Το θεώρημα διακριτοποίησης του **Bourgain** και ομοιόμορφη προσέγγιση με αφφινικές συναρτήσεις

Διπλωματική Εργασία

Στέλιος-Εριόν Μπότσι

Επιβλέπων: Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2017

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το θεώρημα του Ribe

Θα λέμε ότι δύο χώροι Banach X και Y είναι *uniform-ομοιομορφικοί* αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : X \to Y$ τέτοιος ώστε οι ϕ και ϕ^{-1} να είναι και ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Λέμε ακόμη ότι ο X είναι *crudely finitely representable* στον Y αν υπάρχει σταθερά $C \geqslant 1$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε υπόχωρο X_1 του X με $\dim X_1 = n$, υπάρχει Y_1 υπόχωρος του Y έτσι ώστε $d(X_1, Y_1) \leqslant C$, όπου με $d(X_1, Y_1)$ συμβολίζουμε την απόσταση Banach-Mazur των X_1, Y_1.

Θεώρημα 1.1.1 (Ribe). *Έστω X, Y δύο uniform-ομοιομορφικοί χώροι Banach. Τότε ο X είναι crudely finitely representable στον Y και ο Y είναι crudely finitely representable στον X.*

Το θεώρημα του Ribe δίνει την αφορμή για να βρεθούν μετρικοί χαρακτηρισμοί γνωστών κλάσεων χώρων Banach. Λέγοντας μετρικό χαρακτηρισμό εννοούμε έναν χαρακτηρισμό που αναφέρεται μόνο στη μετρική δομή ενός χώρου Banach και δεν εμπλέκει τη γραμμική του δομή.

Οι γνωστές αποδείξεις του θεωρήματος του Ribe είναι τρεις. Η πρώτη οφείλεται στον ίδιο τον Ribe, την οποία παρουσιάζουμε αργότερα με μικρές παραλλαγές, και χρησιμοποιεί γεωμετρικά και συνδυαστικά επιχειρήματα. Η δεύτερη δίνεται από τους Heinrich και Mankiewicz [9] και χρησιμοποιεί υπεργινόμενα. Δίνουμε μια γενική περιγραφή της στρατηγικής της απόδειξης.

Έστω (X, d_X) και (Y, d_Y) δύο μετρικοί χώροι. Η *Lipschitz παραμόρφωση* $c_Y(X)$ του X στον Y είναι το infimum του συνόλου όλων των $1 \leqslant D \leqslant \infty$ για τους οποίους υπάρχουν $f : X \to Y$ και $s > 0$ τέτοιοι ώστε

$$s\, d_X(x, y) \leqslant d_Y(f(x), f(y)) \leqslant Ds\, d_X(x, y)$$

για κάθε $x, y \in X$.

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι οι X και Y είναι χώροι Banach με μοναδιαίες μπάλες B_X και B_Y αντίστοιχα. Υποθέτουμε επιπλέον ότι ο X έχει πεπερασμένη διάσταση. Τότε, αποδεικνύεται ότι για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ υπάρχει $0 < \delta < 1$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε δ-δίκτυο $\mathcal{N}_\delta$ της B_X ισχύει

$$c_Y(\mathcal{N}_\delta) \geqslant (1 - \varepsilon) c_Y(X).$$

[Υπενθυμίζουμε ότι δ-δίκτυο της B_X είναι ένα μεγιστικό υποσύνολο της B_X με την ιδιότητα ότι οποιαδήποτε διαφορετικά σημεία του ικανοποιούν την $\|x-y\|_X \geqslant \delta$.]

Ένας τρόπος απόδειξης αυτού του ισχυρισμού είναι ο εξής. Θέτουμε $D = c_Y(X)$ και ας υποθέσουμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $\frac{1}{k}$-δίκτυο $\mathcal{N}_{1/k}$ της B_X και $f_k : \mathcal{N}_{1/k} \to Y$ τέτοια ώστε

$$\|x-y\|_X \leqslant \|f_k(x) - f_k(y)\|_Y \leqslant (1-\varepsilon)D\|x-y\|_X$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{N}_{1/k}$. Για κάθε $x \in B_X$ σταθεροποιούμε ένα $z_k(x) \in \mathcal{N}_{1/k}$ με

$$\|x - z_k(x)\|_X \leq 1/k.$$

Έστω $\mathcal{U}$ ένα ελεύθερο υπερφίλτρο στο $\mathbb{N}$. Θεωρούμε το υπεργινόμενο $Y_{\mathcal{U}}$, το χώρο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας των φραγμένων ακολουθιών με τιμές στο Y modulo τη σχέση ισοδυναμίας

$$(x_k)_k \sim (y_k)_k \Leftrightarrow \lim_{k\to\mathcal{U}} \|x_k - y_k\|_Y = 0,$$

εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|(x_k)_k/\sim\|_{Y_{\mathcal{U}}} = \lim_{k\to\mathcal{U}} \|x_k\|_Y$. Ορίζουμε $f_{\mathcal{U}} : B_X \to Y_{\mathcal{U}}$ με

$$f_{\mathcal{U}}(x) = (f_k(z_k(x))_k)/\sim .$$

Τότε $\|x-y\|_X \leq \|f_{\mathcal{U}}(x) - f_{\mathcal{U}}(y)\|_{Y_{\mathcal{U}}} \leq (1-\varepsilon)D\|x-y\|_X$ για κάθε $x, y \in X$. Από ένα (μη τετριμμένο) επιχείρημα w^*-Gâteaux διαφορισιμότητας των Heinrich και Mankiewicz [9] έπεται ότι υπάρχει γραμμική απεικόνιση $T_1 : X \to (Y_{\mathcal{U}})^{**}$ με $\|x\|_X \leq \|T_1 x\|_{(Y_{\mathcal{U}})^{**}} \leq (1-\varepsilon/2)D\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Εφόσον ο X, άρα και ο T_1X, είναι πεπερασμένης διάστασης, από την Αρχή της Τοπικής Ανακλαστικότητας [27] υπάρχει $T_2 : T_1X \to Y_{\mathcal{U}}$ με $\|y\|_{(Y_{\mathcal{U}})^{**}} \leq \|T_2 y\|_{Y_{\mathcal{U}}} \leq (1+\varepsilon/5)\|y\|_{(Y_{\mathcal{U}})^{**}}$ για κάθε $y \in T_1X$. Τότε, υπάρχει $T_3 : T_2T_1X \to Y$ με $\|y\|_{Y_{\mathcal{U}}} \leq \|T_3 y\|_Y \leq (1+\varepsilon/5)\|y\|_{Y_{\mathcal{U}}}$ για κάθε $y \in T_2T_1X$. Θεωρώντας τον $T_3T_2T_1 : X \to Y$ έχουμε $D = c_Y(X) \leq (1-\varepsilon/2)(1+\varepsilon/5)^2 D$, το οποίο είναι άτοπο.

1.2 Το θεώρημα διακριτοποίησης του Bourgain

Οι αποδείξεις των Heinrich και Mankiewicz [9], καθώς και του Ribe [8], εξασφαλίζουν την ύπαρξη κάποιου $\delta = \delta(\varepsilon)$, δεν δίνουν όμως κάποια συγκεκριμένη εκτίμηση για το δ. Η τρίτη απόδειξη, του Bourgain [10] έδωσε μια τέτοια εκτίμηση ακολουθώντας μια διαφορετική προσέγγιση στο πρόβλημα. Για την ακριβή διατύπωση του αποτελέσματός του χρειαζόμαστε τον ακόλουθο ορισμό.

Ορισμός 1.2.1 (δείκτης διακριτοποίησης)**.** Για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ συμβολίζουμε με $\delta_{X\hookrightarrow Y}(\varepsilon)$ το supremum του συνόλου όλων των $\delta \in (0,1)$ που ικανοποιούν το εξής: για κάθε δ-δίκτυο $\mathcal{N}_\delta$ της B_X ισχύει

$$c_Y(\mathcal{N}_\delta) \geqslant (1-\varepsilon)c_Y(X).$$

Θεώρημα 1.2.2 (Bourgain). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα. Αν X, Y είναι χώροι Banach με $\dim(X) = n < \infty$ και $\dim(Y) = \infty$ τότε για κάθε $0 < \varepsilon < 1$ ισχύει*

$$\delta_{X \hookrightarrow Y}(\varepsilon) \geqslant e^{-(n/\varepsilon)^{Cn}}. \tag{1.2.1}$$

Μπορεί κανείς να βελτιώσει την εκτίμηση (1.2.1) έτσι ώστε να εξαρτάται από την παραμόρφωση $c_Y(X)$. Πιο συγκεκριμένα, ισχύει το φράγμα

$$\delta_{X \hookrightarrow Y}(\varepsilon) \geqslant e^{-(c_Y(X)/\varepsilon)^{Cn}}. \tag{1.2.2}$$

Η εκτίμηση (1.2.2) είναι ισχυρότερη από την (1.2.1). Πράγματι, από το θεώρημα του Dvoretzky [14] έχουμε $c_Y(\ell_2^n) = 1$, και σε συνδυασμό με το θεώρημα του John [13] συμπεραίνουμε ότι για κάθε n-διάστατο χώρο X με νόρμα ισχύει $c_Y(X) \leqslant \sqrt{n}$. Αν δεν υποθέσουμε ότι $\dim(Y) = \infty$ τότε πρέπει υποχρεωτικά να ισχύει $\dim(Y) \geqslant n$, αλλιώς έχουμε $c_Y(X) = \infty$ και η (1.2.2) ισχύει τετριμμένα. Έτσι, πάλι από το θεώρημα του John, έχουμε $c_Y(X) \leqslant n$, το οποίο δείχνει ότι πάλι η (1.2.2) συνεπάγεται την (1.2.1). Η απόδειξη που θα περιγράψουμε δίνει την (1.2.2).

Το θεώρημα διακριτοποίησης του Bourgain συχνά διατυπώνεται ως εξής: αν το δ είναι το πολύ ίσο με το δεξιό μέλος της (1.2.2) και αν $\mathcal{N}_\delta$ είναι ένα δ-δίκτυο στην B_X τότε υπάρχει μια *γραμμική* εμφύτευση στον Y με παραμόρφωση το πολύ ίση με $c_Y(\mathcal{N}_\delta)/(1-\varepsilon)$. Το επιχείρημα των Heinrich-Mankiewicz δείχνει ότι αν ο χώρος X έχει πεπερασμένη διάσταση τότε οποιοδήποτε φράγμα για την $c_Y(X)$ συνεπάγεται απευθείας το ίδιο φράγμα όταν ζητάμε επιπλέον η εμφύτευση να είναι γραμμική. Μπορούμε λοιπόν να μην κάνουμε διάκριση μεταξύ γραμμικών και μη-γραμμικών εμφυτεύσεων.

Δεν είναι γνωστό αν η εκτίμηση (1.2.1) είναι ασυμπτωτικά βέλτιστη, και το πιθανότερο είναι ότι θα μπορούσε να βελτιωθεί. Τα γνωστά άνω φράγματα για την $\delta_{X \hookrightarrow Y}(\varepsilon)$ είναι πολύ μακριά από την (1.2.1). Για παράδειγμα, ο μετρικός χώρος $(\ell_1^n, \sqrt{\|x-y\|_1})$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον L_2 [28]. Έπεται, ότι κάθε δ-δίκτυο στην $B_{\ell_1^n}$ εμφυτεύεται στον L_2 με παραμόρφωση το πολύ ίση με $\sqrt{2/\delta}$. Παίρνοντας υπόψη μας το γεγονός ότι $c_{L_2}(\ell_1^n) = \sqrt{n}$ βλέπουμε ότι $\delta_{\ell_1^n \hookrightarrow L_2}(\varepsilon) \leqslant 2/((1-\varepsilon)^2 n)$.

Παρουσιάζουμε επίσης ισχυρότερες εκτιμήσεις για την παράμετρο $\delta_{X \hookrightarrow Y}(\varepsilon)$ κάτω από κάποιες πρόσθετες υποθέσεις για τον χώρο Y. Ειδικότερα, στην περίπτωση που ο Y είναι κάποιος L_p χώρος έχουμε το εξής.

Θεώρημα 1.2.3. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\kappa > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και $0 < \varepsilon < 1$, και για κάθε n-διάστατο χώρο Banach X, ισχύει*

$$\delta_{X \hookrightarrow L_p}(\varepsilon) \geqslant \frac{\kappa \varepsilon^2}{n^{5/2}}.$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί ιδέες από μια μέθοδο που είχε εισαχθεί σε παλιότερη δουλειά των Johnson, Maurey και Schechtman [18] για διαφορετικό σκοπό.

Τα παραπάνω θεωρήματα αποτελούν μέρος ενός γενικότερου προβλήματος διακριτοποίησης στη θεωρία εμφύτευσης. Συχνά χρειάζεται να αποδειχθεί ένα θεώρημα μη-εμφύτευσης για πεπερασμένους χώρους, όπου η παραμόρφωση επηρεάζεται από τον πληθάριθμο. Σε πολλές περιπτώσεις, όμως, είναι πιο εύκολο να αποδειχθούν αποτελέσματα μη-εμφύτευσης σε άπειρους χώρους, χρησιμοποιώντας τεχνικές που είναι διαθέσιμες για συνεχή αντικείμενα. Είναι φυσιολογικό τότε να αποδειχθεί ένα θεώρημα διακριτοποίησης, δηλαδή ένα αποτέλεσμα που να μεταφέρει το θεώρημα μη-εμφύτευσης από το συνεχές αντικείμενο στα πεπερασμένα του δίκτυα, με κάποιο έλεγχο στον πληθάριθμό τους.

1.3 Ομοιόμορφη προσέγγιση με αφφινικές συναρτήσεις

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας μελετάμε την *ιδιότητα ομοιόμορφης προσέγγισης με αφφινικές συναρτήσεις* (για συντομία (UAAP)) η οποία εισήχθη από τους Bates, Johnson, Lindenstrauss, Preiss και Schechtman [17]. Λέμε ότι ο χώρος $\mathrm{Lip}(X,Y)$ των Lipschitz συναρτήσεων μεταξύ δύο χώρων Banach X και Y έχει την ιδιότητα (UAAP) αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $0<r<1$ τέτοιος ώστε, αν $f:B_X\to Y$ είναι μια 1-Lipschitz συνάρτηση τότε υπάρχουν $\varrho\geqslant r$ και $x\in X$ με $x+\varrho B_X\subseteq B_X$ και μια αφφινική συνάρτηση $\Lambda:X\to Y$ τέτοια ώστε $\|f(y)-\Lambda(y)\|\leqslant\varepsilon\varrho$ για κάθε $y\in x+\varrho B_X$. Οι Bates, Johnson, Lindenstrauss, Preiss και Schechtman [17] απέδειξαν ότι ο $\mathrm{Lip}(X,Y)$ ικανοποιεί τα παραπάνω αν και μόνο αν ο Y επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα.

Σταθεροποιούμε δύο χώρους Banach X και Y, και συμβολίζουμε με $r^{X\to Y}(\varepsilon)$ το supremum του συνόλου όλων των $0<r<1$ για τους οποίους ικανοποιείται ο ορισμός της (UAAP). Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι να δοθούν εκτιμήσεις για την παράμετρο $r^{X\to Y}(\varepsilon)$ στην περίπτωση που ο X είναι n-διάστατος χώρος με νόρμα και ο Y επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα. Οι Hytönen και Naor [15] απέδειξαν το εξής:

Θεώρημα 1.3.1 (Hytönen-Naor)**.** *Έστω Y χώρος Banach που επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα. Υπάρχει σταθερά $c_Y>0$, που εξαρτάται μόνο από τον Y, τέτοια ώστε, για κάθε n-διάστατο χώρο X με νόρμα και κάθε $0<\varepsilon\leqslant 1/2$,*

$$r^{X\to Y}(\varepsilon)\geqslant\exp(-1/\varepsilon^{c_Y n}).$$

Πριν από το Θεώρημα 1.3.1, εκτιμήσεις γι' αυτή την παράμετρο είχαν αποδειχθεί από τους Hytönen, Naor και S. Li [16], με πιο περιοριστικές υποθέσεις για τον Y. Η στρατηγική της απόδειξης του Θεωρήματος 1.3.1 συνδέεται στενά με το θεώρημα διακριτοποίησης του Bourgain. Οι Li και Naor [19] είχαν χρησιμοποιήσει τη σχέση αυτού του προβλήματος με την αφφινική προσέγγιση, και είχαν δώσει διαφορετική απόδειξη του θεωρήματος του Bourgain στην περίπτωση που ο Y είναι ομοιόμορφα κυρτός. Μάλιστα, το Θεώρημα 1.3.1 οδηγεί σε μια βελτίωση της εκτίμησης που είχαν επιτύχει. Το επιχείρημα του Bourgain, όπως και το επιχείρημα των Naor και Li, χρησιμοποιεί την ημιομάδα Poisson. Οι Hytönen και Naor αντικαθιστούν την ημιομάδα Poisson με την ημιομάδα της θερμότητας, γιατί χρειάζονται ένα φράγμα για την L_q απόσταση μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f(x)$ από το πολυώνυμο Taylor τάξης 1 της $H_t(f)$ στο x για κατάλληλο μέτρο στο $(x,t)\in X\times(0,\infty)$ με την υπόθεση ότι ο Y έχει martingale cotype q. Ένα τέτοιο φράγμα δεν είναι δυνατό αν χρησιμοποιηθεί η ημιομάδα Poisson. Αυτή η L_q εκτίμηση που επιτυγχάνεται δεν ήταν γνωστή, και συνδέεται στενά με κάποια ανοικτά ερωτήματα στη θεωρία Littlewood-Paley-Stein.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 αποτελείται σχηματικά από τα παρακάτω μέρη. Πρώτα, πρέπει να περιγραφεί η σταθερά c_Y που εμφανίζεται στη διατύπωσή του. Από ένα αποτέλεσμα του Pisier [20], αν $(Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach τότε υπάρχει μια ισοδύναμη νόρμα $\|\cdot\|$ στον Y και σταθερές $C > 0, q \geqslant 2$ τέτοιες ώστε $\|x+y\| \leqslant 2 - C^{-q}\|x-y\|^q$ για κάθε $x, y \in Y$ με $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$. Λέμε, επίσης, ότι η $\|\cdot\|$ έχει modulus ομοιόμορφης κυρτότητας εκθέτη q. Στη συνέχεια, μια ανισότητα του Pisier [20] για martingales δείχνει ότι, για κάθε χώρο πιθανότητας $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mu)$, κάθε martingale $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ στον $L_q(\mathcal{S}, \mu; Y)$ ικανοποιεί την

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|M_{k+1} - M_k\|_{L_q(\mathcal{S},\mu;Y)}^q\right)^{1/q} \preceq C \sup_{k\in\mathbb{N}} \|M_k\|_{L_q(\mathcal{S},\mu;Y)}.$$

Αυτό οδηγεί στον ορισμό της martingale cotype q σταθεράς του Y [5]:

$$m_q(Y) := \sup \left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \|M_{k+1} - M_k\|_Y^q \, d\mu\right)^{1/q},$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλα τα martingales $\{M_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq L_q(\mathcal{S}, \mu; Y)$ με

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{S}} \|M_k\|_Y^q \, d\mu = 1.$$

Ο Pisier [5] απέδειξε ότι, ο Y επιδέχεται ισοδύναμη νόρμα με μέτρο κυρτότητας τύπου q αν και μόνο αν ο Y έχει martingale cotype q. Η σταθερά c_Y εξαρτάται από το q και τη σταθερά $m_q(Y)$.

Θεωρούμε την ημιομάδα της θερμότητας στον $\mathbb{R}^n$ με τιμές στον Y, την οποία συμβολίζουμε με $\{H_t\}_{t\geqslant 0}$: για κάθε $t > 0$ και $f \in L_1(\mathbb{R}^n; Y)$ η συνάρτηση $H_t f : \mathbb{R}^n \to Y$ ορίζεται από την

$$H_t f(x) := h_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h_t(z) f(x-z) \, dz,$$

όπου $h_t : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ είναι ο πυρήνας της θερμότητας $h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Βασικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1 είναι η ακόλουθη χρονική ανισότητα Littlewood-Paley-Stein.

Θεώρημα 1.3.2. *Αν Y είναι ένας χώρος Banach με martingale cotype q σταθερά $m_q(Y) < \infty$ τότε, για κάθε $f \in L_q(\mathbb{R}^n; Y)$,*

$$\left(\int_0^{\infty} \|t\partial_t H_t f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \preceq \sqrt{n} \cdot m_q(Y) \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}.$$

Το επόμενο βασικό σημείο αφορά τον χώρο X. Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, τον οποίο ταυτίζουμε με τον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $0 < p < \infty$ θέτουμε

$$I_q(X) := \left(\fint_{B_X} |x|^q dx\right)^{1/q} \quad \text{και} \quad M_p(X) := \left(\fint_{S^{n-1}} \|\sigma\|^p d\sigma\right)^{1/p},$$

όπου $\fint_A \phi\, d\mu = \frac{1}{\mu(A)} \int_a \phi\, d\mu$. Αν $f : \mathbb{R}^n \to Y$ είναι μια διαφορίσιμη συνάρτηση, τότε το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της f στο $x \in \mathbb{R}^n$ είναι η αφφινική συνάρτηση $\mathrm{Taylor}_x^1(f) : \mathbb{R}^n \to Y$ που ορίζεται από την

$$\mathrm{Taylor}_x^1(f)(y) := f(x) + (y - x) \cdot \nabla f(x),$$

όπου

$$z \cdot \nabla f(x) := \sum_{j=1}^{n} z_j \partial_j f(x) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(x + \varepsilon z) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Οι Hytönen και Naor αποδεικνύουν το εξής.

Θεώρημα 1.3.3. *Αν η $f : X \to Y$ ικανοποιεί τις $\|f\|_{\mathrm{Lip}(B_X,Y)} \leqslant 1$ και $\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant L$ τότε, για κάθε $x \in B_X$ και*

$$0 < t \leqslant \frac{(1 - \|x\|)^2}{C(M_1(X)\sqrt{n} + b(X)\sqrt{\log L})^2}$$

ισχύει

$$\|\mathrm{Taylor}_x^1(H_t f)\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant 2.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω αποδεικνύουν ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $\kappa > 0$ τέτοια ώστε, αν $\dim(X) = n$ και $m_q(Y) < \infty$, και αν

$$\gamma = \gamma(q, X) = \frac{I_q(X)}{\sqrt{n} M(X)} \quad \text{και} \quad K = K(q, n, X, Y) = \kappa \sqrt[4]{n}\, m_q(Y) \sqrt{I_q(X) M(X)}, \tag{1.3.1}$$

τότε, για κάθε Lipschitz συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to Y$ με συμπαγή φορέα,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \fint_{x + tB_X} \frac{\|f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2} f)(y)\|_Y^q}{t^{q+1}}\, dy\, dt\, dx \right)^{1/q} \leqslant K |\mathrm{supp}(f)|^{1/q} \|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)}. \tag{1.3.2}$$

Έπεται το ακόλουθο:

Θεώρημα 1.3.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < \frac{1}{4}$ τέτοια ώστε, με την προηγούμενη υπόθεση, αν K είναι η σταθερά που ορίζεται στην (1.3.1) και*

$$T := \frac{c}{n^{\frac{5}{4}} \sqrt{I_q(X) M(X) \log n}}, \tag{1.3.3}$$

τότε $T \leqslant \frac{1}{2n}$. Επιπλέον, για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f : B_X \to Y$ και κάθε $0 < r \leqslant T^2$,

$$\fint_r^T \left(\fint_{(1 - \frac{1}{2n})B_X} \inf_{\substack{\Lambda \in \mathcal{A}(X,Y) \\ \|\Lambda\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant 2}} \frac{\fint_{x + \rho B_X} \|f(y) - \Lambda(y)\|_Y^q}{\rho^q} y\, dx \right) \frac{d\rho}{\rho} \leqslant \frac{(9Kn)^q}{|\log r|}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω μπορούμε να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1. Έστω $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ένας χώρος Banach που επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m_q(Y) < \infty$ για κάποιον q. Αν η $f : B_X \to Y$ είναι 1-Lipschitz και $0 < \delta \leqslant 1/2$, μπορούμε να επιλέξουμε απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε αν $r = \exp(-(CKn/\delta)^q)$ να έχουμε $r \leqslant T^2$, όπου T και K είναι οι σταθερές που ορίζονται στις (1.3.1) και (1.3.3). Τότε, από το Θεώρημα 1.3.4 υπάρχουν $\varrho \geqslant r$, $x \in B_X$ με $x+\varrho B_X \subseteq B_X$, και μια αφφινική συνάρτηση $\Lambda : X \to Y$ με $\|\Lambda\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant 2$ και

$$\left(\fint_{x+\rho B_X} \|f(y) - \Lambda(y)\|_Y^q \, dy\right)^{1/q} \leqslant \delta\varrho.$$

Αν το δ είναι εκθετικά μικρό ως προς n, για παράδειγμα αν $\delta = (\eta\varepsilon)^{1+n/q}$ για κάποια μικρή σταθερά $\eta > 0$, τότε $\|f(y)-\Lambda(y)\|_Y \leqslant \varepsilon\varrho$ για κάθε $y \in x+\varrho B_X$. Τότε, αν θέσουμε $\alpha = \eta/(C\kappa)$ παίρνουμε

$$r^{X\to Y}(\varepsilon) \geqslant \exp\left(-\frac{\left(n^{\frac{5}{4}}\sqrt{I_q(X)M_1(X)}\, m_q(Y)\right)^q}{(\alpha\varepsilon)^{n+q}}\right).$$

Δεδομένου ότι μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι $I_q(X)M_1(X) \leqslant \sqrt{n}$, τελικά παίρνουμε

$$r^{X\to Y}(\varepsilon) \geqslant \exp\left(-\frac{n^{\frac{3q}{2}} m_q(Y)^q}{(\alpha\varepsilon)^{n+q}}\right).$$

Έχουμε έτσι μια ακριβέστερη εκδοχή του κύριου θεωρήματος

$$r^{X\to Y}(\varepsilon) \geqslant \exp(-1/\varepsilon^{cn}).$$

Αξίζει να σημειωθεί ότι οι Hytönen και Naor, παρόλο που δεν το χρειάζονται για το κεντρικό αποτέλεσμα, δίνουν, επιπρόσθετα, καταφατική απάντηση σε ένα πρόβλημα των Martínez, Torrea και Xu [21], στην ειδική περίπτωση της ημιομάδας της θερμότητας (ακόμα και αυτή η ειδική περίπτωση δεν ήταν γνωστή). Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.3.2, για κάθε $\vec{f} \in \ell_q^n(L_q(\mathbb{R}^n; Y))$,

$$\left(\int_0^\infty \left\|\sqrt{t}\,\mathrm{div}\, H_t\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \preceq \sqrt{n}\cdot m_q(Y) \fint_{S^{n-1}} \left\|\sigma\cdot\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} d\sigma,$$

όπου $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$, $H_t\vec{f} := (H_tf_1, \ldots, H_tf_n)$ και $\mathrm{div}\, H_t\vec{f} := \sum_{j=1}^n \partial_j(H_tf_j)$. Επιπλέον, για κάθε $f \in L_q(\mathbb{R}^n; Y)$ και $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_0^\infty \left\|\sqrt{t}(z\cdot\nabla)H_tf\,\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \preceq |z|\, m_q(Y)\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}.$$

Ένα άλλο ενδιαφέρον σημείο στη δουλειά τους είναι η γεωμετρική παράμετρος $I_q(X)M_1(X)$ η οποία εμφανίζεται σε ένα από τα βασικά τεχνικά βήματα της απόδειξης, την (1.3.2). Η εκτίμησή τους χρησιμοποιεί αυτή την παράμετρο, η οποία συνδέεται στενά με την εικασία της ισοτροπικής σταθεράς στην ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία. Το πρόβλημα να ελαχιστοποιηθεί αυτή η παράμετρος πάνω από όλες τις «θέσεις» ενός συμμετρικού κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ και να δοθεί άνω φράγμα γι' αυτό το ελάχιστο, είναι ένα νέο ενδιαφέρον πρόβλημα στην ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία.

Κεφάλαιο 2

Ανάλυση σε χώρους Banach

Σε αυτό το κεφάλαιο, παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα της ολοκλήρωσης και παραγώγισης συναρτήσεων με τιμές σε χώρους Banach. Ξεκινάμε μελετώντας τους διάφορους ορισμούς μετρησιμότητας για τέτοιες συναρτήσεις. Αποδεικνύεται ότι για έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach X και έναν μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$, μια $f : \mathcal{S} \to X$ είναι μετρήσιμη - υπό την έννοια ότι τα $f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμα για κάθε Borel σύνολο B του X - αν και μόνο αν οι $\langle f, x^* \rangle$ είναι μετρήσιμες για κάθε $x^* \in X^*$. Αυτό είναι ουσιαστικά το περιεχόμενο του θεωρήματος μετρησιμότητας του Pettis.

Κατασκευάζουμε το ολοκλήρωμα Bochner, το οποίο είναι το ανάλογο του ολοκληρώματος Lebesgue για συναρτήσεις με τιμές σε έναν χώρο Banach. Διατηρούνται όλες οι ουσιαστικές πλευρές του ολοκληρώματος Lebesgue, όπως τα θεωρήματα προσέγγισης, τα θεωρήματα σύγκλισης και το θεώρημα Fubini. Οι χώροι Banach $L_p(\mu; X)$ αποτελούν το βασικό υπόβαθρο για τον σκοπό αυτό.

Εν συνεχεία, ορίζουμε την έννοια της διαφορισιμότητας συναρτήσεων από έναν χώρο Banach σε έναν άλλο χώρο Banach. Και σε αυτή την περίπτωση, τα βασικά θεωρήματα του Διαφορικού Λογισμού παραμένουν αληθή.

2.1 Μετρησιμότητα

Στους χώρους Banach εμφανίζονται διάφορες μορφές μετρησιμότητας, όπως η (απλή) μετρησιμότητα, η ισχυρή και η ασθενής μετρησιμότητα. Σε πεπερασμένη διάσταση αυτές οι τρεις ταυτίζονται, αλλά αυτό δεν είναι αληθές σε άπειρη διάσταση. Πρέπει, λοιπόν, να γίνει κατανοητό, πως αυτές οι τρεις έννοιες συνδέονται. Το θεώρημα μετρησιμότητας του Pettis είναι το κύριο αποτέλεσμα σε αυτή την κατεύθυνση. Μας λέει ότι μια συνάρτηση με τιμές σε ένα χώρο Banach είναι ισχυρά μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι separably valued και ασθενώς μετρήσιμη.

2.1.1 Συναρτήσεις σε έναν μετρήσιμο χώρο $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$

Ο πρώτος ορισμός της μετρησιμότητας που θα σκεφτεί κανείς για συναρτήσεις με τιμές σε έναν χώρο Banach είναι αυτός με τις αντίστροφες εικόνες: μια συνάρτηση με τιμές σε ένα χώρο Banach X

είναι *μετρήσιμη* αν για κάθε B Borel του X, το $f^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο. Αποδεικνύεται, όμως, ότι αυτός ο φυσιολογικός ορισμός δεν είναι ιδιαίτερα χρήσιμος, κυρίως επειδή η Borel σ-άλγεβρα $\mathcal{B}(X)$ είναι γενικά πολύ "μεγάλη". Για την ακρίβεια, η σ-άλγεβρα που παράγεται από όλα τα γραμμικά συναρτησοειδή του X μπορεί να είναι γνήσια μικρότερη της $\mathcal{B}(X)$. Αυτό αποτελεί ένα εμπόδιο στο να εφαρμόσουμε συνήθη εργαλεία της συναρτησιακής ανάλυσης όπως το θεώρημα Hahn-Banach ουσιαστικά.

Το πρώτο κύριο αποτέλεσμα είναι ότι αν ο X είναι διαχωρίσιμος χώρος Banach, τότε το πρόβλημα δεν εμφανίζεται. Αν $Y \subseteq X^*$, συμβολίζουμε με $\sigma(Y)$ την σ-άλγεβρα που παράγεται από το Y, δηλαδή την μικρότερη σ-άλγεβρα του X για την οποία κάθε $x^* \in Y$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Παρατηρούμε ότι η $\sigma(Y)$ παράγεται από την οικογένεια $\mathcal{C}(Y)$ που αποτελείται από όλα τα σύνολα της μορφής

$$\{x \in X : (\langle x, x_1^* \rangle, \ldots, \langle x, x_n^* \rangle) \in B\}$$

με $n \geq 1$, $x_1^*, \ldots, x_n^* \in Y$ και $B \in \mathcal{B}(\mathbb{K}^n)$.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας γραμμικός υπόχωρος Y του X^* είναι πυκνός ως προς την ασθενή* τοπολογία του X αν και μόνο αν ο Y διαχωρίζει τα σημεία του X.

Πρόταση 2.1.1. *Έστω X διαχωρίσιμος και Y ασθενώς* πυκνός γραμμικός υπόχωρος του X^*. Τότε*

$$\sigma(Y) = \sigma(X^*) = \mathcal{B}(X).$$

Όταν ο X δεν είναι διαχωρίσιμος, είναι δυνατόν και να ισχύει $\sigma(X^*) \neq \mathcal{B}(X)$.

Πόρισμα 2.1.2. *Αν ο X είναι διαχωρίσιμος και $f : \mathcal{S} \to X$, τα επόμενα είναι ισοδύναμα:*

(α) η f είναι μετρήσιμη,

(β) η $\langle f, x^* \rangle$ είναι μετρήσιμη για κάθε $x^* \in X^*$.

Η χαρακτηριστική ιδιότητα που χρησιμοποιείται για την κατασκευή του ολοκληρώματος Lebesgue είναι ότι κάθε μετρήσιμη συνάρτηση προσεγγίζεται σημειακά από απλές συναρτήσεις. Εφόσον, και αντίστροφα, το κατά σημείο όριο μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μετρήσιμη, αυτό μας οδηγεί να συνδέσουμε την έννοια της μετρησιμότητας με την προσέγγιση από απλές συναρτήσεις. Αυτή ακριβώς η ιδέα μας δίνει τον ορισμό της ισχυρής μετρησιμότητας.

Μια $f : \mathcal{S} \to X$ λέγεται *απλή* αν είναι της μορφής $f = \sum_{i=1}^{n} x_n \mathbb{1}_{A_n}$ για κάποια $A_n \in \mathcal{A}$ και $x_n \in X$.

Μια $f : \mathcal{S} \to X$ λέγεται *ισχυρά μετρήσιμη* αν υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $f_n : \mathcal{S} \to X$ τέτοια ώστε $f_n \to f$ κατά σημείο.

Μια $f : \mathcal{S} \to X$ λέγεται *separably valued* αν υπάρχει διαχωρίσιμος κλειστός υπόχωρος $X_0 \subseteq X$ τέτοιος ώστε $f(s) \in X_0$ για κάθε $s \in \mathcal{S}$. Μια $f : \mathcal{S} \to X$ λέγεται *ασθενώς μετρήσιμη* αν η

$$s \mapsto \langle f, x^* \rangle(s) = \langle f(s), x^* \rangle,$$

είναι μετρήσιμη για κάθε $x^* \in X^*$.

Θεώρημα 2.1.3 (1^o Θεώρημα μετρησιμότητας του Pettis). *Έστω $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος και Y ένας ασθενώς* πυκνός υπόχωρος του X^*. Για μια $f : \mathcal{S} \to X$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(a) η f είναι ισχυρά μετρήσιμη,

(b) η f είναι separably valued και ασθενώς μετρήσιμη,

(c) η f είναι separably valued και η $\langle f, x^* \rangle$ είναι μετρήσιμη για κάθε $x^* \in Y$.

Επιπλέον, αν η f παίρνει τιμές σε έναν κλειστό γραμμικό υπόχωρο X_0 του X, τότε η f είναι το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας απλών συναρτήσεων με τιμές στο X_0.

Πόρισμα 2.1.4. *Αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι ισχυρά μετρήσιμη, τότε υπάρχει ακολουθία απλών συναρτήσεων $(f_n)_n$ τέτοια ώστε $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ και $f_n \to f$ κατά σημείο.*

Πόρισμα 2.1.5. *Αν η $f : \mathcal{S} \to X$ παίρνει τιμές σε έναν κλειστό υπόχωρο X_0 του X, τότε η f είναι ισχυρά μετρήσιμη ως συνάρτηση με τιμές στον X αν και μόνο αν η f είναι ισχυρά μετρήσιμη ως συνάρτηση με τιμές στον X_0.*

Πόρισμα 2.1.6. *Το κατά σημείο όριο ισχυρά μετρήσιμων συναρτήσεων είναι ισχυρά μετρήσιμη συνάρτηση.*

Το επόμενο πόρισμα μας δίνει την ακριβή σύνδεση των μετρήσιμων και των ισχυρά μετρήσιμων συναρτήσεων.

Πόρισμα 2.1.7. *Έστω $f : \mathcal{S} \to X$. Η f είναι ισχυρά μετρήσιμη αν και μόνο αν είναι separably valued και μετρήσιμη.*

Αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι ισχυρά μετρήσιμη και παίρνει τιμές σε ένα ανοιχτό υποσύνολο $O \subseteq X$, και η $\phi : O \to Y$ είναι συνεχής, όπου Y ένας άλλος χώρος Banach, τότε η $\phi \circ f$ είναι ισχυρά μετρήσιμη. Για την ακρίβεια, η f είναι το κατά σημείο όριο απλών f_n, άρα και το όριο των $\hat{f}_n = \mathbb{1}_{\{f_n \in O\}} f_n + \mathbb{1}_{\{f_n \notin O\}} x_0$, όπου x_0 ένα σταθερό σημείο του O. Τότε, οι $\phi \circ \hat{f}_n$ είναι καλά ορισμένες, απλές και συγκλίνουν στην $\phi \circ f$.

Γενικότερα, ισχύει το εξής:

Πόρισμα 2.1.8. *Αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι ισχυρά μετρήσιμη και η $\phi : X \to Y$ είναι μετρήσιμη, όπου Y ένας χώρος Banach, τότε η $\phi \circ f$ είναι ισχυρά μετρήσιμη.*

2.1.2 Συναρτήσεις σε έναν χώρο μέτρου $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu)$

Μια *μ-απλή* συνάρτηση με τιμές στον X είναι μια συνάρτηση της μορφής $f = \sum_{i=1}^n x_n \mathbb{1}_{A_n}$, όπου $x_n \in X$, και $A_n \in \mathcal{A}$ με $\mu(A_n) < \infty$.

Μια $f : \mathcal{S} \to X$ είναι *ισχυρά μ-μετρήσιμη* αν υπάρχει ακολουθία $(f_n)_n$ μ-απλών συναρτήσεων που να συγκλίνει στην f μ-σχεδόν παντού.

Όταν $X = \mathbb{K}$, συνήθως λέμε ότι η f είναι απλώς μ-μετρήσιμη.

Το παρακάτω αποτέλεσμα, μας λέει ότι μια ισχυρά μ-μετρήσιμη συνάρτηση έχει μ-ουσιώδες φορέα σε σ-πεπερασμένα μέτρα.

Πρόταση 2.1.9. *Έστω $f : \mathcal{S} \to X$ ισχυρά μ-μετρήσιμη. Τότε υπάρχει διαμέριση $\mathcal{S} = S_0 \sqcup S_1$ με $S_0, S_1 \in \mathcal{A}$ τέτοια ώστε:*

(a) $f \equiv 0$ μ-σχεδόν παντού στο S_0,

(b) το μ είναι σ-πεπερασμένο στο S_1.

Η επόμενη πρόταση συνδέει την έννοια της ισχυρής μετρησιμότητας με αυτή της ισχυρής μ-μετρησιμότητας.

Πρόταση 2.1.10. *Έστω $f : \mathcal{S} \to X$.*

(a) Αν η f είναι ισχυρά μ-μετρήσιμη, τότε η f είναι μ-σχεδόν παντού ίση με μια ισχυρά μετρήσιμη συνάρτηση.

(b) Αν το μ είναι σ-πεπερασμένο και η f είναι μ-σχεδόν παντού ίση με μια ισχυρά μετρήσιμη συνάρτηση, τότε η f είναι ισχυρά μ-μετρήσιμη.

Μια $f : \mathcal{S} \to X$ λέγεται *μ-essentially separably valued* αν υπάρχει κλειστός διαχωρίσιμος υπόχωρος X_0 του X τέτοιος ώστε $f(s) \in X_0$ για μ-σχεδόν όλα τα $s \in \mathcal{S}$, και *ασθενώς μ-μετρήσιμη* αν η $\langle f, x^* \rangle$ είναι μ-μετρήσιμη για κάθε $x^* \in X^*$.

Θεώρημα 2.1.11 (2^o Θεώρημα μετρησιμότητας του Pettis)**.** *Έστω $f : \mathcal{S} \to X$. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(a) η f είναι ισχυρά μ-μετρήσιμη,

(b) η f είναι μ-essentially separably valued και ασθενώς μ-μετρήσιμη,

(c) η f είναι μ-essentially separably valued και υπάρχει ένας ασθενώς* πυκνός υπόχωρος Y του X^* τέτοιος ώστε η $\langle f, x^* \rangle$ να είναι μ-μετρήσιμη για κάθε $x^* \in Y$.

Επιπλέον, αν η f παίρνει τιμές μ-σχεδόν παντού σε έναν κλειστό γραμμικό υπόχωρο X_0 του X, τότε η f είναι μ-σχεδόν παντού το κατά σημείο όριο απλών συναρτήσεων με τιμές στον X_0.

Για λόγους πληρότητας παραθέτουμε κάποια αντίστοιχα πορίσματα με αυτά που αναφέραμε και για την ισχυρή μετρησιμότητα.

Πόρισμα 2.1.12. *Αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι ισχυρά μ-μετρήσιμη. τότε υπάρχει ακολουθία μ-απλών συναρτήσεων $(f_n)_n$ τέτοια ώστε $\|f_n(x)\| \leq \|f(x)\|$ και $f_n(x) \to f(x)$ για μ-σχεδόν όλα τα $x \in \mathcal{S}$.*

Πόρισμα 2.1.13. *Αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι ισχυρά μ-μετρήσιμη και παίρνει τιμές σε έναν κλειστό υπόχωρο X_0 του X μ-σχεδόν παντού, τότε η f είναι μ-ισχυρά μετρήσιμη ως συνάρτηση με τιμές στον X_0.*

Πόρισμα 2.1.14. *Το μ-σχεδόν παντού κατά σημείο όριο μ-ισχυρά μετρήσιμων συναρτήσεων είναι μ-ισχυρά μετρήσιμη συνάρτηση.*

Πόρισμα 2.1.15. *Αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι μ-ισχυρά μετρήσιμη και η $\phi : X \to Y$ είναι μετρήσιμη, όπου Y ένας χώρος Banach, τότε η $\phi \circ f$ είναι ισχυρά μ-μετρήσιμη αν ένα εκ των παρακάτω δύο ισχύει:*

(i) *το μ είναι σ-πεπερασμένο,*

(ii) $\phi(0) = 0$.

Πόρισμα 2.1.16. *Έστω f και g ισχυρά μ-μετρήσιμες τέτοιες ώστε $\langle f, x^* \rangle = \langle g, x^* \rangle$ μ-σχεδόν παντού για κάθε $x^* \in Y$, όπου Y ένας ασθενώς* πυκνός γραμμικός υπόχωρος του X^*. Τότε $f = g$ μ-σχεδόν παντού.*

2.2 Το ολοκλήρωμα Bochner

Εδώ συζητάμε την επέκταση του ολοκληρώματος Lebesgue για συναρτήσεις με τιμές σε έναν χώρο Banach, το ολοκλήρωμα Bochner.

Έστω $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu)$ χώρος μέτρου. Για μια μ-απλή συνάρτηση $f = \sum_{i=1}^{n} x_n \mathbb{1}_{A_n}$ ορίζουμε

$$\int_{\mathcal{S}} f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} x_n \mu(A_n).$$

Είναι εύκολο να ελέγξει κανείς ότι ο ορισμός είναι ανεξάρτητος της αναπαράστασης της f και ότι $\| \int_{\mathcal{S}} f \, d\mu \| \leq \int_{\mathcal{S}} \|f\| \, d\mu$. Αν οι f και g είναι μ-απλές, τότε $\int_{\mathcal{S}} f \, d\mu + \int_{\mathcal{S}} g \, d\mu = \int_{\mathcal{S}} f + g \, d\mu$.

Μια ισχυρά μ-μετρήσιμη $f : \mathcal{S} \to X$ είναι *Bochner ολοκληρώσιμη* αν υπάρχει ακολουθία μ-απλών συναρτήσεων $f_n : \mathcal{S} \to X$ τέτοια ώστε

$$\lim_{n} \int_{\mathcal{S}} \|f - f_n\| \, d\mu = 0.$$

Παρατηρούμε ότι η $s \mapsto \|f(s) - f_n(s)\|$ είναι μ-μετρήσιμη, άρα ο ορισμός βγάζει νόημα. Από την

$$\left\| \int_{\mathcal{S}} f_n \, d\mu - \int_{\mathcal{S}} f_m \, d\mu \right\| \leq \int_{\mathcal{S}} \|f_n - f_m\| \, d\mu \leq \int_{\mathcal{S}} \|f_n - f\| \, d\mu + \int_{\mathcal{S}} \|f - f_m\| \, d\mu$$

βλέπουμε ότι τα ολοκληρώματα $\int_{\mathcal{S}} f_n \, d\mu$ αποτελούν μια βασική ακολουθία. Άρα, λόγω πληρότητας, η ακολουθία αυτή συγκλίνει σε ένα στοιχείο του X. Το όριο αυτό καλείται το *ολοκλήρωμα Bochner* της f, δηλαδή

$$\int_{\mathcal{S}} f \, d\mu = \lim_{n} \int_{\mathcal{S}} f_n \, d\mu.$$

Είναι εύκολο να δειχθεί ότι ο ορισμός αυτός είναι ανεξάρτητος από την επιλογή της ακολουθίας απλών συναρτήσεων.

Αν η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη και $f = g$ μ-σχεδόν παντού, τότε η g είναι Bochner ολοκληρώσιμη και τα ολοκληρώματα των f και g ταυτίζονται. Ειδικότερα, στον ορισμό του ολοκληρώματος Bochner αρκεί η f να είναι μ-σχεδόν παντού ορισμένη.

Πρόταση 2.2.1. *Μια ισχυρά μ-μετρήσιμη $f : \mathcal{S} \to X$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν*

$$\int_{\mathcal{S}} \|f\|\, d\mu < \infty,$$

και σε αυτή την περίπτωση

$$\left\| \int_{\mathcal{S}} f\, d\mu \right\| \le \int_{\mathcal{S}} \|f\|\, d\mu.$$

Μια απλή εφαρμογή του παραπάνω αποτελέσματος μας δίνει ότι αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη, τότε για κάθε $A \in \mathcal{A}$ η $\mathbb{1}_A f : \mathcal{S} \to X$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη και η $f|A : A \to X$ είναι επίσης Bochner ολοκληρώσιμη ως προς το $\mu|_A$. Επιπλέον,

$$\int_{\mathcal{S}} \mathbb{1}_A f\, d\mu = \int_A f|_A\, d\mu|_A.$$

Στο εξής, τα ολοκληρώματα αυτά θα συμβολίζονται με $\int_A f\, d\mu$.

Πρόταση 2.2.2. *Έστω $f : \mathcal{S} \to X$ Bochner ολοκληρώσιμη. Αν X_0 είναι ένας κλειστός υπόχωρος του X τέτοιος ώστε $f(s) \in X_0$ για σχεδόν όλα τα $s \in \mathcal{S}$, τότε η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη ως συνάρτηση με τιμές στον X_0, και ειδικότερα $\int_{\mathcal{S}} f\, d\mu \in X_0$.*

Είναι άμεσο από τον ορισμό του ολοκληρώματος Bochner ότι αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη και ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής από τον X σε έναν άλλο χώρο Banach, τότε η $Tf : \mathcal{S} \to Y$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη και

$$T \int_{\mathcal{S}} f\, d\mu = \int_{\mathcal{S}} Tf\, d\mu. \tag{2.2.1}$$

Ειδικότερα, για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε ότι

$$\left\langle \int_{\mathcal{S}} f\, d\mu, x^* \right\rangle = \int_{\mathcal{S}} \langle f, x^* \rangle\, d\mu.$$

Η ταυτότητα (2.2.1) έχει μια χρήσιμη γενίκευση στην κλάση των κλειστών γραμμικών τελεστών. Ένας γραμμικός τελεστής T ορισμένος στον γραμμικό υπόχωρο $D(T) \subseteq X$ (το πεδίο ορισμού του T) που παίρνει τιμές σε έναν άλλο χώρο Banach Y, λέγεται *κλειστός* αν το γράφημα

$$G(T) = \{(x, Tx) : x \in D(T)\}$$

είναι κλειστός υπόχωρος του $X \times Y$. Αν ο T είναι κλειστός, τότε το $D(T)$ είναι χώρος Banach με την νόρμα του γραφήματος

$$\|x\|_{D(T)} = \|x\| + \|Tx\|$$

και ο T είναι φραγμένος τελεστής από τον $D(T)$ στον X. Το θεώρημα κλειστού γραφήματος λέει ότι αν ο $T : X \to Y$ είναι ένας κλειστός γραμμικός τελεστής με πεδίο ορισμού $D(T) = X$, τότε ο T είναι φραγμένος.

Θεώρημα 2.2.3 (Hille)**.** *Έστω $f : \mathcal{S} \to X$ μια Bochner ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω T κλειστός γραμμικός τελεστής με πεδίο ορισμού $D(T)$ στον X και με τιμές σε έναν χώρο Banach Y. Αν η f παίρνει τιμές στο $D(T)$ σχεδόν παντού και η σχεδόν παντού ορισμένη $Tf : \mathcal{S} \to Y$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη, τότε η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη ως συνάρτηση με τιμές στον $D(T)$, $\int_{\mathcal{S}} f\,d\mu \in D(T)$, και*

$$T \int_{\mathcal{S}} f\,d\mu = \int_{\mathcal{S}} Tf\,d\mu.$$

Ως γενικός κανόνας, τα αποτελέσματα του ολοκληρώματος Lebesgue ισχύουν και για το ολοκλήρωμα Bochner, αρκεί να μην εμπλέκεται η υπόθεση θετικότητας της συνάρτησης. Για παράδειγμα, όπως βλέπουμε παρακάτω, υπάρχουν τα ανάλογα του θεωρήματος κυριαρχημένης σύγκλισης, του θεωρήματος αντικατάστασης και του θεωρήματος Fubini.

Θεώρημα 2.2.4 (Θεώρημα Κυριαρχημένης Σύγκλισης)**.** *Έστω $f_n : \mathcal{S} \to X$ Bochner ολοκληρώσιμες. Αν υπάρχει $f : \mathcal{S} \to X$ και μη-αρνητική ολοκληρώσιμη $g : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ τέτοιες ώστε $\lim_n f_n = f$ σχεδόν παντού και $\|f_n\| \leq g$ σχεδόν παντού, τότε η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη και*

$$\lim_n \int_{\mathcal{S}} \|f_n - f\|\,d\mu = 0.$$

Ειδικότερα,

$$\lim_n \int_{\mathcal{S}} f_n\,d\mu = \int_{S} f\,d\mu.$$

Θεώρημα 2.2.5 (Θεώρημα Αντικατάστασης)**.** *Έστω $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος μέτρου και $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ ένας μετρήσιμος χώρος. Έστω $\phi : \mathcal{S} \to \mathcal{T}$ μετρήσιμη και $f : \mathcal{T} \to X$ ισχυρά μετρήσιμη. Θεωρούμε το $\nu = \mu \circ \phi^{-1}$, το μέτρο-εικόνα του μ ως προς την ϕ. Τότε η $f \circ \phi$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη ως προς το μ αν και μόνο αν η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη ως προς το ν, και σε αυτή την περίπτωση*

$$\int_{\mathcal{S}} f \circ \phi\,d\mu = \int_{\mathcal{T}} f\,d\nu.$$

Αν $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ και $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ μετρήσιμοι χώροι, συμβολίζουμε με $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ τη *σ-άλγεβρα γινόμενο*, δηλαδή τη μικρότερη σ-άλγεβρα στην $\mathcal{S} \times \mathcal{T}$ που περιέχει όλα τα σύνολα της μορφής $A \times B$, όπου $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$. Αν τα μ και ν είναι σ-πεπερασμένα στις $(\mathcal{S}, \mathcal{A})$ και $(\mathcal{T}, \mathcal{B})$ αντίστοιχα, συμβολίζουμε με $\mu \times \nu$ το *μέτρο γινόμενο*, δηλαδή το μοναδικό σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(\mathcal{S} \times \mathcal{T}, \mathcal{A} \times \mathcal{B})$ με $(\mu \times \nu)(A \times B) = \mu(A)\nu(B)$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ και $B \in \mathcal{B}$.

Το θεώρημα μετρησιμότητας του Pettis 2.1.11 και το θεώρημα Fubini μας δίνουν την εξής απλή παρατήρηση. Αν η $f : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \to X$ είναι ισχυρά μετρήσιμη, τότε για κάθε $s \in \mathcal{S}, t \in \mathcal{T}$ οι συναρτήσεις $t \mapsto f(s,t)$ και $s \mapsto f(s,t)$ είναι ισχυρά μετρήσιμες. Όμοια, αν η $f : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \to X$ είναι ισχυρά $\mu \times \nu$-μετρήσιμη, τότε για μ-σχεδόν όλα τα $s \in \mathcal{S}$ η συνάρτηση $t \mapsto f(s,t)$ είναι ισχυρά ν-μετρήσιμη και για ν-σχεδόν όλα τα $t \in \mathcal{T}$ η συνάρτηση $s \mapsto f(s,t)$ είναι ισχυρά μ-μετρήσιμη. Όσον αφορά την Bochner ολοκληρωσιμότητα των παραπάνω συναρτήσεων έχουμε το εξής αποτέλεσμα.

Θεώρημα 2.2.6 (Θεώρημα Fubini)**.** *Έστω $(\mathcal{S}, \mathcal{A}, \mu)$ και $(\mathcal{T}, \mathcal{B}, \nu)$ σ-πεπερασμένοι χώροι μέτρου και $f : \mathcal{S} \times \mathcal{T} \to X$ Bochner ολοκληρώσιμη. Τότε,*

(i) Για σχεδόν όλα τα $s \in \mathcal{S}$ η συνάρτηση $t \mapsto f(s,t)$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη.

(ii) Για σχεδόν όλα τα $t \in \mathcal{T}$ η συνάρτηση $s \mapsto f(s,t)$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη.

(iii) Οι συναρτήσεις $s \mapsto \int_{\mathcal{T}} f(s,t)\, d\nu(t)$ και $t \mapsto \int_{\mathcal{S}} f(s,t)\, d\mu(s)$ είναι Bochner ολοκληρώσιμες και

$$\int_{\mathcal{S}\times\mathcal{T}} f(s,t)\, d(\mu \times \nu)(s,t) = \int_{\mathcal{T}} \int_{\mathcal{S}} f(s,t)\, d\mu(s)\, d\nu(t) = \int_{\mathcal{S}} \int_{\mathcal{T}} f(s,t)\, d\nu(t)\, d\mu(s).$$

Συνεχίζουμε με κάποια αποτελέσματα στο ολοκλήρωμα Bochner σχετικά με την κυρτότητα. Για να αποδειχθεί η ανισότητα Jensen χρειάζονται τα εξής δύο λήμματα.

Λήμμα 2.2.7. *Έστω C ένα κυρτό κλειστό σύνολο σε ένα διαχωρίσιμο χώρο με νόρμα X. Τότε υπάρχει ακολουθία αφφινικών συναρτήσεων της μορφής $\phi_i = \Re\langle \cdot, x_i^* \rangle - t_i$, όπου $x_i^* \in X^*$ και $t_i \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$x \in C \Leftrightarrow \forall i \quad \phi_i(x) \geq 0.$$

Μια $\phi : X \to \mathbb{R}$ λέγεται *κάτω ημι-συνεχής* αν $\phi(x_0) \leq \liminf_{x \to x_0} \phi(x)$ για κάθε $x_0 \in X$.

Λήμμα 2.2.8. *Έστω $\phi : X \to \mathbb{R}$ κυρτή, κάτω ημι-συνεχής συνάρτηση, όπου X διαχωρίσιμος χώρος με νόρμα. Τότε, υπάρχει ακολουθία αφφινικών συναρτήσεων $\phi_i : X \to \mathbb{R}$ της μορφής $\phi_i = \Re\langle \cdot, y_i^* \rangle + a_i$ με $y_i^* \in X^*$ και $a_i \in \mathbb{R}$, τέτοια ώστε*

$$\phi(x) = \sup_i \phi(x) \quad \forall x \in X.$$

Θεώρημα 2.2.9 (Ανισότητα Jensen)**.** *Έστω $\mu(\mathcal{S}) = 1$, $f : \mathcal{S} \to X$ Bochner ολοκληρώσιμη και $\phi : X \to \mathbb{R}$ κυρτή και κάτω ημι-συνεχής. Αν η $\phi \circ f$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\phi\left(\int_{\mathcal{S}} f\, d\mu\right) \leq \int_{\mathcal{S}} \phi \circ f\, d\mu.$$

Στο επόμενο αποτέλεσμα, με $\operatorname{conv} V$ συμβολίζουμε την *κυρτή θήκη* του $V \subseteq X$. δηλαδή το σύνολο των πεπερασμένων γραμμικών συνδυασμών $\sum_{i=1}^n \lambda_i x_i$ όπου $x_i \in V$, $\lambda_i \geq 0$ και $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$. Η κλειστή θήκη αυτού του συνόλου συμβολίζεται με $\overline{\operatorname{conv}} V$.

Πρόταση 2.2.10. *Έστω $\mu(\mathcal{S}) = 1$. Αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη, τότε*

$$\int_{\mathcal{S}} f\, d\mu \in \overline{\operatorname{conv}}\{f(s) : s \in \mathcal{S}\}.$$

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, έχουμε το εξής.

Πρόταση 2.2.11. *Έστω $f : \mathcal{S} \to X$ Bochner ολοκληρώσιμη και έστω $C \subseteq X$ κλειστό και κυρτό. Αν το $\frac{1}{\mu(A)} \int_A f \, d\mu \in C$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(A) < \infty$, τότε $f(s) \in C$ για σχεδόν όλα τα $s \in \mathcal{S}$.*

Το παρακάτω αποτέλεσμα δίνει ένα χρήσιμο κριτήριο για να ελέγχουμε πότε δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις είναι ίσες σχεδόν παντού.

Πρόταση 2.2.12. *Έστω $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{A}$ μια οικογένεια συνόλων, κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές, με $\sigma(\mathcal{C}) = \mathcal{A}$. Αν η $f : \mathcal{S} \to X$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη και*

$$\int_C f \, d\mu = 0 \qquad \forall C \in \mathcal{C},$$

τότε $f = 0$ σχεδόν παντού.

2.3 Οι χώροι Bochner $L_p(\mu; X)$

Δύο ισχυρά μ-μετρήσιμες $f : \mathcal{S} \to X$ και $g : \mathcal{S} \to X$ θα καλούνται *ισοδύναμες* αν $f(s) = g(s)$ για μ-σχεδόν όλα τα $s \in \mathcal{S}$. Έτσι, έχουμε μια σχέση ισοδυναμίας στο σύνολο των ισχυρά μ-μετρήσιμων συναρτήσεων από τον $\mathcal{S}$ στον X. Ως συνήθως δεν θα διακρίνουμε μια συνάρτηση από την κλάση που ορίζει.

Για κάθε $1 \leq p < \infty$ ορίζουμε τον $L_p(\mu; X)$ ως τον γραμμικό χώρο όλων των (κλάσεων ισοδυναμίας των) ισχυρά μ-μετρήσιμων $f : \mathcal{S} \to X$ για τις οποίες

$$\int_{\mathcal{S}} \|f\|^p \, d\mu < \infty.$$

Επίσης, ορίζουμε τον $L_\infty(\mu; X)$ ως τον γραμμικό χώρο όλων των (κλάσεων ισοδυναμίας των) ισχυρά μ-μετρήσιμων $f : \mathcal{S} \to X$ για τις οποίες υπάρχει $r \geq 0$ τέτοιος ώστε $\mu([\|f\| \geq r]) = 0$.

Οι χώροι L_p για $1 \leq p \leq \infty$ εφοδιασμένοι με τις νόρμες

$$\|f\|_{L_p(\mu;X)} = \left(\int_{\mathcal{S}} \|f\|^p \, d\mu \right)^{1/p}$$

και

$$\|f\|_{L_\infty(\mu;X)} = \inf\{r \geq 0 : \mu([\|f\| \geq r]) = 0\},$$

είναι χώροι Banach. Η απόδειξη χρειάζεται το εξής αποτέλεσμα. Αν $\lim_n f_n = f$ στον $L_p(\mu; X)$, τότε υπάρχει υπακολουθία με $\lim_n f_{k_n} = f$ στον X σχεδόν παντού. Παρατηρούμε, επίσης, ότι τα στοιχεία του $L_1(\mu; X)$ είναι ακριβώς οι κλάσεις ισοδυναμίας των Bochner ολοκληρώσιμων συναρτήσεων.

Για $1 \leq p \leq \infty$ γράφουμε

$$L_p(\mu) = L_p(\mu; \mathbb{K}).$$

Παρατηρούμε ότι μια μ-μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathcal{S} \to X$ ανήκει στον $L_p(\mu; X)$ αν και μόνο αν η $\|f\| : \mathcal{S} \to \mathbb{R}$ ανήκει στον $L_p(\mu)$.

Αν η $\mathcal{F}$ είναι μια υπο-σ-άλγεβρα της $\mathcal{A}$, γράφουμε

$$L_p(\mu, \mathcal{F}; X)$$

τον L_p-χώρο ως προς το χώρο μέτρου $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mu|_{\mathcal{F}})$. Ο χώρος αυτός συμπίπτει με τον κλειστό γραμμικό υπόχωρο του $L_p(\mu; X)$ που αποτελείται από όλες τις κλάσεις ισοδυναμίας των συναρτήσεων που είναι μ-μετρήσιμες ως προς την $\mathcal{F}$. Επίσης, γράφουμε $L_p(\mu, \mathcal{F}) = L_p(\mu, \mathcal{F}; \mathbb{K})$.

Πρόταση 2.3.1. *Για μια ισχυρά μ-μετρήσιμη $f : \mathcal{S} \to X$ τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:*

(i) $f \in L_\infty(\mu; X)$,

(ii) $\langle f, x^* \rangle \in L_\infty(\mu)$ *για κάθε* $x^* \in X^*$.

Επιπλέον,

$$\|f\|_{L_\infty(\mu;X)} = \sup_{\|x^*\| \leq 1} \|\langle f, x^* \rangle\|_{L_\infty(\mu)}.$$

Λήμμα 2.3.2 (Προσέγγιση από απλές συναρτήσεις)**.** *Έστω* $1 \leq p \leq \infty$.

(i) Οι μ-απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L_p(\mu; X)$, $1 \leq p < \infty$. Ειδικότερα, το αλγεβρικό τανυστικό γινόμενο $L_p(\mu) \otimes X$ είναι πυκνό στον $L_p(\mu; X)$, $1 \leq p < \infty$.

(ii) Οι μ-απλές συναρτήσεις είναι πυκνές στον $L_\infty(\mu; X)$ ως προς την σύγκλιση ως προς μέτρο. Ειδικότερα, αν η f είναι στον $L_\infty(\mu; X)$ και $A \in \mathcal{A}$ με σ-πεπερασμένο μέτρο, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν μ-απλή $g : \mathcal{S} \to X$ και $A' \in A$ με $A' \subseteq A$ και $\mu(A \backslash A') < \varepsilon$ τέτοια ώστε $\|g\|_\infty \leq \|f\|_\infty$ και

$$\sup_{s \in A'} \|f(s) - g(s)\| < \varepsilon.$$

Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με κάποια αποτελέσματα στους χώρους Bochner $L_p(\mathbb{R}^n; X)$ επί του χώρου μέτρου $(\mathbb{R}^n, \mathcal{B}(\mathbb{R}^n), \lambda)$, όπου λ είναι το μέτρο Lebesgue.

Λήμμα 2.3.3 (Ανισότητα Young)**.** *Αν $f \in L_p(\mathbb{R}^n; X)$ και $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$, τότε η συνέλιξη*

$$\phi * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y) f(x - y) \, dy$$

είναι καλά ορισμένη ως ολοκλήρωμα Bochner για σχεδόν όλα τα $x \in \mathbb{R}^n$, και

$$\|\phi * f\|_p \leq \|\phi\|_1 \|f\|_p.$$

Ο αναγνώστης που γνωρίζει το θεώρημα του Lusin μπορεί να παρατηρήσει ότι το ακόλουθο λήμμα ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον $\mathbb{R}^n$ με έναν τυχαίο τοπικά συμπαγή Hausdorff χώρο με ένα κανονικό μέτρο Borel μ.

Λήμμα 2.3.4. *Για κάθε $p \in [1, \infty)$ ο χώρος $C_c(\mathbb{R}^n; X)$ των συναρτήσεων με συμπαγή φορέα είναι πυκνός στον $L_p(\mathbb{R}^n; X)$.*

Σαν εφαρμογή του παραπάνω μπορούμε να πάρουμε και την εξής χρήσιμη προσέγγιση.

Πρόταση 2.3.5. *Έστω $f \in L_p(\mathbb{R}^n; X)$ για κάποιο $p \in [1, \infty)$, και $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$. Για $\varepsilon > 0$, ορίζουμε $\phi_\varepsilon(y) = \varepsilon^{-n}\phi(\varepsilon^{-1}y)$. Τότε,*

$$\phi_\varepsilon * f \to c_\phi f \qquad \text{στον } L_p(\mathbb{R}^n; X)$$

καθώς $\varepsilon \downarrow 0$, όπου $c_\phi = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(y)\, dy$.

Ένα κλασσικό αποτέλεσμα στη θεωρία μέτρου είναι το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue. Το θεώρημα αυτό ισχύει και στο πλαίσιο που δουλεύουμε.

Θεώρημα 2.3.6 (Θεώρημα Παραγώγισης του Lebesgue)**.** *Έστω $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ ανοιχτό και $f \in L_1(\Omega; X)$. Τότε*

$$\lambda(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} \|f(y) - f(x)\|\, d\lambda(y) \to 0 \quad \text{καθώς} \quad r \to 0$$

για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$. Ειδικότερα, ισχύει ότι

$$f(x) = \lim_{r \to 0} \lambda(B(x,r))^{-1} \int_{B(x,r)} f(y)\, d\lambda(y)$$

σχεδόν παντού. Και για $n = 1$,

$$f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \int_x^{x+h} f(t)\, d\lambda(t)$$

για σχεδόν όλα τα $x \in \Omega$.

2.4 Παραγώγιση σε χώρους Banach

Για το υπόλοιπο του κεφαλαίου οι X, Y, Z θα είναι χώροι Banach.

Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό και $x \in U$. Η $f : U \to Y$ λέγεται *διαφορίσιμη στο x*, αν υπάρχει γραμμική συνεχής $\lambda : X \to Y$ με

$$\lim_{h \to 0} \frac{\|f(x+h) - f(x) - \lambda(h)\|_Y}{\|h\|_X}.$$

Ισοδύναμα, αν υπάρχει γραμμική συνεχής απεικόνιση $\lambda : X \to Y$ και ψ ορισμένη για αρκετά μικρά h στο X, με τιμές στον Y, τέτοιες ώστε $\lim_{h \to 0} \psi(h) = 0$, και

$$f(x+h) = f(x) + \lambda(h) + \|h\|_X \psi(h).$$

Ο όρος $\|h\|_X \psi(h)$ μπορεί να αντικατασταθεί από τον $\phi(h)$, όπου η ϕ είναι απεικόνιση τέτοια ώστε $\lim_{h\to 0} \frac{\phi(h)}{\|h\|_X} = 0$.

Ο ορισμός της διαφορισιμότητας, μας λέει ότι κοντά στο x, οι τιμές της f προσεγγίζονται από την γραμμική απεικόνιση λ με σφάλμα που περιγράφεται από τις οριακές ιδιότητες των ψ ή ϕ.

Είναι σαφές ότι αν η f είναι διαφορίσιμη στο x, τότε είναι και συνεχής στο x. Επιπλέον, αν υπάρχει λ που να ικανοποιεί τα παραπάνω αυτή είναι μοναδικά ορισμένη από την f και το x. Εφόσον, λοιπόν, η λ είναι μοναδική, την καλούμε *παράγωγο* της f στο x, και τη συμβολίζουμε με $f'(x)$ ή $Df(x)$.

Αν η f είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x \in U$, λέμε ότι η f είναι *διαφορίσιμη* στο U, και συμβολίζουμε με f' την απεικόνιση

$$Df = f' : U \to \mathcal{L}(X, Y)$$

οπότε για κάθε x, έχουμε μια γραμμική απεικόνιση $f'(x) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Αν η f' είναι συνεχής, λέμε ότι η f είναι κλάσης C^1. Εφόσον η f' απεικονίζεται από τον U στον χώρο Banach $\mathcal{L}(X, Y)$, μπορούμε επαγωγικά να ορίσουμε την f να είναι κλάσης C^p αν κάθε παράγωγος $D^k f$ υπάρχει και είναι συνεχής για $1 \leq k \leq p$.

Πρόταση 2.4.1. *Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό και $x \in U$. Αν οι $g, f : U \to Y$ είναι διαφορίσιμες στο x, τότε και η $f + g$ είναι διαφορίσιμη στο x και*

$$(f + g)'(x) = f'(x) + g'(x).$$

Αν $c \in \mathbb{R}$, τότε η cf είναι διαφορίσιμη στο x και

$$(cf)'(x) = cf'(x).$$

Πρόταση 2.4.2. *Έστω X_1, X_2 χώροι Banach, και $X_1 \times X_2 \to Z$ μια συνεχής διγραμμική απεικόνιση. Αν $U \subseteq X$ ανοιχτό, $F : U \to X_1$, $g : U \to X_2$ διαφορίσιμες σε ένα $x \in U$, τότε η fg είναι διαφορίσιμη στο x και*

$$(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x), \tag{2.4.1}$$

όπου η γραμμική απεικόνιση στο δεξιό μέλος της (2.4.1) είναι η

$$v \mapsto (f'(x)v)g(x) + f(x)(g'(x)v).$$

Θεώρημα 2.4.3 (Κανόνας της Αλυσίδας)**.** *Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό και $V \subseteq Y$ ανοιχτό. Έστω $f : U \to V$, $g : V \to Z$ και $x \in U$. Αν η f είναι διαφορίσιμη στο x και η g είναι διαφορίσιμη στο $f(x)$, τότε η $g \circ f$ είναι διαφορίσιμη στο x, και*

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \circ f'(x).$$

Θεώρημα 2.4.4. *Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό, και $f : U \to X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_m$, με $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$. Τότε, η f είναι διαφορίσιμη στο x αν και μόνο αν κάθε f_i είναι διαφορίσιμη στο x, και σε αυτή την περίπτωση*

$$f'(x) = (f_1'(x), f_2'(x), \ldots, f_m'(x)).$$

Θεώρημα 2.4.5. *Έστω $\lambda : X \to Y$ συνεχής γραμμική απεικόνιση. Τότε η λ είναι διαφορίσιμη σε κάθε $x \in X$ και $\lambda'(x) = \lambda$ για κάθε $x \in X$.*

Πόρισμα 2.4.6. *Έστω $f : U \to Y$ διαφορίσιμη απεικόνιση, και $\lambda : X \to Y$ μια συνεχής γραμμική απεικόνιση. Τότε, για κάθε $x \in U$,*

$$(\lambda \circ f)'(x) = \lambda(f'(x)),$$

ώστε για κάθε $v \in X$ έχουμε

$$(\lambda \circ f)'(x)v = \lambda(f'(x)v).$$

Θεώρημα 2.4.7 (Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού)**.** *Έστω $f : [\alpha, \beta] \to Y$ Bochner ολοκληρώσιμη, και συνεχής σε κάποιο $\gamma \in [\alpha, \beta]$. Τότε, η απεικόνιση*

$$F(t) = \int_a^t f(x)\, dx$$

είναι διαφορίσιμη στο γ και η παράγωγος της είναι $f(\gamma)$.

2.5 Θεωρήματα Μέσης Τιμής και Taylor

Το θεώρημα μέσης τιμές ουσιαστικά συνδέει τις τιμές μιας απεικόνισης σε δύο διαφορετικά σημεία με τον μέσο των ενδιαμέσων τιμών της απεικόνισης στο ευθύγραμμο τμήμα των δύο σημείων. Εμείς θα δώσουμε μια ολοκληρωτική μορφή αυτού του αποτελέσματος.

Θα ολοκληρώσουμε καμπύλες στον χώρο των συνεχών γραμμικών απεικονίσεων $\mathcal{L}(X, Y)$. Θα ασχοληθούμε, επίσης, με την $\mathcal{L}(X, Y) \times X \to Y$, $(\lambda, y) \mapsto \lambda(y)$, η οποία είναι συνεχής διγραμμική απεικόνιση.

Αν $\gamma : I = [\alpha, \beta] \to \mathcal{L}(X, Y)$ συνεχής απεικόνιση, για κάθε $t \in I$ παρατηρούμε ότι $\gamma(t) \in \mathcal{L}(X, Y)$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε, λοιπόν, ένα $y \in X$ και τότε $\gamma(t)y \in Y$. Από την άλλη, μπορούμε να ολοκληρώσουμε την καμπύλη γ, και το $\int_\alpha^\beta \gamma(t)\, dt$ είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{L}(X, Y)$. Αν η γ είναι διαφορίσιμη, τότε η $\frac{d\gamma(t)}{dt}$ είναι επίσης ένα στοιχείο του $\mathcal{L}(X, Y)$.

Λήμμα 2.5.1. *Έστω $\gamma : I \to \mathcal{L}(X, Y)$ συνεχής απεικόνιση και $y \in X$. Τότε,*

$$\int_\alpha^\beta \gamma(t)y\, dt = \int_\alpha^\beta \gamma(t)\ dt \cdot y,$$

όπου το γινόμενο στο δεξιό μέλος είναι η εφαρμογή της γραμμικής απεικόνισης $\int_\alpha^\beta \gamma(t)\, dt$ στο διάνυσμα y.

Θεώρημα 2.5.2 (Θεώρημα Μέσης Τιμής). *Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό και $x \in U$, $y \in X$. Έστω $f : U \to Y$ μια C^1 απεικόνιση, και έστω ότι $x + ty \in U$ για κάθε $0 \le t \le 1$. Τότε,*

$$f(x+y) - f(x) = \int_0^1 f'(x+ty)y\, dt.$$

Πόρισμα 2.5.3. *Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό και $x, y \in U$ ώστε το ευθύγραμμο τμήμα των x και y να περιέχεται στο U. Αν η $f : U \to Y$ είναι κλάσης C^1, τότε*

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \le \sup_{v \in [x,y]} \|f'(v)\| \|x - y\|_X.$$

Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό και $f : U \to Y$ διαφορίσιμη. Υπενθυμίζουμε ότι

$$Df = f' : U \to \mathcal{L}(X, Y)$$

και γνωρίζουμε ότι ο $\mathcal{L}(X, Y)$ είναι χώρος Banach. Άρα μπορούμε να ορίσουμε την δεύτερη παράγωγο

$$D^2 f = f'' : U \to \mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y)).$$

Είναι γνωστό ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τον $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, Y))$ με τον $\mathcal{L}(X, X; Y) = \mathcal{L}^2(X, Y)$, το χώρο των συνεχών διγραμμικών απεικονίσεων από τον X στον Y.

Μια διγραμμική απεικόνιση $\lambda : X \times X \to Y$ λέγεται *συμμετρική* αν $\lambda(u, v) = \lambda(v, u)$ για κάθε $u, v \in X$. Γενικότερα, μια πλειογραμμική $\lambda : X \times X \times \cdots \times X \to Y$ λέγεται συμμετρική αν

$$\lambda(v_1, v_2, \ldots, v_n) = \lambda(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(n)})$$

για κάθε μετάθεση σ στο $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$.

Θεώρημα 2.5.4. *Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό, $f : U \to Y$ δύο φορές παραγωγίσιμη, με $D^2 f$ συνεχή. Τότε, για κάθε $x \in U$, η διγραμμική απεικόνιση $D^2 f(x)$ είναι συμμετρική, δηλαδή για κάθε $u, v \in X$ ισχύει*

$$D^2 f(x)(u, v) = D^2 f(x)(v, u).$$

Θεωρούμε, τώρα, παραγώγους υψηλότερης τάξης. Ορίζουμε

$$D^p f(x) = D(D^{p-1} f)(x).$$

Οπότε, η $D^p f(x)$ είναι ένα στοιχείο του $\mathcal{L}(X, \mathcal{L}(X, \ldots, \mathcal{L}(X, Y) \cdots))$ που συμβολίζουμε με $L^p(X, Y)$. Λέμε ότι η f είναι κλάσης C^p στο U ή ότι η f είναι C^p απεικόνιση αν οι $D^k f$ υπάρχουν και είναι συνεχείς για κάθε $k = 0, 1, \ldots, p$.

Η D^p είναι γραμμική υπό την έννοια ότι $D^p(f + g) = D^p f + D^p g$ και $D^p(cf) = cD^p f$.

Θεώρημα 2.5.5. *Έστω f τάξης C^p στο U. Τότε, για κάθε $x \in U$, η πλειογραμμική απεικόνιση $D^p f(x)$ είναι συμμετρική.*

Θεώρημα 2.5.6 (Θεώρημα Taylor). *Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό, $f : U \to Y$ κλάσης C^p. Έστω $x \in U$ και $y \in X$ τέτοια ώστε το ευθύγραμμο τμήμα των x και y να περιέχεται στο U. Συμβολίζουμε με $y^{(k)}$ το $(y, y, \ldots, y)$. Τότε,*

$$f(x+y) = f(x) + \frac{Df(x)y}{1!} + \cdots + \frac{D^{p-1}f(x)y^{(p-1)}}{(p-1)!} + \int_0^1 \frac{(1-t)^{p-1}}{(p-1)!} D^p f(x+ty)y^{(p)}\, dt.$$

2.6 Μερικές παράγωγοι

Θεωρούμε $X = X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ έναν χώρο Banach. Έστω $U_i \subseteq X_i$ ανοιχτά και έστω $f : U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n \to Y$. Γράφουμε ένα $x \in U_1 \times U_2 \times \cdots \times U_n$ στη μορφή $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ όπου $x_i \in U_i$.

Μπορούμε να ορίσουμε μερικές παραγώγους όπως και στην απλή περίπτωση όπου $E = \mathbb{R}^n$. Πράγματι, για $x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n$ σταθεροποιημένο, θεωρούμε τη μερική απεικόνιση

$$x_i \mapsto f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n)$$

του U_i στον Y. Αν αυτή η απεικόνιση είναι διαφορίσιμη, καλούμε τη παράγωγο της, *i-οστή μερική παράγωγο* της f στο σημείο x, και τη συμβολίζουμε με $D_i f(x)$.

Θεώρημα 2.6.1. *Έστω $U_i \subseteq X_i$ ανοιχτά και $f : U_1 \times U_2 \times \cdots U_n \to Y$. Η f είναι κλάσης C^p αν και μόνο αν κάθε μερική παράγωγός της είναι κλάσης C^{p-1}. Σε αυτή την περίπτωση, για κάθε $v = (v_1, v_2, \ldots, v_n) \in X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ έχουμε*

$$Df(x)v = \sum_{i=1}^{n} D_i f(x) v_i.$$

Θεώρημα 2.6.2. *Έστω $U \subseteq X_1 \times X_2$ ανοιχτό και $f : U \to Y$ τέτοια ώστε οι $D_1 f, D_2 f, D_1 D_2 f$ και $D_2 D_1 f$ υπάρχουν και είναι συνεχείς. Τότε, $D_1 D_2 f = D_2 D_1 f$.*

Θεώρημα 2.6.3. *Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό και $I = [\alpha, \beta]$. Έστω $f : I \times U \to Y$ συνεχής και τέτοια ώστε η $D_2 f$ υπάρχει και είναι συνεχής. Ορίζουμε*

$$g(x) = \int_\alpha^\beta f(t, x)\, dt.$$

Τότε, η g είναι διαφορίσιμη στο U και

$$Dg(x) = \int_\alpha^\beta D_2 f(t, x)\, dt.$$

Θεώρημα 2.6.4. *Έστω $U \subseteq X$ ανοιχτό, και έστω $f_n : U \to Y$ συναρτήσεις C^1 για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν η $(f_n)_n$ συγκλίνει κατά σημείο σε μια f, και η $(f_n')_n$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια $g : U \to \mathcal{L}(X, Y)$, τότε η f είναι διαφορίσιμη και $f' = g$.*

Κεφάλαιο 3

Το θεώρημα διακριτοποίησης του Bourgain

3.1 Το θεώρημα του Ribe

Θα λέμε ότι δύο χώροι Banach X και Y είναι *uniform-ομοιομορφικοί* αν υπάρχει ομοιομορφισμός $\phi : X \to Y$ τέτοιος ώστε οι ϕ και ϕ^{-1} να είναι και ομοιόμορφα συνεχείς συναρτήσεις. Λέμε ακόμη ότι ο X είναι *crudely finitely representable* στον Y αν υπάρχει σταθερά $C \geqslant 1$ τέτοια ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε υπόχωρο X_1 του X με $\mathrm{dim} X_1 = n$, υπάρχει Y_1 υπόχωρος του Y έτσι ώστε $d(X_1, Y_1) \leqslant C$, όπου με $d(X_1, Y_1)$ συμβολίζουμε την απόσταση Banach-Mazur των X_1, Y_1.

Θεώρημα 3.1.1 (Ribe). *Έστω X, Y δύο uniform-ομοιομορφικοί χώροι Banach. Τότε ο X είναι crudely finitely representable στον Y και ο Y είναι crudely finitely representable στον X.*

Αν (X, d), (Y, σ) είναι δύο μετρικοί χώροι, θα λέμε παρακάτω ότι μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι *Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις*, αν για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει σταθερά $K_\delta > 0$ τέτοια ώστε

$$\text{αν } x, y \in X \text{ και } d(x,y) \geqslant \delta \text{ τότε } \sigma(f(x), f(y)) \leqslant K_\delta \cdot d(x,y).$$

Ξεκινάμε με την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.1.2. *Έστω X, Y δύο χώροι Banach. Αν μια συνάρτηση $f : X \to Y$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, τότε είναι Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις.*

Απόδειξη. Από την ομοιόμορφη συνέχεια της f, υπάρχει $d > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $u, v \in X$, με $\|u - v\|_X < d$ να ισχύει $\|f(u) - f(v)\|_Y < 1$.
Έστω $\delta > 0$, και έστω $x, y \in X$ με $\|x - y\|_X \geqslant \delta$. Θέτουμε $m = \lceil 2\|x - y\|_X / d \rceil$ και επιλέγουμε $x = a_0, a_1, \ldots, a_m = y$ σημεία τέτοια ώστε

$$\|a_i - a_{i-1}\|_X = \frac{\|x - y\|_X}{m} \leqslant \frac{d}{2} < d$$

για κάθε $i = 1, \ldots, m$ (συγκεκριμένα, επιλέγουμε $a_i = x + \frac{i}{m}(y-x)$). Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leqslant \sum_{i=1}^{m} \|f(a_i) - f(a_{i-1})\|_Y \leqslant m \leqslant \frac{2\|x-y\|_X}{d} + 1 \leqslant \left(\frac{2}{d} + \frac{1}{\delta}\right) \|x-y\|_X,$$

όπου, για την τελευταία ανισότητα, χρησιμοποιούμε την $\|x-y\|_X \geqslant \delta$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο με $K_\delta = \frac{2}{d} + \frac{1}{\delta}$. □

Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1. Έστω $\phi : X \to Y$ ένας uniform-ομοιομορφισμός. Τότε από την Πρόταση 3.1.2, οι ϕ και ϕ^{-1} είναι Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις. Πολλαπλασιάζοντας την ϕ με κατάλληλη σταθερά, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει $K > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε $x, y \in X$ με $\|x-y\|_X \geqslant 1$ να ισχύει

$$\|x-y\|_X \leqslant \|\phi(x) - \phi(y)\|_Y \leqslant K \cdot \|x-y\|_X. \tag{3.1.1}$$

Έστω X_1 υπόχωρος του X με $\dim X_1 = n$. Επιλέγουμε μια Auerbach βάση $\{x_i\}_{i=1}^n$ του X_1. Δηλαδή, τα $x_1, \ldots, x_n$ ικανοποιούν την

$$\max_{1 \leqslant i \leqslant n} |a_i| \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\|_X \leqslant \sum_{i=1}^{n} |a_i|$$

για κάθε ακολουθία $\{a_i\}_{i=1}^n$ πραγματικών αριθμών. Ειδικότερα,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \right\|_X \geqslant 1$$

για κάθε επιλογή ακεραίων $\{k_i\}_{i=1}^n$ που δεν είναι όλοι ίσοι με μηδέν. Ορίζουμε

$$\mathcal{M} = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \;\middle|\; k_i \in \mathbb{Z}, i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Επίσης, για σταθερό $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\mathcal{M}_m = \left\{ \sum_{i=1}^{n} k_i x_i \;\middle|\; k_i \in \mathbb{Z}, |k_i| \leqslant m, i = 1, \ldots, n \right\}.$$

Έστω $m, s \in \mathbb{N}$. Κάθε σύνολο $\mathcal{L}$ της μορφής $u + s\mathcal{M}_m$, όπου $u \in \mathcal{M}$, θα λέγεται πεπερασμένο lattice μεγέθους $(2m+1)^n$ και βήματος s.

Για κάθε πεπερασμένο lattice $\mathcal{L}$ βήματος s, ορίζουμε $\phi_{\mathcal{L}} : s\mathcal{M} \to Y$ με

$$\phi_{\mathcal{L}}(y) = |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{z \in \mathcal{L}} \left(\phi(z+y) - \phi(z)\right).$$

Κάθε $\phi_{\mathcal{L}}$ είναι K-Lipschitz: αν $x \neq y \in s\mathcal{M}$ τότε

$$\begin{aligned}\|\phi_{\mathcal{L}}(x) - \phi_{\mathcal{L}}(y)\|_Y &= |\mathcal{L}|^{-1} \left\| \sum_{z\in\mathcal{L}} (\phi(z+x) - \phi(z)) - \sum_{z\in\mathcal{L}} (\phi(z+y) - \phi(z)) \right\|_Y \\ &= |\mathcal{L}|^{-1} \left\| \sum_{z\in\mathcal{L}} (\phi(z+x) - \phi(z+y)) \right\|_Y \\ &\leqslant |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{z\in\mathcal{L}} \|\phi(z+x) - \phi(z+y)\|_Y \\ &\leqslant |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{z\in\mathcal{L}} K \cdot \|x-y\|_X = K \cdot \|x-y\|_X,\end{aligned}$$

γιατί η ϕ είναι K-Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις, και $\|x-y\|_X \geqslant 1$.

Επιπλέον, η $\phi_{\mathcal{L}}$ είναι σχεδόν προσθετική, με την εξής έννοια: αν $y, z \in s\mathcal{M}$ τότε

$$\begin{aligned}\phi_{\mathcal{L}}(y+z) &= |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{x\in\mathcal{L}} (\phi(x+y+z) - \phi(x)) \\ &= |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{x\in\mathcal{L}} (\phi(x+y+z) - \phi(x+y)) + |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{x\in\mathcal{L}} (\phi(x+y) - \phi(x)) \\ &= \phi_{y+\mathcal{L}}(z) + \phi_{\mathcal{L}}(y).\end{aligned}$$

Η επόμενη παρατήρηση είναι ότι, αν θεωρήσουμε πως $|\mathcal{L}| = (2m+1)^n$ για κάποιο $m \in \mathbb{N}$, σταθεροποιήσουμε $y, z \in s\mathcal{M}$ και αφήσουμε το m να μεγαλώσει αυθαίρετα, τότε τα περισσότερα στοιχεία των συνόλων $\mathcal{L}$ και $y + \mathcal{L}$ – άρα και οι περισσότεροι όροι των $\phi_{\mathcal{L}}(z)$ και $\phi_{y+\mathcal{L}}(z)$ – συμπίπτουν: Αν $y = s\sum_{i=1}^n k_i^{(y)} x_i$, θέτουμε $m_y = \max_{i=1,\dots,n} |k_i^{(y)}|$, ώστε να έχουμε $|k_i^{(y)}| \leqslant m_y$ για κάθε $i = 1, \dots, n$. Αν για κάποιο x υποθέσουμε ότι $x = s\sum_{i=1}^n k_i^{(x)} x_i \in \mathcal{L} \setminus (y + \mathcal{L})$, τότε $x - y \notin \mathcal{L}$, οπότε υπάρχει τουλάχιστον ένα $i_0 \in \{1, \dots, n\}$ ώστε

$$m < |k_{i_0}^{(z)} - k_{i_0}^{(y)}| \leqslant |k_{i_0}^{(z)}| + |k_{i_0}^{(y)}| \leqslant m + |k_{i_0}^{(y)}|,$$

δηλαδή ώστε $m - |k_{i_0}^{(y)}| < |k_{i_0}^{(z)}| \leqslant m$. Υπάρχουν λοιπόν $|k_{i_0}^{(y)}|$ το πλήθος δυνατές επιλογές για το $|k_{i_0}^{(z)}|$ και άρα το πλήθος των z με αυτή την ιδιότητα για κάποια συντεταγμένη i_0 θα είναι $2|k_{i_0}^{(y)}|(2m+1)^{n-1} \leqslant 2m_y(2m+1)^{n-1}$. Έπεται έτσι ότι

$$|\mathcal{L} \setminus (y + \mathcal{L})| \leqslant \sum_{i=1}^n 2|k_i^{(y)}|(2m+1)^{n-1} \leqslant \sum_{i=1}^n 2m_y(2m+1)^{n-1} = 2nm_y(2m+1)^{n-1}.$$

Με τον ίδιο τρόπο έχουμε επίσης ότι

$$|(y + \mathcal{L}) \setminus \mathcal{L}| \leqslant 2nm_y(2m+1)^{n-1},$$

οπότε $|(y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}| \leqslant 4nm_y(2m+1)^{n-1}$.

Από τα παραπάνω, μπορούμε τελικά να ισχυριστούμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει κατάλληλο $m = m(\varepsilon, K, \|y\|_X) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$|\mathcal{L}| > (2m+1)^n \Rightarrow \frac{|(y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}|}{|\mathcal{L}|} \leqslant \frac{\varepsilon}{K}.$$

Επιπλέον, για κάθε $z \neq 0$, $z \in s\mathcal{M}$,

$$\begin{aligned}\|\phi_{y+\mathcal{L}}(z) - \phi_{\mathcal{L}}(z)\|_Y &= |\mathcal{L}|^{-1} \left\| \sum_{x \in (y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}} (\phi(x+z) - \phi(x)) \right\|_Y \\ &\leqslant |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{x \in (y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}} \|\phi(x+z) - \phi(x)\|_Y \\ &\leqslant |\mathcal{L}|^{-1} \sum_{x \in (y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}} K \cdot \|z\|_X,\end{aligned}$$

αφού

$$\|x+z-x\|_X = \|z\|_X = \left\| s\sum_{i=1}^{n} k_i^{(z)} x_i \right\|_X \geqslant s \geqslant 1$$

και η ϕ είναι K-Lipschitz για αποστάσεις $\geqslant 1$. Έχουμε δείξει έτσι ότι

$$\begin{aligned}\|\phi_{\mathcal{L}}(y+z) - \phi_{\mathcal{L}}(y) - \phi_{\mathcal{L}}(z)\|_Y = \|\phi_{y+\mathcal{L}}(z) - \phi_{\mathcal{L}}(z)\|_Y &\leqslant \frac{|(y+\mathcal{L})\triangle\mathcal{L}|}{|\mathcal{L}|} K \cdot \|z\|_X \\ &\leqslant \varepsilon \|z\|_X.\end{aligned}$$

Με ένα επαγωγικό επιχείρημα βλέπουμε ότι, για κάθε $m_0 \in \mathbb{N}$, για κάθε $x = s\sum_{i=1}^{n} k_i x_i \in s\mathcal{M}_{m_0}$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει $m = m(\varepsilon, m_0, K, s) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\left\| \phi_{\mathcal{L}}(x) - \sum_{i=1}^{n} k_i \phi_{\mathcal{L}}(s x_i) \right\|_Y \leqslant \varepsilon \|x\|_X. \tag{3.1.2}$$

Θα χρειαστούμε στη συνέχεια και την ακόλουθη παρατήρηση:

Ισχυρισμός 3.1.3. *Αν $m_0 > 2n/\varepsilon$, τότε το σύνολο $\left\{ \frac{x}{\|x\|} : x \in s\mathcal{M}_{m_0} \right\}$ είναι ε-πυκνό στη μοναδιαία σφαίρα S_{X_1} του X_1.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $s = 1$. Έστω $y \in S_{X_1}$. Μπορούμε να γράψουμε $y = \frac{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i}{\|\sum_{i=1}^{n} t_i x_i\|}$, για κάποιους πραγματικούς αριθμούς $\{t_i\}_{i=1}^{n}$ κατάλληλα επιλεγμένους ώστε να ισχύει η $\max|k_i - t_i| \leqslant 1$ (το $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ να είναι «κοντά» σε κάποιο σημείο του $\mathcal{M}_{m_0}$) για κάποια $\{k_i\} \subseteq \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε $\max|k_i| = m_0$ (ο «κύβος» στον οποίο ανήκει το $\sum_{i=1}^{n} t_i x_i$ να βρίσκεται στο «σύνορο» του lattice). Προσθαφαιρώντας τον όρο $\frac{\sum_{i=1}^{n} t_i x_i}{\|\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\|}$ και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$\left\| \frac{\sum_{i=1}^{n} k_i x_i}{\|\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\|} - y \right\| \leqslant \frac{2\sum_{i=1}^{n} |k_i - t_i|}{\|\sum_{i=1}^{n} k_i x_i\|} \leqslant \frac{2\sum_{i=1}^{n} |k_i - t_i|}{\max|k_i|} \leqslant \frac{2n}{m_0},$$

οπότε επιλέγοντας $m_0 > 2n/\varepsilon$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Ορίζουμε τώρα τον γραμμικό τελεστή $T_{\mathcal{L}} : X_1 \to Y$ μέσω των $T_{\mathcal{L}}(s x_i) = \phi_{\mathcal{L}}(s x_i)$, για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Από την ανισότητα (3.1.2) έχουμε τότε ότι, για κάθε $x \in s\mathcal{M}_{m_0}$,

$$\|\phi_{\mathcal{L}}(x) - T_{\mathcal{L}}(x)\|_Y \leqslant \varepsilon \|x\|_X, \quad x \in s\mathcal{M}_{m_0}, \tag{3.1.3}$$

και άρα

$$\left\|T_{\mathcal{L}}\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leqslant \frac{\|\phi_{\mathcal{L}}(x)\|}{\|x\|} + \varepsilon < K + \varepsilon.$$

Έστω τώρα $u \in S_{X_1}$. Από τον Ισχυρισμό (3.1.3) μπορούμε τότε να βρούμε $\{u_j\}_{j=0}^{\infty} \in \left\{\frac{x}{\|x\|} : x \in s\mathcal{M}_{m_0}\right\}$ τέτοια ώστε $u = \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j u_j$. Επιλέγοντας $\varepsilon < \frac{K}{2K+1}$, έχουμε τότε ότι

$$\|T_{\mathcal{L}}(u)\| \leqslant \sum_{j=0}^{\infty} \varepsilon^j \|T_{\mathcal{L}}(u_j)\| < \frac{K+\varepsilon}{1-\varepsilon} < 2K.$$

Για να εξασφαλίσουμε περαιτέρω ότι ο τελεστής $T_{\mathcal{L}}$ είναι αντιστρέψιμος και να βρούμε ένα φράγμα για την $\|T_{\mathcal{L}}^{-1}\|$, θα πρέπει να κάνουμε μια ιδιαίτερη επιλογή του συνόλου $\mathcal{L}$.

Ισχυρισμός 3.1.4. *Έστω $l \in \mathbb{Z}^+$ και $y \in \mathcal{M}$. Τότε υπάρχει $M = M(l, y) > 0$ τέτοιος ώστε για κάθε πεπερασμένο lattice $\mathcal{L}_1$ μεγέθους $(2m+1)^n$, όπου $m > M$, υπάρχουν sublattice $\mathcal{L}_2 \subset \mathcal{L}_1$ μεγέθους $(2l+1)^n$ και βήματος $s \in \mathbb{N}$, και $u^* \in Y^*$ με $\|u\|_* = 1$, τέτοια ώστε*

$$\langle u^*, \phi(x+sy) - \phi(x)\rangle \geqslant \frac{s\|y\|_X}{2},$$

για κάθε $x \in \mathcal{L}_2$.

Δεχόμενοι προς στιγμή την αλήθεια του παραπάνω ισχυρισμού, προχωρούμε ως εξής: Επιλέγουμε $\varepsilon > 0$ και $m_0 \in \mathbb{N}$ όπως παραπάνω, και θεωρούμε μια αρίθμηση $\{y_i\}_{i=1}^{p}$, $p = (2m_0+1)^n - 1$, των μη μηδενικών στοιχείων του $\mathcal{M}_{m_0}$. Επιλέγουμε ένα πολύ μεγάλο $m_1 = m_1(\varepsilon, m_0, p)$ και θέτουμε $\mathcal{L}_1 = \mathcal{M}_{m_1}$. Εφαρμόζουμε τότε το επιχείρημα του ισχυρισμού p φορές διαδοχικά για κάθε y_i για να βρούμε sublattices $\mathcal{L}_1 \supset \mathcal{L}_2 \supset \cdots \supset \mathcal{L}_{p+1} = \mathcal{L}$ και μοναδιαία $u_i^* \in Y^*$ τέτοια ώστε

$$\langle u_i^*, \phi(x+sy_i) - \phi(x)\rangle \geqslant \frac{s\|y_i\|_X}{2},$$

για κάθε $i = 1, \ldots, p$ και κάθε $x \in \mathcal{L}$, όπου s το βήμα του $\mathcal{L}$. Σημειώνουμε ότι το m_1 μπορεί να επιλεγεί αρκετά μεγάλο ώστε για το $\mathcal{L}$ να μην παύει η ισχύς της (3.1.3), καθώς και ότι $\|T_{\mathcal{L}}\| \leqslant 2K$.

Έχουμε πλέον ότι, για κάθε $i = 1, \ldots, p$,

$$\begin{aligned}\|\phi_{\mathcal{L}}(sy_i)\|_Y &= |\mathcal{L}|^{-1}\left\|\sum_{x\in\mathcal{L}}(\phi(x+sy_i) - \phi(x))\right\|_Y \\ &= |\mathcal{L}|^{-1}\|u_i^*\|_*\left\|\sum_{x\in\mathcal{L}}(\phi(x+sy_i) - \phi(x))\right\|_Y \\ &\geqslant |\mathcal{L}|^{-1}\sum_{x\in\mathcal{L}}\langle u_i^*, \phi(x+sy_i) - \phi(x)\rangle \geqslant \frac{s\|y_i\|_Y}{2}.\end{aligned}$$

Επιλέγουμε $\varepsilon < \frac{1}{6}$. Από την (3.1.3) και την παραπάνω σχέση για $s = 1$ ισχύει ότι

$$\|\phi_{\mathcal{L}}(y_i) - T_{\mathcal{L}}(y_i)\|_Y \leqslant \frac{\|y_i\|_X}{6} \leqslant \frac{\|\phi_{\mathcal{L}}(y_i)\|_Y}{3},$$

απ΄ όπου έπεται ότι
$$\|T_{\mathcal{L}}(y_i)\|_Y \geqslant 2\frac{\|\phi_{\mathcal{L}}(y_i)\|_Y}{3} \geqslant \frac{\|y_i\|_X}{3},$$
για κάθε $i = 1, \ldots, p$. Για κάθε μοναδιαίο $z \in X_1$ τέλος, μπορούμε να επιλέξουμε $i \in \{1, \ldots, p\}$ ώστε $\|z - \frac{y_i}{\|y_i\|_X}\|_X < \varepsilon$, οπότε
$$\|T_{\mathcal{L}}(z)\|_Y \geqslant \left\|T_{\mathcal{L}}\left(\frac{y_i}{\|y_i\|_X}\right)\right\|_Y - \left\|T_{\mathcal{L}}\left(z - \frac{y_i}{\|y_i\|_X}\right)\right\|_Y \geqslant \frac{1}{3} - 2K\varepsilon \geqslant \frac{1}{4},$$
αν $\varepsilon < \frac{1}{24K}$. Έχουμε δείξει έτσι ότι ο $T_{\mathcal{L}}$ είναι αντιστρέψιμος, και $\|T_{\mathcal{L}}^{-1}\| \leqslant 4$, οπότε
$$d(X_1, Y_1) \leqslant \|T_{\mathcal{L}}\| \cdot \|T_{\mathcal{L}}^{-1}\| \leqslant 8K,$$
όπου $Y_1 := T_{\mathcal{L}}(X_1)$. □

Απόδειξη του Ισχυρισμού 3.1.4. Μπορούμε χάριν απλότητας να υποθέσουμε ότι ο $\mathcal{L}_1$ έχει βήμα ίσο με 1, και θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$, $N > l$. Θέτουμε επιπλέον
$$a_j = \sup\left\{2^{-j}\frac{\|\phi(x+2^jy) - \phi(x)\|_Y}{\|y\|_X} : x \in \mathcal{L}_1 \text{ τέτοιο ώστε } x + 2^jy \in \mathcal{L}_1\right\}.$$
Ισχύει τότε, από την (3.1.1), ότι $1 \leqslant a_j \leqslant K$ για κάθε j. Ακόμη, για $x, x + 2^{j-1}y \in \mathcal{L}_1$,
$$\begin{aligned}
&2^{-j}\frac{\|\phi(x+2^jy) - \phi(x)\|_Y}{\|y\|_X}\\
&\quad \leqslant 2^{-j}\frac{\|\phi(x+2^jy) - \phi(x+2^{j-1}y)\|_Y + \|\phi(x+2^{j-1}y) - \phi(x)\|_Y}{\|y\|_X}\\
&\quad = 2^{-j}\frac{\|\phi((x+2^{j-1}y)+2^{j-1}y) - \phi(x+2^{j-1}y)\|_Y + \|\phi(x+2^{j-1}y) - \phi(x)\|_Y}{\|y\|_X}\\
&\quad \leqslant 2^{-1}(a_{j-1} + a_{j-1}),
\end{aligned}$$
οπότε $a_j \leqslant a_{j-1}$. Επιλέγουμε τέλος $M > 0$ με την ιδιότητα: Αν $m > M$, τότε τα σύνολα στον ορισμό των a_j παραπάνω είναι μη κενά για έναν αριθμό από j αρκετά μεγάλο, ώστε να μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι υπάρχει j_0 τέτοιο ώστε $a_{j_0} \leqslant a_{j_0+N} + 2^{-N}$. Αυτό είναι συνέπεια της αρχής του περιστερώνα: Αν το m είναι αρκετά μεγάλο, τότε θα μπορούμε να βρούμε $j_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $a_{j_0+N} \in [\sup(a_j) - 2^{-N}, \sup(a_j)]$. Αν υποθέσουμε τότε ότι $a_{j_0} > a_{j_0+N} + 2^{-N}$, έπεται ότι $a_{j_0} > \sup(a_j)$, που είναι άτοπο.

Έστω τώρα το $z \in \mathcal{L}_1$ εκείνο, για το οποίο ισχύει ότι
$$a_{j_0+N} = 2^{-j_0-N}\frac{\|\phi(z+2^{j_0+N}y) - \phi(z)\|_Y}{\|y\|_X}.$$
Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $z = 0$ (αλλιώς εργαζόμαστε στον $\mathcal{L}_1 - z$) καθώς και, περνώντας στο sublattice $\mathcal{L}_1 \cap 2^{j_0}\mathcal{L}_1$ και με επαναπροσαρμογή της κλίμακας, ότι $j_0 = 0$. Έχουμε τότε ότι
$$a_0 - 2^N \leqslant a_N = \frac{2^{-N}\|\phi(2^Ny) - \phi(0)\|_Y}{\|y\|_X}.$$

Από το Θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει μοναδιαίο $u^* \in Y^*$ ώστε

$$\langle u^*, \phi(2^N y) - \phi(0)\rangle = 2^N a_N \|y\|_X.$$

Θεωρούμε $v \in \mathcal{M}_m$, και θέτουμε $C = 1 + 2K \cdot \max\left\{\frac{\|v\|_X}{\|y\|_X} : v \in \mathcal{M}_m\right\}$. Μετά από κατάλληλες πράξεις είναι φανερό ότι,

$$\begin{aligned}
&\langle u^*, \phi(v + 2^N y) - \phi(v)\rangle \geqslant \\
&\qquad \geqslant \langle u^*, \phi(2^N y) - \phi(0)\rangle - \|\phi(v + 2^N y) - \phi(2^N y)\|_Y - \|\phi(v) - \phi(0)\|_Y \\
&\qquad \geqslant 2^N a_N \|y\|_X - 2K\|v\|_X \geqslant 2^N (a_0 - 2^{-N})\|y\|_X - 2K\|v\|_X \\
&\qquad \geqslant (2^N a_0 - C)\|y\|_X. \qquad (3.1.4)
\end{aligned}$$

Λόγω γραμμικότητας ισχύει επιπλέον ότι

$$\langle u^*, \phi(v + 2^N y) - \phi(v)\rangle = \sum_{k=0}^{2^N - 1} \langle u^*, \phi(v + (k+1)y) - \phi(v + ky)\rangle, \qquad (3.1.5)$$

όπου για κάθε έναν από τους όρους του παραπάνω αθροίσματος έχουμε

$$\begin{aligned}
\langle u^*, \phi(v + (k+1)y) - \phi(v + ky)\rangle &= \langle u^*, \phi((v + ky) + y) - \phi(v + ky)\rangle \\
&\leqslant \|\phi((v + ky) + y) - \phi(v + ky)\|_Y \leqslant a_0 \|y\|_X. \qquad (3.1.6)
\end{aligned}$$

Έστω $v \in \mathcal{M}_m$. Ορίζουμε

$$J_v = \left\{k \in \{0, 1, \ldots, 2^N - 1\} : \langle u^*, \phi(v + (k+1)y) - \phi(v + ky)\rangle < \frac{\|y\|_X}{2}\right\}.$$

Από τις (3.1.4), (3.1.5), (3.1.6) και τον παραπάνω ορισμό έπεται τότε ότι

$$\begin{aligned}
|J_v| \frac{\|y\|_X}{2} + (2^N - |J_v|) a_0 \|y\|_X &= \sum_{k \in J_v} \frac{\|y\|_X}{2} + \sum_{k \notin J_v} a_0 \|y\|_X \\
&> \langle u^*, \phi(v + 2^N y) - \phi(v)\rangle \geqslant (2^N a_0 - C)\|y\|_X,
\end{aligned}$$

και από την παραπάνω και το γεγονός ότι $a_0 \geqslant 1$, είναι άμεσο ότι

$$C > |J_v| \left(a_0 - \frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{|J_v|}{2}.$$

Έχουμε έτσι ότι $|J_v| < 2C$, για κάθε $v \in \mathcal{M}_m$. Έπεται τότε ότι, επιλέγοντας $N \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\left|\bigcup_{v \in \mathcal{M}_m} J_v\right| < (2m+1)^n \cdot 2C \leqslant 2^N,$$

αναγκαστικά υπάρχει $k_0 \in \{0, \ldots, 2^N - 1\}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $v \in \mathcal{M}_m$,

$$\langle u^*, \phi(v + (k_0 + 1)y) - \phi(v + k_0 y)\rangle \geqslant \frac{\|y\|_X}{2}.$$

Θέτοντας $\mathcal{L}_2 = k_0 y + \mathcal{M}_m$ έχουμε $\mathcal{L}_2 \subseteq \mathcal{L}_1$ και $\langle u^*, \phi(x + y) - \phi(x)\rangle \geqslant \frac{\|y\|_X}{2}$ για κάθε $x \in \mathcal{L}_2$. $\square$

3.2 Σχεδόν ομοιόμορφη επέκταση

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε ένα θεώρημα σχεδόν ομοιόμορφης επέκτασης, το οποίο είναι το πρώτο βήμα για το θεώρημα διακριτοποίησης του Bourgain.

Σταθεροποιούμε έναν n-διάστατο χώρο με νόρμα X, τον οποίο μπορούμε να ταυτίσουμε με τον $\mathbb{R}^n$ δηλαδή να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, χρησιμοποιώντας το θεώρημα του John [13], μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η Ευκλείδεια νόρμα $|\cdot|$ στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x| \leqslant \|x\|_X \leqslant |x|, \qquad x \in \mathbb{R}^n. \tag{3.2.1}$$

Θεωρούμε $\varepsilon, \delta \in (0, 1/8)$ και ένα δ-δίκτυο $\mathcal{N}_\delta$ της B_X. Θεωρούμε επίσης ένα χώρο Banach Y και μια απεικόνιση $f : \mathcal{N}_\delta \to Y$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $x, y \in \mathcal{N}_\delta$,

$$\frac{1}{D}\|x-y\|_X \leqslant \|f(x) - f(y)\|_Y \leqslant \|x-y\|_X, \tag{3.2.2}$$

όπου $D > 1$ είναι μια σταθερά. Μεταφέροντας την f, μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $f(\mathcal{N}_\delta) \subseteq B_Y$.

Θα κατασκευάσουμε μια απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \to Y$ η οποία είναι Lipschitz «σχεδόν επέκταση» της f, δηλαδή, είναι Lipschitz και στο $\mathcal{N}_\delta$ οι τιμές της είναι κοντά στις αντίστοιχες τιμές της f. Η διατύπωση του επόμενου θεωρήματος οφείλεται στους Giladi, Naor και Schechtman [11], και παρουσιάζει μικρές διαφορές από την διατύπωση του αντίστοιχου θεωρήματος του Bourgain [10].

Θεώρημα 3.2.1 (Bourgain). *Έστω $\varepsilon, \delta \in (0, 1/8)$, $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα που ικανοποιεί την* (3.2.1), *Y ένας χώρος Banach, $\mathcal{N}_\delta$ ένα δ-δίκτυο της B_X, και $f : \mathcal{N}_\delta \to Y$ Lipschitz-συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την* (3.2.2). *Αν $\delta < \frac{\varepsilon}{4n}$ τότε υπάρχει απεικόνιση $F : \mathbb{R}^n \to Y$ η οποία είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$, είναι διαφορίσιμη παντού στην $\frac{1}{2}B_X$, και ικανοποιεί τα ακόλουθα:*

(α) *Η F έχει φορέα το $3B_X$.*

(β) *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ ισχύει $\|F(x) - F(y)\|_Y \leqslant 6\|x-y\|_X$.*

(γ) *Για κάθε $x, y \in \frac{1}{2}B_X$ ισχύει $\|F(x) - F(y)\|_Y \leqslant (1+\varepsilon)\|x-y\|_X$.*

(δ) *Για κάθε $x \in \mathcal{N}_\delta$ ισχύει $\|F(x) - f(x)\|_Y \leqslant \frac{9n\delta}{\varepsilon}$.*

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1 θα χρειαστούμε ένα λήμμα του Begun.

Λήμμα 3.2.2 (Begun). *Έστω K κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\tau, \eta, L > 0$. Έστω $h : K + \tau B_X \to Y$ συνάρτηση τέτοια ώστε $\|h(x) - h(y)\|_Y \leqslant L(\|x-y\|_X + \eta)$ για κάθε $x, y \in K + \tau B_X$. Ορίζουμε $H : K \to Y$ με*

$$H(x) = \frac{1}{|\tau B_X|}\int_{\tau B_X} h(x-y)\, dy.$$

Τότε,

$$\|H(x) - H(y)\|_Y \leqslant L\left(1 + \frac{\eta n}{\tau}\right)\|x - y\|_X$$

για κάθε $x, y \in K$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y = 0$ και ότι $|\tau B_X| = 1$. Έστω $x \in K$. Θέτουμε $M = \tau B_X \setminus (x + \tau B_X)$ και $M' = (x + \tau B_X) \setminus \tau B_X$. Έχουμε

$$\begin{aligned} H(0) - H(x) &= \int_{\tau B_X} h(y)\,dy - \int_{\tau B_X} h(x-y)\,dy = \int_{\tau B_X} h(y)\,dy - \int_{x+\tau B_X} h(y)\,dy \\ &= \int_M h(y)\,dy - \int_{\tau B_X \cap (x+\tau B_X)} h(y)\,dy - \int_{M'} h(y)\,dy + \int_{\tau B_X \cap (x+\tau B_X)} h(y)\,dy \\ &= \int_M h(y)\,dy - \int_{M'} h(y)\,dy. \end{aligned}$$

Γράφουμε $w(z)$ για το μήκος του διαστήματος $(z + \mathbb{R}x) \cap \tau B_X$. Θέτουμε

$$W = \{z \in \tau B_X : (z + \mathbb{R}x) \cap \tau B_x \cap (x + \tau B_X) \neq \emptyset\}$$

και

$$N = \tau B_X \setminus W.$$

Ορίζουμε $c : M \to M'$ το μετασχηματισμό στη διεύθυνση του x που μεταφέρει το $(z + \mathbb{R}x) \cap M$ στο $(z + \mathbb{R}x) \cap M'$. Τότε,

$$z - c(z) = \begin{cases} x, & z \in N \\ \frac{w(z)}{\|x\|_2}x, & z \in W \cap M \end{cases}.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned} \|H(0) - H(x)\|_Y &= \left\|\int_M h(y)\,dy - \int_{M'} h(y)\,dy\right\|_Y = \left\|\int_M h(y)\,dy - \int_M h(c(y))\,dy\right\|_Y \\ &= \left\|\int_M [h(y) - h(c(y))]\,dy\right\|_Y \leqslant \int_M \|h(y) - h(c(y))\|_Y\,dy \\ &\leqslant \int_M L(\|y - c(y)\|_X + \eta)\,dy = L\eta|M| + L\int_M \|y - c(y)\|_X\,dy, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί ο $c : M \to M'$ διατηρεί το μέτρο, και η τελευταία ανισότητα ισχύει από την υπόθεση του λήμματος. Επίσης,

$$\begin{aligned} \int_M \|y - c(y)\|_X dy &= \int_N \|x\|_X dy + \int_{W \cap M} \frac{w(y)}{\|x\|_2}\|x\|_X dy \\ &= \|x\|_X|N| + \int_{\mathrm{Proj}(W \cap M)} \frac{w(z)}{\|x\|_2}\|x\|_X\|x\|_2\,dz \\ &= \|x\|_X|N| + \|x\|_X|\tau B_X \setminus N| = \|x\|_X|\tau B_X| \\ &= \|x\|_X, \end{aligned}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει από το θεώρημα Fubini και από το γεγονός ότι για κάθε $z \in \mathrm{Proj}(W \cap M)$ το $W \cap M$ τέμνει την ευθεία $(z + \mathbb{R}x) \cap \tau B_X$ σε ένα διάστημα μήκους $\|x\|_X$. Άρα,

$$\|H(0) - H(x)\|_Y \leqslant L\eta|M| + L\|x\|_X.$$

Παρατηρούμε ότι $M \subseteq \tau B_X \setminus \left(1 - \frac{\|x\|_X}{\tau}\right) B_X$. Πράγματι, αν $y \in M = \tau B_X \setminus (x + \tau B_X)$, τότε $\|y - x\|_X \geqslant \tau$, άρα

$$\|y\|_X \geqslant \|x - y\|_X - \|x\|_X \geqslant \tau - \|x\|_X = \left(1 - \frac{\|x\|_X}{\tau}\right)\tau.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}|M| &\leqslant \left|\tau B_X \setminus \left(1 - \frac{\|x\|_X}{\tau}\right) B_X\right| \leqslant |\tau B_X| - \left|\left(1 - \frac{\|x\|_X}{\tau}\right) B_X\right| \\ &= 1 - \left(1 - \frac{\|x\|_X}{\tau}\right)^n \leqslant \frac{n\|x\|_X}{\tau},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τη στοιχειώδη ανισότητα $1 - (1-\theta)^n \leqslant n\theta$ για κάθε $0 \leqslant \theta \leqslant 1$. Τελικά,

$$\|H(0) - H(y)\|_Y \leqslant L\left(1 + \frac{\eta n}{\tau}\right)\|x\|_X,$$

άρα $\|H\|_{\mathrm{Lip}(K)} \leqslant L\left(1 + \frac{\eta n}{\tau}\right)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Γράφουμε το $\mathcal{N}_\delta$ στη μορφή $\mathcal{N}_\delta = \{p_1, \ldots, p_N\}$. Θα ορίσουμε, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant N$, μια C^∞ συνάρτηση $\phi_{p_i} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ ώστε:

(α) $\phi_{p_i}(x) = 0$, αν $\|x - p_i\| \geqslant 2\delta$,

(β) $\sum_{i=1}^N \phi_{p_i}(x) = 1$ για κάθε $x \in B_X$.

Για το σκοπό αυτό, αρχικά, ορίζουμε C^∞ συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ με

$$\psi(x) = \begin{cases} 1, & \|x\| \leqslant \delta \\ 0, & \|x\| > 2\delta \end{cases},$$

και για κάθε $i = 1, \ldots, N$ θέτουμε $\psi_{p_i}(x) = \psi(x - p_i)$. Στη συνέχεια, θεωρούμε την $\prod_{i=1}^N (1 - \psi_{p_i})$, η οποία είναι ταυτοτικά μηδενική στην B_X, αφού το $\mathcal{N}_\delta$ είναι δ-δίκτυο. Αναλύουμε

$$\prod_{i=1}^N (1 - \psi_{p_i}) = 1 - \psi_1 \prod_{i=2}^N (1 - \psi_{p_i}) - \psi_{p_2} \prod_{i=3}^N (1 - \psi_{p_i}) - \cdots - \psi_{N-1}(1 - \psi_N) - \psi_N.$$

Ορίζουμε

$$\phi_{p_k} = \psi_{p_k} \prod_{i=k+1}^{i=N} (1 - \psi_{p_i}) \qquad , k \in \{1, 2, \ldots, N-1\}$$

και $\phi_{p_N} = \psi_{p_N}$. Τότε, έχουμε $\phi_{p_i} : \mathbb{R}^n \to [0,1]$, διότι $0 \leqslant \psi_{p_i} \leqslant 1$. Επίσης, $\phi_{p_i}(x) = 0$ αν $\|x - p_i\| > 2\delta$, γιατί $\psi_{p_i}(x) = 0$ όταν $\|x - p_i\| > 2\delta$, και $\sum_{i=1}^N \phi_{p_i}(x) = 1$ αν $x \in B_X$, διότι $\prod_{i=1}^N (1 - \psi_{p_i}) = 0$.

Τέλος, θεωρούμε τη συνάρτηση $\beta : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με $\beta(t) := \max\{0, 2 - t\}$.

Μπορούμε, χωρίς βλάβη της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $f(\mathcal{N}_\delta) \subseteq 2B_Y$ διαλέγοντας ένα $p_{i_0} \in \mathcal{N}_\delta$ και παίρνοντας $g : \mathcal{N}_\delta \to Y$ με $g(y) = f(y) - f(p_{i_0})$. Τότε, η g παραμένει Lipschitz με σταθερά 1, και αν $p_j \in \mathcal{N}_\delta$ τότε έχουμε

$$\|g(p_j)\|_Y = \|g(p_j) - g(p_{i_0})\|_Y \leqslant \|p_j - p_{i_0}\|_X \leqslant \|p_j\|_X + \|p_{i_0}\|_X \leqslant 2$$

αφού $p_j, p_{i_0} \in B_X$.

Ορίζουμε $g : B_X \to Y$ με $g(x) = \sum_{i=1}^N f(p_i)\phi_{p_i}(x)$, και στη συνέχεια ορίζουμε $h : \mathbb{R}^n \to Y$ με

$$h(x) = \begin{cases} g(x), & x \in B_X, \\ \beta(\|x\|_X) g\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right), & x \in \mathbb{R}^n \setminus B_X. \end{cases} \tag{3.2.3}$$

Παρατηρούμε ότι αν $x, y \in B_X$ τότε

$$\begin{aligned} h(x) - h(y) &= g(x) - g(y) \\ &= \sum_{\|p_i - x\|_X \leqslant 2\delta} \phi_{p_i}(x) f(p_i) - \sum_{\|p_j - y\|_X \leqslant 2\delta} \phi_{p_j}(y) f(p_j) \\ &= \sum_{\|p_i - x\|_X \leqslant 2\delta, \|p_j - y\|_X \leqslant 2\delta} \phi_{p_i}(x)\phi_{p_j}(y)[f(p_i) - f(p_j)]. \end{aligned}$$

Από αυτή την ταυτότητα βλέπουμε ότι, για κάθε $x, y \in B_X$,

$$\|h(x) - h(y)\|_Y \leqslant \|x - y\|_X + 4\delta. \tag{3.2.4}$$

Αν $x \in B_X$ και $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_X$ τότε, χρησιμοποιώντας την $f(\mathcal{N}_\delta) \subseteq 2B_Y$ και το γεγονός ότι η β είναι 1-Lipschitz, έχουμε

$$\begin{aligned} \|h(x) - h(y)\|_Y &\leqslant \left\| g(x) - g\left(\frac{y}{\|y\|_X}\right) \right\|_Y + (1 - \beta(\|y\|_X)) \left\| g\left(\frac{y}{\|y\|_X}\right) \right\| \\ &\leqslant \left\| x - \frac{y}{\|y\|_X} \right\|_X + 4\delta + (\|y\|_X - 1) \sup_{1 \leqslant i \leqslant N} \|f(p_i)\|_Y \\ &\leqslant \|x - y\|_X + 3(\|y\|_X - 1) + 4\delta. \end{aligned}$$

Αφού

$$\|y\|_X - 1 \leqslant \|x - y\|_X + \|x\|_X - 1 \leqslant \|x - y\|_X,$$

έπεται ότι, για κάθε $x \in B_X$ και $y \in \mathbb{R}^n \setminus B_X$,

$$\|h(x) - h(y)\|_Y \leqslant 4(\|x - y\|_X + \delta). \tag{3.2.5}$$

Τέλος, αν $x, y \in \mathbb{R}^n \setminus B_X$ τότε

$$\begin{aligned}
\|h(x) - h(y)\|_Y &\leqslant \left\| g\left(\frac{x}{\|x\|_X}\right) - g\left(\frac{y}{\|y\|_X}\right)\right\|_Y \beta(\|x\|_X) \\
&\quad + \left\| g\left(\frac{y}{\|y\|_X}\right)\right\|_Y |\beta(\|x\|_X) - \beta(\|y\|_X)| \\
&\leqslant \left\| \frac{x}{\|x\|_X} - \frac{y}{\|y\|_X}\right\|_X + 4\delta + 2\|x-y\|_X \\
&\leqslant 4(\|x-y\|_X + \delta).
\end{aligned} \tag{3.2.6}$$

Θέτουμε $\tau = \frac{2n\delta}{\varepsilon}$. Παρατηρήστε ότι $0 < \tau < 1/2$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε

$$F(x) = \frac{1}{|\tau B_X|} \int_{\tau B_X} h(x-y)\, dy. \tag{3.2.7}$$

Από τον ορισμό (3.2.3) βλέπουμε ότι η h είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$. Ακριβέστερα, μπορεί να μην είναι διαφορίσιμη μόνο σε σημεία του $S_X \cup (2S_X)$. Αφού η h είναι διαφορίσιμη στο $B_X \setminus S_X$ και $0 < \tau < 1/2$, από την (3.2.7) έπεται ότι η F είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού στον $\mathbb{R}^n$ και είναι διαφορίσιμη παντού στο $\frac{1}{2}B_X$.

Τώρα, παρατηρούμε τα εξής:

(i) Από την κατασκευή είναι σαφές ότι ο φορέας της F περιέχεται στο $(2+\tau)B_X \subseteq 3B_X$, άρα ο πρώτος ισχυρισμός του θεωρήματος έχει αποδειχθεί.

(ii) Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.2.2 με $K = \mathbb{R}^n$, $L = 4$ και $\eta = \delta$, από τις (3.2.4), (3.2.5) και (3.2.6) βλέπουμε ότι η F είναι $4(1+\varepsilon/2)$-Lipschitz, το οποίο αποδεικνύει τον δεύτερο ισχυρισμό του θεωρήματος.

(iii) Εφαρμόζοντας πάλι το Λήμμα 3.2.2, αυτή τη φορά με $K = (1-\tau)B_X$, από την (3.2.4) βλέπουμε ότι η F είναι $(1+\varepsilon)$-Lipschitz στο $(1-\tau)B_X \supseteq \tau B_X$. Αυτό αποδεικνύει τον τρίτο ισχυρισμό του θεωρήματος.

Για να αποδείξουμε τον τέταρτο ισχυρισμό του θεωρήματος, σταθεροποιούμε $x \in \mathcal{N}_\delta$. Τότε,

$$\|F(x) - h(x)\|_Y \leqslant \frac{1}{|\tau B_X|} \int_{\tau B_X} \|h(x-y) - h(x)\|_Y\, dy \leqslant 4(\tau + \delta), \tag{3.2.8}$$

από τις (3.2.4) και (3.2.5). Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|h(x) - f(x)\|_Y &\leqslant \sum_{i=1}^N \|f(x) - f(p_i)\|_Y \phi_{p_i}(x) \\
&\leqslant \max_{\|p_i - x\|_X \leqslant 2\delta} \|f(x) - f(p_i)\|_Y \leqslant 2\delta.
\end{aligned} \tag{3.2.9}$$

Δεδομένου ότι $\tau = \frac{2n\delta}{\varepsilon}$, ο τέταρτος ισχυρισμός του θεωρήματος έπεται από τις (3.2.8) και (3.2.9).

$\square$

3.3 Το θεώρημα διακριτοποίησης του Bourgain

Ορισμός 3.3.1. Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ συμβολίζουμε με $\delta_{X\hookrightarrow Y}(\varepsilon)$ το supremum όλων των $\delta > 0$ με την ιδιότητα ότι για κάθε δ-δίκτυο $\mathcal{N}_\delta$ της B_X ισχύει

$$c_Y(\mathcal{N}_\delta) \geqslant (1-\varepsilon)c_Y(X).$$

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε το *θεώρημα διακριτοποίησης του Bourgain.*

Θεώρημα 3.3.2 (Bourgain)**.** *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν X, Y είναι χώροι Banach με $\dim(X) = n < \infty$ και $\dim(Y) = \infty$ τότε για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ ισχύει*

$$\delta_{X\hookrightarrow Y}(\varepsilon) \geqslant e^{-(n/\varepsilon)^{Cn}}. \tag{3.3.1}$$

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_X)$ και υποθέτουμε ότι η Ευκλείδεια νόρμα $|\cdot|$ στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την

$$\frac{1}{\sqrt{n}}|x| \leqslant \|x\|_X \leqslant |x|, \qquad x \in \mathbb{R}^n.$$

Για κάθε $t > 0$, ο πυρήνας Poisson $P_t : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ ορίζεται από την

$$P_t(x) = \frac{c_n t}{(t^2 + |x|^2)^{\frac{n+1}{2}}},$$

όπου η σταθερά c_n επιλέγεται έτσι ώστε $\int_{\mathbb{R}^n} P_t(x)\,dx = 1$. Μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή της c_n:

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\pi^{\frac{n+1}{2}}}.$$

Ο πυρήνας Poisson ικανοποιεί την ιδιότητα της ημιομάδας $P_t * P_s = P_{t+s}$, όπου η συνέλιξη δύο συναρτήσεων $f, g \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ορίζεται από την

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy.$$

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $\delta < \frac{\varepsilon}{4n}$ και θεωρούμε μια συνάρτηση $F : \mathbb{R}^n \to Y$ που ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.2.1. Θεωρούμε την τροχιά της F κάτω από τη δράση της ημιομάδας Poisson, δηλαδή τις συναρτήσεις $P_t * F : \mathbb{R}^n \to Y$ με

$$(P_t * F)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_t(y-x)F(y)\,dy.$$

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν $t_0 > 0$ και $x \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε η παράγωγος $T = (P_{t_0} * F)'(x)$ να είναι εμφύτευση και να ικανοποιεί την

$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant (1 + 10\varepsilon)D.$$

Διαισθητικά, θα περίμενε κανείς ότι αυτό ισχύει για κάθε t αρκετά μικρό, αφού σε αυτή την περίπτωση η $P_t * F$ είναι κοντά στην F, και η F είναι πολύ κοντά σε εμφύτευση αν την περιορίσουμε στο δ-δίκτυο $\mathcal{N}_\delta$. Όμως, η ύπαρξη του t_0 τελικά θα αποδειχθεί με ένα αρκετά πολύπλοκο επιχείρημα απαγωγής σε άτοπο. Θα δείξουμε την ύπαρξη κατάλληλου t_0 χωρίς να μπορούμε να προσδιορίσουμε συγκεκριμένη τιμή του για την οποία η $(P_t * F)'(x)$ έχει τις ιδιότητες που ζητάμε.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω μ ένα Borel μέτρο πιθανότητας στην S_X. Έστω $R, A > 0$ και $m \in \mathbb{N}$. Υπάρχει $t > 0$ τέτοιος ώστε*

$$\frac{A}{(R+1)^{m+1}} \leqslant t \leqslant A \tag{3.3.2}$$

και

$$\begin{aligned}\int_{S_X}\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_t * F)(x)\|_Y \, dx \, d\mu(\alpha) \leqslant \int_{S_X}\int_{\mathbb{R}^n} &\|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y \, dx \, d\mu(\alpha) \\ &+ \frac{6\mathrm{vol}(3B_X)}{m}.\end{aligned} \tag{3.3.3}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε t που ικανοποιεί την (3.3.2) η (3.3.3) δεν ισχύει. Τότε, για κάθε $0 \leqslant k \leqslant m+1$ έχουμε

$$\begin{aligned}&\int_{S_X}\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_{A(R+1)^{k-m-1}} * F)(x)\|_Y \, dx \, d\mu(\alpha) \\ &\qquad > \int_{S_X}\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_{A(R+1)^{k-m}} * F)(x)\|_Y \, dx \, d\mu(\alpha) + \frac{6\mathrm{vol}(3B_X)}{m}.\end{aligned} \tag{3.3.4}$$

Συνδυάζοντας αυτές τις $m+1$ ανισότητες παίρνουμε

$$\begin{aligned}&\int_{S_X}\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_{A(R+1)^{-m-1}} * F)(x)\|_Y \, dx \, d\mu(\alpha) \\ &\qquad > \int_{S_X}\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_{A(R+1)} * F)(x)\|_Y \, dx \, d\mu(\alpha) + \frac{6(m+1)\mathrm{vol}(3B_X)}{m}.\end{aligned} \tag{3.3.5}$$

Αφού η F είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού και 6-Lipschitz, για κάθε $\alpha \in S_X$ έχουμε $\|\partial_\alpha F\| \leqslant 6$ σχεδόν παντού. Επιπλέον, η F μηδενίζεται έξω από την $3B_X$, άρα

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_{A(R+1)^{-m-1}} * F)(x)\|_Y \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \|(P_{A(R+1)^{-m-1}} * \partial_\alpha F)(x)\|_Y \, dx \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} P_{A(R+1)^{-m-1}}(x-y)\|\partial_\alpha F(y)\|_Y \, dx \, dy \\ &= \int_{3B_X} \|\partial_\alpha F(y)\|_Y \, dy \leqslant 6\mathrm{vol}(3B_X).\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Ολοκληρώνοντας την (3.3.6) στην S_X ως προς το μέτρο πιθανότητας μ καταλήγουμε σε άτοπο λόγω της (3.3.5). $\square$

Θα συνδυάσουμε το Λήμμα 3.3.3 με το βασικό Λήμμα 3.3.6 το οποίο ισχυρίζεται ότι οι κατευθυνόμενες παράγωγοι της $P_t * F$ είναι μεγάλες αν θεωρήσουμε κατάλληλους μέσους όρους τους. Για την απόδειξη του Λήμματος 3.3.6 χρειαζόμαστε κάποιες βοηθητικές εκτιμήσεις τις οποίες δίνουμε, πρώτα, χωριστά.

Λήμμα 3.3.4. *Για κάθε $0 < t \leqslant 1/2$ και για κάθε $x \in B_X$ έχουμε*

$$\|(P_t * F)(x) - F(x)\|_Y \leqslant 8\sqrt{n}t \log\left(\frac{7}{t}\right).$$

Απόδειξη. Αφού η F μηδενίζεται έξω από την $3B_X$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\|(P_t * F)(x) - F(x)\|_Y & \\ \leqslant \int_{x+3B_X} \|F(y-x) - F(x)\|_Y P_t(y)\,dy &+ \|F(x)\|_Y \int_{\mathbb{R}^n\setminus(x+3B_X)} P_t(y)\,dy.\end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Αφού η F είναι 6-Lipschitz και μηδενίζεται έξω από την $3B_X$, βλέπουμε ότι $\|F(x)\|_Y \leqslant 18$. Επιπλέον, αν $\|y-x\|_X \geqslant 3$ τότε $\|y\|_X \geqslant \|x-y\|_X - \|x\|_X \geqslant 2$, άρα

$$\|F(x)\|_Y \int_{\mathbb{R}^n\setminus(x+3B_X)} P_t(y)\,dy \leqslant 18 \int_{\mathbb{R}^n\setminus(2B_X)} P_t(y)\,dy \leqslant 9t\sqrt{n}, \tag{3.3.8}$$

αν χρησιμοποιήσουμε τον Ισχυρισμό 3.3.8. Για να φράξουμε τον πρώτο όρο στο δεξιό μέλος της (3.3.7) παρατηρούμε ότι αν $\|y-x\|_X \leqslant 3$ τότε $|y| \leqslant \sqrt{n}\|y\|_X \leqslant 4\sqrt{n}$. Επιπλέον,

$$\|F(y-x) - F(x)\|_Y \leqslant 6\|y\|_X \leqslant 6|y|.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\int_{x+3B_X} \|F(y-x) - F(x)\|_Y P_t(y)\,dy &\leqslant 6\int_{4\sqrt{n}B_2^n} |y|\,P_t(y)\,dy \\ &= 6t\int_{\frac{4\sqrt{n}}{t}B_2^n} |y|\,P_t(y)\,dy \\ &= 6tc_n \cdot n\omega_n \int_0^{\frac{4\sqrt{n}}{t}} \frac{s^n}{(1+s^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,ds.\end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Το μέγιστο της $s \mapsto s^n/(1+s^2)^{\frac{n+1}{2}}$ πιάνεται όταν $s = \sqrt{n}$, άρα

$$\frac{s^n}{(1+s^2)^{\frac{n+1}{2}}} \leqslant \min\left\{\frac{1}{\sqrt{en}}, \frac{1}{s}\right\}$$

για κάθε $s > 0$. Έπεται ότι

$$\int_0^{\frac{4\sqrt{n}}{t}} \frac{s^n}{(1+s^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,ds \leqslant 1 + \int_{\sqrt{en}}^{\frac{4\sqrt{n}}{t}} \frac{ds}{s} = 1 + \log\left(\frac{4}{t\sqrt{e}}\right). \tag{3.3.10}$$

Αντικαθιστώντας τις (3.3.8), (3.3.9) και (3.3.10) στην (3.3.7), και χρησιμοποιώντας τις $t \leqslant 1/2$ και $c_n \cdot n\omega_n \leqslant \sqrt{n}$, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Εκτός από το Λήμμα 3.3.4, θα χρειαστούμε έναν ακόμα υπολογισμό.

Ισχυρισμός 3.3.5. *Για κάθε* $y \in \mathbb{R}^n$ *ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_t(x) - P_t(x+y)|\, dx \leqslant \frac{\sqrt{n}|y|}{t}. \tag{3.3.11}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την $P_t(x) = t^{-n}P_1(x/t)$ και την αλλαγή μεταβλητής $z = \frac{x}{t}$ βλέπουμε ότι αρκεί να ελέγξουμε την

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_1(x) - P_1(x+y)|\, dx \leqslant \sqrt{n}\,|y|.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |P_1(x) - P_1(x+y)|\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left| \int_0^1 \langle \nabla P_1(x+sy), y\rangle\, ds \right| dx \\
&\leqslant |y| \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla P_1(x)|\, dx \\
&= (n+1)c_n|y| \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|x|}{(1+|x|^2)^{\frac{n+3}{2}}}\, dx \\
&= (n+1)c_n \cdot n\omega_n\, |y| \int_0^\infty \frac{r^n}{(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}}\, dr \\
&= c_n \cdot n\omega_n\, |y|,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι η παράγωγος της $r \mapsto r^{n+1}/(1+r^2)^{\frac{n+1}{2}}$ ισούται με $(n+1)r^n/(1+r^2)^{\frac{n+3}{2}}$. Ο ισχυρισμός έπεται τώρα από τον τύπο του Stirling. $\square$

Λήμμα 3.3.6. *Έστω* $0 < t \leqslant 1/2$, $R > 0$ *και* $0 < \delta < \frac{\varepsilon}{4n}$, *οι οποίοι ικανοποιούν τις*

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon t \log(7/t)}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{\varepsilon^4}{6n^{5/2}(80D)^2} \tag{3.3.12}$$

και

$$\frac{720n^{3/2}D^2\log(7/t)}{\varepsilon^2} \leqslant R \leqslant \frac{\varepsilon}{32t\sqrt{n}}. \tag{3.3.13}$$

Τότε, για κάθε $x \in \frac{1}{8}B_X$ *και* $\alpha \in S_X$ *έχουμε*

$$\big(\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y * P_{Rt}\big)(x) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{D}. \tag{3.3.14}$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$\Theta = \frac{100D\sqrt{n}t\log(7/t)}{\varepsilon}. \tag{3.3.15}$$

Θεωρούμε $w, y \in \frac{1}{2}B_X$ και $p, q \in \mathcal{N}_\delta \cap \left(\frac{1}{2}B_X\right)$ τέτοια ώστε $\|p-w\|_X \leqslant 2\delta$ και $\|q-y\|_X \leqslant 2\delta$. Ας υποθέσουμε ότι $\|w-y\|_X \geqslant \Theta$. Από το Θεώρημα 3.2.1 (γ) και (δ), και από το Λήμμα 3.3.4, έχουμε

(3.3.16)

$$\begin{aligned}\|(P_t * F)(w) - (P_t * F)(y)\|_Y &\geqslant \|f(p)-f(q)\|_Y - \|F(p)-f(p)\|_Y - \|F(q)-f(q)\|_Y \\ &\quad - \|F(w)-F(p)\|_Y - \|F(y)-F(q)\|_Y \\ &\quad - \|(P_t * F)(w) - F(w)\|_Y - \|(P_t * F)(y) - F(y)\|_Y \\ &\geqslant \frac{1}{D}\|p-q\|_X - \frac{18n\delta}{\varepsilon} - 4(1+\varepsilon)\delta - 16\sqrt{n}t\log\left(\frac{7}{t}\right) \\ &\geqslant \frac{1}{D}(\|w-y\|_X - 4\delta) - \frac{18n\delta}{\varepsilon} - 4(1+\varepsilon)\delta - 16\sqrt{n}t\log\left(\frac{7}{t}\right) \\ &\geqslant \frac{1-\varepsilon/3}{D}\|w-y\|_X,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την $\|w-y\|_X \geqslant \Theta$ και την (3.3.12).

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη ανισότητα στην (3.3.12) συνεπάγεται ότι $\Theta \leqslant 1/4$. Συνεπώς, αφού $\|\alpha\|_X = 1$, από την (3.3.16) βλέπουμε ότι για κάθε $z \in \frac{1}{4}B_X$ ισχύει

$$\begin{aligned}\frac{1-\varepsilon/3}{D}\Theta &\leqslant \|(P_t * F)(z+\Theta\alpha) - (P_t * F)(z)\|_Y \\ &= \left\|\int_0^\Theta \partial_\alpha(P_t * F)(z+s\alpha)\,ds\right\|_Y \leqslant \int_0^\Theta \|\partial_\alpha(P_t * F)(z+s\alpha)\|_Y ds.\end{aligned} \tag{3.3.17}$$

Έχουμε υποθέσει ότι $\|x\|_X \leqslant 1/8$, άρα

$$\begin{aligned}&\frac{1}{\Theta}\int_0^\Theta \int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_t * F)(x+s\alpha-y)\|_Y P_{Rt}(y)\,dy\,ds \\ &\qquad \geqslant \frac{1-\varepsilon/3}{D}\int_{\frac{1}{8}B_X} P_{Rt}(y)\,dy \geqslant \frac{1-\varepsilon/3}{D}(1-8Rt\sqrt{n}) \\ &\qquad \geqslant \frac{1}{D}(1-\varepsilon/3)(1-\varepsilon/4) \geqslant \frac{1-7\varepsilon/12}{D}.\end{aligned} \tag{3.3.18}$$

Αφού η F είναι 6-Lipschitz, έχουμε $\|\partial_\alpha F\|_Y \leqslant 6$ σχεδόν παντού, άρα $\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y \leqslant 6$ σχεδόν παντού. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}&\int_0^\Theta \int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_t * F)(x-y)\|_Y (P_{Rt}(y+s\alpha) - P_{Rt}(y))\,dy\,ds \\ &\qquad \leqslant 6\int_0^\Theta \int_{\mathbb{R}^n} |P_{Rt}(y+s\alpha) - P_{Rt}(y)|\,dy\,ds \\ &\qquad \leqslant \frac{6\sqrt{n}t|\alpha|}{Rt}\cdot\frac{\Theta^2}{2} \leqslant \frac{3n\Theta^2}{Rt} \leqslant \frac{5\varepsilon\Theta}{12D}.\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του λήμματος γράφοντας

$$\begin{aligned}(\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y * P_{Rt})(x) &= \frac{1}{\Theta}\int_0^\Theta \int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_t * F)(x+s\alpha-y)\|_Y P_{Rt}(y)\,dy\,ds \\ &- \frac{1}{\Theta}\int_0^\Theta \int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_t * F)(x-y)\|_Y (P_{Rt}(y+s\alpha)-P_{Rt}(y))\,dy\,ds \\ &\geqslant \frac{1-\varepsilon}{D},\end{aligned}$$

από τις (3.3.18) και (3.3.19). □

Λήμμα 3.3.7. *Έστω $0 < t < \frac{\varepsilon}{25\sqrt{n}}$. Τότε, για κάθε $x, y \in \frac{1}{4}B_X$ έχουμε*

$$\|(P_t * F)(x) - (P_t * F)(y)\|_Y \leqslant (1+2\varepsilon)\|x-y\|_X.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής απλή εκτίμηση.

Ισχυρισμός 3.3.8. *Για κάθε $r, t > 0$ ισχύει*

$$\int_{\mathbb{R}^n\setminus(rB_X)} P_t(x)\,dx \leqslant \frac{t\sqrt{n}}{r}. \tag{3.3.20}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την $P_t(x) = t^{-n}P_1(x/t)$ και κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $x = ty$ έχουμε, παίρνοντας υπόψη και την $\|x\|_X \leqslant |x|$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n\setminus(rB_X)} P_t(x)\,dx &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n\setminus(rB_2^n)} P_t(x)\,dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n\setminus(\frac{r}{t}B_2^n)} P_1(y)\,dy \\ &= n\omega_n\cdot c_n \int_{r/t}^\infty \frac{s^{n-1}}{(1+s^2)^{\frac{n+1}{2}}}\,ds \\ &\leqslant n\omega_n\cdot c_n\int_{r/t}^\infty \frac{1}{s^2}\,ds = \frac{n\omega_n\cdot c_n t}{r}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τις $c_n = \Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)/\pi^{\frac{n+1}{2}}$ και $n\omega_n = n\pi^{\frac{n}{2}}/\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)$, σε συνδυασμό με τον τύπο του Stirling, ελέγχουμε ότι $n\omega_n\cdot c_n \leqslant \sqrt{2n/\pi}$, απ' όπου προκύπτει ο ισχυρισμός. □

Απόδειξη του Λήμματος 3.3.7. Έστω $x, y \in \frac{1}{4}B_X$. Χρησιμοποιώντας το ότι η F είναι $(1+\varepsilon)$-

Lipschitz στην $\frac{1}{2}B_X$ και 6-Lipschitz στον $\mathbb{R}^n$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\|(P_t * F)(x) - (P_t * F)(y)\|_Y &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} P_t(z)\,\|F(x-z) - F(y-z)\|_Y\,dz \\ &= \int_{\frac{1}{4}B_X} P_t(z)\,\|F(x-z) - F(y-z)\|_Y\,dz \\ &\quad + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\frac{1}{4}B_X} P_t(z)\,\|F(x-z) - F(y-z)\|_Y\,dz \\ &\leqslant \int_{\frac{1}{4}B_X} P_t(z)(1+\varepsilon)\|x-y\|_X\,dz + \int_{\mathbb{R}^n\setminus\frac{1}{4}B_X} P_t(z)\,6\|x-y\|_X\,dz \\ &= \left((1+\varepsilon)\int_{\frac{1}{4}B_X} P_t(z)\,dz + 6\int_{\mathbb{R}^n\setminus\frac{1}{4}B_X} P_t(z)\,dz\right)\|x-y\|_X \\ &\leqslant \big((1+\varepsilon) + 24t\sqrt{n}\big)\,\|x-y\|_X \leqslant (1+2\varepsilon)\|x-y\|_X,\end{aligned}$$

όπου, στην τελευταία γραμμή, χρησιμοποιήσαμε τον Ισχυρισμό 3.3.8 και την υπόθεση ότι $t\sqrt{n} < \varepsilon/25$. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.2. Θεωρούμε $\delta > 0$ ο οποίος ικανοποιεί την

$$\delta \leqslant \Big(\frac{\varepsilon}{cD}\Big)^{12(cD/\varepsilon)^{n+1}}. \tag{3.3.21}$$

Μπορούμε να επιλέξουμε $c = 300$. Σταθεροποιούμε ένα (ε/D)-δίκτυο $\mathcal{F}$ της S_X με πληθάριθμο

$$|\mathcal{F}| \leqslant \left(1 + \frac{2D}{\varepsilon}\right)^n \leqslant \left(\frac{3D}{\varepsilon}\right)^n,$$

(για την ύπαρξη δικτύων τέτοιου πληθαρίθμου, βλέπε [4]) και θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ στο $\mathcal{F}$. Ορίζουμε

$$A = \Big(\frac{\varepsilon}{cD}\Big)^{5n}, \qquad R = \left(\frac{cD}{\varepsilon}\right)^{4n} - 1, \qquad m = \left\lfloor \left(\frac{cD}{\varepsilon}\right)^{n+1} \right\rfloor - 1. \tag{3.3.22}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 3.3.3 με αυτές τις παραμέτρους, βρίσκουμε $t > 0$ τέτοιο ώστε

$$\Big(\frac{\varepsilon}{cD}\Big)^{12(cD/\varepsilon)^{n+1}} \leqslant t \leqslant \Big(\frac{\varepsilon}{cD}\Big)^{5n} \tag{3.3.23}$$

και

$$\begin{aligned}\sum_{\alpha\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_t * F)(x)\|_Y\,dx \leqslant \sum_{\alpha\in\mathcal{F}} \int_{\mathbb{R}^n} \|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y\,dx \\ + \frac{6|\mathcal{F}|\,\mathrm{vol}(3B_X)}{m}.\end{aligned} \tag{3.3.24}$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι αν το δ ικανοποιεί την (3.3.21), αν το R οριστεί όπως στην (3.3.22) και αν το t ικανοποιεί την (3.3.23), τότε οι υποθέσεις (3.3.12) και (3.3.13) του Λήμματος 3.3.6 ικανοποιούνται. Συνεπώς, για κάθε $x \in \frac{1}{8}B_X$ και $\alpha \in S_X$ έχουμε

$$\big(\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y * P_{Rt}\big)(x) \geqslant \frac{1-\varepsilon}{D}. \tag{3.3.25}$$

Λόγω κυρτότητας, για κάθε $\alpha \in S_X$ και σχεδόν κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y = \|(P_{Rt} * (\partial_\alpha(P_t * F)))(x)\|_Y \leqslant \big(\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y * P_{Rt}\big)(x).$$

Συνεπώς,

$$\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y * P_{Rt} - \|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)\|_Y \geqslant 0.$$

Από την ανισότητα Markov παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\text{(3.3.26)} \qquad \mathrm{vol}\left(\left\{x \in \frac{1}{8}B_X : \big(\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y * P_{Rt}\big)(x) - \|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y \geqslant \frac{\varepsilon}{D}\right\}\right) \\
\leqslant \frac{D}{\varepsilon}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\big(\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y * P_{Rt}\big)(x) - \|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y\right)dx\right) \\
= \frac{D}{\varepsilon}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\|\partial_\alpha(P_t * F)(x)\|_Y\,dx - \int_{\mathbb{R}^n}\|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y\,dx\right).
\end{aligned}$$

Από τις (3.3.26), (3.3.24) και (3.3.22) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathrm{vol}\left(\bigcup_{\alpha\in\mathcal{F}}\left\{x \in \frac{1}{8}B_X : \big(\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y * P_{Rt}\big)(x) - \|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y \geqslant \frac{\varepsilon}{D}\right\}\right) \\
\leqslant \frac{D}{\varepsilon}\left(\sum_{\alpha\in\mathcal{F}}\int_{\mathbb{R}^n}\|\partial_\alpha(P_t * F)(x)\|_Y\,dx - \sum_{\alpha\in\mathcal{F}}\int_{\mathbb{R}^n}\|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y\,dx\right) \\
\leqslant \frac{D}{\varepsilon}\cdot\frac{6|\mathcal{F}|\,\mathrm{vol}(3B_X)}{m} \\
\leqslant \frac{12D}{\varepsilon}\left(\frac{3D}{\varepsilon}\right)^n\left(\frac{\varepsilon}{cD}\right)^{n+1}24^n\mathrm{vol}\Big(\frac{1}{8}B_X\Big) \\
= \frac{6^n}{25^{n+1}}\mathrm{vol}\Big(\frac{1}{8}B_X\Big) < \mathrm{vol}\Big(\frac{1}{8}B_X\Big).
\end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει $x \in \frac{1}{8}B_X$ τέτοιο ώστε: για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$,

$$\text{(3.3.27)} \qquad \big(\|\partial_\alpha(P_t * F)\|_Y * P_{Rt}\big)(x) - \|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y < \frac{\varepsilon}{D}.$$

Την ίδια στιγμή ισχύει και η (3.3.25), άρα η (3.3.27) μας δίνει ότι, για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$,

$$\text{(3.3.28)} \qquad \|\partial_\alpha(P_{(R+1)t} * F)(x)\|_Y \geqslant \frac{1-2\varepsilon}{D}.$$

Από τις (3.3.22) και (3.3.23) βλέπουμε ότι

$$(R+1)t \leqslant \left(\frac{\varepsilon}{cD}\right)^n < \frac{\varepsilon}{25\sqrt{n}}.$$

Αν λοιπόν ορίσουμε $T = (P_{(R+1)t} * F)'(x)$ τότε από το Λήμμα 3.3.7 έχουμε

$$\|T\| \leqslant 1 + 2\varepsilon.$$

Από την (3.3.28) έχουμε επίσης
$$\|T\alpha\|_Y \geqslant \frac{1-2\varepsilon}{D}$$
για κάθε $\alpha \in \mathcal{F}$. Θεωρούμε τώρα τυχόν $z \in S_X$ και βρίσκουμε $\alpha \in \mathcal{F}$ τέτοιο ώστε $\|z-\alpha\|_X \leqslant \varepsilon/D$. Τότε,
$$\|Tz\| \geqslant \|T\alpha\| - \|T\|\,\|z-\alpha\|_X \geqslant \frac{1-2\varepsilon}{D} - (1+2\varepsilon)\,\frac{\varepsilon}{D} \geqslant \frac{1-4\varepsilon}{D}.$$
Αυτό αποδεικνύει ότι ο T είναι αντιστρέψιμος και ότι
$$\|T^{-1}\| \leqslant \frac{D}{1-4\varepsilon}.$$
Συνεπώς,
$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leqslant \frac{1+2\varepsilon}{1-4\varepsilon}\,D \leqslant (1+12\varepsilon)D,$$
και έχουμε το θεώρημα. □

Τώρα, μπορούμε να δώσουμε και μια δεύτερη απόδειξη του θεωρήματος του Ribe:

Θεώρημα 3.3.9 (Ribe). *Έστω X, Y δύο uniform-ομοιομορφικοί χώροι Banach. Τότε ο X είναι crudely finitely representable στον Y και ο Y είναι crudely finitely representable στον X.*

Απόδειξη. Έστω $\phi : X \to Y$ uniform-ομοιομορφισμός. Από την Πρόταση 3.1.2 η ϕ είναι bi-Lipschitz για μεγάλες αποστάσεις, δηλαδή για κάθε $d > 0$ υπάρχει $L > 0$ τέτοιος ώστε: αν $x, y \in X$ με $\|x-y\|_X \geq d$ να ισχύει $\frac{1}{L}\|x-y\|_x \leq \|\phi(x)-\phi(y)\|_Y \leq L\|x-y\|_X$.

Έστω X_1 υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης και $d > 0$. Τότε, τα d-δίκτυα στην ρB_x εμφυτεύονται στον Y με παραμόρφωση μικρότερη από L^2 για κάθε $\rho > d$. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει και για τα δ-δίκτυα της B_X για κάθε $\delta \in (0,1)$. Από το θεώρημα διακριτοποίησης του Bourgain, υπάρχει γραμμική εμφύτευση του X_1 στον Y με παραμόρφωση μικρότερη από $\frac{L^2}{1-\varepsilon}$. Το παραπάνω επιχείρημα λειτουργεί βέβαια και για τους υπόχωρους πεπερασμένης διάστασης του Y. □

3.4 Ισχυρότερες εκτιμήσεις για τους χώρους L_p

Σε αυτή την παράγραφο θα δώσουμε ισχυρότερες εκτιμήσεις για την παράμετρο $\delta_{X\hookrightarrow Y}(\varepsilon)$ κάτω από κάποιες πρόσθετες υποθέσεις για τον χώρο Y. Ειδικότερα, στην περίπτωση που ο Y είναι κάποιος L_p χώρος έχουμε το εξής.

Θεώρημα 3.4.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\kappa > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ και $0 < \varepsilon < 1$, και για κάθε n-διάστατο χώρο Banach X, ισχύει*

$$\delta_{X\hookrightarrow L_p}(\varepsilon) \geqslant \frac{\kappa\varepsilon^2}{n^{5/2}}. \tag{3.4.1}$$

Για την απόδειξη χρησιμοποιείται μια μέθοδος που είχε εισαχθεί σε παλιότερη δουλειά των Johnson, Maurey και Schechtman [18] για διαφορετικό σκοπό. Έστω (Ω,ν) ένας χώρος μέτρου και Z χώρος Banach. Για κάθε $p\in[1,\infty]$ συμβολίζουμε με $L_p(\nu,Z)$ το χώρο όλων των κλάσεων ισοδυναμίας μετρήσιμων συναρτήσεων $f:\Omega\to Z$ για τις οποίες

$$\|f\|^p_{L_p(\nu,Z)}=\int_\Omega \|f\|_Z^p d\nu<\infty$$

(και στην περίπτωση $p=\infty$, $\|f\|_{L_\infty(\nu,Z)}=\mathrm{esssup}_{\omega\in\Omega}\|f(\omega)\|_Z$).

Θεώρημα 3.4.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\kappa>0$ με την ακόλουθη ιδιότητα. Έστω $0<\delta,\varepsilon<1$ και $D\geqslant 1$ τέτοια ώστε $\delta\leqslant \kappa\varepsilon^2/(n^2D)$. Έστω X,Y χώροι Banach με $\dim(X)=n<\infty$ και έστω $\mathcal{N}_\delta$ ένα δ-δίκτυο στην B_X. Υποθέτουμε ότι $c_Y(\mathcal{N}_\delta)\leqslant D$. Τότε, υπάρχουν ένας διαχωρίσιμος χώρος πιθανότητας (Ω,ν), ένας υπόχωρος Z του X με πεπερασμένη διάσταση, και ένας γραμμικός τελεστής $T:X\to L_\infty(\nu,Z)$, τέτοιοι ώστε, για κάθε $x\in X$,*

$$\frac{1-\varepsilon}{D}\|x\|_X\leqslant \|Tx\|_{L_1(\nu,Z)}\leqslant \|Tx\|_{L_\infty(\nu,Z)}\leqslant (1+\varepsilon)\|x\|_X.$$

Παρατηρήστε ότι, αφού το ν είναι μέτρο πιθανότητας, για κάθε $1\leqslant p\leqslant\infty$ και για κάθε $h\in L_\infty(\nu,Y)$ έχουμε

$$\|h\|_{L_1(\nu,Y)}\leqslant \|h\|_{L_p(\nu,Y)}\leqslant \|h\|_{L_\infty(\nu,Y)}.$$

Συνεπώς, από το Θεώρημα 3.4.2 παίρνουμε ότι αν $\delta\leqslant \frac{\kappa\varepsilon^2}{n^2c_Y(\mathcal{N}_\delta)}$ τότε, για κάθε $1\leqslant p<\infty$,

$$c_Y(\mathcal{N}_\delta)\geqslant \frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}c_{L_p(\nu,Y)}(X). \tag{3.4.2}$$

Γνωρίζουμε ότι αν ο Y είναι απειροδιάστατος τότε $c_Y(\mathcal{N}_\delta)\leqslant\sqrt{n}$. Έπεται τότε από την (3.4.2) ότι αν ο $L_p(\nu,Y)$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον Y τότε

$$\delta_{X\hookrightarrow Y}(\varepsilon)\geqslant \frac{\kappa\varepsilon^2}{n^{5/2}}.$$

Ειδικότερα, αφού αυτό ισχύει για τον $Y=L_p$, έχουμε το Θεώρημα 3.4.1.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.2 αρχίζουμε από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 3.4.3. *Έστω V ένας χώρος Banach και $U=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|_U)$ ένας n-διάστατος χώρος Banach. Έστω $g:B_U\to V$ συνεχής συνάρτηση, διαφορίσιμη στο εσωτερικό της B_U. Τότε,*

$$\left\|\fint_{B_U} g'(u)\,du\right\|\leqslant n\|g\|_{L_\infty(S_U)}. \tag{3.4.3}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $y\in\mathbb{R}^n$ με $\|y\|_2=1$. Έστω $P_{y^\perp}:\mathbb{R}^n\to y^\perp$ η ορθογώνια προβολή στο υπερεπίπεδο $y^\perp$. Για κάθε $u\in P_{y^\perp}(B_U)$ υπάρχουν μοναδικοί $a_u,b_u\in\mathbb{R}$ οι οποίοι ικανοποιούν τις

$a_u \leqslant b_u$ και $\|u + a_u y\|_U = \|u + b_u y\|_U = 1$. Άρα,

$$\begin{aligned}\left\| \fint_{B_U} g'(u)(y)\, du \right\|_V &= \left\| \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_U)} \int_{P_{y^\perp}(B_U)} \int_{a_u}^{b_u} \frac{d}{ds} g(u+sy)\, ds\, du \right\|_V \\ &= \left\| \frac{1}{\mathrm{Vol}(B_U)} \int_{P_{y^\perp}} (g(u+b_u y) - g(u + a_u y))\, du \right\|_V \\ &\leqslant 2\|g\|_{L_\infty(S_U)} \cdot \frac{\mathrm{Vol}_{n-1}(P_{y^\perp}(B_U))}{\mathrm{Vol}(B_U)}.\end{aligned}$$

Για να αποδείξουμε την (3.4.3) αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\mathrm{Vol}_{n-1}(P_{y^\perp}(B_U)) \leqslant \frac{n}{2} \|y\|_U \mathrm{Vol}(B_U).$$

Η ανισότητα αυτή είναι ισοδύναμη με την $\mathrm{Vol}(K) \leqslant \mathrm{Vol}(B_U)$, όπου K είναι η κυρτή θήκη του $P_{Y^\perp}(B_U) \cup \{\pm y/\|y\|_U\}$, δηλαδή η ένωση των δύο κώνων με βάση το $P_{y^\perp}(B_U)$ και κορυφές τα $\pm y/\|y\|_U$. Για κάθε $u \in P_{y^\perp}(B_U)$ θέτουμε $c_u \geqslant 1$ τον μεγαλύτερο $c \in [1, \infty)$ για τον οποίο $cu \in P_{y^\perp}(B_U)$. Τότε,

$$K = \bigcup_{u \in P_{y^\perp}(B_U)} \left(u + \left[-\frac{c_u - 1}{c_u \|y\|_U}, \frac{c_u - 1}{c_u \|y\|_U} \right] y \right). \tag{3.4.4}$$

Από τον ορισμό των a_u και c_u έχουμε $c_u u + a_{c_u u} y \in S_U$. Αφού, $\pm y/\|y\|_U \in B_U$, λόγω κυρτότητας βλέπουμε ότι τα σημεία

$$\frac{1}{c_u}(c_u u + a_{c_u u} y) + \left(1 - \frac{1}{c_u}\right) \frac{y}{\|y\|_U} \quad \text{και} \quad \frac{1}{c_u}(c_u u + a_{c_u u} y) - \left(1 - \frac{1}{c_u}\right) \frac{y}{\|y\|_U}$$

ανήκουν στην B_U. Συνεπώς, πάλι λόγω κυρτότητας, έχουμε ότι

$$\bigcup_{u \in P_{y^\perp}(B_U)} \left(u + \left[\frac{a_{c_u u}}{c_u} - \frac{c_u - 1}{c_u \|y\|_U}, \frac{a_{c_u u}}{c_u} + \frac{c_u - 1}{c_u \|y\|_U} \right] y \right) \subseteq B_U. \tag{3.4.5}$$

Από το θεώρημα Fubini, ο όγκος του αριστερού μέλους της (3.4.5) ισούται με τον όγκο του δεξιού μέλους της (3.4.4), άρα παίρνουμε την $\mathrm{Vol}(K) \leqslant \mathrm{Vol}(B_U)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.2. Σταθεροποιούμε $\varepsilon, \delta \in (0, 1/2)$ και θεωρούμε ένα δ-δίκτυο $\mathcal{N}_\delta$ της $B_X \subseteq \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι για κάποιον, επίσης σταθερό, $D > 1$ η $f : \mathcal{N}_\delta \to Y$ ικανοποιεί την

$$\frac{1}{D}\|x - y\|_X \leqslant \|f(x) - f(y)\|_Y \leqslant \|x - y\|_X$$

για κάθε $x, y \in \mathcal{N}_\delta$. Ορίζουμε $Z = \mathrm{span}(f(\mathcal{N}_\delta))$. Ο Z είναι ένας υπόχωρος του Y με πεπερασμένη διάσταση. Υποθέτουμε ότι

$$\delta \leqslant \frac{\varepsilon^2}{30 n^2 D}. \tag{3.4.6}$$

Ειδικότερα, έχουμε $\delta < \frac{\varepsilon}{4n}$, άρα υπάρχει $F : X \to Z$ η οποία είναι διαφορίσιμη παντού στην $\frac{1}{2}B_X$ και ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.2.1. Θεωρούμε το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στην $\frac{1}{2}B_X$ και ορίζουμε έναν γραμμικό τελεστή $T : X \to L_\infty(\nu, Z)$ θέτοντας

$$(Ty)(x) = F'(x)(y). \tag{3.4.7}$$

Αφού η F είναι $(1+\varepsilon)$-Lipschitz στην $\frac{1}{2}B_X$, έχουμε

$$\|T\|_{X\to L_\infty(\nu,Z)} \leqslant 1+\varepsilon.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι, για κάθε $y \in X$,

$$\frac{1-\varepsilon}{D}\|y\|_X \leqslant \|Ty\|_{L_1(\nu,Z)} = \fint_{\frac{1}{2}B_X} \|F'(x)(y)\|_Y\,dx. \tag{3.4.8}$$

Για να αποδείξουμε την (3.4.8) θεωρούμε μια γραμμική ισομετρική εμφύτευση $J : X \to \ell_\infty$. Από το μη γραμμικό θεώρημα Hahn-Banach (βλέπε [3] Κεφ. 1) υπάρχει μια D-Lipschitz απεικόνιση $G : Z \to \ell_\infty$ τέτοια ώστε, για κάθε $x \in \mathcal{N}_\delta$,

$$G(f(x)) = J(x). \tag{3.4.9}$$

Επεκτείνουμε εδώ την απεικόνιση $J\circ(f^{-1}\big|_{f(\mathcal{N}_\delta)}) : f(\mathcal{N}_\delta) \to \ell_\infty$, διατηρώντας τη Lipschitz σταθερά της. Παίρνοντας συνέλιξη της G με μια λεία συνάρτηση που το ολοκλήρωμά της στον Y ισούται με 1 και ο φορέας της έχει μικρή διάμετρο, μπορούμε να βρούμε $H : Z \to \ell_\infty$ με Lipschitz σταθερά το πολύ ίση με D, τέτοια ώστε, για κάθε $z \in F(B_X)$,

$$\|H(z) - G(z)\|_{\ell_\infty} \leqslant \frac{nD\delta}{\varepsilon}. \tag{3.4.10}$$

Ορίζουμε έναν γραμμικό τελεστή $S : L_1(\nu, Z) \to \ell_\infty$ θέτοντας, για $h \in L_1(\nu, Z)$,

$$Sh = \int_{\frac{1}{2}B_X} H'(F(x))(h(x))\,d\nu(x). \tag{3.4.11}$$

Αφού η H είναι D-Lipschitz και το ν είναι μέτρο πιθανότητας, έχουμε

$$\|S\|_{L_1(\nu,Z)\to\ell_\infty} \leqslant D. \tag{3.4.12}$$

Από τον κανόνα της αλυσίδας και τις (3.4.7) και (3.4.11), για κάθε $y \in X$ παίρνουμε

$$ST(y) = \int_{\frac{1}{2}B_X} H'(F(x))(F'(x)(y))\,d\nu(x) = \int_{\frac{1}{2}B_X} (H\circ F)'(x)(y)\,d\nu(x). \tag{3.4.13}$$

Παρατηρούμε ότι, από τις (3.4.9) και (3.4.10), για κάθε $y \in \mathcal{N}_\delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} \|H(F(y)) - J(y)\|_{\ell_\infty} &= \|H(F(y)) - G(f(y))\|_{\ell_\infty} \\ &\leqslant \|H(F(y)) - G(F(y))\|_{\ell_\infty} + \|G(F(y)) - G(f(y))\|_{\ell_\infty} \\ &\leqslant \frac{nD\delta}{\varepsilon} + D\|F(y) - f(y)\|_Y \\ &\leqslant \frac{nD\delta}{\varepsilon} + D\cdot\frac{9n\delta}{\varepsilon} \leqslant \frac{10nD\delta}{\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.4.14}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε επίσης το γεγονός ότι $\|F(y) - f(y)\|_Y \leqslant 9n\delta/\varepsilon$ για κάθε $y \in \mathcal{N}_\delta$, από το Θεώρημα 3.2.1. Αν $x \in \frac{1}{2}B_X$ τότε υπάρχει $y \in \mathcal{N}_\delta \cap \left(\frac{1}{2}B_X\right)$ τέτοιο ώστε $\|x - y\|_X \leqslant 2\delta$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η $H \circ F$ είναι $(1+\varepsilon)D$-Lipschitz στην $\frac{1}{2}B_X$, βλέπουμε ότι

(3.4.15)

$$\begin{aligned}\|H(F(x)) - J(x)\|_{\ell_\infty} &\leqslant \|H(F(y)) - J(y)\|_{\ell_\infty} + \|H(F(x)) - H(F(y))\|_{\ell_\infty} + \|J(x) - J(y)\|_{\ell_\infty} \\ &\leqslant \frac{10nD\delta}{\varepsilon} + (1+\varepsilon)D \cdot 2\delta + 2\delta \\ &\leqslant \frac{15nD\delta}{\varepsilon}.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 3.4.3 με $V = \ell_\infty$, $\|\cdot\|_U = 2\|\cdot\|_X$ και $g = H \circ F - J$, από την (3.4.15) και την (3.4.13) έπεται ότι

$$\|ST - J\|_{X \to \ell_\infty} = \left\| \int_{\frac{1}{2}B_X} (H \circ F)'(x)\, d\nu(x) - J \right\|_{X \to \ell_\infty} \leqslant \frac{30n^2 D\delta}{\varepsilon} \leqslant \varepsilon, \tag{3.4.16}$$

λόγω της (3.4.6). Συνεπώς, για κάθε $y \in X$, οι (3.4.12) και (3.4.16) μας δίνουν

$$D\|Ty\|_{L_1(\nu,Z)} \geqslant \|STy\|_{\ell_\infty} \geqslant \|J(y)\|_{\ell_\infty} - \|ST - J\|_{X \to \ell_\infty} \cdot \|y\|_X \geqslant (1-\varepsilon)\|y\|_X.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (3.4.8), άρα η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. $\square$

Κεφάλαιο 4

Ομοιόμορφη προσέγγιση με αφφινικές συναρτήσεις

4.1 Εισαγωγή

Η *ιδιότητα ομοιόμορφης προσέγγισης με αφφινικές συναρτήσεις* (για συντομία (UAAP)) εισήχθη από τους Bates, Johnson, Lindenstrauss, Preiss και Schechtman [17]. Θεωρούμε δύο χώρους Banach $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ και λέμε ότι ο χώρος $\mathrm{Lip}(X, Y)$ των Lipschitz συναρτήσεων μεταξύ των X και Y έχει την ιδιότητα (UAAP) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $0 < r < 1$ τέτοιος ώστε, αν $f : B_X \to Y$ είναι μια 1-Lipschitz συνάρτηση τότε υπάρχουν $\varrho \geqslant r$ και $x \in X$ με $x + \varrho B_X \subseteq B_X$ και μια αφφινική συνάρτηση $\Lambda : X \to Y$ τέτοια ώστε $\|f(y) - \Lambda(y)\| \leqslant \varepsilon\varrho$ για κάθε $y \in x + \varrho B_X$.

Οι Bates, Johnson, Lindenstrauss, Preiss και Schechtman [17] απέδειξαν ότι ο $\mathrm{Lip}(X, Y)$ ικανοποιεί τα παραπάνω αν και μόνο αν ο Y επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα.

Θεώρημα 4.1.1. *Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ δύο χώροι Banach με $\dim(X) < \infty$. Τότε, ο $\mathrm{Lip}(X, Y)$ έχει την ιδιότητα ομοιόμορφης προσέγγισης με αφφινικές συναρτήσεις αν και μόνο αν ο Y επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα.*

Υπενθυμίζουμε η νόρμα $\|\cdot\|_Y$ ενός χώρου Banach Y λέγεται *ομοιόμορφα κυρτή* αν για κάθε $0 < \varepsilon \leqslant 2$ υπάρχει $0 < \delta \leqslant 1$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x, y \in B_Y$ με $\|x - y\|_Y \geqslant \varepsilon$ ισχύει

$$\|x + y\|_Y \leqslant 2(1 - \delta).$$

Αφετηρία του ορισμού της (UAAP) είναι η παρατήρηση ότι μια συνάρτηση είναι διαφορίσιμη αν επιδέχεται οσοδήποτε καλές αφφινικές προσεγγίσεις σε μπάλες «απειροστής» ακτίνας. Η έννοια λοιπόν της ομοιόμορφης προσέγγισης με αφφινικές συναρτήσεις ποσοτικοποιεί αυτή την παρατήρηση απαιτώντας από την αφφινική προσέγγιση να είναι εφικτή σε μπάλες με συγκεκριμένο μέγεθος το οποίο δεν εξαρτάται από τη συγκεκριμένη 1-Lipschitz συνάρτηση που θεωρούμε. Πέρα από το γεγονός ότι αυτό το ερώτημα είναι πολύ φυσιολογικό, οι Bates, Johnson, Lindenstrauss, Preiss και Schechtman το συνέδεσαν με τη μελέτη προβλημάτων της μη γραμμικής συναρτησιακής ανάλυσης.

Σταθεροποιούμε δύο χώρους Banach X και Y, και συμβολίζουμε με $r^{X\to Y}(\varepsilon)$ το supremum του συνόλου όλων των $0 < r < 1$ για τους οποίους ικανοποιείται ο ορισμός της (UAAP). Το πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι να δοθούν εκτιμήσεις για την παράμετρο $r^{X\to Y}(\varepsilon)$ στην περίπτωση που ο X είναι n-διάστατος χώρος με νόρμα και ο Y επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα. Οι Hytönen και Naor [15] απέδειξαν το εξής:

Θεώρημα 4.1.2 (Hytönen-Naor). *Έστω Y χώρος Banach που επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα. Υπάρχει σταθερά $c_Y > 0$, που εξαρτάται μόνο από τον Y, τέτοια ώστε, για κάθε n-διάστατο χώρο X με νόρμα και κάθε $0 < \varepsilon \leqslant 1/2$,*

$$r^{X\to Y}(\varepsilon) \geqslant \exp(-1/\varepsilon^{c_Y n}).$$

Πριν από το Θεώρημα 4.1.2, εκτιμήσεις γι' αυτή την παράμετρο είχαν αποδειχθεί από τους Hytönen, Naor και S. Li [16], με πιο περιοριστικές υποθέσεις για τον Y.

Η αρχική ιδέα για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2 είναι να χρησιμοποιηθεί μια τεχνική ανάλογη με εκείνην που είδαμε στην απόδειξη του θεωρήματος διακριτοποίησης του Bourgain. Για το λόγο αυτό, υπενθυμίζουμε αρχικά τη στρατηγική της απόδειξης εκεί. Αν (M, d_M) και (Z, d_Z) είναι δύο μετρικοί χώροι, συμβολίζουμε με $c_Z(M)$ το infimum των σταθερών $D \geqslant 1$ για τις οποίες υπάρχουν εμφύτευση $\phi : M \to Z$ και $s > 0$ τέτοια ώστε $s d_M(x,y) \leqslant d_Z(\phi(x),\phi(y)) \leqslant Ds\, d_M(x,y)$ για κάθε $x, y \in M$. Το θεώρημα διακριτοποίησης του Bourgain δίνει κάτω φράγμα για τον μεγαλύτερο $\delta \in (0,1)$ που ικανοποιεί το εξής: αν $(X, \|\cdot\|_X)$ είναι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ είναι οποιοσδήποτε χώρος με νόρμα τότε για κάθε δ-δίκτυο $\mathcal{N}_\delta$ της B_X έχουμε

$$c_Y(X) \leqslant 2c_Y(\mathcal{N}_\delta).$$

Όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, μπορεί κανείς να πάρει

$$\delta \geqslant \exp(-c_Y(X)^{cn}) \geqslant \exp(-n^{cn}), \tag{4.1.1}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η δεύτερη ανισότητα στην (4.1.1) ισχύει γιατί εύκολα ελέγχεται ότι $c_Y(X) \leqslant \sqrt{n}$, από το θεώρημα του John [13] και το θεώρημα του Dvoretzky [14].

Για την απόδειξη της (4.1.1) ξεκινήσαμε με ένα δ-δίκτυο $\mathcal{N}_\delta$ της B_X και μια εμφύτευση $\phi : \mathcal{N}_\delta \to Y$ και ορίσαμε μια βοηθητική απεικόνιση $f : X \to Y$. Αυτό είναι το περιεχόμενο του Θεωρήματος 3.2.1 (της σχεδόν ομοιόμορφης προσέγγισης). Σε αδρές γραμμές, η f είναι Lipschitz, έχει συμπαγή φορέα, και προσεγγίζει καλά την ϕ στο δίκτυο $\mathcal{N}_\delta$. Στη συνέχεια, θεωρήσαμε την τροχιά $\{P_t f\}_{t\geqslant 0}$ της f κάτω από τη δράση της ημιομάδας Poisson:

$$P_t f(x) = (p_t * f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} p_t(y) f(x-y)\, dy.$$

Με ένα επιχείρημα «εις άτοπον απαγωγής» δείξαμε ότι αν το δ είναι αρκετά μικρό τότε μπορούμε να βρούμε κάποια στιγμή $t > 0$ και κάποια θέση $x \in X$ τέτοια ώστε η παράγωγος της $P_t f$ στο x να είναι γραμμική εμφύτευση του X στον Y με παραμόρφωση ένα σταθερό πολλαπλάσιο της παραμόρφωσης της ϕ. Παρατηρήστε ότι, επειδή η $P_t f$ προκύπτει από την f ως «μέσος όρος» τιμών της, το γεγονός ότι η παράγωγος της $P_t f$ είναι Lipschitz προκύπτει αυτόματα. Το σημείο που παρουσιάζει δυσκολία είναι να αποδειχθεί ότι η παράγωγος είναι αντιστρέψιμη και να ελεγχθεί η νόρμα της αντίστροφής της.

Παρατηρούμε ότι αν μια αφφινική συνάρτηση είναι αντιστρέψιμη σε ένα αρκετά λεπτό δίκτυο της B_X τότε είναι και ολικά αντιστρέψιμη, στον X. Αν λοιπόν μπορούσαμε να δείξουμε ότι το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της $P_t f$ στο x είναι αρκετά κοντά στην f σε κάποια υπο-μπάλα της B_X, οπότε θα ήταν και κοντά στην ϕ στην τομή αυτής της υπο-μπάλας με το $\mathcal{N}_\delta$, τότε θα μπορούσαμε να αποδείξουμε ποσοτικό αποτέλεσμα για την αντιστρεψιμότητα της παραγώγου της $P_t f$ στο x. Φαίνεται έτσι ότι αν πετυχαίναμε κάποιο καλό κάτω φράγμα για τον δείκτη $r^{X\to Y}(\varepsilon)$ θα μπορούσαμε να το αξιοποιήσουμε στο πρόβλημα διακριτοποίησης του Bourgain. Φυσικά, δεν μπορούμε να περιμένουμε ότι θα αποδείξουμε το φράγμα της (4.1.1) σε πλήρη γενικότητα με αυτόν τον τρόπο, διότι η (4.1.1) ισχύει για κάθε χώρο Y με νόρμα ενώ $r^{X\to Y}(\varepsilon) > 0$ μόνο όταν ο Y επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα. Για παράδειγμα, αυτή η τεχνική δεν θα μπορούσε να λειτουργήσει για τον $Y = \ell_1$.

Αν όμως ο Y υποτεθεί ομοιόμορφα κυρτός τότε μπορούμε να ελπίζουμε ότι το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της $P_t f$ έχει πιθανότητες να παίξει το ρόλο της αφφινικής συνάρτησης που προσεγγίζει την f σε κάποια σχετικά μεγάλη υπο-μπάλα της B_X και να μας δώσει εκτίμηση για τον δείκτη $r^{X\to Y}(\varepsilon)$. Το πολυώνυμο Taylor βαθμού 1 μιας διαφορίσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to Y$ στο σημείο $x \in \mathbb{R}^n$ θα συμβολίζεται με $\mathrm{Taylor}^1_x(f)$. Είναι η αφφινική συνάρτηση $\mathrm{Taylor}^1_x(f) : \mathbb{R}^n \to Y$ που ορίζεται από την

$$\mathrm{Taylor}^1_x(f)(y) := f(x) + (y - x) \cdot \nabla f(x),$$

όπου, για κάθε $x, z \in \mathbb{R}^n$ ορίζουμε την κατευθυνόμενη παράγωγο της f ως εξής:

$$z \cdot \nabla f(x) := \sum_{j=1}^{n} z_j \partial_j f(x) = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{f(x+\varepsilon z) - f(x)}{\varepsilon}.$$

Το πρώτο πράγμα που πρέπει να δούμε είναι με ποιόν τρόπο θα αξιοποιηθεί ποσοτικά η πρόσθετη υπόθεση ότι ο Y επιδέχεται ισοδύναμη ομοιόμορφα κυρτή νόρμα. Στην επόμενη παράγραφο εισάγεται, με βάση κάποια αποτελέσματα του Pisier, μια παράμετρος του Y η οποία μπορεί να παίξει αυτό το ρόλο, η martingale cotype q σταθερά $m_q(Y)$.

4.2 Martingale cotype

Έστω $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ένας χώρος Banach. Συμβολίζουμε με B_Y τη μοναδιαία μπάλα του Y. Η νόρμα $\|\cdot\|_Y$ λέγεται *ομοιόμορφα κυρτή* αν για κάθε $0 < \varepsilon \leqslant 2$ υπάρχει $0 < \delta \leqslant 1$ τέτοιος ώστε, για κάθε $x, y \in B_Y$ με $\|x - y\|_Y \geqslant \varepsilon$ ισχύει

$$\|x + y\|_Y \leqslant 2(1 - \delta). \tag{4.2.1}$$

Παρόλο που στον ορισμό δεν απαιτείται κάποια συγκεκριμένη εξάρτηση του δ από το ε, το επόμενο θεώρημα του Pisier [20] μας εξασφαλίζει ότι αν περάσουμε σε μια ισοδύναμη νόρμα τότε μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι το δ θα είναι τουλάχιστον ίσο με κάποια δύναμη του ε.

Θεώρημα 4.2.1 (Pisier). *Έστω $(Y, \|\cdot\|_Y)$ ένας ομοιόμορφα κυρτός χώρος Banach. Υπάρχει νόρμα $\|\cdot\|$ στον Y η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|_Y$, δηλαδή υπάρχουν $a, b > 0$ ώστε*

$$a\|y\|_Y \leqslant \|y\| \leqslant b\|y\|_Y$$

για κάθε $y \in Y$, και σταθερές $C > 0, q \geqslant 2$ τέτοιες ώστε

$$\|x + y\| \leqslant 2 - \frac{1}{C^q}\|x - y\|^q$$

για κάθε $x, y \in Y$ με $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$.

Λέμε, επίσης, ότι η $\|\cdot\|$ έχει modulus ομοιόμορφης κυρτότητας εκθέτη q.

Μια ακολουθία $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ τυχαίων μεταβλητών στον χώρο πιθανότητας $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \mu)$ με τιμές στον Y λέγεται martingale αν υπάρχει αύξουσα ακολουθία υπο-σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_2 \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}$ τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}\left[M_{k+1} \mid \mathcal{F}_k\right] = M_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Συμβολίζουμε με $\mathbb{E}\left[\cdot \mid \mathcal{F}_k\right]$ τη δεσμευμένη μέση τιμή ως προς την $\mathcal{F}_k$ και υποθέτουμε ότι $M_k \in L_1(\mu; Y)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $1 \leqslant q < \infty$ ο χώρος $L_q(\mu; Y)$ αποτελείται από όλες τις $\mathcal{F}$-μετρήσιμες συναρτήσεις $f : \mathcal{S} \to Y$ για τις οποίες

$$\|f\|_{L_q(\mu;Y)}^q = \int_{\mathcal{S}} \|f\|_y^q \, d\mu < \infty.$$

Ο Pisier [20] απέδειξε την ακόλουθη ανισότητα για τις νόρμες που ικανοποιούν το συμπέρασμα του Θεωρήματος 4.2.1.

Θεώρημα 4.2.2. *Έστω $C > 0$ και $q \geqslant 2$. Έστω $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώρος με νόρμα που ικανοποιεί την*

$$\|x + y\|_Y \leqslant 2 - \frac{1}{C^q}\|x - y\|_Y^q$$

για κάθε $x, y \in B_Y$. Τότε, για κάθε martingale $\{M_k\}_{k=1}^{\infty}$ στον $L_q(\mu; Y)$ ισχύει

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} \|M_{k+1} - M_k\|_{L_q(\mu;Y)}^q\right)^{1/q} \preceq C \sup_{k\in\mathbb{N}} \|M_k\|_{L_q(\mu;Y)}. \tag{4.2.2}$$

Το Θεώρημα 4.2.2 οδηγεί στον ακόλουθο ορισμό [5]. Για κάθε χώρο Banach $(Y, \|\cdot\|)$ και για κάθε $q \geqslant 2$, η σταθερά martingale cotype q του Y είναι η ποσότητα

$$m_q(Y) := \sup\left(\sum_{k=1}^{\infty} \int_{\mathcal{S}} \|M_{k+1} - M_k\|_Y^q \, d\mu\right)^{1/q},$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλα τα martingales $\{M_k\}_{k=1}^{\infty} \subseteq L_q(\mu; Y)$ για τα οποία

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int_{\mathcal{S}} \|M_k\|_Y^q \, d\mu = 1.$$

Λέμε ότι ο Y έχει martingale cotype q αν $m_q(Y) < \infty$. Από τα αποτελέσματα του Pisier [5] προκύπτει ότι ένας χώρος Banach επιδέχεται ισοδύναμη νόρμα της οποίας το modulus ομοιόμορφης κυρτότητας έχει εκθέτη q αν και μόνο αν ο Y έχει martingale cotype q.

Μια συμμετρική ημιομάδα διάχυσης σε έναν χώρο μέτρου $(\mathcal{M}, \mu)$ [6] είναι μια μονοπαραμετρική οικογένεια αυτοσυζυγών τελεστών $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ που απεικονίζουν μετρήσιμες συναρτήσεις σε μετρήσιμες συναρτήσεις και έχουν τις ακόλουθες ιδιότητες: ο T_0 είναι ο ταυτοτικός τελεστής και $T_{t+s} = T_t T_s$ για κάθε $s, t \geqslant 0$. Επιπλέον απαιτούμε τα εξής:

(α) Για κάθε $t \geqslant 0$ και $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ο τελεστής T_t απεικονίζει τον $L_p(\mu)$ στον $L_p(\mu)$ και $\|T_t\|_{p\to p} \leqslant 1$.

(β) Για κάθε $f \in L_2(\mu)$ ισχύει $\lim\limits_{t\to 0^+} \|T_t f - f\|_{L_2(\mu)} = 0$.

(γ) Για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$ και για κάθε $t \geqslant 0$ η συνάρτηση $T_t f$ είναι μη αρνητική.

(δ) Για κάθε $t \geqslant 0$, $T_t \mathbb{1}_{\mathcal{M}} = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$.

Αν Y είναι ένας χώρος Banach, η ημιομάδα $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ επεκτείνεται σε μια ημιομάδα συστολών στον $L_q(\mu; Y)$ για κάθε $1 \leqslant q \leqslant \infty$ [21]. Επίσης, για κάθε $1 \leqslant q < \infty$ και $f \in L_q(\mu; Y)$ η απεικόνιση $t \mapsto T_t f$ είναι μια συνεχής απεικόνιση από το $[0, \infty)$ στον $L_q(\mu; Y)$.

Στις επόμενες δύο παραγράφους θα χρησιμοποιήσουμε τις ακόλουθες δύο γενικές προτάσεις για συμμετρικές ημιομάδες διάχυσης στον $L_q(\mu; Y)$, όπου $(Y, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος Banach με martingale cotype q.

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $2 \leqslant q < \infty$ και $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος Banach με martingale cotype q. Έστω $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ μια συμμετρική ημιομάδα διάχυσης στο χώρο μέτρου $(\mathcal{M}, \mu)$. Αν $f \in L_q(\mu; Y)$ και $\{t_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών, τότε*

$$\left(\sum_{j\in\mathbb{Z}} \|T_{t_j} f - T_{t_{j+1}} f\|_{L_q(\mu;Y)}^q \right)^{1/q} \leqslant m_q(Y) \|f\|_{L_q(\mu;Y)}. \tag{4.2.3}$$

Απόδειξη. Αρκεί να αποδείξουμε την (4.2.3) για πεπερασμένα αθροίσματα. Θεωρούμε δηλαδή $0 < t_0 < t_1 < \cdots < t_N$ και ζητάμε

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1} \|T_{t_j} f - T_{t_{j+1}} f\|_{L_q(\mu;Y)}^q \right)^{1/q} \leqslant m_q(Y) \|f\|_{L_q(\mu;Y)}. \tag{4.2.4}$$

Αφού η $t \mapsto T_t f$ είναι συνεχής συνάρτηση από το $[0, \infty)$ στον $L_q(\mu; Y)$, μπορούμε, με ένα επιχείρημα προσέγγισης, να υποθέσουμε ότι κάθε t_j είναι ακέραιο πολλαπλάσιο κάποιου $\delta > 0$, δηλαδή ότι $t_j = k_j \delta$, όπου $k_j \in \mathbb{N}$.

Θέτοντας $Q := T_{\delta/2}$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την (4.2.4) στη μορφή

$$\left(\sum_{j=0}^{N-1} \|Q^{2k_j} f - Q^{2k_{j+1}} f\|_{L_q(\mu;Y)}^q \right)^{1/q} \leqslant m_q(Y) \|f\|_{L_q(\mu;Y)}. \tag{4.2.5}$$

Ο τελεστής Q ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος αναπαράστασης του Rota [6]

Θεώρημα 4.2.4. *Έστω Q τελεστής στον $L_p(\mu)$ τέτοιος ώστε:*

(α) $\|Qf\|_{L_p(\mu)} \leq \|f\|_{L_p(\mu)}$.

(β) Ο Q είναι αυτοσυζυγής στον $L_2(\mu)$.

(γ) Για κάθε μη αρνητική μετρήσιμη $f : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, η συνάρτηση Qf είναι μη αρνητική.

(δ) $Q\mathbb{1}_{\mathcal{M}} = \mathbb{1}_{\mathcal{M}}$.

Τότε, υπάρχει χώρος μέτρου $(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \nu)$, μια οικογένεια σ-αλγεβρών $\cdots \subseteq \mathcal{F}_{k+1} \subseteq \mathcal{F}_k \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq \mathcal{F}_0$, και μια σ-άλγεβρα $\mathcal{F}'$ που περιέχονται στην $\mathcal{F}$ ώστε οι χώροι μέτρου $(\mathcal{M}, \mathcal{A}, \mu)$ και $(\mathcal{S}, \mathcal{F}', \nu)$ είναι ισόμορφοι, και

$$Q^{2k} = J^{-1} \circ E' \circ E_k \circ J,$$

όπου

- *ο $J : L_q(\mu; Y) \to L_q(\mathcal{S}, \mathcal{F}', \nu; Y)$ είναι ο επαγόμενος ισομετρικός ισομορφισμός των $L_q(\mu; Y)$ και $L_q(\mathcal{S}, \mathcal{F}', \nu; Y)$,*
- *ο $E_k : L_q(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \nu; Y) \to L_q(\mathcal{S}, \mathcal{F}_k, \nu; Y) \subseteq L_p(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \nu; Y)$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή των σ-πεπερασμένων υπο-σ-αλγεβρών $\mathcal{F}_k$, και*
- *ο $E' : L_q(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \nu; Y) \to L_q(\mathcal{S}, \mathcal{F}', \nu; Y) \subseteq L_q(\mathcal{S}, \mathcal{F}, \nu; Y)$ είναι η δεσμευμένη μέση τιμή για την υπο-σ-άλγεβρα $\mathcal{F}' \subseteq \mathcal{F}$.*

Έτσι, οι άρτιες δυνάμεις του γράφονται στη μορφή

$$Q^{2k} = J^{-1} \circ E' \circ E_k \circ J, \tag{4.2.6}$$

όπως παραπάνω.

Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\sum_{j=0}^{N-1} \|(Q^{2k_j} - Q^{2k_{j+1}})f\|^q_{L_q(\mu;Y)} &= \sum_{j=0}^{N-1} \|J^{-1}E'(E_{k_j} - E_{k_{j+1}})Jf\|^q_{L_q(\mu;Y)} \\ &\leqslant \sum_{j=0}^{N-1} \|(E_{k_j} - E_{k_{j+1}})Jf\|^q_{L_q(\mathcal{S},\mathcal{F},\nu;Y)} \\ &\leqslant m_q(Y)^q \|Jf\|^q_{L_q(\mathcal{S},\mathcal{F}',\nu;Y)} \\ &= m_q(Y)^q \|f\|^q_{L_q(\mu;Y)},\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

όπου στο πρώτο βήμα χρησιμοποιήσαμε την (4.2.6), στο δεύτερο το γεγονός ότι ο J^{-1} είναι ισομετρία και ο E' συστολή, στο τρίτο βήμα τον ορισμό της $m_q(Y)$ για το martingale $\{E_{k_j} Jf\}_{j=0}^{N-1}$, και στο τελευταίο βήμα το γεγονός ότι ο J είναι ισομετρία. □

Λήμμα 4.2.5. *Έστω $2 \leqslant q < \infty$, $1 < \alpha < \infty$ και $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος Banach με martingale cotype q. Έστω $\{T_t\}_{t\geqslant 0}$ μια συμμετρική ημιομάδα διάχυσης στον χώρο μέτρου $(\mathcal{M}, \mu)$. Τότε, για κάθε $f \in L_q(\mu; Y)$,*

$$\left(\int_0^\infty \|(T_t - T_{\alpha t})f\|^q_{L_q(\mu;Y)} \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \leqslant (\log \alpha)^{1/q} m_q(Y) \|f\|_{L_q(\mu;Y)}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \|(T_t - T_{\alpha t})f\|^q_{L_q(\mu;Y)} \frac{dt}{t} &= \sum_{j\in\mathbb{Z}} \int_{\alpha^j}^{\alpha^{j+1}} \|(T_t - T_{\alpha t})f\|^q_{L_q(\mu;Y)} \frac{dt}{t} \\ &= \int_1^\alpha \sum_{j\in\mathbb{Z}} \|(T_{\alpha^j t} - T_{\alpha^{j+1} t})f\|^q_{L_q(\mu;Y)} \frac{dt}{t} \\ &\leqslant m_q(Y)^q \|f\|^q_{L_q(\mu;Y)} \int_1^\alpha \frac{dt}{t},\end{aligned} \tag{4.2.8}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την Πρόταση 4.2.3 με $t_j = \alpha^j t$. □

Έστω $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώρος Banach και $1 \leqslant p \leqslant \infty$. Για κάθε $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$ συμβολίζουμε με $L_p(\Omega; Y)$ το χώρο Lebesgue-Bochner των p-ολοκληρώσιμων συναρτήσεων με τιμές στον Y. Θα θεωρούμε πάντα ότι το Ω είναι εφοδιασμένο με το μέτρο Lebesgue. Στην περίπτωση $Y = \mathbb{R}$ γράφουμε για απλότητα $L_p(\Omega) := L_p(\Omega; \mathbb{R})$.

4.3 Χωρικές παράγωγοι της ημιομάδας θερμότητας

Οι Martínez, Torrea και Xu [21] έχουν αποδείξει ότι ένας χώρος Banach $(Y, \|\cdot\|_Y)$ έχει martingale cotype q αν και μόνο αν για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $f \in L_q(\mathbb{R}^n; Y)$ ισχύει

$$\|\mathcal{G}_q f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \preceq_{n,Y} \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}, \tag{4.3.1}$$

όπου $\mathcal{G}_q f : \mathbb{R}^n \to Y$ είναι η γενικευμένη $\mathcal{G}$-συνάρτηση Littlewood-Paley-Stein που ορίζεται από την

$$\mathcal{G}_q f(x) := \left(\int_0^\infty \|t\partial_t P_t f(x)\|_Y^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q}, \qquad x \in \mathbb{R}^n$$

όπου $\{P_t\}_{t\geqslant 0}$ είναι η ημιομάδα Poisson. Φαίνεται λοιπόν φυσιολογικό να προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε αυτό το αποτέλεσμα για να φράξουμε την L_q-απόσταση της $f(x)$ από το πολυώνυμο Taylor πρώτης τάξης της $P_t f$ στο x, για κάποιο κατάλληλο μέτρο στα ζεύγη $(x,t) \in X \times (0,\infty)$. Με λίγα λόγια, θα θέλαμε να φράξουμε ένα ολοκλήρωμα της μορφής

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty ⨍_{x+tB_2^n} \frac{\|f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(P_{\gamma t} f)(y)\|_Y^q}{t^{q+1}}\, dy\, dt\, dx \right)^{1/q}$$

από την $\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)}$ για κατάλληλη σταθερά $\gamma > 0$. Όπως όμως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, αυτή η ανισότητα δεν μπορεί να ισχύει ακόμα και στην περίπτωση που ο $Y = \mathcal{H}$ είναι χώρος Hilbert.

Για το λόγο αυτό, οι Hytönen και Naor [15] αποφασίζουν να αντικαταστήσουν την ημιομάδα Poisson με την ημιομάδα της θερμότητας. Η ημιομάδα της θερμότητας στον $\mathbb{R}^n$ με τιμές στον Y συμβολίζεται με $\{H_t\}_{t\geqslant 0}$. Για κάθε $t > 0$ και $f \in L_1(\mathbb{R}^n; Y)$ ορίζουμε την $H_t f : \mathbb{R}^n \to Y$ ως εξής:

$$H_t f(x) := h_t * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} h_t(z) f(x-z)\, dz,$$

όπου ο πυρήνας της θερμότητας $h_t : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ είναι η συνάρτηση

$$h_t(x) = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}} = \frac{1}{t^{\frac{n}{2}}} h_1\left(\frac{x}{2\sqrt{t}} \right).$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το εξής.

Θεώρημα 4.3.1 (χωρική ανισότητα Littlewood-Paley-Stein για την ημιομάδα της θερμότητας)**.** *Έστω $2 \leqslant q < \infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Έστω $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος Banach που επιδέχεται ισοδύναμη νόρμα με δείκτη ομοιόμορφης κυρτότητας τύπου q. Τότε, για κάθε $\vec{f} \in \ell_q^n(L_q(\mathbb{R}^n; Y))$ έχουμε*

$$\left(\int_0^\infty \left\| \sqrt{t}\, \mathrm{div}\, H_t \vec{f} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \preceq \sqrt{n} \cdot m_q(Y) ⨍_{S^{n-1}} \left\| \sigma \cdot \vec{f} \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} d\sigma, \tag{4.3.2}$$

όπου $\vec{f} = (f_1, \ldots, f_n)$,

$$H_t \vec{f} := (H_t f_1, \ldots, H_t f_n) \quad \text{και} \quad \mathrm{div}\, H_t \vec{f} := \sum_{j=1}^n \partial_j (H_t f_j). \tag{4.3.3}$$

Επιπλέον, για κάθε $f \in L_q(\mathbb{R}^n; Y)$ και $z \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\left(\int_0^\infty \left\| \sqrt{t}(z \cdot \nabla) H_t f \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \preceq |z|\, m_q(Y) \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}. \tag{4.3.4}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1 θα χρειαστούμε δύο λήμματα.

Λήμμα 4.3.2. *Έστω $1 \leqslant q \leqslant \infty$ και $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος Banach. Για κάθε $\vec{f} \in \ell_q^n(L_q(\mathbb{R}^n;Y))$ ισχύει*

$$\left\|\sqrt{t}\operatorname{div} H_t\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \leqslant \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \fint_{S^{n-1}} \left\|\sigma\cdot\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} d\sigma \tag{4.3.5}$$
$$\preceq \sqrt{n}\fint_{S^{n-1}} \left\|\sigma\cdot\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} d\sigma.$$

Απόδειξη. Για κάθε $y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, για κάθε $t \geqslant 0$ και για κάθε $j \in \{1, \ldots, n\}$ ισχύει

$$\partial_j h_t(y) = -\frac{y_j h_t(y)}{2t}.$$

Συνεπώς, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $t \geqslant 0$ έχουμε

$$\operatorname{div} H_t\vec{f}(x) = \sum_{j=1}^n (\partial_j h_t * f_j)(x) = -\frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}^n} h_t(y)y\cdot\vec{f}(x-y)\,dy \tag{4.3.6}$$
$$= -\frac{1}{2t}\int_{\mathbb{R}^n} h_t(y)y\cdot\vec{f}_y(x)\,dy,$$

όπου η $\vec{f}_y : \mathbb{R}^n \to \ell_q^n(L_q(\mathbb{R}^n;Y))$ ορίζεται από την $\vec{f}_y(x) = \vec{f}(x-y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$.

Από το αναλλοίωτο ως προς μεταφορές έχουμε

$$\left\|y\cdot\vec{f}_y\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} = \left\|y\cdot\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, άρα η (4.3.6) μας δίνει

$$\begin{aligned}\left\|\sqrt{t}\operatorname{div} H_t\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{t}}\int_{\mathbb{R}^n} h_t(y)\left\|y\cdot\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} dy\\ &= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} h_1(z)\left\|z\cdot\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} dz\\ &= \left(\frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty r^n\frac{e^{-\frac{r^2}{4}}}{(4\pi)^{\frac{n}{2}}}\,dr\right)\fint_{S^{n-1}}\left\|\sigma\cdot\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} d\sigma\\ &= \frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\fint_{S^{n-1}}\left\|\sigma\cdot\vec{f}\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} d\sigma,\end{aligned}$$

όπου στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες. Αυτό αποδεικνύει την πρώτη ανισότητα στην (4.3.5). Η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από τον τύπο του Stirling. □

Λήμμα 4.3.3. *Έστω $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Για κάθε $f \in L_q(\mathbb{R}^n;Y)$, για κάθε $t \geqslant 0$ και $z \in \mathbb{R}^n$,*

$$\left\|\sqrt{t}(z\cdot\nabla)H_t f\right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \leqslant \frac{|z|}{\sqrt{\pi}}\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$(z \cdot \nabla) h_t(y) = -\frac{1}{2t}(z \cdot y) h_t(y),$$

άρα για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\begin{aligned}(z \cdot \nabla) H_t f(x) = (z \cdot \nabla) h_t * f &= -\frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}^n} (z \cdot y) h_t(y) f(x-y)\, dy \\ &= -\frac{1}{2t} \int_{\mathbb{R}^n} (z \cdot y) h_t(y) f_y(x)\, dy.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left\| \sqrt{t} (z \cdot \nabla) H_t f \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{t}} \int_{\mathbb{R}^n} |z \cdot y| h_t(y) \|f_y\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} dy \\ &= \frac{1}{2} \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \int_{\mathbb{R}^n} |z \cdot y| h_1(y) dy \\ &= \frac{|z|}{2} \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \int_{\mathbb{R}^n} |y_1| h_1(y)\, dy \\ &= \frac{|z|}{\sqrt{\pi}} \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}.\end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.1. Αφού $1 < q < \infty$ έχουμε

$$\lim_{t \to \infty} \|H_t \vec{f}\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)^n} = 0.$$

Άρα,

$$H_t \vec{f} = \sum_{k=-1}^{\infty} (H_{2^{k+1}t} - H_{2^{k+2}t}) \vec{f} = \sum_{k=-1}^{\infty} H_{2^k t} (H_{2^k t} - H_{3 \cdot 2^k t}) \vec{f}. \tag{4.3.7}$$

Από την τριγωνική ανισότητα στον $L_q((0,\infty), dt/t; L_q(\mathbb{R}^n;Y))$ και την (4.3.7) έπεται ότι

$$\begin{aligned}&\left(\int_0^\infty \|\sqrt{t} \operatorname{div} H_t \vec{f}\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &\leqslant \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\int_0^\infty \|\sqrt{t} \operatorname{div} H_{2^k t}(H_{2^k t} - H_{3 \cdot 2^k t}) \vec{f}\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{dt}{t} \right)^{1/q} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{2^{\frac{k}{2}}} \left(\int_0^\infty \|\sqrt{s} \operatorname{div} H_s (H_s - H_{3s}) \vec{f}\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \\ &\asymp \left(\int_0^\infty \|\sqrt{s} \operatorname{div} H_s (H_s - H_{3s}) \vec{f}\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{ds}{s} \right)^{1/q},\end{aligned} \tag{4.3.8}$$

όπου κάναμε την αλλαγή μεταβλητής $s = 2^k t$ στους προσθετέους.

Για κάθε $s \geqslant 0$, εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3.2 με την $(H_s - H_{3s})\vec{f}$ στο ρόλο της $\vec{f}$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \|\sqrt{s}\,\mathrm{div}\, H_s(H_s - H_{3s})\vec{f}\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} &\preceq \sqrt{n} ⨍_{S^{n-1}} \|\sigma \cdot (H_s - H_{3s})\vec{f}\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\, d\sigma \\ &= \sqrt{n} ⨍_{S^{n-1}} \|(H_s - H_{3s})(\sigma \cdot \vec{f})\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\, d\sigma. \end{aligned} \tag{4.3.9}$$

Συνδυάζοντας τις (4.3.8) και (4.3.9) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} &\left(\int_0^\infty \|\sqrt{t}\,\mathrm{div}\, H_t\vec{f}\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &\preceq \sqrt{n}\left(\int_0^\infty \left(⨍_{S^{n-1}} \|(H_s - H_{3s})(\sigma\cdot\vec{f})\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\, d\sigma\right)^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \\ &\leqslant \sqrt{n} ⨍_{S^{n-1}} \left(\int_0^\infty \|(H_s - H_{3s})(\sigma\cdot\vec{f})\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{ds}{s}\right)^{1/q} d\sigma \\ &\preceq \sqrt{n}\cdot m_q(Y) ⨍_{S^{n-1}} \|\sigma\cdot\vec{f}\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\, d\sigma, \end{aligned} \tag{4.3.10}$$

χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για τον $L_q((0,\infty), ds/s)$ στο προτελευταίο βήμα και το Λήμμα 4.2.5 στο τελευταίο βήμα. Αυτό αποδεικνύει την (4.3.2).

Για την απόδειξη της (4.3.4), εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στην (4.3.7) με την f στο ρόλο της $\vec{f}$ και κάνοντας τις ίδιες αλλαγές μεταβλητής όπως στην (4.3.8), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \left(\int_0^\infty \|\sqrt{t}(z\cdot\nabla)H_t f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{dt}{t}\right)^{1/q} &\preceq \left(\int_0^\infty \|\sqrt{s}(z\cdot\nabla)H_s(H_s - H_{3s})f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \\ &\preceq |z| \left(\int_0^\infty \|(H_s - H_{3s})f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \\ &\preceq |z| m_q(Y) \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}, \end{aligned} \tag{4.3.11}$$

όπου στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε το Λήμμα 4.3.3 και στο τελευταίο βήμα το Λήμμα 4.2.5. □

Παρόλο που δεν θα το χρειαστούμε για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2, δίνουμε εδώ την απόδειξη της αντίστοιχης «χρονικής ανισότητας» Littlewood-Paley-Stein για την ημιομάδα της θερμότητας, την οποία αποδεικνύουν οι Hytönen και Naor [15], απαντώντας σε ένα ερώτημα των Martínez, Torrea και Xu [21] (στην ειδική βέβαια περίπτωση της ημιομάδας της θερμότητας).

Θεώρημα 4.3.4 (χρονική ανισότητα Littlewood-Paley-Stein για την ημιομάδα της θερμότητας). *Έστω $2 \leqslant q < \infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Έστω $(Y, \|\cdot\|)$ χώρος Banach που επιδέχεται ισοδύναμη νόρμα με δείκτη ομοιόμορφης κυρτότητας τύπου q. Τότε, για κάθε $f \in L_q(\mathbb{R}^n;Y)$ έχουμε*

$$\left(\int_0^\infty \|t\partial_t H_t f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \preceq \sqrt{n}\cdot m_q(Y)\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}. \tag{4.3.12}$$

Χρειαζόμαστε ένα λήμμα.

Λήμμα 4.3.5. *Έστω $1 \leqslant q \leqslant \infty$. Για κάθε $f \in L_q(\mathbb{R}^n; Y)$ και $t \geqslant 1$ έχουμε*

$$\|t\dot{H}_t f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \preceq \sqrt{n} \cdot \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για κάθε $t > 0$ ισχύει

$$\|t\dot{h}_t\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \frac{2}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\left(\frac{n}{2e}\right)^{\frac{n}{2}} \asymp \sqrt{n}. \tag{4.3.13}$$

Από αυτή την εκτίμηση έπεται το λήμμα, διότι

$$\|t\dot{H}_t f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} = \|(t\dot{h}_t) * f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \leqslant \|t\dot{h}_t\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \cdot \|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \asymp \sqrt{n}\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}.$$

Για την απόδειξη της (4.3.13) κάνουμε απευθείας υπολογισμό. Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και $t > 0$,

$$\dot{h}_t(x) = -\frac{1}{2t}\left(n - \frac{|x|^2}{2t}\right)h_t(x).$$

Περνώντας σε πολικές συντεταγμένες έχουμε, για κάθε $t > 0$,

$$\|t\dot{h}_t\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}\int_0^\infty \left|n - \frac{r^2}{2t}\right| h_t(r) r^{n-1} dr. \tag{4.3.14}$$

Τέλος, υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (4.3.14) ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \left|n - \frac{r^2}{2t}\right| h_t(r) r^{n-1} dr &= \int_0^{\sqrt{2tn}} \frac{n - \frac{r^2}{2t}}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} dr + \int_{\sqrt{2tn}}^\infty \frac{\frac{r^2}{2t} - n}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{r^2}{4t}} r^{n-1} dr \\ &= \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_0^{\sqrt{2tn}} \frac{\partial}{\partial r}\left(r^n e^{-\frac{r^2}{4t}}\right) dr - \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{n}{2}}} \int_{\sqrt{2tn}}^\infty \frac{\partial}{\partial r}\left(r^n e^{-\frac{r^2}{4t}}\right) dr \\ &= 2\left(\frac{n}{2\pi e}\right)^{\frac{n}{2}}.\end{aligned}$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.4. Από την ταυτότητα $H_{t+s} = H_t H_s$ έπεται ότι $\dot{H}_{t+s} = \dot{H}_t H_s$ για κάθε $t, s > 0$. Παίρνοντας υπόψη και την (4.3.7) έχουμε

$$\dot{H}_t f = \sum_{k=-1}^{\infty} (\dot{H}_{2^{k+1}t} - \dot{H}_{2^{k+2}t}) f = \sum_{k=-1}^{\infty} \dot{H}_{2^k t}(H_{2^k t} - H_{3\cdot 2^k t}) f$$

για κάθε $t > 0$. Με το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε για την (4.3.8) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \|t\dot{H}_t f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{dt}{t}\right)^{1/q} &\leqslant \sum_{k=-1}^{\infty} \left(\int_0^\infty \|t\dot{H}_{2^k t}(H_{2^k t} - H_{3\cdot 2^k t}) f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{dt}{t}\right)^{1/q} \\ &= \sum_{k=-1}^{\infty} \frac{1}{2^k} \left(\int_0^\infty \|s\dot{H}_s(H_s - H_{3s}) f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{ds}{s}\right)^{1/q} \\ &\preceq \left(\int_0^\infty \|t\dot{H}_t(H_t - H_{3t}) f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \frac{dt}{t}\right)^{1/q}.\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3.5 με την $(H_t - H_{3t})f$ στο ρόλο της f, ολοκληρώνοντας ως προς t και εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.2.5 βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\int_0^\infty \|t\dot{H}_t(H_t - H_{3t})f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\frac{dt}{t}\right)^{1/q} &\preceq \sqrt{n}\left(\int_0^\infty \|(H_t - H_{3t})f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\frac{dt}{t}\right)^{1/q}\\ &\preceq \sqrt{n}\cdot m_q(Y)\|f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}.\end{aligned}$$

□

4.4 Σταθερά Lipschitz κατά μήκος της ημιομάδας

Σε αυτή την παράγραφο θα δούμε μία από τις γεωμετρικές παραμέτρους του χώρου X που παίζουν ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια νόρμα $|\cdot|$. Μπορούμε λοιπόν να ταυτίσουμε τον X, ως πραγματικό διανυσματικό χώρο, με τον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $0 < p < \infty$ θέτουμε

$$M_p(X) := \left(\fint_{S^{n-1}} \|\sigma\|^p_X d\sigma\right)^{1/p}. \tag{4.4.1}$$

Θέτουμε επίσης

$$M_\infty(X) = b(X) = \sup_{\sigma\in S^{n-1}} \|\sigma\|_X$$

και

$$M(X) := M_1(X).$$

Θεωρούμε μια συνάρτηση $f : X \to Y$ που ικανοποιεί τις $\|f\|_{\mathrm{Lip}(B_X,Y)} \leqslant 1$ και $\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant L$. Σκοπός μας είναι να δώσουμε μια εκτίμηση για τη σταθερά Lipschitz του πολυωνύμου Taylor πρώτης τάξης $\mathrm{Taylor}^1_x(H_t f)$ της $H_t f$ στο x, για μικρές τιμές του $t > 0$. Η παράμετρος $M_1(X)$ καθορίζει το εύρος των τιμών του t για τις οποίες έχουμε τη ζητούμενη εκτίμηση.

Λήμμα 4.4.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα. Έστω $n \in \mathbb{N}$, έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και $L \geqslant 1$. Έστω επίσης $|\cdot|$ μια Ευκλείδεια νόρμα στον X. Αν η $f : X \to Y$ ικανοποιεί τις $\|f\|_{\mathrm{Lip}(B_X,Y)} \leqslant 1$ και $\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant L$, τότε για κάθε $x \in B_X$ και για κάθε*

$$0 < t \leqslant \frac{(1 - \|x\|)^2}{C(M_1(X)\sqrt{n} + b(X)\sqrt{\log L})^2}$$

ισχύει

$$\|\mathrm{Taylor}^1_x(H_t f)\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant 2. \tag{4.4.2}$$

Απόδειξη. Παίρνοντας συνέλιξη της f με μια ομαλή συνάρτηση αυθαίρετα μικρού φορέα μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι η f είναι ομαλή, οπότε

$$\|(z\cdot\nabla)f(w)\|_Y \leqslant \mathbb{1}_{B_X}(w) + L\,\mathbb{1}_{\mathbb{R}^n\setminus B_X}(w)$$

για κάθε $w \in \mathbb{R}^n$ και $z \in \partial B_X$. Συνεπώς, αν συμβολίσουμε με G ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ (του οποίου η πυκνότητα είναι ανάλογη της $e^{-|x|^2/2}$) τότε για κάθε $z \in \partial B_X$ έχουμε

$$\begin{aligned}\|(z\cdot\nabla)H_tf(x)\|_Y &= \|(z\cdot\nabla)\mathbb{E}[f(x-\sqrt{2t}G)]\|_Y \\ &\leqslant \mathbb{E}\left[\|(z\cdot\nabla)f(x-\sqrt{2t}G)\|_Y\right] \\ &\leqslant \mathbb{P}\left[\|x-\sqrt{2t}G\|_X\leqslant 1\right] + L\cdot\mathbb{P}[\|x-\sqrt{2t}G\|_X\geqslant 1] \\ &\leqslant 1+L\cdot\mathbb{P}\left[\|G\|_X\geqslant \frac{1-\|x\|_X}{\sqrt{2t}}\right].\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Markov έπεται ότι

$$\|\mathrm{Taylor}_x^1(H_tf)\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} = \sup_{z\in\partial B_X}\|(z\cdot\nabla)H_tf(x)\|_Y \leqslant 1+L\inf_{p>0}\left(\frac{\sqrt{2t}}{1-\|x\|_X}\right)^p\mathbb{E}[\|G\|_X^p]. \tag{4.4.3}$$

Για κάθε $p>0$, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left[\|G\|_X^p\right] = \frac{|B_2^n|}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\left(\int_0^\infty nr^{n+p-1}e^{-\frac{r^2}{2}}dr\right)\fint_{S^{n-1}}\|\sigma\|_X^p d\sigma = \frac{2^{\frac{p}{2}}\Gamma\left(\frac{n+p}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}M_p(X)^p. \tag{4.4.4}$$

Από ένα θεώρημα των Litvak, Milman και Schechtman [26] (βλέπε επίσης [7]) γνωρίζουμε ότι, για κάθε $1\leqslant p\leqslant\infty$,

$$M_p(X)\asymp M(X)+\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n+p}}b(X). \tag{4.4.5}$$

Συνδυάζοντας την (4.4.4) με την (4.4.5), και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, βλέπουμε ότι για κάθε $1\leqslant p\leqslant\infty$ ισχύει

$$\left(\mathbb{E}\left[\|G\|_X^p\right]\right)^{1/p}\asymp\sqrt{n+p}\left(M(X)+\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{n+p}}b(X)\right)\asymp M(X)\sqrt{n}+b(X)\sqrt{p}. \tag{4.4.6}$$

Έστω t που ικανοποιεί την (4.4.2), όπου $C>0$ είναι μια αρκετά μεγάλη απόλυτη σταθερά που θα προσδιορίσουμε στη συνέχεια. Αντικαθιστώντας την (4.4.6) στην (4.4.3) βλέπουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $\kappa>0$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned}\|\mathrm{Taylor}_x^1(H_tf)\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} &\leqslant 1+L\inf_{p>0}\left(\frac{\kappa\sqrt{2t}(M(X)\sqrt{n}+b(X)\sqrt{p})}{1-\|x\|_X}\right)^p \\ &\leqslant 1+L\inf_{p>0}\left(\frac{\kappa\sqrt{2}}{\sqrt{C}}\cdot\frac{M(X)\sqrt{n}+b(X)\sqrt{p})}{M(X)\sqrt{n}+b(X)\sqrt{\log L}}\right)^p,\end{aligned} \tag{4.4.7}$$

όπου στο τελευταίο βήμα της (4.4.7) χρησιμοποιήσαμε το άνω φράγμα που έχουμε υποθέσει για το t. Επιλέγουμε

$$p=\frac{C(M(X)\sqrt{n}+b(X)\sqrt{\log L})^2}{8e^2\kappa^2b(X)^2}$$

στην (4.4.7). Αφού $b(X) \preceq M(X)\sqrt{n}$, αν η σταθερά C επιλεγεί αρκετά μεγάλη έχουμε $p \geqslant 1$ και $p \geqslant nM(X)^2/b(X)^2$. Έπεται ότι

$$M(X)\sqrt{n} + b(X)\sqrt{p} \leqslant 2b(X)\sqrt{p},$$

άρα

$$\begin{aligned}\left(\frac{\kappa\sqrt{2}}{\sqrt{C}} \cdot \frac{M(X)\sqrt{n} + b(X)\sqrt{p}}{M(X)\sqrt{n} + b(X)\sqrt{\log L}}\right)^p &\leqslant \left(\frac{\kappa\sqrt{2}}{\sqrt{C}} \cdot \frac{2b(X)\sqrt{p}}{M(X)\sqrt{n} + b(X)\sqrt{\log L}}\right)^p \\ &= \frac{1}{e^p} \leqslant \frac{1}{L^{\frac{C}{8e^2\kappa^2}}} \leqslant \frac{1}{L},\end{aligned}$$

όπου στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την $p \geqslant (C/8e^2\kappa^2)\log L$ και το τελευταίο βήμα ισχύει αν $C \geqslant 8e^2\kappa^2$. Από την (4.4.7) έπεται τώρα η (4.4.2). $\square$

4.5 Απόδειξη του θεωρήματος

Θεωρούμε μία ακόμα γεωμετρική παράμετρο του χώρου X. Για κάθε $q > 0$ ορίζουμε

$$I_q(X) := \left(\fint_{B_X} |x|^q \, dx\right)^{1/q}. \tag{4.5.1}$$

Η ποσότητα $I_q(X)M(X)$ παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στο επόμενο βασικό θεώρημα, το οποίο δείχνει ότι το μέτρο

$$\left(t^{-q} \fint_{x+tB_X} \|f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2} f)(y)\|_Y^q \, dy\right) \frac{dx\,dt}{t}$$

είναι μέτρο Carleson για κατάλληλη τιμή της σταθεράς γ. Το Θεώρημα 4.5.1 δείχνει ότι αν $f : X \to Y$ είναι μια 1-Lipschitz συνάρτηση τότε το $\mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2} f)(y)$ είναι κοντά στην $f(y)$ για τις περισσότερες τιμές του t και του x.

Θεώρημα 4.5.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\kappa \geqslant 2$ με την ακόλουθη ιδιότητα. Έστω $q \geqslant 2$ και $n \in \mathbb{N}$, και έστω $(X, \|\cdot\|)$ και $(Y, \|\cdot\|)$ χώροι Banach με $\dim(X) = n$ και $m_q(Y) < \infty$. Έστω $|\cdot|$ μια Ευκλείδεια νόρμα στον X, τον οποίο ταυτίζουμε με τον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $\gamma, K > 0$ θέτοντας*

$$\gamma = \gamma(q, X) = \frac{I_q(X)}{\sqrt{n}M(X)} \quad \text{και} \quad K = K(q, n, X, Y) = \kappa\sqrt[4]{n} \cdot m_q(Y)\sqrt{I_q(X)M(X)}. \tag{4.5.2}$$

Τότε, για κάθε συνάρτηση Lipschitz $f : \mathbb{R}^n \to Y$ με συμπαγή φορέα έχουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \fint_{x+tB_X} \frac{\|f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2} f)(y)\|_Y^q}{t^{q+1}} \, dy\, dt\, dx\right)^{1/q} \leqslant K|\mathrm{supp}(f)|^{1/q}\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)}. \tag{4.5.3}$$

Το βασικό βήμα είναι το επόμενο θεώρημα, το οποίο εξασφαλίζει παρόμοια εκτίμηση με αυτήν του Θεωρήματος 4.5.1, αλλά με την ασθενέστερη υπόθεση ότι κατάλληλη $W^{1,q}$ νόρμα Sobolev της f είναι πεπερασμένη, αντί της υπόθεσης ότι η f είναι Lipschitz.

Θεώρημα 4.5.2. *Έστω $2 \leqslant q < \infty$ και $n \in \mathbb{N}$. Έστω $(X, \|\cdot\|)$ και $(Y, \|\cdot\|)$ χώροι Banach με $\dim(X) = n$ και $m_q(Y) < \infty$. Έστω $|\cdot|$ μια Ευκλείδεια νόρμα στον X, τον οποίο ταυτίζουμε με τον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\gamma > 0$ και για κάθε ομαλή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to Y$ έχουμε*

$$\tag{4.5.4} \begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \fint_{x+tB_X} \frac{\|f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2}f)(y)\|_Y^q}{t^{q+1}}\, dy\, dt\, dx\right)^{1/q} \\ &\quad\preceq \frac{m_q(Y)}{\sqrt{\gamma}}\left(\fint_{B_X} |x|^q \|x\cdot\nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q\, dx\right)^{1/q} + m_q(Y)\sqrt{\gamma n}\fint_{S^{n-1}} \|\sigma\cdot\nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\, d\sigma. \end{aligned}$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε $\gamma > 0$ έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το δεξιό μέλος της (4.5.4), δηλαδή αν ορίσουμε

$$\gamma(f) := \frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \frac{\left(\fint_{B_X} |x|^q \|x\cdot\nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q dx\right)^{1/q}}{\fint_{S^{n-1}} \|\sigma\cdot\nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\, d\sigma},$$

τότε

$$\tag{4.5.5} \begin{aligned} &\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \fint_{x+tB_X} \frac{\|f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma(f)t^2}f)(y)\|_Y^q}{t^{q+1}}\, dy\, dt\, dx\right)^{1/q} \\ &\quad\preceq m_q(Y)\sqrt[4]{n}\left(\fint_{B_X} |x|^q \|x\cdot\nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q\, dx\right)^{\frac{1}{2q}} \left(\fint_{S^{n-1}} \|\sigma\cdot\nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\, d\sigma\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Απόδειξη. Η (4.5.5) προκύπτει από την (4.5.4) αν αντικαταστήσουμε τη βέλτιστη τιμή της σταθεράς $\gamma = \gamma(f)$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε την (4.5.4). Για το σκοπό αυτό θα δείξουμε τις ανισότητες

$$\tag{4.5.6} \begin{aligned} J_1 &:= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \fint_{B_X} \frac{\|H_{\gamma t^2}f(x+tz) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2}f)(x+tz)\|_Y^q}{t^{q+1}}\, dz\, dt\, dx\right)^{1/q} \\ &\preceq \frac{m_q(Y)}{\sqrt{\gamma}}\left(\fint_{B_X} |x|^q \|x\cdot\nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q dx\right)^{1/q} \end{aligned}$$

και

$$\tag{4.5.7} J_2 := \left(\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\|f(y) - H_{\gamma t^2}f(y)\|_Y^q}{t^{q+1}}\, dy\, dt\right)^{1/q} \preceq m_q(Y)\sqrt{\gamma n}\fint_{S^{n-1}} \|\sigma\cdot\nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\, d\sigma.$$

Από αυτές τις εκτιμήσεις προκύπτει το Θεώρημα 4.5.2 διότι, προσθαφαιρώντας την $H_{\gamma t^2}f(y)$ και εφαρμόζοντας την τριγωνική ανισότητα στον $L_q(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; Y)$ έχουμε

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \fint_{x+tB_X} \frac{\|f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2}f)(y)\|_Y^q}{t^{q+1}}\, dy\, dt\, dx\right)^{1/q} \leqslant J_1 + J_2.$$

Για να αποδείξουμε την (4.5.7) παρατηρούμε ότι

$$\dot{H}_t f := \partial_t H_t f = \Delta H_t f = \operatorname{div} H_t \nabla f,$$

άρα

$$\begin{aligned}
J_2 &= \left(\int_0^\infty \left\| \int_0^1 \gamma t^2 \dot{H}_{u\gamma t^2} f \, du \right\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{dt}{t^{q+1}} \right)^{1/q} \\
&\leqslant \gamma \int_0^1 \left(\int_0^\infty t^{q-1} \| \dot{H}_{u\gamma t^2} f \|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q dt \right)^{1/q} du \\
&= \sqrt{\gamma} \left(\int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}} \right) \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty \| \sqrt{s} \dot{H}_s f \|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \\
&= 2^{1-\frac{1}{q}} \sqrt{\gamma} \left(\int_0^\infty \| \sqrt{s} \operatorname{div} H_t \nabla f \|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{4.5.8}$$

Εφαρμόζοντας τώρα την (4.3.2) με $\vec{f} = \nabla f$ παίρνουμε την (4.5.7).

Για να δείξουμε την (4.5.6) παρατηρούμε ότι από την ολοκληρωτική αναπαράσταση του σφάλματος στον τύπο του Taylor, για κάθε $x, z \in \mathbb{R}^n$ και $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$H_{\gamma t^2} f(x+tz) - \mathrm{Taylor}_x^1 (H_{\gamma t^2} f)(x+tz) = \int_0^1 (tz \cdot \nabla)^2 H_{\gamma t^2} f(x+stz)(1-s) ds.$$

Επομένως, από την ανισότητα Jensen παίρνουμε

$$\begin{aligned}
J_1 &\leqslant \int_0^1 \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \fint_{B_X} t^{q-1} \| (z\cdot\nabla)^2 H_{\gamma t^2} f(x+stz) \|_Y^q \, dz \, dt \, dx \right)^{1/q} (1-s) \, ds \\
&= \frac{1}{2} \left(\int_0^\infty \fint_{B_X} t^{q-1} \| (z\cdot\nabla)^2 H_{\gamma t^2} f \|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \, dz \, dt \right)^{1/q}.
\end{aligned} \tag{4.5.9}$$

Αφού οι τελεστές $\{z \cdot \nabla\}_{z \in \mathbb{R}^n}$ και $\{H_s\}_{s \geqslant 0}$ αντιμετατίθενται, για κάθε $z \in B_X$ έχουμε

(4.5.10)

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^\infty t^{q-1} \| (z\cdot\nabla)^2 H_{\gamma t^2} f \|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \, dt \right)^{1/q} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \left(\int_0^\infty \| \sqrt{s} (z\cdot\nabla) H_s (z\cdot\nabla) f \|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}^q \frac{ds}{s} \right)^{1/q} \\
&\preceq \frac{|z| m_q(Y)}{\sqrt{\gamma}} \| z \cdot \nabla f \|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)},
\end{aligned}$$

όπου στο τελευταίο βήμα της (4.5.10) χρησιμοποιήσαμε την (4.3.4) με την $(z \cdot \nabla) f$ στο ρόλο της f. Αντικαθιστώντας την (4.5.10) στην (4.5.9) παίρνουμε την (4.5.6). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.5.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} = 1$, και παίρνοντας συνέλιξη της f με ομαλή συνάρτηση αυθαίρετα μικρού φορέα μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η f είναι ομαλή. Τότε,

$$\| z \cdot \nabla f(x) \|_Y \leqslant \|z\|_X \mathbb{1}_{\mathrm{supp}(f)}(x)$$

για κάθε $x, z \in \mathbb{R}^n$. Άρα,

$$\|z \cdot \nabla f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} \leqslant \|z\|^q_X |\mathrm{supp}(f)|.$$

Έπεται ότι

$$\fint_{S^{n-1}} \|\sigma \cdot \nabla f\|_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)}\, d\sigma \leqslant |\mathrm{supp}(f)|^{1/q} \fint_{S^{n-1}} \|\sigma\|_X\, d\sigma = M(X)|\mathrm{supp}(f)|^{1/q}$$

και

$$\left(\fint_{B_X} |x|^q \|x \cdot \nabla f\|^q_{L_q(\mathbb{R}^n;Y)} dx\right)^{1/q} \leqslant \left(\fint_{B_X} |x|^q dx\right)^{1/q} |\mathrm{supp}(f)|^{1/q} = I_q(X)|\mathrm{supp}(f)|^{1/q}.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις εκτιμήσεις στην (4.5.4) βλέπουμε ότι για κάθε $\gamma > 0$ ισχύει

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n}\int_0^\infty \fint_{x+tB_X} \frac{\|f(y) - \mathrm{Taylor}^1_x(H_{\gamma t^2} f)(y)\|^q_Y}{t^{q+1}}\, dy\, dt\, dx\right)^{1/q} \preceq m_q(Y)\left(\sqrt{\gamma n} M(X) + \frac{I_q(X)}{\sqrt{\gamma}}\right) |\mathrm{supp}(f)|^{1/q}. \tag{4.5.11}$$

Η τιμή του γ στην (4.5.2) ελαχιστοποιεί το δεξιό μέλος της (4.5.11) και μας δίνει την (4.5.3). □

Η διαφορά του Θεωρήματος 4.5.1 από το Θεώρημα 4.1.2 είναι το δεύτερο αφορά συναρτήσεις που είναι ορισμένες στη μοναδιαία μπάλα B_X ενώ το πρώτο συναρτήσεις που ορίζονται σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$. Για να φτάσουμε στο Θεώρημα 4.1.2, αποδεικνύουμε πρώτα το επόμενο θεώρημα, το οποίο είναι μια «τοπική έκδοση» του Θεωρήματος 4.5.1. Συμφωνούμε εδώ, για κάθε $a, A > 0$ με $a < A$ και κάθε $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε η συνάρτηση $\rho \mapsto \psi(\rho)/\rho$ να ανήκει στον $L_1([a, A])$, να γράφουμε

$$\fint_a^A \psi(\rho)\, \frac{d\rho}{\rho} = \frac{1}{\ln(A/a)} \int_a^A \psi(\rho)\, \frac{d\rho}{\rho}$$

για τη μέση τιμή της ψ ως προς το μέτρο $\frac{d\rho}{\rho}$ στο διάστημα $[a, A]$.

Θεώρημα 4.5.3. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < \frac{1}{4}$ με τις ακόλουθες ιδιότητες. Έστω $q \geqslant 2$ και $n \in \mathbb{N}$, και έστω $(X, \|\cdot\|)$ και $(Y, \|\cdot\|)$ χώροι Banach με $\dim(X) = n$ και $m_q(Y) < \infty$. Έστω $|\cdot|$ μια Ευκλείδεια νόρμα στον X, τον οποίο ταυτίζουμε με τον $\mathbb{R}^n$. Έστω K η σταθερά που ορίστηκε στην (4.5.2) και έστω*

$$T := \frac{c}{n^{\frac{5}{4}}\sqrt{I_q(X)M(X)\log n}}. \tag{4.5.12}$$

Τότε, $T \leqslant \frac{1}{2n}$. Επιπλέον, για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f : B_X \to Y$ και για κάθε $0 < r \leqslant T^2$,

$$\fint_r^T \left(\fint_{\left(1-\frac{1}{2n}\right)B_X} \inf_{\substack{\Lambda \in \mathcal{A}(X,Y)\\ \|\Lambda\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant 2}} \frac{\fint_{x+\rho B_X} \|f(y) - \Lambda(y)\|^q_Y}{\rho^q}\, dy\, dx\right) \frac{d\rho}{\rho} \leqslant \frac{(9Kn)^q}{|\log r|}. \tag{4.5.13}$$

Απόδειξη. Έστω $f : B_X \to Y$ με $\|f\|_{\mathrm{Lip}(B_X,Y)} \leqslant 1$. Ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 4.5.3 είναι αναλλοίωτος ως προς μεταφορές, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $f(0) = 0$. Ορίζουμε $F : X \to Y$ θέτοντας $F(x) = f(x)$ αν $x \in B_X$ και $F(x) = \max\{0, n + 1 - n\|x\|_X\} \cdot f(x/\|x\|_X)$ αν $x \in \mathbb{R}^n \setminus B_X$. Τότε, $\mathrm{supp}(F) \subseteq (1 + 1/n)B_X$ και εύκολα ελέγχουμε ότι $\|F\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant n + 2$.

Σταθεροποιούμε $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\|_X \leqslant 1 - \frac{1}{2n}$ και $t > 0$. Από τον ορισμό του γ στην (4.5.2) και για τη σταθερά C του Λήμματος 4.4.1, γνωρίζουμε ότι $\|\mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2}F)\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant 2$ αν ικανοποιείται η

$$\gamma t^2 = \frac{I_q(X)t^2}{\sqrt{n}M(X)} \leqslant \frac{1}{4Cn^2(M(X)\sqrt{n} + b(X)\sqrt{\log(n+2)})^2}. \tag{4.5.14}$$

Από την (4.4.5), με $p = 1$, έχουμε $b(X) \preceq M(X)\sqrt{n}$, άρα υπάρχει απόλυτη σταθερά $0 < c < \frac{1}{4}$ τέτοια ώστε η συνθήκη (4.5.14) να ικανοποιείται για κάθε $0 < t \leqslant T$, όπου T είναι η σταθερά που ορίστηκε στην (4.5.12). Άρα, για $0 < t \leqslant T$ η απεικόνιση $\mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2}F) \in \mathcal{A}(X,Y)$ είναι 2-Lipschitz. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}
&\fint_r^T \left(\fint_{(1-\frac{1}{2n})B_X} \inf_{\substack{\Lambda \in \mathcal{A}(X,Y) \\ \|\Lambda\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant 2}} \frac{\fint_{x+\rho B_X} \|f(y) - \Lambda(y)\|_Y^q}{\rho^q} y\, dx \right) \frac{d\rho}{\rho} \\
&\leqslant \frac{1}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n |B_X| \log\left(\frac{T}{r}\right)} \int_{(1-\frac{1}{2n})B_X} \int_r^T \fint_{x+tB_X} \frac{\|F(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2}F)(y)\|_Y^q}{t^{q+1}}\, dy\, dt\, dx.
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.5.1 για την F, βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος της (4.5.13) φράσσεται από

$$\frac{K^q |\mathrm{supp}(F)| (n+2)^q}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n |B_X| \log\left(\frac{T}{r}\right)} \leqslant \frac{2(3Kn)^q \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}{\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n |\log r|} \leqslant \frac{(9Kn)^q}{|\log r|}.$$

Στις προηγούμενες ανισότητες χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\|F\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant n+2$, ότι ο φορέας της F περιέχεται στο $(1+1/n)B_X$ άρα $|\mathrm{supp}(F)| \leqslant (1+1/n)^n |B_X|$, το γεγονός ότι $r \leqslant T^2 \leqslant 1$ άρα $\log(T/r) \geqslant |\log r|/2$, το γεγονός ότι η ακολουθία $\{(1+1/n)^n/(1-1/(2n))^n\}_{n=1}^\infty$ είναι φθίνουσα άρα άνω φραγμένη από 4, και την υπόθεση ότι $q \geqslant 2$. Άρα, η απόδειξη του Θεωρήματος 4.5.3 είναι πλήρης. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε την ακόλουθη, πιο ακριβής, μορφή του Θεωρήματος 4.1.2.

Θεώρημα 4.5.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $a \in (0,1)$ με την εξής ιδιότητα. Έστω $q \geqslant 2$ και $n \geqslant 1$, και έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ και $(Y, \|\cdot\|_Y)$ χώροι Banach με $\dim(X) = n$ και $m_q(Y) < \infty$. Αν $|\cdot|$ είναι μια Ευκλείδεια νόρμα στον X και $0 < \varepsilon < 1/2$, τότε*

$$r^{X \to Y}(\varepsilon) \geqslant \exp\left(-\frac{\left(n^{\frac{5}{4}} \sqrt{I_q(X)M(X)} \cdot m_q(Y)\right)^q}{(a\varepsilon)^{n+q}} \right).$$

Συνεπώς, επιλέγοντας κατάλληλη Ευκλείδεια νόρμα $|\cdot|$ ώστε να ισχύει $I_q(X)M(X) \leqslant \sqrt{n}$, για κάθε $0 < \varepsilon < 1/2$ έχουμε

$$r^{X\to Y}(\varepsilon) \geqslant \exp\left(-\frac{n^{\frac{3q}{2}} m_q(Y)^q}{(a\varepsilon)^{n+q}}\right).$$

Απόδειξη. Έστω $f : B_X \to Y$ μια 1-Lipschitz συνάρτηση και έστω $\delta \in (0, 1/2)$. Θεωρούμε μια απόλυτη σταθερά $C \geqslant 9$, η οποία θα επιλεγεί έτσι ώστε, αν ορίσουμε $r = \exp(-(CKn/\delta)^q)$, να ισχύει $r \leqslant T^2$, όπου η σταθερά K ορίζεται στην (4.5.2) και η σταθερά T ορίζεται στην (4.5.12). Η ύπαρξη μιας τέτοιας σταθεράς εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι $I_q(X)M(X) \geqslant 1/2$ και τον ορισμό των K και T.

Από την (4.5.13) μπορούμε να βρούμε ακτίνα $\varrho \geqslant r$, ένα σημείο $x \in B_X$ τέτοιο ώστε $x + \varrho B_X \subseteq B_X$, και μια αφφινική συνάρτηση $\Lambda : X \to Y$ με $\|\Lambda\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant 2$ τέτοια ώστε

$$\left(\fint_{x+\varrho B_X} \|f(y) - \Lambda(y)\|_Y^q \, dy\right)^{1/q} \leqslant \delta\varrho. \tag{4.5.15}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι, για κάθε $\varepsilon \in (0, 1/2)$, αν το φράγμα στο δεξιό μέλος της (4.5.15) είναι εκθετικά μικρό ως προς n τότε αναγκαστικά

$$\|f(y) - \Lambda(y)\|_Y \leqslant \varepsilon\varrho \qquad \text{για κάθε } \; y \in x + \varrho B_X.$$

Ειδικότερα, αυτό ισχύει αν $\delta = (\eta\varepsilon)^{+n/q}$ για μια αρκετά μικρή απόλυτη σταθερά $\eta \in (0, 1)$. Εν συντομία, ο λόγος γι' αυτό είναι ότι, αφού $\|f\|_{\mathrm{Lip}(B_X,Y)} \leqslant 1$ και $\|\Lambda\|_{\mathrm{Lip}(X,Y)} \leqslant 2$, έχουμε $\|f - \Lambda\|_{\mathrm{Lip}(B_X,Y)} \leqslant 3$, άρα αν $\|f(y_0) - \Lambda(y_0)\| > \varepsilon\varrho$ για κάποιο $y_0 \in x + \varrho B_X$ τότε θα είχαμε ότι η $\|f(y) - \Lambda(y)\|_Y$ θα ήταν μεγαλύτερη από ένα σταθερό πολλαπλάσιο του $\varepsilon\varrho$ σε κάποια υπο-μπάλα της $x + \varrho B_X$ με ακτίνα τουλάχιστον ίση με κάποιο σταθερό πολλαπλάσιο του $\varepsilon\varrho$, και τότε το αριστερό μέλος της (4.5.15) θα ήταν μεγαλύτερο από $(\eta\varepsilon)^{1+n/q}\varrho$ για κάποια απόλυτη σταθερά $\eta \in (0, 1)$. Έτσι, επιλέγοντας $\delta = (\eta\varepsilon)^{1+n/q}$, παίρνοντας υπόψη μας το γεγονός ότι $r = \exp(-(CKn/\delta)^q)$ και τον ορισμό της σταθεράς K στην (4.5.2), αν θέσουμε $a = \eta/(C\kappa)$, όπου κ είναι η απόλυτη σταθερά στο Θεώρημα 4.5.1, παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Κεφάλαιο 5

Σχόλια και παρατηρήσεις

5.1 Ανισότητα Littlewood-Paley-Stein για την ημιομάδα Poisson

Για κάθε $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$ θεωρούμε το μετασχηματισμό Fourier της f:

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-ix\cdot\xi}\, dx, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Από το θεώρημα Plancherel, για κάθε ομαλή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με συμπαγή φορέα έχουμε

$$\begin{aligned} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \right)^{1/2} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \\ &= \sqrt{n} \left(\fint_{S^{n-1}} \|\sigma \cdot \nabla f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \, d\sigma \right)^{1/2}. \end{aligned} \tag{5.1.1}$$

Επίσης, έχουμε

$$\widehat{P_t f}(\xi) = e^{-t|\xi|} \widehat{f}(\xi) \quad \text{και} \quad \widehat{H_t f}(\xi) = e^{-t|\xi|^2} \widehat{f}(\xi)$$

για κάθε $t \geqslant 0$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ και $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$.

1. Η ημιομάδα της θερμότητας. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση με συμπαγή φορέα και έστω $\gamma > 0$. Για κάθε $t > 0$ και $z \in \mathbb{R}^n$ θεωρούμε το μετασχηματισμό Fourier της συνάρτησης

$$x \mapsto f(x + tz) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2} f)(x + tz) = f(x + tz) - H_{\gamma t^2} f(x) - tz \cdot \nabla H_{\gamma t^2} f(x),$$

ο οποίος δίνεται από την

$$\xi \mapsto e^{itz\cdot\xi} \widehat{f}(\xi) - \left(e^{-\gamma t^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) + itz \cdot \xi e^{-\gamma t^2 |\xi|^2} \widehat{f}(\xi) \right) = \left(e^{itz\cdot\xi} - (1 + itz \cdot \xi) e^{-\gamma t^2 |\xi|^2} \right) \widehat{f}(\xi).$$

Από το θεώρημα Plancherel έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x + tz) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2} f)(x + tz)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{itz\cdot\xi} - (1 + itz \cdot \xi) e^{-\gamma t^2 |\xi|^2} \right|^2 \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi. \tag{5.1.2}$$

Για κάθε $\xi \in \mathbb{R}^n$ και $t > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\fint_{B_2^n} \left| e^{itz\cdot\xi} - (1 + itz\cdot\xi)e^{-\gamma t^2|\xi|^2} \right|^2 dz \\
&\quad = \fint_{B_2^n} \left| e^{it|\xi|z_1} - (1 + it|\xi|z_1)e^{-\gamma t^2|\xi|^2} \right|^2 dz \\
&\quad = \frac{|B_2^{n-1}|}{|B_2^n|} \int_{-1}^{1} \left| e^{it|\xi|u} - (1 + it|\xi|u)e^{-\gamma t^2|\xi|^2} \right|^2 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du.
\end{aligned}$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = t|\xi|$ και αντικαθιστώντας τις τιμές των $|B_2^{n-1}|$ και $|B_2^n|$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\int_0^\infty \fint_{B_2^n} \left| e^{itz\cdot\xi} - (1 + itz\cdot\xi)e^{-\gamma t^2|\xi|^2} \right|^2 dz\, \frac{dt}{t^3} \\
&\quad = \sqrt{\pi}\, \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} |\xi|^2 \int_0^\infty \int_{-1}^{1} \left| e^{isu} - (1+isu)e^{-\gamma s^2} \right|^2 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du\, \frac{ds}{s^3}.
\end{aligned} \tag{5.1.3}$$

Ορίζουμε

$$\begin{aligned}
h(n,\gamma) &:= n\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)} \int_0^\infty \int_{-1}^{1} \left| e^{isu} - (1+isu)e^{-\gamma s^2} \right|^2 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}\, du\, \frac{ds}{s^3} \\
&\asymp n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \int_0^\infty \left((\cos(su) - e^{-\gamma s^2})^2 + (\sin(su) - sue^{-\gamma s^2})^2 \right) \frac{(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}}{s^3}\, ds\, du.
\end{aligned} \tag{5.1.4}$$

Τότε, συνδυάζοντας τις (5.1.1), (5.1.2) και (5.1.3) παίρνουμε την ακόλουθη ταυτότητα:

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \fint_{x+tB_2^n} \frac{(f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2} f)(y))^2}{t^3}\, dy\, dt\, dx \right)^{1/2} \\
&\quad = \sqrt{\frac{h(n,\gamma)}{n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\xi|^2 \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2\, d\xi \right)^{1/2} \\
&\quad = \sqrt{h(n,\gamma)} \left(\fint_{S^{n-1}} \|\sigma \cdot \nabla f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2\, d\sigma \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.1.5}$$

Παρόλο που η (5.1.5) διατυπώνεται για συναρτήσεις με πραγματικές τιμές, η αντίστοιχη ταυτότητα ισχύει αυτομάτως για συναρτήσεις που παίρνουν τιμές σε χώρο Hilbert. Αρκεί να εφαρμόσουμε την (5.1.5) για καθεμία από τις συντεταγμένες ως προς κάποια ορθοκανονική βάση. Με άλλα λόγια, αν $\mathcal{H}$ είναι ένας χώρος Hilbert τότε για κάθε $n \in \mathbb{N}$, για κάθε $\gamma > 0$ και για κάθε ομαλή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{H}$ με συμπαγή φορέα, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \fint_{x+tB_2^n} \|f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(H_{\gamma t^2} f)(y)\|_{\mathcal{H}}^2\, dy\, \frac{dt}{t^3}\, dx \right)^{1/2} \\
&\quad = \sqrt{h(n,\gamma)} \left(\fint_{S^{n-1}} \|\sigma \cdot \nabla f\|_{L_2(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})}^2\, d\sigma \right)^{1/2}.
\end{aligned} \tag{5.1.6}$$

Το επόμενο λήμμα δίνει ένα ακριβές άνω φράγμα για την ποσότητα $h(n,\gamma)$.

Λήμμα 5.1.1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε $\gamma > 0$ έχουμε*

$$h(n,\gamma) \preceq \gamma n + \int_0^\infty v^2 e^{-v^2} \ln\left(2 + \frac{v^2+\gamma n}{v\sqrt{\gamma n}}\right) dv. \tag{5.1.7}$$

Απόδειξη. Θα εκτιμήσουμε χωριστά τα δύο ολοκληρώματα που αντιστοιχούν σε καθέναν από τους προσθετέους που εμφανίζονται στο δεξιό μέλος της (5.1.4). Αρχικά, από τη στοιχειώδη ανισότητα

$$|\cos a - e^{-b}| \leqslant |\cos a - 1| + |1 - e^{-b}| \asymp \min\{a^2, 1\} + \min\{b, 1\}$$

που ισχύει για κάθε $a, b \geqslant 0$, βλέπουμε ότι για κάθε $u > 0$ ισχύει

$$\int_0^\infty (\cos(su) - e^{-\gamma s^2}) \frac{ds}{s^3} \preceq u^4 \int_0^{\frac{1}{u}} s\, ds + \int_{\frac{1}{u}}^\infty \frac{ds}{s^3} + \gamma^2 \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}} s\, ds + \int_{\frac{1}{\sqrt{\gamma}}}^\infty \frac{ds}{s^3} \asymp u^2 + \gamma.$$

Συνεπώς,

$$n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \int_0^\infty \left(\cos(su) - e^{-\gamma s^2}\right)^2 \frac{(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}}{s^3} ds\, du \preceq n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 (u^2+\gamma) e^{-\frac{n-1}{2}u^2} du \asymp 1 + \gamma n. \tag{5.1.8}$$

Για κάθε $0 \leqslant a \leqslant 1$ και $b > 0$ έχουμε επίσης

$$|\sin a - a e^{-b}| \leqslant |\sin a - a| + a|1 - e^{-b}| \asymp a^2 + a\min\{1, b\},$$

απ΄ όπου βλέπουμε ότι για κάθε $0 < u \leqslant 1$ ισχύει

$$\begin{aligned}\int_0^{\frac{1}{u}} \left(\sin(su) - sue^{-\gamma s^2}\right)^2 \frac{ds}{s^3} &\preceq u^4 \int_0^{\frac{1}{u}} s\, ds + u^2 \int_0^{\frac{1}{u}} \frac{\min\{1, \gamma^2 s^4\}}{s} ds \\ &\asymp u^2 + \min\left\{\frac{\gamma^2}{u^2}, u^2\right\} + u^2 \ln\left(\max\left\{1, \frac{\sqrt{\gamma}}{u}\right\}\right) \\ &\asymp u^2 \ln\left(2 + \frac{\sqrt{\gamma}}{u}\right).\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $b \geqslant 2$, χρησιμοποιώντας τη στοιχειώδη ανισότητα

$$(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} \leqslant e^{-nu^2/4}$$

βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}&n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \int_0^{\frac{1}{u}} \left(\sin(su) - sue^{-\gamma s^2}\right)^2 \frac{(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}}{s^3} ds\, du \\ &\preceq n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 u^2 e^{-\frac{u^2 n}{4}} \ln\left(2 + \frac{\sqrt{\gamma}}{u}\right) du \\ &= 8 \int_0^{\frac{\sqrt{n}}{2}} v^2 e^{-v^2} \ln\left(2 + \frac{\sqrt{\gamma n}}{2v}\right) dv \\ &\preceq \int_0^\infty v^2 e^{-v^2} \ln\left(2 + \frac{\sqrt{\gamma n}}{2v}\right) dv.\end{aligned} \tag{5.1.9}$$

Στην περίπτωση $n = 1$ το αριστερό μέλος της (5.1.9) φράσσεται από μια απόλυτη σταθερά, άρα φράσσεται πάλι από ένα σταθερό πολλαπλάσιο του τελευταίου όρου της (5.1.9).

Με τον ίδιο τρόπο, παρατηρώντας ότι αν $a \geqslant 1$ και $b \geqslant 0$ τότε

$$|\sin a - ae^{-b}| \leqslant |\sin a| + ae^{-b} \leqslant 1 + ae^{-b},$$

βλέπουμε ότι για κάθε $0 < u \leqslant 1$ ισχύει

$$\begin{aligned}
\int_{\frac{1}{u}}^{\infty} \left(\sin(su) - sue^{-\gamma s^2}\right)^2 \frac{ds}{s^3} &\preceq \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} \frac{ds}{s^3} + u^2 \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} \frac{e^{-2\gamma s^2}}{s}\, ds \\
&\asymp u^2 + u^2 \int_{\frac{\sqrt{2\gamma}}{u}}^{\infty} \frac{e^{-t^2}}{t}\, dt \\
&\preceq u^2 + u^2 \int_{\frac{\sqrt{2\gamma}}{u}}^{\max\left\{\frac{\sqrt{2\gamma}}{u},1\right\}} \frac{dt}{t} + u^2 \int_1^{\infty} e^{-t^2} dt \\
&\preceq u^2 \ln\left(2 + \frac{u}{\sqrt{\gamma}}\right).
\end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας αυτή την ανισότητα ως προς u, για $n \geqslant 2$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
(5.1.10)\qquad & n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} \left(\sin(su) - sue^{-\gamma s^2}\right)^2 \frac{(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}}{s^3}\, ds\, du \\
&\preceq n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 u^2 e^{-\frac{u^2 n}{4}} \ln\left(2 + \frac{u}{\sqrt{\gamma}}\right) du \\
&= 8 \int_0^{\frac{\sqrt{n}}{2}} v^2 e^{-v^2} \ln\left(2 + \frac{2v}{\sqrt{\gamma n}}\right) dv \\
&\preceq \int_0^{\infty} v^2 e^{-v^2} \ln\left(2 + \frac{2v}{\sqrt{\gamma n}}\right) dv.
\end{aligned}$$

Όπως πριν, στην περίπτωση $n = 1$ το αριστερό μέλος της (5.1.10) φράσσεται πάλι από ένα σταθερό πολλαπλάσιο του τελευταίου όρου της (5.1.10).

Προσθέτοντας τις (5.1.9) και (5.1.10), και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\ln[(2+a)(2+1/a)] \asymp \ln(2 + (a^2+1)/a)$$

για κάθε $a > 0$, συμπεραίνουμε ότι

(5.1.11)

$$n^{\frac{3}{2}} \int_0^1 \int_0^{\infty} \left(\sin(su) - sue^{-\gamma s^2}\right)^2 \frac{(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}}}{s^3}\, ds\, du \preceq \int_0^{\infty} v^2 e^{-v^2} \ln\left(2 + \frac{v^2+\gamma n}{v\sqrt{\gamma n}}\right) dv.$$

Λόγω της (5.1.4), η (5.1.7) προκύπτει τώρα από τις (5.1.8) και (5.1.11). □

Στην ειδική περίπτωση $\gamma = 1/n$ παίρνουμε το εξής πόρισμα για την L_2-αφφινική προσέγγιση

Πόρισμα 5.1.2. *Έστω $\mathcal{H}$ ένας χώρος Hilbert. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε ομαλή συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathcal{H}$ με συμπαγή φορέα, έχουμε*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \fint_{x+tB_2^n} \left\| f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1 \left(H_{\frac{t^2}{n}} f \right)(y) \right\|_{\mathcal{H}}^2 dy \, \frac{dt}{t^3} \, dx \right)^{1/2} \preceq \left(\fint_{S^{n-1}} \|\sigma \cdot \nabla f\|_{L_2(\mathbb{R}^n;\mathcal{H})}^2 \, d\sigma \right)^{1/2}.$$

2. Η ημιομάδα Poisson. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ μια ομαλή συνάρτηση με συμπαγή φορέα και έστω $\gamma > 0$. Επαναλαμβάνοντας το επιχείρημα που μας έδωσε την (5.1.2), από το θεώρημα Plancherel έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |f(x+tz) - \mathrm{Taylor}_x^1(P_{\gamma t} f)(x+tz)|^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \left| e^{itz\cdot\xi} - (1 + itz\cdot\xi) e^{-\gamma t|\xi|} \right|^2 \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 \, d\xi.$$

Το επιχείρημα που μας έδωσε την ταυτότητα (5.1.5) τώρα μας δίνει

(5.1.12)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \fint_{x+tB_2^n} \frac{(f(y) - \mathrm{Taylor}_x^1(P_{\gamma t} f)(y))^2}{t^3} \, dy \, dt \, dz$$
$$= c_n \left(\int_0^\infty \int_{-1}^1 |e^{isu} - (1+isu)e^{-\gamma s}|^2 (1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} \, du \, \frac{ds}{s^3} \right) \fint_{S^{n-1}} \|\sigma \cdot \nabla f\|_{L_2(\mathbb{R}^n)}^2 \, d\sigma,$$

όπου

$$c_n = n\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}.$$

Όμως, για σταθερό $u \in (-1,1)$, καθώς το $s \to 0$ η υπό ολοκλήρωση ποσότητα στο πρώτο ολοκλήρωμα του δεξιού μέλους της (5.1.12) είναι ασυμπτωτικά ίση με $(1-u^2)^{\frac{n-1}{2}} \frac{\gamma^2}{s}$. Άρα, το πρώτο ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (5.1.12) αποκλίνει, το οποίο σημαίνει ότι το αριστερό μέλος της (5.1.12) απειρίζεται.

5.2 Γεωμετρικές εκτιμήσεις στην ισοτροπική περίπτωση

Σε αυτή την παράγραφο παρουσιάζουμε τις γνωστές εκτιμήσεις για το γινόμενο $I_q(X)M(X)$ συναρτήσει της διάστασης $n = \dim(X)$ και του q, υποθέτοντας ότι η Ευκλείδεια νόρμα επιλέγεται έτσι ώστε η μοναδιαία μπάλα του X να είναι στην ισοτροπική θέση. Υποθέτουμε δηλαδή ότι $|B_X| = 1$ και ότι υπάρχει σταθερά $L_X > 0$ τέτοια ώστε

$$\left(\int_{B_X} (x \cdot y)^2 \, dx \right)^{1/2} = L_X |y| \tag{5.2.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Είναι γνωστό ότι κάθε χώρος πεπερασμένης διάστασης με νόρμα επιδέχεται μοναδική Ευκλείδεια νόρμα ως προς την οποία η B_X είναι ισοτροπική. Από γνωστά αποτελέσματα της κυρτής γεωμετρικής ανάλυσης προκύπτει ότι τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant \sqrt{n}$, ισχύει

$$I_q(X)M(X) \preceq (n\log n)^{\frac{2}{5}}. \tag{5.2.2}$$

Παρατηρήστε αρχικά ότι, εφαρμόζοντας την (5.2.1) με το y να διατρέχει μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και προσθέτοντας τα τετράγωνα των σχέσεων που προκύπτουν, έχουμε

$$I_2(X) = \sqrt{n}L_X.$$

Παρατηρήστε επίσης ότι η ποσότητα $I_\infty(X) = \max_{x\in B_X} |x|$ είναι η περιγεγραμμένη ακτίνα της B_X και η ποσότητα $b(X) = \max_{x\in S^{n-1}} \|x\|_X$ είναι η αντίστροφη της εγγεγραμμένης ακτίνας της B_X. Έπεται ότι [25] (βλέπε επίσης [7])

$$I_\infty(X) \preceq \sqrt{n}I_2(X) \quad \text{και} \quad b(X) \preceq \frac{\sqrt{n}}{I_2(X)}. \tag{5.2.3}$$

Οι Γιαννόπουλος και E. Milman [23] έχουν αποδείξει ότι

$$M(X) \preceq \frac{(n\log n)^{\frac{2}{5}}}{I_2(X)}. \tag{5.2.4}$$

Αντικαθιστώντας την (5.2.4) και τη δεύτερη ανισότητα της (5.2.3) στην (4.4.5) (βλέπε παρακάτω) παίρνουμε ότι, για κάθε $p \geqslant 1$,

$$M_p(X) \preceq \left((n\log n)^{\frac{2}{5}} + \frac{\sqrt{pn}}{\sqrt{n+p}} \right) \frac{1}{I_2(X)}. \tag{5.2.5}$$

Από ένα θεώρημα του Παούρη [24] είναι γνωστό ότι, για κάθε $q \geqslant 2$,

$$I_q(X) \preceq \left(1 + \frac{q\sqrt{n}}{n+q} \right) I_2(X). \tag{5.2.6}$$

Συνδυάζοντας τις (5.2.5) και (5.2.6) βλέπουμε ότι για κάθε $p \geqslant 1$ και $q \geqslant 2$ ισχύει

$$I_q(X)M_p(X) \preceq \left(1 + \frac{q\sqrt{n}}{n+q} \right) \left((n\log n)^{\frac{2}{5}} + \frac{\sqrt{pn}}{\sqrt{n+p}} \right). \tag{5.2.7}$$

Θέτοντας $p = 1$ και υποθέτοντας ότι $q \leqslant \sqrt{n}$ παίρνουμε την (5.2.1).

Αξίζει τον κόπο να σημειώσουμε ότι αν ο X έχει type-2 τότε υπάρχει Ευκλείδεια νόρμα στον X ώστε

$$I_q(X)M(X) \preceq_q T_2(X),$$

όπου $T_2(X)$ είναι η σταθερά type-2 του X. Επίσης, απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$I_q(\ell_\infty^n)M(\ell_\infty^n) \asymp_q \sqrt{\log n} \quad \text{και} \quad I_q(\ell_1^n)M(\ell_1^n) \asymp_q 1.$$

Γενικότερα, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ ισχύει

$$I_q(\ell_p^n)M(\ell_p^n) \asymp_{p,q} 1.$$

Αν υποθέσουμε ότι ο X έχει unconditional βάση με σταθερά $C \geqslant 1$ τότε

$$I_q(X)M(X) \preceq_q C^2\sqrt{\log n}.$$

Με βάση αυτές τις παρατηρήσεις μπορεί κανείς να κάνει την ακόλουθη εικασία.

Εικασία 5.2.1. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $q \geqslant 1$, και για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X υπάρχει Ευκλείδεια νόρμα $|\cdot|$ στον X τέτοια ώστε

$$I_q(X)M(X) \preceq_q \sqrt{\log n}.$$

Η εικασία αυτή είναι πολύ ισχυρή. Μπορεί κανείς να δείξει ότι

$$I_q(X)M(X) \succeq L_X, \tag{5.2.8}$$

άρα μια θετική απάντηση στην Εικασία 5.2.1 θα έδινε άνω φράγμα της τάξης της $\sqrt{\log n}$ για την L_X. Το καλύτερο όμως γνωστό φράγμα (του Klartag [29]) για την L_X είναι

$$L_X \preceq \sqrt[4]{n}.$$

Στη συνέχεια αυτής της παραγράφου δίνουμε κάτω φράγματα για την ποσότητα $I_q(X)M(X)$. Ειδικότερα, αποδεικνύουμε την (5.2.8).

Λήμμα 5.2.2. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $q > 0$. Έστω $\|\cdot\|_U$ και $\|\cdot\|_V$ δύο νόρμες στον $\mathbb{R}^n$, με μοναδιαίες μπάλες τις B_U και B_V αντίστοιχα. Τότε,*

$$\left(\fint_{B_U} \|u\|_V^q \, du\right)^{1/q} \geqslant \left(\frac{n}{n+q}\right)^{1/q} \left(\frac{|B_U|}{|B_V|}\right)^{1/n}. \tag{5.2.9}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια Ευκλείδεια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{B_U} \left(\frac{\|u\|_U}{\|u\|_V}\right)^n du &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\frac{\|u\|_U}{\|u\|_V}\right)^n \mathbb{1}_{\{\|u\|_U \leqslant 1\}} \, du \\
&= |B_2^n| \fint_{S^{n-1}} \left(\frac{\|\sigma\|_U}{\|\sigma\|_V}\right)^n \int_0^{\frac{1}{\|\sigma\|_U}} nr^{n-1} \, dr \, d\sigma \\
&= |B_2^n| \fint_{S^{n-1}} \frac{d\sigma}{\|\sigma\|_V^n} = |B_2^n| \fint_{S^{n-1}} \int_0^{\frac{1}{\|\sigma\|_V}} nr^{n-1} \, dr \, d\sigma \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbb{1}_{\{\|v\|_V \leqslant 1\}} \, dv = |B_V|.
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Όμοια,

$$\begin{aligned}
\int_{B_U}\left(\frac{\|u\|_V}{\|u\|_U}\right)^q du &= |B_2^n| \fint_{S^{n-1}} \left(\frac{\|\sigma\|_V}{\|\sigma\|_U}\right)^q \int_0^{\frac{1}{\|\sigma\|_U}} nr^{n-1}\,dr\,d\sigma \\
&= |B_2^n| \fint_{S^{n-1}} \frac{\|\sigma\|_V^q}{\|\sigma\|_U^{q+n}}\,d\sigma \\
&= |B_2^n| \fint_{S^{n-1}} \|\sigma\|_V^q \int_0^{\frac{1}{\|\sigma\|_U}} (n+q) r^{n+q-1}\,dr\,d\sigma \\
&= \frac{n+q}{n}\int_{B_V} \|u\|_V^q\,du.
\end{aligned} \tag{5.2.11}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Hölder με εκθέτες $(n+q)/n$ και $(n+q)/q$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
|B_U| &= \int_{B_U}\left(\frac{\|u\|_V}{\|u\|_U}\right)^{\frac{nq}{n+q}}\left(\frac{\|u\|_U}{\|u\|_V}\right)^{\frac{nq}{n+q}} du \\
&\leqslant \left(\int_{B_U}\left(\frac{\|u\|_V}{\|u\|_U}\right)^q du\right)^{\frac{n}{n+q}}\left(\int_{B_U}\left(\frac{\|u\|_U}{\|u\|_V}\right)^n du\right)^{\frac{q}{n+q}} \\
&= \left(\frac{n+q}{n}\int_{B_U}\|u\|_V^q\,du\right)^{\frac{n}{n+q}} |B_V|^{\frac{q}{n+q}}.
\end{aligned} \tag{5.2.12}$$

Απλοποιώντας την (5.2.12) παίρνουμε την (5.2.9). □

Πόρισμα 5.2.3. *Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $p, q > 0$. Έστω $(X, \|\cdot\|_X)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα και έστω $|\cdot|$ μια Ευκλείδεια νόρμα στον X, μέσω της οποίας ταυτίζουμε τον X με τον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$I_q(X) M_p(X) \geqslant \left(\frac{n}{n+q}\right)^{1/q}. \tag{5.2.13}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.2.2 με $\|\cdot\|_U = |\cdot|$ και $\|\cdot\|_V = \|\cdot\|_X$, και ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(\frac{n}{n+p}\right)^{1/p}\left(\frac{|B_2^n|}{|B_X|}\right)^{1/n} &\leqslant \left(\fint_{B_2^n}\|x\|_X^p\,dx\right)^{1/p} \\
&= \left(\fint_{S^{n-1}}\int_0^1 nr^{n+p-1}\|\sigma\|_X^p\,dr\,d\sigma\right)^{1/p} \\
&= \left(\frac{n}{n+p}\right)^{1/p} M_p(X).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$M_p(X) \geqslant \left(\frac{|B_2^n|}{|B_X|}\right)^{1/n}. \tag{5.2.14}$$

Εφαρμόζοντας άλλη μια φορά το Λήμμα 5.2.2, αυτή τη φορά με $\|\cdot\|_U = \|\cdot\|_X$ και $\|\cdot\|_V = |\cdot|$, παίρνουμε

$$I_q(X) \geqslant \left(\frac{n}{n+q}\right)^{1/q} \left(\frac{|B_X|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}. \tag{5.2.15}$$

Πολλαπλασιάζοντας τις (5.2.14) και (5.2.15) παίρνουμε την (5.2.13). □

Σταθεροποιούμε $p, q \geqslant 2$. Είναι γνωστό ότι $|B_2^n|^{1/n} \asymp 1/\sqrt{n}$ και όταν η B_X είναι στην ισοτροπική θέση έχουμε $|B_X| = 1$. Τότε, η (5.2.14) μας δίνει

$$M_p(X) \succeq 1/\sqrt{n}.$$

Όμως,

$$I_q(X) \geqslant I_2(X) = L_X\sqrt{n}.$$

Έπεται ότι

$$I_q(X)M_p(X) \succeq L_X.$$

Βιβλιογραφία

[1] T. Hytönen, J. Van Neerven, M. Veraar, and L. Weis, *Analysis in Banach Spaces: Volume I: Martingales and Littlewood-Paley Theory*, Cham, Switzerland: Springer, 2016. Print.

[2] S. Lang, *Real and Functional Analysis*, Springer, 2013. Print.

[3] Y. Benyamini, and J. Lindenstrauss, *Geometric Nonlinear Functional Analysis*, Providence, RI: American Mathematical Society, 2000. Print.

[4] F. Albiac, and N. J Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Cham: Springer, 2016. Print.

[5] G. Pisier, *Probabilistic Methods in the Geometry of Banach Spaces*, Paris: Université Paris, 1985. Print.

[6] E. M. Stein, *Topics in Harmonic Analysis: Related to the Littlewood-Paley Theory*, Princeton, NJ: Princeton UP, 1985. Print.

[7] S. Brazitikos, A. Giannopoulos, P. Valettas, and B.-H. Vritsiou, *Geometry of isotropic convex bodies*, Mathematical Surveys and Monographs 196, Amer. Math. Society (2014).

[8] M. Ribe, *On uniformly homeomorphic normed spaces*, Arkiv För Matematik 14.1-2 (1976): 237-44.

[9] S. Heinrich, and P. Mankiewicz, *Applications of ultrapowers to the uniform and Lipschitz classification of Banach spaces*, Studia Math., 73(3):225-251, 1982.

[10] J. Bourgain, *Remarks on the extension of Lipschitz maps defined on discrete sets and uniform homeomorphisms*, Geometrical Aspects of Functional Analysis Lecture Notes in Mathematics (1987): 157-67.

[11] O. Giladi, A. Naor, and G. Schechtman, *Bourgain's discretization theorem*, Annales De La Faculté Des Sciences De Toulouse Mathématiques 21.4 (2012): 817-37.

[12] B. Begun, *A remark on almost extensions of Lipschitz functions*, Israel Journal of Mathematics 109.1 (1999): 151-55.

[13] F. John, *Extremum Problems with Inequalities as Subsidiary Conditions*, Traces and Emergence of Nonlinear Programming (2013): 197-215.

[14] A. Dvoretzky, *Some Results on Convex Bodies and Banach Spaces*, Jerusalem: Hebrew U, 1960. 123-60. Print.

[15] T. Hytönen, and A. Naor, *Heat flow and quantitative differentiation*, Preprint (arXiv:1608.01915).

[16] T. Hytönen, A. Naor, and S. Li, *Quantitative Affine Approximation for UMD Targets*, (arXiv:1510.00276).

[17] S. Bates, W. B. Johnson, J. Lindenstrauss, D. Preiss, and G. Schechtman, *Affine Approximation of Lipschitz Functions and Nonlinear Quotients*, Geometric And Functional Analysis 9.6 (1999): 1092-127.

[18] W. B. Johnson, B. Maurey, and G. Schechtman, *Non-linear Factorization of Linear Operators*, Bulletin of the London Mathematical Society 41.4 (2009): 663-68.

[19] S. Li, and A. Naor, *Discretization and Affine Approximation in High Dimensions*, Israel Journal of Mathematics 197.1 (2013): 107-29.

[20] G. Pisier, *Uniformly Convex Banach Space Valued Martingales*, Martingales in Banach Spaces : 382-427.

[21] T. Martínez, J. L. Torrea, and Q. Xu, *Vector-valued Littlewood-Paley-Stein Theory for Semigroups*, Advances in Mathematics 203.2 (2006): 430-757.

[22] G.-C. Rota, *An "alternierende Verfahren" for General Positive Operators*, Bulletin of the American Mathematical Society 68.2 (1962): 95-103.

[23] A. Giannopoulos, and E. Milman, *M-Estimates for Isotropic Convex Bodies and Their L_q-Centroid Bodies*, Lecture Notes in Mathematics Geometric Aspects of Functional Analysis (2014): 159-82.

[24] G. Paouris, *Concentration of mass on convex bodies*, GAFA Geometric And Functional Analysis 16.5 (2006): 1021-049.

[25] V. D. Milman, and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics Geometric Aspects of Functional Analysis : 64-104.

[26] A. E. Litvak, V. D. Milman, and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Mathematische Annalen 312.1 (1998): 95-124.

[27] J. Lindenstrauss and H. P. Rosenthal, *The L_p spaces*, Israel Journal of Mathematics 7.4 (1969): 325-49.

[28] M. Deza, and M. Laurent, *Geometry of Cuts and Metrics*, Heidelberg: Springer, 2010. Print.

[29] B. Klartag, *On Convex Perturbations with a Bounded Isotropic Constant*, GAFA Geometric And Functional Analysis 16.6 (2006): 1274-290.