Προβλήματα Γεωμετρικής Συναρτησιακής Ανάλυσης

Διδακτορική Διατριβή

Νίκος Σκαρμόγιαννης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2020

Η διδακτορική διατριβή υποστηρίχτηκε από το Ελληνικό Ίδρυμα Έρευνας και Καινοτομίας (ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ.) στο πλαίσιο της Δράσης «1η Προκήρυξη Υποτροφιών ΕΛ.ΙΔ.Ε.Κ. για Υποψήφιους Διδάκτορες» (Αριθμός Έργου: 70/3/14547).

Εισηγητής:

Απόστολος Γιαννόπουλος

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Συνδυάζοντας πιθανοθεωρητικές τεχνικές με γεωμετρικά και αναλυτικά εργαλεία, στην παρούσα διατριβή ασχολούμαστε με έναν αριθμό προβλημάτων που εμπίπτουν στον ευρύτερο κλάδο της Γεωμετρικής Συναρτησιακής Ανάλυσης. Βασικός άξονας είναι η μελέτη των ιδιοτήτων των (συμμετρικών) κυρτών σωμάτων του $\mathbb{R}^n$ από την ασυμπτωτική σκοπιά, θεωρώντας δηλαδή ότι η διάσταση n του υποκείμενου χώρου τείνει στο άπειρο. Ακολουθεί μια συνοπτική περιγραφή των αποτελεσμάτων της διατριβής.

Προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων. Αποδεικνύουμε μια βελτιωμένη εκδοχή ενός αποτελέσματος του D. Hajela που σχετίζεται με ένα πολύ γνωστό πρόβλημα του Komlós: Δείχνουμε ότι αν $f(n)$ είναι μια συνάρτηση που ικανοποιεί τις $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ και $f(n) = o(n)$, τότε υπάρχει $n_0 = n_0(f)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με πληθάριθμο $|S| \leqslant 2^{n/f(n)}$ μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log f(n)}$$

για κάθε $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$. Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ανάλογα αποτελέσματα στην περίπτωση όπου τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία τα οποία είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n ή οποιοδήποτε συμμετρικό κυρτό σώμα, και η ℓ_∞^n-νόρμα αντικαθίσταται από τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Αθροίσματα λογαριθμικά κοίλων τυχαίων διανυσμάτων με βάρη. Έστω C και K δύο συμμετρικά κυρτά σώματα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αποδεικνύουμε άνω φράγματα για την ποσότητα

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} = \int_C \cdots \int_C \Big\| \sum_{j=1}^s t_j x_j \Big\|_K \, dx_s \cdots dx_1$$

στην περίπτωση που το C είναι ισοτροπικό. Η προσέγγισή μας στο πρόβλημα μας επιτρέπει να δώσουμε εναλλακτική απόδειξη για το γνωστό ακριβές κάτω φράγμα γι' αυτήν την ποσότητα, το οποίο έχει αποδειχθεί από τους Gluskin και V. Milman. Παρουσιάζουμε επίσης εφαρμογές σε «τυχαιοποιημένες» εκδοχές προβλημάτων εξισορρόπησης διανυσμάτων.

Τυχαία κυρτά σύνολα. Για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \times_{i=1}^N \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $T_{\mathbf{x}} = [x_1 \cdots x_N]$ τον $n \times N$ πίνακα που έχει ως στήλες τα διανύσματα x_i. Οι Παούρης και Pivovarov έδειξαν ότι αν $N \geqslant n$ και $f_1, \ldots, f_N$ είναι πυκνότητες στον $\mathbb{R}^n$ με $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ τότε, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$, η μέση τιμή

$$\mathcal{F}_K(f_1,\dots,f_N)=\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))\big)\prod_{i=1}^N f_i(x_i)\,dx_N\cdots dx_1$$

του όγκου του $T_{\mathbf{x}}(K)$ ελαχιστοποιείται όταν καθεμία από τις f_i είναι η δείκτρια συνάρτηση της Ευκλείδειας μπάλας D_n όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Δίνουμε άνω και κάτω φράγματα για την ποσότητα $\mathcal{F}_K(f_1,\dots,f_N)$ στην περίπτωση όπου οι f_i είναι ισοτροπικές πυκνότητες. Στο δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου, για δεδομένα $N,n\geqslant 1$ και $r>0$, δίνουμε άνω και κάτω φράγματα για τη μέση τιμή $\mathbb{E}\left(\mathrm{vol}_n\left(\cap_{i=1}^N B(x_i,r)\right)\right)$ του όγκου τυχαίων «σφαιρικών» πολυέδρων που ορίζονται από μια N-άδα ανεξάρτητων ισοκατανεμημένων τυχαίων σημείων $x_1,\dots,x_N$ στον $\mathbb{R}^n$ που η πυκνότητά τους f ικανοποιεί την $\|f\|_\infty\leqslant 1$.

Αφφινικά quermassintegrals τυχαίων πολυτόπων. Ένα ανοικτό πρόβλημα που σχετίζεται με γνωστές εικασίες του Lutwak για τα αφφινικά quermassintegrals ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ρωτάει αν για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1\leqslant k\leqslant n$ ισχύει η ανισότητα

$$\Phi_{[k]}(K):=\mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\Big(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\,d\nu_{n,k}(F)\Big)^{-\frac{1}{kn}}\leqslant c\sqrt{n/k},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Δίνουμε καταφατική απάντηση για κάποιες ευρείες κλάσεις τυχαίων πολυτόπων. Δίνουμε επίσης άνω φράγματα για τις ποσότητες $\Phi_{[k]}(K)$ όταν $K=B_1^n$, η μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n, κάτι που έχει ως συνέπεια αντίστοιχα φράγματα για οποιοδήποτε unconditional κυρτό σώμα K.

Ο συμμετρικός μέσος και η MM^*-ανισότητα για ισοτροπικά κυρτά σώματα. Συζητάμε δύο ανοικτά προβλήματα από την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία. Το πρώτο πρόβλημα αφορά εκτιμήσεις για τον συμμετρικό μέσο $\mathrm{sav}(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, που ορίζεται από την

$$\mathrm{sav}(K):=\inf\Big\{\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)}\int_{K_z}\|-x\|_{K_z}\,dx : z\in\mathrm{int}(K)\Big\},$$

όπου $K_z:=K-z$ είναι η μεταφορά του K κατά z. Δίνουμε απλούστερες αποδείξεις για τα μέχρι στιγμής καλύτερα γνωστά άνω φράγματα γι' αυτήν την ποσότητα, που οφείλονται στους Guédon και Litvak.

Το δεύτερο πρόβλημα αφορά άνω φράγματα για το μέσο πλάτος $w(K)$ και τη μέση νόρμα $M(K)$ ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$. Τα καλύτερα γνωστά αποτελέσματα οφείλονται στους E. Milman και Γιαννόπουλο-E. Milman, αντίστοιχα. Δίνουμε μια απλούστερη απόδειξη γι' αυτά τα αποτελέσματα, που αποφεύγει την θεωρία των L_q-κεντροειδών σωμάτων.

Το πλαίσιο στο οποίο εντάσσονται τα αποτελέσματα της διατριβής αναλύεται στο Κεφάλαιο 1, στο οποίο γίνεται επίσης σύγκριση με προηγούμενα αποτελέσματα. Τα βασικά γεωμετρικά και αναλυτικά εργαλεία τα οποία χρησιμοποιούνται στη διατριβή παρουσιάζονται συνοπτικά στο Κεφάλαιο 2.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Παρουσίαση των αποτελεσμάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο παρουσιάζουμε τα αποτελέσματα της διατριβής. Τα περιεχόμενα κάθε κεφαλαίου αντιστοιχούν σε ξεχωριστές εργασίες, οι περισσότερες εκ των οποίων έχουν γίνει δεκτές για δημοσίευση ή έχουν ήδη δημοσιευθεί. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 3 προέρχονται από την εργασία

> G. Chasapis and N. Skarmogiannis, *A note on norms of signed sums of vectors*, Advances in Geometry, (δεκτή για δημοσίευση).

(β) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 4 προέρχονται από την εργασία

> G. Chasapis, A. Giannopoulos and N. Skarmogiannis, *Norms of weighted sums of log-concave random vectors*, Communications in Contemporary Mathematics **22** (2020), no. 4, 1950036.

(γ) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 5 προέρχονται από την εργασία

> N. Skarmogiannis, On some random convex sets generated by isotropic log-concave random vectors, (υπό προετοιμασία).

(δ) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 6 προέρχονται από την εργασία

> G. Chasapis and N. Skarmogiannis, *Affine quermassintegrals of random polytopes*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **479** (2019), 546–568.

(ε) Τα περιεχόμενα του Κεφαλαίου 7 αποτελούν κομμάτια εργασιών που βρίσκονται σε εξέλιξη, και δεν έχουν ακόμα δημοσιευθεί.

Στο Κεφάλαιο 2 εισάγουμε βασικές έννοιες και τον συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί στην διατριβή. Παρουσιάζουμε επίσης τα βασικά τεχνικά εργαλεία, από την συναρτησιακή ανάλυση και την κυρτή γεωμετρία, τα οποία θα χρησιμοποιηθούν στα επόμενα. Παραπέμπουμε τον αναγνώστη σε αυτό το κεφάλαιο για τους ορισμούς που ενδεχομένως θα χρειαστεί διαβάζοντας το παρόν κεφάλαιο.

1.1 Προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων

Για κάθε ζεύγος K, D συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε την παράμετρο $\beta(K, D)$ ως τον μικρότερο $r > 0$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in K$ μπορούμε να βρούμε πρόσημα $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n \in rD.$$

Ένα γενικό κάτω φράγμα για την παράμετρο $\beta(K, D)$ αποδείχθηκε από τον Banaszczyk: στο [14] έδειξε ότι αν K και D είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\beta(K, D) \geqslant c\sqrt{n}(\mathrm{vol}_n(K)/\mathrm{vol}_n(D))^{1/n} \tag{1.1.1}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, όπου $\mathrm{vol}_n(K)$ είναι ο όγκος του K. Στα επόμενα, γράφουμε B_p^n για τη μοναδιαία μπάλα του $\ell_p^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Ένα πολύ γνωστό θεώρημα του Spencer [106] ισχυρίζεται ότι $\beta(B_\infty^n, B_\infty^n) \leqslant c\sqrt{n}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (το ίδιο αποτέλεσμα αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Gluskin στο [48]): υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_i\|_\infty \leqslant 1$, μπορούμε να βρούμε $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_\infty \leqslant c\sqrt{n}. \tag{1.1.2}$$

Από την (1.1.1) βλέπουμε αμέσως ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι βέλτιστο αν αγνοήσουμε απόλυτες σταθερές. Ένα πολύ γνωστό πρόβλημα του Komlós (δείτε τα [107] και [108]) ρωτάει αν η ακολουθία $\beta(B_2^n, B_\infty^n)$ είναι φραγμένη. Δεδομένου ότι $B_\infty^n \subseteq \sqrt{n}B_2^n$, από μια θετική απάντηση σε αυτό το ερώτημα προκύπτει άμεσα η ανισότητα του Spencer. Η καλύτερη γνωστή εκτίμηση οφείλεται στον Banaszczyk [15]: υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_i\|_2 \leqslant 1$ μπορούμε να βρούμε $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_\infty \leqslant c\sqrt{\log n}. \tag{1.1.3}$$

Μάλιστα, ο Banaszczyk απέδειξε ένα πιο γενικό θεώρημα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με μέτρο Gauss $\gamma_n(K) \geqslant 1/2$ τότε $\beta(B_2^n, K) \leqslant C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από αυτή την ανισότητα προκύπτει άμεσα η (1.1.3), διότι $\gamma_n(rB_\infty^n) \geqslant 1/2$ για κάθε $r \geqslant c\sqrt{\log n}$. Η μέθοδος στο [15] δεν είναι κατασκευαστική, πρόσφατα όμως δόθηκε μια αλγοριθμική απόδειξη του φράγματος $O(\sqrt{\log n})$ για το πρόβλημα, από τους Bansal, Dadush και Garg [17].

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι ένα αποτέλεσμα του Hajela [55] στην κατεύθυνση του να δοθεί αρνητική απάντηση στο πρόβλημα του Komlós.

Θεώρημα 1.1.1 (Hajela)**.** *Έστω $f(n)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ και $f(n) = o(n)$. Για κάθε $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ υπάρχει $n_0 = n_0(f, \lambda)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $S \subseteq \{-1, 1\}^n$ με πληθάριθμο $|S| \leqslant 2^{n/f(n)}$ μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την*

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_\infty \geqslant \exp\left(\frac{\lambda \log\log f(n)}{\log\log\log f(n)}\right)$$

για κάθε $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Μάλιστα, ο Hajela διατυπώνει στο [55] την άποψη ότι το ερώτημα του Komlós έχει αρνητική απάντηση και ότι η εκτίμηση (1.1.3) που αποδείχθηκε αργότερα από τον Banaszczyk πρέπει να είναι βέλτιστη. Το πρώτο μας αποτέλεσμα είναι μια βελτιωμένη έκδοση του Θεωρήματος 1.1.1.

Θεώρημα 1.1.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c \in (0,1)$ που ικανοποιεί τα παρακάτω: Για κάθε $n \geqslant 1$ και $\frac{1}{n} < \delta < 1$, και για κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$, υπάρχουν ορθοκανονικά διανύσματα $x_1, \dots, x_n$ στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την*

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \Big\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log(1/\delta)}$$

για κάθε $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in S$.

Το Θεώρημα 1.1.2 έχει ως συνέπεια μια ισχυρότερη έκδοση του θεωρήματος του Hajela. Έστω $f(n)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ και $f(n) = o(n)$. Παρατηρήστε ότι αν θέσουμε $\delta = \delta(f,n) = e/f(n)$ στο Θεώρημα 1.1.2 τότε έχουμε $\frac{1}{n} < \delta < 1$ για αρκετά μεγάλα n, και προκύπτει το κάτω φράγμα

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \Big\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log f(n)},$$

το οποίο είναι ισχυρότερο από αυτό του Θεωρήματος 1.1.1. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2, την οποία παρουσιάζουμε στην Παράγραφο 3.2, ακολουθούμε αρχικά την ιδέα του Hajela: τα διανύσματα $x_1, \dots, x_n$ προκύπτουν από τυχαία στροφή της συνήθους βάσης $e_1, \dots, e_n$ του $\mathbb{R}^n$. Η βελτίωση που πετυχαίνουμε οφείλεται στο Λήμμα 3.2.2 που εξασφαλίζει ισχυρότερες εκτιμήσεις για το «μέτρο των μικρών τιμών» της $\|\cdot\|_\infty$-νόρμας στη σφαίρα.

Η μέθοδος που περιγράφουμε για να δοθούν κάτω φράγματα για την ℓ_∞-νόρμα ενός προσημασμένου αθροίσματος διανυσμάτων έχει προφανείς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, είμαστε αναγκασμένοι να θεωρήσουμε ένα υποσύνολο $S \subseteq \{-1,1\}^n$ πληθαρίθμου $2^{o(n)}$ αν θέλουμε το Θεώρημα 1.1.2 να μας δώσει κάποιο κάτω φράγμα τάξης μεγαλύτερης από την τάξη μεγέθους στο δεξιό μέλος της (1.1.1). Έτσι, αυτή η στρατηγική δεν φαίνεται να επαρκεί για να οδηγήσει σε μια αρνητική απάντηση για το πρόβλημα του Komlós. Πιστεύουμε όμως ότι η διασύνδεση ανάμεσα σε εκτιμήσεις για το «μέτρο των μικρών τιμών» μιας νόρμας και τη νόρμα των προσημασμένων αθροισμάτων διανυσμάτων είναι από μόνη της ενδιαφέρουσα, και στην Παράγραφο 3.3 εκμεταλλευόμαστε αυτό το φαινόμενο από διάφορες απόψεις. Αρχικά, υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $x_1, \dots x_n$ ικανοποιούν ένα κάτω φράγμα της μορφής $\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \|_2 \geqslant c\sqrt{n}$ για όλες τις επιλογές προσήμων $\epsilon_i = \pm 1$, και στη θέση της ℓ_∞^n-νόρμας θεωρούμε τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, για τυχόν δοθέν συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$, αποδεικνύουμε ότι αν τα διανύσματα $x_1, \dots x_n$ ικανοποιούν την παραπάνω συνθήκη τότε για κάθε «μεγάλο» υποσύνολο $S \subseteq \{-1,1\}^n$, η D-νόρμα του $\sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i)$ είναι «μεγάλη» για κάθε $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in S$, με μεγάλη πιθανότητα ως προς $U \in O(n)$. Το «πόσο μεγάλη» είναι αυτή, προσδιορίζεται από τη συμπεριφορά του μέτρου Gauss των πολλαπλασίων του D. Για να κάνουμε τα παραπάνω σαφέστερα, δίνουμε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.1.3. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$, και για τυχόν $\delta \in (0,1)$, ορίζουμε

$$t_{D,\delta} := \max\{t > 0 : \gamma_n(2tm(D)\, D) \leqslant (2^\delta e)^{-n}\},$$

όπου $m(D)$ είναι η διάμεσος της $\|\cdot\|_D$ ως προς το τυπικό μέτρο Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$. Στην περίπτωση που το D είναι η μοναδιαία μπάλα B_p^n κάποιου ℓ_p^n, $p \in [1,\infty]$, θέτουμε $t_{p,\delta} := t_{B_p^n,\delta}$ για συντομία.

Σημειώνουμε ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\delta \in (0,1)$, η παράμετρος $t_{D,\delta}$ ικανοποιεί τα φράγματα

$$c_1 \mathrm{vol}_n(D)^{-1/n} \leqslant t_{D,\delta} m(D) \leqslant \frac{1}{2} m(D), \tag{1.1.4}$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ (για λόγους πληρότητας, εξηγούμε εν συντομία την (1.1.4) στην Παράγραφο 3.3.1). Παρόλο που ο ορισμός της παραμέτρου $t_{D,\delta}$ μπορεί με την πρώτη ματιά να φαίνεται κάπως τεχνητός, πιστεύουμε ότι η ιδέα πίσω από τον ορισμό της και ο ρόλος που παίζει θα φανούν καθαρά στη συνέχεια (δείτε τα σχόλια μετά από το Θεώρημα 1.1.5).

Χρησιμοποιώντας αυτό τον συμβολισμό, αποδεικνύουμε αρχικά το εξής.

Θεώρημα 1.1.4. *Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\delta \in (0,1)$. Για κάθε $\tau > 0$, για κάθε n-άδα διανυσμάτων $x_1, \ldots, x_n$ με $\min\limits_{\epsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_2 \geqslant \tau\sqrt{n}$ και για κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$, υπάρχει υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) \geqslant 1 - e^{-n}$ τέτοιο ώστε για κάθε $U \in \mathcal{U}$ η*

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i) \Big\|_D \geqslant \tau t_{D,\delta} m(D)$$

να ισχύει για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Στη συνέχεια θεωρούμε την περίπτωση όπου τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι σημεία από τυχόν κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι μπορεί κανείς να δώσει εναλλακτική απόδειξη της (1.1.1) χρησιμοποιώντας ένα πιο γενικό θεώρημα των Gluskin και V. Milman από το [49]: Έστω D ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(D)$ και $V_1, \ldots, V_m$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(D) = \mathrm{vol}_n(V_1) = \cdots = \mathrm{vol}_n(V_m)$. Για κάθε $s_1, \ldots, s_m \in \mathbb{R}$ και κάθε $0 < t < 1$ ισχύει

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{ (x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \Big\| \sum_{i=1}^m s_i x_i \Big\|_D \leqslant t \Big(\sum_{i=1}^m s_i^2 \Big)^{1/2} \Big\}\Big) \leqslant \Big(t e^{\frac{1-t^2}{2}} \Big)^n,$$

όπου η πιθανότητα είναι ως προς το γινόμενο των ομοιόμορφων μέτρων πιθανότητας $\mu_i(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(A \cap V_i)}{\mathrm{vol}_n(V_i)}$. Συμπεριλαμβάνουμε την απόδειξη αυτής της ανισότητας (δείτε την Πρόταση 3.3.4), που βασίζεται στη βέλτιστη μορφή της πολυμεταβλητής ανισότητας Young (δείτε τα [23] και [24]).

Στη συνέχεια, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1.4 παίρνουμε την ακόλουθη παραλλαγή του αποτελέσματος των Gluskin και V. Milman, στην περίπτωση που $V_i = B_2^n$ για κάθε i.

Θεώρημα 1.1.5. *Έστω $\delta \in (0,1)$, έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{ (x_i)_{i=1}^n \subseteq B_2^n : \Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \Big\|_D \leqslant \frac{1}{10} t_{D,\delta} m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S \Big\}\Big) \leqslant 3e^{-n}.$$

Μπορούμε να δούμε αυτό το θεώρημα ως επέκταση του αποτελέσματος του Hajela: η ℓ_∞^n-νόρμα αντικαθίσταται από τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και το συμπέρασμα ισχύει για τυχαία επιλογή διανυσμάτων στη μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα. Σε αυτό το πλαίσιο, ο ρόλος της παραμέτρου $t_{D,\delta}$ που εμφανίζεται στα αποτελέσματά μας γίνεται πιο κατανοητός: Αφού, από την (1.1.4), έχουμε

$$t_{D,\delta} m(D) \approx t_{D,\delta} \sqrt{n} M(D) \approx t_{D,\delta} M(D) \mathrm{vrad}(D)\, \mathrm{vol}_n(D)^{-1/n},$$

όπου $M(D) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_D \, d\sigma(x)$ και $\mathrm{vrad}(D) = (\mathrm{vol}_n(D)/\omega_n)^{1/n}$, και αφού $M(D)\mathrm{vrad}(D) \geqslant 1$ (αυτή η ανισότητα είναι απλή συνέπεια της ανισότητας Hölder), βλέπουμε ότι το Θεώρημα 1.1.5 μας δίνει ισχυρότερη πληροφορία απ' ότι η (1.1.1) αν έχουμε $M(D)\mathrm{vrad}(D) \gg 1$ και/ή $t_{D,\delta} \approx 1$. Αυτές οι προϋποθέσεις ικανοποιούνται στην περίπτωση της $\|\cdot\|_\infty$-νόρμας και θα ήταν ενδιαφέρον να δοθούν κι άλλα παραδείγματα με βέλτιστες εκτιμήσεις.

Η συνάρτηση $t \mapsto \gamma_n(2tm(D)\,D)$ που εμφανίζεται στον ορισμό του $t_{D,\delta}$ έχει μελετηθεί στα [66], [67], [94] και αλλού. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις παρακάτω εκτιμήσεις:

- Στο [66] αποδεικνύεται ότι για κάθε $0 < t < \frac{1}{2}$ ισχύει
$$\gamma_n(\{x : \|x\|_D \leqslant tm(D)\}) \leqslant \frac{1}{2} t^{d(D)},$$
όπου
$$d(D) = \min\left\{n, -\log \gamma_n\left(\frac{m(D)}{2} D\right)\right\}.$$
Δείτε το [94, Θεώρημα 3.1] για τη συγκεκριμένη ακριβή διατύπωση του αποτελέσματος.

- Στο [67] αποδεικνύεται ότι αν $\gamma_n(D) \leqslant \frac{1}{2}$ τότε για κάθε $0 < t < \frac{1}{2}$ ισχύει $\gamma_n(tD) \leqslant (2t)^{r^2(D)/4}\gamma_n(D)$ όπου $r(D)$ είναι η εγγεγραμμένη ακτίνα του D.

- Στο [94] αποδεικνύεται ότι για κάθε $0 < t < \frac{1}{2}$ ισχύει $\gamma_n(\{x : \|x\|_D \leqslant tm(D)\}) \leqslant \frac{1}{2} t^{c/\beta(D)}$, όπου
$$\beta(D) = \frac{\mathrm{Var}_{\gamma_n}(\|\cdot\|_D)}{M^2(D)}$$
και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην Παράγραφο 3.3 συζητάμε τις εκτιμήσεις που προκύπτουν από τα παραπάνω σε ειδικές περιπτώσεις, για παράδειγμα όταν το D είναι κάποια ℓ_p^n μπάλα.

Τέλος, μπορούμε να γενικεύσουμε περαιτέρω το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 1.1.5 στην περίπτωση όπου τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία τα οποία επιλέγονται ομοιόμορφα από τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα.

Θεώρημα 1.1.6. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ που ικανοποιεί τα παρακάτω: Έστω $\delta \in (0,1)$, έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K) = \mathrm{vol}_n(B_2^n)$ μπορούμε να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) > 1 - 2e^{-n/2}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $U \in \mathcal{U}$,*
$$\mathbb{P}\Big(\Big\{(z_i)_{i=1}^n \subseteq U(K) \times \cdots \times U(K) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\Big\|_D \leqslant ct_{D,\delta} m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) \leqslant e^{-n/2}.$$

1.2 Αθροίσματα λογαριθμικά κοίλων τυχαίων διανυσμάτων με βάρη

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε s-άδα $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_s)$ συμμετρικών κυρτών σωμάτων C_j στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε τη νόρμα στον $\mathbb{R}^s$, που ορίζεται από την
$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K} = \frac{1}{\prod_{j=1}^s \mathrm{vol}_n(C_j)} \int_{C_1} \cdots \int_{C_s} \Big\|\sum_{j=1}^s t_j x_j\Big\|_K \, dx_s \cdots dx_1,$$

όπου $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_s)$. Αν $\mathcal{C}=(C,\ldots,C)$ τότε γράφουμε $\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}$ αντί για $\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}$. Ένα πρόβλημα που έχει τεθεί από τον V. Milman είναι να διερευνηθεί αν, στην περίπτωση όπου $C=K$, ισχύει ότι η $\|\cdot\|_{K^s,K}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη Ευκλείδεια νόρμα modulo έναν όρο που είναι λογαριθμικής τάξης ως προς τη διάσταση, και ειδικότερα, αν με την πρόσθετη υπόθεση ότι η νόρμα που επάγεται από το K στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί κάποια συνθήκη cotype έχουμε ισοδυναμία της $\|\cdot\|_{K^s,K}$ με την Ευκλείδεια νόρμα.

Το ερώτημα αυτό μελετήθηκε από τους Bourgain, Meyer, V. Milman και Pajor στο [33]. Απέδειξαν το κάτω φράγμα

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}\geqslant c\sqrt{s}\Big(\prod_{j=1}^s|t_j|\Big)^{1/s}\Big(\prod_{j=1}^s\mathrm{vol}_n(C_j)\Big)^{\frac{1}{sn}}/\mathrm{vol}_n(K)^{1/n},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Οι Gluskin και V. Milman μελέτησαν το ίδιο πρόβλημα στο [49] και απέδειξαν ένα καλύτερο κάτω φράγμα, μάλιστα σε ένα πιο γενικό πλαίσιο.

Θεώρημα 1.2.1 (Gluskin-V. Milman). *Έστω $A_1,\ldots,A_s$ μετρήσιμα σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Τότε, για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_s)\in\mathbb{R}^s$,*

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{A},K}:=\frac{1}{\prod_{j=1}^s\mathrm{vol}_n(A_j)}\int_{A_1}\cdots\int_{A_s}\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_K dx_s\cdots dx_1\geqslant c\Big(\sum_{j=1}^s t_j^2\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(A_j)}{\mathrm{vol}_n(K)}\Big)^{2/n}\Big)^{1/2},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ισοδύναμα, αν $\mathrm{vol}_n(A_j)=\mathrm{vol}_n(K)$ για κάθε $1\leqslant j\leqslant s$ τότε

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{A},K}\geqslant c\,\|\mathbf{t}\|_2 \tag{1.2.1}$$

για κάθε $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^s$.

Στην παραπάνω διατύπωση, όταν K είναι ένα αστρόμορφο σώμα ως προς το 0 χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\|x\|_K$ για το συναρτησοειδές Minkowski του K, που ορίζεται από την $\|x\|_K=\inf\{r>0:x/r\in K\}$. Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1 δείχνει μάλιστα ότι μπορούμε να πάρουμε $c\geqslant c(n)/\sqrt{2}$, όπου $c(n)\to 1$ όταν $n\to\infty$. Οι Gluskin και V. Milman χρησιμοποιούν ένα αποτέλεσμα συμμετρικοποίησης το οποίο είναι συνέπεια της ανισότητας Brascamp-Lieb-Luttinger: με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.2.1 και κάνοντας την πρόσθετη υπόθεση ότι $\mathrm{vol}_n(A_j)=\mathrm{vol}_n(K)=\mathrm{vol}_n(B_2^n)$ για κάθε $1\leqslant j\leqslant s$, έχουμε

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{1\leqslant j\leqslant s}:x_j\in A_j\ \text{ για κάθε } j\ \text{ και }\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_K<\alpha\Big\}\Big)\\&\qquad\leqslant\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{1\leqslant j\leqslant s}:x_j\in B_2^n\ \text{ για κάθε } j\ \text{ και }\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_2<\alpha\Big\}\Big)\end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_s)\in\mathbb{R}^s$ και κάθε $\alpha>0$.

Αφετηρία της δικής μας δουλειάς είναι μια απλή αλλά χρήσιμη ταυτότητα: ισχύει ότι

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}=\|\mathbf{t}\|_2\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K\,d\nu_{\mathbf{t}}(x), \tag{1.2.2}$$

όπου $\nu_{\mathbf{t}}$ είναι η κατανομή του τυχαίου διανύσματος $\frac{1}{\|\mathbf{t}\|_2}(t_1X_1+\cdots+t_sX_s)$ και τα $X_1,\ldots,X_s$ είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα ομοιόμορφα κατανεμημένα στα $C_1,\ldots,C_s$ αντίστοιχα. Ξεκινώντας από την (1.2.2) μπορούμε μάλιστα να δώσουμε μια εναλλακτική σύντομη απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.1 στην περίπτωση που μελετάμε.

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω $\mathcal{C}=(C_1,\ldots,C_s)$ μια s-άδα συμμετρικών κυρτών σωμάτων και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(C_j)=\mathrm{vol}_n(K)=1$. Τότε, για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_s)\in\mathbb{R}^s$,*

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}\geqslant\frac{n}{e(n+1)}\|\mathbf{t}\|_2.$$

Ενδιαφερόμαστε κυρίως για άνω φράγματα για την ποσότητα $\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}$. Δεδομένου ότι

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}=\|\mathbf{t}\|_{(TC)^s,TK}$$

για κάθε $T\in SL(n)$, μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου το C είναι ισοτροπικό (δείτε το Κεφάλαιο 2 για τον ορισμό και βασικά αποτελέσματα σχετικά με τα ισοτροπικά κυρτά σώματα). Σε αυτή την περίπτωση,

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}=\|\mathbf{t}\|_2L_C\,I_1(\mu_{\mathbf{t}},K), \tag{1.2.3}$$

όπου $\mu_{\mathbf{t}}$ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με συμπαγή φορέα, το οποίο εξαρτάται από το $\mathbf{t}$ και, για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$,

$$I_1(\mu,K):=\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_Kd\mu(x).$$

Για να αποκτήσετε μια αίσθηση σχετικά με το αναμενόμενο φράγμα, σημειώνουμε ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_{O(n)}I_1(\mu,U(K))\,d\nu(U)=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{O(n)}\|x\|_{U(K)}d\nu(U)\,d\mu(x)=M(K)\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_2d\mu(x)\approx\sqrt{n}M(K),$$

όπου

$$M(K):=\int_{S^{n-1}}\|\xi\|_Kd\sigma(\xi)$$

και ν,σ είναι τα μέτρα πιθανότητας Haar στην $O(n)$ και την S^{n-1} αντίστοιχα. Έπεται ότι

$$\int_{O(n)}\|\mathbf{t}\|_{U(C)^s,K}\approx(L_C\sqrt{n}M(K))\,\|\mathbf{t}\|_2. \tag{1.2.4}$$

Στόχος μας λοιπόν είναι να πετύχουμε μια σταθερά της τάξης του $L_C\sqrt{n}M(K)$ στο άνω φράγμα μας για την $\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}$. Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι το ερώτημα να δοθούν φράγματα για την παράμετρο $M(K)$ ενός ισοτροπικού συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, η οποία θα εμφανίζεται συχνά στα άνω φράγματα που θα αποδείξουμε, παραμένει ανοικτό. Θα μπορούσε κανείς να ελπίζει ότι $L_K\sqrt{n}M(K)\leqslant c(\log n)^b$ για κάποια απόλυτη σταθερά $b>0$. Όμως, η καλύτερη γνωστή εκτίμηση είναι, αυτή τη στιγμή,

$$M(K)\leqslant\frac{c\log^{2/5}(e+n)}{\sqrt[10]{n}L_K}.$$

Αυτή η ανισότητα αποδεικνύεται στο [43] (δείτε επίσης το [45] για προηγούμενη δουλειά σε αυτό το πρόβλημα) και επίσης αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που το K είναι ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ, ισχύει ότι

$$M(K) \leqslant \frac{c\sqrt[3]{\varrho}\log^{1/3}(e+n)}{\sqrt[6]{n}L_K}.$$

Περνάμε τώρα στην περιγραφή των φραγμάτων μας για την $\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}$. Κάποιες άμεσες και απλές άνω και κάτω εκτιμήσεις δίνονται στο επόμενο θεώρημα (το οποίο αποδεικνύεται στην Παράγραφο 4.3.1).

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω C ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $s \geqslant 1$ και $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s$,*

$$c_1 L_C R(K^\circ)\, \|\mathbf{t}\|_2 \leqslant \|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant \sqrt{n} L_C R(K^\circ)\, \|\mathbf{t}\|_2,$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $R(K^\circ)$ είναι η εξωτερική ακτίνα του K°.

Μια κλάση συμμετρικών κυρτών σωμάτων για την οποία μπορούμε να εφαρμόσουμε το άνω φράγμα του Θεωρήματος 1.2.3 είναι η κλάση των 2-κυρτών σωμάτων. Ακριβέστερα, στην Παράγραφο 4.3.2 βλέπουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι επίσης 2-κυρτό με σταθερά α, τότε

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant (c_2 L_C/\sqrt{\alpha})\, \|\mathbf{t}\|_2$$

για κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα C και κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι 2-κυρτό με σταθερά α έχουμε

$$\|\mathbf{t}\|_{K^s,K} \leqslant (c_3/\alpha)\, \|\mathbf{t}\|_2$$

για κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s$, όπου $c_3 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ξεκινώντας πάλι από την (1.2.3) και χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα το οποίο προέρχεται από τον Bourgain (χρησιμοποιώντας επίσης την ανισότητα του Παούρη και το θεώρημα σύγκρισης του Talagrand) στην Παράγραφο 4.3.3 αποδεικνύουμε ένα γενικό άνω φράγμα διαφορετικού τύπου.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω C ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant c\left(L_C \max\left\{\sqrt[4]{n}, \sqrt{\log(1+s)}\right\}\right)\sqrt{n}M(K)\|\mathbf{t}\|_2$$

για κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην περίπτωση που το C είναι ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ, άμεση εφαρμογή του θεωρήματος του Talagrand οδηγεί σε ισχυρότερες εκτιμήσεις: Αν C είναι ένα ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ και K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant c\varrho^2\sqrt{n}M(K)\, \|\mathbf{t}\|_2$$

για κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στη συνέχεια, συνδυάζοντας την (1.2.3) με αποτελέσματα του E. Milman από το [76], παίρνουμε αρκετά ισχυρές εκτιμήσεις στην περίπτωση που το K έχει φραγμένη σταθερά συντύπου-2 (δείτε την Παράγραφο 4.4). Στην περίπτωση όπου $C = K$ παίρνουμε:

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $s \geqslant 1$ και $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s$ έχουμε ότι*

$$\frac{c_3}{C_2(X_K)}\, \|\mathbf{t}\|_2 \leqslant \|\mathbf{t}\|_{K^s,K} \leqslant \left(c_4 L_K C_2(X_K)\sqrt{n} M(K_{\rm iso})\right) \|\mathbf{t}\|_2,$$

όπου $C_2(X_K)$ είναι η σταθερά συντύπου-2 του χώρου με νόρμα X_K που έχει ως μοναδιαία μπάλα το K, και $K_{\rm iso}$ είναι μια ισοτροπική εικόνα του K.

Στην Παράγραφο 4.5 εξετάζουμε την unconditional περίπτωση. Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα από το [44], που βασίζεται σε γνωστά αποτελέσματα των Bobkov και Nazarov, παίρνουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις.

Θεώρημα 1.2.6. *Αν K και $C_1, \dots, C_s$ είναι ισοτροπικά unconditional κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K} \leqslant c\sqrt{\log n} \cdot \max\{\|\mathbf{t}\|_2, \sqrt{\log n}\|\mathbf{t}\|_\infty\}$$

για κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \dots, t_s) \in \mathbb{R}^s$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.2.5 και την «ψ_2-εκδοχή» του Θεωρήματος 1.2.4 μπορούμε να ελέγξουμε ότι στην ειδική περίπτωση της κανονικοποιημένης μοναδιαίας μπάλας $\overline{B_p^n}$ του ℓ_p^n, $1 \leqslant p \leqslant \infty$, προκύπτει το άνω φράγμα

$$\|\mathbf{t}\|_{\overline{B_p^n}^s, \overline{B_p^n}} \leqslant c\, \min\{\sqrt{p}, \sqrt{\log n}\}\, \|\mathbf{t}\|_2$$

για κάθε $s \geqslant 1$ και κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^s$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (και, γενικά, $\overline{K} = {\rm vol}_n(K)^{-1/n}K$).

Στην Παράγραφο 4.6 συζητάμε εφαρμογές των προηγούμενων αποτελεσμάτων σε κάποιες τυχαιοποιημένες εκδοχές προβλημάτων εξισορρόπησης διανυσμάτων. Δοθέντων δύο συμμετρικών κυρτών σωμάτων C, K στον $\mathbb{R}^n$, η παράμετρος $\beta_s(C,K)$ ορίζεται ως εξής:

$$\beta_s(C,K) := \min\Big\{r > 0 : \ \text{για κάθε } x_1, \dots, x_s \in C, \ \min_{\epsilon \in E_2^s} \Big\| \sum_{j=1}^s \epsilon_j x_j \Big\|_K \leqslant r\Big\},$$

όπου $E_2^s := \{-1,1\}^s$ είναι ο διακριτός κύβος στον $\mathbb{R}^s$. Για κάθε $x_1, \dots, x_n \in K$, από την τριγωνική ανισότητα είναι φανερό ότι $\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j\|_K \leqslant n$ για κάθε $\epsilon \in E_2^n$, άρα $\beta_n(K,K) \leqslant n$. Μάλιστα, αυτό το φράγμα είναι γενικά βέλτιστο: επιλέγοντας $K = B_1^n$ και $x_j = e_j$, την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$, παίρνουμε $\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j e_j\|_1 = n$ για κάθε επιλογή προσήμων. Όμως, το άνω φράγμα για την $\beta_n(K,K)$ μπορεί να γίνει πολύ καλύτερο για κάποια κυρτά σώματα, όπως δείχνει για παράδειγμα το θεώρημα του Spencer [106]: ισχύει ότι $\beta_n(B_\infty^n, B_\infty^n) \leqslant 6\sqrt{n}$.

Ορίζουμε επίσης $\tilde{\beta}(C,K) = \sup_{k \geqslant n} \beta_k(C,K)$. Είναι φανερό ότι $\beta_n(C,K) \leqslant \tilde{\beta}(C,K)$. Από ένα θεώρημα των Bárány και Grinberg [20], έχουμε ότι $\tilde{\beta}(K,K) \leqslant 2n$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει επίσης από το τετριμμένο φράγμα για την $\beta_n(K,K)$ που αναφέραμε προηγουμένως και την γενική παρατήρηση ότι

$$\tilde{\beta}(C,K) \leqslant 2 \max_{k \leqslant n} \beta_k(C,K).$$

Ένα σχετικό αποτέλεσμα είναι το Λήμμα Dvoretzky-Hanani (δείτε το [61, Λήμμα 2.2.1]) το οποίο ισχυρίζεται ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $s \geqslant 1$ και κάθε $x_1, \dots, x_s \in K$, υπάρχουν πρόσημα $\epsilon_1, \dots, \epsilon_s \in \{-1,1\}$ τέτοια ώστε $\max_{k \leqslant s} \|\sum_{j=1}^k \epsilon_j x_j\|_K \leqslant 2n$.

Το ερώτημα που συζητάμε είναι αν μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο από το $O(n)$ φράγμα για την τυχαία s-άδα $(x_1,\dots,x_s)$ από το C. Για να κάνουμε αυτό το ερώτημα ακριβές, για κάθε $\delta\in(0,1)$ εισάγουμε την παράμετρο

$$\beta^{(R)}_{\delta,s}(C,K)$$
$$:=\min\Big\{r>0:\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s : x_j\in C \text{ για κάθε } j \text{ και } \min_{\epsilon\in E_2^s}\Big\|\sum_{j=1}^s\epsilon_j x_j\Big\|_K\leqslant r\Big\}\Big)\geqslant 1-\delta\Big\}.$$

Τα αποτελέσματα της Παραγράφου 4.3 και της Παραγράφου 4.5 μας επιτρέπουν να αποδείξουμε αρκετά καλύτερα φράγματα για την παράμετρο $\beta^{(R)}_{\delta,s}(C,K)$. Στο θεώρημα που διατυπώνουμε παρακάτω, περιοριζόμαστε στην περίπτωση $C=K$ και $s=n$. Με την ίδια τεχνική μπορούμε να καταλήξουμε σε ανάλογα φράγματα για τυχόντα C και s.

Θεώρημα 1.2.7. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\delta\in(0,1)$,*

$$\beta^{(R)}_{\delta,n}(K,K)\leqslant(c\log(2/\delta)L_K n^{3/4})\sqrt{n}M(K_{\rm iso})$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $K_{\rm iso}$ είναι μια ισοτροπική εικόνα του K. Αν το K είναι ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ τότε

$$\beta^{(R)}_{\delta,n}(K,K)\leqslant(c\log(2/\delta)\varrho^2\sqrt{n})\sqrt{n}M(K_{\rm iso}).$$

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για 2-κυρτά σώματα με σταθερά α, όπου έχουμε την εκτίμηση

$$\beta^{(R)}_{\delta,n}(K,K)\leqslant(c\log(2/\delta)\sqrt{n}/\alpha),$$

ή σώματα με φραγμένη σταθερά συντύπου-2, όπου έχουμε την εκτίμηση

$$\beta^{(R)}_{\delta,n}(K,K)\leqslant(c\log(2/\delta)L_KC_2(X_K)\sqrt{n})\sqrt{n}M(K_{\rm iso}).$$

Μάλιστα, η απόδειξη του Θεωρήματος 1.2.7 δείχνει ότι τα ίδια άνω φράγματα ισχύουν για την παράμετρο $\kappa^{(R)}_{\delta,s}(C,K)$ η οποία ορίζεται ως ο μικρότερος $r>0$ με την ιδιότητα ότι

$$\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s : x_j\in C \text{ για κάθε } j \text{ και } \mathbb{P}\Big(\Big\{\epsilon\in E_2^s:\Big\|\sum_{j=1}^s\epsilon_j x_j\Big\|_K\leqslant r\Big\}\Big)\geqslant 1-\delta\Big\}\Big)\geqslant 1-\delta.$$

Παρατηρήστε ότι, από τον ορισμό, $\kappa^{(R)}_{\delta,s}(C,K)\geqslant\beta^{(R)}_{\delta,s}(C,K)$.

Τέλος, συνδυάζοντας την προσέγγισή μας με κάποια κλασικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας αποδεικνύουμε παραλλαγές των κύριων αποτελεσμάτων του προηγούμενου κεφαλαίου, καθώς και τις δυϊκές τους εκτιμήσεις. Κλείνουμε αυτή την εισαγωγική παράγραφο με την διατύπωση αυτών των αποτελεσμάτων στην ειδική περίπτωση όπου $C=\overline{B_2^n}$.

Θεώρημα 1.2.8. *Έστω $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^s$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $S\subseteq E_2^s$ με $|S|\leqslant e^{cd(K)}$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s : x_j\in\overline{B_2^n}\ \text{για κάθε } j \text{ και } \Big\|\sum_{j=1}^s\epsilon_j t_j x_j\Big\|_K\leqslant c_1L_C\sqrt{n}M(K)\,\|\mathbf{t}\|_2\ \text{ για κάποιο } \epsilon\in S\Big\}\Big)$$
$$\leqslant e^{-c_2d(K)}$$

και

$$\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s : x_j \in \overline{B_2^n} \ \text{ για κάθε } j \text{ και } \Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_j t_j x_j\Big\|_K \geqslant c_3 L_C \sqrt{n} M(K)\, \|\mathbf{t}\|_2 \ \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big)$$
$$\leqslant e^{-c_4 k(K)},$$

όπου $c_i > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Οι ποσότητες $k(K)$ και $d(K)$ είναι πολύ γνωστές παράμετροι κάθε συμμετρικού κυρτού σώματος, τις οποίες συζητάμε στο Κεφάλαιο 2 (και τις υπενθυμίζουμε στην Παράγραφο 4.6). Η παράμετρος $k(K) = n(M(K)/b(K))^2$ είναι η «διάσταση Dvoretzky» του K και η παράμετρος $d(K)$ ορίζεται από την

$$d(K) = \min\Big\{n, -\log \gamma_n\Big(\frac{m(K)}{2}K\Big)\Big\},$$

όπου $m(K) \approx \sqrt{n}M(K)$ είναι η διάμεσος (ο μέσος Lévy) της $\|\cdot\|_K$ ως προς το τυπικό μέτρο Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$.

1.3 Τυχαία κυρτά σύνολα

Στο Κεφάλαιο 5 μελετάμε τη μέση τιμή του όγκου δύο κλάσεων τυχαίων κυρτών συνόλων, οι οποίες έχουν μελετηθεί από τους Παούρη και Pivovarov στις εργασίες τους [90] και [92].

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^N$. Για κάθε $N \geqslant n$ και $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_N) \in \times_{i=1}^N \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $T_{\mathbf{x}} = [x_1 \cdots x_N]$ τον $n \times N$ πίνακα που έχει ως στήλες τα διανύσματα x_i. Στη συνέχεια, θεωρούμε το πολύτοπο

$$T_{\mathbf{x}}(K) = \Big\{\sum_{i=1}^N t_i x_i : \mathbf{t} = (t_1, \dots, t_N) \in K\Big\}.$$

Δύο παραδείγματα με προφανές γεωμετρικό ενδιαφέρον προκύπτουν αν επιλέξουμε $K = B_1^N$ ή $K = B_\infty^N$. Το $T_{\mathbf{x}}(B_1^N) = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\}$ είναι η απόλυτη κυρτή θήκη των $x_1, \dots, x_N$, ενώ το $T_{\mathbf{x}}(B_\infty^N) = \sum_{i=1}^N [-x_i, x_i]$ είναι το ζωνότοπο που ορίζεται ως το άθροισμα Minkowski των ευθυγράμμων τμημάτων $[-x_i, x_i]$. Έστω τώρα $\mu_1, \dots, \mu_N$ μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητες $f_1, \dots, f_N$, αντίστοιχα. Θεωρούμε το τυχαίο κυρτό σώμα $T_{\mathbf{x}}(K)$, όπου το x_i έχει κατανομή μ_i για $1 \leqslant i \leqslant N$. Το ακόλουθο θεώρημα από το [90] ισχυρίζεται ότι αν $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ τότε η μέση τιμή του όγκου του $T_{\mathbf{x}}(K)$ ελαχιστοποιείται όταν κάθε μ_i είναι το ομοιόμορφο μέτρο στην Ευκλείδεια μπάλα D_n όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 1.3.1 (Παούρης-Pivovarov)**.** *Έστω $N \geqslant n$ και $\mu_1, \dots, \mu_N$ μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητες $f_1, \dots, f_N$, αντίστοιχα, ως προς το μέτρο Lebesgue, τέτοιες ώστε $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$. Θεωρούμε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ και ορίζουμε*

$$\mathcal{F}_K(f_1, \dots, f_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))\, d\mu_N(x_N) \cdots d\mu_1(x_1).$$

Τότε,

$$\mathcal{F}_K(f_1, \dots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_K(\mathbf{1}_{D_n}, \dots, \mathbf{1}_{D_n}).$$

Ενδιαφερόμαστε για άνω και κάτω φράγματα για τη μέση τιμή του όγκου του τυχαίου κυρτού συνόλου $T_{\mathbf{x}}(K)$ στην περίπτωση όπου το $\mu_1 = \cdots = \mu_N = \mu$ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτό το κεφάλαιο λέμε ότι το μ είναι ισοτροπικό αν έχει κέντρο βάρους το 0, για την πυκνότητα f του μ ισχύει $\|f\|_\infty = 1$, και ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του μ είναι ο $\mathrm{Cov}(\mu) = L_\mu^2 I_n$, όπου L_μ είναι η ισοτροπική σταθερά του μ. Ξεκινάμε από τον τύπο

$$\text{(1.3.1)} \qquad \mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K)) = \sqrt{\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)}\,\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(K)),$$

όπου $E_{\mathbf{x}} = \ker(T_{\mathbf{x}})^\perp = \mathrm{Range}(T_{\mathbf{x}}^*)$, και A^* είναι ο ανάστροφος ενός πίνακα A. Για να εκμεταλλευτούμε αυτή τη σχέση, αποδεικνύουμε αρχικά ότι αν $x_1, \ldots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία τα οποία είναι κατανεμημένα σύμφωνα με ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\text{(1.3.2)} \qquad c_1 L_\mu\sqrt{N} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\big(\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)\big)^{\frac{1}{2n}}\,d\mu^N(\mathbf{x}) \leqslant L_\mu\sqrt{N},$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Μια πρώτη συνέπεια είναι το ακόλουθο άνω φράγμα για τη μέση τιμή

$$\int_{O(N)}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(U(K)))^{\frac{1}{n}}\,d\mu^N(\mathbf{x})\Big)\,d\nu_N(U)$$

ως προς $U \in O(N)$ συναρτήσει του μέσου πλάτους του K, η οποία δείχνει τι θα μπορούσαμε να περιμένουμε ως μια «καλή εκτίμηση» για την ακτίνα όγκου του τυχαίου $T_{\mathbf{x}}(K)$.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N \geqslant n$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ έχουμε ότι*

$$\int_{O(N)}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K)\big)^{\frac{1}{n}}\Big)\,d\nu_N(U) \leqslant cL_\mu\sqrt{N/n}\,w(K)$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στη συνέχεια μελετάμε τα βασικά παραδείγματα $K = B_1^N$ ή $K = B_\infty^N$ και, χρησιμοποιώντας επιπλέον γνωστά αποτελέσματα των Bobkov και Nazarov τα οποία περιγράφουν τη γεωμετρία ενός γενικού ισοτροπικού unconditional κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ επιτυγχάνουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για το πρόβλημα.

Θεώρημα 1.3.3. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ έχουμε*

$$c_1\sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(K) \leqslant \mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\Big) \leqslant c_2L_\mu\sqrt{N/n}\,(\log n)^2\mathrm{vrad}(K),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στην περίπτωση $K = \overline{B}_q^N$, $2 \leqslant q \leqslant \infty$, μπορούμε να δώσουμε ακριβή ασυμπτωτική εκτίμηση για τη μέση τιμή του όγκου του $T_{\mathbf{x}}(K)$.

Θεώρημα 1.3.4. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N \geqslant n$ και κάθε $2 \leqslant q \leqslant \infty$ έχουμε*

$$c_1\sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_q^N) \leqslant \mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_q^N))^{1/n}\Big) \leqslant c_2L_\mu\sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_q^N).$$

Δίνουμε επίσης ένα γενικό άνω φράγμα με την υπόθεση ότι τόσο το μ όσο και το K είναι ισοτροπικά.

Θεώρημα 1.3.5. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N \geqslant n$ και κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ έχουμε*

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \frac{c_2 L_\mu N}{n}\,\mathrm{vrad}(K)\,L_K,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στο δεύτερο μέρος του Κεφαλαίου 5 δίνουμε εκτιμήσεις για τη μέση τιμή του όγκου τυχαίων «σφαιρικών» πολυέδρων. Έστω f μια πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Σταθεροποιούμε $N \geqslant 1$ και μια N-άδα $\mathbf{r} = (r_1, \ldots, r_N)$ θετικών πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι κατανεμημένα σύμφωνα με την f, και ορίζουμε το τυχαίο «σφαιρικό» πολύεδρο

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{r}) := \bigcap_{i=1}^N B(x_i, r_i)$$

να είναι η τομή των Ευκλείδειων μπαλών $B(x_i, r_i)$. Οι Παούρης και Pivovarov απέδειξαν στο [92] ότι η μέση τιμή του όγκου αυτού του τυχαίου σφαιρικού πολυέδρου μεγιστοποιείται όταν $f = \mathbf{1}_{D_n}$, δηλαδή η f είναι η πυκνότητα του ομοιόμορφου μέτρου στην D_n.

Θεώρημα 1.3.6 (Παούρης-Pivovarov)**.** *Έστω $N, n \geqslant 1$ και $r_1, \ldots, r_N \in (0, \infty)$. Θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ και $x_1^*, \ldots, x_N^*$ τέτοια ώστε κάθε x_i να έχει πυκνότητα f_i με $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$, και κάθε x_i^* να έχει πυκνότητα $\mathbf{1}_{D_n}$, $i = 1, \ldots, N$. Τότε, για κάθε $r_1, \ldots, r_N > 0$,*

$$\mathbb{E}_{\oplus\mu_i}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N B(x_i, r_i)\Big)\Big) \leqslant \mathbb{E}_{\mu_{D_n}^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N B(x_i^*, r_i)\Big)\Big).$$

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Η πρώτη μας παρατήρηση είναι ότι στην περίπτωση όπου $r_1 = \cdots = r_N = r$ υπάρχει ένας απλός τύπος που δίνει τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N B(x_i, r_i)\Big)\Big).$$

Συγκεκριμένα,

$$\mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N B(x_i, r)\Big)\Big) = \int_{K + rB_2^n} \mathrm{vol}_n((K - y) \cap rB_2^n)^N\,dy.$$

Μάλιστα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις Ευκλείδειες μπάλες με r-πολλαπλάσια οποιουδήποτε συμμετρικού κυρτού σώματος C στον $\mathbb{R}^n$. Ο αντίστοιχος τύπος είναι

$$\mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + rC)\Big)\Big) = \int_{K + rC} \mathrm{vol}_n((K - y) \cap rC)^N\,dy.$$

Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα που βασίζεται στην ανισότητα Brunn-Minkowski, και πηγαίνει πίσω στη δουλειά των Rogers και Shephard, αποδεικνύουμε το ακόλουθο κάτω φράγμα, που ισχύει για κάθε $r > 0$.

Θεώρημα 1.3.7. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και $x_1, \dots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Τότε, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι*

$$\binom{nN+n}{n}^{-1} \mathrm{vol}_n(K \cap rC)^N \mathrm{vol}_n(K + rC)$$
$$\leqslant \mathbb{E}_{\mu_K^N} \Big(\mathrm{vol}_n \Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + rC) \Big) \Big) \leqslant \mathrm{vol}_n(K \cap rC)^N \mathrm{vol}_n(K + rC).$$

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να βρεθούν οι βέλτιστες σταθερές στην ανισότητα του Θεωρήματος 1.3.7. Αποδεικνύουμε ότι η συμπεριφορά της $\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\left(\cap_{i=1}^N (x_i + rC)\right)\right)$ είναι διαφορετική για μικρές και μεγάλες τιμές του r. Έχουμε

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}_n(rC)} \mathbb{E}_{\mu_K^N} \Big(\mathrm{vol}_n \Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + rC) \Big) \Big) = 1$$

και

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{vol}_n(rC)^N} \mathbb{E}_{\mu_K^N} \Big(\mathrm{vol}_n \Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + rC) \Big) \Big) = 1.$$

1.4 Αφφινικά quermassintegrals τυχαίων πολυτόπων

Τα αφφινικά quermassintegrals ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ εισήχθησαν από τον Lutwak στο [71]: ορίζονται από την

$$\Phi_{n-k}(K) = \frac{\omega_n}{\omega_k} \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n} d\nu_{n,k}(F) \right)^{-1/n}$$

για $1 \leqslant k \leqslant n-1$, όπου $\nu_{n,k}$ είναι το μέτρο πιθανότητας Haar στην Grassmannian $G_{n,k}$ όλων των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ και ω_k είναι ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας B_2^k στον $\mathbb{R}^k$. Στα επόμενα, θα υιοθετήσουμε επίσης τον συμβολισμό $\Phi_0(K) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $\Phi_n(K) = \omega_n$. Ο Grinberg απέδειξε στο [52] ότι αυτές οι ποσότητες είναι αναλλοίωτες ως προς αφφινικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο. Ο Lutwak διατύπωσε στο [72] την εικασία ότι τα αφφινικά quermassintegrals ικανοποιούν τις ανισότητες

$$\omega_n^j \Phi_{n-j}(K)^k \leqslant \omega_n^k \Phi_{n-k}(K)^j \tag{1.4.1}$$

για κάθε $0 \leqslant k \leqslant j \leqslant n$, με ισότητα όταν $k < j$ αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές, και, ειδικότερα για $j = n$, ότι

$$\omega_n^{\frac{n-k}{n}} \mathrm{vol}_n(K)^{\frac{k}{n}} \leqslant \Phi_{n-k}(K) \tag{1.4.2}$$

για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n$ με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές (δείτε το [4, Κεφάλαιο 9] για σχετικές εικασίες που αφορούν τα δυϊκά αφφινικά quermassintegrals και τη βιβλιογραφία).

Η ακόλουθη παραλλαγή της ποσότητας Φ_{n-k} μελετήθηκε από τους Δαφνή και Παούρη στο [40]: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ορίζουμε το κανονικοποιημένο k-στο αφφινικό quermassintegral του K ως εξής:

$$\Phi_{[k]}(K) := \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}} \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F) \right)^{-\frac{1}{kn}}.$$

Σημειώνουμε ότι $\Phi_{[k]}(K) = \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{\omega_k}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{k}} \Phi_{n-k}(K)^{\frac{1}{k}}$, άρα η εικασία ότι ισχύει η ανισότητα (1.4.2) αναδιατυπώνεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\Phi_{[k]}(K) \geqslant \Phi_{[k]}(B_2^n). \tag{1.4.3}$$

Όταν $k = 1$, η παραπάνω ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας Blaschke-Santaló, η οποία ισχυρίζεται ότι το «γινόμενο όγκων» ενός κυρτού σώματος K με κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων και του πολικού του σώματος K° μεγιστοποιείται όταν το K είναι ελλειψοειδές:

$$\mathrm{vol}_n(K) \cdot \mathrm{vol}_n(K^\circ) \leqslant \omega_n^2. \tag{1.4.4}$$

Στην περίπτωση $k = n-1$, σημειώνουμε ότι

$$\Phi_{[n-1]}(K) = \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}} \left(\frac{\mathrm{vol}_n(\Pi^* K)}{\omega_n} \right)^{-\frac{1}{n(n-1)}},$$

όπου $\Pi^* K$ είναι το *πολικό σώμα προβολών* του K (το πολικό σώμα του σώματος προβολών ΠK του K, που έχει συνάρτηση στήριξης την $h_{\Pi K}(\vartheta) = \mathrm{vol}_{n-1}(P_{\vartheta^\perp} K)$, $\vartheta \in S^{n-1}$). Τότε, η (1.4.3) είναι συνέπεια της ανισότητας προβολών του Petty [96]:

$$\mathrm{vol}_n(K)^{n-1} \mathrm{vol}_n(\Pi^* K) \leqslant \left(\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} \right)^n. \tag{1.4.5}$$

Πολύ πρόσφατα, η (1.4.2), και ισοδύναμα η (1.4.3), αποδείχθηκε από τους E. Milman και A. Yehudayoff στο [78].

Οι Δαφνής και Παούρης μελέτησαν στο [40] μια ισομορφική εκδοχή της εικασίας του Lutwak: το ερώτημα είναι αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$c_1 \sqrt{n/k} \leqslant \Phi_{[k]}(K) \leqslant c_2 \sqrt{n/k} \tag{1.4.6}$$

(υπενθυμίζουμε ότι η $\omega_k^{1/k}$ είναι της τάξης του $k^{-1/2}$). Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση $k = 1$ η δεξιά ανισότητα της (1.4.6) έπεται από την αντίστροφη ανισότητα Santaló των Bourgain και V. Milman [32], ενώ στην περίπτωση $k = n-1$ η τάξη μεγέθους που εικάζεται για την ποσότητα $\Phi_{[n-1]}(K)$ ισχύει και πάλι, αυτή τη φορά από την αντίστροφη της ανισότητας προβολών του Petty, η οποία έχει αποδειχθεί από τον Zhang [115].

Το γεγονός ότι η ανισότητα στο αριστερό μέλος της (1.4.6) ισχύει αποδείχθηκε από τους Παούρη και Pivovarov στο [91]. Επιβεβαιώνει την (1.4.2) από την ισομορφική άποψη (όπως αναφέραμε ππρογουμένως, η ισχυρή εικασία (1.4.2) έχει πλέον επαληθευτεί και αυτή).

Θεώρημα 1.4.1 (Παούρης-Pivovarov). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant k \leqslant n$. Τότε,*

$$\Phi_{[k]}(K) \geqslant c\sqrt{n/k}. \tag{1.4.7}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.4.1 βασίζεται σε ένα επιχείρημα δυϊσμού, το οποίο χρησιμοποιεί την ανισότητα Blaschke-Santaló (1.4.4) και την αντίστροφή της, σε συνδυασμό με μια ανισότητα ισοπεριμετρικού τύπου για τις ροπές του όγκου των τομών ενός κυρτού σώματος, η οποία αποδείχθηκε από τον Grinberg [52], σύμφωνα με την οποία

$$\mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}} \left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K \cap F)^n \, d\nu_{n,k}(F) \right)^{\frac{1}{kn}} \leqslant \frac{\omega_k^{1/k}}{\omega_n^{1/n}}. \tag{1.4.8}$$

Το κεντρικό ερώτημα που συζητάμε σε αυτό το κεφάλαιο σχετίζεται με το άνω φράγμα στην (1.4.6). Μια σχεδόν βέλτιστη εκτίμηση (που υπολείπεται της εικασίας κατά έναν όρο $\log n$) δόθηκε από τους Δαφνή και Παούρη στο [40]. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει ότι

$$\Phi_{[k]}(K) \leqslant c_2\sqrt{n/k}\log n, \tag{1.4.9}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το πρόβλημα που παραμένει ανοικτό είναι αν ο όρος $\log n$ στην (1.4.9) μπορεί να απαλειφθεί.

Στο Κεφάλαιο 6 μελετάμε αυτό το πρόβλημα για κάποιες ευρείες κλάσεις τυχαίων πολυτόπων. Στην Παράγραφο 6.2 δίνουμε καταφατική απάντηση στο πρόβλημα για την κλάση των συμμετρικών τυχαίων πολυτόπων με $e^{\sqrt{n}}$ το πολύ κορυφές ομοιόμορφα κατανεμημένες σε ένα κυρτό σώμα K. Δεδομένου ότι το πρόβλημα είναι αφφινικά αναλλοίωτο, μπορούμε να περιοριστούμε στην ισοτροπική περίπτωση. Έστω $N \geqslant n$ και ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα $x_1, \dots, x_N$ που επιλέγονται ομοιόμορφα από ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή, έχουν κατανομή το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στο K). Θεωρούμε το συμμετρικό τυχαίο πολύτοπο

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\}.$$

Θεώρημα 1.4.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ και $n^2 \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$. Αν $x_1, \dots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα που επιλέγονται ομοιόμορφα από το K, τότε*

$$\Phi_{[k]}(K_N) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{2}{N}$.

Στην Παράγραφο 6.3 θεωρούμε την περίπτωση του κωνικού μέτρου πιθανότητας μ_K στο σύνορο $\partial(K)$ ενός κυρτού σώματος K, το οποίο ορίζεται από την

$$\mu_K(B) = \frac{\mathrm{vol}_n(\{rx : x \in B, 0 \leqslant r \leqslant 1\})}{\mathrm{vol}_n(K)}$$

για όλα τα Borel υποσύνολα B του $\partial(K)$. Για κάθε $N \geqslant n$ θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$ που έχουν κατανομή το μ_K και το τυχαίο πολύτοπο $M_N = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\}$. Δίνουμε μια περιγραφή του «ασυμπτωτικού σχήματος» του M_N που είναι παράλληλη με την διαθέσιμη περιγραφή για το K_N. Αυτό είναι εφικτό, με κατάλληλες τροποποιήσεις της θεωρίας που αναπτύχθηκε στα [38] και [39], και μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι το ανάλογο του Θεωρήματος 1.4.2 ισχύει και γι' αυτό το μοντέλο.

Θεώρημα 1.4.3. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ και $n^2 \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$. Αν $x_1, \dots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με κατανομή το μ_K, τότε*

$$\Phi_{[k]}(M_N) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{1}{N^2}$.

Στην Παράγραφο 6.4 μελετάμε ένα διαφορετικό μοντέλο τυχαίων πολυτόπων. Για δοθέν $\beta > -1$, έστω ν_β το μέτρο πιθανότητας με φορέα την B_2^n, που έχει πυκνότητα $p_{n,\beta}(x) = c_{n,\beta}(1 - \|x\|_2^2)^\beta$, όπου $c_{n,\beta} := \pi^{-n/2}\frac{\Gamma(\beta+\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\beta+1)}$. Σταθεροποιούμε $N > n$, και θεωρούμε τυχαία διανύσματα $x_1, \dots, x_N$ τα οποία επιλέγονται ανεξάρτητα και έχουν κατανομή το μέτρο ν_β. Το Βήτα-πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ (με παράμετρο β) είναι το τυχαίο πολύτοπο

$$P_{N,n}^\beta := \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\}.$$

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 1.4.4. *Έστω $\beta > -1$ και $x_1, \dots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν κατανομή το ν_β. Αν $k \geqslant \log\left(n\left(1+\log\left(4\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}\right)\right)\right)$ και $N \geqslant c_0^{\beta+\frac{n+1}{2}}$, όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, τότε*

$$\Phi_{[k]}(P_{N,n}^\beta) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην τελευταία παράγραφο του Κεφαλαίου 6 μελετάμε τις ποσότητες $\Phi_{[k]}(K)$ για την κλάση των unconditional κυρτών σωμάτων K. Επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση $K = B_1^n$, διότι, σύμφωνα με γνωστά αποτελέσματα των Bobkov και Nazarov (δείτε την Παράγραφο 6.5) αποδεικνύεται ότι αν K είναι ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, έχουμε ότι

$$\Phi_{[k]}(K) \leqslant c\Phi_{[k]}(B_1^n)$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε το επόμενο θεώρημα μόνο στην περίπτωση $K = B_1^n$.

Θεώρημα 1.4.5. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\log n \leqslant k \leqslant n$,*

$$\Phi_{[k]}(K) \leqslant c\sqrt{n/k}\cdot\sqrt{1+\log(n/k)}, \tag{1.4.10}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Γενικότερα, για κάθε $p \neq 0$ μπορούμε να θεωρήσουμε την ποσότητα

$$W_{[k,p]}(K) = \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\left(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^p \, d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{kp}}$$

και να μελετήσουμε τη συμπεριφορά της ως προς p, n και k στην περίπτωση όπου K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ (σημειώνουμε ότι $\Phi_{[k]}(K) = W_{[k,-n]}$). Για την κλάση των unconditional κυρτών σωμάτων, μελετώντας την περίπτωση $K = B_1^n$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $W_{[k,-p]}(K) \leqslant cW_{[k,-p]}(B_1^n)$ για κάθε p, δίνουμε φράγματα για την «ελάχιστη τιμή» του p για την οποία $W_{[k,-p]}(K) \leqslant c\sqrt{n/k}$.

Θεώρημα 1.4.6. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και κάθε $p \geqslant c_1(n-k)\log n$ έχουμε ότι*

$$W_{[k,-p]}(K) \leqslant c_2\sqrt{n/k}, \tag{1.4.11}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

1.5 Συμμετρικός μέσος και η MM^*-ανισότητα για ισοτροπικά κυρτά σώματα

Στο Κεφάλαιο 7 συζητάμε δύο ανοικτά προβλήματα από την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία.

Το πρώτο πρόβλημα αφορά εκτιμήσεις για τον συμμετρικό μέσο $\mathrm{sav}(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, που ορίζεται από την

$$\mathrm{sav}(K) := \inf\Big\{\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)}\int_{K_z} \|-x\|_{K_z}\,dx : z \in \mathrm{int}(K)\Big\},$$

όπου $K_z := K - z$ είναι η μεταφορά του K κατά z. Η παράμετρος $\mathrm{sav}(K)$ είναι αφφινικά αναλλοίωτη και είναι ένα ενδιαφέρον μέτρο ασυμμετρίας του K. Οι Guédon και Litvak μελέτησαν το πρόβλημα να δοθούν άνω φράγματα για την παράμετρο $\mathrm{sav}(K)$ στο [54]. Απέδειξαν ότι

$$\frac{n}{n+1} \leqslant \mathrm{sav}(K) < \sqrt{n}$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, με ισότητα στην αριστερή ανισότητα αν και μόνο αν το K είναι συμμετρικό. Για την απόδειξη της δεξιάς ανισότητας χρησιμοποιούν μια ειδική θέση του K, αυτήν για την οποία η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο K και έχει κέντρο το κέντρο βάρους του K. Δείχνουμε ότι ένα άνω φράγμα της ίδιας τάξης ισχύει αν υποθέσουμε ότι το K βρίσκεται στην ισοτροπική θέση.

Θεώρημα 1.5.1. *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_K \|-x\|_K\,dx \leqslant c\sqrt{n},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, $\mathrm{sav}(K) \leqslant c\sqrt{n}$.

Η απόδειξη αυτή είναι απλούστερη και έχει το πλεονέκτημα ότι, υπό προϋποθέσεις για το K, μπορεί να δώσει καλύτερες εκτιμήσεις. Για παράδειγμα, μπορούμε να δείξουμε ότι για το simplex S, που είναι το πλέον ακραίο παράδειγμα μη συμμετρικού κυρτού σώματος, ισχύει το φράγμα $\mathrm{sav}(S) \leqslant C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ένα δεύτερο αποτέλεσμα το οποίο αποδεικνύεται στο [54] αφορά την περίπτωση όπου το K είναι πολύεδρο με «λίγες έδρες». Αν $N > n$ και K είναι ένα πολύεδρο στον $\mathbb{R}^n$ με N έδρες, τότε

$$\mathrm{sav}(K) \leqslant c\log N,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Μπορούμε και πάλι να δείξουμε ένα άνω φράγμα της ίδιας τάξης δουλεύοντας με την ισοτροπική θέση.

Θεώρημα 1.5.2. *Έστω $N > n$ και K ισοτροπικό πολύεδρο με N έδρες στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_K \|-x\|_K \, dx \leqslant c \log N,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, $\mathrm{sav}(K) \leqslant c \log N$.

Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει, πάλι, ότι αν και ένα κυρτό σώμα μπορεί να απέχει πολύ από το να είναι συμμετρικό με την έννοια της απόστασης Banach-Mazur, ο συμμετρικός του μέσος μπορεί να είναι πολύ μικρότερης τάξης ως προς τη διάσταση.

Το πρόβλημα της παραμέτρου $\mathrm{sav}(K)$ σχετίζεται άμεσα με τα αποτελέσματα και τα ερωτήματα του Κεφαλαίου 4. Το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 1.2.4 μας δίνει την ακόλουθη εκτίμηση.

Θεώρημα 1.5.3. *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{-K} \|x\|_K \, dx \leqslant c\sqrt[4]{n}\,\sqrt{n} L_K M(K),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\mathrm{sav}(K) \leqslant c\sqrt[4]{n}\,\sqrt{n} L_K M(K_{\mathrm{iso}})$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, όπου K_{iso} μια ισοτροπική θέση του K.

Το δεύτερο πρόβλημα αφορά τις παραμέτρους $w(K)$ και $M(K)$ για συμμετρικά ισοτροπικά κυρτά σώματα. Το ερώτημα να δοθεί άνω φράγμα για το μέσο πλάτος ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος

$$w(K) := \int_{S^{n-1}} h_K(\vartheta) \, d\sigma(\vartheta),$$

δηλαδή, την L_1-νόρμα της συνάρτησης στήριξης του K ως προς το μέτρο Haar στη σφαίρα, ήταν ανοικτό για αρκετά χρόνια. Το άνω φράγμα $w(K) \leqslant cn^{3/4} L_K$ εμφανίστηκε στη διδακτορική διατριβή της Χαρτζουλάκη [56]. Άλλες προσεγγίσεις που οδηγούν στο ίδιο άνω φράγμα εμφανίζονται σε εργασίες των Pivovarov [99] και Βαλέττα, Γιαννόπουλου και Παούρη [47]. Ο E. Milman απέδειξε στο [77] ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $q \geqslant 1$ ισχύει

$$w(Z_q(K)) \leqslant C \log(1+q) \max\left\{ \frac{q \log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q} \right\} L_K$$

όπου $Z_q(K)$ είναι το L_q-κεντροειδές σώμα του K (δείτε το Κεφάλαιο 2 για τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες των κεντροειδών σωμάτων) και $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n} (\log n)^2 L_K.$$

Η εξάρτηση από το n είναι βέλτιστη αν εξαιρέσουμε το λογαριθμικό όρο.

Το δυϊκό πρόβλημα, να δοθεί άνω φράγμα για την αντίστοιχη L_1-νόρμα του συναρτησοειδούς Minkowski του K,

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} \|x\|_K \, d\sigma(x),$$

όταν το K είναι ισοτροπικό κυρτό σώμα, δεν είχε μελετηθεί μέχρι πρόσφατα. Κάποια άνω φράγματα δόθηκαν αρχικά στο [45]. Η καλύτερη γνωστή εκτίμηση, στην περίπτωση που το K είναι συμμετρικό,

$$M(K) \leqslant \frac{C \log^{2/5}(e+n)}{\sqrt[10]{n} L_K}$$

οφείλεται στους Γιαννόπουλο και E. Milman (δείτε το [43]).

Δίνουμε μια απλούστερη απόδειξη, που αποφεύγει την θεωρία των L_q-κεντροειδών σωμάτων, για όλα αυτά τα αποτελέσματα. Από την απόδειξη γίνεται σαφές ότι το επιχείρημα για το μέσο πλάτος μπορεί να επεκταθεί χωρίς δυσκολίες στην περίπτωση των μη συμμετρικών κυρτών σωμάτων. Η περίπτωση της μέσης νόρμας εμφανίζεται αυτή τη στιγμή πιο δύσκολη: πέρα από το ότι οι εκτιμήσεις στη συμμετρική περίπτωση δεν είναι βέλτιστες, υπάρχουν κάποιες τεχνικές δυσκολίες και για το πέρασμα από τη συμμετρική στη μη συμμετρική περίπτωση, οι οποίες οδηγούν σε ενδιαφέροντα ερωτήματα για τις προβολές μη συμμετρικών κυρτών σωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Αναλυτικά και γεωμετρικά εργαλεία

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο

$$\langle x, y\rangle := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

για κάθε $x = (x_1, \ldots, x_n)$, και $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$. Με $(e_i)_{i=1}^n$ συμβολίζουμε τη συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$, και με $0 = (0, \ldots, 0)$ το μηδέν του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ με $\xi^\perp$ συμβολίζουμε το κεντρικό υπερεπίπεδο που είναι κάθετο στο ξ. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την Ευκλείδεια νόρμα $\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x\rangle}$, και γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Με τον όρο όγκος του A, αναφερόμαστε στο n-διάστατο μέτρο Lebesgue ενός (πλήρους διάστασης) μετρήσιμου υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε τον όγκο ενός τέτοιου συνόλου A με $\mathrm{vol}_n(A)$. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n. Για ευκολία στο συμβολισμό γράφουμε $\overline{A}$ για την ομοιοθετική εικόνα όγκου 1 ενός $A \subseteq \mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(A) > 0$, δηλαδή $\overline{A} := \mathrm{vol}_n(A)^{-1/n} A$.

Η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} είναι εφοδιασμένη με ένα αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας, το οποίο συμβολίζουμε με σ: ένας τρόπος ορισμού αυτού του μέτρου είναι να θέσουμε

$$\sigma(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(C(A))}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)},$$

για κάθε Borel $A \subseteq S^{n-1}$, όπου $C(A) = \{tx : x \in A, t \in [0, 1]\}$.

Γράφουμε $GL(n)$ για το σύνολο όλων των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, και $SL(n) = \{T \in GL(n) : |\det(T)| = 1\}$ είναι το υποσύνολο των $T \in GL(n)$ που διατηρούν τον όγκο. Με $O(n)$ συμβολίζουμε το σύνολο των ορθογώνιων μετασχηματισμών στον $\mathbb{R}^n$. Η ορθογώνια ομάδα $O(n)$ είναι εφοδιασμένη με ένα μοναδικό μέτρο πιθανότητας (μέτρο Haar) το οποίο συμβολίζουμε με ν_n. Σταθεροποιώντας τυχόν $x_0 \in S^{n-1}$ έχουμε, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq S^{n-1}$, την ταυτότητα

$$\sigma(A) := \nu_n\left(\{U \in O(n) : U(x_0) \in A\}\right).$$

Για κάθε φυσικό $k < n$, με $G_{n,k}$ συμβολίζουμε την πολλαπλότητα Grassmann, το σύνολο των k-διάστατων υπόχωρων του $\mathbb{R}^n$. Η $G_{n,k}$ είναι επίσης εφοδιασμένη με ένα μέτρο Haar πιθανότητας που συμβολίζουμε με $\nu_{n,k}$, και ορίζεται μέσω του μέτρου στην $O(n)$: Για κάθε μετρήσιμο $S \subseteq G_{n,k}$,

$$\nu_{n,k}(S) := \nu_n\left(\{U \in O(n) : U(\mathbb{R}^k) \in S\}\right).$$

Για έναν υπόχωρο $F \in G_{n,k}$, συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ επί του F.

Τα γράμματα $c, c', \bar{c}, c_1, c_2$ κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές που η τιμή τους μπορεί να αλλάζει από γραμμή σε γραμμή. Όταν γράφουμε $a \lesssim b$, εννοούμε ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $a \leqslant cb$. Γράφουμε επίσης $a \approx b$ αν $a \lesssim b$ και $b \lesssim a$. Όμοια, αν $K, T \subseteq \mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K \approx T$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε $c_1 K \subseteq T \subseteq c_2 K$. Συμβολίζουμε τέλος με $|A|$ τον πληθάριθμο ενός πεπερασμένου συνόλου A, και συχνά χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

2.1 Αποτελέσματα από την θεωρία των κυρτών σωμάτων

Κυρτά σώματα. Συμβολίζουμε με $\mathcal{K}_n$ την κλάση όλων των μη κενών συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το K είναι συμμετρικό αν $K = -K$, δηλαδή αν «$x \in K$ αν και μόνο αν $-x \in K$». Λέμε ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0 αν το βαρύκεντρό του $\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)} \int_K x\,dx$ είναι το 0. Ισοδύναμα, αν

$$\int_K \langle x, \xi \rangle\, dx = 0$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$.

Ένα συμπαγές σύνολο K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται αστρόμορφο (στο 0) αν περιέχει το 0 στο εσωτερικό του και κάθε ημιευθεία με αρχή το το 0 τέμνει το K σε ένα ευθύγραμμο τμήμα. Για κάθε τέτοιο σύνολο, η ακτινική συνάρτηση ρ_K ορίζεται στην S^{n-1} από την

$$\rho_K(\xi) = \max\{t > 0 : t\xi \in K\}, \qquad \xi \in S^{n-1}. \tag{2.1.1}$$

Αν η ρ_K είναι συνεχής, λέμε ότι το K είναι αστρόμορφο σώμα. Τότε, ο όγκος του K σε πολικές συντεταγμένες δίνεται από την

$$\mathrm{vol}_n(K) = \omega_n \int_{S^{n-1}} \rho_K^n(\xi)\, d\sigma(\xi). \tag{2.1.2}$$

Γενικότερα, μπορούμε να ορίσουμε την ακτινική συνάρτηση ρ_K στον $\mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ μέσω της $\rho_K(x) = \max\{t > 0 : tx \in K\}$. Τότε, η ρ_K είναι θετικά ομογενής βαθμού -1, δηλαδή $\rho_K(ax) = a^{-1}\rho_K(x)$ για κάθε $a > 0$.

Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_K$ το συναρτησοειδές Minkowski του K,

$$\|x\|_K = \min\{t \geqslant 0 : x \in tK\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.3}$$

Σημειώνουμε ότι $\rho_K(\xi) = \|\xi\|_K^{-1}$ για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Στην περίπτωση που το K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα, το συναρτησοειδές Minkowski $\|\cdot\|_K$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, για την οποία ισχύει

$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leqslant 1\}$. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, η κλειστή μοναδιαία μπάλα του X, $B_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Με αυτήν την έννοια, η κλάση των n-διάστατων χώρων με νόρμα ταυτίζεται με την κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$.

Η ακτίνα όγκου ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ είναι η ποσότητα

$$\text{vrad}(K) = \left(\frac{\text{vol}_n(K)}{\text{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}. \tag{2.1.4}$$

Από την (2.1.2) βλέπουμε ότι αν το 0 είναι εσωτερικό σημείο του K τότε η ακτίνα όγκου του K είναι ίση με

$$\text{vrad}(K) = \left(\int_{S^{n-1}} \|\xi\|_K^{-n}\, d\sigma(\xi)\right)^{1/n}. \tag{2.1.5}$$

Η συνάρτηση στήριξης ενός κυρτού σώματος K ορίζεται από την

$$h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{2.1.6}$$

Η συνάρτηση στήριξης χαρακτηρίζει το σώμα: Έχουμε $h_K \leqslant h_L$ αν και μόνο αν $K \subseteq L$. Γεωμετρικά, για κάθε $\xi \in S^{n-1}$, η ποσότητα $h_K(\xi)$ είναι η (προσημασμένη) απόσταση του υπερεπιπέδου στήριξης του K στη διεύθυνση ξ από το 0, η δε ποσότητα $h_K(\xi) + h_K(-\xi)$ μετράει το «πλάτος» του σώματος K στη διεύθυνση $\xi \in S^{n-1}$. Θεωρώντας τη μέση τιμή αυτού του πλάτους στην S^{n-1} (και διαιρώντας με 2) παίρνουμε το μέσο πλάτος του K,

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(\xi)\, d\sigma(\xi). \tag{2.1.7}$$

Το συναρτησοειδές h_K είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Λόγω της θετικής ομογένειας μάλιστα, είναι συνηθισμένο να θεωρούμε την h_K ορισμένη μόνο στη σφαίρα S^{n-1}, αντί για ολόκληρον τον $\mathbb{R}^n$. Παρατηροούμε επίσης ότι η h_K είναι άρτια αν και μόνο αν το K είναι συμμετρικό, και θετική αν και μόνο αν $0 \in \text{int}(K)$. Όταν ισχύουν τα παραπάνω, η h_K είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Η κλειστή μοναδιαία μπάλα αυτής της νόρμας είναι το λεγόμενο πολικό σώμα του K, το οποίο μπορεί να οριστεί και χωρίς την υπόθεση της συμμετρίας: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $0 \in \text{int}(K)$, ορίζουμε

$$K^\circ := \left\{x \in \mathbb{R}^n : \max_{y \in K}\langle x, y\rangle \leqslant 1\right\}. \tag{2.1.8}$$

Στην περίπτωση που το K είναι συμμετρικό, και $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$, έχουμε $K^\circ = B_{X^*}$, δηλαδή το πολικό σώμα K° είναι η κλειστή μοναδιαία μπάλα του δυϊκού χώρου X^*. Σημειώνουμε επίσης ότι $(K^\circ)^\circ = K$ και $h_K(\cdot) = \|\cdot\|_{K^\circ}$ για κάθε κυρτό σώμα K με $0 \in \text{int}(K)$.

Ορίζουμε

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} \|\xi\|_K d\sigma(\xi).$$

Παρατηρώντας ότι $\|x\|_K = h_{K^\circ}(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ βλέπουμε ότι $M(K) = w(K^\circ)$. Η εξωτερική ακτίνα $R(K)$ ενός κυρτού σώματος K είναι ο μικρότερος $R > 0$ με την ιδιότητα $K \subseteq RB_2^n$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι $R(K) \leqslant c\sqrt{n}w(K)$. Ισοδύναμα, $b(K) \leqslant c\sqrt{n}M(K)$, όπου $b(K)$ είναι ο μικρότερος $b > 0$ με την ιδιότητα ότι $\|x\|_K \leqslant b\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Μεικτοί όγκοι. Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, ο τύπος του Steiner δείχνει ότι ο όγκος του αθροίσματος Minkowski $K + tB_2^n$ μπορεί να γραφεί σαν ένα πολυώνυμο του t: Υπάρχουν μη-αρνητικοί συντελεστές $(W_k(K))_{k=0}^n$ τέτοιοι ώστε

$$\mathrm{vol}_n(K + tB_2^n) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} W_k(K) t^k. \tag{2.1.9}$$

Ο όρος $W_k(K)$ στην (2.1.9) είναι το k-στο quermassintegral του K. Οι ποσότητες αυτές έχουν μια ολοκληρωτική αναπαράσταση, μέσω του τύπου του Kubota:

$$W_k(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-k}} \int_{G_{n,n-k}} \mathrm{vol}_{n-k}(P_F(K))\, d\nu_{n,n-k}(F) \tag{2.1.10}$$

Εφαρμόζοντας την (2.1.10) για $k = n-1$ παίρνουμε $W_{n-1}(K) = \omega_n w(K)$, ενώ εύκολα βλέπουμε ότι $W_0(K) = \mathrm{vol}_n(K)$, $W_n(K) = \omega_n$.

Από την ανισότητα Aleksandrov-Fenchel (δείτε το [1, Θεώρημα B.2.1]) έπεται ότι

$$\left(\frac{W_k(K)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-k}} \geqslant \left(\frac{W_j(K)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{n-j}},$$

για κάθε $0 \leqslant j < k \leqslant n$. Αυτή η παρατήρηση δείχνει ότι είναι χρήσιμο να θεωρήσουμε μια διαφορετική κανονικοποίηση. Ορίζουμε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$

$$Q_k(K) := \left(\frac{W_{n-k}(K)}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{k}}.$$

Λέμε ότι το $Q_k(K)$ είναι το κανονικοποιημένο k-στό quermassintegral του K. Με αυτό το συμβολισμό, από τα προηγούμενα βλέπουμε ότι $Q_1(K) = w(K)$, $Q_n(K) = \mathrm{vrad}(K)$ και ότι η $(Q_k(K))_{k\leqslant n}$ είναι φθίνουσα ακολουθία του k. Ο τύπος του Kubota δίνει μια ολοκληρωτική αναπαράσταση για το Q_k, ανάλογη της 2.1.10:

$$Q_k(K) = \left(\frac{1}{\omega_k} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F)\right)^{1/k}.$$

Η ακολουθία των intrinsic volumes ενός κυρτού σώματος προκύπτει επίσης από μια διαφορετική κανονικοποίηση των quermassintegrals. Ορίζουμε τον k-στο intrinsic volume $V_k(K)$ του K, μέσω της

$$V_k(K) := \omega_{n-k}^{-1} \binom{n}{k} W_{n-k}(K) \tag{2.1.11}$$

(δείτε την [9, (4.9)]). Σημειώνουμε ότι, με αυτή την κανονικοποίηση, $V_0(K) = 1$, $V_n(K) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $V_1(K) = n\frac{\omega_n}{\omega_{n-1}} w(K)$.

Γεωμετρικές ανισότητες. Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με μερικές βασικές γεωμετρικές ανισότητες που θα χρησιμοποιούμε συχνά.

Θεώρημα 2.1.1 (ανισότητα Brunn-Minkowski). *Έστω K και L δύο μη-κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K+L)^{1/n} \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + \mathrm{vol}_n(L)^{1/n}. \tag{2.1.12}$$

Αν τα K και L είναι κυρτά σώματα, τότε ισότητα στην (2.1.12) ισχύει αν και μόνον αν τα K και L είναι ομοιοθετικά.

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει τον όγκο με το άθροισμα Minkowski. Μια ισοδύναμη διατύπωση είναι ότι για κάθε $\lambda \in (0,1)$, και κάθε ζεύγος μη-κενών, συμπαγών υποσυνόλων K, L του $\mathbb{R}^n$,

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)L)^{1/n} \geqslant \lambda \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} + (1-\lambda)\mathrm{vol}_n(L)^{1/n}. \tag{2.1.13}$$

Η ανισότητα αυτή είναι επίσης ισοδύναμη με την

$$\mathrm{vol}_n(\lambda K + (1-\lambda)L) \geqslant \mathrm{vol}_n(K)^{\lambda}\mathrm{vol}_n(L)^{1-\lambda}. \tag{2.1.14}$$

για κάθε K, L και $\lambda \in (0,1)$. Η συναρτησιακή εκδοχή της ανισότητας Brunn-Minkowski είναι η ανισότητα Prékopa-Leindler: Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{2.1.15}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)\,dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)\,dx\right)^{1-\lambda}. \tag{2.1.16}$$

Παρατηρήστε ότι η ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται άμεσα από την ανισότητα Prékopa-Leindler, αν θεωρήσουμε τις $f = \mathbf{1}_K$, $g = \mathbf{1}_L$ και $h = \mathbf{1}_{\lambda K + (1-\lambda)L}$.

Μια κλασική ανισότητα που προκύπτει άπό την ανισότητα Brunn-Minkowski σε συνδυασμό με τη μέθοδο της συμμετρικοποίησης κατά Steiner (για μια απόδειξη, βλέπε [1, Θεώρημα 1.5.11]) είναι η ανισότητα του Urysohn.

Θεώρημα 2.1.2 (ανισότητα Urysohn). *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε*

$$w(K) \geqslant \left(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\right)^{1/n}. \tag{2.1.17}$$

Παρατηρήστε ότι το δεξιό μέλος της (2.1.17) ισούται με την ακτίνα όγκου του K. Μπορούμε λοιπόν να την διατυπώσουμε στην ισοδύναμη μορφή

$$w(K) \geqslant \mathrm{vrad}(K). \tag{2.1.18}$$

Μια βασική ανισότητα που συνδέει τον όγκο ενός κυρτού σώματος με τον όγκο του πολικού του είναι η ανισότητα Blaschke-Santaló.

Θεώρημα 2.1.3 (ανισότητα Blaschke-Santaló)**.** *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ) \leqslant \omega_n^2. \tag{2.1.19}$$

Η παραπάνω ανισότητα στην ουσία λέει ότι το γινόμενο όγκων $\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ)$ μεγιστοποιείται στην περίπτωση που το K είναι ελλειψοειδές. Όπως με την ανισότητα του Urysohn, μπορούμε να αποδείξουμε την ανισότητα Blaschke-Santaló χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski και συμμετρικοποίηση κατά Steiner (βλέπε [1, Παράγραφος 1.5.4])

Δεδομένου ότι $\omega_n^{1/n} \approx n^{-1/2}$, η ανισότητα Blaschke-Santaló μας δίνει

$$\big(\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ)\big)^{1/n} \leqslant \frac{c}{n} \tag{2.1.20}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ένα μεταγενέστερο αποτέλεσμα των Bourgain και Milman εξασφαλίζει ότι στην ουσία η ανισότητα αυτή αντιστρέφεται. Γι' αυτό το λόγο, το επόμενο θεώρημα αναφέρεται και ως «αντίστροφη ανισότητα Santaló».

Θεώρημα 2.1.4 (ανισότητα Bourgain-Milman)**.** *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τέτοιο ώστε $0 \in \mathrm{int}(K)$. Τότε,*

$$(\mathrm{vol}_n(K)\mathrm{vol}_n(K^\circ))^{1/n} \geqslant \frac{c}{n} \tag{2.1.21}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατηρήστε ότι από τις ανισότητες Blaschke-Santaló και Bourgain-Milman έπεται ότι

$$\mathrm{vrad}(K)\mathrm{vrad}(K^\circ) \approx 1,$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0.

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $F \in G_{n,k}$ ορίζουμε

$$g(K,k;F) := \mathrm{vol}_k(P_F(K))\,\mathrm{vol}_{n-k}(K \cap F^\perp), \tag{2.1.22}$$

όπου με $F^\perp$ συμβολίζουμε τον ορθογώνιο υπόχωρο του F στον $\mathbb{R}^n$. Μια κλασική ανισότητα των Rogers και Shephard [103] (βλέπε επίσης Chakerian [36]) μας λέει ότι αν το K είναι συμμετρικό ως προς την αρχή των αξόνων και έχει όγκο 1, τότε

$$1 \leqslant g(K,k;F) \leqslant \binom{n}{k}. \tag{2.1.23}$$

Το δεξιό μέλος στην ανισότητα ισχύει ακόμα και αν υποθέσουμε απλώς ότι $0 \in \mathrm{int}(K)$. Επιπλέον, ο Spingarn [109] έδειξε οτι το κάτω φράγμα παραμένει το ίδιο αν υποθέσουμε ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0.

Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την θεωρία των κυρτών σωμάτων παραπέμπουμε στα βιβλία [9], [4] και [3].

2.2 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Ισοτροπικά κυρτά σώματα. Ένα κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο 1, το κέντρο βάρους του είναι το 0, και ο πίνακας αδρανείας του είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα: υπάρχει μια σταθερά $L_C > 0$ τέτοια ώστε

$$\|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L_2(C)}^2 := \int_C \langle x, \xi\rangle^2 dx = L_C^2 \tag{2.2.1}$$

για κάθε $\xi \in S^{n-1}$. Για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό. Αυτή η ισοτροπική εικόνα του K είναι μονοσήμαντα ορισμένη modulo ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Η εικασία του υπερεπιπέδου είναι το ερώτημα αν υπάρχει απόλυτη σταθερά $A > 0$ τέτοια ώστε

$$L_n := \max\{L_C : C \text{ ισοτροπικό κυρτό σώμα στον } \mathbb{R}^n\} \leqslant A \tag{2.2.2}$$

για κάθε φυσικό $n \geqslant 1$. Ο Bourgain απέδειξε στο [31] ότι $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}\,\mathrm{log}n$. Αργότερα, ο Klartag [63] βελτίωσε αυτό το φράγμα σε $L_n \leqslant c\sqrt[4]{n}$.

Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας. Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση των Borel μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Η πυκνότητα του $\mu \in \mathcal{P}_n$ συμβολίζεται με f_μ. Λέμε ότι το $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει κέντρο βάρους το 0 και γράφουμε $\mathrm{bar}(\mu) = 0$ αν, για κάθε $\xi \in S^{n-1}$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \xi\rangle d\mu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \xi\rangle f_\mu(x) dx = 0. \tag{2.2.3}$$

Ένα μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν

$$\mu(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \mu(A)^\lambda \mu(B)^{1-\lambda} \tag{2.2.4}$$

για κάθε ζεύγος μη κενών συμπαγών υποσυνόλων A και B του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$. Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη αν ο φορέας της, $\{f > 0\}$, είναι κυρτό σύνολο και ο περιορισμός της $\log f$ σε αυτόν είναι κοίλη συνάρτηση. Είναι γνωστό ότι αν ένα μέτρο πιθανότητας μ είναι λογαριθμικά κοίλο και $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H, τότε $\mu \in \mathcal{P}_n$ και η πυκνότητά του f_μ είναι λογαριθμικά κοίλη. Σημειώνουμε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε η ανισότητα Brunn-Minkowski έχει ως συνέπεια ότι η δείκτρια συνάρτηση $\mathbf{1}_K$ του K είναι η πυκνότητα ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου.

Ισοτροπική σταθερά λογαριθμικά κοίλων μέτρων. Αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f_μ, ορίζουμε την ισοτροπική σταθερά του μ ως εξής:

$$L_\mu := \left(\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}, \tag{2.2.5}$$

όπου $\mathrm{Cov}(\mu)$ είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του μ με συντεταγμένες

$$\mathrm{Cov}(\mu)_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f_\mu(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\,dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f_\mu(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\,dx}\frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f_\mu(x)\,dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)\,dx}. \tag{2.2.6}$$

Λέμε ότι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν $\mathrm{bar}(\mu) = 0$ και ο $\mathrm{Cov}(\mu)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας, και γράφουμε $\mathcal{IL}_n$ για την κλάση των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Σημειώνουμε ότι ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν το λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ_K με πυκνότητα $x \mapsto L_K^n \mathbf{1}_{K/L_K}(x)$ είναι ισοτροπικό. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$L_\mu \leqslant \kappa L_n, \tag{2.2.7}$$

όπου $\kappa > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (μια απόδειξη δίνεται στο [2, Πρόταση 2.5.12]).

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ και κάθε $E \in G_{n,k}$, η περιθώρια κατανομή του μ ως προς E είναι το μέτρο πιθανότητας $\pi_E(\mu)$ με πυκνότητα

$$f_{\pi_E(\mu)}(x) = \int_{x+E^\perp} f_\mu(y)dy. \tag{2.2.8}$$

Εύκολα ελέγχεται ότι αν το μ έχει κέντρο βάρους το 0, είναι ισοτροπικό ή λογαριθμικά κοίλο, τότε το $\pi_E(\mu)$ έχει επίσης κέντρο βάρους το 0, είναι ισοτροπικό ή λογαριθμικά κοίλο, αντίστοιχα.

Αν μ είναι ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μετρο Lebesgue, και αν f_μ είναι η πυκνότητα του μ και $f_\mu(0) > 0$, τότε για κάθε $p > 0$ ορίζουμε

$$K_p(\mu) := K_p(f_\mu) = \left\{ x : \int_0^\infty r^{p-1} f_\mu(rx)\, dr \geqslant \frac{f_\mu(0)}{p} \right\}. \tag{2.2.9}$$

Από τον ορισμό έπεται ότι το $K_p(\mu)$ είναι αστρόμορφο σώμα με ακτινική συνάρτηση

$$\rho_{K_p(\mu)}(x) = \left(\frac{1}{f_\mu(0)} \int_0^\infty p r^{p-1} f_\mu(rx)\, dr \right)^{1/p} \tag{2.2.10}$$

για $x \neq 0$. Τα σώματα $K_p(\mu)$ εισήχθησαν από τον K. Ball ο οποίος απέδειξε ότι αν το μ είναι λογαριθμικά κοίλο τότε, για κάθε $p > 0$, το $K_p(\mu)$ είναι κυρτό σώμα.

L_q-κεντροειδή σώματα. Τα L_q-κεντροειδή σώματα εισήχθησαν, με διαφορετική κανονικοποίηση, από τους Lutwak και Zhang στο [73], και μελετήθηκαν από τους Lutwak, Yang και Zhang στο [74]. Πρώτος ο Παούρης εκμεταλλεύτηκε τις ιδιότητές τους από ασυμπτωτική σκοπιά. Θα χρησιμοποιήσουμε τον δικό του συμβολισμό και κανονικοποίηση. Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K) = 1$, για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το L_q-κεντροειδές σώμα του K, το οποίο συμβολίζουμε με $Z_q(K)$, μέσω της συνάρτησης στήριξής του

$$h_{Z_q(K)}(\xi) := \|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L_q(K)} = \Big(\int_K |\langle x, \xi\rangle|^q\, dx \Big)^{1/q}, \quad \xi \in S^{n-1}.$$

Για $q = +\infty$, ορίζουμε $Z_\infty(K) := \mathrm{conv}\{K, -K\}$. Κάποιες βασικές ιδιότητες αυτής της οικογένειας σωμάτων είναι οι ακόλουθες:

(α) Αν το K είναι ισοτροπικό, τότε $Z_2(K) = L_K B_2^n$.

(β) Για κάθε $1 \leqslant p < q \leqslant \infty$ και $\xi \in S^{n-1}$ έχουμε ότι $\|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L^q(\lambda_K)} \leqslant c_1 \frac{q}{p} \|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L^p(\lambda_K)}$, άρα $Z_p(K) \subseteq Z_q(K) \subseteq c_1 \frac{q}{p} Z_p(K)$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

(γ) Αν το K έχει το κέντρο βάρους του το 0, τότε $Z_q(K) \supseteq c_2 Z_\infty(K)$, για κάθε $q \geqslant n$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ο ισχυρισμός (α) είναι άμεση συνέπεια του ορισμού του $Z_2(K)$, ενώ ο ισχυρισμός (β) είναι συνέπεια των κλασικών αντίστροφων ανισοτήτων Hölder για ημινόρμες, που προκύπτουν από το λήμμα του Borell [30], δείτε επίσης τα [2, Λήμμα 2.4.5 και Θεώρημα 2.4.6]. Ο ισχυρισμός (γ) παρατηρήθηκε για πρώτη φορά από τον Παούρη στο [87], δείτε επίσης το [2, Λήμμα 3.2.8].

Ο υπολογισμός του όγκου των L_q-κεντροειδών σωμάτων είναι ένα σημαντικό ερώτημα, για το οποίο δεν έχει ακόμα δοθεί πλήρης απάντηση. Συγκεντρώνουμε τις γνωστές εκτιμήσεις στο επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Οι Lutwak, Yang και Zhang έχουν αποδείξει στο [74] ότι, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$,*

$$\mathrm{vol}_n(Z_q(K))^{1/n} \gtrsim \sqrt{q/n}. \tag{2.2.11}$$

(β) *Οι Klartag και E. Milman έχουν αποδείξει στο [65] ότι αν $q \leqslant \sqrt{n}$ τότε η εκτίμηση του* (α) *παραπάνω μπορεί να πάρει την ισχυρότερη μορφή*

$$\mathrm{vol}_n(Z_q(K))^{1/n} \gtrsim \sqrt{q/n} L_K. \tag{2.2.12}$$

(γ) *Από την άλλη πλευρά, ο Παούρης έχει αποδείξει στο [88] ότι η ανισότητα*

$$\mathrm{vol}_n(Z_q(K))^{1/n} \lesssim \sqrt{q/n} L_K \tag{2.2.13}$$

ισχύει για κάθε $1 \leqslant q \leqslant n$.

Θα χρειαστούμε επίσης τα «μεικτά πλάτη» ενός κυρτού σώματος. Για κάθε $q \in [-n, n]$, $q \neq 0$, ορίζουμε

$$w_q(K) := \Big(\int_{S^{n-1}} h_K(\xi)^q \, d\sigma(\xi) \Big)^{1/q}.$$

Τέλος, για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $q \neq 0$, $q > -n$, ορίζουμε

$$I_q(K) := \Big(\int_K \|x\|_2^q \, dx \Big)^{1/q}.$$

Σημειώνουμε ότι $I_2(K) = \sqrt{n} L_K$, αφού το K είναι ισοτροπικό. Απευθείας υπολογισμός (δείτε το [2, Λήμμα 3.2.16]) δείχνει ότι

$$I_q(K) \approx \sqrt{n/q} \Big(\int_{S^{n-1}} \int_K |\langle x, \xi \rangle|^q \, dx \, d\sigma(\xi) \Big)^{1/q} = \sqrt{n/q}\, w_q(Z_q(K)). \tag{2.2.14}$$

Αντίστοιχη ταυτότητα ισχύει για τις αρνητικές τιμές του q: για κάθε $1 \leqslant q < n$,

$$w_{-q}(Z_q(K)) \approx \sqrt{q/n}\, I_{-q}(K). \tag{2.2.15}$$

Αυτό αποδείχθηκε από τον Παούρη στο [89], δείτε επίσης το [2, Θεώρημα 5.3.16].

Ένα σημαντικό αποτέλεσμα του Παούρη (δείτε τα [88] και [89]) ισχυρίζεται ότι οι ποσότητες $I_q(K)$ παραμένουν σταθερές, της τάξης του $\sqrt{n} L_K$, στα διαστήματα $1 \leqslant |q| \leqslant \sqrt{n}$.

Θεώρημα 2.2.2 (Παούρης). *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$I_{-q}(K) \approx I_q(K) \approx \sqrt{n} L_K,$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$.

Από το Θεώρημα 2.2.2 προκύπτει μια πολύ χρήσιμη ανισότητα μεγάλων αποκλίσεων (δείτε το [88]) καθώς και μια ισχυρή ανισότητα για μικρές μπάλες (δείτε το [89]) για ισοτροπικά κυρτά σώματα.

Θεώρημα 2.2.3 (Παούρης). *Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mathrm{vol}_n(\{x \in K : \|x\|_2 \geqslant c_1 t\sqrt{n} L_K\}) \leqslant e^{-t\sqrt{n}}$$

για κάθε $t \geqslant 1$ και

$$\mathrm{vol}_n(\{x \in K : \|x\|_2 \leqslant \varepsilon\sqrt{n} L_K\}) \leqslant \varepsilon^{c_2\sqrt{n}} \tag{2.2.16}$$

για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, όπου $\varepsilon_0, c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Μια χρήσιμη εφαρμογή του Θεωρήματος 2.2.2 είναι η ακόλουθη εκτίμηση για το μέσο πλάτος του $Z_q(K)$, όταν $q \lesssim \sqrt{n}$. Αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$,

$$w(Z_q(K)) \approx \sqrt{q} L_K. \tag{2.2.17}$$

Αυτή η εκτίμηση είναι συνέπεια των αποτελεσμάτων του Παούρη στο [88]: παρατηρήστε ότι

$$w_q(Z_q(K)) \approx \sqrt{q/n}\, I_q(K) \approx \sqrt{q/n}\, I_2(K) = \sqrt{q} L_K.$$

Αφού $w(Z_q(K)) \leqslant w_q(Z_q(K))$, από την ανισότητα Hölder, βλέπουμε ότι $w(Z_q(K)) \lesssim \sqrt{q} L_K$. Για την αντίστροφη ανισότητα, χρησιμοποιώντας το κάτω φράγμα για τον όγκο του $Z_q(K)$ από το Θεώρημα 2.2.1 (β) και την ανισότητα Urysohn, γράφουμε

$$w(Z_q(K)) \geqslant \Big(\frac{\mathrm{vol}_n(Z_q(K))}{\omega_n}\Big)^{1/n} \gtrsim \sqrt{n}\sqrt{q/n} L_K.$$

Αντίστροφες ανισότητες Hölder. Αν C είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, λέμε ότι μια διεύθυνση $\xi \in S^{n-1}$ είναι ψ_α-διεύθυνση (όπου $1 \leqslant \alpha \leqslant 2$) για το C με σταθερά $\varrho > 0$ αν

$$\|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L_{\psi_\alpha}(C)} \leqslant \varrho \|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L_2(C)},$$

όπου

$$\|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L_{\psi_\alpha}(C)} := \inf\Big\{t > 0 : \int_C \exp\big((|\langle x, \xi\rangle|/t)^\alpha\big)\, dx \leqslant 2\Big\}.$$

Από την ανισότητα Markov είναι φανερό ότι αν το C ικανοποιεί ψ_α-εκτίμηση με σταθερά ϱ στη διεύθυνση του ξ τότε για κάθε $t \geqslant 1$ έχουμε $\mathrm{vol}_n(\{x \in C : |\langle x, \xi\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L_2(C)}\}) \leqslant 2e^{-t^\alpha/\varrho^\alpha}$. Αντίστροφα, δεν είναι δύσκολο να δει κανείς ότι εκτιμήσεις αυτής της μορφής για τις «ουρές» της f μας δίνουν ότι το ξ είναι ψ_α-διεύθυνση για το C. Μπορούμε να δώσουμε παρόμοιους ορισμούς στο πλαίσιο ενός λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$.

Αν $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας και η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι ημινόρμα, τότε για κάθε $1 \leqslant p < q$ έχουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^q \, d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p \, d\mu(x)\right)^{1/p}, \tag{2.2.18}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την υπόθεση του λογαριθμικά κοίλου προκύπτει ότι κάθε $\xi \in S^{n-1}$ είναι ψ_1-διεύθυνση για κάθε C ή μ με μια απόλυτη σταθερά ϱ: υπάρχει $\varrho > 0$ τέτοιος ώστε

$$\|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L_{\psi_1}(\mu)} \leqslant \varrho \|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L_2(\mu)}$$

για κάθε $n \geqslant 1$, κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, και κάθε $\xi \in S^{n-1}$.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο [2] για μια εκτεταμένη παρουσίαση των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων και περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την εικασία του υπερεπιπέδου.

2.3 Αποτελέσματα από την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία

Απόσταση Banach-Mazur. Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Ορίζουμε την απόσταση Banach-Mazur των X και Y ως εξής:

$$d(X,Y) := \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| : T : X \to Y \text{ ισομορφισμός}\}. \tag{2.3.1}$$

Οι βασικές ιδιότητες της απόστασης Banach-Mazur είναι οι εξής:

(α) $d(X,Y) \geqslant 1$, και ισότητα ισχύει αν και μόνον αν οι X, Y είναι ισομετρικά ισόμορφοι.

(β) $d(X,Y) = d(Y,X)$.

(γ) $d(X,Y) \leqslant d(X,Z)d(Z,Y)$.

(δ) $d(X^*,Y^*) = d(X,Y)$.

Η γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur είναι η ακόλουθη: δύο χώροι με νόρμα είναι «κοντά» ως προς τη d αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός της μοναδιαίας μπάλας του ενός που «μοιάζει» με τη μοναδιαία μπάλα του δεύτερου:

$$d(X,Y) = \min\{d \geqslant 1 : \text{ υπάρχει } T : X \to Y \text{ ώστε } B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq dB_Y\}. \tag{2.3.2}$$

Μια άλλη, σχετική, έννοια απόστασης κυρτών σωμάτων είναι η λεγόμενη γεωμετρική απόσταση: αν K και L είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$d_{\mathrm{G}}(K,L) := \min\left\{d \geqslant 1 : \text{ υπάρχουν } a,b > 0 \text{ με } ab \leqslant d \text{ ώστε } a^{-1}L \subseteq K \subseteq bL\right\}. \tag{2.3.3}$$

Παρατηρήστε ότι αν X_K, X_L είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα με μοναδιαίες μπάλες K, L αντίστοιχα, τότε

$$d(X_K,X_L) = \inf\{d_{\mathrm{G}}(K,T(L)) : T \in GL(n)\}. \tag{2.3.4}$$

Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι unconditional αν η $\{e_1,\dots,e_n\}$ είναι 1-unconditional βάση για τη νόρμα $\|\cdot\|_K$ που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το K: αυτό σημαίνει ότι για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1,\dots,t_n$ και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j=\pm 1$ έχουμε

$$\big\|\varepsilon_1t_1e_1+\cdots+\varepsilon_nt_ne_n\big\|_K=\big\|t_1e_1+\cdots+t_ne_n\big\|_K.$$

Το θεώρημα του John. Ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ είναι κάθε κυρτό σώμα της μορφής

$$\mathcal{E}=\left\{x\in\mathbb{R}^n:\sum_{i=1}^n\frac{\langle x,v_i\rangle^2}{a_i^2}\leqslant 1\right\}, \tag{2.3.5}$$

όπου $\{v_1,\dots,v_n\}$ είναι μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $a_1,\dots,a_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του $\mathcal{E}$ αντίστοιχα). Αποδεικνύεται ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα $\mathcal{E}$ στον $\mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει $T\in GL(n)$ ώστε $\mathcal{E}=T(B_2^n)$.

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ένα επιχείρημα συμπάγειας δείχνει ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $\mathcal{E}$ που περιέχεται στο K και έχει το μέγιστο δυνατό όγκο. Λέμε σε αυτή την περίπτωση ότι το $\mathcal{E}$ είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Ομοίως αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K, δηλαδή μοναδικό ελλειψοειδές που έχει τον ελάχιστο όγκο, ανάμεσα σε όλα τα ελλειψοειδή που περιέχουν το K.

Λέμε ότι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K βρίσκεται σε θέση John, όταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Αντίστοιχα λέμε ότι το K είναι σε θέση Löwner αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελαχίστου όγκου του K. Ένα $x\in\mathbb{R}^n$ λέγεται σημείο επαφής του K και της B_2^n αν $\|x\|_2=\|x\|_K=1$. Το κλασικό θεώρημα του F. John [58] μας δίνει ακόμη περισσότερες πληροφορίες, περιγράφοντας την κατανομή των σημείων επαφής στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}.

Θεώρημα 2.3.1 (John)**.** *Έστω ότι το συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει ελλειψοειδές μέγιστου όγκου τη B_2^n. Τότε υπάρχουν σημεία επαφής $u_1,\dots,u_m$ του K και της B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $c_1,\dots,c_m$ τέτοιοι ώστε, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$,*

$$x=\sum_{j=1}^m c_j\langle x,u_j\rangle u_j. \tag{2.3.6}$$

Το Θεώρημα 2.3.1 μας λέει ισοδύναμα ότι ο ταυτοτικός τελεστής I_n στον $\mathbb{R}^n$ μπορεί να αναπαρασταθεί στη μορφή

$$I_n=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j, \tag{2.3.7}$$

όπου με $u_j\otimes u_j$ συμβολίζουμε την προβολή στη διεύθυνση του u_j: $(u_j\otimes u_j)(x):=\langle x,u_j\rangle u_j$. Παρατηρήστε ότι από την (2.3.6) έπεται ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$,

$$\|x\|_2^2=\langle x,x\rangle=\sum_{j=1}^m c_j\langle x,u_j\rangle^2. \tag{2.3.8}$$

Επίσης, εφαρμόζοντας την ίδια σχέση για $x = e_i$, όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και αθροίζοντας ως προς i, παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{m} c_j = n. \tag{2.3.9}$$

Μια πολύ γνωστή συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.1 είναι ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται σε θέση John τότε $K \subseteq \sqrt{n}B_2^n$. Στη γλώσσα της γεωμετρικής απόστασης δύο κυρτών σωμάτων, η τελευταία πρόταση μας λέει ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που βρίσκεται σε θέση John έχουμε $d_{\rm G}(K, B_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. Έπεται ότι για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X, $d(X, \ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. Χρησιμοποιώντας την υποπολλαπλασιαστική ιδιότητα της d μπορούμε τότε να δούμε ότι το άνω φράγμα $d(X, Y) \leqslant n$ ισχύει για κάθε ζευγάρι n-διάστατων χώρων με νόρμα X, Y.

Αριθμοί κάλυψης. Έστω A και B δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ο *αριθμός κάλυψης του A από το B* είναι ο μικρότερος φυσικός N για τον οποίο υπάρχουν N μεταφορές του B των οποίων η ένωση καλύπτει το A:

$$N(A, B) = \min\Big\{N \in \mathbb{N} : \ \exists x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B)\Big\}.$$

Μια παραλλαγή του παραπάνω αριθμού κάλυψης ορίζεται ως εξής:

$$\overline{N}(A, B) = \min\Big\{N \in \mathbb{N} : \ \exists x_1, \ldots, x_N \in A \text{ ώστε } A \subseteq \bigcup_{j=1}^{N} (x_j + B)\Big\}.$$

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι $N(A, B) \leqslant \overline{N}(A, B)$. Μπορούμε επίσης εύκολα να ελέγξουμε ότι $\overline{N}(A, B - B) \leqslant N(A, B)$. Ειδικότερα, αν το B είναι συμμετρικό και κυρτό, τότε $\overline{N}(A, 2B) \leqslant N(A, B)$.

Αν A, B είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ με το B συμμετρικό τότε, για κάθε $t > 0$ ορίζουμε

$$S_t(A, B) = \max\{m \in \mathbb{N} : \ \exists x_1, \ldots, x_m \in A \text{ ώστε } \|x_i - x_j\|_B > t \text{ για } i \neq j\}.$$

Από τον ορισμό ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\overline{N}(A, tB) \leqslant S_t(A, B) \leqslant \overline{N}(A, \tfrac{t}{2}B).$$

Τέλος, θα χρειαστούμε δύο βασικά θεωρήματα για αριθμούς κάλυψης. Το πρώτο είναι η ανισότητα του Sudakov:

Θεώρημα 2.3.2 (Sudakov)**.** *Αν K είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε για κάθε $t > 0$ ισχύει*

$$N(K, tB_2^n) \leqslant 2\exp\left(cn\,(w(K)/t)^2\right), \tag{2.3.10}$$

όπου $c > 0$ είναι απόλυτη σταθερά.

Το επόμενο θεώρημα δυϊσμού για τους αριθμούς κάλυψης αποδείχθηκε από τους Artstein, Milman και Szarek [13].

Θεώρημα 2.3.3. *Υπάρχουν απόλυτες θετικές σταθερές α και β τέτοιες ώστε για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$*

$$N(B_2^n, \alpha^{-1}K^\circ)^{\frac{1}{\beta}} \leqslant N(K, B_2^n) \leqslant N(B_2^n, \alpha K^\circ)^\beta \tag{2.3.11}$$

Ο V. Milman (βλέπε [81]) απέδειξε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\beta > 0$ με την εξής ιδιότητα: κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο το 0 έχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ τέτοια ώστε $\mathrm{vol}_n(\tilde{K}) = \mathrm{vol}_n(B_2^n)$ και

$$\max\big\{N(\tilde{K}, B_2^n), N(B_2^n, \tilde{K}), N(\tilde{K}^\circ, B_2^n), N(B_2^n, \tilde{K}^\circ)\big\} \leqslant \exp(\beta n). \tag{2.3.12}$$

Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K που ικανοποιεί αυτή την εκτίμηση είναι σε *M-θέση με σταθερά β.*

Αργότερα, ο Pisier [98] έδωσε μια διαφορετική προσέγγιση σε αυτό το αποτέλεσμα, που δίνει περισσότερες πληροφορίες για τη συμπεριφορά των αριθμών κάλυψης. Η ακριβής διατύπωση είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 2.3.4 (Pisier)**.** *Για κάθε $1 \leqslant \alpha < 2$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ υπάρχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K τέτοια ώστε*

$$\max\big\{N(\tilde{K}, tB_2^n), N(B_2^n, t\tilde{K}), N(\tilde{K}^\circ, tB_2^n), N(B_2^n, t\tilde{K}^\circ)\big\} \leqslant \exp\left(\frac{c(\alpha)n}{t^\alpha}\right) \tag{2.3.13}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου η σταθερά $c(\alpha)$ εξαρτάται μόνο από το α, και $c(\alpha) = O\big((2-\alpha)^{-\alpha/2}\big)$ καθώς το $\alpha \to 2$.

Η M^*-ανισότητα. Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} \|\xi\|_K d\sigma(\xi).$$

Παρατηρούμε ότι

$$M(K)^{-1} \leqslant \mathrm{vrad}(K) \leqslant w(K) = M(K^\circ).$$

Η ανισότητα στο αριστερό μέλος ελέγχεται εύκολα αν εκφράσουμε τον όγκο του K σαν ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες και χρησιμοποιήσουμε τις ανισότητες Hölder και Jensen, ενώ η ανισότητα στο δεξιό μέλος προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Urysohn.

Η δυϊκή ανισότητα Sudakov των Pajor και Tomczak-Jaegermann [86] δίνει άνω φράγμα για τους αριθμούς κάλυψης $N(B_2^n, tK)$ συναρτήσει της παραμέτρου $M(K)$.

Θεώρημα 2.3.5 (Pajor-Tomczak)**.** *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t > 0$,*

$$\log N(B_2^n, tK) \leqslant cn\,(M(K)/t)^2\,, \tag{2.3.14}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την M^*-ανισότητα:

Θεώρημα 2.3.6. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, ο τυχαίος υπόχωρος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$R(K \cap F) \leqslant c_1 \sqrt{\frac{n}{n-k}}\, w(K)$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c_2(n-k))$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.6, με ασθενέστερη εξάρτηση από το λόγο $\frac{n}{n-k}$, δόθηκε από τον V. Milman στο [79], και μια δεύτερη απόδειξη δόθηκε στο [80], με γραμμική εξάρτηση από το $\frac{n}{n-k}$. Το Θεώρημα 2.3.6 αποδείχτηκε, σε αυτή τη βέλτιστη μορφή, από τους Pajor και Tomczak-Jaegermann στο [86]. Τέλος, ο Gordon [51] απέδειξε μία ακόμα πιο ακριβή μορφή της ανισότητας, εξασφαλίζοντας ότι η τιμή της σταθεράς c_1 μπορεί να υποτεθεί (ασυμπτωτικά) ίση με 1.

Η ανισότητα του Pisier και η MM^*-ανισότητα. Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω α μια νόρμα στον $L(\ell_2^n, X)$. Η *δυϊκή ως προς το ίχνος νόρμα* ορίζεται στον $L(X, \ell_2^n)$ ως εξής:

$$\alpha^*(v) = \sup\{\mathrm{tr}(vu) : \alpha(u) \leqslant 1\}. \tag{2.3.15}$$

Το λήμμα του Lewis [68] ισχύει για κάθε ζευγάρι δυϊκών ως προς το ίχνος νορμών:

Θεώρημα 2.3.7. *Για κάθε νόρμα α στον $L(\ell_2^n, X)$, υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε $\alpha(u) = 1$ και $\alpha^*(u^{-1}) = n$.*

Η *ℓ-νόρμα* στον $L(\ell_2^n, X)$ ορίστηκε από τους Figiel και Tomczak-Jaegermann στο [42]. Έστω $\{g_1, \ldots, g_n\}$ μια ακολουθία από ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας και έστω $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $u : \ell_2^n \to X$ ορίζουμε την ℓ-νόρμα του u ως εξής:

$$\ell(u) = \left(\mathbb{E}\,\Big\|\sum_{i=1}^n g_i u(e_i)\Big\|^2\right)^{1/2}. \tag{2.3.16}$$

Ένας απλός υπολογισμός μας δίνει ότι

$$\ell(u) \approx \sqrt{n}\, w((u^{-1})^*(K^\circ)), \tag{2.3.17}$$

όπου K είναι η μοναδιαία μπάλα του X. Αυτή η σχέση συνδέει την ℓ-νόρμα με το μέσο πλάτος. Ένα απλούστερο μοντέλο προκύπτει αν στη θέση των κανονικών τυχαίων μεταβλητών θεωρήσουμε τις Rademacher συναρτήσεις $r_i : E_2^n \to \{-1, 1\}$ που ορίζονται μέσω των $r_i(\varepsilon) = \varepsilon_i$, όπου βλέπουμε τον $E_2^n = \{-1, 1\}^n$ σαν χώρο πιθανότητας με το ομοιόμορφο μέτρο. Από μια ανισότητα των Maurey και Pisier έπεται ότι

$$\ell(u) \approx \left(\int_{E_2^n} \Big\|\sum_{i=1}^n r_i(\varepsilon) u(e_i)\Big\|^2 d\varepsilon\right)^{1/2}. \tag{2.3.18}$$

Το σύμβολο $\approx$ σημαίνει εδώ ότι οι δύο ποσότητες διαφέρουν κατά έναν όρο τάξης το πολύ ίσης με $\sqrt{\log n}$.

Θεωρούμε τις συναρτήσεις Walsh $w_A(\varepsilon) = \prod_{i\in A} r_i(\varepsilon)$, όπου $A \subseteq \{1,\dots,n\}$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι κάθε συνάρτηση $f : E_2^n \to X$ γράφεται με μοναδικό τρόπο στη μορφή

$$f(\epsilon) = \sum_A w_A(\epsilon)x_A, \tag{2.3.19}$$

για κάποια διανύσματα $x_A \in X$. Ο χώρος όλων των συναρτήσεων $f : E_2^n \to X$ γίνεται χώρος Banach με νόρμα την

$$\|f\|_{L_2(E_2^n;X)} = \left(\int_{E_2^n} \|f(\epsilon)\|^2 d\epsilon\right)^{1/2} \tag{2.3.20}$$

Η *Rademacher προβολή* $R_n : L_2(X) \to L_2(X)$ είναι ο τελεστής που απεικονίζει την $f = \sum w_A x_A$ στη συνάρτηση $R_n f := \sum_{i=1}^n r_i x_{\{i\}}$. Γράφουμε $\mathrm{Rad}(X)$ για τη νόρμα του τελεστή R_n. Οι Figiel και Tomczak-Jaegermann [42] απέδειξαν το εξής:

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Υπάρχει $u : \ell_2^n \to X$ τέτοιος ώστε*

$$\ell(u)\ell((u^{-1})^*) \leqslant n\mathrm{Rad}(X). \tag{2.3.21}$$

Ο Pisier έδωσε στο [97] μια ακριβή εκτίμηση για την $\mathrm{Rad}(X)$ συναρτήσει της απόστασης Banach-Mazur $d(X,\ell_2^n)$.

Θεώρημα 2.3.9. *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Τότε,*

$$\mathrm{Rad}(X) \leqslant c\log[d(X,\ell_2^n)+1] \leqslant c\log(n+1), \tag{2.3.22}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, και η τελευταία ανισότητα προκύπτει από το θεώρημα του John.

Σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα των Lewis, Figiel και Tomczak-Jaegermann, το Θεώρημα 2.3.9 οδηγεί στο ακόλουθο συμπέρασμα.

Θεώρημα 2.3.10 (MM^*-ανισότητα)**.** *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μια θέση $\tilde{K}$ του K για την οποία*

$$w(\tilde{K})w(\tilde{K}^\circ) \leqslant c\log[d(X_K,\ell_2^n)+1] \leqslant c\log(n+1), \tag{2.3.23}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Υπολογίζοντας τον όγκο του $\tilde{K}$ σε πολικές συντεταγμένες και εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder βλέπουμε ότι $w(\tilde{K}^\circ)^{-1} \leqslant c_2\sqrt{n}\,\mathrm{vol}_n(\tilde{K})^{1/n}$. Έπεται ότι

$$w(\tilde{K}) \leqslant c\sqrt{n}\log n\,\mathrm{vol}_n(\tilde{K})^{1/n}. \tag{2.3.24}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο παίρνουμε την εξής *αντίστροφη ανισότητα Urysohn.*

Θεώρημα 2.3.11. *Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει μια γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K με όγκο $\mathrm{vol}_n(\tilde{K})=1$ και μέσο πλάτος*

$$w(\tilde{K}) \leqslant c\sqrt{n}\log n, \tag{2.3.25}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Επιπλέον, με ένα απλό επιχείρημα που βασίζεται στην ανισότητα Rogers-Shephard μπορούμε να δούμε ότι η υπόθεση της συμμετρίας στο προηγούμενο θεώρημα δεν είναι απαραίτητη.

Παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία [1], [7] και [8] για την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία και την τοπική θεωρία των χώρων με νόρμα.

2.4 Ανισότητες αναδιάταξης

Η συμμετρική αναδιάταξη ενός Borel υποσυνόλου A του $\mathbb{R}^n$ με πεπερασμένο μέτρο Lebesgue είναι η ανοικτή μπάλα A^* που έχει κέντρο το 0 και $\mathrm{vol}_n(A^*) = \mathrm{vol}_n(A)$. Σημειώνουμε ότι η $\mathbf{1}_{A^*}$ είναι κάτω ημισυνεχής. Η συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη της $\mathbf{1}_A$ ορίζεται να είναι η $\mathbf{1}_A^* = \mathbf{1}_{A^*}$. Αν $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ είναι μια Borel μετρήσιμη συνάρτηση της οποίας τα σύνολα στάθμης $\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}$, $t > 0$ έχουν πεπερασμένο μέτρο, ορίζουμε την συμμετρική φθίνουσα αναδιάταξη f^* της f θέτοντας

$$f^*(x) = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f>t\}}^*(x)\,dt = \int_0^\infty \mathbf{1}_{\{f>t\}^*}(x)\,dt. \tag{2.4.1}$$

Τότε, η f^* είναι ακτινικά συμμετρική, φθίνουσα και ισομετρήσιμη με την f. Ειδικότερα, $\|f\|_p = \|f^*\|_p$ για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

Η ανισότητα Rogers/Brascamp-Lieb-Luttinger ισχυρίζεται ότι αν $f_1, \ldots, f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ είναι μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $u_1, \ldots, u_N \in \mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^N f_i(\langle x, u_i\rangle)\,dx \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^N f_i^*(\langle x, u_i\rangle)\,dx \tag{2.4.2}$$

(δείτε τα [102] και [25]). Έπεται ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_K \prod_{i=1}^N f_i(x_i)\,dx \leqslant \int_K \prod_{i=1}^N f_i^*(x_i)\,dx. \tag{2.4.3}$$

Θα χρησιμοποιήσουμε μια αναδιατύπωση της (2.4.2) η οποία οφείλεται στον Christ (δείτε το [37, Θεώρημα 4.2]) και, όπως παρατηρήθηκε στο [90], μπορεί να φανεί πολύ χρήσιμη σε γεωμετρικά προβλήματα. Υπενθυμίζουμε ότι μια συνάρτηση $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ λέγεται quasi-κοίλη αν το σύνολο $\{x : H(x) > s\}$ είναι κυρτό για κάθε $s \in \mathbb{R}$, και quasi-κυρτή αν το σύνολο $\{x : H(x) < s\}$ είναι κυρτό για κάθε $s \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας την (2.4.3) παίρνουμε:

Θεώρημα 2.4.1. *Έστω $H : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^+$ μια άρτια quasi-κοίλη συνάρτηση και $f_1, \ldots, f_N : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(t_1, \ldots, t_N) \prod_{i=1}^N f_i(t_i)\,dt \leqslant \int_{\mathbb{R}^N} H(t_1, \ldots, t_N) \prod_{i=1}^N f_i^*(t_i)\,dt. \tag{2.4.4}$$

Αν η H είναι quasi-κυρτή, τότε η ανισότητα αντιστρέφεται.

Έστω $H : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}^+$. Για δεδομένα $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και $Y = \{y_1, \ldots, y_s\} \subset z^\perp$ θεωρούμε την συνάρτηση $H_Y : \mathbb{R}^s \to \mathbb{R}^+$ που ορίζεται από την

$$H_Y(t) = H(y_1 + t_1 z, \ldots, y_s + t_s z). \tag{2.4.5}$$

Λέμε ότι η H είναι Steiner κυρτή (αντίστοιχα, Steiner κοίλη) αν για κάθε $z \in S^{n-1}$ και κάθε $Y = \{y_1, \ldots, y_s\} \subset z^{\perp}$ η συνάρτηση H_Y είναι άρτια και quasi-κυρτή (αντίστοιχα, quasi-κοίλη). Θέτουμε επίσης

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_s) = \int_{(\mathbb{R}^n)^s} H(x_1, \ldots, x_s) \prod_{i=1}^{s} f_i(x_i)\, dx_1 \ldots, dx_s. \tag{2.4.6}$$

Οι εφαρμογές μας αφορούν συναρτησοειδή της μορφής (2.4.6), όπου η H είναι άρτια και Steiner κυρτή ή Steiner κοίλη. Τότε, έχουμε τις ακόλουθες ανισότητες αναδιάταξης (δείτε την [90, Πρόταση 3.2]).

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω $f_1, \ldots, f_s : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Έστω $H : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}^+$ μια άρτια Steiner κυρτή συνάρτηση. Τότε,*

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_s) \geqslant \mathcal{F}_H(f_1^*, \ldots, f_s^*). \tag{2.4.7}$$

Αν η συνάρτηση H_Y είναι Steiner κοίλη τότε η ανισότητα αντιστρέφεται:

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_s) \leqslant \mathcal{F}_H(f_1^*, \ldots, f_s^*). \tag{2.4.8}$$

Επιπλέον, αν $f_i = f_i^*$, δηλαδή κάθε f_i είναι ακτινικά συμμετρική πυκνότητα, και $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ για κάθε i, τότε μπορούμε να κάνουμε ένα ακόμα βήμα σε αυτήν την διαδικασία συμμετρικοποίησης (δείτε την [90, Πρόταση 3.9]).

Θεώρημα 2.4.3. *Έστω $f_1, \ldots, f_s : \mathbb{R}^n \to [0, 1]$ ακτινικά συμμετρικές πυκνότητες. Έστω $H : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}^+$ μια Steiner κυρτή συνάρτηση. Τότε,*

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_s) \geqslant \mathcal{F}_H(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}), \tag{2.4.9}$$

όπου D_n είναι η Ευκλείδεια μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν η H είναι Steiner κοίλη τότε η ανισότητα αντιστρέφεται:

$$\mathcal{F}_H(f_1, \ldots, f_s) \leqslant \mathcal{F}_H(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}), \tag{2.4.10}$$

Είναι χρήσιμο να παρατηρήσουμε ότι αν η $H : (\mathbb{R}^n)^s \to \mathbb{R}^+$ είναι Steiner κυρτή και αν $g : (0, \infty) \to (0, \infty)$ είναι μια γνησίως αύξουσα συνεχής συνάρτηση τότε η $g \circ H$ είναι Steiner κυρτή, ενώ αν η g είναι γνησίως φθίνουσα τότε η $g \circ H$ είναι Steiner κοίλη. Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν αν συνθέσουμε μια Steiner κοίλη συνάρτηση με μια γνησίως μονότονη συνεχή συνάρτηση g όπως παραπάνω.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων

3.1 Εισαγωγή

Για κάθε ζεύγος K, D συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε την παράμετρο $\beta(K,D)$ ως τον μικρότερο $r>0$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $x_1,\dots,x_n\in K$ μπορούμε να βρούμε πρόσημα $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{-1,1\}$ τέτοια ώστε

$$\|\epsilon_1x_1+\cdots+\epsilon_nx_n\|_D\leqslant r.$$

Ένα γενικό κάτω φράγμα για την παράμετρο $\beta(K,D)$ αποδείχθηκε από τον Banaszczyk: στο [14] έδειξε ότι αν K και D είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\beta(K,D)\geqslant c\sqrt{n}(\mathrm{vol}_n(K)/\mathrm{vol}_n(D))^{1/n} \tag{3.1.1}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$, όπου $\mathrm{vol}_n(K)$ είναι ο όγκος του K. Στα επόμενα, γράφουμε B_p^n για τη μοναδιαία μπάλα του $\ell_p^n=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_p)$, $1\leqslant p\leqslant\infty$. Ένα πολύ γνωστό θεώρημα του Spencer [106] ισχυρίζεται ότι $\beta(B_\infty^n,B_\infty^n)\leqslant c\sqrt{n}$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (το ίδιο αποτέλεσμα αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τον Gluskin στο [48]): υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε για κάθε $n\geqslant 1$ και για κάθε $x_1,\dots,x_n\in\mathbb{R}^n$ με $\|x_i\|_\infty\leqslant 1$, μπορούμε να βρούμε $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{-1,1\}$ τέτοια ώστε

$$\|\epsilon_1x_1+\cdots+\epsilon_nx_n\|_\infty\leqslant c\sqrt{n}. \tag{3.1.2}$$

Από την (3.1.1) βλέπουμε αμέσως ότι αυτό το αποτέλεσμα είναι βέλτιστο αν αγνοήσουμε απόλυτες σταθερές. Ένα πολύ γνωστό πρόβλημα του Komlós (δείτε τα [107] και [108]) ρωτάει αν η ακολουθία $\beta(B_2^n,B_\infty^n)$ είναι φραγμένη. Δεδομένου ότι $B_\infty^n\subseteq\sqrt{n}B_2^n$, από μια θετική απάντηση σε αυτό το ερώτημα προκύπτει άμεσα η ανισότητα του Spencer. Η καλύτερη γνωστή εκτίμηση οφείλεται στον Banaszczyk [15]: υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε για κάθε $n\geqslant 1$ και για κάθε

$x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ με $\|x_i\|_2 \leqslant 1$ μπορούμε να βρούμε $\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$ τέτοια ώστε

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_\infty \leqslant c\sqrt{\log n}. \tag{3.1.3}$$

Μάλιστα, ο Banaszczyk απέδειξε ένα πιο γενικό θεώρημα: αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με μέτρο Gauss $\gamma_n(K) \geqslant 1/2$ τότε $\beta(B_2^n, K) \leqslant C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από αυτή την ανισότητα προκύπτει άμεσα η (3.1.3), διότι $\gamma_n(rB_\infty^n) \geqslant 1/2$ για κάθε $r \geqslant c\sqrt{\log n}$. Η μέθοδος στο [15] δεν είναι κατασκευαστική, πρόσφατα όμως δόθηκε μια αλγοριθμική απόδειξη του φράγματος $O(\sqrt{\log n})$ για το πρόβλημα, από τους Bansal, Dadush και Garg [17].

Αφετηρία αυτού του κεφαλαίου είναι ένα αποτέλεσμα του Hajela [55] στην κατεύθυνση του να δοθεί αρνητική απάντηση στο πρόβλημα του Komlós.

Θεώρημα 3.1.1 (Hajela). *Έστω $f(n)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ και $f(n) = o(n)$. Για κάθε $0 < \lambda < \frac{1}{2}$ υπάρχει $n_0 = n_0(f, \lambda)$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $S \subseteq \{-1, 1\}^n$ με πληθάριθμο $|S| \leqslant 2^{n/f(n)}$ μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την*

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_\infty \geqslant \exp\left(\frac{\lambda \log\log f(n)}{\log\log\log f(n)}\right)$$

για κάθε $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Μάλιστα, ο Hajela διατυπώνει στο [55] την άποψη ότι το ερώτημα του Komlós έχει αρνητική απάντηση και ότι η εκτίμηση (3.1.3) που αποδείχθηκε αργότερα από τον Banaszczyk πρέπει να είναι βέλτιστη. Στην επόμενη παράγραφο αποδεικνύουμε μια βελτιωμένη έκδοση του Θεωρήματος 3.1.1.

3.2 Βελτιωμένη έκδοση του θεωρήματος του Hajela

Σε όσα ακολουθούν, συμβολίζουμε με $e_1, \ldots, e_n$ την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με S^{n-1} την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα στον $\mathbb{R}^n$, και με σ το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Υπενθυμίζουμε ότι το σ μπορεί να οριστεί μέσω του Haar μέτρου πιθανότητας ν_n στην ορθογώνια ομάδα $O(n)$ ως εξής: για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq S^{n-1}$ έχουμε

$$\sigma(A) = \nu_n(\{U \in O(n) : U(e_1) \in A\}).$$

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 3.2.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c \in (0, 1)$ που ικανοποιεί τα παρακάτω: Για κάθε $n \geqslant 1$ και $\frac{1}{n} < \delta < 1$, και για κάθε $S \subseteq \{-1, 1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$, υπάρχουν ορθοκανονικά διανύσματα $x_1, \ldots, x_n$ στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την*

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\Big\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log(1/\delta)}$$

για κάθε $(\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Το Θεώρημα 3.2.1 έχει ως συνέπεια μια ισχυρότερη έκδοση του θεωρήματος του Hajela. Έστω $f(n)$ μια συνάρτηση τέτοια ώστε $\lim_{n\to\infty} f(n) = \infty$ και $f(n) = o(n)$. Παρατηρήστε ότι αν θέσουμε $\delta = \delta(f,n) = e/f(n)$ στο Θεώρημα 3.2.1 τότε έχουμε $\frac{1}{n} < \delta < 1$ για αρκετά μεγάλα n, και προκύπτει το κάτω φράγμα

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} \epsilon_i x_i \Big\|_\infty \geqslant c\sqrt{\log f(n)},$$

το οποίο είναι ισχυρότερο από αυτό του Θεωρήματος 3.1.1.

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1, ακολουθούμε αρχικά την ιδέα του Hajela: τα διανύσματα $x_1, \dots, x_n$ προκύπτουν από τυχαία στροφή της συνήθους βάσης $e_1, \dots, e_n$ του $\mathbb{R}^n$. Χρειαζόμαστε μια εκτίμηση για το «μέτρο των μικρών τιμών» της ℓ_∞^n-νόρμας, η οποία δίνεται στο επόμενο λήμμα. Μας προσφέρει ένα φράγμα που η συμπεριφορά του για μικρές τιμές του t θα παίξει πολύ σημαντικό ρόλο στη συνέχεια. Στην περίπτωση της $\|\cdot\|_\infty$ αυτή η συμπεριφορά έχει παρατηρηθεί από διάφορους συγγραφείς (δείτε, για παράδειγμα, τα [111] και [84]). Δίνουμε μια άμεση και σύντομη απόδειξη της ανισότητας που θα χρειαστούμε.

Λήμμα 3.2.2. *Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $c \in (0,1)$ ώστε, για κάθε $n \geqslant 1$ και $\delta \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{4}\right)$,*

$$\sigma\Big(\Big\{\vartheta \in S^{n-1} : \|\vartheta\|_\infty \leqslant \frac{c\sqrt{\log(1/\delta)}}{\sqrt{n}}\Big\}\Big) < 2^{-\delta n},$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε το γεγονός (δείτε το [66] για την απλή απόδειξή του) ότι αν A είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\sigma(S^{n-1} \cap A) \leqslant 2\gamma_n(2\sqrt{n}A), \tag{3.2.1}$$

και γράφουμε

$$\begin{aligned}\sigma\Big(\Big\{\vartheta \in S^{n-1} : \|\vartheta\|_\infty \leqslant \frac{s}{2\sqrt{n}}\Big\}\Big) &\leqslant 2\gamma_n\Big(\Big\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_\infty \leqslant s\Big\}\Big)\\ &= 2(1-2(1-\Phi(s)))^n \leqslant 2\exp(-2n(1-\Phi(s))),\end{aligned}$$

όπου, ως συνήθως, Φ είναι η συνάρτηση κατανομής μιας τυπικής κανονικής τυχαίας μεταβλητής, δηλαδή, $\Phi(x) = (2\pi)^{-1/2}\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}\,dt$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα $(t+s)^2 \leqslant 2(t^2+s^2)$, έχουμε ότι, για κάθε $s > 0$,

$$1 - \Phi(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-\frac{(t+s)^2}{2}}\,dt \geqslant \frac{e^{-s^2}}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty e^{-t^2}\,dt = \frac{e^{-s^2}}{2\sqrt{2}}.$$

Έπεται ότι

$$\sigma\Big(\Big\{\vartheta \in S^{n-1} : \|\vartheta\|_\infty \leqslant \frac{s}{2\sqrt{n}}\Big\}\Big) \leqslant 2\exp\Big(-\frac{n}{\sqrt{2}}e^{-s^2}\Big).$$

Τέλος, αν $\delta \in \left(\frac{1}{n}, \frac{1}{4}\right)$ τότε επιλέγοντας $s = \frac{1}{2}\sqrt{\log\left(\frac{e}{\delta}\right)}$ παίρνουμε

$$2\exp\Big(-\frac{n}{\sqrt{2}}e^{-s^2}\Big) = 2\exp\Big(-\frac{n}{\sqrt{2}}\delta^{1/4}\Big) < 2^{-\delta n},$$

και αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Η ιδέα της απόδειξης είναι η ίδια με αυτήν στην εργασία του Hajela. Θεωρούμε ορθοκανονικές n-άδες που προκύπτουν ως τυχαίες στροφές της συνήθους βάσης $e_1,\dots,e_n$ του $\mathbb{R}^n$. Έστω $\delta\in(n^{-1},1/4)$. Για κάθε $\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in\{-1,1\}^n$ έχουμε $n^{-1/2}\sum_{i=1}^n e_i\in S^{n-1}$, άρα, από τον ορισμό του μέτρου σ στην S^{n-1} έπεται, αν πάρουμε $\alpha=c\sqrt{\log(e/\delta)}$ όπου c είναι η σταθερά στο Λήμμα 3.2.2, ότι

$$\begin{aligned}
\nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|U\Big(\sum_{i=1}^n\epsilon_ie_i\Big)\Big\|_\infty\leqslant c\sqrt{\log(e/\delta)}\Big\}\Big)&\\
&=\nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|U\Big(\frac{\sum_{i=1}^n e_i}{\sqrt{n}}\Big)\Big\|_\infty\leqslant\frac{c\sqrt{\log(e/\delta)}}{\sqrt{n}}\Big\}\Big)\\
&=\sigma\Big(\Big\{\vartheta\in S^{n-1}:\|\vartheta\|_\infty\leqslant\frac{c\sqrt{\log(e/\delta)}}{\sqrt{n}}\Big\}\Big).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.2.2 παίρνουμε

$$\sigma\Big(\Big\{\vartheta\in S^{n-1}:\|\vartheta\|_\infty\leqslant\frac{c\sqrt{\log(e/\delta)}}{\sqrt{n}}\Big)\Big)<2^{-\delta n}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|U\Big(\sum_{i=1}^n\epsilon_ie_i\Big)\Big\|_\infty\leqslant c\sqrt{\log(e/\delta)}\Big\}\Big)<2^{-\delta n}. \tag{3.2.2}$$

Έστω τώρα $S\subseteq\{-1,1\}^n$ με $|S|\leqslant 2^{\delta n}$. Από την υποπροσθετικότητα του μέτρου και την (3.2.2) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(e_i)\Big\|_\infty\geqslant c\sqrt{\log(e/\delta)}\,,\ \text{για κάθε }\epsilon\in S\Big\}\Big)=&\\
&=1-\nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(e_i)\Big\|_\infty\leqslant c\sqrt{\log(e/\delta)}\,,\ \text{για κάποιο }\epsilon\in S\Big\}\Big)\\
&\geqslant 1-\sum_{\epsilon\in S}\nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(e_i)\Big\|_\infty\leqslant c\sqrt{\log(e/\delta)}\Big\}\Big)\\
&>1-|S|\cdot 2^{-\delta n}\geqslant 0.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε έτσι ότι υπάρχει $U_0\in O(n)$ τέτοιος ώστε, αν θέσουμε $x_i=U_0(e_i)$, $i=1,\dots,n$, να ισχύει

$$\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\Big\|_\infty\geqslant c\sqrt{\log(e/\delta)},$$

για κάθε $\epsilon=(\epsilon_1,\dots,\epsilon_n)\in S$, αν υποθέσουμε ότι $1/n<\delta<1/4$.

Τέλος, παρατηρούμε ότι στην περίπτωση $\delta\in(1/4,1)$ το ζητούμενο ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο, αφού για κάθε $U\in O(n)$ και κάθε $\epsilon\in\{-1,1\}^n$ ισχύει η ανισότητα

$$\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(e_i)\Big\|_\infty\geqslant 1\geqslant c\sqrt{\log(e/\delta)}$$

για κατάλληλη απόλυτη σταθερά $c>0$. $\square$

Η μέθοδος που περιγράψαμε για να δοθούν κάτω φράγματα για την ℓ_∞-νόρμα ενός προσημασμένου αθροίσματος διανυσμάτων έχει προφανείς περιορισμούς. Συγκεκριμένα, είμαστε αναγκασμένοι να θεωρήσουμε ένα υποσύνολο $S \subseteq \{-1,1\}^n$ πληθαρίθμου $2^{o(n)}$ αν θέλουμε το Θεώρημα 3.2.1 να μας δώσει κάποιο κάτω φράγμα τάξης μεγαλύτερης από την τάξη μεγέθους στο δεξιό μέλος της (3.1.1). Έτσι, αυτή η στρατηγική δεν φαίνεται να επαρκεί για να οδηγήσει σε μια αρνητική απάντηση για το πρόβλημα του Komlós. Η διασύνδεση ανάμεσα σε εκτιμήσεις για για το «μέτρο των μικρών τιμών» μιας νόρμας και τη νόρμα των προσημασμένων αθροισμάτων διανυσμάτων είναι από μόνη της ενδιαφέρουσα, και στην επόμενη παράγραφο εκμεταλλευόμαστε αυτό το φαινόμενο από διάφορες απόψεις.

3.3 Προσημασμένα αθροίσματα τυχαίων διανυσμάτων

Το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1 μας δίνει το κίνητρο να θεωρήσουμε ένα πιο γενικό πλαίσιο. Σε πρώτη φάση, αντικαθιστούμε την ℓ_∞^n νόρμα με τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και εξασθενίζουμε τις υποθέσεις μας για την επιλογή των διανυσμάτων $x_1,\ldots,x_n \in B_2^n$. Στη συνέχεια, γενικεύουμε ακόμα περισσότερο, αφήνοντας τα $x_1,\ldots,x_n$ να επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα από την B_2^n ή από τυχόν κυρτό σώμα K.

3.3.1 Νόρμες προσημασμένων αθροισμάτων τυχαίων διανυσμάτων

Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την διάμεσο $m(D)$ της $\|Z\|_D$ όπου $Z \sim N(0, I_n)$ είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα της προηγούμενης παραγράφου μπορούμε να αποδείξουμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 3.3.1. *Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\tau > 0$. Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^n$ ικανοποιούν την*

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \zeta_i x_i \Big\|_2 \geqslant \tau\sqrt{n},$$

για κάθε $\zeta_i = \pm 1$. Τότε, για κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με

$$|S| \cdot \gamma_n\Big(\frac{2t}{\tau} m(D) D\Big) < 1/2,$$

μπορούμε να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) > 1 - |S| \cdot \gamma_n\left(\frac{2t}{\tau} m(D)D\right)$ τέτοιο ώστε για κάθε $U \in \mathcal{U}$ να έχουμε

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i) \Big\|_D \geqslant t m(D)$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n) \in S$.

Απόδειξη. Θεωρούμε $x_1,\ldots,x_n \in \mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την υπόθεση της πρότασης, και σταθεροποιούμε $\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n$. Κανονικοποιώντας με την $\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_2$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι είναι μεγαλύτερη από $\tau\sqrt{n}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(x_i)\Big\|_D\leqslant tm(D)\Big\}\Big)&\\ &\leqslant \nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|U\Big(\frac{\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i}{\big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\big\|_2}\Big)\Big\|_D\leqslant\frac{tm(D)}{\tau\sqrt{n}}\Big\}\Big)\\ &=\sigma\Big(\Big\{\vartheta\in S^{n-1}:\|\vartheta\|_D\leqslant\frac{tm(D)}{\tau\sqrt{n}}\Big\}\Big)\\ &\leqslant 2\gamma_n\Big(\frac{2t}{\tau}m(D)D\Big),\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την (3.2.1). Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(x_i)\Big\|_D\geqslant tm(D)\,,\ \text{για κάθε } \epsilon\in S\Big\}\Big)&\\ &\geqslant 1-\sum_{\epsilon\in S}\nu_n\Big(\Big\{U\in O(n):\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iU(x_i)\Big\|_D\leqslant tm(D)\Big\}\Big)\\ &>1-2|S|\cdot\gamma_n\Big(\frac{2t}{\tau}m(D)D\Big).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό της πρότασης. □

Ορισμός 3.3.2. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $\delta\in(0,1)$, ορίζουμε

$$t_{D,\delta}:=\max\{t>0:\gamma_n(2tm(D)\,D)\leqslant(2^\delta e)^{-n}\},$$

όπου $m(D)$ είναι η διάμεσος της $\|\cdot\|_D$ ως προς το τυπικό μέτρο Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$. Στην περίπτωση που το D είναι η μοναδιαία μπάλα B_p^n κάποιου ℓ_p^n, $p\in[1,\infty]$, θέτουμε $t_{p,\delta}:=t_{B_p^n,\delta}$ για συντομία.

Σημειώνουμε ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $\delta\in(0,1)$, η παράμετρος $t_{D,\delta}$ ικανοποιεί τα φράγματα

$$c_1\mathrm{vol}_n(D)^{-1/n}\leqslant t_{D,\delta}m(D)\leqslant\frac{1}{2}m(D), \tag{3.3.1}$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1,c_2>0$.

Απόδειξη της (3.3.1). Για το άνω φράγμα παρατηρούμε ότι από τον ορισμό της διαμέσου προκύπτει άμεσα η

$$\gamma_n(m(D)D)=\gamma_n(\|Z\|_D\leqslant m(D))\geqslant\frac{1}{2}>(2^\delta e)^{-n},$$

άρα $t_{D,\delta}\leqslant\frac{1}{2}$. Για το κάτω φράγμα, αφού ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε $\int_{S^{n-1}}\|x\|_D^{-n}\,d\sigma(x)=\frac{\mathrm{vol}_n(D)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}$, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\sigma\Big(\Big\{\|x\|_D\leqslant e^{-\eta}\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\Big)^{1/n}\Big\}\Big)\leqslant e^{-\eta n}$$

για κάθε $\eta > 0$. Μπορούμε να συνδέσουμε την τελευταία ανισότητα με το μέτρο Gauss: χρησιμοποιώντας το ίδιο επιχείρημα με αυτό της απόδειξης του [66, Λήμμα 2.1], μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $a \geqslant 1$,

$$\gamma_n\Big(\frac{1}{a}\sqrt{n}e^{-\eta}\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\Big)^{1/n}D\Big) \leqslant \sigma\Big(\|x\|_D \leqslant e^{-\eta}\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\Big)^{1/n}\Big) + \gamma_n\Big(\frac{1}{a}\sqrt{n}B_2^n\Big)$$
$$\leqslant e^{-\eta n} + \gamma_n\Big(\frac{1}{a}\sqrt{n}B_2^n\Big).$$

Φράσσουμε τον δεύτερο όρο χρησιμοποιώντας, για παράδειγμα, την [22, Πρόταση 2.2], και παίρνουμε $\gamma_n\left(\frac{1}{a}\sqrt{n}B_2^n\right) \leqslant a^{-n}\exp\left(\frac{n(a^2-1)}{2a^2}\right)$. Παρατηρήστε ότι, για $\eta = \log(4e)$ έχουμε $2e^{-\eta n} = 2^{-n+1}(2e)^{-n} \leqslant (2^\delta e)^{-n}$ για κάθε $\delta \in (0,1)$, άρα αρκεί να έχουμε

$$a^{-n}\exp\Big(\frac{n(a^2-1)}{2a^2}\Big) \leqslant (4e)^{-n} = e^{-\eta n},$$

κάτι που ικανοποιείται αν το a είναι αρκετά μεγάλο (η τιμή $a = 20$ μας κάνει). Τώρα, αφού $\gamma_n\left(\frac{1}{80e}\sqrt{n}\left(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\right)^{1/n}D\right) \leqslant (2^\delta e)^{-n}$ για κάθε $\delta \in (0,1)$, από τον ορισμό του $t_{D,\delta}$ βλέπουμε ότι

$$t_{D,\delta} \geqslant \frac{1}{160e}\frac{\sqrt{n}}{m(D)}\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(D)}\Big)^{1/n} \geqslant c_1\frac{1}{\mathrm{vol}_n(D)^{1/n}m(D)},$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$. □

Όπως αναφέραμε και στο Κεφάλαιο 1, η συνάρτηση $t \mapsto \gamma_n(2tm(D)\,D)$ που εμφανίζεται στον ορισμό του $t_{D,\delta}$ έχει μελετηθεί στα [66], [67], [94] και αλλού. Ενδεικτικά αναφέρουμε τις παρακάτω εκτιμήσεις:

- Στο [66] αποδεικνύεται ότι για κάθε $0 < t < \frac{1}{2}$ ισχύει
$$\gamma_n(\{x : \|x\|_D \leqslant tm(D)\}) \leqslant \frac{1}{2}t^{d(D)},$$
όπου
$$d(D) = \min\left\{n, -\log\gamma_n\left(\frac{m(D)}{2}D\right)\right\}.$$
Δείτε το [94, Θεώρημα 3.1] για τη συγκεκριμένη ακριβή διατύπωση του αποτελέσματος.

- Στο [67] αποδεικνύεται ότι αν $\gamma_n(D) \leqslant \frac{1}{2}$ τότε για κάθε $0 < t < \frac{1}{2}$ ισχύει $\gamma_n(tD) \leqslant (2t)^{r^2(D)/4}\gamma_n(D)$ όπου $r(D)$ είναι η εγγεγραμμένη ακτίνα του D.

- Στο [94] αποδεικνύεται ότι για κάθε $0 < t < \frac{1}{2}$ ισχύει $\gamma_n(\{x : \|x\|_D \leqslant tm(D)\}) \leqslant \frac{1}{2}t^{c/\beta(D)}$, όπου
$$\beta(D) = \frac{\mathrm{Var}_{\gamma_n}(\|\cdot\|_D)}{M^2(D)}$$
και $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρόλο που ο ορισμός της παραμέτρου $t_{D,\delta}$ μπορεί με την πρώτη ματιά να φαίνεται κάπως τεχνητός, πιστεύουμε ότι η ιδέα πίσω από τον ορισμό της και ο ρόλος που παίζει θα φανούν καθαρά στη συνέχεια (δείτε τα σχόλια μετά από το Θεώρημα 3.3.7).

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 3.3.1 είναι το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $\delta \in (0,1)$. Για κάθε $\tau > 0$, για κάθε n-άδα διανυσμάτων $x_1, \dots, x_n$ με $\min\limits_{\epsilon_i = \pm 1} \|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_2 \geqslant \tau\sqrt{n}$ και για κάθε $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$, υπάρχει υποσύνολο $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) \geqslant 1 - e^{-n}$ τέτοιο ώστε για κάθε $U \in \mathcal{U}$, η*

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i) \Big\|_D \geqslant \tau t_{D,\delta} m(D)$$

να ισχύει για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in S$.

Απόδειξη. Έστω $t = \tau t_{D,\delta}$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$. Από τον ορισμό του $t_{D,\delta}$ έχουμε ότι $|S|\gamma_n(\frac{2t}{\tau} m(D)D) < e^{-n}$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.3.1 και να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ τέτοιο ώστε $\nu_n(\mathcal{U}) \geqslant 1 - e^{-n}$ και

$$\Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i) \Big\|_D \geqslant t m(D) = \tau t_{D,\delta} m(D)$$

για κάθε $U \in \mathcal{U}$ και κάθε $(\epsilon_1, \dots, \epsilon_n) \in S$, όπως ισχυρίζεται το θεώρημα. □

3.3.2 Τυχαία σημεία από κυρτά σώματα

Θα δούμε τώρα ότι, κατάλληλα κανονικοποιημένη, η υπόθεση για τη νόρμα του αθροίσματος $\zeta_1 x_1 + \cdots + \zeta_n x_n$ στη διατύπωση της Πρότασης 3.3.1 ικανοποιείται με μεγάλη πιθανότητα όταν τα x_i επιλέγονται τυχαία, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το εσωτερικό ενός γενικού συμμετρικού κυρτού σώματος K. Το ζητούμενο κάτω φράγμα, το οποίο μάλιστα ισχύει για κάθε νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και όχι μόνο για την Ευκλείδεια νόρμα, θα προκύψει ως πόρισμα του ακόλουθου θεωρήματος των Gluskin και V. Milman [49]. Συμπεριλαμβάνουμε την απόδειξη, η οποία βασίζεται στην ακριβή μορφή της πολυδιάστατης ανισότητας του Young, που αποδείχθηκε ανεξάρτητα από τους Beckner [23] και Brascamp και Lieb [24].

Πρόταση 3.3.4 (Gluskin-V. Milman)**.** *Έστω D ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(D)$ και $V_1, \dots, V_m$ μετρήσιμα υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(D) = \mathrm{vol}_n(V_1) = \cdots = \mathrm{vol}_n(V_m)$. Για κάθε $s_1, \dots, s_m \in \mathbb{R}$ και για κάθε $0 < t < 1$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}_{nm}\Big(\Big\{(x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \Big\|\sum_{i=1}^m s_i x_i\Big\|_D \leqslant t\Big(\sum_{i=1}^m s_i^2\Big)^{1/2}\Big\}\Big) \leqslant \Big(te^{\frac{1-t^2}{2}}\Big)^n.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{vol}_n(D)) = 1$. Θέτουμε $\tau := t\left(\sum_{i=1}^m s_i^2\right)^{1/2}$. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $y_k = \sum_{i=1}^k s_i x_i$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
&\mathrm{vol}_{nm}\Big(\Big\{(x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \Big\|\sum_{i=1}^m s_i x_i\Big\|_D \leqslant t\Big(\sum_{i=1}^m s_i^2\Big)^{1/2}\Big\}\Big) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{V_1}(x_1)\mathbf{1}_{V_2}(x_2)\dots\mathbf{1}_{V_m}(x_m)\mathbf{1}_{\tau D}\Big(\sum_{i=1}^m s_i x_i\Big)\, dx_m \cdots dx_1 \\
&= \Big(\prod_{i=1}^m s_i\Big)^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{s_1V_1}(y_1)\mathbf{1}_{s_2V_2}(y_2 - y_1)\dots\mathbf{1}_{s_mV_m}(y_m - y_{m-1}) \\
&\qquad \times \mathbf{1}_{\tau D}\,(y_m)\, dy_m \cdots dy_1.
\end{aligned}$$

Δίνουμε ένα άνω φράγμα για την τελευταία ποσότητα χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Young (δείτε τις εργασίες των Beckner [23], και Brascamp και Lieb [24]). Έπεται ότι για κάθε $1 \leqslant p_i \leqslant \infty$, $i = 0, 1, \dots, m$ που ικανοποιούν την $\sum_{i=0}^{m} \frac{1}{p_i} = m$,

$$
\begin{aligned}
(3.3.2) \qquad & \mathrm{vol}_{nm}\Big(\Big\{(x_i)_{i=1}^m, x_i \in V_i : \Big\| \sum_{i=1}^m s_i x_i \Big\|_D \leqslant t\Big(\sum_{i=1}^m s_i^2\Big)^{1/2}\Big\}\Big) \\
& \leqslant \Big(\prod_{i=1}^m s_i\Big)^{-n} \Big(\prod_{i=0}^m C_i\Big)^n \|\mathbf{1}_{\tau D}\|_{p_0} \prod_{i=1}^m \|\mathbf{1}_{s_i V_i}\|_{p_i},
\end{aligned}
$$

όπου

$$
C_i = \Big(p_i^{1/p_i}\Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big)^{1-1/p_i}\Big)^{1/2}.
$$

Παρατηρήστε ότι από τον ορισμό του τ και την υπόθεση ότι $\mathrm{vol}_n(D) = \mathrm{vol}_n(V_i) = 1$ για κάθε i, το δεξιό μέλος της (3.3.2) είναι ακριβώς ίσο με

$$
(3.3.3) \qquad \Big(t\Big(\sum_{i=1}^m s_i^2\Big)^{1/2}\Big)^{\frac{n}{p_0}} \prod_{i=1}^m s_i^{\frac{n}{p_i}} \prod_{i=0}^m p_i^{\frac{n}{2p_i}} \Big(1 - \frac{1}{p_i}\Big)^{\frac{n}{2}\left(1-\frac{1}{p_i}\right)}.
$$

Τώρα θέτουμε $q_i = 1 - \frac{1}{p_i}$, $i = 0, 1, \dots, m$. Από τους περιορισμούς μας για τα p_i έχουμε ότι $\sum_{i=0}^m q_i = 1$, και $0 \leqslant q_i \leqslant 1$ για κάθε i. Με αυτό το συμβολισμό, η (3.3.3) παίρνει τη μορφή

$$
(3.3.4) \qquad \Big(\sum_{i=1}^m s_i^2\Big)^{(1-q_0)\frac{n}{2}} t^n \Big(\frac{1}{t^{2q_0}} \frac{q_0(1-q_0)^{q_0}}{1-q_0} \prod_{i=1}^m \Big(\frac{q_i(1-q_i)}{s_i^2}\Big)^{q_i} \frac{1}{1-q_i}\Big)^{n/2}.
$$

Θέλουμε να επιλέξουμε τα q_i έτσι ώστε να ελαχιστοποιήσουμε την τελευταία ποσότητα. Για το σκοπό μας είναι αρκετό να επιλέξουμε $q_0 = t^2$ και $q_i = \frac{(1-t)^2 s_i}{\sum_{j=1}^m s_j^2}$ για κάθε $i = 1, \dots, m$. Με αυτή την επιλογή, η (3.3.4) είναι ίση με

$$
t^n \Big(\prod_{i=1}^m \frac{1}{(1-q_i)^{1-q_i}}\Big)^{n/2} = t^n \exp\Big(\frac{n}{2}\sum_{i=1}^m (1-q_i)\log\frac{1}{1-q_i}\Big).
$$

Τότε, το αποτέλεσμα έπεται, διότι $(1-q_i)\log\frac{1}{1-q_i} = (1-q_i)\log\Big(1 + \frac{q_i}{1-q_i}\Big) \leqslant q_i$ (υπενθυμίζουμε ότι $q_i \geqslant 0$) και $\sum_{i=1}^m q_i = 1 - q_0 = 1 - s^2$. □

Παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ειδική περίπτωση της Πρότασης 3.3.4, η οποία ταυτόχρονα μας δίνει εναλλακτική απόδειξη του γενικού κάτω φράγματος του Banaszczyk (3.1.1) για την $\beta(K, D)$.

Πόρισμα 3.3.5. *Έστω K και D συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $x_1, \dots, x_n$ τυχαία σημεία ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Η ανισότητα*

$$
\Big\| \sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i \Big\|_D \geqslant \frac{1}{10}\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(D)}\Big)^{1/n} \sqrt{n}
$$

ισχύει για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_1, \dots, \epsilon_n \in \{-1, 1\}$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ ως προς $(x_1, \dots, x_n)$.

Απόδειξη. Θεωρούμε τυχόν $t>0$ και αρχικά υποθέτουμε ότι $\mathrm{vol}_n(K)=\mathrm{vol}_n(D)$. Έχουμε

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{(x_i)_{i=1}^n\subseteq K:\Big\|\sum_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon_ix_i\Big\|_D\leqslant t,\ \text{για κάποια } \epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{-1,1\}\Big\}\Big)$$
$$\leqslant 2^n\mathbb{P}\Big(\Big\{(x_i)_{i=1}^n\subseteq K:\Big\|\sum_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon_ix_i\Big\|_D\leqslant t\Big\}\Big).$$

Τώρα, αν εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.3.4 με $m:=n$, $V_i:=K$ και $s_i:=\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon_i$ για κάθε i, και t τέτοιο ώστε $2te^{(1-t^2)/2}<e^{-1}$ (ας πούμε $t=1/10$) παίρνουμε

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{(x_i)_{i=1}^n\subseteq K:\Big\|\sum_{i=1}^n\frac{1}{\sqrt{n}}\epsilon_ix_i\Big\|_D\leqslant t,\ \text{για κάποια } \epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{-1,1\}\Big\}\Big)\leqslant 2^n(te^{\frac{1-t^2}{2}})^n<e^{-n}.$$

Έπεται ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$ ως προς $(x_1,\dots,x_n)$, έχουμε

$$\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\Big\|_D\geq\frac{1}{10}\sqrt{n}$$

για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{-1,1\}$.

Για ένα γενικό ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K,D, θέτουμε $a=(\mathrm{vol}_n(D)/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n}$ και $\tilde{K}=aK$. Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε τα παραπάνω για το ζεύγος $\tilde{K},D$ και να συμπεράνουμε ότι για κάθε επιλογή προσήμων $\epsilon_1,\dots,\epsilon_n\in\{-1,1\}$ ισχύει η

$$\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_iax_i\Big\|_D\geq\frac{1}{10}\sqrt{n},$$

ή, ισοδύναμα, η

$$\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\Big\|_D\geq\frac{1}{10}\sqrt{n}\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(D)}\Big)^{1/n}$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$ ως προς $(x_1,\dots,x_n)$. □

Παρατήρηση 3.3.6. Παρατηρήστε ότι από το Πόρισμα 3.3.5 έπεται άμεσα το κάτω φράγμα του Banaszczyk για την $\beta(K,D)$:

$$\beta(K,D)\geqslant c\sqrt{n}(\mathrm{vol}_n(K)/\mathrm{vol}_n(D))^{1/n}.$$

3.3.3 Σημεία από τη μπάλα

Αρχικά ασχολούμαστε με την περίπτωση όπου τα διανύσματα $x_1,\dots,x_n$ επιλέγονται τυχαία, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από την B_2^n.

Θεώρημα 3.3.7. *Εστω $\delta\in(0,1)$, έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S\subseteq\{-1,1\}^n$ με $|S|\leqslant 2^{\delta n}$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{(x_i)_{i=1}^n\subseteq B_2^n:\Big\|\sum_{i=1}^n\epsilon_ix_i\Big\|_D\leqslant\frac{1}{10}t_{D,\delta}m(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon\in S\Big\}\Big)\leqslant 3e^{-n}.$$

Ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 3.3.7 προκύπτει άμεσα από τον ορισμό του $t_{D,\delta}$ και την ακόλουθη συνέπεια της Πρότασης 3.3.1. Είναι με μια έννοια γενίκευση του αποτελέσματος του Hajela, στο πνεύμα της Πρότασης 3.3.4.

Θεώρημα 3.3.8. *Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$. Τότε*

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{(x_i)_{i=1}^n \subseteq B_2^n : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\Big\|_D \leqslant tm(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) \leqslant 2|S| \cdot \gamma_n(20tm(D)D) + e^{-n}.$$

Απόδειξη. Έστω $A \subseteq (B_2^n)^n$ το σύνολο

$$A := \Big\{(x_i)_{i=1}^n \subseteq B_2^n : \Big\|\sum \epsilon_i x_i\Big\|_2 \geqslant \frac{1}{10}\sqrt{n},\ \text{για κάθε } \epsilon_1,\ldots,\epsilon_n \in \{-1,1\}\Big\}.$$

Από το Πόρισμα 3.3.5, το οποίο εφαρμόζουμε για $K = D = B_2^n$, έχουμε ότι $\mathbb{P}(A^c) < e^{-n}$. Συνδυάζοντας αυτό το δεδομένο με το επιχείρημα που χρησιμοποιήθηκε στην απόδειξη της Πρότασης 3.3.1 παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}\Big(\Big\{(z_i)_{i=1}^n \subseteq B_2^n : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\Big\|_D \leqslant tm(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big)\\
&= \mathbb{P}\Big(\Big\{\big((x_i)_{i=1}^n, U\big) \in (B_2^n)^n \times O(n) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i)\Big\|_D \leqslant t\, m(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big)\\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\Big\{\big((x_i)_{i=1}^n, U\big) \in A \times O(n) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i)\Big\|_D \leqslant tm(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) + e^{-n}\\
&\leqslant \int_A \Big[\nu_n\Big(\Big\{U \in O(n) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U(x_i)\Big\|_D \leqslant tm(D),\ \text{για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big)\Big]\, d\mu(x_1,\ldots,x_n) + e^{-n}\\
&< 2|S|\gamma_n(20tm(D)\, D) + e^{-n},
\end{aligned}$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Μπορούμε να δούμε το Θεώρημα 3.3.7 ως επέκταση του αποτελέσματος του Hajela: η ℓ_∞^n-νόρμα αντικαθίσταται από τυχούσα νόρμα στον $\mathbb{R}^n$ και το συμπέρασμα ισχύει για τυχαία επιλογή διανυσμάτων στη μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα. Σε αυτό το πλαίσιο, ο ρόλος της παραμέτρου $t_{D,\delta}$ που εμφανίζεται στα αποτελέσματά μας γίνεται πιο κατανοητός: Αφού, από την (3.3.1),

$$t_{D,\delta} m(D) \approx t_{D,\delta}\sqrt{n} M(D) \approx t_{D,\delta} M(D) \mathrm{vrad}(D)\, \mathrm{vol}_n(D)^{-1/n},$$

όπου $M(D) = \int_{S^{n-1}} \|x\|_D\, d\sigma(x)$ και $\mathrm{vrad}(D) = (\mathrm{vol}_n(D)/\omega_n)^{1/n}$, και αφού $M(D)\mathrm{vrad}(D) \geqslant 1$ (αυτή η ανισότητα είναι απλή συνέπεια της ανισότητας Hölder), βλέπουμε ότι το Θεώρημα 3.3.7 μας δίνει ισχυρότερη πληροφορία απ' ότι η (3.1.1) αν έχουμε $M(D)\mathrm{vrad}(D) \gg 1$ και/ή $t_{D,\delta} \approx 1$. Αυτές οι προϋποθέσεις ικανοποιούνται στην περίπτωση της $\|\cdot\|_\infty$-νόρμας και θα ήταν ενδιαφέρον να δοθούν κι άλλα παραδείγματα με βέλτιστες εκτιμήσεις.

3.3.4 Εφαρμογή: η περίπτωση του ℓ_p^n

Σαν εφαρμογή θεωρούμε την περίπτωση $D = B_p^n$, $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Σημειώνουμε ότι, παρόλο που η εκτίμηση $\beta(B_2^n, B_2^n) \leqslant \sqrt{n}$ φαίνεται να είναι ευρέως γνωστή (μια απόδειξη μπορεί να βρεθεί στο

[18]), δεν μπορούσαμε να εντοπίσουμε στη βιβλιογραφία κάποιο άνω φράγμα για την παράμετρο $\beta(B_2^n, B_p^n)$, για $p \neq 2$. Όμως, αν $1 \leqslant p < 2$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το προφανές άνω φράγμα για την $\beta(B_2^n, B_2^n)$: από τον κανόνα του παραλληλογράμμου γνωρίζουμε ότι για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in B_2^n$ υπάρχουν $(\epsilon_i)_{i=1}^n \subseteq \{-1, 1\}$ ώστε $\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_2 \leqslant \sqrt{n}$, και τότε μπορούμε να γράψουμε

$$\|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_p \leqslant n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}} \|\epsilon_1 x_1 + \cdots + \epsilon_n x_n\|_2 \leqslant n^{1/p}.$$

Αυτή η εκτίμηση είναι μάλιστα ακριβής, κάτι που φαίνεται αν θυμηθούμε το κάτω φράγμα (3.1.1) και το γεγονός ότι ο λόγος $(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(B_p^n))^{1/n}$ είναι της τάξης του $n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$. Από την άλλη πλευρά, για την περίπτωση $p > 2$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση του Banasczcyk $\beta(B_2^n, B_\infty^n) \leqslant c\sqrt{\log n}$ με παρόμοιο τρόπο, για να συμπεράνουμε ότι $\beta(B_2^n, B_p^n) \leqslant cn^{1/p}\sqrt{\log n}$.

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της παραμέτρου β στο [95]:

$$\beta(D) = \frac{\mathrm{Var}_{\gamma_n}(\|\cdot\|_D)}{M^2(D)}.$$

Για το $D = B_p^n$, η $\beta(D)$ έχει υπολογιστεί στο [95]: έχουμε $\beta(B_p^n) \approx \frac{2^p}{p^2 n}$ αν $1 \leqslant p \leqslant c \log n$ και $\beta(B_p^n) \approx (\log n)^{-2}$ αν $C \log n \leqslant p \leqslant \infty$, για κάποιες απόλυτες σταθερές $c, C > 0$ (για μια πιο λεπτομερή ανάλυση, μπορεί κανείς να συμβουλευτεί το [75]). Επιπλέον, είναι γνωστό ότι, γενικά, $m(D) \approx \mathbb{E}\,\|Z\|_D$ για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα D στον $\mathbb{R}^n$ (η ανισότητα $\mathbb{E}\,\|Z\|_D \leqslant cm(D)$ προκύπτει από το [6, Λήμμα 3.1], ενώ η $m(D) \leqslant 2\mathbb{E}\,\|Z\|_D$ είναι άμεση από τον ορισμό της διαμέσου $m(D)$ και την ανισότητα Markov). Ειδικότερα,

$$m(B_p^n) \approx \mathbb{E}\,\|Z\|_p \approx n^{1/p}\sqrt{p}, \qquad \text{αν } \ 1 \leqslant p \leqslant \log n,$$

ενώ

$$m(B_p^n) \approx \mathbb{E}\,\|Z\|_p \approx \sqrt{\log n}, \qquad \text{αν } \ \log n \leqslant p \leqslant \infty.$$

Συνεπώς, επιλέγοντας $t = \frac{1}{4}$ στο Θεώρημα 3.3.8 και χρησιμοποιώντας την εκτίμηση $\gamma_n(\{x : \|x\|_p \leqslant tm(B_p^n)\}) \leqslant \frac{1}{2} t^{c/\beta(B_p^n)}$, παίρνουμε:

Πόρισμα 3.3.9. *Για κάθε $p \geqslant 1$ υπάρχει σταθερά $c_p > 0$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0(p)$ και κάθε $S \subseteq \{-1, 1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{c_p n}$ να ισχύει ότι η τυχαία n-άδα σημείων από την B_2^n ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$,*

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\Big\|_p \geqslant c\sqrt{p} n^{1/p}$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Παρατήρηση 3.3.10. Είναι χρήσιμο να συγκρίνουμε αυτό το αποτέλεσμα με την (3.1.1). Για κάθε $p \leqslant \log n$, αφού ο λόγος $(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(B_p^n))^{1/n}$ είναι της τάξης του $n^{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}}$ βλέπουμε ότι για κάθε $S \subseteq \{-1, 1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{c_p n}$ η τυχαία n-άδα σημείων από την B_2^n ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$,

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\Big\|_p \geqslant c\sqrt{p}\sqrt{n}\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(B_p^n)}\Big)^{1/n}$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$. Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση $p \geq \log n$ μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι νόρμες $\|\cdot\|_p$ και $\|\cdot\|_\infty$ είναι ισοδύναμες για να συμπεράνουμε από το Θεώρημα 3.2.1 (ακριβέστερα, το Θεώρημα 3.3.7 σε συνδυασμό με την εκτίμηση του Θεωρήματος 3.2.1) ότι για κάθε $0 < \varrho < 1$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{n^{1-\varrho}}$, η τυχαία n-άδα σημείων από την B_2^n ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$,

$$\Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\Big\|_p \geqslant c(\varrho)\sqrt{\log n}\sqrt{n}\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}{\mathrm{vol}_n(B_p^n)}\Big)^{1/n}$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$.

Μάλιστα, τα αποτελέσματα αυτής της παραγράφου υποδεικνύουν έναν γενικό τρόπο για να αποδείξουμε παραλλαγές της (3.1.1) σε αυτό το πνεύμα. Μπορούμε να έχουμε ένα μη τετριμμένο κάτω φράγμα για την $\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\|_D$, με μεγάλη πιθανότητα, για την τυχαία n-άδα $x_1, \ldots, x_n$, αν δεν απαιτήσουμε να ισχύει για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in \{-1,1\}^n$, αλλά για όλες τις n-άδες προσήμων από ένα «μεγάλο» υποσύνολο $S \subseteq \{-1,1\}^n$.

Σημεία από ένα συμμετρικό κυρτό σώμα

Τέλος, μελετάμε την περίπτωση όπου τα $x_1, \ldots, x_n$ επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα από τυχόν συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Θα αποδείξουμε την ακόλουθη γενίκευση του Θεωρήματος 3.3.8.

Θεώρημα 3.3.11. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ που ικανοποιεί τα παρακάτω: Έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S \subseteq \{-1,1\}^n$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε $t > 0$ τέτοιον ώστε*

$$|S|\gamma_n(ct(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n} m(D)\, D) < e^{-n}.$$

Τότε, μπορούμε να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) > 1 - 3e^{-n/2}$ ώστε, για κάθε $U \in \mathcal{U}$,

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{(z_i)_{i=1}^n \subseteq U(K) \times \cdots \times U(K) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\Big\|_D \leqslant tm(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) \leqslant e^{-n/2}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$A = \Big\{(x_i)_{i=1}^n \subseteq K : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i x_i\Big\|_2 \geq \frac{1}{10}\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(K)}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)}\Big)^{1/n}\sqrt{n}, \text{για κάθε } \epsilon_1, \ldots, \epsilon_n \in \{-1,1\}\Big\}.$$

Εφαρμόζοντας το Πόρισμα 3.3.5 για το $D = B_2^n$ έχουμε ότι $\mathbb{P}(A^c) < e^{-n}$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 3.3.1 γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\int_{O(n)} \mathbb{P}\Big(\Big\{(z_i)_{i=1}^n \in U(K)^n : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\Big\|_D \leqslant tm(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) \\
&= \mathbb{P}\Big(\Big\{\big((x_i)_{i=1}^n, U\big) \in K^n \times O(n) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U x_i\Big\|_D \leqslant tm(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S]Big\}\Big) \\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(\Big\{\big((x_i)_{i=1}^n, U\big) \in A \times O(n) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U x_i\Big\|_D \leqslant tm(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) + e^{-n} \\
&\leqslant \int_A \Big[\nu_n\Big(\Big\{U \in O(n) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i U x_i\Big\|_D \leqslant tm(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big)\Big]\, d\mu(x_1, \ldots, x_n) + e^{-n} \\
&< 2|S|\gamma_n(20t(|B_2^n|/|K|)^{1/n} m(D) D) + e^{-n}.
\end{aligned}$$

Ας υποθέσουμε ότι ο t επιλέγεται έτσι ώστε

$$|S|\gamma_n(20t(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n}m(D)D) < e^{-n}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov μπορούμε να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) > 1 - 3e^{-n/2}$ ώστε

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{(z_i)_{i=1}^n \subseteq U(K)^n : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\Big\|_D \leqslant t \cdot m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) \leqslant e^{-n/2}.$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Παρατήρηση 3.3.12. Το Θεώρημα 3.3.11 περιγράφει και πάλι την κεντρική ιδέα πίσω από την βελτίωση του αποτελέσματος του Hajela, του Θεωρήματος 3.2.1, καθώς και πίσω από τα υπόλοιπα αποτελέσματα αυτού του κεφαλαίου. Εκτιμήσεις του μέτρου Gauss για μικρά πολλαπλάσια συμμετρικών κυρτών σωμάτων μας επιτρέπουν να δώσουμε κάτω φράγματα για παραλλαγές της παραμέτρου $\beta(K, D)$, που απαιτούν κάτω φράγμα για την D-νόρμα του προσημασμένου αθροίσματος τυχαίας n-άδας διανυσμάτων για όλες τις επιλογές προσήμων από κατάλληλα μεγάλο υποσύνολο του $\{-1, 1\}^n$.

Για $t := ct_{D,\delta}$, το Θεώρημα 3.3.11 μας δίνει το εξής.

Θεώρημα 3.3.13. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ που ικανοποιεί τα παρακάτω: Έστω $\delta \in (0, 1)$, έστω D ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S \subseteq \{-1, 1\}^n$ με $|S| \leqslant 2^{\delta n}$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(K) = \mathrm{vol}_n(B_2^n)$ μπορούμε να βρούμε $\mathcal{U} \subseteq O(n)$ με $\nu_n(\mathcal{U}) > 1 - 2e^{-n/2}$ ώστε, για κάθε $U \in \mathcal{U}$,*

$$\mathbb{P}\Big(\Big\{(z_i)_{i=1}^n \subseteq U(K) \times \cdots \times U(K) : \Big\|\sum_{i=1}^n \epsilon_i z_i\Big\|_D \leqslant ct_{D,\delta} m(D), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) \leqslant e^{-n/2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Αθροίσματα λογαριθμικά κοίλων τυχαίων διανυσμάτων με βάρη

4.1 Εισαγωγή

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε s-άδα $\mathcal{C}=(C_1,\dots,C_s)$ συμμετρικών κυρτών σωμάτων C_j στον $\mathbb{R}^n$ θεωρούμε τη νόρμα στον $\mathbb{R}^s$, που ορίζεται από την

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}=\frac{1}{\prod_{j=1}^s \mathrm{vol}_n(C_j)}\int_{C_1}\cdots\int_{C_s}\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_K\,dx_s\cdots dx_1,$$

όπου $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_s)$. Αν $\mathcal{C}=(C,\dots,C)$ τότε γράφουμε $\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}$ αντί για $\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}$. Ένα πρόβλημα που έχει τεθεί από τον V. Milman είναι να διερευνηθεί αν, στην περίπτωση όπου $C=K$, ισχύει ότι η $\|\cdot\|_{K^s,K}$ είναι ισοδύναμη με τη συνήθη Ευκλείδεια νόρμα modulo έναν όρο που είναι λογαριθμικής τάξης ως προς τη διάσταση, και ειδικότερα, αν με την πρόσθετη υπόθεση ότι η νόρμα που επάγεται από το K στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί κάποια συνθήκη cotype έχουμε ισοδυναμία της $\|\cdot\|_{K^s,K}$ με την Ευκλείδεια νόρμα.

Το ερώτημα αυτό μελετήθηκε από τους Bourgain, Meyer, V. Milman και Pajor στο [33]. Απέδειξαν το κάτω φράγμα

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}\geqslant c\sqrt{s}\Big(\prod_{j=1}^s|t_j|\Big)^{1/s}\Big(\prod_{j=1}^s\mathrm{vol}_n(C_j)\Big)^{\frac{1}{sn}}/\mathrm{vol}_n(K)^{1/n},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Οι Gluskin και V. Milman μελέτησαν το ίδιο πρόβλημα στο [49] και απέδειξαν ένα καλύτερο κάτω φράγμα, μάλιστα σε ένα πιο γενικό πλαίσιο.

Θεώρημα 4.1.1 (Gluskin-V. Milman). *Έστω $A_1,\dots,A_s$ μετρήσιμα σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Τότε, για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$,*

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{A},K}:=\frac{1}{\prod_{j=1}^s\mathrm{vol}_n(A_j)}\int_{A_1}\cdots\int_{A_s}\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_K\,dx_s\cdots dx_1\geqslant c\Big(\sum_{j=1}^s t_j^2\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(A_j)}{\mathrm{vol}_n(K)}\Big)^{2/n}\Big)^{1/2},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ισοδύναμα, αν $\mathrm{vol}_n(A_j)=\mathrm{vol}_n(K)$ για κάθε $1\leqslant j\leqslant s$ τότε

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{A},K}\geqslant c\,\|\mathbf{t}\|_2 \tag{4.1.1}$$

για κάθε $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^s$.

Στο Θεώρημα 4.1.1, όταν K είναι ένα αστρόμορφο σώμα ως προς το 0 χρησιμοποιούμε το συμβολισμό $\|x\|_K$ για το συναρτησοειδές Minkowski του K, που ορίζεται από την $\|x\|_K=\inf\{r>0:x/r\in K\}$. Για την απόδειξη χρειαζόμαστε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.1.2. *Έστω $A_1,\ldots,A_s$ μετρήσιμα σύνολα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0\in\mathrm{int}(K)$. Υποθέτουμε ότι $\mathrm{vol}_n(A_i)=\mathrm{vol}_n(K)=\mathrm{vol}_n(B_2^n)=\omega_n$ για κάθε $1\leqslant i\leqslant m$. Τότε, για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_s)\in\mathbb{R}^s$ και για κάθε $s>0$ έχουμε*

$$\begin{aligned}&\mathrm{vol}_{nm}\Big(\Big\{(x_i)_{i\leqslant m}:x_i\in A_i \text{ για κάθε } i \text{ και } \Big\|\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big\|_K<s\Big\}\Big)\\&\qquad\leqslant \mathrm{vol}_{nm}\Big(\Big\{(x_i)_{i\leqslant n}:x_i\in B_2^n \text{ για κάθε } i \text{ και } \Big\|\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big\|_{B_2^n}<s\Big\}\Big).\end{aligned}$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s=1$. Οι Brascamp, Lieb και Luttinger έχουν δείξει ότι αν $f_0,f_1,\ldots,f_m:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^+$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις και $B=(b_{j,i})$ είναι ένας $(m+1)\times m$ πίνακας τότε

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=0}^m f_j\Big(\sum_{i=1}^m b_{j,i}x_i\Big)dx_m\cdots dx_1\\&\qquad\leqslant\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=0}^m f_j^*\Big(\sum_{i=1}^m b_{j,i}x_i\Big)dx_m\cdots dx_1.\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

Χρησιμοποιούμε επίσης το γεγονός ότι αν $\mathbf{1}_A$ είναι η δείκτρια συνάρτηση ενός συνόλου $A\subset\mathbb{R}^n$ τότε η $(\mathbf{1}_A)^*$ είναι η δείκτρια συνάρτηση της Ευκλείδειας μπάλας rB_2^n, όπου $\mathrm{vol}_n(A)=\mathrm{vol}_n(rB_2^n)$.

Εφαρμόζουμε την (4.1.2) για τις συναρτήσεις $f_0=\mathbf{1}_K$ και $f_j=\mathbf{1}_{A_j}$, $1\leqslant j\leqslant m$, και για τον πίνακα B με

$$b_{j,i}=\begin{cases}1 & \text{αν } 1\leqslant j=i\leqslant m,\\ t_i & \text{αν } j=0,\\ 0 & \text{αλλιώς,}\end{cases}$$

και έχουμε άμεσα το αποτέλεσμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1. Αρχικά υποθέτουμε ότι $\mathrm{vol}_n(A_i)=\mathrm{vol}_n(K)=\omega_n$ για κάθε $1\leqslant i\leqslant m$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.1.2 με $s=1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\int_{A_1}\cdots\int_{A_m}\mathbf{1}_K\Big(\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big)dx_m\cdots dx_1\\&\qquad\leqslant\int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n}\mathbf{1}_{B_2^n}\Big(\sum_{i=1}^m t_ix_i\Big)dx_m\cdots dx_1.\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

Παρατηρούμε ότι
$$\|y\|_K = \int_0^\infty \big(1 - \mathbf{1}_K(y/t)\big)\, dt.$$
Τότε, η (4.1.3) μας δίνει

$$\|t\|_{A_i,K} = \int_{A_1}\cdots\int_{A_m} \Big\|\sum_{i=1}^m t_i x_i\Big\|_K \frac{dx_m\cdots dx_1}{\prod_{i=1}^m \mathrm{vol}_n(A_i)} \tag{4.1.4}$$
$$\geqslant \int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n} \Big\|\sum_{i=1}^m t_i x_i\Big\|_{B_2^n} \frac{dx_m\cdots dx_1}{\omega_n^m}.$$

Από το γεγονός ότι η B_2^n είναι unconditional και από την ανισότητα Khinthcine έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n} &\Big\|\sum_{i=1}^m t_i x_i\Big\|_{B_2^n} \frac{dx_m\cdots dx_1}{\omega_n^m}\\ &= \int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n} \mathrm{Ave}_{\varepsilon_i=\pm1}\Big\|\sum_{i=1}^m \varepsilon_i t_i x_i\Big\|_{B_2^n} \frac{dx_m\cdots dx_1}{\omega_n^m}\\ &\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}}\int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n} \Big(\sum_{i=1}^m t_i^2|x_i|^2\Big)^{1/2} \frac{dx_m\cdots dx_1}{\omega_n^m}\\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\|f\|_1,\end{aligned}$$

όπου
$$f(x) = \Big(\sum_{i=1}^m t_i^2|x_i|^2\Big)^{1/2}.$$
Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρησιμοποιούμε την
$$\|f\|_2 \leqslant \|f\|_1^{1/3}\|f\|_4^{2/3}$$
που είναι συνέπεια της ανισότητας Hölder, και υπολογίζοντας ακριβώς τις $\|f\|_2$ και $\|f\|_4$ παίρνουμε το ζητούμενο με
$$c = \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{n}{n+2}\Big)^{3/2}\sqrt{\frac{n+4}{n}} \to \frac{1}{\sqrt{2}} \quad \text{όταν } n\to\infty.$$
Για την γενική περίπτωση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mathrm{vol}_n(K) = \omega_n$ και κατόπιν κάνουμε την αντικατάσταση $x_i' = x_i/r_i$, όπου $r_i = (\mathrm{vol}_n(A_i)/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n}$. Έτσι αναγόμαστε στην περίπτωση που έχουμε ήδη μελετήσει. □

Ενδιαφερόμαστε κυρίως για άνω φράγματα για την ποσότητα $\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}$. Δεδομένου ότι
$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} = \|\mathbf{t}\|_{(TC)^s,TK}$$
για κάθε $T\in SL(n)$, μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση όπου το C είναι ισοτροπικό. Σε αυτή την περίπτωση,

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} = \|\mathbf{t}\|_2 L_C\, I_1(\mu_{\mathbf{t}},K), \tag{4.1.5}$$

όπου $\mu_{\mathbf{t}}$ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με συμπαγή φορέα, το οποίο εξαρτάται από το $\mathbf{t}$ και, για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$,

$$I_1(\mu, K) := \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K d\mu(x).$$

Για να αποκτήσετε μια αίσθηση σχετικά με το αναμενόμενο φράγμα, σημειώνουμε ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_{O(n)} I_1(\mu, U(K))\, d\nu(U) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{O(n)} \|x\|_{U(K)} d\nu(U)\, d\mu(x) = M(K)\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2 d\mu(x) \approx \sqrt{n}M(K),$$

όπου

$$M(K) := \int_{S^{n-1}} \|\xi\|_K d\sigma(\xi)$$

και ν, σ είναι τα μέτρα πιθανότητας Haar στην $O(n)$ και την S^{n-1} αντίστοιχα. Έπεται ότι

$$\int_{O(n)} \|\mathbf{t}\|_{U(C)^s,K} \approx (L_C\sqrt{n}M(K))\,\|\mathbf{t}\|_2. \tag{4.1.6}$$

Στόχος μας λοιπόν είναι να πετύχουμε μια σταθερά της τάξης του $L_C\sqrt{n}M(K)$ στο άνω φράγμα μας για την $\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}$. Πρέπει να σημειώσουμε εδώ ότι το ερώτημα να δοθούν φράγματα για την παράμετρο $M(K)$ ενός ισοτροπικού συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$, η οποία θα εμφανίζεται συχνά στα άνω φράγματα που θα αποδείξουμε, παραμένει ανοικτό. Θα μπορούσε κανείς να ελπίζει ότι $L_K\sqrt{n}M(K) \leqslant c(\log n)^b$ για κάποια απόλυτη σταθερά $b > 0$. Όμως, η καλύτερη γνωστή εκτίμηση είναι, αυτή τη στιγμή,

$$M(K) \leqslant \frac{c\log^{2/5}(e+n)}{\sqrt[10]{n}L_K}.$$

Αυτή η ανισότητα αποδεικνύεται στο [43], όπου επίσης αποδεικνύεται ότι στην περίπτωση που το K είναι ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ, ισχύει ότι

$$M(K) \leqslant \frac{c\sqrt[3]{\varrho}\log^{1/3}(e+n)}{\sqrt[6]{n}L_K}.$$

4.2 Μια βασική ταυτότητα και μια απόδειξη του κάτω φράγματος

Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι $C_1, \ldots, C_s$ είναι συμμετρικά κυρτά σώματα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και μελετάμε την ποσότητα

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K} = \int_{C_1}\cdots\int_{C_s} \Big\|\sum_{j=1}^s t_j x_j\Big\|_K dx_s\cdots dx_1$$

όπου $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s$ και K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Λόγω της συμμετρίας των C_j έχουμε ότι

$$\int_{C_1}\cdots\int_{C_s} \Big\|\sum_{j=1}^s t_j x_j\Big\|_K dx_s\cdots dx_1 = \int_{C_1}\cdots\int_{C_s} \Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_j t_j x_j\Big\|_K dx_s\cdots dx_1$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_s) \in E_2^s$, συνεπώς μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι $t_1, \ldots, t_s \geqslant 0$. Ξεκινάμε με την ακόλουθη παρατήρηση.

Λήμμα 4.2.1. *Έστω $X_1,\dots,X_s$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα, ομοιόμορφα κατανεμημένα στα $C_1,\dots,C_s$ αντίστοιχα. Για δοθέν $\mathbf{t}=(t_1\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$, συμβολίζουμε με $\nu_{\mathbf{t}}$ την κατανομή του τυχαίου διανύσματος $t_1X_1+\cdots+t_sX_s$. Τότε,*

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}=\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K d\nu_{\mathbf{t}}(x).$$

Με αφετηρία αυτή την ταυτότητα, θα δώσουμε μια διαφορετική απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 των Gluskin και V. Milman.

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω $\mathcal{C}=(C_1,\dots,C_s)$ μια s-άδα συμμετρικών κυρτών σωμάτων και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{vol}_n(C_j)=\mathrm{vol}_n(K)=1$. Τότε, για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$,*

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}\geqslant\frac{n}{e(n+1)}\|\mathbf{t}\|_2.$$

Αφού η $\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}$ είναι νόρμα, μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι $\|\mathbf{t}\|_2=1$. Σημειώνουμε ότι το $\nu_{\mathbf{t}}$ είναι ένα άρτιο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ (αυτό είναι συνέπεια της ανισότητας Prékopa-Leindler – δείτε το [1]). Γράφουμε $g_{\mathbf{t}}$ για την πυκνότητα του $\nu_{\mathbf{t}}$. Το επόμενο λήμμα δίνει ένα άνω φράγμα για την $\|g_{\mathbf{t}}\|_\infty=g_{\mathbf{t}}(0)$.

Λήμμα 4.2.3. *Αν $\|\mathbf{t}\|_2=1$ τότε $\|g_{\mathbf{t}}\|_\infty\leqslant e^n$.*

Η απόδειξη χρησιμοποιεί ένα αποτέλεσμα των Bobkov και Madiman από το [26] και την ανισότητα Shannon-Stam (δείτε το [110]). Υπενθυμίζουμε ότι το συναρτησοειδές εντροπίας ενός τυχαίου διανύσματος X στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα $g(x)$ ορίζεται από την

$$h(X)=-\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\log g(x)\,dx$$

όταν αυτό το ολοκλήρωμα υπάρχει.

Λήμμα 4.2.4 (Bobkov-Madiman)**.** *Αν η πυκνότητα $g:\mathbb{R}^n\to[0,\infty)$ του τυχαίου διανύσματος X είναι λογαριθμικά κοίλη τότε*

$$\log(\|g\|_\infty^{-1})\leqslant h(X)\leqslant n+\log(\|g\|_\infty^{-1})$$

Απόδειξη. Η υπόθεση ότι η g είναι λογαριθμικά κοίλη χρειάζεται μόνο για την απόδειξη της δεξιάς ανισότητας. Η αριστερή ανισότητα προκύπτει άμεσα, αφού

$$h(X)\geqslant\int_{\mathbb{R}^n}g(x)\log\frac{1}{\|g\|_\infty}\,dx=\log\frac{1}{\|g\|_\infty}.$$

Για την δεξιά ανισότητα, θεωρούμε την εντροπία Rényi τάξης $p>1$ που ορίζεται από την

$$h_p(X)=\frac{p}{p-1}\log\frac{1}{\|g\|_p}.$$

Θα δείξουμε ότι

$$\frac{1}{n}h_p(X)\leqslant\frac{1}{p-1}\log p+\log(\|g\|_\infty^{-1/n}).\tag{4.2.1}$$

Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και $t, s > 0$ με $t + s = 1$, έχουμε $g(tx + sy) \geqslant g(x)^t g(y)^s$, δηλαδή

$$g(tx + sy)^{1/t} \geqslant g(x) g(y)^{s/t}.$$

Ολοκληρώνοντας ως προς x, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int g = 1$, παίρνουμε

$$t^{-n} \int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{1/t} dx \geqslant g(y)^{s/t}.$$

Αφού αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε y, έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(x)^{1/t} dx \geqslant t^n \|g\|_\infty^{s/t}.$$

Θέτοντας $t = 1/p$ ξαναγράφουμε την τελευταία ανισότητα στη μορφή $\int g^p \geqslant p^{-n} \|g\|_\infty^{p-1}$, ή ισοδύναμα,

$$\|g\|_p^{-1} \leqslant p^{n/p} \|g\|_\infty^{\frac{1-p}{p}}.$$

Έπεται ότι

$$h_p(X) \leqslant \frac{p}{p-1} \log \left(p^{n/p} \|g\|_\infty^{\frac{1-p}{p}} \right) = \frac{n}{p-1} \log p + \log \frac{1}{\|g\|_\infty}.$$

Παρατηρώντας ότι $\lim_{p \to 1^-} h_p(X) = h(X)$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Λήμματος 4.2.3. Έστω $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^s$ με $\|\mathbf{t}\|_2 = 1$ και $t_1, \ldots, t_s \geqslant 0$. Τότε, αν $X_1, \ldots, X_s$ είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με πυκνότητες $g_1, \ldots, g_s$ έχουμε ότι

$$h(t_1 X_1 + \cdots + t_s X_s) \geqslant \sum_{j=1}^{s} t_j^2 h(X_j).$$

Αυτή η ανισότητα είναι μια ισοδύναμη μορφή της ανισότητας Shannon-Stam (δείτε τα [69] και [41]). Αφού η πυκνότητα $g_{\mathbf{t}}$ του $t_1 X_1 + \cdots + t_s X_s$ είναι επίσης λογαριθμικά κοίλη, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.4 μπορούμε να γράψουμε

$$\sum_{j=1}^{s} t_j^2 \log(\|g_j\|_\infty^{-1}) \leqslant \sum_{j=1}^{s} t_j^2 h(X_j) \leqslant h(t_1 X_1 + \cdots + t_s X_s) \leqslant n + \log(\|g_{\mathbf{t}}\|_\infty^{-1}),$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\|g_{\mathbf{t}}\|_\infty \leqslant e^n \prod_{j=1}^{s} \|g_j\|_\infty^{t_j^2}.$$

Στην περίπτωσή μας, $g_j = \mathbf{1}_{C_j}$, συνεπώς $\|g_j\|_\infty = 1$ και το λήμμα έπεται. □

Το επόμενο λήμμα είναι άμεση συνέπεια του [33, Λήμμα 2.3] (δείτε επίσης το [82, Λήμμα 2.1]).

Λήμμα 4.2.5. *Έστω f μια φραγμένη πυκνότητα ενός μέτρου πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $p > 0$ ισχύει ότι*

$$\left(\frac{n}{n+p} \right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^p f(x)\, dx \right)^{1/p} \|f\|_\infty^{1/n} \mathrm{vol}_n(K)^{1/n}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $g := f/\|f\|_\infty$. Αποδεικνύουμε ότι η συνάρτηση

$$G(p) = \left(\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^p g(x)\, dx}{\int_K \|x\|_K^p\, dx} \right)^{\frac{1}{n+p}}$$

είναι αύξουσα στο $(-n, \infty)$. Αρχικά παρατηρούμε ότι απευθείας υπολογισμός δίνει

$$\int_K \|x\|_K^p\, dx = \frac{n}{n+p} \mathrm{vol}_n(K).$$

Για κάθε $p > q > -n$ και κάθε $t > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^p g(x)\, dx &\geqslant t^{p-q} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^q\, dx - \int_{tK} (t^{p-q}\|x\|_K^q - \|x\|_K^p) g(x)\, dx \\ &\geqslant t^{p-q} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^q\, dx - t^{p+n} \int_K (\|x\|_K^q - \|x\|_K^p)\, dx. \end{aligned}$$

Η βέλτιστη επιλογή για το t είναι

$$t = \left((q+n) \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^q g(x)\, dx \right)^{\frac{1}{n+q}}.$$

Εισάγοντας αυτή την τιμή του t στην προηγούμενη ανισότητα παίρνουμε $G(p) \geqslant G(q)$. Τώρα, για $q = 0$ η ανισότητα αυτή παίρνει τη μορφή

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^p f(x)\, dx}{\frac{n}{n+p} \mathrm{vol}_n(K) \|f\|_\infty} \geqslant \left(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)\|f\|_\infty} \right)^{1+\frac{p}{n}},$$

που μετά από άπλές πράξεις δίνει το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.2.5 για το λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\nu_{\mathbf{t}}$. Για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^s$ με $\|\mathbf{t}\|_2 = 1$ έχουμε $\|g_{\mathbf{t}}\|_\infty = g_{\mathbf{t}}(0) \leqslant e^n$, συνεπώς

$$\frac{n}{n+1} \leqslant e\, \mathrm{vol}_n(K)^{1/n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K\, d\nu_{\mathbf{t}}(x).$$

Συνδυάζοντας αυτή την ανισότητα με το Λήμμα 4.2.1 βλέπουμε ότι αν $\mathcal{C} = (C_1, \ldots, C_s)$ είναι μια s-άδα συμμετρικών κυρτών σωμάτων όγκου 1 και K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $s \geqslant 1$ και κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s$,

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K} \geqslant \frac{n}{e(n+1)} \mathrm{vol}_n(K)^{-1/n}\, \|\mathbf{t}\|_2.$$

Έτσι, έχουμε αποδείξει το θεώρημα. □

4.3 Άνω φράγματα

Σε αυτή την παράγραφο υποθέτουμε ότι C είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θα εκμεταλλευτούμε την ταυτότητα του Λήμματος 4.2.1 για να δώσουμε άνω φράγματα για την $\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}$, όπου K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, έστω $X_1,\dots,X_s$ ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο C. Για δοθέν $\mathbf{t}=(t_1\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$ με $\|\mathbf{t}\|_2=1$, συμβολίζουμε με $\nu_{\mathbf{t}}$ την κατανομή του τυχαίου διανύσματος $t_1X_1+\cdots+t_sX_s$. Είναι απλό να ελέγξουμε ότι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων $\mathrm{Cov}(\nu_{\mathbf{t}})$ του $\nu_{\mathbf{t}}$ είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα. Πιο συγκεκριμένα,

$$\mathrm{Cov}(\nu_{\mathbf{t}})=L_C^2\,I_n.$$

Έπεται ότι αν $g_{\mathbf{t}}$ είναι η πυκνότητα του $\nu_{\mathbf{t}}$ τότε η συνάρτηση $f_{\mathbf{t}}(x)=L_C^ng_{\mathbf{t}}(L_Cx)$ είναι η πυκνότητα ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Πράγματι, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}f_{\mathbf{t}}(x)x_ix_j\,dx=L_C^n\int_{\mathbb{R}^n}g_{\mathbf{t}}(L_Cx)x_ix_j\,dx=L_C^{-2}\int_{\mathbb{R}^n}g_{\mathbf{t}}(y)y_iy_j\,dy=\delta_{ij}$$

για κάθε $1\leqslant i,j\leqslant n$. Από το Λήμμα 4.2.3 βλέπουμε ότι

$$L_{\mu_{\mathbf{t}}}=\|f_{\mathbf{t}}\|_\infty^{\frac{1}{n}}=L_C\|g_{\mathbf{t}}\|_\infty^{\frac{1}{n}}\leqslant eL_C$$

για κάθε $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^s$ με $\|\mathbf{t}\|_2=1$. Έχουμε επίσης

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}=\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K\,d\nu_{\mathbf{t}}(x)=L_C^{-n}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_Kf_{\mathbf{t}}(x/L_C)\,dx=L_C\int_{\mathbb{R}^n}\|y\|_Kd\mu_{\mathbf{t}}(y).$$

Ορισμός 4.3.1. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε αστρόμορφο σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$I_1(\mu,K)=\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_Kd\mu(x).$$

Με αυτό τον ορισμό, μπορούμε να γράψουμε

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}=L_C\,I_1(\mu_{\mathbf{t}},K)\tag{4.3.1}$$

για κάθε $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^s$ με $\|\mathbf{t}\|_2=1$. Στόχος μας είναι λοιπόν να δώσουμε άνω φράγματα για την ποσότητα $I_1(\mu_{\mathbf{t}},K)$.

4.3.1 Απλά άνω και κάτω φράγματα

Ένα πρώτο άνω φράγμα για την ποσότητα $I_1(\mu_{\mathbf{t}},K)$ προκύπτει αν χρησιμοποιήσουμε την απλή ανισότητα $\|y\|_K\leqslant b\|y\|_2$, όπου $b=b(K)=R(K^\circ)$. Παρατηρούμε ότι

$$I_1(\mu_{\mathbf{t}},K)\leqslant b\int_{\mathbb{R}^n}\|y\|_2d\mu_{\mathbf{t}}(y)\leqslant b\sqrt{n}.$$

διότι το τελευταίο ολοκλήρωμα φράσσεται από $\sqrt{n}$: αυτό είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz και της υπόθεσης ότι το $\mu_{\mathbf{t}}$ είναι ισοτροπικό. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}I_1(\mu_{\mathbf{t}},K)&=\int_{\mathbb{R}^n}\max_{x\in K^\circ}|\langle x,y\rangle|\,d\mu_{\mathbf{t}}(y)\geqslant\max_{x\in K^\circ}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x,y\rangle|\,d\mu_{\mathbf{t}}(y)\geqslant\max_{x\in K^\circ}c_1\Big(\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x,y\rangle|^2\,d\mu_{\mathbf{t}}(y)\Big)^{1/2}\\&=c_1\max_{x\in K^\circ}\|x\|_2=c_1R(K^\circ)=c_1b,\end{aligned}$$

όπου στη δεύτερη ανισότητα χρησιμοποιούμε το [2, Θεώρημα 2.4.6]. Εισάγοντας αυτά τα δύο φράγματα στην (4.3.1) έχουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω C ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $s \geqslant 1$ και $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s$,*

$$c_1 L_C R(K^\circ) \, \|\mathbf{t}\|_2 \leqslant \|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant \sqrt{n} L_C R(K^\circ) \, \|\mathbf{t}\|_2,$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Υπάρχουν κάποιες κλάσεις συμμετρικών κυρτών σωμάτων που συμπεριφέρονται καλά ως προς το άνω φράγμα του Θεωρήματος 4.3.2. Συζητάμε μία από αυτές στην επόμενη υποπαράγραφο.

4.3.2 2-κυρτά σώματα

Υπενθυμίζουμε ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε ο συντελεστής κυρτότητας του K είναι η συνάρτηση $\delta_K : (0,2] \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την

$$\delta_K(\varepsilon) = \inf \Big\{ 1 - \Big\| \frac{x+y}{2} \Big\|_K \, : \, \|x\|_K, \|y\|_K \leqslant 1, \|x-y\|_K \geqslant \varepsilon \Big\}.$$

Λέμε ότι το K είναι 2-κυρτό με σταθερά α αν, για κάθε $\varepsilon \in (0,2]$,

$$\delta_K(\varepsilon) \geqslant \alpha \varepsilon^2.$$

Παραδείγματα 2-κυρτών σωμάτων μας δίνουν οι μοναδιαίες μπάλες υποχώρων των L_p-χώρων, $1 < p \leqslant 2$: μπορούμε να ελέγξουμε ότι ο ορισμός ικανοποιείται με $\alpha \approx p-1$. Οι Klartag και E. Milman έχουν αποδείξει στο [64] ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι και 2-κυρτό με σταθερά α, τότε

$$L_K \leqslant c_1/\sqrt{\alpha},$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επιπλέον, αν το K είναι ισοτροπικό τότε

$$c_2 \sqrt{\alpha} \sqrt{n} B_2^n \subseteq K,$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$ (δείτε, πάλι, το [64]). Από το Θεώρημα 4.3.2 προκύπτει άμεσα η παρακάτω εκτίμηση.

Θεώρημα 4.3.3. *Έστω C ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι επίσης 2-κυρτό με σταθερά α. Τότε, για κάθε $s \geqslant 1$ και $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s$,*

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant \frac{cL_C}{\sqrt{\alpha}} \|\mathbf{t}\|_2$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ που είναι 2-κυρτό με σταθερά α, έχουμε ότι

$$\|\mathbf{t}\|_{K^s,K} \leqslant \frac{c}{\alpha} \|\mathbf{t}\|_2.$$

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός προκύπτει από το γεγονός ότι $R(K^\circ) \leqslant c_2^{-1}/(\sqrt{\alpha}\sqrt{n})$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό χρησιμοποιούμε την παρατήρηση ότι

$$\mathbb{E}_{K^s} \Big\| \sum_{j=1}^s t_j x_j \Big\|_K = \mathbb{E}_{(TK)^s} \Big\| \sum_{j=1}^s t_j x_j \Big\|_{TK}$$

για κάθε $T \in SL(n)$, η οποία μας επιτρέπει να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Αφού $L_K \leqslant c_1/\sqrt{\alpha}$, βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}_{K^s}\Big\|\sum_{j=1}^{s} t_j x_j\Big\|_K \leqslant \frac{c_2^{-1}L_K}{\sqrt{\alpha}}\|\mathbf{t}\|_2 \leqslant \frac{c_3}{\alpha}\|\mathbf{t}\|_2,$$

όπου $c_3 = c_2^{-1}c_1$. □

4.3.3 Ένα γενικό άνω φράγμα

Ξεκινώντας πάλι από την (4.1.5) και χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα το οποίο προέρχεται από τον Bourgain (χρησιμοποιώντας επίσης την ανισότητα του Παούρη και το θεώρημα σύγκρισης του Talagrand) αποδεικνύουμε ένα γενικό άνω φράγμα διαφορετικού τύπου.

Θεώρημα 4.3.4. *Έστω C ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant c\left(L_C \max\left\{\sqrt[4]{n}, \sqrt{\log(1+s)}\right\}\right)\sqrt{n}M(K)\|\mathbf{t}\|_2$$

για κάθε $\mathbf{t} = (t_1,\dots,t_s) \in \mathbb{R}^s$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Επειδή η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε είναι ομογενής, εξετάζουμε την περίπτωση όπου $\|\mathbf{t}\|_2 = 1$. Αφετηρία μας είναι και πάλι η (4.3.1). Έχουμε

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} = L_C\, I_1(\mu_{\mathbf{t}}, K),$$

άρα ο στόχος μας είναι να δώσουμε άνω φράγμα για την ποσότητα $I_1(\mu_{\mathbf{t}}, K)$. Θα χρησιμοποιήσουμε μια πολύ γνωστή ανισότητα του Παούρη από το [88].

Θεώρημα 4.3.5 (Παούρης)**.** *Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant c_1\, r\sqrt{n}\}) \leqslant e^{-r\sqrt{n}}$$

για κάθε $r \geqslant 1$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Σημειώνουμε επίσης ότι, αφού $R(C) \leqslant c_2 n L_C$ και $\mathrm{supp}(\nu_{\mathbf{t}}) \subseteq sC$, έχουμε ότι

$$\mathrm{supp}(\mu_{\mathbf{t}}) \subseteq \frac{s}{L_C}\, C \subseteq (c_2 n s)\, B_2^n$$

για κάθε $\mathbf{t} = (t_1,\dots,t_s) \in \mathbb{R}^s$ με $\|\mathbf{t}\|_2 = 1$. Συνεπώς, αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $r \geqslant 1$ και θέσουμε $C_{\mathbf{t}}(r) = \mathrm{supp}(\mu_{\mathbf{t}}) \cap c_1 r\sqrt{n}B_2^n$, μπορούμε να γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K\, d\mu_{\mathbf{t}}(x) &= \int_{C_{\mathbf{t}}(r)}\|x\|_K\, d\mu_{\mathbf{t}}(x) + \int_{\mathrm{supp}(\mu_{\mathbf{t}})\setminus C_{\mathbf{t}}(r)}\|x\|_K\, d\mu_{\mathbf{t}}(x)\\ &\leqslant \int_{C_{\mathbf{t}}(r)}\|x\|_K\, d\mu_{\mathbf{t}}(x) + b(K)\int_{\mathrm{supp}(\mu_{\mathbf{t}})\setminus C_{\mathbf{t}}(r)}\|x\|_2 d\mu_{\mathbf{t}}(x)\\ &\leqslant \int_{C_{\mathbf{t}}(r)}\|x\|_K\, d\mu_{\mathbf{t}}(x) + b(K)\,(c_2 n s)\, e^{-r\sqrt{n}}.\end{aligned}$$

Στρέφουμε αρχικά την προσοχή μας στον πρώτο όρο. Θεωρούμε το λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας $\mu_{\mathbf{t},r}$ με πυκνότητα

$$\frac{1}{\mu_{\mathbf{t}}(C_{\mathbf{t}}(r))}\,\mathbf{1}_{C_{\mathbf{t}}(r)}f_{\mathbf{t}}$$

και την στοχαστική ανέλιξη $(w_y)_{y\in K^\circ}$ στον $(\mathbb{R}^n,\mu_{\mathbf{t},r})$, όπου $w_y(x)=\langle x,y\rangle$. Θεωρούμε επίσης ένα τυπικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα G στο $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $y\in K^\circ$ ορίζουμε $h_y(G)=\langle G,y\rangle$. Σημειώνουμε ότι (δείτε π.χ. το [1, Λήμμα 9.1.3])

$$\mathbb{E}\Big(\max_{y\in K^\circ}h_y(G)\Big)=\mathbb{E}\,\|G\|_K\approx\sqrt{n}M(K). \tag{4.3.2}$$

Για να φράξουμε την $\mathbb{E}(\max_{y\in K^\circ}w_y)$, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα σύγκρισης του Talagrand (δείτε το [113]).

Θεώρημα 4.3.6 (θεώρημα σύγκρισης του Talagrand)**.** *Αν $(Y_t)_{t\in T}$ είναι μια Gaussian ανέλιξη και $(X_t)_{t\in T}$ μια στοχαστική ανέλιξη τέτοια ώστε*

$$\|X_s-X_t\|_{\psi_2}\leqslant\alpha\,\|Y_s-Y_t\|_2$$

για κάποιον $\alpha>0$ και κάθε $s,t\in T$, τότε

$$\mathbb{E}\Big(\max_{t\in T}X_t\Big)\leqslant c\alpha\,\mathbb{E}\Big(\max_{t\in T}Y_t\Big).$$

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $\|h_y-h_z\|_2=\|y-z\|_2$ για κάθε $y,z\in K^\circ$. Για να φράξουμε την ψ_2 νόρμα της w_y-w_z, χρησιμοποιούμε την ανισότητα $\|h\|_{\psi_2}\leqslant\sqrt{\|h\|_{\psi_1}\|h\|_\infty}$. Παρατηρούμε ότι

$$\|w_y-w_z\|_{L^\infty(\mu_{\mathbf{t},r})}\leqslant R(C_{\mathbf{t}}(r))\|y-z\|_2\leqslant c_1r\sqrt{n}\|y-z\|_2$$

και επίσης έχουμε

$$\|w_y-w_z\|_{L^{\psi_1}(\mu_{\mathbf{t},r})}\leqslant c_3\|w_y-w_z\|_{L^2(\mu_{\mathbf{t},r})}\leqslant 2c_3\|y-z\|_2$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_3>0$ (εδώ χρησιμοποιούμε και το γεγονός ότι $\mu(C_{\mathbf{t}}(r))\geqslant 1-e^{-r\sqrt{n}}\geqslant 1/2$). Έπεται ότι

$$\|w_y-w_z\|_{L^{\psi_2}(\mu_{\mathbf{t},r})}\leqslant c_4\sqrt{r}\,\sqrt[4]{n}\,\|h_y-h_z\|_2.$$

Τώρα, το Θεώρημα 4.3.6 μας εξασφαλίζει ότι

$$\begin{aligned}\int_{C_{\mathbf{t}}(r)}\|x\|_K\,d\mu_{\mathbf{t}}(x)&=\mu_{\mathbf{t}}(C_{\mathbf{t}}(r))\,\mathbb{E}_{\mu_{\mathbf{t},r}}\Big(\max_{y\in K^\circ}w_y\Big)\leqslant c_5\sqrt{r}\,\sqrt[4]{n}\,\mathbb{E}\Big(\max_{y\in K^\circ}h_y\Big)\\&\approx\sqrt{r}\sqrt[4]{n}\,\sqrt{n}M(K).\end{aligned}$$

Τέλος,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K\,d\mu_{\mathbf{t}}(x)\leqslant c_1'\Big(\sqrt{r}\sqrt[4]{n}\,\sqrt{n}M(K)+b(K)\,ns\,e^{-r\sqrt{n}}\Big).$$

Αφού $b(K)\leqslant c_6\sqrt{n}M(K)$ έχουμε ότι

$$b(K)\,ns\,e^{-r\sqrt{n}}\leqslant c_6nse^{-r\sqrt{n}}\,\sqrt{n}M(K)\leqslant\sqrt{r}\,\sqrt[4]{n}\,\sqrt{n}M(K)$$

αν επιλέξουμε
$$r \approx \max\Big\{1, \frac{\log(1+s)}{\sqrt{n}}\Big\}.$$

Συνεπώς,

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} = L_C\, I_1(\mu_{\mathbf{t}}, K) \leqslant \Big(c_2' L_C \max\Big\{1, \frac{\sqrt{\log(1+s)}}{\sqrt[4]{n}}\Big\}\sqrt[4]{n}\Big)\sqrt{n}M(K)$$

όπως θέλαμε. □

Προσαρμόζοντας την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.4 μπορούμε να δείξουμε ότι αν το C υποτεθεί ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ, το οποίο σημαίνει ότι κάθε διεύθυνση ξ είναι ψ_2-διεύθυνση για το C με σταθερά ϱ, τότε μπορούμε να επιτύχουμε μια πολύ καλύτερη εκτίμηση.

Θεώρημα 4.3.7. *Έστω C ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο είναι ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ, και έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $s \geqslant 1$ και κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s$,*
$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant c\varrho^2\sqrt{n}M(K)\,\|\mathbf{t}\|_2$$
όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε την Gaussian ανέλιξη $h_y(G) = \langle G, y\rangle$, όπου G είναι ένα τυπικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, και υπενθυμίζουμε ότι $\|h_y - h_z\|_2 = \|y - z\|_2$ και
$$\mathbb{E}\Big(\max_{y\in K^\circ} h_y(G)\Big) \approx \sqrt{n}M(K).$$

Η βασική παρατήρηση είναι ότι αν $\|\mathbf{t}\|_2 = 1$ τότε το $\mu_{\mathbf{t}}$ είναι ψ_2-μέτρο με σταθερά ϱ. Πράγματι, για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ έχουμε (δείτε την [11, Πρόταση 2.6.1]) ότι αν $w_\xi(x) = \langle x, \xi\rangle$ τότε

$$\|\langle x,\xi\rangle\|^2_{L_{\psi_2}(\mu_{\mathbf{t}})} = \Big\|\Big\langle \sum_{j=1}^s L_C^{-1} t_j X_j, \xi\Big\rangle\Big\|^2_{L_{\psi_2}(C^s)} \leqslant \sum_{j=1}^s L_C^{-2} t_j^2 \|\langle X_j,\xi\rangle\|^2_{L_{\psi_2}(C)} \leqslant \varrho^2,$$

άρα, για κάθε $y, z \in K^\circ$, η ψ_2 νόρμα της $w_y - w_z$ υπολογίζεται απευθείας ως εξής:

$$\|w_y - w_z\|_{\psi_2} \leqslant c_1\varrho\|y - z\|_2 = c_1\varrho\|h_y - h_z\|_2.$$

Τότε, από το Θεώρημα 4.3.6 και από το γεγονός ότι $L_C \leqslant c_2\varrho$ (δείτε το [2, Κεφάλαιο 7]) συμπεραίνουμε ότι

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} = L_C \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K\, d\mu_{\mathbf{t}}(x) = L_C\,\mathbb{E}\Big(\max_{y\in K^\circ} w_y\Big) \leqslant c_3\varrho^2\,\mathbb{E}\Big(\max_{y\in K^\circ} h_y(G)\Big) \approx \varrho^2\sqrt{n}M(K).$$

όπως ισχυριστήκαμε. □

4.4 Σώματα με φραγμένη σταθερά συντύπου-2

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπενθυμίζουμε ότι αν X_K είναι ο χώρος με νόρμα που έχει ως μοναδιαία μπάλα το K, γράφουμε $C_{2,k}(X_K)$ για την μικρότερη σταθερά $C>0$ με την ιδιότητα

$$\Big(\mathbb{E}_\epsilon\Big\|\sum_{i=1}^k \epsilon_i x_i\Big\|_K^2\Big)^{1/2} \geqslant \frac{1}{C}\Big(\sum_{i=1}^k \|x_i\|_K^2\Big)^{1/2}$$

για κάθε $x_1,\ldots,x_k\in X$. Στη συνέχεια, ορίζουμε την σταθερά συντύπου-2 του X_K θέτοντας $C_2(X_K):=\sup_k C_{2,k}(X_K)$. Αντικαθιστώντας τις ϵ_j με ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές g_j στον παραπάνω ορισμό, μπορούμε να ορίσουμε την σταθερά $\alpha_2(X_K)$ Gaussian συντύπου-2 του X_K. Αποδεικνύεται ότι $\alpha_2(X_K)\leqslant C_2(X_K)$. Ο E. Milman απέδειξε στο [76] ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό μέτρο με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$I_1(\mu,K)\leqslant c_1\alpha_2(X_K)\sqrt{n}M(K)\leqslant c_1C_2(X_K)\sqrt{n}M(K). \tag{4.4.1}$$

Σκιαγραφούμε την απόδειξη για την διευκόλυνση του αναγνώστη. Ένα επιχείρημα προσέγγισης δείχνει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\mu=\sum_{i=1}^m\lambda_i\delta_{v_i}$ για κάποιους $\lambda_i>0$ και κάποια διανύσματα $v_i\in\mathbb{R}^n$. Αν θεωρήσουμε το τυχαίο διάνυσμα $\Lambda_\mu=\sum_{i=1}^m g_i\sqrt{\lambda_i}v_i$, όπου $g_1,\ldots,g_m$ είναι ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές, τότε για κάθε $z_1,z_2\in\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(\langle\Lambda_\mu,z_1\rangle\langle\Lambda_\mu,z_2\rangle) &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i,j=1}^m g_ig_j\sqrt{\lambda_i}\sqrt{\lambda_j}\langle v_i,z_1\rangle\langle v_j,z_2\rangle\Big)\\ &= \mathbb{E}\Big(\sum_{i=1}^m g_i^2\lambda_i\langle v_i,z_1\rangle\langle v_i,z_2\rangle\Big)\\ &= \sum_{i=1}^m \lambda_i\langle v_i,z_1\rangle\langle v_i,z_2\rangle=\langle z_1,z_2\rangle,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και την υπόθεση ότι το μ είναι ισοτροπικό. Συνεπώς, το Λ_μ είναι τυπικό κανονικό n-διάστατο τυχαίο διάνυσμα. Αν επίσης θεωρήσουμε μια δεύτερη ακολουθία ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών $\{g_i'\}_{i=1}^n$, που είναι ανεξάρτητες και από τις g_i, από τα παραπάνω βλέπουμε ότι το Λ_μ έχει την ίδια κατανομή με το $\sum_{i=1}^n g_i'e_i$, και μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int\Big\|\sum_{i=1}^m g_i\sqrt{\lambda_i}v_i\Big\|_K^2 &= \int\Big\|\sum_{i=1}^n g_i'e_i\Big\|_K^2=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K^2e^{-\|x\|_2^2}dx\\ &=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\Big(\int_0^\infty e^{-r^2/2}r^{n+1}dr\Big)\cdot\int_{S^{n-1}}\|\vartheta\|_K^2d\sigma(\vartheta)=nM_2(K)^2,\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, ο ορισμός της σταθεράς συντύπου-2 και η υπόθεση ότι το μ είναι ισοτροπικό, μας δίνουν

$$\alpha_2(X_K)^2\int\Big\|\sum_{i=1}^m g_i\sqrt{\lambda_i}v_i\Big\|_K^2\geqslant\sum_{i=1}^k\lambda_i\|v_i\|_K^2=\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K^2d\mu(x).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$I_1(\mu, K) \leqslant \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^2 d\mu(x)\Big)^{1/2} \leqslant \alpha_2(X_K)\sqrt{n}M_2(X_K),$$

και η (4.4.1) έπεται από την $M_2(X_K) \approx M(X_K)$.

Χρησιμοποιώντας την (4.4.1) μπορούμε να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω C ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $s \geqslant 1$ και $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s$,*

$$\frac{c_1}{C_2(X_K)}\mathrm{vol}_n(K)^{-1/n}\|\mathbf{t}\|_2 \leqslant \mathbb{E}_{C^s}\Big\|\sum_{j=1}^s t_j x_j\Big\|_K \leqslant \big(c_2 L_C C_2(X_K)\sqrt{n}M(K)\big)\,\|\mathbf{t}\|_2$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\frac{c_1}{C_2(X_K)}\|\mathbf{t}\|_2 \leqslant \mathbb{E}_{K^s}\Big\|\sum_{j=1}^s t_j x_j\Big\|_K \leqslant \big(c_2 L_K C_2(X_K)\sqrt{n}M(K_{\mathrm{iso}})\big)\,\|\mathbf{t}\|_2,$$

όπου K_{iso} είναι μια ισοτροπική εικόνα του K.

Απόδειξη. Συνδυάζοντας την (4.4.1) με την (4.3.1) παίρνουμε

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant c_1 L_C C_2(X_K)\,\sqrt{n}M(K)$$

για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^s$ με $\|\mathbf{t}\|_2 = 1$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^s$, λόγω της συμμετρίας του C έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} &= \int_C \cdots \int_C \int_{E_2^s} \Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_j t_j x_j\Big\|_K d\mu_s(\epsilon)\,dx_1\cdots dx_s \\
&\geqslant \int_C \cdots \int_C \frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\int_{E_2^s} \Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_j t_j x_j\Big\|_K^2 d\mu_s(\epsilon)\Big)^{1/2} dx_1\cdots dx_s \\
&\geqslant \frac{1}{\sqrt{2}C_2(X_K)}\int_C \cdots \int_C \Big(\sum_{j=1}^s t_j^2\|x_j\|_K^2\Big)^{1/2} dx_1\cdots dx_s \\
&\geqslant \frac{c}{C_2(X_K)}\Big(\sum_{j=1}^s t_j^2 \int_C \|x_j\|_K^2 dx_j\Big)^{1/2} \\
&\geqslant \frac{c}{C_2(X_K)}\|\mathbf{t}\|_2 \int_C \|x\|_K\,dx,
\end{aligned}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά (για την πρώτη ανισότητα χρησιμοποιούμε την ανισότητα Kahane-Khintchine, για την τρίτη ανισότητα χρησιμοποιούμε το [2, Θεώρημα 2.4.6] για την ημινόρμα $(x_1, \ldots, x_s) \mapsto \Big(\sum_{j=1}^s t_j^2\|x_j\|_K^2\Big)^{1/2}$ στο C^s, ενώ στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιούμε την ανισότητα Cauchy-Schwarz για την $\|\cdot\|_K$ στο C). Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.5 για την $f = \mathbf{1}_C$ βλέπουμε ότι

$$\int_C \|x\|_K\,dx \geqslant \frac{n}{n+1}\mathrm{vol}_n(K)^{-1/n},$$

και έπεται το συμπέρασμα.

Στην περίπτωση $C = K$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό και τότε τα φράγματα που αποδείξαμε παίρνουν τη μορφή

$$\frac{c_1}{C_2(X_K)}\|\mathbf{t}\|_2 \leqslant \mathbb{E}_{K^s}\Big\|\sum_{j=1}^{s} t_j x_j\Big\|_K \leqslant \big(c_2 L_K C_2(X_K)\sqrt{n}M(K)\big)\,\|\mathbf{t}\|_2.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση 4.4.2. Μια άλλη ενδιαφέρουσα περίπτωση έχουμε όταν το K έχει φραγμένη σταθερά τύπου-2. Υπενθυμίζουμε ότι αν X_K είναι ο χώρος με νόρμα που έχει ως μοναδιαία μπάλα το K, γράφουμε $T_{2,k}(X_K)$ για την μικρότερη σταθερά $T > 0$ με την ιδιότητα ότι

$$\Big(\mathbb{E}_\epsilon\Big\|\sum_{i=1}^{k}\epsilon_i x_i\Big\|_K^2\Big)^{1/2} \leqslant T\Big(\sum_{i=1}^{k}\|x_i\|_K^2\Big)^{1/2}$$

για κάθε $x_1,\dots,x_k \in X$. Στη συνέχεια, ορίζουμε τη σταθερά τύπου-2 του X_K θέτοντας $T_2(X_K) := \sup_k T_{2,k}(X_K)$. Ο E. Milman απέδειξε στο [76] ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό μέτρο με συμπαγή φορέα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$I_1(\mu, K) \geqslant c\sqrt{n}\frac{M(K)}{T_2(X_K)}. \tag{4.4.2}$$

Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα και ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό που δώσαμε στην περίπτωση του συντύπου-2, παίρνουμε:

Θεώρημα 4.4.3. *Έστω C ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $s \geqslant 1$ και $\mathbf{t} = (t_1,\dots,t_s) \in \mathbb{R}^s$,*

$$\frac{c_1 L_C\sqrt{n}M(K)}{T_2(X_K)}\,\|\mathbf{t}\|_2 \leqslant \mathbb{E}_{C^s}\Big\|\sum_{j=1}^{s} t_j x_j\Big\|_K \leqslant c_2 T_2(X_K)\Big(\int_C \|x\|_K dx\Big)\,\|\mathbf{t}\|_2$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι

$$\frac{c_1 L_K\sqrt{n}M(K_{\rm iso})}{T_2(X_K)}\|\mathbf{t}\|_2 \leqslant \mathbb{E}_{K^s}\Big\|\sum_{j=1}^{s} t_j x_j\Big\|_K \leqslant c_2 T_2(X_K)\|\mathbf{t}\|_2.$$

Παρατηρήστε ότι αν $\mathrm{vol}_n(K) = 1$ τότε $\sqrt{n}M(K) \geqslant c > 0$, συνεπώς η εκτίμηση στο θεώρημα είναι ακριβής, με την εξαίρεση της σταθεράς τύπου-2, και μάλιστα έχει ως συνέπεια ένα άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά L_K.

4.5 Η unconditional περίπτωση

Σε αυτή την παράγραφο εξετάζουμε την unconditional περίπτωση. Όταν τα $C_1,\dots,C_s$ και K είναι ισοτροπικά unconditional κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, το πρόβλημα έχει ουσιαστικά μελετηθεί στο [44, Θεώρημα 4.1].

Θεώρημα 4.5.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: αν K και $C_1,\dots,C_s$ είναι ισοτροπικά unconditional κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $q\geqslant 1$,*

$$\Big(\int_{C_1}\cdots\int_{C_s}\Big\|\sum_{j=1}^{s}t_jx_j\Big\|_K^q\,dx_s\dots dx_1\Big)^{1/q}\leqslant cn^{1/q}\sqrt{q}\cdot\max\{\|\mathbf{t}\|_2,\sqrt{q}\|\mathbf{t}\|_\infty\}$$

για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$.

Απόδειξη. Περιγράφουμε εν συντομία το επιχείρημα, το οποίο είναι ουσιαστικά το ίδιο με εκείνο στο [44]. Γράφουμε μ_n για την ομοιόμορφη κατανομή στην B_1^n, με πυκνότητα $\frac{d\mu_n(x)}{dx}=\frac{n!}{2^n}\mathbf{1}_{B_1^n}(x)$. Αν θέσουμε $\Delta_n=\{x\in\mathbb{R}^n_+ : x_1+\cdots+x_n\leqslant 1\}$ τότε ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι για κάθε n-άδα μη αρνητικών ακεραίων $p_1,\dots,p_n$, ισχύει ότι

$$\int_{\Delta_n}x_1^{p_1}\dots x_n^{p_n}\,dx=\frac{p_1!\cdots p_n!}{(n+p_1+\cdots+p_n)!}.$$

Στο [27] αποδεικνύεται ότι για κάθε ισοτροπικό unconditional κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε $cB_\infty^n\subseteq K\subseteq V_n$, όπου $V_n=\sqrt{3/2}nB_1^n$ και $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, $\|\cdot\|_K\leqslant c_1\|\cdot\|_\infty\leqslant c_1\|\cdot\|_q$, όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεχίζουμε δίνοντας ένα άνω φράγμα για την ποσότητα

$$F_{\mathcal{C},q}(\mathbf{t}):=\int_{C_1}\cdots\int_{C_s}\|\sum_{i=1}^{s}t_ix_i\|_{2q}^{2q}\,dx_1\cdots dx_s,$$

όπου ο $q\geq 1$ είναι ακέραιος. Γράφουμε $x_i=(x_{i1},\dots,x_{in})$ και ορίζουμε $y_j=(x_{1j},\dots,x_{sj})$ για κάθε $j=1,\dots,n$. Τότε,

$$F_{\mathcal{C},q}(\mathbf{t})=\int_{C_1}\cdots\int_{C_s}\sum_{j=1}^{n}\langle\mathbf{t},y_j\rangle^{2q}\,dx_1\cdots dx_s=\sum_{j=1}^{n}\sum_{q_1+\cdots+q_s=q}\frac{(2q)!}{(2q_1)!\cdots(2q_s)!}\prod_{i=1}^{s}t_i^{2q_i}\int_{C_i}x_{ij}^{2q_i}\,dx_i.$$

Στη συνέχεια, εφαρμόζουμε ένα θεώρημα σύγκρισης από το [28]: για κάθε συνάρτηση $F:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ που είναι συμμετρική ως προς το 0, αύξουσα ως προς κάθε συντεταγμένη και απολύτως συνεχής, έχουμε ότι

$$\int F(x)d\mu_A(x)\leqslant\int F(x)d\mu_{V_n}(x),$$

όπου μ_A είναι το ομοιόμορφο μέτρο στο ισοτροπικό unconditional κυρτό σώμα A. Έπεται ότι

$$\int_{C_i}x_{ij}^{2q_i}\,dx_i\leqslant\int_{V_n}x_1^{2q_i}d\mu_{V_n}(x)\leqslant(c_1n)^{2q_i}n!\int_{\Delta_n}x_1^{2q_i}dx=(c_1n)^{2q_i}\frac{n!(2q_i)!}{(n+2q_i)!},$$

όπου $c_1=\sqrt{3/2}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$F_{\mathcal{C},q}(\mathbf{t})\leqslant n(n!)^s(c_1n)^{2q}(2q)!\sum_{q_1+\cdots+q_s=q}\frac{t_1^{2q_1}\cdots t_s^{2q_s}}{(n+2q_1)!\cdots(n+2q_s)!}.$$

Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση $(n+2r)!\geq n!n^{2r}$ η οποία ισχύει για κάθε $r\geq 0$, παίρνουμε

$$F_{\mathcal{C},q}(\mathbf{t})\leqslant nc_1^{2q}(2q)!\sum_{q_1+\cdots+q_s=q}t_1^{2q_1}\cdots t_s^{2q_s}.$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε μια άλλη παρατήρηση από το [28]: αν ο $q \geq 1$ είναι ακέραιος και $P_q(y) = \sum_{q_1+\cdots+q_s=q} y_1^{q_1}\cdots y_s^{q_s}$, $y=(y_1,\ldots,y_s)\in\mathbb{R}_+^s$, τότε για κάθε $y\in\mathbb{R}_+^s$ με $y_1+\cdots+y_s=1$ ισχύει ότι

$$P_q(y) \leqslant (2e\max\{1/q, \|y\|_\infty\})^q\,.$$

Εφαρμόζοντας αυτή την ανισότητα στην s-άδα $y = \frac{1}{\|\mathbf{t}\|_2^2}(t_1^2,\ldots,t_s^2)$ παίρνουμε

$$F_{\mathcal{C},q}^{\frac{1}{2q}}(\mathbf{t}) \leqslant c_1 n^{\frac{1}{2q}}\sqrt[2q]{(2q)!}\left(2e\max\{\|\mathbf{t}\|_2^2/q, \|\mathbf{t}\|_\infty^2\}\right)^{1/2} \leqslant c_2 n^{\frac{1}{2q}}\sqrt{q}\max\{\|\mathbf{t}\|_2, \sqrt{q}\|\mathbf{t}\|_\infty\}.$$

Κατόπιν, είναι εύκολο να ολοκληρώσουμε την απόδειξη. □

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.5.1 με $q=\log n$ παίρνουμε άμεσα το εξής.

Θεώρημα 4.5.2. *Αν K και $C_1,\ldots,C_s$ είναι ισοτροπικά unconditional κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K} \leqslant c\sqrt{\log n}\cdot\max\{\|\mathbf{t}\|_2, \sqrt{\log n}\|\mathbf{t}\|_\infty\}$$

για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\ldots,t_s)\in\mathbb{R}^s$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Παρατήρηση 4.5.3. Χρησιμοποιώντας την ίδια προσέγγιση μπορούμε να αποδείξουμε παρόμοιο άνω φράγμα με άμεσο τρόπο. Θεωρούμε $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^s$ με $\|\mathbf{t}\|_2=1$. Ως συνήθως, έχουμε

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} = L_C\, I_1(\mu_{\mathbf{t}}, K),$$

όπου $\mu_{\mathbf{t}}$ είναι ένα unconditional ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Αφού το K είναι επίσης unconditional και ισοτροπικό, έχουμε $c_1 B_\infty^n \subseteq K$, άρα $\|x\|_K \leqslant c_1^{-1}\|x\|_\infty$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Συνεπώς,

$$I_1(\mu_{\mathbf{t}}, K) = \int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K d\mu_{\mathbf{t}}(x) \leqslant c_1^{-1}\int_{\mathbb{R}^n}\max_{1\leqslant i\leqslant n}|\langle x, e_i\rangle|\, d\mu_{\mathbf{t}}(x) \leqslant c_2\log n$$

διότι το $\mu_{\mathbf{t}}$ είναι ισοτροπικό ψ_1-μέτρο με απόλυτη σταθερά ϱ (δείτε την [1, Πρόταση 3.5.8]). Αφού το C είναι unconditional, έχουμε επίσης $L_C\leqslant c_3$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_3>0$. Έπεται ότι

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K} \leqslant c_4\log n\,\|\mathbf{t}\|_2$$

για κάθε $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^s$. Φυσικά, η εκτίμηση του Θεωρήματος 4.5.1 είναι πιο εκλεπτυσμένη, και σε κάποιες περιπτώσεις μπορεί να υπερέχει κατά έναν $\sqrt{\log n}$-όρο, καθώς λαμβάνει υπ' όψιν της και τις συντεταγμένες του $\mathbf{t}$.

Παρατήρηση 4.5.4. Στο [44] γίνεται η παρατήρηση ότι ο ℓ_∞-όρος στην εκτίμηση που δίνει το Θεώρημα 4.5.1 δεν μπορεί να απαλειφθεί. Αν $C=\overline{B_1^n}$ και $K=\frac{1}{2}B_\infty^n$ τότε επιλέγοντας το διάνυσμα $\mathbf{e_1}=(1,0,0,\ldots,0)$ έχουμε

$$\|\mathbf{e_1}\|_{C^s,K} = \int_{\overline{B_1^n}} 2\|x\|_\infty\, dx \geqslant c\log n\,\|\mathbf{e_1}\|_\infty$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$.

Το παράδειγμα του κύβου δείχνει ότι ο όρος $\sqrt{\log n}\|\mathbf{t}\|_\infty$ είναι απαραίτητος. Οι Gluskin και V. Milman αποδεικνύουν στο [49] ότι αν $C = K = \frac{1}{2}B_\infty^n$ τότε

$$\|\mathbf{t}\|_{K^n,K} \approx q_n(\mathbf{t}) = \sum_{i=1}^{u} t_i^* + \sqrt{u}\left(\sum_{i=u+1}^{n} (t_i^*)^2\right)^{1/2}$$

όπου $u \approx \log n$ και $(t_i^*)_{i\leqslant n}$ είναι η φθίνουσα αναδιάταξη της $(|t_j|)_{j=1}^n$. Η [44, Παρατήρηση 4.5] δείχνει ότι αυτό έχει ως συνέπεια το κάτω φράγμα

$$\int_{S^{n-1}} \|\mathbf{t}\|_{K^n,K}\, d\sigma(\mathbf{t}) \geqslant c\sqrt{\log n}.$$

Παρατήρηση 4.5.5. Είναι ενδιαφέρον να δοκιμάσουμε τα αποτελέσματα της Παραγράφου 4.3 και της Παραγράφου 4.4 στο παράδειγμα της ℓ_p^n-μπάλας B_p^n. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $1 \leqslant p \leqslant 2$. Τότε, η σταθερά συντύπου-2 του ℓ_p^n είναι φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά (ανεξάρτητη από τα p και n). Είναι επίσης γνωστό (δείτε το [1, Κεφάλαιο 5]) ότι $M(B_p^n) \approx n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}$ και $\mathrm{vol}_n(B_p^n)^{1/n} \approx n^{-\frac{1}{p}}$. Έπεται ότι

$$M(\overline{B_p^n}) = \mathrm{vol}_n(B_p^n)^{1/n} M(B_p^n) \approx 1/\sqrt{n}.$$

Αφού το $\overline{B_p^n}$ είναι ισοτροπικό και η ισοτροπική σταθερά του είναι επίσης φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά, το Θεώρημα 4.4.1 δείχνει ότι

$$\|\mathbf{t}\|_{\overline{B_p^n}^s,\overline{B_p^n}} \leqslant c_1\, \|\mathbf{t}\|_2$$

για κάθε $s \geqslant 1$ και κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^s$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $2 \leqslant q \leqslant \infty$. Σε αυτή την περίπτωση είναι γνωστό (δείτε το [1, Κεφάλαιο 5]) ότι $\mathrm{vol}_n(B_q^n)^{1/n} \approx n^{-\frac{1}{q}}$ και

$$M(B_q^n) \approx \min\{\sqrt{q}, \sqrt{\log n}\} n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

Έπεται ότι

$$M(\overline{B_q^n}) = \mathrm{vol}_n(B_q^n)^{1/n} M(B_q^n) \approx \min\{\sqrt{q}, \sqrt{\log n}\}/\sqrt{n}.$$

Αφού το $\overline{B_q^n}$ είναι ισοτροπικό ψ_2-κυρτό σώμα με σταθερά $\varrho \approx 1$ (ανεξάρτητη από τα q και n – δείτε το [21]) και η ισοτροπική σταθερά του είναι επίσης φραγμένη από μια απόλυτη σταθερά, το Θεώρημα 4.3.7 δείχνει ότι

$$\|\mathbf{t}\|_{\overline{B_q^n}^s,\overline{B_q^n}} \leqslant c_2 \min\{\sqrt{q}, \sqrt{\log n}\}\, \|\mathbf{t}\|_2$$

για κάθε $s \geqslant 1$ και $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^s$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

4.6 Εφαρμογές σε προβλήματα εξισορρόπησης διανυσμάτων

Σε αυτή την παράγραφο συζητάμε εφαρμογές των προηγούμενων αποτελεσμάτων σε κάποιες τυχαιοποιημένες εκδοχές προβλημάτων εξισορρόπησης διανυσμάτων. Υπενθυμίζουμε ότι αν C, K είναι δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, η παράμετρος $\beta_s(C,K)$ ορίζεται ως εξής:

$$\beta_s(C,K) := \min\Big\{r > 0 : \ \text{για κάθε } x_1,\dots,x_s \in C,\ \min_{\epsilon\in E_2^s} \Big\|\sum_{j=1}^{s} \epsilon_j x_j\Big\|_K \leqslant r\Big\},$$

όπου $E_2^s := \{-1,1\}^s$ είναι ο διακριτός κύβος στον $\mathbb{R}^s$. Για κάθε $x_1,\dots,x_n\in K$, από την τριγωνική ανισότητα είναι φανερό ότι $\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j\|_K \leqslant n$ για κάθε $\epsilon\in E_2^n$, άρα $\beta_n(K,K)\leqslant n$. Μάλιστα, αυτό το φράγμα είναι γενικά βέλτιστο: επιλέγοντας $K=B_1^n$ και $x_j=e_j$, την συνήθη βάση του $\mathbb{R}^n$, παίρνουμε $\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j e_j\|_1 = n$ για κάθε επιλογή προσήμων. Όμως, το άνω φράγμα για την $\beta_n(K,K)$ μπορεί να γίνει πολύ καλύτερο για κάποια κυρτά σώματα, όπως δείχνει για παράδειγμα το κλασικό θεώρημα του Spencer [106]: ισχύει ότι $\beta_n(B_\infty^n,B_\infty^n)\leqslant 6\sqrt{n}$.

Ορίζουμε επίσης $\tilde{\beta}(C,K)=\sup_{k\geqslant n}\beta_k(C,K)$. Είναι φανερό ότι $\beta_n(C,K)\leqslant\tilde{\beta}(C,K)$. Από ένα θεώρημα των Bárány και Grinberg [20], έχουμε ότι $\tilde{\beta}(K,K)\leqslant 2n$. Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει επίσης από το τετριμμένο φράγμα για την $\beta_n(K,K)$ που αναφέραμε προηγουμένως και την γενική παρατήρηση ότι

$$\tilde{\beta}(C,K)\leqslant 2\max_{k\leqslant n}\beta_k(C,K).$$

Ένα σχετικό αποτέλεσμα είναι το Λήμμα Dvoretzky-Hanani (δείτε το [61, Λήμμα 2.2.1]) το οποίο ισχυρίζεται ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $s\geqslant 1$ και κάθε $x_1,\dots,x_s\in K$, υπάρχουν πρόσημα $\epsilon_1,\dots,\epsilon_s\in\{-1,1\}$ τέτοια ώστε $\max_{k\leqslant s}\|\sum_{j=1}^k\epsilon_j x_j\|_K\leqslant 2n$.

Το ερώτημα που συζητάμε είναι αν μπορούμε να πετύχουμε κάτι καλύτερο από το $O(n)$ φράγμα για την τυχαία s-άδα $(x_1,\dots,x_s)$ από το C. Για να κάνουμε αυτό το ερώτημα ακριβές, για κάθε $\delta\in(0,1)$ εισάγουμε την παράμετρο

$$\begin{aligned}\beta_{\delta,s}^{(R)}(C,K) := \min\Big\{r>0 : \mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s : x_j\in C \text{ για κάθε } j \text{ και}\\ \min_{\epsilon\in E_2^s}\Big\|\sum_{j=1}^s\epsilon_j x_j\Big\|_K\leqslant r\Big\}\Big)\geqslant 1-\delta\Big\}.\end{aligned}$$

Τα αποτελέσματα της Παραγράφου 4.3 και της Παραγράφου 4.5 μας επιτρέπουν να αποδείξουμε αρκετά καλύτερα φράγματα για την παράμετρο $\beta_{\delta,s}^{(R)}(C,K)$. Στο θεώρημα που διατυπώνουμε παρακάτω, περιοριζόμαστε στην περίπτωση $C=K$ και $s=n$. Με την ίδια τεχνική μπορούμε να καταλήξουμε σε ανάλογα φράγματα για τυχόντα C και s.

Θεώρημα 4.6.1. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\delta\in(0,1)$,*

$$\beta_{\delta,n}^{(R)}(K,K)\leqslant (c\log(2/\delta)L_K n^{3/4})\,\sqrt{n}M(K_{\rm iso})$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $K_{\rm iso}$ είναι μια ισοτροπική εικόνα του K. Αν το K είναι ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ τότε

$$\beta_{\delta,n}^{(R)}(K,K)\leqslant (c\log(2/\delta)\varrho^2\sqrt{n})\,\sqrt{n}M(K_{\rm iso}).$$

Θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 4.6.2. *Έστω $C_1,\dots,C_s$ κυρτά σώματα όγκου 1 και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\Big(\mathbb{E}_{\mathcal{C}}\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_K^q\Big)^{1/q}\leqslant cq\,\|\mathbf{t}\|_{\mathcal{C},K}$$

για κάθε $q\geqslant 1$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το λήμμα προκύπτει άμεσα από το γεγονός (δείτε το [2, Θεώρημα 2.4.6]) ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^k$ και η $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ είναι ημινόρμα τότε, για κάθε $q \geqslant 1$,

$$\|f\|_{L_q(\mu)} \leqslant cq\,\|f\|_{L_1(\mu)},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Εφαρμόζουμε αυτή την ανισότητα στον $\mathbb{R}^{ns}$ για την ημινόρμα

$$(x_1, \dots, x_s) \mapsto \Big\| \sum_{j=1}^{s} t_j x_j \Big\|_K$$

και το ομοιόμορφο μέτρο στο $C_1 \times \cdots \times C_s$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.1. Ξεκινάμε από το Λήμμα 4.6.2. Εφαρμόζοντάς το για το διάνυσμα $\mathbf{1} = (1, \dots, 1) \in \mathbb{R}^n$, βλέπουμε ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$,

$$\Big(\mathbb{E}_{K^n} \Big\| \sum_{j=1}^{n} x_j \Big\|_K^q \Big)^{1/q} \leqslant cq\,\|\mathbf{1}\|_{K^n,K}, \tag{4.6.1}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την άλλη πλευρά, λόγω της συμμετρίας του K έχουμε ότι, για κάθε $q \geqslant 1$,

$$\mathbb{E}_{K^n} \Big\| \sum_{j=1}^{n} x_j \Big\|_K^q = \mathbb{E}_{K^n} \Big(\mathbb{E}_{\epsilon} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j \Big\|_K^q \Big). \tag{4.6.2}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε, ειδικότερα,

$$\Big(\mathbb{E}_{K^n} \min_{\epsilon \in E_2^n} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j \Big\|_K^q \Big)^{1/q} \leqslant c_1 q\,\|\mathbf{1}\|_{K^n,K}. \tag{4.6.3}$$

Έπεται ότι η τυχαία n-άδα $(x_1, \dots, x_n) \in K^n$ ικανοποιεί την

$$\min_{\epsilon \in E_2^n} \Big\| \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j x_j \Big\|_K \leqslant c_2 q\,\|\mathbf{1}\|_{K^n,K}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-q}$. Επιλέγοντας $q = \log(2/\delta)$ βλέπουμε ότι

$$\beta_{\delta,n}^{(R)}(K, K) \leqslant c_2 \log(2/\delta)\,\|\mathbf{1}\|_{K^n,K}. \tag{4.6.4}$$

Εισάγοντας τα άνω φράγματα για την $\|\mathbf{1}\|_{K^n,K}$ στην (4.6.4) ολοκληρώνουμε την απόδειξη. $\square$

Ανάλογα αποτελέσματα ισχύουν για 2-κυρτά σώματα με σταθερά α, όπου έχουμε την εκτίμηση

$$\beta_{\delta,n}^{(R)}(K, K) \leqslant (c \log(2/\delta)\sqrt{n}/\alpha),$$

ή σώματα με φραγμένη σταθερά συντύπου-2, όπου έχουμε την εκτίμηση

$$\beta_{\delta,n}^{(R)}(K, K) \leqslant (c \log(2/\delta) L_K C_2(X_K)\sqrt{n})\,\sqrt{n} M(K_{\rm iso}).$$

Μάλιστα, η απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.1 δείχνει ότι τα ίδια άνω φράγματα ισχύουν για την παράμετρο $\kappa^{(R)}_{\delta,s}(C,K)$ η οποία ορίζεται ως ο μικρότερος $r>0$ με την ιδιότητα ότι

$$\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s : x_j \in C \text{ για κάθε } j \text{ και } \mathbb{P}\Big(\Big\{\epsilon\in E_2^s : \Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_j x_j\Big\|_K \leqslant r\Big\}\Big) \geqslant 1-\delta\Big\}\Big) \geqslant 1-\delta.$$

Παρατηρήστε ότι, από τον ορισμό, $\kappa^{(R)}_{\delta,s}(C,K) \geqslant \beta^{(R)}_{\delta,s}(C,K)$.

Στη συνέχεια, συνδυάζοντας την προσέγγισή μας με κάποια κλασικά αποτελέσματα της ασυμπτωτικής κυρτής γεωμετρίας αποδεικνύουμε παραλλαγές των κύριων αποτελεσμάτων του Κεφαλαίου 3, καθώς και τις δυϊκές τους εκτιμήσεις. Η αρχική μας παρατήρηση είναι ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$\int_{O(n)} I_1(\mu, U(K))\,d\nu(U) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{O(n)} \|x\|_{U(K)} d\nu(U)\,d\mu(x) = M(K)\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_2 d\mu(x) \approx \sqrt{n}M(K).$$

Εφαρμόζοντας αυτή τη σχέση για το μέτρο $\mu_{\mathbf{t}}$, από την (4.3.1) παίρνουμε άμεσα το εξής.

Πρόταση 4.6.3. *Έστω C ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$ υπάρχει $U\in O(n)$ τέτοιος ώστε*

$$\|\mathbf{t}\|_{U(C)^s,K} \geqslant cL_C\sqrt{n}M(K)\,\|\mathbf{t}\|_2. \tag{4.6.5}$$

Γνωρίζουμε ότι αν $\mathrm{vol}_n(K)=1$ τότε η ποσότητα $\sqrt{n}M(K)$ είναι πάντα μεγαλύτερη από c. Συνεπώς, η Πρόταση 4.6.3 μας δίνει πολλά παραδείγματα στα οποία το κάτω φράγμα των Gluskin και V. Milman επιδέχεται βελτίωση (παρατηρήστε επίσης την παρουσία της L_C στο δεξιό μέλος της ανισότητας). Για παράδειγμα, στο κλασικό παράδειγμα του κύβου $K=\frac{1}{2}B_\infty^n$ έχουμε ότι $\sqrt{n}M(K)\approx\sqrt{\log n}$, απ' όπου έπεται το εξής:

Πόρισμα 4.6.4. *Για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$ υπάρχει $U\in O(n)$ τέτοιος ώστε*

$$\int_{U(C)}\cdots\int_{U(C)}\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_\infty dx_1\cdots dx_s \geqslant cL_C\sqrt{\log n}\,\|\mathbf{t}\|_2,$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Εκμεταλλευόμαστε γενικότερα αυτή την ιδέα. Θα χρησιμοποιήσουμε κάποια σημαντικά αποτελέσματα από την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία (δείτε το [2] για τις αποδείξεις και την βιβλιογραφία). Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $q\neq 0$ ορίζουμε

$$M_q(K) = \left(\int_{S^{n-1}}\|\xi\|_K^q d\sigma(\xi)\right)^{1/q}.$$

Οι Litvak, V. Milman και Schechtman έχουν αποδείξει στο [70] ότι

$$M_q(K)\approx M(K) \tag{4.6.6}$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_1 k(K)$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και $k(K) = n(M(K)/b(K))^2$ είναι η διάσταση Dvoretzky του K. Επιπλέον, οι Klartag και Vershynin έχουν αποδείξει στο [66] ότι

$$M_{-q}(K) \approx M(K) \tag{4.6.7}$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_2 d(K)$, όπου $d(K) \geqslant c_3 k(K)$ είναι μια παράμετρος του K που ορίζεται από την

$$d(K) = \min\Big\{n, -\log \gamma_n\Big(\frac{m(K)}{2}K\Big)\Big\},$$

και $m(K) \approx \sqrt{n}M(K)$ είναι η διάμεσος της $\|\cdot\|_K$ ως προς το τυπικό μέτρο Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$.

Για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $q \neq 0$, $q > -n$, ορίζουμε

$$I_q(\mu) := \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q \, d\mu(x)\Big)^{1/q}.$$

Ο Παούρης έχει αποδείξει στα [88] και [89] ότι

$$I_{-q}(\mu) \approx I_q(\mu) \approx \sqrt{n} \tag{4.6.8}$$

για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_4 q_*(\mu)$, όπου $q_*(\mu) := \max\{q : k(Z_q^\circ(\mu)) \geqslant q\}$. Είναι γνωστό ότι $q_*(\mu) \geqslant c_5\sqrt{n}$. Επιπλέον, αν το μ είναι ψ_2-μέτρο με σταθερά ϱ τότε $q_*(\mu) \geqslant c_6 n/\varrho^2$.

Θεώρημα 4.6.5. *Έστω C ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_s) \in \mathbb{R}^s$ και κάθε $S \subseteq E_2^n$ με $|S| \leqslant e^{q(\mathbf{t})}$, ο τυχαίος $U \in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s : x_j \in U(C) \ \ \text{για κάθε } j \text{ και} \Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_j t_j x_j\Big\|_K \leqslant cL_C\sqrt{n}M(K)\,\|\mathbf{t}\|_2 \\ \text{για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) \leqslant e^{-q(\mathbf{t})}\end{aligned}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-2q(\mathbf{t})}$, όπου

$$q(\mathbf{t}) := \min\{q_*(\mu_{\mathbf{t}}), d(K)\}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|\mathbf{t}\|_2 = 1$. Ξεκινάμε γράφοντας

$$\int_C \cdots \int_C \Big\|\sum_{j=1}^s t_j x_j\Big\|_K^{-q(\mathbf{t})} dx_s \cdots dx_1 = \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^{-q(\mathbf{t})} d\nu_{\mathbf{t}}(x) = L_C^{-q(\mathbf{t})} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_K^{-q(\mathbf{t})} d\mu_{\mathbf{t}}(x).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{O(n)} \int_C \cdots \int_C \Big\|\sum_{j=1}^s t_j x_j\Big\|_{U(K)}^{-q(\mathbf{t})} dx_s \cdots dx_1 \, d\nu(U) \\ &= L_C^{-q(\mathbf{t})} \int_{\mathbb{R}^n} \int_{O(n)} \|x\|_{U(K)}^{-q(\mathbf{t})} d\nu(U)\, d\mu_{\mathbf{t}}(x) \\ &= L_C^{-q(\mathbf{t})} M_{-q(\mathbf{t})}^{-q(\mathbf{t})}(K) \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^{-q(\mathbf{t})} d\mu_{\mathbf{t}}(x) \\ &= L_C^{-q(\mathbf{t})} I_{-q(\mathbf{t})}^{-q(\mathbf{t})}(\mu_{\mathbf{t}}) M_{-q(\mathbf{t})}^{-q(\mathbf{t})}(K).\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Markov, ο τυχαίος $U\in O(n)$ ικανοποιεί την

$$\int_C\cdots\int_C\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_{U(K)}^{-q(\mathbf{t})}dx_s\cdots dx_1\leqslant e^{2q(\mathbf{t})}L_C^{-q(\mathbf{t})}I_{-q(\mathbf{t})}^{-q(\mathbf{t})}(\mu_{\mathbf{t}})M_{-q(\mathbf{t})}^{-q(\mathbf{t})}(K)$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-2q(\mathbf{t})}$. Αφού

$$\int_C\cdots\int_C\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_{U(K)}^{-q(\mathbf{t})}dx_s\cdots dx_1=\int_C\cdots\int_C\Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_jt_jx_j\Big\|_{U(K)}^{-q(\mathbf{t})}dx_1\cdots dx_s$$

για κάθε $\epsilon\in E_2^s$, συμπεραίνουμε ότι ο τυχαίος $U\in O(n)$ ικανοποιεί την

$$\int_C\cdots\int_C\Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_jt_jx_j\Big\|_{U(K)}^{-q(\mathbf{t})}dx_s\cdots dx_1\leqslant e^{2q(\mathbf{t})}L_C^{-q(\mathbf{t})}I_{-q(\mathbf{t})}^{-q(\mathbf{t})}(\mu_{\mathbf{t}})M_{-q(\mathbf{t})}^{-q(\mathbf{t})}(K)$$

για κάθε $\epsilon\in E_2^s$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-2q(\mathbf{t})}$.

Στη συνέχεια, σταθεροποιούμε οποιονδήποτε U με αυτή την ιδιότητα και θεωρούμε $S\subseteq E_2^n$ με $|S|\leqslant e^{q(\mathbf{t})}$. Χρησιμοποιώντας τις (4.6.7), (4.6.8) και την ανισότητα Markov, βλέπουμε ότι η τυχαία s-άδα $(x_1,\dots,x_s)\in C^s$ ικανοποιεί την

$$\Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_jt_jx_j\Big\|_{U(K)}\geqslant e^{-3}L_CI_{-q(\mathbf{t})}(\mu_{\mathbf{t}})M_{-q(\mathbf{t})}(K)\geqslant c_1L_C\sqrt{n}M(K)$$

για κάθε $\epsilon\in S$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-q(\mathbf{t})}$. □

Υπενθυμίζουμε ότι αν το C είναι ισοτροπικό ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ τότε το $\mu_{\mathbf{t}}$ είναι ψ_2 ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με σταθερά ϱ. Σε αυτή την περίπτωση ισχύει ότι $q_*(\mu_{\mathbf{t}})\geqslant cn/\varrho^2$, άρα, στο Θεώρημα 4.6.5 έχουμε $q(\mathbf{t})\geqslant c\min\{n/\varrho^2,d(K)\}$. Επιπλέον, αν $C=\overline{B_2^n}$ τότε $U(C)=\overline{B_2^n}$ για κάθε $U\in O(n)$ και $\varrho\approx 1$. Συνεπώς, έχουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 4.6.6. *Έστω C ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι ψ_2 με σταθερά ϱ, και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$ και κάθε $S\subseteq E_2^s$ με $|S|\leqslant e^{c\min\{n/\varrho^2,d(K)\}}$, ο τυχαίος $U\in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s:x_j\in U(C)\ \ \textit{για κάθε } j \textit{ και}\Big\|\sum_{j=1}^s\epsilon_jt_jx_j\Big\|_K\leqslant c_1L_C\sqrt{n}M(K)\,\|\mathbf{t}\|_2\\ \textit{για κάποιο } \epsilon\in S\Big\}\Big)\leqslant e^{-c_2\min\{n/\varrho^2,d(K)\}}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-c_2\min\{n/\varrho^2,d(K)\}}$. Ειδικότερα, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $S\subseteq E_2^s$ με $|S|\leqslant e^{cd(K)}$ έχουμε

$$\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s:x_j\in \overline{B_2^n}\ \ \textit{για κάθε } j \textit{ και}\ \Big\|\sum_{j=1}^s\epsilon_jt_jx_j\Big\|_K\leqslant c_1L_C\sqrt{n}M(K)\,\|\mathbf{t}\|_2\\ \textit{για κάποιο } \epsilon\in S\Big\}\Big)\leqslant e^{-c_2d(K)}.$$

Παρατήρηση 4.6.7. Αν επιλέξουμε $t_1 = \cdots = t_s = 1$, τότε μπορούμε να δούμε τα προηγούμενα αποτελέσματα ως κάτω φράγματα για μια «τυχαιοποιημένη» εκδοχή της παραμέτρου $\beta_s(C, K)$. Ένα γενικό κάτω φράγμα για την παράμετρο $\beta_n(C, K)$ αποδείχθηκε από τον Banaszczyk: στο [14] έδειξε ότι αν C και K είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\beta_n(C, K) \geqslant c\sqrt{n}(\mathrm{vol}_n(C)/\mathrm{vol}_n(K))^{1/n} \tag{4.6.9}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Μια εναλλακτική απόδειξη αυτού του κάτω φράγματος προκύπτει από ένα πιο γενικό αποτέλεσμα των Gluskin και V. Milman στο [49]: Αν $\mathrm{vol}_n(K) = \mathrm{vol}_n(C)$ τότε, για κάθε $0 < u < 1$ ισχύει ότι

$$\mathrm{vol}_{n^2}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^n : x_j \in C \ \text{ για κάθε } j \text{ και } \Big\|\sum_{j=1}^n t_j x_j\Big\|_K \leqslant u\|\mathbf{t}\|_2\Big\}\Big) \leqslant u^n e^{\frac{(1-u^2)n}{2}},$$

απ' όπου έπεται ότι, για κάθε $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ ως προς $(x_1, \ldots, x_n)$ έχουμε

$$\min_{\epsilon \in E_2^n} \Big\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j t_j x_j\Big\|_K \geqslant \frac{1}{10}\|\mathbf{t}\|_2.$$

Το θεώρημα του Banaszczyk αντιστοιχεί στην περίπτωση $s = n$ και $\mathbf{t} = (1, 1, \ldots, 1)$. Ξεκινώντας από αυτή την παρατήρηση, στο Κεφάλαιο 3 αποδείξαμε διάφορα αποτελέσματα στο πνεύμα του Θεωρήματος 4.6.5 και του Πορίσματος 4.6.6. Για παράδειγμα, είδαμε ότι αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $S \subseteq E_2^n$ τότε

$$\begin{aligned}\mathrm{vol}_{n^2}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^n \subseteq B_2^n : \Big\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j\Big\|_K \leqslant c\delta\sqrt{n}M(K), \text{ για κάποιο } \epsilon \in S\Big\}\Big) \\ \leqslant |S| \cdot \gamma_n(\delta\sqrt{n}M(K)\,K) + e^{-n}.\end{aligned}$$

Μια συγκεκριμένη εφαρμογή αυτού του αποτελέσματος είναι ότι, για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \log n$ και κάθε $S \subseteq E_2^n$ με $|S| \leqslant 2^{c_p n}$, η τυχαία n-άδα σημείων της B_2^n ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$,

$$\Big\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j\Big\|_p \geqslant c\sqrt{p}\sqrt{n}\big(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(B_p^n)\big)^{1/n}$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$, ενώ στην περίπτωση $p > \log n$ μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $0 < \delta < 1$ και κάθε $S \subseteq E_2^n$ με $|S| \leqslant 2^{n^{1-\delta}}$, η τυχαία n-άδα σημείων της B_2^n ικανοποιεί, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$,

$$\Big\|\sum_{j=1}^n \epsilon_j x_j\Big\|_p \geqslant c(\delta)\sqrt{\log n}\sqrt{n}\big(\mathrm{vol}_n(B_2^n)/\mathrm{vol}_n(B_p^n)\big)^{1/n}$$

για κάθε $\epsilon = (\epsilon_1, \ldots, \epsilon_n) \in S$. Μπορούμε να αποδείξουμε (μάλιστα, με πιο άμεσο τρόπο) παραλλαγές και γενικεύσεις αυτών των φραγμάτων, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 4.6.6 και τις υπάρχουσες πληροφορίες για τις παραμέτρους $d(B_p^n)$.

Ακολουθώντας την απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.5 μπορούμε επίσης να πάρουμε άνω φράγματα για την $\|\cdot\|_K$-νόρμα προσημασμένων αθροισμάτων τυχαίων σημείων από ένα ισοτροπικό σώμα C.

Θεώρημα 4.6.8. *Έστω C ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$ και κάθε $S\subseteq E_2^n$ με $|S|\leqslant e^{p(\mathbf{t})}$, ο τυχαίος $U\in O(n)$ ικανοποιεί την*

$$\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s : x_j\in U(C) \ \textit{για κάθε } j \textit{ και } \Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_j t_j x_j\Big\|_K \geqslant cL_C\sqrt{n}M(K)\,\|\mathbf{t}\|_2 \\ \textit{για κάποιο } \epsilon\in S\Big\}\Big)\leqslant e^{-p(\mathbf{t})}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-2p(\mathbf{t})}$, όπου

$$p(\mathbf{t}) := \min\{q_*(\mu_{\mathbf{t}}), k(K)\}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|\mathbf{t}\|_2=1$. Ξεκινάμε γράφοντας

$$\int_C\cdots\int_C\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_K^{p(\mathbf{t})}dx_s\cdots dx_1=\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K^{p(\mathbf{t})}d\nu_{\mathbf{t}}(x)=L_C^{p(\mathbf{t})}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_K^{p(\mathbf{t})}d\mu_{\mathbf{t}}(x).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{O(n)}\int_C\cdots\int_C\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_{U(K)}^{p(\mathbf{t})}dx_s\cdots dx_1\,d\nu(U) &= L_C^{p(\mathbf{t})}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{O(n)}\|x\|_{U(K)}^{p(\mathbf{t})}d\nu(U)\,d\mu_{\mathbf{t}}(x)\\ &= L_C^{p(\mathbf{t})}M_{p(\mathbf{t})}^{p(\mathbf{t})}(K)\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_2^{p(\mathbf{t})}d\mu_{\mathbf{t}}(x)\\ &= L_C^{p(\mathbf{t})}I_{p(\mathbf{t})}^{p(\mathbf{t})}(\mu_{\mathbf{t}})M_{p(\mathbf{t})}^{p(\mathbf{t})}(K).\end{aligned}$$

Στη συνέχεια, προχωράμε όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.6.5 χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov, και κατόπιν τις (4.6.6) και (4.6.8). □

Μπορούμε επίσης να δείξουμε ένα αποτέλεσμα ανάλογο του Πορίσματος 4.6.6 με την υπόθεση ότι το C είναι ψ_2-σώμα με σταθερά ϱ. Ειδικότερα, έχουμε:

Πόρισμα 4.6.9. *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\mathbf{t}=(t_1,\dots,t_s)\in\mathbb{R}^s$ και κάθε $S\subseteq E_2^s$ με $|S|\leqslant e^{ck(K)}$ ισχύει ότι*

$$\mathrm{vol}_{ns}\Big(\Big\{(x_j)_{j=1}^s : x_j\in \overline{B_2^n} \ \textit{για κάθε } j \textit{ και } \Big\|\sum_{j=1}^s \epsilon_j t_j x_j\Big\|_K \geqslant cL_C\sqrt{n}M(K)\,\|\mathbf{t}\|_2 \\ \textit{για κάποιο } \epsilon\in S\Big\}\Big)\leqslant e^{-ck(K)}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Τυχαία κυρτά σύνολα

5.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε τη μέση τιμή του όγκου δύο κλάσεων τυχαίων κυρτών συνόλων, οι οποίες έχουν μελετηθεί από τους Παούρη και Pivovarov στις εργασίες τους [90] και [92].

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^N$. Για κάθε $N \geqslant n$ και $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N) \in \times_{i=1}^N \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $T_{\mathbf{x}} = [x_1 \cdots x_N]$ τον $n \times N$ πίνακα που έχει ως στήλες τα διανύσματα x_i. Στη συνέχεια, θεωρούμε το κυρτό σώμα

$$T_{\mathbf{x}}(K) = \Big\{ \sum_{i=1}^N t_i x_i : \mathbf{t} = (t_1, \ldots, t_N) \in K \Big\}.$$

Δύο παραδείγματα με προφανές γεωμετρικό ενδιαφέρον προκύπτουν αν επιλέξουμε $K = B_1^N$ ή $K = B_\infty^N$. Το $T_{\mathbf{x}}(B_1^N) = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ είναι η απόλυτη κυρτή θήκη των $x_1, \ldots, x_N$, ενώ το $T_{\mathbf{x}}(B_\infty^N) = \sum_{i=1}^N [-x_i, x_i]$ είναι το ζωνότοπο που ορίζεται ωα το άθροισμα Minkowski των ευθυγράμμων τμημάτων $[-x_i, x_i]$. Έστω τώρα $\mu_1, \ldots, \mu_N$ μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητες $f_1, \ldots, f_N$, αντίστοιχα. Θεωρούμε το τυχαίο σύνολο $T_{\mathbf{x}}(K)$, όπου το x_i έχει κατανομή μ_i για $1 \leqslant i \leqslant N$. Το ακόλουθο θεώρημα από το [90] ισχυρίζεται ότι αν $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ τότε η μέση τιμή του όγκου του $T_{\mathbf{x}}(K)$ ελαχιστοποιείται όταν κάθε μ_i είναι το ομοιόμορφο μέτρο στην Ευκλείδεια μπάλα D_n όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 5.1.1 (Παούρης-Pivovarov)**.** *Έστω $N \geqslant n$ και $\mu_1, \ldots, \mu_N$ μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητες $f_1, \ldots, f_N$, αντίστοιχα, ως προς το μέτρο Lebesgue, τέτοιες ώστε $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant N$. Θεωρούμε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ και ορίζουμε*

$$\mathcal{F}_K(f_1, \ldots, f_N) = \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))\, d\mu_N(x_N) \cdots d\mu_1(x_1).$$

Τότε,

$$\mathcal{F}_K(f_1, \ldots, f_N) \geqslant \mathcal{F}_K(\mathbf{1}_{D_n}, \ldots, \mathbf{1}_{D_n}).$$

Ενδιαφερόμαστε για άνω και κάτω φράγματα για τη μέση τιμή του όγκου του τυχαίου κυρτού συνόλου $T_{\mathbf{x}}(K)$ στην περίπτωση όπου το $\mu_1 = \cdots = \mu_N = \mu$ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτό το κεφάλαιο λέμε ότι το μ είναι ισοτροπικό αν έχει κέντρο βάρους το 0, για την πυκνότητα f του μ ισχύει $\|f\|_\infty = 1$, και ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του μ είναι ο $\mathrm{Cov}(\mu) = L_\mu^2 I_n$, όπου L_μ είναι η ισοτροπική σταθερά του μ. Ξεκινάμε από τον τύπο

$$\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K)) = \sqrt{\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)}\,\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(K)), \tag{5.1.1}$$

όπου $E_{\mathbf{x}} = \ker(T_{\mathbf{x}})^\perp = \mathrm{Range}(T_{\mathbf{x}}^*)$, και A^* είναι ο ανάστροφος ενός πίνακα A. Αποδεικνύουμε αρχικά ότι αν $x_1, \ldots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία τα οποία είναι κατανεμημένα σύμφωνα με ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$, τότε

$$c_1 L_\mu \sqrt{N} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \left(\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)\right)^{\frac{1}{2n}} d\mu^N(\mathbf{x}) \leqslant L_\mu \sqrt{N},$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Με χρήση αυτού του αποτελέσματος μπορούμε να δώσουμε το ακόλουθο άνω φράγμα για τη μέση τιμή

$$\int_{O(N)} \Big(\int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(U(K)))^{\frac{1}{n}} d\mu^N(\mathbf{x}) \Big)\, d\nu_N(U)$$

ως προς $U \in O(N)$, το οποίο δείχνει τι θα μπορούσαμε να περιμένουμε ως μια «καλή εκτίμηση» για την ακτίνα όγκου του τυχαίου συνόλου $T_{\mathbf{x}}(K)$. Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε $N \geqslant n$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ έχουμε ότι

$$\int_{O(N)} \mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K)\right)^{\frac{1}{n}} \Big)\, d\nu_N(U) \leqslant c L_\mu \sqrt{N/n}\, w(K)$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στη συνέχεια μελετάμε τα βασικά παραδείγματα $K = B_1^N$ ή $K = B_\infty^N$ και, χρησιμοποιώντας επιπλέον γνωστά αποτελέσματα των Bobkov και Nazarov τα οποία περιγράφουν τη γεωμετρία ενός γενικού ισοτροπικού unconditional κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ επιτυγχάνουμε τις ακόλουθες εκτιμήσεις για το πρόβλημα: Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε για κάθε unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ έχουμε

$$c_1 \sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(K) \leqslant \mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_2 L_\mu \sqrt{N/n}\,(\log n)^2 \mathrm{vrad}(K),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στην περίπτωση $K = \overline{B}_q^N$, $2 \leqslant q \leqslant \infty$, μπορούμε να δώσουμε ακριβή ασυμπτωτική εκτίμηση για τη μέση τιμή του όγκου του $T_{\mathbf{x}}(K)$: για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $N \geqslant n$ και κάθε $2 \leqslant q \leqslant \infty$ έχουμε

$$c_1 \sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_q^N) \leqslant \Big(\mathbb{E}_{\mu^N}\,\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_q^N))\Big)^{1/n} \leqslant c_2 L_\mu \sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_q^N).$$

Δίνουμε επίσης ένα γενικό άνω φράγμα με την υπόθεση ότι τόσο το μ όσο και το K είναι ισοτροπικά. Για κάθε $N \geqslant n$ έχουμε

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \frac{c_2 L_\mu N}{n}\,\mathrm{vrad}(K)\, L_K,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στο δεύτερο μέρος αυτού του κεφαλαίου δίνουμε εκτιμήσεις για τη μέση τιμή του όγκου τυχαίων «σφαιρικών» πολυέδρων. Έστω f μια πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Σταθεροποιούμε $N \geqslant 1$ και μια N-άδα $\mathbf{r} = (r_1, \dots, r_N)$ θετικών πραγματικών αριθμών. Θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$ στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι κατανεμημένα σύμφωνα με την f, και ορίζουμε το τυχαίο «σφαιρικό» πολύεδρο

$$B(\mathbf{x}, \mathbf{r}) := \bigcap_{i=1}^{N} B(x_i, r_i)$$

να είναι η τομή των Ευκλείδειων μπαλών $B(x_i, r_i)$. Οι Παούρης και Pivovarov απέδειξαν στο [92] ότι η μέση τιμή του όγκου αυτού του τυχαίου σφαιρικού πολυέδρου μεγιστοποιείται όταν $f = \mathbf{1}_{D_n}$, δηλαδή όταν η f είναι η πυκνότητα του ομοιόμορφου μέτρου στην D_n.

Θεώρημα 5.1.2 (Παούρης-Pivovarov)**.** *Έστω $N, n \geqslant 1$ και $r_1, \dots, r_N \in (0, \infty)$. Θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$ και $x_1^*, \dots, x_N^*$ τέτοια ώστε κάθε x_i να έχει πυκνότητα f_i με $\|f_i\|_\infty \leqslant 1$, και κάθε x_i^* να έχει πυκνότητα $\mathbf{1}_{D_n}$, $i = 1, \dots, N$. Τότε, για κάθε $r_1, \dots, r_N > 0$,*

$$\mathbb{E}_{\oplus \mu_i}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N} B(x_i, r_i)\Big)\Big) \leqslant \mathbb{E}_{\mu_{D_n}^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N} B(x_i^*, r_i)\Big)\Big).$$

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Η πρώτη μας παρατήρηση είναι ότι στην περίπτωση όπου $r_1 = \cdots = r_N = r$ υπάρχει ένας απλός τύπος που δίνει τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N} B(x_i, r_i)\Big)\Big).$$

Συγκεκριμένα,

$$\mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N} B(x_i, r)\Big)\Big) = \int_{K + rB_2^n} \mathrm{vol}_n((K-y) \cap rB_2^n)^N \, dy.$$

Μάλιστα, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τις Ευκλείδειες μπάλες με r-πολλαπλάσια οποιουδήποτε συμμετρικού κυρτού σώματος C στον $\mathbb{R}^n$. Ο αντίστοιχος τύπος είναι

$$\mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N} (x_i + rC)\Big)\Big) = \int_{K + rC} \mathrm{vol}_n((K-y) \cap rC)^N \, dy.$$

Χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα που βασίζεται στην ανισότητα Brunn-Minkowski, και πηγαίνει πίσω στη δουλειά των Rogers και Shephard, αποδεικνύουμε το ακόλουθο κάτω φράγμα, που ισχύει για κάθε $r > 0$.

Θεώρημα 5.1.3. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και $x_1, \dots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Τότε, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} &\binom{nN+n}{n}^{-1} \mathrm{vol}_n(K \cap rC)^N \mathrm{vol}_n(K + rC) \\ &\qquad \leqslant \mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N} (x_i + rC)\Big)\Big) \leqslant \mathrm{vol}_n(K \cap rC)^N \mathrm{vol}_n(K + rC). \end{aligned}$$

Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να βρεθούν οι βέλτιστες σταθερές στην ανισότητα του Θεωρήματος 5.1.3. Αποδεικνύουμε ότι η συμπεριφορά της $\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\left(\cap_{i=1}^N (x_i + rC)\right)\right)$ είναι διαφορετική για μικρές και μεγάλες τιμές του r. Έχουμε

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}_n(rC)} \mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + rC)\Big)\Big) = 1$$

και

$$\lim_{r\to 0^+} \frac{1}{\mathrm{vol}_n(rC)^N} \mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + rC)\Big)\Big) = 1.$$

5.2 Εκτιμήσεις για τη μέση τιμή του όγκου του $T_{\mathbf{x}}(K)$

Έστω μ ένα ισοτροπικό μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N \geqslant n$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^N$ θέλουμε να δώσουμε άνω και κάτω φράγματα για την ποσότητα

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))\big)^{\frac{1}{n}}\Big) := \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))\big)^{\frac{1}{n}}\, d\mu^N(\mathbf{x}),$$

όπου $T_{\mathbf{x}}$ είναι ο τυχαίος $n \times N$ πίνακας που έχει ως στήλες N ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα $x_1, \ldots, x_N$ τα οποία έχουν κατανομή το μ. Ξεκινάμε από τον τύπο (δείτε, για παράδειγμα, την [91, Πρόταση 2.1])

$$\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K)) = \sqrt{\det(T_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}}^*)}\, \mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(K)), \tag{5.2.1}$$

όπου $E_{\mathbf{x}} = \ker(T_{\mathbf{x}})^{\perp} = \mathrm{Range}(T_{\mathbf{x}}^*)$, και A^* είναι ο ανάστροφος ενός πίνακα A. Θα χρειαστούμε κάποιες προκαταρκτικές παρατηρήσεις σχετικά με τη μέση τιμή της $\det(T_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}}^*)$.

5.2.1 Αρχικές εκτιμήσεις

Είναι γνωστό ότι η ποσότητα $\sqrt{\det(T_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}}^*)}$ ισούται με τον όγκο του n-διάστατου παραλληλεπιπέδου που παράγουν στον $\mathbb{R}^N$ οι γραμμές $y_1, \ldots, y_n$ του $T_{\mathbf{x}}$. Το επόμενο λήμμα δίνει κάποιες εκτιμήσεις για την $\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\det(T_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}}^*)^{1/n}\right)$. Σημειώνουμε ότι η υπόθεση ότι το μ είναι λογαριθμικά κοίλο χρειάζεται μόνο για το κάτω φράγμα.

Λήμμα 5.2.1. *Έστω $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία τα οποία είναι κατανεμημένα σύμφωνα με ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$c_1 L_\mu \sqrt{N} \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \cdots \int_{\mathbb{R}^n} \big(\det(T_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}}^*)\big)^{\frac{1}{2n}}\, d\mu^N(\mathbf{x}) \leqslant L_\mu \sqrt{N}, \tag{5.2.2}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε τον τύπο Cauchy-Binet: Για κάθε $S \subseteq [N]$ με $|S| = n$ συμβολίζουμε με $T_{\mathbf{x}}|_S$ τον $n \times n$ πίνακα που έχει ως στήλες τα $x_{i_1}, \ldots, x_{i_n}$. Τότε,

$$\det(T_{\mathbf{x}} T_{\mathbf{x}}^*) = \sum_{|S|=n} \det((T_{\mathbf{x}}|_S)(T_{\mathbf{x}}|_S)^*). \tag{5.2.3}$$

Από έναν πολύ γνωστό τύπο που πηγαίνει πίσω στον Blaschke (δείτε την [2, Πρόταση 3.5.5] για μια απόδειξη) βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^S}\Big(\det((T_{\mathbf{x}}|_S)(T_{\mathbf{x}}|_S)^*)\Big) = n!\,\det(\mathrm{Cov}(\mu)), \tag{5.2.4}$$

όπου $\mu^S := \otimes_{i\in S}\mu$. Σημειώνουμε ότι αυτή η ταυτότητα ισχύει για κάθε μέτρο πιθανότητας που έχει κέντρο βάρους το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Αν υποθέσουμε ότι το μ είναι ισοτροπικό, έχουμε $\det(\mathrm{Cov}(\mu)) = L_\mu^{2n}$ και έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)\,d\mu^N(\mathbf{x}) = \binom{N}{n} n!\,\det(\mathrm{Cov}(\mu)) \leqslant N^n\,\det(\mathrm{Cov}(\mu)) = N^nL_\mu^{2n}. \tag{5.2.5}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder παίρνουμε το άνω φράγμα στην (5.2.2).

Για το κάτω φράγμα, χρησιμοποιώντας αρχικά το γεγονός ότι η συνάρτηση $x\mapsto x^p$ είναι κοίλη για $p\in(0,1)$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\big(\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)\big)^{\frac{1}{2n}}d\mu^N(\mathbf{x}) &= \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\sum_{|S|=n}\det((T_{\mathbf{x}}|_S)(T_{\mathbf{x}}|_S)^*)\Big)^{\frac{1}{2n}}d\mu^N(\mathbf{x})\\ &\geqslant \binom{N}{n}^{\frac{1}{2n}}\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{|S|=n}\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\det((T_{\mathbf{x}}|_S)(T_{\mathbf{x}}|_S)^*)^{\frac{1}{2n}}d\mu^N(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Από το [100, Πόρισμα 1] (δείτε επίσης το [82, Παράγραφος 3.7]) βλέπουμε ότι, για κάθε $S\subset[N]$ με $|S|=n$, έχουμε $\det((T_{\mathbf{x}}|_S)(T_{\mathbf{x}}|_S)^*)\geqslant (c_2n)^nL_\mu^{2n}$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$. Έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\det((T_{\mathbf{x}}|_S)(T_{\mathbf{x}}|_S)^*)^{\frac{1}{2n}}d\mu^N(\mathbf{x})\geqslant c_3L_\mu\sqrt{n}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_3>0$. Συνεπώς,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)^{\frac{1}{2n}}d\mu^N(\mathbf{x})\geqslant c_3\sqrt{n}\binom{N}{n}^{\frac{1}{2n}}L_\mu\geqslant c_1L_\mu\sqrt{N}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1>0$. □

Η επόμενη πρόταση δίνει άνω φράγμα για τη μέση τιμή

$$\int_{O(N)}\Big(\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(U(K)))^{\frac{1}{n}}d\mu^N(\mathbf{x})\Big)\,d\nu_n(U)$$

ως προς $U\in O(N)$ συναρτήσει του μέσου πλάτους του K, και δείχνει τι θα μπορούσαμε να περιμένουμε ως μια «καλή εκτίμηση» για την ακτίνα όγκου του τυχαίου $T_{\mathbf{x}}(K)$.

Πρόταση 5.2.2. *Έστω μ ένα ισοτροπικό μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N\geqslant n$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ έχουμε ότι*

$$\int_{O(N)}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(U(K))\big)^{\frac{1}{n}}\Big)\,d\nu_N(U)\leqslant c\sqrt{N/n}\,w(K)$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θα ξεκινήσουμε από την (5.2.1). Έστω $U \in O(N)$, ανεξάρτητος από το $\mathbf{x}$, και με κατανομή το μέτρο πιθανότητας Haar ν_N στην $O(N)$. Αφού $\det((T_{\mathbf{x}}U)(U^*T_{\mathbf{x}}^*)) = \det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)$ και $P_{E_{\mathbf{x}}} \circ U = P_{U^*(E_{\mathbf{x}})}$, βλέπουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}U(K)) = \sqrt{\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)}\,\mathrm{vol}_n(P_{U^*E_{\mathbf{x}}}(K)),$$

όπου $E_{\mathbf{x}} = \ker(T_{\mathbf{x}})^{\perp} = \mathrm{Range}(T_{\mathbf{x}}^*)$. Παρατηρούμε ότι ο $E_{\mathbf{x}}$ είναι n-διάστατος με πιθανότητα 1, άρα η κατανομή του $U^*(E_{\mathbf{x}})$ είναι το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{N,n}$ στην $G_{N,n}$ σχεδόν βεβαίως ως προς $\mathbf{x}$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}(5.2.6)\qquad &\int_{O(N)} \mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(U(K)))\big)^{\frac{1}{n}}\Big)\,d\nu_N(U)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\int_{O(n)} \mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(U(K)))^{\frac{1}{n}}\,d\nu_N(U)\Big)\,d\mu^N(\mathbf{x})\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\Big(\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)^{\frac{1}{2n}}\int_{O(n)} \mathrm{vol}_n(P_{U^*E_{\mathbf{x}}}(K)^{\frac{1}{n}}\,d\nu_N(U))\Big)d\mu^N(\mathbf{x})\\ &= \Big(\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)^{\frac{1}{2n}}\,d\mu^N(\mathbf{x})\Big)\Big(\int_{G_{N,n}} \mathrm{vol}_n(P_E(K))^{\frac{1}{n}}\,d\nu_{N,n}(E)\Big).\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 5.2.1 παίρνουμε

$$\int_{O(N)} \mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(U(K)))\big)^{\frac{1}{n}}\Big)\,d\nu_N(U) \leqslant L_\mu\sqrt{N}\Big(\int_{G_{N,n}} \mathrm{vol}_n(P_E(K))\,d\nu_{N,n}(E)\Big)^{\frac{1}{n}}.$$

Από τις ανισότητες του Aleksandrov γνωρίζουμε ότι

$$\Big(\frac{1}{\omega_n}\int_{G_{N,n}} \mathrm{vol}_n(P_E(K))\,d\nu_{N,n}(E)\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{\omega_1}\int_{G_{N,1}} \mathrm{vol}_1(P_E(K))\,d\nu_{N,1}(E) = w(K),$$

άρα,

$$\int_{O(N)} \mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(U(K)))\big)^{\frac{1}{n}}\Big)\,d\nu_N(U) \leqslant L_\mu\sqrt{N}\cdot\omega_n^{\frac{1}{n}}\,w(K).$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder, και συνυπολογίζοντας το γεγονός ότι $\omega_n^{1/n} \approx 1/\sqrt{n}$, έχουμε το συμπέρασμα της πρότασης. □

5.2.2 Δύο βασικά παραδείγματα

Υπάρχουν δύο βασικά παραδείγματα κυρτών σωμάτων K για τα οποία η μέση τιμή του όγκου του $T_{\mathbf{x}}(K)$ έχει μελετηθεί αρκετά. Το πρώτο είναι όταν $K = B_\infty^N$. Σε αυτή την περίπτωση, το $T_{\mathbf{x}}(B_\infty^N) = \sum_{i=1}^N [-x_i, x_i]$ είναι το ζωνότοπο που ορίζεται ως το άθροισμα Minkowski των ευθυγράμμων τμημάτων $[-x_i, x_i]$.

Πρόταση 5.2.3. *Έστω $\overline{B}_\infty^N$ ο κύβος όγκου 1 στον $\mathbb{R}^N$. Τότε,*

$$\mathbb{E}_{\mu_{D_n}^N}\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_\infty^N))^{\frac{1}{n}}\big) \approx \sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_\infty^N).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$I_p(D_n;m) := \int_{D_n}\cdots\int_{D_n}\mathrm{vol}_n\Big(\sum_{i=1}^{m}[-x_i,x_i]\Big)^p dx_m\cdots dx_1.$$

Παρατηρήστε ότι

$$I_{1/n}(D_n;N) = \mathbb{E}_{\mu_{D_n}^N}\Big(\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_\infty^N))\big)^{\frac{1}{n}}\Big).$$

Με απευθείας υπολογισμό που βασίζεται στον τύπο Blashcke-Petkantschin (δείτε το [10, Θεώρημα 8.2.2]) βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{\mathrm{vol}_n(B_2^n)^n}\int_{B_2^n}\cdots\int_{B_2^n}\mathrm{vol}_n\Big(\sum_{i=1}^{n}[0,x_i]\Big)^p dx_n\cdots dx_1 = \frac{\omega_{n+p}^n}{\omega_n^n}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j)\omega_{n-j}}{(n+p-j)\omega_{n+p-j}},$$

όπου $\omega_k = \mathrm{vol}_k(B_2^k)$. Έπεται ότι

$$I_p(D_n;n) := \int_{D_n}\cdots\int_{D_n}\mathrm{vol}_n\Big(\sum_{i=1}^{n}[0,x_i]\Big)^p dx_n\cdots dx_1 = \frac{\omega_{n+p}^n}{\omega_n^{n+p}}\prod_{j=0}^{n-1}\frac{(n-j)\omega_{n-j}}{(n+p-j)\omega_{n+p-j}}.$$

Επιλέγοντας $p=1/n$ μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$c_1\sqrt{n}\leqslant I_{1/n}(D_n;n)\leqslant c_2\sqrt{n}$$

όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{vol}_n\Big(\sum_{i=1}^{N}[-x_i,x_i]\Big) = 2^n\sum_{I\subset[N],|I|=n}\mathrm{vol}_n\Big(\sum_{j\in I}[0,x_j]\Big).$$

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες

$$\binom{N}{n}^p\frac{1}{\binom{N}{n}}\sum_{I\subset[N],|I|=n}t_I^p\leqslant\Big(\sum_{I\subset[N],|I|=n}t_I\Big)^p\leqslant\sum_{I\subset[N],|I|=n}t_I^p$$

με $t_I=\mathbb{E}_{\mu_{D_n}^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\sum_{j\in I}[0,x_j]\Big)\Big)$ βλέπουμε ότι

$$c_1\sqrt{n}\binom{N}{n}^{1/n}\leqslant\binom{N}{n}^{1/n}I_{1/n}(D_n;n)\leqslant\frac{1}{2}I_{1/n}(D_n;N)\leqslant\binom{N}{n}^{1/n}I_{1/n}(D_n;n)\leqslant c_2\sqrt{n}\binom{N}{n}^{1/n}.$$

Αφού $\binom{N}{n}^{1/n}\approx\frac{N}{n}$ και $\mathrm{vrad}(\overline{B}_\infty^n)\approx\sqrt{N}$, παίρνουμε το αποτέλεσμα. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.1.2 και της ανισότητας Hölder είναι η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.2.4. *Έστω $N\geqslant n$ και $\mu_1,\dots,\mu_N$ μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητες f_i, αντίστοιχα, ως προς το μέτρο Lebesgue, τέτοιες ώστε $\|f_i\|_\infty\leqslant 1$. Τότε,*

$$\mathbb{E}_{\otimes_{i=1}^N\mu_i}\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_\infty^N))^{\frac{1}{n}}\big)\geqslant c\sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_\infty^N),$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Ένα δεύτερο βασικό παράδειγμα έχουμε στην περίπτωση όπου $K = \overline{B}_1^N$. Σημειώνουμε ότι $T_{\mathbf{x}}(B_1^N) = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$.

Πρόταση 5.2.5. *Έστω $\overline{B}_1^N$ το πολλαπλάσιο του cross-polytope B_1^N που έχει όγκο 1 στον $\mathbb{R}^N$. Τότε, για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε ότι*

$$\begin{aligned} c_1 L_\mu \sqrt{N/n}\,\sqrt{\log(2N/n)}\mathrm{vrad}(\overline{B}_1^N) &\leqslant \Big(\mathbb{E}_{\mu^N}\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_1^N))\big)\Big)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant c_2 L_\mu \sqrt{N/n}\,\sqrt{\log N}\mathrm{vrad}(\overline{B}_1^N) \end{aligned} \tag{5.2.7}$$

αν $n \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$, και

$$\begin{aligned} c_1 \sqrt{N/n}\,\sqrt{\log(2N/n)}\mathrm{vrad}(\overline{B}_1^N) &\leqslant \Big(\mathbb{E}_{\mu^N}\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_1^N))\big)\Big)^{\frac{1}{n}} \\ &\leqslant c_2 L_\mu \sqrt{N/n}\,\sqrt{\log N}(\log\log N)^2\mathrm{vrad}(\overline{B}_1^N) \end{aligned} \tag{5.2.8}$$

αν $\exp(\sqrt{n}) \leqslant N \leqslant \exp(n)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι $\overline{B}_1^N \approx N\, B_1^N$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_1^N) \approx N\,\mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}.$$

Άρα,

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_1^N))^{\frac{1}{n}}\Big) \approx N\,\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\})^{\frac{1}{n}}\Big).$$

Στο [38] αποδεικνύεται ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\})\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{c_1 w(Z_{\log N}(\mu))}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $N \leqslant e^n$, όπου $Z_q(\mu)$ είναι το L_q-κεντροειδές σώμα του μ. Αφού $\mathrm{vrad}(\overline{B}_1^N) \approx \sqrt{N}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_1^N))^{\frac{1}{n}}\Big) \leqslant c_2\sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_1^N)\, w(Z_{\log N}(\mu)).$$

Τότε, το άνω φράγμα στις (5.2.7) και (5.2.8) προκύπτει από τα γνωστά άνω φράγματα για το μέσο πλάτος $w(Z_q(\mu))$ του $Z_q(\mu)$. O E. Milman έχει αποδείξει στο [77] ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $q \geqslant 1$,

$$w(Z_q(\mu)) \leqslant cL_\mu \log(1+\min\{q,n\}) \max\Big\{\frac{q\log(1+q)}{\sqrt{n}}, \sqrt{q}\Big\}.$$

Παρατηρήστε ότι αν $1 \leqslant q \leqslant n$ τότε αυτή η ποσότητα είναι πάντα φραγμένη από $cL_\mu\sqrt{n}(\log n)^2$.

Για το κάτω φράγμα χρησιμοποιούμε το γεγονός, το οποίο αποδεικνύεται στο [38], ότι αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και αν $x_1, \ldots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία σημεία τα οποία είναι κατανεμημένα σύμφωνα με το μ, τότε για $n \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$ έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\})^{1/n} \geqslant c_1 L_\mu \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}} \tag{5.2.9}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c_2\sqrt{N})$, ενώ για το εύρος τιμών $e^{\sqrt{n}} \leqslant N \leqslant e^n$ έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(\mathrm{conv}\{\pm x_1,\ldots,\pm x_N\})^{1/n} \geqslant c_1\,\frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}, \tag{5.2.10}$$

πάλι με πιθανότητα εκθετικά κοντά στο 1. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_1^N))^{\frac{1}{n}}\right) \geqslant cL_\mu\sqrt{N/n}\,\sqrt{\log(2N/n)}\mathrm{vrad}(\overline{B}_1^N)$$

για το εύρος τιμών $n \leqslant N \leqslant \exp(\sqrt{n})$, ενώ το κάτω φράγμα στην (5.2.8) προκύπτει με τον ίδιο τρόπο από την (5.2.10). □

5.2.3 Κάποιες γενικές εκτιμήσεις

Μπορούμε να δώσουμε κάποιες γενικές εκτιμήσεις χρησιμοποιώντας τα ακόλουθα φράγματα για την ακτίνα όγκου των n-διάστατων προβολών ενός κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^N$.

Λήμμα 5.2.6. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^N$. Για κάθε $1 \leqslant n < N$ και κάθε $E \in G_{N,n}$ έχουμε ότι*

$$c_1\sqrt{n/N}\frac{1}{\sqrt{n}M(K)} \leqslant \mathrm{vol}_n(P_E(K))^{1/n} \leqslant c_2\sqrt{N/n}\frac{w(K)}{\sqrt{n}},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Έστω $N(A,B)$ ο αριθμός κάλυψης του A από το B, δηλαδή ο ελάχιστος αριθμός μεταφορών του B που η ένωσή τους καλύπτει το A. Η κλασική ανισότητα του Sudakov ισχυρίζεται ότι $N(K, tB_2^N) \leqslant \exp(c_3Nw^2(K)/t^2)$ για κάθε $t > 0$. Αφού $N(P_E(K), tP_E(B_2^N)) \leqslant N(K, tB_2^N)$ για κάθε $E \in G_{N,n}$, έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_n(P_E(K))^{1/n} \leqslant \exp(c_3Nw^2(K)/t^2n)\mathrm{vol}_n(tP_E(B_2^N))^{1/n}$$

για κάθε $t > 0$, και επιλέγοντας $t = \sqrt{N/n}w(K)$ παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(P_E(K))^{1/n} \leqslant c_4\sqrt{N/n}w(K)\mathrm{vol}_n(B_E)^{1/n},$$

όπου $B_E = P_E(B_2^N) = B_2^N \cap E$, άρα $\mathrm{vol}_n(B_E)^{1/n} \approx 1/\sqrt{n}$. Αυτό αποδεικνύει την δεξιά ανισότητα. Για το κάτω φράγμα χρησιμοποιούμε παρόμοιο επιχείρημα, αυτή τη φορά χρησιμοποιώντας την δυϊκή ανισότητα Sudakov $N(B_2^N, tK) \leqslant \exp(c_3NM^2(K)/t^2)$, η οποία μας δίνει ότι

$$\mathrm{vol}_n(P_E(B_2^N))^{1/n} \leqslant \exp(c_3NM^2(K)/t^2n)\mathrm{vol}_n(tP_E(K))^{1/n}$$

για κάθε $t > 0$. □

Παίρνοντας υπόψη μας το Λήμμα 5.2.1 έχουμε τις εξής γενικές εκτιμήσεις.

Θεώρημα 5.2.7. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N \geqslant n$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ έχουμε*

$$c_1L_\mu\,\frac{1}{M(K)} \leqslant \mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant \frac{c_2L_\mu N}{n}\,w(K),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))\Big) &= \mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\sqrt{\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)}\,\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(K))\Big)\\ &\leqslant L_\mu^n N^{n/2}\max_{E\in G_{N,n}}\mathrm{vol}_n(P_E(K)),\end{aligned}$$

από το Λήμμα 5.2.1, και τότε το άνω φράγμα της Πρότασης 5.2.6 μας δίνει ότι

$$\Big(\mathbb{E}_{\mu^N}\,\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))\Big)^{\frac{1}{n}} \leqslant L_\mu\sqrt{N}\,c_2\sqrt{N/n}\frac{w(K)}{\sqrt{n}} = \frac{c_2N}{n}L_\mu w(K).$$

Από την άλλη πλευρά, παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big((\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K)))^{\frac{1}{n}}\Big) &= \mathbb{E}_{\mu^N}\Big((\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*))^{\frac{1}{2n}}\,\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(K))^{\frac{1}{n}}\Big)\\ &\geqslant \min_{E\in G_{N,n}}\mathrm{vol}_n(P_E(K))^{\frac{1}{n}}\,\mathbb{E}_{\mu^N}\Big((\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*))^{\frac{1}{2n}}\Big),\end{aligned}$$

και συνδυάζοντας τα κάτω φράγματα από το Λήμμα 5.2.1 και το Λήμμα 5.2.6 παίρνουμε

$$\Big(\mathbb{E}_{\mu^N}\,(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K)))^{\frac{1}{n}}\Big) \geqslant c_3L_\mu\sqrt{N}\,c_4\sqrt{n/N}\frac{1}{\sqrt{n}M(K)} = \frac{c_5L_\mu}{M(K)},$$

όπως θέλαμε. □

Το επόμενο αποτέλεσμα δίνει ένα γενικό άνω φράγμα με την υπόθεση ότι τόσο το μ όσο και το K είναι ισοτροπικά.

Θεώρημα 5.2.8. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N\geqslant n$ και κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ έχουμε*

$$\Big(\mathbb{E}_{\mu^N}\,\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\Big) \leqslant \frac{c_2L_\mu N}{n}\,\mathrm{vrad}(K)\,L_K,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Ξεκινώντας από την (5.2.1) μπορούμε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\Big) &\leqslant \Big(\mathbb{E}_{\mu^N}\Big(\det(T_{\mathbf{x}}T_{\mathbf{x}}^*)\Big)\Big)^{\frac{1}{2n}}\Big(\mathbb{E}_{\mu^N}\,\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(K))^{\frac{2}{n}}\Big)^{1/2}\\ &\leqslant L_\mu\sqrt{N}\Big(\mathbb{E}_{\mu^N}\,\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(K))^{\frac{2}{n}}\Big)^{1/2}\end{aligned}$$

παίρνοντας υπόψη μας το Λήμμα 5.2.1. Από μια κλασική ανισότητα των Rogers και Shephard (δείτε το [1, Λήμμα 1.5.6]) γνωρίζουμε επίσης ότι

$$\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(K)) \leqslant \binom{N}{n}\mathrm{vol}_n(K\cap E_{\mathbf{x}}^{\perp})^{-1}$$

για κάθε $\mathbf{x}$. Από την υπόθεση ότι το K είναι ισοτροπικό, έχουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(K\cap E_{\mathbf{x}}^{\perp})^{1/n} \geqslant c\frac{L_{K_{n+1}(\pi_{E_{\mathbf{x}}}(\mu_K))}}{L_K} \geqslant \frac{c_2}{L_K}$$

όπου $\pi_E(\mu_K)$ είναι το περιθώριο μέτρο του K ως προς τον E (δείτε την [2, Πρόταση 5.1.15]). Συνδυάζοντας τα παραπάνω, τελικά παίρνουμε

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant L_\mu \sqrt{N}\binom{N}{n}^{\frac{1}{n}} c_3 L_K,$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει από το γεγονός ότι $\mathrm{vol}_N(K)=1$, άρα $\mathrm{vrad}(K)\approx\sqrt{N}$. □

Στο επόμενο θεώρημα υποθέτουμε ότι το K είναι ένα unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^N$ και χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα της προηγούμενης υποπαραγράφου επιτυγχάνουμε καλύτερες εκτιμήσεις.

Θεώρημα 5.2.9. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε unconditional ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$ έχουμε*

$$c_1\sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(K) \leqslant \mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_2 L_\mu \sqrt{N/n}\,(\log n)^2 \mathrm{vrad}(K),$$

όπου $c_1, c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Οι Bobkov και Nazarov έχουν δείξει στο [27] ότι, με τις υποθέσεις μας για το K, ισχύει $c_1\overline{B}_\infty^N \subseteq K \subseteq c_2\overline{B}_1^N$ για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1, c_2>0$. Έπεται ότι $T_{\mathbf{x}}(K)\subseteq c_2 T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_1^N)$ για κάθε $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_N)$, άρα

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{\frac{1}{n}}\right) \leqslant c_2\mathbb{E}_{\mu^N}\left[\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_1^N))^{\frac{1}{n}}\right).$$

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.2.4 και την Πρόταση 5.2.5 ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Το τελευταίο μας αποτέλεσμα αφορά την περίπτωση $K=\overline{B}_q^N$, $2\leqslant q\leqslant\infty$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να δώσουμε ακριβή ασυμπτωτική εκτίμηση για τη μέση τιμή του όγκου του $T_{\mathbf{x}}(K)$.

Θεώρημα 5.2.10. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N\geqslant n$ και κάθε $2\leqslant q\leqslant\infty$ έχουμε*

$$c_1\sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_q^N) \leqslant \left(\mathbb{E}_{\mu^N}\,\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_q^N))^{1/n}\right) \leqslant c_2 L_\mu\sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_q^N).$$

Απόδειξη. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.7 παρατηρήσαμε ότι ισχύει η γενική ανισότητα

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))\right) \leqslant L_\mu^n N^{n/2}\left(\mathbb{E}_{\mu^N}\,\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(K))^2\right)^{1/2} \tag{5.2.11}$$

όπου $E_{\mathbf{x}}=\ker(T_{\mathbf{x}})^\perp=\mathrm{Range}(T_{\mathbf{x}}^*)$, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^N$.

Παρατηρούμε ότι αν $2\leqslant q\leqslant\infty$ τότε $R(B_q^N)\approx N^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$ και $\mathrm{vol}_n(B_q^N)^{1/N}\approx N^{-\frac{1}{q}}$. Συνεπώς, $\overline{B}_q^N\subseteq c\sqrt{N}B_2^N$. Έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(\overline{B}_q^N))^{1/n} \leqslant c_1\mathrm{vol}_n(P_{E_{\mathbf{x}}}(\sqrt{N}B_2^N))^{1/n} \leqslant c_2\sqrt{N/n}$$

για κάθε $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_N)$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Παίρνοντας υπόψη μας την (5.2.11) βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(\overline{B}_q^N))\right)^{1/n} \leqslant c_3 L_\mu \sqrt{N}\sqrt{N/n} \leqslant c_4 L_\mu \sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(\overline{B}_q^N).$$

διότι $\mathrm{vrad}(\overline{B}_q^N) \approx \sqrt{N}$. Για το κάτω φράγμα χρησιμοποιούμε το κάτω φράγμα του Θεωρήματος 5.2.9. □

Παρατήρηση 5.2.11. Παρατηρήστε ότι η ιδιότητα της B_q^N που χρειαστήκαμε στο προηγούμενο επιχείρημα ήταν ότι η B_q^N περιέχεται σε μια μπάλα αB_2^N τέτοια ώστε $\left(\mathrm{vol}_N(\alpha B_2^N)/\mathrm{vol}_N(B_q^N)\right)^{1/N} \leqslant C$, για μια σταθερά $C > 0$ που δεν εξαρτάται από το N ή το q. Με άλλα λόγια, μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε το ακόλουθο αποτέλεσμα: Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ και έστω K ένα συμμετρικό κυρτόσώμα στον $\mathbb{R}^N$. Αν $K \subseteq \alpha B_2^N$ και

$$\left(\mathrm{vol}_N(\alpha B_2^N)/\mathrm{vol}_N(K)\right)^{1/N} \leqslant \beta$$

τότε για κάθε $N \geqslant n$ έχουμε

$$\mathbb{E}_{\mu^N}\left(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))^{1/n}\right) \leqslant c_2 L_\mu \beta \sqrt{N/n}\,\mathrm{vrad}(K),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

5.3 Τυχαία «σφαιρικά» πολύεδρα

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 5.1.3. Το επιχείρημα που θα χρησιμοποιήσουμε δουλεύει στο εξής γενικότερο πλαίσιο. Θεωρούμε δύο συμμετρικά κυρτά σώματα K και C στον $\mathbb{R}^n$, και για κάθε $N \geqslant 1$, $r_1, \ldots, r_N > 0$ και $x_1, \ldots, x_N \in K$ θεωρούμε το κυρτό σώμα

$$\bigcap_{i=1}^N (x_i + r_i C).$$

Το επόμενο θεώρημα δίνει φράγματα για τη μέση τιμή του όγκου $\mathrm{vol}_n\left(\bigcap_{i=1}^N (x_i + r_i C)\right)$ ως προς το ομοιόμορφο μέτρο $\mu_K(A) = \frac{\mathrm{vol}_n(K\cap A)}{\mathrm{vol}_n(K)}$ στο K.

Θεώρημα 5.3.1. *Έστω K, C δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία, ομοιόμορφα κατανεμημένα στο K. Τότε, για κάθε $r_1, \ldots, r_N > 0$,*

$$\begin{aligned}\binom{nN+n}{n}^{-1} &\frac{\mathrm{vol}_n(K + rC)\prod_{i=1}^N \mathrm{vol}_n(K\cap r_i C)}{\mathrm{vol}_n(K)^N} \\ &\leqslant \mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + r_i C)\Big)\right) \leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K + rC)\prod_{i=1}^N \mathrm{vol}_n(K\cap r_i C)}{\mathrm{vol}_n(K)^N},\end{aligned}$$

όπου $r = \min\{r_1, \ldots, r_N\}$.

Η απόδειξη βασίζεται στον ακόλουθο απλό τύπο για τη μέση τιμή.

Λήμμα 5.3.2. *Έστω K, C δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $r_1, \ldots, r_N > 0$,*

$$\mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + r_i C)\Big)\Big) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^N}\int_{K+rC}\prod_{i=1}^N \mathrm{vol}_n((K-y)\cap r_i C)\,dy,$$

όπου $r = \min\{r_1, \ldots, r_N\}$.

Απόδειξη. Έστω $r_1, \ldots, r_N > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(K)^N \cdot \mathbb{E}_{\mu_K^N}&\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + r_i C)\Big)\Big)\\
&= \int_K \cdots \int_K \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\bigcap_{i=1}^N (x_i + r_i C)}(y)\,dy\,dx_N \cdots dx_1\\
&= \int_K \cdots \int_K \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^N \mathbf{1}_{x_i + r_i C}(y)\,dy\,dx_N \cdots dx_1\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\int_K \cdots \int_K \prod_{i=1}^N \mathbf{1}_{y + r_i C}(x_i)\,dx_N \cdots dx_1\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^N \Big(\int_K \mathbf{1}_{y + r_i C}(x_i)\,dx_i\Big)\,dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^N \mathrm{vol}_n(K\cap(y + r_i C))\,dy.
\end{aligned}$$

Το λήμμα έπεται από το γεγονός ότι $\mathrm{vol}_n(K\cap(y+r_iC)) = \mathrm{vol}_n((K-y)\cap r_iC)$ και ότι $(K-y)\cap r_iC = \emptyset$ για κάποιο $1 \leqslant i \leqslant N$ αν και μόνο αν $y \notin K + rC$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.1. Για κάθε $i = 1, \ldots, N$ θεωρούμε τη συνάρτηση $u_i : K + rC \to [0, \infty)$ με $u_i(y) = \mathrm{vol}_n((K-y)\cap r_iC)^{1/n}$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski και την κυρτότητα και συμμετρία των K και C ελέγχουμε εύκολα ότι η u_i είναι άρτια και κοίλη συνάρτηση. Συνεπώς,

$$\max(u_i) = u_i(0) = \mathrm{vol}_n(K\cap r_iC)^{1/n},$$

και αυτό δίνει αμέσως το άνω φράγμα: έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^N}\int_{K+rC}\prod_{i=1}^N \mathrm{vol}_n((K-y)\cap r_iC)\,dy &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^N}\int_{K+rC}\prod_{i=1}^N u_i(y)^n\,dy\\
&\leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K+rC)}{\mathrm{vol}_n(K)^N}\prod_{i=1}^N u_i^n(0) = \frac{\mathrm{vol}_n(K+rC)\prod_{i=1}^N \mathrm{vol}_n(K\cap r_iC)}{\mathrm{vol}_n(K)^N}.
\end{aligned}$$

Για το κάτω φράγμα, συμβολίζουμε με ϱ την ακτινική συνάρτηση του $K + rC$ στην S^{n-1}, και γράφουμε

$$\mathrm{vol}_n(K)^N \cdot \mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + r_i C)\Big)\Big) = n\omega_n\int_{S^{n-1}}\int_0^{\varrho(\xi)} t^{n-1}\prod_{i=1}^N u^n(t\xi)\,dt\,d\sigma(\xi).$$

Αφού κάθε u_i είναι κοίλη, έχουμε

$$u_i(t\xi) \geqslant (1-t/\varrho(\xi))u_i(0) + (t/\varrho(\xi))u_i(\varrho(\xi)\xi) \geqslant (1-t/\varrho(\xi))u_i(0),$$

άρα

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}_n(K)^N \cdot \mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i+r_iC)\Big)\Big) \\
&\geqslant n\omega_n \prod_{i=1}^N u_i^n(0) \int_{S^{n-1}} \int_0^{\varrho(\xi)} t^{n-1}\Big(1-\frac{t}{\varrho(\xi)}\Big)^{nN} dt\, d\sigma(\xi) \\
&= n\omega_n \prod_{i=1}^N u_i^n(0) \int_{S^{n-1}} \int_0^1 \varrho^n(\xi) s^{n-1}(1-s)^{nN}\, ds\, d\sigma(\xi) \\
&= n \prod_{i=1}^N u_i^n(0) \cdot \omega_n \int_{S^{n-1}} \varrho^n(\xi)\, d\sigma(\xi) \cdot \int_0^1 s^{n-1}(1-s)^{nN}\, ds \\
&= n\, B(n, nN+1) \mathrm{vol}_n(K+rC) \prod_{i=1}^N \mathrm{vol}_n(K\cap r_iC) \\
&= \binom{nN+n}{n}^{-1} \mathrm{vol}_n(K+rC) \prod_{i=1}^N \mathrm{vol}_n(K\cap r_iC),
\end{aligned}$$

και παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 5.3.3. Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση $N=1$ έχουμε $\mathrm{vol}_n(x+rC)=\mathrm{vol}_n(rC)$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, άρα το Θεώρημα 5.3.1 παίρνει την ακόλουθη μορφή: Αν K, C είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $r>0$,

$$\binom{2n}{n}^{-1} \mathrm{vol}_n(K+rC)\mathrm{vol}_n(K\cap rC) \leqslant \mathrm{vol}_n(rC)\mathrm{vol}_n(K) \leqslant \mathrm{vol}_n(K+rC)\mathrm{vol}_n(K\cap rC),$$

που είναι μια πολύ γνωστή ανισότητα των Rogers και Shephard (δείτε το [1, Κεφάλαιο 4]). Η σταθερά $\binom{2n}{n}$ είναι βέλτιστη.

Παρατήρηση 5.3.4. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να βρεθούν οι βέλτιστες σταθερές στην ανισότητα του Θεωρήματος 5.3.1. Η συμπεριφορά της μέσης τιμής $\mathbb{E}_{\mu_K^N}\big(\mathrm{vol}_n\big(\cap_{i=1}^N (x_i+rC)\big)\big)$ είναι φυσικά διαφορετική για μικρές και μεγάλες τιμές του r. Στην περίπτωση $C=B_2^n$, ο Gorbovickis έχει αποδείξει στο [50] ότι για κάθε $n\geqslant 2$ και για κάθε $x_1,\ldots,x_N\in\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι

$$\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N B(x_i,r)\Big) = \mathrm{vol}_n(rB_2^n) - n\omega_n w(\mathrm{conv}(x_1,\ldots,x_N))r^{n-1} + o(r^{n-1})$$

καθώς το $r\to\infty$. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε το ακόλουθο φυσιολογικό ανάλογο αυτού του αποτελέσματος για την μέση τιμή:

Πρόταση 5.3.5. *Έστω K, C δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}_n(rC)} \mathbb{E}_{\mu_K^N}\Big(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i+rC)\Big)\Big) = 1.$$

Απόδειξη. Ένα κλασικό θεώρημα του Minkowski ισχυρίζεται ότι η συνάρτηση $\mathrm{vol}_n(K+rC)$ είναι πολυώνυμο ως προς $r \in [0,\infty)$: Έχουμε

$$\mathrm{vol}_n(K+rC) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} V_j(K,C)\, r^j,$$

όπου $V_j(K,C) = V(K;n-j,C;j)$ είναι ο j-οστός μεικτός όγκος των K και C (με τον συμβολισμό $C;j$ εννοούμε $C,\ldots,C$ j-φορές). Έχουμε επίσης $V_n(K,C) = \mathrm{vol}_n(C)$. Από το Λήμμα 5.3.2 βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N}(x_i+rC)\Big)\right) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^N}\int_{K+rC} \big(\mathrm{vol}_n(K\cap(y+rC))\big)^N\, dy \leqslant \mathrm{vol}_n(K+rC).$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{1}{\mathrm{vol}_n(rC)}\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N}(x_i+rC)\Big)\right) \leqslant \lim_{r\to\infty}\frac{1}{r^n\mathrm{vol}_n(C)}\sum_{j=0}^{n}\binom{n}{j}V_j(K,C)\, r^j = 1.$$

Από την άλλη πλευρά, έστω $r_0 = \min\{t>0 : K\subseteq tC\}$. Τότε, αν $r>r_0$ και $y\in(r-r_0)C$ είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $K\subseteq r_0C\subseteq y+rC$. Συνεπώς, έχουμε

$$\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N}(x_i+rC)\Big)\right) = \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^N}\int_{K+rC} \big(\mathrm{vol}_n(K\cap(y+rC))\big)^N\, dy \geqslant \mathrm{vol}_n((r-r_0)C)$$

για κάθε $r>r_0$, άρα

$$\liminf_{r\to\infty}\frac{1}{\mathrm{vol}_n(rC)}\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N}(x_i+rC)\Big)\right) \geqslant \lim_{r\to\infty}\frac{(r-r_0)^n\mathrm{vol}_n(C)}{r^n\mathrm{vol}_n(C)} = 1.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Δεν είναι επίσης δύσκολο να ελέγξουμε ότι η εξάρτηση από το r είναι διαφορετική καθώς το $r\to 0$:

Πρόταση 5.3.6. *Έστω K, C δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\lim_{r\to 0^+}\frac{\mathrm{vol}_n(K)^{N-1}}{\mathrm{vol}_n(rC)^N}\,\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N}(x_i+rC)\Big)\right) = 1.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.3.2 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N}(x_i+rC)\Big)\right) &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)^N}\int_{K+rC}\big(\mathrm{vol}_n((K-y)\cap rC)\big)^N\, dy\\ &\leqslant \frac{\mathrm{vol}_n(K+rC)\mathrm{vol}_n(rC)^N}{\mathrm{vol}_n(K)^N}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\limsup_{r\to 0^+}\frac{\mathrm{vol}_n(K)^{N-1}}{\mathrm{vol}_n(rC)^N}\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^{N}(x_i+rC)\Big)\right) \leqslant \lim_{r\to 0^+}\frac{\mathrm{vol}_n(K+rC)}{\mathrm{vol}_n(K)} = 1.$$

Από την άλλη πλευρά, έστω $t_0 = \max\{t > 0 : C \subseteq \frac{1}{t}K\}$. Τότε, αν $0 < r < t_0$ και $y \in \left(1 - \frac{r}{t_0}\right) K$ είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι $y + rC \subseteq \left(1 - \frac{r}{t_0}\right) K + \frac{r}{t_0}K = K$. Συνεπώς, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{vol}_n(K)^{N-1}}{\mathrm{vol}_n(rC)^N}\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + rC)\Big)\right) &= \frac{1}{\mathrm{vol}_n(rC)^N \mathrm{vol}_n(K)} \int_{K+rC} \big(\mathrm{vol}_n(K \cap (y + rC))\big)^N \, dy \\ &\geqslant \frac{\mathrm{vol}_n\big((1 - \frac{r}{t_0}K)\big)}{\mathrm{vol}_n(K)} = \left(1 - \frac{r}{t_0}\right)^n,\end{aligned}$$

για κάθε $0 < r < t_0$, άρα

$$\liminf_{r \to 0^+} \frac{\mathrm{vol}_n(K)^{N-1}}{\mathrm{vol}_n(rC)^N}\mathbb{E}_{\mu_K^N}\left(\mathrm{vol}_n\Big(\bigcap_{i=1}^N (x_i + rC)\Big)\right) \geqslant \lim_{r \to 0^+} \left(1 - \frac{r}{t_0}\right)^n = 1.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Αφφινικά quermassintegrals τυχαίων πολυτόπων

6.1 Εισαγωγή

Τα αφφινικά quermassintegrals ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ εισήχθησαν από τον Lutwak στο [71]: ορίζονται από την

$$\Phi_{n-k}(K) = \frac{\omega_n}{\omega_k}\Big(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n} d\nu_{n,k}(F)\Big)^{-1/n}$$

για $1 \leqslant k \leqslant n-1$, όπου $\nu_{n,k}$ είναι το μέτρο πιθανότητας Haar στην Grassmannian $G_{n,k}$ όλων των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ και ω_k είναι ο όγκος της Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας B_2^k στον $\mathbb{R}^k$. Στα επόμενα, θα υιοθετήσουμε επίσης τον συμβολισμό $\Phi_0(K) = \mathrm{vol}_n(K)$ και $\Phi_n(K) = \omega_n$. Ο Grinberg απέδειξε στο [52] ότι αυτές οι ποσότητες είναι αναλλοίωτες ως προς αφφινικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο.

Η ακόλουθη παραλλαγή της ποσότητας Φ_{n-k} μελετήθηκε από τους Δαφνή και Παούρη στο [40]: Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ορίζουμε το κανονικοποιημένο k-στο αφφινικό quermassintegral του K ως εξής:

$$\Phi_{[k]}(K) := \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\Big(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F)\Big)^{-\frac{1}{kn}}.$$

Σημειώνουμε ότι $\Phi_{[k]}(K) = \mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\left(\frac{\omega_k}{\omega_n}\right)^{\frac{1}{k}}\Phi_{n-k}(K)^{\frac{1}{k}}$. Με αυτήν την ορολογία, μια εικασία του Lutwak (δείτε την Παράγραφο 1.4) αναδιατυπώνεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\Phi_{[k]}(K) \geqslant \Phi_{[k]}(B_2^n). \tag{6.1.1}$$

Όταν $k=1$, η παραπάνω ανισότητα είναι συνέπεια της ανισότητας Blaschke-Santaló, ενώ στην περίπτωση $k=n-1$ η (6.1.1) είναι συνέπεια της ανισότητας προβολών του Petty.

Οι Δαφνής και Παούρης μελέτησαν στο [40] μια ισομορφική εκδοχή της εικασίας του Lutwak: το ερώτημα είναι αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε, για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$,

$$c_1\sqrt{n/k} \leqslant \Phi_{[k]}(K) \leqslant c_2\sqrt{n/k} \tag{6.1.2}$$

(υπενθυμίζουμε ότι η $\omega_k^{1/k}$ είναι της τάξης του $k^{-1/2}$). Σημειώνουμε ότι στην περίπτωση $k=1$ η (6.1.2) έπεται από την ανισότητα Blaschke-Santaló και την αντίστροφη ανισότητα Santaló των Bourgain και V. Milman, ενώ στην περίπτωση $k=n-1$ η τάξη μεγέθους που εικάζεται για την ποσότητα $\Phi_{[n-1]}(K)$ ισχύει και πάλι, αυτή τη φορά από την ανισότητα προβολών του Petty και την αντίστροφή της, η οποία έχει αποδειχθεί από τον Zhang.

Το γεγονός ότι η ανισότητα στο αριστερό μέλος της (6.1.2) ισχύει αποδείχθηκε από τους Παούρη και Pivovarov στο [91]. Επιβεβαιώνει την εικασία του Lutwak από την ισομορφική άποψη.

Θεώρημα 6.1.1 (Παούρης-Pivovarov). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και $1 \leqslant k \leqslant n$. Τότε,*

$$\Phi_{[k]}(K) \geqslant c\sqrt{n/k}. \tag{6.1.3}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1 βασίζεται σε ένα επιχείρημα δυϊσμού, το οποίο χρησιμοποιεί την ανισότητα Blaschke-Santaló (2.1.19) και την αντίστροφή της, σε συνδυασμό με μια ανισότητα ισοπεριμετρικού τύπου για τις ροπές των τομών ενός κυρτού σώματος, η οποία αποδείχθηκε από τον Grinberg [52], σύμφωνα με την οποία

$$\mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\Big(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(K\cap F)^n\, d\nu_{n,k}(F)\Big)^{\frac{1}{kn}} \leqslant \frac{\omega_k^{1/k}}{\omega_n^{1/n}}. \tag{6.1.4}$$

Η ακριβής μορφή της εικασίας του Lutwak αποδείχθηκε πολύ πρόσφατα από τους E. Milman και A. Yehudayoff στο [78]. Το κεντρικό ερώτημα που συζητάμε σε αυτό το κεφάλαιο σχετίζεται με το άνω φράγμα στην (6.1.2). Μια σχεδόν βέλτιστη εκτίμηση (που επαληθεύει την εικασία παρά έναν όρο $\log n$) δόθηκε από τους Δαφνή και Παούρη στο [40]. Υπενθυμίζουμε εν συντομία το επιχείρημά τους: Οι ανισότητες Aleksandrov (δείτε τα [3, Παράγραφοι 20.1-20.2] και [9, Παράγραφος 6.4]) συνεπάγονται ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε η ακολουθία

$$Q_k(K) = \Big(\frac{1}{\omega_k}\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F)\Big)^{1/k} \tag{6.1.5}$$

είναι φθίνουσα ως προς k. Ειδικότερα, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n-1$ έχουμε ότι $Q_k(K) \leqslant Q_1(K)$, και αυτή η ανισότητα μπορεί να γραφεί στην ισοδύναμη μορφή

$$\Big(\frac{1}{\omega_k}\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F)\Big)^{\frac{1}{k}} \leqslant w(K), \tag{6.1.6}$$

όπου $w(K)$ είναι το μέσο πλάτος του K. Τότε, από την ανισότητα Hölder,

$$\Big(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F)\Big)^{-\frac{1}{kn}} \leqslant \Big(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F)\Big)^{\frac{1}{k}} \leqslant \omega_k^{1/k} w(K).$$

Αφού η ποσότητα στο αριστερό μέλος της ανισότητας είναι αναλλοίωτη ως προς αφφινικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K έχει ελάχιστο μέσο πλάτος, και είναι γνωστό ότι σε αυτή την περίπτωση έχουμε $w(K) \leqslant c\sqrt{n}\log n\,\mathrm{vol}_n(K)^{1/n}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$ (δείτε το [1, Κεφάλαιο 6]). Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το γεγονός ότι η ποσότητα $\omega_k^{1/k}$ είναι της τάξης του $1/\sqrt{k}$, παίρνουμε

$$\Phi_{[k]}(K) \leqslant c_2\sqrt{n/k}\log n. \tag{6.1.7}$$

Στο [40] αποδεικνύεται επίσης ότι

$$\Phi_{[k]}(K) \leqslant c_3(n/k)^{3/2}\sqrt{\log{(en/k)}}.$$

Με άλλα λόγια, αν το k είναι ανάλογο της διάστασης n τότε το άνω φράγμα για την $\Phi_{[k]}(K)$ είναι της τάξης του 1. Το πρόβλημα που παραμένει ανοικτό είναι αν ο όρος $\log n$ στην (6.1.7) μπορεί να απαλειφθεί.

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε αυτό το πρόβλημα για κάποιες ευρείες κλάσεις τυχαίων πολυτόπων. Αρχικά, δίνουμε καταφατική απάντηση στο πρόβλημα (με μεγάλη πιθανότητα) για την κλάση των συμμετρικών τυχαίων πολυτόπων με $e^{\sqrt{n}}$ το πολύ κορυφές ομοιόμορφα κατανεμημένες σε ένα κυρτό σώμα.

Στην Παράγραφο 6.3 θεωρούμε την περίπτωση του κωνικού μέτρου πιθανότητας μ_K στο σύνορο $\partial(K)$ ενός κυρτού σώματος K, το οποίο ορίζεται από την

$$\mu_K(B) = \frac{\mathrm{vol}_n(\{rx : x\in B, 0\leqslant r\leqslant 1\})}{\mathrm{vol}_n(K)}$$

για όλα τα Borel υποσύνολα B του $\partial(K)$. Για κάθε $N\geqslant n$ θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1,\dots,x_N$ που έχουν κατανομή το μ_K και το τυχαίο πολύτοπο $M_N=\mathrm{conv}\{\pm x_1,\dots,\pm x_N\}$. Δίνουμε μια περιγραφή του «ασυμπτωτικού σχήματος» του M_N που είναι παράλληλη με την διαθέσιμη περιγραφή για το K_N. Αυτό είναι εφικτό, με κατάλληλες τροποποιήσεις της θεωρίας που αναπτύχθηκε στα [38] και [39], και μας επιτρέπει να αποδείξουμε ότι, στην περίπτωση όπου $N\leqslant e^{\sqrt{n}}$, το πρόβλημα έχει καταφατική απάντηση (με μεγάλη πιθανότητα) και γι' αυτό το μοντέλο.

Στην Παράγραφο 6.4 μελετάμε ένα διαφορετικό μοντέλο τυχαίων πολυτόπων. Για δοθέν $\beta>-1$, έστω ν_β το μέτρο πιθανότητας με φορέα την B_2^n, που έχει πυκνότητα $p_{n,\beta}(x)=c_{n,\beta}(1-\|x\|_2^2)^\beta$, όπου $c_{n,\beta}:=\pi^{-n/2}\frac{\Gamma\left(\beta+\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma(\beta+1)}$. Σταθεροποιούμε $N>n$, και θεωρούμε τυχαία διανύσματα $x_1,\dots,x_N$ τα οποία επιλέγονται ανεξάρτητα και έχουν κατανομή το μέτρο ν_β. Το Βήτα-πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ (με παράμετρο β) είναι το τυχαίο πολύτοπο

$$P_{N,n}^\beta := \mathrm{conv}\{x_1,\dots,x_N\}.$$

Δείχνουμε ότι το πρόβλημα έχει καταφατική απάντηση (με μεγάλη πιθανότητα) για ένα εύρος τιμών του N που εξαρτάται από τα n και β.

Στην τελευταία παράγραφο αυτού του κεφαλαίου μελετάμε τις ποσότητες $\Phi_{[k]}(K)$ για την κλάση των unconditional κυρτών σωμάτων K. Επικεντρωνόμαστε στην περίπτωση $K=B_1^n$, διότι, σύμφωνα με γνωστά αποτελέσματα των Bobkov και Nazarov (δείτε την Παράγραφο 6.5), αποδεικνύεται ότι αν K είναι ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε, για κάθε $1\leqslant k\leqslant n$, έχουμε ότι

$$\Phi_{[k]}(K) \leqslant c\Phi_{[k]}(B_1^n)$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, αρκεί να μελετήσουμε το πρόβλημα μόνο στην περίπτωση $K = B_1^n$. Αποδεικνύουμε ότι αν K είναι ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε, για κάθε $\log n \leqslant k \leqslant n$,

$$\Phi_{[k]}(K) \leqslant c\sqrt{n/k} \cdot \sqrt{\log(1+n/k)}, \tag{6.1.8}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

6.2 Τυχαία πολύτοπα με κορυφές σε κυρτά σώματα

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε καταφατική απάντηση στο πρόβλημα της Παραγράφου 6.1 για την κλάση των συμμετρικών τυχαίων πολυτόπων με $e^{\sqrt{n}}$ το πολύ κορυφές που είναι ανεξάρτητα και ομοιόμορφα κατανεμημένες σε ένα κυρτό σώμα. Δεδομένου ότι το πρόβλημα είναι αφφινικά αναλλοίωτο, μπορούμε να περιοριστούμε στην ισοτροπική περίπτωση. Έστω $N \geqslant n$ και ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα $x_1, \ldots, x_N$ που επιλέγονται ομοιόμορφα από ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ (δηλαδή, έχουν κατανομή το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στο K). Θεωρούμε το συμμετρικό τυχαίο πολύτοπο

$$K_N := \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}.$$

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $1 \leqslant k \leqslant n$ και $n^2 \leqslant N \leqslant e^{\sqrt{n}}$. Αν $x_1, \ldots, x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα που επιλέγονται ομοιόμορφα από το K, τότε*

$$\Phi_{[k]}(K_N) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{2}{N}$.

Η μελέτη του «ασυμπτωτικού σχήματος» του τυχαίου πολυτόπου K_N χρησιμοποιεί την θεωρία των L_q-κεντροειδών σωμάτων ενός κυρτού σώματος (δείτε την Παράγραφο 2.2 για τον ορισμό και βασικές πληροφορίες). Τα επόμενα δύο αποτελέσματα αποδεικνύονται στο [38] και στο [44, Λήμμα 3.1]:

(Π1) Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $\alpha, c_1, c_2, c_3 > 0$ τέτοιες ώστε: αν $N \geqslant \alpha n$ και $q \leqslant c_1 \log(N/n)$ τότε ο εγκλεισμός

$$K_N = \mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\} \supseteq c_2 Z_q(K) \tag{6.2.1}$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-c_3\sqrt{N}}$.

(Π2) Για κάθε $q \geqslant \log N$ και $t \geqslant 1$, η ανισότητα

$$w(K_N) \leqslant c_3 t w(Z_q(K)) \tag{6.2.2}$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - t^{-q}$.

Συνδυάζοντας αυτές τις βασικές ασυμπτωτικές ιδιότητες του τυχαίου K_N με την θεωρία των L_q-κεντροειδών σωμάτων παίρνουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.2 (Γιαννόπουλος-Δαφνής-Τσολομύτης)**.** *Έστω $n, N \in \mathbb{N}$, και K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Αν $n \lesssim N \leqslant e^{\sqrt{n}}$, τότε*

$$\mathrm{vol}_n(K_N)^{1/n} \gtrsim \sqrt{\log(2N/n)/n} L_K \tag{6.2.3}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-c\sqrt{N})$, για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$.

(β) *Αν $n \lesssim N \leqslant e^{\sqrt{n}}$, τότε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε ότι*

$$\sqrt{\log(2N/n)} L_K \lesssim Q_k(K_N) \leqslant w(K_N) \lesssim \sqrt{\log N} L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{1}{N}$.

Για την απόδειξη όλων αυτών των ισχυρισμών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα [38], [39], και επίσης στο [2, Κεφάλαιο 11]. Επιπλέον, στο εύρος τιμών $n \lesssim N \leqslant e^{\sqrt{n}}$, μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι ένα άνω φράγμα της τάξης του $\sqrt{\log N} L_K$ ισχύει για την ακτίνα όγκου της τυχαίας k-διάστατης προβολής του τυχαίου K_N (δείτε το [39, Ισχυρισμός 4.6]). Ξεκινώντας από την ανισότητα

$$Q_k(K_N) = \Big(\frac{1}{\omega_k} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K_N))\, d\nu_{n,k}(F) \Big)^{1/k} \lesssim \sqrt{\log N} L_K$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov, παίρνουμε:

Λήμμα 6.2.3. *Αν $n \lesssim N \leqslant e^{\sqrt{n}}$ τότε με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{1}{N}$ το τυχαίο πολύτοπο K_N ικανοποιεί το εξής: για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και $t > 1$,*

$$\nu_{n,k}\Big(\Big\{ F \in G_{n,k} : \Big(\frac{\mathrm{vol}_k(P_F(K_N))}{\omega_k} \Big)^{1/k} \leqslant c_1 t \sqrt{\log N} L_K \Big\} \Big) \geqslant 1 - t^{-k}. \tag{6.2.4}$$

Οι εκτιμήσεις αυτές είναι αρκετές για να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.2.1.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1. Από το Θεώρημα 6.2.2 και το Λήμμα 6.2.3 γνωρίζουμε ότι με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{1}{N} - e^{-c\sqrt{N}}$, για τον όγκο του τυχαίου πολυτόπου K_N έχουμε το κάτω φράγμα

$$\mathrm{vol}_n(K_N)^{1/n} \gtrsim \sqrt{\log(2N/n)/n} L_K \tag{6.2.5}$$

και επίσης $\nu_{n,k}(A) \geqslant 1 - 2^{-k}$, όπου $A = \Big\{ F \in G_{n,k} : \Big(\frac{\mathrm{vol}_k(P_F(K_N))}{\omega_k} \Big)^{1/k} \leqslant 2c_1 \sqrt{\log N} L_K \Big\}$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K_N))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F) &\geqslant \int_A \mathrm{vol}_k(P_F(K_N))^{-n}\, d\nu_{n,k}(F) \\ &\geqslant (1 - 2^{-k})(2c_1 \sqrt{\log N} \omega_k^{1/k} L_K)^{-kn} \\ &\geqslant (4c_1 \sqrt{\log N} \omega_k^{1/k} L_K)^{-kn}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{2}{N}$, για κάθε $1\leqslant k\leqslant n$ έχουμε

$$\Big(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(K_N))^{-n}\,d\nu_{n,k}(F)\Big)^{-\frac{1}{kn}}\leqslant c_2\sqrt{\log N}\,\omega_k^{1/k}L_K. \tag{6.2.6}$$

Συνδυάζοντας με την (6.2.5) γράφουμε

$$\begin{aligned}\Phi_{[k]}(K_N)&=\mathrm{vol}_n(K_N)^{-\frac{1}{n}}\Big(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(K_N))^{-n}\,d\nu_{n,k}(F)\Big)^{-\frac{1}{kn}}\\&\lesssim\frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{\log(N/n)}}\frac{\sqrt{n}}{\omega_k^{-1/k}}\lesssim\sqrt{n/k},\end{aligned}$$

αφού $\omega_k^{-1/k}\approx\sqrt{k}$ και $\log N\leqslant 2\log(N/n)$ (διότι $N\geqslant n^2$). □

6.3 Τυχαία πολύτοπα με κορυφές σε κυρτές επιφάνειες

Στη συνέχεια, θεωρούμε την περίπτωση του κωνικού μέτρου πιθανότητας μ_K στο σύνορο $\partial(K)$ ενός κυρτού σώματος K, το οποίο ορίζεται από την

$$\mu_K(B)=\frac{\mathrm{vol}_n(\{rx : x\in B, 0\leqslant r\leqslant 1\})}{\mathrm{vol}_n(K)}$$

για όλα τα Borel υποσύνολα B του $\partial(K)$. Για κάθε $N\geqslant n$ θεωρούμε ανεξάρτητα τυχαία σημεία $x_1,\dots,x_N$ που έχουν κατανομή το μ_K και το τυχαίο πολύτοπο $M_N=\mathrm{conv}\{\pm x_1,\dots,\pm x_N\}$. Δίνουμε μια περιγραφή του «ασυμπτωτικού σχήματος» του M_N που είναι παράλληλη με την διαθέσιμη περιγραφή για το K_N. Αυτό είναι εφικτό, με κατάλληλες τροποποιήσεις της θεωρίας που αναπτύχθηκε στα [38] και [39], και μας επιτέπει να αποδείξουμε ότι το ανάλογο του Θεωρήματος 6.2.1 ισχύει και γι' αυτό το μοντέλο.

Θεώρημα 6.3.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, $1\leqslant k\leqslant n$ και $n^2\leqslant N\leqslant e^{\sqrt{n}}$. Αν $x_1,\dots,x_N$ είναι ανεξάρτητα τυχαία διανύσματα με κατανομή το μ_K, τότε*

$$\Phi_{[k]}(M_N)\leqslant c\sqrt{n/k}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{1}{N^2}$.

Για την απόδειξη, θα περιγράψουμε το ασυμπτωτικό σχήμα του M_N κάνοντας κάποιες τροποποιήσεις στην προσέγγιση του [38]. Ξεκινάμε με το ακόλουθο λήμμα εγκλεισμού.

Λήμμα 6.3.2. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $\alpha,c_1,c_2,c_3>0$ τέτοιες ώστε: αν $N\geqslant\alpha n$ και $q\leqslant c_1\log(N/n)$ τότε ο εγκλεισμός*

$$M_N=\mathrm{conv}\{\pm x_1,\dots,\pm x_N\}\supseteq c_2Z_q(K) \tag{6.3.1}$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-c_3\sqrt{N}}$.

Απόδειξη. Περιγράφουμε εν συντομία το επιχείρημα από το [57]. Θεωρούμε N ανεξάρτητα τυχαία σημεία $y_1,\dots,y_N$ με κατανομή λ_K. Ορίζουμε N σημεία $x_1,\dots,x_N\in\partial(K)$ ως εξής: αν $y_i\neq 0$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant N$ τότε θέτουμε $x_i = y_i/\|y_i\|_K$. Στην περίπτωση που $Y_i = 0$, θέτουμε $x_i = u$, όπου u είναι τυχόν σημείο στο $\partial(K)$ το οποίο έχουμε σταθεροποιήσει. Παρατηρούμε ότι το μέτρο εικόνα του λ_K μέσω της $y \mapsto y/\|y\|_K$ είναι το μ_K. Για κάθε Borel υποσύνολο B του $\partial(K)$ έχουμε

$$\mathbb{P}(x_i \in B) = \mathbb{P}(y_i \in (0,1]B) = \frac{\mathrm{vol}_n((0,1]B)}{\mathrm{vol}_n(K)} = \mu_K(B),$$

το οποίο σημαίνει ότι η κατανομή του πολυτόπου $\mathrm{conv}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ είναι ακριβώς η ίδια με την κατανομή του M_N. Επιπλέον, έχουμε

$$\mathrm{conv}\Big\{\pm \frac{y_1}{\|y_1\|_K}, \ldots, \pm \frac{y_N}{\|y_N\|_K}\Big\} \supseteq \mathrm{conv}\{\pm y_1, \ldots, \pm y_N\} = K_N$$

με πιθανότητα 1. Τώρα, το λήμμα είναι άμεση συνέπεια της (**P1**). □

Λήμμα 6.3.3. *Αν $n \lesssim N \leqslant e^{\sqrt{n}}$ και $q_0 = 2\log(2N)$, τότε η ανισότητα*

$$w(M_N) \lesssim w_{q_0}(Z_{q_0}(K)) \approx \sqrt{\log N} L_K \tag{6.3.2}$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \frac{1}{4N^2}$.

Απόδειξη. Έστω $\xi \in S^{n-1}$. Αν X είναι ένα τυχαίο διάνυσμα με κατανομή το μ_K τότε, για κάθε $t > 1$ έχουμε ότι

$$\mathbb{P}(|\langle X, \xi\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L^q(\mu_K)}) \leqslant t^{-q},$$

από την ανισότητα Markov. Συνεπώς,

$$\mathbb{P}(h_{M_N}(\xi) \geqslant t\|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L^q(\mu_K)}) = \mathbb{P}\Big(\max_{j \leqslant N} |\langle x_j, \xi\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \xi\rangle\|_{L^q(\mu_K)}\Big) \leqslant Nt^{-q}. \tag{6.3.3}$$

Χρησιμοποιούμε την ταυτότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx = n\, \mathrm{vol}_n(K) \int_0^\infty r^{n-1} \int_{\partial(K)} f(rx)\, d\mu_K(x)\, dr \tag{6.3.4}$$

η οποία ισχύει για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Για την απόδειξη, όπως στην [85, Πρόταση 1], αρκεί να ελέγξουμε την ταυτότητα για τις δείκτριες συναρτήσεις συνόλων της μορφής $(a, b)B$, όπου $a < b$ και $B \subset \partial(K)$. Σε αυτήν την περίπτωση η ταυτότητα επαληθεύεται άμεσα.

Μπορούμε τότε να ελέγξουμε ότι

$$\int_K |\langle x, \xi\rangle|^q dx = \frac{n}{n+q} \int_{\partial(K)} |\langle x, \xi\rangle|^q d\mu_K(x)$$

για κάθε $q \geqslant 0$. Αυτός ο υπολογισμός έχει γίνει στο [101, Λήμμα 3.2]: Εφαρμόζοντας την (6.3.4) για την $f(x) = \mathbf{1}_K(x)|\langle x,\xi\rangle|^q$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_K |\langle x,\xi\rangle|^q\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(x)|\langle x,\xi\rangle|^q\,dx\\ &= n\int_0^\infty r^{n-1}\int_{\partial(K)} |\langle rx,\xi\rangle|^q \mathbf{1}_K(rx)\,d\mu_K(x)\,dr\\ &= n\int_0^\infty r^{n-1+q}\int_{\partial(K)} |\langle x,\xi\rangle|^q \mathbf{1}_{[0,1]}(r)\,d\mu_K(x)\,dr\\ &= n\int_0^1 r^{n-1+q}\int_{\partial(K)} |\langle x,\xi\rangle|^q\,d\mu_K(x)\,dr\\ &= \frac{n}{n+q}\int_{\partial(K)} |\langle x,\xi\rangle|^q\,d\mu_K(x).\end{aligned}$$

Ισοδύναμα, μπορούμε να γράψουμε

$$\frac{n}{n+q}\|\langle\cdot,\xi\rangle\|_{L^q(\mu_K)}^q = h_{Z_q(K)}(\xi)^q. \tag{6.3.5}$$

Αφού $M_N \subseteq R(K)B_2^n \subseteq c_2nL_KB_2^n$ και $Z_q(K)\supseteq Z_2(K)\approx L_KB_2^n$, βλέπουμε ότι

$$h_{M_N}(\xi)\leqslant c_1nh_{Z_q(K)}(\xi)\leqslant c_1n\|\langle\cdot,\xi\rangle\|_{L^q(\mu_K)}$$

για κάθε $\xi\in S^{n-1}$. Συνεπώς,

$$\int_{S^{n-1}}\Big(\frac{h_{M_N}(\xi)}{\|\langle\cdot,\xi\rangle\|_{L^q(\mu_K)}}\Big)^q d\sigma(\xi) = \int_0^{c_1n} qt^{q-1}\sigma\Big(\{\xi\in S^{n-1}: h_{M_N}(\xi)\geqslant t\|\langle\cdot,\xi\rangle\|_{L^q(\mu_K)}\}\Big)\,dt.$$

Παίρνοντας τη μέση τιμή και στα δύο μέλη, και χρησιμοποιώντας την (6.3.3), έχουμε, για κάθε $\alpha>1$,

$$\mathbb{E}\Big(\int_{S^{n-1}}\frac{h_{M_N}(\xi)^q}{\|\langle\cdot,\xi\rangle\|_{L^q(\mu_K)}^q}\,d\sigma(\xi)\Big)\leqslant \alpha^q+\int_\alpha^{c_1n} qt^{q-1}Nt^{-q}\,dt = \alpha^q + qN\log\Big(\frac{c_1n}{\alpha}\Big).$$

Παρατηρήστε ότι η επιλογή $q_0 := 2\log(2N)$ μας δίνει $e^{q_0} = (2N)^2 \gtrsim q_0N\log\big(\frac{c_1n}{2e}\big)$, οπότε εφαρμόζοντας τα παραπάνω με $\alpha = 2e$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}\Big(\int_{S^{n-1}}\frac{h_{M_N}(\xi)^{q_0}}{\|\langle\cdot,\xi\rangle\|_{L^{q_0}(\mu_K)}^{q_0}}\,d\sigma(\xi)\Big)\leqslant c_2^{q_0},$$

όπου $c_2>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Τώρα, από την ανισότητα Markov βλέπουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}}\frac{h_{M_N}(\xi)^{q_0}}{\|\langle\cdot,\xi\rangle\|_{L^{q_0}(\mu_K)}^{q_0}}\,d\sigma(\xi)\leqslant (c_2e)^{q_0} \tag{6.3.6}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-q_0} = 1-\frac{1}{4N^2}$. Τώρα, χρησιμοποιώντας διαδοχικά την ανισότητα Hölder, την ανισότητα Cauchy-Schwarz, την (6.3.5) και την (6.3.6), γράφουμε

$$\begin{aligned} w(M_N)^{q_0} &\leqslant \Big(\int_{S^{n-1}} h_{M_N}(\xi)^{q_0/2}d\sigma(\xi)\Big)^2 \leqslant w_{q_0}(Z_{q_0}(K))^{q_0}\int_{S^{n-1}}\frac{h_{M_N}(\xi)^{q_0}}{h_{Z_{q_0}(K)}(\xi)^{q_0}}d\sigma(\xi)\\ &\leqslant \frac{n+q_0}{n}w_{q_0}(Z_{q_0}(K))^{q_0}\int_{S^{n-1}}\frac{h_{M_N}(\xi)^{q_0}}{\|\langle\cdot,\xi\rangle\|_{L^{q_0}(\mu_K)}^{q_0}}d\sigma(\xi)\\ &\leqslant 2w_{q_0}(Z_{q_0}(K))^{q_0}(c_2e)^{q_0},\end{aligned}$$

και συμπεραίνουμε ότι

$$w(M_N) \lesssim w_{q_0}(Z_{q_0}(K)) \lesssim \sqrt{q_0}L_K \approx \sqrt{\log N}L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{1}{4N^2}$, συνυπολογίζοντας την (2.2.14) και την επιλογή μας για το q_0. □

Αυτά τα δύο λήμματα μας παρέχουν αποτελέσματα αντίστοιχα των (**Π1**) και (**Π2**) στην περίπτωση του M_N. Τότε, όπως και για το K_N, μπορούμε άμεσα να συμπεράνουμε το εξής.

Θεώρημα 6.3.4. *Έστω $n, N \in \mathbb{N}$, και K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.*

(α) *Αν $n \lesssim N \leqslant e^{\sqrt{n}}$, τότε*

$$\mathrm{vol}_n(M_N)^{1/n} \gtrsim \sqrt{\log(2N/n)/n}L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-c\sqrt{N})$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$.

(β) *Αν $n \lesssim N \leqslant e^{\sqrt{n}}$, τότε για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε ότι*

$$\sqrt{\log(2N/n)}L_K \lesssim Q_k(M_N) \leqslant w(M_N) \lesssim \sqrt{\log N}L_K$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{1}{4N^2}$.

Έχοντας αποδείξει το Θεώρημα 6.3.4, μπορούμε να επαναλάβουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1 και να πάρουμε το Θεώρημα 6.3.1.

Ολοκληρώνουμε αυτή την παράγραφο με την απόδειξη ενός άνω φράγματος για την ακτίνα όγκου του τυχαίου M_N.

Θεώρημα 6.3.5. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $n \lesssim N \leqslant e^n$, τότε*

$$\mathrm{vol}_n(M_N)^{1/n} \leqslant c\sqrt{\log N/n}\, L_K,$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{1}{4N^2}$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $q_0 = 2\log(2N)$ και ελέγχουμε ότι

$$w_{-q_0}(M_N) \lesssim w_{-q_0/2}(Z_{q_0}(K)), \tag{6.3.7}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\frac{1}{4N^2}$. Αυτό φαίνεται αν γράψουμε

$$\begin{aligned}(w_{-q_0/2}(Z_{q_0}(K)))^{-q_0} &= \Big(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_{Z_{q_0}(K)}(\xi)^{q_0/2}}\,d\sigma(\xi)\Big)^2\\ &\leqslant \Big(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_{M_N}(\xi)^{q_0}}\,d\sigma(\xi)\Big)\Big(\int_{S^{n-1}} \frac{h_{M_N}(\xi)^{q_0}}{h_{Z_{q_0}(K)}(\xi)^{q_0}}\,d\sigma(\xi)\Big)\\ &= w_{-q_0}(M_N)^{-q_0}\Big(\int_{S^{n-1}} \frac{h_{M_N}(\xi)^{q_0}}{h_{Z_{q_0}(K)}(\xi)^{q_0}}\,d\sigma(\xi)\Big).\end{aligned} \tag{6.3.8}$$

Στην απόδειξη του Λήμματος 6.3.3 είδαμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} \frac{h_{M_N}(\xi)^{q_0}}{h_{Z_{q_0}(K)}(\xi)^{q_0}}\,d\sigma(\xi) \leqslant (c_2 e)^{q_0}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-q_0}=1-\frac{1}{4N^2}$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε την (6.3.7).

Υπενθυμίζουμε ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα A στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $q\leqslant n$,

$$\Big(\frac{\mathrm{vol}_n(A^\circ)}{\omega_n}\Big)^{1/n}=\Big(\int_{S^{n-1}}h_A(\xi)^{-n}\,d\sigma(\xi)\Big)^{1/n}\geqslant\Big(\int_{S^{n-1}}h_A(\xi)^{-q}\,d\sigma(\xi)\Big)^{1/q}=\frac{1}{w_{-q}(A)}.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Blaschke-Santaló και το γεγονός ότι $\omega_n^{1/n}\approx 1/\sqrt{n}$, παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(A)^{1/n}\leqslant\omega_n^{2/n}\mathrm{vol}_n(A^\circ)^{-1/n}\leqslant\omega_n^{1/n}w_{-q}(A)\leqslant c_1\frac{w_{-q}(A)}{\sqrt{n}},\tag{6.3.9}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1>0$.

Χρησιμοποιώντας διαδοχικά τις (6.3.9) και (6.3.7), παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(M_N)^{1/n}\leqslant c_1\frac{w_{-q_0}(M_N)}{\sqrt{n}}\lesssim\frac{w_{-q_0/2}(Z_{q_0}(K))}{\sqrt{n}}.$$

Αφού $Z_{q_0}(K)\subseteq cZ_{q_0/2}(K)$, έχουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(M_N)^{1/n}\lesssim\frac{w_{-q_0/2}(Z_{q_0/2}(K))}{\sqrt{n}}\approx\frac{\sqrt{q_0}}{n}I_{-q_0/2}(K),$$

παίρνοντας υπ' όψιν μας την (2.2.15). Τέλος, αφού η $I_{-q/2}\leqslant I_2(K)=\sqrt{n}L_K$ ισχύει για κάθε $q\leqslant n$, τελικά παίρνουμε

$$\mathrm{vol}_n(M_N)^{1/n}\lesssim\frac{\sqrt{q_0}}{\sqrt{n}}L_K\approx\frac{\sqrt{\log 2N}}{\sqrt{n}}L_K,$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-q_0}=1-\frac{1}{4N^2}$. $\square$

6.4 Βήτα πολύτοπα

Σε αυτή την παράγραφο μελετάμε ένα διαφορετικό μοντέλο τυχαίων πολυτόπων. Δίνουμε πρώτα κάποιους ορισμούς και βασικές ιδιότητες της Βήτα κατανομής στον $\mathbb{R}^n$.

Ορισμός 6.4.1. Έστω $\beta>-1$. Θέτουμε

$$c_{n,\beta}:=\pi^{-n/2}\frac{\Gamma\Big(\beta+\frac{n}{2}+1\Big)}{\Gamma(\beta+1)},$$

και ορίζουμε ν_β να ειναι το μέτρο πιθανότητας με φορέα την B_2^n, και συνάρτηση πυκνότητας

$$p_{n,\beta}(x):=c_{n,\beta}(1-\|x\|_2^2)^\beta,\quad x\in B_2^n.$$

Με άλλα λόγια,

$$\nu_\beta(A)=c_{n,\beta}\int_A(1-\|x\|_2^2)^\beta\,dx,$$

για κάθε μετρήσιμο $A\subseteq B_2^n$.

Παρατήρηση 6.4.2. (α) Για κάθε $\beta > -1$, το μέτρο ν_β είναι αναλλοίωτο ως προς στροφές. Ισχύει δηλαδή ότι $\nu_\beta(A) = \nu_\beta(U(A))$, για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq \mathbb{R}^n$.
(β) Παρατηρήστε ότι για $\beta = 0$ στον παραπάνω ορισμό παίρνουμε $c_{n,0} = \omega_n^{-1}$. Έπεται ότι το μέτρο ν_0 ταυτίζεται με το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στη μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα, $\mu_{B_2^n}$.

Ολοκληρώνοντας στις $n-1$ συντεταγμένες, είναι εύκολο να δούμε ότι η μονοδιάστατη περιθώρια συνάρτηση πυκνότητας του μέτρου ν_β είναι η

$$f_\beta(t) := \alpha_{n,\beta}(1-t^2)^{\beta+\frac{n-1}{2}}, \qquad t \in [-1,1],$$

όπου

$$\alpha_{n,\beta} := \frac{c_{n,\beta}}{c_{n-1,\beta}} = \pi^{-1/2}\frac{\Gamma\Big(\beta+\frac{n}{2}+1\Big)}{\Gamma\Big(\beta+\frac{n+1}{2}\Big)}.$$

Παρατηρήστε ότι, από τους παραπάνω ορισμούς, προκύπτει ότι $f_\beta = p_{1,\beta+\frac{n-1}{2}}$. Το γεγονός αυτό γενικεύεται και στις υψηλότερες διαστάσεις $1 \leqslant k \leqslant n$.

Πρόταση 6.4.3. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$ και $F \in G_{n,k}$. Αν X είναι ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με κατανομή ν_β, τότε το $P_F(X)$ ακολουθεί την κατανομή $\nu_{\beta+\frac{n-k}{2}}$ στον $\mathbb{R}^k$.*

Απόδειξη. Αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση $k = n-1$, γιατί στη συνέχεια μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε επαγωγή. Λόγω του αναλλοίωτου ως προς στροφές, μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε ότι $F = \{x \in \mathbb{R}^n : x_n = 0\}$. Έστω $x' = (x_1,\dots,x_{n-1}) \in B_2^{n-1}$ με $\|x'\|_2 = r < 1$. Τότε, αν γράψουμε $P_F^{-1}(x') =: x = (x_1,\dots,x_{n-1},x_n) \in B_2^n$, έπεται ότι $|x_n| \leqslant \sqrt{1-r^2}$. Επιπλέον, $\|x\|_2^2 = r^2 + x_n^2$, οπότε ολοκληρώνοντας ως προς τη n-οστή συντεταγμένη έχουμε

$$\begin{aligned} c_{n,\beta}\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}(1-\|x\|_2^2)^\beta\,dx_n &= c_{n,\beta}\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}(1-r^2-x_n^2)^\beta\,dx_n \\ &= c_{n,\beta}(1-r^2)^\beta\int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}}\Big(1-\frac{x_n^2}{1-r^2}\Big)^\beta\,dx_n \\ &= c_{n,\beta}(1-r^2)^{\beta+\frac12}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^\beta\,dy \\ &= p_{n-1,\beta+\frac12}(x), \end{aligned}$$

όπου στο προτελευταίο βήμα κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $y = \frac{x_n}{\sqrt{1-r^2}}$, και η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί $c_{n,\beta}\int_{-1}^{1}(1-y^2)^\beta\,dy = c_{n-1,\beta+\frac12}$. □

Ξεκινάμε με την ακόλουθη παρατήρηση, που είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 6.4.3, σχετικά με την κατανομή της k-διάστατης προβολής ενός τυχαίου διανύσματος X με κατανομή το ν_β.

Λήμμα 6.4.4. *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$,*

$$\mathbb{E}\,V_k(P_{N,n}^\beta) = \binom{n}{k}\frac{\kappa_n}{\kappa_k\kappa_{n-k}}\,\mathbb{E}\,\mathrm{vol}_k\big(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}}\big).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 6.4.3, έπεται ότι

$$\mathbb{E}\mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta})) = \mathbb{E}\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})$$

για κάθε $F \in G_{n,k}$. Από τον ορισμό του V_k (δείτε την (2.1.11)) και τον τύπο του Kubota (2.1.10), έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}V_k(P_{N,n}^{\beta}) &= \binom{n}{k}\omega_{n-k}^{-1}\mathbb{E}W_{n-k}(P_{N,n}^{\beta}) \\ &= \binom{n}{k}\frac{\omega_n}{\omega_k\omega_{n-k}}\int_{G_{n,k}}\mathbb{E}\mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))\,d\nu_{n,k}(F) \\ &= \binom{n}{k}\frac{\omega_n}{\omega_k\omega_{n-k}}\mathbb{E}\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}}),\end{aligned}$$

και το ζητούμενο έχει αποδειχθεί. □

Μία ακόμη ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στην Ευκλείδεια σφαίρα, μπορεί κατά κάποιο τρόπο να ιδωθεί σαν οριακό σημείο των μέτρων ν_β, καθώς $\beta \to -1$.

Πρόταση 6.4.5. *Η οικογένεια των μέτρων $(\nu_\beta)_{\beta>-1}$ στον $\mathbb{R}^n$ συγκλίνει (υπό την ασθενή έννοια) καθώς $\beta \to -1$, στο ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας σ στην S^{n-1}.*

Απόδειξη. Λόγω της συμπάγειας της B_2^n, η οικογένεια $(\nu_\beta)_{\beta>-1}$ είναι tight. Από το θεώρημα του Prokhorov τότε είναι και ασθενώς ακολουθιακά συμπαγής, δηλαδή υπάρχει μια ασθενώς συγκλίνουσα ακολουθία $(\nu_{\beta_n})_{n\in\mathbb{N}} \subset (\nu_\beta)_{\beta>-1}$ με $\beta_n \to -1$. Για κάθε τέτοια ακολουθία το οριακό μέτρο πιθανότητας πρέπει να είναι αναλλοίωτο ως προς στροφές και έχει φορέα το σύνορο της B_2^n. Από τη μοναδικότητα του μέτρου Haar τότε έπεται ότι το όριο της $(\nu_{\beta_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ταυτίζεται με το μέτρο σ στην S^{n-1}. □

Για $d \in [0,1]$, θέτουμε

$$B(d) := \int_d^1 f_\beta(t)\,dt.$$

Παρατηρήστε ότι $B(0) = 1/2$, $B(1) = 0$ και η B είναι φθίνουσα συνάρτηση του d. Θα χρειαστούμε κάποια φράγματα για την $B(d)$. Ξεκινάμε με ένα φράγμα για τον λόγο συναρτήσεων Γάμμα, που δεν είναι παρά μια ειδική περίπτωση της ανισότητας του Wendel (δείτε τη σχέση (7) στο [114]), αλλά συναντάται σε αυτή περίπου τη μορφή ήδη στο [12]. Για κάθε $x > 1$,

$$\frac{1}{\sqrt{x}} \leqslant \frac{\Gamma(x)}{\Gamma(x+\frac{1}{2})} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x-1}}. \tag{6.4.1}$$

Από αυτή την ανισότητα παίρνουμε το ακόλουθο λήμμα για την $B(d)$.

Λήμμα 6.4.6. *Έστω $d \in (0,1)$. Τότε,*

$$\frac{1}{2\sqrt{\pi}}\frac{(1-d^2)^{\beta+\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}} \leqslant B(d) \leqslant \frac{1}{2d\sqrt{\pi}}\frac{(1-d^2)^{\beta+\frac{n+1}{2}}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}}}. \tag{6.4.2}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $s = 1 - t^2$, γράφουμε

$$B(d) = \alpha_{n,\beta} \int_d^1 (1-t^2)^{\beta+\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}\alpha_{n,\beta} \int_0^{1-d^2} s^{\beta+\frac{n-1}{2}}(1-s)^{-\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}s.$$

Παρατηρήστε ότι, αφού $s \in (0, 1-d^2)$, έχουμε $(1-s)^{-1/2} \in (1, d^{-1})$, οπότε

$$\frac{\alpha_{n,\beta}}{2} \int_0^{1-d^2} s^{\beta+\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}s < B(d) < \frac{\alpha_{n,\beta}}{2d} \int_0^{1-d^2} s^{\beta+\frac{n-1}{2}}\,\mathrm{d}s.$$

Το γεγονός ότι

$$\frac{\alpha_{n,\beta}}{\beta+\frac{n+1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{\Gamma(\beta+\frac{n}{2}+1)}{\Gamma(\beta+\frac{n}{2}+\frac{3}{2})},$$

μαζί με την (6.4.1), συμπληρώνουν την απόδειξη. □

Σταθεροποιούμε $N > n$, και θεωρούμε τυχαία διανύσματα $x_1, \dots, x_N$ τα οποία επιλέγονται ανεξάρτητα και έχουν κατανομή το μέτρο ν_β. Το Βήτα-πολύτοπο στον $\mathbb{R}^n$ (με παράμετρο β) είναι το τυχαίο πολύτοπο

$$P_{N,n}^\beta := \mathrm{conv}\{x_1, \dots, x_N\}.$$

Θα αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 6.4.7. *Έστω $\beta > -1$ και $x_1, \dots, x_N$ ανεξάρτητα τυχαία σημεία στον $\mathbb{R}^n$ που έχουν κατανομή το ν_β. Αν $k \geqslant \log\left(n\left(1+\log\left(4\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}\right)\right)\right)$ και $N \geqslant c_0^{\beta+\frac{n+1}{2}}$, όπου $c_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, τότε*

$$\Phi_{[k]}(P_{N,n}^\beta) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-k}$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Το Θεώρημα 6.4.7 θα προκύψει από τα επόμενα δύο λήμματα.

Λήμμα 6.4.8. *Έστω $\beta > -1$ και $N > n$. Τότε, αν*

$$g(n,\beta) := 2\sqrt{\pi}n\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}\left(1+\log\left(4\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}\right)\right)$$

και $N \geqslant c_1 g(n,\beta)$, έχουμε ότι

$$\mathrm{vol}_n(P_{N,n}^\beta)^{1/n} \geqslant c\frac{\sqrt{1-(g(n,\beta)/N)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}}{\sqrt{n}}.$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$.

Απόδειξη. Για κάθε $R > \frac{1}{2}\sqrt{1-(g(n,\beta)/N)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}$, παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{P}\Big(\frac{1}{2}\sqrt{1-(g(n,\beta)/N)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}B_2^n \not\subseteq P_{N,n}^\beta\Big) \leqslant \mathbb{P}(RB_2^n \not\subseteq P_{Nn}^\beta)$$

άρα, θα πάρουμε τον ισχυρισμό του λήμματος αν αποδείξουμε ότι

$$\mathbb{P}(RB_2^n \not\subseteq P_{N,n}^{\beta}) \leqslant e^{-n},$$

για κατάλληλη τιμή του R.

Σταθεροποιούμε κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$ το οποίο θα προσδιοριστεί αργότερα, και θεωρούμε ένα ε-δίκτυο $\mathcal{N}_\varepsilon$ για την S^{n-1}, με πληθάριθμο $|\mathcal{N}_\varepsilon| \leqslant \left(\frac{2}{\varepsilon}\right)^n$. Σημειώνουμε ότι, για κάθε $x \in B_2^n$ και για κάθε $a > 0$, αν έχουμε $\langle x, \xi\rangle \leqslant a$ για κάποιο $\xi \in S^{n-1}$, τότε έχουμε επίσης $\langle x, \xi\rangle \leqslant a+\varepsilon$ για κάποιο $\xi \in \mathcal{N}_\varepsilon$. Χρησιμοποιώντας την υποπροσθετικότητα του μέτρου και την ανεξαρτησία των κορυφών X_i, μπορούμε τότε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(RB_2^n \not\subseteq P_{N,n}^{\beta}) &\leqslant \mathbb{P}\Big(h_{P_{N,n}^{\beta}}(\xi) < R, \text{ για κάποιο } \xi \in S^{n-1}\Big)\\
&\leqslant \mathbb{P}\Big(h_{P_{N,n}^{\beta}}(\xi) < R+\varepsilon, \text{ για κάποιο } \xi \in \mathcal{N}_\varepsilon\Big)\\
&\leqslant \Big(\frac{2}{\varepsilon}\Big)^n \mathbb{P}\Big(\max_{1\leqslant i\leqslant N}\langle X_i, \xi\rangle < R+\varepsilon\Big)\\
&= \Big(\frac{2}{\varepsilon}\Big)^n \Big(\mathbb{P}(\langle X, \xi\rangle < R+\varepsilon)\Big)^N.
\end{aligned}$$

Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι, για κάθε $\xi \in S^{n-1}$ και $d \in (0,1)$, λόγω του αναλλοίωτου του ν_β ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(\langle X, \xi\rangle < d) = \mathbb{P}(\langle X, e_1\rangle < d) &= c_{n,\beta}\int_{-1}^{d}\int_{\sqrt{1-x_1^2}B_2^{n-1}} (1-\|x\|_2^2)^\beta \, d(x_2,\dots,x_n)\, dx_1\\
&= c_{n,\beta}\int_{-1}^{d}\int_{\sqrt{1-x_1^2}B_2^{n-1}} (1-x_1^2)^\beta \Big(1-\frac{\sum_{i=2}^n x_i^2}{1-x_1^2}\Big)^\beta d(x_2,\dots,x_n)\, dx_1\\
&= c_{n,\beta}\int_{-1}^{d}(1-t^2)^\beta \int_{B_2^{n-1}} (1-\|z\|_2^2)^\beta (1-t^2)^{\frac{n-1}{2}}\, dz\, dt\\
&= \alpha_{n,\beta}\int_{-1}^{d}(1-t^2)^{\beta+\frac{n-1}{2}}\, dt \int_{B_2^{n-1}} p_{n-1,\beta}(z)\, dz\\
&= \int_{-1}^{d} f_\beta(t)\, dt = 1 - B(d).
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(RB_2^n \not\subseteq P_{N,n}^{\beta}) &\leqslant \Big(\frac{2}{\varepsilon}\Big)^n (1-B(R+\varepsilon))^N\\
&\leqslant \Big(\frac{2}{\varepsilon}\Big)^n \exp(-NB(R+\varepsilon)) = \exp\Big(n\log(2/\varepsilon) - NB(R+\varepsilon)\Big),
\end{aligned}$$

συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $n\log(2/\varepsilon) - NB(R+\varepsilon) \leqslant -n$, ή, ισοδύναμα,

$$NB(R+\varepsilon) \geqslant n\left(1+\log(2/\varepsilon)\right).$$

Επιλέγουμε τώρα $\varepsilon = \Big(2\sqrt{\beta+\frac{n+1}{2}}\Big)^{-1}$, και παρατηρούμε ότι αν επιλέξουμε

$$N > g(n,\beta)\left(1-4\varepsilon^2\right)^{-\left(\beta+\frac{n+1}{2}\right)}$$

(κάτι που ικανοποιείται αν $N \geqslant c_1 g(n,\beta)$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$), έπεται ότι $\varepsilon < \frac{1}{2}\sqrt{1-(g(n,\beta)/N)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}$. Παίρνοντας $R = \sqrt{1-(g(n,\beta)/N)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}} - \varepsilon$ και χρησιμοποιώντας το κάτω φράγμα στην (6.4.2), μπορούμε τότε να δούμε ότι

$$NB(R+\varepsilon) \geqslant \frac{N}{2\sqrt{\pi}} \frac{(g(n,\beta)/N)^{\frac{2}{2\beta+n+1}(\beta+\frac{n+1}{2})}}{\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}} = \frac{g(n,\beta)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}} \geqslant n\Big(1+\log(2/\varepsilon)\Big),$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Η μέση τιμή, στην $G_{n,k}$, του όγκου της προβολής $P_F(P_{N,n}^{\beta})$ συνδέεται με τον όγκο του $P_{N,k}^{\beta'}$, για κάποιο $\beta' > -1$, ως εξής: Υπενθυμίζουμε ότι, για $k = 1, \dots, n$, ο k-οστός intrinsic όγκος ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια ολοκληρωτική αναπαράσταση, που δίνεται από τον τύπο του Kubota,

$$V_k(K) = r_{n,k} \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(K))\, d\nu_{n,k}(F),$$

όπου $r_{n,k} = \binom{n}{k}\frac{\omega_n}{\omega_k\omega_{n-k}}$. Από το Λήμμα 6.4.4 γνωρίζουμε ότι

$$\mathbb{E}(V_k(P_{N,n}^{\beta})) = r_{n,k}\mathbb{E}(\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})),$$

και άρα

$$\mathbb{E}\Big(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))\, d\nu_{n,k}(F)\Big) = \mathbb{E}(\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})). \tag{6.4.3}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός, μπορούμε να αποδείξουμε το επόμενο λήμμα.

Λήμμα 6.4.9. *Για κάθε $\beta > -1$ και*

$$k \geqslant \log\left(n\left(1+\log\left(4\sqrt{\beta+\frac{n}{2}+1}\right)\right)\right),$$

αν $N \geqslant g(n,\beta)c_1^{\beta+\frac{n+1}{2}}$, τότε το ενδεχόμενο

$$\nu_{n,k}\Big(\Big\{F \in G_{n,k} : \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))^{1/k} \leqslant c_2\frac{1}{\sqrt{k}}\sqrt{1-(g(n,\beta)/N)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}\Big\}\Big) \geqslant 1-e^{-k},$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-k}$.

Απόδειξη. Θέτουμε $r := \sqrt{1-(g(n,\beta)/N)^{\frac{2}{2\beta+n+1}}}$, και

$$S_t = \Big\{F \in G_{n,k} : \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))^{1/k} \geqslant \frac{tr}{\sqrt{k}}\Big\}.$$

Από την ανισότητα Markov,

$$\nu_{n,k}(S_t) \leqslant \Big(\frac{\sqrt{k}}{tr}\Big)^k \int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))\, d\nu_{n,k}(F).$$

Θα αποδείξουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{P}\Big(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))\, d\nu_{n,k}(F) \leqslant \Big(c_3 \frac{r}{\sqrt{k}}\Big)^k \Big) \geqslant 1 - e^{-k},$$

και αυτό συνεπάγεται τον ισχυρισμό του λήμματος (με $c_2 = c_3 e$) αν επιλέξουμε $t = c_3 e$. Σημειώνουμε ότι, πάλι από την ανισότητα Markov, υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_4 > 0$ τέτοια ώστε, εφαρμόζοντας επίσης την (6.4.3),

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\Big(\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))\, d\nu_{n,k}(F) \geqslant \Big(\frac{c_4 e r}{\sqrt{k}}\Big)^k \Big) &\leqslant e^{-k}\mathbb{E}\left(\frac{\int_{G_{n,k}} \mathrm{vol}_k(P_F(P_{N,n}^{\beta}))\, d\nu_{n,k}(F)}{\mathrm{vol}_k\big(rB_2^k\big)} \right) \\ &= e^{-k}\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})}{\mathrm{vol}_k(rB_2^k)} \right),\end{aligned}$$

άρα το πρόβλημα ανάγεται στο να δοθεί άνω φράγμα της σωστής τάξης για την $\mathbb{E}(\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}}))$. Θα δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})}{\mathrm{vol}_k(rB_2^k)} \right) \leqslant c_5^k,$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_5 > 0$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός, το οποίο αποδεικνύεται στο [29, Λήμμα 3.3 (α)], ότι για κάθε $\beta > -1$, $m \in \mathbb{N}$, και κάθε φραγμένο $A \subset \mathbb{R}^m$,

$$\mathbb{E}(\mathrm{vol}_m(P_{N,m}^{\beta} \cap A)) \leqslant N \sup_{x \in A} B(\|x\|_2)\mathrm{vol}_m(A).$$

Αν $A = B_2^k \setminus rB_2^k$, τότε, αφού $\|x\|_2 \geqslant r$ για κάθε $x \in A$,

$$\mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}})}{\mathrm{vol}_k(rB_2^k)} \right) \leqslant 1 + \mathbb{E}\left(\frac{\mathrm{vol}_k(P_{N,k}^{\beta+\frac{n-k}{2}} \cap A)}{\mathrm{vol}_k(rB_2^k)} \right) \leqslant 1 + r^{-k} N B(r).$$

Παρατηρήστε ότι η υπόθεση για το N συνεπάγεται ότι $r \geqslant c_6$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c_6 > 0$. Χρησιμοποιώντας το άνω φράγμα στην (6.4.2) παίρνουμε, για $k \geqslant \log\big(n \log\big(\sqrt{\beta + \frac{n}{2}} + 1\big)\big)$,

$$r^{-k} N B(r) \leqslant N \frac{1}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\beta + \frac{n}{2}}} \frac{(g(n,\beta)/N)^{\frac{2}{2\beta+n+1}(\beta + \frac{n+1}{2})}}{r^{k+1}} \leqslant \frac{g(n,\beta)}{2\sqrt{\pi}\sqrt{\beta + \frac{n}{2}}} \frac{1}{c_6^{k+1}} \leqslant c^k,$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του λήμματος. □

Είναι τώρα φανερό ότι, έχοντας αποδείξει το Λήμμα 6.4.8 και το Λήμμα 6.4.9, μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.4.7, ακριβώς όπως κάναμε για το Θεώρημα 6.2.1.

6.5 Η περίπτωση των unconditional κυρτών σωμάτων

Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ (αυτό σημαίνει ότι το K έχει μια γραμμική εικόνα η οποία είναι συμμετρική ως προς τους υποχώρους συντεταγμένων $e_i^{\perp}$, όπου $\{e_1,\ldots,e_n\}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$). Αφού η ποσότητα $\Phi_{[k]}(K)$ είναι γραμμικά αναλλοίωτη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K βρίσκεται στην ισοτροπική θέση. Τότε, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι συμμετρικό ως προς τους υποχώρους συντεταγμένων και από ένα πολύ γνωστό αποτέλεσμα των Bobkov και Nazarov (δείτε τα [27] και [28]) έχουμε ότι

$$c_1B_\infty^n \subseteq K \subseteq c_2nB_1^n$$

για κάποιες απόλυτες σταθερές $c_1,c_2>0$, άρα το πρόβλημα ουσιαστικά ανάγεται στο να δοθούν ακριβείς εκτιμήσεις για την $\Phi_{[k]}(K)$ στην περίπτωση που το K είναι το cross-polytope $B_1^n=\mathrm{conv}\{\pm e_1,\ldots,\pm e_n\}$. Πράγματι, μπορούμε εύκολα να δούμε ότι αν K είναι ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε, για κάθε $1\leqslant k\leqslant n$, έχουμε ότι

$$\Phi_{[k]}(K)\leqslant c\Phi_{[k]}(B_1^n) \tag{6.5.1}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε κάτι γενικότερο. Για κάθε $p\neq 0$ θεωρούμε την ποσότητα

$$W_{[k,p]}(K)=\mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\Big(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(K))^p\,d\nu_{n,k}(F)\Big)^{\frac{1}{kp}}.$$

Παρατηρούμε ότι $\mathrm{vol}_k(P_F(K))^{\frac{1}{k}}\leqslant c_2n\,\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{\frac{1}{k}}$ για κάθε $F\in G_{n,k}$, άρα

$$\begin{aligned}W_{[k,-p]}(K)&=\Big(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-p}\,d\nu_{n,k}(F)\Big)^{-\frac{1}{kp}}\\&\leqslant c_2n\Big(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{-p}\,d\nu_{n,k}(F)\Big)^{-\frac{1}{kp}}\leqslant c_3W_{[k,-p]}(B_1^n)\end{aligned}$$

για κάθε $p\neq 0$ και $1\leqslant k\leqslant n-1$, αν λάβουμε υπ' όψιν μας το γεγονός ότι $\mathrm{vol}_n(B_1^n)=\frac{2^n}{n!}$, απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{vol}_n(B_1^n)^{-1/n}\approx n$. Ειδικότερα, έχουμε την (6.5.1), διότι

$$\Phi_{[k]}(K)=W_{[k,-n]}(K).$$

Συνεχίζουμε λοιπόν εξετάζοντας την περίπτωση του cross-polytope B_1^n. Μια πρώτη παρατήρηση είναι ότι $B_1^n\supseteq\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n$ άρα, προφανώς, $P_F(B_1^n)\supseteq\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n\cap F$ για κάθε $1\leqslant k\leqslant n-1$ και $F\in G_{n,k}$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{\frac{1}{k}}\geqslant\frac{\omega_k^{1/k}}{\sqrt{n}}\approx\frac{1}{\sqrt{kn}}.$$

Από την άλλη πλευρά, είναι γνωστό ότι $\mathrm{vol}_k(B_\infty^n\cap F)\geqslant\mathrm{vol}_k(B_\infty^k)=2^k$ και, αφού το $B_\infty^n\cap F$ είναι το πολικό σώμα του $P_F(B_1^n)$ στον F, η ανισότητα Blaschke-Santaló μας δίνει

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{\frac{1}{k}}\leqslant\mathrm{vol}_k(B_\infty^n\cap F)^{-\frac{1}{k}}\omega_k^{2/k}\leqslant\frac{c}{k}$$

για κάθε k και $F\in G_{n,k}$. Συνοψίζουμε αυτές τις αρχικές πληροφορίες στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 6.5.1. *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και κάθε $F \in G_{n,k}$ έχουμε*

$$\frac{c_1}{\sqrt{kn}} \leqslant \mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{\frac{1}{k}} \leqslant \frac{c_2}{k},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$c_3\sqrt{n/k} \leqslant W_{[k,-p]}(B_1^n) \leqslant c_4\, n/k$$

για κάθε $p \neq 0$, όπου $c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Στη συνέχεια, εξετάζουμε την τυπική συμπεριφορά μιας k-διάστατης προβολής του B_1^n. Για τον τυχαίο $F \in G_{n,k}$ έχουμε το ακόλουθο άνω φράγμα:

Λήμμα 6.5.2. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$. Αν $k \geqslant \log n$ τότε με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - \exp(-k)$ έχουμε*

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{c\sqrt{\log(1+n/k)}}{\sqrt{kn}}. \tag{6.5.2}$$

Απόδειξη. Συνδυάζουμε δύο πολύ γνωστά αποτελέσματα. Το πρώτο είναι το (άνω φράγμα στο) λήμμα των Johnson-Lindenstrauss από το [59].

> *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_i > 0$, $i = 1, 2, 3$, τέτοιες ώστε αν $\varepsilon > 0$ και $N < \exp(\varepsilon^2 k/16)$ τότε για κάθε $\{y_1, \ldots, y_N\} \subset S^{n-1}$ υπάρχει υποσύνολο $\mathcal{G} \subseteq G_{n,k}$ με μέτρο $\nu_{n,k}(\mathcal{G}) \geqslant 1 - \exp(-\varepsilon^2 k/16)$ τέτοιο ώστε για κάθε $F \in \mathcal{G}$ και κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$ να έχουμε*
>
> $$\|P_F(y_j)\|_2 \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{k/n}. \tag{6.5.3}$$

Χρησιμοποιούμε επίσης γνωστά κάτω φράγματα για τον όγκο της τομής πεπερασμένου πλήθους συμμετρικών λωρίδων. Οι Carl-Pajor [35], και ανεξάρτητα ο Gluskin [48] (δείτε επίσης το [19]), έδωσαν κάτω φράγμα για τον όγκο ενός συμμετρικού πολυέδρου $K = \{x \in \mathbb{R}^k : |\langle x, w_j\rangle| \leqslant 1, j = 1, \ldots, n\}$ συναρτήσει του $\max\{\|w_j\|_2 : 1 \leqslant j \leqslant n\}$:

> *Έστω $w_1, \ldots, w_n$ διανύσματα που παράγουν τον $\mathbb{R}^k$ με $\|w_j\|_2 \leqslant 1$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$. Θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σώμα*
>
> $$C = \{x \in \mathbb{R}^k : |\langle x, w_j\rangle| \leqslant 1, j = 1, \ldots, n\}.$$
>
> *Τότε,*
>
> $$\mathrm{vol}_k(C)^{1/k} \geqslant \frac{c}{\sqrt{\log(1+n/k)}}, \tag{6.5.4}$$
>
> *όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Θεωρούμε τα συνήθη ορθοκανονικά διανύσματα $e_1, \ldots, e_n$ στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε $\varepsilon > 0$ το οποίο θα επιλεγεί κατάλληλα, και έναν υπόχωρο $F \in G_{n,k}$ που ικανοποιεί την $\|P_F(e_j)\|_2 \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt{k/n}$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$. Αν θέσουμε $w_j = \frac{1}{1+\varepsilon}\sqrt{\frac{n}{k}}P_F(e_j)$ έχουμε ότι

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant n} \|w_j\|_2 \leqslant 1.$$

Από την (6.5.4) βλέπουμε ότι το $C=\{x\in F:|\langle x,w_j\rangle|\leqslant 1, j=1,\ldots,n\}$ έχει όγκο

$$\mathrm{vol}_k(C)^{1/k}\geqslant \frac{c_1}{\sqrt{\log(1+n/k)}}.$$

Συνεπώς, το πολικό σώμα $C^\circ=\mathrm{conv}\{\pm w_1,\ldots,\pm w_n\}$ του C στον F έχει όγκο

$$\mathrm{vol}_k(C^\circ)^{1/k}\leqslant \frac{c_2}{k}\mathrm{vol}_k(C)^{-1/k}\leqslant \frac{c_3\sqrt{\log(1+n/k)}}{k}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$P_F(B_1^n)=\mathrm{conv}\{\pm P_F(e_1),\ldots,\pm P_F(e_n)\}=(1+\varepsilon)\sqrt{k/n}\,C^\circ.$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k}\leqslant (1+\varepsilon)\frac{c_3\sqrt{\log(1+n/k)}}{\sqrt{kn}}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\exp(-\varepsilon^2k/16)$, αν υποθέσουμε ότι $n<\exp(\varepsilon^2k/16)$. Αν $k\geqslant\log n$ τότε επιλέγοντας $\varepsilon=4$ παίρνουμε το λήμμα. □

Από το Λήμμα 6.5.2 προκύπτει εύκολα το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 6.5.3. *Έστω $1\leqslant k\leqslant n$. Αν $k\geqslant\log n$ τότε*

$$W_{[k,-p]}(B_1^n)\leqslant c\sqrt{n/k}\sqrt{\log(1+n/k)}$$

για κάθε $p\geqslant c'/(n\log n)$, όπου $c,c'>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$\Phi_{[k]}(B_1^n)\leqslant c\sqrt{n/k}\sqrt{\log(1+n/k)}.$$

Απόδειξη. Έστω $A_{n,k}$ το υποσύνολο της $G_{n,k}$ για το οποίο έχουμε

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k}\leqslant\frac{c\sqrt{\log(1+n/k)}}{\sqrt{kn}},\quad F\in A_{n,k}.$$

Από το Λήμμα 6.5.2 έχουμε $\nu_{n,k}(A_{n,k})\geqslant 1-\exp(-k)$. Τώρα, για κάθε $p\geqslant c'/(n\log n)$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}W_{[k,-p]}(B_1^n)&\leqslant c_1n\Big(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{-p}\,d\nu_{n,k}(F)\Big)^{-\frac{1}{kp}}\\&\leqslant c_1n[\nu_{n,k}(A_{n,k})]^{-\frac{1}{kp}}\left(\frac{c\sqrt{\log(1+n/k)}}{\sqrt{kn}}\right)\\&\leqslant c_2\sqrt{n/k}\sqrt{\log(1+n/k)}(1-e^{-k})^{-\frac{1}{kp}}\\&\leqslant c_3\sqrt{n/k}\sqrt{\log(1+n/k)},\end{aligned}$$

παίρνοντας υπ' όψιν το γεγονός ότι

$$(1-e^{-k})^{\frac{1}{kp}}\geqslant\exp(-2e^{-k}/(kp))\geqslant\frac{1}{2},$$

διότι $ke^k\geqslant n\log n$ και $p\geqslant c'/(n\log n)$. □

Από την (6.5.1) έχουμε τώρα το ίδιο άνω φράγμα για κάθε unconditional κυρτό σώμα.

Θεώρημα 6.5.4. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\log n \leqslant k \leqslant n$,*

$$\Phi_{[k]}(K) \leqslant c\sqrt{n/k} \cdot \sqrt{\log(1+n/k)}, \tag{6.5.5}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στη συνέχεια, μελετώντας την περίπτωση $K = B_1^n$ και χρησιμοποιώντας την $W_{[k,-p]}(K) \leqslant cW_{[k,-p]}(B_1^n)$, που ισχύει για κάθε p, δίνουμε φράγματα για την «ελάχιστη τιμή» του p για την οποία $W_{[k,-p]}(K) \leqslant c\sqrt{n/k}$ για κάθε unconditional κυρτό σώμα.

Θεώρημα 6.5.5. *Έστω K ένα unconditional κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και κάθε $p \geqslant c_1(n-k)\log n$ έχουμε ότι*

$$W_{[k,-p]}(K) \leqslant c_2\sqrt{n/k}, \tag{6.5.6}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Το επιχείρημα που θα χρησιμοποιήσουμε βασίζεται στην ύπαρξη k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ για τους οποίους $\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{c}{\sqrt{kn}}$. Για το άλλο άκρο, δεν είναι δύσκολο να δώσουμε παραδείγματα υποχώρων $F \in G_{n,k}$ για τους οποίους $\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \approx \frac{1}{k}$. Μπορούμε, για παράδειγμα, να επιλέξουμε $F_\sigma = \mathrm{span}\{e_j : j \in \sigma\}$ για οποιοδήποτε $\sigma \subseteq [n]$ με $|\sigma| = k$. Τότε,

$$\mathrm{vol}_k(P_{F_\sigma}(B_1^n)) = \frac{2^k}{k!}.$$

Το επόμενο λήμμα δίνει παραδείγματα υποχώρων $F \in G_{n,k}$ για τους οποίους $\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{c}{\sqrt{kn}}$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k < \frac{n}{10}$, αλλιώς αυτή η εκτίμηση ισχύει για τον τυχαίο F από το Λήμμα 6.5.2.

Λήμμα 6.5.6. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n/10$. Υπάρχει $F \in G_{n,k}$ τέτοιος ώστε*

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{c}{\sqrt{kn}},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια διαμέριση $[n] = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_k$ σε ξένα υποσύνολα σ_i με $|\sigma_i| = m_i$, και ορίζουμε

$$v_i = \frac{1}{\sqrt{m_i}} \sum_{j \in \sigma_i} e_j.$$

Μπορούμε να επιλέξουμε $m_1 = \cdots = m_{k-1} = \lfloor n/k \rfloor$ και $m_k = n - (k-1)\lfloor n/k \rfloor$. Παρατηρήστε ότι $\frac{n}{2k} \leqslant \frac{n}{k} - 1 \leqslant m_i \leqslant \frac{n}{k}$ για κάθε $i = 1, \ldots, k-1$ και

$$m_k = n - (k-1)\lfloor n/k \rfloor \geqslant n - \frac{k-1}{k}n = \frac{n}{k}.$$

Ορίζουμε $F = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_k\}$. Παρατηρούμε ότι τα $v_1, \ldots, v_k$ σχηματίζουν ορθοκανονική βάση για τον F και ότι αν $j \in \sigma_i$ τότε

$$P_F(e_j) = \langle e_j, v_i\rangle v_i = \frac{v_i}{\sqrt{m_i}}.$$

Συνεπώς, η προβολή $P_F(B_1^n)$ είναι η απόλυτη κυρτή θήκη k ορθογώνιων διανυσμάτων με μήκη $\frac{1}{\sqrt{m_1}}, \ldots, \frac{1}{\sqrt{m_k}} \leqslant \sqrt{\frac{2k}{n}}$. Έπεται ότι

$$\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n)) = \frac{2^k}{k!}\prod_{i=1}^k \frac{1}{\sqrt{m_i}} \leqslant \frac{2^k}{k!}\Big(\frac{2k}{n}\Big)^{k/2},$$

άρα $\mathrm{vol}_k(P_F(B_1^n))^{1/k} \leqslant c/\sqrt{kn}$. □

Το επόμενο λήμμα προκύπτει εύκολα από τον ορισμό της κυρτής θήκης.

Λήμμα 6.5.7. *Έστω $P = \mathrm{conv}\{u_1, \ldots, u_N\}$ και $Q = \mathrm{conv}\{w_1, \ldots, w_N\}$ δύο πολύτοπα στον $\mathbb{R}^k$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $\varepsilon > 0$ ισχύει $\|u_j - w_j\|_2 \leqslant \varepsilon$ για κάθε $j = 1, \ldots, N$. Τότε,*

$$P \subseteq Q + \varepsilon B_2^k \quad \textit{και} \quad Q \subseteq P + \varepsilon B_2^k.$$

Θεωρούμε τις μετρικές $\sigma_\infty(E, F) = \|P_E - P_F\|$ και $d(E, F) = \inf\{\|I_n - U\| : U \in O(n), U(E) = F\}$ στην $G_{n,k}$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$\sigma_\infty(E, F) \leqslant d(E, F) \leqslant \sqrt{2}\sigma_\infty(E, F)$$

για κάθε $E, F \in G_{n,k}$. Αρχικά, σταθεροποιούμε έναν υπόχωρο F_0 που ικανοποιεί την εκτίμηση του Λήμματος 6.5.6.

Λήμμα 6.5.8. *Έστω E στον $G_{n,k}$ με $d(E, F_0) \leqslant \frac{1}{\sqrt{n}}$. Τότε,*

$$\mathrm{vol}_k(P_E(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{C}{\sqrt{kn}},$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έστω $U \in O(n)$ τέτοιος ώστε $U(E) = F_0$ και $\|I_n - U\| \leqslant \varepsilon := \frac{1}{\sqrt{n}}$. Για κάθε $j = 1, \ldots, n$ θέτουμε $u_j = P_{F_0}(e_j)$ και $w_j = U(P_E(e_j))$. Τότε, $u_j, w_j \in F_0$ και έχουμε

$$\|P_E(e_j) - w_j\|_2 = \|P_E(e_j) - U(P_E(e_j))\|_2 \leqslant d(E, F_0)\,\|P_E(e_j)\|_2 \leqslant \varepsilon$$

και

$$\|P_E(e_j) - u_j\|_2 = \|P_E(e_j) - P_{F_0}(e_j)\|_2 \leqslant \|P_E - P_{F_0}\| = \sigma_\infty(E, F_0) \leqslant \varepsilon,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\|u_j - w_j\|_2 \leqslant 2\epsilon = \frac{2}{\sqrt{n}}.$$

Από το Λήμμα 6.5.7 παίρνουμε

$$U(P_E(B_1^n)) \subseteq P_{F_0}(B_1^n) + \frac{2}{\sqrt{n}}B_2^n \cap F_0 \subseteq 3P_{F_0}(B_1^n).$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{vol}_k(P_E(B_1^n))^{1/k} \leqslant 3\mathrm{vol}_k(P_{F_0}(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{3c}{\sqrt{kn}},$$

όπου $c > 0$ είναι η σταθερά στο Λήμμα 6.5.6. □

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 6.5.5. Ο Szarek έχει αποδείξει στο [112] ότι για κάθε $F \in G_{n,k}$ και κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει ότι

$$\nu_{n,k}(B_d(F,\varepsilon)) \geqslant (c_1\varepsilon)^{k(n-k)}.$$

Συνεπώς, το άνω φράγμα

$$\mathrm{vol}_k(P_E(B_1^n))^{1/k} \leqslant \frac{C}{\sqrt{kn}}$$

ισχύει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $(c_1/\sqrt{n})^{k(n-k)}$. Έπεται ότι αν $p > 0$ τότε

$$\begin{aligned} W_{[k,-p]}(B_1^n) &\leqslant c_1 n\Big(\int_{B_d(F_0,1/\sqrt{n})} \mathrm{vol}_k(P_E(B_1^n))^{-p} d\nu_{n,k}(E)\Big)^{-\frac{1}{kp}} \\ &\leqslant c_1 n\,[\nu_{n,k}(B_d(F_0,1/\sqrt{n}))]^{-\frac{1}{kp}} \cdot \frac{c_2}{\sqrt{kn}} \leqslant (c_3 n)^{\frac{n-k}{p}} c_4\sqrt{n/k}. \end{aligned} \tag{6.5.7}$$

Ειδικότερα, παίρνουμε το εξής: Για κάθε $p \geqslant (n-k)(\log n)$ ισχύει ότι

$$W_{[k,-p]}(B_1^n) \leqslant c\sqrt{n/k}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά, άρα $W_{[k,-p]}(B_1^n) \approx \sqrt{n/k}$ από το Λήμμα 6.5.1. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Δύο ανοικτά προβλήματα

7.1 Ο συμμετρικός μέσος ενός κυρτού σώματος

Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $K_z := K - z$ τη μεταφορά του K κατά z. Ο συμμετρικός μέσος $\mathrm{sav}(K)$ του K είναι η παράμετρος

$$\mathrm{sav}(K) := \inf\Big\{\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)}\int_{K_z} \|-x\|_{K_z}\,dx : z \in \mathrm{int}(K)\Big\}.$$

Η παράμετρος $\mathrm{sav}(K)$ είναι αφφινικά αναλλοίωτη: για κάθε αντιστρέψιμο αφφινικό μετασχηματισμό $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ ισχύει ότι $\mathrm{sav}(T(K)) = \mathrm{sav}(K)$. Μπορούμε να την βλέπουμε ως ένα μέτρο ασυμμετρίας του K με την έννοια του [53].

Οι Guédon και Litvak μελέτησαν το πρόβλημα να δοθούν άνω φράγματα για την παράμετρο $\mathrm{sav}(K)$ στο [54]. Απέδειξαν ότι

$$\frac{n}{n+1} \leqslant \mathrm{sav}(K) < \sqrt{n}$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, με ισότητα στην αριστερή ανισότητα αν και μόνο αν το K είναι συμμετρικό. Για την απόδειξη της δεξιάς ανισότητας χρησιμοποιούν μια ειδική θέση του K, αυτήν για την οποία η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο K και έχει κέντρο το κέντρο βάρους του K. Περιγράφουμε εν συντομία το επιχείρημά τους.

Θεώρημα 7.1.1 (Guédon-Litvak). *Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι*

$$\mathrm{sav}(K) \leqslant \frac{n}{\sqrt{n+2}} < \sqrt{n}.$$

Απόδειξη. Υπάρχει αφφινικός μετασχηματισμός $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ τέτοιος ώστε το $T(K)$ να έχει κέντρο βάρους το 0 και η B_2^n να είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του $\tilde{K} := T(K)$. Θα δείξουμε ότι

$$\Big(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(\tilde{K})}\int_{\tilde{K}} \|x\|_2^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant \frac{n}{\sqrt{n+2}}$$

και το ζητούμενο έπεται διότι $B_2^n \subseteq \tilde{K}$, άρα $\|\cdot\|_{\tilde{K}} \leqslant \|\cdot\|_2$, και

$$\mathrm{sav}(K) \leqslant \frac{1}{\mathrm{vol}_n(\tilde{K})}\int_{\tilde{K}} \|x\|_K\,dx \leqslant \Big(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(\tilde{K})}\int_{\tilde{K}} \|x\|_K^2\,dx\Big)^{1/2}.$$

Από την υπόθεση ότι το $\tilde{K}$ έχει κέντρο βάρους το 0 έπεται (δείτε το [62]) ότι

$$\Big(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(\tilde{K})}\int_{\tilde{K}}\langle x,u\rangle^2\,dx\Big)^{1/2}\leqslant\sqrt{\frac{n}{n+2}}\|u\|_{\tilde{K}^\circ}\tag{7.1.1}$$

για κάθε $u\in\mathbb{R}^n$. Από το θεώρημα του John, υπάρχουν $u_1,\dots,u_m\in S^{n-1}$ τέτοια ώστε $\|u_j\|_2=\|u_j\|_{\tilde{K}}=\|u_j\|_{\tilde{K}^\circ}=1$ και $c_1,\dots,c_m>0$ ώστε

$$I_n=\sum_{j=1}^m c_ju_j\otimes u_j.$$

Έπεται ότι $\|x\|_2^2=\sum_{j=1}^m c_j\langle x,u_j\rangle^2$ για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\Big(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(\tilde{K})}\int_{\tilde{K}}\|x\|_2^2\,dx\Big)^{1/2}&=\Big(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(\tilde{K})}\int_{\tilde{K}}\sum_{j=1}^m c_j\langle x,u_j\rangle^2\,dx\Big)^{1/2}\\&=\Big(\frac{1}{\mathrm{vol}_n(\tilde{K})}\sum_{j=1}^m c_j\int_{\tilde{K}}\langle x,u_j\rangle^2\,dx\Big)^{1/2}\\&\leqslant\Big(\sum_{j=1}^m c_j\frac{n}{n+2}\|u_j\|_{\tilde{K}^\circ}^2\Big)^{1/2}=\Big(\frac{n}{n+2}\sum_{j=1}^m c_j\Big)^{1/2}\\&=\frac{n}{\sqrt{n+2}},\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και την $\sum_{j=1}^m c_j=\mathrm{tr}(I_n)=n$. □

Θα δείξουμε, με πολύ πιο άμεσο τρόπο, ότι ένα άνω φράγμα της ίδιας τάξης ισχύει αν υποθέσουμε ότι το K βρίσκεται στην ισοτροπική θέση.

Θεώρημα 7.1.2. *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_K\|-x\|_K\,dx\leqslant c\sqrt{n},$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, $\mathrm{sav}(K)\leqslant c\sqrt{n}$.

Απόδειξη. Αφού το K είναι ισοτροπικό, γνωρίζουμε ότι $K\supseteq c_1L_KB_2^n$, όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, $\|y\|_K\leqslant\frac{1}{c_1L_K}\|y\|_2$ για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_K\|-x\|_K\,dx&\leqslant\frac{1}{c_1L_K}\int_K\|-x\|_2\,dx=\frac{1}{c_1L_K}\int_K\|x\|_2\,dx\\&\leqslant\frac{1}{c_1L_K}\Big(\int_K\|x\|_2^2\,dx\Big)^{1/2}=\frac{1}{c_1L_K}\sqrt{n}L_K,\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο με $c=1/c_1>0$. □

Το πρόβλημα σχετίζεται άμεσα με τα αποτελέσματα και τα ερωτήματα του Κεφαλαίου 4. Υποθέτοντας ότι το K είναι ισοτροπικό, ζητάμε ένα άνω φράγμα για την ποσότητα

$$\int_{-K}\|x\|_K\,dx,$$

και το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 4.3.4 μας δίνει την ακόλουθη εκτίμηση.

Θεώρημα 7.1.3. *Έστω K ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{-K} \|x\|_K \, dx \leqslant c\sqrt[4]{n}\,\sqrt{n}L_K M(K),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα,

$$\mathrm{sav}(K) \leqslant c\sqrt[4]{n}\,\sqrt{n}L_K M(K_{\rm iso})$$

για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, όπου $K_{\rm iso}$ είναι μια ισοτροπική θέση του K.

Έχουμε παρατηρήσει στο Κεφάλαιο 4 ότι είναι πιθανό η ποσότητα $\sqrt{n}L_K M(K_{\rm iso})$ που εμφανίζεται στο φράγμα του Θεωρήματος 7.1.3 να είναι πάντα φραγμένη από μια σταθερή δύναμη του $\log n$. Αυτό παραμένει ανοικτό πρόβλημα, είναι όμως μια ένδειξη για το ότι το φράγμα στα Θεωρήματα 7.1.1 και 7.1.2 να επιδέχεται βελτίωση. Επίσης, τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 4 δείχνουν ότι για διάφορες κλάσεις κυρτών σωμάτων μπορούμε ήδη να εξασφαλίσουμε καλύτερο άνω φράγμα για τον συμμετρικό μέσο $\mathrm{sav}(K)$.

Ένα δεύτερο αποτέλεσμα το οποίο αποδεικνύεται στο [54] αφορά την περίπτωση όπου το K είναι πολύεδρο με «λίγες έδρες».

Θεώρημα 7.1.4 (Guédon-Litvak)**.** *Έστω $N > n$ και K ένα φραγμένο πολύεδρο στον $\mathbb{R}^n$ με N έδρες. Τότε,*

$$\mathrm{sav}(K) \leqslant c\log N,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K έχει κέντρο βάρους το 0 και όγκο ίσο με 1. Αφού το K έχει N έδρες, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}^n$ ώστε

$$\|x\|_K = \max_{1\leqslant j\leqslant N} \langle x, y_j\rangle.$$

Παρατηρήστε ότι $K^\circ = \mathrm{conv}\{y_1, \ldots, y_N\}$ και $\|y_j\|_{K^\circ} = 1$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$. Για κάθε $q \geqslant 2$ μπορούμε να γράψουμε, χρησιμοποιώντας επίσης την ανισότητα Kahane-Khintchine και την (7.1.1),

$$\begin{aligned}
\mathrm{sav}(K) &\leqslant \int_K \|-x\|_K\,dx = \int_K \max_{1\leqslant j\leqslant N}\langle -x, y_j\rangle\,dx \leqslant \int_K \Big(\sum_{j=1}^N |\langle x, y_j\rangle|^q\Big)^{1/q} dx \\
&\leqslant \Big(\int_K \sum_{j=1}^N |\langle x, y_j\rangle|^q\,dx\Big)^{1/q} \leqslant c_1 q\Big(\sum_{j=1}^N \Big(\int_K |\langle x, y_j\rangle|^2\,dx\Big)^{q/2}\Big)^{1/q} \\
&\leqslant c_1 q N^{1/q} \max_{1\leqslant j\leqslant N}\Big(\int_K |\langle x, y_j\rangle|^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant c_1 q N^{1/q} \max_{1\leqslant j\leqslant N}\sqrt{\frac{n}{n+2}}\|y_j\|_{K^\circ} \\
&\leqslant c_1 q N^{1/q}.
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $q = \max\{2, \log N\}$ έχουμε το ζητούμενο. □

Μπορούμε και πάλι να δείξουμε ένα άνω φράγμα της ίδιας τάξης δουλεύοντας με την ισοτροπική θέση.

Θεώρημα 7.1.5. *Έστω $N > n$ και K ισοτροπικό πολύεδρο με N έδρες στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_K \|-x\|_K\, dx \leqslant c\log N,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, $\mathrm{sav}(K) \leqslant c\log N$.

Απόδειξη. Όπως και στην προηγούμενη απόδειξη, υπάρχουν $y_1, \ldots, y_N \in \mathbb{R}^n$ με $\|y_j\|_{K^\circ} = 1$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$, ώστε

$$\|x\|_K = \max_{1\leqslant j\leqslant N} \langle x, y_j\rangle.$$

Γράφουμε

$$\int_K \|-x\|_K\, dx = \int_K \max_{1\leqslant j\leqslant N} \langle -x, y_j\rangle\, dx \leqslant \int_K \max_{1\leqslant j\leqslant N} |\langle x, y_j\rangle|\, dx$$

και παρατηρούμε ότι οι συναρτήσεις $x \mapsto \langle x, y_j\rangle$ είναι ψ_1 στο κυρτό σώμα K, με

$$\|\langle \cdot, y_j\rangle\|_{\psi_1} \leqslant c_1 L_K \|y_j\|_2$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$. Χρησιμοποιούμε την ακόλουθη κλασική εκτίμηση: αν οι συναρτήσεις $\{f_i\}_{i=1}^N$, $N \geqslant 2$, σε κάποιον χώρο πιθανότητας, ικανοποιούν την ψ_1-εκτίμηση $\|f_i\|_{\psi_1} \leqslant b$ για κάθε $i = 1, \ldots, N$, τότε

$$\mathbb{E} \max_{1\leqslant i\leqslant N} |f_i| \leqslant Cb\log N,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\int_K \|-x\|_K\, dx \leqslant c_2 \log N \max_{1\leqslant j\leqslant N} \|\langle\cdot, y_j\rangle\|_{\psi_1} \leqslant c_3 \log N\, L_K \max_{1\leqslant j\leqslant N} \|y_j\|_2. \tag{7.1.2}$$

Όμως, $K \supseteq c_4 L_K B_2^n$ άρα $K^\circ \subseteq \frac{1}{c_4 L_K} B_2^n$, απ' όπου έπεται ότι $\|y_j\|_2 \leqslant \frac{1}{c_4 L_K}$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant N$. Επιστρέφοντας στην (7.1.2) παίρνουμε

$$\int_K \|-x\|_K\, dx \leqslant c_3 \log N\, L_K \cdot \frac{1}{c_4 L_K} = c\log N$$

με $c = c_3/c_4 > 0$. □

Όπως σημειώνουν οι Guédon και Litvak στο [54], το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι μπορεί ένα κυρτό σώμα να απέχει πολύ από το να είναι συμμετρικό με την έννοια της απόστασης Banach-Mazur αλλά ο συμμετρικός του μέσος να είναι πολύ μικρότερης τάξης ως προς τη διάσταση. Για παράδειγμα, το simplex S έχει συμμετρικό μέσο $\mathrm{sav}(S) \leqslant c\log n$ αφού έχει $n+1$ έδρες.

Μπορούμε μάλιστα, χρησιμοποιώντας το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 7.1.2 να δείξουμε ότι $\mathrm{sav}(S) \leqslant C$, όπου $C > 0$ είναι απόλυτη σταθερά. Πράγματι, για το ισοτροπικό κανονικό simplex Δ_n γνωρίζουμε ότι $\Delta_n \supseteq c_1\sqrt{n} B_2^n$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Συνεπώς, $\|y\|_{\Delta_n} \leqslant \frac{1}{c_1\sqrt{n}} \|y\|_2$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{\Delta_n} \|-x\|_{\Delta_n}\, dx &\leqslant \frac{1}{c_1\sqrt{n}} \int_{\Delta_n} \|-x\|_2\, dx = \frac{1}{c_1\sqrt{n}} \int_{\Delta_n} \|x\|_2\, dx \\ &\leqslant \frac{1}{c_1\sqrt{n}} \Big(\int_{\Delta_n} \|x\|_2^2\, dx\Big)^{1/2} = \frac{1}{c_1\sqrt{n}}\sqrt{n},\end{aligned}$$

και έχουμε το ζητούμενο με $C = 1/c_1$.

7.2 Η MM^*-ανισότητα για ισοτροπικά συμμετρικά κυρτά σώματα

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Γράφουμε $\|\cdot\|$ για το συναρτησοειδές Minkowski του K, που ορίζεται από την $\|x\| = \inf\{t > 0 : x \in tK\}$, και h_K για την συνάρτηση στήριξης $h_K(x) = \max\{\langle x, y\rangle : y \in K\}$ του K. Οι παράμετροι

$$M(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\| \, d\sigma(x) \quad \text{και} \quad M^*(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(x) \, d\sigma(x),$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}, παίζουν κεντρικό ρόλο στην ασυμπτωτική θεωρία των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα.

Συμβολίζουμε με $\mathrm{vrad}(K) := (\mathrm{vol}_n(K)/\mathrm{vol}_n(B_2^n))^{1/n}$ την ακτίνα όγκου του K. Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι

$$M(K)^{-1} \leqslant \mathrm{vrad}(K) \leqslant M^*(K) = M(K^\circ),$$

όπου $K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \text{ για κάθε } x \in K\}$ είναι το πολικό σώμα του K. Ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα στην άλλη κατεύθυνση, το οποίο προκύπτει από αποτελέσματα των Figiel–Tomczak-Jaegermann [42], Lewis [68] και την εκτίμηση του Pisier στο [97] για τη νόρμα της προβολής Rademacher, ισχυρίζεται ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K, υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε

$$M(TK)M^*(TK) \leqslant c \log n,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στη γενική περίπτωση, όπου δεν υποθέτουμε ότι το K είναι συμμετρικό, είναι φυσιολογικό να θεωρήσουμε την παράμετρο

$$E(K) = \min M(TK)M^*(TK),$$

όπου το minimum είναι πάνω από όλους τους αντιστρέψιμους αφφινικούς μετασχηματισμούς του $\mathbb{R}^n$ για τους οποίους $0 \in \mathrm{int}(TK)$. Οι Banaszczyk, Litvak, Pajor και Szarek απέδειξαν στο [16] ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο βρίσκεται στη θέση John (δηλαδή, το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που εγγράφεται στο K είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα) τότε

$$M^*(K) \leqslant c\sqrt{n}\sqrt{\log n}.$$

Όταν το K βρίσκεται στη θέση John, από τον εγκλεισμό $K \supseteq B_2^n$ και το τετριμμένο άνω φράγμα $M(K) \leqslant M(B_2^n) = 1$, βλέπουμε ότι $E(K) \leqslant c\sqrt{n}\sqrt{\log n}$. Αυτή η εκτίμηση βελτιώθηκε από τον Rudelson στο [105]: απέδειξε ότι αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$E(K) \leqslant cn^{1/3} \log^b n$$

όπου $b > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ένα βασικό συστατικό της δουλειάς του Rudelson είναι μια γεωμετρική ανισότητα από το [104], η οποία συγκρίνει τους όγκους των k-διάστατων τομών ενός κυρτού σώματος με τους αντίστοιχους του σώματος διαφορών του.

Θεώρημα 7.2.1 (Rudelson). *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και κάθε $F \in G_{n,k}$ ισχύει ότι*

$$\mathrm{vrad}((K - K) \cap F) \leqslant c \, \min\{n/k, \sqrt{k}\} \max_{y \in F^\perp} \mathrm{vrad}(K \cap (F + y))$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στόχος μας είναι να δώσουμε άνω φράγματα για τις παραμέτρους $M^*(K)$ και $M(K)$, όταν το K βρίσκεται στην ισοτροπική θέση. Υπενθυμίζουμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται ισοτροπικό αν έχει όγκο 1, το κέντρο βάρους του είναι στο 0, και υπάρχει μια σταθερά $L_K > 0$ με την ιδιότητα ότι

$$\int_K \langle x, \vartheta \rangle^2 dx = L_K^2, \ \text{για κάθε } \vartheta \in S^{n-1}.$$

Ο E. Milman απέδειξε στο [77] ότι αν K είναι ένα συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$w(K) \leqslant C\sqrt{n}(\log n)^2 L_K.$$

Η εξάρτηση από τη διάσταση n είναι βέλτιστη αν εξαιρέσουμε τον λογαριθμικό όρο. Το δυϊκό πρόβλημα, να εκτιμήσουμε την παράμετρο $M(K)$ στην ισοτροπική θέση, μένει ανοικτό. Κάποια πρώτα μη τετριμμένα φράγματα δόθηκαν στο [45]. Η καλύτερη εκτίμηση που είναι γνωστή αυτή τη στιγμή είναι

$$M(K) \leqslant \frac{C \log^{2/5}(e+n)}{\sqrt[10]{n} L_K}$$

και οφείλεται στους Γιαννόπουλο και E. Milman (δείτε το [43]). Δίνουμε εδώ μια απλούστερη απόδειξη των αυτών των φραγμάτων για το μέσο πλάτος και τη μέση νόρμα ενός συμμετρικού ισοτροπικού κυρτού σώματος. Από αυτά προκύπτει ότι

$$M(K)M^*(K) \leqslant cn^{\alpha}(\log n)^b$$

όπου $\alpha = 4/9 < 1/2$ και οι $b, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Θα χρησιμοποιήσουμε κάποια εργαλεία από την ασυμπτωτική θεωρία χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα. Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός κάλυψης $N(K, L)$ δύο κυρτών σωμάτων ορίζεται ως ο ελάχιστος αριθμός μεταφορών του L που η ένωσή τους καλύπτει το K. Ο k-οστός αριθμός εντροπίας των K και L ορίζεται ως εξής:

$$e_k(K, L) := \inf\left\{t > 0 \ : \ N(K, tL) \leqslant 2^k\right\}.$$

Ένα σημείο από το οποίο μπορεί να ξεκινήσει κανείς για να φράξει την παράμετρο $M^*(K)$ είναι η ανισότητα εντροπίας του Dudley (δείτε, για παράδειγμα, το [8, Θεώρημα 5.5]):

$$\sqrt{n}M^*(K) \leqslant C \sum_{k\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{k}} e_k(K, B_2^n). \tag{7.2.1}$$

Θεωρούμε τώρα τις ακόλουθες ογκομετρικές παραμέτρους του K:

$$w_k(K) := \sup\{\mathrm{vrad}(K \cap E) : E \in G_{n,k}\}, v_k(K) := \sup\{\mathrm{vrad}(P_E(K)) : E \in G_{n,k}\},$$

και

$$w_k^-(K) := \inf\{\mathrm{vrad}(K \cap E) : E \in G_{n,k}\}, v_k^-(K) := \inf\{\mathrm{vrad}(P_E(K)) : E \in G_{n,k}\}.$$

Σημειώνουμε ότι $0 < c \leqslant w_k^-(K)v_k(K^\circ), v_k^-(K)w_k(K^\circ) \leqslant 1$ από την ανισότητα Blaschke-Santaló και την ανισότητα Bourgain-Milman. Παρατηρούμε επίσης ότι η απεικόνιση $k \mapsto v_k(K)$ είναι φθίνουσα από τις ανισότητες του Aleksandrov και τον τύπο του Kubota, και ότι η απεικόνιση

$k \mapsto w_k^-(K)$ είναι αύξουσα (αυτό προκύπτει με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες και χρήση της ανισότητας Jensen).

Οι V. Milman και Pisier απέδειξαν στο [83] μια ανισότητα ισχυρότερη από την (7.2.1) του Dudley. Υπενθυμίζουμε ότι

$$v_k(K) := \sup\{\mathrm{vrad}(P_F(K)) : F \in G_{n,k}\}, \tag{7.2.2}$$

και ότι, για κάθε $F \in G_{n,k}$,

$$\begin{aligned}\mathrm{Vol}_k(P_F(K)) &\leqslant N(P_F(K), e_k P_F(B_2^n))\mathrm{Vol}_k(e_k B_F) \leqslant N(K, e_k(K)B_2^n)e_k^k \mathrm{Vol}_k(B_F)\\ &\leqslant (2e_k(K))^k \mathrm{Vol}_k(B_F),\end{aligned} \tag{7.2.3}$$

άρα,

$$v_k(K) \leqslant 2e_k(K). \tag{7.2.4}$$

Θεώρημα 7.2.2 (V. Milman-Pisier). *Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει ότι*

$$\sqrt{n}w(K) \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \mathrm{Rad}_k(K) v_k(K), \tag{7.2.5}$$

όπου $\mathrm{Rad}_k(K) := \sup\{\mathrm{Rad}(X_{P_F(K)}) : F \in G_{n,k}\}$, και $\mathrm{Rad}(Y) \leqslant c_3 \log(d(Y, \ell_2^{\dim(Y)}) + 1)$ είναι η σταθερά Rademacher του Y.

Θα χρειαστούμε επίσης το θεώρημα του Pisier για την ύπαρξη α-κανονικών M-ελλειψοειδών. Ο Pisier απέδειξε (δείτε το [98] και το [8, Κεφάλαιο 7]) ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\alpha \in (0, 2)$, υπάρχει ένα ελλειψοειδές $\mathcal{E} = \mathcal{E}_{K,\alpha}$ με την ακόλουθη ιδιότητα:

$$\max\{e_k(K, \mathcal{E}), e_k(K^\circ, \mathcal{E}^\circ), e_k(\mathcal{E}, K), e_k(\mathcal{E}^\circ, K^\circ)\} \leqslant P_\alpha \left(\frac{n}{k}\right)^{1/\alpha}, \tag{7.2.6}$$

όπου $P_\alpha \leqslant C\left(\frac{\alpha}{2-\alpha}\right)^{1/2}$ είναι μια θετική σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α.

Για κάθε ζεύγος συμμετρικών κυρτών σωμάτων K, L στον $\mathbb{R}^n$, οι αριθμοί Gelfand $c_k(K, L)$ ορίζονται ως εξής:

$$c_k(K, L) := \begin{cases} \inf\{\mathrm{diam}_{L\cap F}(K \cap F) : F \in G_{n,n-k}\} & k = 0, \ldots, n-1 \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases},$$

όπου $\mathrm{diam}_A(B) := \inf\{R > 0 : B \subseteq RA\}$. Για συντομία γράφουμε $c_k(K) = c_k(K, B_2^n)$ και $e_k(K) = e_k(K, B_2^n)$.

Το θεώρημα του Carl [34] συνδέει διάφορες νόρμες Lorentz της ακολουθίας των αριθμών εντροπίας $\{e_m(K, L)\}$ με αυτές των αριθμών Gelfand $\{c_m(K, L)\}$. Ειδικότερα, για κάθε $\alpha > 0$, υπάρχουν σταθερές $C_\alpha, C'_\alpha > 0$ ώστε, για κάθε $k \geqslant 1$,

$$\sup_{m=1,\ldots,k} m^\alpha e_m(K, L) \leqslant C_\alpha \sup_{m=1,\ldots,k} m^\alpha c_m(K, L), \tag{7.2.7}$$

και

$$\sum_{m=1}^{k} m^{-1+\alpha} e_m(K,L) \leqslant C'_\alpha \sum_{m=1}^{k} m^{-1+\alpha} c_m(K,L). \tag{7.2.8}$$

Μάλιστα, ο Pisier απέδειξε τις ανισότητες (7.2.6) για τους αριθμούς κάλυψης εφαρμόζοντας το θεώρημα του Carl, αφού πρώτα απέδειξε τις ακόλουθες εκτιμήσεις:

$$\max\{c_k(K,\mathcal{E}), c_k(K^\circ,\mathcal{E}^\circ)\} \leqslant P_\alpha\Big(\frac{n}{k}\Big)^{1/\alpha} \quad \text{για κάθε } k\in\{1,\ldots,n\}\,. \tag{7.2.9}$$

Το φράγμα που θα δώσουμε για την παράμετρο $M(K)$ θα βασιστεί στο ακόλουθο αποτέλεσμα των Γιαννόπουλου και E. Milman.

Θεώρημα 7.2.3. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $k=1,\ldots,n/2$,*

$$c_{2k}(K) \leqslant C\frac{n}{k}\log\Big(e+\frac{n}{k}\Big)w_k(K).$$

Με άλλα λόγια, υπάρχει $F\in G_{n,n-2k}$ ώστε

$$K\cap F \subseteq C\frac{n}{k}\log\Big(e+\frac{n}{k}\Big)w_k(K)B_F, \tag{7.2.10}$$

και δυϊκά, υπάρχει $F\in G_{n,n-2k}$ ώστε

$$P_F(K) \supseteq \frac{1}{C\frac{n}{k}\log(e+\frac{n}{k})}v_k^-(K)B_F. \tag{7.2.11}$$

Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Περιγράφουμε αρχικά μια απλούστερη απόδειξη του ουσιαστικά ακριβούς φράγματος του E. Milman για το μέσο πλάτος του K.

Θεώρημα 7.2.4 (E. Milman)**.** *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$M^*(K) \leqslant c\sqrt{n}(\log n)^2 L_K, \tag{7.2.12}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 7.2.2 προκύπτει άμεσα η ανισότητα

$$\sqrt{n}M^*(K) \leqslant c_1\log n\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}v_k(K). \tag{7.2.13}$$

Θα εφαρμόσουμε την (7.2.13) για ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $F\in G_{n,k}$. Από την ανισότητα Rogers-Shephard παίρνουμε $\mathrm{vol}(P_F(K))\mathrm{vol}(K\cap F^\perp) \leqslant \binom{n}{k}$, άρα

$$\mathrm{vol}(P_F(K))^{1/k}\mathrm{vol}(K\cap F^\perp)^{1/k} \leqslant c_1 n/k.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού το K είναι ισοτροπικό, γνωρίζουμε από την [2, Πρόταση 5.1.15] ότι

$$\mathrm{vol}(K\cap F^\perp)^{1/k} \approx \frac{L_{\overline{K_{k+1}(\pi_F(\mu_K))}}}{L_K}.$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{vrad}(P_F(K)) \approx \sqrt{k}\mathrm{vol}(P_F(K))^{1/k} \leqslant c_3\frac{nL_K}{\sqrt{k}}.$$

Άρα, $v_k(K) \leqslant c_2 nL_K/\sqrt{k}$ για κάθε $1 \leqslant k < n$. Επιστρέφοντας στην (7.2.13) παίρνουμε

$$\sqrt{n}M^*(K) \leqslant c_4 \log n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}\frac{n}{\sqrt{k}}L_K = c_4 n(\log n)L_K \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \leqslant c_5 n(\log n)^2 L_K,$$

και έχουμε το θεώρημα. □

Θεώρημα 7.2.5 (Γιαννόπουλος-E. Milman). *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$M(K) \leqslant \frac{cn^{2/5}(\log n)^2}{\sqrt{n}L_K}, \tag{7.2.14}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Μια συνέπεια του Θεωρήματος 7.2.3 είναι ότι, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $K \supseteq rB_2^n$, έχουμε:

$$\sqrt{n}M(K) \leqslant C\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\min\left(\frac{1}{r}, \frac{n}{k}\log\left(e+\frac{n}{k}\right)\frac{1}{v_k^-(K)}\right). \tag{7.2.15}$$

Για να το δείτε, παρατητηρήστε ότι από την ανισότητα εντροπίας (7.2.1) του Dudley και το θεώρημα του Carl (7.2.8) έχουμε ότι

$$\sqrt{n}M^*(K^\circ) \leqslant c_1\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}e_k(K^\circ) \leqslant c_2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}c_k(K^\circ),$$

και $c_k(K^\circ) \leqslant R(K^\circ) \leqslant 1/r$ για κάθε k, συνεπώς το Θεώρημα 7.2.3 μας δίνει ότι

$$\sqrt{n}M(K) = \sqrt{n}M^*(K^\circ) \leqslant c_2\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\min\left(\frac{1}{r}, \frac{n}{k}\log\left(e+\frac{n}{k}\right)w_k(K^\circ)\right). \tag{7.2.16}$$

Τέλος, θυμηθείτε ότι $w_k(K^\circ) \leqslant 1/v_k^-(K)$ από την ανισότητα Blaschke-Santaló.

Τώρα, αφού το K είναι ισοτροπικό, γνωρίζουμε ότι $K \supseteq c_1L_KB_2^n$, άρα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (7.2.15) με $r = c_1L_K$. Γνωρίζουμε επίσης ότι για κάθε $F \in G_{n,k}$ ισχύει ότι

$$\mathrm{vol}(P_F(K))^{1/k} \geqslant \frac{c_2}{\mathrm{vol}(K\cap F^\perp)^{1/s}} \approx \frac{L_K}{L_{\overline{K_{k+1}(\pi_F(\mu_K))}}} \geqslant \frac{c_3L_K}{\sqrt[4]{k}}.$$

Συνεπώς, $\mathrm{vrad}(P_F(K)) \geqslant c_4\sqrt[4]{k}L_K$, απ' όπου έπεται ότι $v_k^-(K) \geqslant c_4\sqrt[4]{k}L_K$. Εισάγοντας αυτές τις εκτιμήσεις στην (7.2.16) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sqrt{n}M(K) &\leqslant \frac{c_5}{L_K}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\min\left\{1, \frac{n\log n}{k^{5/4}}\right\} \approx \frac{1}{L_K}\Bigg(\sum_{k=1}^{n^{4/5}}\frac{1}{\sqrt{k}} + \sum_{k=n^{4/5}}^{n}\frac{n\log n}{k^{7/4}}\Bigg)\\ &\approx \frac{n^{2/5}\log^b n}{L_K}.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Παρατήρηση 7.2.6. Στη μη-συμμετρική περίπτωση μπορούμε και πάλι να δείξουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε $M^*(K) \leqslant c\sqrt{n}(\log n)^2 L_K$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Το επιχείρημα είναι απλό: Θεωρούμε το σώμα διαφορών $K - K$ του K. Αφού $0 \in K$ έχουμε ότι $K \subseteq K - K$, άρα $M^*(K) \leqslant M^*(K)$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 7.2.2 για το $K - K$ παίρνουμε

$$\sqrt{n} M^*(K-K) \leqslant c_1 \log n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} v_k(K-K). \tag{7.2.17}$$

Παρατηρούμε ότι αν $1 \leqslant k < n$ τότε για κάθε $F \in G_{n,k}$ έχουμε

$$\mathrm{vol}(P_F(K-K))^{1/k} = \mathrm{vol}(P_F(K) - P_F(K))^{1/k} \leqslant 4\mathrm{vol}(P_F(K))^{1/k},$$

από την ανισότητα Rogers-Shephard. Τότε, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.4, συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{vol}(P_F(K))^{1/k}\mathrm{vol}(K \cap F^{\perp})^{1/k} \leqslant c_1 n/k$. Η συνέχεια της απόδειξης είναι όμοια: αφού το K είναι ισοτροπικό, γνωρίζουμε ότι $\mathrm{vol}(K \cap F^{\perp})^{1/k} \approx L_{\pi_F(\mu_K)}/L_K \geqslant c_2/L_K$, απ' όπου έπεται ότι $\mathrm{vrad}(P_F(K)) \approx \sqrt{k}\mathrm{vol}(P_F(K))^{1/k} \leqslant c_3 \frac{nL_K}{\sqrt{k}}$. Άρα, $v_k(K-K) \leqslant c_2 n L_K/\sqrt{k}$ για κάθε $1 \leqslant k < n$, και εισάγοντας αυτά τα φράγματα στην (7.2.13) βλέπουμε ότι

$$\sqrt{n} M^*(K) \leqslant \sqrt{n} M^*(K-K) \leqslant c_4 \log n \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \frac{n}{\sqrt{k}} L_K \leqslant c_5 n (\log n)^2 L_K.$$

Παρατήρηση 7.2.7. Το αντίστοιχο πρόβλημα για την παράμετρο $M(K)$ παρουσιάζει περισσότερες δυσκολίες. Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Μια ιδέα είναι να θεωρήσουμε το συμμετρικό κυρτό σώμα $K \cap (-K)$. Αφού $K \cap (-K) \subseteq K$, γνωρίζουμε ότι $M(K) \leqslant M(K \cap (-K))$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\sqrt{n} M(K \cap (-K)) \leqslant c_2 \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \min\left(\frac{1}{r}, \frac{n}{k} \log\left(e + \frac{n}{k}\right) \frac{1}{v_k^-(K \cap (-K))}\right). \tag{7.2.18}$$

Το K είναι ισοτροπικό, άρα $K \supseteq L_K B_2^n$. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την (7.2.15) με $r = L_K$. Γνωρίζουμε επίσης ότι για κάθε $F \in G_{n,k}$ ισχύει

$$\mathrm{vol}(P_F(K))^{1/k} \geqslant \frac{c}{\mathrm{vol}(K \cap F^{\perp})^{1/s}} \approx \frac{L_K}{L_{\pi_F(\mu_K)}} \geqslant \frac{cL_K}{\sqrt[4]{k}}.$$

Συνεπώς, $\mathrm{vrad}(P_F(K)) \geqslant c\sqrt[4]{k} L_K$, απ' όπου έπεται ότι $v_k^-(K) \geqslant c\sqrt[4]{k} L_K$. Θα θέλαμε μια εκτίμηση, δυϊκή προς αυτήν του Θεωρήματος 7.2.1. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι ισχύει το ακόλουθο:

Για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0, για κάθε $1 \leqslant k < n$ και κάθε $F \in G_{n,k}$,

$$\mathrm{vrad}(P_F(K \cap (-K))) \geqslant \frac{ck}{n} \mathrm{vrad}(P_F(K)) \tag{7.2.19}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Τότε, $\mathrm{vrad}(P_F(K\cap(-K)))\geqslant c(k/n)\sqrt[4]{k}L_K$, και συνεπώς, $v_k^-(K\cap(-K))\geqslant c(k/n)\sqrt[4]{k}L_K$. Εισάγοντας αυτές τις εκτιμήσεις στην (7.2.16) θα είχαμε

$$\begin{aligned}\sqrt{n}M(K) &\leqslant \frac{c}{L_K}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k}}\min\Big\{1,\frac{n^2\log n}{k^{9/4}}\Big\}\approx\frac{1}{L_K}\Big(\sum_{k=1}^{n^{8/9}}\frac{1}{\sqrt{k}}+\sum_{k=n^{8/9}}^{n}\frac{n^2\log n}{k^{11/4}}\Big)\\ &\approx\frac{n^{4/9}\log^b n}{L_K}.\end{aligned}$$

Δεν γνωρίζουμε όμως αν ισχύει μια γενική ανισότητα της μορφής (7.2.19) με αυτή την ισχυρή εξάρτηση από τον λόγο k/n.

Βιβλιογραφία

[S-1] G. Chasapis and N. Skarmogiannis, *A note on norms of signed sums of vectors*, Advances in Geometry (to appear).

[S-2] G. Chasapis, A. Giannopoulos and N. Skarmogiannis, *Norms of weighted sums of log-concave random vectors*, Communications in Contemporary Mathematics **22** (2020), no. 4, 1950036.

[S-3] N. Skarmogiannis, *On some random convex sets generated by isotropic log-concave random vectors*, Preprint.

[S-4] G. Chasapis and N. Skarmogiannis, *Affine quermassintegrals of random polytopes*, Journal of Mathematical Analysis and Applications **479** (2019), 546–568.

Βιβλία

[1] S. Artstein-Avidan, A. Giannopoulos and V. D. Milman, *Asymptotic Geometric Analysis, Part I*, Amer. Math. Soc., Mathematical Surveys and Monographs **202** (2015).

[2] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas and B-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Amer. Math. Society, Mathematical Surveys and Monographs **196** (2014).

[3] Y. D. Burago and V. A. Zalgaller, *Geometric Inequalities*, Springer Series in Soviet Mathematics, Springer-Verlag, Berlin-New York (1988).

[4] R. Gardner, *Geometric Tomography*, *Second Edition*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **58**, Cambridge University Press, 2006.

[5] A. Koldobsky, *Fourier analysis in convex geometry*, Mathematical Surveys and Monographs **116**, Amer. Math. Society (2005).

[6] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Springer, Berlin, 1991.

[7] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.

[8] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[9] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Second expanded edition. Encyclopedia of Mathematics and Its Applications 151, Cambridge University Press, Cambridge, 2014.

[10] R. Schneider and W. Weil, *Stochastic and integral geometry*, Probability and its Applications, Springer-Verlag, Berlin (2008).

[11] R. Vershynin, *High-Dimensional Probability: An Introduction with Applications in Data Science*, Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics **47**, Cambridge University Press, Cambridge, 2018.

Ἄρθρα

[12] E. Artin, *Einführung in die Theorie der Gammafunktion*, (Teubner, Leipzig, 1931) (in Germany); The Gamma Function (Holt, Rinehart and Winston, New York, 1964).

[13] S. Artstein, V. Milman and S. Szarek, *Duality of metric entropy*, Annals of Math. **159** (2004), 1313–1328.

[14] W. Banaszczyk, *Balancing vectors and convex bodies*, Studia Math. **106** (1993), 93–100.

[15] W. Banaszczyk, *Balancing vectors and Gaussian measures of n-dimensional convex bodies*, Random Structures Algorithms **12** (1998), no. 4, 351–360.

[16] W. Banaszczyk, A. E. Litvak, A. Pajor and S. J. Szarek, *The flatness theorem for non-symmetric convex bodies via the local theory of Banach spaces*, Math. Oper. Res. **24** (1999), no. 3, 728–750.

[17] N. Bansal, D. Dadush, and S. Garg, *An algorithm for Komlós conjecture matching Banaszczyk"s bound*, In 57th Annual IEEE Symposium on Foundations of Computer Science, FOCS 2016, New Brunswick, NJ, USA, October 9-11 2016, 788–799.

[18] I. Bárány, *On the power of linear dependencies*, Building Bridges, Bolyai Society Mathematical Studies, Vol. 19, Springer, Berlin (2008), pp.31–45.

[19] I. Bárány and Z. Füredi, *Approximation of the sphere by polytopes having few vertices*, Proc. Amer. Math. Soc. **102** (1988), 651–659.

[20] I. Bárány and V. S. Grinberg, *On some combinatorial questions in finite dimensional spaces*, Linear Algebra Appl. **41** (1981), 1–9.

[21] F. Barthe, O. Guédon, S. Mendelson and A. Naor, *A probabilistic approach to the geometry of the ℓ_p^n-ball*, Ann. Prob. **33** (2005), 480–513.

[22] A. Barvinok, *Measure Concentration*, lecture notes, University of Michigan (2005), available at http://www.math.lsa.umich.edu/~barvinok/total710.pdf.

[23] W. Beckner, *Inequalities in Fourier analysis*, Ann. Math., 102, 159–182 (1975).

[24] H. J. Brascamp and E. H. Lieb, *Best constants in Young"s inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*, Advances in Math., 20, no. 2, 151–173 (1976).

[25] H. J. Brascamp, E. H. Lieb and J. M. Luttinger, *A general rearrangement inequality for multiple integrals*, J. Funct. Anal. **17** (1974) 227–237.

[26] S. G. Bobkov and M. Madiman, *The entropy per coordinate of a random vector is highly constrained under convexity conditions*, IEEE Trans. Inform. Theory **57** (2011), 4940–4954.

[27] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 53–69.

[28] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. **56**, Birkhäuser, Basel (2003), 3–13.

[29] G. Bonnet, G. Chasapis, J. Grote, D. Temesvari, and N. Turchi, *Threshold phenomena for high-dimensional random polytopes*, Communications in Contemporary Mathematics **21** (2019), no. 5, 1850038, 30 pp..

[30] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Period. Math. Hungar. 6 (1975), 111–136.

[31] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127–137.

[32] J. Bourgain and V. D. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in $\mathbb{R}^n$*, Invent. Math. **88**, no. 2, (1987), 319–340.

[33] J. Bourgain, M. Meyer, V. D. Milman and A. Pajor, *On a geometric inequality*, Geometric aspects of functional analysis (1986-'87), Lecture Notes in Math., 1317, Springer, Berlin (1988), 271–282.

[34] B. Carl, *Entropy numbers, s-numbers, and eigenvalue problems*, J. Funct. Anal. **41** (1981), 290–306.

[35] B. Carl and A. Pajor, *Gelfand numbers of operators with values in a Hilbert space*, Invent. Math. **94** (1988), 479–504.

[36] G. D. Chakerian, *Inequalities for the difference body of a convex body*, Proc. Amer. Math. Soc. **18** (1967), 879–884.

[37] M. Christ, *Estimates for the k-plane transform*, Indiana Univ. Math. J. 33 (1984) 891–910.

[38] N. Dafnis, A. Giannopoulos, and A. Tsolomitis, *Asymptotic shape of a random polytope in a convex body*, J. Funct. Anal. **257**(9) (2009), 2820–2839.

[39] N. Dafnis, A. Giannopoulos and A. Tsolomitis, *Quermassintegrals and asymptotic shape of random polytopes in an isotropic convex body*, Michigan Mathematical Journal **62** (2013), 59–79.

[40] N. Dafnis and G. Paouris, *Estimates for the affine and dual affine quermassintegrals of convex bodies*, Illinois J. of Math. **56** (2012), 1005–1021.

[41] A. Dembo, T. Cover, and J. Thomas, *Information-theoretic inequalities*, IEEE Trans. Inform. Theory **37** (1991), 1501–1518.

[42] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155–171.

[43] A. Giannopoulos and E. Milman, *M-estimates for isotropic convex bodies and their L_q-centroid bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2116** (2014), 159–182.

[44] A. Giannopoulos, M. Hartzoulaki and A. Tsolomitis, *Random points in isotropic unconditional convex bodies*, J. London Math. Soc. **72** (2005), 779–798.

[45] A. Giannopoulos, P. Stavrakakis, A. Tsolomitis and B-H. Vritsiou, *Geometry of the L_q-centroid bodies of an isotropic log-concave measure*, Trans. Amer. Math. Soc. **367** (2015), 4569–4593.

[46] A. Giannopoulos, L. Hioni and A. Tsolomitis, *Asymptotic shape of the convex hull of isotropic log-concave random vectors*, Adv. Appl. Math. **75** (2016), 116–143.

[47] A. Giannopoulos, G. Paouris and P. Valettas, *On the distribution of the ψ_2-norm of linear functionals on isotropic convex bodies*, in Geom. Aspects of Funct. Analysis, Lecture Notes in Mathematics **2050** (2012), 227–254.

[48] E. D. Gluskin, *Extremal properties of orthogonal parallelepipeds and their applications to the geometry of Banach spaces*, Math. USSR Sbornik **64** (1989), 85–96.

[49] E. Gluskin and V. Milman, *Geometric probability and random cotype 2*, Geometric Aspects of Functional Analysis, volume 1850 of Lecture Notes in Math., pages 123–138. Springer, Berlin, 2004.

[50] I. Gorbovickis, *Strict Kneser-Poulsen conjecture for large radii*, Geom. Dedicata **162** (2013), 95–107.

[51] Y. Gordon, *On Milman's inequality and random subspaces which escape through a mesh in $\mathbb{R}^n$*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 84–106.

[52] E. L. Grinberg, *Isoperimetric inequalities and identities for k-dimensional cross-sections of a convex bodies*, Math. Ann. **291** (1991), 75–86.

[53] B. Grünbaum, *Measures of symmetry for convex sets*, Proc. Sympos. Pure Math., Vol. VII, 233–270, Amer. Math. Soc. 1963.

[54] O. Guédon and A. E, Litvak, *On the symmetric average of a convex body*, Adv. Geom. **11** (2011), no. 4, 615–622.

[55] D. Hajela, *On a Conjecture of Komlós about Signed Sums of Vectors inside the Sphere*, Eur. J. Comb. 9(1): 33–37, (1988).

[56] M. Hartzoulaki, *Probabilistic methods in the theory of convex bodies*, Ph.D. Thesis (March 2003), University of Crete.

[57] J. Hörrmann, J. Prochno, and C. Thäle, *On the isotropic constant of random polytopes with vertices on an ℓ_p-sphere*, J. Geom. Anal. **28** (2018), 405–426.

[58] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187–204.

[59] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space*, in Conference in modern analysis and probability (New Haven, Conn.) (1982), 189–206.

[60] Z. Kabluchko, D. Temesvari and C. Thäle, *Expected intrinsic volumes and facet numbers of random beta-polytopes*, Math. Nachrichten **292** (2019), 79–105.

[61] M. I. Kadets and V. M. Kadets, *Series in Banach spaces*, Operator Theory Advances and Applications, vol. 94, Birkhäuser Verlag, 1997.

[62] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541–559.

[63] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Anal. **16** (2006), 1274–1290.

[64] B. Klartag and E. Milman, *On volume distribution in 2-convex bodies*, Israel J. Math. **164** (2008), 221–249.

[65] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform - A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10–34.

[66] B. Klartag and R. Vershynin, *Small ball probability and Dvoretzky Theorem*, Israel J. Math. 157 (2007) , no. 1, 193–207.

[67] R. Latała and K. Oleszkiewicz, *Small ball probability estimates in terms of widths*, Studia Math. **169** (2005), 305–314.

[68] D. R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18–29.

[69] E. H. Lieb, *Proof of an entropy conjecture of Wehrl*, Comm. Math. Phys. **62** (1978), 35–41.

[70] A. Litvak, V.D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95–124.

[71] E. Lutwak, *A general isepiphanic inequality*, Proc. Amer. Math. Soc. **90** (1984), 415–421.

[72] E. Lutwak, *Inequalities for Hadwiger's harmonic Quermassintegrals*, Math. Annalen **280** (1988), 165–175.

[73] E. Lutwak and G. Zhang, *Blaschke-Santaló inequalities*, J. Differential Geom. **47** (1997), 1–16.

[74] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *L^p affine isoperimetric inequalities*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111–132.

[75] A. Lytova and K. E. Tikhomirov, *The variance of the ℓ_p^n-norm of the gaussian vector, and Dvoretzky's theorem*, St. Petersburg Math. J., **30** (2018), no. 4, 107•-139.

[76] E. Milman, *Dual mixed volumes and the slicing problem*, Adv. Math. **207** (2006), 566–598.

[77] E. Milman, *On the mean width of isotropic convex bodies and their associated L_p-centroid bodies*, Int. Math. Res. Not. IMRN (2015), no. 11, 3408–3423.

[78] E. Milman and A. Yehudayoff, *Sharp Isoperimetric Inequalities for Affine Quermassintegrals*, Preprint.

[79] V. D. Milman, *Geometrical inequalities and mixed volumes in the Local Theory of Banach spaces*, Astérisque **131** (1985), 373–400.

[80] V. D. Milman, *Random subspaces of proportional dimension of finite dimensional normed spaces: approach through the isoperimetric inequality*, Lecture Notes in Mathematics **1166** (1985), 106–115.

[81] V. D. Milman, *Isomorphic symmetrization and geometric inequalities*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 107–131.

[82] V. D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 64–104.

[83] V. D. Milman and G. Pisier, *Gaussian processes and mixed volumes*, Annals of Probability **15** (1987), 292–304.

[84] V. D. Milman and G. Schechtman, *An "isomorphic" version of Dvoretzky's theorem*, C.R. Acad. Sci. Paris **321** (1995), 541–544.

[85] A. Naor and D. Romik, *Projecting the surface measure of the sphere of ℓ_p^n*, Ann. Inst. H. Poincaré Probab. Statist. **39** (2003), 241–261.

[86] A. Pajor and N. Tomczak-Jaegermann, *Subspaces of small codimension of finite dimensional Banach spaces*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 637–642.

[87] G. Paouris, *Ψ_2 estimates for linear functionals on zonoids*, Lecture Notes in Mathematics 1807 (2003), 211–222.

[88] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1021–1049.

[89] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287–308.

[90] G. Paouris and P. Pivovarov, *A probabilistic take on isoperimetric-type inequalities*, Advances in Mathematics 230 (2012), 1402–1422.

[91] G. Paouris and P. Pivovarov, *Small-ball probabilities for the volume of random convex sets*, Discrete Comput. Geom. **49** (2013), 601–646.

[92] G. Paouris and P. Pivovarov, *Random ball-polyhedra and inequalities for intrinsic volumes*, Monatsc. Math. 182 (2017), 709–729.

[93] G. Paouris and P. Pivovarov, *Randomised isoperimetric inequalities*, Convexity and Concentration (E. Carlen, M. Madiman, E. Werner, Eds.), The IMA Volumes in Mathematics and its Applications 161 (2017) pp. 391–425.

[94] G. Paouris and P. Valettas, *A Gaussian small deviation inequality for convex functions*, Annals of Probability **46** (2018), 1441–1454.

[95] G. Paouris, P. Valettas and J. Zinn, *Random version of Dvoretzky's theorem in ℓ_p^n*, Stochastic Process. Appl. **127** (2017), no. 10, 3187–3227.

[96] C. M. Petty, *Projection bodies*, Proc. Colloq. on Convexity, 1967, 234–241.

[97] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Annals of Math. **115** (1982), 375–392.

[98] G. Pisier, *A new approach to several results of V. Milman*, J. Reine Angew. Math. **393** (1989), 115–131.

[99] P. Pivovarov, *On the volume of caps and bounding the mean-width of an isotropic convex body*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **149** (2010), 317–331.

[100] P. Pivovarov, *On determinants and the volume of random polytopes in isotropic convex bodies*, Geom. Dedicata 149 (2010), 45–58.

[101] J. Prochno, C. Thäle and N. Turchi, *The isotropic constant of random polytopes with vertices on convex surfaces*, Journal of Complexity **54** (2019), 101394, 17 pp.

[102] C. A. Rogers, *A single integral inequality*, J. London Math. Soc. 32 (1957) 102–108.

[103] C. A. Rogers and G. C. Shephard, *Convex bodies associated with a given convex body*, J. London Soc. **33** (1958), 270–281.

[104] M. Rudelson, *Sections of the difference body*, Discrete Comput. Geom. **23** (2000), no. 1, 137–146.

[105] M. Rudelson, *Distances between non-symmetric convex bodies and the MM^*-estimate*, Positivity **4** (2000), 161–178.

[106] J. Spencer, *Six standard deviations suffice*, Trans. Amer. Math. Soc. **289** (1985), 679–706.

[107] J. Spencer, *Balancing vectors in the max norm*, Combinatorica **6**(1) (1986), 55–65.

[108] J. Spencer, *Ten Lectures on the Probabilistic Method*, Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, Penn. 1994.

[109] J. Spingarn, *An inequality for sections and projections of a convex set*, Proc. Amer. Math. Soc. **118** (1993), 1219–1224.

[110] A. Stam, *Some inequalities satisfied by the quantities of information of Fisher and Shannon*, Information and Control **2** (1959), 101–112.

[111] A. Szankowski, *On Dvoretzky's theorem on almost spherical sections of convex bodies*, Israel J. Math. **17** (1974), 325–338.

[112] S. J. Szarek, *Nets of Grassmann manifold and orthogonal groups*, Proceedings of Banach Space Workshop, University of Iowa Press (1982), 169–185.

[113] M. Talagrand, *Regularity of Gaussian processes*, Acta Math. **159** (1987), 99–147.

[114] J. G. Wendel, *Note on the gamma function*, Amer. Math. Monthly **55** (1948) 563–564.

[115] G. Zhang, *Restricted chord projection and affine inequalities*, Geometriae Dedicata, 39 (1991), 213–222.

Abstract

We study a number of questions from Geometric Functional Analysis using geometric, analytic and probabilistic methods.

Signed sums of vectors in normed spaces. We obtain an improved version of a result of D. Hajela related to a question of Komlós: we show that if $f(n)$ is a function such that $\lim_{n\to\infty} f(n)=\infty$ and $f(n)=o(n)$, there exists $n_0=n_0(f)$ such that for every $n\geqslant n_0$ and any $S\subseteq\{-1,1\}^n$ with cardinality $|S|\leqslant 2^{n/f(n)}$ one can find orthonormal vectors $x_1,\ldots,x_n\in\mathbb{R}^n$ that satisfy

$$\|\epsilon_1x_1+\cdots+\epsilon_nx_n\|_\infty\geqslant c\sqrt{\log f(n)}$$

for all $(\epsilon_1,\ldots,\epsilon_n)\in S$. We obtain analogous results in the case where $x_1,\ldots,x_n$ are independent random points uniformly distributed in the Euclidean unit ball B_2^n or any symmetric convex body, and the ℓ_∞^n-norm is replaced by an arbitrary norm on $\mathbb{R}^n$.

Norms of weighted sums of log-concave random vectors. Let C and K be centrally symmetric convex bodies of volume 1 in $\mathbb{R}^n$. We provide upper bounds for the multi-integral expression

$$\|\mathbf{t}\|_{C^s,K}=\int_C\cdots\int_C\Big\|\sum_{j=1}^s t_jx_j\Big\|_K\,dx_1\cdots dx_s$$

in the case where C is isotropic. Our approach provides an alternative proof of the sharp lower bound, due to Gluskin and V. Milman, for this quantity. We also present some applications to "randomized" vector balancing problems.

Random convex sets generated by isotropic log-concave random vectors. For any N-tuple $\mathbf{x}=(x_1,\ldots,x_N)\in\oplus_{i=1}^N\mathbb{R}^n$ we denote by $T_{\mathbf{x}}=[x_1\cdots x_N]$ the $n\times N$ matrix whose columns are the vectors x_i. Paouris and Pivovarov showed that if $N\geqslant n$ and $f_1,\ldots,f_N$ are probability densities on $\mathbb{R}^n$ with $\|f_i\|_\infty\leqslant 1$ then, for any centrally symmetric convex body K in $\mathbb{R}^N$, the expected volume

$$\mathcal{F}_K(f_1,\ldots,f_N)=\int_{\mathbb{R}^n}\cdots\int_{\mathbb{R}^n}\big(\mathrm{vol}_n(T_{\mathbf{x}}(K))\big)\prod_{i=1}^N f_i(x_i)\,dx_N\cdots dx_1$$

of $T_{\mathbf{x}}(K)$ is minimized when each f_i is the indicator function of the Euclidean ball D_n of volume 1 in $\mathbb{R}^n$. We discuss upper and lower bounds for $\mathcal{F}_K(f_1,\ldots,f_N)$ in the case where f_i are isotropic densities. In the second part of this note, given $N,n\geqslant 1$ and $r>0$, we discuss upper and lower bounds for the expected volume $\mathbb{E}\left[\mathrm{vol}_n\left(\cap_{i=1}^N B(x_i,r)\right)\right]$ of random ball polyhedra defined by an N-tuple of i.i.d. random points $x_1,\ldots,x_N$ in $\mathbb{R}^n$ whose density f satisfies $\|f\|_\infty\leqslant 1$.

Affine quermassintegrals of random polytopes. A question related to some conjectures of Lutwak about the affine quermassintegrals of a convex body K in $\mathbb{R}^n$ asks whether for every convex body K in $\mathbb{R}^n$ and all $1\leqslant k\leqslant n$

$$\Phi_{[k]}(K):=\mathrm{vol}_n(K)^{-\frac{1}{n}}\left(\int_{G_{n,k}}\mathrm{vol}_k(P_F(K))^{-n}\,d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{kn}}\leqslant c\sqrt{n/k},$$

where $c>0$ is an absolute constant. We provide an affirmative answer for some broad classes of random polytopes. We also discuss upper bounds for $\Phi_{[k]}(K)$ when $K=B_1^n$, the unit ball of

ℓ_1^n, and explain how this special instance has implications for the case of a general unconditional convex body K.

The symmetric average and the MM^*-estimate for isotropic convex bodies. We discuss two open problems from asymptotic convex geometry. The first problem is to give an upper bound for the symmetric average $\mathrm{sav}(K)$ of a convex body K in $\mathbb{R}^n$, which is defined by

$$\mathrm{sav}(K) := \inf\Big\{\frac{1}{\mathrm{vol}_n(K)}\int_{K_z} \|-x\|_{K_z}\,dx : z \in \mathrm{int}(K)\Big\},$$

where $K_z := K - z$ is the translate of K by z. We provide simpler proofs for the best known upper bounds for this quantity, which are due to Guédon and Litvak.

The second problem is to give upper bounds for the mean width $w(K)$ and the mean norm $M(K)$ of an isotropic convex body K in $\mathbb{R}^n$. The best known results are due to E. Milman and Giannopoulos-E. Milman, respectively. We provide a simpler proof of these results, which avoids the theory of L_q-centroid bodies.