Το κεντρικό οριακό πρόβλημα για λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

Διπλωματική Εργασία

Λαμπρινή Χιώνη

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2013

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Περιγραφή της εργασίας

1.1 Το πρόβλημα

Στην εργασία αυτή μελετάμε την γεωμετρία των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Αυτά είναι τα Borel μέτρα πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την

$$\mu((1-\lambda)A+\lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}$$

για κάθε ζευγάρι μη κενών συμπαγών υποσυνόλων A, B του $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda \in (0,1)$.

Το βασικό πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το *κεντρικό οριακό πρόβλημα*: το ερώτημα είναι αν τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ (μεγάλης διάστασης) έχουν κατά προσέγγιση κανονικές περιθώριες κατανομές. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι το μ είναι *ισοτροπικό*, δηλαδή κανονικοποιημένο έτσι ώστε

$$\int_{\mathbb{R}^n} x\, d\mu(x) = 0 \quad \text{και} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle^2 d\mu(x) = 1$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ο ορισμός του *ισοτροπικού κυρτού σώματος* είναι λίγο διαφορετικός. Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν έχει όγκο ίσο με 1, κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων και αν υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ ώστε

$$\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx = L_K^2$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε, από την ανισότητα Brunn-Minkowski έπεται ότι το μέτρο με πυκνότητα $L_K^n \mathbf{1}_{K/L_K}$ είναι λογαριθμικά κοίλο και ισοτροπικό.

Πριν περιγράψουμε αναλυτικά την δομή και τα βασικά αποτελέσματα της εργασίας, δίνουμε κάποια σχόλια για την προέλευση του προβλήματος και αιτιολογούμε τον όρο «κεντρικό οριακό πρόβλημα».

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ η από κοινού πυκνότητα n ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών $X_1, \ldots, X_n$. Μπορούμε να γράψουμε την f στην μορφή

$$f(x_1, \ldots, x_n) = f_1(x_1) \cdots f(x_n)$$

όπου $f_1, \ldots, f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^+$. Υποθέτουμε ότι

$$\mathbb{E}\,(X_j) = 0 \quad \text{και} \quad \mathrm{Var}(X_j) = 1, \qquad 1 \leqslant j \leqslant n.$$

Το κεντρικό οριακό θεώρημα ισχυρίζεται ότι, κάτω από κάποιες υποθέσεις ολοκληρωσιμότητας για τις f_j, έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\sum_{j=1}^{n} \theta_j X_j \leqslant t\right) \simeq \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-s^2/2)\, ds \quad \text{για κάθε}\, t \in \mathbb{R}$$

για τα περισσότερα $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in S^{n-1}$ (ως προς το μέτρο πιθανότητας σ στην S^{n-1}).

Ένα τυπικό παράδειγμα μας δίνει το τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \ldots, X_n)$ που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στον κύβο $Q(n) = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]^n$ (η κανονικοποίηση επιλέγεται έτσι ώστε $\mathrm{Var}(X_j^2) = 1$ για κάθε $1 \leqslant j \leqslant n$). Είναι γνωστό ότι αν π.χ. τα θ_j ικανοποιούν την συνθήκη Lindeberg τότε η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής

$$\langle X, \theta \rangle = \sum_{j=1}^{n} \theta_j X_j$$

είναι κατά προσέγγιση τυπική κανονική.

Ένα δεύτερο παράδειγμα μας δίνει η μπάλα $D(n) = \sqrt{n+2}B_2^n$. Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα $X = (X_1, \ldots, X_n)$ ομοιόμορφα κατανεμημένο στην $D(n)$. Τώρα, οι τυχαίες μεταβλητές X_j δεν είναι πιά ανεξάρτητες. Με βάση την παρατήρηση του Maxwell ότι αν το n είναι αρκετά μεγάλο τότε

$$\sigma\,(\theta_j \leqslant t) \simeq \sqrt{\frac{n}{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} \exp(-s^2 n/2)\, ds \tag{1.1.1}$$

για κάθε $t \in [-1, 1]$, και χρησιμοποιώντας την συμμετρία της $D(n)$, μπορούμε να ελέγξουμε ότι η κατανομή της τυχαίας μεταβλητής $\langle X, \theta \rangle$ είναι πολύ κοντά στην τυπική κανονική κατανομή για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Το *κεντρικό οριακό πρόβλημα* ρωτάει ποιές είναι εκείνες οι κατανομές (μεγάλης διάστασης) οι οποίες έχουν κατά προσέγγιση κανονικές περιθώριες κατανομές. Υποθέτουμε ότι $X = (X_1, \ldots, X_n)$ είναι ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή κανονικοποιημένο έτσι ώστε

$$\mathbb{E}(X_j) = 0 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X_i X_j) = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, \ldots, n.$$

Αποδεικνύεται ότι αν η κατανομή του X συγκεντρώνεται ισχυρά σε έναν λεπτό δακτύλιο τότε η απάντηση είναι καταφατική.

Θεώρημα 1.1.1. *Έστω X ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι*

$$\mathbb{P}\left(\left|\frac{\|X\|_2}{\sqrt{n}} - 1\right| \geqslant \varepsilon\right) \leqslant \varepsilon \tag{1.1.2}$$

για κάποιο $\varepsilon \in (0,1)$. Τότε, για κάθε θ σε ένα υποσύνολο A της S^{n-1} με $\sigma(A) \geqslant 1 - \exp(-c_1\sqrt{n})$ έχουμε

$$|\mathbb{P}(\langle X, \theta\rangle \leqslant t) - \Phi(t)| \leqslant c_2(\varepsilon + n^{-\alpha}) \qquad \text{για κάθε } t \in \mathbb{R},$$

όπου $\Phi(t)$ είναι η τυπική κανονική συνάρτηση κατανομής και $c_1, c_2, \alpha > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Αποτελέσματα αυτού του τύπου έχουν εμφανιστεί αρκετές φορές στην βιβλιογραφία (βλέπε, για παράδειγμα, Sudakov, Diaconis και Freedman, von Weizsäker). Θα περιγράψουμε αναλυτικά μόνο την εργασία των Anttila, Ball και Περυσινάκη, η οποία έκανε το πρόβλημα ευρέως γνωστό στο πλαίσιο των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και, γενικότερα, στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων κατανομών.

Αξίζει τον κόπο να αναφέρουμε εδώ τις βασικές ιδέες πίσω από το Θεώρημα 1.1.1. Θεωρούμε ένα τυχαίο διάνυσμα Y, ανεξάρτητο από το X, το οποίο είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στην S^{n-1}. Για σταθερό $t \in \mathbb{R}$, ορίζουμε $F_t : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$F_t(\theta) = \mathbb{P}(\langle X, \theta\rangle \leqslant t).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} F_t(\theta)\, d\sigma(\theta) = \mathbb{P}(\|X\|_2 Y_1 \leqslant t).$$

Συνδυάζοντας την (1.1.1) με την υπόθεση (1.1.2) βλέπουμε ότι η $\|X\|_2 Y_1$ είναι περίπου τυπική κανονική τυχαία μεταβλητή, συνεπώς

$$\int_{S^{n-1}} F_t(\theta)\, d\sigma(\theta) \simeq \Phi(t).$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1 θα ολοκληρωνόταν αν μπορούσαμε να δείξουμε ότι, για τα περισσότερα $\theta \in S^{n-1}$,

$$F_t(\theta) \simeq \Phi(t).$$

Εδώ, χρησιμοποιούμε ανισότητες μεγάλων αποκλίσεων για Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις στην σφαίρα και δείχνουμε ότι η F_t είναι περίπου σταθερή και ίση με την μέση τιμή της σε ένα μεγάλο κομμάτι της S^{n-1}. Δεν μπορούμε να υποθέσουμε, σε πλήρη γενικότητα, ότι η F_t είναι Lipschitz συνεχής. Μπορούμε όμως να προσεγγίσουμε την F_t με μια συνάρτηση της μορφής

$$G_t(\theta) = \mathbb{E}\, I_t(\langle X, \theta\rangle),$$

όπου I_t είναι μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση που προσεγγίζει την χαρακτηριστική συνάρτηση του $(-\infty, t]$ (η ιδέα αυτή εμφανίζεται σε μια εργασία του Bobkov). Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας για σταθερή τιμή του t, και η απόδειξη ολοκληρώνεται με ένα επιχείρημα διακριτοποίησης: εφαρμόζουμε το προηγούμενο βήμα για τις τιμές $t_k = \Phi^{-1}(k\varepsilon)$, $k = 1, \ldots, \lceil \varepsilon^1 \rceil$.

Το επιχείρημα που περιγράψαμε είναι πολύ γενικό. Υποθέσαμε φυσικά ότι η διάσταση είναι αρκετά μεγάλη, δεν υποθέσαμε όμως την ανεξαρτησία των τυχαίων μεταβλητών X_j ούτε κάποιου είδους συμμετρία για την κατανομή του τυχαίου διανύσματος X. Το βασικό λοιπόν ερώτημα είναι να δούμε για ποιές κατανομές μεγάλης διάστασης ισχύει καλή εκτίμηση για την συγκέντρωση του μέτρου σε έναν λεπτό δακτύλιο. Μπορούμε εύκολα να κατασκευάσουμε παραδείγματα ισοτροπικών κατανομών για τις οποίες δεν ισχύει κάτι τέτοιο. Αν συμβολίσουμε με σ_t το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας στην σφαίρα tS^{n-1} και επιλέξουμε $t_1 = \sqrt{n}/2$ και $t_2 = \sqrt{7n}/2$, τότε το ισοτροπικό μέτρο

$$\mu = \frac{\sigma_{t_1} + \sigma_{t_2}}{2}$$

δεν έχει «κανονικές περιθώριες κατανομές» (άρα, δεν συγκεντρώνεται σε κάποιον λεπτό δακτύλιο).

Όπως θα δούμε, αν υποθέσουμε ότι η κατανομή είναι λογαριθμικά κοίλη τότε μπορούμε να αποδείξουμε ισχυρή συγκέντρωση σε λεπτό δακτύλιο και να δώσουμε καταφατική απάντηση στο κεντρικό οριακό πρόβλημα. Έχει μάλιστα διατυπωθεί η εξής πολύ ισχυρή εικασία.

Εικασία του λεπτού δακτυλίου: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα X στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\sigma_X^2 := \mathbb{E}\,(\|X\|_2 - \sqrt{n})^2 \leqslant C^2.$$

Η εικασία παραμένει ανοικτή. Όμως, τα τελευταία χρόνια έχουν αποδειχθεί πολύ ισχυρές ανισότητες συγκέντρωσης, οι οποίες οδηγούν σε (ισχυρά αλλά όχι βέλτιστα) κεντρικά οριακά θεωρήματα για το τυχόν ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Οι ανισότητες αυτές θα παρουσιαστούν στο Κεφάλαιο 5.

1.2 Δομή της εργασίας

Σε αυτήν την παράγραφο αναφέρουμε συνοπτικά τα κεντρικά αποτελέσματα που παρουσιάζουμε στα επόμενα Κεφάλαια.

Κεφάλαιο 2. Στην Παράγραφο 2.2 εισάγουμε την κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Αποδεικνύουμε επίσης χρήσιμες ανισότητες για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις και λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας, οι οποίες θα χρησιμοποιούνται αρκετά συχνά στην συνέχεια.

Στην Παράγραφο 2.3 ορίζουμε τα ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα. Αυτά είναι τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας μ που έχουν βαρύκεντρο στην αρχή των αξόνων και ικανοποιούν την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle^2 d\mu(x) = 1$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Η ισοτροπική σταθερά ενός μέτρου μ που ανήκει σε αυτήν την κλάση ορίζεται ως εξής:

$$L_\mu := \left(\sup_{x \in \mathbb{R}^n} f(x) \right)^{1/n} \simeq (f(0))^{1/n},$$

όπου f είναι η λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα του μ. Παράλληλα συζητάμε την κλάση των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων και δίνουμε τον ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς ενός κυρτού σώματος. Στις τελευταίες δύο υποπαραγράφους εισάγουμε κάποια πολύ βασικά εργαλεία. Στην Παράγραφο 2.3(ε) μελετάμε τις ιδιότητες συγκέντρωσης των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας οι οποίες προκύπτουν άμεσα από την ανισότητα Brunn-Minkowski (ακριβέστερα, από το λήμμα του Borell) και τις εκφράζουμε στην μορφή αντίστροφων ανισοτήτων Hölder για ημινόρμες. Στην Παράγραφο 2.3(στ) ορίζουμε την οικογένεια των κυρτών σωμάτων $K_p(\mu)$, $p \geqslant 1$, που αντιστοιχούν σε ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ. Τα σώματα $K_p(\mu)$ εισήχθησαν από τον K. Ball και μας επιτρέπουν να αναχθούμε από την μελέτη των λογαριθμικά κοίλων μέτρων στην μελέτη των κυρτών σωμάτων. Αποδεικνύουμε ότι είναι κυρτά σώματα και συζητάμε τις βασικές τους ιδιότητες. Σαν ένα πρώτο παράδειγμα για την χρησιμότητά τους, δείχνουμε ότι για να επιτύχουμε άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά των λογαριθμικά κοίλων μέτρων αρκεί να εξασφαλίσουμε αντίστοιχο άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά στην πιο περιορισμένη κλάση των κυρτών σωμάτων.

Κεφάλαιο 3. Ένα βασικό αποτέλεσμα του Κεφαλαίου 2 εξασφαλίζει ότι η ψ_1-νόρμα οποιουδήποτε γραμμικού συναρτησοειδούς $x \mapsto \langle x, \theta \rangle$, $\theta \in S^{n-1}$, ως προς ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ είναι φραγμένη από μία απόλυτη σταθερά. Σε αυτό το Κεφάλαιο εισάγουμε την οικογένεια των L_q-κεντροειδών σωμάτων ενός ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου μ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$, το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(\mu)$ του μ ορίζεται μέσω της συνάρτησης στήριξής του

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \|\langle \cdot, y \rangle\|_{L_q(\mu)} = \left(\int_K |\langle x, y \rangle|^q d\mu(x) \right)^{1/q}.$$

Παρατηρήστε ότι το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν έχει βαρύκεντρο το 0 και $Z_2(\mu) = B_2^n$. Η μελέτη αυτής της οικογένειας σωμάτων, και της συμπεριφοράς τους καθώς το q αυξάνει από το 2 προς το n, δίνει πολλές πληροφορίες για τις ιδιότητες συγκέντρωσης του μέτρου μ.

Αρχικά παρουσιάζουμε τις βασικές ιδιότητες της οικογένειας $\{L_q(\mu) : q \geqslant 2\}$ και αποδεικνύουμε κάποιες θεμελιώδεις σχέσεις. Δύο από αυτές παίζουν ιδιαίτερα σημαντικό ρόλο στα επόμενα:

(i) $f_\mu(0)^{1/n}|Z_n(\mu)|^{1/n} \simeq 1$.

(ii) Για κάθε $1 \leqslant k < n$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$ και $q \geqslant 1$, έχουμε

$$P_F(Z_q(\mu)) = Z_q(\pi_F(\mu)),$$

όπου $\pi_F(\mu)$ είναι η περιθώρια κατανομή του μ ως προς τον F, που ορίζεται από την σχέση $\pi_F(\mu)(A) := \mu(P_F^{-1}(A))$ για κάθε Borel υποσύνολο του F.

Η πρώτη σημαντική εφαρμογή της θεωρίας των L_q-κεντροειδών σωμάτων είναι η ανισότητα του Παούρη: για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant ct\sqrt{n}\}) \leqslant \exp\left(-t\sqrt{n}\right)$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η ανισότητα είναι σχεδόν άμεση συνέπεια του εξής αποτελέσματος: υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε, αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$I_q(\mu) \leqslant c_2 I_2(\mu)$$

για κάθε $q \leqslant c_1\sqrt{n}$, όπου η ποσότητα $I_q(\mu)$ ορίζεται, για κάθε $0 \neq q > -n$, ως εξής:

$$I_q(\mu) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Περιγράφουμε επίσης την απόδειξη ενός δεύτερου αποτελέσματος του Παούρη, το οποίο επεκτείνει το προηγούμενο. Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_3\sqrt{n}$ ισχύει

$$I_{-q}(\mu) \simeq I_q(\mu).$$

Ειδικότερα, για κάθε $1 \leqslant q \leqslant c_3\sqrt{n}$ ισχύει $I_q(\mu) \leqslant cI_2(\mu)$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Από την ανισότητα $I_{-q}(\mu) \leq cI_2(\mu)$, με $q \simeq \sqrt{n}$, προκύπτει ότι αν $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ τότε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon^{c_4\sqrt{n}},$$

όπου $\varepsilon_0, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Με άλλα λόγια, τα αποτελέσματα αυτού του Κεφαλαίου δίνουν μια εκτίμηση του μέτρου σε έναν «όχι και τόσο λεπτό» δακτύλιο γύρω από την ακτίνα $\sqrt{n}$: έχουμε

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : c\sqrt{n} \leqslant \|x\|_2 < C\sqrt{n}\}) > 1 - o_n(1),$$

όπου $0 < c < 1 < C$ είναι απόλυτες σταθερές.

Κεφάλαιο 4. Σε αυτό το Κεφάλαιο παρουσιάζουμε το θεώρημα των Anttila, Ball και Περυσινάκη. Θεωρούμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο μπορεί κανείς να δεί σαν χώρο πιθανότητας με το μέτρο Lebesgue μ_K στο K, και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X_\theta(x) = \langle x, \theta \rangle$. Η υπόθεση ότι το K είναι ισοτροπικό παίρνει την μορφή

$$\mathbb{E}X_\theta = 0 \ \text{ και } \ \mathrm{Var}(X_\theta) = L_K^2$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Συμβολίζουμε με $g(s)$ την πυκνότητα της κανονικής τυχαίας μεταβλητής γ που έχει μέση τιμή 0 και διασπορά L_K^2, και για απλότητα γράφουμε $g_\theta(s)$ για την πυκνότητα της X_θ. Παρατηρήστε ότι

$$g_\theta(s) = |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = s\}|$$

και

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}L_K} \exp\left(-\frac{s^2}{2L_K^2}\right).$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 1.2.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο ικανοποιεί την*

$$\mu_K\left(\left|\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} - L_K\right| \geqslant \varepsilon L_K\right) \leqslant \varepsilon \tag{1.2.1}$$

για κάποιον $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Τότε, για κάθε $\delta > 0$,

$$\begin{aligned}\sigma&\left(\left\{\theta : \left|\int_{-t}^{t} g_\theta(s)\,ds - \int_{-t}^{t} g(s)\,ds\right| \leqslant \delta + 4\varepsilon + \frac{c_1}{\sqrt{n}} \ \text{ για κάθε } \ t \in \mathbb{R}\right\}\right)\\ &\geqslant 1 - n\,e^{-c_2\delta^2 n},\end{aligned}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Κεφάλαιο 5. Περιγράφουμε το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα για την εικασία του λεπτού δακτυλίου, το οποίο οφείλεται στους Guédon και E. Milman. Πολλές από τις ιδέες της απόδειξης βασίζονται σε προηγούμενες δουλειές του Klartag (που ήταν ο πρώτος που έδωσε ασθενέστερη αλλά γενική εκτίμηση) και του Fleury (το επιχείρημα του οποίου περιγράφουμε επίσης λεπτομερώς).

Θεώρημα 1.2.2. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\big|\,\|X\|_2 - \sqrt{n}\big| \geqslant t\sqrt{n}\right) \leqslant C\exp(-c\sqrt{n}\min(t^3,t)) \tag{1.2.2}$$

για κάθε $t>0$, όπου $C,c>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\|X\|_2)} \leqslant Cn^{1/3}. \tag{1.2.3}$$

Από το Θεώρημα 1.2.2 προκύπτει μια εκτίμηση μεγάλων αποκλίσεων η οποία συμπληρώνει την ανισότητα του Παούρη.

Θεώρημα 1.2.3. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp(-c\sqrt{n}\min(t^3,t)) \tag{1.2.4}$$

για κάθε $t\geqslant 0$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Από το Θεώρημα 1.2.2 προκύπτει επίσης μια εκτίμηση για το μέτρο σε μικρές μπάλες.

Θεώρημα 1.2.4. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp\left(-c_1\sqrt{n}\min\left(t^3, \log\frac{c_2}{1-t}\right)\right) \tag{1.2.5}$$

για κάθε $t\in(0,1)$, όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Όλα τα παραπάνω θεωρήματα είναι συνέπειες του εξής κύριου τεχνικού θεωρήματος.

Θεώρημα 1.2.5. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $1\leqslant |p-2|\leqslant c_1n^{1/6}$ τότε*

$$1 - C\frac{|p-2|}{n^{1/3}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2\right)^{1/2}} \leqslant 1 + C\frac{|p-2|}{n^{1/3}}, \tag{1.2.6}$$

και αν $c_1n^{1/6}\leqslant |p-2|\leqslant c_2\sqrt{n}$ τότε

$$1 - C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2\right)^{1/2}} \leqslant 1 + C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}}. \tag{1.2.7}$$

Κεφάλαιο 2

Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

2.1 Προαπαιτούμενα από την ασυμπτωτική κυρτή γεωμετρία

2.1α΄ Κυρτά σώματα

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με μια Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και S^{n-1} για την μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται με $|\cdot|$. Γράφουμε ω_n για τον όγκο της B_2^n και σ για το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Η πολλαπλότητα Grassmann $G_{n,k}$ των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$ είναι εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Έστω $k\leqslant n$ και $F\in G_{n,k}$. Συμβολίζουμε με P_F την ορθογώνια προβολή από τον $\mathbb{R}^n$ στον F. Επίσης, ορίζουμε $B_F := B_2^n\cap F$ και $S_F := S^{n-1}\cap F$.

Τα γράμματα c, c', c_1, c_2 κλπ. συμβολίζουν απόλυτες θετικές σταθερές, οι οποίες μπορεί να αλλάζουν από γραμμή σε γραμμή. Οποτεδήποτε γράφουμε $a\simeq b$, εννοούμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2>0$ έτσι ώστε $c_1 a\leqslant b\leqslant c_2 a$. Επίσης, αν $K, L\subseteq\mathbb{R}^n$ θα γράφουμε $K\simeq L$ αν υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2>0$ έτσι ώστε $c_1K\subseteq L\subseteq c_2K$.

Ένα **κυρτό σώμα** στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα συμπαγές κυρτό σύνολο C του $\mathbb{R}^n$ με μη κενό εσωτερικό. Λέμε ότι το C είναι συμμετρικό αν «$x\in C$ αν και μόνον αν $-x\in C$». Λέμε ότι το C έχει *κέντρο βάρους* στο 0 (ή στην αρχή των αξόνων) αν $\int_C\langle x,\theta\rangle\,dx=0$ για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Η *ακτινική συνάρτηση* $\rho_C:\mathbb{R}^n\setminus\{0\}\to\mathbb{R}^+$ του κυρτού σώματος C με $0\in\mathrm{int}(C)$ ορίζεται ως εξής:

$$\rho_C(x)=\max\{t>0 : tx\in C\}.$$

Η *συνάρτηση στήριξης* του C ορίζεται ως εξής:

$$h_C(y) = \max\{\langle x, y\rangle : x \in C\}.$$

Παρατηρήστε ότι σε κάθε διευθύνση $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_C(\theta) \leqslant h_C(\theta)$. Το *μέσο πλάτος* του C είναι η ποσότητα

$$w(C) = \int_{S^{n-1}} h_C(\theta)\sigma(d\theta).$$

Η *περιγεγραμμένη ακτίνα* του C είναι η

$$R(C) = \max\{\|x\|_2 : x \in C\}.$$

Πολλές φορές, για σώματα C με $0 \in \mathrm{int}(C)$ λέμε την παραπάνω ποσότητα διάμετρο του σώματος. Ο λόγος είναι ότι αυτές οι δύο ποσότητες είναι ισοδύναμες:

$$R(C) \leqslant \mathrm{diam}(C) \leqslant 2R(C),$$

όπου $\mathrm{diam}(C)$ είναι η συνήθης διάμετρος $\mathrm{diam}(C) = \sup\{\|x-y\|_2 : x, y \in C\}$. Το πολικό σώμα C° του C ορίζεται να είναι το σώμα

$$C^\circ = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, y\rangle \leqslant 1 \ \forall y \in C\}.$$

Βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι ακόλουθες:

(i) $0 \in C^\circ$.

(ii) Αν $0 \in \mathrm{int}(C)$, τότε $(C^\circ)^\circ = C$.

(iii) Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ισχύει $\rho_{C^\circ}(\theta) = 1/h_C(\theta)$.

(iv) Για κάθε $T \in GL(n)$ ισχύει $(TK)^\circ = (T^{-1})^*(K^\circ)$.

Κάποιες βασικές ανισότητες για όγκους κυρτών σωμάτων οι οποίες θα φανούν χρήσιμες είναι οι ακόλουθες:

(α) Η ανισότητα του Urysohn. Αν C είναι κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$w(C) \geqslant \left(\frac{|C|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}.$$

(β) Η ανισότητα Blaschke-Santaló. Αν K είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, ή γενικότερα αν το K έχει κέντρο βάρους το 0, τότε

$$|K|\,|K^\circ| \leqslant |B_2^n|^2.$$

(γ) Η ανισότητα των Bourgain-Milman. Υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $0 < c < 1$ ώστε: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$, ισχύει

$$|K| \cdot |K^\circ| \geqslant c^n |B_2^n|.$$

Η ανισότητα αυτή είναι γνωστή και ως αντίστροφη ανισότητα Santaló.

Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|\cdot\|_K : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ με

$$\|x\|_K = \inf\{t > 0 : x \in tK\}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ συμβολίζεται με X_K. Αντίστροφα, αν $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία μπάλα $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leqslant 1\}$ του X είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Έστω X, Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Η *απόσταση Banach–Mazur* του X από τον Y ορίζεται ως εξής:

$$d(X,Y) = \inf\{\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \mid T : X \to Y \text{ γραμμικός ισομορφισμός}\}.$$

Σε γεωμετρική γλώσσα η απόσταση Banach–Mazur περιγράφεται ως εξής: Αν $X = X_K$ και $Y = X_L$ (δηλαδή οι μοναδιαίες μπάλες των X, Y είναι τα κυρτά σώματα K, L αντίστοιχα) τότε η $d(X,Y)$ είναι ο μικρότερος $d > 0$ ώστε

$$L \subseteq T(K) \subseteq dL$$

για κάποιον αντιστρέψιμο γραμμικό μετασχηματισμό T. Είναι προφανές ότι $d(X,Y) \geqslant 1$ για κάθε δύο n-διάστατους χώρους, με ισότητα αν και μόνον αν οι χώροι είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Έτσι, η απόσταση Banach–Mazur μετράει πόσο διαφέρουν δύο χώροι από το να είναι ισομετρικοί.

2.1β′ Η ανισότητα Brunn-Minkowski

Ορισμός 2.1.1. *Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$A + B := \{a + b \mid a \in A, \, b \in B\}$$

και για κάθε $t \geqslant 0$,

$$tA = \{ta \mid a \in A\}.$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 2.1.2. *Εστω K και T δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/n} \geqslant |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{2.1.1}$$

Σημείωση. Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα, ισότητα στην (2.1.1) μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά.

Η (2.1.1) εκφράζει με μία έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι *κοίλη* συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geqslant \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}. \tag{2.1.2}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.1.2) και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geqslant |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}. \tag{2.1.3}$$

Η ασθενέστερη αυτή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητη της διάστασης.

Υπάρχουν πολλές αποδείξεις της (2.1.1). Θα δώσουμε εδώ την απόδειξη της *συναρτησιακής μορφής* της ανισότητας, που οφείλεται στους Prékopa και Leindler

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω $f, g, h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^+$ τρεις μετρήσιμες συναρτήσεις και έστω $\lambda \in (0,1)$. Υποθέτουμε ότι οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, και ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$*

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^{\lambda} g(y)^{1-\lambda}. \tag{2.1.4}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}.$$

Απόδειξη. Θα δείξουμε την ανισότητα με επαγωγή ως προς την διάσταση n.

(α) $n = 1$: Χρησιμοποιώντας βασικά αποτελέσματα από την θεωρία του ολοκληρώματος Lebesgue, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι f και g είναι συνεχείς και γνήσια θετικές. Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ιδέα της μεταφοράς του μέτρου.

Ορίζουμε $x, y : (0,1) \to \mathbb{R}$ μέσω των

$$\int_{-\infty}^{x(t)} f = t \int f \quad , \quad \int_{-\infty}^{y(t)} g = t \int g.$$

Με βάση τις υποθέσεις μας οι x, y είναι παραγωγίσιμες, και για κάθε $t \in (0,1)$ έχουμε

$$x'(t) f(x(t)) = \int f \quad \text{και} \quad y'(t) g(y(t)) = \int g.$$

Ορίζουμε $z : (0,1) \to \mathbb{R}$ με

$$z(t) = \lambda x(t) + (1-\lambda) y(t).$$

Οι x και y είναι γνησίως αύξουσες. Επεται ότι η z είναι κι αυτή γνησίως αύξουσα και, από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,

$$z'(t) = \lambda x'(t) + (1-\lambda) y'(t) \geqslant (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα της h κάνοντας την αλλαγή μεταβλητών $s = z(t)$:

$$\begin{aligned}
\int h &= \int_0^1 h(z(t)) z'(t) dt \\
&\geqslant \int_0^1 h(\lambda x(t) + (1-\lambda) y(t)) (x'(t))^{\lambda} (y'(t))^{1-\lambda} dt \\
&\geqslant \int_0^1 f^{\lambda}(x(t)) g^{1-\lambda}(y(t)) \left(\frac{\int f}{f(x(t))} \right)^{\lambda} \left(\frac{\int g}{g(y(t))} \right)^{1-\lambda} dt \\
&= \left(\int f \right)^{\lambda} \left(\int g \right)^{1-\lambda}.
\end{aligned}$$

(β) *Επαγωγικό βήμα:* Υποθέτουμε ότι $n \geqslant 2$ και ότι το Θεώρημα έχει αποδειχθεί για $k \in \{1, \ldots, n-1\}$. Εστω f, g, h όπως στο Θεώρημα. Για κάθε $s \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $h_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$ με $h_s(w) = h(w, s)$, και με ανάλογο τρόπο ορίζουμε $f_s, g_s : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^+$. Από την (2.1.4) έπεται ότι, αν $x, y \in \mathbb{R}^{n-1}$ και $s_0, s_1 \in \mathbb{R}$ τότε

$$h_{\lambda s_1 + (1-\lambda) s_0}(\lambda x + (1-\lambda) y) \geqslant f_{s_1}(x)^{\lambda} g_{s_0}(y)^{1-\lambda},$$

και η επαγωγική υπόθεση μας δίνει

$$\begin{aligned}
H(\lambda s_1 + (1-\lambda) s_0) &:= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} h_{\lambda s_1 + (1-\lambda) s_0} \\
&\geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{s_1} \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^{n-1}} g_{s_0} \right)^{1-\lambda} =: F^{\lambda}(s_1) G^{1-\lambda}(s_0).
\end{aligned}$$

Εφαρμόζοντας τώρα ξανά την επαγωγική υπόθεση για $n = 1$ στις συναρτήσεις F, G και H, παίρνουμε

$$\int h = \int_{\mathbb{R}} H \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}} F \right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}} G \right)^{1-\lambda} = \left(\int f \right)^{\lambda} \left(\int g \right)^{1-\lambda}. \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2. Έστω K, T συμπαγή μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και έστω $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε $f = \chi_K$, $g = \chi_T$, και $h = \chi_{\lambda K + (1-\lambda)T}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 2.1.3, οπότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| = \int h \geqslant \left(\int f\right)^{\lambda} \left(\int g\right)^{1-\lambda} = |K|^{\lambda}|T|^{1-\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.1.3) για κάθε τριάδα K, T, λ. Για να πάρουμε την (2.1.1) θεωρούμε K και T όπως στο Θεώρημα 2.1.2 (με $|K| > 0$, $|T| > 0$), και ορίζουμε

$$K_1 = |K|^{-1/n}K, \qquad T_1 = |T|^{-1/n}T, \qquad \lambda = \frac{|K|^{1/n}}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}}.$$

Τα K_1 και T_1 έχουν όγκο 1, οπότε από την (2.1.3) παίρνουμε

$$|\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1| \geqslant 1. \tag{2.1.5}$$

Όμως,

$$\lambda K_1 + (1-\lambda)T_1 = \frac{K+T}{|K|^{1/n} + |T|^{1/n}},$$

επομένως η (2.1.5) παίρνει την μορφή

$$|K+T| \geqslant \left(|K|^{1/n} + |T|^{1/n}\right)^n.$$

□

Η ανισότητα Brunn-Minkowski είναι το θεμέλιο της θεωρίας των κυρτών σωμάτων. Δίνουμε εδώ μερικές μόνο από τις εφαρμογές της, αυτές που έχουν σχέση με τα θέματα που θα μας απασχολήσουν.

Η ανισότητα των Rogers και Shephard.

Το *σώμα διαφορών* του κυρτού σώματος K είναι το

$$K - K = \{x - y \mid x, y \in K\}.$$

Το $K - K$ είναι συμμετρικό (με κέντρο συμμετρίας το 0), και $|K - K| \geqslant |K|$. Οι Rogers και Shephard έδωσαν ακριβές άνω φράγμα για τον όγκο του σώματος διαφορών.

Θεώρημα 2.1.4. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K - K| \leqslant \binom{2n}{n}|K|.$$

Απόδειξη. Η ανισότητα Brunn-Minkowski μπαίνει στην απόδειξη μέσω του εξής λήμματος:

Λήμμα 2.1.5. *Αν K και T είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση*

$$x \mapsto |K \cap (x+T)|^{1/n}$$

είναι κοίλη στον φορέα της.

Απόδειξη. Το Λήμμα είναι άμεση συνέπεια του εγκλεισμού

$$\lambda(K \cap (x+T)) + (1-\lambda)(K \cap (y+T)) \subseteq K \cap ((\lambda x + (1-\lambda)y) + T).$$

Έπεται ότι

$$|K \cap ((\lambda x + (1-\lambda)y) + T)| \geqslant |\lambda(K \cap (x+T)) + (1-\lambda)(K \cap (y+T))|,$$

και από την (2.1.2) συμπεραίνουμε ότι

$$|K \cap (\lambda x + (1-\lambda)y + T)|^{1/n} \geqslant \lambda |K \cap (x+T)|^{1/n} + (1-\lambda)|K \cap (y+T)|^{1/n}.$$

Ορίζουμε $f(x) = |K \cap (x+K)|^{1/n}$. Θέτοντας $T = K$ στο Λήμμα 2.1.5 βλέπουμε ότι η f είναι κοίλη συνάρτηση στον φορέα της, δηλαδή στο $K - K$.

Ορίζουμε μια δεύτερη συνάρτηση $g : K - K \to \mathbb{R}^+$ ως εξής: κάθε $x \in K - K$ γράφεται στην μορφή $x = r\theta$, όπου $\theta \in S^{n-1}$ και $0 \leqslant r \leqslant \rho_{K-K}(\theta)$. Τότε, θέτουμε $g(x) = f(0)(1 - r/\rho_{K-K}(\theta))$. Από τον τρόπο με τον οποίο ορίστηκε, η g είναι γραμμική στο ευθύγραμμο τμήμα $[0, \rho_{K-K}(\theta)\theta]$, μηδενίζεται στο σύνορο του $K-K$, και $g(0) = f(0)$. Αφού η f είναι κοίλη, παίρνουμε $f \geqslant g$ στο $K - K$. Επομένως,

$$\begin{aligned}
\int_{K-K} |K \cap (x+K)|dx &= \int_{K-K} f^n(x)dx \geqslant \int_{K-K} g^n(x)dx \\
&= [f(0)]^n n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_{K-K}(\theta)} r^{n-1}(1-r/\rho)^n dr\sigma(d\theta) \\
&= |K| n\omega_n \int_{S^{n-1}} \rho_{K-K}^n(\theta)\sigma(d\theta) \int_0^1 t^{n-1}(1-t)^n dt \\
&= |K||K-K| n \frac{\Gamma(n)\Gamma(n+1)}{\Gamma(2n+1)} = \binom{2n}{n}^{-1} |K||K-K|.
\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, το θεώρημα του Fubini μας δίνει

$$\begin{aligned}\int_{K-K}|K\cap(x+K)|dx &= \int_{\mathbb{R}^n}|K\cap(x+K)|dx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n}\chi_K(y)\chi_{x+K}(y)dydx\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\chi_K(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\chi_{y-K}(x)dx\right)dy\\ &= \int_K|y-K|dy=|K|^2.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο σχέσεις ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Σημείωση. Εξετάζοντας πιό προσεκτικά την απόδειξη, και παίρνοντας υπόψη την συνθήκη ισότητας στην ανισότητα Brunn-Minkowski, βλέπουμε ότι ισχύει ισότητα στο Θεώρημα 2.1.4 αν και μόνο αν το K έχει την ακόλουθη ιδιότητα:

$$(rK+x)\cap(sK+y)=tK+w$$

για κάθε $r,s>0$ και $x,y\in\mathbb{R}^n$, δηλαδή αν η τομή δύο όχι ξένων ομοιοθετικών προς το K σωμάτων είναι κι αυτή ομοιοθετική προς το K. Οι Rogers και Shephard απέδειξαν ότι η ιδιότητα αυτή χαρακτηρίζει το simplex.

Η χρησιμότητα της εκτίμησης του Θεωρήματος 2.1.4 έγκειται στην παρατήρηση ότι ο όγκος του $K-K$ δεν είναι πολύ μεγαλύτερος από τον όγκο του K:

$$|K-K|^{1/n}\leqslant 4|K|^{1/n},$$

δηλαδή, κάθε κυρτό σώμα (που περιέχει το 0) περιέχεται σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα με «περίπου» τον ίδιο όγκο. Η παρατήρηση αυτή θα χρησιμοποιηθεί ουσιαστικά στην συνέχεια.

Τομές ενός κυρτού σώματος με παράλληλα υπερεπίπεδα

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, και σταθεροποιούμε μια διεύθυνση $\theta\in S^{n-1}$. Ορίζουμε $f=f_{K,\theta}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}^+$ ως εξής:

$$f(t)=|K\cap(\theta^\perp+t\theta)|.$$

Ο όγκος εδώ είναι $(n-1)$-διάστατος. Δηλαδή, $f(t)$ είναι το «εμβαδόν» της τομής του K που είναι κάθετη στο θ και σε (προσημασμένη) απόσταση t από τον $\theta^\perp$.

Θεώρημα 2.1.6. *Εστω K κυρτό σώμα, $\theta\in S^{n-1}$, και $f(t)=|K\cap(\theta^\perp+t\theta)|$. Τότε, η $f^{\frac{1}{n-1}}$ είναι κοίλη στον φορέα της.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\theta = e_n$, οπότε ταυτίζουμε φυσιολογικά τον $\theta^\perp$ με τον $\mathbb{R}^{n-1}$. Για κάθε t ορίζουμε

$$K(t) = \{x \in \mathbb{R}^{n-1} \mid (x,t) \in K\}.$$

Εστω $I = \{t \mid K(t) \neq \emptyset\}$. Για κάθε $t \in I$, το $K(t)$ είναι κυρτό, και αν $t, s \in I$, $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$\lambda K(t) + (1-\lambda)K(s) \subseteq K(\lambda t + (1-\lambda)s).$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski στον $\mathbb{R}^{n-1}$,

$$|K(\lambda t + (1-\lambda)s)|^{\frac{1}{n-1}} \geqslant \lambda |K(t)|^{\frac{1}{n-1}} + (1-\lambda)|K(s)|^{\frac{1}{n-1}}.$$

Όμως $f(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)| = |K(t)|$, κι αυτό δίνει το ζητούμενο. □

Σημείωση. Το Θεώρημα 2.1.6 προηγήθηκε της ανισότητας Brunn-Minkowski. Ο Brunn έδειξε το παραπάνω αποτέλεσμα με την μέθοδο της συμμετρικοποίησης, και ο Minkowski έδωσε μια απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2 χρησιμοποιώντας το.

Πόρισμα 2.1.7. *Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος* 2.1.6 *η f είναι λογαριθμικά κοίλη στον φορέα της.*

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, παίρνουμε

$$f(\lambda t + (1-\lambda)s) \geqslant f(t)^\lambda f(s)^{1-\lambda}$$

για κάθε $t, s \in I$ και $\lambda \in (0,1)$. Αυτό σημαίνει ότι η $\log f$ είναι κοίλη στο I. □

Πόρισμα 2.1.8. *Αν το K είναι συμμετρικό με κέντρο το 0, τότε $\|f\|_\infty = f(0)$, δηλαδή η μέγιστη τομή του K είναι η κεντρική.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση της συμμετρίας έπεται ότι $K(-t) = -K(t)$ για κάθε $t \in I$. Από το Πόρισμα 2.1.7 η f είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στο I. Αρα, για κάθε $t \in I$,

$$f(0) = f\left(\frac{t + (-t)}{2}\right) \geqslant \sqrt{f(t)}\sqrt{f(-t)} = f(t).$$

□

Το Λήμμα του Borell

Θεώρημα 2.1.9. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$, και A κλειστό κυρτό συμμετρικό σύνολο τέτοιο ώστε $|K \cap A| = \delta > \frac{1}{2}$. Τότε, για κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$|K \cap (tA)^c| \leqslant \delta \left(\frac{1-\delta}{\delta}\right)^{\frac{t+1}{2}}.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα με απαγωγή σε άτοπο ότι

$$A^c \supseteq \frac{2}{t+1}(tA)^c + \frac{t-1}{t+1}A.$$

Εστω ότι υπάρχει $a \in A$ που γράφεται στην μορφή

$$a = \frac{2}{t+1}y + \frac{t-1}{t+1}a_1,$$

όπου $a_1 \in A$ και $y \notin tA$. Τότε,

$$\frac{1}{t}y = \frac{t+1}{2t}a + \frac{t-1}{2t}(-a_1) \in A,$$

από την κυρτότητα και την συμμετρία του A. Αυτό σημαίνει ότι $y \in tA$, άτοπο.

Το K είναι κυρτό, επομένως

$$A^c \cap K \supseteq \frac{2}{t+1}[(tA)^c \cap K] + \frac{t-1}{t+1}[A \cap K].$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Brunn-Minkowski για συμπαγή σύνολα, παίρνουμε

$$1 - \delta = |A^c \cap K| \geqslant |(tA)^c \cap K|^{\frac{2}{t+1}} |A \cap K|^{\frac{t-1}{t+1}} = |(tA)^c \cap K|^{\frac{2}{t+1}} \delta^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Το Λήμμα του Borell εκφράζει την *συγκέντρωση του όγκου* στον $\mathbb{R}^n$: Αν το $A \cap K$ περιέχει περισσότερο από το μισό του όγκου του K, τότε το ποσοστό του K που μένει έξω από το tA, $t > 1$ φθίνει εκθετικά ως προς t καθώς το $t \to \infty$, με ρυθμό ανεξάρτητο από το K και την διάσταση n.

2.1γ΄ Συγκέντρωση του μέτρου

Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Δηλαδή, ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και το μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ των Borel υποσυνόλων του (X, d). Αν $A \in \mathcal{A}$ και $t > 0$, η *t-περιοχή* του A είναι το σύνολο

$$A_t = \{x \in X : d(x, A) \leqslant t\}.$$

Ορισμός 2.1.10. *Η συνάρτηση συγκέντρωσης του $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ ορίζεται στο $(0, \infty)$ από την*

$$\alpha(X, t) := 1 - \inf\{\mu(A_t) : \mu(A) \geqslant 1/2\}.$$

Λέμε ότι υπάρχει «συγκέντρωση μέτρου» στον χώρο αν η $\alpha(X, t)$ φθίνει γρήγορα (για παράδειγμα, εκθετικά ως προς t). Πολλές από τις εφαρμογές της συγκέντρωσης του μέτρου βασίζονται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.11. *Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1, δηλαδή αν $|f(x) - f(y)| \leqslant d(x,y)$ για κάθε $x, y \in X$, τότε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leqslant 2\alpha(X,t)$$

όπου $\mathrm{med}(f)$ είναι ο μέσος Lévy της f.

Σημείωση. Ο μέσος Lévy $\mathrm{med}(f)$ της f είναι ένας αριθμός για τον οποίο

$$\mu(\{f \geqslant \mathrm{med}(f)\}) \geqslant 1/2 \text{ και } \mu(\{f \leqslant \mathrm{med}(f)\}) \geqslant 1/2.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.11. Θέτουμε $A = \{x : f(x) \geqslant \mathrm{med}(f)\}$ και $B = \{x : f(x) \leqslant \mathrm{med}(f)\}$. Αν $y \in A_t$ τότε υπάρχει $x \in A$ με $d(x,y) \leqslant t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \geqslant -d(y,x) + \mathrm{med}(f) \geqslant \mathrm{med}(f) - t$$

αφού η f είναι 1-Lipschitz. Ομοίως, αν $y \in B_t$ τότε υπάρχει $x \in B$ με $d(x,y) \leqslant t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \leqslant d(y,x) + \mathrm{med}(f) \leqslant \mathrm{med}(f) + t.$$

Δηλαδή, αν $y \in A_t \cap B_t$ τότε $|f(x) - \mathrm{med}(f)| \leqslant t$. Με άλλα λόγια,

$$\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\} \subseteq (A_t \cap B_t)^c = A_t^c \cup B_t^c. \tag{2.1.6}$$

Όμως, από τον ορισμό της συνάρτησης συγκέντρωσης έχουμε $\mu(A_t) \geqslant 1 - \alpha(X,t)$ και $\mu(B_t) \geqslant 1 - \alpha(X,t)$. Επιστρέφοντας στην (2.1.6) βλέπουμε ότι

$$\mu\left(\{|f - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leqslant (1 - \mu(A_t)) + (1 - \mu(B_t)) \leqslant 2\alpha(X,t).$$

□

Στην περίπτωση που η συνάρτηση συγκέντρωσης φθίνει πολύ γρήγορα, το Θεώρημα 2.1.11 δείχνει ότι οι 1-Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις είναι «σχεδόν σταθερές» σε «σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Ισχύει μάλιστα και το αντίστροφο.

Πρόταση 2.1.12. *Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν για κάποιο $t > 0$ και για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f : X \to \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leqslant \eta,$$

τότε $\alpha(X,t) \leqslant \eta$.

Απόδειξη. Έστω A Borel υποσύνολο του X με $\mu(A) \geqslant 1/2$. Θεωρούμε την συνάρτηση $f(x) = d(x,A)$. Η f είναι 1-Lipschitz και $\mathrm{med}(f) = 0$ γιατί η f παίρνει μη αρνητικές τιμές και $\mu(\{x : f(x) = 0\}) \geqslant 1/2$. Από την υπόθεση παίρνουμε

$$\mu(\{x \in X : d(x,A) > t\}) \leqslant \eta,$$

δηλαδή $1 - \mu(A_t) \leqslant \eta$. Έπεται ότι $\alpha(X,t) \leqslant \eta$. □

2.1δ′ Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα

Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένη με την γεωδαισιακή μετρική ρ: η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x,y \in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία $x0y$ στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων 0 και τα x,y. Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο σ: για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma(A) := \frac{|\tilde{A}|}{|B_2^n|},$$

όπου B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα και

$$\tilde{A} := \{sx : x \in A \text{ και } 0 \leqslant s \leqslant 1\}.$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε

$$\|x-y\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2},$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x,y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leqslant \|x-y\|_2 \leqslant \rho(x,y).$$

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στην σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

> Δίνονται $\alpha \in (0,1)$ και $t > 0$. Ανάμεσα σε όλα τα Borel υποσύνολα A της σφαίρας για τα οποία $\sigma(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα για τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_t)$ της t-περιοχής του A.

Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Ισοπεριμετρική ανισότητα στην σφαίρα. *Έστω $\alpha \in (0,1)$ και*

$$B(x,r) = \{y \in S^{n-1} : \rho(x,y) \leqslant r\}$$

μια μπάλα στην S^{n-1} με ακτίνα $r > 0$ που επιλέγεται ώστε $\sigma(B(x,r)) = \alpha$. Τότε, για κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \alpha$ και για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\sigma(A_t) \geqslant \sigma\big(B(x,r)_t\big) = \sigma\big(B(x,r+t)\big).$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α και οποιοδήποτε $t > 0$ οι μπάλες μέτρου α δίνουν τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς την διάσταση. Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $\alpha = 1/2$. Αν

$\sigma(A)=1/2$ και $t>0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του A_t χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_t) \geqslant \sigma\left(B\big(x, \tfrac{\pi}{2}+t\big)\right) \tag{2.1.7}$$

για κάθε $t>0$ και $x \in S^{n-1}$. Εκτιμώντας από κάτω το δεξιό μέλος της (2.1.7) οδηγούμαστε στην ακόλουθη ανισότητα.

Θεώρημα 2.1.13. *Έστω $A \subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A)=1/2$ και έστω $t>0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geqslant 1-\sqrt{\pi/8}\exp(-t^2 n/2). \tag{2.1.8}$$

Παρατήρηση. Αυτό που έχει σημασία σε σχέση με την εκτίμηση του Θεωρήματος 2.1.13 είναι ότι, όσο μικρό $t>0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-t^2n/2)$ τείνει στο 0 καθώς $n\to\infty$ και μάλιστα με πολύ ταχύ ρυθμό (εκθετικά ως προς n). Επομένως, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την t-περιοχή οποιουδήποτε υποσυνόλου A της S^{n+1} με $\sigma(A)=1/2$ είναι «σχεδόν μηδενικό» αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.13 βασίζεται πολύ ισχυρά στην σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Για τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νού μας είναι αρκετή μια ανισότητα σαν την (2.1.8) και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος. Θα δώσουμε μια απλή απόδειξη της (2.1.8) χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski.

Λήμμα 2.1.14. *Θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Δηλαδή, $\mu(A)=|A|/|B_2^n|$ για κάθε Borel $A\subseteq B_2^n$. Αν $A,C\subseteq B_2^n$ συμπαγή, και*

$$d(A,C) := \min\{\|a-c\|_2 : a\in A, c\in C\} = \rho > 0,$$

τότε

$$\min\{\mu(A),\mu(C)\} \leqslant \exp(-\rho^2 n/8).$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+C}{2}$. Από την ανισότητα Brunn-Minkowski παίρνουμε $\left|\frac{A+C}{2}\right| \geqslant \min\{|A|,|C|\}$. Συνεπώς,

$$\mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \geqslant \min\{\mu(A),\mu(C)\}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a\in A$ και $c\in C$, ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει

$$\|a+c\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|c\|_2^2 - \|a-c\|_2^2 \leqslant 4-\rho^2,$$

επομένως

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}}B_2^n.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες βλέπουμε ότι

$$\min\{\mu(A),\mu(C)\} \leqslant \left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leqslant \exp(-\rho^2 n/8).$$

□

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.13. Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = 1/2$ και έστω $t > 0$. Θέτουμε $C = S^{n-1} \setminus A_t$ και θεωρούμε τα υποσύνολα

$$A_1 = \{\rho a : a \in A, \tfrac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1\} \text{ και } C_1 = \{\rho a : a \in C, \tfrac{1}{2} \leqslant \rho \leqslant 1\}$$

της B_2^n. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$d(A_1, C_1) \geqslant \sin\frac{t}{2} \geqslant \frac{t}{\pi}.$$

Από το Λήμμα 2.1.14 συμπεραίνουμε ότι

$$|C_1| \leqslant \exp(-d^2 n/8)|B_2^n| \leqslant \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right)|B_2^n|.$$

Όμως, από τον ορισμό του σ έχουμε $|B_2^n|\sigma(C) = |\tilde{C}|$ και $|C_1| = (1-2^{-n})|\tilde{C}|$. Συνεπώς,

$$\sigma(A_t^c) = \sigma(C) \leqslant \frac{1}{1-2^{-n}} \exp\left(-t^2 n/(8\pi^2)\right).$$

Δηλαδή,

$$\sigma(A_t) \geqslant 1 - c_1 \exp(-c_2 t^2 n) \tag{2.1.9}$$

όπου $c_1 = 2$ και $c_2 = 1/(8\pi^2)$. Η (2.1.9) είναι εντελώς ανάλογη με την ανισότητα του Θεωρήματος 2.1.13 αν εξαιρέσουμε τις ακριβείς τιμές των σταθερών c_1 και c_2. □

2.2 Λογαριθμικά κοίλα μέτρα πιθανότητας

2.2α′ Ορισμοί και παραδείγματα

Συμβολίζουμε με $\mathcal{P}_n$ την κλάση όλων των μέτρων πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία είναι απολύτως συνεχή ως προς το μέτρο Lebesgue. Η πυκνότητα ενός μέτρου $\mu \in \mathcal{P}_n$ συμβολίζεται με f_μ.

Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$. Λέμε ότι το μ έχει βαρύκεντρο το $x_0 \in \mathbb{R}^n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle \, d\mu(x) = \langle x_0, \theta\rangle \tag{2.2.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ισοδύναμα, αν

$$x_0 = \int_{\mathbb{R}^n} x \, d\mu(x).$$

Η υποκλάση $\mathcal{CP}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα *κεντραρισμένα* $\mu \in \mathcal{P}_n$. Αυτά είναι τα μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$ που έχουν βαρύκεντρο στην αρχή των αξόνων. Δηλαδή, $\mu \in \mathcal{CP}_n$ αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle d\mu(x) = 0 \tag{2.2.2}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Η υποκλάση $\mathcal{SP}_n$ της $\mathcal{P}_n$ αποτελείται από όλα τα άρτια (συμμετρικά) μέτρα $\mu \in \mathcal{P}_n$: το μ λέγεται άρτιο αν $\mu(A) = \mu(-A)$ για κάθε σύνολο Borel A στον $\mathbb{R}^n$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Όπως στην περίπτωση των μέτρων, το βαρύκεντρο της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{bar}(f) = \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x f(x) \, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx}.$$

Ειδικότερα, η f έχει βαρύκεντρο (ή κέντρο βάρους) στην αρχή των αξόνων αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta \rangle f(x) \, dx = 0$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Τότε λέμε και ότι η f είναι *κεντραρισμένη*.

Ορισμός 2.2.1. Ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλο* αν για κάθε ζεύγος συνόλων Borel A, B στον $\mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$ ισχύει

$$\mu((1-\lambda)A + \lambda B) \geqslant \mu(A)^{1-\lambda} \mu(B)^{\lambda}. \tag{2.2.3}$$

Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ λέγεται *λογαριθμικά κοίλη* αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda} \tag{2.2.4}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$.

Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, dx = 1$ (τότε λέμε ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη *πυκνότητα*). Από την ανισότητα Prékopa-Leindler έπεται ότι το μέτρο μ που έχει πυκνότητα την f είναι λογαριθμικά κοίλο: για να το δούμε αυτό, θεωρούμε δύο Borel σύνολα A, B στον $\mathbb{R}^n$ και τυχόν $\lambda \in (0, 1)$. Τότε, οι συναρτήσεις $w = \mathbf{1}_A f$, $g = \mathbf{1}_B f$ και $h = \mathbf{1}_{(1-\lambda)A + \lambda B} f$ ικανοποιούν την

$$h((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant w(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$, συνεπώς, το Θεώρημα 2.1.3 δείχνει ότι

$$\mu((1-\lambda)A+\lambda B) = \int_{\mathbb{R}^n} h \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} w\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{\lambda}$$
$$= \mu(A)^{1-\lambda}\mu(B)^{\lambda}.$$

Το επόμενο θεώρημα του Borell [11] δείχνει ότι, αντίστροφα, κάθε μη εκφυλισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{P}_n$ και έχει λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα.

Θεώρημα 2.2.2. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με την ιδιότητα $\mu(H) < 1$ για κάθε υπερεπίπεδο H. Τότε, το μ είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue και έχει μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f, δηλαδή $d\mu(x) = f(x)\,dx$.*

Παραδείγματα 2.2.3. (α) Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας μ_K στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\mu_K(A) = |K \cap A| = \int_A \mathbf{1}_K(x)dx$$

για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq \mathbb{R}^n$. Από την κυρτότητα του K έπεται ότι η $\mathbf{1}_K$ είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, άρα το μ_K είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας.

(β) Για κάθε $c > 0$, η συνάρτηση $f_c(x) = \exp(-c\|x\|_2^2)$ είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^n$: παρατηρήστε ότι η Ευκλείδεια νόρμα είναι κυρτή συνάρτηση, και η $t \mapsto ct^2$ είναι επίσης κυρτή. Συνεπώς, η σύνθεσή τους $c\|x\|_2^2 = -\log f(x)$ είναι μια άρτια κυρτή συνάρτηση. Έπεται ότι, για κάθε $c > 0$, το μέτρο

$$\gamma_{r,c}(A) = \frac{1}{I(c)} \int_A \exp(-c\|x\|_2^2)dx$$

όπου $I(c) = \int_{\mathbb{R}^r} \exp(-c\|x\|_2^2)dx$, είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας. Ειδικότερα αυτό ισχύει για το τυπικό μέτρο του Gauss γ_n.

2.2β΄ Ανισότητες για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις

Σε αυτήν την παράγραφο αποδεικνύουμε ανισότητες για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις οι οποίες θα χρησιμοποιούνται συχνά στην συνέχεια. Δείχνουμε αρχικά ότι κάθε ολοκληρώσιμη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι οι τιμές $f(x)$ της f φθίνουν εκθετικά καθώς $\|x\|_2 \to \infty$ (η απόδειξη που περιγράφουμε προέρχεται από το [24, Λήμμα 2.1]).

Λήμμα 2.2.4. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, υπάρχουν σταθερές $A, B > 0$ ώστε $f(x) \leqslant Ae^{-B\|x\|_2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ειδικότερα, η f έχει πεπερασμένες ροπές κάθε τάξης.*

Απόδειξη. Εφόσον $\int f > 0$, υπάρχει $t \in (0,1)$ ώστε το σύνολο $C := \{x : f(x) > t\}$ να έχει θετικό μέτρο Lebesgue. Παρατηρούμε ότι το C είναι κυρτό αφού η f είναι λογαριθμικά κοίλη, και έχει μη κενό εσωτερικό. Πράγματι, αφού το C έχει θετικό μέτρο, η αφινική του θήκη έχει διάσταση n, άρα το C περιέχει ένα αφινικά ανεξάρτητο σύνολο $\{x_i\}_{i\leqslant n+1}$. Λόγω κυρτότητας, το C περιέχει το simplex $S = \mathrm{conv}\{x_i\}_{i\leqslant n+1}$. Ειδικότερα, το C έχει μη κενό εσωτερικό. Έστω $x_0 \in C$ και $r > 0$ ώστε $x_0 + rB_2^n \subseteq C$. Θεωρώντας την $f_1(\cdot) = f(\cdot + x_0)$ αν χρειασθεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $rB_2^n \subseteq C$.

Ορίζουμε $K = \{x : f(x) > t/e\}$. Τότε, από την ανισότητα του Markov και τη μονοτονία του όγκου έχουμε $0 < |K| < \infty$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το K είναι κυρτό, έχει πεπερασμένο όγκο και περιέχει την rB_2^n, συμπεραίνουμε ότι το K είναι φραγμένο. Επομένως, υπάρχει $R > 0$ ώστε $K \subset RB_2^n$. Τότε, για κάθε $\|x\|_2 > R$ έχουμε $R\frac{x}{\|x\|_2} \notin K$, οπότε $f(R/\|x\|_2 x) \leqslant t/e$, ενώ $r\frac{x}{\|x\|_2} \in C$, το οποίο αποδεικνύει ότι $f(r\frac{x}{\|x\|_2}) \geqslant t$. Επιπλέον, μπορούμε να γράψουμε

$$R\frac{x}{\|x\|_2} = \frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}\frac{rx}{\|x\|_2} + \frac{R-r}{\|x\|_2 - r}\,x.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη παίρνουμε:

$$\frac{t}{e} \geqslant f\left(R\frac{x}{\|x\|_2}\right) \geqslant f\left(r\frac{x}{\|x\|_2}\right)^{\frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}} f(x)^{\frac{R-r}{\|x\|_2 - r}} \geqslant t^{\frac{\|x\|_2 - R}{\|x\|_2 - r}} f(x)^{\frac{R-r}{\|x\|_2 - r}}.$$

Έπεται ότι

$$f(x) \leqslant te^{-\frac{\|x\|_2 - r}{R-r}} < e^{-\|x\|_2/R},$$

για κάθε $\|x\|_2 > R$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε $x \in RB_2^n$ και για κάθε $y \in \frac{x}{2} + \frac{r}{2}B_2^n$ έχουμε (λόγω του ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη)

$$f(y) \geqslant \sqrt{f(x)f(2y-x)} \geqslant \sqrt{t}\,\sqrt{f(x)}.$$

Σε συνδυασμό με το γεγονός ότι η f είναι ολοκληρώσιμη, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε $f(x) \leqslant M$ για κάθε $x \in RB_2^n$. Τώρα είναι φανερό ότι μπορούμε να βρούμε δύο σταθερές $A, B > 0$, οι οποίες εξαρτώνται από την f, έτσι ώστε $f(x) \leqslant Ae^{-B\|x\|_2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. □

Το δεύτερο αποτέλεσμα, το οποίο οφείλεται στον Fradelizi [17], δείχνει ότι η τιμή μιάς λογαριθμικά κοίλης συνάρτησης στο βαρύκεντρό της είναι συγκρίσιμη με την μέγιστη τιμή της (με την σταθερά σύγκρισης να εξαρτάται - εκθετικά - μόνο από την διάσταση). Παρατηρήστε ότι αν η f υποτεθεί άρτια, τότε $f(0) = \|f\|_\infty$.

Λήμμα 2.2.5. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\mathrm{bar}(f) = 0$. Τότε,*

$$f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0).$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f(y)dy = 1$. Από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\log f\left(\int_{\mathbb{R}^n} yf(y)dy\right) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy. \tag{2.2.5}$$

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη, έχουμε

$$-\log f(x) \geqslant -\log f(y) + \langle x-y, \nabla\left(-\log f\right)(y)\rangle . \tag{2.2.6}$$

Πολλαπλασιάζοντας και τα δύο μέλη της τελευταίας ανισότητας με $f(y)$, και στην συνέχεια ολοκληρώνοντας ως προς y, παίρνουμε

$$\begin{aligned} -\log f(x) &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy + \int_{\mathbb{R}^n} \langle x-y, -\nabla f(y)\rangle\, dy \\ &\geqslant -\int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dy - n, \end{aligned} \tag{2.2.7}$$

όπου η τελευταία ανισότητα προκύπτει αν ολοκληρώσουμε κατά μέρη (και χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι οι τιμές $f(y)$ της f φθίνουν εκθετικά καθώς $\|y\|_2 \to \infty$). Συνδυάζοντας τις (2.2.5) και (2.2.7) βλέπουμε ότι

$$\log f(0) \geqslant \int_{\mathbb{R}^n} f(y)\log f(y)dx \geqslant \log f(x) - n,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Παίρνοντας το supremum πάνω από όλα τα x έχουμε το ζητούμενο. □

Στην συνέχεια, αποδεικνύουμε κάποιες τεχνικές ανισότητες για λογαριθμικά κοίλες συναρτήσεις μιας μεταβλητής. Το πρώτο βασικό αποτέλεσμα είναι μια αντίστροφη ανισότητα Hölder. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε εδώ γενικεύει το [23, Λήμμα 2.6] (βλέπε επίσης [32] για ένα παρόμοιο αποτέλεσμα, όπου όμως γίνεται η επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι φθίνουσα).

Θεώρημα 2.2.6. *Έστω $f : [0,\infty) \to [0,\infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση*

$$G(p) := \left[\frac{1}{f(0)\Gamma(p)}\int_0^\infty f(x)x^{p-1}\,dx\right]^{1/p} \tag{2.2.8}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του p στο $[1,\infty)$.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(0)=1$, αλλιώς δουλεύουμε με την λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f_1 = \frac{1}{f(0)}f$. Έστω $p>0$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = cx$ βλέπουμε ότι για κάθε $c>0$ ισχύει

$$\int_0^\infty e^{-cx}x^{p-1}dx = \frac{1}{c^p}\int_0^\infty e^{-x}x^{p-1}dx = \frac{\Gamma(p)}{c^p}.$$

Συνεπώς, αν επιλέξουμε $c_p = \frac{1}{G(p)}$ έχουμε

$$\int_0^\infty e^{-c_p x} x^{p-1} dx = \int_0^\infty f(x) x^{p-1} dx. \tag{2.2.9}$$

Ειδικότερα, δεν μπορούμε να έχουμε $e^{-c_p x} < f(x)$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$, διότι το σύνολο $\{x > 0 : e^{-c_p x} \geqslant f(x)\}$ είναι μη κενό και

$$x_0 := \inf\{x > 0 : e^{-c_p x} \geqslant f(x)\} \in [0, +\infty).$$

Έπεται ότι

$$e^{-c_p x} < f(x) \text{ για κάθε } 0 < x < x_0, \tag{2.2.10}$$

ενώ αν $x > x_0$ τότε μπορούμε να βρούμε $y \in [x_0, x) \cap \{y' > 0 : e^{-c_p y'} \geqslant f(y')\}$ και μπορούμε να γράψουμε

$$e^{-c_p y} \geqslant f(y) \geqslant f(x)^{\frac{y}{x}} f(0)^{1-\frac{y}{x}} = f(x)^{\frac{y}{x}} \tag{2.2.11}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη, απ' όπου έπεται ότι $f(x) \leqslant (e^{-c_p y})^{\frac{x}{y}} = e^{-c_p x}$. Έτσι, έχουμε

$$\int_x^\infty f(t) t^{p-1} dt \leqslant \int_x^\infty e^{-c_p t} t^{p-1} dt \tag{2.2.12}$$

για κάθε $x > x_0$. Από την άλλη πλευρά, από την (2.2.10) βλέπουμε ότι για $x \leqslant x_0$ ισχύει

$$\int_0^x f(t) t^{p-1} dt \geqslant \int_0^x e^{-c_p t} t^{p-1} dt,$$

και έτσι, από την (2.2.9) έχουμε την (2.2.12) και για κάθε $x \leqslant x_0$.

Έστω $q > p$. Από το Θεώρημα Fubini και από την (2.2.9) έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(x) x^{q-1} dx &= \int_0^\infty f(x) x^{p-1} \int_0^x (q-p) t^{q-p-1} dt dx \\
&= \int_0^\infty (q-p) t^{q-p-1} \int_t^\infty f(x) x^{p-1} dx dt \\
&\leqslant \int_0^\infty (q-p) t^{q-p-1} \int_t^\infty e^{-c_p x} x^{p-1} dx dt \\
&= \int_0^\infty e^{-c_p x} x^{q-1} dx = \frac{\Gamma(q)}{c_p^q}.
\end{aligned}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$G(q) = \left(\frac{1}{\Gamma(q)}\int_0^\infty f(x)x^{q-1}\,dx\right)^{1/q} \leqslant \frac{1}{c_p} = G(p),$$

που ήταν το ζητούμενο. □

Η επόμενη ανισότητα είναι στην αντίθετη κατεύθυνση (βλέπε [32, Λήμμα 2.1]).

Λήμμα 2.2.7. *Έστω $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η*

$$F(p) := \left(\frac{p}{\|f\|_\infty}\int_0^\infty t^{p-1}f(t)\,dt\right)^{1/p} \tag{2.2.13}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του p στο $[1,\infty)$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $c>0$,

$$\int_0^\infty x^{p-1}f(cx)\,dx = c^{-p}\int_0^\infty x^{p-1}f(x)\,dx. \tag{2.2.14}$$

Επιλέγοντας $c=F(p)$ παίρνουμε

$$\int_0^\infty x^{p-1}f(F(p)x)\,dx = \frac{\|f\|_\infty}{p} = \int_0^\infty x^{p-1}\|f\|_\infty\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,dx. \tag{2.2.15}$$

Για κάθε $s\in[0,1]$ έχουμε

$$\int_0^s x^{p-1}f(F(p)x)\,dx \leqslant \int_0^s x^{p-1}\|f\|_\infty\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,dx, \tag{2.2.16}$$

οπότε για κάθε $s\geqslant 0$ συμπεραίνουμε ότι

$$\psi_1(s) := \int_s^\infty x^{p-1}f(F(p)x)\,dx \geqslant \psi_2(s) := \int_0^\infty x^{p-1}\|f\|_\infty\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,dx. \tag{2.2.17}$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x^{q-1}f(F(p)x)\,dx &= \int_0^\infty x^{q-p}(-\psi_1(x))'\,dx\\ &= (q-p)\int_0^\infty x^{q-p-1}\psi_1(x)\,dx\\ &\geqslant (q-p)\int_0^\infty x^{q-p-1}\psi_2(x)\,dx\\ &= \int_0^\infty x^{q-1}\|f\|_\infty\mathbf{1}_{[0,1]}(x)\,dx\\ &= \frac{\|f\|_\infty}{q}.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{[F(p)]^q}\int_0^\infty x^{q-1}f(x)\,dx \geqslant \frac{\|f\|_\infty}{q}, \tag{2.2.18}$$

που αποδεικνύει το ζητούμενο.

2η Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_\infty = 1$. Τότε, για $0 < p < q$ και $A > 0$ μπορούμε να γράψουμε:

$$\begin{aligned}\frac{F(q)^q}{q} = \int_0^\infty t^{q-1}f(t)\,dt &= \int_0^A t^{q-1}f(t)\,dt + \int_A^\infty t^{q-1}f(t)\,dt \\ &\geqslant \int_0^A t^{q-1}f(t)\,dt + A^{q-p}\int_A^\infty t^{p-1}f(t)\,dt \\ &= A^{q-p}\frac{F(p)^p}{p} - A^q\int_0^1 (t^{p-1}-t^{q-1})f(At)\,dt \\ &\geqslant A^{q-p}\frac{F(p)^p}{p} - A^q\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right).\end{aligned}$$

Μεγιστοποιώντας το δεξιό μέλος ως προς A επιλέγουμε $A = F(p)$ και έχουμε το συμπέρασμα. □

Το επόμενο αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το λήμμα του Grünbaum [19]. Ο ισχυρισμός του είναι ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο την αρχή των αξόνων, τότε κάθε υπερεπίπεδο που διέρχεται από την αρχή των αξόνων ορίζει δύο ημιχώρους που έχουν περίπου το ίδιο μέτρο. Η απόδειξη που παρουσιάζουμε προέρχεται από το [30].

Λήμμα 2.2.8. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο το 0. Τότε,*

$$\frac{1}{e} \leqslant \mu(\{x : \langle x,\theta\rangle \geqslant 0\}) \leqslant 1-\frac{1}{e}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\mu(\{x : |\langle x,\theta\rangle| > M\}) = 0$$

για κάποιον $M > 0$. Για την γενική περίπτωση προσεγγίζουμε το τυχόν λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με μέτρα που έχουν αυτήν την ιδιότητα στην διεύθυνση του θ.

Ορίζουμε $G(t) = \mu(\langle x,\theta\rangle \leqslant t)$. Η G είναι λογαριθμικά κοίλη, αύξουσα, και έχουμε $G(t) = 0$ αν $t \leqslant M$ και $G(t) = 1$ αν $t \geqslant M$. Αφού το μ έχει βαρύκεντρο το 0, ισχύει

$$\int_{-M}^{M} tG'(t)dt = 0,$$

και με ολοκλήρωση κατά μέρη βλέπουμε ότι

$$\int_{-M}^{M} G(t)dt = M.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$G(0) \geqslant \frac{1}{e}.$$

Παρατηρούμε ότι η $\log G$ είναι κυρτή συνάρτηση, συνεπώς

$$G(t) \leqslant G(0)e^{\alpha t},$$

όπου $\alpha = G'(0)/G(0)$. Μπορούμε να επιλέξουμε τον M αρκετά μεγάλο ώστε $1/c < M$. Τότε, $G(t) \leqslant G(0)e^{\alpha t}$ αν $t \leqslant 1/\alpha$ και, προφανώς, $G(t) \leqslant 1$ αν $t > 1/\alpha$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned} M = \int_{-M}^{M} G(t)dt &\leqslant \int_{-\infty}^{1/\alpha} G(0)e^{\alpha t}dt + \int_{1/\alpha}^{M} 1dt \\ &= \frac{eG(0)}{\alpha} + M - \frac{1}{\alpha}, \end{aligned}$$

και αυτό μας δίνει $G(0) \geqslant 1/e$. □

Η ανισότητα του Lyapunov ισχυρίζεται ότι, για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f, η συνάρτηση $p \mapsto \log \|f\|_p^p$, $-\infty < p < \infty$, είναι κυρτή. Θα χρειαστούμε μια αντίστροφη ανισότητα Lyapunov η οποία αποδείχτηκε από τον Borell στην εργασία [9].

Θεώρημα 2.2.9. *Έστω $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Η συνάρτηση*

$$\Phi(p) = \log \frac{\int_0^\infty x^p f(x)\,dx}{\Gamma(p+1)}$$

είναι κοίλη στο $[0,\infty)$.

Η απόδειξη θα βασιστεί σε μια σειρά από λήμματα.

Λήμμα 2.2.10. *Έστω $g : [0,1] \to [0,\infty)$ μια συνεχώς παραγωγίσιμη, γνησίως φθίνουσα κοίλη συνάρτηση με $g(0) = 1$ και $g(1) = 0$. Σταθεροποιούμε $p > 0$ και θεωρούμε την συνάρτηση*

$$G(s) = -\int_s^1 (t-s)^p g^{n-1}(t) g'(t)dt, \qquad s \in [0,1].$$

Τότε, η συνάρτηση $G^{\frac{1}{n+p}}$ είναι κοίλη.

Απόδειξη. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t \mapsto g(t)$ βλέπουμε ότι

$$G(s) = \int_0^{g(s)} t^{n-1}(g^{-1}(t) - s)^p dt.$$

Έστω $0 < s_1, s_2 < 1$ και $\lambda_1, \lambda_2 > 0$ με $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$. Για κάθε $u \in [0,1]$ ορίζουμε $x_1(u)$ και $x_2(u)$ μέσω των εξισώσεων

$$\int_0^{g(x_i(u))} t^{n-1}(g^{-1}(t) - s_i)^p dt = uG(s_i), \qquad i = 1, 2.$$

Τότε, οι x_1 και x_2 είναι γνησίως φθίνουσες συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις στο $[0,1]$, οι οποίες ικανοποιούν τις $x_i(0) = 1$, $x_i(1) = s_i$ και

$$(x_i(u) - s_i)^p g^{n-1}(x_i(u)) g'(x_i(u)) x_i'(u) = G(s_i), \qquad 0 \leqslant u \leqslant 1. \tag{2.2.19}$$

Αφού η g είναι κοίλη, έχουμε

$$G(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) \geqslant \int_0^{\lambda_1 g(s_1) + \lambda_2 g(s_2)} t^{n-1}(g^{-1}(t) - \lambda_1 s_1 - \lambda_2 s_2)^p dt.$$

Κάνοντας την αντικατάσταση $t = \lambda_1 g(x_1(u)) + \lambda_2 g(x_2(u))$, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η g^{-1} είναι επίσης κοίλη, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
&G(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) \\
&\geqslant \int_0^1 (\lambda_1(x_1(u) - s_1) + \lambda_2(x_2(u) - s_2))^p \, (\lambda_1 g(x_1(u)) + \lambda_2 g(x_2(u)))^{n-1} \\
&\times (\lambda_1 g'(x_1(u)) x_1'(u) + \lambda_2 g'(x_2(u)) x_2'(u)) \, du.
\end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι η συνάρτηση $(a, b, c) \mapsto (a^p b^{n-1} c)^{\frac{1}{n+p}}$ (για $a, b, c \geqslant 0$) είναι κοίλη και παίρνοντας υπ' όψιν την (2.2.19), βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
G(\lambda_1 s_1 + \lambda_2 s_2) &\geqslant \int_0^1 \left(\lambda_1 G(s_1)^{1/(n+p)} + \lambda_2 G(s_2)^{1/(n+p)}\right)^{n+p} du \\
&= \left(\lambda_1 G(s_1)^{1/(n+p)} + \lambda_2 G(s_2)^{1/(n+p)}\right)^{n+p},
\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ο ισχυρισμός του λήμματος. □

Λήμμα 2.2.11. *Έστω $g : [0,1) \to (0, \infty)$ μια φθίνουσα, κοίλη συνάρτηση με $g(0) = 1$. Τότε, η συνάρτηση*

$$\Psi(p) = \log\left(\prod_{i=0}^n (i+p) \int_0^1 s^{p-1} g^n(s) ds\right), \qquad p > 0$$

είναι κοίλη.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η g ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 2.2.10. Για κάθε συνεχή συνάρτηση $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ θέτουμε

$$\tilde{f}(a) := \int_0^1 s^{a-1} f(s)ds, \qquad a > 0$$

και θεωρούμε τα συναρτησοειδή J^a, $a > 0$, που ορίζονται ως εξής:

$$[J^a(f)](s) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_s^1 (t-s)^{a-1} f(t)dt, \qquad 0 \leqslant s \leqslant 1.$$

Παρατηρούμε ότι η J ικανοποιεί την προσθετική ταυτότητα

$$J^a(J^b) = J^{a+b}, \qquad a, b > 0. \tag{2.2.20}$$

Θέτουμε $\varphi = g^n$ και για κάθε $p > 0$ θεωρούμε την

$$\psi = -\Gamma(p)(\tilde{\varphi}(p))^{-1} J^p(\varphi').$$

Χρησιμοποιώντας την (2.2.20) ελέγχουμε ότι η ψ είναι πυκνότητα πιθανότητας στο $[0, 1]$. Μπορούμε επίσης να ελέγξουμε ότι

$$\tilde{\psi}(a+1) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(a+1)}{\Gamma(a+p)} \, \frac{\tilde{\varphi}(a+p)}{\tilde{\varphi}(p)} \tag{2.2.21}$$

για κάθε $a > 0$, και ότι

$$\int_s^1 \psi(t)dt = -(p\tilde{\varphi}(p))^{-1} \int_s^1 (t-s)^p \varphi'(t)dt$$

για κάθε $s \in [0, 1]$. Από το Λήμμα 2.2.10 έπεται ότι η συνάρτηση

$$G_0(s) = \left(\int_s^1 \psi(t)dt \right)^{\frac{1}{n+p}}$$

είναι κοίλη στο $[0, 1]$.

Σταθεροποιούμε $a > 0$ και επιλέγουμε $x_0 > 0$ έτσι ώστε

$$\tilde{\psi}(a+1) = (n+p) \int_0^1 (x_0 s)^a (1-s)^{n+p-1} ds. \tag{2.2.22}$$

Τότε,

$$\int_0^1 G_0^{n+p}(s) ds^a = \int_0^{x_0} \left(1 - \frac{s}{x_0}\right)^{n+p} ds^a.$$

Αφού η G_0 είναι κοίλη και $G_0(0) = 1$, υπάρχει $0 < y_0 < 1$ ώστε $G_0(s) \geqslant 1 - s/x_0$ για κάθε $0 \leqslant s \leqslant y_0$ και $G_0(s) \leqslant 1 - s/x_0$ για κάθε $y_0 \leqslant s \leqslant 1$. Ορίζοντας $G_0(s) \equiv 0$ για $s > 1$, παίρνουμε

$$\int_x^{x_0} G_0^{n+p}(s)ds^a \leqslant \int_x^{x_0} (1 - s/x_0)^{n+p}\, ds^a$$

για κάθε $0 \leqslant x \leqslant x_0$. Συνεπώς,

$$\int_0^1 G_0^{n+p}\sigma(s)ds^a \leqslant \int_0^{x_0} (1 - s/x_0)^{n+p}\, \sigma(s)ds^a$$

για κάθε μη αρνητική, αύξουσα συνάρτηση $\sigma : [0, x_0] \to \mathbb{R}$. Επιλέγοντας $\sigma(s) = \frac{b}{a}s^{b-a}$, όπου $b > a$, έχουμε

$$\tilde{\psi}(b+1) \leqslant (n+p)\int_0^1 (1-s)^{n+p-1}(x_0 s)^b ds. \tag{2.2.23}$$

Απαλείφοντας το x_0 από τις (2.2.22) και (2.2.23) παίρνουμε

$$\left(\frac{\tilde{\psi}(b+1)}{(n+p)B(b+1, n+p)}\right)^{\frac{1}{b}} \leqslant \left(\frac{\tilde{\psi}(a+1)}{(n+p)B(a+1, n+p)}\right)^{\frac{1}{a}}, \tag{2.2.24}$$

για κάθε $b > a > 0$, όπου $B(\cdot,\cdot)$ είναι η συνάρτηση Βήτα

$$B(u, v) = \int_0^1 t^{u-1}(1-t)^{v-1}dt, \qquad u, v > 0.$$

Θέτοντας $p_1 = p$, $p_2 = p + a$ και $p_3 = p + b$, από τις (2.2.21) και (2.2.24) έχουμε

$$\left(\prod_{i=0}^n (i + p_2)\tilde{\phi}(p_2)\right)^{p_3 - p_1} \geqslant \left(\prod_{i=0}^n (i + p_1)\tilde{\phi}(p_1)\right)^{p_3 - p_2} \left(\prod_{i=0}^n (i + p_3)\tilde{\phi}(p_3)\right)^{p_2 - p_1}.$$

Αφού οι $0 < p_1 < p_2 < p_3$ ήταν τυχόντες, η τελευταία ανισότητα δείχνει ότι η Ψ είναι κοίλη. □

Λήμμα 2.2.12. *Έστω f μια μη αρνητική κοίλη συνάρτηση, ορισμένη σε ένα ανοικτό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο Ω του $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση*

$$\Psi_f(p) = \frac{(p+1)\cdots(p+n)}{n!}\int_\Omega f(x)^p dx, \qquad p \geqslant 0$$

είναι λογαριθμικά κοίλη.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sup_{x\in\Omega} f = 1$ και ότι $|\Omega| = 1$. Γράφουμε

$$\int_\Omega f(x)^p dx = p\int_0^1 s^{p-1} g^n(s) ds,$$

όπου $g(s) = |\{x \in \Omega :\ f(x) > s\}|^{1/n}$. Από την ανισότητα Brunn-Minkowski, η g είναι κοίλη συνάρτηση. Μπορούμε λοιπόν εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2.11 να συμπεράνουμε ότι η Ψ_f είναι λογαριθμικά κοίλη. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.9. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(x) = e^{-g(x)}$, όπου $g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχής κυρτή συνάρτηση, ορισμένη σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b] \subset (0, \infty)$. Για μεγάλες τιμές του n, ορίζουμε

$$\Omega_n := \left\{(x_1, \dots, x_n, x) \in \mathbb{R}^n_+ \times [a, b] : x_1 + \cdots + x_n \leqslant 1 - \frac{g(x)}{n}\right\}.$$

Παρατηρούμε ότι, καθώς το n τείνει στο άπειρο, έχουμε

$$n!|\Omega_n| = \int_a^b \left(1 - \frac{g(x)}{n}\right)^n dx \to \int_a^b e^{-g(x)} = 1$$

και ότι, για κάθε $p \geqslant 0$,

$$h_n(p) := \frac{1}{|\Omega_n|}\int_{\Omega_n} x^p dx_1 \cdots dx_n dx \to h(p) = \int_a^b x^p e^{-g(x)} dx.$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 2.2.12 για την συνάρτηση $f(x_1, ..., x_n, x) = x$ βλέπουμε ότι οι συναρτήσεις

$$m_n(p) := \frac{(p + 1) \cdots (p + n)}{n^{p+1} n!} h_n(p), \qquad n \geqslant 1$$

είναι λογαριθμικά κοίλες (παρατηρήστε ότι ο παράγοντας n^{p+1} είναι λογαριθμικά γραμμικός). Συμπεραίνουμε έτσι ότι η $m(p) := \lim_n m_n(p)$ είναι κι αυτή λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Τέλος, παρατηρούμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{(p + 1) \cdots (p + n)}{n^{p+1} n!} = \frac{1}{\Gamma(p + 1)}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $m_n(p) \to \exp(\Phi(p))$ καθώς το $n \to \infty$, και το συμπέρασμα έπεται. $\square$

2.3 Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Ορίζουμε αρχικά την ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος K και την ισοτροπική σταθερά L_K σαν μιά αναλλοίωτη της αφινικής κλάσης του K. Στις επόμενες υποπαραγράφους δίνουμε έναν πιο γενικό ορισμό στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων.

2.3α′ Ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος

Ορισμός 2.3.1. Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται *ισοτροπικό* αν έχει όγκο $|K| = 1$, είναι κεντραρισμένο (δηλαδή έχει βαρύκεντρο στην αρχή των αξόνων), και υπάρχει μια σταθερά $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_K \langle x, y\rangle^2 dx = \alpha^2 \|y\|_2^2 \tag{2.3.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρήστε ότι αν το K ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη (2.3.1) τότε

$$\int_K \|x\|_2^2 dx = \sum_{i=1}^n \int \langle x, e_i\rangle^2 dx = n\alpha^2,$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε το $U(K)$ είναι επίσης ισοτροπικό για κάθε $U \in O(n)$.

Παρατήρηση 2.3.2. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι η *ισοτροπική συνθήκη* (2.3.1) είναι ισοδύναμη με καθεμία από τις παρακάτω συνθήκες:

(i) Για κάθε $i, j = 1, \dots, n$,

$$\int_K x_i x_j dx = \alpha^2 \delta_{ij}, \tag{2.3.2}$$

όπου $x_j = \langle x, e_j\rangle$ είναι οι συντεταγμένες του x ως προς κάποια ορθοκανονική βάση $\{e_1, \dots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$.

(ii) Για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$,

$$\int_K \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2 (\mathrm{tr} T). \tag{2.3.3}$$

Για να το δούμε, υποθέτουμε πρώτα ότι το K είναι ισοτροπικό, και θέτοντας $y = e_i$, $y = e_j$ και $y = e_i + e_j$ στην (2.3.1) παίρνουμε την (2.3.2). Παρατηρώντας ότι αν $T = (t_{ij})_{i,j=1}^n$ τότε $\langle x, T(x)\rangle = \sum_{i,j=1}^n t_{ij} x_i x_j$, βλέπουμε αμέσως ότι η (2.3.2) συνεπάγεται την (2.3.3). Τέλος, παρατηρήστε ότι αν εφαρμόσουμε την (2.3.3) για την $T(x) = \langle x, y\rangle y$ παίρνουμε την ισοτροπική συνθήκη (2.3.1).

Ύπαρξη

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα έχει μια γραμμική εικόνα που ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε το $T(K)$ να είναι ισοτροπικό.*

Απόδειξη. Ο τελεστής $M \in L(\mathbb{R}^n)$ που ορίζεται μέσω της $M(y) = \int_K \langle x, y\rangle x dx$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Συνεπώς, έχει μια συμμετρική και θετική τετραγωνική ρίζα S. Θεωρούμε την γραμμική εικόνα $\tilde{K} = S^{-1}(K)$ του K. Τότε, για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\tilde{K}} \langle x, y\rangle^2 dx &= |\mathrm{det}S|^{-1} \int_K \langle S^{-1}x, y\rangle^2 dx\\ &= |\mathrm{det}S|^{-1} \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle^2 dx\\ &= |\mathrm{det}S|^{-1} \Big\langle \int_K \langle x, S^{-1}y\rangle x dx, S^{-1}y\Big\rangle\\ &= |\mathrm{det}S|^{-1}\langle MS^{-1}y, S^{-1}y\rangle = |\mathrm{det}S|^{-1}\|y\|_2^2.\end{aligned}$$

Κανονικοποιώντας τον όγκο του $\tilde{K}$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Η Πρόταση 2.3.3 δείχνει ότι κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει μια *θέση* $\tilde{K}$ που είναι ισοτροπική. Λέμε ότι το $\tilde{K}$ είναι μια *ισοτροπική θέση* του K. Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι η ισοτροπική θέση ενός κυρτού σώματος είναι μονοσήμαντα ορισμένη (αν αγνοήσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς) και ότι προκύπτει σαν λύση ενός προβλήματος ελαχιστοποίησης.

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$B(K) = \inf\Big\{ \int_{TK} \|x\|_2^2 dx : T \in SL(n)\Big\}. \tag{2.3.4}$$

Τότε, μια θέση K_1 του K είναι ισοτροπική αν και μόνο αν

$$\int_{K_1} \|x\|_2^2 dx = B(K). \tag{2.3.5}$$

Αν K_1 και K_2 είναι δύο ισοτροπικές θέσεις του K τότε υπάρχει $U \in O(n)$ ώστε $K_2 = U(K_1)$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια ισοτροπική θέση K_1 του K. Η παρατήρηση 2.3.2 δείχνει ότι υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε

$$\int_{K_1} \langle x, Tx\rangle dx = \alpha^2(\mathrm{tr}T)$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Τότε, για κάθε $T \in SL(n)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{TK_1} \|x\|_2^2 dx &= \int_{K_1} \|Tx\|_2^2 dx = \int_{K_1} \langle x, T^*Tx\rangle dx\\ &= \alpha^2 \mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n\alpha^2 = \int_{K_1} \|x\|_2^2 dx,\end{aligned} \tag{2.3.6}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου στην μορφή

$$\mathrm{tr}(T^*T) \geqslant n[\det(T^*T)]^{1/n}.$$

Αυτό δείχνει ότι το K_1 ικανοποιεί την (2.3.5). Ειδικότερα, το infimum στην (2.3.4) είναι minimum.

Παρατηρούμε επίσης ότι αν έχουμε ισότητα στην (2.3.6) τότε $T^*T = I$, άρα $T \in O(n)$. Αυτό δείχνει ότι κάθε άλλη θέση $\tilde{K}$ του K που ικανοποιεί την (2.3.5) είναι ορθογώνια εικόνα του K_1, άρα είναι ισοτροπική.

Τέλος, αν K_2 είναι κάποια άλλη ισοτροπική θέση του K τότε το πρώτο μέρος της απόδειξης δείχνει ότι το K_2 ικανοποιεί την (2.3.5). Από το προηγούμενο βήμα πρέπει να έχουμε $K_2 = U(K_1)$ για κάποιον $U \in O(n)$. □

Παρατήρηση 2.3.5. Ένας άλλος τρόπος για να δούμε ότι αν το K είναι λύση του παραπάνω προβλήματος ελαχιστοποίησης τότε το K είναι ισοτροπικό, είναι ο εξής. Θεωρούμε τυχόντα $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Για μικρά $\varepsilon > 0$, ο $I + \varepsilon T$ είναι αντιστρέψιμος, άρα ο $(I+\varepsilon T)/[\det(I+\varepsilon T)]^{1/n}$ διατηρεί τους όγκους. Συνεπώς,

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \frac{\|x+\varepsilon Tx\|_2^2}{[\det(I+\varepsilon T)]^{2/n}} dx.$$

Παρατηρούμε ότι $\|x+\varepsilon Tx\|_2^2 = \|x\|_2^2 + 2\varepsilon\langle x, Tx\rangle + O_{T,K}(\varepsilon^2)$ και $[\det(I+\varepsilon T)]^{2/n} = 1 + 2\varepsilon\frac{\mathrm{tr}T}{n} + O_T(\varepsilon^2)$. Αφήνοντας το $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε ότι

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx \leqslant \int_K \langle x, Tx\rangle dx.$$

Αφού ο T ήταν τυχών, η ίδια ανισότητα ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον T με τον $-T$, άρα

$$\frac{\mathrm{tr}T}{n}\int_K \|x\|_2^2 dx = \int_K \langle x, Tx\rangle dx$$

για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n)$. Έχουμε ήδη δεί ότι αυτή η συνθήκη εξασφαλίζει ότι το K είναι ισοτροπικό.

Ορισμός 2.3.6. Η προηγούμενη συζήτηση δείχνει ότι, για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, η σταθερά

$$L_K^2 = \frac{1}{n}\min\left\{\frac{1}{|TK|^{1+\frac{2}{n}}}\int_{TK}\|x\|_2^2 dx \;\middle|\; T \in GL(n)\right\}$$

είναι καλά ορισμένη και εξαρτάται μόνο από την γραμμική κλάση του K. Επίσης, αν το K είναι ισοτροπικό τότε για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_K^2.$$

Η σταθερά L_K ονομάζεται **ισοτροπική σταθερά** του K.

2.3β′ Ισοτροπικά λογαριθμικά κοίλα μέτρα

Ορισμός 2.3.7. Γενικεύοντας τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος λέμε ότι ένα μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι *ισοτροπικό* αν έχει βαρύκεντρο το 0 και ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 \, d\mu(x) = 1 \tag{2.3.7}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν το $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει βαρύκεντρο το 0 τότε τα παρακάτω είναι ισοδύναμα:

(α) Το μ είναι ισοτροπικό.

(β) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle \, d\mu(x) = \mathrm{tr}(T). \tag{2.3.8}$$

(γ) Ισχύουν οι $\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j \, d\mu(x) = \delta_{ij}$ για κάθε $i, j = 1, 2, \ldots, n$.

Παρατήρηση 2.3.8. Αν το μ είναι ισοτροπικό, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 \, d\mu(x) = n. \tag{2.3.9}$$

Επίσης, για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 \, d\mu(x) = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2. \tag{2.3.10}$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι κάθε μη εκφυλισμένο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ έχει μια ισοτροπική εικόνα $\nu = \mu \circ S$, όπου $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι μια γραμμική απεικόνιση, ακολουθώντας την απόδειξη της Πρότασης 2.3.3. Ορίζουμε έναν τελεστή $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με

$$Ty = \int \langle x, y\rangle x \, d\mu(x),$$

παρατηρούμε ότι ο T είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, και θέτουμε $\nu = \mu \circ S$ όπου ο S είναι συμμετρικός θετικά ορισμένος στην $GL(n)$ και ικανοποιεί την $T = S^2$. Εύκολα ελέγχουμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$

$$\int \langle x, y\rangle^2 \, d\nu(x) = \|y\|_2^2.$$

Επιπλέον, αν το μ είναι κεντραρισμένο βλέπουμε ότι και το ν έχει την ίδια ιδιότητα. □

Ορισμός 2.3.9. Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Δηλαδή, η f έχει βαρύκεντρο το 0, είναι λογαριθμικά κοίλη και $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$. Τότε, η f λέγεται *ισοτροπική* αν

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle^2 f(x)\, dx = 1 \tag{2.3.11}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Όπως πριν, ελέγχουμε εύκολα ότι η f είναι ισοτροπική αν και μόνο αν ισχύει κάποιο από τα παρακάτω:

(i) Για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle x, Tx\rangle f(x)\, dx = \mathrm{tr}(T). \tag{2.3.12}$$

(ii) Ισχύουν οι

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\, dx = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{2.3.13}$$

Πάλι, αν η f είναι ισοτροπική, τότε $\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^2 f(x)\, dx = n$, και γενικότερα,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \|Tx\|_2^2 f(x)\, dx = \|T\|_{\mathrm{HS}}^2 \tag{2.3.14}$$

για κάθε γραμμική απεικόνιση $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$.

Εύκολα ελεγχουμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα έχει μια ισοτροπική εικόνα: μπορούμε να βρούμε έναν αφινικό ισομορφισμό $S : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ και έναν θετικό αριθμό a ώστε η $af \circ S$ να είναι ισοτροπική.

Τέλος, παρατηρούμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο δεν φέρεται από υπερεπίπεδο είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η πυκνότητά του f_μ είναι ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Παρατήρηση 2.3.10. Αξίζει τον κόπο να συγκρίνουμε τον ορισμό του ισοτροπικού κυρτού σώματος (Ορισμός 2.3.1) με τον ορισμό του ισοτροπικού λογαριθμικά κοίλου μέτρου. Παρατηρήστε ότι ένα κυρτό σώμα K με όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν η συνάρτηση $L_K^n \mathbf{1}_{\frac{1}{L_K}K}$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση.

Ορισμός 2.3.11 (Γενικός ορισμός της ισοτροπικής σταθεράς)**.** Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, μπορούμε να ορίσουμε τον *πίνακα αδρανείας* – ή *πίνακα συνδιακυμάνσεων* – $\mathrm{Cov}(f)$ της f ως τον πίνακα με συντεταγμένες

$$[\mathrm{Cov}(f)]_{ij} := \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i x_j f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx} - \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_i f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx} \frac{\int_{\mathbb{R}^n} x_j f(x)\, dx}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\, dx}.$$

Παρατηρήστε ότι αν η f είναι ισοτροπική τότε ο $\mathrm{Cov}(f)$ είναι ο ταυτοτικός πίνακας.

Αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα, η *ισοτροπική σταθερά* της ορίζεται από την:

$$L_f := \left(\frac{\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)}{\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}. \tag{2.3.15}$$

Επίσης, αν μ είναι ένα μη εκφυλισμένο πεπερασμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα την f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue, τότε ορίζουμε την ισοτροπική του σταθερά θέτοντας $L_\mu := L_{f_\mu}$, δηλαδή

$$L_\mu := \left(\frac{\|\mu\|_\infty}{\int_{\mathbb{R}^n} f_\mu(x)dx}\right)^{\frac{1}{n}} [\det \mathrm{Cov}(\mu)]^{\frac{1}{2n}}, \tag{2.3.16}$$

όπου

$$\|\mu\|_\infty := \sup_{x\in\mathbb{R}^n} f_\mu(x)$$

και $\mathrm{Cov}(\mu) := \mathrm{Cov}(f_\mu)$.

Με βάση αυτόν τον ορισμό μπορούμε εύκολα να ελέγξουμε ότι η ισοτροπική σταθερά L_μ είναι αφινικά αναλλοίωτη: έχουμε $L_\mu = L_{a\mu\circ A}$ και $L_f = L_{af\circ A}$ για κάθε αντιστρέψιμο αφινικό μετασχηματισμό A του $\mathbb{R}^n$ και για κάθε θετικό αριθμό a. Παρατηρούμε επίσης ότι:

(i) Ο Ορισμός 2.3.11 συμφωνεί με τον προηγούμενο ορισμό (Ορισμός 2.3.6) που είχαμε δώσει για την ισοτροπική σταθερά ενός κυρτού σώματος, με την έννοια ότι $L_{\mathbf{1}_K} = L_K$. Ένας απλός τρόπος για να το δούμε είναι να υποθέσουμε ότι το K είναι στην ισοτροπική θέση και μετά να παρατηρήσουμε ότι $\|\mathbf{1}_K\|_\infty = 1$, $\int \mathbf{1}_K(x)\,dx = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_K) = L_K^2\, I$.

(ii) Αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ τότε $\int f_\mu = 1$ και $\mathrm{Cov}(\mu) = I$, απ' όπου έπεται ότι $L_\mu = \|\mu\|_\infty^{1/n}$. Επιπλέον, αφού το μ έχει εξ ορισμού βαρύκεντρο στο 0, από το Λήμμα 2.2.5 έχουμε ότι $L_\mu \simeq (f_\mu(0))^{1/n}$. Στην συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα αυτήν την παρατήρηση.

Μπορούμε επίσης να αποδείξουμε έναν χαρακτηρισμό της ισοτροπικής σταθεράς, τελείως αντίστοιχο με εκείνον του Θεωρήματος 2.3.4: αν $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$nL_f^2 = \inf_{\substack{T\in SL(n)\\ y\in\mathbb{R}^n}} \Big(\sup_{x\in\mathbb{R}^n} f(x)\Big)^{2/n} \int_{\mathbb{R}^n} \|Tx+y\|_2^2 f(x)\,dx.$$

Η επόμενη Πρόταση δείχνει ότι οι ισοτροπικές σταθερές όλων των ισοτροπικών λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας είναι ομοιόμορφα φραγμένες από κάτω, από μια σταθερά $c > 0$ που είναι ανεξάρτητη από την διάσταση.

Πρόταση 2.3.12. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Τότε,*

$$L_f = \|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αφού η f είναι ισοτροπική, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} n = \int \|x\|_2^2 f(x)\,dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_0^{\|x\|_2^2} \mathbf{1}\,dt \right) f(x)\,dx \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\{x:\|x\|_2^2 \geqslant t\}}(x) f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n \setminus \sqrt{t}B_2^n} f(x)\,dx\,dt \\ &= \int_0^\infty \left(1 - \int_{\sqrt{t}B_2^n} f(x)dx \right) dt \\ &\geqslant \int_0^{(\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n}} [1 - \omega_n\|f\|_\infty t^{n/2}]\,dt \\ &= (\omega_n\|f\|_\infty)^{-2/n} \frac{n}{n+2}. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την $\omega_n^{-1/n} \simeq \sqrt{n}$ καταλήγουμε στην $\|f\|_\infty^{1/n} \geqslant c$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

2.3γ΄ Ισοτροπικά τυχαία διανύσματα

Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ ένας χώρος πιθανότητας. Ένα *τυχαίο διάνυσμα* $X : \Omega \to \mathbb{R}^n$ λέγεται λογαριθμικά κοίλο αν η κατανομή του

$$\mu(A) := \mathbb{P}(X \in A) = \mathbb{P}(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\}$$

είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Θα λέμε ότι το X είναι ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα αν το μ είναι ισοτροπικό και θα γράφουμε τις ισοτροπικές συνθήκες στην μορφή

$$\mathbb{E}(X) = 0 \quad \text{και} \quad \mathbb{E}(X \otimes X) = \mathrm{Id}.$$

Η πρώτη ισότητα είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι το μ είναι κεντραρισμένο και η δεύτερη είναι ισοδύναμη με το γεγονός ότι $\mathrm{Cov}(\mu) = \mathrm{Id}$.

2.3δ′ ψ_α–εκτιμήσεις

Ορισμός 2.3.13. Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας και έστω $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση στον $L_\infty(\mu)$. Για κάθε $\alpha \geqslant 1$ ορίζουμε την ψ_α νόρμα της f ως εξής:

$$\|f\|_{\psi_\alpha} := \inf\left\{ t > 0 : \int_\Omega \exp\left(\frac{|f(\omega)|}{t}\right)^\alpha d\mu(\omega) \leqslant 2 \right\}. \tag{2.3.17}$$

Οι ψ_α-νόρμες είναι μια υποκλάση της οικογένειας των νορμών Orlicz. Κάθε τέτοια νόρμα ορίζεται από μιά άρτια κυρτή συνάρτηση $\Phi : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ που ικανοποιεί τις $\Phi(0) = 0$ και $\lim_{x\to\infty} \Phi(x) = +\infty$. Για κάθε τέτοια συνάρτηση, η μοναδιαία μπάλα του αντίστοιχου χώρου Orlicz αποτελείται από όλες τις $\mathcal{A}$-μετρήσιμες συναρτήσεις f για τις οποίες $\int_\Omega \Phi(f(\omega))d\omega \leqslant 1$, η δε νόρμα οποιασδήποτε $\mathcal{A}$-μετρήσιμης συνάρτησης f για την οποία το παραπάνω ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, είναι ακριβώς ο μικρότερος θετικός αριθμός κ για τον οποίον η f/κ ανήκει στην μοναδιαία μπάλα του χώρου. Παρατηρήστε ότι οι ψ_α-νόρμες, οι οποίες μας ενδιαφέρουν εδώ, είναι ακριβώς εκείνες οι νόρμες Orlicz που αντιστοιχούν στις συναρτήσεις $t \in \mathbb{R} \to e^{|t|^\alpha} - 1$.

Το επόμενο Λήμμα δίνει μια ισοδύναμη έκφραση για την ψ_α νόρμα μέσω των L_q-νορμών.

Λήμμα 2.3.14. *Έστω $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ένας χώρος πιθανότητας. Έστω $\alpha \geqslant 1$ και $f : \Omega \to \mathbb{R}$ μία $\mathcal{A}$-μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε,*

$$\|f\|_{\psi_\alpha} \simeq \sup_{p\geqslant\alpha} \frac{\|f\|_{L_p(\mu)}}{p^{1/\alpha}},$$

όπου οι σταθερές της ισοδυναμίας είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει μια απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $p \geqslant \alpha$ να έχουμε

$$\|f\|_p \leqslant Cp^{1/\alpha}\|f\|_{\psi_\alpha}.$$

Πράγματι, θέτουμε $A = \|f\|_{\psi_\alpha}$ και χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη ανισότητα $1 + \frac{t^k}{k!} \leqslant e^t$, η οποία ισχύει για κάθε $t > 0$, παίρνουμε

$$1 + \int_\Omega \frac{|f(\omega)|^{k\alpha}}{k!A^{k\alpha}}\, d\mu \leqslant \int_\Omega \exp(|f|/A)^\alpha\, d\mu = 2,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_\Omega |f|^{k\alpha}\, d\mu \leqslant k!A^{k\alpha}.$$

Έστω $p \geqslant \alpha$. Υπάρχει μοναδικός $k \in \mathbb{N}$ ώστε $k\alpha \leqslant p < (k + 1)\alpha$. Τότε, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder και τον τύπο του Stirling παίρνουμε

$$\begin{aligned}\|f\|_p &\leqslant \|f\|_{(k+1)\alpha} \leqslant [(k+1)!]^{\frac{1}{(k+1)\alpha}} A \leqslant (2k)^{1/\alpha} A\\ &\leqslant \left(\frac{2p}{\alpha}\right)^{1/\alpha} A \leqslant 2p^{1/\alpha} A.\end{aligned}$$

Αντίστροφα, αν $\gamma := \sup_{p\geqslant\alpha} \frac{\|f\|_p}{p^{1/\alpha}}$, τότε $\int_\Omega |f|^p \, d\mu \leqslant \gamma^p p^{p/\alpha}$ για κάθε $p \geqslant \alpha$. Σταθεροποιούμε $c > 0$ (το οποίο θα επιλέξουμε κατάλληλα) και γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega \exp(|f|/c\gamma)^\alpha &= 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{1}{(c\gamma)^{k\alpha} k!} \int_\Omega |f|^{\alpha k} \, d\mu \leqslant 1 + \sum_{k=1}^\infty \frac{(k\alpha)^k}{k! c^{k\alpha}}\\ &\leqslant 1 + \sum_{k=1}^\infty \left(\frac{e\alpha}{c^\alpha}\right)^k,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και την στοιχειώδη ανισότητα $k! \geqslant (k/e)^k$. Επιλέγοντας $c_\alpha := (2e\alpha)^{1/\alpha} \leqslant 2e \cdot e^{1/e} =: c$ βλέπουμε ότι $\|f\|_{\psi_\alpha} \leqslant c_\alpha \gamma \leqslant c\gamma$. $\square$

Ορισμός 2.3.15. Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$, $\alpha \geqslant 1$ και $\theta \in S^{n-1}$. Λέμε ότι το μ ικανοποιεί ψ_α *εκτίμηση στην διεύθυνση του* θ *με σταθερά* $b_\alpha = b_\alpha(\theta)$ αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_\alpha} \leqslant b_\alpha \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2. \tag{2.3.18}$$

Λέμε ότι το μ είναι ψ_α-μέτρο με σταθερά $B_\alpha > 0$ αν

$$\sup_{\theta\in S^{n-1}} \frac{\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_\alpha}}{\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2} = B_\alpha. \tag{2.3.19}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.3.14 βλέπουμε ότι το μ ικανοποιεί ψ_α εκτίμηση στην διεύθυνση του $\theta \in S^{n-1}$ με σταθερά b_α αν

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \leqslant c b_\alpha q^{1/\alpha} \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2 \tag{2.3.20}$$

για κάθε $q \geqslant \alpha$.

Το επόμενο Λήμμα δίνει ακόμα μία ισοδύναμη περιγραφή της ψ_α-νόρμας.

Λήμμα 2.3.16. *Έστω* $\mu \in \mathcal{P}_n$ *και έστω* $\alpha \geqslant 1$ *και* $\theta \in S^{n-1}$.

(ι) *Αν το* μ *ικανοποιεί* ψ_α*-εκτίμηση με σταθερά* b *στην διεύθυνση του* θ *τότε για κάθε* $t > 0$ *έχουμε* $\mu(\{x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2\}) \leqslant 2e^{-t^\alpha/b^\alpha}$.

(ιι) *Αν* $\mu(\{x : |\langle x, \theta\rangle| \geqslant t\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_2\}) \leqslant 2e^{-t^\alpha/b^\alpha}$ *για κάθε* $t > 0$ *τότε το* μ *ικανοποιεί* ψ_α*-εκτίμηση με σταθερά* $\leqslant cb$ *στην διεύθυνση του* θ, *όπου* $c > 0$ *είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Ο πρώτος ισχυρισμός είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Markov. Για τον δεύτερο, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p \, d\mu(x)\right)^{1/p} \leqslant cbp^{1/\alpha}\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2,$$

για κάθε $p \geqslant \alpha$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p \, d\mu(x) &= \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(x : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant t)\, dt \\ &\leqslant \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1}\mu(x : |\langle x,\theta\rangle| \geqslant t\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2)\, dt \\ &\leqslant 2\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2^p \int_0^\infty pt^{p-1}e^{-t^\alpha/b^\alpha}\, dt,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την υπόθεση. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = (t/b)^\alpha$, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p \, d\mu(x) &\leqslant 2(b\|\langle,\theta\rangle\|_2)^p \int_0^\infty \frac{p}{\alpha}s^{p/\alpha-1}e^{-s}\, ds \\ &= 2(b\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_2)^p\Gamma\left(\frac{p}{\alpha}+1\right).\end{aligned}$$

Το συμπέρασμα έπεται από τον τύπο του Stirling. □

Το λήμμα του Borell εξακολουθεί να ισχύει στο πιο γενικό πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Λήμμα 2.3.17. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο στην κλάση $\mathcal{P}_n$. Για κάθε συμμετρικό κλειστό κυρτό υποσύνολο A του $\mathbb{R}^n$ με $\mu(A) = \alpha \in (0,1)$ και για κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$1 - \mu(tA) \leqslant \alpha\left(\frac{1-\alpha}{\alpha}\right)^{\frac{t+1}{2}}. \tag{2.3.21}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την συμμετρία και την κυρτότητα του A ελέγχουμε ότι

$$\frac{2}{t+1}(\mathbb{R}^n \setminus (tA)) + \frac{t-1}{t+1}A \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A.$$

για κάθε $t > 1$. Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το μ είναι λογαριθμικά κοίλο, παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Σημείωση. Το δεξιό μέλος της (2.3.21) γράφεται στην μορφή

$$\frac{(1-\alpha)^{\frac{t+1}{2}}}{\alpha^{\frac{t-1}{2}}} < \frac{(1-\alpha)^{\frac{t-1}{2}}}{\alpha^{\frac{t-1}{2}}} = \left(\frac{1}{\alpha}-1\right)^{\frac{t-1}{2}}. \tag{2.3.22}$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Borell θα δούμε ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$ είναι ψ_1-μέτρο (σε κάθε διεύθυνση) με μια απόλυτη σταθερά.

Θεώρημα 2.3.18. *Έστω $\mu \in \mathcal{P}_n$ λογαριθμικά κοίλο. Αν η $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι ημινόρμα τότε για κάθε $q > p \geqslant 1$ έχουμε*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |f|^p \, d\mu\right)^{1/p},$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Γράφουμε $\|f\|_p^p := \int |f|^p \, d\mu$. Τότε, το σύνολο

$$A = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3\|f\|_p\}$$

είναι συμμετρικό, κλειστό και κυρτό. Επίσης, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$tA = \{x \in \mathbb{R}^n : |f(x)| \leqslant 3t\|f\|_p\},$$

και $\mu(A) \geqslant 1 - 3^{-p}$. Συνεπώς, $\frac{1}{\alpha} - 1 \leqslant \frac{3^{-p}}{1-3^{-p}} \leqslant e^{-p/2}$. Από την (2.3.22) βλέπουμε ότι

$$\mu(x : |f(x)| \geqslant 3t\|f\|_p) \leqslant e^{-c_1 p(t-1)}$$

για κάθε $t > 1$, όπου $c_1 = \frac{1}{4}$. Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} |f|^q \, d\mu &= \int_0^\infty q s^{q-1} \mu(\{x : |f(x)| \geqslant s\}) \, ds \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + (3\|f\|_p)^q \int_1^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p(t-1)} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{c_1 p}(3\|f\|_p)^q \int_0^\infty q t^{q-1} e^{-c_1 p t} \, dt \\ &\leqslant (3\|f\|_p)^q + e^{c_1 p} \left(\frac{3\|f\|_p}{c_1 p}\right)^q \Gamma(q+1).\end{aligned}$$

Από τον τύπο του Stirling και από το γεγονός ότι $(a+b)^{1/q} \leqslant a^{1/q} + b^{1/q}$ για κάθε $a, b > 0$ και $q \geqslant 1$, συμπεραίνουμε ότι $\|f\|_{L_q(\mu)} \leqslant c\frac{q}{p}\|f\|_{L_p(\mu)}$. □

Παρατηρήσεις 2.3.19. (α) Τα γραμμικά συναρτησοειδή στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.18. Συνεπώς,

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q \leqslant cq\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_1 \tag{2.3.23}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{\psi_1} \leqslant c\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_1 \tag{2.3.24}$$

για $\theta \in S^{n-1}$. Το γεγονός αυτό παίζει πολύ βασικό ρόλο στα επόμενα.

(β) Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το n-διάστατο μέτρο Gauss είναι λογαριθμικά κοίλο, βλέπουμε ότι αν f είναι μια ημινόρμα, τότε η f ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 2.3.18. Από την άλλη πλευρά, ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες παίρνουμε

$$\left(\int |f(x)|^q \, d\gamma_n(x)\right)^{1/q} \simeq \sqrt{n+q}\left(\int_{S^{n-1}} |f(\theta)|^q \, d\sigma(\theta)\right)^{1/q}, \tag{2.3.25}$$

για κάθε $q \geqslant 1$. Συνδυάζοντας αυτές τις ανισότητες, έχουμε:

$$\left(\int_{S^{n-1}} |f|^q \, d\sigma\right)^{1/q} \leqslant c\frac{q}{p}\sqrt{\frac{n+p}{n+q}}\left(\int_{S^{n-1}} |f|^p \, d\sigma\right)^{1/p}, \tag{2.3.26}$$

για κάθε $1 \leqslant p \leqslant q$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

2.3ε΄ Τα σώματα $K_p(\mu)$

Σε κάθε λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f αντιστοιχίζουμε μια οικογένεια κυρτών σωμάτων $K_p(f)$. Δείχνουμε ότι είναι κυρτά και περιγράφουμε κάποιες βασικές ιδιότητές τους. Τα σώματα $K_p(f)$ ορίστηκαν από τον K. Ball και θα παίξουν σημαντικό ρόλο στην συνέχεια, διότι μας δίνουν έναν τρόπο να αναχθούμε από τα λογαριθμικά κοίλα μέτρα στα κυρτά σώματα.

Ορισμός 2.3.20. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια μετρήσιμη συνάρτηση. Για κάθε $p > 0$ ορίζουμε ένα σώμα $K_p(f)$ ως εξής:

$$K_p(f) = \left\{x \in \mathbb{R}^n : \int_0^\infty f(rx) r^{p-1} \, dr \geqslant \frac{f(0)}{p}\right\}. \tag{2.3.27}$$

Από τον ορισμό βλέπουμε ότι η ακτινική συνάρτηση του $K_p(f)$ είναι ίση με

$$\rho_{K_p(f)}(x) = \left(\frac{1}{f(0)}\int_0^\infty p r^{p-1} f(rx) \, dr\right)^{1/p}. \tag{2.3.28}$$

Αν μ είναι ένα μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο Lebesgue τότε ορίζουμε

$$K_p(\mu) := K_p(f_\mu) = \left\{x : \int_0^\infty r^{p-1} f_\mu(r) \, dr \geqslant \frac{f(0)}{p}\right\}, \tag{2.3.29}$$

όπου f_μ είναι η πυκνότητα του μ.

Λήμμα 2.3.21. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in K$. Τότε, έχουμε $K_p(\mathbf{1}_K) = K$ για κάθε $p > 0$.*

Απόδειξη. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\rho^p_{K_p(\mathbf{1}_K)}(\theta) = \frac{1}{\mathbf{1}_K(0)} \int_0^{+\infty} pt^{p-1}\, \mathbf{1}_K(t\theta)\, dt = \int_0^{\rho_K(\theta)} pt^{p-1}\, dt = \rho^p_K(\theta). \tag{2.3.30}$$

Έπεται ότι $K_p(\mathbf{1}_K) = K$. □

Στην επόμενη πρόταση περιγράφουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των συνόλων $K_p(f)$.

Πρόταση 2.3.22. *Έστω $f, g : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ δύο ολοκληρώσιμες συναρτήσεις με $f(0) = g(0) > 0$. Θέτουμε*

$$m = \inf\left\{\frac{f(x)}{g(x)} : g(x) > 0\right\} \quad \textit{και} \quad M^{-1} = \inf\left\{\frac{g(x)}{f(x)} : f(x) > 0\right\}.$$

Θεωρούμε επίσης ένα αστρόμορφο σώμα V και συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_V$ το συναρτησοειδές Minkowski του V. Τότε, για κάθε $p > 0$ ισχύουν τα εξής:

(i) $0 \in K_p(f)$.

(ii) *Το $K_p(f)$ είναι αστρόμορφο.*

(iii) *Το $K_p(f)$ είναι συμμετρικό αν η f είναι άρτια.*

(iv) $m^{1/p} K_p(g) \subseteq K_p(f) \subseteq M^{1/p} K_p(g)$.

(v) *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\int_{K_{n+1}(f)} \langle x, \theta\rangle\, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \langle x, \theta\rangle f(x)\, dx.$$

Άρα, η f έχει βαρύκεντρο στο 0 αν και μόνο αν το $K_{n+1}(f)$ έχει βαρύκεντρο στο 0.

(vi) *Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $p > 0$ έχουμε*

$$\int_{K_{n+p}(f)} |\langle x, \theta\rangle|^p\, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^p\, f(x)\, dx.$$

(vii) *Αν $p > -n$ τότε*

$$\int_{K_{n+p}(f)} \|x\|_V^p\, dx = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_V^p f(x)\, dx. \tag{2.3.31}$$

Απόδειξη. Οι πρώτοι τρείς ισχυρισμοί (i), (ii) και (iii) ελέγχονται εύκολα. Για να αποδείξουμε τον (iv) συγκρίνουμε τις ακτινικές συναρτήσεις των $K_p(f)$ και $K_p(g)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}\rho^p_{K_p(f)}(x) &= \frac{1}{f(0)}\int_0^\infty pr^{p-1}f(rx)\,dr \leqslant \frac{M}{g(0)}\int_0^\infty pr^{p-1}g(rx)\,dr\\ &= (M^{1/p}\rho_{K_p(g)}(x))^p,\end{aligned}$$

και όμοια $(m^{1/p}\rho_{K_p(g)}(x))^p \leqslant \rho^p_{K_p(f)}(x)$.

(v) Ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\int_{K_{n+1}(f)}\langle x,\theta\rangle dx &= n\omega_n\int_{S^{n-1}}\langle\phi,\theta\rangle\int_0^{\rho_{K_{n+1}(f)}(\phi)} r^n dr d\sigma(\phi)\\ &= \frac{n\omega_n}{f(0)}\int_{S^{n-1}}\langle\phi,\theta\rangle\int_0^\infty r^n f(r\phi)drd\sigma(\phi)\\ &= \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\theta\rangle f(x)dx.\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν η f έχει βαρύκεντρο στο 0 τότε το $K_{n+1}(f)$ έχει επίσης βαρύκεντρο στο 0.

(vi) Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι, για κάθε $p > -n$ και $\theta \in S^{n-1}$,

$$\begin{aligned}\int_{K_{n+p}(f)}|\langle x,\theta\rangle|^p dx &= n\omega_n\int_{S^{n-1}}|\langle\phi,\theta\rangle|^p\int_0^{\rho_{K_{n+p}(f)}(\phi)} r^{n+p-1} dr d\sigma(\phi)\\ &= \frac{n\omega_n}{f(0)}\int_{S^{n-1}}|\langle\phi,\theta\rangle|^p\int_0^\infty r^{n+p-1} f(r\phi)drd\sigma(\phi)\\ &= \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x,\theta\rangle|^p f(x)dx.\end{aligned}$$

(vii) Δουλεύοντας με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι, για κάθε $p > -n$,

$$\begin{aligned}\int_{K_{n+p}(f)}\|x\|_V^p dx &= n\omega_n\int_{S^{n-1}}\|\phi\|_V^p\int_0^{\rho_{K_{n+p}(f)}(\phi)} r^{n+p-1} dr d\sigma(\phi)\\ &= \frac{n\omega_n}{f(0)}\int_{S^{n-1}}\|\phi\|_V^p\int_0^\infty r^{n+p-1} f(r\phi)drd\sigma(\phi)\\ &= \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_V^p f(x)dx.\end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ελέγξει τις (i)–(vii). □

Αν υποθέσουμε ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη τότε μπορούμε να αποδείξουμε ότι τα σύνολα $K_p(f)$, $p \geqslant 1$, είναι κυρτά. Για τον σκοπό αυτό χρειαζόμαστε το λήμμα που ακολουθεί: είναι μια ανισότητα για «τρείς συναρτήσεις» στο πνεύμα της ανισότητας Prékopa-Leindler.

Λήμμα 2.3.23. *Έστω $w, g, h : (0,\infty) \to [0,\infty)$ μετρήσιμες συναρτήσεις που ικανοποιούν την συνθήκη*

$$h\left(\frac{2rs}{r+s}\right) \geqslant w(r)^{\frac{s}{r+s}} g(s)^{\frac{r}{r+s}}$$

για κάθε $r, s > 0$. Θεωρούμε $p \geqslant 1$ και ορίζουμε

$$\begin{aligned} A &= \left(\int_0^\infty w(r) r^{p-1}\, dr\right)^{1/p}, \\ B &= \left(\int_0^\infty g(r) r^{p-1}\, dr\right)^{1/p}, \\ C &= \left(\int_0^\infty h(r) r^{p-1}\, dr\right)^{1/p}. \end{aligned}$$

Τότε,

$$C \geqslant \frac{2}{A^{-1} + B^{-1}}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι w, g και h είναι φραγμένες και έχουν συμπαγή φορέα στο $(0,\infty)$, και ότι δεν μηδενίζονται σχεδόν παντού. Ορίζουμε $\beta > 0$ μέσω της εξίσωσης

$$\sup_{r>0} w(r) r^{p+1} = \beta^{p+1} \sup_{r>0} g(r) r^{p+1}.$$

Στην συνέχεια, ορίζουμε

$$\begin{aligned} w_1(u) &= w(u^{-1}) u^{-p-1} \\ g_1(u) &= g(\beta^{-1} u^{-1}) u^{-p-1} \\ h_1(u) &= \Big(\frac{1+\beta}{2}\Big)^{p+1} h(u^{-1}) u^{-p-1}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \sup_{u>0} w_1(u) &= \sup_{r>0} w(r) r^{p+1} = \beta^{p+1} \sup_{r>0} g(r) r^{p+1} \\ &= \beta^{p+1} \sup_{u>0} g(\beta^{-1} u^{-1}) (\beta u)^{-p-1} \\ &= \sup_{u>0} g(\beta^{-1} u^{-1}) u^{-p-1} = \sup_{u>0} g_1(u). \end{aligned} \tag{2.3.32}$$

Επίσης, έχουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w_1(u)\, du &= \int_0^\infty w(u^{-1}) u^{-p-1} du = \int_0^\infty w(u^{-1}) u^{1-p} \frac{du}{u^2} \\ &= \int_0^\infty w(r) r^{p-1} dr = A^p, \end{aligned}$$

και
$$\int_0^\infty g_1(u)du = (\beta B)^p, \qquad \int_0^\infty h_1(u)du = \Big(\frac{1+\beta}{2}\Big)^{p+1} C^p.$$

Παρατηρούμε ότι

$$h_1(w) \geqslant (w_1(u))^{\frac{u}{u+\beta v}} (g_1(v))^{\frac{\beta v}{u+\beta v}} \tag{2.3.33}$$

για κάθε $u, v, w \in (0, \infty)$ που ικανοποιούν την $2w = u + \beta v$. Αυτό φαίνεται αν θέσουμε $r = u^{-1}$, $s = (\beta v)^{-1}$ και γράψουμε

$$w_1(u)^{\frac{u}{u+\beta v}} g_1(v)^{\frac{\beta v}{u+\beta v}} = w(r)^{\frac{s}{r+s}} g(s)^{\frac{r}{r+s}} \Big(r^{\frac{s}{r+s}} (\beta s)^{\frac{r}{r+s}}\Big)^{p+1}.$$

Αφού
$$r^{\frac{s}{r+s}} (\beta s)^{\frac{r}{r+s}} \leqslant \frac{s}{r+s}\, r + \frac{r}{r+s}\, \beta s,$$

παίρνουμε
$$\Big(r^{\frac{s}{r+s}} (\beta s)^{\frac{r}{r+s}}\Big)^{p+1} \leqslant \Big((1+\beta)\frac{rs}{r+s}\Big)^{p+1}.$$

Χρησιμοποιώντας επίσης το γεγονός ότι $2w = \frac{1}{r} + \frac{1}{s}$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} w_1(u)^{\frac{u}{u+\beta v}} g_1(v)^{\frac{\beta v}{u+\beta v}} &\leqslant w(r)^{\frac{s}{r+s}} g(s)^{\frac{r}{r+s}} \Big(\frac{1+\beta}{2}\Big)^{p+1} \Big(\frac{2rs}{r+s}\Big)^{p+1} \\ &\leqslant \Big(\frac{1+\beta}{2}\Big)^{p+1} h(w^{-1}) w^{-p-1} = h_1(w). \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (2.3.33).

Τώρα, ελέγχουμε ότι

$$\{w : h_1(w) \geqslant t\} \supseteq \frac{1}{2}\{u : w_1(u) \geqslant t\} + \frac{\beta}{2}\{v : g_1(v) \geqslant t\}$$

για κάθε $0 \leqslant t \leqslant M := \sup w_1 = \sup g_1$, και χρησιμοποιώντας την μονοδιάστατη ανισότητα Brunn-Minkowski γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_0^\infty h_1(w)\, dw &\geqslant \int_0^M |\{w : h_1(w) \geqslant t\}|\, dt \\ &\geqslant \frac{1}{2}\int_0^M |\{u : w_1(u) \geqslant t\}|\, dt + \frac{\beta}{2}\int_0^M |\{v : g_1(v) \geqslant t\}|\, dt \\ &= \frac{1}{2}\int_0^\infty w_1(u)\, du + \frac{\beta}{2}\int_0^\infty g_1(v)\, dv. \end{aligned}$$

Ξαναγράφοντας αυτήν την ανισότητα συναρτήσει των A, B και C, έχουμε

$$\Big(\frac{1+\beta}{2}\Big)^{p+1} C^p \geqslant \frac{1}{2}A^p + \frac{\beta}{2}(\beta B)^p,$$

ή ισοδύναμα,

$$C^p \geqslant \Big(\frac{2}{1+\beta}\Big)^p \frac{A^p + \beta(\beta B)^p}{1+\beta}.$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε την στοιχειώδη ανισότητα $(\lambda a^p + (1-\lambda)b^p)^{1/p} \geqslant \lambda a + (1-\lambda)b$ (η οποία ισχύει για κάθε $p \geqslant 1$, $\lambda \in (0,1)$ και $a, b > 0$) και παίρνουμε

$$C^p \geqslant \Big(\frac{2}{1+\beta}\Big)^p \Big(\frac{A + \beta(\beta B)}{1+\beta}\Big)^p.$$

Έπεται ότι

$$C \geqslant \frac{2}{1+\beta}\,\frac{A+\beta^2 B}{1+\beta} = \frac{2AB}{A+B} + \frac{2(A-\beta B)^2}{(A+B)(1+\beta)^2} \geqslant \frac{2AB}{A+B},$$

που είναι ακριβώς ο ισχυρισμός του λήμματος. □

Θεώρημα 2.3.24. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $f(0) > 0$. Για κάθε $p \geqslant 1$, το $K_p(f)$ είναι κυρτό σύνολο.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι αν $x, y \in K_p(f)$ τότε $\frac{x+y}{2} \in K_p(f)$. Ορίζουμε

$$w(r) = f(rx), \quad g(r) = f(ry) \quad \text{και} \quad h(r) = f\Big(r\frac{x+y}{2}\Big).$$

Θα θέλαμε να δείξουμε ότι αν $A, B \geqslant f(0)/p$ τότε $C \geqslant f(0)/p$. Αφού

$$\frac{2}{A^{-1} + B^{-1}} \geqslant \frac{f(0)}{p},$$

αρκεί να ελέγξουμε ότι η υπόθεση του Λήμματος 2.3.23 ικανοποιείται από τις w, g και h. Όμως αυτό ελέγχεται εύκολα, διότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη. □

Μένει να δείξουμε ότι τα κυρτά σύνολα $K_p(f)$, $p \geqslant 1$, είναι όντως κυρτά σώματα, δηλαδή ότι είναι συμπαγή και έχουν μη κενό εσωτερικό, με την υπόθεση ότι η f έχει πεπερασμένο, θετικό ολοκλήρωμα.

Λήμμα 2.3.25. *Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ με $f(0) > 0$ ισχύει*

$$|K_n(f)| = \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx.$$

Ειδικότερα, αν η f είναι λογαριθμικά κοίλη και $0 < \int_{\mathbb{R}^n} f < \infty$, τότε, χρησιμοποιώντας και το Θεώρημα 2.3.24, βλέπουμε ότι το $K_n(f)$ είναι ένα κλειστό κυρτό σύνολο με πεπερασμένο και θετικό όγκο, συνεπώς είναι κυρτό σώμα.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$
\begin{aligned}
|K_n(f)| &= \int_{K_n(f)} \mathbf{1}\, dx \\
&= n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{\rho_{K_n(f)}(\phi)} r^{n-1} dr d\sigma(\phi) \\
&= \frac{n\omega_n}{f(0)} \int_{S^{n-1}} \int_0^{\infty} r^{n-1} f(r\phi) dr d\sigma(\phi) \\
&= \frac{1}{f(0)} \int_{\mathbb{R}^n} f(x) dx
\end{aligned}
$$

χρησιμοποιώντας την (2.3.28) και ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες. □

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι αν η f είναι λογαριθμικά κοίλη και έχει πεπερασμένο και θετικό ολοκλήρωμα τότε τα σύνολα $K_p(f)$ έχουν όλα μη κενό εσωτερικό. Αυτό προκύπτει από τις σχέσεις εγκλεισμού (και τις εκτιμήσεις για τους όγκους τους) που περιγράφουμε στις επόμενες δύο προτάσεις (βλέπε [32] και [35]).

Πρόταση 2.3.26. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $f(0) > 0$.*

(i) *Αν $0 < p \leqslant q$, τότε*

$$
\frac{\Gamma(p+1)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(q+1)^{\frac{1}{q}}} K_q(f) \subseteq K_p(f) \subseteq \left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} K_q(f). \tag{2.3.34}
$$

(ii) *Αν η f έχει βαρύκεντρο στο 0 τότε, για κάθε $0 < p \leqslant q$,*

$$
\frac{\Gamma(p+1)^{\frac{1}{p}}}{\Gamma(q+1)^{\frac{1}{q}}} K_q(f) \subseteq K_p(f) \subseteq e^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q}} K_q(f). \tag{2.3.35}
$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι ο ισχυρισμός (ii) είναι άμεση συνέπεια του (i) αν χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 2.2.5: γνωρίζουμε ότι αν $\mathrm{bar}(f) = 0$ τότε $f(0) \leqslant \|f\|_\infty \leqslant e^n f(0)$. Συνεπώς,

$$
\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)} \right)^{\frac{1}{p} - \frac{1}{q}} \leqslant e^{\frac{n}{p} - \frac{n}{q}}.
$$

Για τον δεξιό εγκλεισμό στην (2.3.34) χρησιμοποιούμε το Λήμμα 2.2.7: για κάθε $x \neq 0$ η συνάρτηση

$$
F(p) := \left(\frac{p}{\|f\|_\infty} \int_0^\infty r^{p-1} f(rx)\, dr \right)^{1/p}
$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του p στο $(0,\infty)$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\rho_{K_q(f)}(x) &= \left(\frac{q}{f(0)}\int_0^\infty r^{q-1}f(rx)\,dr\right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q}\left(\frac{q}{\|f\|_\infty}\int_0^\infty r^{q-1}f(rx)\,dr\right)^{1/q} \\
&= \left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q}F(q) \geqslant \left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q}F(p) \\
&= \left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q-1/p}\left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/p}F(p) \\
&= \left(\frac{\|f\|_\infty}{f(0)}\right)^{1/q-1/p}\rho_{K_p(f)}(x).
\end{aligned}$$

Για τον αριστερό εγκλεισμό στην (2.3.34) χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 2.2.6: για κάθε $x\neq 0$ η συνάρτηση

$$G(p) := \left(\frac{1}{f(0)\Gamma(p)}\int_0^\infty r^{p-1}f(rx)\,dr\right)^{1/p}$$

είναι φθίνουσα συνάρτηση του p στο $[1,\infty)$. Άρα,

$$\begin{aligned}
\rho_{K_q(f)}(x) &= \left(\frac{q}{f(0)}\int_0^\infty r^{q-1}f(rx)\,dr\right)^{1/q} \\
&= \Gamma(q+1)^{1/q}\left(\frac{1}{f(0)\Gamma(q)}\int_0^\infty r^{q-1}f(rx)\,dr\right)^{1/q} \\
&= \Gamma(q+1)^{1/q}G(q) \\
&\leqslant \frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}}\Gamma(p+1)^{1/p}G(p) \\
&= \frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}}\rho_{K_p(f)}(x),
\end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο στο 0. Ξεκινώντας από την ισότητα

$$|K_n(f)|\,f(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx = 1 \tag{2.3.36}$$

του Λήμματος 2.3.25 και χρησιμοποιώντας τους εγκλεισμούς της Πρότασης 2.3.26 μπορούμε να εκτιμήσουμε τον όγκο του $K_p(f)$ για κάθε $p>0$.

Πρόταση 2.3.27. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο στο 0. Τότε, για κάθε $p > 0$ έχουμε*

$$e^{-1} \leqslant f(0)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} \leqslant e\frac{n+p}{n}, \tag{2.3.37}$$

ενώ για $-n < p < 0$ έχουμε

$$e^{-1} \leqslant f(0)^{\frac{1}{-p}-\frac{1}{n}} |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{-p}-\frac{1}{n}} \leqslant e. \tag{2.3.38}$$

Απόδειξη. Για την απόδειξη της (2.3.37), χρησιμοποιούμε πρώτα την (2.3.35) για να γράψουμε

$$e^{\frac{n^2}{n+p}-n}|K_n(f)| \leqslant |K_{n+p}(f)| \leqslant \frac{\Gamma(n+p+1)^{\frac{n}{n+p}}}{\Gamma(n+1)}|K_n(f)|.$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την (2.3.36) βλέπουμε ότι, για κάθε $p > 0$,

$$\frac{e^{-\frac{np}{n+p}}}{f(0)} \leqslant |K_{n+p}(f)| \leqslant ((n+p)!)^{\frac{n}{n+p}} \frac{1}{n!f(0)},$$

άρα

$$\frac{1}{e} \leqslant f(0)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} |K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}} \leqslant \frac{((n+p)!)^{\frac{1}{p}}}{(n!)^{\frac{n+p}{np}}}.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και τις

$$\frac{((n+p)!)^{\frac{1}{p}}}{(n!)^{\frac{n+p}{np}}} \leqslant (n+p)\frac{(n!)^{\frac{1}{p}}}{(n!)^{\frac{n+p}{np}}} = \frac{n+p}{(n!)^{\frac{1}{n}}} \leqslant e\frac{n+p}{n},$$

ολοκληρώνουμε την απόδειξη της (2.3.37). Για την (2.3.38) δουλεύουμε με τον ίδιο τρόπο, χρησιμοποιώντας επίσης την ανισότητα

$$\frac{\Gamma(q+1)^{\frac{1}{q}}}{\Gamma(p+1)^{\frac{1}{p}}} \leqslant e^{\frac{q}{p}-1}$$

η οποία ισχύει για κάθε $0 < p \leqslant q$. □

Έχουμε ήδη αναφέρει ότι τα σώματα $K_p(f)$ μας επιτρέπουν να αναχθούμε από την μελέτη των λογαριθμικά κοίλων μέτρων σε αυτήν των κυρτών σωμάτων. Ένα πρώτο παράδειγμα δίνεται από τις επόμενες δύο προτάσεις οι οποίες δείχνουν ότι αν γνωρίζουμε άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά των κυρτών σωμάτων τότε μπορούμε να πετύχουμε το ίδιο άνω φράγμα για την μεγαλύτερη κλάση των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Εξετάζουμε πρώτα την συμμετρική περίπτωση.

Πρόταση 2.3.28. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ μια άρτια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, το σώμα $T = K_{n+2}(f)$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα με*

$$c_1 L_f \leqslant L_T \leqslant c_2 L_f,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Επιπλέον, αν η f είναι ισοτροπική τότε το $\overline{T}$ είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα.

Απόδειξη. Αφού η f είναι άρτια και λογαριθμικά κοίλη, το T είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Επίσης, έχουμε $f(x) \leqslant f(0)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Συνεπώς, $f(0) > 0$. Από την Πρόταση 2.3.22 (vi)

$$\int_T \langle x,\theta\rangle^2\,dx = \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\theta\rangle^2 f(x)\,dx,$$

και γενικότερα

$$\int_T \langle x,\theta\rangle\langle x,\phi\rangle\,dx = \frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,\theta\rangle\langle x,\phi\rangle f(x)\,dx$$

για κάθε $\theta,\phi \in S^{n-1}$. Έχουμε δεί ότι $L_{\mathbf{1}_T} = L_T$ και

$$|T|\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_T) = \frac{\int f}{f(0)}\mathrm{Cov}(f).$$

Από τον ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς παίρνουμε

$$L_T = \frac{1}{|T|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}}\left(\frac{1}{f(0)}\int f\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} L_f.$$

Από την άλλη πλευρά, εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.3.27 με $p=2$ βλέπουμε ότι

$$|T|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} = |K_{n+2}(f)|^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}} \simeq \left(\frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx\right)^{\frac{1}{2}+\frac{1}{n}}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $L_T \simeq L_f$. Τέλος, παρατηρούμε ότι αν η f είναι ισοτροπική τότε

$$\int_{\overline{T}} \langle x,\theta\rangle^2\,dx = \frac{1}{|T|^{1+\frac{2}{n}}}\int_T \langle x,\theta\rangle^2\,dx = \frac{1}{f(0)|T|^{1+\frac{2}{n}}}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, το οποίο αποδεικνύει ότι το $\overline{T}$ είναι στην ισοτροπική θέση. □

Η επόμενη πρόταση είναι από το [22] και δείχνει ότι μπορούμε να περιοριστούμε, ακόμα περισσότερο, στην μελέτη της ισοτροπικής σταθεράς των συμμετρικών κυρτών σωμάτων.

Πρόταση 2.3.29. *Για κάθε κυρτό σώμα K μπορούμε να βρούμε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα T με την ιδιότητα*

$$L_T \simeq L_K.$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K έχει όγκο 1 και βαρύκεντρο στο 0. Ορίζουμε μια συνάρτηση f που έχει φορέα το $K-K$ ως εξής:

$$f(x) = (\mathbf{1}_K * \mathbf{1}_{-K})(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(y)\mathbf{1}_{-K}(x-y)\,dy = |K \cap (x+K)|.$$

Από την ανισότητα Brunn-Minkowski η f είναι λογαριθμικά κοίλη. Αφού για κάθε x έχουμε

$$|K \cap (x+K)| = |-x + (K \cap (x+K))| = |(-x+K) \cap K|,$$

συμπεραίνουμε ότι η f είναι άρτια. Επιπλέον, εύκολα ελέγχουμε ότι $\int_{\mathbb{R}^n} f = 1$ και ότι $f(x) \leqslant f(0) = |K| = 1$ για κάθε x, συνεπώς

$$L_f = [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}}.$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \langle x,z\rangle^2 f(x)dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \langle y+(x-y),z\rangle^2 \mathbf{1}_K(y)\mathbf{1}_{-K}(x-y)\,dydx \\
&= \int_K \langle y,z\rangle^2 \left(\int_{-K+y} dx\right) dy + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_K(y)\left(\int_{-K}\langle w,z\rangle^2 dw\right) dy \\
&\quad + 2\int_{\mathbb{R}^n} \langle y,z\rangle \mathbf{1}_K(y)\left(\int_{\mathbb{R}^n}\langle x-y,z\rangle \mathbf{1}_{-K}(x-y)\,dx\right) dy \\
&= \int_K \langle x,z\rangle^2 dx + \int_{-K}\langle x,z\rangle^2 dx,
\end{aligned}$$

διότι το K έχει βαρύκεντρο στο 0 (άρα και το $-K$). Έπεται ότι

$$\mathrm{Cov}(f) = \mathrm{Cov}(K) + \mathrm{Cov}(-K) = 2\,\mathrm{Cov}(K),$$

άρα

$$L_f = [\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{2}\,[\det \mathrm{Cov}(K)]^{\frac{1}{2n}} = \sqrt{2}\,L_K.$$

Είναι τώρα εύκολο να ελέγξουμε ότι το κυρτό σώμα $T := K_{n+2}(f)$ έχει τις ζητούμενες ιδιότητες: το T είναι συμμετρικό διότι η f είναι άρτια, και $L_T \simeq L_f = \sqrt{2}\,L_K$. □

Αν υποθέσουμε ότι η συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ έχει βαρύκεντρο στο 0, χωρίς απαραίτητα να είναι άρτια, επιλέγουμε να δουλέψουμε με το σώμα $K_{n+1}(f)$ αντί για το $K_{n+2}(f)$, διότι το $K_{n+1}(f)$ έχει βαρύκεντρο στο 0 και ταυτόχρονα είναι «σχεδόν ισοτροπικό». Ο ορισμός αυτής της έννοιας είναι ο εξής.

Ορισμός 2.3.30. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Λέμε ότι το K είναι *σχεδόν ισοτροπικό με σταθερά* $C > 0$ αν για κάθε $T \in GL(n)$ για τον οποίον το $T(K)$ είναι ισοτροπικό, έχουμε $d_G(T(B_2^n), B_2^n) \leqslant C$.

Πρόταση 2.3.31. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με βαρύκεντρο στο 0 και πεπερασμένο θετικό ολοκλήρωμα. Τότε, το $T = K_{n+1}(f)$ είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο στο 0 και*

$$c_1 L_f \leqslant L_T \leqslant c_2 L_f,$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Επιπλέον, αν η f είναι ισοτροπική τότε το $\overline{K_{n+1}}(f)$ είναι σχεδόν ισοτροπικό με κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι, από το Λήμμα 2.2.5, αφού η f έχει βαρύκεντρο στο 0 έχουμε $f(0) > 0$. Άρα, το $K_{n+1}(f)$ είναι καλά ορισμένο και από την προηγούμενη συζήτηση γνωρίζουμε ότι είναι κυρτό σώμα με βαρύκεντρο στο 0. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, αλλιώς δουλεύουμε με την $f_1 = \frac{f}{\int f}$ χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $K_{n+1}(\lambda f) = K_{n+1}(f)$ και $L_{\lambda f} = L_f$ για κάθε $\lambda > 0$. Από την Πρόταση 2.3.22 έχουμε

$$\int_T |\langle x, \theta\rangle|\, dx = \frac{1}{f(0)} \int |\langle x, \theta\rangle| f(x)\, dx.$$

Από το λήμμα του Borell βλέπουμε ότι για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{|T|}\int_T \langle x, y\rangle^2\, dx\right)^{1/2} &\simeq \frac{1}{|T|}\int_T |\langle x, y\rangle|\, dx \\ &= \frac{1}{f(0)|T|}\int |\langle x, y\rangle| f(x)\, dx \\ &\simeq \frac{1}{f(0)|T|}\left(\int \langle x, y\rangle^2 f(x)\, dx\right)^{1/2},\end{aligned}$$

και, συνδυάζοντάς το με το ότι το T και η f έχουν και οι δύο βαρύκεντρο στο 0, συμπεραίνουμε ότι υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ ώστε οι πίνακες

$$\mathrm{Cov}(T) - c_1(|T| f(0))^{-2}\mathrm{Cov}(f) \ \text{ και } \ (|T| f(0))^{-2}\mathrm{Cov}(f) - c_2\mathrm{Cov}(T) \tag{2.3.39}$$

να είναι θετικά ορισμένοι (όπου γράφουμε $\mathrm{Cov}(T)$ για τον $\mathrm{Cov}(\mathbf{1}_T)$). Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Minkowski παίρνουμε

$$\begin{aligned}[\det \mathrm{Cov}(T)]^{1/n} &\geqslant \left[\det\big(c_1(|T| f(0))^{-2}\mathrm{Cov}(f)\big)\right]^{1/n} \\ &\quad + \left[\det\big(\mathrm{Cov}(T) - c_1(|T| f(0))^{-2}\mathrm{Cov}(f)\big)\right]^{1/n} \\ &\geqslant c_1(|T| f(0))^{-2}[\det \mathrm{Cov}(f)]^{1/n},\end{aligned}$$

και, όμοια, $(|T|f(0))^{-2}[\det \mathrm{Cov}(f)]^{1/n} \geqslant c_2[\det \mathrm{Cov}(T)]^{1/n}$. Από τον ορισμό της ισοτροπικής σταθεράς έπεται ότι

$$\begin{aligned} L_T &= \frac{1}{|T|^{1/n}}[\det \mathrm{Cov}(T)]^{\frac{1}{2n}} \\ &\simeq |T|^{-1/n}(f(0)|T|)^{-1}[\det \mathrm{Cov}(f)]^{\frac{1}{2n}} \\ &\simeq (f(0)|T|)^{-1-\frac{1}{n}}L_f, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε επίσης το γεγονός ότι $\|f\|_\infty^{1/n} \simeq f(0)^{1/n}$ από το Λήμμα 2.2.5. Τέλος, εφαρμόζοντας την Πρόταση 2.3.27 με $p=1$ παίρνουμε

$$e^{-1} \leqslant (f(0)|T|)^{1+\frac{1}{n}} \leqslant e\frac{n+1}{n} \leqslant 2e. \tag{2.3.40}$$

Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η f είναι ισοτροπική. Από τις (2.3.39) και (2.3.40), και αφού $\mathrm{Cov}(\lambda K) = \lambda^2 \mathrm{Cov}(K)$ για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $\lambda > 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$c_3 f(0)^{2/n}\|y\|_2^2 \leqslant \langle \mathrm{Cov}(\overline{T})(y), y\rangle \leqslant c_4 f(0)^{2/n}\|y\|_2^2$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και κάποιες απόλυτες σταθερές $c_3, c_4 > 0$. Θεωρούμε $S \in GL(n)$ τέτοιον ώστε το $T_1 = S(\overline{T})$ να είναι ισοτροπικό. Τότε, $S \in SL(n)$ και μπορούμε να γράψουμε τον S μονοσήμαντα στην μορφή UP, δηλαδή ως γινόμενο δύο πινάκων, όπου ο U είναι ορθογώνιος και ο P είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος. Επιπλέον, από την ισοτροπική συνθήκη έχουμε

$$\int_{T_1} \langle x, y\rangle^2\, dx = L_T^2\|y\|_2^2$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, άρα μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} L_T^2\|y\|_2^2 = L_T^2\|Uy\|_2^2 &= \int_{T_1} \langle x, Uy\rangle^2\, dx \\ &= \int_{\overline{T}} \langle Sx, Uy\rangle^2\, dx = \int_{\overline{T}} \langle x, S^*Uy\rangle^2\, dx \\ &\geqslant c_3 f(0)^{2/n}\|S^*Uy\|_2^2 = c_3 f(0)^{2/n}\|(P^*U^*)Uy\|_2^2 \\ &= c_3 f(0)^{2/n}\|Py\|_2^2 = c_3 f(0)^{2/n}\|UPy\|_2^2 = c_3 f(0)^{2/n}\|Sy\|_2^2. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|Sy\|_2 \leqslant c_3^{-1/2} L_T f(0)^{-1/n}\|y\|_2$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Όμοια βλέπουμε ότι $\|Sy\|_2 \geqslant c_4^{-1/2} L_T f(0)^{-1/n}\|y\|_2$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Από αυτές τις δύο εκτιμήσεις συμπεραίνουμε ότι $d_G(S(B_2^n), B_2^n) \leqslant C$ με $C := \sqrt{c_4/c_3}$. Συνεπώς, το $\overline{T} = \overline{K_{n+1}}(f)$ είναι σχεδόν ισοτροπικό με σταθερά C, όπου η $C > 0$ είναι ανεξάρτητη από την f και από την διάσταση n. $\square$

2.4 Γεωμετρία των ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

2.4α΄ Η εικασία της ισοτροπικής σταθεράς

Ένα βασικό ανοικτό πρόβλημα είναι αν υπάρχει ομοιόμορφο άνω φράγμα, ανεξάρτητο από την διάσταση, για τις ισοτροπικές σταθερές όλων των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας.

Εικασία 2.4.1. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε

$$L_K \leqslant C$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx \leqslant C^2$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Γενικότερα, υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε

$$L_\mu \leqslant C$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε κεντραρισμένο λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, αν $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, τότε

$$f(0)^{1/n} \leqslant C,$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Αφετηρία της Εικασίας 2.4.1 είναι η λεγόμενη *εικασία του υπερεπιπέδου*, η οποία ρωτάει αν κάθε κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 έχει τουλάχιστον μία τομή με $(n-1)$-διάστατο υπόχωρο η οποία να έχει όγκο μεγαλύτερο από μια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Η σύνδεση γλινεται φανερή από το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 2.4.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\frac{c_1}{L_K} \leqslant |K \cap \theta^\perp| \leqslant \frac{c_2}{L_K},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Το θεώρημα προκύπτει από μια σειρά παρατηρήσεων. Δείχνουμε πρώτα ότι οι τομές που περνούν από το βαρύκεντρο είναι ουσιαστικά μέγιστες.

Πρόταση 2.4.3. *Έστω K κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε $\theta \in S^{n-1}$ και την συνάρτηση*

$$f(t) = f_{K,\theta}(t) = |K \cap (\theta^{\perp} + t\theta)|, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Τότε,

$$\|f\|_{\infty} \leqslant ef(0) = e|K \cap \theta^{\perp}|.$$

Απόδειξη. Από την ανισότητα Brunn-Minkowski η f είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση και αφού το K είναι κεντραρισμένο έχουμε $\mathrm{bar}(f) = 0$. Τώρα, το ζητούμενο προκύπτει από το Λήμμα 2.2.5 στην μονοδιάστατη περίπτωση. □

Η βασική παρατήρηση είναι ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ ο όγκος της $(n-1)$-διάστατης τομής $|K \cap \theta^{\perp}|$ του K συνδέεται στενά με τις L_q-νόρμες

$$\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q := \|\langle \cdot, \theta\rangle\|_{L^q(K)} = \left(\int_K |\langle x, \theta\rangle|^q dx\right)^{1/q}$$

του γραμμικού συναρτησοειδούς $x \mapsto \langle x, \theta\rangle$. Η σύνδεση γίνεται φανερή αν γράψουμε την $\|\langle \cdot, \theta\rangle\|_q^q$ στην μορφή

$$\int_K |\langle x, \theta\rangle|^q dx = \int_{\mathbb{R}} |t|^q f(t) dt.$$

Πρόταση 2.4.4. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $q \geqslant 1$,*

$$\left(\int_K |\langle x, \theta\rangle|^q dx\right)^{1/q} \geqslant \frac{1}{2e(q+1)^{1/q}} \frac{1}{|K \cap \theta^{\perp}|}. \tag{2.4.1}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε πρώτα το Λήμμα 2.2.7 για τις συναρτήσεις $f \cdot \mathbf{1}_{\{t \geqslant 0\}}$ και $f \cdot \mathbf{1}_{\{t \leqslant 0\}}$. Έχουμε

$$F(q+1) = \left(\frac{q+1}{\|f\|_{\infty}} \int_0^{\infty} t^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)} \geqslant F(1) = \frac{1}{\|f\|_{\infty}} \int_0^{\infty} f(t) dt,$$

και όμοια,

$$\left(\frac{q+1}{\|f\|_{\infty}} \int_{-\infty}^{0} |t|^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)} \geqslant \frac{1}{\|f\|_{\infty}} \int_{-\infty}^{0} f(t) dt.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $a^s + b^s \leqslant 2^{1-s}(a+b)^s$ για κάθε $a, b > 0$ και $0 < s < 1$, καθώς και το γεγονός ότι $\int_{-\infty}^{\infty} f = |K| = 1$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{\|f\|_{\infty}} &\leqslant \left(\frac{q+1}{\|f\|_{\infty}} \int_0^{\infty} t^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)} + \left(\frac{q+1}{\|f\|_{\infty}} \int_{-\infty}^{0} |t|^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)} \\ &\leqslant 2^{q/(q+1)} \left(\frac{q+1}{\|f\|_{\infty}} \int_{-\infty}^{\infty} |t|^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)}.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^q f(t)\, dt \geqslant \frac{1}{\|f\|_\infty^q 2^q(q+1)}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει διότι

$$\frac{1}{\|f\|_\infty} \geqslant \frac{1}{ef(0)} = \frac{1}{e|K\cap\theta^\perp|}$$

από την Πρόταση 2.4.3. □

Σημείωση. Στην συμμετρική περίπτωση έχουμε $f(0) = \|f\|_\infty$ και το κάτω φράγμα της Πρότασης 2.4.4 παίρνει την μορφή

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \geqslant \frac{1}{2(q+1)^{1/q}}\frac{1}{|K\cap\theta^\perp|}.$$

Στην περίπτωση $q=2$ αυτό είχε αποδειχτεί από τον Hensley.

Πρόταση 2.4.5. *Έστω K ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ και $q\geqslant 1$,*

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx\right)^{1/q} \leqslant \frac{cq}{|K\cap\theta^\perp|}, \tag{2.4.2}$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Πόρισμα 2.2.6 όπως στην προηγούμενη απόδειξη: έχουμε

$$G(q+1) := \left(\frac{1}{f(0)\Gamma(q+1)}\int_0^\infty t^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)} \leqslant G(0) = \frac{1}{f(0)}\int_0^\infty f(t)\, dt$$

και

$$\left(\frac{1}{f(0)\Gamma(q+1)}\int_{-\infty}^0 |t|^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)} \leqslant \frac{1}{f(0)}\int_{-\infty}^0 f(t)\, dt.$$

Προσθέτοντας κατά μέλη και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $a^s+b^s \geqslant (a+b)^s$ για κάθε $a,b>0$ και $0<s<1$, καθώς και την $\int_{-\infty}^\infty f = |K| = 1$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{f(0)} &\geqslant \left(\frac{1}{f(0)\Gamma(q+1)}\int_0^\infty t^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)}\\ &\quad + \left(\frac{1}{f(0)\Gamma(q+1)}\int_{-\infty}^0 t^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)}\\ &\geqslant \left(\frac{1}{f(0)\Gamma(q+1)}\int_{-\infty}^\infty |t|^q f(t)\, dt\right)^{1/(q+1)}.\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι
$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx = \int_{-\infty}^{\infty} |t|^q f(t)\,dt \leqslant \frac{\Gamma(q+1)}{f(0)^q}$$
και το αποτέλεσμα προκύπτει διότι $\Gamma(q+1)^{1/q} \simeq q$ από τον τύπο του Stirling. □

Υποθέτουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Τότε, οι Προτάσεις 2.4.4 και 2.4.5 μας δίνουν το Θεώρημα 2.4.2.

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.2. Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε $\|\langle \cdot,\theta\rangle\|_2 = L_K$. Από τις (2.4.1) και (2.4.2) βλέπουμε ότι
$$\frac{c_1}{L_K} \leqslant |K\cap\theta^\perp| \leqslant \frac{c_2}{L_K},$$
όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. □

Από το Θεώρημα 2.4.2 γίνεται φανερή η σχέση της εικασίας της ισοτροπικής σταθεράς με την ακόλουθη:

Εικασία 2.4.6 (εικασία του υπερεπιπέδου)**.** Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν K είναι ένα κεντραρισμένο κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ τότε υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ ώστε

$$|K\cap\theta^\perp| \geqslant c. \tag{2.4.3}$$

Υποθέτουμε ότι η εικασία του υπερεπιπέδου ισχύει. Αν το K είναι ισοτροπικό, το Θεώρημα 2.4.2 δείχνει ότι *όλες* οι τομές $K\cap\theta^\perp$ έχουν όγκο φραγμένο από c_2/L_K. Αφού η (2.4.3) πρέπει να ισχύει για τουλάχιστον ένα $\theta \in S^{n-1}$, συμπεραίνουμε ότι $L_K \leqslant c_2/c$.

Αντίστροφα, μπορεί σχετικά εύκολα να δεί κανείς ότι αν υπάρχει απόλυτο άνω φράγμα για την ισοτροπική σταθερά τότε ισχύει η εικασία του υπερεπιπέδου.

2.4β΄ Διάμετρος ισοτροπικών κυρτών σωμάτων

Η εσωτερική ακτίνα $r(K)$ ενός κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$ είναι ο μεγαλύτερος $r > 0$ για τον οποίον $rB_2^n \subseteq K$ ενώ η εξωτερική ακτίνα $R(K) := \max\{\|x\|_2 : x \in K\}$ του K είναι ο μεγαλύτερος $R > 0$ για τον οποίον $K \subseteq RB_2^n$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η εσωτερική και η εξωτερική ακτίνα ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ ικανοποιούν τις ανισότητες

$$c_1 L_K \leqslant r(K) \leqslant R(K) \leqslant c_2 n L_K, \tag{2.4.4}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Για την δεξιά ανισότητα χρησιμοποιούμε το εξής απλό επιχείρημα: για το τυχόν $\theta \in S^{n-1}$ γνωρίζουμε ότι

$$|K\cap\theta^\perp| \simeq \frac{1}{L_K}. \tag{2.4.5}$$

Θεωρούμε $x_\theta \in K$ με την ιδιότητα $\langle x_\theta, \theta\rangle = h_K(\theta)$ και γράφουμε $C(\theta)$ για τον κώνο $\mathrm{conv}(K\cap\theta^\perp, x_\theta)$. Τότε, $C(\theta)\subseteq K$, άρα

$$1 = |K| \geqslant |C(\theta)| = \frac{|K\cap\theta^\perp| h_K(\theta)}{n}.$$

Έπεται ότι $h_K(\theta)\leqslant c_2 n L_K$. Για την αριστερή ανισότητα χρησιμοποιούμε το λήμμα του Grünbaum (Λήμμα 2.2.8): αφού το K έχει βαρύκεντρο στο 0, για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ έχουμε $|\{x\in K : \langle x,\theta\rangle \geqslant 0\}| \geqslant e^{-1}$. Συνεπώς,

$$e^{-1} \leqslant \|f_{K,\theta}\|_\infty h_K(\theta) \leqslant e|K\cap\theta^\perp| h_K(\theta),$$

όπου $f_{K,\theta}(t) = |K\cap\{\langle x,\theta\rangle = t\}|$. Τώρα, χρησιμοποιώντας την (2.4.5) βλέπουμε ότι $h_K(\theta)\geqslant c_1 L_K$, και αφού το θ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $r(K)\geqslant c_1 L_K$. Στην συμμετρική μάλιστα περίπτωση έχουμε το φράγμα $r(K)\geqslant L_K$, διότι $|\langle x,\theta\rangle|\leqslant h_K(\theta)$ για κάθε $x\in K$, άρα

$$h_K(\theta) \geqslant \left(\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx\right)^{1/2} = L_K$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$.

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε ένα επιχείρημα των Kannan, Lovász και Simonovits από το [21], το οποίο δίνει καλύτερη τιμή για την σταθερά στο άνω φράγμα της (2.4.4).

Θεώρημα 2.4.7. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, $R(K)\leqslant (n+1)L_K$.*

Απόδειξη. Έστω $x\in K$. Ορίζουμε $h : S^{n-1}\to\mathbb{R}$ με

$$h(u) = \max\{t\geqslant 0 : x+tu\in K\}.$$

Μπορούμε να γράψουμε τον όγκο του K ως εξής:

$$1 = |K| = n\omega_n \int_{S^{n-1}}\int_0^{h(u)} t^{n-1} dt d\sigma(u) = \omega_n \int_{S^{n-1}} h^n(u) d\sigma(u).$$

Αφού το K είναι ισοτροπικό, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
L_K^2 &= \int_K \langle y,\theta\rangle^2 dy \\
&= n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{h(u)} t^{n-1}\langle x+tu,\theta\rangle^2 dt d\sigma(u) \\
&= n\omega_n \int_{S^{n-1}} \int_0^{h(u)} \left(t^{n-1}\langle x,\theta\rangle^2 + 2t^n\langle x,\theta\rangle\langle u,\theta\rangle + t^{n+1}\langle u,\theta\rangle^2\right) dt d\sigma(u) \\
&= n\omega_n \int_{S^{n-1}} \Big(\frac{h^n(u)}{n}\langle x,\theta\rangle^2 + \frac{2h^{n+1}(u)}{n+1}\langle x,\theta\rangle\langle u,\theta\rangle + \frac{h^{n+2}(u)}{n+2}\langle u,\theta\rangle^2\Big) d\sigma(u) \\
&= n\omega_n \int_{S^{n-1}} \left(\frac{h^n(u)}{n(n+1)^2}\langle x,\theta\rangle^2 + h^n(u)\left(\frac{h(u)\langle u,\theta\rangle}{\sqrt{n+2}} + \frac{\sqrt{n+2}\langle x,\theta\rangle}{n+1}\right)^2\right) d\sigma(u) \\
&\geqslant \frac{\langle x,\theta\rangle^2}{(n+1)^2}\omega_n \int_{S^{n-1}} h^n(u) d\sigma(u) = \frac{\langle x,\theta\rangle^2}{(n+1)^2}.
\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι, για κάθε $x \in K$ και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$|\langle x,\theta\rangle| \leqslant (n+1)L_K.$$

Συνεπώς,

$$\|x\|_2 = \max_{\theta\in S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle| \leqslant (n+1)L_K.$$

Αφού το $x \in K$ ήταν τυχόν, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Παρατήρηση. Η εκτίμηση που δίνει το Θεώρημα 2.4.7 δεν βελτιώνεται. Η μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n έχει όγκο $2^n/n!$. Αν την πολλαπλασιάσουμε με κατάλληλη σταθερά ώστε να έχει όγκο 1, τότε η σταθερά είναι της τάξης του n, δηλαδή η ισοτροπική εικόνα της μοναδιαίας μπάλας του ℓ_1^n έχει διάμετρο της τάξης του n.

2.4γ΄ ψ_2-εκτίμηση για την Ευκλείδεια νόρμα

Το επόμενο θεώρημα, που οφείλεται στον Alesker [1], ισχυρίζεται ότι η Ευκλείδεια νόρμα, σαν συνάρτηση ορισμένη σε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα, ικανοποιεί ψ_2-εκτίμηση.

Θεώρημα 2.4.8. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $f(x) = \|x\|_2$, τότε*

$$\|f\|_{L^{\psi_2}(K)} \leqslant c\sqrt{n}L_K,$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 2.4.9. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ με βαρύκεντρο στο 0. Για κάθε $q \geqslant 1$,*

$$\left(\int_{S^{n-1}}\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx d\sigma(\theta)\right)^{1/q} \simeq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{n+q}}\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $q \geqslant 1$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ελέγχουμε ότι

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle|^q d\sigma(\theta)\right)^{1/q} \simeq \frac{\sqrt{q}}{\sqrt{n+q}}\|x\|_2. \tag{2.4.6}$$

Για την απόδειξη, χρησιμοποιώντας πολικές συντεταγμένες βλέπουμε πρώτα ότι

$$\begin{aligned}\int_{B_2^n} |\langle x,y\rangle|^q dy &= n\omega_n \int_0^1 r^{n+q-1}dr \int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle|^q d\sigma(\theta)\\ &= \frac{n\omega_n}{n+q}\int_{S^{n-1}} |\langle x,\theta\rangle|^q d\sigma(\theta).\end{aligned}$$

Μπορούμε όμως να γράψουμε το αριστερό μέλος και ως εξής:

$$\begin{aligned}\int_{B_2^n} |\langle x,y\rangle|^q dy &= \|x\|_2^q \int_{B_2^n} \left|\left\langle \frac{x}{\|x\|_2}, y\right\rangle\right|^q dy\\ &= \|x\|_2^q \int_{B_2^n} |\langle e_1,y\rangle|^q dy\\ &= 2\omega_{n-1}\|x\|_2^q \int_0^1 t^q(1-t^2)^{(n-1)/2}dt\\ &= \omega_{n-1}\|x\|_2^q \frac{\Gamma\left(\frac{q+1}{2}\right)\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n+q+2}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Συγκρίνοντας τις δύο εκφράσεις και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling παίρνουμε την (2.4.6). Απλή εφαρμογή του θεωρήματος του Fubini ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.8. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $q > 1$ ισχύει

$$\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q} \leqslant c_1\sqrt{q}\sqrt{n}L_K$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $\theta \in S^{n-1}$

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx \leqslant c_2^q q^q L_K^q.$$

Ολοκληρώνοντας στην σφαίρα παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}} \int_K |\langle x, \theta\rangle|^q dx d\sigma(\theta) \leqslant c_2^q q^q L_K^q.$$

Χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 2.4.9 βλέπουμε ότι

$$\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q} \leqslant c_3 q \sqrt{\frac{n+q}{q}} L_K \leqslant c_4 \sqrt{q}\sqrt{n} L_K,$$

αν υποθέσουμε ότι $q \leqslant n$. Από την άλλη πλευρά, στην περίπτωση που $q > n$, χρησιμοποιώντας την $R(K) \leqslant (n+1)L_K$, παίρνουμε

$$\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q} \leqslant c_5 n L_K \leqslant c_5 \sqrt{q}\sqrt{n} L_K.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ ώστε

$$\left(\int_K \|x\|_2^q dx\right)^{1/q} \leqslant c_1 \sqrt{q}\sqrt{n} L_K$$

για κάθε $q > 1$. □

Πόρισμα 2.4.10. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν K είναι ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$|\{x \in K : \|x\|_2 \geqslant c\sqrt{n} L_K s\}| \leqslant 2\exp(-s^2)$$

για κάθε $s > 0$.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.4.8 και από τον ορισμό της ψ_2-νόρμας έχουμε

$$\int_K \exp\left(\frac{\|x\|_2^2}{c^2 n L_K^2}\right) dx \leqslant 2$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Το συμπέρασμα έπεται από την ανισότητα του Markov.
□

Κεφάλαιο 3

Συγκέντρωση του μέτρου

3.1 L_q-κεντροειδή σώματα

3.1α΄ Ορισμός και αρχικές παρατηρήσεις

Ορισμός 3.1.1. Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(K)$ του K να είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα που έχει συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(K)}(y) = \|\langle \cdot, y\rangle\|_{L^q(K)} = \left(\int_K |\langle x, y\rangle|^q dx\right)^{1/q}.$$

Παρατηρήστε ότι $Z_q(T(K)) = T(Z_q(K))$ για κάθε $T \in SL(n)$ και για κάθε $q \geqslant 1$. Επίσης, ένα κυρτό σώμα K που έχει όγκο 1 και βαρύκεντρο το 0 είναι ισοτροπικό αν το $Z_2(K)$ είναι πολλαπλάσιο της μοναδιαίας Ευκλείδειας μπάλας.

Ο ορισμός επεκτείνεται φυσιολογικά στο πλαίσιο των λογαριθμικά κοίλων μέτρων πιθανότητας. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με $\int f = 1$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε το L_q-κεντροειδές σώμα $Z_q(f)$ της f να είναι το συμμετρικό κυρτό σώμα με συνάρτηση στήριξης την

$$h_{Z_q(f)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q f(x)\, dx\right)^{1/q}.$$

Αντίστοιχα, αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, ορίζουμε

$$h_{Z_q(\mu)}(y) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, y\rangle|^q \, d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Παρατηρήστε ότι αν το μ έχει πυκνότητα f_μ ως προς το μέτρο Lebesgue τότε $Z_q(\mu) = Z_q(f_\mu)$.

Όπως και στην περίπτωση των κυρτών σωμάτων, το $Z_q(\mu)$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα και έχουμε $Z_q(T\circ\mu) = T(Z_q(\mu))$ για κάθε $T \in SL(n)$ και για κάθε $q \geqslant 1$. Μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f είναι ισοτροπική αν $Z_2(f) = B_2^n$.

Λήμμα 3.1.2. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $q \geqslant 1$,*

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx \geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2e\Gamma(q+n+1)} \max\left\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\right\}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $f_\theta(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|$. Από την αρχή του Brunn η $f_\theta^{1/(n-1)}$ είναι κοίλη στον φορέα της. Έπεται ότι

$$f_\theta(t) \geqslant \left(1 - \frac{t}{h_K(\theta)}\right)^{n-1} f_\theta(0)$$

για κάθε $t \in [0, h_K(\theta)]$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} \int_K |\langle x,\theta\rangle|^q dx &= \int_0^{h_K(\theta)} t^q f_\theta(t)dt + \int_0^{h_K(-\theta)} t^q f_{-\theta}(t)dt \\ &\geqslant \int_0^{h_K(\theta)} t^q \left(1 - \frac{t}{h_K(\theta)}\right)^{n-1} f_\theta(0)dt \\ &\quad + \int_0^{h_K(-\theta)} t^q \left(1 - \frac{t}{h_K(-\theta)}\right)^{n-1} f_\theta(0)dt \\ &= f_\theta(0)\left(h_K^{q+1}(\theta) + h_K^{q+1}(-\theta)\right)\int_0^1 s^q(1-s)^{n-1}ds \\ &= \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{\Gamma(q+n+1)} f_\theta(0)\left(h_K^{q+1}(\theta) + h_K^{q+1}(-\theta)\right) \\ &\geqslant \frac{\Gamma(q+1)\Gamma(n)}{2\Gamma(q+n+1)} f_\theta(0)\left(h_K(\theta) + h_K(-\theta)\right)\cdot \max\left\{h_K^q(\theta), h_K^q(-\theta)\right\}. \end{aligned} \tag{3.1.1}$$

Αφού το K έχει βαρύκεντρο το 0, έχουμε $\|f_\theta\|_\infty \leqslant e f_\theta(0)$, άρα

$$1 = |K| = \int_{-h_K(-\theta)}^{h_K(\theta)} f_\theta(t)dt \leqslant e\left(h_K(\theta) + h_K(-\theta)\right) f_\theta(0).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 3.1.3. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $q \geqslant n$,*

$$\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_q \simeq \max\{h_K(\theta), h_K(-\theta)\}.$$

Απόδειξη. Από το Λήμμα 3.1.2 ελέγχουμε εύκολα ότι $\|\langle\cdot,\theta\rangle\|_n \simeq \max\{h_K(\theta),h_K(-\theta)\}$. $\square$

Υποθέτουμε ότι K είναι ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα Hölder είνα φανερό ότι

$$Z_1(K)\subseteq Z_p(K)\subseteq Z_q(K)\subseteq Z_\infty(K)$$

για κάθε $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$, όπου $Z_\infty(K)=\mathrm{conv}\{K,-K\}$.

Από το Θεώρημα 2.3.18, για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$ και για κάθε $q>p\geqslant 1$ έχουμε

$$\|\langle\cdot,y\rangle\|_q\leqslant\frac{cq}{p}\|\langle\cdot,y\rangle\|_p.$$

Επιπλέον, αν υποθέσουμε ότι το K έχει βαρύκεντρο στο 0, τότε το Πόρισμα 3.1.3 ισχυρίζεται ότι

$$\|\langle\cdot,y\rangle\|_{L^n(K)}\simeq\max\{h_K(y),h_K(-y)\}.$$

Στην γλώσσα των L_q-κεντροειδών σωμάτων, αυτά τα δύο αποτελέσματα παίρνουν την ακόλουθη μορφή.

Πρόταση 3.1.4. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1\leqslant p<q$ έχουμε*

$$Z_p(K)\subseteq Z_q(K)\subseteq\frac{c_1q}{p}Z_p(K),$$

όπου $c_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αν το K έχει βαρύκεντρο στο 0, τότε

$$Z_q(K)\supseteq c_2Z_\infty(K)$$

για κάθε $q\geqslant n$, όπου $c_2>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Εντελώς ανάλογο αποτέλεσμα ισχύει για λογαριθμικά κοίλα μέτρα.

Πρόταση 3.1.5. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με πυκνότητα f. Τότε, για κάθε $1\leqslant p<q$ έχουμε*

$$Z_p(f)\subseteq Z_q(f)\subseteq\frac{cq}{p}Z_p(f),$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

3.1β′ L_q-κεντροειδή σώματα των $K_p(\mu)$

Σε αυτήν την Παράγραφο συζητάμε την σχέση της οικογένειας των L_q-κεντροειδών σωμάτων ενός κενταρισμένου λογαριθμικά κοίλου μέτρου πιθανότητας μ με την οικογένεια των σωμάτων $K_p(\mu)$. Ξεκινάμε από ένα πόρισμα της Πρότασης 2.3.22. Θυμηθείτε ότι, για κάθε συμπαγές $A\subset\mathbb{R}^n$ με $|A|>0$, γράφουμε $\overline{A}$ για το σύνολο $A/|A|^{1/n}$.

Πρόταση 3.1.6. *Έστω f λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με $\mathrm{bar}(f)=0$ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p\geqslant 1$,*

$$Z_p(\overline{K_{n+p}}(f))|K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{p}+\frac{1}{n}}f(0)^{1/p}=Z_p(f).$$

Απόδειξη. Έστω $p\geqslant 1$. Από την Πρόταση 2.3.22 (vi) γνωρίζουμε ότι

$$\int_{K_{n+p}(f)}|\langle x,\theta\rangle|^p\,dx=\frac{1}{f(0)}\int_{\mathbb{R}^n}|\langle x,\theta\rangle|^p\,f(x)\,dx$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Αφού

$$\int_{K_{n+p}(f)}|\langle x,\theta\rangle|^p\,dx=|K_{n+p}|^{1+\frac{p}{n}}\int_{\overline{K_{n+p}}(f)}|\langle x,\theta\rangle|^p\,dx,$$

παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Τώρα, χρησιμοποιούμε την Πρόταση 2.3.27. Γνωρίζουμε ότι για κάθε $p>0$ ισχύει

$$e^{-1}\leqslant f(0)^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}|K_{n+p}(f)|^{\frac{1}{n}+\frac{1}{p}}\leqslant e\frac{n+p}{n}.$$

Από την Πρόταση 3.1.6 παίρνουμε:

Πρόταση 3.1.7. *Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p\geqslant 1$,*

$$\frac{1}{e}Z_p(\overline{K_{n+p}}(f))\subseteq f(0)^{1/n}Z_p(f)\subseteq e\frac{n+p}{n}Z_p(\overline{K_{n+p}}(f)).$$

Θα μας φανεί επίσης χρήσιμη η σύγκριση των L_q-κεντροειδών σωμάτων μιας κεντραρισμένης λογαριθμικά κοίλης πυκνότητας με τα αντίστοιχα κεντροειδή σώματα των σωμάτων $\overline{K_{n+1}}(f)$ και $\overline{K_{n+2}}(f)$.

Θεώρημα 3.1.8. *Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant q\leqslant n$ έχουμε*

$$c_1f(0)^{1/n}Z_q(f)\subseteq Z_q(\overline{K_{n+1}}(f))\subseteq c_2f(0)^{1/n}Z_q(f)\tag{3.1.2}$$

και

$$c_3f(0)^{1/n}Z_q(f)\subseteq Z_q(\overline{K_{n+2}}(f))\subseteq c_4f(0)^{1/n}Z_q(f),\tag{3.1.3}$$

όπου $c_1,c_2,c_3,c_4>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο q είναι θετικός ακέραιος. Λόγω της Πρότασης 3.1.7 αρκεί να συγκρίνουμε το $Z_q(\overline{K_{n+1}}(f))$ με το $Z_q(\overline{K_{n+q}}(f))$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 2.3.26 (ii) παίρνουμε

$$\begin{aligned} e^{\frac{n}{n+q}-\frac{n}{n+1}}\left(\frac{|K_{n+1}(f)|}{|K_{n+q}(f)|}\right)^{1/n}\overline{K_{n+1}}(f) &\subseteq \overline{K_{n+q}}(f) \\ &\subseteq \frac{(\Gamma(n+q+1))^{\frac{1}{n+q}}}{(\Gamma(n+2))^{\frac{1}{n+1}}}\left(\frac{|K_{n+1}(f)|}{|K_{n+q}(f)|}\right)^{1/n}\overline{K_{n+1}}(f). \end{aligned}$$

Συνεπώς, για τους αντίστοιχους όγκους έχουμε

$$\frac{(\Gamma(n+2))^{\frac{1}{n+1}}}{(\Gamma(n+q+1))^{\frac{1}{n+q}}} \leqslant \left(\frac{|K_{n+1}(f)|}{|K_{n+q}(f)|}\right)^{1/n} \leqslant e^{-\frac{n}{n+q}+\frac{n}{n+1}},$$

άρα

$$A^{-1}\,\overline{K_{n+1}(f)} \subseteq \overline{K_{n+q}}(f) \subseteq A\,\overline{K_{n+1}}(f),$$

όπου $A := e^{\frac{n}{n+1}-\frac{n}{n+q}}\frac{\Gamma(n+q+1)^{\frac{1}{n+q}}}{\Gamma(n+2)^{\frac{1}{n+1}}}$. Έπεται ότι

$$A^{-\frac{n+q}{q}}Z_q\left(\overline{K_{n+1}}(f)\right) \subseteq Z_q\left(\overline{K_{n+q}}(f)\right) \subseteq A^{\frac{n+q}{q}}Z_q\left(\overline{K_{n+1}}(f)\right),$$

με

$$\begin{aligned} A^{\frac{n+q}{q}} &= \frac{(\Gamma(n+q+1))^{\frac{1}{n+q}\cdot\frac{n+q}{q}}}{(\Gamma(n+2))^{\frac{1}{n+1}\cdot\frac{n+q}{q}}}\cdot e^{(-\frac{n}{n+q}+\frac{n}{n+1})\cdot\frac{n+q}{q}} \\ &= \left(\frac{e^{\frac{n(q-1)}{n+1}}(n+2)\dots(n+q)}{(n+1)!^{\frac{q-1}{n+1}}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant \left(e^{\frac{(2n+1)(q-1)}{n+1}}\,\frac{(n+q)^{q-1}}{(n+1)^{q-1}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\leqslant e^2\frac{n+q}{n+1}. \end{aligned}$$

Παρόμοιο επιχείρημα αποδεικνύει τον ισχυρισμό για το $\overline{K_{n+2}}(f)$. □

3.1γ΄ Όγκος του $Z_n(f)$

Ο τύπος της επόμενης Πρότασης είναι πολύ χρήσιμος.

Πρόταση 3.1.9. *Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{c_1}{f(0)^{1/n}} \leqslant |Z_n(f)|^{1/n} \leqslant \frac{c_2}{f(0)^{1/n}}, \tag{3.1.4}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Αφού η f είναι κεντραρισμένη, το $K_{n+1}(f)$ έχει βαρύκεντρο το 0. Από την Πρόταση 3.1.4 βλέπουμε ότι

$$|Z_n(\overline{K_{2n}}(f))|^{1/n} \simeq 1.$$

Τότε, από την Πρόταση 3.1.7 παίρνουμε

$$f(0)^{1/n}|Z_n(f)|^{1/n} \simeq |Z_n(\overline{K_{2n}}(f))|^{1/n} \simeq 1.$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Πόρισμα 3.1.10. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ με $\mathrm{bar}(\mu) = 0$. Τότε,*

$$|Z_n(\mu)|^{1/n} \simeq \frac{1}{\|\mu\|_\infty^{1/n}}.$$

Απόδειξη. Έστω f η λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα του μ. Από την προηγούμενη Πρόταση έχουμε

$$|Z_n(\mu)|^{1/n} = |Z_n(f)|^{1/n} \simeq \frac{1}{f(0)^{1/n}}.$$

Τότε, αφού $\mathrm{bar}(\mu) = 0$, το Λήμμα 2.2.5 δείχνει ότι

$$e^{-n}\|\mu\|_\infty \leqslant f(0) \leqslant \|\mu\|_\infty,$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

3.1δ΄ Περιθώριες κατανομές και προβολές

Ορισμός 3.1.11. Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Έστω ακέραιος $1 \leqslant k < n$ και έστω $F \in G_{n,k}$. Η *περιθώρια συνάρτηση* $\pi_F(f) : F \to [0,\infty)$ της f ως προς F ορίζεται ως εξής:

$$\pi_F(f)(x) := \int_{x+F^\perp} f(y)dy. \tag{3.1.5}$$

Γενικότερα, για κάθε $\mu \in \mathcal{P}_n$ ορίζουμε την περιθώρια κατανομή του μ ως προς τον k-διάστατο υπόχωρο F θέτοντας

$$\pi_F(\mu)(A) := \mu(P_F^{-1}(A))$$

για κάθε Borel υποσύνολο A του F. Αν το μ έχει (λογαριθμικά κοίλη) πυκνότητα f_μ τότε οι δύο ορισμοί συμφωνούν. Μπορούμε να δούμε ότι

$$f_{\pi_F(\mu)} = \pi_F(f_\mu)$$

σχεδόν παντού. Πράγματι, για κάθε Borel υποσύνολο A του F, έχουμε

$$\begin{aligned} \pi_F(\mu)(A) = \mu(P_F^{-1}(A)) &= \int f_\mu(x)\mathbf{1}_A(P_F x)\,dx \\ &= \int_F \int_{F^\perp} f_\mu(x+y)\mathbf{1}_A(x)\,dy\,dx, \end{aligned} \tag{3.1.6}$$

από το θεώρημα Fubini. Με μια αλλαγή μεταβλητής βλέπουμε ότι

$$\pi_F(\mu)(A) = \int_A \left(\int_{x+F^\perp} f_\mu(y)\,dy \right) dx = \int_A \pi_F(f_\mu)(x)\,dx.$$

Η επόμενη Πρόταση περιγράφει κάποιες βασικές ιδιότητες των περιθώριων κατανομών.

Πρόταση 3.1.12. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και έστω $F \in G_{n,k}$.*

(i) *Αν η f είναι άρτια, τότε και η $\pi_F(f)$ είναι άρτια.*

(ii) *Έχουμε*

$$\int_F \pi_F(f)(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\,dx.$$

(iii) *Για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $g : F \to \mathbb{R}$ έχουμε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} g(P_F x) f(x)\,dx = \int_F g(x)\pi_F(f)(x)\,dx.$$

(iv) *Για κάθε $\theta \in S_F$,*

$$\int_F \langle x,\theta\rangle \pi_F(f)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^n} \langle x,\theta\rangle f(x)dx. \tag{3.1.7}$$

Ειδικότερα, αν η f είναι κεντραρισμένη τότε, για κάθε $F \in G_{n,k}$ η $\pi_F(f)$ είναι κεντραρισμένη.

(v) *Για κάθε $p > 0$ και για κάθε $\theta \in S_F$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^p f(x)dx = \int_F |\langle x,\theta\rangle|^p \pi_F(f)(x)dx.$$

Ειδικότερα, αν η f είναι ισοτροπική, τότε και η $\pi_F(f)$ είναι ισοτροπική.

(vi) *Αν η f είναι λογαριθμικά κοίλη, τότε και η $\pi_F(f)$ είναι λογαριθμικά κοίλη.*

Αντίστοιχα συμπεράσματα έχουμε για οποιοδήποτε μέτρο $\mu \in \mathcal{P}_n$.

Απόδειξη. Η πρώτη ιδιότητα είναι προφανής. Οι ισχυρισμοί (ii)-(v) είναι άμεσες συνέπειες του θεωρήματος Fubini. Για τον τελευταίο ισχυρισμό, χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι το μ είναι λογαριθμικά κοίλο, γράφουμε

$$\begin{aligned}\pi_F(\mu)((1-\lambda)A+\lambda B) &= \mu(P_F^{-1}((1-\lambda)A+\lambda B))\\ &= \mu((1-\lambda)P_F^{-1}(A)+\lambda P_F^{-1}(B))\\ &\geqslant \mu(P_F^{-1}(A))^{1-\lambda}\mu(P_F^{-1}(B))^{\lambda}\\ &= (\pi_F(\mu)(A))^{1-\lambda}(\pi_F(\mu)(B))^{\lambda}\end{aligned}$$

για κάθε ζεύγος συνόλων Borel A και B στον F. □

3.1ε′ Προβολές του $Z_q(f)$

Μια βασική παρατήρηση του Παούρη στο [34] είναι ότι κάθε προβολή του L_q-κεντροειδούς σώματος μιας πυκνότητας f συμπίπτει με το L_q-κεντροειδές σώμα του αντίστοιχου marginal της f. Η απόδειξη είναι άμεση εφαρμογή του Θεωρήματος Fubini.

Θεώρημα 3.1.13. *Έστω $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και για κάθε $F \in G_{n,k}$ και $q \geqslant 1$, έχουμε*

$$P_F(Z_q(f)) = Z_q(\pi_F(f)). \tag{3.1.8}$$

Απόδειξη. Για κάθε $q \geqslant 1$ και για κάθε $\theta \in S_F$, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^q f(x)dx = \int_F |\langle x,\theta\rangle|^q \pi_F(f)(x)dx,$$

διότι $\langle x,\theta\rangle = \langle P_F(x),\theta\rangle$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα,

$$h_{Z_q(f)}(\theta) = h_{Z_q(\pi_F f)}(\theta),$$

για κάθε $\theta \in S_F$, και το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα από την παρατήρηση ότι $h_{P_F(Z_q(f))}(\theta) = h_{Z_q(f)}(\theta)$ για κάθε $\theta \in S_F$. □

Έστω f μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $F \in G_{n,k}$, η συνάρτηση $\pi_F(f)$ είναι μια κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον F. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.1.9 για την $\pi_F(f)$. Έπεται ότι

$$\frac{c_1}{\pi_F(f)(0)^{1/k}} \leqslant |Z_k(\pi_F(f))|^{1/k} \leqslant \frac{c_2}{\pi_F(f)(0)^{1/k}}.$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με την (3.2.13) έχουμε αποδείξει το εξής.

Θεώρημα 3.1.14. *Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με $\mathrm{bar}(f)=0$ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $1\leqslant k<n$ και για κάθε $F\in G_{n,k}$, έχουμε*

$$c_1 \leqslant [\pi_F(f)(0)]^{\frac{1}{k}} |P_F(Z_k(f))|^{\frac{1}{k}} \leqslant c_2, \tag{3.1.9}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Επιλέγοντας $f=\mathbf{1}_K$ και παρατηρώντας ότι $\pi_F(f)(0)=|K\cap F^{\perp}|$ παίρνουμε την ακόλουθη γεωμετρική ανισότητα, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν μια L_q εκδοχή της ανισότητας Rogers-Shephard.

Θεώρημα 3.1.15. *Έστω K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $1\leqslant k<n$ και για κάθε $F\in G_{n,k}$, έχουμε*

$$c_1 \leqslant |K\cap F^{\perp}|^{\frac{1}{k}} |P_F(Z_k(K)|^{\frac{1}{k}} \leqslant c_2, \tag{3.1.10}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η επόμενη Πρόταση μας δίνει χρήσιμους τύπους για τον όγκο των κεντρικών τομών ενός ισοτροπικού κυρτού σώματος.

Πρόταση 3.1.16. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με μ_K το ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο που έχει πυκνότητα την $L_K^n\mathbf{1}_{\frac{K}{L_K}}$. Τότε, για κάθε $1\leqslant k<n$ και για κάθε $F\in G_{n,k}$, το σώμα $\overline{K_{k+1}}(\pi_F(\mu_K))$ είναι σχεδόν ισοτροπικό και*

$$|K\cap F^{\perp}|^{1/k} \simeq \frac{L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_F(\mu_K))}}{L_K}, \tag{3.1.11}$$

Επίσης, για κάθε $1\leqslant p\leqslant k$,

$$Z_p\big(\overline{K_{k+1}}(\pi_F(\mu_K))\big) \simeq |K\cap F^{\perp}|^{1/k} P_F(Z_p(K)). \tag{3.1.12}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $1\leqslant k<n$ και $F\in G_{n,k}$. Συμβολίζουμε με f_K την πυκνότητα του μ_K. Αφού η f_K είναι ισοτροπική, η Πρόταση 3.1.12 δείχνει ότι το $\pi_F(f_K)$ είναι ισοτροπικό. Συνεπώς, από την Πρόταση 2.3.31 έχουμε ότι το $\overline{K_{k+1}}(\pi_F(f_K))$ είναι σχεδόν ισοτροπικό με κάποια απόλυτη σταθερά $C>0$. Από το Θεώρημα 3.1.8 (με $q=2$) παίρνουμε:

$$\begin{aligned} L_{\overline{K_{k+1}}(\pi_F(f_K))} = \left(\frac{|Z_2(\overline{K_{k+1}}(\pi_F(f_K)))|}{|B_F|}\right)^{1/k} &\simeq \pi_F(f_K)(0)^{1/k}\left(\frac{|Z_2(\pi_F(f_K))|}{|B_F|}\right)^{1/k} \\ &= \pi_F(f_K)(0)^{1/k}\left(\frac{|P_F(Z_2(f_K))|}{|B_F|}\right)^{1/k}, \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την $Z_2(\pi_F(f)) = P_F(Z_2(f))$ που ισχύει για κάθε λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση f. Αφού το K είναι ισοτροπικό, έχουμε

$$Z_2(f_K) = L_K^{-1} Z_2(K) = B_2^n.$$

Επιπλέον,

$$\pi_F(f_K)(0) = \int_{F^\perp} f_K(y)\,dy = L_K^n \big|\tfrac{1}{L_K} K \cap F^\perp\big| = L_K^k |K \cap F^\perp|.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$L_{\overline{K_{k+1}(\pi_F(f_K))}} \simeq L_K |K \cap F^\perp|^{1/k}.$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 3.1.8 και τις ταυτότητες

$$\pi_F(\mu_K)(0)^{1/k} = L_K |K \cap F^\perp|^{1/k}$$

και $Z_q(\pi_F(\mu_K)) = L_K^{-1} P_F(Z_q(K))$. $\square$

3.2 Εκτιμήσεις μεγάλων αποκλίσεων για την Ευκλείδεια νόρμα

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι η εξής ανισότητα συγκέντρωσης, που οφείλεται στον Παούρη (βλέπε [34]).

Θεώρημα 3.2.1 (Παούρης). *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 \geqslant ct\sqrt{n}\}) \leqslant \exp\left(-t\sqrt{n}\right) \tag{3.2.1}$$

για κάθε $t \geqslant 1$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

3.2α΄ Αναγωγή στις ροπές

Σε αυτήν την Παράγραφο περιγράφουμε μια αναγωγή του Θεωρήματος 3.2.1 στην συμπεριφορά των ροπών της συνάρτησης $x \mapsto \|x\|_2$. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε

$$I_q(\mu) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Όπως είδαμε, από το λήμμα του Borell έπονται οι παρακάτω ανισότητες τύπου Khintchine.

Λήμμα 3.2.2. *Για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ και για κάθε $p, q \geqslant 1$ έχουμε*

$$\|\langle \cdot, y\rangle\|_{pq} \leqslant c_1 q \|\langle \cdot, y\rangle\|_p,$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επίσης, αφού η $\|x\|_2$ είναι νόρμα, για κάθε $p, q \geqslant 1$ έχουμε

$$I_{pq}(K) \leqslant c_1 q I_p(K).$$

Ειδικότερα, έχουμε

$$I_q(\mu) \leqslant c_1 q I_2(\mu)$$

για κάθε $q \geqslant 2$. Από το θεώρημα του Alesker (Θεώρημα 2.4.8) έχουμε επίσης

$$I_q(\mu) \leqslant c_2 \sqrt{q} I_2(\mu)$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Θα αποδείξουμε την εξής ισχυρότερη ανισότητα.

Θεώρημα 3.2.3 (Παούρης). *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_3, c_4 > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$I_q(\mu) \leqslant c_4 I_2(\mu) \tag{3.2.2}$$

για κάθε $q \leqslant c_3\sqrt{n}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Υποθέτοντας ότι έχουμε δείξει το Θεώρημα 3.2.3, θεωρούμε ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$. Από την ανισότητα του Markov, για κάθε $q \geqslant 2$ έχουμε

$$\mu(\{\|x\|_2 \geqslant e^3 I_q(\mu)\}) \leqslant e^{-3q}.$$

Τότε, από το Λήμμα του Borell - ακριβέστερα, από την (2.3.22) - παίρνουμε

$$\begin{aligned}\mu(\{\|x\|_2 \geqslant e^3 I_q(\mu)s\}) &\leqslant (1 - e^{-3q})\left(\frac{e^{-3q}}{1 - e^{-3q}}\right)^{(s+1)/2} \\ &\leqslant e^{-qs}\end{aligned}$$

για κάθε $s \geqslant 1$. Επιλέγοντας $q = c_3\sqrt{n}$, και χρησιμοποιώντας την (3.2.2), βλέπουμε ότι

$$\mu(\{\|x\|_2 \geqslant c_4 e^3 I_2(\mu)s\}) \leqslant \exp(-c_3\sqrt{n}s)$$

για κάθε $s \geqslant 1$. Αφού το μ είναι ισοτροπικό, έχουμε $I_2(\mu) = \sqrt{n}$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.3 θα χρειαστεί πρώτα να εισάγουμε κάποιες παραμέτρους οι οποίες μας επιτρέπουν να μελετήσουμε σε βάθος την οικογένεια των L_q-κεντροειδών σωμάτων του μ.

3.2β′ Μέσοι νορμών στην σφαίρα

Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το C. Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε

$$M_q := M_q(C) = \left(\int_{S^{n-1}} \|\theta\|^q \sigma(d\theta)\right)^{1/q}.$$

Παρατηρήστε ότι $M_1(C) = M(C)$. Οι παράμετροι M_q μελετήθηκαν από τους Litvak, Milman και Schechtman στην εργασία [29].

Θεώρημα 3.2.4. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\|\cdot\|$ η επαγόμενη νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με b την μικρότερη σταθερά για την οποία ισχύει $\|x\| \leqslant b\|x\|_2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\max\left\{M_1, c_1\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\} \leqslant M_q \leqslant \max\left\{2M_1, c_2\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\}$$

για κάθε $q \in [1,n]$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $\|x\| : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά b. Από την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα προκύπτει ότι

$$\sigma\big(x \in S^{n-1} : \big|\, \|x\| - M_1 \,\big| > t\big) \leqslant 2\exp(-c_1 t^2 n/b^2)$$

για κάθε $t > 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \big|\, \|x\| - M_1 \,\big|^q d\sigma(x) &\leqslant 2q\int_0^\infty t^{q-1}\exp(-c_1t^2n/b^2)\,dt \\ &= \Big(\frac{b}{\sqrt{c_1 n}}\Big)^q 2q\int_0^\infty s^{q-1}\exp(-s^2)\,ds \\ &\leqslant \Big(C\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\Big)^q,\end{aligned}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 0$. Από την τριγωνική ανισότητα στον $L^q(S^{n-1})$ έχουμε

$$M_q - M_1 \leqslant \|\, \|x\| - M_1\|_q \leqslant C\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}.$$

Άρα,

$$M_q \leqslant 2\max\left\{M_1, C\frac{b\sqrt{q}}{\sqrt{n}}\right\}.$$

Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι το C περιέχεται σε μια λωρίδα πλάτους $1/b$: υπάρχει $z \in S^{n-1}$ με $\|z\| = b$ ώστε $C \subset \{y : |\langle y, z\rangle| \leqslant 1/b\}$. Έπεται ότι

$$\{x \in S^{n-1} : \|x\| \geqslant t\} \supset C_t := \{x \in S^{n-1} : |\langle x, z\rangle| \geqslant t/b\}$$

για κάθε $t > 0$. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\sigma(C_t) \geqslant \frac{c_2\sqrt{n}t}{b}\exp(-c_3 nt^2/b^2)$$

αν $t \leqslant b/3$, όπου $c_2, c_3 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} M_q &= \left(q\int_0^\infty t^{q-1}\sigma(C_t)dt\right)^{1/q} \geqslant s[\sigma(C_s)]^{1/q} \\ &\geqslant cs\frac{\sqrt{n}}{b}\exp(-cns^2/qb^2) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

για κάθε $s \leqslant b/3$, και επιλέγοντας $s = b\sqrt{q}/3\sqrt{n}$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Ορισμός 3.2.5. Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\|x\|_C$ η νόρμα που επάγεται στον $\mathbb{R}^n$ από το C. Ορίζουμε $k(C)$ τον μεγαλύτερο φυσικό $k \leqslant n$ για τον οποίον

$$\mu_{n,k}\left(F \in G_{n,k} : \frac{M(C)}{2}\|x\|_2 \leqslant \|x\|_C \leqslant 2M(C)\|x\|_2,\ x \in F\right) \geqslant \frac{n}{n+k}.$$

Επίσης, ορίζουμε $k_*(C) = k(C^\circ)$.

Η διάσταση $k(C)$ προσδιορίζεται πλήρως από τις παραμέτρους $M(C)$ και $b(C)$.

Θεώρημα 3.2.6 (Milman–Schechtman)**.** *Υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ ώστε*

$$c_1 n\frac{M(C)^2}{b(C)^2} \leqslant k(C) \leqslant c_2 n\frac{M(C)^2}{b(C)^2}$$

για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$.

Παρατήρηση 3.2.7. Η μεταβολή της συμπεριφοράς της ποσότητας M_q συμβαίνει όταν $q \simeq n(M_1/b)^2$. Η τιμή αυτή του q είναι περίπου ίση με την διάσταση Dvoretzky $k(C)$ του C. Παρατηρήστε επίσης ότι, από το Θεώρημα 3.2.4 έχουμε $M_n \simeq b$. Αφού $M_q \leqslant b$ για κάθε $q \geqslant 1$ και η συνάρτηση $q \mapsto M_q$ είναι προφανώς αύξουσα, συμπεραίνουμε ότι $M_q \simeq b$ αν $q \geqslant n$. Με άλλα λόγια, έχουμε μια δεύτερη μεταβολή συμπεριφοράς της παραμέτρου M_q στο σημείο $q = n$.

3.2γ΄ Μεικτά πλάτη

Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $p, q \geqslant 1$ ορίζουμε

$$w_p(Z_q(\mu)) = \left(\int_{S^{n-1}} h^p_{Z_q(\mu)}(\theta)\sigma(d\theta) \right)^{1/p}.$$

Παρατηρήστε ότι το $w_1(Z_q(\mu)) = w(Z_q(\mu))$ είναι το μέσο πλάτος του $Z_q(\mu)$.

Οι q-ροπές της Ευκλείδειας νόρμας ως προς το μ συνδέονται με τα L_q-κεντροειδή σώματα του μ μέσω του επόμενου Λήμματος.

Λήμμα 3.2.8. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $q \geqslant 1$ έχουμε*

$$w_q(Z_q(\mu)) = a_{n,q}\sqrt{\frac{q}{q+n}} I_q(\mu)$$

όπου $a_{n,q} \simeq 1$.

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$\left(\int_{S^{n-1}} |\langle x, \theta\rangle|^q \sigma(d\theta) \right)^{1/q} = a_{n,q}\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{q+n}}\|x\|_2,$$

όπου $a_{n,q} \simeq 1$. Αφού

$$w_q(Z_q(\mu)) = \left(\int_{S^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^q d\mu(x)\sigma(d\theta) \right)^{1/q},$$

έπεται το Λήμμα. □

Παρατήρηση 3.2.9. *Απλός υπολογισμός δείχνει ότι $a_{n,2} = \sqrt{(n+2)/(2n)}$ και*

$$I_2(\mu) = \sqrt{n}\, w_2(Z_2(\mu)).$$

Παρατηρώντας ότι $M(C^\circ) = w(C)$ και $b(C^\circ) = R(C)$, μπορούμε να μεταφράσουμε το Θεώρημα 3.2.4 ως εξής:

Θεώρημα 3.2.10. *Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2, c_3 > 0$ ώστε για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα C στον $\mathbb{R}^n$ να ισχύουν τα εξής:*

(i) *Αν $1 \leqslant q \leqslant k_*(C)$ τότε $w(C) \leqslant w_q(C) \leqslant c_1 w(C)$.*

(ii) *Αν $k_*(C) \leqslant q \leqslant n$ τότε $c_2\sqrt{q/n}\, R(C) \leqslant w_q(C) \leqslant c_3\sqrt{q/n}\, R(C)$.*

Επίσης, από τον ορισμό της παραμέτρου $k_*(C) := k(C^\circ)$ και από το γεγονός ότι $(C^\circ \cap F)^\circ = P_F(C)$, παίρνουμε:

Θεώρημα 3.2.11. *Υπάρχουν $c_1, c_2 > 0$ ώστε: αν $1 \leqslant k \leqslant k_*(C)$ τότε ο τυχαίος $F \in G_{n,k}$ ικανοποιεί την*

$$c_1 w(C) B_F \subseteq P_F(C) \subseteq c_2 w(C) B_F$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από 1/2.

3.2δ′ Η παράμετρος q_*

Ορισμός 3.2.12. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$q_*(\mu) = \max\{q \geqslant 2 : k_*(Z_q(\mu)) \geqslant q\}.$$

Θα χρειαστούμε ένα κάτω φράγμα για το $q_*(\mu)$. Το φράγμα που θα δώσουμε εξαρτάται από την ψ_α-συμπεριφορά των γραμμικών συναρτησοειδών ως προς το μ. Θυμηθείτε ότι αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ και αν $\alpha \in [1,2]$ τότε λέμε ότι το μ είναι *ψ_α-μέτρο με σταθερά b_α* αν

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant b_\alpha q^{1/\alpha} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x,\theta\rangle|^2 d\mu(x)\right)^{1/2} \tag{3.2.4}$$

για κάθε $q \geqslant 2$ και για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ισοδύναμα, αν

$$Z_q(\mu) \subseteq b_\alpha q^{1/\alpha} Z_2(\mu)$$

για κάθε $q \geqslant 2$. Παρατηρήστε ότι αν το μ είναι ψ_α-μέτρο με σταθερά b_α, τότε το $\mu \circ T$ είναι ψ_α-με την ίδια σταθερά, για κάθε $T \in SL(n)$. Επίσης, από την (3.2.4) βλέπουμε ότι

$$R(Z_q(\mu)) \leqslant b_\alpha q^{1/\alpha} R(Z_2(\mu)) \tag{3.2.5}$$

για κάθε $q \geqslant 2$.

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.18 είναι ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ ώστε κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ να είναι ψ_1-μέτρο με σταθερά c.

Λήμμα 3.2.13. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ τότε, για κάθε $n \geqslant q \geqslant q_*(\mu)$,*

$$c_1 R(Z_q(\mu)) \leqslant I_q(\mu) \leqslant c_2 R(Z_q(\mu)).$$

Ειδικότερα, αν το μ είναι ισοτροπικό ψ_α-μέτρο με σταθερά b_α τότε, για κάθε $n \geqslant q \geqslant q_*(\mu)$,

$$I_q(\mu) \leqslant c_2 b_\alpha q^{1/\alpha}. \tag{3.2.6}$$

Απόδειξη. Έστω $n \geqslant q \geqslant q_*(\mu)$. Από τον ορισμό του $q_*(\mu)$ έχουμε $q \geqslant k_*(Z_q(\mu))$, και από το Λήμμα 3.2.10 (ii) παίρνουμε

$$c_3\sqrt{\frac{q}{n}}R(Z_q(\mu)) \leqslant w_q(Z_q(\mu)) \leqslant c_4\sqrt{\frac{q}{n}}R(Z_q(\mu)).$$

Τώρα, από το Λήμμα 3.2.8 έχουμε

$$w_q(Z_q(\mu)) = a_{n,q}\sqrt{\frac{q}{q+n}}I_q(\mu).$$

Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό. Για τον δεύτερο, χρησιμοποιούμε την (3.2.5) και το γεγονός ότι $R(Z_2(\mu)) = 1$ αν το μ είναι ισοτροπικό. □

Πρόταση 3.2.14. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι ψ_α-μέτρο με σταθερά b_α, τότε*

$$q_*(\mu) \geqslant c\frac{(k_*(Z_2(\mu)))^{\alpha/2}}{b_\alpha^\alpha}.$$

Ειδικότερα, για κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{k_*(Z_2(\mu))}.$$

Απόδειξη. Θέτουμε $q_* := q_*(\mu)$. Από το Λήμμα 3.2.10 (i), το Λήμμα 3.2.8, την ανισότητα Hölder και την Παρατήρηση 3.2.9 παίρνουμε

$$\begin{aligned} w(Z_{q_*}(\mu)) &\geqslant c_1 w_{q_*}(Z_{q_*}(\mu)) = c_1 a_{n,q_*}\sqrt{\frac{q_*}{n+q_*}}I_{q_*}(\mu) \\ &\geqslant c_1 a_{n,q_*}\sqrt{\frac{q_*}{n+q_*}}I_2(\mu) \\ &= c_1 a_{n,q_*}\sqrt{\frac{q_*}{n+q_*}}\,\sqrt{n}w_2(Z_2(\mu)). \end{aligned} \tag{3.2.7}$$

Με άλλα λόγια,

$$w(Z_{q_*}(\mu)) \geqslant c_2\sqrt{q_*}w(Z_2(\mu)). \tag{3.2.8}$$

Αφού το μ είναι ψ_α-μέτρο με σταθερά b_α, έχουμε

$$R(Z_{q_*}(\mu)) \leqslant b_\alpha {q_*}^{1/\alpha}R(Z_2(\mu)). \tag{3.2.9}$$

Χρησιμοποιώντας τον ορισμό του q_*, το Θεώρημα 3.2.6 και τις ανισότητες (3.2.8) και (3.2.9), γράφουμε

$$
\begin{aligned}
q_* + 1 &\geqslant k_*(Z_{q_*}(\mu)) \geqslant c_3 n \left(\frac{w(Z_{q_*}(\mu))}{R(Z_{q_*}(\mu))}\right)^2 \\
&\geqslant c_3 n \frac{c_2^2 q_*}{b_\alpha^2 q_*^{2/\alpha}} \frac{w^2(Z_2(\mu))}{R^2(Z_2(\mu))} = c_5 \frac{q_*^{1-2/\alpha}}{b_\alpha^2} k_*(Z_2(\mu)).
\end{aligned} \tag{3.2.10}
$$

Έτσι, καταλήγουμε στην

$$q_*(\mu) \geqslant c \frac{[k_*(Z_2(\mu))]^{\alpha/2}}{b_\alpha^\alpha}.$$

Ο δεύτερος ισχυρισμός προκύπτει από το γεγονός ότι κάθε λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 είναι ψ_1-μέτρο με μια (απόλυτη) σταθερά $c > 0$. □

Παρατηρήστε ότι το μ είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν $k_*(Z_2(\mu)) = n$. Έτσι, παίρνουμε το εξής:

Πόρισμα 3.2.15. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι ψ_α-μέτρο με σταθερά b_α, τότε*

$$q_*(\mu) \geqslant \frac{cn^{\alpha/2}}{b_\alpha^\alpha}.$$

Ειδικότερα, για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{n}.$$

3.2ε΄ Το θεώρημα των ροπών

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το θεώρημα των ροπών.

Θεώρημα 3.2.16. *Υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν μ είναι ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$I_q(\mu) \leqslant c_1\sqrt{n}$$

για κάθε $q \leqslant c_2\sqrt{n}$.

Απόδειξη. Από το Πόρισμα 3.2.15 γνωρίζουμε ότι

$$q_*(\mu) = \max\{q \geqslant 2 : k_*(Z_q(\mu)) \geqslant q\} \geqslant c_2\sqrt{n}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$. Για την συνέχεια της απόδειξης θέτουμε $q = q_*(\mu)$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι ο q είναι ακέραιος. Από το Θεώρημα 3.2.10 έχουμε

$$I_q(\mu) \simeq \sqrt{n/q}\, w_q(Z_q)(\mu) \simeq \sqrt{n/q}\, w(Z_q(\mu)).$$

Συνεπώς, η απόδειξη του Θεωρήματος θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι

$$w(Z_q(\mu)) \leqslant c_2\sqrt{q}.$$

Από το Θεώρημα 3.2.11 υπάρχει $F \in G_{n,q}$ με την ιδιότητα

$$\frac{1}{2} w(Z_q(\mu)) \leqslant h_{Z_q(\mu)}(\theta) \leqslant 2w(Z_q(\mu))$$

για κάθε $\theta \in S_F$. Δηλαδή,

$$P_F(Z_q(\mu)) \simeq w(Z_q(\mu)) B_F. \tag{3.2.11}$$

Τότε,

$$w(Z_q(\mu)) \simeq \left(\frac{|P_F(Z_q(\mu))|}{|B_2^q|} \right)^{1/q} \simeq \sqrt{q} |P_F(Z_q(\mu))|^{1/q}.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι (για κάθε $F \in G_{n,q}$) ισχύει

$$|P_F(Z_q(\mu))|^{1/q} \leqslant C. \tag{3.2.12}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε το Θεώρημα 3.1.13: έχουμε

$$P_F(Z_q(f)) = Z_q(\pi_F(f)). \tag{3.2.13}$$

Η $\pi_F(f)$ είναι μια ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στον F. Αφού $\mathrm{bar}(\pi_F(f)) = 0$, η Πρόταση 3.1.9 μας εξασφαλίζει ότι

$$|Z_q(\pi_F(f))|^{1/q} [\pi_F(f)(0)]^{1/q} \simeq 1$$

και αφού η $\pi_F(f)$ είναι ισοτροπική, η Πρόταση 2.3.12 μας δίνει

$$[\pi_F(f)(0)]^{1/q} \geqslant c_1,$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε

$$c_1 |Z_q(\pi_F(f))|^{1/q} \leqslant |Z_q(\pi_F(f))|^{1/q} [\pi_F(f)(0)]^{1/q} \leqslant c_2,$$

απ' όπου παίρνουμε την (3.2.12). □

Μπορούμε μάλιστα να περιγράψουμε πλήρως την συμπεριφορά της $I_q(\mu)$ στο διάστημα $2 \leqslant q \leqslant n$.

Θεώρημα 3.2.17. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$,*

$$I_q(\mu) \simeq \max\{I_2(\mu), R(Z_q(\mu))\}.$$

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι $I_2(\mu) \leqslant I_q(\mu)$ για κάθε $q \geqslant 2$ και, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,

$$h_{Z_q(\mu)}(\theta) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\langle x, \theta\rangle|^q d\mu(x)\right)^{1/q} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q} = I_q(\mu).$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $R(Z_q(\mu)) \leqslant I_q(\mu)$, άρα

$$\max\{I_2(\mu), R(Z_q(\mu))\} \leqslant I_q(\mu).$$

Για την αντίστροφη ανισότητα παρατηρούμε πρώτα ότι, από το Λήμμα 3.2.13, αν $n \geqslant q \geqslant q_*(\mu)$ τότε $R(Z_q(\mu)) \simeq I_q(\mu)$. Από την άλλη πλευρά, αν $2 \leqslant q \leqslant q_*(\mu)$ τότε $I_q(\mu) \simeq I_2(\mu)$. Συνεπώς,

$$I_q(\mu) \leqslant c_2 \max\{I_2(\mu), R(Z_q(\mu))\}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$. □

Πόρισμα 3.2.18. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο είναι ψ_α-μέτρο με σταθερά b_α. Τότε,*

$$I_q(\mu) \leqslant c \max\{b_\alpha q^{1/\alpha}, \sqrt{n}\}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ειδικότερα, για κάθε ισοτροπικό μέτρο μ στον $\mathbb{R}^n$ έχουμε

$$I_q(\mu) \leqslant c_1 \max\{q, \sqrt{n}\}$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant n$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

3.3 Εκτιμήσεις για τις αρνητικές ροπές

Ορισμός 3.3.1. Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Επεκτείνουμε τον ορισμό του $I_q(\mu)$, επιτρέποντας αρνητικές τιμές του q, με τον προφανή τρόπο: για κάθε $q \in (-n, \infty)$, $q \neq 0$, ορίζουμε

$$I_q(\mu) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q d\mu(x)\right)^{1/q}.$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι ένα δεύτερο θεώρημα του Παούρη [35] το οποίο επεκτείνει το Θεώρημα 3.2.1.

Θεώρημα 3.3.2. *Έστω μ ένα λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k \leqslant q_*(\mu)$ έχουμε*

$$I_{-k}(\mu) \simeq I_k(\mu).$$

Ειδικότερα, το Θεώρημα αυτό δείχνει ότι για κάθε $k \leqslant q_*(\mu)$ έχουμε $I_k(\mu) \leqslant CI_2(\mu)$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτός ακριβώς ήταν ο ισχυρισμός του Θεωρήματος 3.2.1.

Από το Θεώρημα 3.3.2 προκύπτει μια εκτίμηση για το μέτρο μικρής μπάλας, αν χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα του Markov και το γεγονός ότι $q_*(\mu) \geqslant c\sqrt{n}$ για κάθε ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας μ.

Θεώρημα 3.3.3. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ έχουμε*

$$\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon\sqrt{n}\}) \leqslant \varepsilon^{c\sqrt{n}},$$

όπου $\varepsilon_0, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Έστω $1 \leqslant k \leqslant q_*(\mu)$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\mu(\{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon I_2(\mu)\}) &\leqslant \mu(\{x : \|x\|_2 < c_1\varepsilon I_{-k}(\mu)\})\\ &\leqslant (c_1\varepsilon)^k \leqslant \varepsilon^{k/2},\end{aligned}$$

για κάθε $0 < \varepsilon < c_1^{-2}$ και $k \leqslant q_*(\mu)$. Αφού $q_*(\mu) \geqslant c_2\sqrt{n}$, έπεται το συμπέρασμα με $\varepsilon_0 = c_1^{-2}$ και $c = c_2/2$. □

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.2 θα χρειαστεί και πάλι να εισάγουμε κάποιες παραμέτρους που σχετίζονται με το μ και να αποδείξουμε κάποιες βασικές ταυτότητες που σχετίζουν το $I_q(\mu)$ με το $I_{-q}(\mu)$.

3.3α′ Το B-θεώρημα

Θα χρειαστούμε το B-θεώρημα των Cordero-Erausquin, Fradelizi και Maurey [14].

Θεώρημα 3.3.4. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση*

$$t \mapsto \gamma_n(e^t K)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στο $\mathbb{R}$.

Απόδειξη. Για κάθε $(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, συμβολίζουμε με $\Delta(t_1, \ldots, t_n)$ τον διαγώνιο πίνακα με διαγώνιες συντεταγμένες τους $t_1, \ldots, t_n$. Αν T είναι ένας γραμμικός τελεστής στον

$\mathbb{R}^n$, γράφουμε $e^T K$ για την εικόνα του K μέσω του τελεστή e^T. Θα αποδείξουμε ότι η συνάρτηση

$$(t_1,\dots,t_n)\mapsto \gamma_n(e^{\Delta(t_1,\dots,t_n)}K)$$

είναι λογαριθμικά κοίλη στον $\mathbb{R}^n$. Το θεώρημα προκύπτει αν περιορίσουμε αυτό το αποτέλεσμα σε n-άδες της μορφής $(t,\dots,t)$.

Σταθεροποιούμε δύο n-άδες $(a_1,\dots,a_n)$ και $(b_1,\dots,b_n)$ στον $\mathbb{R}^n$ και συμβολίζουμε με A και B τους αντίστοιχους διαγώνιους πίνακες. Ορίζουμε $f=f_{K,B,A}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με

$$f(t)=\gamma_n(e^{B+tA}K)$$

και σκοπός μας είναι να αποδείξουμε ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη. Ισοδύναμα, θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{f''(t)}{f(t)}-\frac{[f'(t)]^2}{[f(t)]^2}\leqslant 0. \tag{3.3.1}$$

Αφού $f_{K,B,A}(s+t)=f_{K_1,0,A}(t)$ για κάθε $s,t\in\mathbb{R}$, όπου $K_1=e^{B+sA}K$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $B=0$ και $t=0$. Με άλλα λόγια, αρκεί να ελέγξουμε την (3.3.1) για την συνάρτηση

$$f(t)=\gamma_n(e^{tA}K)$$

στο σημείο $t=0$. Το θεώρημα αντιστοιχεί στην περίπτωση $A=I$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y=e^{tA}x$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι για κάθε διαγώνιο πίνακα X ισχύει $\det\left(e^X\right)=e^{\mathrm{tr}(X)}$, παίρνουμε

$$f(t)=\gamma_n(e^{tA}K)=\frac{e^{t\cdot\mathrm{tr}(A)}}{(2\pi)^{n/2}}\int_K e^{-\|e^{tA}x\|_2^2/2}\,dx.$$

Παρατηρήστε ότι η συνάρτηση $t\mapsto e^{t\cdot\mathrm{tr}(A)}$ είναι λογαριθμικά αφινική. Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε την (3.3.1) για την συνάρτηση

$$g(t)=\int_K e^{-\|e^{tA}x\|_2^2/2}dx$$

στο σημείο $t=0$. Η παράγωγος της g δίνεται από την

$$g'(t)=-\int_K\langle e^{tA}x,Ae^{tA}x\rangle e^{-\|e^{tA}x\|_2^2/2}dx,$$

και η δεύτερη παράγωγος της g από την

$$g''(t)=\int_K\left(\langle e^{tA}x,Ae^{tA}x\rangle^2-2\langle e^{tA}x,A^2e^{tA}x\rangle\right)e^{-\|e^{tA}x\|_2^2/2}dx.$$

Θέλουμε να δείξουμε ότι

$$\frac{g''(0)}{g(0)} - \frac{[g'(0)]^2}{[g(0)]^2} \leqslant 0. \tag{3.3.2}$$

Η ζητούμενη ανισότητα γράφεται ισοδύναμα ως εξής:

$$\frac{\int_K \langle x, Ax\rangle^2 e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}{\int_K e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx} - \left(\frac{\int_K \langle x, Ax\rangle e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}{\int_K e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}\right)^2 \leqslant 2\frac{\int_K \langle x, A^2x\rangle^2 e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}{\int_K e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}. \tag{3.3.3}$$

Εισάγοντας το μέτρο γ_K με πυκνότητα

$$d\gamma_K(x) = \frac{\mathbf{1}_K(x)e^{-\|x\|_2^2/2}\,dx}{\int_K e^{-\|y\|_2^2/2}\,dy},$$

το οποίο είναι ο περιορισμός του μέτρου Gauss στο K, ξαναγράφουμε την προηγούμενη ανισότητα ως εξής:

$$\int [f_A(x)]^2\,d\gamma_K(x) - \left(\int f_A(x)\,d\gamma_K(x)\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\int \|\nabla f_A(x)\|_2^2\,d\gamma_K(x),$$

όπου $f_A(x) = \langle x, Ax\rangle$. Συνεπώς, αυτό που θέλουμε είναι να επαληθεύσουμε μια ανισότητα Poincaré για το μέτρο γ_K και την συνάρτηση f_A, με σταθερά $\frac{1}{2}$.

Παρατήρηση 3.3.5. Το μέτρο γ_K είναι λογαριθμικά κοίλο ως προς το γ_n: ανήκει στην κλάση των μέτρων πιθανότητας μ της μορφής $d\mu(x) = e^{-W(x)}\,dx$ με την W κυρτή στον $\mathbb{R}^n$ και $\mathrm{Hess}_x W \geqslant I$ στο κυρτό σύνολο K όπου $\{W < \infty\}$. Είναι μάλιστα τεχνικά ευκολότερο να υποθέσουμε ότι η W ορίζεται σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^n$ και όχι μόνο στο κυρτό σύνολο K. Για τον σκοπό αυτό, θεωρούμε το γ_K ως το κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας πυκνοτήτων της μορφής

$$e^{-\|x\|_2^2-\psi(x)},$$

όπου η ψ είναι σταθερή στο C και παίρνει «μεγάλες τιμές» έξω από το K. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η ψ είναι άρτια όταν το K είναι συμμετρικό, και ότι η $\mathrm{Hess}\psi$ είναι λεία και φραγμένη στον $\mathbb{R}^n$. Γράφοντας $W(x) = \|x\|_2^2 + \psi(x)$ δουλεύουμε με ένα μέτρο πιθανότητας μ που δίνεται από την

$$d\mu(x) = e^{-W(x)}\,dx\ , \quad W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{Hess}W \geqslant I. \tag{3.3.4}$$

Στην περίπτωσή μας, η W είναι επιπλέον άρτια και το ζητούμενο είναι τώρα να δείξουμε ότι για την

$$q(x) = \langle x, Ax\rangle - \int \langle x, Ax\rangle \, d\mu(x)$$

ισχύει

$$\int q^2 \, d\mu \leqslant \frac{1}{2} \int \|\nabla q\|_2^2 \, d\mu.$$

Είναι γνωστό ότι τα μέτρα πιθανότητας μ της μορφής (3.3.4) ικανοποιούν την ανισότητα Poincaré με σταθερά 1:

Λήμμα 3.3.6. Για κάθε μέτρο πιθανότητας μ της μορφής (3.3.4) και για κάθε λεία συνάρτηση $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ με $g \in L_2(\mu)$ και $\int g \, d\mu = 0$ έχουμε

$$\int g^2 \, d\mu \leqslant \int \|\nabla g\|_2^2 \, d\mu. \tag{3.3.5}$$

Παρατηρήστε ότι εφαρμόζοντας απευθείας την (3.3.5) θα παίρναμε ένα ασθενέστερο αποτέλεσμα από το ζητούμενο, χάνοντας μια σταθερά 2. Για να ξεπεράσουμε αυτήν την δυσκολία χρησιμοποιούμε ουσιαστικά την πρόσθετη υπόθεση ότι $\int \nabla q \, d\mu = 0$. Θα την εκμεταλλευτούμε μέσω του επόμενου λήμματος, το οποίο παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Λήμμα 3.3.7. *Έστω μ ένα μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$, της μορφής $d\mu(x) = e^{-W(x)} \, dx$, όπου $W : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση με $\mathrm{Hess}W \geqslant I$. Τότε, για κάθε λεία συνάρτηση $f \in L_2(\mu)$ με $\int f \, d\mu = 0$ και $\int \nabla f \, d\mu = 0$ έχουμε*

$$\int f^2 \, d\mu \leqslant \frac{1}{2} \int \|\nabla f\|_2^2 \, d\mu.$$

Περιγραφή της απόδειξης. Εισάγουμε τον διαφορικό τελεστή $Lu = \Delta u - \langle \nabla W, \nabla u\rangle$, $u \in C^2$. Μπορούμε τότε να ελέγξουμε ότι ο L έχει τις εξής ιδιότητες:

1. Αν οι $u, \nabla v \in L_2(\mu)$ έχουν συμπαγή φορέα και $u \in C^2$, τότε

$$\int vLu \, d\mu = -\int \langle \nabla u, \nabla v\rangle \, d\mu.$$

Για την απόδειξη, χρησιμοποιούμε το θεώρημα Green:

$$\begin{aligned} \int v\Delta u e^{-W} dx &= -\int \left\langle \nabla u, \nabla \left(ve^{-W}\right)\right\rangle dx \\ &= -\int \langle \nabla u, \nabla v\rangle \, e^{-W} \, dx - \int \langle \nabla u, \nabla W\rangle \, ve^{-W} dx. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό έχουμε

$$\int vLu\,d\mu = \int v\Delta u\,d\mu - \int v\,\langle \nabla W, \nabla u\rangle\; d\mu.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το συμπέρασμα.

2. $\nabla(Lu) = L\nabla u - \mathrm{Hess}W(\nabla u)$.

3. Συνδυάζοντας τους δύο προηγούμενους τύπους παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int (Lu)^2\,d\mu &= -\int \langle \nabla u, \nabla(Lu)\rangle\, d\mu \\ &= -\int \langle \nabla u, L\,(\nabla u)\rangle\; d\mu + \int \langle (\mathrm{Hess}\,W)(\nabla u), \nabla u\rangle\, d\mu \\ &= \int \left(\|\mathrm{Hess}(u)\|_{HS}^2 + \langle (\mathrm{Hess}\,W)(\nabla u), \nabla u\rangle\right) d\mu.\end{aligned}$$

Έστω $f \in L_2(\mu)$ με $\int f\,d\mu = 0$ και $\int \nabla f\,d\mu = 0$. Υποθέτουμε επίσης ότι $\nabla f \in L_2(\mu)$. Ξεκινάμε με την παρατήρηση ότι, αφού $\int f\,d\mu = 0$, έχουμε

$$\min\Big\{ \int (g-f)^2\,d\mu \;:\; g \in L_2(\mu),\; \int g\,d\mu = 0\Big\} = 0.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής κλασικό αποτέλεσμα.

Λήμμα 3.3.8. Ο χώρος $\{Lu : u \in C^2$ λεία με συμπαγή φορέα$\}$ είναι $L_2(\mu)$-πυκνός στον χώρο $\{g \in L_2(\mu) : \int g\,d\mu = 0\}$ (για μια απόδειξη βλέπε [14]).

Συνεπώς,

$$\inf\Big\{ \int (Lu-f)^2\,d\mu : u \in C^2 \text{ λεία, με συμπαγή φορέα}\Big\} = 0.$$

Για να αποδείξουμε το ζητούμενο αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τέτοια συνάρτηση u έχουμε

$$\int \Big((Lu-f)^2 - f^2 + \frac{1}{2}\|\nabla f\|_2^2\Big)\, d\mu \geqslant 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\int \Big((Lu)^2 - 2fLu + \frac{1}{2}\|\nabla f\|_2^2\Big)\, d\mu \geqslant 0.$$

Από την ιδιότητα 3, από το γεγονός ότι $\langle (\mathrm{Hess}\,W)(\nabla u), \nabla u\rangle \geqslant \|\nabla u\|_2^2$ και από την ιδιότητα 1, βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int \Big(\|\mathrm{Hess}(u)\|_{\mathrm{HS}}^2 + \|\nabla u\|_2^2 + 2\langle \nabla u, \nabla f\rangle + \frac{1}{2}\|\nabla f\|_2^2\Big)\, d\mu \geqslant 0.$$

Μπορούμε να ξαναγράψουμε την τελευταία ανισότητα στην μορφή

$$\int \Big(\|\mathrm{Hess}(u)\|_{\mathrm{HS}}^2 - \|\nabla u\|_2^2 + \frac{1}{2}\|2\nabla u + \nabla f\|_2^2\Big)\, d\mu \geqslant 0.$$

Θέτοντας $\alpha := \int \nabla u\, d\mu$, εισάγοντας μια συνάρτηση u_0 με $\nabla u_0 = \nabla u - \alpha$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση ότι $\int \nabla f\, d\mu = 0$, βλέπουμε ότι η τελευταία ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$\|\alpha\|_2^2 + \int \Big(\|\mathrm{Hess}(u_0)\|_{\mathrm{HS}}^2 - \|\nabla u_0\|_2^2 + \frac{1}{2}\|2\nabla u_0 + \nabla f\|_2^2\Big)\, d\mu \geqslant 0.$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int \big(\|\mathrm{Hess}(u_0)\|_{\mathrm{HS}}^2 - \|\nabla u_0\|_2^2\big)\, d\mu \geqslant 0.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.6 για τις συναρτήσεις $\frac{\partial u_0(x)}{\partial x_j}$ για $j = 1, \ldots, n$ (αυτή είναι ακριβώς η ανισότητα Poincaré για ένα μέτρο μ αυτής της ειδικής μορφής) και αθροίζοντας πάνω από όλα τα $j = 1, \ldots, n$ παίρνουμε την τελευταία ανισότητα, άρα και το συμπέρασμα. □

3.3β′ Η παράμετρος d_*

Ορισμός 3.3.9. Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε

$$d_*(C) = \min\left\{-\log\sigma\left(\left\{x \in S^{n-1} : h_C(x) \leqslant \frac{w(C)}{2}\right\}\right), n\right\}.$$

Η παράμετρος d_* ορίστηκε στο [28], όπου επίσης αποδείχτηκε ότι η $d_*(C)$ είναι πάντα μεγαλύτερη από $k_*(C)$:

Πρόταση 3.3.10. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$d_*(C) \geqslant ck_*(C),$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα έπεται ότι

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : |h_C(x) - w(C)| > tw(C)\}) \leqslant \exp(-ct^2 k_*(C))$$

για κάθε $t > 0$. Επιλέγοντας $t = 1/2$ έχουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 3.3.11. *Αν K είναι ένα αστρόμορφο σώμα στον $\mathbb{R}^n$ τότε*

$$\tfrac{1}{2}\,\sigma\big(S^{n-1} \cap \tfrac{1}{2}K\big) \leqslant \gamma_n(\sqrt{n}K) \leqslant \sigma(S^{n-1} \cap 2K) + e^{-cn}.$$

Απόδειξη. Γράφουμε σ_r για το αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο πιθανότητας στην rS^{n-1}. Για την αριστερή ανισότητα παρατηρούμε ότι, αφού το K είναι αστρόμορφο,

$$\begin{aligned}\gamma_n(\sqrt{n}K) &\geqslant \gamma_n(2\sqrt{n}B_2^n \cap \sqrt{n}K) \\ &\geqslant \gamma_n(2\sqrt{n}B_2^n)\sigma_{2\sqrt{n}}(2\sqrt{n}S^{n-1} \cap \sqrt{n}K) \\ &= \gamma_n(2\sqrt{n}B_2^n)\sigma\left(S^{n-1} \cap \tfrac{1}{2}K\right).\end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Αφού

$$\gamma_n(2\sqrt{n}B_2^n) \geqslant 1 - \left(\sqrt{2}/e\right)^n,$$

παίρνουμε

$$\sigma\left(S^{n-1} \cap \tfrac{1}{2}K\right) \leqslant 2\gamma_n(\sqrt{n}K).$$

Παρατηρούμε τώρα ότι

$$\sqrt{n}K \subseteq \left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}B_2^n\right) \cup C\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}S^{n-1} \cap \sqrt{n}K\right)$$

όπου, για κάθε $A \subseteq \frac{1}{2}\sqrt{n}S^{n-1}$, συμβολίζουμε με $C(A)$ τον θετικό κώνο που παράγεται από το A. Έπεται ότι

$$\gamma_n(\sqrt{n}K) \leqslant \gamma_n\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}B_2^n\right) + \sigma_{\frac{\sqrt{n}}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}S^{n-1} \cap \sqrt{n}K\right).$$

Τώρα,

$$\sigma_{\frac{\sqrt{n}}{2}}\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}S^{n-1} \cap \sqrt{n}K\right) = \sigma(S^{n-1} \cap 2K),$$

και απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\gamma_n\left(\rho\sqrt{n}B_2^n\right) \leqslant \left(\frac{\rho\sqrt{n}}{\sqrt{2\pi}}\right)^n |B_2^n|,$$

για κάθε $0 < \rho \leqslant 1$. Έπεται ότι

$$\gamma_n\left(\tfrac{1}{2}\sqrt{n}B_2^n\right) \leqslant e^{-cn},$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. □

Θεώρημα 3.3.12. *Για κάθε $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ έχουμε*

$$\sigma(\{x \in S^{n-1} : h_C(x) < \varepsilon w(C)\}) < \varepsilon^{c_1 d_*(C)} < \varepsilon^{c_1 k_*(C)},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση στήριξης h_C του συμμετρικού κυρτού σώματος C και γράφουμε $m = \mathrm{med}(h_C)$ για τον μέσο Lévy της h_C ως προς το μέτρο $\sigma(\cdot)$ στην μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}. Από την ανισότητα Markov βλέπουμε ότι

$$\frac{1}{2}\mathrm{med}(h_C) \leqslant \int_{\{\theta: h_C(\theta)\geqslant m\}} h_C(\theta)\, d\sigma(\theta) \leqslant w(C).$$

Θέτουμε $L = m\sqrt{n}C^\circ$. Από το Λήμμα 3.3.11 έχουμε

$$\gamma_n(2L) \geqslant \frac{1}{2}\sigma(S^{n-1}\cap mC^\circ) \geqslant \frac{1}{4}, \tag{3.3.7}$$

λόγω του ορισμού του μέσου Lévy. Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας ξανά το Λήμμα 3.3.11, έχουμε

$$\begin{aligned} \gamma_n(\tfrac{1}{8}L) &\leqslant \sigma\left(S^{n-1}\cap \frac{m}{4}C^\circ\right) + e^{-cn} \\ &= \sigma\left(\theta\in S^{n-1} : h_C(\theta) \leqslant \frac{m}{4}\right) + e^{-cn} \\ &\leqslant \sigma\left(\theta\in S^{n-1} : h_C(\theta) \leqslant \frac{w(C)}{2}\right) + e^{-cn} \\ &\leqslant 2e^{-c_1 d_*(C)}, \end{aligned} \tag{3.3.8}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι κατάλληλη απόλυτη σταθερά. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < e^{-3}$. Εφαρμόζουμε το B-θεώρημα για το L, με $a = \varepsilon$, $b = 2$ και $\lambda = 3(\log\frac{1}{\varepsilon})^{-1}$. Έχουμε

$$\gamma_n(\varepsilon L)^{\frac{3}{\log(1/\varepsilon)}}\gamma_n(2L)^{1-\frac{3}{\log(1/\varepsilon)}} \leqslant \gamma_n(\varepsilon^{\frac{3}{\log(1/\varepsilon)}}2^{1-\frac{1}{\log(1/\varepsilon)}}L) \leqslant \gamma_n(\tfrac{1}{8}L). \tag{3.3.9}$$

Συνδυάζοντας τις (3.3.7), (3.3.8) και (3.3.9) βλέπουμε ότι

$$\gamma_n(\varepsilon L) \leqslant 8e^{c_2 d_*(C)\log\varepsilon} \leqslant 8\varepsilon^{c_2 d_*(C)} \leqslant (c_3\varepsilon)^{c_2 d_*(C)}.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.11 μεταφέρουμε αυτήν την εκτίμηση στο σφαιρικό μέτρο:

$$\sigma\left(\theta\in S^{n-1} : h_C(\theta) \leqslant \frac{w(C)}{2}\right) \leqslant (c_4\varepsilon)^{c_5 d_*(C)}.$$

Τροποποιώντας τις σταθερές παίρνουμε το ζητούμενο. □

Το Θεώρημα 3.3.12 έχει σαν συνέπεια τις ακόλουθες αντίστροφες ανισότητες Hölder.

Πόρισμα 3.3.13. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0 < q < c_1 d_*(C)$,*

$$c_2 w(C) \leqslant \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_C^q(x)} d\sigma(x)\right)^{-1/q} \leqslant c_3 w(C).$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $0 < q < c_1 d_*(C)$ *ισχύει*

$$w_{-q}(C) \simeq w(C).$$

Απόδειξη. Η δεξιά ανισότητα προκύπτει εύκολα από την ανισότητα Hölder. Για την αριστερή ανισότητα χρησιμοποιούμε ολοκλήρωση κατά μέρη σε συνδυασμό με τις εκτιμήσεις του προηγούμενου θεωρήματος. □

Ειδικότερα, αφού $d_*(C) \geqslant c k_*(C)$, έχουμε πάντα το εξής.

Θεώρημα 3.3.14. *Έστω* C *ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον* $\mathbb{R}^n$. *Τότε,* $w_q(C) \simeq w_{-q}(C)$ *για κάθε* $1 \leqslant q \leqslant k_*(C)$.

Απόδειξη. Από το θεώρημα των Litvak, Milman και Schechtman έχουμε $w_q(C) \simeq w(C)$ για κάθε $q \leqslant k_*(C)$. Από το Θεώρημα 3.3.13 παίρνουμε $w_{-q}(C) \simeq w(C)$ για κάθε $q < k_*(C)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε το συμπέρασμα. □

3.3γ′ Ροπές της Ευκλείδειας νόρμας

Ορισμός 3.3.15. Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Επεκτείνουμε τον ορισμό της $I_q(f)$, επιτρέποντας αρνητικές τιμές του q, με τον προφανή τρόπο: για κάθε $q \in (-n, \infty)$, $q \neq 0$, ορίζουμε

$$I_q(f) := \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^q f(x)\, dx \right)^{1/q}.$$

Πρόταση 3.3.16. *Έστω* f *μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το* 0 *στον* $\mathbb{R}^n$ *και έστω* $1 \leqslant k < n$ *ένας θετικός ακέραιος. Τότε,*

$$I_{-k}(f) = c_{n,k} \left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0) d\nu_{n,k}(F) \right)^{-1/k}, \tag{3.3.10}$$

όπου

$$c_{n,k} = \left(\frac{(n-k)\omega_{n-k}}{n\omega_n} \right)^{1/k} \simeq \sqrt{n}.$$

Απόδειξη. Για κάθε $1 \leqslant s \leqslant n$ θέτουμε $\delta_s = s\omega_s$. Έστω $1 \leqslant k < n$. Τότε, έχουμε

(3.3.11)
$$\begin{aligned}\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0)\, d\nu_{n,k}(F) &= \int_{G_{n,n-k}} \pi_F(f)(0)\, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= \int_{G_{n,n-k}} \int_F f(y)\, dy\, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= \int_{G_{n,n-k}} \delta_{n-k} \int_{S_F} \int_0^\infty r^{n-k-1} f(r\theta)\, dr\, d\sigma_F(\theta)\, d\nu_{n,n-k}(F) \\ &= \frac{\delta_{n-k}}{\delta_n}\delta_n \int_{S^{n-1}} \int_0^\infty r^{n-k-1} f(r\theta)\, dr\, d\sigma(\theta) \\ &= \frac{\delta_{n-k}}{\delta_n} \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_2^{-k} f(x)\, dx = c_{n,k} I_{-k}^{-k}(f).\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πρόταση 3.3.17. *Έστω C ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $1 \leqslant k < n$ ένας θετικός ακέραιος. Τότε,*

$$w_{-k}(C) \simeq \sqrt{k} \left(\int_{G_{n,k}} |P_F C|^{-1} d\nu_{n,k}(F) \right)^{-\frac{1}{k}}. \tag{3.3.12}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Blaschke-Santaló και την αντίστροφη ανισότητα Santaló, γράφουμε

$$\begin{aligned} w_{-k}^{-1}(C) &= \left(\int_{S^{n-1}} \frac{1}{h_C^k(\theta)} d\sigma(\theta) \right)^{1/k} \\ &= \left(\frac{1}{\omega_k} \int_{G_{n,k}} \omega_k \int_{S_F} \frac{1}{\|\theta\|_{(P_F C)^\circ}^k} d\sigma(\theta) d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k} \\ &= \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|(P_F(C))^\circ|}{|B_2^k|} d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k} \\ &\simeq \left(\int_{G_{n,k}} \frac{|B_2^k|}{|P_F(C)|} d\nu_{n,k}(F) \right)^{1/k}, \end{aligned} \tag{3.3.13}$$

απ' όπου έπεται το συμπέρασμα. □

Έστω τώρα f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε έναν ακέραιο $1 \leqslant k < n$ και κάποιον $F \in G_{n,k}$. Από το Θεώρημα 3.1.14, έχουμε

$$\frac{1}{|P_F(Z_k(f))|^{1/k}} \simeq \pi_F(f)(0)^{1/k}.$$

Συνδυάζοντας τις προηγούμενες δύο Προτάσεις παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 3.3.18. *Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k < n$ έχουμε*

$$w_{-k}(Z_k(f)) \simeq \sqrt{k}\left(\int_{G_{n,k}} \pi_F(f)(0)d\nu_{n,k}(F)\right)^{-\frac{1}{k}}$$

και

$$I_{-k}(f) \simeq \sqrt{\frac{n}{k}}w_{-k}(Z_k(f)). \tag{3.3.14}$$

Θυμηθείτε ότι, για κάθε $1 \leqslant k < n$,

$$w_k(Z_k(f)) \simeq \sqrt{\frac{k}{n}}I_k(f). \tag{3.3.15}$$

Τότε, από το Θεώρημα 3.3.14 και από τις σχέσεις (3.3.14) και (3.3.15), βλέπουμε αμέσως ότι η $I_q(f)$ είναι «σταθερή» για $1 \leqslant |q| \leqslant q_*(f)$.

Θεώρημα 3.3.19. *Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε ακέραιο $1 \leqslant k \leqslant q_*(f)$ έχουμε*

$$I_{-k}(f) \simeq I_k(f).$$

Ειδικότερα, το θεώρημα δείχνει ότι για κάθε $k \leqslant q_*(f)$ έχουμε $I_k(f) \leqslant CI_2(f)$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Markov και το γεγονός ότι $q_*(f) \geqslant c\sqrt{n}$ για κάθε ισοτροπική λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση f έχουμε το εξής.

Πόρισμα 3.3.20. *Έστω μ ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο μέτρο στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ έχουμε*

$$\mu(x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon\sqrt{n}) < \varepsilon^{c\sqrt{n}},$$

όπου $\varepsilon_0, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Έστω $1 \leqslant k \leqslant q_*(\mu)$. Μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mu(x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_2 < \varepsilon I_2(\mu)) &\leqslant \mu(x : \|x\|_2 < c_1\varepsilon I_{-k}(\mu))\\ &\leqslant (c_1\varepsilon)^k \leqslant \varepsilon^{k/2},\end{aligned}$$

για κάθε $0 < \varepsilon < c_1^{-2}$ και για κάθε $k \leqslant q_*(\mu)$. Αφού $q_*(\mu) \geqslant c_2\sqrt{n}$ το συμπέρασμα προκύπτει με $\varepsilon_0 = c_1^{-2}$ και $c = c_2/2$. $\square$

Κεφάλαιο 4

Το κεντρικό οριακό πρόβλημα

4.1 Η υπόθεση της ε-συγκέντρωσης

Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε την εργασία των Anttila, Ball και Περυσινάκη. Θεωρούμε ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο βλέπουμε σαν χώρο πιθανότητας με το μέτρο Lebesgue μ_K στο K. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ θεωρούμε την τυχαία μεταβλητή $X_\theta(x) = \langle x, \theta \rangle$. Αφού το K είναι ισοτροπικό, έχουμε

$$\mathbb{E}X_\theta = 0 \;\; \text{και} \;\; \mathrm{Var}(X_\theta) = L_K^2$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Θα δείξουμε ότι οι περισσότερες από αυτές τις τυχαίες μεταβλητές απέχουν πολύ λίγο από μια κανονική τυχαία μεταβλητή γ με μέση τιμή 0 και διασπορά L_K^2, τουλάχιστον στην συμμετρική περίπτωση, αρκεί να ικανοποιείται η ακόλουθη γενική υπόθεση, η οποία ισχυρίζεται ότι η Ευκλείδεια νόρμα συγκεντρώνεται κοντά στην τιμή $\sqrt{n}L_K$ σαν συνάρτηση στο K.

Ορισμός 4.1.1 (υπόθεση συγκέντρωσης)**.** Έστω $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Λέμε ότι το K ικανοποιεί την *υπόθεση της ε-συγκέντρωσης* αν

$$\mu_K\left(\left| \frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} - L_K \right| \geqslant \varepsilon L_K \right) \leqslant \varepsilon.$$

Προκειμένου να διατυπώσουμε το θεώρημα χρειάζεται να εισάγουμε κάποιον συμβολισμό. Συμβολίζουμε με $g(s)$ την πυκνότητα της κανονικής τυχαίας μεταβλητής γ που έχει μέση τιμή 0 και διασπορά L_K^2, και για απλότητα γράφουμε $g_\theta(s)$ για την πυκνότητα της X_θ. Παρατηρήστε ότι

$$g_\theta(s) = f_{K,\theta}(s) = |K \cap \{\langle x, \theta \rangle = s\}|$$

και
$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} L_K} \exp\left(-\frac{s^2}{2L_K^2}\right).$$

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, το οποίο ικανοποιεί την υπόθεση της ε-συγκέντρωσης για κάποιον $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$. Τότε, για κάθε $\delta > 0$,*
$$\sigma\left(\left\{\theta : \left|\int_{-t}^{t} g_\theta(s)\,ds - \int_{-t}^{t} g(s)\,ds\right| \leqslant \delta + 4\varepsilon + \frac{c_1}{\sqrt{n}} \ \text{ για κάθε } \ t \in \mathbb{R}\right\}\right)$$
$$\geqslant 1 - n\,e^{-c_2\delta^2 n},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η απόδειξη θα γίνει σε τρία βήματα. Πρώτα θεωρούμε την συνάρτηση
$$A_K(t) = \int_{S^{n-1}} \int_{-t}^{t} g_\theta(s)\,ds\,d\sigma(\theta)$$
και δείχνουμε ότι αν ικανοποιείται η υπόθεση της ε-συγκέντρωσης τότε η $A_K(t)$ είναι κοντά στην $\int_{-t}^{t} g(s)\,ds$ για κάθε $t > 0$:

Θεώρημα 4.1.3 (πρώτο βήμα)**.** *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν το K ικανοποιεί την υπόθεση της ε-συγκέντρωσης τότε*
$$\left|A_K(t) - \int_{-t}^{t} g(s)ds\right| \leqslant 4\varepsilon + \frac{c_1}{\sqrt{n}}$$
για κάθε $t > 0$.

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1 και κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων. Ορίζουμε
$$f_{K,\theta}(t) = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|$$
για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $t \geqslant 0$. Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.3 ορίζουμε μια συνάρτηση f_K, που μετράει την μέση πτώση του όγκου των τομών του K με υπερεπίπεδα, θέτοντας
$$f_K(t) = \int_{S^{n-1}} f_{K,\theta}(t)\sigma(d\theta).$$
Η επόμενη Πρόταση δίνει έναν ολοκληρωτικό τύπο για την f_K.

Πρόταση 4.1.4. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο 1 και κέντρο βάρους την αρχή των αξόνων. Για κάθε $t \geqslant 0$,*
$$f_K(t) = c_n \int_{U_K(t)} \frac{1}{\|x\|_2}\left(1 - \frac{t^2}{\|x\|_2^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} dx,$$

όπου $U_K(t) = \{x \in K : \|x\|_2 \geqslant t\}$ *και*

$$c_n = \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)}.$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $\lambda_{\theta,t}$ το μέτρο Lebesgue στο υπερεπίπεδο $N_\theta(t) = \{x : \langle x, \theta\rangle = t\}$. Θεωρούμε το μέτρο

$$\lambda_t = \int_{S^{n-1}} \lambda_{\theta,t} d\sigma(\theta).$$

Το λ_t είναι ένα θετικό μέτρο στον $\mathbb{R}^n$ και

$$f_K(t) = \int_{S^{n-1}} \int_{N_\theta(t)} \chi_K(x) d\lambda_{\theta,t}(x) d\sigma(\theta) = \lambda_t(K).$$

Η πυκνότητα του λ_t είναι αναλλοίωτη ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς, άρα

$$\frac{d\lambda_t}{dx} = p_t(\|x\|_2)$$

όπου $p_t : [t, +\infty) \to [0, +\infty)$. Για να προσδιορίσουμε την p_t, για κάθε $r > t$ υπολογίζουμε το $\lambda_t(B(0,r))$ με δύο διαφορετικούς τρόπους. Παρατηρούμε πρώτα ότι

$$\lambda_t(B(0,r)) = \int_{B(0,r)} p_t(\|x\|_2) dx = n\omega_n \int_t^r p_t(s) s^{n-1} ds.$$

Από την άλλη πλευρά, αφού η τομή της $B(0,r)$ με το υπερεπίπεδο $N_\theta(t)$ είναι μια $(n-1)$-διάστατη μπάλα ακτίνας $\sqrt{r^2 - t^2}$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, παίρνουμε

$$\lambda_t(B(0,r)) = \int_{S^{n-1}} \lambda_{\theta,t}(B(0,r)) d\sigma(\theta) = \omega_{n-1}(r^2 - t^2)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Παραγωγίζοντας ως προς $r \geqslant t$, βλέπουμε ότι

$$\frac{(n-1)\omega_{n-1}}{2}(r^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}} 2r = n\omega_n p_t(r) r^{n-1}.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$p_t(r) = \frac{(n-1)\omega_{n-1}}{n\omega_n} \frac{(r^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}}}{r^{n-2}}.$$

Συνεπώς,

$$f_K(t) = \int_{U_K(t)} p_t(\|x\|_2) dx = \frac{(n-1)\omega_{n-1}}{n\omega_n} \int_{U_K(t)} \frac{(\|x\|_2^2 - t^2)^{\frac{n-3}{2}}}{\|x\|_2^{n-2}} dx,$$

και έπεται το συμπέρασμα. □

Σημείωση. Από τον τύπο για την f_K φαίνεται αμέσως ότι είναι φθίνουσα συνάρτηση του $t \geqslant 0$.

Λήμμα 4.1.5. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t > 0$,*

$$\left| A_K(t) - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_K \int_0^{\frac{t\sqrt{n}}{\|x\|_2}} e^{-\frac{u^2}{2}}\, du\, dx \right| \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.1.4 έχουμε

$$f_K(s) = c_n \int_{\{x\in K:\|x\|_2 \geqslant s\}} \frac{1}{\|x\|_2} \left(1 - \frac{s^2}{\|x\|_2^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} dx,$$

όπου $c_n = \Gamma\left(\frac{n}{2}\right)/\sqrt{\pi}\Gamma\left(\frac{n-1}{2}\right)$. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{2c_n} = \int_0^1 (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du. \tag{4.1.1}$$

Από το θεώρημα Fubini παίρνουμε

$$\begin{aligned} A_K(t) &= 2\int_0^t f_K(s)ds \\ &= 2c_n \int_0^t \int_{\{x\in K:\|x\|_2 \geqslant s\}} \frac{1}{\|x\|_2} \left(1 - \frac{s^2}{\|x\|_2^2}\right)^{\frac{n-3}{2}} dx\, ds \\ &= 2c_n \int_K \int_0^{\min\left\{1, \frac{t}{\|x\|_2}\right\}} (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du\, dx. \end{aligned}$$

Θα δείξουμε ότι

$$\left| 2c_n \int_0^{\min\left\{1, \frac{t}{\|x\|_2}\right\}} (1-u^2)^{\frac{n-3}{2}} du - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{t\sqrt{n}}{\|x\|_2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}} \tag{4.1.2}$$

για κάθε $t > 0$ και $x \in K$, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Αυτό αποδεικνύει το λήμμα, διότι ο όγκος του K είναι ίσος με 1.

Περίπτωση 1. Αν $\|x\|_2 \leqslant t$, από την (4.1.1) βλέπουμε ότι πρέπει να δείξουμε ότι

$$\left| 1 - \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{t\sqrt{n}}{\|x\|_2}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \right| \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}}.$$

Όμως, το αριστερό μέλος ισούται με

$$\begin{aligned} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\frac{t\sqrt{n}}{\|x\|_2}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du &\leqslant \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_{\sqrt{n}}^{\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &\leqslant 2e^{-n/2} < \frac{4}{\sqrt{n}}, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την στοιχειώδη ανισότητα

$$\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_t^\infty e^{-x^2/2}\,dx \leqslant 2e^{-t^2/2},$$

για κάθε $t \geqslant 1$.

Περίπτωση 2: Αν $\|x\|_2 \geqslant t$, γράφουμε

$$2c_n\int_0^{\frac{t}{\|x\|_2}}(1-u^2)^{\frac{n-3}{2}}du = \frac{2c_n}{\sqrt{n}}\int_0^{\frac{t\sqrt{n}}{\|x\|_2}}\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}du.$$

Τότε, το αριστερό μέλος της (4.1.2) φράσσεται από

$$\left|\frac{2c_n}{\sqrt{n}}-\frac{2}{\sqrt{2\pi}}\right|\int_0^{\frac{t\sqrt{n}}{\|x\|_2}}e^{-\frac{u^2}{2}}du + \frac{2c_n}{\sqrt{n}}\int_0^{\frac{t\sqrt{n}}{\|x\|_2}}\left|\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}-e^{-\frac{u^2}{2}}\right|du. \tag{4.1.3}$$

Χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική εκτίμηση $\Gamma(x) = x^{x-1}e^{-x}\sqrt{2\pi x}\left(1+\frac{1}{12x}+O(x^{-2})\right)$ καθώς το $x\to+\infty$, βλέπουμε ότι

$$\frac{2c_n}{\sqrt{n}} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\left(\frac{n}{n-1}\right)^{\frac{n}{2}-1}\frac{1}{\sqrt{e}}\big(1+O(1/n)\big).$$

Συνεπώς, ο πρώτος όρος στην (4.1.3) φράσσεται από c/n καθώς το $n\to\infty$.

Για τον δεύτερο όρο, θεωρούμε την συνάρτηση

$$h(u) = e^{-\frac{u^2}{2}} - \left(1-\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}$$

στο $[0,\sqrt{n}]$. Παρατηρήστε ότι $h(0)=0$ και $h(\sqrt{n}) = \exp(-n/2)$. Αν υπάρχει κάποιο σημείο $v\in[0,\sqrt{n}]$ με την ιδιότητα $h'(v)=0$, τότε $\left(1-\frac{v^2}{n}\right)^{\frac{n-5}{2}} = \frac{n}{n-3}e^{-\frac{v^2}{2}}$, οπότε, $h(v) = \frac{v^2-3}{n-3}e^{-\frac{v^2}{2}}$. Αφού η τελευταία ποσότητα είναι $O(1/n)$ στο $[0,\sqrt{n}]$, έχουμε

$$\int_0^{\frac{t\sqrt{n}}{\|x\|_2}}\left|\left(1-\frac{u^2}{n}\right)^{\frac{n-3}{2}}-e^{-\frac{u^2}{2}}\right|du \leqslant \frac{c'}{\sqrt{n}}.$$

Από την άλλη πλευρά έχουμε $c_n \simeq \sqrt{n}$, κι αυτό αποδεικνύει ότι ο δεύτερος όρος στην (4.1.3) φράσσεται από $c/\sqrt{n}$ καθώς το $n\to\infty$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.3. Θεωρούμε $t>0$ και θέτουμε

$$F_t(s) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\int_0^{\frac{t}{s}}e^{-\frac{u^2}{2}}\,du.$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, το Λήμμα 4.1.5 ισχυρίζεται ότι

$$\left| A_K(t) - \int_K F_t\left(\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}\right) dx \right| \leqslant \frac{c_1}{\sqrt{n}}. \tag{4.1.4}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} F_t(L_K) &= \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\frac{t}{L_K}} e^{-\frac{u^2}{2}} du \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi} L_K} \int_{-t}^{t} e^{-\frac{s^2}{2L_K^2}} ds = \int_{-t}^{t} g(s) ds. \end{aligned}$$

Άρα, ο ισχυρισμός του Θεωρήματος είναι ότι

$$|A_K(t) - F_t(L_K)| \leqslant 4\varepsilon + \frac{c_1}{\sqrt{n}}.$$

Λόγω της (4.1.4), θα έχουμε αποδείξει το θεώρημα αν ελέγξουμε ότι

$$\left| \int_K F_t\left(\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}\right) dx - F_t(L_K) \right| \leqslant 4\varepsilon. \tag{4.1.5}$$

Χωρίζουμε το K σε δύο υποσύνολα:

$$K_1 = K \cap \left\{ \left| \frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} - L_K \right| \leqslant \varepsilon L_K \right\}$$

και

$$K_2 = K \cap \left\{ \left| \frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} - L_K \right| \geqslant \varepsilon L_K \right\}.$$

Τότε,

$$\left| \int_K F_t\left(\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}\right) dx - F_t(L_K) \right| \leqslant \sum_{i=1}^{2} \int_{K_i} \left| F_t\left(\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}\right) - F_t(L_K) \right| dx.$$

Για να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα στο K_2, χρησιμοποιούμε απλώς το γεγονός ότι οι $F_t\left(\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}\right)$ και $F_t(L_K)$ φράσσονται από 1. Αφού το K ικανοποιεί την υπόθεση της ε-συγκέντρωσης, έχουμε

$$\int_{K_2} \left| F_t\left(\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}\right) - F_t(L_K) \right| dx \leqslant 2|K_2| \leqslant 2\varepsilon.$$

Για το ολοκλήρωμα στο K_1 θα χρησιμοποιήσουμε μια εκτίμηση για την Lipschitz σταθερά της F_t. Παρατηρήστε ότι

$$|F'(s)| = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \frac{t}{s^2} e^{-\frac{t^2}{2s^2}} \leqslant \frac{1}{s},$$

διότι $x\exp(-x^2/2) \leqslant 1/\sqrt{e}$ στο $[0,+\infty)$. Επίσης, αφού $\varepsilon < 1/2$, για κάθε $x \in K_1$ έχουμε

$$\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} > \frac{L_K}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\int_{K_1}\left|F_t\left(\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}}\right) - F_t(L_K)\right| dx &\leqslant \int_{K_1} \frac{2}{L_K}\left|\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} - L_K\right| dx \\ &\leqslant \int_{K_1} 2\varepsilon\, dx \leqslant 2\varepsilon.\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε την (4.1.5), και παίρνοντας υπ' όψιν την (4.1.4) ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Στο δεύτερο βήμα θα χρησιμοποιήσουμε την εκτίμηση του Θεωρήματος 4.1.3 για τον μέσο $A(t)$ για να πάρουμε ανάλογη εκτίμηση για «τυχαίες διευθύνσεις» $\theta \in S^{n-1}$.

Θεώρημα 4.1.6. *Έστω K ένα ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν το K ικανοποιεί την υπόθεση της ε-συγκέντρωσης, τότε για κάθε $t > 0$ και $\delta > 0$,*

$$\sigma\left(\left\{\theta : \left|\int_{-t}^{t} g_\theta(s)ds - \int_{-t}^{t} g(s)ds\right| \geqslant \delta + 4\varepsilon + \frac{c_3}{\sqrt{n}}\right\}\right) \leqslant 2e^{-c_4\delta^2 n},$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Η ιδέα είναι να δείξουμε ότι το $\int_{-t}^{t} g_\theta(s)ds$ είναι ο περιορισμός στην S^{n-1} της ακτινικής συνάρτησης ενός συμμετρικού κυρτού σώματος στον $\mathbb{R}^n$ και μετά να χρησιμοποιήσουμε την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα ως ανισότητα απόκλισης από την μέση τιμή μιας Lipschitz συνεχούς συνάρτησης στην σφαίρα. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε την ανισότητα του Busemann, η οποία ισχυρίζεται ότι για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, η συνάρτηση

$$x \mapsto \frac{\|x\|_2}{|K \cap x^\perp|}$$

είναι νόρμα. Αυτός ο ισχυρισμός είναι μια ειδική περίπτωση (πάρτε $k = 2$) του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα 4.1.7. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Έστω $2 \leqslant k \leqslant n-1$ και έστω E ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ συνδιάστασης k. Θέτουμε $F = E^\perp$ και, για κάθε $z \in F$, ορίζουμε $E(z) = \{x + tz : x \in E, t > 0\}$. Τότε, η συνάρτηση*

$$z \mapsto \frac{\|z\|_2}{|K \cap E(z)|} \tag{4.1.6}$$

είναι νόρμα στον F.

Απόδειξη. Έστω z_1 και z_2 γραμμικώς ανεξάρτητα διανύσματα στον F. Θέτουμε $z_3 = z_1+z_2$ και ορίζουμε

$$f_i(t) = \big|K \cap \big(t(z_i/\|z_i\|_2) + E\big)\big| \tag{4.1.7}$$

για κάθε $t > 0$, $i = 1, 2, 3$. Τότε,

$$F_i = |K \cap E(z_i)| = \int_0^\infty f_i(t)dt. \tag{4.1.8}$$

Θα δείξουμε ότι

$$\frac{\|z_3\|_2}{F_3} \leqslant \frac{\|z_1\|_2}{F_1} + \frac{\|z_2\|_2}{F_2}. \tag{4.1.9}$$

Θεωρούμε $t_1, t_2 > 0$ και ορίζουμε $y_i = t_iz_i/\|z_i\|_2$, $i = 1, 2$. Το ευθύγραμμο τμήμα $[y_1, y_2]$ τέμνει την ημιευθεία που ορίζεται από το z_3 στο σημείο $y_3 = t_3z_3/\|z_3\|_2$. Γράφοντας $y_3 = \alpha y_1 + (1-\alpha)y_2$, βλέπουμε ότι

$$\alpha = \frac{t_2/\|z_2\|_2}{t_1/\|z_1\|_2 + t_2/\|z_2\|_2}. \tag{4.1.10}$$

Τότε, από την ισότητα

$$\frac{\alpha t_1}{\|z_1\|_2}z_1 + \frac{(1-\alpha)t_2}{\|z_2\|_2}z_2 = \frac{t_3}{\|z_3\|_2}z_3 \tag{4.1.11}$$

παίρνουμε

$$\frac{\|z_3\|_2}{t_3} = \frac{\|z_1\|_2}{t_1} + \frac{\|z_2\|_2}{t_2}. \tag{4.1.12}$$

Για κάθε $s \in [0, 1]$ ορίζουμε $t_1(s)$ και $t_2(s)$ μέσω των εξισώσεων

$$s = \frac{1}{F_1}\int_0^{t_1(s)} f_1(u)du = \frac{1}{F_2}\int_0^{t_2(s)} f_2(u)du. \tag{4.1.13}$$

Έχουμε

$$\frac{dt_i}{ds} = \frac{F_i}{f_i(t_i(s))}, \tag{4.1.14}$$

και παραγωγίζοντας την (4.1.12) βλέπουμε ότι

$$\frac{\|z_3\|_2}{t_3^2(s)}\frac{dt_3}{ds} = \frac{\|z_1\|_2}{t_1^2(s)}\frac{F_1}{f_1(t_1(s))} + \frac{\|z_2\|_2}{t_2^2(s)}\frac{F_2}{f_2(t_2(s))}. \tag{4.1.15}$$

Εφαρμόζοντας την λογαριθμικά κοίλη μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski βλέπουμε ότι

$$f_3(t_3(s)) \geqslant f_1(t_1(s))^{\alpha} f_2(t_2(s))^{1-\alpha}. \tag{4.1.16}$$

Γράφουμε

$$\frac{F_3}{\|z_3\|_2} \geqslant \int_0^1 \frac{f_3(t_3(s))}{\|z_3\|_2}\frac{dt_3}{ds}ds. \tag{4.1.17}$$

Η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση είναι μεγαλύτερη ή ίση από

$$\frac{t_3^2(s)}{\|z_3\|_2^2}\left(\frac{\|z_1\|_2}{t_1^2(s)}\frac{F_1}{f_1(t_1(s))}+\frac{\|z_2\|_2}{t_2^2(s)}\frac{F_2}{f_2(t_2(s))}\right)f_1(t_1(s))^{\alpha}f_2(t_2(s))^{1-\alpha}. \tag{4.1.18}$$

Αν θέσουμε $a = \|z_1\|_2/t_1$ και $b = \|z_2\|_2/t_2$, από τις (4.1.10) και (4.1.12) μπορούμε να γράψουμε την τελευταία ποσότητα στην μορφή

$$\frac{1}{(a+b)^2}\left(a^2\frac{F_1}{|z_1|f_1(t_1(s))}+b^2\frac{F_2}{|z_2|f_2(t_2(s))}\right)f_1(t_1(s))^{\frac{a}{a+b}}f_2(t_2(s))^{\frac{b}{a+b}}. \tag{4.1.19}$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου,
(4.1.20)

$$a\left(\frac{aF_1}{\|z_1\|_2 f_1(t_1)}\right)+b\left(\frac{bF_2}{\|z_2\|_2 f_2(t_2)}\right)\geqslant (a+b)\left(\frac{aF_1}{\|z_1\|_2 f_1(t_1)}\right)^{\frac{a}{a+b}}\left(\frac{bF_2}{\|z_2\|_2 f_2(t_2)}\right)^{\frac{b}{a+b}},$$

άρα, η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση στην (4.1.17) είναι μεγαλύτερη ή ίση από

$$\frac{1}{(a+b)}\left(\frac{aF_1}{\|z_1\|_2}\right)^{\frac{a}{a+b}}\left(\frac{bF_2}{\|z_2\|_2}\right)^{\frac{b}{a+b}}. \tag{4.1.21}$$

Εφαρμόζοντας και πάλι την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\frac{aF_1}{\|z_1\|_2}\right)^{\frac{a}{a+b}}\left(\frac{bF_2}{\|z_2\|_2}\right)^{\frac{b}{a+b}} &\geqslant \left(\frac{a}{a+b}\frac{\|z_1\|_2}{aF_1}+\frac{b}{a+b}\frac{\|z_2\|_2}{bF_2}\right)^{-1}\\ &= (a+b)\left(\frac{\|z_1\|_2}{F_1}+\frac{|z_2|}{F_2}\right)^{-1}.\end{aligned} \tag{4.1.22}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση στην (4.1.17) είναι μεγαλύτερη ή ίση από $\left(\frac{\|z_1\|_2}{F_1}+\frac{\|z_2\|_2}{F_2}\right)^{-1}$, κι αυτό αποδεικνύει την (4.1.9). □

Πρόταση 4.1.8. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $t>0$ και ορίζουμε*

$$\|x\|_t = \frac{\|x\|_2}{\int_{-t}^{t} g_{\frac{x}{\|x\|_2}}(s)ds}.$$

Τότε, η $\|\cdot\|_t$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Θυμηθείτε ότι $g_\theta(s) = \big|K \cap (\theta^\perp + s\theta)\big|$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Ορίζουμε

$$v(x,t) = \int_{-t}^{t} g_{\frac{x}{\|x\|_2}}(s)ds$$

και αποδεικνύουμε ότι, για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|_2}{v(x,t)} + \frac{\|y\|_2}{v(y,t)}\right) \geqslant \frac{\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2}{v\left(\frac{x+y}{2}, t\right)}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα x και y είναι γραμμικώς ανεξάρτητα. Θεωρούμε το κυρτό σώμα $K' = K \times [-1,1]$ στον $\mathbb{R}^{n+1}$. Το Θεώρημα 4.1.7 δείχνει ότι η $\frac{\|\theta\|_2}{|K' \cap \theta^\perp|}$ ορίζει νόρμα στον $\mathbb{R}^{n+1}/\{0\}$. Δηλαδή,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\|\theta\|_2}{|K' \cap \theta^\perp|} + \frac{\|\phi\|_2}{|K' \cap \phi^\perp|}\right) \geqslant \frac{\left\|\frac{\theta+\phi}{2}\right\|_2}{\left|K' \cap \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)^\perp\right|}$$

για κάθε ζεύγος γραμμικώς ανεξάρτητων $\theta, \phi \in \mathbb{R}^{n+1}$.

Ορίζουμε $r \in (0,1)$ μέσω της εξίσωσης $tr = \sqrt{1-r^2}$. Παρατηρούμε ότι αν $z \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ και

$$u(z) = \left(r\,\frac{z}{\|z\|_2}, \sqrt{1-r^2}\right),$$

τότε η προβολή του $K' \cap u(z)^\perp$ στις πρώτες n συντεταγμένες είναι το $\{w \in K : |\langle w, z\rangle| \leqslant t\|z\|_2\}$. Έπεται ότι

$$v(z,t) = \sqrt{1-r^2}|K' \cap u(z)^\perp|.$$

Ορίζουμε $\eta(z) = \|z\|_2\, u(z)$. Τότε, $|K' \cap u(z)^\perp| = |K' \cap \eta(z)^\perp|$ και $\|\eta(z)\|_2 = \|z\|_2$. Αν θέσουμε $\theta = \eta(x)$ και $\phi = \eta(y)$, η ανισότητα του Busemann δείχνει ότι

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|_2}{v(x,t)} + \frac{\|y\|_2}{v(y,t)}\right) \geqslant \frac{1}{\sqrt{1-r^2}}\frac{\left\|\frac{\theta+\phi}{2}\right\|_2}{\left|K' \cap \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)^\perp\right|}. \tag{4.1.23}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{\theta+\phi}{2} &= \left(r\,\frac{x+y}{2}, \sqrt{1-r^2}\,\frac{(\|x\|_2 + \|y\|_2)}{2}\right)\\ &= \frac{\|x+y\|_2}{2}\left(r\frac{x+y}{\|x+y\|_2}, \sqrt{1-r^2}\frac{\|x\|_2 + \|y\|_2}{\|x+y\|_2}\right).\end{aligned}$$

Άρα, η προβολή του $K' \cap \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)^\perp$ στις πρώτες n συντεταγμένες είναι μια λωρίδα κάθετη στο $\frac{x+y}{2}$, με πλάτος

$$s = \frac{\|x\|_2 + \|y\|_2}{\|x+y\|_2}\, t,$$

και αυτό μας δίνει ότι

$$\frac{v\left(\frac{x+y}{2}, s\right)}{\left|K' \cap \left(\frac{\theta+\phi}{2}\right)^{\perp}\right|} = \frac{\sqrt{1-r^2}}{2}\,\frac{\|x\|_2 + \|y\|_2}{\left\|\frac{\theta+\phi}{2}\right\|_2}.$$

Τότε, η (4.1.23) παίρνει την μορφή

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\|x\|_2}{v(x,t)} + \frac{\|y\|_2}{v(y,t)}\right) \geqslant \frac{1}{2}\,\frac{\|x\|_2 + \|y\|_2}{v\left(\frac{x+y}{2}, s\right)}. \tag{4.1.24}$$

Παρατηρήστε ότι αν $a \geqslant 1$, τότε για κάθε $z \in \mathbb{R}^n$ έχουμε

$$v(z, at) \leqslant a\, v(z,t)$$

(αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι $g_\theta(as) \leqslant g_\theta(s)$ για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και $s > 0$). Έτσι,

$$\frac{\|x\|_2 + \|y\|_2}{2v\left(\frac{x+y}{2}, s\right)} = \frac{\|x\|_2 + \|y\|_2}{2v\left(\frac{x+y}{2}, \frac{\|x\|_2+\|y\|_2}{\|x+y\|_2} t\right)} \geqslant \frac{\|x\|_2 + \|y\|_2}{2\frac{\|x\|_2+\|y\|_2}{\|x+y\|_2} v\left(\frac{x+y}{2}, t\right)} = \frac{\left\|\frac{x+y}{2}\right\|_2}{v\left(\frac{x+y}{2}, t\right)}.$$

Επιστρέφοντας στην (4.1.24) παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Λήμμα 4.1.9. *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε $t > 0$,*

$$\int_t^\infty g_\theta(s)ds \leqslant \frac{1}{2} e^{-2g_\theta(0)t}.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση

$$H(t) = \int_t^\infty g_\theta(s)ds = \int_0^\infty \chi_{[t,\infty)}(s) g_\theta(s)ds.$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η g_θ είναι λογαριθμικά κοίλη και εφαρμόζοντας την ανισότητα Prékopa-Leindler, ελέγχουμε ότι η H είναι λογαριθμικά κοίλη. Έπεται ότι

$$(\log H)(t) - (\log H)(0) \leqslant (\log H)'(0)t$$

για κάθε $t > 0$. Παρατηρήστε ότι $H(0) = 1/2$ λόγω της συμμετρίας του K, και

$$(\log H)'(0) = -\frac{g_\theta(0)}{H(0)} = -2g_\theta(0).$$

Συνεπώς,

$$H(t) \leqslant H(0)\exp\big((\log H)'(0)t\big) = \frac{1}{2}\exp(-2g_\theta(0)t),$$

όπως θέλαμε. □

Λήμμα 4.1.10. *Έστω K ένα συμμετρικό ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$, η νόρμα*

$$\|x\|_t = \frac{\|x\|_2}{\int_{-t}^{t} g_{\frac{x}{\|x\|_2}}(s)\,ds}$$

ικανοποιεί την

$$a\|x\|_2 \leqslant \|x\|_t \leqslant b\|x\|_2$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, όπου a,b είναι δύο θετικές σταθερές με $a\geqslant 1$ και $b/a\leqslant c$ για κάποια απόλυτη σταθερά $c>0$.

Απόδειξη. Αφού το K είναι ισοτροπικό, γνωρίζουμε ότι $g_\theta(0)\simeq L_K^{-1}$ για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Τότε, από την συμμετρία του K έχουμε

$$\int_{-t}^{t} g_\theta(s)\,ds \leqslant \min\{2t\,g_\theta(0),1\} \leqslant \min\left\{\frac{c_1 t}{L_K},1\right\}.$$

Επίσης, το Λήμμα 4.1.9 δείχνει ότι

$$\int_{-t}^{t} g_\theta(s)\,ds = 1-2\int_t^\infty g_\theta(s)\,ds \geqslant 1-e^{-2g_\theta(0)t} \geqslant 1-e^{-\frac{c_2 t}{L_K}}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$1-e^{-\frac{c_5 t}{L_K}} \geqslant \frac{c_2 t}{2L_K}$$

αν $c_2 t\leqslant L_K$. Σε κάθε περίπτωση,

$$\int_{-t}^{t} g_\theta(s)\,ds \geqslant \min\left\{\frac{c_3 t}{L_K},1-e^{-1}\right\}.$$

Με άλλα λόγια,

$$a:=\max\left\{\frac{L_K}{c_4 t},1\right\} \leqslant \|\theta\|_t \leqslant b:=\max\left\{\frac{L_K}{c_3 t},\frac{e}{e-1}\right\}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Παρατηρήστε ότι $a\geqslant 1$ και ότι ο λόγος b/a φράσσεται από μια σταθερά ανεξάρτητη από τα t και L_K. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.6. Σταθεροποιούμε $t>0$ και $\delta>0$. Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής συνέπεια της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας: αν η $f:S^{n-1}\to\mathbb{R}$ είναι d-Lipschitz και αν $M(f)$ είναι ο μέσος της, τότε

$$\sigma\left(\left\{\theta : |f-M(f)|\geqslant \delta+\frac{c_2}{\sqrt{n}}\right\}\right) \leqslant 2e^{-\frac{\delta^2 n}{2d^2}}.$$

Εφαρμόζουμε αυτήν την Πρόταση για την συνάρτηση $f(\theta) = \int_{-t}^{t} g_{\theta(s)}\, ds$. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_{-t}^{t} g_\theta(s)\, ds - \int_{-t}^{t} g_\phi(s)\, ds\right| &= \left|\frac{1}{||\theta||_t} - \frac{1}{||\phi||_t}\right| \\ &\leqslant \frac{||\theta-\phi||_t}{||\theta||_t\ ||\phi||_t} \leqslant \frac{b}{a^2}\|\theta-\phi\|_2 \leqslant c\|\theta-\phi\|_2,\end{aligned}$$

όπου c είναι η απόλυτη σταθερά στο Λήμμα 4.1.10. Παρατηρούμε επίσης ότι $M(f) = A_K(t)$. Έπεται ότι

$$\sigma\left(\left\{\theta : \left|\int_{-t}^{t} g_\theta(s)\, ds - A_K(t)\right| \geqslant \delta + \frac{c_2}{\sqrt{n}}\right\}\right) \leqslant 2\exp\left(-\frac{\delta^2 n}{2c^2}\right).$$

Συνδυάζοντας αυτήν την ανισότητα με το Θεώρημα 4.1.3 παίρνουμε

$$\sigma\left(\left\{\theta : \left|\int_{-t}^{t} g_\theta(s)ds - \int_{-t}^{t} g(s)ds\right| \geqslant \delta + 4\varepsilon + \frac{c_3}{\sqrt{n}}\right\}\right) \leqslant 2\ \exp\left(-c_4\delta^2 n\right),$$

όπου $c_3 = c_1 + c_2$ (c_1 είναι η σταθερά στο Θεώρημα 4.1.3) και $c_4 = 1/(2c^2)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2. Πρώτα, σταθεροποιούμε $\theta \in S^{n-1}$. Αφού

$$g_\theta(s) \leqslant g_\theta(0) \leqslant \frac{c_1}{L_K}$$

και

$$g(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}L_K}\exp(-s^2/(2L_K^2)) \leqslant \frac{1}{\sqrt{2\pi}L_K}$$

για κάθε $s > 0$, η συνάρτηση

$$H(t) = \left|\int_{-t}^{t} g_\theta(s)ds - \int_{-t}^{t} g(s)ds\right|$$

είναι Lipschitz συνεχής με σταθερά $d \leqslant \frac{c_2}{L_K}$, όπου c_2 είναι μια απόλυτη σταθερά.

Επίσης, υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$ ώστε $H(t) \leqslant 1/\sqrt{n}$ για κάθε $t \geqslant c_3 L_K \log n$. Αυτό προκύπτει από την ισότητα

$$H(t) = 2\left|\int_{t}^{\infty} g_\theta(s)ds - \int_{t}^{\infty} g(s)ds\right|$$

και από το Λήμμα 4.1.9: αν η $c_3 > 0$ επιλεγεί αρκετά μεγάλη, για $t \geqslant c_3 L_K \log n$ έχουμε

$$\max\left\{\int_{t}^{\infty} g_\theta(s)ds, \int_{t}^{\infty} g(s)ds\right\} < \frac{1}{2\sqrt{n}}.$$

Ορίζουμε $t_k = k\alpha$, όπου $\alpha = L_K/\sqrt{n}$ και $k = 1, \ldots, k_0 = [c_3\sqrt{n}\log n] + 1$. Από το Θεώρημα 4.1.6, για κάθε $\delta > 0$ έχουμε

$$\sigma\,(A) \leqslant 2c_3\sqrt{n}(\log n)e^{-c_6\delta^2 n},$$

όπου

$$A = \left\{\theta : \exists k \leqslant k_0 \text{ ώστε } \left|\int_{-t_k}^{t_k} g_\theta(s)ds - \int_{-t_k}^{t_k} g(s)ds\right| \geqslant \delta + 4\varepsilon + \frac{c_5}{\sqrt{n}}\right\}$$

και $c_5, c_6 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Αν το θ δεν ανήκει στο A, τότε

$$H(t_k) \leqslant \delta + 4\varepsilon + \frac{c_5}{\sqrt{n}}$$

για κάθε $k = 1, \ldots, k_0$. Αφού η H είναι $\frac{c_2}{L_K}$-Lipschitz, παίρνουμε ανάλογη εκτίμηση για την $H(t)$, $t \in [0, c_3 L_K \log n]$. Τέλος, αν $t > c_3 L_K \log n$, γνωρίζουμε ότι $H(t) < 1/\sqrt{n}$. $\square$

4.2 Η υπόθεση της διασποράς

Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Σε αυτήν την παράγραφο μελετάμε την παράμετρο $\overline{\sigma}_K$ του K που ορίζεται μέσω της

$$\overline{\sigma}_K^2 = \frac{\mathrm{Var}(\|x\|_2^2)}{nL_K^4}$$

και την σχέση της με την υπόθεση της ε-συγκέντρωσης. Είναι βολικό να γράφουμε την $\overline{\sigma}_K$ στην μορφή

$$\overline{\sigma}_K^2 = \frac{n\mathrm{Var}(\|x\|_2^2)}{\left(\mathbb{E}\|x\|_2^2\right)^2}.$$

Με αυτόν τον τρόπο, η ποσότητα γίνεται αναλλοίωτη ως προς ομοιοθεσίες και έτσι ο υπολογισμός της γίνεται απλούστερος.

Η παράμετρος $\overline{\sigma}_K$ ορίστηκε από τους Bobkov και Koldobsky, οι οποίοι έθεσαν το ερώτημα αν είναι ομοιόμορφα φραγμένη.

Υπόθεση της διασποράς. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε $\overline{\sigma}_K^2 \leqslant C$ για κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα.*

Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι αν $K = B_2^n$ τότε

$$\mathbb{E}\|x\|_2^4 = \frac{n}{n+4} \quad \text{και} \quad \mathbb{E}\|x\|_2^2 = \frac{n}{n+2}.$$

Συνεπώς,

$$\overline{\sigma}^2_{B_2^n} = n\left(\frac{\mathbb{E}\|x\|_2^4}{\left(\mathbb{E}\|x\|_2^2\right)^2} - 1\right) = \frac{4}{n+4}. \tag{4.2.1}$$

Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι η Ευκλείδεια μπάλα έχει την ελάχιστη δυνατή $\overline{\sigma}_K$.

Θεώρημα 4.2.1. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\overline{\sigma}_K \geqslant \overline{\sigma}_{B_2^n}.$$

Απόδειξη. Έστω ότι το x είναι ομοιόμορφα κατανεμημένο στο K. Η συνάρτηση κατανομής $F(r) = |\{x \in K : \|x\|_2 \leqslant r\}|$ έχει πυκνότητα

$$F'(r) = n\omega_n r^{n-1}\sigma\big(\frac{1}{r}K\big)$$

για κάθε $r > 0$. Ορίζουμε $q(r) = n\omega_n\sigma\left(\frac{1}{r}K\right)$. Παρατηρήστε ότι q είναι αύξουσα και μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι απολύτως συνεχής. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε την q στην μορφή

$$q(r) = n\int_r^\infty \frac{p(s)}{s^n}ds,$$

όπου $p : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ είναι μια μη αρνητική μετρήσιμη συνάρτηση. Τότε, το θεώρημα Fubini δείχνει ότι

$$\int_0^\infty p(s)ds = n\int_0^\infty \frac{p(s)}{s^n}\left(\int_0^s r^{n-1}dr\right)ds = \int_0^\infty r^{n-1}q(r)dr = 1,$$

άρα η p είναι η πυκνότητα κάποιας θετικής τυχαίας μεταβλητής ξ.

Επίσης, για κάθε $\alpha > -n$,

$$\mathbb{E}\|x\|_2^\alpha = \int_0^\infty r^{\alpha+n-1}q(r)dr = \frac{n}{n+\alpha}\int_0^\infty s^\alpha p(s)ds = \frac{n}{n+\alpha}\mathbb{E}\xi^\alpha.$$

Μπορούμε τώρα να κάνουμε τον υπολογισμό:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(\|x\|_2^2) &= \frac{n}{n+4}\mathbb{E}\xi^4 - \left(\frac{n}{n+2}\mathbb{E}\xi^2\right)^2 \\ &= \frac{4n}{(n+4)(n+2)^2}\left(\mathbb{E}\xi^2\right)^2 + \frac{n}{n+4}\mathrm{Var}(\xi^2) \\ &\geqslant \frac{4n}{(n+4)(n+2)^2}\left(\mathbb{E}\xi^2\right)^2. \end{aligned} \tag{4.2.2}$$

Έπεται ότι

$$\overline{\sigma}_K^2 = n\frac{\mathrm{Var}(\|x\|_2^2)}{\left(\mathbb{E}\|x\|_2^2\right)^2} \geqslant n\frac{\frac{4n}{(n+4)(n+2)^2}\left(\mathbb{E}\xi^2\right)^2}{\left(\frac{n}{n+2}\mathbb{E}\xi^2\right)^2} = \frac{4}{n+4},$$

και το Θεώρημα προκύπτει από την (4.2.1). □

Παρατήρηση 1: Απλοί υπολογισμοί δείχνουν ότι

$$\overline{\sigma}_{B_1^n}^2 = 1 - \frac{2(n+1)}{(n+3)(n+4)} \to 1 \ \text{καθώς το} \ n\to\infty$$

και

$$\overline{\sigma}_{B_\infty^n} = \frac{4}{5} \ \text{για κάθε } n.$$

Στην επόμενη υποπαράγραφο δείχνουμε ότι η $\overline{\sigma}_K^2$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για όλες τις ℓ_p^n, $p\in[1,\infty]$.

4.2α΄ Η υπόθεση της διασποράς για τις p-μπάλες

Έστω $1\leqslant p\leqslant\infty$ και έστω $r_{p,n}$ θετική σταθερά ώστε $|r_{p,n}B_p^n| = 1$. Γράφουμε $L_{p,n}$ για την ισοτροπική σταθερά της B_p^n και $\mu_{p,n}$ για το μέτρο Lebesgue στην $r_{p,n}B_p^n$.

Το επόμενο θεώρημα δείχνει ότι το μεγαλύτερο μέρος του όγκου της κανονικοποιημένης ℓ_p^n-μπάλας βρίσκεται μέσα σε έναν πολύ λεπτό δακτύλιο γύρω από την ακτίνα $\sqrt{n}L_{p,n}$:

Θεώρημα 4.2.2. *Για κάθε $t>0$,*

$$\mu_{p,n}\left(\left|\frac{\|x\|_2^2}{n} - L_{p,n}^2\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{CL_{p,n}^4}{nt^2},$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη βασίζεται στο γεγονός ότι οι κανονικοποιημένες ℓ_p^n-μπάλες έχουν την ακόλουθη «ιδιότητα υπο-ανεξαρτησίας».

Θεώρημα 4.2.3 (υπο-ανεξαρτησία)**.** *Έστω $K = r_{p,n}B_p^n$ και $P=\mu_{p,n}$. Αν $t_1,\dots,t_n$ είναι μη αρνητικοί αριθμοί, τότε*

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{|x_i|\geqslant t_i\}\right) \leqslant \prod_{i=1}^n P\big(\{|x_i|\geqslant t_i\}\big).$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{|x_i|\geqslant t_i\}\right)\leqslant P\left(|x_1|\geqslant t_1\right)P\left(\bigcap_{i=2}^{n}\{|x_i|\geqslant t_i\}\right).$$

Το θεώρημα έπεται με επαγωγή. Θέτουμε

$$S=\bigcap_{i=2}^{n}\{|x_i|\geqslant t_i\}.$$

Τότε, αυτό που πρέπει να ελέγξουμε είναι ότι

$$\frac{|K\cap S\cap\{|x_1|\geqslant t_1\}|}{|K|}\leqslant\frac{|K\cap\{|x_1|\geqslant t_1\}|}{|K|}\cdot\frac{|K\cap S|}{|K|}.$$

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής απλή παρατήρηση: αν μ είναι ένα θετικό μέτρο στο $[0,1]$ και αν η $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ είναι αύξουσα συνάρτηση, τότε

$$\mu([0,1])\int_0^s f\,d\mu\leqslant\mu([0,s])\int_0^1 f\,d\mu \tag{4.2.3}$$

για κάθε $s\in[0,1]$. Αν

$$f(u)=\frac{|K\cap S\cap\{|x_1|=1-u\}|}{|K\cap\{|x_1|=1-u\}|},$$

εύκολα ελέγχουμε ότι η f είναι αύξουσα. Έστω μ το μέτρο πιθανότητας με πυκνότητα

$$g(u)=\frac{|K\cap\{|x_1|=1-u\}|}{|K|}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(u)d\mu&=\int_0^1\frac{|K\cap S\cap\{|x_1|=1-u\}|}{|K\cap\{|x_1|=1-u\}|}\frac{|K\cap\{|x_1|=1-u\}|}{|K|}du\\&=\frac{|K\cap S|}{|K|}\end{aligned} \tag{4.2.4}$$

και

$$\int_0^{1-t}f(u)d\mu=\frac{|K\cap S\cap\{|x_1|\geqslant t\}|}{|K|}.$$

Εφαρμόζοντας την (4.2.3) με $s=1-t_1$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Συνέπεια του Θεωρήματος 4.2.3 είναι η εξής ανισότητα αρνητικής συνδιακύμανσης για τις συναρτήσεις συντεταγμένων.

Πόρισμα 4.2.4. *Έστω $K = r_{p,n}B_p^n$. Τότε,*

$$\int_K x_i^2 x_j^2 dx \leqslant \int_K x_i^2 dx \cdot \int_K x_j^2 dx$$

για κάθε $i \neq j$ στο $\{1, \ldots, n\}$.

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_K x_i^2 x_j^2 dx &= 4 \int_{K\cap\{x_i \geqslant 0, x_j \geqslant 0\}} x_i^2 x_j^2 dx \\
&= 4 \int_0^\infty \int_0^\infty 4t_i t_j P(x_i \geqslant t_i, x_j \geqslant t_j) dt_i dt_j \\
&\leqslant 4 \int_0^\infty \int_0^\infty 4t_i t_j P(x_i \geqslant t_i) P(x_j \geqslant t_j) dt_i dt_j \\
&\leqslant 4 \left(\int_0^\infty 2t_i P(x_i \geqslant t_i) dt_i \right) \left(\int_0^\infty 2t_j P(x_j \geqslant t_j) dt_j \right) \\
&= 4 \int_{K\cap\{x_i \geqslant 0\}} x_i^2 dx \int_{K\cap\{x_j \geqslant 0\}} x_j^2 dx \\
&= \int_K x_i^2 dx \int_K x_j^2 dx.
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$n^2 L_{p,n}^4 = \left(\int_K \|x\|_2^2 dx \right)^2 \leqslant \int_K \|x\|_2^4 dx.$$

Από την άλλη πλευρά, χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 4.2.4 έχουμε

$$\begin{aligned}
\int_K \|x\|_2^4 dx &= \int_K \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^2 dx = \sum_{i=1}^n \int_K x_i^4 dx + \sum_{i \neq j} \int_K x_i^2 x_j^2 dx \\
&\leqslant n \int_K x_1^4 dx + \sum_{i \neq j} \int_K x_i^2 dx \int_K x_j^2 dx \\
&= n \int_K x_1^4 dx + n(n-1) L_{p,n}^4.
\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

Όμως,

$$\int_K x_1^4 dx \leqslant C \left(\int_K x_1^2 dx \right)^2 = C L_{p,n}^4$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C>0$. Συνεπώς,

$$L_{p,n}^4 \leqslant \frac{1}{n^2}\int_K \|x\|_2^4 dx \leqslant \left(1+\frac{C}{n}\right) L_{p,n}^4.$$

Έπεται ότι

$$\int_K \left(\frac{\|x\|_2^2}{n} - L_{p,n}^2\right)^2 dx = \frac{1}{n^2}\int_K \|x\|_2^4 dx - L_{p,n}^4 \leqslant \frac{C}{n} L_{p,n}^4.$$

Τότε, η ανισότητα του Chebyshev μας δίνει

$$t^2 \mu_{p,n}\left(\left|\frac{\|x\|_2^2}{n} - L_{p,n}^2\right| \geqslant t\right) \leqslant \int_K \left(\frac{\|x\|_2^2}{n} - L_{p,n}^2\right)^2 dx \leqslant \frac{C}{n} L_{p,n}^4$$

για κάθε $t>0$. □

Πόρισμα 4.2.5. *Για κάθε $t>0$,*

$$\mu_{p,n}\left(\left|\frac{\|x\|_2}{\sqrt{n}} - L_{p,n}\right| \geqslant t\right) \leqslant \frac{CL_{p,n}^2}{t^2 n}.$$

Απόδειξη. Έστω $t>0$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \mu_{p,n}\left(\left|\, \|x\|_2 - \sqrt{n}L_{p,n}\, \right| \geqslant t\sqrt{n}\right) &\leqslant \mu_{p,n}\left(\left|\, \|x\|_2^2 - nL_{p,n}^2\right| \geqslant tnL_{p,n}\right) \\ &\leqslant \frac{CL_{p,n}^4}{t^2 n L_{p,n}^2} = \frac{CL_{p,n}^2}{t^2 n} \end{aligned} \tag{4.2.7}$$

από το Θεώρημα 4.2.2. □

Παρατηρήστε ότι η $\overline{\sigma}_K^2$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη για όλες τις ℓ_p^n.

Πρόταση 4.2.6. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ ώστε $\sigma_{B_p^n}^2 \leqslant C$ για κάθε n και για κάθε $p\in[1,\infty]$.*

Απόδειξη. Στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.2 είδαμε ότι

$$n^2 L_{p,n}^4 \leqslant \int_K \|x\|_2^4 dx \leqslant (n^2+Cn) L_{p,n}^4$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C>0$. Τότε,

$$\sigma_{B_p^n}^2 = n\left(\frac{\mathbb{E}\|x\|_2^4}{n^2 L_{p,n}^4} - 1\right) \leqslant C$$

για κάθε p και n. □

Κεφάλαιο 5

Εκτιμήσεις για λεπτούς δακτυλίους

5.1 Το επιχείρημα του Fleury

Ο Fleury απέδειξε την εξής εκτίμηση για λεπτούς δακτυλίους.

Θεώρημα 5.1.1. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $2 \leqslant q \leqslant c_1 \sqrt[4]{n}$ ισχύει*

$$(\mathbb{E}\|X\|_2^2)^{1/2} \leqslant (\mathbb{E}\|X\|_2^q)^{1/q} \leqslant \left(1 + \frac{c_2 q}{\sqrt[4]{n}}\right) (\mathbb{E}\|X\|_2^2)^{1/2}, \tag{5.1.1}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Έπεται ότι

$$\mathbb{P}\left(1 - \frac{t}{n^{1/8}} \leqslant \frac{\|X\|_2}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \frac{t}{n^{1/8}}\right) \geqslant 1 - C_1 e^{-c_3 t} \tag{5.1.2}$$

και

$$\mathbb{P}\left(\frac{\|X\|_2}{\sqrt{n}} \geqslant 1 + \frac{t}{n^{1/8}}\right) \leqslant C_2 e^{-c_4 t^2} \tag{5.1.3}$$

για κάθε $0 \leqslant t \leqslant n^{1/8}$, όπου $C_1, C_2, c_3, c_4 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Συμβολίζουμε με μ την κατανομή του X και με f την πυκνότητά του. Το πρώτο βήμα για την απόδειξη είναι να θεωρήσουμε ένα νέο λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα Y στον $\mathbb{R}^n$ το οποίο έχει πυκνότητα την συνέλιξη $g = f * \gamma_n$ της πυκνότητας f του X με την τυπική κανονική πυκνότητα γ_n στον $\mathbb{R}^n$. Ισοδύναμα, $Y = X + G_n$ όπου G_n είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ ανεξάρτητο από το X. Συμβολίζουμε με ν την κατανομή του Y.

Λήμμα 5.1.2. *Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$ και έστω $F_0 \in G_{n,k}$. Τότε,*

$$\mathrm{Cov}(Y) = 2I_n, \quad \mathrm{Cov}(P_{F_0}(Y)) = 2I_k$$

και

$$\mathbb{E}\,\|P_{F_0}(Y)\|_2^2 = 2k.$$

Απόδειξη. Αφού τα X και G_n είναι ανεξάρτητα και έχουν βαρύκεντρο το 0, για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$\mathbb{E}(Y_iY_j) = \mathbb{E}[(X_i + (G_n)_i)(X_j + (G_n)_j)] = \mathbb{E}(X_iX_j) + \mathbb{E}(G_iG_j) = 2\delta_{ij}.$$

Συνεπώς, $\mathrm{Cov}(Y) = 2I_n$. Παρόμοιος υπολογισμός δείχνει ότι $\mathrm{Cov}(P_{F_0}(Y)) = 2I_k$.

Για τον δεύτερο ισχυρισμό θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{v_i\}_{i\leqslant k}$ του F_0 και γράφουμε

$$\mathbb{E}\,\|P_{F_0}(Y)\|_2^2 = \mathbb{E}\,\|P_{F_0}(X)\|_2^2 + \mathbb{E}\,\|P_{F_0}(G_n)\|_2^2 = k + k = 2k,$$

χρησιμοποιώντας την

$$\mathbb{E}\,\|P_{F_0}(Z)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}\,|\langle Z, v_i\rangle|^2 = k$$

η οποία ισχύει για κάθε ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα Z στον $\mathbb{R}^n$. □

Σταθεροποιούμε $F_0 \in G_{n,k}$ και θεωρούμε το μέτρο Haar $\nu_{n,k}$ στην $G_{n,k}$ και το μέτρο Haar ν_n στην $SO(n)$. Παρατηρήστε ότι, για κάθε Borel σύνολο $A \subseteq G_{n,k}$ ισχύει

$$\nu_{n,k}(A) = \nu_n(\{U \in SO(n) : U(F_0) \in A\}).$$

Σταθεροποιούμε $\theta_0 \in S^{n-1} \cap F_0$ και για κάθε $\delta > \sqrt{2}$ και $q \geqslant 0$ ορίζουμε $h_q : SO(n) \to [0, +\infty)$ με

$$h_q(U) = \int_0^{\delta\sqrt{k}} t^{q+k-1}[\pi_{U(F_0)}(g)](tU(\theta_0))dt. \tag{5.1.4}$$

Πρόταση 5.1.3. *Υπάρχει $\delta > \sqrt{2}$ ώστε, για κάθε $2 \leqslant q \leqslant c_1 \min\{k, \sqrt{n}\}$,*

$$\frac{(\mathbb{E}\|Y\|_2^q)^{1/q}}{(\mathbb{E}\|Y\|_2^2)^{1/2}} \leqslant \left(1 + C_1 e^{-c_2 \min(k,\sqrt{n})}\right) \frac{(\mathbb{E}\,h_q(U))^{1/q}(\mathbb{E}\,h_0(U))^{1/2-1/q}}{(\mathbb{E}\,h_2(U))^{1/2}},$$

όπου $c_1, c_2, C_1 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε κάποια ενδιάμεσα αποτελέσματα.

Λήμμα 5.1.4. *Για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *και* $q \geqslant 2$, *ισχύει*

$$\frac{(\mathbb{E}\|Y\|_2^q)^{1/q}}{(\mathbb{E}\|Y\|_2^2)^{1/2}} \leqslant \frac{(\mathbb{E}_{Y,F}\|P_F(Y)\|_2^q)^{1/q}}{(\mathbb{E}_{Y,F}\|P_F(Y)\|_2^2)^{1/2}} = \frac{\left(\mathbb{E}_Y\left(\int_{G_{n,k}}\|P_F(Y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F)\right)\right)^{1/q}}{\left(\mathbb{E}_Y\left(\int_{G_{n,k}}\|P_F(Y)\|_2^2 d\nu_{n,k}(F)\right)\right)^{1/2}}. \tag{5.1.5}$$

Απόδειξη. Από το γεγονός ότι το $\nu_{n,k}$ είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς συμπεραίνουμε ότι για κάθε $p>0$ υπάρχει σταθερά $a_{n,k,p}>0$ ώστε

$$\|y\|_2^p = a_{n,k,p}\int_{G_{n,k}}\|P_F(y)\|_2^p d\nu_{n,k}(F)$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. Άρα,

$$\mathbb{E}\,\|Y\|_2^q = a_{n,k,q}\,\mathbb{E}\Big(\int_{G_{n,k}}\|P_F(Y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F)\Big), \tag{5.1.6}$$

και όμοια,

$$\mathbb{E}\,\|Y\|_2^2 = a_{n,k,2}\,\mathbb{E}\Big(\int_{G_{n,k}}\|P_F(Y)\|_2^2 d\nu_{n,k}(F)\Big).$$

Συνεπώς,

$$\frac{(\mathbb{E}\|Y\|_2^q)^{1/q}}{(\mathbb{E}\|Y\|_2^2)^{1/2}} = \frac{a_{n,k,q}^{1/q}}{a_{n,k,2}^{1/2}}\frac{\left(\mathbb{E}\left(\int_{G_{n,k}}\|P_F(Y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F)\right)\right)^{1/q}}{\left(\mathbb{E}\left(\int_{G_{n,k}}\|P_F(Y)\|_2^2 d\nu_{n,k}(F)\right)\right)^{1/2}}.$$

Η απόδειξη του λήμματος θα έχει ολοκληρωθεί αν δείξουμε το εξής:

Λήμμα 5.1.5. *Για κάθε* $1 \leqslant k \leqslant n$ *και* $q \geqslant 2$ *ισχύει*

$$a_{n,k,q}^{1/q} \leqslant a_{n,k,2}^{1/2}.$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε την σταθερά $a_{n,k,p}$, $p \geqslant 2$ χρησιμοποιώντας το μέτρο του Gauss. Έχουμε

$$I_q^q(\gamma_n) = \int_{\mathbb{R}^n}\|y\|_2^q d\gamma_n(y) = a_{n,k,q}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{G_{n,k}}\|P_F(y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F)d\gamma_n(y).$$

Όμως,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n}\int_{G_{n,k}}\|P_F(y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F)d\gamma_n(y) &= \int_{G_{n,k}}\int_{\mathbb{R}^n}\|P_F(y)\|_2^q d\gamma_n(y)\, d\nu_{n,k}(F)\\ &= \int_{G_{n,k}}\int_F\int_{F^\perp}\|P_F(x+z)\|_2^q d\gamma_k(x)d\gamma_{n-k}(z)d\nu_{n,k}(F)\\ &= \int_{G_{n,k}}\int_F\|x\|_2^q d\gamma_k(x)d\nu_{n,k}(F)\\ &= \int_{G_{n,k}}\int_{\mathbb{R}^k}\|x\|)2^q d\gamma_k(x)d\nu_{n,k}(F)\\ &= \int_{G_{n,k}} I_q^q(\gamma_k)d\nu_{n,k}(F)\\ &= I_q^q(\gamma_k).\end{aligned}$$

Από τις δύο προηγούμενες σχέσεις παίρνουμε

$$I_q^q(\gamma_n) = a_{n,k,q}I_q^q(\gamma_k).$$

Συνεπώς,

$$\frac{a_{n,k,q}^{1/q}}{a_{n,k,2}^{1/2}} = \frac{I_q(\gamma_n)}{I_q(\gamma_k)}\frac{I_2(\gamma_k)}{I_2(\gamma_n)}. \tag{5.1.7}$$

Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned}I_q^q(\gamma_s) = \int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_2^q d\gamma_s(x) &= \frac{s\omega_s}{(2\pi)^{s/2}}\int_{S^{s-1}}\int_0^\infty t^{s+q-1}e^{-t^2/2}dtd\sigma(\theta)\\ &= \frac{s}{2^{s/2}\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}2^{\frac{s+q-2}{2}}\int_0^\infty r^{\frac{s+q-2}{2}}e^{-r}dr = \frac{s2^{\frac{q-2}{2}}\Gamma\left(\frac{s+q}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)}.\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι

$$I_2^q(\gamma_s) = s^{\frac{q}{2}},$$

καταλήγουμε στην

$$\frac{I_q^q(\gamma_s)}{I_2^q(\gamma_s)} = \frac{\Gamma\left(\frac{s+q}{2}\right)}{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{q-2}{2}}\Gamma\left(\frac{s+2}{2}\right)} = \frac{\Gamma\left(\frac{s+q}{2}\right)}{\left(\frac{s}{2}\right)^{\frac{q}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Ισχυρισμός 5.1.6. *Η συνάρτηση*

$$s\mapsto F(s) := \frac{I_q^q(\gamma_s)}{I_2^q(\gamma_s)}$$

είναι φθίνουσα.

Έχοντας αποδείξει τον ισχυρισμό βλέπουμε ότι $F(n) \leqslant F(k)$ και το λήμμα προκύπτει από την (5.1.7). □

Θα χρησιμοποιήσουμε την εξής συνέπεια της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας.

Λήμμα 5.1.7. *Για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και για κάθε $y \neq 0$ στον $\mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\nu_{n,k}\left(\left\{F \in G_{n,k} : \|P_F(y)\|_2 \geqslant 2s\sqrt{k/n}\|y\|_2\right\}\right) \leqslant C_2 e^{-c_1 k s^2}$$

για κάθε $s \geqslant 1$. □

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης την ανισότητα του Παούρη: για κάθε $s \geqslant 1$ έχουμε

$$\mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \geqslant C_4 s\sqrt{n}\}\right) \leqslant C_3 e^{-c_2 s\sqrt{n}}. \tag{5.1.8}$$

Λήμμα 5.1.8. *Υπάρχει $\delta > \sqrt{2}$ ώστε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ και $2 \leqslant q \leqslant c\min(k,\sqrt{n})$,*

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left(\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F)\right)\\ &\qquad \leqslant \left(1 + C_1 e^{-c_1\min(k,\sqrt{n})}\right)\mathbb{E}\left(\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^q \mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2 \leqslant \delta\sqrt{k}\}} d\nu_{n,k}(F)\right).\end{aligned}$$

Απόδειξη. Γράφουμε

$$\begin{aligned}&\mathbb{P}_{Y,F}\left(\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\}\right)\\ &\quad = \mathbb{E}_Y\left(\mathbb{P}_F(\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\})\right)\\ &\quad = \mathbb{E}_Y\left[\left(\mathbb{P}_F(\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\})\right)\mathbf{1}_{\{\|Y\|_2 \leqslant \frac{\delta}{2}\sqrt{n}\}}\right]\\ &\qquad\quad + \mathbb{E}_Y\left[\left(\mathbb{P}_F(\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\})\right)\mathbf{1}_{\{\|Y\|_2 \geqslant \frac{\delta}{2}\sqrt{n}\}}\right]\\ &\quad \leqslant \mathbb{E}_Y\left(\mathbb{P}_F\left(\left\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant 2\|Y\|_2\sqrt{k/n}\right\}\right)\right) + \mathbb{P}_Y\left(\|Y\|_2 \geqslant \delta\sqrt{n}/2\right),\end{aligned}$$

και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.1.7 και την (5.1.8) παίρνουμε

$$\mathbb{P}_{Y,F}\left(\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\}\right) \leqslant C_2 e^{-c_1 k} + C_3 e^{-c_2\sqrt{n}} \leqslant e^{-c_3\min(k,\sqrt{n})} \tag{5.1.9}$$

επιλέγοντας $\delta = 2C_4$. Αφού το Y είναι λογαριθμικά κοίλο, γνωρίζουμε ότι

$$(\mathbb{E}\|Y\|_2^{2q})^{1/2q} \leqslant C_5(\mathbb{E}\|Y\|_2^q)^{1/q}.$$

Τότε, η (5.1.6) δείχνει ότι

$$\left(\mathbb{E}\left(\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^{2q} d\nu_{n,k}(F)\right)\right)^{\frac{1}{2q}} \leqslant C_6\left(\mathbb{E}\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^q \mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\}} d\nu_{n,k}(F)$$
$$\left(\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^{2q} d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{G_{n,k}} \mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\}} d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Καθώς $\mathbb{E}(X\cdot Y) \leqslant \sqrt{\mathbb{E}(X^2)}\sqrt{\mathbb{E}(Y^2)}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}&\left(\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^q \mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\}} d\nu_{n,k}(F)\right)\\
&\leqslant \mathbb{E}\left[\left(\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^{2q} d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{G_{n,k}} \mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\}} d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{2}}\right]\\
&\leqslant \left(\mathbb{E}\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^{2q} d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{E}\left(\nu_{n,k}(\|P_F(y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k})\right)\right)^{1/2}\\
&= \left(\mathbb{E}\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^{2q} d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{2}} \left(\mathbb{P}_{F,Y}(\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\})\right)^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}$$

Αφού

$$\left(\mathbb{P}_{F,Y}(\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\})\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant e^{-c_3 \min(k,\sqrt{n})}$$

και

$$\left(\mathbb{E}\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^{2q} d\nu_{n,k}(F)\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_6^q \left(\mathbb{E}\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^{q} d\nu_{n,k}(F)\right),$$

έχουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}&\left(\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^q \mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2 \geqslant \delta\sqrt{k}\}} d\nu_{n,k}(F)\right)\\
&\leqslant C_6^q e^{-c_3\min(k,\sqrt{n})}\mathbb{E}\left(\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F)\right)\\
&\leqslant e^{-c_4\min(k,\sqrt{n})}\mathbb{E}\int_{G_{n,k}} \|P_F(Y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F),
\end{aligned}$$

υπό τον περιορισμό $q \leqslant c\min(k,\sqrt{n})$.

Τώρα, είναι φανερό ότι

$$\mathbb{E}\left(\int_{G_{n,k}}\|P_F(Y)\|_2^q\mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2\leqslant\delta\sqrt{k}\}}d\nu_{n,k}(F)\right)\geqslant(1-e^{-c_4\min(k,\sqrt{n})})\mathbb{E}\int_{G_{n,k}}\|P_F(Y)\|_2^q d\nu_{n,k}(F),$$

και αφού

$$\frac{1}{1-e^{-c_4\min(k,\sqrt{n})}}\leqslant 1+c_1e^{-c_4\min(k,\sqrt{n})}$$

έχουμε δείξει το λήμμα. □

Απόδειξη της Πρότασης 5.1.3. Από την (5.1.9) γνωρίζουμε ότι, για κατάλληλη επιλογή της απόλυτης σταθεράς $\delta>\sqrt{2}$,

$$\mathbb{P}_{Y,F}\left(\{\|P_F(Y)\|_2\leqslant\delta\sqrt{k}\}\right)\geqslant 1-e^{-c_3\min(k,\sqrt{n})}.$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.1.4 και το Λήμμα 5.1.8 γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{(\mathbb{E}\|Y\|_2^q)^{1/q}}{(\mathbb{E}\|Y\|_2^2)^{1/2}}&\leqslant\frac{\left(\mathbb{E}_{F,Y}\|P_F(Y)\|_2^q\right)^{1/q}}{\left(\mathbb{E}_{F,Y}\|P_F(Y)\|_2^2\right)^{1/2}}\\&\leqslant\frac{\left(\mathbb{E}_{F,Y}\|P_F(Y)\|_2^q\right)^{1/q}}{(\mathbb{E}_{F,Y}(\|P_F(Y)\|_2^2\mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2\leqslant\delta\sqrt{k}\}}))^{1/2}}\leqslant(1+e^{-c_4\min(k,\sqrt{n})})\\&\times\frac{(\mathbb{E}_{F,Y}(\|P_F(Y)\|_2^q\mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2\leqslant\delta\sqrt{k}\}}))^{1/q}\,\mathbb{P}_{F,Y}(\|P_F(Y)\|_2\leqslant\delta\sqrt{k})^{1/2-1/q}}{(\mathbb{E}_{F,Y}(\|P_F(Y)\|_2^2\mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2\leqslant\delta\sqrt{k}\}}))^{1/2}}.\end{aligned}$$

Για την ολοκλήρωση της απόδειξης παρατηρούμε ότι, για $p=0,2$ και q, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\|P_F(Y)\|_2^p\mathbf{1}_{\{\|P_F(Y)\|_2\leqslant\delta\sqrt{k}\}}\right]&=\int_{\mathbb{R}^n}\int_{G_{n,k}}\|P_F(y)\|_2^p\mathbf{1}_{\{\|P_F(y)\|_2\leqslant\delta\sqrt{k}\}}d\nu_{n,k}(F)d\nu(y)\\&=\int_{G_{n,k}}\int_{B_F(\delta\sqrt{k})+F^\perp}\|P_F(y)\|_2^p d\nu(y)d\nu_{n,k}(F)\\&=\int_{G_{n,k}}\int_{B_F(\delta\sqrt{k})}\|z\|_2^p\int_{F^\perp}g(z+u)du\,dz\,d\nu_{n,k}\\&=\int_{G_{n,k}}\int_{B_F(\delta\sqrt{k})}\|z\|_2^p\pi_Fg(z)\,dz\,d\nu_{n,k}(F)\\&=\int_{G_{n,k}}k\omega_k\int_{S_F}\int_0^{\delta\sqrt{k}}t^{p+k-1}\pi_Fg(t\theta)\,dt\,d\sigma_F(\theta)\,d\nu_{n,k}(F)\\&=\int_{SO(n)}k\omega_k\int_0^{\delta\sqrt{k}}t^{p+k-1}\pi_{UF_0}g(tU\theta_0)\,dt\,d\nu_n(U)\\&=k\omega_k\int_{SO(n)}h_p(U)\,d\nu_n(U)=k\omega_k\mathbb{E}\left(h_p(U)\right).\end{aligned}$$

□

Άλλα εργαλεία. Έχοντας αποδείξει την Πρόταση 5.1.3, ο Fleury χρησιμοποιεί στην συνέχεια τα εξής εργαλεία:

(α) Ένα λήμμα του Borell (η απόδειξη δίνεται στην §2.2).

Λήμμα 5.1.9. *Έστω $\phi : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ μια ολοκληρώσιμη λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Τότε, η συνάρτηση $\Psi : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ που ορίζεται από την*

$$\Psi(q) = \frac{1}{\Gamma(q)} \int_0^\infty t^{q-1}\phi(t)\, dt$$

είναι λογαριθμικά κοίλη.

(β) Μια εκτίμηση για την σταθερά Lipschitz της $\log h_p$, η οποία έπαιζε σημαντικό ρόλο στις προγενέστερες εργασίες του Klartag για το ίδιο πρόβλημα:

Πρόταση 5.1.10. *Έστω $F_0 \in G_{n,k}$ και $x_0 \in F$ με $\|x_0\|_2 \leqslant \delta\sqrt{k}$. Αν ορίσουμε $M : SO(n) \to \mathbb{R}$ με*

$$M(U) = \log \pi_{U(F_0)} g(U(x_0))$$

τότε $\|M\|_{\rm Lip} \leqslant Ck^2$. Συνεπώς, για κάθε $p \geqslant 0$,

$$\|\log h_p\|_{\rm Lip} \leqslant Ck^2.$$

Δεν θα παρουσιάσουμε την απόδειξη της Πρότασης 5.1.10 γιατί, όπως θα δούμε στην επόμενη παράγραφο, οι Guédon και E. Milman την αντικατέστησαν με μία ισχυρότερη.

(γ) Την λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την $SO(n)$.

Θεώρημα 5.1.11. *Για κάθε Lipschitz συνεχή συνάρτηση $F : SO(n) \to \mathbb{R}$ ισχύει*

$$\mathrm{Ent}(F^2) \leqslant \frac{C}{n}\, \mathbb{E}|\nabla F(U)|^2,$$

όπου

$$\mathrm{Ent}(F^2) = \mathbb{E}\,[F^2 \log(F^2)] - \mathbb{E}\,(F^2)\log(\mathbb{E}\,(F^2))$$

και

$$|\nabla F(U)| = \limsup_{d(V,U)\to 0} \frac{|F(V) - F(U)|}{d(V,U)}.$$

Ο Fleury χρησιμοποιεί το Θεώρημα 5.1.11 για να συγκρίνει τις ροπές της $h_p(U)$. Γενικότερα, αν $h : SO(n) \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση με $\|\log h\|_{\rm Lip} \leqslant A$ τότε ορίζουμε $A_h(q) = \left(\int h^q\right)^{1/q}$, οπότε $\log A_h(q) = \frac{1}{q}\log\left(\int h^q\right)$ και

$$\frac{d}{dq}\left(\log A_h(q)\right) = \frac{\int h^q \log(h^q) - \int h^q \cdot \log\left(\int h^q\right)}{q^2 \int h^q},$$

άρα, εφαρμόζοντας την λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την $F = h^{q/2}$ βλέπουμε ότι, για κάθε $q > 0$,

$$\begin{aligned}\frac{d}{dq}(\log A_h(q)) &= \frac{\mathrm{Ent}(h^q)}{q^2\int h^q} \leqslant \frac{1}{q^2\int h^q}\,\frac{C}{n}\int |\nabla h^{q/2}|^2\\ &= \frac{1}{q^2\int h^q}\,\frac{C}{n}\,\frac{q^2}{4}\int h^{q-2}|\nabla h|^2 = \frac{C_1}{n}\,\frac{\int h^q|\nabla \log h|^2}{\int h^q}\\ &\leqslant \frac{C_1}{n}\,\|\log h\|_{\mathrm{Lip}}^2\frac{\int h^q}{\int h^q} \leqslant \frac{C_1A^2}{n}.\end{aligned}$$

Έστω $q > r > 0$. Ολοκληρώνοντας αυτήν την ανισότητα στο $[r, q]$ παίρνουμε

$$\log A_h(q) - \log A_h(r) \leqslant \frac{C_1A^2}{n}(q-r),$$

δηλαδή

$$A_h(q) \leqslant e^{\frac{C_1A^2(q-r)}{n}}A_h(r).$$

Με άλλα λόγια,

$$(\mathbb{E}\,|h|^q)^{1/q} \leqslant \exp\Big(\frac{CA^2}{n}(q-r)\Big)\,(\mathbb{E}\,|h|^r)^{1/r} \tag{5.1.10}$$

για κάθε $q > r > 0$.

Λήμμα 5.1.12. *Έστω $4 \leqslant p \leqslant k$. Αν $A := \max\{\|\log h_p\|_{\mathrm{Lip}}, \|\log h_0\|_{\mathrm{Lip}}\} \leqslant \sqrt{n}$ τότε*

$$(\mathbb{E}\,(h_p))^{1/p}(\mathbb{E}\,(h_0))^{1/2-1/p} \leqslant \Big(1 + \frac{CA^2}{pn} + \frac{Cp}{k}\Big)\,(\mathbb{E}\,(h_2))^{1/2}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $p \geqslant 4$. Εφαρμόζοντας το Λήμμα 5.1.9 για την λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση

$$\phi(t) = \pi_{U(F_0)}g(tU(\theta_0))\cdot \mathbf{1}_{[0,\delta\sqrt{k}]}(t),$$

για κάθε $U \in SO(n)$ έχουμε

$$\frac{1}{\Gamma(k+2)}h_2(U) \geqslant \Big(\frac{1}{\Gamma(k+p)}h_p(U)\Big)^{2/p}\Big(\frac{1}{\Gamma(k)}h_0(U)\Big)^{1-2/p}.$$

Απλοί υπολογισμοί με την συνάρτηση Γάμμα δείχνουν ότι

$$[h_p(U)]^{2/p}[h_0(U)]^{1-2/p} \leqslant \Big(1 + \frac{2p}{k}\Big)h_2(U). \tag{5.1.11}$$

Εφαρμόζουμε την (5.1.10) τέσσερις φορές:

(i) Για την $h = h_p$ με $q = 1$ και $r = 2/p$, έχουμε

$$\mathbb{E}\,(h_p^{2/p}) \geqslant e^{-\frac{C_1A^2}{pn}}(\mathbb{E}\,(h_p))^{2/p}. \tag{5.1.12}$$

(ii) Για την $h = h_0$ με $q = 1$ και $r = 1 - 2/p$, έχουμε

$$\mathbb{E}\,(h_0^{1-2/p}) \geqslant e^{-\frac{C_2A^2}{pn}}(\mathbb{E}\,(h_0))^{1-2/p}. \tag{5.1.13}$$

(iii) Για την $h = h_p$ με $q = 4/p$ και $r = 2/p$, έχουμε

$$\mathbb{E}\,(h_p^{4/p}) \leqslant e^{\frac{C_3A^2}{np^2}}(\mathbb{E}\,(h_p^{2/p}))^2 \tag{5.1.14}$$

(iv) Για την $h = h_0$ με $q = 2(1-2/p)$ και $r = 1 - 2/p$, έχουμε

$$\mathbb{E}\,(h_0^{2(1-2/p)}) \leqslant e^{\frac{C_4A^2}{n}}(\mathbb{E}\,(h_0^{1-2/p}))^2. \tag{5.1.15}$$

Γράφουμε $\mathrm{Cov}(Z_1, Z_2)$ για την συνδιακύμανση δύο τυχαίων μεταβλητών Z_1, Z_2. Από τις (5.1.14) και (5.1.15) βλέπουμε ότι, αν $A \leqslant \sqrt{n}$,

$$\begin{aligned} |\mathrm{Cov}(h_p^{2/p}, h_0^{1-2/p})| &\leqslant \sqrt{\mathrm{Var}(h_p^{2/p})}\sqrt{\mathrm{Var}(h_0^{1-2/p})} \\ &\leqslant \left(e^{\frac{C_3A^2}{np^2}} - 1\right)^{1/2}\left(e^{\frac{C_4A^2}{n}} - 1\right)^{1/2}\mathbb{E}\,(h_p^{2/p})\mathbb{E}\,(h_0^{1-2/p}) \\ &\leqslant \frac{C_5A^2}{pn}\mathbb{E}\,(h_p^{2/p})\mathbb{E}\,(h_0^{1-2/p}). \end{aligned}$$

Ολοκληρώνοντας την (5.1.11), χρησιμοποιώντας το φράγμα για την $|\mathrm{Cov}(h_p^{2/p}, h_0^{1-2/p})|$, καθώς και τις (5.1.12) και (5.1.13) στο τελευταίο βήμα, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \Big(1 + \frac{2p}{k}\Big)\mathbb{E}\,(h_2) &\geqslant \mathbb{E}\,[h_p^{2/p}h_0^{1-2/p}] \\ &= \mathbb{E}\,(h_p^{2/p})\mathbb{E}\,(h_0^{1-2/p}) + \mathrm{Cov}(h_p^{2/p}, h_0^{1-2/p}) \\ &\geqslant \Big(1 - \frac{C_5A^2}{pn}\Big)\mathbb{E}\,(h_p^{2/p})\mathbb{E}\,(h_0^{1-2/p}) \\ &\geqslant \Big(1 - \frac{C_6A^2}{pn}\Big)(\mathbb{E}\,(h_p))^{2/p}(\mathbb{E}\,(h_0))^{1-2/p}, \end{aligned}$$

το οποίο αποδεικνύει το λήμμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1. Συνδυάζοντας την Πρόταση 5.1.3 με το Λήμμα 5.1.12, και παίρνοντας υπ' όψιν την εκτίμηση της Πρότασης 5.1.10 για την σταθερά Lipschitz της $\log h_p$, βλέπουμε ότι αν $k \leqslant \sqrt[4]{n}$ τότε για κάθε ακέραιο $4 \leqslant q \leqslant k/2$ ισχύει

$$(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^q)^{1/q} \leqslant \left(1+\frac{cq}{k}+\frac{ck^4}{qn}\right)(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^2)^{1/2}. \tag{5.1.16}$$

Βήμα 1. *Για κάθε $k \leqslant \sqrt[4]{n}$ και $\sqrt{k} \leqslant q \leqslant k/2$ έχουμε*

$$(\mathbb{E}\,\|X\|_2^q)^{1/q} \leqslant \left(1+\frac{cq}{k}\right)(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2} \tag{5.1.17}$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, για κάθε ακέραιο $q \geqslant 2$ γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\|Y\|_2^{2q} &= \mathbb{E}\left(\|X+G_n\|_2^2\right)^q \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\left(\|X+G_n\|_2^2\right)^q+\left(\|X-G_n\|_2^2\right)^q\right) \\
&\geqslant \mathbb{E}\left(\|X\|_2^2+\|G_n\|_2^2\right)^q \\
&\geqslant 2^q\mathbb{E}\left(\|X\|_2^q\|G_n\|_2^q\right) \\
&= 2^q\mathbb{E}\,\|X\|_2^q\,\mathbb{E}\,\|G_n\|_2^q \\
&\geqslant 2^q\mathbb{E}\,\|X\|_2^q\left(\mathbb{E}\,\|G_n\|_2^2\right)^{q/2} \\
&= (2\sqrt{n})^q\mathbb{E}\,\|X\|_2^q.
\end{aligned}$$

Συνεπώς, αν $4 \leqslant q \leqslant k/2$ έχουμε

$$\begin{aligned}
(\mathbb{E}\,\|X\|_2^q)^{1/q} &\leqslant \frac{1}{2\sqrt{n}}(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^{2q})^{1/q} \\
&\leqslant \left(1+\frac{C_2q}{k}+\frac{C_2k^4}{qn}\right)\frac{\mathbb{E}\,\|Y\|_2^2}{2\sqrt{n}} \\
&= \left(1+\frac{C_2q}{k}+\frac{C_2k^4}{qn}\right)(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2},
\end{aligned}$$

διότι $\mathbb{E}\,\|Y\|_2^2 = 2n$ και $(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2} = \sqrt{n}$. Τέλος, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $k^4 \leqslant n$ και $q/k \geqslant 1/q$ λόγω των περιορισμών μας για τους k και q, έχουμε $k^4/qn \leqslant 1/q \leqslant q/k$, απ'όπου έπεται η (5.1.17).

Βήμα 2. *Επιλέγοντας $k = \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor$ παίρνουμε την* (5.1.1) *στο διάστημα* $[\sqrt[8]{n}, \sqrt[4]{n}]$: *αν $\sqrt[8]{n} \leqslant q \leqslant c_1\sqrt[4]{n}$ τότε*

$$(\mathbb{E}\|X\|_2^q)^{1/q} \leqslant \left(1+\frac{c_2q}{\sqrt[4]{n}}\right)(\mathbb{E}\|X\|_2^2)^{1/2},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Βήμα 3. *Αποδεικνύουμε την (5.1.3): για κάθε $0 \leqslant t \leqslant n^{1/8}$,*

$$\mathbb{P}\left(\frac{\|X\|_2}{\sqrt{n}} \geqslant 1 + \frac{t}{n^{1/8}} \right) \leqslant C_2 e^{-c_4 t^2}.$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, θέτουμε $k = \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor$ και θεωρούμε $t > 0$ με $2 \leqslant t \leqslant \sqrt{k}$. Επιλέγουμε $q = \frac{t\sqrt{k}}{2}$ και παρατηρούμε ότι $\sqrt{k} \leqslant q \leqslant k/2$. Από την ανισότητα Markov,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \geqslant \left(1 + \frac{t}{\sqrt{k}}\right) (\mathbb{E}\,\|X\|_2^q)^{1/q} \right) &\leqslant \left(1 + \frac{t}{\sqrt{k}}\right)^{-q} \\ &\leqslant \exp\Big(-\frac{qt}{2\sqrt{k}}\Big) = \exp\Big(-\frac{t^2}{4}\Big).\end{aligned}$$

Από την (5.1.17) παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \geqslant \left(1 + \frac{C_3 t}{\sqrt{k}}\right) (\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2} \right) \leqslant \exp\Big(-\frac{t^2}{2}\Big). \tag{5.1.18}$$

Βήμα 4. *Αποδεικνύουμε την (5.1.2): αν $0 \leqslant t \leqslant \sqrt[8]{n}$ τότε*

$$\mathbb{P}\left(1 - \frac{t}{n^{1/8}} \leqslant \frac{\|X\|_2}{\sqrt{n}} \leqslant 1 + \frac{t}{n^{1/8}} \right) \geqslant 1 - C_1 e^{-c_3 t}.$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, παρατηρούμε πρώτα ότι, λόγω της (5.1.17), μπορούμε να επιλέξουμε $k \simeq \sqrt[4]{n}$ και $q \simeq \sqrt{k}$ ώστε

$$\mathrm{Var}(\|X\|_2^q) \leqslant \frac{1}{16} (\mathbb{E}\,\|X\|_2^q)^2.$$

Τότε, από την ανισότητα Markov έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{4} &\geqslant \mathbb{P}\Big(\big|\, \|X\|_2^q - (\mathbb{E}\,\|X\|_2^q) \,\big| \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\,\|X\|_2^q \Big) \geqslant \mathbb{P}\Big(\|X\|_2 \leqslant \frac{1}{2^{1/q}} (\mathbb{E}\,\|X\|_2^q)^{1/q} \Big) \\ &\geqslant \mathbb{P}\Big(\|X\|_2 \leqslant \Big(1 - \frac{C_4}{\sqrt{k}}\Big) (\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2} \Big).\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, η (5.1.18) δείχνει ότι

$$\mathbb{P}\Big(\|X\|_2 \leqslant \Big(1 + \frac{C_5 t}{\sqrt{k}}\Big) (\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2} \Big) \geqslant \frac{3}{4}.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $t \geqslant 1$, αλλιώς η (5.1.2) ισχύει τετριμμένα. Ορίζουμε $C_6 = \max\{C_4, C_5\}$ και θέτοντας $\lambda = \frac{2}{1+t}$ γράφουμε

$$1 - \frac{C_6}{\sqrt{k}} = \lambda\Big(1 - \frac{C_6 t}{\sqrt{k}}\Big) + (1-\lambda)\Big(1 + \frac{C_6}{\sqrt{k}}\Big).$$

Η συνάρτηση $w : [0,\infty) \to [0,1]$ με $u \mapsto w(u) = \mathbb{P}(\|X\|_2 \leqslant u)$ είναι λογαριθμικά κοίλη, άρα

$$\mathbb{P}\Big(\|X\|_2 \leqslant \Big(1 - \frac{C_6}{\sqrt{k}}\Big)(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2}\Big) \geqslant \mathbb{P}\Big(\|X\|_2 \leqslant \Big(1 - \frac{C_6 t}{\sqrt{k}}\Big)(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2}\Big)^{\lambda}$$
$$\times\, \mathbb{P}\Big(\|X\|_2 \leqslant \Big(1 + \frac{C_6}{\sqrt{k}}\Big)(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2}\Big)^{1-\lambda}.$$

Έπεται ότι

$$\mathbb{P}\Big(\|X\|_2 \leqslant \Big(1 - \frac{C_6 t}{\sqrt{k}}\Big)(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2}\Big) \leqslant \Big(\frac{1}{4}\Big)^{1/\lambda}\Big(\frac{4}{3}\Big)^{1/\lambda - 1} \leqslant \Big(\frac{1}{3}\Big)^{1/\lambda} \leqslant e^{-ct}.$$

Βήμα 5. *Τέλος, δείχνουμε ότι*

$$(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2} \leqslant (\mathbb{E}\,\|X\|_2^q)^{1/q} \leqslant \left(1 + \frac{c_2 q}{\sqrt[4]{n}}\right)(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2},$$

για κάθε $2 \leqslant q \leqslant \sqrt[8]{n}$.

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, παρατηρούμε ότι αρκεί να γράψουμε

$$\mathbb{E}|F(X)|^q = q\int_0^{\infty} t^{q-1}\mathbb{P}(\{|F(X)| \geqslant t\})\,dt$$

για την συνάρτηση

$$F(x) = \frac{\|x\|_2^2}{n} - 1$$

και να χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα

$$\mathbb{P}\Big(\big|\,\|X\|_2 - \sqrt{n}\,\big| \geqslant s\sqrt{n}\Big) \leqslant Ce^{-c\sqrt{k}s}\mathbf{1}_{\{s\leqslant 1\}}(s) + Ce^{-c\sqrt{n}s}\mathbf{1}_{\{s\geqslant 1\}}(s),$$

η οποία ισχύει για κάθε $s > 0$. □

5.2 Η εκτίμηση των Guédon και E. Milman

Τα καλύτερα γνωστά αποτελέσματα για την εικασία του λεπτού δακτυλίου είναι αυτά των Guédon και E. Milman.

Θεώρημα 5.2.1. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\big|\,\|X\|_2-\sqrt{n}\big|\geqslant t\sqrt{n}\right)\leqslant C\exp(-c\sqrt{n}\min(t^3,t)) \tag{5.2.1}$$

για κάθε $t>0$, όπου $C,c>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\|X\|_2)}\leqslant Cn^{1/3}. \tag{5.2.2}$$

Από το Θεώρημα 5.2.1 προκύπτει μια εκτίμηση μεγάλων αποκλίσεων η οποία συμπληρώνει την ανισότητα του Παούρη.

Θεώρημα 5.2.2. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2\geqslant(1+t)\sqrt{n}\right)\leqslant \exp(-c\sqrt{n}\min(t^3,t)) \tag{5.2.3}$$

για κάθε $t\geqslant 0$, όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Από το Θεώρημα 5.2.1 προκύπτει επίσης μια εκτίμηση για το μέτρο σε μικρές μπάλες.

Θεώρημα 5.2.3. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Ισχύει*

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2\leqslant(1-t)\sqrt{n}\right)\leqslant \exp\left(-c_1\sqrt{n}\min\left(t^3,\log\frac{c_2}{1-t}\right)\right) \tag{5.2.4}$$

για κάθε $t\in(0,1)$, όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Όλα τα παραπάνω θεωρήματα είναι συνέπειες του εξής κύριου τεχνικού θεωρήματος.

Θεώρημα 5.2.4. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Αν $1\leqslant|p-2|\leqslant c_1n^{1/6}$ τότε*

$$1-C\frac{|p-2|}{n^{1/3}}\leqslant\frac{(\mathbb{E}\,\|X\|_2^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2}}\leqslant 1+C\frac{|p-2|}{n^{1/3}}, \tag{5.2.5}$$

και αν $c_1n^{1/6}\leqslant|p-2|\leqslant c_2\sqrt{n}$ τότε

$$1-C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}}\leqslant\frac{(\mathbb{E}\,\|X\|_2^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\,\|X\|_2^2)^{1/2}}\leqslant 1+C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}}. \tag{5.2.6}$$

Τα βασικά βήματα της απόδειξης του Θεωρήματος 5.2.4 είναι τα ακόλουθα.

1. Πρώτα αντικαθιστούμε το X με το $Y = (X+G_n)/\sqrt{2}$, όπου G_n είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα. Συμβολίζουμε με g την πυκνότητα του Y. Το βήμα αυτό υπάρχει και στις δουλειές των Klartag και Fleury. Από τεχνική άποψη, στην δουλειά των Guédon και Milman εξασφαλίζει ότι τα L_q-κεντροειδή σώματα (για την ακρίβεια, μια παραλλαγή τους η οποία θα οριστεί στην επόμενη υποπαράγραφο) $Z_q^+(g)$ της g ικανοποιούν τον εγκλεισμό $Z_q^+(g) \supseteq c_1\sqrt{q}B_2^n$ για κάθε $q \geqslant 1$.

2. Αποδεικνύουμε ότι για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$ ισχύει

$$\frac{\left(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^2\right)^{1/2}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}_{F,Y}\,\|P_F(Y)\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}_{F,Y}\,\|P_F(Y)\|_2^2\right)^{1/2}}.$$

Στην πραγματικότητα, θα χρησιμοποιήσουμε μια ακριβέστερη μορφή αυτής της ανισότητας. Χρησιμοποιώντας το αναλλοίωτο του μέτρου Haar και ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες, παίρνουμε την ταυτότητα

$$\frac{\left(\mathbb{E}_{F,Y}\,\|P_F(Y)\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}_{F,Y}\,\|P_F(Y)\|_2^2\right)^{1/2}} = \frac{\left(\mathbb{E}_U\,h_{k,p}(U)\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}\,h_{k,2}(U)\right)^{1/2}}, \tag{5.2.7}$$

όπου η τελευταία μέση τιμή είναι ως προς το μέτρο Haar στην $SO(n)$ και, για κάθε $U \in SO(n)$, θέτουμε

$$h_{k,p}(U) = k\omega_k \int_0^\infty t^{p+k-1}\pi_{U(E_0)}g(tu(\theta_0))\,dt$$

για κάποιον σταθερό $E_0 \in G_{n,k}$ και κάποιο σταθερό $\theta_0 \in S_{E_0}$. Παρατηρήστε ότι, ακολουθώντας τον Klartag, ο Fleury περιόριζε το διάστημα ολοκλήρωσης στο $[0, \delta\sqrt{k}]$ για κατάλληλη απόλυτη σταθερά $\delta > \sqrt{2}$.

3. Στόχος μας είναι να δώσουμε άνω φράγμα για το δεξιό μέλος της (5.2.7). Για τον σκοπό αυτό χρειαζόμαστε άνω φράγμα για την log-Lipschitz σταθερά $A_{k,p}$ της συνάρτησης $h_{k,p}$. Η εκτίμηση των Guédon και E. Milman, η οποία είναι η καλύτερη γνωστή αυτήν την στιγμή, είναι η εξής.

Θεώρημα 5.2.5. *Αν $p \geqslant -k+1$ τότε*

$$A_{k,p} \leqslant C\,[\max(k,p)]^{3/2}.$$

4. Τα υπόλοιπα εργαλεία της απόδειξης είναι τα ίδια με αυτά που εμφανίζονταν στο επιχείρημα του Fleury. Αντικαθιστούν κάποια κομμάτια της αρχικής προσέγγισης του Klartag και βελτιώνονται ακόμα περισσότερο από τους Guédon και E. Milmam. Βασικό ρόλο παίζουν η λογαριθμική ανισότητα Sobolev και οι αντίστροφες ανισότητες Hölder που προκύπτουν από αυτήν, για log-Lipschitz συναρτήσεις $f : SO(n) \to \mathbb{R}$.

5.2α′ Μια παραλλαγή των L_q-κεντροειδών σωμάτων

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.5 θα χρειαστούμε μια παραλλαγή των L_q-κεντροειδών σωμάτων, τα λεγόμενα *μονόπλευρα L_q-κεντροειδή σώματα*. Αν $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα, για κάθε $q\geqslant 1$ ορίζουμε ένα κυρτό σώμα $Z_q^+(f)$ με συνάρτηση στήριξης

$$h_{Z_q^+(f)}(y)=\left(2\int_{\mathbb{R}^n}\langle x,y\rangle_+^q f(x)dx\right)^{1/q},$$

όπου $a_+=\max(a,0)$. Στην περίπτωση που η f είναι άρτια, είναι φανερό ότι $Z_q^+(f)=Z_q(f)$. Σε κάθε περίπτωση, εύκολα ελέγχουμε ότι

$$Z_q^+(f)\subseteq 2^{1/q}Z_q(f).$$

Θα χρειαστούμε δύο αποτελέσματα για τα σώματα $Z_q^+(f)$. Το πρώτο δίνει μια εκτίμηση της γεωμετρικής απόστασης του $Z_q^+(g)$ από την B_2^n, όπου g είναι η πυκνότητα του $(X+G_n)/\sqrt{2}$.

Πρόταση 5.2.6. *Έστω X ένα ισοτροπικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$ με λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f. Θεωρούμε το τυχαίο διάνυσμα $Y=(X+G_n)/\sqrt{2}$ και συμβολίζουμε την πυκνότητά του με g. Τότε, για κάθε $q\geqslant 2$ έχουμε*

$$c_1\sqrt{q}\,B_2^n\subseteq Z_q^+(g)\subseteq c_2q\,B_2^n,$$

όπου $c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα,

$$\mathrm{dist}(Z_q^+(g),B_2^n)\leqslant C_1\sqrt{q}.$$

Για την απόδειξη της Πρότασης 5.2.6 θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα του Grünbaum (Λήμμα 2.2.8) στην ακόλουθη μορφή: αν X_1 είναι τυχαία μεταβλητή στο $\mathbb{R}$ με λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα και βαρύκεντρο το 0, τότε

$$e^{-1}\leqslant\mathbb{P}\left(X_1\geqslant 0\right)\leqslant 1-e^{-1}. \tag{5.2.8}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\theta\in S^{n-1}$ και ορίζουμε $Y_1=\pi_\theta(Y)$, $X_1=\pi_\theta(X)$ και $G_1=\pi_\theta(G_n)$. Τότε,

$$h^q_{Z_q^+(g)}(\theta)=2\mathbb{E}(Y_1)_+^q=\frac{2}{2^{q/2}}\mathbb{E}(X_1+G_1)_+^q\geqslant\frac{2}{2^{q/2}}\mathbb{E}[(G_1)_+^q]\,\mathbb{P}(X_1\geqslant 0).$$

Από την (5.2.8) έχουμε $\mathbb{P}\left(X_1\geqslant 0\right)\geqslant 1/e$, απ' όπου έπεται ότι

$$h^q_{Z_q^+(g)}(\theta)\geqslant\frac{1}{e2^{q/2}}\mathbb{E}\,|G_1|^q,$$

αν χρησιμοποιήσουμε και την συμμετρία του G_1. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$c_1\sqrt{q} \leqslant \big(\mathbb{E}\,|G_1|^q\big)^{1/q} \leqslant c_2\sqrt{q}$$

για κάθε $q \geqslant 1$, παίρνουμε τον αριστερό εγκλεισμό.

Στην συνέχεια παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}h^q_{Z_q^+(g)}(\theta) \leqslant h^q_{Z_q(g)}(\theta) &= \mathbb{E}\,|Y_1|^q = \mathbb{E}\left|\frac{X_1+G_1}{\sqrt{2}}\right|^q \\ &\leqslant \frac{2^{q-1}}{2^{q/2}}\mathbb{E}\left(|X_1|^q + |G_1|^q\right).\end{aligned}$$

Αφού

$$\big(\mathbb{E}\,|X_1|^q\big)^{1/q} \leqslant cq\big(\mathbb{E}\,|X_1|^2\big)^{1/2} = cq,$$

έπεται και ο δεύτερος εγκλεισμός. □

Στην συνέχεια, εισάγουμε μια παραλλαγή των σωμάτων $K_p(f)$. Η διαφοροποίηση στον ορισμό δεν είναι σημαντική.

Ορισμός 5.2.7. Για κάθε λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $w : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ με $0 < \int w < \infty$ και $w(0) > 0$, και για κάθε $q \geqslant 1$, ορίζουμε

$$\|x\| = \|x\|_{K_q(w)} := \left(\int_0^\infty qt^{q-1}w(tx)dt\right)^{-1/q}.$$

Πρόταση 5.2.8. *Η συνάρτηση $\|\cdot\|$ ικανοποιεί τα εξής: $\|x\| \geqslant 0$ με ισότητα αν και μόνο αν $x = 0$, $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$, και $\|\lambda x\| = \lambda\|x\|$ για κάθε $\lambda \geqslant 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^m$.*

Για την απόδειξη της τριγωνικής ανισότητας, βλέπε Θεώρημα 2.3.24. Η Πρόταση 5.2.8 μας λέει ότι η $\|\cdot\|_{K_q(w)}$ έχει όλες τις ιδιότητες μιας νόρμας, με την εξαίρεση ότι μπορεί να μην είναι άρτια. Ορίζουμε

$$\|x\|_{\widehat{K}_q(w)} := \max\left(\|x\|_{K_q(w)}, \|-x\|_{K_q(w)}\right).$$

Δηλαδή, η μοναδιαία μπάλα αυτής της νόρμας είναι το

$$\widehat{K}_q(w) = K_q(w) \cap (-K_q(w)).$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε

$$\big|\, \|x\|_{K_q(w)} - \|y\|_{K_q(w)} \,\big| \leqslant \|x-y\|_{\widehat{K}_q(w)} \tag{5.2.9}$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^m$. Από την συμμετρία της B_2^m έχουμε ότι αν $c_1B_2^m\subseteq K\subseteq c_2B_2^m$ τότε $c_1B_2^m\subseteq K\cap(-K)\subseteq c_2B_2^m$. Εφαρμόζοντας αυτήν την παρατήρηση για το $K_q(w)$ βλέπουμε ότι

$$\frac{\|x\|_{\widehat{K}_q(w)}}{\|y\|_{K_q(w)}}\leqslant \mathrm{dist}(K_q(w),B_2^m)\frac{\|x\|_2}{\|y\|_2} \tag{5.2.10}$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^m$.

Θα χρειαστούμε το επόμενο θεώρημα, το οποίο συγκρίνει το $K_{m+q}(f)$ με το $Z_q^+(K_{m+q}(f))$.

Θεώρημα 5.2.9. *Έστω $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα. Για κάθε $q\geqslant 1$ έχουμε*

$$\begin{aligned}C_1Z_q^+(K_{m+q}(f)) &\subseteq |K_{m+q}(f)|^{1/q}K_{m+q}(f)\\ &\subseteq C_2\left(\frac{\Gamma(m+q+1)}{\Gamma(m)\Gamma(q+1)}\right)^{1/q} Z_q^+(K_{m+q}(f)),\end{aligned}$$

όπου $C_1,C_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε μια σειρά από λήμματα. Πρώτα, θυμηθείτε την ανισότητα

$$e^{-m(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\frac{K_p(f)}{f(0)^{1/p}}\subseteq\frac{K_q(f)}{f(0)^{1/q}}\subseteq\frac{\Gamma(q+1)^{1/q}}{\Gamma(p+1)^{1/p}}\frac{K_p(f)}{f(0)^{1/p}}, \tag{5.2.11}$$

η οποία ισχύει για κάθε κεντραρισμένη λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα f και για κάθε $q\geqslant p\geqslant 1$. Είναι ακριβώς ισοδύναμη με την (2.3.34).

Παρακάτω, χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$H_\theta^+=\{x\in\mathbb{R}^m:\langle x,\theta\rangle\geqslant 0\}.$$

Λήμμα 5.2.10. *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Σταθεροποιούμε $\theta\in S^{n-1}$ και ορίζουμε $f_\theta=\pi_\theta(\mathbf{1}_K)$. Τότε,*

$$\left(\frac{f_\theta(0)}{2\|f_\theta\|_\infty}\right)^{1/q}\left(\frac{\Gamma(m)\Gamma(q+1)}{\Gamma(m+q+1)}\right)^{1/q}h_K(\theta)\leqslant\frac{h_{Z_q^+(K)}(\theta)}{(2|K\cap H_\theta^+|)^{1/q}}\leqslant h_K(\theta).$$

Απόδειξη. Η δεξιά ανισότητα είναι απλή: γράφουμε

$$\begin{aligned}h_{Z_q^+(K)}(\theta) &= \left(2\int_0^{h_K(\theta)}t^qf_\theta(t)\,dt\right)^{1/q}\\ &\leqslant\left(2\int_0^{h_K(\theta)}f_\theta(t)\,dt\right)^{1/q}h_K(\theta)=(2|K\cap H_\theta^+|)^{1/q}h_K(\theta).\end{aligned}$$

Για την αριστερή ανισότητα επαναλαμβάνουμε την απόδειξη του Λήμματος 3.1.2. Έχουμε

$$f_\theta(t) \geqslant \Big(1 - \frac{t}{h_K(\theta)}\Big)^{m-1} f_\theta(0)$$

για κάθε $t \in [0, h_K(\theta)]$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned} h^q_{Z_q^+(K)}(\theta) &= \int_0^{h_K(\theta)} t^q f_\theta(t)dt \geqslant \int_0^{h_K(\theta)} t^q \Big(1 - \frac{t}{h_K(\theta)}\Big)^{m-1} f_\theta(0)dt \\ &= f_\theta(0) h_K^{q+1}(\theta) \int_0^1 s^q (1-s)^{m-1} ds \\ &= \frac{\Gamma(m)\Gamma(q+1)}{\Gamma(q+m+1)} f_\theta(0) h_K^{q+1}(\theta). \end{aligned}$$

Παρατηρώντας ότι

$$f_\theta(0) h_K(\theta) = \frac{f_\theta(0)}{\|f_\theta\|_\infty} \|f_\theta\|_\infty h_K(\theta) \geqslant \frac{f_\theta(0)}{\|f_\theta\|_\infty} |K \cap H_\theta^+|,$$

παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Λήμμα 5.2.11. *Έστω f μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα στο $\mathbb{R}$ και έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Αν*

$$\varepsilon \leqslant \int_0^\infty f(x)dx \leqslant 1 - \varepsilon,$$

τότε

$$f(0) \geqslant \varepsilon \|f\|_\infty.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$F(x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt \quad \text{και} \quad G(x) = 1 - F(x) = \int_x^\infty f(t)dt.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Prékopa-Leindler ελέγχουμε ότι οι F και G είναι λογαριθμικά κοίλες. Συνεπώς, οι συναρτήσεις f/F και $-f/G$ είναι φθίνουσες. Έπεται ότι

$$f(x) \leqslant f(y) \max\left\{\frac{F(x)}{F(y)}, \frac{G(x)}{G(y)}\right\}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Από την υπόθεση του Λήμματος έχουμε $F(0) \geqslant \varepsilon$ και $G(0) \geqslant \varepsilon$. Θέτοντας $y = 0$ παίρνουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 5.2.12. *Έστω $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση με βαρύκεντρο το 0. Για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ έχουμε*

$$\left(\frac{|K_{m+q}(f)\cap H_\theta^+|}{|K_{m+q}(f)|}\right)^{1/q}\geqslant c,$$

όπου $c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(0)=1$ και ότι η f είναι πυκνότητα. Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$|K\cap H_\theta^+|=\frac{1}{m}\int_{S^{m-1}\cap H_\theta^+}\|u\|_K^{-m}du, \tag{5.2.12}$$

η οποία ελέγχεται εύκολα με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες, για κάθε κυρτό σώμα K το οποίο περιέχει το 0. Από την (5.2.11) βλέπουμε ότι, για κάθε $u\in S^{m-1}$,

$$e^{-\frac{mq}{m+q}}\|u\|_{K_m(f)}^{-m}\leqslant\|u\|_{K_{m+q}(f)}^{-m}\leqslant\frac{\Gamma(m+q+1)^{\frac{m}{m+q}}}{\Gamma(m+1)}\|u\|_{K_m(f)}^{-m}.$$

Βάζοντας αυτές τις ανισότητες στην (5.2.12) και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling βλέπουμε ότι

$$e^{-q}\leqslant\frac{|K_{m+q}(f)\cap H_\theta^+|}{|K_m(f)\cap H_\theta^+|}\leqslant C^q \tag{5.2.13}$$

για κάθε $\theta\in S^{m-1}$. Χρησιμοποιώντας πάλι την (5.2.12), τον ορισμό του $K_m(f)$ και πολικές συντεταγμένες, βλέπουμε ότι

$$|K_m(f)\cap H_\theta^+|=\int_{H_\theta^+}f(x)dx=\mathbb{P}\left(W_1\geqslant 0\right),$$

όπου W_1 είναι η τυχαία μεταβλητή $\pi_\theta(f)$ στο $\mathbb{R}$. Αφού η W_1 είναι λογαριθμικά κοίλη και κεντραρισμένη, η (5.2.8) δείχνει ότι

$$\frac{|K_m(f)\cap H_\theta^+|}{|K_m(f)|}\geqslant\frac{1}{e}. \tag{5.2.14}$$

Γράφοντας $|K_{m+q}(f)|=|K_{m+q}(f)\cap H_\theta^+|+|K_{m+q}(f)\cap H_{-\theta}^+|$ και χρησιμοποιώντας τις (5.2.13) και (5.2.14), ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.9. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.2.10 για το $K=K_{m+q}(f)$ και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.2.12 βλέπουμε ότι, για κάθε $\theta\in S^{m-1}$,

$$c\left(\frac{f_\theta(0)}{\|f_\theta\|_\infty}\right)^{1/q}\left(\frac{\Gamma(m)\Gamma(q+1)}{\Gamma(m+q+1)}\right)^{1/q}\leqslant|K_{m+q}(f)|^{-1/q}\frac{h_{Z_q^+(K_{m+q}(f))}(\theta)}{h_{K_{m+q}(f)}(\theta)}\leqslant C.$$

Συνδυάζοντας το Λήμμα 5.2.11 με το Λήμμα 5.2.12 συμπεραίνουμε ότι

$$\min_{\theta\in S^{m-1}}\left(\frac{f_\theta(0)}{\|f_\theta\|_\infty}\right)^{1/q}\geqslant c_1>0,$$

άρα

$$c_2\left(\frac{\Gamma(m)\Gamma(q+1)}{\Gamma(m+q+1)}\right)^{1/q}K_{m+q}(f)\subseteq |K_{m+q}(f)|^{-1/q}Z_q^+(K_{m+q}(f))\subseteq CK_{m+q}(f).$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

5.2β′ Η log-Lipschitz σταθερά της $h_{k,p}$

Γράφουμε $M_{k,l}$ για το σύνολο όλων των $k\times l$ πραγματικών πινάκων και θέτουμε $M_n:=M_{n,n}$. Θεωρούμε την

$$SO(n)=\{U\in M_n : U^*U=I_n,\, \det(U)=1\}$$

εφοδιασμένη με την συνήθη αναλλοίωτη μετρική Riemann d. Σταθεροποιούμε μια ορθοκανονική βάση στον $\mathbb{R}^n$ και παραγωγίζοντας την $U^*U=I_n$ βλέπουμε ότι ο εφαπτόμενος χώρος $T_{I_n}(SO(n))$ στην ταυτοτική απεικόνιση $I_n\in SO(n)$ μπορεί να ταυτιστεί με το σύνολο όλων των αντισυμμετρικών πινάκων

$$\{B\in M_n : B^*+B=0\}.$$

Για κάθε $B\in T_{I_n}(SO(n))$ θέτουμε

$$|B|^2=\langle B,B\rangle := d_{I_n}(B,B)=\frac{1}{2}\|B\|_{\rm HS}^2,$$

όπου

$$\|A\|_{\rm HS}^2={\rm tr}(A^*A)=\sum_{i=1}^k\sum_{j=1}^l a_{ij}^2$$

για κάθε $A=(a_{ij})\in M_{k,l}$.

Έχουμε θεωρήσει ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα X στον $\mathbb{R}^n$ και έχουμε θέσει $Y=(X+G_n)/\sqrt{2}$, όπου G_n είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Συμβολίζουμε με g την πυκνότητα του Y, σταθεροποιούμε k,p, $E_0\in G_{n,k}$ και $\theta_0\in S_{E_0}$, και ορίζουμε

$$h_{k,p}(U)=n\omega_n\int_0^\infty t^{p+k-1}\pi_{U(E_0)}g(tU(\theta_0))\,dt.$$

Θεώρημα 5.2.13. *Η log-Lipschitz σταθερά $A_{k,p}$ της $h_{k,p}$ ικανοποιεί την*

$$A_{k,p} \leqslant C \max(k,p)\, \mathrm{dist}(Z^+_{\max(k,p)}(g), B_2^n),$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $2 \leqslant k \leqslant n/2$. Αφού ο $E_0 \in G_{n,k}$ είναι τυχών, από την συμμετρία και την μεταβατικότητα της $SO(n)$ βλέπουμε ότι αρκεί να εκτιμήσουμε την $\|\nabla_{U_0} \log h_{k,p}\|_2$ στο σημείο $U_0 = I$. Θεωρούμε μια ορθοκανονική βάση $\{\theta_0, e_2, \ldots, e_k\}$ του E_0 και την επεκτείνουμε σε μια ορθοκανονική βάση $\{\theta_0, e_2, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$.

Ο αντισυμμετρικός πίνακας $M = \nabla_I \log h_{k,p} \in T_I(SO(n))$ γράφεται στην μορφή

$$M = \begin{pmatrix} M_1 & M_2 \\ -M_2^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_1 = \begin{pmatrix} 0 & V_1 \\ -V_1^* & 0 \end{pmatrix}, \qquad M_2 = \begin{pmatrix} V_2 \\ V_3 \end{pmatrix}$$

όπου $M_1 \in M_{k,k}$, $M_2 \in M_{k,n-k}$, $V_1 \in M_{1,k-1}$, $V_2 \in M_{1,n-k}$ και $V_3 \in M_{k-1,n-k}$. Αρκεί να παρατηρήσουμε ότι ο κάτω δεξιός $(n-k) \times (n-k)$ υποπίνακας του M είναι ίσος με 0 γιατί κάθε στροφή του $E_0^\perp$ αφήνει την $\pi_{U(E_0)}(g)$, άρα και την $h_{k,p}$, αμετάβλητη. Επίσης, ο κάτω δεξιός $(k-1) \times (k-1)$ υποπίνακας του M_1 είναι ίσος με 0 γιατί κάθε στροφή που σταθεροποιεί το θ_0 και δρά αναλλοίωτα στον E_0 αφήνει την $h_{k,p}$ αμετάβλητη. Έπεται ότι

$$\|\nabla_I \log h_{k,p}\|_2^2 = \|V_1\|_{\mathrm{HS}}^2 + \|V_2\|_{\mathrm{HS}}^2 + \|V_3\|_{\mathrm{HS}}^2.$$

Θα αναλύσουμε αυτούς τους τρεις όρους χωριστά.

Για κάθε $i = 1, 2, 3$ γράφουμε T_i για τον υπόχωρο του $T_I(SO(n))$ που αποτελείται από εκείνους τους πίνακες της παραπάνω μορφής που ικανοποιούν την $V_j = 0$ αν $j \neq i$. Για κάθε $B \in T_i$, μια *κίνηση τύπου-i* είναι μια γεωδαισιακή $s \mapsto U_s := \exp_{I_n}(sB)$ στην $SO(n)$. Παρατηρήστε ότι $\frac{d}{ds} U_s\big|_{s=0} = B$, συνεπώς

$$\frac{d}{ds} \log h_{k,p}(U_s)\big|_{s=0} = \langle \nabla_{I_n} \log h_{k,p}, B \rangle.$$

Τότε,

$$\|V_i\|_{\mathrm{HS}} = \sup \left\{ \frac{\langle \nabla_{I_n} \log h_{k,p}, B \rangle}{|B|} : 0 \neq B \in T_i \right\},$$

απ' όπου βλέπουμε ότι αρκεί να εξασφαλίσουμε άνω φράγμα για την παράγωγο της $\log h_{k,p}$ που επάγεται από κάθε κίνηση τύπου-i.

Κινήσεις τύπου-1

Έστω $B_1 \in T_1$ με $|B| = 1$. Θεωρούμε μια κίνηση τύπου-1 $\{U_s\}$ και γράφουμε

$$\xi_0 = \frac{d}{ds} U_s(\theta_0)\big|_{s=0} \in T_{\theta_0} S(\mathbb{R}^n).$$

Χρησιμοποιώντας την φυσιολογική εμφύτευση $T_\theta S(\mathbb{R}^n) \subset T_\theta\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^n$ βλέπουμε ότι η U_s είναι στροφή στο $\{\theta_0, \xi_0\}$-επίπεδο και ότι το ξ_0 είναι κάθετο στο θ_0 στον E_0, άρα $U_s(E_0) = E_0$. Από την υπόθεση ότι $|B| = 1$ προκύπτει ότι $\|\xi_0\|_2 = 1$. Τότε, από τον ορισμό της $h_{k,p}$ έχουμε

$$h_{k,p}(U_s) = k\omega_k \int_0^\infty t^{p+k-1}\pi_{E_0}g(tU_s(\theta_0))dt = c_{p.k}\|U_s(\theta_0)\|_{K_{k+p}(\pi_{E_0}g)}^{-(k+p)},$$

όπου $c_{p,k} = k\omega_k/(k+p)$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\big|\langle \nabla_{I_n} \log h_{k,p}, B\rangle\big| &= \left|\frac{d}{ds}\log h_{k,p}(U_s)\big|_{s=0}\right| \\ &= (k+p)\left|\frac{d}{ds}\log \|U_s(\theta_0)\|_{K_{k+p}(\pi_{E_0}g)}\big|_{s=0}\right|.\end{aligned}$$

Από την τριγωνική ανισότητα (5.2.9) παίρνουμε

$$\left|\frac{d}{ds}\|U_s(\theta_0)\|_{K_{k+p}(\pi_{E_0}g)}\right| \leqslant \left\|\frac{d}{ds}U_s(\theta_0)\right\|_{\widehat{K}_{k+p}(\pi_{E_0}(g))},$$

και χρησιμοποιώντας την (5.2.10) συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}|\langle \nabla_{I_n} \log h_{k,p}, B\rangle| &\leqslant (k+p)\frac{\|\xi_0\|_{\widehat{K}_{k+p}(\pi_{E_0}g)}}{\|\theta_0\|_{K_{k+p}(\pi_{E_0}g)}} \\ &\leqslant (k+p)\mathrm{dist}(K_{k+p}(\pi_{E_0}g), B_{E_0}).\end{aligned}$$

Κινήσεις τύπου-2

Έστω $B_1 \in T_2$ με $|B| = 1$. Θεωρούμε μια κίνηση τύπου-2 $\{U_s\}$ και θέτουμε $\theta_s := U_s(\theta_0)$ και

$$\xi_s := \frac{d}{ds}\theta_s \in T_{\theta_s}S(\mathbb{R}^n).$$

Παρατηρούμε ότι $\xi_0 \in E_0^\perp$ και ότι η U_s είναι στροφή στο $\{\theta_0, \xi_0\} = \{\theta_s, \xi_s\}$-επίπεδο. Από την υπόθεση ότι $|B| = 1$ έπεται ότι $\|\xi_0\|_2 = 1$. Γράφουμε E_1 για το ορθογώνιο συμπλήρωμα του θ_0 στον E_0. Τότε, η U_s στρέφει τον E_0 στον

$$E_s := U_s(E_0) = E_1 \oplus \mathrm{span}\{\theta_s\},$$

άρα η U_s αφήνει τον $H := E_0 \oplus \mathrm{span}\{\xi_0\} = E_s \oplus \mathrm{span}\{\xi_s\} \in G_{n,k+1}$ αναλλοίωτο. Συνεπώς,

$$h_{k,p}(U_s) = k\omega_k \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty t^{p+k-1}\pi_H g(t\theta_s + r\xi_s)drdt.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $r = vt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} h_{k,p}(U_s) &= k\omega_k \int_0^\infty \int_{-\infty}^\infty t^{p+k} \pi_H g(t(\theta_s + v\xi_s)) dv dt \\ &= c_{p,k} \int_{-\infty}^\infty \|\theta_s + v\xi_s\|_{K_{k+p+1}(\pi_H g)}^{-(k+p+1)} dv, \end{aligned}$$

όπου $c_{p,k} = k\omega_k/(k+p+1)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\frac{d}{ds}\xi_s = -\theta_s$, μαζί με την (5.2.9) και την (5.2.10) για την $\|\cdot\|_{K_{k+p+1}(\pi_H g)}$, γράφουμε

$$\begin{aligned} |\langle \nabla_{I_n} \log h_{k,p}, B\rangle| &= \left| \frac{d}{ds} \log h_{k,p}(U_s)\big|_{s=0} \right| \\ &\leqslant (k+p+1) \sup_{v\in\mathbb{R}} \frac{\|\xi_0 - v\theta_0\|_{\widehat{K}_{k+p+1}(\pi_H g)}}{\|\theta_0 + v\xi_0\|_{K_{k+p+1}(\pi_H g)}} \\ &\leqslant (k+p+1) \mathrm{dist}(K_{k+p+1}(\pi_H g), B_H) \sup_{v\in\mathbb{R}} \frac{\|\xi_0 - v\theta_0\|_2}{\|\theta_0 + v\xi_0\|_2} \\ &= (k+p+1)\mathrm{dist}(K_{k+p+1}(\pi_H g), B_H), \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε και το γεγονός ότι $\theta_0 \perp \xi_0$.

Κινήσεις τύπου-3

Τέλος, εξετάζουμε τις κινήσεις τύπου-3: αυτές δρούν σε υποχώρους διάστασης $(k-1)(n-k)$. έστω $0 \neq B \in T_3$ ο οποίος παράγει μια κίνηση τύπου-3 $\{U_s\}$. Θέτουμε $e_{s,j} := U_s(e_j)$ και $f_j := \frac{d}{ds} e_{s,j}|_{s=0}$, $j = 2, \dots, k$. Τότε, $U_s(\theta_0) = \theta_0$ και $f_j \in E_0^\perp$ για κάθε j. Ορίζουμε $F_0 := \mathrm{span}\{f_2, \dots, f_k\}$ και, θεωρώντας μια μικρή διαταραχή του B αν χρειαστεί, υποθέτουμε ότι $\dim(F_0) = k-1$. Θέτουμε $H = E_0 \oplus F_0 \in G_{n,2k-1}$ και παρατηρούμε ότι ο H είναι αναλλοίωτος από τον U_s, γιατί ο U_s είναι ισομετρία και δρά ταυτοτικά στο ορθογώνιο συμπλήρωμά του. Έπεται ότι $H = E_s \oplus F_s$, όπου $E_s := U_s(E_0)$ και $F_s := U_s(F_0)$. Συνεπώς,

$$h_{k,p}(U_s) = k\omega_k \int_0^\infty \int_{F_s} t^{p+k-1} \pi_H g(t\theta_0 + y) dy dt.$$

Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $y = zt$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} h_{k,p}(U_s) &= k\omega_k \int_0^\infty \int_{F_s} t^{p+2k-2} \pi_H g(t(\theta_0 + z)) dz dt \\ &= c_{p,k} \int_{F_s} \|\theta_0 + z\|_{K_{2k+p-1}(\pi_H g)}^{-(2k+p-1)} dz, \end{aligned}$$

όπου $c_{p,k} = k\omega_k/(2k+p-1)$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο U_s είναι ορθογώνιος, ξαναγράφουμε την τελευταία σχέση στην μορφή

$$h_{k,p}(U_s) = c_{p,k}\int_{F_0} \|\theta_0 + U_s(z)\|_{K_{2k+p-1}(\pi_H g)}^{-(2k+p-1)} dz.$$

Τότε, η τριγωνική ανισότητα (5.2.9) για την $\|\cdot\|_{K_{2k+p-1}(\pi_H g)}$ μας δίνει

$$\begin{aligned} |\langle \nabla_{I_n} \log h_{k,p}, B\rangle| &= \left| \frac{d}{ds}\log h_{k,p}(U_s)\big|_{s=0}\right| \\ &\leqslant (2k+p-1)\sup_{z\in F_0} \frac{\|Bz\|_{\widehat{K}_{2k+p-1}(\pi_H g)}}{\|\theta_0 + z\|_{K_{2k+p-1}(\pi_H g)}}, \end{aligned}$$

και από την (5.2.10) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \frac{|\langle \nabla_{I_n} \log h_{k,p}, B\rangle|}{(2k+p-1)\mathrm{dist}(K_{2k+p-1}(\pi_H g), B_J)} &\leqslant \sup_{z\in F_0} \frac{\|Bz\|_2}{\|\theta_0+z\|_2} \\ &\leqslant \|B\|_{\mathrm{op}} \sup_{z\in F_0}\frac{\|z\|_2}{\sqrt{1+\|z\|_2^2}} \\ &\leqslant \frac{\|B\|_{\mathrm{HS}}}{\sqrt{2}} = |B|, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $\theta_0 \perp F_0$ και την ανισότητα $\|B\|_{\mathrm{op}} \leqslant \|B\|_{\mathrm{HS}}/\sqrt{2}$ η οποία ισχύει για κάθε αντισυμμετρικό πίνακα (και είναι άμεση συνέπεια της ανισότητας Cauchy-Schwarz).

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του θεωρήματος, πρέπει να εκτιμήσουμε την απόσταση του $K_{m+p}(\pi_H g)$ από την Ευκλείδεια μπάλα, για τυχόντα $H \in G_{n,m}$ με $m \simeq k$.

Πρόταση 5.2.14. *Έστω $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ μια λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα με βαρύκεντρο το 0. Για κάθε $p \geqslant -m+1$, έχουμε*

$$\mathrm{dist}(K_{m+p}(f), B_2^m) \leqslant C\max\left(\frac{m}{m+p}, 1\right)\mathrm{dist}(Z^+_{\max(p,m)}(f), B_2^m),$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Αρχικά συγκρίνουμε το $K_{m+q}(\pi_H g)$ με το $Z_q^+(\pi_H g)$ για κατάλληλη τιμή του q. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.2.9 παίρνουμε

$$\begin{aligned} C_1 Z_p^+(K_{m+p}(f)) &\subseteq |K_{m+p}(f)|^{1/p} K_{m+p}(f) \\ &\subseteq C_2\left(\frac{\Gamma(m+p+1)}{\Gamma(m)\Gamma(p+1)}\right)^{1/p} Z_p^+(K_{m+p}(f)), \end{aligned}$$

όπου $C_1, C_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Από την άλλη πλευρά, με ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες βλέπουμε ότι

$$Z_p^+(K_{m+p}(f)) = Z_p^+(f),$$

οπότε, συνδυάζοντας τα παραπάνω και χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling έχουμε

$$\mathrm{dist}(K_{m+p}(f), B_2^m) \leqslant C\frac{m+p}{p}\mathrm{dist}(Z_p^+(f), B_2^m).$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό μας στην περίπτωση $p \geqslant m$. Για την περίπτωση $p < m$ χρησιμοποιούμε την (5.2.11) για να γράψουμε

$$\begin{aligned}\mathrm{dist}(K_{m+p}(f), B_2^m) &\leqslant C_1\frac{m+q}{m+p}\mathrm{dist}(K_{m+q}(f), B_2^m)\\ &\leqslant C_2\frac{m+q}{m+p}\frac{m+q}{q}\mathrm{dist}(Z_q^+(f), B_2^m)\end{aligned}$$

για κάθε $q \geqslant \max(p,1)$. Θέτοντας $q = m$ ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.13. Το θεώρημα προκύπτει άμεσα αν εφαρμόσουμε την Πρόταση 5.2.14 για την $f = \pi_H g$. □

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 5.2.13 με την Πρόταση 5.2.6 παίρνουμε το Θεώρημα 5.2.5, το οποίο ξαναδιατυπώνουμε εδώ:

Θεώρημα 5.2.15 (log-Lipschitz σταθερά)**.** *Αν $p \geqslant -k+1$ τότε*

$$A_{k,p} \leqslant C\,[\max(k,p)]^{3/2}.$$

5.2γ′ Εκτιμήσεις για τις ροπές της Ευκλείδειας νόρμας

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε μια έκδοση του Θεωρήματος 5.2.4, αντικαθιστώντας πρώτα το X με το Y.

Θεώρημα 5.2.16. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $Y = (X+G_n)/\sqrt{2}$, όπου G_n είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα. Τότε, για κάθε $|p| \leqslant c\sqrt{n}$ έχουμε*

$$1 - C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}} \leqslant \frac{\left(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^p\right)^{1/p}}{\left(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^2\right)^{1/2}} \leqslant 1 + C\frac{\sqrt{|p-2|}}{n^{1/4}}. \tag{5.2.15}$$

Το πρώτο βήμα είναι να ξαναγράψουμε τον λόγο $\left(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^p\right)^{1/p} / \left(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^2\right)^{1/2}$ χρησιμοποιώντας συναρτήσεις της μορφής $h_{k,s}$ στην $SO(n)$.

Λήμμα 5.2.17. *Έστω $0 \neq |p| \leqslant \frac{n-1}{2}$ και έστω k ένας ακέραιος στο $[2,n]$ ο οποίος ικανοποιεί την $|p| \leqslant \frac{k-1}{2}$. Τότε,*

$$\mathbb{E}\,\|Y\|_2^p = c_{n,p}\mathbb{E}_U\,[h_{k,p}(U)],$$

όπου

$$c_{n,p} = \frac{\Gamma\left(\frac{p+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right)}.$$

Απόδειξη. Θυμηθείτε ότι υπάρχει σταθερά $a_{n,k,p} > 0$ ώστε

$$\|x\|_2^p = a_{n,k,p}\mathbb{E}_F\|P_F(x)\|_2^p.$$

Γράφουμε

$$\frac{\mathbb{E}\,\|Y\|_2^p}{\mathbb{E}\,\|G_n\|_2^p} = \frac{\mathbb{E}_{Y,F}\,\|P_F(Y)\|_2^p}{\mathbb{E}_{Y,F}\,\|P_F(G_n)\|_2^p} = \frac{\mathbb{E}_{Y,F}\,\|P_F(Y)\|_2^p}{\mathbb{E}\,\|G_k\|_2^p}$$

και ελέγχουμε ότι

$$\mathbb{E}\,\|G_s\|_2^p = \frac{2^{p/2}\Gamma\left(\frac{p+s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}.$$

Άρα,

$$\mathbb{E}\,\|Y\|_2^p = \frac{\Gamma\left(\frac{p+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right)}\mathbb{E}_{Y,F}\|P_F(Y)\|_2^p.$$

Έχουμε ορίσει

$$h_{k,p}(U) = k\omega_k\int_0^\infty t^{p+k-1}\pi_{U(E_0)}g(tu(\theta_0))\,dt$$

για κάποιον σταθερό $E_0 \in G_{n,k}$ και κάποιο σταθερό $\theta_0 \in S_{E_0}$. Υπολογίζουμε την $\mathbb{E}_{Y,F}\|P_F(Y)\|_2^p$ ολοκληρώνοντας σε πολικές συντεταγμένες στον $F \in G_{n,k}$, και κατόπιν, χρησιμοποιώντας το $SO(n)$-αναλλοίωτο των μέτρων Haar στις $G_{n,k}$, S_F και $SO(n)$, βλέπουμε ότι μπορεί να γραφτεί στην μορφή $\mathbb{E}_U\,[h_{k,p}(U)]$. □

Λήμμα 5.2.18. *Έστω $0 \neq |p| \leqslant \frac{n-1}{2}$ και έστω k ένας ακέραιος στο $[2,n]$ ο οποίος ικανοποιεί την $|p| \leqslant \frac{k-1}{2}$. Τότε,*

$$\frac{d}{dp}\log\left(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^p)^{1/p}\right) \leqslant \frac{c}{p^2n}(2A_{k,p}^2 + 3A_{k,0}^2) + \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)}\right)$$
$$+\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma\left(\frac{p+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right)}\right).$$

Απόδειξη. Αρχικά γράφουμε

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dp}\log\left(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^p)^{1/p}\right)\\&=\frac{d}{dp}\log\left((\mathbb{E}_U[h_{k,p}(U)])^{1/p}\right)+\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma\left(\frac{p+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right)}\right).\end{aligned}$$

Για κάθε $U\in SO(n)$ ορίζουμε ένα μέτρο (όχι αναγκαστικά πιθανότητας) μ_U στο $\mathbb{R}^+$ με πυκνότητα $k\omega_k t^{k-1}\pi_{U(F_0)}g(tU(\theta_0))$. Στη συνέχεια, ορίζουμε το μέτρο πιθανότητας $\mu_{k,p}:=\mathbb{E}_U\mu_U$ στο $[0,\infty)$. Με αυτούς τους ορισμούς έχουμε

$$h_{k,p}(U)=\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p)\quad \text{και}\quad \mathbb{E}_U\left[h_{k,p}(U)\right]=\mathbb{E}_U(\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p))=\mathbb{E}_{\mu_{k,p}}(t^p). \tag{5.2.16}$$

Για κάθε χώρο μέτρου (Ω,μ) και κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f:\Omega\to[0,\infty)$ συμφωνούμε να γράφουμε

$$\mathbb{E}_\mu(f)=\int_\Omega f\,d\mu\quad\text{και}\quad \mathrm{Ent}_\mu(f)=\mathbb{E}_\mu(f\log f)-\mathbb{E}_\mu(f)\log(\mathbb{E}_\mu(f)).$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\frac{d}{dp}\log\left((\mathbb{E}_\mu f^p)^{1/p}\right)=\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{Ent}_\mu(f^p)}{\mathbb{E}_\mu(f^p)}.$$

Ειδικότερα,

$$\frac{d}{dp}\log\left((\mathbb{E}_U[h_{k,p}(U)])^{1/p}\right)=\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{Ent}_{\mu_{k,p}}(t^p)}{\mathbb{E}_{\mu_{k,p}}(t^p)}=\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{Ent}_{\mu_{k,p}}(t^p)}{\mathbb{E}_U h_{k,p}(U)}. \tag{5.2.17}$$

Χρησιμοποιώντας την ισότητα $\mathbb{E}_{\mu_{k,p}}(t^p)=\mathbb{E}_U(\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p))$ και τον ορισμό της Ent βλέπουμε ότι ο αριθμητής γράφεται στην μορφή

$$\begin{aligned}\mathrm{Ent}_{\mu_{k,p}}(t^p)&=\mathbb{E}_U\left(\mathrm{Ent}_{\mu_U}(t^p)\right)+\mathrm{Ent}_U\left(\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p)\right)\\&=\mathbb{E}_U\left(\mathrm{Ent}_{\mu_U}(t^p)\right)+\mathrm{Ent}_U\left(h_{k,p}(U)\right).\end{aligned} \tag{5.2.18}$$

Για τον δεύτερο όρο στην (5.2.18) χρησιμοποιώντας την λογαριθμική ανισότητα Sobolev στην $SO(n)$ (Θεώρημα 5.1.11) γράφουμε

$$\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{Ent}_U h_{k,p}(U)}{\mathbb{E}_U h_{k,p}(U)}\leqslant\frac{c}{p^2n}\frac{\mathbb{E}_U[\|\nabla\log h_{k,p}\|_2^2(U)h_{k,p}(U)]}{\mathbb{E}_U h_{k,p}(U)}\leqslant\frac{cA_{k,p}^2}{p^2n}, \tag{5.2.19}$$

όπου $A_{k,p}$ είναι η log-Lipschitz σταθερά της $U \mapsto h_{k,p}(U)$. Για τον πρώτο όρο στην (5.2.18), χρησιμοποιώντας την (5.2.16) γράφουμε πρώτα

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{Ent}_{\mu_U}(t^p)}{\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p)} &= \frac{d}{dp}\left[\log\left((\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p))^{1/p}\right)\right]\\ &= \frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\left(\log\frac{h_{k,p}(U)}{\Gamma(k+p)} - \log\frac{h_{k,0}(U)}{\Gamma(k)} + \log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)} + \log h_{k,0}(U)\right)\right].\end{aligned}$$

Κατόπιν, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 5.1.9 βλέπουμε ότι η συνάρτηση $p \mapsto \log(h_{k,p}(U)/\Gamma(k+p))$ είναι κοίλη στο $[-k+1,\infty)$, άρα

$$\frac{d}{dp}\left[\frac{1}{p}\left(\log\frac{h_{k,p}(U)}{\Gamma(k+p)} - \log\frac{h_{k,0}(U)}{\Gamma(k)}\right)\right] \leqslant 0.$$

Έπεται ότι
$$\frac{1}{p^2}\frac{\mathrm{Ent}_{\mu_U}(t^p)}{\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p)} \leqslant \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)}\right) - \frac{1}{p^2}\log h_{k,0}(U).$$

Ολοκληρώνοντας αυτήν την ανισότητα ως προς $U \in O(n)$ και παίρνοντας υπ' όψιν την $h_{k,p}(U) = \mathbb{E}_{\mu_U}(t^p)$ έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{p^2}\mathbb{E}_U(\mathrm{Ent}_{\mu_U}(t^p)) &\leqslant \mathbb{E}_U(\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p))\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)}\right)\\ &\quad + \frac{1}{p^2}\mathbb{E}_U\left(\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p)\log(1/h_{k,0}(U))\right)\\ &= \mathbb{E}_U[h_{k,p}(U)]\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)}\right)\\ &\quad + \frac{1}{p^2}\mathbb{E}_U\left[\log(1/h_{k,0}(U))h_{k,p}(U)\right]\end{aligned}$$

άρα

$$\frac{1}{p^2}\frac{\mathbb{E}_U(\mathrm{Ent}_{\mu_U}(t^p))}{\mathbb{E}_U(\mathbb{E}_{\mu_U}(t^p))} \leqslant \frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)}\right) + \frac{1}{p^2}\frac{\mathbb{E}_U[\log(1/h_{k,0}(U))h_{k,p}(U)]}{\mathbb{E}_U(h_{k,p}(U))}. \tag{5.2.20}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε την ανισότητα Jensen και την ανισότητα Cauchy-Schwarz για να φράξουμε τον δεύτερο όρο ως εξής:

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{E}_U[\log(1/h_{k,0}(U))h_{k,p}(U)]}{\mathbb{E}_U[h_{k,p}(U)]} &\leqslant \log\left(\frac{\mathbb{E}_U\left(\frac{h_{k,p}(U)}{h_{k,0}(U)}\right)}{\mathbb{E}_U[h_{k,p}(U)]}\right)\\ &\leqslant \log\left(\frac{(\mathbb{E}_U[h_{k,p}(U)^2])^{1/2}}{\mathbb{E}_U[h_{k,p}(U)]}\,(\mathbb{E}_U[h_{k,0}(U)^{-2}])^{1/2}\right).\end{aligned}$$

Κατόπιν, χρησιμοποιούμε την αντίστροφη ανισότητα Hölder

$$(\mathbb{E}_U(f^q))^{1/q} \leqslant \exp\left(C\frac{\|f\|_{\rm Lip}^2}{n}(q-r)\right)(\mathbb{E}_U(f^r))^{1/r} \qquad (q>r>0)$$

(είναι η ίδια με την (5.1.10) στο επιχείρημα του Fleury) για να χειριστούμε τις διάφορες ροπές που εμφανίζονται. Θέτοντας $\|f\|_q := (\mathbb{E}_U|f(U)|^q)^{1/q}$ έχουμε

$$\|h_{k,p}\|_2 \leqslant \exp\Big(\frac{CA_{k,p}^2}{n}\Big)\|h_{k,p}\|_1$$

και

$$\begin{aligned}\|h_{k,0}^{-1}\|_2 &\leqslant \exp\Big(\frac{2CA_{k,0}^2}{n}\Big)\|h_{k,0}^{-1}\|_0 = \exp\Big(\frac{2CA_{k,0}^2}{n}\Big)\frac{1}{\|h_{k,0}\|_0}\\ &\leqslant \exp\Big(\frac{3CA_{k,0}^2}{n}\Big)\frac{1}{\|h_{k,0}\|_1}.\end{aligned}$$

Αφού

$$\|h_{k,0}\|_1 = \mathbb{E}_U[h_{k,0}(U)] = \mathbb{E}_{\mu_{k,p}}(1) = 1,$$

παίρνουμε

$$\frac{1}{p^2}\frac{\mathbb{E}_U[\log(1/h_{k,0}(U))h_{k,p}(U)]}{\mathbb{E}_U[h_{k,p}(U)]} \leqslant \frac{C}{p^2 n}(A_{k,p}^2 + 3A_{k,0}^2). \tag{5.2.21}$$

Βάζοντας τις (5.2.19), (5.2.20) και (5.2.21) στην (5.2.17) παίρνουμε το συμπέρασμα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.16. Αναλύουμε τους τρείς όρους στο φράγμα του Λήμματος 5.2.18. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η συνάρτηση $p \mapsto \frac{d}{dp}\log\Gamma(p)$ είναι κοίλη, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma\left(\frac{p+n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)\Gamma\left(\frac{p+k}{2}\right)}\right) \leqslant 0. \tag{5.2.22}$$

Για τον δεύτερο όρο, αν $q \neq 0$ και ο q έχει το ίδιο πρόσημο με τον p και $k+p+q>0$, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Jensen γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)}\right) &= \frac{1}{pq}\frac{\int_0^\infty \log(t^q)t^{p+k-1}\exp(-t)dt}{\Gamma(p+k)} - \frac{1}{p^2}\log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)}\\ &\leqslant \frac{1}{pq}\log\frac{\Gamma(k+p+q)}{\Gamma(k+p)} - \frac{1}{p^2}\log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)}\\ &= \frac{1}{p}\log\left(\frac{\Gamma(k+p+q)^{1/q}}{\Gamma(k+p)^{1/q}}\frac{\Gamma(k)^{1/p}}{\Gamma(k+p)^{1/p}}\right).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο του Stirling, θέτοντας $q = (p+k-1)\frac{p}{k-1}$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $p \geqslant -\frac{k-1}{2}$, βλέπουμε ότι

$$\frac{d}{dp}\left(\frac{1}{p}\log\frac{\Gamma(k+p)}{\Gamma(k)}\right) \leqslant \frac{C}{k}. \tag{5.2.23}$$

Αυτό δείχνει ότι

$$\frac{d}{dp}\log((\mathbb{E}\|Y\|_2^p)^{1/p}) \leqslant C\left(\frac{ck^3}{p^2n}+\frac{1}{k}\right) \tag{5.2.24}$$

για κάθε $k \in [\max(2, 2|p|+1), n]$. Η βέλτιστη επιλογή του k είναι

$$k = \lceil \sqrt{|p|}\sqrt[4]{n}\rceil,$$

και ικανοποιεί όλους τους περιορισμούς μας αν υποθέσουμε ότι $|p| \in [c_1/\sqrt{n}, c_2\sqrt{n}]$. Έτσι, για όλες αυτές τις τιμές του p παίρνουμε

$$\frac{d}{dp}\log((\mathbb{E}\|Y\|_2^p)^{1/p}) \leqslant \frac{C_2}{\sqrt{|p|}\sqrt[4]{n}}.$$

Θέτοντας $p_0 := c_1/\sqrt{n}$ και ολοκληρώνοντας ως προς p βλέπουμε ότι

$$\exp\left(-C\frac{\sqrt{|p-2|}}{\sqrt[4]{n}}\right) \leqslant \frac{(\mathbb{E}\|Y\|_2^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\|Y\|_2^2)^{1/2}} \leqslant \exp\left(C\frac{\sqrt{|p-2|}}{\sqrt[4]{n}}\right) \tag{5.2.25}$$

για κάθε $p \in [p_0, c_2\sqrt{n}]$, και

$$\frac{(\mathbb{E}\|Y\|_2^p)^{1/p}}{(\mathbb{E}\|Y\|_2^{-p_0})^{1/p_0}} \geqslant \exp\left(-C\frac{\sqrt{|p-p_0|}}{\sqrt[4]{n}}\right) \tag{5.2.26}$$

για κάθε $p \in [-c_2\sqrt{n}, -p_0]$.

Μας μένει να μελετήσουμε τις ροπές της $\|Y\|_2$ στην περίπτωση που $p \in [-p_0, p_0]$. Θέτουμε $k_0 = \sqrt{|p_0|}\sqrt[4]{n}\rceil \simeq 1$. Από το γεγονός ότι η

$$q \mapsto \log\frac{\int_0^\infty t^q w(t)dt}{\Gamma(q+1)}$$

είναι κοίλη στο $\mathbb{R}^+$ για κάθε λογαριθμικά κοίλη πυκνότητα w, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} h_{k_0,p_0}^{1/2}(u)h_{k_0,-p_0}^{1/2}(u) &\leqslant \frac{(\Gamma(k_0+p_0)\Gamma(k_0-p_0))^{1/2}}{\Gamma(k_0)}h_{k,0}(u) \\ &\leqslant (1+C_2p_0^2)h_{k_0,0}(u). \end{aligned}$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz παίρνουμε

$$\begin{aligned}(1+C_2p_0^2) &\geqslant \mathbb{E}_U[h_{k_0,p_0}^{1/2}(U)]\,\mathbb{E}_U[h_{k_0,-p_0}^{1/2}(U)] + \mathrm{Cov}_U\Big(h_{k_0,p_0}^{1/2}(U), h_{k_0,-p_0}^{1/2}(U)\Big)\\ &\geqslant \mathbb{E}_U[h_{k_0,p_0}^{1/2}(U)]\,\mathbb{E}_U[h_{k_0,-p_0}^{1/2}(U)] - \sqrt{\mathrm{Var}_U\Big(h_{k_0,p_0}^{1/2}(U)\Big)\mathrm{Var}\Big(h_{k_0,-p_0}^{1/2}(U)\Big)}\\ &= \mathbb{E}_U[h_{k_0,p_0}^{1/2}(U)]\,\mathbb{E}_U[h_{k_0,-p_0}^{1/2}(U)] - \Big(\mathbb{E}_U[h_{k_0,p_0}(U)] - \Big(\mathbb{E}_U[h_{k_0,p_0}^{1/2}(U)]\Big)^2\Big)^{1/2}\\ &\times\Big(\mathbb{E}_U[h_{k_0,-p_0}(U)] - \Big(\mathbb{E}_U[h_{k_0,-p_0}^{1/2}(U)]\Big)^2\Big)^{1/2}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την λογαριθμική ανισότητα Sobolev για τις h_{k_0,p_0} και $h_{k_0,-p_0}$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}(1+C_2p_0^2) &\geqslant \Big(\mathbb{E}_U[h_{k_0,p_0}(U)]\,\mathbb{E}_U[h_{k_0,-p_0}(U)]\Big)^{1/2}\\ &\times\Big(\exp\Big(-\frac{C}{2}\frac{A_{k_0,p_0}^2+A_{k_0,-p_0}^2}{n}\Big) - C\frac{A_{k_0,p_0}A_{k_0,-p_0}}{n}\Big).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση $\max(A_{k_0,p_0}, A_{k_0,-p_0}) \leqslant C_3k_0^{3/2}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{(\mathbb{E}_U[h_{k_0,p_0}(U)])^{1/p_0}}{(\mathbb{E}_U[h_{k_0,-p_0}(U)])^{-1/p_0}} \leqslant \Big(1+\frac{C_t}{n}\Big)^{2/p_0} \leqslant 1+\frac{C_5}{\sqrt{n}},$$

άρα

$$\frac{(\mathbb{E}\|Y\|_2^{p_0})^{1/p_0}}{(\mathbb{E}\|Y\|_2^{-p_0})^{-1/p_0}} \leqslant \frac{(\mathbb{E}_U[h_{k_0,p_0}(U)])^{1/p_0}}{(\mathbb{E}_U[h_{k_0,-p_0}(U)])^{-1/p_0}} \leqslant 1+\frac{C_5}{\sqrt{n}}.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.16. □

5.2δ′ Μεγάλες αποκλίσεις

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τις εκτιμήσεις μεγάλων αποκλίσεων των Θεωρημάτων 5.2.2 και 5.2.2 για το Y.

Θεώρημα 5.2.19. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Θέτουμε $Y=(X+G_n)/\sqrt{2}$, όπου G_n είναι ένα τυπικό κανονικό τυχαίο διάνυσμα. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp(-c\sqrt{n}\min(t^3,t)) \tag{5.2.27}$$

για κάθε $t\geqslant 0$, και

$$\mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) \leqslant C\exp\left(-c\sqrt{n}\max\left(t^3, \log\frac{c_2}{1-t}\right)\right) \tag{5.2.28}$$

για κάθε $t\in(0,1)$.

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε τις c, C του Θεωρήματος 5.2.16 και θέτουμε

$$\varepsilon_n := \frac{2\sqrt{2}C}{n}.$$

Παρατηρούμε ότι υπάρχει μια σταθερά $t_0 \in (0,1]$ ώστε για κάθε $t \in (\varepsilon_n, t_0]$ να μπορούμε να βρούμε $p_1 \in (4, c\sqrt{n}]$ και $p_2 \in [-c\sqrt{n}, 0)$ που ικανοποιούν τις

$$t = 2C\frac{\sqrt{p_1 - 2}}{\sqrt[4]{n}} \qquad \text{και} \qquad t = 2C\frac{\sqrt{|p_2 - 2|}}{\sqrt[4]{n}}. \tag{5.2.29}$$

Επομένως, έχουμε

$$\big(1 - \frac{t}{2}\big)\sqrt{n} \leqslant (\mathbb{E}\|Y\|_2^{p_2})^{1/p_2} \leqslant (\mathbb{E}\,\|Y\|_2^{p_1})^{1/p_1} \leqslant \big(1 + \frac{t}{2}\big)\sqrt{n}. \tag{5.2.30}$$

Χρησιμοποιώντας την στοιχειώδη ανισότητα

$$\frac{1+t}{1+t/2} \geqslant 1 + \frac{t}{3}, \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα Markov βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \geqslant (1+t/3)(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^{p_1})^{1/p_1}\right) \\ &\leqslant (1+t/3)^{-p_1} \leqslant \exp(-p_1 t/4). \end{aligned}$$

Λύνοντας την πρώτη εξίσωση της (5.2.29) ως προς p_1 συναρτήσει του t, παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp(-c_1\sqrt{n}t^3)$$

για κάθε $t \in [\varepsilon_n, t_0]$. Από την άλλη πλευρά, είναι σαφές ότι

$$\mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant \frac{1}{(1+t)^2} \leqslant \exp(-t/2)$$

για κάθε $t \in [0, \varepsilon_n]$, κι έτσι μπορούμε να επεκτείνουμε την εκτίμηση (5.2.27) σε ολόκληρο το διάστημα $[0, t_0]$ (αρκεί να αντικαταστήσουμε την σταθερά c_1 με μια διαφορετική απόλυτη σταθερά $c_2 > 0$). Στην περίπτωση $t \in [t_0, 1]$, εφαρμόζοντας το λήμμα του Borell βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp(-c_3\sqrt{n}t),$$

και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (5.2.27).

Για την δεύτερη εκτίμηση, πρώτα γράφουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \leqslant (1-t/2)(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^{p_2})^{1/p_2}\right) \\ &\leqslant (1-t/2)^{-p_2} \leqslant \exp(p_2 t/2). \end{aligned}$$

Λύνοντας την δεύτερη εξίσωση (5.2.30) ως προς p_2 συναρτήσει του t, παίρνουμε

$$\mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) \leqslant C_2 \exp(-c\sqrt{n}t^3)$$

για κάθε $t \in [\varepsilon_n, t_0]$. Τροποποιώντας την σταθερά C_2 μπορούμε να επεκτείνουμε την εκτίμηση σε ολόκληρο το διάστημα $t \in (0, t_0]$. Τέλος, παρατηρούμε ότι αν θέσουμε $p_3 = -c_3\sqrt{n}$ έχουμε

$$(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^{p_3})^{1/p_3} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt{n},$$

άρα, για κάθε $0 < \varepsilon < 1/2$ έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \leqslant \varepsilon\sqrt{n}\right) &\leqslant \mathbb{P}\left(\|Y\|_2 \leqslant 2\varepsilon(\mathbb{E}\,\|Y\|_2^{p_3})^{1/p_3}\right)\\ &\leqslant (2\varepsilon)^{-p_3} = \exp\left(-c_3\sqrt{n}\log\left(\tfrac{1}{2\varepsilon}\right)\right).\end{aligned}$$

Αλλάζοντας, αν χρειαστεί, τις σταθερές παίρνουμε την (5.2.28). □

5.2ε΄ Απόδειξη των κύριων θεωρημάτων

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε τα Θεωρήματα 5.2.1, 5.2.2 και 5.2.3. Θα χρησιμοποιήσουμε ένα λήμμα του Klartag:

Λήμμα 5.2.20. *Έχουμε*

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant C\,\mathbb{P}\left(\frac{\|X+G_n\|_2}{\sqrt{2}} \geqslant \sqrt{\frac{(1+t)^2+1}{2}}\sqrt{n}\right) \tag{5.2.31}$$

και

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) \leqslant C\,\mathbb{P}\left(\frac{\|X+G_n\|_2}{\sqrt{2}} \leqslant \sqrt{\frac{(1-t)^2+1}{2}}\sqrt{n}\right) \tag{5.2.32}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $C > 1$. □

Θεώρημα 5.2.21. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\big|\,\|X\|_2 - \sqrt{n}\big| \geqslant t\sqrt{n}\right) \leqslant C\exp(-c\sqrt{n}\min(t^3, t)) \tag{5.2.33}$$

για κάθε $t > 0$, όπου $C, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ειδικότερα.

$$\sqrt{\mathrm{Var}(\|X\|_2)} \leqslant Cn^{1/3}. \tag{5.2.34}$$

Απόδειξη. Αρκεί να συγκρίνουμε την συμπεριφορά του X με εκείνην του Y. Από το Λήμμα 5.2.20 βλέπουμε ότι η (5.2.33) είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.2.19. □

Παρατηρήστε ότι το επιχείρημα αυτό δεν αποδεικνύει πλήρως τις εκτιμήσεις των Θεωρημάτων 5.2.2 και 5.2.3. Εξασφαλίζει μόνο ότι

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant C\exp(-c\sqrt{n}\min(t^3,t)) \tag{5.2.35}$$

για κάθε $t \geqslant 0$, και

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) \leqslant C\exp\left(-c\sqrt{n}t^3\right) \tag{5.2.36}$$

για κάθε $t \in (0,1)$, όπου $C, c > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Το βασικό πρόβλημα που απομένει λοιπόν είναι να διώξουμε την σταθερά C, κάτι που πετυχαίνουμε με τα επόμενα, πιο σύνθετα, επιχειρήματα.

Θεώρημα 5.2.22. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \geqslant (1+t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp(-c\sqrt{n}\min(t^3,t)) \tag{5.2.37}$$

για κάθε $t \geqslant 0$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα του Fleury. Για κάθε $p \geqslant 1$, χρησιμοποιώντας την συμμετρία και την ανεξαρτησία του G_n, την κυρτότητα της συνάρτησης $t \mapsto t^p$ και την ανισότητα Cauchy-Schwarz, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}\,\|Y\|_2^p &= \mathbb{E}\left(\frac{\|X+G_n\|_2^2}{2}\right)^p \\
&= \frac{1}{2}\mathbb{E}\left(\left(\frac{\|X+G_n\|_2^2}{2}\right)^p + \left(\frac{\|X-G_n\|_2^2}{2}\right)^p\right) \\
&\geqslant \mathbb{E}\left(\frac{\|X\|_2^2+\|G_n\|_2^2}{2}\right)^p \\
&\geqslant \mathbb{E}\left(\|X\|_2^p\|G_n\|_2^p\right) \\
&= \mathbb{E}\,\|X\|_2^p\,\mathbb{E}\,\|G_n\|_2^p \\
&\geqslant \mathbb{E}\,\|X\|_2^p\left(\mathbb{E}\,\|G_n\|_2^2\right)^{p/2} \\
&= n^{p/2}\mathbb{E}\,\|X\|_2^p.
\end{aligned}$$

Αφού $\mathbb{E}\,\|X\|_2^2 = n$, συμπεραίνουμε ότι

$$\frac{(\mathbb{E}\|X\|_2^p)^{1/p}}{\mathbb{E}\|X\|_2^2)^{1/2}} \leqslant \left(\frac{(\mathbb{E}\|Y\|_2^{2p})^{1/(2p)}}{\mathbb{E}\|Y\|_2^2)^{1/2}}\right)^2. \tag{5.2.38}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι οι εκτιμήσεις των p-ροπών στο Θεώρημα 5.2.16 ισχύουν για το X, όταν $p \geqslant 3$. Ειδικότερα, έχουμε την (5.2.6) για $p \geqslant c_1 n^{1/6}$. Κατόπιν, δουλεύοντας όπως στο Θεώρημα 5.2.19, παίρνουμε την (5.2.37) σε αυτό το διάστημα. Για να επεκτείνουμε αυτό το αποτέλεσμα στο διάστημα $1 \leqslant p-2 \leqslant c_1 n^{1/6}$ χρησιμοποιούμε τα ίδια επιχειρήματα με αυτά της απόδειξης του Θεωρήματος 5.2.23 παρακάτω. □

Θεώρημα 5.2.23. *Έστω X ένα ισοτροπικό λογαριθμικά κοίλο τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) \leqslant \exp\left(-c_1\sqrt{n}\min\left(t^3, \log\frac{c_2}{1-t}\right)\right) \tag{5.2.39}$$

για κάθε $t \in (0,1)$, όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την εκτίμηση του Θεωρήματος 5.2.19 και το θεώρημα του Παούρη για τις αρνητικές ροπές, βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P}\left(\|X\|_2 \leqslant (1-t)\sqrt{n}\right) \leqslant C_2\exp\left(-c_2\sqrt{n}\max\left(t^3, \log\frac{c_3}{1-t}\right)\right) \tag{5.2.40}$$

για κάθε $t \in (0,1)$. Κατόπιν, ολοκληρώνουμε κατά μέρη ως εξής: θέτουμε $Z = \|X\|_2/\sqrt{n}$ και παρατηρούμε ότι

$$1 = \mathbb{E}(Z^2) = \int_0^\infty \mathbb{P}\left(Z^2 \geqslant t\right) dt.$$

Τότε, για κάθε $p > 0$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(Z^{-2p}) &= p\int_0^\infty t^{-(p+1)}\mathbb{P}\left(Z^2 \leqslant t\right) dt \\
&= p\int_0^1 \mathbb{P}\left(Z^2 \leqslant t\right)(t^{-(p+1)}-1)dt + p\int_0^1 (1-\mathbb{P}(Z^2 \geqslant t))dt \\
&+ p\int_1^\infty (1-\mathbb{P}\left(Z^2 \geqslant t\right))t^{-(p+1)}dt \\
&= p\int_1^\infty t^{-(p+1)}dt + p\int_0^1 \mathbb{P}\left(Z^2 \leqslant t\right)(t^{-(p+1)}-1)dt \\
&+ p\int_1^\infty \mathbb{P}\left(Z^2 \geqslant t\right)(1-t^{-(p+1)})dt \\
&= 1 + p\int_0^1 \mathbb{P}\left(Z^2 \leqslant 1-s\right)((1-s)^{-(p+1)}-1)ds \\
&+ p\int_0^\infty \mathbb{P}\left(Z^2 \geqslant 1+s\right)(1-(1+s)^{-(p+1)})ds.
\end{aligned}$$

Υποθέτουμε ότι $p \geqslant 2$ και χρησιμοποιούμε την (5.2.40) για να φράξουμε το πρώτο ολοκλήρωμα (δουλεύοντας χωριστά στα διαστήματα $[1-c_3^2/2, 1]$, $[0, 1/p]$ και $[1/p, 1-c_3^2/2]$) και την (5.2.37) για να φράξουμε το δεύτερο ολοκλήρωμα (δουλεύοντας χωριστά στα διαστήματα $[0, 1/p]$ και $[1/p, \infty)$). Παρατηρήστε ότι

$$\mathbb{P}\left(Z^2 \leqslant 1 - s\right) \leqslant \mathbb{P}\left(Z \leqslant 1 - s/2\right)$$

και

$$\mathbb{P}\left(Z^2 \geqslant 1 + s\right) \leqslant \mathbb{P}\left(Z \geqslant 1 + c\min(s, \sqrt{s})\right)$$

για κάθε $s \geqslant 0$. Επίσης,

$$(1 - s)^{-(p+1)} - 1 \leqslant Cps, \qquad s \in [0, 1/p]$$

και

$$(1 - s)^{-(p+1)} - 1 \leqslant \exp(Cps), \qquad s \in [1/p, 1/2],$$

ενώ

$$1 - (1 + s)^{-(p+1)} \leqslant (p + 1)s, \qquad s \in [0, 1/p]$$

και

$$1 - (1 + s)^{-(p+1)} - 1 \leqslant 1, \qquad s \in [1/p, \infty).$$

Χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, γράφουμε

(5.2.41)
$$\begin{aligned}\mathbb{E}(Z^{-2p}) &\leqslant 1 + pC_2 \int_0^{c_3^2/2} (\varepsilon/c_3^2)^{c_2\sqrt{n}/2} \varepsilon^{-(p+1)} d\varepsilon \\ &\quad + p^2 C_3 \int_0^{1/p} s\exp(-c_4\sqrt{n}s^3)ds + pC_4 \int_{1/p}^{1+c_3^2/2} \exp(-c_4\sqrt{n}s^3 + c_5 ps)ds \\ &\quad + p^2 C_5 \int_0^{1/p} s\exp(-c_6\sqrt{n}s^3)ds + pC_6 \int_{1/p}^{\infty} \exp(-c_6\sqrt{n}\min(s^3, \sqrt{s}))ds.\end{aligned}$$

Από την ανισότητα $(1 + 2px)^{\frac{1}{2p}} \leqslant 1 + x$ βλέπουμε ότι αν $2 \leqslant p \leqslant c_1 n^{1/6}$ τότε

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}(Z^{-2p}))^{1/(2p)} &\leqslant 1 + C_2 2^{-c_7\sqrt{n}} + pC_7 \int_0^{\infty} s\exp(-c_7\sqrt{n}s^3)ds \\ &\quad + C_8 \int_{1/p}^{\infty} \exp(-c_4\sqrt{n}s^3 + c_5 ps)ds \\ &\quad + C_9 \int_{1/p}^{\infty} \exp(-c_6\sqrt{n}\min(s^3, \sqrt{s}))ds.\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι για όλες αυτές τις τιμές του p έχουμε $1/p \geqslant c\sqrt{p}/\sqrt[4]{n}$ και αυτό δείχνει ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση στον όρο που περιέχει την C_8 είναι φθίνουσα. Αυτό δείχνει ότι τα ολοκληρώματα που περιέχουν τις C_8 και C_9 φράσσονται από εκείνο που περιέχει την C_7. Έτσι προκύπτει η (5.2.39). Παρόμοιο επιχείρημα ξεκαθαρίζει την περίπτωση που είχε μείνει ανοικτή στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.22.

Αν $c_1 n^{1/6} \leqslant p \leqslant c_2\sqrt{n}$ τότε χρησιμοποιώντας την (5.2.41) ελέγχουμε ότι

$$(\mathbb{E}(Z^{-2p}))^{\frac{1}{2p}} \leqslant \left(C_{10}\frac{p}{n^{1/6}} + pC_4 \int_{-\infty}^{\infty} \exp(-c_4\sqrt{n}|s|^3 + c_5 ps)\, ds \right)^{1/(2p)}.$$

Χρησιμοποιούμε την μέθοδο Laplace για να φράξουμε τον δεύτερο όρο, ο οποίος είναι μεγαλύτερος, και καταλήγουμε στην (5.2.39) και σε αυτήν την περίπτωση. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] S. Alesker, *ψ_2-estimate for the Euclidean norm on a convex body in isotropic position*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Lindenstrauss-Milman eds.), Oper. Theory Adv. Appl. **77** (1995), 1-4.

[2] M. Anttila, K. M. Ball and I. Perissinaki, *The central limit problem for convex bodies*, Trans. Amer. Math. Soc. **355** (2003), 4723-4735.

[3] K. M. Ball, *Logarithmically concave functions and sections of convex sets in $\mathbb{R}^n$*, Studia Math. **88** (1988), 69-84.

[4] K. M. Ball, *An elementary introduction to modern convex geometry*, Flavors of geometry, 1-58, Math. Sci. Res. Inst. Publ., 31, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1997.

[5] K. M. Ball and I. Perissinaki, *The subindependence of coordinate slabs for the ℓ_p^n-balls*, Israel J. Math. **107** (1998), 289-299.

[6] S. G. Bobkov and A. Koldobsky, *On the central limit property of convex bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 44-52.

[7] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003), 53-69.

[8] S. G. Bobkov and F. L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Stochastic Inequalities and Applications, Progr. Probab. 56, Birkhäuser, Basel, 2003, 3-13.

[9] C. Borell, *Complements of Lyapunov's inequality*, Math. Ann. **205** (1973), 323-331.

[10] C. Borell, *Convex measures on locally convex spaces*, Ark. Mat. **12** (1974), 239-252.

[11] C. Borell, *Convex set functions in d-space*, Period. Math. Hungar. **6** (1975), 111-136.

[12] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467-1476.

[13] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127-137.

[14] D. Cordero-Erausquin, M. Fradelizi and B. Maurey, *The (B)-conjecture for the Gaussian measure of dilates of symmetric convex sets and related problems*, J. Funct. Anal. **214** (2004), 410-427.

[15] B. Fleury, *Poincaré inequality in mean value for Gaussian polytopes*, Probability Theory and Related Fields, Springer (2010).

[16] B. Fleury, O. Guédon and G. Paouris, *A stability result for mean width of L_p-centroid bodies*, Adv. Math. **214**, 2 (2007), 865-877.

[17] M. Fradelizi, *Sections of convex bodies through their centroid*, Arch. Math. **69** (1997), 515-522.

[18] A. Giannopoulos, *Notes on isotropic convex bodies*, Lecture Notes, Warsaw 2003, available at `http://users.uoa.gr/~apgiannop/`.

[19] B. Grünbaum, *Partitions of mass-distributions and of convex bodies by hyperplanes*, Pacific J. Math. **10** (1960), 1257-1261.

[20] O. Guédon and E. Milman, *Interpolating thin-shell and sharp large-deviation estimates for isotropic log-concave measures*, Geom. Funct. Anal. **21** (2011), 1043-1068.

[21] R. Kannan, L. Lovász and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541-559.

[22] B. Klartag, *An isomorphic version of the slicing problem*, J. Funct. Anal. **218** (2005), 372-394.

[23] B. Klartag, *On convex perturbations with a bounded isotropic constant*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1274-1290.

[24] B. Klartag, *Uniform almost sub-gaussian estimates for linear functionals on convex sets*, Algebra i Analiz (St. Petersburg Math. Journal) **19** (2007), 109-148.

[25] B. Klartag, *A central limit theorem for convex sets*, Invent. Math. **168** (2007), 91-131.

[26] B. Klartag and E. Milman, *Centroid Bodies and the Logarithmic Laplace Transform - A Unified Approach*, J. Funct. Anal. **262** (2012), 10-34.

[27] B. Klartag and E. Milman, *Inner regularization of log-concave measures and small-ball estimates*, GAFA Seminar Volume (2012).

[28] B. Klartag and R. Vershynin, *Small ball probability and Dvoretzky theorem*, Israel J. Math. **157** (2007), 193-207.

[29] A. Litvak, V.D. Milman and G. Schechtman, *Averages of norms and quasi-norms*, Math. Ann. **312** (1998), 95-124.

[30] L. Lovász and S. Vempala, *The geometry of logconcave functions and sampling algorithms*, Random Structures Algorithms **30** (2007), 307-358.

[31] E. Lutwak, D. Yang and G. Zhang, *L^p affine isoperimetric inequalities*, J. Differential Geom. **56** (2000), 111-132.

[32] V.D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 64-104.

[33] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986), Springer, Berlin.

[34] G. Paouris, *Concentration of mass in convex bodies*, Geom. Funct. Analysis **16** (2006), 1021-1049.

[35] G. Paouris, *Small ball probability estimates for log-concave measures*, Trans. Amer. Math. Soc. **364** (2012), 287-308.

[36] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).