ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ
Εθνικόν και Καποδιστριακόν Πανεπιστήμιον Αθηνών
ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837

ΕΘΝΙΚΟ ΚΑΙ ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟ
ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗ ΘΕΩΡΗΤΙΚΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

# ΕΡΓΟΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΔΡΑΣΕΩΝ ΤΟΠΙΚΑ ΣΥΜΠΑΓΩΝ ΟΜΑΔΩΝ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

Αλέξανδρος Βλάνδος

Ιούλιος 2021

# Summary

We study the ergodic theory of actions of locally compact groups on metric spaces. We introduce the notion of an invariant, under such an action, measure on the metric space, the notions of ergodicity and mixing for such actions, and provide examples of actions which are mixing but not mixing of higher orders. Next, we introduce the notion of amenability for locally compact groups and show that for every continuous action of a locally compact amenable group on a compact metric space, via homeomorphisms, there exists a probability measure which is invariant under the action of the group. This result generalizes the theorem of Krylov and Bogoliouboff for actions of $\mathbb{Z}$ or $\mathbb{N}$ and provides a characterization of amenability. We prove the mean ergodic theorem and pointwise ergodic theorems for amenable groups. Finally, we establish the ergodic decomposition of an invariant under a group action probability measure.

# Περιεχόμενα

# Κεφάλαιο 1

# Εισαγωγή

Ή εργοδική θεωρία που σχετίζεται με αφηρημένα μαθηματικά μοντέλα δυναμικών συστημάτων που εξελίσσονται στο χρόνο μελετά έναν επαναλαμβανόμενο μετασχηματισμό που διατηρεί το μέτρο (τη δράση του $\mathbb{N}$ ή του $\mathbb{Z}$) ή μια ροή (τη δράση του $\mathbb{R}$). Για διάφορα προβλήματα που προέρχονται από τη γεωμετρία, τη θεωρία αριθμών αλλά και τις απαρχές της εργοδικής θεωρίας στη στατιστική μηχανική, είναι χρήσιμο να μελετήσουμε δράσεις ομάδων που είναι πιο γενικές από τους ακεραίους ή τους πραγματικούς αριθμούς. Σε αυτή την εργασία μελετάμε συστήματα $(X, \mathcal{B}, \mu, T)$ που διατηρούν το μέτρο, στα οποία ο $T$ είναι η δράση μιας ομάδας $G$. Δηλαδή ο $T$ είναι ένας ομομορφισμός $T : G \to MPT(X, \mathcal{B}, \mu)$, όπου $MPT(X, \mathcal{B}, \mu)$ είναι η ομάδα των μετασχηματισμών του χώρου πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, \mu)$ που διατηρούν το μέτρο.

Πέρα από τις σημαντικές εφαρμογές αυτής της θεωρίας, ένα ενδιαφέρον χαρακτηριστικό της εργοδικής θεωρίας των δράσεων ομάδων είναι η αλληλεπίδραση ανάμεσα στις αλγεβρικές και τις αναλυτικές ιδιότητες της ομάδας $G$ από τη μια πλευρά και τις εργοδικές ιδιότητες των δράσεών της από την άλλη.

Μελετάμε την εργοδική θεωρία δράσεων τοπικά συμπαγών ομάδων σε μετρικούς χώρους. Παρουσιάζονται οι έννοιες του αναλλοίωτου ως προς μια τέτοια δραση μέτρου πιθανότητας στον μετρικό χώρο, οι έννοιες της εργοδικότητας και του mixing για δράσεις, δίνονται παραδείγματα mixing αλλά όχι mixing ανώτερης τάξης. Εισάγεται η έννοια της amenability για τοπικά συμπαγείς ομάδες και αποδεικνύεται ότι για κάθε συνεχή δράση μιας τοπικά συμπαγούς amenable ομάδας σε συμπαγή μετρικό χώρο, με ομοιομορφισμούς, υπάρχει ένα μέτρο πιθανότητας που είναι αναλλοίωτο ως προς την δράση της ομάδας. Το αποτέλεσμα αυτό αποτελεί γενίκευση του Θεωρήματος Krylov-Bogoliouboff για δράσεις της ομάδας $\mathbb{Z}$ ή γενικότερα της ημιομάδας $\mathbb{N}$ και αποτελει χαρακτηρισμό της amenability. Αποδεικνύονται το μέσο εργοδικό θεώρημα και κατά σημείο εργοδικά θεωρήματα για amenable ομάδες. Τέλος δίνεται η εργοδική ανάλυση ενός αναλλοίωτου ως προς την δράση μιας ομάδας μέτρου πιθανότητας.

## 1.1 Σύντομη περιγραφή της εργασίας

Στο Κεφάλαιο 2 εισάγουμε έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια της εργασίας: τη δεσμευμένη μέση τιμή, τα δεσμευμένα μέτρα και απεικονίσεις μεταξύ Borel χώρων πιθανότητας που διατηρούν το μέτρο. Δίνουμε επίσης τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος διανυσματικών συναρτήσεων.

Στο Κεφάλαιο 3 εισάγουμε την έννοια της $G$-δράσης. Έστω $G$ αριθμήσιμα συμπαγής μετρική ομάδα και $(X, d)$ ένας $\sigma$-συμπαγής μετρικός χώρος. Με τον όρο συνεχής $G$-δράση αναφερόμαστε σε έναν ομομορφισμό από την $G$ στην ομάδα των ομοιομορφισμών του $(X, d)$. Γράφουμε $x \mapsto g \cdot x$ για την δράση του $g \in G$. Ειδικότερα, $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ για κάθε $g, h \in G$ και $x \in X$. Μια δράση της $G$ στον $X$ λέγεται συνεχής αν η απεικόνιση $(g, x) \longmapsto gx$ είναι συνεχής.

Στη συνέχεια συζητάμε τις έννοιες της εργοδικότητας και της μίξης. Γράφουμε $g_n \to \infty$ όταν $n \to \infty$, αν για κάθε $K \subseteq G$ συμπαγές υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ να ισχύει $g_n \notin K$. Η δράση της $G$ λέγεται:

- εργοδική, αν για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με την ιδιότητα ότι $\mu(g^{-1}(A) \vartriangle A) = 0$ για κάθε $g \in G$, ισχύει ότι $\mu(A) \in \{0, 1\}$.

- ασθενώς mixing, αν η δράση $g \longmapsto g \times g$ είναι εργοδική στον χώρο $(X \times X, \mathcal{B} \times \mathcal{B}, \mu \times \mu)$.

- mixing, αν για κάθε $A_0, A_1 \in \mathcal{B}$ και $g_n \to \infty$ όταν $n \to \infty$, ισχύει
$$\mu(A_0 \cap g_n^{-1} A_1) \to \mu(A_0)\mu(A_1)$$
όταν $n \to \infty$.

- mixing σε $r$-το πλήθος σύνολα, αν για κάθε $A_0, \ldots, A_{r-1} \in \mathcal{B}$ και $g_{j,n} \to \infty$ με $g_{i,n} g_{j,n}^{-1} \to \infty$ για κάθε $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r-1$ και $n \to \infty$, έχουμε
$$\mu(A_0 \cap g_{1,n}^{-1} A_1 \cap \cdots \cap g_{r-1,n}^{-1} A_{r-1}) \to \mu(A_0) \cdots \mu(A_{r-1}).$$

- mixing όλων των τάξεων, αν είναι mixing σε $r$ σύνολα για κάθε $r \geq 1$.

- rigid, αν υπάρχει ακολουθία $\{g_n\}_n \subset G$ με $g_n \to \infty$ τέτοια ώστε
$$\mu(A_0 \cap g_n^{-1} A_1) \to \mu(A_0 \cap A_1)$$
για κάθε $A_0, A_1 \in \mathcal{B}$.

Μελετάμε αναλυτικά το παράδειγμα του Ledrappier που δείχνει ότι μια δράση μπορεί να είναι mixing αλλά όχι mixing όλων των τάξεων.

Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(X) = \{$μέτρα Borel πιθανότητας στον X$\}$ λέγεται αναλλοίωτο από την $G$ αν $g_*\mu = \mu$ για κάθε $g \in G$, δηλαδή $\mu(g^{-1}(A)) = \mu(A)$ για κάθε $g \in G$ και για κάθε $A \in \mathcal{B}$, όπου $\mathcal{B}$ η Borel $\sigma$-άλγεβρα του $X$. Γράφουμε $\mathcal{M}^G(X)$ για τα

$G$-αναλλοίωτα μέτρα στον $X$. Ο χώρος $\mathcal{M}^G(X)$ είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{M}(X)$ και αποδεικνύουμε ότι ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^G(X)$ είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{M}^G(X)$ αν και μόνο αν το $\mu$ είναι $G$-εργοδικό.

Στο Κεφάλαιο 4 εισάγουμε το φυσιολογικό μέτρο $m_G$ που ορίζεται στην Borel $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{B}_G$ μιας $\sigma$-τοπικά συμπαγούς μετρικής ομάδας $G$, το οποίο θα αντικαταστήσει το μέτρο απαρίθμησης στο $\mathbb{N}$ που χρησιμοποιούμε, για παράδειγμα, για να ορίσουμε εργοδικούς μέσους. Το φυσιολογικό μέτρο είναι το αριστερά αναλλοίωτο μέτρο Haar $m_G$ στην $G$, το οποίο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

- $m_G(gB) = m_G(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}_G$ και $g \in G$.
- $m_G(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq G$.
- $m_G(O) > 0$ για κάθε μη κενό ανοικτό $O \subseteq G$.

Αποδεικνύουμε ότι αν $G$ είναι μια $\sigma$-τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμη ομάδα τότε υπάρχει ένα αριστερό μέτρο Haar $m_G$ που έχει τις παραπάνω τρεις ιδιότητες. Αποδεικνύουμε επίσης ότι το μέτρο Haar $m_G$ μιας $\sigma$-τοπικά συμπαγούς μετρικοποιήσιμης ομάδας $G$ είναι μοναδικό αν αγνοήσουμε έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα. Ειδικότερα, κάθε συνεχής αυτομορφισμός ομάδων $\phi : G \to G$ ικανοποιεί την

$$\phi_* m_G = \mathrm{mod}(\phi) m_G$$

για κάποια σταθερά $\mathrm{mod}(\phi) > 0$.

Στο Κεφάλαιο 5 συζητάμε την amenability. Σύμφωνα με το θεώρημα Kryloff-Bogoliouboff, κάθε συνεχής $\mathbb{Z}$-δράση σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο έχει αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας. Μας ενδιαφέρει λοιπόν να περιγράψουμε εκείνες τις κλάσεις ομάδων που όλες οι συνεχείς δράσεις τους έχουν αναλλοίωτα μέτρα. Μια τέτοια κλάση ομάδων είναι οι amenable ομάδες. Έχουμε ήδη δώσει παραδείγματα ομάδων που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα, οπότε ο ορισμός της amenabiity είναι μη-τετριμμένος. Η amenability μπορεί να οριστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Για τους σκοπούς αυτής της εργασίας, ο ακόλουθος ορισμός είναι ο πιο εύχρηστος: Μια $\sigma$-τοπικά συμπαγής ομάδα $G$ λέγεται amenable αν για κάθε συμπαγές $K \subseteq G$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \subseteq G$ μετρήσιμο με το $\overline{F}$ συμπαγές ώστε το $KF$ να είναι μετρήσιμο και

$$m_G(F \triangle KF) < \varepsilon m_G(F).$$

όπου $m_G$ είναι ένα αριστερό μέτρο Haar για την $G$. Ένα σύνολο $F$ που ικανοποιεί την παραπάνω σχέση λέγεται $(K, \varepsilon)$-αναλλοίωτο. Μια ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συμπαγών υποσυνόλων της $G$ λέγεται ακολουθία Følner αν για κάθε $K$ συμπαγές και κάθε $\varepsilon > 0$ το $F_n$ είναι $(K, \varepsilon)$-αναλλοίωτο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο. Μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $\sigma$-τοπικά συμπαγή amenable ομάδα $G$ υπάρχει ακολουθία Følner.

Ένας διαφορετικός χαρακτηρισμός της amenability μπορεί να δοθεί μέσω της ύπαρξης αναλλοίωτων μέτρων πιθανότητας για συνεχείς δράσεις. Αυτός ο χαρακτηρισμός γενικεύει απευθείας το θεώρημα Kryloff-Bogiliouboff. Αποδεικνύουμε τη μία κατεύθυνση της ισοδυναμίας: αν μια τοπικά συμπαγής ομάδα $G$ είναι amenable, τότε κάθε συνεχής δράση της $G$, $G \to \mathrm{Homeo}(X,d)$ σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο $(X,d)$ έχει αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας. Οι αβελιανές ομάδες είναι amenable. Δείχνουμε ότι αν $G$ είναι μια αβελιανή τοπικά συμπαγής ομάδα τότε κάθε συνεχής δράση της $G$ στον συμπαγή μετρικό χώρο $(X,d)$ έχει αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας. Οι συμπαγείς ομάδες είναι επίσης amenable. Δίνουμε απευθείας απόδειξη του ότι αν η $G$ είναι συμπαγής τοπολογική ομάδα τότε κάθε συνεχής δράση της $G$ έχει αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας.

Οι ακολουθίες Følner μας επιτρέπουν να σχηματίσουμε εργοδικούς μέσους και μπορούμε να αποδείξουμε μέσα και κατά σημείο εργοδικά θεωρήματα αν κάνουμε κατάλληλες υποθέσεις για τις δράσεις amenable ομάδων που διατηρούν το μέτρο. Στο βασικό αποτέλεσμα αυτής του κεφαλαίου θεωρούμε το ολοκλήρωμα συναρτήσεων που ορίζονται σε μια ομάδα και παίρνουν τιμές στον χώρο Hilbert $L^2_\mu(X)$. Χρησιμοποιούμε επίσης την επαγόμενη unitary αναπαράσταση της $G$ που ορίζεται μέσω της

$$U_g(f)(x) = f(g^{-1}\cdot x)$$

για κάθε $x \in X$. Αφού έχουμε υποθέσει ότι κάθε στοιχείο της $G$ διατηρεί το μέτρο $\mu$ στη δράση του στον $X$, γνωρίζουμε ότι ο $U_g : L^2_\mu \to L^2_\mu$ είναι unitary. Επιπλέον, αν $g,h \in G$ τότε από τον ορισμό έχουμε $U_h(U_g(f))(x) = U_{hg}(f)(x)$, το οποίο αποδεικνύει ότι η $g \mapsto U_g$ για $g \in G$ ορίζει μια δράση της $G$ στον $L^2_\mu$. Αν $G$ είναι μια $\sigma$-συμπαγής amenable ομάδα με αριστερό μέτρο Haar $m_G$, η οποία δρα συνεχώς στον $(X,\mathcal{B},\mu)$, όπου $\mu$ ένα $G$-αναλλοίωτο Borel μέτρο πιθανότητας στον $X$ και αν $P_G$ είναι η ορθογώνια προβολή στον κλειστό υπόχωρο

$$I = \{f \in L^2_\mu(X) : U_g(f) = f \text{ για κάθε } g \in G\} \subseteq L^2_\mu(X),$$

αποδεικνύουμε ότι για κάθε ακολουθία Følner και $f \in L^2_\mu(X)$ ισχύει

$$\frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} U_{g^{-1}} f \, dm_G(g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P_G f$$

στον $L^2_\mu$. Συνεπώς, η δράση είναι εργοδική αν και μόνο αν

$$\frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} U_{g^{-1}} \, dm_G(g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, d\mu$$

για κάθε $f \in L^2_\mu(X)$.

Το θεώρημα αυτό έχει ως συνέπεια ένα μέσο εργοδικό θεώρημα στον $L^1$, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην κλασική θεωρία. Έστω $G$ μια τοπικά συμπαγής amenable ομάδα με αριστερό μέτρο Haar $m_G$ που δρα συνεχώς στον $(X,\mathcal{B},\mu)$, όπου $\mu$ $G$-αναλλοίωτο Borel μέτρο πιθανότητας. Τότε για κάθε ακολουθία Følner $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και για κάθε $f \in L^2_\mu(X)$ ισχύει

$$\frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} f \circ g \, dm_G(g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})$$

ως προς την $\|\cdot\|_1$ νόρμα, όπου $\mathcal{E}$ η $\sigma$-άλγεβρα των $G$-αναλλοίωτων συνόλων.

Στο Κεφάλαιο 6 εισάγουμε την έννοια της ροής. Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Ροή είναι μια οικογένεια $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ από μετρήσιμους μετασχηματισμούς του $(X, \mathcal{B}, \mu)$ που ικανοποιούν την ταυτότητα $T_s \circ T_t = T_{s+t}$ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ και με $T_0 = id_X$. Λέμε ότι η ροή διατηρεί το μέτρο αν η $T_t$ διατηρεί το μέτρο $\mu$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και ότι είναι μετρήσιμη αν η απεικόνιση $(x,t) \longmapsto T_t(x)$ είναι μετρήσιμη από τον $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ στον $(X, \mathcal{B})$. Παρόμοια, ημιροή είναι μια δράση της ημιομάδας $\mathbb{R}_{\geq 0}$ με τις αντίστοιχες ιδιότητες. Αποδεικνύουμε ότι αν $T$ είναι μια μετρήσιμη ημιροή που διατηρεί το μέτρο στον χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, \mu)$ τότε για κάθε $f \in L^1_\mu$ υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο μέτρου 1 στο οποίο

$$\frac{1}{s}\int_0^s f(T_s x)\, ds \underset{s\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})(x)$$

παντού και στον $L^1_\mu$, όπου $\mathcal{E} = \{B \in \mathcal{B} : \mu(B \vartriangle T_t^{-1}B) = 0 \text{ για κάθε } t \in \mathbb{R}\}$. Αποδεικνύουμε επίσης ότι αν $T$ είναι μια μετρήσιμη ροή που διατηρεί το μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{B}, \mu)$ τότε για κάθε $f \in L^1_\mu$ ισχύει

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\int_0^\varepsilon f(T_t(x))\, dt = f(x)$$

σχεδόν παντού.

Στη συνέχεια θεωρούμε μια τοπικά συμπαγή unimodular ομάδα $(G, d)$ με μετρική $d$ δεξιά αναλλοίωτη και με τις ακόλουθες ιδιότητες αύξησης:

(P) Για κάθε $r > 0$ η μπάλα $B_r^G = B_r^G(e)$ έχει συμπαγή κλειστή θήκη και $m_G(\overline{B_r^G} \setminus B_r^G) = 0$, όπου $m_G$ το μέτρο Haar της $G$.

(D) Η μετρική $d$ έχει την doubling property: υπάρχει $C_G > 0$ τέτοια ώστε $m_G(B_{3r}^G) \leq C_G m_G(B_r^G)$.

(F) Οι μπάλες σχηματίζουν ακολουθία Følner: για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ισχύει

$$\frac{m_G(B_{r+s}^G)}{m_G(B_r^G)} \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Αποδεικνύουμε το ακόλουθο μεγιστικό εργοδικό θεώρημα: Αν $G$ είναι μια unimodular τοπικά συμπαγής ομάδα με δεξιά αναλλοίωτη μετρική που ικανοποιεί τις ιδιότητες (P), (D) και (F) και αν η η $G$ δρα συνεχώς σε έναν τοπικά συμπαγή $\sigma$-συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$ που διατηρεί ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $X$, για κάθε $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ ορίζουμε τη μεγιστική συνάρτηση

$$f^*(x) = \sup_{r>0}\frac{1}{m_G(B_g^G)}\int_{B_r^G} f(gx)\, dm_G(g)$$

για $x \in X$, και για κάθε $\alpha > 0$ ορίζουμε $E_\alpha^f = \{x \in X : f^*(x) > \alpha\}$. Τότε,

$$\alpha\mu(E_\alpha^f) \leq C_G\|\phi\|_1.$$

Έπεται ότι αν

$$A_r f(x) = \frac{1}{m_G(B_r)} \int_{B_r} f(gx)\, dm_G(g)$$

τότε $A_r(f)(x) \underset{r\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})(x)$ $\mu$-σχεδόν παντού και στον $L^1_\mu$, όπου $\mathcal{E}$ η $\sigma$-άλγεβρα των $G$-αναλλοίωτων συνόλων.

Στόχος μας στο Κεφάλαιο 7 είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα εργοδικής διάσπασης για μια συνεχή δράση μιας $\sigma$-συμπαγούς μετρικής ομάδας που διατηρεί το μέτρο. Έστω $G$ μια $\sigma$-συμπαγής μετρική ομάδα που δρα συνεχώς σε έναν $\sigma$-συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$. Έστω $\mu$ ένα $G$-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας στον $X$, και έστω

$$\mathcal{E} = \{B \subseteq X : \text{ το } B \text{ είναι μετρήσιμο και } \mu(g \cdot B \triangle B) = 0 \text{ για κάθε } g \in G\}$$

η $\sigma$-άλγεβρα των $G$-αναλλοίωτων συνόλων. Τότε

$$\mu = \int \mu_x^{\mathcal{E}}\, d\mu(x)$$

είναι η εργοδική διάσπαση του $\mu$. Δηλαδή, για $\mu$-σχεδόν κάθε $x$, το δεσμευμένο μέτρο $\mu_x^{\mathcal{E}}$ είναι ένα $G$-αναλλοίωτο και εργοδικό μέτρο πιθανότητας στον $X$.

Όπως έχουμε δει, υπάρχουν συνεχείς δράσεις ομάδων σε συμπαγείς μετρικούς χώρους οι οποίες δεν έχουν αναλλοίωτα μέτρα πιθανότητας. Ένας τρόπος για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία είναι να περιορίσουμε την προσοχή μας στις δράσεις amenable ομάδων. Ένας άλλος τρόπος είναι να χαλαρώσουμε την απαίτηση του αυστηρά αναλλοίωτου για τα μέτρα πιθανότητας που θεωρούμε. Αντί να απαιτούμε το αναλλοίωτο για κάθε στοιχείο της ομάδας που δρα, μπορούμε να ζητήσουμε το αναλλοίωτο κατά μέσο όρο, με μια έννοια, και έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό. Έστω $G$ μια $\sigma$-συμπαγής μετρικοποιήσιμη ομάδα, εφοδιασμένη με ένα μέτρο πιθανότητας $\nu$. Υποθέτουμε ότι η $G$ δρα συνεχώς σε έναν $\sigma$-συμπαγή μετρικό χώρο $X$. Ένα μέτρο πιθανότητας $\mu \in \mathcal{M}(X)$ λέγεται $\nu$-στάσιμο αν

$$\mu = \int_G g_* \mu\, d\nu(g),$$

ή ισοδύναμα αν

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_G \int_X f(g \cdot x) d\mu(x)\, d\nu(g)$$

για κάθε $f \in C_c(X)$. Διαισθητικά, μπορούμε να σκεφτόμαστε την ιδιότητα του "στάσιμου" ως την ιδιότητα του "αναλλοίωτου" ως προς τον τυχαίο περίπατο στον $X$ που ορίζεται από το μέτρο $\nu$. Αυτός ο τυχαίος περίπατος ορίζεται ως εξής: Για δοθέν $x \in X$, επιλέγουμε τυχαία, ως προς το μέτρο $\nu$, ένα στοιχείο $g \in G$, και στη συνέχεια μετακινούμε το $x$ στη θέση $g \cdot x$. Αυτή η διασύνδεση μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε επιχειρήματα που χρησιμοποιούσαμε για έναν μόνο μετασχηματισμό για να μελετήσουμε γενικές δράσεις ομάδων. Αποδεικνύουμε ότι αν $G$ είναι μια $\sigma$-συμπαγής μετρικοποιήσιμη ομάδα, $\nu$ ένα μέτρο πιθανότητας στην $G$ και η $G$ δρα συνεχώς σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο $X$, τότε υπάρχει ένα $\nu$-στάσιμο μέτρο στον $X$.

# Κεφάλαιο 2

# Δεσμευμένα μέτρα και άλγεβρες

Σε αυτό το κεφάλαιο εισάγουμε έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν στη συνέχεια της εργασίας: τη δεσμευμένη μέση τιμή, τα δεσμευμένα μέτρα και απεικονίσεις μεταξύ Borel χώρων πιθανότητας που διατηρούν το μέτρο. Δίνουμε επίσης τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος διανυσματικών συναρτήσεων.

## 2.1 Δεσμευμένη μέση τιμή

**2.1.1 Θεώρημα.** *Έστω $(X,\mathcal{B},\mu)$ χώρος πιθανότητας και $\mathcal{A}\subseteq\mathcal{B}$ μια σ-υποάλγεβρα. Υπάρχει απεικόνιση*

$$\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A}) : L^1((X,\mathcal{B},\mu)) \to L^1(X,\mathcal{A},\mu)$$

*η οποία καλείται δεσμευμένη μέση τιμή και έχει τις εξής ιδιότητες:*

(1) *Για κάθε $f\in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$ η $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη μ-σ.π. και για κάθε $A\in\mathcal{A}$*
$$\int_A \mathbb{E}(f|A)\,d\mu = \int_A f\,d\mu.$$

(2) *Η απεικόνιση $f\mapsto\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ είναι γραμμικός τελεστής νόρμας 1. Επιπλέον, $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\geq 0$ μ-σ.π. για κάθε $f\in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$ με $f\geq 0$.*

(3) *Για κάθε $f\in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$ και $g\in L^\infty(X,\mathcal{A},\mu)$ έχουμε ότι $\mathbb{E}(gf|\mathcal{A}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ μ-σ.π.*

(4) *Αν $\mathcal{A}'\subseteq\mathcal{A}$ είναι μια σ-υποάλγεβρα, τότε $\mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{A})|\mathcal{A}') = \mathbb{E}(f|\mathcal{A}')$ μ-σ.π.*

(5) *Αν $f\in L^1(X,\mathcal{A},\mu)$, τότε $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = f$ μ-σ.π.*

(6) *Για κάθε $f\in L^1(X,\mathcal{B},\mu)$ ισχύει $|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})|\leq\mathbb{E}(|f||\mathcal{A})$ μ-σ.π.*

*Απόδειξη.* (1) **Ύπαρξη**

**Πρώτος τρόπος**: Έστω $f \geq 0$. Ορίζουμε $\mu_f(B) = \int_B f\,d\mu$ για κάθε $B \in \mathcal{B}$. Το $\mu_f$ είναι μέτρο με $\mu_f \ll \mu$. Άρα $\mu_f\big|_{\mathcal{A}} \ll \mu\big|_{\mathcal{A}}$, οπότε από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει $g \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ $\mu$-σ.π. ώστε $\mu_f(A) = \int_A g\,d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$, άρα

$$\int_A f\,d\mu = \int_A g\,d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Η γενική περίπτωση προκύπτει εύκολα.

**Δεύτερος τρόπος**: Έστω $V = L^2(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq H = L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Ο $V$ είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του $H$, αφού είναι πλήρης. Έστω $P : H \to V$ η ορθογώνια προβολή του $H$ στον $V$. Τότε $\int_A f\,d\mu = \int_A (Pf)\,d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ αν $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$. Έχουμε ότι $A_1 = \{x \in X : Pf(x) \geq 0\} \in \mathcal{A}$ και $A_2 = \{x \in X : Pf(x) < 0\} \in \mathcal{A}$, αφού $Pf \in V$. Άρα,

$$\begin{aligned}\|Pf\|_1 &= \int_X |Pf(x)|\,d\mu(x) = \int_{A_1} Pf(x)\,d\mu(x) + \int_{A_2} -Pf(x)\,d\mu(x)\\ &= \int_{A_1} f(x)\,d\mu(x) + \int_{A_2} -f(x)\,d\mu(x) \leq \int_{A_1} |f(x)|\,d\mu(x) + \int_{A_2} |f(x)|\,d\mu(x) = \|f\|_1.\end{aligned}$$

Αν η $f$ παίρνει μιγαδικές τιμές, τότε $\|Pf\|_1 \leq 2\|f\|_1$. Άρα $Pf \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $\int_A Pf\,d\mu = \int_A f\,d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$.

**Μοναδικότητα**: Έστω $g_1, g_2 \in L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$ τέτοιες ώστε $\int_A g_1\,d\mu = \int_A f\,d\mu = \int_A g_2\,d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Τότε θέτουμε

$$A = \{x \in X : g_1(x) < g_2(x)\} \in \mathcal{A}.$$

Έχουμε

$$\int_A g_1\,d\mu = \int_A g_2\,d\mu \Longleftrightarrow \int_A (g_2 - g_1)\,d\mu = 0$$

και αφού $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ με $A_n = \left\{x \in X : \frac{1}{n} \leq g_2(x) - g_1(x)\right\}$ τότε αν υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(A_{n_0}) > 0$ έχουμε

$$0 = \int_A (g_2 - g_1)\,d\mu \geq \int_{A_{n_0}} (g_2 - g_1)\,d\mu \geq \frac{1}{n}\mu(A_{n_0}) > 0,$$

άτοπο. Άρα πρέπει να έχουμε $\mu(A_n) = 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε $\mu(A) = 0$. Ομοίως $\mu(\{x \in X : g_1(x) > g_2(x)\}) = 0$. Άρα $g_1 = g_2$ $\mu$-σ.π.

(2) Η $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ είναι γραμμική από τη μοναδικότητα. Αν $f \geq 0, f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, θέτουμε

$$A = \{x \in X : \mathbb{E}(f|\mathcal{A}) < 0\}.$$

Τότε,

$$0 \leq \int_A f\,d\mu = \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{A})\,d\mu.$$

Αν $A = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, όπου $A_n = \{x \in X : \mathbb{E}(f|\mathcal{A}) \leq -\frac{1}{n}\}$ και $\mu(A) > 0$, τότε υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\mu(A_{n_0}) > 0$. Άρα

$$0 \leq \int_A f\, d\mu \leq -\frac{1}{n}\mu(A_{n_0}) < 0$$

άτοπο, άρα $\mu(A) = 0$, δηλαδή $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) \geq 0$.

**2.1.2 Σημείωση.** Η συνέχεια της $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$ αποδεικνύεται ως εξής: Θεωρούμε τα σύνολα

$$C_1 = \{x \in X : \mathbb{E}(f|\mathcal{A})(x) \geq 0\}$$

και

$$C_2 = \{x \in X : \mathbb{E}(f|\mathcal{A})(x) < 0\}$$

τα οποία ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Τότε

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 &= \int_X |\mathbb{E}(f|\mathcal{A})(x)|\, d\mu(x) = \int_{C_1} \mathbb{E}(f|\mathcal{A})(x)\, d\mu(x) + \int_{C_2} -\mathbb{E}(f|\mathcal{A})(x)\, d\mu(x)\\ &= \int_{C_1} f(x)\, d\mu(x) + \int_{C_2} -f(x)\, d\mu(x) \leq \int_{C_1} |f(x)|\, d\mu(x) + \int_{C_2} |f(x)|\, d\mu(x)\\ &= \|f\|_1.\end{aligned}$$

(3) Έστω $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ και $A \in \mathcal{A}$, $g = \chi_A, B \in \mathcal{A}$. Τότε

$$\begin{aligned}\int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{A})\, d\mu &= \int_B gf\, d\mu = \int_{B\cap A} f\, d\mu\\ &\overset{B\cap A\in\mathcal{A}}{=\!=\!=} \int_{B\cap A} \mathbb{E}(f|\mathcal{A})\, d\mu = \int_B g\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\, d\mu.\end{aligned}$$

Άρα $\mathbb{E}(\chi_A f|\mathcal{A}) = \chi_A\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ για κάθε $A \in \mathcal{A}$ $\mu$-σ.π. Τώρα αν $g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu) \subseteq L^1(X, \mathcal{A}, \mu)$, υπάρχουν $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} : X \to \mathbb{C}$ απλές $\mathcal{A}$-μετρήσιμες ώστε $s_n \underset{m\to\infty}{\longmapsto} g$. Θέτουμε

$$A = \{x \in X : |g(x)| \leq \|g\|_\infty\} \in \mathcal{A}.$$

Τότε $\mu(A^c) = 0$ και $s_n|_A \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g|_A$ με $g|_A$ φραγμένη. Οπότε $s_n|_A \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} g|_A$ ομοιόμορφα. Άρα

$$\begin{aligned}\|s_n\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) - g\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 &= \int_A |s_n(x) - g(x)||\mathbb{E}(f|\mathcal{A})(x)|\, d\mu(x)\\ &\leq \int_A \sup_{x\in X} |s_n(x) - g(x)||\mathbb{E}(f|\mathcal{A})|(x)\, d\mu(x)\\ &\leq \|g|_A - s_n|_A\|_{\sup}\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|g\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) - g\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 &= \int_X |g\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) - \mathbb{E}(gf|\mathcal{A})\| \, d\mu \\
&\leq \int_X |g\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) - s_n\mathbb{E}(f|\mathcal{A})| \, d\mu + \int_X |s_n\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) - \mathbb{E}(gf|\mathcal{A})| \, d\mu \\
&= \|s_n\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) - g\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 + \int_X |\mathbb{E}(s_n f|\mathcal{A}) - \mathbb{E}(gf|\mathcal{A})| \, d\mu \\
&= \|s_n\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) - g\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 + \int_X \mathbb{E}((s_n - g)f|\mathcal{A})| \, d\mu \\
&= \|s_n\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) - g\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 + \|\mathbb{E}((s_n - g)f|\mathcal{A})\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

λόγω της συνέχειας της $\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})$.

Άρα $g\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(gf|\mathcal{A})$ $\mu$-σ.π. για κάθε $g \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

(4) Έχουμε

$$\int_A \mathbb{E}(\mathbb{E}(f|\mathcal{A})|\mathcal{A}') \, d\mu = \int_A \mathbb{E}(f|\mathcal{A}) \, d\mu - \int_A f \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}'$. Άρα $A(\mathbb{E}(f|\mathcal{A})|\mathcal{A}') = \mathbb{E}(f|\mathcal{A}')$ $\mu$-σ.π.

(5) Άμεσο.

(6) Αν $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$, τότε $|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})| = g\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$, όπου $g = \frac{\overline{\mathbb{E}(f|\mathcal{A})}}{|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})|} \in L^\infty(X, \mathcal{A}, \mu)$ και $|g(x)| = 1$ για κάθε $x \in X$. Άρα $\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = g\mathbb{E}(f|\mathcal{A}) = \mathbb{E}(gf|\mathcal{A})$. Οπότε, για κάθε $A \in \mathcal{A}$,

$$\begin{aligned}
\int_A |\mathbb{E}(f|\mathcal{A})| \, d\mu &= \int_A \mathbb{E}(gf|\mathcal{A}) \, d\mu = \int_A gf \, d\mu \\
&\leq \int_A |gf| \, d\mu = \int_A |f| \, d\mu = \int_A \mathbb{E}(|f||\mathcal{A}) \, d\mu.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 \leq \|f\|_1$, άρα $\|\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})\| \leq 1$. Όμως

$$\|\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})\| = \sup\{\|\mathbb{E}(f|\mathcal{A})\|_1 : \|f\|_1 \leq 1\} \geq 1.$$

Άρα $\|\mathbb{E}(\cdot|\mathcal{A})\| = 1$. □

## 2.2 Δεσμευμένα μέτρα

Έστω $X$ ένα Borel υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου με τον περιορισμό της Borel $\sigma$-άλγεβρας $\mathcal{B}$ στο $X$. Τότε το ζεύγος $(X, \mathcal{B})$ λέγεται Borel χώρος.

Έστω $X$ ένα πυκνό Borel υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου $\overline{X}$, με ένα μέτρο πιθανότητας $\mu$ ορισμένο στον περιορισμό της Borel $\sigma$-άλγεβρας $\mathcal{B}$ στο $X$. Ο χώρος πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, \mu)$ λέγεται Borel χώρος πιθανότητας.

Για έναν συμπαγή μετρικό χώρο $X$, ο χώρος $\mathcal{M}(X)$ των Borel μέτρων πιθανότητας στο $X$ έχει κι αυτός τη δομή συμπαγούς μετρικού χώρου με την weak*-τοπολογία.

Ειδικότερα, μπορούμε να ορίσουμε την Borel $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{B}_{\mathcal{M}(X)}$ στον χώρο $\mathcal{M}(X)$ με τον συνήθη τρόπο. Αν $X$ είναι ένα Borel υποσύνολο ενός συμπαγούς μετρικού χώρου $X$ τότε ορίζουμε

$$\mathcal{M}(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(\overline{X}) : \mu(\overline{X} \setminus X) = 0\}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι το $\mathcal{M}(X)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{M}(\overline{X})$.

Ένα σύνολο λέγεται συν-μηδενικό αν είναι το συμπλήρωμα ενός μηδενικού συνόλου. Αν $\mathcal{C}$ και $\mathcal{C}'$ είναι δύο $\sigma$-άλγεβρες γράφουμε

$$\mathcal{C} \subseteq_\mu \mathcal{C}'$$

αν για κάθε $A \in \mathcal{C}$ υπάρχει $A' \in \mathcal{C}'$ τέτοιο ώστε $\mu(A \triangle A') = 0$. Γράφουμε επίσης

$$\mathcal{C} =_\mu \mathcal{C}'$$

αν $\mathcal{C} \subseteq_\mu \mathcal{C}'$ και $\mathcal{C}' \subseteq_\mu \mathcal{C}$.

Λέμε ότι μια $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{A}$ στο $X$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη αν υπάρχει αριθμήσιμο σύνολο $\{a_1, A_2, \ldots\}$ υποσυνόλων του $X$ με την ιδιότητα ότι $\mathcal{A} = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots\})$ είναι η μικρότερη $\sigma$-άλγεβρα που περιέχει τα σύνολα $A_1, A_2, \ldots$.

**2.2.1 Θεώρημα.** *Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ένας Borel χώρος πιθανότητας και $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ μια $\sigma$-άλγεβρα. Τότε υπάρχει $\mathcal{A}$-μετρήσιμο συν-μηδενικό σύνολο $X' \subseteq X$ και ένα σύστημα $\{\mu_x^{\mathcal{A}} : x \in X'\}$ μέτρων στο $X$, τα οποία ονομάζουμε δεσμευμένα μέτρα, με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(1) *Το $\mu_x^{\mathcal{A}}$ είναι μέτρο πιθανότητας στο $X$ με*

$$\mathbb{E}(f|\mathcal{A})(x) = \int f(y)\, d\mu_x^{\mathcal{A}}(y) \tag{2.2.1}$$

*σχεδόν παντού για κάθε $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Με άλλα λόγια, για κάθε συνάρτηση $f \in \mathcal{L}^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ έχουμε ότι το $\int f(y)\, d\mu_x^{\mathcal{A}}(y)$ υπάρχει για όλα τα $x$ σε ένα συν-μηδενικό σύνολο στην $\mathcal{A}$, ότι σε αυτό το σύνολο η*

$$x \mapsto \int f(y)\, d\mu_x^{\mathcal{A}}(y)$$

*εξαρτάται $\mathcal{A}$-μετρήσιμα από το $x$, και ότι*

$$\int_A \int f(y)\, d\mu_x^{\mathcal{A}}(y)\, d\mu(x) = \int_A f\, d\mu$$

*για κάθε $A \in \mathcal{A}$.*

(2) *Αν η $\mathcal{A}$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη, τότε $\mu_x^{\mathcal{A}}([x]_{\mathcal{A}}) = 1$ για κάθε $x \in X'$, όπου*

$$[x]_{\mathcal{A}} = \bigcap_{x \in A \in \mathcal{A}} A$$

*είναι το άτομο της $\mathcal{A}$ που περιέχει το $x$. Επιπλέον, αν $x, y \in X'$ και $[x]_{\mathcal{A}} = [y]_{\mathcal{A}}$ τότε $\mu_x^{\mathcal{A}} = \mu_y^{\mathcal{A}}$.*

(3) *Η ιδιότητα (1) προσδιορίζει μονοσήμαντα το $\mu_x^{\mathcal{A}}$ σχεδόν για κάθε $x \in X$. Μάλιστα, αν υποθέσουμε την ιδιότητα (1) για ένα πυκνό αριθμήσιμο σύνολο συναρτήσεων στον $C(\overline{X})$ τότε το $\mu_x^{\mathcal{A}}$ προσδιορίζεται μονοσήμαντα σχεδόν για κάθε $x \in X$.*

(4) *Αν $\mathcal{A}'$ είναι μια $\sigma$-άλγεβρα με $\mathcal{A} =_\mu \mathcal{A}'$ τότε $\mu_x^{\mathcal{A}} = \mu_x^{\mathcal{A}'}$ σχεδόν παντού.*

**2.2.2 Παρατηρήσεις.** (α) Αν $\mathcal{A} = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots\})$ είναι μια αριθμήσιμα παραγόμενη $\sigma$-άλγεβρα τότε το άτομο στο (2) δίνεται από την

$$[x]_{\mathcal{A}} = \bigcap_{x \in A_i} A_i \cap \bigcap_{x \notin A_i} (X \setminus A_i), \tag{2.2.2}$$

άρα είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμο. Μάλιστα το $[x]_{\mathcal{A}}$ είναι το μικρότερο στοιχείο της $\mathcal{A}$ το οποίο περιέχει το $x$.

(β) Αν $N \subseteq X$ είναι ένα μηδενικό σύνολο για το $\mu$, τότε $\mu_x^{\mathcal{A}}(N) = 0$ σχεδόν παντού. Με άλλα λόγια, κάθε $\mu$-μηδενικό σύνολο $N$ είναι επίσης $\mu_x^{\mathcal{A}}$-μηδενικό για $\mu$-σχεδόν κάθε $x$. Αυτό προκύπτει αν εφαρμόσουμε το (1) στη συνάρτηση $f = \chi_N$. Σε πολλές ενδιαφέρουσες περιπτώσεις, τα άτομα $[x]_{\mathcal{A}}$ είναι μηδενικά σύνολα ως προς το $\mu$, οπότε το $\mu_x^{\mathcal{A}}$ είναι ιδιάζον ως προς $\mu$.

(γ) Συχνά λέμε ότι τα δεσμευμένα μέτρα που κατασκευάζουμε στο Θεώρημα 2.2.1 δίνουν μια αποσύνθεση του μέτρου $\mu$.

(δ) Για τη μοναδικότητα στο (3), και όμοια για το (4), χρειάζεται μερικές φορές να μεταβούμε σε μικρότερα συν-μηδενικά σύνολα. Δηλαδή, αν $\mu_x^{\mathcal{A}}$ για $x \in X' \subseteq X$ και $\tilde{\mu}_x^{\mathcal{A}}$ για $\tilde{X}' \subseteq X$ είναι δύο συστήματα μετρων όπως στο (1), τότε ο ισχυρισμός είναι ότι υπάρχει ένα συν-μηδενικό υποσύνολο $X'' \subseteq X' \cap \tilde{X}'$ με $\mu_x^{\mathcal{A}} = \tilde{\mu}_x^{\mathcal{A}}$ για κάθε $x \in X''$.

(ε) Μιλάμε μόνο για άτομα αριθμήσιμα παραγόμενων $\sigma$-αλγεβρών. Ένας λόγος γι' αυτό είναι ότι για μια γενική $\sigma$-άλγεβρα η παράσταση που ορίζεται στο Θεώρημα 2.2.1 (2) από μια υπεραριθμήσιμη τομή μπορεί να μην είναι μετρήσιμη. Επιπλέον, ακόμα και σε αυτές τις περιπτώσεις που αυτή η παράσταση συμβαίνει να είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, ο ορισμός δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε τους ισχυρισμούς του θεωρήματος. Σημειώνουμε επίσης ότι δεν ισχύει ότι κάθε υπο-$\sigma$-άλγεβρα μιας αριθμήσιμα παραγόμενης $\sigma$-άλγεβρας είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Για παράδειγμα, η $\sigma$-άλγεβρα των μηδενικών συνόλων στο $\mathbb{T}$ ως προς το μέτρο Lebesgue δεν είναι αριθμήσιμα παραγόμενη.

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 2.2.1. Από την υπόθεση, ο $X$ περιέχεται σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο $\overline{X}$, ο οποίος είναι αυτομάτως διαχωρίσιμος. Αν αποδείξουμε τον ισχυρισμό του θεωρήματος για τον $\overline{X}$ τότε η Παρατήρηση 2.2.2 (β) δείχνει ότι θα έχουμε το ζητούμενο και για τον $X$. Μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι ο $X = \overline{X}$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Υποθέτουμε αρχικά ότι $\{\rho_x\}$ και $\{\nu_x\}$ είναι οικογένειες μέτρων που ορίζονται σχεδόν για κάθε $x$ και ικανοποιούν και οι δύο την (2.2.1) για ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ του $C(X)$. Τότε για κάθε $n \geq 1$ και σχεδόν κάθε $x$ έχουμε

$$\int f_n \, d\rho_x = \mathbb{E}(f_n|\mathcal{A}) = \int f_n \, d\nu_x. \tag{2.2.3}$$

Έπεται ότι υπάρχει ένα κοινό μηδενικό σύνολο $N$ με την ιδιότητα ότι η (2.2.3) ισχύει για κάθε $n \geq 1$ και $x \notin N$. Χρησιμοποιώντας ομοιόμορφη προσέγγιση και το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης βλέπουμε ότι

$$\int f \, d\rho_x = \int f \, d\nu_x$$

για κάθε $f \in C(X)$ και $x \notin N$. Άρα $\rho_x = \nu_x$ για κάθε $x \notin N$, το οποίο δείχνει ότι τα δεσμευμένα μέτρα, αν υπάρχουν, πρέπει να είναι μοναδικά όπως ισχυριζόμαστε στο (3).

Έστω τώρα ότι

$$\tilde{A} =_\mu \mathcal{A}$$

και έστω $\overline{\mathcal{A}}$ η μικρότερη $\sigma$-άλγεβρα που περιέχει τις $\mathcal{A}$ και $\mathcal{A}'$. Τότε για κάθε $f \in C(X)$, η $\mathbb{E}(f|\mathcal{A})$ (ομοίως, η $\mathbb{E}(f, \tilde{\mathcal{A}})$) ικανοποιεί τις χαρακτηριστικές ιδιότητες της $\mathbb{E}(f|\overline{\mathcal{A}})$, άρα είναι ίση με αυτήν σχεδόν παντού. Παρατηρώντας αυτό για ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $C(X)$ έχουμε (όπως στην απόδειξη της μοναδικότητας) ότι $\mu_x^{\mathcal{A}} = \mu_x^{\tilde{\mathcal{A}}}$ σχεδόν παντού, το οποίο μας δίνει το (4).

Για την ύπαρξη, έστω

$$\mathcal{F} = \{f_0 \equiv 1, f_1, f_2, \ldots\} \subseteq C(X)$$

ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{Q}$ ο οποίος είναι πυκνός στον $C(X)$. Για κάθε $i \geq 1$, επιλέγουμε μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση $g_i \in \mathcal{L}^1_\mu$ η οποία αναπαριστά την $\mathbb{E}(f_i|\mathcal{A})$. Ορίζουμε $g_0$ να είναι η σταθερή συνάρτηση 1. Τότε:

- $g_i(x) \geq 0$ σχεδόν παντού αν $f_i \geq 0$.
- $|g_i(x)| \leq \|f_i\|_\infty$ σχεδόν παντού.
- Αν $f_i = \alpha f_j + \beta f_k$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$, τότε $g_i(x) = \alpha g_j(x) + \beta g_k(x)$ σχεδόν για κάθε $x$.

Έστω $N \in \mathcal{A}$ η ένωση όλων των μηδενικών συνόλων στο συμπλήρωμα των οποίων ισχύουν οι παραπάνω ιδιότητες. Αφού παίρνουμε αριθμήσιμη ένωση, το $N$ είναι μηδενικό σύνολο.

Αν $x \notin N$, ορίζουμε $\Lambda_x(f_i)$ να είναι το $g_i(x)$. Τότε η $\Lambda_x$ είναι μια $\mathbb{Q}$-γραμμική απεικόνιση από τον $\mathcal{F}$ στο $\mathbb{R}$ με $\|\Lambda_x\| \leq 1$. Έπεται ότι η $\Lambda_x$ επεκτείνεται μονοσήμαντα σε ένα συνεχές θετικό γραμμικό συναρτησοειδές

$$\Lambda_x : C(X) \to \mathbb{R}.$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, υπάρχει μέτρο $\mu_x^{\mathcal{A}}$ στο $X$ που χαρακτηρίζεται από την ιδιότητα ότι

$$\Lambda_x(f) = \int f \, d\mu_x^{\mathcal{A}}$$

για κάθε $f \in C(X)$. Επιπλέον, $\Lambda_x(1) = 1$, άρα το $\mu_x^{\mathcal{A}}$ είναι μέτρο πιθανότητας.

Από την επιλογή του συνόλου $\mathcal{F}$, για κάθε $f \in C(X)$ υπάρχει ακολουθία $(f_{n_j})$ με $f_{n_j} \longrightarrow f$ ομοιόμορφα. Έχουμε ήδη δείξει (στο Θεώρημα 2.2.1(1)) ότι η

$$x \mapsto \int f_{n_j} \, d\mu_x^{\mathcal{A}}$$

είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη, και ότι

$$\int_A \int f_{n_j} \, d\mu_x^{\mathcal{A}} \, d\mu(x) = \int_A f_{n_j} \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε ότι η

$$\int f_{n_j} \, d\mu_x^{\mathcal{A}} \longrightarrow \int f \, d\mu_x^{\mathcal{A}} \tag{2.2.4}$$

δίνει μια $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση του $x$ και

$$\int_A \int f \, d\mu_x^{\mathcal{A}} \, d\mu(x) = \int_A f \, d\mu \tag{2.2.5}$$

για κάθε $A \in \mathcal{A}$. Για κάθε ανοικτό σύνολο $O$ υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία $(f_{n_j})$ με $f_{n_j} \to \chi_)$, άρα από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης οι (2.2.4) και (2.2.5) ισχύουν για την $\chi_O$. Έτσι παίρνουμε τις (2.2.4) και (2.2.5) για την δείκτρια συνάρτηση οποιουδήποτε κλειστού συνόλου $A \subseteq X$, παίρνοντας συμπληρώματα. Όμοια, αυτές οι σχέσεις επεκτείνονται σε κάθε $G_\delta$-σύνολο $G$ και κάθε $F_\sigma$-σύνολο $F$. Ορίζουμε

$$\mathcal{M} = \{B \in \mathcal{B} : \text{ η } f = \chi_B \text{ ικανοποιεί τις (2.2.4) και (2.2.5)}\}.$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, αν $B_1, B_2, \ldots \in \mathcal{M}$ με

$$B_1 \subseteq B_2 \subseteq \cdots,$$

τότε $\bigcup_{n\geq 1} B_n \in \mathcal{M}$ και αν $C_1, C_2, \ldots \in \mathcal{M}$ με

$$C_1 \supseteq C_2 \supseteq \cdots,$$

τότε $\bigcap_{n\geq 1} C_n \in \mathcal{M}$. Δηλαδή, η $\mathcal{M}$ είναι μονότονη κλάση. Ορίζουμε

$$\mathcal{R} = \left\{ \bigsqcup_{i=1}^{n} O_i \cap A_i : O_i \subseteq X \text{ ανοικτό και } A_i \subseteq X \text{ κλειστό} \right\}$$

για $n \in \mathbb{N}$. Η $\mathcal{R}$ είναι άλγεβρα, δηλαδή είναι κλειστή ως προς συμπληρώματα, πεπερασμένες τομές και πεπερασμένες ενώσεις. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι η $\sigma$-άλγεβρα που παράγεται από πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά και κλειστά σύνολα έχει την ιδιότητα ότι κάθε στοιχείο της $\mathcal{C}$ είναι ξένη ένωση ατόμων της διαμέρισης που παράγεται από αυτά τα ανοικτά και κλειστά σύνολα, τα οποία είναι όλα της μορφής $O \cap A$.

Αφού κάθε σύνολο $O \cap A$ είναι $G_\delta$-σύνολο και οι (2.2.4) και (2.2.5) είναι γραμμικές σχέσεις, έπεται ότι οι (2.2.4) και (2.2.5) ισχύουν επίσης για συναρτήσεις της μορφής

$$\chi_R = \sum_{i=1}^{n} \chi_{O_i \cap A_i}$$

για κάθε

$$R = \bigsqcup_{i=1}^{n} O_i \cap A_i \in \mathcal{R}.$$

Από το θεώρημα μονότονων κλάσεων έπεται ότι $\mathcal{B} = \sigma(\mathcal{R}) \subseteq \mathcal{M}$. Με άλλα λόγια, για κάθε Borel μετρήσιμο σύνολο $B \in \mathcal{B}$ η δείκτρια συνάρτηση $\chi_B$ ικανοποιεί τις (2.2.4) και (2.2.5). Θεωρώντας απλές συναρτήσεις και στη συνέχεια εφαρμόζοντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης συμπεραίνουμε ότι οι (2.2.4) και (2.2.5) ισχύουν για κάθε μη αρνητική $\mathcal{B}$-μετρήσιμη συνάρτηση $f$.

Τέλος, για κάθε $\mathcal{B}$-μετρήσιμη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f$ μπορούμε να γράψουμε

$$f = f^+ - f^-$$

όπου οι $f^+, f^-$ είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμες ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε από τη (2.2.5) έχουμε

$$\int f^+ \, d\mu_x^{\mathcal{A}}, \int f^- \, d\mu_x^{\mathcal{A}} < \infty$$

σχεδόν παντού. Ειδικότερα, η $f$ είναι $\mu_x^{\mathcal{A}}$-μετρήσιμη σχεδόν για κάθε $x$, και όπου είναι ολοκληρώσιμη, η $\int f \, d\mu_x^{\mathcal{A}}$ είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση του $x$. Τέλος ισχύει η (2.2.5), οπότε έχουμε αποδείξει το (1).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η $\mathcal{A} = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots\})$ είναι αριθμήσιμα παραγόμενη. Τότε

$$\mathbb{E}(\chi_{A_i} | \mathcal{A})(x) = \chi_{A_i}(x) = \mu_x^{\mathcal{A}}(A_i)$$

σχεδόν παντού, για κάθε $i \geq 1$. Ενώνοντας όλα τα μηδενικά σύνολα που προκύπτουν σε ένα μόνο μηδενικό σύνολο $N$, παίρνουμε $\mu_x^{\mathcal{A}}(A_i) = 1$ αν $x \in A_i \setminus N$ και $\mu_x^{\mathcal{A}}(A_i) = 0$ αν $x \in X \setminus (A_i \cup N)$.

Αφού το $\mu_x^{\mathcal{A}}$ είναι μέτρο, από την (2.2.2) έπεται ότι

$$\mu_x^{\mathcal{A}}([x]_{\mathcal{A}}) = 1$$

αν $x \notin N$. Θέτοντας $X' = X \setminus N$ έχουμε ότι η απεικόνιση

$$x \mapsto \int f \, d\mu_x^{\mathcal{A}}, \qquad x \in X'$$

είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμη για κάθε $f \in C(X)$. Άρα

$$\int f \, d\mu_x^{\mathcal{A}} = \int f \, d\mu_y^{\mathcal{A}}$$

αν $x, y \in X'$ και $[x]_{\mathcal{A}} = [y]_{\mathcal{A}}$, δηλαδή η $[x]_{\mathcal{A}} = [y]_{\mathcal{A}}$ συνεπάγεται την $\mu_x^{\mathcal{A}} = \mu_y^{\mathcal{A}}$. □

## 2.3 Άλγεβρες και Απεικονίσεις

Έστω $X$ και $Y$ Borel υποσύνολα των συμπαγών μετρικών χώρων $\overline{X}$ και $\overline{Y}$. Για μια μετρήσιμη συνάρτηση $\phi : X \to Y$ γράφουμε $\phi_* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ για την απεικόνιση που επάγεται στον χώρο των μέτρων πιθανότητας μέσω της

$$(\phi_*(\mu))(A) = \mu(\phi^{-1}(A))$$

για κάθε μετρήσιμο $A \subseteq Y$. Ισοδύναμα, για κάθε ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f : Y \to \mathbb{R}$ και κάθε $B \in \mathcal{B}(Y)$ ισχύει

$$\int_{\phi^{-1}(B)} f \circ \phi \, d\mu = \int_B f \, d\phi_* \mu.$$

Ειδικότερα, μια απεικόνιση $\phi : (X, \mathcal{B}, \mu) \to (Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ μεταξύ δύο Borel χώρων πιθανότητας διατηρεί το μέτρο αν και μόνο αν $\phi_* \mu = \nu$.

Κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $\phi : X \to Y$ όπως παραπάνω ορίζει μια $\sigma$-άλγεβρα

$$\mathcal{A} = \phi^{-1}(\mathcal{B}_Y)$$

στον $X$. Θα δούμε ότι όλες ουσιαστικά οι $\sigma$-άλγεβρες στον $X$ προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο.

**2.3.1 Λήμμα.** *Αν $\overline{X}$ είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $f \in \mathcal{L}^\infty(\overline{X})$ τότε η απεικόνιση*

$$\nu \mapsto \int f \, d\nu, \qquad \nu \in \mathcal{M}(X)$$

*είναι Borel μετρήσιμη. Ειδικότερα, για κάθε Borel υποσύνολο $X$ του $\overline{X}$ έχουμε ότι ο $\mathcal{M}(X)$ είναι Borel υποσύνολο του $\mathcal{M}(\overline{X})$. Επιπλέον, αν $\phi : X \to Y$ είναι μια Borel μετρήσιμη απεικόνιση μεταξύ Borel υποσυνόλων συμπαγών μετρικών χώρων τότε η επαγόμενη απεικόνιση $\phi_* : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(Y)$ είναι Borel μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* Θεωρώντας αρχικά συνεχείς συναρτήσεις, από τον ορισμό της weak*-τοπολογίας στον $\mathcal{M}(X)$, γνωρίζουμε ότι το $\int f \, d\nu$ εξαρτάται με συνεχή τρόπο από το $\nu$. Επιχειρηματολογώντας όπως στην προηγούμενη ενότητα βλέπουμε ότι το $\int f \, d\nu$ εξαρτάται με μετρήσιμο τρόπο από το $\nu$ για όλες τις δείκτριες συναρτήσεις ανοικτών συνόλων, άρα το ίδιο ισχύει για τις δείκτριες συναρτήσεις όλων των Borel μετρήσιμων συνόλων και τελικά για κάθε $f \in \mathcal{L}^\infty$. Από τον ορισμό και από αυτό το επιχείρημα έπεται ότι το

$$\mathcal{M}(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(\overline{X}) : \mu(\overline{X} \setminus X) = 0\}$$

είναι Borel μετρήσιμο. Τώρα, έστω $\phi : X \to Y$ μετρήσιμη συνάρτηση. Σταθεροποιούμε $r \in \mathbb{R}$, $\varepsilon > 0$ και $f \in C(\overline{Y})$. Τότε το

$$O_{f,r,\varepsilon} = \left\{\mu \in \mathcal{M}(Y) : \left| \int f \, d\mu - r \right| < \varepsilon \right\}$$

είναι ανοικτό σύνολο στο $\mathcal{M}(\overline{Y})$ και το

$$\phi_*^{-1} O_{f,r,\varepsilon} = \left\{\nu \in \mathcal{M}(X) : \left| \int f \circ \phi \, d\nu - r \right| < \varepsilon \right\}$$

είναι μετρήσιμο στο $\mathcal{M}(X)$. Αφού κάθε ανοικτό σύνολο στο $\mathcal{M}(\overline{Y})$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση πεπερασμένων τομών συνόλων της μορφής $O_{f,r,\varepsilon}$ με την $f$ μέσα από ένα πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο του $C(\overline{X})$, $r \in \mathbb{Q}$ και $\varepsilon \in \mathbb{Q}^+$, έπεται το λήμμα. □

**2.3.2 Πόρισμα.** *Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ ένας Borel χώρος πιθανότητας και έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$ μια αριθμήσιμα παραγόμενη σ-άλγεβρα. Τότε υπάρχει ένα σύνολο $X' = X \setminus N$, όπου $\mu(N) = 0$, στην $\mathcal{A}$, ένας συμπαγής μετρικός χώρος με την Borel σ-άλγεβρά του $(Y, \mathcal{B}_Y)$, και μια μετρήσιμη απεικόνιση $\phi : X' \to Y$ τέτοια ώστε*

$$\mathcal{A}\big|_{X'} = \phi^{-1}\mathcal{B}_Y.$$

*Επιπλέον,*

$$[x]_{\mathcal{A}} = \phi^{-1}(\phi(x))$$

*για κάθε $x \notin N$, και $\mu_x^{\mathcal{A}} = \nu_{\phi(x)}$ για κάποια μετρήσιμη απεικόνιση $y \mapsto \nu_y$ που ορίζεται σε ένα $\phi_*\mu$-συν-μηδενικό υποσύνολο του $Y$. Μπορούμε μάλιστα να πάρουμε $Y = \mathcal{M}(\overline{X})$, $\phi(x) = \mu_x^{\mathcal{A}}$ και $\nu_y = y$.*

*Απόδειξη.* Έστω ότι $\mathcal{A} = \sigma(\{A_1, A_2, \ldots\})$. Θεωρώντας τον $Y = \mathcal{M}(\overline{X})$ με την weak*-τοπολογία, οπότε ο $Y$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, και ορίζοντας $\phi(x) = \mu_x^{\mathcal{A}}$ μπορούμε να θέσουμε $\nu_y = y$, άρα παίρνουμε άμεσα ότι $\nu_{\phi(x)} = \mu_x^{\mathcal{A}}$. Έστω $X'$ ένα $\mu$-συν-μηδενικό σύνολο για το οποίο ισχύει το Θεώρημα 2.2.1. Ισχυριζόμαστε αρχικά ότι, μεγαλώνοντας ενδεχομένως το συμπλήρωμα του $X'$ με μηδενικά σύνολα απείρως συχνά, έχουμε $\mathcal{A} = \phi^{-1}\mathcal{B}_Y$. Από το Θεώρημα 2.2.1,

$$\chi_{A_i}(x) = \mu_x^{\mathcal{A}}(A_i) \tag{2.3.1}$$

σχεδόν για κάθε $x$, και μπορούμε να υποθέσουμε ότι αυτό ισχύει για κάθε $x \in X'$. Αφού $\{\nu : \nu(A_i) = 1\} \in \mathcal{B}_Y$, η (2.3.1) δείχνει ότι $A_i \cap X' \in \phi^{-1}\mathcal{B}_Y$, άρα $\mathcal{A}\big|_{X'} \subseteq \phi^{-1}\mathcal{B}_Y$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση $\phi^{-1}\mathcal{B}_Y \subseteq \mathcal{A}\big|_{X'}$, αρκεί να ελέγξουμε τον εγκλεισμό σε σύνολα της μορφής $O_{f,r,\varepsilon}$ αφού αυτά παράγουν την weak$^*$-τοπολογία με αριθμήσιμο τρόπο, και από το Θεώρημα 2.2.1 το σύνολο

$$\phi^{-1}\left(\left\{\nu : \Big|\int f\, d\mu - r\Big| < \varepsilon\right\}\right) = \left\{x : \Big|\int f\, d\mu_x^{\mathcal{A}} - r\Big| < \varepsilon\right\}$$

είναι $\mathcal{A}$-μετρήσιμο για κάθε $f \in C(X)$, $r \in \mathbb{R}$ και $\varepsilon > 0$. Άρα, $\mathcal{A}\big|_{X'} = \phi^{-1}\mathcal{B}$.

Αφού η $\phi : X' \to Y$ ικανοποιεί την $\mathcal{A}\big|_{X'} = \phi^{-1}\mathcal{B}_Y$, και η Borel $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{B}_Y$ του $Y$ διαχωρίζει σημεία, έπεται ότι $[x]_{\mathcal{A}} = \phi^{-1}(\phi(x))$. □

**2.3.3 Πόρισμα.** *Έστω $\phi : (X, \mathcal{B}_X, \mu) \to (Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ μια απεικόνιση μεταξύ Borel χώρων πιθανότητας που διατηρεί το μέτρο, και έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}_Y$ μια υπο-$\sigma$-άλγεβρα. Τότε*

$$\phi_*\mu_x^{\phi^{-1}\mathcal{A}} = \nu_{\phi(x)}^{\mathcal{A}}$$

*$\mu$-σχεδόν για κάθε $x \in X$.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε αρχικά ότι για κάθε $f \in L^1(Y, \mathcal{B}_Y, \nu)$ η $\mathbb{E}_\nu(f|\mathcal{A}) \circ \phi$ είναι $\phi^{-1}\mathcal{A}$-μετρήσιμη και

$$\begin{aligned}\int_{\phi^{-1}\mathcal{A}} \mathbb{E}_\nu(f|\mathcal{A}) \circ \phi\, d\mu &= \int_A \mathbb{E}_\nu(f|\mathcal{A})\, d\nu \\ &= \int_A f\, d\nu \\ &= \int_{\phi^{-1}A} f \circ \phi\, d\nu.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\mathbb{E}_\nu(f|\mathcal{A}) \circ \phi = \mathbb{E}_\mu(f \circ \phi|\phi^{-1}\mathcal{A}).$$

Άρα, για κάθε $f \in \mathcal{L}^\infty(Y, \mathcal{B}_Y)$,

$$\begin{aligned}\int f\, d\nu_{\phi(x)}^{\mathcal{A}} &= \mathbb{E}_\nu(f|\mathcal{A})(\phi(x)) \\ &= \mathbb{E}_\mu(f \circ \phi|\phi^{-1}\mathcal{A})(x) \\ &= \int f \circ \phi\, d\mu_x^{\phi^{-1}\mathcal{A}} \\ &= \int f\, d\Big(\phi_*\mu_x^{\phi^{-1}\mathcal{A}}\Big)\end{aligned}$$

$\mu$-σχεδόν παντού. Έπεται ότι $\nu_{\phi(x)}^{\mathcal{A}} = \phi_*\mu_x^{\phi^{-1}\mathcal{A}}$ $\mu$-σχεδόν παντού. □

## 2.4 Ολοκλήρωση διανυσματικών συναρτήσεων

**2.4.1 Ορισμός.** Έστω $V$ τοπολογικός διανυσματικός χώρος και έστω ότι ο $V^*$ διαχωρίζει τα σημεία του $V$. Έστω επίσης $f : V \to V$, όπου $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος μέτρου με την ιδιότητα $\lambda(f) : X \to \mathbb{C}, \lambda(f) \in L^1_\mu(X), \forall \lambda \in V^*$. Αν υπάρχει $u \in V$ για το οποίο $\lambda(u) = \int_X \lambda(f)(x)\, d\mu(x)$ για κάθε $\lambda \in V^*$, τότε ορίζουμε $u = \int_X f\, d\mu$.

**2.4.2 Παράδειγμα.** Αν ο $V$ είναι χώρος Hilbert, τότε παίρνουμε $\lambda_h(f) = \langle h, f\rangle : X \to \mathbb{C}$, όπου $\lambda_h \in V^*, h \in V$, και $\int_X \langle h, f(x)\rangle\, d\mu(x)$ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz υπάρχει μοναδικό $a \in V$ ώστε

$$\langle h, a\rangle = \int_X \langle h, f(x)\rangle\, d\mu(x).$$

Τότε $a = \int_X f\, d\mu$. Επίσης

$$\overline{\langle h, a\rangle} = \langle a, h\rangle = \overline{\int_X \langle h, f(x)\rangle\, d\mu(x)} = \int_X \langle f(x), h\rangle\, d\mu(x).$$

**2.4.3 Θεώρημα.** *Έστω $X$ τοπολογικός διανυσματικός χώρος τέτοιος ώστε ο $X^*$ να διαχωρίζει τα σημεία του $X$ και $\mu$ ένα Borel μέτρο πιθανότητας σε έναν συμπαγή χώρο Hausdorff $Q$. Αν η $f : Q \to X$ είναι συνεχής συνάρτηση και το $\overline{\mathrm{conv}(f(Q))}$ είναι συμπαγές στον $X$, τότε το $y = \int_Q f\, d\mu$ υπάρχει. Επιπλέον, $y \in \overline{\mathrm{conv}(f(Q))}$.*

*Απόδειξη.* Υποθέτουμε αρχικά ότι ο $X$ είναι πραγματικός διανυσματικός χώρος. Θέτουμε $H = \mathrm{conv}(f(Q))$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $y \in H$ ώστε $\Lambda(y) = \int_Q (\Lambda f)\, d\mu$ για κάθε $\Lambda \in X^*$.

Έστω $L = \{\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n\} \subseteq X^*, n \in \mathbb{N}$ και έστω

$$E_L = \left\{ y \in \overline{H} : \Lambda(y) = \int_Q (\Lambda f)\, d\mu, \forall \Lambda \in L \right\} = \bigcap_{i=1}^{n} \Lambda_i^{-1}\left(\left\{\int_Q (\Lambda_i f\, d\mu)\right\}\right) \bigcap \overline{H}.$$

Το $E_L$ είναι κλειστό λόγω της συνέχειας των $\Lambda_i \in X^*, i = 1, \ldots, n$ και αφού το $\overline{H}$ είναι συμπαγές συμπεραίνουμε ότι το $E_L$ είναι συμπαγές. Παρατηρούμε ότι αν $L \subseteq X^*$ έχουμε $E_L \neq \varnothing$, άρα $\bigcap_{L \text{ πεπερασμένο} \subseteq X^*} E_L \neq \varnothing$ από την ιδιότητα πεπερασμένων τομών, οπότε υπάρχει $y \in \bigcap_{L \text{ πεπερασμένο} \subseteq X^*} E_L$, δηλαδή υπάρχει $y \in \overline{H}$ ώστε $\Lambda(y) = \int_Q (\Lambda f)\, d\mu$ για κάθε $\Lambda \in X^*$.

*Μοναδικότητα:* Αν υπάρχει $y' \in \overline{H}$ τέτοιο ώστε $\Lambda(y') = \int_Q \Lambda(f)\, d\mu$ για κάθε $\Lambda \in X^*$, τότε $\Lambda(y) = \Lambda(y')$ για κάθε $\Lambda \in X^*$. Αν όμως $y \neq y'$, αφού ο $X^*$ διαχωρίζει τα σημεία του $X$, υπάρχει $\Lambda_1 \in X^*$ ώστε $\Lambda_1(y) \neq \Lambda_1(y')$, άτοπο.

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $E_L \neq \varnothing$ για κάθε $L$ πεπερασμένο $\subseteq X^*$. Θεωρούμε $L : (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_n) : X \to \mathbb{R}^n$ και θέτουμε $K = L(f(Q))$. Ορίζουμε

$$m_i = \int_Q (\Lambda_i(f))\, d\mu, \qquad 1 \leq i \leq n.$$

Το $K$ είναι συμπαγές. Θα δείξουμε ότι

$$m = (m_1, \dots, m_n) \in \mathrm{conv}(K).$$

Έστω $t = (t_1, \dots, t_n) \in \mathbb{R}^n \setminus \mathrm{conv}(K)$ και $u = (u_1, \dots, u_n) \in K$. Τότε $\{t\} \cap \mathrm{conv}(K) = \varnothing$ και έχουμε ότι το $\{t\}$ είναι κλειστό, το $\mathrm{conv}(K)$ συμπαγές, και τα δύο σύνολα είναι κυρτά. Από το διαχωριστικό θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $\Lambda \in X^*$ τέτοιο ώστε $\mathrm{Re}(\Lambda)(u) < \mathrm{Re}(\Lambda)(t)$ για κάθε $u \in K$. Άρα,

$$\sum_{i=1}^{n} c_i u_i < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$$

και $c_1, \dots, c_n \in \mathbb{R}$. Τότε

$$\sum_{i=1}^{n} c_i \Lambda_i f(q) < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i, q \in Q.$$

Ολοκληρώνοντας παίρνουμε

$$\sum_{i=1}^{n} c_i m_i < \sum_{i=1}^{n} c_i t_i$$

οπότε $m \neq t$, άτοπο, άρα $m \in \mathrm{conv}(K)$. Συνεπώς,

$$m = \lambda_1 L(f(q_1)) + \lambda_2 L(f(q_2)) + \cdots + \lambda_k L(f(q_k))$$

όπου $k \in \mathbb{N}, q_1, \dots, q_k \in Q, 0 \leq \lambda_1, \dots, \lambda_k \leq 1, \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$. Άρα

$$m = L(\lambda_1 f(q_1) + \cdots + \lambda_k f(q_k))$$

και θέτοντας $y = \lambda_1 f(q_1) + \cdots + \lambda_k f(q_k) \in \mathrm{conv}(f(Q)) = H \subseteq \overline{H}$ έχουμε $m = L(y)$. Άρα

$$m_i = \Lambda_i(y) = \int_Q \Lambda_i(f)\, d\mu, \qquad i = 1, \dots, n$$

δηλαδή, $y \in E_L$, άρα $E_L \neq \varnothing$ για κάθε $L \subseteq X^*$ πεπερασμένο. Με τον ίδιο τρόπο αποδεικνύεται το θεώρημα όταν ο $X$ είναι μιγαδικός διανυσματικός χώρος, εφαρμόζοντας τα παραπάνω για το πραγματικό και το φανταστικό μέρος του X. □

**2.4.4 Θεώρημα.** *Έστω $Q$ συμπαγής χώρος Hausdorff, $X$ χώρος Banach και $f : Q \to X$ συνεχής. Έστω επίσης $\mu$ Borel μέτρο στον $Q$. Τότε,*

$$\Big\| \int_Q f\, d\mu \Big\| \leq \int_Q \|f\|\, d\mu.$$

*Απόδειξη.* Θέτουμε $y = \int_Q f\, d\mu$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $\Lambda \in X^*$ ώστε $\Lambda(y) = \|y\|$ και $|\Lambda(x)| \leq \|x\|$ για κάθε $x \in X$. Δηλαδή,

$$|\Lambda(f(s))| \leq \|f(s)\|, \qquad s \in Q.$$

Από το Θεώρημα 2.4.3 έπεται ότι

$$\|y\| = \Lambda(y) = \int_Q (\Lambda f)\, d\mu \leq \int_Q \|f\|\, d\mu.$$

Δηλαδή,

$$\Big\| \int_Q f\, d\mu \Big\| \leq \int_Q \|f\|\, d\mu.$$

$\square$

**2.4.5 Θεώρημα.** *Έστω $V$ χώρος Frechet και $\mu$ ένα μέτρο Radon στον τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff $X$. Αν $F : X \to V$ είναι συνεχής συνάρτηση με συμπαγή φορέα, τότε υπάρχει το $\int_X F\, d\mu$. Επίσης, αν ο $V$ είναι χώρος Banach, τότε*

$$\Big\| \int_X F\, d\mu \Big\| \leq \int_X \|F\|\, d\mu.$$

*Απόδειξη.* Έστω $K = \overline{\{x \in X : F(x) \neq 0_V\}}$ ο φορέας της $F$. Το $K$ είναι συμπαγές, άρα το $\overline{\operatorname{conv}(F(K))}$ είναι συμπαγές. Από τα προηγούμενα θεωρήματα ορίζεται το

$$\psi_0 = \int_X F\, d\mu.$$

Αφού

$$\Lambda\left(\int_K F\, d\mu\right) = \int_K \Lambda(F)\, d\mu = \int_K \Lambda(F)\, d\mu + \int_{X\setminus K} \Lambda(F)\, d\mu = \int_X \Lambda(F)\, d\mu,$$

έχουμε επιπλέον

$$\Big\| \int_X F\, d\mu \Big\| = \Big\| \int_K F\, d\mu \Big\| \leq \int_K \|F\|\, d\mu = \int_X \|F\|\, d\mu.$$

$\square$

**2.4.6 Θεώρημα.** *Έστω $V$ χώρος Banach και $\mu$ μέτρο Radon στον τοπικά συμπαγή χώρο Hausdorff $X$. Αν $g \in L(\mu)$ και $H : V \to V$ φραγμένη και συνεχής, τότε ορίζεται το $\int_X gH\, d\mu$ και*

$$\Big\| \int_X gH\, d\mu \Big\| \leq \int_X \|gH\|\, d\mu \leq \sup_{x\in X} \|H(x)\| \cdot \|g\|_1.$$

*Απόδειξη.* Για κάθε $\phi \in V^*$ και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$|\phi \circ H(x)| \leq \|\phi\| \|H(x)\| \leq C\|\phi\|.$$

Άρα η $\phi$ είναι φραγμένη συνάρτηση. Επίσης,

$$\phi \circ (gH)(x) = \phi(g(x)H(x)) \xlongequal{\phi \text{ γραμμική}} g(x)\phi(H(x))$$

για κάθε $x \in X$. Συνεπώς,

$$\phi \circ (gH) = g(\phi \circ H).$$

Αφού το $\mu$ είναι μέτρο Radon, έχουμε $\overline{C_c(X)}^{\|\|_1} = L^1(\mu)$. Άρα υπάρχει $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C_c(X)$ ώστε $g_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} g$ στον $L^1(\mu)$. Τότε υπάρχουν τα ολοκληρώματα $\int_X g_n \, d\mu$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αφού ο $V$ είναι τοπολογικός διανυσματικός χώρος άρα η $g_n H$ είναι συνεχής για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε,

$$\begin{aligned}
&\Big\| \int_X g_n(x)H(x)\, d\mu(x) - \int_X g_m(x)H(x)\, d\mu(x) \Big\| \\
&\qquad \le \int_X \|(g_n(x) - g_m(x))H(x)\| \, d\mu(x) \\
&\qquad = \int_X |g_n(x) - g_m(x)| \|H(x)\| \, d\mu(x) \le C\|g_n - g_m\|_1 \to 0
\end{aligned}$$

όταν $n, m \in \mathbb{N}, n, m \to \infty$. Άρα η $\int_X g_n H \, d\mu$ είναι $\|\cdot\|$-Cauchy στον $V$. Αφού ο $V$ είναι πλήρης, υπάρχει μοναδικό $u = \lim_{n\to\infty} \int_X g_n H \, d\mu$. Τώρα, για κάθε $\phi \in V^*$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi(u) = \phi\left(\lim_{n\to\infty} \int_X g_n H \, d\mu\right) &\overset{\phi \text{ συνεχής}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \phi\left(\int_X g_n H \, d\mu\right) \\
&\overset{\text{ορισμός}}{=\!=\!=} \lim_{n\to\infty} \int_X \phi \circ (g_n H) \, d\mu = \int_X \phi \circ (gH) \, d\mu.
\end{aligned}$$

Επίσης

$$\begin{aligned}
\int_X |\phi \circ (g_n H) - \phi \circ (gH)| \, d\mu &= \int_X |\phi \circ (g_n H - gH)| \, d\mu \\
&= \int_X |g_n - g| |\phi \circ H| \, d\mu \le \|\phi\| C \|g_n - g\|_1 \to 0,
\end{aligned}$$

οπότε υπάρχει μοναδικό $u = \int_X gH \, d\mu$. Έχουμε

$$\Big| \int_X |g_n(x)| \, \|H(x)\| \, d\mu(x) - \int_X |g(x)| \, \|H(x)\| \, d\mu(x) \Big| \le \|g_n - g\|_1 \underset{n\infty}{\longrightarrow} 0$$

και

$$\Big| \int_X (\|g_n H\| - \|gH\|) \, d\mu \Big| = \Big| \int_X |g_n - g| \|H\| \, d\mu \Big| \le C\|g_n - g\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Τώρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\Big\| \int_X g_n H \, d\mu \Big\| \le \int_X \|g_n H\| \, d\mu = \int_X |g_n(x)| \, \|H(x)\| \, d\mu(x),$$

άρα αφήνοντας το $n \to \infty$ έχουμε ότι

$$\Big\| \int_X gH \, d\mu \Big\| \le \int_X \|gH\| \, d\mu = \int_X |g(x)| \, \|H(x)\| \, d\mu(x) \le \sup_{x\in X} \|H(x)\| \cdot \|g\|_1.$$

$\square$

# Κεφάλαιο 3

# Εργοδικότητα και μίξη

## 3.1 Εργοδικότητα και μίξη

Έστω $G$ αριθμήσιμα συμπαγής μετρική ομάδα και $(X, d)$ ένας $\sigma$-συμπαγής μετρικός χώρος. Με τον όρο συνεχής $G$-δράση αναφερόμαστε σε έναν ομομορφισμό από την $G$ στην ομάδα των ομοιομορφισμών του $(X, d)$. Γράφουμε $x \mapsto g \cdot x$ για την δράση του $g \in G$. Ειδικότερα, $g \cdot (h \cdot x) = (gh) \cdot x$ για κάθε $g, h \in G$ και $x \in X$.

**3.1.1 Ορισμός.** Μια δράση της $G$ στον $X$ λέγεται συνεχής αν η απεικόνιση $(g, x) \longmapsto gx$ είναι συνεχής. Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(X) = \{$μέτρα Borel πιθανότητας στον X$\}$ λέγεται αναλλοίωτο από την $G$ αν $g_*\mu = \mu$ για κάθε $g \in G$, δηλαδή $\mu(g^{-1}(A)) = \mu(A)$ για κάθε $g \in G$ και για κάθε $A \in \mathcal{B}$, όπου $\mathcal{B}$ η Borel $\sigma$-άλγεβρα του $X$. Γράφουμε $\mathcal{M}^G(X)$ για τα $G$-αναλλοίωτα μέτρα στον $X$.

Κατ' αρχήν δεν είναι σαφές ότι τέτοια αναλλοίωτα μέτρα υπάρχουν πάντοτε στο πλαίσιο που συζητάμε. Το παράδειγμα που ακολουθεί δείχνει ότι υπάρχουν ομάδες που έχουν συνεχείς δράσεις για τις οποίες δεν υπάρχουν αναλλοίωτα μέτρα. Όπως θα δούμε παρακάτω, υπάρχουν συνθήκες για την ομάδα $G$, όπως η ιδιότητα της amenability, που εξασφαλίζουν την ύπαρξη αναλλοίωτου μέτρου για κάθε συνεχή δράση της $G$, Υπάρχουν επίσης ομάδες που δεν είναι amenable αλλά έχουν μη τετριμμένες δράσεις με αναλλοίωτα μέτρα. Αυτό που ισχύει πάντα είναι ότι αν για κάποια δράση υπάρχει αναλλοίωτο μέτρο τότε υπάρχει και αναλλοίωτο εργοδικό μέτρο πιθανότητας. Θα αποδείξουμε αυτό το αποτέλεσμα στο τελευταίο κεφάλαιο της εργασίας, αποδεικνύοντας την εργοδική διάσπαση για δράσεις ομάδων.

**3.1.2 Παράδειγμα.** Έστω $X = \{z \in \mathbb{C} : |z - i| = 1\}$ και $T : X \to X$ με

$$T(z) = \begin{cases} 2i & \text{αν } z = 2i \\ \pi^{-1}(\pi(z)/2) & \text{αν } z \neq 2i \end{cases},$$

όπου $\pi(x, y) = (-x/(y - 2), 0)$ για $(x, y) \neq (0, 2)$. Η $T$ είναι μετρήσιμη ως συνεχής συνάρτηση. Η $T$ είναι συνεχής γιατί ο τύπος της σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι ο εξής:

$$T(x,y) = \begin{cases} (0,2) & \text{αν } (x,y)=(0,2) \\ \left(-\frac{4(y-2)x}{4(y-2)^2+x^2}, -\frac{8(y-2)^2}{(4(y-2)^2)+x^2}+2\right) & \text{αλλιώς} \end{cases}.$$

Ισχύει ότι $\pi(T^n(z)) = \pi(z)/2^n \to (0,0)$ όταν $n \to \infty$, άρα $T^n(z) \to (0,0)$, για κάθε $z \in X \setminus \{(0,2)\}$ και η $(\pi(T^n(z)))_{n\in\mathbb{N}}$ (αν την δούμε στο $\mathbb{R}$) είναι φθίνουσα αν $\pi(z) > 0$ και αύξουσα αν $\pi(z) < 0$.

Παρατηρούμε ότι για κάθε $p \in [0,1]$ ισχύει $p\delta_{2i} + (1-p)\delta_0 \in \mathcal{M}_T(X)$. Θα δείξουμε ότι $\mathcal{M}_T(X) = \{p\delta_{2i} + (1-p)\delta_0\}$. Έστω $\mu \in \mathcal{M}_T(X)$. Είδαμε ότι $T^n(z) \to (0,0)$ όταν $n \to \infty$. Έπεται ότι $T^n(X \setminus \{(0,2)\}) \to (0,0)$, οπότε

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} T^n(X \setminus \{(0,2)\}) = (0,0).$$

Όμως, $\mu(X \setminus \{(0,2)\}) = \mu(T^n(X \setminus \{(0,2)\}))$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, αφού $T_*\mu = \mu$. Άρα

$$\mu(X \setminus \{(0,2)\}) = \lim_{n\to\infty} \mu(T^n(X \setminus \{(0,2)\})) = \mu(\{(0,0)\}).$$

Διακρίνουμε περιπτώσεις:

- Αν $\mu(\{(0,0)\}) = 0$, τότε

$$\begin{aligned} 1 = \mu(X) &= \mu((X \setminus \{(0,2)\}) \cup \{(0,2)\}) = \mu(X \setminus \{(0,2)\}) + \mu(\{(0,2)\}) \\ &= \mu(\{(0,0)\}) + \mu(\{(0,2)\}) = \mu(\{(0,2)\}). \end{aligned}$$

  Άρα, για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ με $(0,2) \in A$ έχουμε $\mu(A) = 1$, οπότε $\mu = \delta_{2i}$. Τέλος, για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ με $(0,2) \notin A$, έχουμε $A \subseteq X \setminus \{(0,2)\}$ και άρα $\mu(A) = 0$.

- Αν $\mu(\{(0,0)\}) = 1$, τότε $\mu(\{(0,2)\}) = 0$ και τότε για κάθε $A \in \mathcal{B}(X)$ με $(0,0) \in A$ ισχύει $\mu(A) = 1$ και αν $(0,0) \notin A$ τότε $A \subseteq X \setminus \{(0,0)\}$. Άρα, $\mu(A) = 0$ και $\mu = \delta_0$.

- Αν $1 > \mu(\{(0,0)\}) > 0$, τότε $1 > \mu(\{(0,2)\}) > 0$, οπότε θέτοντας $p = \mu(\{(0,0)\})$, έχουμε ότι αν $(0,0) \in A, (0,2) \notin A$ τότε $\{(0,0)\} \subseteq A \subseteq X \setminus \{(0,2)\}$, δηλαδή

$$\mu(\{(0,0)\}) \leq \mu(A) \leq \mu(X \setminus \{(0,2)\}) = \mu(\{(0,0)\}).$$

  Άρα, $\mu(A) = \mu(\{(0,0)\}) = p$. Αν $(0,0) \notin A, (0,2) \in A$, τότε $\{(0,2)\} \subseteq A \subseteq X \setminus \{(0,0)\}$ και

$$\mu(\{(0,2)\}) \leq \mu(A) \leq \mu(\{(0,2)\}).$$

  Συνεπώς, $\mu(A) = \mu(\{(0,2)\}) = 1 - p$. Αν $(0,0) \notin A$ και $(0,2) \notin A$, τότε $A \subseteq X \setminus (\{(0.2)\}, \{(0,0)\})$. Άρα, $\mu(A) = 0$.

Συνεπώς, $\mu = p\delta_{2i} + (1-p)\delta_0$. Τώρα παίρνουμε την ομάδα $G = (\langle T, R_a\rangle, \circ)$, όπου $R_a$ είναι η άρρητη στροφή στον κύκλο κατά $a \notin \mathbb{Q}$. Αφού $M^{R_a}(S^1) = \{\lambda\}$, όπου $\lambda$ το μέτρο Lebesgue, έχουμε ότι αν το $\mu$ είναι $G$-αναλλοίωτο τότε $\mu(g^{-1}(A)) = \mu(A)$ για κάθε $g \in G$ και κάθε $A \in \mathcal{B}$. Άρα $\mu(R_a^{-1}(A)) = \mu(A)$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$. Τότε $\mu = \lambda$. Οπότε, $\lambda = p\delta_{2i} + (1-p)\delta_0$ για κάποιο $p \in [0,1]$, $p \neq 1$. Άρα, $0 = \lambda(\{(0,0)\}) = 1-p > 0$. Αν $p = 1$, τότε $0 = \lambda(\{(0,2)\}) = \delta_{2i}(\{(0,2)\}) = 1$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, η συνεχής δράση της $G$ δεν έχει $G$-αναλλοίωτα μέτρα.

**3.1.3 Ορισμός.** Έστω $G$ τοπικά συμπαγής ομάδα. Γράφουμε $g_n \to \infty$ όταν $n \to \infty$, αν για κάθε $K \subseteq G$ συμπαγές υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geq N$ να ισχύει $g_n \notin K$. Η δράση της $G$ λέγεται:

- εργοδική, αν για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με την ιδιότητα ότι $\mu(g^{-1}(A) \vartriangle A) = 0$ για κάθε $g \in G$, ισχύει ότι $\mu(A) \in \{0,1\}$.
- ασθενώς mixing, αν η δράση $g \longmapsto g \times g$ είναι εργοδική στον χώρο $(X \times X, \mathcal{B} \times \mathcal{B}, \mu \times \mu)$.
- mixing, αν για κάθε $A_0, A_1 \in \mathcal{B}$ και $g_n \to \infty$ όταν $n \to \infty$, ισχύει

$$\mu(A_0 \cap g_n^{-1}A_1) \to \mu(A_0)\mu(A_1)$$

  όταν $n \to \infty$.
- mixing σε $r$-το πλήθος σύνολα, αν για κάθε $A_0, \ldots, A_{r-1} \in \mathcal{B}$ και $g_{j,n} \to \infty$ με $g_{i,n}g_{j,n}^{-1} \to \infty$ για κάθε $i \neq j$, $i, j = 1, 2, \ldots, r-1$ και $n \to \infty$, έχουμε

$$\mu(A_0 \cap g_{1,n}^{-1}A_1 \cap \cdots \cap g_{r-1,n}^{-1}A_{r-1}) \to \mu(A_0) \cdots \mu(A_{r-1}).$$

- mixing όλων των τάξεων, αν είναι mixing σε $r$ σύνολα για κάθε $r \geq 1$.
- rigid, αν υπάρχει ακολουθία $\{g_n\}_n \subset G$ με $g_n \to \infty$ τέτοια ώστε

$$\mu(A_0 \cap g_n^{-1}A_1) \to \mu(A_0 \cap A_1)$$

  για κάθε $A_0, A_1 \in \mathcal{B}$.

**3.1.4 Θεώρημα.** *Έστω $G$ σ-τοπικά συμπαγής μετρική ομάδα που δρα με συνεχή τρόπο στον σ-τοπικά συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$. Τότε ο χώρος $\mathcal{M}^G(X)$ είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{M}(X)$. Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}^G(X)$ είναι ακραίο σημείο του $\mathcal{M}^G(X)$ αν και μόνο αν το $\mu$ είναι $G$-εργοδικό.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $g \in G$ ορίζουμε $\mathcal{M}^g(X) = \{\mu \in \mathcal{M}(X) : g_*\mu = \mu\}$. Τότε, το $\mathcal{M}^g(X)$ είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{M}(X)$. Άρα, το

$$\mathcal{M}^G(X) = \bigcap_{g \in G} \mathcal{M}^g(X)$$

είναι κλειστό και κυρτό υποσύνολο του $\mathcal{M}(X)$. Έστω $\mu \in \mathcal{M}^G(X)$ που δεν είναι εργοδικό. Τότε υπάρχει $B \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $0 < \mu(B) < 1$ και $\mu(g^{-1}B \bigtriangleup B) = 0$ για κάθε $g \in G$. Γράφουμε

$$\mu = \mu(B)\left(\frac{1}{\mu(B)}\mu|_B\right) + \mu(X \setminus B)\left(\frac{1}{\mu(X \setminus B)}\mu|_{X\setminus B}\right),$$

όπου $\frac{1}{\mu(B)}\mu|_B, \frac{1}{\mu(X\setminus B)}\mu|_{X\setminus B} \in \mathcal{M}^G(X)$. Άρα το $\mu$ δεν είναι ακραίο.

Αντίστροφα, έστω $\mu \in \mathcal{M}^G(X)$ εργοδικό μέτρο και $s \in (0,1)$ ώστε $\mu = s\nu_1 + (1-s)\nu_2$ για κάποια $\nu_1, \nu_2 \in \mathcal{M}^G(X)$. Τότε $\nu_1 \ll \mu$ και άρα απο το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχει η Radon-Nikodym παράγωγος $f$ ώστε $\nu_1(A) = \int_A f\,d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$. Θα δείξουμε ότι η $f$ είναι $G$-αναλλοίωτη και μετρήσιμη. Έστω $g \in G, B \in \mathcal{B}$. Έχουμε

$$\int_B f\,d\mu = \nu_1(B) = \nu_1(gB) = \int_{gB} f\,d\mu = \int_{gB} f \circ g \circ g^{-1}\,d\mu = \int_B f \circ g\,d\mu.$$

Από μοναδικότητα έπεται ότι $f = f \circ g$ $\mu$-σ.π. για κάθε $g \in G$. Άρα, $f = c =$ σταθερή $\mu$-σ.π., αφού το $\mu$ είναι εργοδικό. Άρα

$$1 = \nu_1(X) = \int_B c\,d\mu = c\mu(B) = c,$$

οπότε $f = 1$ $\mu$-σ.π. και συνεπώς $\nu_1 = \mu = \nu_2$, δηλαδή το $\mu$ είναι ακραίο. □

## 3.2 Μίξη για αυτομορφισμούς που μετατίθενται

Σε αυτή την παράγραφο δίνουμε παραδείγματα που δείχνουν ότι μια δράση μπορεί να είναι mixing αλλά όχι mixing όλων των τάξεων. Δείχνουμε πρώτα κάποια γενικά αποτελέσματα τα οποία θα χρειαστούμε παρακάτω.

**3.2.1 Πρόταση.** *Ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο $(X, \mathcal{B}, m, G)$ είναι mixing αν και μόνο αν για κάθε $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma = \widehat{G}$ ισχύει*

$$\int_X \gamma_0(x)\gamma_1(g_n x)\,dm(x) \to \int_X \gamma_0(x)\,dm(x) \int_X \gamma_1(x)\,dm(x)$$

*για κάθε $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ με $g_n \to \infty$.*

*Απόδειξη.* Γνωρίζουμε ότι ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο είναι mixing αν και μόνο αν για κάθε $f_0, f_1 \in L^2(m)$ ισχύει ότι

$$\int_X f_0(x)f_1(g_n x)\,dm(x) \to \int_X f_0(x)\,dm(x) \int_x f_1(x)\,dm(x)$$

για κάθε $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ με $g_n \to \infty$. Αφού για κάθε χαρακτήρα $\gamma_0, \gamma_1 \in \Gamma$ έχουμε ότι $\gamma_0, \gamma_1 \in L^2(m)$, η μία κατεύθυνση ισχύει προφανώς.

Αντίστροφα, ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle : L^2(m)\times L^2(m)\to\mathbb{C}$ με

$$\langle f,g\rangle = \int_X fg\,dm$$

για κάθε $f,g\in L^2(m)$. Έστω $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}\subseteq G$ με $g_n\to\infty$ και έστω $h\in L^2(m)$. Ορίζουμε

$$H_h = \Big\{f\in L^2(m) : \langle f\circ g_n, h\rangle \to \int_X f\,dm\int_X \overline{h}\,dm\Big\}.$$

Θα δείξουμε ότι ο $H_h$ είναι κλειστός υπόχωρος του $L^2(m)$. Έστω $(f_j)_{j\in\mathbb{N}}\subseteq H_h$, $f_j\to f\in L^2(m)$ με την $\|\cdot\|_2$-νόρμα όταν $j\to\infty$. Θα δείξουμε ότι $f\in H_h$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\Big|\langle f\circ g_n,h\rangle - \int_X f\,dm\int_X h\,dm\Big| &\le |\langle (f-f_j)\circ g_n, h\rangle| \\
&+ \Big|\langle f_j\circ g_n,h\rangle - \int_X f_j\,dm\int_X \overline{h}\,dm\Big| \\
&+ \Big|\int_X f_j\,dm\int_X \overline{h}\,dm - \int_X f\,dm\int_X \overline{h}\,dm\Big| \\
&\le \|f-f_j\|_2\|h\|_2 + \Big|\langle f_j\circ g_n,h\rangle - \int_X f_j\,dm\int_X \overline{h}\,dm\Big| + \int_X |f-f_j|\,dm\cdot\|h\|_2.
\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon>0$. Τότε υπάρχει $j_0(\varepsilon)=j_0\in\mathbb{N} : \|f-f_j\|_2 < \frac{\varepsilon}{3\|h\|_2}$ για κάθε $j\ge j_0$. Άρα,

$$\begin{aligned}
&\|f-f_j\|_2\|h\|_2 + \Big|\langle f_j\circ g_n,h\rangle - \int_X f_j\,dm\int_X \overline{h}\,dm\Big| + \int_X |f-f_j|\,dm\cdot\|h\|_2 \\
&< \|h\|_2\frac{\varepsilon}{3\|h\|_2} + \Big|\langle f_{j_0}\circ g_n,h\rangle - \int_X f_{j_0}\,dm\int_X \overline{h}\,dm\Big| + \frac{\varepsilon}{3\|h\|_2}\|h\|_2
\end{aligned}$$

για κάθε $j\ge j_0$. Τώρα υπάρχει $n_0(\varepsilon)=n_0\in\mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n\ge n_0$ να ισχύει

$$\Big|\langle f_{j_0}\circ g_n,h\rangle - \int_X f_{j_0}\,dm\int_X \overline{h}\,dm\Big| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Άρα,

$$\|h\|_2\frac{\varepsilon}{3\|h\|_2} + \Big|\langle f_{j_0}\circ g_n,h\rangle - \int_X f_{j_0}\,dm\int_X \overline{h}\,dm\Big| + \frac{\varepsilon}{3\|h\|_2}\|h\|_2 < \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\Big|\langle f\circ g_n,h\rangle - \int_X f\,dm\int_X h\,dm\Big| < \varepsilon$$

για κάθε $n\ge n_0$. Συνεπώς, ο $H_h\subseteq L^2(m)$ είναι κλειστός.

Τώρα θα δείξουμε ότι για κάθε χαρακτήρα $\gamma$ της $G$ ισχύει ότι $\gamma\in H_h$. Έστω $\varepsilon>0$. Γνωρίζουμε ότι το σύνολο

$$A(\Gamma) = \left\{\sum_{i=1}^n \alpha_i\gamma_i : n\in\mathbb{N}, \alpha_i\in\mathbb{C}, \gamma_i\in\Gamma\right\}$$

είναι πυκνό στον $L^2(m)$. Άρα, υπάρχουν $k \in \mathbb{N}$ και $0 \neq \alpha_i \in \mathbb{C}, \gamma_i \in \Gamma$, $i = 1, \ldots, k$ τέτοια ώστε

$$\Big\| h - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i \Big\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\Big| \langle \gamma \circ g_n, h \rangle - \int_X \gamma \, dm \int_X \overline{h} \, dm \Big| \\
&\quad \leq \Big| \langle \gamma \circ g_n, h \rangle - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i \Big| \\
&\quad + \Big| \Big\langle \gamma \circ g_n, \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i \Big\rangle - \int_X \gamma \, dm \int_X \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i \gamma_i} \, dm \Big| \\
&\quad + \Big| \int_X \gamma \, dm \int_X \sum_{i=1}^{k} \overline{\alpha_i \gamma_i} \, dm - \int_X \gamma \, dm \int_X \overline{h} \, dm \Big| \\
&\quad \leq \|\gamma\|_2 \Big\| h - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i \Big\|_2 + \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i| \cdot \Big| \langle \gamma \circ g_n, \gamma_i \rangle - \int_X \gamma \, dm \int_X \overline{\gamma_i} \, dm \Big| \\
&\quad + \|\gamma\|_2 \cdot \Big\| h - \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \gamma_i \Big\|_2 .
\end{aligned}$$

Όμως από την υπόθεση έχουμε ότι για κάθε $i = 1, \ldots, k$

$$\Big| \langle \gamma \circ g_n, \gamma_i \rangle - \int_X \gamma \, dm \int_X \overline{\gamma_i} \, dm \Big| < \frac{\varepsilon}{3 \sum_{i=1}^{k} |\alpha_i|}$$

για κάθε $n \geq n_0$. Οπότε $|\langle \gamma \circ g_n, h \rangle - \int_X \gamma \, dm \int_X \overline{h} \, dm| < \varepsilon$ για κάθε $n \geq n_0$. Άρα, $\gamma \in H_h$ για κάθε $h \in L^2(m)$. Τέλος, $A(\Gamma) \subseteq H_h \subseteq L^2(m)$ και λόγω της πυκνότητας του $A(\Gamma)$ στον $L^2(m)$ ισχύει ότι $H_h = L^2(m)$ για κάθε $h \in L^2(m)$. □

**3.2.2 Θεώρημα.** *Έστω $G$ διακριτή ομάδα. Τότε η $\Gamma = \widehat{G}$, η δυϊκή ομάδα της $G$, είναι συμπαγής. Αν η $G$ είναι συμπαγής, τότε η $\Gamma$ είναι διακριτή.*

*Απόδειξη.* Στην $\Gamma$ δίνουμε την $w^*$-τοπολογία από τον χώρο $L^1(G)^{**} \cong L^1(G)$, καθώς ισχύει ότι $\Gamma \cong \sigma(L^1(G))$ (πολλαπλασιαστικά συναρτησοειδή). Οπότε για έναν χαρακτήρα $\gamma_0 \in \Gamma$, έχουμε βασική περιοχή

$$U_{\gamma_0, \varepsilon, \Gamma} = \{ \gamma \in \Gamma : |\gamma(h_i) - \gamma_0(h_i)| < \varepsilon, h_i \in L^1(G), i = 1, \ldots, n, n \in \mathbb{N} \}$$

όπου $\varepsilon > 0$.

Αφού η $G$ είναι διακριτή, η $L^1(G)$ είναι μεταθετική άλγεβρα Banach με μονάδα την εξής $e \in L^1(G) : e(0) = 1, e(x) = 0$ για κάθε $x \neq 0$ (αφού το μέτρο Haar είναι το αριθμητικό μέτρο). Τότε η $\sigma(L^1(G))$ είναι συμπαγής, άρα λόγω ισομορφίας και η

$\Gamma$ είναι συμπαγής. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: Αν $t \in cl_*(\sigma(L^1(G)))$ τότε υπάρχει $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \sigma(L^1(G)) : t_n \to t$ με την $w^*$-τοπολογία και καθώς $n \to \infty$. Άρα η $t$ είναι γραμμική και πολλαπλασιαστική και αφού $t_n(e) = 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $t(e) = 1$, άρα $t \neq 0$, $t \in \sigma(L^1(G))$ και συνεπώς $cl_*(\sigma(L^1(G))) = \sigma(L^1(G))$. Προκύπτει λοιπόν ότι το $\sigma(L^1(G))$ είναι κλειστό υποσύνολο της μοναδαίας σφαίρας $S^*$ του $L^1(G)^{**}$. Από το θεώρημα Banach-Αλάογλου η $S^*$ είναι συμπαγής, οπότε και η $\sigma(L^1(G))$ είναι συμπαγής.

Αντίστροφα, αν η $G$ είναι συμπαγής, τότε το μέτρο Haar $m$ είναι πεπερασμένο. Έστω $m(G) = 1$. Τότε θεωρούμε την $f \in L^1(G)$ με $f(x) = 1$ για κάθε $x \in G$ (έχουμε $f \in L^1(G)$ γιατί η $G$ είναι συμπαγής). Τώρα,

$$\widehat{f}(0) = \int_G f(x)\,dm(x) = m(G) = 1$$

και

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_G f(x)(-x,\gamma)\,dm(x) = \int_G (-x,\gamma)\,dm(x) = 0$$

αν $\gamma \neq 0_\Gamma$. Όμως η $\widehat{f}$ συνεχής, άρα το $\{0_\Gamma\} = \widehat{f}^{-1}(\mathbb{C} \setminus \{0_\mathbb{C}\})$ είναι ανοικτό σύνολο, οπότε όλα τα σύνολα στην $\Gamma$ είναι ανοικτά. Τελικά η $\Gamma$ είναι διακριτή. □

**3.2.3 Θεώρημα.** *Έστω $G$ συμπαγής αβελιανή ομάδα και $\Psi \subseteq \Gamma = \widehat{G}$ ώστε για κάθε $a \neq e, a \in G$ να υπάρχει $x \in \Psi$ με $x(a) = 1$. Τότε $\Gamma = \Psi$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε $\mathcal{T} = \{\sum_{j=1}^m a_j x_j : a_j \in \mathbb{C}, m \in \mathbb{N}, x_j \in \Psi\} \subseteq C(G)$. Η $\mathcal{T}$ είναι υπάλγεβρα της $C(G)$. Επίσης η $\mathcal{T}$ διαχωρίζει τα σημεία της $G$. Πράγματι, αν $a, b \in G$ και $a \neq b$ τότε υπάρχει $x \in \Psi$ τέτοιο ώστε $x(ab^{-1}) \neq 1$, δηλαδή $x(a) \neq x(b)$.

Από το θεώρημα Stone-Weierstrass έχουμε ότι $cl(\mathcal{T}) = C(G)$. Έστω τώρα $y \in \Gamma \setminus \Psi$. Τότε υπάρχει $\sum_{j=1}^m a_j x_j \in \mathcal{T}$ ώστε $\|y - \sum_{j=1}^m a_j x_j\|_2 < 1$. Άρα,

$$\begin{aligned}
1 > \int_G |y - \sum_{j=1}^m a_j x_j|^2\,dm &= \int_G y\overline{y}\,dm - \sum_{j=1}^m a_j \int_G x_j \overline{y}\,dm \\
&- \sum_{j=1}^m \overline{a_j} \int_G y\overline{x_j}\,dm + \sum_{j=1}^m \sum_{j=1}^m a_j \overline{a_k} \int_G x_j \overline{x_k}\,dm \\
&= 1 + \sum_{j=1}^m |a_j|^2 > 1,
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. □

**3.2.4 Θεώρημα.** *Έστω $\{G_i : i \in I\}$ μια μη κενή οικογένεια από συμπαγείς αβελιανές ομάδες και έστω $X_i = \widehat{(G_i)}$, για κάθε $i \in I$. Παίρνουμε $(\gamma_i)_{i\in I} \in (P_{i\in I} X_i)^*$, δηλαδή για πεπερασμένα το πλήθος $i \in I$ έχουμε $\gamma_i \neq 1_\Gamma$, με $[(\gamma_i)_{i\in I}] : P_{i\in I} X_i \to \mathbb{C}$ ώστε*

$$[(\gamma_i)_{i\in I}]((x_i)_{i\in I}) = \prod_{i\in I} \gamma_i(x_i).$$

*Τότε $\widehat{P_{i\in I} G_i} = \{[(\gamma_i)_{i\in I}] : (\gamma_i)_{i\in I} \in (P_{i\in I} X_i)^*\}$.*

*Απόδειξη.* Έχουμε ότι ότι το $\{[(\gamma_i)_{i\in I}] : (\gamma_i)_{i\in I} \in (P_{i\in I}X_i)^*\}$ είναι υποομάδα της $\widehat{P_{i\in I}G_i}$ η οποία διαχωρίζει τα σημεία της $P_{i\in I}G_i$. Από το προηγούμενο θεώρημα έπεται το συμπέρασμα. □

**3.2.5 Παράδειγμα** (Ledrappier). Έστω $e_1 = (1,0), e_2 = (0,1) \in \mathbb{R}^2$. Ορίζουμε

$$H = \{x \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2} : x_{n+e_1} + x_{n+e_2} + x_n = 0(\mathrm{mod}\ 2),\ n \in \mathbb{Z}^2\}.$$

Η $H$ είναι κλειστή, άρα συμπαγής αβελιανή υποομάδα της $\{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ με πράξη την πρόσθεση κατά συντεταγμένη $(\mathrm{mod}\,2)$.

Ορίζουμε $T_k : \mathbb{Z}^2 \to MPT(H, \mathcal{B}(H), m)$, όπου $T_k((x_n)_{n\in\mathbb{Z}^2}) = (x_{n+k})_{n\in\mathbb{Z}^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}^2$ και $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}^2} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, όπου $m$ το μέτρο Haar της $H$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z}^2$ ισχύει $m(T_k^{-1}(A)) = m(A)$ για κάθε $A \subseteq H, A \in \mathcal{B}(H)$.

Ορίζουμε τα κυλινδρικά σύνολα ως εξής: Έστω $A \subseteq \mathbb{Z}^2$ πεπερασμένο και $s : \mathbb{Z}^2 \to \{0,1\}$ συνάρτηση. Κυλινδρικό σύνολο είναι ένα σύνολο της μορφής

$$C_A^{s(A)} = \{x \in H : x_a = s(a), a \in A\}.$$

Παίρνουμε τον κύλινδρο $C_A^{s_0(A)} = \{x \in H : x_a = 0, a \in A\}$ (όπου $s(a) = 0$ για κάθε $a \in$ ). Τότε, για κάθε $x \in H$, αν $x_a = s(a)$ για κάθε $a \in A$ έχουμε $x \in x + C_A^{s(A)}$, γιατί

$$\begin{aligned} x + C_A^{s_0(A)} &= x + \{y \in H : y_a = s(a) = 0, a \in A\} = \{x + y \in H : y_a = 0\} \\ &= \{z = x + y \in H : z_a - x_a = 0, a \in A\} = \{z \in H : z_a = x_a = s(a), a \in A\}. \end{aligned}$$

Άρα $H = \bigcup_{x\in H, x_a = s(a)}(x + C_A^{s_0(A)})$, όπου τα σύνολα $x + C_A^{s_0(A)}$ είναι ξένα ανά δύο και αριθμήσιμα το πλήθος. Άρα έχουμε ότι για κάθε κύλινδρο $C_A^{s(A)} = x + C_A^{s_0(A)}$, για κάποιο $x \in H$ ισχύει $x_a = s(a), a \in A$. Οπότε, αφού το $m$ είναι το μέτρο Haar της $H$, έχουμε $m(C_A^{s(A)}) = m(x + C_A^{s(A)}) = m(C_A^{s_0(A)})$ και

$$\begin{aligned} 1 = m(H) &= m\left(\bigcup_{x\in H, x_a = s(a), a\in A} x + C_A^{s_0(A)}\right) \\ &= \sum_{x\in H, x_a = s(a), a\in A} m(C_A^{s_0(A)}) = |\pi_A(H)| m(C_A^{s(A)}). \end{aligned}$$

Συνεπώς, $m(C_A^{s(A)}) = \frac{1}{|\pi_A(H)|}$.

**3.2.6 Σημείωση.** Έστω $G = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ το ευθύ γινόμενο της ομάδας $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$. Η $\mathbb{Z}_2$ θεωρείται εφοδιασμένη με την πρόσθεση mod 2 και η $G$ με την πρόσθεση κατά συντεταγμένη (ευθύ γινόμενο ομάδων), όπου σε κάθε συντεταγμένη η πρόσθεση είναι mod 2. Θα γράφουμε $x = (x_{(n.m)\in\mathbb{Z}^2})$ για ένα στοιχείο της $G$. Από τα προηγούμενα θεωρήματα, ένας χαρακτήρας της $G$ καθορίζεται μονοσήμαντα από ένα πεπερασμένο υποσύνολο $Z \subseteq \mathbb{Z}^2$:

$$\gamma_Z(x) = (-1)^{\sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} x_{(n,m)}} = e^{\pi i \sum_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} x_{(n,m)}}$$

για $x = (x_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \in G$. Έστω τώρα

$$H = \Big\{x = (x_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \in G : x_{(n,m)} + x_{(n+1,m)} + x_{(n.m+1)} = 0 \,(\mathrm{mod}\ 2) \text{ για κάθε } (n,m) \in \mathbb{Z}^2\Big\}.$$

Η $H$ είναι υποομάδα της $G = \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ και μάλιστα κλειστή. Η ομάδα των χαρακτήρων της $H$ είναι η Γ, όπου όμως έχουμε ταυτίσει δύο χαρακτήρες της $G$ αν οι χαρακτήρες αυτοί ταυτίζονται πάνω στην $H$. Από τη σχέση

$$x_{(n,m)} + x_{(n+1,m)} + x_{(n,m+1)} = 0 \,(\mathrm{mod}\ 2) \text{ για κάθε } (n,m) \in \mathbb{Z}^2$$

που ορίζει την $H$, η $H$ είναι ισόμορφη με την $\{0,1\}^F$, όπου $F = (\mathbb{Z}\times\{0\}) \bigcup [\{0\}\times(-\mathbb{N})]$, γιατί κάθε στοιχείο $(x_{(n,m)})_{(n,m)\in F}$ της $\{0,1\}^F$ επεκτείνεται κατά μοναδικό τρόπο σε ένα στοιχείο $(x_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2}$ της $H$. Πράγματι, τα $x_{(n,0)}, n \in \mathbb{Z}$, καθορίζουν όλα τα $x_{(n,1)}, n \in \mathbb{Z}$ μέσω των σχέσεων $x_{(n,1)} = x_{(n,0)} + x_{(n+1,0)}(\mathrm{mod}\ 2)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και κατόπιν τα $x_{(n,1)}, n \in \mathbb{Z}$ καθορίζουν όλα τα $x_{(n,2)}, n \in \mathbb{Z}$ μέσω των σχέσεων $x_{(n,2)} = x_{(n,1)} + x_{n+1,1}(\mathrm{mod}\ 2)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, και επαγωγικά τα $x_{(n,0)}, n \in \mathbb{Z}$ καθορίζουν όλα τα $x_{(n,m)}, n \in \mathbb{Z}$ με $m \in \mathbb{N}$. Επίσης, τα $x_{(0,-m)}, m \in \mathbb{N}\bigcup\{0\}$ καθορίζουν όλα τα $x_{(1,-m)}, m \in \mathbb{N}$ μέσω των σχέσεων $x_{(1,-m)} = x_{(0,-m)} + x_{(0,-m+1)}$ (mod 2) για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κατόπιν τα $x_{(1,-m)}, m \in \mathbb{N}$ μαζί με το $x_{(1,0)}$ καθορίζουν όλα τα $x_{(2,-m)}, m \in \mathbb{N}$ μέσω των σχέσεων $x_{(2,-m)} = x_{(1,-m)} + x_{(1,-m+1)}$ (mod 2) για κάθε $m \in \mathbb{N}$, και επαγωγικά, τα $x_{(0,-m)}, m \in \mathbb{N}$ μαζί με το $x_{(n,0)}$ καθορίζουν διαδοχικά όλα τα $x_{(n,-m)}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$. Τέλος, τα $x_{(0,-m)}, m \in \mathbb{N}$ μαζί με το $x_{(-1,0)}$ καθορίζουν διαδοχικά το $x_{(-1,-1)}$ μέσω της $x_{(-1,-1)} = x_{(0,-1)} + x_{(-1,0)}$ (mod 2), κατόπιν το $x_{(-1,-2)}$ μέσω της $x_{(-1,-2)} = x_{(0,-2)} + x_{(-1,-1)}$ (mod 2), και επαγωγικά το $x_{(-1,-m)}, m \in \mathbb{N}$ μέσω της $x_{(-1,-m)} = x_{(0,-m)} + x + (-1,-m+1)$ (mod 2), και κατόπιν τα $x_{(-1,-m)}, m \in \mathbb{N}$ μαζί με το $x_{(-2,0)}$ καθορίζουν διαδοχικά τα $x_{(-2,-1)}, x_{(-2,-2)}$ και επαγωγικά το $x_{(-2,-m)}, m \in \mathbb{N}$, και επαγωγικά εν τέλει τα $x_{(0,-m)}, m \in \mathbb{N}$ μαζί με τα $x_{(-n,0)}, n \in \mathbb{N}$ καθορίζουν όλα τα $x_{(-n,-m)}, n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{N}$.

Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι ένα $x = (x_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \in H$ καθορίζεται μονοσήμαντα από τα $x_{(n,m)}$ για $(n,m) \in F + (k,l)$ για οποιοδήποτε $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$, δηλαδή καθορίζεται μονοσήμαντα από τα $x_{(n,m)}$ για $(n,m)$ σε ένα οποιοδήποτε σύνολο της μορφής

$$\{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : m = l\} \cup \{(n,m) \in \mathbb{Z}^2 : n = k, m < l\}.$$

Αφού η $H$ είναι ισόμορφη με την $\{0,1\}^F$, οι χαρακτήρες της είναι ακριβώς οι συναρτήσεις

$$\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{(n,m)\in A} x_{(n,m)}}$$

όπου το $A$ διατρέχει όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα του $F$ (από προηγούμενο θεώρημα).

**3.2.7 Λήμμα.** *Έστω πεπερασμένο $A \subseteq F$. Θέτουμε*

$$m_A = \min\{m \in (-\mathbb{N}) \cup \{0\} : \exists n \in \mathbb{Z}\, \textit{ώστε}\, (n,m) \in A\},$$

*δηλαδή $m_A$ είναι η ελάχιστη $y$-συντεταγμένη κάποιου στοιχείου του $A$. Θέτουμε επίσης*

$$n_A = \min\{n \in \mathbb{Z} : \exists m \in (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \text{ ώστε } (n,m) \in A\}$$

*και*

$$n^A = \max\{n \in \mathbb{Z} : \exists m \in (-\mathbb{N}) \cup \{0\} \text{ ώστε } (n,m) \in A\},$$

*δηλαδή $n_A$ και $n^A$ είναι η ελάχιστη και μέγιστη $x$-συντεταγμένη κάποιου στοιχείου του $A$, αντίστοιχα. Αν*

$$\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{(n,m)\in A} x_{(n,m)}}$$

*είναι ο αντίστοιχος χαρακτήρας της $H$ και $m \le m_A$, τότε ο χαρακτήρας $\gamma_A$ γράφεται και ως*

$$\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{n \in N_m} x_{(n,m)}}$$

*για κατάλληλο υποσύνολο $N_m$ του $\{n_A, n_A, \ldots, n^A + |m|\}$. Ισοδύναμα, γράφεται ως*

$$\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{(n',m')\in A_m} x_{(n',m')}}$$

*για κατάλληλο υποσύνολο $A_m$ του $\{n_A, n_A + 1, \ldots, n^A + |m|\} \times \{m\}$.*

*Απόδειξη.* Αφού το $A$ είναι υποσύνολο του $F$, γράφεται σαν $A = (A^1 \times \{0\}) \cup (\{0\} \times A^2)$ για κάποια πεπερασμένα υποσύνολα $A^1 \subseteq \mathbb{Z}$ και $A^2 \subseteq (-\mathbb{N})$, οπότε

$$\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{n\in A^1} x_{(n,0)} + \sum_{m \in A^2} x_{(0,m)}}.$$

Έχουμε επίσης ότι $m_A = \min A^2$ αν $A^2 \neq \varnothing$ και $m_A = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε τώρα ότι, αν $A^1 \neq \varnothing$,

$$\sum_{n\in A^1} x_{(n,0)} = \sum_{(n \in A^1} [x_{(n,0)} + x_{(n,-1)} + x_{(n+1,-1)}] + \sum_{n\in A^1} [x_{(n,-1)} + x_{(n+1,-1)}] \pmod 2$$

επειδή $x_{(n,m)} + x_{(n,m)} = 0 \pmod 2$ για κάθε $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$. Για κάθε $x = (x_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$ και για $x \in H$ έχουμε ότι, $\pmod 2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{n\in A^1} x_{(n,0)} &= \sum_{n\in A^1} [x_{(n,-1)} + x_{(n+1,-1)}] = \sum_{n\in A^1} x_{(n,-1)} + \sum_{n \in A^1+1} x_{(n,-1)} \\
&= \sum_{n \in A^1 \setminus (A^1+1)} x_{(n,-1)} + \sum_{n\in A^1 \cap (A^1+1)} x_{(n,-1)} + \sum_{n \in (A^1+1)\setminus A^1} x_{(n,-1)} \\
&= \sum_{n \in A^1 \triangle (A^1+1)} x_{(n,-1)}.
\end{aligned}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει πάλι επειδή $x_{(n,m)} + x_{(n,m)} = 0 \pmod 2$ για κάθε $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ και για κάθε $x = (x_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$. Αν τώρα θέσουμε $N^1 = A^1 \triangle (A^1 + 1)$, επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$\sum_{n\in A^1} x_{(n,0)} = \sum_{n\in A^1 \triangle (A^1+1)} x_{(n,-1)} = \sum_{n \in N^1} x_{(n,-1)} = \sum_{n \in N^1 \triangle (N^1+1)} x_{(n,-2)} \pmod 2$$

και επαγωγικά εν τέλει ότι

$$\sum_{n\in A^1} x_{(n,0)} = \cdots = \sum_{n\in N^{m-1}\triangle(N^{m-1}+1)} x_{(n,-m)} = \sum_{n\in N^m} x_{(n,-m)} \pmod 2$$

για οποιοδήποτε $m \geq 0$, όπου $N^0 = A^1$ και $N^k = N^{k-1} \triangle (N^{k-1}+1), k \in \{1,2,\ldots,m\}$. Παρατηρούμε επίσης ότι $\min N^k = \min N^{k-1}$ και $\max N^k = \max N^{k-1} + 1$ για κάθε $k \in \{1,2,\ldots,m\}$, οπότε

$$\min N^m = \min N^0 = \min A^1 \geq n_A$$

και

$$\max N^m = \max N^0 + m = \max A^1 + m \leq n^A + m,$$

άρα $N^m \subseteq \{n_A, n_A+1, \ldots, n^A+m\}$ για οποιοδήποτε $m \geq 0$. Ομοίως, αν $A^2 \neq \varnothing$, αντικαθιστώντας κάθε όρο $x_{(0,m)}$ στο άθροισμα $\sum_{m\in A^2} x_{(0,m)}$, εκτός του όρου $x_{(0.m_A)}$ αν υπάρχουν τέτοιοι όροι, με τον όρο $x_{(0,m-1)}+x_{(1,m-1)}$, καταλήγουμε σε ένα άθροισμα με όρους $x_{(n,m)}$ με $m_A \leq m < -1$. Κατόπιν, αντικαθιστώντας πάλι κάθε όρο $x_{(n,m)}$ στο καινούριο άθροισμα, εκτός των όρων $m = m_A$ αν υπάρχουν τέτοιοι όροι πάλι, με τον όρο $x_{(n,m-1)} + x_{(n+1,m-1)}$, καταλήγουμε σε ένα άθροισμα με όρους $x_{(n,m)}$ με $m_A \leq m < -2$ και συνεχίζοντας εν τέλει καταλήγουμε σε ένα άθροισμα της μορφής

$$c_0 x_{(0.m_A)} + c_1 x_{(1,m_A)} + \cdots + c_{-m_A-1} x_{(-m_A-1,m_A)},$$

με κάθε συντελεστή $c_i, i \in \{0,1,\ldots,-m_A-1\}$, έναν μη αρνητικό ακέραιο. Χρησιμοποιώντας πάλι το γεγονός ότι (mod 2)

$$c x_{(n,m)} = \begin{cases} 0 & \text{αν } c \in 2\mathbb{N}\cup\{0\} \\ x_{(n,m)} & \text{αν } c \in 2\mathbb{N}+1 \end{cases}$$

καταλήγουμε εν τέλει σε ένα άθροισμα της μορφής

$$\sum_{m\in A^2} x_{(0,m)} = \sum_{n\in M} x_{(n,m_A)} \pmod 2$$

για κάποιο πεπερασμένο σύνολο $M \subseteq \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε δε ότι $M \subseteq \{0,1,\ldots,-m_A-1\}$. Δοθέντος τώρα $m \in \mathbb{Z}$ με $m \leq m_A$, αν $m < m_A$ μπορούμε αντικαθιστώντας κάθε όρο $x_{(n,m_A)}, n \in M$ στο τελευταίο άθροισμα με τον όρο $x_{(n,m_A-1)} + x_{(n+1,m_A-1)}$, να γράψουμε το παραπάνω άθροισμα σαν

$$\sum_{m'\in A^2} x_{(0,m')} = \sum_{n\in M} x_{(n,m_A)} = \sum_{n\in M\triangle(M+1)} x_{(n,m_A-1)} \pmod 2$$

και κατόπιν, αν $m < m_A - 1$, αντικαθιστώντας πάλι κάθε όρο $x_{(n,m_A-1)}, n \in M^1 = M \triangle (M+1)$ στο τελευταίο άθροισμα με τον όρο $x_{(n,m_A-2)} + x_{(n+1,m_A-2)}$, γράφουμε αυτό το άθροισμα σαν

$$\begin{aligned}\sum_{m'\in A^2} x_{(0,m')} &= \sum_{n\in M} x_{(n,m_A)} = \sum_{n\in M\triangle(M+1)} x_{(n,m_A-1)} = \sum_{n\in M^1} x_{(n,m_A-1)}\\ &= \sum_{n\in M^1\triangle(M^1+1)} x_{(n,m_A-2)} = \cdots = \sum_{n\in M^m A^{-m-1}\triangle(M^m A^{-m-1}+1)} x_{(n,m)}\\ &= \sum_{n\in M^m A^{-m}} x_{(n,m)} \pmod 2\end{aligned}$$

όπου $M^k = M^{k-1} \triangle (M^{k-1}+1)$ για $k\in\{1,2,\ldots,m_A-m\}, M^0 = M$. Παρατηρούμε πάλι ότι $\min M^k = \min M^{k-1}$ και $\max M^k = \max M^{k-1}+1$ για κάθε $k\in\{1,2,\ldots,m\}$, οπότε

$$\min M^m A^{-m} = \min M^0 = \min M \geq 0 \geq n_A$$

και

$$\begin{aligned}\max M^m A^{-m} &= \max M^0 + m_A - m = \max M + m_A - m \leq -m_A - 1 + m_A - m\\ &= -1 - m < n_A - m,\end{aligned}$$

άρα

$$M^m A^{-m} \subseteq \{n_A, n_A+1, \ldots, n_A - m\} = \{n_A, n_A+1, \ldots, n_A+|m|\}.$$

Άρα, για $m \leq m_A$ έχουμε εν τέλει ότι

$$\begin{aligned}\sum_{(n',m'\in A} x_{(n',m')} &= \sum_{n'\in A^1} x_{(n',0)} + \sum_{m'\in A^2} x_{(0,m')} = \sum_{n\in N^m} x_{(n,m)} + \sum_{n\in M^m A^{-m}} x_{(n,m)}\\ &= \sum_{n\in N^m\triangle M^m A^{-m}} x_{(n,m)} = \sum_{n\in N_m} x_{(n,m)} \pmod 2,\end{aligned}$$

όπου εξ' ορισμού, $N_m = N^m \triangle M^m A^{-m}$. Έπεται ότι $\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{n\in N_m} x_{(n,m)}}$ για τον χαρακτήρα $\gamma_A$. Επιπλέον, $N_m \subseteq \{n_A, n_A+1, \ldots, n_A+|m|\}$ αφού καθένα από τα $N^m$ και $M^m A^{-m}$ περιέχεται στο $\{n_A, n_A+1, \ldots, n_A+|m|\}$. □

Ακριβώς η ίδια απόδειξη δείχνει το λήμμα στην γενικότερη περίπτωση όπου το $A$ είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $F+(k,l)$ για κάποιο $(k,l)\in\mathbb{Z}^2$. Ακόμα πιο γενικά έχει κανείς το εξής:

**3.2.8 Λήμμα.** *Έστω πεπερασμένο $A\subseteq\mathbb{Z}^2$. Θέτουμε*

$$m_A = \min\{m\in\mathbb{Z} : \exists n \ \tau.\omega.\ (n,m)\in A\}$$

*δηλαδή $m_A$ είναι η ελάχιστη $y$-συντεταγμένη κάποιου στοιχείου του $A$. Θέτουμε επίσης*

$$n_A = \min\{n\in\mathbb{Z} : \exists m\in\mathbb{Z} \ \tau.\omega.\ (n,m)\in A\}$$

*και*

$$n^A = \max\{n+m : (n,m) \in A\} - m_A$$

*και*

$$m^A = \max\{n+m : (n,m) \in A\} - n_A$$

*δηλαδή $n_A$ είναι η ελάχιστη $x$-συντεταγμένη κάποιου στοιχείου του $A$ και το ορθογώνιο τρίγωνο με κορυφές τα σημεία $(n_A, m^A), (n_A, m_A), (n^A, m_A)$ είναι το ελάχιστο ορθογώνιο τρίγωνο με κάθετες πλευρές παράλληλες προς τους άξονες και υποτείνουσα με κλίση $-1$ το οποίο περιέχει το $A$. Αν*

$$\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{(n,m)\in A} x_{(n,m)}}$$

*και $m \leq m_A$, τότε υπάρχει μοναδικό υποσύνολο $N_m$ του $\{n_A, n_A+1, \ldots, n^A+m_A-m\}$ τέτοιο ώστε*

$$\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{n\in N_m} x_{(n,m)}}.$$

*Ισοδύναμα, υπάρχει μοναδικό υποσύνολο $A_m$ του $\{n_A, n_A+1, \ldots, n^A+m_A-m\} \times \{m\}$ τέτοιο ώστε*

$$\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{(n',m')\in A_m} x_{(n',m')}}.$$

*Απόδειξη.* Έστω $m \leq m_A$. Όπως και στο προηγούμενο λήμμα, αντικαθιστούμε κάθε όρο $x_{(n',m')}$ με $m' > m$ στο άθροισμα $\sum_{(n',m')\in A} x_{(n',m')}$, αν υπάρχουν τέτοιοι όροι, με τον όρο

$$x_{(n',m'-1)} + x_{(n'+1,m'-1)}.$$

Λόγω της σχέσης $x_{(n',m'-1)} + x_{(n'+1,m')} + x_{(n',m'+1)} = 0 \pmod 2$ για όλα τα ζευγάρια $(n', m') \in \mathbb{Z}^2$ που πρέπει να ικανοποιείται για κάθε $x \in H$, το νέο άθροισμα που προκύπτει είναι ίσο με το αρχικό $\sum_{(n',m')\in A} x_{(n',m')} \pmod 2$. Επιπλέον, το νέο άθροισμα δεν περιέχει πια όρους $x_{(n',m')}$ με $m' = \max\{m'' \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} \text{ τ.ω. } (n, m'') \in A\}$, αλλά περιέχει μόνο όρους $x_{(n',m')}$ με $m' < \max\{m'' \in \mathbb{Z} : \exists n \in \mathbb{Z} \text{ τ.ω. } (n, m'') \in A\}$. Κατόπιν αντικαθιστούμε κάθε όρο $x_{(n',m')}$ με $m' > m$ στο νέο άθροισμα που προέκυψε, αν υπάρχουν τέτοιοι όροι, με τον όρο

$$x_{(n',m'-1)} + x_{(n'+1,m'-1)}$$

πάλι και το νέο άθροισμα που προκύπτει είναι ίσο με το προηγούμενο, και άρα με το αρχικό, (mod 2), και επιπλέον δεν περιέχει όρους $x_{(n',m')}$ με

$$m' = \max\{m'' \in \mathbb{Z} : \exists \text{ τ.ω. } (n, m'') \in A\}$$

ή

$$m' = \max\{m'' \in \mathbb{Z} : \exists \text{ τ.ω. } (n, m'') \in A\} - 1.$$

Συνεχίζοντας με αυτό τον τρόπο, καταλήγουμε εν τέλει σε ένα άθροισμα της μορφής

$$c_0 x_{(n_A,m)} + c_1 x_{(n_A+1,m)} + \cdots + c_k x_{(k,m)}$$

με όρους $x_{(n',m')}$ με $m^{'} = m$ όλους, με κάθε συντελεστή $c_i, i \in \{0, 1, \ldots, k\}$ έναν μη αρνητικό ακέραιο. Χρησιμοποιώντας πάλι το γεγονός ότι

$$cx_{(n',m')} = \begin{cases} 0 & \text{αν } c \in 2\mathbb{N} \cup \{0\} \\ x_{(n',m')} & \text{αν } c \in 2\mathbb{N} + 1(\text{mod}2) \end{cases}$$

για κάθε μη αρνητικό ακέραιο $c$, καταλήγουμε εν τέλει σε ένα άθροισμα της μορφής

$$\sum_{(n',m')} x_{(n',m')} = \sum_{n \in N_m} x_{(n,m)} \ (\text{mod } 2).$$

Παρατηρούμε ακόμη ότι, σε κάθε βήμα, όταν αντικαθιστούμε έναν όρο $x_{(n',m')}$ με τον όρο $x_{(n',m'-1)} + x_{(n'+1,m'-1)}$, οι δείκτες $(n^{'}, m^{'} - 1)$ και $(n^{'} + 1, m^{'} - 1)$ που χρησιμοποιούμε ικανοποιούν τις ανισότητες

$$n^{'} + (m^{'} - 1) < n^{'} + m^{'} \leq \max\{n^{''} + m^{''} : (n^{''}, m^{''}) \in A\}$$

και

$$(n^{'} + 1) + (m^{'} - 1) = n^{'} + m^{'} \leq \max\{n^{''} + m^{''} : (n^{''}, m^{''}) \in A\}$$

και άρα πρέπει εν τέλει να έχουμε $k + m \leq \max\{n^{''} + m^{''} : (n^{''}, m^{''}) \in A\}$, δηλαδή

$$k \leq \max\{n^{''} + m^{''} : (n^{''}, m^{''}) \in A\} - m = n^A + m_A - m.$$

Έπεται ότι $N_m \subseteq \{n_A, n_A + 1, \ldots, n^A + m_A - m\}$.

Όσον αφορά τη μοναδικότητα, έστω, για δοθέν $m \leq m_A$, $N_{m'}$, ένα άλλο υποσύνολο του $\mathbb{Z}$ τέτοιο ώστε

$$\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{n \in N_m^{'}} x_{(n,m)}}.$$

Έστω $n \in N_m \triangle N_m^{'}$ και θέτουμε $x_{(n,m)} = 1, x_{(n',m)} = 0$ για κάθε $n^{'} \in \mathbb{Z} \setminus \{n\}$ και $x_{(n,m')} = 0$ για κάθε $m^{'} \in \mathbb{Z}$ με $m^{'} < m$, δηλαδή θέτουμε $x_{(n,m)} = 1$ και $x_{(n',m')} = 0$ για κάθε άλλο $(n^{'}, m^{'}) \in F + (n, m)$, και επεκτείνουμε αυτό το $x \in \{0, 1\}^{F+(n,m)}$ σε ένα $x \in H$ (βλ. Σημείωση 3.2.6). Τότε ένα από τα $(-1)^{\sum_{n \in N_m^{'}} x_{(n,m)}}, (-1)^{\sum_{n \in N_m} x_{(n,m)}}$ είναι ίσο με 1 και το άλλο ίσο με $-1$, επομένως δεν μπορεί να ισχύει

$$(-1)^{\sum_{n \in N_m^{'}} x_{(n,m)}} = \gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{n \in N_m} x_{(n,m)}}$$

γι' αυτό το $x \in H$. Άρα δεν μπορεί να υπάρχει $n \in N_m \triangle N_m^{'}$, δηλαδή $N_m \triangle N_m^{'} = \varnothing$ και επομένως $N_m = N_{m'}$. □

Όπως δείχνει το πρώτο μέρος της απόδειξης του Λήμματος 3.2.7, όταν το σύνολο $A$ είναι της μορφής $A = N \times \{m\}$ για κάποιο πεπερασμένο σύνολο $N \subseteq \mathbb{Z}$ και κάποιον $m \in \mathbb{Z}$, τότε μπορούμε να πούμε κάτι περισσότερο για τα σύνολα $N_m^{'}$ των Λημμάτων 3.2.7 και 3.2.8.

**3.2.9 Λήμμα.** *Έστω πεπερασμένο $N \subseteq \mathbb{Z}$ και $m \in \mathbb{Z}$. Θεωρούμε το σύνολο $A = N \times \{m\}$, για το οποίο $m_A = m, n_A = \min N$ και $n^A = \max N$, με το συμβολισμό του Λήμματος 3.2.8. Τότε για κάθε $m^{'} \leq m$ έχουμε ότι $\min N_{m'} = \min N = n_A$ και $\max N_{m'} = \max N + m - m^{'}$, όπου $N_{m'}$ το σύνολο στα Λήμματα 3.2.7 και 3.2.8 για τα δοθέντα $A$ και $m^{'}$.*

*Απόδειξη.* Όπως στο πρώτο μέρος της απόδειξης του Λήμματος 3.2.7,

$$\begin{aligned}\sum_{(n^{'},m^{'})\in A} x_{(n^{'},n^{'})} &= \sum_{n\in N} x_{(n,m)} = \sum_{n\in N}[x_{(n,m)} + x_{(n,m-1)} + x_{(n+1,m-1)}] \\ &\quad + \sum_{n\in N}[x_{(n,m-1)} + x_{(n+1,m-1)}] \pmod 2\end{aligned}$$

επειδή $x_{(n,m)} + x_{(n,m)} = 0 \pmod 2$ για κάθε $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$ για κάθε $x = (x_{(n,m)})_{(n,m)} \in \mathbb{Z}^2 \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$, και για $x \in H$ έχουμε ότι, $\pmod 2$,

$$\begin{aligned}\sum_{n\in N} x_{(n,m)} &= \sum_{n\in N}[x_{(n,m-1)} + x_{(n+1,m-1)}] = \sum_{n\in N} x_{(n,m-1)} + \sum_{n\in N+1} x_{(n,m-1)} \\ &= \sum_{n\in N\setminus(N+1)} x_{(n,m-1)} + \sum_{n\in N\cap(N+1)} x_{(n,m-1)} \\ &\quad + \sum_{n\in N\cap(N+1)} x_{(n,m-1)} + \sum_{n\in(N+1)\setminus N} x_{(n,m-1)} \\ &= \sum_{n\in N\triangle(N+1)} x_{(n,m-1)},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ισότητα ισχύει πάλι επειδή $x_{(n,m)}+x_{(n,m)} = 0 \pmod 2$ για κάθε $x = (x_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}^2}$. Θέτουμε πάλι $N^1 = N \triangle (N+1)$, και επαναλαμβάνοντας τα παραπάνω παίρνουμε ότι

$$\sum_{n\in N} x_{(n,m)} = \sum_{n\in N\triangle(N+1)} x_{(n,m-1)} = \sum_{n\in N^1} x_{(n,m-1)} = \sum_{n\in N^1\triangle(N+1)} x_{(n,m-2)} \pmod 2$$

και επαγωγικά εν τέλει ότι

$$\sum_{n\in N} x_{(n,m)} = \cdots = \sum_{n\in N^{m-m^{'}-1}\triangle(N^{m-m^{'}}+1)} x_{(n,m^{'})} = \sum_{n\in N^{m-m^{'}}} x_{(n,m^{'})} \pmod 2,$$

όπου $N^0 = N$ και $N^k = N^{k-1} \triangle (N^{k-1}+1), k \in \{1,2,\ldots,m-m^{'}\}$. Άρα $\gamma_A(x) = (-1)^{\sum_{n\in N_{m'}} x_{(n,m')}}$, όπου $N_{m'} = N^{m-m^{'}}$. Παρατηρούμε επίσης ότι $\min N^k = \min N^{k-1}$ και $\max N^k = \max N^{k-1} + 1$ για κάθε $k \in \{1,2,\ldots,m-m^{'}\}$, οπότε

$$\min N^{m-m^{'}} = \min N^0 = \min N = n_A$$

και $\max N^{m-m^{'}} = \max N^0 + m - m^{'} = \max N + m - m^{'}$, δηλαδή $\min N_{m'} = \min N = n_A$ και $\max N_{m'} = \max N + m - m^{'} = n^A + m_A - m_{'}$. □

**3.2.10 Πρόταση.** *Το σύστημα που διατηρεί το μέτρο $(H, \mathcal{B}(H), m, T)$ του πιο πάνω παραδείγματος, όπου $m$ είναι το μέτρο Haar της ομάδας $H$ και $T$ το shift, είναι mixing αλλά όχι mixing όλων των τάξεων.*

*Απόδειξη.* Από την Πρόταση 3.2.1 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_X \gamma_0(x)\gamma_1(g_n x)\, dm(x) \to \int_X \gamma_0(x)\, dm(x) \int_X \gamma_1(x)\, dm(x)$$

για $\gamma_1, \gamma_2$ χαρακτήρες της $G$. Από τη σχέση ορθογωνιότητας που ικανοποιούν οι χαρακτήρες έχουμε ότι

$$\int \gamma\, dm = \begin{cases} 1 & \text{αν γ=1} \\ 0 & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

για $\gamma$ χαρακτήρα της $G$. Άρα η σχέση αυτή ισχύει τετριμμένα όταν και οι δύο χαρακτήρες $\gamma_0, \gamma_1$ είναι ταυτοτικά ίσοι με 1. Έστω λοιπόν ότι ένας απο τους $\gamma_0, \gamma_1$ δεν είναι ο ταυτοτικά ίσος με 1 χαρακτήρας. Τότε το γινόμενο $\int \gamma_0\, dm \int \gamma_1\, dm = 0$. Άρα πρέπει να ισχύει και ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int \gamma_0\gamma_1 \circ T_n\, dm = 0.$$

Όμως το γινόμενο $\gamma_0\gamma_1 \circ T_n$ είναι, για κάθε $n \in \mathbb{Z}^2$, χαρακτήρας, αφού η σύνθεση χαρακτήρα με ομοιομορφισμό, όπως είναι ο $T_n$, είναι χαρακτήρας και το γινόμενο χαρακτήρων είναι χαρακτήρας. Άρα το ολοκλήρωμα $\int \gamma_0\gamma_1 \circ T_n\, dm$ είναι, για κάθε $n \in \mathbb{Z}^2$, ίσο με 0 ή 1, και είναι ίσο με 1 ανν ο χαρακτήρας $\gamma_0\gamma_1 \circ T_n$ είναι ταυτοτικά ίσος με 1. Επομένως για να τείνει η ακολουθία

$$\int \gamma_0\gamma_1 \circ T_n\, dm$$

στο 0, πρέπει να είναι ίση με 0 έξω από κάποιο φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{Z}^2$, γιατί για $\varepsilon = \frac{1}{2} > 0$, για παράδειγμα, υπάρχει ένα φραγμένο, έστω $N$, υποσύνολο του $\mathbb{Z}^2$ ώστε

$$\Big| \int \gamma_0\gamma_1 \circ T_n\, dm \Big| < \varepsilon \ \ \forall n \in \mathbb{Z}^2 \setminus N$$

και άρα αναγκαστικά

$$\int \gamma_0\gamma_1 \circ T_n\, dm = 0 \ \ \forall n \in \mathbb{Z}^2 \setminus N.$$

Όμως $\int \gamma_0\gamma_1 \circ T_n\, dm = 0$ ανν ο $\gamma_0\gamma_1 \circ T_n$ δεν είναι ο ταυτοτικά 1 χαρακτήρας, το οποίο δείχνει ότι

$$\int \gamma_0\gamma_1 \circ T_n = 1 \Longrightarrow n \in \mathbb{N}.$$

Επομένως

$$\lim_{n\to\infty} \int \gamma_0\gamma_1 \circ T_n\, dm = 0$$

ανν υπάρχει ένα φραγμένο υποσύνολο  του $\mathbb{Z}^2$ τέτοιο ώστε $\gamma_0\gamma_1 \circ T_n \neq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}^2 \setminus N$, ή ισοδύναμα

$$\lim_{n\to\infty} \int \gamma_0\gamma_1 \circ T_n \, dm = 0$$

ανν υπάρχει φραγμένο υποσύνολο $N$ του $\mathbb{Z}^2$ τέτοιο ώστε $\gamma_0\gamma_1 \circ T_n = 1 \Longrightarrow n \in \mathbb{N}$. Το σύνολο  εξαρτάται φυσικά κάθε φορά από τους χαρακτήρες $\gamma_0, \gamma_1$.

Έστω τώρα δύο χαρακτήρες $\gamma$ και $\gamma^{'}$ της $H$ και $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$. Έστω επίσης $T_{(k,l)}$ ο αυτομορφισμός της $G$ που δίνεται από την $T_{(k,l)}(x) = y$, όπου $y_{(n,m)} = x_{(n+k,m+l)}$ για κάθε $(n,m) \in \mathbb{Z}^2$.

Προφανώς $x \in H \Longrightarrow T_{(k,l)}(x) \in H$ και ο $T_{(k,l)}$ είναι αυτομορφισμός της $H$. Επιπλέον ο $T_{(k,l)}$ είναι συνεχής και εν τέλει ομοιομορφισμός (αφού η $T^{-1}_{(k,l)} = T(-k,-l)$ είναι επίσης συνεχής). Ειδικότερα, η συνάρτηση $\gamma \circ T_{(k,l)}$ είναι χαρακτήρας της $H$, επομένως

$$\langle \gamma, \gamma \circ T_{(k,l)} \rangle = \int \gamma \overline{(\gamma^{'} \circ T_{(k,l)})} \, d\lambda_H = \begin{cases} 1, & \text{αν } \gamma = \gamma^{'} \circ T_{(k,l)} \\ 0, & \text{αν } \gamma \neq \gamma^{'} \circ T_{(k,l)} \end{cases}$$

όπου $\lambda_H = m$ (το μέτρο Haar της $H$).

Υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα $A, A^{'} \subseteq F$ τέτοια ώστε $\gamma = \gamma_A$ και $\gamma = \gamma_{A^{'}}$, δηλαδή

$$\gamma(x) = (-1)^{\sum_{(n,m)\in A} x_{(n,m)}} \quad \text{και} \quad \gamma^{'}(x) = (-1)^{\sum_{(n,m^{'})\in A^{'}} x_{(n,m)}}$$

για $x = (x_{(n,m)})_{(n,m)\in\mathbb{Z}^2} \in H$.

Αν

$$m = \min\{m \in \mathbb{N} \cup \{0\} : \exists n \in \mathbb{Z} \text{ τ.ω. } (n,m) \in A \cup A^{'}\},$$

τότε από το Λήμμα 3.2.7, ή το γενικότερο Λήμμα 3.2.8, υπάρχουν μοναδικά σύνολα $B, B^{'} \subseteq \mathbb{Z}$ τέτοια ώστε

$$\gamma(x) = (-1)^{\sum_{n\in B} x_{(n,m)}} \quad \text{και} \quad \gamma^{'}(x) = (-1)^{\sum_{n\in B^{'}} x_{(n,m)}}.$$

για $x = (x_{(n^{'},m^{'})})_{(n^{'},m^{'})\in\mathbb{Z}^2} \in H$. Τότε

$$\gamma^{'} \circ T_{(k,l)}(x) = (-1)^{\sum_{n\in B^{'}} x_{n+k,m+l}} = (-1)^{\sum_{n\in B^{'}+k} x_{(n,m+l)}}.$$

Διακρίνουμε τώρα τρεις περιπτώσεις:

- $l = 0$. Τότε, όπως στην απόδειξη της μοναδικότητας στο Λήμμα 3.2.8, $\gamma = \gamma \circ T_{(k.l)}$, ανν $B = B^{'} + k$, και αυτό συμβαίνει μόνο αν $B \subseteq \{\min B^{'} + k, \min B^{'} + k + 1, \max B^{'} + k\}$ και $B^{'} + k \subseteq \{\min B, \min B + 1, \ldots, \max B\}$, ισοδύναμα μόνο αν

$$\{\min B, \min B + 1, \ldots, \max B\} = \{\min B^{'}, \min B^{'} + 1, \ldots, \max B^{'}\} + k.$$

- $l < 0$. Υπάρχει $B^{'} \subseteq \{\min B, \min B + 1, \dots, \max B + |l|\}$ τέτοιο ώστε

$$\gamma(x) = (-1)^{\sum_{n \in B^{''}} x_{(n,m+l)}},$$

όπως στο Λήμμα 3.2.7 ή το γενικότερο Λήμμα 3.2.8, και από το Λήμμα 3.2.9, $\min B^{''} = \min B$ και $\max B^{''} = \max B + |l|$. Τότε $\gamma = \gamma \circ T_{(k,l)}$ ανν $B^{''} = B^{'} + k$, το οποίο συμβαίνει πάλι μόνο αν

$$B^{''} \subseteq \{\min B^{'} + k, \min B^{'} + k + 1, \dots, \max B^{'} + k\}$$

και

$$B^{'} + k \subseteq \{minB^{''}, minB^{''} + 1, \dots, \max B^{''}\},$$

ισοδύναμα μόνο αν

$$\{\min B^{''}, minB^{''} + 1, \dots, \max B^{''}\} = \{\min B^{'}, \min B^{'} + 1, \dots, \max B^{'}\} + k,$$

και άρα μόνο αν

$$\{\min B, \min B + 1, \dots, \max B + |l|\} = \{\min B^{'}, \min B^{'} + 1, \dots, maxB^{'}\} + k.$$

Άρα μόνο αν $k = \min B - \min B^{'}$ και

$$l = \max B - maxB^{'} - k = \max B - \max B^{'} - \min B + \min B^{'}.$$

- $l > 0$. Όπως στο Λήμμα 3.2.8, υπάρχει

$$B^{''} \subseteq \{\min B^{'} + k, \min B^{'} + k + 1, \dots, \max B^{'} + k + |l|\}$$

τέτοιο ώστε

$$\gamma \circ T_{(k,l)}(x) = (-1)^{\sum_{n \in B^{''}} x_{(n,m)}}$$

και τότε $\gamma = \gamma \circ T_{(k,l)}$, ανν $B^{''} = B$. Η τελευταία ισότητα μπορεί να συμβεί μόνο αν

$$\{\min B^{''}, minB^{''} + 1, \dots, \max B^{''}\} = \{\min B, \min B + 1, \dots, \max B\}.$$

Από το Λήμμα 3.2.9 επίσης, πρέπει να έχουμε $\min B^{''} = \min B^{'} + k$ και $\max B^{''} = \max B^{'} + k + |l|$. Επομένως πρέπει πάλι να έχουμε $k = \min B - \min B^{'}$ και

$$l = \max B - \max B^{'} - k = \max B - \max B^{'} - \min B + \min B^{'}.$$

Έπεται τώρα ότι, αφού τα $B$ και $B^{'}$ είναι μονοσήμαντα ορσιμένα από τα $A$ και $A^{'}$, δηλαδή μονοσήμαντα ορισμένα από τα $\gamma$ και $\gamma^{'}$, τα ζευγάρια $(k,l) \in \mathbb{Z}^2$ για τα οποία $\gamma = \gamma \circ T_{(k,l)}$ είναι πεπερασμένα το πλήθος και επομένως $\langle \gamma, \gamma^{'} \circ T_{(k,l)} \rangle = 0$ εκτός από ένα πεπερασμένο το πλήθος σύνολο από $(k,l)$.

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη δείχνουμε ότι ο $T$ δεν είναι mixing σε τρία σύνολα. Από τη συνθήκη $x_n + x_{n+e_1} + x_{n+e_2} = 0$ έπεται ότι για κάθε $k$

$$x_{2^k e_2} = \sum_{j=0}^{2^k} \binom{2^k}{j} x_{je_1} = x_0 + x_{2^k e_1} \pmod 2. \tag{3.2.1}$$

Πράγματι, η (3.2.1) ισχύει για $k = 1$ και η γενική περίπτωση προκύπτει με επαγωγή. Ορίζουμε $A = \{x \in H : x_0 = 0\}$ και θεωρούμε τυχόν $x_* \in H$ με $x_0 = 1$. Τότε, ο $H$ είναι η ξένη ένωση των $A$ κα $A + x_*$, άρα

$$m(A) = m(A + x_*) = \frac{1}{2}.$$

Όμως, από την (3.2.1) έχουμε

$$x \in A \cap T_{-2^k e_1} A \implies x \in T_{-2^k e_2} A,$$

άρα

$$A \cap T_{-2^k e_1} A \cap T_{-2^k e_2}(A + x_*) = \varnothing$$

για κάθε $k \geq 1$, το οποίο σημαίνει ότι ο $T$ δεν είναι mixing σε τρία σύνολα ως προς το μέτρο Haar $m$. $\square$

# Κεφάλαιο 4

# Μέτρο Haar και κανονική αναπαράσταση

## 4.1 Μέτρο Haar

Σε αυτή την ενότητα εισάγουμε το φυσιολογικό μέτρο $m_G$ που ορίζεται στην Borel $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{B}_G$ μιας $\sigma$-τοπικά συμπαγούς μετρικής ομάδας $G$, το οποίο θα αντικαταστήσει το μέτρο απαρίθμησης στο $\mathbb{N}$ που χρησιμοποιούμε, για παράδειγμα, για να ορίσουμε εργοδικούς μέσους.

Το φυσιολογικό μέτρο είναι το αριστερά αναλλοίωτο μέτρο Haar $m_G$ στην $G$, το οποίο έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

1. $m_G(gB) = m_G(B)$ για κάθε $B \in \mathcal{B}_G$ και $g \in G$.

2. $m_G(K) < \infty$ για κάθε συμπαγές $K \subseteq G$.

3. $m_G(O) > 0$ για κάθε μη κενό ανοικτό $O \subseteq G$.

Όπως θα δούμε, το μέτρο $m_G$ είναι ουσιαστικά μοναδικό, με την εξής έννοια: Αν $\mu_1$ και $\mu_2$ είναι δύο μέτρα που έχουν τις παραπάνω τρεις ιδιότητες, τότε υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε $\mu_2 = c\mu_1$.

**4.1.1 Θεώρημα** (Haar). *Έστω $G$ μια $\sigma$-τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμη ομάδα. Τότε υπάρχει ένα αριστερό μέτρο Haar $m_G$ που έχει τις παραπάνω τρεις ιδιότητες.*

Δίνουμε την περιγραφή ενός επιχειρήματος για την ύπαρξη του μέτρου Haar. Για κάθε συμπαγές σύνολο $K \subseteq G$ και κάθε σύνολο $L$ με μη κενό εσωτερικό, ορίζουμε $[K : L]$ να είναι το ελάχιστο πλήθος αριστερών μεταφορών του $L$ που απαιτούνται για να καλύψουμε το $K$. Έστω $V$ μια μικρή περιοχή του ουδέτερου στοιχείου $e \in G$, και έστω $K_0$ κάποιο σταθερό συμπαγές σύνολο με μη κενό εσωτερικό. Παρατηρούμε ότι αν επιτρέψουμε το $V$ να γίνεται ολοένα και μικρότερη περιοχή (το οποίο είναι δυνατό εκτός εάν η $G$ είναι διακριτή, οπότε το μέτρο απαρίθμησης είναι μέτρο Haar) τότε περιμένουμε ότι η ποσότητα $[K : V]$ θα αποκλίνει στο άπειρο. Για το λόγο αυτό, κανονικοποιούμε ως προς το $K_0$ ορίζοντας

$$I_V(K) = \frac{[K : V]}{[K_0 : V]}$$

για κάθε συμπαγές $K \subseteq G$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $[gK : V] = [K : V]$ και

$$[K \cup K' : V] \leq [K : V] + [K' : V],$$

άρα η $K \mapsto I_V(K)$ είναι μια αριστερά αναλλοίωτη υποπροσθετική συνάρτηση ορισμένη στα συμπαγή υποσύνολα της $G$.

Δεν είναι δύσκολο να δώσουμε παραδείγματα που δείχνουν ότι η $I_V$ δεν είναι προσθετική για ξένα σύνολα. Ο λόγος είναι ότι η περιοχή $V$ μπορεί να είναι μεγάλη ώστε, για παράδειγμα, να καλύπτει δύο μικρά ξένα συμπαγή σύνολα $K_1$ και $K_2$ που έχουν μικρή απόσταση, οπότε

$$[K_1 : V] = [K_2 : V] = 1 = [K_1 \cup K_2 : V].$$

Για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία πρέπει να δουλέψουμε με μια ακολουθία $\{V_n\}$ που σχηματίζει βάση περιοχών του $e \in G$. Το συναρτησοειδές

$$I(K) = \lim_{n\to\infty} I_{V_n}(K)$$

(αν αποδεικνύαμε ότι ένα τέτοιο όριο υπάρχει) θα ήταν ο κατάλληλος υποψήφιος για να εξασφαλίσουμε την προσθετικότητα για ξένα συμπαγή σύνολα. Το επιχείρημα που ακολουθεί βασίζεται σε αυτή την ιδέα και δείχνει πώς μπορούμε να ξεπεράσουμε τη δυσκολία της προσθετικότητας.

Από την υπόθεση, το $K_0$ έχει μη κενό εσωτερικό, άρα $m = [K : K_0] < \infty$. Έστω

$$K \subseteq g_1K_0 \cup g_2K_0 \cup \cdots \cup g_mK_0$$

και

$$K_0 \subseteq h_1V \cup h_2V \cup \cdots \cup h_nV$$

βέλτιστες καλύψεις (ειδικότερα, $n = [K_0 : V]$). Τότε

$$K \subseteq g_1(h_1V \cup h_2V \cup \cdots \cup h_nV) \cup \cdots \cup g_m(h_1V \cup h_2V \cup \cdots \cup h_nV),$$

άρα $[K : V] \leq [K : K_0] \cdot [K_0 : V]$, ή ισοδύναμα $I_V(K) \leq [K : K_0]$. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι $[K_0 : V] \leq [K_0 : K] \cdot [K : V]$, άρα $\frac{1}{[K_0:K]} \leq I_V(K)$, με τη σύμβαση ότι $[K_0 : K] = \infty$ και $\frac{1}{[K:K_0]} = 0$ αν δεν μπορούμε να καλύψουμε το $K_0$ με πεπερασμένες το πλήθος μεταφορές του $K$. Με αυτή τη σύμβαση,

$$I_V \in \prod_{K\subseteq G} \left[\frac{1}{[K_0 : K]}, [K : K_0]\right] = \mathcal{R},$$

όπου το γινόμενο παίρνεται πάνω από όλα τα συμπαγή υποσύνολα της $G$, και ο χώρος $\mathcal{R}$ είναι συμπαγής από το θεώρημα Tychonoff (αυτός ο χώρος δεν είναι μετρικός εκτός εάν η $G$ είναι αριθμήσιμη). Έπεται ότι υπάρχει κάποιο σημείο συσσώρευσης $I$ του συνόλου $\{I_{V_n} : n \in \mathbb{N}\}$, και αυτό το σημείο συσσώρευσης είναι μια συνάρτηση που ορίζεται σε όλα τα συμπαγή υποσύνολα της $G$ και έχει την ιδιότητα ότι

$$I(K) \in \left[\frac{1}{[K_0 : K]}, [K : K_0]\right],$$

τέτοια ώστε για κάθε περιοχή $U$ της $I$ στην τοπολογία γινόμενο και κάθε $N$, υπάρχει $n > N$ ώστε $I_{V_n} \in U$. Έπεται ότι η $I$ είναι υποπροσθετική συνάρτηση, η οποία είναι προσθετική για ξένα συμπαγή σύνολα όπως δείχνει το ακόλουθο επιχείρημα: Αν $K$ και $K'$ είναι ξένα συμπαγή σύνολα τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, το

$$U = \{J \in \mathcal{R} : |J(K) - I(K) < \varepsilon, |J(K') - I(K')| < \varepsilon, |J(K \cup K') - I(K \cup K')| < \varepsilon\}$$

είναι μια περιοχή της $I$ στην τοπολογία γινόμενο του $\mathcal{R}$. Από την παραπάνω συζήτηση, για τα δοσμένα σύνολα $K, K'$ και για αρκετά μεγάλο $n$, η $I_{V_n}$ ικανοποιεί την

$$I_{V_n}(K \cup K') = I_{V_n}(K) + I_{V_n}(K').$$

Από την άλλη πλευρά, υπάρχουν οσοδήποτε μεγάλες τιμές του $n$ για τις οποίες $I_{V_n} \in U$, άρα

$$|I(K \cup K') - I(K) - I(K')| < 3\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$.

Από την προσθετικότητα για ξένα συμπαγή σύνολα και χρησιμοποιώντας επιχειρήματα παρόμοια με αυτά στην απόδειξη του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz, μπορούμε να δείξουμε ότι θέτοντας

$$m_G(O) = \sup\{I(K) : K \subseteq O, K \text{ συμπαγές}\}$$

και

$$m_G^*(B) = \inf\{m_G(O) : B \subseteq O, O \text{ ανοικτό}\}$$

παίρνουμε ένα μέτρο στα ανοικτά σύνολα και ένα εξωτερικό μέτρο σε όλα τα σύνολα αντίστοιχα. Ο περιορισμός αυτού του εξωτερικού μέτρου στην $\mathcal{B}_G$ μας δίνει ένα αριστερό μέτρο Haar στην $G$.

## 4.2 Μετροθεωρητική μεταβατικότητα και μοναδικότητα

Αποδεικνύουμε αρχικά τη μοναδικότητα του μέτρου Haar. Η απόδειξη θα βασιστεί στην επόμενη πρόταση, η απόδειξη της οποίας δεν χρησιμοποιεί τη μοναδικότητα του μέτρου Haar.

**4.2.1 Πρόταση.** *Έστω $G$ σ-τοπικά συμπαγής μετρικοποιήσιμη ομάδα και έστω $m_G$ αριστερό μέτρο Haar της $G$. Τότε για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(G)$ με $m_G(B_1)m_G(B_2) > 0$, το σύνολο*

$$O := \{g \in G : m_G(gB_1 \cap B_2) > 0\}$$

*είναι μη-κενό και ανοικτό υποσύνολο της $G$. Το ίδιο ισχύει και για το σύνολο $\{g \in G : m_G(B_1 g \cap B_2) > 0\}$. Επιπλέον, $m_G(B) > 0$ αν και μόνο αν $m_G(B^{-1}) > 0$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(G)$.*

*Απόδειξη.* Πρώτα δείχουμε ότι $m_G(B) > 0$ αν και μόνο αν $m_G(B^{-1}) > 0$ για κάθε $B \in \mathcal{B}(G)$. Έχουμε ότι

$$m_G(gB_1 \cap B_2) = \int_G \chi_{gB_1}(h)\chi_{B_2}\, dm_G(h) = \int_G \chi_{h_1 B_1^{-1}}(g)\chi_{B_2}(h)\, dm_G(h)$$

για $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(G)$. Αφού η $G$ είναι σ-τοπικά συμπαγής ομάδα έχουμε $G = \bigcup_{n=1}^{\infty} G_n$, όπου $G_n$ συμπαγές υποσύνολο της $G$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$B_1^N = \bigcup_{n=1}^{N}(B_1 \cap G_n), B_2^N = \bigcup_{n=1}^{N}(B_2 \cap G_n)$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$. Τότε οι $(B_1^N)_{N\in\mathbb{N}}, (B_2^N)_{N\in\mathbb{N}}$ είναι αύξουσες με

$$\bigcup_{N=1}^{\infty} B_1^N = B_1, \bigcup_{N=1}^{\infty} B_2^N = B_2.$$

Άρα έχουμε

$$m_G(gB_1^N \cap B_2^N) = \int_G \chi_{h(B_1^N)^{-1}}(g)\chi_{B_2^N}(h)\, dm_G(h) \text{ για κάθε } N \in \mathbb{N}.$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
\int_G m_G(gB_1^N \cap B_2^N))\, dm_G(g) &= \int_G \chi_{B_2^N}(h) \int_G \chi_{h(B_1^N)^{-1}}(g)\, dm_G(g) dm_G(h) \\
&= \int_G \chi_{B_2^N}(h) m_G(h(B_1^N)^{-1})\, dm_G(h) \\
&= \int_G \chi_{B_2^N}(h) m_G((B_1^N)^{-1})\, dm_G(h) \\
&= m_G(B_2^N) m_G((B_1^N)^{-1})
\end{aligned}$$

από το θεώρημα Fubini. Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης έχουμε ότι

$$\int_G m_G(gB_1 \cap B_2)\, dm_G(g) = \lim_{N\to\infty} m_G(B_2^N) m_G((B_1^N)^{-1})$$

δηλαδή,

$$m_G(G) m_G(gB_1 \cap B_2) = m_G(B_2) m_G(B_1^{-1})$$

για κάθε $B_1, B_2 \in \mathcal{B}(G)$. Θέτουμε $B_2 = G$. Άρα έχουμε

$$m_G(G)m_G(gB_1) = m_G(G)m_G(B_1^{-1})$$

δηλαδή

$$m_G(G)m_G(B_1) = m_G(G)m_G(B_1^{-1}).$$

Συνεπώς, $m_G(B_1) > 0$ αν και μόνο αν $m_G(B^{-1}) > 0$, για κάθε $B_1 \in \mathcal{B}(G)$. Επίσης, αν $O = \{g \in G : m_G(gB_1 \cap B_2) > 0\} = \varnothing$, τότε ισχύει ότι

$$0 = \int_G m_G(gB_1 \cap B_2)\, dm_G(g) = m_G(B_1^{-1})m_G(B_2) > 0$$

αφού $m_G(B_1) > 0$ αν και μόνο αν $m_G(B_1^{-1}) > 0$, το οποίο είναι άτοπο, οπότε $O \neq \varnothing$.

Θα δείξουμε ότι το $O$ είναι ανοικτό υποσύνολο της $G$. Έστω $g \in O$. Τότε $g \in G$ και $m_G(gB_1 \cap B_2) > 0$. Ισχύει ότι $B_1 = \bigcup_{n=1}^{\infty}(B_1 \cap G_n)$. Αν υποθέσουμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει ότι $m_G(gG_n \cap B_2) = 0$, τότε

$$\begin{aligned} 0 < m_G(gB_1 \cap B_2) &= m_G(g\bigcup_{n=1}^{\infty}(B_1 \cap G_n) \cap B_2) = m_G(\bigcup_{n=1}^{\infty} g(B_1 \cap G_n) \cap B_2) \\ &\leq m_G(\bigcup_{n=1}^{\infty}(gG_n \cap B_2)) \leq \sum_{n=1}^{\infty} m_G(gG_n \cap B_2) = 0, \end{aligned}$$

άτοπο. Άρα υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $m_G(gG_{n_0} \cap B_2) > 0$. Θέτουμε $\varepsilon = m_G(gG_{n_0} \cap B_2) > 0$. Τώρα έχουμε ότι

$$m_G(g_1G_{n_0} \cap B_2) = \int_G \chi_{g_1G_{n_0}}\chi_{B_2}\, dm_G = \int_G \chi_{G_{n_0}}(g_1^{-1}h)\chi_{B_2}(h)\, dm_G(h)$$

για $g_1 \in G$. Άρα αν θέσουμε $f = \chi_{G_n} \in L_m^1(X)$ στο Λήμμα 4.2.2 το οποίο αποδεικνύουμε αμέσως μετά, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} |m_G(gG_{n_0} \cap B_2) - m_G(g_1G_{n_0} \cap B_2)| &= \Big|\int_G (f(g^{-1}h) - f(g_1^{-1}h))\chi_{B_2}(h)\, dm_G(h)\Big| \\ &\leq \int_G |f(g^{-1}h) - f(g_1^{-1}h)|\, dm_G(h) \\ &= \|U_gf - U_{g_1}f\|_1. \end{aligned}$$

Επειδή η $g \longmapsto U_gf$ είναι συνεχής ως προς την $\|\cdot\|_1$ νόρμα, έχουμε ότι υπάρχει $V$ περιοχή του $e \in G$ (ουδέτερο στοιχείο της $G$) ώστε αν $g_1 \in gV$, τότε $\|U_gf - U_{g_1}f\|_1 < \varepsilon$. Οπότε έχουμε συνολικά

$$|m_G(gG_{n_0} \cap B_2) - m_G(g_1G_{n_0} \cap B_2)| < \varepsilon = m_G(gG_{n_0} \cap B_2)$$

ή ισοδύναμα

$$-m_G(gG_{n_0} \cap B_2) < m_G(gG_{n_0} \cap B_2) - m_G(g_1G_{n_0} \cap B_2) < m_G(gG_{n_0} \cap B_2).$$

Συνεπώς, $m_G(g_1 G_{n_0} \cap B_2) > 0$. Άρα $g_1 \in O$. Οπότε $gV \subseteq O$ και άρα το $O$ είναι ανοικτό υποσύνολο της $G$. Τέλος, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\{g \in G : m_G(B_1 g \cap B_2) > 0\} &= \{g \in G : m_G((B_1 g \cap B_2)^{-1}) > 0\} \\ &= \{g^{-1} \in G : m_G(g^{-1} B_1^{-1} \cap B_2^{-1}) > 0\} \\ &= \{g \in G : m_G(g^{-1} B_1^{-1} \cap B_2^{-1}) > 0\}^{-1}\end{aligned}$$

και αφού η $g \mapsto g^{-1}$ είναι συνεχής σε τοπολογικές ομάδες έπεται ότι το $\{g \in G : m_G(B_1 g \cap B_2) > 0\}$ είναι ανοικτό υποσύνολο της $G$. □

**4.2.2 Λήμμα.** *Έστω $G$ σ-τοπικά συμπαγής μετρική ομάδα που δρα με συνεχή τρόπο σε έναν τοπικά συμπαγή, σ-συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$. Έστω $\mu$ μέτρο Radon στον $X$ το οποίο είναι $G$-αναλλοίωτο. Τότε, για κάθε $p \geq 1$ και για κάθε $f \in L^p_\mu(X)$, η*

$$U_g f(x) = f(g^{-1}x)$$

*ορίζει $U_g f : X \to \mathbb{C}$ με $U_g f \in L^p_\mu(X)$ και $\|U_g f\|_p = \|f\|_p$. Επιπλέον, αν $f \in L^p_\mu(X)$ τότε η $g \longmapsto U_g f$ είναι συνεχής από την EGE στον $L^p_\mu(X)$ ως προς την $\|\cdot\|_p$ νόρμα.*

*Απόδειξη.* Αν $f \in L^p_\mu(X)$, τότε θέτοντας $y = g^{-1}x$ έχουμε

$$\int_X |f(g^{-1}x)|^p \, d\mu(x) = \int_{gX} |f(y)|^p \, d\mu(y) = \int_X |f(y)|^p \, d\mu(y)$$

γιατί το $\mu$ είναι $G$-αναλλοίωτο. Άρα $\|U_g f\|_p = \|f\|_p$ για κάθε $f \in L^p_\mu(X)$.

Θα δείξουμε ότι η $g \longmapsto U_g f$ είναι συνεχής ως προς την $\|\cdot\|_p$ νόρμα για τυχούσα $f \in L^p_\mu(X)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι $\overline{C_c(X)} = L^p_\mu(X)$. Άρα υπάρχει $f_0 \in C_c(X)$ ώστε $\|f - f_0\|_p < \varepsilon$. Αφού η $G$ είναι τοπικά συμπαγής, υπάρχει $V_0 \subseteq G$ περιοχή του $e \in G$ ώστε $V_0 = V_0^{-1}$ και $V_0$ συμπαγής. Θέτουμε $K = V_0 \cdot \mathrm{supp}(f_0)$ και αφού η δράση της $G$ στον $X$ είναι συνεχής έχουμε ότι το $K$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $X$. Η $f_0\big|_K$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε

$$d(x, y) < \delta \Longrightarrow |f_0(x) - f_0(y)| < \varepsilon / \mu(K)^{\frac{1}{p}}$$

για $x, y \in K$. Αν $x \in K$, τότε $gx \in K$. Άρα, από τη συνέχεια της δράσης της $G$, υπάρχει $V \subseteq V_0$ συμμετρική περιοχή του $e \in G$ ώστε αν $g \in V$ τότε $d(x, gx) < \delta$. Αν $g \in V$, τότε αφού η $V$ είναι συμμετρική έχουμε

$$d(x, g^{-1}x) < \delta \Longrightarrow |f_0(x) - f_0(g^{-1}x)| < \varepsilon / \mu(K)^{\frac{1}{p}}$$

και άρα

$$\int_K |f_0(x) - f_0(g^{-1}x)|^p < \varepsilon^p.$$

Επίσης, αν $x \notin K$, τότε αν $g^{-1}x \in \mathrm{supp}(f_0)$ έχουμε $x = g(g^{-1}x) \in K$ το οποίο είναι άτοπο για $g \in V$. Άρα για κάθε $g \in V$ έχουμε $g^{-1}x \notin \mathrm{supp}(f_0)$. Έπεται ότι $\|U_g f - U_g f_0\|_p = \|f - f_0\| < \varepsilon$ για κάθε $g \in V$. Συνεπώς,

$$\|f - U_g f\|_p \leq \|f - f_0\|_p + \|f_0 - U_g f_0\|_p + \|U_g f_0 - U_g f\|_p < 3\varepsilon.$$

Άρα για $g_0 \in G$ και $g \in g_0V$, θέτοντας $y = g_0^{-1}x$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\|U_{g_0}f_0 - U_g f_0\|_p &= \Big( \int_X |f_0(g_0^{-1}x) - f_0(g^{-1}x)|^p \, d\mu(x) \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big( \int_{g_0 X} |f_0(y) - f_0(g^{-1}g_0 y)|^p \, d\mu(y) \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \Big( \int_X |f_0(y) - U_{g_0^{-1}g} f_0(y)|^p \, d\mu(y) \Big)^{\frac{1}{p}} \\
&= \|f_0 - U_{g_0^{-1}g} f_0\|_p < \varepsilon
\end{aligned}$$

αφού το $\mu$ είναι $G$-αναλλοίωτο και $g_0^{-1}g \in V$. Άρα,

$$\|U_{g_0}f - U_g f\|_p \leq \|U_{g_0}f - U_{g_0}f_0\|_p + \|U_{g_0}f_0 - U_g f_0\|_p + \|U_g f_0 - U_g f\|_p < 3\varepsilon,$$

όπως θέλαμε. □

**4.2.3 Θεώρημα.** *Το μέτρο Haar $m_G$ μιας σ-τοπικά συμπαγούς μετρικοποιήσιμης ομάδας $G$ είναι μοναδικό αν αγνοήσουμε έναν πολλαπλασιαστικό παράγοντα. Ειδικότερα, κάθε συνεχής αυτομορφισμός ομάδων $\phi : G \to G$ ικανοποιεί την*

$$\phi_* m_G = \mathrm{mod}(\phi) m_G$$

*για κάποια σταθερά* $\mathrm{mod}(\phi) > 0$.

*Απόδειξη.* Έστω $m_1$ και $m_2$ δύο αριστερά αναλλοίωτα μέτρα Haar. Ορίζουμε $m = m_1 + m_2$, οπότε το $m$ είναι επίσης αριστερά αναλλοίωτο μέτρο Haar με την ιδιότητα ότι τα $m_1$ και $m_2$ είναι και τα δύο απολύτως συνεχή ως προς το $m$. Από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχουν μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2$ τέτοιες ώστε $dm_j = f_j dm$ για $j = 1, 2$. Θα δείξουμε ότι οι $f_1 \equiv c_1$ και $f_2 \equiv c_2$ είναι σταθερές, οπότε $m_1 = c_1 m$ και $m_2 = c_2 m$, άρα $m_2 = \frac{c_1}{c_2} m_1$ όπως θέλουμε.

Έστω ότι ο ισχυρισμός δεν ισχύει για την $f_1$. Τότε υπάρχουν δύο μετρήσιμα σύνολα $B_1, B_2 \subseteq G$ με θετικό $m$ μέτρο τέτοια ώστε $f_1(x_1) < f_1(x_2)$ για κάθε $x_1 \in B_1$ και $x_2 \in B_2$. Αυτό προκύπτει αν διαιρέσουμε το $\mathbb{R}^+$ σε διαστήματα $\big[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n}\big)$ και θεωρήσουμε τις αντίστροφες εικόνες τους μέσω της $f_1$. Αν η $f_1$ δεν είναι σταθερή πρέπει να υπάρχουν $n$ και $k_1 \neq k_2$ για τα οποία και οι δύο αντίστοιχες αντίστροφες εικόνες έχουν θετικό μέτρο. Από την Πρόταση 4.2.1 (την οποία εφαρμόζουμε για το $m_G = m$) υπάρχει κάποιο $g \in G$ τέτοιο ώστε $m_G(gB_1 \cap B_2) > 0$.

Έστω τώρα $E \subseteq G$ τυχόν μετρήσιμο σύνολο. Τότε

$$\int_E f_1(x)dm(x) = m_1(E) = m_1(g^{-1}E) = \int_{g^{-1}E} f_1 dm = \int_E f_1(gx)dm(x)$$

από τον ορισμό της $f_1$, το αριστερά αναλλοίωτο του $m_1$ και το αριστερά αναλλοίωτο του $m$. Αφού αυτό ισχύει για κάθε μετρήσιμο $E \subseteq G$, η μοναδικότητα της παραγώγου Radon-Nikodym δείχνει ότι $f_1(x) = f_1(gx)$ για $m$-σχεδόν κάθε $x$. Όμως, αν $x \in$

$B_1 \cap g^{-1}B_2$ τότε από την κατασκευή των $B_1$ και $B_2$ έχουμε ότι $f_1(x) < f_1(gx)$ και πάλι από την κατασκευή $m(B_1 \cap g^{-1}B_2) > 0$. Αυτή η αντίφαση δείχνει ότι $m_1 = c_1 m$ για κάποια σταθερά $c_1 > 0$ και από τη συμμετρία των $m_1$ και $m_2$ έπεται το πρώτο μισό του θεωρήματος.

Για το δεύτερο μισό του θεωρήματος, παρατηρούμε ότι αν $\phi : G \to G$ είναι ένας συνεχής αυτομορφισμός τότε το μέτρο $\phi_* m_G$ είναι επίσης αριστερά αναλλοίωτο, για τον εξής λόγο. Αν $B \subseteq G$ είναι ένα μετρήσιμο σύνολο και $g \in G$ τότε

$$\begin{aligned}\phi_* m_G(gB) &= m_G(\phi^{-1}(gB))\\ &= m_G(\phi^{-1}(g)\phi^{-1}(B))\\ &= m_G(\phi^{-1}(B))\\ &= \phi_* m_G(B).\end{aligned}$$

Επίσης, από την υπόθεση, το $\phi^{-1}(K)$ είναι συμπαγές (αντίστοιχα, το $\phi^{-1}(O)$ είναι ανοικτό) αν το $K$ είναι συμπαγές (αντίστοιχα, το $O$ είναι ανοικτό), άρα $0 < \mathrm{mod}(\phi) < \infty$. □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μια χρήσιμη πρόταση που εξασφαλίζει ότι αναλλοίωτα σύνολα modulo $\mu$ αν τροποποιηθούν κατά ένα μηδενικό σύνολο μπορούν να γίνουν αυστηρά αναλλοίωτα. Στο πλαίσιο των δράσεων ομάδων η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι κάπως πιο τεχνική, διότι η ομάδα που δρα μπορεί να είναι υπεραριθμήσιμη.

**4.2.4 Πρόταση.** *Έστω $G$ σ-συμπαγής μετρική ομάδα που δρα συνεχώς σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο $X$ διατηρώντας ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Τότε για κάθε $B \in \mathcal{B}$ τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

*(1) $\mu(gB \vartriangle B) = 0$ για κάθε $g \in G$.*

*(2) Υπάρχει $B' \in \mathcal{B} : \mu(B \vartriangle B') = 0$ και με $gB' = B'$ για κάθε $g \in G$.*

*Απόδειξη.* (2) $\Longrightarrow$ (1), προφανές.

(1) $\Longrightarrow$ (2). Έστω $G$ αριθμήσιμη ομάδα και $B \in \mathcal{B}$ με $0 = \mu(gB \vartriangle B)$ για κάθε $g \in G$. Θέτουμε $B' = \bigcap_{g\in G} gB \in \mathcal{B}$. Τότε

$$\begin{aligned}\mu(B \vartriangle B') &= \mu(B \setminus B') + \mu(B' \setminus B) = \mu(B \setminus B')\\ &= \mu\Big(\bigcup_{g\in G}(B \setminus gB)\Big) \leq \sum_{g\in G} \mu(B \setminus gB) = 0\end{aligned}$$

και

$$hB' = B', \text{ για κάθε } h \in G.$$

Αφού η $G$ είναι σ-συμπαγής μετρική ομάδα, υπάρχει $(G_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ ώστε $G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} G_n$ και το $G_n$ να είναι συμπαγές για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε αριθμήσιμο $D_n \subseteq G_n$ ώστε $\overline{D_n} = G_n$. Τότε το $D = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n$ είναι αριθμήσιμο και

$$G = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{D_n} \subseteq \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n} = \overline{D} \subseteq G.$$

Άρα $G = \overline{D}$.

Παίρνουμε $\overline{\langle D\rangle} = G$, όπου $\langle D\rangle$ η ομάδα που παράγεται από το $D$, η οποία είναι μάλιστα αριθμήσιμη. Θέτουμε $G^{'} = \langle D\rangle$. Έστω $B \in \mathcal{B}$ ώστε $\mu(gB \triangle B) = 0$ για κάθε $g \in G$. Τότε αφού η $G^{'}$ αριθμήσιμη, όπως πριν υπάρχει $B^{''} \in \mathcal{B}$ ώστε $\mu(B \triangle B^{''}) = 0$ και $hB^{''} = B^{''}$ για κάθε $h \in G^{'}$. Θέτουμε

$$B_x^{'} = \{g \in G : gx \in B^{''}\} \subseteq G, \;\text{ για κάθε } x \in G.$$

Αφού η $F_x : G \to X$ με $F_x(g) = gx$ για κάθε $x \in X$ είναι συνεχής, το $B_x = F_x^{-1}(B)$ είναι μετρήσιμο για κάθε $x \in X$. Επίσης έχουμε ότι

$$\begin{aligned} hB_x^{'} = \{hg \in G : gx \in B^{''}\} &= \{y \in G : h^{-1}yx \in B^{''}\} \\ &= \{y \in G : yx \in B\} \\ &= \{y \in G : yx \in B\} = B_x. \end{aligned}$$

Ισχυριζόμαστε ότι

$$\mu_G(B_x^{'}) = 0 \quad \text{ή} \quad \mu_G(G \setminus B_x^{'}) = 0.$$

Έστω ότι $\mu_G(B_x^{'}) > 0$ και $\mu_G(G \setminus B_x^{'}) > 0$. Τότε από την Πρόταση 4.2.1 έχουμε ότι το $O = \{g \in G : \mu_G(gB_x^{'} \setminus B_x^{'}) > 0\}$ είναι μη κενό και ανοικτό υποσύνολο της $G$. Άρα αφού $\overline{G^{'}} = G$, υπάρχει $h \in G^{'} \cap O$, δηλαδή $\mu_G(hB_x^{'} \setminus B_x^{'}) > 0$. Όμως $hB_x^{'} = B_x^{'}$, άτοπο.

Ορίζουμε τώρα

$$B^{'} = \{x \in X : \mu_G(B_x) > 0\} = \{x \in X : \mu_G(G \setminus B_x^{'}) = 0\}$$

και έστω $x \in B^{'}, h \in G$. Τότε

$$B_{hx}^{'} = \{g \in G : ghx \in B\} = \{yh^{-1} \in G : yx \in B\} = B_x^{-1}h^{-1}.$$

Ισχύει ότι

$$\begin{aligned} m_G(B_x^{'}) > 0 \iff m_G((B_x^{'})^{-1}) > 0 &\iff m_G(h(B_x^{'})^{-1}) \\ = m_G((B_x^{-1}h^{-1})^{-1}) > 0 &\iff \mu((B_x^{'})^{-1}h^{-1}) \\ = m_G(B_{hx}^{-1}) > 0. \end{aligned}$$

Άρα $hx \in B^{'}$ και $hB^{'} \subseteq B^{'}$ και λόγω του ότι ισχύει επιπλέον $h^{-1}B^{'} \subseteq B^{'} \Rightarrow B^{'} \subseteq hB^{'}$, έχουμε $hB^{'} = B^{'}$ για κάθε $g \in G$. Θα δείξουμε ότι το $B^{'}$ είναι μετρήσιμο και ότι $m_G(B^{''} \triangle B^{'}) = 0$. Αφού το $m_G$ είναι το μέτρο Haar της ομάδας $G$, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με $m_G(G_{n_0}) > 0$ και επιλέγουμε $U \subseteq G_{n_0} \subseteq G$ ανοικτό ώστε $+\infty > m_G(U) > 0$. Ορίζουμε

$$f(x) = \frac{1}{m_G(U)} \int_U x_B(gx)\, dm_G(g).$$

Θα δείξουμε ότι $f = \chi_{B'}$.

- Αν $x \in B^{'}$, τότε $m_G(B^{'}_x) > 0$ και $m_G(G \setminus B^{'}_x) = 0$. Άρα

$$
\begin{aligned}
f(x) =& \frac{1}{m_G(U)} \int_G \chi_{B''}(gx)\chi_U(g)\, dm_G(g) \\
=& \frac{1}{m_G(U)} \int_G \chi_{B'_x}(g)\chi_U(g)\, dm_G(g) \\
=& \frac{1}{m_G(U)} \int_G \chi_{B'_x \cap U}(g)\, dm_G(g) \\
=& \frac{m_G(B^{'}_x \cap U)}{m_G(U)}.
\end{aligned}
$$

Αφού $m_G(G \setminus B^{'}_x) = 0$, συμπεραίνουμε ότι $m_G(U \setminus B^{'}_x) = 0$. Άρα

$$
m_G(U) = m_G(U \cap B^{'}_x) + m_G(U \setminus B^{'}_x) = m_G(U \cap B^{'}_x).
$$

Άρα $f(x) = 1$ για $x \in B^{'}$.

- Αν $x \notin B^{'}$, τότε $m_G(B^{'}_x) = 0 \Rightarrow m_G(B^{'}_x \cap U) = 0$, άρα $f(x) = 0$ για $x \notin B^{'}$.

Οπότε $f = \chi_{B'}$ μετρήσιμη και έπεται ότι $B^{'} \in \mathcal{B}$ από το θεώρημα Fubini εφαρμοσμένο στο $U \times X$. Έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
\mu(B \triangle B^{'}) &= \mu(B \cup B^{'}) - \mu(B \cap B^{'}) \\
&= \mu(B) + \mu(B^{'}) - 2\mu(B \cap B^{'}).
\end{aligned}
$$

Άρα,

$$
\begin{aligned}
&\mu(B \triangle B^{'}) = \int_X (\chi_B + \chi_{B'} - 2\chi_B\chi_{B'}) d\mu \\
&= \int_X \Big( \chi_B + \frac{1}{m_G(U)} \int_U \chi_B(gx) dm_G(g) - 2\chi_B \cdot \frac{1}{m_G(U)} \int_U \chi_B(gx) dm_G(g) \Big) d\mu \\
&= \frac{1}{m_G(U)} \int_U \int_X \big( \chi_B + \chi_{g^{-1}B} - 2\chi_B\chi_{g^{-1}B} \big)\, d\mu\, dm_G(g) \\
&= \frac{1}{m_G(U)} \int_U \mu(B \triangle g^{-1}B)\, dm_G(g) = 0,
\end{aligned}
$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. □

# Κεφάλαιο 5

# Amenable ομάδες

## 5.1 Amenable ομάδες και ύπαρξη αναλλοίωτων μέτρων

Σύμφωνα με το θεώρημα Kryloff-Bogoliouboff, κάθε συνεχής $\mathbb{Z}$-δράση σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο έχει αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας. Μας ενδιαφέρει λοιπόν να περιγράψουμε εκείνες τις κλάσεις ομάδων που όλες οι συνεχείς δράσεις τους έχουν αναλλοίωτα μέτρα. Μια τέτοια κλάση ομάδων είναι οι amenable ομάδες. Έχουμε ήδη δώσει παραδείγματα ομάδων που δεν έχουν αυτή την ιδιότητα, οπότε ο ορισμός της amenabiity είναι μη-τετριμμένος. Η amenability μπορεί να οριστεί με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Για τους σκοπούς αυτής της εργασίας, για παράδειγμα προκειμένου να αποδείξουμε το μέσο εργοδικό θεώρημα, αλλά και για να μπορούμε να δουλέψουμε με γνωστές ομάδες, ο ορισμός που ακολουθεί είναι ο πιο εύχρηστος.

**5.1.1 Ορισμός.** Μια $\sigma$-τοπικά συμπαγής ομάδα $G$ λέγεται amenable αν για κάθε συμπαγές $K \subseteq G$ και κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $F \subseteq G$ μετρήσιμο με το $\overline{F}$ συμπαγές ώστε το $KF$ να είναι μετρήσιμο και

$$m_G(F \triangle KF) < \varepsilon m_G(F). \tag{5.1.1}$$

όπου $m_G$ είναι ένα αριστερό μέτρο Haar για την $G$.

Ένα σύνολο $F$ που ικανοποιεί την (5.1.1) λέγεται $(K, \varepsilon)$-αναλλοίωτο. Μια ακολουθία $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ συμπαγών υποσυνόλων της $G$ λέγεται ακολουθία Følner αν για κάθε $K$ συμπαγές και κάθε $\varepsilon > 0$ το $F_n$ είναι $(K, \varepsilon)$-αναλλοίωτο για κάθε $n \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο. Μπορούμε να δείξουμε ότι για κάθε $\sigma$-τοπικά συμπαγή amenable ομάδα $G$ υπάρχει ακολουθία Følner. Θεωρούμε μια αύξουσα ακολουθία συμπαγών συνόλων $K_n \nearrow G$ και εφαρμόζουμε τον ορισμό της amenability για να βρούμε συμπαγές $F_n$ το οποίο ικανοποιεί την (5.1.1) με $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$. Η ακολουθία $(F_n)$ είναι ακολουθία Følner για την $G$.

Ένας διαφορετικός χαρακτηρισμός της amenability μπορεί να δοθεί μέσω της ύπαρξης αναλλοίωτων μέτρων πιθανότητας για συνεχείς δράσεις. Αυτός ο χαρακτηρισμός γενικεύει απευθείας το θεώρημα Kryloff-Bogiliouboff. Θα χρειαστούμε μόνο τη μία κατεύθυνση αυτής της ισοδυναμίας, και παραλείπουμε την άλλη κατεύθυνση που δείχνει ότι μπορούμε ισοδύναμα να ορίσουμε την amenability με αυτόν τον τρόπο.

**5.1.2 Θεώρημα.** *Αν μια τοπικά συμπαγής ομάδα $G$ είναι amenable, τότε κάθε συνεχής δράση της $G$, $G \to \mathrm{Homeo}(X, d)$ σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$ έχει αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας.*

*Απόδειξη.* Κάθε συνεχής δράση της $G$ επάγει μια συνεχή δράση της $G$ στον χώρο $\mathcal{M}(X)$, ως εξής: $\nu \longmapsto g_*\nu, \nu \in \mathcal{M}(X), g \in G$. Έστω $\nu \in \mathcal{M}(X)$ και $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μια ακολουθία Følner στην $G$. Ορίζουμε

$$\mu_n = \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} g_*\nu \, dm_G(g).$$

Παρατηρούμε ότι αν $A \in \mathcal{B}$ τότε

$$\mu_n(A) = \int_X \chi_A \, d\mu_n$$

και

$$\begin{aligned}\frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} \int_X \chi_A(gx) \, d\nu(x) \, dm_G(g) &= \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} \nu(g^{-1}A) \, dm_G(g) \\ &= \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} g_*\nu(A) \, dm_G(g) = \mu_n(A).\end{aligned}$$

Συνεπώς, για κάθε $f \in C(X)$ έχουμε ότι

$$\int_X f \, d\mu_n = \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} \int_X f(gx) \, d\nu(x) \, dm_G(g).$$

Αφού ο $(\mathcal{M}(x), w^*)$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, υπάρχει $(\mu_{j_n})_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ώστε $\mu_{j_n} \to \mu$ με την $w^*$-τοπολογία καθώς $n \to \infty$ για κάποιο $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Θα δείξουμε ότι το $\mu$ είναι $G$-αναλλοίωτο. Έστω $f \in C(X)$ και $h \in G$. Τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_X f(hx) \, d\mu_{j_n}(x) &= \frac{1}{m_G(F_{j_n})} \int_{F_{j_n}} \int_X f(hgx) \, d\nu(x) \, dm_G(g) \\ &= \frac{1}{m_G(F_{j_n})} \int_{hF_{j_n}} \int_X f(gx) \, d\nu(x) \, dm_G(g).\end{aligned}$$

Άρα

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_X f(x)\,d\mu_{j_n}(x) - \int_X f(hx)\,d\mu_{j_n}(x)\Big| \\
&\quad = \Big|\frac{1}{m_G(F_{j_n})}\int_{F_{j_n}}\int_X f(gx)\,d\nu(x)\,dm_G(g) - \frac{1}{m_G(F_{j_n})}\int_{hF_{j_n}}\int_X f(gx)\,d\nu(x)\,dm_G(g)\Big| \\
&\quad = \Big|\frac{1}{m_G(F_{j_n})}\int_G\int_X f(gx)(\chi_{F_{j_n}}(g) - \chi_{hF_{j_n}}(g))\,d\nu(x)\,dm_G(g)\Big| \\
&\quad \le \frac{1}{m_G(F_{j_n})}\int_G\int_X |f(gx)||\chi_{F_{j_n}}(g) - \chi_{hF_{j_n}}(g)|\,d\nu(x)\,dm_G(g) \\
&\quad = \int_G\int_X |f(gx)|\cdot\chi_{F_{j_n}\triangle hF_{j_n}}(g)\,d\nu(x)\,dm_G(g) \\
&\quad = \frac{1}{m_G(F_{j_n})}\int_{F_{j_n}\triangle hF_{j_n}}\int_X |f(gx)|\,d\nu(x)\,dm_G(g) \\
&\quad \le \frac{1}{m_G(F_{j_n})}\int_{F_{j_n}\triangle hF_{j_n}}\int_X \|f\|_\infty\,d\nu\,dm_G \\
&\quad = \frac{1}{m_G(F_{j_n})}m_G(F_{j_n}\triangle hF_{j_n})\|f\|_\infty \to 0
\end{aligned}$$

αφού ο $(X,d)$ είναι συμπαγής, η $f$ είναι συνεχής και η $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία Følner.

Επιπλέον, $\mu_{j_n} \to \mu$ καθώς $n \to \infty$ με την $w^*$-τοπολογία, άρα

$$\int_X f(x)\,d\mu_{j_n} \to \int_X f(x)\,d\mu(x)$$

και

$$\int_X f(hx)\,d\mu_{j_n} \to \int_X f(hx)\,d\mu(x)$$

καθώς $n \to \infty$, αφού $f\circ h \in C(X)$ για κάθε $h \in G$. Άρα, για κάθε $f \in C(X)$ και $h \in G$ έχουμε

$$\begin{aligned}
&\Big|\int_X f(x)\,d\mu(x) - \int_X f(hx)\,d\mu(x)\Big| \\
&\qquad \le \Big|\int_X f(x)\,d\mu(x) - \int_X f(x)\,d\mu_{j_n}(x)\Big| + \Big|\int_X f(x)\,d\mu_{j_n}(x) - \int_X f(hx)\,d\mu_{j_n}(x)\Big| \\
&\qquad + \Big|\int_X f(hx)\,d\mu_{j_n}(x) - \int_X f(hx)\,d\mu(x)\Big| \to 0.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_X f(x)\,d\mu(x) = \int_X f(hx)\,d\mu(x) = \int_X f(x)\,dh_*\mu(x)$$

για κάθε $f \in C(X)$, άρα $\mu = h_*\mu$ για κάθε $h \in G$, οπότε το $\mu$ είναι $G$-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας. $\square$

Οι αβελιανές ομάδες είναι amenable. Δεδομένου ότι δεν χρειαζόμαστε αυτόν ακριβώς τον ισχυρισμό αλλά περισσότερο τη συνέπεια που μας δίνει το Θεώρημα 5.1.2, δείχνουμε ότι οι αβελιανές ομάδες έχουν την ιδιότητα ότι κάθε συνεχής δράση τους έχει αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας, μια ιδιότητα που είδαμε ότι έχουν όλες οι amenable ομάδες.

**5.1.3 Θεώρημα.** *Αν η $G$ είναι αβελιανή τοπικά συμπαγής ομάδα τότε κάθε συνεχής δράση της $G$ στον συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$ έχει αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας.*

*Απόδειξη.* Για κάθε $g \in G, n \geq 0$ ορίζουμε $A_{n,g} : \mathcal{M}(X) \to \mathcal{M}(X)$ ως εξής:

$$A_{n,g}(\mu) = \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_*^j \mu \in \mathcal{M}(X)$$

γιατί το $\mathcal{M}(X)$ είναι κυρτό. Παίρνουμε ως $(A_G, \circ)$ την ημιομάδα που παράγεται από το σύνολο $\{A_{n,g} : n \geq 0, g \in G\}$. Κάθε $A \in A_G$ γράφεται ως εξής: $A = A_{n_1, g_1^{k_1}} \circ \cdots \circ A_{n_s, g_s^{k_s}}, s \in \mathbb{N}$. Άρα η $A$ είναι συνεχής. Συνεπώς το $A(\mathcal{M}(X))$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{M}(X)$.

Έστω $r \in \mathbb{N}$ και $A_1, \ldots, A_r \in A_G$. Θέτουμε $A = A_1 \circ \cdots \circ A_r$. Τότε

$$A(\mathcal{M}(X)) = A_i\Big(A_1 \circ \cdots \circ A_{i-1} \circ A_{i+1} \circ \cdots \circ A_r(\mathcal{M}(X))\Big) \subseteq A_i(\mathcal{M}(X))$$

για κάθε $i = 1, \ldots, r$, αφού η $G$ είναι αβελιανή. Άρα,

$$\bigcap_{i=1}^{r} A_i(\mathcal{M}(X)) \supseteq A(\mathcal{M}(X)) \neq \varnothing.$$

για κάθε $r \in \mathbb{N}$. Από τη συμπάγεια του $\mathcal{M}(X)$ έπεται ότι $\bigcap_{A \in A_G} A(\mathcal{M}(X)) \neq \varnothing$. Άρα υπάρχει $\mu^* \in \bigcap_{A \in A_G} A(\mathcal{M}(X))$ για κάθε $g \in G$ και $n \geq 0$. Υπάρχει $\mu \in \mathcal{M}(X)$ ώστε $\mu^* = A_{n,g}(\mu)$, άρα

$$\begin{aligned}
\mu^* - g_*\mu^* &= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_*^j \mu - g_* \left( \frac{1}{n} \sum_{n=0}^{n-1} g_*^j \mu \right) \\
&= \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_*^j \mu - \frac{1}{n} \sum_{j=0}^{n-1} g_*^{j+1} \mu = \frac{1}{n}(\mu - g_*^n \mu).
\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|\mu^* - g_*\mu^*\| = |\mu^* - g_*\mu^*|(X) \leq \frac{1}{n}(\|\mu\| + \|g_*^n \mu\|) \leq \frac{2}{n}$$

για κάθε $n \geq 1$. Άρα $\mu^* = g_*\mu^*$ για κάθε $g \in G$, οπότε το $\mu^*$ είναι $G$-αναλλοίωτο. □

Οι συμπαγείς ομάδες είναι επίσης amenable, δηλαδή ικανοποιούν τον Ορισμό 5.1.1 που έχουμε δώσει. Στο επόμενο λήμμα δίνουμε απευθείας απόδειξη του ότι κάθε συνεχής δράση τους έχει αναλλοίωτο μέτρο.

**5.1.4 Λήμμα.** *Αν η $G$ είναι συμπαγής τοπολογική ομάδα τότε κάθε συνεχής δράση της $G$ έχει αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας.*

*Απόδειξη.* Έστω $x \in X$. Ορίζουμε $\phi : G \to X : \phi(g) = gx$ για κάθε $g \in G$. Αν $m_G$ είναι το μέτρο Haar της $G$, τότε το $\phi_*(m_G)$ είναι αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας. Πράγματι,

$$\phi_*(m_G)(X) = m_G(\phi^{-1}(X)) = m_G(\{g \in G : gx \in X\}) = m_G(G) = 1$$

και

$$\begin{aligned}\phi_*(m_G)(hA) &= m_G(\phi^{-1}(hA)) = m_G(\{g \in G : gx \in hA\}) \\ &= m_G(\{g \in G : h^{-1}gx \in A\}) = m_G(h\{y \in G : yx \in A\}) \\ &= m_G(\{y \in G : yx \in A\}) = \phi_*(m_G)(A)\end{aligned}$$

για κάθε $h \in G$. □

## 5.2 Μέσο εργοδικό θεώρημα για amenable ομάδες

Οι ακολουθίες Følner μας επιτρέπουν να σχηματίσουμε εργοδικούς μέσους και μπορούμε να αποδείξουμε μέσα και κατά σημείο εργοδικά θεωρήματα αν κάνουμε κατάλληλες υποθέσεις για τις δράσεις amenable ομάδων που διατηρούν το μέτρο. Στο βασικό αποτέλεσμα αυτής της ενότητας θεωρούμε το ολοκλήρωμα συναρτήσεων που ορίζονται σε μια ομάδα και παίρνουν τιμές στον χώρο Hilbert $L^2_\mu(X)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την επαγόμενη unitary αναπαράσταση της $G$ που ορίζεται μέσω της

$$U_g(f)(x) = f(g^{-1} \cdot x)$$

για κάθε $x \in X$. Αφού έχουμε υποθέσει ότι κάθε στοιχείο της $G$ διατηρεί το μέτρο $\mu$ στη δράση του στον $X$, γνωρίζουμε ότι ο $U_g : L^2_\mu \to L^2_\mu$ είναι unitary. Επιπλέον, αν $g, h \in G$ τότε από τον ορισμό έχουμε

$$\begin{aligned}U_h(U_g(f))(x) &= U_g(f)(h^{-1} \cdot x) = f(g^{-1}h^{-1} \cdot x) = f((hg)^{-1} \cdot x) \\ &= U_{hg}(f)(x),\end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει ότι η $g \mapsto U_g$ για $g \in G$ ορίζει μια δράση της $G$ στον $L^2_\mu$. Χρησιμοποιούμε τον αντίστροφο στον ορισμό της $U_g$ ακριβώς για να εξασφαλίσουμε ότι αυτή η απεικόνιση είναι πράγματι μια δράση.

**5.2.1 Θεώρημα.** *Έστω $G$ μια $\sigma$-συμπαγής amenable ομάδα με αριστερό μέτρο Haar $m_G$, η οποία δρα συνεχώς στον $(X, \mathcal{B}, \mu)$, όπου $\mu$ ένα $G$-αναλλοίωτο Borel μέτρο πιθανότητας στον $X$. Έστω $P_G$ η ορθογώνια προβολή στον κλειστό υπόχωρο*

$$I = \{f \in L^2_\mu(X) : U_g(f) = f \text{ για κάθε } g \in G\} \subseteq L^2_\mu(X).$$

*Τότε για κάθε ακολουθία Følner και $f \in L^2_\mu(X)$ ισχύει:*

$$\frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} U_{g^{-1}} f \, dm_G(g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P_G f$$

*στον $L^2_\mu$. Συνεπώς, η δράση είναι εργοδική αν και μόνο αν*

$$\frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} U_{g^{-1}} \, dm_G(g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_X f \, d\mu$$

*για κάθε $f \in L^2_\mu(X)$.*

*Απόδειξη.* Ορίζουμε $u : X \to \mathbb{C}$ με $u(x) = v(hx) - v(x)$ για κάθε $x \in X$, όπου $v \in L^2_\mu(X)$ και $h \in G$. Δηλαδή, $u = U_{h^{-1}} v - v$. Τότε,

$$\int_{F_n} U_{g^{-1}} U_{h^{-1}} v \, dm_G(g) = \int_{F_n} U_{(hg)^{-1}} v \, dm_G(g) = \int_{hF_n} U_{g^{-1}} v \, dm_G(g).$$

Οπότε,

$$\begin{aligned}
&\Big\| \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} U_{g^{-1}} u \, dm_G(g) \Big\|_2 \\
&\quad = \Big\| \frac{1}{m_G(f_n)} \Big( \int_{F_n} U_{g^{-1}} U_{h^{-1}} v \, dm_G(g) - \int_{F_n} U_{g^{-1}} v \, dm_G(g) \Big) \Big\|_2 \\
&\quad = \Big\| \frac{1}{m_G(f_n)} \Big( \int_{hF_n} U_{g^{-1}} v \, dm_G(g) - \int_{F_n} U_{g^{-1}} v \, dm_G(g) \Big) \Big\|_2 \\
&\quad = \Big\| \frac{1}{m_G(f_n)} \int_G U_{g^{-1}} v (\chi_{hF_n}(g) - \chi_{F_n}(g)) \, dm_G(g) \Big\|_2 \\
&\quad \le \frac{1}{m_G(F_n)} \int_G \|U_{g^{-1}} v\|_2 \|\chi_{hF_n \triangle F_n}(g)\|_2 \, dm_G(g) \\
&\quad = \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{hF_n \triangle F_n} \|U_{g^{-1}} v\|_2 \, dm_G(g) \\
&\quad = \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{hF_n \triangle F_n} \|v\|_2 \, dm_G(g) \\
&\quad = \frac{m_G(hF_n \triangle F_n)}{m_G(F_n)} \|v\|_2 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Θέτουμε

$$V = \mathrm{cl}_{\|\cdot\|_2} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i u_i : n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{C}, u_i = U_{h_i^{-1}} v_i - v_i, v_i \in L^2_\mu(X), h_i \in G \Big\}.$$

Αν $f \in V$, τότε υπάρχει $u_m = \sum_{i=1}^{n_m} a_i(m) u_i(m)$, $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f - u_m\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ και λόγω των παραπάνω έχουμε ότι υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \ge n_0, n \in \mathbb{N}$

$$\Big\| \frac{1}{m_G(F_n)} \int_{F_n} U_{g^{-1}} u_m \, dm_G(g) \Big\|_2 < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} U_{g^{-1}} f \, dm_G(g)\Big\|_2 \\
&\leq \Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} U_{g^{-1}}(f-u_m) \, dm_G(g)\Big\|_2 + \Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} U_{g^{-1}}(u_m) \, dm_G(g)\Big\|_2 \\
&\leq \frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} \|f-u_m\|_2 \, dm_G(g) + \Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} U_{g^{-1}}(u_m) \, dm_G(g)\Big\|_2 \\
&< \frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon
\end{aligned}$$

για κάθε $n \geq n_0$, από την ανισότητα Minkowski. Θα δείξουμε ότι $L^2_\mu = V \oplus I$, δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι $I = V^\perp$. Αν $u \perp V$, δηλαδή $u \in V^\perp$, τότε για κάθε $v \in L^2_\mu, g \in G$ έχουμε ότι $\langle u, U_g v - v\rangle = 0$. Άρα $\langle u, U_g v\rangle = \langle u, v\rangle$ για κάθε $g \in G, v \in L^2_\mu$. Οπότε $\langle (U_g)^* u, v\rangle = \langle u, v\rangle$ για κάθε $g \in G, v \in L^2_\mu$. Άρα, $(U_g)^* u = u$ για κάθε $g \in G$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
\|U_g u - u\|_2 &= \langle U_g u - u, U_g u - u\rangle = \|U_g u\|_2^2 - \langle u, U_g u\rangle - \langle U_g u, u\rangle + \|u\|^2 \\
&= 2\|u\|_2^2 - \langle (U_g)^* u, u\rangle - \langle u, (U_g)^* u\rangle = 2\|u\|_2^2 - 2\|u\|_2^2 = 0
\end{aligned}$$

αφού $U_g u = u$ για κάθε $g \in G$. Άρα $U_g u = u$ για κάθε $g \in G$ και έπεται ότι $u \in I$. Συνεπώς, $V^\perp \subseteq I$. Θα δείξουμε ότι $I \subseteq V^\perp$. Αν $u \in I$, τότε για κάθε $g \in G$ έχουμε $U_g u = u$. Θα δείξουμε ότι $\langle u, U_h v - v\rangle = 0$ για κάθε $h \in G, v \in L^2_\mu$. Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\langle u, U_h v - v\rangle &= \langle u, U_h v\rangle - \langle u, v\rangle = \langle U_h u, U_h u\rangle - \langle u, v\rangle \\
&= \langle u, v\rangle - \langle u, v\rangle = 0.
\end{aligned}$$

Οπότε, $u \in V^\perp$. Άρα $I = V^\perp$. Τελικά $L^2_\mu = V \oplus I$.

Έστω $f \in L^2_\mu(X)$. Θα δείξουμε ότι $f = f_1 + f_2$, όπου $f_1 \in V$ και $f_2 \in I$ κατά μοναδικό τρόπο. Θα δείξουμε ότι $f_2 = P_G(f)$. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $h \in L^2_\mu(X)$ ισχύει $\langle P_G(f), h\rangle = \langle f_2, h\rangle$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|f_2 - P_G(f)\|_2^2 &= \langle f_2 - P_G(f), f_2 - P_G(f)\rangle = \langle f - f_1 - P_G(f), f_2 - P_G(f)\rangle \\
&= \langle f - P_G(f), f_2 - P_G(f)\rangle - \langle f_1, f_2 - P_G(f)\rangle \\
&= \langle f - P_G(f), f_2\rangle - \langle f - P_G(F), P_G(f)\rangle - \langle f_1, f_2\rangle + \langle f_1, P_G(f)\rangle \\
&= 0 - \langle f - P_G(f), P_G(f)\rangle + \langle f_1, P_G(f)\rangle = \langle f_1, P_G(f)\rangle = 0,
\end{aligned}$$

άρα $f_2 = P_G(f)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
&\left\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} U_{g^{-1}} f \, dm_G(g) - P_G(f)\right\|_2 \\
&\qquad = \left\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} U_{g^{-1}}(f_1+f_2)\, dm_G(g) - f_2\right\|_2 \\
&\qquad = \left\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} (U_{g^{-1}}(f_1+f_2) - f_2)\, dm_G(g)\right\|_2 \\
&\qquad \le \left\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} (U_{g^{-1}}(f_2) - f_2)\, dm_G(g)\right\|_2 + \left\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} U_{g^{-1}}(f_1)\, dm_G(g)\right\|_2 \\
&\qquad \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} U_{g^{-1}} f \, dm_G(g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} P_G(f)$$

ως προς την $\|\cdot\|_2$ νόρμα. Αν η δράση της $G$ είναι εργοδική, τότε αφού $f_2 = P_G(f) \in I$, έχουμε $U_g(P_G(f)) = P_G(f)$ για κάθε $g \in G$. Άρα η $P_G(f)$ είναι $G$-αναλλοίωτη, οπότε σταθερή $\mu$-σ.π., λόγω εργοδικότητας. Άρα, $P_G(f) = f_2 = c =$ σταθερά $\mu$-σ.π. Άρα,

$$\int_X f_2 \, d\mu = c = \int_X (f - f_1)\, d\mu$$

και

$$\int_X f\, d\mu = \int_X (f-f_2)\, d\mu + \int_X f_2\, d\mu = \langle f - f_2, \chi_X\rangle + \int_X f_2 \, d\mu = c.$$

Όμως $\langle f - f_2, \chi_X\rangle = 0$, γιατί $\chi_X \in I$. Οπότε $P_G(f) = \int_X f\, d\mu$. □

Το Θεώρημα 5.2.1 έχει ως συνέπεια ένα μέσο εργοδικό θεώρημα στον $L^1$, όπως ακριβώς συμβαίνει και στην κλασική θεωρία.

**5.2.2 Πόρισμα.** *Έστω $G$ μια τοπικά συμπαγής amenable ομάδα με αριστερό μέτρο Haar $m_G$ που δρα συνεχώς στον $(X, \mathcal{B}, \mu)$, όπου $\mu$ $G$-αναλλοίωτο Borel μέτρο πιθανότητας. Τότε για κάθε ακολουθία Følner $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ και για κάθε $f \in L^2_\mu(X)$ ισχύει*

$$\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} f \circ g \, dm_G(g) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})$$

*ως προς την $\|\cdot\|_1$ νόρμα, όπου $\mathcal{E}$ η $\sigma$-άλγεβρα των $G$-αναλλοίωτων συνόλων.*

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι $\overline{L^2}^{\|\cdot\|_1} = L^1$. Έστω $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$ και $\varepsilon > 0$. Θέτουμε

$$f_n = \begin{cases} f, & |f| \le n \\ 0, & \text{αλλιώς} \end{cases}$$

και έχουμε $|f_n - f| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Επίσης, $|f_n - f| \leq 2|f|$, με $2|f| \in L^1$. Άρα, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, $\|f_n - f\|_1 \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Όμως $f_n \in L^2$, γιατί

$$\|f_n\|_2^2 = \int_X |f_n|^2 \, d\mu \leq \int_{\{x\in X : |f(x)|\leq n\}} |f|^2 \, d\mu \leq \int_X n^2 \, d\mu = n^2 < +\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Οπότε υπάρχει $h \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$ τέτοια ώστε $\|f - h\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}$. Από το προηγούμενο θεώρημα έχουμε ότι υπάρχει $n_0(\varepsilon) = n_0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ με $n \geq n_0$

$$\Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} h\circ g \, dm_G(g) - \mathbb{E}(h \mid \mathcal{E})\Big\|_1 \leq \Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} h\circ g \, dm_G(g) - \mathbb{E}(h \mid \mathcal{E})\Big\|_2$$
$$= \Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} h\circ g \, dm_G(g) - P_G(h)\Big\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}$$

γιατί $\mathbb{E}(h \mid \mathcal{E}) = P_G(h)$ $\mu$-σ.π. αφού

$$\int_A \mathbb{E}(h \mid \mathcal{E}) \, d\mu = \int_A h \, d\mu = \int_A P_G(h) \, d\mu + \langle h_2, \chi_A \rangle = \int_A P_G(h) \, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{E}$, επειδή $\chi_A \circ g = \chi_{g^{-1}A} = \chi_A$ για κάθε $g \in G$ και $h_2 \in I^{\perp}$. Επίσης ισχύει ότι

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} f\circ g \, dm_G(g) - \frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} h\circ g \, dm_G(g)\Big\|_1 \\
&= \Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} (f\circ g - h\circ g) \, dm_G(g)\Big\|_1 \\
&\leq \frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} \|f\circ g - h\circ g\|_1 \, dm_G(g) \\
&= \frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} \|f - h\|_1 \, dm_G(g) = \|f - h\|_1
\end{aligned}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τέλος,

$$\begin{aligned}
\|\mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}) - \mathbb{E}(h \mid \mathcal{E}\|_1 &= \int_X |\mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}) - \mathbb{E}(h \mid \mathcal{E})| \, d\mu \\
&= \int_X |\mathbb{E}(f - h) \mid \mathcal{E}| \, d\mu \\
&\leq \int_X \mathbb{E}(|f - h| \mid \mathcal{E}) \, d\mu = \int_X |f - h| \, d\mu = \|f - h\|_1.
\end{aligned}$$

Οπότε συνολικά έχουμε

$$\begin{aligned}
&\Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} f\circ g \, dm_G(g) - \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})\Big\|_1 \\
&\leq \Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} f\circ g \, dm_G(g) - \frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} h\circ g \, dm_G(g)\Big\|_1 \\
&+ \Big\|\frac{1}{m_G(F_n)}\int_{F_n} h\circ g \, dm_G(g) - \mathbb{E}(h \mid \mathcal{E})\Big\|_1 + \|\mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}) - \mathbb{E}(h \mid \mathcal{E})\|_1 < \varepsilon
\end{aligned}$$

για κάθε $n \geq n_0$. □

**5.2.3 Σημείωση.** Θεωρούμε τις $\sigma$-άλγεβρες $\mathcal{B}^g = \{B \in \mathcal{B} : \mu(gB \bigtriangleup B) = 0\}$ και $\mathcal{E}^g = \{B \in \mathcal{B} : gB = B\}$, όπου $g \in G$. Θα δείξουμε ότι $\mathbb{E}(f|\mathcal{B}^g) = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}^g)$ $\mu$-σ.π. αν $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Έχουμε $\mathcal{E}^g \subseteq \mathcal{B}^g$ για κάθε $g \in G$. Έστω $B \in \mathcal{B}^g$, δηλαδή $\mu(gB \bigtriangleup B) = 0$. Από την Πρόταση 4.2.4 υπάρχει $B' \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $\mu(B \bigtriangleup B') = 0$ και $gB' = B'$. Άρα

$$\begin{aligned}
\int_B \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}^g)\, d\mu &= \int_{B\cap B'} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}^g)\, d\mu + \int_{B\setminus B'} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}^g)\, d\mu \\
&\overset{\mu(B\setminus B')=0}{=\!=\!=} \int_{B\cap B'} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}^g)\, d\mu \\
&\overset{\mu(B'\setminus B)=0}{=\!=\!=} \int_{B\cap B'} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}^g)\, d\mu + \int_{B'\setminus B} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}^g)\, d\mu \\
&= \int_{B'} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}^g)\, d\mu \\
&\overset{B'\in\mathcal{E}^g}{=\!=\!=} \int_{B'} f\, d\mu = \int_{B\cap B'} f\, d\mu \\
&\overset{B\cap B'\in\mathcal{B}^g}{=\!=\!=} \int_{B\cap B'} \mathbb{E}(f|\mathcal{B}^g)\, d\mu \\
&= \int_B \mathbb{E}(f|\mathcal{B}^g)\, d\mu = \int_B f\, d\mu.
\end{aligned}$$

Άρα $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}^g) = \mathbb{E}(f|\mathcal{B}^g)$ $\mu$-σ.π.. Αν $C = \{B \in \mathcal{B} : \mu(gB \bigtriangleup B) = 0, \forall g \in G\}$ και $\mathcal{E} = \{B \in \mathcal{B} : gB = B, \forall g \in G\}$ αποδεικνύουμε με τον ίδιο τρόπο ότι $\mathbb{E}(f|C) = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})$ $\mu$-σ.π. για $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$.

Θα δείξουμε ότι $\mathbb{E}(f|C) = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})$ $\mu$-σ.π. $G$-αναλλοίωτες. Θέτουμε

$$D = \{x \in X : \mathbb{E}(f|C)(x) = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})(x)\}$$

και έστω ότι υπάρχει $x \in D$ ώστε $\mathbb{E}(f|C)(x) \neq \mathbb{E}(f|C)(gx)$ για κάποιο $g \in G$. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι έχουμε πραγματικές τιμές (για μιγαδικές τιμές είναι ανάλογο). Όμως

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(f|C)^{-1}((-\infty, \mathbb{E}(f|C)(gx))) &= g^{-1}\mathbb{E}(f|C)^{-1}((-\infty, \mathbb{E}(f|C)(gx))) \\
&\iff \{y \in X : \mathbb{E}(f|C)(y) < \mathbb{E}(f|C)(gx) \\
&= \{g^{-1}y \in X : \mathbb{E}(f|C)(y) < \mathbb{E}(f|C)(gx)\} \\
&= \{y \in X : \mathbb{E}(f|C)(gy) < \mathbb{E}(f|C)(gx)\} = A.
\end{aligned}$$

Άρα $x \in D \subseteq X$ και $\mathbb{E}(f|C)(gx) < \mathbb{E}(f|C)(gx)$. Οπότε $x \in A$, άρα $\mathbb{E}(f|C)(x) < \mathbb{E}(f|C)(gx)$, άτοπο.

# Κεφάλαιο 6

# Κατά σημείο εργοδικά θεωρήματα

## 6.1 Ροή

**6.1.1 Ορισμός.** Έστω $(X, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας. Ροή είναι μια οικογένεια $\{T_t : t \in \mathbb{R}\}$ από μετρήσιμους μετασχηματισμούς του $(X, \mathcal{B}, \mu)$ που ικανοποιούν την ταυτότητα $T_s \circ T_t = T_{s+t}$ για κάθε $s, t \in \mathbb{R}$ και με $T_0 = id_X$. Λέμε ότι η ροή διατηρεί το μέτρο αν η $T_t$ διατηρεί το μέτρο $\mu$ για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και ότι είναι μετρήσιμη αν η απεικόνιση $(x, t) \longmapsto T_t(x)$ είναι μετρήσιμη από τον $(X \times \mathbb{R}, \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}_{\mathbb{R}})$ στον $(X, \mathcal{B})$. Παρόμοια, ημιροή είναι μια δράση της ημιομάδας $\mathbb{R}_{\geq 0}$ με τις αντίστοιχες ιδιότητες.

**6.1.2 Πρόταση.** *Έστω $T$ μια μετρήσιμη (ημι-)ροή που διατηρεί το μέτρο στον χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Τότε για κάθε $f \in L^1_\mu$ υπάρχει ένα μετρήσιμο σύνολο μέτρου 1 στο οποίο*

$$\frac{1}{s} \int_0^s f(T_s x)\, ds \underset{s \to +\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})(x)$$

*παντού και στον $L^1_\mu$, όπου $\mathcal{E} = \{B \in \mathcal{B} : \mu(B \vartriangle T_t^{-1} B) = 0$ για κάθε $t \in \mathbb{R}\}$.*

*Απόδειξη.* Η συνάρτηση $(x, s) \longmapsto f(T_s(x))$ είναι ολοκληρώσιμη στον $X \times [0, s]$ για κάθε $s \geq 0$ από το θεώρημα Fubini. Οπότε το $\int_0^s f(T_t x)\, dt$ ορίζεται $\mu$-σχεδόν για κάθε $x \in X$. Το ολοκλήρωμα

$$F(x) = \int_0^1 f(T_t(x))\, dt$$

είναι καλά ορισμένο για $\mu$-σχεδόν κάθε $x \in X$ και ορίζει μια συνάρτηση $F \in L^1_\mu(X)$.

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{j=0}^{n-1} F(T_1^j(x)) &= \sum_{j=0}^{n-1} \int_0^1 f(T_t(T_1^j(x)))\,dt \\
&= \int_0^1 f(T_t(x))\,dt + \int_0^1 f(T_{t+1}(x))\,dt + \cdots + \int_0^1 f(T_{t+(n-1)}(x))\,dt \\
&= \int_0^1 f(T_t(x))\,dt + \int_1^2 f(T_t(x))\,dt + \cdots + \int_{n-1}^n f(T_t(x))\,dt \\
&= \int_0^n f(T_t(x))\,dt.
\end{aligned}$$

Από το θεώρημα Birkhoff ισχύει ότι

$$\frac{1}{n}\int_0^n |f(T_t)|\,dt \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}_1$$

$\mu$-σ.π. και στον $L^1_\mu$. Θέτουμε

$$F_{\text{abs}}(x) = \int_0^1 |f(T_s(x))|\,ds.$$

Οπότε έχουμε

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N}\sum_{k=0}^{N-1} F_{\text{abs}}(T_1^k) - \frac{N+1}{N}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N} F_{\text{abs}}(T_1^k) \\
&\quad = \frac{1}{N}\int_0^N |f(T_t)|\,dt - \frac{N+1}{N}\frac{1}{N+1}\int_0^{N+1} |f(T_t)|\,dt \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}_1 - \tilde{f}_1 = 0
\end{aligned}$$

$\mu$-σ.π. και στον $L^1_\mu$. Άρα,

$$\frac{1}{N}F_{\text{abs}}(T_1^N(x)) = \frac{1}{N}\int_0^1 |f(T_{t+N}(x))|\,dt \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

$\mu$-σ.π. και στον $L^1_\mu$. Τώρα για κάθε $s \in [N, N+1), N \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\Big|\int_0^s f(T_t(x))\,dt - \int_0^N f(T_t(x))\,dt\Big| = \Big|\int_N^s f(T_t(x))\,dt\Big| &\leq \int_N^s |f(T_t(x))|\,dt \\
&\overset{t_1=t-N}{=\!=\!=} \int_0^{s-N} |f(T_{t+N}(x))|\,dt \\
&\leq \int_0^1 |f(T_{t+N}(x))|\,dt.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\Big|\frac{1}{N}\int_0^s f(T_t(x))\,dt - \frac{1}{N}\int_0^N f(T_t(x))\,dt\Big| \leq \frac{1}{N}\int_0^1 |f(T_{t+N}(x))|\,dt \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}
&\Big|\frac{1}{s}\int_0^s f(T_t(x))\,dt-\tilde{f}(x)\Big|\\
&\leq \Big|\frac{1}{s}\int_0^s f(T_t(x))\,dt-\frac{1}{N}\int_0^s f(T_t(x))\,dt\Big|+\Big|\frac{1}{N}\int_0^s f(T_t(x))\,dt-\frac{1}{N}\int_0^N f(T_t(x))\,dt\Big|\\
&\qquad+\Big|\frac{1}{N}\int_0^N f(T_t(x))\,dt-\tilde{f}(x)\Big|\\
&=\Big|\frac{1}{s}-\frac{1}{N}\Big|\cdot\Big|\int_0^s f(T_f(x))\,dt\Big|+\Big|\frac{1}{N}\int_0^s f(T_t(x))\,dt-\frac{1}{N}\int_0^N f(T_t(x))\,dt\Big|\\
&\qquad+\Big|\frac{1}{N}\int_0^N f(T_t(x))\,dt-\tilde{f}(x)\Big|.
\end{aligned}$$

Όμως

$$\begin{aligned}
\Big|\frac{1}{s}-\frac{1}{N}\Big|\cdot\Big|\int_0^s f(T_t(x))\,dt\Big| &\leq \left(\frac{1}{N}-\frac{1}{s}\right)\int_0^s |f(T_t(x))|\,dt\\
&\leq \left(\frac{1}{N}-\frac{1}{s}\right)\int_0^{N+1} |f(T_t(x))|\,dt\\
&\leq \left(\frac{1}{N}-\frac{1}{N+1}\right)\int_0^{N+1} |f(T_t(x))|\,dt\\
&= \frac{N+1-N}{N(N+1)}\int_0^{N+1} |f(T_t(x))\,dt\\
&\leq \frac{1}{N}\left(\frac{1}{N+1}\int_0^{N+1} |f(T_t(x))|\,dt\right)\underset{N\to\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

$\mu$-σχεδόν για κάθε $x\in X$. Άρα

$$\frac{1}{s}\int_0^s f(T_t(x))\,dt \underset{s\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}(x)$$

$\mu$-σχεδόν για κάθε $x\in X$.

Μένει να βρούμε την $\tilde{f}$, οπότε θα έχουμε και την $L^1_\mu$-σύγκλιση. Έχουμε ότι $\tilde{f}\circ T_{t_1}=\tilde{f}$ $\mu$-σ.π. για κάθε $t\in\mathbb{R}$ από το θεώρημα Birkhoff. Θα δείξουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι $\mathcal{E}$-μετρήσιμη.

Προφανώς, αν $C\in\mathcal{B}(\mathbb{C})$, τότε $\tilde{f}^{-1}(C)\in\mathcal{B}$, αφού η $\tilde{f}$ είναι $\mathcal{B}$-μετρήσιμη. Τώρα, έχουμε

$$\mu(\tilde{f^{-1}}(C)\vartriangle T_{t_1}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(C)))=\mu(\tilde{f^{-1}}(C)\setminus T_{t_1}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(C)))+\mu(T_{t_1}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(C))\setminus \tilde{f^{-1}}(C))$$

και

$$\tilde{f}^{-1}(C)\setminus T_{t_1}^{-1}(\tilde{f}(C))=\{x\in X:\tilde{f}(x)\in C,\tilde{f}(T_{t_1}(x))\notin C\}.$$

Θέτουμε

$$D_{t_1}=\{x\in X:\tilde{f}\circ T_{t_1}(x)=\tilde{f}(x)\}$$

για κάθε $t_1 \in \mathbb{R}$. Άρα

$$\begin{aligned}\tilde{f}^{-1}(C) \setminus T_{t_1}^{-1}(\tilde{f}(C)) &= \{x \in D_{t_1} : \tilde{f}(x) \in C, \tilde{f}(T_{t_1}(x)) \notin C\} \\ &= \{x \in D_{t_1} : \tilde{f}(x) \in C, \tilde{f}(x) \notin C\} = \varnothing.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\mu(\tilde{f}^{-1}(c) \setminus T_{t_1}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(C))) = 0.$$

Ομοίως $\mu(T_{t_1}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(C)) \setminus \tilde{f^{-1}}(C)) = 0$, οπότε

$$\mu(\tilde{f^{-1}}(C) \triangle T_{t_1}^{-1}(\tilde{f}^{-1}(C))) = 0.$$

Άρα $\tilde{f}^{-1}(C) \in \mathcal{E}$ και συμπεραίνουμε ότι η $\tilde{f}$ είναι $\mathcal{E}$-μετρήσιμη. Θα δείξουμε ότι $\mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}) = \tilde{f}$ $\mu$-σ.π. Έστω $B \in \mathcal{E}$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_X \chi_B(x) \frac{1}{N} \int_0^N f(T_t(x))\, dt\, d\mu(x) &= \frac{1}{N} \int_0^N \int_X \chi_B(x) f(x)\, d\mu(x)\, dt \\ &= \frac{1}{N} \int_0^N \int_B f(x)\, d\mu(x)\, dt = \int_B f\, d\mu.\end{aligned}$$

Όμως,

$$\frac{1}{N} \int_0^N f(T_t)\, dt \underset{N\to\infty}{\rightarrow} \tilde{f}.$$

Άρα,

$$\chi_B \frac{1}{N} \int_0^N f(T_t)\, dt \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \tilde{f}\chi_B.$$

Οπότε,

$$\int_X \chi_B(x) \frac{1}{N} \int_0^N f(T_t(x))\, dt\, d\mu(x) \underset{N\to\infty}{\longrightarrow} \int_B \tilde{f}(x)\, d\mu(x).$$

Συνεπώς, $\int_B f\, d\mu = \int_B \tilde{f}\, d\mu$, για κάθε $B \in \mathcal{E}$, άρα $\tilde{f} = \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})$ $\mu$-σ.π.. □

**6.1.3 Θεώρημα** (Wiener). *Έστω $T$ μια μετρήσιμη ροή που διατηρεί το μέτρο στον χώρο $(X, \mathcal{B}, \mu)$. Τότε για κάθε $f \in L_\mu^1$ ισχύει*

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^\varepsilon f(T_t(x))\, dt = f(x)$$

*σχεδόν παντού.*

*Απόδειξη.* Η $t \longmapsto f(T_t(x)) \in L_\lambda^1([0, T])$ για κάθε $T \geq 0$, όπου $\lambda$ το μέτρο Lebesgue, και η $\int_0^s f(T_t(x))\, dt$ είναι καλά ορισμένη σχεδόν για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε

$$N = X \times [0, +\infty) \setminus \left\{(x,t) \in X \times [0, +\infty) : \lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\varepsilon f(T_{t+s}(x))\, dt = f(T_t(x))\right\}$$

και
$$N^t = \{x \in X : (x,t) \in N\}$$
για $t \geq 0$. Ορίζουμε επίσης
$$N_x = \{t \in [0,+\infty) : (x,t) \in N\}$$
για $x \in X$. Από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού έχουμε ότι $\lambda(N_x) = 0$ για σχεδόν κάθε $x \in X$. Άρα
$$(\mu \times \lambda)(N) = \int_X \lambda(N_x)\, d\mu(x) = 0 = \int_{[0,+\infty)} \mu(N^t)\, d\lambda(t).$$
Έπεται ότι $\mu(N^t) = 0$ για σχεδόν κάθε $t \geq 0$. Επίσης έχουμε ότι $N^t = T_t^{-1}(N^0)$, γιατί $(T_t(x), 0) \in N \iff (x,t) \in N$. Αφού η ροή διατηρεί το $\mu$,
$$0 = \mu(N^t) = \mu(T_t^{-1}(N^0)) = \mu(N^0).$$
Άρα $(x,0) \in N$ $\mu$-σ.π., οπότε $\lim_{\varepsilon\to 0} \int_0^\varepsilon f(T_s(x))\, ds = f(x)$ $\mu$-σχεδόν για κάθε $x \in X$. □

## 6.2 Κατά σημείο εργοδικά θεωρήματα και πολυωνυμική αύξηση

Έστω $(G,d)$ τοπικά συμπαγής unimodular ομάδα, με μετρική $d$ δεξιά αναλλοίωτη και με τις ακόλουθες ιδιότητες αύξησης:

(P) Για κάθε $r > 0$ η μπάλα $B_r^G = B_r^G(e)$ έχει συμπαγή κλειστή θήκη και $m_G(\overline{B_r^G} \setminus B_r^G) = 0$, όπου $m_G$ το μέτρο Haar της $G$.

(D) Η μετρική $d$ έχει την doubling property: υπάρχει $C_G > 0$ τέτοια ώστε $m_G(B_{3r}^G) \leq C_G m_G(B_r^G)$.

(F) Οι μπάλες σχηματίζουν ακολουθία Følner: για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ισχύει
$$\frac{m_G(B_{r+s}^G)}{m_G(B_r^G)} \overset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

**6.2.1 Πρόταση.** *Έστω $(G,d)$ τοπικά συμπαγής μετρική ομάδα, όπου $d$ δεξιά αναλλοίωτη μετρική. Έστω $f \in L^1(G)$. Ορίζουμε $A_r f : G \to \mathbb{C}$, για κάποιο $r > 0$, με*
$$A_r f(x) = \frac{1}{m_G(B_r)} \int_{B_r} f(gx)\, dm_G(g)$$
*για κάθε $x \in G$. Τότε η $A_r f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα Borel μετρήσιμη.*

*Απόδειξη.* Αφού η $G$ είναι τοπικά συμπαγής ομάδα, είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος ως μετρικός χώρος. Ορίζουμε μετρική $\rho : G \times G \to [0, +\infty)$ ως εξής: $\rho(x, y) = d(x^{-1}, y^{-1})$. Τότε η $\rho$ είναι αριστερά αναλλοίωτη:

$$\begin{aligned}\rho(zx, zy) &= d((zx)^{-1}, (zy)^{-1}) = d(x^{-1}z^{-1}, y^{-1}z^{-1}) = d(x^{-1}, y^{-1}) \\ &= d(x^{-1}x, y^{-1}x) = d(e, y^{-1}x) = d(e, (y^{-1}x)^{-1}) = d(e, x^{-1}) \\ &= d(y^{-1}, x^{-1}) = \rho(x, y)\end{aligned}$$

για κάθε $z \in G, x, y \in G$, όπου $e$ η μονάδα της $G$. Επιπλέον, αν $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq G$ με $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x$ ως προς την μετρική $d$, τότε λόγω συνέχειας έχουμε ισοδύναμα $x_n^{-1} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} x^{-1}$. Άρα $\rho \sim d$.

Θα δείξουμε ότι η $A_r f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής για κάθε $r > 0$. Αρχικά υποθέτουμε ότι $f \in C_c(G)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $K = \text{supp}(f)$. Η $f|_K$ είναι ομοιόμορφα συνεχής, αφού ο $K$ είναι συπαγής μετρικός χώρος, άρα για κάθε $x \in K$ υπάρχει $U_x$ ανοικτή περιοχή του $e$ (της μονάδας της $G$), ώστε $|f(xy) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $y \in U_x$, αφού $xy, x \in xU_x$. Υπάρχει $V_x$ συμμετρική ανοικτή περιοχή του $e$ ώστε $V_xV_x \subseteq U_x$. Έχουμε $K \subseteq \bigcup_{x\in K} xV_x$ και αφού το $K$ είναι συμπαγές, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_n \in K$ ώστε $K \subseteq \bigcup_{j=1}^{n} x_jV_{x_j}$. Θεωρούμε την ανοικτή περιοχή

$$V = \bigcap_{j=1}^{n} V_{x_j}$$

του $e$. Θα δείξουμε ότι

$$\sup_{x\in G} |f(xy) - f(x)| < \varepsilon$$

για κάθε $y \in V$. Διακρίνουμε περιπτώσεις:

1. Αν $x \in K$ τότε υπάρχει $j \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $x \in x_jV_{x_j}$, δηλαδή $x_j^{-1}x \in V_{x_j}$. Άρα, $xy = x_j(x_j^{-1}x)y \in x_jV_{x_j}V_{x_j} \subseteq x_jU_{x_j}$. Τότε,

$$|f(xy) - f(x)| \leq |f(xy) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

γιατί $x_j \in x_jU_{x_j}, xy \in x_jU_{x_j}, x \in x_jV_{x_j}, x = x_jz, z \in V_{x_j}$. Όμως $z = ze \in V_{x_j}V_{x_j}$, άρα $x \in x_jV_{x_j}V_{x_j} \subseteq x_jU_{x_j}$.

2. Αν $x \notin K$ και $xy \in K$ τότε υπάρχει $j \in \{1, \ldots, n\}$ ώστε $xy \in x_jV_{x_j}, x_j \in K, y \in V$. Άρα,

$$x = (xy)y^{-1} \in x_jV_{x_j}V_{x_j}^{-1} = x_jV_{x_j}V_{x_j} \subseteq x_jU_{x_j}.$$

Άρα

$$|f(xy) - f(x)| \leq |f(xy) - f(x_j)| + |f(x_j) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

γιατί $xy, x_j, x \in x_jU_{x_j}$.

3. Αν $x, xy \notin K$ τότε $f(x) = f(xy) = 0$. Άρα,
$$|f(xy) - f(x)| = 0 < \varepsilon.$$
Οπότε η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής από δεξιά. Υπάρχει περιοχή του $e$ ώστε αν $y, z \in V$ να έχουμε $|f(xy) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $|f(xz) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα $|f(xz) - f(xy)| < \varepsilon$. Οπότε $\sup_{x\in G} |f(xz) - f(xy)| < \varepsilon$ για κάθε $z, y \in V$.

Δοθέντος $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ ώστε αν $x, y \in G$ και $\rho(x, y) < \delta$ να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Τότε $\rho(gx, gy) < \delta$ για κάθε $g \in G$ (ως αριστερά αναλλοίωτη) και άρα $|f(gx) - f(gy)| < \varepsilon$ για κάθε $g \in G$ (η $f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής όπως είδαμε πριν). Οπότε,
$$|A_r f(x) - A_r f(y)| \le \frac{1}{m_G(B_r)} \int_{B_r} |f(gx) - f(gy)|\, dm_G(g) \le \varepsilon.$$

Άρα η $A_r f$ ομοιόμορφα συνεχής, οπότε και Borel μετρήσιμη. Έστω ότι $f \in L^1(G)$ και έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι $\overline{C_c(G)}^{\|\cdot\|_1} = L^1(G)$, αφού $m_G$ μέτρο Radon. Άρα υπάρχει $F \in C_c(G)$ ώστε $\|f - F\|_1 < \frac{\varepsilon}{3} m_G(B_r)$. Τότε για $x, y \in G$ με $\rho(x, y) < \delta$ έχουμε ότι $|A_r F(x) - A_r F(y)| \le \frac{\varepsilon}{3}$, άρα
$$\begin{aligned}|A_r f(x) - A_r f(y)| &\le |A_r f(x) - A_r F(x)| + |A_r F(x) - A_r F(y)| + |A_r F(y) - A_r f(y)| \\ &\le \frac{1}{m_G(B_r)} \int_{B_r} |f(gx) - F(gx)|\, dm_G(g) + |A_r F(x) - A_r F(y)| \\ &\quad + \frac{1}{m_G(B_r)} \int_{B_r} |F(gy) - f(gy)|\, dm_G(g) \\ &\le \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Άρα η $A_r f$ είναι ομοιόμορφα συνεχής για κάθε $f \in L^1(G), r > 0$, άρα και Borel μετρήσιμη. □

**6.2.2 Σημείωση.** Η συνάρτηση
$$\phi^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_r^G} \phi(gx)\, dm_G(g), \qquad x \in G$$
είναι Borel μετρήσιμη.

*Απόδειξη.* Πράγματι, αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε
$$\begin{aligned}(\phi^*)^{-1}((\alpha, +\infty)) &= \{x \in G : \phi^*(x) > \alpha\} = \bigcup_{r\in\mathbb{Q}, r>0} \{x \in G : A_r\phi(x) > \alpha\} \\ &= \bigcup_{r\in\mathbb{Q}, r>0} (A_r\phi)^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathcal{B}(G)\end{aligned}$$
ως αριθμήσιμη ένωση Borel συνόλων (από την προηγούμενη πρόταση). □

**6.2.3 Λήμμα.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής unimodular ομάδα με μια δεξιά αναλλοίωτη μετρική που ικανοποιεί τις ιδιότητες (P) και (D). Τότε για κάθε $\phi \in L^1(G)$ και $\alpha > 0$ ορίζουμε τη μεγιστική συνάρτηση*

$$\phi^*(a) = \sup_{r>0} \frac{1}{m_G(B_r^G)} \phi(ga)\, dm_G(g)$$

*για $a \in G$ και το σύνολο $E_\alpha^\phi = \{a \in G : \phi^*(a) > \alpha\}$. Τότε $\alpha m_G(E_\alpha^\phi) \leq C_G \|\phi\|_1$.*

*Απόδειξη.* Από την παραπάνω σημείωση η $\phi^*$ είναι μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $a \in E_\alpha^\phi$ διαλέγουμε $r(a) > 0$ ώστε

$$\frac{1}{m_G(B_{r(a)}^G)} \int_{B_{r(a)}^G} \phi(ga)\, dm_G(g) > \alpha.$$

Αφού η $(G, d)$ είναι δεύτερος αριθμήσιμος χώρος, το ανοικτό σύνολο $O = \bigcup_{a \in E_\alpha^\phi} B_{r(a)}^G a$ γράφεται ως

$$O = \bigcup_{i=1}^{+\infty} B_{r(a_i)}^G a_i$$

για κάποιο $\{a_1, a_2, \dots\} \subseteq E_\alpha^\phi$. Γράφουμε $r_i = r(a_i)$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Παρατηρούμε ότι $B_r^G a = B_r^G(a)$ για κάθε $r > 0$ και $a \in G$ (αφού η $d$ είναι δεξιά αναλλοίωτη). Σταθεροποιούμε $k \geq 1$ και εφαρμόζοντας το λήμμα κάλυψης του Vitali διαλέγουμε $j(1), \dots, j(k) \in \{1, \dots, k\}$ ώστε οι μπάλες $B_{r_{j(1)}}^G a_{j(1)} \bigcup B_{r_{j(k)}}^G a_{j(k)}$ να είναι ξένες και

$$B_{r_1}^G a_1 \cup \cdots \cup B_{r_k}^G a_k \subseteq B_{3r_{j(1)}}^G a_{j(1)} \cup \cdots \cup B_{3r_{j(k)}}^G a_{j(k)}.$$

Έχουμε

$$\begin{aligned}
\|\phi\|_1 &= \int_X |\phi(g)|\, dm_G(g) \geq \int_{\bigcup_{i=1}^k B_{r_{j(i)}}^G a_{j(i)}} |\phi(g)|\, dm_G(g) \\
&\overset{\text{ξένα}}{=\!=} \sum_{i=1}^k \int_{B_{r_{j(i)}} a_{j(i)}} |\phi(g)|\, dm_G(g) \\
&\overset{y_i = g a_{j(i)}, \forall i=1,\dots,k}{=\!=\!=\!=} \sum_{i=1}^k \int_{B_{r(j(i))}^G} |\phi(g a_{j(i)})|\, dm_G(g) \\
&= \sum_{i=1}^k m_G(B_{r_{j(i)}}^G) \frac{1}{m_G(B_{r_{j(i)}}^G)} \int_{B_{r_{j(i)}}^G} \phi(g a_{j(i)})\, dm_G(g) \\
&= \sum_{i=1}^k m_G(B_{r_{j(i)}}^G a_{j(i)}) \frac{1}{m_G(B_{r_{j(i)}}^G)} \phi(g a_{j(i)})\, dm_G(g) \geq \sum_{i=1}^k m_G(B_{r_{j(i)}}^G a_{j(i)}) \alpha.
\end{aligned}$$

Από την προηγούμενη σχέση έπεται ότι

$$m_G\left(\bigcup_{j=1}^{k} B_{r^G_{j(i)}} a_j\right) \le m_G\left(\bigcup_{i=1}^{k} B^G_{3r_{j(i)}} a_{j(i)}\right) \le \sum_{i=1}^{k} m_G(B^G_{3r_{j(i)}} a_{j(i)})$$
$$\le C_G \sum_{i=1}^{k} m_G(B^G_{r_{j(i)}} a_{j(i)}).$$

Οπότε,

$$\alpha \sum_{j=1}^{k} m_G(B^G_{r_j} a_j) \le C_G \alpha \sum_{i=1}^{k} m_G(B^G_{r_{j(i)}} a_{j(i)}) \le C_G \|\phi\|_1$$

για κάθε $k \ge 1$. Άρα,

$$\alpha m_G(O) \le \alpha \lim_{k\to\infty} \sum_{j=1}^{k} m_G(B_{r_j} a_j) \le C_G \|\phi\|_1.$$

Όμως $E^\phi_\alpha \subseteq O$, συνεπώς

$$\alpha m_G(E^\phi_\alpha) \le C_G \|\phi\|_1.$$

□

**6.2.4 Πρόταση.** *Έστω $G$ τοπικά συμπαγής ομάδα με μέτρο Haar $m_G$ που δρα συνεχώς στον μετρικό χώρο $(X,\rho)$. Έστω $\phi \in C_c(X)$ και $U$ συμπαγής περιοχή του $e \in G$, όπου $e$ η μονάδα της $G$. Τότε η απεικόνιση*

$$A_U(\phi)(x) = \frac{1}{m_G(U)} \int_U \phi(gx)\, dm_G(g), \qquad x \in X$$

*είναι συνεχής.*

*Απόδειξη.* Παρατηρούμε αρχικά ότι αφού η $G$ είναι τοπικά συμπαγής ομάδα, υπάρχει συμπαγής περιοχή $U$ του $e$. Έστω $K = \operatorname{supp}(\phi)$. Δοθέντος $\varepsilon > 0$, για κάθε $x \in K$ υπάρχει $r_x > 0$ ώστε αν $y \in U(x, r_x)$, τότε $|\phi(y) - \phi(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, λόγω συνέχειας της $\phi$. Έχουμε $K \subseteq \bigcup_{x\in K} U(x, r_x)$, όμως το $K$ είναι συμπαγές, άρα υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $K \subseteq U(y_1, \frac{1}{2} r_{y_1}) \cup \cdots \cup U(y_n, \frac{1}{2} r_{y_n})$. Ορίζουμε

$$r = \frac{1}{2} \min\{r_{y_1}, \ldots, r_{y_n}\} > 0.$$

Λόγω της συνέχειας της δράσης της $G$, για κάθε $(g,x) \in U \times K$ υπάρχει ανοικτή περιοχή $V_{(g,x)} \times U(x, \gamma_{(g,x)})$ του $(g,x)$, όπου $V_{(g,x)}$ ανοικτή περιοχή του $g$ και $U(x, \gamma_{(g,x)})$ ανοικτή περιοχή του $x$ τέτοια ώστε $\rho(gx, hy) < \frac{1}{2} r$ για κάθε $(h,y) \in V_{(g,x)} \times U(x, \gamma_{(g,x)})$. Το $U \times \{x\}$ είναι συμπαγές, άρα $U \times \{x\} \subseteq \bigcup_{g\in U} V_{(g,x)} \times U(x, \gamma_{(g,x)})$, οπότε

$$U \times \{x\} \subseteq (V_{(g_{x,1},x)} \times U(x, \gamma_{(g_{x,1},x)})) \cup \cdots \cup (V_{(g_{x,m_x},x)} \times U(x, \gamma_{(g_{x,m_x},x)}))$$

για κάποιο $m_x \in \mathbb{N}$ και θέτουμε

$$\delta_x = \min\{\gamma(g_{x,1}, x), \ldots, \gamma(g_{x,m_x}, x)\}.$$

Έστω τώρα $x, y \in X$ με $\rho(x, y) < \delta_x$. Έστω $g \in U$.

1. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $j \in \{1, \ldots, n\}$ τέτοιο ώστε $gx \in U(y_j, \frac{1}{2}r_{y_j})$. Τότε υπάρχει $i \in \{1, \ldots, m_x\}$ τέτοιο ώστε $(g, x) \in V_{(g_{x,i},x)} \times U(x, \gamma_{(g_{x,i},x)})$ και $(g, y) \in V_{(g_{x,i},x)} \times U(x, \gamma_{(g_{x,i},x)})$ από τον ορισμό του $\delta_x$. Τότε όμως $\rho(gx, gy) < \frac{1}{2}$. Οπότε,

$$\rho(gy, y_j) \leq \rho(gy, gx) + \rho(gx, y_j) < \frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r_{y_j} \leq \frac{1}{2}r_{y_j} + \frac{1}{2}r_{y_j} = r_{y_j}.$$

   Συνεπώς, $gy \in U(y_j, r_{y_j})$. Δηλαδή $gx, gy \in U(y_j, r_{y_j})$ και άρα

$$|\phi(gx) - \phi(gy)| \leq |\phi(gx) - \phi(y_j)| + |\phi(y_j) - \phi(gy)| < \frac{1}{2}\varepsilon + \frac{1}{2}\varepsilon = \varepsilon.$$

2. Αν $gx \in X \backslash [U(y_1, \frac{1}{2}r_{y_1}) \cup \cdots \cup U(y_n, \frac{1}{2}r_{y_n})]$ αλλά $gy \in U(y_1, \frac{1}{2}r_{y_1}) \cup \cdots \cup U(y_n, \frac{1}{2}r_{y_n})$, τότε $gy \in U(y_j, \frac{1}{2}r_{y_j})$ για κάποιο $j \in \{1, \ldots, n\}$ και τότε $gx \in U(y_j, r_{y_j})$ όπως πριν, αφού $\rho(gx, gy) < \frac{1}{2}r$. Άρα $|\phi(gx) - \phi(gy)| < \varepsilon$.

3. Αν $gx, gy \in X \setminus [U(y_1, \frac{1}{2}r_{y_1}) \cup \cdots \cup U(y_n, \frac{1}{2}r_{y_n})]$, τότε $gx, gy \notin K$, άρα $\phi(gx) = \phi(gy) = 0$ και άρα $\|\phi(gx) - \phi(gy)| = 0 < \varepsilon$. Συνολικά δείξαμε ότι αν $x, y \in X$ με $\rho(x, y) < \delta_x$, τότε $|\phi(gx) - \phi(gy)| < \varepsilon$ για κάθε $g \in U$, οπότε

$$\begin{aligned} |A_U(\phi)(x) - A_U(\phi)(y)| &= \Big| \frac{1}{m_G(U)} \int_U \phi(gx)\, dm_G(g) - \frac{1}{m_G(U)} \int_U \phi(gy)\, dm_G(g) \Big| \\ &\leq \frac{1}{m_G(U)} \int_U |\phi(gx) - \phi(gy)|\, dm_G(g) < \varepsilon. \end{aligned}$$

Οπότε η $A_U(\phi)$ είναι συνεχής στο $x \in X$ και αφού το $x$ ήταν τυχόν έπεται ότι είναι συνεχής παντού στον $X$.

Τώρα, έστω ότι $f \in L^1(X)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Ξέρουμε ότι $\overline{C_c(X)}^{\|\,\|_1} = L^1(X)$. Άρα υπάρχει $\phi \in C_c(X)$ με $\|f - \phi\|_1 < \frac{\varepsilon}{3}m_G(U)$. Για $x, y \in X$ με $\rho(x, y) < \delta_x$ έχουμε ότι $|A_U(\phi)(x) - A_U(\phi)(y)| < \frac{\varepsilon}{3}$. Τότε

$$\begin{aligned} |A_U(f)(x) - A_U(f)(y)| &\leq |A_U f(x) - A_U f(y)| + |A_U \phi(x) - A_U \phi(y)| \\ &\quad + |A_U \phi(y) - A_U f(y)| \\ &\leq \frac{1}{m_G(U)} \int_U |f(gx) - \phi(gx)|\, dm_G(g) + |A_U \phi(x) - A_U \phi(y)| \\ &\quad + \frac{1}{m_G(U)} \int_U |\phi(gy) - f(gy)|\, dm_G(g) \\ &\leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η $A_U f$ είναι συνεχής. □

**6.2.5 Σημείωση.** Αν η $G$ είναι τοπικά συμπαγής ομάδα, με μέτρο Haar $m_G$ που δρα συνεχώς στον μετρικό χώρο $(X, d)$, τότε η απεικόνιση

$$f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_r^G} f(gx)\, dm_G(g), \qquad x \in X$$

είναι Borel μετρήσιμη.

*Απόδειξη.* Πράγματι αν $\alpha \in \mathbb{R}$, τότε

$$\begin{aligned}(f^*)^{-1}((\alpha, +\infty)) = \{x \in X : f^*(x) > \alpha\} &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, r>0} \{x \in X : A_r f(x) < \alpha\} \\ &= \bigcup_{r \in \mathbb{Q}, r>0} (A_r f)^{-1}((\alpha, +\infty)) \in \mathcal{B}(X)\end{aligned}$$

ως αριθμήσιμη ένωση Borel μετρησίμων συνόλων, λόγω της προηγούμενης πρότασης. □

**6.2.6 Θεώρημα** (μεγιστικό εργοδικό θεώρημα). *Έστω $G$ μια unimodular τοπικά συμπαγής ομάδα με δεξιά αναλλοίωτη μετρική που ικανοποιεί τις ιδιότητες* (P), (D) *και* (F). *Έστω ότι η $G$ δρα συνεχώς σε έναν τοπικά συμπαγή $\sigma$-συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$ που διατηρεί ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $X$, και έστω $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Ορίζουμε τη μεγιστική συνάρτηση*

$$f^*(x) = \sup_{r>0} \frac{1}{m_G(B_g^G)} \int_{B_r^G} f(gx)\, dm_G(g)$$

*για $x \in X$, και για κάθε $\alpha > 0$ ορίζουμε $E_\alpha^f = \{x \in X : f^*(x) > \alpha\}$. Τότε,*

$$\alpha \mu(E_\alpha^f) \leq C_G \|\phi\|_1.$$

*Απόδειξη.* Η $(g, x) \longmapsto f(gx)$ και η $(g, x) \longmapsto |f(gx)|$ είναι ολοκληρώσιμες στον $B_j^G \times X$ για δοθέν $J > 1$. Πράγματι, έχουμε ότι

$$\int_{B_r^G} \int_X |f(gx)|\, d\mu(x)\, dm_G(g) = \int_{B_r^G} \int_X |f(x)|\, d\mu(x)\, dm_G(g) = \|f\|_1 m_G(B_r^G) < +\infty.$$

Για σχεδόν κάθε $x \in X$ ορίζεται η συνάρτηση $\phi \in L^1(G)$ με

$$\phi(g) = \begin{cases} f(gx) & , \text{αν } g \in B_J^G \\ 0 & , \text{αλλιώς} \end{cases}$$

Από το προηγούμενο λήμμα έχουμε ότι

$$\alpha m_G(E_\alpha^\phi) \leq C_G \|\phi\|_1.$$

Σταθεροποιούμε $M > 0$. Ορίζουμε

$$\phi_M^*(a) = \sup_{0<r<M} \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_r^G} \phi(ga)\, dm_G(g)$$
$$f_M^*(x) = \sup_{0<r<M} \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_r^G} f(gx)\, dm_G(g)$$

για $a \in G, x \in X$, και τα σύνολα

$$E_{\alpha,M}^{\phi} = \{a \in G : \phi_M^*(a) > \alpha\}$$
$$E_{\alpha,M}^{f} = \{x \in X : f_M^*(x) > \alpha\}.$$

Έστω $J > M$. Σταθεροποιούμε $a \in B_{J-M}^G$ και $g \in B_M^G$. Τότε $ga \in B_J^G$, άρα $\phi_M^*(a) = f_M^*(ax)$ από τον ορισμό της $\phi$ για $a \in B_{J-M}^G$. Έπεται ότι

$$\alpha m_G(\{a \in B_{J-M}^G : ax \in E_{\alpha,M}^f\}) = \alpha m_G(B_{J-M}^G \cap E_{\alpha,M}^{\phi}) \leq \alpha m_G(E_{\alpha}^{\phi}) \leq C_G \|\phi\|_1.$$

Ολοκληρώνουμε κατά μέλη και έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_X m_G(\{a \in B_{J-M} : ax \in E_{\alpha,M}^f\})\, d\mu(x) &= \int_X \int_{B_{J-M}^G} x_{E_{\alpha,M}^f}(ax)\, dm_G(a)\, d\mu(x) \\
&\overset{\text{Fubini}}{=\!=\!=} \int_{B_{J-M}^G} \int_X x_{E_{\alpha,M}^f}(ax)\, d\mu(x)\, dm_G(a) \\
&\overset{\mu\ G-\text{αναλλοίωτο}}{=\!=\!=\!=\!=} \int_{B_{J-M}^G} \int_X x_{E_{\alpha,M}^f}(x)\, d\mu(x)\, dm_G(a) \\
&= m_G(B_{J-M}^G)\mu(E_{\alpha,M}^f).
\end{aligned}$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}
\int_X \|\phi\|_1\, d\mu(x) &= \int_X \int_G |\phi(g)|\, dm_G(g)\, d\mu(x) \\
&= \int_X \int_{B_J^G} |f(gx)|\, dm_G(g)\, \mu(x) \\
&= \int_{B_J^G} \int_X |f(gx)|\, d\mu(x)\, dm_G(g) = \|f\|_1 m_G(B_J^G).
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$\alpha m_G(B_{J-M}^G)\mu(E_{\alpha,M}^f) \leq C_G m_G(B_J^G)\|f\|_1.$$

Διαιρούμε με $m_G(B_J^M) > 0$ και έχουμε

$$\alpha \frac{m_G(B_{J-M}^G)}{m_G(B_J^G}\mu(E_{\alpha,M}^f) \leq C_G \|f\|_1.$$

Αφήνοντας το $J \to +\infty$ παίρνουμε

$$\alpha\mu(E^f_{\alpha,M}) \leq C_G\|f\|_1$$

από τη συνθήκη (F). Όταν $M \to +\infty$ παίρνουμε

$$\alpha\mu(E^f_{\alpha}) \leq C_G\|f\|_1.$$

□

**6.2.7 Θεώρημα.** *Έστω $G$ μια unimodular τοπικά συμπαγής ομάδα με μια δεξιά αναλλοίωτη μετρική $d$ που ικανοποιεί τις συνθήκες (P), (D) και (F). Έστω ότι η $G$ δρα συνεχώς σε έναν τοπικά συμπαγή $\sigma$-συμπαγή μετρικό χώρο $X$ και έστω $f \in L^1(X, \mathcal{B}, \mu)$. Τότε $A_r(f)(x) \underset{r\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})(x)$ $\mu$-σχεδόν παντού και στον $L^1_\mu$, όπου $\mathcal{E}$ η $\sigma$-άλγεβρα των $G$-αναλλοίωτων συνόλων.*

*Απόδειξη.* Θα δείξουμε ότι η (F) δίνει την amenability της ομάδας $G$. Αν $\varnothing \neq K \subseteq G$ συμπαγές, τότε $B^G_s \supseteq K$ για κάποιο $s > 0$. Οπότε,

$$B^G_r \vartriangle KB^G_r = (B^G_r \setminus KB^G_r) \cup (KB^G_r \setminus B^G_r) \subseteq (B^G_r \setminus B^G_{r-s}) \cup (B^G_{r+s} \setminus B^G_r)$$

για κάθε $r > s$, αφού $B^G_{r-s} \subseteq KB^G_r \subseteq B^G_s B^G_r \subseteq B^G_{r+s}$. Αυτό γιατί αν $g \in B^G_{r-s}$, τότε $d(e,g) < r-s$. Αν $h \in K \subseteq B^G_s$, τότε $g = h(h^{-1}g), d(h,e) = d(h^{-1},e) + d(g,e) < s + (r-s) = r$. Άρα $g \in KB^G_r \subseteq B^G_{r+s}$. Οπότε,

$$m_G(B^G_r \vartriangle KB^G_r) \leq m_G(B^G_r \setminus B^G_{r-s}) + m_G(B^G_{r+s} \setminus B^G_r) = m_G(B^G_{r+s}) - m_G(B^G_{r-s}).$$

Άρα,

$$\begin{aligned} 0 \leq \frac{m_G(B^G_r \vartriangle KB^G_r)}{m_G(B^G_r)} &\leq \frac{m_G(B^G_r \setminus B^G_{r+s})}{m_G(B^G_r)} - \frac{m_G(B^G_{r-s} \setminus B^G_r)}{m_G(B^G_r)} \\ &\underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 1 - 1 = 0. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{m_G(B^G_r \vartriangle KB^G_r)}{m_G(B^G_r)} \underset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Οπότε η $G$ είναι amenable. Αν $f_0 \in L^\infty \subseteq L^1$, τότε από το μέσο εργοδικό θεώρημα

$$A_n(f_0) \underset{n+\infty}{\longrightarrow} F_0 = \mathbb{E}(f_0 \mid \mathcal{E})$$

ως προς την $\|\cdot\|_1$ νόρμα. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|F_o - A_M(f_0)\|_1 < \frac{\varepsilon^2}{C_G}$. Εφαρμόζουμε το προηγούμενο θεώρημα για την $F_0 - A_M(f_0) \in L^1$ και έχουμε

$$\varepsilon\mu(\{x \in X : \sup_{r>0} A_r(F_0 - A_M(f_0)) > \varepsilon\}) < C_G\|F_0 - A_M(f_0)\|_1 < \frac{C_G\varepsilon^2}{C_G} = \varepsilon^2.$$

Άρα,

$$\mu(\{x \in X : \sup_{r>0} A_r(F_0 - A_M(f_0)) > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Επίσης,

$$A_r(F_0)(x) = \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_r^G} F_0(gx)\, dm_G(g) = \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_r^G} F_0(x)\, dm_G(g) = F_0(x)$$

για κάθε $x \in X$. Άρα $A_r(F_0) = F_0$. Επιπλέον,

$$\begin{aligned} A_r(A_M(f_0))(x) &= \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_G A_M(f_0)(gx)\chi_{B_r^G}(g)\, dm_G(g) \\ &= \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_G \int_G \frac{f_0(hgx)}{m_G(B_M^G)} \chi_{B_r^G}(g)\chi_{B_M^G}(h)\, dm_G(g)\, dm_G(h) \\ &\overset{g'}{=\!=} \frac{1}{m_G(B_r^G)m_G(B_M^G)} \int_G \int_G \chi_{B_r^G}(h^{-1}g')\chi_{B_M^G}(h)\, dm_G(h)\, f_0(g'x)\, dm_G(g'). \end{aligned}$$

Θέτουμε

$$\psi(g') = \int_G \chi_{B_r^G}(h^{-1}g')\chi_{B_M^G}(h)\, dm_G(h).$$

- Αν $g' \in B_{r-M}^G$, τότε $h^{-1}g' \in B_M^G B_{r-M}^G \subseteq B_r^G$ για κάθε $h \in B_M^G$. Έπεται ότι

  $$\psi(g') = \int_G \chi_{B_r^G}(h^{-1}g')\chi_{B_M^G}(h)\, dm_G(h) = m_G(B_M^G).$$

- Αν $g' \notin B_{r+M}^G$, τότε αν $h^{-1}g' \in B_r^G$ για κάποιο $h \in B_M^G$, θα έχουμε

  $$g' = h(h^{-1}g') \in B_M^G B_r^G \subseteq B_{r+M}^G,$$

  άτοπο. Συνεπώς $h^{-1}g' \notin B_r^G$, οπότε $\psi(g') = 0$.

- Αν $g' \in B_{r+M}^G \setminus B_{r-M}^G$, τότε $0 \leq \psi(g') \leq m_G(B_M^G)$.

Επομένως

$$\begin{aligned}
|A_r(A_M(f_0)) - A_r(f_0)| = \Big| & \frac{1}{m_G(B_r^G) m_G(B_M^G)} \int_G \psi(g) f_0(gx)\, dm_G(g) \\
& - \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_r^G} f_0(gx)\, dm_G(g) \Big| \\
&= \frac{1}{m_G(B_r^G)} \Big| \int_G \Big( \frac{1}{m_G(B_M^G)} \psi(g) - \chi_{B_r^G}(g) \Big) f_0(gx)\, dm_G(g) \Big| \\
&\leq \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_G \Big| \frac{1}{m_G(B_M^G)} \psi(g) - \chi_{B_r^G}(g) \Big| |f_0(gx)|\, dm_G(g) \\
&\leq \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{G \setminus B_{r+M}^G} \Big| \frac{1}{m_G(B_M^G)} \psi(g) - \chi_{B_r^G}(g) \Big| |f_0(gx)|\, dm_G(g) \\
&+ \int_{B_{r+M}^G} \Big| \frac{1}{m_G(B_M^G)} \psi(g) - \chi_{B_r^G}(g) \Big| |f_0(gx)|\, dm_G(g) \\
&+ \int_{B_{r-M}^G} \Big| \frac{1}{m_G(B_M^G)} \psi(g) - \chi_{B_r^G}(g) \Big| |f_0(gx)|\, dm_G(g)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_{r+M}^G \setminus B_{r-M}^G} \Big| \frac{1}{m_G(B_M^G)} \psi(g) - \chi_{B_r^G}(g) \Big| |f_0(gx)|\, dm_G(g) \\
&= \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_{r+M}^G \setminus B_r^G} \Big| \frac{1}{m_G(B_M^G)} \psi(g) - \chi_{B_r^G}(g) \Big| |f_0(gx)|\, dm_G(g) \\
&+ \frac{1}{m_G(B_r^G)} \int_{B_r^G \setminus B_{r-M}^G} \Big| \frac{1}{m_G(B_M^G)} \psi(g) - \chi_{B_r^G}(g) \Big| |f_0(gx)|\, dm_G(g) \\
&\leq \frac{m_G(B_{r+M}^G \setminus B_r^G)}{m_G(B_r^G)} \|f_0\|_\infty + \frac{1}{m_G(B_r^G)} m_G(B_r^G \setminus B_{r-M}^G) \|f_0\|_\infty \\
&= \frac{m_G(B_{r+M}^G \setminus B_{r-M}^G)}{m_G(B_r^G)} \|f_0\|_\infty \\
&= \|f_0\|_\infty \left( \frac{m_G(B_{r+M}^G}{m_G(B_r^G)} - \frac{m_G(B_{r-M}^G)}{m_G(B_r^G)} \right) \underset{r \to +\infty}{\longrightarrow} 0
\end{aligned}$$

από την ιδιότητα (F). Οπότε,

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x \in X : \limsup_{r \to +\infty} |F_0(x) - A_r(f_0)(x)| > \varepsilon\}) \\
&\leq \mu(\{x \in X : \limsup_{r \to +\infty} |F_0(x) - A_r(f_0)(x)| + \limsup_{r \to +\infty} |A_r(A_M(f_0))(x) - A_r(f_0)(x)| > \varepsilon\}) \\
&= \mu(\{x \in X : \limsup_{r \to +\infty} |A_r(F_0 - A_M(f_0))(x)| > \varepsilon\}) \\
&\leq \mu(\{x \in X : \sup_{r \to +\infty} |A_r(F_0 - A_M(f_0))(x)| > \varepsilon\}) < \varepsilon.
\end{aligned}$$

Άρα $A_r(f_0) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} F_0$ $\mu$-σ.π.

Από το προηγούμενο θεώρημα ισχύει ότι $A_n(f) \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} \mathbb{E}(f \mid \mathcal{E}) = F$ για $f \in L^1_\mu$. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε υπάρχει $f_0 \in L^\infty_\mu$ ώστε $\|f - f_0\|_1 < \varepsilon^2$. Θέτοντας

$$F_0 \overset{L^1_\mu}{=\!=} \lim_{r\to+\infty} A_r(f_0) = \mathbb{E}(f_0 \mid \mathcal{E})$$

και επειδή

$$\begin{aligned}
\|F - F_0\|_1 &= \int_X |\mathbb{E}(f \mid \mathcal{E})(x) - \mathbb{E}(f_0 \mid \mathcal{E})(x)|\, d\mu(x) \\
&= \int_X |\mathbb{E}(f - f_0 \mid \mathcal{E})(x)|\, d\mu(x) \\
&\le \int_X \mathbb{E}(|f - f_0| \mid \mathcal{E})(x)\, d\mu(x) = \int_X |f - f_0|(x)\, d\mu(x) = \|f - f_0\|_1 < \varepsilon^2,
\end{aligned}$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
&\mu(\{x \in X : \limsup_{r\to+\infty} |F(x) - A_r(f)(x)| > 2\varepsilon\}) \\
&\le \mu(\{x \in X : |F(x) - F_0(x)| \\
&+ \limsup_{r\to+\infty} |F_0(x) - A_r(f_0)(x)| + \limsup_{r\to+\infty} |A_r(f_0 - f)(x)| > 2\varepsilon\}) \\
&\le \mu(\{x \in X : |F(x) - F_0(x)| > \varepsilon\} + \mu(\{x \in X : \limsup_{r\to+\infty} |A_r(f_0 - f)(x)| > \varepsilon\}) \\
&\le \frac{1}{\varepsilon}\|F - F_0\|_1 + \frac{1}{\varepsilon}\|f - f_0\|_1 < \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2 + \frac{1}{\varepsilon}\varepsilon^2 = 2\varepsilon,
\end{aligned}$$

γιατί $\|A_r(f) - A_r(f_0)\|_1 \le \|f - f_0\|_1$ για κάθε $r > 0$. Άρα, $A_r(f) \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} F$ $\mu$-σ.π. και έπεται ότι $\|A_r(f) - F\|_1 \underset{r\to+\infty}{\longrightarrow} 0$. □

# Κεφάλαιο 7

# Εργοδική διάσπαση για δράσεις ομάδων

## 7.1 Εργοδική διάσπαση

Στόχος μας σε αυτή την ενότητα είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα εργοδικής διάσπασης για μια συνεχή δράση μιας $\sigma$-συμπαγούς μετρικής ομάδας που διατηρεί το μέτρο.

**7.1.1 Θεώρημα.** *Έστω $G$ μια $\sigma$-συμπαγής μετρική ομάδα που δρα συνεχώς σε έναν $\sigma$-συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$. Έστω $\mu$ ένα $G$-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας στον $X$, και έστω*

$$\mathcal{E} = \{B \subseteq X : \text{ το } B \text{ είναι μετρήσιμο και } \mu(g \cdot B \triangle B) = 0 \text{ για κάθε } g \in G\}$$

*η $\sigma$-άλγεβρα των $G$-αναλλοίωτων συνόλων. Τότε*

$$\mu = \int \mu_x^{\mathcal{E}} \, d\mu(x)$$

*είναι η εργοδική διάσπαση του $\mu$. Δηλαδή, για $\mu$-σχεδόν κάθε $x$, το δεσμευμένο μέτρο $\mu_x^{\mathcal{E}}$ είναι ένα $G$-αναλλοίωτο και εργοδικό μέτρο πιθανότητας στον $X$.*

Το λήμμα που ακολουθεί θα παίξει το ρόλο εργοδικού θεωρήματος για τον σκοπό μας.

**7.1.2 Λήμμα.** *Έστω $P_1, P_2, \ldots$ ορθογώνιες προβολές, ορισμένες σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Hilbert $H$. Ορίζουμε τους τελεστές*

$$Q_1 = P_1, Q_2 = Q_1 P_2 Q_1, \ldots, Q_{n+1} = Q_n P_{n+1} Q_n$$

*για κάθε $n \geq 0$. Τότε για κάθε $v \in H$ η ακολουθία $(Q_n v)_{n \in \mathbb{N}}$ συγκλίνει ως προς την $\| \cdot \|_2$ στο $Pv$, όπου $P$ η ορθογώνια προβολή στον $\bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Im} P_m$.*

*Απόδειξη.* Έστω $v \in H$. Παρατηρούμε αρχικά ότι $\|Q_n\|_2 \leq 1$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Πράγματι, $\|Q_1\|_2 = \|P_1\|_2 = 1$. Αν υποθέσουμε ότι $\|Q_n\|_2 \leq 1$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$, θα δείξουμε ότι $\|Q_{n+1}\|_2 \leq 1$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\|Q_{n+1}(x)\|_2 &= \|Q_nP_{n+1}Q_n(x)\|_2 \leq \|Q_n\|_2\|P_{n+1}(Q_n(x))\|_2 \leq \|P_{n+1}(Q_n(x))\|_2 \\ &\leq \|Q_n\|_2\|x\|_2 \leq \|x\|_2\end{aligned}$$

για κάθε $x \in H$. Άρα $\|Q_{n+1}\|_2 \leq 1$.

Συνεπώς, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε ότι $\|Q_n\|_2 \leq 1$, οπότε $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq (S^*, w^*)$ και από το θεώρημα Banach-Alaoglu ισχύει ότι, αφού ο $H$ είναι επιπλέον διαχωρίσιμος, υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών αριθμών $n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots$ ώστε $Q_{n_k} \xrightarrow{w^*} a$. Άρα

$$Q_{n_k}(v) \xrightarrow{w^*} a(v) =: w$$

δηλαδή

$$\langle G_{n_k}(v), \xi\rangle \longrightarrow \langle w, \xi\rangle$$

για κάθε $\xi \in H$. Θα δείξουμε ότι $w \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Im}P_m$.

Δείχνουμε αρχικά ότι

$$P_1Q_n = Q_n \tag{7.1.1}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για $n = 1$ έχουμε $P_1Q_1 = P_1P_1 = P_1^2 = P_1 = Q_1$, αφού ο $P_1$ είναι προβολή. Υποθέτουμε ότι ο ισχυρισμός ισχύει για τον $n \in \mathbb{N}$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για τον $n+1$. Έχουμε ότι

$$P_1Q_{n+1} = P_1Q_nP_{n+1}Q_n = Q_nP_{n+1}Q_n = Q_{n+1}.$$

Άρα, αν $\xi \in (\mathrm{Im}P_1)^{\perp} = \mathrm{Ker}P_1$ τότε

$$\langle Q_{n_k}(v), \xi\rangle = \langle P_1Q_{n_k}(v), \xi\rangle = \langle Q_{n_k}(v), P_1\xi\rangle = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Άρα,

$$\langle w, \xi\rangle = \lim_{k\to\infty} \langle Q_{n_k}(v), \xi\rangle = 0,$$

δηλαδή $w \in \mathrm{Im}P_1$.

Τώρα θα δείξουμε ότι $w \in \mathrm{Im}P_m$ για κάθε $m \geq 2$. Ορίζουμε

$$c = \lim_{n\to\infty} \|Q_n(v)\|_2 = \inf_{n\in\mathbb{N}} \|Q_n(v)\|_2.$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει γιατί

$$\|Q_{n+1}(v)\|_2 = \|Q_nP_{n+1}Q_n(v)\|_2 \leq \|Q_n(v)\|_2$$

αφού ο $Q_nP_{n+1}$ είναι γινόμενο ορθογώνιων προβολών, απ' όπου έπεται ότι η ακολουθία $(\|Q_n(v)\|_2)_{n\in\mathbb{N}}$ είναι φθίνουσα και κάτω φραγμένη. Έστω $m \geq 1$ και $\varepsilon > 0$.

Από τον ορισμό του $c$ και τις προηγούμενες παρατηρήσεις, υπάρχει $n > m$ τέτοιος ώστε $\|Q_{n-1}(v)\|_2 < c + \varepsilon$. Τότε

$$Q_n = Q_{m-1} P_m S P_n Q_{n-1}$$

για κάποιο γινόμενο $S$ προβολών $P_\ell$ για διάφορους δείκτες $\ell$ (αυτό μπορεί να το δει κανείς με επαγωγή, ξεκινώντας με $n = m + 1$ και χρησιμοποιώντας τον επαγωγικό ορισμό του $Q_n$). Ορίζουμε

$$v' = P_m S P_n Q_{n-1}(v) \in \mathrm{Im} P_m.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι το $Q_{m-1}(v') = Q_n(v)$ είναι κοντά στον $\mathrm{Im}P_m$ εφαρμόζοντας διαδοχικά στο $v'$ τις προβολές $P_\ell$ που εμφανίζονται στον $Q_{m-1}$. Έστω $P$ η πρώτη προβολή που εμφανίζεται στα δεξιά στον $Q_{m-1}$. Τότε

$$c \le \|P(v')\|_2 \le \|v'\|_2 < c + \varepsilon$$

άρα

$$\|v' - P(v')\|_2 = \sqrt{\|v'\|_2^2 - \|P(v')\|_2^2} \le \sqrt{(c+\varepsilon)^2 - c^2} = \sqrt{2c\varepsilon + \varepsilon^2}.$$

Έστω $i(m)$ το πλήθος των προβολών που εμφανίζονται στον ορισμό του $Q_{m-1}$. Επαναλαμβάνοντας το προηγούμενο επιχείρημα, και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα, παίρνουμε

$$\|v' - Q_n(v)\|_2 = \|v' - Q_{m-1}(v')\|_2 \le i(m)\sqrt{2c\varepsilon + \varepsilon^2}, \tag{7.1.2}$$

άρα το $Q_n(v)$ απέχει από τον $\mathrm{Im}P_m$ απόσταση μικρότερη από $i(m)\sqrt{2c\varepsilon + \varepsilon^2}$. Θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την παρατήρηση ως το ανάλογο της (7.1.1). Αν $\xi$ είναι ένα στοιχείο του $(\mathrm{Im}P_m)^\perp$ τότε για αρκετά μεγάλα $k$ έχουμε

$$|\langle Q_{n_k}(v), \xi\rangle| = |\langle Q_{n_k}(v), \xi\rangle - \langle v', \xi\rangle| \le i(m)\sqrt{2c\varepsilon + \varepsilon^2}\,\|\xi\|_2$$

από την (7.1.2) με $n = n_k$ και $v' \in \mathrm{Im}P_m$ που εξαρτάται από τον $n_k$. Συνεπώς, έχουμε $\langle w, \xi\rangle = 0$ για το $w^*$-όριο $w$ της $Q_{n_k}(v)$ για κάθε $\xi \in (\mathrm{Im}P_m)^\perp$ και κάθε $m \ge 1$. Έπεται τώρα ο ισχυρισμός ότι $w \in \bigcap_{m=1}^\infty \mathrm{Im}P_m$.

Ειδικότερα, $Q_{n_k}(w) = w$, άρα

$$\begin{aligned}\langle Q_{n_k}(v-w), v-w\rangle &= \langle Q_{n_k}(v), v-w\rangle - \langle w, v-w\rangle \\ &\longrightarrow \langle w, v-w\rangle - \langle w, v-w\rangle = 0\end{aligned}$$

καθώς το $k \to \infty$. Αφού $Q_n^* = Q_n$ και $P_n^* = P_n = P_n^2$, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\langle Q_{n_k}(v-w), v-w\rangle &= \langle P_{n_k} Q_{n_k-1}(v-w), P_{n_k} Q_{n_k-1}(v-w)\rangle \\ &= \|P_{n_k} Q_{n_k-1}(v-w)\|_2^2 \longrightarrow 0\end{aligned}$$

καθώς το $k \to \infty$. Άρα,

$$\|Q_n(v-w)\|_2 = \|Q_n(v) - w\|_2 \to 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Δηλαδή, η αρχική ακολουθία συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_2$.

Για να δούμε ότι το $w$ είναι η προβολή του $v$ στον $\bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Im} P_m$ παρατηρούμε ότι αν $v' \in \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathrm{Im} P_m$ τότε (χρησιμοποιώντας και την $Q_n(v') = v'$) έχουμε

$$\langle w, v' \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle Q_n(v), v' \rangle = \lim_{n\to\infty} \langle v, Q_n(v') \rangle = \langle v, v' \rangle$$

όπως θέλαμε. $\square$

Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 7.1.2 μαζί με τις προβολές

$$P(f) = \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{B}^g) \tag{7.1.3}$$

για $f \in L^2(X, \mathcal{B}, \mu)$, όπου $\mathcal{B}^g = \{B \in \mathcal{B} : \mu(g \cdot B \triangle B) = 0\}$ είναι η $\sigma$-άλγεβρα των $g$-αναλλοίωτων συνόλων για δοθέν $g \in G$. Από το κατά σημείο εργοδικό θεώρημα για τον μετασχηματισμό $g$, ο τελεστής $P(f)$ έχει κατά σημείο ερμηνεία με την έννοια ότι η σχέση

$$P(f)(x) = \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m} \sum_{i=0}^{m-1} f(g^i \cdot x) \tag{7.1.4}$$

ορίζει την προβολή $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{B}^g)$ και το όριο υπάρχει στο συμπλήρωμα ενός μηδενικού συνόλου $N = N(f, g)$.

Υποθέτουμε αρχικά ότι η $G$ είναι αριθμήσιμη, και γράφουμε $G = \{g_1, g_2, \dots, \}$. Η προβολή $P_n$ ορίζεται τότε από την (7.1.3) για $g = g_n$, και ισοδύναμα από την (7.1.4). Επιπλέον, σε αυτή την περίπτωση ο τελεστής της προβολής στον $\bigcap_{n=1}^{\infty} \mathrm{Im} P_n$ είναι ακριβώς η απεικόνιση $f \mapsto \mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{E})$, όπου $\mathcal{E} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{B}^{g_n}$ όπως στη διατύπωση του Θεωρήματος 7.1.1.

**7.1.3 Λήμμα.** *Έστω $G = \{g_1, g_2, \dots\}$ μια αριθμήσιμη ομάδα που δρα συνεχώς σε έναν $\sigma$-συμπαγή μετρικό χώρο $(X, d)$, και έστω $\mu$ ένα $G$-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας στον $X$. Τότε το $\mu$ είναι εργοδικό αν και μόνο αν, για κάθε $f \in C_c(X)$ ή για όλες τις $f$ σε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο του $C_c(X)$, έχουμε*

$$(Q_{n_k} f)(x) \to \int f \, d\mu$$

*όταν το $k \to \infty$ σχεδόν για κάθε $x$, για κάποια γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών $(n_k)$ η οποία μπορεί να εξαρτάται από την $f$.*

Σημειώνουμε και πάλι ότι για κάθε $f \in L^2_\mu$ η συνάρτηση $(Pf)(x)$ της (7.1.4) είναι επίσης στον $L^2_\mu$, άρα $Q_n f \in L^2_\mu$ για κάθε $n \geq 1$ και $f \in C(X)$. Επιπλέον, η $Q_n f$ συγκλίνει στον $L^2_\mu$ στην $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{E})$ από το Λήμμα 7.1.2, άρα υπάρχει πάντα μια υπακολουθία $Q_{n_k} f$ η οποία συγκλίνει στην $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{E})$.

*Απόδειξη του Λήμματος 7.1.3.* Θεωρούμε $f \in C_c(X)$ και ένα εργοδικό μέτρο πιθανότητας $\mu$. Τότε η $Q_n f$ συγκλίνει στο $\int f \, d\mu$ στον $L^2_\mu$, άρα υπάρχει υπακολουθία

$Q_{n_k} f \to \int f\, d\mu$ σχεδόν παντού. Από την άλλη πλευρά, αν έχουμε κάποια υπακολουθία $Q_{n_k} f \to \int f\, d\mu$ σχεδόν παντού, τότε η ορθογώνια προβολή της $f$ στον υπόχωρο των $G$-αναλλοίωτων συναρτήσεων πρέπει να δίνει το $\int f\, d\mu$. Γνωρίζοντας αυτό για κάθε $f \in C_c(X)$ (ή για όλες τις $f$ σε ένα πυκνό υποσύνολο του $C_c(X)$) συμπεραίνουμε, από την πυκνότητα του $C_c(X)$ στον $L^2_\mu$, ότι δεν υπάρχουν σχεδόν παντού $G$-αναλλοίωτες όχι-σταθερές συναρτήσεις, άρα το $\mu$ είναι εργοδικό. □

*Απόδειξη του Θεωρήματος* 7.1.1. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $G = \{g_1, g_2, \ldots\}$ είναι αριθμήσιμη, θεωρούμε ένα αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο $D \subseteq C_c(X)$ και μια $f \in D$. Γνωρίζουμε ότι το όριο $f^{(1)} = P_1(f)$ που ορίζεται όπως στην (7.1.4) (χρησιμοποιώντας την $g = g_1$) συγκλίνει στο συμπλήρωμα ενός μηδενικού συνόλου. Αφού η $G$ είναι αριθμήσιμη, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το μηδενικό σύνολο είναι $G$-αναλλοίωτο. Όμοια, η $f^{(2)} = P_2(f^{(1)})$, η $f^{(3)} = P_1(f^{(2)}) = Q_2(f), \ldots$ (όπως στην (7.1.4) χρησιμοποιώντας τις $g = g_2, g = g_1, \ldots$) συγκλίνει κατά σημείο στο συμπλήρωμα ενός $G$-αναλλοίωτου μηδενικού συνόλου. Εδώ χρησιμοποιούμε τα στοιχεία της ομάδας $g_n$ με τη σειρά με την οποία οι αντίστοιχες προβολές $P_n$ χρησιμοποιούνται για να οριστεί ο $Q_\ell$. Συνεπώς, παίρνουμε ένα $G$-αναλλοίωτο μηδενικό σύνολο με την ιδιότητα ότι η $Q_n(f)(x)$ ορίζεται στο συμπλήρωμά του για κάθε $n$, και εδώ ο ορισμός του $Q_n(f)(x)$ είναι τέτοιος που δεν χρησιμοποιούμε ιδιότητες του μέτρου $\mu$, αλλά μόνο χρησιμοποιούμε τις τιμές της $f$ στην τροχιά $G \cdot x$. Παίρνοντας πάλι μια αριθμήσιμη ένωση μηδενικών συνόλων μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα παραπάνω ισχύουν για κάθε $f \in D$ και κάθε $x \in X'$, για κάποιο $G$-αναλλοίωτο σύνολο $X'$ με μηδενικό συμπλήρωμα.

Σταθεροποιούμε πάλι μια $f \in D$. Από το Λήμμα 7.1.2, η $Q_n(f)$ συγκλίνει στην $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{E})$ ως προς την $L^2_\mu$-νόρμα. Έπεται ότι υπάρχει μια γνησίως αύξουσα ακολουθία δεικτών $n_k = n_k(f)$ για την οποία

$$Q_{n_k} f(x) \to \mathbb{E}(f|\mathcal{E}) = \int f\, d\mu_x^{\mathcal{E}} \tag{7.1.5}$$

σχεδόν παντού όταν το $k \to \infty$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η σύγκλιση στην (7.1.5) ισχύει επίσης για $x \in X'$, για κάθε $f \in D$ και για την αντίστοιχη υπακολουθία $(n_k = n_k(f))$.

Αφού η $\mathcal{E}$ είναι η $\sigma$-άλγεβρα των αναλλοίωτων συνόλων, και συνεπώς η $\mathcal{E}$ είναι $g$-αναλλοίωτη $\sigma$-άλγεβρα, για κάθε $g \in G$, έχουμε

$$g_* \mu_x^{\mathcal{E}} = \mu_x^{\mathcal{E}} \tag{7.1.6}$$

σχεδόν παντού για κάθε $g \in G$, από το Πόρισμα 2.3.3. Συρρικνώνοντας πάλι το $X'$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η (7.1.6) ισχύει για $x \in X'$, και τέλος ότι $\mu_x^{\mathcal{E}}(X') = 1$ για κάθε $x \in X'$, χωρίς να χάνουμε την ιδιότητα ότι το $X'$ έχει πλήρες μέτρο και είναι $G$-αναλλοίωτο.

Ισχυριζόμαστε ότι το $\mu_x^{\mathcal{E}}$ είναι $G$-αναλλοίωτο και εργοδικό μέτρο πιθανότητας για κάθε $x \in X'$. Το αναλλοίωτο ισχύει από την (7.1.6) και την επιλογή του $X'$.

Για την εργοδικότητα εφαρμόζουμε το Λήμμα 7.1.3 για το μέτρο $\mu_x^{\mathcal{E}}$. Για το σκοπό αυτό πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $f \in D$ η $Q_{n_k}f(x)$ συγκλίνει $\mu_x^{\mathcal{E}}$-σχεδόν παντού στο $\int f\, d\mu_x^{\mathcal{E}}$. Για κάθε $x \in X'$ έχουμε ότι η $P_1(f)(x)$ που ορίζεται όπως στην (7.1.4) συγκλίνει. Συνεπώς, εφαρμόζοντας το εργοδικό θεώρημα για την $f$ και το $\mu_x^{\mathcal{E}}$, παίρνουμε ότι η $f^{(1)}$ μπορεί να ταυτιστεί με την προβολή της $f$ στον υπόχωρο των $g_1$-αναλλοίωτων συναρτήσεων στον $L^2_{\mu_x^{\mathcal{E}}}$. Όμοια παίρνουμε ότι η $f^{(\ell)}(x)$ όπως ορίστηκε επαγωγικά πιο πάνω για $x \in X'$, μπορεί να ταυτιστεί, ως στοιχείο του $L^2_{\mu_x^{\mathcal{E}}}$, με το αποτέλεσμα των διαδοχικών προβολών της $f$ στους $g_1, g_2, g_1, \ldots$-αναλλοίωτους υπόχωρους του $L^2_{\mu_x^{\mathcal{E}}}$. Ειδικότερα, αφού η $Q_{n_k}(f)(x)$ συγκλίνει για $x \in X'$ στο $\int f\, d\mu_x^{\mathcal{E}}$, συμπεραίνουμε ότι το $\mu_x^{\mathcal{E}}$ είναι $G$-εργοδικό από το Λήμμα 7.1.3. Σημειώνουμε ότι για τη μετάβαση από το $\mu$ στο $\mu_x^{\mathcal{E}}$ σε αυτό το επιχείρημα, βασικό ρόλο παίζει το γεγονός ότι η $Q_n(f)(x)$ ορίζεται με τρόπο που εξαρτάται μόνο από το $x$ και όχι από το μέτρο $\mu$ (ή το $\mu_x^{\mathcal{E}}$ αντίστοιχα). Αυτό εξασφαλίζεται από την (7.1.4) και τον αναδρομικό ορισμό του $Q_n$.

Έστω τώρα ότι η $G$ είναι τυχούσα $\sigma$-συμπαγής μετρική ομάδα. Τότε υπάρχει μια αριθμήσιμη πυκνή υποομάδα $G' \subseteq G$ για την οποία ο ισχυρισμός έχει ήδη αποδειχθεί. Παρατηρήστε ότι από τη συνέχεια της δράσης και την πυκνότητα της $G'$ στην $G$ έχουμε ότι ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{M}(X)$ είναι $G$-αναλλοίωτο αν και μόνο αν είναι $G'$-αναλλοίωτο. Όμοια, ένα μετρήσιμο σύνολο $B$ είναι $G$-αναλλοίωτο modulo $\mu$ (αντίστοιχα modulo $\mu_x^{\mathcal{E}}$) αν και μόνο αν είναι $G'$-αναλλοίωτο modulo $\mu$ (αντίστοιχα modulo $\mu_x^{\mathcal{E}}$). Έπεται ότι η $\sigma$-άλγεβρα $\mathcal{E}$ μπορεί να οριστεί είτε χρησιμοποιώντας την $G$ είτε χρησιμοποιώντας την $G'$. Εφαρμόζοντας το αποτέλεσμα που αποδείξαμε για την $G'$, βλέπουμε ότι τα $\mu_x^{\mathcal{E}}$ είναι $G'$-αναλλοίωτα και εργοδικά μέτρα πιθανότητας σχεδόν βεβαίως. Δηλαδή,

$$\mu = \int \mu_x^{\mathcal{E}}\, d\mu$$

είναι η εργοδική διάσπαση για το $\mu$ και την δράση της $G'$. Όμως, από τις παραπάνω παρατηρήσεις, αν το $\mu_x^{\mathcal{E}}$ είναι $G'$-αναλλοίωτο και εργοδικό, τότε είναι επίσης $G$-αναλλοίωτο και εργοδικό. Τώρα, το θεώρημα έπεται. □

## 7.2 Στάσιμα μέτρα

Όπως έχουμε δει, υπάρχουν συνεχείς δράσεις ομάδων σε συμπαγείς μετρικούς χώρους οι οποίες δεν έχουν αναλλοίωτα μέτρα πιθανότητας. Ένας τρόπος για να ξεπεράσουμε αυτή τη δυσκολία είναι να περιορίσουμε την προσοχή μας στις δράσεις amenable ομάδων. Ένας άλλος τρόπος είναι να χαλαρώσουμε την απαίτηση του αυστηρά αναλλοίωτου για τα μέτρα πιθανότητας που θεωρούμε.

Αντί να απαιτούμε το αναλλοίωτο για κάθε στοιχείο της ομάδας που δρα, μπορούμε να ζητήσουμε το αναλλοίωτο κατά μέσο όρο, με μια έννοια, και έτσι οδηγούμαστε στον ακόλουθο ορισμό.

**7.2.1 Ορισμός.** Έστω $G$ μια $\sigma$-συμπαγής μετρικοποιήσιμη ομάδα, εφοδιασμένη με ένα μέτρο πιθανότητας $\nu$. Υποθέτουμε ότι η $G$ δρα συνεχώς σε έναν $\sigma$-συμπαγή μετρικό χώρο $X$. Ένα μέτρο πιθανότητας $\mu \in \mathcal{M}(X)$ λέγεται $\nu$-στάσιμο αν

$$\mu = \int_G g_* \mu \, d\nu(g),$$

ή ισοδύναμα αν

$$\int_X f(x) d\mu(x) = \int_G \int_X f(g \cdot x) d\mu(x) \, d\nu(g)$$

για κάθε $f \in C_c(X)$.

Διαισθητικά, μπορούμε να σκεφτόμαστε την ιδιότητα του "στάσιμου" ως την ιδιότητα του "αναλλοίωτου" ως προς τον τυχαίο περίπατο στον $X$ που ορίζεται από το μέτρο $\nu$. Αυτός ο τυχαίος περίπατος ορίζεται ως εξής: Για δοθέν $x \in X$, επιλέγουμε τυχαία, ως προς το μέτρο $\nu$, ένα στοιχείο $g \in G$, και στη συνέχεια μετακινούμε το $x$ στη θέση $g \cdot x$. Αυτή η διασύνδεση περιγράφεται πιο τυπικά στην επόμενη πρόταση και μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε επιχειρήματα που χρησιμοποιούσαμε για έναν μόνο μετασχηματισμό για να μελετήσουμε γενικές δράσεις ομάδων.

**7.2.2 Πρόταση.** *Έστω $G$ μια $\sigma$-συμπαγής μετρικοποιήσιμη ομάδα, και έστω $\nu$ ένα μέτρο πιθανότητας στην $G$. Υποθέτουμε ότι η $G$ δρα συνεχώς σε έναν συμπαγή μετρικό χώρο $X$. Τότε υπάρχει ένα $\nu$-στάσιμο μέτρο στον $X$.*

*Απόδειξη.* Έστω $\mu_0 \in \mathcal{M}(X)$ ένα μέτρο πιθανότητας στον $X$. Ορίζουμε ένα νέο μέτρο πιθανότητας $\nu * \mu_0$ θέτοντας

$$\nu * \mu_0 = \int_G g_* \mu_0 \, d\nu(g).$$

Θεωρούμε επίσης τους μέσους όρους

$$\mu_N = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} \nu * (\nu * \cdots (\nu * \mu_0) \cdots),$$

που σχηματίζουν μια ακολουθία μέτρων στον συμπαγή χώρο $\mathcal{M}(X)$. Έπεται ότι υπάρχει μια υπακολουθία $(\mu_{N_k})$ η οποία συγκλίνει σε κάποιο $\mu \in \mathcal{M}(X)$. Παρατηρούμε ότι

$$\nu * \mu_{N_k} - \mu_{N_k} = \frac{1}{N_k} (\nu * (\nu * \cdots (\nu * \mu_0) \cdots)) - \mu_0,$$

το οποίο δείχνει ότι

$$\left| \int f \, d\nu * \mu_{N_k} - \int f \, d\mu_{N_k} \right| \leq \frac{2\|f\|_\infty}{N_k}$$

για κάθε $f \in C(X)$. Το

$$\int f \, d\nu * \mu_{N_k} = \iint f(g \cdot x) \, d\nu(g) \, d\mu_{N_k}(x) \tag{7.2.1}$$

συγκλίνει (όταν το $k \to \infty$) στο

$$\iint f(g \cdot x)\, d\nu(g)\, d\mu(x) = \int f\, d\nu * \mu. \tag{7.2.2}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι το $\mu$ είναι $\nu$-στάσιμο. $\square$

# Βιβλιογραφία


[1] M. Einsiedler and T. Ward, *Ergodic theory with a view towards number theory*. Graduate Texts in Mathematics, 259. Springer-Verlag London, Ltd., London, 2011.

[2] E. Hewitt, Edwin and K. A. Ross, *Abstract harmonic analysis. Vol. I. Structure of topological groups, integration theory, group representations*, Second edition. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften, 115. Springer-Verlag, Berlin-New York, 1979.

[3] W. H. Gottschalk and G. A. Hedlund, *Topological dynamics*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 36 (American Mathematical Society, Providence, R. I., 1955).

[4] W. Rudin, *Fourier analysis on groups*, Reprint of the 1962 original. Wiley Classics Library. A Wiley-Interscience Publication. John Wiley & Sons, Inc., New York, 1990.

[5] W. Rudin, *Functional analysis*, Second edition. International Series in Pure and Applied Mathematics. McGraw-Hill, Inc., New York, 1991.