Η εικασία Bernoulli και το θεώρημα Bednorz-Latała

Διπλωματική Εργασία

Δημήτρης-Μάριος Λιακόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα, 2014

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

1.1 Το πρόβλημα

Ένα απο τα θεμελιώδη ζητήματα της Θεωρίας Πιθανοτήτων είναι η διερεύνηση των ελαχίστων κάτω φραγμάτων (suprema) στοχαστικών ανελίξεων. Πέρα από διάφορες πρακτικές εφαρμογές, το ερώτημα αυτό συνδέεται στενά με σημαντικά θεωρητικά πρόβλήματα: την συνέχεια δειγματικών μονοπατιών στοχαστικών ανελίξεων, την σύγκλιση ορθογώνιων σειρών, τυχαίων σειρών και στοχαστικών ολοκληρωμάτων, εκτιμήσεις για τη νόρμα τυχαίων διανυσμάτων και τυχαίων πινάκων, οριακά θεωρήματα για τυχαία διανύσματα και εμπειρικές ανελίξεις, συνδυαστικά προβλήματα και πολλά άλλα.

Ειδικότερα, σε πολλές περιπτώσεις χρειαζόμαστε κάτω και άνω φράγματα για την ποσότητα

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right)$$

όπου $(X_t)_{t\in T}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη. Για μια μεγάλη κλάση ανελίξεων (η οποία συμπεριλαμβάνει τις Gaussian και Bernoulli ανελίξεις) το γεγονός ότι αυτή η ποσότητα είναι πεπερασμένη είναι ισοδύναμο με το φραγμένο της ανέλιξης, δηλαδή με την συνθήκη

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T} X_t < \infty\right) = 1.$$

Για να αποφύγουμε προβλήματα μετρησιμότητας μπορούμε είτε να υποθέσουμε ότι το T είναι πεπερασμένο ή να ορίσουμε

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) := \sup_{F} \mathbb{E}\left(\sup_{t\in F} X_t\right), \tag{1.1.1}$$

όπου το supremum λαμβάνεται πάνω από όλα τα πεπερασμένα υποσύνολα F του T. Η μοντέρνα προσέγγιση αυτού του προβλήματος βασίζεται σε τεχνικές διαδοχικής προσέγγισης, που εμφανίζονταν ήδη στη δουλειά του Kolmogorov και αναπτύχθηκαν με επιτυχία κατά τα τελευταία 40 χρόνια (βλέπε τις μονογραφίες [24] και [25]).

Η πιο σημαντική περίπτωση της κεντραρισμένης Gaussian ανέλιξης $(G_t)_{t\in T}$ έχει γίνει πλήρως κατανοητή. Σε αυτήν την περίπτωση, το φραγμένο της ανέλιξης σχετίζεται με την γεωμετρία του μετρικού χώρου (T,d), όπου

$$d(t,s) := \left(\mathbb{E}((G_t - G_s)^2)\right)^{1/2}.$$

Στην εργασία ορόσημο [4], ο R. Dudley βρήκε ένα άνω φράγμα για την ποσότητα $g(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} G_t\right)$ συναρτήσει των αριθμών εντροπίας του (T,d). Το φράγμα του Dudley μπορεί να αντιστραφεί για ευσταθείς ανελίξεις (βλέπε [6]), αλλά όχι γενικά. Το 1974, ο X. Fernique [6] έδειξε ότι για κάθε μέτρο πιθανότητας μ στον μετρικό χώρο (T,d) ισχύει

$$g(T) \leqslant L \sup_{t\in T} \int_0^\infty \log^{1/2}\left(\frac{1}{\mu(B(x,t))}\right) dx,$$

όπου L εδώ και στην συνέχεια συμβολίζει μια καθολική σταθερά, και $B(t,x)$ είναι η μπάλα του T με κέντρο το t και ακτίνα x. Μπορεί κανείς να διαπιστώσει ότι το φράγμα του Fernique βελτιώνει αυτό του Dudley. Στην θεμελιώδη εργασία [15], ο M. Talagrand έδειξε ότι το φράγμα του Fernique αντιστρέφεται, δηλαδή για κάθε Gaussian ανέλιξη (G_t) υπάρχει μέτρο πιθανότητας στο T (το οποίο λέμε «κυριαρχούν») ώστε

$$\sup_{t\in T} \int_0^\infty \log^{1/2}\left(\frac{1}{\mu(B(x,t))}\right) dx \leqslant Lg(T).$$

Γενικά, σε συγκεκριμένες περιπτώσεις δεν είναι καθόλου εύκολο να προσδιορίσουμε ένα κυριαρχούν μέτρο για την δοθείσα ανέλιξη. Στην εργασία [22], ο Talagrand πρότεινε μια περισσότερο συνδυαστική προσέγγιση στο πρόβλημα και έδειξε ότι η κατασκευή του κυριαρχούντος μέτρου είναι ισοδύναμη με την εύρεση κατάλληλης ακολουθίας *αποδεκτών* διαμερίσεων του συνόλου T. Μια αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ διαμερίσεων του συνόλου T λέγεται αποδεκτή αν $\mathcal{A}_0 = \{T\}$ και $|\mathcal{A}_n| \leqslant N_n := 2^{2^n}$, όπου $|C|$ συμβολίζει τον πληθάριθμο ενός πεπερασμένου συνόλου C. Σε αυτήν την γλώσσα, το θεώρημα των Fernique-Talagrand παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{L}\gamma_2(T,d) \leqslant g(T) \leqslant L\gamma_2(T,d), \tag{1.1.2}$$

όπου

$$\gamma_2(T,d) := \inf \sup_{t\in T} \sum_{n=0}^\infty 2^{n/2}\Delta(\mathcal{A}_n(t)),$$

όπου το infimum λαμβάνεται πάνω από όλες τις αποδεκτές ακολουθίες διαμερίσεων, $\mathcal{A}_n(t)$ είναι το μοναδικό σύνολο της $\mathcal{A}_n$ στο οποίο ανήκει το t, και $\Delta(A)$ είναι η διάμετρος ενός συνόλου A. Το αποτέλεσμα αυτό θα περιγραφεί στο Κεφάλαιο 2 της εργασίας. Βασική συνέπεια είναι η πλήρης απάντηση στο πρόβλημα για την περίπτωση των Gaussian ανελίξεων, την οποία θα δούμε στην Παράγραφο 2.3.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω $(X_t)_{t\in T}$ μια Gaussian ανέλιξη και έστω d η επαγόμενη απόσταση στο T. Ισχύει*

$$\frac{1}{L}\gamma_2(T,d) \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) \leqslant L\gamma_2(T,d), \tag{1.1.3}$$

όπου $L>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Είναι γνωστό ότι κάθε Gaussian ανέλιξη έχει μια κανονική αναπαράσταση (την λεγόμενη Karhunen-Loève αναπαράσταση)

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty} t_i g_i\right)_{t\in T},$$

όπου $\{g_i\}$ είναι μια ακολουθία τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών και T είναι ένα υποσύνολο του ℓ_2. Αντικαθιστώντας τις g_i με ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli παίρνουμε ένα δεύτερο πολύ σημαντικό παράδειγμα ανελίξεων. Θεωρούμε ένα αριθμήσιμο σύνολο I και μια ακολουθία $(\varepsilon_i)_{i\in I}$ ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli: κάθε ε_i παίρνει τις τιμές ± 1 με πιθανότητα $1/2$. Για κάθε $t\in \ell_2(I)$ η σειρά $X_t := \sum_{i\in I} t_i\varepsilon_i$ συγκλίνει σχεδόν βεβαίως. Δοθέντος ενός $T\subset \ell_2(I)$ ορίζουμε την ανέλιξη Bernoulli $(X_t)_{t\in T}$ και θα θέλαμε να εκτιμήσουμε την ποσότητα

$$b(T) := \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right).$$

Υπάρχουν δύο απλοί τρόποι για να φράξουμε την ποσότητα $b(T)$. Ο πρώτος προκύπτει από το ομοιόμορφο φράγμα

$$|X_t| \leqslant \|t\|_1 = \sum_{i\in I} |t_i|.$$

Από αυτό έπεται ότι

$$b(T) \leqslant \sup_{t\in T} \|t\|_1.$$

Ο δεύτερος βασίζεται στην σύγκριση με την αντίστοιχη Gaussian ανέλιξη $G_t := \sum_{i\in I} t_i g_i$. Αν υποθέσουμε ότι οι (g_i) και (ε_i) είναι ανεξάρτητες, από την ανισότητα Jensen συμπεραίνουμε ότι

$$g(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I} t_i g_i\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I} t_i\varepsilon_i|g_i|\right) \geqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I} t_i\varepsilon_i\mathbb{E}|g_i|\right) = \sqrt{2/\pi}\, b(T). \tag{1.1.4}$$

Είναι επίσης φανερό ότι αν $T \subset T_1 + T_2 = \{t^1 + t^2 : t^i \in T_i\}$ τότε $b(T) \leqslant b(T_1) + b(T_2)$, άρα

$$\begin{aligned} b(T) &\leqslant \inf\left\{\sup_{t\in T_1}\|t\|_1 + \sqrt{\pi/2}\, g(T_2) : T \subset T_1 + T_2\right\} \\ &\leqslant \inf\left\{\sup_{t\in T_1}\|t\|_1 + L\gamma_2(T_2) : T \subset T_1 + T_2\right\}, \end{aligned}$$

όπου $\gamma_2(T) = \gamma_2(T, d_2)$ και d_2 είναι η ℓ_2-απόσταση. Ένα ανοικτό πρόβλημα, για περισσότερα από 25 χρόνια, γνωστό ως η *εικασία Bernoulli*, ρωτούσε αν η προηγούμενη ανισότητα μπορεί να αντιστραφεί (βλέπε, για παράδειγμα, το Πρόβλημα 12 στο βιβλίο [13] ή το Κεφάλαιο 4 στο βιβλίο [24]). Οι W. Bednorz και R. Latała απέδειξαν ότι το ερώτημα έχει καταφατική απάντηση.

Θεώρημα 1.1.2. *Για κάθε $T \subset \ell_2(I)$ με $b(T) < \infty$ μπορούμε να βρούμε διάσπαση $T \subset T_1 + T_2$ του T ώστε*

$$\sup_{t\in T_1}\sum_{i\in I}|t_i| \leqslant Lb(T) \quad \textit{και} \quad g(T_2) \leqslant Lb(T).$$

Στο Κεφάλαιο 4 της εργασίας παρουσιάζουμε την απόδειξη αυτού του Θεωρήματος, όπως αυτή περιγράφεται από τους Bednorz και Latała στο [3].

1.2 Λίγα λόγια για την απόδειξη

Η δυσκολία του προβλήματος οφείλεται εν μέρει στο γεγονός ότι η ζητούμενη διάσπαση δεν είναι ούτε μονοσήμαντα ορισμένη ούτε κανονική. Παρακάτω περιγράφουμε μερικές από τις βασικές ιδέες που βρίσκονται πίσω από την απόδειξη. Αρκετές από αυτές αναπτύχθηκαν σταδιακά από τον M. Talagrand. Καλό είναι να θυμηθεί κανείς αρχικά την απόδειξη του κάτω φράγματος στην (1.1.2), όπως αυτή παρουσιάζεται στο [24]. Όλες οι βασικές ιδέες αυτής της απόδειξης χρησιμοποιούνται στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2.

Στην εργασία [17] εξηγείται ο ρόλος δύο θεμελιωδών εργαλείων της απόδειξης: το ένα είναι οι ιδιότητες συγκέντρωσης των Gaussian ανελίξεων και το άλλο είναι η ανισότητα του Sudakov. Η ιδιότητα συγκέντρωσης εξασφαλίζει ότι η απόκλιση του supremum μιας

Gaussian ανέλιξης από την μέση τιμή του E είναι το πολύ ίση με αυτή μιας κανονικής τυχαίας μεταβλητής που έχει τυπική απόκλιση περίπου ίση με την διάμετρο του χώρου (T,d), ανεξάρτητα από το ποιά είναι αυτή η μέση τιμή E. Η ανισότητα του Sudakov μας λέει ότι το supremum m κανονικών τυχαίων μεταβλητών που ανά δύο απέχουν απόσταση τουλάχιστον ίση με a είναι τουλάχιστον με μια ποσότητα της τάξης της $a\sqrt{\log m}$. Μπορούμε μετά να συνδυάσουμε αυτές τις δύο αρχές για να πάρουμε μια «αυξητική συνθήκη» ως εξής. Αν ο χώρος (T,d) περιέχει m κομμάτια H_ℓ, τα οποία έχουν ανά δύο απόσταση τουλάχιστον ίση με a, και αν καθένα από αυτά το κομμάτια έχει διάμετρο το πολύ ίση με ένα μικρό κλάσμα του a, τότε η μέση τιμή του supremum της ανέλιξης πάνω από ολόκληρο το σύνολο δεικτών T είναι μεγαλύτερη κατά $a\sqrt{\log m}$ από το minimum ως προς ℓ των μέσων τιμών του supremum της ανέλιξης πάνω από τα σύνολα H_ℓ χωριστά. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει την ιδέα να μετρήσουμε το «μέγεθος» $F(A)$ ενός υποσυνόλου A του T μέσω της μέσης τιμής του supremum της ανέλιξης πάνω από το A. Οδηγούμαστε έτσι στο να κοιτάζουμε τον αφηρημένο μετρικό χώρο (T,d) χρησιμοποιώντας μόνο την τιμή του «συναρτησοειδούς» $F(A)$ στα διάφορα υποσύνολα A του T. Η έννοια των συναρτησοειδών, και των «αυξητικών συνθηκών» που σχετίζονται με αυτά, αναπτύχθηκε από τον M. Talagrand στα [21], [24], όπου δόθηκαν απλούστερες αποδείξεις του Θεωρήματος 1.1.1 και εγκαινιάστηκε μια γενικότερη, ενοποιημένη προσέγγιση στα προβλήματα αυτού του τύπου.

Το βασικό συστατικό στην συνέχεια της απόδειξης είναι ένα «λήμμα διάσπασης», το οποίο είναι απλή συνέπεια της αυξητικής συνθήκης σε συνδυασμό με μια φυσιολογική κατασκευή. Σε αδρές γραμμές, το λήμμα διάσπασης ισχυρίζεται ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά r με την ιδιότητα ότι κάθε υποσύνολο A του T μπορεί να διαμεριστεί σε m το πολύ κομμάτια τέτοια ώστε, κάθε κομμάτι είτε έχει διάμετρο το πολύ ίση με $\Delta(A)/r$ ή ικανοποιεί την συνθήκη ότι κάθε υποσύνολό του B που έχει διάμετρο το πολύ ίση με $\Delta(A)/r^2$ ικανοποιεί την $F(B) \leqslant F(A) - c\Delta(A)\sqrt{\log m}$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$. Με απλά λόγια, κάθε κομμάτι είτε είναι μικρό ή έχει την ιδιότητα ότι η τιμή του συναρτησοειδούς στα πολύ μικρά υποσύνολά του είναι αρκετά μικρότερη από την τιμή του σε ολόκληρο το A. Η αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων που ζητάμε προκύπτει με διαδοχικές εφαρμογές του λήμματος διάσπασης.

Όταν δουλεύουμε με ανελίξεις Bernoulli, η κατάσταση είναι πιο πολύπλοκη απ' ότι στην Gaussian περίπτωση, και είμαστε αναγκασμένοι να χρησιμοποιήσουμε μια οικογένεια αποστάσεων που παρεμβάλλονται ανάμεσα στην ℓ_2 και την ℓ_1 απόσταση. Τέτοιες αποστάσεις θεώρησε πρώτος ο Talagrand στις εργασίες [18], [19] και [20]. Οι Bednorz και Latała τις χρησιμοποιούν επίσης. Ένα σημαντικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2 στο [3] είναι η αναγωγή του προβλήματος της διάσπασης του T στην κατασκευή κατάλληλης αποδεκτής ακολουθίας διαμερίσεων. Το Θεώρημα 4.2.1 είναι μια εξελιγμένη έκδοση προηγούμενων προσπαθειών του Talagrand στην ίδια κατεύθυνση (μερικές από αυτές παρουσιάζονται στο Κεφάλαιο 3). Ο Talagrand (βλέπε [16] και [18]) ανέπτυξε εργαλεία που αντικαθιστούσαν την Gaussian συγκέντρωση και την ανισότητα του Sudakov στο πλαίσιο των ανελίξεων Bernoulli. Το αποτέλεσμα τύπου Sudakov δίνει κάτω φράγμα για την μέση τιμή του supremum τυχαίων μεταβλητών X_{t_ℓ} όταν τα διάφορα σημεία t_ℓ είναι ανά δύο μακριά με την ℓ_2 έννοια, απαιτεί όμως κάποιον πρόσθετο έλεγχο για την ℓ_∞-νόρμα των t_ℓ (με απλά λόγια, η ιδέα είναι ότι, από το κεντρικό οριακό θεώρημα, ένα άθροισμα $\sum_i \varepsilon_i t_{\ell_i}$ συμπεριφέρεται σαν κανονική τυχαία μεταβλητή αν όλοι οι συντελεστές t_{ℓ_i} είναι μικροί). Για να εφαρμόσουμε αυτήν την ανισότητα σε ολοένα μεγαλύτερες οικογένειες, πρέπει να έχουμε ακολουθίες συντελεστών με ολοένα μικρότερη ℓ_∞-νόρμα. Για να το πετύχει αυτό, ο Talagrand εισήγαγε στο [18] την θεμελιώδη ιδέα των «συναρτήσεων τεμαχισμού». Αυτές αντικαθιστούν την ανέλιξη που μας ενδιαφέρει με μια άλλη ανέλιξη για τον οποία έχουμε καλύτερο έλεγχο της ℓ_∞-νόρμας και ταυτόχρονα σχετίζεται με την αρχική ανέλιξη μέσω ενός επίσης σημαντικού θεωρήματος σύγκρισης (βλέπε Θεώρημα 4.1.2). Για να την ορίσουμε, ουσιαστικά αντικαθιστούμε κάθε όρο $t_i\varepsilon_i$ με ένα άθροισμα $\sum_j \varphi_j(t_i)\varepsilon_{ij}$, στο οποίο ελέγχουμε ομοιόμορφα τις ποσότητες $\sup|\varphi_j(t_i)|$ και συγχρόνως έχουμε $|t_i| = \sum_j |\varphi_j(t_i)|$. Κατά κάποιον τρόπο, προσθέτουμε περισσότερες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli στην ανέλιξη.

Με αυτές τις ιδέες ο Talagrand απέδειξε στο [20] μια ασθενή εκδοχή της εικασίας Bernoulli με ένα φράγμα που εξαρτάται από την ℓ_p διάμετρο του συνόλου T_1 για $p > 1$ (αντί για την ℓ_1 διάμετρο). Ήδη, αυτό το ασθενέστερο φράγμα βρήκε σημαντικές εφαρμογές.

Η βασική δυσκολία της τεχνικής των συναρτήσεων τεμαχισμού είναι ότι στο πρόβλημα εμπλέκονται δύο ℓ_2 αποστάσεις, η απόσταση που επάγεται από την ανέλιξη πριν από την αποκοπή, και η συνήθως πολύ μικρότερη απόσταση που επάγεται από την ανέλιξη αφού γίνει η αποκοπή. Έτσι, είναι πολύ δύσκολο να αποφύγει κανείς την απώλεια πληροφορίας στην διάρκεια της κατασκευής. Για παράδειγμα, αν προσπαθήσουμε να μιμηθούμε την κατασκευή της Gaussian περίπτωσης, και αν σε κάποιο στάδιο της κατασκευής έχουμε ένα σύνολο A με την ιδιότητα ότι σε κάθε υποσύνολο πολύ μικρής διαμέτρου η ανέλιξη είναι σημαντικά μικρότερη απ' ότι σε ολόκληρο το A, δεν είναι καθόλου προφανές τι θα σημαίνει αυτό όταν εφαρμόσουμε κάποια συνάρτηση τεμαχισμού γιατί τα σύνολα που έχουν πολύ μικρή διάμετρο για την νέα «μικρότερη» απόσταση μπορεί να μην είχαν μικρή διάμετρο ως προς την «μεγαλύτερη» απόσταση. Στην εργασία [11], όπου η εικασία Bernoulli αποδεικνύεται για μια πολύ ειδική κατηγορία υποσυνόλων του ℓ_2, χρησιμοποιήθηκσν απεικονίσεις διαφορετικές από τις συναρτήσεις τεμαχισμού. Η Πρόταση 4.1.10 είναι μια ουσιαστική τροποποίηση των βασικών ιδεών της [11] και είναι ένα από τα κρίσιμα σημεία της απόδειξης της γενικής εικασίας Bernoulli από τους Bednorz και Latała. Ενώ ο Talagrand μέσω των συναρτήσεων τεμαχισμού προσθέτει συνεχώς νέες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli στην ανέλιξη, το νέο στοιχείο στο [3] είναι ότι κάποιες φορές είναι πιο βολικό να *αφαιρεθούν κάποιες* από αυτές τις τυχαίες μεταβλητές, δηλαδή να μειωθεί το μέγεθος της ανέλιξης. Με τον συμβολισμό της Πρότασης 4.1.10, θεωρούμε ένα υποσύνολο J του I και την ανέλιξη $X'_t = \sum_{i\in J} t_i\varepsilon_i$, δηλαδή αφαιρούμε εκείνες τις μεταβλητές που οι δείκτες τους δεν ανήκουν στο J. Έχουμε τότε δύο ℓ_2 αποστάσεις στο σύνολο δεικτών: μία μικρή, την $\sqrt{\sum_{i\in J}(t_i-s_i)^2}$ και μία μεγάλη, την $\sqrt{\sum_{i\in I}(t_i-s_i)^2}$. Με λίγα λόγια, η Πρόταση 4.1.10 μας λέει ότι αν το σύνολο δεικτών έχει μικρή διάμετρο ως προς την *μικρότερη* απόσταση τότε μπορούμε να το διασπάσουμε σε σχετικά λίγα σύνολα που είτε έχουν μικρή διάμετρο ως προς την *μεγαλύτερη* αρχική απόσταση ή αλλιώς έχουν την ιδιότητα ότι το μέγεθος της ανέλιξης σε ολόκληρο το κομμάτι έχει μειωθεί σημαντικά όταν αφαιρούμε τις τυχαίες μεταβλητές που δεν έχουν δείκτες στο J. Στην ακριβή διατύπωση αυτού του αποτελέσματος υπεισέρχεται φυσικά ένας όρος $\sqrt{\log m}$, όπου m είναι το πλήθος των κομματιών που επιτρέπεται να ορίσουμε.

Ακόμα και μετά από την επίλυση αυτής της τεχνικής δυσκολίας, το πρόβλημα του ορισμού κατάλληλης οικογένειας «συναρτησοειδών» που θα μετρούν το «μέγεθος» των κομματιών της διαμέρισης παραμένει δύσκολο. Αυτά τα συναρτησοειδή άλλοτε «προσθέτουν» νέες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli και άλλοτε «αφαιρούν» κάποιες από τις υπάρχουσες. Το δύσκολο σημείο είναι να βρεθεί η ακριβής ισορροπία ανάμεσα σε αυτές τις δύο ενέργειες ώστε να εξασφαλιστεί ότι δεν χάνεται κάποια ουσιαστική πληροφορία. Τα συναρτησοειδή που ορίζουν οι Bednorz και Latała εξαρτώνται από τέσσερις παραμέτρους J, u, k, j. Η παράμετρος $j \in \mathbb{Z}$ δείχνει «πόσο πολλές αποκοπές έχουμε πραγματοποιήσει». Οι άλλες τρεις παράμετροι μας δείχνουν ποιές τυχαίες μεταβλητές Bernoulli εξακολουθούμε να χρησιμοποιούμε στο συναρτησοειδές. Ένα νέο χαρακτηριστικό της κατασκευής είναι ότι τα συναρτησοειδή δεν εξαρτώνται μόνο από το βήμα της κατασκευής στο οποίο βρισκόμαστε, αλλά και από το συγκεκριμένο κομμάτι που προσπαθούμε να διαμερίσουμε. Σε κάθε βήμα χρησιμοποιείται ένα «λήμμα διάσπασης» (το Πόρισμα 4.4.3) που έχει αρκετές ομοιότητες με αυτό της Gaussian περίπτωσης. Σε αντίθεση όμως με την Gaussian περίπτωση, αυτό το λήμμα διάσπασης παράγει τρεις διαφορετικούς τύπους κομματιών. Οι δύο συμπεριφέρονται όπως στην Gaussian περίπτωση. Ο τρίτος τύπος έχει την ιδιότητα ότι το μέγεθός του (όπως αυτό μετριέται από το κατάλληλο συναρτησοειδές) έχει μειωθεί σε σύγκριση με το σύνολο που διαμερίσαμε αφού πρώτα αγνοήσαμε μερικές από τις μεταβλητές Bernoulli.

Στην απόδειξη χρησιμοποιείται επίσης με ουσιαστικό τρόπο η τεχνική των «δεικτών» η οποία είχε εισαχθεί από τον Talagrand για να λαμβάνεται υπ' όψιν το «παρελθόν» της κατασκευής (βλέπε [24, Κεφάλαιο 5]).

1.3 Εφαρμογές και ανοικτά προβλήματα

Συνέπεια του Θεωρήματος 1.1.2 είναι ένας εντυπωσιακός χαρακτηρισμός για το φραγμένο μιας ανέλιξης Bernoulli.

Θεώρημα 1.3.1. *Έστω $(X_t)_{t\in T}$ μια ανέλιξη Bernoulli με $b(T)<\infty$. Τότε, υπάρχει ακολουθία $\{t_k : k \geqslant 1\}$ στον ℓ_2 τέτοια ώστε $T-T \subset \overline{\mathrm{conv}}(\{t_k : k\geqslant 1\})$ και $\|X_{t_k}\|_{\log(k+2)} \leqslant Lb(T)$ για κάθε $k\geqslant 1$, όπου $\|X\|_p := (\mathbb{E}|X|^p)^{1/p}$.*

Ο αντίστροφος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από την ανισότητα του Markov. Ας υποθέσουμε ότι $T - T \subset \overline{\mathrm{conv}}(\{t_k : k \geqslant 1\})$ και $\|X_{t_k}\|_{\log(k+2)} \leqslant M$ για κάθε $k \geqslant 1$. Τότε, για κάθε $u \geqslant 1$,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T-T} X_t \geqslant uM\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\sup_{k\geqslant 1} X_{t_k} \geqslant uM\right)\\ &\leqslant \sum_{k\geqslant 1}\mathbb{P}(X_{t_k} \geqslant u\|X_{t_k}\|_{\log(k+2)}) \leqslant \sum_{k\geqslant 1} u^{-\log(k+2)},\end{aligned}$$

και ολοκληρώνοντας κατά μέρη βλέπουμε εύκολα ότι

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T-T} X_t\right) \leqslant LM.$$

Επιπλέον, για κάθε $t_0 \in T$,

$$\begin{aligned}b(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0})\right) &= \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}(X_{t-t_0})\right)\\ &\leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{s\in T-T} X_s\right) \leqslant LM.\end{aligned}$$

Ένα από τα κίνητρα για την διατύπωση και την μελέτη της εικασίας Bernoulli ήταν ένα ερώτημα του X. Fernique σχετικά με τυχαίες σειρές Fourier με διανυσματικές τιμές. Μια άλλη εφαρμογή του Θεωρήματος 1.1.2 είναι μια μεγιστική ανισότητα τύπου Lévy-Ottaviani για VC-κλάσεις. Οι εφαρμογές αυτές θα παρουσιαστούν στην Παράγραφο 4.7.

Το Θεώρημα 1.1.2 μπορεί να θεωρηθεί ως το πρώτο επιτυχημένο βήμα ενός γενικότερου, πιο φιλόδοξου, προγράμματος. Ένας τρόπος να ερμηνεύσει κανείς το Θεώρημα 1.1.1 του Talagrand είναι να πεί ότι η τεχνική της διαδοχικής προσέγγισης περιγράφει πλήρως το μέγεθος μιας Gaussian ανέλιξης $(X_t)_{t\in T}$. Με άλλα λόγια, το καλύτερο φράγμα που μπορούμε να πετύχουμε για την $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right)$ με την τεχνική αυτή συμβαίνει να δίνει πάντα και την σωστή τάξη. Στην περίπτωση των ανελίξεων Bernoulli, το φράγμα $\sum_i t_i\varepsilon_i \leqslant \sum_i |t_i|$ είναι διαφορετικής φύσης, με την έννοια ότι δεν εκμεταλλεύεται τις «διαγραφές» μεταξύ θετικών και αρνητικών όρων. Κατά κάποιον τρόπο, το Θεώρημα 1.1.2 μας λέει ότι «η τεχνική της διαδοχικής προσέγγισης εξηγεί εκείνο το κομμάτι του φράγματος που οφείλεται σε αυτές τις διαγραφές». Δηλαδή, η προσέγγιση εξηγεί το φράγμα για το κομμάτι T_2 της ανέλιξης, ενώ το φράγμα για το T_1 δεν οφείλεται καθόλου σε διαγραφές. Θα μπορούσε κανείς να υποστηρίξει ότι το ίδιο φαινόμενο πρέπει να εμφανίζεται και σε άλλες περιπτώσεις, κάτι το οποίο αξίζει να μελετηθεί.

Ένα παράδειγμα μας δίνουν οι εμπειρικές ανελίξεις. Έστω $(X_i)_{i\leqslant N}$ μια ακολουθία ανεξάρτητων ισοκατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τιμές σε έναν μετρήσιμο χώρο S, και έστω $\mathcal{F}$ μια οικογένεια μετρήσιμων συναρτήσεων στον S. Ένα θεμελιώδες πρόβλημα (βλέπε [5], [26]) είναι να περιγραφεί η σχέση της ποσότητας

$$\mathbb{E}\left(\sup_{f\in\mathcal{F}}\sum_{i\leqslant N}(f(X_i)-\mathbb{E}(f(X_i)))\right) \tag{1.3.1}$$

με την γεωμετρία της οικογένειας $\mathcal{F}$. Μια περίπτωση που μπορεί να εμφανιστεί είναι π.χ. να μπορούμε να φράξουμε την

$$\mathbb{E}\left(\sup_{f\in\mathcal{F}}\sum_{i\leqslant N}|f(X_i)|\right),$$

μια ποσότητα στην οποία δεν εμφανίζονται διαγραφές. Μια άλλη περίπτωση είναι να μπορούμε να φράξουμε την ποσότητα (1.3.1) με τεχνικές διαδοχικής προσέγγισης. Δεδομένου ότι, σε κάποιο σημείο, θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε κάποια ανισότητα τύπου Bernstein, χρειάζεται να ελέγχουμε όχι μόνο το μέγεθος της $\mathcal{F}$ σε σχέση με την ℓ_2-νόρμα, αλλά και σε σχέση με την ℓ_∞-νόρμα. Μια εικασία του Talagrand ισχυρίζεται ότι η γενική περίπτωση είναι πάντα ένας συνδυασμός αυτών των δύο περιπτώσεων. Μια ακριβής, αλλά τεχνική, διατύπωση αυτής της εικασίας δίνεται στην Παράγραφο 4.8, όπου περιγράφονται μερικά ακόμα σχετικά ανοικτά προβλήματα.

Κεφάλαιο 2

Το θεώρημα του Talagrand και οι Gaussian ανελίξεις

2.1 Διαδοχική προσέγγιση

Σε αυτήν την ενότητα θεωρούμε ένα μετρικό χώρο (T, d) και μια στοχαστική ανέλιξη $(X_t)_{t\in T}$ η οποία ικανοποιεί την «αυξητική» συνθήκη

$$\forall\, u > 0, \qquad \mathbb{P}(|X_s - X_t| \geqslant u) \leqslant 2\exp\left(-\frac{u^2}{2d(s,t)^2}\right) \tag{2.1.1}$$

για κάθε $s \neq t \in T$. Θέλουμε να βρούμε φράγματα για την

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right)$$

που να εξαρτώνται από την δομή του μετρικού χώρου (T, d). Πάντα θα υποθέτουμε ότι

$$\forall\, t \in T, \qquad \mathbb{E}(X_t) = 0. \tag{2.1.2}$$

Έτσι, δοθέντος t_0 στο T, έχουμε

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0})\right). \tag{2.1.3}$$

Γράφοντας την μέση τιμή με αυτόν τον τρόπο, έχουμε το πλεονέκτημα ότι τώρα ψάχνουμε εκτιμήσεις για τη μέση τιμή της μη αρνητικής τυχαίας μεταβλητής

$$Y = \sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0}).$$

Συνεώς, μπορούμε να γράψουμε

$$\mathbb{E}(Y) = \int_0^\infty \mathbb{P}(Y \geqslant u)\, du. \tag{2.1.4}$$

Έτσι, αναζητούμε φράγματα για την

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0}) \geqslant u\right), \tag{2.1.5}$$

όπου $u > 0$. Θα υποθέσουμε ότι το T είναι πεπερασμένο σύνολο, κάτι το οποίο, όπως θα φανεί, δεν προκαλεί βλάβη στη γενικότητα.

Το πρώτο φράγμα που έρχεται στο μυαλό μας είναι να γράψουμε

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}(X_t - X_{t_0}) \geqslant u\right) \leqslant \sum_{t\in T} \mathbb{P}(X_t - X_{t_0} \geqslant u). \tag{2.1.6}$$

Αυτό το φράγμα είναι αποτελεσματικό αν οι μεταβλητές $X_t - X_{t_0}$ είναι κατά κάποιον τρόπο ασυσχέτιστες (και δεν είναι πάρα πολλές). Είναι όμως σχεδόν καταστροφικό αν οι μεταβλητές $(X_t)_{t\in T}$ είναι σχεδόν ταυτόσημες. Φαίνεται λοιπόν καλή ιδέα να ομαδοποιήσουμε εκείνες τις μεταβλητές X_t που είναι σχεδόν ταυτόσημες. Για να το κάνουμε αυτό, θεωρούμε ένα υποσύνολο T_1 του T, και για κάθε t στο T θεωρούμε ένα σημείο $\pi_1(t)$ στο T_1, το οποίο μπορούμε να σκεφτόμαστε ως μια (πρώτη) προσέγγιση του t. Τα σημεία του T τα οποία, σε αυτό το επίπεδο προσέγγισης, αντιστοιχίζονται στο ίδιο σημείο $\pi_1(t)$, θεωρούνται ταυτόσημα. Κατόπιν, γράφουμε

$$X_t - X_{t_0} = X_t - X_{\pi_1(t)} + X_{\pi_1(t)} - X_{t_0}. \tag{2.1.7}$$

Η ιδέα είναι ότι θα μπορέσουμε να χρησιμοποιήσουμε την (2.1.6) για τις μεταβλητές $X_{\pi_1(t)} - X_{t_0}$, γιατί δεν είναι πάρα πολλές, και είναι μάλλον διαφορετικές. Από την άλλη πλευρά, αφού το $\pi_1(t)$ είναι προσέγγιση του t, οι μεταβλητές $X_t - X_{\pi_1(t)}$ είναι «μικρότερες» από τις αρχικές μεταβλητές $X_t - X_{t_0}$, και έτσι θα μπορούμε να χειριστούμε ευκολότερα το supremum τους. Σκοπεύουμε στη συνέχεια να επαναλάβουμε αυτήν την διαδικασία.

Μπορούμε τώρα να παρουσιάσουμε το γενικό σχήμα. Για κάθε $n \geqslant 0$ θεωρούμε ένα υποσύνολο T_n του T, και για κάθε $t \in T$ θεωρούμε $\pi_n(t)$ στο T_n (η ιδέα είναι φυσικά ότι τα σημεία $\pi_n(t)$ είναι διαδοχικές προσεγγίσεις του t). Υποθέτουμε ότι το T_0 αποτελείται από ένα μόνο στοιχείο t_0, δηλαδή $\pi_0(t) = t_0$ για κάθε t στο T. Η θεμελιώδης σχέση είναι η

$$X_t - X_{t_0} = \sum_{n\geqslant 1}(X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}). \tag{2.1.8}$$

Η ισότητα αυτή ισχύει, αρκεί να εξασφαλίσουμε ότι $\pi_n(t) = t$ για n αρκετά μεγάλο, οπότε η σειρά στο δεξιό μέλος είναι ουσιαστικά πεπερασμένο άθροισμα. Η σχέση (2.1.8) περιγράφει τις προσαυξήσεις της ανέλιξης $(X_t - X_{t_0})_{t\in T}$ κατά μήκος της «αλυσίδας» $(\pi_n(t))_{n\geqslant 0}$.

Θα μας φανεί πολύ χρήσιμο να ελέγχουμε το σύνολο T_n φράσσοντας την πληθικότητά του. Θα υποθέτουμε ότι

$$\mathrm{card}(T_n) \leqslant N_n, \tag{2.1.9}$$

όπου

$$N_0 = 1 \quad \text{και} \quad N_n = 2^{2^n} \quad \text{αν } n \geqslant 1. \tag{2.1.10}$$

Η υπόθεση (2.1.10) θα χρησιμοποιείται παντού στη συνέχεια.

Αφού το $\pi_n(t)$ είναι προσέγγιση του t, είναι φυσικό να υποθέσουμε ότι

$$d(t, \pi_n(t)) = d(t, T_n) = \inf_{s\in T_n} d(t, s). \tag{2.1.11}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.1.1) βλέπουμε ότι για κάθε $u > 0$ ισχύει

$$\mathbb{P}\big(\big|X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}\big| \geqslant u2^{n/2} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))\big) \leqslant 2\exp(-u^2 2^n).$$

Το πλήθος των δυνατών ζευγαριών $(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))$ είναι το πολύ ίσο με

$$\mathrm{card}(T_n)\cdot \mathrm{card}(T_{n-1}) \leqslant N_n N_{n-1} \leqslant N_{n+1} = 2^{2^{n+1}}.$$

Έτσι, αν συμβολίσουμε με Ω_u το ενδεχόμενο που ορίζεται από τη σχέση

$$\forall n \geqslant 1,\ \forall t, \qquad |X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}| \leqslant u2^{n/2} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)),$$

βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}(\Omega_u^c) \leqslant p(u) := \sum_{n\geqslant 1} 2\cdot 2^{2^{n+1}} \exp(-u^2 2^n). \tag{2.1.12}$$

Όταν συμβαίνει το Ω_u, βλέπουμε από την (2.1.8) ότι

$$|X_t - X_{t_0}| \leqslant u \sum_{n\geqslant 1} 2^{n/2} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)),$$

άρα έχουμε

$$\sup_{t\in T} |X_t - X_{t_0}| \leqslant uS,$$

όπου

$$S := \sup_{t\in T} \sum_{n\geqslant 1} 2^{n/2} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)),$$

και έτσι έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}|X_t - X_{t_0}| > uS\right) \leqslant p(u).$$

Χρησιμοποιώντας την παρατήρηση ότι

$$u^2 2^n \geqslant \frac{u^2}{2} + u^2 2^{n-1} \geqslant \frac{u^2}{2} + 2^{n+1}$$

για κάθε $u \geqslant 2$, βλέπουμε ότι για $u \geqslant 2$ ισχύει $p(u) \leqslant L\exp(-u^2/2)$. Εδώ, και στα επόμενα, με L συμβολίζουμε μια καθολική σταθερά, η οποία δεν θα είναι κατ' ανάγκην η ίδια σε κάθε περίπτωση. Χρησιμοποιώντας την (2.1.4) και έχοντας κατά νού ότι η ολοκληρωτέα συνάρτηση είναι $\leqslant 1$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) \leqslant LS.$$

Χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την (2.1.4) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} d(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) &\leqslant d(t, \pi_n(t)) + d(t, \pi_{n-1}(t)) \\ &\leqslant d(t, T_n) + d(t, T_{n-1}), \end{aligned}$$

οπότε $S \leqslant L\sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} d(t, T_n)$, και έτσι έχουμε αποδείξει ότι

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) \leqslant L\sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} d(t, T_n). \tag{2.1.13}$$

Το ερώτημα που τίθεται τώρα είναι με ποιόν τρόπο θα κατασκευάσουμε τα σύνολα T_n. Η παραδοσιακή μέθοδος τα επιλέγει ούτως ώστε το

$$\sup_{t\in T} d(t, T_n)$$

να είναι όσο το δυνατόν μικρότερο υπό τον περιορισμό $\mathrm{card}(T_n) \leqslant N_n$, όπου φυσικά

$$d(t, T_n) = \inf_{s\in T_n} d(t, s).$$

Έτσι, ορίζουμε

$$e_n(T) = \inf \sup_{t\in T} d(t, T_n), \tag{2.1.14}$$

όπου το infimum λαμβάνεται πάνω από όλα τα υποσύνολα T_n του T που ικανοποιούν την $\mathrm{card}(T_n) \leqslant N_n$ (αφού έχουμε υποθέσει ότι το T είναι πεπερασμένο, το infimum είναι στην πραγματικότητα minimum). Ο ορισμός αυτός είναι βολικός για τους σκοπούς μας.

Αξίζει τον κόπο να παρατηρήσουμε ότι (αφού $N_0 = 1$)

$$\frac{\Delta(T)}{2} \leqslant e_0(T) \leqslant \Delta(T). \tag{2.1.15}$$

Εδώ, και στην συνέχεια, με $\Delta(T)$ συμβολίζουμε την διάμετρο του T,

$$\Delta(T) = \sup_{t_1,t_2 \in T} d(t_1, t_2). \tag{2.1.16}$$

Όταν χρειάζεται να αποσαφηνίσουμε την απόσταση που χρησιμοποιούμε στον ορισμό της διαμέτρου, θα γράφουμε $\Delta(T, d)$ αντί για $\Delta(T)$.

Για κάθε n επιλέγουμε ένα υποσύνολο T_n του T με $\mathrm{card}(T_n) \leqslant N_n$ και $e_n(T) = \sup_{t\in T} d(t, T_n)$. Αφού $d(t, T_n) \leqslant e_n(T)$ για κάθε t, από την (2.1.13) βλέπουμε αμέσως ότι ισχύει η ακόλουθη:

Πρόταση 2.1.1 (το άνω φράγμα του Dudley)**.** *Υποθέτοντας την αυξητική συνθήκη* (2.1.1) *έχουμε*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) \leqslant L \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} e_n(T). \tag{2.1.17}$$

Έχουμε εξηγήσει το επιχείρημα που αποδεικνύει την (2.1.17) μόνο στην περίπτωση που το T είναι πεπερασμένο, χρησιμοποιώντας όμως την (1.1.1) μπορούμε να επεκτείνουμε το φράγμα του Dudley και στην περίπτωση που το T είναι άπειρο, όπως φαίνεται από το ακόλουθο απλό λήμμα.

Λήμμα 2.1.2. *Αν U είναι ένα υποσύνολο του T, έχουμε*

$$e_n(U) \leqslant 2e_n(T).$$

Απόδειξη. Πράγματι, αν $a > e_n(T)$, μπορεί κανείς να καλύψει το T με N_n μπάλες ακτίνας a ως προς τη μετρική d, και η τομή αυτών των μπαλών με το U έχει διάμετρο $\leqslant 2a$. Έτσι, το U μπορεί να καλυφθεί από N_n μπάλες στο U ακτίνας $2a$. □

Συνήθως, το φράγμα του Dudley διατυπώνεται στην γλώσσα των αριθμών κάλυψης. Ο αριθμός κάλυψης $N(T, d, \varepsilon)$ ορίζεται ως ο μικρότερος ακέραιος N για τον οποίο μπορεί κανείς να βρεί ένα υποσύνολο F του T με $\mathrm{card}(F) \leqslant N$ και

$$\forall t \in T, \quad d(t, F) \leqslant \varepsilon.$$

Έτσι,

$$e_n(T) = \inf\{\varepsilon : N(T, d, \varepsilon) \leqslant N_n\}$$

και
$$\varepsilon < e_n(T) \quad \Longrightarrow \quad N(T,d,\varepsilon) > N_n \quad \Longrightarrow \quad N(T,d,\varepsilon) \geqslant 1 + N_n.$$
Έτσι, έχουμε
$$\sqrt{\log(1+N_n)}(e_n(T) - e_{n+1}(T)) \leqslant \int_{e_{n+1}(T)}^{e_n(T)} \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}\, d\varepsilon.$$
Αφού $\log(1+N_n) \geqslant 2^n \log 2$ για κάθε $n \geqslant 0$, αθροίζοντας ως προς $n \geqslant 0$ παίρνουμε
$$\sqrt{\log 2} \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2}(e_n(T) - e_{n+1}(T)) \leqslant \int_0^{e_0(T)} \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}\, d\varepsilon. \tag{2.1.18}$$
Τώρα,
$$\begin{aligned} \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2}(e_n(T) - e_{n+1}(T)) &= \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} e_n(T) - \sum_{n\geqslant 1} 2^{(n-1)/2} e_n(T) \\ &\geqslant \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} e_n(T), \end{aligned}$$
άρα η (2.1.18) δίνει
$$\sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} e_n(T) \leqslant L \int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}\, d\varepsilon$$
και ως εκ τούτου έχουμε το φράγμα του Dudley στη συνήθη μορφή:
$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) \leqslant L \int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}\, d\varepsilon. \tag{2.1.19}$$
Φυσικά, αφού $\log 1 = 0$, το ολοκλήρωμα είναι στην πραγματικότητα πάνω από τα $1 \leqslant \varepsilon \leqslant \Delta(T)$.

Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι σχύει και η ανισότητα
$$\int_0^\infty \sqrt{\log N(T,d,\varepsilon)}\, d\varepsilon \leqslant L \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} e_n(T),$$
το οποίο δείχνει ότι η (2.1.17) δεν βελτιώνει σε κάτι την (2.1.19).

Ωστόσο, παρατηρούμε ότι το φράγμα (2.1.13) μοιάζει να είναι πραγματικά καλύτερο από το φράγμα (2.1.17) γιατί, όταν πηγαίνουμε από την (2.1.13) στην (2.1.17) χρησιμοποιούμε την ανισότητα
$$\sup_{t\in T} \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} d(t,T_n) \leqslant \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} \sup_{t\in T} d(t,T_n).$$

Η ανισότητα (2.1.13) παίζει κεντρικό ρόλο στην δουλειά μας. Βέβαια, το γεγονός ότι εμφανίζεται τώρα με τόσο φυσικό τρόπο δεν αντανακλά την ιστορία του προβλήματος – περισσότερο οφείλεται στο ότι χρησιμοποιήσαμε την σωστή προσέγγιση. Όταν θα χρησιμοποιούμε αυτήν την ανισότητα, θα επιλέγουμε τα σύνολα T_n έτσι ώστε να ελαχιστοποιείται το δεξιό μέλος της (2.1.13) αντί να τα επιλέγουμε όπως στην (2.1.14).

Ενώ αρχικά κάποιος θα μπορούσε να σκεφτεί ότι η (2.1.13) δεν είναι και τόσο δραματική βελτίωση της (2.1.17), η σημασία της προκύπτει από το γεγονός ότι, όπως θα αποδείξουμε αργότερα, σε πολλές περιπτώσεις είναι ουσιαστικά το καλύτερο δυνατό φράγμα για την $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right)$.

Η ιδέα πίσω από την (2.1.13) μας οδηγεί επίσης σε μια πιο βολική διατύπωση.

Ορισμός 2.1.3. Δοθέντος ενός συνόλου T, μια *αποδεκτή ακολουθία* (admissible sequence) είναι μια αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$ διαμερίσεων του T με $\mathrm{card}(\mathcal{A}_n) \leqslant N_n$.

Με τον όρο «αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων» εννοούμε ότι κάθε σύνολο της $\mathcal{A}_{n+1}$ περιέχεται σε ένα σύνολο της $\mathcal{A}_n$. Στη συνέχεια, για κάθε $t \in T$ θα συμβολίζουμε με $A_n(t)$ το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{A}_n$ που περιέχει το t.

Θεώρημα 2.1.4 (το φράγμα της διαδοχικής προσέγγισης)**.** *Αν υποθέσουμε την αυξητική συνθήκη* (2.1.1) *και αν* $\mathbb{E}(X_t) = 0$ *για κάθε* $t \in T$, *τότε για κάθε αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων* $(\mathcal{A}_n)$ *του* T *έχουμε*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) \leqslant L \sup_{t\in T} \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2}\Delta(A_n(t)), \tag{2.1.20}$$

όπου, όπως πάντα, $\Delta(A_n(t))$ *είναι η διάμετρος του* $A_n(t)$.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το T είναι πεπερασμένο σύνολο. Κατασκευάζουμε ένα υποσύνολο T_n του T παίρνοντας ακριβώς ένα σημείο από κάθε σύνολο A της $\mathcal{A}_n$. Ορίζουμε το $\pi_n(t)$ μέσω της

$$T_n \cap A_n(t) = \{\pi_n(t)\}.$$

Τότε, αφού για κάθε $n \geqslant 0$ τα t και $\pi_n(t)$ ανήκουν στο $A_n(t)$, έχουμε

$$d(t, \pi_n(t)) \leqslant \Delta(A_n(t))$$

και το αποτέλεσμα έπεται από την (2.1.13). □

Ορισμός 2.1.5. Για κάθε $\alpha > 0$ και για κάθε μετρικό χώρο (T, d), τον οποίο δεν υποθέτουμε αναγκαστικά πεπερασμένο, ορίζουμε

$$\gamma_\alpha(T, d) = \inf \sup_{t\in T} \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/\alpha}\Delta(A_n(t)),$$

όπου το infimum λαμβάνεται πάνω από όλες τις αποδεκτές ακολουθίες διαμερίσεων του T.

Αξίζει τον κόπο να παρατηρήσουμε ότι αφού $A_0(t) = T$ έχουμε $\gamma_\alpha(T,d) \geqslant \Delta(T)$. Μια άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.4 είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 2.1.6. *Υποθέτοντας τις* (2.1.1) *και* (2.1.2) *έχουμε*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) \leqslant L\gamma_2(T,d). \tag{2.1.21}$$

Βέβαια, το Θεώρημα 2.1.6 αποκτά μεγαλύτερο ενδιαφέρον αν έχουμε κάποιον τρόπο να ελέγχουμε την ποσότητα $\gamma_2(T,d)$, δηλαδή αν έχουμε τρόπο να κατασκευάζουμε «καλές» αποδεκτές ακολουθίες διαμερίσεων. Θα συζητήσουμε αυτό το θέμα στην επόμενη Ενότητα.

Το θεώρημα που ακολουθεί εφαρμόζεται σε ανελίξεις που ικανοποιούν ένα φράγμα ασθενέστερο από την (2.1.1), και έχει αρκετές εφαρμογές.

Θεώρημα 2.1.7. *Θεωρούμε ένα σύνολο T εφοδιασμένο με δύο μετρικές d_1 και d_2. Αν $(X_t)_{t\in T}$ είναι μια στοχαστική ανέλιξη που ικανοποιεί τις $\mathbb{E}(X_t) = 0$ και*

$$\mathbb{P}(|X_s - X_t| \geqslant u) \leqslant 2\exp\left(-\min\left(\frac{u^2}{d_2(s,t)^2}, \frac{u}{d_1(s,t)}\right)\right) \tag{2.1.22}$$

για κάθε $s,t \in T$ και $u > 0$, τότε

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s,t\in T} |X_s - X_t|\right) \leqslant L(\gamma_1(T,d_1) + \gamma_2(T,d_2)). \tag{2.1.23}$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\Delta_j(A)$ την διάμετρο του συνόλου A ως προς την d_j. Θεωρούμε μια αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{B}_n)_{n\geqslant 0}$ τέτοια ώστε

$$\forall t \in T, \qquad \sum_{n\geqslant 0} 2^n \Delta_1(B_n(t)) \leqslant 2\gamma_1(T,d_1), \tag{2.1.24}$$

και μια αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{C}_n)_{n\geqslant 0}$ τέτοια ώστε

$$\forall t \in T, \qquad \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2} \Delta_2(C_n(t)) \leqslant 2\gamma_2(T,d_2). \tag{2.1.25}$$

Όπως έχουμε συμφωνήσει, το $B_n(t)$ είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{B}_n$ που περιέχει το t, και το $C_n(t)$ είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{C}_n$ που περιέχει το t. Ορίζουμε διαμερίσεις $\mathcal{A}_n$ του T ως εξής. Θέτουμε $\mathcal{A}_0 = \{T\}$ και για $n \geqslant 1$ ορίζουμε $\mathcal{A}_n$ να είναι η διαμέριση που παράγεται από τις $\mathcal{B}_{n-1}$ και $\mathcal{C}_{n-1}$, δηλαδή την διαμέριση που αποτελείται από τα σύνολα $B \cap C$ όπου $B \in \mathcal{B}_{n-1}$ και $C \in \mathcal{C}_{n-1}$. Έτσι, έχουμε

$$\mathrm{card}(\mathcal{A}_n) \leqslant N_{n-1}^2 \leqslant N_n,$$

και η ακολουθία $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ είναι αποδεκτή.

Ορίζουμε τώρα το $\pi_n(t)$ όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.4. Από την (2.1.22) βλέπουμε ότι, για κάθε $u \geqslant 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}(2.1.26)\qquad \mathbb{P}\Big(|X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}| \geqslant u(2^n d_1(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) + 2^{n/2} d_2(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))\Big)\\ \leqslant 2\exp(-u2^n),\end{aligned}$$

άρα, συνεχίζοντας όπως στην (2.1.12), με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-L\exp(-u)$ έχουμε

$$|X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}| \leqslant u(2^n d_1(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) + 2^{n/2} d_2(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t))$$

για κάθε n και t, και έτσι,

$$\sup_{t\in T}|X_t - X_s| \leqslant u \sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 1}(2^n d_1(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) + 2^{n/2} d_2(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)).$$

Τώρα, αν $n \geqslant 2$ έχουμε $\pi_n(t), \pi_{n-1}(t) \in A_{n-1}(t) \subseteq B_{n-2}(t)$. Άρα,

$$d_1(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) \leqslant \Delta_1(B_{n-2}(t)),$$

και ως εκ τούτου, αφού $d_1(\pi_1(t), \pi_0(t)) \leqslant \Delta_1(B_0(t)) = \Delta_1(T)$, έχουμε

$$\sum_{n\geqslant 1} 2^n d_1(\pi_n(t), \pi_{n-1}(t)) \leqslant L\sum_{n\geqslant 0} 2^n \Delta_1(B_n(t)).$$

Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο για την d_2 παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}|X_t - X_{t_0}| \geqslant Lu(\gamma_1(T,d_1) + \gamma_2(T,d_2))\right) \leqslant L\exp(-u).$$

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη χρησιμοποιώντας την

$$|X_s - X_t| \leqslant |X_s - X_{t_0}| + |X_t - X_{t_0}|$$

και την (2.1.4). □

Παρατηρήστε ότι τα αριστερά μέλη των (2.1.21) και (2.1.23) είναι διαφορετικά. Επίσης, η απόδειξη που δώσαμε για την (2.1.21) οδηγεί στο φαινομενικά ισχυρότερο αποτέλεσμα

$$(2.1.27)\qquad \mathbb{E}\left(\sup_{s,t\in T}|X_s - X_t|\right) \leqslant L\gamma_2(T,d).$$

Όμως, στην πραγματικότητα η ανισότητα αυτή δεν είναι ισχυρότερη από την (2.1.21). Στο επόμενο Λήμμα, υποθέτουμε ότι η $(X_t)_{t\in T}$ είναι συμμετρική, δηλαδή έχει την ίδια κατανομή με την $(-X_t)_{t\in T}$. Στις εφαρμογές, όλες οι στοχαστικές ανελίξεις που θεωρούμε είναι συμμετρικές.

Λήμμα 2.1.8. *Αν η ανέλιξη $(X_t)_{t\in T}$ είναι συμμετρική, τότε*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s,t\in T}|X_s-X_t|\right)=2\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}X_t\right).$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\sup_{s,t\in T}|X_s-X_t|=\sup_{s,t\in T}(X_s-X_t)=\sup_{s\in T}X_s+\sup_{t\in T}(-X_t),$$

και παίρνουμε την μέση τιμή. □

Όπως φαίνεται από το προηγούμενο Λήμμα, ο μόνος λόγος για τον οποίο αποδεικνύουμε ανισότητες για το supremum μιας συμμετρικής ανέλιξης χρησιμοποιώντας την ποσότητα $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}X_t\right)$ είναι ότι αυτή η ποσότητα είναι «εμφανισιακά κομψότερη» από την ισοδύναμη ποσότητα $\mathbb{E}\left(\sup_{s,t\in T}|X_s-X_t|\right)$.

Μερικές φορές χρειαζόμαστε την ακόλουθη πιο ακριβή έκδοση του Θεωρήματος 2.1.7.

Θεώρημα 2.1.9. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.7, για κάθε $u_1,u_2>0$ έχουμε*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T}|X_t-X_{t_0}|\geqslant L(\gamma_1(T,d_1)+\gamma_2(T,d_2))+u_1D_1+u_2D_2\right)\leqslant L\exp(-\min(u_2^2,u_1)),\tag{2.1.28}$$

όπου $D_j=2\sum_{n\geqslant 0}e_n(T,d_j)$.

Σημείωση. Το αποτέλεσμα αυτό είναι ισχυρότερο από εκείνο του Θεωρήματος 2.1.7 γιατί $D_j\leqslant L\gamma_j(T,d_j)$.

Απόδειξη. Υπάρχει διαμέριση του T σε N_n σύνολα, καθένα από τα οποία έχει διάμετρο $\leqslant 2e_n(T,d_1)$ ως προς την d_1. Έτσι, μπορούμε να βρούμε μια αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{B}'_n)_{n\geqslant 0}$ τέτοια ώστε

$$\Delta_1(B)\leqslant 2e_{n-1}(T,d_1)$$

για κάθε $B\in\mathcal{B}'_n$, και μια αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{C}'_n)_{n\geqslant 0}$ η οποία έχει την ίδια ιδιότητα ως προς την d_2. Ορίζουμε $\mathcal{A}_0=\mathcal{A}_1=\{T\}$, και για κάθε $n\geqslant 2$ ορίζουμε $\mathcal{A}_n$ να είναι η διαμέριση που παράγεται από τις $\mathcal{B}_{n-2}$, $\mathcal{B}'_{n-2}$, $\mathcal{C}_{n-2}$, $\mathcal{C}'_{n-2}$, όπου $\mathcal{B}_n$ και $\mathcal{C}_n$ είναι οι διαμερίσεις στις (2.1.24) και (2.1.25) αντίστοιχα.

Αντί για την (2.1.26) χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αν

$$U=(2^n+u_1)d_1(\pi_n(t),\pi_{n-1}(t))+(2^{n/2}+u_2)d_2(\pi_n(t),\pi_{n-1}(t))$$

τότε

$$\mathbb{P}\left(|X_{\pi_n(t)}-X_{\pi_{n-1}(t)}|\geqslant U\right)\leqslant 2\exp(-2^n-\min(u_2^2,u_1)),$$

οπότε, με πιθανότητα τουλάχιστον $1 - L\exp(-2^n - \min(u_2^2, u_1))$ έχουμε

$$|X_{\pi_n(t)} - X_{\pi_{n-1}(t)}| \leqslant 2^n \Delta_1(B_{n-3}(t)) + 2^{n/2}\Delta_2(C_{n-3}(t)) + 2u_1 e_{n-3}(T, d_1) + 2u_2 e_{n-3}(T, d_2)$$

για κάθε $n \geqslant 3$ και για κάθε $t \in T$. Η ανισότητα αυτή εξακολουθεί να ισχύει για $n = 1, 2$ αν στο δεξιό της μέλος αντικαταστήσουμε το $n - 3$ με 0. □

2.2 Η μέθοδος των διαμερίσεων

Το βασικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 2.1.4 είναι με ποιόν τρόπο μπορούμε να κατασκευάζουμε καλές αποδεκτές ακολουθίες διαμερίσεων. Σε αυτήν την ενότητα θα εξηγήσουμε μια βασική μέθοδο που απαντά σε αυτό το ερώτημα.

Θα λέμε ότι μια απεικόνιση F είναι *συναρτησοειδές* πάνω στο σύνολο T αν σε κάθε υποσύνολο A του T αντιστοιχίζει έναν αριθμό $F(A) \geqslant 0$, και αν είναι αύξουσα με την έννοια ότι

$$A \subseteq A_1 \subseteq T \quad \Longrightarrow \quad F(A) \leqslant F(A_1). \tag{2.2.1}$$

Διαισθητικά, ένα συναρτησοειδές είναι ένα μέτρο του «μεγέθους» των υποσυνόλων του T. Μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε ποιά υποσύνολα του T είναι «μεγάλα» για τους σκοπούς μας. Έχοντας ένα συναρτησοειδές στην διάθεσή μας, μπορούμε να κατασκευάζουμε κατάλληλες διαμερίσεις του T μέσω μιας διαδικασίας εξάντλησης που επιλέγει πρώτα τα μεγάλα υποσύνολα του T.

Θεωρούμε ένα μετρικό χώρο (T, d), που δεν χρειάζεται να είναι πεπερασμένος, και μια φθίνουσα ακολουθία $(F_n)_{n\geqslant 0}$ συναρτησοειδών πάνω στο T. Υποθέτουμε δηλαδή ότι

$$\forall A \subseteq T, \quad F_{n+1}(A) \leqslant F_n(A). \tag{2.2.2}$$

Η βασική ιδιότητα αυτών των συναρτησοειδών είναι (πολύ χοντρικά) ότι αν θεωρήσουμε ένα σύνολο το οποίο είναι η ένωση πολλών μικρών κομματιών, καλά διαχωρισμένων ανά δύο, τότε αυτό το σύνολο είναι σημαντικά μεγαλύτερο (όπως μετρήθηκε από το συναρτησοειδές) από ότι το *μικρότερο* ανάμεσα στα κομμάτια του. Το «σημαντικά μεγαλύτερο» εξαρτάται από την κλίμακα των κομματιών και από το πλήθος τους, μέσω μιας συνάρτησης

$$\theta : \mathbb{N} \cup \{0\} \to \mathbb{R}^+.$$

Στις συνθήκες που θα περιγράψουμε παρακάτω εμφανίζονται δύο παράμετροι δευτερεύουσας σημασίας, η β και η τ. Σε μια πρώτη ανάγνωση μπορεί κανείς να υποθέτει ότι $\beta = 1$ και $\tau = 1$.

Ορισμός 2.2.1. Λέμε ότι τα συναρτησοειδή F_n «ικανοποιούν την αυξητική συνθήκη» αν για κάποιον ακέραιο $\tau \geqslant 1$, και για κάποιους αριθμούς $r \geqslant 4$ και $\beta > 0$, ισχύουν τα ακόλουθα. Θεωρούμε έναν ακέραιο $n \geqslant 0$ και θέτουμε $m = N_{n+\tau}$. Τότε, για κάθε $s \in T$, για κάθε $a > 0$ και για κάθε $t_1, \ldots, t_m \in T$ τέτοια ώστε

$$\forall \ell \leqslant m,\ t_\ell \in B(s, ar) \ \text{ και } \ \forall \ell, \ell' \leqslant m,\ \ \ell \neq \ell' \Longrightarrow d(t_\ell, t_{\ell'}) \geqslant a, \tag{2.2.3}$$

και για τυχόντα σύνολα $H_1, \ldots, H_m \subseteq T$, έχουμε

$$\forall \ell \leqslant m,\ H_\ell \subseteq B(t_\ell, a/r) \quad\Longrightarrow\quad F_n\left(\bigcup_{\ell \leqslant m} H_\ell\right) \geqslant a^\beta \theta(n+1) + \min_{\ell \leqslant m} F_{n+1}(H_\ell). \tag{2.2.4}$$

Ως συνήθως, με $B(s, a)$ συμβολίζουμε τη μπάλα με κέντρο s και ακτίνα a στο μετρικό χώρο (T, d). Ένα κρίσιμο σημείο στην συνθήκη (2.2.4) είναι ότι $H_\ell \subseteq B(t_\ell, a/r)$ ενώ τα σημεία t_ℓ είναι σε απόσταση τουλάχιστον a το ένα από το άλλο. Τα σύνολα $(H_\ell)_{\ell \leqslant m}$ είναι «καλά διαχωρισμένα». Μόνο για τέτοιες οικογένειες συνόλων χρειαζόμαστε να έχουμε κάποιον έλεγχο για τις τιμές των συναρτησοειδών F_n. Ο ρόλος της παραμέτρου r είναι για να ελέγχουμε πόσο καλά διαχωρισμένα είναι αυτά τα σύνολα (ο διαχωρισμός είναι καλύτερος για μεγαλύτερα r). Στο δεξιό μέλος της (2.2.4), ο όρος $a^\beta \theta(n+1)$ αποτελείται από τον a^β ο οποίος εξαρτάται από την κλίμακα στην οποία τα σύνολα H_ℓ είναι διαχωρισμένα και από τον $\theta(n+1)$ που αντιστοιχεί στο πλήθος αυτών των συνόλων. Η «γραμμική περίπτωση» $\beta = 1$ είναι μακράν η πιο σημαντική. Ο ρόλος της παραμέτρου τ είναι για να μας δώσει λίγο χώρο. Όταν το τ είναι μεγάλο, υπάρχουν περισσότερα σύνολα και λογικά είναι ευκολότερο να αποδείξουμε την (2.2.4).

Το πρώτο συγκεκριμένο παράδειγμα στο οποίο εμφανίζεται η αυξητική ιδιότητα είναι όταν μελετάμε την θεμελιώδη περίπτωση των Gaussian ανελίξεων. Σε αυτήν την περίπτωση, τα συναρτησοειδή δεν εξαρτώνται από το n και ορίζονται από την

$$F_n(A) = \mathbb{E}\left(\sup_{t \in A} X_t\right).$$

Η αυξητική ιδιότητα θα αποδειχθεί στην Πρόταση 2.3.5.

Υποθέτουμε επίσης την ακόλουθη συνθήκη κανονικότητας για την θ. Για κάποιον $1 < \xi \leqslant 2$, και για όλα τα $n \geqslant 0$, ζητάμε

$$\xi \theta(n) \leqslant \theta(n+1) \leqslant \frac{r^\beta}{2} \theta(n). \tag{2.2.5}$$

Το πιο σημαντικό παράδειγμα είναι η $\theta(n) = 2^{n/2}$, $\beta = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση, η (2.2.5) ισχύει για $\xi = \sqrt{2}$.

Παρατηρήστε ότι η συνθήκη (2.2.4) επιβάλλει ισχυρούς περιορισμούς στο μετρικό χώρο (T,d). Για παράδειγμα, όταν $\beta=1$, $\tau=1$ και $\theta(n)=2^{n/2}$, παίρνοντας $H_\ell=\{t_\ell\}$, από την $F_{n+1}\geqslant 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$F_0(T)\geqslant F_n(T)\geqslant a2^{(n+1)/2}.$$

Θεωρούμε σημεία $t_1,\dots,t_k$ στην $B(s,ar)$ τέτοια ώστε $d(t_\ell,t_{\ell'})\geqslant a$ όποτε $\ell\neq\ell'$. Αν θεωρήσουμε το μέγιστο δυνατό k, τότε η $B(s,ar)$ καλύπτεται από τις μπάλες $B(t_\ell,a)$. Άρα, αν $a2^{(n+1)/2}>F_0(T)$ τότε η μπάλα $B(s,ar)$ μπορεί να καλυφθεί από N_{n+1} μπάλες $B(t,a)$. Αν, για παράδειγμα, $r=4$, τότε είναι εύκολο να δείξουμε ότι $2^{n/2}e_n(T)\leqslant LF_0(T)$. Υπάρχει όμως μια μικρή διαφορά ανάμεσα σε αυτό το κάτω φράγμα και το άνω φράγμα που δίνεται από την (2.1.17). Αυτό το απλό επιχείρημα θα βελτιωθεί στο επόμενο θεώρημα, το οποίο θα μας δώσει ένα κάτω φράγμα της ίδιας ακριβώς τάξης μέ εκείνην του άνω φράγματος της (2.1.20).

Θεώρημα 2.2.2. *Με τις υποθέσεις του Ορισμού 2.2.1 μπορούμε να βρούμε μια αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ από διαμερίσεις του T με $\operatorname{card}(\mathcal{A}_n)\leqslant N_{n+\tau}$, τέτοια ώστε*

$$\sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0}\theta(n)\Delta^\beta(A_n(t))\leqslant L(2r)^\beta\left(\frac{F_0(T)}{\xi-1}+\theta(0)\Delta^\beta(T)\right). \tag{2.2.6}$$

Σε όλες τις περιπτώσεις που θα θεωρήσουμε, ισχύει $F_0(t_1,t_2)\geqslant\theta(0)d^\beta(t_1,t_2)$ για κάθε ζεύγος σημείων t_1 και t_2 στον T (αφού $F_1(H)\geqslant 0$ για κάθε σύνολο H, αυτή η συνθήκη είναι ουσιαστικά ασθενέστερη απ' ότι η (2.2.4) για $n=0$). Τότε,

$$\theta(0)\Delta^\beta(T)\leqslant F_0(T).$$

Το Θεώρημα 2.2.2 κατασκευάζει διαμερίσεις που αντιστοιχούν σε δεδομένα συναρτησοειδή F_n, το πρόβλημα λοιπόν είναι με ποιόν τρόπο θα βρούμε αυτά τα συναρτησοειδή. Εδώ δεν υπάρχει κάτι το μαγικό. Οι αποδεκτές ακολουθίες αντανακλούν την γεωμετρία του χώρου (T,d). Από την στιγμή που αυτή η γεωμετρία έχει γίνει κατανοητή, είναι συνήθως δυνατόν να μαντέψουμε μια καλή επιλογή για τα συναρτησοειδή F_n. Για την ακρίβεια, είναι μάλλον ευκολότερο να μαντέψουμε τα συναρτησοειδή F_n παρά τις διαμερίσεις του Θεωρήματος 2.2.2. Άλλωστε, όπως δείχνει το Θεώρημα 2.2.4 που ακολουθεί, πράγματι δεν έχουμε πολλές επιλογές. Τα συναρτησοειδή και η αυξητική συνθήκη είναι στενά συνδεδεμένα με τις αποδεκτές ακολουθίες.

Η ακολουθία $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ του Θεωρήματος 2.2.2 δεν είναι αποδεκτή γιατί το $\operatorname{card}(\mathcal{A}_n)$ είναι μεγάλο. Για να κατασκευάσουμε καλές αποδεκτές ακολουθίες θα συνδυάσουμε το Θεώρημα 2.2.2 με το ακόλουθο Λήμμα.

Λήμμα 2.2.3. *Θεωρούμε έναν θετικό πραγματικό αριθμό α, έναν ακέραιο τ και μια αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{B}_n)_{n\geqslant 0}$ με $\operatorname{card}\mathcal{B}_n \leqslant N_{n+\tau}$. Έστω*

$$S = \sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0} 2^{n/\alpha}\Delta(B_n(t)).$$

Τότε μπορούμε να βρούμε αποδεικτή ακολουθία $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ τέτοια ώστε:

$$\sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0} 2^{n/\alpha}\Delta(A_n(t)) \leqslant 2^{\tau/\alpha}\left(S + K(\alpha)\Delta(T)\right),$$

όπου $K(\alpha)$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το α.

Απόδειξη. Θέτουμε $\mathcal{A}_n = \{T\}$ αν $n \leqslant \tau$ και $\mathcal{A}_n = \mathcal{B}_{n-\tau}$ αν $n \geqslant \tau$. Τότε $\operatorname{card}\mathcal{A}_n \leqslant N_n$ και

$$\sum_{n\geqslant \tau} 2^{n/\alpha}\Delta(A_n(t)) = 2^{\tau/\alpha}\sum_{n\geqslant 0} 2^{n/\alpha}\Delta(B_n(t)).$$

Όμως $\Delta(A_n(t)) \leqslant \Delta(T)$, οπότε

$$2^{\tau/\alpha}\sum_{n\geqslant 0} 2^{n/\alpha}\Delta(A_n(t)) \leqslant K(\alpha)2^{\tau/\alpha}\Delta(T).$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Το επόμενο αποτέλεσμα δείχνει ότι στην πιο σημαντική περίπτωση οι αύξουσες ακολουθίες συναρτησοειδών που ικανοποιούν την αυξητική συνθήκη είναι κανονικά αντικείμενα. Μπορεί επίσης να επεκταθεί στο γενικότερο πλαίσιο του Θεωρήματος 2.2.2.

Θεώρημα 2.2.4. (α) *Υποθέτουμε ότι στον μετρικό χώρο (T, d) ορίζεται μια αύξουσα ακολουθία συναρτησοειδών $\left(F_n\right)_{n\geqslant 0}$ που ικανοποιεί την αυξητική συνθήκη για κάποιο $r \geqslant 4$, για $\beta = 1$, $\tau = 1$ και $\theta(n) = c2^{n/2}$, όπου $c > 0$. Τότε,*

$$\gamma_2(T, d) \leqslant \frac{Lr}{c}\left(F_0(T) + \Delta(T)\right).$$

(β) *Σε κάθε μετρικό χώρο (T, d) υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία συναρτησοειδών $\left(F_n\right)_{n\geqslant 0}$ με $F_0(T) = \gamma_2(T, d)$ που ικανοποιεί την αυξητική συνθήκη για $r = 4$, $\beta = 1$, $\tau = 1$ και $\theta(n) = 2^{n/2-1}$.*

Ο ισχυρισμός (β) είναι ένα είδος αντιστρόφου του ισχυρισμού (α), ο οποίος δείχνει ότι οι ακολουθίες συναρτησοειδών που ικανοποιούν την αυξητική συνθήκη μας εξασφαλίζουν μια κανονική μέθοδο για να φράξουμε την $\gamma_2(T, d)$ από πάνω.

Απόδειξη. Παρατηρούμε αρχικά ότι το (α) είναι απλή συνέπεια του Θεωρήματος 2.2.2 και του Λήμματος 2.2.3. Για να αποδείξουμε το (β) ορίζουμε

$$F_n(A) = \inf \sup_{t\in A} \sum_{k\geqslant n} 2^{k/2}\Delta(A_k(t)),$$

όπου το infimum λαμβάνεται πάνω από όλες τις αποδεκτές ακολουθίες διαμερίσεων του T. Έτσι $F_0(T) = \gamma_2(T,d)$. Για να αποδείξουμε την αυξητική συνθήκη (2.2.4) θεωρούμε σημεία $(t_\ell)_{\ell\leqslant m}$ του T με $d(t_\ell, t_s) \geqslant a$ αν $\ell \neq s$. Θεωρούμε επίσης σύνολα $H_\ell \subseteq B(t_\ell, a/4)$, θέτουμε $H = \bigcup_{\ell\leqslant m} H_\ell$, και $c < \min_{\ell\leqslant m} F_{n+1}(H_\ell)$. Θεωρούμε μια αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$ του H και ορίζουμε

$$I = \{\ell \leqslant m :\ \exists A \in \mathcal{A}_n,\ A \subseteq H_\ell\}.$$

Αφού τα σύνολα H_ℓ για $\ell \leqslant m$ είναι ξένα, έχουμε ότι $\mathrm{card}\, I \leqslant N_n$, και έτσι υπάρχει $\ell \leqslant m$ ώστε $\ell \notin I$. Τότε, για κάθε $t \in H_\ell$ έχουμε ότι $A_n(t) \nsubseteq H_\ell$, και αφού $A_n(t) \subseteq H$ το σύνολο $A_n(t)$ πρέπει να τέμνει μια μπάλα $B(t_m, a/4)$ για κάποιον $m \neq \ell$. Ως εκ τούτου, $\Delta(A_n(t)) \geqslant a/2$, οπότε

$$\sum_{k\geqslant n} 2^{k/2}\Delta(A_k(t)) \geqslant \frac{a}{2}\, 2^{n/2} + \sum_{k\geqslant n+1} 2^{k/2}\Delta(A_k(t)\cap H_\ell).$$

Συνεπώς,

$$\sup_{t\in H_\ell} \sum_{k\geqslant n} 2^{k/2}\Delta(A_k(t)) \geqslant a\, 2^{n/2-1} + F_{n+1}(H_\ell).$$

Αφού η αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$ είναι τυχούσα, έχουμε δείξει ότι

$$F_n(H) \geqslant a 2^{n/2-1} + c,$$

δηλαδή την (2.2.4). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.2. Όλες οι μπάλες που θα θεωρήσουμε θα έχουν ακτίνα της μορφής r^{-j} για κάποιον $j \in \mathbb{Z}$. Γι' αυτό το λόγο, πριν προχωρήσουμε στην απόδειξη ξαναγράφουμε τις σχέσεις (2.2.3) και (2.2.4) με $a = r^{-j-1}$: έχουμε

$$\forall \ell \leqslant m,\ t_\ell \in B(s, r^{-j}) \ \text{ και } \ \forall \ell, \ell' \leqslant m,\ \ \ell \neq \ell' \Longrightarrow d(t_\ell, t_{\ell'}) \geqslant r^{-j-1}, \tag{2.2.7}$$

και για τυχόντα σύνολα $H_1, \ldots, H_m \subseteq T$,

$$\begin{aligned} &\forall \ell \leqslant m,\ H_\ell \subseteq B(t_\ell, r^{-j-2}) \\ &\Longrightarrow\ F_n\left(\bigcup_{\ell\leqslant m} H_\ell\right) \geqslant r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) + \min_{\ell\leqslant m} F_{n+1}(H_\ell). \end{aligned} \tag{2.2.8}$$

Θα κατασκευάσουμε μια αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$ διαμερίσεων με επαγωγή. Μαζί με κάθε $C \in \mathcal{A}_n$ θα ορίσουμε ένα σημείο t_c του T, έναν $j(C) \in \mathbb{Z}$ και τρεις αριθμούς $b_i(C)$ για $i = 0, 1, 2$. Υποθέτουμε ότι

$$C \subseteq B(t_C, r^{-j(C)}), \tag{2.2.9}$$

οπότε, ειδικότερα, έχουμε ότι $\Delta(C) \leqslant 2r^{-j(C)}$. Υποθέτουμε ότι

$$F_n(C) \leqslant b_0(C) \tag{2.2.10}$$

και, για κάθε $t \in C$,

$$F_n\left(C \cap B(t, r^{-j(C)-1})\right) \leqslant b_1(C) \tag{2.2.11}$$

και

$$F_n\left(C \cap B(t, r^{-j(C)-2})\right) \leqslant b_2(C). \tag{2.2.12}$$

Η ιδέα είναι ότι το

$$a_1(C) = \sup_{t \in C} F_n\left(C \cap B(t, r^{-j(C)-1})\right)$$

μπορεί να είναι πολύ μικρότερο από το $a_0(C) = F_n(C)$, και ότι αυτό χρειάζεται να το παίρνουμε υπ' όψιν μας. Όμως, για τεχνικούς λόγους, οι παράμετροι $a_0(C)$ και $a_1(C)$ δεν είναι βολικές και οι $b_0(C), b_1(C)$ είναι η «κανονικοποιημένη εκδοχή» τους. Οι συνθήκες κανονονικότητας που υποθέτουμε είναι

$$b_1(C) \leqslant b_0(C) \tag{2.2.13}$$

και

$$b_0(C) - r^{\beta(j(C)+1)}\theta(n) \leqslant b_2(C) \leqslant b_0(C) + \varepsilon_n \tag{2.2.14}$$

όπου

$$\varepsilon_n = 2^{-n} F_0(T). \tag{2.2.15}$$

Η πιο σημαντική σχέση είναι η εξής: Αν $n \geqslant 0$, $A \in \mathcal{A}_{n+1}$, $C \in \mathcal{A}_n$, $A \subseteq C$, τότε

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} b_i(A) + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) r^{-\beta(j(A)+1)}\theta(n+1) \\ &\qquad \leqslant \sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} b_i(A) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) r^{-\beta(j(C)+1)}\theta(n) + \varepsilon_{n+1}. \end{aligned} \tag{2.2.16}$$

Όπως θα δούμε παρακάτω, προσθέτοντας αυτές τις ανισότητες πάνω από όλα τα $n \geqslant 0$ παίρνουμε την (2.2.6). Για να αρχίσουμε την κατασκευή, θέτουμε

$$b_0(T) = b_1(T) = b_2(T) = F_0(T),$$

και επιλέγουμε τυχόν $t_T \in T$. Έπειτα, θέτουμε $j(T)$ τον μεγαλύτερο ακέραιο για τον οποίο $T \subseteq B(t_T, r^{-j(T)})$.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι για κάποιον $n \geqslant 0$ έχουμε ήδη κατασκευάσει διαμέριση $\mathcal{A}_n$ με $\operatorname{card} \mathcal{A}_n \leqslant N_{n+\tau}$. Για να ορίσουμε την $\mathcal{A}_{n+1}$ θα χωρίσουμε κάθε σύνολο της $\mathcal{A}_n$ σε $N_{n+\tau}$ το πολύ κομμάτια (έτσι, αφού $N_{n+\tau}^2 \leqslant N_{n+\tau+1}$, θα έχουμε $\operatorname{card} \mathcal{A}_{n+1} \leqslant N_{n+\tau+1}$). Για τον σκοπό αυτό, σταθεροποιούμε $C \in \mathcal{A}_n$ και θέτουμε $j = j(C)$. Με επαγωγή ως προς $1 \leqslant \ell \leqslant m = N_{n+\tau}$ ορίζουμε σημεία $t_\ell \in C$ και σύνολα $A_\ell \subseteq C$ ως εξής: Πρώτα θέτουμε $D_0 = C$ και επιλέγουμε t_1 τέτοιο ώστε

$$F_{n+1}\left(C \cap B(t_1, r^{-j-2})\right) \geqslant \sup_{t\in C} F_{n+1}\left(C \cap B(t, r^{-j-2})\right) - \varepsilon_{n+1}. \tag{2.2.17}$$

Έπειτα, θέτουμε $A_1 = C \cap B(t_1, r^{-j-1})$. Η ιδέα είναι ότι παίρνουμε το «μεγαλύτερο δυνατόν κομμάτι» του C. Παρατηρήστε ότι η ακτίνα των μπαλών στην (2.2.17) είναι r^{-j-2} ενώ στον ορισμό του A_1 είναι r^{-j-1}. Αυτό είναι ένα από τα τρύκ της απόδειξης. Ένα «μεγάλο κομμάτι» του C είναι ένα κομμάτι τύπου $A_1 = C \cap B(t_1, r^{-j-1})$ για το οποίο η τιμή $F_{n+1}\left(C \cap B(t_1, r^{-j-2})\right)$ (και όχι η $F_{n+1}(A)$) είναι μεγάλη.

Για να συνεχίσουμε την κατασκευή, υποθέτουμε τώρα ότι τα $t_1, \dots, t_l$ έχουν ήδη οριστεί και θέτουμε $D_\ell = C \setminus \bigcup_{1\leqslant p\leqslant \ell} A_p$. Αν $D_\ell = \emptyset$ τότε η κατασκευή σταματά. Αλλιώς, επιλέγουμε $t_{\ell+1} \in D_\ell$ ώστε

$$F_{n+1}\left(D_\ell \cap B(t_{\ell+1}, r^{-j-2})\right) \geqslant \sup_{t\in C} F_{n+1}\left(D_\ell \cap B(t, r^{-j-2})\right) - \varepsilon_{n+1}. \tag{2.2.18}$$

Θέτουμε $A_{\ell+1} = D_\ell \cap B(t_{\ell+1}, r^{-j-1})$ και συνεχίζουμε έως ότου είτε σταματήσουμε ή κατασκευάσουμε το $D_{m-1} = C \setminus \bigcup_{\ell<m} A_\ell$. Αν το D_{m-1} είναι κενό, η κατασκευή ολοκληρώνεται. Αλλιώς, θέτουμε $A_m = D_{m-1}$ και τότε τα $A_1, \dots, A_m$ σχηματίζουν μια διαμέριση του C. Με τον τρόπο αυτό έχουμε διαμερίσει το C σε m το πολύ κομμάτια. Έστω A ένα από αυτά. Αν $A = A_m$ ορίζουμε $j(A) = j(= j(C))$, $t_A = t_C$ και $b_0(A) = b_0(C)$, $b_1(A) = b_1(C)$, $b_2(A) = b_0(C) - r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) + \varepsilon_{n+1}$. Είναι προφανές ότι τα A και $n+1$ στην θέση των C και n ικανοποιούν τις σχέσεις (2.2.9),(2.2.13) και (2.2.14). Οι σχέσεις (2.2.10) και (2.2.11) για το A απορρέουν από το γεγονός ότι παρόμοιες σχέσεις ισχύουν για το C αντί για το A, ότι $F_{n+1} \leqslant F_n$ και ότι το συναρτησοειδές F_{n+1} είναι αύξον.

Αποδεικνύουμε τώρα την (2.2.12) για το A. Θεωρούμε τυχόν σημείο $t = t_m \in A_m$. Από την κατασκευή, για $1 \leqslant \ell \leqslant m$ έχουμε ότι $t_\ell \in D_{\ell-1}$, και έτσι αν $s < \ell$ έχουμε ότι $d(t_\ell, t_s) \geqslant$

r^{-j-1}. Συνεπώς, εφαρμόζοντας την (2.2.4) με $a = r^{-j-1}$ και $H_\ell = D_\ell \cap B(t_{\ell+1}, r^{-j-2})$ έχουμε (αφού η F_n είναι αύξουσα),

$$F_n(C) \geqslant r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) + \min_{0\leqslant \ell\leqslant n} \left(F_{n+1}\left(D_\ell \cap B(t_{\ell+1}, r^{-j-2})\right)\right). \tag{2.2.19}$$

Τώρα, από την (2.2.18), αφού $t_m \in D_\ell$, έχουμε

$$\begin{aligned} F_{n+1}\left(D_\ell \cap B(t_{\ell+1}, r^{-j-2})\right) &\geqslant F_{n+1}\left(D_\ell \cap B(t_m, r^{-j-2})\right) - \varepsilon_{n+1} \\ &\geqslant F_{n+1}\left(A \cap B(t_m, r^{-j-2})\right) - \varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Αφού $F_n(C) \leqslant b_0(C)$, η (2.2.19) μας δίνει

$$b_0(C) \geqslant r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) - \varepsilon_{n+1} + F_{n+1}\left(A \cap B(t_m, r^{-j-2})\right)$$

και αυτό αποδεικνύει την (2.2.12) από τον ορισμό του $b_2(A)$.

Για να αποδείξουμε την (2.2.16), παρατηρούμε ότι εξ' ορισμού

$$\begin{aligned} \sum_{0\leqslant i\leqslant 2} b_i(A) + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) &= 2b_0(C) + b_1(C) - \frac{1}{\xi} r^{-\beta(j+1)}\theta(n+1) + \varepsilon_{n+1} \\ &\leqslant 2b_0(C) + b_1(C) - r^{-\beta(j+1)}\theta(n) + \varepsilon_{n+1}, \end{aligned} \tag{2.2.20}$$

όπου στην τελευταία ανισότητα χρησιμοποιήσαμε την συνθήκη κανονικότητας για την $\theta(n)$. Όμως, από την (2.2.14) έχουμε ότι

$$b_0(C) \leqslant b_2(C) + r^{-\beta(j+1)}\theta(n),$$

άρα η (2.2.20) συνεπάγεται την (2.2.16).

Έχουμε έτσι τελειώσει με την περίπτωση $A = A_m$, και υποθέτουμε τώρα ότι $A = A_\ell$ όπου $\ell < m$. Ορίζουμε $j(A) = j+1$ και $t_A = t_\ell$. Τότε,

$$A = A_\ell \subseteq B(t_\ell, r^{-j-1}) = B(t_A, r^{-j(A)}).$$

Ορίζουμε $b_0(A) = b_2(A) = b_1(C)$, και $b_1(A) = \min\{b_1(C), b_2(C)\}$.

Οι σχέσεις (2.2.13) και (2.2.14) ισχύουν προφανώς για το A. Για να αποδείξουμε την (2.2.10) για το A, γράφουμε

$$\begin{aligned} F_{n+1}(A) &\leqslant F_{n+1}(C \cap B(t_\ell, r^{-j-1})) \\ &\leqslant F_n(C \cap B(t_\ell, r^{-j-1})) \leqslant b_1(C) = b_0(A), \end{aligned}$$

χτησιμοποιώντας την (2.2.11) για το C. Με παρόμοιο τρόπο, αν $t \in A$, έχουμε

$$\begin{aligned} F_{n+1}(A \cap B(t, r^{-j(A)-1})) &\leqslant F_{n+1}(C \cap B(t, r^{-j-2})) \\ &\leqslant F_n(C \cap B(t, r^{-j-2})) \\ &\leqslant \min\{b_1(C), b_2(C)\} = b_1(A). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.2.11) για το A. Επίσης, η (2.2.12) για το A έπεται από την (2.2.10) για το A, αφού $b_2(A) = b_0(A)$.

Για να αποδείξουμε την (2.2.16) παρατηρούμε ότι

$$\sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} b_i(A) \leqslant 2b_1(C) + b_2(C) \leqslant \sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} b_i(C), \tag{2.2.21}$$

αφού από την (2.2.13) έχουμε ότι $b_1(C) \leqslant b_0(C)$. Παρατηρούμε ότι, αφού $j(A) = j(C)+1$, και αφού $r^{-\beta}\theta(n+1) \leqslant \theta(n)/2$, από την (2.2.5) έχουμε:

$$r^{-\beta(j(A)+1)}\theta(n+1) \leqslant \frac{1}{2} r^{-\beta(j(C)+1)}\theta(n)$$

και συνδυάζοντας την με την (2.2.21) αποδεικνύουμε την (2.2.16).

Έχουμε ολοκληρώσει την κατασκευή και περνάμε στην απόδειξη της (2.2.6). Από την (2.2.16) έχουμε ότι για κάθε $t \in T$ και κάθε $n \geqslant 0$, θέτοντας $j_n(t) = j(A_n(t))$,

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} b_i(A_{n+1}(t)) + \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1) \\ &\leqslant \sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} b_i(A_n(t)) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n) + \varepsilon_{n+1}. \end{aligned}$$

Γράφοντας αυτήν την ανισότητα στην μορφή

$$\begin{aligned} \left(1 - \frac{1}{\xi}\right) r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1_{-}\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\xi}\right) r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n) \\ \leqslant \sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} (b_i(A_n(t)) - b_i(A_{n+1}(t))) + \varepsilon_{n+1} \end{aligned}$$

και αθροίζοντας αυτές τις σχέσεις για $0 \leqslant n \leqslant q$ παίρνουμε ότι:

$$\begin{aligned} &\sum_{0 \leqslant n \leqslant q} \sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} (b_i(A_n(t)) - b_i(A_{n+1}(t))) + \sum_{0 \leqslant n \leqslant q} \varepsilon_{n+1} \\ &\qquad = \sum_{0 \leqslant i \leqslant 2} \sum_{0 \leqslant n \leqslant q} (b_i(A_n(t)) - b_i(A_{n+1}(t))) + \left(\sum_{0 \leqslant n \leqslant q} 2^{-n-1}\right) F_0(T). \end{aligned}$$

Όμως,

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant q}(b_i(A_n(t))-b_i(A_{n+1}(t)))=b_i(A_0(t))-b_i(A_q(t)).$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i\leqslant 2}\sum_{0\leqslant n\leqslant q}(b_i(A_n(t))-b_i(A_{n+1}(t))) &= \sum_{0\leqslant i\leqslant 2} b_i(A_0(t))-b_i(A_q(t))\\ &\leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant 2} b_i(A_0(t)) = \sum_{0\leqslant i\leqslant 2} b_i(T)=3F_0(T),\end{aligned}$$

διότι $b_i(T)=F_0(T)$, $b_i(A)\geqslant 0$ για κάθε $0\leqslant i\leqslant 2$ και για κάθε $A\subseteq T$.

Από τα παραπάνω έπεται ότι

$$\sum_{0\leqslant n\leqslant q}\sum_{0\leqslant i\leqslant 2}(b_i(A_n(t))-b_i(A_{n+1}(t)))+\sum_{0\leqslant n\leqslant q}\varepsilon_{n+1}\leqslant 4F_0(T),$$

άρα

(2.2.22)
$$\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\sum_{0\leqslant n\leqslant q} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1)\leqslant 4F_0(T)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\sum_{0\leqslant n\leqslant q} r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n).$$

Τότε,

$$\begin{aligned}&\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\sum_{0\leqslant n\leqslant q} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\sum_{0\leqslant n\leqslant q} r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n)\\ &\qquad\leqslant 4F_0(T)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\xi}\right)r^{-\beta(j_0(T)+1)}\theta(0)\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\sum_{1\leqslant n\leqslant q} r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n) &= \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\sum_{0\leqslant n\leqslant q-1} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1)\\ &\leqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\sum_{0\leqslant n\leqslant q} r^{-\beta(j_{n+1}(t)+1)}\theta(n+1),\end{aligned}$$

άρα

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\xi}\right)\sum_{0\leqslant n\leqslant q} r^{-\beta(j_n(t)+1)}\theta(n)\leqslant 4F_0(T)+\left(1-\frac{1}{\xi}\right)r^{-\beta(j(T)+1)}\theta(0).$$

Από την (2.2.9), έχουμε $\Delta(A_n(t))\leqslant 2r^{-j_n(t)}$, και από την επιλογή του $j(T)$ έχουμε ότι $r^{-j(T)-1}\leqslant\Delta(T)$, οπότε, αφού $\xi\leqslant 2$,

(2.2.23)
$$\sum_{n\geqslant 0}\theta(n)\Delta^\beta(A_n(t))\leqslant\frac{L(2r)^\beta}{\xi-1}(F_0(T)+\Delta^\beta(T)\theta(0)).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω (T,d) ένας μετρικός χώρος, έστω $\tau' \geqslant 0$. Για $n \geqslant 0$ θεωρούμε υποσύνολα T_n του T με $\mathrm{card}(T_0) = 1$ και $\mathrm{card}(T_n) \leqslant N_{n+\tau'} = 2^{2^{n+\tau'}}$ για $n \geqslant 1$. Θεωρούμε επίσης δύο αριθμούς $\alpha > 0$, $S > 0$, και ορίζουμε*

$$U = \left\{ t \in T : \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/\alpha} d(t, T_n) \leqslant S \right\}.$$

Τότε, $\gamma_\alpha(U,d) \leqslant K(\alpha,\tau')S$.

Παρατηρήστε ότι το Θεώρημα 2.2.5 μας επιτρέπει να ελέγχουμε την $\gamma_\alpha(U,d)$ χρησιμοποιώντας σύνολα T_n τα οποία δεν είναι απαραίτητα υποσύνολα του U. Ειδικότερα, όταν $U = T$ έχουμε

$$\gamma_\alpha(T,d) \leqslant K(\alpha) \sup_{t \in T} \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/\alpha} d(t, T_n), \tag{2.2.24}$$

το οποίο δείχνει ότι το φράγμα (2.1.20) είναι εξίσου καλό με το (2.1.13). Όπως φαίνεται από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.7, το φράγμα (2.1.20) είναι συνήθως πιο βολικό.

Ένας τρόπος να ερμηνεύσουμε την (2.2.24) είναι ο εξής. Θεωρούμε την ποσότητα

$$\gamma_{\alpha'}(T,d) = \inf \sup_{t \in T} \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/\alpha} d(t, T_n),$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλες τις επιλογές συνόλων T_n με $\mathrm{card}(T_n) \leqslant N_n$. Από την απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.7 φαίνεται ότι $\gamma_{\alpha'}(T,d) \leqslant \gamma_\alpha(T,d)$, και από την (2.2.18) έπεται ότι $\gamma_\alpha(T,d) \leqslant K(\alpha)\gamma_{\alpha'}(T,d)$.

Θα δώσουμε δύο αποδείξεις του Θεωρήματος 2.2.5. Η πρώτη βασίζεται στο Θεώρημα 2.2.2 ενώ η δεύτερη σε ένα απλό άμεσο επιχείρημα.

Πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.2.2 με $r = 4$, $\beta = 1$ και $\tau = \tau' + 1$. Για κάθε $n \geqslant 0$ και κάθε υποσύνολο A του U ορίζουμε

$$F_n(A) = \sup_{t \in A} \sum_{k \geqslant n} 2^{k/\alpha} d(t, T_k).$$

Θέτουμε $m = N_{n+\tau'+1}$ και θεωρούμε σημεία $t_1, \ldots, t_m$ του U τέτοια ώστε

$$1 \leqslant \ell < \ell' \leqslant m \quad \Longrightarrow \quad d(t_\ell, t_{\ell'}) \geqslant a,$$

και υποσύνολα $H_1, \ldots, H_m$ του U με $H_\ell \subseteq B(t_\ell, a/4)$. Από τον ορισμό του F_{n+1}, για τυχόν $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $u_\ell \in H_\ell$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{k \geqslant n+1} 2^{k/\alpha} d(u_\ell, T_k) \geqslant F_{n+1}(H_\ell) - \varepsilon.$$

Αφού $d(t_\ell, t_{\ell'}) \geqslant a$ για κάθε $\ell \neq \ell'$, οι ανοικτές μπάλες $B(t_\ell, a/2)$ είναι ξένες. Αφού το πλήθος τους είναι $N_{n+\tau'+1}$ ενώ $\mathrm{card}(T_n) \leqslant N_{n+\tau'}$, κάποια από αυτές τις μπάλες δεν τέμνει το T_n. Έτσι, υπάρχει $\ell \leqslant m$ με $d(t_\ell, T_n) \geqslant a/2$. Αφού έχουμε $u_\ell \in H_\ell \subseteq B(t_\ell, a/4)$, έχουμε $d(u_\ell, T_n) \geqslant a/\mathbf{4}$ και

$$\begin{aligned}\sum_{k\geqslant n} 2^{k/\alpha} d(u_\ell, T_k) &\geqslant 2^{n/\alpha}\frac{a}{4} + \sum_{k\geqslant n+1} 2^{k/\alpha} d(u_\ell, T_k) \\ &\geqslant 2^{n/\alpha-2}a + F_{n+1}(H_\ell) - \varepsilon.\end{aligned}$$

Αφού $u_\ell \in H_\ell$ αυτό δείχνει ότι

$$F_n\left(\bigcup_{p\leqslant m} H_p\right) \geqslant 2^{n/\alpha-2}a + F_{n+1}(H_\ell) - \varepsilon,$$

και αφού το ε ήταν τυχόν, έχουμε αποδείξει την (2.2.4) με $\theta(n+1) = 2^{n/\alpha-2}$. (Η συνθήκη (2.2.5) ισχύει μόνο όταν $\alpha \geqslant 1$, η οποία είναι η πιο ενδιαφέρουσα περίπτωση. Μπορούμε όμως να αποδείξουμε το ίδιο στην περίπτωση $\alpha < 1$, χρησιμοποιώντας μια διαφορετική τιμή για την σταθερά r.) Έχουμε $F_0(U) \leqslant S$, και αφού $d(t, T_0) \leqslant S$ για κάθε $t \in U$ και $\mathrm{card}(T_0) = 1$, έχουμε $\Delta(U) \leqslant 2S$. Για να τελειώσουμε την απόδειξη αρκεί να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2.2 και το Λήμμα 2.2.3. □

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5. Για απλότητα υποθέτουμε ότι $\tau' = 1$. Για κάθε $u \in T_n$ θέτουμε

$$V(u) = \{t \in U : d(t, T_n) = d(t, u)\}.$$

Έχουμε $U = \bigcup_{u\in T_n} V(u)$, άρα μπορούμε να βρούμε διαμέριση $\mathcal{C}_n$ του U με $\mathrm{card}(\mathcal{C}_n) \leqslant N_n$ και την ιδιότητα ότι

$$\forall C \in \mathcal{C}_n,\ \ \exists u \in T_n : C \leqslant V(u).$$

Θεωρούμε C όπως παραπάνω, τον μικρότερο ακέραιο $b > \frac{1}{a+1}$, το σύνολο

$$C_{bn} = \{t \in C : d(t, u) \leqslant 2^{-bn}\Delta(U)\}$$

και, για κάθε $0 \leqslant k \leqslant bn$, το σύνολο

$$C_k = \{t \in C : 2^{-k-1}\Delta(U) < d(t, u) \leqslant 2^{-k}\Delta(U)\}.$$

Έχουμε $\Delta(C_k) \leqslant 2^{-k+1}\Delta(U)$ και, αν $k < bn$,

$$\forall t \in C_k,\ \ \Delta(C_k) \leqslant 4d(t, T_n).$$

Άρα,

$$\forall k \leqslant bn, \ \ \forall t \in C_k, \ \ \Delta(C_k) \leqslant 4d(t, T_n) + 2^{-bn+1}\Delta(U). \tag{2.2.25}$$

Θεωρούμε την διαμέριση $\mathcal{B}_n$ που αποτελείται από τα σύνολα C_k για $C \in \mathcal{C}_n$, $0 \leqslant k \leqslant bn$, οπότε $\mathrm{card}(\mathcal{B}_n) \leqslant (bn+1)N_n$. Κατόπιν, θεωρούμε την διαμέριση $\mathcal{A}_n$ που παράγεται από τις $\mathcal{B}_0, \ldots, \mathcal{B}_n$, οπότε η ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$ είναι αύξουσα και $\mathrm{card}(\mathcal{A}_n) \leqslant \mathbf{N_{n+\tau}}$ για κάποιον τ που εξαρτάται μόνο από το α. Από την (2.2.25) παίρνουμε ότι

$$\forall A \in \mathcal{A}_n, \ \ \forall t \in A, \ \ \Delta(A) \leqslant 4d(t, T_n) + 2^{-bn+1}\Delta(U),$$

και έτσι

$$\begin{aligned}\sum_{n \geqslant 0} 2^{n/\alpha}\Delta(A_n(t)) &\leqslant 4\sum_{n \geqslant 0} 2^{n/\alpha} d(t, T_n) + \Delta(U) \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/\alpha - bn+1} \\ &\leqslant 4(S + \Delta(U)).\end{aligned}$$

Αφού $\Delta(U) \leqslant 2S$, το συμπέρασμα έπεται από το Λήμμα 2.2.3. □

Στο επόμενο Θεώρημα συγκεντρώνουμε κάποιες χρήσιμες παρατηρήσεις.

Θεώρημα 2.2.6. (α) *Αν U είναι ένα υποσύνολο του T, τότε*

$$\gamma_\alpha(U, d) \leqslant \gamma_\alpha(T, d).$$

(β) *Αν η $f : (T, d) \to (U, d')$ είναι επί και για κάποια σταθερά A ικανοποιεί την συνθήκη*

$$\forall x, y \in T, \ \ d'(f(x), f(y)) \leqslant Ad(x, y),$$

τότε

$$\gamma_\alpha(U, d') \leqslant K(\alpha)A\gamma_\alpha(T, d).$$

(γ) *Έχουμε*

$$\gamma_\alpha(T, d) \leqslant K(\alpha) \sup \gamma_\alpha(F, d), \tag{2.2.26}$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλα τα πεπερασμένα $F \subseteq T$.

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι προφανής. Για να αποδείξουμε το (β) θεωρούμε σύνολα $T_n \subseteq T$ με $\mathrm{card}(T_n) \leqslant N_n$ και

$$\sup_{t \in T} \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/\alpha} d(t, T_n) \leqslant 2\gamma_\alpha(T, d),$$

και παρατηρούμε ότι

$$\sup_{s\in U}\sum_{n\geqslant 0} d'(s,f(T_n))\leqslant 2A\gamma_\alpha(T,d).$$

Κατόπιν, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.2.5.

Για να αποδείξουμε το (γ) επαναλαμβάνουμε κατ' ουσίαν το επιχείρημα της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.4. Ορίζουμε

$$\gamma_{\alpha,n}(T,d)=\inf\sup_{t\in T}\sum_{k\geqslant n} 2^{k/\alpha}\Delta(A_k(t)),$$

όπου το infimum είναι πάνω από όλες τις αποδεκτών ακολουθίες $(\mathcal{A}_k)_{k\geqslant 0}$. Θεωρούμε τα συναρτησοειδή

$$F_n(A)=\sup\gamma_{\alpha,n}(G,d),$$

όπου το supremum είναι πάνω από όλα τα πεπερασμένα $G\subseteq A$. Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.2.2 με $\beta=1$, $\theta(n+1)=2^{n/\alpha-1}$, $\tau=1$, και $r=4$. (Όπως στο Θεώρημα 2.2.5 αυτή η επιλογή δουλεύει μόνο για $\alpha\geqslant 1$, και η περίπτωση $\alpha<1$ απαιτεί μια διαφορετική επιλογή της σταθεράς r.) Για να αποδείξουμε την (2.2.4), θέτουμε $m=N_{n+1}$ και θεωρούμε σημεία $(t_\ell)_{\ell\leqslant m}$ του T με $d(t_\ell,t_{\ell'})\geqslant a$ αν $\ell\neq\ell'$. Θεωρούμε σύνολα $H_\ell\subseteq B(t_\ell,a/4)$ και $c<\min_{\ell\leqslant m}F_{n+1}(H_\ell)$. Για $\ell\leqslant m$, θεωρούμε πεπερασμένα σύνολα $G_\ell\subseteq H_\ell$ με $\gamma_{\alpha,n+1}(G_\ell,d)>c$, και ορίζουμε $G=\bigcup_{\ell\leqslant m}G_\ell$. Θεωρούμε μια αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ του G και θέτουμε

$$I=\{\ell\leqslant m:\exists A\in\mathcal{A}_n : A\subseteq G_l\}.$$

Αφού τα σύνολα G_ℓ, $\ell\leqslant m$ είναι ξένα, έχουμε $\mathrm{card}(I)\leqslant N_n$, συνεπώς υπάρχει $\ell\leqslant m$ ώστε $\ell\notin I$. Τότε, για $t\in G_\ell$ έχουμε $A_n(t)\nsubseteq G_\ell$, άρα το $A_n(t)$ τέμνει τη μπάλα $B(t_{\ell'},a/4)$ για $\ell\neq\ell'$, και ως εκ τούτου $\Delta(A_n(t))\geqslant a/2$. Έπεται ότι

$$\sum_{k\geqslant r}2^{k/\alpha}\Delta(A_k(t))\geqslant\frac{a}{2}2^{n/\alpha}+\sum_{k\geqslant n+1}2^{k/\alpha}\Delta(A_k(t)\cap G_\ell)$$

και άρα

$$\sup_{t\in G_\ell}\sum_{k\geqslant n}2^{k/\alpha}\Delta(A_k(t))\geqslant a2^{n/\alpha-1}+\gamma_{\alpha,n+1}(G_\ell,d).$$

Αφού η αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ ήταν τυχούσα, έχουμε δείξει ότι

$$\gamma_{\alpha,n}(G,d)\geqslant a2^{n/\alpha-1}+c,$$

και έτσι παίρνουμε την

$$F_n\left(\bigcup_{\ell\leqslant m}H_\ell\right)\geqslant a2^{n/\alpha-1}+\min_{\ell\leqslant m}F_{n+1}(H_\ell),$$

η οποία είναι ακριβώς η (2.2.4). Τέλος, έχουμε $F_0(T) = \sup \gamma_\alpha(G, d)$, όπου το supremum είναι πάνω από όλα τα πεπερασμένα $G \subset T$, και αφού $\Delta(G) \leqslant \gamma_\alpha(G, d)$ συμπεραίνουμε ότι $\Delta(T) \leqslant F_0(T)$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα (2.2.3) και το Θεώρημα 2.2.2 ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Υπάρχουν πολλές πιθανές παραλλαγές του σχήματος της απόδειξης του Θεωρήματος 2.2.2. Κλείνουμε αυτήν την ενότητα με μια τέτοια παραλλαγή, η οποία θα μπορούσε να φανεί χρήσιμη σε καταστάσεις όπου, προκειμένου να είμαστε σε θέση να δείξουμε την ανισότητα της 2.2.4, πρέπει να γνωρίζουμε ότι $H_\ell \subseteq B(t_l, \eta a)$, για κάποιο πολύ μικρό η. Αν επιχειρήσουμε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2.2, πρέπει να επιλέξουμε $r \geqslant 1/\eta$, το οποίο (όταν $\beta = 1$) οδηγεί στην απώλεια ενός παράγοντα της τάξης του $1/\eta$. Η απλή τροποποίηση του Θεωρήματος 2.2.2 που δίνουμε παρακάτω μας εξασφαλίζει ότι η απώλεια που θα προκύψει είναι πολύ μικρότερη, της τάξης του $\log(1/\eta)$.

Για απλότητα, υποθέτουμε ότι $r = 4$, $\beta = 1$, $\theta(n) = 2^{n/2}$ και $\tau = 1$. Θεωρούμε επίσης έναν ακέραιο $q \geqslant 2$.

Θεώρημα 2.2.7. *Υποθέτουμε ότι οι υποθέσεις του Θεωρήματος* 2.2.2 *είναι τροποποιημένες ως εξής. Αν τα* $t_1, \ldots, t_m$ *που είναι όπως στην* (2.2.3) *και αν* $H_\ell \subseteq B(t_\ell, a4^{-q})$, *έχουμε*

$$F_n\left(\bigcup_{\ell \leqslant m} H_\ell\right) \geqslant a2^{n/2} + \min_{\ell \leqslant m} F_{n+1}(H_\ell).$$

Τότε, υπάρχει μια αύξουσα ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ *του* T *τέτοια ώστε* $\operatorname{card}(\mathcal{A}_n) \leqslant N_{n+1}$ *και*

$$\sup_{t\in T} \sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2}\Delta(A_n(t)) \leqslant Lq(F_0(T) + \Delta(T)).$$

Απόδειξη. Θα μιμηθούμε την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.2. Μαζί με κάθε σύνολο C στην $\mathcal{A}_n$ ορίζουμε αριθμούς $b_i(C) \geqslant 0$ για $0 \leqslant i \leqslant q$, τέτοιους ώστε αν $\varepsilon_n = 2^{-n}F_0(T)$ να έχουμε,

(i) Για κάθε i, $1 \leqslant i \leqslant q$, $b_i(C) \leqslant b_0(C)$.

(ii) $\varepsilon_n + b_0(C) \geqslant b_q(C) \geqslant b_0(C) - 4^{-j(A)-1}2^{n/2}$.

(iii) $F_n(C) \leqslant b_0(C)$.

(iv) Για κάθε i, $1 \leqslant i \leqslant q$ και για κάθε $t \in C$, $F_n(C \cap B(t, 4^{-j(C)-i})) \leqslant b_i(C)$.

Θέτουμε $b_i(T) = F_0(T)$ για $0 \leqslant i \leqslant q$. Στο επαγωγικό βήμα παίρνουμε $m = N_{n+1}$ και αντικαθιστούμε την (2.2.18) με την

$$F_{n+1}(D_\ell \cap B(t_{\ell+1}, 4^{-j-q})) \geqslant \sup_{t\in D_\ell} F_{n+1}(D_\ell \cap B(t, 4^{-j-q})) - \varepsilon_{n+1}.$$

Θεωρούμε ένα από τα κομμάτια A της διαμέρισης του C. Αν $A = A_m$, θέτουμε

$$\forall i,\ 1 \leqslant i \leqslant q,\ \ b_i(A) = b_i(C)$$

και

$$b_q(A) = b_0(A) - 4^{-j-1}2^{(n+1)/2}.$$

Αν $A = A_\ell$ με $\ell < m$ τότε θέτουμε $b_q(A) = b_1(C)$ και, για κάθε $i < q$,

$$b_i(A) = \min(b_{i+1}(C), b_1(C)).$$

Ακριβώς όπως προηγουμένως δείχνουμε και στις δύο περιπτώσεις ότι

$$\begin{aligned}\sum_{0\leqslant i\leqslant q} b_i(A) &+ \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) 4^{-j(A)-1}2^{(n+1)/2}\\ &\leqslant \sum_{0\leqslant i\leqslant q} b_i(C) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) 4^{-j(C)-1}2^{n/2} + \varepsilon_{n+1},\end{aligned}$$

και ολοκληρώνουμε την απόδειξη με τον ίδιο τρόπο. □

2.3 Gaussian Ανελίξεις

Θεωρούμε μια Gaussian ανέλιξη, δηλαδή μια οικογένεια $(X_t)_{t\in T}$ πραγματικών τυχαίων μεταβλητών, όπου T ένα μη κενό σύνολο δεικτών, τέτοια ώστε κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός $a_1X_{t_1} + \cdots + a_mX_{t_m}$ των X_t να είναι κανονική τυχαία μεταβλητή με μέση τιμή 0. Εφοδιάζουμε το T με την κανονική απόσταση

$$d(s,t) = \left(\mathbb{E}\,(X_s - X_t)^2\right)^{1/2}. \tag{2.3.1}$$

Σε αυτήν την Ενότητα αποδεικνύουμε το θεώρημα του Talagrand (majorizing measure theorem).

Θεώρημα 2.3.1. *Για κάποια απόλυτη σταθερά L ισχύει*

$$\frac{1}{L}\gamma_2(T,d) \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) \leqslant L\gamma_2(T,d). \tag{2.3.2}$$

Η δεξιά ανισότητα προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 2.1.6. Για την απόδειξη του κάτω φράγματος, κάνοντας χρήση του Θεωρήματος 2.2.6 (γ) υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι το T είναι πεπερασμένο σύνολο. Το επιχείρημα βασίζεται στο Θεώρημα 2.2.2. Θα χρησιμοποιήσουμε τα συναρτησοειδή

$$F_n(A) = F(A) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in A} X_t\right).$$

Παρατηρήστε ότι το F_n δεν εξαρτάται από το n. Μια πρώτη γενική αρχή που θα παίξει βασικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1 είναι η εξής:

Λήμμα 2.3.2 (Sudakov minoration)**.** *Υποθέτουμε ότι, για κάθε $p, q \leqslant m$ με $p \neq q$ ισχύει $d(t_p, t_q) \geqslant a$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{p \leqslant m} X_{t_p}\right) \geqslant \frac{a}{L_1}\sqrt{\log m}, \tag{2.3.3}$$

όπου $L_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στο Λήμμα του Slepian: Αν $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ είναι ένας χώρος πιθανότητας και $X = (X_1, \ldots, X_m)$, $Y = (Y_1, \ldots, Y_m)$ είναι δύο m-άδες κανονικών τυχαίων μεταβλητών που ορίζονται στον Ω και έχουν μέση τιμή 0, με την ιδιότητα

$$\|X_i - X_j\|_2 \leqslant \|Y_i - Y_j\|_2$$

για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$, τότε

$$\mathbb{E}\left(\sup_{i \leqslant m} X_i\right) \leqslant 2\mathbb{E}\left(\sup_{i \leqslant m} Y_i\right). \tag{2.3.4}$$

Θα χρειαστούμε επίσης την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω $g_1, \ldots, g_m$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με $g_i \sim N(0,1)$. Τότε,*

$$c_1\sqrt{\log m} \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{i \leqslant m} g_i\right) \leqslant c_2\sqrt{\log m},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Έστω $q \geqslant 1$. Από την ανισότητα του Hölder,

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\sup_{i \leqslant m} g_i\right) &\leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{i \leqslant m} |g_i|\right) \leqslant \mathbb{E}\Big(\sum_{i \leqslant m} |g_i|^q\Big)^{1/q} \\
&\leqslant \left(\sum_{i \leqslant m} \mathbb{E}|g_i|^q\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Η ροπή τάξης q της g υπολογίζεται ακριβώς:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}|g|^q &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty x^q e^{-x^2/2}dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^\infty (2y)^{\frac{q-1}{2}} e^{-y}dy \\
&= \frac{2^{q/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{q+1}{2}\Big).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{i\leqslant m} g_i\right) \leqslant \left(m\frac{2^{q/2}}{\sqrt{\pi}}\Gamma\Big(\frac{q+1}{2}\Big)\right)^{1/q} \leqslant c\sqrt{q}m^{1/q}.$$

Αν επιλέξουμε $q \sim \log m$, βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\sup_{i\leqslant m} g_i\right) \leqslant c_2\sqrt{\log m},$$

όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την αντίστροφη ανισότητα δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει (αρκετά μικρή) απόλυτη σταθερά $\alpha > 0$ και υπάρχει φυσικός αριθμός n_0 ώστε: αν $g \sim N(0,1)$ και $m \geqslant n_0$, τότε

$$\mathbb{P}(g > \alpha\sqrt{\log m}) \geqslant \frac{1}{m}.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(g > \alpha\sqrt{\log m}) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha\sqrt{\log m}}^{\infty} e^{-x^2/2}dx \geqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int_{\alpha\sqrt{\log m}}^{2\alpha\sqrt{\log m}} e^{-x^2/2}dx \\ &= \frac{\alpha\sqrt{\log m}}{\sqrt{2\pi}}e^{-2\alpha^2\log m} = \frac{\alpha\sqrt{\log m}}{\sqrt{2\pi}}m^{-2\alpha^2} \geqslant \frac{1}{m}\end{aligned}$$

αν, για παράδειγμα, $\alpha = 1/2$ και το n_0 επιλεγεί κατάλληλα. Τότε, για κάθε $m \geqslant n_0$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\max_{i\leqslant m} g_i \leqslant \alpha\sqrt{\log m}\right) = \Big[\mathbb{P}(g \leqslant \alpha\sqrt{\log m})\Big]^m \leqslant \left(1-\frac{1}{m}\right)^m \leqslant \frac{1}{e},$$

άρα, από την ανισότητα του Markov παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left(\sup_{i\leqslant m} g_i\right) \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\log m}\cdot\mathbb{P}\left(\max_{i\leqslant m} g_i \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{\log m}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{e}\right)\sqrt{\log m}$$

αν $m \geqslant n_0$. Είναι τώρα φανερό ότι αν επιλέξουμε κατάλληλη απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, πετυχαίνουμε την

$$c_1\sqrt{\log m} \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{i\leqslant m} g_i\right)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. □

Απόδειξη του Λήμματος 2.3.2. Θεωρούμε ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές $g_1,\dots,g_m$ (ανεξάρτητες από τις X_{t_p}) και θέτουμε

$$Y_p = \frac{g_p}{\sqrt{2}}\min_{p\neq q}\|X_{t_p} - X_{t_q}\|_2.$$

Τότε, για κάθε $p \neq q$ έχουμε

$$\|Y_p - Y_q\|_2 = \min_{p\neq q} \|X_{t_p} - X_{t_q}\|_2 \leqslant \|X_{t_p} - X_{t_q}\|_2.$$

Από το Λήμμα του Slepian,

$$\frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\sup_{p\leqslant m} Y_p\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\max_{p\leqslant m} X_{t_p}\right).$$

Από την Πρόταση 2.3.3,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\mathbb{E}\mathbb{E}\left(\sup_{p\leqslant m} Y_p\right) &= \frac{1}{2\sqrt{2}}\min_{p\neq q}\|X_{t_p} - X_{t_q}\|_2 \cdot \mathbb{E}\left(\sup_{p\leqslant m} g_i\right)\\ &\geqslant \frac{c_1 a}{2\sqrt{2}}\sqrt{\log m}\end{aligned}$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Η δεύτερη αρχή που θα χρησιμοποιήσουμε είναι η ακόλουθη ανισότητα συγκέντρωσης.

Λήμμα 2.3.4. *Εστω $(Z_t)_{t\in U}$ μια Gaussian ανέλιξη, όπου U είναι ένα πεπερασμένο σύνολο, και έστω $\sigma \in \mathbb{R}$ με*

$$\sigma \geqslant \sup_{t\in U}\left(\mathbb{E}(Z_t^2)\right)^{1/2}.$$

Τότε, για κάθε $u > 0$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\left|\sup_{t\in U} Z_t - \mathbb{E}\Big(\sup_{t\in U} Z_t\Big)\right| \geqslant u\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.3.5}$$

Απόδειξη. Γράφουμε $U = \{t_1,\dots,t_n\}$ και θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $(Z_{t_1},\dots,Z_{t_n})$ στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με $\Gamma = A^tA$ τον θετικά ημιορισμένο πίνακα συνδιακυμάνσεων του τυχαίου αυτού διανύσματος. Το $(Z_{t_1},\dots,Z_{t_n})$ έχει την ίδια κατανομή με το $A\mathcal{N}$, όπου το $\mathcal{N}$ έχει κατανομή το μέτρο Gauss γ_n στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε $F:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$F(x) = F(x_1,\dots,x_n) = \max_{1\leqslant i\leqslant n}(Ax)_i.$$

Τότε, η κατανομή της F ως προς το γ_n είναι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\max_{1\leqslant i\leqslant n} Z_{t_i}$. Ελέγχουμε ότι η Lipschitz νόρμα $\|F\|_{\mathrm{Lip}}$ της F είναι μικρότερη ή ίση από τη νόρμα $\|A\|$ του $A:\ell_2^n \to \ell_\infty^n$. Από την κατασκευή, αυτή η νόρμα ισούται με

$$\|A\| = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\sum_{j=1}^n A_{ij}^2\right)^{1/2} = \max_{1\leqslant i\leqslant n}\left(\mathbb{E}\big(Z_{t_i}^2\big)\right)^{1/2},$$

όπου, με A_{ij} συμβολίζουμε τις συντεταγμένες του πίνακα A. Από την ισοπεριμετρική ανισότητα για το γ_n συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} Z_{t_i} \geqslant \mathbb{E}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} Z_{t_i}\right)+u\right\}\right) \leqslant e^{-u^2/2\sigma^2} \tag{2.3.6}$$

για κάθε $u\geqslant 0$. Εφαρμόζοντας την ίδια ανισότητα για την $-F$ παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left(\left\{\max_{1\leqslant i\leqslant n} Z_{t_i} \leqslant \mathbb{E}\left(\max_{1\leqslant i\leqslant n} Z_{t_i}\right)-u\right\}\right) \leqslant e^{-u^2/2\sigma^2}. \tag{2.3.7}$$

Από τις (2.3.6) και (2.3.7) έχουμε το ζητούμενο. □

Πρόταση 2.3.5. *Έστω $t_1,\dots,t_m\in T$ με την ιδιότητα $d(t_\ell,t_{\ell'})\geqslant a$ αν $\ell\neq\ell'$. Θεωρούμε $\sigma>0$, και για κάθε $\ell\leqslant m$ ένα πεπερασμένο σύνολο $H_\ell\subset B(t_\ell,\sigma)$. Αν $H=\bigcup_{\ell\leqslant m}H_\ell$, τότε*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in H} X_t\right) \geqslant \frac{a}{L_1}\sqrt{\log m} - L_2\sigma\sqrt{\log m} + \min_{\ell\leqslant m}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in H_\ell} X_t\right). \tag{2.3.8}$$

Παρατήρηση 2.3.6. Αν $\sigma\leqslant a/(2L_1L_2)$, από την (2.3.8) παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in H} X_t\right) \geqslant \frac{a}{2L_1}\sqrt{\log m} + \min_{\ell\leqslant m}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in H_\ell} X_t\right). \tag{2.3.9}$$

Η ανισότητα αυτή μπορεί να θεωρηθεί γενίκευση της (2.3.3).

Απόδειξη της Πρότασης 2.3.5. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $m\geqslant 2$. Για κάθε $\ell\leqslant m$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή

$$Y_\ell = \left(\sup_{t\in H_\ell} X_t\right) - X_{\ell_t} = \sup_{t\in H_\ell}(X_t - X_{t_\ell}).$$

Θέτουμε $U=H_\ell$ και $Z_t=X_t-X_{t_\ell}$. Τότε, για κάθε $t\in U$ έχουμε $\mathbb{E}(Z_t^2)\leqslant\sigma$ και για κάθε $u\geqslant 0$, από την (2.3.5) έχουμε

$$\mathbb{P}(|Y_\ell-\mathbb{E}(Y_\ell)|\geqslant u)\leqslant 2\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right).$$

Έτσι, αν $V=\max_{\ell\leqslant m}|Y_\ell-\mathbb{E}(Y_\ell)|$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left(V\geqslant u\right)\leqslant 2m\exp\left(-\frac{u^2}{2\sigma^2}\right). \tag{2.3.10}$$

Για κάθε μη αρνητική τυχαία μεταβλητή V ισχύει $\mathbb{E}(V) = \int_0^\infty \mathbb{P}(V \geqslant v)\,dv$, οπότε ένας απλός υπολογισμός ο οποίος χρησιμοποιεί την (2.3.10) δείχνει ότι, αφού $m \geqslant 2$,

$$\mathbb{E}(V) \leqslant \int_0^\infty \min\Big(1, 2m\exp(-u^2/(2\sigma^2))\Big)\,du \leqslant L_2\sigma\sqrt{\log m}.$$

Τώρα, για κάθε $\ell \leqslant m$,

$$Y_\ell \geqslant \mathbb{E}(Y_\ell) - V \geqslant \min_{\ell \leqslant m} \mathbb{E}(Y_\ell) - V,$$

άρα

$$\sup_{t \in H_\ell} X_t = Y_\ell + X_{t_\ell} \geqslant X_{t_\ell} + \min_{\ell \leqslant m} \mathbb{E}(Y_\ell) - V$$

απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\sup_{t \in H_\ell} X_t = Y_\ell + X_{t_\ell} \geqslant \max_{\ell \leqslant m} X_{t_\ell} + \min_{\ell \leqslant m} \mathbb{E}(Y_\ell) - V.$$

Κατόπιν, παίρνουμε μέση τιμή και χρησιμοποιούμε την (2.3.3). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1. Σταθεροποιούμε $r \geqslant 2L_1L_2$, και επιλέγουμε $\beta = 1$, $\tau = 1$. Για να αποδείξουμε ότι τα συναρτησοειδή F_n ικανοποιούν την αυξητική συνθήκη, απλώς παρατηρούμε ότι, λόγω της (2.3.9), η (2.2.4) ισχύει για την $\theta(n) = 2^{n/2}/L$. Με βάση το Θεώρημα 2.2.2 και το Λήμμα 2.2.3, μας μένει να ελέγξουμε τον όρο $\Delta(T)$. Όμως,

$$\mathbb{E}(\max(X_{t_1}, X_{t_2})) = \mathbb{E}\left(\max(X_{t_1} - X_{t_2}, 0)\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} d(t_1, t_2),$$

άρα $\Delta(T) \leqslant \sqrt{2\pi}\,\mathbb{E}\left(\sup_{t \in T} X_t\right)$. □

Το Θεώρημα 2.3.1 έχει κάποιες πολύ χρήσιμες συνέπειες. Η πρώτη είναι ένα θεώρημα σύγκρισης.

Θεώρημα 2.3.7. *Θεωρούμε δύο ανελίξεις $(Y_t)_{t \in T}$ και $(X_t)_{t \in T}$ με δείκτες από το ίδιο σύνολο T. Υποθέτουμε ότι η ανέλιξη $(X_t)_{t \in T}$ είναι Gaussian και ότι η ανέλιξη $(Y_t)_{t \in T}$ ικανοποιεί την συνθήκη: για κάθε $u > 0$ και για κάθε $t \neq s \in T$,*

$$\mathbb{P}\left(|Y_s - Y_t| \geqslant u\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{u^2}{d(s,t)^2}\right),$$

όπου d είναι η απόσταση (2.3.1) που επάγεται από την $(X_t)_{t \in T}$. Τότε,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{s,t \in T} |Y_s - Y_t|\right) \leqslant L\,\mathbb{E}\left(\sup_{t \in T} X_t\right).$$

Απόδειξη. Συνδυάζουμε την (2.1.27) με την αριστερή ανισότητα στην (2.3.2). □

Το επόμενο κλασσικό παράδειγμα αποσαφηνίζει την διαφορά ανάμεσα στην (2.1.19) και την (2.1.13). Θεωρούμε μια ακολουθία $(g_i)_{i\geqslant 1}$ ανεξάρτητων τυπικών κανονικών τυχαίων μεταβλητών και για κάθε $i \geqslant 2$ θέτουμε

$$X_i = \frac{g_i}{\sqrt{\log i}}. \tag{2.3.11}$$

Θεωρούμε έναν ακέραιο $s \geqslant 2$ και την ανέλιξη $(X_i)_{i\leqslant N_s}$. Δηλαδή, το σύνολο δεικτων είναι το $T = \{2, 3, \dots, N_s\}$. Η απόσταση d που επάγεται από την ανελιξη ικανοποιεί την

$$\frac{1}{\sqrt{\log(\min(p, q))}} \leqslant d(p, q) \leqslant \frac{2}{\sqrt{\log(\min(p, q))}} \tag{2.3.12}$$

για κάθε $p \neq q$.

Αν $T_n \subset T$ και $\mathrm{card}(T_n) = N_n$ για κάθε $1 \leqslant n \leqslant s$, τότε υπάρχει $p \leqslant N_n + 1$ ώστε $p \notin T_n$, άρα από την (2.3.12) έχουμε $d(p, T_n) \geqslant 2^{-n/2}/L$, απ' όπου βλέπουμε ότι $e_n(T) \geqslant 2^{-n/2}/L$. Άρα,

$$\sum_n 2^{n/2} e_n(T) \geqslant \frac{s-1}{L}. \tag{2.3.13}$$

Από την άλλη πλευρά, μπορούμε για κάθε $n \leqslant s$ να ορίσουμε $T_n = \{2, 3, \dots, N_n, N_s\}$. Θεωρούμε ακεραίους $p \in T$ και $m \leqslant s - 1$ τέτοιους ώστε $N_m \leqslant p \leqslant N_{m+1}$. Τότε $d(p, T_n) = 0$ αν $n \geqslant m + 1$, ενώ, αν $n \leqslant m$,

$$d(p, T_n) \leqslant d(p, N_s) \leqslant 2^{-m/2} L,$$

από την (2.3.12) και από το γεγονός ότι $p, N_s \geqslant N_m$. Άρα, έχουμε

$$\sum_n 2^{n/2} d(p, T_n) \leqslant \sum_{n\leqslant m} L \cdot 2^{n/2} 2^{-m/2} \leqslant L. \tag{2.3.14}$$

Συγκρίνοντας τις (2.3.13) και (2.3.14) βλέπουμε ότι το φράγμα (2.1.19) υστερεί του φράγματος (2.1.13) κατά έναν παράγοντα της τάξης του s. Το παράδειγμα αυτά είναι με μία έννοια ακραίο. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι, αν το T είναι πεπερασμένο, το φράγμα (2.1.19) δεν μπορεί να είναι χειρότερο από το (2.1.13) κατά έναν παράγοντα πολύ μεγαλύτερο από $\log\log(\mathrm{card}(T))$.

Από τις (2.3.14) και (2.1.13) έπεται ότι $\mathbb{E}\left(\sup_{i\geqslant 1} X_i\right) < \infty$. Στην Πρόταση 2.3.9 θα δούμε μια απλούστερη απόδειξη αυτού του ισχυρισμού.

Θεωρούμε τον χώρο Hilbert ℓ_2 των ακολουθιών $(t_i)_{i\geqslant 1}$ που ικανοποιούν την $\sum_{i\geqslant 1} t_i^2 < \infty$, εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|t\| = \|t\|_2 = \left(\sum_{i\geqslant 1} t_i^2\right)^{1/2}.$$

Κάθε $t \in \ell_2$ ορίζει μια Gaussian τυχαία μεταβλητή, την

$$X_t = \sum_{i \geqslant 1} t_i g_i \tag{2.3.15}$$

(η σειρά αυτή συγκλίνει στον ℓ_2). Κατ' αυτόν τον τρόπο, για κάθε υποσύνολο T του ℓ_2 μπορούμε να θεωρήσουμε την Gaussian ανέλιξη $(X_t)_{t\in T}$. Η απόσταση που επάγεται στο T από αυτήν την ανέλιξη συμπίπτει με την απόσταση του ℓ_2. Πράγματι, από την (2.3.15) έχουμε $\mathbb{E}(X_t^2) = \sum_{i\geqslant 1} t_i^2$.

Η σημασία αυτής της κατασκευής έγκειται στο ότι είναι τελείως γενική. *Όλες* οι Gaussian ανελίξεις προκύπτουν με αυτόν τον τρόπο (στην περίπτωση τουλάχιστον που υπάρχει ένα αριθμήσιμο υποσύνολο T' του T το οπίο είναι πυκνό στον μετρικό χώρο (T,d), που είναι και η πλέον ενδιαφέρουσα για τις εφαρμογές). Πράγματι, δεν έχουμε παρά να σκεφτούμε τις τυχαίες μεταβλητές Y_t μιας Gaussian ανέλιξης σαν σημεία στον $L^2(\Omega)$ (όπου Ω είναι ο χώρος πιθανότητας στον οποίο ορίζονται οι Y_t) ο οποίος είναι τότε διαχωρίσιμος, και ισοδύναμα, σαν σημεία του ℓ_2 επιλέγοντας μια ορθοκανονική βάση του $L^2(\Omega)$.

Ένα υποσύνολο T του ℓ_2 θα θεωρείται πάντα εφοδιασμένο με την απόσταση που επάγεται από την ℓ_2-νόρμα. Μπορούμε λοιπόν, σε αυτήν την περίπτωση, να γράφουμε $\gamma_2(T)$ αντί για $\gamma_2(T,d)$. Γράφουμε $\mathrm{conv}(T)$ για την κυρτή θήκη του T και

$$T_1 + T_2 = \{t_1 + t_2 :\ t_1 \in T_1,\ t_2 \in T_2\}.$$

Θεώρημα 2.3.8. *Για κάθε υποσύνολο T του ℓ_2 ισχύει*

$$\gamma_2(\mathrm{conv}(T)) \leqslant L\,\gamma_2(T). \tag{2.3.16}$$

Αν T_1 και T_2 είναι δύο υποσύνολα του ℓ_2, τότε

$$\gamma_2(T_1+T_2) \leqslant L\,\left(\gamma_2(T_1)+\gamma_2(T_2)\right). \tag{2.3.17}$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την (2.3.16) χρησιμοποιούμε την (2.3.2) και το γεγονός ότι

$$\sup_{t\in\mathrm{conv}(T)} = \sup_{t\in T} X_t, \tag{2.3.18}$$

το οποίο προκύπτει από την $X_{a_1t_1+a_2t_2} = a_1X_{t_1} + a_2X_{t_2}$. Η απόδειξη της (2.3.17) είναι παρόμοια. □

Πρόταση 2.3.9. *Θεωρούμε ένα σύνολο $T = \{t_k : k \geqslant 1\} \subset \ell_2$ με $\|t_k\| \leqslant 1/\sqrt{\log(k+1)}$ για κάθε $k \geqslant 1$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) \leqslant L.$$

Απόδειξη. Θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε την (2.1.13), είναι όμως ευκολότερο να γράψουμε

$$\mathbb{P}\left(\sup_k |X_{t_k}| \geqslant u\right) \leqslant \sum_k \mathbb{P}(|X_{t_k}| \geqslant u) \leqslant \sum_k 2\exp\left(-\frac{u^2}{2}\log(k+1)\right) \tag{2.3.19}$$

διότι η X_{t_k} είναι Gaussian με $\mathbb{E}(X_{t_k}^2) \leqslant 1/\log(k+1)$. Τώρα, για κάθε $u \geqslant 2$, το δεξιό μέλος της (2.3.19) φράσσεται από $L\exp(-u^2/2)$. □

Συνδυάζοντας την Πρόταση 2.3.9 με την (2.3.18) βλέπουμε ότι $\mathbb{E}\left(\sup_{t\in S} X_t\right) \leqslant L$, όπου $S = \mathrm{conv}(\{t_k : k \geqslant 1\})$. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι αυτή η κατασκευή περιγράφει πλήρως την ουσία του προβλήματος.

Θεώρημα 2.3.10. *Έστω T ένα αριθμήσιμο υποσύνολο του ℓ_2 με $0 \in T$. Τότε, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία (t_k) στον ℓ_2, με $\|t_k\|\sqrt{\log(k+1)} \leqslant L \cdot \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right)$ και*

$$T \subseteq \mathrm{conv}(\{t_k : k \geqslant 1\} \cup \{0\}).$$

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.3.1 μπορούμε να βρούμε μια αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$ του T ώστε, για κάθε $t \in T$,

$$\sum_{n\geqslant 0} 2^{n/2}\Delta(A_n(t)) \leqslant L \cdot \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t\right) = S. \tag{2.3.20}$$

Κατασκευάζουμε σύνολα $T_n \subset T$ τέτοια ώστε κάθε $A \in \mathcal{A}_n$ να περιέχει ακριβώς ένα σημείο του T_n. Θα φροντίσουμε επίσης η κατασκευή να μας εξασφαλίσει ότι $T_0 = \{0\}$ και $T = \bigcup_{n\geqslant 0} T_n$. Αυτό είναι απλό: μπορούμε να αριθμήσουμε τα στημεία του T στην μορφή $(u_n)_{n\geqslant 1}$ με $u_0 = 0$, και στον ορισμό του T_n να φροντίσουμε το u_n να ανήκει στο T_n. Για κάθε $n \geqslant 1$ θεωρούμε το σύνολο U_n που αποτελείται από όλα τα σημεία

$$2^{-n/2}\frac{t-v}{\|t-v\|}$$

όπου $t \in T_n$, $v \in T_{n-1}$ και $t \neq v$. Τότε, κάθε στοιχείο του U_n έχει νόρμα $2^{-n/2}$, και το U_n έχει το πολύ $N_nN_{n-1} \leqslant N_{n+1}$ στοιχεία. Ορίζουμε $U = \bigcup_{k\geqslant 1} U_k$. Παρατηρούμε ότι το U περιέχει το πολύ N_{n+2} στοιχεία νόρμας $\geqslant 2^{-n/2}$. Θεωρούμε μια αρίθμηση $U = \{t_k : k \geqslant 1\}$ του U, τέτοια ώστε η ακολουθία $\|t_k\|$ να είναι φθίνουσα. Τότε, αν $\|t_k\| \geqslant 2^{-n/2}$ έχουμε $k \leqslant N_{n+2}$ και από αυτό έπεται ότι $\|t_k\| \leqslant L/\sqrt{\log(k+1)}$.

Έστω $t \in T$. Υπάρχει $m \geqslant 0$ ώστε $t \in T_m$. Αν συμβολίσουμε με $\pi_n(t)$ το μοναδικό στοιχείο του $T_n \cap A_n(t)$, αφού $\pi_0(t) = 0$, έχουμε

$$t = \sum_{1 \leqslant n \leqslant m} (\pi_n(t) - \pi_{n-1}(t)) = \sum_{1 \leqslant n \leqslant m} a_n(t) u_n(t), \tag{2.3.21}$$

όπου

$$u_n(t) = 2^{-n/2} \frac{\pi_n(t) - \pi_{n-1}(t)}{\|\pi_n(t) - \pi_{n-1}(t)\|} \in U$$

και

$$a_n(t) = 2^{n/2} \|\pi_n(t) - \pi_{n-1}(t)\|.$$

Αφού

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant m} a_n(t) \leqslant \sum_{n \geqslant 1} 2^{n/2} \Delta(A_{n-1}(t)) \leqslant 2S,$$

από την (2.3.21) βλέπουμε ότι

$$t \in 2S \,\mathrm{conv}(U \cup \{0\}).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Κεφάλαιο 3

Η εικασία Bernoulli

3.1 Η εικασία

Οι Gaussian τυχαίες μεταβλητές είναι αναμφισβήτητα το κεντρικό αντικείμενο της Θεωρίας Πιθανοτήτων, όμως οι τυχαίες μεταβλητές Bernoulli είναι επίσης πολύ χρήσιμες. Υπενθυμίζουμε ότι μια τυχαία μεταβλητή Bernoulli ε περιγράφει την ρίψη ενός νομίσματος: παίρνει τις τιμές ± 1 με πιθανότητα

$$\mathbb{P}(\varepsilon = 1) = \mathbb{P}(\varepsilon = -1) = 1/2.$$

Θεωρούμε ένα υποσύνολο T του ℓ_2, και μια ακολουθία $(\varepsilon_i)_{i\geqslant 1}$ ανεξάρτητων ισοκατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli. Θέτουμε

$$b(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1} t_i\varepsilon_i\right). \tag{3.1.1}$$

Παρατηρούμε ότι $b(T) \geqslant 0$, ότι $b(T) \leqslant b(T')$ αν $T \subseteq T'$, και ότι $b(T + t_0) = b(T)$ για κάθε $t_0 \in \ell_2$.

Θα θέλαμε να καταλάβουμε την τιμή της $b(T)$ μέσα από την γεωμετρία του T. Συμβολίζουμε με $\|t\|_1 = \sum_{i\geqslant 1} |t_i|$ την ℓ_1-νόρμα του t, και με B_1 την μοναδιαία μπάλα του ℓ_1. Η επόμενη Πρόταση είναι τετριμμένη.

Πρόταση 3.1.1. *Έχουμε*

$$b(T) \leqslant \sup_{t\in T} \|t\|_1. \tag{3.1.2}$$

Υπενθυμίζουμε τον συμβολισμό

$$g(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1} t_i g_i\right).$$

Ένας άλλος τρόπος να ελέγχουμε την $b(T)$ δίνεται από την επόμενη Πρόταση.

Πρόταση 3.1.2. *Έχουμε*

$$b(T) \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2}}\, g(T). \tag{3.1.3}$$

Απόδειξη. Αν $(\varepsilon_i)_{i\geqslant 1}$ είναι μια ακολουθία ανεξάρτητων ισοκατανεμημένων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli, η οποία είναι ανεξάρτητη από την ακολουθία $(g_i)_{i\geqslant 1}$, τότε η ακολουθία $(\varepsilon_i|g_i|)_{i\geqslant 1}$ έχει την ίδια κατανομή με την $(g_i)_{i\geqslant 1}$. Έτσι,

$$g(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1} \varepsilon_i |g_i| t_i\right).$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen για να ολοκληρώσουμε ως προς τις g_i μέσα στο supremum, παίρνουμε

$$g(T) \geqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}}\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1} t_i\varepsilon_i\right) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}b(T),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $\mathbb{E}(|g_i|) = \sqrt{2/\pi}$. □

Βλέπουμε λοιπόν ότι, εκτός από την (3.1.2), ένας άλλος τρόπος για να είναι η $b(T)$ μικρή είναι να είναι η $g(T)$, ή ισοδύναμα η $\gamma_2(T)$, μικρή. Η εικασία Bernoulli ισχυρίζεται ότι ο μόνος τρόπος για να είναι η $b(T)$ μικρή είναι να έχουμε έναν συνδυασμό των δύο παραπάνω καταστάσεων.

Εικασία 3.1.3 (η εικασία Bernoulli)**.** *Υπάρχει μια καθολική σταθερά L τέτοια ώστε: για κάθε υποσύνολο T του ℓ_2 μπορούμε να βρούμε δύο υποσύνολα T_1 και T_2 του ℓ_2 ώστε*

$$T \subseteq T_1 + T_2, \tag{3.1.4}$$

και

$$\gamma_2(T_1) \leqslant Lb(T), \tag{3.1.5}$$

$$T_2 \subseteq Lb(T)B_1, \quad \textit{δηλαδή}\ t\in T_2 \implies \|t\|_1 \leqslant Lb(T). \tag{3.1.6}$$

Η διάσπαση (3.1.4) θα έδειχνε με πολύ σαφή τρόπο πότε έχουμε $b(T) < \infty$, αφού έχει σαν συνέπεια την

$$b(T) \leqslant \sqrt{\pi/2}g(T_1) + \sup_{t\in T_2} \|t\|_1 \leqslant L\gamma_2(T_1) + \sup_{t\in T_2} \|t\|_1.$$

Μια ενδογενής δυσκολία στο να αποδείξει κανείς την εικασία Bernoulli είναι ότι η διάσπαση (3.1.4), όταν υπάρχει, δεν είναι μοναδική ούτε κανονική.

3.2 Έλεγχος στην ℓ_∞-νόρμα

Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι το εξής.

Θεώρημα 3.2.1. *Υπάρχει μια καθολική σταθερά L τέτοια ώστε, για κάθε υποσύνολο T του ℓ_2 ισχύει*

$$\gamma_2(T) \leqslant L(b(T) + \sqrt{b(T)\gamma_1(T, d_\infty)}). \tag{3.2.1}$$

Ειδικότερα, αν $\gamma_1(T, d_\infty) \leqslant Lb(T)$, έχουμε

$$\gamma_2(T) \leqslant Lb(T) \leqslant L'\gamma_2(T).$$

Το βασικό εργαλείο για την απόδειξη είναι η εξής:

Πρόταση 3.2.2. *Υπάρχουν σταθερές L_1 και L_2 με τις ακόλουθες ιδιότητες: Θεωρούμε αριθμούς $a, b, \sigma > 0$, διανύσματα $t_1, \dots, t_m \in \ell_2$, και υποθέτουμε ότι*

$$\ell \neq \ell' \implies \|t_\ell - t_{\ell'}\|_2 \geqslant a. \tag{3.2.2}$$

Υποθέτουμε επιπλέον ότι

$$\forall \ell \leqslant m, \quad \|t_\ell\|_\infty \leqslant b. \tag{3.2.3}$$

Για $\ell \leqslant m$ θεωρούμε σύνολα H_ℓ με $H_\ell \subseteq B_2(t_\ell, \sigma)$. Τότε,

$$b\left(\bigcup_{\ell\leqslant m} H_\ell\right) \geqslant \frac{1}{L_1}\min\left(a\sqrt{\log m}, \frac{a^2}{b}\right) - L_2\sigma\sqrt{\log m} + \min_{\ell\leqslant m} b(H_\ell). \tag{3.2.4}$$

Πόρισμα 3.2.3. *Υπάρχει μια σταθερά L_0 τέτοια ώστε: αν τα σημεία t_ℓ ικανοποιούν την (3.2.2) και $t_\ell \in D$ με $\Delta(D, d_\infty) \leqslant 4a/\sqrt{\log m}$, και αν $H_\ell \subseteq B_2(t_\ell, a/L_0)$, τότε έχουμε*

$$b\left(\bigcup_{\ell\leqslant m} H_\ell\right) \geqslant \frac{a}{L_0}\sqrt{\log m} + \min_{\ell\leqslant m} b(H_\ell). \tag{3.2.5}$$

Φυσικά, ο συντελεστής 4 στην συνθήκη $\Delta(D, d_\infty) \leqslant 4a/\sqrt{\log m}$ μπορεί να φύγει. Ο μοναδικός σκοπός που εξυπηρετεί είναι ότι θα μας διευκολύνει αργότερα να χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 3.2.3 σε αυτήν ακριβώς την μορφή.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t_1 = 0$. Έτσι,

$$\|t_\ell\|_\infty \leqslant b = 4a/\sqrt{\log m}$$

για όλα τα $\ell \leqslant m$ και χρησιμοποιώντας την (3.2.4) με $\sigma = a/L_0$ παίρνουμε

$$b\left(\bigcup_{\ell\leqslant m} H_\ell\right) \geqslant \frac{1}{4L_1} a\sqrt{\log m} - \frac{aL_2}{L_0}\sqrt{\log m} + \min_{\ell\leqslant m} b(H_\ell),$$

οπότε, αν $L_0 \geqslant 8L_1L_2$ και $L_0 \geqslant 8L_1$ παίρνουμε την (3.2.5). □

Η απόδειξη της Πρότασης 3.2.2 είναι πανομοιότυπη με αυτήν της Πρότασης 2.3.5, αν αντικαταστήσουμε τα Λήμματα 2.3.2 και 2.3.4 αντίστοιχα με τα ακόλουθα θεωρήματα:

Θεώρημα 3.2.4 (Sudakov minoration)**.** *Έστω $t_1, \dots, t_m \in \ell_2$ που ικανοποιούν τις* (3.2.2) *και* (3.2.3)*. Τότε,*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\ell\leqslant m}\sum_{i\geqslant 1} t_{\ell,i}\varepsilon_i\right) \geqslant \frac{1}{L}\min\left\{a\sqrt{\log m}, \frac{a^2}{b}\right\}. \tag{3.2.6}$$

Θεώρημα 3.2.5. *Αν $T \subseteq B(t,\sigma)$ τότε*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1} t_i\varepsilon_i - b(T)\right| \geqslant u\right) \leqslant L\exp\left(-\frac{u^2}{L\sigma^2}\right) \tag{3.2.7}$$

για κάθε $u > 0$.

Παρατήρηση 3.2.6. Στις κατασκευές μας, δεν θα πρέπει να έχουμε μόνο την πληροφορία (3.2.2), αλλά θα πρέπει επίσης να γνωρίζουμε ότι για κάποιο s,

$$\forall \ell \leqslant m,\ t_\ell \in B_2(s, ra).$$

Με μικρές μόνο μετατροπές μπορούμε να τακτοποιήσουμε τα πράγματα έτσι ώστε η (3.2.6) να είναι απαραίτητη μόνο υπό αυτήν την πρόσθετη πληροφορία. Σε αυτήν την περίπτωση, αυτό έπεται άμεσα από το κύριο αποτέλεσμα της [23] (σε συνδυασμό με την Sudakov minoration για Gaussian ανελίξεις), η απόδειξη του οποίου είναι πιο απλή και πιο κομψή από αυτήν της [18] (μπορούμε επίσης να συμπεράνουμε την (3.2.6) από το αποτέλεσμα της [23] σε συνδυασμό με ένα επαναληπτικό επιχείρημα).

Θα χρειαστούμε επίσης το εξής απλό λήμμα.

Λήμμα 3.2.7. *Για κάθε υποσύνολο T του ℓ_2 ισχύει*

$$\Delta(T, d_2) \leqslant Lb(T). \tag{3.2.8}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $0 \in T$. Τότε, για κάθε $t \in T$ έχουμε

$$b(T) \geqslant \mathbb{E}\left(\max\left\{0, \sum_{i\geqslant 1} t_i\varepsilon_i\right\}\right) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\left|\sum_{i\geqslant 1} t_i\varepsilon_i\right|\right) \geqslant \frac{1}{L}\|t\|_2,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την συμμετρία για την ισότητα, και την ανισότητα του Khintchine στην τελευταία ανισότητα. Αυτό αποδεικνύει την (3.2.8). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Θεωρούμε έναν ακέραιο $\tau \geqslant 1$ που θα καθοριστεί αργότερα, και μια αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{D}_n)_{n\geqslant 0}$ του T τέτοια ώστε

$$\sup_{t\in T}\sum_{p\geqslant 0} 2^p\Delta(D_p(t), d_\infty) \leqslant 2\gamma_1(T, d_\infty). \tag{3.2.9}$$

Για την απόδειξη θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2.2 στα συναρτησοειδή

$$F_n(A) = \sup\{b(A\cap D) + U_n(A), D \in \mathcal{D}_{n+\tau}, A\cap D \neq \emptyset\},$$

όπου

$$U_n(A) = \sup_{t\in D}\sum_{p\geqslant n} 2^p\Delta(D_{p+\tau}(t), d_\infty).$$

Ελέγχουμε τώρα ότι αυτά τα συναρτησοειδή ικανοποιούν την αυξητική συνθήκη του Ορισμού 2.2.1 για κάποια κατάλληλη τιμή των παραμέτρων. Θέτουμε $m = N_{n+\tau+1}$, θεωρούμε σημεία $t_1, \ldots, t_m$ του T τέτοια ώστε

$$\ell \neq \ell' \implies \|t_\ell - t_{\ell'}\|_2 \geqslant a, \tag{3.2.10}$$

και σύνολα $H_\ell \subseteq B_2(t_\ell, a/r)$, όπου $r = 8L_0$, και $L_0 \geqslant 1$ είναι η σταθερά του Πορίσματος 3.2.3.

Θεωρούμε $c < \min_{\ell\leqslant m} F_{n+1}(H_\ell)$, και για κάθε ℓ θεωρούμε $D_\ell \in \mathcal{D}_{n+\tau+1}$ τέτοιο ώστε $H_\ell \cap D_\ell \neq \emptyset$ και

$$b(H_\ell \cap D_\ell) + U_{n+1}(D_\ell) > c. \tag{3.2.11}$$

Καθένα από τα m σύνολα D_ℓ περιέχεται σε ένα από τα σύνολα $D_{n+\tau}$. Αφού $m = N_{n+\tau+1} = N_{n+\tau}^2 \geqslant N_{n+\tau}\cdot\mathrm{card}(D_{n+\tau})$, από την αρχή του περιστερώνα μπορούμε να βρούμε $D \in \mathcal{D}_{n+\tau}$ τέτοιο ώστε αν

$$I = \{\ell \leqslant m : D_\ell \subseteq D\}$$

τότε $\mathrm{card}(I) \geqslant N_{n+\tau}$. Έχουμε

$$F_n\left(\bigcup_{\ell\leqslant m} H_\ell\right) \geqslant b\left(D\cap\bigcup_{\ell\in I} H_\ell\right) + U_n(D). \tag{3.2.12}$$

Τώρα, για κάθε $\ell \in I$ έχουμε

$$U_n(D) = 2^n\Delta(D,d_\infty) + U_{n+1}(D) \geqslant 2^n\Delta(D,d_\infty) + U_{n+1}(D_\ell). \tag{3.2.13}$$

Περίπτωση 1: Υποθέτουμε ότι $\Delta(D,d_\infty) \geqslant a2^{-n/2}$. Τότε, οι (3.2.11), (3.2.12) και (3.2.13) δείχνουν ότι αν ℓ_0 είναι ένα αυθαίρετο στοιχείο του I, έχουμε

$$\begin{aligned} F_n\left(\bigcup_{\ell\leqslant m} H_\ell\right) &\geqslant 2^{n/2}a + b(D_{\ell_0}\cap H_{\ell_0}) + U_{n+1}(D_{\ell_0}) \\ &\geqslant 2^{n/2}a + c, \end{aligned}$$

αν χρησιμοποιήσουμε την (3.2.11) για $\ell = \ell_0$, και έτσι

$$F_n\left(\bigcup_{\ell\leqslant m} H_\ell\right) \geqslant 2^{n/2}a + \inf_{\ell\leqslant m} F_{n+1}(H_\ell). \tag{3.2.14}$$

Περίπτωση 2: Υποθέτουμε ότι $\Delta(D,d_\infty) \leqslant a2^{-n/2}$, οπότε $\Delta(D,d_\infty) \leqslant a/\sqrt{\log N_n}$. Επιλέγουμε τυχόν υποσύνολο J του I με $\mathrm{card}(J) = N_n$. Για $\ell \in J$ επιλέγουμε αυθαίρετα ένα $u_\ell \in H_\ell \cap D_\ell \subseteq D$, και αφού $H_\ell \subseteq V_2(t_\ell, a/r)$ έχουμε

$$H_\ell \subseteq B_2(u_\ell, 2a/r) = B_2(u_\ell, a/(4L_0))$$

διότι $r = 8L_0$. Παρατηρούμε ότι, αφού $r \geqslant 4$, από την (3.2.10) έχουμε $d_2(u_\ell, u_{\ell'}) \geqslant a/4$ για $\ell \neq \ell'$.

Χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 3.2.3 με $m = N_n$, το $H_\ell \cap D_\ell$ αντί για το H_ℓ, τον $a/4$ αντί για τον a, και το u_ℓ αντί για το t_ℓ, και έχουμε

$$\begin{aligned} b\left(D\cap\bigcup_{\ell\in I} H_\ell\right) &\geqslant b\left(\bigcup_{\ell\in J}(H_\ell\cap D_{|ell})\right) \\ &\geqslant \frac{a}{4L_0}\sqrt{\log N_n} + \inf_{\ell\in J} b(H_\ell\cap D_\ell). \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με τις (3.2.11), (3.2.12) και (3.2.13) παίρνουμε

$$F_n\left(\bigcup_{\ell\leqslant m} H_\ell\right) \geqslant \frac{2^{n/2}a}{L} + \inf_{\ell\in J} F_{n+1}(H_\ell) \geqslant \frac{2^{n/2}a}{L} + \inf_{\ell\leqslant m} F_{n+1}(H_\ell). \tag{3.2.15}$$

Έτσι, αυτή η σχέση ισχύει σε καθεμία από τις προηγούμενες περιπτώσεις. Δηλαδή, έχουμε αποδείξει ότι η αυξητική συνθήκη του Ορισμού 2.2.1 ισχύει με $\theta(n) = 2^{n/2}/L$, $\tau+1$ αντί για τ, και $\beta = 1$. Μπορούμε τότε να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 2.2.2 γι' αυτές τις τιμές των παραμέτρων. Εξ' ορισμού έχουμε

$$F_0(T) \leqslant b(T) + U_0(T)$$

και από την (3.2.9) έχουμε $2^\tau U_0(T) \leqslant 2\gamma_1(T, d_\infty)$, συνεπώς,

$$F_0(T) \leqslant b(T) + 2^{-\tau+1}\gamma_1(T, d_\infty).$$

Αφού $\Delta(T, d_2) \leqslant Lb(T)$ από την (3.2.8), συμπεραίνουμε από το Λήμμα 2.2.3 ότι

$$\gamma_2(T) \leqslant L2^{\tau/2}(b(T) + 2^{-\tau}\gamma_1(T, d_\infty))$$

και το Θεώρημα 3.2.1 έπεται αν επιλέξουμε τον $\tau \geqslant 1$ με τον καλύτερο δυνατό τρόπο. □

3.3 Συναρτήσεις τεμαχισμού και η ασθενής λύση

Σκοπός αυτής της Ενότητας είναι να αποδείξουμε μια ασθενή μορφή της εικασίας Bernoulli. Με B_p συμβολίζουμε τη μοναδιαία μπάλα του ℓ_p, δηλαδή

$$B_p = \left\{ t : \sum_{i \geqslant 1} |t_i|^p \leqslant 1 \right\}.$$

Θεώρημα 3.3.1. *Για κάθε $p > 1$ υπάρχει μια σταθερά $K(p) < \infty$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $T \subset \ell_2$ μπορούμε να βρούμε δύο σύνολα $T_1, T_2 \subset \ell_2$ με $T \subset T_1 + T_2$ ώστε*

$$\gamma_2(T_1) \leqslant K(p)b(T) \tag{3.3.1}$$

και

$$T_2 \subset K(p)b(T)B_p. \tag{3.3.2}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 εισάγουμε τις *συναρτήσεις τεμαχισμού*.

Ορισμός 3.3.2. Για κάθε $c > 0$ ορίζουμε την συνάρτηση τεμαχισμού $\psi_c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ ως εξής. Θέτουμε $\psi_c(x) = (\psi_{c,j}(x))_{j\in\mathbb{Z}}$ όπου: αν $x \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\psi_{c,j}(x) = 0 &\quad \text{αν} \quad j < 0.\\
\psi_{c,j}(x) = c &\quad \text{αν} \quad c(j+1) \leqslant x,\ j \geqslant 0.\\
\psi_{c,j}(x) = x - cj &\quad \text{αν} \quad cj \leqslant x \leqslant c(j+1),\ j \geqslant 0.\\
\psi_{c,j}(x) = 0 &\quad \text{αν} \quad x \leqslant cj,\ j \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Αν $x < 0$ τότε θέτουμε $\psi_{c,j}(x) = -\psi_{c,-j}(-x)$.

Με άλλα λόγια, το x «τεμαχίζεται» σε κομμάτια μήκους c που είναι τοποθετημένα το ένα δίπλα στο άλλο.

Κατόπιν, ορίζουμε την συνάρτηση τεμαχισμού $\Psi_c : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}\times\mathbb{Z}}$ κατά συντεταγμένη:

$$\Psi_c\left((t_i)_{i\geqslant 1}\right) = \left(\psi_{c,j}(t_i)\right)_{i\in\mathbb{N}, j\in\mathbb{Z}}. \tag{3.3.3}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\|\Psi_c(t)\|_\infty \leqslant c.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι, μετά από κατάλληλη αναδιάταξη των συντεταγμένων, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\Psi_{c/k} = \Psi_{c/k} \circ \Psi_c. \tag{3.3.4}$$

Ειδικότερα, αν ο q είναι ακέραιος, έχουμε

$$\Psi_{q^{-j-1}} = \Psi_{q^{-j-1}} \circ \Psi_{q^{-j}} \tag{3.3.5}$$

για κάθε $j \in \mathbb{Z}$.

Το επόμενο Λήμμα είναι άμεσο.

Λήμμα 3.3.3. *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$|x-y| = \sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)|, \tag{3.3.6}$$

άρα

$$|x-y|^2 \geqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)\right)^2. \tag{3.3.7}$$

Ένας από τους λόγους για τους οποίους οι συναρτήσεις τεμαχισμού είναι χρήσιμες, είναι η αλληλεπίδρασή τους με την ℓ_1 και την ℓ_2 νόρμα.

Λήμμα 3.3.4. (α) *Αν $|x-y| \leqslant c$, έχουμε*

$$|x-y|^2 \leqslant 4\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)\right)^2 \leqslant 4|x-y|^2 \tag{3.3.8}$$

(β) *Αν $|x-y| \geqslant c$, έχουμε*

$$c|x-y| \leqslant 4\sum_{j\in\mathbb{Z}} \left(\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)\right)^2 \leqslant 8c|x-y|. \tag{3.3.9}$$

Απόδειξη. Η δεξιά ανισότητα στην (3.3.8) προκύπτει από την (3.3.7). Για να δείξουμε την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι αν $|x-y| \leqslant c$ τότε το πολύ δύο από τους όρους $|\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)|$ είναι μη μηδενικοί, ενώ από την ισότητα του προηγούμενου Λήμματος ένας από αυτούς είναι μεγαλύτερος ή ίσος από $|x-y|/2$.

Για να αποδείξουμε την δεξιά ανισότητα στην (3.3.9) χρησιμοποιούμε την (3.3.6) και το γεγονός ότι, αφού $|\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)| \leqslant 2c$, έχουμε

$$(\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y))^2 \leqslant 2c|\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)|.$$

Για να αποδείξουμε την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι υπάρχουν το πολύ δύο δείκτες, έστω j_1 και j_2, για τους οποίους οι $u_j = |\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)|$ ικανοποιούν την $0 < u_j < c$. Άρα,

$$\sum_{j\neq j_1,j_2} u_j^2 \geqslant c \sum_{j\neq j_1,j_2} u_j.$$

Αν υποθέσουμε ότι $\sum_{j\neq j_1,j_2} u_j \geqslant |x-y|/4$ έχουμε το ζητούμενο. Αλλιώς, από την (3.3.6) έχουμε $u_{j_1} + u_{j_2} \geqslant 3|x-y|/4$, άρα

$$u_{j_1}^2 + u_{j_2}^2 \geqslant \frac{1}{2}(u_{j_1} + u_{j_2})^2 \geqslant \frac{9}{32}|x-y|^2 \geqslant \frac{c}{4}|x-y|.$$

□

Πόρισμα 3.3.5. (α) *Για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$ έχουμε*

$$|x-y|^2\mathbf{1}_{\{|x-y|<c\}} + c|x-y|\mathbf{1}_{\{|x-y|\geqslant c\}} \leqslant 4\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)|^2 \tag{3.3.10}$$

και

$$\sum_{j\in\mathbb{Z}} |\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)|^2 \leqslant |x-y|^2\mathbf{1}_{\{|x-y|<c\}} + 2c|x-y|\mathbf{1}_{\{|x-y|\geqslant c\}}. \tag{3.3.11}$$

(β) *Αν $s, t \in \ell_2$, έχουμε*

$$\sum_{i\geqslant 1}(s_i - t_i)^2\mathbf{1}_{\{|s_i-t_i|<c\}} + c\sum_{i\geqslant 1}|s_i - t_i|\mathbf{1}_{\{|s_i-t_i|\geqslant c\}} \leqslant 4\|\Psi_c(s) - \Psi_c(t)\|_2^2 \tag{3.3.12}$$

και

$$\|\Psi_c(s) - \Psi_c(t)\|_2^2 \leqslant \sum_{i\geqslant 1}(s_i - t_i)^2\mathbf{1}_{\{|s_i-t_i|<c\}} + 2c\sum_{i\geqslant 1}|s_i - t_i|\mathbf{1}_{\{|s_i-t_i|\geqslant c\}}. \tag{3.3.13}$$

Απόδειξη. Για να αποδείξουμε την (3.3.10) χρησιμοποιούμε την αριστερή ανισότητα της (3.3.8) αν $|x-y| \leqslant c$ και την αριστερή ανισότητα της (3.3.9) αλλιώς. Κατόπιν, η (3.3.12) έπεται αν προσθέσουμε την (3.3.10) ως προς j. Για να αποδείξουμε την (3.3.11) χρησιμοποιούμε την αριστερή ανισότητα της (3.3.8) αν $|x-y|\leqslant c$ και την αριστερή ανισότητα της (3.3.9) αλλιώς, και μετά παίρνουμε την (3.3.13) προσθέτοντας ως προς j. □

Η συνάρτηση τεμαχισμού Ψ_c απεικονίζει τον $\ell_2(\mathbb{N})$ στον $\ell_2\left(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\right)$. Στη συνέχεια, με B_2 συμβολίζουμε τη μοναδιαία μπάλα του $\ell_2(\mathbb{N})$ ή του $\ell_2\left(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\right)$. Όμοια χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό B_1 για τη μοναδιαία μπάλα του $\ell_1(\mathbb{N})$ ή του $\ell_1\left(\mathbb{N}\times\mathbb{Z}\right)$.

Πόρισμα 3.3.6. *Για κάθε $t\in\ell_2$ έχουμε*

$$\Psi_c\left(t+\varepsilon B_2+\frac{\varepsilon^2}{c}B_1\right)\subseteq\Psi_c(t)+4\varepsilon B_2 \tag{3.3.14}$$

και

$$\Psi_c^{-1}\left(\Psi_c(t)+\varepsilon B_2\right)\subseteq t+2\varepsilon B_2+\frac{4\varepsilon^2}{c}B_1. \tag{3.3.15}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε $s\in\ell^2$ και $t=s+u$ όπου $u\in\frac{\varepsilon^2}{c}B_1$. Γράφουμε $u=v+w$ όπου

$$v_i=u_i\cdot\mathbf{1}_{\{|u_i|<c\}},\qquad w_i=u_i\cdot\mathbf{1}_{\{|u_i|\geqslant c\}}. \tag{3.3.16}$$

Τότε,

$$\sum_{i\geqslant 1}v_i^2\leqslant c\sum_{i\geqslant 1}|u_i|\leqslant\varepsilon^2\quad\text{και}\quad\sum_{i\geqslant 1}|w_i|\leqslant\varepsilon^2/c.$$

Από την (3.3.13) έπεται τότε ότι $\|\Psi_c(t)-\Psi_c(s)\|_2^2\leqslant 4\varepsilon^2$, άρα

$$\Psi_c\left(s+\frac{\varepsilon^2}{c}B_1\right)\subseteq\Psi_c(s)+2\varepsilon B_2.$$

Αν τώρα $u\in\varepsilon B_2$ και τα v,w είναι όπως παραπάνω, έχουμε

$$\sum_{i\geqslant 1}v_i^2\leqslant\varepsilon^2\quad\text{και}\quad\sum_{i\geqslant 1}|w_i|\leqslant\sum i\geqslant 1u_i^2/c\leqslant\varepsilon^2/c,$$

και, όπως πριν,

$$\Psi_c\left(s+\varepsilon B_2\right)\subseteq\Psi_c(s)+2\varepsilon B_2.$$

Αυτό απόδυκνύει την (3.3.14).

Για να αποδείξουμε την (3.3.15), θεωρούμε $u\in\ell_2$ και την διάσπαση $u=v+w$ όπως πριν. Αν $t+u\in\Psi_c^{-1}\left(\Psi_c(t)+\varepsilon B_2\right)$ τότε $\|\Psi_c(t+u)-\Psi(t)\|_2\leqslant\varepsilon$, και χρησιμοποιώντας την (3.3.12) βλέπουμε ότι

$$\|v\|_2\leqslant 2\varepsilon\quad\text{και}\quad\|w\|_1\leqslant\frac{4\varepsilon^2}{c},$$

οπότε $t + u \in t + 2\varepsilon B_2 + (4\varepsilon^2/c)B_1$. $\square$

Πέρα από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις τεμαχισμού έχουν την αξιοσημείωτη συμπεριφορά του Πορίσματος 3.3.6, πολύ κεντρικό ρόλο στην δουλειά μας παίζει το γεγονός ότι «ελαττώνουν την $b(T)$».

Πρόταση 3.3.7. *Για κάθε $T \subset \ell_2$ ισχύει*

$$b\left(\Psi_c(T)\right) \leqslant b(T). \tag{3.3.17}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ανεξάρτητες ισοκατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli $(\varepsilon_i)_{i\geqslant 1}$ και $(\varepsilon_{i,j})_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}$. Οι διπλές ακολουθίες $(\varepsilon_{i,j})$ και $(\varepsilon_i\varepsilon_{i,j})$ έχουν την ίδια κατανομή, άρα

$$\begin{aligned} b\left(\Psi_c(T)\right) &= \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{i,j}\psi_{c,j}(t_i)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in\mathbb{N},j\in\mathbb{Z}}\varepsilon_i\varepsilon_{i,j}\psi_{c,j}(t_i)\right) \\ &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}_\varepsilon\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon_i\theta_i(t_i)\right)\right), \end{aligned} \tag{3.3.18}$$

όπου $\theta_i(x) = \sum_{j\in\mathbb{Z}}\varepsilon_{i,j}\psi_{c,j}(x)$ και ο συμβολισμός $\mathbb{E}_\varepsilon$ σημαίνει ότι υπολογίζουμε τη μέση τιμή μόνο ως προς $(\varepsilon_i)_{i\geqslant 1}$. Παρατηρούμε ότι οι θ_i είναι συστολές: έχουμε

$$|\theta_i(x) - \theta_i(y)| \leqslant \sum_{j\in\mathbb{Z}}|\psi_{c,j}(x) - \psi_{c,j}(y)| \leqslant |x-y|$$

από την (3.3.6). Τώρα, εφαρμόζοντας το θεώρημα σύγκρισης του Talagrand για ανελίξεις Bernoulli (βλέπε [18, Θεώρημα 2.1]) έχουμε

$$\mathbb{E}_\varepsilon\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon_i\theta_i(t_i)\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1}\varepsilon_i t_i\right) = b(T).$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την (3.3.18) παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Ο βασικός λόγος για την εισαγωγή των συναρτήσεων τεμαχισμού είναι για να αποδείξουμε την επόμενη Πρόταση. Η απόδειξη δείχνει πολύ καλά την χρησιμότητά τους.

Πρόταση 3.3.8. *Υπάρχει σταθερά $L > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε υποσύνολο T του ℓ_2 και για κάθε $\varepsilon > 0$,*

$$\varepsilon\sqrt{\log N\left(T, \varepsilon B_2 + Lb(T)B_1\right)} \leqslant Lb(T),$$

όπου $N(T,C)$ είναι ο μικρότερος αριθμός μεταφορών του C που η ένωσή τους καλύπτει τον T.

Παρατηρήστε ότι η Πρόταση 3.3.8 προκύπτει σχετικά εύκολα αν υποθέσουμε την εικασία Bernoulli. Πράγματι, από την αισότητα Sudakov (Λήμμα 2.3.2) έχουμε

$$\varepsilon\sqrt{\log N(T_1, \varepsilon B_1)} \leqslant L\gamma_2(T_1),$$

και αν $T \subseteq T_1 + T_2$ έχουμε

$$N\left(T, \varepsilon B_2 + Lb(T)B_1\right) \leqslant N(T_1, \varepsilon B_2)N\left(T_2, Lb(T)B_1\right) \leqslant N(T_1, \varepsilon B_2)$$

για κάθε $T_2 \subseteq Lb(T)B_1$.

Απόδειξη της Πρότασης 3.3.8. Για κάθε $c > 0$, με διαδοχικές εφαρμογές της Πρότασης 3.3.7 και του Θεωρήματος 3.2.4 παίρνουμε

$$b(T) \geqslant b\left(\Psi_c(T)\right) \geqslant \frac{1}{L}\min\left(\varepsilon\sqrt{\log N\left(\Psi_c(T), \varepsilon B_2\right)}, \frac{\varepsilon^2}{c}\right), \tag{3.3.19}$$

διότι, αν $m \leqslant N\left(\Psi_c(T), \varepsilon B_2\right)$ τότε μπορούμε να βρούμε σημεία $(t_\ell)_{\ell\leqslant m}$ στο $\Psi_c(T)$ με $\|t_\ell - t_{\ell'}\| \geqslant \varepsilon/2$ για $\ell \neq \ell'$, ενώ παράλληλα $\|t\|_\infty \leqslant c$ για κάθε $t \in \Psi_c(T)$. Έτσι, αν επιλέξουμε $c = \varepsilon^2/(2Lb(t))$, όπου η σταθερά L είναι όπως στην (3.3.19), παίρνουμε

$$b(T) \geqslant \min\left(\varepsilon\sqrt{\log N\left(\Psi_c(T), \varepsilon B_2\right)}, 2b(T)\right),$$

οπότε

$$Lb(T) \geqslant \varepsilon\sqrt{\log N\left(\Psi_c(T), \varepsilon B_2\right)},$$

και από την (3.3.15) έχουμε

$$N\left(T, 2\varepsilon B_2 + \frac{4\varepsilon^2}{c}B_1\right) \leqslant N\left(\Psi_c(T), \varepsilon B_2\right).$$

□

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1 θα βασιστεί σε κατάλληλη τροποποίηση της μεθόδου των διαμερίσεων, την οποία συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 2. Στο σχήμα που θα περιγράψουμε, θεωρούμε ένα σύνολο T εφοδιασμένο με μια ακολουθία μετρικών $(d_k)_{k\geqslant 0}$. Αυτή η ακολουθία είναι φθίνουσα: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει

$$d_{k+1} \leqslant d_k. \tag{3.3.20}$$

Συμβολίζουμε με $\Delta_k(A)$ την διάμετρο ενός συνόλου A ως προς τη μετρική d_k. Επίσης, συμβολίζουμε με $B_k(t, a)$ τη μπάλα, ως προς την d_k, με κέντρο t και ακτίνα a.

Θεωρούμε μια ακολουθία συναρτησοειδών $(F_k)_{k\geqslant 1}$ και υποθέτουμε ότι $F_{k+1} \leqslant F_k$. Επίσης, θεωρούμε μια σταθερά $\gamma > 1$.

Ορισμός 3.3.9. Λέμε ότι τα συναρτησοειδή ικανοποιούν την αυξητική συνθήκη (με παράμετρο γ) αν ικανοποιούνται τα εξής: Για κάθε $n \geqslant 0$ και $1 \leqslant k \leqslant j$ με

$$k\gamma \geqslant j \quad \text{και} \quad r^{-j}2^{n/2} \leqslant \frac{1}{r}, \tag{3.3.21}$$

αν θέσουμε $m = 2^n$ και θεωρήσουμε σημεία $(t_\ell)_{\ell \leqslant m}$ τέτοια ώστε

$$\begin{aligned} &\exists t \in T,\ \forall \ell \leqslant n, \quad t_\ell \in B\left(t, r^j\right) \\ &\forall \ell \neq \ell', \quad d_k\left(t_\ell, t_{\ell'}\right) \geqslant r^{-j-1}, \end{aligned} \tag{3.3.22}$$

και σύνολα $H_\ell \subseteq B_k\left(t_\ell, r^{-j-2}\right)$ για κάθε $\ell \leqslant m$, έχουμε

$$F_k\left(\cup_{\ell \leqslant m} H_\ell\right) \geqslant r^{-j-1}2^{n/2} + \min_{\ell \leqslant m} F_k(H_\ell). \tag{3.3.23}$$

Παρατηρήστε ότι, στην (3.3.23), τα συναρτησοειδή εξαρτώνται περισσότερο από τη μετρική που χρησιμοποιούμε παρά από το n.

Θεώρημα 3.3.10. *Με τις προηγούμενες υποθέσεις, αν επιπλέον $F_1(T) \leqslant 1/(2r^2)$, $\Delta_1(T) \leqslant 1/r$ και $r \geqslant 4$, μπορούμε να βρούμε αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$ διαμερίσεων του T και για κάθε $A \in \mathcal{A}_n$ έναν ακέραιο $j(A) \geqslant 1$, έτσι ώστε*

$$\forall A \in \mathcal{A}_n, \quad \Delta_{j(A)}(A) \leqslant 2r^{-j(A)}, \tag{3.3.24}$$

$$\forall t \in T, \quad \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/2} r^{-j(A_n(t))} \leqslant K(r, \gamma), \tag{3.3.25}$$

$$A \in \mathcal{A}_n, B \in \mathcal{A}_{n-1}, A \subseteq B \Longrightarrow j(B) \leqslant j(A) \leqslant j(B) + 1. \tag{3.3.26}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη μοιάζει με αυτήν του Θεωρήματος 2.2.2. Μια βασική διαφορά είναι ότι η κατασκευή που θα κάνουμε θα εξαρτάται από διαφορετική απόσταση σε κάθε βήμα. Μια δυσκολία είναι ότι η πληροφορία που έχουμε για κάποια σύνολα θεωρώντας την απόσταση d_k δεν μας λέει πολλά πράγματα για την συμπεριφορά τους ως προς την απόσταση d_{k+1}. Ξεπερνάμε αυτή τη δυσκολία εφαρμόζοντας την κατασκευή του Θεωρήματος 2.2.2 χρησιμοποιώντας όσο γίνεται περισσότερες φορές την ίδια απόσταση d_k πριν αλλάξουμε σε κάποια άλλη απόσταση $d_{k'}$ με $k' > k$. Όταν αλλάζουμε μετρική χάνουμε πολλή πληροφορία, ευτυχώς όμως, η πληροφορία που έχει συγκεντρωθεί όσο χρησιμοποιούσαμε την d_k είναι αρκετή για να μας δώσει ένα χρήσιμο τελικό συμπέρασμα.

Για κάθε $C \in \mathcal{A}_n$ ορίζουμε ένα σημείο t_C, ακεραίους $1 \leqslant k(C) \leqslant j(C)$, και αριθμούς $a_i(C) \geqslant 0$, $0 \leqslant i \leqslant 2$. Οι αριθμοί $a_i(C)$ παίζουν τον ίδιο ρόλο με τους αριθμούς $b_i(C)$ του

Θεωρήματος 2.2.2. Αποφεύγουμε να τους συμβολίσουμε με $b_i(C)$ εδώ, για να αποφύγουμε την σύγχυση με την ποσότητα $b(C)$. Ο ακέραιος $k(C)$ δείχνει ποιά είναι η απόσταση με την οποία δουλεύουμε. Γράφοντας $k = k(C)$ και $j = j(C)$ έχουμε

$$C \subseteq B_k(t_C, r^{-j}), \tag{3.3.27}$$

$$F_k(C) \leqslant a_0(C) \leqslant 3 - 2^{-n}, \tag{3.3.28}$$

$$\forall t \in C, \quad F_k(C \cap B_k(t, r^{-j-1})) \leqslant a_1(C), \tag{3.3.29}$$

$$\forall t \in C, \quad F_k(C \cap B_k(t, r^{-j-2})) \leqslant a_2(C), \tag{3.3.30}$$

$$a_0(C) - 2^{(n-1)/2} r^{-j(C)-1} - 2^{-n} \leqslant a_2(C) \leqslant a_0(C) \tag{3.3.31}$$

$$a_1(C) \leqslant a_0(C). \tag{3.3.32}$$

Απαιτούμε επίσης τις ακόλουθες τεχνικές συνθήκες:

$$2^{n/2} r^{-j} \leqslant \frac{1}{r} \tag{3.3.33}$$

και

$$U^{j-k} 2^{-n} \leqslant a_0(C) - a_1(C), \tag{3.3.34}$$

όπου $U = r^c$ και $c = 2\gamma/(\gamma-1)$. Διαισθητικά, η (3.3.34) εξασφαλίζει ότι ο λόγος j/k μένει κοντά στο 1, γιατί θέλουμε αυτός ο λόγος να είναι μικρότερος από γ ώστε να μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.3.33). Τέλος, θα ελέγχουμε ότι ικανοποιείται μία ακόμα συνθήκη: Αν $A \in \mathcal{A}_{n+1}$, $A \subset C \in \mathcal{A}_n$, τότε

$$\begin{aligned} Ua_0(A) + a_1(A) + a_2(A) + \frac{1}{4} 2^{n/2} r^{-j(A)-1} \\ \leqslant Ua_0(C) + a_1(C) + a_2(C) + \frac{1}{8} 2^{(n-1)/2} r^{-j(C)-1} + 2^{-n+1} U. \end{aligned} \tag{3.3.35}$$

Ξεκινάμε την κατασκευή ορίζοντας $\mathcal{A}_0 = \{T\}$, $a_1(T) = a_2(T) = F_1(T) \leqslant 1$, $a_0(T) = a_1(T) + 1 \leqslant 2 = 3 - 2^0$ και $k(T) = j(T) = 1$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται όλες οι σχέσεις που ζητάμε. Για το επαγωγικό βήμα, αν $C \in \mathcal{A}_n$ τότε θέτουμε $m = 2^{2^n}$, οπότε $mN_n \leqslant N_{n+1}$, και προχωράμε διαμερίζοντας το C σε m το πολύ κομμάτια. Θέτουμε $k = k(C)$, $j = j(C)$ και $\varepsilon = \min(2^{-n}, 2^{n/2}r^{-j-1})$.

Με επαγωγή ως προς ℓ, $1 \leqslant \ell \leqslant m$, ορίζουμε σημεία $t_\ell \in C$ και σύνολα $A_\ell \subset C$ ως εξής. Πρώτα, επιλέγουμε t_1 τέτοιο ώστε

$$F_k(C \cap B_k(t_1, r^{-j-2})) \geqslant \sup_{t\in C} F_k(C \cap B_k(t, r^{-j-2})) - \varepsilon.$$

Κατόπιν, θέτουμε $A_1 = C \cap B_k(t_1, r^{-j-1})$.

Υποθέτουμε ότι τα $t_1, \ldots, t_\ell$ και $A_1, \ldots, A_\ell$ έχουν οριστεί, και θέτουμε $D_\ell = C \setminus \bigcup_{1\leqslant p\leqslant \ell} A_p$. Αν $D_\ell = \emptyset$ τότε η διαδικασία τερματίζεται. Αλλιώς, επιλέγουμε $t_{\ell+1}$ στο D_ℓ έτσι ώστε

$$F_k(D_\ell \cap B_k(t_{\ell+1}, r^{-j-2})) \geqslant \sup_{t\in D_\ell} F_k(D_\ell \cap B_k(t, r^{-j-2})) - \varepsilon, \tag{3.3.36}$$

θέτουμε $A_{\ell+1} = D_\ell \cap B_k(t_{\ell+1}, r^{-j-1})$ και συνεχίζουμε. Αν η διαδικασία δεν έχει τερματιστεί την στιγμή που ορίζεται το t_{m-1}, ορίζουμε $A_m = D_{m-1} = C \bigcup_{\ell<m} A_\ell$. Με αυτόν τον τρόπο έχουμε διαμερίσει το C σε m το πολύ κομμάτια. Ας θεωρήσουμε ένα από αυτά, το A.

Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που $A = A_m$. Θέτουμε $j(A) = j = j(C)$, $k(A) = k = k(C)$, $t_A = t_C$,

$$a_0(A) = a_0(C), \quad a_1(A) = a_1(C) \quad \text{και} \quad a_2(A) = a_0(A) - 2^{n/2}r^{-j-1} + \varepsilon. \tag{3.3.37}$$

Είναι φανερό ότι οι (3.3.27)–(3.3.29) και οι (3.3.32), (3.3.34) ισχύουν για το A. Αφού $\varepsilon \leqslant 2^{n/2}r^{-j-1}$, είναι επίσης φανερό ότι η (3.3.31) ισχύει για το A. Από την (3.3.34) και από την $a_0(C) \leqslant 3$ έχουμε

$$U^{j-k}2^{-n} \leqslant 3,$$

άρα

$$\left(\frac{U}{r^2}\right)^j \leqslant 3 \cdot U^k 2^n r^{-2j} \leqslant U^k$$

από την (3.3.33) και την υπόθεση ότι $r \geqslant 4$. Αφού $U = r^c$, έπεται ότι

$$r^{j(c-2)} \leqslant r^{ck},$$

άρα $k \geqslant j(c-2)/c$, δηλαδή $\gamma k \geqslant j$. Τότε, χρησιμοποιώντας την (3.3.33) βλέπουμε ότι η (3.3.21) ισχύει, άρα, αν θέσουμε $D_0 = C$ και επιλέξουμε τυχόν σημείο $t = t_m \in A$, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την (3.3.23) για τα σύνολα $H_\ell = D_{\ell-1} \cap B_k(t_\ell, r^{-j-2})$. Συμπεραίνουμε πρώτα ότι

$$r^{-j-1}2^{n/2} \leqslant F_k(C) \leqslant F_1(T) \leqslant \frac{1}{2r^2},$$

άρα $r^{-j}2^{(n+1)/2} \leqslant 1/r$, και η (3.3.21) ισχύει για το A. Στη συνέχεια, όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.2, συμπεραίνουμε από τις (3.3.23) και (3.3.36) ότι, για κάθε $t \in A$,

$$F_k(A \cap B_k(t, r^{-j-2})) \leqslant F_k(C) - 2^{n/2}r^{-j-1} + \varepsilon,$$

και αφού $F_k(C) \leqslant a_0(C)$, από τον ορισμό του $a_2(A)$ παίρνουμε την (3.3.30) για το A.

Για να δείξουμε την (3.3.35), θέτουμε $w = 2^{n/2}r^{-j-1}$. Από τον ορισμό έχουμε $a_2(A) = a_0(C) - w + \varepsilon$, και αφού $-3/4 < -1/\sqrt{2}$, αφού $\varepsilon \leqslant 2^{-n} \leqslant 2^{-n}U$, έχουμε

$$\begin{aligned} Ua_0(A) + a_1(A) + a_2(A) + \frac{w}{4} &\leqslant Ua_0(C) + a_1(C) + a_0(C) - \frac{3}{4}w + \varepsilon \\ &\leqslant Ua_0(C) + a_1(C) + a_0(C) - \frac{w}{\sqrt{2}} + 2^{-n}U \\ &\leqslant Ua_0(C) + a_1(C) + a_2(C) + 2^{-n+1}U, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την αριστερή ανισότητα της (3.3.31) στην τελευταία ανισότητα. Έτσι τελειώνει η κατασκευή όταν $A = A_m$.

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $A = A_\ell$, όπου $\ell < m$. Τότε, έχουμε $j(A) = j(C) + 1$. Για να κρατήσουμε τον λόγο j/k κοντά στο 1, όπως απαιτείται από την (3.3.34), κάποιες φορές χρειάζεται να αυξήσουμε το k. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις.

Πρώτη περίπτωση. Έχουμε

$$(U + 2)a_1(C) \leqslant Ua_0(C) + a_1(C) + a_2(C). \tag{3.3.38}$$

Σε αυτήν την περίπτωση, η ιδέα είναι ότι αυτή η ανισότητα αρκεί για να δείξουμε την (3.3.35), άρα έχουμε το περιθώριο να αυξήσουμε το k όσο επιτρέπεται, να αλλάξουμε απόσταση και να χάσουμε αρκετή από την πληροφορία που περιέχεται στις (3.3.29) και (3.3.30). Θέτουμε $k(A) = j(A) = j + 1$, $t_A = t_\ell$ και

$$\begin{aligned} a_1(A) &= a_2(A) = a_1(C) \\ a_0(A) &= a_1(C) + 2^{-n-1}. \end{aligned}$$

Με αυτόν τον ορισμό προσπαθούμε να πάρουμε την (3.3.34) για το A. Από την (3.3.32) και την (3.3.28) έχουμε $a_0(A) \leqslant a_0(C) + 2^{-n-1} \leqslant 3 - 2^{-n-1}$. Επιπλέον, αφού $k(A) = j+1 \geqslant k$, χρησιμοποιώντας την (3.3.29) στην τελευταία ανισότητα έχουμε

$$F_{k(A)}(A) = F_{j+1}(A_\ell) \leqslant F_k(A_\ell) \leqslant F_k(C \cap B_k(t_\ell, r^{-j-1})) \leqslant a_1(C).$$

Άυτό αποδεικνύει την (3.3.28) για το A. Έπεται από την (3.3.38) ότι

$$Ua_0(A) + a_1(A) + a_2(A) \leqslant Ua_0(C) + a_1(C) + a_2(C) + 2^{-n-1}U,$$

και αφού έχουμε $\sqrt{2}/r \leqslant 1/2$ λόγω της $r \geqslant 4$, προκύπτει η (3.3.35) διότι $j(A) = j(C) = 1$. Τώρα, όλες οι συνθήκες (3.3.28)–(3.3.35) επαληθεύονται εύκολα.

Δεύτερη περίπτωση. Υποθέτουμε ότι η (3.3.38) δεν ισχύει, δηλαδή

$$(U + 2)a_1(C) > Ua_0(C) + a_1(C) + a_2(C),$$

την οποία ξαναγράφουμε στη μορφή

$$a_1(C) - a_2(C) \geqslant U(a_0(C) - a_1(C)). \tag{3.3.39}$$

Κατόπιν, θέτουμε $k(A) = k = k(C)$, $j(A) = j + 1$, $t_A = t_\ell$,

$$a_0(A) = a_2(A) = a_1(C), \quad a_1(A) = \min(a_1(C), a_2(C)),$$

οπότε $a_0(A) - a_1(A) \geqslant a_1(C) - a_2(C)$ και εφαρμόζοντας τις (3.3.39) και (3.3.34) για το C παίρνουμε την (3.3.34) για το A. Για να δείξουμε την (3.3.35) παρατηρούμε ότι $a_0(A) \leqslant a_1(C) \leqslant a_0(C)$ και ότι $a_1(A) + a_2(A) \leqslant a_1(C) + a_2(C)$, και ••οτι $\sqrt{2}/r \leqslant 1/2$. Οι άλλες σχέσεις ελέγχονται εύκολα.

Προσθέτοντας τις ανισότητες (3.3.35) παίρνουμε

$$\sum_{n \geqslant 1} 2^{n/2} r^{-j(A_n(t))} \leqslant K(r, \gamma),$$

απ' όπου έπεται η (3.3.25), διότι $j(T) = 1$. Τέλος, η (3.3.26) ισχύει από την κατασκευή. □

Εκτός από το Θεώρημα 3.3.10 θα χρειαστούμε ένα ακόμα τεχνικό αποτέλεσμα από το [24].

Θεώρημα 3.3.11. *Έστω (Ω, Σ, μ) ένας χώρος μέτρου και έστω T ένα αριθμήσιμο σύνολο μετρήσιμων συναρτήσεων στο Ω με $0 \in T$. Έστω $V \geqslant 2$. Θεωρούμε μια αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_n)$ του T, και για κάθε $A \in \mathcal{A}_n$ θεωρούμε $j(A) \in \mathbb{Z}$ και έναν αριθμό $\delta(A) \in \mathbb{R}^+$, με τις εξής ιδιότητες:*

$$\forall t \in T, \quad \lim_{n \to \infty} j(A_n(t)) = \infty, \tag{3.3.40}$$

$$A \in \mathcal{A}_n,\ B \in \mathcal{A}_{n-1},\ A \subset B \quad \Longrightarrow \quad j(A) \geqslant j(B), \tag{3.3.41}$$

$$A \subset B,\ A \in \mathcal{A}_n,\ B \in \mathcal{A}_{n'},\ j(A) = j(B) \quad \Longrightarrow \quad \delta(B) \leqslant 2\delta(A), \tag{3.3.42}$$

$$\forall s, t \in A,\ \int (s(\omega) - t(\omega))^2 \wedge V^{-2j(A)} d\mu(\omega) \leqslant \delta^2(A), \tag{3.3.43}$$

όπου $x \wedge y = \min(x, y)$. *Τότε, μπορούμε να γράψουμε* $T \subset T_1 + T_2 + T_3$ *όπου*

$$\gamma_2(T_1, d_2) \leqslant L \sup_{t \in T} \sum_{n \geqslant 0} 2^{n/2} \delta(A_n(t)), \tag{3.3.44}$$

$$\gamma_1(T_1, d_\infty) \leqslant L \sup_{t \in T} \sum_{n \geqslant 0} 2^n V^{-j(A_n(t))}, \tag{3.3.45}$$

$$\forall t \in T_2,\ \forall p \geqslant 1,\ \|t\|_p^p \leqslant L^p \sup_{t \in T} \sum V^{2j(A_{n+1}(t)) - pj(A_n(t))} \delta^2(A_{n+1}(t)), \tag{3.3.46}$$

όπου η άθροιση είναι πάνω από όλους τους $n \geqslant 0$ *για τους οποίους είτε* $n = 0$ *ή* $j(A_{n+1}(t)) > j(A_n(t))$. *Επιπλέον,*

$$\forall t \in T_3,\ \exists s \in T,\ |t| \leqslant 5|s|\,\mathbf{1}_{\{2|s| \geqslant V^{-j(T)}\}}. \tag{3.3.47}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.1. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $0 \in T$. Η σταθερά L_0 που θα εμφανιστεί στην απόδειξη είναι η σταθερά του Πορίσματος 3.2.3. Θεωρούμε $1 < p < 2$ και επιλέγουμε το γ έτσι ώστε $2\gamma = 1 + \frac{1}{2-p}$, άρα $\gamma > 1$ και $(2-p)\gamma < 1$. Σταθεροποιούμε $r \geqslant \max(4, L_0)$ τέτοιο ώστε ο $q = r^{2\gamma}$ να είναι ακέραιος. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $c(k) = r^{-2\gamma k} = q^{-k}$, και ορίζουμε μια απόσταση d_k στον ℓ_2 ως εξής:

$$d_k(s, t) = \|\Psi_{c(k)}(s) - \Psi_{c(k)}(t)\|_2.$$

Από τις (3.3.5) και (3.3.7) έπεται ότι $d_{k+1} \leqslant d_k$. Για κάθε υποσύνολο A του ℓ_2 ορίζουμε

$$F_k'(A) = b(\Psi_{c(k)}(A)).$$

Τότε, από την (3.3.5) και την Πρόταση 3.3.7 έχουμε $F_{k+1}' \leqslant F_k'$. Θεωρούμε σημεία $(t_\ell)_{\ell \leqslant m}$ όπως στην (3.3.22), και σύνολα $(H_\ell)_{\ell \leqslant m}$ με $H_\ell \subset B_k(t_\ell, r^{-j-2})$. Από τον ορισμό της d_k βλέπουμε ότι $\Psi_{c(k)}(H_\ell) \subset B(u_\ell, r^{-j-2})$, όπου $u_\ell = \Psi_{c(k)}(t_\ell)$ (και η μπάλα θεωρείται ως προς την ℓ_2 απόσταση). Επιπλέον,

$$u_\ell \in D = \{u : \|u\|_\infty \leqslant c(k) = q^{-k}\},$$

και $\Delta(D, d_\infty) \leqslant 2q^{-k}$. Έτσι, αν

$$2q^{-k} \leqslant 4r^{-j-1}/\sqrt{\log m}, \tag{3.3.48}$$

μπορούμε να εφαρμόσουμε την (3.2.5) με $a = r^{-j-1}$ για τα σύνολα $\Psi_{c(k)}(H_\ell)$ αντί για τα H_ℓ και τα σημεία u_ℓ αντί για τα t_ℓ. Αφού $\log\left(2^{2^n}\right)$, βλέπουμε ότι η (3.3.48) ισχύει με $m = 2^{2^n}$ όταν $q^{-k} \leqslant r^{-j-1}2^{-n/2}$, και αφού $2^{n-1} \leqslant \log\left(2^{2^n}\right)$ παίρνουμε

$$F_k'\left(\bigcup_{\ell \leqslant m} H_\ell\right) \geqslant \frac{1}{2L_0} r^{-j-1} 2^{n/2} + \min_{\ell \leqslant m} F_k'(H_\ell).$$

Η συνθήκη

$$q^{-k} = r^{-2\gamma k} \leqslant r^{-j-1}2^{-n/2}$$

είναι ισοδύναμη με την

$$2^{n/2} r^{-j+1} \leqslant r^{2(\gamma k - j)},$$

άρα ισχύει αν $\gamma k \geqslant j$ και $2^{n/2} r^{-j} \leqslant 1/r$. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι τα συναρτησοειδή $F_k(a) = 2L_0 F_k'(A)$ ικανοποιούν την αυξητική συνθήκη του Ορισμού 3.3.9. Παρατηρούμε τώρα ότι υπάρχει σταθερά $K(r)$ τέτοια ώστε

$$b(T) \leqslant \frac{1}{K(r)} \quad \Longrightarrow \quad F_1(T) \leqslant \frac{1}{2r^2}, \quad \Delta(T, d_2) < \frac{1}{4r^\gamma}, \tag{3.3.49}$$

όπου, αυτή τη φορά, συμβολίζουμε με d_2 την απόσταση που επάγεται από τη νόρμα του ℓ_2. Η (3.3.49) προκύπτει από το γεγονός ότι $F_1(T) \leqslant 2L_0 b(T)$ και από την (3.2.8). Έτσι, αν $b(T) \leqslant 1/K(r)$ όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.10 ικανοποιούνται, και μπορούμε να βρούμε μια αποδεκτή ακολουθία $(\mathcal{A}_n)$ του T και ακεραίους $j(A)$ που ικανοποιούν τις (3.3.24) έως (3.3.26).

Χρησιμοποιώντας την (3.3.12) με $c = c(k) = r^{-2\gamma k}$ βλέπουμε ότι: αν $s = (s_i)_{i \geqslant 1}$ και $t = (t_i)_{i \geqslant 1}$ τότε

$$\sum_{i \geqslant 1} (s_i - t_i)^2 \wedge c^2 \leqslant 4 d_k^2(s, t),$$

και αν θέσουμε $V = r^{2\gamma}$, αφού $c^2 = V^{-2k}$ παίρνουμε

$$\sum_{i \geqslant 1} (s_i - t_i)^2 \wedge V^{-2k} \leqslant 4 d_k^2(s, t).$$

Αφού $k(A) \leqslant j(A)$, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.3.11 ικανοποιούνται για το μέτρο αρίθμησης μ στο $\mathbb{N}$, με $\delta(A) = 2r^{-j(A)}$. Αφού $0 \in T$ και $\Delta(T, d_2) \leqslant 1/(4r^\gamma)$, έχουμε

$\|t\|_\infty < 1/(2r^\gamma) \leqslant 1/(2V)$, άρα $T \subset T_1 + T_2$. Από τις (3.3.44) και (3.3.25) έχουμε $\gamma_2(T_1, d_2) \leqslant LK(r.p)$. Επίσης,

$$\begin{aligned} V^{2j(A_{n+1}(t))-pj(A_n(t))}\delta^2(A_{n+1}(t)) &\leqslant Lr^{(4\gamma-2)j(A_{n+1}(t))-2p\gamma j(A_n(t))} \\ &\leqslant K(r,\gamma)r^{2((2-p)\gamma-1)j(A_n(t))} \end{aligned}$$

διότι $j(A_{n+1}(t)) \leqslant j(A_n(t)) + 1$ από την (3.3.26). Αφού $(2-p)\gamma - 1 < 0$, έπεται από την (3.3.46) ότι $\|t\|_p \leqslant K(r,p)$ για $t \in T_2$.

Δεδομένου ότι ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 3.3.1 είναι ομογενής, η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Κεφάλαιο 4

Το θεώρημα Bednorz-Latała

4.1 Εκτιμήσεις για ανελίξεις Bernoulli

Στο πρώτο μέρος αυτής της Ενότητας συγκεντρώνουμε γνωστές εκτιμήσεις για τα suprema των ανελίξεων Bernoulli και συζητάμε κάποιες από τις συνέπειές τους, οι οποίες θα παίξουν κρίσιμο ρόλο στην απόδειξη του κύριου αποτελέσματος.

Αρχίζουμε με το ακόλουθο απλό φράγμα για την διάμετρο του συνόλου δεικτών.

Λήμμα 4.1.1. *Για κάθε* $T \subseteq \ell_2(I)$ *έχουμε* $\Delta_2(T) \leqslant 4b(T)$.

Απόδειξη. Έστω $X_t := \sum_i t_i\varepsilon_i$ για $t \in T$. Για κάθε $t, s \in T$ έχουμε

$$\begin{aligned} b(T) &\geqslant \mathbb{E}(\max\{X_t, X_s\}) = \mathbb{E}(\max\{X_t - X_s, 0\}) \\ &= \frac{1}{2}\mathbb{E}(|X_t - X_s|) \geqslant \frac{1}{4}\|t-s\|_2. \end{aligned}$$

□

Από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in J} t_i\varepsilon_i\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I} t_i\varepsilon_i\right) \tag{4.1.1}$$

αν $J \subseteq I$. Το επόμενο θεώρημα σύγκρισης του Talagrand για τις ανελίξεις Bernoulli γενικεύει αυτήν την παρατήρηση (βλέπε Θεώρημα 2.1 στο [18] ή την απόδειξη του Θεωρήματος 4.12 στο [13]).

Θεώρημα 4.1.2. *Υποθέτουμε ότι οι* $\varphi_i : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $i \in I$ *είναι συστολές, δηλαδή* $|\varphi_i(x) - \varphi_i(y)| \leqslant |x - y|$, *και ότι* $\varphi_i(0) = 0$ *για όλα τα* $i \in I$. *Τότε, για κάθε* $T \subseteq \ell_2(I)$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I}\varphi_i(t_i)\varepsilon_i\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I}t_i\varepsilon_i\right).$$

Παρατήρηση 4.1.3. Αφού

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I}\varphi_i(t_i)\varepsilon_i\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I}(\varphi_i(t_i) - \varphi_i(0))\varepsilon_i\right),$$

μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση ότι $\varphi_i(0) = 0$ με την υπόθεση $(\varphi_i(0)) \in \ell_2(I)$, η οποία για συστολές είναι ισοδύναμη με την $(\varphi_i(t)) \in \ell_2(I)$ για κάποιο/όλα τα $t \in \ell_2(I)$.

Μια τυπική εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1.2 είναι η εξής.

Πόρισμα 4.1.4. *Υποθέτουμε ότι* $(f_{i,j})$ *και* (g_i) *είναι συναρτήσεις στο* $\mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε, για όλα τα* $i \in I$ *και* $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\sum_{j\in J}|f_{i,j}(x) - f_{i,j}(y)| \leqslant |g_i(x) - g_i(y)|.$$

Έστω T *ένα σύνολο τέτοιο ώστε* $(g_i(t_i)) \in \ell_2(I)$ *και* $(f_{i,j}(t_i)) \in \ell_2(I \times J)$ *για όλα τα* $t \in T$. *Τότε,*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{(i,j)\in I\times J}f_{i,j}(t_i)\varepsilon_{i,j}\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I}g_i(t_i)\varepsilon_i\right).$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ακολουθίες $(\varepsilon_{i,j})$ και (ε_i) είναι ανεξάρτητες. Παρατηρούμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{(i,j)\in I\times J}f_{i,j}(t_i)\varepsilon_{i,j}\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I}\left(\sum_{j\in J}f_{i,j}(t_i)\varepsilon_{i,j}\right)\varepsilon_i\right)$$

και για όλες τις τιμές των $\varepsilon_{i,j} \in \{-1, 1\}$ και $x, y \in \mathbb{R}$,

$$\left|\sum_{j\in J}f_{i,j}(x)\varepsilon_{i,j} - \sum_{j\in J}f_{i,j}(y)\varepsilon_{i,j}\right| \leqslant |g_i(x) - g_j(y)|.$$

Ο ισχυρισμός έπεται με εφαρμογή του Θεωρήματος 4.1.2. □

Το επόμενο θεώρημα περιγράφει τις ιδιότητες συγκέντρωσης των ανελίξεων Bernoulli (βλέπε [16] ή [12, Πόρισμα 4.10]).

Θεώρημα 4.1.5. *Έστω $(a_t)_{t\in T}$ μια ακολουθία πραγματικων αριθμών με δείκτες από ένα σύνολο $T\subseteq \ell_2(I)$. Υποθέτουμε ότι η*

$$S := \sup_{t\in T}\left(a_t + \sum_{i\in T} t_i\varepsilon_i\right)$$

ικανοποιεί την $|S|<\infty$ σχεδόν βεβαίως. Τότε,

$$\mathbb{P}\left(|S-\mathrm{med}(S)|\geqslant u\right)\leqslant 4\exp\left(-\frac{u^2}{16\sigma^2}\right)$$

για κάθε $u>0$, όπου $\sigma := \sup_{t\in T}\|t\|_2$. Ειδικότερα $\mathbb{E}(|S|)<\infty$, και

$$|\mathbb{E}(S)-\mathrm{med}(S)|\leqslant L\sigma$$

και

$$\mathbb{P}\left(|S-\mathbb{E}(S)|\geqslant u\right)\leqslant 2\exp\left(-\frac{u^2}{L_1\sigma^2}\right)$$

για κάθε $u>0$.

Συνέπεια του Θεωρήματος 4.1.5 είναι η επόμενη Πρόταση (βλέπε [11, Πόρισμα 1]).

Πρόταση 4.1.6. *Έστω $(Y_t^k)_{t\in T}$, $1\leqslant k\leqslant n$, μια ακολουθία ανεξάρτητων ισοκατανεμημένων ανελίξεων Bernoulli και έστω $\sigma := \sup_{t\in T}\|Y_t^1\|_2$. Τότε, για κάθε ανέλιξη $(Z_t)_{t\in T}$ ανρξάρτητη από τις Y_t^k, $t\in T$, $k\leqslant m$, έχουμε*

$$\mathbb{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m}\sup_{t\in T}(Z_t+Y_t^k)\right)\leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}(Z_t+Y_t^1)\right)+L_2\sigma\sqrt{\log m}.$$

Μια άλλη σημαντική ιδιότητα των ανελίξεων Bernoulli είναι η ακόλουθη ανισότητα τύπου Sudakov που διατυπώθηκε και αποδείχθηκε από τον Talagrand (βλέπε [18] ή [24, Θεώρημα 4.2.4]).

Θεώρημα 4.1.7. *Υποθέτουμε ότι τα διανύσματα $t_1,\ldots,t_m\in\ell_2(I)$ ικανοποιούν τις συνθήκες*

$$\forall \ell\neq\ell'\ \ \|t_\ell-t_{\ell'}\|_2\geqslant a\ \ \text{και}\ \ \forall\ell\ \|t_\ell\|_\infty\leqslant b \tag{4.1.2}$$

για κάποιους $a,b>0$. Τότε,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{\ell\leqslant m}\sum_{i\in I}t_{\ell,i}\varepsilon_i\right)\geqslant\frac{1}{L_3}\min\left\{a\sqrt{\log m},\frac{a^2}{b}\right\}.$$

Η επόμενη Πρόταση, που επίσης οφείλεται στον Talagrand, συνδυάζει τις ιδιότητες συγκέντρωσης με την ανισότητα τύπου Sudakov για ανελίξεις Bernoulli (βλέπε [24, Πρόταση 4.2.2]). Είναι το ανάλογο της αντίστοιχης πρότασης για Gaussian ανελίξεις.

Πρόταση 4.1.8. *Έστω $t_1, \ldots, t_m \in \ell_2(I)$ και $a, b > 0$ ώστε να ισχύει η (4.1.2). Τότε, για κάθε $\sigma > 0$ και για οποιαδήποτε σύνολα $H_\ell \subseteq B_{\ell_2(I)}(t_\ell, \sigma)$,*

$$b\left(\bigcup_{\ell \leqslant m} H_\ell\right) \geqslant \frac{1}{L_4} \min\left\{a\sqrt{\log m}, \frac{a^2}{b}\right\} - L_5 \sigma \sqrt{\log m} + \min_{\ell \leqslant m} b(H_\ell).$$

Η Πρόταση 4.1.8 σε συνδυασμό με ένα επιχείρημα εξάντλησης δίνει το επόμενο αποτέλεσμα διάσπασης για τις ανελίξεις Bernoulli, αντίστοιχο με εκείνο της περίπτωσης των Gaussian ανελίξεων.

Πόρισμα 4.1.9. *Υποθέτουμε ότι $\|t\|_\infty \leqslant b$ για όλα τα $t \in T$ και $b\sqrt{\log m} \leqslant \sigma$. Τότε, υπάρχουν σύνολα $C_1, \ldots, C_{m-1} \subseteq T$ τέτοια ώστε $\Delta_{\ell_2(I)}(C_i) \leqslant L_6 \sigma$ και για κάθε μη κενό σύνολο $D \subseteq T \setminus \cup_{k \leqslant m-1} C_k$ με $\Delta_{\ell_2(I)}(D) \leqslant \sigma$,*

$$b(D) \leqslant b(T) - \sigma\sqrt{\log m}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $L_6 = \max\{2, 2L_4(L_5+2)\}$ και $a = \frac{1}{2} L_6 \sigma$. Τότε,

$$\min\left\{a\sqrt{\log m}, \frac{a^2}{b}\right\} = a\sqrt{\log m} \geqslant L_4(L_5+2)\sigma\sqrt{\log m}.$$

Αν $T \subseteq \cup_{i \leqslant m-1} B(t_i, a)$ για κάποια $t_1, \ldots, t_m \in T$ τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Αλλιώς, επιλέγουμε επαγωγικά διανύσματα $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$. Για τον σκοπό αυτό θέτουμε $T_1 := T$ και $T_k := T \setminus \cup_{\ell < k} B(t_\ell, a)$ για $k > 1$, και επιλέγουμε $t_k \in T_k$ με τέτοιον τρόπο ώστε

$$b(T_k \cap B(t_k, \sigma)) \geqslant \sup_{t \in T_k} b(T_k \cap B(t, \sigma)) - \sigma\sqrt{\log m}.$$

Θέτουμε $C_k := T \cap B(t_k, a)$ για $k \leqslant m-1$. Τότε, προφανώς, $\Delta_{\ell_2(I)}(C_k) \leqslant L_6 \sigma$. Παίρνουμε τυχόν $D \subseteq T_m = T \setminus \cup_{k<m} C_k$ με $\Delta_{\ell_2(I)}(D) \leqslant \sigma$ και επιλέγουμε τυχόν $t_m \in D$, οπότε $D \subseteq B(t_m, \sigma) \cap T_m$. Από την κατασκευή εξασφαλίζουμε ότι η (4.1.2) ισχύει. Θέτουμε $H_\ell := B(t_\ell, \sigma) \cap T_\ell$ για $\ell < m$ και $H_m := D$. Τότε, από την επιλογή του t_ℓ έπεται ότι

$$\min_{1 \leqslant \ell \leqslant m} b(H_\ell) \geqslant b(D) - \sigma\sqrt{\log m}.$$

Έτσι, από την Πρόταση 4.1.8,

$$\begin{aligned} b(t) &\geqslant b\left(\bigcup_{\ell \leqslant m} H_\ell\right) \geqslant \frac{1}{L_4} \min\left\{a\sqrt{\log m}, \frac{a^2}{b}\right\} + b(D) - (L_5+1)\sigma\sqrt{\log m} \\ &\geqslant b(D) + \sigma\sqrt{\log m}. \end{aligned}$$

□

Το τελευταίο αποτέλεσμα σε αυτήν την Ενότητα είναι μια τροποποίηση της Πρότασης 1 από το [11], η οποία θα είναι κρίσιμη για την απόδειξη του κύριου αποτελέσματος διάσπασης, του Πορίσματος 4.4.3. Πριν το αναφέρουμε, εισάγουμε τον απαραίτητο συμβολισμό. Για $\emptyset \neq J \subseteq I$, $t \in \ell_2(I)$ και $T \subseteq \ell_2(I)$ ορίζουμε

$$\begin{aligned} t_J &:= (t_i)_{i \in J} \in \ell_2(J) \\ b_J(T) &:= \mathbb{E}\left(\sup_{t \in T} \sum_{i \in J} t_i \varepsilon_i\right) \\ d_J(t,s) &:= \|t_J - s_J\|_2, \quad t,s \in \ell_2(I) \\ B_J(t,a) &:= \{s \in \ell_2(I) : d_J(t,s) \leqslant a\}, \quad a \geqslant 0. \end{aligned}$$

Πρόταση 4.1.10. *Θεωρούμε έναν θετικό ακέραιο m, τους $b, c, \sigma > 0$ και $\lambda \geqslant 1$ που ικανοποιούν την $b\sqrt{\log m} \leqslant \lambda\sigma$, και $T \subseteq \ell_2(I)$ τέτοιο ώστε*

$$\forall t, s \in T \quad d_J(t,s) \leqslant c, \quad \|t - s\|_\infty \leqslant b. \tag{4.1.3}$$

Τότε, υπάρχουν $t_1, \ldots, t_m \in T$ τέτοια ώστε είτε

$$T \subseteq \bigcup_{\ell \leqslant m} B(t_\ell, \sigma)$$

ή

$$b_J\left(T \setminus \bigcup_{\ell \leqslant m} B_I(t_\ell, \sigma)\right) \leqslant b_I(T) - \left(\frac{1}{4\lambda L_3}\sigma - L_7 c\right)\sqrt{\log m}. \tag{4.1.4}$$

Η Πρόταση 4.1.10 και το Πόρισμα 4.1.9 μας παρέχουν δύο τρόπους για να διασπάσουμε το σύνολο δεικτών μιας ανέλιξης Bernoulli. Συνδυάζοντας αυτούς τους δύο τρόπους θα αποδείξουμε το βασικό αποτέλεσμα διάσπασης (Πόρισμα 4.4.3). Παρατηρήστε ότι στην Πρόταση 4.1.10 χρησιμοποιούμε δύο μετρικές d_I και d_J. Βασικό ρόλο παίζει εδώ το γεγονός ότι υποθέτουμε την διάμετρο του συνόλου T μικρή μόνο σε σχέση με την μικρότερη μετρική d_J και δείχνουμε ότι μπορεί να καλυφθεί από συγκεκριμένο αριθμό από μπάλες ως προς την μετρική d_I και να εναπομείνει ένα σύνολο για το οποίο ελέγχουμε την τιμή του b_J.

Απόδειξη. Αν $T \subseteq \cup_{\ell \leqslant m} B_I(t_\ell, \sigma)$ για κάποια $t_1, \ldots, t_m \in T$ ή $m = 1$ τότε δεν έχουμε κάτι να δείξουμε, θεωρούμε λοιπόν την αντίθετη περίπτωση. Μπορούμε επίσης να επιλέξουμε την καθολική σταθερά L_7 με τέτοιο τρόπο ώστε $L_3 L_7 \geqslant 1$, έτσι είναι αρκετό να θεωρήσουμε την περίπτωση $\sigma \geqslant 2c$ (αφού αλλιώς, $\frac{1}{4\lambda L_3}\sigma - L_7 c < 0$).

Αφού $b_J(T) = b_J(T-t)$ για κάθε $t \in \ell_2(I)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \in T$, ούτως ώστε

$$\|t_J\|_2 \leqslant c, \quad \|t\|_\infty \leqslant b \leqslant \frac{\lambda\sigma}{\sqrt{\log m}} \ \text{ για } t \in T.$$

Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\alpha < b_I(T) - \left(\frac{1}{4\lambda L_3} - L_7 c\right)\sqrt{\log m}, \tag{4.1.5}$$

όπου

$$\alpha := \inf_{t_1,\ldots,t_m \in T} b_J\left(T \setminus \bigcup_{\ell \leqslant m} B_I(t_\ell, \sigma)\right).$$

Έστω $\varepsilon_i^{(k)}$, $i \in J$, $k = 1, \ldots, m$, ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli, ανεξάρτητες από τις $(\varepsilon_i)_{i\in I}$. Ορίζουμε

$$Y_t^{(k)} := \sum_{i\in J} t_i \varepsilon_i^{(k)}, \quad Z_t := \sum_{i \in I\setminus J} t_i \varepsilon_i.$$

Τότε, για κάθε k,

$$b(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}(Z_t + Y_t^{(k)})\right),$$

επομένως η Πρόταση 4.1.6 μας δίνει

$$\mathbb{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m}\sup_{t\in T}(Z_t + Y_t^{(k)})\right) \leqslant b(T) + L_2 c\sqrt{\log m}. \tag{4.1.6}$$

Θέτουμε $T_1 = T$ και ορίζουμε τυχαίο σημείο $t_1 \in T_1$ που εξαρτάται μόνο από την $(\varepsilon_i^{(1)})_{i\in J}$, τέτοιο ώστε

$$Y_{t_1}^{(1)} > \sup_{t\in T_1} Y_t^{(1)} - c\sqrt{\log m}.$$

Συνεχίζουμε αυτήν την κατασκευή και επαγωγικά ορίζουμε τυχαία σημεία $t_k \in T$, $k \leqslant m$, που εξαρτώνται μόνο από την $(\varepsilon_i^{(\ell)})_{\ell\leqslant k, i\in J}$.

Αν τα $t_1, \ldots, t_k$ έχουν ήδη οριστεί, θέτουμε

$$T_k := T \setminus \bigcup_{\ell\leqslant m} B_I(t_\ell, \sigma)$$

και επιλέγουμε τυχαίο σημείο $t_k \in T$ τέτοιο ώστε

$$Y_{t_k}^{(k)} > \sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)} - c\sqrt{\log m}.$$

Η ανέλιξη $(Y_t^{(k)})$ είναι ανεξάρτητη από το σύνολο T_k και για $k \leqslant m$,

$$Y_{t_k}^{(k)} + c\sqrt{\log m} > \sup_{t \in T_k} Y_t^{(k)} \quad \text{και} \quad \mathbb{E}\left(\sup_{t \in T_k} Y_t^{(k)}\right) \geqslant \alpha.$$

Έχουμε

(4.1.7)

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m} \sup_{t\in T}(Z_t + Y_t^{(k)})\right) &\geqslant \mathbb{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m} Z_{t_k} + \min_{1\leqslant k\leqslant m} Y_{t_k}^{(k)}\right) \\
&\geqslant \mathbb{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m} Z_{t_k} + \alpha - c\sqrt{\log m} + \mathbb{E}\left(\min_{1\leqslant k\leqslant m}(\sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)} - \alpha\right)\right) \\
&\geqslant \mathbb{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m} Z_{t_k}\right) + \alpha - c\sqrt{\log m} + \mathbb{E}\left(\min_{1\leqslant k\leqslant m}(\sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)} - \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)}\right)\right).
\end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι για $1 \leqslant \ell < k \leqslant m$,

$$d_{I\setminus J}(t_k, t_\ell) \geqslant d_I(t_k, t_\ell) - d_J(t_k, t_\ell) \geqslant \sigma - c \geqslant \frac{\sigma}{2},$$

και ως εκ τούτου, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1.7 με $a = \sigma/2$ και την ανεξαρτησία των Z_t και των τυχαίων σημείων (t_k), παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left(\max_{1\leqslant k\leqslant m} Z_{t_k}\right) \geqslant \frac{1}{4\lambda L_3}\sigma\sqrt{\log m}. \tag{4.1.8}$$

Αφού η $(Y_t^{(k)})$ είναι ανεξάρτητη από το σύνολο T_k, το Θεώρημα 4.1.5 μας δίνει ότι: για κάθε $u > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)} - \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)}\right) \leqslant -u\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{u^2}{L_1 c^2}\right).$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{P}\left(\min_{k\leqslant m}\left(\sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)} - \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)}\right)\right) \leqslant -u\right) \leqslant \min\left\{1, 2m\exp\left(-\frac{u^2}{L_1 c^2}\right)\right\}.$$

Με ολοκλήρωση κατά μέρη παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left(\min_{k\leqslant m}\left(\sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)} - \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T_k} Y_t^{(k)}\right)\right)\right) \geqslant -Lc\sqrt{\log m}. \tag{4.1.9}$$

Από τις ανισότητες (4.1.6)–(4.1.9) προκύπτει η (4.1.5), και η απόδειξη είναι πλήρης. □

4.2 Διαμερίσεις

Μία από τις βασικές δυσκολίες της απόδειξης του Θεωρήματος 1.1.2 είναι ότι δεν υπάρχει κάποιος κανονικός τρόπος για να διασπάσουμε το σύνολο δεικτών μιας ανέλιξης Bernoulli. Ο Talagrand συνέδεσε το πρόβλημα αυτό με την κατασκευή κατάλληλης ακολουθίας διαμερίσεων (βλέπε το Θεώρημα 3.3.11 στο Κεφάλαιο 3). Το Θεώρημα 4.2.1 και η απόδειξή του βασίζονται στις ιδέες του Talagrand. Το κύριο νέο συστατικό είναι η εισαγωγή των συνόλων $I_n(A)$, τα οποία θα μας επιτρέπουν να «αφαιρούμε» από την ανέλιξη κάποιες τυχαίες μεταβλητές Bernoulli στην διάρκεια μιας επαγωγικής κατασκευής διαμερίσεων και να χρησιμοποιούμε αποτελεσματικά την Πρόταση 4.1.10.

Υπενθυμίζουμε ότι μια αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ διαμερίσεων του T λέγεται αποδεκτή αν $\mathcal{A}_0 = \{T\}$ και $\mathrm{card}(\mathcal{A}_n) \leqslant N_n := 2^{2^n}$. Για κάθε $t \in T$ συμβολίζουμε με $A_n(t)$ το μοναδικό σύνολο της $\mathcal{A}_n$ που περιέχει το t. Σε κάθε σύνολο $A \in \mathcal{A}_n$ αντιστοιχίζουμε ένα σημείο $\pi_n(A)$ και έναν ακέραιο $j_n(A)$. Για να απλοποιήσουμε τον συμβολισμό θέτουμε $j_n(t) := j_n(A_n(t))$ και $\pi_n(t) := \pi_n(A_n(t))$. Το νέο στοιχείο στο επόμενο θεώρημα είναι η εισαγωγή των συνόλων $I_n(A)$.

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω $M > 0$, $r \geqslant 2$, και έστω $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ μια αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων του $T \subseteq \ell_2(I)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $A \in \mathcal{A}_n$ υπάρχει ένας ακέραιος $j_n(A)$ και ένα σημείο $\pi_n(A) \in T$ που ικανοποιούν τα εξής:*

(i) $\|t-s\|_2 \leqslant \sqrt{M} r^{-j_0(T)}$ *για κάθε $t, s \in T$.*

(ii) *Αν $n \geqslant 1$, $A \in \mathcal{A}_n$, $A' \in \mathcal{A}_{n-1}$ και $A \subseteq A'$, τότε*

(α) *είτε $j_n(A) = j_{n-1}(A')$ και $\pi_n(A) = \pi_{n-1}(A')$ ή*

(β) $j_n(A) > j_{n-1}(A')$, $\pi_n(A) \in A'$ *και*

$$\sum_{i\in I_n(A)} \{(t_i - \pi_n(A)_i)^2, r^{-2j_n(A)}\} \leqslant M 2^n r^{-2j_n(A)}$$

για κάθε $t \in A$, όπου

$$I_n(A) = I_n(t) := \{i \in I : |\pi_{k+1}(t)_i - \pi_k(t)_i| \leqslant r^{-j_k(t)} \text{ για } 0 \leqslant k \leqslant n-1\}.$$

Τότε, υπάρχουν σύνολα T_1, T_2 τέτοια ώστε $T \subseteq T_1 + T_2$ και

$$\sup_{t^1\in T_1} \|t^1\|_1 \leqslant LM \sup_{t\in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n r^{-j_n(t)} \quad \text{και} \quad \gamma_2(T) \leqslant L\sqrt{M} \sup_{t\in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n r^{-j_n(t)}. \tag{4.2.1}$$

Παρατήρηση 4.2.2. Παρατηρούμε ότι αν $t, s \in A \in \mathcal{A}_n$ τότε για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n$ έχουμε $A_k(t) = A_k(s)$, και ως συνέπεια αυτού, $j_k(t) = j_k(s)$, $\pi_k(t) = \pi_k(s)$ και $I_n(t) = I_n(s)$. Ως εκ τούτου, ο ορισμός του $I_n(A)$ δεν εξαρτάται από την επιλογή του $t \in A$.

Απόδειξη. Προφανώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\sup_{t\in T}\sum_{n\geqslant 0} 2^n r^{-j_n(t)} < \infty,$$

το οποίο ειδικότερα συνεπάγεται ότι $\lim_{n\to\infty} j_n(t) = \infty$. Για $t \in T$, $i \in I$, ορίζουμε

$$m(t,i) := \inf\{n \geqslant 0 : |\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i| > r^{-j_n(t)}\},$$

οπότε $I_n(t) = \{i : m(t,i) \geqslant n\}$ για κάθε $n \geqslant 0$.

Παρατηρούμε ότι

$$|\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i| \leqslant r^{-j_n(t)} I_{\{j_{n+1}(t)>j_n(t)\}} \quad \text{για } 0 \leqslant n < m(t,i). \tag{4.2.2}$$

Αφού η $j_n(t)$ είναι αύξουσα ακολουθία ακεραίων, για i τέτοιο ώστε $m(t,i) = \infty$ το όριο $\pi_\infty(t)_i := \lim_{n\to\infty} \pi_n(t)_i$ υπάρχει. Επομένως, μπορούμε να ορίσουμε $\pi(t)$ από τον τύπο

$$\pi(t)_i := \pi_{m(t,i)}(t)_i, \;\; t \in T, i \in I.$$

Θέτουμε

$$T_1 := \{t - \pi(t) : t \in T\} \quad \text{και} \quad T_2 := \{\pi(t) : t \in T\},$$

οπότε, προφανώς, $T \subseteq T_1 + T_2$.

Για να εκτιμήσουμε την $\|t - \pi(t)\|_1$ ορίζουμε

$$\tau(t,i) := \inf\{n \geqslant 0 : |\pi_n(t)_i - t_i| > \tfrac{1}{2} r^{-j_n(t)}\}, \quad t \in T, i \in I,$$

και

$$J_n(t) := \{i \in I : \tau(t,i) = n\}.$$

Παρατηρούμε ότι $\tau(t,i) \leqslant m(t,i) + 1$ και αν $\tau(t,i) = \infty$ τότε $\pi(t)_i = \pi_\infty(t)_i = t_i$. Επομένως, έχουμε

$$\|t - \pi(t)\|_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{i\in J_n(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i|.$$

Από την 4.2.2 παίρνουμε

$$|\pi_0(t) - \pi_{m(t,i)}(t)_i| \leqslant \sum_{n=0}^{m(t,i)-1} |\pi_{n+1}(t)_i - \pi_n(t)_i| \leqslant \sum_{j=j_0(t)}^{\infty} r^{-j} \leqslant 2r^{-j_0(t)},$$

και επιπλέον, για $i \in J_0(t)$ ισχύει ότι $|t_i - \pi_0(t)_i| \geqslant \frac{1}{2} r^{-j_0(t)}$. Έτσι,

$$\begin{aligned}\sum_{i\in J_0(t)} |t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| &\leqslant 5 \sum_{i\in J_0(t)} |t_i - \pi_0(t)_i| \leqslant 10 r^{j_0(t)} \sum_{i\in I} |t_i - \pi_0(t)_i|^2 \\ &\leqslant 10 M r^{-j_0(t)},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα έπεται από την υπόθεση (i).

Αν $i \in J_n(t)$, $n \geqslant 1$ τότε $m(t,i) \geqslant n-1$ και

$$\begin{aligned}
|t_i - \pi_{m(t,i)}(t)_i| &\leqslant |t_i - \pi_{n-1}(t)_i| + \sum_{k=n-1}^{m(t,i)-1} |\pi_{k+1}(t)_i - \pi_k(t)_i| \\
&\leqslant \frac{1}{2} r^{-j_{n-1}(t)} + \sum_{k=n-1}^{\infty} r^{-j_k(t)} I_{\{j_{k+1}(t) > j_k(t)\}} \\
&\leqslant \frac{1}{2} r^{-j_{n-1}(t)} + \sum_{\ell=j_{n-1}(t)}^{\infty} r^{-\ell} \leqslant 3 r^{-j_{n-1}(t)}.
\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|t - \pi(t)\|_1 \leqslant 10 M r^{-j_0(t)} + 3 \sum_{n=1}^{\infty} r^{-j_{n-1}(t)} \mathrm{card}(J_n(t)).$$

Για να εκτιμήσουμε τον $\mathrm{card}(J_n(t))$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $j_n(t) > j_{n-1}(t)$, αφού αλλιώς η υπόθεση (ii) (α) δίνει $\pi_n(t) = \pi_{n-1}(t)$ και $\mathrm{card}(J_n(t)) = 0$. Για $i \in J_n(t)$ έχουμε είτε $i \in I_n(t)$ ή $m(t,i) = n-1$. Αφού $|\pi_n(t)_i - t_i| > \frac{1}{2} r^{-j_n(t)}$ για $i \in J_n(t)$ παίρνουμε από την υπόθεση (ii) (β)

$$\begin{aligned}
\frac{1}{4} r^{-2j_n(t)} \mathrm{card}(J_n(t) \cap I_n(t)) &\leqslant \sum_{i \in I_n(t)} \min\{|t_i - \pi_n(t)_i|^2, r^{-2j_n(t)}\} \\
&\leqslant M 2^n r^{-2j_n(t)}.
\end{aligned}$$

Αν $m(t,i) = n-1$ τότε $|\pi_n(t)_i - \pi_{n-1}(t)_i| > r^{-j_{n-1}(t)}$. Έστω $n' = \inf\{k \leqslant n-1 : j_k(t) = j_{n-1}(t)\}$. Τότε, αφού $\pi_n(t) \in A_{n-1}(t) \subseteq A_{n'}(t)$, $j_{n-1}(t) = j_{n'}(t) > j_{n'-1}(t)$ και $\pi_{n-1}(t) = \pi_{n'}(t)$, χρησιμοποιώντας την υπόθεση (ii) (β) αυτή τη φορά για n', παίρνουμε

$$\begin{aligned}
r^{-2j_{n-1}(t)} \mathrm{card}(\{i : m(t,i) = n-1\}) &\leqslant \sum_{i \in I_{n'}(t)} \min\{|\pi_n(t)_i - \pi_{n-1}(t)_i|^2, r^{-2j_{n-1}(t)}\} \\
&\leqslant M 2^{n-1} r^{-2j_{n-1}(t)}.
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\mathrm{card}(J_n(t)) \leqslant \mathrm{card}(J_n(t) \cap I_n(t)) + \mathrm{card}(\{i : m(t,i) = n-1\}) \leqslant 9 M 2^{n-1}$$

και

$$\|t - \pi(t)\|_1 \leqslant 10 M r^{-j_0(t)} + 27 M \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} r^{-j_{n-1}(t)} \leqslant 37 M \sup_{t \in T} \sum_{n=0}^{\infty} 2^n r^{-j_n(t)}.$$

Για να φράξουμε την $\gamma_2(T_2)$ θα ορίσουμε κατάλληλα σύνολα $U_n \subseteq \ell_2(I)$ τέτοια ώστε $\mathrm{card}(U_0) = 1$, $\mathrm{card}(U_n) \leqslant N_n$ για $n \geqslant 0$ και θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 2.2.5 για να πάρουμε

$$\gamma_2(T_2) \leqslant L \sup_{t\in T} \sum_{n-0}^{\infty} 2^{n/2} \mathrm{dist}(\pi(t), U_n). \tag{4.2.3}$$

Για το σκοπό αυτό ορίζουμε

$$U_n := \{\pi_{m(t,i)\wedge n}(t) : t \in T\},$$

όπου $\pi_{m(t,i)\wedge n}(t) = (\pi_{m(t,i)\wedge n}(t)_i)_{i\in I}$. Παρατηρούμε ότι για $s \in A_n(t)$ έχουμε $\pi_k(s) = \pi_k(t)$ για $k \leqslant n$ και $\{i : m(t,i) \geqslant n\} = \{i : m(s,i) \geqslant n\}$, άρα $m(t,i) \wedge n = m(s,i) \wedge n$. Ως εκ τούτου, $\mathrm{card}(U_n) = \mathrm{card}(\mathcal{A}_n) \leqslant N_n$ για $n \geqslant 1$ και $U_0 = \{\pi_0(T)\}$.

Για να εκτιμήσουμε την $\mathrm{dist}(\pi(t), U_n)$, παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\mathrm{dist}(\pi(t), U_n) \leqslant \|\pi(t) - \pi_{m(t,i)\wedge n}(t)\|_2 \leqslant \sum_{\ell=n}^{\infty} \|(\pi_{\ell+1}(t) - \pi_\ell(t))\mathbf{1}_{\{m(t,i)\geqslant \ell+1\}}\|_2.$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned}
\|\pi(t) - \pi_{m(t,i)\wedge n}(t)\|_2^2 &= \sum_{i\in I} |\pi(t)_i - \pi_{m(t,i)\wedge n}(t)_i|^2 \\
&= \sum_{i\in I} |\pi_{m(t,i)}(t)_i - \pi_{m(t,i)\wedge n}(t)_i|^2 \\
&= \sum_{\{i:m(t,i)\geqslant n+1\}} |\pi_{m(t,i)}(t)_i - \pi_n(t)_i|^2 \\
&= \|(\pi_{\ell+1}(t) - \pi_\ell(t))\mathbf{1}_{\{m(t,i)\geqslant n+1\}}\|_2^2,
\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}
\|\pi(t) - \pi_{m(t,i)\wedge n}(t)\|_2 &\leqslant \|(\pi_{\ell+1}(t) - \pi_\ell(t))\mathbf{1}_{\{m(t,i)\geqslant n+1\}}\|_2 \\
&\leqslant \sum_{\ell=n}^{m(t,i)-1} \|(\pi_{\ell+1}(t) - \pi_\ell(t))\mathbf{1}_{\{m(t,i)\geqslant \ell+1\}}\|_2 \\
&\leqslant \sum_{\ell=n}^{\infty} \|(\pi_{\ell+1}(t) - \pi_\ell(t))\mathbf{1}_{\{m(t,i)\geqslant \ell+1\}}\|_2.
\end{aligned}$$

Η συνθήκη $m(t,i) \geqslant \ell+1$ συνεπάγεται ότι $|\pi_{\ell+1}(t)_i - \pi_\ell(t)_i| \leqslant r^{-j_\ell(t)}$. Αν $j_{\ell+1}(t) = j_\ell(t)$

τότε $\pi_{\ell+1}(t)=\pi_\ell(t)$, αλλιώς $\pi_{\ell+1}(t)\in A_\ell(t)$ και από την υπόθεση (ii) (β) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|(\pi_{\ell+1}(t)-\pi_\ell(t))\mathbf{1}_{\{m(t,i)\geqslant \ell+1\}}\|_2^2 &\leqslant \sum_{i\in I_{\ell+1}(t)}\min\{|\pi_{\ell+1}(t)_i-\pi_\ell(t)_i|^2, r^{-2j_\ell(t)}\}\\ &\leqslant M2^\ell r^{-2j_\ell(t)}.\end{aligned}$$

Επομένως,

$$\mathrm{dist}(\pi(t),U_n)\leqslant \sum_{\ell=n}^{\infty}\sqrt{M}2^{\ell/2}r^{-j_\ell(t)}$$

και

$$\sum_{n=0}^{\infty}2^{n/2}\mathrm{dist}(\pi(t),U_n)\leqslant \sqrt{M}\sum_{\ell=0}^{\infty}2^{\ell/2}r^{-j_\ell(t)}\sum_{n=0}^{\ell}2^{n/2}\leqslant L\sqrt{M}\sum_{\ell=0}^{\infty}2^\ell r^{-j_\ell(t)}.$$

Τώρα, η εκτίμηση για την $\gamma_2(T_2)$ έπεται από την (4.2.3). □

4.3 Συναρτήσεις τεμαχισμού

Σε αυτήν την ενότητα, με βάση την ιδέα των αποκαλούμενων «συναρτήσεων τεμαχισμού», ορίζουμε συναρτησοειδή που θα παίξουν βασικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2. Οι συναρτήσεις τεμαχισμού εισήχθησαν από τον Talagrand στο [18], που τις χρησιμοποίησε για να αποδείξει την ασθενή μορφή της Εικασίας Bernoulli που συζητήσαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο.

Για $u<v$ ορίζουμε την αύξουσα συνάρτηση $\varphi_{u,v}$ μέσω της

$$\varphi_{u,v}(x):=\min\{v,\max\{x,u\}\}-\min\{v,\max\{0,u\}\}.$$

Με άλλα λόγια, η $\varphi_{u,v}$ είναι η μοναδική συνεχής συνάρτηση η οποία είναι σταθερή στις ημιευθείες $(-\infty,u]$ και $[v,\infty)$, έχει κλίση 1 στο διάστημα $[u,v]$, και παίρνει την τιμή 0 στο 0. Παρατηρούμε ότι $|\varphi_{u,v}(x)|\leqslant v-u$, $|\varphi_{u,v}(x)-\varphi_{u,v}(y)|\leqslant \min\{|x-y|,v-u\}$, και

$$\varphi_{u_0,u_k}(x)=\sum_{\ell=1}^{k}\varphi_{u_{\ell-1},u_\ell}(x)\quad \text{για } u_0<u_1<\cdots<u_k. \tag{4.3.1}$$

Οι $\varphi_{u_i,u_{i+1}}$ ονομάστηκαν *συναρτήσεις τεμαχισμού* από τον Talagrand γιατί το διάστημα $[u_0,u_k]$ «τεμαχίζεται» σε μικρότερα διαστήματα $[u_i,u_{i+1}]$ τα οποία είναι διαδοχικά, η $\varphi_{u_i,u_{i+1}}$ μεταβάλλεται μόνο στο διάστημα $[u_i,u_{i+1}]$, και παράλληλα ισχύει η (4.3.1).

Λήμμα 4.3.1. *Για κάθε* $u_0 < u_1 < \cdots < u_k$ *και* $x, y \in \mathbb{R}$ *έχουμε*

$$\sum_{\ell=1}^{k} |\varphi_{u_{\ell-1},u_\ell}(x) - \varphi_{u_{\ell-1}.u_\ell}(y)| = |\varphi_{u_0,u_k}(x) - \varphi_{u_0,u_k}(y)| \leqslant |x-y|. \tag{4.3.2}$$

Ειδικότερα,

$$\sum_{\ell=1}^{k} |\varphi_{u_{\ell-1},u_\ell}(x)| \leqslant |x| \quad \textit{και} \quad \sum_{\ell=1}^{k} \varphi_{u_{\ell-1},u_\ell}(x)^2 \leqslant x^2. \tag{4.3.3}$$

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x > y$. Τότε $\varphi_{u,v}(x) \geqslant \varphi_{u,v}(y)$ για κάθε $u < v$ και η (4.3.2) έπεται από την (4.3.1). Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει εύκολα αν πάρουμε $y = 0$. □

Έστω $G_i = \{u_{i,0} < u_{i,1} < \cdots < u_{i,k_i}\}$, $i \in I$ μια οικογένεια πεπερασμένων υποσυνόλων του $\mathbb{R}$. Γράφουμε $\mathcal{G} = (G_i)_{i\in I}$. Για $t \in \ell_2(I)$ ορίζουμε την ανέλιξη Bernoulli

$$X_t(G_i, i) := \sum_{\ell=1}^{k_i} \varphi_{u_{i,\ell-1},u_{i,\ell}}(t_i)\varepsilon_{i,\ell}$$

και θέτουμε

$$X_t(\mathcal{G}) := \sum_{i\in I} X_t(G_i, i) = \sum_{i\in I}\sum_{\ell=1}^{k_i} \varphi_{u_{i,\ell-1},u_{i,\ell}}(t_i)\varepsilon_{i,\ell}.$$

Παρατηρούμε ότι για $t \in \ell_2(I)$ από την (4.3.3) παίρνουμε

$$\sum_{i\in I}\sum_{\ell=1}^{k_i} |\varphi_{u_{i,\ell-1},u_{i,\ell}}(t_i)|^2 \leqslant \sum_{i\in I} t_i^2 < \infty$$

και η $X_t(\mathcal{G})$ είναι καλά ορισμένη. Θεωρούμε επίσης την κανονική μετρική $d_{\mathcal{G}}$ που συνδέεται με την ανέλιξη $X_t(\mathcal{G})$, που δίνεται από την

$$d_{\mathcal{G}}(s,t)^2 := \mathbb{E}(|X_t(\mathcal{G}) - X_s(\mathcal{G})|^2) = \sum_{i\in I}\sum_{\ell=1}^{k_i} |\varphi_{u_{i,\ell-1},u_{i,\ell}}(t_i) - \varphi_{u_{i,\ell-1},u_{i,\ell}}(s_i)|^2.$$

Πρόταση 4.3.2. (α) *Για κάθε οικογένεια πεπερασμένων συνόλων* $\mathcal{G} = (G_i)_{i\in I}$ *και* $T \subseteq \ell_2(I)$ *έχουμε*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t(\mathcal{G})\right) \leqslant b(T) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I} t_i\varepsilon_i\right).$$

(β) *Αν* $\mathcal{G} = (G_i)_{i\in I}$ *και* $\mathcal{G}' = (G'_i)_{i\in I}$ *είναι δύο οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε, για κάθε* $i \in I$,

$$G_i \subseteq G'_i, \quad \max_i G_i = \max_i G'_i \quad \textit{και} \quad \min_i G_i = \min_i G'_i, \tag{4.3.4}$$

τότε για κάθε $T \subseteq \ell_2(I)$,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t(\mathcal{G}')\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t(\mathcal{G})\right).$$

Απόδειξη. Το (α) έπεται εύκολα από το Πόρισμα 4.1.4 και την (4.3.2). Για να δείξουμε το (β) γράφουμε $G_i = \{u_{i,0} < u_{i,1} < \cdots < u_{i,k_i}\}$ και $[u_{i,\ell-1}, u_{i,\ell}] \cap G'_i = \{s_{i,\ell,0} < s_{i,\ell,1} < \cdots < s_{i,\ell,k_{i,\ell}}\}$. Τότε,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t(\mathcal{G}')\right) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\in I}\sum_{\ell=1}^{k_i}\sum_{j=1}^{k_{i,\ell}} \varphi_{s_{i,\ell,j-1},s_{i,\ell,j}}(t_i)\varepsilon_{i,\ell,j}\right),$$

και ο ισχυρισμός έπεται από το Πόρισμα 4.1.4 και την (4.3.2). □

Η ανισότητα (4.3.3) μας δίνει

$$d_{\mathcal{G}}(s,t) \leqslant \|s-t\|_2 \quad \text{για } s,t \in \ell_2(I). \tag{4.3.5}$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει πώς να συγκρίνουμε την $d_{\mathcal{G}}$ με την $d_{\mathcal{G}'}$.

Πρόταση 4.3.3. *Εστω* $\mathcal{G} = (G_i)_{i\in I}$ *και* $\mathcal{G}' = (G'_i)_{i\in I}$ *δύο οικογένειες πεπερασμένων υποσυνόλων του* $\mathbb{R}$ *τέτοιες ώστε* $G_i \subseteq G'_i$ *και* $G_i = \{u_{i,0} < u_{i,1} < \cdots < u_{i,k_i}\}$ *για κάθε* $i \in I$.

(i) *Αν* $\max_i G_i = \max_i G'_i$ *και* $\min_i G_i = \min_i G'_i$ *τότε* $d_{\mathcal{G}'} \leqslant d_{\mathcal{G}}$.

(ii) *Αν* $\mathrm{card}(G'_i \cap (u_{i,\ell-1}, u_{i,\ell}]) \leqslant q$ *για κάθε* $i \in I$, $1 \leqslant \ell \leqslant k_i$, *τότε* $d_{\mathcal{G}} \leqslant \sqrt{q}\, d_{\mathcal{G}'}$.

Απόδειξη. Η (i) έπεται από την (4.3.2) και από την ανισότητα

$$\sum_\ell |a_\ell|^2 \leqslant \left(\sum_\ell |a_\ell|\right)^2.$$

Για να δείξουμε την (ii) χρησιμοποιούμε πάλι την (4.3.2) και την

$$\left(\sum_{\ell=1}^k |a_\ell|\right)^2 \leqslant k\sum_{\ell=1}^k |a_\ell|^2.$$

□

Είμαστε τώρα έτοιμοι να ορίσουμε κάποια συναρτησοειδή και τις αντίστοιχες μετρικές. Έστω $r \geqslant 4$ ένας ακέραιος που θα επιλεγεί αργότερα. Για $x \in \mathbb{R}$ και $k \in \mathbb{Z}$ θέτουμε

$$G(x,k) := \{pr^{-k} : p \in \mathbb{Z}\} \cap [x - 4r^{-k}, x + 4r^{-k}).$$

Με άλλα λόγια, αν $p_k(x) = \lceil r^k x \rceil \in \mathbb{Z}$, δηλαδή $(p_k(x) - 1)r^{-k} < x \leqslant p_k(x)r^{-k}$, τότε

$$G(x,k) = \{pr^{-k} : p_k(x) - 4 \leqslant p \leqslant p_k(x) + 3\}.$$

Για κάθε ακέραιο $j \geqslant k$ θέτουμε

$$\begin{aligned} G(x,k,j) &:= \{pr^{-j} : (p_k(x) - 4)r^{-k} \leqslant pr^{-j} \leqslant (p_k(x) + 3)r^{-k}\} \\ &= \{pr^{-j} : w_{k,j}(x) \leqslant p \leqslant v_{k,j}(x)\}, \end{aligned}$$

όπου $w_{k,j}(x) := (p_k(x)-4)r^{j-k}$ και $v_{k,j}(x) := (p_k(x)+3)r^{j-k}$. Τότε, $G(x,k,k) = G(x,k)$ και αν $j' \geqslant j \geqslant k$ έχουμε

$$\begin{aligned} G(x,k,j) \subseteq G(x,k,j'), \min G(x,k,j) &= \min G(x,k,j') \\ \text{και} \quad \max G(x,k,j) &= \max G(xmk,j'). \end{aligned} \tag{4.3.6}$$

Για $u \in \ell_2(I)$, ακεραίους $j \geqslant k$ και $J \subseteq I$ ορίζουμε την ανέλιξη $X_t(J,u,k,j)$ θέτοντας

$$X_t(J,u,k,j) := X_t((G(u_i,k,j))_{i\in J}) = \sum_{i\in J} \sum_{p=w_{k,j}(u_i)+1}^{v_{k,j}(u_i)} \varphi_{(p-1)r^{-j},pr^{-j}}(t_i)\varepsilon_{i,p}.$$

Για $T \subseteq \ell_2(I)$ θέτουμε

$$F(T,J,u,k,j) := \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t(J,u,k,j)\right).$$

Αύξηση της παραμέτρου j αντιστοιχεί στην «προσθήκη» νέων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli, ενώ αύξηση της παραμέτρου k έχει ως αποτέλεσμα την «αφαίρεση» ορισμένων τυχαίων μεταβλητών Bernoulli από την ανέλιξη $(X_t(J,u,k,j))$. Ας συμβολίσουμε με $d(J,u,k,j)$ την κανονική απόσταση που επάγεται από την ανέλιξη $\big(X_t(J,u,k,j)\big)$, δηλαδή

$$d(J,u,k,j)(t,s) := \big(\mathbb{E}\big((X_t(J,u,k,j) - X_s(J,u,k,j))^2\big)\big)^{1/2}$$

και συμβολίζουμε με $\Delta(T,J,u,k,j)$ την διάμετρο του συνόλου $T \subseteq \ell_2(I)$ ως προς την $d(J,u,k,j)$.

Από την Πρόταση 4.3.2 (i) και την (4.3.5) παίρνουμε εύκολα την ακόλουθη.

Πρόταση 4.3.4. *Για κάθε $J \subseteq I$, $u \in \ell_2(I)$, ακέραιο $j \geqslant k$ και $T \subseteq \ell_2(I)$, έχουμε*

$$F(T, J, u, k, j) \leqslant b(T)$$

και

$$\Delta(T, J, u, k, j) \leqslant \Delta_{\ell_2(I)}(T).$$

Έχουμε επίσης την ακόλουθη σύγκριση διακεκριμένων συναρτησοειδών και των αντίστοιχων μετρικών.

Πρόταση 4.3.5. *Αν $J' \subseteq J \subseteq I$, και οι ακέραιοι $j \geqslant k$ και $j' \geqslant k'$ ικανοποιούν τις $j' \geqslant j$ και $k' \geqslant k$, τότε για κάθε $u \in \ell_2(I)$ και $T \subseteq \ell_2(I)$ έχουμε*

$$F(T, J', u, k', j') \leqslant F(T, J, u, k, j)$$

και

$$\Delta(T, J', u, k', j') \leqslant \Delta(T, J, u, k, j).$$

Απόδειξη. Η μονοτονία των $F(T, J, u, k, j)$ σε σχέση με το σύνολο J και την μεταβλητή k ελέγχεται εύκολα από τον ορισμό της $X_t(J, u, k, j)$ και την (4.1.1). Η μονοτονία σε σχέση με το j είναι συνέπεια της Πρότασης 4.3.2 (ii) και της (4.3.6).

Η μονοτονία των μετρικών $d(T, J, u, k, j)$ σε σχέση με το J και το k είναι προφανής, και σε σχέση με το j έπεται από την Πρόταση 4.3.3. □

Το επόμενο Λήμμα δίνει κάτω φράγμα για τις μετρικές που κατασκευάσαμε.

Λήμμα 4.3.6. *Για $s, t, u \in \ell_2(I)$, $J \subseteq I$ και $j \geqslant k$,*

$$d(J, u, k, j)(t, s)^2 \geqslant \frac{1}{2} \sum_{i \in J} \min\{|s_i - t_i|^2, r^{-2j}\} I_{\{|s_i - u_i| \leqslant 2r^{-k}\}}.$$

Απόδειξη. Εύκολα αναγόμαστε στην περίπτωση όπου $|s_i - u_i| \leqslant 2r^{-k}$ και $|s_i - t_i| \leqslant r^{-j}$ για κάθε $i \in J$. Τότε,

$$\min G(u_i, k, j) \leqslant s_i, t_i \leqslant \max G(u_i, k, j)$$

για κάθε $i \in J$, και υπάρχουν το πολύ δύο ακέραιοι p για τους οποίους

$$\varphi_{(p-1)r^{-j}, pr^{-j}}(t_i) \neq \varphi_{(p-1)r^{-j}, pr^{-j}}(s_i).$$

Η εκτίμηση έπεται από την (4.3.1), αφού $(a+b)^2 \leqslant 2a^2 + 2b^2$. □

4.4 Λήμματα διάσπασης

Σε αυτήν την Ενότητα αποδεικνύουμε διάφορα αποτελέσματα διάσπασης για τα συναρτησοειδή $F(T,J,u,k,j)$. Οι δύο πρώτες προτάσεις βασίζονται σε αποτελέσματα της Ενότητας 4.1. Τα συνδυάζουμε για να πάρουμε το Πόρισμα 4.4.3 στο οποίο θα βασίσουμε την επαγωγική κατασκευή των διαμερίσεων που θα χρειαστούμε.

Η πρώτη Πρόταση έπεται άμεσα από το Πόρισμα 4.1.9.

Πρόταση 4.4.1. *Έστω $T \subseteq \ell_2(I)$, $u \in \ell_2(I)$, $J \subseteq I$ και $j \geqslant k$. Αν $r^{-j}\sqrt{\log m} \leqslant \sigma$ τότε υπάρχουν σύνολα $C_1, \dots, C_{m-1} \subseteq T$ τέτοια ώστε*

$$\Delta(C_\ell, J, u, k, j) \leqslant L_6 \sigma, \qquad 1 \leqslant \ell \leqslant m-1$$

και για κάθε $\emptyset \neq D \subseteq T \setminus \bigcup_{\ell<m} C_\ell$ με $\Delta(D,J,u,k,j) \leqslant \sigma$ ισχύει

$$F(D,J,u,k,j) \leqslant F(T,J,u,k,j) - \sigma\sqrt{\log m}.$$

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι συνέπεια της Πρότασης 4.1.10.

Πρόταση 4.4.2. *Έστω $u, u' \in \ell_2(I)$, $J \subseteq I$, $j \geqslant k$ και $J' \subseteq J$ τέτοια ώστε $|u_i - u_i'| \leqslant 2r^{-k}$ για κάθε $i \in J'$. Έστω T ένα υποσύνολο του $\ell_2(I)$ με $\Delta(T,J,u,k,j+2) \leqslant c$. Αν $r^{-j-1}\sqrt{\log m} \leqslant \sigma$ και $L_8 c \leqslant \sigma$ τότε υπάρχουν σύνολα $A_1, \dots, A_m \subseteq T$ τέτοια ώστε*

$$\Delta(A_\ell, J, u, k, j+1) \leqslant \sigma \quad \text{για κάθε } 1 \leqslant \ell \leqslant m$$

και είτε $T \subseteq \bigcup_{\ell \leqslant m} A_\ell$ ή

$$F\left(T \setminus \bigcup_{\ell=1}^{m} A_\ell, J', u', j+2, j+2\right) \leqslant F(T,J,u,k,j+1) - \frac{1}{L_9}\sigma\sqrt{\log m}. \tag{4.4.1}$$

Απόδειξη. Έστω $\mathcal{G} = (G_i)_{i\in J}$, $\mathcal{G}' = (G_i')_{i \in J'}$, όπου

$$G_i = G(u_i, k, j+1) \quad \text{για } i \in J$$

και

$$G_i' = G_i \ \text{ για } i \in J \setminus J' \quad \text{και} \quad G_i' = G_i \cup G(u_i', j+2, j+2) \ \text{ για } i \in J'.$$

Αφού $r \geqslant 4$ και $j \geqslant k$ έχουμε

$$G(u_i', j+2, j+2) \subseteq [u_i' - 4r^{-j-2}, u_i' + 4r^{-j-2}) \subset (u_i' - r^{-k}, u_i' + r^{-k}).$$

Επιπλέον, $|u_i - u_i'| \leqslant 2r^{-k}$ για $i \in J'$, άρα τα σύνολα G_i, G_i' ικανοποιούν την συνθήκη 4.3.4 και η Πρόταση 4.3.2 (ii) μας δίνει

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t(\mathcal{G}')\right) \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t(\mathcal{G})\right) = F(T,J,u,k,j+1).$$

Αφού $\mathrm{card}(G(u'_i, j+2, j+2)) = 8$, η Πρόταση 4.3.3 (ii) με $q = 9$ μας δίνει $d_{\mathcal{G}} \leqslant 3d_{\mathcal{G}'}$.

Για $i \in J'$ έχουμε $|u_i - u'_i| \leqslant 2r^{-k}$, οπότε

$$|pr^{-j-2} - u'_i| \leqslant 4r^{-j-2} \implies |pr^{-j-2} - u_i| \leqslant 2r^{-k} + 4r^{-j-2} \leqslant 3r^{-k},$$

επομένως, $G(u'_i, j+2, j+2) \subseteq G(u_i, k, j+2)$. Έτσι,

$$\Delta(T, J, u', j+2, j+2) \leqslant \Delta(T, J, u, k, j+2) \leqslant c.$$

Εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.1.10 με $b = r^{-j-1}$, $\lambda = 6$ και σ^*, I^*, J^*, T^* αντί για I, J και T, όπου $\sigma^* := \sigma/6$,

$$I^* := \{(i,u) : i \in I, u \in G'_i \setminus \{\min G_i\}\},$$

$$J^* := \{(i,u) : i \in J', u \in G(u'_i, j+2, j+2) \setminus \{\min G(u'_i, j+2, j+2)\}\},$$

και για $A \subseteq T$,

$$A^* := \{(\varphi_{u^-,u}(t_i))_{(i,u)} : t \in A, (i,u) \in I^*\},$$

όπου για $(i,u) \in I^*$, με u^- συμβολίζουμε το μεγαλύτερο στοιχείο του G'_i που είναι μικρότερο του u.

Παρατηρούμε ότι, με τον συμβολισμό της Πρότασης 4.1.10, έχουμε για $A \subseteq T$

$$b_{I^*}(A^*) = \mathbb{E}\left(\sup_{t\in A} X_t(\mathcal{G}')\right) \quad \text{και} \quad b_{J^*}(A^*) = F(A, J', u', j+2, j+2).$$

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι όλες οι υποθέσεις της Πρότασης ικανοποιούνται. Συνεπώς, υπάρχουν σύνολα $A_1, \ldots, A_m \subseteq T$ τέτοια ώστε $A^*_\ell \subseteq B_{I^*}(t^*_\ell, \sigma^*)$ για κάποιο $t^*_\ell \in T^*$ και

$$\begin{aligned} F\left(T \setminus \bigcup_{\ell=1}^m A_\ell, J', u', j+2, j+2\right) &\leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T} X_t(\mathcal{G}')\right) - \left(\frac{1}{144L_3}\sigma - L_7 c\right)\sqrt{\log m} \\ &\leqslant F(T, J, u, k, j+1) - \left(\frac{1}{144L_3}\sigma - L_7 c\right)\sqrt{\log m}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι η συνθήκη 4.4.1 ισχύει αν επιλέξουμε $L_8 = 288L_3L_7$ και $L_7 = 288L_3$. Από τη συνθήκη $A^*_\ell \subseteq B_{I^*}(t^*_\ell, \sigma^*)$ έπεται ότι αν $s, t \in A_\ell$ τότε $d_{\mathcal{G}}(s,t) \leqslant 3d_{\mathcal{G}'}(s,t) = 6\sigma^* = \sigma$, άρα $\Delta(A_\ell, J, u, k, j+1) \leqslant \sigma$ για κάθε $1 \leqslant \ell \leqslant m$. □

Κλείνουμε αυτήν την Ενότητα με ένα κρίσιμο Πόρισμα που εξασφαλίζει ότι τα συναρτησοειδή μας ικανοποιούν μια συνθήκη διάσπασης τύπου Talagrand. Συγκεκριμένα, κάθε σύνολο μπορεί να διασπαστεί σε κομμάτια τριών τύπων. Τα κομμάτια τύπου (C_3) έχουν μικρές διαμέτρους και τα κομμάτια τύπου (C_1) δίνουν μικρή τιμή συναρτησοειδών σε υποσύνολα με αρκετά μικρή διάμετρο – και στις δύο περιπτώσεις δεν αλλάζουμε τιμές στις παραμέτρους k, J και u. Τα κομμάτια τύπου (C_2) είναι διαφορετικά – έχουν τόσο μικρές διαμέτρους όσο και μικρή τιμή συναρτησοειδών, ωστόσο, αυξάνουμε την παράμετρο k και επιτρέπουμε αλλαγές στις παραμέτρους u και J.

Πόρισμα 4.4.3. *Υπάρχει θετικός ακέραιος r_0 με την ακόλουθη ιδιότητα. Θεωρούμε $T \subseteq \ell_2(I)$, $J \subseteq I$, $u \in \ell_2(I)$, $u' \in T$, $c \geqslant 0$ και ακεραίους $j \geqslant k$, $n \geqslant 1$, $r \geqslant r_0$ και το σύνολο*

$$J' := \{i \in J : |u_i - u_i'| \leqslant 2r^{-k}\}.$$

Τότε μπορούμε να βρούμε $p \leqslant N_n$ και μια διαμέριση $(A_\ell)_{\ell \leqslant p}$ του T τέτοια ώστε κάθε σύνολο A_ℓ να ικανοποιεί μία από τις ακόλουθες ιδιότητες:

Για κάθε $D \subseteq A_\ell$ με $\Delta(D, J, u, k, j+2) \leqslant \frac{1}{L_{10}} 2^{n/2} r^{-j-1}$,

$$(C_1) \qquad F(D, J, u, k, j+2) \leqslant F(T, J, u, k, j+2) - \frac{1}{L_{11}} 2^n r^{-j-1}$$

ή

$$(C_2a) \qquad \Delta(A_\ell, J', u', j+2, j+2) \leqslant \Delta(A_\ell, J, u, k, j+2) \leqslant 2^{n/2} r^{-j-1}$$

και

$$(C_2b) \qquad F(A_\ell, J', u', j+2, j+2) \leqslant F(T, J, u, k, j+1) - \frac{1}{L_{12}} 2^n r^{-j-1}$$

$$\leqslant F(T, J, u, k, j) - \frac{1}{L_{12}} 2^n r^{-j-1},$$

ή

$$(C_3) \qquad \Delta(A_\ell, J, u, k, j+1) \leqslant 2^{n/2} r^{-j-1}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $m := \sqrt{N_n}$. Τότε $\sqrt{\log m} = 2^{(n-1)/2}\sqrt{\log 2}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $L_8 \geqslant 1$ (όπου L_8 είναι η απόλυτη σταθερά που δίνεται από την Πρόταση 4.4.2).

Πρώτα εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.4.1 με $j+2$ και $\sigma = \frac{1}{L_6 L_8} 2^{n/2} r^{-j-1}$. Παρατηρούμε ότι $r^{-j-2}\sqrt{\log m} \leqslant r^{-j-2} 2^{(n-1)/2} \leqslant \sigma$ αν $r_0 \geqslant L_6 L_8$. Με αυτόν τον τρόπο παίρνουμε την διάσπαση $T = \bigcup_{\ell \leqslant m-1} C_\ell \cup A_1$, όπου $\Delta(C_\ell, J, u, k, j+2) \leqslant c := \frac{1}{L_8} 2^{n/2} r^{-j-1}$ και το A_1 ικανοποιεί την συνθήκη (C_1) με $L_{10} := L_6 L_8$ και $L_{11} := (2/\log 2)^{1/2} L_6 L_8$.

Τώρα, για $\ell \leqslant m-1$ εφαρμόζουμε την Πρόταση 4.4.2 με $T = C_\ell$, $\sigma = 2^{n/2} r^{-j-1}$ και διασπούμε το C_ℓ σε $m+1$ το πολύ σύνολα που ικανοποιούν είτε την (C_2b) με $L_{12} := (2/\log 2)^{1/2} L_9$ ή την (C_3). Αφού $G(u_i', j+2, j+2) \subseteq G(u_i, k, j+2)$ για $i \in J'$ και $L_8 \geqslant 1$, παίρνουμε

$$\Delta(C_\ell, J', u', j+2, j+2) \leqslant \Delta(C_\ell, J, u, k, j+2) \leqslant c \leqslant 2^{n/2} r^{-j-1}$$

και έπεται η (C_2a).

Με αυτόν τον τρόπο διασπούμε το σύνολο T σε $N_n = 1 + (m-1)(m+1)$ το πολύ σύνολα A_ℓ που ικανοποιούν μία από τις συνθήκες (C_1)–(C_3). $\square$

4.5 Η κατασκευή της διαμέρισης

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα 1.1.2 χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2.1 πρέπει να κατασκευάσουμε μια βολική αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ του συνόλου δεικτών T. Σε αυτήν την ενότητα θα παρουσιάσουμε μια τέτοια κατασκευή.

Χρησιμοποιούμε τον εξής συμβολισμό. Για $A \in \mathcal{A}_n$, $n \geqslant 1$, με A' θα συμβολίζουμε το μοναδικό σύνολο της $\mathcal{A}_{n-1}$ για το οποίο $A \subseteq A'$. Για $t \in T$ και $n \geqslant 0$, $A_n(t)$ είναι το μοναδικό στοιχείο της $\mathcal{A}_n$ το οποίο περιέχει το t. Επιπλέον, αν σε κάποιο σύνολο $A \in \mathcal{A}_n$ αντιστοιχίζουμε κάποια ποσότητα $a_n(A)$ (η οποία μπορεί να είναι ένα σημείο, ένας αριθμός ή ένα σύνολο, τότε για να συντομεύσουμε τον συμβολισμό γράφουμε $a_n(t)$ αντί για $a_n(A_n(t))$.

Το επόμενο λήμμα, το οποίο βρίσκεται στο [25] (Λήμμα 2.6.3), θα μας φανεί πολύ χρήσιμο.

Λήμμα 4.5.1. *Έστω $a > 1$ και έστω $(a_n)_{n\geqslant 0}$ μια ακολουθία θετικών αριθμών με $\sup_n a_n < \infty$. Ορίζουμε*

$$V := \{m \geqslant 0 : a_n < a_m \alpha^{|n-m|} \ \text{για όλα τα } n \neq 0, n \neq m\}.$$

Τότε,

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \leqslant \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \sum_{m\in V} a_m.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε μια μερική διάταξη στο $\mathbb{N}$ με $n \prec m$ αν και μόνο αν $a_m \geqslant a_n \alpha^{|n-m|}$. Τότε, το V είναι απλά το σύνολο των μεγιστικών στοιχείων της $\prec$, δηλαδή αν $m \in V$ και $m \prec m'$ τότε $m = m'$. Επιπλέον, αφού η (a_n) είναι φραγμένη, δεν μπορούμε να έχουμε μια άπειρη ακολουθία ακεραίων γνησίως αύξουσα ως προς την $\prec$. Επομένως, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $m \in V$ τέτοιος ώστε $n \prec m$. Έτσι,

$$\sum_{n\geqslant 0} a_n \leqslant \sum_{m\in V} \sum_{n\geqslant 0} \alpha^{-|n-m|} \leqslant \frac{2\alpha}{\alpha - 1} \sum_{m\in V} a_m.$$

$\square$

Είμαστε τώρα έτοιμοι να περιγράψουμε την κατασκευή της διαμέρισης. Βασίζεται σε διαδοχικές εφαρμογές του Πορίσματος 4.4.3. Δυστυχώς θα χρειαστεί να ελέγξουμε διάφορες παραμέτρους. Οι ακέραιοι $k_n \leqslant j_n$, τα σημεία $u_n \in T$ και τα σύνολα $J_n \subseteq I_n$ σχετίζονται με τα συναρτησοειδή που μελετήθηκαν στις προηγούμενες ενότητες. Η παράμετρος $p_n = 0$ σημαίνει ότι θα χρησιμοποιήσουμε το Πόρισμα 4.4.3 για να διασπάσουμε το σύνολο, και η $p_n > 0$ σημαίνει ότι θα περιμένουμε $2\kappa - p_n$ βήματα πριν το χρησιμοποιήσουμε.

Ας δούμε πρώτα πώς αλληλοεξαρτώνται αυτές οι ποσότητες. Η πρώτη συνθήκη δίνει τις αρχικές τιμές των παραμέτρων

$$(P1) \qquad p_0(T) = 0, \qquad j_0(T) = k_0(T) = j_0, \qquad J_0(T) = I.$$

Η επόμενη απαίτηση είναι μια ήπια συνθήκη κανονικότητας (σε όλες τις συνθήκες παρακάτω υποθέτουμε ότι $A \in \mathcal{A}_n$ για κάποιο $n \geqslant 1$):

$$(P2) \qquad j_{n-1}(A') \leqslant j_n(A) \leqslant j_{n-1}(A') + 2, \qquad k_{n-1}(A') \leqslant k_n(A).$$

Παρατηρήστε ότι δεν φράσσουμε την διαφορά $k_n(A) - k_{n-1}(A')$ από πάνω. Διατυπώνουμε τώρα μια κρίσιμη εκτίμηση για την διάμετρο του συνόλου A:

$$(P3) \qquad p_n(A) = 0 \implies \Delta(A, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A)) \leqslant 2^{n/2} r^{-j_n(A)},$$

και την εκδοχή της για θετικές τιμές του μετρητή $p_n(A)$:

$$(P4) \quad p_n(A) > 0 \implies \Delta(A, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A)) \leqslant 2^{(n-p_n(A))/2} r^{-j_n(A)+1}.$$

Απαιτούμε οι παράμετροι k, J, u να μην αλλάζουν, εκτός αν $p_n(A) = 1$:

$$(P5) \quad p_n(A) \neq 1 \implies u_n(A) = u_{n-1}(A'),\ k_n(A) = k_{n-1}(A'),\ J_n(A) = J_{n-1}(A').$$

Η επόμενη συνθήκη περιγράφει τον τρόπο με τον οποίο αλλάζουν οι παράμετροι όταν $p_n(A) = 1$:

$$p_n(A) = 1 \implies u_n(A) \in A',\ j_n(A) = j_n(A') + 2 \ \text{ και}$$

$$(P6) \qquad J_n(A) = \left\{ i \in J_{n-1}(A') : |u_n(A)_i - u_{n-1}(A')_i| \leqslant 2r^{-k_{n-1}(A')} \right\}.$$

Για $p_n(A') \neq 0$ η παράμετρος j_n δεν αλλάζει:

$$(P7) \qquad p_n(A') \neq 0 \implies j_n(A) = j_{n-1}(A').$$

Οι τελευταίες δύο συνθήκες περιγράφουν την συμπεριφορά του μετρητή p_n:

$$(P8) \qquad p_n(A) > 0 \implies p_n(A) = p_{n-1}(A') + 1,$$

και

$$(P9) \qquad p_n(A) = 0 \implies p_{n-1}(A') \in \{0, 2\kappa - 1\},\ \ j_n(A) \leqslant j_{n-1}(A') + 1.$$

Πρόταση 4.5.2. *Υποθέτουμε ότι $r = 2^\kappa$, όπου κ είναι ένας αρκετά μεγάλος θετικός ακέραιος και έστω $T \subseteq \ell_2(I)$ που ικανοποιεί την $\Delta_2(T) \leqslant r^{-j_0}$. Τότε, υπάρχει μια αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ του T, και υπάρχουν σημεία $u_n(A) \in T$, σύνολα $J_n(A) \subseteq I$ και ακέραιοι $k_n(A) \leqslant j_n(A)$, $0 \leqslant p_n(A) \leqslant 2\kappa - 1$, $A \in \mathcal{A}_n$ που ικανοποιούν τις συνθήκες $(P1)$–$(P9)$. Επιπλέον, για όλα τα $t \in T$,*

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2^n r^{-j_n(t)} \leqslant K(r)(r^{-j_0(T)} + b(T)), \tag{4.5.1}$$

όπου $K(r)$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το r.

Απόδειξη. Ορίζουμε $F_n(A) := F(A, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A))$. Θα απαιτήσουμε επιπλέον τις εξής δύο συνθήκες, οι οποίες θα μας βοηθήσουν να αποδείξουμε την (4.5.1): πρώτον,

$$p_n(A) = 1 \quad \Longrightarrow \quad F_n(A) \leqslant F_{n-1}(A') - \frac{1}{L_{12}} 2^{n-1} r^{-j_n(A)+1}, \tag{$P10$}$$

και δεύτερον, αν $n \geqslant 2$, $p_n(A) = p_{n-1}(A') = 0$ και $j_n(A) = j_n(A')$, τότε για κάθε $D \subseteq A$ με $\Delta(D, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A) + 2) \leqslant \frac{1}{L_{10}} 2^{(n-1)/2} r^{-j_n(A)-1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} (P11) \quad & F(D, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A) + 2) \\ & \leqslant F(A', J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A) + 2) - \frac{1}{L_{11}} 2^{n-1} r^{-j_n(A)-1} \\ & \leqslant F(A', J_n(A'), u_{n-1}(A'), k_{n-1}(A'), j_{n-1}(A')) - \frac{1}{L_{11}} 2^{n-1} r^{-j_n(A)-1}. \end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι ο κ είναι αρκετά μεγάλος ώστε $r \geqslant \max\{r_0, 4L_{10}^2\}$, όπου ο r_0 είναι η σταθερά που ορίζεται στο Πόρισμα 4.4.3.

Αρχίζουμε την κατασκευή με $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_1 = \{T\}$, $k_1(T) = j_1(T) = k_0(T) = j_0(T) = j_0$, $p_1(T) = p_0(T) = 0$, $J_1(T) = J_0(T) = I$ και $u_1(T) = u_0(T) = t_0$, όπου t_0 είναι ένα σημείο του T. Αφού

$$\Delta(T, J_n(A), u_n(A), k_n(A), j_n(A)) \leqslant \Delta_2(T) \leqslant r^{-j_0},$$

οι συνθήκες $(P1)$–$(P11)$ ικανοποιούνται για $n \leqslant 1$.

Υποθέτουμε τώρα ότι η $\mathcal{A}_n$, $n \geqslant 1$, έχει ήδη κατασκευαστεί, και σταθεροποιούμε ένα σύνολο $B \in \mathcal{A}_n$. Θα χωρίσουμε αυτό το σύνολο σε N_n το πολύ σύνολα στην $\mathcal{A}_{n+1}$, οπότε $\mathrm{card}(\mathcal{A}_{n+1}) \leqslant N_n \mathrm{card}(\mathcal{A}_n) \leqslant N_n^2 = N_{n+1}$, όπως απαιτείται.

Αν $1 \leqslant p_n(B) \leqslant 2\kappa - 2$ τότε δεν χωρίζουμε το B. Δηλαδή, αποφασίζουμε ότι $B \in \mathcal{A}_{n+1}$ και θέτουμε $p_{n+1}(B) := p_n(B) + 1$, $k_{n+1}(B) := k_n(B)$, $j_{n+1}(B) := j_n(B)$, $J_{n+1}(B) := J_n(B)$ και $u_{n+1}(B) := u_n(B)$. Είναι εύκολο να δούμε ότι όλες οι απαιτούμενες συνθήκες ισχύουν για τα B και $n + 1$.

Αν $p_n(B) = 2\kappa - 1$, πάλι δεν χωρίζουμε το B, αλλά αυτή τη φορά θέτουμε $p_{n+1}(B) := 0$, $k_{n+1}(B) := k_n(B)$, $j_{n+1}(B) := j_n(B)$, $J_{n+1}(B) := J_n(B)$ και $u_{n+1}(B) := u_n(B)$. Η συνθήκη $(P3)$ για $A = B$ και $n+1$ έπεται από την $(P4)$ για $A = B$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι $p_n(B) = 0$. Τότε χωρίζουμε το B χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 4.4.3 με $T = B$, $u = u_n(B)$, u' οποιοδήποτε σημείο του B, $J = J_n(B)$, $k = k_n(B)$ και $j = j_n(B)$. Βρίσκουμε μια διαμέριση $B = \bigcup_{\ell \leqslant m} A_\ell$, $m \leqslant N_n$ με καθένα από τα σύνολα A_ℓ να ικανοποιεί τις συνθήκες (C_1)–(C_3). Έστω $A = A_\ell$ ένα από αυτά τα σύνολα.

Αν το A ικανοποιεί την (C_1) θέτουμε $p_{n+1}(A) := 0$, $j_{n+1}(A) := j_n(B)$, $k_{n+1}(A) := k_n(B)$, $J_{n+1}(A) := J_n(B)$ και $u_{n+1}(A) := u_n(B)$. Η πρώτη ανισότητα στην $(P11)$ για A και $n+1$ έπεται τώρα από την (C_1).

Αν το A ικανοποιεί τις (C_2a)–(C_2b) ορίζουμε $p_{n+1}(A) := 1$, $j_{n+1}(A) := k_{n+1}(A) := j_n(B) + 2$, $u_{n+1}(A) = u'$ και

$$J_{n+1}(A) := J' = \{i \in J_n(B) : |u_n(B)_i - u'_i| \leqslant 2r^{-k_n(B)}\}.$$

Η ιδιότητα $(P4)$ για A και $n+1$ έπεται από την (C_2a) και η ιδιότητα $(P10)$ από την (C_2b).

Τέλος, αν το A ικανοποιεί την (C_3) ορίζουμε $p_{n+1}(A) := 0$, $j_{n+1}(A) = j_n(B) + 1$, $k_{n+1}(A) = k_n(B)$, $J_{n+1}(A) := J_n(B)$ και $u_{n+1}(A) := u_n(B)$. Η συνθήκη $(P3)$ για A και $n+1$ τώρα έπεται από την (C_3).

Με αυτόν τον τρόπο κατασκευάσαμε μια αποδεκτή διαμέριση που ικανοποιεί τις $(P1)$–$(P11)$. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη πρέπει να δείξουμε την (4.5.1).

Παρατηρούμε ότι $F_n(A) \leqslant F_{n-1}(A')$: για $p_n(A) = 1$ αυτό έπεται άμεσα από την $(P10)$, ενώ για $p_n(A) \neq 1$, έχουμε $u_{n-1}(A') = u_n(A)$, $J_{n-1}(A') = J_n(A)$, $j_{n-1}(A') \leqslant j_n(A)$ και $k_{n-1}(A') = k_n(A)$ και μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.3.5.

Σταθεροποιούμε $t \in T$ και ορίζουμε $a_n = a_n(t) := 2^n r^{-j_n(t)}$. Αν $p_n(t) = 0$ και $n \geqslant 2$, τότε είτε $j_{n-1}(t) < j_n(t)$ και $a_{n-1} > a_n$ ή $j_{n-1}(t) = j_n(t)$, $p_{n-1}(t) = 0$, το οποίο από την $(P11)$ δίνει $a_n \leqslant 2L_{11} r F_{n-1}(t) \leqslant 2L_{11} r b(T)$ ή $p_{n-1}(t) = 2\kappa - 1$, το οποίο δίνει $p_{n-2\kappa}(t) = 0$, $j_{n-2\kappa}(t) = j_n(t) - 2$ και $a_{n-2\kappa} = a_n$. Αν $p_n(t) > 0$ τότε παίρνοντας $n' := \inf\{m \geqslant n : p_m(t) = 0\}$ έχουμε $j_{n'}(t) = j_n(t)$, $p_{n'}(t) = 0$ και $a_n < a_{n'}$. Αυτό δείχνει ότι

$$\sup_n a_n \leqslant \max\{a_0, a_1, 2L_{11} r b(T)\} \leqslant K(r)(r^{-j_0} + b(T)) < \infty.$$

Έστω

$$V_0 := \{n \geqslant 0 : a_m < 2^{|m-n|} a_n \ \text{ για όλα τα } m \geqslant 0,\ m \neq n\}.$$

Αν $n \in V_0$ τότε $a_{n+1} = 2^{n+1} r^{-j_{n+1}(t)} < 2a_n = 2^{n+1} r^{-j_n(t)}$, άρα

$$V_0 \subseteq V_1 := \{n \geqslant 0 : j_n(T) < j_{n+1}(t)\}.$$

Από το Λήμμα 4.5.1 με $\alpha = 2$ έχουμε

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n \leqslant 4 \sum_{n \in V_0} a_n \leqslant 4 \sum_{n \in V_1} a_n.$$

Αριθμούμε τα στοιχεία του V_1 ως $1 \leqslant n_0 < n_1 < n_2 < \cdots$ και θέτουμε

$$V_2 := \{n_q : a_{n_m} < 2^{|m-q|} a_{n_q} \ \text{ για όλα τα } m \geqslant 0,\ m \neq q\}.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.5.1 και πάλι, έχουμε

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n \leqslant 4 \sum_{n \in V_1} a_n \leqslant 16 \sum_{n \in V_2} a_n.$$

Σταθεροποιούμε $n = n_q \in V_2$. Αν $j_{n+1}(t) < j_n(t)$ τότε $n - 1 = n_{q-1}$ και (αφού $r \geqslant 4$)

$$a_{n_{q-1}} = a_{n-1} \geqslant \frac{r}{2} a_n \geqslant 2a_n,$$

το οποίο έρχεται σε αντίθεση με τον ορισμό του V_2. Άρα, $j_{n-1}(t) = j_n(t) < j_{n+1}(t)$. Έχουμε τώρα τα εξής τέσσερα ενδεχόμενα:

1. $j_{n+1}(t) = j_n(t) + 2$. Τότε, $p_{n+1}(t) = 1$ και εφαρμόζοντας την $(P10)$ με $A = A_{n+1}(t)$ παίρνουμε
$$a_n = r2^n r^{-j_{n+1}(t)+1} \leqslant L_{12} r (F_n(t) - F_{n+1}(t)).$$

2. $j_{n+1}(t) = j_n(t) + 1$ και $j_{n_{q+1}+1}(t) = j_{n_{q+1}}(t) + 2$. Τότε, $p_{n_{q+1}+1}(t) = 1$, $j_{n_{q+1}+1}(t) = j_n(t) + 3$, και εφαρμόζοντας την $(P10)$ με $A = A_{n_{q+1}+1}(t)$ παίρνουμε
$$a_n \leqslant \frac{1}{4} r^3 a_{n_{q+1}+1} \leqslant \frac{1}{2} L_{12} r^2 (F_{n_{q+1}}(t) - F_{n_{q+1}+1}(t)).$$

3. $p_{n-1}(t) = 2\kappa - 1$. Τότε, $p_{n-2\kappa+1}(t) = 1$, $j_{n-2\kappa}(t) < j_{n-2\kappa+1}(t) = j_n(t)$. Έτσι, $n - 2\kappa = n_{q-1}$ και εφαρμόζοντας την $(P10)$ με $A = A_{n_{q-1}+1}(t)$ παίρνουμε
$$\begin{aligned} a_n = 2^{2\kappa-1} a_{n_{q-1}+1} &\leqslant 2^{2\kappa} L_{12} r^{-1} (F_{n_{q-1}}(t) - F_{n_{q-1}+1}(t)) \\ &= L_{12} r (F_{n_{q-1}}(t) - F_{n_{q-1}+1}(t)). \end{aligned}$$

4. $p_{n-1}(t) = 0$, $j_{n+1}(t) = j_n(t) + 1$ και $j_{n_{q+1}+1}(t) = j_{n_{q+1}}(t) + 1$. Τότε $p_{n_{q+1}+1}(t) = 0$, και επιπλέον, από τον ορισμό του V_2,
$$2^{n_q+1} r^{-j_n(t)-1} = a_{n_{q+1}} < 2a_{n_q} = 2^{n+1} r^{-j_n(t)},$$
το οποίο μας δίνει $n_{q+1} - n \leqslant \kappa$. Ειδικότερα, αυτό συνεπάγεται ότι $p_m(t) = 0$ για όλα τα $n \leqslant m \leqslant n_{q+1} + 1$. Άρα, $k_{n_{q+1}+1}(t) = k_n(t)$, $j_{n_{q+1}+1}(t) = j_n(t) + 2$,

$u_{n_{q+1}+1}(t) = u_n(t)$ και $J_{n_{q+1}+1}(t) = J_n(t)$. Επομένως, χρησιμοποιώντας την $(P3)$ για $n = n_{q+1} + 1$ και $A = A_{n_{q+1}+1}(t)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Delta(A_{n_{q+1}+1}(t), J_n(t), u_n(t), k_n(t), j_n(t) + 2) &\leqslant 2^{(n_{q+1}+1)/2} r^{-j_n(t)-2} \\ &\leqslant \frac{1}{L_{10}} 2^{(n-1)/2} r^{-j_n(t)-1},\end{aligned}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει από τις $n_{q+1} - n \leqslant \kappa$ και $r = 2^\kappa \geqslant (2L_{10})^2$. Τότε, είτε $q = 0$ ή $n = 1$ και μπορούμε να εφαρμόσουμε την $(P11)$ για τα $D = A_{n_{q+1}+1}$, $A = A_n(t)$ και να πάρουμε

$$a_n \leqslant 2L_{11} r(F_n(t) - F_{n_{q+1}+1}(t)).$$

Αυτό δείχνει ότι για $n = n_q \in V_2$, είτε $n = 1$ ή $a_n \leqslant K(r)(F_{n_\ell}(t) - F_{n_{\ell+2}}(t))$ για κάποιον $\ell \in \{q-1, q, q+1\}$. Από τη μονοτονία της απεικόνισης $\ell \mapsto F_{n_\ell}(t)$ παίρνουμε (με μια τιμή της $K(r)$ η οποία μπορεί να αλλάζει σε κάθε περίπτωση)

$$\sum_{n \geqslant 0} a_n \leqslant 16 \sum_{n \in V_2} a_n \leqslant 16 a_{n_0} + K(r) F_0(t) \leqslant K(r)(r^{-j_0} + b(T)).$$

$\square$

4.6 Απόδειξη του κύριου αποτελέσματος

Είμαστε τώρα έτοιμοι να παρουσιάσουμε την απόδειξη του κύριου Θεωρήματος 1.1.2 και του Θεωρήματος 1.3.1. Από το Θεώρημα 4.2.1, για να διασπάσουμε το σύνολο δεικτών T αρκεί να βρούμε κατάλληλη αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων. Για να κατασκευάσουμε μια τέτοια ακολουθία, στην Ενότητα 4.3 ορίσαμε μια οικογένεια συναρτησοειδών και, με τη βοήθεια των αποτελεσμάτων της Ενότητας 4.1, δείξαμε ότι ικανοποιούν τη συνθήκη τύπου-Talagrand την οποία παρουσιάσαμε στο Πόρισμα 4.4.3. Διαδοχικές εφαρμογές αυτού του αποτελέσματος μας επέτρεψαν να κατασκευάσουμε επαγωγικά μια ακολουθία διαμερίσεων. Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη χρειάζεται να επαληθεύσουμε ότι αυτή η ακολουθία ικανοποιεί τις συνθήκες του Θεωρήματος 4.2.1. Ειδικότερα, χρειάζεται να ορίσουμε σημεία $\pi_n(A)$ και να δείξουμε ότι τα σύνολα $I_n(A)$ που ορίστηκαν στο Θεώρημα 4.2.1 σχετίζονται με τα σύνολα $J_n(A)$ της Πρότασης 4.5.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.2. Η ανισότητα του θεωρήματος είναι ομογενής, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $b(T) = 1/4$, και τότε $\Delta_2(T) \leqslant 1$ από το Λήμμα 4.1.1. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 4.5.2 με $j_0 = 0$, παίρνουμε μια αποδεκτή ακολουθία διαμερίσεων $(\mathcal{A}_n)_{n \geqslant 0}$, τους αριθμούς $p_n(A)$, $k_n(A)$, $j_n(A)$ και τα σημεία $u_n(A)$. Πρώτα, ορίζουμε επαγωγικά τα σημεία $\pi_n(A)$. Θέτουμε $\pi_0(T) = u_0(T)$ και για $A \in \mathcal{A}_n$, $n \geqslant 1$

ορίζουμε $\pi_n(A) = \pi_{n-1}(A')$ αν $j_n(A) = j_{n-1}(A')$, $\pi_n(A) = u_n(A)$ αν $p_n(A) = 1$, και επιλέγουμε για $\pi_n(A)$ ένα αυθαίρετο σημείο στο A αν $p_n(A) = 0$ και $j_n(A) > j_{n-1}(A')$.

Όπως στο Θεώρημα 4.2.1 θέτουμε

$$I_n(t) := \{i \in I : |\pi_{q+1}(t)_i - \pi_q(t)_i| \leqslant r^{-j_q(t)} \text{ για } 0 \leqslant q \leqslant n-1\}.$$

Πρώτα δείχνουμε ότι

$$|\pi_{n+1}(t)_i - u_n(t)_i| \leqslant 2r^{-k_n(t)} \text{ για } i \in I_{n+1}(t). \tag{4.6.1}$$

Για τον σκοπό αυτό ορίζουμε $J' = \{0\} \cup \{n \geqslant 1 : p_n(t) = 1\}$. Τότε $\pi_n(t) = u_n(t)$ για $n \in J'$. Σταθεροποιούμε ένα n και θέτουμε n' το μεγαλύτερο στοιχείο του J' για το οποίο $n' \leqslant n$. Τότε, από την $(P5)$, $u_n(t) = u_{n'}(t) = \pi_{n'}(t)$ και $k_n(t) = k_{n'}(t)$. Επομένως, για $i \in I_{n+1}(t)$,

$$\begin{aligned}|\pi_{n+1}(t)_i - u_n(t)_i| = |\pi_{n+1}(t)_i - \pi_{n'}(t)_i| &\leqslant \sum_{q=n'}^{n} |\pi_{q+1}(t)_i - \pi_q(t)_i| \\ &\leqslant \sum_{j \geqslant j_{n'}(t)} r^{-j} \leqslant 2r^{-j_{n'}(t)} \leqslant 2r^{-k_{n'}(t)} = 2r^{-k_n(t)}.\end{aligned}$$

Τώρα, επαγωγικά δείχνουμε ότι $I_n(t) \subseteq J_n(t)$. Για $n = 0$ και τα δύο σύνολα είναι ίσα με I. Αν $p_{n+1}(t) \neq 1$ τότε

$$I_{n+1}(t) \subseteq I_n(t) \subseteq J_n(t) = J_{n+1}(t).$$

Αν $p_{n+1}(t) = 1$ τότε $\pi_{n+1}(t) = u_{n+1}(t)$. Έτσι, από την (4.6.1), $|u_{n+1}(t) - u_n(t)_i| \leqslant 2r^{-k_n(t)}$ για $i \in I_{n+1}(t)$, οπότε από την $(P6)$ και από την επαγωγική υπόθεση $I_{n+1}(t) \subseteq J_{n+1}(t)$.

Τέλος, υποθέτουμε ότι $A \in \mathcal{A}_n$, $j_n(A) > j_{n-1}(A')$ και $t \in A$. Τότε, $p_{n-1}(A') = 0$, $t, \pi_n(A) \in A'$, $I_n(A) \subseteq J_n(A) \subseteq J_{n-1}(A')$ και $|\pi_n(A)_i - u_{n-1}(A')_i| \leqslant 2r^{-k_{n-1}(A')}$ για $i \in I_n(A)$. Τότε, εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.3.6 με $J = I_n(A)$, $u = u_{n-1}(A')$, $s = \pi_n(A)$, $j = j_{n-1}(A')$ και $k = k_{n-1}(A')$, και χρησιμοποιώντας την $(P2)$ και την $(P3)$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i \in I_n(A)} \min\{(t_i - \pi_n(A)_i)^2, r^{-2j_n(A)}\} &\leqslant \sum_{i \in I_n(A)} \min\{(t_i - \pi_n(A)_i)^2, r^{-2j_{n-1}(A')}\} \\ &\leqslant 2\Delta(A', J_{n-1}(A'), u_{n-1}(A'), k_{n-1}(A'), j_{n-1}(A'))^2 \\ &\leqslant 2^n r^{-2j_{n-1}(A')} \leqslant r^4 2^n r^{-2j_n(A)}.\end{aligned}$$

Επομένως, όλες οι υποθέσεις του Θεωρήματος 4.2.1 ικανοποιούνται με $M = r^4$, και το Θεώρημα 1.1.2 έπεται από τις (4.2.1) και (4.5.1), αφού $r^{-j_0} = 1 = 4b(T)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 1.3.1. Από το Θεώρημα 1.1.2 γνωρίζουμε ότι $T \subseteq T_1 + T_2$ με $\sup_{t \in T_1} \|t\|_1 \leqslant Lb(T)$ και $g(T_2) \leqslant Lb(T)$. Τότε,

$$T - T \subseteq (T_1 - T_1) + (T_2 - T_2) \subseteq \mathrm{conv}\{2(T_1 - T_1), 2(T_2 - T_2)\}.$$

Προφανώς, $T_1 - T_1 \subseteq L\,\overline{\mathrm{conv}}\{e_i : i \in I\}$, όπου $(e_i)_{i \in I}$ είναι η κανονική βάση του $\ell_2(I)$. Από το θεώρημα κυριαρχούντων μέτρων για τις Gaussian ανελίξεις μπορούμε να βρούμε διανύσματα $(s^n)_{n \geqslant 1}$ του ℓ_2 τέτοια ώστε $T_2 - T_2 \subseteq \overline{\mathrm{conv}}\{s^n : n \geqslant 1\}$ και

$$\sqrt{\log(n+1)}\|s^n\|_2 \leqslant Lg(T_2) \leqslant Lb(T).$$

Για να τελειώσουμε την απόδειξη αρκεί να παρατηρήσουμε ότι $\|X_{e_i}\|_p = \|\varepsilon_i\|_p = 1$ για κάθε $p > 0$ και ότι, από την ανισότητα του Khintchine, $\|X_t\|_p \leqslant L\sqrt{p}\|t\|_2$ για κάθε $p \geqslant 1$. □

4.7 Κάποιες εφαρμογές

Ένα από τα κίνητρα για την εικασία Bernoulli ήταν το ακόλουθο ερώτημα του X. Fernique σχετικά με τις τυχαίες σειρές Fourier. Έστω G μια συμπαγής Αβελιανή ομάδα και έστω $(F, \|\cdot\|)$ ένας μιγαδικός χώρος Banach. Θεωρούμε (πεπερασμένα το πλήθος) διανύσματα $v_i \in F$ και χαρακτήρες χ_i της G. Ο Fernique [7] έδειξε ότι

$$\mathbb{E}\left(\sup_{h \in G}\left\|\sum_i v_i g_i \chi_i(h)\right\|\right) \leqslant L\left(\mathbb{E}\left\|\sum_i v_i g_i\right\| + \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \mathbb{E}\left(\sup_{h \in G}\left|\sum_i x^*(v_i) g_i \chi_i(h)\right|\right)\right),$$

και ρώτησε αν ισχύει παρόμοια ανισότητα αν αντικαταστήσουμε τις κανονικές τυχαίες μεταβλητές με τυχαίες μεταβλητές Bernoulli. Το Θεώρημα 1.1.2 μας επιτρέπει να δώσουμε καταφατική απάντηση.

Θεώρημα 4.7.1. *Για κάθε συμπαγή Αβελιανή ομάδα G, και για κάθε πεπερασμένη οικογένεια διανυσμάτων v_i σε έναν μιγαδικό χώρο Banach $(F, \|\cdot\|)$ και χαρακτήρων χ_i της G, έχουμε*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{h \in G}\left\|\sum_i v_i \varepsilon_i \chi_i(h)\right\|\right) \leqslant L\left(\mathbb{E}\left\|\sum_i v_i \varepsilon_i\right\| + \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \mathbb{E}\left(\sup_{h \in G}\left|\sum_i x^*(v_i) \varepsilon_i \chi_i(h)\right|\right)\right).$$

Παρατήρηση 4.7.2. Αφού $\chi_i(e) = 1$, όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της G, έχουμε

$$\max\left\{\mathbb{E}\left\|\sum_i v_i \varepsilon_i\right\|, \sup_{\|x^*\| \leqslant 1} \mathbb{E}\left(\sup_{h \in G}\left|\sum_i x^*(v_i) \varepsilon_i \chi_i(h)\right|\right)\right\} \leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{h \in G}\left\|\sum_i v_i \varepsilon_i \chi_i(h)\right\|\right).$$

Το Θεώρημα 4.7.1 δείχνει ότι οι δύο αυτές ποσότητες είναι ισοδύναμες.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.7.1. Πρέπει να δείξουμε ότι, για κάθε φραγμένο σύνολο $T \subseteq \mathbb{C}^n$,

(4.7.1)
$$\mathbb{E}\left(\sup_{h\in G, t\in T}\left\|\sum_{i=1}^n t_i\varepsilon_i\chi_i(h)\right\|\right) \leqslant L\left(\sup_{t\in T}\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n t_i\varepsilon_i\right| + \sup_{t\in T}\mathbb{E}\left(\sup_{h\in G}\left|\sum_{i=1}^n t_i\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right)\right).$$

Θέτουμε $M := \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\left|\sum_{i=1}^n t_i\varepsilon_i\right|\right)$. Από το Θεώρημα 1.1.2 μπορούμε να βρούμε μια διάσπαση $T \subseteq T_1 + T_2$ με $\sup_{t^1\in T_1}\|t^1\|_1 \leqslant LM$ και

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t^2\in T_2}\left|\sum_{i=1}^n t_i^2 g_i\right|\right) \leqslant LM.$$

Προφανώς,

$$\begin{aligned}(4.7.2)\qquad \mathbb{E}&\left(\sup_{h\in G, t\in T}\left|\sum_{i=1}^n t_i\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right)\\ &\leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{h\in G, t^1\in T_1}\left|\sum_{i=1}^n t_i^1\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right) + \mathbb{E}\left(\sup_{h\in G, t^2\in T_2}\left|\sum_{i=1}^n t_i^2\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right).\end{aligned}$$

Αφού

$$\left|\sum_{i=1}^n t_i^1\varepsilon_i\chi_i(h)\right| \leqslant \sum_{i=1}^n |t_i^1|\,|\chi_i(h)| = \|t^1\|_1,$$

παίρνουμε

$$(4.7.3)\qquad \mathbb{E}\left(\sup_{h\in G, t^1\in T_1}\left|\sum_{i=1}^n t_i^1\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right) \leqslant \sup_{t^1\in T_1}\|t^1\|_1 \leqslant LM.$$

Η ανισότητα (1.1.4) και το θεώρημα του Fernique συνεπάγονται ότι

$$\begin{aligned}(4.7.4)\qquad \mathbb{E}\left(\sup_{h\in G, t^2\in T_2}\left|\sum_{i=1}^n t_i^2\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right) &\leqslant \sqrt{\pi/2}\,\mathbb{E}\left(\sup_{h\in G, t^2\in T_2}\left|\sum_{i=1}^n t_i^2 g_i\chi_i(h)\right|\right)\\ &\leqslant L\left(\sup_{t^2\in T_2}\mathbb{E}\left|\sum_{i=1}^n t_i^2 g_i\right| + \sup_{t^2\in T_2}\mathbb{E}\left(\sup_{h\in G}\left|\sum_{i=1}^n t_i^2 g_i\chi_i(h)\right|\right)\right).\end{aligned}$$

Η ανισότητα Marcus-Pisier [14] δίνει, για κάθε $t^2 \in T_2$,

$$(4.7.5)\qquad \mathbb{E}\left(\sup_{h\in G}\left|\sum_{i=1}^n t_i^2 g_i\chi_i(h)\right|\right) \leqslant L\,\mathbb{E}\left(\sup_{h\in G}\left|\sum_{i=1}^n t_i^2\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right).$$

Αφού μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T_2 \subseteq T - T_1$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}(4.7.6)\qquad \sup_{t^2\in T_2} \mathbb{E}\left(\sup_{h\in G}\left|\sum_{i=1}^n t_i^2\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right) &\leqslant \sup_{t\in T}\mathbb{E}\left(\sup_{h\in G}\left|\sum_{i=1}^n t_i\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right)\\ &\quad + \sup_{t^1\in T_1}\mathbb{E}\left(\sup_{h\in G}\left|\sum_{i=1}^n t_i^1\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right)\\ &\leqslant \sup_{t\in T}\mathbb{E}\left(\sup_{h\in G}\left|\sum_{i=1}^n t_i\varepsilon_i\chi_i(h)\right|\right) + LM.\end{aligned}$$

Τώρα, το συμπέρασμα έπεται από τις (4.7.2)–(4.7.6). □

Μια άλλη συνέπεια του Θεωρήματος 1.1.2 είναι μια μεγιστική ανισότητα τύπου Lévy-Ottaviani για τις VC-κλάσεις (βλέπε [10] για περισσότερες λεπτομέρειες). Υπενθυμίζουμε ότι μια κλάση $\mathcal{C}$ υποσυνόλων του I λέγεται Vapnik-Chervonenkis κλάση (ή VC-κλάση για συντομία) τάξης το πολύ d αν για κάθε σύνολο $A \subseteq I$ πληθικότητας $d+1$ έχουμε

$$\mathrm{card}(\{C\cap A : C\in\mathcal{C}\}) < 2^{d+1}.$$

Θεώρημα 4.7.3. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach $(F,\|\cdot\|)$, τέτοιες ώστε $|\{i : X_i\neq 0\}| < \infty$ σχεδόν βεβαίως, και έστω $\mathcal{C}$ μια αριθμήσιμη VC-κλάση υποσυνόλων του I, τάξης d. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\sup_{C\in\mathcal{C}}\left\|\sum_{i\in C}X_i\right\|\geqslant u\right)\leqslant K(d)\sup_{C\in\mathcal{C}\cup\{I\}}\mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i\in C}X_i\right\|\geqslant\frac{u}{K(d)}\right)$$

για κάθε $u>0$, όπου $K(d)\leqslant L\sqrt{d}$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από το d. Επιπλέον, αν οι μεταβλητές X_i είναι συμμετρικές, τότε

$$\mathbb{P}\left(\sup_{C\in\mathcal{C}}\left\|\sum_{i\in C}X_i\right\|\geqslant u\right)\leqslant K(d)\,\mathbb{P}\left(\left\|\sum_{i\in I}X_i\right\|\geqslant\frac{u}{K(d)}\right)$$

για κάθε $u>0$.

Είναι εύκολο να δούμε (παίρνοντας $F=\mathbb{R}$, $X_i=\varepsilon_i v$ για $i\in I_0$ και $X_i=0$ αλλιώς, όπου I_0 είναι ένα πεπερασμένο υποσύνολο του I και v είναι οποιοδήποτε μη μηδενικό διάνυσμα του F) πως η υπόθεση ότι η $\mathcal{C}$ είναι VC-κλάση είναι απαραίτητη, ακόμα και στην βαθμωτή περίπτωση.

Οι μεγιστικές ανισότητες αυτού του τύπου χρησιμοποιούνται στην απόδειξη θεωρημάτων τύπου Itô-Nisio που έχουν ως συνέπεια διάφορα οριακού τύπου θεωρήματα για τις VC-κλάσεις. Σαν παράδειγμα εφαρμογής παρουσιάζουμε έναν ομοιόμορφο Ισχυρό Νόμο των Μεγάλων Αριθμών.

Πόρισμα 4.7.4. *Έστω $(X_i)_{i\in I}$ ανεξάρτητες συμμετρικές τυχαίες μεταβλητές με τιμές σε έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach $(F,\|\cdot\|)$, τέτοιες ώστε $\frac{1}{a_n}\sum_{i=1}^n X_i \to 0$ σχεδόν βεβαίως. Τότε, για κάθε VC-κλάση υποσυνόλων του $\mathbb{N}$ έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a_n}\max_{C\in\mathcal{C}}\Bigg\|\sum_{i\in C\cap\{1,\ldots,n\}} X_i\Bigg\| = 0 \ \ \text{σχεδόν βεβαίως}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε έναν θετικό ακέραιο n_0. Τότε, για κάθε $A\subseteq\mathbb{N}$,

$$\max_{n\geqslant n_0}\frac{1}{a_n}\Bigg\|\sum_{i\in A\cap\{1,\ldots,n\}} X_i\Bigg\| = \Bigg\|\sum_{i\in A} Y_i\Bigg\|,$$

όπου οι Y_i είναι τυχαίες μεταβλητές του $\ell_\infty(F)$ που ορίζονται ως εξής: $Y_i(n) = 0$ για $n < n_0$ ή $i > n$, και $Y_i(n) = X_i$ για $i \leqslant n \geqslant n_0$. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.7.3 στις τυχαίες μεταβλητές Y_i παίρνουμε, για κάθε $t > 0$,

$$\mathbb{P}\left(\max_{n\geqslant n_0}\frac{1}{a_n}\max_{C\in\mathcal{C}}\Bigg\|\sum_{i\in C\cap\{1,\ldots,n\}} X_i\Bigg\| \geqslant t\right) \leqslant K\,\mathbb{P}\left(\max_{n\geqslant n_0}\frac{1}{a_n}\Bigg\|\sum_{i=1}^n X_i\Bigg\| \geqslant \frac{t}{K}\right),$$

όπου K είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από την $\mathcal{C}$, και ο ισχυρισμός έπεται εύκολα. □

Σκιαγράφηση της απόδειξης του Θεωρήματος 4.7.3. Ένα τυπικό επιχείρημα (βλέπε [10]) δείχνει ότι μπορούμε να περιοριστούμε στην περίπτωση που το I είναι πεπερασμένο και $X_i = v_i\varepsilon_i$ για κάποια διανύσματα $v_i \in F$. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες συγκέντρωσης των ανελίξεων Bernoulli βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε το εξής: για κάθε φραγμένο συμμετρικό σύνολο $T\subseteq\mathbb{R}^I$ και για κάθε VC-κλάση $\mathcal{C}$ τάξης d,

$$\mathbb{E}\left(\sup_{C\in\mathcal{C}}\sup_{t\in T}\Bigg|\sum_{i\in C} t_i\varepsilon_i\Bigg|\right) \leqslant K(d)\,\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\Bigg|\sum_{i\in I} t_i\varepsilon_i\Bigg|\right) = K(d)\,b(T). \tag{4.7.7}$$

Έστω $T\subseteq T_1+T_2$ μια διάσπαση που δίνεται από το Θεώρημα 1.1.2. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι τα T_1 και T_2 είναι συμμετρικά. Προφανώς,

$$\Bigg|\sum_{i\in C} t_i^1\varepsilon_i\Bigg| \leqslant \sum_{i\in C}|t_i^1| \leqslant \|t^1\|_1,$$

άρα

$$\mathbb{E}\left(\sup_{C\in\mathcal{C}}\sup_{t^1\in T_1}\Bigg|\sum_{i\in C} t_i^1\varepsilon_i\Bigg|\right) \leqslant \sup_{t^1\in T_1}\|t^1\|_1 \leqslant L\,b(T). \tag{4.7.8}$$

Η ανισότητα (1.1.4) δίνει

$$\mathbb{E}\left(\sup_{C\in\mathcal{C}}\sup_{t^2\in T_2}\left|\sum_{i\in C} t_i^2\varepsilon_i\right|\right) \leqslant \sqrt{\pi/2}\,\mathbb{E}\left(\sup_{C\in\mathcal{C}}\sup_{t^2\in T_2}\left|\sum_{i\in C} t_i^2 g_i\right|\right). \tag{4.7.9}$$

Ένα αποτέλεσμα του Krawczyk [8] και η επιλογή του T_2 δίνουν

$$\mathbb{E}\left(\sup_{C\in\mathcal{C}}\sup_{t^2\in T_2}\left|\sum_{i\in C} t_i^2 g_i\right|\right) \leqslant K(d)g(T_2) \leqslant K(d)b(T). \tag{4.7.10}$$

Από τις εκτιμήσεις (4.7.8)–(4.7.10) παίρνουμε την (4.7.7). □

Παρατήρηση 4.7.5. Εναλλακτικά, μπορούμε να δείξουμε την (4.7.7) χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.3.1 και το γεγονός ότι οι μεγιστικές ανισότητες ισχύουν για $F=\mathbb{R}$.

4.8 Περαιτέρω ερωτήματα

Είναι φυσικό να ρωτήσουμε αν μπορεί να δώσει κανείς φράγματα για τα suprema άλλων στοχαστικών ανελίξεων. Το άνω φράγμα μέσω κυριαρχούντων μέτρων δουλεύει σε αρκετά γενικές περιπτώσεις (βλέπε [1]). Αμφίπλευρες όμως εκτιμήσεις είναι γνωστές μόνο σε πολύ λίγες περιπτώσεις. Για «κανονικές ανελίξεις» της μορφής $X_t=\sum_{i\geqslant 1} t_iX_i$, όπου X_i είναι ανεξάρτητες κεντραρισμένες τυχαίες μεταβλητές, αποτελέσματα στο πνεύμα του Θεωρήματος 1.3.1 αποδείχτηκαν για ορισμένες συμμετρικές μεταβλητές με λογαριθμικά κοίλες ουρές (βλέπε [19] και [9]).

Μια βασική σημαντική κλάση κανονικών ανελίξεων που αξίζουν διερεύνηση είναι η κλάση των ανελίξεων (selector processes) της μορφής

$$X_t=\sum_{i\geqslant 1} t_i(\delta_i-\delta), \quad t\in\ell_2,$$

όπου $(\delta_i)_{i\geqslant 1}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $\mathbb{P}(\delta_i=1)=\delta=1-\mathbb{P}(\delta_i=0)$. Μπορούμε να φράξουμε την ποσότητα

$$\delta(T):=\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\left|\sum_{i\geqslant 1} t_i(\delta_i-\delta)\right|\right), \quad T\subseteq\ell_2$$

με δύο τρόπους.

Πρώτα φράσσουμε την $\delta(T)$ με μια κατά σημείο εκτίμηση. Θεωρούμε ένα ανεξάρτητο αντίγραφο $(\delta_i')_{i\geqslant 1}$ της $(\delta_i)_{i\geqslant 1}$ και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen γράφουμε

$$\begin{aligned}\delta(T) &\leqslant \mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\left|\sum_{i\geqslant 1} t_i(\delta_i-\delta_i')\right|\right) \leqslant 2\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\left|\sum_{i\geqslant 1} t_i\delta_i\right|\right)\\ &\leqslant 2\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\sum_{i\geqslant 1}|t_i|\delta_i\right).\end{aligned}$$

Η δεύτερη εκτίμηση βασίζεται στην διαδοχική προσέγγιση. Ορίζουμε, για $\alpha>0$ και για έναν μετρικό χώρο (T,d),

$$\gamma_\alpha(T,d) := \inf\sup_{t\in T}\sum_{n=0}^{\infty} 2^{n/\alpha}\Delta(A_n(t)),$$

όπου, όπως στον ορισμό του γ_2, το infimum λαμβάνεται πάνω από όλες τις αποδεκτές ακολουθίες διαμερίσεων $(\mathcal{A}_n)_{n\geqslant 0}$ του συνόλου T. Η ανισότητα Bernstein συνεπάγεται ότι για $X_t=\sum_{i\geqslant 1} t_i(\delta_i-\delta)$ και $\delta\in(0,1/2]$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left(|X_t-X_s|\geqslant u\right)\leqslant 2\exp\left(-\min\left\{\frac{u^2}{L\delta d_2(s,t)^2},\frac{u}{Ld_\infty(s,t)}\right\}\right)$$

για κάθε $s,t\in\ell_p$, όπου $d_p(t,s):=\|t-s\|_p$ είναι η ℓ_p-μετρική. Από το Θεώρημα 2.1.7 έχουμε

$$\delta(T)\leqslant L(\sqrt{\delta}\gamma_2(T,d_2)+\gamma_1(T,d_\infty)).$$

Η επόμενη εικασία διατυπώθηκε από τον M. Talagrand και ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει άλλος τρόπος να φράξουμε το $\delta(T)$ παρά μόνο συνδυάζοντας τις ανωτέρω δύο εκτιμήσεις και το γεγονός ότι $\delta(T_1+T_2) ls \delta(T_1)+\delta(T_2)$.

Εικασία 4.8.1. *Έστω $0<\delta\leqslant 1/2$, έστω δ_i ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές τέτοιες ώστε $\mathbb{P}(\delta_i=1)=\delta=1-\mathbb{P}(\delta_i=0)$, και έστω $\delta(T):=\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T}\left|\sum_{i\geqslant 1}t_i(\delta_i-\delta)\right|\right)$ για $T\subseteq\ell_2$. Τότε, για κάθε σύνολο T με $\delta(T)<\infty$ μπορούμε να βρούμε διάσπαση $T\subseteq T_1+T_2$ τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{t\in T_1}\sum_{i\geqslant 1}|t_i|\delta_i\right)\leqslant L\delta(T),\quad \sqrt{\delta}\gamma_2(T_2,d_2)\leqslant L\delta(T)\ \ \textit{και}\ \ \gamma_1(T_2,d_\infty)\leqslant L\delta(T).$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι για $\delta=1/2$ η παραπάνω εικασία έπεται από το Θεώρημα 1.1.2.

Αφού κάθε τυχαία μεταβλητή που έχει μέση τιμή μηδέν είναι ένα μείγμα από δίτιμες τυχαίες μεταβλητές που έχουν μέση τιμή μηδέν, οι selector processes είναι στενά συνδεδεμένες με τις εμπειρικές ανελίξεις

$$Z_f := \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{i \leqslant N} (f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))), \qquad f \in \mathcal{F}$$

όπου $(X_i)_{i \leqslant N}$ είναι ανεξάρτητες ισοκατανεμημένες τυχαίες μεταβλητές και $\mathcal{F}$ είναι μια κλάση μετρήσιμων συναρτήσεων. Έστω

$$S_N(\mathcal{F}) := \mathbb{E}\left(\sup_{f \in \mathcal{F}} |Z_f|\right) = \frac{1}{\sqrt{N}} \mathbb{E}\left(\sup_{f \in \mathcal{F}} \left| \sum_{i \leqslant N} (f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))) \right| \right).$$

Όπως και για τις selector processes, υπάρχουν δύο διαφορετικοί τρόποι για να φράξουμε την $S_N(\mathcal{F})$. Ο πρώτος είναι να χρησιμοποιήσουμε το τετριμμένο κατά σημείο φράγμα

$$\left| \sum_{i \leqslant N} f(X_i) \right| \leqslant \sum_{i \leqslant N} |f(X_i)|.$$

Ο δεύτερος βασίζεται στην διαδοχική προσέγγιση και στην ανισότητα Bernstein

$$\mathbb{P}\left(\left| \sum_{i \leqslant N} (f(X_i) - \mathbb{E}(f(X_i))) \right| \geqslant t \right) \leqslant 2 \exp\left(- \min\left\{ \frac{t^2}{4N\|f\|_2^2}, \frac{t}{4\|f\|_\infty} \right\} \right), \tag{4.8.1}$$

όπου $\|f\|_p$ είναι η L_p-νόρμα της $f(X_i)$. Επιχειρήματα διαδοχικής προσέγγισης ανάλογα με αυτά που χρησιμοποιήσαμε στην περίπτωση των selector processes δίνουν

$$S_N(\mathcal{F}) \leqslant L\left(\gamma_2(\mathcal{F}_2, d_2) + \frac{1}{\sqrt{N}} \gamma_1(\mathcal{F}_1, d_\infty) \right),$$

όπου $d_p(f,g) := \|f - g\|_p$.

Η ακόλουθη εικασία ισχυρίζεται ότι δεν υπάρχει άλλος τρόπος να φράξουμε τα suprema των εμπειρικών ανελίξεων.

Εικασία 4.8.2. *Υποθέτουμε ότι $\mathcal{F}$ είναι μια αριθμήσιμη κλάση μετρήσιμων συναρτήσεων. Τότε, μπορούμε να βρούμε μια διάσπαση $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_1 + \mathcal{F}_2$ τέτοια ώστε*

$$\mathbb{E}\left(\sup_{f_1 \in \mathcal{F}_1} \sum_{i \leqslant N} |f_1(X_i)| \right) \leqslant \sqrt{N} S_N(\mathcal{F}),$$

και

$$\gamma_2(\mathcal{F}_2, d_2) \leqslant L S_N(\mathcal{F}) \quad \textit{και} \quad \gamma_1(\mathcal{F}_2, d_\infty) \leqslant L\sqrt{N} S_N(\mathcal{F}).$$

Συναφείς εικασίες (και μια πολύ πιο λεπτομερής συζήτηση) μπορούν να βρεθούν στο [24, Κεφάλαιο 12].

Βιβλιογραφία

[1] W. Bednorz, *A theorem on majorizing measures*, Ann. Probab. **34** (2006), 1771–1781.

[2] W. Bednorz and R. Latała, *On the suprema of Bernoulli processes*, C. R. Math. Acad. Sci. Paris **351** (2013), 131–134.

[3] W. Bednorz and R. Latała, *On the boundedness of Bernoulli processes*, Annals of Math. (to appear).

[4] R. M. Dudley, *The sizes of compact subsets of Hilbert space and continuity of Gaussian processes*, J. Functional Analysis **1** (1967), 290–330.

[5] R. M. Dudley, *Uniform central limit theorems*, Cambridge University Press, Cambridge, 1999.

[6] X. Fernique, *Regularité des trajectoires des fonctions aléatoires gaussiennes*, École d'Été de Probabilités de Saint-Flour, IV-1974, Lecture Notes in Mathematics **480**, 1–96, Springer, Berlin, 1975.

[7] X. Fernique, *Fonctions aléatoires gaussiennes, vecteurs aléatoires gaussiens*, Université de Montréal, Centre de Recherches Mathématiques, Montréal, QC, 1997.

[8] L. Krawczyk, *Maximal inequality for Gaussian vectors*, Bull. Polish Acad. Sci. Math. **44** (1996), 157–160.

[9] R. Latała, *Sudakov monoration principle and supremum of some processes*, Geo. Funct. Anal. **7** (1997), 936–953.

[10] R. Latała, *A note on the maximal inequalities for VC-classes*, Advances in Stochastic Inequalities (Atlanta, GA, 1997), 125–134, Contemp. Math. **234** Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.

[11] R. Latała, *On the boundedness of Bernoulli processes over thin sets*, Electron. Commun. Probab. **13** (2008), 175–186.

[12] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Amer. Math. Society, Mathematical Surveys and Monographs, Providence, RI, 2001.

[13] M. Ledoux and M. Talagrand, *Probability in Banach spaces – Isoperimetry and processes*, Springer-Verlag, Berlin, 1991.

[14] M. B. Marcus and G. Pisier, *Random Fourier Series with applications to harmonic analysis*, Annals of Mathematics Studies **101**, Princeton University Press, Princeton, N.J., University of Tokyo Press, Tokyo, 1981.

[15] M. Talagrand, *Regularity of Gaussian processes*, Acta Math. **159** (1987), 99–149.

[16] M. Talagrand, *An isoperimetric theorem on the cube and the Khinthcine-Kahane inequalities*, Proc. Amer. Math. Soc. **104** (1988), 905–909.

[17] M. Talagrand, *A simple proof of the majorizing measure theorem*, Geom. Funct. Anal. **2** (1992), 118–125.

[18] M. Talagrand, *Regularity of infinitely divisible processes*, Ann. Probab. **21** (1993), 362–432.

[19] M. Talagrand, *The supremum of some canonical processes*, Amer. J. Math. **116** (1994), 284–325.

[20] M. Talagrand, *Constructions of majorizing measures, Bernoulli processes and cotype*, Geom. Funct. Anal. **4** (1994), 660–717.

[21] M. Talagrand, *Majorizing measures: the generic chaining*, Ann. Probab. **24** (1996), 1049–1103.

[22] M. Talagrand, *Majorizing measures without measures*, Ann. Probab. **29**, (2001), 411–417.

[23] M. Talagrand, *Gaussian averages, Bernoulli averages, and Gibbs' measures*, Random structures and algorithms **21** (2002), 197–204.

[24] M. Talagrand, *The generic chaining – Upper and lower bounds of stochastic processes*, Springer Monographs in Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, 2005.

[25] M. Talagrand, *Upper and lower bounds for stochastic processes – Modern methods and classical problems*, Springer-Verlag (to appear).

[26] W. van der Vaart and J. A. Wellner, *Weak convergence and Empirical Processes with applications to Statistics*, Springer, New York, 1996.