Η συνέπεια της Γενικευμένης Υπόθεσης του Συνεχούς με τα αξιώματα ZFC

Διπλωματική Εργασία

Γεώργιος Μαραγγέλης

Επιβλέπων: Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2021

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Απόστολος Γιαννόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ
Κωνσταντίνος Δημητρακόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Ι.Φ.Ε., ΕΚΠΑ
Βασιλική Φαρμάκη, Καθηγήτρια, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Σε αυτή την εργασία θα παρουσιαστεί μια απόδειξη της συνέπειας της γενικευμένης υπόθεσης του συνεχούς (GCH) με το σύνολο των αξιωμάτων Zermelo-Fraenkel, μαζί με το αξίωμα της επιλογής, για τη θεωρία συνόλων (ZFC).

Αρχικά ο Cantor είχε αποδείξει ότι ο πληθάριθμος του συνεχούς, c, δεν είναι ο πρώτος άπειρος πληθάριθμος, αλλά δεν μπορούσε να προσδιορίσει τη θέση του στην ιεραρχία των πληθαρίθμων. Έτσι αργότερα υπέθεσε ότι $c = \aleph_1$ ή ισοδύναμα $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, δηλαδή ότι είναι ο δεύτερος άπειρος πληθάριθμος. Αυτή η εικασία έγινε γνωστή ως η Υπόθεση του Συνεχούς (CH), η οποία πιο απλά διατυπωμένη είναι η εξής:

> *Δεν υπάρχει σύνολο του οποίου ο πληθάριθμος να είναι γνήσια μεταξύ του πληθαρίθμου των φυσικών αριθμών και του πληθαρίθμου των πραγματικών αριθμών.*

Αργότερα, ο Hausdorff (1908) διατύπωσε την εξης γενίκευση της υπόθεσης του συνεχούς:

> *Για κάθε άπειρο σύνολο A, δεν υπάρχει σύνολο του οποίου ο πληθάριθμος να βρίσκεται γνήσια μεταξύ του πληθαρίθμου του συνόλου A και του πληθαρίθμου του δυναμοσυνόλου του A.*

Ισοδύναμα, $2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1}$, για κάθε διατακτικό α. Η γενίκευση αυτή είναι γνωστή ως η Γενικευμένη Υπόθεση του Συνεχούς.

Στη συνέχεια ο Gödel, παρά τις προσπάθειές του, δεν κατάφερε να αποδείξει την ορθότητα ή μη της υπόθεσης του συνεχούς. Κατάφερε όμως να αποδείξει ότι δεν αντιβαίνει στα αξιώματα της συνολοθεωρίας, δηλαδή ότι είναι συνεπής με τα υπόλοιπα αξιώματα. Αργότερα αποδείχθηκε και ότι η άρνηση της υπόθεσης του συνεχούς είναι συνεπής με τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων.

Τέλος, με τις ίδιες μεθόδους αποδείχθηκε και η συνέπεια της γενικευμένης υπόθεσης του συνεχούς, καθώς και της άρνησής της, με το σύνολο των αξιωμάτων.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Αξιώματα

Θα αναφέρουμε εν συντομία κάποια στοιχεία της πρωτοβάθμιας λογικής και τα αξιώματα της συνολοθεωρίας, εκφράζοντας τα με τύπους, ώστε στη συνέχεια όταν αναφερόμαστε σε αυτά να είναι ξεκάθαρο το πλαίσιο στο οποίο δουλεύουμε.

Αρχικά ας δούμε λίγα στοιχεία της πρωτοβάθμιας λογικής, καθορίζοντας αρχικά τη γλώσσα την οποία θα χρησιμοποιούμε. Τα βασικά σύμβολα της γλώσσας είναι τα $\wedge$, $\neg$, $\exists$, $($, $)$, $\in$, $=$ και v_j, για κάθε φυσικό αριθμό j. Άτυπα θα σκεφτόμαστε την ερμηνεία του $\wedge$ ως «και», του $\neg$ ως «άρνηση», του $\exists$ ως «υπάρχει» και του $\in$ ως «ανήκει». Τέλος, το $=$ υποδηλώνει «ισότητα» και οι $v_0, v_1, \ldots$ είναι οι μεταβλητές της γλώσσας.

Τώρα, αφού καθορίσαμε τα σύμβολα της γλώσσας, ας δώσουμε έναν ορισμό για το τι είναι τύπος (δηλαδή εκφράσεις που έχουν νόημα για εμάς στη γλώσσα) ως εξής:

Ορισμός 1.1. (i) Τα $v_i \in v_j$ και $v_i = v_j$ είναι τύποι για κάθε i, j.

(ii) Αν οι φ και ψ είναι τύποι τότε και οι $(\varphi) \wedge (\psi)$, $\neg(\varphi)$ και $\exists v_j\ (\varphi)$, για κάθε i, είναι τύποι.

Για παράδειγμα ο $\exists v_0\ (\exists v_1\ ((v_0 \in v_1) \wedge (v_1 \in v_0)))$ είναι ένας τύπος.

Συχνά, βέβαια, θα τους γράφουμε, για διευκόλυνση του αναγνώστη, με μια πιο άτυπη μορφή παραλείποντας κάποιες από τις παρενθέσεις, αν είναι ευκρινές που πρέπει να τοποθετηθούν. Επιπλέον, θα προσθέσουμε και κάποια άλλα σύμβολα στη γλώσσα ώστε οι τύποι να γίνονται πιο εύκολα κατανοητοί. Τα νέα σύμβολα θα είναι τα $\vee$ (ή), $\forall$ (για κάθε), $\longrightarrow$ (συνεπάγεται) και $\longleftrightarrow$ (ισοδυναμία) και θα χρησιμοποιούνται ως εξής:

(i) $\forall v_i\ (\varphi)$ θα σημαίνει $\neg(\exists v_i\ (\neg(\varphi)))$.

(ii) $(\varphi) \vee (\psi)$ θα σημαίνει $\neg\left((\neg(\varphi)) \wedge (\neg(\psi))\right)$.

(iii) $(\varphi) \longrightarrow (\psi)$ θα σημαίνει $(\neg\,(\varphi) \vee (\psi))$.

(iv) $(\varphi) \longleftrightarrow (\psi)$ θα σημαίνει $((\varphi) \longrightarrow (\psi)) \wedge ((\psi) \longrightarrow (\varphi))$.

Τέλος, συχνά θα χρησιμοποιούμε τις εκφράσεις $\mathrm{v}_i \neq \mathrm{v}_j$, που θα σημαίνει $\neg\,(\mathrm{v}_i = \mathrm{v}_j)$ και $\mathrm{v}_i \notin \mathrm{v}_j$ που θα είναι ο $\neg(\mathrm{v}_i \in \mathrm{v}_j)$.

Αφού, λοιπόν, καθορίσαμε πλήρως την έννοια του τύπου και πώς θα την χρησιμοποιούμε πρέπει να αναφέρουμε δύο ακόμα έννοιες που θα μας φανούν χρήσιμες.

Ορισμός 1.2. Σε κάθε τύπο της μορφής $\exists x\ \varphi$, η μεταβλητή x αποκαλείται δεσμευμένη. Ελεύθερες θα αποκαλούμε τις μεταβλητές που δεν είναι δεσμευμένες.

Ορισμός 1.3. Θα λέμε πρόταση κάθε τύπο της πρωτοβάθμιας λογικής που δεν έχει ελεύθερες μεταβλητές.

Ορισμός 1.4. Ένα σύνολο προτάσεων, Σ, θα λέμε ότι είναι συνεπές, ανν δεν υπάρχει φ τ.ω. από το Σ να αποδεικύεται η φ και η $\neg\varphi$.

Τώρα θα απαριθμήσουμε τα αξιώματα της θεωρίας συνόλων, εκφρασμένα με τύπους πρωτοβάθμιας λογικής.

Αξίωμα 0: Ύπαρξη συνόλου

$$\exists\, x\, (x = x).$$

Αξίωμα 1: Έκτασης

$$\forall\, x\, \forall\, y\, (\forall\, z\, (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y).$$

Αξίωμα 2: Θεμελίωσης

$$\forall\, x\, [\exists y\, (y \in x) \longrightarrow \exists\, y\, (y \in x\ \wedge\ \neg\exists z(z \in x\ \wedge\ z \in y))].$$

Αξιωμα 3: Εξειδίκευσης

Για κάθε τύπο φ με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $x, z, w_1, \ldots, w_n$, ισχύει:

$$\forall\, z\, \forall\, w_1, \ldots, w_n\, \exists\, y\, \forall x (x \in y \longleftrightarrow x \in z\ \wedge\ \varphi).$$

Αξίωμα 4: Ζεύγους

$$\forall\, x\, \forall\, y\, \exists\, z\, (x \in z\ \wedge\ y \in z).$$

Αξίωμα 5: Ένωσης

$$\forall\, \mathcal{F}\, \exists\, A\, \forall\, Y\, \forall x\, (x \in Y\ \wedge\ Y \in \mathcal{F} \longrightarrow x \in A).$$

Αξίωμα 6: Αντικατάστασης

Για κάθε τύπο φ με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $x, y, A, w_1, \ldots, w_n$,

$$\forall\, A\, \forall\, w_1, \ldots, w_n\, [\forall\, x \in A \exists! y \varphi \longrightarrow \exists\, Y\, \forall\, x \in A\, \exists\, y \in Y \varphi].$$

Αξίωμα 7: Απείρου

$$\exists\, x\, (\varnothing \in x \,\wedge\, \forall\, y \in x\, (S(y) \in x)),$$

όπου $S(y) = y \cup \{y\}$.
Αξίωμα 8: Δυναμοσυνόλου

$$\forall\, x\, \exists\, y\, \forall\, z\, (z \subseteq x \,\longrightarrow\, z \in y).$$

Αξίωμα 9: Επιλογής (AC)

$$\forall\, A\, \exists R\, (\text{η}\, R\, \text{διατάσσει καλά το}\, A).$$

Τα αξιώματα 0–9 αποτελούν το σύστημα αξιωμάτων της θεωρίας συνόλων Zermelo–Frankel με το αξίωμα της επιλογής ή πιο απλά θα αναφερόμαστε σε αυτό ως ZFC σύστημα αξιωμάτων. Πολλές φορές τα συμπεράσματα που θα εξαγάγουμε απο το ZFC, δεν θα απαιτούν όλα τα αξιώματα και θα είναι σημαντικό να γνωρίζουμε ποια από αυτά χρησιμοποιούνται. Γι' αυτό το λόγο εισάγουμε την παρακάτω ορολογία. Με τη συντομογραφία ZF θα εννοούμε τα αξιώματα 0-8, με την ZF-P τα αξιώματα 0-7, με την ZFC-P τα αξιώματα 0-7 μαζί με το αξίωμα της επιλογής και με την ZF-P-Inf τα αξιώματα 0-6. Επιπλέον όταν στο συμβολισμό προστίθεται ένα πλην (-) ως εκθέτης, εννοούμε ότι από την αντίστοιχη θεωρία έχει αφαιρεθεί το αξίωμα της θεμελίωσης. Για παράδειγμα αν γράψουμε ZF^{-}-P θα εννοούμε τα αξιώματα ZF-P χωρίς το αξίωμα της θεμελίωσης.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Καλά θεμελιωμένα σύνολα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δουλεύουμε στο ZF^- και θα ορίσουμε την κλάση WF των καλά θεμελιωμένων συνόλων.

Ορισμός 2.1. Με υπερπεπερασμένη αναδρομή, για κάθε $\alpha \in ON$ (όπου με ON συμβολίζουμε την κλάση όλων των διατακτικών), ορίζουμε:

- $R(0) = 0$.
- $R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$.
- $R(\alpha) = \bigcup_{x<\alpha} R(x)$, όταν ο α είναι οριακός διατακτικός.

Ορισμός 2.2. $WF = \bigcup\{R(\alpha) : \alpha \in ON\}$.

Πρόταση 2.1. *Για κάθε διατακτικό α ισχύει:*

(i) *Το $R(\alpha)$ είναι μεταβατικό.*

(ii) *Για κάθε $x < \alpha$, $R(x) \subseteq R(\alpha)$.*

Απόδειξη. Θα τα αποδείξουμε και τα δύο ταυτόχρονα κάνοντας επαγωγή στο α. Αν $\alpha = 0$ τότε $R(0) = 0$ και τα ζητούμενα είναι προφανή.

Αν α οριακός, τότε το (ii) είναι προφανές από τον ορισμό. Για το (i) παίρουμε ένα $x \in R(\alpha)$, και συνεπώς υπάρχει $\xi < \alpha$ με $x \in R(\xi)$. Όμως, από την επαγωγική υπόθεση, έχουμε ότι το $R(\xi)$ είναι μεταβατικό, άρα προκύπτει ότι $x \subseteq R(\xi) \subseteq R(\alpha)$.

Αν $\alpha = \beta + 1$, για κάποιον διατακτικό β, τότε πρώτα παρατηρούμε ότι αν $x \in R(\beta)$, από επαγωγική υπόθεση, έχουμε $x \subseteq R(\beta)$, δηλαδή $x \in \mathcal{P}(R(\beta))$. Δηλαδή, $R(\beta) \subseteq R(\alpha)$. Πάλι από την επαγωγική υπόθεση αν $\xi < \alpha$ (δηλ. $\xi \leq \beta$) έχουμε $R(\xi) \subseteq R(\beta) \subseteq R(\alpha)$. Άρα έχουμε αποδείξει το (ii).

Για το (i), παίρνουμε ένα $x \in R(\alpha) = \mathcal{P}(R(\beta))$, άρα έχουμε $x \subseteq R(\beta) \subseteq R(\alpha)$, δηλαδή ότι το $R(\alpha)$ είναι μεταβατικό. $\square$

Ορισμός 2.3. Παρατηρούμε ότι αν $x \in WF$, τότε ο ελάχιστος α για τον οποίο ισχύει $x \in R(\alpha)$, πρέπει να είναι επόμενος. Συνεπώς μπορούμε να ορίσουμε $\mathrm{rank}(x)$ να είναι ο ελάχιστος $\beta \in ON$ τέτοιος ώστε (τ.ω.) $x \in R(\beta+1)$.

Πρόταση 2.2. *Για κάθε α ισχύει, $R(\alpha) = \{x \in WF : \mathrm{rank}(x) < \alpha\}$.*

Απόδειξη. Έχουμε $x \in WF$, με $\mathrm{rank}(x) < \alpha$ ανν υπάρχει $\beta < \alpha$ τ.ω. $x \in R(\beta + 1) \subseteq R(\alpha)$. Άρα $\{x \in WF : \mathrm{rank}(x) < \alpha\} \subseteq R(\alpha)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, αν $\alpha = 0$, τότε $R(\alpha) = 0$ και συνεπώς έχουμε το ζητούμενο.

Αν $\alpha \neq 0$ και $x \in R(\alpha)$, τότε:

(i) Αν α οριακός, υπάρχει $\xi < \alpha$ τ.ω. $x \in R(\xi)$, και συνεπώς $\mathrm{rank}(x) < \alpha$.

(ii) Αν $\alpha = \beta + 1$, για κάποιον β, τότε $\mathrm{rank}(x) \leq \beta < \alpha$.

□

Πρόταση 2.3. *Έστω $y \in WF$. Τότε*

(i) $\forall\, x \in y\ (x \in WF\ \wedge\ \mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y))$.

(ii) $\mathrm{rank}(y) = \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 : x \in y\}$.

Απόδειξη. (i) Έστω $\alpha = \mathrm{rank}(y)$. Τότε $y \in R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$.

Αν τώρα $x \in y \subseteq R(\alpha)$, τότε $x \in R(\alpha)$, άρα $\mathrm{rank}(x) < \alpha$ (Πρόταση 2.2).

(ii) Έστω $\alpha = \sup\{\mathrm{rank}(x) + 1 : x \in y\}$. Τότε από το (i) έχουμε $\alpha \leq \mathrm{rank}(y)$, καθώς για κάθε $x \in y$ ισχύει $\mathrm{rank}(x) < \mathrm{rank}(y)$ άρα $\mathrm{rank}(x) + 1 \leq \mathrm{rank}(y)$. Επιπλέον, κάθε $x \in y$ έχει $\mathrm{rank}(x) < \alpha = \sup\{\mathrm{rank}(x)+1 : x \in y\}$, άρα $y \subseteq R(\alpha)$, συνεπώς $y \in \mathcal{P}(R(\alpha)) = R(\alpha + 1)$ και τελικά $\mathrm{rank}(y) \leq \alpha$. □

Πρόταση 2.4. *Αν $x \in WF$ τότε $\bigcup x$, $\mathcal{P}(x)$, $\{x\} \in WF$ και το* rank *αυτών των συνόλων είναι μικρότερο από το* $\mathrm{rank}(x) + \omega$.

Απόδειξη. Έστω $\alpha = \mathrm{rank}(x)$. Τότε $x \subseteq R(\alpha)$, άρα $\mathcal{P}(x) \subseteq \mathcal{P}(R(\alpha)) = R(\alpha+1)$, άρα $\mathcal{P}(x) \in R(\alpha + 2) \subseteq WF$.

Όμοια $\{x\} \in R(\alpha + 2)$ και $\bigcup x \in R(\alpha + 1)$. □

Πρόταση 2.5. $\forall x\ (x \in WF \longleftrightarrow x \subseteq WF)$.

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Αυτή η κατεύθυνση είναι προφανής, καθώς κάθε $R(\alpha)$ είναι μεταβατικό.

($\Longleftarrow$) Έστω τώρα $x \subseteq WF$. Ορίζουμε $\alpha = \sup\{\mathrm{rank}(y) + 1 : y \in x\}$. Τότε $x \in R(\alpha + 1)$, άρα $x \in R(\alpha + 1) = \mathcal{P}(R(\alpha))$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Καλά θεμελιωμένες σχέσεις

Σε αυτό το κεφάλαιο θα ορίσουμε την έννοια της καλά θεμελιωμένης σχέσης, η οποία αποτελεί μια γενίκευση της καλής διάταξης και θα είναι βασικό εργαλείο στα επόμενα κεφάλαια.

Ορισμός 3.1 (ZF^--P). Μια σχέση, R, είναι καλά θεμελιωμένη στο σύνολο A αν
$$\forall X \subseteq A\,[X \neq \varnothing \longrightarrow \exists y \in X\,(\neg \exists z \in X\,(z\,R\,y))].$$

Πρόταση 3.1 (ZF^-). *Αν $A \in WF$ τότε η σχέση $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στο A.*

Απόδειξη. Έστω $\varnothing \neq X \subseteq A$ και $\alpha = \min\{\operatorname{rank}(y) : y \in X\}$.

Σταθεροποιούμε ένα $y \in X$, με $\operatorname{rank}(y) = \alpha$. Τότε από την Πρόταση 2.3 (i) το y είναι $\in$-ελαχιστικό στο X. □

Πρόταση 3.2. *Αν A είναι μεταβατικό σύνολο και η $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στο A, τότε $A \in WF$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.5 αρκεί να δείξουμε ότι $A \subseteq WF$.

Έστω λοιπόν ότι δεν ισχύει $A \subseteq WF$. Τότε το $X = A \setminus WF \neq \varnothing$ και συνεπώς υπάρχει $y \in X$ που είναι $\in$-ελαχιστικό.

Τώρα αν $z \in y$, έχουμε ότι $z \notin X$, αλλά αφού το A είναι μεταβατικό έχουμε $z \in y \subseteq A$, άρα $z \in WF$. Άρα $y \subseteq WF$. Συνεπώς από την Πρόταση 2.5 έχουμε $y \in WF$ που είναι άτοπο. □

Ορισμός 3.2 (ZF^--P). (i) Αναδρομικά ορίζουμε $\bigcup^0 A = A$ και $\bigcup^{n+1} A = \bigcup(\bigcup^n A)$.

(ii) $\operatorname{trcl}(A) = \bigcup\{\bigcup^n A : n \in \omega\}$.

Λήμμα 3.3 (ZF^--P). *Αν $A \subseteq T$ και T μεταβατικό, τότε* $\mathrm{trcl}(A) \subseteq T$.

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο n και θα αποδείξουμε ότι $\bigcup^n A \subseteq T$. Για $n = 0$ έχουμε $\bigcup^0 A = A \subseteq T$, που ισχύει.

Αν τώρα ισχύει για n θα δείξουμε ότι ισχύει για $n+1$. Αν $x \in \bigcup^{n+1} A$, τότε υπάρχει $B \in \bigcup^n A$ με $x \in B$. Όμως $B \in T$, αφού από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\bigcup^n A \subseteq T$ και καθώς το T είναι μεταβατικό, έχουμε $B \subseteq T$, άρα $x \in T$. Δηλαδή $\bigcup^{n+1} A \subseteq T$. □

Θεώρημα 3.4 (ZF^-). *Για κάθε σύνολο A τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) $A \in WF$.

(ii) $\mathrm{trcl}(A) \in WF$.

(iii) *Η σχέση $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στο* $\mathrm{trcl}(A)$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Αν $A \in WF$ τότε από την Πρόταση 2.4 και με επαγωγή στο n, έχουμε $\bigcup^n A \in WF$ για κάθε n. Άρα, από την Πρόταση 2.5 έχουμε $\bigcup^n A \subseteq WF$, και συνεπώς $\mathrm{trcl}(A) \subseteq WF$ και τελικά χρησιμοποιώντας πάλι την Πρόταση 2.5 έχουμε $\mathrm{trcl}(A) \in WF$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Έχει αποδειχθεί στην Πρόταση 3.1.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Από την Πρόταση 3.2 έχουμε ότι $\mathrm{trcl}(A) \in WF$. Συνεπώς, από την Πρόταση 2.5, $\mathrm{trcl}(A) \subseteq WF$. Επιπλέον, $A \subseteq \mathrm{trcl}(A) \subseteq WF$ και τελικά, πάλι από την Πρόταση 2.5, $A \in WF$. □

Θεώρημα 3.5 (ZF^-). *Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το Αξίωμα της Θεμελίωσης*

(ii) *Για κάθε A η $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στο A.*

(iii) $V = WF$, *όπου* $V = \{x : x = x\}$.

Απόδειξη. (i) $\Longleftrightarrow$ (ii) Προφανές από τον ορισμό της καλά θεμελιωμένης σχέσης.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Έστω A. Εφαρμόζουμε την υπόθεση για το $\mathrm{trcl}(A)$ και τότε απο το Θεώρημα 3.4 έχουμε $A \in WF$. Αφού το A ήταν τυχόν, $V \subseteq WF$, δηλαδή $V = WF$.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Ισχύει από την Πρόταση 3.1. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Επαγωγή και αναδρομή

Σε αυτό το κεφάλαιο θα προσπαθήσουμε να γενικεύσουμε τις έννοιες της επαγωγής και της αναδρομής σε καλά θεμελιωμένες σχέσεις. Δηλαδή, αποδεικνύοντας ότι ισχύει η επαγωγή για μια καλά θεμελιωμένη σχέση, R, σε ένα σύνολο A, θα μπορούμε αντί να αποδείξουμε απευθείας τον τύπο $\forall x \in A\, \varphi(x)$, να αποδείξουμε ότι για κάθε $x \in A$ ισχύει :

$$\forall y \in A\ (y\, R\, x \longrightarrow \varphi(y)) \longrightarrow \varphi(x).$$

Το συμπέρασμα $\forall x \in A\ \varphi(x)$ έπεται επειδή ένα R-ελαχιστικό στοιχείο του $\{x \in A : \neg\varphi(x)\}$ θα οδηγούσε σε άτοπο.

Τέλος, να πούμε ότι είναι αρκετές φορές χρήσιμο τα παραπάνω αποτελέσματα να τα χρησιμοποιούμε και για κλάσεις Α, αντί για σύνολα.

Ορισμός 4.1 (ZF^{-}-P)**.** Μια σχέση στο A λέγεται συνολοφανής (set-like), αν για κάθε $x \in A$ το $\{y \in A : y\, R\, x\}$ είναι σύνολο.

Ορισμός 4.2 (ZF^{-}-P)**.** Αν η σχέση R είναι συνολοφανής στο A και $x \in A$, τότε ορίζουμε:

(i) $\mathrm{pred}(A, x, R) = \{y \in A : y\, R\, x\}$.

(ii) $\mathrm{pred}^0(A, x, R) = \mathrm{pred}(A, x, R)$
$\mathrm{pred}^{n+1}(A, x, R) = \bigcup\{\mathrm{pred}(A, y, R) : y \in \mathrm{pred}^n(A, x, R)\}$.

(iii) $\mathrm{cl}(A, x, R) = \bigcup\{\mathrm{pred}^n(A, x, R) : n \in \omega\}$.

Λήμμα 4.1 (ZF^{-}-P)**.** *Αν η σχέση R είναι συνολοφανής στο A και $x \in A$, τότε για κάθε $y \in \mathrm{cl}(A, x, R)$, έχουμε ότι $\mathrm{pred}(A, y, R) \subseteq \mathrm{cl}(A, x, R)$.*

Απόδειξη. Έστω $z \in \mathrm{pred}(A, y, R)$. Αφού $y \in \mathrm{cl}(A, x, R)$, υπάρχει n τ.ω. $y \in \mathrm{pred}^n(A, x, R)$. Άρα τελικά $z \in \mathrm{cl}(A, x, R)$. □

Θεώρημα 4.2 (ZF^{-}-P)**.** *Αν R είναι μια καλά θεμελιωμένη και συνολοφανής σχέση στο A, τότε κάθε μη κενή υποκλάση X του A έχει R-ελαχιστικό στοιχείο.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Αν το x δεν είναι το ζητούμενο, δηλ. δεν είναι R-ελαχιστικό, τότε το $X \cap \mathrm{cl}(A, x, R)$ είναι μη κενό υποσύνολο του A και συνεπώς έχει R-ελαχιστικό στοιχείο y. Έτσι από το προηγούμενο λήμμα το y είναι και R-ελαχιστικό στο X. □

Μια ειδική περίπτωση του παραπάνω θεωρήματος για $A = ON$ και με σχέση την $\in$ είναι η υπερπεπερασμένη επαγωγή για τους διατακτικούς. Είναι σαφές, λοιπόν, πως πλέον θα μπορούμε να εφαρμόσουμε υπερπεπερασμένη επαγωγή σε καλά θεμελιωμένες και συνολοφανείς σχέσεις.

Θεώρημα 4.3 (ZF^{-}-P, Υπερπεπερασμένη Αναδρομή)**.** *Έστω R μια καλά θεμελιωμένη και συνολοφανής σχέση στο A. Αν $F : A \times V \to V$, τότε υπάρχει μοναδικός τελεστής $G : A \to V$ τ.ω.*

$$\forall x \in A \, [G(x) = F(x, G\big|_{\mathrm{pred}(A,x,R)}].$$

Απόδειξη. Αυτό το θεώρημα είναι μια γενίκευση της υπεπρεπερασμένης αναδρομής και η απόδειξή του παραλείπεται καθώς είναι αντίστοιχη με την απόδειξη στους διατακτικούς. □

Ορισμός 4.3 (ZF^{-}-P)**.** Έστω R μια καλά θεμελιωμένη και συνολοφανής σχέση στο A. Ορίζουμε αναδρομικά

$$\mathrm{rank}(x, A, R) = \sup\{\mathrm{rank}(y, A, R) + 1 : y \, R \, x \wedge y \in A\}.$$

Πρόταση 4.4. *Έστω A μεταβατικό και η $\in$ να είναι καλά θεμελιωμένη στο A. Τότε $A \subseteq WF$ και $\mathrm{rank}(x, A, \in) = \mathrm{rank}(x)$ για κάθε $x \in A$.*

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει $A \subseteq WF$. Τότε $A \setminus WF \neq \varnothing$. Συνεπώς, αφού η $\in$ είναι καλά θεμελιωμένη στο A, υπάρχει ένα $\in$-ελαχιστικό στοιχείο x στο $A \setminus WF$. Τότε ομως, $x \subseteq WF$.

Πράγματι, αν $y \in x$, αλλά $y \notin WF$, έχουμε $x \in A$, οπότε, αφού το A είναι μεταβατικό, $x \subseteq A$, συνεπώς $y \in A$ και τελικά $y \in A \setminus WF$. Αυτό όμως είναι άτοπο από τον τρόπο επιλογής του x, άρα $y \in WF$.

Από την Πρόταση 2.5, $x \in WF$. Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο και άρα $A \subseteq WF$.

Έστω τώρα ότι $\{x \in A : \mathrm{rank}(x, A, \in) \neq \mathrm{rank}(x)\} \neq \varnothing$. Τότε πάλι παίρνουμε x $\in$-ελαχιστικό στοιχείο και καταλήγομε σε άτοπο από την Πρόταση 2.3 (ii). □

Ορισμός 4.4 (ZF^{-}-P)**.** Έστω R καλά θεμελιωμένη, συνολοφανής σχέση στο A. Ορίζουμε τη συνάρτηση κατάρρευσης του Mostowski (Mostowski collapsing function) G των A και R ως εξής:

$$G(x) = \{G(y) : y \in A \wedge y \, R \, x\}.$$

Επιπλέον ορίζουμε ως κατάρρευση του Mostowski (Mostowski collapse), M, το $G(A)$.

Ορισμός 4.5 (ZF^{-}-P)**.** Η σχέση R είναι εκτατική στο A ανν

$$\forall x, y \in A\,(\forall z \in A\,(z\,R\,x \longleftrightarrow z\,R\,y) \longrightarrow x = y).$$

Παρατηρήσεις:

(i) Η πρόταση «η $R = \in$ είναι εκτατική στο A» ισοδυναμεί με το ότι το A είναι μοντέλο του αξιώματος της έκτασης.

(ii) Πολλές φορές, ισοδύναμα, αντί του αρχικού ορισμού θα ελέγχουμε το εξής:

$$x \neq y \;\longrightarrow\; \mathrm{pred}(A, x, R) \neq \mathrm{pred}(A, y, R).$$

Πρόταση 4.5 (ZF^{-}-P)**.** *Αν N μεταβατικό, τότε η σχέση $\in$ είναι εκτατική στο N.*

Απόδειξη. $\mathrm{pred}(N, x, \in) = \{y \in N : y \in x\} = x$, καθώς N μεταβατικό και $x \in N$, έχουμε $x \subseteq N$. Άρα αν $x \neq y$ έχουμε $\mathrm{pred}(N, x, \in) \neq \mathrm{pred}(N, y, \in)$ και συνεπώς η $\in$ είναι εκτατική. □

Λήμμα 4.6 (ZF^{-}-P)**.** *Αν R μια καλά θεμελιωμένη, συνολοφανής και εκτατική σχέση στο A, τότε η συνάρτηση κατάρρευσης του Mostowski των A και R, G, είναι ισομορφισμός (δηλ. είναι 1-1 και $\forall x, y \in A\,(x\,R\,y \longleftrightarrow G(x) \in G(y))$).*

Απόδειξη. Για το 1-1: Έστω ότι δεν είναι, τότε παίρνουμε x το R-ελαχιστικό στοιχείο του $\{x \in A : \exists y \in A\,(x \neq y \wedge G(x) = G(y))\}$ και έστω επίσης $y \in A$ με $x \neq y$ και $G(x) = G(y)$. Αφού λοιπόν η R είναι εκτατική, ισχύει ένα από τα εξής:

(i) Υπάρχει $z \in A$ τ.ω. $z\,R\,x$ και $\neg(z\,R\,y)$.

Τότε $G(z) \in G(x) = G(y)$, άρα υπάρχει $w \in A$ με $w\,R\,y$ τ.ω. $G(z) = G(w)$. Άρα $z \neq w$ που είναι άτοπο από την επιλογή του x.

(ii) Υπάρχει $w \in A$ με $w\,R\,y$ και $\neg(w\,R\,x)$. Καταλήγουμε σε άτοπο όμοια με την περίπτωση (i).

Άρα τελικά η G είναι 1-1.

Η δεύτερη απαίτηση, ώστε να είναι ισομορφισμός, είναι προφανής από τον ορισμό της G. □

Θεώρημα 4.7 (ZF^{-}-P, Θεώρημα κατάρρευσης του Mostowski)**.** *Έστω R καλά θεμελιωμένη, συνολοφανής και εκτατική σχέση στο A. Τότε υπάρχει μεταβατική κλάση M και 1-1 απεικόνιση G από το A στη M τ.ω. η G να είναι ισομορφισμός μεταξύ των (A, R) και $(M, \in)$. Επιπλέον οι M και G είναι μοναδικές.*

Απόδειξη. Η ύπαρξη αποδείχθηκε στο Λήμμα 4.6.

Για τη μοναδικότητα τώρα, έστω G' και M' που ικανοποιούν τις απαιτήσεις του θεωρήματος. Με επαγωγή στο x εύκολα βλέπουμε ότι $G(x) = G(x')$ για κάθε $x \in A$. Τέλος, από τον ορισμό της M, προκύπτει ότι $M = M'$. □

Πόρισμα 4.8. *Αν η $\in$ είναι εκτατική στο A, τότε υπάρχει μεταβατική κλάση M και 1-1 απεικόνιση G από το A στο M που είναι ισομορφισμός για την $\in$, δηλαδή*

$$\forall x, y \in A\,(x \in y \longleftrightarrow G(x) \in G(y)).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από το Θεώρημα 4.7. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σχετικοποίηση (Relativization)

Ορισμός 5.1. Έστω M μια κλάση, τότε για κάθε τύπο φ ορίζουμε τη σχετικοποίηση του φ στη M, φ^M, με αναδρομή στον φ ως εξής:

(i) Ο $(x = y)^M$ είναι ο $x = y$.

(ii) Ο $(x \in y)^M$ είναι ο $x \in y$.

(iii) $(\varphi \wedge \psi)^M$ είναι $\varphi^M \wedge \psi^M$.

(iv) $(\neg\varphi)^M$ είναι $\neg(\varphi^M)$.

(v) $(\exists x\, \varphi)^M$ είναι $\exists x\, (x \in M \wedge \varphi^M)$.

Παρατήρηση: Ο φ^M είναι ο τύπος που προκύπτει από τον φ αντικαθιστώντας όλους τους ποσοδείκτες $\exists x$ με το $\exists x \in M$. Επιπλέον, αν $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ τύπος με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $x_1, \ldots, x_n$, ο $\varphi^M(x_1, \ldots, x_n)$ υποδηλώνει ότι ο φ είναι αληθής για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in M$.

Ορισμός 5.2. Έστω M κλάση και φ πρόταση, τότε λέμε ότι η φ αληθεύει στη M αν έχουμε φ^M.

Πρόταση 5.1. *Έστω S και T δύο σύνολα προτάσεων της γλώσσας της συνολοθεωρίας και υποθέτουμε ότι υπάρχει κλάση M και από το T μπορούμε να αποδείξουμε ότι η M είναι μη κενή και μοντέλο για το S. Τότε* $\mathrm{Con}(T) \longrightarrow \mathrm{Con}(S)$.

Σημείωση: Με το σύμβολο $\mathrm{Con}(T)$ εννοούμε ότι το T είναι συνεπές.

Απόδειξη. Έστω ότι το S είναι ασυνεπές. Τότε υπάρχει πρόταση χ τ.ω. $S \vdash \chi \wedge \neg\chi$. Όμως από το T μπορούμε να αποδείξουμε ότι η κλάση M είναι μοντέλο για το S και συνεπώς μπορούμε να αποδείξουμε από το T την πρόταση $\chi^M \wedge \neg\chi^M$. Τότε όμως το T θα ήταν ασυνεπές, που είναι άτοπο. $\square$

Πρόταση 5.2. *Αν M μεταβατική κλάση, τότε η M είναι μοντέλο του αξιώματος της έκτασης.*

Απόδειξη. Το Αξίωμα της έκτασης, σχετικοποιημένο στη M, γίνεται:

$$\forall x, y \in M\ (\forall z \in M\, (z \in x \longleftrightarrow z \in y) \longrightarrow x = y),$$

που είναι ακριβώς ο ορισμός του η σχέση $\in$ να είναι εκτατική στο M, που ισχύει απο την Πρόταση 4.5, αφού η M είναι μεταβατική. □

Πρόταση 5.3. *Έστω τύπος φ με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $x, y, w_1, \dots, w_n$ για τον οποίο ισχύει:*

$$\forall z, w_1, \dots, w_n \in M\ (\{x \in z : \varphi^M(x, z, w_1, \dots, w_n)\} \in M).$$

Τότε το αξίωμα της εξειδίκευσης αληθεύει στη M (δηλ. η M είναι μοντέλο του αξιώματος αυτού).

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε τύπο φ όπως στη διατύπωση της πρότασης, έχουμε:

$$\forall z, w_1, \dots, w_n \in M\, \exists y \in M\, \forall x \in M\, (x \in y \longleftrightarrow x \in z \wedge \varphi^M(x, z, w_1, \dots, w_n)).$$

Έστω λοιπόν $z, w_1, \dots, w_n \in M$. Ορίζουμε $y = \{x \in z : \varphi^M(x, z, w_1, \dots, w_n)\}$. Τότε $y \in M$ από την υπόθεση και συνεπώς για κάθε $x \in M$ έχουμε $x \in y \longleftrightarrow x \in z \wedge \varphi^M(x, z, w_1, \dots, w_n)$. □

Πόρισμα 5.4. *Αν $\forall x \in M\, (\mathcal{P}(z) \subseteq M)$, τότε το αξίωμα της εξειδίκευσης αληθεύει στη M.*

Απόδειξη. Άμεσο από την Πρόταση 5.3. □

Πρόταση 5.5. *Έστω M μεταβατική κλάση, τότε το αξίωμα του δυναμοσυνόλου αληθεύει στη M ανν $\forall x \in M\, \exists y \in M\, (\mathcal{P}(x) \cap M \subseteq y)$.*

Απόδειξη. Το αξίωμα του δυναμοσυνόλου, σχετικοποιημένο στη M, γίνεται:

$$\forall x \in M\, \exists y \in M\, \forall z \in M\, (z \subseteq x \longrightarrow z \in y)$$

και ισοδύναμα αφού $z \in M \cap \mathcal{P}(x)$ έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 5.6. *Αν $\forall x, y \in M\, \exists z \in M\, (x \in z \wedge y \in z)$ και $\forall x \in M\, \exists z \in M\, (\bigcup x \subseteq z)$, τότε τα αξιώματα του μη διατεταγμένου ζεύγους και της ένωσης αληθεύουν στη M.*

Απόδειξη. Η απόδειξη αυτής της πρότασης είναι προφανής αφού αυτές οι προτάσεις είναι τα αξιώματα του μη διατεταγμένου ζεύγους και της ένωσης σχετικοποιημένα στη M, αντίστοιχα. □

Πρόταση 5.7. *Υποθέτουμε ότι για κάθε τύπο* $\varphi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$ *και για κάθε* $A, w_1, \ldots, w_n \in M$ *μπορούμε να δείξουμε ότι αν*

$$\forall x \in A\, \exists! y \in M\, \varphi^M(x, y, A, w_1, \ldots, w_n),$$

τότε $\exists Y \in M\, (\{y : \exists x \in A\, \varphi^M(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\} \subseteq Y)$. *Τότε το αξίωμα της αντικατάστασης αληθεύει στη* M.

Απόδειξη. Η απόδειξη είναι άμεση από τη διατύπωση του αξιώματος και τον ορισμό της σχετικοποίησης. □

Πρόταση 5.8. *Έστω* $M \subseteq WF$. *Τότε το αξίωμα της θεμελίωσης αληθεύει στη* M.

Απόδειξη. Το αξίωμα της θεμελίωσης, σχετικοποιημένο στη M, έχει ως εξής:

$$\forall x \in M\, (\exists y \in M\, (y \in x) \longrightarrow \exists y \in M\, (y \in x \land \neg \exists z \in M\, (z \in x \land z \in y))).$$

Έστω, λοιπόν $x \in M$ και $y \in M \cap x$ που έχει το ελάχιστο rank. Τότε το y είναι $\in$-ελαχιστικό στο $M \cap x$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Απολυτότητα (Absoluteness)

Ορισμός 6.1. Έστω φ τύπος με το πολύ τις $x_1, \ldots, x_n$ ελεύθερες μεταβλητές.

(i) Αν $M \subseteq N$, λέμε ότι ο φ είναι απόλυτος για τα M, N αν

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in M\,(\varphi^M(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow \varphi^N(x_1, \ldots, x_n)).$$

(ii) Ο φ είναι απόλυτος για το M αν είναι απόλυτος για τα M και V, δηλαδή:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in M\,(\varphi^M(x_1, \ldots, x_n) \longleftrightarrow \varphi(x_1, \ldots, x_n)).$$

Πρόταση 6.1. *Έστω $M \subseteq N$ μεταβατικά και φ απόλυτος για τα M, N. Τότε ο $\exists x\,(x \in y \land \varphi)$, ή πιο απλά $\exists x \in y\, \varphi$ είναι επίσης απόλυτος για τα M, N.*

Απόδειξη. Ας γράψουμε τον φ ως $\varphi(x, y, z_1, \ldots, z_n)$ θεωρώντας πως οι ελεύθερες μεταβλητές του είναι μεταξύ των $x, y, z_1, \ldots, z_n$. Τότε για κάθε $y, z_1, \ldots, z_n \in M$ έχουμε:

$$\begin{aligned}
[\exists x\,(x \in y \land \varphi(y, z_1, \ldots, z_n))]^M &\longleftrightarrow \exists x\,(x \in y \land \varphi^M(y, z_1, \ldots, z_n)) \\
&\longleftrightarrow \exists x\,(x \in y \land \varphi^N(y, z_1, \ldots, z_n)) \\
&\longleftrightarrow [\exists x\,(x \in y \land \varphi(y, z_1, \ldots, z_n))]^N.
\end{aligned}$$

Για την πρώτη ισοδυναμία χρησιμοποιήθηκε η μεταβατικότητα του M και γι' αυτό στο δεύτερο μέλος γράφουμε $\exists x$ αντί για $\exists x \in M$. Δηλαδή αφού $y \in M$ έχουμε ότι $y \subseteq M$ και συνεπώς $x \in M$. Όμοια και για την τελευταία ισοδυναμία χρησιμοποιήθηκε η μεταβατικότητα του N. Τέλος για την ενδιάμεση ισοδυναμία χρησιμοποιήθηκε η απολυτότητα του φ. □

Ορισμός 6.2. Ορίζουμε τους τύπους Δ_0 αναδρομικά ως εξής:

(i) Οι $x \in y$ και $x = y$ είναι Δ_0.

(ii) Αν οι φ, ψ είναι Δ_0, τότε οι $\neg\varphi$ και $\varphi \wedge \psi$ είναι Δ_0.

(iii) Αν ο φ είναι Δ_0, τότε και ο $\exists x\,(x \in y \wedge \varphi)$ είναι Δ_0.

Πόρισμα 6.2. *Έστω M μεταβατικό και φ Δ_0 τύπος. Τότε ο φ είναι απόλυτος για το M.*

Απόδειξη. Επαγωγή στον φ. □

Ορισμός 6.3. Έστω F συνάρτηση και $M \subseteq N$. Τότε η F είναι απόλυτη για τα M, N αν ο τύπος $F(x_1, \dots, x_n) = y$ είναι απόλυτος για τα M, N.

Στον παραπάνω ορισμό, αν θέλουμε να είμαστε πιο αυστηροί θα έπρεπε να θεωρήσουμε την $F(x_1, \dots, x_n)$ ως το μοναδικό y τ.ω. $\varphi(x_1, \dots, x_n, y)$ (δηλαδή ο φ είναι ο τύπος που ορίζει την F). Δηλαδή στη συνέχεια θα έχει νόημα να μιλάμε για απολυτότητα συνάρτησης αν ξέρουμε ότι ο τύπος $\forall x_1, \dots, x_n\, \exists! y\, \varphi(x_1, \dots, x_n)$ αληθεύει στα M και N. Άρα τελικά θα έχουμε ότι η F είναι απόλυτη για τα M, N αν και μόνο αν ο φ είναι απόλυτος για τα M, N αν και μόνο αν για κάθε $x_1, \dots, x_n \in M$, $F^M(x_1, \dots, x_n) = F^N(x_1, \dots, x_n)$.

Θεώρημα 6.3. *Οι ακόλουθες σχέσεις και συναρτήσεις στο ZF^--P-*Inf *ορίζονται από ισοδύναμους Δ_0 τύπους. Έτσι είναι απόλυτοι για κάθε, M, μεταβατικό μοντέλο του ZF^--P-*Inf.

(i) $x \in y$,

(ii) $x = y$,

(iii) $x \subseteq y$,

(iv) $\{x, y\}$,

(v) $\{x\}$,

(vi) $\langle x, y\rangle$,

(vii) $\varnothing$,

(viii) $x \cup y$,

(ix) $x \cap y$,

(x) $x \setminus y$,

(xi) $x \cup \{x\}$,

(xii) *Το x είναι μεταβατικό,*

(xiii) $\bigcup x$,

(xiv) $\bigcap x$, (*όπου* $\bigcap \varnothing = \varnothing$).

Απόδειξη. Για τα (i) και (ii) έχουμε το ζητούμενο από τον ορισμό των Δ_0 τύπων.
(iii) $x \subseteq y \longleftrightarrow \forall z\, (z \in x \longrightarrow z \in y) \longleftrightarrow \neg \exists z \in x\, (\neg z \in y)$, και ο τελευταίος είναι Δ_0 τύπος.
(iv) $z = \{x, y\} \longleftrightarrow [x \in z \wedge y \in z \wedge \forall w \in z\, (w = x \vee w = y)]$ και τώρα το δεξί μέλος είναι ισοδύναμο με τον εξής Δ_0 τύπο:

$$x \in z \wedge y \in z \wedge \neg \exists w \in z\, ((\neg w = x) \wedge (\neg w = y)).$$

Για τα (v) και (vi) δουλεύουμε όμοια, καθώς $\langle x, y\rangle = \{\{x\}, \{x, y\}\}$.
(vii) $z = \varnothing \longleftrightarrow \forall w \in z\, (w \neq w)$ και ο τελευταίος έχουμε δει ότι εύκολα αποδεικνύεται ότι είναι ισοδύναμος με κάποιον Δ_0 τύπο.
(viii) $z = x \cup y \longleftrightarrow [\forall w \in z\, (w \in x \vee w \in y) \wedge x \subseteq z \wedge y \subseteq z]$ και το δεξί μέλος γίνεται Δ_0 αν αντικαταστήσουμε τις σχέσεις των υποσυνόλων με τους αντίστοιχους Δ_0 τύπους.
(ix) $z = x \cap y \longleftrightarrow [\forall w \in x\, (w \in y \longrightarrow w \in z) \wedge z \subseteq x \wedge z \subseteq y]$.
(x) Όμοια με το (ix), αφού $x \setminus y = x \cap y^c$.
(xi) $z = S(x) \longleftrightarrow [x \in z \wedge x \subseteq z \wedge \forall w \in z\, (w = x \vee w \in x)]$.
(xii) Το x είναι μεταβατικό $\longleftrightarrow [\forall v \in x\, \forall z \in v\, (z \in x)]$.
(xiii) $y = \bigcup x \longleftrightarrow [\forall v \in x\, (v \subseteq y) \wedge \forall z \in y\, \exists w \in x\, (z \in v)]$.
(xiv) $y = \bigcap x \longleftrightarrow [\forall v \in x\, (y \subseteq v) \wedge \forall v \in x\, \forall z \in v\, (\forall w \in x\, (z \in w) \longrightarrow z \in y) \wedge (x = \varnothing \longrightarrow y = \varnothing)]$. □

Λήμμα 6.4. *Έστω $M \subseteq N$. Αν $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ τύπος, $F(x_1, \ldots, x_n)$ και $G_i(y_1, \ldots, y_m)$, $i = 1, 2, \ldots, n$ όλα απόλυτα για τα M, N, τότε ο τύπος*

$$\varphi(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m))$$

και η συνάρτηση

$$F(G_1(y_1, \ldots, y_m), \ldots, G_n(y_1, \ldots, y_m))$$

είναι επίσης απόλυτα για τα M, N.

Απόδειξη. Θα κάνουμε την απόδειξη στην ειδική περίπτωση που $n = m = 1$, καθώς η απόδειξη στη γενική περίπτωση είναι τελείως ανάλογη. Έστω, λοιπόν, $y \in M$. Τότε

$$(\varphi(G(y)))^M \longleftrightarrow \varphi^M(G^M(y)) \longleftrightarrow \varphi^N(G^N(y)) \longleftrightarrow (\varphi(G(y)))^N.$$

Οι ισοδυναμίες αυτές προκύπτουν από το γεγονός ότι $G^M(y) = G^N(y)$, που είναι γνωστό από την απολυτότητα της G, και ότι ο φ είναι απόλυτος για τα M, N. Όμοια,

$$(F(G(y)))^M = F^M(G^M(y)) = F^N(G^N(y)) = (F(G(y)))^N.$$

□

Θεώρημα 6.5. *Οι ακόλουθες σχέσεις και συναρτήσεις είναι απόλυτες για κάθε μεταβατικό μοντέλο, M, του ZF^--P-Inf:*

(i) *το z είναι διατεταγμένο ζεύγος,*

(ii) $A \times B$,

(iii) *η R είναι σχέση,*

(iv) $\mathrm{dom}(R)$,

(v) $\mathrm{ran}(R)$,

(vi) *η R είναι συνάρτηση,*

(vii) $R(x)$,

(viii) *η R είναι* 1-1 *συνάρτηση.*

Απόδειξη. (i) Το z είναι διατεταγμένο ζεύγος $\longleftrightarrow \exists x \in \bigcup z\, \exists y \in \bigcup z\, (z = \langle x, y\rangle)$. Αν τώρα θέσουμε $G_1(z) = G_2(z) = \bigcup z$, οι G_1, G_2 είναι απόλυτες συναρτήσεις απο το Θεώρημα 6.3. Αν επιπλέον $G_3(z) = z$ και $\varphi(a, b, c)$ ο τύπος $\exists x \in a\, \exists y \in b\ (c = \langle x, y\rangle)$ που είναι απόλυτος, αφού από το Θεώρημα 6.3 το $c = \langle x, y\rangle$ είναι απόλυτο. Άρα τότε το z είναι διατεταγμένο ζεύγος $\leftrightarrow \varphi(G_1(z), G_2(z), G_3(z))$ και από το Λήμμα 6.4 έπεται το ζητούμενο.
(ii) $C = A \times B \longleftrightarrow \forall x \in A\ \forall y \in B\ (\langle x, y\rangle \in C) \wedge \forall x \in C\ \exists x \in A\ \exists y \in B\ (z = \langle x, y\rangle)$.
(iii) Η R είναι σχέση $\longleftrightarrow \forall z \in R$ (το z είναι διατεταγμένο ζεύγος).
(iv) $A = \mathrm{dom}(R) \longleftrightarrow \forall x \in A\ \exists y \in \bigcup\bigcup R\ ))\langle x, y\rangle \in R) \wedge \forall x \in \bigcup\bigcup R\ \forall y \in \bigcup\bigcup R\ (\langle x, y\rangle \in R \longrightarrow x \in A)$.
(vi) Η R είναι συνάρτηση $\longleftrightarrow$ η R είναι σχέση $\wedge \forall x \in \bigcup\bigcup R\ \forall y \in \bigcup\bigcup R\ \forall y' \in \bigcup\bigcup R\ (\langle x, y\rangle \in R \wedge \langle x, y\rangle \longrightarrow y = y')$.
(vii) $y = R(x) \longleftrightarrow (\varphi(x) \wedge \langle x, y\rangle \in R) \vee (\neg\varphi(x) \wedge y = 0)$, όπου $\varphi(x)$ είναι ο εξής τύπος:

$$\exists v \in \bigcup\bigcup R\ (\langle x, v\rangle \in R) \wedge \forall w \in \bigcup\bigcup R\ (\langle x, y\rangle \in R \longrightarrow w = v)).$$

(viii) Η R είναι 1-1 συνάρτηση $\longleftrightarrow$ η R είναι συνάρτηση $\wedge \forall x \in \mathrm{dom}(R)\ (R(x) = R(x') \longrightarrow x = x')$.

Για τους ισχυρισμούς μετά το (i), χρησιμοποιήσαμε την ίδια τεχνική με το (i), βασιζόμενοι στο Λήμμα 6.4 και ήδη γνωστές απόλυτες έννοιες. □

Πρόταση 6.6. *Έστω M μεταβατικό μοντέλο του ZF^--P-Inf και $A, R \in M$. Υποθέτουμε, επίσης, ότι η R διατάσσει καλά το A. Τότε (η R διατάσσει καλά το A)^M.*

Απόδειξη. Το (η R διατάσσει καλά το $A)^M$ προκύπτει εύκολα από βασικές ιδιότητες των ζευγών που έχουμε δει στο Θεώρημα 6.5. Για την καλή διάταξη, τώρα, πρέπει να δούμε το $(\forall X\, \varphi(X, A, R))^M$, όπου $\varphi(X, A, R)$ είναι ο τύπος

$$X \subseteq A \wedge X \neq \varnothing \longrightarrow \exists y \in X\, \forall z \in X\, (\langle z, y\rangle \notin R).$$

Ο φ προκύπτει ότι είναι απόλυτος πάλι από το Θεώρημα 6.5, άρα αρκεί να δείξουμε ότι $\forall X \in M\, \varphi(X, A, R)$, που ισχύει αφού η R διατάσσει καλά το A. □

Θεώρημα 6.7. *Οι ακόλουθες σχέσεις, που είναι ορισμένες στο ZF-P, είναι ισοδύναμες με Δ_0 τύπους στο ZF-P και συνεπώς είναι απόλυτες για κάθε μεταβατικό μοντέλο, M, του ZF-P.*

(i) *ο x είναι διατακτικός,*

(ii) *ο x είναι οριακός διατακτικός,*

(iii) *ο x είναι επόμενος διατακτικός,*

(iv) *ο x είναι πεπερασμένος διατακτικός,*

(v) ω

(vi) 0

(vii) 1

(viii) 2

$\ldots$

και τελικά όλοι οι διατακτικοί μέχρι και τον ω είναι ισοδύναμοι με Δ_0 τύπους.

Απόδειξη. (i) Ξέρουμε ότι ο x είναι διατακτικός αν και μόνο αν το x είναι μεταβατικό σύνολο και ολικά διατεταγμένο από τη σχέση $\in$.

Το να είναι ο x μεταβατικό σύνολο ισοδυναμεί με Δ_0 τύπο από το Θεώρημα 6.3.

Το x είναι ολικά διατεταγμένο από τη σχέση $\in \longleftrightarrow \forall y \in x\; \forall z \in x\; (y \in z \vee y = z \vee z \in y)$, που είναι Δ_0 τύπος.

(ii) Ο x είναι οριακός διατακτικός αν και μόνο αν ο x είναι διατακτικός και $\forall y \in x\; \exists z \in x\; (y \in z) \wedge x \neq 0$.

Το να είναι ο x διατακτικός το είδαμε στο (i). Όσον αφορά τον δεύτερο τύπο, το κομμάτι πριν το $\wedge$ είναι Δ_0, ενώ το υπόλοιπο είναι ισοδύναμο με Δ_0 τύπο από το Θεώρημα 6.3.

(iii) Ο x είναι επόμενος διατακτικός αν και μόνο αν (ο x είναι διατακτικός και $x \neq 0$ και ο x δεν είναι οριακός).

(iv) Ο x είναι πεπερασμένος διατακτικός αν και μόνο αν ο x είναι διατακτικός και κάθε $y \in x$ είναι 0 ή επόμενος.

(v) $x = \omega \longleftrightarrow$ ο x είναι οριακός $\wedge \forall y \in x$ (ο y δεν είναι οριακός).

(vi) Έχει αποδειχθεί στο Θεώρημα 6.3.

(vii) $x = 1 \longleftrightarrow \exists y \in x\ (y = 0 \wedge x = S(y))$.

(viii) $x = 2 \longleftrightarrow \exists y \in x\ (y = 1 \wedge x = S(y))$.

Έτσι επαγωγικά αποδεικνύεται ότι κάθε πεπερασμένος διατακτικός είναι ισοδύναμος με Δ_0 τύπο. □

Λήμμα 6.8. *Αν M μεταβατικό μοντέλο του ZF-P, τότε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο του M ανήκει στο M.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε, με επαγωγή, ότι

$$\forall x \subseteq M\,(|x| = n \longrightarrow x \in M).$$

Αν $n = 0$, το ζητούμενο προκύπτει από την απολυτότητα του 0 που έχει αποδειχθεί στο Θεώρημα 6.3.

Αν ισχύει για τον n θα δείξουμε ότι ισχύει για τον $n+1$. Έστω $x \subseteq M$ με $|x| = n+1$. Αν $y \in x$, τότε $y \in M$ και από την επαγωγική υπόθεση $(x \setminus \{y\}) \in M$. Επίσης $x = \{y\} \cup (x \setminus \{y\})$ και το $\{y\}$, η ένωση και η συνολοθεωρητική διαφορά είναι απόλυτα για το M (Θεώρημα 6.3) και συνεπώς $x \in M$. □

Θεώρημα 6.9. *Τα ακόλουθα είναι απόλυτα για κάθε μεταβατικό μοντέλο, M, του ZF-P:*

(i) *το x είναι πεπερασμένο,*

(ii) A^n,

(iii) $A^{<\omega}$ $(\bigcup_{n\in\omega} A^n)$.

Απόδειξη. (i) Το x είναι πεπερασμένο αν και μόνο αν $\exists f\ \varphi(x,f)$, όπου $\varphi(x,f)$ είναι ο τύπος «f συνάρτηση $\wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge \mathrm{ran}(f) \in \omega \wedge$ η f είναι 1-1» που είναι απόλυτος από το Λήμμα 6.4 και το Θεώρημα 6.7. Συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι $\exists f \in M\ \varphi(x,f) \longleftrightarrow \exists f\ \varphi(x,f)$. Αυτό, όμως, έπεται από το ότι έχουμε $\varphi(x,f) \longrightarrow f \in M$, το οποίο είναι αληθές καθώς ο $\varphi(x,f)$ σημαίνει ότι η f είναι ένα πεπερασμένο σύνολο ζευγών απο στοιχεία του M. Άρα, από την απολυτότητα των ζευγών, τα ζεύγη τελικά ανήκουν στο M και τελικά $f \subseteq M$ και από το Λήμμα 6.8, έχουμε $f \in M$.

(ii) Θεωρούμε ότι το A^n ορίζεται από συνάρτηση δύο μεταβλητών:

$$F(A,x) = \begin{cases} \{f : f \text{ συνάρτηση} \wedge \mathrm{dom}(f) = x \wedge \mathrm{ran}(f) \subseteq A\} & , \ x \in \omega \\ \varnothing & , \ x \notin \omega \end{cases}$$

Από την απολυτότητα του ω, βλέπουμε ότι $F^M(x,A) = \varnothing = F(x,A)$, όταν $x \notin \omega$ και στην περίπτωση που $x \in \omega$, δουλεύουμε όμοια με το (i).

(iii) Το $A^{<\omega}$ ορίζεται από την:

$$G(A) = \{f : f \text{ συνάρτηση } \wedge \ \exists n \in \omega \,(\mathrm{dom}(f) = n) \wedge \ \mathrm{ran}(f) \subseteq A\},$$

και αποδεικνύεται όμοια με το (ii). □

Θεώρημα 6.10. *Το εξής είναι απόλυτο για κάθε μεταβατικό μοντέλο, M, του ZF-P: «η R διατάσσει καλά το A».*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $A, R \in M$

$$(\text{η } R \text{ διατάσσει καλά το } A)^M \longrightarrow \text{η } R \text{ διατάσσει καλά το } A,$$

καθώς το αντίστροφο το έχουμε αποδείξει στην Πρόταση 6.6.

Γνωρίζουμε ότι κάθε καλά διατεταγμένος χώρος είναι ισόμορφος με μοναδικό διατακτικό αριθμό και έτσι, αν υποθέσουμε (η R διατάσσει καλά το $A)^M$, έχουμε ότι $\exists \alpha, f \in M$ τ.ω.

$$(\alpha \text{ διατακτικός και } f \text{ ισομορφισμός από το } (A, R) \text{ στον } \alpha)^M.$$

Όμως ο τελευταίος τύπος είναι απόλυτος από προηγούμενα θεωρήματα που έχουμε δείξει σε αυτό το κεφάλαιο. □

Θεώρημα 6.11. *Έστω R καλά θεμελιωμένη, συνολοφανής σχέση στο A και $F : A \times V \to V$. Τότε, από το θεώρημα υπερπεπερασμένης αναδρομής για καλά θεμελιωμένες και συνολοφανείς σχέσεις, έχουμε ότι υπάρχει μοναδική $G : A \to V$ τ.ω.*

$$\forall x \in A \, [G(x) = F(x, G\big|_{\mathrm{pred}(A,x,R)})].$$

Αν τώρα M μεταβατικό μοντέλο του ZF-P τ.ω.

(i) *η F να είναι απόλυτη για το M και*

(ii) *τα R και A να είναι απόλυτα για το M, (η R είναι συνολοφανής στο $A)^M$ και $\forall x \in M \,(\mathrm{pred}(A, x, R) \subseteq M)$,*

τότε η G είναι απόλυτη για το M.

Σχόλια: Προτού παραθέσουμε την απόδειξη του θεωρήματος πρέπει να αποσαφηνίσουμε μερικά σημεία του:

(i) Μια κλάση A είναι, τυπικά, ένας τύπος $A(x)$, απλά συνηθίζουμε να το σκεφτόμαστε ως $A = \{x : A(x)\}$ (όπως και τα σύνολα καθορίζονται από ένα τύπο). Άρα έχει νόημα να λέμε ότι το A είναι απόλυτο για το M. Δηλαδή A απόλυτο για το M ανν $A^M = \{x \in M : A^M(x)\} = A \cap M$.

(ii) Όπως και για σχέσεις $R \subseteq A \times A$, έχουμε $R = \{\langle x, y\rangle : R(x, y)\}$ και τελικά R απόλυτο για το M ανν

$$R^M = \{\langle x, y\rangle \in M \times M : R^M(x, y)\} = R \cap (M \times M).$$

(iii) Τέλος, κατ' αντιστοιχία με τις συναρτήσεις, γενικεύουμε την έννοια της απολυτότητας και για τελεστές. Δηλαδή αν G τελεστής και $G(x, y)$ ο τύπος $\forall x\, \exists! y\, (G(x) = y)$, τότε $G = \{\langle x, y\rangle : G(x, y)\}$ και $G^M = \{\langle x, y\rangle \in M \times M : G^M(x, y)\}$, δηλαδή ο G είναι απόλυτος για το M ανν $G^M = G\big|_M = G \cap (M \times M)$.

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι αληθεύει στο M ότι η R είναι καλά θεμελιωμένη στο A, δηλαδή (η R είναι καλά θεμελιωμένη στο $A)^M$.

Πράγματι, $R^M = R \cap (M \times M)$ αφού η R είναι απόλυτη για το M και ομοίως $A^M = A \cap M$. Άρα αν $X \in M$ με $\varnothing \neq X \subseteq A^M$ έχουμε, αφού η R είναι καλά θεμελιωμένη στο A, ότι $\exists y \in X\ (\neg \exists z \in X\ (z\, R\, y))$ και προφανώς αυτό αληθεύει στο M αφού $y, z \in X \subseteq M$.

Τώρα για να ορίσουμε την G^M χρησιμοποιούμε υπερπεπερασμένη αναδρομή και έτσι έχουμε $G^M : A^M \to M$ τ.ω.

$$\forall x \in A^M\ [G^M(x) = F^M(x, G^M\big|_{\mathrm{pred}^M(A^M, x, R^M)})].$$

Με υπερπεπερασμένη επαγωγή τώρα συμπεραίνουμε ότι $G^M = G\big|_{A^M}$ και τότε θα έχουμε το ζητούμενο).

Πράγματι, ας θεωρήσουμε το

$$X = \{x \in A^M : G^M(x) \neq G(x)\} \subseteq A^M.$$

Αν $X \neq \varnothing$, αφού (η R είναι καλά θεμελιωμένη στο A^M), έχουμε ότι

$$\exists y \in X\ (\neg \exists z \in X : z\, R\, y).$$

Παίρνουμε ένα τέτοιο y και έχουμε $G^M(y) \neq G(y)$, αλλά $G^M\big|_{\mathrm{pred}^M(A^M, y, R^M)} = G\big|_{\mathrm{pred}^M(A^M, y, R^M)}$, άρα

$$G^M(y) = F^M(y, G\big|_{\mathrm{pred}^M(A^M, y, R^M)}).$$

Επίσης, $\mathrm{pred}^M(A^M, y, R^M) = \mathrm{pred}(A, y, R)$, αφού έχουμε ότι $\forall x \in M\ (\mathrm{pred}(A, y, R) \subseteq M)$, και τελικά

$$G^M(y) = F^M(y, G\big|_{\mathrm{pred}(A, y, R)}) = F^M(y, G\big|_{\mathrm{pred}(A, y, R)}) = G(y),$$

που είναι άτοπο. $\square$

Θεώρημα 6.12. *Τα ακόλουθα είναι απόλυτα για κάθε μεταβατικό μοντέλο, M, του ZF-P.*

(i) α^β, *όπου* α, β *διατακτικοί,*

(ii) $\mathrm{rank}(x)$ $(= \mathrm{rank}(x, V, \in))$.

Απόδειξη. (i) Η δύναμη μεταξύ διατακτικών έχει οριστεί με αναδρομή στην κλάση των διατακτικών, συνεπώς το ζητούμενο είναι εφαρμογή του Θεωρήματος 6.11.

(ii) Έχουμε ότι $\mathrm{rank}(x)$ $(= \mathrm{rank}(x, V, \in))$ από την Πρόταση 4.4 και συνεπώς είναι ορισμένο με αναδρομή στο x, άρα απόλυτο για το M. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Θεωρήματα ανάκλασης

Λήμμα 7.1. *Για κάθε τύπο, χ, που έχουμε αποδείξει ότι είναι απόλυτος για μεταβατικά μοντέλα του ZF-P, υπάρχουν αξιώματα $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ μεταξύ των ZF-P τ.ω.*

$$ZF\text{-}P \vdash \forall M \ (M \text{ μεταβατικό} \land \varphi_1^M \land \cdots \land \varphi_n^M \longrightarrow \text{ ο } \chi \text{ είναι απόλυτος για το } M).$$

Το ίδιο ισχύει και για τις συναρτήσεις που έχουμε αποδείξει ότι είναι απόλυτες.

Απόδειξη. Για τις συναρτήσεις έχουμε αναφέρει ότι μιλάμε για απολυτότητα, των αντίστοιχων τύπων τους, μόνο στην περίπτωση που ικανοποιείται το εξής:

$$\forall x_1, \dots, x_n \, \exists! \, y \; \chi(x_1, \dots, x_n, y),$$

όπου χ ο τύπος που ορίζει τη συνάρτηση. Η μοναδικότητα, σε κάθε συνάρτηση αποδεικνύεται με κάποια αξιώματα από τα ZF-P. Για τους υπόλοιπους τύπους αποδείξαμε ότι είτε είναι ισοδύναμοι με κάποιον Δ_0 τύπο στο ZF-P, οπότε ήταν ισοδύναμοι με κάποια αξιώματα, είτε μέσω σύνθεσης απόλυτων εννοιών (Λήμμα 6.4), που δεν απαιτούσε επιπλέον υπόθεση για το M, είτε με υπερπεπερασμένη αναδρομή, που σε κάθε περίπτωση απαιτείται να ικανοποιούνται αρκετά αξιώματα του ZF-P ώστε να είναι δυνατή η συγκεκριμένη αναδρομή. □

Το παραπάνω λήμμα ισχύει ακόμα και όταν το μοντέλο μας δεν είναι σύνολο, αλλά μια κλάση.

Ορισμός 7.1. Έστω φ τύπος. Ο φ' λέγεται υποτύπος του φ, αν περιέχεται ως έκφραση στον φ και είναι τύπος.

Ορισμός 7.2. Το σύνολο τύπων $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ λέγεται κλειστό ως προς υποτύπους, αν κάθε υποτύπος των $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ εμφανίζεται ως τύπος στη λίστα.

Λήμμα 7.2. *Έστω $M \subseteq N$ και $\{\varphi_1, \dots, \varphi_n\}$ σύνολο τύπων κλειστό ως προς υποτύπους. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Οι* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *είναι απόλυτοι για τα* M, N.

(ii) *Αν κάποιος τύπος* φ_i *είναι της μορφής* $\exists x\, \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$, *ισχύει:*

$$\forall y_1, \ldots, y_l \in M\ [\exists x \in N\, \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_l) \longrightarrow \exists x \in M\ \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_l)].$$

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω $y_1, \ldots, y_l \in M$.

Υποθέτουμε, τώρα, ότι $\exists x \in N\ \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_l)$, δηλαδή $\varphi_i^N(y_1, \ldots, y_l)$ και αφού ο φ_i είναι απόλυτος για τα M, N, έχουμε φ_i^M, δηλαδή $\exists x \in M\ \varphi_j^M(x, y_1, \ldots, y_l)$. Τέλος, αφού και ο φ_j είναι απόλυτος για τα M, N, έχουμε $\exists x \in M\ \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_l)$.
(ii) $\Longrightarrow$ (i) Θα κάνουμε επαγωγή στο μήκος του φ_i.

Αν ο φ_i είναι ατομικός τύπος, δηλαδή της μορφής $x = y$ ή $x \in y$, τότε το ζητούμενο έπεται κατά προφανή τρόπο από τους ορισμούς της σχετικοποίησης και της απολυτότητας.

Αν ο φ_i είναι της μορφής $\varphi_j \wedge \varphi_k$ (προφανώς οι δύο τύποι που εμφανίζονται στη σύζευξη, δηλ. οι φ_j, φ_k, είναι τύποι της λίστας, καθώς η λίστα είναι κλειστή ως προς υποτύπους), τότε το ζητούμενο έπεται καθώς οι φ_j, φ_k από την επαγωγική υπόθεση είναι απόλυτοι για τα M, N.

Όμοια αν ο φ_i είναι της μορφής $\neg\varphi_j$ τότε είναι απόλυτος για τα M, N, καθώς ο φ_j είναι από την επαγωγική υπόθεση απόλυτος.

Τέλος, αν ο φ_i είναι της μορφής $\exists x \in \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_l)$ και υποθέσουμε ότι $y_1, \ldots, y_l \in M$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \varphi_i(y_1, \ldots, y_l) &\longleftrightarrow \exists x \in M\ \varphi_j^M(x, y_1, \ldots, y_l) \longleftrightarrow \exists x \in M\ \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_l) \\ &\longleftrightarrow \exists x \in N\ \varphi_j^N(x, y_1, \ldots, y_l) \longleftrightarrow \varphi_i^N(x, y_1, \ldots, y_l). \end{aligned}$$

Η δεύτερη ισοδυναμία προκύπτει εφαρμόζοντας την υπόθεση (ii) του λήμματος και η τρίτη ισοδυναμία προκύπτει από την απολυτότητα του φ_j, από την επαγωγική υπόθεση. □

Θεώρημα 7.3. *Έστω* Z *κλάση και για κάθε διατακτικό* α *έστω σύνολο* $Z(\alpha)$ *τ.ω.*

(i) $\alpha < \beta \longrightarrow Z(\alpha) \subseteq Z(\beta)$.

(ii) *Αν* γ *οριακός διατακτικός, τότε* $Z(\gamma) = \bigcup_{\alpha<\gamma} Z(\alpha)$.

(iii) $Z = \bigcup_{\alpha \in ON} Z(\alpha)$.

Τότε για κάθε n*-άδα* $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ *τύπων έχουμε:*

$$\forall \alpha\, \exists \beta < \alpha \ \text{ ώστε οι } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ να είναι απόλυτοι για τα } Z(\beta), Z.$$

Παρατηρούμε ότι μια πιο αυστηρή διατύπωση του θεωρήματος είναι ότι δεδομένων τύπων $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ και ορισμών για τα $Z, Z(\alpha)$, τότε είναι αποδείξιμη από το ZF η πρόταση που λέει ότι από τους ισχυρισμούς (i)-(iii) έπεται το συμπέρασμα.

Απόδειξη. Θα προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 7.2 για $N = Z$ και θα ψάξουμε να βρούμε β ώστε $M = Z(\beta)$ που να ικανοποιεί τις υποθέσεις του λήμματος.

Κατ' αρχάς μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ είναι κλειστοί ως προς υποτύπους (αν όχι, επεκτείνουμε το σύνολό μας μέχρι να γίνει).

Για κάθε $i = 1, 2, \dots, n$ ορίζουμε $F_i : ON \to ON$ ως εξής: Αν ο φ_i είναι της μορφής $\exists x\ \varphi_j(x, y_1, \dots, y_l)$ ορίζουμε $G_i(y_1, \dots, y_l) = \varnothing$ αν $\neg\exists x \in Z\ \varphi_j^Z(x, y_1, \dots, y_l)$, ενώ αλλιώς ορίζουμε $G_i(y_1, \dots, y_l) =$ ο ελάχιστος η ώστε $\exists x \in Z(\eta)\ \varphi_j^Z(x, y_1, \dots, y_l)$. Και τελικά

$$F_i(\xi) = \sup\{G_i(y_1, \dots, y_l) : y_1, \dots, y_l \in Z(\xi)\}.$$

Στην περίπτωση που ο φ_i δεν είναι της παραπάνω μορφής, ορίζουμε $F_i(\xi) = 0$.

Έστω τώρα α διατακτικός αριθμός. Ορίζουμε ακολουθία ως εξής: $\beta_0 = \alpha$, και για κάθε φυσικό αριθμό k, $\beta_{k+1} = \max\{\beta_k, F_1(\beta_k), \dots, F_n(\beta_k)\}$. Έστω $\beta = \sup\{\beta_p : p \in \omega\}$. Αφού λοιπόν $\alpha = \beta_0 < \beta_1 < \dots < \beta$, έχουμε ότι ο β είναι οριακός και $\beta > \alpha$.

Τώρα παρατηρούμε ότι η F_i, για κάθε i, είναι αύξουσα. Πράγματι, έστω $\gamma < \delta$. Αν η F_i είναι η μηδενική συνάρτηση, τότε το ζητούμενο είναι προφανές, ενώ αν όχι έχουμε

$$\{G_i(y_1, \dots, y_l) : y_1, \dots, y_l \in Z(\gamma)\} \subseteq \{G_i(y_1, \dots, y_l) : y_1, \dots, y_l \in Z(\delta)\},$$

οπότε

$$\sup\{G_i(y_1, \dots, y_l) : y_1, \dots, y_l \in Z(\gamma)\} \leq \sup\{G_i(y_1, \dots, y_l) : y_1, \dots, y_l \in Z(\delta)\}.$$

Συνεπώς αν $\xi < \beta$ τότε υπάρχει $p \in \omega$ τ.ω. $\xi < \beta_p$ και έχουμε $F_i(\xi) \leq F_i(\beta_p) \leq \beta_{p+1} < \beta$.

Άρα θα εφαρμόσουμε το Λήμμα 7.2, για $N = Z$ και $M = Z(\beta)$. Έστω ότι ο φ_i είναι της μορφής $\exists x\ \varphi_j(x, y_1, \dots, y_l)$, $y_1, \dots, y_l \in M = Z(\beta)$ και υποθέτουμε ότι $\exists x \in Z\ \varphi_j^Z(x, y_1, \dots, y_l)$.

Τότε για κάθε $k = 1, 2, \dots, l$ υπάρχει $\xi_k < \beta$ τ.ω. $y_k \in Z(\xi_k)$, δηλαδή υπάχει $\xi < \beta$ με $y_1, \dots, y_l \in Z(\xi)$ και $F_i(\xi) = \sup\{G_i(y_1, \dots, y_l) : y_1, \dots, y_l \in Z(\xi)\} < \beta$, οπότε αν $\eta = G_i(y_1, \dots, y_l) < \beta$ από τον ορισμό της G_i υπάρχει $x \in Z(\eta) \subseteq Z(\beta)\ \varphi_j^Z(x, y_1, \dots, y_l)$. Δηλαδή ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 7.2 και συνεπώς οι $\varphi_1, \dots, \varphi_n$ είναι απόλυτοι για τα $Z(\beta), Z$. □

Ορισμός 7.3. Μια n-διάστατη συνάρτηση είναι μια συνάρτηση $f : A^n \to A$, αν $n > 0$, ή απλά ένα στοιχείο του A αν $n = 0$. Επιπλέον, αν $B \subseteq A$, το B λέγεται κλειστό από την f, αν $f(B^n) \subseteq B$ (ή $f \in B$ αν $n = 0$).

Τέλος αν J σύνολο συναρτήσεων τ.ω. $\forall f \in J\ \exists n \in \omega\ (f : A^n \to A)$ και $B \subseteq A$, ονομάζουμε κλειστότητα του B στο J να είναι το $\subseteq$-ελάχιστο $C \subseteq A$ τ.ω. $B \subseteq C$ και C κλειστό από κάθε $f \in J$.

Σημείωση: Υπάρχει C που ικανοποιεί τον προηγούμενο ορισμό:

$$C = \bigcap\{D : B \subseteq D \subseteq A\ \wedge\ D \text{ κλειστό από κάθε } f \in J\}.$$

Θεώρημα 7.4 (AC). *Έστω κ άπειρος πληθάριθμος, $B \subseteq A$ τ.ω. $|B| \leq \kappa$ και $J = \{f$ συνάρτηση $: \exists n \leq \kappa$ τ.ω. $f : A^n \to A\}$. Τότε η κλειστότητα του B στο J έχει πληθικότητα μικρότερη ή ίση του κ.*

Απόδειξη. Αν $f \in J$ και $D \subseteq A$, ορίζουμε

$$f^*D = \begin{cases} f(D^n) & , n > 0 \\ \{f\} & , n = 0 \end{cases}$$

Παρατηρούμε επίσης ότι αν $|D| \leq \kappa$ τότε $|f^*D| \leq \kappa$. Ορίζουμε, τώρα, επαγωγικά την εξής ακολουθία συνόλων:

- $C_0 = B$,
- $C_{n+1} = C_n \cup \bigcup\{f^*C_n : f \in J\}$.

Βλέπουμε ότι, για κάθε $n \in \omega$, $|C_n| \leq \kappa$, και επιπλέον ορίζουμε $C_\omega = \bigcup_{n\in\omega} C_n$.

Τώρα θα αποδείξουμε ότι το C_ω είναι η κλειστότητα του B στο J. Πράγματι, $B \subseteq C_\omega$ και αν $f \in J$, έχουμε:

$$f^*C_\omega = f(C_\omega^n) = f((\bigcup_\nu C_\nu)^n) \subseteq C_\omega.$$

Πράγματι, ο τελευταίος εγκλεισμός ισχύει. Έστω, λοιπόν $y \in f((\bigcup_\nu C_\nu)^n)$. Τότε υπάρχει $(x_1, \ldots, x_n) \in (\bigcup_\nu C_\nu)^n$ τ.ω. $y = f(x_1, \ldots, x_n)$. Καθώς όμως η (C_ν) είναι αύξουσα ακολουθια συνόλων, έχουμε ότι υπάρχει ν_0 τ.ω. $x_i \in C_{\nu_0}$ για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$. Άρα $(x_1, \ldots, x_n) \in C_{\nu_0}^n$ και $y \in f(C_{\nu_0}^n)$, δηλαδή $y \in C_{\nu_0+1} \subseteq C_\omega$. Τελικά, αν $B \subseteq D \subseteq A$ με D κλειστό από κάθε συνάρτηση του J, βλέπουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό n, $C_n \subseteq D$ άρα $C_\omega \subseteq D$.

Τέλος, $|C_\omega| \leq \kappa$, αφού $|C_n| \leq \kappa$ για κάθε $n \in \omega$. □

Θεώρημα 7.5 (AC). *Αν Z κλάση και $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ τύποι, τότε*

$$\forall X \subseteq Z\, \exists A\, [X \subseteq A \subseteq Z \wedge (\text{οι } \varphi_1, \ldots, \varphi_n \text{ είναι απόλυτοι για τα } A, Z) \wedge |A| \leq \max\{\omega, |X|\}].$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το $\{\varphi_1, \ldots, \varphi_n\}$ είναι κλειστό ως προς υποτύπους (αν όχι επεκτείνουμε το σύνολο ώστε να γίνει).

Επιπλέον ορίζουμε $Z(\alpha) = Z \cap R(\alpha)$. Τότε εύκολα επιβεβαιώνουμε ότι τα Z και $Z(\alpha)$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.3.

Έστω τώρα α τ.ω. $X \subseteq Z(\alpha)$. Τότε από το Θεώρημα 7.3 υπάρχει $\beta < \alpha$ τ.ω. οι $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ να είναι απόλυτοι για τα $Z(\beta), Z$.

Από το Αξίωμα της Επιλογής υπάρχει καλή διάταξη $<$ του $Z(\beta)$. Αν τώρα, για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$, ο φ_i έχει l_i ελεύθερες μεταβλητές, ορίζουμε συνάρτηση $H : Z(\beta)^{l_i} \to Z(\beta)$ ως εξής: Αν ο φ_i είναι της μορφής $\exists x\ \varphi_j(x, y_1, \ldots, y_{l_i})$ και $\exists x \in Z(\beta)\ \varphi_j^{Z(\beta)}(x, y_1, \ldots, y_{l_i})$, ορίζουμε ως $H_i(y_1, \ldots, y_{l_i})$ το $<$-ελάχιστο τέτοιο x. Αλλιώς, ορίζουμε ως $H_i(y_1, \ldots, y_{l_i})$ το $<$-ελάχιστο του $Z(\beta)$.

Ορίζουμε τώρα A να είναι η κλειστότητα του X στο $\{H_1, \ldots, H_n\}$ και τότε, από το Θεώρημα 7.4, $|A| \leq \max\{\omega, |X|\}$.

Επιπλέον, από το Λήμμα 7.2 προκύπτει ότι αν το A είναι κλειστό από κάθε H_i, τότε ο φ_i θα είναι απόλυτος για τα $A, Z(\beta)$ και συνεπώς για τα A, Z, αυτό όμως ισχύει από τον ορισμό του A. □

Λήμμα 7.6. *Έστω G απεικόνιση από το A στο M, ισομορφισμός για τη σχέση $\in$. Τότε για κάθε τύπο $\varphi(x_1, \ldots, x_n)$ έχουμε*

$$\forall x_1, \ldots, x_n \in A\, [\varphi(x_1, \ldots, x_n)^A \longleftrightarrow \varphi(G(x_1), \ldots, G(x_n))^M].$$

Ειδικότερα αν φ πρόταση, έχουμε $\varphi^A \longleftrightarrow \varphi^M$.

Απόδειξη. Επαγωγή στον φ. □

Πόρισμα 7.7 (AC). *Αν Z μεταβατική κλάση και $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ προτάσεις, τότε*

$$\forall X \subseteq Z\, [\text{το } X \text{ είναι μεταβατικό} \longrightarrow \exists M\, (X \subseteq M \wedge \bigwedge_{i=1}^{n} (\varphi_i^M \longleftrightarrow \varphi_i^Z)$$
$$\wedge\ M \text{ μεταβατικό} \wedge |M| \leq \max\{\omega, |X|\})].$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι φ_n είναι το αξίωμα της έκτασης (αν όχι το προσθέτουμε).

Έστω, τώρα $X \subseteq Z$ μεταβατικό, και A όπως στο Θεώρημα 7.5. Αφού η Z είναι μεταβατική κλάση, έχουμε δει ότι το αξίωμα της έκτασης αληθεύει στη Z και συνεπώς στο A.

Έτσι, από το Πόρισμα 4.8, έχουμε ότι υπάρχει $\in$-ισομορφισμός $G : A \to M$, όπου M μεταβατικό σύνολο.

Άρα από το Λήμμα 7.6 και το Θεώρημα 7.5 το μόνο που μας μένει να αποδείξουμε είναι ότι $X \subseteq M$.

Έστω, λοιπόν, $x \in X$. Έχουμε, από τον ορισμό του ισομορφισμού, $G(x) = \{G(y) : y \in A \wedge y \in x\}$, και συνεπώς $G(x) = \{G(y) : y \in x\}$, αφού X μεταβατικό και $X \subseteq A$.

Με επαγωγή στο x ως προς τη σχέση $\in$, έχουμε $G(x) = x$ και τελικά $X \subseteq M$. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Ορισιμότητα

Ορισμός 8.1. Έστω $n \in \omega$ και $i, j < n$.

(i) $\mathrm{Proj}(A, R, n) = \{s \in A^n : \exists t \in R\,(t\big|_n = s)\}$.

(ii) $\mathrm{Diag}_{\in}(A, n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) \in s(j)\}$.

(iii) $\mathrm{Diag}_{=}(A, n, i, j) = \{s \in A^n : s(i) = s(j)\}$.

(iv) Με αναδρομή στο $\kappa \in \omega$ ορίζουμε το $\mathrm{Df}(\kappa, A, n)$, ως εξής:

$$\mathrm{Df}'(0, A, n) = \{\mathrm{Diag}_{\in}(A, n, i, j) : i, j < n\} \cup \{\mathrm{Diag}_{=}(A, n, i, j) : i, j < n\}$$

και

$$\mathrm{Df}'(\kappa + 1, A, n) = \mathrm{Df}'(\kappa, A, n) \cup \{A^n \setminus R : R \in \mathrm{Df}'(\kappa, A, n)\}$$

$$\cup \{R \cap S : R, S \in \mathrm{Df}'(\kappa, A, n)\} \cup \{\mathrm{Proj}(A, R, n) : R \in \mathrm{Df}'(\kappa, A, n + 1)\}.$$

(v) $\mathrm{Df}(A, n) = \bigcup\{\mathrm{Df}'(\kappa, A, n) : \kappa \in \omega\}$.

Με τον παραπάνω ορισμό κάνουμε μια προσπάθεια να περιγράψουμε το σύνολο των ορίσιμων σχέσεων n-θέσεων στο A και θα μελετήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητές του στη συνέχεια.

Λήμμα 8.1. *Αν $R, S \in \mathrm{Df}(A, n)$ τότε $A^n \setminus R \in \mathrm{Df}(A, n)$ και $R \cap S \in \mathrm{Df}(A, n)$. Επιπλέον αν $R \in \mathrm{Df}(A, n + 1)$ τότε $\mathrm{Proj}(A, R, n) \in \mathrm{Df}(A, n)$.*

Απόδειξη. Έστω, $R, S \in \mathrm{Df}(A, n)$. Υπάρχει, λοιπόν, $\kappa \in \omega$ τ.ω. $R, S \in \mathrm{Df}'(\kappa, A, n)$, άρα εξ' ορισμού $A^n \setminus R \in \mathrm{Df}'(\kappa + 1, A, n) \subseteq \mathrm{Df}(A, n)$ και επίσης $R \cap S \in \mathrm{Df}'(\kappa + 1, A, n) \subseteq \mathrm{Df}(A, n)$.

Τέλος, το ζητούμενο που απομένει προκύπτει άμεσα από τους ορισμούς των Df και Df′. $\square$

Πρόταση 8.2. *Αν $\varphi(x_0, x_1, \ldots, x_{n-1})$ τύπος με ελεύθερες μεταβλητές μεταξύ των $x_0, \ldots, x_{n-1}$, τότε*

$$\forall A\ (\{s \in A^n : \varphi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} \in \mathrm{Df}(A, n)).$$

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στον φ.

Αν ο φ είναι ατομικός τύπος: Αν ο φ είναι της μορφής $x = x_j$, τότε

$$\{s \in A^n : \varphi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} = \mathrm{Diag}_=(A, n, i, j) \in \mathrm{Df}'(0, A, n) \subseteq \mathrm{Df}(A, n).$$

Αν ο φ είναι της μορφής $x_i \in x_j$, τότε

$$\{s \in A^n : \varphi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} = \mathrm{Diag}_\in(A, n, i, j) \in \mathrm{Df}'(0, A, n) \subseteq \mathrm{Df}(A, n).$$

Αν, τώρα ο φ είναι της μορφής $\psi \wedge \chi$ και το ζητούμενο ισχύει για τους ψ και χ. Αν ορίσουμε:

$$\begin{aligned} Y &= \{s \in A^n : \psi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} \in \mathrm{Df}(A, n) \\ X &= \{s \in A^n : \chi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} \in \mathrm{Df}(A, n), \end{aligned}$$

τότε από το Λήμμα 8.1, έχουμε ότι

$$Y \cap X = \{s \in A^n : \varphi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} \in \mathrm{Df}(A, n).$$

Αν ο φ είναι της μορφής $\neg\psi$ και το ζητούμενο ισχύει για τον ψ, ορίζουμε:

$$Y = \{s \in A^n : \psi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} \in \mathrm{Df}(A, n),$$

και από το Λήμμα 8.1 έχουμε ότι

$$A^n \setminus Y = \{s \in A^n : \varphi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} \in \mathrm{Df}(A, n).$$

Τέλος, αν ο φ είναι της μορφής $\exists v\ \psi$, και το ζητούμενο ισχύει για τον ψ, διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:

- αν $v \in \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$ (δηλ. $v = x_j$ για κάποιο j, τότε ο ψ έχει ελεύθερες μεταβλητές μόνο μεταξύ των $x_0, \ldots, x_{n-1}$. Έστω, τώρα z μεταβλητή που δεν απαντάται στον φ. Ορίζουμε $\psi'(x_0, \ldots, x_{n-1}, z)$ να είναι ο

  $$\psi(x_0, \ldots, x_{j-1}, z, x_{j+1}, \ldots, x_{n-1})$$

  και φ' να είναι ο $\exists z\, \psi'$. Τότε οι φ και φ' είναι λογικά ισοδύναμοι, οπότε μπορούμε να αναχθούμε στην παρακάτω περίπτωση.

- αν $v \notin \{x_0, \ldots, x_{n-1}\}$, τότε

  $$R = \{t \in A^{n+1} : \psi^A(t(0), \ldots, t(n-1), t(n))\} \in \mathrm{Df}(A, n+1),$$

  άρα

  $$\mathrm{Proj}(A, R, n) = \{s \in A^n : \varphi^A(s(0), \ldots, s(n-1))\} \in \mathrm{Df}(A, n).$$

□

Με την παραπάνω απόδειξη έχουμε, ουσιαστικά, αποδείξει ότι κάθε ορίσιμη n-θέσια σχέση στο A ανήκει στο $\mathrm{Df}(A, n)$.

Ορισμός 8.2. Με αναδρομή στο m, ορίζουμε το $\mathrm{En}(m, A, n)$ ως εξής:

(i) αν $m = 2^i \cdot 3^j$ και $i, j < n$, τότε

$$\mathrm{En}(m, A, n) = \mathrm{Diag}_{\in}(A, n, i, j).$$

(ii) αν $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5$ και $i, j < n$, τότε

$$\mathrm{En}(m, A, n) = \mathrm{Diag}_{=}(A, n, i, j).$$

(iii) αν $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^2$ και $i, j < n$, τότε

$$\mathrm{En}(m, A, n) = A^n \setminus \mathrm{En}(i, A, n).$$

(iv) αν $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^3$, τότε

$$\mathrm{En}(m, A, n) = \mathrm{En}(i, A, n) \cap \mathrm{En}(j, A, n).$$

(v) αν $m = 2^i \cdot 3^j \cdot 5^4$, τότε

$$\mathrm{En}(m, A, n) = \mathrm{Proj}(A, \mathrm{En}(i, A, n+1), n).$$

(vi) αν δεν ισχύει τίποτα από τα παραπάνω, τότε

$$\mathrm{En}(m, A, n) = \varnothing.$$

Πρόταση 8.3. *Για κάθε φυσικό αριθμό $n \in \omega$ και κάθε σύνολο A, έχουμε*

$$\mathrm{Df}(A, n) = \{\mathrm{En}(m, A, n) : m \in \omega\}.$$

Απόδειξη. Με επαγωγή στο m θα αποδείξουμε το ($\supseteq$). Αν $m = 0$, τότε $\mathrm{En}(0, A, n) = \varnothing \in \mathrm{Df}(A, n)$. Το $\varnothing \in \mathrm{Df}(A, n)$ πράγματι, καθώς αν $R \in \mathrm{Df}(A, n)$ τότε από το Λήμμα 8.1, $A^n \setminus R \in \mathrm{Df}(A, n)$ και επίσης $R \cap (A^n \setminus R) = \varnothing \in \mathrm{Df}(A, n)$.

Έστω ότι ισχύει το ζητούμενο για κάθε $\mu \leq m$. Τότε, αν το $m+1$ είναι στις περιπτώσεις (i)-(v) του Ορισμού 8.2, το ότι $\mathrm{En}(m+1, A, n) \in \mathrm{Df}(A, n)$ είναι άμεσο από τους ορισμούς των En, Df.

Αν το $m+1$ είναι στην περίπτωση (vi) του ορισμού, τότε $\mathrm{En}(m+1, A, n) = \varnothing$, που είδαμε ότι ανήκει στο $\mathrm{Df}(A, n)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θα αποδείξουμε ότι $\mathrm{Df}'(\kappa, A, n) \subseteq \{\mathrm{En}(m, A, n) : m \in \omega\}$ για κάθε κ. Θα κάνουμε, λοιπόν, επαγωγή στο κ.

Αν $\kappa = 0$, το ζητούμενο είναι προφανές από τον ορισμό του $\mathrm{Df}'(0, A, n)$.

Έστω, τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει για κ. Τότε για $\kappa+1$, το ζητούμενο έπεται άμεσα από τους ορισμούς των Df' και En. □

Πόρισμα 8.4. $|\mathrm{Df}(A, n)| \leq \omega$.

Απόδειξη. Άμεσο από την Πρόταση 8.3. $\square$

Πρόταση 8.5. *Οι συναρτήσεις* Df *και* En *είναι απόλυτες για κάθε μεταβατικό μοντέλο, M, του ZF-P.*

Απόδειξη. Το ότι οι συναρτήσεις $\mathrm{Proj}, \mathrm{Diag}_{\in}, \mathrm{Diag}_{=}, \mathrm{Df}', \mathrm{Df}$ είναι απόλυτες ελέγχεται εύκολα και καθώς οι ορισμοί τους είναι αναδρομικοί, χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 6.11.

Για την En δουλεύουμε όμοια, απλά χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 6.12. $\square$

Ο επόμενος στόχος μας θα είναι να ορίσουμε τα διατακτικά ορίσιμα (ordinal definable) σύνολα. Μια, άτυπη προσέγγιση είναι ότι ένα σύνολο α θα λέγεται διατακτικά ορίσιμο, ανν είναι ορίσιμο από μια πεπερασμένη ακολουθία διατακτικών αριθμών. Δηλαδή, ανν υπάρχει ένας τύπος $P(y_1, \ldots, y_n, x)$ και διατακτικοί $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ τ.ω.

$$\forall x \; (P(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \longleftrightarrow x = \alpha).$$

Έστω, τώρα OD η κλάση όλων των διατακτικά ορίσιμων συνόλων. Σύμφωνα με τα παραπάνω, εύκολα προκύπτει ότι $ON \subseteq OD$. Για να το διαπιστώσουμε αυτό, αρκεί να θεωρήσουμε ως τύπο $P(y_1, x)$ τον $x = y_1$.

Πάμε, όμως, να δούμε τους αυστηρούς ορισμούς αυτών των εννοιών.

Ορισμός 8.3. Ορίζουμε την κλάση όλων των διατακτικά ορίσιμων συνόλων, OD, να είναι η κλάση όλων των συνόλων α τ.ω.

$$\exists \beta > \mathrm{rank}(\alpha) \; \exists s \in \beta^n \; \exists R \in \mathrm{Df}(R(\beta), n+1)$$

$$\forall x \in R(\beta) \, (s^\frown \langle x \rangle \in R \longleftrightarrow x = \alpha).$$

Όπου με $s^\frown \langle x \rangle$, συμβολίζουμε την $(n+1)$-άδα που προκύπτει από την n-άδα s αν της επισυνάψουμε το στοιχείο x ως τελευταία συντεταγμένη.

Θεώρημα 8.6. *Για κάθε τύπο $\varphi(y_1, \ldots, y_n, x)$ έχουμε*

$$\forall \alpha_1 \cdots \forall \alpha_n \, \forall \alpha \; [\forall x \, (\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \longleftrightarrow x = \alpha) \longrightarrow x \in OD].$$

Απόδειξη. Έστω $\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha$ και υποθέτουμε ότι

$$\forall x \; (\varphi(\alpha_1, \ldots, \alpha_n, x) \longleftrightarrow x = \alpha).$$

Από το Θεώρημα 7.3 $\exists \beta > \max\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \mathrm{rank}(\alpha)\}$ τ.ω. ο φ να είναι απόλυτος για το $R(\beta)$. Έστω επίσης

$$R = \{\langle y_1, \ldots, y_n, x \rangle \in R(\beta)^{n+1} : \varphi(y_1, \ldots, y_n, x)\}$$

και $s = \langle \alpha_1, \dots, \alpha_n \rangle \in \beta^n$. Τότε έχουμε

$$\forall x \in R(\beta)\ (s^\frown\langle x\rangle \in R \longleftrightarrow x = \alpha).$$

Επιπλέον, αφού ο φ είναι απόλυτος για το $R(\beta)$, έχουμε ότι

$$R = \{\langle y_1, \dots, y_n, x\rangle \in R(\beta)^{n+1} : \varphi(y_1, \dots, y_n, x)^{R(\beta)}\}.$$

Έτσι, τελικά, από την Πρόταση 8.2 έχουμε $R \in \mathrm{Df}(R(\beta), n+1)$ και συνεπώς $\alpha \in OD$. □

Ορισμός 8.4. Έστω $s, t \in ON^{<\omega}$. Ορίζουμε $s \lhd t$ αν

(i) $\max(\mathrm{ran}(s)) < \max(\mathrm{ran}(t))$ ή

(ii) $\max(\mathrm{ran}(s)) = \max(\mathrm{ran}(t)) \ \wedge\ \mathrm{dom}(s) < \mathrm{dom}(t)$ (εννοούμε το μήκος των s, t) ή

(iii) $\max(\mathrm{ran}(s)) = \max(\mathrm{ran}(t)) \ \wedge\ \mathrm{dom}(s) = \mathrm{dom}(t) \ \wedge\ \exists \kappa \in \mathrm{dom}(s)\ (s\big|_\kappa = t\big|_\kappa \ \wedge\ s(\kappa) < t(\kappa))$.

Παρατήρηση: Είναι άμεσο να διαπιστώσουμε ότι η $\lhd$ είναι καλή (γνήσια) διάταξη στο $ON^{<\omega}$.

Ορισμός 8.5. Ορίζουμε ως $\mathrm{Enon}(\gamma)$ το γ-οστό στοιχείο του $ON^{<\omega}$ ως προς τη διάταξη $\lhd$.

Πρόταση 8.7. *Η* Enon *είναι* 1-1 *απεικόνιση από το* ON *στο* $ON^{<\omega}$.

Απόδειξη. Άμεσο από τον προηγούμενο ορισμό. □

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός της Enon δεν είναι απόλυτα αυστηρός. Αν θέλαμε έναν πιο αυστηρό ορισμό, θα την ορίζαμε με υπερπεπερασμένη αναδρομή, ή θα ορίζαμε πρώτα την αντίστροφη Enon^{-1} ως τη συνάρτηση κατάρρευσης του Mostowski για τη σχέση $\lhd$ στην $ON^{<\omega}$.

Ορισμός 8.6. Αν $\gamma \in ON$, ορίζουμε το $\mathrm{Enod}(\gamma)$ ως εξής

(i) Αν $\mathrm{Enon}(\gamma) = s^\frown\langle \beta, n, m\rangle$, όπου $n, m \in \omega$, $s \in \beta^{<\omega}$, $\mathrm{dom}(s) = n$ και για κάποιο $\alpha \in R(\beta)$ ισχύει

$$\forall x \in R(\beta)\ (s^\frown\langle x\rangle \in \mathrm{En}(m, R(\beta), n+1) \longleftrightarrow x = a),$$

τότε $\mathrm{Enod}(\gamma) = \alpha$.

(ii) Αλλιώς $\mathrm{Enod}(\gamma) = 0$.

Πρόταση 8.8. $OD = \{\mathrm{Enod}(\gamma) : \gamma \in ON\}$.

Απόδειξη. Το ζητούμενο είναι άμεσο από την Πρόταση 8.3 και από το γεγονός ότι $0 \in OD$.

Πράγματι, αν εφαρμόσουμε το Θεώρημα 8.6 για $\varphi(y, x)$ τον τύπο $y = x$ και $\alpha =$ προκύπτει ότι $0 \in OD$. □

Πρόταση 8.9. (i) $ON \subseteq OD$.

(ii) *Αν* $w, z \in OD$, *τότε* $\{w, z\} \in OD$.

(iii) *Αν* $w \in OD$, *τότε* $\bigcup w, \mathcal{P}(w) \in OD$.

Απόδειξη. (i) Εφαρμογή του Θεωρήματος 8.6 για $\varphi(x, y)$ τον τύπο $y = x$.
(ii) Από την Πρόταση 8.8 υπάρχουν α_1, α_2 τ.ω. $w = \text{Enod}(\alpha_1)$ και $z = \text{Enod}(\alpha_2)$. Επίσης θέτουμε $\alpha = \{w, z\}$.

Έστω, τώρα, $\varphi(y_1, y_2, x)$ ο τύπος

$$y_1 \in ON \ \wedge \ y_2 \in ON \ \wedge \ x = \{\text{Enod}(y_1), \text{Enpd}(y_2)\}.$$

Με εφαρμογή του Θεωρήματος 8.6 προκύπτει ότι $\alpha \in OD$.
(iii) Πάλι με εφαρμογή του Θεωρήματος 8.6 για $\varphi(y, x)$ τους τύπους

$$y \in ON \wedge \ x = \bigcup \text{Enod}(y)$$
$$y \in ON \wedge \ x = \mathcal{P}(\text{Enod}(y))$$

αντίστοιχα. □

Στη συνέχεια θα ορίσουμε τα κληρονομικά διατακτικά ορίσιμα σύνολα, που θα είναι τα σύνολα που τα μέλη τους, τα μέλη των μελών τους κ.ο.κ. θα είναι διατακτικά ορίσιμα σύνολα. Την κλάση αυτών των συνόλων θα τη συμβολίζουμε με HOD (Hereditarily Ordinal Definable). Πάμε, όμως, να δούμε τον αυστηρό ορισμό.

Ορισμός 8.7. $HOD = \{x \in OD : \text{trcl}(x) \subseteq OD\}$.

Πρόταση 8.10. $ON \subseteq HOD \subseteq OD$ *και η* HOD *είναι μεταβατική κλάση.*

Απόδειξη. Αν $\alpha \in ON$, τότε $\alpha \in OD$ (Πρόταση 8.9). Άρα, επίσης από την Πρόταση 8.9, έχουμε $\bigcup \alpha \in OD$ και επαναλαμβάνοντας την εφαρμογή αυτής της πρότασης, προκύπτει ότι $\text{trcl}(\alpha) \in OD$, δηλαδή $\alpha \in HOD$. Άρα $ON \subseteq HOD \subseteq OD$.

Αν, τώρα $x \in HOD$ τότε $x \in OD$.

Έστω $y \in x$. Έχουμε $y \subseteq \bigcup x$ και συνεπώς προκύπτει $\text{trcl}(y) \subseteq \text{trcl}(\cup x) \subseteq \text{trcl}(x) \subseteq OD$.

Επίσης αφού $y \in x$, έχουμε $y \in \text{trcl}(x) \subseteq OD$. Άρα $y \in HOD$, δηλαδή $x \subseteq HOD$. □

Πρόταση 8.11. *Για κάθε σύνολο* α *έχουμε ότι αν* $\alpha \in OD$ *και* $\alpha \subseteq HOD$, *τότε* $\alpha \in HOD$.

Απόδειξη. Αν $\alpha \in OD$ και $\alpha \subseteq HOD$, τότε από το Λήμμα 3.3, αφού η HOD είναι μεταβατική κλάση, έχουμε $\mathrm{trcl}(\alpha) \subseteq HOD \subseteq OD$. Συνεπώς, $\alpha \in HOD$. □

Πρόταση 8.12. *Για κάθε* α, $(R(\alpha) \cap HOD) \in HOD$.

Απόδειξη. Αφού $R(\alpha) \cap HOD \in HOD$, από την Πρόταση 8.11, αρκεί να δείξουμε ότι $R(\alpha) \cap HOD \in OD$. Αυτό το διαπιστώνουμε εφαρμόζοντας το Θεώρημα 8.6 για $\varphi(y, x)$ τον τύπο

$$y \in ON \ \wedge \ x = R(y) \cap HOD.$$

□

Θεώρημα 8.13 (ZF). *Όλα τα αξιώματα* ZFC *αληθεύουν στο* HOD.

Απόδειξη. (1) Αξίωμα της έκτασης: Αφού η HOD είναι μεταβατική κλάση, το ζητούμενο έπεται από την Πρόταση 5.2.

(2) Αξίωμα της θεμελίωσης: Από την Πρόταση 5.8 και το Θεώρημα 3.5 έχουμε το ζητούμενο.

(3) Αξίωμα της εξειδίκευσης: Από την Πρόταση 5.3 αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τύπο $\psi(v, z, w_1, \ldots, w_n)$ ισχύει

$$\forall v, z, w_1, \ldots, w_n \in HOD \ (\{v \in z : \psi^{HOD}(v, z, w_1, \ldots, w_n)\} \in HOD).$$

Έστω $z, w_1, \ldots, w_n \in HOD \subseteq OD$. Τότε από την Πρόταση 8.8 έχουμε ότι υπάρχουν $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ με $z = \mathrm{Enod}(\alpha_0)$ και $w_i = \mathrm{Enod}(\alpha_i)$ για κάθε i.

Αν, τώρα $\alpha = \{v \in z : \psi^{HOD}(v, z, w_1, \ldots, w_n)\}$, τότε το α είναι το μοναδικό σύνολο x που ικανοποιεί τον $\varphi(\alpha_0, \ldots, \alpha_n, x)$, όπου $\varphi(y_0, \ldots, y_n, x)$ είναι ο τύπος

$$y_0, \ldots, y_n \in ON \ \wedge \ x = \{v \in \mathrm{Enod}(y_0) : \psi^{HOD}(v, \mathrm{Enod}(y_0), \ldots, \mathrm{Enod}(y)n))\}.$$

Έτσι, από το Θεώρημα 8.6, $\alpha \in OD$. Επίσης $\alpha \subseteq z \in HOD$ και HOD μεταβατικό, οπότε $\alpha \subseteq HOD$ και από την Πρόταση 8.11 έχουμε $\alpha \in HOD$.

(4)-(5)-(6)-(7) Αξιώματα μη διατεταγμένου ζεύγους, ένωσης, αντικατάστασης, δυναμοσυνόλου: Όλα αυτά απαιτούν από το HOD να έχει αρκετά μεγάλα σύνολα και έπειτα εφαρμόζουμε την Πρόταση 8.12.

Ενδεικτικά ας δούμε για το αξίωμα του μη διατεταγμένου ζεύγους. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x, y \in HOD$, υπάρχει $w \in HOD$ τ.ω. $x \in w \ \wedge \ y \in w$.

Οπότε θέτουμε $w = R(\alpha) \cap HOD$, όπου $\alpha > \max\{\mathrm{rank}(x), \mathrm{rank}(y)\}$. Έτσι, αφού έχουμε ότι το αξίωμα της εξειδίκευσης αληθεύει στο HOD, προκύπτει ότι το $\{x, y\} \in HOD$.

(8) Αξίωμα του απείρου: Το ζητούμενο προκύπτει από το γεγονός ότι $\omega \in HOD$.

(9) Το αξίωμα της επιλογής: Από το Θεώρημα 6.10 έχουμε ότι η σχέση της καλής διάταξης είναι απόλυτη στο HOD και αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $A \in HOD$ είναι καλά διατάξιμο. Δηλαδή ότι για κάθε $A \in HOD$, υπάρχει $R \in HOD$ τ.ω. η R να διατάσσει καλά το A.

Αφού $A \in HOD$, έχουμε ότι $A \in OD$, άρα υπάρχει α με $A = \mathrm{Enod}(\alpha)$. Επίσης έχουμε ότι $A \subseteq \mathrm{trcl}(A) \subseteq OD$. Ορίζουμε

$$R = \{\langle x, y\rangle \in A \times A : \exists \xi \ (x = \mathrm{Enod}(\xi) \ \wedge \ \forall \eta \leq \xi \ (y \neq \mathrm{Enod}(\eta)))\}.$$

Τότε η $R \in OD$ αφού είναι ορίσιμη από το α (Θεώρημα 8.6) και $R \subseteq A \times A \subseteq HOD$, άρα $R \in HOD$ από την Πρόταση 8.11.

Τέλος, η R διατάσσει καλά το A αφού η Enod κάνει το ίδιο στο HOD. □

Πόρισμα 8.14. $\mathrm{Con}(ZF) \longrightarrow \mathrm{Con}(ZFC)$.

Απόδειξη. Άμεσο από την Πρόταση 5.1 ως πόρισμα του Θεωρήματος 8.13. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Κατασκευάσιμα Σύνολα

Σε αυτό το κεφάλαιο θα δουλέψουμε στο ZF και θα ορίσουμε την κλάση όλων των κατασκευάσιμων συνόλων, L.

Ορισμός 9.1. $\mathcal{D}(A) = \{X \subseteq A : \exists n \in \omega\ \exists s \in A^n\ \exists R \in \mathrm{Df}(A, n+1)\ (X = \{x \in A : s^\frown\langle x\rangle \in R\})\}$.

Πρόταση 9.1. *Αν $\varphi(v_0, v_1, \ldots, v_{n-1}, x)$ τύπος, τότε*

$$\forall A\ \forall v_0, \ldots, v_{n-1} \in A\ (\{x \in A : \varphi^A(v_0, \ldots, v_{n-1}, x)\} \in \mathcal{D}(A)).$$

Απόδειξη. Έστω A, $v_0, \ldots, v_{n-1} \in A$ και $x_0 \in \{x \in A : \varphi^A(v_0, \ldots, v_{n-1}, x)\} = B$. Τότε, $(v_0, \ldots, v_{n-1}, x_0) \in R = \{s \in A^{n+1} : \varphi^A(s(0), \ldots, s(n))\}$ και από την Πρόταση 8.2 έχουμε ότι $R \in \mathrm{Df}(A, n+1)$. Άρα, λοιπόν, $s = (v_0, \ldots, v_{n-1}) \in A^n$, $R \in \mathrm{Df}(A, n+1)$ και αν $x \in B$ τότε $s^\frown\langle x\rangle \in R$.

Αντίστροφα αν $s^\frown\langle x\rangle \in R$, τότε $x \in B$. Άρα, $B = \{x \in A : s^\frown\langle x\rangle \in R\} \in \mathcal{D}(A)$. □

Πρόταση 9.2. *Για κάθε A,*

(i) $\mathcal{D}(A) \subseteq \mathcal{P}(A)$.

(ii) *Αν A μεταβατικό, τότε $A \subseteq \mathcal{D}(A)$.*

(iii) $\forall X \subseteq A\ (|X| < \omega \longrightarrow X \in \mathcal{D}(A))$.

(iv) (AC): $|A| \geq \omega \longrightarrow |\mathcal{D}(A)| = |A|$.

Απόδειξη. (i) Προφανές.

(ii) Για τον τύπο φ, $x \in v$, εφαρμόζουμε την Πρόταση 9.1. Έτσι, $\forall v \in A$ $(\{x \in A : x \in v\} \in \mathcal{D}(A))$. Αφού το A είναι μεταβατικό, έχουμε $v \subseteq A$ και συνεπώς $\{x \in A : x \in v\} = v \in \mathcal{D}(A)$.

(iii) Από το Λήμμα 8.1, έχουμε ότι αν $R, S \in \mathrm{Df}(A, n+1)$ τότε $A^{n+1} \setminus R \in \mathrm{Df}(A, n+1)$, $R \cap S \in \mathrm{Df}(A, n+1)$ και $R \cup S = A^{n+1} \setminus [(A^{n+1} \setminus R) \cap (A^{n+1} \setminus S)] \in \mathrm{Df}(A, n+1)$. Έπειτα θα δείξουμε ότι για κάθε $m \leq n$

$$E_n^m = \{t \in A^{n+1} : \exists i < m \ (t(n) = t(i))\} \in \mathrm{Df}(A, n+1).$$

Θα κάνουμε επαγωγή στο $m \leq n$. Αν $m = 0$, $E_n^0 = \varnothing \in \mathrm{Df}(A, n+1)$ (το έχουμε δει σε προηγούμενη απόδειξη). Έστω, τώρα, ότι ισχύει το ζητούμενο για m. Παρατηρούμε ότι $E_n^{m+1} = E_n^m \cup \{t \in A^{n+1} : t(n) = t(m)\}$. Επίσης από την επαγωγική υπόθεση προκύπτει ότι $E_n^m \in \mathrm{Df}(A, n+1)$. Τώρα,

$$\{t \in A^{n+1} : t(n) = t(m)\} = \mathrm{Diag}_{=}(A, n+1, i, j) \in \mathrm{Df}(A, n+1).$$

Άρα από την αρχική παρατήρηση, έχουμε, $E_n^{m+1} \in \mathrm{Df}(A, n+1)$. Έτσι για κάθε $s \in A^n$ το σύνολο $\mathrm{ran}(s) = \{x \in A : s^\frown\langle x\rangle \in E_n^n\} \in \mathcal{D}(A)$. Έτσι $\forall n < \omega \ \forall X \subseteq A \ (|X| \leq n \longrightarrow X \in \mathcal{D}(A))$.

Πράγματι, αν $X = \{x_0, \ldots, x_{m-1}\}$ με $m \leq n$ και $s \in A^n$, όπου οι πρώτες m συντεταγμένες είναι οι $x_0, \ldots, x_{m-1}$, τότε

$$X = \{x \in A : s^\frown\langle x\rangle \in E_n^m\} \in \mathcal{D}(A).$$

(iv) Γνωρίζουμε ότι αν $|A| \geq \omega$, τότε $|A^n| = |A|$ για κάθε $n \in \omega$, και επιπλέον από το Πόρισμα 8.4, έχουμε $|\mathrm{Df}(A, n+1)| \leq \omega$.

Τότε συμπεραίνουμε ότι $|\mathcal{D}(A)| \leq |A|$, καθώς εύκολα βλέπουμε από τον ορισμό του $\mathcal{D}(A)$ ότι

$$|\mathcal{D}(A)| \leq \Big|\bigcup_{n\in\omega} [A^n \times \mathrm{Df}(A, n+1)]\Big| \leq \omega \cdot |A| \leq |A| \cdot |A| = |A|.$$

Αντίστροφα, βλέπουμε ότι $|A| \leq |\mathcal{D}(A)|$. Πράγματι, από το (iii), βλέπουμε ότι για κάθε $x \in A$, έχουμε $\{x\} \in \mathcal{D}(A)$. □

Ορισμός 9.2. Με υπερπεπερασμένη αναδρομή ορίζουμε το $L(\alpha)$, για κάθε διατακτικό α, ως εξής:

(i) $L(0) = 0$.

(ii) $L(\alpha + 1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$.

(iii) $L(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi)$, αν α οριακός.

Ορισμός 9.3. Ορίζουμε την κλάση των κατασκευάσιμων συνόλων

$$L = \bigcup\{L(\alpha) : \alpha \in ON\}.$$

Πρόταση 9.3. *Για κάθε $\alpha \in ON$*

(i) *Το* $L(\alpha)$ *είναι μεταβατικό σύνολο.*

(ii) $\forall \xi \le \alpha \ (L(\xi) \subseteq L(\alpha))$.

Απόδειξη. Με υπερπεπερασμένη επαγωγή στο α θα αποδείξουμε το (i) και το (ii) ταυτόχρονα. Αν $\alpha = 0$ τότε $L(0) = 0$ και προφανώς ισχύουν και τα δύο ζητούμενα.

Αν τώρα τα ζητούμενα ισχύουν για κάθε $\beta < \alpha$, τότε:

- αν α οριακός και $x \in L(\alpha)$, τότε υπάρχει $\xi < \alpha$ με $x \in L(\xi)$. Όμως το $L(\xi)$ είναι μεταβατικό από την επαγωγική υπόθεση, άρα $x \subseteq L(\xi) \subseteq L(\alpha) = \bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi)$.
- αν $\alpha = \beta + 1$ (δηλ. επόμενος) τότε $L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta))$. Αφού, από την επαγωγική υπόθεση το $L(\beta)$ είναι μεταβατικό, τότε από την Πρόταση 9.2, έχουμε $L(\beta) \subseteq \mathcal{D}(L(\beta)) = L(\alpha)$. Επιπλέον, αν $x \in L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta))$, τότε $x \subseteq L(\beta) \subseteq L(\alpha)$ από τον ορισμό του $\mathcal{D}(L(\beta))$.

$\square$

Παρατήρηση: Από τον ορισμό των $L(\alpha)$, προκύπτει ότι αν $x \in L$ τότε ο ελάχιστος α τέτοιος ώστε $x \in L(\alpha)$ είναι επόμενος.

Ορισμός 9.4. Έστω $x \in L$. Ορίζουμε την L-τάξη του x, $\rho(x)$ ως τον ελάχιστο $\beta \in ON$ τ.ω. $L(\beta + 1)$.

Πρόταση 9.4. *Για κάθε* $\alpha \in ON$, *ισχύει* $L(\alpha) = \{x \in L : \rho(x) < \alpha\}$.

Απόδειξη. Αν $x \in L(\alpha)$, τότε $x \in L$ και $\rho(x) < \alpha$, δηλαδή $x \in \{x \in L : \rho(x) < \alpha\}$ και τελικά $L(\alpha) \subseteq \{x \in L : \rho(x) < \alpha\}$.

Αντίστροφα, αν $x \in \{x \in L : \rho(x) < \alpha\}$ και $\beta = \rho(x)$, τότε $x \in L(\beta + 1)$ και $\beta + 1 \le \alpha$, οπότε $L(\beta + 1) \subseteq L(\alpha)$. Έτσι, τελικά $x \in L(\alpha)$, συνεπώς $\{x \in L : \rho(x) < \alpha\} \subseteq L(\alpha)$. $\square$

Πρόταση 9.5. (i) $\forall \alpha \in ON \ (\alpha \in L \wedge \rho(\alpha) = \alpha)$.

(ii) $\forall \alpha \in ON \ (L(\alpha) \cap ON = \alpha)$.

Απόδειξη. (i) Δεδομένου του (ii) , το (i) είναι προφανές. Πράγματι, έστω $\alpha \in ON$. Τότε, $\alpha \notin L(\alpha)$, καθώς αν $\alpha \in L(\alpha)$, τότε $\alpha \in L(\alpha) \cap ON = \alpha$ που είναι άτοπο.

Επιπλέον, $\alpha \in \alpha + 1 = L(\alpha + 1) \cap ON$, άρα $\alpha \in L(\alpha + 1) \subseteq L$ και τελικά $\rho(\alpha) = \alpha$.

(ii) Άρα αρκεί να αποδείξουμε το (ii). Αυτό θα το κάνουμε με επαγωγή στο α.

- αν $\alpha = 0$: $L(0) = 0$, οπότε $L(0) \cap ON = 0$.

Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε $\xi < \alpha$.

- αν α οριακός: $\forall\xi < \alpha\ L(\xi) \cap ON = \xi \implies L(\alpha) \cap ON = \bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi) \cap ON = \bigcup_{\xi<\alpha}(L(\xi) \cap ON) = \bigcup_{\xi<\alpha} \xi = \alpha$.

- αν $\alpha = \beta + 1$ (επόμενος): έχουμε $L(\beta) \subseteq L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta)) \subseteq \mathcal{P}(L(\beta)) \implies L(\beta) \cap ON = \beta \subseteq L(\alpha) \cap ON \subseteq \alpha$.

  Για τον τελευταίο εγκλεισμό, έστω $\xi \in L(\alpha) \cap ON$. Τότε, έχουμε $\exists n \in \omega\ \exists s \in L(\beta)^n\ \exists R \in \mathrm{Df}(L(\beta), n+1)$ τ.ω. $\xi = \{x \in L(\beta) : s^\frown\langle x\rangle \in R\}$.

  Άρα, αν $x \in \xi \implies x \in ON \implies x \in L(\beta) \cap ON = \beta \implies \xi \subseteq \beta \implies \xi < \beta + 1 \implies L(\alpha) \cap ON \subseteq \beta + 1 = \alpha$.

  Τώρα, λοιπόν, αρκεί να δείξουμε ότι $\beta \in L(\alpha)$ (πράγματι, αν ίσχυε αυτό, τότε $\beta \in L(\alpha) \cap ON \implies L(\alpha) \cap ON \neq \beta \implies L(\alpha) \cap ON = \alpha = \beta + 1$). Από το Θεώρημα 6.7 υπάρχει Δ_0 τύπος φ τ.ω.

  $$\forall x\ (\text{ο } x \text{ είναι φιατακτικός} \longleftrightarrow \varphi(x))$$

  και αφού οι Δ_0 τύποι είναι απόλυτοι για κάθε μεταβατικό σύνολο (Πόρισμα 6.2), από την Πρόταση 9.1 έχουμε

  $$\beta = L(\beta) \cap ON = \{x \in L(\beta) : \varphi^{L(\beta)}(x)\} \in \mathcal{D}(L(\beta)) = L(\alpha).$$

□

Πρόταση 9.6. *$L(\alpha) \in L(\alpha + 1)$, για κάθε $\alpha \in ON$.*

Απόδειξη. $L(\alpha) = \{x \in L(\alpha) : (x = x)^{L(\alpha)}\} \in \mathcal{D}(L(\alpha)) = L(\alpha + 1)$, από την Πρόταση 9.1. □

Πρόταση 9.7. *$L(\alpha) \subseteq R(\alpha)$, για κάθε $\alpha \in ON$.*

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο α.

- αν $\alpha = 0$: $L(0) = 0 = R(0)$.

Έστω, τώρα, ότι το ζητούμενο ισχύει για κάθε $\xi < \alpha$.

- αν α οριακός: έχουμε $\forall\xi < \alpha\ L(\xi) \subseteq R(\xi) \implies \bigcup_{\xi<\alpha} L(\xi) = L(\alpha) \subseteq \bigcup_{\xi<\alpha} R(\xi) = R(\alpha)$.

- αν $\alpha = \beta + 1$ (επόμενος): $L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta)) \subseteq \mathcal{P}(L(\beta)) \subseteq \mathcal{P}(R(\beta)) = R(\alpha)$.

□

Πρόταση 9.8. *Αν $X \subseteq L(\alpha)$ πεπερασμένο, τότε $X \in L(\alpha + 1)$.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 9.2, έχουμε ότι $X \subseteq L(\alpha)$ πεπερασμένο $\implies X \in \mathcal{D}(L(\alpha)) = L(\alpha + 1)$. □

Λήμμα 9.9. *Για κάθε* $n \in \omega$, *έχουμε* $|L(n)| < \infty$.

Απόδειξη. Θα κάνουμε επαγωγή στο n.

- αν $n = 0$: $L(0) = 0 < \infty$.

Έστω ότι το ζητούμενο ισχύει για n.

- $L(n+1) = \mathcal{D}(L(n)) \subseteq \mathcal{P}(L(n))$. Άρα τελικά $|L(n+1)| < \infty$.

□

Πρόταση 9.10. (i) $\forall n \in \omega\ (L(n) = R(n))$.

(ii) $L(\omega) = R(\omega)$.

Απόδειξη. (i) Θα κάνουμε επαγωγή στο n.

- αν $n = 0$: $L(0) = 0 = R(0)$.

Έστω, τώρα, ότι το ζητούμενο ισχύει για n.

- Παρατηρούμε ότι ισχύει $\mathcal{D}(L(n)) = L(n+1) = \mathcal{P}(L(n))$. Πράγματι, γενικά ισχύει $\mathcal{D}(L(n)) \subseteq \mathcal{P}(L(n))$.

  Αντίστροφα, αν $X \in \mathcal{P}(L(n))$, τότε $X \subseteq L(n)$ πεπερασμένο (Λήμμα 9.9), άρα από την Πρόταση 9.8 έχουμε $X \in L(n+1)$, δηλαδή $\mathcal{P}(L(n)) \subseteq \mathcal{D}(L(n))$.

  Άρα, τελικά, αφού από την επαγωγική υπόθεση έχουμε $L(n) = R(n)$, προκύπτει $L(n+1) = \mathcal{P}(L(n)) = \mathcal{P}(R(n)) = R(n+1)$.

(ii) $L(\omega) = \bigcup_{n<\omega} L(n) = \bigcup_{n<\omega} R(n) = R(\omega)$. Η μεσαία ισότητα προκύπτει από το (i). □

Πρόταση 9.11 (*AC*)**.** *Για κάθε* $\alpha > \omega$, *έχουμε* $|L(\alpha)| = |\alpha|$.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 9.5 (ii), έχουμε $\alpha \subseteq L(\alpha) \implies |\alpha| \leq |L(\alpha)|$.

Για το αντίστροφο θα κάνουμε επαγωγή στο α και θα αποδείξουμε ότι αν $\alpha \geq \omega$ και $\forall \beta < \alpha\ (\beta \geq \omega \longrightarrow |L(\beta)| = |\beta|)$, τότε $\forall \beta < \alpha\ (L(\beta) \leq \alpha)$ (αυτό ισχύει και για $\beta < \omega$, αφού $|L(\beta)| < \infty$).

- αν α οριακός: $L(\alpha) = \bigcup_{\beta<\alpha} L(\beta)$ (ένωση $|\alpha|$ συνόλων πληθικότητας $\leq |\alpha|$), άρα $|L(\alpha)| \leq |\alpha| \cdot |\alpha|$.
- αν $\alpha = \beta + 1$ (επόμενος): $|L(\beta)| = |\beta| = |\alpha|$ και $L(\alpha) = \mathcal{D}(L(\beta))$, τελικά από την Πρόταση 9.2 (iv), έχουμε $|L(\alpha)| = |\mathcal{D}(L(\beta))| = |L(\beta)| = |\alpha|$.

□

Τώρα πάμε να αποδείξουμε το κεντρικό θεώρημα αυτού του κεφαλαίου, που είναι και ο λόγος που κάναμε την κατασκευή της κλάσης L.

Θεώρημα 9.12. *Το L είναι μοντέλο του ZF.*

Απόδειξη. (1) Το αξίωμα της έκτασης: Παρατηρούμε ότι η L είναι μεταβατική κλάση. Πράγματι, αν $x \in L$ τότε υπάρχει $\alpha \in ON$ τ.ω. $x \in L(\alpha)$. Όμως το $L(\alpha)$ έχουμε δει ότι είναι μεταβατικό σύνολο (Πρόταση 9.3), άρα $x \subseteq L(\alpha) \subseteq L$. Έτσι από την Πρόταση 5.2 έχουμε ότι το αξίωμα της έκτασης αληθεύει στην L.

(2) Το αξίωμα της θεμελίωσης: Έχουμε ότι για κάθε α ισχύει $L(\alpha) \subseteq R(\alpha)$, οπότε $L \subseteq WF$ και τελικά από την Πρόταση 5.8 προκύπτει ότι το L είναι μοντέλο του αξιώματος της θεμελίωσης.

(3) Το αξίωμα της εξειδίκευσης: Από την Πρόταση 5.3 αρκεί να αποδείξουμε ότι για κάθε τύπο $\psi(x, z, v_1, \ldots, v_n)$, έχουμε

$$\forall z, v_1, \ldots, v_n \in L\ (\{x \in z : \psi^L(x, z, v_1, \ldots, v_n)\} \in L).$$

Αν $z, v_1, \ldots, v_n \in L$, τότε υπάρχει $\alpha \in ON$ τ.ω. $z, v_1, \ldots, v_n \in L(\alpha)$. Τώρα, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.3 παίρνουμε $\beta > \alpha$ οριακό τ.ω. ο ψ να είναι απόλυτος για τα $L(\beta)$, L. Τότε

$$\{x \in z : \psi^L(x, z, v_1, \ldots, v_n)\} = \{x \in L(\beta) : \varphi^{L(\beta)}(x, z, v_1, \ldots, v_n)\},$$

όπου φ είναι ο τύπος $x \in z \wedge \psi$. Έτσι, από την Πρόταση 9.1,

$$\{x \in z : \psi^L(x, z, v_1, \ldots, v_n)\} \in \mathcal{D}(L(\beta)) = L(\beta + 1) \subseteq L.$$

(4) Το αξίωμα της αντικατάστασης: Από την Πρόταση 5.7 αρκεί να αποδείξουμε ότι αν για κάθε τύπο $\varphi(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$ και $A, w_1, \ldots, w_n \in L$ υποθέσουμε ότι $\forall x \in A\ \exists! y \in L\ \varphi^L(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)$, μπορούμε να συμπεράνουμε $\exists Y \in L\ (\{y : \exists x \in A\ \varphi^L(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\} \subseteq Y)$.

Ας πάμε όμως να το αποδείξουμε. Έστω

$$\alpha = \sup\{\rho(y) + 1 : \exists x \in A\ \varphi^L(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\}$$

και ας θέσουμε $Y = L(\alpha) \in L$.

Τότε το Y ικανοποιεί τη ζητούμενη σχέση. Πράγματι, αν

$$y \in \{y : \exists A\ \varphi^L(x, y, A, w_1, \ldots, w_n)\},$$

τότε $\rho(y) + 1 \leq \alpha$, οπότε $L(\rho(y) + 1) \subseteq L(\alpha) = Y$. Αφού, λοιπόν, $y \in L(\rho(y) + 1)$, έχουμε ότι $y \in Y$.

(5)-(6)-(7) Τα αξιώματα μη διατεταγμένου ζεύγους-ένωσης-δυναμοσυνόλου: Το ζητούμενο γι' αυτά τα αξιώματα προκύπτει με εφαρμογή των Προτάσεων 5.5 και 5.6. Ενδεικτικά ας δούμε για το αξίωμα του δυναμοσυνόλου. Θα αποδείξουμε ότι

$$\forall x \in L\ \exists y \in L\ (\mathcal{P}(x) \cap L \subseteq y).$$

Έστω, λοιπόν, $x \in L$. Ορίζουμε $\alpha = \sup\{\rho(z)+1 : z \in \mathcal{P}(x) \cap L\}$ (που είναι σύνολο αφού το αξίωμα της αντικατάστασης αληθεύει στο L). Άρα $z \in \mathcal{P}(x) \cap L \implies \rho(z) + 1 \leq \alpha \implies z \in L(\rho(z) + 1) \subseteq L(\alpha) = y \in L$ (Πρόταση 9.6).

(8) Το αξίωμα του απείρου: Αρκεί να δείξουμε ότι $\omega \in L$. Από την Πρόταση 9.5, $\rho(\omega) = \omega$, άρα $\omega \in L(\omega + 1) \subseteq L$. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 10

Το Αξίωμα της Κατασκευασιμότητας

Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε ότι αν υποθέσουμε $V = L$, τότε αυτό είναι συνεπές με τα αξιώματα ZF. Αποδεικνύεται, αν και δεν θα δούμε αυτή την απόδειξη σε αυτή την εργασία, ότι αν υποθέσουμε $V \neq L$ τότε και αυτό είναι συνεπές με το ZF. Αν και δε μοιάζει λογικό να θεωρούμε ότι αυτή η υπόθεση είναι αληθής, παρόλα αυτά θα μας βοηθήσει να αποδείξουμε ότι αρκετές έννοιες αληθεύουν στο L, κάτι που θα είναι χρήσιμο για να πετύχουμε τον τελικό μας στόχο για τη συνέπεια της GCH.

Ορισμός 10.1. Το αξίωμα της κατασκευασιμότητας είναι το $V = L$, ή διαφορετικά $\forall x\ \exists \alpha\ (x \in L(\alpha))$.

Πρόταση 10.1. *Ο τελεστής $L(\alpha)$ είναι απόλυτος για κάθε μεταβατικό μοντέλο, M, του ZF-P.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 8.5 έχουμε ότι η DF είναι απόλυτη και από αυτό προκύπτει, εύκολα, με τις μεθόδους που είδαμε στο κεφάλαιο για την απολυτότητα ότι η $\mathcal{D}$ είναι απόλυτη. Τέλος, αφού το $L(\alpha)$ ορίστηκε με αναδρομή στο $\mathcal{D}$, προκύπτει ότι και αυτό είναι απόλυτο (Θεώρημα 6.11). □

Θεώρημα 10.2 (ZF)**.** *Το L είναι μοντέλο του $ZF + (V = L)$ $(= ZF \cup \{V = L\})$.*

Απόδειξη. Το L είναι μοντέλο του ZF από το Θεώρημα 9.12. Άρα απομένει να αποδείξουμε ότι το $V = L$ αληθεύει στο L, δηλαδή $(V = L)^L$.

Δηλαδή θα αποδείξουμε ότι $\forall x \in L\ \exists \alpha \in L\ [(x \in L(\alpha))^L]$.

Έστω, λοιπόν, $x \in L$ και α τ.ω. $x \in L(\alpha)$. Όμως, βλέπουμε ότι $\alpha \in L$ αφού $ON \subseteq L$ (Πρόταση 9.5) και επιπλέον έχουμε $(x \in L(\alpha))^L$ (Πρόταση 10.1). □

Πόρισμα 10.3. $\mathrm{Con}(ZF) \longrightarrow \mathrm{Con}(ZF + (V = L))$.

Απόδειξη. Άμεσο από το πρηγούμενο θεώρημα. □

Θεώρημα 10.4. *Έστω M κλάση που δεν είναι σύνολο και έστω επίσης ότι η M είναι μεταβατικό μοντέλο του ZF-P. Τότε έχουμε $L = L^M \subseteq M$.*

Απόδειξη. Πρώτα παρατηρούμε ότι $ON \subseteq M$. Πράγματι, έστω $\alpha \in ON$. Αφού η M δεν είναι σύνολο, έχουμε ότι δεν περιέχεται στο $R(\alpha)$. Έτσι, υπάρχει $x \in M \setminus R(\alpha)$. Όμως από το Θεώρημα 3.5 έχουμε ότι $WF = V$, άρα $x \in WF$ και συνεπώς $\text{rank}(x) \geq \alpha$.

Από την Πρόταση 6.12 τώρα, το rank είναι απόλυτο για το M. Άρα $\text{rank}(x) \in M$ και καθώς η M είναι μεταβατική, $\text{rank}(x) \subseteq M$.

Αν $\alpha < \text{rank}(x)$, τότε $\alpha \in \text{rank}(x) \subseteq M$ που είναι άτοπο. Αν $\alpha = \text{rank}(x) \in M$ έχουμε επίσης άτοπο.

Τώρα από την Πρόταση 10.1 έχουμε ότι το $L(\alpha)$ είναι απόλυτο για τη M, άρα

$$\begin{aligned} L^M &= \{x \in M : (\exists \alpha\, (x \in L(\alpha))^M\} = \{x \in M : \exists \alpha \in M\, (x \in L(\alpha)^M)\} \\ &= \{x \in M : \exists \alpha\, (x \in L(\alpha))\} = \bigcup \{L(\alpha) : \alpha \in ON\} = L. \end{aligned}$$

Η προτελευταία ισότητα προκύπτει καθώς το $L(\alpha)$ είναι απόλυτο για το M, έχουμε ότι $L(\alpha) \in M$ και αφού η M είναι μεταβατική, $L(\alpha) \subseteq M$. □

Σχόλιο: Στην παραπάνω απόδειξη η M είναι κλάση και όχι σύνολο, οπότε δεν είναι τυπικά σωστές όλες οι διατυπώσεις. Όμως αυτό το πρόβλημα μπορεί, εύκολα, να ξεπεραστεί χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.1. Θα μπορούσε, δηλαδή, η διατύπωση του θεωρήματος να είναι η εξής:

$$(M \text{ μεταβατική κλάση που δεν είναι σύνολο}) \wedge \varphi^M \longrightarrow L \subseteq M,$$

όπου φ θα είναι σύζευξη αξιωμάτων, όπως στο Λήμμα 7.1, ώστε οι έννοιες του διατακτικού, του rank και του $L(\alpha)$ να είναι απόλυτες για μεταβατικά μοντέλα του ZF-P.

Ορισμός 10.2. Ορίζουμε $o(M) = M \cap ON$.

Πρόταση 10.5. *Αν M μεταβατικό σύνολο, τότε $o(M) \in ON$ και είναι, μάλιστα, ο πρώτος διατακτικός που δεν ανήκει στο M.*

Απόδειξη. Αφού το M είναι σύνολο, τότε και το $o(M)$ είναι σύνολο. Επιπλέον έχουμε $o(M) \subseteq ON$, άρα είναι καλά διατεταγμένο από την $\in$. Επιπροσθέτως, το $o(M)$ είναι μεταβατικό, αφού το M είναι μεταβατικό. Άρα, τελικά, όντως $o(M) \in ON$.

Τέλος $o(M) \notin M$, γιατί αν είχαμε $o(M) \in M$, τότε θα ίσχυε $o(M) \in o(M)$, που είναι άτοπο. Επίσης, προφανώς από τον ορισμό του, ο $o(M)$ είναι και ο μικρότερος που δεν ανήκει στο M. □

Θεώρημα 10.6. *Υπάρχει πεπερασμένη σύζευξη αξιωμάτων από τα ZF-P, ψ, τ.ω.*

$$\forall M\,[M \text{ μεταβατικό σύνολο} \wedge \psi^M \longrightarrow L(o(M)) = L^M \subseteq M].$$

Απόδειξη. Έστω, λοιπόν, ψ η σύζευξη του φ που χρειαστήκαμε στο Θεώρημα 10.4, την οποία βρήκαμε μέσω του Λήμματος 7.1 με αρκετά αξιώματα, ώστε να αποδεικνύεται ότι δεν υπάρχει μέγιστος διατακτικός.

Αν τώρα M μεταβατικό σύνολο και ψ^M, τότε $o(M)$ οριακός αφού $o(M) \notin M$, το M δεν έχει μέγιστο διατακτικό και αν $\alpha < o(M)$, τότε $\alpha \in o(M) \subseteq M$. Άρα $L(o(M)) = \bigcup_{\alpha\in M} L(\alpha)$, αλλά

$$L^M = \{x \in M : (\exists\alpha\,(x \in L(\alpha)))^M\} = \{x \in M : \exists\alpha \in M\,(x \in L(\alpha)^M)\}$$

και αφού το $L(\alpha)$ είναι απόλυτο για το M, έχουμε

$$L^M = \{x \in M : \exists\alpha \in M\,(x \in L(\alpha))\} = \bigcup_{\alpha\in M} L(\alpha) = L(o(M)) \subseteq M.$$

□

Θεώρημα 10.7. *Υπάρχει πεπερασμένη σύζευξη αξιωμάτων από τα (ZF-P)+(V = L), χ, τ.ω.*

(i) *Αν M μεταβατική κλάση που δεν είναι σύνολο και χ^M, τότε $M = L$.*

(ii) $\forall M\,(M \text{ μεταβατικό σύνολο} \wedge \chi^M \longrightarrow M = L(o(M)))$.

Απόδειξη. Ο χ είναι απλά ο ψ του Θεωρήματος 10.6 συζευγμένος με το $(V = L)$.

Έτσι, αν M μεταβατικό (κλάση ή σύνολο) και χ^M, έχουμε $(\forall x\,(x \in L))^M$, δηλαδή $M = L^M$.

Έτσι, τώρα, το (i) προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 10.4 και το (ii) από το Θεώρημα 10.6. □

Θεώρημα 10.8 (*ZF*). $V = L \longrightarrow V = HOD$.

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 10.4 για $M = HOD$, έχουμε $L \subseteq HOD$ άρα $V \subseteq HOD$ και τελικά $V = HOD$. □

Πόρισμα 10.9. $\mathrm{Con}(ZF) \longrightarrow \mathrm{Con}(ZF + (V = HOD))$.

Απόδειξη. Είναι άμεσο από το Πόρισμα 10.3 και το Θεώρημα 10.8. □

Πόρισμα 10.10 (*ZF*). $V = L \longrightarrow AC$.

Απόδειξη. Άμεσο από το Θεώρημα 10.8 και το γεγονός ότι το αξίωμα της επιλογής αληθεύει στο HOD. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 11

Η GCH στο L

Ορισμός 11.1. Με αναδρομή στο α ορίζουμε καλή διάταξη (γνήσια) $\lhd_\alpha = \lhd(\alpha)$ στο $L(\alpha)$ ως εξής:

- $\lhd_0 = 0$.
- Αν α οριακός

  $$\lhd_\alpha = \{\langle x, y\rangle \in L(\alpha)\times L(\alpha) : \rho(x) < \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge \langle x, y\rangle \in \lhd(\rho(x)+1))\}.$$

Τώρα δεδομένου του $\lhd_\alpha$, ορίζουμε το $\lhd^n_\alpha$ στο $L(\alpha)^n$ ως εξής:

$$s \lhd^n_\alpha t \longleftrightarrow \exists k < n\, (s\big|_k = t\big|_k \wedge s(k) \lhd_\alpha t(k)).$$

Αν τώρα $X \in L(\alpha+1) = \mathcal{D}(L(\alpha))$, παίρνουμε n_χ το ελάχιστο n τ.ω. $\exists s \in L(\alpha)^n\ \exists R \in \mathrm{Df}(L(\alpha), n+1)\, (X = \{x \in L(\alpha) : s^\frown\langle x\rangle \in R\})$.

Έστω, επίσης, s_x να είναι το $\lhd^{n_x}_\alpha$-ελάχιστο $s \in L(\alpha)^{n_x}$ τ.ω. $\exists R \in \mathrm{Df}(L(\alpha), n_x+1)$ $(X = \{x \in L(\alpha) : s^\frown\langle x\rangle \in R\})$, και τέλος έστω m_x το ελάχιστο $m \in \omega$ τ.ω. $X = \{x \in L(\alpha) : s_x^\frown\langle x\rangle \in \mathrm{En}(m, L(\alpha), n_x)\}$. (Το τελευταίο υπάρχει, αφού $\mathrm{Df}(A, n) = \{\mathrm{En}(m, A, n) : m \in \omega\}$.) Άρα, τώρα ορίζουμε, αν $X, Y \in L(\alpha+1)$,

$X \lhd_{\alpha+1} Y \iff$

- $X, Y \in L(\alpha) \wedge \lhd_\alpha Y$ ή
- $X \in L(\alpha) \wedge Y \notin L(\alpha)$ ή
- $X, Y \notin L(\alpha) \wedge [(n_x < n_y) \vee (n_x < n_y \wedge s_x \lhd^{n_x}_\alpha s_y) \vee (n_x = n_y \wedge s_x = s_y \wedge m_x < m_y)]$.

Παρατήρηση: Στον προηγούμενο ορισμό πρέπει να ελέγξουμε ότι η $\lhd_\alpha$ είναι μια καλή διάταξη, όμως αυτό είναι εύκολο με επαγωγή.

Βλέπουμε επίσης ότι για τον ορισμό του s_χ προϋποθέτουμε ότι η $\lhd_\alpha$ είναι καλή διάταξη, οπότε για να το ορίσουμε αυστηρά θα έπρεπε να ορίσουμε $\lhd_{\alpha+1} = 0$ αν η $\lhd_\alpha$ δεν είναι καλή διάταξη και στη συνέχεια να αποδεικνύαμε ότι πάντα είναι.

Πρόταση 11.1. $V = L \longrightarrow AC$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι αυτό το αποτέλεσμα το έχουμε δει και στο Πόρισμα 10.10, αλλά τώρα θα το αποδείξουμε με διαφορετικό τρόπο.

Αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $x \in L$ είναι καλά διατάξιμο. Αν $x \in L$, τότε υπάρχει α τ.ω. $x \in L(\alpha)$, οπότε $x \subseteq L(\alpha)$. Έτσι, το x διατάσσεται καλά με την $\triangleleft_\alpha$. □

Ορισμός 11.2. Αν $x, y \in L$, τότε ορίζουμε $x <_L y$, αν

$$\rho(x) < \rho(y) \vee (\rho(x) = \rho(y) \wedge \langle x, y \rangle \in \triangleleft(\rho(x) + 1)).$$

Πρόταση 11.2. *Η $<_L$ διατάσσει καλά το L. Επιπλέον, κάθε $L(\alpha)$ είναι αρχικό τμήμα του L και η $<_L$ περιορισμένη στο $L(\alpha)$ είναι η $\triangleleft_\alpha$.*

Απόδειξη. Άμεσο από τον ορισμό της $<_L$. □

Πρόταση 11.3. (i) *Η συνάρτηση $\triangleleft(\alpha)$ είναι απόλυτη για κάθε μεταβατικό μοντέλο, M, του ZF-P.*

(ii) *Αν M μεταβατική κλάση που δεν είναι σύνολο και M μοντέλο για το ZF-P, τότε η $<_L$ είναι απόλυτη για το M.*

(iii) *Έστω M μεταβατικό σύνολο που είναι μοντέλο του ZF-P και $x, y \in M$. Αν $x, y \in L^M$, τότε $x <_L y \Longleftrightarrow (x <_L y)^M$.*

Απόδειξη. (i) Προκύπτει από την ήδη αποδεδειγμένη απολυτότητα των συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκαν στον αναδρομικό ορισμό.
(ii) Έχουμε ότι $L^M = L \subseteq M$ από το Θεώρημα 10.4 και συνεπώς προκύπτει άμεσα από την απολυτότητα της $\triangleleft(\alpha)$.
(iii) Από το Θεώρημα 10.6 έχουμε $L^M = L(o(M))$, άρα $x, y \in L(o(M))$ και στο (i) αποδείξαμε την απολυτότητα της $\triangleleft_{o(M)}$. □

Θεώρημα 11.4. *Αν $V = L$, τότε για κάθε άπειρο διατακτικό, α, ισχύει*

$$\mathcal{P}(L(\alpha)) \subseteq L(\alpha^+).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 10.7, υπάρχει πεπερασμένη σύζευξη αξιωμάτων, χ, από τα $ZF + (V = L)$ τ.ω.

$$\forall M\, [M \text{ μεταβατικό σύνολο} \wedge \chi^M \longrightarrow M = L(o(M))].$$

Έστω, τώρα, $A \in \mathcal{P}(L(\alpha))$ και $X = L(\alpha) \cup \{A\} \subseteq L$ μεταβατικό. Τότε $|X| = |\alpha|$, από την Πρόταση 9.11. (Η Πρόταση 9.11 χρησιμοποιεί το αξίωμα της επιλογής, αλλά έχουμε δει στην Πρόταση 11.1 ότι $V = L \longrightarrow AC$.) Επίσης, από το Πόρισμα 7.7 για $Z = V$, προκύπτει ότι υπάρχει M μεταβατικό τ.ω. $|M| = |\alpha|$, $X \subseteq M$ και $\chi^M \longleftrightarrow \chi^V$. (Παρατηρούμε ότι από το Πόρισμα, αρχικά, προκύπτει $|M| \leq \max\{\omega, |X|\} = |\alpha|$, αλλά $X \subseteq M$, οπότε $|\alpha| \leq |M|$, δηλαδή $|M| = |\alpha|$.)

Όμως, το χ^V αληθεύει αφού $V = L$ και το L είναι μοντέλο για τα αξιώματα, άρα αληθεύει και το χ^M και τελικά $M = L(o(M))$. Άρα, από την Πρόταση 9.11, έχουμε $|o(M)| = |M| = |\alpha|$, οπότε $|o(M)| < \alpha^+$. Έτσι, $A \in X \subseteq L(o(M)) = M \subseteq L(\alpha^+)$. $\square$

Πόρισμα 11.5 (ZF)**.** $V = L \longrightarrow AC + GCH$.

Απόδειξη. Για το AC το έχουμε δει στην Πρόταση 11.1. Για την GCH: Από το Θεώρημα 11.4 έχουμε ότι αν κ πληθάριθμος με $\kappa \geq \omega$, τότε $\kappa \subseteq L(\kappa) \Longrightarrow \mathcal{P}(\kappa) \subseteq \mathcal{P}(L(\kappa)) \subseteq L(\kappa^+)$, οπότε $2^\kappa \leq |L(\kappa^+)| = \kappa^+$ (Πρόταση 9.11) και τελικά $\kappa \leq 2^\kappa \leq \kappa^+$. $\square$

Πόρισμα 11.6 (ZF)**.** $(AC + GCH)^L$.

Απόδειξη. Άμεσο από το Πόρισμα 11.5 και ότι το L είναι μοντέλο για το $ZF + (V = L)$. $\square$

Πόρισμα 11.7. $\mathrm{Con}(ZF) \longrightarrow \mathrm{Con}(ZFC + GCH)$.

Απόδειξη. Άμεσο από την Πρόταση 5.1 και το Πόρισμα 11.6. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] K. Kunen, *Set Theory, An introduction to independence proofs*, North-Holland, 1983.

[2] K. Gödel, *Collected Works*, vol. II, S. Feferman (ed.), Oxford University Press, 1990.