Γεωμετρική Συναρτησιακή Ανάλυση
και Εφαρμογές στη Συνδυαστική

Διδακτορική Διατριβή

Σιλουανός Μπραζιτικός

$$\int_{2014}^{2017}$$

Αθήνα 2017

Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Αθηνών.

Εισηγητής:

Απόστολος Γιαννόπουλος

Περιεχόμενα

1 Αποτελέσματα της διατριβής **1**

1.1 Ποσοτικές εκδοχές του θεωρήματος Helly 2

1.2 Ανισότητες για τον όγκο τομών κυρτών σωμάτων 8

1.3 Αλγοριθμικά λήμματα κανονικότητας για αραιούς πίνακες 15

I Φασματική αραιοποίηση, προσεγγιστική ανισότητα Brascamp-Lieb και ποσοτικές εκδοχές του θεωρήματος Helly **19**

2 Ποσοτικές εκδοχές του θεωρήματος Helly **21**

2.1 Εισαγωγή 21

2.2 Συμβολισμός και βασικοί ορισμοί 30

3 Ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Helly για τον όγκο **33**

3.1 Το επιχείρημα του Naszódi 33

3.2 Προσεγγιστικές αναπαραστάσεις του ταυτοτικού τελεστή 35

3.3 Ανισότητα Brascamp-Lieb και προσεγγιστικές αναπαραστάσεις του ταυτοτικού τελεστή 36

3.4 Προσέγγιση του όγκου με κυρτά σώματα που έχουν λίγες έδρες 39

4 Ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Helly για την διάμετρο **49**

4.1 Συμμετρική περίπτωση 49

4.2 Γενική περίπτωση 51

4.3 Πολυωνυμική εκτίμηση για το πρόβλημα της διαμέτρου 55

5 Συνεχής προσεγγιστική ανισότητα Brascamp-Lieb **59**

5.1 Συμβολισμός και ορισμοί 59

5.2 Απόδειξη των αποτελεσμάτων 63

5.3 Προσεγγιστικές κλασσικές θέσεις κυρτών σωμάτων 69

II Ανισότητες για τον όγκο τομών κυρτών σωμάτων 73

6 Εισαγωγή 75

6.1 Ανισότητες για τον όγκο τομών κυρτού σώματος με κύριους υποχώρους 75

6.2 Συναρτησοειδές μέσης τομής 80

6.3 Συμβολισμός και ορισμοί 86

7 Περιορισμένες ανισότητες τύπου Loomis-Whitney και Meyer 91

7.1 Περιορισμένες ανισότητες Loomis-Whitney 91

7.2 Περιορισμένες δυϊκές ανισότητες Loomis-Whitney 93

7.3 Ανισότητες για μεικτούς όγκους 95

8 Ανισότητες για το συναρτησοειδές μέσης τομής 99

8.1 Φράγματα συναρτήσει της απόστασης λόγου όγκων από την κλάση των γενικευμένων k−οστών σωμάτων τομών 99

8.2 Φράγματα συναρτήσει της ισοτροπικής σταθεράς 101

8.3 Αντίστροφες ανισότητες στις κλασσικές θέσεις 106

III Αλγοριθμικά λήμματα κανονικότητας για αραιούς πίνακες 111

9 Αλγοριθμικό λήμμα κανονικότητας για L_p κανονικούς αραιούς πίνακες 113

9.1 Εισαγωγή 113

9.1α΄ Σχετικά με το πρόβλημα 113

9.1β΄ Το βασικό αποτέλεσμα 115

9.2 Δύο βασικά εργαλεία 116

9.2α΄ Ακολουθίες διαφορών martingales 116

9.2β΄ Η αλγοριθμική εκδοχή της ανισότητας του Grothendieck 117

9.3 Προκαταρκτικά λήμματα 117

9.4 Απόδειξη του Θεωρήματος 9.1.3 122

9.5 Εφαρμογές 125

9.5α΄ Αλγόριθμοι προσέγγισης τανυστών 125

9.5β΄ Προσέγγιση MAX-CSP στιγμιοτύπων 126

Κεφάλαιο 1

Αποτελέσματα της διατριβής

Η διατριβή αποτελείται από τρία μέρη τα οποία είναι ανεξάρτητα. Σε αυτό το κεφάλαιο περιγράφουμε εν συντομία το πλαίσιο και τα αποτελέσματα για κάθε μέρος χωριστά. Τα περισσότερα από τα αποτελέσματα έχουν ήδη δημοσιευτεί ή έχουν γίνει δεκτά για δημοσίευση. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Τα αποτελέσματα του Μέρους Α προέρχονται από τις εργασίες:

- S. Brazitikos, *Brascamp-Lieb inequality and quantitative versions of Helly's theorem*, Mathematika **63** (2017), 272–291.
- S. Brazitikos, *Quantitative Helly-type theorem for the diameter of convex sets*, Discrete and Computational Geometry **57** (2017), 494–505.
- S. Brazitikos and A. Giannopoulos, *Continuous version of the approximate geometric Brascamp-Lieb inequalities*, (υπό προετοιμασία).
- S. Brazitikos, *Polynomial estimates towards a sharp Helly-type theorem for convex sets*, (υπό προετοιμασία).

(β) Τα αποτελέσματα του Μέρους Β προέρχονται από τις εργασίες:

- S. Brazitikos, A. Giannopoulos and D-M. Liakopoulos, *Uniform cover inequalities for the volume of coordinate sections and projections of convex bodies*, Advances in Geometry, (δεκτή για δημοσίευση).
- S. Brazitikos, S. Dann, A. Giannopoulos and A. Koldobsky, *On the average volume of sections of convex bodies*, Israel Journal of Mathematics, (δεκτή για δημοσίευση).

(γ) Τα αποτελέσματα του Μέρους Γ προέρχονται από την εργασία:

- S. Brazitikos and Th. Karageorgos, *An algorithmic regularity lemma for* L_p *regular sparse matrices*, SIAM Journal on Discrete Mathematics, (δεκτή για δημοσίευση).

Στο σημείο αυτό θα ήθελα να ευχαριστήσω τον δάσκαλό μου κ. Απόστολο Γιαννόπουλο, πέραν του ότι με εισήγαγε στο κλάδο της Ασυμπτωτικής Γεωμετρίας, η βοήθειά του ήταν πάντα άμεση καθόλη τη διάρκεια της εκπόνησης της διατριβής και οι ώρες που αφιέρωσε αναρίθμητες. Τέλος, θα ήθελα να ευχαριστήσω το Ίδρυμα Ωνάση που χρηματοδότησε την προσπάθειά μου για την απόκτηση του διδακτορικού.

1.1 Φασματική αραιοποίηση, προσεγγιστική ανισότητα Brascamp-Lieb και ποσοτικές εκδοχές του θεωρήματος Helly

§1.1.1. Το κλασσικό συνδυαστικό θεώρημα του Helly ισχυρίζεται ότι αν $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια $n+1$ ή περισσοτέρων κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ και αν οποιαδήποτε $n+1$ μέλη της $\mathcal{P}$ έχουν μη κενή τομή, τότε $\bigcap_{i\in I} P_i \neq \emptyset$. Οι Bárány, Katchalski και Pach απέδειξαν στο [11] την ακόλουθη ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Helly για τον όγκο: Αν $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$, και αν η τομή οποιωνδήποτε $2n$ ή λιγότερων μελών της $\mathcal{P}$ έχει όγκο μεγαλύτερο ή ίσο από 1, τότε $\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right| \geqslant c_n$, όπου $c_n > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το n.

Συνδυάζοντας το γεγονός ότι κάθε (κλειστό) κυρτό σύνολο είναι η τομή μιας οικογένειας κλειστών ημιχώρων με ένα απλό επιχείρημα συμπάγειας μπορεί κανείς να αφαιρέσει τον περιορισμό ότι η $\mathcal{P}$ είναι πεπερασμένη και επίσης να θεωρήσει ότι κάθε P_i είναι κλειστός ημίχωρος. Συνεπώς, το θεώρημα των Bárány, Katchalski και Pach διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια κλειστών ημιχώρων στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right| > 0$. Υπάρχουν $s \leqslant 2n$ και $i_1, \dots, i_s \in I$ τέτοια ώστε*

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant C_n \left|\bigcap_{i\in I} P_i\right|, \tag{1.1.1}$$

όπου $C_n > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το n.

Δεδομένου ότι ο κύβος $[-1,1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι η τομή των $2n$ κλειστών ημιχώρων $H_j^{\pm} := \{x : \langle x, \pm e_j\rangle \leqslant 1\}$ και ότι η τομή οποιωνδήποτε $2n-1$ από αυτούς τους ημιχώρους έχει άπειρο όγκο, είναι φανερό ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε κάποιο θεώρημα αυτής της μορφής με $s \leqslant 2n-1$. Το επιχείρημα στο [11] εξασφαλίζει το φράγμα $C_n \leqslant n^{2n^2}$ για τη σταθερά C_n. Πρόσφατα, ο Naszódi [74] απέδειξε μια ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Helly για τον όγκο με $C_n \leqslant (Cn)^{2n}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Παρουσιάζουμε αρχικά μια μικρή τροποποίηση του επιχειρήματος του Naszódi η οποία μάλιστα δίνει φράγμα με εκθέτη $\frac{3n}{2}$ αντί του $2n$:

Θεώρημα 1.1.2. *Έστω $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια κλειστών ημιχώρων τέτοια ώστε $\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right| > 0$. Μπορούμε να βρούμε $s \leqslant 2n$ και $i_1, \dots, i_s \in I$ τέτοια ώστε*

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant (Cn)^{\frac{3n}{2}} \left|\bigcap_{i\in I} P_i\right|, \tag{1.1.2}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Βασικός μας σκοπός στο Κεφάλαιο 3 είναι να δούμε αν εξασθενίζοντας τη συνθήκη για το πλήθος s των ημιχώρων που χρησιμοποιούμε (απαιτώντας όμως πάντα αυτό να είναι ανάλογο με τη διάσταση) μπορούμε να βελτιώσουμε σημαντικά τον εκθέτη από $\frac{3n}{2}$ σε n ή και $\frac{n}{2}$. Μελετάμε επίσης το ίδιο ερώτημα για την περίπτωση οικογενειών από συμμετρικές λωρίδες στον $\mathbb{R}^n$.

Αρχίζοντας από τη συμμετρική περίπτωση, αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 1.1.3. *Έστω $\{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια από συμμετρικές λωρίδες*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, w_i \rangle| \leqslant 1\} \tag{1.1.3}$$

στον $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε το $P = \bigcap_{i\in I} P_i$ να έχει θετικό όγκο. Για κάθε $d > 1$ υπάρχουν $s \leqslant dn$ και $i_1, \ldots, i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant \left(\frac{4\gamma_d}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) |P|, \tag{1.1.4}$$

όπου $\gamma_d := \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}\right)^2$.

Στη μη συμμετρική περίπτωση αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.4. *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $\alpha > 1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε οικογένεια $\{P_i : i \in I\}$ κλειστών ημιχώρων*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i \rangle \leqslant 1\} \tag{1.1.5}$$

στον $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε το $P = \bigcap_{i\in I} P_i$ να έχει θετικό όγκο, υπάρχουν $s \leqslant \alpha n$ και $i_1, \ldots, i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant (Cn)^n |P|, \tag{1.1.6}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη αυτών των εκτιμήσεων χρησιμοποιούμε τεχνικές φασματικής αραιοποίησης σε συνδυασμό με κατάλληλη τροποποίηση της γεωμετρικής ανισότητας Brascamp-Lieb. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $P = \bigcap_{i\in I}\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i \rangle \leqslant 1\}$ έχει πεπερασμένο όγκο και ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο P είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα. Από το θεώρημα του John έχουμε την ακόλουθη αναπαράσταση του ταυτοτικού τελεστή: υπάρχει $J \subseteq I$ τέτοιο ώστε τα v_j, $j \in J$ να είναι σημεία επαφής των P και B_2^n, καθώς και θετικοί πραγματικοί αριθμοί a_j, $j \in J$ έτσι ώστε

$$I_n = \sum_{j\in J} a_j v_j \otimes v_j \quad \text{και} \quad \sum_{j\in J} a_j v_j = 0. \tag{1.1.7}$$

Για δοθέν $d > 1$ θα θέλαμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο σ του J, με πληθικότητα το πολύ dn, για το οποίο να εξακολουθούμε να έχουμε μια προσεγγιστική αναπαράσταση John του ταυτοτικού τελεστή, με κατάλληλα βάρη. Για το σκοπό αυτό, στην απόδειξη του Θεωρήματος

1.1.3 χρησιμοποιούμε ένα αποτέλεσμα των Batson, Spielman και Srivastava από το [17]: υπάρχει ένα υποσύνολο $\sigma \subseteq J$ με $|\sigma| \leqslant dn$ και $b_j > 0$, $j \in \sigma$, τέτοιοι ώστε

$$I_n \preceq \sum_{j\in\sigma} b_j a_j v_j \otimes v_j \preceq \gamma_d I_n, \tag{1.1.8}$$

όπου $\gamma_d := \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}\right)^2$. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.4 χρησιμοποιούμε ένα δεύτερο, πιο τεχνικό, θεώρημα του Srivastava από το [85].

Στη συνέχεια, εκμεταλλευόμαστε κατάλληλη τροποποίηση της απόδειξης της αντίστροφης ισοπεριμετρικής ανισότητας από τον Ball στο [5] για να εκτιμήσουμε τον όγκο του $Q := \bigcap_{j\in\sigma} P_j$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brascamp-Lieb. Για το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε μια εκτίμηση για τη σταθερά στην ανισότητα Brascamp-Lieb που αντιστοιχεί σε μια προσεγγιστική αναπαράσταση John. Απ΄ όσο γνωρίζουμε, αυτό το πρόβλημα δεν είχε μελετηθεί. Το βασικό μας τεχνικό αποτέλεσμα είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.5. *Έστω $\gamma > 1$. Έστω $u_1, \dots, u_s \in S^{n-1}$ και $c_1, \dots, c_s > 0$ που ικανοποιούν την*

$$I_n \preceq A := \sum_{j=1}^{s} c_j u_j \otimes u_j \preceq \gamma I_n. \tag{1.1.9}$$

Θέτουμε $\kappa_j = c_j \langle A^{-1}u_j, u_j\rangle > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Αν $f_1, \dots, f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{s} f_j^{\kappa_j}(\langle x, u_j\rangle)dx \leqslant \gamma^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{s} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t)dt\right)^{\kappa_j}. \tag{1.1.10}$$

Αυτή είναι μια πολύ αδρή περιγραφή της ιδέας και των εργαλείων που χρησιμοποιούμε. Οι πλήρεις αποδείξεις δίνονται στο Κεφάλαιο 3.

§1.1.2. Στο Κεφάλαιο 4 αποδεικνύουμε μια ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Helly για τη διάμετρο. Οι Bárány, Katchalski και Pach [11] απέδειξαν ότι αν $\{P_i : i \in I\}$ είναι μια οικογένεια κλειστών κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1,$$

τότε υπάρχουν $s \leqslant 2n$ και $i_1, \dots, i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{diam}\,(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant (cn)^{n/2}, \tag{1.1.11}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Στην ίδια εργασία έκαναν την εικασία ότι το σωστό φράγμα θα πρέπει να είναι πολυωνυμικό ως προς n και μάλιστα ότι η εκτίμηση $(cn)^{n/2}$ θα μπορούσε να αντικατασταθεί από $c\sqrt{n}$. Εξασθενίζοντας την απαίτηση να πάρουμε $s \leqslant 2n$, ακριβώς όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, δίνουμε καταφατική απάντηση, αν και δεν μπορούμε να επιτύχουμε φράγμα της τάξης της $\sqrt{n}$.

Ξεκινώντας από τη συμμετρική περίπτωση, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.6. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια πεπερασμένη οικογένεια συμμετρικών κυρτών συνόλων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{int}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) \neq \emptyset$. *Για κάθε* $d > 1$ *υπάρχουν* $s \leqslant dn$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s} \subseteq \gamma_d \sqrt{n} \left(\bigcap_{i\in I} P_i\right), \tag{1.1.12}$$

όπου $\gamma_d := \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.6 βασίζεται σε ένα λήμμα του Barvinok από το [16] το οποίο με τη σειρά του εκμεταλλεύεται το θεώρημα των Batson, Spielman και Srivastava.

Στη γενική (όχι αναγκαστικά συμμετρική) περίπτωση, χρησιμοποιώντας παρόμοια στρατηγική και κάποιες από τις ιδέες του προηγούμενου κεφαλαίου, καθώς και το θεώρημα του Srivastava, παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση.

Θεώρημα 1.1.7. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $\alpha > 1$ *με την ακόλουθη ιδιότητα: αν* $\{P_i : i \in I\}$ *είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{int}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) \neq \emptyset$, *τότε υπάρχουν* $z \in \mathbb{R}^n$, $s \leqslant \alpha n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$z + P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s} \subseteq cn^{3/2} \left(z + \bigcap_{i\in I} P_i\right), \tag{1.1.13}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Από το Θεώρημα 1.1.6 και το Θεώρημα 1.1.7 παίρνουμε πολυωνυμικές εκτιμήσεις για τη διάμετρο:

Θεώρημα 1.1.8. (α) *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια οικογένεια συμμετρικών κυρτών συνόλων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$. *Για κάθε* $d > 1$ *υπάρχουν* $s \leqslant dn$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant \gamma_d \sqrt{n}, \tag{1.1.14}$$

όπου $\gamma_d := \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$.

(β) *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $\alpha > 1$ *με την ακόλουθη ιδιότητα: αν* $\{P_i : i \in I\}$ *είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$, *τότε υπάρχουν* $s \leqslant \alpha n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant cn^{3/2}, \tag{1.1.15}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Στην Παράγραφο 4.3 δίνουμε πολυωνυμική εκτίμηση για το αρχικό ερώτημα των Bárány, Katchalski και Pach.

Θεώρημα 1.1.9. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$. *Μπορούμε να βρούμε* $s \leqslant 2n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοιους ώστε*

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant cn^5, \tag{1.1.16}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Το βασικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.9 είναι και πάλι ένα θεώρημα εγκλεισμού.

Θεώρημα 1.1.10. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{int}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) \neq \emptyset$. *Για κάθε* $k > n$ *μπορούμε να βρούμε* $z \in \mathbb{R}^n$, $s \leqslant k+n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$z + P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s} \subseteq \gamma_{k,n} n(n+2)\left(z + \bigcap_{i\in I} P_i\right), \tag{1.1.17}$$

όπου $\gamma_{k,n} = \left(\frac{\sqrt{k}+\sqrt{n}}{\sqrt{k}-\sqrt{n}}\right)^2$.

Είναι φανερό ότι αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.1.10 με $k = n+1$ τότε παίρνουμε πολυωνυμική εκτίμηση (τάξης $O(n^4)$) για τη διάμετρο με $s \leqslant 2n+1$. Για να ελαττώσουμε το πλήθος των σωμάτων P_{i_j} από $2n+1$ σε $2n$, και να πάρουμε το ακριβές αποτέλεσμα του Θεωρήματος 1.1.9, εφαρμόζουμε μία φορά στο τέλος ένα σχετικό λήμμα των Bárány, Katchalski και Pach.

§**1.1.3.** Στο Κεφάλαιο 5 επεκτείνουμε τη συνεχή μορφή των ανισοτήτων Brascamp-Lieb, που αποδείχθηκε από τον Barthe, στο πλαίσιο των κατά προσέγγιση ισοτροπικών μέτρων Borel στη σφαίρα. Ένα μέτρο Borel ν στην S^{n-1} λέγεται ισοτροπικό αν

$$I_n = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\nu(u), \tag{1.1.18}$$

όπου I_n είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Το θεώρημα του Barthe είναι ένα ζεύγος ανισοτήτων για μια οικογένεια συναρτήσεων (f_u), $u \in S^{n-1}$, που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες συνέχειας:

- Υπάρχουν μια συνεχής συνάρτηση $F : S^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ και δύο συναρτήσεις a, b στην S^{n-1} με $a < b$ (οι a, b είτε παίρνουν πραγματικές τιμές ή είναι σταθερές με τιμή $\pm\infty$) τέτοιες ώστε, για κάθε $(u, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$

$$f_u(t) = \mathbf{1}_{a(u)\leqslant t\leqslant b(u)} F(u, t).$$

- Υπάρχει μια συνάρτηση $U \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $0 \leqslant f_u \leqslant U$ για κάθε $u \in S^{n-1}$.

Τότε λέμε ότι η οικογένεια (f_u) ικανοποιεί τη συνθήκη (H).

Θεώρημα 1.1.11 (Barthe). *Έστω* ν *ένα ισοτροπικό μέτρο Borel στην* S^{n-1} *και έστω* (f_u), $u \in S^{n-1}$ *μια οικογένεια συναρτήσεων* $f_u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ *που ικανοποιεί τη συνθήκη* (H). *Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x, u\rangle) d\nu(u)\right) dx \leqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) d\nu(u)\right). \tag{1.1.19}$$

Επίσης, αν h *είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$h\left(\int_{S^{n-1}} \theta(u) u \, d\nu(u)\right) \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\theta(u)) \, d\nu(u)\right) \tag{1.1.20}$$

για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση θ, *τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) d\nu(u)\right). \tag{1.1.21}$$

Τα διακριτά ανάλογα των δύο ισχυρισμών του Θεωρήματος 1.1.11, η εκδοχή του Ball για την ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb του Barthe, έχουν παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στην κυρτή γεωμετρική ανάλυση, όντας το κρίσιμο εργαλείο για να αποδειχθούν ακριβείς γεωμετρικές ανισότητες.

Παρουσιάζουμε μια παραλλαγή του Θεωρήματος 1.1.11 για ένα μέτρο Borel ν στην S^{n-1} το οποίο είναι κατά προσέγγιση ισοτροπικό. Για κάθε μη-αρνητικό και πεπερασμένο μέτρο Borel ν στην S^{n-1} θεωρούμε τον συμμετρικό θετικά ημιορισμένο $n\times n$ πίνακα

$$T_\nu = \int_{S^{n-1}} u\otimes u\, d\nu(u). \tag{1.1.22}$$

Λέμε ότι το ν ειναι *γ-προσέγγιση ισοτροπικού μέτρου* (για κάποιον $\gamma>1$) αν

$$I_n \preceq T_\nu = \int_{S^{n-1}} u\otimes u\, d\nu(u) \preceq \gamma I_n. \tag{1.1.23}$$

Αρχικά, αποδεικνύουμε μια γενίκευση του ακόλουθου αποτελέσματος των Lutwak, Yang και Zhang [68]: αν ν είναι ένα ισοτροπικό μέτρο στην S^{n-1} και $t:\mathrm{supp}(\nu)\longrightarrow(0,\infty)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\det\left(\int_{S^{n-1}} t(u)u\otimes u\, d\nu(u)\right) \geqslant \exp\left[\int_{S^{n-1}} \log t(u)\, d\nu(u)\right]. \tag{1.1.24}$$

Αυτό το γεγονός παίζει βασικό ρόλο στην απόδειξη του Barthe για το Θεώρημα 1.1.11. Στην περίπτωση που έχουμε ένα κατά προσέγγιση ισοτροπικό μέτρο, παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 1.1.12. *Έστω ν μια γ-προσέγγιση ισοτροπικού μέτρου στην S^{n-1}. Για κάθε συνεχή συνάρτηση* $t:\mathrm{supp}(\nu)\longrightarrow(0,\infty)$ *έχουμε*

$$\begin{aligned}\gamma^n \det\left(\int_{S^{n-1}} t(u)\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle\, u\otimes u\, d\nu(u)\right) &\geqslant \det\left(\int_{S^{n-1}} t(u)u\otimes u\, d\nu(u)\right)\\ &\geqslant \exp\left[\int_{S^{n-1}} \log t(u)\,\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle\, d\nu(u)\right].\end{aligned} \tag{1.1.25}$$

Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε μια συνεχή ανισότητα Brascamp-Lieb και την αντίστροφή της για γ-προσεγγίσεις ισοτροπικών μέτρων.

Θεώρημα 1.1.13. *Έστω ν μια γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου Borel στον $\mathbb{R}^n$ και έστω* (f_u), $u\in S^{n-1}$ *μια οικογένεια συναρτήσεων* $f_u:\mathbb{R}\longrightarrow[0,+\infty)$ *που ικανοποιούν την* (H). *Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x,u\rangle)\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle d\nu(u)\right)\, dx \leqslant \gamma^{\frac{n}{2}} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right)\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle\, d\nu(u)\right). \tag{1.1.26}$$

Επίσης, αν h *είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε*

$$h\left(\int_{S^{n-1}} \theta(u)u\, d\nu(u)\right) \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\theta(u))\langle T_\nu^{-1}u, u\rangle\, d\nu(u)\right) \tag{1.1.27}$$

για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση θ, *τότε*

$$\gamma^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} h(y)\, dy \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) \langle T_\nu^{-1}u, u\rangle\, d\nu(u)\right). \tag{1.1.28}$$

Στην τελευταία παράγραφο αυτού του κεφαλαίου εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1.13 για να αποδείξουμε αποτελέσματα ευστάθειας για κάποιες κλασσικές θέσεις κυρτών σωμάτων. Αποδεικνύουμε και εφαρμόζουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.1.14. *Έστω* ν *ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στην* S^{n-1}. *Έστω* $C(\nu)$ *το συμμετρικό κυρτό σώμα που έχει συνάρτηση στήριξης το μετασχηματισμό συνημιτόνου του* ν

$$C_\nu(x) = \int_{S^{n-1}} |\langle x, u\rangle|\, d\nu(u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{1.1.29}$$

και έστω $C^*(\nu)$ *το πολικό σώμα του* ν. *Τότε,*

$$\nu(S^{n-1})|C^*(\nu)|^{1/n} \geqslant \frac{n\omega_n^{\frac{n+1}{n}}}{2\omega_{n-1}} \geqslant c, \tag{1.1.30}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά. Αντίστροφα, αν* ν *είναι μια* γ*-προσέγγιση ισοτροπικού μέτρου στην* S^{n-1} *για κάποιον* $\gamma > 1$, *τότε*

$$\nu(S^{n-1})|C^*(\nu)|^{1/n} \leqslant 2e\gamma^{\frac{3}{2}}. \tag{1.1.31}$$

Το ισοτροπικό ανάλογο του Θεωρήματος 1.1.14 εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο [45], στην ειδική περίπτωση όπου $\nu = \sigma_K$ είναι το επιφανειακό μέτρο ενός κυρτού σώματος K. Το Θεώρημα 1.1.14 μας επιτρέπει να το χρησιμοποιήσουμε για κατά προσέγγιση ισοτροπικά μέτρα. Ως παράδειγμα εφαρμογής δείχνουμε ότι αν το επιφανειακό μέτρο του K είναι σχεδόν ισοτροπικό τότε το K έχει σχεδόν ελάχιστη επιφάνεια.

1.2 Ανισότητες για τον όγκο τομών κυρτών σωμάτων

§1.2.1. Η κλασσική ανισότητα Loomis-Whitney [64] συγκρίνει τον όγκο $|K|$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με το γεωμετρικό μέσο των όγκων $|P_i(K)|$ των ορθογώνιων πρβολών του στους υπόχωρους $e_i^\perp$, όπου $\{e_1, \dots, e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Ισχύει η ανισότητα

$$|K|^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^n |P_i(K)|, \tag{1.2.1}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τέτοιο ώστε τα $\pm e_i$ να είναι τα κάθετα διανύσματα των εδρών του. Σε αυτή την ανισότητα, με $|P_i(K)|$ συμβολίζουμε τον

$(n-1)$-διάστατο όγκο της προβολής $P_i(K)$ (γενικότερα, αν A είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε $|A|$ για τον όγκο του A στον αφφινικό υπόχωρο $\mathrm{aff}(A)$ που παράγεται από το A). Μάλιστα, η (1.2.1) ισχύει για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$.

Μια δυϊκή ανισότητα, στην οποία οι προβολές $P_i(K)$ αντικαθίστανται από τις τομές $K \cap e_i^{\perp}$, αποδείχθηκε από τον Meyer στο [72]. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$|K|^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^{n} |K \cap e_i^{\perp}|, \tag{1.2.2}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι γραμμική εικόνα $T(B_1^n)$ του cross-polytope

$$B_1^n = \mathrm{conv}\{\pm e_1, \dots, \pm e_n\}$$

για κάποιον διαγώνιο (ως προς την δοθείσα βάση) τελεστή $T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$, όπου $\lambda_i > 0$.

Μια επέκταση της ανισότητας Loomis-Whitney αποδείχθηκε από τους Bollobás και Thomason στο [20]. Για να διατυπώσουμε το αποτέλεσμά τους, εισάγουμε πρώτα κάποιο συμβολισμό. Για κάθε $\tau \subset [n] := \{1, \dots, n\}$ θέτουμε $F_\tau = \mathrm{span}\{e_j : j \in \tau\}$ και $E_\tau = F_\tau^{\perp}$. Αν $s \geqslant 1$ και $\sigma \subseteq [n]$ λέμε ότι τα (όχι απαραίτητα διακεκριμένα) σύνολα $\sigma_1, \dots, \sigma_r \subseteq \sigma$ σχηματίζουν ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ αν κάθε $j \in \sigma$ ανήκει σε ακριβώς s από τα σύνολα σ_i. Η *ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος* από το [20] δίνει άνω φράγμα για τον όγκο ενός συμπαγούς συνόλου συναρτήσει των όγκων των προβολών του στους υποχώρους συντεταγμένων που αντιστοιχούν σε ένα ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$.

Θεώρημα 1.2.1 (Bollobás-Thomason). *Έστω $r \geqslant 1$ και έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, έχουμε*

$$|K|^s \leqslant \prod_{i=1}^{r} |P_{F_{\sigma_i}}(K)|. \tag{1.2.3}$$

Στο Κεφάλαιο 7 αποδεικνύουμε αρχικά κάποιες *περιορισμένες* εκδοχές της ανισότητας Loomis-Whitney και της ανισότητας ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás-Thomason.

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω $r > s \geqslant 1$, έστω $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\prod_{i=1}^{r} |P_{E_{\sigma_i}}(K)| \geqslant \gamma(n, d, s, r) |P_{E_\sigma}(K)|^s \, |K|^{r-s},$$

όπου

$$\gamma(n, d, s, r) = \binom{n}{d}^{r-s} \binom{n - \frac{sd}{r}}{n-d}^{-r}.$$

Στη συνέχεια, ξεκινώντας από την ανισότητα του Meyer και χρησιμοποιώντας την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás και Thomason, αποδεικνύουμε δυϊκές ανισότητες αυτής της μορφής, στο πνεύμα του Θεωρήματος 1.2.2.

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω* $r > s \geqslant 1$, *έστω* $\sigma \subseteq [n]$ *με πληθικότητα* $|\sigma| = d < n$ *και έστω* $(\sigma_1, \ldots, \sigma_r)$ *ένα* s*-ομοιόμορφο κάλυμμα του* σ. *Θέτουμε επίσης* $d_i = |\sigma_i|$. *Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα* K *στον* $\mathbb{R}^n$ *έχουμε*

$$\prod_{i=1}^{r} |K \cap E_{\sigma_i}| \leqslant \frac{(c_0 d)^{ds}}{d_1^{d_1} \cdots d_r^{d_r}} |K \cap E_\sigma|^s |K|^{r-s}, \tag{1.2.4}$$

όπου $c_0 > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Συζητάμε επίσης ένα σχετικό ερώτημα που αφορά μεικτούς όγκους. Οι Hug και Schneider [51] έχουν κάνει την εικασία ότι για κάθε $1 \leqslant r \leqslant n$ και κάθε r-άδα $(K_1, \ldots, K_r)$ κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$V(K_1, \ldots, K_r, B_2^n[n-r]) \leqslant \frac{(n-r)!\omega_{n-r}}{n!} \prod_{i=1}^{r} V_1(K_i), \tag{1.2.5}$$

όπου $V(A_1, \ldots, A_n)$ είναι ο μεικτός όγκος των n συμπαγών κυρτών συνόλων A_i, ο συμβολισμός $A[m]$ χρησιμοποιείται για μια m-άδα $A, \ldots, A$, και

$$\omega_{n-s} V_s(K) = \binom{n}{s} V(K[s], B_2^n[n-s])$$

είναι ο s-οστός intrinsic όγκος του K (βλέπε επίσης [19] για την περίπτωση του επιπέδου). Οι Hug και Schneider απέδειξαν την (1.2.5) στην ειδική περίπτωση που τα σώματα $K_1, \ldots, K_r$ είναι ζωνοειδή. Στην περίπτωση $r = 2$, οι Artstein-Avidan, Florentin και Ostrover έχουν αποδείξει στο [2] ότι αν K είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα και Z είναι ένα ζωνοειδές στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|B_2^n|\, V(K, Z, B_2^n[n-2]) \leqslant \frac{n}{n-1} \frac{\omega_n \omega_{n-2}}{\omega_{n-1}^2} V(K, B_2^n[n-1])\, V(Z, B_2^n[n-1]).$$

Από τον ορισμό του $V_1(K)$ αυτή η ανισότητα είναι η ίδια με αυτή της εικασίας (για $r = 2$). Ένα πιο γενικό πρόβλημα μελετάται στο [84], όπου οι Soprunov και Zvavitch αποδεικνύουν ότι αν A είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $Z_1, \ldots, Z_r$ είναι ζωνοειδή τότε

$$|A|^{r-1} V(Z_1, \ldots, Z_r, A[n-r]) \leqslant r^{r-1} \prod_{i=1}^{r} V(Z_i, A[n-1]),$$

και για κάθε r-άδα (τυχόντων) κυρτών σωμάτων $K_1, \ldots, K_r$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|A|^{r-1} V(K_1, \ldots, K_r, A[n-r]) \leqslant c_{n,r} \prod_{i=1}^{r} V(K_i, A[n-1]), \tag{1.2.6}$$

όπου $c_{n,r} = n^r r^{r-1}$. Επιπλέον, η σταθερά $c_{n,r}$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $c'_{n,r} = n^{r/2} r^{r-1}$ αν τα $K_1, \ldots, K_r$ είναι συμμετρικά.

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω A ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K_1 και K_2 στον $\mathbb{R}^n$,*

$$|A|\, V(K_1, K_2, A[n-2]) \leqslant 2V(K_1, A[n-1])\, V(K_2, A[n-1]).$$

Επιλέγοντας $A = B_2^n$ στο Θεώρημα 1.2.4 παίρνουμε μια παραλλαγή της (1.2.5) με σταθερά 2. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $\frac{n-1}{n} < \frac{\omega_n\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}^2} < 1$, άρα η σταθερά $b_{n,2} := \frac{n}{n-1}\frac{\omega_n\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}^2}$ που εικάζεται ικανοποιεί την

$$1 < b_{n,2} < \frac{n}{n-1}.$$

Με άλλα λόγια, η σταθερά του Θεωρήματος 1.2.4 υπολείπεται της σταθεράς της εικασίας (μόνο) κατά έναν παράγοντα 2.

Όσον αφορά τις σταθερές $c_{n,r}$ και $c'_{n,r}$ στην (1.2.6), από το Θεώρημα 1.2.4 βλέπουμε αμέσως ότι $c_{n,2} \leqslant 2$ και επίσης παρατηρούμε ότι ένα επαγωγικό επιχείρημα οδηγεί σε μια εκδοχή της γενικής ανισότητας (1.2.6) με μια σταθερά c_r που εξαρτάται μόνο από το r. Θα ήταν ενδιαφέρον να προσδιοριστεί η βέλτιστη τιμή αυτής της σταθεράς. Απλή επαγωγή οδηγεί στην πολύ ασθενή εκτίμηση $c_r \leqslant 2^{2^{r-1}-1}$.

§1.2.2. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{as}(K)$ το μέσο όγκο των κεντρικών τομών του K συνδιάστασης 1:

$$\mathrm{as}(K) = \int_{S^{n-1}} |K \cap \xi^{\perp}|\, d\sigma(\xi). \tag{1.2.7}$$

Γενικότερα, για κάθε $1 \leqslant r \leqslant n-1$ ορίζουμε

$$\mathrm{as}_r(K) = \int_{G_{n,n-r}} |K \cap E|\, d\nu_{n,n-r}(E), \tag{1.2.8}$$

όπου $\nu_{n,n-r}$ είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Haar στην Grassmannian $G_{n,n-r}$ των $(n-r)$-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$.

Ο Koldobsky απέδειξε στο [58] ότι αν το K είναι «σώμα τομών» στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\mathrm{as}(K) \leqslant b_{n,1}\, |K|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi\in S^{n-1}} \mathrm{as}(K \cap \xi^{\perp}), \tag{1.2.9}$$

όπου $b_{n,1} \simeq 1$ και ω_m είναι ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας B_2^m στον $\mathbb{R}^m$. Στο Κεφάλαιο 8 μελετάμε το ερώτημα αν ισχύουν αντίστοιχες ανισότητες για το μέσο όγκο των κεντρικών τομών συνδιάστασης 1 οποιουδήποτε κεντραρισμένου κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$.

Ερώτημα 1.2.5. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-2$ και έστω $\gamma_{n,k}$ η μικρότερη σταθερά $\gamma > 0$ με την ιδιότητα ότι για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{as}(K) \leqslant \gamma^k |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E\in G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K \cap E). \tag{1.2.10}$$

Είναι σωστό ότι $\sup_{n,k} \gamma_{n,k} < \infty$;

Αποδεικνύουμε ότι η περίπτωση $k = 1$ είναι ισοδύναμη με το ερωτημα αν κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια κεντρική τομή συνδιάστασης 1 με όγκο μεγαλύτερο από μια απόλυτη σταθερά, ένα ερώτημα που με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα να δοθεί άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά.

Αρχικά γενικεύουμε την (1.2.9) χρησιμοποιώντας ως παράμετρο την «απόσταση εξωτερικού λόγου όγκων» $d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ ενός συμμετρικού αστρόμορφου σώματος K από την κλάση $\mathcal{BP}_k^n$ των γενικευμένων k-σωμάτων τομών. Οι εκτιμήσεις μας βασίζονται στο επόμενο πιο γενικό θεώρημα το οποίο ισχύει για τη μεγαλύτερη κλάση των συμμετρικών αστρόμορφων σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε άρτια συνεχή πυκνότητα στην S^{n-1}.

Θεώρημα 1.2.6. *Έστω $1 \leqslant k < n-1$, έστω K ένα συμμετρικό αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και έστω g μια άρτια μη-αρνητική συνεχής συνάρτηση στην S^{n-1}. Τότε,*

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-1}(\theta) g(\theta)\, d\theta \leqslant c^k\, d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n)\, |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in G_{n,n-k}} \int_{S^{n-1} \cap E} \rho_K^{n-k-1}(\theta) g(\theta)\, d\theta, \tag{1.2.11}$$

όπου c είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το Θεώρημα 1.2.6 δίνει την πρώτη μας εκτίμηση για τις σταθερές $\gamma_{n,k}$ του Ερωτήματος 1.2.5. Επιλέγοντας $g \equiv 1$ βλέπουμε ότι από την (1.2.11) έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-2$, και έστω K ένα συμμετρικό αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{as}(K) \leqslant b^k d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n)\, |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in Gr_{n-k}} \mathrm{as}(K \cap E), \tag{1.2.12}$$

όπου b είναι μια απόλυτη σταθερά. Με άλλα λόγια, $\gamma_{n,k} \leqslant b\, d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$.

Για πολλές κλάσεις κυρτών σωμάτων η απόσταση $d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ φράσσεται από μια απόλυτη σταθερά. Σε αυτές τις κλάσεις συμπεριλαμβάνονται τα unconditional σώματα, οι μοναδιαίες μπάλες υποχώρων του L_p, και άλλα (βλέπε [59, 61]). Συνεπώς, ο περιορισμός του Ερωτήματος 1.2.5 σε όλες αυτές τις κλάσεις έχει καταφατική απάντηση.

Για κάθε κυρτό σώμα K, εκτιμήσεις για την απόσταση $d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ δόθηκαν στο [62]. Ειδικότερα, τα γνωστά φράγματα για την $d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ δείχνουν ότι η $\gamma_{n,k}$ φράσσεται από μια συνάρτηση του n/k, άρα είναι φραγμένη αν το k είναι ανάλογο του n. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

Θεώρημα 1.2.8. *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε άρτια μη-αρνητική συνεχή συνάρτηση g στην S^{n-1},*

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-1}(\theta) g(\theta)\, d\theta \leqslant \big(c_1 h(n/k)\big)^k\, |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in G_{n,n-k}} \int_{S^{n-1} \cap E} \rho_K^{n-k-1}(\theta) g(\theta)\, d\theta, \tag{1.2.13}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $h(t) = \sqrt{t} \cdot (\log(et))^{\frac{3}{2}}$, $t \geqslant 1$. Ειδικότερα,

$$\gamma_{n,k} \leqslant c_1 \sqrt{n/k}\, [\log(en/k)]^{\frac{3}{2}}. \tag{1.2.14}$$

Το Θεώρημα 1.2.6 μας επιτρέπει επίσης να δείξουμε ένα ανάλογο του Θεωρήματος 1.2.7 για τις ποσότητες $\mathrm{as}_r(K)$.

Θεώρημα 1.2.9. *Έστω $1 \leqslant k < n-2$ και $1 \leqslant r < n-k$. Για κάθε συμμετρικό αστρόμορφο σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{as}_r(K) \leqslant \left(\phi\sqrt{\frac{n}{n-r}}\right)^k d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n)\,|K|^{\frac{k}{n}} \max_{E\in Gr_{n-k}} \mathrm{as}_r(K\cap E), \tag{1.2.15}$$

όπου ϕ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην συνέχεια δείχνουμε ότι ένα ανάλογο της (1.2.9) ισχύει σε πλήρη γενικότητα, αν αγνοήσουμε την τιμή της ισοτροπικής σταθεράς του K. Για να διατυπώσουμε το αποτέλεσμα, υπενθυμίζουμε πρώτα τον ορισμό της ισοτροπικής θέσης. Ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, \xi\rangle^2 dx = L_K^2 \tag{1.2.16}$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K έχει μια *ισοτροπική θέση* $T(K)$, $T \in GL(n)$, η οποία είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς, άρα η *ισοτροπική σταθερά* L_K είναι μια αναλλοίωτη της γραμμικής κλάσης του K. Η γνωστή εικασία του υπερεπιπέδου είναι το ερώτημα αν υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_K \leqslant C$ για κάθε n και κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα

$$L_n := \sup\{L_K : K \text{ ισοτροπικό στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant c\sqrt[4]{n} \tag{1.2.17}$$

οφείλεται στον Klartag [54], ο οποίος βελτίωσε προηγούμενο αποτέλεσμα του Bourgain [23] (βλέπε [26] για την ιστορία του προβλήματος και τις πρόσφατες εξελίξεις σε αυτή την περιοχή). Από την άλλη πλευρά, έχουμε πάντα $L_K \geqslant L_{B_2^n} \geqslant c$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Με άλλα λόγια, το ερώτημα είναι αν ισχύει $L_K \simeq 1$ για όλα τα κεντραρισμένα κυρτά σώματα.

Θεώρημα 1.2.10. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-2$,*

$$\mathrm{as}(K) \leqslant (c_2 L_K)^k\,|K|^{\frac{k}{n}} \max_{E\in G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E), \tag{1.2.18}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και L_K είναι η ισοτροπική σταθερά του K.

Για πολλές κλάσεις κυρτών σωμάτων η ισοτροπική σταθερά L_K είναι φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά (βλέπε [26, Κεφάλαιο 4]). Το Θεώρημα 1.2.10 δίνει καταφατική απάντηση στο Ερώρημα 1.2.5 για όλες αυτές τις κλάσεις. Από την άλλη πλευρά, είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η (1.2.18) δίνει ουσιαστικά το καλύτερο φράγμα που θα μπορούσαμε να ελπίζουμε. Στην Πρόταση 8.2.3 δείχνουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathrm{as}(K) \simeq L_K \max_{\xi\in S^{n-1}} \mathrm{as}(K\cap \xi^{\perp})\,|K|^{\frac{1}{n}}. \tag{1.2.19}$$

Αυτό δείχνει ότι η εκτίμηση του Θεωρήματος 1.2.10 είναι ασυμπτωτικά ακριβής: αν $\gamma > 0$ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε η (1.2.10) να ισχύει για $k = 1$ και όλα τα K, τότε πρέπει να έχουμε $\gamma \geqslant cL_K$. Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με το Θεώρημα 1.2.10 συμπεραίνουμε ότι

$$\gamma_{n,k} \lesssim \gamma_{n,1} \simeq L_n \tag{1.2.20}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-2$ (βλέπε Πρόταση 8.2.5).

Ένα από τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.10 είναι η παραλλαγή της δυϊκής ανισότητας Loomis-Whitney του Meyer [72] του Κεφαλαίου 7. Το δεύτερο εργαλείο είναι ένα κάτω φράγμα για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals

$$\Phi_k(K) := \frac{\omega_n}{\omega_{n-k}} \left(\int_{G_{n,n-k}} |K \cap E|^n \, d\nu_{n,n-k}(E) \right)^{\frac{1}{n}} \tag{1.2.21}$$

ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ συναρτήσει της ισοτροπικής σταθεράς του K (βλέπε [30]). Μπορούμε μάλιστα να ελέγξουμε ότι το πρόβλημα του να δοθούν ασυμπτωτικά ακριβή κάτω φράγματα για την ποσότητα $\Phi_k(K)$ είναι ισοδύναμο με το ερώτημα αν $\gamma_{n,1} \simeq L_n \simeq 1$ (βλέπε Παρατήρηση 8.2.7). Όταν η συνδιάσταση k είναι ανάλογη του n, τα γνωστά κάτω φράγματα είναι ανεξάρτητα από την ισοτροπική σταθερά του K (βλέπε [30] και [26, Παράγραφος 6.4]). Έτσι, παίρνουμε μια παραλλαγή του Θεωρήματος 1.2.8.

Θεώρημα 1.2.11. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-2$ και έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{as}(K) \leqslant \big(c_2 h(n/k)\big)^k |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in Gr_{n-k}} \mathrm{as}(K \cap E), \tag{1.2.22}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $h(t) = \sqrt{t} \cdot (\log(et))^{\frac{3}{2}}$, $t \geqslant 1$.

Τέλος, μελετάμε τη μέση τιμή του συναρτησοειδούς μέσης τομής $\mathrm{as}(K \cap E)$ πάνω από όλους τους $E \in G_{n,n-k}$, $1 \leqslant k \leqslant n-2$. Παίρνουμε τα ακόλουθα γενικά άνω και κάτω φράγματα.

Θεώρημα 1.2.12. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $p(K) := R(K)/|K|^{\frac{1}{n}}$, όπου $R(K)$ είναι η ακτίνα του K. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-2$ έχουμε*

$$\left(\frac{c_3\sqrt{n}}{p(K)}\right)^k \mathrm{as}(K) \leqslant |K|^{\frac{k}{n}} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K \cap E) \, d\nu_{n,n-k}(E) \leqslant \left(\frac{c_4 p(K)}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{k}{n-1}} \mathrm{as}(K), \tag{1.2.23}$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Δεδομένου ότι η ακτίνα $R(K)$ είναι πολυωνυμική ως προς n για όλες τις κλασσικές θέσεις ενός κυρτού σώματος K (ισοτροπική θέση, θέση ελάχιστης επιφάνειας, θέση ελάχιστου μέσου πλάτους, θέση John και θέση Löwner), η δεξιά ανισότητα της (1.2.23) μας δίνει το εξής.

Θεώρημα 1.2.13. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν το K είναι σε κάποια από τις κλασσικές θέσεις, τότε*

$$|K|^{\frac{k}{n}} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K \cap E) \, d\nu_{n,n-k}(E) \leqslant c_5^k \, \mathrm{as}(K) \tag{1.2.24}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, όπου $c_5 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

1.3 Αλγοριθμικά λήμματα κανονικότητας για αραιούς πίνακες

Αφετηρία του Μέρους Γ είναι η εργασία των Coja-Oghlan, Cooper και Frieze [29] στην οποία δίνουν έναν αλγόριθμο για την προσέγγιση ενός αραιού $\{0,1\}$ πίνακα f από ένα άθροισμα *πινάκων περιορισμού* κάνοντας την υπόθεση ότι ο f είναι (C,η)-φραγμένος. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι το πλήθος των προσθετέων είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του πίνακα και την πυκνότητά του. Στο Κεφάλαιο 9 επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα σε μια ευρύτερη κλάση αραιών $\{0,1\}$ πινάκων, την κλάση των L_p κανονικών πινάκων η οποία εισήχθη πρόσφατα από τους Borgs, Chayes, Cohn και Zhao [22].

Για να ορίσουμε την κλάση των L_p κανονικών πινάκων εισάγουμε πρώτα κάποιο συμβολισμό. Με n_1 και n_2 θα συμβολίζουμε δύο θετικούς ακεραίους. Για κάθε θετικό ακέραιο n γράφουμε $[n] := \{1,\dots,n\}$, και συμβολίζουμε την πληθικότητα ενός πεπερασμένου συνόλου S με $|S|$. Αν X είναι ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο, συμβολίζουμε με μ_X το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας πάνω στο X. Επίσης, για ευκολία, για τα μέτρα $\mu_{[n_1]}, \mu_{[n_2]}$ και $\mu_{[n_1]\times[n_2]}$ θα γράφουμε απλά μ_1, μ_2 και μ αντίστοιχα. Αν $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του $[n_1]\times[n_2]$, τότε θα συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ την (πεπερασμένη) σ-άλγεβρα στο $[n_1]\times[n_2]$ που επάγεται από την $\mathcal{P}$.

Θεωρούμε τα μη κενά, πεπερασμένα σύνολα X_1, X_2 και το σύνολο

$$\mathcal{S}_{X_1\times X_2} := \{A_1\times A_2 \colon A_1\subseteq X_1 \text{ και } A_2\subseteq X_2\}.$$

Αν είναι σαφές σε ποια X_1 και X_2 αναφερόμαστε (συγκεκριμένα, αν $X_1=[n_1]$ και $X_2=[n_2]$), τότε για το σύνολο $\mathcal{S}_{X_1\times X_2}$ θα γράφουμε απλώς $\mathcal{S}$. Επιπλέον για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $X_1\times X_2$ με $\mathcal{P}\subseteq \mathcal{S}_{X_1\times X_2}$ θέτουμε

$$\iota(\mathcal{P}) := \min\big\{\min\{\mu_{X_1}(P_1), \mu_{X_2}(P_2)\} : P = P_1\times P_2\in\mathcal{P}\big\}.$$

Με άλλα λόγια, η ποσότητα $\iota(\mathcal{P})$ είναι η ελάχιστη πυκνότητα πλευράς κάθε ορθογωνίου της μορφής $P_1\times P_2$ που περιέχεται στην $\mathcal{P}$.

Με τον όρο *περιορισμένος πίνακας* εννοούμε έναν πίνακα $g\colon [n_1]\times[n_2]\to\mathbb{R}$ για τον οποίο υπάρχουν δύο σύνολα $S\subseteq[n_1]$ και $T\subseteq[n_2]$, και ένας πραγματικός αριθμός c ώστε $g = c\cdot 1_{S\times T}$; το σύνολο $S\times T$ καλείται το σύνολο *στήριξης* του πίνακα g. Επιπλέον, για κάθε πίνακα $f\colon[n_1]\times[n_2]\to\mathbb{R}$ η *νόρμα περιορισμού* του f είναι η ποσότητα

$$\|f\|_{\square} = \max_{\substack{S\subseteq[n_1]\\ T\subseteq[n_2]}} \Big|\sum_{(x_1,x_2)\in S\times T} f(x_1,x_2)\Big| = (n_1\cdot n_2)\cdot \max_{\substack{S\subseteq[n_1]\\ T\subseteq[n_2]}} \Big|\int_{S\times T} f\,d\mu\Big|.$$

Τέλος, έστω $f\colon[n_1]\times[n_2]\to\{0,1\}$ ένας πίνακας και έστω $\mathcal{P}$ μια διαμέριση του $[n_1]\times[n_2]$ με $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}$. Η *δεσμευμένη μέση τιμή* του f ως προς την $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ ορίζεται ως

$$\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) = \sum_{P\in\mathcal{P}} \frac{\int_P f\,d\mu}{\mu(P)}\, 1_P.$$

Ειδικότερα, η μέση τιμή $\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})$ είναι άθροισμα περιορισμένων πινάκων με διακεκριμένα σύνολα στήριξης. Αν $1\leqslant p<\infty$, τότε έχουμε

$$\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_p} = \Big(\sum_{P\in\mathcal{P}} \Big|\frac{\int_P f\,d\mu}{\mu(P)}\Big|^p \mu(P)\Big)^{1/p}$$

ενώ αν $p = \infty$, τότε

$$\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_\infty} = \max\Big\{\Big|\frac{\int_P f\,d\mu}{\mu(P)}\Big| : P \in \mathcal{P}\Big\}.$$

Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι η $\|f\|_{L_1}$ είναι ίση με την *πυκνότητα* της f, το οποίο σημαίνει ότι είναι ίση με το πλήθος των άσσων στο πίνακα, διαιρεμένο με $n_1 \cdot n_2$. Επίσης παρατηρούμε ότι $\|f\|_\square = \|f\|_{L_p}^p \cdot (n_1 \cdot n_2)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$.

Ορισμός 1.3.1. Θεωρούμε $0 < \eta \leqslant 1$, $C \geqslant 1$ και $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ένας πίνακας $f\colon [n_1] \times [n_2] \to \{0,1\}$ καλείται (C,η,p)-*κανονικός* (ή απλά L_p *κανονικός* αν δεν υπάρχει σύγχυση για τις τιμές των C και η) αν για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[n_1] \times [n_2]$ με $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ και $\iota(\mathcal{P}) \geqslant \eta$ έχουμε

$$\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_p} \leqslant C\,\|f\|_{L_1}. \tag{1.3.1}$$

Παρατηρούμε ότι, από τη μονοτονία των L_p νορμών, αν $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$ και ο f είναι L_{p_2} κανονικός, τότε ο f είναι και L_{p_1} κανονικός. Επίσης παρατηρούμε ότι για $p = 1$ η προηγούμενη έννοια δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον καθώς κάθε $\{0,1\}$ πίνακας είναι L_1 κανονικός. Από την άλλη πλευρά, η περίπτωση $p = \infty$ στον Ορισμό 1.3.1 είναι ισοδύναμη με την έννοια του (C,η)-φραγμένου πίνακα. Πράγματι, ένας πίνακας $f\colon [n_1] \times [n_2] \to \{0,1\}$ λέγεται (C,η)-φραγμένος αν για κάθε $S \subseteq [n_1]$ και κάθε $T \subseteq [n_2]$ με $\mu_1(S) \geqslant \eta$ και $\mu_2(T) \geqslant \eta$ έχουμε

$$\frac{\int_{S\times T} f\,d\mu}{\mu(S \times T)} \leqslant C\,\|f\|_{L_1}.$$

Ισχύει το ακόλουθο.

Πρόταση 1.3.2. *Θεωρούμε* $0 < \eta \leqslant 1$ *και* $C \geqslant 1$, *και* $f\colon [n_1] \times [n_2] \to \{0,1\}$ *ένας πίνακας. Αν ο* f *είναι* (C,η)*-φραγμένος, τότε ο* f *είναι* (C,η,∞)*-κανονικός. Αντίστροφα, αν* f *είναι ένας* (C,η,∞)*-κανονικός, τότε ο* f *είναι* $(4C,\eta)$*-φραγμένος.*

Μεταξύ των ακραίων περιπτώσεων «$p = 1$» και «$p = \infty$», υπάρχει μια μεγάλη κλάση, αυτή των αραιών πινάκων, που έχει πολύ καλή συμπεριφορά. Τα πιο κατανοητά παραδείγματα είναι τα τυχαία. Συγκεκριμένα, από το [22, Θεώρημα 2.14], για κάθε συμμετρική μετρήσιμη συνάρτηση $W\colon [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}^+$ με $W \in L_p$ $(1 < p \leqslant \infty)$ και κάθε θετικό ακέραιο n, υπάρχει ένα φυσιολογικό μοντέλο αραιών τυχαίων n-επί-n $\{0,1\}$ πινάκων οι οποίοι είναι L_p κανονικοί ασυμπτωτικά σχεδόν βέβαια. Από την άλλη πλευρά, αν $W \notin L_p$, τότε ένας τυπικός πίνακας σε αυτό το μοντέλο δεν είναι L_p κανονικός.

Το βασικό αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 9 είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.3.3. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές* $a_1, a_2 > 0$, *ένας αλγόριθμος και ένα πολυώνυμο* Π_0 (*με μη αρνητικούς συντελεστές, του οποίου ο βαθμός* d *και οι συντελεστές* $a_0, \dots, a_d$ *είναι ανεξάρτητοι από όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους*) *έτσι ώστε να ισχύει το ακόλουθο. Έστω* $0 < \varepsilon < 1/2$ *και* $C \geqslant 1$. *Θεωρούμε επίσης* $1 < p \leqslant \infty$, *και γράφουμε* $p^\dagger = \min\{2, p\}$. *Αν* q *είναι ο συζυγής εκθέτης του* $p^\dagger$ (*δηλαδή,* $1/p^\dagger + 1/q = 1$) *θέτουμε*

$$\tau = \Big\lceil \frac{a_1 \cdot C^2}{(p^\dagger - 1)\,\varepsilon^2} \Big\rceil \ \ \textit{και}\ \ \eta = \Big(\frac{a_2 \cdot \varepsilon}{C}\Big)^{\sum_{i=1}^{\tau+1} (\frac{2}{p^\dagger}+1)^{i-1} q^i}. \tag{1.3.2}$$

Αν εισάγουμε

INP: έναν (C,η,p)*-κανονικό πίνακα* $f\colon [n_1]\times[n_2]\to\{0,1\}$,

τότε ο αλγόριθμος εξάγει

OUT: μια διαμέριση $\mathcal{P}$ *του* $[n_1]\times[n_2]$ *με* $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}$, $|\mathcal{P}|\leqslant 4^{\tau}$ *και* $\iota(\mathcal{P})\geqslant\eta$, *έτσι ώστε*

$$\|f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{\square}\leqslant\varepsilon\|f\|_{\square}. \tag{1.3.3}$$

Αυτός ο αλγόριθμος τρέχει σε χρόνο $(\tau\,4^{\tau})\cdot\Pi_0(n_1\cdot n_2)$.

Το Θεώρημα 1.3.3 επεκτείνει το [29, Θεώρημα 1] που αντιστοιχεί στην περίπτωση $p=\infty$. Στην πραγματικότητα, το επιχείρημα στο [29] δουλεύει με τις απαραίτητες τροποποιήσεις και για την περίπτωση $p\geqslant 2$. Σημειώνουμε επίσης ότι οι περιορισμένοι πίνακες που προκύπτουν από το [29, Θεώρημα 1] δεν έχουν κατ΄ ανάγκη ξένα στηρίγματα, αλλά αυτό μπορεί εύκολα να επιτευχθεί—δείτε το [29, Πόρισμα 1] για περισσότερες λεπτομέρειες. Τέλος σημειώνουμε ότι, από την (1.3.2) και την (1.3.3), ο πίνακας f προσεγγίζεται από ένα άθροισμα που αποτελείται από το πολύ 4^{τ} περιορισμένους πίνακες με ξένα στηρίγματα και επιπλέον ο θετικός ακέραιος τ είναι ανεξάρτητος από τις διαστάσεις και την πυκνότητα του f. Επίσης παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο ότι ο χρόνος που τρέχει ο αλγόριθμος στο Θεώρημα 1.3.3 αυξάνεται καθώς το p φθίνει προς το 1.

Μέρος I

Φασματική αραιοποίηση, προσεγγιστική ανισότητα Brascamp-Lieb και ποσοτικές εκδοχές του θεωρήματος Helly

Κεφάλαιο 2

Ποσοτικές εκδοχές του θεωρήματος Helly

2.1 Εισαγωγή

Αφετηρία μας είναι μια ποσοτική εκδοχή του κλασσικού θεωρήματος Helly για κυρτά σύνολα στον Ευκλείδειο χώρο. Το θεώρημα του Helly ισχυρίζεται ότι αν $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια $n+1$ ή περισσοτέρων κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ και αν οποιαδήποτε $n+1$ μέλη της $\mathcal{P}$ έχουν μη κενή τομή, τότε $\bigcap_{i\in I} P_i \neq \emptyset$. Οι Bárány, Katchalski και Pach απέδειξαν στο [11] (βλέπε επίσης [12]) την ακόλουθη ποσοτική εκδοχή για τον όγκο:

Έστω $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$. Αν η τομή οποιωνδήποτε $2n$ ή λιγότερων μελών της $\mathcal{P}$ έχει όγκο μεγαλύτερο ή ίσο από 1, τότε $\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right| \geqslant c_n$, όπου $c_n > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το n.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι κάθε (κλειστό) κυρτό σύνολο είναι η τομή μιας οικογένειας κλειστών ημιχώρων σε συνδυασμό με ένα απλό επιχείρημα συμπάγειας (βλέπε [11]) μπορούμε να αφαιρέσουμε τον περιορισμό ότι η $\mathcal{P}$ είναι πεπερασμένη και επίσης να υποθέσουμε ότι κάθε P_i είναι κλειστός ημίχωρος. Συνεπώς, το θεώρημα των Bárány, Katchalski και Pach διατυπώνεται ισοδύναμα ως εξής:

Έστω $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια κλειστών ημιχώρων στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right| > 0$. Υπάρχουν $s \leqslant 2n$ και $i_1, \ldots, i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant C_n \left|\bigcap_{i\in I} P_i\right|, \tag{2.1.1}$$

όπου $C_n > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το n.

Παρατηρήστε ότι ο κύβος $[-1,1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι η τομή των $2n$ κλειστών ημιχώρων $H_j^{\pm} := \{x : \langle x, \pm e_j\rangle \leqslant 1\}$ και ότι η τομή οποιωνδήποτε $2n-1$ από αυτούς τους ημιχώρους έχει άπειρο όγκο. Αυτό δείχνει ότι δεν μπορούμε να μειώσουμε το $2n$ σε $2n-1$ στον παραπάνω ισχυρισμό. Στο [11] οι συγγραφείς έδωσαν το φράγμα $C_n \leqslant n^{2n^2}$ για τη σταθερά C_n και έκαναν την εικασία ότι θα μπορούσε στην πραγματικότητα να ισχύει η ανισότητα $C_n \leqslant n^{cn}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Ο Naszódi [74] απέδειξε αυτή την εικασία. Συγκεκριμένα, απέδειξε μια ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Helly για τον όγκο με $C_n \leqslant (Cn)^{2n}$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Στο ίδιο άρθρο αποδεικνύεται, με ένα παράδειγμα, ότι $C_n \geqslant n^{\frac{n}{2}}$. Παρουσιάζουμε αρχικά μια μικρή τροποποίηση του επιχειρήματος του Naszódi η οποία οδηγεί στον εκθέτη $\frac{3n}{2}$ αντί του $2n$:

Θεώρημα 2.1.1. *Έστω $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια κλειστών ημιχώρων τέτοια ώστε $\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right| > 0$. Μπορούμε να βρούμε $s \leqslant 2n$ και $i_1, \ldots, i_s \in I$ τέτοια ώστε*

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant (Cn)^{\frac{3n}{2}} \left|\bigcap_{i\in I} P_i\right|, \tag{2.1.2}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Βασικός μας σκοπός είναι να μελετήσουμε ένα φυσιολογικό ερώτημα το οποίο προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.1. Για δοθέν $N > 2n$ θα θέλαμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα

$$C_{n,N} = \sup \frac{|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_N}|}{\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right|}, \tag{2.1.3}$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλες τις οικογένειες $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ κλειστών ημιχώρων με $\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right| > 0$. Θα θέλαμε επίσης να μελετήσουμε το ίδιο ερώτημα για την περίπτωση οικογενειών από συμμετρικές λωρίδες στον $\mathbb{R}^n$.

Αρχίζοντας από τη συμμετρική περίπτωση, το κύριο αποτέλεσμά μας είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω $\{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια από συμμετρικές λωρίδες*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, w_i\rangle| \leqslant 1\} \tag{2.1.4}$$

στον $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε το $P = \bigcap_{i\in I} P_i$ να έχει θετικό όγκο. Για κάθε $d > 1$ υπάρχουν $s \leqslant dn$ και $i_1, \ldots, i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant \left(\frac{4\gamma_d}{\pi}\right)^{\frac{n}{2}} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) |P|, \tag{2.1.5}$$

όπου $\gamma_d := \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}\right)^2$.

Παρατηρήστε ότι αν $d \gg 1$ τότε η σταθερά $C_{n,\lfloor dn\rfloor}$ φράσσεται από $(Cn)^{\frac{n}{2}}$. Στη μη συμμετρική περίπτωση, αρχικά χρησιμοποιούμε παρόμοια στρατηγική (οι λεπτομέρειες της οποίας είναι φυσικά πιο επίπονες) για να πάρουμε μια εκτίμηση συγκρίσιμη με αυτήν του Θεωρήματος 2.1.1.

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια οικογένεια από κλειστούς ημιχώρους*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i \rangle \leqslant 1\} \tag{2.1.6}$$

στον $\mathbb{R}^n$, *τέτοια ώστε το* $P = \bigcap_{i \in I} P_i$ *να έχει θετικό όγκο. Για κάθε* $d > 1$ *υπάρχουν* $s \leqslant (d+1)(n+1)$ *και* $i_1, \dots, i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant \gamma_d^{\frac{n+1}{2}} \frac{n^{n/2}(n+1)^{3(n+1)/2}}{\pi^{\frac{n}{2}} n!} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) |P| \leqslant \gamma_d^{\frac{n+1}{2}} (Cn)^{\frac{3n}{2}} |P|, \tag{2.1.7}$$

όπου $C > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 2.1.3 δίνει την ίδια εξάρτηση, από το n, με εκείνην του Θεωρήματος 2.1.1. Μάλιστα, το Θεώρημα 2.1.1 είναι ισχυρότερο αν αυτό που έχει σημασία είναι να χρησιμοποιήσουμε (τους λιγότερους δυνατούς) $2n$ από τους κλειστούς ημιχώρους P_i. Από την άλλη πλευρά, υπάρχει μια (μικρή) διαφορά στην τιμή της σταθεράς C που εμφανίζεται στη διατύπωση των δύο θεωρημάτων: η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.1 δουλεύει με $C = 2\sqrt[3]{\pi}$, ενώ η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.3 δουλεύει με $C_d = \left(\frac{e\gamma_d}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ (που είναι μικρότερη από C αν το d είναι αρκετά μεγάλο).

Παρόλα αυτά, αν εξασθενίσουμε τη συνθήκη για το πλήθος s των ημιχώρων που χρησιμοποιούμε (απαιτώντας όμως πάντα να είναι ανάλογο με τη διάσταση) τότε μπορούμε να βελτιώσουμε σημαντικά τον εκθέτη στη σταθερά $C_{n,N}$ από $\frac{3n}{2}$ σε n:

Θεώρημα 2.1.4. *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά* $\alpha > 1$ *με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε οικογένεια* $\{P_i : i \in I\}$ *κλειστών ημιχώρων*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i \rangle \leqslant 1\} \tag{2.1.8}$$

στον $\mathbb{R}^n$, *τέτοια ώστε το* $P = \bigcap_{i \in I} P_i$ *να έχει θετικό όγκο, υπάρχουν* $s \leqslant \alpha n$ *και* $i_1, \dots, i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant (Cn)^n |P|, \tag{2.1.9}$$

όπου $C > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Σημειώνουμε ότι, στο [31], οι De Loera, La Haye, Rolnick και Soberón παρουσιάζουν πολλά ενδιαφέροντα αποτελέσματα, τόσο συνεχή όσο και διακριτά, τα οποία μπορούν να θεωρηθούν ποσοτικές εκδοχές των θεωρημάτων του Καραθεοδωρή, του Helly και του Tverberg. Για παράδειγμα, αποδεικνύουν ότι για κάθε $n \geqslant 1$ και $\varepsilon > 0$ υπάρχει θετικός ακέραιος $N(n, \varepsilon)$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν $\mathcal{F} = \{F_i : i \in I\}$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα ότι $|F_{i_1} \cap \cdots \cap F_{i_s}| \geqslant 1$ για κάθε $s \leqslant Nn$ και $i_1, \dots, i_s \in I$, τότε

$$\left| \bigcap_{i \in I} F_i \right| \geqslant \frac{1}{1+\varepsilon}. \tag{2.1.10}$$

Αποδεικνύουν επίσης μια παραλλαγή αυτού του ισχυρισμού, στην οποία ο όγκος αντικαθίσταται από τη διάμετρο, καθώς και μια «έγχρωμη» εκδοχή του θεωρήματος του Helly για τον όγκο. Τονίζουμε έδώ ότι η «φιλοσοφία» όλων αυτών των αποτελεσμάτων είναι τελείως διαφορετική από τη δική μας. Η παράμετρος $N(n,\varepsilon)$ ορίζεται να είναι ο μικρότερος ακέραιος με την ιδιότητα ότι, για κάθε κυρτό σύνολο $K\subset\mathbb{R}^n$ με θετικό όγκο υπάρχει ένα πολύτοπο $P\supseteq K$ που έχει το πολύ $N(n,\varepsilon)$ έδρες τέτοιο ώστε $|P|\leqslant(1+\varepsilon)|K|$, και είναι γνωστό ότι ο $N(n,\varepsilon)$ εξαρτάται εκθετικά από τα n και ε: έχουμε

$$\left(\frac{c_1 n}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{2}}\leqslant N(n,\varepsilon)\leqslant\left(\frac{c_2 n}{\varepsilon}\right)^{\frac{n-1}{2}}. \tag{2.1.11}$$

Ενδιαφερόμαστε για το καλύτερο κάτω φράγμα που μπορεί να δοθεί για τον όγκο $\left|\bigcap_{i\in I}F_i\right|$ αν έχουμε ένα κάτω φράγμα για τον όγκο της τομής οποιωνδήποτε $N\simeq n$ από τα σύνολα F_i (το κρίσιμο σημείο είναι ότι το N υποτίθεται ανάλογο προς τη διάσταση).

Κλείνουμε αυτή την εισαγωγική παράγραφο εξηγώντας εν συντομία τις βασικές ιδέες πίσω από τα αποτελέσματά μας στη μη-συμμετρική περίπτωση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $P=\bigcap_{i\in I}\{x\in\mathbb{R}^n:\langle x,v_i\rangle\leqslant 1\}$ έχει πεπερασμένο όγκο και, δεδομένου ότι τα αποτελέσματα είναι αναλλοίωτα ως προς αφφινικούς μετασχηματισμούς, ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο P είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα (το P είναι στη θέση John). Έχουμε τότε στη διάθεσή μας την αναπαράσταση John του ταυτοτικού τελεστή: υπάρχει $J\subseteq I$ τέτοιο ώστε τα v_j, $j\in J$ να είναι σημεία επαφής των P και B_2^n, καθώς και θετικοί πραγματικοί αριθμοί a_j, $j\in J$ έτσι ώστε

$$I_n=\sum_{j\in J}a_jv_j\otimes v_j\quad\text{και}\quad\sum_{j\in J}a_jv_j=0. \tag{2.1.12}$$

Για δοθέν $d>1$ θα θέλαμε να επιλέξουμε ένα υποσύνολο σ του J, με πληθικότητα dn, για το οποίο να εξακολουθούμε να έχουμε μια προσεγγιστική αναπαράσταση John του ταυτοτικού τελεστή, με κατάλληλα βάρη. Για το σκοπό αυτό, στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.3 χρησιμοποιούμε ένα αποτέλεσμα των Batson, Spielman και Srivastava από το [17]: υπάρχει ένα υποσύνολο $\sigma\subseteq J$ με $|\sigma|\leqslant dn$ και $b_j>0$, $j\in\sigma$, τέτοιο ώστε

$$I_n\preceq\sum_{j\in\sigma}b_ja_jv_j\otimes v_j\preceq\gamma_dI_n, \tag{2.1.13}$$

όπου $\gamma_d:=\left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}\right)^2$. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4 χρησιμοποιούμε ένα δεύτερο, πιο τεχνικό, θεώρημα του Srivastava από το [85].

Κατόπιν, θα θέλαμε να εκμεταλλευτούμε κατάλληλη τροποποίηση της απόδειξης της αντίστροφης ισοπεριμετρικής ανισότητας από τον Ball στο [5] για να εκτιμήσουμε τον όγκο του $Q:=\bigcap_{j\in\sigma}P_j$ χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brascamp-Lieb. Το βασικό πρόβλημα είναι τώρα να έχουμε μια εκτίμηση για τη σταθερά στην ανισότητα Brascamp-Lieb που αντιστοιχεί σε μια προσεγγιστική αναπαράσταση John. Απ΄ όσο γνωρίζουμε, αυτό το πρόβλημα δεν είχε μελετηθεί. Το βασικό μας τεχνικό αποτέλεσμα είναι το επόμενο θεώρημα, το οποίο πιστεύουμε ότι παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Θεώρημα 2.1.5. *Έστω $\gamma > 1$. Έστω $u_1, \ldots, u_s \in S^{n-1}$ και $c_1, \ldots, c_s > 0$ που ικανοποιούν την*

$$I_n \preceq A := \sum_{j=1}^{s} c_j u_j \otimes u_j \preceq \gamma I_n. \tag{2.1.14}$$

Θέτουμε $\kappa_j = c_j \langle A^{-1} u_j, u_j \rangle > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Αν $f_1, \ldots, f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{s} f_j^{\kappa_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leqslant \gamma^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{s} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{\kappa_j}. \tag{2.1.15}$$

Στο Κεφάλαιο 4 αποδεικνυουμε μια ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Helly για τη διάμετρο. Αφετηρία μας είναι το ακόλουθο θεώρημα των Bárány, Katchalski και Pach από το [11], στο οποίο δίνεται μια πρώτη εκτίμηση αυτού του τύπου:

Έστω $\{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια κλειστών κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε

$$\operatorname{diam} \left(\bigcap_{i \in I} P_i \right) = 1.$$

Υπάρχουν $s \leqslant 2n$ και $i_1, \ldots, i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$\operatorname{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant (cn)^{n/2}, \tag{2.1.16}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην ίδια εργασία οι συγγραφείς κάνουν την εικασία ότι το σωστό φράγμα θα πρέπει να είναι πολυωνυμικό ως προς n. Ρωτάνε μάλιστα αν η εκτίμηση $(cn)^{n/2}$ μπορεί να αντικατασταθεί από $c\sqrt{n}$. Εξασθενίζοντας την απαίτηση να πάρουμε $s \leqslant 2n$, ακριβώς όπως στο προηγούμενο κεφάλαιο, δίνουμε καταφατική απάντηση, αν και δεν μπορούμε να επιτύχουμε φράγμα της τάξης της $\sqrt{n}$.

Ξεκινώντας από τη συμμετρική περίπτωση, έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.6. *Έστω $\{P_i : i \in I\}$ μια πεπερασμένη οικογένεια συμμετρικών κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ με $\operatorname{int}\left(\bigcap_{i \in I} P_i\right) \neq \emptyset$. Για κάθε $d > 1$ υπάρχουν $s \leqslant dn$ και $i_1, \ldots i_s \in I$ τέτοια ώστε*

$$P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s} \subseteq \gamma_d \sqrt{n} \left(\bigcap_{i \in I} P_i \right), \tag{2.1.17}$$

όπου $\gamma_d := \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.6 βασίζεται σε ένα λήμμα του Barvinok από το [16] το οποίο με τη σειρά του εκμεταλλεύεται το θεώρημα των Batson, Spielman και Srivastava. Είναι φανερό ότι το φράγμα της τάξης της $\sqrt{n}$ δεν μπορεί να βελτιωθεί (δίνουμε ένα απλό παράδειγμα).

Στη γενική (όχι αναγκαστικά συμμετρική) περίπτωση, χρησιμοποιώντας παρόμοια στρατηγική και κάποιες από τις ιδέες του προηγούμενου κεφαλαίου, καθώς και το θεώρημα του Srivastava, παίρνουμε την ακόλουθη εκτίμηση.

Θεώρημα 2.1.7. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $\alpha > 1$ *με την ακόλουθη ιδιότητα: αν* $\{P_i : i \in I\}$ *είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{int}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) \neq \emptyset$*, τότε υπάρχουν* $z \in \mathbb{R}^n$, $s \leqslant \alpha n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$z + P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s} \subseteq cn^{3/2}\left(z + \bigcap_{i\in I} P_i\right), \tag{2.1.18}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Είναι φανερό ότι από το Θεώρημα 2.1.6 και το Θεώρημα 2.1.7 παίρνουμε πολυωνυμικές εκτιμήσεις για τη διάμετρο:

Θεώρημα 2.1.8. (α) *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια οικογένεια συμμετρικών κυρτών συνόλων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$*. Για κάθε* $d > 1$ *υπάρχουν* $s \leqslant dn$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant \gamma_d \sqrt{n}, \tag{2.1.19}$$

όπου $\gamma_d := \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$.

(β) *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $\alpha > 1$ *με την ακόλουθη ιδιότητα: αν* $\{P_i : i \in I\}$ *είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$*, τότε υπάρχουν* $s \leqslant \alpha n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant cn^{3/2}, \tag{2.1.20}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Στην Παράγραφο 4.3 δίνουμε πολυωνυμική εκτίμηση για το αρχικό ερώτημα των Bárány, Katchalski και Pach.

Θεώρημα 2.1.9. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$*. Μπορούμε να βρούμε* $s \leqslant 2n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοιους ώστε*

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant cn^5, \tag{2.1.21}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Το βασικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.9 είναι και πάλι ένα θεώρημα εγκλεισμού.

Θεώρημα 2.1.10. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{int}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) \neq \emptyset$*. Για κάθε* $k > n$ *μπορούμε να βρούμε* $z \in \mathbb{R}^n$, $s \leqslant k + n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$z + P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s} \subseteq \gamma_{k,n} n(n+2)\left(z + \bigcap_{i\in I} P_i\right), \tag{2.1.22}$$

όπου $\gamma_{k,n} = \left(\frac{\sqrt{k}+\sqrt{n}}{\sqrt{k}-\sqrt{n}}\right)^2$.

Είναι φανερό ότι αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.1.10 με $k = n+1$ τότε παίρνουμε πολυωνυμική εκτίμηση (τάξης $O(n^4)$) για τη διάμετρο με $s \leqslant 2n+1$. Για να ελαττώσουμε το πλήθος των σωμάτων P_{i_j} από $2n+1$ σε $2n$, και να πάρουμε το ακριβές αποτέλεσμα του Θεωρήματος 2.1.9, εφαρμόζουμε μία φορά στο τέλος ένα σχετικό λήμμα των Bárány, Katchalski και Pach.

Στο Κεφάλαιο 5 επεκτείνουμε τη συνεχή μορφή των ανισοτήτων Brascamp-Lieb, που αποδείχθηκε από τον Barthe, στο πλαίσιο των κατά προσέγγιση ισοτροπικών μέτρων Borel στη σφαίρα. Ένα μέτρο Borel ν στην S^{n-1} λέγεται ισοτροπικό αν

$$I_n = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\nu(u), \tag{2.1.23}$$

όπου I_n είναι ο ταυτοτικός τελεστής. Το θεώρημα του Barthe είναι ένα ζεύγος ανισοτήτων για μια οικογένεια συναρτήσεων (f_u), $u \in S^{n-1}$, που ικανοποιούν τις ακόλουθες συνθήκες συνέχειας:

- Υπάρχουν μια συνεχής συνάρτηση $F : S^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ και δύο συναρτήσεις a, b στην S^{n-1} με $a < b$ (οι a, b είτε παίρνουν πραγματικές τιμές ή είναι σταθερές με τιμή $\pm\infty$) τέτοιες ώστε, για κάθε $(u, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$
$$f_u(t) = \mathbf{1}_{\{a(u) \leqslant t \leqslant b(u)\}} F(u, t).$$
- Υπάρχει μια συνάρτηση $U \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ τέτοια ώστε $0 \leqslant f_u \leqslant U$ για κάθε $u \in S^{n-1}$.

Τότε λέμε ότι η οικογένεια (f_u) ικανοποιεί τη συνθήκη (H).

Θεώρημα 2.1.11 (Barthe). *Έστω ν ένα ισοτροπικό μέτρο Borel στην S^{n-1} και έστω (f_u), $u \in S^{n-1}$ μια οικογένεια συναρτήσεων $f_u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ που ικανοποιεί τη συνθήκη (H). Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x, u \rangle) d\nu(u) \right) dx \leqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u \right) d\nu(u) \right). \tag{2.1.24}$$

Επίσης, αν h είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$h\left(\int_{S^{n-1}} \theta(u) u \, d\nu(u) \right) \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\theta(u)) \, d\nu(u) \right) \tag{2.1.25}$$

για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση θ, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) \, dx \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u \right) d\nu(u) \right). \tag{2.1.26}$$

Τα διακριτά ανάλογα των δύο ισχυρισμών του Θεωρήματος 2.1.11, η εκδοχή του Ball για την ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb του Barthe, έχουν παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στην κυρτή γεωμετρική ανάλυση, όντας το κρίσιμο εργαλείο για να αποδειχθούν ακριβείς γεωμετρικές ανισότητες. Υπενθυμίζουμε ότι αν $m \geqslant n$, $u_1, \ldots, u_m \in \mathbb{R}^n$

και οι $c_1, \dots, c_m > 0$ ικανοποιούν την $c_1 + \dots + c_m = n$, τότε η ανισότητα Brascamp-Lieb [25], όπως αναδιατυπώθηκε από τον Ball (βλέπε, για παράδειγμα, [4]), ισχυρίζεται ότι

$$G(f_1, \dots, f_m) := \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j^{c_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leqslant \frac{1}{\sqrt{D}} \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j \right)^{c_j} \tag{2.1.27}$$

για όλες τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_j : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, όπου

$$D = \inf \left\{ \frac{\det\left(\sum_{j=1}^{m} c_j \lambda_j u_j \otimes u_j \right)}{\prod_{j=1}^{m} \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\}. \tag{2.1.28}$$

Μια αντίστροφη μορφή της (2.1.27) αποδείχθηκε από τον Barthe στο [13] (βλέπε επίσης [14] για μια πολυδιάστατη επέκταση). Με τις ίδιες υποθέσεις για τα δεδομένα $\{u_j, c_j\}_{j \leqslant m}$, έχουμε

$$K(h_1, \dots, h_m) := \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup \left\{ \prod_{j=1}^{m} h_j^{c_j}(\theta_j) : \theta_j \in \mathbb{R}\,,\ x = \sum_{j=1}^{m} \theta_j c_j u_j \right\} dx \geqslant \sqrt{D} \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} h_j \right)^{c_j} \tag{2.1.29}$$

για όλες τις ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $h_1, \dots, h_m : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$, όπου με $\int^{*}$ συμβολίζουμε το εξωτερικό ολοκλήρωμα.

Αν θέλουμε να εφαρμόσουμε τις (2.1.27) και (2.1.29) για δοθέντα διανύσματα u_j και βάρη c_j, πρέπει να υπολογίσουμε τη σταθερά $D = D(\{u_j, c_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m})$ και αυτό δεν είναι απλό πρόβλημα. Η κρίσιμη παρατήρηση του Ball είναι ότι αν τα $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$ και οι $c_1, \dots, c_m > 0$ ικανοποιούν τη συνθήκη

$$I_n = \sum_{j=1}^{m} c_j u_j \otimes u_j, \tag{2.1.30}$$

τότε

$$D = D(\{u_j, c_j\}_{1 \leqslant j \leqslant m}) = 1. \tag{2.1.31}$$

Ο Ball χρησιμοποίησε αυτό το γεγονός αρχικά στο [4] για να δώσει εκτιμήσεις για τον όγκο των τομών και των προβολών του μοναδιαίου κύβου. Μια πολύ γνωστή αναπαράσταση της μορφής (2.1.30) εμφανίζεται στο θεώρημα του John για κυρτά σώματα που έχουν ως ελλειψοειδές μέγιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα. Η πρώτη πολύ γνωστή εφαρμογή της (2.1.27) είναι η ακριβής αντίστροφη ισοπεριμετρική ανισότητα του Ball στο [5]. Στη συνέχεια, τόσο η (2.1.27) όσο και η (2.1.29) χρησιμοποιήθηκαν συστηματικά για την απόδειξη διαφόρων ανισοτήτων στην κυρτή γεωμετρική ανάλυση (βλέπε [7] για αναφορές και την ιστορία αυτών των ιδεών).

Παρατηρήστε ότι τα $u_j \in S^{n-1}$ και $c_j > 0$ ικανοποιούν την (2.1.30) αν και μόνο αν το μέτρο ν με $\mathrm{supp}(\nu) = \{u_1, \dots, u_m\}$ και $\nu(\{u_j\}) = c_j$, $j = 1, \dots, m$ είναι ισοτροπικό μέτρο στην S^{n-1}. Έγινε αντιληπτό, με αφετηρία το [44] στο οποίο τέθηκε αυτό το πλαίσιο, ότι διάφορες κλασσικές θέσεις των κυρτών σωμάτων χαρακτηρίζονται από το γεγονός ότι κατάλληλο κάθε φορά μέτρο Borel στη σφαίρα είναι ισοτροπικό. Για παράδειγμα:

- Ένα κυρτό σώμα K έχει ελάχιστη επιφάνεια ανάμεσα σε όλες τις αφφινικές εικόνες του που έχουν τον ίδιο όγκο αν και μόνο αν το επιφανειακό μέτρο σ_K του K είναι ισοτροπικό μέτρο στην S^{n-1}.

- Ένα κυρτό σώμα K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος ανάμεσα σε όλες τις αφφινικές εικόνες του που έχουν τον ίδιο όγκο αν και μόνο αν το μέτρο ν_K με πυκνότητα h_K ως προς το σ είναι ισοτροπικό μέτρο στην S^{n-1}.

Το θεώρημα του Barthe (Θεώρημα 2.1.11) δίνει μια συνεχή εκδοχή (και επέκταση) των (2.1.27) και (2.1.29) η οποία επιτρέπει εφαρμογές σε περιπτώσεις όπου εμφανίζεται ένα μη-διακριτό ισοτροπικό μέτρο, όπως στα δύο παραδείγματα που δώσαμε πιο πάνω (βλέπε επίσης [69] και [70] για ένα δείγμα εφαρμογών).

Παρουσιάζουμε μια παραλλαγή του Θεωρήματος 2.1.11 για ένα μέτρο Borel ν στην S^{n-1} το οποίο είναι κατά προσέγγιση ισοτροπικό. Για κάθε μη-αρνητικό και πεπερασμένο μέτρο Borel ν στην S^{n-1} θεωρούμε τον συμμετρικό θετικά ημιορισμένο $n \times n$ πίνακα

$$T_\nu = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\nu(u). \tag{2.1.32}$$

Λέμε ότι το ν ειναι *γ-προσέγγιση ισοτροπικού μέτρου* (για κάποιον $\gamma > 1$) αν

$$I_n \preceq T_\nu = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\nu(u) \preceq \gamma I_n. \tag{2.1.33}$$

Αρχικά, αποδεικνύουμε μια γενίκευση του ακόλουθου αποτελέσματος των Lutwak, Yang και Zhang [68] που είναι η συνεχής εκδοχή της παρατήρησης του Ball (2.1.31): αν ν είναι ένα ισοτροπικό μέτρο στην S^{n-1} και $t : \mathrm{supp}(\nu) \longrightarrow (0, \infty)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε

$$\det\left(\int_{S^{n-1}} t(u) u \otimes u \, d\nu(u)\right) \geqslant \exp\left[\int_{S^{n-1}} \log t(u) \, d\nu(u)\right]. \tag{2.1.34}$$

Αυτό το γεγονός παίζει βασικό ρόλο στην απόδειξη του Barthe για το Θεώρημα 2.1.11. Στην περίπτωση που έχουμε ένα κατά προσέγγιση ισοτροπικό μέτρο, παίρνει την ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 2.1.12. *Έστω ν μια γ-προσέγγιση ισοτροπικού μέτρου στην S^{n-1}. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $t : \mathrm{supp}(\nu) \longrightarrow (0, \infty)$ έχουμε*

$$\begin{aligned}\gamma^n \det\left(\int_{S^{n-1}} t(u) \langle T_\nu^{-1} u, u\rangle \, u \otimes u \, d\nu(u)\right) &\geqslant \det\left(\int_{S^{n-1}} t(u) u \otimes u \, d\nu(u)\right) \\ &\geqslant \exp\left[\int_{S^{n-1}} \log t(u) \, \langle T_\nu^{-1} u, u\rangle \, d\nu(u)\right].\end{aligned} \tag{2.1.35}$$

Στη συνέχεια, ακολουθώντας το επιχείρημα του Barthe από το [15] παίρνουμε μια συνεχή ανισότητα Brascamp-Lieb και την αντίστροφή της για γ-προσεγγίσεις ισοτροπικών μέτρων.

Θεώρημα 2.1.13. *Έστω ν μια γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου Borel στον $\mathbb{R}^n$ και έστω (f_u), $u \in S^{n-1}$ μια οικογένεια συναρτήσεων $f_u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ που ικανοποιούν την* (H). *Τότε,*

(2.1.36)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x, u\rangle)\langle T_\nu^{-1}u, u\rangle d\nu(u)\right) dx \leqslant \gamma^{\frac{n}{2}} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) \langle T_\nu^{-1}u, u\rangle\, d\nu(u)\right).$$

Επίσης, αν h είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση τέτοια ώστε

$$h\left(\int_{S^{n-1}} \theta(u)u\, d\nu(u)\right) \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\theta(u))\langle T_\nu^{-1}u, u\rangle\, d\nu(u)\right) \tag{2.1.37}$$

για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση θ, τότε

$$\gamma^{\frac{n}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} h(y)\, dy \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) \langle T_\nu^{-1}u, u\rangle\, d\nu(u)\right). \tag{2.1.38}$$

Στην τελευταία παράγραφο αυτού του κεφαλαίου εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.1.13 για να αποδείξουμε κάποια αποτελέσματα ευστάθειας για κάποιες κλασσικές θέσεις κυρτών σωμάτων. Η βασική ιδέα είναι να εφαρμόσουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.14. *Έστω ν ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στην S^{n-1}. Έστω $C(\nu)$ το συμμετρικό κυρτό σώμα που έχει συνάρτηση στήριξης το μετασχηματισμό συνημιτόνου του ν*

$$C_\nu(x) = \int_{S^{n-1}} |\langle x, u\rangle|\, d\nu(u), \qquad x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.1.39}$$

και έστω $C^*(\nu)$ το πολικό σώμα του ν. Τότε,

$$\nu(S^{n-1})|C^*(\nu)|^{1/n} \geqslant \frac{n\omega_n^{\frac{n+1}{n}}}{2\omega_{n-1}} \geqslant c, \tag{2.1.40}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αντίστροφα, αν ν είναι μια γ-προσέγγιση ισοτροπικού μέτρου στην S^{n-1} για κάποιον $\gamma > 1$, τότε

$$\nu(S^{n-1})|C^*(\nu)|^{1/n} \leqslant 2e\gamma^{\frac{3}{2}}. \tag{2.1.41}$$

Το ισοτροπικό ανάλογο του Θεωρήματος 2.1.14 εμφανίστηκε για πρώτη φορά στο [45], στην ειδική περίπτωση όπου $\nu = \sigma_K$ είναι το επιφανειακό μέτρο ενός κυρτού σώματος K. Το Θεώρημα 2.1.14 μας επιτρέπει να το χρησιμοποιήσουμε για κατά προσέγγιση ισοτροπικά μέτρα. Ως παράδειγμα εφαρμογής δείχνουμε ότι αν το επιφανειακό μέτρο του K είναι σχεδόν ισοτροπικό τότε το K έχει σχεδόν ελάχιστη επιφάνεια (το γεγονός αυτό εμφανίζεται στο [45] αλλά το επιχείρημα που δίνουμε εδώ είναι πιο φυσιολογικό και μπορεί να δώσει νέες εφαρμογές αυτού του τύπου).

2.2 Συμβολισμός και βασικοί ορισμοί

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με μια Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, και γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος συμβολίζεται με $|\cdot|$. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n και σ για το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Θα συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ επί του F. Ορίζουμε επίσης $B_F = B_2^n \cap F$ και $S_F = S^{n-1} \cap F$.

Τα γράμματα c, c', c_1, c_2 κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές, η τιμή των οποίων μπορεί να αλλάζει από γραμμή σε γραμμή. Γράφοντας $a \simeq b$ εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$. Επίσης, αν $K, L \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K \simeq L$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 K \subseteq L \subseteq c_2 K$.

Παραπέμπουμε στο βιβλίο του Schneider [83] για τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας Brunn-Minkowski και στο βιβλίο των Artstein-Avidan, Γιαννόπουλου και V. Milman [3] για τα βασικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας.

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με μη-κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το K είναι συμμετρικό αν $K = -K$, και ότι το K είναι κεντραρισμένο αν το κέντρο βάρους του

$$\mathrm{bar}(K) = \frac{1}{|K|}\int_K x\,dx \tag{2.2.1}$$

είναι στην αρχή των αξόνων. Το πολικό σώμα K° του K ορίζεται ως εξής:

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } x \in K\}. \tag{2.2.2}$$

Η ανισότητα Blaschke-Santaló ισχυρίζεται ότι για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει $|K||K^\circ| \leqslant \omega_n^2$, με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές. Η αντίστροφη ανισότητα Santaló των Bourgain και V. Milman [24] μας δίνει, αντίστροφα, ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$\left(|K||K^\circ|\right)^{1/n} \geqslant c/n, \tag{2.2.3}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του.

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K είναι στη θέση John αν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Το θεώρημα του John [52] ισχυρίζεται ότι το K είναι στη θέση John αν και μόνο αν $B_2^n \subseteq K$ και υπάρχουν $u_1, \dots, u_m \in \mathrm{bd}(K) \cap S^{n-1}$ (σημεία επαφής των K και B_2^n) και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \dots, c_m$ έτσι ώστε να ισχύει η

$$\sum_{j=1}^m c_j u_j = 0 \tag{2.2.4}$$

και ο ταυτοτικός τελεστής I_n να αναπαρίσταται στη μορφή

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j, \tag{2.2.5}$$

όπου $(u_j \otimes u_j)(y) = \langle u_j, y\rangle u_j$. Στην περίπτωση που το K είναι συμμετρικό, η δεύτερη συνθήκη (2.2.5) είναι αρκετή (για κάθε σημείο επαφής u έχουμε ότι το $-u$ είναι επίσης σημείο επαφής, άρα, έχοντας την (2.2.5) μπορούμε εύκολα να δημιουργήσουμε μια άλλη αναπαράσταση τέτοια ώστε η (2.2.4) να ικανοποιείται κι αυτή). Κατ΄ αναλογία προς τη θέση John, λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K είναι στη θέση Löwner αν το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι αυτό ισχύει αν και μόνο αν το K° είναι στη θέση John. Ειδικότερα, έχουμε μια αναπαράσταση του ταυτοτικού τελεστή όμοια με την (2.2.5).

Υποθέτουμε ότι τα $u_1, \dots, u_m$ είναι μοναδιαία διανύσματα που ικανοποιούν τη συνθήκη John (2.2.5) με κάποια θετικά βάρη c_j. Τότε, ισχύουν οι χρήσιμες ταυτότητες

$$\sum_{j=1}^{m} c_j = \mathrm{tr}(I_n) = n \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{m} c_j \langle u_j, z\rangle^2 = 1 \tag{2.2.6}$$

για κάθε $z \in S^{n-1}$. Επιπλέον,

$$\mathrm{conv}\{u_1, \dots, u_m\} \supseteq \frac{1}{n} B_2^n. \tag{2.2.7}$$

Μάλιστα, στη συμμετρική περίπτωση έχουμε

$$\mathrm{conv}\{\pm u_1, \dots, \pm u_m\} \supseteq \frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n. \tag{2.2.8}$$

Ένα άλλο χρήσιμο αποτέλεσμα, που προέρχεται από το κλασσικό άρθρο των Dvoretzky και Rogers [38], εξασφαλίζει ότι μπορούμε να επιλέξουμε $v_1, \dots, v_n$, από τα διανύσματα u_i, τέτοια ώστε

$$\mathrm{dist}(v_k, \mathrm{span}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})) \geqslant \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \tag{2.2.9}$$

για κάθε $k = 2, \dots, n$.

Τέλος, διατυπώνουμε ως λήμμα μια χρήσιμη παρατήρηση από τη Γραμμική Άλγεβρα.

Λήμμα 2.2.1. *Έστω A ένας $n \times n$ αντιστρέψιμος πίνακας. Για κάθε $u, v \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\det(A + u \otimes v) = \det(A)(1 + \langle A^{-1}u, v\rangle). \tag{2.2.10}$$

Απόδειξη. Έστω $u, v \in \mathbb{R}^n$. Ξεκινώντας από την ταυτότητα

$$\begin{pmatrix} I_n & 0 \\ v & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n + u \otimes v & u \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_n & 0 \\ -v & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & u \\ 0 & 1 + \langle u, v\rangle \end{pmatrix} \tag{2.2.11}$$

και παίρνοντας ορίζουσες βλέπουμε ότι $\det(I + u \otimes v) = 1 + \langle u, v\rangle$, που είναι ο ισχυρισμός του λήμματος στην περίπτωση $A = I_n$. Για τον τυχόντα $n \times n$ αντιστρέψιμο πίνακα A γράφουμε

$$A + u \otimes v = A(I_n + A^{-1}(u \otimes v)) = A(I_n + (A^{-1}u \otimes v)), \tag{2.2.12}$$

και εφαρμόζοντας την προηγούμενη ειδική περίπτωση παίρνουμε

$$\det(A + u \otimes v) = \det(A)\det(I_n + (A^{-1}u \otimes v)) = \det(A)(1 + \langle A^{-1}u, v\rangle) \tag{2.2.13}$$

όπως θέλαμε. ■

Κεφάλαιο 3

Ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Helly για τον όγκο

3.1 Το επιχείρημα του Naszódi

Αρχίζουμε με μια εκλέπτυνση του επιχειρήματος του Naszódi από το [74]. Το μοναδικό νέο στοιχείο στην απόδειξη που δίνουμε είναι το γεγονός ότι κάθε κυρτό σώμα K περιέχει ένα κεντρικά συμμετρικό κυρτό σώμα K_1 με όγκο $|K_1| \geqslant 2^{-n}|K|$. Εισάγοντας αυτή την πληροφορία στην αρχική απόδειξη, πετυχαίνουμε καλύτερη εκτίμηση.

Θεώρημα 3.1.1. *Έστω $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια κλειστών ημιχώρων τέτοια ώστε $\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right| > 0$. Μπορούμε να βρούμε $s \leqslant 2n$ και $i_1, \dots, i_s \in I$ τέτοια ώστε*

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant (Cn)^{\frac{3n}{2}} \left|\bigcap_{i\in I} P_i\right|, \tag{3.1.1}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια οικογένεια $\mathcal{P} = \{P_i : i \in I\}$ κλειστών ημιχώρων $P_i = \{x : \langle x, u_i\rangle \leqslant 1\}$ τέτοια ώστε $\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right| < \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathcal{P}$ είναι πεπερασμένη οικογένεια, άρα το $P = \bigcap_{i\in I} P_i$ είναι πολύτοπο. Επειδή το πρόβλημα είναι αφφινικά αναλλοίωτο, μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το P είναι στη θέση John. Από το θεώρημα του John, υπάρχει $J \subseteq I$ τέτοιο ώστε τα u_j, $j \in J$ να είναι σημεία επαφής των P και B_2^n, και $a_j > 0$, $j \in J$ τέτοια ώστε

$$I_n = \sum_{j\in J} a_j u_j \otimes u_j \quad \text{και} \quad \sum_{j\in J} a_j u_j = 0. \tag{3.1.2}$$

Από το λήμμα Dvoretzky-Rogers, μπορούμε να επιλέξουμε n από αυτά τα σημεία επαφής, τα οποία συμβολίζουμε με $v_1, \dots, v_n$, έτσι ώστε

$$\mathrm{dist}(v_k, \mathrm{span}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})) \geqslant \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \tag{3.1.3}$$

για κάθε $k = 2, \dots, n$. Έπεται ότι το simplex $S = \mathrm{conv}\{v_0 = 0, v_1, \dots, v_n\} \subseteq P$ έχει όγκο

$$|S| = \frac{1}{n!}\prod_{k=1}^{n} \mathrm{dist}(v_k, \mathrm{span}(v_1, v_2, \dots, v_{k-1})) \geqslant \frac{1}{n^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}}. \tag{3.1.4}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε το γεγονός (βλέπε [3, Θεώρημα 4.1.20]) ότι αν w είναι το κένρο βάρους του S τότε $S - w$ περιέχει ένα συμμετρικό κυρτό σώμα T_1 με όγκο $|T_1| \geqslant 2^{-n}|S - w| = 2^{-n}|S|$, άρα το κυρτό σώμα $T = T_1 + w \subseteq S$ έχει κέντρο συμμετρίας το w και όγκο

$$|T| \geqslant 2^{-n}|S|. \tag{3.1.5}$$

Θεωρούμε την ημιευθεία ℓ με αρχή το 0 στη διεύθυνση του $-w$. Τότε, η ℓ τέμνει το σύνορο του $\mathrm{conv}\{u_j, j \in J\}$ σε κάποιο σημείο $z \in \mathrm{conv}\{v_{n+1}, \dots, v_{n+k}\}$ για κάποια $v_{n+i} \in \{u_j, j \in J\}$ και $k \leqslant n$ (αυτό προκύπτει από το θεώρημα του Καραθεοδωρή). Επίσης, παρατηρήστε ότι $\mathrm{conv}\{u_j, j \in J\} \supseteq \frac{1}{n}B_2^n$, άρα $\|z\|_2 \geqslant \frac{1}{n}$. Εφαρμόζοντας στο T μια ομοιοθεσία με κέντρο το z και λόγο

$$\lambda = \frac{\|z\|_2}{\|z - w\|_2} = \frac{\|z\|_2}{\|z\|_2 + \|w\|_2} \geqslant \frac{\|z\|_2}{1 + \|z\|_2} \geqslant \frac{1}{n+1},$$

παίρνουμε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα

$$Q \subseteq \mathrm{conv}\{z, v_1, \dots, v_n\} \subseteq \mathrm{conv}\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}, \dots, v_{n+k}\} \tag{3.1.6}$$

με όγκο

$$|Q| \geqslant \frac{1}{(n+1)^n}|T| \geqslant \frac{1}{2^n(n+1)^n}|S| \geqslant \frac{1}{2^n(n+1)^n n^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}}. \tag{3.1.7}$$

Θεωρούμε την τομή των $n + k \leqslant 2n$ ημιχώρων

$$R = \bigcap_{i=1}^{n+k}\{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, v_i \rangle \leqslant 1\}. \tag{3.1.8}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Blaschke-Santaló για το Q και το γεγονός ότι $B_2^n \subseteq P$ και $R \subseteq Q^\circ$, παίρνουμε

$$\frac{|R|}{|P|} \leqslant \frac{|Q^\circ|}{|B_2^n|} \leqslant \frac{|B_2^n|}{|Q|}. \tag{3.1.9}$$

Τέλος, από την (3.1.7) βλέπουμε ότι

$$|R| \leqslant \frac{\pi^{\frac{n}{2}} 2^n (n+1)^n n^{\frac{n}{2}}\sqrt{n!}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}|P| \tag{3.1.10}$$

και έπεται το αποτέλεσμα (με σταθερά $C = 2\sqrt[3]{\pi}$ όπως μπορεί κανείς να ελέγξει χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling) . ∎

3.2 Προσεγγιστικές αναπαραστάσεις του ταυτοτικού τελεστή

Το πρώτο μας εργαλείο προέρχεται από τη δουλειά των Batson, Spielman και Srivastava [17] μεθέμα τη φασματική αραιοποίηση γραφημάτων, στην οποία εισήγαγαν μια ντετερμινιστική μέθοδο εύρεσης προσεγγιστικής αναπαράστασης τύπου John με λίγα διανύσματα, ξεκινώντας από μια αναπαράσταση John της μορφής (2.2.5). Η ακριβής διατύπωση του αποτελέσματός τους είναι η εξής:

Θεώρημα 3.2.1 (Batson-Spielman-Srivastava). *Έστω* $v_1, \dots, v_m \in S^{n-1}$ *και* $a_1, \dots, a_m > 0$ *τέτοια ώστε*

$$I_n = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j \otimes v_j. \tag{3.2.1}$$

Τότε, για κάθε $d > 1$ *μπορούμε να βρούμε υποσύνολο* $\sigma \subseteq \{1, \dots, m\}$ *με* $|\sigma| \leqslant dn$ *και* $b_j > 0$, $j \in \sigma$, *τέτοια ώστε*

$$I_n \preceq \sum_{j \in \sigma} b_j a_j v_j \otimes v_j \preceq \gamma_d I_n, \tag{3.2.2}$$

όπου

$$\gamma_d := \left(\frac{\sqrt{d} + 1}{\sqrt{d} - 1} \right)^2. \tag{3.2.3}$$

Στη διατύπωση του θεωρήματος, αλλά και παρακάτω, για δύο συμμετρικούς θετικά ορισμένους πίνακες A και B γράφουμε $A \preceq B$ αν $\langle Ax, x \rangle \leqslant \langle Bx, x \rangle$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας αυτό το θεώρημα, ο Srivastava [85] απέδειξε μια βελτιωμενη έκδοση του θεωρήματος του Rudelson [81] για την προσέγγιση ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K από ένα συμμετρικό κυρτό σώμα T που έχει λίγα σημεία επαφής με το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του: για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα συμμετρικό κυρτό σώμα T το οποίο έχει το πολύ $32n/\epsilon^2$ σημεία επαφής με το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του και ικανοποιεί την $T \subseteq K \subseteq (1+\epsilon)T$.

Για να μελετήσει τη γενικότερη, όχι αναγκαστικά συμμετρική, περίπτωση ο Srivastava απέδειξε στο [85] την ακόλουθη παραλλαγή του Θεωρήματος 3.2.1:

Θεώρημα 3.2.2 (Srivastava). *Έστω* $v_1, \dots, v_m \in S^{n-1}$ *και* $a_1, \dots, a_m > 0$ *τέτοια ώστε*

$$I_n = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j \otimes v_j \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^{m} a_j v_j = 0. \tag{3.2.4}$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ *μπορούμε να βρούμε υποσύνολο* σ *του* $\{1, \dots, m\}$ *με πληθικότητα* $|\sigma| = O_\varepsilon(n)$, *θετικούς πραγματικούς αριθμούς* c_i, $i \in \sigma$ *και ένα διάνυσμα* v *με*

$$\|v\|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\sum_{i \in \sigma} c_i}, \tag{3.2.5}$$

τέτοια ώστε

$$I_n \preceq \sum_{i\in\sigma} c_i(v_i+v)\otimes(v_i+v) \preceq (4+\varepsilon)I_n \tag{3.2.6}$$

και

$$\sum_{i\in\sigma} c_i(v_i+v) = 0. \tag{3.2.7}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.2, ο Srivastava απέδειξε ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\epsilon > 0$ υπάρχει ένα κυρτό σώμα T το οποίο έχει $O_\epsilon(n)$ σημεία επαφής με το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του, τέτοιο ώστε $T \subseteq K \subseteq (\sqrt{5}+\epsilon)T$. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 3.2.2 για να μελετήσουμε τη γενική, όχι απαραίτητα συμμετρική, περίπτωση του προβλήματός μας, η οποία παρουσιάζει πολύ περισσότερες δυσκολίες.

3.3 Ανισότητα Brascamp-Lieb και προσεγγιστικές αναπαραστάσεις του ταυτοτικού τελεστή

Η ανισότητα Brascamp-Lieb [25] δίνει εκτιμήσεις για τη νόρμα του πλειογραμμικού τελεστή $G : L^{p_1}(\mathbb{R}) \times \cdots \times L^{p_m}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$G(f_1,\dots,f_m) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j(\langle x, u_j\rangle)\, dx, \tag{3.3.1}$$

όπου $m \geqslant n$, $p_1,\dots,p_m \geqslant 1$ με $\frac{1}{p_1}+\cdots+\frac{1}{p_m} = n$, και $u_1,\dots,u_m \in \mathbb{R}^n$. Οι Brascamp και Lieb απέδειξαν ότι η νόρμα του G είναι το supremum D των λόγων

$$\frac{G(g_1,\dots,g_m)}{\prod_{j=1}^m \|g_j\|_{p_j}} \tag{3.3.2}$$

πάνω από όλες τις κεντραρισμένες Gaussian συναρτήσεις $g_1,\dots,g_m$, δηλαδή πάνω από όλες τις συναρτήσεις της μορφής $g_j(t) = e^{-\lambda_j t^2}$, $\lambda_j > 0$.

Αν θέσουμε $c_j = 1/p_j$ και αντικαταστήσουμε τις f_j με τις $f_j^{c_j}$ τότε μπορούμε να αναδιατυπώσουμε την ανισότητα Brascamp-Lieb στην ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 3.3.1 (Brascamp-Lieb). *Έστω* $m \geqslant n$, *και έστω* $u_1,\dots,u_m \in \mathbb{R}^n$ *και* $c_1,\dots,c_m > 0$ *με* $c_1+\cdots+c_m = n$. *Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{c_j}(\langle x, u_j\rangle)dx \leqslant D \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_j\right)^{c_j} \tag{3.3.3}$$

για οποιεσδήποτε ολοκληρώσιμες συναρτήσεις $f_j : \mathbb{R} \to [0,\infty)$, *όπου* $D = 1/\sqrt{F}$ *και*

$$F = \inf\left\{ \frac{\det\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j\otimes u_j\right)}{\prod_{j=1}^m \lambda_j^{c_j}} : \lambda_j > 0 \right\}. \tag{3.3.4}$$

Ο υπολογισμός της σταθεράς $F = F(\{u_j\},\{c_j\})$ στο Θεώρημα 3.3.1 είναι δύσκολος. Μια σημαντική παρατήρηση του Ball (βλέπε, για παράδειγμα, [4]) είναι ότι αν τα $u_1,\dots,u_m \in S^{n-1}$ και $c_1,\dots,c_m > 0$ ικανοποιούν τη συνθήκη αναπαράστασης του John (2.2.5) τότε η σταθερά $F = F(\{u_j\},\{c_j\})$ στο Θεώρημα 3.3.1 είναι ίση με 1.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι εξακολουθούμε να έχουμε ανισότητα Brascamp-Lieb με αρκετά καλή σταθερά αν έχουμε στη διάθεσή μας μια προσεγγιστική συνθήκη τύπου John.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω $\gamma > 1$. Αν τα $u_1,\dots,u_s \in S^{n-1}$ και $c_1,\dots,c_s > 0$ ικανοποιούν την*

$$I_n \preceq A := \sum_{j=1}^{s} c_j u_j \otimes u_j \preceq \gamma I_n \tag{3.3.5}$$

τότε

$$\gamma^n \det\left(\sum_{j=1}^{s} \kappa_j \lambda_j u_j \otimes u_j\right) \geqslant \prod_{j=1}^{s} \lambda_j^{\kappa_j} \tag{3.3.6}$$

για κάθε $\lambda_1,\dots,\lambda_s > 0$, όπου $\kappa_j = c_j\langle A^{-1}u_j, u_j\rangle > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$.

Απόδειξη. Για κάθε $M \subset \{1,\dots,s\}$ με πληθικότητα $|M| = n$ ορίζουμε

$$\lambda_M = \prod_{j\in M} \lambda_j \quad \text{και} \quad U_M = \det\left(\sum_{j\in M} c_j u_j \otimes u_j\right). \tag{3.3.7}$$

Από τον τύπο Cauchy-Binet έχουμε

$$\det\left(\sum_{j=1}^{s} c_j \lambda_j u_j \otimes u_j\right) = \sum_{|M|=n} \lambda_M U_M. \tag{3.3.8}$$

Επιλέγοντας $\lambda_j = 1$ στην (3.3.8) παίρνουμε

$$\sum_{|M|=n} U_M = \det(A). \tag{3.3.9}$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$\sum_{|M|=n} \lambda_M \frac{U_M}{\sum_{|M|=n} U_M} \geqslant \prod_{|M|=n} \lambda_M^{\frac{U_M}{\sum_{|M|=n} U_M}} = \prod_{j=1}^{s} \lambda_j^{\frac{\sum_{\{M:j\in M\}} U_M}{\sum_{|M|=n} U_M}}. \tag{3.3.10}$$

Εφαρμόζοντας ξανά τον τύπο Cauchy-Binet, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{\sum_{\{M:j\in M\}} U_M}{\sum_{|M|=n} U_M} &= \frac{\sum_{|M|=n} U_M - \sum_{\{M:j\notin M\}} U_M}{\sum_{|M|=n} U_M} = 1 - \frac{\det\left(A - c_j u_j \otimes u_j\right)}{\det(A)} \\ &= 1 - (1 - c_j\langle A^{-1}u_j, u_j\rangle) = c_j\langle A^{-1}u_j, u_j\rangle\end{aligned}$$

για κάθε $j = 1, \dots, s$, όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 2.2.1. Επιστρέφοντας στις (3.3.8) και (3.3.10) βλέπουμε ότι

$$\frac{\det\left(\sum_{j=1}^s c_j\lambda_j u_j \otimes u_j\right)}{\det(A)} \geqslant \prod_{j=1}^s \lambda_j^{c_j\langle A^{-1}u_j, u_j\rangle} \tag{3.3.11}$$

Θέτουμε

$$\kappa_j = c_j\langle A^{-1}u_j, u_j\rangle, \qquad j = 1, \dots, s. \tag{3.3.12}$$

Αφού $I_n \preceq A \preceq \gamma I_n$ έχουμε ότι $\det(A) \geqslant 1$ και $\gamma\kappa_j = c_j\gamma\langle A^{-1}u_j, u_j\rangle \geqslant c_j$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant s$. Αυτό συνεπάγεται ότι, για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_s > 0$,

$$\sum_{j=1}^s c_j\lambda_j u_j \otimes u_j \preceq \gamma\left(\sum_{j=1}^s \kappa_j\lambda_j u_j \otimes u_j\right). \tag{3.3.13}$$

Συνδυάζοντας τις (3.3.11) και (3.3.13) παίρνουμε

$$\gamma^n \det\left(\sum_{j=1}^s \kappa_j\lambda_j u_j \otimes u_j\right) \geqslant \prod_{j=1}^s \lambda_j^{\kappa_j} \tag{3.3.14}$$

όπως θέλαμε. ∎

Παρατήρηση 3.3.3. Θέτοντας $\lambda_1 = \dots = \lambda_s = \lambda > 0$ στο συμπέρασμα της Πρότασης 3.3.2, παίρνουμε

$$\gamma^n\lambda^n \det\left(\sum_{j=1}^s \kappa_j u_j \otimes u_j\right) \geqslant \lambda^{\sum_{j=1}^s \kappa_j}. \tag{3.3.15}$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\lambda > 0$, αναγκαστικά έχουμε

$$\sum_{j=1}^s \kappa_j = n. \tag{3.3.16}$$

Μπορούμε να ελέγξουμε αυτή τη σχέση και απευθείας: παρατηρήστε ότι

(3.3.17)
$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^s \kappa_j &= \sum_{j=1}^s c_j\langle A^{-1}u_j, u_j\rangle = \sum_{j=1}^s c_j \operatorname{tr}(u_j \otimes A^{-1}u_j) = \operatorname{tr}\left(\sum_{j=1}^s c_j(u_j \otimes A^{-1}u_j)\right)\\ &= \operatorname{tr}\left(\sum_{j=1}^s c_jA^{-1}(u_j \otimes u_j)\right) = \operatorname{tr}\left(A^{-1}\Big(\sum_{j=1}^s c_j(u_j \otimes u_j)\Big)\right) = \operatorname{tr}(A^{-1}A) = \operatorname{tr}(I_n) = n.\end{aligned}$$

Έχοντας επαληθεύσει τη συνθήκη (3.3.16), συμπεραίνουμε από την Πρόταση 3.3.2 ότι η σταθερά στην ανισότητα Brascamp-Lieb που αντιστοιχεί στα $\{u_j\}_{j=1}^s$ και $\{\kappa_j\}_{j=1}^s$ φράσσεται από $\gamma^{n/2}$. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την παρατήρηση στην ακόλουθη μορφή:

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω $\gamma > 1$. Υποθέτουμε ότι τα $u_1, \dots, u_s \in S^{n-1}$ και $c_1, \dots, c_s > 0$ ικανοποιούν την*

$$I_n \preceq A := \sum_{j=1}^{s} c_j u_j \otimes u_j \preceq \gamma I_n \tag{3.3.18}$$

και θέτουμε $\kappa_j = c_j \langle A^{-1} u_j, u_j \rangle > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$. Αν $f_1, \dots, f_s : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{s} f_j^{\kappa_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leqslant \gamma^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{s} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{\kappa_j}. \tag{3.3.19}$$

3.4 Προσέγγιση του όγκου με κυρτά σώματα που έχουν λίγες έδρες

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε τα κύρια αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Θα δείξουμε ότι η τομή οποιασδήποτε οικογένειας κλειστών ημιχώρων περιέχεται σε μια τομή $N \simeq n$ από αυτούς τους ημιχώρους, που έχει σχετικά μικρό όγκο. Αυτό συνεπάγεται τις ποσοτικές εκδοχές μας για το θεώρημα του Helly, όπως εξηγήσαμε στην εισαγωγή.

Αρχίζουμε με τη συμμετρική περίπτωση.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $\{P_i : i \in I\}$ μια οικογένεια συμμετρικών λωρίδων*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_i \rangle| \leqslant 1\} \tag{3.4.1}$$

στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $P = \bigcap_{i \in I} P_i$. Για κάθε $d > 1$ υπάρχουν $s \leqslant dn$ και $i_1, \dots, i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant \left(\frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1} \right)^n \Gamma\left(\frac{n}{2} + 1 \right) |P|. \tag{3.4.2}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το P είναι στη θέση John. Από το θεώρημα του John υπάρχει $J \subseteq I$ τέτοιο ώστε τα διανύσματα v_j, $j \in J$ να είναι σημεία επαφής των P και S^{n-1} καθώς και $a_j > 0$, $j \in J$, τέτοια ώστε

$$I_n = \sum_{j \in J} a_j v_j \otimes v_j. \tag{3.4.3}$$

Το Θεώρημα 3.2.1 δείχνει ότι υπάρχει ένα υποσύνολο $\sigma \subseteq J$ με $|\sigma| = s \leqslant dn$ καθώς και $b_j > 0$, $j \in \sigma$, τέτοια ώστε

$$I_n \preceq \sum_{j \in \sigma} b_j a_j v_j \otimes v_j \preceq \gamma_d I_n, \tag{3.4.4}$$

όπου $\gamma_d = \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1} \right)^2$. Ξαναγράφουμε τα διανύσματα v_j, $j \in \sigma$ ως $w_1, \dots, w_s$ και θέτουμε $c_j = a_j b_j$. Τώρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.3.4 βρίσκουμε $\kappa_j > 0$, $1 \leqslant j \leqslant s$ τέτοια ώστε $\sum_{j=1}^{s} \kappa_j = n$ και

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{s} f_j^{\kappa_j}(\langle x, w_j \rangle) dx \leqslant \gamma_d^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^{s} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{\kappa_j} \tag{3.4.5}$$

για κάθε επιλογή μη-αρνητικών ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_s$ ον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι

$$|P_1 \cap \cdots \cap P_s| = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{s} \mathbf{1}_{[-1,1]}(\langle x, w_j \rangle)^{\kappa_j} dx. \tag{3.4.6}$$

Αφού $\int_{\mathbb{R}} \mathbf{1}_{[-1,1]}(t)dt = 2$, από το Θεώρημα 3.3.4 παίρνουμε

$$|P_1 \cap \cdots \cap P_s| \leqslant 2^n \gamma_d^{\frac{n}{2}}. \tag{3.4.7}$$

Αφού $B_2^n \subseteq P$, έχουμε επίσης

$$|P| \geqslant |B_2^n| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)} \tag{3.4.8}$$

και έπεται το συμπέρασμα. ∎

Παρατήρηση 3.4.2. Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.1 δείχνει ότι αν το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στη θέση John τότε για κάθε $d > 1$ υπάρχουν $s \leqslant dn$ και $w_1, \ldots, w_s \in S^{n-1}$ τέτοια ώστε

$$K \subseteq P := \bigcap_{j=1}^{s} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, w_j \rangle| \leqslant 1\} \tag{3.4.9}$$

και

$$|P|^{\frac{1}{n}} \leqslant 2\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}. \tag{3.4.10}$$

Αξίζει τον κόπο να συγκρίνουμε αυτή την εκτίμηση με κάποια πολύ γνωστά κάτω φράγματα για των όγκο των τομών λωρίδων, τα οποία οφείλονται στους Carl-Pajor [28], Gluskin [46] και Ball-Pajor [8]. Αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $d > 1$ και θέσουμε $N = \lfloor dn \rfloor$ τότε για κάθε επιλογή διανυσμάτων $w_1, \ldots, w_N$ που παράγουν τον $\mathbb{R}^n$, με $\|w_i\|_2 \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant N$, γνωρίζουμε ότι το σώμα $P = \bigcap_{j=1}^{N} \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, w_j \rangle| \leqslant 1\}$ έχει όγκο

$$|P|^{\frac{1}{n}} \geqslant \frac{2}{\sqrt{e}\sqrt{\log(1+d)}}. \tag{3.4.11}$$

που είναι της ίδιας τάξης (αν αγνοήσουμε την εξάρτηση από το d).

Από την άλλη πλευρά, ακόμα κι αν ζητήσουμε $N = n$ (που αντιστοιχεί στο να πάρουμε $d = 1$), μπορούμε να βρούμε άνω φράγματα της μορφής (3.4.10) στη βιβλιογραφία: για παράδειγμα, αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στη θέση John και αν $v_1, \ldots, v_n$ είναι τα διανύσματα στην (2.2.9) τότε το παραλληλεπίπεδο

$$P = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, v_j \rangle| \leqslant 1,\ j = 1, \ldots, n\}, \tag{3.4.12}$$

ικανοποιεί τις $K \subseteq P$ και

$$|P|^{\frac{1}{n}} = 2|\det(v_1, v_2, \ldots, v_n)|^{-\frac{1}{n}} \leqslant \frac{2\sqrt{n}}{(n!)^{\frac{1}{2n}}} \sim 2\sqrt{e}. \tag{3.4.13}$$

Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στους Dvoretzky και Rogers, και μια εκτίμηση της ίδιας τάξης (η οποία επιτυγχάνει κάπως καλύτερες τιμές για τις σταθερές που εμπλέκονται στο φράγμα) αποδείχθηκε από τους Pelczynski και Szarek στο [77]. Συγκρίνοντας τη σταθερά $2\sqrt{e}$ με την $2\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$ βλέπουμε ότι η εκτίμησή μας δίνει καλύτερο φράγμα αν επιτρέψουμε κάπως μεγαλύτερο, αλλά πάντα ανάλογο της διάστασης, πλήθος λωρίδων.

Περνάμε τώρα στη γενική περίπτωση. Θεωρούμε μια οικογένεια $\{P_i : i \in I\}$ κλειστών n-μιχώρων και θέλουμε να επιλέξουμε s ημιχώρους P_j έτσι ώστε $|P_1 \cap \cdots \cap P_s| \leqslant c_{n,s}\left|\bigcap_{i\in I} P_i\right|$. Παρουσιάζουμε δύο επιχειρήματα. Το πρώτο βασίζεται στις ιδέες του Θεωρήματος 3.4.1 και εξασφαλίζει (για κάθε $d>1$) την ύπαρξη $s \leqslant (d+1)(n+1)$ ημιχώρων και ένα φράγμα της τάξης του $n^{3n/2}$ για τη σταθερά $c_{n,s}$.

Θεώρημα 3.4.3. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια οικογένεια κλειστών ημιχώρων*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i\rangle \leqslant 1\} \tag{3.4.14}$$

στον $\mathbb{R}^n$, *τέτοια ώστε το* $P = \bigcap_{i\in I} P_i$ *να έχει θετικό όγκο. Για κάθε* $d > 1$ *υπάρχουν* $s \leqslant (d+1)(n+1)$ *και* $i_1, \dots, i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant \gamma_d^{\frac{n+1}{2}} \frac{n^{n/2}(n+1)^{3(n+1)/2}}{\pi^{\frac{n}{2}} n!} \Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right) |P| \leqslant \gamma_d^{\frac{n+1}{2}} (Cn)^{\frac{3n}{2}} |P|, \tag{3.4.15}$$

όπου $C > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι το P είναι στη θέση John. Από το θεώρημα του John υπάρχει $J \subseteq I$ τέτοιο ώστε τα διανύσματα u_j, $j \in J$ να είναι σημεία επαφής των P και S^{n-1} και να υπάρχουν $a_j > 0$, $j \in J$, τέτοια ώστε

$$I_n = \sum_{j\in J} a_j u_j \otimes u_j \quad \text{και} \quad \sum_{j\in J} a_j u_j = 0. \tag{3.4.16}$$

Θέτουμε

$$v_j = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(-u_j, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{και} \quad b_j = \frac{n+1}{n} a_j. \tag{3.4.17}$$

Τότε,

$$I_{n+1} = \sum_{j\in J} b_j v_j \otimes v_j. \tag{3.4.18}$$

Το Θεώρημα 3.2.1 δείχνει ότι υπάρχει ένα υποσύνολο $\sigma \subseteq J$ με $|\sigma| = s \leqslant d(n+1)$ καθώς και $\delta_j > 0$, $j \in \sigma$, τέτοια ώστε

$$I_{n+1} \preceq A := \sum_{j\in\sigma} \delta_j b_j v_j \otimes v_j \preceq \gamma_d I_{n+1}, \tag{3.4.19}$$

όπου $\gamma_d = \left(\frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}\right)^2$. Σταθεροποιούμε τα διανύσματα v_j, $j \in \sigma$, και θέτουμε $c_j = \delta_j b_j$. Θεωρούμε επίσης το διάνυσμα

(3.4.20) $$w := -\frac{1}{n(n+1)} \sum_{j\in\sigma} \kappa_j u_j,$$

όπου $\kappa_j = c_j\langle A^{-1}u_j, u_j\rangle > 0$, $j \in \sigma$ είναι οι συντελεστές που μας δίνει η Πρόταση 3.3.2. Θυμηθείτε ότι, από το θεώρημα του John, $\mathrm{conv}\{u_j, j \in J\} \supseteq \frac{1}{n}B_2^n$, και $\|w\|_2 \leqslant \frac{1}{n}$ από την τριγωνική ανισότητα και το γεγονός ότι $\sum_{j\in\sigma} \kappa_j = n+1$. Από το θεώρημα του Καραθεοδωρή συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $\tau \subseteq J$ με $|\tau| \leqslant n+1$ καθώς και $\rho_i > 0$ με $\sum_{i\in\tau} \rho_i = 1$ τέτοια ώστε

(3.4.21) $$w = \sum_{i\in\tau} \rho_i u_i.$$

Ορίζουμε

(3.4.22) $$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_j\rangle < 1 \text{ για κάθε } j \in \sigma\}$$

και

(3.4.23) $$Q' = Q \cap \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i\rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } i \in \tau\}.$$

Από το Θεώρημα 3.3.4 γνωρίζουμε ότι αν $f_j : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$, $j \in \sigma$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, τότε

(3.4.24) $$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j\rangle)dy \leqslant \gamma_d^{\frac{n+1}{2}} \prod_{j\in\sigma} \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t)dt\right)^{\kappa_j}.$$

Για κάθε $j \in \sigma$ ορίζουμε $f_j(t) = e^{-t}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$. Έστω $y = (x, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$. Ελέγχουμε εύκολα ότι αν $r > 0$ και $x \in \frac{r}{\sqrt{n}}Q$ τότε $\langle x, u_j\rangle < \frac{r}{\sqrt{n}}$ για κάθε $j \in \sigma$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\langle y, v_j\rangle > 0$ για κάθε $j \in \sigma$, άρα $\prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j\rangle) > 0$. Έπεται ότι

(3.4.25)

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j\rangle)dy &\geqslant \int_0^\infty \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}Q} \prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j\rangle)dy \\
&= \int_0^\infty \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}Q} \exp\left(-\sum_{j\in\sigma} \kappa_j\langle (x, r), v_j\rangle\right) dx\, dr \\
&= \int_0^\infty \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}Q} \exp\left(\sqrt{\frac{n}{n+1}}\sum_{j\in\sigma} \kappa_j\langle x, u_j\rangle - \frac{r}{\sqrt{n+1}}\sum_{j\in\sigma} \kappa_j\right) dx\, dr \\
&= \int_0^\infty \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}Q} e^{-r\sqrt{n+1}} \exp\left(-n^{3/2}\sqrt{n+1}\langle x, w\rangle\right) dx\, dr \\
&\geqslant \int_0^\infty \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}Q'} e^{-r\sqrt{n+1}} \exp\left(-n^{3/2}\sqrt{n+1}\,\langle x, w\rangle\right) dx\, dr,
\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $Q' \subseteq Q$. Τώρα, παρατηρούμε ότι αν $x \in \frac{r}{\sqrt{n}}Q'$ τότε

$$\langle x, w\rangle = \sum_{i\in\tau} \rho_i \langle x, u_i\rangle \leqslant \frac{r}{\sqrt{n}}. \tag{3.4.26}$$

Έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j\rangle)dy &\geqslant \int_0^\infty \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}Q'} e^{-r\sqrt{n+1}-rn\sqrt{n+1}}dx\,dr \\ &= \int_0^\infty \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}Q'} e^{-r(n+1)^{3/2}}dx\,dr \\ &= |Q'|\cdot \frac{1}{n^{n/2}} \int_0^\infty r^n e^{-r(n+1)^{3/2}}\,dr \\ &= |Q'|\cdot \frac{1}{n^{n/2}} \frac{n!}{(n+1)^{3(n+1)/2}}. \end{aligned} \tag{3.4.27}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\prod_{j\in\sigma}\left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t)dt\right)^{\kappa_j} = 1, \tag{3.4.28}$$

άρα η (3.4.24) μας δίνει

$$|Q'| \leqslant \gamma_d^{\frac{n+1}{2}} \frac{n^{n/2}(n+1)^{3(n+1)/2}}{n!}. \tag{3.4.29}$$

Αφού το Q' είναι τομή το πολύ $(d+1)(n+1)$ ημιχώρων και $B_2^n \subseteq P \subseteq Q'$, το συμπέρασμα προκύπτει όπως στη συμμετρική περίπτωση. Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling μπορεί κανείς να ελέγξει ότι το συμπέρασμα ισχύει με $C_d = \left(\frac{e\gamma_d}{2\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$. ∎

Το επιχείρημα που παρουσιάζουμε στη συνέχεια εξασφαλίζει (για μια απόλυτη σταθερά $\alpha \gg 1$) μια επιλογή $s \leqslant \alpha n$ ημιχώρων και ένα πολύ καλύτερο φράγμα της τάξης του n^n για τη σταθερά $c_{n,s}$.

Θεώρημα 3.4.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\alpha > 1$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε οικογένεια $\{P_i : i \in I\}$ κλειστών ημιχώρων*

$$P_i = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_i\rangle \leqslant 1\} \tag{3.4.30}$$

στον $\mathbb{R}^n$, τέτοια ώστε το $P = \bigcap_{i\in I} P_i$ να έχει θετικό όγκο, υπάρχουν $s \leqslant \alpha n$ και $i_1, \dots, i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$|P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}| \leqslant (Cn)^n\,|P|, \tag{3.4.31}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.3, υποθέτουμε ότι το P είναι στη θέση John, και βρίσκουμε $J \subseteq I$ τέτοιο ώστε τα διανύσματα u_j, $j \in J$ να είναι σημεία επαφής των P και S^{n-1} και, για κάποιους $a_j > 0$, $j \in J$,

$$I_n = \sum_{j\in J} a_j u_j \otimes u_j \quad \text{και} \quad \sum_{j\in J} a_j u_j = 0. \tag{3.4.32}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.2 βρίσκουμε ένα υποσύνολο $\sigma \subseteq J$ με $|\sigma| \leqslant \alpha_1(\varepsilon)n$, θετικούς πραγματικούς αριθμούς c_j, $j \in \sigma$ και ένα διάνυσμα u, τέτοια ώστε

$$I_n \preceq \sum_{j\in\sigma} c_j(u_j+u)\otimes(u_j+u) \preceq (4+\varepsilon)I_n \tag{3.4.33}$$

και

$$\sum_{j\in\sigma} c_j(u_j+u) = 0 \quad \text{και} \quad \|u\|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\sum_{j\in\sigma} c_j}. \tag{3.4.34}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}\left(\sum_{j\in\sigma} c_j(u_j+u)\otimes(u_j+u)\right) &= \sum_{j\in\sigma} c_j\|u_j+u\|_2^2 \\ &= \sum_{j\in\sigma} c_j\|u_j\|_2^2 + 2\sum_{j\in\sigma}\langle u, c_ju_j\rangle + \left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)\|u\|_2^2 \\ &= \sum_{j\in\sigma} c_j + 2\Big\langle u, -\Big(\sum_{j\in\sigma} c_j\Big)u\Big\rangle + \left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)\|u\|_2^2 \\ &= \sum_{j\in\sigma} c_j - \left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)\|u\|_2^2, \end{aligned} \tag{3.4.35}$$

άρα από την (3.4.33) έχουμε

$$n \leqslant \sum_{j\in\sigma} c_j - \left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)\|u\|_2^2 \leqslant (4+\varepsilon)n.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την (3.4.34) παίρνουμε

$$n \leqslant \sum_{j\in\sigma} c_j \leqslant (4+2\varepsilon)n. \tag{3.4.36}$$

Ειδικότερα,

$$\|u\|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\sum_{j\in\sigma} c_j} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}. \tag{3.4.37}$$

Θυμηθείτε ότι $\mathrm{conv}\{u_j, j \in J\} \supseteq \frac{1}{n}B_2^n$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε το $w = \frac{u}{\sqrt{\varepsilon n}}$ τότε $\|w\|_2 \leqslant \frac{1}{n}$ άρα $w \in \mathrm{conv}\{u_j, j \in J\}$. Από το θεώρημα του Καραθεοδωρή συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν $\tau \subseteq J$ με $|\tau| \leqslant n+1$ και $\rho_i > 0$, $i \in \tau$ τέτοια ώστε

$$w = \sum_{i\in\tau} \rho_i u_i \quad \text{και} \quad \sum_{i\in\tau} \rho_i = 1. \tag{3.4.38}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)(-u) = \sum_{j\in\sigma} c_j u_j, \tag{3.4.39}$$

οπότε $-u \in \mathrm{conv}\{u_j : j \in \sigma\}$. Έπεται ότι το ευθύγραμμο τμήμα

$$\left[-u, \frac{u}{\sqrt{\varepsilon n}}\right] \subset \mathrm{conv}\{u_j : j \in \sigma \cup \tau\}. \tag{3.4.40}$$

Για κάθε $j \in \sigma$ θέτουμε

$$v_j = \sqrt{\frac{n}{n+1}}\left(-u_j, \frac{1}{\sqrt{n}}\right) \quad \text{και} \quad b_j = \frac{n+1}{n} c_j. \tag{3.4.41}$$

Ορίζουμε επίσης $-v = \sqrt{\frac{n}{n+1}}(u, 0)$. Τότε, χρησιμοποιώντας την (3.4.34) παίρνουμε

$$\sum_{j\in\sigma} b_j (v_j + v) \otimes (v_j + v) = \begin{pmatrix} \sum_{j\in\sigma} c_j (u_j + u) \otimes (u_j + u) & 0 \\ 0 & \frac{\sum_{j\in\sigma} c_j}{n} \end{pmatrix}, \tag{3.4.42}$$

η οποία, με τη βοήθεια της (3.4.36), μας δίνει

$$I_{n+1} \preceq \sum_{j\in\sigma} b_j (v_j + v) \otimes (v_j + v) \preceq (4 + 2\varepsilon) I_{n+1}. \tag{3.4.43}$$

Ξαναγράφουμε την τελευταία σχέση ως εξής:

$$\begin{aligned} I_{n+1} - \sum_{j\in\sigma} b_j v_j \otimes v - \sum_{j\in\sigma} v \otimes b_j v_j - \left(\sum_{j\in\sigma} b_j\right) v \otimes v \\ \preceq \sum_{j\in\sigma} b_j v_j \otimes v_j \preceq 5 I_{n+1} - \sum_{j\in\sigma} b_j v_j \otimes v - \sum_{j\in\sigma} v \otimes b_j v_j - \left(\sum_{j\in\sigma} b_j\right) v \otimes v. \end{aligned} \tag{3.4.44}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{j\in\sigma} b_j v_j = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(-\sum_{j\in\sigma} c_j u_j, \frac{\sum_{j\in\sigma} c_j}{\sqrt{n}}\right) = \sqrt{\frac{n+1}{n}}\left(\left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right) u, \frac{\sum_{j\in\sigma} c_j}{\sqrt{n}}\right), \tag{3.4.45}$$

άρα

$$\left(\sum_{j\in\sigma} b_j v_j\right)\otimes v = \left(\left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)u, \frac{\sum_{j\in\sigma} c_j}{\sqrt{n}}\right)\otimes(-u,0) \tag{3.4.46}$$

$$= \begin{pmatrix} -\left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)u\otimes u & 0 \\ -\frac{(\sum_{j\in\sigma} c_j)u}{\sqrt{n}} & 0\end{pmatrix}.$$

Με παρόμοιο υπολογισμό τελικά παίρνουμε

$$T := \sum_{j\in\sigma} b_j v_j \otimes v + \sum_{j\in\sigma} v\otimes b_j v_j + \left(\sum_{j\in\sigma} b_j\right) v\otimes v = \begin{pmatrix} V & z \\ z & 0\end{pmatrix}. \tag{3.4.47}$$

όπου $V = -\left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)u\otimes u$ και $z = -\frac{(\sum_{j\in\sigma} c_j)u}{\sqrt{n}}$. Τώρα, για κάθε $(x,t)\in S^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\langle T(x,t),(x,t)\rangle &= \langle Vx,x\rangle + 2\langle z,t\rangle \leqslant \|V\| + 2\|z\|_2 \\ &= \left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)\|u\|_2^2 + \left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)\frac{2\|u\|_2}{\sqrt{n}} \\ &\leqslant \varepsilon + (4+2\varepsilon)n\frac{2\sqrt{\varepsilon}}{n} = \varepsilon + 2\sqrt{\varepsilon}(4+2\varepsilon).\end{aligned} \tag{3.4.48}$$

Επιλέγοντας $\varepsilon = 10^{-3}$ παίρνουμε

$$\left\|\sum_{j\in\sigma} b_j v_j\otimes v + \sum_{j\in\sigma} v\otimes b_j v_j + \left(\sum_{j\in\sigma} b_j\right)v\otimes v\right\| \leqslant \frac{1}{2}, \tag{3.4.49}$$

και επιστρέφοντας στην (3.4.44) βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2}I_{n+1} \preceq \sum_{j\in\sigma} b_j v_j\otimes v_j \preceq 5I_{n+1}. \tag{3.4.50}$$

Τώρα, εφαρμόζοντας την Πρόταση 3.3.2 βρίσκουμε $\kappa_j > 0$, $j\in\sigma$ με την εξής ιδιότητα: αν $f_j:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j\rangle)dy \leqslant 10^{\frac{n+1}{2}} \prod_{j\in\sigma}\left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t)dt\right)^{\kappa_j}. \tag{3.4.51}$$

Για κάθε $j\in\sigma$ ορίζουμε $f_j(t) = e^{-\frac{b_j}{\kappa_j}t}\mathbf{1}_{[0,\infty)}(t)$. Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j\rangle)dy \leqslant 10^{\frac{n+1}{2}} \prod_{j\in\sigma}\left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t)dt\right)^{\kappa_j} = 10^{\frac{n+1}{2}}\prod_{j\in\sigma}\left(\frac{\kappa_j}{c_j}\right)^{\kappa_j} \leqslant 40^{\frac{n+1}{2}}, \tag{3.4.52}$$

αν θυμηθούμε, από την απόδειξη της Πρότασης 3.3.2, ότι $\frac{\kappa_j}{b_j} = \langle A^{-1}u_j, u_j\rangle \leqslant 2$ (η τελευταία ανισότητα είναι συνέπεια της $\frac{1}{2}I_{n+1}\preceq A = \sum_{j\in\sigma} b_j v_j\otimes v_j$).

Θέτουμε

$$Q = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u_j \rangle < 1, \quad j \in \sigma \cup \tau\}. \tag{3.4.53}$$

Γράφουμε $y = (x, r) \in \mathbb{R}^{n+1}$ και υποθέτουμε ότι $r > 0$ και $x \in \frac{r}{\sqrt{n}}Q$. Τότε, έχουμε $\langle x, u_j \rangle < \frac{r}{\sqrt{n}}$ για κάθε $j \in \sigma$. Έπεται ότι $\langle y, v_j \rangle > 0$ για κάθε $j \in \sigma$, άρα $\prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j \rangle) > 0$. Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{\left(\sum_{j\in\sigma} c_j\right)} \left\langle \sum_{j\in\sigma} c_j u_j, x \right\rangle &= \langle -u, x \rangle = \sqrt{\varepsilon n}\langle -w, x \rangle = \sqrt{\varepsilon n}\left\langle -\sum_{i\in\tau} \rho_i u_i, x \right\rangle \\ &\geqslant -\sqrt{\varepsilon}r. \end{aligned} \tag{3.4.54}$$

Η τελευταία ανισότητα ισχύει διότι $x \in \frac{r}{\sqrt{n}}Q$. Έπεται ότι

$$\left\langle \sum_{j\in\sigma} c_j u_j, x \right\rangle \geqslant -5\sqrt{\varepsilon} r n. \tag{3.4.55}$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω (και την επιλογή που κάναμε για το $\varepsilon = 10^{-3} < 1$) βλέπουμε ότι αν $y = (x, r) \in \frac{r}{\sqrt{n}}Q \times (0, \infty)$ τότε

$$\begin{aligned} \prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j \rangle) &= \exp\left(-\sum_{j\in\sigma} b_j \left(\frac{r}{\sqrt{n}} - \sqrt{\frac{n}{n+1}}\langle x, u_j \rangle\right)\right) \\ &= \exp\left(-\frac{r}{\sqrt{n}}\sum_{j\in\sigma} b_j\right) \exp\left(\left\langle x, \sum_{j\in\sigma} b_j u_j \right\rangle\right) \\ &\geqslant \exp\left(-5r\frac{n+1}{\sqrt{n}} - 5\sqrt{\varepsilon} r(n+1)\right) \geqslant \exp\left(-10r(n+1)\right). \end{aligned} \tag{3.4.56}$$

Τώρα, η (3.4.52) μας δίνει

$$\begin{aligned} \frac{|Q|}{n^{\frac{n}{2}}} \int_0^\infty r^n e^{-10r(n+1)}\, dr &= \int_0^\infty \int_{\frac{r}{\sqrt{n}}Q} e^{-10r(n+1)} dx\, dr \leqslant \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \prod_{j\in\sigma} f_j^{\kappa_j}(\langle y, v_j \rangle) dy \\ &\leqslant 40^{\frac{n+1}{2}}. \end{aligned} \tag{3.4.57}$$

Με απευθείας υπολογισμό και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling βλέπουμε ότο

$$|Q| \leqslant C_1^n \frac{n^{\frac{3n}{2}}}{n!} \leqslant C_2^n n^{\frac{n}{2}} \tag{3.4.58}$$

και το Q είναι τομή το πολύ $|\sigma| + |\tau| \leqslant \alpha_1(10^{-3})n + n + 1 \leqslant \alpha n$ ημιχώρων, όπου $\alpha = \alpha_1(10^{-3}) + 2$. Αφού $B_2^n \subseteq P \subseteq Q$, το συμπέρασμα έπεται όπως στη συμμετρική περίπτωση. ■

Κεφάλαιο 4

Ποσοτική εκδοχή του θεωρήματος Helly για την διάμετρο

4.1 Συμμετρική περίπτωση

Το βασικό μας εργαλείο για τη συμμετρική περίπτωση είναι ένα λήμμα του Barvinok από το [16], το οποίο με τη σειρά του εκμεταλλεύεται το θεώρημα των Batson, Spielman και Srivastava [17] που χρησιμοποιήσαμε και στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 4.1.1 (Batson-Spielman-Srivastava). *Έστω* $v_1, \ldots, v_m \in S^{n-1}$ *και* $a_1, \ldots, a_m > 0$ *τέτοια ώστε*

$$I_n = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j \otimes v_j. \tag{4.1.1}$$

Τότε, για κάθε $d > 1$ *μπορούμε να βρούμε υποσύνολο* $\sigma \subseteq \{1, \ldots, m\}$ *με* $|\sigma| \leqslant dn$ *και* $b_j > 0$, $j \in \sigma$, *τέτοια ώστε*

$$I_n \preceq \sum_{j\in\sigma} b_j a_j v_j \otimes v_j \preceq \gamma_d^2 I_n, \tag{4.1.2}$$

όπου $\gamma_d := \frac{\sqrt{d}+1}{\sqrt{d}-1}$.

Συμφωνούμε ότι για δύο συμμετρικούς θετικά ορισμένους πίνακες A και B θα γράφουμε $A \preceq B$ αν $\langle Ax, x\rangle \leqslant \langle Bx, x\rangle$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Το λήμμα του Barvinok είναι το εξής.

Λήμμα 4.1.2 (Barvinok). *Έστω* $C \subset \mathbb{R}^n$ *ένα συμπαγές σύνολο. Τότε, υπάρχει υποσύνολο* $X \subseteq C$ *με πληθικότητα* $\mathrm{card}(X) \leqslant dn$ *τέτοιο ώστε για κάθε* $z \in \mathbb{R}^n$ *να ισχύει*

$$\max_{x\in X} |\langle z, x\rangle| \leqslant \max_{x\in C} |\langle z, x\rangle| \leqslant \gamma_d \sqrt{n} \max_{x\in X} |\langle z, x\rangle| \tag{4.1.3}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το C παράγει τον $\mathbb{R}^n$ και, επειδή ο ισχυρισμός του λήμματος είναι γραμμικά αναλλοίωτος, ότι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το C. Τότε, υπάρχουν $v_1, \ldots, v_m \in C \cap S^{n-1}$ και $a_1, \ldots, a_m > 0$

τέτοια ώστε να ισχύει η (4.1.1). Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.1.1 μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο $\sigma \subseteq \{1, \dots, m\}$ με $\mathrm{card}(\sigma) \leqslant dn$ και $b_j > 0$, $j \in \sigma$, τέτοιους ώστε να ισχύει η (4.1.2). Ειδικότερα,

$$n \leqslant \sum_{j\in\sigma} a_j b_j = \mathrm{tr}\left(\sum_{j\in\sigma} b_j a_j v_j \otimes v_j\right) \leqslant \gamma_d^2 n. \tag{4.1.4}$$

Για το τυχόν $z \in \mathbb{R}^n$, από τις (4.1.2) και (4.1.4) έχουμε

$$\|z\|_2^2 \leqslant \sum_{j\in\sigma} b_j a_j \langle z, v_j\rangle^2 \leqslant \gamma_d^2 n \max_{j\in\sigma} |\langle z, v_j\rangle|^2, \tag{4.1.5}$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $C \subseteq B_2^n$ συμπεραίνουμε ότι

$$\max_{x\in C} |\langle z, x\rangle| \leqslant \|z\| \leqslant \gamma_d \sqrt{n} \max_{j\in\sigma} |\langle z, v_j\rangle|. \tag{4.1.6}$$

Θέτοντας $X = \{v_j : j \in \sigma\}$ παίρνουμε το ζητούμενο. ■

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Barvinok μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 2.1.6.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.6. Θέτουμε $P = \bigcap_{i\in I} P_i$ και θεωρούμε το πολικό του σώμα

$$P^\circ = \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i\in I} P_i^\circ\right). \tag{4.1.7}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1.2 για το $C = P^\circ$ μπορούμε να βρούμε $X = \{v_1, \dots, v_s\} \subset P^\circ$ με $\mathrm{card}(X) = s \leqslant dn$ τέτοιο ώστε

$$\max_{x\in P^\circ} |\langle z, x\rangle| \leqslant \gamma_d \sqrt{n} \max_{x\in X} |\langle z, x\rangle| \tag{4.1.8}$$

για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$. Έπεται ότι

$$P^\circ \subseteq \gamma_d \sqrt{n}\, \mathrm{conv}(\{\pm v_1, \dots, \pm v_s\}). \tag{4.1.9}$$

Από την απόδειξη του Λήμματος 4.1.2 βλέπουμε ότι τα $v_1, \dots, v_s$ μπορούν να επιλεγούν να είναι σημεία επαφής του P° με το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του, οπότε είναι απλό να ελέγξουμε ότι στην πραγματικότητα ισχύει $v_j \in \bigcup_{i\in I} P_i^\circ$ για κάθε $j = 1, \dots, s$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να βρούμε $i_1, \dots, i_s \in I$ τέτοια ώστε $v_j \in P_{i_j}$, $j = 1, \dots, s$. Τότε, από την (4.1.9) έπεται ότι

$$P^\circ \subseteq \gamma_d \sqrt{n}\, \mathrm{conv}(P_{i_1}^\circ \cup \cdots \cup P_{i_s}^\circ), \tag{4.1.10}$$

και περνώντας στα πολικά τους σώματα παίρνουμε

$$P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s} \subseteq \gamma_d \sqrt{n}\, P \tag{4.1.11}$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 4.1.3. Το Θεώρημα 2.1.6 είναι βέλτιστο με την εξής έννοια: μπορούμε να βρούμε $w_1, \ldots, w_N \in S^{n-1}$ (υποθέτοντας ότι το N είναι εκθετικό ως προς τη διάσταση n) τέτοια ώστε

$$B_2^n \subseteq \bigcap_{j=1}^{N} P_j \subseteq 2B_2^n, \tag{4.1.12}$$

όπου

$$P_j = \{x \in \mathbb{R}^n : |\langle x, w_j\rangle| \leqslant 1\}. \tag{4.1.13}$$

Για κάθε $s \leqslant dn$ και κάθε επιλογή των $j_1, \ldots, j_s \in \{1, \ldots, N\}$, από γνωστά αποτελέσματα για τον όγκο τομών λωρίδων (βλέπε Carl-Pajor [28], Gluskin [46] και Ball-Pajor [8]) έχουμε

$$|P_{j_1} \cap \cdots \cap P_{j_s}|^{1/n} \geqslant \frac{2}{\sqrt{e}\,\sqrt{\log(1+d)}}. \tag{4.1.14}$$

Συνεπώς, αν $P_{j_1} \cap \cdots \cap P_{j_s} \subseteq \alpha \bigcap_{j=1}^{N} P_j$ για κάποιον $\alpha > 0$, συγκρίνοντας όγκους βλέπουμε ότι

$$\alpha \geqslant \frac{|P_{j_1} \cap \cdots \cap P_{j_s}|^{1/n}}{|2B_2^n|^{1/n}} \geqslant \frac{c}{\sqrt{\log(1+d)}}\sqrt{n}, \tag{4.1.15}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

4.2 Γενική περίπτωση

Για να αντιμετωπίσουμε τη γενική περίπτωση χρησιμοποιούμε το θεώρημα του Srivastava από το [85] που χρησιμοποιήσαμε επίσης στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Θεώρημα 4.2.1 (Srivastava). *Έστω $v_1, \ldots, v_m \in S^{n-1}$ και $a_1, \ldots, a_m > 0$ τέτοια ώστε*

$$I_n = \sum_{j=1}^{m} a_j v_j \otimes v_j \quad \textit{και} \quad \sum_{j=1}^{m} a_j v_j = 0. \tag{4.2.1}$$

Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο σ του $\{1, \ldots, m\}$ με πληθικότητα $|\sigma| = O_\varepsilon(n)$, θετικούς πραγματικούς αριθμούς b_i, $i \in \sigma$ και ένα διάνυσμα v με

$$\|v\|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\sum_{i\in\sigma} b_i}, \tag{4.2.2}$$

τέτοια ώστε

$$I_n \preceq \sum_{i\in\sigma} b_i (v_i + v) \otimes (v_i + v) \preceq (4+\varepsilon) I_n \tag{4.2.3}$$

και

$$\sum_{i\in\sigma} b_i (v_i + v) = 0. \tag{4.2.4}$$

Πρόταση 4.2.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά* $\alpha > 1$ *με την ακόλουθη ιδιότητα: αν* K *είναι ένα κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *με ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, τότε υπάρχει υποσύνολο* $X \subset K \cap S^{n-1}$ *με πληθικότητα* $\mathrm{card}(X) \leqslant \alpha n$ *τέτοιο ώστε*

$$B_2^n \subseteq c n^{3/2} \mathrm{conv}(X), \tag{4.2.5}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του Λήμματος 4.1.2 υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K, και βρίσκουμε $v_j \in K \cap S^{n-1}$ και $a_j > 0$, $j \in J$, τέτοια ώστε

$$I_n = \sum_{j \in J} a_j v_j \otimes v_j \quad \text{και} \quad \sum_{j \in J} a_j v_j = 0. \tag{4.2.6}$$

Σταθεροποιούμε $\varepsilon > 0$, το οποίο θα επιλέξουμε αρκετά μικρό, και εφαρμόζοντας το Θεώρημα 3.2.2 βρίσκουμε υποσύνολο $\sigma \subseteq J$ με $|\sigma| \leqslant \alpha_1(\varepsilon) n$, θετικούς πραγματικούς αριθμούς b_j, $j \in \sigma$ και ένα διάνυσμα v τέτοια ώστε

$$I_n \preceq \sum_{j \in \sigma} b_j (v_j + v) \otimes (v_j + v) \preceq (4 + \varepsilon) I_n \tag{4.2.7}$$

και

$$\sum_{j \in \sigma} b_j (v_j + v) = 0 \quad \text{και} \quad \|v\|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\sum_{j \in \sigma} b_j}. \tag{4.2.8}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{tr}\left(\sum_{j \in \sigma} b_j (v_j + v) \otimes (v_j + v) \right) = \sum_{j \in \sigma} b_j - \left(\sum_{j \in \sigma} b_j \right) \|v\|_2^2, \tag{4.2.9}$$

οπότε από την (4.2.7) παίρνουμε

$$n \leqslant \sum_{j \in \sigma} b_j - \left(\sum_{j \in \sigma} b_j \right) \|v\|_2^2 \leqslant (4 + \varepsilon) n.$$

Τώρα, χρησιμοποιώντας την (4.2.8) έχουμε

$$n \leqslant \sum_{j \in \sigma} b_j \leqslant (4 + 2\varepsilon) n. \tag{4.2.10}$$

Ειδικότερα,

$$\|v\|_2^2 \leqslant \frac{\varepsilon}{\sum_{j \in \sigma} b_j} \leqslant \frac{\varepsilon}{n}. \tag{4.2.11}$$

Από το θεώρημα του John γνωρίζουμε ότι $\mathrm{conv}\{v_j, j \in J\} \supseteq \frac{1}{n} B_2^n$. Συνεπώς, για το διάνυσμα $w = \frac{v}{\sqrt{\varepsilon n}}$ έχουμε $\|w\|_2 \leqslant \frac{1}{n}$, δηλαδή $w \in \mathrm{conv}\{v_j, j \in J\}$. Από το θεώρημα του Καραθεοδωρή έπεται ότι υπάρχουν $\tau \subseteq J$ με $|\tau| \leqslant n + 1$ και $\rho_i > 0$, $i \in \tau$ τέτοια ώστε

$$w = \sum_{i \in \tau} \rho_i v_i \quad \text{και} \quad \sum_{i \in \tau} \rho_i = 1. \tag{4.2.12}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\left(\sum_{j\in\sigma} b_j\right)(-v) = \sum_{j\in\sigma} b_j v_j, \tag{4.2.13}$$

το οποίο δείχνει ότι $-v \in \mathrm{conv}\{v_j : j \in \sigma\}$.

Γράφουμε

$$I_n - T \preceq \sum_{j\in\sigma} b_j v_j \otimes v_j \preceq (4+2\varepsilon)I_n - T, \tag{4.2.14}$$

όπου

$$T := \sum_{j\in\sigma} b_j v_j \otimes v + \sum_{j\in\sigma} v \otimes b_j v_j + \left(\sum_{j\in\sigma} b_j\right) v \otimes v. \tag{4.2.15}$$

Παίρνοντας υπόψη την (4.2.13) ελέγχουμε ότι, για κάθε $x \in S^{n-1}$,

$$|\langle Tx, x\rangle| = \left(\sum_{j\in\sigma} b_j\right)\langle x, v\rangle^2 \leqslant \left(\sum_{j\in\sigma} b_j\right)\|v\|_2^2 \leqslant \varepsilon. \tag{4.2.16}$$

Επιλέγοντας $\varepsilon = 1/2$ βλέπουμε ότι $\|T\| \leqslant \frac{1}{2}$, και αυτό τελικά δίνει

$$\frac{1}{2}I_n \preceq A := \sum_{j\in\sigma} b_j v_j \otimes v_j \preceq \frac{11}{2}I_n. \tag{4.2.17}$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι

$$K := \mathrm{conv}(\{v_j : j \in \sigma \cup \tau\}) \supseteq \frac{c}{n^{3/2}}B_2^n. \tag{4.2.18}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το συναρτησοειδές Minkowski του K ορίζεται από την

$$p_K(x) = \min\{t \geqslant 0 : x \in tK\}. \tag{4.2.19}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το p_K είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές.

Έστω $x \in S^{n-1}$. Θέτουμε $\delta = \min\{\langle x, v_j\rangle : j \in \sigma\}$. Παρατηρήστε ότι $|\delta| \leqslant 1$ και $\langle x, v_j\rangle - \delta \leqslant 2$ για κάθε $j \in \sigma$. Αν $\delta < 0$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
p_K(Ax) &\leqslant p_K\left(Ax - \delta\sum_{j\in\sigma} b_j v_j\right) + p_K\left(\delta\sum_{j\in\sigma} b_j v_j\right)\\
&= p_K\left(\sum_{j\in\sigma} b_j(\langle x, v_j\rangle - \delta)v_j\right) + p_K\left(\delta\Big(\sum_{j\in\sigma} b_j\Big)(-v)\right)\\
&\leqslant \sum_{j\in\sigma} b_j(\langle x, v_j\rangle - \delta)p_K(v_j) - \delta\Big(\sum_{j\in\sigma} b_j\Big)p_K(v)\\
&\leqslant \Big(\sum_{j\in\sigma} b_j\Big)\left[2 + \sqrt{n/2}\,p_K(w)\right]\\
&\leqslant c_1 n^{3/2},
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι, αφού $w \in K$, ισχύει $p_K(w) \leqslant 1$. Αν $\delta \geqslant 0$ τότε $\langle x, v_j\rangle \geqslant 0$ για κάθε $j \in \sigma$, άρα

$$p_K(Ax) = p_K\left(\sum_{j\in\sigma} b_j\langle x, v_j\rangle v_j\right) \leqslant \sum_{j\in\sigma} b_j\langle x, v_j\rangle p_K(v_j) \leqslant \sum_{j\in\sigma} b_j \leqslant 5n \tag{4.2.20}$$

Σε κάθε περίπτωση, έχουμε

$$p_{A^{-1}(K)}(x) \leqslant c_2 n^{3/2} \tag{4.2.21}$$

για κάθε $x \in S^{n-1}$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Σε συνδυασμό με την (4.2.17) αυτό δείχνει ότι

$$\frac{1}{2}B_2^n \subseteq A(B_2^n) \subseteq c_2 n^{3/2} K. \tag{4.2.22}$$

Αφού $\mathrm{card}(\sigma\cup\tau) \leqslant \alpha_1(1/2)n + n + 1 \leqslant (\alpha_1(1/2)+2)n$, η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.7. Θέτουμε $P = \bigcap_{i\in I} P_i$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(P)$ και ότι το πολικό σώμα

$$P^\circ = \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i\in I} P_i^\circ\right) \tag{4.2.23}$$

είναι στη θέση Löwner. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.2 για το $C = P^\circ$ μπορούμε να βρούμε $X = \{v_1, \dots, v_s\} \subset P^\circ S^{\setminus-\infty}$ με $\mathrm{card}(X) = s \leqslant \alpha n$ τέτοιο ώστε

$$P^\circ \subseteq cn^{3/2}\mathrm{conv}(\{v_1, \dots, v_s\}), \tag{4.2.24}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αφού τα $v_1, \dots, v_s$ είναι σημεία επαφής του P° με το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του, είναι απλό να ελέγξουμε ότι στην πραγματικότητα $v_j \in \bigcup_{i\in I} P_i^\circ$ για κάθε $j = 1, \dots, s$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να βρούμε $i_1, \dots, i_s \in I$ τέτοια ώστε $v_j \in P_{i_j}$, $j = 1, \dots, s$. Τότε, από την (4.2.24) παίρνουμε

$$P^\circ \subseteq cn^{3/2}\mathrm{conv}(P_{i_1}^\circ \cup \dots \cup P_{i_s}^\circ), \tag{4.2.25}$$

και περνώντας στα πολικά σώματα έχουμε

$$P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_s} \subseteq cn^{3/2} P \tag{4.2.26}$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 4.2.3. Στο [11] αποδεικνύεται ότι αν $\{P_i : i \in I\}$ είναι μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$, τότε υπάρχουν $s \leqslant n(n+1)$ και $i_1, \dots i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \dots \cap P_{i_s}) \leqslant \sqrt{2n(n+1)}. \tag{4.2.27}$$

Στη συνέχεια περιγράφεται ένα σχήμα το οποίο μας επιτρέπει να ελαττώσουμε κι άλλο το πλήθος των σωμάτων P_{i_j} εξακολουθώντας να έχουμε κάποιον έλεγχο στη διάμετρο. Το λήμμα στο οποίο βασίζεται αυτή η διαδικασία είναι το εξής:

Λήμμα 4.2.4. *Έστω $m > 2n$ και $P_1, \ldots, P_m$ κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $0 \in P_1 \cap \cdots \cap P_m$. Αν η περιγεγραμμένη ακτίνα του $P_1 \cap \cdots \cap P_m$ είναι ίση με 1 τότε μπορούμε να βρούμε $1 \leqslant j \leqslant m$ τέτοια ώστε η περιγεγραμμένη ακτίνα του $\bigcap_{i=1, i\neq j}^m P_i$ να είναι το πολύ ίση με $\frac{m}{m-2n}$.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν C είναι μια γεωδαισιακή μπάλα στην S^{n-1} τέτοια ώστε $\mathrm{dist}(0, \mathrm{conv}(C)) = \frac{m-2n}{m}$ τότε $\sigma(C) > \frac{n}{m}$. Υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leqslant j \leqslant m$ η περιγεγραμμένη ακτίνα του $\bigcap_{i=1, i\neq j}^m P_i$ είναι μεγαλύτερη από 1 και θα αποδείξουμε ότι η περιγεγραμμένη ακτίνα του $P_1 \cap \cdots \cap P_m$ είναι μεγαλύτερη από $\frac{m-2n}{m}$. Μπορούμε να επιλέξουμε $y_j \in \bigcap_{i=1, i\neq j}^m P_i$ με $\|y_j\|_2 = 1$ και στη συνέχεια θεωρούμε τη γεωδαισιακή μπάλα C_j με κέντρο y_j και $\mathrm{dist}(0, \mathrm{conv}(C_j)) = \frac{m-2n}{m}$. Ισχυριζόμαστε ότι υπάρχει $\nu \in S^{n-1}$ το οποίο ανήκει σε τουλάχιστον $n+1$ από τα σύνολα C_j. Αν όχι, τότε κάθε σημείο της S^{n-1} καλύπτεται από το πολύ n από τα C_j, και αυτό μας δίνει

$$n \geqslant \sum_{j=1}^m \sigma(C_j) > m \cdot \frac{n}{m} = n,$$

το οποίο είναι άτοπο. Τώρα, θεωρούμε τη γεωδαισιακή μπάλα $C(\nu)$ με κέντρο ν και $\mathrm{dist}(0, \mathrm{conv}(C(\nu))) = \frac{m-2n}{m}$. Έχουμε τουλάχιστον $n+1$ από τα σημεία y_j στο $C(\nu)$, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y_1, \ldots, y_{n+1} \in C(\nu)$. Κάθε ευθύγραμμο τμήμα $[0, y_j]$, $j \leqslant n+1$, συναντάει το υπερεπίπεδο στήριξης H του $C(\nu)$ σε κάποιο σημείο $w_j \in \bigcap_{i=1, i\neq j}^m P_i$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Radon για τα σημεία $w_1, \ldots, w_{n+1}$ του H, βρίσκουμε ένα σημείο $u \in \bigcap_{j=1}^{n+1} \left(\bigcap_{i=1, i\neq j}^m P_i\right) = P_1 \cap \cdots \cap P_m$. Αφού $u \in H$, έχουμε $\|u\|_2 \geqslant \frac{m-2n}{m}$. ■

Ξεκινώντας με το Θεώρημα 2.1.7 και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.4, για κάθε πεπερασμένη οικογένεια $\{P_i : i \in I\}$ κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$, αρχικά βρίσκουμε $s \leqslant \alpha n$ και $i_1, \ldots i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant c_1 n^{3/2}, \tag{4.2.28}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, και μετά μπορούμε να κρατήσουμε $2n$ από τα σώματα P_{i_j} έτσι ώστε η διάμετρος της τομής τους να φράσσεται από

$$c_1 n^{3/2} \prod_{m=2n+1}^{s} \frac{m}{m-2n} = c n^{3/2} \binom{s}{2n} \leqslant c n^{3/2} \left(\frac{e\alpha}{2}\right)^{2n} \leqslant c_2^n, \tag{4.2.29}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό βελτιώνει την εκτίμηση στο [11] (για το αρχικό ερώτημα που μελετάται εκεί) αλλά η εκτίμηση εξακολουθεί να είναι εκθετική ως προς τη διάσταση.

4.3 Πολυωνυμική εκτίμηση για το πρόβλημα της διαμέτρου

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε πολυωνυμική εκτίμηση για το αρχικό ερώτημα των Bárány, Katchalski και Pach.

Θεώρημα 4.3.1. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$. *Μπορούμε να βρούμε* $s \leqslant 2n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοιους ώστε*

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant cn^5, \tag{4.3.1}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Το βασικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 είναι και πάλι ένα θεώρημα εγκλεισμού.

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{int}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) \neq \emptyset$. *Για κάθε* $k > n$ *μπορούμε να βρούμε* $z \in \mathbb{R}^n$, $s \leqslant k + n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$z + P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s} \subseteq \gamma_{k,n} n(n+2)\left(z + \bigcap_{i\in I} P_i\right), \tag{4.3.2}$$

όπου $\gamma_{k,n} = \left(\frac{\sqrt{k}+\sqrt{n}}{\sqrt{k}-\sqrt{n}}\right)^2$.

Είναι φανερό ότι αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 4.3.2 με $k = n+1$ τότε παίρνουμε πολυωνυμική εκτίμηση (τάξης $O(n^4)$) για τη διάμετρο με $s \leqslant 2n+1$. Για να ελαττώσουμε το πλήθος των σωμάτων P_{i_j} από $2n+1$ σε $2n$, και να πάρουμε το ακριβές αποτέλεσμα του Θεωρήματος 4.3.1, θα εφαρμόσουμε στο τέλος το Λήμμα 4.2.4 μία φορά.

Ξεκινάμε αποδεικνύοντας την ακόλουθη πρόταση, η οποία είναι παραλλαγή της Πρότασης 4.2.2.

Πρόταση 4.3.3. *Έστω* K *ένα κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$ *το οποίο έχει ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα. Για κάθε* $k > n$ *υπάρχει ένα υποσύνολο* $X \subset K \cap S^{n-1}$ *με πληθικότητα* $\mathrm{card}(X) \leqslant k + n$ *τέτοιο ώστε*

$$K \subseteq B_2^n \subseteq \left(\frac{\sqrt{k}+\sqrt{n}}{\sqrt{k}-\sqrt{n}}\right)^2 n(n+2)\,\mathrm{conv}(X). \tag{4.3.3}$$

Απόδειξη. Αφού η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K, από το θεώρημα του John μπορούμε να βρούμε $v_j \in K \cap S^{n-1}$ και $a_j > 0$, $j \in J$, τέτοια ώστε

$$I_n = \sum_{j\in J} a_j v_j \otimes v_j \quad \text{και} \quad \sum_{j\in J} a_j v_j = 0. \tag{4.3.4}$$

Από την (4.3.4) έπεται ότι

$$\mathrm{conv}\{v_1, \dots, v_m\} \supseteq \frac{1}{n} B_2^n. \tag{4.3.5}$$

Υπενθυμίζουμε ότι $\gamma_{k,n} := \left(\frac{\sqrt{k}+\sqrt{n}}{\sqrt{k}-\sqrt{n}}\right)^2$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα των Batson, Spielman και Srivastava βρίσκουμε ένα υποσύνολο $\sigma \subseteq J$ με $|\sigma| \leqslant k$ και θετικούς πραγματικούς αριθμούς b_j, $j \in \sigma$, έτσι ώστε ο $T := \sum_{j\in\sigma} b_j v_j \otimes v_j$ να ικανοποιεί την

$$I_n \preceq \sum_{j\in\sigma} b_j v_j \otimes v_j \preceq \gamma_{k,n} I_n.$$

Παίρνοντας ίχνη βλέπουμε ότι

$$b := \sum_{j\in\sigma} b_j \leqslant \gamma_{k,n} n.$$

Παρατηρούμε ότι το διάνυσμα $w = -\frac{1}{bn}\sum_{j\in\sigma} b_j v_j$ έχει μήκος $\|w\|_2 \leqslant \frac{1}{bn}\sum_{j\in\sigma} b_j = \frac{1}{n}$, άρα $w \in \mathrm{conv}\{v_j, j \in J\}$ από την (4.3.5). Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε $\kappa \geqslant 1$ τέτοιον ώστε το κw να ανήκει σε κάποια έδρα της κυρτής θήκης $\mathrm{conv}\{v_j, j \in J\}$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα του Καραθεοδωρή βρίσκουμε $\tau \subseteq J$ με $|\tau| \leqslant n$ και $\rho_i > 0$, $i \in \tau$ τέτοιους ώστε

$$\kappa w = \sum_{i\in\tau} \rho_i v_i \quad \text{και} \quad \sum_{i\in\tau} \rho_i = 1. \tag{4.3.6}$$

Θα δείξουμε ότι

$$K := \mathrm{conv}(\{v_j : j \in \sigma \cup \tau\}) \supseteq \frac{1}{\gamma_{k,n} n(n+2)} B_2^n. \tag{4.3.7}$$

Υπενθυμίζουμε ότι το συναρτησοειδές Minkowski του K, το οποίο ορίζεται από την $p_K(y) = \min\{t \geqslant 0 : y \in tK\}$, είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Θεωρούμε τυχόν $x \in S^{n-1}$, θέτουμε $\delta = \min\{\langle x, v_j\rangle : j \in \sigma\}$ και παρατηρούμε ότι $|\delta| \leqslant 1$ και $\langle x, v_j\rangle - \delta \leqslant 2$ για κάθε $j \in \sigma$. Αν $\delta < 0$, γράφουμε

$$\begin{aligned} p_K(T(x)) &\leqslant p_K\left(T(x) - \delta\sum_{j\in\sigma} b_j v_j\right) + p_K\left(\delta\sum_{j\in\sigma} b_j v_j\right) \\ &= p_K\left(\sum_{j\in\sigma} b_j(\langle x, v_j\rangle - \delta)v_j\right) + p_K\left(|\delta| bnw\right) \\ &\leqslant \sum_{j\in\sigma} b_j(\langle x, v_j\rangle - \delta)p_K(v_j) + |\delta| bn p_K(w). \end{aligned}$$

Αφού $p_K(v_j) \leqslant 1$ και $\langle x, v_j\rangle - \delta \leqslant 2$ για κάθε $j \in \sigma$, βλέπουμε ότι $\sum_{j\in\sigma} b_j(\langle x, v_j\rangle - \delta)p_K(v_j) \leqslant 2\sum_{j\in\sigma} b_j = 2b$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\kappa w \in K$, άρα $p_K(w) = \frac{1}{\kappa} p_K(\kappa w) \leqslant 1$, έχουμε επίσης $|\delta| bn p_K(w) \leqslant bn$. Συνεπώς, αν $\delta < 0$ τότε τελικά παίρνουμε

$$p_K(T(x)) \leqslant 2b + bn = b(n+2) \leqslant \gamma_{k,n} n(n+2).$$

Αν $\delta \geqslant 0$ τότε $\langle x, v_j\rangle \geqslant 0$ για κάθε $j \in \sigma$, άρα

$$p_K(T(x)) = p_K\left(\sum_{j\in\sigma} b_j\langle x, v_j\rangle v_j\right) \leqslant \sum_{j\in\sigma} b_j\langle x, v_j\rangle p_K(v_j) \leqslant \sum_{j\in\sigma} b_j \leqslant \gamma_{k,n} n. \tag{4.3.8}$$

Σε κάθε περίπτωση,

$$p_{T^{-1}(K)}(x) \leqslant \gamma_{k,n} n(n+2) p_{B_2^n}(x) \tag{4.3.9}$$

για κάθε $x \in S^{n-1}$. Αφού $I_n \preceq T$, έχουμε επίσης $B_2^n \subseteq T(B_2^n)$, άρα

$$K \subseteq B_2^n \subseteq T(B_2^n) \subseteq \gamma_{k,n} n(n+2) K. \tag{4.3.10}$$

Αφού $\mathrm{card}(\sigma\cup\tau) \leqslant k + n$, η απόδειξη είναι πλήρης. ∎

Θεώρημα 4.3.4. *Έστω* $\{P_i : i \in I\}$ *μια πεπερασμένη οικογένεια κυρτών σωμάτων στον* $\mathbb{R}^n$ *με* $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$*. Για κάθε* $k > n$ *υπάρχουν* $s \leqslant k+n$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant \gamma_{k,n} n(n+2). \tag{4.3.11}$$

Ειδικότερα, επιλέγοντας $k = n+1$ *βλέπουμε ότι υπάρχουν* $s \leqslant 2n+1$ *και* $i_1, \dots i_s \in I$ *τέτοια ώστε*

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant 16n(n+2)(n+1)^2. \tag{4.3.12}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $P = \bigcap_{i\in I} P_i$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in \mathrm{int}(P)$ και ότι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του πολικού σώματος

$$P^\circ = \mathrm{conv}\left(\bigcup_{i\in I} P_i^\circ\right) \tag{4.3.13}$$

του P είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.3 για το $K = P^\circ$ μπορούμε να βρούμε $X = \{v_1, \dots, v_s\} \subset P^\circ \cap S^{n-1}$ με $\mathrm{card}(X) = s \leqslant k+n$ τέτοιο ώστε

$$P^\circ \subseteq \gamma_{k,n} n(n+2)\mathrm{conv}(\{v_1, \dots, v_s\}). \tag{4.3.14}$$

Αφού τα $v_1, \dots, v_s$ είναι σημεία επαφής του P° με την B_2^n, μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι στην πραγματικότητα $v_j \in \bigcup_{i\in I} P_i^\circ$ για κάθε $j = 1, \dots, s$. Με άλλα λόγια, μπορούμε να βρούμε $i_1, \dots, i_s \in I$ τέτοιους ώστε $v_j \in P_{i_j}$, $j = 1, \dots, s$. Τότε, από την (4.3.14) παίρνουμε

$$P^\circ \subseteq \gamma_{k,n} n(n+2)\mathrm{conv}(P_{i_1}^\circ \cup \cdots \cup P_{i_s}^\circ), \tag{4.3.15}$$

και περνώντας στα πολικά τους σώματα έχουμε

$$P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s} \subseteq \gamma_{k,n} n(n+2)P \tag{4.3.16}$$

όπως θέλαμε. Αφού $\gamma_{n+1,n} = (\sqrt{n+1} + \sqrt{n})^4 \leqslant 16(n+1)^2$, η απόδειξη είναι πλήρης. ■

Για το τελευταίο βήμα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.3.1 χρησιμοποιούμε το Λήμμα 4.2.4. Θεωρούμε μια πεπερασμένη οικογένεια $\{P_i : i \in I\}$ κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{diam}\left(\bigcap_{i\in I} P_i\right) = 1$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in \bigcap_{i\in I} P_i$. Αρχικά εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.3.4 και βρίσκουμε $s \leqslant 2n+1$ και $i_1, \dots i_s \in I$ τέτοια ώστε

$$\mathrm{diam}(P_{i_1} \cap \cdots \cap P_{i_s}) \leqslant c_1 n^4, \tag{4.3.17}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αν $s \leqslant 2n$ τότε δεν χρειάζεται να κάνουμε τίποτα, αλλιώς έχουμε $s = 2n+1$ και εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.4 μία φορά κρατάμε $2n$ από τα P_{i_j} έτσι ώστε η διάμετρος της τομής τους να φράσσεται από

$$c_1 n^4(2n+1) \leqslant c_2 n^5, \tag{4.3.18}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1.

Κεφάλαιο 5

Συνεχής προσεγγιστική ανισότητα Brascamp-Lieb

5.1 Συμβολισμός και ορισμοί

5.2.1. Κλασσικές θέσεις κυρτών σωμάτων

Λέμε ότι το K έχει *ελάχιστο μέσο πλάτος* αν $w(K) \leqslant w(TK)$ για κάθε $T \in SL(n)$. Στο [44] αποδείχθηκε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με αρκετά ομαλό σύνορο έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν

$$\int_{S^{n-1}} h_K(x)\langle x, \theta\rangle^2 d\sigma(x) = \frac{w(K)}{n} \tag{5.1.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ισοδύναμα, αν το μέτρο ν_K στην S^{n-1} που έχει πυκνότητα h_K ως προς το σ είναι πολλαπλάσιο ενός ισοτροπικού μέτρου. Επιπλέον, αυτή η θέση ελάχιστου μέσου πλάτους είναι μοναδική αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

Το επιφανειακό μέτρο σ_K ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται στην S^{n-1} και αντιστοιχεί στο συνηθισμένο μέτρο του συνόρου του K μέσω της απεικόνισης του Gauss: για κάθε Borel υποσύνολο $A \subseteq S^{n-1}$, θέτουμε

$$\sigma_K(A) = \lambda\left(\{x \in \mathrm{bd}(K) : \text{ το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του } K \text{ στο } x \text{ ανήκει στο } A\}\right), \tag{5.1.2}$$

όπου λ είναι το $(n-1)$-διάστατο μέτρο στο σύνορο του K. Η επιφάνεια $\partial(K)$ του K είναι προφανώς ίση με $\sigma_K(S^{n-1})$. Λέμε ότι το K έχει ελάχιστη επιφάνεια αν $\partial(K) \leqslant \partial(TK)$ για κάθε $T \in SL(n)$. Ένας χαρακτηρισμός της θέσης ελάχιστης επιφάνειας μέσω του επιφανειακού μέτρου δόθηκε από τον Petty στο [78] (βλέπε επίσης [45]): ένα κυρτό σώμα K έχει ελάχιστη επιφάνεια αν και μόνο αν το σ_K είναι πολλαπλάσιο ενός ισοτροπικού μέτρου. Επιπλέον, αυτή η θέση ελάχιστης επιφάνειας είναι μοναδική αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Το σώμα προβολών ΠK του K είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα που έχει συνάρτηση στήριξης την $h_{\Pi K}(\theta) = |P_{\theta^\perp}(K)|$, $\theta \in S^{n-1}$. Γράφουμε $\Pi^* K$ για το πολικό του σώμα (το πολικό σώμα προβολών του K).

Ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν είναι κεντραρισμένο και υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2 \tag{5.1.3}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Επιπλέον, η ισοτροπική θέση είναι μοναδική αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Γράφοντας την (5.1.3) σε πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε

$$\frac{n\omega_n}{n+2}\int_{S^{n-1}} \langle u, \theta\rangle^2 \rho_K^{n+2}(u)d\sigma(u) = L_K^2 \tag{5.1.4}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου $\rho_K(u) = \max\{t > 0 : tu \in K\}$ είναι η ακτινική συνάρτηση του K. Συνεπώς, το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν το μέτρο λ_K στην S^{n-1} με πυκνότητα ρ_K^{n+2} ως προς το σ είναι πολλαπλάσιο ενος ισοτροπικού μέτρου.

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K είναι στη θέση John αν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Το θεώρημα του John [52] ισχυρίζεται ότι το K είναι στη θέση John αν και μόνο αν $B_2^n \subseteq K$ και υπάρχουν $u_1, \dots, u_m \in \mathrm{bd}(K) \cap S^{n-1}$ (σημεία επαφής των K και B_2^n) και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1, \dots, c_m$ ώστε

$$\sum_{j=1}^m c_j u_j = 0 \tag{5.1.5}$$

και ο ταυτοτικός τελεστής I_n να αναπαρίσταται στη μορφή

$$I_n = \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j. \tag{5.1.6}$$

5.2.2. Διακριτές προσεγγιστικές αναπαραστάσεις του ταυτοτικού τελεστή

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, αν τα $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \dots, c_m > 0$ ικανοποιούν την (5.1.5) τότε $D(\{u_j, c_j\}_{1\leqslant j\leqslant m}) = 1$. Στην περίπτωση που έχουμε προσεγγιστική αναπαράσταση τύπου John είδαμε ότι ισχύει το εξής.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω $\gamma > 1$. Αν τα $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \dots, c_m > 0$ ικανοποιούν την*

$$I_n \preceq A := \sum_{j=1}^m c_j u_j \otimes u_j \preceq \gamma I_n \tag{5.1.7}$$

τότε

$$\gamma^n \det\left(\sum_{j=1}^m \kappa_j\lambda_j u_j \otimes u_j\right) \geqslant \det\left(\sum_{j=1}^m c_j\lambda_j u_j \otimes u_j\right) \geqslant \prod_{j=1}^m \lambda_j^{\kappa_j} \tag{5.1.8}$$

για κάθε $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$, όπου $\kappa_j = c_j\langle A^{-1}u_j, u_j\rangle > 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$.

Άμεση συνέπεια είναι η ακόλουθη προσεγγιστική γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb, καθώς και η αντίστροφή της.

Θεώρημα 5.1.2. *Έστω $\gamma > 1$. Υποθέτουμε ότι τα $u_1, \dots, u_m \in S^{n-1}$ και $c_1, \dots, c_m > 0$ ικανοποιούν την (5.1.1) και θέτουμε $\kappa_j = c_j \langle A^{-1} u_j, u_j \rangle > 0$, $1 \leqslant j \leqslant m$. Αν $f_1, \dots, f_m : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^m f_j^{\kappa_j}(\langle x, u_j \rangle) dx \leqslant \gamma^{\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} f_j(t) dt \right)^{\kappa_j}. \tag{5.1.9}$$

Επίσης, αν $w, h_1, \dots, h_m : \mathbb{R} \longrightarrow [0, \infty)$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και

$$w(x) \geqslant \sup \Big\{ \prod_{j=1}^m h_j^{\kappa_j}(\theta_j) : \theta_j \in \mathbb{R} \, , \; x = \sum_{j=1}^m \theta_j c_j u_j \Big\},$$

τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} w(x) dx \geqslant \gamma^{-\frac{n}{2}} \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} h_j(t) \, dt \right)^{\kappa_j}. \tag{5.1.10}$$

5.2.3. Ισοτροπικά μέτρα

Ένα μέτρο Borel ν στην S^{n-1} λέγεται ισοτροπικό αν

$$I_n = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\nu(u). \tag{5.1.11}$$

Παρατηρήστε ότι τα $u_j \in S^{n-1}$ και $c_j > 0$ ικανοποιούν την (5.1.6) αν και μόνο αν το μέτρο ν με $\mathrm{supp}(\nu) = \{u_1, \dots, u_m\}$ και $\nu(\{u_j\}) = c_j$, $j = 1, \dots, m$ είναι ισοτροπικό μέτρο στην S^{n-1}.

Για κάθε μη-αρνητικό και πεπερασμένο μέτρο πεπερασμένο μέτρο Borel ν στην S^{n-1} θεωρούμε τον συμμετρικό θετικά ημιορισμένο $n \times n$ πίνακα

$$T_\nu = \int_{S^{n-1}} u \otimes u \, d\nu(u). \tag{5.1.12}$$

Ισοδύναμα, έχουμε

$$\langle T_\nu x, x \rangle = \int_{S^{n-1}} \langle x, u \rangle^2 \, d\nu(u) \tag{5.1.13}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι

$$\mathrm{tr}(T_\nu) = \nu(S^{n-1}). \tag{5.1.14}$$

Ειδικότερα, για κάθε αναπαράσταση τύπου John (5.1.6) έχουμε ότι

$$\sum_{j=1}^m c_j = \mathrm{tr}(I_n) = n \quad \text{και} \quad \sum_{j=1}^m c_j \langle u_j, z \rangle^2 = 1 \tag{5.1.15}$$

για κάθε $z \in S^{n-1}$.

Ο μετασχηματισμός συνημιτόνου ενός πεπερασμένου μέτρου Borel ν στην S^{n-1} ορίζεται από την

$$C_\nu(x) = \int_{S^{n-1}} |\langle x, u\rangle| \, d\nu(u), \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{5.1.16}$$

Αν το ν δεν συγκεντρώνεται σε μια σφαίρα χαμηλότερης διάστασης, τότε η C_ν είναι η συνάρτηση στήριξης ενός συμμετρικού κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο συμβολίζουμε με $C(\nu)$. Γράφουμε επίσης $C^*(\nu)$ για το πολικό σώμα του $C(\nu)$. Για παράδειγμα, αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$C_{\sigma_K}(\theta) = \int_{S^{n-1}} |\langle \theta, u\rangle| \, d\sigma_K(u) = 2|P_{\theta^\perp}(K)| \tag{5.1.17}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, άρα $C(\sigma_K) = 2\Pi K$.

5.2.4. Μεικτές διακρίνουσες

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.12 θα τροποποιήσουμε το επιχείρημα που χρησιμοποίησαν οι Lutwak, Yang και Zhang στο [68] για την ισοτροπική περίπτωση. Για το σκοπό αυτό θα χρειαστούμε κάποιες βασικές ιδιότητες των μεικτών διακρινουσών. Υπενθυμίζουμε ότι αν $T_1, \dots, T_m$ είναι θετικά ημιορισμένοι $n \times n$ πίνακες τότε η ορίζουσα του $a_1T_1 + \cdots + a_mT_m$ αναπτύσσεται ως ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς $a_1, \dots, a_m \geqslant 0$. Έχουμε

$$\det(a_1T_1 + \cdots + a_mT_m) = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_n \leqslant m} D(T_{i_1}, \dots, T_{i_n}) a_{i_1} \cdots a_{i_n}, \tag{5.1.18}$$

όπου ο συντελεστής $D(T_{i_1}, \dots, T_{i_n})$ εξαρτάται μόνο από τους δείκτες $i_1, \dots, i_n$ και είναι αναλλοίωτος ως προς μεταθέσεις τους. Ο συντελεστής αυτός είναι η μεικτή διακρίνουσα των $T_{i_1}, \dots, T_{i_n}$.

Θα χρησιμοποιήσουμε τις παρακάτω ιδιότητες των μεικτών διακρινουσών (για μια απόδειξη, βλέπε [10]).

Λήμμα 5.1.3. *Αν S, T, T_i, T_i' ειναι θετικά ημιορισμένοι $n \times n$ πίνακες, τότε:*

(α) $D(T_1, \dots, T_n) \geqslant 0$.

(β) $D(T, T, \dots, T) = \det(T)$. *Ειδικότερα,* $D(I_n, \dots, I_n) = 1$.

(γ) $nD(T, I_n, \dots, I_n) = \mathrm{tr}(T)$.

(δ) *Για κάθε* $a, b \geqslant 0$ *ισχύει*

$$D(aT_1 + bT_1', T_2, \dots, T_n) = aD(T_1, T_2, \dots, T_n) + bD(T_1', T_2, \dots, T_n).$$

(ε) $D(T_1S, T_2S, \dots, T_nS) = |\det(S)| D(T_1, \dots, T_n)$ *και* $D(ST_1, ST_2, \dots, ST_n) = |\det(S)| D(T_1, \dots, T_n)$.

Ενδιαφερόμαστε για n-άδες $(T_{\mu_1},\dots,T_{\mu_n})$ όπου τα $\mu_1,\dots,\mu_n$ είναι μη-αρνητικά πεπερασμένα μέτρα Borel στην S^{n-1}. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$D(T_{\mu_1},\dots,T_{\mu_n}) = \frac{1}{n!}\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}[u_1,\dots,u_n]^2 d\mu_1(u_1)\cdots d\mu_n(u_n), \tag{5.1.19}$$

όπου με $[u_1,\dots,u_n]$ συμβολίζουμε τον όγκο του παραλληλεπιπέδου που ορίζεται από τα $u_1,\dots,u_n$ (βλέπε [68] για μια απόδειξη).

Παρατηρήστε επίσης ότι αν $u\in S^{n-1}$ και δ_u είναι το μέτρο πιθανότητας που φέρεται από το $\{u\}$, τότε

$$\frac{1}{n} = \frac{\mathrm{tr}(T_{\delta_u})}{n} = D(T_{\delta_u}, I_n,\dots,I_n). \tag{5.1.20}$$

5.2 Απόδειξη των αποτελεσμάτων

Αρχίζουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.12. Έστω ν ένα μέτρο Borel στην S^{n-1} το οποίο είναι γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου. Με άλλα λόγια,

$$I_n \preceq T_\nu = \int_{S^{n-1}} u\otimes u\, d\nu(u) \preceq \gamma I_n \tag{5.2.1}$$

για κάποιον $\gamma>1$. Θα δείξουμε ότι για κάθε συνεχή συνάρτηση $t:\mathrm{supp}(\nu)\longrightarrow(0,\infty)$ ισχύει

$$\begin{aligned}\gamma^n \det\left(\int_{S^{n-1}} t(u)\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle\, u\otimes u\, d\nu(u)\right) &\geqslant \det\left(\int_{S^{n-1}} t(u) u\otimes u\, d\nu(u)\right)\\ &\geqslant \exp\left[\int_{S^{n-1}} \log t(u)\, \langle T_\nu^{-1}u,u\rangle\, d\nu(u)\right].\end{aligned} \tag{5.2.2}$$

Απόδειξη της (5.2.2). Εφαρμόζοντας την (5.1.19) για τα μέτρα $\mu_1=\cdots=\mu_n=\mu$ όπου $d\mu = t\, d\nu$, παίρνουμε

(5.2.3)
$$\begin{aligned}\det\left(\int_{S^{n-1}} t(u)u\otimes u\, d\nu(u)\right) &= \det(T_\mu) = D(T_\mu,\dots,T_\mu)\\ &= \frac{1}{n!}\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}} t(u_1)\cdots t(u_n)[u_1,\dots,u_n]^2 d\nu(u_1)\cdots d\nu(u_n)\\ &= \det(T_\nu)\frac{1}{n!\det(T_\nu)}\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}} t(u_1)\cdots t(u_n)[u_1,\dots,u_n]^2 d\nu(u_1)\cdots d\nu(u_n).\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας την t με τη σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1}$ στην προηγούμενη ταυτότητα, βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{n!\det(T_\nu)}\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}[u_1,\dots,u_n]^2 d\nu(u_1)\cdots d\nu(u_n) = 1. \tag{5.2.4}$$

Τότε, από την ανισότητα Jensen έχουμε

(5.2.5)

$$\begin{aligned}
&\det\left(\int_{S^{n-1}} t(u)u\otimes u\,d\nu(u)\right)\\
&\geqslant \det(T_\nu)\exp\left[\frac{1}{n!\det(T_\nu)}\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}\log(t(u_1)\cdots t(u_n))[u_1,\dots,u_n]^2 d\nu(u_1)\cdots d\nu(u_n)\right]\\
&= \det(T_\nu)\exp\left[\frac{1}{n!\det(T_\nu)}\sum_{j=1}^{n}\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}\log t(u_j)[u_1,\dots,u_n]^2 d\nu(u_1)\cdots d\nu(u_n)\right].
\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι για κάθε $u\in S^{n-1}$ έχουμε επίσης

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}[u,u_2,\dots,u_n]^2 d\nu(u_2)\cdots d\nu(u_n) &= n!D(T_{\delta_u},T_\nu,\dots,T_\nu)\\
&= n!\det(T_\nu)D(T_\nu^{-1}T_{\delta_u},I_n,\dots,I_n)\\
&= (n-1)!\det(T_\nu)\mathrm{tr}(T_\nu^{-1}T_{\delta_u})\\
&= (n-1)!\det(T_\nu)\left\langle T_\nu^{-1}u,u\right\rangle.
\end{aligned} \tag{5.2.6}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
&\int_{S^{n-1}}\cdots\int_{S^{n-1}}\log t(u_1)[u_1,\dots,u_n]^2 d\nu(u_1)\cdots d\nu(u_n)\\
&\qquad = (n-1)!\det(T_\nu)\int_{S^{n-1}}\log t(u)\left\langle T_\nu^{-1}u,u\right\rangle\, d\nu(u),
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

και τότε, οι (5.2.3) και (5.2.5) μας δίνουν:

$$\det\left(\int_{S^{n-1}} t(u)u\otimes u\,d\nu(u)\right)\geqslant \det(T_\nu)\exp\left[\int_{S^{n-1}}\log t(u)\left\langle T_\nu^{-1}u,u\right\rangle\, d\nu(u)\right]. \tag{5.2.8}$$

Τέλος, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\gamma\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle\geqslant 1$ βλέπουμε ότι

$$\gamma^n\det\left(\int_{S^{n-1}} t(u)\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle\, u\otimes u\,d\nu(u)\right)\geqslant \det\left(\int_{S^{n-1}} t(u)u\otimes u\,d\nu(u)\right), \tag{5.2.9}$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 5.2.1. Έστω $u_1,\dots,u_m\in S^{n-1}$ και $c_1,\dots,c_m>0$ τα οποία ικανοποιούν την

$$I_n\preceq A:=\sum_{j=1}^{m}c_ju_j\otimes u_j\preceq\gamma I_n \tag{5.2.10}$$

για κάποιον $\gamma>1$. Εφαρμόζοντας την (5.2.2) για το διακριτό μέτρο ν με $\nu(\{u_j\})=c_j$ και τη συνάρτηση $t:\{u_1,\dots,u_m\}\longrightarrow(0,\infty)$ με $t(u_j)=\lambda_j$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\gamma^n\det\left(\sum_{j=1}^{m}c_j\lambda_j\langle A^{-1}u_j,u_j\rangle u_j\otimes u_j\right)&\geqslant\exp\left[\sum_{j=1}^{m}\log(\lambda_j)\,c_j\langle A^{-1}u_j,u_j\rangle\right]\\
&=\prod_{j=1}^{m}\lambda_j^{c_j\langle A^{-1}u_j,u_j\rangle}
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

για κάθε $\lambda_1,\dots,\lambda_m>0$. Αυτό αποδεικνύει ότι το Θεώρημα 2.1.12 γενικεύει το Θεώρημα 5.1.1.

Περνάμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.13. Στο επόμενο λήμμα, το οποίο είναι ουσιαστικά το κύριο λήμμα του [15], $(f_u), (g_u)$, $u \in S^{n-1}$ είναι δύο οικογένειες συναρτήσεων $f_u, g_u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ που ικανοποιούν τη συνθήκη (H):

- Υπάρχουν δύο συνεχείς συναρτήσεις $F, G : S^{n-1} \times \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ και συναρτήσεις a, b, c, d στην S^{n-1} με $a < b$ και $c < d$ (οι a, b, c, d είναι είτε συναρτήσεις με πραγματικές τιμές ή σταθερές με τιμή $\pm\infty$) τέτοιες ώστε για κάθε $(u, t) \in S^{n-1} \times \mathbb{R}$

$$f_u(t) = \mathbf{1}_{\{a(u) \leqslant t \leqslant b(u)\}} F(u, t) \quad \text{και} \quad g_u(t) = \mathbf{1}_{\{c(u) \leqslant t \leqslant d(u)\}} G(u, t). \tag{5.2.12}$$

- Υπάρχουν δύο συναρτήσεις $U, V \in L_1(\mathbb{R}) \cap L_\infty(\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε $0 \leqslant f_u \leqslant U$ και $0 \leqslant g_u \leqslant V$ για κάθε $u \in S^{n-1}$.

Λήμμα 5.2.2. *Έστω $\gamma > 1$ και έστω ν μια γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου στην S^{n-1}. Έστω μ το μέτρο στην S^{n-1} με $d\mu(u) = \langle T_\nu^{-1} u, u \rangle d\nu(u)$. Αν $(f_u), (g_u)$, $u \in S^{n-1}$ είναι δύο οικογένειες συναρτήσεων που ικανοποιούν την* (H) *τότε*

(5.2.13)
$$\begin{aligned} &\exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} g_u\right) d\mu(u)\right) \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x, u \rangle) d\mu(u)\right) dx \\ &\leqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) d\mu(u)\right) \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup_{y = \int \theta(u) u \, d\nu(u)} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log g_u(\theta(u)) d\mu(u)\right) dy. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Θα περιγράψουμε την απόδειξη, ακολουθώντας το επιχείρημα του Barthe, απλώς για να κάνουμε τις αναγκαίες τροποποιήσεις. Υποθέτουμε ότι το αριστερό μέλος της (5.2.13) είναι θετικό και παρατηρούμε ότι το $\exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x, u \rangle) d\mu(u)\right)$ είναι ίσο με μηδέν έξω από το κλειστό και κυρτό σύνολο

$$S = \{x \in \mathbb{R}^n : a(u) \leqslant \langle x, u \rangle \leqslant b(u) \text{ για κάθε } u \in \mathrm{supp}(\nu)\}. \tag{5.2.14}$$

Για κάθε $u \in S^{n-1}$ ορίζουμε $T_u : (a(u), b(u)) \longrightarrow (c(u), d(u))$ μέσω της

$$\frac{\int_{a(u)}^{t} f_u}{\int f_u} = \frac{\int_{c(u)}^{T_u(t)} g_u}{\int g_u}. \tag{5.2.15}$$

Παρατηρήστε ότι η απεικόνιση $(u, t) \mapsto T_u(t)$ είναι συνεχής στο ανοικτό σύνολο $\{(u, t) : u \in S^{n-1}, a(u) < t < b(u)\}$ και ότι για κάθε u η συνάρτηση T_u είναι γνησίως αύξουσα και παραγωγίσιμη, με

$$f_u(t) \int_{\mathbb{R}} g_u = g_u(T_u(t)) T_u'(t) \int_{\mathbb{R}} f_u \tag{5.2.16}$$

για κάθε $t \in (a(u), b(u))$. Έπεται ότι οι συναρτήσεις $u \mapsto T_u(\langle x, u \rangle)$ και $u \mapsto T_u'(\langle x, u \rangle)$ είναι συνεχείς στην S^{n-1} για κάθε $x \in \mathrm{int}(S)$.

Ορίζουμε $T : \mathrm{int}(S) \longrightarrow \mathbb{R}^n$ με

$$T(x) = \int_{S^{n-1}} T_u(\langle x, u\rangle) u \, d\nu(u). \tag{5.2.17}$$

Τότε,

$$dT(x) = \int_{S^{n-1}} T'_u(\langle x, u\rangle) u \otimes u \, d\nu(u). \tag{5.2.18}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1.12 βλέπουμε ότι

$$\det(dT(x)) \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log T'_u(\langle x, u\rangle)\, d\mu(u)\right). \tag{5.2.19}$$

Ειδικότερα, αυτό συνεπάγεται ότι η T είναι 1-1. Συνεπώς, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση h που ικανοποιεί την

$$h\left(\int_{S^{n-1}} \theta(u) u \, d\nu(u)\right) \geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log g_u(\theta(u))\, d\mu(u)\right) \tag{5.2.20}$$

για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση θ, μπορούμε να γράψουμε

(5.2.21)

$$\begin{aligned}
&\exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) d\mu(u)\right) \int_{\mathbb{R}^n} h(y)\, dy \\
&\geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) d\mu(u)\right) \int_{\mathrm{int}(S)} h(T(x)) \det(dT(x))\, dx \\
&\geqslant \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) d\mu(u)\right) \int_{\mathrm{int}(S)} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log g_u(T_u(\langle x, u\rangle))\, d\mu(u)\right) \det(dT(x))\, dx \\
&\geqslant \int_{\mathrm{int}(S)} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(g_u(T_u(\langle x, u\rangle)) \int_{\mathbb{R}} f_u\right) d\mu(u)\right) dx \times \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log T'_u(\langle x, u\rangle)\, d\mu(u)\right) dx \\
&= \int_{\mathrm{int}(S)} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(g_u(T_u(\langle x, u\rangle)) T'_u(\langle x, u\rangle) \int_{\mathbb{R}} f_u\right) d\mu(u)\right) dx \\
&= \int_{\mathrm{int}(S)} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(f_u(\langle x, u\rangle) \int_{\mathbb{R}} g_u\right) d\mu(u)\right) dx \\
&= \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} g_u\right) d\mu(u)\right) \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x, u\rangle) d\mu(u)\right) dx,
\end{aligned}$$

που είναι το ζητούμενο. ■

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.13. Έστω $\gamma > 1$ και έστω ν μια γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου Borel στην S^{n-1}. Έστω μ το μέτρο στην S^{n-1} με $d\mu(u) = \langle T_\nu^{-1} u, u\rangle d\nu(u)$ και έστω (f_u), $u \in S^{n-1}$ μια οικογένεια συναρτήσεων $f_u : \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ που ικανοποιούν την (H).

Θυμηθείτε ότι $\gamma^{-1} \leqslant \langle T_{\nu}^{-1}u, u\rangle \leqslant 1$ για κάθε $u \in S^{n-1}$. Παρατηρούμε ότι αν $y = \int \theta(u) u d\nu(u)$ τότε

$$
\begin{aligned}
\|y\|_2^2 &= \left\langle y, \int_{S^{n-1}} \theta(u) u d\nu(u) \right\rangle \\
&= \int_{S^{n-1}} \theta(u) \langle y, u\rangle d\nu(u) \\
&\leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \theta^2(u) d\nu(u) \right)^{1/2} \left(\int_{S^{n-1}} \langle y, u\rangle^2 d\nu(u) \right)^{1/2} \\
&= \left(\int_{S^{n-1}} \theta^2(u) d\nu(u) \right)^{1/2} \sqrt{\langle T_{\nu} y, y\rangle} \\
&\leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \theta^2(u) \gamma \langle T_{\nu}^{-1}u, u\rangle d\nu(u) \right)^{1/2} \sqrt{\gamma} \|y\|_2 \\
&= \gamma \left(\int_{S^{n-1}} \theta^2(u) d\mu(u) \right)^{1/2} \|y\|_2.
\end{aligned} \tag{5.2.22}
$$

Συνεπώς,

$$
\int_{S^{n-1}} \theta^2(u) d\mu(u) \geqslant \gamma^{-2} \|y\|_2^2. \tag{5.2.23}
$$

Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_u(t) = \exp(-\pi t^2)$, $u \in S^{n-1}$. Τότε,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup_{y = \int \theta(u) u d\nu(u)} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log g_u(\theta(u)) d\mu(u) \right) dy \\
&\quad = \int_{\mathbb{R}^n}^{*} \sup_{y = \int \theta(u) u d\nu(u)} \exp\left(-\int_{S^{n-1}} \pi \theta^2(u) d\mu(u) \right) dy \\
&\quad \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \exp(-\pi \gamma^{-2} \|y\|_2^2)\, dy = \gamma^n.
\end{aligned} \tag{5.2.24}
$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.2.2 παίρνουμε

$$
\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x, u\rangle) d\mu(u) \right) dx \leqslant \gamma^n \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u \right) d\mu(u) \right). \tag{5.2.25}
$$

Για τον δεύτερο ισχυρισμό του θεωρήματος εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.2.2 για τις συναρτήσεις $f_u(t) = \exp(-\pi t^2)$. Τότε,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x, u\rangle) d\mu(u) \right) dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} -\pi \langle x, u\rangle^2 d\mu(u) \right) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} -\pi \langle x, u\rangle^2 \langle T_{\nu}^{-1}u, u\rangle d\nu(u) \right) dx \\
&\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} -\pi \langle x, u\rangle^2 d\nu(u) \right) dx \\
&\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} e^{-\pi \gamma \|x\|_2^2} dx = \gamma^{-n/2},
\end{aligned}
$$

άρα

(5.2.26)
$$\begin{aligned}\exp\left(\int_{S^{n-1}}\log\left(\int_{\mathbb{R}} g_u\right)d\mu(u)\right) &\leqslant \gamma^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}^{*}\sup_{y=\int\theta(u)u\,d\nu(u)}\exp\left(\int_{S^{n-1}}\log g_u(\theta(u))d\mu(u)\right)dy\\ &\leqslant \gamma^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}^{*}\sup_{y=\int\theta(u)u\,d\nu(u)} h\left(\int_{S^{n-1}}\theta(u)u\,d\nu(u)\right)dy\\ &= \gamma^{n/2}\int_{\mathbb{R}^n}h(y)\,dy.\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 5.2.3. Η απόδειξή μας για τον πρώτο ισχυρισμό του Θεωρήματος 2.1.13 δίνει τη σταθερά γ^n στην «προσεγγιστική ανισότητα Brascamp-Lieb inequality», ενώ η αντίστοιχη σταθερά στο διακριτό ανάλογο (Θεώρημα 5.1.2) είναι $\gamma^{\frac{n}{2}}$. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε τη συνεχή εκδοχή της ανισότητας με σταθερά $\gamma^{\frac{n}{2}}$, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.2 και ένα επιχείρημα προσέγγισης που περιγράφουμε παρακάτω.

Έστω ν μια γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου Borel στην S^{n-1}. Για τυχόν $\varepsilon > 0$ θεωρούμε ένα μεγιστικό ε-δίκτυο N_ε της S^{n-1} και μια διαμέριση $(C_u)_{u\in N_\varepsilon}$ της S^{n-1} σε σύνολα Borel $C_u \subseteq B(u,\varepsilon)$. Στη συνέχεια, θεωρούμε το μέτρο

$$\nu_\varepsilon = \sum_{u\in N_\varepsilon}\nu(C_u)\delta_u. \tag{5.2.27}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $z \in S^{n-1}$,

(5.2.28)
$$|\langle T_{\nu_\varepsilon}z,z\rangle - \langle T_\nu z,z\rangle| = \sum_{u\in N_\varepsilon}\int_{C_u}[\langle z,y\rangle^2 - \langle z,u\rangle^2]\,d\nu(y) \leqslant \sum_{u\in N_\varepsilon}\int_{C_u}2\varepsilon\,d\nu(y) = 2\varepsilon\nu(S^{n-1}).$$

Γενικοτερα, για κάθε συνεχή συνάρτηση $\theta : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ έχουμε

$$\left|\int_{S^{n-1}}\theta(u)\,d\nu - \int_{S^{n-1}}\theta(u)\,d\nu_\varepsilon(u)\right| \leqslant \nu(S^{n-1})\omega_\theta(\varepsilon), \tag{5.2.29}$$

όπου ω_θ είναι το μέτρο συνέχειας της θ. Με άλλα λόγια, $\nu_\varepsilon \to \nu$ ασθενώς καθώς το $\varepsilon \to 0^+$. Ειδικότερα, από την (5.2.28) βλέπουμε ότι αν το $\varepsilon > 0$ είναι αρκετά μικρό τότε

$$a_\varepsilon I_n \preceq T_{\nu_\varepsilon} \preceq b_\varepsilon I_n \tag{5.2.30}$$

για κάποιους $b_\varepsilon > a_\varepsilon > 0$, και έχουμε

$$T_{\nu_\varepsilon} \longrightarrow T_\nu \quad \text{και} \quad T_{\nu_\varepsilon}^{-1} \longrightarrow T_\nu^{-1} \tag{5.2.31}$$

καθώς $\varepsilon \to 0^+$, και

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon} \leqslant \gamma. \tag{5.2.32}$$

Έστω (f_u), $u \in S^{n-1}$ μια οικογένεια συναρτήσεων $f_u : \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ που ικανοποιούν τη συνθήκη (H). Τότε, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 5.1.2 για το μέτρο $\frac{1}{a_\varepsilon}\nu_\varepsilon$ βλέπουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{u\in N_\varepsilon} f_u^{\kappa_\varepsilon(u)}(\langle x,u\rangle)dx \leqslant \left(\frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \prod_{u\in N_\varepsilon} \left(\int_{\mathbb{R}} f_u(t)dt\right)^{\kappa_\varepsilon(u)}, \tag{5.2.33}$$

όπου $\kappa_\varepsilon(u) = \nu(C_u)\langle T_{\nu_\varepsilon}^{-1}u,u\rangle$. Ισοδύναμα,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x,u\rangle)\langle T_{\nu_\varepsilon}^{-1}u,u\rangle\, d\nu_\varepsilon(u)\right) dx \\ \leqslant \left(\frac{b_\varepsilon}{a_\varepsilon}\right)^{\frac{n}{2}} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) \langle T_{\nu_\varepsilon}^{-1}u,u\rangle\, d\nu_\varepsilon(u)\right).\end{aligned} \tag{5.2.34}$$

Από την (5.2.31) έχουμε $\langle T_{\nu_\varepsilon}^{-1}u,u\rangle \to \langle T_\nu^{-1}u,u\rangle$ ομοιόμορφα στην S^{n-1} καθώς $\varepsilon \to 0^+$. Αφού οι (f_u), $u \in S^{n-1}$ ικανοποιούν τη συνθήκη (H), από την ασθενή σύγκλιση των ν_ε στο ν και την (5.2.32) συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log f_u(\langle x,u\rangle)\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle d\nu(u)\right) dx \leqslant \gamma^{\frac{n}{2}} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) \langle T_\nu^{-1}u,u\rangle\, d\nu(u)\right). \tag{5.2.35}$$

5.3 Προσεγγιστικές κλασσικές θέσεις κυρτών σωμάτων

Έστω ν ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στην S^{n-1}. Θεωρούμε το μετασχηματισμό συνημιτόνου C_ν και το συμμετρικό κυρτό σώμα $C(\nu)$ που ορίζεται από την

$$h_{C(\nu)}(x) = C_\nu(x) = \int_{S^{n-1}} |\langle x,u\rangle|\, d\nu(u). \tag{5.3.1}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} w(C(\nu)) &= \int_{S^{n-1}} h_{C(\nu)}(x)d\sigma(x) = \int_{S^{n-1}}\int_{S^{n-1}} |\langle x,u\rangle|d\nu(u)d\sigma(x) \\ &= \int_{S^{n-1}} \left(\int_{S^{n-1}} |\langle x,u\rangle|d\sigma(x)\right) d\nu(u) = c_n\nu(S^{n-1}),\end{aligned} \tag{5.3.2}$$

όπου

$$c_n = \int_{S^{n-1}} |\langle x,u\rangle|d\sigma(x) = \frac{2\omega_{n-1}}{n\omega_n} \simeq \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{5.3.3}$$

Συνδυάζοντας αυτή την παρατήρηση με την ανισότητα

$$\frac{1}{w(C(\nu))} \leqslant \mathrm{vrad}(C^*(\nu)) := \left(\frac{|C^*(\nu)|}{\omega_n}\right)^{1/n} \tag{5.3.4}$$

η οποία ελέγχεται εύκολα αν εκφράσουμε τον όγκο του $C^*(\nu))$ σε πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.3.1. *Έστω* ν *ένα πεπερασμένο μέτρο Borel στην* S^{n-1}. *Τότε,*

$$\nu(S^{n-1})|C^*(\nu)|^{1/n} \geqslant \frac{n\omega_n^{\frac{n+1}{n}}}{2\omega_{n-1}} \geqslant c, \tag{5.3.5}$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Η πρόταση που ακολουθεί δίνει μια αντίστροφη ανισότητα για προσεγγιστικά ισοτροπικά μέτρα.

Πρόταση 5.3.2. *Έστω* $\gamma > 1$ *και έστω* ν *μια* γ*-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου στην* S^{n-1}. *Τότε,*

$$\nu(S^{n-1})|C^*(\nu)|^{1/n} \leqslant 2e\gamma^{\frac{3}{2}}. \tag{5.3.6}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα Fubini ελέγχουμε ότι

$$n!|C^*(\nu)| = \int_{\mathbb{R}^n} e^{-h_{C(\nu)}(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\int_{S^{n-1}} |\langle x,u\rangle| d\nu(u)\right) dx. \tag{5.3.7}$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.1.13 με $f_u(t) = e^{-|t|}$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\int_{S^{n-1}} |\langle x,u\rangle| d\nu(u)\right) dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(-\int_{S^{n-1}} |\langle x,u\rangle| \langle T_\nu^{-1}u,u\rangle \, d\nu(u)\right) dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log(f_u(\langle x,u\rangle))\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle \, d\nu(u)\right) dx \\ &\leqslant \gamma^{\frac{n}{2}} \exp\left(\int_{S^{n-1}} \log\left(\int_{\mathbb{R}} f_u\right) \langle T_\nu^{-1}u,u\rangle \, d\nu(u)\right) \\ &= \gamma^{\frac{n}{2}} \exp\left(\int_{S^{n-1}} (\log 2)\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle \, d\nu(u)\right) \\ &= 2^n\gamma^{\frac{n}{2}}, \end{aligned} \tag{5.3.8}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την παρατήρηση ότι

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \langle T_\nu^{-1}u,u\rangle \, d\nu(u) &= \int_{S^{n-1}} \mathrm{tr}(T_\nu^{-1}(u\otimes u)) \, d\nu(u) = \mathrm{tr}\left[T_\nu^{-1}\left(\int_{S^{n-1}} u\otimes u \, d\nu(u)\right)\right] \\ &= \mathrm{tr}(T_\nu^{-1}T_\nu) = \mathrm{tr}(I_n) = n. \end{aligned} \tag{5.3.9}$$

Αφού $\langle T_\nu^{-1}u,u\rangle \geqslant \gamma^{-1}$ για κάθε $u \in S^{n-1}$, έχουμε επίσης

$$n = \int_{S^{n-1}} \langle T_\nu^{-1}u,u\rangle \, d\nu(u) \geqslant \gamma^{-1}\nu(S^{n-1}). \tag{5.3.10}$$

Έπεται ότι

$$\nu(S^{n-1})|C^*(\nu)|^{1/n} \leqslant \gamma n \frac{2\sqrt{\gamma}}{(n!)^{1/n}} \leqslant 2e\gamma^{\frac{3}{2}}, \tag{5.3.11}$$

όπως θέλαμε. ∎

Από τις (5.3.7) και (5.3.8) βλέπουμε ότι αν το ν είναι γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου στην S^{n-1} τότε

$$\int_{S^{n-1}} h_{C(\nu)}^{-n}\, d\sigma(\theta) = \frac{|C^*(\nu)|}{\omega_n} \leqslant \frac{2^n\gamma^{\frac{n}{2}}}{n!\omega_n}, \tag{5.3.12}$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα του Markov βλέπουμε ότι η τυχαία διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ ικανοποιεί την

$$h_{C(\nu)}(\theta) \geqslant \frac{(n!\omega_n)^{\frac{1}{n}}}{4\sqrt{\gamma}} \geqslant \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{\gamma}} \tag{5.3.13}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2^{-n}$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την άλλη πλευρά, από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} h_{C(\nu)}(\theta) &= \int_{S^{n-1}} |\langle u,\theta\rangle|\, d\nu(u) \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \langle u,\theta\rangle^2\, d\nu(u)\right)^{\frac{1}{2}} \sqrt{\nu(S^{n-1})} \\ &\leqslant \sqrt{\gamma}\sqrt{\nu(S^{n-1})} \leqslant \gamma\sqrt{n} \end{aligned} \tag{5.3.14}$$

Με άλλα λόγια, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2^{-n}$ ισχύει

$$\frac{c}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{n} \leqslant \int_{S^{n-1}} |\langle u,\theta\rangle|\, d\nu(u) \leqslant \gamma\sqrt{n}. \tag{5.3.15}$$

Αυτή η παρατήρηση εφαρμόζεται για όλες τις κλασσικές θέσεις ενός κυρτού σώματος που έχουμε συζητήσει:

Πρόταση 5.3.3. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Αν το σ_K είναι γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου τότε*

$$\frac{c}{\sqrt{\gamma}}\frac{\partial(K)}{\sqrt{n}} \leqslant 2|P_{\theta^\perp}(K)| = \int_{S^{n-1}} |\langle u,\theta\rangle|\, d\sigma_K(u) \leqslant \gamma\frac{\partial(K)}{\sqrt{n}} \tag{5.3.16}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2^{-n}$ στην S^{n-1}.

(β) *Αν το ν_K είναι γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου τότε*

$$\frac{c}{\sqrt{\gamma}}\frac{w(K)}{\sqrt{n}} \leqslant \int_{S^{n-1}} |\langle u,\theta\rangle|\, h_K(u)\, d\sigma(u) \leqslant \gamma\frac{w(K)}{\sqrt{n}} \tag{5.3.17}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2^{-n}$ στην S^{n-1}.

(γ) *Αν το λ_K είναι γ-προσέγγιση ενός ισοτροπικού μέτρου τότε*

$$\frac{c}{\sqrt{\gamma}}\sqrt{n}L_K^2 \leqslant \int_K |\langle x,\theta\rangle|\, \|x\|_2\, dx \leqslant \gamma\sqrt{n}L_K^2 \tag{5.3.18}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-2^{-n}$ στην S^{n-1}.

Παρατήρηση 5.3.4. Παρατηρήστε ότι $(t\nu)(S^{n-1})|C^*(t\nu)|^{1/n} = \nu(S^{n-1})|C^*(\nu)|^{1/n}$ για κάθε μέτρο Borel ν στην S^{n-1} και κάθε $t > 0$.

Ως εφαρμογή της Πρότασης 5.3.1 και της Πρότασης 5.3.2 δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη ενός αποτελέσματος από το [45] σχετικά με την ευστάθεια της θέσης ελάχιστης επιφάνειας.

Θεώρημα 5.3.5. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε*

$$I_n \preceq \frac{1}{\alpha}\int_{S^{n-1}} u\otimes u\, d\sigma_K(u) \preceq \gamma I_n \tag{5.3.19}$$

για κάποιους $\gamma > 1$ και $\alpha > 0$. Τότε,

$$\partial(TK) \leqslant \partial(K) \leqslant c\gamma^{3/2}\partial(TK), \tag{5.3.20}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, $T \in SL(n)$ και το TK είναι στη θέση ελάχιστης επιφάνειας.

Απόδειξη. Υπενθυμίζουμε ότι $\Pi^*K = 2C^*(\sigma_K)$ και $\Pi^*(TK) = 2C^*(\sigma_{TK})$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 5.3.1 και την Πρόταση 5.3.2 σε κατάλληλα πολλαπλάσια των μέτρων σ_K και σ_{TK} (επίσης, παίρνοντας υπόψη την Παρατήρηση 5.3.4) παίρνουμε

$$\sigma_K(S^{n-1})|\Pi^*K|^{1/n} \leqslant 4e\gamma^{3/2} \leqslant \frac{2e}{c}\gamma^{3/2}\sigma_{TK}(S^{n-1})|\Pi^*(TK)|^{1/n}. \tag{5.3.21}$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε την παρατήρηση του Petty [78] ότι

$$\Pi^*(TK) = T(\Pi^*K) \tag{5.3.22}$$

(αυτό ισχύει για κάθε κυρτό σώμα K και κάθε $T \in SL(n)$) απ΄ όπου έπεται ότι $|\Pi^*(TK)| = |\Pi^*K|$. Επιστρέφοντας στην (5.3.21) συμπεραίνουμε ότι

$$\partial(K) = \sigma_K(S^{n-1}) \leqslant \frac{2e}{c}\gamma^{3/2}\sigma_{TK}(S^{n-1}) = \frac{2e}{c}\gamma^{3/2}\partial(TK). \tag{5.3.23}$$

Η ανισότητα $\partial(TK) \leqslant \partial(K)$ είναι προφανής αφού το TK έχει ελάχιστη επιφάνεια. ∎

Μέρος II

Ανισότητες για τον όγκο τομών κυρτών σωμάτων

Κεφάλαιο 6

Εισαγωγή

6.1 Ανισότητες για τον όγκο τομών κυρτού σώματος με κύριους υποχώρους

Η κλασσική ανισότητα Loomis-Whitney [64] συγκρίνει τον όγκο $|K|$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με το γεωμετρικό μέσο των όγκων $|P_i(K)|$ των ορθογώνιων πρβολών του στους υπόχωρους $e_i^{\perp}$, όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Ισχύει η ανισότητα

$$|K|^{n-1} \leqslant \prod_{i=1}^{n} |P_i(K)|, \tag{6.1.1}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο τέτοιο ώστε τα $\pm e_i$ να είναι τα κάθετα διανύσματα των εδρών του. Σε αυτή την ανισότητα, με $|P_i(K)|$ συμβολίζουμε τον $(n-1)$-διάστατο όγκο της προβολής $P_i(K)$ (γενικότερα, αν A είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο στον $\mathbb{R}^n$, γράφουμε $|A|$ για τον όγκο του A στον αφφινικό υπόχωρο $\mathrm{aff}(A)$ που παράγεται από το A). Μάλιστα, η (6.1.1) ισχύει για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$.

Μια δυϊκή ανισότητα, στην οποία οι προβολές $P_i(K)$ αντικαθίστανται από τις τομές $K \cap e_i^{\perp}$, αποδείχθηκε από τον Meyer στο [72]. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$|K|^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^{n} |K \cap e_i^{\perp}|, \tag{6.1.2}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι γραμμική εικόνα $T(B_1^n)$ του cross-polytope

$$B_1^n = \mathrm{conv}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\}$$

για κάποιον διαγώνιο (ως προς την δοθείσα βάση) τελεστή $T = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, όπου $\lambda_i > 0$. Η απόδειξη αυτής της ανισότητας από τον Meyer δίνεται για unconditional κυρτό σώμα K, αφού πρώτα παρατηρεί ότι κάνοντας Steiner συμμετρικοποίηση ενός σώματος K παίρνουμε κυρτό σώμα για το οποίο μεγαλώνει το δεξιό μέλος της (6.1.2).

Οι δύο αυτές ανισότητες έχουν γενικευτεί στο ακόλουθο πλαίσιο: έστω $u_1, \ldots, u_m$ μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ και $c_1, \ldots, c_m$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε να ικανοποιείται η συνθήκη του John

$$I_n=\sum_{i=1}^m c_i u_i\otimes u_i.$$

Τότε, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$\frac{n!}{n^n}\prod_{i=1}^m |K\cap u_i^{\perp}|^{c_i}\leqslant |K|^{n-1}\leqslant \prod_{i=1}^m |P_{u_i^{\perp}}(K)|^{c_i}. \tag{6.1.3}$$

Η υπόθεση ότι το K είναι κεντραρισμένο χρειάζεται φυσικά μόνο για την αριστερή ανισότητα. Οι περιπτώσεις ισότητας είναι ακριβώς οι ίδιες με αυτές στην ανισότητα Loomis-Whitney και την ανισότητα του Meyer αντίστοιχα. Η δεξιά ανισότητα της (6.1.3) αποδείχθηκε από τον Ball στο [5], ενώ η αριστερή ανισότητα αποδείχθηκε πρόσφατα από τους Li και Huang στο [63]. Η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της, που οφείλονται στους Ball και Barthe (βλέπε [7] και [14]), παίζουν τον κρίσιμο ρόλο στις αποδείξεις αυτών των πιο γενικών ανισοτήτων.

Μια επέκταση της ανισότητας Loomis-Whitney αποδείχθηκε από τους Bollobás και Thomason στο [20]. Για να διατυπώσουμε το αποτέλεσμά τους, χρειάζεται να εισάγουμε κάποιο συμβολισμό και ορολογία. Για κάθε $\tau\subset[n]:=\{1,\dots,n\}$ θέτουμε $F_\tau=\mathrm{span}\{e_j: j\in\tau\}$ και $E_\tau=F_\tau^{\perp}$. Αν $s\geqslant 1$ και $\sigma\subseteq[n]$ λέμε ότι τα (όχι απαραίτητα διακεκριμένα) σύνολα $\sigma_1,\dots,\sigma_r\subseteq\sigma$ σχηματίζουν ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ αν κάθε $j\in\sigma$ ανήκει σε ακριβώς s από τα σύνολα σ_i. Η *ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος* από το [20] δίνει άνω φράγμα για τον όγκο ενός συμπαγούς συνόλου συναρτήσει των όγκων των προβολών του στους υποχώρους συντεταγμένων που αντιστοιχούν σε ένα ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$.

Θεώρημα 6.1.1 (Bollobás-Thomason). *Έστω $r\geqslant 1$ και έστω $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του $[n]$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι η κλειστή θήκη του εσωτερικού του, έχουμε*

$$|K|^s\leqslant\prod_{i=1}^r |P_{F_{\sigma_i}}(K)|. \tag{6.1.4}$$

Αρχικά, αποδεικνύουμε κάποιες *περιορισμένες* εκδοχές της ανισότητας Loomis-Whitney και της ανισότητας ομοιόμορφου καλύμματος του Θεωρήματος 6.1.1. Αφετηρία μας είναι η ακόλουθη ανισότητα από το [42]: Αν $i\neq j\in\{1,\dots,n\}$ και $P_{ij}(K)=P_{E_{ij}}(K)$, όπου $E_{ij}=\mathrm{span}\{e_i,e_j\}^{\perp}$, τότε

$$|P_i(K)|\,|P_j(K)|\geqslant\frac{n}{2(n-1)}\,|K|\,|P_{ij}(K)|. \tag{6.1.5}$$

Η ανισότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί περιορισμένη (ή «τοπική») εκδοχή της ανισότητας Loomis-Whitney, υπό την έννοια ότι δίνει κάτω φράγμα για το γεωμετρικό μέσο δύο μόνο προβολών ενός κυρτού σώματος σε υπόχωρους συντεταγμένων συνδιάστασης 1. Συνέπεια της (6.1.5) είναι η ανισότητα

$$\frac{S(P_{u^{\perp}}(K))}{|P_{u^{\perp}}(K)|}\leqslant\frac{2(n-1)}{n}\frac{S(K)}{|K|}$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $u \in S^{n-1}$, όπου $S(A)$ είναι η επιφάνεια του A στην κατάλληλη διάσταση. Η ανισότητα αυτή χρησιμοποιήθηκε στο [42] για τη μελέτη ενος ερωτήματος των Dembo, Cover και Thomas [32] σχετικά με τη μονοτονία ενός ανάλογου της πληροφορίας Fisher στην κλάση των συμπαγών κυρτών συνόλων, και εμφανίζεται ξανά στο [43] όπου μελετάται το ερώτημα να συγκριθεί η επιφάνεια $S(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με τη μέση, ελάχιστη ή μέση επιφάνεια των προβολών του συνδιάστασης 1.

Προσαρμόζοντας την απόδειξη του Λήμματος 4.1 από το [42] και συνδυάζοντάς την με την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος (6.1.4) του Θεωρήματος 6.1.1 παίρνουμε την ακόλουθη γενίκευση της (6.1.5).

Θεώρημα 6.1.2. *Έστω $r > s \geqslant 1$, έστω $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\prod_{i=1}^{r} |P_{E_{\sigma_i}}(K)| \geqslant \gamma(n, d, s, r) |P_{E_\sigma}(K)|^s \, |K|^{r-s},$$

όπου

$$\gamma(n, d, s, r) = \binom{n}{d}^{r-s} \binom{n - \frac{sd}{r}}{n-d}^{-r}.$$

Παρατηρήστε ότι αν τα σύνολα $\sigma_1, \dots, \sigma_r$ έχουν την ίδια πληθικότητα k, τότε $k = \frac{sd}{r}$ και το αποτέλεσμα παίρνει τη μορφή

$$\prod_{i=1}^{r} |P_{E_{\sigma_i}}(K)| \geqslant \binom{n}{d}^{r-s} \binom{n-k}{n-d}^{-r} |P_{E_\sigma}(K)|^s \, |K|^{r-s}.$$

Η αφετηρία μας (6.1.5) αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση $d = r = 2$, $k = 1$ και $s = 1$. Η περίπτωση $k = 1$, $d = r$ και $s = 1$ μελετήθηκε πρόσφατα από τους Soprunov και Zvavitch στο [84], οι οποίοι χρησιμοποίησαν παρόμοιο επιχείρημα, βασισμένο στο [42, Λήμμα 4.1] και στην κλασσική ανισότητα Loomis-Whitney. Δίνουν επίσης ένα παράδειγμα το οποίο δείχνει ότι η σταθερά

$$\gamma(n, r, 1, r) = \binom{n}{r}^{r-1} \binom{n-1}{n-r}^{-r} = \left(\frac{n}{r}\right)^r \binom{n}{r}^{-1}$$

είναι βέλτιστη.

Στη συνέχεια, ξεκινώντας από την ανισότητα του Meyer (6.1.2) μελετάμε το φυσιολογικό ερώτημα αν είναι εφικτό να πάρουμε μια ανισότητα για τομές, η οποία να είναι δυϊκή της (6.1.5). Πιο συγκεκριμένα, το ερώτημα είναι αν για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $i \neq j \in \{1, \dots, n\}$,

$$|K \cap e_i^{\perp}| \, |K \cap e_j^{\perp}| \leqslant c_0 |K \cap E_{ij}| \, |K|, \tag{6.1.6}$$

όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Εκμεταλλευόμενοι τις βασικές ιδιότητες της οικογένειας των L_p-κεντροειδών σωμάτων $Z_p(K)$ του K δείχνουμε ότι αυτό το ερώτημα έχει καταφατική απάντηση. Με λίγα λόγια, μέσω ενός επιχειρήματος δυϊσμού, μεταφράζουμε το ερώτημα για τις τομές του K σε ένα ερώτημα για τις προβολές κατάλληλου κεντροειδούς σώματος του K, και μετά χρησιμοποιούμε την ανισότητα Loomis-Whitney (ή κάποια επέκτασή της) για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη. Γενικεύοντας τη μέθοδο και χρησιμοποιώντας πλήρως την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás και Thomason, μπορούμε να αποδείξουμε πιο γενικές ανισότητες αυτής της μορφής, στο πνεύμα του Θεωρήματος 6.1.2.

Θεώρημα 6.1.3. *Έστω $r > s \geqslant 1$, έστω $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Θέτουμε επίσης $d_i = |\sigma_i|$. Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\prod_{i=1}^{r} |K \cap E_{\sigma_i}| \leqslant \frac{(c_0 d)^{ds}}{d_1^{d_1} \cdots d_r^{d_r}} |K \cap E_\sigma|^s |K|^{r-s}, \tag{6.1.7}$$

όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατηρήστε ότι με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 6.1.3 έχουμε $d_1 + \cdots + d_r = ds$, άρα

$$d_1^{d_1} \dots d_r^{d_r} \geqslant \left(\frac{ds}{r}\right)^{ds}$$

από την ανισότητα Jensen. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε το αποτέλεσμα στην απλούστερη μορφή

$$\prod_{i=1}^{r} |K \cap E_{\sigma_i}| \leqslant \left(\frac{c_0 r}{s}\right)^{ds} |K \cap E_\sigma|^s |K|^{r-s}.$$

Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την (6.1.7) αν όλα τα σύνολα σ_i έχουν την ίδια πληθικότητα $k = \frac{ds}{r}$. Η αφετηρία μας (6.1.6) αντιστοιχεί στην ειδική περίπτωση $d = r = 2$, $k = 1$ και $s = 1$. Στη γενικότερη περίπτωση $d = r$, $k = 1$ και $s = 1$, που αντιστοιχεί στο να πάρουμε $\sigma_j = \{i_j\}$ για κάποιους διακεκριμένους $i_1, \dots, i_r \in [n]$, το Θεώρημα 6.1.3 δίνει το φράγμα

$$\prod_{j=1}^{r} |K \cap e_{i_j}^{\perp}| \leqslant (c_0 r)^r \, |K \cap [\mathrm{span}\{e_{i_1}, \dots, e_{i_r}\}]^{\perp}| \, |K|^{r-1}.$$

Η σταθερά $(c_0 r)^r$ ίσως δεν είναι βέλτιστη, εξαρτάται όμως μόνο από το r και όχι από τη διάσταση n.

Στη συνέχεια δίνουμε μια εναλλακτική απόδειξη της (6.1.5), με την ίδια σταθερά, χρησιμοποιώντας μια γενική ανισότητα για μεικτούς όγκους. Έστω $\mathcal{C} = (K_3, \dots, K_n)$ μια $(n-2)$-άδα συμπαγών κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ζεύγος συμπαγών κυρτών συνόλων A, B στον $\mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε το μεικτό όγκο $V(A, B, \mathcal{C})$ με $V(A, B)$. Τότε, για κάθε τριάδα A, B, C συμπαγών κυρτών συνόλων στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$V(A, A)V(B, C) \leqslant 2V(A, B)V(A, C). \tag{6.1.8}$$

Μάλιστα, η (6.1.8) είναι άμεση συνέπεια ενός από τα κεντρικά λήμματα στα [42] και [39]. Παρατηρούμε ότι η (6.1.8) οδηγεί σε μια γενίκευση της (6.1.5), η οποία ισχύει για κάθε ζεύγος προβολών συνδιάστασης 1 που ορίζονται από δύο όχι απαραίτητα ορθογώνια διανύσματα u και v.

Θεώρημα 6.1.4. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $u, v \in S^{n-1}$. Αν $P_{u,v}(K) = P_{\mathrm{span}\{u,v\}^\perp}(K)$, τότε*

$$|P_u(K)|\,|P_v(K)| \geqslant \frac{n}{2(n-1)}\sqrt{1-\langle u,v\rangle^2}\,|K|\,|P_{u,v}(K)|.$$

Συζητάμε επίσης ένα διαφορετικό ερώτημα, στο οποίο φαίνεται η χρησιμότητα της (6.1.8). Οι Hug και Schneider [51] έχουν κάνει την εικασία ότι για κάθε $1 \leqslant r \leqslant n$ και κάθε r-άδα $(K_1, \dots, K_r)$ κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$V(K_1, \dots, K_r, B_2^n[n-r]) \leqslant \frac{(n-r)!\omega_{n-r}}{n!}\prod_{i=1}^r V_1(K_i), \tag{6.1.9}$$

όπου $V(A_1, \dots, A_n)$ είναι ο μεικτός όγκος των n συμπαγών κυρτών συνόλων A_i, ο συμβολισμός $A[m]$ χρησιμοποιείται για μια m-άδα $A, \dots, A$, και

$$\omega_{n-s}V_s(K) = \binom{n}{s}V(K[s], B_2^n[n-s])$$

είναι ο s-οστός intrinsic όγκος του K (βλέπε επίσης [19] για την περίπτωση του επιπέδου). Οι Hug και Schneider απέδειξαν την (6.1.9) στην ειδική περίπτωση που τα σώματα $K_1, \dots, K_r$ είναι ζωνοειδή. Στην περίπτωση $r = 2$, οι Artstein-Avidan, Florentin και Ostrover έχουν αποδείξει στο [2] ότι αν K είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα και Z είναι ένα ζωνοειδές στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$|B_2^n|\,V(K, Z, B_2^n[n-2]) \leqslant \frac{n}{n-1}\frac{\omega_n\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}^2}\,V(K, B_2^n[n-1])\,V(Z, B_2^n[n-1]).$$

Από τον ορισμό του $V_1(K)$ αυτή η ανισότητα είναι η ίδια με αυτή της εικασίας (για $r = 2$).

Ένα πιο γενικό πρόβλημα μελετάται στο [84], όπου οι Soprunov και Zvavitch αποδεικνύουν ότι αν A είναι οποιοδήποτε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $Z_1, \dots, Z_r$ είναι ζωνοειδή τότε

$$|A|^{r-1}V(Z_1, \dots, Z_r, A[n-r]) \leqslant r^{r-1}\prod_{i=1}^r V(Z_i, A[n-1]),$$

και για κάθε r-άδα (τυχόντων) κυρτών σωμάτων $K_1, \dots, K_r$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|A|^{r-1}V(K_1, \dots, K_r, A[n-r]) \leqslant c_{n,r}\prod_{i=1}^r V(K_i, A[n-1]), \tag{6.1.10}$$

όπου $c_{n,r} = n^r r^{r-1}$. Επιπλέον, η σταθερά $c_{n,r}$ μπορεί να αντικατασταθεί από την $c'_{n,r} = n^{r/2}r^{r-1}$ αν τα $K_1, \dots, K_r$ είναι συμμετρικά.

Παρατηρούμε ότι η (6.1.8) έχει ως συνέπεια μια πιο γενική ανισότητα, η οποία επιβεβαιώνει την εικασία ότι ισχύει η (6.1.9) στην περίπτωση $r = 2$, με μια απόλυτη (σχεδόν βέλτιστη) σταθερά και δείχνει ότι η σταθερά $c_{n,2}$ στην (6.1.10) μπορεί να αντικατασταθεί από τη σταθερά 2.

Θεώρημα 6.1.5. *Έστω A ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K_1 και K_2 στον $\mathbb{R}^n$,*

$$|A|\,V(K_1, K_2, A[n-2]) \leqslant 2V(K_1, A[n-1])\,V(K_2, A[n-1]).$$

Επιλέγοντας $A = B_2^n$ στο Θεώρημα 6.1.5 παίρνουμε μια παραλλαγή της (6.1.9) με σταθερά 2. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $\frac{n-1}{n} < \frac{\omega_n\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}^2} < 1$, άρα η σταθερά $b_{n,2} := \frac{n}{n-1}\frac{\omega_n\omega_{n-2}}{\omega_{n-1}^2}$ που εικάζεται ικανοποιεί την

$$1 < b_{n,2} < \frac{n}{n-1}.$$

Με άλλα λόγια, η σταθερά του Θεωρήματος 6.1.5 υπολείπεται της σταθεράς της εικασίας (μόνο) κατά έναν παράγοντα 2.

Όσον αφορά τις σταθερές $c_{n,r}$ και $c'_{n,r}$ στην (6.1.10), από το Θεώρημα 6.1.5 βλέπουμε αμέσως ότι $c_{n,2} \leqslant 2$ και επίσης παρατηρούμε ότι ένα επαγωγικό επιχείρημα οδηγεί σε μια εκδοχή της γενικής ανισότητας (6.1.10) με μια σταθερά c_r που εξαρτάται μόνο από το r. Θα ήταν ενδιαφέρον να προσδιοριστεί η βέλτιστη τιμή αυτής της σταθεράς. Απλή επαγωγή οδηγεί στην πολύ ασθενή εκτίμηση $c_r \leqslant 2^{2^{r-1}-1}$.

6.2 Συναρτησοειδές μέσης τομής

Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\mathrm{as}(K)$ το μέσο όγκο των κεντρικών τομών του K συνδιάστασης 1:

$$\mathrm{as}(K) = \int_{S^{n-1}} |K \cap \xi^\perp|\, d\sigma(\xi), \tag{6.2.1}$$

όπου $|\cdot|$ είναι ο όγκος στην κατάλληλη κάθε φορά διάσταση, $\xi^\perp$ είναι ο υπόχωρος με κάθετο διάνυσμα το ξ, και σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Αν E είναι ένας m-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $\mathrm{as}(K\cap E)$ τον μέσο $(m-1)$-διάστατο όγκο των κεντρικών τομών του $K \cap E$ συνδιάστασης 1. Γενικότερα, για κάθε $1 \leqslant r \leqslant n-1$ ορίζουμε

$$\mathrm{as}_r(K) = \int_{G_{n,n-r}} |K \cap E|\, d\nu_{n,n-r}(E), \tag{6.2.2}$$

όπου $\nu_{n,n-r}$ είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Haar στην Grassmannian $G_{n,n-r}$ των $(n-r)$-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή, $\mathrm{as}_r(K)$ είναι ο μέσος όγκος των τομών του K συνδιάστασης r. Σημειώνουμε ότι $\mathrm{as}(K) = \mathrm{as}_1(K)$.

Ο Koldobsky απέδειξε στο [58] ότι αν το K είναι «σώμα τομών» στον $\mathbb{R}^n$ (βλέπε Παράγραφο 6.3 για τους απαραίτητους ορισμούς), τότε

$$\mathrm{as}(K) \leqslant b_{n,1}\, |K|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi\in S^{n-1}} \mathrm{as}(K \cap \xi^\perp), \tag{6.2.3}$$

όπου

$$b_{n,1} := \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-2}\omega_n^{\frac{1}{n}}} \simeq 1.$$

Όποτε γράφουμε $a \lesssim b$ εννοούμε ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $a \leqslant cb$, και όταν γράφουμε $a \simeq b$, εννοούμε ότι $a \lesssim b$ και $b \lesssim a$. Σημειώνουμε ότι η (6.2.3) είναι ακριβής: γίνεται ισότητα όταν $K = B_2^n$.

Σκοπός μας είναι να μελετήσουμε αν ισχύουν αντίστοιχες ανισότητες για το μέσο όγκο των κεντρικών τομών συνδιάστασης 1 οποιουδήποτε κεντραρισμένου κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε το ακόλουθο ερώτημα.

Ερώτημα 6.2.1. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-2$ και έστω $\gamma_{n,k}$ η μικρότερη σταθερά $\gamma > 0$ με την ιδιότητα ότι για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{as}(K) \leqslant \gamma^k |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K \cap E). \tag{6.2.4}$$

Είναι σωστό ότι $\sup_{n,k} \gamma_{n,k} < \infty$;

Γράφοντας τον όγκο σε πολικές συντεταγμένες, στην (6.2.4), βλέπουμε ότι το ερώτημα παίρνει τη μορφή μιας «μεγιστικής ανισότητας Hölder» για την ακτινική συνάρτηση ρ_K του σώματος K:

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-1}(\theta)\, d\theta \leqslant c^k \left(\frac{1}{n} \int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\theta)\, d\theta \right)^{\frac{k}{n}} \max_{E \in G_{n,n-k}} \int_{S^{n-1} \cap E} \rho_K^{n-k-1}(\theta)\, d\theta, \tag{6.2.5}$$

όπου γράφουμε $d\theta$ για το μη-κανονικοποιημένο αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο στη σφαίρα, και c είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το Ερώτημα 6.2.1 συνδέεται στενά με διάφορα προβλήματα της κυρτής γεωμετρίας. Θα δείξουμε ότι η περίπτωση $k = 1$ είναι ισοδύναμη με το ερωτημα αν κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια κεντρική τομή συνδιάστασης 1 με όγκο μεγαλύτερο από μια απόλυτη σταθερά, ένα ερώτημα που με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με το πρόβλημα να δοθεί άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά (βλέπε παρακάτω). Η ανισότητα (6.2.3) αποδείχθηκε στο [58] ως εφαρμογή του ακόλουθου αποτελέσματος ευστάθειας για το πρόβλημα Busemann-Petty: αν K, L είναι συμμετρικά αστρόμορφα σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με το K σώμα τομών, $\varepsilon > 0$, και $|K \cap \xi^\perp| \leqslant |L \cap \xi^\perp| + \varepsilon$ για κάθε $\xi \in S^{n-1}$, τότε $|K|^{\frac{n-1}{n}} \leqslant |L|^{\frac{n-1}{n}} + c\varepsilon$, όπου c είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην Παράγραφο 8.1 γενικεύουμε την (6.2.3) χρησιμοποιώντας ως παράμετρο την «απόσταση εξωτερικού λόγου όγκων» $d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ ενός συμμετρικού αστρόμορφου σώματος K από την κλάση $\mathcal{BP}_k^n$ των γενικευμένων k-σωμάτων τομών. Οι εκτιμήσεις μας βασίζονται στο επόμενο πιο γενικό θεώρημα το οποίο ισχύει για τη μεγαλύτερη κλάση των συμμετρικών αστρόμορφων σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε άρτια συνεχή πυκνότητα στην S^{n-1}.

Θεώρημα 6.2.2. *Έστω $1 \leqslant k < n-1$, έστω K ένα συμμετρικό αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και έστω g μια άρτια μη-αρνητική συνεχής συνάρτηση στην S^{n-1}. Τότε,*

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-1}(\theta) g(\theta)\, d\theta \leqslant c^k\, d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n)\, |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in G_{n,n-k}} \int_{S^{n-1} \cap E} \rho_K^{n-k-1}(\theta) g(\theta)\, d\theta, \tag{6.2.6}$$

όπου c είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην απόδειξη, η σταθερά c εμφανίζεται ως $c_{n,k}$, όπου

$$c_{n,k}^k = \frac{n\omega_n^{\frac{n-k}{n}}}{(n-k)\omega_{n-k}},$$

και μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $c_{n,k} \simeq 1$. Το Θεώρημα 6.2.2 δίνει την πρώτη μας εκτίμηση για τις σταθερές $\gamma_{n,k}$ του Ερωτήματος 6.2.1. Επιλέγοντας $g \equiv 1$ βλέπουμε ότι από την (6.2.6) έπεται το ακόλουθο.

Θεώρημα 6.2.3. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-2$, και έστω K ένα συμμετρικό αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{as}(K) \leqslant b^k d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n)\, |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K \cap E), \tag{6.2.7}$$

όπου b είναι μια απόλυτη σταθερά. Με άλλα λόγια, $\gamma_{n,k} \leqslant b\ d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$.

Στην απόδειξη, η σταθερά b εμφανίζεται ως $b_{n,k}$, με

$$b_{n,k}^k = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_{n-k-1}\omega_n^{\frac{k}{n}}},$$

και μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $b_{n,k} \simeq 1$.

Για πολλές κλάσεις κυρτών σωμάτων η απόσταση $d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ φράσσεται από μια απόλυτη σταθερά. Σε αυτές τις κλάσεις συμπεριλαμβάνονται τα unconditional σώματα, οι μοναδιαίες μπάλες υποχώρων του L_p, και άλλα σώματα (βλέπε [59, 61]). Συνεπώς, ο περιορισμός του Ερωτήματος 6.2.1 σε όλες αυτές τις κλάσεις έχει καταφατική απάντηση.

Για κάθε κυρτό σώμα K, εκτιμήσεις για την απόσταση $d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ δόθηκαν στο [62]. Ειδικότερα, τα γνωστά φράγματα για την $d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ δείχνουν ότι η $\gamma_{n,k}$ φράσσεται από μια συνάρτηση του n/k, άρα είναι φραγμένη αν το k είναι ανάλογο του n. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε:

Θεώρημα 6.2.4. *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και για κάθε άρτια μη-αρνητική συνεχή συνάρτηση g στην S^{n-1},*

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-1}(\theta) g(\theta)\, d\theta \leqslant \big(c_1 h(n/k)\big)^k\, |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in G_{n,n-k}} \int_{S^{n-1}\cap E} \rho_K^{n-k-1}(\theta) g(\theta)\, d\theta, \tag{6.2.8}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $h(t) = \sqrt{t} \cdot (\log(et))^{\frac{3}{2}}$, $t \geqslant 1$. Ειδικότερα,

$$\gamma_{n,k} \leqslant c_1 \sqrt{n/k}\, [\log(en/k)]^{\frac{3}{2}}. \tag{6.2.9}$$

Το Θεώρημα 6.2.2 μας επιτρέπει επίσης να δείξουμε ένα ανάλογο του Θεωρήματος 6.2.3 για τις ποσότητες $\mathrm{as}_r(K)$.

Θεώρημα 6.2.5. *Έστω $1 \leqslant k < n-2$ και $1 \leqslant r < n-k$. Για κάθε συμμετρικό αστρόμορφο σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$\mathrm{as}_r(K) \leqslant \left(\phi\sqrt{\frac{n}{n-r}}\right)^k d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n)\,|K|^{\frac{k}{n}} \max_{E\in G_{n,n-k}} \mathrm{as}_r(K\cap E), \tag{6.2.10}$$

όπου ϕ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην απόδειξη, η σταθερά $\phi\sqrt{\frac{n}{n-r}}$ εμφανίζεται ως $\phi_{n,k,r}$, όπου

$$\phi_{n,k,r}^k = \frac{\omega_{n-r}}{\omega_{n-k-r}\omega_n^{\frac{k}{n}}},$$

και μπορεί κανείς να ελέγξει ότι $\phi_{n,k,r} \simeq \sqrt{\frac{n}{n-r}}$.

Στην Παράγραφο 8.2 δείχνουμε ότι ένα ανάλογο της (6.2.3) ισχύει σε πλήρη γενικότητα, αν αγνοήσουμε την τιμή της ισοτροπικής σταθεράς του K. Για να διατυπώσουμε το αποτέλεσμα, υπενθυμίζουμε πρώτα τον ορισμό της ισοτροπικής θέσης. Ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x,\xi\rangle^2 dx = L_K^2 \tag{6.2.11}$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K έχει μια *ισοτροπική θέση* $T(K)$, $T \in GL(n)$, η οποία είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς, άρα η *ισοτροπική σταθερά* L_K είναι μια αναλλοίωτη της γραμμικής κλάσης του K. Η γνωστή εικασία του υπερεπιπέδου είναι το ερώτημα αν υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_K \leqslant C$ για κάθε n και κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Το καλύτερο γνωστό άνω φράγμα

$$L_n := \sup\{L_K : K \text{ ισοτροπικό στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant c\sqrt[4]{n} \tag{6.2.12}$$

οφείλεται στον Klartag [54], ο οποίος βελτίωσε προηγούμενο αποτέλεσμα του Bourgain [23] (βλέπε [26] για την ιστορία του προβλήματος και τις πρόσφατες εξελίξεις σε αυτή την περιοχή). Από την άλλη πλευρά, έχουμε πάντα $L_K \geqslant L_{B_2^n} \geqslant c$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Με άλλα λόγια, το ερώτημα είναι αν ισχύει $L_K \simeq 1$ για όλα τα κεντραρισμένα κυρτά σώματα.

Θεώρημα 6.2.6. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-2$,*

$$\mathrm{as}(K) \leqslant (c_2 L_K)^k\,|K|^{\frac{k}{n}} \max_{E\in G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E), \tag{6.2.13}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και L_K είναι η ισοτροπική σταθερά του K.

Για πολλές κλάσεις κυρτών σωμάτων η ισοτροπική σταθερά L_K είναι φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά (βλέπε [26, Κεφάλαιο 4]). Το Θεώρημα 6.2.6 δίνει καταφατική απάντηση στο Ερώτημα 6.2.1 για όλες αυτές τις κλάσεις. Από την άλλη πλευρά, είναι ενδιαφέρον το γεγονός ότι η (6.2.13) δίνει ουσιαστικά το καλύτερο φράγμα που θα μπορούσαμε να ελπίζουμε. Στην Πρόταση 8.2.3 δείχνουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\mathrm{as}(K) \simeq L_K \max_{\xi\in S^{n-1}} \mathrm{as}(K\cap \xi^{\perp})\,|K|^{\frac{1}{n}}. \tag{6.2.14}$$

Αυτό δείχνει ότι η εκτίμηση του Θεωρήματος 6.2.6 είναι ασυμπτωτικά ακριβής: αν $\gamma > 0$ είναι μια σταθερά τέτοια ώστε η (6.2.4) να ισχύει για $k = 1$ και όλα τα K, τότε πρέπει να έχουμε $\gamma \geqslant cL_K$. Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με το Θεώρημα 6.2.6 συμπεραίνουμε ότι

$$\gamma_{n,k} \lesssim \gamma_{n,1} \simeq L_n \tag{6.2.15}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-2$ (βλέπε Πρόταση 8.2.5).

Ένα από τα εργαλεία που χρησιμοποιούμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.6 είναι η παραλλαγή της δυϊκής ανισότητας Loomis-Whitney του Meyer [72] του προηγούμενου κεφαλαίου (βλέπε (8.2.2)). Το δεύτερο εργαλείο είναι ένα κάτω φράγμα για τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals

$$\Phi_k(K) := \frac{\omega_n}{\omega_{n-k}}\left(\int_{G_{n,n-k}} |K\cap E|^n \, d\nu_{n,n-k}(E)\right)^{\frac{1}{n}} \tag{6.2.16}$$

ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ συναρτήσει της ισοτροπικής σταθεράς του K (βλέπε [30]). Μπορούμε μάλιστα να ελέγξουμε ότι το πρόβλημα του να δοθούν ασυμπτωτικά ακριβή κάτω φράγματα για την ποσότητα $\Phi_k(K)$ είναι ισοδύναμο με το ερώτημα αν $\gamma_{n,1} \simeq L_n \simeq 1$ (βλέπε Παρατήρηση 8.2.7). Όταν η συνδιάσταση k είναι ανάλογη του n, τα γνωστά κάτω φράγματα είναι ανεξάρτητα από την ισοτροπική σταθερά του K (βλέπε [30] και [26, Παράγραφος 6.4]). Έτσι, παίρνουμε μια παραλλαγή του Θεωρήματος 6.2.4.

Θεώρημα 6.2.7. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n-2$ και έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{as}(K) \leqslant \big(c_2 h(n/k)\big)^k |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E\in G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E), \tag{6.2.17}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $h(t) = \sqrt{t}\cdot(\log(et))^{\frac{3}{2}}$, $t \geqslant 1$.

Οι μέθοδοι που χρησιμοποιούνται για τις αποδείξεις των Θεωρημάτων 6.2.6 και 6.2.3 είναι α-νεξάρτητες. Σημειώνουμε ότι η πρώτη μέθοδος μας επιτρέπει να δουλέψουμε με (όχι αναγκαστικά συμμετρικά) κεντραρισμένα κυρτά σώματα, ενώ η δεύτερη μέθοδος μας επιτρέπει να δουλέψουμε με συμμετρικά (όχι απαραίτητα κυρτά) αστρόμορφα σώματα και να θεωρήσουμε άρτιες συνεχείς πυκνότητες στη θέση του όγκου. Άρα, τα δύο αποτελέσματα αλληλοσυμπληρώνονται. Τα δύο φράγματα συνδέονται μέσω της ανισότητας

$$L_K \leqslant cL_k \cdot d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n), \tag{6.2.18}$$

του E. Milman (βλέπε [73, Πόρισμα 5.4]). Αφού όμως γνωρίζουμε μόνο ότι $L_k = O(\sqrt[4]{k})$, οι εκτιμήσεις των Θεωρημάτων 6.2.6 και 6.2.3 δεν είναι συγκρίσιμες όταν $k \gg 1$.

Στην Παράγραφο 8.3 μελετάμε τη μέση τιμή του συναρτησοειδούς μέσης τομής $\mathrm{as}(K\cap E)$ πάνω από όλους τους $E\in G_{n,n-k}$, $1\leqslant k\leqslant n-2$. Παίρνουμε τα ακόλουθα γενικά άνω και κάτω φράγματα.

Θεώρημα 6.2.8. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $p(K):=R(K)/|K|^{\frac{1}{n}}$, όπου $R(K)$ είναι η ακτίνα του K. Τότε, για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-2$ έχουμε*

$$\left(\frac{c_3\sqrt{n}}{p(K)}\right)^k \mathrm{as}(K)\leqslant |K|^{\frac{k}{n}}\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{as}(K\cap E)\,d\nu_{n,n-k}(E)\leqslant \left(\frac{c_4 p(K)}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{k}{n-1}}\mathrm{as}(K), \tag{6.2.19}$$

όπου $c_3,c_4>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Δεδομένου ότι η ακτίνα $R(K)$ είναι πολυωνυμική ως προς n για όλες τις κλασσικές θέσεις ενός κυρτού σώματος K (ισοτροπική θέση, θέση ελάχιστης επιφάνειας, θέση ελάχιστου μέσου πλάτους, θέση John και θέση Löwner), η δεξιά ανισότητα της (6.2.19) μας δίνει το εξής.

Θεώρημα 6.2.9. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν το K είναι σε κάποια από τις κλασσικές θέσεις, τότε*

$$|K|^{\frac{k}{n}}\int_{G_{n,n-k}}\mathrm{as}(K\cap E)\,d\nu_{n,n-k}(E)\leqslant c_5^k\,\mathrm{as}(K) \tag{6.2.20}$$

για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$, όπου $c_5>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Τα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου είναι δυϊκά εκείνων του [43]. Το βασικό ερώτημα εκεί ήταν να συγκριθεί η επιφάνεια $S(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με την ελάχιστη, μέση ή μέγιστη επιφάνεια των προβολών του συνδιάστασης 1 ή χαμηλότερης διάστασης. Ένα από τα κύρια αποτελέσματα στο [43] ισχυρίζεται ότι για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$|K|^{\frac{1}{n}}\min_{\xi\in S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K))\leqslant \frac{c_6\partial_K}{\sqrt{n}}\,S(K), \tag{6.2.21}$$

όπου $c_6>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και

$$\partial_K:=\min\left\{S(T(K))/|T(K)|^{\frac{n-1}{n}}:T\in GL(n)\right\} \tag{6.2.22}$$

είναι η *παράμετρος ελάχιστης επιφάνειας* του K. Ένα άλλο αποτέλεσμα από το [43] ισχυρίζεται ότι αν το K είναι σε κάποια από τις κλασσικές θέσεις που αναφέραμε παραπάνω, τότε

$$|K|^{\frac{1}{n}}\int_{S^{n-1}} S(P_{\xi^\perp}(K))\,d\sigma(\xi)\geqslant c_7 S(K), \tag{6.2.23}$$

όπου $c_7>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η αναλογία ανάμεσα στο Θεώρημα 6.2.6 και την (6.2.21) είναι σαφής. Το ρόλο του συναρτησοειδούς μέσης τομής $\mathrm{as}(K)$ παίζει η επιφάνεια $S(K)$, και το ρόλο της ισοτροπικής σταθεράς παίζει η παράμετρος ελάχιστης επιφάνειας.

6.3 Συμβολισμός και ορισμοί

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια δομή $\langle \cdot, \cdot \rangle$ και σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$. Συμβολίζουμε με B_2^n και S^{n-1} την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και σφαίρα του $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα. Γράφουμε σ για το κανονικοποιημένο αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1} και ν για το Haar μέτρο πιθανότητας στην ορθογώνια ομάδα $O(n)$. Με $G_{n,k}$ συμβολίζουμε την Grassmannian όλων των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$. Η $O(n)$ εφοδιάζει την $G_{n,k}$ με το Haar μέτρο πιθανότητας $\nu_{n,k}$. Χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $d\theta$ για το μη κανονικοποιημένο αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο στη σφαίρα.

Τα γράμματα c, c', c_1, c_2 κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές που μπορεί να αλλάζουν από γραμμή σε γραμμή. Όταν γράφουμε $a \simeq b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 a \leqslant b \leqslant c_2 a$.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία [41] και [83] για τα βασικά αποτελέσματα της θεωρίας Brunn-Minkowski και στο βιβλίο [3] για τα βασικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας. Το βιβλίο [26] αναπτύσσει λεπτομερώς τη θεωρία της οικογένειας των L_p-κεντροειδών σωμάτων ενός κυρτού σώματος.

Αστρόμορφα σώματα και κυρτά σώματα

Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_n$ την κλάση όλων των μη κενών συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Αν το $K \in \mathcal{K}_n$ έχει μη κενό εσωτερικό, θα λέμε ότι το K είναι κυρτό σώμα. Για κάθε $K \in \mathcal{K}_n$, συμβολίζουμε με $|K|$ τον όγκο του K στον κατάλληλο αφφινικό υπόχωρο, εκτός αν δηλώνουμε κάτι άλλο. Ο όγκος της B_2^n συμβολίζεται με ω_n. Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι συμμετρικό αν $K = -K$, δηλαδή αν $x \in K$ αν και μόνο αν $-x \in K$, και ότι το K είναι κεντραρισμένο αν το βαρύκεντρό του $\frac{1}{|K|}\int_K x\, dx$ είναι στην αρχή των αξόνων. Ένα συμπαγές σύνολο K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται αστρόμορφο (στο 0) αν περιέχει την αρχή των αξόνων στο εσωτερικό του και κάθε ευθεία που περνάει από το 0 τέμνει το K σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Για κάθε τέτοιο σύνολο, η ακτινική συνάρτηση ρ_K ορίζεται στην S^{n-1} από την

$$\rho_K(\theta) = \max\{\lambda > 0 : \lambda\theta \in K\}, \qquad \theta \in S^{n-1}. \tag{6.3.1}$$

Αν η ρ_K είναι συνεχής, τότε λέμε ότι το K είναι αστρόμορφο σώμα. Τότε, ο όγκος του K σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από την

$$|K| = \omega_n \int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\theta)\, d\sigma(\theta). \tag{6.3.2}$$

Το ακτινικό άθροισμα $K \tilde{+} D$ δύο αστρόμορφων σωμάτων K και D ορίζεται από την

$$\rho_{K\tilde{+}D} = \rho_K + \rho_D. \tag{6.3.3}$$

Ένας άλλος συνηθισμένος συμβολισμός για το ακτινικό άθροισμα είναι ο $+_r$. Εφοδιάζουμε την κλάση $\mathcal{S}_n$ των αστρόμορφων σωμάτων με την ακτινική μετρική

$$d_r(K, D) := \sup_{\xi \in S^{n-1}} |\rho_K(\xi) - \rho_D(\xi)|. \tag{6.3.4}$$

Η συνάρτηση στήριξης ενός κυρτού σώματος K ορίζεται από την $h_K(y) = \max\{\langle x, y\rangle : x \in K\}$. Το μέσο πλάτος του K είναι η ποσότητα

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\theta)\, d\sigma(\theta). \tag{6.3.5}$$

Η ακτίνα του K είναι ο μικρότερος $R > 0$ για τον οποίο $K \subseteq RB_2^n$. Αν $0 \in \mathrm{int}(K)$, τότε γράφουμε $r(K)$ για την εσωτερική ακτίνα του K (τον μεγαλύτερο $r > 0$ για τον οποίο $rB_2^n \subseteq K$) και ορίζουμε το πολικό σώμα K° του K ως εξής:

$$K^\circ := \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } x \in K\}. \tag{6.3.6}$$

Για κάθε $E \in G_{n,k}$ συμβολίζουμε με $E^\perp$ τον ορθογώνιο υπόχωρο του E, δηλαδή $E^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle = 0 \text{ για κάθε } y \in E\}$. Ειδικότερα, για κάθε $u \in S^{n-1}$ ορίζουμε $u^\perp = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle = 0\}$. Η τομή του $K \in \mathcal{K}_n$ με έναν υπόχωρο E του $\mathbb{R}^n$ είναι το $K \cap E$, και η ορθογώνια προβολή του K στον E συμβολίζεται με $P_E(K)$. Θέτουμε επίσης $B_E = B_2^n \cap E$ και $S_E = S^{n-1} \cap E$.

Η ακτίνα όγκου του K είναι η ποσότητα $\mathrm{vrad}(K) = (|K|/|B_2^n|)^{1/n}$. Το συναρτησοειδές Minkowski ενός αστρόμορφου σώματος K σε ένα $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζεται από την $\|x\|_K = \min\{t > 0 : x \in tK\}$. Η M-παράμετρος του K είναι η ποσότητα

$$M(K) = \int_{S^{n-1}} \rho_K^{-1}(\theta)\, d\sigma(\theta) = \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_K\, d\sigma(\theta). \tag{6.3.7}$$

Μεικτοί όγκοι

Οι μεικτοί όγκοι ορίζονται μέσω ενός κλασσικού θεωρήματος του Minkowski το οποίο περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο ο όγκος αλληλεπιδρά με τις πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού συμπαγών κυρτών συνόλων με μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Αν $K_1, \dots, K_N \in \mathcal{K}_n$, $N \in \mathbb{N}$, τότε ο όγκος του $t_1K_1 + \cdots + t_NK_N$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς $t_i \geqslant 0$ (βλέπε [27] και [83]):

$$\left|t_1K_1 + \cdots + t_NK_N\right| = \sum_{1 \leqslant i_1, \dots, i_n \leqslant N} V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) t_{i_1} \dots t_{i_n},$$

όπου οι συντελεστές $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ επιλέγονται έτσι ώστε να είναι αναλλοίωτοι ως προς μεταθέσεις των ορισμάτων τους. Ο συντελεστής $V(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$ ονομάζεται μεικτός όγκος της n-άδας $(K_{i_1}, \dots, K_{i_n})$. Θα χρησιμοποιούμε συχνά το γεγονός ότι η συνάρτηση V είναι θετικά γραμμική ως προς κάθε όρισμά της και ότι $V(K, \dots, K) = |K|_n$ (το n-διάστατο μέτρο Lebesgue του K) για κάθε $K \in \mathcal{K}_n$.

Ο τύπος του Steiner είναι ειδική περίπτωση του θεωρήματος του Minkowski. Ο όγκος του $K + tB_2^n$, $t > 0$, αναπτύσσεται ως πολυώνυμο του t:

$$|K + tB_2^n| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_k(K) t^k,$$

όπου $W_k(K) := V(K[n-k], B_2^n[k])$ είναι το k-οστό quermassintegral του K.

Η ανισότητα Aleksandrov-Fenchel ισχυρίζεται ότι αν $K, L, K_3, \dots, K_n \in \mathcal{K}_n$, τότε

$$V(K, L, K_3, \dots, K_n)^2 \geqslant V(K, K, K_3, \dots, K_n)V(L, L, K_3, \dots, K_n).$$

Ειδικότερα, η ανισότητα έχει ως συνέπεια το γεγονός ότι η ακολουθία $(W_0(K), \dots, W_n(K))$ είναι λογαριθμικά κοίλη. Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel μπορούμε να πάρουμε την ανισότητα Brunn-Minkowski καθώς και την ακόλουθη γενίκευση για τα quermassintegrals:

$$W_k(K+L)^{\frac{1}{n-k}} \geqslant W_k(K)^{\frac{1}{n-k}} + W_k(L)^{\frac{1}{n-k}}, \qquad k = 0, \dots, n-1.$$

Συμβολίζουμε με $S(K)$ την επιφάνεια του K. Από τον τύπο του Steiner και τον ορισμό της επιφάνειας βλέπουμε ότι $S(K) = nW_1(K)$. Αξίζει τον κόπο να αναφέρουμε επίσης τον ολοκληρωτικό τύπο του Kubota

$$W_k(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-k}} \int_{G_{n,n-k}} |P_E(K)| \, d\nu_{n,n-k}(E), \qquad 1 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Η περίπτωση $k = 1$ αντιστοιχεί στον τύπο του Cauchy για την επιφάνεια:

$$S(K) = \frac{\omega_n}{n\omega_{n-1}} \int_{S^{n-1}} |P_{u^\perp}(K)| \, d\sigma(u).$$

Δυϊκοί μεικτοί όγκοι

Ο Lutwak εισήγαγε τους δυϊκούς μεικτούς όγκους στο [65]. Αρχικά θεώρησε κυρτά σώματα, στη συνέχεια όμως επεξέτεινε τον ορισμό του στην κλάση $\mathcal{S}_n$ των αστρόμορφων σωμάτων. Αν $K_1, \dots, K_n \in \mathcal{S}_n$, ο δυϊκός μεικτός όγκος τους είναι το ολοκλήρωμα

(6.3.8) $$\tilde{V}(K_1, \dots, K_n) = \omega_n \int_{S^{n-1}} \rho_{K_1}(\theta) \cdots \rho_{K_n}(\theta) d\sigma(\theta).$$

Αυτά τα ολοκληρώματα έχουν ιδιότητες ανάλογες με εκείνες των μεικτών όγκων αν αντικαταστήσουμε την πρόσθεση κατά Minkowski με την ακτινική πρόσθεση. Η συνάρτηση $\tilde{V}$ είναι προφανώς μη αρνητική, συμμετρική και μονότονη ως προς τα ορίσματά της, θετικά γραμμική ως προς την $\tilde{+}$ για κάθε όρισμά της, και έχει ως διαγώνιο τον όγκο. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι αν $K_1, \dots, K_m \in \mathcal{S}_n$ και $\lambda_1, \dots, \lambda_m > 0$, τότε

(6.3.9) $$|\lambda_1 K_1 \tilde{+} \cdots \tilde{+} \lambda_m K_m| = \sum_{i_1, \dots, i_n = 1}^{m} \tilde{V}(K_{i_1}, \dots, K_{i_n}) \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_n}.$$

Ειδικότερα, αν $K, D \in \mathcal{S}_n$ και $t > 0$ τότε

(6.3.10) $$|K \tilde{+} tD| = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \tilde{V}_j(K, D) \, t^j,$$

όπου $\tilde{V}_j(K, D) := \omega_n \int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-j}(\theta) \rho_D^j(\theta) d\sigma(\theta)$ είναι ο j-οστός δυϊκός μεικτός όγκος των K και D.

Μια ανισότητα που δείχνει την αναλογία με τους μεικτούς όγκους είναι η δυϊκή ανισότητα Minkowski: για κάθε $K, D \in \mathcal{S}_n$, απλή εφαρμογή της ανισότητας Hölder μας δίνει

(6.3.11) $$\tilde{V}_1(K, D) \leqslant \left(\omega_n \int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\theta) d\sigma(\theta) \right)^{\frac{n-1}{n}} \left(\omega_n \int_{S^{n-1}} \rho_D^n(\theta) d\sigma(\theta) \right)^{\frac{1}{n}} \leqslant |K|^{\frac{n-1}{n}} |D|^{\frac{1}{n}}.$$

Σώματα τομών

Η κλάση των σωμάτων τομών εισήχθη από τον Lutwak στο [67]. Το σώμα τομών ενός αστρόμορφου σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με ακτινική συνάρτηση $\rho_K \in C(S^{n-1})$ είναι το αστρόμορφο σώμα IK με ακτινική συνάρτηση

$$\rho_{IK}(\xi) = |K \cap \xi^{\perp}| = \omega_{n-1} \int_{S(\xi^{\perp})} \rho_K^{n-1}(\theta) d\sigma_{\xi}(\theta), \tag{6.3.12}$$

όπου $S(\xi^{\perp}) = S^{n-1} \cap \xi^{\perp}$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα στον $\xi^{\perp}$ και σ_{ξ} είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην $S(\xi^{\perp})$. Αν το K είναι κεντραρισμένο κυρτό σώμα τότε το IK είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Στο [67] αποδεικνύεται ότι

$$I(TK) = |\det T| \, (T^{-1})^{*}(IK) \tag{6.3.13}$$

για κάθε $T \in GL(n)$. Ειδικότερα, αν $T \in SL(n)$ βλέπουμε ότι $|I(TK)| = |IK|$. Επίσης, κάθε ελλειψοειδές είναι σώμα τομών κάποιου άλλου ελλειψοειδούς.

Για $k = 1$, μια πιο γενική κλάση σωμάτων τομών ορίστηκε από τους Goodey, Lutwak και Weil στο [48]. Ο ορισμός τους επεκτάθηκε από τον Zhang [88] για όλα τα $2 \leqslant k < n$. Αν $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ο $(n-k)$-*διάστατος σφαιρικός μετασχηματισμός Radon* $R_{n-k} : C(S^{n-1}) \to C(G_{n,n-k})$ είναι ο γραμμικός τελεστής που ορίζεται από την

$$R_{n-k} g(E) = \int_{S^{n-1} \cap E} g(\theta) \, d\theta, \qquad \forall \, g \in C(S^{n-1}), \; E \in G_{n,n-k}. \tag{6.3.14}$$

Λέμε ότι ένα συμμετρικό αστρόμορφο σώμα D στον $\mathbb{R}^n$ είναι *γενικευμένο* k-*σώμα τομών*, και γράφουμε $D \in \mathcal{BP}_k^n$, αν υπάρχει πεπερασμένο μη αρνητικό μέτρο Borel μ_D στην $G_{n,n-k}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $g \in C(S^{n-1})$,

$$\int_{S^{n-1}} \rho_D^k(\theta) g(\theta) \, d\theta = \int_{G_{n,n-k}} R_{n-k} g(H) \, d\mu_D(H). \tag{6.3.15}$$

Η κλάση $\mathcal{BP}_1^n = \mathcal{I}_n$ είναι η κλάση των σωμάτων τομών. Η κλάση $\mathcal{I}_n$ είναι η κλειστή θήκη, ως προς την ακτινική μετρική, των ακτινικών αθροισμάτων ελλειψοειδών (βλέπε [47]).

Για κάθε αστρόμορφο σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ορίζουμε

$$d_{\rm ovr}(K, \mathcal{BP}_k^n) = \inf \left\{ \left(\frac{|D|}{|K|} \right)^{1/n} : \; K \subset D, \; D \in \mathcal{BP}_k^n \right\}$$

την *απόσταση εξωτερικού λόγου όγκων* του K από την κλάση $\mathcal{BP}_k^n$. Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με το μετασχηματισμό Radon και τα σώματα τομών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο [57].

Κεφάλαιο 7

Περιορισμένες ανισότητες τύπου Loomis-Whitney και Meyer

7.1 Περιορισμένες ανισότητες Loomis-Whitney

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2, θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος (6.1.4) των Bollobás και Thomason σε συνδυασμό με την ακόλουθη κλασσική ανισότητα του Berwald [18].

Λήμμα 7.1.1 (Berwald). *Έστω* A *ένα κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^m$ *και έστω* $\phi : A \to \mathbb{R}^+$ *μια κοίλη συνάρτηση. Τότε, για κάθε* $0 < p < q$,

$$\left[\binom{m+q}{m}\frac{1}{|A|}\int_A |\phi(x)|^q dx\right]^{1/q} \leqslant \left[\binom{m+p}{m}\frac{1}{|A|}\int_A |\phi(x)|^p dx\right]^{1/p}.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2. Έστω $r > s \geqslant 1$, έστω $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο καλυμμα του σ. Παρατηρήστε ότι αν $|\sigma_i| = d_i$ τότε

$$ds = d_1 + \cdots + d_r.$$

Για κάθε $y \in P_{E_\sigma}(K)$ ορίζουμε τα σύνολα

$$K_i(y) = \left\{t \in F_{\sigma\setminus\sigma_i} : y + t \in P_{E_{\sigma_i}}(K)\right\}$$

και

$$K(y) = \{t \in F_\sigma : y + t \in K\}.$$

Τότε, το $K_i(y)$ είναι η ορθογώνια προβολή του $K(y)$ στον $F_{\sigma\setminus\sigma_i}$. Αφού το $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ είναι s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ, βλέπουμε ότι το $(\sigma\setminus\sigma_1, \dots, \sigma\setminus\sigma_r)$ είναι $(r-s)$-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Από την (6.1.4) έπεται ότι

$$|K(y)|^{r-s} \leqslant \prod_{i=1}^r |K_i(y)|$$

για κάθε $y \in P_{E_\sigma}(K)$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι

$$\prod_{i=1}^{r} |P_{E_{\sigma_i}}(K)| = \prod_{i=1}^{r} \int_{P_{E_\sigma}(K)} |K_i(y)| dy \geqslant \left(\int_{P_{E_\sigma}(K)} (|K_1(y)| \cdots |K_r(y)|)^{1/r} dy \right)^r \geqslant \left(\int_{P_{E_\sigma}(K)} |K(y)|^{\frac{r-s}{r}} dy \right)^r . \tag{7.1.1}$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski, η συνάρτηση $\phi : P_{E_\sigma}(K) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την $\phi(y) = |K(y)|^{1/d}$ είναι κοίλη, και

$$|K(y)|^{\frac{r-s}{r}} = \phi(y)^{\frac{(r-s)d}{r}} = \phi(y)^{d - \frac{d_1 + \cdots + d_r}{r}}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_{P_{E_\sigma}(K)} \phi(y)^d \, dy = \int_{P_{E_\sigma}(K)} |K(y)| \, dy = |K|.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.1.1 με $A = P_{E_\sigma}(K)$, $m = n - d$, $p = \frac{(r-s)d}{r}$ και $q = d$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\left[\binom{n - d + \frac{(r-s)d}{r}}{n-d} \frac{1}{|P_{E_\sigma}(K)|} \int_{P_{E_\sigma}(K)} |K(y)|^{\frac{r-s}{r}} dy \right]^r \\ &= \left[\binom{n - \frac{sd}{r}}{n-d} \frac{1}{|P_{E_\sigma}(K)|} \int_{P_{E_\sigma}(K)} \phi(y)^{\frac{(r-s)d}{r}} dy \right]^r \\ &\geqslant \left[\binom{n}{d} \frac{1}{|P_{E_\sigma}(K)|} \int_{P_{E_\sigma}(K)} \phi(y)^d \, dy \right]^{r-s} \\ &= \left[\binom{n}{d} \frac{1}{|P_{E_\sigma}(K)|} |K| \right]^{r-s} . \end{aligned} \tag{7.1.2}$$

Έπεται ότι

$$\left(\int_{P_{E_\sigma}(K)} |K(y)|^{\frac{r-s}{r}} dy \right)^r \geqslant \binom{n}{d}^{r-s} \binom{n - \frac{sd}{r}}{n-d}^{-r} |P_{E_\sigma}(K)|^s \, |K|^{r-s},$$

και το συμπέρασμα προκύπτει από την (7.1.1). ■

Παρατήρηση 7.1.2. Αν υποθέσουμε ότι τα σύνολα $\sigma_1, \ldots, \sigma_r$ έχουν τον ίδιο πληθάριθμο k, τότε $k = \frac{sd}{r}$ και το αποτέλεσμα παίρνει τη μορφή

$$\prod_{i=1}^{r} |P_{E_{\sigma_i}}(K)| \geqslant \binom{n}{d}^{r-s} \binom{n-k}{n-d}^{-r} |P_{E_\sigma}(K)|^s \, |K|^{r-s}.$$

Για να πάρουμε καλύτερη εικόνα για το είδος των εκτιμήσεων που προκύπτουν, ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση δύο ορθογώνιων υποχώρων συντεταγμένων $F_1, F_2 \in G_{n,k}$, όπου $k < n/2$. Τότε, $r = 2$, $s = 1$ και $d = 2k$. Συνεπώς,

$$\gamma(n, 2k, 1, 2) = \binom{n}{2k} \binom{n-k}{k}^{-2} \geqslant c_1^k$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$. Άρα, παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 7.1.3. *Έστω* $k < n/2$ *και* $F_1, F_2 \in G_{n,k}$ *δύο ορθογώνιοι υπόχωροι συντεταγμένων. Για κάθε κυρτό σώμα* K *στον* $\mathbb{R}^n$ *έχουμε*

$$|P_{F_1^\perp \cap F_2^\perp}(K)|\,|K| \leqslant c^k |P_{F_1^\perp}(K)||P_{F_2^\perp}(K)|,$$

όπου $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

7.2 Περιορισμένες δυϊκές ανισότητες Loomis-Whitney

Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Υπενθυμίζουμε ότι, για κάθε $p \geqslant 1$, το L_p-κεντροειδές σώμα $Z_p(K)$ του K είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_p(K)}(y) = \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L^p(K)} = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^p dx\right)^{1/p}.$$

Τα L_p-κεντροειδή σώματα ενός κυρτού σώματος εισήχθησαν από τους Lutwak και Zhang. Η συστηματική μελέτη τους από τη σκοπιά της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας ξεκίνησε με τις εργασίες του Παούρη [75] και [76]. Ειδικότερα, η ανισότητα (7.2.2) η οποία εμφανίζεται παρακάτω και παίζει ουσιαστικό ρόλο στο επιχείρημά μας προέρχεται από το [76]. Θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες βασικές ιδιότητες της οικογένειας $\{Z_p(K)\}_{p\geqslant 1}$. Για τις αποδείξεις παραπέμπουμε στο [26, Κεφάλαιο 5].

Λήμμα 7.2.1 (L_p-κεντροειδή σώματα). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές* $c_i > 0$ *τέτοιες ώστε, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα* K *όγκου 1 στον* $\mathbb{R}^n$*, για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n-1$, $q > p \geqslant 1$ *και* $F \in G_{n,k}$*, έχουμε*

$$Z_q(K) \subseteq \frac{c_1 q}{p} Z_p(K) \tag{7.2.1}$$

και

$$c_2 \leqslant |K \cap F^\perp|^{\frac{1}{k}} |P_F(Z_k(K))|^{\frac{1}{k}} \leqslant c_3. \tag{7.2.2}$$

Επιπλέον, αν $p \geqslant n$ *τότε*

$$Z_p(K) \supseteq c_4 Z_\infty(K),$$

όπου $Z_\infty(K) = \mathrm{conv}\{K, -K\}$.

Εκτός από τις (7.2.1) και (7.2.2) θα χρειαστούμε το εξής: Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $p \geqslant 1$ και κάθε $u \in S^{n-1}$,

$$c_5 h_{Z_p(K)}(u) \leqslant \frac{1}{|K \cap u^\perp|} \leqslant c_6 p h_{Z_p(K)}(u), \tag{7.2.3}$$

όπου $c_5, c_6 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Αρχίζουμε με την απόδειξη της (6.1.5). Αυτή είναι μια ειδική περίπτωση της γενικής ανισότητας του Θεωρήματος 6.1.3, η οποία περιγράφει τις βασικές ιδέες πίσω από την απόδειξή της.

Θεώρημα 7.2.2. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω u, v ορθογώνια μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $E_{uv} = [\mathrm{span}\{u, v\}]^{\perp}$ τότε*

$$|K \cap u^{\perp}|\,|K \cap v^{\perp}| \leqslant c|K \cap E_{uv}|\,|K|,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερα.

Απόδειξη. Η ανισότητα είναι ομογενής, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|K| = 1$. Χρησιμοποιώντας την (7.2.2) με $F = E_{uv}^{\perp} = \mathrm{span}\{u, v\}$ βλέπουμε ότι

$$|K \cap E_{uv}| \geqslant \frac{c_7}{|P_F(Z_2(K))|}.$$

Από την (7.2.3) έχουμε

$$|K \cap u^{\perp}|\,|K \cap v^{\perp}| \leqslant c_8\,[h_{Z_1(K)}(u)h_{Z_1(K)}(v)]^{-1}.$$

Από την (7.2.1) έχουμε επίσης

$$h_{Z_1(K)}(u) \geqslant c_{10}h_{Z_2(K)}(u) = c_{10}h_{P_F(Z_2(K))}(u)$$

και

$$h_{Z_1(K)}(v) \geqslant c_{10}h_{Z_2(K)}(v) = c_{10}h_{P_F(Z_2(K))}(v),$$

όπου οι δύο ισότητες ισχύουν διότι $u, v \in F$. Αν θεωρήσουμε το διδιάστατο συμμετρικό ελλειψοειδές $C = P_F(Z_2(K))$ είναι φανερό (από την ανισότητα Loomis-Whitney στο επίπεδο) ότι

$$|C| \leqslant 4h_C(u)h_C(v),$$

και αυτό δείχνει ότι

$$\begin{aligned} c_7|K \cap E_{uv}|^{-1} &\leqslant |P_F(Z_2(K))| \leqslant 4h_{P_F(Z_2(K))}(u)h_{P_F(Z_2(K))}(v) \\ &\leqslant 4c_{10}^{-2}h_{Z_1(K)}(u)h_{Z_1(K)}(v) \leqslant 4c_8c_{10}^{-2}\big(|K \cap u^{\perp}|\,|K \cap v^{\perp}|\big)^{-1}. \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. ∎

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.3. Έστω $r > s \geqslant 1$, έστω $\sigma \subseteq [n]$ με πληθικότητα $|\sigma| = d < n$ και έστω $(\sigma_1, \dots, \sigma_r)$ ένα s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ. Παρατηρήστε ότι αν $|\sigma_i| = d_i$ τότε $ds = d_1 + \cdots + d_r$.

Η ανισότητα είναι ομογενής, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|K| = 1$. Ξεκινώντας από την (7.2.2) μπορούμε να γράψουμε

$$c_2 \leqslant |K \cap E_{\sigma_i}|^{\frac{1}{d_i}}|P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K))|^{\frac{1}{d_i}} \leqslant c_3$$

για κάθε i, άρα,

$$\prod_{i=1}^{r}|K \cap E_{\sigma_i}| \leqslant c_3^{d_1+\cdots+d_r}\prod_{i=1}^{r}|P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K))|^{-1} = c_3^{ds}\prod_{i=1}^{r}|P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K))|^{-1},$$

οπότε χρειαζόμαστε κάτω φράγμα για το γινόμενο

$$\prod_{i=1}^{r}|P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K))|.$$

Από την (7.2.1) έχουμε

$$Z_d(K)\subseteq \frac{c_1d}{d_i}Z_{d_i}(K)$$

για κάθε $i=1,\dots,r$, η οποία δίνει

$$\prod_{i=1}^{r}|P_{F_{\sigma_i}}(Z_d(K))|\leqslant \prod_{i=1}^{r}\left(\frac{c_1d}{d_i}\right)^{d_i}\prod_{i=1}^{r}|P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K))|=\frac{(c_1d)^{ds}}{d_1^{d_1}\cdots d_r^{d_r}}\prod_{i=1}^{r}|P_{F_{\sigma_i}}(Z_{d_i}(K))|.$$

Τώρα, αφού το $(\sigma_1,\dots,\sigma_r)$ είναι s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ, εφαρμόζοντας την ανισότητα ομοιόμορφου καλύμματος των Bollobás και Thomason για το κυρτό σώμα $P_{F_\sigma}(Z_d(K))$ παίρνουμε

$$|P_{F_\sigma}(Z_d(K))|^s\leqslant \prod_{i=1}^{r}|P_{F_{\sigma_i}}(Z_d(K))|.$$

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας πάλι την (7.2.2), βλέπουμε ότι

$$|P_{F_\sigma}(Z_d(K))|^s\geqslant c_2^{ds}|K\cap E_\sigma|^{-s}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\prod_{i=1}^{r}|K\cap E_{\sigma_i}|\leqslant \frac{(c_1c_3d)^{ds}}{d_1^{d_1}\cdots d_r^{d_r}}|P_{F_\sigma}(Z_d(K))|^{-s}\leqslant \frac{(c_0d)^{ds}}{d_1^{d_1}\cdots d_r^{d_r}}|K\cap E_\sigma|^s,$$

όπου $c_0=c_1c_3/c_2$, και έπεται το αποτέλεσμα. □

Για να δώσουμε μια γεύση των εκτιμήσεων, ας θεωρήσουμε την περίπτωση δύο ορθογώνιων υποχώρων συντεταγμένων $F_1,F_2\in G_{n,k}$, όπου $k<n/2$. Τότε, $r=2$, $s=1$ και $d=2k$. Συνεπώς, παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 7.2.3. *Έστω $k<n/2$ και $F_1,F_2\in G_{n,k}$ δύο ορθογώνιοι υπόχωροι συντεταγμένων. Για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε*

$$|K\cap F_1^\perp|\,|K\cap F_2^\perp|\leqslant c^k|K\cap F_1^\perp\cap F_2^\perp|\,|K|,$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

7.3 Ανισότητες για μεικτούς όγκους

Σε αυτή την τελευταία παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 6.1.4 και συζητάμε την εικασία των Hug και Schneider στην περίπτωση $r=2$. Δίνουμε καταφατική απάντηση παρά έναν παράγοντα ίσο με 2, σε ένα γενικότερο πλαίσιο. Βασική πηγή των αποτελεσμάτων μας είναι το επόμενο λήμμα, το οποίο είναι σχεδόν άμεση συνέπεια ενός λήμματος από το [39] (παραλλαγή του οποίου είχε νωρίτερα αποδειχθεί στο [42]). Παρουσιάζουμε την ιδέα της απόδειξης για λόγους πληρότητας.

Λήμμα 7.3.1. *Έστω* $\mathcal{C} = (K_3, \dots, K_n)$ *μια* $(n-2)$*-άδα σωμάτων* $K_j \in \mathcal{K}_n$*. Αν* $A, B \in \mathcal{K}_n$*, συμβολίζουμε τον* $V(A, B, \mathcal{C})$ *με* $V(A, B)$*. Τότε, για κάθε* $A, B, C \in \mathcal{K}_n$ *έχουμε*

$$V(A, A)V(B, C) \leqslant 2V(A, B)V(A, C).$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel, για κάθε $t, s \geqslant 0$ έχουμε

$$V(B + tA, C + sA)^2 - V(B + tA, B + tA)V(C + sA, C + sA) \geqslant 0$$

και

$$V(sB + tC, A)^2 - V(sB + tC, sB + tC)V(A, A) \geqslant 0.$$

Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα των μεικτών όγκων, από την πρώτη ανισότητα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}(7.3.1)\qquad 0 \leqslant\ & g(t, s) + t^2 \left(V(C, A)^2 - V(A, A)V(C, C)\right) + s^2 \left(V(B, A)^2 - V(A, A)V(B, B)\right) \\ & + 2ts \left(V(B, C)V(A, A) - V(B, A)V(C, A)\right),\end{aligned}$$

όπου g είναι μια γραμμική συνάρτηση των t και s. Έπεται ότι ο τετραγωνικός όρος είναι μη-αρνητικός, άρα, είτε $V(B, C)V(A, A) > V(B, A)V(C, A)$ ή η διακρίνουσά του

$$(V(B, A)V(C, A) - V(B, C)V(A, A))^2 - [V(B, A)^2 - V(A, A)V(B, B)]\,[V(C, A)^2 - V(A, A)V(C, C)]$$

είναι μη-θετική. Δουλεύοντας όμοια με τη δεύτερη ανισότητα καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}(7.3.2)\qquad 0 \leqslant\ & t^2(V(C, A)^2 - V(A, A)V(C, C)) + s^2(V(B, A)^2 - V(A, A)V(B, B)) \\ & + 2ts(V(B, A)V(C, A) - V(B, C)V(A, A)).\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $V(B, C)V(A, A) > V(B, A)V(C, A)$ τότε η διακρίνουσα της δεύτερης τετραγωνικής μορφής (που είναι η ίδια με την προηγούμενη) είναι μη-θετική. Έπεται ότι, και στις δύο περιπτώσεις,

$$\begin{aligned}(7.3.3)\qquad & (V(B, A)V(C, A) - V(B, C)V(A, A))^2 \\ & \qquad \leqslant [V(B, A)^2 - V(A, A)V(B, B)]\,[V(C, A)^2 - V(A, A)V(C, C)] \\ & \qquad \leqslant V(B, A)^2 V(C, A)^2.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$|V(B, A)V(C, A) - V(B, C)V(A, A)| \leqslant V(B, A)V(C, A),$$

και το λήμμα έπεται άμεσα. ∎

Ξεκινάμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.4. Για κάθε $u \in S^{n-1}$ γράφουμε L_u για το ευθύγραμμο τμήμα $[0, u]$. Υπολογίζοντας τον όγκο του $K + tL_u$ βλέπουμε ότι

$$nV(K[n-1], L_u) = |P_E(K)|$$

για κάθε $K \in \mathcal{K}_n$, όπου $E = u^{\perp}$. Από τη γραμμικότητα των μεικτών όγκων έχουμε

$$nV(K_1, \dots, K_{n-1}, L_u) = V_E(P_E(K_1), \dots, P_E(K_{n-1})) \tag{7.3.4}$$

για κάθε $K_1, \dots, K_{n-1} \in \mathcal{K}_n$, όπου V_E είναι οι μεικτοί όγκοι στον E. Το ακόλουθο πιο γενικό αποτέλεσμα οφείλεται στον Fedotov (βλέπε [27]).

Λήμμα 7.3.2. *Έστω* $E \in G_{n,k}$ *και* $L_1, \dots, L_{n-k}$ *συμπαγή κυρτά υποσύνολα του* $E^{\perp}$. *Για κάθε* $K_1, \dots, K_k \in \mathcal{K}_n$,

$$\binom{n}{k} V(K_1, \dots, K_k, L_1, \dots, L_{n-k}) = V_E(P_E(K_1), \dots, P_E(K_k)) V_{E^{\perp}}(L_1, \dots, L_{n-k}),$$

όπου $V_E, V_{E^{\perp}}$ *είναι οι μεικτοί όγκοι στους* $E, E^{\perp}$ *αντίστοιχα.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.4. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 7.3.1 με $\mathcal{C} = (K, \dots, K)$, $A = K$, $B = L_u = [0, u]$ και $C = L_v = [0, v]$. Έχουμε

$$V(L_u, L_v) V(K, K) \leqslant 2V(K, L_u) V(K, L_v).$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.3.2 με $\mathcal{C} = (K, \dots, K)$, $L_1 = [0, u]$, $L_2 = [0, v]$ και $E = \mathrm{span}\{e_s : s \neq i, j\}$, και παρατηρώντας ότι $V_{E^{\perp}}(L_u, L_v) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \langle u, v\rangle^2}$, βλέπουμε ότι

$$V(L_u, L_v) = V(K, \dots, K, L_u, L_v) = \frac{1}{2}\sqrt{1 - \langle u, v\rangle^2}\binom{n}{2}^{-1} |P_{u,v}(K)|.$$

Παίρνοντας υπόψη την (7.3.4) και το γεγονός ότι $V(K, K) = |K|$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{1}{n(n-1)}\sqrt{1 - \langle u, v\rangle^2} |P_{u,v}(K)|\, |K| \leqslant \frac{2}{n^2} |P_u(K)|\, |P_v(K)|,$$

και έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 7.3.3. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.3.1 με $\mathcal{C} = (B_2^n, \dots, B_2^n)$, $A = B_2^n$, $B = K_1$ και $C = K_2$ βλέπουμε αμέσως ότι για κάθε ζεύγος κυρτών σωμάτων K_1, K_2 στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$V(B_2^n, B_2^n, \mathcal{C}) V(K_1, K_2, \mathcal{C}) \leqslant 2V(K_1, B_2^n, \mathcal{C}) V(K_2, B_2^n, \mathcal{C}),$$

ή ισοδύναμα,

$$|B_2^n|\, V(K_1, K_2, B_2^n[n-2]) \leqslant 2V(K, B_2^n[n-1]) V(K_2, B_2^n[n-1]). \tag{7.3.5}$$

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, αυτό επιβεβαιώνει την περίπτωση $r = 2$ μιας εικασίας των Hug και Schneider, με την απώλεια μιας σταθεράς ίσης με 2. Θυμηθείτε ότι

$$V(K_i, B_2^n[n-1]) = \omega_n \int_{S^{n-1}} h_{K_i}(u)\, d\sigma(u)$$

για $i = 1, 2$ και ότι (βλέπε, για παράδειγμα, [83])

$$V(K_1, K_2, B_2^n[n-2]) = \omega_n \int_{S^{n-1}} h_{K_1}(u) \left(h_{K_2}(u) + \frac{1}{n-1} \Delta_S h_{K_2}(u) \right) d\sigma(u)$$

όπου Δ_S είναι ο σφαιρικός τελεστής Laplace στην S^{n-1}, άρα η (7.3.5) έχει ως συνέπεια ότι για κάθε ζεύγος συναρτήσεων στήριξης ισχύει

$$\int_{S^{n-1}} h_{K_1}(u) \left(h_{K_2}(u) + \frac{1}{n-1} \Delta_S h_{K_2}(u) \right) d\sigma(u) \leqslant 2 \int_{S^{n-1}} h_{K_1}(u)\, d\sigma(u) \int_{S^{n-1}} h_{K_2}(u)\, d\sigma(u).$$

Παρατήρηση 7.3.4. Το επόμενο αποτέλεσμα των Soprunov και Zvavitch (βλέπε [84, Θεώρημα 5.7]) αναφέρθηκε στην εισαγωγή. Έστω A τυχόν κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $(K_1, \dots, K_r)$ τυχούσα r-άδα κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$|A|^{r-1} V(K_1, \dots, K_r, A[n-r]) \leqslant c_{n,r} \prod_{i=1}^{r} V(K_i, A[n-1]), \tag{7.3.6}$$

για κάποια σταθερά $c_{n,r} \leqslant n^r r^{r-1}$. Επιπλέον, αν τα $K_1, \dots, K_r$ είναι συμμετρικά τόε έχουμε την ίδια ανισότητα με σταθερά $c'_{n,r} \leqslant n^{r/2} r^{r-1}$. Εφαρμόζοντας την (6.1.8) με $\mathcal{C} = (A, \dots, A)$ και $B = K_1$, $C = K_2$ βλέπουμε αμέσως ότι αν $r = 2$ τότε παίρνουμε την (7.3.6) στη μορφή

$$|A|\, V(K_1, K_2, A[n-2]) \leqslant 2 \prod_{i=1}^{2} V(K_i, A[n-1]).$$

Αυτή είναι ακριβώς η διατύπωση του Θεωρήματος 6.1.5. Ένα απλό επαγωγικό επιχείρημα δείχνει ότι αν $r = 3$ τότε μπορούμε να πάρουμε την (7.3.6) στη μορφή

$$|A|^2\, V(K_1, K_2, K_3, A[n-3]) \leqslant 8 \prod_{i=1}^{3} V(K_i, A[n-1]).$$

Γενικότερα, για κάθε $r \geqslant 2$ υπάρχει $c_r > 0$ (που εξαρτάται μόνο από το r) τέτοια ώστε, για κάθε $n > r$ και κάθε r-άδα $(K_1, \dots, K_r)$ κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$,

$$|A|^{r-1} V(K_1, \dots, K_r, A[n-r]) \leqslant c_r \prod_{i=1}^{r} V(K_i, A[n-1]). \tag{7.3.7}$$

Με επαγωγή μπορεί κανείς να ελέγξει ότι η (7.3.7) ισχύει με $c_r \leqslant 2^{2^{r-1}-1}$.

Τέλος, αναφέρουμε ότι οι Soprunov και Zvavitch έχουν παρατηρήσει στο [84] ότι αν $A = \Delta$ είναι ένα n-διάστατο simplex τότε η (7.3.7) ισχύει με σταθερά 1, και κάνουν την εικασία ότι αν ένα κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την (7.3.7) με σταθερά 1 για κάθε r και όλα τα $K_1, \dots, K_r \in \mathcal{K}_n$ τότε το A πρέπει να είναι n-διάστατο simplex. Στο [82] αυτή η εικασία επαληθεύεται με την πρόσθετη υπόθεση ότι το A είναι πολύτοπο.

Κεφάλαιο 8

Ανισότητες για το συναρτησοειδές μέσης τομής

8.1 Φράγματα συναρτήσει της απόστασης λόγου όγκων από την κλάση των γενικευμένων $k-$οστών σωμάτων τομών

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το Θεώρημα 6.2.2 το οποίο ισχύει για τη μεγαλύτερη κλάση των συμμετρικών αστρόμορφων σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε άρτια συνεχή πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Επιλέγοντας κατάλληλα την πυκνότητα f παίρνουμε το Θεώρημα 6.2.3 και τη γενίκευσή του, το Θεώρημα 6.2.5.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.2. Έστω $\varepsilon > 0$. Έστω f μια μη αρνητική, άρτια και συνεχής συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $f(\rho_K(\theta)\theta) = g(\theta)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Για κάθε $E \in G_{n,n-k}$, έχουμε

$$\int_{(K\tilde{+}\varepsilon B_2^n)\cap E} f(x)dx - \int_{K\cap E} f(x)dx \leqslant \max_{F\in G_{n,n-k}} \left(\int_{(K\tilde{+}\varepsilon B_2^n)\cap F} f(x)dx - \int_{K\cap F} f(x)dx \right). \tag{8.1.1}$$

Παρατηρήστε ότι $\rho_{K\tilde{+}\varepsilon B_2^n} = \rho_K + \varepsilon$. Εκφράζοντας τα ολοκληρώματα σε πολικές συντεταγμένες παίρνουμε

$$R_{n-k}\left(\int_{\rho_K(\cdot)}^{\rho_K(\cdot)+\varepsilon} r^{n-k-1} f(r\cdot)dr \right)(E) \leqslant \max_{F\in G_{n,n-k}} \left(\int_{S^{n-1}\cap F} \int_{\rho_K(\theta)}^{\rho_K(\theta)+\varepsilon} r^{n-k-1} f(r\theta)drd\theta \right). \tag{8.1.2}$$

Θεωρούμε $D \in \mathcal{BP}_k^n$ τέτοιο ώστε $K \subset D$. Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα ως προς E πάνω στην $G_{n,n-k}$ εφοδιασμένη με το μέτρο μ_D που αντιστοιχεί στο D μέσω της (6.3.14), παίρνουμε

$$\begin{aligned} &\int_{S^{n-1}} \rho_D^k(\theta) \int_{\rho_K(\theta)}^{\rho_K(\theta)+\varepsilon} r^{n-k-1} f(r\theta)drd\theta \\ &\qquad \leqslant \mu_D(G_{n,n-k}) \cdot \max_{F\in G_{n,n-k}} \left(\int_{S^{n-1}\cap F} \int_{\rho_K(\theta)}^{\rho_K(\theta)+\varepsilon} r^{n-k-1} f(r\theta)drd\theta \right). \end{aligned} \tag{8.1.3}$$

Διαιρούμε τα δύο μέλη αυτής της ανισότητας με ε και στέλνουμε το ε στο μηδέν. Παρατηρήστε ότι μπορούμε να εναλλάξουμε το όριο με το maximum, διότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς F. Έτσι, παίρνουμε

(8.1.4)
$$\int_{S^{n-1}} \rho_D^k(\theta)\rho_K^{n-k-1}(\theta)f(\rho_K(\theta)\theta)d\theta \leqslant \mu_D(G_{n,n-k})\cdot \max_{F\in G_{n,n-k}}\left(\int_{S^{n-1}\cap F}\rho_K^{n-k-1}(\theta)f(\rho_K(\theta)\theta)d\theta\right).$$

Αφού $K\subset D$, το ολοκλήρωμα στο αριστερό μέλος φράσσεται από κάτω από

$$\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-1}(\theta)f(\rho_K(\theta)\theta)\ d\theta.$$

Για να εκτιμήσουμε το $\mu_D(G_{n,n-k})$ από πάνω, παρατηρούμε ότι έχουμε $1 = R_{n-k}\mathbf{1}(E)/|S^{n-k-1}|$ για κάθε $E\in G_{n,n-k}$, και εφαρμόζουμε την ανισότητα Hölder:

$$\begin{aligned}\mu_D(G_{n,n-k}) &= \frac{1}{|S^{n-k-1}|}\int_{G_{n,n-k}} R_{n-k}\mathbf{1}(E)d\mu_D(E)\\ &= \frac{1}{|S^{n-k-1}|}\int_{S^{n-1}}\|\theta\|_D^{-k}\ d\theta\\ &\leqslant \frac{1}{|S^{n-k-1}|}\left|S^{n-1}\right|^{\frac{n-k}{n}}\left(\int_{S^{n-1}}\|\theta\|_D^{-n}\ d\theta\right)^{\frac{k}{n}}\\ &= \frac{1}{|S^{n-k-1}|}\left|S^{n-1}\right|^{\frac{n-k}{n}}\ n^{\frac{k}{n}}|D|^{\frac{k}{n}}.\end{aligned} \tag{8.1.5}$$

Αυτές οι εκτιμήσεις δείχνουν ότι

$$\begin{aligned}&\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-1}(\theta)f(\rho_K(\theta)\theta)d\theta\\ &\qquad\leqslant \frac{1}{|S^{n-k-1}|}\left|S^{n-1}\right|^{\frac{n-k}{n}}\ n^{\frac{k}{n}}|D|^{\frac{k}{n}}\max_{F\in G_{n,n-k}}\left(\int_{S^{n-1}\cap F}\rho_K^{n-k-1}(\theta)f(\rho_K(\theta)\theta)d\theta\right).\end{aligned} \tag{8.1.6}$$

Τέλος, επιλέγουμε το D έτσι ώστε $|D|^{1/n}\leqslant (1+\delta)d_{\rm ovr}(K,\mathcal{BP}_k^n)|K|^{1/n}$, και στη συνέχεια στέλνουμε το δ στο μηδέν. □

Όλα τα υπόλοιπα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου είναι συνέπειες του Θεωρήματος 6.2.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.3. Πρώτα εκφράζουμε τα συναρτησοειδή μέσης τομής $as(K)$ και $as(K\cap E)$ συναρτήσει της ακτινικής συνάρτησης του K. Χρησιμοποιώντας την (6.3.2) γράφουμε

$$\begin{aligned}as(K) &= \int_{S^{n-1}}|K\cap\xi^\perp|\,d\sigma(\xi) = \omega_{n-1}\int_{S^{n-1}}\int_{S(\xi^\perp)}\rho_K^{n-1}(\theta)\,d\sigma_\xi(\theta)\,d\sigma(\xi)\\ &= \omega_{n-1}\int_{S^{n-1}}\rho_K^{n-1}(\theta)\,d\sigma(\theta).\end{aligned} \tag{8.1.7}$$

Όμοια, για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ και κάθε $E\in G_{n,n-k}$, έχουμε

$$as(K\cap E) = \omega_{n-k-1}\int_{S_E}\rho_K^{n-k-1}(\theta)\,d\sigma_E(\theta), \tag{8.1.8}$$

όπου σ_E είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην $S_E = S^{n-1} \cap E$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 6.2.2 για την πυκνότητα $g \equiv \mathbf{1}$, παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-1}(\theta)\, d\theta \leqslant c_{n,k}^k\, d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n)\, |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in G_{n,n-k}} \int_{S^{n-1} \cap E} \rho_K^{n-k-1}(\theta)\, d\theta. \tag{8.1.9}$$

Τώρα, το Θεώρημα 6.2.3 έπεται από τις (8.1.7) και (8.1.8) με κατάλληλη προσαρμογή των σταθερών. □

Παρατήρηση 8.1.1. Για κάποιες κλάσεις συμμετρικών κυρτών σωμάτων είναι γνωστό ότι η απόσταση $d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n)$ είναι φραγμένη από απόλυτη σταθερά.

Σε αυτές τις κλάσεις συμπεριλαμβάνονται τα unconditional κυρτά σώματα, τα πολικά των σωμάτων με φραγμένο λόγο όγκων (βλέπε [59]) καθώς και οι μοναδιαίες μπάλες χώρων με νόρμα που εμφυτεύονται στους χώρους L_p, $-n < p < \infty$ (βλέπε [60], [73] και [61]). Περιορίζοντας το Πρόβλημα 6.2.1 σε οποιαδήποτε από αυτές τις κλάσεις, παίρνουμε καταφατική απάντηση γι' αυτό από το Θεώρημα 6.2.3.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.4. Συνδυάζουμε το Θεώρημα 6.2.2 με το ακόλουθο αποτέλεσμα από το [62]: Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$d_{\mathrm{ovr}}(K, \mathcal{BP}_k^n) \leqslant c\, \sqrt{n/k}\, [\log(en/k)]^{\frac{3}{2}}, \tag{8.1.10}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.5. Επιλέγοντας $g(\theta) = \rho_K^{-r+1}(\theta)$ στο Θεώρημα 6.2.2 παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-r}(\theta)\, d\theta \leqslant c_{n,k}^k\, d_{\mathrm{ovr}}^k(K, \mathcal{BP}_k^n)\, |K|^{\frac{k}{n}} \max_{E \in G_{n,n-k}} \int_{S^{n-1} \cap E} \rho_K^{n-k-r}(\theta)\, d\theta. \tag{8.1.11}$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον τύπο

$$as_r(K) = \omega_{n-r} \int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-r}(\theta) d\sigma(\theta) \tag{8.1.12}$$

που γενικεύει την (8.1.7) και επαληθεύεται εύκολα με τον ίδιο τρόπο. □

8.2 Φράγματα συναρτήσει της ισοτροπικής σταθεράς

Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτή την παράγραφο συγκρίνουμε την $as(K)$ με το αντίστοιχο συναρτησοειδές μέσης τομής $as(K \cap E)$ για κάθε υπόχωρο E του $\mathbb{R}^n$ συνδιάστασης k. Το βασικό μας εργαλείο θα είναι ένα από τα αποτελέσματα του προηγούμενου κεφαλαίου (από το [B-3]) το οποίο δίνει μια «περιορισμένη έκδοση» της δυϊκής ανισότητας Loomis-Whitney του Meyer

$$|K|^{n-1} \geqslant \frac{n!}{n^n} \prod_{i=1}^{n} |K \cap e_i^{\perp}|, \tag{8.2.1}$$

όπου $\{e_1,\dots,e_n\}$ είναι τυχούσα ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ (βλέπε [72]). Με μια έννοια, αυτό το αποτέλεσμα είναι δυϊκό της «ανισότητας ομοιόμορφου καλύμματος» των Bollobás και Thomason (βλέπε [20]). Υπενθυμίζουμε πρώτα τον απαραίτητο συμβολισμό. Για κάθε μη-κενό $\tau\subset[n]:=\{1,\dots,n\}$ θέτουμε $F_\tau=\mathrm{span}\{e_j: j\in\tau\}$ και $E_\tau=F_\tau^\perp$. Για κάθε $s\geqslant 1$ και $\sigma\subseteq[n]$, ακολουθώντας την ορολογία του [20], λέμε ότι τα (όχι αναγκαστικά διακεκριμένα) σύνολα $\sigma_1,\dots,\sigma_t\subseteq\sigma$ σχηματίζουν s-ομοιόμορφο κάλυμμα του σ αν κάθε $j\in\sigma$ ανήκει σε ακριβώς s από τα σ_i. Το [B-3, Θεώρημα 1.3] ισχυρίζεται ότι για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $t\geqslant 1$, για κάθε υποσύννολο σ του $[n]$ και για κάθε s-ομοιόμορφο κάλυμμα $(\sigma_1,\dots,\sigma_t)$ του σ, έχουμε

$$\prod_{i=1}^{t}|K\cap E_{\sigma_i}|\leqslant\left(\frac{c_0t}{s}\right)^{ds}|K\cap E_\sigma|^s|K|^{t-s}, \tag{8.2.2}$$

όπου $d=|\sigma|$. Θα χρειαστούμε μόνο μια ειδική περίπτωση αυτής της ανισότητας. Θεωρούμε $1\leqslant k\leqslant n-1$ και $(k+1)$ ορθοκανονικά διανύσματα $e_1,\dots,e_k,e_{k+1}:=\xi$ στον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι τα σύνολα $\sigma_1=[k]$ και $\sigma_2=\{k+1\}$ σχηματίζουν ένα 1-ομοιόμορφο κάλυμμα του συνόλου $\sigma=[k+1]$. Εφαρμόζοντας την (8.2.2) με $t=2$, $s=1$ και $d=k+1$ παίρνουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 8.2.1. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$, για κάθε $E\in G_{n,n-k}$ και κάθε $\xi\in S^{n-1}\cap E$ έχουμε*

$$|K\cap E|\cdot|K\cap\xi^\perp|\leqslant c_0^{k+1}|K\cap E\cap\xi^\perp|\cdot|K|, \tag{8.2.3}$$

όπου $c_0>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 8.2.1 μπορούμε να συγκρίνουμε την $\mathrm{as}(K)$ με την $\mathrm{as}(K\cap E)$ για κάθε $E\in G_{n,n-k}$. Χρειαζόμαστε τις ακόλουθες πολύ γνωστές ιδιότητες της παραμέτρου M, η οποία ορίστηκε στην (6.3.7). Αν D είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^m$, τότε για κάθε $1\leqslant s\leqslant m-1$ και $F\in \mathrm{Gr}_s(\mathbb{R}^m)$ έχουμε

$$M(D\cap F)=\int_{S_F}\|\xi\|_D\,d\sigma_F(\xi)\leqslant c_1\sqrt{m/s}\int_{S^{m-1}}\|\xi\|_D\,d\sigma(\xi)=c_1\sqrt{m/s}\,M(D), \tag{8.2.4}$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Είναι επίσης γνωστό ότι

$$\int_{S^{m-1}}\rho_D(\theta)\,d\sigma(\theta)=\int_{S^{m-1}}\|\theta\|_D^{-1}\,d\sigma(\theta)\simeq\frac{1}{M(D)}. \tag{8.2.5}$$

Για μια απόδειξη των (8.2.4) και (8.2.5) βλέπε [3, Παράγραφος 5.2.1] και [3, Θεώρημα 5.8.7] αντίστοιχα.

Θεώρημα 8.2.2. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ και $E\in G_{n,n-k}$ έχουμε*

$$|K\cap E|\cdot\mathrm{as}(K)\leqslant c_2^k\,\mathrm{as}(K\cap E)\cdot|K|, \tag{8.2.6}$$

όπου $c_2>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1,\dots,e_k\}$ του $E^{\perp}$ και τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα $\xi \in E$. Από το Λήμμα 8.2.1 έχουμε

$$|K\cap E|\cdot|K\cap \xi^{\perp}| \leqslant c_0^{k+1}|K\cap E\cap \xi^{\perp}|\cdot|K|. \tag{8.2.7}$$

Ολοκληρώνοντας την (8.2.7) ως προς $\xi \in S_E$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}|K\cap E|\cdot\int_{S_E}|K\cap\xi^{\perp}|d\sigma_E(\xi) &\leqslant c_0^{k+1}\int_{S_E}|(K\cap E)\cap\xi^{\perp}|d\sigma_E(\xi)\cdot|K|\\ &= c_0^{k+1}\,\mathrm{as}(K\cap E)\cdot|K|.\end{aligned}\tag{8.2.8}$$

Εφαρμόζοντας την (8.2.5) για το συμμετρικό κυρτό σώμα $IK\cap E$ παίρνουμε

$$\int_{S_E}|K\cap\xi^{\perp}|d\sigma_E(\xi) = \int_{S_E}\rho_{IK}(\xi)\,d\sigma_E(\xi) \simeq \frac{1}{M(IK\cap E)}, \tag{8.2.9}$$

άρα, χρησιμοποιώντας την (8.2.4) με $m = n$ και $s = n-k$ και εφαρμόζοντας την (8.2.5) για το σώμα IK αυτή τη φορά, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{S_E}|K\cap\xi^{\perp}|d\sigma_E(\xi) &\geqslant \frac{c\sqrt{n-k}}{\sqrt{n}}\frac{1}{M(IK)} \simeq \frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{n}}\int_{S^{n-1}}\rho_{IK}(\xi)\,d\sigma(\xi)\\ &= \frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{n}}\int_{S^{n-1}}|K\cap\xi^{\perp}|\,d\sigma(\xi) = \frac{\sqrt{n-k}}{\sqrt{n}}\mathrm{as}(K).\end{aligned}\tag{8.2.10}$$

Συνεπώς,

$$|K\cap E|\,\mathrm{as}(K) \leqslant \frac{c_1\sqrt{n}}{\sqrt{n-k}}c_0^{k+1}\,\mathrm{as}(K\cap E)\cdot|K| \leqslant c_2^k\,\mathrm{as}(K\cap E)\cdot|K| \tag{8.2.11}$$

για κάθε $E \in G_{n,n-k}$. ∎

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.6 χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 8.2.2 και εκτιμήσεις για τα δυϊκά affine quermassintegrals ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος K. Αυτά ορίζονται, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, ως εξής:

$$\mathfrak{R}_k(K) := \frac{1}{|K|^{n-k}}\int_{G_{n,n-k}}|K\cap E|^n\,d\nu_{n,n-k}(E). \tag{8.2.12}$$

Οι ποσότητες $\mathfrak{R}_k(K)$ εισήχθησαν από τον Lutwak στα [66] και [67]. Ακριβέστερα, θεώρησε τις ποσότητες $\Phi_k(K)$ οι οποίες ορίστηκαν στην (6.2.16), και προφανώς ικανοποιούν την ταυτότητα

$$\Phi_k(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-k}}|K|^{\frac{n-k}{n}}\left[\mathfrak{R}_k(K)\right]^{\frac{1}{n}}. \tag{8.2.13}$$

Ο Grinberg απέδειξε στο [49] ότι η ποσότητα $\mathfrak{R}_k(K)$ είναι αναλλοίωτη ως προς $T \in GL(n)$: έχουμε

$$\mathfrak{R}_k(T(K)) = \mathfrak{R}_k(K) \tag{8.2.14}$$

για κάθε $T \in GL(n)$. Απέδειξε επίσης ότι

$$\mathcal{R}_k(K) \leqslant \mathcal{R}_k(B_2^n) := \frac{\omega_{n-k}^n}{\omega_n^{n-k}} \leqslant e^{\frac{kn}{2}}. \tag{8.2.15}$$

Από την άλλη πλευρά, οι Δαφνής και Παούρης παρατήρησαν στο [30] ότι

$$\mathcal{R}_k(K) \geqslant \left(\frac{c_4}{L_K}\right)^{kn}, \tag{8.2.16}$$

όπου $c_4 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερα. Μάλιστα, στην περίπτωση $k = 1$, τα δύο μέλη της (8.2.16) είναι ισοδύναμα. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτό το κάτω φράγμα, το οποίο είναι άμεση συνέπεια της (8.2.14) και του γεγονότος ότι αν το K είναι ισοτροπικό τότε $|K \cap E|^{\frac{1}{k}} \geqslant \frac{c_4}{L_K}$ για κάθε $E \in G_{n,n-k}$ (βλέπε [26, Πρόταση 5.1.15] για μια απόδειξη).

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.6. Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Από το Θεώρημα 8.2.2 γνωρίζουμε ότι για κάθε $E \in G_{n,n-k}$ ισχύει

$$|K \cap E| \cdot \mathrm{as}(K) \leqslant c_2^k\, \mathrm{as}(K \cap E) \cdot |K|, \tag{8.2.17}$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεπώς,

$$\max_{E \in G_{n,n-k}} |K \cap E| \cdot \mathrm{as}(K) \leqslant c_2^k \max_{E \in G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K \cap E) \cdot |K|. \tag{8.2.18}$$

Τώρα, από την (8.2.14) βλέπουμε ότι

$$\max_{E \in G_{n,n-k}} |K \cap E| \geqslant \left(\int_{G_{n,n-k}} |K \cap E|^n \, d\nu_{n,n-k}(E)\right)^{\frac{1}{n}} \geqslant \left(\frac{c_4}{L_K}\right)^k |K|^{\frac{n-k}{n}}. \tag{8.2.19}$$

Επιστρέφοντας στην (8.2.18) έχουμε

$$\left(\frac{c_4}{L_K}\right)^k |K|^{\frac{n-k}{n}} \mathrm{as}(K) \leqslant c_2^k |K| \max_{E \in G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K \cap E), \tag{8.2.20}$$

και αυτό αποδεικνύει το Θεώρημα 6.2.6. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν το K είναι ισοτροπικό και θεωρήσουμε την περίπτωση των υπερεπιπέδων ($k = 1$), τότε η εκτίμηση του Θεωρήματος 6.2.6 είναι ακριβής: έχουμε έναν ασυμπτωτικό τύπο.

Πρόταση 8.2.3. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $\mathrm{as}(K) \simeq L_K^{-1}$ και $\mathrm{as}(K \cap \xi^\perp) \simeq L_K^{-2}$ για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Ειδικότερα,*

$$\mathrm{as}(K) \simeq L_K\, |K|^{\frac{1}{n}} \max_{\xi \in S^{n-1}} \mathrm{as}(K \cap \xi^\perp). \tag{8.2.21}$$

Απόδειξη. Είναι γενικά γνωστό (προκύπτει από την [26, Πρόταση 5.1.15]) ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα τότε για κάθε $E \in G_{n,n-k}$ ισχύει

$$\frac{c_1}{L_K} \leqslant |K \cap E|^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{cL_k}{L_K} \leqslant \frac{c_2(k)}{L_K}, \tag{8.2.22}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $c_2(k)$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το k (μάλιστα, $c_2(k) \leqslant c\sqrt[4]{k}$ από το άνω φράγμα του Klartag για την L_k). Εφαρμόζοντας την (8.2.22) με $k = 1$ βλέπουμε ότι όλες οι τομές $K \cap \xi^{\perp}$ του K με υποχώρους συνδιάστασης 1 έχουν όγκο ίσο (αν εξαιρέσουμε μια απόλυτη σταθερά) με L_K^{-1}. Ειδικότερα,

$$\mathrm{as}(K) = \int_{S^{n-1}} |K \cap \xi^{\perp}|\, d\sigma(\xi) \simeq L_K^{-1}. \tag{8.2.23}$$

Εφαρμόζοντας την (8.2.22) με $k = 2$ βλέπουμε ότι όλες οι τομές $K \cap E$ του K συνδιάστασης 2 έχουν όγκο ίσο (αν εξαιρέσουμε μια απόλυτη σταθερά) με L_K^{-2}. Ειδικότερα, για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ παίρνουμε

$$\mathrm{as}(K \cap \xi^{\perp}) = \int_{S(\xi^{\perp})} |K \cap E_{\xi,\theta}|\, d\sigma_{\xi}(\theta) \simeq L_K^{-2}, \tag{8.2.24}$$

όπου $E_{\xi,\theta} = [\mathrm{span}\{\xi, \theta\}]^{\perp}$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\mathrm{as}(K) \simeq L_K\, \mathrm{as}(K \cap \xi^{\perp}) = L_K\, \mathrm{as}(K \cap \xi^{\perp})\, |K|^{\frac{1}{n}} \tag{8.2.25}$$

Ειδικότερα, από την (8.2.25) έπεται η (8.2.21). ∎

Παρατήρηση 8.2.4. Η Πρόταση 8.2.3 και ο ορισμός της σταθεράς $\gamma_{n,1}$ δείχνουν ότι

$$L_K^{-1} \simeq \mathrm{as}(K) \leqslant \gamma_{n,1} \max_{\xi \in S^{n-1}} \mathrm{as}(K \cap \xi^{\perp}) \simeq \gamma_{n,1} L_K^{-2} \tag{8.2.26}$$

για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Συνεπώς, $L_K \leqslant c\gamma_{n,1}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, το οποίο δείχνει ότι

$$L_n \leqslant c\gamma_{n,1}. \tag{8.2.27}$$

Παρατηρήστε ότι από το Θεώρημα 6.2.6 μπορούμε τότε να συμπεράνουμε ότι $\gamma_{n,k} \leqslant cL_n \leqslant c\gamma_{n,1}$. Τέλος, το Θεώρημα 6.2.6 δείχνει ότι $\gamma_{n,1} \leqslant c' L_n$. Συνοψίζουμε τις παρατηρήσεις μας στην επόμενη πρόταση.

Πρόταση 8.2.5. *Για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n-1$ *ισχύει*

$$\gamma_{n,k} \lesssim \gamma_{n,1} \simeq L_n. \tag{8.2.28}$$

Η Πρόταση 8.2.5 δείχνει ότι καταφατική απάντηση στο Ερώτημα 6.2.1 (και μάλιστα μόνο στην περίπτωση $k = 1$) είναι ισοδύναμη με την ύπαρξη ομοιόμορφου φράγματος για τις ισοτροπικές σταθερές όλων των κυρτών σωμάτων σε όλες τις διαστάσεις (αυτή είναι ακριβώς η εικασία του υπερεπιπέδου). Δείχνει επίσης ότι το πρόβλημα γίνεται «ευκολότερο» καθώς η συνδιάσταση k αυξάνει, με την έννοια ότι $\gamma_{n,k} \lesssim \gamma_{n,1}$. Μάλιστα, μπορούμε να δείξουμε ότι αν το k είναι ανάλογο του n, τότε η $\gamma_{n,k}$ είναι φραγμένη (αυτό είναι ακριβώς το περιεχόμενο του Θεωρήματος 6.2.7):

Θεώρημα 8.2.6. *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε*

$$\gamma_{n,k} \leqslant c\,\sqrt{n/k}\,[\log(en/k)]^{\frac{3}{2}}, \tag{8.2.29}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.6 χρησιμοποιώντας την ακόλουθη εκτίμηση από το [30, Θεώρημα 1.3]

$$\mathcal{R}_k(K) \geqslant \left(\frac{c_5}{\sqrt{n/k}\,[\log(en/k)]^{\frac{3}{2}}}\right)^{kn} \tag{8.2.30}$$

αντί για την (8.2.16). ∎

Παρατήρηση 8.2.7. Έστω $\alpha_{n,k}$ η μεγαλύτερη σταθερά $\alpha > 0$ με την ιδιότητα ότι $\mathcal{R}_k(K) \geqslant \alpha^{kn}$ για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Επαναλαμβάνοντας την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.6 ή του Θεωρήματος 8.2.6 βλέπουμε ότι

$$\gamma_{n,k} \leqslant \frac{c_1}{\alpha_{n,k}}, \tag{8.2.31}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\gamma_{n,k} \lesssim \gamma_{n,1} \simeq L_n \lesssim \alpha_{n,1}^{-1}. \tag{8.2.32}$$

Από την άλλη πλευρά, η (8.2.16) δείχνει ότι $\alpha_{n,k} \geqslant c/L_n$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, άρα $\alpha_{n,1}^{-1} \lesssim L_n$. Συνεπώς,

$$\gamma_{n,1} \simeq L_n \simeq \alpha_{n,1}^{-1}. \tag{8.2.33}$$

Με άλλα λόγια, το ερώτημα αν

$$\mathcal{R}_k(K) \geqslant c^{kn} \tag{8.2.34}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ το οποίο μελετάται στο [30] (βλέπε επίσης [41, Παράγραφος 9.4]) είναι ισοδύναμο με την εικασία του υπερεπιπέδου και με το Ερώτημα 6.2.1.

8.3 Αντίστροφες ανισότητες στις κλασσικές θέσεις

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε εκτιμήσεις για τη μέση τιμή του συναρτησοειδούς μέσης τομής του K. Ξεκινάμε εκφράζοντας την $\mathrm{as}(K)$ συναρτήσει των δυϊκών μεικτών όγκων. Παρατηρήστε ότι από την (8.1.7) έχουμε

$$\mathrm{as}(K) = \omega_{n-1}\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-1}(\theta)\,d\sigma(\theta) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\tilde{V}(K,\dots,K,B_2^n), \tag{8.3.1}$$

και χρησιμοποιώντας την (8.1.8) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E)\,d\nu_{n,n-k}(E) &= \omega_{n-k-1}\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-k-1}(\theta)\,d\sigma(\theta)\\ &= \frac{\omega_{n-k-1}}{\omega_n}\tilde{V}(K\,[n-k-1], B_2^n\,[k+1]),\end{aligned} \tag{8.3.2}$$

όπου με $A\,[s]$ συμβολίζουμε την ακολουθία $A,\dots,A$ μήκους s.

Θεώρημα 8.3.1. *Έστω* K *ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$*. Τότε,*

$$\mathrm{as}(K)^{k+1} \leqslant c^k\,|K|^k \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E)\,d\nu_{n,n-k}(E) \tag{8.3.3}$$

και

$$\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E)\,d\nu_{n,n-k}(E) \leqslant c^k\,\mathrm{as}(K)^{\frac{n-k-1}{n-1}}, \tag{8.3.4}$$

όπου $c>0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε από την ανισότητα Hölder

$$\left(\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-1}(\theta)\,d\sigma(\theta)\right)^{k+1} \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n}(\theta)\,d\sigma(\theta)\right)^{k} \left(\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-k-1}(\theta)\,d\sigma(\theta)\right), \tag{8.3.5}$$

την οποία μπορούμε να γράψουμε ισοδύναμα στη μορφή

$$\tilde{V}(K,\dots,K,B_2^n)^{k+1} \leqslant |K|^k\,\tilde{V}(K\,[n-k-1],B_2^n\,[k+1]). \tag{8.3.6}$$

Παίρνοντας υπόψη τις (8.3.1) και (8.3.2) ξαναγράφουμε την (8.3.6) ως εξής:

$$\mathrm{as}(K)^{k+1} \leqslant |K|^k\,\frac{\omega_{n-1}^{k+1}}{\omega_n^k\,\omega_{n-k-1}} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E)\,d\nu_{n,n-k}(E). \tag{8.3.7}$$

Απλός υπολογισμός δείχνει ότι $\frac{\omega_{n-1}^{k+1}}{\omega_n^k\omega_{n-k-1}} < c^k$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$, και έπεται η (8.3.3).

Από την άλλη πλευρά, από την ανισότητα Hölder,

$$\begin{aligned}\frac{1}{\omega_{n-k-1}} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E)\,d\nu_{n,n-k}(E) &= \int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-k-1}(\theta)\,d\sigma(\theta)\\ &\leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \rho_K^{n-1}(\theta)\,d\sigma(\theta)\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}} = \left(\frac{\mathrm{as}(K)}{\omega_{n-1}}\right)^{\frac{n-k-1}{n-1}},\end{aligned} \tag{8.3.8}$$

άρα

$$\int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E)\,d\nu_{n,n-k}(E) \leqslant \rho_{n,k}\,\mathrm{as}(K)^{\frac{n-k-1}{n-1}}, \tag{8.3.9}$$

όπου $\rho_{n,k} = \omega_{n-k-1}\cdot\omega_{n-1}^{-\frac{n-k-1}{n-1}} \leqslant c^k$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$, το οποίο δίνει την (8.3.4). ∎

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Υπενθυμίζουμε ότι η περιγεγραμμένη ακτίνα $R(K)$ του K είναι ο μικρότερος $R>0$ για τον οποίο $K\subseteq RB_2^n$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι μεικτοί όγκοι είναι γραμμικοί ως προς κάθε θέση και ομογενείς, καθώς και την (8.3.1), μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{as}(K) &= \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n}\tilde{V}(K,\dots,K,B_2^n) \geqslant \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n R(K)}\tilde{V}(K,\dots,K,R(K)B_2^n)\\ &\geqslant \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n R(K)}\tilde{V}(K,\dots,K,K) = \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n R(K)}\,|K|.\end{aligned} \tag{8.3.10}$$

Με αυτό τον τρόπο παίρνουμε το ακόλουθο γενικό κάτω φράγμα για την $\mathrm{as}(K)$.

Λήμμα 8.3.2. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν ορίσουμε $p(K) = R(K)/|K|^{\frac{1}{n}}$, τότε*

$$\frac{c\sqrt{n}}{p(K)} \leqslant \frac{\mathrm{as}(K)}{|K|^{\frac{n-1}{n}}}, \tag{8.3.11}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από την (8.3.10) βλέπουμε ότι

$$\frac{\mathrm{as}(K)}{|K|^{\frac{n-1}{n}}} \geqslant \frac{\omega_{n-1}}{\omega_n R(K)}|K|^{1/n} \geqslant \frac{c\sqrt{n}}{R(K)}|K|^{1/n}, \tag{8.3.12}$$

και το λήμμα έπεται από τον ορισμό του $p(K)$. ■

Επιστρέφοντας στο Θεώρημα 8.3.1, παίρνουμε αμέσως το Θεώρημα 6.2.8. Φυσικά, η αριστερή ανισότητα του Θεωρήματος 6.2.8 είναι πολύ απλή, και η ουσία του θεωρήματος βρίσκεται στη δεξιά ανισότητα.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.8. Η αριστερή ανισότητα προκύπτει από το Λήμμα 8.3.2 και την (8.3.3). Έχουμε

$$|K|^{\frac{k(n-1)}{n}}\left(\frac{c_4\sqrt{n}}{p(K)}\right)^k \mathrm{as}(K) \leqslant \mathrm{as}(K)^{k+1} \leqslant c^k|K|^k \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E)\, d\nu_{n,n-k}(E),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\left(\frac{c_4\sqrt{n}}{cp(K)}\right)^k \mathrm{as}(K) \leqslant |K|^{\frac{k}{n}} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E)\, d\nu_{n,n-k}(E).$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι

$$|K|^{\frac{k}{n}} = \left(|K|^{\frac{n-1}{n}}\right)^{\frac{k}{n-1}} \leqslant \left(\frac{p(K)\mathrm{as}(K)}{c\sqrt{n}}\right)^{\frac{k}{n-1}}, \tag{8.3.13}$$

και αυτό μας δίνει την

$$|K|^{\frac{k}{n}}\,\mathrm{as}(K)^{\frac{n-k-1}{n-1}} \leqslant \left(\frac{c_5 p(K)}{\sqrt{n}}\right)^{\frac{k}{n-1}} \mathrm{as}(K). \tag{8.3.14}$$

Τότε, η δεξιά ανισότητα της (6.2.19) έπεται από την (8.3.4) στο Θεώρημα 8.3.1. □

Παρατήρηση 8.3.3. Θα συζητήσουμε τις εκτιμήσεις που μπορεί να πάρει κανείς από το Θεώρημα 6.2.8 αν υποθέσουμε ότι το κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι σε κάποια από τις κλασσικές θέσεις, τις οποίες εισάγουμε παρακάτω. Για μια λεπτομερή παρουσίαση και περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε στο [3].

(α) Λέμε ότι το K είναι στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους αν $w(K) \leqslant w(T(K))$ για κάθε $T \in SL(n)$. Οι Γιαννόπουλος και V. Milman απέδειξαν ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος αν και μόνο αν

$$w(K) = n \int_{S^{n-1}} h_K(\theta)\langle \xi, \theta\rangle^2 d\sigma(\theta) \tag{8.3.15}$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Από αποτελέσματα των Figiel-Tomczak, Lewis και Pisier (βλέπε [3, Κεφάλαιο 6]) γνωρίζουμε ότι αν ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει ελάχιστο μέσο πλάτος, τότε $w(K) \leqslant c|K|^{\frac{1}{n}} \sqrt{n} \log n$. Από τη γενική ανισότητα $R(K) \leqslant c\sqrt{n} w(K)$ που ισχύει για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα, συμπεραίνουμε ότι $R(K) \leqslant c|K|^{\frac{1}{n}} n \log n$ στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους.

(β) Λέμε ότι το K είναι στη θέση John αν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο K είναι πολλαπλάσιο της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας B_2^n και ότι το K είναι στη θέση Löwner αν το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K είναι πολλαπλάσιο της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας B_2^n. Μπορεί κανείς να ελέγξει εύκολα ότι αυτό ισχύει αν και μόνο αν το K° είναι στη θέση John. Ο λόγος όγκων ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vr}(K) = \inf\left\{ \left(\frac{|K|}{|\mathcal{E}|}\right)^{\frac{1}{n}} : \mathcal{E} \text{ είναι ελλειψοειδές και } \mathcal{E} \subseteq K \right\}. \tag{8.3.16}$$

Ο εξωτερικός λόγος όγκων ενός κεντραρισμένου κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ είναι η ποσότητα $\mathrm{ovr}(K) = \mathrm{vr}(K^\circ)$. Ο K. Ball απέδειξε στο [5] ότι $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(C_n) \simeq \sqrt{n}$ στη συμμετρική περίπτωση και $\mathrm{vr}(K) \leqslant \mathrm{vr}(\Delta_n) \simeq \sqrt{n}$ στη γενική περίπτωση, όπου $C_n = [-1, 1]^n$ και Δ_n είναι ένα κανονικό simplex τον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το K είναι στη θέση John. Τότε, αν rB_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, από το θεώρημα του John έχουμε $R(K) \leqslant rn$. Αφού $|K|^{1/n} \geqslant r|B_2^n|^{1/n} \geqslant cr/\sqrt{n}$, παίρνουμε

$$R(K) \leqslant rn \leqslant c|K|^{\frac{1}{n}} n^{\frac{3}{2}}. \tag{8.3.17}$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι το K είναι στη θέση Löwner. Γνωρίζουμε ότι η $R(K)B_2^n$ είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K, άρα

$$R(K)|B_2^n|^{1/n} = |K|^{\frac{1}{n}} \mathrm{ovr}(K) = |K|^{\frac{1}{n}} \mathrm{vr}(K^\circ) \leqslant c\sqrt{n}|K|^{\frac{1}{n}}, \tag{8.3.18}$$

απ΄ όπου έπεται ότι $R(K) \leqslant cn|K|^{\frac{1}{n}}$.

(γ) Λέμε ότι το K έχει ελάχιστη επιφάνεια αν $S(K) \leqslant S(T(K))$ για κάθε $T \in SL(n)$. Υπενθυμίζουμε ότι το επιφανειακό μέτρο σ_K του K είναι το μέτρο Borel στην S^{n-1} που ορίζεται από την
(8.3.19)

$$\sigma_K(A) = \lambda(\{x \in \mathrm{bd}(K) : \text{ το εξωτερικό κάθετο διάνυσμα του } K \text{ στο } x \text{ ανήκει στο } A\}),$$

όπου λ είναι το σύνηθες επιφανειακό μέτρο στο K. O Petty απέδειξε στο [78] ότι το K έχει ελάχιστη επιφάνεια αν και μόνο αν το σ_K ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$S(K) = n\int_{S^{n-1}} \langle \xi, \theta\rangle^2 d\sigma_K(\theta) \tag{8.3.20}$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Είναι γνωστό ότι αν το K έχει ελάχιστη επιφάνεια, τότε $w(K) \leqslant cn|K|^{\frac{1}{n}}$ (αυτό παρατηρήθηκε από τους Μαρκεσίνη, Παούρη και Σαρόγλου στο [71]). Συνεπώς, $R(K) \leqslant cn^{\frac{3}{2}}|K|^{\frac{1}{n}}$.

(δ) Τέλος, αν το K είναι στην ισοτροπική θέση, τότε γνωρίζουμε ότι $R(K) \leqslant |K|^{\frac{1}{n}}(n+1)L_K$. Αυτή η εκτίμηση οφείλεται στους Kannan, Lovász και Simonovits (το ασυμπτωτικά ακριβές άνω φράγμα $R(K) \leqslant cnL_K\,|K|^{\frac{1}{n}}$ αποδεικνύεται και με ένα στοιχειώδες επιχείρημα).

Δεδομένου ότι η $R(K)$ είναι πολυωνυμική ως προς n σε όλες τις κλασσικές θέσεις ενός κυρτού σώματος K, από το δεξιό μέλος της ανισότητας (6.2.19) του Θεωρήματος 6.2.8 παίρνουμε το αποτέλεσμα του Θεωρήματος 6.2.9.

Παρατήρηση 8.3.4. Όμοια, από το αριστερό μέλος της ανισότητας (6.2.19) του Θεωρήματος 6.2.8 βλέπουμε ότι αν το K είναι σε κάποια από τις κλασσικές θέσεις που συζητήσαμε στην Παρατήρηση 8.3.3, τότε

$$c_n^{-k}\,\mathrm{as}(K) \leqslant |K|^{\frac{k}{n}} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{as}(K\cap E)\, d\nu_{n,n-k}(E) \tag{8.3.21}$$

για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$, όπου $c_n \simeq \sqrt{n}$ αν το K είναι στη θέση Löwner, $c_n \simeq \sqrt{n\log n}$ αν το K είναι στη θέση John, $c_n \simeq \sqrt{n}(\log n)$ αν το K είναι στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους, $c_n \simeq n$ αν το K είναι στη θέση ελάχιστης επιφάνειας, και $c_n \simeq \sqrt{n}L_K$ αν το K είναι στην ισοτροπική θέση.

Μέρος III

Αλγοριθμικά λήμματα κανονικότητας για αραιούς πίνακες

Κεφάλαιο 9

Αλγοριθμικό λήμμα κανονικότητας για L_p κανονικούς αραιούς πίνακες

9.1 Εισαγωγή

9.1α΄ Σχετικά με το πρόβλημα

Είναι γνωστό ότι είναι NP-δύσκολος όχι μόνο ο υπολογισμός της βέλτιστης λύσης για το πρόβλημα MAX-CSP, αλλά και το να βρούμε «καλές» προσεγγίσεις αυτής της βέλτιστης λύσης (βλέπε, για παράδειγμα, [50, 53, 87]).

Σε μια θεμελιώδη εργασία [40], οι Frieze και Kannan απέδειξαν διάφορα αποτελέσματα σχετικά με *πυκνά* στιγμιότυπα των προηγούμενων προβλημάτων. Αργότερα, οι Coja-Oghlan, Cooper και Frieze [29] απέδειξαν ότι αυτά τα αποτελέσματα μπορούν να επεκταθούν στο *αραιό* πλαίσιο αν υποθέσουμε μια συνθήκη ψευδοτυχαιότητας γνωστή ως (C,η)-*φράξιμο* (βλέπε [55, 56]). Πιο συγκεκριμένα, στο [29] οι συγγραφείς βρήκαν έναν αλγόριθμο για την προσέγγιση ενός αραιού $\{0,1\}$ πίνακα f από ένα άθροισμα *πινάκων περιορισμού* κάνοντας την υπόθεση ότι ο f είναι (C,η)-φραγμένος. Το κρίσιμο σημείο είναι ότι το πλήθος των προσθετέων είναι ανεξάρτητο από το μέγεθος του πίνακα και την πυκνότητά του. Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα, απέδειξαν παρόμοιο αποτέλεσμα για τανυστές, το οποίο με τη σειρά του δίνει προσεγγίσεις για αραιά MAX-CSP στιγμιότυπα.

Σκοπός μας σε αυτό το κεφάλαιο είναι να επεκτείνουμε αυτά τα αποτελέσματα σε μια ευρύτερη κλάση αραιών $\{0,1\}$ πινάκων, την κλάση των L_p κανονικών πινάκων η οποία εισήχθη πρόσφατα από τους Borgs, Chayes, Cohn και Zhao [22].

Για να προχωρήσουμε είναι χρήσιμο να εισάγουμε σε αυτό το σημείο κάποιο συμβολισμό και ορολογία. Στο εξής, με n_1 και n_2 θα συμβολίζουμε δύο θετικούς ακεραίους. Ως συνήθως, για κάθε θετικό ακέραιο n γράφουμε $[n] := \{1,\dots,n\}$, και συμβολίζουμε την πληθικότητα ενός πεπερασμένου συνόλου S με $|S|$.

Αν X είναι ένα μη κενό πεπερασμένο σύνολο, τότε θα συμβολίζουμε με μ_X το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας πάνω στο X, δηλαδή, $\mu_X(A) := |A|/|X|$ για κάθε $A \subseteq X$. Επίσης, για ευκολία, για τα μέτρα $\mu_{[n_1]}, \mu_{[n_2]}$ και $\mu_{[n_1]\times[n_2]}$ θα γράφουμε απλά μ_1, μ_2 και $\boldsymbol{\mu}$ αντίστοιχα. Αν τώρα $\mathcal{P}$ είναι μια διαμέριση του $[n_1]\times[n_2]$, τότε θα συμβολίζουμε με $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ την (πεπερασμένη) σ-άλγεβρα στο $[n_1]\times[n_2]$ που επάγεται από την $\mathcal{P}$.

Συνεχίζοντας, θεωρούμε τα μη κενά, πεπερασμένα σύνολα X_1, X_2 και το σύνολο

$$\mathcal{S}_{X_1\times X_2} := \{A_1\times A_2 \colon A_1\subseteq X_1 \text{ και } A_2\subseteq X_2\}.$$

Αν είναι σαφές σε ποια X_1 και X_2 αναφερόμαστε (συγκεκριμένα, αν $X_1=[n_1]$ και $X_2=[n_2]$), τότε για το σύνολο $\mathcal{S}_{X_1\times X_2}$ θα γράφουμε απλώς $\mathcal{S}$. Επιπλέον για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $X_1\times X_2$ με $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}_{X_1\times X_2}$ θέτουμε

$$\iota(\mathcal{P}) := \min\Big\{\min\{\mu_{X_1}(P_1), \mu_{X_2}(P_2)\} : P = P_1\times P_2\in\mathcal{P}\Big\}.$$

Με άλλα λόγια, η ποσότητα $\iota(\mathcal{P})$ είναι η ελάχιστη πυκνότητα πλευράς κάθε ορθογωνίου της μορφής $P_1\times P_2$ που περιέχεται στην $\mathcal{P}$.

Με τον όρο *περιορισμένος πίνακας* εννοούμε έναν πίνακα $g\colon [n_1]\times[n_2]\to\mathbb{R}$ για τον οποίο υπάρχουν δύο σύνολα $S\subseteq[n_1]$ και $T\subseteq[n_2]$, και ένας πραγματικός αριθμός c ώστε $g = c\cdot 1_{S\times T}$; το σύνολο $S\times T$ καλείται σύνολο *στήριξης* του πίνακα g. Επιπλέον, για κάθε πίνακα $f\colon[n_1]\times[n_2]\to\mathbb{R}$ η *νόρμα περιορισμού* του f είναι η ποσότητα

$$\|f\|_{\square} = \max_{\substack{S\subseteq[n_1]\\ T\subseteq[n_2]}} \Big|\sum_{(x_1,x_2)\in S\times T} f(x_1,x_2)\Big| = (n_1\cdot n_2)\cdot \max_{\substack{S\subseteq[n_1]\\ T\subseteq[n_2]}} \Big|\int_{S\times T} f\, d\boldsymbol{\mu}\Big|.$$

Τέλος, έστω $f\colon[n_1]\times[n_2]\to\{0,1\}$ ένας πίνακας και έστω $\mathcal{P}$ μια διαμέριση του $[n_1]\times[n_2]$ με $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}$. Η *δεσμευμένη μέση τιμή* του f ως προς την $\mathcal{A}_{\mathcal{P}}$ ορίζεται ως

$$\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}}) = \sum_{P\in\mathcal{P}} \frac{\int_P f\, d\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}(P)} 1_P.$$

Ας παρατηρήσουμε ειδικότερα ότι η μέση τιμή $\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})$ είναι άθροισμα περιορισμένων πινάκων με διακεκριμένα σύνολα στήριξης. Αυτή η παρατήρηση θα είναι χρήσιμη αργότερα. Επιπρόσθετα, αν $1\leqslant p<\infty$, τότε έχουμε

$$\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_p} = \Big(\sum_{P\in\mathcal{P}} \Big|\frac{\int_P f\, d\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}(P)}\Big|^p \boldsymbol{\mu}(P)\Big)^{1/p}$$

ενώ αν $p=\infty$, τότε

$$\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_\infty} = \max\Big\{\Big|\frac{\int_P f\, d\boldsymbol{\mu}}{\boldsymbol{\mu}(P)}\Big| : P\in\mathcal{P}\Big\}.$$

Ειδικότερα, παρατηρούμε ότι η $\|f\|_{L_1}$ είναι ίση με την *πυκνότητα* της f, το οποίο σημαίνει ότι είναι ίση με το πλήθος των άσσων στο πίνακα, διαιρεμένο με $n_1\cdot n_2$. Επίσης παρατηρούμε ότι $\|f\|_{\square} = \|f\|_{L_p}^p\cdot(n_1\cdot n_2)$ για κάθε $1\leqslant p<\infty$.

Είμαστε τώρα σε θέση να εισάγουμε την κλάση των $\{0,1\}$ πινάκων.

Ορισμός 9.1.1 (L_p κανονικοί πίνακες [22]). Θεωρούμε $0 < \eta \leqslant 1$, $C \geqslant 1$ και $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ένας πίνακας $f\colon [n_1]\times[n_2] \to \{0,1\}$ καλείται (C,η,p)-*κανονικός* (ή απλά L_p *κανονικός* αν δεν υπάρχει σύγχυση για τις τιμές των C και η) αν για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[n_1]\times[n_2]$ με $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{S}$ και $\iota(\mathcal{P}) \geqslant \eta$ έχουμε

$$\|\mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_p} \leqslant C\,\|f\|_{L_1}. \tag{9.1.1}$$

Παρατηρούμε ότι, από τη μονοτονία των L_p νορμών, αν $1 \leqslant p_1 \leqslant p_2 \leqslant \infty$ και ο f είναι L_{p_2} κανονικός, τότε ο f είναι και L_{p_1} κανονικός. Επίσης παρατηρούμε ότι για $p = 1$ η προηγούμενη έννοια δεν παρουσιάζει ενδιαφέρον καθώς κάθε $\{0,1\}$ πίνακας είναι L_1 κανονικός. Από την άλλη πλευρά, η περίπτωση $p = \infty$ στον Ορισμό 9.1.1 είναι ισοδύναμη με την προαναφερθείσα έννοια του (C,η)-φραγμένου πίνακα. Πράγματι, ένας πίνακας $f\colon [n_1]\times[n_2] \to \{0,1\}$ λέγεται (C,η)-φραγμένος αν για κάθε $S \subseteq [n_1]$ και κάθε $T \subseteq [n_2]$ με $\mu_1(S) \geqslant \eta$ και $\mu_2(T) \geqslant \eta$ έχουμε

$$\frac{\int_{S\times T} f\,d\mu}{\mu(S\times T)} \leqslant C\,\|f\|_{L_1}.$$

Ισχύει το ακόλουθο. (Δείτε επίσης και το Λήμμα 9.3.1 παρακάτω.)

Πρόταση 9.1.2. *Έστω* $0 < \eta \leqslant 1$ *και* $C \geqslant 1$, *και* $f\colon [n_1]\times[n_2] \to \{0,1\}$ *ένας πίνακας. Αν ο* f *είναι* (C,η)-*φραγμένος, τότε ο* f *είναι* (C,η,∞)-*κανονικός. Αντίστροφα, αν* f *είναι ένας* (C,η,∞)-*κανονικός, τότε ο* f *είναι* $(4C,\eta)$-*φραγμένος.*

Μεταξύ των ακραίων περιπτώσεων «$p = 1$» και «$p = \infty$», υπάρχει μια μεγάλη κλάση, αυτή των αραιών πινάκων, που έχει πολύ καλή συμπεριφορά. Τα πιο κατανοητά παραδείγματα είναι τα τυχαία. Συγκεκριμένα, από το [22, Θεώρημα 2.14], για κάθε συμμετρική μετρήσιμη συνάρτηση $W\colon [0,1]\times[0,1] \to \mathbb{R}^+$ με $W \in L_p$ $(1 < p \leqslant \infty)$ και κάθε θετικό ακέραιο n, υπάρχει ένα φυσιολογικό μοντέλο [1] αραιών τυχαίων n-επί-n $\{0,1\}$ πινάκων οι οποίοι είναι L_p κανονικοί ασυμπτωτικά σχεδόν βέβαια. (Από την άλλη πλευρά, αν $W \notin L_p$, τότε ένας τυπικός πίνακας σε αυτό το μοντέλο δεν είναι L_p κανονικός.) Επιπλέον (ντεντερμινιστικά) παραδείγματα τα οποία έχουν μια αριθμοθεωρητική οπτική, δίνονται στο [36].

9.1β΄ Το βασικό αποτέλεσμα

Το βασικό αποτέλεσμα που θα αποδείξουμε είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9.1.3. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές* $a_1, a_2 > 0$, *ένας αλγόριθμος και ένα πολυώνυμο* [2] Π_0 *έτσι ώστε να ισχύει το ακόλουθο. Έστω* $0 < \varepsilon < 1/2$ *και* $C \geqslant 1$. *Θεωρούμε επίσης* $1 < p \leqslant \infty$, *και γράφουμε* $p^\dagger = \min\{2,p\}$. *Αν* q *είναι ο συζυγής εκθέτης του* $p^\dagger$ (*δηλαδή,* $1/p^\dagger + 1/q = 1$) *θέτουμε*

$$\tau = \left\lceil \frac{a_1 \cdot C^2}{(p^\dagger - 1)\,\varepsilon^2} \right\rceil \ \text{ και } \ \eta = \left(\frac{a_2\cdot\varepsilon}{C}\right)^{\sum_{i=1}^{\tau+1}(\frac{2}{p^\dagger}+1)^{i-1} q^i}. \tag{9.1.2}$$

[1] Αυτό το μοντέλο περικλείει το κλασικό μοντέλο Erdős–Rényi –δείτε, για παράδειγμα, [21].

[2] Με τον όρο *πολυώνυμο* εννοούμε ένα πραγματικό πολυώνυμο Π με μη αρνητικούς συντελεστές, δηλαδή, $\Pi(x) = a_d x^d + \cdots + a_1 x + a_0$ όπου $d \in \mathbb{N}$ και $a_0, \ldots, a_d \in \mathbb{R}^+$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι ο βαθμός d και οι συντελεστές $a_0, \ldots, a_d$ είναι ανεξάρτητοι από όλες τις υπόλοιπες παραμέτρους.

Αν εισάγουμε

INP: έναν (C,η,p)*-κανονικό πίνακα* $f\colon [n_1]\times[n_2]\to\{0,1\}$,

τότε ο αλγόριθμος εξάγει

OUT: μια διαμέριση $\mathcal{P}$ *του* $[n_1]\times[n_2]$ *με* $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}$, $|\mathcal{P}|\leqslant 4^{\tau}$ *και* $\iota(\mathcal{P})\geqslant\eta$, *έτσι ώστε*

$$\|f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{\square}\leqslant\varepsilon\|f\|_{\square}. \tag{9.1.3}$$

Αυτός ο αλγόριθμος τρέχει σε χρόνο $(\tau\,4^{\tau})\cdot\Pi_0(n_1\cdot n_2)$.

Το Θεώρημα 9.1.3 επεκτείνει το [29, Θεώρημα 1] που αντιστοιχεί στην περίπτωση $p=\infty$[3]. Τέλος σημειώνουμε ότι, από την (9.1.2) και την (9.1.3), ο πίνακας f προσεγγίζεται από ένα άθροισμα που αποτελείται από το πολύ 4^{τ} περιορισμένους πίνακες με ξένα στηρίγματα και επιπλέον ο θετικός ακέραιος τ είναι ανεξάρτητος από τις διαστάσεις και την πυκνότητα του f. Επίσης παρατηρούμε, όπως ήταν αναμενόμενο ότι ο χρόνος που τρέχει ο αλγόριθμος στο Θεώρημα 9.1.3 αυξάνεται καθώς το p φθίνει προς το 1.

9.2 Δύο βασικά εργαλεία

9.2α΄ Ακολουθίες διαφορών martingales

Υπενθυμίζουμε ότι μια πεπερασμένη ακολουθία $(d_i)_{i=0}^{n}$ ολοκληρώσιμων πραγματικών τυχαίων μεταβλητών σε έναν χώρο πιθανότητας (X,Σ,μ) λέγεται *ακολουθία διαφορών martingale* αν υπάρχει κάποιο martingale $(f_i)_{i=0}^{n}$ τέτοιο ώστε $d_0=f_0$ και $d_i=f_i-f_{i-1}$ αν $n\geqslant 1$ και $i\in[n]$. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο αποτέλεσμα των Ricard και Xu [80] το οποίο μπορεί να θεωρηθεί επέκταση του βασικού θεωρήματος ότι οι ακολουθίες διαφορών martingales είναι ορθογώνιες στον L_2. (Βλέπε επίσης [34, Παράρτημα A] για μια συζήτηση αυτού του αποτελέσματος και της απόδειξής του.)

Πρόταση 9.2.1. *Έστω* (X,Σ,μ) *ένας χώρος πιθανότητας και* $1<p\leqslant 2$. *Τότε, για κάθε ακολουθία διαφορών martingale* $(d_i)_{i=0}^{n}$ *στον* $L_p(X,\Sigma,\mu)$ *έχουμε*

$$\Big(\sum_{i=0}^{n}\|d_i\|_{L_p}^2\Big)^{1/2}\leqslant\Big(\frac{1}{p-1}\Big)^{1/2}\Big\|\sum_{i=0}^{n}d_i\Big\|_{L_p}. \tag{9.2.1}$$

Τονίζουμε ότι η σταθερά $(p-1)^{-1/2}$ που εμφανίζεται στο δεξιό μέλος της (9.2.1) είναι βέλτιστη.

[3] Στην πραγματικότητα, το επιχείρημα στο [29] δουλεύει με τις απαραίτητες τροποποιήσεις και για την περίπτωση $p\geqslant 2$. Σημειώνουμε επίσης ότι οι περιορισμένοι πίνακες που προκύπτουν από το [29, Θεώρημα 1] δεν έχουν κατ΄ ανάγκη ξένα στηρίγματα, αλλά αυτό μπορεί εύκολα να επιτευχθεί—δείτε το [29, Πόρισμα 1] για περισσότερες λεπτομέρειεςς.

9.2β΄ Η αλγοριθμική εκδοχή της ανισότητας του Grothendieck

Θα χρειαστούμε επίσης το ακόλουθο αποτέλεσμα των Alon και Naor [1].

Πρόταση 9.2.2. *Υπάρχει μια σταθερά $a_0 > 0$, ένας αλγόριθμος και ένα πολυώνυμο Π_{AN} ώστε να ισχύει το εξής. Αν εισάγουμε*

INP: έναν πίνακα $f\colon [n_1] \times [n_2] \to \mathbb{R}$,

τότε ο αλγόριθμος εξάγει

OUT: ένα σύνολο $A \in \mathcal{S}$ τέτοιο ώστε $(n_1 \cdot n_2)\big|\int_A f\, d\mu\big| \geqslant a_0\|f\|_\square$.

Ο αλγόριθμος αυτός τρέχει σε χρόνο $\Pi_{AN}(n_1 \cdot n_2)$.

Η σταθερά a_0 στην Πρόταση 9.2.2 συνδέεται στενά με τη σταθερά του Grothendieck K_G (βλέπε, για παράδειγμα, [79]).

9.3 Προκαταρκτικά λήμματα

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε κάποια προκαταρκτικά αποτελέσματα που αφορούν L_p κανονικούς πίνακες. Αρχίζουμε με το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 9.3.1. *Υπάρχουν ένας αλγόριθμος και ένα πολυώνυμο Π_1 ώστε να ισχύει το εξής. Έστω X_1, X_2 μη κενά πεπερασμένα σύνολα, και έστω $0 < \vartheta < 1/2$. Αν εισάγουμε*

INP: δύο σύνολα $A_1 \subseteq X_1$ και $A_2 \subseteq X_2$ με $\mu_{X_1}(A_1) \geqslant \vartheta$ και $\mu_{X_2}(A_2) \geqslant \vartheta$,

τότε ο αλγόριθμος εξάγει

OUT1: μια διαμέριση $\mathcal{Q} \subseteq \mathcal{S}$ με $|\mathcal{Q}| \leqslant 4$ και $\iota(\mathcal{Q}) \geqslant \vartheta$, και

OUT2: ένα σύνολο $B \in \mathcal{Q}$ τέτοιο ώστε $A_1 \times A_2 \subseteq B$ και $\mu_{X_1 \times X_2}\big(B \setminus (A_1 \times A_2)\big) \leqslant 2\vartheta$.

Αυτός ο αλγόριθμος τρέχει σε χρόνο $\Pi_1(|X_1| \cdot |X_2|)$.

Απόδειξη. Διακρίνουμε τις παρακάτω τέσσερις (αλληλοαποκλειόμενες) περιπτώσεις.

Περιπτωση 1: *Έχουμε* $\mu_{X_1}(A_1) < 1-\vartheta$ *και* $\mu_{X_2}(A_2) < 1-\vartheta$. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος εξάγει την $\mathcal{Q} = \{A_1 \times A_2, (X_1 \setminus A_1) \times A_2, A_1 \times (X_2 \setminus A_2), (X_1 \setminus A_1) \times (X_2 \setminus A_2)\}$ και το $B = A_1 \times A_2$. Παρατηρήστε ότι η $\mathcal{Q}$ και το B ικανοποιούν τις απαιτήσεις του λήμματος.

Περιπτωση 2: *Έχουμε* $\mu_{X_1}(A_1) < 1-\vartheta$ *και* $\mu_{X_2}(A_2) \geqslant 1-\vartheta$. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος εξάγει την $\mathcal{Q} = \{A_1 \times X_2, (X_1 \setminus A_1) \times X_2\}$ και το $B = A_1 \times X_2$. Πάλι, είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathcal{Q}$ και το B ικανοποιούν τις απαιτήσεις του λήμματος.

Περιπτωση 3: *Έχουμε* $\mu_{X_1}(A_1) \geqslant 1-\vartheta$ *και* $\mu_{X_2}(A_2) < 1-\vartheta$. Η περίπτωση αυτή είναι όμοια με την Περίπτωση 2. Συγκεκριμένα, θέτουμε $\mathcal{Q} = \{X_1 \times A_2, X_1 \times (X_2 \setminus A_2)\}$ και $B = X_1 \times A_2$.

Περιπτωση 4: *Έχουμε* $\mu_{X_1}(A_1) \geqslant 1-\vartheta$ *και* $\mu_{X_2}(A_2) \geqslant 1-\vartheta$. Σε αυτή την περίπτωση ο αλγόριθμος εξάγει την $\mathcal{Q} = \{X_1 \times X_2\}$ και το $B = X_1 \times X_2$. Όπως πριν, είναι εύκολο να δούμε ότι η $\mathcal{Q}$ και το B έχουν τις ζητούμενες ιδιότητες.

Τέλος, παρατηρούμε ότι το τμήμα του αλγορίθμου που κοστίζει περισσότερο είναι η εκτίμηση των ποσοτήτων $\mu_{X_1}(A_1)$ και $\mu_{X_2}(A_2)$, κάτι όμως που μπορεί φυσικά να γίνει σε πολυωνυμικό χρόνο του $|X_1| \cdot |X_2|$. Έτσι, ο αλγόριθμος θα σταματήσει σε πολυωνυμικό χρόνο του $|X_1| \cdot |X_2|$. ∎

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι μια ανισότητα τύπου Hölder για L_p κανονικούς πίνακες. Για να δώσουμε μια ιδέα για τη χρησιμότητα αυτής της ανισότητας, ας θεωρήσουμε έναν πίνακα $f\colon [n_1] \times [n_2] \to \{0,1\}$. Αν $1 < p < \infty$, και q είναι ο συζυγής εκθέτης του, παρατηρούμε ότι από την ανισότητα Hölder, για κάθε $A \subseteq [n_1] \times [n_2]$ έχουμε

$$\int_A f \, d\mu \leqslant \|f\|_{L_1}^{1/p} \cdot \mu(A)^{1/q}. \tag{9.3.1}$$

Δυστυχώς, αυτή η εκτίμηση δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμη αν ο f είναι αραιός—δηλαδή αν $\|f\|_{L_1} = o(1)$—διότι σε αυτή την περίπτωση η ποσότητα $\|f\|_{L_1}^{1/p}$ *δεν* είναι συγκρίσιμη με την πυκνότητα $\|f\|_{L_1}$ του f. Μπορούμε όμως να βελτιώσουμε την (9.3.1) αν υποθέσουμε ότι ο πίνακας f είναι L_p κανονικός και $A \in \mathcal{S}$. Συγκεκριμένα, έχουμε το ακόλουθο λήμμα (βλέπε επίσης [35, Πρόταση 4.1]).

Λήμμα 9.3.2. *Έστω* $0 < \eta < 1/2$ *και* $C \geqslant 1$. *Έστω επίσης* $1 < p \leqslant 2$ *και* q *ο συζυγής εκθέτης του. Τέλος, έστω* $f\colon [n_1] \times [n_2] \to \{0,1\}$ *ο οποίος είναι* (C,η,p)*-κανονικός. Τότε, για κάθε* $A \subseteq [n_1] \times [n_2]$ *με* $A \in \mathcal{S}$ *έχουμε*

$$\int_A f \, d\mu \leqslant C\, \|f\|_{L_1} (\mu(A) + 6\eta)^{1/q}. \tag{9.3.2}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε ένα μη κενό υποσύνολο A του $[n_1] \times [n_2]$ με $A \in \mathcal{S}$, και θεωρούμε $A_1 \subseteq [n_1]$ και $A_2 \subseteq [n_2]$ τέτοια ώστε $A = A_1 \times A_2$. Αν $\mu_1(A_1) \geqslant \eta$ και $\mu_2(A_2) \geqslant \eta$, ισχυριζόμαστε ότι

$$\int_A f \, d\mu \leqslant C\, \|f\|_{L_1} (\mu(A) + 2\eta)^{1/q}. \tag{9.3.3}$$

Πράγματι, εφαρμόζοντας το Λήμμα 9.3.1 για τα $X_1 = [n_1]$ και $X_2 = [n_2]$, παίρνουμε μια διαμέριση $\mathcal{Q}$ του $[n_1] \times [n_2]$ με $\mathcal{Q} \in \mathcal{S}$ και $\iota(\mathcal{Q}) \geqslant \eta$, και ένα σύνολο $B \in \mathcal{Q}$ τέτοιο ώστε $A \subseteq B$ και $\mu(B \setminus A) \leqslant 2\eta$. Από την L_p κανονικότητα του f, έχουμε

$$\frac{\int_B f \, d\mu}{\mu(B)}\, \mu(B)^{1/p} \leqslant \|\mathbb{E}(f \,|\, \mathcal{A}_{\mathcal{Q}})\|_{L_p} \leqslant C\, \|f\|_{L_1}$$

άρα

$$\int_A f \, d\mu \leqslant \int_B f \, d\mu \leqslant C\, \|f\|_{L_1} \mu(B)^{1/q} \leqslant C\, \|f\|_{L_1} (\mu(A) + 2\eta)^{1/q}.$$

Στη συνέχεια, υποθέτουμε ότι $\mu_1(A_1) \geqslant \eta$ και $\mu_2(A_2) < \eta$ και παρατηρούμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε ένα σύνολο $B \subseteq [n_2]$ με $\eta < \mu_2(B) \leqslant 2\eta$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A f\,d\mu &\leqslant \int_{A_1\times(A_2\cup B)} f\,d\mu \overset{(9.3.3)}{\leqslant} C\,\|f\|_{L_1}\big(\mu\big(A_1\times(A_2\cup B)\big)+2\eta\big)^{1/q}\\ &\leqslant C\,\|f\|_{L_1}(\mu(A)+2\eta\,\mu_1(A_1)+2\eta)^{1/q} \leqslant C\,\|f\|_{L_1}(\mu(A)+4\eta)^{1/q}.\end{aligned}$$

Η περίπτωση όπου $\mu_1(A_1) < \eta$ και $\mu_2(A_2) \geqslant \eta$ είναι εντελώς όμοια.

Τέλος, υποθέτουμε ότι $\mu_1(A_1) < \eta$ και $\mu_2(A_2) < \eta$, και παρατηρούμε ότι υπάρχουν $B_1 \subseteq [n_1]$ και $B_2 \subseteq [n_2]$ τέτοια ώστε $\eta < \mu_1(B_1) \leqslant 2\eta$ και $\eta < \mu_2(B_2) \leqslant 2\eta$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_A f\,d\mu &\leqslant \int_{(A_1\cup B_1)\times(A_2\cup B_2)} f\,d\mu\\ &\overset{(9.3.3)}{\leqslant} C\,\|f\|_{L_1}\big(\mu\big((A_1\cup B_1)\times(A_2\cup B_2)\big)+2\eta\big)^{1/q}\\ &\leqslant C\,\|f\|_{L_1}(\mu(A)+8\eta^2+2\eta)^{1/q} \leqslant C\,\|f\|_{L_1}(\mu(A)+6\eta)^{1/q}\end{aligned}$$

και η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης. ■

Τα Λήμματα 9.3.1 και 9.3.2 θα χρησιμοποιηθούν στην απόδειξη του επόμενου αποτελέσματος.

Λήμμα 9.3.3. *Υπάρχουν αλγόριθμος και πολυώνυμο Π_2 ώστε να ισχύει το εξής. Έστω $0 < \varepsilon < 1/2$ και $C \geqslant 1$. Για $1 < p \leqslant \infty$, θέτουμε $p^\dagger = \min\{2, p\}$ και γράφουμε q για τον συζυγή εκθέτη του $p^\dagger$. Θεωρούμε τον a_0 της Πρότασης 9.2.2, και θέτουμε*

$$\vartheta = \frac{a_0\,\varepsilon}{16C} \quad \textit{και} \quad \eta \leqslant \Big(\vartheta\cdot\iota(\mathcal{P})^{\frac{2}{p^\dagger}+1}\Big)^q.$$

Αν εισάγουμε

INP1: μια διαμέριση $\mathcal{P}$ του $[n_1]\times[n_2]$ με $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}$,

INP2: ένα υποσύνολο A του $[n_1]\times[n_2]$ με $A\in\mathcal{S}$, και

INP3: έναν (C,η,p)-κανονικό πίνακα $f\colon [n_1]\times[n_2]\to\{0,1\}$,

τότε ο αλγόριθμος εξάγει

OUT1: μια εκλέπτυνση $\mathcal{Q}$ της $\mathcal{P}$ με $\mathcal{Q}\subseteq\mathcal{S}$, $|\mathcal{Q}|\leqslant 4|\mathcal{P}|$ και $\iota(\mathcal{Q}) \geqslant (\vartheta\cdot\iota(\mathcal{P})^{\frac{2}{p^\dagger}+1})^q$, και

OUT2: ένα σύνολο $B\in\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ τέτοιο ώστε

$$\int_{A\triangle B}\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\,d\mu \leqslant 2C\,\|f\|_{L_1}\vartheta \quad \textit{και} \quad \int_{A\triangle B} f\,d\mu \leqslant 6C\,\|f\|_{L_1}\vartheta. \tag{9.3.4}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι ο πίνακας f του INP3 ικανοποιεί την

$$\Big|\int_A \big(f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\big)\,d\mu\Big| \geqslant a_0\,\varepsilon\,\|f\|_{L_1}, \tag{9.3.5}$$

τότε η διαμέριση $\mathcal{Q}$ του OUT2 ικανοποιεί την

$$\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}) - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_{p^\dagger}} \geqslant \frac{a_0\,\varepsilon\,\|f\|_{L_1}}{2}. \tag{9.3.6}$$

Τέλος, αυτός ο αλγόριθμος έχει χρόνο εκτέλεσης $|\mathcal{P}|\cdot\Pi_2(n_1\cdot n_2)$.

Το Λήμμα 9.3.3 είναι μια αλγοριθμική εκδοχή του [35, Λήμματα 5.1 και 5.2]. Παρατηρούμε ότι αν ο πίνακας f ικανοποιεί την εκτίμηση στην (9.3.5), τότε από την ανισότητα (9.3.6) έπεται ότι η διαμεριση $\mathcal{Q}$ είναι γνήσια εκλέπτυνση της $\mathcal{P}$. Τονίζουμε επίσης ότι το πολυώνυμο Π_2 που εξασφαλίζεται από το Λήμμα 9.3.3 είναι απόλυτο και ανεξάρτητο από τις παραμέτρους ε, C και p. Προχωράμε στην απόδειξη.

Απόδειξη του Λήμματος 9.3.3. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το A είναι μη κενό. Επιλέγουμε $A_1 \subseteq [n_1]$ και $A_2 \subseteq [n_2]$ τέτοια ώστε $A = A_1 \times A_2$, και θέτουμε

$$\theta = \vartheta^q \cdot \iota(\mathcal{P})^{\frac{2q}{p^\dagger}}.$$

Επίσης ορίζουμε

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}^1 &= \{P = P_1\times P_2 \in \mathcal{P}\colon \mu_1(A_1\cap P_1) < \theta\mu_1(P_1) \text{ και } \mu_2(A_2\cap P_2) < \theta\mu_2(P_2)\},\\
\mathcal{P}^2 &= \{P = P_1\times P_2 \in \mathcal{P}\colon \mu_1(A_1\cap P_1) < \theta\mu_1(P_1) \text{ και } \mu_2(A_2\cap P_2) \geqslant \theta\mu_2(P_2)\},\\
\mathcal{P}^3 &= \{P = P_1\times P_2 \in \mathcal{P}\colon \mu_1(A_1\cap P_1) \geqslant \theta\mu_1(P_1) \text{ και } \mu_2(A_2\cap P_2) < \theta\mu_2(P_2)\},\\
\mathcal{P}^4 &= \{P = P_1\times P_2 \in \mathcal{P}\colon \mu_1(A_1\cap P_1) \geqslant \theta\mu_1(P_1) \text{ και } \mu_2(A_2\cap P_2) \geqslant \theta\mu_2(P_2)\}.
\end{aligned}$$

Είναι σαφές ότι η οικογένεια $\{\mathcal{P}^1,\mathcal{P}^2,\mathcal{P}^3,\mathcal{P}^4\}$ είναι εκλέπτυνση της $\mathcal{P}$.

Τώρα, για κάθε $P\in\mathcal{P}$ εκτελούμε την ακόλουθη υπορουτίνα. Πρώτα, υποθέτουμε ότι $P \in \mathcal{P}^1\cup\mathcal{P}^2\cup\mathcal{P}^3$ και παρατηρούμε ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε $\boldsymbol{\mu}(A\cap P) \leqslant \theta\boldsymbol{\mu}(P)$. Τότε θέτουμε $B_P = \emptyset$ και $\mathcal{Q}_P = \{P\}$. Από την άλλη πλευρά, αν $P = P_1\times P_2 \in \mathcal{P}^4$, τότε εφαρμόζουμε το Λήμμα 9.3.1 για τα $X_1 = P_1$ και $X_2 = P_2$, και παίρνουμε[4] μια διαμέριση $\mathcal{Q}_P$ του P με $\mathcal{Q}\in\mathcal{S}$, $|\mathcal{Q}_P| \leqslant 4$ και $\iota(\mathcal{Q}_P) \geqslant \theta\cdot\iota(\mathcal{P})$, και ένα σύνολο $B_P \in \mathcal{Q}_P$ τέτοιο ώστε $A\cap P \subseteq B_P$ και $\boldsymbol{\mu}(B_P\setminus(A\cap P)) \leqslant 2\theta\boldsymbol{\mu}(P)$.

Αφού γίνει αυτό, ο αλγόριθμος εξάγει

$$\mathcal{Q} = \bigcup_{P\in\mathcal{P}} \mathcal{Q}_P \quad \text{και} \quad B = \bigcup_{P\in\mathcal{P}} B_P.$$

Παρατηρήστε ότι υπάρχει πολυώνυμο Π_2 τέτοιο ώστε αυτός ο αλγόριθμος να τρέχει σε χρόνο $|\mathcal{P}|\cdot\Pi_2(n_1\cdot n_2)$. Πράγματι, θυμηθείτε ότι ο αλγόριθμος του Λήμματος 9.3.1 τρέχει σε πολυωνυμικό χρόνο και παρατηρήστε ότι έχουμε εφαρμόσει το Λήμμα 9.3.1 το πολύ $|\mathcal{P}|$ φορές.

Δείχνουμε τώρα ότι η διαμέριση $\mathcal{Q}$ και το σύνολο B ικανοποιούν τις απαιτήσεις του λήμματος. Για το σκοπό αυτό, παρατηρούμε αρχικά ότι η $\mathcal{Q}$ ικανοποιεί τις απαιτήσεις στην OUT1. Επιπλέον, έχουμε $B\in\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ και

$$A \triangle B = \Big(\bigcup_{i=1}^{3}\bigcup_{P\in\mathcal{P}^i}(A\cap P)\Big) \cup \Big(\bigcup_{P\in\mathcal{P}^4}\big(B_P\setminus(A\cap P)\big)\Big). \tag{9.3.7}$$

[4] Παρατηρήστε ότι για κάθε $A\subseteq X_1$ έχουμε $\mu_{X_1}(A) = \mu_1(A)/\mu_1(X_1)$, και όμοια για το X_2.

Συνεπώς,

$$\mu(A \triangle B) \leqslant 2\theta \tag{9.3.8}$$

και έτσι, από την L_p κανονικότητα της f, την ανισότητα Hölder, τη μονοτονία των L_p νορμών και το γεγονός ότι $p^\dagger \leqslant p$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{A\triangle B} \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\,d\mu &\leqslant \|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_{p^\dagger}} \cdot \mu(A\triangle B)^{1/q} \leqslant \|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_p} \cdot \mu(A\triangle B)^{1/q}\\ &\leqslant C\,\|f\|_{L_1}(2\theta)^{1/q} \leqslant 2C\,\|f\|_{L_1}\vartheta\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει την πρώτη ανισότητα στην (9.3.4). Για τη δεύτερη ανισότητα, από την (9.3.7), έχουμε

$$\int_{A\triangle B} f\,d\mu = \sum_{P\in\mathcal{P}^1\cup\mathcal{P}^2\cup\mathcal{P}^3} \int_{A\cap P} f\,d\mu + \sum_{P\in\mathcal{P}^4} \int_{B_P\setminus(A\cap P)} f\,d\mu \tag{9.3.9}$$

και, από τον ορισμό του θ και το γεγονός ότι $\eta \leqslant (\vartheta\cdot\iota(\mathcal{P})^{\frac{2}{p^\dagger}+1})^q$, έχουμε $\eta \leqslant \theta\mu(P)$ για κάθε $P\in\mathcal{P}$. Έτσι, αν $P\in\mathcal{P}^1\cup\mathcal{P}^2\cup\mathcal{P}^3$, τότε από το Λήμμα 9.3.2 και την υπόθεσή μας ότι η f είναι (C,η,p)-κανονική (και συνεπώς $(C,\eta,p^\dagger)$-κανονική), έχουμε

$$\int_{A\cap P} f\,d\mu \leqslant C\,\|f\|_{L_1}(\mu(A\cap P)+6\eta)^{1/q} \leqslant 3C\,\|f\|_{L_1}\big(\theta\mu(P)\big)^{1/q}$$

το οποίο μας δίνει

$$\sum_{P\in\mathcal{P}^1\cup\mathcal{P}^2\cup\mathcal{P}^3} \int_{A\cap P} f\,d\mu \leqslant 3C\,\|f\|_{L_1}\,\theta^{1/q} \sum_{P\in\mathcal{P}^1\cup\mathcal{P}^2\cup\mathcal{P}^3} \mu(P)^{1/q}. \tag{9.3.10}$$

Από την άλλη πλευρά, από την επιλογή της οικογένειας $\{B_P : P\in\mathcal{P}^4\}$ και το Λήμμα 9.3.2,

$$\sum_{P\in\mathcal{P}^4} \int_{B_P\setminus(A\cap P)} f\,d\mu \leqslant 6C\,\|f\|_{L_1}\,\theta^{1/q} \sum_{P\in\mathcal{P}^4} \mu(P)^{1/q}. \tag{9.3.11}$$

Επιπλέον, αφού $q\geqslant 2$ έχουμε ότι η $x^{1/q}$ είναι κοίλη στο $\mathbb{R}^+$, άρα

$$\sum_{P\in\mathcal{P}} \mu(P)^{1/q} \leqslant |\mathcal{P}|^{\frac{1}{p^\dagger}} \leqslant \iota(\mathcal{P})^{-\frac{2}{p^\dagger}}. \tag{9.3.12}$$

Συνδυάζοντας τις (9.3.10)–(9.3.12), βλέπουμε ότι ικανοποιείται η δεύτερη ανισότητα στην (9.3.4).

Τέλος, υποθέτουμε ότι ο πίνακας f ικανοποιεί την (9.3.5). Από την (9.3.4) και την επιλογή του ϑ,

$$\begin{aligned}&\Big|\int_A \big(f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\big)\,d\mu - \int_B \big(f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\big)\,d\mu\Big|\\ &\qquad\leqslant \int_{A\triangle B}\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\,d\mu + \int_{A\triangle B} f\,d\mu \leqslant \frac{a_0\,\varepsilon\,\|f\|_{L_1}}{2}\end{aligned}$$

άρα, από την (9.3.5), έχουμε

$$\Big|\int_B \big(f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\big)\,d\mu\Big| \geqslant \frac{a_0\,\varepsilon\,\|f\|_{L_1}}{2}. \tag{9.3.13}$$

Επιπλέον, το γεγονός ότι $B\in\mathcal{A}_{\mathcal{Q}}$ μας δίνει

$$\int_B \big(f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\big)\,d\mu = \int_B \big(\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{Q}})-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\big)\,d\mu. \tag{9.3.14}$$

Συνεπώς, από τη μονοτονία των L_p νορμών, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}&\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{Q}})-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_{p^\dagger}} \geqslant \|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{Q}})-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_1}\\ &\geqslant \Big|\int_B \big(\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{Q}})-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\big)\,d\mu\Big| \overset{(9.3.14)}{=} \Big|\int_B \big(f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\big)\,d\mu\Big| \overset{(9.3.13)}{\geqslant} \frac{a_0\,\varepsilon\,\|f\|_{L_1}}{2}\end{aligned}$$

και η απόδειξη του Λήμματος 9.3.3 είναι πλήρης. ■

9.4 Απόδειξη του Θεωρήματος 9.1.3

Θα περιγράψουμε έναν αναδρομικό αλγόριθμο που εκτελεί τα ακόλουθα βήματα. Ξεκινώντας από την τετριμμένη διαμέριση του $[n_1]\times[n_2]$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 9.3.3 ο αλγόριθμος θα παράξει μια γνησίως αύξουσα οικογένεια από διαμερίσεις του $[n_1]\times[n_2]$. Συγχρόνως, χρησιμοποιώντας την Πρόταση 9.2.2, ο αλγόριθμος θα ελέγχει αν η διαμέριση που παράγεται σε κάθε βήμα ικανοποιεί τις προϋποθέσεις στο OUT του Θεωρήματος 9.1.3. Το γεγονός ότι ο αλγόριθμος θα σταματήσει τελικά, προκύπτει από την Πρόταση 9.2.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος9.1.3. Θεωρούμε a_0 όπως στην Πρόταση 9.2.2, και θέτουμε

$$\vartheta=\frac{a_0\,\varepsilon}{16C},\quad \tau=\Big\lceil\frac{4C^2}{(p^\dagger-1)\,\varepsilon^2\,a_0^2}\Big\rceil \ \text{ και }\ \eta=\vartheta^{\sum_{i=1}^{\tau+1}(\frac{2}{p^\dagger}+1)^{i-1}q^i}. \tag{9.4.1}$$

Σταθεροποιούμε επίσης έναν (C,η,p)-κανονικό πίνακα $f\colon[n_1]\times[n_2]\to\{0,1\}$. Ο αλγόριθμος εκτελεί τα ακόλουθα βήματα.

ΑρχικοΒημα: Θέτουμε $\mathcal{P}_0=\{[n_1]\times[n_2]\}$ και εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της Πρότασης 9.2.2 για τον πίνακα $f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_0})$. Επομένως παίρνουμε ένα σύνολο $A_0\subseteq[n_1]\times[n_2]$ με $A_0\in\mathcal{S}$ και τέτοιο ώστε

$$(n_1 n_2)\Big|\int_{A_0}\big(f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_0})\big)\,d\mu\Big| \geqslant a_0\|f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_0})\|_{\square}.$$

Αν $|\int_{A_0}\big(f-\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_0})\big)\,d\mu|\leqslant a_0\,\varepsilon\,\|f\|_{L_1}$, τότε ο αλγόριθμος εξάγει τη διαμέριση $\mathcal{P}_0$ και Σταματάει. Αλλιώς, ο αλγόριθμος θέτει $m=1$ και μπαίνει στον ακόλουθο βρόχο.

ΓενικοΒημα: Στον αλγόριθμο εισάγουμε έναν θετικό ακέραιο $m\in[\tau-1]$, μια διαμέριση [5] $\mathcal{P}_{m-1}\subseteq\mathcal{S}$ και ένα σύνολο $A_{m-1}\subseteq[n_1]\times[n_2]$ με $A_{m-1}\in\mathcal{S}$, τέτοιο ώστε

[5] Ας παρατηρήσουμε ότι $\mathcal{P}_0\subseteq\mathcal{S}$ και $\iota(\mathcal{P}_0)=1$.

(α) $|\mathcal{P}_{m-1}| \leqslant 4^m$,

(β) $\big(\vartheta \cdot \iota(\mathcal{P}_{m-1})^{\frac{2}{p^\dagger}+1}\big)^q \geqslant \vartheta^{\sum_{i=1}^{m}(\frac{2}{p^\dagger}+1)^{i-1}q^i}$, και

(ς) $|\int_{A_{m-1}} \big(f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{m-1}})\big)\, d\mu| > a_0\, \varepsilon\, \|f\|_{L_1}$.

Από το (β) και την επιλογή του η στην (9.4.1), έχουμε ότι $\eta \leqslant \big(\vartheta \cdot \iota(\mathcal{P}_{m-1})^{\frac{2}{p^\dagger}+1}\big)^q$. Το γεγονός αυτό σε συνδυασμό με την επιλογή του ϑ στην (9.4.1) μας επιτρέπει να εκτελέσουμε τον αλγόριθμο του Λήμματος 9.3.3 για τον πίνακα f, τη διαμέριση $\mathcal{P}_{m-1}$ και το σύνολο A_{m-1}. Επομένως παίρνουμε μια εκλέπτυνση $\mathcal{P}_m$ της $\mathcal{P}_{m-1}$ με $\mathcal{P}_m \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{P}_m| \leqslant 4|\mathcal{P}_{m-1}|$, $\iota(\mathcal{P}_m) \geqslant \big(\vartheta \cdot \iota(\mathcal{P}_{m-1})^{\frac{2}{p^\dagger}+1}\big)^q$, και τέτοια ώστε

$$\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_m}) - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{m-1}})\|_{L_{p^\dagger}} \geqslant \frac{a_0\, \varepsilon\, \|f\|_{L_1}}{2}.$$

Στη συνέχεια εφαρμόζουμε τον αλγόριθμο της Προτασης 9.2.2 για τον πίνακα $f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_m})$, και παίρνουμε ένα σύνολο $A_m \subseteq [n_1] \times [n_2]$ με $A_m \in \mathcal{S}$ και τέτοιο ώστε

$$(n_1 n_2)\left|\int_{A_m} \big(f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_m})\big)\, d\mu\right| \geqslant a_0\, \|f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_m})\|_{\square}.$$

Αν $|\int_{A_m} \big(f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_m})\big)\, d\mu| \leqslant a_0\, \varepsilon\, \|f\|_{L_1}$, τότε ο αλγόριθμος εξάγει μια διαμέριση $\mathcal{P}_m$ και Σταματαει. Αλλιώς, αν $m < \tau - 1$, τότε ο αλγόριθμος πέφτει στο βρόχο που περιγράψαμε παραπάνω για τον ακέραιο $m+1$, τη διαμέριση $\mathcal{P}_m$ και το σύνολο A_m, ενώ αν $m = \tau - 1$ τότε ο αλγόριθμος προχωρά στο ακόλουθο βήμα.

ΤελικοΒημα: Στον αλγόριθμο έχουμε σαν είσοδο μια διαμέριση $\mathcal{P}_{\tau-1} \subseteq \mathcal{S}$ και ένα σύνολο $A_{\tau-1} \subseteq [n_1] \times [n_2]$ με $A_{\tau-1} \in \mathcal{S}$, τέτοιο ώστε

(δ) $|\mathcal{P}_{\tau-1}| \leqslant 4^{\tau-1}$,

(ε) $\big(\vartheta \cdot \iota(\mathcal{P}_{\tau-1})^{\frac{2}{p^\dagger}+1}\big)^q \geqslant \vartheta^{\sum_{i=1}^{\tau}(\frac{2}{p^\dagger}+1)^{i-1}q^i}$, και

(στ) $|\int_{A_{\tau-1}} \big(f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\tau-1}})\big)\, d\mu| > a_0\, \varepsilon\, \|f\|_{L_1}$.

Παρατηρούμε και πάλι ότι από την (ε) και την επιλογή του η στην (9.4.1), έχουμε $\eta \leqslant \big(\vartheta \cdot \iota(\mathcal{P}_{\tau-1})^{\frac{2}{p^\dagger}+1}\big)^q$. Σύμφωνα με το γεγονός αυτό και την επιλογή του ϑ στην (9.4.1), μπορούμε να εφαρμόσουμε τον αλγόριθμο του Λήμματος 9.3.3 για τον πίνακα f, τη διαμέριση $\mathcal{P}_{\tau-1}$ και το σύνολο $A_{\tau-1}$. Επομένως, παίρνουμε μια εκλέπτυνση $\mathcal{P}_\tau$ της $\mathcal{P}_{\tau-1}$ με $\mathcal{P}_\tau \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{P}_\tau| \leqslant 4|\mathcal{P}_{\tau-1}|$, $\iota(\mathcal{P}_\tau) \geqslant \big(\vartheta \cdot \iota(\mathcal{P}_{\tau-1})^{\frac{2}{p^\dagger}+1}\big)^q$, και τέτοια ώστε

$$\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_\tau}) - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\tau-1}})\|_{L_{p^\dagger}} \geqslant \frac{a_0\, \varepsilon\, \|f\|_{L_1}}{2}.$$

Ο αλγόριθμος εξάγει την διαμέριση $\mathcal{P}_\tau$ και Σταματαει.

Παρατηρούμε ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο Π_0 τέτοιο ώστε ο προηγούμενος αλγόριθμος να τρέχει σε χρόνο $(\tau 4^\tau) \cdot \Pi_0(n_1 n_2)$. Πράγματι, από την Πρόταση 9.2.2, υπάρχει ένα πολυώνυμο Π_0' τέτοιο ώστε το ΑρχικοΒημα να τρέχει σε χρόνο $\Pi_0'(n_1 n_2)$. Επιπλέον από τους χρόνους που τρέχουν οι αλγόριθμοι στο Λήμμα 9.3.3 και την Πρόταση 9.2.2, υπάρχει ένα πολυώνυμο Π_0'' έτσι ώστε το ΓενικοΒημα να τρέχει σε χρόνο $4^\tau \cdot \Pi_0''(n_1 n_2)$. Τέλος, χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 9.3.3, βλέπουμε ότι υπάρχει πολυώνυμο Π_0''' έτσι ώστε το ΤελικοΒημα να τρέχει σε χρόνο $\Pi_0'''(n_1 n_2)$. Συνεπώς, ο αλγόριθμος που περιγράψαμε παραπάνω τρέχει σε χρόνο

$$\Pi_0'(n_1 \cdot n_2) + (\tau - 1)\, 4^\tau\, \Pi_0''(n_1 \cdot n_2) + \Pi_0'''(n_1 \cdot n_2)$$

το οποίο με τη σειρά του δίνει ότι υπάρχει ένα πολυώνυμο Π_0 τέτοιο ώστε ο αλγόριθμος να τρέχει σε χρόνο $(\tau\, 4^\tau) \cdot \Pi_0(n_1 \cdot n_2)$.

Απομένει λοιπόν να επαληθεύσουμε ότι ο προηγούμενος αλγόριθμος θα παράξει μια διαμέριση που ικανοποιεί τις προϋποθέσεις στο OUT του Θεωρήματος 9.1.3. Όπως σημειώθηκε, το επιχείρημα βασίζεται στην Πρόταση 9.2.1 και μπορούμε να το δούμε σαν την L_p εκδοχή της αποκαλούμενης μεθόδου αύξησης της ενέργειας (δείτε για παράδειγμα, [86, Λήμματα 10.40 και 11.31]). Για περισσότερες πληροφορίες και εφαρμογές της μεθόδου παραπέμπουμε στα [34, 35, 37].

Ας δούμε τις λεπτομέρειες του επιχειρήματος. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο αλγόριθμος έχει σταματήσει πριν το ΤελικοΒημα. Τότε ο αλγόριθμος εξάγει μια διαμέριση όπως αυτή περιγράφηκε στο ΑρχικοΒημα και στο ΓενικοΒημα, έστω $\mathcal{P}_m$ για κάποιο $m \in \{0, \dots, \tau-1\}$. Παρατηρούμε ότι η $\mathcal{P}_m$ ικανοποιεί $\mathcal{P}_m \subseteq \mathcal{S}$, $|\mathcal{P}_m| \leqslant 4^m$, και $\iota(\mathcal{P}_m) \geqslant \eta$. Με άλλα λόγια η $\mathcal{P}_m$ ικανοποιεί τις τρεις πρώτες προϋποθέσεις στο OUT του Θεωρήματος 9.1.3. Επιπλέον, υπάρχει ένα σύνολο $A_m \subseteq [n_1] \times [n_2]$ με $A_m \in \mathcal{S}$, και τέτοιο ώστε

$$(n_1 \cdot n_2)\Big| \int_{A_m} \big(f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_m})\big)\, d\mu \Big| \geqslant a_0\, \|f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_m})\|_\square.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού το εξαγόμενο του αλγόριθμου είναι η διαμέριση $\mathcal{P}_m$, έχουμε ότι

$$|\int_{A_m} \big(f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_m})\big)\, d\mu| \leqslant a_0\, \varepsilon\, \|f\|_{L_1}.$$

Συνδυάζοντας τις παραπάνω εκτιμήσεις παίρνουμε $\|f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_m})\|_\square \leqslant \varepsilon \|f\|_\square$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι ο αλγόριθμος φτάνει στο ΤελικοΒημα. Όμως, $\mathcal{P}_\tau \subseteq \mathcal{S}$ και παρατηρούμε ότι από το (δ) και το γεγονός ότι $|\mathcal{P}_\tau| \leqslant 4|\mathcal{P}_{\tau-1}|$, έχουμε $|\mathcal{P}_\tau| \leqslant 4^\tau$. Επιπλέον, από το (ε) και την επιλογή του η στην (9.1.2),

$$\iota(\mathcal{P}_\tau) \geqslant \big(\vartheta \cdot \iota(\mathcal{P}_{\tau-1})^{\frac{2}{p^\dagger}+1}\big)^q \geqslant \vartheta^{\sum_{i=1}^{\tau} (\frac{2}{p^\dagger}+1)^{i-1} q^i} \geqslant \eta. \tag{9.4.2}$$

Επομένως, μένει να δείξουμε ότι $\|f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_\tau})\|_\square \leqslant \varepsilon \|f\|_\square$. Πράγματι, υποθέτουμε προς άτοπο ότι $\|f - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_\tau})\|_\square > \varepsilon \|f\|_\square$. Παρατηρούμε ότι από την επιλογή του η στις (9.4.1) και (9.4.2), έχουμε $(\vartheta \cdot \iota(\mathcal{P}_\tau)^{\frac{2}{p^\dagger}+1})^q \geqslant \eta$. Χρησιμοποιώντας τις δύο προηγούμενες εκτιμήσεις της Πρότασης 9.2.2 και του Λήμματος 9.3.3, και ακριβώς όπως στο ΓενικοΒημα, μπορούμε να επιλέξουμε μια εκλέπτυνση $\mathcal{P}_{\tau+1}$ της $\mathcal{P}_\tau$ με $\mathcal{P}_{\tau+1} \subseteq \mathcal{S}$ και $\iota(\mathcal{P}_{\tau+1}) \geqslant \eta$, και τέτοια ώστε $\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\tau+1}}) - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_\tau})\|_{L_{p^\dagger}} \geqslant (a_0\, \varepsilon\, \|f\|_{L_1})/2$. Έπεται ότι υπάρχει μια αύξουσα πεπερασμένη ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{P}_i)_{i=0}^{\tau+1}$ με $\mathcal{P}_0 = \{[n_1] \times [n_2]\}$ και τέτοια ώστε για κάθε $i \in [\tau+1]$ να έχουμε $\mathcal{P}_i \subseteq \mathcal{S}$, $\iota(\mathcal{P}_i) \geqslant \eta$, και

$$\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_i}) - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{i-1}})\|_{L_{p^\dagger}} \geqslant \frac{a_0\, \varepsilon\, \|f\|_{L_1}}{2}. \tag{9.4.3}$$

Θέτουμε τώρα $d_0 = \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_0})$ και $d_i = \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_i}) - \mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{i-1}})$ για κάθε $i \in [\tau+1]$, και παρατηρούμε ότι η ακολουθία $(d_i)_{i=0}^{\tau+1}$ είναι μια ακολουθία διαφορών `martingale`. Επομένως από την Πρόταση 9.2.1 και το γεγονός ότι ο πίνακας f είναι (C,η,p)-κανονικός, έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{a_0\,\varepsilon\,\|f\|_{L_1}}{2}\cdot\sqrt{\tau+1} &\overset{(9.4.3)}{\leqslant} \Big(\sum_{i=1}^{\tau+1}\|d_i\|_{L_{p^\dagger}}^2\Big)^{1/2} \leqslant \Big(\sum_{i=0}^{\tau+1}\|d_i\|_{L_{p^\dagger}}^2\Big)^{1/2}\\
&\overset{(9.2.1)}{\leqslant} \frac{1}{\sqrt{p^\dagger-1}}\,\Big\|\sum_{i=0}^{\tau+1} d_i\Big\|_{L_{p^\dagger}} = \frac{1}{\sqrt{p^\dagger-1}}\,\|\mathbb{E}(f\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}_{\tau+1}})\|_{L_{p^\dagger}}\\
&\leqslant \frac{C}{\sqrt{p^\dagger-1}}\,\|f\|_{L_1}
\end{aligned}$$

που αντιβαίνει στην επιλογή του τ στην (9.1.2). Επομένως ολοκληρώνεται η απόδειξη του Θεωρήματος 9.1.3 ■

9.5 Εφαρμογές

9.5α΄ Αλγόριθμοι προσέγγισης τανυστών

Σε αυτή την υποενότητα έστω $k \geqslant 2$ ένας ακέραιος. Επιπλέον οι $n_1,\dots,n_k$ είναι θετικοί ακέραιοι και με μ_k συμβολίζουμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στο $[n_1]\times\cdots\times[n_k]$.

Ένας k-*διάστατος τανυστής* είναι μια συνάρτηση $F\colon [n_1]\times\cdots\times[n_k]\to\mathbb{R}$. (Ας παρατηρήσουμε, ειδικότερα, ότι ένας 2-διάστατος τανυστής είναι ένας πίνακας.) Επίσης, ένας τανυστής $G\colon [n_1]\times\cdots\times[n_k]\to\mathbb{R}$ λέγεται *περιορισμένος τανυστής* αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός c και για κάθε $i\in[k]$ ένα υποσύνολο S_i τύπου $[n_i]$ ώστε $G = c\cdot \mathbf{1}_{S_1\times\cdots\times S_k}$. Τέλος, για κάθε τανυστή $F\colon [n_1]\times\cdots\times[n_k]\to\mathbb{R}$ η *περιορισμένη νόρμα* του ορίζεται ως

$$\|F\|_\square = \Big(\prod_{i=1}^{k} n_i\Big)\cdot\max\Big\{\Big|\int_{S_1\times\cdots\times S_k} F\,d\mu_k\Big| : S_i\subseteq[n_i]\ \text{ για κάθε }\ i\in[k]\Big\}.$$

Στη συνέχεια θέτουμε

$$k_1 := \lfloor k/2\rfloor,\quad A_k := [n_1]\times\cdots\times[n_{k_1}]\ \text{ και }\ B_k := [n_{k_1+1}]\times\cdots\times[n_k], \tag{9.5.1}$$

και για κάθε τανυστή $F\colon [n_1]\times\cdots\times[n_k]\to\{0,1\}$ θεωρούμε τον *αντίστοιχο πίνακα* f_F του F $f_F\colon A_k\times B_k\to\{0,1\}$ που ορίζεται από την

$$f_F\big((i_1,\dots,i_{k_1}),(i_{k_1+1},\dots,i_k)\big) = F(i_1,\dots,i_k) \tag{9.5.2}$$

για κάθε $\big((i_1,\dots,i_{k_1}),(i_{k_1+1},\dots,i_k)\big)\in A_k\times B_k = [n_1]\times\cdots\times[n_k]$.

Όπως στο [29], επεκτείνουμε την έννοια της L_p κανονικότητας από τους πίνακες στους τανυστές ως εξής.

Ορισμός 9.5.1 (L_p κανονικοί τανυστές). Έστω $0<\eta\leqslant 1$, $C\geqslant 1$ και $1\leqslant p\leqslant\infty$. Ένας τανυστής $F\colon [n_1]\times\cdots\times[n_k]$ λέγεται (C,η,p)-*κανονικός* αν ο αντίστοιχος πίνακας f_F είναι (C,η,p)-κανονικός, δηλαδή, αν για κάθε διαμέριση $\mathcal{P}$ του $A_k\times B_k$ με $\mathcal{P}\subseteq\mathcal{S}_{A_k\times B_k}$ και $\iota(\mathcal{P})\geqslant\eta$ έχουμε $\|\mathbb{E}(f_F\,|\,\mathcal{A}_{\mathcal{P}})\|_{L_p}\leqslant C$.

Για να διατυπώσουμε το βασικό αποτέλεσμα για τους L_p κανονικούς τελεστές, χρειάζεται να εισάγουμε κάποιες αριθμητικές σταθερές. Συγκεκριμένα, έστω $\varepsilon > 0$ και $C \geqslant 1$. Επίσης θεωρούμε $1 < p \leqslant \infty$, και θέτουμε $p^\dagger = \min\{2, p\}$. Με q συμβολίζουμε τον συζυγή εκθέτη του $p^\dagger$. Τέλος, θεωρούμε a_1, a_2 όπως στο Θεώρημα 9.1.3, και ορίζουμε

$$\tau(\varepsilon, C, p) = \left\lceil \frac{a_1 C^2}{(p^\dagger - 1)\,\varepsilon^2} \right\rceil \ \text{ και } \ \eta(\varepsilon, C, p) = \left(\frac{a_2\,\varepsilon}{C}\right)^{\sum_{i=1}^{\tau(\varepsilon,C,p)+1}(\frac{2}{p^\dagger}+1)^{i-1} q^i}. \tag{9.5.3}$$

Έχουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 9.5.2. *Υπάρχει μια σταθερά* b*, ένας αλγόριθμος και ένα πολυώνυμο* Π_3 *τέτοια ώστε να ισχύει το ακόλουθο. Έστω* $0 < \varepsilon < 1/2$ *και* $C \geqslant 1$*. Θεωρούμε* $1 < p \leqslant \infty$, $\tau = \tau(\varepsilon/2, C, p)$ *και* $\eta = \eta(\varepsilon/2, C, p)$ *όπως στην* (9.5.3)*. Εάν εισάγουμε*

INP: έναν (C, η, p)*-κανονικό τανυστή* $F\colon [n_1] \times \cdots \times [n_k] \to \{0, 1\}$,

τότε ο αλγόριθμος εξάγει

OUT: περιορισμένους τανυστές $G_1, \dots, G_s$ *με* $s \leqslant \left(\frac{2b\,C}{\varepsilon\,\eta^2}\right)^{2(k-1)}$ *και τέτοιους ώστε*

$$\Big\|F - \sum_{i=1}^{s} G_i\Big\|_\square \leqslant \varepsilon \|F\|_\square \ \textit{ και } \ \sum_{i=1}^{s} \|G_i\|_{L_\infty}^2 \leqslant \left(\frac{C\,\|F\|_{L_1}}{\eta^2}\right)^2 b^{2k}. \tag{9.5.4}$$

Αυτός ο αλγόριθμος τρέχει σε χρόνο $\big(\tau\,4^\tau + \big(\frac{2C}{\varepsilon\eta^2}\big)^{3k}\big) \cdot \Pi_3\big(\prod_{i=1}^{k} n_i\big)$.

Το Θεώρημα 9.5.2 μπορεί να αποδειχθεί ακολουθώντας τα βήματα της απόδειξης στο [29, Θεώρημα 2] και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 9.1.3 αντί για το [29, Πόρισμα 1]. Οι λεπτομέρειες επαφίενται στον αναγνώστη.

9.5β΄ Προσέγγιση MAX-CSP στιγμιοτύπων

Σε ότι ακολουθεί οι n, k είναι θετικοί ακέραιοι με $k \leqslant n$.

Αν $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ είναι ένα σύνολο από Boolean μεταβλητές, ονομάζουμε *ανάθεση* σ στο V μια απεικόνιση $\sigma\colon V \to \{0, 1\}$. Παρατηρούμε ότι αν σ είναι μια ανάθεση στο V και $W \subseteq V$, τότε η $\sigma|_W\colon W \to \{0, 1\}$ είναι μια ανάθεση στο W. Επιπλέον, ένας k-*περιορισμός* είναι ένα ζεύγος (ϕ, V_ϕ) όπου $V_\phi \subseteq V$ με $|V_\phi| = k$ και η $\phi\colon \{0, 1\}^{V_\phi} \to \{0, 1\}$ δεν είναι ταυτοτικά ίση με το μηδέν. Τέλος, ένα k-*CSP στιγμιότυπο* στο V είναι μια οικογένεια από $\mathcal{F}$ k-περιορισμούς στο V.

Για κάθε k-CSP στιγμιότυπο $\mathcal{F}$ ορίζουμε

$$\mathrm{OPT}(\mathcal{F}) = \max_{\sigma \in \{0,1\}^V} \sum_{(\phi, V_\phi) \in \mathcal{F}} \phi(\sigma|_{V_\phi}). \tag{9.5.5}$$

Επιπλέον, έστω Ψ_k το σύνολο όλων των μη μηδενικών απεικονίσεων από το $\{0, 1\}^k$ στο $\{0, 1\}$. Έχουμε τον ακόλουθο ορισμόι.

Ορισμός 9.5.3. Έστω $\psi \in \Psi_k$ και (ϕ, V_ϕ) ένας k-περιορισμός στο V όπου $V_\phi = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ για κάποιο $1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n$. Θα λέμε ότι το ζεύγος (ϕ, V_ϕ) είναι *τύπου* ψ αν για κάθε ανάθεση $\sigma\colon V \to \{0,1\}$ έχουμε ότι

$$\psi\big(\sigma(x_{i_1}), \dots, \sigma(x_{i_k})\big) = \phi(\sigma|_{V_\phi}).$$

Παρατηρούμε ότι κάθε k-CSP στιγμιότυπο $\mathcal{F}$ μπορεί να παρασταθεί από μια οικογένεια $(F^{\psi}_{\mathcal{F}})_{\psi \in \Psi_k}$ αποτελούμενη από $2^{2^k} - 1$ τανυστές, όπου για κάθε $\psi \in \Psi_k$ ο τανυστής $F^{\psi}_{\mathcal{F}}\colon [n]^k \to \{0,1\}$ ορίζεται ως εξής:

$$F^{\psi}_{\mathcal{F}}(i_1, \dots, i_k) = \begin{cases} 1 & \text{αν υπάρχει } (\phi, V_\phi) \in \mathcal{F} \text{ τύπου } \psi \\ & \text{με } V_\phi = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}, \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases} \tag{9.5.6}$$

Έχοντας αυτή την αναπαράσταση στο μυαλό μας, λέμε ότι ένας k-περιορισμός $\mathcal{F}$ είναι (C, η, p)-κανονικός για κάποιους $0 < \eta \leqslant 1$, $C \geqslant 1$ και $1 \leqslant p \leqslant \infty$, υπό την προϋπόθεση ότι για κάθε $\psi \in \Psi_k$ ο τανυστής $F^{\psi}_{\mathcal{F}}$ που ορίστηκε παραπάνω είναι (C, η, p)-κανονικός.

Έχουμε λοιπόν το ακόλουθο θεώρημα το οποίο επεκτείνει το [29, Θεώρημα 3]. Για την απόδειξη του τελευταίου, αρκεί να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 9.5.2 χρησιμοποιώντας τα επιχειρήματα της απόδειξης στο [29, Θεώρημα 3]. Οι λεπτομέρειες επαφίενται στον αναγνώστη.

Θεώρημα 9.5.4. *Υπάρχει ένας αλγόριθμος, μια σταθερά $\gamma > 0$ και ένα πολυώνυμο Π_4 έτσι ώστε να ισχύει το ακόλουθο. Έστω k ένας θετικός ακέραιος, και $0 < \varepsilon < 1/2$, $C \geqslant 1$, $1 < p \leqslant \infty$. Θέτουμε $a = \varepsilon\, 2^{-(2^k+2k+2)}$, και ορίζουμε $\tau = \tau(a, C, p)$ και $\eta = \eta(a, C, p)$ όπως στην* (9.5.3). *Αν εισάγουμε*

INP: ένα (C, η, p)-κανονικό k-CSP στιγμιότυπο $\mathcal{F}$ επί του συνόλου $V = \{x_1, \dots, x_n\}$ που αποτελείται από Boolean μεταβλητές,

τότε ο αλγόριθμος εξάγει

OUT: μια ανάθεση $\sigma\colon V \to \{0,1\}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{(\phi, V_\phi) \in \mathcal{F}} \phi(\sigma|_{V_\phi}) \geqslant (1 - \varepsilon) \cdot \mathrm{OPT}(\mathcal{F}).$$

Ο αλγόριθμος αυτός τρέχει σε χρόνο

$$\Pi_4\left(n^k \cdot \exp\Big(k\, 2^k\, 2^{2^k} \big(\frac{2C}{\varepsilon\,\eta^2}\big)^{2k} \ln\big(\frac{2C}{\varepsilon\,\eta^2}\big)\Big)\right).$$

Βιβλιογραφία

[B-1] S. Brazitikos, *Brascamp-Lieb inequality and quantitative versions of Helly's theorem*, Mathematika **63** (2017), 272–291.

[B-2] S. Brazitikos, *Quantitative Helly-type theorem for the diameter of convex sets*, Discrete and Computational Geometry **57** (2017), 494–505.

[B-3] S. Brazitikos, A. Giannopoulos and D-M. Liakopoulos, *Uniform cover inequalities for the volume of coordinate sections and projections of convex bodies*, Advances in Geometry (to appear).

[B-4] S. Brazitikos, S. Dann, A. Giannopoulos and A. Koldobsky, *On the average volume of sections of convex bodies*, Israel Journal of Mathematics (to appear).

[B-5] S. Brazitikos and Th. Karageorgos, *An algorithmic regularity lemma for* L_p *regular sparse matrices*, SIAM Journal on Discrete Mathematics (to appear).

[B-6] S. Brazitikos and A. Giannopoulos, *Continuous version of the approximate geometric Brascamp-Lieb inequalities*, Preprint.

[B-7] S. Brazitikos, *Polynomial estimates towards a sharp Helly-type theorem for convex sets*, Preprint.

[1] N. Alon and A. Naor, *Approximating the cut-norm via Grothendieck's inequality*, Proc. 36th STOC (2004), 72-80.

[2] S. Artstein-Avidan, D. Florentin and Y. Ostrover, *Remarks about Mixed Discriminants and Volumes*, Communications in Contemporary Mathematics **16** (2014), no. 2, 1350031.

[3] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Vol. I*, Mathematical Surveys and Monographs **202**, Amer. Math. Society (2015).

[4] K. M. Ball, *Volumes of sections of cubes and related problems*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 251-260.

[5] K. M. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, J. London Math. Soc. (2) **44** (1991), 351-359.

[6] K. M. Ball, *Shadows of convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **327** (1991), 891-901.

[7] K. M. Ball, *Convex geometry and functional analysis*, Handbook of the geometry of Banach spaces, Vol. I, North-Holland, Amsterdam, (2001), 161-194.

[8] K. M. Ball and A. Pajor, *Convex bodies with few faces*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), no. 1, 225-231.

[9] K. Ball, E. A. Carlen and E. H. Lieb, *Sharp uniform convexity and smoothness inequalities for trace norms*, Invent. Math. 115 (1994), 463–482.

[10] R. B. Bapat, *Mixed discriminants of positive semidefinite matrices*, Linear Algebra Appl. **126** (1989), 107-124.

[11] I. Bárány, M. Katchalski and J. Pach, *Quantitative Helly-type theorems*, Proc. Amer. Math. Soc. **86** (1982), 109-114.

[12] I. Bárány, M. Katchalski and J. Pach, *Helly's theorem with volumes*, Amer. Math. Monthly **91** (1984), 362-365.

[13] F. Barthe, *Inégalités de Brascamp-Lieb et convexité*, C. R. Acad. Sci. Paris Ser. I Math. **324** (1997), no. 8, 885-888.

[14] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. Math. **134** (1998), 335-361.

[15] F. Barthe, *A continuous version of the Brascamp-Lieb inequalities*, Geometric aspects of functional analysis, 53-63, Lecture Notes in Math., **1850**, Springer, Berlin, 2004.

[16] A. Barvinok, *Thrifty approximations of convex bodies by polytopes*, Int. Math. Res. Not. IMRN **2014**, no. 16, 4341-4356.

[17] J. Batson, D. Spielman and N. Srivastava, *Twice-Ramanujan Sparsifiers*, STOC' 2009: Proceedings of the 41st annual ACM Symposium on Theory of Computing (ACM, New York, 2009), pp. 255-262.

[18] L. Berwald, *Verallgemeinerung eines Mittelswertsatzes von J. Favard, für positive konkave Functionen*, Acta Math. **79** (1947), 17-37.

[19] U. Betke and W. Weil, *Isoperimetric inequalities for the mixed area of plane convex sets*, Arch. Math. (Basel) **57** (1991), no. 5, 501-507.

[20] B. Bollobás and A. Thomason, *Projections of bodies and hereditary properties of hypergraphs*, Bull. London Math. Soc. **27** (1995), 417-424.

[21] B. Bollobás, S. Janson and O. Riordan, *The phase transition in inhomogeneous random graphs*, Random Structures and Algorithms 31 (2007), 3–122.

[22] C. Borgs, J. T. Chayes, H. Cohn and Y. Zhao, *An L^p theory of sparse graph convergence I: limits, sparse random graph models, and power law distributions*, preprint (2014), available at `arXiv:1401.2906`.

[23] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high-dimensional convex sets*, Geometric aspects of functional analysis (1989-90), Lecture Notes in Math., **1469** (Springer, Berlin, 1991) 127-137.

[24] J. Bourgain and V. D. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$*, Invent. Math. **88** (1987), 319-340.

[25] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse and its generalization to more than three functions*, Adv. in Math. **20** (1976), 151-173.

[26] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Mathematical Surveys and Monographs **196**, Amer. Math. Society (2014).

[27] Y. D. Burago and V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York (1988).

[28] B. Carl and A. Pajor, *Gelfand numbers of operators with values in a Hilbert space*, Invent. Math. **94** (1988), 479-504.

[29] A. Coja-Oghlan, C. Cooper and A. Frieze, *An efficient sparse regularity concept*, SIAM J. Discrete Math. 23 (2010), 2000–2034.

[30] N. Dafnis and G. Paouris, *Estimates for the affine and dual affine quermassintegrals of convex bodies*, Illinois J. of Math. **56** (2012), 1005-1021.

[31] J. A. De Loera, R. N. La Haye, D. Rolnick and P. Soberón, *Quantitative Tverberg, Helly and Carathéodory theorems*, Preprint.

[32] A. Dembo, T. Cover and J. Thomas, *Information-theoretic inequalities*, IEEE Trans. Inform. Theory **37** (1991), 1501-1518.

[33] P. Dodos and V. Kanellopoulos, *Ramsey Theory for Product Spaces*, Mathematical Surveys and Monographs, Vol. 212, American Mathematical Society, 2016.

[34] P. Dodos, V. Kanellopoulos and Th. Karageorgos, *Szemerédi's regularity lemma via martingales*, Electron. J. Comb. 23 (2016), Research Paper P3.11, 1–24.

[35] P. Dodos, V. Kanellopoulos and Th. Karageorgos, L_p *regular sparse hypergraphs*, Fund. Math. (to appear), available at `arxiv:1510.07139`.

[36] P. Dodos, V. Kanellopoulos and Th. Karageorgos, L_p *regular sparse hypergraphs: box norms*, preprint (2015), available at `arxiv:1510.07140`.

[37] P. Dodos, V. Kanellopoulos and K. Tyros, *A concentration inequality for product spaces*, J. Funct. Anal. 270 (2016), 609–620.

[38] A. Dvoretzky and C. A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci., U.S.A **36** (1950), 192-197.

[39] M. Fradelizi, A. Giannopoulos and M. Meyer, *Some inequalities about mixed volumes*, Israel J. Math. **135** (2003), 157-179.

[40] A. Frieze and R. Kannan, *Quick approximation to matrices and applications*, Combinatorica, 1999, 175-220.

[41] R. J. Gardner, *Geometric Tomography*, Second Edition. Encyclopedia of Mathematics and its Applications **58**, Cambridge University Press, Cambridge (2006).

[42] A. Giannopoulos, M. Hartzoulaki and G. Paouris, *On a local version of the Aleksandrov-Fenchel inequality for the quermassintegrals of a convex body*, Proc. Amer. Math. Soc. **130** (2002), 2403-2412.

[43] A. Giannopoulos, A. Koldobsky and P. Valettas, *Inequalities for the surface area of projections of convex bodies*, Canadian J. Math. (to appear).

[44] A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Extremal problems and isotropic positions of convex bodies*, Israel J. Math. **117** (2000), 29-60.

[45] A. Giannopoulos and M. Papadimitrakis, *Isotropic surface area measures*, Mathematika **46** (1999), 1-13.

[46] E. D. Gluskin, *Extremal properties of orthogonal parallelepipeds and their applications to the geometry of Banach spaces*, Mat. Sb. (N.S.) **136** (1988), 85-96.

[47] P. Goodey and W. Weil, *Intersection bodies and ellipsoids*, Mathematika **42** (1995), 295-304.

[48] P. Goodey, E. Lutwak and W. Weil, *Functional analytic characterization of classes of convex bodies*, Math. Z. **222** (1996), 363-381.

[49] E. L. Grinberg, *Isoperimetric inequalities and identities for* k*-dimensional cross-sections of convex bodies*, Math. Ann. **291** (1991), 75-86.

[50] J. Hastad, *Some optimal inapproximability results*, Journal of the ACM, 2001, 798-859.

[51] D. Hug and R. Schneider, *Reverse inequalities for zonoids and their application*, Adv. Math. **228** (2011), no. 5, 2634-2646.

[52] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187-204.

[53] S. Khot, G. Kindler, E. Mossel and R. O' Donnell, *Optimal inapproximability results for MAX-CUT and other 2-variable CSP's*, Proc. 45th FOCS, 2004, 146-154.

[54] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1274-1290.

[55] Y. Kohayakawa and V. Rödl, *Szemerédi's regularity lemma and quasi-randomness*, Recent Advances in Algorithms and Combinatorics, CMS Books in Mathematics, Vol. 11, Springer, 2003, 289-351.

[56] Y. Kohayakawa, *Szemerédi's regularity lemma for sparse graphs*, Foundations of Computational Mathematics, Springer, 1997, 216-230.

[57] A. Koldobsky, *Fourier analysis in convex geometry*, Mathematical Surveys and Monographs **116**, Amer. Math. Society (2005).

[58] A. Koldobsky, *Stability and separation in volume comparison problems*, Math. Model. Nat. Phenom. **8** (2013), 156-169.

[59] A. Koldobsky, *Slicing inequalities for measures of convex bodies,* Adv. Math. **283** (2015), 473–488.

[60] A. Koldobsky, *Slicing inequalities for subspaces of* L_p, Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), 787–795.

[61] A. Koldobsky and A. Pajor, *A remark on measures of sections of* L_p*-balls*, Geometric aspects of functional analysis, 213-220, Lecture Notes in Math., **2169**, Springer, Cham, 2017.

[62] A. Koldobsky, G. Paouris and M. Zymonopoulou, *Isomorphic properties of intersection bodies*, J. Funct. Anal. **261** (2011), 2697-2716.

[63] A-J. Li and Q. Huang, *The dual Loomis-Whitney inequality*, Bull. London Math. Soc. **48** (2016), 676-690.

[64] L. H. Loomis and H. Whitney, *An inequality related to the isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. **55** (1949), 961-962.

[65] E. Lutwak, *Dual mixed volumes*, Pacific J. Math. **58** (1975), 531-538.

[66] E. Lutwak, *A general isepiphanic inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 415-421.

[67] E. Lutwak, *Intersection bodies and dual mixed volumes*, Adv. Math. **71** (1988), 232-261.

[68] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *Volume inequalities for subspaces of* L^p, J. Differential Geom. **68** (2004), 159-184.

[69] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *A volume inequality for polar bodies*, J. Differential Geom. **84** (2010), 163-178.

[70] G. Maresch and F. Schuster, *The sine transform of isotropic measures*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2012), no. 4, 717-739.

[71] E. Markessinis, G. Paouris and Ch. Saroglou, *Comparing the* M*-position with some classical positions of convex bodies*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **152** (2012), 131-152.

[72] M. Meyer, *A volume inequality concerning sections of convex sets*, Bull. London Math. Soc. **20** (1988), 151-155.

[73] E. Milman, *Dual mixed volumes and the slicing problem*, Adv. Math. **207** (2006), 566–598.

[74] M. Naszódi, *Proof of a conjecture of Bárány, Katchalski and Pach*, Discrete Comput. Geom. **55** (2016), no. 1, 243-248.

[75] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1021-1049.

[76] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287-308.

[77] A. Pelczynski and S. J. Szarek, *On parallelepipeds of minimal volume containing a convex symmetric body in* $\mathbb{R}^n$, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. (1991), 125-148.

[78] C. M. Petty, *Surface area of a convex body under affine transformations*, Proc. Amer. Math. Soc. **12** (1961), 824-828.

[79] G. Pisier, *Grothendieck's theorem, past and present*, Bull. Amer. Math. Soc. 49 (2012), 237–323.

[80] E. Ricard and Q. Xu, *A noncommutative martingale convexity inequality*, Ann. Probab. 44 (2016), 867–882.

[81] M. Rudelson, *Contact points of convex bodies*, Israel J. Math. **101** (1997), 93-124.

[82] Ch. Saroglou, I. Soprunov and A. Zvavitch, *Characterization of simplices via the Bezout inequality for mixed volumes*, Proc. Amer. Math. Soc. Proc. Amer. Math. Soc. **144** (2016), no. 12, 5333-5340.

[83] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[84] I. Soprunov and A. Zvavitch, *Bezout inequality for mixed volumes*, Int. Math. Res. Not. IMRN 2016, no. 23, 7230-7252.

[85] N. Srivastava, *On contact points of convex bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2050** (2012), 393-412.

[86] T. Tao and V. Vu, *Additive Combinatorics*, Cambridge Studies in Advanced Mathematics, Vol. 105, Cambridge University Press, 2006.

[87] L. Trevisan, G. Sorkin, M. Sudan and D. Williamson, *Gadgets, approximation, and linear programming*, SIAM J. Comput. 29 (2000), 2074–2097.

[88] Gaoyong Zhang, *Sections of convex bodies*, Amer. J. Math. **118** (1996), 319–340.