}}{k^p}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p\,d\mu(x).
\end{aligned}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\epsilon\in E_2^n$ και $x\in\mathbb{Z}_m^n$. Θεωρούμε τα αθροίσματα

$$A_f(x,\epsilon)=\sum_{j=1}^n\epsilon_j\Big[\mathcal{E}_j^{(k)}f(x+e_j)-\mathcal{E}_j^{(k)}f(x-e_j)\Big] \tag{5.2.15}$$

και

$$B_f(x,\epsilon) = \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{z-x\in(-k,k)^n\cap(2\mathbb{Z})^n} [f(z+\epsilon) - f(z-\epsilon)]. \tag{5.2.16}$$

Επειδή $|S(j,k)| = k(k+1)^{n-1}$, ανεξαρτήτως του j, παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} A_f(x,\epsilon) &= \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{z\in S(j,x)} \epsilon_j (f(x+z+e_j) - f(x+z-e_j)) \\ &= \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \left(\sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}_m^n \\ y-x-e_j\in S(j,k)}} \epsilon_j f(y) + \sum_{\substack{y\in\mathbb{Z}_m^n \\ y-x+e_j\in S(j,k)}} -\epsilon_j f(y) \right), \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$A_f(x,\epsilon) = \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} a_y(x,\epsilon) f(y), \tag{5.2.17}$$

όπου

$$a_y(x,\epsilon) = \sum_{\{j:y-x-\epsilon_j\in S(j,k)\}} \epsilon_j + \sum_{\{j:y-x+\epsilon_j\in S(j,k)\}} -\epsilon_j .$$

Με ανάλογο τρόπο παίρνουμε

$$B_f(x,\epsilon) = \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} b_y(x,\epsilon) f(y), \tag{5.2.18}$$

όπου

$$b_y(x,\epsilon) = \begin{cases} 1, & \text{αν } y-x-\epsilon\in(-k,k)^n\cap(2\mathbb{Z})^n, \\ -1, & \text{αν } y-x+\epsilon\in(-k,k)^n\cap(2\mathbb{Z})^n, \\ 0, & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Για κάθε $x\in\mathbb{Z}_m^n$ ορίζουμε $S(x)\subset\mathbb{Z}_m^n$ ως εξής:

$$S(x) = \left\{ y\in x+(2\mathbb{Z}+1)^n : d_{\mathbb{Z}_m^n}(y,x) = k \ \text{ και } \ |\{j : |y_j - x_j| \equiv k \mod m\}| \geqslant 2 \right\}.$$

Ισχυρισμός 5.2.10. *Για κάθε $x\in\mathbb{Z}_m^n$ και $y\notin S(x)$ ισχύει $a_y(x,\epsilon) = b_y(x,\epsilon)$.*

Απόδειξη. Αν ο $x_j - y_j$ είναι άρτιος για κάποιον $j\in\{1,\dots,n\}$, τότε από τους ορισμούς βλέπουμε ότι $a_y(x,\epsilon) = b_y(x,\epsilon) = 0$. Επίσης, αν $d_{\mathbb{Z}_m^n}(x,y) > k$ τότε $a_y(x,\epsilon) = b_y(x,\epsilon) = 0$ γιατί ο k είναι περιττός.

Έστω ότι $x-y \in (2\mathbb{Z}+1)^n$. Αν $d_{\mathbb{Z}_m^n}(y,x) < k$ τότε για κάθε j ο όρος $f(y)$ διαγράφεται στην διαφορά $\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j)$, απ' όπου έπεται ότι $a_y(x,\epsilon) = 0$. Όμοια, στο άθροισμα που ορίζει την $B_f(x,\epsilon)$, ο όρος $f(y)$ εμφανίζεται δύο φορές με αντίθετα πρόσημα, άρα $b_y(x,\epsilon) = 0$.

Μένει να εξετάσουμε την περίπτωση $|\{j : |y_j - x_j| \equiv k \mod m\}| = 1$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$|y_1 - x_1| \equiv k \mod m \ \text{ και για } j \geqslant 2, \ \ y_j - x_j \in (-k,k) \mod m.$$

Αν $y_1 - x_1 \equiv k \mod m$ τότε $a_y(x,\epsilon) = \epsilon_1$, γιατί στο άθροισμα που ορίζει την $A_f(x,\epsilon)$ ο προσθετέος $f(y)$ διαγράφεται από τους όρους που αντιστοιχούν στα $j \geqslant 2$. Ισχυριζόμαστε επίσης ότι, σε αυτήν την περίπτωση, $b_y(x,\epsilon) = \epsilon_1$. Πράγματι, αν $\epsilon_1 = 1$ τότε ο προσθετέος $f(y)$ εμφανίζεται στο άθροισμα που ορίζει την $B_f(x,\epsilon)$ μόνο στον όρο που αντιστοιχεί στο $z = y - \epsilon$, ενώ αν $\epsilon_1 = -1$ τότε ο προσθετέος $f(y)$ εμφανίζεται σε αυτό το άθροισμα μόνο στον όρο που αντιστοιχεί στο $z = y + \epsilon$, και σε αυτήν την περίπτωση ο συντελεστής του είναι -1. Στην περίπτωση $y_1 - x_1 \equiv -k \mod m$, παρόμοιος συλλογισμός δείχνει ότι $a_y(x,\epsilon) = b_y(x,\epsilon) = -\epsilon_1$. □

Από τον Ισχυρισμό 5.2.10 έχουμε

$$A_f(x,\epsilon) - B_f(x,\epsilon) = \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y \in S(x)} [a_y(x,\epsilon) - b_y(x,\epsilon)] f(y). \tag{5.2.19}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|A_f(x,\epsilon)\|_X^p d\mu(x) \leqslant 3^{p-1} & \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|B_f(x,\epsilon)\|_X^p d\mu(x) \\ & + 3^{p-1} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y \in S(x)} a_y(x,\epsilon) f(y) \right\|_X^p d\mu(x) \\ & + 3^{p-1} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y \in S(x)} b_y(x,\epsilon) f(y) \right\|_X^p d\mu(x). \end{aligned}$$

Για την απόδειξη του Λήμματος 5.2.9 αρκεί λοιπόν να αποδείξουμε τις ανισότητες

$$\int_{\mathbb{Z}_m^n} \|B_f(x,\epsilon)\|_X^p d\mu(x) \leqslant \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon) - f(x-\epsilon)\|_X^p d\mu(x), \tag{5.2.20}$$

(5.2.21)

$$\int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y \in S(x)} a_y(x,\epsilon) f(y) \right\|_X^p d\mu(x) \leqslant \frac{8^p n^{2p-1}}{k^p} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j) - f(x)\|_X^p$$

και
(5.2.22)
$$\int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{y\in S(x)} b_y(x,\epsilon)f(y) \right\|_X^p d\mu(x) \leqslant \frac{8^p n^{2p-1}}{k^p} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p.$$

Για την ανισότητα (5.2.20) έχουμε, από τον ορισμό του $B_f(x,\epsilon)$ και την τριγωνική,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_m^n} & \|B_f(x,\epsilon)\|_X^p \\ & \leqslant \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left(\frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{z-x\in(-k,k)^n\cap(2\mathbb{Z})^n} \|f(z-x+x+\epsilon)-f(z-x+x-\epsilon)\|_X \right)^p \\ & \leqslant \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon)-f(x-\epsilon)\|_X^p,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το αναλλοίωτο του μέτρου ως προς τις μεταφορές, και το γεγονός ότι $|(-k,k)^n\cap(2\mathbb{Z})^n| = k^n \leq k(k+1)^{n-1}$.

Περνάμε τώρα στην απόδειξη των (5.2.21) και (5.2.22). Για κάθε $j=1,\ldots,n$ και για κάθε $y\in S(x)$ ορίζουμε

$$\tau_j^x(y) = \begin{cases} y-2ke_j, & \text{αν } y_j - x_j \equiv k \mod m \\ y, & \text{αλλιώς,} \end{cases}$$

και θέτουμε $\tau_j^x(y) = y$ αν $y\notin S(x)$. Παρατηρούμε ότι

$$\tau_j^x(y) = \tau_j^0(y-x)+x. \tag{5.2.23}$$

Ισχυρισμός 5.2.11. *Υποθέτουμε ότι για κάθε $j\in\{1,2,\ldots,n\}$ και για κάθε $x,y\in\mathbb{Z}_m^n$ και $\epsilon\in E_2^n$ μας δίνεται κάποιος πραγματικός αριθμός $\eta_j(x,y,\epsilon)\in[-1,1]$. Τότε,*

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{Z}_m^n} & \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{j=1}^n \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} \eta_j(x,y,\epsilon)[f(y)-f(\tau_j^x(y))] \right\|_X^p d\mu(x) \\ & \leqslant \frac{8^p n^{2p-1}}{2k^p} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p d\mu(x).\end{aligned}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $N(x,\epsilon)$ το πλήθος των μη μηδενικών προσθετέων στο

$$\sum_{j=1}^n \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} \eta_j(x,y,\epsilon)[f(y)-f(\tau_j^x(y))].$$

Για κάθε $\ell \geqslant 2$ ορίζουμε $S^\ell(x)$ να είναι το σύνολο όλων των $y \in S(x)$ για τα οποία το πλήθος των συντεταγμένων j για τις οποίες $y_j - x_j \in \{-k, k\} \mod m$ ισούται με ℓ. Τότε,

$$|S^\ell(x)| = \binom{n}{\ell} 2^\ell (k-1)^{n-\ell}.$$

Επίσης, για κάθε $y \in S^\ell(x)$ έχουμε ότι $y \neq \tau_j^x(y)$ για ℓ το πολύ τιμές του j. Άρα,

$$\begin{aligned} N(x,\epsilon) \leqslant \sum_{\ell=2}^{n} |S^\ell(x)|\ell &= \sum_{\ell=2}^{n} \binom{n}{\ell} 2^\ell (k-1)^{n-\ell}\ell \\ &= 2n \sum_{\ell=2}^{n} \binom{n-1}{\ell-1} 2^{\ell-1}(k-1)^{n-\ell} \\ &= 2n \left[\sum_{l=1}^{n} \binom{n-1}{\ell-1} 2^{\ell-1}(k-1)^{n-\ell} - \binom{n-1}{0} 2^0 (k-1)^{n-1} \right] \\ &= 2n[(k+1)^{n-1} - (k-1)^{n-1}] \leqslant \frac{4n^2}{k^2} k(k+1)^{n-1}, \end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα κάναμε χρήση της $(k+1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} \leqslant \frac{2n}{k}(k+1)^{n-1}$. Τώρα, χρησιμοποιώντας την (5.2.23), παίρνουμε

(5.2.24)

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \frac{1}{k(k+1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{y \in \mathbb{Z}_m^n} \eta_j(x,y,\epsilon)[f(y) - f(\tau_j^x(y))] \right\|_X^p d\mu(x) \\ &= \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left(\frac{N(x,\epsilon)}{k(k+1)^{n-1}} \right)^p \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \frac{1}{N(x,\epsilon)} \sum_{j=1}^{n} \sum_{y \in \mathbb{Z}_m^n} \eta_j(x,y,\epsilon)[f(y) - f(\tau_j^x(y))] \right\|_X^p d\mu(x) \\ &\leqslant \int_{\mathbb{Z}_m^n} \frac{N(x,\epsilon)^{p-1}}{k^p(k+1)^{(n-1)p}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{y \in \mathbb{Z}_m^n} \|f(y) - f(\tau_j^x(y))\|_X^p d\mu(x) \\ &\leqslant \frac{4^{p-1}n^{2p-2}}{k^{2p-1}(k+1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{y \in \mathbb{Z}_m^n} \|f(y) - f(\tau_j^x(y))\|_X^p d\mu(x) \\ &= \frac{4^{p-1}n^{2p-2}}{k^{2p-1}(k+1)^{n-1}} \sum_{j=1}^{n} \sum_{z \in \mathbb{Z}_m^n} \|f(z+x) - f(\tau_j^0(z)+x)\|_X^p d\mu(x). \end{aligned}$$

Θεωρούμε το σύνολο

$$\begin{aligned} E_j &= \{z \in \mathbb{Z}_m^n : \tau_j^0(z) = z - 2ke_j\} \\ &= \{z \in S(0) : z_j \equiv k \mod m\} \\ &= \{z \in (2\mathbb{Z}+1)^n \cap [-k,k]^n : z_j \equiv k \mod m \wedge |z_\ell| \equiv k \mod m, \text{ για κάποιο } \ell \neq j\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε j,

$$|E_j| = \sum_{\ell=1}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} 2^\ell (k-1)^{n-1-\ell} \tag{5.2.25}$$
$$= \sum_{\ell=0}^{n-1} \binom{n-1}{\ell} 2^\ell (k-1)^{n-1-\ell} - (k-1)^{n-1}$$
$$=(k+1)^{n-1} - (k-1)^{n-1} \leqslant \frac{2n}{k}(k+1)^{n-1}.$$

Χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του μέτρου Haar της $\mathbb{Z}_m^n$ ως προς τις μεταφορές, βλέπουμε ότι

(5.2.26)

$$\sum_{j=1}^{n} \sum_{z\in\mathbb{Z}_m^n} \|f(z+x) - f(\tau_j^0(z)+x)\|_X^p d\mu(x)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{z\in E_j} \|f(z+x) - f(z+x-2ke_j)\|_X^p d\mu(x)$$
$$= \sum_{j=1}^{n} |E_j| \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(w) - f(w-2ke_j)\|_X^p d\mu(w)$$
$$\leqslant \frac{2n}{k}(k+1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(w) - f(w-2ke_j)\|_X^p d\mu(w)$$

(5.2.27)

$$\leqslant \frac{2n}{k}(k+1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left((2k)^{p-1} \sum_{t=1}^{2k} \|f(w-(t-1)e_j) - f(w-te_j)\|_X^p \right) d\mu(w)$$
$$\leqslant 2^{p+1} n k^{p-1} (k+1)^{n-1} \sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(z+e_j) - f(z)\|_X^p d\mu(z),$$

όπου στην (5.2.26) χρησιμοποιήσαμε την (5.2.25). Συνδυάζοντας τις (5.2.27) και (5.2.24) ολοκληρώνουμε την απόδειξη του ισχυρισμού. □

Με βάση τον Ισχυρισμό 5.2.11, θα έχουμε δείξει τις ανισότητες (5.2.21) και (5.2.22), άρα και το Λήμμα 5.2.9, αν αποδείξουμε τις παρακάτω ταυτότητες:

$$\sum_{y\in S(x)} a_y(x,\epsilon) f(y) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n} \epsilon_j [f(y) - f(\tau_j^x(y))] \tag{5.2.28}$$

και

$$\sum_{y\in S(x)} b_y(x,\epsilon)f(y)=\sum_{j=1}^{n}\sum_{y\in\mathbb{Z}_m^n}\delta_j(x,y,\epsilon)[f(y)-f(\tau_j^x(y))], \tag{5.2.29}$$

για κάποιους $\delta_j(x,y,\epsilon)\in\{-1,0,1\}$.

Για την ταυτότητα (5.2.28) παρατηρούμε, από τον ορισμό του $a_y(x,\epsilon)$, ότι για κάθε $y\in S(x)$, αν για κάποιο j είναι $|y_j-x_j|<k$, τότε $y-x-e_j, y-x+e_j\in S(j,k)$, οπότε οι όροι ϵ_j και $-\epsilon_j$ αλληλοδιαγράφονται. Έχουμε έτσι

$$a_y(x,\epsilon)=\sum_{\{j:y_j-x_j\equiv k \mod m\}}\epsilon_j-\sum_{\{j:y_j-x_j\equiv -k \mod m\}}\epsilon_j.$$

Για την ταυτότητα (5.2.29) αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $x=0$, διότι $b_y(x,\epsilon)=b_{y-x}(0,\epsilon)$. Για τον σκοπό αυτό παρατηρούμε ότι, από την 5.2.16, για κάθε $y\in S(0)$,

$$b_y(0,\epsilon)=\begin{cases}1, & \text{αν } \exists j\ y_j\equiv\epsilon_j k \mod m \text{ και } \forall\ell\ y_\ell\not\equiv-\epsilon_\ell k \mod m\\ -1, & \text{αν } \exists j\ y_j\equiv-\epsilon_j k \mod m \text{ και } \forall\ell\ y_\ell\not\equiv\epsilon_\ell k \mod m\\ 0, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Για κάθε $y\in S(0)$ ορίζουμε

$$y_j^\Theta=\begin{cases}-y_j, & \text{αν } y_j\in\{-k,k\} \mod m\\ y_j, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Αφού $b_y(0,\epsilon)=-b_{y^\Theta}(0,\epsilon)$, παίρνουμε

$$\sum_{y\in S(0)} b_y(0,\epsilon)f(y)=\frac{1}{2}\sum_{y\in S(0)} b_y(0,\epsilon)[f(y)-f(y^\Theta)]. \tag{5.2.30}$$

Για κάθε $\ell\in\{1,\dots,n+1\}$ ορίζουμε $y^{\Theta_\ell}\in\mathbb{Z}_m^n$ ως εξής:

$$y_j^{\Theta_\ell}=\begin{cases}-y_j, & \text{αν } j<\ell \text{ και } y_j\in\{-k,k\} \mod m\\ y_j, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Τότε, $y^{\Theta_{n+1}}=y^\Theta$, $y^{\Theta_1}=y$ και, από την (5.2.30),

$$\sum_{y\in S(0)} b_y(0,\epsilon)f(y)=\frac{1}{2}\sum_{\ell=1}^{n}\sum_{y\in S(0)} b_y(0,\epsilon)\big[f(y^{\Theta_\ell})-f(y^{\Theta_{\ell+1}})\big].$$

Παρατηρούμε ότι αν $y^{\Theta_\ell}\neq y^{\Theta_{\ell+1}}$ τότε το ένα από αυτά τα διανύσματα προκύπτει από το άλλο με αλλαγή του προσήμου της ℓ-στης συντεταγμένης, η οποία ανήκει στο $\{-k,k\}$ $\mathrm{mod}\ m$. Έτσι, παίρνουμε την αναπαράσταση στην (5.2.29), και η απόδειξη του Λήμματος 5.2.9 είναι πλήρης. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1. Παίρνοντας τους μέσους όρους πάνω από όλα τα $\epsilon \in E_2^n$ στην ανισότητα του Λήμματος 5.2.9 έχουμε

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} & \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j \left[\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j) \right] \right\|_X^p d\mu(x) \\
& \leqslant 3^{p-1} \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} 2^{p-1} \left(\|f(x+\epsilon) - f(x)\|_X^p + \|f(x) - f(x-\epsilon)\|_X^p \right) d\mu(x) + \\
& \qquad + \frac{24^p n^{2p-1}}{k^p} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j) - f(x)\|_X^p \, d\mu(x) \\
& \leqslant \frac{6^p}{3} \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+\epsilon) - f(x)\|_X^p \, d\mu(x) + \\
& \qquad + \frac{24^p n^{2p-1}}{k^p} \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \|f(x+e_j) - f(x)\|_X^p \, d\mu(x).
\end{aligned} \tag{5.2.31}
$$

Έστω $x \in \mathbb{Z}_m^n$ και $m \in 4\mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $m \geqslant 6n^{2+1/q}$. Για $C > C_q^{(p)}(X)$ έχουμε, από τον ορισμό του $C_q^{(p)}(X)$ για τα διανύσματα $\{\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j)\}_{j=1}^n$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{E}_\epsilon & \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j \left[\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j) \right] \right\|_X^p \\
& \geqslant \frac{1}{C^p n^{1-\frac{p}{q}}} \sum_{j=1}^n \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j) \right\|_X^p .
\end{aligned} \tag{5.2.32}
$$

Επιπλέον, για κάθε $j \in \{1, \dots, n\}$, χρησιμοποιώντας πάλι την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα Hölder, παίρνουμε

$$
\begin{aligned}
\sum_{s=1}^{m/4} & \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f(x+2se_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x+(2s-1)e_j) \right\|_X^p \\
& \geqslant \left(\frac{4}{m} \right)^{p-1} \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x) \right\|_X^p .
\end{aligned}
$$

Παίρνοντας έπειτα το μέσο όρο πάνω από όλα τα $x \in \mathbb{Z}_m^n$ και χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του μέτρου μ ως προς τις μεταφορές έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j) \right\|_X^p \, d\mu(x) \\
&\qquad \geqslant \left(\frac{4}{m}\right)^p \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x) \right\|_X^p \, d\mu(x),
\end{aligned} \tag{5.2.33}$$

και συνδυάζοντας τις (5.2.32) και (5.2.33) παίρνουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \sum_{j=1}^n \epsilon_j \left[\mathcal{E}_j^{(k)} f(x+e_j) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x-e_j) \right] \right\|_X^p \, d\mu(x) \\
&\qquad \geqslant \frac{1}{C^p n^{1-\frac{p}{q}}} \left(\frac{4}{m}\right)^p \sum_{j=1}^n \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x) \right\|_X^p \, d\mu(x).
\end{aligned} \tag{5.2.34}$$

Για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$, ισχύει επιπλέον ότι

$$\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - \mathcal{E}_j^{(k)} f(x) \right\|_X^p \, d\mu(x) \\
&\quad \geqslant \frac{1}{3^{p-1}} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - f(x) \right\|_X^p \, d\mu(x) \\
&\qquad\qquad - \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| \mathcal{E}_j^{(k)} f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) \right\|_X^p \, d\mu(x) \\
&\qquad\qquad\qquad - \int_{\mathbb{Z}_m^n} \| \mathcal{E}_j^{(k)} f(x) - f(x) \|_X^p \, d\mu(x) \\
&\quad = \frac{1}{3^{p-1}} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - f(x) \right\|_X^p \, d\mu(x) - 2 \int_{\mathbb{Z}_m^n} \| \mathcal{E}_j^{(k)} f(x) - f(x) \|_X^p \, d\mu(x) \\
&\quad \geqslant \frac{1}{3^{p-1}} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \left\| f\left(x + \tfrac{m}{2} e_j\right) - f(x) \right\|_X^p \, d\mu(x) \\
&\qquad\qquad - 2^{p+1} k^p \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} \| f(x+\epsilon) - f(x) \|_X^p \, d\mu(x) \\
&\qquad\qquad\qquad - 2^p \int_{\mathbb{Z}_m^n} \| f(x+e_j) - f(x) \|_X^p \, d\mu(x),
\end{aligned} \tag{5.2.35}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα παραπάνω χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 5.2.6. Από τις

(5.2.34) και (5.2.35), χρησιμοποιώντας και την (5.2.31), παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{Z}_m^n}\left\|f\left(x+\tfrac{m}{2}e_j\right)-f(x)\right\|_X^p\,d\mu(x)\\
&\quad\leqslant \frac{(3Cm)^p n^{1-\frac{p}{q}}}{3\cdot 4^p}\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}\left\|\sum_{j=1}^{n}\epsilon_j\left[\mathcal{E}_j^{(k)}f(x+e_j)-\mathcal{E}_j^{(k)}f(x-e_j)\right]\right\|_X^p d\mu(x)+\\
&\qquad+6^p k^p n\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+\epsilon)-f(x)\|_X^p\,d\mu(x)+6^p\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p\,d\mu(x)\\
&\quad\leqslant\left(\frac{(18Cm)^p n^{1-\frac{p}{q}}}{4^p}+6^p k^p n\right)\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+\epsilon)-f(x)\|_X^p\,d\mu(x)+\\
&\qquad\qquad+\left(\frac{(3Cm)^p n^{1-\frac{p}{q}}}{4^p}\cdot\frac{24^p n^{2p-1}}{k^p}+6^p\right)\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p\,d\mu(x)\\
&\quad\overset{(*)}{\leqslant}(18Cm)^p n^{1-\frac{p}{q}}\left(\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+\epsilon)-f(x)\|_X^p\,d\mu(x)+\right.\\
&\qquad\qquad\qquad\left.+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\int_{\mathbb{Z}_m^n}\|f(x+e_j)-f(x)\|_X^p\,d\mu(x)\right),
\end{aligned}$$

όπου η $(*)$ παραπάνω ισχύει αν $4n^2\leqslant k\leqslant\frac{3m}{4n^{1/q}}$ (αυτή την επιλογή μπορούμε να την κάνουμε επειδή έχουμε υποθέσει ότι $m\geqslant 6n^{2+1/q}$). Το ζητούμενο έπεται τότε από το Λήμμα 5.1.6. □

Με τον παραπάνω συλλογισμό, έχουμε επιπλέον αποδείξει το παρακάτω (βλ. και Παρατήρηση 5.2.5)

Θεώρημα 5.2.12. *Έστω X χώρος Banach και υποθέτουμε ότι για κάποιο $1\leqslant p<q$ ισχύει $\Gamma_q^{(p)}<\infty$. Τότε ο X έχει Rademacher συντύπο q', για κάθε $q'>q$. Αν $q=2$, τότε ο X έχει Rademacher συντύπο 2.*

Από την άλλη μεριά, ισχύει ότι $\Gamma_q^{(p)}(X)\leqslant c_{pq}C_q(X)$, όπου c_{pq} απόλυτη σταθερά που εξαρτάται μόνο από τα p,q.

Παρατηρήσεις 5.2.13. (α) Αν $(\mathcal{M},d_{\mathcal{M}}),(\mathcal{N},d_{\mathcal{N}})$ είναι δύο μετρικοί χώροι, λέμε ότι μια συνάρτηση $f:\mathcal{M}\to\mathcal{N}$ είναι uniform-εμφύτευση αν είναι 1-1 και οι f,f^{-1} είναι ομοιόμορφα συνεχείς. Στα τέλη της δεκαετίας του 1950 ο Smirnov ρώτησε αν κάθε διαχωρίσιμος μετρικός χώρος είναι uniform-εμφυτεύσιμος στον L_2. Στο πρόβλημα αυτό δόθηκε τελικά αρνητική απάντηση το 1969 από τον Enflo [13]. Στο [2] οι Aharoni, Maurey και Mityagin ασχολήθηκαν επίσης με τους μετρικούς χώρους που είναι uniform-ομοιομορφικοί με κάποιο υποσύνολο του L_2, και έδειξαν ότι για $p > 2$, ο L_p δεν είναι uniform-εμφυτεύσιμος στον L_2.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.3 και το Θεώρημα Maurey-Pisier, οι Mendel και Naor ολοκληρώνουν στο [51] τον χαρακτηρισμό των τιμών των p, q για τις οποίες ο L_p είναι uniform-εμφυτεύσιμος στον L_q, δείχνοντας ότι κάτι τέτοιο συμβαίνει αν και μόνον αν $p \leq q$ ή $q \leq p \leq 2$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι πόρισμα του παρακάτω θεωρήματος (συμβολίζουμε $q_X = \inf\{q :$ ο X έχει συντύπο-$q\}$).

Θεώρημα 5.2.14 (Mendel, Naor, 2008)**.** *Έστω X ένας K-κυρτός χώρος Banach, και Y ένας χώρος Banach, uniform-εμφυτεύσιμος στον X. Τότε $q_Y \leq q_X$.*

(β) Στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 παραπάνω είδαμε ότι για έναν χώρο Banach με συντύπο-q, μπορούμε για κάθε $p \leq q$ να βρούμε $\Gamma = O(C_q(X))$ τέτοιο ώστε,

$$m_q^{(p)}(X; n, \Gamma) = O(n^{2+1/q}).$$

Το Θεώρημα 5.2.3 μας δίνει $m_q^{(p)}(X; n, \Gamma) = O(n^{1/q})$ στην περίπτωση που ο X είναι K-κυρτός. Από το Λήμμα 5.1.2 έπεται μάλιστα ότι αυτή η εκτίμηση είναι βέλτιστη. Ένα κεντρικό ανοικτό πρόβλημα στον χώρο είναι το κατά πόσο κάτι τέτοιο είναι αλήθεια *για κάθε* χώρο Banach X.

Πρόβλημα 5.2.15. *Έστω X ένας χώρος Banach με συντύπο-$q < \infty$. Ισχύει τότε ότι για κάθε $1 \leq p \leq q$ υπάρχει σταθερά $\Gamma > 0$ τέτοια ώστε $m_q^{(p)}(X; n, \Gamma) = O(n^{1/q})$;*

Στο [51], οι Mendel, Naor εικάζουν ότι η απάντηση στο παραπάνω ερώτημα είναι καταφατική. Δείχνουν μάλιστα ότι, αν και ο L_1 δεν είναι K-κυρτός, ισχύει ότι $m_2^{(1)}(L_1; n, 4) = O(\sqrt{n})$. Ακόμη πιο πρόσφατα οι Giladi, Mendel και Naor [22] κατάφεραν να βελτιώσουν την προηγούμενή τους εκτίμηση πετυχαίνοντας για το m ένα φράγμα της τάξης του $O(n^{1+1/q})$. Αυτό είναι και το τελευταίο γνωστό αποτέλεσμα σε αυτή την κατεύθυνση.

Σημειώνουμε ότι μια καταφατική απάντηση του Προβλήματος 5.2.15 θα καθιστούσε την υπόθεση της K-κυρτότητας του X στο Θεώρημα 5.2.14 περιττή, εξασφαλίζοντας ότι ο συντύπος διατηρείται κάτω από τις uniform-εμφυτεύσεις. Ένα ακόμη συμπέρασμα θα ήταν ότι ένας μετρικός χώρος καθολικός ως προς τις uniform-εμφυτεύσεις (τέτοιος δηλαδή ώστε κάθε άλλος διαχωρίσιμος μετρικός χώρος να είναι uniform-εμφυτεύσιμος σε αυτόν) δεν μπορεί να έχει μη-τετριμμένο συντύπο, και άρα, από το Θεώρημα Maurey-Pisier, περιέχει αναγκαστικά τους ℓ_∞^n.

5.3 Ένα μετρικό ανάλογο του Θεωρήματος Maurey-Pisier

Έστω $m, n \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε παρακάτω με $[m]_\infty^n$ το σύνολο $\{0, \ldots, m-1\}^n$ εφοδιασμένο με τη μετρική που επάγεται από την ℓ_∞-νόρμα. Σκοπός μας στην παράγραφο αυτή είναι να αποδείξουμε το παρακάτω θεώρημα, που μπορεί να ιδωθεί σαν μια μετρική εκδοχή του Θεωρήματος Maurey-Pisier, για την περίπτωση του συντύπου.

Θεώρημα 5.3.1. *Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Οι ακόλουθες προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(α) $\Gamma_q^{(2)}(X)=\infty$, *για κάθε $q<\infty$.*

(β) *Για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$ και κάθε $\varepsilon>0$, ο μετρικός χώρος $[m]_\infty^n$ εμφυτεύεται με παραμόρφωση $1+\varepsilon$ στον X.*

Δοθέντων δύο μετρικών χώρων (X,d_X) και (Y,d_Y) και μιας συνάρτησης $f:X\hookrightarrow Y$, ορίζουμε την παραμόρφωση της f,

$$\mathrm{dist}(f)=\|f\|_{\mathrm{Lip}}\cdot\|f^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}=\sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}}\frac{d_Y(f(x),f(y))}{d_X(x,y)}\cdot\sup_{\substack{x,y\in X\\ x\neq y}}\frac{d_X(x,y)}{d_Y(f(x),f(y))},$$

και γράφουμε

$$c_Y(X)=\inf\{\mathrm{dist}(f):f:X\hookrightarrow Y\}.$$

Με αυτό τον συμβολισμό, το Θεώρημα 5.3.1 μας λέει ότι $\Gamma_q^{(2)}(X)=\infty$ για κάθε $q<\infty$ αν και μόνον αν $c_X([m]_\infty^n)=1$, για κάθε $m,n\in\mathbb{N}$.

Θα συμβολίζουμε στο εξής με $\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)$ το γράφημα στον $\mathbb{Z}_m^n$ στο οποίο δύο $x,y\in\mathbb{Z}_m^n$, $x\neq y$, ενώνονται με μία ακμή ακριβώς όταν για κάθε $i\in\{1,\dots,n\}$, $x_i-y_i\in\{\pm1 \mod m\}$. Επιπλέον, για δεδομένα $l,n\in\mathbb{N}$ θα συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X;n,l)$ το infimum πάνω από όλα τα $\mathcal{B}>0$ για τα οποία, για κάθε $m\in 2\mathbb{N}$ και κάθε $f:\mathbb{Z}_m^n\to X$, ισχύει ότι

$$\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{Z}_m^n}d(f(x+le_j),f(x))^2\,d\mu(x)\leqslant\mathcal{B}^2l^2n\cdot\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}d(f(x+\epsilon),f(x))^2\,d\mu(x),$$

όπου ο μέσος όρος λαμβάνεται πάνω από όλα τα $\epsilon\in\{-1,1\}^n$.

Λήμμα 5.3.2. *Για κάθε μετρικό χώρο (X,d), κάθε $n,a\in\mathbb{N}$, κάθε $m,r\in 2\mathbb{N}$ με $0\leqslant r<m$, και κάθε $f:\mathbb{Z}_m^n\to X$,*

$$\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{Z}_m^n}d(f(x+(am+r)e_j),f(x))^2\,d\mu(x)\leqslant$$

$$\leqslant\min\{r^2,(m-r)^2\}\cdot n\,\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}d(f(x+\epsilon),f(x))^2\,d\mu(x).\tag{5.3.1}$$

Συγκεκριμένα, $\mathcal{B}(X;n,l)\leqslant 1$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και κάθε $l\in 2\mathbb{N}$.

Απόδειξη. Το αριστερό μέρος της (5.3.1) εξαρτάται μόνο από το r και δεν μεταβάλλεται αν αντικαταστήσουμε το r από το $m-r$. Μπορούμε έτσι να υποθέσουμε ότι $a=0$ και $r\leqslant m-r$. Σταθεροποιούμε $x\in\mathbb{Z}_m^n$ και $j\in\{1,\dots,n\}$ και παρατηρούμε ότι τα σημεία

$$\left\{x+\frac{1-(-1)^k}{2}\sum_{r\neq j}e_r+ke_j\right\}_{k=0}^r$$

αποτελούν ένα μονοπάτι μήκους r που συνδέει τα x και $x+re_j$ στο γράφημα $\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)$. Έπεται έτσι ότι $d_{\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)}(x,x+re_j)=r$. Αν $(x=w_0,w_1,\dots,w_r=x+re_j)$ είναι μια γεωδαισιακή που ενώνει τα x και $x+re_j$ στο $\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)$, από την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα Hölder έχουμε

$$d(f(x+re_j),f(x))^2 \leqslant r\sum_{k=1}^{r} d(f(w_k),f(w_{k-1}))^2. \tag{5.3.2}$$

Συμβολίζουμε με W το σύνολο όλων των γεωδαισιακών $w=(x=w_0,w_1,\dots,w_r=x+re_j)$. Αθροίζοντας την (5.3.2) πάνω από όλα τα $w\in W$ έχουμε

$$|W|\cdot d(f(x+re_j),f(x))^2 \leqslant r\sum_{w\in W}\sum_{k=1}^{r} d(f(w_k),f(w_{k-1}))^2. \tag{5.3.3}$$

Παρατηρούμε τέλος ότι

$$\frac{1}{|W|}\sum_{w\in W} d(f(w_1),f(x))^2 = \mathbb{E}_\epsilon[d(f(x+\epsilon),f(x))^2],$$

οπότε ολοκληρώνοντας την (5.3.3) και χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του μέτρου Haar ως προς τις μεταφορές, παίρνουμε

$$\int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+re_j),f(x))^2\,d\mu(x) \leqslant r^2\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\epsilon),f(x))^2\,d\mu(x).$$

Το ζητούμενο έπεται, αν αθροίσουμε πάνω από όλα τα $j=1,\dots,n$. □

Λήμμα 5.3.3. *Για καθε τετράδα* $l,k,s,t\in\mathbb{N}$,

$$\mathcal{B}(X;lk,st)\leqslant \mathcal{B}(X;l,s)\cdot\mathcal{B}(X;k,t).$$

Απόδειξη. Έστω $m\in 2\mathbb{N}$ και $f:\mathbb{Z}_m^{lk}\to X$. Σταθεροποιούμε αρχικά $x\in\mathbb{Z}_m^{lk}$ και $\epsilon\in\{-1,1\}^{lk}$. Ορίζουμε $g:\mathbb{Z}_m^l\to X$ μέσω της

$$g(y)=f\left(x+\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\epsilon_{j+(r-1)l}\cdot y_j\cdot e_{j+(r-1)l}\right).$$

Παρατηρούμε ότι, για $a\in\{1,\dots,l\}$,

$$g(y+se_a)=f\left(x+\sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\epsilon_{j+(r-1)l}\cdot y_j\cdot e_{j+(r-1)l}+s\sum_{r=1}^{k}\epsilon_{a+(r-1)l}\cdot e_{a+(r-1)l}\right)$$

οπότε, από τον ορισμό του $\mathcal{B}(X;l,s)$ για την g έχουμε, για κάθε $\mathcal{B}_1 > \mathcal{B}(X;l,s)$,

$$\begin{aligned}\sum_{a=1}^{l}\int_{\mathbb{Z}_m^l} d\Bigg(f\Bigg(x + \sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{l} \epsilon_{j+(r-1)l}\cdot y_j\cdot e_{j+(r-1)l} + s\sum_{r=1}^{k}\epsilon_{a+(r-1)l}\cdot e_{a+(r-1)l}\Bigg),\\ f\Bigg(x + \sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\epsilon_{j+(r-1)l}\cdot y_j\cdot e_{j+(r-1)l}\Bigg)\Bigg)^2 d\mu_{\mathbb{Z}_m^l}(y)\\ \leqslant \mathcal{B}_1^2 s^2 l\cdot \mathbb{E}_\delta \int_{\mathbb{Z}_m^l} d\Bigg(f\Bigg(x + \sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\epsilon_{j+(r-1)l}\cdot (y_j+\delta_j)\cdot e_{j+(r-1)l}\Bigg),\\ f\Bigg(x + \sum_{r=1}^{k}\sum_{j=1}^{l}\epsilon_{j+(r-1)l}\cdot y_j\cdot e_{j+(r-1)l}\Bigg)\Bigg)^2 d\mu_{\mathbb{Z}_m^l}(y).\end{aligned}$$

Παίρνοντας τους μέσους όρους πάνω από όλα τα $x \in \mathbb{Z}_m^{lk}$ και $\epsilon \in \{-1,1\}^{lk}$, και χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του μέτρου Haar ως προς τις μεταφορές, παίρνουμε τότε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_\epsilon \sum_{a=1}^{l}\int_{\mathbb{Z}_m^{lk}} d\Bigg(f\Bigg(x + s\sum_{r=1}^{k}\epsilon_{a+(r-1)l}\cdot e_{a+(r-1)l}\Bigg), f(x)\Bigg)^2 d\mu_{\mathbb{Z}_m^{lk}}(x)\\ \leqslant \mathcal{B}_1^2 s^2 l\cdot \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^{lk}} d(f(x+\epsilon), f(x))^2\, d\mu_{\mathbb{Z}_m^{lk}}(x).\end{aligned} \tag{5.3.4}$$

Σταθεροποιώντας στη συνέχεια $x \in \mathbb{Z}_m^{lk}$ και $u \in \{1,\dots,l\}$, ορίζουμε $h_u : \mathbb{Z}_m^k \to X$ με

$$h_u(y) = f\left(x + s\sum_{r=1}^{k} y_r\cdot e_{u+(r-1)l}\right).$$

Από τον ορισμό του $\mathcal{B}(X;k,t)$ τώρα για την h_u έχουμε, για κάθε $\mathcal{B}_2 > \mathcal{B}(X;k,t)$,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{k}\int_{\mathbb{Z}_m^k} d\Bigg(f\Bigg(x + s\sum_{r=1}^{k} y_r\cdot e_{u+(r-1)l} + ste_{u+(j-1)l}\Bigg),\\ f\Bigg(x + s\sum_{r=1}^{k} y_r\cdot e_{u+(r-1)l}\Bigg)\Bigg)^2 d\mu_{\mathbb{Z}_m^k}(x)\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{j=1}^{k} \int_{\mathbb{Z}_m^k} d(h_u(y+te_j), h_u(y))^2 d\mu_{\mathbb{Z}_m^k}(y) \\
&\leqslant \mathcal{B}_2^2 t^2 k \cdot \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^k} d(h_u(y+\epsilon), h_u(y))^2 d\mu_{\mathbb{Z}_m^k}(y) \\
&\leqslant \mathcal{B}_2^2 t^2 k \cdot \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^k} d\Bigg(f\Bigg(x + s\sum_{r=1}^{k} (y_r + \epsilon_{u+(r-1)l}) e_{u+(r-1)l} \Bigg), \\
&\qquad\qquad f\Bigg(x + s\sum_{r=1}^{k} y_r \cdot e_{u+(r-1)l} \Bigg)\Bigg)^2 d\mu_{\mathbb{Z}_m^k}(x).
\end{aligned}
$$

Αθροίζοντας τελικά πάνω από τα $u \in \{1, \dots, l\}$ και παίρνοντας τον μέσο όρο πάνω από όλα τα $x \in \mathbb{Z}_m^{lk}$ παίρνουμε, χρησιμοποιώντας και την (5.3.4),

$$
\begin{aligned}
&\sum_{a=1}^{lk} \int_{\mathbb{Z}_m^{lk}} d(f(x+ste_a), f(x))^2 \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^{lk}}(x) \\
&\qquad \leqslant \mathcal{B}_2^2 t^2 k \cdot \mathbb{E}_\epsilon \sum_{u=1}^{l} \int_{\mathbb{Z}_m^{lk}} d\Bigg(f\Bigg(x + s\sum_{r=1}^{k} \epsilon_{u+(r-1)l} \cdot e_{u+(r-1)l} \Bigg), f(x)\Bigg)^2 d\mu_{\mathbb{Z}_m^{lk}}(x) \\
&\qquad \leqslant \mathcal{B}_2^2 t^2 k \cdot \mathcal{B}_1^2 s^2 l \cdot \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^{lk}} d(f(x+\epsilon), f(x))^2 \, d\mu_{\mathbb{Z}_m^{lk}}(x),
\end{aligned}
$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Το επόμενο Λήμμα είναι το πρώτο βασικό συστατικό στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1. Μέσω αυτού επιτυγχάνεται η σύνδεση των ποσοτήτων $\mathcal{B}(X; n, l)$ και $\Gamma_q^{(2)}(X)$.

Λήμμα 5.3.4. *Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακέραιοι $n_0, l_0 > 1$ τέτοιοι ώστε $\mathcal{B}(X; n_0, l_0) < 1$. Τότε υπάρχει $1 \leqslant q < \infty$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$m_q^{(2)}(X; n, 3n_0) \leqslant 2l_0 n^{\log_{n_0} l_0}.$$

Ειδικότερα, $\Gamma_q^{(2)}(X) < \infty$.

Απόδειξη. Έστω $q < \infty$ τέτοιος ώστε $\mathcal{B}(X; n_0, l_0) \leqslant n_0^{-1/q}$. Εφαρμόζοντας επαναληπτικά το Λήμμα 5.3.3 έχουμε ότι, για κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\mathcal{B}(X; n_0^k, l_0^k) \leqslant n_0^{-k/q}$. Θέτοντας $n = n_0^k$ και $m = 2l_0^k$, βλέπουμε ότι, για κάθε $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$,

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d\left(f\left(x + \frac{m}{2} e_j \right), f(x) \right)^2 d\mu(x) \leqslant \frac{1}{4} m^2 n^{1-\frac{2}{q}} \cdot \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\epsilon), f(x))^2 \, d\mu(x).$$

Για $f : \mathbb{Z}_m^{n'} \to X$ με $n' \leqslant n$ ορίζουμε στη συνέχεια $g : \mathbb{Z}_m^{n'} \times \mathbb{Z}_m^{n-n'} \to X$ με $g(x,y) = f(x)$. Από την προηγούμενη ανισότητα για την g παίρνουμε τότε

$$\sum_{j=1}^{n'} \int_{\mathbb{Z}_m^{n'}} d\left(f\left(x + \frac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^2 d\mu(x) \leqslant \frac{1}{4} m^2 n^{1-\frac{2}{q}} \cdot \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^{n'}} d(f(x+\epsilon), f(x))^2 \, d\mu(x),$$

οπότε από το Λήμμα 5.1.6 έπεται ότι $\Gamma_q^{(2)}(X; n_0^k, 2l_0^k) \leqslant 3$.

Για $n \in \mathbb{N}$, έστω k ο μικρότερος ακέραιος τέτοιος ώστε $n \leqslant n_0^k$. Από το Λήμμα 5.1.4 παίρνουμε

$$\Gamma_q^{(2)}(X; n, 2l_0^k) \leqslant \left(\frac{n_0^k}{n}\right)^{\frac{q-2}{2q}} \cdot \Gamma_q^{(2)}(X; n_0^k, 2l_0^k) \leqslant 3\left(\frac{n_0^k}{n_0^{k-1}}\right)^{\frac{q-2}{2q}} = 3n_0^{\frac{q-2}{2q}} \leqslant 3n_0.$$

Ισχύει τέλος, από την επιλογή του n, ότι $l_0^{k-1} = n_0^{\log_{n_0} l_0^{k-1}} = n_0^{(k-1)\log_{n_0} l_0} < n^{\log_{n_0} l_0}$, οπότε

$$m_q^{(2)}(X; n, 3n_0) \leqslant 2l_0^k \leqslant 2l_0 n^{\log_{n_0} l_0}.$$

□

Το κύριο κομμάτι της απόδειξής μας συνίσταται στο παρακάτω θεώρημα. Σύμφωνα με αυτό, για κάθε $\varepsilon > 0$ ο μετρικός χώρος $[m]_\infty^n$ εμφυτεύεται με παραμόρφωση $1+\varepsilon$ στον (X,d), αν $\mathcal{B}(X; n, 4m) = 1$.

Θεώρημα 5.3.5. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$, $m \in 2\mathbb{N}$ και $s \in 4\mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\eta \in (0,1)$ ισχύει ότι $8^{sn}\sqrt{\eta} < \frac{1}{2}$ και ότι υπάρχει $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$ τέτοια ώστε*

$$\sum_{j=1}^{n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+se_j), f(x))^2 \, d\mu(x) > (1-\eta)s^2 n \cdot \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\epsilon), f(x))^2 \, d\mu(x). \tag{5.3.5}$$

Τότε

$$c_X\left([s/4]_\infty^n\right) \leqslant 1 + 8^{sn}\sqrt{\eta}.$$

Ειδικότερα,

$$\mathcal{B}(X; n, s) = 1 \Longrightarrow c_X\left([s/4]_\infty^n\right) = 1.$$

Απόδειξη. Από την (5.3.5) και το Λήμμα 5.3.2 έχουμε ότι $(1-\eta)s^2 < \min\{s^2, (m-s)^2\}$, οπότε

$$m > s + s\sqrt{1-\eta} > 2s\sqrt{1-\eta} > 2s - 1,$$

γιατί από την επιλογή του η ισχύει ότι $\sqrt{1-\eta} \geqslant 1 - \sqrt{\eta} > 1 - \frac{1}{2s}$. Έπεται έτσι ότι $m \geqslant 2s$. Θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω το γεγονός ότι αν $a_1, \ldots, a_r \geqslant 0$ και $0 \leqslant b \leqslant \frac{1}{r}\sum_{j=1}^r a_j$, τότε

$$\sum_{j=1}^{r} (a_j - b)^2 \leqslant \sum_{j=1}^{r} a_j^2 - rb^2. \tag{5.3.6}$$

Για $x \in \mathbb{Z}_m^n$, έστω $\mathcal{G}_j^+(x)$ (αντ. $\mathcal{G}_j^-(x)$) το σύνολο όλων των γεωδαισιακών που ενώνουν το x και το $x+se_j$ (αντ. $x-se_j$) στο $\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)$. Καθώς το s είναι άρτιος αριθμός, έχουμε δει στην απόδειξη του Λήμματος 5.3.2 ότι τα σύνολα αυτά είναι μη-κενά. Παρατηρούμε ότι αν $m=2s$, τότε $\mathcal{G}_j^+(x)=\mathcal{G}_j^-(x)$, αλλιώς $\mathcal{G}_j^+(x)\cap\mathcal{G}_j^-(x)=\emptyset$. Χρησιμοποιούμε παρακάτω τον συμβολισμό $\mathcal{G}_j^\pm(x)=\mathcal{G}_j^+(x)\cup\mathcal{G}_j^-(x)$, και για $\pi\in\mathcal{G}_j^\pm(x)$ γράφουμε

$$\operatorname{sgn}(\pi)=\begin{cases}+1, & \text{αν } \pi\in\mathcal{G}_j^+(x)\\ -1, & \text{αλλιώς.}\end{cases}$$

Κάθε γεωδαισιακή στο $\mathcal{G}_j^\pm(x)$ έχει μήκος s. Γράφουμε έτσι κάθε $\pi\in\mathcal{G}_j^\pm(x)$ σαν μια ακολουθία διανυσμάτων $\pi=(x=\pi_0,\ldots,\pi_s=x+\operatorname{sgn}(\pi)se_j)$.

Παρατηρούμε ότι για τους αριθμούς $a_j=d(f(\pi_j),f(\pi_{j-1}))$ και $b=\frac{1}{s}d(f(x+se_j),f(x))$ ισχύει, από την τριγωνική ανισότητα, ότι $b\leqslant\frac{1}{s}\sum_{j=1}^s a_j$, οπότε από την (5.3.6) έχουμε

$$\begin{aligned}&\sum_{l=1}^s\left(d(f(\pi_l),f(\pi_{l-1}))-\frac{1}{s}d(f(x+\operatorname{sgn}(\pi)se_j),f(x))\right)^2\\ &\qquad\leqslant\sum_{l=1}^s d(f(\pi_l),f(\pi_{l-1}))^2-\frac{1}{s}d(f(x+\operatorname{sgn}(\pi)se_j),f(x))^2.\end{aligned}\tag{5.3.7}$$

Λόγω συμμετρίας, έχουμε $|\mathcal{G}_j^+(x)|=|\mathcal{G}_j^-(x)|$, και η τιμή αυτή είναι ανεξάρτητη των $x\in\mathbb{Z}_m^n$ και $j\in\{1,\ldots,n\}$. Θέτουμε $g=|\mathcal{G}_j^\pm(x)|$, και παρατηρούμε ότι $g\leqslant 2\cdot 2^{sn}$. Παίρνοντας στην (5.3.7) το μέσο όρο πάνω από όλα τα $x\in\mathbb{Z}_m^n$ και $\pi\in\mathcal{G}_j^\pm(x)$, αθροίζοντας πάνω από τα $j=\{1,\ldots,n\}$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεσή μας, έχουμε

$$\begin{aligned}&\frac{1}{g}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{Z}_m^n}\sum_{\pi\in\mathcal{G}_j^\pm(x)}\sum_{l=1}^s\left(d(f(\pi_l),f(\pi_{l-1}))-\frac{1}{s}d(f(x+\operatorname{sgn}(\pi)se_j),f(x))\right)^2d\mu(x)\\ &\qquad\leqslant sn\cdot\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}d(f(x+\epsilon),f(x))^2\,d\mu(x)-\frac{1}{s}\sum_{j=1}^n\int_{\mathbb{Z}_m^n}d(f(x+se_j),f(x))^2\,d\mu(x)\\ &\qquad<\eta sn\cdot\mathbb{E}_\epsilon\int_{\mathbb{Z}_m^n}d(f(x+\epsilon),f(x))^2\,d\mu(x).\end{aligned}\tag{5.3.8}$$

Ορίζουμε τώρα $\psi:\mathbb{Z}_m^n\to\mathbb{R}$ με

$$\begin{aligned}\psi(x)=2\eta sn2^{sn}&\mathbb{E}_\epsilon[d(f(x+\epsilon),f(x))^2]-\\ &-\sum_{j=1}^n\sum_{\pi\in\mathcal{G}_j^\pm(x)}\sum_{l=1}^s\left(d(f(\pi_l),f(\pi_{l-1}))-\frac{1}{s}d(f(x+\operatorname{sgn}(\pi)se_j),f(x))\right)^2.\end{aligned}$$

Από την (5.3.8) και το γεγονός ότι $g \leqslant 2 \cdot 2^{sn}$ παίρνουμε

$$0 < \int_{\mathbb{Z}_m^n} \psi(x)\, d\mu(x) = \frac{1}{(2s-1)^n} \int_{\mathbb{Z}_m^n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}_m^n \\ d_{\mathbb{Z}_m^n}(x,y) < s}} \psi(y)\, d\mu(x).$$

Έπεται έτσι ότι υπάρχει $x^0 \in \mathbb{Z}_m^n$, τέτοιο ώστε

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}_m^n \\ d_{\mathbb{Z}_m^n}(x^0,y) < s}} \sum_{j=1}^n \sum_{\pi \in \mathcal{G}_j^{\pm}(y)} \sum_{l=1}^s \Big(d(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})) - \frac{1}{s} d(f(y + \operatorname{sgn}(\pi) s e_j), f(y)) \Big)^2 & \\ < 2\eta s n 2^{sn} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}_m^n \\ d_{\mathbb{Z}_m^n}(x^0,y) < s}} \mathbb{E}_\epsilon [d(f(y+\epsilon), f(y))^2]. & \qquad (5.3.9) \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας με κατάλληλη σταθερά, μπορούμε να υποθέσουμε για την d ότι

$$\frac{1}{(2s-1)^n} \sum_{\substack{y \in \mathbb{Z}_m^n \\ d_{\mathbb{Z}_m^n}(x^0,y) < s}} \mathbb{E}_\epsilon [d(f(y+\epsilon), f(y))^2] = 1, \qquad (5.3.10)$$

οπότε υπάρχει $y^0 \in \mathbb{Z}_m^n$ με $d_{\mathbb{Z}_m^n}(x^0, y^0) < s$, τέτοιο ώστε

$$\mathbb{E}_\epsilon [d(f(y^0+\epsilon), f(y^0))^2] \geqslant 1. \qquad (5.3.11)$$

Χωρίς βλάβη της γενικότητας (μετακινώντας το όρισμα της f) μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y^0 = 0$, και πολλαπλασιάζοντας κατά συντεταγμένη με κατάλληλο στοιχείο του $\{-1,1\}^n$, υποθέτουμε ακόμη ότι όλες οι συντεταγμένες του x^0 είναι μη αρνητικές. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $y \in \{0,1,\dots,s-1\}^n$ έπεται τότε ότι $d_{\mathbb{Z}_m^n}(x^0, y) < s$. Από τις (5.3.9) και (5.3.10) τότε, για κάθε $y \in \{0,1,\dots,s-1\}^n$, κάθε $j \in \{1,\dots,n\}$, κάθε $\pi \in \mathcal{G}_j^{\pm}(y)$ και κάθε $l \in \{1,\dots,s\}$,

$$\begin{aligned} \Big| d(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})) - \frac{1}{s} d(f(y + \operatorname{sgn}(\pi) s e_j), f(y)) \Big| &\leqslant \sqrt{2\eta (2s-1)^n s n 2^{sn}} \\ &\leqslant 2^{2sn} \sqrt{\eta}. \qquad (5.3.12) \end{aligned}$$

Ισχυρισμός 5.3.6. *Για κάθε* $\epsilon, \delta \in \{-1,1\}^n$ *και κάθε* $x \in \mathbb{Z}_m^n$ *τέτοιο ώστε* $x + \epsilon \in \{0,1,\dots,s-1\}^n$,

$$|d(f(x+\epsilon), f(x)) - d(f(x+\delta), f(x))| \leqslant 2\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn}.$$

Απόδειξη. Αν $\epsilon = \delta$, τότε δεν υπάρχει κάτι προς απόδειξη, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι υπάρχει $l \in \{1, \ldots, n\}$ τέτοιο ώστε $\epsilon_l = -\delta_l$. Θέτουμε $S = \{j \in \{1, \ldots, n\} : \epsilon_j = -\delta_j\}$, και οριζουμε $\theta, \tau \in \{-1, 1\}^n$ με

$$\theta_j = \begin{cases} -\epsilon_j, & \text{αν } j = l \\ \epsilon_j, & \text{αν } j \in S \setminus \{l\} \\ 1, & \text{αν } j \notin S \end{cases} \quad \text{και} \quad \tau_j = \begin{cases} -\epsilon_j, & \text{αν } j = l \\ \epsilon_j, & \text{αν } j \in S \setminus \{l\} \\ -1, & \text{αν } j \notin S \end{cases}.$$

Θεωρούμε τώρα το εξής μονοπάτι π στο $\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)$: Ξεκινώντας από το σημείο $x + \epsilon$ μετακινούμαστε στο σημείο x, έπειτα διαδοχικά στα $x + \delta$, $x + \delta + \theta$, $x + \delta + \theta + \tau$, και επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία $s/4$ φορές. Από την κατασκευή μας τότε, έπεται ότι $\pi \in \mathcal{G}_l^{\delta_l}(x + \epsilon)$, οπότε από την (5.3.12) παίρνουμε

$$\begin{aligned} &|d(f(x+\epsilon), f(x)) - d(f(x+\delta), f(x))| \\ &\qquad = |d(f(\pi_0), f(\pi_1)) - d(f(\pi_2), f(\pi_1))| \leqslant 2\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn}. \end{aligned}$$

□

Πόρισμα 5.3.7. *Υπάρχει σταθερά $A \geqslant 1$ τέτοια ώστε, για κάθε $\epsilon \in \{-1, 1\}^n$,*

$$\left(1 - 4\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn}\right) \cdot A \leqslant d(f(\epsilon), f(0)) \leqslant \left(1 + 4\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn}\right) \cdot A.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $e = \sum_{j=1}^n e_j$ και $A = \left(\mathbb{E}_\delta[d(f(\delta), f(0))^2]\right)^{1/2}$. Από την (5.3.11), ισχύει ότι $A \geqslant 1$. Χρησιμοποιώντας δύο φορές τον Ισχυρισμό 5.3.6, για κάθε $\epsilon, \delta \in \{-1, 1\}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned} d(f(\epsilon), f(0)) &\leqslant d(f(e), f(0)) + 2\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn} \\ &\leqslant d(f(\delta), f(0)) + 4\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn}. \end{aligned}$$

Παίρνοντας το μέσο όρο πάνω από τα $\delta \in \{-1, 1\}^n$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(f(\epsilon), f(0)) &\leqslant \mathbb{E}_\delta[d(f(\delta), f(0))^2]^{1/2} + 4\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn} \\ &\leqslant A + 4\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn} \leqslant (1 + 4\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn}) \cdot A. \end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, ισχύει ότι

$$A^2 = \mathbb{E}_\delta[d(f(\delta), f(0))^2] \leqslant \left(d(f(\epsilon), f(0)) + 4\sqrt{\eta} \cdot 2^{2sn}\right)^2,$$

οπότε το ζητούμενο έπεται και πάλι επειδή $A \geqslant 1$. □

Ισχυρισμός 5.3.8. *Ορίζουμε*

$$V = \left\{x \in \mathbb{Z}_m^n : 0 \leqslant x_j \leqslant \frac{s}{2} \ \text{και } x_j \in 2\mathbb{N}, \ \text{για κάθε } j \in \{1, \ldots, n\}\right\}.$$

Τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(1) *Για κάθε* $x, y \in V$ *υπάρχουν* $z \in \{x, y\}$, $j \in \{1, \dots, n\}$ *και* $\pi = (\pi_0, \dots, \pi_s) \in \mathcal{G}_j^+(z)$ *που περνά από τα* x *και* y. *Επιπλέον, για κάθε* $l \in \{1, \dots, s\}$ *έχουμε* $\{\pi_l, \pi_{l-1}\} \cap \{0, \dots, s-1\}^n \neq \emptyset$.

(2) *Για κάθε* $x, y \in V$, $d_{\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)}(x, y) = d_{\mathbb{Z}_m^n}(x, y) = \|x - y\|_\infty$.

Απόδειξη. Έστω $j \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιος ώστε $|x_j - y_j| = \|x - y\|_\infty := t$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $y_j \geqslant x_j$. Θα κατασκευάσουμε ένα μονοπάτι μήκους s από το x στο $x + se_j$ που διέρχεται από το y. Ξεκινάμε ορίζοντας $\epsilon^l, \delta^l \in \{-1, 1\}^n$ με επαγωγή στο l, ως εξής:

$$\epsilon_r^l = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_r + \sum_{k=1}^{l-1}(\epsilon_r^k + \delta_r^k) < y_r \\ -1, & \text{αν } x_r + \sum_{k=1}^{l-1}(\epsilon_r^k + \delta_r^k) > y_r \\ 1, & \text{αν } x_r + \sum_{k=1}^{l-1}(\epsilon_r^k + \delta_r^k) = y_r \end{cases}$$

και

$$\delta_r^l = \begin{cases} 1, & \text{αν } x_r + \sum_{k=1}^{l-1}(\epsilon_r^k + \delta_r^k) < y_r \\ -1, & \text{αν } x_r + \sum_{k=1}^{l-1}(\epsilon_r^k + \delta_r^k) > y_r \\ -1, & \text{αν } x_r + \sum_{k=1}^{l-1}(\epsilon_r^k + \delta_r^k) = y_r \end{cases}.$$

Αν ορίσουμε

$$a_l = x + \sum_{k=1}^{l-1}(\epsilon^k + \delta^k) + \epsilon^l \quad \text{και} \quad b_l = a_l + \delta^l,$$

τότε εκ κατασκευής έχουμε $y = b_{t/2}$, και το μονοπάτι

$$(x, a_1, b_1, a_2, b_2, \dots, a_{t/2}, y)$$

έχει μήκος t στο $\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)$. Αυτό αποδεικνύει το (2) του Ισχυρισμού.

Συνεχίζουμε τώρα την παραπάνω κατασκευή για να πάρουμε ένα μονοπάτι μήκους s που ενώνει τα x και $x + se_j$ στο $\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)$, ως εξής: Παρατηρούμε ότι από τον παραπάνω ορισμό, $\epsilon_j^l = \delta_j^l = 1$, για κάθε $1 \leqslant l \leqslant t/2$, οπότε $-\epsilon^l + 2e_j, -\delta^l + 2e_j \in \{-1, 1\}^n$. Αν ορίσουμε

$$c_l = y + \sum_{k=1}^{l-1}[(-\epsilon^k + 2e_j) + (-\delta^k + 2e_j)] + (-\epsilon^l + 2e_j) \quad \text{και} \quad d_l = c_l + (-\delta^l + 2e_j),$$

τότε $d_{t/2} = x + 2te_j$, και το μονοπάτι

$$(x, a_1, b_1, \dots, a_{t/2}, y, c_1, d_1, \dots, c_{t/2}, x + 2te_j)$$

έχει μήκος $2t$ στο $\mathbf{diag}(\mathbb{Z}_m^n)$. Από τον ορισμό του V γνωρίζουμε ότι $2t \leqslant s$. Αν ισχύει η ισότητα τελειώσαμε, αλλιώς ο $s - 2t$ είναι άρτιος, και μπορούμε έτσι να συνεχίσουμε το μονοπάτι εναλλάσσοντας διαδοχικά τις διευθύνσεις $e_j + \sum_{l \neq j} e_l$ και $e_j - \sum_{l \neq j} e_l$. $\square$

Πόρισμα 5.3.9. *Έστω $x \in V$. Τότε για το A του Πορίσματος 5.3.7 ισχύει, για κάθε $\epsilon \in \{-1,1\}^n$, ότι*

$$\left(1 - 10\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A \leqslant d(f(x+\epsilon), f(x)) \leqslant \left(1 + 10\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A.$$

Απόδειξη. Από τον Ισχυρισμό 5.3.8 (και την απόδειξή του), υπάρχουν $j \in \{1,\dots,n\}$ και $\pi \in \mathcal{G}_j^+(0)$, τέτοια ώστε $\pi_1 = e = (1,\dots,1)$ και $x = \pi_k$, για κάποιο $k \in \{1,\dots,s\}$. Από την (5.3.12) τότε,

$$|d(f(e), f(0)) - d(f(\pi_{k-1}), f(x))| \leqslant 2\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}.$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή $x \in V$, ισχύει $x + e \in \{0,\dots,s-1\}^n$, οπότε από τον Ισχυρισμό 5.3.6,

$$\begin{aligned}|d(f(x+\epsilon), f(x)) - d(f(e), f(0))| &\leqslant |d(f(e), f(0)) - d(f(\pi_{k-1}), f(x))| + \\ &\quad + |d(f(\pi_{k-1}), f(x)) - d(f(x+e), f(x))| + \\ &\quad + |d(f(x+e), f(x)) - d(f(x+\epsilon), f(x))| \\ &\leqslant 6\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}.\end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα έπεται έτσι από το Πόρισμα 5.3.7. □

Πόρισμα 5.3.10. *Για κάθε $x, y \in V$, $x \neq y$, και το A του Πορίσματος 5.3.7,*

$$\left(1 - 12\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A \leqslant \frac{d(f(x), f(y))}{\|x-y\|_\infty} \leqslant \left(1 + 12\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $t = \|x-y\|_\infty$, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι υπάρχει $j \in \{1,\dots,n\}$ τέτοιος ώστε $y_j - x_j = t$. Από τον Ισχυρισμό 5.3.8 υπάρχει ένα μονοπάτι $\pi \in \mathcal{G}_j^+(x)$ μήκους s, τέτοιο ώστε $\pi_t = y$. Από την (5.3.12) και το Πόρισμα 5.3.9 έχουμε, για κάθε $l \in \{1,\dots,s\}$,

$$\left| d(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})) - \frac{1}{s} d(f(x+se_j), f(x))\right| \leqslant \sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn} \tag{5.3.13}$$

και

$$\left(1 - 10\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A \leqslant d(f(\pi_0), f(\pi_1)) \leqslant \left(1 + 10\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A. \tag{5.3.14}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη, και χρησιμοποιώντας ξανά την (5.3.13) (για $l = 1$), έχουμε, για κάθε $l \in \{1,\dots,s\}$,

$$\left(1 - 12\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A \leqslant d(f(\pi_l), f(\pi_{l-1})) \leqslant \left(1 + 12\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A \tag{5.3.15}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
d(f(x),f(y)) &\leqslant \sum_{l=1}^{t} d(f(\pi_l),f(\pi_{l-1}))\\
&\leqslant t\cdot\left(1+12\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A\\
&= \|x-y\|_\infty\cdot\left(1+12\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A,
\end{aligned}$$

και από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}
d(f(x),f(y)) &\geqslant d(f(x+se_j),f(x)) - d(f(x+se_j),f(y))\\
&\overset{(5.3.13)}{\geqslant} sd(f(x),f(\pi_1)) - s\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn} - \sum_{l=t+1}^{s} d(f(\pi_l),f(\pi_{l-1}))\\
&\overset{(5.3.14),(5.3.15)}{\geqslant} s\left(1-10\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A - s\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn} -\\
&\qquad\qquad -(s-t)\left(1-12\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A\\
&\geqslant \|x-y\|_\infty\cdot\left(1-12\sqrt{\eta}\cdot 2^{2sn}\right)\cdot A.
\end{aligned}$$

□

Τελειώνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.5 ως εξής: Θέτουμε $\varepsilon = 8^{sn}\sqrt{\eta}$. Παρατηρούμε ότι, επειδή $s\in 4\mathbb{N}$, $12\sqrt{\eta}2^{2sn} = \frac{12}{2^{sn}}\varepsilon$. Επιπλέον, $2^{sn}-12\varepsilon > 2^8-6$, αφού $s\in 4\mathbb{N}, n>1$ και $\varepsilon\in(0,\frac{1}{2})$. Έπεται ότι

$$\frac{1+\frac{12}{2^{sn}}\varepsilon}{1-\frac{12}{2^{sn}}\varepsilon} = \frac{2^{sn}+12\varepsilon}{2^{sn}-12\varepsilon} = 1+\frac{24\varepsilon}{2^{sn}-12\varepsilon} < 1+\varepsilon,$$

οπότε

$$c_X((V,d_{\mathbb{Z}_m^n})) \leqslant 1+8^{sn}\sqrt{\eta}.$$

Η απόδειξη ολοκληρώνεται τότε με την παρατήρηση ότι η απεικόνιση $x\mapsto x/2$ είναι μια εμφύτευση $(V,d_{\mathbb{Z}_m^n})\to[s/4]_\infty^n$ παραμόρφωσης 1. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1. (α)⇒(β). Έστω ότι $\Gamma_q^{(2)}=\infty$ για κάθε $q<\infty$. Από το Λήμμα 5.3.4 έπεται ότι για κάθε $n,s>1$, $\mathcal{B}(X;n,s)=1$. Το ζητούμενο αποτέλεσμα έπεται τότε άμεσα από το Θεώρημα 5.3.5.

(β)⇒(α). Θα χρειαστούμε την ακόλουθη παρατήρηση.

Λήμμα 5.3.11. *Έστω ότι $\Gamma_q^{(2)}(X;n,m)<\infty$, για κάποιο $q<\infty$. Τότε*

$$c_X(\mathbb{Z}_m^n) \geqslant \frac{n^{1/q}}{2\Gamma_q^{(2)}(X;n,m)}.$$

Απόδειξη. Έστω $f : \mathbb{Z}_m^n \to X$ και $\Gamma > \Gamma_q^{(2)}(X; n, m)$. Τότε

$$\begin{aligned}
\frac{nm^2}{4\|f^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}} &\leqslant \sum_{j=1}^{n} d\left(f\left(x + \frac{m}{2}e_j\right), f(x)\right)^2 \, d\mu(x) \\
&\leqslant \Gamma^2 m^2 n^{1-\frac{2}{q}} \mathbb{E}_\epsilon \int_{\mathbb{Z}_m^n} d(f(x+\epsilon), f(x))^2 \, d\mu(x) \\
&\leqslant \Gamma^2 m^2 n^{1-\frac{2}{q}} \|f\|_{\mathrm{Lip}},
\end{aligned}$$

οπότε $\mathrm{dist}(f) \geqslant n^{1/q}/(2\Gamma)$. □

Αν υποθέσουμε λοιπόν ότι υπάρχει $q < \infty$ έτσι ώστε $\Gamma_q^{(2)}(X) < \infty$, τότε από το παραπάνω Λήμμα έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in 2\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $c_X(\mathbb{Z}_m^n) \geqslant n^{1/q}/\left(2\Gamma_q^{(2)}(X)\right)$. Επιλέγοντας $n > \left(2\Gamma_q^{(2)}(X)\right)^q$, και δεδομένου ότι $c_{[m]_\infty^n}(\mathbb{Z}_m^n) = 1$, έπεται τότε ότι $c_X([m]_\infty^n) > 1$, που είναι άτοπο από την υπόθεσή μας. □

Παρατηρήσεις 5.3.12. Ισχυροποιώντας ένα παλιότερο αποτέλεσμα και απαντώντας ταυτόχρονα σε μια ερώτηση των Arora, Lovász, Newman, Rabani, Rabinovich και Vempala, οι Mendel και Naor δείχνουν επιπλέον στο [51] (βλ. και [50]), χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.3.1, το ακόλουθο αποτέλεσμα διχοτομίας: Αν $\mathcal{F}$ είναι μια οικογένεια μετρικών χώρων συμβολίζουμε, για ένα μετρικό χώρο M,

$$c_{\mathcal{F}}(M) = \inf\{c_X(M) : X \in \mathcal{F}\},$$

και λέμε ότι η οικογένεια $\mathcal{F}$ είναι *σχεδόν καθολική*, αν $c_{\mathcal{F}}(M) = 1$, για κάθε πεπερασμένο μετρικό χώρο M.

Θεώρημα 5.3.13. *Για κάθε κλάση $\mathcal{F}$ μετρικών χώρων, είτε*

1. *Η $\mathcal{F}$ είναι σχεδόν καθολική, είτε*
2. *Υπάρχει $a = a(\mathcal{F}) > 0$ και ακολουθία μετρικών χώρων $\{M_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, τέτοια ώστε $|M_n| = n$ και ταυτόχρονα $c_{\mathcal{F}}(M_n) = \Omega((\log n)^a)$.*

Για τους χώρους Hilbert H είναι γνωστό, από το Θεώρημα εμφύτευσης του Bourgain [8] (βλ. Θεώρημα 6.1.4) και μεταγενέστερη δουλειά των Linial, London και Rabinovich [41] (βλ. Παρατήρηση 6.1.7), ότι $\sup\{c_H(M) : |M| = n\} = \Theta(\log n)$. Δεν είναι ωστόσο ακόμη γνωστό αν μπορούμε να βρούμε $\beta \in (0,1)$ για το οποίο υπάρχει κλάση $\mathcal{F} = \mathcal{F}(\beta)$ μετρικών χώρων που να είναι σχεδόν καθολική ενώ ταυτόχρονα

$$\sup\{c_{\mathcal{F}}(M) : |M| = n\} = O((\log n)^\beta).$$

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [47], [52] και τις πηγές που αναφέρονται εκεί.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Εμφυτεύσεις μετρικών χώρων σε χώρους με νόρμα

Αν (X,ρ), (Y,σ) είναι δύο μετρικοί χώροι και $D \geq 1$, λέμε ότι μια απεικόνιση $f : X \to Y$ είναι *D-εμφύτευση* του X στον Y αν υπάρχει σταθερά $\lambda > 0$ (συντελεστής κλίμακας), τέτοια ώστε

$$\lambda \cdot \rho(x,y) \leq \sigma(f(x), f(y)) \leq D \cdot \lambda \cdot \rho(x,y).$$

Λέμε τότε ότι ο X *εμφυτεύεται με παραμόρφωση D στον Y* ή ότι οι X, Y είναι D-ισομορφικοί (σαν μετρικοί χώροι), και συμβολίζουμε με $c_Y(X)$ το infimum αυτών των D. Εναλλακτικά μπορούμε να ορίσουμε τη νόρμα Lipschitz της f,

$$\|f\|_{\text{Lip}} = \sup_{x \neq y} \frac{\sigma(f(x), f(y))}{\rho(x,y)},$$

και να γράφουμε

$$c_Y(X) = \inf\{\|f\|_{\text{Lip}} \|f^{-1}\|_{\text{Lip}} : f : X \to Y\}.$$

Σε αυτό το Κεφάλαιο ο χώρος Y είναι κάποιος ℓ_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Γράφουμε $c_p(X)$ αντί για $c_{\ell_p}(X)$.

6.1 Εμφυτεύσεις τυπου Fréchet

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος. Μια εμφύτευση $f : (X,d) \to \ell_\infty^m$ προσδιορίζεται από τις m «συντεταγμένες» $f_1, \ldots, f_m : X \to \mathbb{R}$. Προκειμένου να δώσουμε άνω φράγμα για την $c_\infty(X)$, θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε τις f_i έτσι ώστε για κάποιον $\gamma \geqslant 1$ να ισχύουν τα εξής:

(α) Για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $i = 1, \ldots, m$,

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leqslant d(x, y).$$

(β) Για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει $i = i(x, y) \in \{1, \ldots, m\}$ ώστε

$$|f_i(x) - f_i(y)| \geqslant \frac{1}{\gamma} d(x, y).$$

Τότε,

$$d(x, y) \geqslant \|f_i(x) - f_i(y)\|_\infty = \max_{1 \leqslant i \leqslant m} |f_i(x) - f_i(y)| \geqslant \frac{1}{\gamma} d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$, δηλαδή η $f = (f_1, \ldots, f_m)$ είναι γ-εμφύτευση του X στον ℓ_∞^m (οπότε $c_\infty(X) \leqslant \gamma$).

Μια τεχνική που χρησιμοποιείται συχνά για την κατασκευή τέτοιων εμφυτεύσεων είναι η εξής. Θεωρούμε μια οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ υποσυνόλων του X και ορίζουμε $f_i : X \to \mathbb{R}$ με

$$f_i(x) = d(x, A_i) = \inf \big\{ d(x, u) : \, u \in A_i \big\}.$$

Από την τριγωνική ανισότητα για την d έπεται ότι

$$|f_i(x) - f_i(y)| = |d(x, A_i) - d(y, A_i)| \leqslant d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $i \in I$. Μένει να επιλέξουμε την οικογένεια $(A_i)_{i \in I}$ με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιείται το (β) για όσο γίνεται μικρότερη σταθερά γ. Τέτοιες εμφυτεύσεις καταγράφονται στη βιβλιογραφία σαν εμφυτεύσεις τύπου Fréchet, και έχουν πάρει το όνομά τους από το ακόλουθο απλό επιχείρημα.

Πρόταση 6.1.1 (εμφύτευση του Fréchet). *Κάθε μετρικός χώρος (X, d) με n σημεία εμφυτεύεται ισομετρικά στον ℓ_∞^n.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ορίζουμε

$$f_i(x) = d(x, \{x_i\}) = d(x, x_i).$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε: για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $i \leqslant n$, $|f_i(x) - f_i(y)| = |d(x, x_i) - d(y, x_i)| \leqslant d(x, y)$. Συνεπώς,

$$\|f(x) - f(y)\|_{\ell_\infty^n} = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} |f_i(x) - f_i(y)| \leqslant d(x, y).$$

Από την άλλη πλευρά, αν $x = x_i$ και $y = x_j$ στον X, έχουμε

$$\|f(x_i) - f(x_j)\|_{\ell_\infty^n} \geqslant |f_j(x_i) - f_j(x_j)| = |d(x_i, x_j) - d(x_j, x_j)| = d(x_i, x_j).$$

Δηλαδή, $\|f(x) - f(y)\|_{\ell_\infty^n} = d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. $\square$

Στην παραπάνω απόδειξη, τον ρόλο των συνόλων A_i είχαν τα μονοσύνολα $\{x_i\}$. Ο Bourgain στο [8] κάνει μία τυχαία επιλογή των A_i για να αποδείξει ότι κάθε πεπερασμένος μετρικός χώρος X εμφυτεύεται σε Ευκλείδειο χώρο με παραμόρφωση $O(\log |X|)$. Πριν την παρουσίαση αυτού του αποτελέσματος, παραθέτουμε ένα μεταγενέστερο θεώρημα του Matoušek που ακολουθεί την ίδια τεχνική.

6.1.1 ℓ_∞-εμφυτεύσεις

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Το επιχείρημα της Πρότασης 6.1.1 δείχνει ότι μπορούμε να εμφυτεύσουμε ισομετρικά τον X στον ℓ_∞^{n-1}. Αρκεί να ορίσουμε την εμφύτευση $f=(f_2,\dots,f_n):X\to\ell_\infty^{n-1}$ (αυτή παραμένει ισομετρία). Αν όμως θεωρήσουμε διάσταση m σημαντικά μικρότερη από n, τότε η ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση με την οποία μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον X στον ℓ_∞^m θα είναι μια συνάρτηση των n και m.

Θεώρημα 6.1.2 (Matoušek). *Έστω $\gamma=2q-1\geqslant 3$ ένας περιττός φυσικός αριθμός και έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Υπάρχουν $m=O(qn^{1/q}\log n)$ και γ-εμφύτευση του X στον ℓ_∞^m.*

Απόδειξη. Γράφουμε $X=\{x_1,\dots,x_n\}$. Η απόδειξη θα βασιστεί στην ιδέα που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω. Οι συντεταγμένες f_i της εμφύτευσης θα είναι συναρτήσεις απόστασης από κατάλληλα υποσύνολα του X τα οποία επιλέγονται τυχαία.

Ορίζουμε $p=n^{-1/q}$ και για κάθε $j=1,2,\dots,q$ θέτουμε $p_j=\min\left\{\frac{1}{2},p^j\right\}$. Τέλος, θέτουμε $s=\lceil 24n^{1/q}\log n\rceil$.

Για κάθε $i=1,\dots,s$ και $j=1,2,\dots,q$, επιλέγουμε τυχαίο υποσύνολο A_{ij} του X ως εξής. Θεωρούμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\{Z_{ij}^k: i\leqslant s, j\leqslant q, k\leqslant n\}$ σε κάποιο χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$, οι οποίες παίρνουν τις τιμές 0 ή 1 με πιθανότητα

$$\mathbb{P}(Z_{ij}^k=0)=1-p_j\quad\text{και}\quad\mathbb{P}(Z_{ij}^k=1)=p_j,$$

και θέτουμε

$$A_{ij}(\omega)=\{x_k:\ Z_{ij}^k(\omega)=1\}.$$

Με άλλα λόγια, κάθε σημείο του X ανήκει στο A_{ij} με πιθανότητα p_j και η επιλογή του x_k είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του x_s αν $k\neq s$. Αν $(i,j)\neq(i',j')$, τότε το A_{ij} είναι ανεξάρτητο από το $A_{i'j'}$.

Θέτουμε $d=qs$ και ορίζουμε (την τυχαία εμφύτευση) $f:X\to\ell_\infty^d$ με

$$f(x)=\left(d(x,A_{11}),\dots,d(x,A_{s1}),\dots,d(x,A_{1q}),\dots,d(x,A_{sq})\right).$$

Θα δείξουμε ότι με θετική πιθανότητα η f είναι $(2q-1)$-εμφύτευση.

Λήμμα 6.1.3. *Έστω x,y δύο διακεκριμένα σημεία του X. Υπάρχει δείκτης $j\in\{1,2,\dots,q\}$ ώστε αν τα τυχαία σύνολα A_{ij} επιλέγονται όπως παραπάνω τότε, για κάθε $i=1,\dots,s$,*

$$\mathbb{P}\left(|d(x,A_{ij})-d(y,A_{ij})|\geqslant\frac{1}{\gamma}d(x,y)\right)\geqslant\frac{p}{12}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\Delta=\frac{1}{\gamma}d(x,y)$. Ορίζουμε $B_0=\{x\}$, B_1 την κλειστή μπάλα ακτίνας Δ με κέντρο το y, B_2 την κλειστή μπάλα ακτίνας 2Δ με κέντρο το x, και ούτω καθεξής, με τελευταία την B_q που είναι η κλειστή μπάλα ακτίνας $q\Delta$ με κέντρο το x (αν ο q είναι άρτιος) ή το y (αν ο q είναι περιττός). Θυμηθείτε ότι $\gamma=2q-1$, οπότε οι ακτίνες των B_{q-1} και B_q

έχουν άθροισμα ίσο με $d(x,y)$. Δηλαδή, οι τελευταίες δύο μπάλες εφάπτονται. Για κάθε $t=0,1,\dots,q$ γράφουμε n_t για το πλήθος των σημείων του X που ανήκουν στην B_t.

Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει κάποιος δείκτης $j\in\{1,\dots,q\}$ με την ιδιότητα: για κάποιο $0\leqslant t\leqslant q$ ισχύουν οι

$$n_t\geqslant n^{(j-1)/q}\qquad\text{και}\qquad n_{t+1}\leqslant n^{j/q}.$$

Αυτό είναι απλή συνέπεια της αρχής του περιστερώνα: χωρίζουμε το διάστημα $[1,n]$ σε q διαστήματα $I_1,I_2,\dots,I_q$, θέτοντας

$$I_j=\left[n^{(j-1)/q},n^{j/q}\right]$$

και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν η ακολουθία $(n_1,n_2,\dots,n_q)$ δεν είναι αύξουσα, υπάρχει κάποιος t ώστε $n_{t+1}<n_t$. Υπάρχει j ώστε $n_t\in I_j$. Γι' αυτόν τον j ικανοποιείται το ζητούμενο.

(ii) Αν $1=n_0\leqslant n_1\leqslant\cdots\leqslant n_q\leqslant n$ τότε, από την αρχή του περιστερώνα, υπάρχουν t και j ώστε οι n_t και n_{t+1} να ανήκουν στο I_j. Γι' αυτόν τον j ικανοποιείται το ζητούμενο.

Θα δείξουμε ότι για τον δείκτη j που επιλέξαμε ικανοποιείται το συμπέρασμα του Λήμματος. Έστω $i\in\{1,\dots,s\}$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

E_1 : «το σύνολο A_{ij} περιέχει σημείο της B_t»
E_2 : «το σύνολο A_{ij} είναι ξένο προς το εσωτερικό της B_{t+1}».

Αν δείξουμε ότι $\mathbb{P}[E_1\cap E_2]\geqslant\frac{p}{12}$ τότε παίρνουμε το Λήμμα, αφού για κάθε A_{ij} που ικανοποιεί τα E_1 και E_2 έχουμε $d(x,A_{ij})\geqslant(t+1)\Delta$ και $d(y,A_{ij})\leqslant t\Delta$ (αν ο t είναι περιττός) ή $d(y,A_{ij})\geqslant(t+1)\Delta$ και $d(x,A_{ij})\leqslant t\Delta$ (αν ο t είναι άρτιος). Σε κάθε περίπτωση,

$$|d(x,A_{ij})-d(y,A_{ij})|\geqslant\Delta=\frac{1}{\gamma}d(x,y).$$

Γράφουμε

$$\mathbb{P}[E_1]=1-\mathbb{P}[A_{ij}\cap B_t=\emptyset]=1-(1-p_j)^{n_t}\geqslant 1-e^{-p_jn_t}.$$

Όμως,

$$p_jn_t\geqslant p_jn^{(j-1)/q}=p_jp^{-j+1}=\min\left\{\frac{1}{2},p^j\right\}p^{-j+1}\geqslant\min\left\{\frac{1}{2},p\right\}.$$

Άρα, αν $p\geqslant\frac{1}{2}$ έχουμε $\mathbb{P}[E_1]\geqslant 1-e^{-1/2}>\frac{1}{3}\geqslant\frac{p}{3}$, ενώ αν $p<\frac{1}{2}$ έχουμε $\mathbb{P}[E_1]\geqslant 1-e^{-p}\geqslant\frac{p}{3}$.

Από την άλλη πλευρά, αφού $p_j\leqslant\frac{1}{2}$,

$$\mathbb{P}[E_2]\geqslant(1-p_j)^{n_{t+1}}\geqslant(1-p_j)^{n^{j/q}}\geqslant(1-p_j)^{1/p_j}\geqslant\frac{1}{4}.$$

Η B_t και το εσωτερικό της B_{t+1} έχουν κενή τομή, άρα τα E_1 και E_2 είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Έπεται ότι

$$\mathbb{P}[E_1 \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1] \cdot \mathbb{P}[E_2] \geqslant \frac{p}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{p}{12},$$

κι αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 6.1.2. Από τον τρόπο ορισμού της f έχουμε

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leqslant d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Θα δείξουμε ότι το ενδεχόμενο

> «E : για κάθε $x, y \in X$ υπάρχουν i και j ώστε $|d(x, A_{ij}) - d(y, A_{ij})| \geqslant \frac{1}{\gamma} d(x, y)$»

έχει θετική πιθανότητα. Για σταθερά $x, y \in X$, θεωρούμε τον $j = j(x, y)$ του Λήμματος 6.1.3. Η πιθανότητα να μην ισχύει η ανισότητα για κανέναν $i \leqslant s$ φράσσεται από

$$\left(1 - \frac{p}{12}\right)^s \leqslant e^{-ps/12} \leqslant n^{-2}$$

από τον ορισμό του s. Το πλήθος των ζευγαριών $\{x, y\}$ είναι $\binom{n}{2} < n^2$. Έπεται ότι

$$\mathbb{P}[E^c] < 1.$$

Υπάρχουν λοιπόν A_{ij} για τα οποία η εμφύτευση f ικανοποιεί την

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \geqslant \frac{1}{\gamma} d(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$. Η $f : X \to \ell_\infty^{sq}$ έχει παραμόρφωση γ και $d = sq = O(qn^{1/q} \log n)$. □

6.1.2 Ευκλείδειες εμφυτεύσεις

Σε αυτή την Παράγραφο δείχνουμε το άνω φράγμα του Bourgain [8] για την $c_2(X)$.

Θεώρημα 6.1.4 (Bourgain)**.** *Κάθε μετρικός χώρος (X, d) με n σημεία εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο με παραμόρφωση $O(\log n)$.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.4 είναι παρόμοια με αυτήν του Θεωρήματος 6.1.2 για τις εμφυτεύσεις μετρικών χώρων στον ℓ_∞^m. Για την ακρίβεια, προηγήθηκε χρονικά της δουλειάς του Matoušek και είναι το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της περιοχής στο οποίο χρησιμοποιήθηκε αυτή η ιδέα: Οι συντεταγμένες της συνάρτησης που θα ορίσουμε θα είναι συναρτήσεις απόστασης από υποσύνολα του X.

Θέτουμε $q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Για κάθε $j = 1, \ldots, q$ θεωρούμε τυχαίο υποσύνολο A_j του X παίρνοντας κάθε σημείο του X να ανήκει ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα σημεία στο A_j με πιθανότητα 2^{-j}.

Λήμμα 6.1.5. *Έστω x, y δύο διακεκριμένα σημεία του X. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\Delta_1, \ldots, \Delta_q \geqslant 0$ με $\Delta_1 + \cdots + \Delta_q = \frac{1}{2}d(x,y)$ ώστε*

$$P_j = \mathbb{P}(|d(x,A_j) - d(y,A_j)| \geqslant \Delta_j) \geqslant \frac{1}{12}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, q$.

Απόδειξη. Ορίζουμε μια αύξουσα ακολουθία θέτοντας $r_0 = 0$ και r_j τη μικρότερη ακτίνα για την οποία ισχύουν ταυτόχρονα οι

$$|B(x,r_j)| \geqslant 2^j \qquad \text{και} \qquad |B(y,r_j)| \geqslant 2^j,$$

όπου $B(x,r) = \{y \in X : d(x,y) \leqslant r\}$. Γράφουμε $j(x,y)$ για το μεγαλύτερο φυσικό $j \leqslant q-1$ για τον οποίο $r_j < \frac{1}{2}d(x,y)$, και θέτουμε $r_j = \frac{1}{2}d(x,y)$ για κάθε $j(x,y) < j \leqslant q$. Θα δείξουμε ότι το συμπέρασμα του Λήμματος ικανοποιείται με $\Delta_j = r_j - r_{j-1}$. Παρατηρήστε ότι αν $q \geqslant j > j(x,y)+1$ δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα.

Έστω $j \in \{1, 2, \ldots, j(x,y)+1\}$. Θεωρούμε το τυχαίο $A_j \subseteq X$ τα στοιχεία του οποίου επιλέγονται με πιθανότητα 2^{-j}. Από τον ορισμό του r_j έχουμε $|B^\circ(x,r_j)| < 2^j$ ή $|B^\circ(y,r_j)| < 2^j$, όπου $B^\circ(x,r) = \{y \in X : d(x,y) < r\}$. Παρατηρήστε ότι το παραπάνω ισχύει και στην περίπτωση $j = q$, αφού $|X| \leqslant 2^q$ από τον ορισμό του q. Παίρνοντας αν χρειαστεί το y στη θέση του x, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|B^\circ(x,r_j)| < 2^j$.

Το τυχαίο σύνολο A_j ικανοποιεί την $|d(x,A_j) - d(y,A_j)| \geqslant \Delta_j$ αν τέμνει την $B(y,r_{j-1})$ και είναι ξένο προς την $B^\circ(x,r_j)$. Η πιθανότητα να συμβαίνει αυτό το ενδεχόμενο υπολογίστηκε στο Λήμμα 6.1.3 (πάρτε $p = 1/2$). □

Κάθε απεικόνιση $\varphi : X \to \mathbb{R}$ επάγει μια *γραμμική ψευδομετρική* ν στον X, η οποία ορίζεται από την

$$\nu(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|.$$

Γράφουμε ν_A για τη γραμμική ψευδομετρική που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $y \mapsto d(y,A)$. Παρατηρήστε ότι $\nu_A(x,y) \leqslant d(x,y)$ για κάθε $A \subseteq X$ και για κάθε $x, y \in X$: θα γράφουμε $\nu_A \leqslant d$ και θα λέμε ότι η ν_A *κυριαρχείται* από την d.

Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι αν μια μετρική d στο X προσεγγίζεται από έναν κυρτό συνδυασμό γραμμικών ψευδομετρικών, οι οποίες κυριαρχούνται από την d, τότε υπάρχει καλή εμφύτευση του (X,d) στον ℓ_2.

Λήμμα 6.1.6. *Έστω (X,d) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος, και έστω $\nu_1, \ldots, \nu_N$ γραμμικές ψευδομετρικές με $\nu_i \leqslant d$ για κάθε $i = 1, \ldots, N$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{i=1}^N \alpha_i \nu_i \geqslant \frac{1}{\gamma} d$$

για κάποιους μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ που έχουν άθροισμα ίσο με 1. Τότε, υπάρχει γ-εμφύτευση του (X,d) στον ℓ_2.

Απόδειξη. Έστω $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση που επάγει τη γραμμική ψευδομετρική ν_i. Ορίζουμε μια εμφύτευση $f : X \to \ell_2^N$ ως εξής:

$$f(y) = (\sqrt{\alpha_1}\varphi_1(y), \dots, \sqrt{\alpha_N}\varphi_N(y)).$$

Από τη μία πλευρά έχουμε

$$\|f(x) - f(y)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i(x,y)^2 \leqslant d(x,y)^2,$$

αφού $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$ και όλες οι ν_i κυριαρχούνται από την d. Από την άλλη πλευρά, με απλή εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\|f(x) - f(y)\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i(x,y)^2\right)^{1/2} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i(x,y)^2\right)^{1/2} \\ &\geqslant \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i(x,y).\end{aligned}$$

Από την υπόθεση, η τελευταία ποσότητα είναι μεγαλύτερη ή ίση από $\frac{1}{\gamma} d(x,y)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.4. Για κάθε $A \subseteq X$ η απεικόνιση $y \mapsto d(y,A)$ επάγει μια γραμμική ψευδομετρική που κυριαρχείται από την d. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.1.5 θα δείξουμε ότι υπάρχει κυρτός συνδυασμός αυτών των ψευδομετρικών, ο οποίος φράσσεται από κάτω από την $\frac{1}{24q} d$.

Για το σκοπό αυτό, για κάθε $A \subseteq X$ και για κάθε $j = 1, \dots, q$ ορίζουμε

$$\pi_j(A) = \mathbb{P}[A_j = A]$$

όπου A_j το τυχαίο σύνολο που τα σημεία του επιλέγονται ανεξάρτητα και με πιθανότητα 2^{-j} από το X. Από το Λήμμα 3.2.2, για κάθε ζευγάρι $\{x,y\}$ σημείων του X έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{A \subseteq X} \pi_j(A) \cdot \nu_A(x,y) &\geqslant \sum_{\{A \subseteq X : \nu_A(x,y) \geqslant \Delta_j\}} \pi_j(A) \cdot \nu_A(x,y) \\ &\geqslant \mathbb{P}\left(\bigcup_{\{A \subseteq X : \nu_A(x,y) \geqslant \Delta_j\}} [A_j = A]\right) \cdot \Delta_j \\ &\geqslant \mathbb{P}[\nu_{A_j}(x,y) \geqslant \Delta_j] \cdot \Delta_j = \frac{1}{12}\Delta_j.\end{aligned}$$

διότι $\{\omega \in \Omega : \nu_{A_j(\omega)}(x,y) \geqslant \Delta_j\} \subseteq \bigcup_{\{A\subseteq X:\nu_A(x,y)\geqslant \Delta_j\}}\{\omega \in \Omega : A_j(\omega) = A\}$. Προσθέτοντας ως προς $j = 1, \dots, q$, παίρνουμε

$$\sum_{A\subseteq X}\left(\sum_{j=1}^{q}\pi_j(A)\right)\cdot \nu_A(x,y) \geqslant \frac{1}{12}\sum_{j=1}^{q}\Delta_j = \frac{1}{24}d(x,y). \tag{6.1.1}$$

Θέτουμε

$$\alpha_A = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^{q}\pi_j(A).$$

Χρησιμοποιώντας την $\sum_{A\subseteq X}\pi_j(A) = 1$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{A\subseteq X}\alpha_A = 1.$$

Από την (6.1.1) παίρνουμε

$$\sum_{A\subseteq X}\alpha_A\nu_A \geqslant \frac{1}{24q}d,$$

και το Λήμμα 6.1.6 δείχνει ότι ο X εμφυτεύεται στον ℓ_2 με παραμόρφωση $24q$. □

Παρατηρήσεις 6.1.7. (α) Το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss μας εξασφαλίζει την εξής «αρχή αναγωγής της διάστασης» για Ευκλείδειες εμφυτεύσεις: *Αν ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος X εμφυτεύεται με παραμόρφωση α σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο, τότε εμφυτεύεται με παραμόρφωση 2α στον $\ell_2^{C\log|X|}$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Από το Θεώρημα 6.1.4 παίρνουμε λοιπόν άμεσα το εξής:

Θεώρημα 6.1.8. *Κάθε μετρικός χώρος (X,d) με n σημεία εμφυτεύεται με παραμόρφωση $O(\log n)$ στον ℓ_2^m για κάποιον $m = O(\log n)$.*

(β) Δέκα χρόνια μετά τον Bourgain, οι Linial, London και Rabinovich [41], έδειξαν ότι το φράγμα λογαριθμικής τάξης ως προς n του Θεωρήματος 6.1.4 είναι βέλτιστο. Το αντιπαράδειγμά τους ήταν οι λεγόμενοι expanders: Έστω $r \geq 3$ και $n \in \mathbb{N}$. Αν $G = (V,E)$ είναι ένα r-κανονικό γράφημα με n κορυφές, για $A, B \subseteq V$ συμβολίζουμε με $e(A,B)$ το πλήθος των ακμών που συνδέουν τα A και B και θέτουμε

$$\Phi(G) = \min_{\substack{A\subseteq V\\ 1\leq|A|\leq\frac{1}{2}|V|}}\frac{e(A, V\setminus A)}{|A|}.$$

Expanders λέγονται τα γραφήματα G για τα οποία η $\Phi(G)$ δεν είναι «πολύ μικρή» σε σχέση με το βαθμό του G. Συγκεκριμένα, δεδομένων $r \geq 3$ και $\varepsilon > 0$, μια οικογένεια γραφημάτων $\{G_i\}_{i\in\mathbb{N}}$ λέγεται οικογένεια από expanders με παραμέτρους (r,ε) αν α) Κάθε G_i είναι ένα r-κανονικό γράφημα με n_i-κορυφές, όπου για την ακολουθία $(n_i)_{i\in\mathbb{N}}$ ισχύει μια συνθήκη της μορφής $n_{i+1} \leq n_i^2$, και

β) Ισχύει ότι $\Phi(G_i) \geq \varepsilon$, για κάθε $i \in \mathbb{N}$.

Το αποτέλεσμα του [41] είναι η παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 6.1.9. *Κάθε εμφύτευση ενός expander n-κόμβων σε χώρο ℓ_p, $1 \leq p \leq 2$, ανεξαρτήτως της διάστασης, έχει παραμόρφωση $\Omega(\log n)$.*

Για περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με τους expanders, ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στη βιβλιογραφία, πχ στο survey [27].

6.2 Θεώρημα Dvoretzky για μετρικούς χώρους

Σε αυτήν την παράγραφο παρουσιάζουμε ένα θεώρημα των Bourgain, Figiel και Milman [11] το οποίο μπορεί να θεωρηθεί σαν το ανάλογο του κλασικού θεωρήματος του Dvoretzky (βλέπε [55]) για τις Ευκλείδειες τομές χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα.

Θεώρημα 6.2.1 (Bourgain-Figiel-Milman). *Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $c(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: κάθε πεπερασμένος μετρικός χώρος (X, d) έχει υποσύνολο Y με πληθάριθμο*

$$|Y| \geqslant c(\varepsilon) \log |X|$$

ώστε ο (Y, d) να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον ℓ_2. Επιπλέον, αν $0 < \varepsilon < 1$, μπορούμε να πάρουμε $c(\varepsilon) = c_1\varepsilon/\log(c_2/\varepsilon)$ όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1 θεωρούμε $0 < \varepsilon < 1$ και σταθεροποιούμε $0 < \delta < \frac{1}{2}$ που ικανοποιεί την $(1 + \delta)^2 \leqslant 1 + \varepsilon$. Θεωρούμε επίσης τον ελάχιστο φυσικό m για τον οποίο $(1 + \delta)^{m-1} > 4$.

Έστω (X, d) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος (χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $|X| > m$). Θα ορίσουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_k$$

που ικανοποιούν την

$$|X_{i+1}| \geqslant \frac{1}{m}|X_i| \qquad \text{για } i \geqslant 0.$$

Ας υποθέσουμε ότι το X_i έχει οριστεί και ότι

$$|X_i| \geqslant \frac{1}{m^i}|X| > m.$$

Επιλέγουμε τυχόν $x_i \in X_i$ και ορίζουμε

$$d_i = \max\{d(x_i, x) : x \in X_i\}.$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε κάποιο $y_i \in X_i$ για το οποίο $d(x_i, y_i) = d_i$ και θέτουμε

$$A_i = \left\{ x \in X_i : d(x_i, x) \leqslant \frac{1}{4} d_i \right\}.$$

Τέλος, ορίζουμε $g(i) = 0$ αν $|A_i| \geqslant \frac{1}{m}|X_i|$ και $g(i) = 1$ αλλιώς. Προκειμένου να ορίσουμε το X_{i+1} διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $g(i) = 0$ τότε θέτουμε $X_{i+1} = A_i$.

(ii) Αν $g(i) = 1$, μπορούμε να βρούμε $\eta \in [1/4, 1)$ ώστε το σύνολο

$$B_\eta = \{x \in X_i : \eta d_i < d(x_i, x) \leqslant (1+\delta)\eta d_i\}$$

να έχει πληθάριθμο $|B_\eta| \geqslant \frac{1}{m}|X_i|$. Πράγματι, αν θεωρήσουμε τα σύνολα B_{η_k}, όπου $\eta_k = (1+\delta)^k/4$, $k = 0, \ldots, m-1$, τότε από την $(1+\delta)^{m-1} > 4$ έχουμε $A_i \cup \left(\bigcup_{k=0}^{m-2} B_{\eta_k}\right) = X_i$, άρα για κάποιο k ισχύει η ανισότητα $|B_{\eta_k}| \geqslant \frac{1}{m}|X_i|$. Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $X_{i+1} = B_\eta$.

Όπως ορίστηκε το X_{i+1}, ικανοποιεί την

$$|X_{i+1}| \geqslant \frac{1}{m}|X_i| \geqslant \frac{1}{m^{i+1}}|X|.$$

Αν $|X| \leqslant m^{i+2}$ σταματάμε εδώ, αλλιώς μπορούμε να συνεχίσουμε την επαγωγική διαδικασία με τον ίδιο τρόπο. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $m^k < |X| \leqslant m^{k+1}$, τότε ορίζουμε $x_i, y_i, g(i)$ για όλα τα $i = 0, 1, \ldots, k-1$.

Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned} \tilde{X} &= \{x_i : 0 \leqslant i < k,\, g(i) = 1\} \\ \tilde{Y} &= \{y_i : 0 \leqslant i < k,\, g(i) = 0\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι, εκ του ορισμού τους, τα $\tilde{X}, \tilde{Y}$ είναι ξένα: Έστω $x_i \in \tilde{X}, y_j \in \tilde{Y}$. Αν υποθέσουμε ότι $i < j$, τότε το γεγονός ότι $g(i) = 1$ σημαίνει ότι $X_{i+1} \cap A_i = \emptyset$, και άρα $x_i \notin X_{i+1} \supseteq X_j$, που είναι άτοπο γιατί $y_j \in X_j$. Αναλόγως, στην περίπτωση που $j < i$ χρησιμοποιούμε το ότι $g(j) = 0$ και τον ορισμό του A_j για να δούμε ότι $y \notin A_j \supseteq X_i$, ενώ $x_i \in X_i$. Ισχύει λοιπόν ότι $\tilde{X} \cap \tilde{Y} = \emptyset$, και έτσι,

$$|\tilde{X}| + |\tilde{Y}| = k.$$

Έπεται ότι κάποιο από τα $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ έχει τουλάχιστον $\frac{k}{2}$ στοιχεία.

Βήμα 1: Θα δείξουμε ότι το $\tilde{X}$ έχει μεγάλο υποσύνολο που είναι $(1+\delta)^2$-ισομορφικό με κάποιο υποσύνολο του ℓ_2. Η απόδειξη θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 6.2.2. *Έστω $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω ρ μια μετρική στο S η οποία ικανοποιεί τις $\rho(s_i, s_j) = \rho(s_i, s_k)$ για $1 \leqslant i < j \leqslant k$ και*

$$\rho(s_1, s_k) \geqslant \rho(s_2, s_k) \geqslant \cdots \geqslant \rho(s_k, s_k) = 0.$$

Τότε, ο (S, ρ) είναι ισομετρικός με κάποιον υπόχωρο του ℓ_2.

Απόδειξη. Θέτουμε $m_i = \rho(s_i, s_k)$, $i = 1, \dots, k-1$. Ορίζουμε $u_1 = 0$ και θεωρούμε τη σφαίρα $S(1)$ του ℓ_2^{k-1} με κέντρο το u_1 και ακτίνα $r_1 = m_1$. Θα επιλέξουμε $u_2, \dots, u_k$ στην $S(1)$.

Παίρνουμε τυχόν $u_2 \in S(1)$ και θεωρούμε τη σφαίρα $S(2)$ του ℓ_2^{k-1} με κέντρο το u_2 και ακτίνα m_2. Η τομή $S(1) \cap S(2)$ είναι μια σφαίρα με διάμετρο

$$2r_2 = \frac{m_2\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}{m_1} > m_2.$$

Επιλέγουμε $u_3 \in S(1) \cap S(2)$ και θεωρούμε τη σφαίρα $S(3)$ του ℓ_2^{k-1} με κέντρο το u_3 και ακτίνα m_3. Αφού $m_3 \leqslant m_2$, η τομή $S(1) \cap S(2) \cap S(3)$ είναι μη κενή. Επιλέγουμε $u_4 \in S(1) \cap S(2) \cap S(3)$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Επαγωγικά δείχνουμε ότι αν $i < k-1$ τότε η τομή $S(1) \cap \cdots \cap S(i)$ είναι μια σφαίρα με διάμετρο $2r_i$ μεγαλύτερη από m_i: παρατηρήστε ότι

$$2r_i = \frac{m_i\sqrt{4r_{i-1}^2 - m_i^2}}{r_{i-1}} > m_i.$$

Επιλέγουμε $u_{i+1} \in S(1) \cap \cdots \cap S(i)$ και θεωρούμε τη σφαίρα $S(i+1)$ του ℓ_2^{k-1} με κέντρο το u_{i+1} και ακτίνα m_{i+1}. Αφού $m_{i+1} \leqslant m_i$, η τομή $S(1) \cap \cdots \cap S(i+1)$ είναι μη κενή. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Με τη διαδικασία που περιγράψαμε, ορίζονται $u_1, \dots, u_k \in \ell_2^{k-1}$ με την ιδιότητα $\rho(s_i, s_j) = \|u_i - u_j\|_2$ για κάθε $i, j = 1, \dots, k$.

Η απεικόνιση $s_i \mapsto u_i$ είναι ισομετρική εμφύτευση. □

Γράφουμε $\tilde{X} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$ όπου $i_1 < \cdots < i_s$, και για συντομία θέτουμε $z_j := x_{i_j}$, $j = 1, \dots, s$.

Λήμμα 6.2.3. *Για κάθε $p < j \leqslant s$ ορίζουμε*

$$d_1(z_p, z_j) = d_1(z_j, z_p) = \max\{d(z_p, z_\tau) : p < \tau \leqslant s\}.$$

Τότε, η d_1 είναι μετρική στο $\tilde{X}$. Αν θέσουμε $\delta_p = d_1(z_p, z_j)$ για κάθε $1 \leqslant p < j \leqslant s$, τότε η d_1 ικανοποιεί τις

$$d(z_p, z_j) \leqslant d_1(z_p, z_j) = \delta_p \leqslant (1+\delta) d(z_p, z_j). \tag{6.2.1}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η d_1 είναι μετρική. Αρκεί να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα. Έστω $p < j \leqslant s$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $r \leqslant s$ ισχύει

$$d_1(z_p, z_j) \leqslant d_1(z_p, z_r) + d_1(z_r, z_j). \tag{6.2.2}$$

Αν $p \leqslant r$ τότε $d_1(z_p, z_j) = d_1(z_p, z_r)$, οπότε η (6.2.2) ισχύει προφανώς. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $r < p < j$. Υπάρχει $\kappa > p$ ώστε $d_1(z_p, z_j) = d(z_p, z_\kappa)$. Τότε,

$$d_1(z_p, z_j) = d(z_p, z_\kappa) \leqslant d(z_p, z_r) + d(z_r, z_\kappa). \tag{6.2.3}$$

Όμως $r < p$ και $r < j$, άρα $d(z_p, z_r) \leqslant d_1(z_p, z_r)$ και $d(z_r, z_\kappa) \leqslant d_1(z_r, z_\kappa) = d_1(z_r, z_j)$. Επιστρέφοντας στην (6.2.3) παίρνουμε την (6.2.2).

Περνάμε τώρα στην απόδειξη της (6.2.1). Προφανώς $d(z_p, z_j) \leqslant d_1(z_p, z_j)$. Επιλέγουμε $\kappa > p$ ώστε $d_1(z_p, z_j) = d(z_p, z_\kappa)$. Έχουμε $g(i_p) = 1$, οπότε $z_\kappa, z_j \in \{x \in X_{i_p} : \eta d_{i_p} < d(z_p, x) \leqslant (1+\delta)\eta d_{i_p}\}$ για κάποιο $\eta \in [\frac{1}{4}, 1)$. Συνεπώς,

$$d(z_p, z_\kappa) \leqslant (1+\delta)\eta d_{i_p} \quad \text{και} \quad \eta d_{i_p} < d(z_p, z_j),$$

απ' όπου προκύπτει η $d_1(z_p, z_j) \leqslant (1+\delta) d(z_p, z_j)$ □

Από το Λήμμα 6.2.2 ο $(\tilde{X}, d_1)$ είναι $(1+\delta)$-ισομορφικός με τον $(\tilde{X}, d|_{\tilde{X}})$. Αρκεί λοιπόν να βρούμε μεγάλο υποσύνολο του $(\tilde{X}, d_1)$ το οποίο να είναι $(1+\delta)$-ισομορφικό με κάποιο υποσύνολο του ℓ_2. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\tilde{X}_n = \{z_p \in \tilde{X} : (1+\delta)^{-n} \leqslant \delta_p < (1+\delta)^{1-n}\}.$$

Παρατηρούμε ότι αν $z_p \in \tilde{X}_n$ και $z_j \in \tilde{X}_{n+m}$ τότε $p < j$. Πράγματι, αν είχαμε $j < p$ τότε για κάθε $p < \tau \leqslant s$ θα έπρεπε να ισχύει η

$$\delta_p = d(z_p, z_\tau) \leqslant d(z_p, z_j) + d(z_j, z_\tau) \leqslant 2\delta_j,$$

οπότε

$$(1+\delta)^{-n} \leqslant \delta_p \leqslant 2\delta_j < 2(1+\delta)^{1-m-n} < \frac{1}{2}(1+\delta)^{-n}.$$

Θεωρούμε τώρα τα σύνολα

$$U_\alpha = \cup\{\tilde{X}_n : n \equiv \alpha (\mathrm{mod}\, m)\}$$

για $\alpha = 0, 1, \ldots, m-1$. Κάποιο από αυτά, ας το πούμε X', έχει πληθάριθμο $|X'| \geqslant \frac{1}{m}|\tilde{X}|$.

Από τον ορισμό του X', αν $z_p, z_j \in X'$ και $p < j$, τότε είτε $\{z_p, z_j\} \subset \tilde{X}_n$ για κάποιον ακέραιο n ή $z_p \in \tilde{X}_n$ και $z_j \in \tilde{X}_{n+sm}$ για κάποιον $s \geqslant 1$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\frac{1}{1+\delta} < \frac{\delta_p}{\delta_j} < 1+\delta, \tag{6.2.4}$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε

$$\delta_j \leqslant (1+\delta)^{1-n-sm} \leqslant (1+\delta)^{1-m}\delta_p \leqslant \frac{\delta_p}{4}. \tag{6.2.5}$$

Αν $z_p \in X'$, ορίζουμε

$$\overline{\delta}_p = \min\{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leqslant \tau \leqslant p\}.$$

Λήμμα 6.2.4. *Για $z_p, z_j \in X'$ με $p < j$ θέτουμε*

$$d_2(z_p, z_j) = d_2(z_j, z_p) = \overline{\delta}_p.$$

Τότε, η d_2 είναι μετρική στο X' και ικανοποιεί την

$$\frac{1}{1+\delta} d_1(z_p, z_j) \leqslant d_2(z_p, z_j) \leqslant d_1(z_p, z_j). \tag{6.2.6}$$

Απόδειξη. Η d_2 είναι μετρική. Για την τριγωνική ανισότητα θεωρούμε $p < j$ και r ώστε $z_p, z_j, z_r \in X'$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: αν $r < p < j$, τότε $\overline{\delta}_p \leqslant \overline{\delta}_r$ αφού $\{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leqslant \tau \leqslant r\} \subset \{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leqslant \tau \leqslant p\}$. Έτσι,

$$d_2(z_p, z_j) \leqslant d_2(z_r, z_p) \leqslant d_2(z_r, z_p) + d_2(z_r, z_j).$$

Αν $p < r$, τότε $d_2(z_p, z_j) = d_2(z_p, z_r)$, οπότε η ανισότητα ισχύει πάλι.

Για την απόδειξη της (6.2.6) θεωρούμε $z_p, z_j \in X'$ με $p < j$ και παρατηρούμε κατ΄ αρχήν ότι

$$d_1(z_p, z_j) = \delta_p \in \{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leqslant \tau \leqslant p\}$$

οπότε

$$d_2(z_p, z_j) = \min\{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leqslant \tau \leqslant p\} \leqslant d_1(z_p, z_j).$$

Αν $\tau \leqslant p$, οι (6.2.4) και (6.2.5) δίνουν αντίστοιχα

$$\frac{1}{1+\delta} < \frac{\delta_\tau}{\delta_p}$$

και

$$\delta_p \leqslant \delta_\tau/4 \leqslant (1+\delta)\delta_\tau.$$

Έτσι,

$$d_1(z_p, z_j) = \delta_p \leqslant (1+\delta)\min\{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leqslant \tau \leqslant p\} = (1+\delta) d_2(z_p, z_j).$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το Λήμμα. □

Ο μετρικός χώρος (X', d_2) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 6.2.2. Άρα, είναι ισομετρικός με κάποιον υπόχωρο του ℓ_2. Από την κατασκευή, ο $(\tilde{X}, d)$ έχει υποσύνολο που είναι $(1+\delta)^2$-ισομορφικό με υπόχωρο του ℓ_2 και έχει πληθάριθμο τουλάχιστον ίσο με $|X'| \geqslant \frac{1}{m}|\tilde{X}|$.

Βήμα 2: Θα δείξουμε ότι το $\tilde{Y}$ έχει μεγάλο υποσύνολο που είναι $(1+\delta)^2$-ισομορφικό με κάποιο υποσύνολο του ℓ_2.

Γράφουμε $\tilde{Y} = \{y_{j_1}, \ldots, y_{j_t}\}$ όπου $t = k - s$ και $j_1 < \cdots < j_t$, και για συντομία θέτουμε $w_i := y_{j_i}$, $i = 1, \ldots, t$.

Λήμμα 6.2.5. *Ο $(\tilde{Y}, d|_{\tilde{Y}})$ είναι 5-ισομορφικός με κάποιο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $T(w_i) = d(w_i, w_t)$. Παρατηρούμε ότι αν $w_i = y_{j_i}$, τότε

$$\{w_{i+1}, \ldots, w_t\} \subset A_{j_i}.$$

Αφού $\mathrm{diam}(A_{j_i}) \leqslant 2 \cdot \frac{1}{4} d(x_{j_i}, y_{j_i}) = \frac{1}{2} d_{j_i}$ και

$$T(w_i) = d(w_i, w_t) \geqslant d(w_i, x_{j_i}) - d(w_t, x_{j_i}) \geqslant d_{j_i} - \frac{1}{4} d_{j_i} = \frac{3}{4} d_{j_i}, \tag{6.2.7}$$

συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $i < \kappa \leqslant t$,

$$T(w_\kappa) \leqslant \frac{1}{2} d_{j_i} \leqslant \frac{2}{3} T(w_i). \tag{6.2.8}$$

Επομένως, αν $1 \leqslant i < \kappa \leqslant t$, τότε $d(w_i, w_\kappa) \leqslant 5 d_{j_i}/4$ και, από την (6.2.7),

$$\frac{d(w_i, w_\kappa)}{5} \leqslant \frac{d_{j_i}}{4} \leqslant \frac{T(w_i)}{3} \leqslant |T(w_i) - T(w_\kappa)| \leqslant d(w_i, w_\kappa).$$

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Περνώντας σε υπόχωρο μπορούμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση του Λήμματος. Για $i = 1, 2, \ldots, \lfloor t/(m-1) \rfloor + 1 = t'$ ορίζουμε $v_i = w_{1+(i-1)m}$. Παρατηρήστε ότι

$$t' > \frac{t}{m-1} > \frac{t}{m} = \frac{1}{m} |\tilde{Y}|.$$

Η (6.2.8) δείχνει ότι

$$T(v_{i+1}) \leqslant \left(\frac{2}{3}\right)^m T(v_i),$$

και, αν θέσουμε $\alpha = (2/3)^m$, βλέπουμε ότι για κάθε $1 \leqslant i < \kappa \leqslant t'$ ισχύει η

$$(1-\alpha) d(v_i, w_t) \leqslant T(v_i) - T(v_\kappa) \leqslant T(v_i) = d(v_i, w_t).$$

Επίσης,

$$d(v_i, v_\kappa) \leqslant d(v_i, w_t) + d(v_\kappa, w_t) \leqslant (1+\alpha) d(v_i, w_t)$$

και
$$d(v_i, w_t) \leqslant d(v_i, v_\kappa) + d(v_\kappa, w_t),$$
άρα
$$d(v_i, v_\kappa) \geqslant (1-\alpha) d(v_i, w_t).$$
Έπεται ότι η T ορίζει μια $(1+\alpha)/(1-\alpha)^2$-ισομορφική εμφύτευση του $V = \{v_1, \dots, v_{t'}\}$ στον ℓ_2. Αν $0 < \varepsilon < 1$ και $\alpha = (2/3)^m < \varepsilon/6$, τότε έχουμε βρει μια $(1+\varepsilon)$-ισομορφική εμφύτευση.

Αν υποθέσουμε ότι $(1+\delta)^2 \leqslant 1+\varepsilon$, τότε ένα από τα σύνολα X' και V που κατασκευάσαμε έχει τουλάχιστον $\frac{k}{2m}$ στοιχεία και είναι $(1+\varepsilon)$-εμφυτεύσιμο στον ℓ_2. Αφού $m^{k+1} \geqslant |X|$, έχουμε $k+1 \geqslant \frac{1}{\log m} \log |X|$, όπου το m εξαρτάται μόνο από το ε σύμφωνα με τις σχέσεις $(1+\delta)^2 \leqslant 1+\varepsilon$ και $(1+\delta)^{m-1} > 4$. Από την
$$\frac{3k}{2} \geqslant k+1 \geqslant \frac{1}{\log m} \log |X|$$
παίρνουμε τελικά ότι κάποιο από τα X', V έχει περισσότερα από $\frac{1}{3m \log m} \log |X|$ σημεία. Ο περιορισμός ικανοποιείται αν πάρουμε $\delta \simeq \varepsilon$, και ο m προσδιορίζεται από την $(1+\delta)^m \simeq c$ για κάποια σταθερά c. Δηλαδή, $m \simeq c_1/\log(1+\delta) \simeq c_1/\delta$. Αντικαθιστώντας το m, λαμβάνουμε μια εκτίμηση της μορφής
$$|Y| \geqslant \big(c_1\varepsilon/\log(c_2/\varepsilon)\big) \cdot \log |X|.$$

6.2.1 Μια κατασκευή

Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω $D \subseteq [0,\infty)$. Μια μετρική d στο X λέγεται D-μετρική αν $d(x,y) \in D$ για κάθε $x, y \in X$. Σε αυτή την παράγραφο σταθεροποιούμε το σύνολο $D = \{0,1,2\}$. Συμβολίζουμε με $c_2(X)$ την ελάχιστη δυνατή απόσταση *Lipschitz* του (X,d) από υποσύνολο του ℓ_2.

Λήμμα 6.2.6. *Αν d είναι μια D-μετρική στο σύνολο X τότε είτε $c_2(X) = 1$ ή $c_2(X) \geqslant 1+\varepsilon_0$, όπου $\varepsilon_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η απόσταση $1+\varepsilon_0$ πετυχαίνεται με κάποιο χώρο (X,d) που έχει πληθάριθμο $|X| = 4$.*

Απόδειξη. Έστω d μια D-μετρική στο σύνολο X. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|X| \geqslant 4$, αλλιώς ο X είναι ισομετρικός με υποσύνολο του επιπέδου. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωση: Υποθέτουμε ότι η σχέση $d(x,y) \leqslant 1$ είναι μεταβατική στο X. Τότε, είναι σχέση ισοδυναμίας. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.2.2 ελέγχουμε ότι $c_2((X,d)) = 1$.

Δεύτερη περίπτωση: Η σχέση $d(x,y) \leqslant 1$ δεν είναι μεταβατική. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x, y, z \in X$ που ικανοποιούν τις $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 1$ και $d(x,z) = 2$. Παίρνουμε ένα (τυχόν) άλλο σημείο $w \in X$ και θέτουμε $X_0 = \{x,y,z,w\}$. Ας υποθέσουμε ότι ο (X_0, d) εμφυτεύεται ισομετρικά στον ℓ_2. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T(x) = e$, $T(y) = 0$ και $T(z) = -e$, όπου e μοναδιαίο διάνυσμα στον ℓ_2. Όμως τότε, οι αποστάσεις $\|e - T(w)\|_2$,

$\|0-T(w)\|_2$ και $\|-e-T(w)\|_2$ δεν μπορούν να είναι όλες ίσες με 1 ή 2. Άρα, $c_2((X_0,d)) > 1$. Αφού $c_2((X,d)) \geqslant c_2((X_0,d))$ και υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος D-μετρικοί χώροι της μορφής $\{x,y,z,w\}$, η ύπαρξη του ε_0 είναι προφανής. □

Λήμμα 6.2.7. *Έστω $\mathcal{D}_s$ το σύνολο όλων των D-μετρικών d στο σύνολο $[s] = \{1,\ldots,s\}$ οι οποίες είναι ισομετρικές με υποσύνολο του ℓ_2. Τότε,*

$$|\mathcal{D}_s| \leqslant s!2^s.$$

Απόδειξη. Από την απόδειξη του προηγούμενου Λήμματος είναι φανερό ότι αρκεί να δώσουμε άνω φράγμα για το πλήθος των σχέσεων ισοδυναμίας στο σύνολο $[s]$. Μετά από κατάλληλη μετάθεση του $[s]$ οι κλάσεις ισοδύναμων στοιχείων γίνονται διαστήματα που περιγράφονται από την ακολουθία των αρχικών τους σημείων. Αφού υπάρχουν το πολύ 2^s τέτοιες ακολουθίες, ισχύει το φράγμα $s!2^s$. □

Θεώρημα 6.2.8. *Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ με την εξής ιδιότητα. Αν $n \geqslant s \geqslant 3 + 2\log_2 n$, τότε υπάρχει μετρική d στο σύνολο $[n] = \{1,\ldots,n\}$ ώστε*

$$c_2((X, d|_X)) \geqslant 1 + \varepsilon_0$$

για κάθε υποσύνολο X του $[n]$ με πληθάριθμο $|X| = s$. Επιπλέον, μπορούμε να επιλέξουμε την d να παίρνει μόνο τις τιμές 0, 1 και 2, οπότε $c_2(([n],d)) \leqslant 2$.

Απόδειξη. Θέτουμε $D = \{0,1,2\}$ και $N = \binom{n}{2}$. Γράφουμε $\mathcal{A}_n$ για την κλάση όλων των D-μετρικών στο $[n]$. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακριβώς 2^N D-μετρικές στο $[n]$. Ορίζουμε

$$\xi = \{d \in \mathcal{A}_n : \exists X \subset Z_n : |X| = s,\ c_2((X, d|_X)) = 1\}.$$

Από το Λήμμα 6.2.7 βλέπουμε ότι

$$|\xi| \leqslant \binom{n}{s} s!2^s 2^{N-\binom{s}{2}}.$$

Αφού $\binom{n}{s} < n^s/s!$, για να δείξουμε ότι $|\xi| < |\mathcal{A}_n|$ αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$(2n)^s 2^{-\binom{s}{2}} \leqslant 1.$$

Ισοδύναμα, αρκεί να ικανοποιείται ο περιορισμός $\log_2 n \leqslant \frac{s-3}{2}$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Μη γραμμική θεωρία Dvoretzky

Παρακάτω και μέχρι το τέλος του κεφαλαίου θα αναφερόμαστε στον όρο *μετρικός χώρος μέτρου* εννοώντας ένα συμπαγή μετρικό χώρο (X, d) εφοδιασμένο με ένα μέτρο μ στα Borel υποσύνολά του. Όταν $\mu(X) = 1$, λέμε ότι ο (X, d, μ) είναι ένας *μετρικός χώρος πιθανότητας*. Δεδομένου $D \geqslant 1$, ακολουθώντας τον ορισμό του προηγούμενου κεφαλαίου, θα λέμε ότι ένας μετρικός χώρος (X, d_X) *εμφυτεύεται με παραμόρφωση* D σε ένα μετρικό χώρο (Y, d_Y), αν υπάρχει $f : X \to Y$ και ένας συντελεστής κλίμακας $\lambda > 0$ έτσι ώστε για κάθε $x, y \in X$ να ισχύει ότι

$$\lambda d_X(x, y) \leqslant d_Y(f(x), f(y)) \leqslant D \cdot \lambda d_X(x, y).$$

Η f τότε θα λέγεται D-*εμφύτευση*. Για $x \in X$ και $r > 0$ τέλος, γράφουμε $B(x, r)$ για την κλειστή και $B^\circ(x, r)$ για την ανοικτή μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r.

7.1 Η δομή των υπερμετρικών χώρων

Ορισμός 7.1.1 (Υπερμετρικός χώρος). *Έστω $(\mathcal{M}, d)$ ένας μετρικός χώρος στον οποίο η μετρική d ικανοποιεί για κάθε $x, y, z \in \mathcal{M}$ την παρακάτω ισχυρότερη μορφή της τριγωνικής ανισότητας,*

$$d(x, y) \leqslant \max\{d(x, z), d(z, y)\}. \tag{7.1.1}$$

Η d τότε λέγεται υπερμετρική και ο $(\mathcal{M}, d)$ υπερμετρικός χώρος.

Από τον ορισμό της υπερμετρικής έπονται άμεσα οι παρακάτω ασυνήθιστες γεωμετρικές ιδιότητες του $(\mathcal{M}, d)$.

Πρόταση 7.1.2. *Έστω $(\mathcal{M}, d)$ ένας υπερμετρικός χώρος. Τότε:*

(α) *Κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές, συγκεκριμένα αν $x_1, x_2, x_3 \in \mathcal{M}$, τότε υπάρχει $i \in \{1,2,3\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $j, k \in \{1,2,3\}$ με $j \neq k \neq i$ ισχύει ότι*

$$d(x_j, x_k) \leqslant d(x_i, x_j) = d(x_i, x_k).$$

(β) *Κάθε ανοικτή μπάλα στον $(\mathcal{M}, d)$ είναι και κλειστή και αντίστροφα κάθε κλειστή μπάλα είναι και ανοικτή.*

(γ) *Αν δύο μπάλες στον $(\mathcal{M}, d)$ τέμνονται, τότε η μία είναι υποσύνολο της άλλης. Επιπλέον, αν για $x, y \in \mathcal{M}$ και $s, t > 0$ είναι $B(x,s) \cap B(y,t) = \emptyset$, τότε*

$$d(x,y) = d(B(x,s), B(y,t)).$$

(δ) *Κάθε στοιχείο του $(\mathcal{M}, d)$ που ανήκει σε μια μπάλα είναι κέντρο της.*

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι μπορούμε πάντα να βρίσκουμε ένα «ανοικτό» κάλυμμα του $\mathcal{M}$ που αποτελείται από ξένα σύνολα.

Πρόταση 7.1.3. *Έστω U ανοικτό υποσύνολο του υπερμετρικού χώρου $(\mathcal{M}, d)$. Τότε δεδομένης μιας ακολουθίας $r_1 > r_2 > \cdots > 0$, το U μπορεί να καλυφθεί από ξένες μπάλες της μορφής $B(x, r_n)$, όπου $x \in \mathcal{M}$ και $n \in \mathbb{N}$.*

Απόδειξη. Έστω $x \in U$. Θέτουμε

$$B_x := \begin{cases} B(x, r_1), & \text{αν } B(x, r_1) \subseteq U \\ B(x, r_n), & \text{αν } B(x, r_n) \subseteq U \text{ και } B(x, r_{n-1}) \nsubseteq U. \end{cases}$$

Με άλλα λόγια ορίζουμε B_x να είναι το μεγιστικό -ως προς τη διάταξη του περιέχεσθαι- στοιχείο της κλάσης

$$\mathscr{B} = \{B(x, r_n) \subseteq U : n \in \mathbb{N}\}.$$

Ισχυριζόμαστε τότε ότι το $\{B_x : x \in U\}$ είναι το ζητούμενο κάλυμμα. Πράγματι, έστω $y \in U$ τέτοιο ώστε $B_x \cap B_y \neq \emptyset$. Από την Πρόταση 7.1.2(γ) τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B_x \subseteq B_y$. Τότε όμως από την Πρόταση 7.1.2(δ) θα έχουμε $B_y \in \mathscr{B}$, οπότε $B_y \subseteq B_x$, άρα $B_x = B_y$. □

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ο $(\mathcal{M}, d)$ είναι ένας συμπαγής υπερμετρικός χώρος. Από την τελευταία πρόταση τότε είναι σαφές ότι μπορεί να βρεθεί μια πεπερασμένη διαμέριση του $\mathcal{M}$. Εναλλακτικά, μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση ισοδυναμίας $\sim$ στον $\mathcal{M}$ μέσω της

$$x \sim y \Leftrightarrow d(x,y) < \operatorname{diam}(\mathcal{M}).$$

Παρατηρούμε ότι είναι η (7.1.1) που κάνει την $\sim$ όντως μια σχέση ισοδυναμίας. Οι αντίστοιχες κλάσεις ισοδυναμίας είναι τότε της μορφής $[x] = B^\circ(x, \operatorname{diam}(\mathcal{M}))$, και από τη συμπάγεια του $\mathcal{M}$ θα υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος τέτοια σύνολα, έστω $\{B_1^1, B_1^2, \ldots, B_1^{k_1}\}$.

Επειδή κάθε ανοικτή μπάλα είναι και κλειστή, έπεται ότι, για κάθε $i \in \{1, \dots k_1\}$, ο (B_1^i, d) είναι με τη σειρά του ένας συμπαγής υπερμετρικός χώρος. Μπορούμε να επαναλάβουμε επαγωγικά λοιπόν τα παραπάνω βήματα για να πάρουμε τελικά την παρακάτω πρόταση.

Πρόταση 7.1.4. *Έστω $(\mathcal{M}, d)$ ένας συμπαγής υπερμετρικός χώρος. Υπάρχει τότε μια ακολουθία διαμερίσεων $\{\mathscr{P}_j\}_{j=0}^{\infty}$ του $\mathcal{M}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) $\mathscr{P}_0 = \{\mathcal{M}\}$.

(2) Η $\mathscr{P}_j$ είναι πεπερασμένη, για κάθε $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$.

(3) Η $\mathscr{P}_j$ είναι μια εκλέπτυνση της $\mathscr{P}_{j-1}$, για κάθε $j \in \mathbb{N}$.

(4) Κάθε $C \in \mathscr{P}_j$ είναι της μορφής $C = B^\circ(x, r)$, για κάποια $x \in \mathcal{M}$ και $r \in [0, \infty)$.

(5) Για κάθε j, αν το $C \in \mathscr{P}_j$ δεν είναι μονοσύνολο, υπάρχουν $x_1, \dots, x_k \in \mathcal{M}$ τέτοια ώστε $\{B^\circ(x_i, \mathrm{diam}(C))\}_{i=1}^k \subseteq \mathscr{P}_{j+1}$, οι μπάλες $\{B^\circ(x_i, \mathrm{diam}(C))\}_{i=1}^k$ είναι ξένες, και $C = \bigcup_{i=1}^k B^\circ(x_i, \mathrm{diam}(C))$.

(6) $\lim_{j \to \infty} \max_{C \in \mathscr{P}_j} \mathrm{diam}(C) = 0$.

(7) Για κάθε $x \in \mathcal{M}$ και $r \in [0, \infty)$ υπάρχει $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ τέτοιο ώστε $B^\circ(x, r) \in \mathscr{P}_j$.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες (1)-(5) είναι άμεσες συνέπειες της κατασκευής που περιγράψαμε παραπάνω. Για την (6), αρκεί να παρατηρήσουμε ότι, για κάθε $j \in \mathbb{N}$, $\max_{C \in \mathscr{P}_j} \mathrm{diam}(C) \leqslant \max_{C \in \mathscr{P}_{j-1}} \mathrm{diam}(C)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν μόνο πεπερασμένες το πλήθος μπάλες ακτίνας τουλάχιστον ίσης με ε στον $\mathcal{M}$, άρα $\lim_{j \to \infty} \max_{C \in \mathscr{P}_j} \mathrm{diam}(C) = 0$.

Για την (7), ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι μπορούμε να βρούμε $x \in \mathcal{M}$ για το οποίο να υπάρχει $r > 0$ τέτοιο ώστε $B^\circ(x, r) \notin \mathscr{P}_j$ για κάθε j. Θέτουμε

$$r_0 = \max\{r > 0 : B^\circ(x, r) \notin \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathscr{P}_j\}.$$

Αφού το σύνολο $\{B^\circ(x, s)\}_{s \geqslant r_0}$ είναι πεπερασμένο, και επιπλέον $B^\circ(x, \mathrm{diam}(\mathcal{M}) + 1) = \mathcal{M} \in \mathscr{P}_0$, μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $B^\circ(x, s) \in \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathscr{P}_j$, για κάθε $s \in (r_0, \infty)$. Επειδή ο $\mathcal{M}$ όμως είναι υπερμετρικός χώρος, υπάρχει $s \in (r_0, \infty)$ τέτοιο ώστε $B(x, r_0) = B^\circ(x, s)$. Αυτό σημαίνει όμως ότι $B(x, r_0) \neq B^\circ(x, r_0)$ που είναι άτοπο. □

Θα περιοριστούμε στο εξής στην πεπερασμένη περίπτωση. Αυτή καλύπτει μεν τις ανάγκες της παρουσίασής μας, τα φαινόμενα δε που περιγράφουμε επεκτείνονται και στην γενικότερη περίπτωση των συμπαγών υπερμετρικών χώρων. Υποθέτουμε λοιπόν στο εξής και μέχρι το τέλος της παραγράφου ότι ο $(\mathcal{M}, d)$ είναι ένας πεπερασμένος υπερμετρικός χώρος. Η Πρόταση 7.1.4 μας δίνει τότε μια πεπερασμένη ακολουθία διαμερίσεων $\{\mathscr{P}_j\}_{j=0}^{n}$

του $\mathcal{M}$, τέτοια ώστε $\mathscr{P}_0 = \{\mathcal{M}\}$, $\mathscr{P}_n = \{\{x\}\}_{x\in\mathcal{M}}$, και η $\mathscr{P}_i$ είναι μια εκλέπτυνση της $\mathscr{P}_{i-1}$, για κάθε $i \in \{1,\ldots,n\}$. Επιπλέον, αν για κάθε $x, y \in \mathcal{M}$ θέσουμε

$$i(x,y) := \max\{i \in \{0,\ldots,n\} : \exists A \in \mathscr{P}_i \text{ τέτοιο ώστε } x, y \in A\},$$

έπεται τότε ότι $d(x,y) = \operatorname{diam}(A)$. Πράγματι, αφού μεν υπάρχει $A \in \mathscr{P}_{i(x,y)}$ τέτοιο ώστε $x, y \in A$, θα είναι $d(x,y) \leqslant \operatorname{diam}(A)$, αν όμως κανείς υποθέσει ότι $d(x,y) < \operatorname{diam}(A)$, τότε $y \in B^\circ(x, \operatorname{diam}(A)) \in \mathscr{P}_{i(x,y)+1}$, που είναι άτοπο από τη μεγιστικότητα του $i(x,y)$.

Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να θεωρήσει ένα γραφοθεωρητικό δένδρο οι κόμβοι του οποίου βρίσκονται σε αντιστοιχία με υποσύνολα του $\mathcal{M}$: Η ρίζα του δένδρου αντιστοιχεί σε ολόκληρο τον $\mathcal{M}$, και οι κόμβοι του i-στου επιπέδου του δένδρου βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία με τα στοιχεία της διαμέρισης $\mathscr{P}_i$. Τα παιδιά ενός κόμβου που βρίσκεται στο i-επίπεδο και αντιστοιχεί στο $A \in \mathscr{P}_i$ θα είναι τότε οι κόμβοι του $(i+1)$-στου επιπέδου που αντιστοιχούν στα σύνολα $\{B \in \mathscr{P}_{i+1} : B \subseteq A\}$. Υπό αυτή τη συνδυαστική οπτική γωνία, ο $\mathcal{M}$ μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο των φύλλων του δένδρου αυτού, ενώ η υπερμετρική στον $\mathcal{M}$ περιγράφεται με τον τρόπο που δείξαμε παραπάνω: Η απόσταση δύο στοιχείων x, y του $\mathcal{M}$ δεν είναι παρά η διάμετρος του υποσυνόλου του $\mathcal{M}$ που αντιστοιχεί στον τελευταίο κοινό πρόγονο των φύλλων-μονοσυνόλων $\{x\}, \{y\}$ στο δένδρο μας. Η εικόνα αυτή ενός υπερμετρικού χώρου θα αξιοποιηθεί εκτενώς στο υπόλοιπο του κεφαλαίου.

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα, και αυτή που συνδέει άρρηκτα τελικά τους υπερμετρικούς χώρους με τη θεωρία των μη γραμμικών ευκλείδιων εμφυτεύσεων, δίνεται από την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 7.1.5. *Έστω $(\mathcal{M}, d)$ ένας πεπερασμένος υπερμετρικός χώρος. Τότε ο $(\mathcal{M}, d)$ εμφυτεύεται ισομετρικά σε μια σφαίρα ακτίνας $\operatorname{diam}(\mathcal{M})/\sqrt{2}$ ενός χώρου Hilbert.*

Απόδειξη. Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή στον $\mathcal{M}$: Αν $\mathscr{P}_1 = \{B_1, B_2, \ldots, B_k\}$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας στις οποίες χωρίζεται ο $\mathcal{M}$, τότε από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν ισομετρικές εμφυτεύσεις $f_i : B_i \to H_i$, όπου $H_1, \ldots, H_k$ είναι χώροι Hilbert, και $\|f_i(x)\|_{H_i} = \operatorname{diam}(B_i)/\sqrt{2}$ για κάθε $i \in \{1,\ldots,k\}$. Ορίζουμε τότε

$$f : \mathcal{M} \to \left(\bigoplus_{i=1}^k H_i\right) \oplus \ell_2^k := H$$

μέσω της

$$x \in B_i \Rightarrow f(x) = f_i(x) + \sqrt{\frac{\operatorname{diam}(\mathcal{M})^2 - \operatorname{diam}(B_i)^2}{2}}\, e_i,$$

όπου e_i η συνήθης βάση του ℓ_2^k. Ο H είναι τότε ένας χώρος Hilbert, και μπορούμε να δείξουμε ότι η f είναι η ζητούμενη εμφύτευση: Έστω $x \in \mathcal{M}$, ας υποθέσουμε μάλιστα πως $x \in B_{i_0}$. Ισχύει τότε ότι

$$\|f(x)\|_H^2 = \|f_{i_0}(x)\|_{H_{i_0}}^2 + \frac{\operatorname{diam}(\mathcal{M})^2 - \operatorname{diam}(B_{i_0})^2}{2} = \frac{\operatorname{diam}(\mathcal{M})^2}{2},$$

ενώ για $x \in B_i$, $y \in B_j$ με $i \neq j$ (οπότε και $d(x,y) = \mathrm{diam}(\mathcal{M})$) είναι

$$\|f(x) - f(y)\|_H^2 = \|f(x)\|_H^2 + \|f(y)\|_H^2 = \mathrm{diam}(\mathcal{M})^2 = d(x,y)^2.$$

Στην απλούστερη περίπτωση που $x, y \in B_i$ (οπότε $d(x,y) = \mathrm{diam}(B_i)$), τότε

$$\|f(x) - f(y)\|_H^2 = \|f_i(x) - f_i(y)\|_{H_i}^2 = \mathrm{diam}(B_i)^2,$$

από την επαγωγική μας υπόθεση. Έχουμε έτσι ότι $\|f(x) - f(y)\|_H = d(x,y)$, για κάθε $x, y \in \mathcal{M}$. □

Τα παραπάνω προτείνουν μια χρήσιμη θεώρηση ενός πεπερασμένου υπερμετρικού χώρου: Μπορεί να έρθει σε αντιστοιχία με το σύνολο των φύλλων ενός δένδρου, τα οποία εμφυτεύονται ισομετρικά σε ένα χώρο Hilbert. Επιπλέον, για κάθε κόμβο του δένδρου, τα υποδένδρα με ρίζες τα παιδιά του είναι μεταξύ τους «ορθογώνια».

7.2 Ένα θεώρημα εμφύτευσης με βάρη

Θεώρημα 7.2.1. *Για κάθε $D > 2$, κάθε πεπερασμένο μετρικό χώρο (X,d) και κάθε $w : X \to (0,\infty)$, υπάρχει $S \subseteq X$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε κάποιον υπερμετρικό χώρο και ικανοποιεί τη σχέση*

$$\sum_{x \in S} w(x)^{\theta(D)} \geqslant \left(\sum_{x \in X} w(x) \right)^{\theta(D)},$$

όπου $\theta(D) \in (0,1)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης

$$\frac{2}{D} = (1-\theta)\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}.$$

Το Θεώρημα 7.2.1 γενικεύει το κεντρικό αποτέλεσμα του [58]. Η απόδειξή του ακολουθεί την ίδια, πιθανοθεωρητική, μέθοδο και μπορεί να βρεθεί στο [53].

Λήμμα 7.2.2. *Έστω (X,d,μ) μετρικός χώρος πιθανότητας και $S \subseteq X$ συμπαγές. Έστω ακόμη $R > r > 0$ και μια Borel μετρήσιμη $w : S \to [0,\infty)$. Τότε υπάρχει συμπαγές $T \subset S$ τέτοιο ώστε*

$$\int_T \frac{\mu(B(x,R))}{\mu(B(x,r))} w(x)\, d\mu(x) \geqslant \int_S w(x)\, d\mu(x),$$

και επιπλέον υπάρχει διαμέριση $\{T_n\}_{n=1}^{\infty}$ του T από συμπαγή υποσύνολα το κάθε ένα εκ των οποίων περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας r, έτσι ώστε $d(T_n, T_m) \geqslant R - r$, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Θεωρούμε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, και έστω $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές στον X και ακολουθούν την ίδια κατανομή, συγκεκριμένα

$$\mathbb{P}[x_n \in A] = \mu(A),$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$. Παρατηρούμε ότι, επειδή για τυχόν $x \in X$ ισχύει $\mu(B(x,R)) > 0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^\infty [x_n \notin B(x,R)]\right) &= \prod_{n=1}^\infty \mathbb{P}[x_n \notin B(x,R)] \\ &= \prod_{n=1}^\infty (1 - \mu(B(x,R))) = \lim_{n\to\infty} (1 - \mu(B(x,R)))^n = 0.\end{aligned}$$

Υπάρχει λοιπόν σχεδόν βεβαίως κάποιο $n \in \mathbb{N}$, τέτοιο ώστε $x_n \in B(x,R)$. Έτσι, αν ορίσουμε

$$n(x) := \inf\{n \in \mathbb{N} : x_n \in B(x,R)\},$$

τότε $n(x) < \infty$ σχεδόν για κάθε $x \in X$, και η απεικόνιση $x \mapsto n(x)$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση του x. Ορίζουμε στη συνέχεια

$$A := \{x \in S : n(x) < \infty \wedge x_{n(x)} \in B(x,r)\}.$$

Παρατηρούμε τότε ότι $A = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$, όπου για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n := \{x \in S : n(x) = n \wedge x_{n(x)} \in B(x,r)\}.$$

Εξ' ορισμού έχουμε τότε $A_n \subseteq B(x_n, r)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ακόμη, αν $x \in A_n$ και $y \in A_m$, $1 \leqslant n < m$, τότε $d(x_n, x) \leqslant r$ και $d(x_n, y) > R$, οπότε από την τριγωνική ανισότητα έχουμε $d(x,y) > R - r$.

Θέτουμε $T_n := \overline{A_n}$. Τότε τα T_n είναι συμπαγή και $d(T_n, T_m) \geqslant R - r$, για $n, m \in \mathbb{N}$ με $n \neq m$. Από τη συμπάγεια του S, αυτό δείχνει ότι μόνο πεπερασμένα το πλήθος από τα T_n είναι μη κενά. Έτσι, αν ορίσουμε $T := \bigcup_{n=1}^\infty T_n$, τότε το T είναι συμπαγές υποσύνολο του S. Τέλος, αφού $T \supseteq A$, για το ζητούμενο αρκεί να δειχθεί ότι

$$\mathbb{E}\left[\int_A \frac{\mu(B(x,R))}{\mu(B(x,r))} w(x)\, d\mu(x)\right] = \int_S w(x)\, d\mu(x).$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή σχεδόν για κάθε $x \in S$ ισχύει ότι $n(x) < \infty$ και η $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ανεξάρτητη,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x \in A] &= \sum_{n=1}^\infty \mathbb{P}[x_n \in B(x,r) \wedge x_1, \dots, x_{n-1} \notin B(x,R)] \\ &= \sum_{n=1}^\infty \mu(B(x,r))(1 - \mu(B(x,R)))^{n-1} = \frac{\mu(B(x,r))}{\mu(B(x,R))}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Fubini τότε, βλέπουμε πως

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\int_A \frac{\mu(B(x,R))}{\mu(B(x,r))} w(x)\,d\mu(x)\right] &= \int_\Omega \int_S \frac{\mu(B(x,R))}{\mu(B(x,r))} w(x)\cdot \mathbb{1}_A \,d\mu(x)\,d\mathbb{P}(\omega) \\ &= \int_S w(x)\frac{\mu(B(x,R))}{\mu(B(x,r))}\left(\int_\Omega \mathbb{1}_A\,d\mathbb{P}(\omega)\right)d\mu(x) \\ &= \int_S w(x)\frac{\mu(B(x,R))}{\mu(B(x,r))}\mathbb{P}[x\in A]\,d\mu(x) = \int_S w(x)\,d\mu(x),\end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 7.2.3. *Έστω (X,d) πεπερασμένος μετρικός χώρος και $w_1, w_2 : X \to [0,\infty)$ δύο μη αρνητικές συναρτήσεις βάρους. Τότε για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $S \subseteq X$ που εμφυτεύεται σε κάποιον υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση*

$$D = \frac{2}{\varepsilon(1-\varepsilon)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}} \tag{7.2.1}$$

ενώ ταυτόχρονα ικανοποιεί την

$$\left(\sum_{x\in S} w_1(x)\right)\cdot\left(\sum_{x\in X} w_2(x)\right)^{\varepsilon} \geqslant \sum_{x\in X} w_1(x)\cdot w_2(x)^{\varepsilon}. \tag{7.2.2}$$

Παρατηρούμε ότι το Θεώρημα 7.2.1 έπεται άμεσα από το Θεώρημα 7.2.3: Πρόκειται για την ειδική περίπτωση $w_1 = w^{1-\varepsilon}$, $w_2 = w$. Ειδικότερα, αν πάρουμε $w_1 = w_2 = 1$, τότε έχουμε το εξής μετρικό ανάλογο του Θεωρήματος του Dvoretzky για πεπερασμένους μετρικούς χώρους, που ήταν το κεντρικό αποτέλεσμα του [58]:

Θεώρημα 7.2.4 (Naor, Tao 2010)**.** *Έστω $D > 2$ και (X,d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Τότε υπάρχει υποσύνολο S του X τέτοιο ώστε $|S| \geqslant n^{\theta(D)}$ και το S εμφυτεύεται σε υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση D.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.3. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι (X,d,μ) είναι ένας μετρικός χώρος πιθανότητας (όχι απαραίτητα πεπερασμένος). Έστω $w \in L_1(\mu)$ μια μη αρνητική Borel μετρήσιμη συνάρτηση. Θα πάρουμε επαγωγικά μια κατάλληλη ακολουθία υποσυνόλων του X εφαρμόζοντας επαναληπτικά το Λήμμα 7.2.2 ως εξής: Υποθέτουμε ότι μας δίνεται μια φθίνουσα ακολουθία θετικών αριθμών $r_0 \geqslant r_1 \geqslant r_2 \geqslant \cdots > 0$, τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} r_n = 0$. Υποθέτουμε επιπλέον ότι $\operatorname{diam}(X) \leqslant 2r_0$. Για $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : X \to [0,\infty)$ με

$$f_n(x) = \left(\prod_{m=n}^{\infty} \frac{\mu(B(x,r_m))}{\mu(B(x, r_m + \frac{2r_{m-1}}{D}))}\right) w(x), \tag{7.2.3}$$

όπου το D παραπάνω είναι αυτό της (7.2.1). Παρατηρούμε ότι $0 \leqslant f_n \leqslant w$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε τώρα επαγωγικά ότι έχουμε ένα συμπαγές σύνολο $S_{n-1} \subseteq X$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.2.2 για τις ακτίνες $r_n+\frac{2r_{n-1}}{D} > r_n > 0$ και συνάρτηση βάρους την f_n, παίρνουμε ένα συμπαγές $S_n \subseteq S_{n-1}$ που ικανοποιεί την

$$\int_{S_n} f_{n+1}\,d\mu = \int_{S_n} \frac{\mu(B(x, r_n + \frac{2r_{n-1}}{D}))}{\mu(B(x, r_n))} \cdot f_n(x)\,d\mu(x) \geqslant \int_{S_{n-1}} f_n\,d\mu.$$

Έπεται έτσι ότι για όλα τα $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\int_{S_n} w\,d\mu \geqslant \int_X f_1\,d\mu.$$

Σημειώνουμε επιπλέον ότι από το Λήμμα 7.2.2, κάθε S_n διαμερίζεται σε μία ακολουθία $\{S_{n,j}\}_{j=1}^{\infty}$, όπου κάθε $S_{n,j}$ είναι συμπαγές και περιέχεται σε μια μπάλα ακτίνας r_n, ενώ μόνο πεπερασμένα το πλήθος εξ' αυτών είναι μη κενά. Αν θεωρήσουμε το συμπαγές σύνολο $S = \bigcap_{n=1}^{\infty} S_n$, τότε από το Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\int_S w\,d\mu \geqslant \int_X f_1\,d\mu. \tag{7.2.4}$$

Θα δείξουμε τώρα ότι το S εμφυτεύεται σε υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση D. Έστω $x, y \in S$, $x \neq y$. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $j \in \mathbb{N}$ να ισχύει είτε ότι $x \notin S_{m,j}$, είτε ότι $y \notin S_{m,j}$, καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$, είτε $x \notin \bigcap_{m=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{m,j}$, είτε $y \notin \bigcap_{m=1}^{n} \bigcup_{j=1}^{\infty} S_{m,j}$, που είναι άτοπο. Μπορούμε λοιπόν να θέσουμε

$$n(x, y) := \max\{n \in \mathbb{N} : \forall m \in \{1, \dots, n\}\ \exists j(m) \in \mathbb{N} \text{ τέτοιο ώστε } x, y \in S_{m,j(m)}\}.$$

Ορίζουμε τώρα για $x, y \in S$,

$$\rho(x, y) := 2r_{n(x,y)}.$$

Από τον ορισμό της, είναι άμεσο ότι η ρ είναι μια υπερμετρική στο S: Έστω $z \in S$, και ας υποθέσουμε ότι $\rho(x, z) = \max\{\rho(x, z), \rho(y, z)\}$. Υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\rho(x, y) > \rho(x, z) \geq \rho(y, z)$, οπότε $n(x, y) < n(x, z) \leq n(y, z)$. Από τους ορισμούς των $n(y, z), n(x, z)$ τότε, έπεται ότι $x, y, z \in S_{n(x,z),j(n(x,z))}$. Τότε όμως $n(x, z) \leq n(x, y)$, που είναι άτοπο.

Επιπλέον, αν $x, y \in S$ και $n = n(x, y)$, τότε εξ' ορισμού $x, y \in S_{n,j}$ για κάποιο $j \in \mathbb{N}$, ενώ $x \in S_{n+1,k}$, $y \in S_{n+1,l}$ με $k \neq l$ (αλλιώς θα ήταν $n+1 \leqslant n(x, y)$, άτοπο). Έπεται έτσι ότι

$$d(x, y) \leqslant \mathrm{diam}(S_{n,j}) \leqslant 2r_n = \rho(x, y),$$

ενώ από την άλλη,

$$d(x, y) \geqslant d(S_{n+1,k}, S_{n+1,l}) \geqslant \frac{2r_n}{D} = \frac{\rho(x, y)}{D}.$$

Δείξαμε έτσι ότι υπάρχει η ζητούμενη εμφύτευση. Για την ολοκλήρωση της απόδειξης θα χρειαστούμε ένα ακόμη πιθανοθεωρητικό επιχείρημα.

Έστω U μια τυχαία μεταβλητή κατανεμημένη ομοιόμορφα στο $[0,1]$. Ορίζουμε μια ακολουθία τυχαίων μεταβλητών $r_0 \geqslant r_1 \geqslant \cdots > 0$ ως εξής: Θέτουμε $r_0 = 1$ και

$$r_n := (1-\varepsilon)^{\frac{U+n-1}{\varepsilon}}.$$

Γράφοντας $a = 2/D$, έχουμε για κάθε $r > 0$,

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[r_n < r \leqslant r_n + \frac{2r_{n-1}}{D}\right] &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[(1-\varepsilon)^{\frac{U+n-1}{\varepsilon}} < r \leqslant (1-\varepsilon)^{\frac{U+n-1}{\varepsilon}} + a(1-\varepsilon)^{\frac{U+n-2}{\varepsilon}}\right] \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}[U \in I_n],\end{aligned}$$

όπου

$$I_n := \left(\frac{\varepsilon \cdot \log r}{\log(1-\varepsilon)} - n + 1, \frac{\varepsilon \cdot \log r}{\log(1-\varepsilon)} - n + 1 - \frac{\varepsilon \cdot \log\left(1 + \frac{a}{(1-\varepsilon)^{1/\varepsilon}}\right)}{\log(1-\varepsilon)}\right].$$

Επειδή $a = \varepsilon(1-\varepsilon)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}$, έπεται ότι $\mathrm{length}(I_n) = \varepsilon < 1$ και άρα τα $\{I_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ξένα μεταξύ τους, το πολύ δυο εξ' αυτών τέμνουν το διάστημα $[0,1]$, και το συνολικό μήκος του $(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n) \cap [0,1]$ είναι το πολύ ίσο με ε. Έπεται έτσι ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}\left[r_n < r \leqslant r_n + \frac{2r_{n-1}}{D}\right] \leqslant \mathrm{length}\left(\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} I_n\right) \cap [0,1]\right) \leqslant \varepsilon. \tag{7.2.5}$$

Ας περιοριστούμε τώρα στην περίπτωση που ο (X,d) είναι ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος, διαμέτρου το πολύ 2, και έστω $w_1, w_2 : X \to [0,\infty)$. Εφοδιάζουμε τον X με το μέτρο πιθανότητας που ορίζεται από την $\mu(\{x\}) = \frac{w_2(x)}{\sum_{x\in X} w_2(x)}$ και θέτουμε $w(x) = w_1(x)/\mu(\{x\})$. Εφαρμόζοντας την (7.2.4), έχουμε από την (7.2.3),

$$\begin{aligned}\sum_{x\in S} w_1(x) &= \sum_{x\in S} w(x)\mu(\{x\}) \geqslant \sum_{x\in X} f_1(x)\cdot\mu(\{x\}) \\ &= \sum_{x\in X}\left(\prod_{m=1}^{\infty} \frac{\mu(B(x,r_m))}{\mu(B(x,r_m+\frac{2r_{m-1}}{D}))}\right) w(x)\cdot\mu(\{x\}) \\ &= \sum_{x\in X} \exp\left(\log\left(\prod_{m=1}^{\infty}\frac{\mu(B(x,r_m))}{\mu(B(x,r_m+\frac{2r_{m-1}}{D}))}\right)\right)\cdot w_1(x) \\ &= \sum_{x\in X} w_1(x)\cdot\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\log\left(\frac{\mu(B(x,r_m))}{\mu(B(x,r_m+\frac{2r_{m-1}}{D}))}\right)\right).\end{aligned}$$

Παίρνοντας στη συνέχεια τους μέσους όρους και εφαρμόζοντας την ανισότητα Jensen έχουμε τελικά

$$\mathbb{E}\left[\sum_{x\in S} w_1(x)\right] \geqslant \sum_{x\in X} w_1(x)\cdot \exp\left(\mathbb{E}\left[\sum_{m=1}^{\infty}\log\left(\frac{\mu(B(x,r_m))}{\mu(B(x,r_m+\frac{2r_{m-1}}{D}))}\right)\right]\right). \tag{7.2.6}$$

Έστω τώρα, για κάθε $x\in X$, $0=t_1(x)<t_2(x)<\cdots<t_{k(x)}(x)$ τέτοιοι ώστε

$$\mu(\{x\})=\mu(B(x,t_1(x)))<\mu(B(x,t_2(x)))<\cdots<\mu(B(x,t_{k(x)}(x)))=\mu(X),$$

και $B(x,t)=B(x,t_j(x))$, αν $t_j\leqslant t<t_{j+1}$ (κατά σύμβαση θέτουμε $t_{k(x)+1}(x)=\infty$). Παρατηρούμε τότε ότι για κάθε τυχαία μεταβλητή $r\geqslant 0$ ισχύει η ταυτότητα

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\log(\mu(B(x,r)))] &= \sum_{j=1}^{k(x)}\mathbb{P}[t_j(x)\leqslant r<t_{j+1}(x)]\cdot\log(\mu(B(x,t_j(x))))\\ &= \sum_{j=1}^{k(x)}(\mathbb{P}[r\geqslant t_j(x)]-\mathbb{P}[r\geqslant t_{j+1}(x)])\cdot\log(\mu(B(x,t_j(x))))\\ &= \sum_{j=2}^{k(x)}\mathbb{P}[r\geqslant t_j(x)]\cdot\log\left(\frac{\mu(B(x,t_j(x)))}{\mu(B(x,t_{j-1}(x)))}\right).\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας την παραπάνω για $r=r_n$ και $r=r_n+\frac{2r_{n-1}}{D}$ παίρνουμε, μετά από πράξεις,

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[\sum_{n=1}^{\infty}\log\left(\frac{\mu(B(x,r_n))}{\mu(B(x,r_n+\frac{2r_{n-1}}{D}))}\right)\right]=\\ &\qquad=-\sum_{j=2}^{k(x)}\left(\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{P}\left[r_n<t_j(x)\leqslant r_n+\frac{2r_{n-1}}{D}\right]\right)\log\left(\frac{\mu(B(x,t_j(x)))}{\mu(B(x,t_{j-1}(x)))}\right).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την τελευταία σχέση και την (7.2.5) παίρνουμε, από την (7.2.6),

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\sum_{x\in S} w_1(x)\right] &\geqslant \sum_{x\in X} w_1(x)\cdot\exp\left(-\varepsilon\sum_{j=2}^{k(x)}\log\left(\frac{\mu(B(x,t_j(x)))}{\mu(B(x,t_{j-1}(x)))}\right)\right)\\ &= \sum_{x\in X} w_1(x)\left(\frac{\mu(\{x\})}{\mu(X)}\right)^{\varepsilon} = \frac{\sum_{x\in X} w_1(x)w_2(x)^{\varepsilon}}{\left(\sum_{y\in X} w_2(y)\right)^{\varepsilon}},\end{aligned}$$

δείχνοντας έτσι ότι η ζητούμενη σχέση (7.2.2) ισχύει με θετική πιθανότητα για το τυχαίο σύνολο $S\subseteq X$. $\square$

7.3 Ο υπερμετρικός σκελετός ενός μετρικού χώρου

Θεώρημα 7.3.1 (Mendel, Naor 2011). *Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $C_\varepsilon \in (0,\infty)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Έστω (X,d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον X. Τότε υπάρχει συμπαγές σύνολο $S \subseteq X$ με τις ιδιότητες:*

(1) το S εμφυτεύεται με παραμόρφωση $O(1/\varepsilon)$ σε υπερμετρικό χώρο.

(2) Υπάρχει ένα Borel μέτρο πιθανότητας ν με $\mathrm{supp}(\nu) = S$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$\nu(B_d(x,r)) \leqslant \left(\mu(B_d(x,C_\varepsilon r))\right)^{1-\varepsilon} \tag{7.3.1}$$

για κάθε $x \in X$ και $r \in [0,\infty)$.

Στην εργασία τους [54], όπου παρουσιάζεται για πρώτη φορά το παραπάνω Θεώρημα, οι Mendel και Naor ονομάζουν τον μετρικό χώρο πιθανότητας (S,d,ν) *υπερμετρικό σκελετό* του (X,d,μ). Ο χαρακτηρισμός αυτός δικαιολογείται τόσο από το γεγονός πως -όπως θα φανεί παρακάτω- το υποσύνολο S είναι αναγκαστικά «μεγάλο» και «απλωμένο», αλλά και γιατί μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την εξαγωγή πληροφοριών για τη δομή ολόκληρου του αρχικού χώρου X.

Το Θεώρημα 7.3.1 είναι στην πραγματικότητα ισοδύναμο με το ακόλουθο αποτέλεσμα.

Θεώρημα 7.3.2 (Mendel, Naor 2010). *Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ υπάρχει $c_\varepsilon \in (0,\infty)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Κάθε μετρικός χώρος μέτρου (X,d,μ) έχει κλειστό υποσύνολο $S \subseteq X$ τέτοιο ώστε ο (S,d) εμφυτεύεται με παραμόρφωση $9/\varepsilon$ σε υπερμετρικό χώρο και επιπλέον, για κάθε $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ και $\{r_i\}_{i\in I} \subseteq [0,\infty)$ τέτοια ώστε οι μπάλες $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ να καλύπτουν το S, έχουμε*

$$\sum_{i\in I} \mu(B(x_i,c_\varepsilon r_i))^{1-\varepsilon} \geqslant \mu(X)^{1-\varepsilon}. \tag{7.3.2}$$

Παρατήρηση 7.3.3. Με μια πρώτη ματιά, το Θεώρημα 7.3.2 -στην περίπτωση που ο (X,d,μ) είναι μετρικός χώρος πιθανότητας, είναι μια απλή συνέπεια του Θεωρήματος 7.3.1: Αν $S \subseteq X$ και ν είναι αντίστοιχα το υποσύνολο και το μέτρο πιθανότητας του Θεωρήματος 7.3.1, είναι προφανές ότι αν $\bigcup_{i\in I} B_d(x_i,r_i) \supseteq S$, τότε

$$\sum_{i\in I} \mu(B(x_i,C_\varepsilon r_i))^{1-\varepsilon} \geqslant \sum_{i\in I} \nu(B(x_i,r_i)) \geqslant \nu(S) = 1.$$

Το Θεώρημα 7.3.2 είναι ταυτόχρονα ο βασικός λόγος για την ισχύ του Θεωρήματος 7.3.1. Στην παράγραφο αυτή θα ακολουθήσουμε τα βήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 7.3.2 που μπορεί να βρεθεί στο [53], βλέποντας πώς τελικά παίρνει κανείς τα δύο παραπάνω αποτελέσματα.

Το πρώτο βήμα στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.2 είναι, χάρη στη συμπάγεια του (X,d,μ), να ανάγουμε το πρόβλημα στην περίπτωση που ο μετρικός χώρος X είναι πεπερασμένος. Στο εδάφιο 7.3.2 ορίζουμε τις βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν, με βασική αυτή της *απεικόνισης κατακερματισμού*. Πρόκειται για απεικονίσεις ορισμένες σε πεπερασμένα γραφοθεωρητικά δένδρα που αντιστοιχίζουν σε κάθε κόμβο ενός δένδρου ένα κατάλληλο υποσύνολο του X, αναδεικνύοντας έτσι μια δενδροειδή δομή στο σύνολο των υποσυνόλων του μετρικού χώρου. Το πρώτο ουσιαστικό βήμα στην απόδειξη είναι η κατασκευή μιας αρχικής τέτοιας απεικόνισης (και άρα ενός αντίστοιχου δένδρου) που εξασφαλίζει ότι τα προκύπτοντα υποσύνολα του X ικανοποιούν ορισμένες χρήσιμες γεωμετρικές ιδιότητες. Η κατασκευή αυτή περιγράφεται στο Λήμμα 7.3.13. Έπειτα βλέπουμε πώς το αρχικό δένδρο μπορεί να «αραιωθεί», δίνοντας ένα υποδένδρο για το σύνολο των φύλλων του οποίου ισχύουν τα συμπεράσματα του Θεωρήματος 7.3.2. Σε αυτό το σημείο η κατασκευή μας αρκεί για την απόδειξη του Θεωρήματος με ένα φράγμα για την παραμόρφωση της εμφύτευσης της τάξης του $e^{O(1/\varepsilon^2)}$ (βλ. Παρατήρηση 7.3.28). Για τη βελτίωση της παραμόρφωσης χρειαζόμαστε μια περαιτέρω αραίωση του δένδρου (Λήμμα 7.3.24), όπου με εφαρμογή του Θεωρήματος 7.2.1 εξασφαλίζουμε τις προϋποθέσεις για ένα φράγμα της τάξης του $O(1/\varepsilon)$. Η απόδειξη των δύο Θεωρημάτων ολοκληρώνεται τελικά στο εδάφιο 7.3.6.

7.3.1 Αναγωγή του προβλήματος στην πεπερασμένη περίπτωση

Αρχικά θα παρουσιάσουμε ένα επιχείρημα συμπάγειας που δείχνει ότι αρκεί να αποδείξουμε το Θεώρημα 7.3.2 στην περίπτωση που ο (X,d) είναι ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος. Θυμίζουμε ότι για δύο μη κενά $A,B\subseteq X$ η απόσταση Hausdorff των A και B δίνεται από την

$$d_H(A,B)=\max\left\{\sup_{x\in A}d(x,B),\sup_{y\in B}d(y,A)\right\}=\inf\{r>0:A\subseteq B_r, B\subseteq A_r\}.$$

Λήμμα 7.3.4. *Έστω $D,c\geqslant 1$ και $\theta\in(0,1]$. Υποθέτουμε ότι κάθε πεπερασμένος μετρικός χώρος (X,d,μ) έχει κλειστό υποσύνολο $S\subseteq X$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε κάποιον υπερμετρικό χώρο, έτσι ώστε κάθε οικογένεια μπαλών $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ που καλύπτει το S να ικανοποιεί την*

$$\sum_{i\in I}\mu(B(x_i,cr_i))^\theta\geqslant\mu(X)^\theta. \tag{7.3.3}$$

Τότε κάθε μετρικός χώρος μέτρου (X,d,μ) έχει κλειστό υποσύνολο $S\subseteq X$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε κάποιον υπερμετρικό χώρο έτσι ώστε κάθε οικογένεια μπαλών $\{B(x_i,r_i)\}_{i\in I}$ που καλύπτει το S να ικανοποιεί την (7.3.3).

Απόδειξη. Έστω (X,d,μ) ένας μετρικός χώρος μέτρου και X_n ένα $\frac{1}{n}$-δίκτυο στον X. Από τη συμπάγεια του X έπεται ότι το X_n είναι πεπερασμένο. Μπορούμε λοιπόν να γράφουμε $X_n=\{x_1^n,x_2^n,\dots,x_{k_n}^n\}$. Για $x\in X$ ορίζουμε

$$j_n(x):=\min\left\{j\in\{1,\dots,k_n\}:d(x,x_j^n)=d(x,X_n)\right\}.$$

Έστω $\{V_1^n,\dots,V_{k_n}^n\}\subseteq 2^X$ με $V_j^n:=\{x\in X: j_n(x)=j\}$. Τότε η $\{V_j^n\}_{j=1}^{k_n}$ είναι μια Borel διαμέριση του X και μπορούμε να ορίσουμε ένα μέτρο μ_n στον X_n μέσω της

$$\mu_n(x_j^n)=\mu(V_j^n).$$

Παρατηρούμε τότε ότι εξ' ορισμού ισχύει $\mu_n(X_n)=\mu(X)$.

Εφαρμόζουμε τώρα την υπόθεση του Λήμματος στον πεπερασμένο μετρικό χώρο μέτρου (X_n,d,μ_n) και παίρνουμε $S_n\subseteq X_n$, υπερμετρικό χώρο (U_n,ρ_n) και μια $f_n:S_n\to U_n$ τέτοια ώστε, για κάθε $x,y\in S_n$,

$$d(x,y)\leqslant \rho_n(f_n(x),f_n(y))\leqslant D\cdot d(x,y).$$

Επιπλέον, για $\{z_j\}_{j\in J}\subseteq X_n$ και $\{r_j\}_{j\in J}\subseteq[0,\infty)$ τέτοιες ώστε $\bigcup_{j\in J}B(z_j,r_j)\supseteq S_n$ ισχύει ότι

$$\sum_{j\in J}\mu_n(X_n\cap B(z_j,cr_j))^\theta\geqslant \mu_n(X_n)^\theta=\mu(X)^\theta. \tag{7.3.4}$$

Έστω $\mathscr{U}$ ένα μη τετριμμένο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$. Επειδή ο X είναι συμπαγής, η μετρική Hausdorff d_H επάγει μια συμπαγή τοπολογία στην κλάση των κλειστών υποσυνόλων του X. Υπάρχει λοιπόν κλειστό $S\subseteq X$ τέτοιο ώστε $\lim_{n\to\mathscr{U}}d_H(S_n,S)=0$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $x\in S$ υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^\infty\in\prod_{n=1}^\infty S_n$ τέτοια ώστε $\lim_{n\to\mathscr{U}}d(x_n,x)=0$. Πράγματι, αν για κάποιο $n_0\in\mathbb{N}$ ισχύει $d_H(S_{n_0},S)<\varepsilon$, με άλλα λόγια $S\subset(S_{n_0})_\varepsilon$ και $S_{n_0}\subset(S)_\varepsilon$, τότε για το δεδομένο $x\in S$ θα υπάρχει $x_{n_0}\in S_{n_0}$ τέτοιο ώστε $d(x_{n_0},x)<\varepsilon$. Δείξαμε έτσι ότι

$$\{n\in\mathbb{N}: d_H(S_n,S)<\varepsilon\}\subseteq\{n\in\mathbb{N}: d(x_n,x)<\varepsilon\}.$$

Όμως το ότι $\lim_{n\to\mathscr{U}}d_H(S_n,S)=0$ σημαίνει ακριβώς πως $\{n\in\mathbb{N}: d_H(S_n,S)<\varepsilon\}\in\mathscr{U}$, για κάθε $\varepsilon>0$. Έπεται ότι $\{n\in\mathbb{N}: d(x_n,x)<\varepsilon\}\in\mathscr{U}$, για κάθε $\varepsilon>0$, δηλαδή $\lim_{n\to\mathscr{U}}d(x_n,x)=0$.

Ορίζουμε τώρα $\rho: S\times S\to[0,\infty)$ ως εξής: Από την παραπάνω παρατήρηση, για $x,y\in S$ υπάρχουν $\{x_n\}_{n=1}^\infty,\{y_n\}_{n=1}^\infty\in\prod_{n=1}^\infty S_n$ τέτοιες ώστε

$$\lim_{n\to\mathscr{U}}d(x_n,x)=\lim_{n\to\mathscr{U}}d(y_n,y)=0.$$

Θέτουμε

$$\rho(x,y)=\lim_{n\to\mathscr{U}}\rho_n(f_n(x_n),f_n(y_n)).$$

Θα πρέπει να ελέγξουμε ότι ο παραπάνω ορισμός είναι καλός, δηλαδή πως η τιμή της $\rho(x,y)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή των ακολουθιών $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ και $\{y_n\}_{n=1}^\infty$. Πράγματι, αν $\{x_n'\}_{n=1}^\infty,\{y_n'\}_{n=1}^\infty\in\prod_{n=1}^\infty S_n$ τέτοιες ώστε $\lim_{n\to\mathscr{U}}d(x_n',x)=\lim_{n\to\mathscr{U}}d(y_n',y)=0$, τότε από την τριγωνική ανισότητα, τη γραμμικότητα του γενικευμένου ορίου και το γεγονός ότι η f_n είναι D-εμφύτευση για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\mathscr{U}} \rho_n(f_n(x_n), f_n(y_n)) &\leqslant \lim_{n\to\mathscr{U}} \rho_n(f_n(x_n), f_n(x'_n)) + \lim_{n\to\mathscr{U}} \rho_n(f_n(x'_n), f_n(y'_n)) + \\
&\qquad + \lim_{n\to\mathscr{U}} \rho_n(f_n(y_n), f_n(y'_n)) \\
&\leqslant D \lim_{n\to\mathscr{U}} d(x_n, x'_n) + \lim_{n\to\mathscr{U}} \rho_n(f_n(x'_n), f_n(y'_n)) + D \lim_{n\to\mathscr{U}} d(y_n, y'_n) \\
&= \lim_{n\to\mathscr{U}} \rho_n(f_n(x'_n), f_n(y'_n)),
\end{aligned}$$

οπότε λόγω συμμετρίας $\lim_{n\to\mathscr{U}} \rho_n(f_n(x_n), f_n(y_n)) = \lim_{n\to\mathscr{U}} \rho_n(f_n(x'_n), f_n(y'_n))$. Είναι τέλος άμεσο (επειδή η ρ είναι εξ' ορισμού το όριο της $\{\rho_n\}_{n=1}^{\infty}$) ότι, για κάθε $x, y \in S$,

$$d(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant D \cdot d(x,y),$$

καθώς και ότι η ρ είναι μια υπερμετρική στο S, αφού το ίδιο ισχύει για τη ρ_n για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Έστω τώρα $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq X$ και $\{r_i\}_{i=1}^{\infty} \subseteq [0,\infty)$ τέτοιες ώστε $\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i, r_i) \supseteq S$. Σταθεροποιούμε $\eta > 0$. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\varepsilon_i \in (0,1)$ τέτοιο ώστε

$$\mu\left(B(x_i, cr_i + c\varepsilon_i)\right) \leqslant \mu\left(B(x_i, cr_i)\right) + \left(\frac{\eta}{2^i}\right)^{1/\theta}. \tag{7.3.5}$$

Επειδή το S είναι συμπαγές (κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς X), υπάρχει πεπερασμένο $I_\eta \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\bigcup_{i\in I_\eta} B\left(x_i, r_i + \frac{\varepsilon_i}{2}\right) \supseteq S.$$

Θέτουμε $\varepsilon = \min_{i\in I_\eta} \varepsilon_i$. Από τον ορισμό του S, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $n > 8/\varepsilon$ και $d_H(S_n, S) < \varepsilon/8$. Θυμίζουμε πως το X_n είναι ένα πεπερασμένο $\frac{1}{n}$-δίκτυο στον X, οπότε για κάθε $i \in I_\eta$ θα μπορούμε να βρούμε $z_i^n \in X_n$ τέτοιο ώστε

$$d(x_i, z_i^n) = d(x_i, X_n) \leqslant \frac{1}{n} < \frac{\varepsilon}{8}.$$

Επειδή ακόμη είναι $d_H(S_n, S) < \varepsilon/8$ και $\bigcup_{i\in I_\eta} B(x_i, r_i + \frac{\varepsilon_i}{2}) \supseteq S$ για κάθε $i \in I_\eta$, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα μπορεί άμεσα κανείς να συμπεράνει πως

$$\bigcup_{i\in I_\eta} B\left(z_i^n, r_i + \frac{3\varepsilon_i}{4}\right) \supseteq S_n.$$

Από την (7.3.4) τότε, παίρνουμε το φράγμα

$$\sum_{i\in I_\eta} \mu_n\left(X_n \cap B\left(z_i^n, cr_i + c\frac{3\varepsilon_i}{4}\right)\right)^{\theta} \geqslant \mu(X)^{\theta}. \tag{7.3.6}$$

Από τον ορισμό του μ_n όμως, χρησιμοποιώντας κατά σειρά δύο φορές την τριγωνική ανισότητα, το γεγονός ότι $2/n < \varepsilon/4$ και την (7.3.5), έχουμε:

$$\begin{aligned}\mu_n\left(X_n \cap B\left(z_i^n, cr_i + c\frac{3\varepsilon_i}{4}\right)\right) &\leqslant \mu\left(\bigcup_{j\in\{1,\dots,k_n\}}\left\{V_j^n : x_j^n \in B\left(z_i^n, cr_i + c\frac{3\varepsilon_i}{4}\right)\right\}\right)\\ &\leqslant \mu\left(B\left(z_i^n, cr_i + \frac{3c\varepsilon_i}{4} + \frac{1}{n}\right)\right)\\ &\leqslant \mu\left(B\left(x_i, cr_i + \frac{3c\varepsilon_i}{4} + \frac{2}{n}\right)\right)\\ &\leqslant \mu\left(B(x_i, cr_i + c\varepsilon_i\right)\\ &\leqslant \mu\left(B(x_i, cr_i)\right) + \left(\frac{\eta}{2^i}\right)^{1/\theta}. \end{aligned} \tag{7.3.7}$$

Από τις (7.3.6) και (7.3.7) έπεται άμεσα ότι

$$\begin{aligned}\mu(X)^\theta &\leqslant \sum_{i\in I_\eta}\left(\mu\left(B(x_i, cr_i)\right) + \left(\frac{\eta}{2^i}\right)^{1/\theta}\right)^\theta \leqslant \sum_{i\in I_\eta}\left(\mu\left(B(x_i, cr_i)\right)^\theta + \frac{\eta}{2^i}\right)\\ &\leqslant \eta + \sum_{i=1}^{\infty}\mu\left(B(x_i, cr_i)\right)^\theta\end{aligned}$$

και αφού η παραπάνω σχέση ισχύει για κάθε $\eta > 0$, η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί. □

Παρατήρηση 7.3.5. Λόγω του Λήμματος 7.3.4 μπορούμε στο εξής να δουλεύουμε με την επιπλέον υπόθεση ότι ο (X, d, μ) είναι ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος μέτρου. Περιοριζόμενοι ακόμη στον φορέα του μ, υποθέτουμε στο εξής ότι $\mu(\{x\}) > 0$ για κάθε $x \in X$, ενώ τέλος μπορούμε να υποθέτουμε, με κατάλληλη αλλαγή της κλίμακας, ότι $\mathrm{diam}(X) = 1$.

7.3.2 Δένδρα και απεικονίσεις κατακερματισμού

Οι λεπτομέρειες της απόδειξης στηρίζονται σε μια ποικιλία κατασκευών, οπού χρησιμοποιούνται κατά βάση τα συνδυαστικά δένδρα. Στο εδάφιο αυτό θα παρουσιάσουμε τη σημειολογία καθώς και τους απαραίτητους ορισμούς για τα αντικείμενα που θα χρησιμοποιηθούν κατά κόρον στη συνέχεια.

Με τον όρο *πεπερασμένο δένδρο με ρίζα* θα εννοούμε ένα πεπερασμένο γραφοθεωρητικό δένδρο T με ένα κόμβο $r(T)$ που θα λέγεται *ρίζα* του T. Χάριν απλότητας θα ταυτίζουμε (κάπως καταχρηστικά) ένα δένδρο T με το σύνολο των κόμβων του, θα γράφουμε δηλαδή $v \in T$ εννοώντας ότι ο v είναι ένας κόμβος του T. Θα λέμε ότι ο $u \in T$ είναι *πρόγονος* του $v \in T \setminus \{u\}$ αν ο u βρίσκεται στο μονοπάτι που ενώνει τον v με τον $r(T)$. Σε αυτή ακριβώς την περίπτωση λέμε με άλλα λόγια ότι ο v είναι *απόγονος* του u. Θα λέμε ότι ο v είναι *ασθενής απόγονος* (αντ. *ασθενής πρόγονος*) του $u \in T$, αν είναι είτε απόγονος (αντ. πρόγονος) του u, είτε $v = u$. Αν ο u είναι είτε ασθενής απόγονος είτε ασθενής πρόγονος του v, τότε λέμε ότι οι u, v είναι *συγκρίσιμοι*, αλλιώς ότι είναι *μη συγκρίσιμοι*. Συμβολίζουμε με $\mathcal{L}(T) \subseteq T$ το *σύνολο των φύλλων του* T, το σύνολο δηλαδή των κόμβων του T που δεν έχουν απογόνους.

Ορισμός 7.3.6 (Cut set)**.** Έστω T ένα δένδρο με ρίζα. Ένα υποσύνολο $S \subseteq T$ θα λέγεται *cut set* του T αν κάθε μονοπάτι που συνδέει τη ρίζα με ένα φύλλο στο T τέμνει το S. Ισοδύναμα, το S είναι cut set του T αν κάθε $u \in T$ είναι συγκρίσιμος με κάποιον κόμβο του S.

Συμβολίζουμε για κάθε $v \in T \setminus \{r(T)\}$ με $\mathbf{p}(v) = \mathbf{p}_T(v)$ τον *γονέα* του v στο T, δηλαδή τον κόμβο που βρίσκεται ακριβώς πριν τον v στο μονοπάτι που ενώνει τον v με τη ρίζα $r(T)$. Λέμε ότι ο $v \in T \setminus \{r(T)\}$ είναι *παιδί* του $u \in T$ αν $\mathbf{p}(v) = u$, και συμβολίζουμε με $\mathbf{p}^{-1}(u) = \{v \in T : \mathbf{p}(v) = u\}$ το σύνολο των παιδιών του u. Αν για δύο κόμβους $u, v \in T \setminus \{r(T)\}$, $u \neq v$, ισχύει ότι $\mathbf{p}(u) = \mathbf{p}(v)$, λέμε τότε ότι οι u, v είναι *αδέλφια* στο T.

Το *βάθος* ενός $u \in T$ στο T συμβολίζεται με $\mathrm{depth}_T(u)$, και είναι ο αριθμός των ακμών στο μονοπάτι που ενώνει τον u με τη ρίζα $r(T)$. Έχουμε έτσι ότι $\mathrm{depth}_T(r(T)) = 0$. Ο τελευταίος κοινός πρόγονος των $u, v \in T$ συμβολίζεται με $\mathrm{lca}(u, v) = \mathrm{lca}_T(u, v)$, και είναι ο κόμβος μεγαλύτερου βάθους που είναι ταυτόχρονα πρόγονος τόσο του u όσο και του v.

Ορισμός 7.3.7 (Υποδένδρο)**.** Έστω T ένα πεπερασμένο δένδρο με ρίζα. Ένα *υποδένδρο* T' του T είναι ένα συνεκτικό υπογράφημα του T με ρίζα, το σύνολο των φύλλων του οποίου είναι ένα υποσύνολο των φύλλων του T, δηλαδή $\mathcal{L}(T') \subseteq \mathcal{L}(T)$.

Για κάθε $u \in T$, συμβολίζουμε με $T_u \subseteq T$ το υποδένδρο με ρίζα τον u, με άλλα λόγια το δένδρο που αποτελείται από όλους τους ασθενείς απογόνους του u και τις ακμές που του κληροδοτούνται από το T.

Η διάδραση των δένδρων με τους μετρικούς χώρους επιτυγχάνεται μέσω της έννοιας της *απεικόνισης κατακερματισμού*, που ορίζεται αμέσως παρακάτω.

Ορισμός 7.3.8 (Απεικόνιση Κατακερματισμού)**.** Έστω (X, d) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος. Μια *απεικόνιση κατακερματισμού* του X είναι μια συνάρτηση $\mathcal{F} : T \to 2^X$, όπου T ένα πεπερασμένο δένδρο με ρίζα, με τις ιδιότητες:

(1) $\mathcal{F}(r(T)) = X$.

(2) Αν $v \in \mathcal{L}(T)$, τότε το $\mathcal{F}(v)$ είναι μονοσύνολο, δηλαδή $\mathcal{F}(v) = \{x\}$, για κάποιο $x \in X$.

(3) Αν $v \in T \setminus \{r(T)\}$, τότε $\mathcal{F}(v) \subset \mathcal{F}(\mathbf{p}(v))$.

(4) Αν οι $u, v \in T$ είναι μη συγκρίσιμοι, τότε $\mathcal{F}(u) \cap \mathcal{F}(v) = \emptyset$.

Δεδομένης μιας απεικόνισης κατακερματισμού $\mathcal{F} : T \to 2^X$, θα συμβολίζουμε παρακάτω $\mathcal{F}_u = \mathcal{F}(u)$.

Ορισμός 7.3.9 (Σύνορο μιας απεικόνισης κατακερματισμού)**.** Το *σύνορο* μιας απεικόνισης κατακερματισμού $\mathcal{F} : T \to 2^X$ είναι μια νέα απεικόνιση $\partial\mathcal{F} : T \to 2^X$ που ορίζεται ως εξής: Για $u \in T$,

$$\partial\mathcal{F}(u) = \partial\mathcal{F}_u = \bigcup_{v \in \mathcal{L}(T_u)} \mathcal{F}_v.$$

Παρατηρούμε ότι $\partial\mathcal{F}_u \subseteq \mathcal{F}_u$.

Ορισμός 7.3.10 (Απεικόνιση Διαμέρισης)**.** Μια *απεικόνιση διαμέρισης* είναι μια απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{F} : T \to 2^X$ τέτοια ώστε $\partial\mathcal{F}_{r(T)} = X$. Παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\partial\mathcal{F} = \mathcal{F}$.

7.3.3 Μια πρώτη απεικόνιση διαμέρισης

Έστω (X, d, μ) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος πιθανότητας. Παρατηρούμε ότι κάθε απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{F} : T \to 2^X$ ορίζει μια *«συνάρτηση βάρους»* $w : T \to (0, \infty)$ των κόμβων του T μέσω της

$$w(u) = \mu(\mathcal{F}_u). \tag{7.3.8}$$

Για τους σκοπούς μας θα χρειαστούμε και μια προσαρμοσμένη εκδοχή της w, που δίνεται παρακάτω.

Ορισμός 7.3.11 (Προσαρμοσμένη συνάρτηση βάρους)**.** Έστω $h, k \in \mathbb{Z} \cap [2, \infty)$ και T ένα πεπερασμένο δένδρο με ρίζα, όλα τα φύλλα του οποίου βρίσκονται στο ίδιο βάθος, το οποίο είναι πολλαπλάσιο του h. Δεδομένης μιας συνάρτησης βάρους $w : T \to (0, \infty)$, ορίζουμε τη συνάρτηση $w_h^k : T \to (0, \infty)$ ως εξής:

$$\text{Αν } u \in \mathcal{L}(T), \text{ τότε } w_h^k(u) = w(u)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Ο ορισμός της w_h^k ολοκληρώνεται με «αντίστροφη επαγωγή» στο $\mathrm{depth}_T(u)$ ως εξής:

$$w_h^k(u) = \begin{cases} w(u)^{\frac{k-1}{k}}, & \text{αν } h \mid \mathrm{depth}_T(u), \\ \sum_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} w_h^k(v), & \text{αν } h \nmid \mathrm{depth}_T(u). \end{cases}$$

Ισοδύναμα, αν $u \in T$ και $(j-1)h < \mathrm{depth}_T(u) \leqslant jh$ για κάποιον ακέραιο j, τότε

$$w_h^k(u) = \sum_{\substack{v \in T_u \\ \mathrm{depth}_T(v) = jh}} w(v)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Σκοπός μας είναι αρχικά να κατασκευάσουμε ένα δένδρο και μια απεικόνιση κατακερματισμού των υποσυνόλων του X που να ικανοποιούν κάποιες «καλές» ιδιότητες. Το είδος του δένδρου αυτού περιγράφεται εν μέρει από τον επόμενο ορισμό.

Ορισμός 7.3.12 (Υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά)**.** Έστω $h,k \in \mathbb{Z} \cap [2,\infty)$. Ένα *υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά* είναι μια τριπλέτα $(T, w, \mathbf{c})$ που απαρτίζεται από ένα πεπερασμένο δένδρο με ρίζα T, μια συνάρτηση βάρους $w : T \to (0,\infty)$, και για κάθε $u \in T \setminus \mathcal{L}(T)$ ένα επιλεγμένο παιδί $\mathbf{c}(u) \in \mathbf{p}^{-1}(u)$ τέτοια ώστε:

(α) Τα φύλλα του T βρίσκονται όλα στο ίδιο βάθος, που είναι πολλαπλάσιο του h.

(β) $w(u) \leqslant \sum_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} w(v)$, για κάθε $u \in T \setminus \mathcal{L}(T)$.

(γ) $w_h^k(\mathbf{c}(u)) = \max_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} w_h^k(v)$, για κάθε $u \in T \setminus \mathcal{L}(T)$.

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στην πρώτη μας κατασκευή.

Λήμμα 7.3.13. *Έστω (X, d, μ) ένας πεπερασμένος χώρος μέτρου διαμέτρου 1, και $\tau \in (0, 1/3)$. Για κάθε τριάδα ακεραίων $m, h, k \geqslant 2$ υπάρχει ένα υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά $(T, w, \mathbf{c})$ και μια απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{F} : T \to 2^X$ (η συνάρτηση βάρους w είναι αυτή που ορίζεται από την (7.3.8)) με τις εξής ιδιότητες:*

(1) $\mathrm{depth}_T(u) = mh$, *για κάθε* $u \in \mathcal{L}(T)$.

(2) *Η $\mathcal{F}$ είναι μια απεικόνιση διαμέρισης, δηλαδή $\partial \mathcal{F}_{r(T)} = X$.*

(3) $\mathrm{diam}(\mathcal{F}_u) \leqslant \tau^{\mathrm{depth}_T(u)}$, *για κάθε* $u \in T$.

(4) *Αν για δύο $u, v \in T \setminus \mathcal{L}(T)$ ισχύει ότι $\mathrm{depth}_T(u) = \mathrm{depth}_T(v)$ και $u \neq v$, τότε*

$$d\left(\mathcal{F}_{\mathbf{c}(u)}, \mathcal{F}_{\mathbf{c}(v)}\right) > \frac{1-3\tau}{2} \cdot \tau^{\mathrm{depth}_T(u)}.$$

Απόδειξη. Η κατασκευή του ζητούμενου δένδρου και της αντίστοιχης απεικόνισης θα γίνει με μια μέθοδο «από κάτω προς τα πάνω», ορίζοντας τα «επίπεδα» $V_0, V_1, \ldots, V_{mh}$, όπου με V_i συμβολίζουμε το σύνολο των κόμβων του T που βρίσκονται σε βάθος i. Θα κατασκευάσουμε τα επίπεδα V_i και τις αντίστοιχες απεικονίσεις $\mathcal{F} : V_i \to 2^X$ και $w_h^k : V_i \to (0,\infty)$ με αντίστροφη επαγωγή στο i, περιγράφοντας ταυτόχρονα για κάθε $v \in V_{i+1}$ τον γονέα του $u \in V_i$ καθώς και το επιλεγμένο παιδί $\mathbf{c}(u)$. Στο τέλος της κατασκευής, το V_0 θα αποτελείται από ένα μόνο κόμβο, τη ρίζα $r(T)$.

Θέτουμε $|X| = l_{mh}$ και γράφουμε $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_{l_{mh}}\}$. Το αρχικό («χαμηλότερο») επίπεδο V_{mh} αποτελείται από τα φύλλα του δένδρου T και ορίζεται ως εξής:

$$V_{mh} = \{v_j^{mh}\}_{j=1}^{l_{mh}}.$$

Για κάθε $j \in \{1, \ldots, l_{mh}\}$ θέτουμε ακόμη

$$\mathcal{F}_{v_j^{mh}} = \{x_j\} \quad \text{και} \quad w_h^k(v_j^{mh}) = \mu(\{x_j\})^{\frac{k-1}{k}}.$$

Υποθέτουμε επαγωγικά ότι για $i \in \{1, \dots, mh-1\}$ έχουμε ορίσει το

$$V_{i+1} = \left\{ v_1^{i+1}, v_2^{i+1}, \dots, v_{l_{i+1}}^{i+1} \right\}$$

και τις απεικονίσεις $\mathcal{F} : V_{i+1} \to 2^X$ και $w_h^k : V_{i+1} \to (0, \infty)$.

Επιλέγουμε $j_1 \in \{1, \dots, l_{i+1}\}$ τέτοιο ώστε

$$w_h^k(v_{j_1}^{i+1}) = \max_{j \in \{1, \dots, l_{i+1}\}} w_h^k(v_j^{i+1}).$$

Ορίζουμε

$$A_1^i := \left\{ s \in \{1, \dots, l_{i+1}\} : d\left(\mathcal{F}_{v_{j_1}^{i+1}}, \mathcal{F}_{v_s^{i+1}} \right) \leqslant \frac{1-3\tau}{2} \tau^i \right\}$$

Εισάγουμε ένα νέο κόμβο $v_1^i \in V_i$. Ορίζουμε

$$\mathcal{F}_{v_1^i} = \bigcup_{s \in A_1^i} \mathcal{F}_{v_s^{i+1}}$$

και $\mathbf{p}^{-1}(v_1^i) = \{v_s^{i+1}\}_{s \in A_1^i} \subseteq V_{i+1}$. Θέτουμε ακόμη

$$w_h^k(v_1^i) = \begin{cases} w(v_1^i)^{\frac{k-1}{k}}, & \text{αν } h \mid i \\ \sum_{s \in A_1^i} w_h^k(v_s^{i+1}), & \text{αν } h \nmid i, \end{cases}$$

και τέλος $\mathbf{c}(v_1^i) := v_{j_1}^{i+1}$.

Συνεχίζοντας επαγωγικά στο i επίπεδο, υποθέτουμε ότι έχουμε ορίσει με τον παραπάνω τρόπο τα $v_1^i, v_2^i, \dots, v_z^i \in V_i$ και αντίστοιχα τα μη κενά, ξένα σύνολα $A_1^i, \dots, A_z^i \subseteq \{1, \dots, l_{i+1}\}$. Αν $\bigcup_{t=1}^z A_t^i = \{1, \dots, l_{i+1}\}$, τότε θέτουμε $l_i = z$, $V_i = \{v_1^i, v_2^i, \dots, v_z^i\}$, και η κατασκευή του i επιπέδου έχει τελειώσει. Αλλιώς επαναλαμβάνουμε την παραπάνω διαδικασία για τους κόμβους του $i+1$ επιπέδου που έχουν απομείνει, επιλέγουμε δηλαδή $j_{z+1} \in \{1, \dots, l_{i+1}\} \setminus \bigcup_{t=1}^z A_t^i$ τέτοιο ώστε

$$w_h^k\left(v_{j+1}^{i+1}\right) = \max_{j \in \{1, \dots, l_{i+1}\} \setminus \bigcup_{t=1}^z A_t^i} w_h^k(v_j^{i+1})$$

και ορίζουμε

$$A_{z+1}^i = \left\{ s \in \{1, \dots, l_{i+1}\} \setminus \bigcup_{t=1}^z A_t^i : d\left(\mathcal{F}_{v_{j_{z+1}}^{i+1}}, \mathcal{F}_{v_s^{i+1}} \right) \leqslant \frac{1-3\tau}{2} \tau^i \right\}.$$

Εισάγουμε έπειτα ένα νέο κόμβο $v_{z+1}^i \in V_i$ και ορίζουμε όπως πριν

$$\mathcal{F}_{v_{z+1}^i} = \bigcup_{s \in A_{z+1}^i} \mathcal{F}_{v_s^{i+1}}$$

και $\mathbf{p}^{-1}(v^i_{z+1}) = \{v^{i+1}_s\}_{s\in A^i_{z+1}} \subseteq V_{i+1}$, όπως επίσης

$$w^k_h(v^i_{z+1}) = \begin{cases} w(v^i_{z+1})^{\frac{k-1}{k}}, & \text{αν } h \mid i \\ \sum_{s\in A^i_{z+1}} w^k_h(v^{i+1}_s), & \text{αν } h \nmid i, \end{cases}$$

και $\mathbf{c}(v^i_{z+1}) := v^{i+1}_{j_{z+1}}$. Η παραπάνω διαδικασία τελειώνει μετά από πεπερασμένα βήματα, δημιουργώντας το επίπεδο V_i του δένδρου T. Συνεχίζουμε έτσι επαγωγικά να κατασκευάζουμε τα επίπεδα του T μέχρι και την κατασκευή του V_1, και έπειτα ορίζουμε $V_0 := \{r(T)\}$, ταυτίζοντας το σύνολο $\mathbf{p}^{-1}(r(T))$ με το σύνολο των κόμβων του V_1. Το $\mathbf{c}(r(T)) = u \in V_1$ επιλέγεται και αυτό έτσι ώστε $w^k_h(u) = \max_{v\in V_1} w^k_h(v)$. Θέτουμε ακόμη $\mathcal{F}_{r(T)} = X$ και $w^k_h(r(T)) = \mu(X)^{\frac{k-1}{k}}$.

Έχουμε τελικά κατασκευάσει με αυτό τον τρόπο ένα υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά $(T, w, \mathbf{c})$, όλα τα φύλλα του οποίου βρίσκονται σε βάθος mh, και μία απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{F} : T \to 2^X$, η οποία μάλιστα είναι εκ του ορισμού της μια απεικόνιση διαμέρισης, αφού

$$\partial\mathcal{F}_{r(T)} = \bigcup_{v\in\mathcal{L}(T)} \mathcal{F}_v = \mathcal{F}(V_{mh}) = X.$$

Θα αποδείξουμε τώρα την ιδιότητα (3) του Λήμματος, με αντίστροφη επαγωγή στο $\mathrm{depth}_T(u)$: Αν $\mathrm{depth}_T(u) = mh$, τότε $\mathrm{diam}(\mathcal{F}_u) = 0$. Υποθέτουμε ότι η (3) ισχύει για $\mathrm{depth}_T(u) = i+1$. Έστω $u = v^i_{z+1}$ όπως παραπάνω, οπότε $\mathrm{depth}_T(u) = i$. Από την τριγωνική ανισότητα και τον ορισμό των $\mathcal{F}_{v^i_{z+1}}$ και A^i_{z+1} έχουμε τότε

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}(\mathcal{F}_u) = \mathrm{diam}(\mathcal{F}_{v^i_{z+1}}) &\leqslant 3 \max_{s\in A^i_{z+1}} \mathrm{diam}(\mathcal{F}_{v^{i+1}_s}) + 2\cdot\frac{1-3\tau}{2}\cdot\tau^i \\ &\leqslant 3\tau^{i+1} + (1-3\tau)\tau^i = \tau^i,\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική μας υπόθεση. Η παραπάνω ισχύει και για $i = 0$, αφού $\mathrm{diam}X = 1$, οπότε η απόδειξη έχει ολοκληρωθεί.

Μένει η απόδειξη της (4) του Λήμματος. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $u, v \notin \mathcal{L}(T)$, $u \neq v$ και $\mathrm{depth}_T(u) = \mathrm{depth}_T(v)$. Μπορούμε να γράφουμε $u = v^i_s$, $v = v^i_t$ για κάποιο $i \in \{1, \ldots, mh-1\}$ και ας υποθέσουμε ότι $s < t$. Εκ κατασκευής τότε είναι $\mathbf{c}(v^i_s) = v^{i+1}_{j_s}$, $\mathbf{c}(v^i_t) = v^{i+1}_{j_t}$ και

$$j_t \in \{1, \ldots, l_{i+1}\} \setminus \bigcup_{l=1}^{t-1} A^i_l \subseteq \{1, \ldots, l_{i+1}\} \setminus \bigcup_{l=1}^{s-1} A^i_l,$$

όμως το $j_t \notin A^i_s$ (το $v^{i+1}_{j_t}$ δεν είναι παιδί του v^i_s). Η ισχύς λοιπόν της (5) έπεται από τον ορισμό του A^i_s. $\square$

7.3.4 Αραιωμένα υποδένδρα

Στο σημείο αυτό θα δούμε πώς μπορούμε από ένα υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά να πάρουμε ένα «μεγάλο» και «αραιωμένο» υποδένδρο, υπό μια έννοια που θα περιγράψουμε παρακάτω. Ξεκινάμε με δύο ορισμούς.

Ορισμός 7.3.14. Έστω T ένα δένδρο με ρίζα και $A \subseteq T$. Για $u \in T$ ορίζουμε $D_T(u,A) \subseteq T$ να είναι το σύνολο των $v \in A$ που ικανοποιούν τις:

(α) ο v είναι απόγονος του u στο T.

(β) δεν υπάρχει στο A πρόγονος του v που να είναι απόγονος του u.

Παρατηρήσεις 7.3.15. (α) Αν ο $u \in T$ δεν έχει απογόνους που να ανήκουν στο $A \subseteq T$, τότε $D_T(u,A) = \emptyset$.
(β) Αν το σύνολο $A \cap T_u$ είναι ένα cut set του T_u, τότε το $D_T(u,A)$ είναι κι αυτό ένα cut set του T_u.

Ορισμός 7.3.16 (Υποδένδρο αραιωμένο σε σύνολο)**.** Έστω $h,k \in \mathbb{Z} \cap [2,\infty)$ και $(T,w,\mathbf{c})$ ένα υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά. Έστω T' ένα υποδένδρο του T και $S \subseteq T'$. Λέμε ότι το T' είναι *αραιωμένο στο* S αν κάθε $v \in S$ είναι κάποιο επιλεγμένο παιδί στο αρχικό δένδρο, και ταυτόχρονα δεν έχει αδέλφια στο T'.

Για τις ανάγκες του ορισμού ακολουθούμε τη σύμβαση ότι και η ρίζα $r(T)$ είναι ένα επιλεγμένο παιδί, ώστε να ισχύει $r(T) \in S$.

Στόχος μας είναι να αποδείξουμε το παρακάτω

Λήμμα 7.3.17. *Έστω $h,k \in \mathbb{Z} \cap [2,\infty)$ τέτοιοι ώστε $h \geqslant 2k^2$ και $(T,w,\mathbf{c})$ ένα υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά. Τότε υπάρχει υποδένδρο T' του T με την ίδια ρίζα, και $R,S \subseteq T'$ που περιέχουν τη ρίζα $r(T') = r(T)$, με τις ιδιότητες:*

(1) *Για κάθε $u \in T' \setminus \mathcal{L}(T')$, ισχύει $\mathbf{c}(u) \in T'$.*

(2) $R = \{v \in T' : h \mid \mathrm{depth}_T(v)\}$.

(3) *Για κάθε $u \in R \setminus \mathcal{L}(T')$,*
$$\sum_{v \in D_{T'}(u,R)} w(v)^{(1-\frac{1}{k})^2} \geqslant w(u)^{(1-\frac{1}{k})^2}.$$

(4) *Το S «εναλάσσεται» με το R υπό την ακόλουθη έννοια: Για κάθε $u,v \in R$ για τους οποίους ισχύει ότι $\mathrm{depth}_T(v) = \mathrm{depth}_T(u) + h$ και ο v είναι απόγονος του u, υπάρχει μοναδικός $w \in S$ που είναι απόγονος του u και ταυτόχρονα ασθενής πρόγονος του v, ώστε να ισχύει*
$$\mathrm{depth}_T(u) < \mathrm{depth}_T(w) \leqslant \mathrm{depth}_T(v).$$

(5) *Για κάθε* $u \in T'$ *με* $D_{T'}(u,S) \neq \emptyset$, *όλοι οι κόμβοι του* $D_{T'}(u,S)$ *βρίσκονται στο ίδιο βάθος στο* T'_u, *το οποίο έχει μια ακέραια τιμή ανάμεσα στο* 1 *και το* $2h$.

(6) *Το* T' *είναι αραιωμένο στο* S.

Για την απόδειξη, και συγκεκριμένα για την ιδιότητα (3) παραπάνω, θα χρειαστούμε ένα επιπλέον Λήμμα, που εξασφαλίζει μια παρόμοια συνθήκη για τα βάρη των φύλλων ορισμένων συγκεκριμένου τύπου υποδένδρων.

Ορισμός 7.3.18 (Αραιωμένο Δένδρο)**.** Έστω $h,k \in \mathbb{Z} \cap [2,\infty)$ και $(T,w,\mathbf{c})$ ένα υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά. Για $i \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε το υποδένδρο $T^{(i)}$ του T ως εξής:

$$T^{(i)} = T \setminus \left(\bigcup_{\substack{u \in T \\ \mathrm{depth}_T(u)=i-1}} \bigcup_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)\setminus\{\mathbf{c}(u)\}} T_v \right).$$

Με άλλα λόγια, το $T^{(i)}$ είναι το υποδένδρο που λαμβάνεται από το T αφαιρώντας όλα τα υποδένδρα με ρίζες σε κόμβους βάθους i οι οποίοι δεν είναι επιλεγμένα παιδιά.

Παρατηρούμε ότι εξ' ορισμού, είναι $T^{(i)} = T$ αν είτε $i \leqslant 0$, είτε το T δεν έχει κόμβους σε βάθος i.

Λήμμα 7.3.19. *Έστω* $h,k \in \mathbb{Z}$ *με* $h \geqslant k \geqslant 2$ *και* $(T,w,\mathbf{c})$ *ένα υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά. Υποθέτουμε ότι τα φύλλα του* T *βρίσκονται σε βάθος* h. *Τότε υπάρχει* $L \subseteq \{1,\ldots,h\}$ *με* $|L| \geqslant h-k+1$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $i \in L$,

$$\sum_{l \in \mathcal{L}(T^{(i)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}} \geqslant w(r(T))^{\frac{k-1}{k}}.$$

Απόδειξη. Για $i \in \{1,\ldots,h\}$ και $u \in T$ ορίζουμε $f_i(u) \in (0,\infty)$ με αντίστροφη επαγωγή στο $\mathrm{depth}_T(u)$ ως εξής: Αν $\mathrm{depth}_T(u) = h$ (δηλαδή $u \in \mathcal{L}(T)$), θέτουμε

$$f_i(u) = w(u)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Αν $\mathrm{depth}_T(u) < h$, τότε ορίζουμε αναδρομικά

$$f_i(u) = \begin{cases} \max_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v), & \text{αν } i = \mathrm{depth}_T(u)+1, \\ \sum_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v), & \text{αν } i \neq \mathrm{depth}_T(u)+1. \end{cases}$$

Παρατηρούμε ότι για κάθε $i \in \{1,\ldots,h\}$ και $u \in T$ έχουμε

$$i \leqslant \mathrm{depth}_T(u) \Rightarrow f_i(u) = \sum_{l \in \mathcal{L}(T_u)} w(l)^{\frac{k-1}{k}} \tag{7.3.9}$$

και

$$i > \mathrm{depth}_T(u) \Rightarrow f_i(u) = \sum_{l \in \mathcal{L}((T_u)^{(i)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}}, \tag{7.3.10}$$

όπου έχουμε ορίσει

$$(T_u)^{(i)} = T_u \setminus \left(\bigcup_{\substack{v \in T \\ \mathrm{depth}_T(v)=i-1}} \ \bigcup_{w \in \mathbf{p}^{-1}(v) \setminus \{\mathbf{c}(v)\}} T_w \right).$$

Θα αποδείξουμε τις (7.3.9) και (7.3.10) με αντίστροφη επαγωγή στο βάθος του u, χρησιμοποιώντας τον αναδρομικό ορισμό της $f_i(u)$. Έστω αρχικά ότι $\mathrm{depth}_T(u) = h$. Τότε η μεν (7.3.10) δεν έχει νόημα, η δε (7.3.9) έπεται άμεσα από τον ορισμό της $f_i(u)$. Υποθέτουμε στη συνέχεια ότι $u \notin \mathcal{L}(T)$ και ότι οι (7.3.9) και (7.3.10) ισχύουν για τα παιδιά του u.

Αν $i \leqslant \mathrm{depth}_T(u)$, τότε από τον ορισμό της f_i και την επαγωγική υπόθεση,

$$f_i(u) = \sum_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v) = \sum_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} \sum_{l \in \mathcal{L}(T_v)} w(l)^{\frac{k-1}{k}} = \sum_{l \in \mathcal{L}(T_u)} w(l)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Αν $i = \mathrm{depth}_T(u) + 1$, αφού έχουμε υποθέσει ότι η (7.3.9) ισχύει για κάθε $v \in \mathbf{p}^{-1}(u)$ και από τον ορισμό της προσαρμοσμένης συνάρτησης βάρους w_h^k έχουμε,

$$\begin{aligned} f_i(u) &= \max_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v) = \max_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} \sum_{l \in \mathcal{L}(T_v)} w(l)^{\frac{k-1}{k}} = \max_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} w_h^k(v) \\ &= w_h^k(\mathbf{c}(u)) = \sum_{l \in \mathcal{L}(T_{\mathbf{c}(u)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}} = \sum_{l \in \mathcal{L}((T_u)^{(i)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}}. \end{aligned}$$

Τέλος, αν $i > \mathrm{depth}_T(u) + 1$, επειδή έχουμε υποθέσει ότι η (7.3.10) ισχύει για κάθε $v \in \mathbf{p}^{-1}(u)$,

$$f_i(u) = \sum_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v) = \sum_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} \sum_{l \in \mathcal{L}((T_v)^{(i)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}} = \sum_{l \in \mathcal{L}((T_u)^{(i)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Το επόμενο βήμα είναι να δείξουμε, και πάλι με αντίστροφη επαγωγή στο $\mathrm{depth}_T(u)$, ότι για κάθε $H \subseteq \{1, \ldots, h\}$ με $|H| = k$ έχουμε

$$\prod_{i \in H} f_i(u) \geqslant w(u)^{k-1}. \tag{7.3.11}$$

Αν λοιπόν $\mathrm{depth}_T(u) = h$, τότε από τον ορισμό της f_i ισχύει η ισότητα παραπάνω. Υποθέτουμε επαγωγικά πως $\mathrm{depth}_T(u) < h$ και ότι η (7.3.11) ισχύει για τα παιδιά του u.

Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $j \in H$ τέτοιο ώστε

$$\prod_{i\in H} f_i(u) \geqslant \left(\max_{v\in \mathbf{p}^{-1}(u)} f_j(v)\right)\cdot \prod_{i\in H\setminus\{j\}}\left(\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v)\right).$$

Πράγματι, αν $\mathrm{depth}_T(u)+1\in H$, επιλέγουμε $j=\mathrm{depth}_T(u)+1$ και ισχύει η ισότητα στην παραπάνω σχέση, εξ' ορισμού της f_i.

Αν από την άλλη $\mathrm{depth}_T(u)+1\notin H$, τότε έστω j τυχόν στοιχείο του H, οπότε και πάλι εξ' ορισμού,

$$\begin{aligned}\prod_{i\in H} f_i(u) &= \left(\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)} f_j(v)\right)\cdot \prod_{i\in H\setminus\{j\}}\left(\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v)\right)\\ &\geqslant \left(\max_{v\in \mathbf{p}^{-1}(u)} f_j(v)\right)\cdot \prod_{i\in H\setminus\{j\}}\left(\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v)\right).\end{aligned}$$

Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι από την ανισότητα του Hölder (θυμίζουμε ότι $|H\setminus\{j\}| = k-1$), έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)}\left(\prod_{i\in H\setminus\{j\}} f_i(v)^{\frac{1}{k-1}}\right) &\leqslant \prod_{i\in H\setminus\{j\}}\left(\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v)\right)^{\frac{1}{k-1}}\\ &= \left(\prod_{i\in H\setminus\{j\}}\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)} f_i(v)\right)^{\frac{1}{k-1}}.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω αποτελέσματα έχουμε

$$\begin{aligned}\prod_{i\in H} f_i(u) &\geqslant \left(\max_{v\in \mathbf{p}^{-1}(u)} f_j(v)\right)\cdot \left(\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)}\prod_{i\in H\setminus\{j\}} f_i(v)^{\frac{1}{k-1}}\right)^{k-1}\\ &\geqslant \left(\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)}\prod_{i\in H} f_i(v)^{\frac{1}{k-1}}\right)^{k-1} \geqslant \left(\sum_{v\in\mathbf{p}^{-1}(u)} w(v)\right)^{k-1} \geqslant w(u)^{k-1},\end{aligned}$$

όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε την επαγωγική μας υπόθεση και τον Ορισμό 7.3.12(β). Δείξαμε έτσι και την ισχύ της (7.3.11).

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του Λήμματος θέτουμε $H_1=\{1,\ldots,k\}$, οπότε από τις (7.3.10) και (7.3.11),

$$\max_{i\in H_1}\sum_{l\in\mathcal{L}(T^{(i)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}} \geqslant \left(\prod_{i\in H_1}\sum_{l\in\mathcal{L}(T^{(i)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}}\right)^{1/k} = \left(\prod_{i\in H_1} f_i(r)\right)^{1/k} \geqslant w(r)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Υπάρχει λοιπόν $i_1 \in H_1$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{l\in\mathcal{L}(T^{(i_1)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}} \geqslant w(r)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Ορίζουμε τώρα $H_2 = (H_1 \setminus \{i_1\}) \cup \{k+1\}$ και επαναλαμβάνουμε το παραπάνω επιχείρημα με το H_2 στη θέση του H_1. Έπεται ότι υπάρχει $i_2 \in H_2$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{l\in\mathcal{L}(T^{(i_2)})} w(l)^{\frac{k-1}{k}} \geqslant w(r)^{\frac{k-1}{k}}.$$

Επαναλαμβάνοντας τη διαδικασία αυτή επαγωγικά $h-k+1$ φορές, παίρνουμε το ζητούμενο σύνολο $L = \{i_1, i_2, \ldots, i_{h-k+1}\}$. □

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του Λήμματος 7.3.17.

Απόδειξη του Λήμματος 7.3.17. Θα δείξουμε ότι αν $(T_1, w, \mathbf{c}), \ldots, (T_l, w, \mathbf{c})$ είναι μια πεπερασμένη ακολουθία από υποπροσθετικά δένδρα με βάρη και επιλεγμένα παιδιά όπως στην υπόθεση του Λήμματος (κάθε T_i έχει ρίζα r_i και το βάθος των φύλλων όλων των T_i είναι το ίδιο, πολλαπλάσιο του h), τότε υπάρχει $C \subseteq \{1, \ldots, l\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i \in C$ υπάρχει το ζητούμενο υποδένδρο T_i' και τα αντίστοιχα σύνολα $R_i, S_i \subseteq T_i$. Θα δείξουμε επιπλέον ότι τα στοιχεία του $\bigcup_{i\in C} D_{T_i'}(r_i, S_i)$ βρίσκονται στο ίδιο βάθος στα αντίστοιχα δένδρα ανεξαρτήτως του i, και

$$\sum_{i\in C} w(r_i)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} \geqslant \left(\sum_{i=1}^{l} w(r_i)^{1-\frac{1}{k}}\right)^{1-\frac{1}{k}}. \tag{7.3.12}$$

Παρατηρήστε ότι το Λήμμα 7.3.17 είναι απλά η περίπτωση $l = 1$ του παραπάνω ισχυρισμού, στο τέλος της απόδειξης θα φανεί όμως ο λόγος για τον οποίο χρειαζόμαστε τη γενικότερη περίπτωση, και μια συνθήκη όπως η (7.3.12).

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή στο ύψος του δένδρου. Όταν το ύψος του T_i είναι 0, θέτουμε $C = \{1, \ldots, l\}$ και $T_i' = R_i = S_i = T_i$. Οι περισσότερες από τις ζητούμενες ιδιότητες ισχύουν κατά τετριμμένο τρόπο σε αυτή την περίπτωση, ενώ η ισχύς της (7.3.12) έπεται από την υποπροσθετικότητα της συνάρτησης $t \mapsto t^{1-\frac{1}{k}}$, $t \in (0, \infty)$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι τα φύλλα των $\{T_i\}_{i=1}^{l}$ βρίσκονται όλα σε βάθος mh, για κάποιο $m \in \mathbb{N}$. Έστω $\hat{T}_j$ το υποδένδρο του T_j που αποτελείται από όλους τους κόμβους του T_j βάθους το πολύ ίσου με h, με τις ακμές που του κληροδοτούνται από το T_j. Παρατηρούμε ότι εξ' ορισμού ο περιορισμός της w_h^k στο $\hat{T}_j$ συμπίπτει με την αντίστοιχη συνάρτηση βάρους του δένδρου $(\hat{T}_j, w)$, και άρα το ίδιο συμβαίνει και με τα αντίστοιχα επιλεγμένα παιδιά. Εφαρμόζοντας τότε το Λήμμα 7.3.19 στο $(\hat{T}_j, w, \mathbf{c})$ παίρνουμε ένα σύνολο $L_j \subseteq \{1, \ldots, h\}$ με $|L_j| = h - k + 1$ τέτοιο ώστε, για κάθε $i \in L_j$,

$$\sum_{\substack{u\in\hat{T}_j^{(i)} \\ \mathrm{depth}_{T_j}(u)=h}} w(u)^{1-\frac{1}{k}} \geqslant w(r_j)^{1-\frac{1}{k}}. \tag{7.3.13}$$

Έστω $j_0 \in \{1, \dots, l\}$ για το οποίο

$$w(r_{j_0}) = \max_{j \in \{1,\dots,l\}} w(r_j).$$

Για $j \in \{1, \dots, l\}$ συμβολίζουμε $L'_j = L_j \cap L_{j_0}$. Τότε

$$|L'_j| = |L_j| + |L_{j_0}| - |L_j \cup L_{j_0}| \geqslant (h-k+1) + (h-k+1) - h = h - 2(k-1). \tag{7.3.14}$$

Αν $l = 1$ θεωρούμε τυχαίο ακέραιο $s_0 \in L_{j_0}$. Αν $l \geqslant 2$ επιλέγουμε $s_0 \in L_{j_0}$ το οποίο ικανοποιεί την

$$\sum_{\substack{j \in \{1,\dots,l\} \setminus \{j_0\} \\ s_0 \in L'_j}} w(r_j)^{1-\frac{1}{k}} = \max_{s \in L_{j_0}} \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,l\} \setminus \{j_0\} \\ s \in L'_j}} w(r_j)^{1-\frac{1}{k}},$$

αν πάρουμε δηλαδή το άθροισμα των $w(r_j)^{1-\frac{1}{k}}$ πάνω σε όλα εκείνα τα j, εκτός του j_0, για τα οποία το $s \in L_{j_0}$ ανήκει και στο L'_j, θέτουμε s_0 εκείνο το $s \in L_{j_0}$ για το οποίο το άθροισμα μεγιστοποιείται. Παίρνοντας το μέσο όρο τότε, είναι

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{j \in \{1,\dots,l\} \setminus \{j_0\} \\ s_0 \in L'_j}} w(r_j)^{1-\frac{1}{k}} &\geqslant \frac{1}{h-k+1} \sum_{s \in L_{j_0}} \sum_{\substack{j \in \{1,\dots,l\} \setminus \{j_0\} \\ s \in L'_j}} w(r_j)^{1-\frac{1}{k}} \\ &= \frac{1}{h-k+1} \sum_{j \in \{1,\dots,l\} \setminus \{j_0\}} |L'_j| w(r_j)^{1-\frac{1}{k}} \\ &\overset{(7.3.14)}{\geqslant} \frac{h-2(k-1)}{h-(k-1)} \sum_{j \in \{1,\dots,l\} \setminus \{j_0\}} w(r_j)^{1-\frac{1}{k}}. \end{aligned} \tag{7.3.15}$$

Ορίζουμε τώρα

$$C = \{j \in \{1, \dots, l\} : s_0 \in L_j\}.$$

Ισχύει τότε ότι $j_0 \in C$, καθώς $s_0 \in L_{j_0}$ εξ' ορισμού. Ακόμη, έχουμε $|L'_j| \geqslant h - 2(k-1)$, άρα $L'_j \neq \emptyset$, οπότε (από τον ορισμό του s_0) αν $l \geqslant 2$, τότε $|C| \geqslant 2$. Θα αποδείξουμε τώρα την (7.3.12) υποθέτοντας ότι $l \geqslant 2$ (η περίπτωση $l = 1$ είναι τετριμμένη). Από την επιλογή του j_0 γνωρίζουμε ότι για κάθε $j \in \{1, \dots, l\} \setminus \{j_0\}$ είναι

$$w(r_j)^{1-\frac{1}{k}} \leqslant \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{l} w(r_i)^{1-\frac{1}{k}}.$$

Θυμίζοντας ότι $h \geqslant 2k^2$, έχουμε τότε

$$\begin{aligned}\frac{h-(k-1)}{h-2(k-1)} \cdot \left(\frac{w(r_j)^{1-\frac{1}{k}}}{\sum_{i=1}^{l} w(r_i)^{1-\frac{1}{k}}} \right)^{1/k} &\leqslant \frac{h-(k-1)}{h-2(k-1)} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{1/k} \\ &\overset{(*)}{\leqslant} \frac{h-(k-1)}{h-2(k-1)} \cdot \frac{2k^2-2(k-1)}{2k^2-(k-1)} \leqslant 1, \end{aligned} \tag{7.3.16}$$

όπου η $(*)$ παραπάνω ισχύει γιατί $2k(2k^2-k+1) \leqslant (2k+1)(2k^2-2k+2)$, οπότε

$$\frac{2k^2-k+1}{2k^2-2k+2} \leqslant \frac{2k+1}{2k} = 1+\frac{1}{2k} \leqslant 2^{1/k}.$$

Πολλαπλασιάζοντας τα δύο μέλη της (7.3.16) με $w(r_j)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}$ παίρνουμε

$$w(r_j)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} \geqslant \frac{h-(k-1)}{h-2(k-1)} \cdot \frac{w(r_j)^{1-\frac{1}{k}}}{\left(\sum_{i=1}^{l} w(r_i)^{1-\frac{1}{k}}\right)^{1/k}} \tag{7.3.17}$$

για κάθε $j \in \{1,\dots,l\} \setminus \{j_0\}$. Η απόδειξη της (7.3.12) ολοκληρώνεται τώρα ως εξής:

$$\begin{aligned}
\sum_{j\in C} w(r_j)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} &= \frac{w(r_{j_0})^{1-\frac{1}{k}}}{w(r_{j_0})^{\left(1-\frac{1}{k}\right)\frac{1}{k}}} + \sum_{j\in C\setminus\{j_0\}} w(r_j)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} \\
&\overset{(7.3.17)}{\geqslant} \frac{w(r_{j_0})^{1-\frac{1}{k}}}{\left(\sum_{i=1}^{l} w(r_i)^{1-\frac{1}{k}}\right)^{1/k}} + \\
&\qquad + \frac{h-(k-1)}{h-2(k-1)} \cdot \sum_{j\in C\setminus\{j_0\}} \frac{w(r_j)^{1-\frac{1}{k}}}{\left(\sum_{i=1}^{l} w(r_i)^{1-\frac{1}{k}}\right)^{1/k}} \\
&\overset{(7.3.15)}{\geqslant} \frac{w(r_{j_0})^{1-\frac{1}{k}}}{\left(\sum_{i=1}^{l} w(r_i)^{1-\frac{1}{k}}\right)^{1/k}} + \frac{\sum_{j\in\{1,\dots,l\}\setminus\{j_0\}} w(r_j)^{1-\frac{1}{k}}}{\left(\sum_{i=1}^{l} w(r_i)^{1-\frac{1}{k}}\right)^{1/k}} \\
&= \left(\sum_{i=1}^{l} w(r_i)^{1-\frac{1}{k}}\right)^{1-\frac{1}{k}}.
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνουμε τώρα την απόδειξη του Λήμματος εφαρμόζοντας την επαγωγική μας υπόθεση: Έστω, για κάθε $j \in C$,

$$\mathcal{L}(\hat{T}_j^{(s_0)}) = \{u_1^j, u_2^j, \dots, u_{l_j}^j\}.$$

Θεωρούμε τα υποδένδρα του T_j με ρίζες τα $u_1^j, u_2^j, \dots, u_{l_j}^j$, $(T_j)_{u_1^j}, (T_j)_{u_2^j}, \dots, (T_j)_{u_{l_j}^j}$. Από την εφαρμογή της επαγωγικής υπόθεσης σε αυτά, υπάρχει σύνολο $C_j \subseteq \{1,\dots,l_j\}$ τέτοιο ώστε για κάθε $i \in C_j$ υπάρχει υποδένδρο $(T_j)'_{u_i^j} \subseteq (T_j)_{u_i^j}$ και υποσύνολα $R_{ji}, S_{ji} \subseteq (T_j)'_{u_i^j}$ που την ικανοποιούν.

Θέτουμε, για κάθε $j \in C$,

$$T'_j = \left(\bigcup_{i\in C_j} (T_j)'_{u_i^j}\right) \cup \left(\bigcup_{i\in C_j} \left\{u \in \hat{T}_j^{(s_0)} :\ \text{ο } u \text{ είναι πρόγονος του } u_i^j\right\}\right),$$

το T_j' δηλαδή λαμβάνεται από το υποδένδρο του $\hat{T}_j^{(s_0)}$ που έχει φύλλα τα $\{u_i^j\}_{i\in C}$, στο οποίο όμως έχουμε αντικαταστήσει κάθε φύλλο u_i^j με το αντίστοιχο δένδρο $(T_j)'_{u_i^j}$. Ορίζουμε ακόμη $R_j = \left(\bigcup_{i=1}^{l_j} R_{ji}\right) \cup \{r_j\}$, και

$$S_j = \left(\bigcup_{i=1}^{l_j}(S_{ji} \setminus \{u_i^j\})\right) \cup \left\{u \in \hat{T}_j^{(s_0)} : \mathrm{depth}_{T_j}(u) = s_0\right\} \cup \{r_j\}.$$

Παρατηρούμε ότι εξ' ορισμού του $\hat{T}_j^{(s_0)}$, κάθε $u \in \hat{T}_j^{(s_0)}$ με $\mathrm{depth}_{T_j}(u) = s_0$ δεν έχει αδέλφια στο $\hat{T}_j^{(s_0)}$.

Οι επιθυμητές ιδιότητες των T_j', R_j, S_j ικανοποιούνται τότε εκ κατασκευής. Για την περίπτωση $u = r_j$, η (3) προκύπτει ως εξής:

$$\begin{aligned}\sum_{v\in D_{T_j'}(r_j,R_j)} w(v)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} &= \sum_{i\in C_j} w(u_i^j)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} \\ &\overset{(7.3.12)}{\geqslant} \left(\sum_{i=1}^{l_j} w(u_i^j)^{1-\frac{1}{k}}\right)^{1-\frac{1}{k}} \overset{(7.3.13)}{\geqslant} w(r_j)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}.\end{aligned}$$

□

7.3.5 Φτιάχνοντας τη βέλτιστη απεικόνιση

Σε αυτό το εδάφιο θα συνδυάσουμε αφ᾽ ενός τα τελευταία μας αποτελέσματα (Λήμματα 7.3.13 και 7.3.17) για να βρούμε μια νέα απεικόνιση κατακερματισμού με κάποιες χρήσιμες γεωμετρικές ιδιότητες. Κατόπιν, επικαλούμενοι το Θεώρημα 7.2.1, θα αραιώσουμε περαιτέρω το αντίστοιχο δένδρο, προκειμένου να εξασφαλίζεται τελικά η εμφυτευσιμότητα ενός κατάλληλου υποσυνόλου του X σε υπερμετρικό χώρο με την επιθυμητή παραμόρφωση.

Στο Λήμμα 7.3.13 προηγουμένως φάνηκε ότι η επιθυμητή απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{F} : T \to 2^X$ θα πρέπει να συνδέεται με κάποιο συγκεκριμένο τρόπο με τη γεωμετρία του μετρικού χώρου X. Θα δώσουμε παρακάτω δύο ορισμούς που θα κάνουν αυτή τη σύνδεση πιο σαφή. Ξεκινάμε με την έννοια της *lacunary* απεικόνισης.

Ορισμός 7.3.20 (Lacunary απεικόνιση κατακερματισμού)**.** Δεδομένων $K, \gamma \in (0, \infty)$, μια απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{F} : T \to 2^X$ λέγεται (K, γ)-*lacunary* αν για κάθε $q, u \in T$ τέτοια ώστε

(α) ο u είναι ασθενής απόγονος του q και

(β) $|\mathbf{p}^{-1}(u)| > 1$,

ισχύει ότι

$$\operatorname{diam}(\mathcal{F}_q) \leqslant K \cdot \gamma^{\operatorname{depth}_T(u)-\operatorname{depth}_T(q)} \cdot \min_{\substack{v,w\in\mathbf{p}^{-1}(u)\\ v\neq w}} d(\partial\mathcal{F}_v, \partial\mathcal{F}_w).$$

Το παρακάτω Λήμμα δίνει μια πρώτη εικόνα της χρησιμότητας των lacunary απεικονίσεων, χωρίς να χρησιμοποιεί πλήρως αυτά που παρέχει ο Ορισμός 7.3.20. Η πλήρης ισχύς της (K,γ)-lacunary συνθήκης θα χρησιμοποιηθεί στα τελικά στάδια της απόδειξης όπου, δίνοντας μας κατάλληλα φράγματα για την διάμετρο συγκεκριμένων υποσυνόλων του X, θα οδηγήσει τελικά στην πιστοποίηση μιας συνθήκης όπως η (7.3.2).

Λήμμα 7.3.21. *Έστω $\mathcal{F} : T \to 2^X$ μία (K,γ)-lacunary απεικόνιση κατακερματισμού ενός μετρικού χώρου (X,d). Τότε ο $(\partial\mathcal{F}_{r(T)}, d)$ εμφυτεύεται με παραμόρφωση K σε έναν υπερμετρικό χώρο.*

Απόδειξη. Έστω $x,y \in \partial\mathcal{F}_{r(T)}$. Τότε υπάρχουν $a,b \in \mathcal{L}(T)$ τέτοια ώστε $\mathcal{F}_a = \{x\}$ και $\mathcal{F}_b = \{y\}$. Ορίζουμε

$$\rho(x,y) = \operatorname{diam}(\mathcal{F}_{\operatorname{lca}(a,b)}).$$

Παρατηρούμε τότε ότι, αφού προφανώς $x,y \in \mathcal{F}_{\operatorname{lca}(a,b)}$, έχουμε $d(x,y) \leqslant \rho(x,y)$. Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι $x \neq y$, τότε ο $\operatorname{lca}(a,b)$ έχει διακριτά παιδιά $v,w \in \mathbf{p}^{-1}(\operatorname{lca}(a,b))$, τέτοια ώστε $x \in \partial\mathcal{F}_v$ και $y \in \partial\mathcal{F}_w$ (αν ήταν $v = w$ τότε θα ήταν $v = \operatorname{lca}(a,b)$, άτοπο). Από τον Ορισμό 7.3.20 τότε για $q = u = \operatorname{lca}(a,b)$ παίρνουμε $\rho(x,y) \leqslant K \cdot d(x,y)$.

Μένει να δείξουμε ότι η ρ είναι υπερμετρική. Έστω $a,b,c \in \mathcal{L}(T)$, και $\mathcal{F}_a = \{x\}$, $\mathcal{F}_b = \{y\}$, $\mathcal{F}_c = \{z\}$. Αν ο $\operatorname{lca}(a,b)$ είναι ασθενής απόγονος του $\operatorname{lca}(b,c)$, τότε $\mathcal{F}_{\operatorname{lca}(a,b)} \subseteq \mathcal{F}_{\operatorname{lca}(b,c)}$, οπότε $\rho(x,y) \leqslant \rho(y,z)$. Στην αντίθετη περίπτωση θα ισχύει ότι $\operatorname{lca}(a,b) \in \{\operatorname{lca}(a,c), \operatorname{lca}(b,c)\}$, οπότε $\rho(x,y) = \max\{\rho(x,z), \rho(y,z)\}$. □

Μια ακόμη χρήσιμη έννοια θα είναι αυτή της *διαχωρισμένης* απεικόνισης. Σύντομα παρακάτω θα αναδειχθεί ο κρίσιμος ρόλος που αυτή παίζει στην απόκτηση τελικά της βέλτιστης παραμόρφωσης.

Ορισμός 7.3.22 (Διαχωρισμένη απεικόνιση κατακερματισμού)**.** Έστω μια απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{F} : T \to 2^X$ και $\beta > 0$. Ένας κόμβος $u \in T$ θα λέγεται *β-διαχωρισμένος* αν για κάθε $x \in \big(\partial\mathcal{F}_{r(T)}\big) \setminus (\partial\mathcal{F}_u)$ ισχύει ότι

$$d(x, \mathcal{F}_u) \geqslant \beta \cdot \operatorname{diam}(\mathcal{F}_u)$$

Η απεικόνιση $\mathcal{F} : T \to 2^X$ θα λέγεται *β-διαχωρισμένη* αν όλοι οι κόμβοι $u \in T$ είναι β-διαχωρισμένοι.

Μετά από αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να διατυπώσουμε το επόμενο Λήμμα. Οι ιδιότητες που εγγυάται δίνονται από την εφαρμογή της «αραίωσης» που περιγράφει το Λήμμα 7.3.17 στο δένδρο που κατασκευάσαμε αρχικά στο Λήμμα 7.3.13.

Λήμμα 7.3.23. *Έστω $\tau \in (0,1/3)$ και $h,k,m \in \mathbb{Z}\cap[2,\infty)$. Έστω ακόμη (X,d,μ) ένας πεπερασμένος χώρος μέτρου διαμέτρου 1. Τότε υπάρχει μια απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{F}: T \to 2^X$ με τις ακόλουθες ιδιότητες.*

(1) $\mathrm{depth}_T(u) = mh$, *για κάθε* $u \in \mathcal{L}(T)$.

(2) *Για κάθε* $u \in T$,
$$\mathrm{diam}(\mathcal{F}_u) \leqslant \tau^{\mathrm{depth}_T(u)}.$$

(3) *Έστω* $R = \{u \in T : \mathrm{depth}_T(u) = ih,\ \text{για κάποιο } i \in \mathbb{Z}\}$. *Τότε για κάθε* $u \in R\backslash\mathcal{L}(T)$,
$$\sum_{v\in D_T(u,R)} \mu(\mathcal{F}_v)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} \geqslant \mu(\mathcal{F}_u)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}.$$

(4) *Υπάρχει ένα σύνολο $S \subseteq T$ που περιέχει τη ρίζα $r(T)$ τέτοιο ώστε: Για κάθε $u,v \in R$ για τους οποίους ισχύει ότι $\mathrm{depth}_T(v) = \mathrm{depth}_T(u) + h$ και ο v είναι απόγονος του u, υπάρχει μοναδικός $w \in S$ που είναι απόγονος του u και ταυτόχρονα ασθενής πρόγονος του v, ώστε να ισχύει*
$$\mathrm{depth}_T(u) < \mathrm{depth}_T(w) \leqslant \mathrm{depth}_T(v).$$

(5) *Οι κόμβοι του S είναι $\frac{1-3\tau}{2\tau}$-διαχωρισμένοι.*

(6) *Η $\mathcal{F}$ είναι $\left(\frac{2}{1-3\tau}\tau^{-2h},\tau^{-1}\right)$-lacunary.*

Απόδειξη. Έστω $(T^0, w, \mathbf{c})$ το υποπροσθετικό δένδρο με βάρη και επιλεγμένα παιδιά που παίρνουμε από το Λήμμα 7.3.13 και $\mathcal{F}^0 : T^0 \to 2^X$ η αντίστοιχη απεικόνιση κατακερματισμού. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 7.3.17 στο T^0 για να πάρουμε το αραιωμένο υποδένδρο T, και ορίζουμε $\mathcal{F} : T \to 2^X$ με $\mathcal{F} = \mathcal{F}^0|_T$.

Παρατηρούμε τότε ότι οι ζητούμενες ιδιότητες (1) και (2) ικανοποιούνται από την $\mathcal{F}^0$ (βλ. Λήμμα 7.3.13 (1) και (3)), και άρα και από την $\mathcal{F}$, αφού τα T και T^0 έχουν την ίδια ρίζα. Ακόμη, οι ιδιότητες (3) και (4) ικανοποιούνται άμεσα από το Λήμμα 7.3.17. Μένει λοιπόν να δειχθούν οι (5), (6).

Για την (5), έστω $u \in S$ και $y \in \left(\partial\mathcal{F}_{r(T)}\right) \setminus (\partial\mathcal{F}_u)$. Αρκεί να δείξουμε ότι
$$d(y,\mathcal{F}_u) \geqslant \frac{1-3\tau}{2\tau}\mathrm{diam}(\mathcal{F}_u).$$
Από το Λήμμα 7.3.17(6), ξέρουμε ότι το T είναι αραιωμένο στο S, οπότε $u = \mathbf{c}(\mathbf{p}(u))$. Θέτουμε $w = \mathrm{lca}_T(u,y)$ και επιλέγουμε $u', y' \in D_T(w,S)$ τέτοιους ώστε ο u' να είναι ασθενής πρόγονος του u και ο y' να είναι ασθενής πρόγονος του y. Από το Λήμμα 7.3.17(5), ξέρουμε ότι $\mathrm{depth}_T(u') = \mathrm{depth}_T(y')$, και άρα από το Λήμμα 7.3.13(4) και το γεγονός ότι $\mathbf{c}(\mathbf{p}(u')) = u'$ και $\mathbf{c}(\mathbf{p}(y')) = y'$ (αφού $u', y' \in S$) παίρνουμε
$$d(y,\mathcal{F}_u) \geqslant d(\mathcal{F}_{y'},\mathcal{F}_{u'}) \geqslant \frac{1-3\tau}{2}\tau^{\mathrm{depth}_T(u')-1} \geqslant \frac{1-3\tau}{2\tau}\mathrm{diam}(\mathcal{F}_u),$$

όπου στο τέλος χρησιμοποιήσαμε την (3) του Λήμματος 7.3.13.

Απομένει η απόδειξη της (6). Έστω $q \in T$ και u ασθενής απόγονος του q που έχει τουλάχιστον δύο παιδιά, έστω $v, w \in \mathbf{p}^{-1}(u)$, με $v \neq w$. Θα δείξουμε ότι

$$\operatorname{diam}(\mathcal{F}_q) \leqslant \frac{2\tau^{-2h}}{1-3\tau} \cdot \tau^{\operatorname{depth}_T(q)-\operatorname{depth}_T(u)} \cdot d(\partial\mathcal{F}_v, \partial\mathcal{F}_w). \tag{7.3.18}$$

Αφού τα v, w είναι αδέρφια στο T γνωρίζουμε, επειδή το T είναι αραιωμένο στο S, ότι $\{v, w\} \cap S = \emptyset$ ενώ επιπλέον,

$$\partial\mathcal{F}_v = \bigcup_{y \in D_T(v,S)} \partial\mathcal{F}_y \text{ και } \partial\mathcal{F}_w = \bigcup_{x \in D_T(w,S)} \partial\mathcal{F}_x,$$

οπότε

$$d(\partial\mathcal{F}_v, \partial\mathcal{F}_w) = \min_{\substack{y \in D_T(v,S) \\ x \in D_T(w,S)}} d(\partial\mathcal{F}_y, \partial\mathcal{F}_x). \tag{7.3.19}$$

Αφού $\{v, w\} \cap S = \emptyset$, έχουμε $D_T(v,S) \cup D_T(w,S) \subseteq D(u,S)$. Από το Λήμμα 7.3.17(5) τότε, ξέρουμε ότι όλοι οι κόμβοι του $D_T(v,S) \cup D_T(w,S)$ βρίσκονται στο ίδιο βάθος στο T, έστω l, για το οποίο μάλιστα ξέρουμε ότι ισχύει

$$l \leqslant \operatorname{depth}_T(u) + 2h.$$

Από το Λήμμα 7.3.13(4) έπεται πως για κάθε $y \in D(v,S)$ και κάθε $x \in D(w,S)$ ισχύει ότι

$$\begin{aligned} d(\partial\mathcal{F}_x, \partial\mathcal{F}_y) \geqslant d(\mathcal{F}_x, \mathcal{F}_y) = d(\mathcal{F}_{\mathbf{c}(\mathbf{p}(x))}, \mathcal{F}_{\mathbf{c}(\mathbf{p}(y))}) &> \frac{1-3\tau}{2} \cdot \tau^l \\ &\geqslant \frac{1-3\tau}{2} \cdot \tau^{\operatorname{depth}_T(u)+2h}, \end{aligned} \tag{7.3.20}$$

οπότε από τις (7.3.19), (7.3.20) και την (3) του Λήμματος 7.3.13,

$$d(\partial\mathcal{F}_v, \partial\mathcal{F}_w) > \frac{1-3\tau}{2} \cdot \tau^{\operatorname{depth}_T(u)+2h} \geqslant \frac{1-3\tau}{2} \cdot \tau^{\operatorname{depth}_T(u)-\operatorname{depth}_T(q)+2h} \cdot \operatorname{diam}(\mathcal{F}_q),$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Το παρακάτω Λήμμα εξασφαλίζει την ύπαρξη μιας επιπλέον «αραίωσης», η οποία όταν εφαρμοστεί στο δένδρο του Λήμματος 7.3.23 θα μας δώσει, μέσω της αντίστοιχης απεικόνισης κατακερματισμού, ένα υποσύνολο του X που εμφυτεύεται με κατάλληλη παραμόρφωση σε έναν υπερμετρικό χώρο. Στην ουσία δεν είναι παρά το Θεώρημα 7.2.1, που εξασφαλίζει την ύπαρξη ενός τέτοιου υποδένδρου.

Συμβολίζουμε στο εξής, για $D \in (2, \infty)$, με $\theta(D)$ τη μοναδική λύση $\theta \in (0,1)$ της εξίσωσης

$$\frac{2}{D} = (1-\theta)\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}.$$

Λήμμα 7.3.24. *Έστω $D \in (2, \infty)$, $\beta \in (0, \infty)$ και (X, d, μ) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος μέτρου. Έστω ακόμη $\mathcal{F} : T \to 2^X$ μια β-διαχωρισμένη απεικόνιση κατακερματισμού και $w : T \to (0, \infty)$ μια συνάρτηση βάρους που ικανοποιεί τη συνθήκη υποπροσθετικότητας*

$$\sum_{v \in \mathbf{p}^{-1}(u)} w(v) \geqslant w(u), \tag{7.3.21}$$

για κάθε $u \in T \setminus \mathcal{L}(T)$.

Τότε υπάρχει υποδένδρο $T' \subset T$ με την ίδια ρίζα, έτσι ώστε ο περιορισμός της $\mathcal{F}$ στο T', $\mathcal{G} = \mathcal{F}|_{T'}$ να ικανοποιεί τις:

(1) *Ο $(\partial \mathcal{G}_{r(T)}, d)$ εμφυτεύεται σε υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση $D \cdot \left(1 + \frac{2}{\beta}\right)$.*

(2) *Για κάθε $u \in T' \setminus \mathcal{L}(T')$,*

$$\sum_{v \in \mathbf{p}_{T'}^{-1}(u)} w(v)^{\theta(D)} \geqslant w(u)^{\theta(D)}.$$

Στην απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε και την ακόλουθη παρατήρηση.

Λήμμα 7.3.25. *Έστω (X, d) ένας φραγμένος μετρικός χώρος που εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε υπερμετρικό χώρο. Τότε υπάρχει υπερμετρική ρ στον X τέτοια ώστε*

(1) *$d(x, y) \leqslant \rho(x, y) \leqslant D \cdot d(x, y)$, για κάθε $x, y \in X$,*

(2) *$\mathrm{diam}_d(X) = \mathrm{diam}_\rho(X)$.*

Απόδειξη. Εξ' υποθέσεως υπάρχει $A > 0$, υπερμετρικός χώρος (U, ρ_U) και $f : X \to U$ έτσι ώστε

$$Ad(x, y) \leqslant \rho_U(f(x), f(y)) \leqslant D \cdot Ad(x, y),$$

για κάθε $x, y \in X$. Ορίζουμε τότε

$$\rho(x, y) := \min\{\frac{\rho_U(f(x), f(y))}{A}, \mathrm{diam}_d(X)\}.$$

Είναι άμεσο ότι η ρ ικανοποιεί τις (1) και (2) της εκφώνησης. □

Απόδειξη του Λήμματος 7.3.24. Για κάθε $u \in T \setminus \mathcal{L}(T)$, θέτουμε $C_u = \mathbf{p}^{-1}(u)$. Εφοδιάζουμε τον C_u με τη μετρική

$$\bar{d_u}(x, y) = \begin{cases} \mathrm{diam}_d(\partial \mathcal{F}_x \cup \partial \mathcal{F}_y), & \text{αν } x \neq y, \\ 0, & \text{αν } x = y. \end{cases}$$

Από το Θεώρημα 7.2.1 τότε, υπάρχει $S_u \subseteq C_u$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{x\in S_u} w(x)^{\theta(D)} \geqslant \left(\sum_{x\in C_u} w(x)\right)^{\theta(D)} \geqslant w(u)^{\theta(D)}. \tag{7.3.22}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και την (7.3.21). Ακόμη, ο $(S_u, \bar{d_u})$ εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε υπερμετρικό χώρο.

Από το Λήμμα 7.3.25 μάλιστα υπάρχει υπερμετρική ρ_u στον S_u τέτοια ώστε, για κάθε $x, y \in S_u$,

$$\begin{aligned}\bar{d_u}(x,y) \leqslant \rho_u(x,y) &\leqslant \min\{\mathrm{diam}_{\bar{d_u}}(S_u), D\cdot \bar{d_u}(x,y)\}\\ &\leqslant \min\left\{\mathrm{diam}_d\left(\bigcup_{x\in S_u}\partial\mathcal{F}_x\right), D\cdot\bar{d_u}(x,y)\right\}.\end{aligned} \tag{7.3.23}$$

Το ζητούμενο υποδένδρο T' κατασκευάζεται επαγωγικά από πάνω προς τα κάτω ως εξής: Αρχικά θέτουμε $r(T) \in T'$, και έπειτα για κάθε $u \in T \setminus \mathcal{L}(T)$ τέτοιο ώστε να ισχύει ότι $u \in T'$ θέτουμε $S_u \subseteq T'$, προσθέτουμε δηλαδή στο T' το υποσύνολο S_u των παιδιών του. Η ζητούμενη ανισότητα στο (2) του Λήμματος προκύπτει άμεσα τότε από την κατασκευή μας και την (7.3.22).

Μένει να δείξουμε ότι ο $(\partial\mathcal{G}_{r(T)}, d)$ εμφυτεύεται σε υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση $D\cdot\left(1+\frac{2}{\beta}\right)$. Έστω $p, q \in \partial\mathcal{G}_{r(T)}$ και $a, b \in \mathcal{L}(T)$ τέτοιοι ώστε $\mathcal{G}_a = \{p\}$ και $\mathcal{G}_b = \{q\}$. Έστω $u = \mathrm{lca}_{T'}(a,b) = \mathrm{lca}_T(a,b)$ και $x, y \in S_u$ ασθενείς πρόγονοι των a και b αντίστοιχα. Ορίζουμε τότε

$$\rho(p,q) := \rho_u(x,y).$$

Η ρ είναι $D\cdot\left(\frac{2}{\beta}+1\right)$-εμφύτευση. Πράγματι,

$$\begin{aligned}d(p,q) = d(\mathcal{G}_a,\mathcal{G}_b) &\leqslant \mathrm{diam}(\partial\mathcal{F}_x\cup\partial\mathcal{F}_y)\\ &= \bar{d_u}(x,y) \leqslant \rho_u(x,y) = \rho(p,q).\end{aligned}$$

Για το άνω φράγμα της ρ χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι η απεικόνιση $\mathcal{F}$ είναι β-διαχωρισμένη:

$$\begin{aligned}\frac{\rho(p,q)}{D} \leqslant \bar{d_u}(x,y) &\leqslant \mathrm{diam}_d(\partial\mathcal{F}_x) + \mathrm{diam}_d(\partial\mathcal{F}_y) + d(\partial\mathcal{F}_x,\partial\mathcal{F}_y)\\ &\leqslant \left(\frac{2}{\beta}+1\right)d(p,q).\end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε τέλος ότι η ρ είναι μια υπερμετρική στον $\partial\mathcal{G}_{r(T)}$. Έστω $p_1, p_2, p_3 \in \partial\mathcal{G}_{r(T)}$ και τα αντίστοιχα $a_1, a_2, a_3 \in \mathcal{L}(T')$ ώστε $\mathcal{G}_{a_i} = \{p_i\}$, $i \in \{1,2,3\}$. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι ο $u = \mathrm{lca}_T(a_1,a_2)$ είναι ασθενής απόγονος του $v = \mathrm{lca}_T(a_2,a_3)$. Διακρίνουμε τις περιπτώσεις:

Αν $u = v$, τότε επιλέγουμε $x_1, x_2, x_3 \in S_u$ ασθενείς προγόνους των a_1, a_2, a_3 αντίστοιχα και επειδή η ρ_u είναι υπερμετρική,

$$\rho(p_1, p_2) = \rho_u(x_1, x_2) \leqslant \max\{\rho_u(x_1, x_3), \rho_u(x_3, x_2)\} = \max\{\rho(p_1, p_3), \rho(p_3, p_2)\}.$$

Αν πάλι ο u είναι γνήσιος απόγονος του v, τότε επιλέγουμε $x_1, x_2 \in S_u$ ασθενείς προγόνους των a_1, a_2 αντίστοιχα και $s, t \in S_v$ ασθενείς προγόνους των u, a_3 αντίστοιχα. Τότε

$$\begin{aligned}\rho(p_1, p_2) = \rho_u(x, y) &\leqslant \operatorname{diam}_d\left(\bigcup_{w \in S_u} \partial\mathcal{F}_w\right) \leqslant \operatorname{diam}_d(\partial\mathcal{F}_s)\\ &\leqslant \operatorname{diam}_d\left(\partial\mathcal{F}_s \cup \partial\mathcal{F}_t\right) = \bar{d}_v(s, t)\\ &\leqslant \rho_v(s, t) = \rho(p_1, p_3) = \rho(p_2, p_3).\end{aligned}$$

□

7.3.6 Από απεικονίσεις κατακερματισμού σε θεωρήματα κάλυψης

Από τα παραπάνω αποτελέσματα μπορούμε πλέον να πάρουμε μια απεικόνιση κατακερματισμού του μετρικού χώρου X που θα μας δώσει το «υπερμετρικό» υποσύνολο του Θεωρήματος 7.3.2. Η απεικόνιση αυτή περιγράφεται στο παρακάτω Λήμμα.

Αν T είναι ένα πεπερασμένο δένδρο με ρίζα, και $A \subseteq T$, συμβολίζουμε στο εξής

$$D_T^*(u, A) = \begin{cases} D_T(u, A), & \text{αν } u \in T \setminus A, \\ \{u\}, & \text{αν } u \in A. \end{cases}.$$

Λήμμα 7.3.26. *Έστω $D \in (2, \infty)$, $k \in \mathbb{Z} \cap [2, \infty)$ και $\tau \in \left(0, \frac{D-2}{3D+2}\right)$. Έστω ακόμη (X, d, μ) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος διαμέτρου 1. Τότε υπάρχει απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{G} : T \to 2^X$ με τις ιδιότητες:*

(1) *Κάθε $l \in \mathcal{L}(T)$ δεν έχει αδέλφια, και $\mathcal{G}_{\mathbf{p}(l)} = \mathcal{G}_l$.*

(2) *Η $\mathcal{G}$ είναι $\left(\frac{2}{1-3\tau}\tau^{-4k^2}, \tau^{-4k^2}\right)$-lacunary.*

(3) *Ο $(\partial\mathcal{G}_{r(T)}, d)$ εμφυτεύεται σε υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση D.*

(4) *Κάθε cut set $G \subseteq T$ ικανοποιεί την*

$$\sum_{v \in G} \mu\left(\mathcal{F}_{\mathbf{p}(v)}\right)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2 \theta\left(\frac{1-3\tau}{1+\tau} D\right)} \geqslant \mu(X)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2 \theta\left(\frac{1-3\tau}{1+\tau} D\right)}, \tag{7.3.24}$$

όπου $\mathbf{p}(v)$ είναι ο γονέας του v στο T αν το v δεν είναι η ρίζα, αλλιώς το ίδιο το v.

Απόδειξη. Έστω $k \in \mathbb{Z} \cap [2, \infty)$ και $\tau \in \left(0, \frac{D-2}{3D+2}\right)$. Θέτουμε $h = 2k^2$ και επιλέγουμε $m \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\min_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} d(x, y) > \tau^{(m-2)h+1}.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.3.23 με τις παραπάνω παραμέτρους τ, m, h, k παίρνουμε μια απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{F} : T^1 \to 2^X$ και τα αντίστοιχα υποσύνολα $R, S \subseteq T^1$. Έστω T^2 το δέντρο που επάγεται από το T^1 στο S, ενώνοντας δηλαδή τα $u, v \in S$ με μία ακμή του T^2, αν ο u είναι πρόγονος του v στο T^1, και ταυτόχρονα κάθε $w \in S$ που είναι πρόγονος του v στο T^1 είναι και ασθενής πρόγονος του u. Παρατηρούμε ότι το παραπάνω ταυτίζεται εξ' ορισμού με την ιδιότητα $v \in D_{T^1}(u, S)$. Ορίζουμε μια νέα απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{S} : T^2 \to 2^X$, με $\mathcal{S} = \mathcal{F}|_S$. Για να ελέγξουμε ότι η $\mathcal{S}$ είναι όντως απεικόνιση κατακερματισμού θα πρέπει να επαληθεύσουμε ότι για κάθε $u \in \mathcal{L}(T^2)$ το $\mathcal{F}_u$ είναι μονοσύνολο. Έστω λοιπόν $u \in \mathcal{L}(T^2)$ και $v = \mathbf{p}_{T^2}(u)$. Αφού τα φύλλα του T^1 βρίσκονται σε βάθος mh, ισχύει ότι $\mathrm{depth}_{T^1}(v) \geqslant (m-2)h + 1$. Χρησιμοποιώντας τότε την ιδιότητα (2) του Λήμματος 7.3.23, παίρνουμε ότι

$$\mathrm{diam}(\mathcal{F}_u) \leqslant \mathrm{diam}(\mathcal{F}_v) \leqslant \tau^{(m-2)h+1} < \min_{\substack{x,y \in X \\ x \neq y}} d(x, y),$$

οπότε τα $\mathcal{F}_u$ και $\mathcal{F}_v$ είναι και τα δύο μονοσύνολα. Από το Λήμμα 7.3.23(5) ακόμη, ξέρουμε ότι οι κόμβοι του S είναι $\frac{1-3\tau}{2\tau}$-διαχωρισμένοι, οπότε η απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{S}$ είναι $\frac{1-3\tau}{2\tau}$-διαχωρισμένη.

Ισχυρισμός: Η απεικόνιση $\mathcal{S}$ είναι $\left(\frac{2}{1-3\tau}\tau^{-2h}, \tau^{-2h}\right)$-lacunary.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Από το Λήμμα 7.3.23(4) γνωρίζουμε ότι αν $u \in S$ και $v \in D_{T^1}(u, S)$, τότε $\mathrm{depth}_{T^1}(v) \leqslant \mathrm{depth}_{T^1}(u) + 2h - 1$. Αν $q, u \in S$ έτσι ώστε ο u είναι ασθενής απόγονος του q στο T^2, τότε από την τελευταία σχέση μπορούμε να ελέγξουμε με επαγωγή στη διαφορά των βαθών $\mathrm{depth}_{T^2}(u) - \mathrm{depth}_{T^2}(q)$ ότι

$$\mathrm{depth}_{T^1}(u) - \mathrm{depth}_{T^1}(q) \leqslant 2h \cdot (\mathrm{depth}_{T^2}(u) - \mathrm{depth}_{T^2}(q))\,. \tag{7.3.25}$$

Έτσι, αν $v, w \in D_{T^1}(u, S)$ με $v \neq w$, μπορούμε να επιλέξουμε $x, y \in \mathbf{p}_{T^1}^{-1}(u)$ έτσι ώστε $x \neq y$ και οι x, y είναι ασθενείς πρόγονοι των v, w αντίστοιχα, και επειδή (από το Λήμμα 7.3.23(6)) η $\mathcal{F}$ είναι $\left(\frac{2}{1-3\tau}\tau^{-2h}, \tau^{-1}\right)$-lacunary έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(\mathcal{S}_q) = \mathrm{diam}(\mathcal{F}_q) &\leqslant \frac{2\tau^{-2h}}{1-3\tau} \cdot \tau^{-(\mathrm{depth}_{T^1}(u) - \mathrm{depth}_{T^1}(q))} d(\partial\mathcal{F}_x, \partial\mathcal{F}_y) \\
&\overset{(7.3.25)}{\leqslant} \frac{2\tau^{-2h}}{1-3\tau} \cdot \tau^{-2h \cdot \left(\mathrm{depth}_{T^2}(u) - \mathrm{depth}_{T^2}(q)\right)} d(\partial\mathcal{S}_x, \partial\mathcal{S}_y),
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει τον παραπάνω ισχυρισμό. □

Ορίζουμε στη συνέχεια $w_R : R \to (0,\infty)$ επαγωγικά στο βάθος των κόμβων ως εξής: Θέτουμε

$$w_R(r(T^1)) = \mu(X)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}$$

και αν $u \in R \setminus \mathcal{L}(T^1)$ και $v \in D_{T^1}(u,R)$ ορίζουμε

$$w_R(v) = \frac{w_R(u)}{\sum_{z\in D_{T^1}(u,R)} \mu(\mathcal{F}_z)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}} \cdot \mu(\mathcal{F}_v)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2},$$

έτσι ώστε για κάθε $u \in R \setminus \mathcal{L}(T^1)$ να έχουμε

$$w_R(u) = \sum_{v\in D_{T^1}(u,R)} w_R(v). \tag{7.3.26}$$

Από τον παραπάνω αναδρομικό ορισμό, σε συνδυασμό με το Λήμμα 7.3.23(3), έπεται ότι, για κάθε $u \in R$,

$$w_R(u) \leqslant \mu(\mathcal{F}_u)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}. \tag{7.3.27}$$

Από την (7.3.26), παίρνοντας το άθροισμα πάνω σε όλα τα $x \in D^*_{T^1}(u,R)$, παίρνουμε, για κάθε $u \in S \setminus \mathcal{L}(T^2)$,

$$\sum_{x\in D^*_{T^1}(u,R)} w_R(x) = \sum_{x\in D^*_{T^1}(u,R)} \sum_{y\in D_{T^1}(x,R)} w_R(y).$$

Παρατηρούμε επιπλέον ότι, από το Λήμμα 7.3.23(4),

$$\bigcup_{x\in D^*_{T^1}(u,R)} D_{T^1}(x,R) = \bigcup_{v\in D_{T^1}(u,S)} D^*_{T^1}(v,R),$$

όπου και οι δύο παραπάνω ενώσεις αποτελούνται από ξένα σύνολα. Έπεται έτσι ότι

$$\sum_{x\in D^*_{T^1}(u,R)} w_R(x) = \sum_{v\in D_{T^1}(u,S)} \sum_{z\in D^*_{T^1}(v,R)} w_R(z).$$

Ορίζουμε τώρα τη συνάρτηση βάρους $w_S : S \to (0,\infty)$ με $w_S(u) = \sum_{x\in D^*_{T^1}(u,R)} w_R(x)$. Από τα παραπάνω έχουμε τότε, για κάθε $u \in S \setminus \mathcal{L}(T^2)$,

$$\sum_{v\in \mathbf{p}^{-1}_{T^2}(u)} w_S(v) = \sum_{v\in D_{T^1}(u,S)} w_S(v) = \sum_{x\in D^*_{T^1}(u,R)} w_R(x) = w_S(u).$$

Δείξαμε έτσι ότι η w_S ικανοποιεί τη συνθήκη (υπο)προσθετικότητας στην υπόθεση του Λήμματος 7.3.24.

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το Λήμμα 7.3.24 για την απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{S} : T^2 \to 2^X$ και τη συνάρτηση βάρους $w_S : T^2 \to (0,\infty)$, με $\beta = \frac{1-3\tau}{2\tau}$ και παράμετρο

$$\frac{D}{1+\frac{2}{\beta}} = D \cdot \frac{1-3\tau}{1+\tau}.$$

Παρατηρούμε μάλιστα ότι επειδή έχουμε υποθέσει πως $\tau < (D-2)/(3D+2)$, ισχύει ότι $\frac{D}{1+\frac{2}{\beta}} > 2$, άρα το Λήμμα μπορεί όντως να εφαρμοστεί. Παίρνουμε έτσι ένα υποδένδρο $T \subseteq T^2$ με την ίδια ρίζα, έτσι ώστε η απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{G} = \mathcal{S}|_T$ να ικανοποιεί τις:

(1) ο $(\partial \mathcal{G}_{r(T)}, d)$ εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε έναν υπερμετρικό χώρο και

(2) για κάθε $u \in T \setminus \mathcal{L}(T)$,

$$\sum_{v \in \mathbf{p}_T^{-1}(u)} w_S(v)^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)} \geqslant w_S(u)^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)}. \tag{7.3.28}$$

Έχουμε ήδη δείξει ότι για $u \in \mathcal{L}(T) \subseteq \mathcal{L}(T^2)$ ισχύει ότι

$$\operatorname{diam}(\mathcal{F}_u) = \operatorname{diam}(\mathcal{F}_{\mathbf{p}_T(u)}) = 0,$$

οπότε ισχύει η (1) του Λήμματος. Ακόμη, επειδή η $\mathcal{S}$ είναι $\frac{1-3\tau}{2\tau}$-διαχωρισμένη και $\left(\frac{2}{1-3\tau}\tau^{-4k^2}, \tau^{-4k^2}\right)$-lacunary, το ίδιο θα ισχύει και για τη $\mathcal{G}$, αφού δεν είναι παρά ο περιορισμός της $\mathcal{S}$ στο T.

Μένει να δειχθεί η ανισότητα (7.3.24) για τα cut sets του T. Ξεκινάμε με την ακόλουθη παρατήρηση: Για $u \in T$ ας συμβολίσουμε με $\mathbf{p}_T(u)$ τον ίδιο τον u αν $u = r(T)$ ή, στην αντίθετη περίπτωση, τον γονέα του u στο T. Ένας $u' \in D^*_{T^1}(\mathbf{p}_T(u), R)$ είναι ένας ασθενής πρόγονος του u στο T^1. Επιπλέον, ισχύει ότι $\mathcal{F}_{\mathbf{p}_T(u)} \supseteq \mathcal{F}_{u'}$, οπότε

$$\begin{aligned}\mu\left(\mathcal{F}_{\mathbf{p}_T(u)}\right)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} \geqslant \mu\left(\mathcal{F}_{u'}\right)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2} &\overset{(7.3.27)}{\geqslant} w_R(u') \overset{(7.3.26)}{=} \sum_{x \in D_{T^1}(u',R)} w_R(x) \\ &= \sum_{x \in D_{T^1}(u,R)} w_R(x) = w_S(u).\end{aligned} \tag{7.3.29}$$

Έστω τώρα $G \subseteq T$ ένα cut set του T. Έστω ακόμη $G_0 \subseteq G$ έτσι ώστε το G_0 να είναι και αυτό cut set, ελαχιστικό ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι. Έστω $v \in G_0$ με μεγιστικό βάθος, και θέτουμε $u_0 = \mathbf{p}_T(v)$. Ισχύει τότε ότι $\mathbf{p}_T^{-1}(u_0) \subset G_0$. Πράγματι, αν $w \in \mathbf{p}_T^{-1}(u_0)$, επειδή το G_0 είναι cut set, υπάρχει $w' \in G_0$ έτσι ώστε οι w, w' να είναι συγκρίσιμοι. Από τη μεγιστικότητα του $\operatorname{depth}_T(v) = \operatorname{depth}_T(w)$ έπεται ότι ο w' είναι ασθενής πρόγονος του w. Όμως αν $w \neq w'$, τότε το $G_0 \setminus \{w'\}$ είναι και αυτό ένα cut set, και $G_0 \setminus \{w'\} \subsetneq G_0$, που είναι άτοπο από την ελαχιστικότητα του G_0. Έπεται έτσι ότι $w = w' \in G_0$.

Παρατηρούμε στη συνέχεια ότι το σύνολο $G_0' = (G_0 \cup \{u\}) \setminus \mathbf{p}_T^{-1}(u)$ είναι και αυτό ένα cut set του T. Έστω τότε $G_1 \subseteq G_0'$ τέτοιο ώστε ο G_1 να είναι και αυτό cut set, ελαχιστικό ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι. Παρατηρούμε τότε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{v\in G_0} w_S(v)^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)} &= \sum_{v\in G_0\setminus \mathbf{p}_T^{-1}(u)} w_S(v)^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)} + \sum_{v\in \mathbf{p}_T^{-1}(u)} w_S(v)^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)} \\ &\overset{(7.3.28)}{\geqslant} \sum_{v\in G_0'} w_S(v)^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)} \geqslant \sum_{v\in G_1} w_S(v)^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)}\end{aligned}$$

Επαναλαμβάνοντας την παραπάνω διαδικασία για το G_1 παίρνουμε ένα κατάλληλο cut set G_2, και συνεχίζοντας επαγωγικά με αυτό τον τρόπο έχουμε μετά από πεπερασμένα βήματα μια ακολουθία από cut sets $\{G_0, G_1, \ldots, G_j\}$, έτσι ώστε $G_j = \{r(T)\}$. Εφαρμόζοντας διαδοχικά λοιπόν τις j το πλήθος παραπάνω ανισότητες που θα έχουν προκύψει παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{v\in G} w_S(v)^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)} &\geqslant \sum_{v\in G_0} w_S(v)^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)} \geqslant \cdots \\ &\geqslant w_S(r(T))^{\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)} = \mu(X)^{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2\theta\left(D\cdot\frac{1-3\tau}{1+\tau}\right)}.\end{aligned}$$

Η ζητούμενη ανισότητα (7.3.24) έπεται τώρα άμεσα από την παραπάνω και την (7.3.29). □

Το μόνο που μένει πια να δούμε είναι πώς μια lacunary απεικόνιση που ικανοποιεί μια ιδιότητα όπως η (4) στο Λήμμα 7.3.26 μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την απόδειξη μιας «συνθήκης κάλυψης» όπως η (7.3.2). Αυτό είναι το περιεχόμενο του επόμενου Λήμματος.

Λήμμα 7.3.27. *Έστω $K, \gamma \in (0,\infty)$ και $\theta \in (0,1)$. Έστω ακόμη (X, d, μ) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος και ας υποθέσουμε ότι υπάρχει μια (K,γ)-lacunary απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{G} : T \to 2^X$ τέτοια ώστε*

(α) *κάθε φύλλο $l \in \mathcal{L}(T)$ δεν έχει αδέλφια, και*

(β) *$\mathcal{G}_{\mathbf{p}(l)} = \mathcal{G}_l$, για κάθε $l \in \mathcal{L}(T)$.*

Υποθέτουμε επιπλέον ότι για κάθε cut set G του T ισχύει ότι

$$\sum_{v\in G} \mu(\mathcal{G}_{\mathbf{p}(v)})^\theta \geqslant \mu(X)^\theta$$

(όπου αν $v = r(T)$, τότε στην παραπάνω έχουμε θέσει $\mathbf{p}(v) = v$). Τότε για κάθε $\{x_i\}_{i\in I} \subseteq X$ και $\{r_i\}_{i\in I} \subseteq [0,\infty)$ τέτοιες ώστε οι μπάλες $\{B_d(x_i, r_i)\}_{i\in I}$ καλύπτουν το $\partial\mathcal{G}_{r(T)}$ έχουμε

$$\sum_{i\in I} \mu\left(B_d(x_i, (1+K^2\gamma)r_i)\right)^\theta \geqslant \mu(X)^\theta. \tag{7.3.30}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\partial\mathcal{G}_{r(T)} \cap B_d(x_i, r_i) \neq \emptyset$ για κάθε $i \in I$. Έστω ακόμη ρ η υπερμετρική του Λήμματος 7.3.21, δηλαδή για $x, y \in \partial\mathcal{G}_{r(T)}$ ορίζουμε

$$\rho(x,y) = \mathrm{diam}_d\left(\mathcal{G}_{\mathrm{lca}(a,b)}\right),$$

όπου $a, b \in \mathcal{L}(T)$ με $\mathcal{G}_a = \{x\}$ και $\mathcal{G}_b = \{y\}$. Παρατηρούμε πως από τον ορισμό αυτό συνεπάγεται ότι, για κάθε $v \in T$,

$$\mathrm{diam}_\rho(\partial\mathcal{G}_v) = \max_{x,y\in\partial\mathcal{G}_v} \rho(x,y) = \max_{a,b\in\mathcal{L}(T_v)} \mathrm{diam}_d(\mathcal{G}_{\mathrm{lca}(a,b)}) = \mathrm{diam}_d(\mathcal{G}_v).$$

Γνωρίζουμε ακόμη, από το Λήμμα 7.3.21, ότι η ρ είναι K-εμφύτευση, δηλαδή για κάθε $x, y \in \partial\mathcal{G}_{r(T)}$,

$$d(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant K \cdot d(x,y). \tag{7.3.31}$$

Για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε $y_i \in \partial\mathcal{G}_{r(T)}$ τέτοιο ώστε

$$d(x_i, y_i) = \min_{y\in\partial\mathcal{G}_{r(T)}} d(x_i, y) \leqslant r_i. \tag{7.3.32}$$

Ισχύει τότε ότι $B_d(y_i, 2r_i) \supseteq B_d(x_i, r_i)$, άρα και οι μπάλες $\{B_d(y_i, 2r_i)\}_{i\in I}$ καλύπτουν το $\partial\mathcal{G}_{r(T)}$, και το ίδιο ισχύει και για τις $\{B_\rho(y_i, 2Kr_i)\}_{i\in I}$, αφού από την (7.3.31) είναι $B_\rho(y_i, 2Kr_i) \supseteq B_d(y_i, 2r_i) \cap \partial\mathcal{G}_{r(T)}$.

Για κάθε $i \in I$ επιλέγουμε τώρα $v_i \in T$ ως εξής: Αν η $B_\rho(y_i, 2Kr_i)$ είναι μονοσύνολο, τότε ορίζουμε v_i να είναι το φύλλο του T για το οποίο $\mathcal{G}_{v_i} = \{y_i\}$. Στην αντίθετη περίπτωση ονομάζουμε v_i τον αρχαιότερο πρόγονο του y_i στο T για τον οποίο ισχύει ότι

$$\mathrm{diam}_\rho(\partial\mathcal{G}_{v_i}) \leqslant 2Kr_i \tag{7.3.33}$$

και ταυτόχρονα έχει δύο παιδιά. Ισχύει τότε ότι $B_\rho(y_i, 2Kr_i) = \partial\mathcal{G}_{v_i}$. Ακόμη, αφού οι μπάλες $\{B_\rho(y_i, 2Kr_i)\}_{i\in I}$ καλύπτουν το $\partial\mathcal{G}_{r(T)}$, έπεται ότι $\bigcup_{i\in I} \mathcal{L}(T_{v_i}) = \mathcal{L}(T)$. Έτσι, αν θέσουμε $G = \{v_i\}_{i\in I}$, συμπεραίνουμε ότι το G είναι cut set του T. Από την υπόθεση του Λήμματος έχουμε λοιπόν ότι

$$\sum_{i\in I} \mu(\mathcal{G}_{\mathbf{p}(v_i)})^\theta \geqslant \mu(X)^\theta. \tag{7.3.34}$$

Εφ' όσον ο v_i έχει τουλάχιστον δύο παιδιά, έχουμε από το γεγονός ότι η $\mathcal{G}$ είναι (K,γ)-lacunary ότι

$$\mathrm{diam}_d(\mathcal{G}_{\mathbf{p}(v_i)}) \leqslant K \cdot \gamma \mathrm{diam}_d(\partial\mathcal{G}_{v_i}). \tag{7.3.35}$$

Αν πάλι ο v_i είναι φύλλο, τότε από τις υποθέσεις μας τα $\mathcal{G}_{v_i}$ και $\mathcal{G}_{\mathbf{p}(v_i)}$ είναι μονοσύνολα, οπότε $\mathrm{diam}_d(\mathcal{G}_{v_i}) = \mathrm{diam}_d(\mathcal{G}_{\mathbf{p}(v_i)}) = 0$, δηλαδή η (7.3.35) ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο και σε αυτή την περίπτωση. Έστω τώρα $i \in I$ και $z \in \mathcal{G}_{\mathbf{p}(v_i)}$. Είναι

$$d(z,x_i) \leqslant d(x_i,y_i)+d(z,y_i) \overset{(7.3.32)}{\leqslant} r_i + d(z,y_i) \leqslant r_i + \mathrm{diam}_d(\mathcal{G}_{\mathbf{p}(v_i)})$$
$$\overset{(7.3.35)}{\leqslant} r_i + K\cdot\gamma\mathrm{diam}_d(\partial\mathcal{G}_{v_i}) \overset{(7.3.31)}{\leqslant} r_i + K\cdot\gamma\mathrm{diam}_\rho(\partial\mathcal{G}_{v_i}) \overset{(7.3.33)}{\leqslant} r_i + 2K^2\cdot\gamma r_i,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το γεγονός ότι $y \in \partial\mathcal{G}_{v_i} \subseteq \mathcal{G}_{v_i} \subseteq \mathcal{G}_{\mathbf{p}(v_i)}$. Έχουμε δείξει έτσι ότι

$$\mathcal{G}_{\mathbf{p}(v_i)} \subseteq B_d\left(x_i,(1+2K^2\gamma)r_i\right),$$

οπότε η ζητούμενη σχέση (7.3.30) έπεται από την (7.3.34). □

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.2. Θυμίζουμε ότι με $\theta(D)$, $D\in(2,\infty)$, συμβολίζουμε τη μοναδική λύση $\theta\in(0,1)$ της εξίσωσης

$$\frac{2}{D} = (1-\theta)\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}}.$$

Παρατηρούμε ότι, επειδή $\theta^{\frac{\theta}{1-\theta}} \geqslant \frac{1}{e}$, για κάθε $D\in(2,\infty)$ έχουμε

$$\theta(D) \geqslant 1-\frac{2e}{D}. \tag{7.3.36}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.2. Μπορούμε, από το Λήμμα 7.3.4 να υποθέσουμε ότι ο (X,d,μ) είναι πεπερασμένος. Έστω $\varepsilon\in(0,1)$ και $k\in\mathbb{Z}\cap[\frac{10}{\varepsilon},\frac{11}{\varepsilon}]$. Θέτουμε ακόμη $\tau=\frac{1}{20}$. Από τα παραπάνω, ισχύει ότι $(1-\varepsilon)(1-\frac{1}{k})^{-2}\in(0,1)$, οπότε μπορούμε να ορίσουμε

$$D = \frac{1+\tau}{1-3\tau}\cdot\theta^{-1}\left(\frac{1-\varepsilon}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}\right) = \frac{21}{17}\cdot\theta^{-1}\left(\frac{1-\varepsilon}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}\right) \tag{7.3.37}$$

ή ισοδύναμα

$$\left(1-\frac{1}{k}\right)^2\theta\left(\frac{1-3\tau}{1+\tau}D\right) = 1-\varepsilon.$$

Από τον ορισμό του θ έχουμε ότι, για κάθε $s\in(0,1)$, $\theta^{-1}(s) = 2(1-s)^{-1}s^{-\frac{s}{1-s}} > 2$, οπότε από την (7.3.37) έπεται ότι $D > 2(1+\tau)/(1-3\tau)$ ή ισοδύναμα ότι $\tau < \frac{D-2}{3D+2}$. Από την (7.3.36) πάλι, έχουμε ότι $\theta^{-1}(s) \leqslant \frac{2e}{1-s}$, οπότε

$$D \leqslant \frac{21}{17}\cdot\frac{2e}{1-\left(\frac{1-\varepsilon}{\left(1-\frac{1}{k}\right)^2}\right)} \leqslant \frac{21}{17}\cdot\frac{2e}{1-\left(\frac{1-\varepsilon}{\left(1-\frac{\varepsilon}{10}\right)^2}\right)} = \frac{42e(10-\varepsilon)^2}{17\varepsilon(\varepsilon+80)} \leqslant \frac{42e}{17\varepsilon}\cdot\frac{10}{8} < \frac{9}{\varepsilon}.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.3.26 για τα δεδομένα D,k,τ παίρνουμε απεικόνιση διαμέρισης $\mathcal{G}: T\to 2^X$ για την οποία ισχύει αφ' ενός ότι το $S=\partial\mathcal{G}_{r(T)}$ εμφυτεύεται σε υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση $D<9/\varepsilon$ και αφ' ετέρου ότι ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 7.3.27, με $K=\frac{2}{1-3\tau}\tau^{-4k^2}$ και $\gamma=\tau^{-4k^2}$, δίνοντας έτσι τη ζητούμενη ανισότητα (7.3.2) με $c_\varepsilon = \tau^{-O(k^2)} = e^{O(1/\varepsilon^2)}$. □

Παρατήρηση 7.3.28. Η απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.2 μπορεί να απλοποιηθεί αρκετά αν κανείς θελήσει να αρκεστεί σε μια εμφύτευση με παραμόρφωση $e^{O(1/\varepsilon^2)}$ αντί της βέλτιστης $O(1/\varepsilon)$: Σε αυτή την περίπτωση δεν απαιτείται η επίκληση του Λήμματος 7.3.24, και άρα ούτε και του Θεωρήματος 7.2.3. Αυτό συμβαίνει καθώς η απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{S}$ που κατασκευάζουμε αρχικά στην απόδειξη του Λήμματος 7.3.26 είναι ήδη $\left(\frac{2}{1-3\tau}\tau^{-4k^2}, \tau^{-4k^2}\right)$-lacunary, οπότε από το Λήμμα 7.3.21 ο $(\partial\mathcal{S}_{r(T)}, d)$ εμφυτεύεται σε υπερμετρικό χώρο, με παραμόρφωση $\frac{2}{1-3\tau}\tau^{-4k^2} = e^{O(1/\varepsilon^2)}$. Σε αυτή την περίπτωση, μπορεί επίσης να απλοποιηθεί η απόδειξη της ανισότητας (7.3.24), θεωρώντας στην απόδειξη αντί της $\mathcal{S}$ μία άλλη απεικόνιση κατακερματισμού $\mathcal{R} : T^3 \to 2^X$, όπου T^3 το δέντρο που επάγεται από το T^1 στο σύνολο R, και $\mathcal{R} = \mathcal{F}|_{T^3}$. Η $\mathcal{R}$ είναι τότε και αυτή $\left(\frac{2}{1-3\tau}\tau^{-4k^2}, \tau^{-4k^2}\right)$-lacunary, και η απόδειξη τότε μπορεί να ολοκληρωθεί χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση βάρους w_R, χωρίς κανείς να χρειάζεται να ορίσει την w_S. Σε αντίθεση με την $\mathcal{S}$, η απεικόνιση $\mathcal{R}$ δεν είναι διαχωρισμένη, γι᾽ αυτό και δε θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί με το Λήμμα 7.3.24.

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης του Θεωρήματος 7.3.1 τώρα, θα χρειαστούμε ένα ακόμη Λήμμα. Δεδομένου ενός συνόλου X, μια συνάρτηση $\xi : 2^X \to [0,\infty)$ θα λέγεται *υπομέτρο* στο X αν ικανοποιεί τις

(α) $\xi(\emptyset) = 0$,

(β) Αν $A \subseteq B \subseteq X$, τότε $\xi(A) \leqslant \xi(B)$,

(γ) Αν $\{A_i\}_{i\in I} \subseteq X$, τότε $\xi\left(\bigcup_{i\in I} A_i\right) \leqslant \sum_{i\in I} \xi(A_i)$.

Αν επιπλέον $\xi(X) = 1$, τότε το ξ λέγεται υπομέτρο πιθανότητας.

Υπάρχουν υπομέτρα πιθανότητας που δεν κυριαρχούν κανένα μη μηδενικό μέτρο πιθανότητας (παθολογικά υπομέτρα). Το παρακάτω Λήμμα ωστόσο δείχνει ότι αν το ξ είναι ένα υπομέτρο πιθανότητας ορισμένο σε κάποιον υπερμετρικό χώρο, υπάρχει πάντα μέτρο πιθανότητας που κυριαρχείται από το ξ σε κάθε μπάλα του χώρου.

Λήμμα 7.3.29. *Έστω (U,ρ) ένας συμπαγής υπερμετρικός χώρος και $\xi : 2^U \to [0,\infty)$ ένα υπομέτρο πιθανότητας. Τότε υπάρχει Borel μέτρο πιθανότητας ν στον U τέτοιο ώστε, για κάθε $x \in U$ και κάθε $r \in [0,\infty)$,*

$$\nu\left(B_\rho(x,r)\right) \leqslant \xi\left(B_\rho(x,r)\right).$$

Απόδειξη. Έστω $\xi : 2^U \to [0,\infty)$ ένα υπομέτρο πιθανότητας και $\{\mathscr{P}_j\}_{j=0}^{\infty}$ η ακολουθία διαμερίσεων του U που περιγράφεται στην Πρόταση 7.1.4. Θέτουμε $\mathcal{S} = \bigcup_{j=0}^{\infty} \mathscr{P}_j \cup \{\emptyset\}$.

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι το $\mathcal{S}$ είναι ένας ημιδακτύλιος συνόλων. Πράγματι, $\emptyset \in \mathcal{S}$ και αν $A, B \in \mathcal{S}$ τότε και $A \cap B \in \mathcal{S}$, αφού $A \cap B \in \{\emptyset, A, B\}$. Μένει ακόμη να δείξουμε ότι για κάθε $A, B \in \mathcal{S}$ το σύνολο $B \setminus A$ μπορεί να γραφεί σαν πεπερασμένη ένωση ξένων συνόλων του $\mathcal{S}$. Έστω προς αυτό ότι $B \setminus A \neq \emptyset$, οπότε $A \subsetneq B$. Υποθέτουμε τότε ότι

$A \in \mathscr{P}_j$ και $B \in \mathscr{P}_i$ με $i < j$, και έστω $C_1, \dots, C_k \in \mathscr{P}_j$ τα ξένα στοιχεία της $\mathscr{P}_j$ για τα οποία ισχύει ότι $B = \bigcup_{i=1}^k C_i$. Μπορούμε τότε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $A = C_1$, οπότε $B \setminus A = \bigcup_{i=2}^k C_i$.

Ορίζουμε τώρα $\nu : \mathcal{S} \to [0, \infty)$ ως εξής: Θέτουμε $\nu(U) = 1$, $\nu(\emptyset) = 0$ και υποθέτουμε επαγωγικά ότι το ν έχει οριστεί στη διαμέριση $\mathscr{P}_j$. Για κάθε $C \in \mathscr{P}_{j+1}$, έστω $D \in \mathscr{P}_j$ το μοναδικό στοιχείο της $\mathscr{P}_j$ ώστε $C \subseteq D$. Τότε υπάρχουν ξένα μεταξύ τους $C_1, \dots, C_k \in \mathscr{P}_j$, με $C \in \{C_1, \dots, C_k\}$, τέτοια ώστε $D = \bigcup_{i=1}^k C_i$. Ορίζουμε

$$\nu(C) = \frac{\xi(C)}{\sum_{i=1}^k \xi(C_i)} \cdot \nu(D).$$

Σκοπός μας είναι να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή, ώστε να επεκτείνουμε το ν σε ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον U. Για να γίνει αυτό πρέπει να ελέγξουμε ότι αν $\{A_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \mathcal{S}$ είναι μια ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του $\mathcal{S}$ τέτοια ώστε $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{S}$, τότε $\nu(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} \nu(A_i)$. Λόγω συμπάγειας (το $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$ είναι μια μπάλα, άρα συμπαγής υπερμετρικός χώρος), αρκεί μάλιστα να δείξουμε ότι αν $A_1, \dots, A_m \in \mathcal{S}$ είναι ξένα ανά δύο και τέτοια ώστε $A_1 \cup \dots \cup A_m \in \mathcal{S}$, τότε $\nu(A_1 \cup \dots \cup A_m) = \sum_{i=1}^m \nu(A_i)$.

Η απόδειξη αυτού θα γίνει με επαγωγή στο m. Αν $m = 1$ τότε το ζητούμενο έπεται κατά τετριμμένο τρόπο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $m > 1$. Για κάθε $i \in \{1, \dots, m\}$ υπάρχει μοναδικό $k_i \in \mathbb{N}$ έτσι ώστε $A_i \in \mathscr{P}_{k_i - 1} \setminus \mathscr{P}_{k_i}$. Θέτουμε $k = \max\{k_1, \dots, k_m\}$. Αν $k = 1$, τότε είναι $m = 1$ και $A_1 = U$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $k > 1$, και σταθεροποιούμε $j \in \{1, \dots, m\}$ τέτοιο ώστε $k_j = k$. Έστω $D \in \mathscr{P}_{k-2}$ το μοναδικό στοιχείο της $\mathscr{P}_{k-2}$ για το οποίο ισχύει $A_j \subseteq D$, και έστω ότι $D = C_1 \cup \dots \cup C_l$, όπου $C_1, \dots, C_l$ ξένα μεταξύ τους στοιχεία της $\mathscr{P}_{k-1}$. Επειδή το σύνολο $A_1 \cup \dots \cup A_m \in \mathcal{S}$, είναι δηλαδή μια μπάλα που περιέχει το $A_j \subseteq D$, έπεται ότι

$$A_1 \cup \dots \cup A_m \supseteq D = C_1 \cup \dots \cup C_l.$$

Από τη μεγιστικότητα τότε του k έπεται ότι $A_j \in \{C_1, \dots, C_l\} \subseteq \{A_1, \dots, A_m\}$, καθώς και ότι $l \geqslant 2$. Για κάθε $i \in \{1, \dots, l\}$ έστω $n_i \in \{1, \dots, m\}$ αυτά για τα οποία $C_i = A_{n_i}$. Έχουμε τότε

$$\left(\bigcup_{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{n_1, \dots, n_l\}} A_i \right) \cup D = \bigcup_{i=1}^m A_i,$$

οπότε από την επαγωγική μας υπόθεση είναι

$$\sum_{i \in \{1, \dots, m\} \setminus \{n_1, \dots, n_l\}} \nu(A_i) + \nu(D) = \nu \left(\bigcup_{i=1}^m A_i \right).$$

Από τον ορισμό όμως του ν έχουμε $\nu(D) = \sum_{j=1}^l \nu(A_{n_j})$, οπότε

$$\sum_{i=1}^m \nu(A_i) = \nu(\bigcup_{i=1}^m A_i).$$

Μπορούμε λοιπόν πια να εφαρμόσουμε το Θεώρημα Επέκτασης του Καραθεοδωρή, επεκτείνοντας το ν σε ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον U που συμβολίζουμε και πάλι με ν. Μένει να ελέγξουμε με επαγωγή στο j ότι αν $C \in \mathscr{P}_j$, τότε $\nu(C) \leqslant \xi(C)$. Αν $j = 0$, τότε δεν είναι παρά $C = U$, και $\nu(U) = \xi(U) = 1$. Αν $j \geqslant 1$, τότε έστω D το μοναδικό στοιχείο της $\mathscr{P}_{j-1}$ για το οποίο $C \subseteq D$ και $C_1, \ldots, C_k$ τα ξένα στοιχεία της $\mathscr{P}_j$ για τα οποία ισχύει ότι $C \in \{C_1, \ldots, C_k\}$ και $D = C_1 \cup \ldots \cup C_k$. Επειδή το ξ είναι υπομέτρο, έχουμε τότε ότι

$$\xi(D) \leqslant \sum_{i=1}^{k} \xi(C_i).$$

Από την επαγωγική μας υπόθεση όμως έχουμε $\nu(D) \leqslant \xi(D)$, και από τον ορισμό του ν παίρνουμε τελικά

$$\nu(C) = \frac{\xi(C)}{\sum_{i=1}^{k} \xi(C_i)} \cdot \nu(D) \leqslant \xi(C) \cdot \frac{\xi(D)}{\sum_{i=1}^{k} \xi(C_i)} \leqslant \xi(C),$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.3.29, μπορούμε τώρα ορίζοντας ένα κατάλληλο υπομέτρο πιθανότητας στο σύνολο S του Θεωρήματος 7.3.2 να αποδείξουμε το Θεώρημα 7.3.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.1. Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος και μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον X. Από το Θεώρημα 7.3.2 υπάρχει συμπαγές $S \subseteq X$ που ικανοποιεί την (7.3.2) και μια υπερμετρική $\rho : S \times S \to [0, \infty)$ που ικανοποιεί την $d(x, y) \leqslant \rho(x, y) \leqslant \frac{K}{\varepsilon} d(x, y)$ για κάθε $x, y \in S$, όπου K απόλυτη σταθερά.

Για κάθε $A \subseteq S$ ορίζουμε

$$\xi(A) = \inf \left\{ \sum_{i \in I} \mu(B_d(x_i, c_\varepsilon r_i))^{1-\varepsilon} : \{(x_i, r_i)\}_{i \in I} \subseteq X \times [0, \infty) \wedge \bigcup_{i \in I} B_d(x_i, r_i) \supseteq A \right\},$$

όπου το το σύνολο δεικτών I στον παραπάνω ορισμό μπορεί να είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο. Εύκολα ελέγχεται ότι το ξ είναι ένα υπομέτρο στον S. Επιπλέον, για $x \in X$ και $r \in [0, \infty)$, θεωρώντας την $B_d(x, r)$ σαν κάλυμμα του εαυτού της, έπεται από τον ορισμό του ξ ότι

$$\xi(S \cap B_d(x, r)) \leqslant \mu(B_d(x, c_\varepsilon r))^{1-\varepsilon}.$$

Επειδή το μ είναι μέτρο πιθανότητας και η διάμετρος του X είναι φραγμένη, έπεται τότε ότι $\xi(S) \leqslant 1$. Από την (7.3.2) πάλι έπεται ότι $\xi(S) \geqslant 1$, άρα το ξ είναι ένα υπομέτρο πιθανότητας στον S.

Από την εφαρμογή του Λήμματος 7.3.29 στον (S, ρ, ξ) παίρνουμε ένα Borel μέτρο πιθανότητας ν στον S, που ικανοποιεί την $\nu(B_\rho(y, r)) \leqslant \xi(B_\rho(y, r))$ για κάθε $y \in S$ και κάθε $r \in [0, \infty)$. Έστω $x \in X$ και $r \in [0, \infty)$. Η (7.3.1) ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο αν $B_d(x, r) \cap S = \emptyset$, υποθέτουμε λοιπόν ότι υπάρχει $y \in S$ με $d(x, y) \leqslant r$. Τότε έχουμε

$$S \cap B_d(x, r) \subseteq S \cap B_d(y, 2r) \subseteq B_\rho\left(y, \frac{2K}{\varepsilon} r\right) \subseteq S \cap B_d\left(y, \frac{2K}{\varepsilon} r\right) \subseteq S \cap B_d\left(x, 1 + \frac{2K}{\varepsilon} r\right).$$

Έπεται έτσι ότι

$$\begin{aligned} \nu(B_d(x, r)) &\leqslant \nu\left(B_\rho\left(y, \frac{2K}{\varepsilon} r\right)\right) \leqslant \xi\left(B_\rho\left(y, \frac{2K}{\varepsilon} r\right)\right) \\ &\leqslant \xi\left(S \cap B_d\left(x, 1 + \frac{2K}{\varepsilon} r\right)\right) \leqslant \mu\left(B_d\left(x, c_\varepsilon\left(1 + \frac{2K}{\varepsilon}\right) r\right)\right)^{1-\varepsilon}, \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 7.3.1. □

7.4 Εφαρμογές

7.4.1 Πεπερασμένοι μετρικοί χώροι

Στην παράγραφο 6.2 ασχοληθήκαμε με το πρώτο μετρικό ανάλογο του κλασικού θεωρήματος του Dvoretzky που διατυπώθηκε και αποδείχθηκε το 1986.

Θεώρημα 7.4.1 (Bourgain-Figiel-Milman, 1986)**.** *Έστω $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $C(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε κάθε μετρικός χώρος (X, d) με $|X| = n$ έχει υποσύνολο Y με $|Y| \geqslant C(\varepsilon) \log n$, το οποίο εμφυτεύεται με παραμόρφωση $(1 + \varepsilon)$ σε χώρο Hilbert.*

Έχουμε δει επιπλέον (βλ. §6.2.1) ότι υπάρχουν $\varepsilon_0 > 0$ και $k \in (0, \infty)$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μετρικός χώρος (X_n, d) με $|X_n| = n$, κάθε υποσύνολο Y του οποίου, αν είναι πληθικότητας $|Y| \geqslant k \log n$, τότε εμφυτεύεται σε χώρο Hilbert με παραμόρφωση μεγαλύτερη ή ίση του $1 + \varepsilon_0$. Με άλλα λόγια, η λογαριθμική τάξη μεγέθους είναι η βέλτιστη δυνατή για τα πιθανά $(1 + \varepsilon)$-Ευκλείδεια υποσύνολα ενός τυχαίου μετρικού χώρου.

Το πρόβλημα λοιπόν, στην πλήρη γενικότητά του, είχε λυθεί εν τη γεννέσει του. Μετά από αρκετά χρόνια ωστόσο, άλλης φύσης προβλήματα από το χώρο της επιστήμης των υπολογιστών αναζωπυρώνουν το ενδιαφέρον για την εύρεση «μεγάλων» Ευκλείδειων υποσυνόλων ενός μετρικού χώρου. Από τη δουλειά των Bartal-Bollobás-Linial το 2002 αρχίζει να διαφαίνεται ότι το μέγεθος ενός τέτοιου υποσυνόλου μπορεί τελικά να είναι αρκετά μεγαλύτερο, αν αφήσει κανείς την παραμόρφωση της εμφύτευσης να απομακρυνθεί «αρκετά» από το 1.

Θεώρημα 7.4.2 (Bartal-Bollobás-Linial, 2002)**.** *Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία και $\beta > 1$. Τότε υπάρχει $Y \subseteq X$ με $|Y| \geqslant n^{1/\beta}$ τέτοιο ώστε ο (Y, d) εμφυτεύεται σε υπερμετρικό χώρο με παραμόρφωση $O(\log_\beta \log n)$.*

Η πιο σύγχρονη αυτή οπτική ενσωματώνει πλέον την χρήσιμη στις αλγοριθμικές εφαρμογές έννοια του υπερμετρικού χώρου, μια δομή που είναι όπως έχουμε δει ισομετρικά ισόμορφη με ένα χώρο Hilbert. Το ζήτημα πλέον είναι, πόσο μικρή μπορεί να γίνει η παραμόρφωση της εμφύτευσης, ώστε να επιτρέπει την εύρεση ενός πολυωνυμικά μεγάλου, υπερμετρικού υποσυνόλου ενός πεπερασμένου μετρικού χώρου; Με μια ντετερμινιστική κατασκευή, οι Bartal-Linial-Mendel-Naor βελτιώνουν στο [6] αυτό το άνω φράγμα.

Θεώρημα 7.4.3 (Bartal-Linial-Mendel-Naor, 2005)**.** *Για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε μετρικός χώρος με n σημεία έχει υποσύνολο πληθικότητας $n^{1-\varepsilon}$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση $O\left(\frac{\log(2/\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$ σε υπερμετρικό χώρο.*

Σύντομα το παραπάνω αποτέλεσμα βελτιώνεται περαιτέρω. Μπορούμε μάλιστα πλέον να πάρουμε σαν απλό πόρισμα του Θεωρήματος 7.3.1 το παρακάτω Θεώρημα.

Θεώρημα 7.4.4 (Mendel-Naor, 2007)**.** *Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$, κάθε μετρικός χώρος έχει υποσύνολο πληθικότητας τουλάχιστον $n^{1-\varepsilon}$ το οποίο εμφυτεύεται με παραμόρφωση $O(1/\varepsilon)$ σε υπερμετρικό χώρο.*

Απόδειξη. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία, και μ το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στον X. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7.3.1 στον μετρικό χώρο μέτρου (X, d, μ) παίρνουμε τον υπερμετρικό σκελετό $(S, d|_S, \nu)$. Ο $(S, d|_S)$ εμφυτεύεται λοιπόν με παραμόρφωση $O(1/\varepsilon)$ σε υπερμετρικό χώρο. Επιπλέον, επειδή το ν είναι ένα μέτρο πιθανότητας με φορέα το S, έχουμε ότι υπάρχει $x \in S$ τέτοιο ώστε $\nu(\{x\}) \geqslant 1/|S|$. Από την (7.3.1) τότε, θέτοντας $r = 0$, παίρνουμε

$$\frac{1}{|S|} \leqslant \nu(\{x\}) \leqslant \mu(\{x\})^{1-\varepsilon} = \left(\frac{1}{n}\right)^{1-\varepsilon},$$

δηλαδή $|S| \geqslant n^{1-\varepsilon}$. □

Παρατηρούμε ότι για την παραπάνω απόδειξη αρκεί μια ειδικότερη περίπτωση, για $r = 0$, του Θεωρήματος 7.3.1. Ας σημειώσουμε εδώ ότι στο [48] το Θεώρημα 7.4.4 αποδεικνύεται με πιθανοθεωρητικές μεθόδους δίνοντας μια παραμόρφωση αρκετά μεγάλη, της τάξης του $\frac{128}{\varepsilon}$. Το Θεώρημα 7.2.4 που έπεται χρονολογικά συμπληρώνει και αυτό το κενό, δίνοντας το ίδιο αποτέλεσμα για παραμόρφωση D οσοδήποτε κοντά στο 2 (αφήνοντας το $\varepsilon \to 1$), συγκεκριμένα

$$D = \frac{2}{\varepsilon(1-\varepsilon)^{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}}}.$$

Μπορεί κανείς να περιμένει κάτι καλύτερο, ή είναι βέλτιστα τα παραπάνω αποτελέσματα; Έστω $\mathcal{M}$ μια κλάση μετρικών χώρων. Συμβολίζουμε με $c_{\mathcal{M}}(X)$ την ελάχιστη παραμόρφωση με την οποία ο μετρικός χώρος X εμφυτεύεται σε κάποιο μετρικό χώρο της κλάσης $\mathcal{M}$. Θέτουμε έπειτα

$$R_{\mathcal{M}}(X, D) = \max\{|Y| : c_{\mathcal{M}}(Y) \leqslant D, Y \subseteq X\},$$

και $R_{\mathcal{M}}(D, n) = \inf\{R_{\mathcal{M}}(X, D) : |X| = n\}$, συμβολίζουμε δηλαδή με $R_{\mathcal{M}}(D, n)$ τον μεγαλύτερο ακέραιο m για τον οποίο κάθε μετρικός χώρος με n σημεία έχει υποσύνολο πληθικότητας m που εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε κάποιο στοιχείο του $\mathcal{M}$. Αφού κάθε υπερμετρικός χώρος εμφυτεύεται ισομετρικά σε χώρο Hilbert, παρατηρούμε ότι, αν συμβολίσουμε με UM την κλάση των υπερμετρικών χώρων και γράφουμε R_2 για $\mathcal{M} = \{\ell_2\}$,

$$R_{UM}(D, n) \leqslant R_2(D, n),$$

για κάθε $D > 1$ και $n \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 7.4.5 (Bartal-Linial-Mendel-Naor, 2005). *Για κάθε $D > 1$ υπάρχουν σταθερές $c(D), c'(D) > 0$ και $\delta(D), \delta'(D) \in (0, 1)$, τέτοιες ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

(α) Αν $D \in (1, 2)$, τότε $c(D) \log n \leqslant R_{UM}(D, n) \leqslant R_2(D, n) \leqslant c'(D) \log n$.

(β) Αν $D \in (2, \infty)$, τότε $n^{1-\delta(D)} \leqslant R_{UM}(D, n) \leqslant R_2(D, n) \leqslant n^{1-\delta'(D)}$.

Παρατηρούμε ότι το (α) του παραπάνω Θεωρήματος συμπληρώνει τη δουλειά των Bourgain-Figiel-Milman, εξασφαλίζοντας μάλιστα ότι η λογαριθμική τάξη μεγέθους είναι η βέλτιστη, για κάποιο D-Ευκλείδειο υποσύνολο μετρικού χώρου, για κάθε $D \in (1, 2)$. Από την άλλη, για κάθε παραμόρφωση μεγαλύτερη του 2 ένα τέτοιο υποσύνολο δε μπορεί να έχει πληθικότητα άνω του n^c, για κάποιο $c \in (0, 1)$.

Από το τελευταίο Θεώρημα φαίνεται ότι στο σημείο $D = 2$ έχουμε ένα φαινόμενο μετάβασης από λογαριθμική σε πολυωνυμική τάξη μεγέθους του μεγαλύτερου D-Ευκλείδειου υποσυνόλου που μπορεί να εξαχθεί από ένα μετρικό χώρο με n σημεία. Η ασυμπτωτική συμπεριφορά του μη-γραμμικού προβλήματος Dvoretzky όταν $D = 2$ παραμένει ωστόσο ακόμα άγνωστη.

7.4.2 Υπερμετρικά υποσύνολα μεγάλης Hausdorff διάστασης

Δεδομένου ενός μετρικού χώρου X, συμβολίζουμε παρακάτω με $\dim_H(X)$ τη διάσταση Hausdorff (βλ. Παράρτημα Β′.3) του X. Το 2006 ο Terrence Tao πρότεινε την εξής φυσιολογική παραλλαγή του μη γραμμικού προβλήματος Dvoretzky: Δεδομένων $a > 0$ και $D > 1$, ποιο είναι το supremum εκείνων των $\beta \geqslant 0$ που έχουν την ιδιότητα «Κάθε μετρικός χώρος X με $\dim_H(X) \geqslant a$ έχει υποσύνολο Y με $Y \geqslant \beta$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε χώρο Hilbert»; Περιοριζόμενοι στην κλάση των συμπαγών μετρικών χώρων, το Θεώρημα 7.3.1 μπορεί να δώσει και εδώ μία απάντηση.

Θεώρημα 7.4.6 (Mendel-Naor, 2010). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $\varepsilon \in (0, 1)$ και $a > 0$, κάθε μετρικός χώρος X με $\dim_H(X) \geqslant a$ έχει κλειστό υποσύνολο $S \subseteq X$ με $\dim_H(S) \geqslant (1 - \varepsilon)a$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση C/ε σε υπερμετρικό χώρο.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon \in (0, 1)$, $a > 0$ και συμπαγής μετρικός χώρος (X, d) με $\dim_H(X) \geqslant a > 0$. Υπάρχει τότε $s \in (0, \infty)$ ώστε $\mathcal{H}^s(X) > 0$, οπότε από το Λήμμα του Frostman (βλ. Θεώρημα Β′.4.3) μπορούμε να βρούμε ένα Borel μέτρο πιθανότητας μ στον X και σταθερά $K > 0$ έτσι ώστε

$$\mu(B(x, r)) \leqslant K r^a$$

για $r \in (0,\infty)$ και $x \in X$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7.3.1 στον μετρικό χώρο πιθανότητας (X,d,μ) παίρνουμε τον υπερμετρικό σκελετό (S,ν), και αν $\{B(x_i,r_i)\}_{i=1}^{\infty}$ είναι μια οικογένεια μπαλών που καλύπτουν το S, έχουμε

$$\begin{aligned} 1 = \nu(S) &\leqslant \nu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B(x_i,r_i)\right) \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \nu(B(x_i,r_i)) \\ &\leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \mu(B(x_i,C_\varepsilon r_i))^{1-\varepsilon} \leqslant K^{1-\varepsilon} C_\varepsilon^{(1-\varepsilon)a} \sum_{i=1}^{\infty} r_i^{(1-\varepsilon)a}, \end{aligned}$$

άρα

$$\sum_{i=1}^{\infty} r_i^{(1-\varepsilon)a} \geqslant \frac{1}{K^{1-\varepsilon} C_\varepsilon^{(1-\varepsilon)a}} > 0.$$

Έπεται ότι $\mathcal{H}^{(1-\varepsilon)a}(S) \geqslant \mathcal{H}_\infty^{(1-\varepsilon)a}(S) > 0$, οπότε $\dim_H(S) = \sup\{s : \mathcal{H}^s(S) > 0\} \geqslant (1-\varepsilon)a$. $\square$

Αποδεικνύεται επίσης ότι το Θεώρημα 7.4.6 δίνει την καλύτερη εκτίμηση για το μέγεθος της Hausdorff διάστασης ενός «σχεδόν υπερμετρικού» υποσυνόλου ενός μετρικού χώρου, υπό την ακόλουθη έννοια.

Θεώρημα 7.4.7. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $a > 0$ υπάρχει συμπαγής μετρικός χώρος X_a με $\dim_H(X_a) = a$ έτσι ώστε, αν για κάποιο $S \subseteq X$ ισχύει ότι $\dim_H(S) \geqslant (1-\varepsilon)a$, τότε το S μπορεί να εμφυτευθεί με παραμόρφωση τουλάχιστον ίση με c/ε σε χώρο Hilbert.*

Στο [6] αποδεικνύεται ότι υπάρχει $c > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχει μετρικός χώρος με n σημεία X_n τέτοιος ώστε για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$, κάθε υποσύνολο Y του X με $|Y| \geq n^{1-\varepsilon}$ εμφυτεύεται σε χώρο Hilbert με παραμόρφωση τουλάχιστον c/ε (βλ. και Θεώρημα 7.4.5(β)). Οι μετρικοί χώροι X_n είναι στην πραγματικότητα expanders (με τη μετρική του συντομότερου μονοπατιού). Ισχύει τότε ότι $\operatorname{diam}(X_n) \leq C\log n$, για κάποιο $C > 0$ (βλ. [27]). Δεδομένου $a > 0$ μπορούμε να βρούμε $n \geq 2$ τέτοιο ώστε $n^{1/a} > C\log n$, οπότε $\operatorname{diam}(X_n) < n^{1/a}$. Οι Mendel και Naor δείχνουν στο [53] ότι σε αυτή την περίπτωση υπάρχει συμπαγής μετρικός χώρος (Y,ρ) με $\dim_H(Y) = \log_{n^{1/a}} n = a$, τέτοιος ώστε, για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$, κάθε υποσύνολο Z του Y που εμφυτεύεται με παραμόρφωση c/ε σε χώρο Hilbert ικανοποιεί την $\dim_H(Z) \leq \log_{n^{1/a}}(n^{1-\varepsilon}) = (1-\varepsilon)a$.

7.4.3 Majorising measures

Χρησιμοποιούμε παρακάτω το συμβολισμό $a \lesssim b$ αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ έτσι ώστε $a \leqslant C \cdot b$, και $a \asymp b$ αν $a \lesssim b$ και $a \gtrsim b$. Μια οικογένεια τυχαίων μεταβλητών $\mathcal{G} = \{G_x\}_{x\in X}$ σε ένα χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{A},\mathbb{P})$ λέμε ότι είναι μια (κεντραρισμένη) *γκαουσιανή ανέλιξη* αν κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός $\sum_{i=1}^{n} a_i G_{x_i}$ στοιχείων της $\mathcal{G}$ είναι μια κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0. Στο σύνολο δεικτών X μπορούμε τότε να ορίσουμε τη μετρική

$$d(x,y) = \left(\mathbb{E}[(G_x - G_y)^2]\right)^{1/2}.$$

Διαφαίνεται ότι η μετρική αυτή καθορίζει κατά κάποιο τρόπο το μέγεθος της ποσότητας $\mathbb{E}[\sup_{x\in X} G_x]$: Για παράδειγμα, σύμφωνα με το Λήμμα του Slepian (βλ. [19], [67]), αν $\{G_x\}_{x\in X}$ και $\{H_x\}_{x\in X}$ είναι δύο γκαουσιανές ανελίξεις τέτοιες ώστε

$$\left(\mathbb{E}[(G_x - G_y)^2]\right)^{1/2} \asymp \left(\mathbb{E}[(H_x - H_y)^2]\right)^{1/2}$$

για κάθε $x, y \in X$, τότε $\mathbb{E}[\sup_{x\in X} G_x] \asymp \mathbb{E}[\sup_{x\in X} H_x]$.

Συμβολίζουμε παρακάτω με $\mathcal{P}_X$ την οικογένεια των Borel μέτρων πιθανότητας στον μετρικό χώρο (X,d), και ορίζουμε την ποσότητα

$$\gamma_2(X,d) = \inf_{\mu\in\mathcal{P}_X} \sup_{x\in X} \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)}\, dr.$$

Σύμφωνα με ένα θεώρημα του Fernique [19], για κάθε γκαουσιανή ανέλιξη $\{G_x\}_{x\in X}$, ισχύει ότι

$$\mathbb{E}[\sup_{x\in X} G_x] \lesssim \gamma_2(X,d).$$

Επιπλέον, ο ίδιος διατύπωσε την εικασία ότι και το αντίστροφο ισχύει. Μάλιστα ο Fernique έδειξε πως $\gamma_2(U,\rho) \lesssim \mathbb{E}[\sup_{x\in U} G_x]$, αν ο (U,ρ) είναι ένας υπερμετρικός χώρος (βλ. [20], [67]). Από το Λήμμα του Slepian τότε, το ίδιο ισχύει και στην περίπτωση που ο μετρικός χώρος X μπορεί να εμφυτευθεί με παραμόρφωση $O(1)$ σε υπερμετρικό.

Η συμπλήρωση της δουλειάς του Fernique ήρθε 12 χρόνια αργότερα από τον Talagrand [67], ο οποίος έδειξε ότι το παραπάνω είναι αλήθεια για κάθε μετρικό χώρο X, οπότε $\gamma_2(X,d) \asymp \mathbb{E}[\sup_{x\in X} G_x]$. Θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω το Θεώρημα 7.3.1 για να φτάσουμε στο ίδιο συμπέρασμα. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 7.4.8. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c, D \in (0,\infty)$ τέτοιες ώστε κάθε πεπερασμένος μετρικός χώρος (X,d) έχει υποσύνολο $S \subseteq X$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση D σε υπερμετρικό χώρο, και επιπλέον*

$$\gamma_2(S,d) \geqslant c \cdot \gamma_2(X,d).$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.4.8 θα ορίσουμε επιπλέον, κατ' αντιστοιχία με το $\gamma_2(X,d)$, την ποσότητα

$$\delta_2(X,d) = \sup_{\mu\in\mathcal{P}_X} \inf_{x\in X} \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)}\, dr.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο Λήμμα, την απόδειξη του οποίου αναβάλλουμε για το τέλος του εδαφίου.

Λήμμα 7.4.9. *Ισχύει ότι* $\gamma_2(X,d) \leqslant \delta_2(X,d)$. *Επιπλέον, ισχύει η ισότητα, στην περίπτωση που ο* (X,d) *είναι υπερμετρικός χώρος.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.4.8. Έστω $\mu \in \mathcal{P}_X$ το μέτρο για το οποίο έχουμε

$$\delta_2(X,d) = \inf_{x\in X} \int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B(x,r))}\right)}\,dr.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.3.1 στον μετρικό χώρο πιθανότητας (X,d,μ) και βρίσκουμε έτσι ένα $S \subseteq X$ για το οποίο υπάρχει α) μια υπερμετρική $\rho : S\times S \to [0,\infty)$ τέτοια ώστε, για κάθε $x,y \in S$,

$$d(x,y) \leqslant \rho(x,y) \leqslant D\cdot d(x,y),$$

και β) ένα μέτρο πιθανότητας $\nu \in \mathcal{P}_s$ με $\nu(B(x,r)) \leq (\mu(B(x,Cr)))^{1/2}$, για κάθε $(x,r) \in X\times[0,\infty)$, για μια σταθερά $C = C(D) > 0$. Για κάθε $(x,r) \in S\times[0,\infty)$ ισχύει ότι $B_\rho(x,r) \subseteq B_d(x,r)\cap S \subseteq B_\rho(x,Dr)$, άρα, από το Λήμμα 7.4.9,

$$\delta_2(S,d) \leqslant \delta_2(S,\rho) = \gamma_2(S,\rho) \leqslant D\cdot\gamma_2(S,d).$$

Έχουμε έτσι,

$$\begin{aligned}
D\cdot\gamma_2(S,d) \geqslant \delta_2(S,d) &\geqslant \inf_{x\in S}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\nu(B_d(x,r))}\right)}\,dr \\
&\geqslant \inf_{x\in S}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\sqrt{\mu(B_d(x,Cr))}}\right)}\,dr \\
&= \frac{1}{C\sqrt{2}}\inf_{x\in S}\int_0^\infty \sqrt{\log\left(\frac{1}{\mu(B_d(x,r))}\right)}\,dr = \frac{\delta_2(X,d)}{C\sqrt{2}} \geqslant \frac{\gamma_2(X,d)}{C\sqrt{2}}, \qquad (7.4.1)
\end{aligned}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Μένει τώρα να δείξουμε το Λήμμα.

Απόδειξη του Λήμματος 7.4.9. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο από το ζητούμενο: Αν $\phi : (0,\infty) \to [0,\infty)$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση, ορίζουμε

$$\gamma_\phi(X,d) = \inf_{\mu\in\mathcal{P}_X}\sup_{x\in X}\int_0^\infty \phi(\mu(B(x,r))\,dr$$

και

$$\delta_\phi(X,d) = \sup_{\mu\in\mathcal{P}_X}\inf_{x\in X}\int_0^\infty \phi(\mu(B(x,r))\,dr.$$

Παρατηρήστε ότι $\gamma_\phi \equiv \gamma_2$ και $\delta_\phi \equiv \delta_2$, όταν $\phi(x) = (1/\log x)^{1/2}$.

Βήμα 1ο: Αν η ϕ είναι συνεχής και $\lim_{x\to 0^+}\phi(x)=\infty$, τότε $\delta_\phi(X,d)\geqslant\gamma_\phi(X,d)$.

Έστω $X=\{x_1,\dots,x_n\}$. Τότε το $\mathcal{P}_X$ μπορεί να ταυτιστεί με το $(n-1)$-διάστατο simplex $\Delta_{n-1}=\{(\mu_1,\dots,\mu_n)\in[0,1]^n:\mu_1+\ldots+\mu_n=1\}$ (θέτοντας $\mu(\{x_i\})=\mu_i$). Οριζουμε $f_1,\dots,f_n:\Delta_{n-1}\to[0,\infty)$ με

$$f_i(\mu)=\begin{cases}0, & \text{αν } \mu_i=0,\\ \left(1+\int_0^\infty\phi(\mu(B(x_i,r)))\,dr\right)^{-1}, & \text{αν } \mu_i>0.\end{cases}$$

Γράφουμε τέλος $S(\mu)=\sum_{i=1}^n f_i(\mu)$, και ορίζουμε $F:\Delta_{n-1}\to\Delta_{n-1}$ με

$$F(\mu)=\frac{1}{S(\mu)}(f_1(\mu),\dots,f_n(\mu)).$$

Από τις υποθέσεις μας για την ϕ, οι f_i είναι συνεχείς στο Δ_{n-1}. Εφ' όσον κάθε $\mu\in\Delta_{n-1}$ έχει τουλάχιστον μία θετική συντεταγμένη, ισχύει ότι $S(\mu)>0$, άρα και η F είναι συνεχής. Μπορούμε επίσης να δούμε ότι η F απεικονίζει κάθε έδρα του Δ_{n-1} στον εαυτό της, οπότε ισχύει (βλ. [24], $4.29\frac{1}{2}{}_+$) ότι $F(\Delta_{n-1})=\Delta_{n-1}$. Συγκεκριμένα υπάρχει $\mu\in\Delta_{n-1}$ για το οποίο $F(\mu)=(1/n,\dots,1/n)$. Με άλλα λόγια, υπάρχει $\mu\in\mathcal{P}_X$ τέτοιο ώστε η ποσότητα $\int_0^\infty\phi(\mu(B(x,r)))\,dr$ να μην εξαρτάται από το $x\in X$. Έπεται τότε ότι

$$\delta_\phi(X,d)\geqslant\inf_{x\in X}\int_0^\infty\phi(\mu(B(x,r)))\,dr=\sup_{x\in X}\int_0^\infty\phi(\mu(B(x,r)))\,dr\geqslant\gamma_\phi(X,d).$$

Βήμα 2ο: Υποθέτουμε ότι η ϕ είναι φθίνουσα, και ο (U,ρ) ένας υπερμετρικός χώρος. Τότε

$$\delta_\phi(U,\rho)\leqslant\gamma_\phi(U,\rho).$$

Ισχυριζόμαστε ότι αν μ, ν είναι μη-αρνητικά μέτρα στον U τέτοια ώστε $\mu(U)\leqslant\nu(U)$, τότε υπάρχει $a\in U$ για το οποίο $\mu(B(a,r))\leqslant\nu(B(a,r))$, για κάθε $r>0$. Αυτό δείχνει το ζητούμενο, γιατί αν τα μ, ν επιλεχθούν έτσι ώστε

$$\gamma_\phi(U,\rho)=\sup_{x\in X}\int_0^\infty\phi(\mu(B(x,r))\,dr$$

και

$$\delta_\phi(U,\rho)=\inf_{x\in X}\int_0^\infty\phi(\nu(B(x,r))\,dr,$$

τότε

$$\gamma_\phi(U,\rho)\geqslant\int_0^\infty\phi(\mu(B(a,r))\,dr\geqslant\int_0^\infty\phi(\nu(B(a,r))\,dr\geqslant\delta_\phi(U,\rho).$$

Ο ισχυρισμός μας θα αποδειχθεί με επαγωγή στο πλήθος των στοιχείων $|U|$. Αν $|U|=1$ τότε δεν έχουμε κάτι να δείξουμε, ενώ στη μη-τετριμμένη περίπτωση υποθέτουμε ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε υποσύνολο του $|U|$, και εκμεταλλευόμαστε τη δομή του υπερμετρικού χώρου: Μπορούμε να βρούμε $x_1, \dots, x_k \in U$ τέτοια ώστε οι μπάλες $\{B(x_i, \mathrm{diam}(U))\}_{i=1}^k$ να είναι μια διαμέριση του U. Έπεται ότι

$$\sum_{i=1}^{k} \mu(B(x_i, \mathrm{diam}(U))) = \mu(U) \leqslant \nu(U) = \sum_{i=1}^{k} \nu(B(x_i, \mathrm{diam}(U))).$$

Συνεπώς, υπάρχει $j \in \{1, \dots, k\}$ τέτοιο ώστε $\mu(B(x_x, \mathrm{diam}(U))) \leqslant \nu(B(x_j, \mathrm{diam}(U)))$. Από την επαγωγική υπόθεση τότε, υπάρχει $a \in B(x_j, \mathrm{diam}(U))$ τέτοιο ώστε $\mu(B(a,r)) \leqslant \nu(B(a,r))$ για κάθε $r > 0$. Η απόδειξη του Λήμματος έχει έτσι ολοκληρωθεί, αφού για $r \geqslant \mathrm{diam}(U)$ έχουμε $B(a,r) = U$. □

Παρατήρηση 7.4.10. Για $n \in \mathbb{N}$ συμβολίζουμε $[n+1] = \{0, 1, \dots, n\}$. Αν θεωρήσουμε τη μετρική «άστρο» d_n στο $[n+1]$ (δηλαδή $d_n(0,i) = 1$ για κάθε $i \neq 0$ και $d_n(p,q) = 2$, για κάθε μη-μηδενικά p, q με $p \neq q$), τότε ισχύει ότι $\delta_2([n+1], d_n) \geq 2\sqrt{\log n}$: Αρκει να θεωρήσουμε το μέτρο ν που δίνει $\nu(\{0\}) = 0$ και $\nu(\{i\}) = 1/n$, για κάθε $i \neq 0$. Ταυτόχρονα, το μέτρο μ με $\mu(\{0\}) = 1/2$ και $\mu(\{i\}) = 1/(2n)$ για κάθε $i \neq 0$ μας δίνει

$$\gamma_2([n+1], d_n) \leqslant \sqrt{\log(2n)} + \sqrt{\log(2n/(n+1))} < 2\sqrt{\log n},$$

για n αρκετά μεγάλο (πχ $n \geqslant 2^4$). Έχουμε τότε ότι $\gamma_2([n+1], d_n) < \delta_2([n+1], d_n)$, και άρα δεν ισχύει γενικά η ισότητα στο Λήμμα 7.4.9. Μπορούμε ωστόσο να δείξουμε ότι $\delta_2(X,d) \lesssim \gamma_2(X,d)$, οπότε οι ποσότητες $\gamma_2(X,d) \asymp \delta_2(X,d)$: Είναι εύκολο (βλ. [67] Λήμμα 6) να δούμε ότι $\gamma_2(S,d) \leqslant 2\gamma_2(X,d)$, οπότε το ζητούμενο έπεται από την (7.4.1).

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Α′

Συγκέντρωση του μέτρου στον διακριτό κύβο

Α′.1 Η ανισότητα του Talagrand

Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1, 1\}^n$, το οποίο ταυτίζουμε με το σύνολο των κορυφών του κύβου $Q_n = [-1, 1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Στο E_2^n ορίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ_n που δίνει μάζα 2^{-n} σε κάθε σημείο. Για κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ θέτουμε

$$\phi_A(x) = \inf\{\|x - y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A)\}. \tag{Α′.1.1}$$

Το βασικό θεώρημα αυτής της παραγράφου είναι το εξής.

Θεώρημα Α′.1.1 (Talagrand). *Για κάθε $A \subseteq E_2^n$,*

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}. \tag{Α′.1.2}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς το πλήθος των σημείων του A. Αν $\mathrm{card}(A) = 1$ δηλαδή $A = \{y\}$, τότε

$$\phi_A(x) = \inf\{\|x - z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A) = \{y\}\} = \|x - y\|_2. \tag{Α′.1.3}$$

Άρα,

$$\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) = \mathbb{E}\left(e^{\|x-y\|_2^2/8}\right) = \frac{1}{2^n}\sum_{x\in E_2^n} e^{\|x-y\|_2^2/8}. \tag{Α′.1.4}$$

Κάθε $x \in E_2^n$ διαφέρει από το y σε i θέσεις, $i = 0, 1, \dots, n$. Το πλήθος των $x \in E_2^n$ που διαφέρουν σε ακριβώς i θέσεις από το y είναι $\binom{n}{i}$. Παρατηρούμε ότι $\|x - y\|_2^2 = 4i$ όταν το x διαφέρει απο το y σε i θέσεις. Άρα,

$$\text{(A'.1.5)} \qquad \begin{aligned} \mathbb{E}e^{\|x-y\|_2^2/8} &= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}e^{i/2} = \frac{1}{2^n}\left(1 + e^{1/2}\right)^n \\ &= \left(\frac{1+e^{1/2}}{2}\right)^n \leqslant 2^n = \frac{1}{\mu_n(A)}, \end{aligned}$$

αφού $e^{1/2} \leqslant e \leqslant 3$.

Έστω τώρα ότι $\mathrm{card}(A) \geqslant 2$. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $n = 1$. Αναγκαστικά έχουμε $A = E_1$, επομένως $\phi_A(x) = 0$ για κάθε $x \in E_1$. Άρα,

$$\text{(A'.1.6)} \qquad \mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) = \mathbb{E}(e^0) = 1 = 1/\mu_1(A).$$

Για το επαγωγικό βήμα θεωρούμε $A \subseteq E_{n+1}$ με $\mathrm{card}(A) \geqslant 2$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\text{(A'.1.7)} \qquad A = (A_1 \times \{1\}) \cup (A_{-1} \times \{-1\})$$

όπου $A_1, A_{-1} \neq \emptyset$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $\mathrm{card}(A_{-1}) \leqslant \mathrm{card}(A_1)$.

Λήμμα A'.1.2. *Για κάθε $x \in E_2^n$,*

$$\text{(A'.1.8)} \qquad \phi_A((x,1)) \leqslant \phi_{A_1}(x).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\text{(A'.1.9)} \qquad \{\|x-y\|_2 : y \in \mathrm{conv}(A_1)\} \subseteq \{\|(x,1) - z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A)\}.$$

Έστω $y \in \mathrm{conv}(A_1)$. Τότε, $y = \sum_{i=1}^m t_i x_i$ όπου $t_i \geqslant 0$ με $\sum_{i=1}^m t_i = 1$ και $x_i \in A_1$. Τότε όμως $(x_i, 1) \in A$ και

$$\text{(A'.1.10)} \qquad \sum_{i=1}^m t_i(x_i, 1) = \Big(\sum_{i=1}^m t_i x_i, \sum_{i=1}^m t_i\Big) = (y, 1),$$

δηλαδή $(y,1) \in \mathrm{conv}(A)$. Αφού $\|x - y\|_2 = \|(x,1) - (y,1)\|_2$ και

$$\text{(A'.1.11)} \qquad \|(x,1) - (y,1)\|_2 \in \{\|(x,1) - z\|_2 : z \in \mathrm{conv}(A)\},$$

έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα A'.1.3. *Για κάθε $x \in E_2^n$ και για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$,*

$$\text{(A'.1.12)} \qquad \phi_A^2((x,-1)) \leqslant 4a^2 + a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x).$$

Απόδειξη. Έστω $z_i \in \mathrm{conv}(A_i)$ $(i = 1, -1)$. Τότε, όπως προηγουμένως, $(z_i, i) \in \mathrm{conv}(A)$. Το $\mathrm{conv}(A)$ είναι κυρτό, άρα

$$z := a(z_1, 1) + (1-a)(z_{-1}, -1) = (az_1 + (1-a)z_{-1}, 2a-1) \in \mathrm{conv}(A). \tag{Α′.1.13}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} \|(x,-1) - z\|_2^2 &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, -2a)\|_2^2 \\ &= \|(x - az_1 - (1-a)z_{-1}, 0)\|_2^2 + \|(0, -2a)\|_2^2 \\ &\leqslant \left(a\|x - z_1\|_2 + (1-a)\|x - z_{-1}\|_2\right)^2 + 4a^2 \\ &\leqslant a\|x - z_1\|_2^2 + (1-a)\|x - z_{-1}\|_2^2 + 4a^2. \end{aligned} \tag{Α′.1.14}$$

Αφού τα $z_i \in \mathrm{conv}(A_i)$ ήταν τυχόντα, έπεται ότι

$$\phi_A^2(x, -1) \leqslant a\phi_{A_1}^2(x) + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x) + 4a^2. \tag{Α′.1.15}$$

□

Χρησιμοποιώντας τα δύο Λήμματα, γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_{n+1}} e^{\phi_A^2(x)/8} \\ &= \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_A^2((x,1))/8} + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_A^2((x,-1))/8} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} + \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \sum_{x \in E_n} e^{a\phi_{A_1}^2(x)/8 + (1-a)\phi_{A_{-1}}^2(x)/8} \\ &\leqslant \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8} \\ &\quad + \frac{1}{2^{n+1}} e^{a^2/2} \left(\sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_1}^2(x)/8}\right)^a \left(\sum_{x \in E_n} e^{\phi_{A_{-1}}^2(x)/8}\right)^{1-a} \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8}) + \frac{1}{2} e^{a^2/2} \left(\mathbb{E}(e^{\phi_{A_1}^2/8})\right)^a \left(\mathbb{E}(e^{\phi_{A_{-1}}^2/8})\right)^{1-a}. \end{aligned} \tag{Α′.1.16}$$

Θέτουμε

$$u_1 = \mathbb{E}\left(e^{\phi_{A_1}^2/8}\right) \quad , \quad v_1 = \frac{1}{\mu_n(A_1)} \tag{Α′.1.17}$$

και

$$u_{-1} = \mathbb{E}\left(e^{\phi_{A_{-1}}^2/8}\right) \quad , \quad v_{-1} = \frac{1}{\mu_n(A_{-1})}. \tag{Α′.1.18}$$

Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $u_1 \leqslant v_1$ και $u_{-1} \leqslant v_{-1}$ (επίσης, η $\mathrm{card}(A_{-1}) \leqslant \mathrm{card}(A_1)$ γράφεται $v_1 \leqslant v_{-1}$). Άρα η προηγούμενη ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} \mathbb{E}e^{\phi_A^2/8} &\leqslant \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(u_1)^a(u_{-1})^{1-a} \\ &\leqslant \frac{1}{2}u_1 + \frac{1}{2}e^{a^2/2}(v_1)^a(v_{-1})^{1-a} \\ &\leqslant \frac{v_1}{2}[1 + e^{a^2/2}(v_1/v_{-1})^{a-1}]. \end{aligned} \tag{A'.1.19}$$

Η τελευταία ποσότητα γίνεται ελάχιστη για $a = -\ln(v_1/v_{-1})$. Η τιμή $-\ln(v_1/v_{-1})$ είναι περίπου ίση με $1-v_1/v_{-1}$. Επιλέγουμε $a_0 = 1-v_1/v_{-1}$. Αφού $v_1 \leqslant v_{-1}$ έχουμε $0 \leqslant a_0 \leqslant 1$, οπότε μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \leqslant \frac{v_1}{2}[1 + e^{a_0^2/2}(1-a_0)^{a_0-1}]. \tag{A'.1.20}$$

Λήμμα A′.1.4. *Για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$ έχουμε*

$$1 + e^{a^2/2}(1-a)^{a-1} \leqslant \frac{4}{2-a}. \tag{A'.1.21}$$

Απόδειξη. Απλές πράξεις δείχνουν ότι η ανισότητα που ζητάμε είναι ισοδύναμη με την

$$g(a) = \ln(2+a) - \ln(2-a) - a^2/2 - (a-1)\ln(1-a) \geqslant 0. \tag{A'.1.22}$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι $g'' \geqslant 0$ και $g'(0) = 0$. Άρα η g είναι αύξουσα στο $[0,1]$. Αφού $g(0) = 0$, έπεται το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα A′.1.4 έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) &\leqslant \frac{v_1}{2}\frac{4}{2-a_0} = \frac{2v_1}{1+v_1/v_{-1}} \\ &= \frac{2}{1/v_1 + 1/v_{-1}} = \frac{2}{\mu_n(A_1)+\mu_n(A_{-1})} \\ &= \frac{1}{\mu_{n+1}(A)}. \end{aligned} \tag{A'.1.23}$$

Η τελευταία ισότητα είναι φανερή αφού $\mu_{n+1}(A_i \times \{i\}) = \mu_n(A_i)/2$, $i = \pm 1$. Έτσι ολοκληρώνονται το επαγωγικό βήμα και η απόδειξη του Θεωρήματος A′.1.1. □

Πόρισμα A′.1.5. *Για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(\phi_A \geqslant t) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}e^{-t^2/8}. \tag{A'.1.24}$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα Α′.1.1 έχουμε $\mathbb{E}\exp(\phi_A^2/8) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}$. Άρα,

$$\text{(Α′.1.25)} \qquad \begin{aligned} e^{t^2/8}\mu_n(\phi_A \geqslant t) &\leqslant \int_{\{\phi_A \geqslant t\}} e^{t^2/8} \leqslant \int_{\{\phi_A \geqslant t\}} e^{\phi_A^2/8} \\ &\leqslant \mathbb{E}(e^{\phi_A^2/8}) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)}. \end{aligned}$$

Έστω A ένα μη κενό υποσύνολο του E_2^n. Η συνάρτηση ϕ_A του Θεωρήματος Α′.1.1 και η συνάρτηση απόστασης από το A

$$\text{(Α′.1.26)} \qquad d_n(x,A) = \min\left\{ \frac{1}{2n}\sum_{i=1}^n |x_i - y_i| : y \in A \right\}$$

συγκρίνονται σύμφωνα με το επόμενο λήμμα.

Λήμμα Α′.1.6. *Για κάθε μη κενό $A \subseteq E_2^n$ έχουμε*

$$\text{(Α′.1.27)} \qquad 2\sqrt{n}d_n(x,A) \leqslant \phi_A(x) \quad , \quad x \in E_2^n.$$

Απόδειξη. Έστω $x \in E_2^n$. Για κάθε $y \in A$ ισχύει

$$\text{(Α′.1.28)} \qquad \langle x-y, x\rangle = \sum_{i=1}^n x_i(x_i - y_i) = 2nd_n(x,y) \geqslant 2nd_n(x,A).$$

Από την (Α′.1.28) έπεται ότι γιά κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$

$$\text{(Α′.1.29)} \qquad \sqrt{n}\|x-y\|_2 \geqslant \langle x-y,x\rangle \geqslant 2nd_n(x,A).$$

Αυτό αποδεικνύει την (Α′.1.27). □

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα δείχνουμε την προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον E_2^n:

Θεώρημα Α′.1.7. *Έστω $A \subseteq E_2^n$ με $\mu_n(A) = 1/2$. Τότε, γιά κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\text{(Α′.1.30)} \qquad \mu_n(A_t) \geqslant 1 - 2\exp(-t^2n/2).$$

Απόδειξη. Αν $x \notin A_t$, τότε $d_n(x,A) \geqslant t$ και το Λήμμα Α′.1.6 δείχνει ότι $\phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}$.
Ομως, από το Θεώρημα Α′.1.1 έχουμε

$$\text{(Α′.1.31)} \qquad e^{t^2n/2}\mu_n(x : \phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}) \leqslant \int_{E_2^n} \exp(\phi_A^2(x)/8)d\mu_n(x) \leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} = 2,$$

το οποίο σημαίνει ότι

$$\text{(Α′.1.32)} \qquad \mu_n(A_t^c) \leqslant \mu_n(x : \phi_A(x) \geqslant 2t\sqrt{n}) \leqslant 2\exp(-t^2n/2).$$

□

Το Θεώρημα Α′.1.7 έχει σαν συνέπεια την συγκέντρωση των κυρτών Lipschitz συναρτήσεων γύρω από τον μέσο Lévy τους.

Θεώρημα Α′.1.8. *Θεωρούμε μια κυρτή Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με σταθερά Lipschitz σ. Έστω M ένας μέσος Lévy της f στον E_2^n. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(\{|f - M| \geqslant t\}) \leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{Α′.1.33}$$

Απόδειξη. Για τον M ισχύουν οι $\mu_n(\{f \geqslant M\}) \geqslant 1/2$ και $\mu_n(\{f \leqslant M\}) \geqslant 1/2$.

Θέτουμε $A = \{f \leqslant M\}$. Αφού η f είναι κυρτή, για κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$ έχουμε $f(y) \leqslant M$. Αν λοιπόν $f(x) \geqslant M + t$ για κάποιο $x \in E_2^n$, τότε

$$f(x) \geqslant M + t \geqslant f(y) + t \tag{Α′.1.34}$$

για κάθε $y \in \mathrm{conv}(A)$. Άρα, $\sigma\|x - y\|_2 \geqslant |f(x) - f(y)| \geqslant t$. Αυτό σημαίνει ότι

$$\phi_A(x) \geqslant t/\sigma. \tag{Α′.1.35}$$

Από το Πόρισμα Α′.1.5 και από την $\mu_n(A) \geqslant 1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f \geqslant M + t\}) &\leqslant \mu_n(\{\phi_A \geqslant t/\sigma\}) \\ &\leqslant \frac{1}{\mu_n(A)} e^{-t^2/8\sigma^2} \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned} \tag{Α′.1.36}$$

Έστω $t > 0$ και $B = \{f \leqslant M - t\}$. Αν $u < t$, όπως πριν ελέγχουμε ότι

$$f(x) \geqslant M - t + u \implies \phi_B(x) \geqslant u/\sigma \tag{Α′.1.37}$$

και με χρήση του Πορίσματος Α′.1.5 έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_n(\{f(x) \geqslant M\}) &\leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M - t + u\}) \\ &\leqslant \mu_n(\{\phi_B \geqslant u/\sigma\}) \leqslant \frac{1}{\mu_n(B)} e^{-u^2/8\sigma^2} \end{aligned} \tag{Α′.1.38}$$

Όμως $1/2 \leqslant \mu_n(\{f(x) \geqslant M\})$, άρα

$$\mu_n(B) \leqslant 2e^{-u^2/8\sigma^2}. \tag{Α′.1.39}$$

Αφήνοντας το u να τείνει στο t παίρνουμε

$$\mu_n(B) \leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{Α′.1.40}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mu_n(\{|f - M| > t\}) &= \mu_n(\{f \geqslant M + t\}) + \mu_n(\{f \leqslant M - t\}) \\ &\leqslant 2e^{-t^2/8\sigma^2} + 2e^{-t^2/8\sigma^2} \\ &= 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \end{aligned} \tag{Α′.1.41}$$

□

Α′.2 Ανισότητα του Azuma

Δίνουμε πρώτα τους βασικούς ορισμούς της δεσμευμένης μέσης τιμής και του martingale σε έναν χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, και στην συνέχεια αποδεικνύουμε την ανισότητα του Azuma.

Ορισμός Α′.2.1 (δεσμευμένη μέση τιμή)**.** Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ ένας χώρος πιθανότητας. Αν $\mathcal{G}$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{A}$ και αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$, τότε η συνολοσυνάρτηση

$$\mu(A) = \int_A f dP, \quad A \in \mathcal{G} \tag{Α′.2.1}$$

ορίζει ένα μέτρο στην $\mathcal{G}$, το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το $P|_{\mathcal{G}}$. Από το θεώρημα Radon–Nikodym, υπάρχει μοναδική $h \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ με την ιδιότητα

$$\int_A h dP = \int_A f dP \tag{Α′.2.2}$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Η h ονομάζεται δεσμευμένη μέση τιμή της f ως προς την $\mathcal{G}$ και συμβολίζεται με $h = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.

Βασικές ιδιότητες της δεσμευμένης μέσης τιμής είναι οι εξής:

Λήμμα Α′.2.2. (α) *Ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός, γραμμικός και έχει νόρμα* 1 *σε κάθε L_p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.*

(β) *Αν $\mathcal{G}_1$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{G}$, τότε $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.*

(γ) *Αν $g \in L_\infty(\Omega, \mathcal{G}, P)$ τότε $\mathbb{E}(f \cdot g|\mathcal{G}) = g \cdot \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$.*

(δ) *Αν $\mathcal{G} = \{\emptyset, \Omega\}$ είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα, τότε η $\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι σταθερή και ισούται με τη μέση τιμή της f:*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) = \mathbb{E}f = \int f dP. \tag{Α′.2.3}$$

Απόδειξη. (α) Η γραμμικότητα έπεται άμεσα από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Δείχνουμε ότι ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός: Αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ και $f \geqslant 0$, τότε υπάρχει $h \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$ ώστε

$$\int_A h\, dP = \int_A f\, dP \geqslant 0 \tag{Α′.2.4}$$

για κάθε $A \in \mathcal{G}$. Αν θεωρήσουμε το $E_n = \{\omega : h(\omega) \leqslant -\frac{1}{n}\}$ έχουμε ότι $E_n \in \mathcal{G}$ και

$$0 \leqslant \int_{E_n} f\, dP = \int_{E_n} h\, dP \leqslant -\frac{1}{n} P(E_n), \tag{Α′.2.5}$$

απ' όπου έπεται ότι $P(E_n) = 0$. Άρα,

$$P(\{\omega : h(\omega) < 0\}) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0. \tag{Α$'$.2.6}$$

Από το γεγονός ότι ο τελεστής $T(f) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$ είναι θετικός και γραμμικός έπεται ότι είναι μονότονος: αν $f, g \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$ με $f \leqslant g$, τότε $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(g|\mathcal{G})$. Ειδικότερα, έπεται ότι

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})| \leqslant \mathbb{E}(|f|\; |\mathcal{G}) \tag{Α$'$.2.7}$$

για κάθε $f \in L_1(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Τότε, η δεσμευμένη μέση τιμή $T : L_1 \to L_1$ είναι φραγμένος τελεστής νόρμας 1. Πράγματι·

$$\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_1 = \int |\mathbb{E}(F|\mathcal{G})|\, dP \leqslant \int \mathbb{E}(|f|\; |\mathcal{G})\, dP = \int |f|\, dP = \|f\|_1, \tag{Α$'$.2.8}$$

όπου στην προτελευταία ισότητα έχουμε χρησιμοποιήσει τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Επίσης, είναι $\mathbb{E}(\mathbf{1}|\mathcal{G}) = \mathbf{1}$. Από την ανισότητα Hölder έπεται ότι $L_p \subseteq L_1$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Επομένως, αν $f \in L_\infty$, τότε

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})| \leqslant \mathbb{E}(|f||\mathcal{G}) \leqslant \mathbb{E}(\|f\|_\infty|\mathcal{G}) = \|f\|_\infty. \tag{Α$'$.2.9}$$

Συνεπώς, για κάθε $f \in L_\infty$ έπεται ότι $\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \in L_\infty$ και μάλιστα $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$. Με άλλα λόγια, η δεσμευμένη μέση τιμή $T : L_\infty \to L_\infty$ είναι καλά ορισμένος τελεστής νόρμας 1. Τέλος, αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι ο $T : L_p \to L_p$ είναι επίσης καλά ορισμένος. Αυτό έπεται από τον ακόλουθο ισχυρισμό:

Ισχυρισμός. Έστω $f \in L_1$ και $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ κυρτή ώστε $\mathbb{E}|\varphi(f)| < \infty$. Τότε ισχύει

$$\varphi(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}). \tag{Α$'$.2.10}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού. Είναι γνωστό ότι υπάρχουν ακολουθίες πραγματικών αριθμών (a_n), (b_n) ώστε $\varphi(x) = \sup_n(a_n x + b_n)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$a_n f(x) + b_n \leqslant \varphi(f(x)) \tag{Α$'$.2.11}$$

σχεδόν παντού. Έπεται ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $E_n \in \mathcal{G}$ με $P(E_n) = 0$ και

$$a_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) + b_n \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}) \tag{Α$'$.2.12}$$

για κάθε $x \in \Omega \setminus E_n$. Αν θέσουμε $E = \cup_{n=1}^{\infty} E_n$, τότε $P(E) = 0$ και αν $x \in \Omega \setminus E$ είναι

$$a_n \mathbb{E}(f|\mathcal{G}) + b_n \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}) \tag{Α$'$.2.13}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Συνεπώς, παίρνοντας supremum ως προς n έχουμε ότι

$$\varphi(\mathbb{E}(f|\mathcal{G})) \leqslant \mathbb{E}(\varphi(f)|\mathcal{G}) \tag{Α$'$.2.14}$$

σχεδόν για κάθε $x \in \Omega$. Εφαρμόζοντας αυτήν την ανισότητα για την $\varphi(t) = |t|^p$ έχουμε ότι

$$|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})|^p \leqslant \mathbb{E}(|f|^p|\mathcal{G}) \tag{Α′.2.15}$$

και ολοκληρώνοντας βλέπουμε ότι $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\|_p \leqslant \|f\|_p$ για κάθε $f \in L_p$.

(β) Έστω $g = \mathbb{E}(f|\mathcal{G})$. Τότε για κάθε $A \in \mathcal{G}$ ισχύει $\int_A f\,dP = \int_A g\,dP$. Αν $B \in \mathcal{G}_1 \subseteq \mathcal{G}$ τότε έχουμε $\int_B g\,dP = \int_B f\,dP$. Από τον ορισμό έπεται ότι $\mathbb{E}(g|\mathcal{G}_1) = \mathbb{E}(f|\mathcal{G}_1)$.

(γ) Αρκεί να το δείξουμε για χαρακτηριστικές συναρτήσεις που είναι $\mathcal{G}$-μετρήσιμες. Για $g = \mathbf{1}_A$ και $A, B \in \mathcal{G}$ έχουμε

$$\int_B \mathbb{E}(fg|\mathcal{G})\,dP = \int_B fg\,dP = \int_{A\cap B} f\,dP = \int_{A\cap B} \mathbb{E}(f|\mathcal{G})\,dP = \int_B g\mathbb{E}(f|\mathcal{G})\,dP. \tag{Α′.2.16}$$

Έτσι, $\mathbb{E}(fg|\mathcal{G}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{G})$, διότι $\mathbf{1}_A\mathbb{E}(f|\mathcal{G}) \in L_1(\Omega, \mathcal{G}, P)$.

(δ) Άμεσο από τον ορισμό. □

Ορισμός Α′.2.3 (martingale)**.** Έστω $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$ μια ακολουθία σ-αλγεβρών. Μια ακολουθία $f_0, f_1, \ldots$ συναρτήσεων $f_i \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$ λέγεται martingale ως προς την $\{\mathcal{F}_i\}$ αν $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{F}_{i-1}) = f_{i-1}$ για κάθε $i \geqslant 1$.

Η ανισότητα του Azuma δίνει εκτίμηση της πιθανότητας απόκλισης μιας φραγμένης συνάρτησης από την μέση τιμή της.

Θεώρημα Α′.2.4. *Έστω $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ και έστω $\{\emptyset, \Omega\} = \mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_n = \mathcal{F}$ μια πεπερασμένη ακολουθία σ-αλγεβρών. Θέτουμε $d_i = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})$, $i = 1, \ldots, n$. Τότε, για κάθε $t > 0$ έχουμε*

$$P(|f - \mathbb{E}f| \geqslant t) \leqslant 2\exp\left(-t^2/4\sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2\right). \tag{Α′.2.17}$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι η ακολουθία $\{\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)\}_{i=0}^n$ είναι martingale ως προς $\{\mathcal{F}_i\}_{i=0}^n$. Πράγματι, έχουμε

$$\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) = \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) \tag{Α′.2.18}$$

και $\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) \in L_1(\Omega, \mathcal{F}_i, P)$ από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής. Επιπλέον, έχουμε $\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) = 0$ για κάθε $i \geqslant 1$:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(d_i|\mathcal{F}_{i-1}) &= \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\big)\\ &= \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_i)|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}\big(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1})|\mathcal{F}_{i-1}\big)\\ &= \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{i-1}) = 0.\end{aligned} \tag{Α′.2.19}$$

Συγκρίνοντας τις δυναμοσειρές των e^x και $e^{x^2/2}$ βλέπουμε ότι $e^x \leqslant x + e^{x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αφού ο τελεστής $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F})$ είναι θετικός, συμπεραίνουμε οτι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_k}|\mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \mathbb{E}(\lambda d_k|\mathcal{F}_{k-1}) + \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_k^2} \mid \mathcal{F}_{k-1}). \tag{Α΄.2.20}$$

Από την γραμμικότητα της $f \mapsto \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_{k-1})$ έχουμε $\mathbb{E}(\lambda d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = \lambda\mathbb{E}(d_k|\mathcal{F}_{k-1}) = 0$. Επίσης, έχουμε υποθέσει ότι $f \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$, άρα κάθε $d_k \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}(e^{\lambda d_k}|\mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \mathbb{E}(e^{\lambda^2 d_k^2} \mid \mathcal{F}_{k-1}) \leqslant \mathbb{E}(e^{\lambda^2\|d_k\|_\infty^2}|\mathcal{F}_{k-1}) = e^{\lambda^2\|d_k\|_\infty^2}. \tag{Α΄.2.21}$$

Ισχυρισμός. Ισχύει η ανισότητα

$$\mathbb{E}\left(e^{\sum_{i=1}^n \lambda d_i}\right) \leqslant e^{\lambda^2 \sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}. \tag{Α΄.2.22}$$

Απόδειξη. Με επαγωγή δείχνουμε ότι $\mathbb{E}\,(e^{\lambda\sum_{j=1}^k d_j}) \leqslant e^{\sum_{j=1}^k \lambda^2\|d_j\|^2}$ για κάθε $k \leqslant n$: Για $k = 1$ έχουμε $\mathbb{E}\,(e^{\lambda d_1}) = \mathbb{E}\,\left[\mathbb{E}\,(e^{\lambda d_1}|F_0)\right] \leqslant e^{\lambda^2\|d_1\|_\infty^2}$. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbb{E}\,(e^{\lambda\sum_{j=1}^k d_j}) \leqslant e^{\sum_{j=1}^k \lambda^2\|d_j\|^2} \tag{Α΄.2.23}$$

για κάποιον $k < n$. Αφού $e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} \in L_\infty(\Omega, \mathcal{F}_k, P)$, από το Λήμμα Α΄.2.2 (γ) παίρνουμε

$$\mathbb{E}(e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} e^{\lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k) = e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j}\mathbb{E}(e^{\lambda d_{k+1}}|\mathcal{F}_k). \tag{Α΄.2.24}$$

Χρησιμοποιώντας και την επαγωγική υπόθεση έχουμε:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,(e^{\lambda\sum_{j=1}^{k+1} d_j}) &= \mathbb{E}\,\left[\mathbb{E}\,(e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} e^{\lambda d_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)\right] \\
&= \mathbb{E}\,\left[e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j}\mathbb{E}\,(e^{\lambda d_{k+1}} \mid \mathcal{F}_k)\right] \\
&\leqslant \mathbb{E}\,\left[e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j} e^{\lambda^2\|d_{k+1}\|_\infty^2}\right] \\
&= e^{\lambda^2\|d_{k+1}\|_\infty^2}\mathbb{E}\,\left(e^{\sum_{j=1}^k \lambda d_j}\right) \\
&\leqslant e^{\lambda^2\|d_{k+1}\|_\infty^2} e^{\lambda^2\sum_{j=1}^k \|d_i\|_\infty^2} \\
&= e^{\lambda^2\sum_{j=1}^{k+1}\|d_j\|_\infty^2}.
\end{aligned} \tag{Α΄.2.25}$$

Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
P(f - \mathbb{E}f \geqslant t) &= P(\mathbb{E}(f|\mathcal{F}_n) - \mathbb{E}(f|\mathcal{F}_0) \geqslant t) = P\left(\sum_{j=1}^n d_j \geqslant t\right) \\
&\leqslant \mathbb{E}\; e^{\lambda\sum_{j=1}^n d_j - \lambda t} \leqslant e^{\lambda^2\sum_{j=1}^n \|d_j\|_\infty^2 - \lambda t}.
\end{aligned} \tag{Α΄.2.26}$$

Ελαχιστοποιώντας ως προς λ βλέπουμε ότι

$$P(f - \mathbb{E}f \geqslant t) \leqslant \exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2\right). \tag{Α′.2.27}$$

Εφαρμόζοντας το ίδιο επιχείρημα για την $-f$, παίρνουμε

$$P(-f + \mathbb{E}f \geqslant t) \leqslant \exp\left(-t^2/4\sum_{j=1}^{n}\|d_j\|_\infty^2\right). \tag{Α′.2.28}$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$.

Α′.3 Ανισότητα του Khintchine

Στα προηγούμενα κεφάλαια ορίσαμε τις συναρτήσεις Rademacher $r_i : E_2^n \to \mathbb{R}$ $(i = 1, \dots, n)$ ως εξής:

$$r_i(\epsilon) = \epsilon_i, \tag{Α′.3.1}$$

όπου $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n)$. Η $\{r_i\}_{i=1}^n$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον $L_2(E_2^n)$. Έπεται ότι, για κάθε ακολουθία $\{a_i\} \in \ell_2^n$,

$$\int_{E_2^n}\left|\sum_i a_i r_i(\epsilon)\right|^2 d\mu_n(\epsilon) = \sum_{i=1}^{n} a_i^2. \tag{Α′.3.2}$$

Εναλλακτικά, οι συναρτήσεις Rademacher μπορούν να οριστούν στο $[0,1]$. Ορίζουμε $r_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ $(i \in \mathbb{N})$ ως εξής:

$$r_i(t) = \mathrm{sign}\big(\sin(2^i \pi t)\big).$$

Μπορεί κανείς να δείξει ότι οι r_i ικανοποιούν την εξής συνθήκη ορθογωνιότητας: αν $1 \leqslant i_1 < i_2 < \cdots < i_m$ και $p_1, \dots, p_m \in \mathbb{N}$, τότε

$$\int_0^1 r_{i_1}^{p_1}(t) r_{i_2}^{p_2}(t) \cdots r_{i_m}^{p_m}(t)\,dt = 0,$$

εκτός αν $p_j \in 2\mathbb{N}$ για κάθε $j = 1, \dots, m$, οπότε το ολοκλήρωμα είναι προφανώς ίσο με 1. Ειδικότερα, η $\{r_k\}$ είναι ορθοκανονική ακολουθία στον $L_2[0,1]$. Έπεται ότι, για κάθε ακολουθία $\{a_i\} \in \ell_2$,

$$\int_0^1\left|\sum_i a_i r_i(t)\right|^2 dt = \sum_i a_i^2.$$

Η τελευταία ταυτότητα είναι ισοδύναμη με την (Α′.3.2).

Θεώρημα Α′.3.1 (Khintchine). *Υπάρχουν σταθερές $A_p, B_p > 0$ ($p \geqslant 1$) με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $a = (a_1, \dots, a_n) \in \ell_2^n$,*

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2} \leqslant \left(\int_0^1 \left| \sum_{i=1}^n a_i r_i(t) \right|^p dt \right)^{1/p} \leqslant B_p \left(\sum_{i=1}^n a_i^2 \right)^{1/2}. \tag{Α′.3.3}$$

Παρατήρηση Α′.3.2. Ισοδύναμα, η ανισότητα του Khintchine γράφεται στην μορφή

$$A_p \Big\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \Big\|_{L_2} \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \Big\|_{L_p} \leqslant B_p \Big\| \sum_{i=1}^n a_i r_i \Big\|_{L_2}. \tag{Α′.3.4}$$

Αν A_p^*, B_p^* είναι οι βέλτιστες σταθερές για τις οποίες ισχύει το Θεώρημα Α′.3.1, από την ανισότητα του Hölder είναι φανερό ότι $A_p^* = 1$ αν $p \geqslant 2$ και $B_p^* = 1$ αν $0 < p \leqslant 2$. Οι ακριβείς τιμές των A_p^*, B_p^* έχουν υπολογιστεί από τους Szarek (A_1^*) και Haagerup (για κάθε p).

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε μια απόδειξη της ανισότητας του Khintchine χρησιμοποιώντας την μέθοδο των martingales. Το επιχείρημα δείχνει ότι $B_p = O(\sqrt{p})$ καθώς $p \to +\infty$ και η A_p είναι φραγμένη μακριά από το μηδέν: δηλαδή, υπάρχει μια σταθερά $m > 0$ ώστε $|A_p| \geqslant m$ για κάθε $p \geqslant 1$.

Απόδειξη του Θεωρήματος Α′.3.1. Έστω $\{a_i\}_{i=1}^n \subseteq \mathbb{R}$ με $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$ (μπορούμε να κάνουμε αυτήν την υπόθεση γιατί η ανισότητα Khintchine είναι ομογενής). Για κάθε $k \geqslant 1$ θεωρούμε την άλγεβρα F_k που αποτελείται από τις πεπερασμένες ενώσεις των υποδιαστημάτων $[s/2^k, (s+1)/2^k)$, $s = 0, 1, \dots, 2^k - 1$. Οι συναρτήσεις Radermacher $r_1, \dots, r_k$ είναι μετρήσιμες ως προς την F_k. Προφανώς $F_1 \subseteq F_2 \subseteq \cdots \subseteq F_n$ και η $\big\{ \sum_{i=1}^k a_i r_i \big\}_{k=1}^n$ είναι martingale ως προς την $\{F_k\}_{k=1}^n$. Πράγματι,

$$\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^k a_i r_i | F_{k-1} \right) = \sum_{i=1}^k a_i \mathbb{E}(r_i | F_{k-1}) = \sum_{i=1}^{k-1} a_i \mathbb{E}(r_i | F_{k-1}) + a_k \mathbb{E}(r_k | F_{k-1}). \tag{Α′.3.5}$$

Οι r_i, $i = 1, \dots, k-1$ είναι μετρήσιμες ως προς την F_{k-1}, άρα

$$\mathbb{E}(r_i | F_{k-1}) = r_i, \qquad i = 1, \dots, k-1. \tag{Α′.3.6}$$

Επίσης, $\mathbb{E}(r_k | F_{k-1}) = 0$. Για τον σκοπό αυτό αρκεί να δείξουμε οτι $\int_A \mathbb{E}(r_k | F_{k-1}) d\mu_n = 0$ για κάθε άτομο της F_{k-1}. Όμως, κάθε άτομο A της F_{k-1} γράφεται στην μορφή $A = B_1 \cup B_2$, όπου τα B_1, B_2 είναι άτομα της F_k, και

$$\int_A \mathbb{E}(r_k | F_{k-1}) d\mu_n = \int_A r_k d\mu_n = \int_{B_1} r_k d\mu_n + \int_{B_2} r_k d\mu_n = 0, \tag{Α′.3.7}$$

αφού σε ένα από τα B_1, B_2 η r_k παίρνει την τιμή 1 και στο άλλο την τιμή -1.

Θέτουμε $f = \sum_{i=1}^n a_i r_i$. Τότε,

$$\mathbb{E}(f|F_k) = \sum_{i=1}^{k} a_i r_i, \tag{Α′.3.8}$$

και αν θέσουμε $d_k = \mathbb{E}(f|F_k) - \mathbb{E}(f|F_{k-1})$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|d_k\|_\infty = \left\| \sum_{i=1}^{k} a_i r_i - \sum_{i=1}^{k-1} a_i r_i \right\|_\infty = \|a_k r_k\|_\infty = |a_k|. \tag{Α′.3.9}$$

Παρατηρήστε επίσης ότι $f \in L_\infty(E_2^n)$ και $\mathbb{E}f = 0$. Από την ανισότητα του Azuma έπεται ότι

$$\mu_n \left(\left| \sum_{i=1}^{n} a_i r_i \right| > t \right) \leqslant 2e^{\frac{-t^2}{4\sum_{i=1}^n \|d_i\|_\infty^2}} = 2e^{\frac{-t^2}{4}} \tag{Α′.3.10}$$

για κάθε $t > 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα Α′.3.3. *Εστω (Ω, μ) χώρος πιθανότητας και $f : \Omega \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμη. Τότε,*

$$\int_\Omega f^p = p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{\omega : f(\omega) \geqslant t\}) dt.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned} p \int_0^\infty t^{p-1} \mu(\{\omega : f(\omega) \geqslant t\}) dt &= \int_0^\infty p t^{p-1} \left(\int_\Omega \mathbf{1}_{\{f(\omega) \geqslant t\}}(\omega) d\mu(\omega) \right) dt \\ &= \int_\Omega \int_0^\infty p t^{p-1} \mathbf{1}_{\{f(\omega) \geqslant t\}}(t) dt d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega \left(\int_0^{f(\omega)} p t^{p-1} dt \right) d\mu(\omega) \\ &= \int_\Omega f(\omega)^p d\mu(\omega). \end{aligned}$$

□

Λόγω της (Α′.3.10) μπορούμε να γράψουμε

$$\text{(Α′.3.11)}\qquad \begin{aligned}\int_{E_2^n} |\sum a_i r_i|^p d\mu_n &= \int_0^\infty p e^{p-1}\mu_n\left(\left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right| > t\right) dt\\ &\leqslant \int_0^\infty p t^{p-1} e^{\frac{-t^2}{4}} dt\\ &= 2^p p \int_0^\infty e^{-x} x^{p/2-1} dx \leqslant (C\sqrt{p})^p,\end{aligned}$$

Έπεται ότι η δεξιά ανισότητα της (Α′.3.3) ισχύει με $B_p = O(\sqrt{p})$ για $p \geqslant 2$.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $1 \leqslant p \leqslant 2$. Από την ανισότητα του Hölder έχουμε

$$\text{(Α′.3.12)}\qquad \begin{aligned}1 = \int_0^1 \left|\sum_{i=0}^n a_i r_i\right|^2 d\mu_n &= \int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|^{2/3} \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|^{4/3} d\mu_n\\ &\leqslant \left(\int_0^1 \left(\left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|^{2/3})^{3/2}\right) d\mu_n\right)^{3/2} \left(\int_0^1 \left(\left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|^{4/3}\right)^3 d\mu_n\right)^{1/3}\\ &= \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right| d\mu_n\right)^{2/3} \left(\int_0^1 \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right|^4 d\mu_n\right)^{1/3}.\end{aligned}$$

Έπεται οτι

$$\text{(Α′.3.13)}\qquad B_4^{-2} \leqslant \int_{E_2^n} \left|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right| d\mu_n.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ υπάρχουν σταθερές B_p, A_p τέτοιες ώστε

$$A_p^{-1} \leqslant \left\|\sum_{i=1}^n a_i r_i\right\|_p \leqslant B_p$$

για κάθε $a_1, \ldots, a_n$ με $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. □

Α′.4 Ανισότητα Kahane-Khintchine

Η ανισότητα Kahane-Khintchine γενικεύει την ανισότητα του Khintchine.

Θεώρημα Α′.4.1. *Υπάρχει σταθερά K ώστε για κάθε χώρο με νόρμα X, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in X$ και για κάθε $p \geqslant 1$,*

$$\text{(Α′.4.1)}\qquad \left(\mathbb{E}\big\|\sum_{i\leqslant n} \epsilon_i x_i\big\|^p\right)^{1/p} \leqslant 2\mathbb{E}\big\|\sum_{i\leqslant n} \epsilon_i x_i\big\| + K\sigma\sqrt{p},$$

όπου

$$\sigma^2 = \sup\Big\{\sum_{i\leqslant n}|x^*(x_i)|^2 : x^*\in X^*, \|x^*\|\leqslant 1\Big\}. \tag{A′.4.2}$$

Παρατήρηση Α′.4.2. Από το Θεώρημα Α′.4.1 έπεται ότι, ειδικότερα, υπάρχει σταθερά $K>0$ ώστε για κάθε χώρο με νόρμα X, για κάθε $n\in\mathbb{N}$, για κάθε $x_1,\dots,x_n\in X$ και για κάθε $p\geqslant 1$,

$$\Big(\mathbb{E}\Big\|\sum_{i\leqslant n}\epsilon_i x_i\Big\|^p\Big)^{1/p}\leqslant (2+K\sqrt{p})\mathbb{E}\Big\|\sum_{i\leqslant n}\epsilon_i x_i\Big\|. \tag{A′.4.3}$$

Για την (Α′.4.3) παρατηρούμε ότι, από την ανισότητα του Khintchine, αν $\|x^*\|\leqslant 1$ τότε

$$\Big(\sum_{i\leqslant n}|x^*(x_i)|^2\Big)^{1/2}\leqslant \sqrt{2}\,\mathbb{E}\Big|\sum_{i\leqslant n}\epsilon_i x^*(x_i)\Big|\leqslant \sqrt{2}\,\mathbb{E}\Big\|\sum_{i\leqslant n}\epsilon_i x_i\Big\|,$$

το οποίο δείχνει ότι

$$\sigma\leqslant \mathbb{E}\Big\|\sum_{i\leqslant n}\epsilon_i x_i\Big\|.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος Α′.4.1 βασίζεται στο εξής πόρισμα του Θεωρήματος **;;**.

Πόρισμα Α′.4.3. *Έστω X χώρος με νόρμα και $(x_i)_{i\leqslant n}$ ακολουθία διανυσμάτων στον X. Αν M είναι ένας μέσος Lévy της $\|\sum_{i\leqslant n}\epsilon_i x_i\|$ στον E_2^n τότε, για κάθε $t\geqslant 0$,*

$$\mu_n\left(\{|\,\|\sum_{i\leqslant n}\epsilon_i x_i\|-M\,|\geqslant t\}\right)\leqslant 4e^{-t^2/8\sigma^2}. \tag{A′.4.4}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την $f(u)=\|\sum_{i\leqslant n}u_i x_i\|$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες της νόρμας ελέγχουμε εύκολα ότι η f είναι κυρτή συνάρτηση. Έστω $x^*\in X^*$ με $\|x^*\|\leqslant 1$ και $u,v\in\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\left|x^*\left(\sum_{i\leqslant n}u_i x_i-\sum_{i\leqslant n}v_i x_i\right)\right| &= \left|\sum_{i\leqslant n}u_i x^*(x_i)-\sum_{i\leqslant n}v_i x^*(x_i)\right|\\ &= \left|\sum_{i\leqslant n}(u_i-v_i)x^*(x_i)\right|\\ &\leqslant \left(\sum_{i\leqslant n}|x^*(x_i)|^2\right)^{1/2}\left(\sum_{i\leqslant n}(u_i-v_i)^2\right)^{1/2}\\ &\leqslant \sigma\|u-v\|_2.\end{aligned} \tag{A′.4.5}$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach συμπεραίνουμε ότι

$$|f(u) - f(v)| \leqslant \left\| \sum_{i \leqslant n} u_i x_i - \sum_{i \leqslant n} v_i x_i \right\| \leqslant \sigma \|u - v\|_2, \tag{A′.4.6}$$

επομένως η f είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά σ. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα **;;** για την f έχουμε το ζητούμενο. □

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μια απόδειξη της ανισότητας Khintchine-Kahane με βέλτιστη εξάρτηση από το p.

Απόδειξη του θεωρήματος A′.4.1. Θεωρούμε την $f : E_2^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$f(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) = \Big| \, \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \| - M \, \Big|. \tag{A′.4.7}$$

Από το Πόρισμα A′.4.3, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = t^2/8\sigma^2$ έχουμε

$$\begin{aligned} \int_{E_2^n} \Big| \, \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \| - M \, \Big|^p d\mu_n(\epsilon) &= p \int_0^\infty t^{p-1} \mu_n(\{\epsilon : | \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \| - M| \geqslant t\}) dt \\ &\leqslant 4 \int_0^\infty p t^{p-1} e^{-t^2/8\sigma^2} dt \\ &= 2^{p+1} p (\sqrt{2}\sigma)^p \int_0^\infty e^{-x} x^{p/2-1} dx \leqslant (K\sigma\sqrt{p})^p. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\left(\int_{E_2^n} | \, \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \| - M|^p d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/p} \leqslant K\sigma\sqrt{p}. \tag{A′.4.8}$$

Από την τριγωνική ανισότητα,

$$\left(\int_{E_2^n} \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \|^p d\mu_n(\epsilon) \right)^{1/p} \leqslant M + K_1 \sigma p^{1/2} \tag{A′.4.9}$$

για κάθε $p \geqslant 1$. Τέλος, παρατηρούμε ότι $M \leqslant 2\mathbb{E} \, \| \sum_{i \leqslant n} \epsilon_i x_i \|$ από την ανισότητα του Markov. □

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ Β′

Μέτρα και διάσταση Hausdorff

Β′.1 Η κατασκευή του Καραθεοδωρή

Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος, $\mathcal{F}$ μια οικογένεια υποσυνόλων του X, και ζ μια πραγματική συνάρτηση ορισμένη στην $\mathcal{F}$, με μη αρνητικές τιμές. Υποθέτουμε ότι

(1) Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχουν $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε $X = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$ και $\mathrm{diam}(E_i) \leqslant \delta$.

(2) Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $E \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\zeta(E) \leqslant \delta$ και $\mathrm{diam}(E) \leqslant \delta$.

Για κάθε $0 < \delta \leqslant \infty$ και $A \subset X$ ορίζουμε τότε

$$\psi_\delta(A) := \inf\left\{\sum_{i=1}^{\infty}\zeta(E_i) : A \subset \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ \mathrm{diam}(E_i) \leqslant \delta,\ E_i \in \mathcal{F}\right\}. \tag{Β′.1.1}$$

Η υπόθεση (1) παραπάνω υιοθετείται για να εξασφαλιστεί ότι τέτοια καλύμματα υπάρχουν πάντα. Από την (2) βλέπουμε ότι $\psi_\delta(\emptyset) = 0$. Επίσης, λόγω της (2) μπορούμε να χρησιμοποιούμε καλύμματα $\{E_i\}_{i\in I}$ με το σύνολο δεικτών I πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, χωρίς να αλλάζει η τιμή του $\psi_\delta(A)$.

Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση ψ_δ είναι μονότονη και υποπροσθετική, οπότε είναι ένα εξωτερικό μέτρο. Γενικά ωστόσο αποτυγχάνει να είναι προσθετική. Παρατηρούμε όμως ότι για $0 < \varepsilon < \delta \leqslant \infty$ έχουμε $\psi_\delta(A) \leqslant \psi_\varepsilon(A)$. Μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε μια συνολοσυνάρτηση $\psi = \psi(\mathcal{F}, \zeta)$ ως εξής:

$$\psi(A) := \lim_{\delta\to 0}\psi_\delta(A) = \sup_{\delta>0}\psi_\delta(A). \tag{Β′.1.2}$$

Η μετροθεωρητική συμπεριφορά της ψ είναι πολύ καλύτερη από αυτή της ψ_δ. Συγκεκριμένα, ισχύει το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Β′.1.1.

(1) *Η ψ είναι μέτρο Borel.*

(2) *Αν τα στοιχεία της $\mathcal{F}$ είναι σύνολα Borel, τότε το ψ είναι κανονικό μέτρο Borel.*

Απόδειξη. (1) Η μονοτονία και η υποπροσθετικότητα της ψ έπονται άμεσα από τις αντίστοιχες ιδιότητες της ψ_δ. Έστω τώρα $A, B \subseteq X$ με $d(A,B) > 0$. Επιλέγουμε δ τέτοιο ώστε $0 < \delta < d(A,B)/2$. Αν τα σύνολα $E_1, E_2, \ldots \in \mathcal{F}$ καλύπτουν το $A \cup B$ και ικανοποιούν την $\mathrm{diam}(E_i) \leqslant \delta$, τότε κανένα τους δεν τέμνει ταυτόχρονα τα A και B. Έτσι,

$$\sum_{i=1}^{\infty} \zeta(E_i) \geqslant \sum_{\substack{i=1 \\ A\cap E_i \neq \emptyset}}^{\infty} \zeta(E_i) + \sum_{\substack{i=1 \\ B\cap E_i \neq \emptyset}}^{\infty} \zeta(E_i) \geqslant \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B).$$

Παίρνοντας το infimum πάνω από όλα αυτά τα καλύμματα έχουμε $\psi_\delta(A\cup B) \geqslant \psi_\delta(A) + \psi_\delta(B)$. Όμως η ψ_δ είναι και υποπροσθετική, άρα $\psi_\delta(A\cup B) = \psi_\delta(A)+\psi_\delta(B)$ και αφήνοντας το $\delta \to 0$ συμπεραίνουμε ότι $\psi(A\cup B) = \psi(A) + \psi(B)$.

Για την (2) θα δείξουμε ότι για κάθε $A \subseteq X$ υπάρχει Borel σύνολο B τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\psi(A) = \psi(B)$. Έστω λοιπόν $A \subseteq X$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε σύνολα $E_{n,1}, E_{n,2}, \ldots \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε

$$A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n,i}, \quad \mathrm{diam}(E_{n,i}) \leqslant \frac{1}{n}$$

και

$$\sum_{i=1}^{\infty} \zeta(E_{n,i}) \leqslant \psi_{\frac{1}{n}}(A) + \frac{1}{n}.$$

Τότε το $B = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{i=1}^{\infty} E_{n,i}$ είναι Borel σύνολο, και ικανοποιεί τις $A \subseteq B$ και $\psi(A) = \psi(B)$. □

Β′.2 Μέτρα Hausdorff

Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{F} = 2^X$ όλων των υποσυνόλων του X, και για δοθέν $0 \leqslant s < \infty$ ορίζουμε $\zeta(E) = \zeta_s(E) = \mathrm{diam}(E)^s$ (συμφωνούμε ότι $0^0 = 1$ και $\mathrm{diam}(\emptyset)^s = 0$). Το μέτρο ψ που προκύπτει με την διαδικασία της προηγούμενης παραγράφου λέγεται *s-διάστατο μέτρο Hausdorff* και συμβολίζεται με $\mathcal{H}^s$. Με άλλα λόγια,

$$\mathcal{H}^s(A) = \lim_{\delta\to 0} \mathcal{H}^s_\delta(A) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(A),$$

όπου

$$\mathcal{H}^s_\delta(A) = \inf\left\{ \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{diam}(E_i)^s : A \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i,\ \mathrm{diam}(E_i) \leqslant \delta \right\}.$$

Θα λέμε επίσης ότι το $\mathcal{H}^s_\infty(A)$ είναι το *s-Hausdorff περιεχόμενο* του A. Για $s=0$, είναι προφανές ότι το $\mathcal{H}^s$ ταυτίζεται με το αριθμητικό μέτρο. Στην περίπτωση που $X=\mathbb{R}^n$ και $s=n$ είναι εύκολο να δούμε ότι $\mathcal{H}^n = c\cdot \mathrm{vol}_n$ για κάποια σταθερά $c>0$, όπου με vol_n συμβολίζουμε το n-διάστατο μέτρο Lebesgue. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι τόσο το $\mathcal{H}^n$ όσο και το vol_n είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα και κανονικά Borel μέτρα.

Το επόμενο θεώρημα δίνει κάποιες βασικές ιδιότητες του $\mathcal{H}^s$. Ειδικότερα, εξασφαλίζει ότι είναι κανονικό Borel μέτρο.

Θεώρημα Β′.2.1. *Έστω X διαχωρίσιμος μετρικός χώρος. Έστω $0\leqslant s<n$ και $\zeta(E)=\mathrm{diam}(E)^s$, για $E\subseteq X$. Αν είτε*

(1) $\mathcal{F}=\{F\subseteq X : F$ κλειστό $\}$, είτε

(2) $\mathcal{F}=\{U\subseteq X : U$ ανοικτό $\}$, είτε

(3) $X=\mathbb{R}^n$ και $\mathcal{F}=\{K\subseteq X : K$ κυρτό $\}$,

τότε $\psi(\mathcal{F},\zeta)=\mathcal{H}^s$.

Οι ιδιότητες (1) και (3) έπονται από το γεγονός ότι η κλειστή θήκη και η κυρτή θήκη ενός $E\subseteq X$ έχουν την ίδια διάμετρο με το E, ενώ η (2) από το γεγονός ότι, για κάθε $\varepsilon>0$, το $\{x : d(x,E)<\varepsilon\}$ είναι ανοικτό και έχει διάμετρο το πολύ ίση με $\mathrm{diam}(E)+2\varepsilon$. Είναι άμεσο τώρα, από το Θεώρημα Β′.1.1(2), ότι

Πόρισμα Β′.2.2. *Το $\mathcal{H}^s$ είναι κανονικό Borel μέτρο.*

Μια ενδιαφέρουσα παρατήρηση, που θα χρησιμοποιηθεί στον ορισμό της διάστασης Hausdorff αμέσως παρακάτω, παρουσιάζεται στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα Β′.2.3. *Για κάθε $0\leqslant s<t<\infty$ και $A\subseteq X$,*

(1) *Αν $\mathcal{H}^s(A)<\infty$, τότε $\mathcal{H}^t(A)=0$.*

(2) *Αν $\mathcal{H}^t(A)>0$, τότε $\mathcal{H}^s(A)=\infty$.*

Απόδειξη. Είναι σαφές ότι οι (1) και (2) είναι ισοδύναμες. Για την απόδειξη της (1), έστω $A\subseteq\bigcup_{i=1}^\infty E_i$ με $\mathrm{diam}(E_i)\leqslant\delta$ και $\sum_{i=1}^\infty \mathrm{diam}(E_i)^s\leqslant \mathcal{H}^s_\delta(A)+1$. Τότε

$$\mathcal{H}^t_\delta(A)\leqslant\sum_{i=1}^\infty \mathrm{diam}(E_i)^t\leqslant \delta^{t-s}\sum_{i=1}^\infty \mathrm{diam}(E_i)^s\leqslant \delta^{t-s}(\mathcal{H}^s_\delta(A)+1),$$

και παίρνοντας το όριο καθώς $\delta\to 0$, βλέπουμε ότι αν $\mathcal{H}^s(A)<\infty$, τότε $\mathcal{H}^t(A)=0$. □

Β′.3 Η διάσταση Hausdorff

Βασιζόμενοι στο Θεώρημα Β′.2.3 δίνουμε τον παρακάτω ορισμό.

Ορισμός Β′.3.1 (διάσταση Hausdorff)**.** *Η διάσταση Hausdorff ενός $A \subseteq X$ ορίζεται ως εξής:*

$$\begin{aligned}\dim_H(A) &:= \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) > 0\} = \sup\{s : \mathcal{H}^s(A) = \infty\}\\ &= \inf\{t : \mathcal{H}^t(A) < \infty\} = \inf\{t : \mathcal{H}^t(A) = 0\}.\end{aligned}$$

Εξ′ ορισμού της, η διάσταση Hausdorff έχει τις ιδιότητες της μονοτονίας και «ευστάθειας» ως προς τις αριθμήσιμες ενώσεις:

$$\begin{aligned}\dim_H(A) &\leqslant \dim_H(B) &&\text{για } A \subseteq B \subseteq X,\\ \dim_H\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \dim_H(A_n) &&\text{για } A_n \subseteq X, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Επαναδιατυπώνοντας τον Ορισμό Β′.3.1, μπορούμε να πούμε ότι η $\dim_H(A)$ είναι ο μοναδικός αριθμός (πιθανόν και $\dim_H(A) = \infty$) για τον οποίο

$$\begin{aligned}s < \dim_H(A) &\Longrightarrow \mathcal{H}^s(A) = \infty,\\ t > \dim_H(A) &\Longrightarrow \mathcal{H}^t(A) = 0.\end{aligned}$$

Στην περίπτωση που $\dim_H(A) = s$ δεν μπορούμε γενικά να γνωρίζουμε την τιμή του $\mathcal{H}^s(A)$: τα τρία ενδεχόμενα $\mathcal{H}^s(A) = 0$, $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, $\mathcal{H}^s(A) = \infty$ είναι όλα πιθανά. Αν όμως για δεδομένο A μπορούμε να βρούμε s τέτοιο ώστε $0 < \mathcal{H}^s(A) < \infty$, τότε αναγκαστικά $s = \dim_H(A)$.

Β′.4 Το λήμμα του Frostman

Το λήμμα του Frostman εξασφαλίζει την ύπαρξη μέτρων Borel συγκεκριμένου τύπου σε έναν μετρικό χώρο με θετικό s-διάστατο μέτρο Hausdorff.

Λέμε παρακάτω ότι ένας μετρικός χώρος X είναι *φραγμένα συμπαγής* αν κάθε κλειστό και φραγμένο υποσύνολό του είναι συμπαγές. Αν $B = B(x,r)$ είναι μια κλειστή μπάλα στον X τότε για κάθε $t > 0$ υιοθετούμε το συμβολισμό $tB = B(x,tr)$.

Λήμμα Β′.4.1. *Έστω X ένας φραγμένα συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $\mathcal{B}$ μια οικογένεια από κλειστές μπάλες του X με την ιδιότητα*

$$\sup\{\mathrm{diam}(B) : B \in \mathcal{B}\} < \infty.$$

Τότε, υπάρχει μια πεπερασμένη ή αριθμήσιμη ακολουθία $\{B_i\}_{i\in I} \subseteq \mathcal{B}$ από ξένες μπάλες, τέτοια ώστε

$$\bigcup_{B\in\mathcal{B}} B \subseteq \bigcup_{i\in I} 5B_i.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε αρχικά ότι τα κέντρα των στοιχείων της $\mathcal{B}$ βρίσκονται όλα μέσα σε ένα φραγμένο υποσύνολο A του X. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την $\mathcal{B}$ στη μορφή

$$\mathcal{B} = \{B(x,r) : x \in A, r \in J_x\},$$

όπου J_x σύνολο δεικτών που εξαρτάται από το x. Για κάθε $x \in A$ επιλέγουμε $r(x) \in J_x$ με $r(x) > \frac{14}{15}\sup\{r : r \in J_x\}$ και θέτουμε $M = \sup\{r(x) : x \in A\}$. Παρατηρήστε ότι η υπόθεση $\sup\{\mathrm{diam}(B) : B \in \mathcal{B}\} < \infty$ εξασφαλίζει ότι $M < \infty$. Θεωρούμε στη συνέχεια το σύνολο

$$A_1 = \Big\{x \in A : \frac{3M}{4} < r(x) \leqslant M\Big\}.$$

Επιλέγουμε επαγωγικά μια πεπερασμένη ακολουθία μπαλών ως εξής: αρχικά επιλέγουμε τυχόν $x_1 \in A_1$, και υποθέτοντας ότι έχουμε βρει τα $x_1, \ldots, x_k$ και ότι $A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^k B\left(x_i, \frac{8}{3}r(x_i)\right) \neq \emptyset$, επιλέγουμε

$$x_{k+1} \in A_1 \setminus \bigcup_{i=1}^{k} B\left(x_i, \frac{8}{3}r(x_i)\right).$$

Από τον ορισμό του A_1, οι μπάλες $B(x_i, r(x_i))$ είναι ξένες και περιέχονται όλες σε ένα συμπαγές υποσύνολο του X. Λόγω συμπάγειας τότε, υπάρχουν μόνο πεπερασμένες το πλήθος τέτοιες, έστω k_1. Ισχύει έτσι ότι

$$A_1 \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_1} B\left(x_i, \frac{8}{3}r(x_i)\right). \tag{Β′.4.1}$$

Παρατηρούμε ότι, εξ′ ορισμού των $r(x)$, έχουμε $r(x) \leqslant M < 2r(x_i)$ για κάθε $x \in A_1$ και κάθε $i \in \{1, \ldots, k_1\}$, οπότε από την (Β′.4.1) και την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\bigcup_{\substack{B(x,r)\in\mathcal{B}\\ x\in A_1}} B(x,r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, 5r(x_i)).$$

Ορίζουμε τώρα $A_2 = \{x \in A : \left(\frac{3}{4}\right)^2 M < r(x) \leqslant \frac{3}{4}M\}$, και θέτουμε

$$A_2' = \left\{x \in A_2 : B(x, r(x)) \cap \left(\bigcup_{i=1}^{k_1} B(x_i, r(x_i))\right) = \emptyset\right\}.$$

Αν $x \in A_2$ τότε ισχύει ότι $r(x) < r(x_i)$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, k_1\}$, και αν $x \in A_2 \setminus A_2'$, τότε υπάρχει $j \in \{1, \ldots, k_1\}$ τέτοιο ώστε $B(x, r(x)) \cap B(x_j, r(x_j)) \neq \emptyset$, άρα

$$d(x, x_j) \leqslant r(x) + r(x_j) \leqslant 2r(x_j) < \frac{8}{3}r(x_j),$$

οπότε

$$A_2 \setminus A_2' \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_1} B\left(x_i, \frac{8}{3}r(x_i)\right). \tag{Β′.4.2}$$

Όπως στο προηγούμενο βήμα, επιλέγουμε αρχικά τυχόν $x_{k_1+1} \in A_2'$, και κατόπιν επαγωγικά

$$x_{k+1} \in A_2' \setminus \bigcup_{i=k_1+1}^{k} B\left(x_i, \frac{8}{3}r(x_i)\right),$$

αν $A_2' \setminus \bigcup_{i=k_1+1}^{k} B\left(x_i, \frac{8}{3}r(x_i)\right) \neq \emptyset$. Μπορούμε τότε και πάλι να βρούμε k_2 τέτοιο ώστε οι μπάλες $B(x_i, r(x_i))$, $i = 1, \ldots, k_2$ να είναι ξένες και να ισχύει

$$A_2' \subseteq \bigcup_{i=k_1+1}^{k_2} B\left(x_i, \frac{8}{3}r(x_i)\right). \tag{Β′.4.3}$$

Από τις (Β′.4.2) και (Β′.4.3) παίρνουμε τότε, όπως πριν,

$$\bigcup_{\substack{B(x,r)\in\mathcal{B} \\ x\in A_2}} B(x,r) \subseteq \bigcup_{i=1}^{k_2} B(x_i, 5r(x_i)).$$

Προχωρώντας έτσι επαγωγικά βρίσκουμε τη ζητούμενη ακολουθία μπαλών.

Εργαστήκαμε παραπάνω με την επιπλέον υπόθεση ότι τα κέντρα των στοιχείων της $\mathcal{B}$ βρίσκονται μέσα σε φραγμένο υποσύνολο του X. Η υπόθεση αυτή δε βλάπτει στην ουσία τη γενικότητα, καθώς θα μπορούσαμε εναλλακτικά να θεωρήσουμε αυθαίρετο $x_0 \in X$ και να επιλέγουμε κάθε φορά το κέντρο x_i με τρόπο ώστε $d(x_i, x_0) \leqslant 2d(x, x_0)$ για κάθε άλλο υποψήφιο προς επιλογή x. $\square$

Θα ορίσουμε στη συνέχεια μια παραλλαγή του μέτρου Hausdorff. Θεωρούμε στο εξής έναν συμπαγή μετρικό χώρο X και σταθεροποιούμε $s \in [0, \infty)$. Για $0 < \delta \leqslant \infty$ και τυχούσα $f : X \to [0, \infty]$ ορίζουμε

$$\lambda_\delta^s(f) = \inf\left\{\sum_{i\in I} c_i \mathrm{diam}(E_i)^s : (E_i, c_i) \in 2^X \times (0,\infty),\ \mathrm{diam}(E_i) \leqslant \delta \text{ και } f \leqslant \sum_{i\in I} c_i \mathbb{1}_{E_i}\right\},$$

με το I στον παραπάνω ορισμό να είναι είτε πεπερασμένο είτε αριθμήσιμο. Η συνάρτηση $\lambda_\delta^s(f)$ είναι προφανώς φθίνουσα ως προς δ, μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε

$$\lambda^s(f) = \lim_{\delta\to 0} \lambda_\delta^s(f).$$

Τέλος, για $A \subset X$ και $f = \mathbb{1}_A$ θέτουμε $\lambda^s_\delta(A) := \lambda^s_\delta(\mathbb{1}_A)$ και $\lambda^s(A) = \lambda^s(\mathbb{1}_A)$. Παρατηρούμε ότι

$$\lambda^s(f) \leqslant \int f \, d\mathcal{H}^s.$$

Στην πραγματικότητα, η παραπάνω σχέση ισχύει ως ισότητα. Για τις ανάγκες μας ωστόσο, θα αρκεστούμε στο παρακάτω γεγονός.

Λήμμα Β΄.4.2. $\mathcal{H}^s(X) \leqslant 30^s \lambda^s(X)$.

Απόδειξη. Έστω $\delta > 0$ και $t \in (0,1)$. Αν για κάθε $i \in I$, όπου I πεπερασμένο ή αριθμήσιμο, έχουμε $c_i > 0$ και $E_i \subseteq X$ τέτοια ώστε $\mathrm{diam}(E_i) \leqslant \delta$ και $\sum_{i\in I} c_i \mathbb{1}_{E_i} \geqslant 1$, τότε υπάρχουν ανοικτές μπάλες $\{U_i\}_{i\in I}$ έτσι ώστε $E_i \subseteq U_i$ και ταυτόχρονα

$$\mathrm{diam}(U_i) \leqslant 3\mathrm{diam}(E_i) \leqslant 3\delta,$$

για κάθε $i \in I$. Έχουμε τότε αναγκαστικά $\sum_i c_i \mathbb{1}_{U_i} > t$.

Τα σύνολα $\left\{x \in X : \sum_{i=1}^k c_i \mathbb{1}_{U_i}(x) > t\right\}$, $k \in \mathbb{N}$, είναι ανοικτά και καλύπτουν το X. Από την συμπάγεια του X μπορούμε να βρούμε $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιον ώστε

$$\begin{aligned} X &= \bigcup_{k=1}^{k_0} \left\{x \in X : \sum_{i=1}^{k} c_i \mathbb{1}_{U_i}(x) > t\right\} \\ &= \left\{x \in X : \sum_{i=1}^{k_0} c_i \mathbb{1}_{U_i}(x) > t\right\} \end{aligned}$$

Για κάθε $i \in \{1, \ldots, k_0\}$, B_i θεωρούμε μια κλειστή μπάλα με $U_i \subseteq B_i$ και $\mathrm{diam}(B_i) \leqslant 2\mathrm{diam}(U_i)$. Τότε,

$$X = \left\{x \in X : \sum_{i=1}^{k_0} c_i \mathbb{1}_{B_i}(x) > t\right\} \text{ και } \sum_{i\in I} c_i \mathrm{diam}(B_i)^s \leqslant 6^s \sum_{i\in I} c_i \mathrm{diam}(E_i)^s. \tag{Β΄.4.4}$$

Ισχυρισμός: Αν $t \in (0, \infty)$, $0 < \varepsilon \leqslant \infty$, $c_1, \ldots, c_{k_0} > 0$ και $B_1, \ldots, B_{k_0}$ είναι κλειστές μπάλες με $\mathrm{diam}(B_i) \leqslant \varepsilon$ για κάθε $i \in \{1, \ldots, k_0\}$, τότε

$$\mathcal{H}^s_{5\varepsilon}\left(\left\{x \in X : \sum_{i=1}^{k_0} c_i \mathbb{1}_{B_i}(x) > t\right\}\right) \leqslant t^{-1} 5^s \sum_{i=1}^{k_0} c_i \mathrm{diam}(B_i)^s. \tag{Β΄.4.5}$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Προσεγγιστικά μπορούμε να θεωρήσουμε ότι κάθε c_i είναι ένας θετικός ρητός, και, πολλαπλασιάζοντας με τον κοινό τους παρονομαστή, να υποθέσουμε τελικά ότι είναι ένας θετικός ακέραιος. Έστω m ο μικρότερος ακέραιος έτσι ώστε $m \geqslant t$.

Θέτουμε $A = \left\{x : \sum_{i=1}^{k_0} c_i \mathbb{1}_{B_i}(x) > t\right\}$ και $\mathcal{B} = \{B_1, \ldots, B_{k_0}\}$, και ορίζουμε $u : B \to \mathbb{Z}$ με $u(B_i) = c_i$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι για $i \neq j$ ισχύει $B_i \neq B_j$, οπότε η u είναι καλά ορισμένη. Ορίζουμε επαγωγικά συναρτήσεις $u_0, \dots, u_m$ στην $\mathcal{B}$ και υποοικογένειες $\mathcal{B}_1, \dots, \mathcal{B}_m$ της $\mathcal{B}$ ως εξής: Θέτουμε αρχικά $u_0 = u$. Από το Λήμμα Β′.4.1 βρίσκουμε μια οικογένεια από ξένες μπάλες $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}$ τέτοια ώστε $A \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}_1} 5B$. Έπειτα ορίζουμε, για $j = 1 \dots, m$, υποοικογένειες $\mathcal{B}_j$ από ξένα στοιχεία της $\mathcal{B}$ έτσι ώστε

$$\mathcal{B}_j \subseteq \{b \in \mathcal{B} : u_{j-1}(B) \geqslant 1\} \text{ και } A \subseteq \bigcup_{B\in\mathcal{B}_j} 5B$$

και

$$u_j(B) = \begin{cases} u_{j-1}(B) - 1, & \text{αν } B \in \mathcal{B}_j \\ u_{j-1}(B), & \text{αν } B \in \mathcal{B} \setminus \mathcal{B}_j. \end{cases}$$

Αυτό γίνεται, με διαδοχικές χρήσεις του Λήμματος Β′.4.1, καθώς για $j < m$ ισχύει ότι $A \subseteq \big\{x : \sum_{x\in B\in\mathcal{B}} u_j(B) \geqslant m - j\big\}$, οπότε για κάθε $x \in A$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $x \in B$ και $u_j(B) \geqslant 1$. Έχουμε έτσι ότι

$$\begin{aligned} m \cdot \mathcal{H}^s_{5\varepsilon}(A) &\leqslant \sum_{j=1}^{m} \sum_{B\in\mathcal{B}_j} \mathrm{diam}(5B)^s \leqslant 5^s \sum_{j=1}^{m} \sum_{B\in\mathcal{B}_j} (u_{j-1}(B) - u_j(B))\mathrm{diam}(B)^s \\ &\leqslant 5^s \sum_{B\in\mathcal{B}} \sum_{j=1}^{m} (u_{j-1}(B) - u_j(B))\mathrm{diam}(B)^s \leqslant 5^s \sum_{B\in\mathcal{B}} u(B)\mathrm{diam}(B)^s, \end{aligned}$$

που ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού. □

Το Λήμμα τώρα έπεται από τις (Β′.4.4) και (Β′.4.5). □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το Λήμμα του Frostman στην περίπτωση που ο X είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Θεώρημα Β′.4.3 (Λήμμα του Frostman)**.** *Έστω (X, d) ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Για κάθε $0 < \delta \leqslant \infty$ υπάρχει Radon μέτρο μ στον X τέτοιο ώστε $\mu(X) = \lambda^s_\delta(X)$ και*

$$\mu(E) \leqslant \mathrm{diam}(E)^s, \quad \text{για κάθε } E \subseteq X \text{ με } \mathrm{diam}(E) < \delta. \tag{Β′.4.6}$$

Ειδικότερα, αν $\mathcal{H}^s(X) > 0$ τότε υπάρχουν $\delta > 0$ και μ τέτοια ώστε να ισχύει η (B.4.6) και $\mu(X) > 0$.

Απόδειξη. Ορίζουμε $p : C(X) \to \mathbb{R}$ με

$$p(f) = \inf\left\{\sum_{i\in I} c_i \mathrm{diam}(E_i)^s : (E_i, c_i) \in 2^X \times (0, \infty),\, \mathrm{diam}(E) \leqslant \delta,\, f \leqslant \sum_{i\in I} c_i \mathbb{1}_{E_i}\right\},$$

όπου το σύνολο δεικτών I είναι πεπερασμένο ή αριθμήσιμο. Για μια μη αρνητική $f \in C(X)$ τότε έχουμε $p(f) = \lambda^s_\delta(f)$. Παρατηρούμε ότι το p είναι ένα θετικά ομογενές, υπογραμμικό συναρτησοειδές. Με εφαρμογή του Θεωρήματος Hahn-Banach επεκτείνουμε το συναρτησοεδές $c \mapsto cp(1)$, $c \in \mathbb{R}$, από τον υπόχωρο των σταθερών συναρτήσεων σε ένα συναρτησοειδές $L : C(X) \to \mathbb{R}$ για το οποίο θα ισχύει ότι

$$L(1) = p(1) = \lambda^s_\delta(X), \text{ και } -p(-f) \leqslant L(f) \leqslant p(f),$$

για κάθε $f \in C(X)$. Αν $f \geqslant 0$, τότε $p(-f) = 0$, οπότε $L(f) \geqslant 0$ και μπορουμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz ώστε να πάρουμε ένα μέτρο Radon μ στον X τέτοιο ώστε $L(f) = \int f\, d\mu$ για κάθε $f \in C(X)$. Ισχύει τότε ότι $\mu(X) = \lambda^s_\delta(X)$.

Επιπλέον, αν $E \subseteq X$ με $\mathrm{diam}(E) < \delta$, τότε μπορούμε να βρούμε μια φθίνουσα ακολουθία συνεχών συναρτήσεων f_i έτσι ώστε $0 \leqslant f_i \leqslant 1$, $f_i = 1$ στο E και $\mathrm{supp}(f_i) \subseteq E_{1/i} = \{x : d(x,E) < \frac{1}{i}\}$. Έχουμε τότε

$$\begin{aligned}\mu(E) &\leqslant \lim_{i\to\infty} \int f_i\, d\mu \leqslant \lim_{i\to\infty} \lambda^s_\delta(E_{1/i})\\ &\leqslant \lim_{i\to\infty} \mathrm{diam}(E_{1/i})^s = \mathrm{diam}(E)^s.\end{aligned}$$

Ειδικότερα, τέλος, αν $\mathcal{H}^s(X) > 0$, τότε από το Λήμμα Β′.4.2 έπεται ότι $\lambda^s(X) > 0$, οπότε $\mu(X) > 0$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] I. Aharoni and J. Lindenstrauss, *Uniform equivalence between Banach spaces*, Bull. Amer. Math. Soc., 84(2):281–283, 1978.

[2] I. Aharoni, B. Maurey, and B. S. Mityagin, *Uniform embeddings of metric spaces and of Banach spaces into Hilbert spaces*, Israel J. Math. **52** (1985), 251–265.

[3] F. Albiac, N.J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Graduate Texts in Mathematics 233, Springer 2006.

[4] K. Ball, *Markov chains, Riesz transforms and Lipschitz maps*, Geom. Funct. Anal., 2(2):137?-172, 1992.

[5] K. Ball, *The Ribe programme*, Séminaire Bourbaki, exposé 1047, 2012.

[6] Y. Bartal, N. Linial, M. Mendel, and A. Naor, *On metric Ramsey-type phenomena*, Ann. of Math. (2), **162**(2):643-709, 2005.

[7] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis Vol. 1*, volume 48 of American Mathematical Society Colloquium Publications, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[8] J. Bourgain, *On Lipschitz embedding of finite metric spaces in Hilbert space*, Israel J. Math., **52**(1-2):46–52, 1985.

[9] J. Bourgain, *The metrical interpretation of superreflexivity in Banach spaces*, Israel J. Math., **56**(2):222–230, 1986.

[10] J. Bourgain, *Remarks on the extension of Lipschitz maps defined on discrete sets and uniform homeomorphisms*, In Geometrical aspects of functional analysis (1985/86), volume 1267 of Lecture Notes in Math., pages 157–167. Springer, Berlin, 1987.

[11] J. Bourgain, T. Figiel and V. Milman, *On Hilbertian subsets of finite metric spaces*, Israel J. Math. **55** (1986), 147-152.

[12] J. Bourgain, V. Milman, and H. Wolfson, *On type of metric spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. **294** (1986), 295-317.

[13] P. Enflo, *On a problem of Smirnov*, Ark. Mat. **8** (1969), 107?109.

[14] P. Enflo, *On the nonexistence of uniform homeomorphisms between L_p-spaces*, Ark. Mat., 8:103–105 (1969), 1969.

[15] P. Enflo, *Topological groups in which multiplication on one side is differentiable or linear*, Math. Scand. **24** (1969), 195–207.

[16] P. Enflo, *Uniform structures and square roots in topological groups, I, II*, Israel J. Math. 8 (1970), 230–252; ibid., 8:253–272.

[17] P. Enflo, *On infinite-dimensional topological groups*, Seminaire sur la Geometrie des Espaces de Banach (1977-78), Exp. No. 10-11, 11 pp. Ecole Polytech., Palaiseau, 1978.

[18] W. Feller, *An introduction to probability theory and its applications*, Vol. II. Second edition. John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[19] X. Fernique, *Regularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, In École d'A Été de Probabilités de Saint-Flour, IV-1974, pages 1–96. Lecture Notes in Math., Vol. 480. Springer, Berlin, 1975.

[20] X. Fernique, *Évaluations de processus gaussiens composés*, In Probability in Banach spaces (Proc. First Internat. Conf., Oberwolfach, 1975), pages 67–83. Lecture Notes in Math., Vol. 526. Springer, Berlin, 1976.

[21] T. Figiel, *On nonlinear isometric embeddings of normed linear spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astronom. Phys., 16:185–188, 1968.

[22] O. Giladi, M. Mendel and A. Naor, *Improved bounds in the metric cotype inequality for Banach spaces*, Journal of Functional Analysis **260**, 2011, 164–194.

[23] E. Gorelik, *The uniform nonequivalence of L_p and ℓ_p*, Israel J. Math., 87(1-3):1-?8, 1994.

[24] M. Gromov, *Metric structures for Riemannian and non-Riemannian spaces*, Modern Birkhäuser Classics. Birkhäuser Boston Inc., Boston, MA, english edition, 2007. Based on the 1981 French original, With appendices by M. Katz, P. Pansu and S. Semmes, Translated from the French by Sean Michael Bates.

[25] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[26] S. Heinrich and P. Mankiewicz, *Applications of ultrapowers to the uniform and Lipschitz classification of Banach spaces*, Studia Math., 73(3):225?-251, 1982.

[27] S. Hoory, N. Linial and A. Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Bull. Amer. Math. Soc. **43** (2006), 439–561.

[28] J. D. Howroyd, *On dimension and on the existence of sets of finite positive Hausdorff measure*, Proc. London Math. Soc. (3), **70**(3):581–604, 1995.

[29] B. Hughes, *Trees and ultrametric spaces: a categorical equivalence*, Adv. Math., **189**(1):148–191, 2004.

[30] T. Hytönen and A. Naor, *Pisier' s inequality revisited*, Studia Mathematica **215** (2013), no. 3, 221–235.

[31] W. B. Johnson and J.Lindenstrauss, *Handbook of the Geometry of Banach spaces 1*,North–Holland (2001) 273–315.

[32] W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, and G. Schechtman *Banach spaces determined by their uniform structures*, Geom. Funct. Anal., 6(3):430–470, 1996.

[33] M. I. Kadec, *A proof of the topological equivalence of all separable infinite-dimensional Banach spaces* Funkcional. Anal. i Priložen., **1**:61–70, 1967.

[34] J. P. Kahane, *Some random series of functions*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics 5, Cambridge University Press, 2nd ed., 1985

[35] S. Kwapień, *Isomorphic characterizations of inner product spaces by orthogonal series with vector coefficients*, Studia Math., **44** (1972),583–595.

[36] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach Spaces*, Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete **23**, Springer-Verlag, New York, 1991.

[37] A.J Lemin, *Isometric embedding of ultrametric (non-Archimedian) spaces in Hilbert spaces and Lebesgue spaces*, A.K. Katsaras, W.H. Schikhof, L. van Hamme (Eds.), p-Adic Functional Analysis, Dekker, New York (2001), pp. 203–218.

[38] J. Lindenstrauss, *On nonlinear projections in Banach spaces*, Michigan Math. J., **11**:263–287, 1964.

[39] J. Lindenstrauss and A. Pelczynski, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–326.

[40] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I & II*, Springer Verlag, 1977 & 1979.

[41] N. Linial, E. London, and Y. Rabinovich, *The geometry of graphs and some of its algorithmic applications*, Combinatorica, **15**(2):215–245, 1995.

[42] J. Matoušek, *Lectures on discrete geometry*, volume 212 of Graduate Texts in Mathematics. Springer-Verlag, New York, 2002.

[43] P. Mattila, *Geometry of sets and measures in Euclidean spaces*, volume 44 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1995. Fractals and rectifiability.

[44] B. Maurey, *Type, cotype and K-convexity*, Handbook of the Geometry of Banach Spaces, Vol. 2 (W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, eds.) (2003), North-Holland Amsterdam, 1299–1332.

[45] B. Maurey, G. Pisier, *Séries de variables aléatoires vectorielles indépendantes et propriétés géométriques des espaces de Banach*, Studia Math. **58** (1976), 45?90.

[46] S. Mazur and S. Ulam, *Sur les transformations isométriques d'Aespaces vectoriels normés*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris, **194**:946–948, 1932.

[47] M. Mendel, *Metric dichotomies*, In Limits of graphs in group theory and computer science, pages 59–76. EPFL Press, Lausanne, 2009.

[48] M. Mendel and A. Naor, *Ramsey partitions and proximity data structures*, J. Eur. Math. Soc. (JEMS), **9**(2):253–275, 2007.

[49] M. Mendel and A. Naor, *Scaled Enflo type is equivalent to Rademacher type*, Bull. Lond. Math. Soc., 39(3):493?498, 2007.

[50] M. Mendel and A. Naor, *Metric Cotype (extended abstract)*, In: Proceedings of the Seventeenth Annual ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms. Association for Computing Machinery , New York, 2006, pp. 79–88.

[51] M. Mendel and A. Naor, *Metric cotype*, Annals of Mathematics **168** (2008), no. 1, 247–298.

[52] M. Mendel and A. Naor, *A note on dichotomies for metric transforms*, Available at `http://arxiv.org/abs/1102.1800`, 2011.

[53] M. Mendel and A. Naor, *Ultrametric subsets with large Hausdorff dimension*, Inventiones Mathematicae Volume 192, Issue 1 (2013), Pages 1–54.

[54] M. Mendel and A. Naor, *Ultrametric skeletons*, Proceedings of the National Academy of Sciences (2013), **110** (48), 19251–19255.

[55] V.D. Milman, G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite-dimensional normed spaces*, Lecture Notes in Mathematics 1200, Springer-Verlag 1986.

[56] A. Naor, *An introduction to the Ribe program*, Jpn. J. Math., **7**(2):167–233, 2012.

[57] A. Naor and G. Schechtman, *Remarks on non linear type and Pisierś inequality*, J. Reine Angew. Math., **552**:213–236, 2002.

[58] A. Naor and T. Tao, *Scale-oblivious metric fragmentation and the nonlinear Dvoretzky theorem*, Israel Journal of Mathematics **192** (2012), 489–504.

[59] B. Nica, *The Mazur-Ulam theorem*, Expositiones Mathematicae **30** (2012), 397–398.

[60] G. Pisier, *Holomorphic semigroups and the geometry of Banach spaces*, Ann. of Math. (2), **115**(2):375–392, 1982.

[61] G. Pisier, *On the dimension of the ℓ_p^n-subspaces of Banach spaces, for* $1 \leqslant p < 2$, Trans. AMS **276** (1983), 201–211.

[62] G. Pisier, *Probabilistic methods in the geometry of Banach spaces*, In Probability and analysis (Varenna, 1985), volume 1206 of Lecture Notes in Math., pages 167–241. Springer, Berlin, 1986.

[63] M. Ribe, *On uniformly homeomorphic normed spaces*, Ark. Mat. **14** (1976), 237–244.

[64] M. Ribe, *Existence of separable uniformly homeomorphic nonisomorphic Banach spaces*, Israel J. Math., **48**(2-3):139–147, 1984.

[65] J.P. Serre, *Trees*, Translated by John Stillwell, Springer-Verlag 1980.

[66] W. H. Schikhof, *Ultrametric calculus: An introduction to p-adic analysis*, Cambridge University Press, 2006.

[67] M. Talagrand, *Regularity of Gaussian processes*, Acta Math., 159(1-2):99–149, 1987.

[68] M. Talagrand, *Isoperimetry, logarithmic Sobolev inequalities on the discrete cube, and Margulis'A graph connectivity theorem*, Geom. Funct. Anal., **3**(3):295–314, 1993.

[69] M. Talagrand, *The generic chaining*, Springer Monographs in Mathematics. Springer-Verlag, Berlin, 2005. Upper and lower bounds of stochastic processes.

[70] A. F. Timan and I. A. Vestfrid, *Any separable ultrametric space can be isometrically imbedded in* ℓ_2, Functional Analysis and Its Applications **17**(1):70–71 (1983).

[71] L. Tzafriri, *On the type and cotype of Banach spaces*, Israel J. Math. **32** (1979), 32–38.

[72] J. Väisälä, *A proof of the Mazur-Ulam theorem*, Amer. Math. Monthly **110** (2003), no. 7, 633–635.

[73] R. Wagner, *Notes on an inequality by Pisier for functions on the discrete cube*, In *Geometric aspects of functional analysis*, volume 1745 of Lecture Notes in Math., pages 263–268. Springer, Berlin, 2000.

[74] P. Wojtaszczyk, *Banach spaces for analysts*, volume 25 of Cambridge Studies in Advanced Mathematics. Cambridge University Press, Cambridge, 1991.

Ευρετήριο

cut set, 146
lattice, 19
martingale, 47, 191, 194

ανέλιξη
- γκαουσιανή, 177

ανισότητα
- Azuma, 47, 191, 195
- Bernstein, 33
- Kahane-Khintchine, 26, 196
- Khintchine, 26, 194
- Pisier, 32
- Talagrand, 183

απεικόνιση
- διαμέρισης, 147
- κατακερματισμού, 146
    - lacunary, 158
    - διαχωρισμένη, 159

αρχή
- περιστερώνα, 23, 118
- συστολής, 86

βάση
- Auerbach, 18

γράφημα
- Cayley, 71
- expander, 122, 177

δένδρο, 145
- αραιωμένο σε σύνολο, 151
- υπο-, 146
- υποπροσθετικό με βάρη, 148

διάσταση
- Hausdorff, 176, 202

εμφύτευση, 115
- Fréchet, 116
- uniform, 101

θεώρημα
- Bourgain-Figiel-Milman, 123, 174
- Bourgain-Milman-Wolfson, 55
- Johnson-Schechtman, 51
- Kwapień, 38
- Matoušek, 117
- Maurey-Pisier, 42
- Pisier, 49
- Ribe, 17
- εμφύτευσης του Bourgain, 119

καθολικότητα
- μετρικών χώρων, 114
    - ως προς uniform-εμφυτεύσεις, 102

λήμμα
- Frostman, 176, 206
- Slepian, 178

μέση τιμή
- δεσμευμένη, 189

μετρική
- ℓ_p-, 54
- άστρο, 181
- D-, 129
- Hausdorff, 142
- συντομότερου μονοπατιού, 71, 177
- υπερ-, 131
- ψευδο-, 120

μέτρο
- Hausdorff, 200
- υπο-, 171

νόρμα
Lipschitz, 115

ομοιομορφισμός
uniform, 17

παραμόρφωση, 115
περιεχόμενο
Hausdorff, 201
προβολή
Rademacher, 28

στρογγυλότητα, 69
συνάρτηση
Rademacher, 25
Walsh, 26
συνθήκη
Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις, 17
συντύπος
Rademacher, 36
ισονορμικός, 88
μετρικός, 72

τύπος
p-ευσταθής, 48
Enflo, 67
Rademacher, 36
μετρικός, 54
τυχαία μεταβλητή
p-ευσταθής, 43

χώρος
K-κυρτός, 40, 80
αδρά πεπερασμένα αναπαραστάσιμος, 17
υπερμετρικός, 131