Χώροι Banach συνεχών συναρτήσεων

Διπλωματική Εργασία

Παναγιώτης Γάσπαρης

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2021

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Η παρούσα διπλωματική εργασία αποτελείται από δύο μέρη:

> Στο πρώτο μέρος θα ασχοληθούμε με τους χώρους $C(K)$, όπου K συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος, και θα μελετήσουμε τις ιδιότητες που έχουν ως χώροι Banach. Θα εξετάσουμε ποιοι κλασικοί χώροι Banach είναι χώροι $C(K)$ (ως προς ισομετρικό ισομορφισμό) και την ταξινόμησή τους ως προς γραμμικό ισομορφισμό. Θα μελετήσουμε επίσης την weak-συμπάγεια υποσυνόλων και τελεστών στους χώρους $C(K)$ αλλά και στον $L_1(\mu)$.
>
> Στο δεύτερο μέρος θα μιλήσουμε για διανυσματικά μέτρα, δηλαδή μέτρα με πεδίο τιμών χώρους Banach και θα εξετάσουμε πότε μπορούμε να έχουμε ένα διανυσματικό θεώρημα Radon-Nikodym και ποιες είναι οι ιδιότητες των χώρων στους οποίους ισχύει ένα τέτοιο θεώρημα.

Πιο αναλυτικά, το πρώτο μέρος της εργασίας αποτελείται από δύο κεφάλαια.

Στο Κεφάλαιο 2, αρχικά αναφέρουμε γνωστά θεμελιώδη θεωρήματα για χώρους $C(K)$. Το κυριότερο είναι το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz που μας επιτρέπει να βλέπουμε τα συναρτησοειδή $f \in C(K)^*$ ως μέτρα και αντίστροφα. Συνδυάζοντάς το με το θεώρημα Stone-Weierstrass (για τις υποάλγεβρες του $C(K)$) αποδεικνύουμε ότι ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο K είναι μετρικοποιήσιμος. Από το θεώρημα Banach-Stone οι χώροι $C(K)$ και $C(L)$ ίναι ισομετρικά ισόμορφοι, και γράφουμε $C(K) \simeq C(L)$, αν και μόνο αν οι K και L είναι ομοιομορφικοί. Χαλαρώνοντας την υπόθεση της ομοιομορφικότητας θέλουμε να δούμε αν μπορούμε να συσχετίσουμε κάπως τους χώρους $C(K)$ και $C(L)$. Πράγματι, μακροπρόθεσμος στόχος μας είναι να αποδείξουμε το θεώρημα του Miljutin που εξασφαλίζει ότι για K, L υπεραριθμήσιμους συμπαγείς μετρικούς χώρους ισχύει $C(K) \approx C(L)$, δηλαδή οι $C(K)$ και $C(L)$ είναι γραμμικά ισόμορφοι. Αρχικά, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει ένα εύκολο κριτήριο για το πότε μια πραγματική άλγεβρα Banach με μονάδα είναι χώρος $C(K)$. Μοναδική συνθήκη είναι οι νόρμες τα τετράγωνα των στοιχείων της άλγεβρας Banach να ικανοποιούν μια απλή αλγεβρική σχέση. Από αυτό το κριτήριο άμεσα παίρνουμε ότι οι χώροι ℓ_∞ και $L_\infty(\mu)$ είναι χώροι $C(K)$.

Έπειτα, εστιάζουμε στους χώρους για τους οποίους ισχύει το θεώρημα Hahn-Banach όταν αυτοί πάρουν τη θέση του $\mathbb{R}$. Αυτοί λέγονται ισομετρικά εμφυτεύσιμοι χώροι (για παράδειγμα, ο

ℓ_∞ είναι ενώ ο c_0 όχι). Το κριτήριο για το αν ένας χώρος $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος, όπως θα αποδείξουμε, είναι η ύπαρξη supremum και infimum για κάθε υποσύνολο του $C(K)$. Έπειτα, αποδεικνύουμε το θεώρημα Kelley σύμφωνα με το οποίο μόνο οι χώροι $C(K)$ (και οι ισομετρικά ισόμορφοί τους) μπορούν να είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμοι χώροι: δεν υπάρχει ισομετρικά εμφυτεύσιμος χώρος X που να μην είναι ισομετρικά ισόμορφος με κάποιον ισομετρικά εμφυτεύσιμο χώρο $C(K)$. Εκτός από τον ℓ_∞, παραδείγματα ισομετρικά εμφυτεύσιμων χώρων μας δίνουν οι χώροι $C(K)$ που είναι δυϊκοί χώροι (κάποιων άλλων χώρων), οι $L_\infty(\mu)$ και οι $C(K)^{**}$. Εντυπωσιακό πόρισμα του ότι ο $L_\infty(\mu)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος, είναι το γεγονός ότι $L_\infty[0,1] \approx \ell_\infty$. Ολοκληρώνουμε την υποενότητα των ισομετρικά εμφυτεύσιμων χώρων αποδεικνύοντας ότι για K άπειρο συμπαγή μετρικό χώρο ο $C(K)$ περιέχει συμπληρωματικό υπόχωρο ισομετρικά ισόμορφο με τον c_0, άρα ο $C(K)$ δεν μπορεί να είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος. Συμπέρασμα είναι ότι οι μοναδικοί διαχωρίσιμοι ισομετρικά εμφυτεύσιμοι χώροι Banach είναι οι χώροι πεπερασμένης διάστασης.

Με αφετηρία το ότι για άπειρο συμπαγή μετρικό χώρο K ο c_0 είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $C(K)$, καταφέρνουμε να φτάσουμε στο θεώρημα Miljutin χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι, για κάθε υπεραριθμήσιμο συμπαγή μετρικό χώρο K, ο K είναι ομοιομορφικός με κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^{\mathbb{N}}$ και ο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικός με κλειστό υποσύνολο του K, καθώς και το θεώρημα Borsuk, σύμφωνα με το οποίο «αν E είναι κλειστό υποσύνολο του K τότε ο $C(E)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με νόρμας 1 συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(K)$». Αποδείξαμε ότι $C(K) \approx C([0,1])$ για K υπεραριθμήσιμο συμπαγή μετρικό χώρο. Το ερώτημα είναι τι γίνεται όταν ο K είναι αριθμήσιμος. Σε αυτή την περίπτωση ορίζουμε την παράγωγο Cantor-Bendixson που έχει να κάνει με τη διαδικασία του να παίρνουμε διαδοχικά το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του K, στη συνέχεια του K', του K'' κτλ. Αν η διαδικασία τερματίζεται (καταλήγει στο κενό σύνολο) σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα τότε λέμε ότι ο K έχει πεπερασμένο δείκτη Cantor-Bendixson. Αποδεικνύουμε ότι αν ο K είναι αριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος τότε ο K έχει πεπερασμένο δείκτη Cantor-Bendixson αν και μόνο αν $C(K) \approx c_0$.

Στο δεύτερο κεφάλαιο μελετάμε την w-συμπάγεια στους χώρους $C(K)$ και $L_1(\mu)$ και τους υποχώρους τους, καθώς και τους w-συμπαγείς τελεστές σε αυτούς. Για ένα φραγμένο $\mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$ λέμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο όταν

$$\lim_{\mu(E)\to 0} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_E |f|\, d\mu = 0$$

και η έννοια αυτή μας δίνει την απάντηση στο ερώτημα πότε ένα w-κλειστό φραγμένο $\mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$ είναι w-συμπαγές. Αποδεικνύουμε ότι το $\mathcal{F}$ είναι σχετικώς w-συμπαγές στον $L_1(\mu)$ αν και μόνο αν το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο. Ως πόρισμα παίρνουμε ότι κανένας υπόχωρος του $L_1(\mu)$ δεν είναι γραμμικά ισόμορφος με τον c_0, σε αντίθεση με τους χώρους $C(K)$. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε $C(K)^* \equiv \mathcal{M}(K)$ και εκμεταλλευόμενοι το θεώρημα Radon-Nikodym φτιάχνουμε ισομετρικό ισομορφισμό του $L_1(\mu)$ με κλειστό υπόχωρο του $\mathcal{M}(K)$. Έτσι, το θεώρημα για την w-συμπάγεια υποσυνόλων του $L_1(\mu)$ μεταφράζεται με αντίστοιχο τρόπο σε ένα θεώρημα για μέτρα στον $\mathcal{M}(K)$.

Για να μελετήσουμε w-συμπαγείς τελεστές ξεκινάμε ορίζοντας μια έννοια ασθενέστερη εκείνης του $\|\cdot\|$-συμπαγούς τελεστή: Ένας τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται τελεστής Dunford-Pettis όταν απεικονίζει w-συμπαγή σύνολα σε $\|\cdot\|$-συμπαγή σύνολα. Λέμε ότι ένας χώρος X έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis όταν για κάθε χώρο Banach Y και κάθε $T : X \to Y$ w-συμπαγή, ο T είναι τελεστής

Dunford-Pettis. Το κύριο αποτέλεσμα αυτής της υποενότητας θα είναι ότι οι χώροι $L_1(\mu)$ και $C(K)$ έχουν την ιδιότητα Dunford-Pettis. Ως πόρισμα παίρνουμε ότι κάθε τελεστής $T : L_1 \to L_1$ ή $T : C(K) \to C(K)$ ο οποίος είναι w-συμπαγής δίνει τον T^2 $\|\cdot\|$-συμπαγή τελεστή. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αν X είναι ένας χώρος Banach τέτοιος ώστε ο c_0 να μην είναι γραμμικά ισόμορφος με κανέναν υπόχωρο του X τότε κάθε τελεστής $T : C(K) \to X$ είναι w-συμπαγής. Τέλος, αποδεικνύουμε ότι οι $L_1(\mu)$ και $C(K)$ δεν έχουν απειροδιάστατους συμπληρωματικούς αυτοπαθείς υπόχωρους και ως τελικό πόρισμα καταφέρνουμε να αποδείξουμε ότι δεν υπάρχουν απειροδιάστατοι διαχωρίσιμοι εμφυτεύσιμοι χώροι (δηλαδή ούτε καν τέτοιοι ώστε η επέκταση να έχει διαφορετική νόρμα).

Αφετηρία για το δεύτερο μέρος της εργασίας είναι μια προγενέστερη απόδειξη του ότι οι χώροι $L_1(\mu)$ και $C(K)$ έχουν την ιδιότητα Dunford-Pettis, η οποία χρησιμοποιούσε θεωρία αναπαραστάσεων τελεστών $T : L_1(\mu) \to X$ η οποία σχετιζόταν με διανυσματικά μέτρα. Αναφερόμαστε εν συντομία στη θεωρία των διανυσματικών μέτρων, δηλαδή μέτρων με πεδίο τιμών έναν χώρο Banach. Ορίζουμε τα διανυσματικά μέτρα, την κύμανση ενός τέτοιου μέτρου, πότε μια $f : \Omega \to X$ λέγεται μετρήσιμη, πότε ολοκληρώσιμη, και ορίζουμε το ολοκλήρωμα Bochner μιας τέτοιας συνάρτησης, το οποίο παίρνει τιμές στον X. Εξηγούμε ότι οι περισσότερες γνωστές ιδιότητες και τα θεωρήματα σχετικά με το ολοκλήρωμα εξακολουθούν να ισχύουν, με εξαίρεση το θεώρημα Radon-Nikodym. Για παράδειγμα, το διανυσματικό μέτρο $\tau : \mathcal{L}[0,1] \to L_1[0,1]$ με $\tau(A) = \chi_A$ για κάθε Lebesgue ετρήσιμο $A \subseteq [0,1]$ δεν έχει παράγωγο Radon-Nikodym ως προς το μέτρο Lebesgue m, παρόλο που το τ είναι απολύτως συνεχές ως προς το m. Γι' αυτό το λόγο δίνουμε τον ορισμό ότι ένα υποσύνολο $C \subseteq X$ έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym όταν για κάθε διανυσματικό μέτρο τ και κάθε μέτρο μ στο C για τα οποία ικανοποιείται η συνθήκη $\frac{\tau(A)}{\mu(A)} \in C$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$ όπου $\mathcal{B}$ η σ-άλγεβρα στον Ω, ισχύει ότι υπάρχει η παράγωγος Radon-Nikodym, δηλαδή μια συνάρτηση $f : \Omega \to X$ τέτοια ώστε για κάθε $A \in \mathcal{B}$ το $\tau(A)$ να γράφεται ως ολοκλήρωμα Bochner $\int_A f\, d\mu$. Αποδεικνύουμε ότι πράγματι για τέτοιους χώρους, ισοδύναμα, κάθε τελεστής $T : L_1(\mu) \to X$ με $T(\varphi) \in C$ για κάθε συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας φ (δηλαδή $\varphi \in L_1(\mu)$ με $\varphi \geqslant 0$ και $\int \varphi d\mu = 1$) είναι αναπαραστάσιμος. Έπειτα, αποδεικνύουμε την ισοδυναμίας της ιδιότητας Radon-Nikodym με dentable σύνολα και τη σύγκλιση των martingales σε χώρους πιθανότητας. Χώροι με την ιδιότητα Radon-Nikodym δείχνουμε ότι είναι πάντα τα w-συμπαγή κυρτά, τα διαχωρίσιμα w^*-συμπαγή κυρτά, άρα και οι αυτοπαθείς χώροι. Αποδεικνύουμε ένα θεώρημα για χώρους με την ιδιότητα Radon-Nikodym, το οποίο είναι αντίστοιχο με το θεώρημα Krein-Milman αλλά χωρίς να προϋποθέτουμε απαραίτητα τη συμπάγεια του δοθέντος συνόλου και με ισχυρότερο συμπέρασμα: Το C είναι η $\|\cdot\|$-κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου των ακραίων σημείων του (ακόμα και π.χ. για w-συμπαγή κυρτά σύνολα). Ολοκληρώνουμε αποδεικνύοντας ότι κάθε συνεχής άνω φραγμένη πραγματική συνάρτηση με πεδίο ορισμού χώρο που έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym είναι όσο κοντά θέλουμε (ως προς τη νόρμα κάποιου συναρτησοειδούς) στο να πιάνει ισχυρό μέγιστο. Ως πόρισμα παίρνουμε μία ακόμα πιο βελτιωμένη εκδοχή του θεωρήματος Krein-Milman σύμφωνα με την οποία κάθε σύνολο C με την ιδιότητα Radon-Nikodym είναι η κλειστή κυρτή θήκη ενός υποσυνόλου του συνόλου των ακραίων σημείων του, του συνόλου των λεγόμενων ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του.

Συμβολισμός και Ορισμοί

Θεωρούμε γνωστές βασικές έννοιες που θα χρησιμοποιούνται συνεχώς, όπως: σ-άλγεβρα, μέτρο, Borel μέτρο, πεπερασμένο μέτρο, μετρικός χώρος, πλήρης μετρικός χώρος, χώρος με νόρμα, τοπολογικός χώρος Hausdorff (T_2).

Υπενθυμίζουμε τους παρακάτω ορισμούς:

1. Έστω $(X, \mathcal{A})$ μετρήσιμος χώρος. Το $\mu : \mathcal{A} \to [-\infty, \infty]$ λέγεται προσημασμένο μέτρο αν $\mu(\varnothing) = 0$, το μ παίρνει το πολύ μία από τις τιμές $-\infty, +\infty$, και για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένων συνόλων στην $\mathcal{A}$ ισχύει
$$\mu\Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$
Παρατηρήστε ότι από την τελευταία συνθήκη έπεται ότι αν $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \in \mathbb{R}$ τότε η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ συγκλίνει απολύτως.

2. Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται χώρος Banach αν είναι πλήρης μετρικός χώρος ως προς την μετρική που επάγει η νόρμα.

3. Έστω X χώρος με νόρμα. Ο $X^* := \{f : X \to \mathbb{R} \mid f \text{ φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές}\}$ είναι χώρος Banach με νόρμα τη νόρμα τελεστή, δηλαδή την
$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1\}, \qquad f \in X^*.$$

4. Έστω K συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff. Ένα Borel μέτρο μ στον K λέγεται κανονικό αν
   (i) $\mu(K) < \infty$.
   (ii) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό}, A \subseteq U\}$.
   (iii) $\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \text{ συμπαγές}, C \subseteq A\}$.

   Ένα προσημασμένο μέτρο μ λέγεται κανονικό αν τα μ^+, μ^- είναι κανονικά, όπου $\mu = \mu^+ - \mu^-$ είναι η διάσπαση Jordan του μ.

5. Συμβολίζουμε με $\mathcal{M}(K)$ τον χώρο των προσημασμένων κανονικών μέτρων Borel στον K. Ο $(\mathcal{M}(K), \|\cdot\|)$ με νόρμα την $\|\mu\| := |\mu|)K) = \mu^+(K) + \mu^-(K)$ είναι χώρος Banach.

6. Έστω K συμπαγής τοπολογικός χώρος. Ορίζουμε $C(K) := \{f : K \to \mathbb{R} : f \text{ συνεχής}\}$. Ο $(C(K), \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach. Στόχος μας είναι το θεώρημα του Miljutin που ισχυρίζεται ότι: «Αν K, L είναι υπεραριθμήσιμοι μετρικοί χώροι τότε οι $C(K)$ και $C(L)$ είναι ισόμορφοι ως χώροι Banach».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Χώροι Banach συνεχών συναρτήσεων

2.1 Βασικές ιδιότητες

Υπενθυμίζουμε ότι δύο χώροι Banach X, Y λέγονται ισόμορφοι αν και μόνο αν υπάρχει $T : X \to Y$ γραμμικός, 1-1 και επί, φραγμένος (συνεχής) τελεστής τέτοιος ώστε ο $T^{-1} : Y \to X$ να είναι επίσης φραγμένος. Οι X, Y λέγονται ισομετρικά ισόμορφοι αν υπάρχει $T : X \to Y$ όπως παραπάνω, για τον οποίο επιπλέον έχουμε $\|T\| = \|T^{-1}\| = 1$. Όταν οι X, Y είναι ισομετρικά ισόμορφοι, θα γράφουμε $X \simeq Y$.

Θα θεωρήσουμε ως δεδομένα τα εξής δύο σημαντικά θεωρήματα.

Θεώρημα 2.1.1 (Θεώρημα αναπαράστασης του Riesz). *Έστω K συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Τότε, ο $C(K)^*$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον χώρο $\mathcal{M}(K)$ των κανονικών μέτρων Borel στον K. Ο ισομετρικός ισομορφισμός είναι η $\varphi : \mathcal{M}(K) \to C(K)^*$ με $\mu \mapsto I_\mu : C(K) \to \mathbb{R}$, όπου*

$$f \mapsto I_\mu(f) := \int_K f\, d\mu.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό

$$\langle f, \mu \rangle := I_\mu(f).$$

Επιπλέον, αν ο K είναι μετρικοποιήσιμος τότε κάθε Borel μέτρο είναι κανονικό και έτσι ο $\mathcal{M}(K)$ είναι ο χώρος των Borel μέτρων.

Συνέπεια του θεωρήματος αναπαράστασης του Riesz είναι το

Θεώρημα 2.1.2 (Θεώρημα Stone-Weierstrass στο $\mathbb{R}$). *Έστω K συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Έστω $\mathcal{A}$ υπάλγεβρα του $C(K)$ με τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(α) *Η σταθερή συνάρτηση $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$ ($\mathbf{1}(x) = x$ για κάθε $x \in K$)*

(β) *Η $\mathcal{A}$ διαχωρίζει τα σημεία του K: Δηλαδή, αν $x \neq y \in K$ τότε υπάρχει $f \in \mathcal{A}$ ώστε $f(x) \neq f(y)$.*

Τότε,

$$\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(K).$$

Υπενθύμιση: Άλγεβρα $\mathcal{A}$ είναι ένας διανυσματικός χώρος που είναι και δακτύλιος, δηλαδή για $a, b \in \mathcal{A}$ έχουμε $a + b, a \cdot b, \lambda \cdot a \in \mathcal{A}$.

Ένα $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A}$ λέγεται υπάλγεβρα της $\mathcal{A}$ αν και μόνο αν $\mathcal{B}$ υπόχωρος και υποδακτύλιος της $\mathcal{A}$.

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω K συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Τότε, ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο K είναι μετρικοποιήσιμος.*

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστούμε ένα λήμμα. Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένας χώρος Banach, στον X^* ορίζεται η weak*-τοπολογία ως η τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης ως εξής: Για ένα δίκτυο $(f_\delta)_{\delta \in \Delta} \subseteq X^*$ ισχύει $f_\delta \xrightarrow{w^*} f$ αν και μόνο αν $f_\delta(x) \xrightarrow{|\cdot|} f(x)$ για κάθε $x \in X$.

Λήμμα 2.1.4. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Τότε:*

(α) *Η $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leqslant 1\}$ είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμη στην* weak*-*τοπολογία.*

(β) *Κάθε* weak-*συμπαγές υποσύνολο του X είναι μετρικοποιήσιμο για την* weak *τοπολογία.*

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.3. ($\Longrightarrow$) Υποθέτουμε ότι ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος και θα δείξουμε ότι ο K είναι μετρικοποιήσιμος. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : K \to \mathcal{M}(K)$ με $s \mapsto \delta_s$, όπου δ_s είναι το μέτρο Dirac στο s ($\delta_s(A) = 1$ αν $s \in A$ και $\delta_s(A) = 0$ αν $s \notin A$). Το $\delta_s \in \mathcal{M}(K)$ αφού $\delta_s(K) = 1 < \infty$ και είναι κανονικό μέτρο Borel.

Πράγματι, θα δείξουμε ότι:

(i) $\delta_s(A) = \inf\{\delta_s(U) : U \text{ ανοικτό}, A \subseteq U\}$.

Απόδειξη: Αν $s \in A$ τότε $\delta_s(A) = 1$ και $s \in U$ για κάθε U ανοικτό με $A \subseteq U$, άρα $\inf\{\delta_s(U) : U \text{ ανοικτό}, A \subseteq U\} = 1$.

Αν $s \notin A$ τότε $\delta_s(A) = 0$ και το $H := X \setminus \{s\}$ είναι ανοικτό (αφού ο X είναι T_2 και άρα τα μονοσύνολα είναι κλειστά). Άρα, $\inf\{\delta_s(U) : U \text{ ανοικτό}, A \subseteq U\} \leqslant \delta_s(X \setminus \{s\}) = 0$.

Σε κάθε περίπτωση, $\delta_s(A) = \inf\{\delta_s(U) : U \text{ ανοικτό}, A \subseteq U\}$.

(ii) Θα δείξουμε ότι $\delta_s(A) = \sup\{\delta_s(C) : C \text{ συμπαγές}, C \subseteq A\}$.

Απόδειξη: Αν $s \notin A$ τότε για κάθε συμπαγές $C \subseteq A$ έχουμε $s \notin C$, οπότε $\delta_s(A) = 0 = \sup\{\delta_s(C) : C \text{ συμπαγές}, C \subseteq A\}$.

Αν $s \in A$ τότε $\{s\} \subseteq A$ και το $\{s\}$ είναι συμπαγές, άρα $\delta_s(A) = 1 \geqslant \sup\{\delta_s(C) : C \text{ συμπαγές}, C \subseteq A\} \geqslant \delta_s(\{s\}) = 1$, δηλαδή έχουμε πάλι ισότητα.

Επομένως, $\delta_s \in \mathcal{M}(K)$. Μάλιστα $\delta_s \in B_{\mathcal{M}(K)}$ αφού $\|\delta_s\| = \delta_s(K) = 1$. Άρα,

$$\mathrm{im}(f) \subseteq B_{\mathcal{M}(K)}.$$

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε $\mathcal{M}(K) \simeq C(K)^*$. Από το Λήμμα 2.1.4 (i) η $B_{C(K)^*}$ είναι μετρικοποιήσιμη στην weak*-τοπολογία, αφού ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος. Άρα, $B_{\mathcal{M}(K)} \simeq B_{C(K)^*}$, συνεπώς ο $(B_{\mathcal{M}(K)}, \text{weak}^*)$ είναι μετρικοποιήσιμος. Έπεται ότι ο $\text{im}(f)$ είναι μετρικοποιήσιμος ως υπόχωρος μετρικοποιήσιμου χώρου. Όμως η f είναι ομοιομορφισμός στην $\text{im}(f)$. Πράγματι: η f είναι 1-1 διότι αν $s_1 \neq s_2$ τότε $\delta_{s_1}(\{s_1\}) = 1$ ενώ $\delta_{s_2}(\{s_1\}) = 0$, άρα $\delta_{s_1} \neq \delta_{s_2}$, και η f είναι αμφισυνεχής: για ένα δίκτυο $(s_\delta)_{\delta\in\Delta} \subseteq K$ ισχύει $s_\delta \to s$ αν και μόνο αν $f(s_\delta) \to f(s)$ για κάθε $f \in C(K)$, το οποίο από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz ισχύει αν και μόνο αν $I_{\delta_{s_\delta}}(f) \to I_{\delta_s}(f)$ για κάθε $f \in C(K)$, δηλαδή αν και μόνο αν $I_{\delta_{s_\delta}} \xrightarrow{w^*} I_{\delta_s}$ ή, ισοδύναμα, $\delta_{s_\delta} \xrightarrow{w^*} \delta_s$.

Άρα, ο K είναι ομοιομορφικός με τον $(\text{im}(f), \text{weak}^*)$, άρα είναι μετρικοποιήσιμος.

($\Longleftarrow$) Έστω K μετρικοποιήσιμος συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff. Έστω d μετρική που επάγει την τοπολογία του K. Αφού ο μετρικός χώρος (K, d) είναι συμπαγής, είναι και διαχωρίσιμος. Θα δείξουμε ότι ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος.

Έστω $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ υκνό αριθμήσιμο υποσύνολο του K. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τις απεικονίσεις $y_n : K \to \mathbb{R}$ με $y_n(x) = d(x, s_n)$. Οι y_n είναι συνεχείς αφού $|d(x, s_n) - d(y, s_n)| \leqslant d(x, y)$ για κάθε $x, y \in K$. Άρα, $y_n \in C(K)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε

$$D := \{y_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{\mathbf{1}\} \subseteq C(K).$$

Το D είναι αριθμήσιμο αλλά όχι απαραίτητα πυκνό στον $C(K)$. Έστω $\mathcal{A}$ η ελάχιστη υπάλγεβρα της $C(K)$ που περιέχει τα στοιχεία του D, δηλαδή $\mathcal{A}$ είναι η υπάλγεβρα που παράγεται από το D. Τότε η $\mathcal{A}$ ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος Stone-Weierstrass (πράγματι, έχουμε $\mathbf{1} \in \mathcal{A}$, η $\mathcal{A}$ είναι υπάλγεβρα, και αν $x \neq y \in K$ τότε υπάρχει $f \in C(K)$ τέτοια ώστε $f(x) = 0$ και $f(y) = 1$, και αφού το D είναι πυκνό στον $C(K)$ υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $y_n(x) < \frac{1}{2}$ και $y_n(y) > \frac{1}{2}$, άρα $y_n(x) \neq y_n(y)$ για την $y_n \in \mathcal{A}$). Από το θεώρημα Stone-Weierstrass συμπεραίνουμε ότι $\overline{\mathcal{A}}^{\|\cdot\|_\infty} = C(K)$, δηλαδή η $\mathcal{A}$ είναι πυκνή στον $C(K)$. Όμως, κάθε συνεχής συνάρτηση στην $\mathcal{A}$ προσεγγίζεται ομοιόμορφα από πολυώνυμα πολλών μεταβλητών από το D με ρητούς συντελεστές. Το σύνολο αυτών των πολυωνύμων είναι αριθμήσιμο και πυκνό στην $\mathcal{A}$, άρα και πυκνό στον $C(K)$ (αφού η $\mathcal{A}$ είναι πυκνή στον $C(K)$). Άρα, ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος. □

Ορισμός. Separation (διαχωρισμός) ενός τοπολογικού χώρου X είναι ένα ζεύγος U, V μη κενών ξένων ανοιχτών υποσυνόλων του X που η ένωσή τους είναι το X. Άρα, ο X είναι συνεκτικός αν και μόνο αν δεν υπάρχει separation για τον X.

Λέμε ότι ο X είναι ολικά μη συνεκτικός (totally disconnected) αν τα μόνα συνεκτικά υποσύνολα του X είναι τα μονοσύνολα. Αυτό είναι ισοδύναμο με το να πούμε ότι κάθε $x \in X$ έχει βάση περιοχών $\mathcal{B}_x$ που αποτελείται από κλειστά και ανοικτά (clopen) σύνολα. Για παράδειγμα, ο $\Delta = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ είναι ολικά μη συνεκτικός συμπαγής τοπολογικός χώρος.

Πρόταση 2.1.5. *Έστω K ολικά μη συνεκτικός συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Τότε, ο χώρος των απλών συνεχών συναρτήσεων $f = \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_{U_j}$, όπου (U_j) ξένα κλειστά και ανοικτά σύνολα, είναι πυκνός.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του θεωρήματος Stone-Weierstrass. □

Θεώρημα 2.1.6 (Θεώρημα Banach-Stone). *Έστω K, L συμπαγείς Hausdorff τοπολογικοί χώροι τέτοιοι ώστε $C(K) \simeq C(L)$. Τότε, οι K και L είναι ομοιομορφικοί.*

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Θα δούμε ότι οι χώροι ℓ_∞ και $L_\infty(0,1)$ είναι ουσιαστικά χώροι $C(K)$ μεταμφιεσμένοι.

2.2 Ένας χαρακτηρισμός των πραγματικών χώρων $C(K)$

Υπενθυμίζουμε ότι άλγεβρα Banach είναι μια άλγεβρα $\mathcal{A}$ που είναι και χώρος Banach και η νόρμα της $\|\cdot\|$ ικανοποιεί την υποπολλαπλασιαστική ιδιότητα $\|xy\| \leqslant \|x\|\,\|y\|$ για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$.

Ορισμός 2.2.1. Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική πραγματική άλγεβρα Banach με μονάδα e, τέτοια ώστε $\|e\| = 1$ (αυτό μπορούμε πάντα να το υποθέτουμε μέσω της μοναδοποίησης). Ο χώρος των states της $\mathcal{A}$ είναι το σύνολο

$$S = \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| = \varphi(e) = 1\}.$$

Ένα στοιχείο του S λέγεται state.

Παρατήρηση 2.2.2. Ισχύει ότι $S \neq \varnothing$. Πράγματι, αφού η $\mathcal{A}$ είναι χώρος Banach, από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχει $f \in \mathcal{A}^*$ που ικανοποιεί τις $f(e) = \|e\| = 1$ και $\|f\| = 1$.

Επίσης, ο S είναι weak*-συμπαγής.

Απόδειξη. Ο S προφανώς περιέχεται στη μοναδιαία μπάλα του $\mathcal{A}^*$ που από το θεώρημα Alaoglu είναι weak*-συμπαγής. Άρα, αρκεί να δείξουμε ότι το S είναι w^*-κλειστό υποσύνολο της μοναδιαίας μπάλας του $\mathcal{A}^*$.

Έστω $(f_\delta)_{\delta\in\Delta}$ δίκτυο στο S με $f_\delta \xrightarrow{w^*} f \in \mathcal{A}^*$, δηλαδή $f_\delta(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Έχουμε $f_\delta \in S$ για κάθε $\delta \in \Delta$, άρα $f_\delta(e) = 1$ και $\|f_\delta\| = 1$. Τότε, $f(e) = \lim_\delta f_\delta(e) = 1$. Επίσης, $|f_\delta(x)| \leqslant \|f_\delta\| \cdot \|x\| = \|x\|$ και $f_\delta(x) \to f(x)$, άρα $|f(x)| \leqslant \|x\|$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$, το οποίο αποδεικνύει ότι $\|f\| \leqslant 1$. Συνεπώς, $\|f\| = 1$, και από τα παραπάνω $f \in S$. Άρα, το S είναι w^*-συμπαγές. □

Ορισμός. Ορίζουμε $\mathcal{A}_+ := \overline{\{a^2 : a \in \mathcal{A}\}}^{\|\cdot\|}$, όπου $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα του $\mathcal{A}$. Το $\mathcal{A}_+$ είναι εξ ορισμού $\|\cdot\|$-κλειστό υποσύνολο του $\mathcal{A}$.

Λήμμα 2.2.3. (i) *Αν η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική και $x, y \in \mathcal{A}_+$ τότε $xy \in \mathcal{A}_+$.*

(ii) *Αν $x \in \mathcal{A}_+$ και $\lambda \geqslant 0$ τότε $\lambda x \in \mathcal{A}_+$.*

Απόδειξη. (i) Αφού $x, y \in \mathcal{A}_+$ υπάρχουν $(a_n), (b_n) \subseteq \mathcal{A}$ ώστε $a_n^2 \to x$ και $b_n^2 \to y$, άρα $xy = \lim_n (a_n^2 b_n^2) = \lim_n (a_n b_n)^2 \in \mathcal{A}_+$ (χρησιμοποιώντας και την υπόθεση ότι η $\mathcal{A}$ είναι μεταθετική.

(ii) Ομοίως: για $\lambda \geqslant 0$ έχουμε $\lambda x = \lim_n \lambda a_n^2 = \lim_n (\sqrt{\lambda} a_n)^2 \in \mathcal{A}_+$. □

Πρόταση 2.2.4. (i) *Έστω $x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\|x\| \leqslant 1$. Τότε: $e + x \in \mathcal{A}_+$.*

(ii) $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$.

Απόδειξη. (i) Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in \mathcal{A}$ με $\|x\| < 1$ ισχύει $e + x \in \mathcal{A}_+$. Τότε, αφού το $\mathcal{A}_+$ είναι κλειστό, αν $x \in \mathcal{A}$ και $\|x\| = 1$ μπορούμε να βρούμε $x_n \in \mathcal{A}$ με $\|x_n\| < 1$ και $x_n \to X$ (π.χ. μπορούμε να πάρουμε $x_n = \frac{n-1}{n}x$) και έχουμε $e + x_n \in \mathcal{A}_+$ και $e + x_n \to e + x$, συνεπώς $e + x \in \mathcal{A}_+$.

Έστω λοιπόν $x \in \mathcal{A}$ με $\|x\| < 1$. Έστω $t \in \mathbb{R}$ με $|t| < 1$. Γνωρίζουμε ότι η διωνυμική σειρά του $(1+t)^{\frac{1}{2}}$ είναι: $\sum c_n t^n$ όπου

$$c_n = \binom{\frac{1}{2}}{n} = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}-1\right)\cdots\left(\frac{1}{2}-n+1\right)}{n!},$$

άρα

$$1 + t = (1+t)^{\frac{1}{2}}(1+t)^{\frac{1}{2}} = \sum_k \Big(\sum_{m+n=k} c_m c_n\Big) t^k,$$

όπου $\sum_{m+n=k} c_m c_n = 1$ αν $k = 0, 1$ και 0 αλλιώς. Παίρνουμε $t = \|x\|$. Τότε, η σειρά $\sum c_n x^n$ συγκλίνει, αφού συγκλίνει απολύτως:

$$\sum \|c_n x^n\| \leqslant \sum |c_n| \cdot \|x\|^n = \sum |c_n| t^n < \infty.$$

Άρα, υπάρχει $y \in \mathcal{A}$: $y = \sum c_n x^n$. Τότε:

$$y^2 = \Big(\sum c_n x^n\Big)\Big(\sum c_n x^n\Big) = \sum_k \Big(\sum_{m+n=k} c_m c_n\Big) x^k = e + x.$$

Άρα, $e + x = y^2 \in \mathcal{A}_+$.

(ii) Έστω $x \in \mathcal{A}$ με $\|x\| \leqslant 1$. Τότε, $e + x \in \mathcal{A}_+$. Επίσης, $\|-x\| = \|x\| \leqslant 1$, άρα $e - x \in \mathcal{A}_+$. Γράφοντας

$$x = \frac{1}{2}(e + x) - \frac{1}{2}(e - x)$$

βλέπουμε ότι $x \in \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$. Γενικότερα, αν $x \in \mathcal{A} \setminus \{0\}$ ότε $\frac{x}{\|x\|} \in \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$, άρα $x \in \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$ (αφού αν $y \in \mathcal{A}_+$ και $\lambda \geqslant 0$ τότε $\lambda y \in \mathcal{A}_+$).

Άρα, $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$. Από την άλλη πλευρά, έχουμε φυσικά $\mathcal{A}_+ \subseteq \mathcal{A}$, άρα $\mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+ \subseteq \mathcal{A} - \mathcal{A} \subseteq \mathcal{A}$.

Συνεπώς, $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$. □

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική (πραγματική) άλγεβρα Banach με μονάδα e με $\|e\| = 1$. Τότε: $\mathcal{A} \simeq C(K)$ για κάποιον συμπαγή τοπολογικό χώρο Hausdorff K αν και μόνο αν*

$$\|a^2 - b^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\|, \qquad a, b \in \mathcal{A}. \tag{2.2.1}$$

Υπενθύμιση. Με το σύμβολο $\simeq$ εννοούμε «ισομετρικά ισόμορφοι χώροι Banach».

Παρατήρηση. Έστω ότι ισχύει η (2.2.1). Τότε, για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$ έχουμε

$$\|x - y\| \leqslant \|x + y\|,$$

άρα και για κάθε $x, y \in \overline{\{a^2 : a \in \mathcal{A}\}} = \mathcal{A}_=$ (αφού $a_n \to a \implies \|a_n\| \to \|a\|$). Δηλαδή,

$$\|x - y\| \leqslant \|x + y\|, \qquad x, y \in \mathcal{A}_+. \tag{2.2.2}$$

Γενικά, $x = \frac{1}{2}(x - y + x + y)$. Άρα, από την (2.2.2) βλέπουμε ότι

$$\|x\| \leqslant \frac{1}{2}(\|x - y\| + \|x + y\|) \leqslant \|x + y\|.$$

Δηλαδή, η (2.2.1) συνεπάγεται την

$$\|x\| \leqslant \|x + y\|, \qquad x, y \in \mathcal{A}_+. \tag{2.2.3}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5 θα χρειαστούμε δύο λήμματα.

Λήμμα 2.2.6. *Έστω $S := \{\varphi \in \mathcal{A}^* : \|\varphi\| = \varphi(e) = 1\}$. Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach που ικανοποιεί την (2.2.1). Τότε, για κάθε $\varphi \in S$ και για κάθε $x \in \mathcal{A}_+$ ισχύει ότι $\varphi(x) \geqslant 0$.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για $x \in \mathcal{A}_+$ με $\|x\| = 1$. Πράγματι, τότε, αν $x \in \mathcal{A}_+$ έχουμε $\left\|\frac{x}{\|x\|}\right\| = 1$ και $\frac{x}{\|x\|} \in \mathcal{A}_+$, άρα $\varphi\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \geqslant 0$, και αφού $\varphi \in \mathcal{A}^*$ παίρνουμε $\frac{1}{\|x\|}\varphi(x) \geqslant 0$, δηλαδή $\varphi(x) \geqslant 0$.

Έστω λοιπόν $x \in \mathcal{A}_+$ με $\|x\| = 1$. Αφού $e, x \in \mathcal{A}_+$, από την Πρόταση 2.2.4 έχουμε $e - x \in \mathcal{A}_+$, άρα από την προηγούμενη παρατήρηση βλέπουμε ότι

$$\|e - x\| \leqslant \|e - x + x\| = \|e\| = 1.$$

Άρα: $\varphi(e - x) \leqslant |\varphi(e - x)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|x\| \leqslant 1$, διότι $\varphi \in S$ άρα $\|\varphi\| = 1$. Επίσης έχουμε $\varphi \in \mathcal{A}^*$ άρα $\varphi(e - x) = \varphi(e) - \varphi(x) = 1 - \varphi(x)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι $1 - \varphi(x) \leqslant 1$, άρα $\varphi(x) \geqslant 0$. □

Λήμμα 2.2.7. *Έστω $\mathcal{A}$ μεταθετική άλγεβρα Banach που ικανοποιεί την (2.2.1). Έστω $K := \{\varphi \in S : \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ για κάθε $x, y \in \mathcal{A}\}$ το σύνολο των πολλαπλασιαστικών states. Τότε, το K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff ως προς την* weak**-τοπολογία του $\mathcal{A}^*$ και περιέχει το σύνολο $\partial_e S$ των ακραίων σημείων του S.*

Απόδειξη. Έχουμε $K \subseteq B_{\mathcal{A}^*}$. Για να δείξουμε ότι το K είναι συμπαγές, αρκεί να δείξουμε ότι το K είναι κλειστό στην $B_{\mathcal{A}^*}$. Έστω $(f_\delta)_{\delta \in \Delta}$ δίκτυο στο K με $f_\delta \xrightarrow{w^*} f \in B_{\mathcal{A}^*}$, δηλαδή $f_\delta(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}$. Αφού $f_\delta \in K$ έχουμε $f_\delta(xy) = f_\delta(x)f_\delta(y)$ και άρα $f(xy) = f(x)f(y)$ για κάθε $x, y \in \mathcal{A}$. Επίσης, $f \in S$ αφού το S είναι w^*-κλειστό υποσύνολο της $B_{\mathcal{A}^*}$. Άρα, $f \in K$. Συνεπώς, ο K είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος και προφανώς Hausdorff με την weak*-τοπολογία.

Έστω $\varphi \in \partial_e S$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\varphi \in K$. Έχουμε $\partial_e S \subseteq S$, άρα $\varphi \in S$. Άρα, πρέπει να δείξουμε ότι η φ είναι πολλαπλασιαστική, δηλαδή

$$\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y), \qquad x, y \in \mathcal{A}.$$

Παρατηρούμε ότι αρκεί να δείξουμε την $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$ για κάθε $x \in \mathcal{A}_+$ και $y \in \mathcal{A}$. [Πράγματι, αν έχουμε δείξει το τελευταίο, τότε παίρνουμε $a, b \in \mathcal{A}$ και αφού $\mathcal{A} = \mathcal{A}_+ - \mathcal{A}_+$ γράφουμε $a = x - y$, όπου $x, y \in \mathcal{A}_+$, άρα

$$\begin{aligned}\varphi(ab) &= \varphi(xb - xa) = \varphi(xb) - \varphi(yb) = \varphi(x)\varphi(b) - \varphi(y)\varphi(b)\\ &= (\varphi(x) - \varphi(y))\varphi(b) = \varphi(x - y)\varphi(b) = \varphi(a)\varphi(b).]\end{aligned}$$

Έστω λοιπόν $x \in \mathcal{A}_+$, $y \in \mathcal{A}$. Μάλιστα, αφού $\varphi \in \mathcal{A}^*$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x\| = \|y\| = 1$. Επομένως, εφαρμόζεται η Πρόταση 2.2.4 (ii): έχουμε $e \pm y \in \mathcal{A}_+$. Αφού $\varphi \in S$, $e \pm y \in \mathcal{A}_+$ και $x \in \mathcal{A}_+$, από το Λήμμα 2.2.3 έχουμε $x(e \pm y) \in \mathcal{A}_+$ και από το Λήμμα 2.2.6 συμπεραίνουμε ότι $\varphi(x(e \pm y)) \geqslant 0$, και αφού $\varphi \in \mathcal{A}^*$, $\varphi(x) \geqslant \pm\varphi(xy)$. Άρα,

$$|\varphi(xy)| \leqslant \varphi(x)$$

για κάθε $x \in \mathcal{A}_+$, $y \in \mathcal{A}$ με $\|x\|, \|y\| \leqslant 1$. Ομοίως, $e - x \in \mathcal{A}_+$ (από την Πρόταση 2.2.4). Άρα,

$$|\varphi((e-x)y)| \leqslant \varphi(e-x) = 1 - \varphi(x).$$

- Αν $\varphi(x) = 0$ τότε $|\varphi(xy)| \leqslant \varphi(x) = 0$, άρα $\varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y)$.
- Αν $\varphi(x) = 1$ τότε $|\varphi((e-x)y)| \leqslant 0$, άρα $\varphi(y - xy) = 0$, δηλαδή $\varphi(xy) = \varphi(y) = \varphi(x)\varphi(y)$.
- Αν $0 < \varphi(x) < 1$ (τότε, αφού $\varphi(x) \geqslant 0$ έχουμε $|\varphi(x)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|x\| \leqslant 1$). Ορίζουμε $\psi_1, \psi_2 \in \mathcal{A}^*$ με $\psi_1(y) := \varphi(x)^{-1}\varphi(xy)$ και $\psi_2(y) := (1 - \varphi(x))^{-1}\varphi((e-x)y)$, για σταθερό $x \in \mathcal{A}_+$.

Θα δείξουμε ότι $\psi_1, \psi_2 \in S$: Έχουμε $\psi_1(e) = \varphi(x)^{-1}\varphi(x) = e$ και $\psi_2(e) = (1-\varphi(x))^{-1}(1-\varphi(x)) = e$.

Στη συνέχεια θα δείξουμε ότι $\|\psi_1\| = \|\psi_2\| = 1$. Έχουμε δει ότι $|\varphi(xy)| \leqslant \varphi(y)$, άρα $\left|\frac{\varphi(xy)}{\varphi(y)}\right| \leqslant 1$, δηλαδή $|\psi_1(y)| \leqslant 1$ για κάθε $y \in \mathcal{A}$ με $\|y\| \leqslant 1$. Άρα, $\|\psi\| = 1$ αφού $\psi_1(e) = 1$.

Έχουμε δει ότι $|\varphi((e-x)y)| \leqslant 1 - \varphi(x)$, άρα $|\psi_2(y)| \leqslant 1$ για κάθε $y \in \mathcal{A}$ με $\|y\| \leqslant 1$. Άρα, $\|\psi_2\| = 1$. Άρα, $\psi_1, \psi_2 \in S$.

Τώρα, $\varphi = \varphi(x)\psi_1 + (1-\varphi(x))\psi_2$. Όμως, το φ είναι ακραίο σημείο του S και $\psi_1, \psi_2 \in S$. Άρα, $\varphi = \psi_1 = \psi_2$. Άρα, $\varphi(y) = \frac{1}{\varphi(x)}\varphi(xy)$ και έπεται ότι $\varphi(x)\varphi(y) = \varphi(xy)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.5. ($\Longrightarrow$) Έστω $\mathcal{A} \simeq C(K)$. Αρκεί να δείξουμε, για $f, g \in C(K)$,

$$\|f^2 - g^2\|_\infty \leqslant \|f^2 + g^2\|_\infty.$$

Αρκεί να δείξουμε ότι $|f^2(x) - g^2(x)| \leqslant f^2(x) + g^2(x)$ για κάθε $x \in K$, που ισχύει.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι η $\mathcal{A}$ ικανοποιεί την (2.2.1). Θα δείξουμε ότι $\mathcal{A} \simeq C(K)$. Ως K παίρνουμε το σύνολο των πολλαπλασιαστικών states όπως στο Λήμμα 2.2.7, δηλαδή

$$K := \{\varphi \in S : \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) \ \text{ για κάθε } x, y \in \mathcal{A}\}$$

με την weak*-τοπολογία.

Ορίζουμε $J : \mathcal{A} \to C(K)$ με $x \mapsto Jx : K \to \mathbb{R}$, όπου

$$\varphi \mapsto Jx(\varphi) = \varphi(x).$$

Η J είναι καλά ορισμένη αφού $\varphi \in \mathcal{A}^*$, άρα $J(x) \in C(K)$ για κάθε x. [Πράγματι: Αν $\varphi_n \xrightarrow{w^*} \varphi$ έχουμε $\varphi_n(x) \to \varphi(x)$ για κάθε x, δηλαδή $Jx(\varphi_n) \to Jx(\varphi)$ για κάθε x.]

Προφανώς $J(e) = 1$ (αφού $\varphi(e) = 1$ για κάθε $\varphi \in K \subseteq S$). Επίσης, αν $\|x\| \leqslant 1$ τότε

$$\|J(x)\|_\infty = \sup\{\varphi(x) : \varphi \in K\} \leqslant \|\varphi\| \cdot \|x\| \leqslant 1$$

αφού $\varphi \in S$. Άρα, $\|J\| = 1$.

Η J είναι ομομορφισμός αλγεβρών (δηλαδή, είναι γραμμική και πολλαπλασιαστική). Για παράδειγμα, η $J(xy) = J(x)J(y)$ ισχύει διότι

$$J(xy)(\varphi) = \varphi(xy) = \varphi(x)\varphi(y) = Jx(\varphi)Jy(\varphi) = JxJy(\varphi)$$

για κάθε $\varphi \in S$. Ομοίως ελέγχουμε τη γραμμικότητα.

Πρέπει να δείξουμε ότι η J είναι ισομετρία.

Ισχυρισμός. Έστω $x \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $\|J(x)\|_\infty \leqslant 1$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $t_\varepsilon > 0$ ώστε

$$\|e - t_\varepsilon(1+\varepsilon)e - t_\varepsilon x\| < 1.$$

Έστω ότι έχουμε αποδείξει τον ισχυρισμό. Για να δείξουμε ότι η J είναι ισομετρία, αφού $\|J\| = 1$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|x\| \leqslant \|J(x)\|_\infty.$$

Γι' αυτό αρκεί να αποδείξουμε ότι: «Αν $\|J(x)\|_\infty \leqslant 1$ τότε $\|x\| \leqslant 1$». Πράγματι, αν ισχύει το τελευταίο τότε, επειδή η J είναι γραμμική, έχουμε

$$\left\| J\left(\frac{x}{\|J(x)\|_\infty}\right)\right\|_\infty = 1 \leqslant 1,$$

άρα $\left\|\frac{x}{\|J(x)\|_\infty}\right\| \leqslant 1$, δηλαδή $\|x\| \leqslant \|J(x)\|_\infty$.

Έστω λοιπόν $\|J(x)\|_\infty \leqslant 1$. Πρέπει να δείξουμε ότι $\|x\| \leqslant 1$. Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ισχυρισμό υπάρχει $t_\varepsilon > 0$ ώστε $\|t_\varepsilon(1+\varepsilon)e + t_\varepsilon x - e\| < 1$. Από την Πρόταση 2.2.4 έχουμε $t_\varepsilon((1+\varepsilon)e + x) \in \mathcal{A}_+$, και αφού $t_\varepsilon > 0$ παίρνουμε $(1+\varepsilon)e + x \in \mathcal{A}_+$ για κάθε $\varepsilon > 0$.

Αφού το $\mathcal{A}_+$ είναι κλειστό, παίρνοντας $\varepsilon \to 0^+$ έχουμε $e + x \in \mathcal{A}_+$. Ομοίως,

$$\|J(-x)\|_\infty = \|-J(x)\|_\infty = \|J(x)\|_\infty \leqslant 1,$$

άρα ακολουθώντας τα ίδια βήματα με το $-x$ στη θέση του x έχουμε $e - x \in \mathcal{A}_+$.

Τώρα, αφού έχουμε ως δεδομένο την (2.2.1), βλέπουμε ότι ισχύει η (2.2.2): $\|x - y\| \leqslant \|x + y\|$ για κάθε $x, y \in \mathcal{A}_+$. Έχουμε $e - x, e + x \in \mathcal{A}_+$, άρα

$$\|x\| = \frac{1}{2}\|(e+x) - (e-x)\| \leqslant \frac{1}{2}\|e + x + e - x\| = \|e\| = 1.$$

Άρα, έχουμε δείξει το ζητούμενο. $\square$

Μένει να αποδείξουμε τον Ισχυρισμό. Για την απόδειξή του θα χρειαστούμε τα ακόλουθα.

Πρώτο διαχωριστικό θεώρημα υπό την ευρεία έννοια (συνέπεια του θεωρήματος Hahn-Banach). Έστω X τοπολογικός διανυσματικός χώρος, $K_1, K_2 \neq \varnothing$ κυρτά υποσύνολα του X, με το K_1 ανοικτό και $K_1 \cap K_2 = \varnothing$. Τότε, υπάρχει $f \in X^*$ με $\|f\| = 1$ και

$$\sup_{x \in K_1} f(x) \leqslant \inf_{x \in K_2} f(x).$$

Θεώρημα Krein-Milman. Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος και K συμπαγές κυρτό υποσύνολο του X. Τότε $\partial_e K \neq \varnothing$ και $\overline{\mathrm{conv}(\partial_e K)} = K$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού: Έστω, για άτοπο, ότι υπάρχει $x \in \mathcal{A}$ με $\|J(x)\|_\infty \leqslant 1$ και $\varepsilon > 0$ ώστε

$$(*) \qquad \|e - t(1+\varepsilon)e - tx\| \geqslant 1 \ \text{ για κάθε } t \geqslant 0.$$

Θεωρούμε το $K_1 := B_{\mathcal{A}}(0,1)$ που είναι ανοικτό και κυρτό. Ορίζουμε επίσης το $K_2 := \{e - t(1+\varepsilon)e - tx : t \geqslant 0\}$ που είναι κυρτό και ξένο προς το K_1 λόγω της $(*)$. Από το πρώτο διαχωριστικό θεώρημα υπάρχει $\varphi \in \mathcal{A}^*$ με $\|\varphi\| = 1$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{\|x\|<1} \varphi(x) \leqslant \inf_{t\geqslant 0} \varphi(e - t(1+\varepsilon)e - tx),$$

δηλαδή, για κάθε $t \geqslant 0$,

$$\varphi(e - t(1+\varepsilon)e - tx) \geqslant \sup_{\|x\|<1} \varphi(x) = \sup_{\|x\|\leqslant 1} \varphi(x) = \sup_{\|x\|\leqslant 1} |\varphi(x)| = \|\varphi\| = 1.$$

Ειδικότερα, για $t = 0$ έχουμε $\varphi(e) \geqslant 1$ και αφού $\|\varphi\| = 1$ και $\|e\| = 1$ βλέπουμε ότι $\varphi(e) = 1$. Άρα, $\varphi \in S$. Έχουμε $\varphi(e - t(1+\varepsilon)e - tx) \geqslant 1$ και αφού $\varphi(e) = 1$ έχουμε $1 - t\varphi((1+\varepsilon)e + x) \geqslant 1$, άρα $\varphi((1+\varepsilon)e + x) \leqslant 0$, δηλαδή $(1+\varepsilon)\cdot 1 + \varphi(x) \leqslant 0$, άρα $-\varphi(x) \geqslant 1 + \varepsilon$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$|\varphi(x)| \geqslant -\varphi(x) \geqslant 1 + \varepsilon,$$

όπου $\varphi \in S$. Από το Λήμμα 2.2.7 έχουμε

$$\begin{aligned}\|J(x)\|_\infty &= \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in K\} \geqslant \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in \partial_e S\} \\ &= \sup\{|\varphi(x)| : \varphi \in \overline{\mathrm{conv}(\partial_e S)} = S\} \geqslant 1 + \varepsilon,\end{aligned}$$

συνεπώς

$$\|J(x)\|_\infty > 1.$$

Έτσι καταλήγουμε σε άτοπο. Άρα, η J είναι ισομετρία. Τέλος, η J είναι επί, αφού η $J(\mathcal{A})$ είναι κλειστή υπάλγεβρα του $C(K)$ που χωρίζει τα σημεία του $C(K)$ (πράγματι, αν $f, g \in C(K)$ με $f \neq g$ τότε υπάρχει $x \in X$ ώστε $f(x) \neq g(x)$, άρα $Jx(f) \neq Jx(g)$, και $Jx \in J(\mathcal{A})$). Από το θεώρημα Stone-Weierstrass έπεται ότι

$$J(\mathcal{A}) = \overline{J(\mathcal{A})}^{\|\cdot\|_\infty} = C(K).$$

□

Παρατήρηση 2.2.8. Την (2.2.1) ουσιαστικά την χρησιμοποιήσαμε μόνο στο βήμα

$$\|(e+x) - (e-x)\| \leqslant \|(e+x) + (e-x)\|.$$

Πριν από αυτό χρησιμοποιούμε μόνο την ασθενέστερη υπόθεση

$$(2.2.4) \qquad \|a^2\| \leqslant \|a^2 + b^2\|, \qquad a, b \in \mathcal{A}.$$

Η (2.2.4) συνεπάγεται την (2.2.3) που χρησιμοποιήθηκε στα λήμματα της απόδειξης του θεωρήματος. Όμως με την (2.2.4) δεν παίρνουμε ότι η J είναι ισομετρία. Παίρνουμε μόνο την $\|J(x)\|_\infty \geqslant \frac{1}{2}\|x\|$.

Από την (2.2.4) δεν έπεται η (2.2.1). Για παράδειγμα, ο $(C(K), |||\cdot|||)$, όπου $|||f||| := \|f_+\|_\infty + \|f_-\|_\infty$, είναι μεταθετική άλγεβρα Banach που ικανοποιεί την (2.2.4) αλλά όχι την (2.2.1). Για την $\mathcal{A} = \ell_\infty$ (με τον κατά συντεταγμένη πολλαπλασιασμό) το Θεώρημα 2.2.5 δίνει $\mathcal{A} \simeq C(K)$ για κάποιον συμπαγή τοπολογικό χώρο K. Συνήθως συμβολίζουμε τον συγκεκριμένο K με $\beta\mathbb{N}$. Επίσης, αν (Ω, Σ, μ) είναι ένας χώρος σ-πεπερασμένου μέτρου τότε ο $L_\infty(\Omega, \mu)$ είναι χώρος $C(K)$. Εδώ, ο ισομετρικός ισομορφισμός διατηρεί τις διατάξεις.

2.3 Ισομετρικά εμφυτεύσιμοι χώροι

Ορισμός 2.3.1. Έστω Y χώρος Banach. Ο Y λέγεται εμφυτεύσιμος αν για κάθε χώρο Banach X, για κάθε κλειστό υπόχωρο E του X και για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : E \to Y$ υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $\tilde{T} : X \to Y$ που είναι επέκταση του T. Αν επιπλέον μπορούμε να επιτύχουμε $\|\tilde{T}\| = \|T\|$ τότε λέμε ότι ο Y είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος.

Για παράδειγμα, ο ℓ_∞ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος χώρος.

Από το Θεώρημα 2.2.5 έχουμε $\ell_\infty \simeq C(K)$, όπου $K = \beta\mathbb{N}$ είναι η Stone-Cech συμπαγοποίηση του $\mathbb{N}$, δηλαδή $\beta\mathbb{N}$ είναι ο μοναδικός συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff που περιέχει το $\mathbb{N}$ και το $\mathbb{N}$ είναι πυκνό στον $\beta\mathbb{N}$ (για την ακρίβεια, υπάρχει εμφύτευση $h : \mathbb{N} \to \beta\mathbb{N}$ και το $h(\mathbb{N})$ είναι πυκνό υποσύνολο του $\beta\mathbb{N}$) και κάθε συνεχής και φραγμένη $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ επεκτείνεται συνεχώς (μοναδικά) σε $\tilde{f} : \beta\mathbb{N} \to \mathbb{R}$. Βλέπουμε το $\mathbb{N}$ ως υποσύνολο του $\beta\mathbb{N}$ αφού $\mathbb{N} \simeq h(\mathbb{N})$ και $h(\mathbb{N}) \subseteq \beta\mathbb{N}$. Είναι γνωστό ότι $|\beta\mathbb{N}| = 2^{2^{\aleph_0}} = |\mathcal{P}(\mathbb{R})| > |\mathbb{R}|$.

Ορισμός 2.3.2. Λέμε ότι ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος αν για κάθε ζεύγος μη κενών $A, B \subseteq C(K)$ με $f \leqslant g$ για κάθε $f \in A$ και για κάθε $g \in B$ υπάρχει $h \in C(K)$ τέτοια ώστε $f \leqslant h \leqslant g$ για κάθε $f \in A$ και για κάθε $g \in B$.

Παρατήρηση 2.3.3. Αν ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος τότε κάθε άνω φραγμένο υποσύνολο A του $C(K)$ έχει ελάχιστο άνω φράγμα το οποίο συμβολίζουμε με $\sup A$.

Για την απόδειξη παρατηρούμε ότι το A έχει τουλάχιστον ένα άνω φράγμα. Έστω B το σύνολο όλων των άνω φραγμάτων του A, δηλαδή

$$B := \{g \in C(K) : f \leqslant g \text{ για κάθε } f \in A\} \neq \varnothing.$$

Τότε, αφού ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος, από τον ορισμό υπάρχει $h \in C(K)$ τέτοια ώστε $f \leqslant h \leqslant g$ για κάθε $f \in A$ και για κάθε $g \in B$. Αφού $f \leqslant h$ για κάθε $f \in A$, έχουμε $h \in B$. Όμως $h \leqslant g$ για κάθε $h \in B$. Άρα, $h = \sup A$.

Όμοια βλέπουμε ότι κάθε μη κενό κάτω φραγμένο υποσύνολο A του $C(K)$ έχει μέγιστο κάτω φράγμα το οποίο συμβολίζουμε με $\inf A$.

Χρειάζεται προσοχή το γεγονός ότι $\sup A \in C(K)$, δηλαδή είναι συνεχής συνάρτηση. Όμως, το $\sup A$ δεν είναι απαραίτητα το κατά σημείο supremum. Δηλαδή, μπορεί να έχουμε $\sup A \neq \sup f \in Af : K \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sup\limits_{f\in A} f(x)$, αφού η $\sup\limits_{f\in A} f$ ενδέχεται να μην είναι συνεχής.

Ο ορισμός του πλήρως διατεταγμένου συνόλου μπορεί να επεκταθεί και σε άλλους χώρους με κατάλληλη δομή διάταξης όπως π.χ. ο ℓ_∞ ή ο L_∞. Ο ℓ_∞ είναι πλήρως διατεταγμένος με τη συνήθη διάταξη. Επίσης, $\ell_\infty \simeq C(\beta\mathbb{N})$, άρα ο $C(\beta\mathbb{N})$ είναι πλήρως διατεταγμένος.

Έστω $\varnothing \neq A \subseteq \ell_\infty$. Έχουμε $\sup A = \sup\limits_{x\in A} x$, δηλαδή το κατά σημείο supremum: $\left(\sup_{x\in A} x\right)(n) = \sup\limits_{x\in A} x(n)$. Όπως στον $C(\beta\mathbb{N})$ το $\sup A$ ($A \subseteq \beta\mathbb{N}$) ενδέχεται, όπως εξηγήσαμε, να μην είναι το κατά σημείο supremum.

Ορισμός 2.3.4. Έστω X χώρος Banach και F γραμμικός υπόχωρος του X. Μια συνάρτηση $V : F \to C(K)$ λέγεται υπογραμμική αν

(i) $V(ax) = aV(x)$ για κάθε $a \geqslant 0$ και για κάθε $x \in F$.

(ii) $V(x+y) \leqslant V(x) + V(y)$ για κάθε $x, y \in F$.

Μια υπογραμμική συνάρτηση $V : X \to C(K)$ θα λέγεται ελαχιστική αν δεν υπάρχει $U : X \to C(K)$ τέτοια ώστε $U \neq V$ και $U(x) \leqslant V(x)$ για κάθε $x \in X$.

Λήμμα 2.3.5. *Έστω X χώρος Banach και F γραμμικός υπόχωρος του X. Έστω $V : X \to C(K)$ και $W : F \to C(K)$ υπογραμμικές απεικονίσεις τέτοιες ώστε*

$$W(y) + V(-y) \geqslant 0 \text{ για κάθε } y \in F.$$

Αν ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος τότε η απεικόνιση $V \wedge W : X \to C(K)$ με

$$x \mapsto V \wedge W(x) := \inf\{V(x-y) + W(y) : y \in F\}$$

είναι καλά ορισμένη και υπογραμμική.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι η $V \wedge W$ είναι καλά ορισμένη. Έστω $x \in X$. Αρκεί να δείξουμε ότι το σύνολο $\{V(x-y) + W(y) : y \in F\}$ είναι κάτω φραγμένο. Τότε, αφού ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος και $\varnothing \neq \{V(x-y) + W(y) : y \in F\} \subseteq C(K)$, υπάρχει το infimum του συνόλου. Παρατηρούμε ότι για κάθε $y \in F$ έχουμε $V(-y) = V(x-y-x) \leqslant V(x-y) + V(-x)$, άρα

$$V(x-y) \geqslant V(-y) - V(-x) \geqslant -W(y) - V(-x).$$

Συνεπώς το $-V(-x)$ είναι κάτω φράγμα του συνόλου $\{V(x-y) + W(y) : y \in F\}$.

Το γεγονός ότι η $V \wedge W$ είναι υπογραμμική προκύπτει από το ότι οι V, W είναι υπογραμμικές, $\inf(aA) = a \cdot \inf A$ για $a \geqslant 0$ και $\inf(A+B) = \inf A + \inf B$. Πράγματι, ενδεικτικά, για κάθε $x_1, x_2 \in X$ και $y, z \in F$ έχουμε

$$V(x_1 + x_2 - (y+z)) + W(y+z) \leqslant V(x_1 - y) + W(y) + V(x_2 - z) + W(z)$$

άρα

$$\begin{aligned} V \wedge W(x_1 + x_2) &\leqslant \inf\{V(x_1 - y) + W(y) : y \in F\} + \inf\{V(x_2 - z) + W(z) : z \in F\} \\ &\leqslant V \wedge W(x_1) + V \wedge W(x_2). \end{aligned}$$

□

Λήμμα 2.3.6. *Έστω $V : X \to C(K)$ υπογραμμική απεικόνιση. Αν ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος τότε υπάρχει ελαχιστική υπογραμμική απεικόνιση $W : X \to C(K)$ και μάλιστα $W(x) \leqslant V(x)$ για κάθε $x \in X$.*

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το Λήμμα Zorn: Έστω $S \neq \varnothing$ και $\leqslant$ μερική διάταξη στο S. Αν κάθε αλυσίδα στο S έχει άνω φράγμα, τότε το S έχει μεγιστικό στοιχείο (ως προς την $\leqslant$).

Θέτουμε

$$S := \{U : X \to C(K) \mid U \text{ υπογραμμική και } U(x) \leqslant V(x)) \text{ για κάθε } x \in X\}.$$

Έχουμε $S \neq \varnothing$ αφού $V \in S$. Ορίζουμε στο S τη μερική διάταξη $\geqslant$, δηλαδή $U_1 \geqslant U_2$ αν και μόνο αν $U_1(x) \geqslant U_2(x)$ για κάθε $x \in X$. Έστω $\Psi := (U_i)_{i \in I}$ αλυσίδα στο S. Κάθε $U_i \in S$, άρα η U_i είναι υπογραμμική. Συνεπώς,

$$0 = U_i(0) = U_i(x + (-x)) \leqslant U_i(x) + U_i(-x),$$

και έπεται ότι

$$U_i(x) \geqslant -U_i(-x) \geqslant -V(-x)$$

αφού $U_i \in S$. Άρα το σύνολο $\{U_i(x) : i \in I\} \subseteq C(K)$ έχει κάτω φράγμα. Αφού ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος, υπάρχει το $\inf\{U_i(x) : i \in I\} \in C(K)$ για κάθε $x \in X$. Ορίζουμε $U_\Psi : X \to C(K)$ με

$$U_\Psi(x) := \inf\{U_i(x) : i \in I\}, \qquad x \in X.$$

Για να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος Zorn αρκεί να δείξουμε ότι $U_\Psi \in S$. [Πράγματι, τότε $U_i \geqslant U_\Psi$ για κάθε $i \in I$, δηλαδή η U_Ψ είναι άνω φράγμα ως προς την $\geqslant$.]

Προφανώς, $U_\Psi(x) \leqslant U_i(x) \leqslant V(x)$ για κάθε $x \in X$. Αρκεί να δείξουμε ότι η U_Ψ είναι υπογραμμική. Αφού η $(U_i)_{i \in I}$ είναι αλυσίδα, αν $i \neq j \in I$ μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να υποθέσουμε ότι $U_i \leqslant U_j$. Τότε, για κάθε $x, y \in X$,

$$U_\Psi(x + y) \leqslant U_i(x + y) \leqslant U_j(x) + U_i(y),$$

άρα $U_\Psi(x + y) - U_j(x) \leqslant U_\Psi(y)$ και έπεται ότι

$$U_\Psi(x + y) - U_\Psi(y) \leqslant \inf\{U_j(x) : j \in I\} = U_\Psi(x),$$

δηλαδή $U_\Psi(x + y) \leqslant U_\Psi(x) + U_\Psi(y)$. Από το Λήμμα Zorn, υπάρχει μεγιστικό στοιχείο της S ως προς την $\geqslant$, δηλαδή ελαχιστική υπογραμμίκή απεικόνιση. □

Λήμμα 2.3.7. *Έστω $C(K)$ πλήρως διατεταγμένος και $V : X \to C(K)$ ελαχιστική υπογραμμική απεικόνιση. Τότε η V είναι γραμμική.*

Απόδειξη. Έστω $x \in X$. Θέτουμε $F := \langle x \rangle = \{\lambda x : \lambda \in \mathbb{R}\}$ και ορίζουμε $W : F \to C(K)$ με

$$\lambda x \mapsto W(\lambda x) := -\lambda V(-x) \in C(K)$$

αφού $V : X \to C(K)$. Ελέγχουμε ότι η W είναι γραμμική:

· $W(\kappa\lambda x) = -\kappa\lambda V(-x) = \kappa W(x)$ για κάθε $\kappa \in \mathbb{R}$.

· $W(\lambda x + \mu x) = W((\lambda + \mu)x) = -(\lambda + \mu)V(-x) = -\lambda V(-x) + (-\mu V(-x)) = W(\lambda x) + W(\mu x)$.

Άρα, οι $V : X \to C(K)$, $W : F \to C(K)$ είναι υπογραμμικές (η W γραμμική) και

$$W(\lambda x) \geqslant -V(-\lambda x).$$

Πράγματι, θα δείξουμε ότι $\lambda V(-x) \leqslant V(-\lambda x)$. Όπως είδαμε, αφού η V είναι υπογραμμική έχουμε $V(\lambda x) + V(-\lambda x) \geqslant 0$.

· Αν $\lambda \geqslant 0$ τότε $\lambda V(-x) = V(\lambda(-x)) = V(-\lambda x)$.

· Αν $\lambda < 0$ τότε $V(-\lambda x) \geqslant -V(\lambda x) = -V(-\lambda(-x)) = -(-\lambda)V(-x) = \lambda V(-x)$.

Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Λήμματος 2.3.5, δηλαδή ορίζεται η $V \wedge W : X \to C(K)$ με

$$V \wedge W(x) := \inf\{V(x-y) + W(y) : y \in \langle x \rangle\} = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}}\{V(x - \lambda x) + W(\lambda x)\}$$

και είναι υπογραμμική. Αφού η V είναι ελαχιστική και $V \wedge W(x) \leqslant V(x)$ για κάθε $x \in X$ (παίρνοντας $\lambda = 0$), συμπεραίνουμε ότι $V \wedge W = V$. Άρα $V = V \wedge W \leqslant W$ (παίρνοντας $\lambda = 1$). Δηλαδή,

$$V(x) \leqslant -V(-x).$$

Όμως, $V(x) \geqslant -V(-x)$ αφού η V είναι υπογραμμική. Άρα,

$$V(-x) = -V(x) \text{ για κάθε } x \in X.$$

Έπεται ότι $V(ax) = aV(x)$ για κάθε $a \in \mathbb{R}$ και για κάθε $x \in X$. Επίσης,

$$V(x+y) \leqslant V(x) + V(y) = -V(-x) - V(-y) = -(V(-x) + V(-y)) \leqslant -V(-(x+y)) = V(x+y)$$

για κάθε $x, y \in X$, άρα $V(x+y) = V(x) + V(y)$ για κάθε $x, y \in X$, δηλαδή η V είναι γραμμική. □

Θεώρημα 2.3.8 (Goodner, Nachbin)**.** *Έστω K συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff. Τότε ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος αν και μόνο αν ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος.*

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Έστω ότι ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος. Θα δείξουμε ότι ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος. Έστω X χώρος Banach και E κλειστός υπόχωρος του X. Αντί να δείξουμε ότι κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : E \to C(K)$ επεκτείνεται σε φραγμένο γραμμικό τελεστή στον X, θα το δείξουμε μόνο για τελεστές νόρμας 1 (τότε το έχουμε και για κάθε τελεστή διαιρώντας με τη νόρμα του τελεστή). Έστω λοιπόν $S : E \to C(K)$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|S\| = 1$. Τότε $sx \in C(K)$ και $\|Sx\|_\infty \leqslant \|x\|$ για κάθε $x \in E$. Άρα, $|(Sx)(k)| \leqslant \|x\|$ για κάθε $k \in K$, άρα

$$-\|x\| \cdot \mathbf{1}(k) \leqslant (Sx)(k) \leqslant \|x\| \cdot \mathbf{1}(k), \qquad k \in K,$$

άρα

$$-\|x\| \cdot 1 \leqslant Sx \leqslant \|x\| \cdot \mathbf{1}, \qquad x \in X$$

όπου $\mathbf{1}(k) = 1$ για κάθε $k \in K$.

Ορίζουμε $V_0 : X \to C(K)$ με $V_0(x) = \|x\| \cdot \mathbf{1}$. Η V_0 είναι υπογραμμική και

$$Sx \geqslant -\|x\| \cdot \mathbf{1} = -\|-x\| \cdot \mathbf{1} = -V_0(-x), \qquad x \in E.$$

Άρα, από το Λήμμα 2.3.5 ορίζεται η υπογραμμική απεικόνιση $V : X \to C(K)$ με

$$V(x) := V_0 \wedge S(x) = \inf\{V_0(x-y) + S(y) : y \in E\}, \qquad x \in X.$$

Από το Λήμμα 2.3.6 υπάρχει $T : X \to C(K)$ ελαχιστική υπογραμμική απεικόνιση με $T \leqslant V$. Από το Λήμμα 2.3.7 η T είναι γραμμική.

Τώρα: $T \leqslant V = V_0 \wedge S \leqslant S$, άρα $T(x) \leqslant S(x)$ και $T(-x) \leqslant S(-x)$ για κάθε $x \in E$. Αφού οι T, S είναι γραμμικοί τελεστές, έπεται ότι $T(x) = S(x)$ για κάθε $x \in E$. Άρα, $T\big|_E = S$. Τέλος, $T(x) \leqslant \|x\| \cdot \mathbf{1}$ και $T(-x) \leqslant \|x\| \cdot \mathbf{1}$, άρα $\|T\| \leqslant 1$. Έτσι, ο T είναι γραμμική επέκταση του S από τον E στον X, Μένει να δείξουμε ότι $\|T\| = 1$. Ξέρουμε ότι

$$1 = \|S\| = \sup\{\|S(x)\|_\infty : \|x\| \leqslant 1, x \in E\}.$$

Άρα,

$$\begin{aligned}\|T\| &= \sup\{\|T(x)\|_\infty : \|x\| \leqslant 1, x \in X\} \geqslant \sup\{\|T(x)\|_\infty : \|x\| \leqslant 1, x \in E\} \\ &= \sup\{\|S(x)\|_\infty : \|x\| \leqslant 1, x \in E\} = \|S\| = 1.\end{aligned}$$

Άρα, $\|T\| \geqslant 1$, και τελικά $\|T\| = 1$. Συνεπώς, ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος.

($\Longrightarrow$) Έστω τώρα ότι ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος. Εφαρμόζουμε τον ορισμό του ισομετρικά εμφυτεύσιμου χώρου για την ταυτοτική απεικόνιση $id : C(K) \to C(K)$ βλέποντας τον $E = C(K)$ ως κλειστό υπόχωρο του $\ell_\infty(K) := \{f : K \to \mathbb{R} \mid f \text{ φραγμένη}\}$. Υπάρχει $P : \ell_\infty(K) \to C(K)$ φραγμένη γραμμική επέκταση του $id_{C(K)}$ με $\|P\| = \|id\| = 1$ (είναι προβολή, αφού $P^2 = P$).

Θα δείξουμε ότι ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος. Έστω $\varnothing \neq A, B \subseteq C(K)$ τέτοια ώστε: για κάθε $f \in A$ και $g \in B$, $f \leqslant g$. Έστω $g \in B$. Τότε, $\sup\limits_{f\in A} f \leqslant g$. Αφού η g είναι φραγμένη, η $\sup\limits_{f\in A} f$ είναι φραγμένη. Ορίζουμε $\alpha := \sup\limits_{f\in A} f$, δηλάφή $\alpha(s) = \sup\limits_{f\in A} f(s)$ για κάθε $s \in K$. Τότε, $\alpha \in \ell_\infty(K)$. Ορίζουμε $h := P(\alpha)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $f \leqslant h \leqslant g$ για κάθε $f \in A$ και $g \in B$.

Γνωρίζουμε ότι $P(\mathbf{1}) = \mathbf{1}$, $\|P\| = 1$ και η P είναι γραμμική. Αρκεί να δείξουμε ότι η P είναι θετική, δηλαδή ότι για κάθε $b \in \ell_\infty(K)$ με $b \geqslant 0$ ισχύει $P(b) \geqslant 0$. [Τότε: ξέρουμε ότι $f \leqslant \sup\limits_{f\in A} f = \alpha$ για κάθε $f \in A$, άρα $\alpha - f \geqslant 0$, συνεπώς $P(\alpha - f) \geqslant 0$, δηλαδή $P(\alpha) \geqslant P(f)$. Άρα $P(f) \leqslant h$, και αφού $P_{C(K)} = id$ έχουμε $f \leqslant h$. Όμοια, $\alpha = \sup\limits_{f\in A} f \leqslant g$ για κάθε $g \in B$, άρα $h = P(\alpha) \leqslant P(g) = g$, και τελικά $f \leqslant h \leqslant g$ για κάθε $f \in A$ και $g \in B$.]

Έστω $b \in \ell_\infty(K)$ με $b > 0$. Τότε, $b(k) > 0$ για κάθε $k \in K$. Θα δείξουμε ότι $|1 - \lambda b(k)| \leqslant 1$ για κάθε $k \in K$ και για κάθε $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{2}{\|b\|}$. Έστω $0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{2}{\|b\|}$. Τότε, $b(k) \leqslant \|b\|$, άρα $-\lambda b(k) \geqslant -\lambda\|b\|$, άρα $1 - \lambda b(k) \geqslant 1 - \frac{2}{\|b\|}\|b\| = -1$, δηλαδή

$$-1 \leqslant 1 - \lambda b(k) \leqslant 1,$$

το οποίο αποδεικνύει ότι $|1 - \lambda b(k)| \leqslant 1$ για κάθε $k \in K$. Άρα, $\|\mathbf{1} - \lambda b\| \leqslant 1$. Τότε,

$$\|P(\mathbf{1} - \lambda b)\| \leqslant \|P\| \cdot \|\mathbf{1} - \lambda b\| \leqslant 1.$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι για κάθε $b \geqslant 0$ ισχύει $P(b) \geqslant 0$. Έχουμε $\|\mathbf{1} - \lambda P(b)\| \leqslant 1$, άρα, για κάθε $k \in K$, $1 - \lambda P(b)(k)| \leqslant 1$, δηλαδή $P(b)(k) \geqslant 0$ για κάθε $k \in K$, άρα $P(b) \geqslant 0$. □

Σχόλιο: Στα παραπάνω, $\mathbf{1} \in C(K) \subseteq \ell_\infty(K)$ είναι η συνάρτηση $\mathbf{1}(k) = 1$, $k \in K$. Ισχύει ότι $\mathbf{1} \in \partial_e(B_{C(K)})$ (δηλ. είναι ακραίο σημείο της $B_{C(K)}$).

Θεώρημα 2.3.9 (Kelley)**.** *Έστω X χώρος Banach. Τότε ο X είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος αν και μόνο αν $X \simeq C(K)$, όπου ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος.*

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Αν $X \simeq C(K)$, όπου $C(K)$ πλήρως διατεταγμένος, τότε από το Θεώρημα 2.3.8 ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος, άρα και ο X.

($\Longrightarrow$) Αρκεί να βρούμε κατάλληλο K ώστε $X \simeq C(K)$. Τότε, αφού ο X είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος και ο $C(K)$ ισομετρικά ισόμορφος με τον X, ο $C(K)$ θα είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος, άρα πλήρως διατεταγμένος.

Θέλουμε να επιλέξουμε το K ως υποσύνολο της $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leqslant 1\}$. Θεωρούμε το σύνολο $\partial_e B_{X^*}$ των ακραίων σημείων της B_{X^*} με την weak*-τοπολογία. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μεγιστικό weak*-ανοικτό $U \subseteq \partial_e B_{X^*}$ τέτοιο ώστε $U \cap (-U) = \varnothing$. Έστω $\mathcal{P}$ το σύνολο των weak*-ανοικτών υποσυνόλων του $\partial_e B_{X^*}$ με την ιδιότητα $U \cap (-U) = \varnothing$. Προφανώς $\varnothing \in \mathcal{P}$, άρα $\mathcal{P} \neq \varnothing$. Το $\mathcal{P}$ γίνεται μερικά διατεταγμένος χώρος με $\leqslant := \subseteq$. Έστω $(U_i)_{i\in I}$ αλυσίδα στο $\mathcal{P}$. Για κάθε $i \in I$ το U_i είναι ανοικτό υποσύνολο του $\partial_e B_{X^*}$, άρα το $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ είναι ανοικτό υποσύνολο του $\partial_e B_{X^*}$.

Για να δείξουμε ότι το $\bigcup\limits_{i\in I} U_i$ είναι άνω φράγμα της $(U_i)_{i\in I}$ αρκεί να δείξουμε ότι ανήκει στο $\mathcal{P}$, δηλαδή να δείξουμε ότι $\Big(\bigcup\limits_{i\in I} U_i\Big) \cap \Big(-\bigcup\limits_{i\in I} U_i\Big) = \varnothing$. Γράφουμε

$$\Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) \cap \Big(-\bigcup_{i\in I} U_i\Big) = \Big(\bigcup_{i\in I} U_i\Big) \cap \Big(\bigcup_{j\in I} (-U_j)\Big) = \bigcup_{i,j} (U_i \cap (-U_j)) = \bigcup_{i\neq j} (U_i \cap (-U_j)).$$

Έστω για άτοπο ότι υπάρχει $x \in \bigcup\limits_{i\neq j} (U_i \cap (-U_j))$. Τότε υπάρχουν $i, j \in I$, $i \neq j$ τέτοια ώστε $x \in U_i$ και $x \in (-U_j)$, δηλαδή $-x \in U_j$. Αφού το $(U_i)_{i\in I}$ είναι αλυσίδα, έχουμε $U_i \subseteq U_j$ ή $U_j \subseteq U_i$. Αν $U_i \subseteq U_j$ τότε $x \in U_i \subseteq U_j$ και $x \in (-U_j)$, δηλαδή $x \in U_j \cap (-U_j)$, το οποίο είναι άτοπο. Αν $U_j \subseteq U_i$ τότε ομοίως έχουμε $x \in U_i \cap (-U_i)$, το οποίο είναι επίσης άτοπο.

Άρα, κάθε αλυσίδα στο $\mathcal{P}$ έχει άνω φράγμα την ένωσή της. Από το Λήμμα Zorn υπάρχει μεγιστικό ανοικτό $U \subseteq \partial_e B_{X^*}$ με την ιδιότητα $U \cap (-U) = \varnothing$.

Θέτουμε $K := \overline{U}^{w^*|_{B_{X^*}}}$. Το K είναι συμπαγής χώρος Hausdorff με την w^*-τοπολογία (είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς B_{X^*}). Από την $U \cap (-U) = \varnothing$ βλέπουμε ότι $U \subseteq \partial_e B_{X^*} \setminus (-U)$, και το $\partial_e B_{X^*} \setminus (-U)$ είναι σχετικώς weak*-κλειστό στο $\partial_e B_{X^*}$. Άρα, $\overline{U}^{w^*|_{B_{X^*}}} \subseteq \partial_e B_{X^*} \setminus (-U)$, δηλαδή $K \cap \partial_e B_{X^*} \subseteq \partial_e B_{X^*} \setminus (-U)$, συνεπώς $(K \cap \partial_e B_{X^*}) \cap (-U) = \varnothing$. Τώρα, $U \subseteq \partial_e B_{X^*}$, άρα $K \cap (-U) = \varnothing$. [Υπενθύμιση: $K := \overline{U}^{w^*|_{B_{X^*}}} = \overline{U}^{w^*} \cap B_{X^*}$.]

Θα δείξουμε ότι $\partial_e B_{X^*} \subseteq K \cup (-K)$. Έστω για άτοπο ότι υπάρχει $x^* \in \partial_e B_{X^*} \setminus (K \cup (-K))$, το οποίο είναι w^*-ανοικτό αφού τα $K, -K$ είναι κλειστά. Αφού ο (X^*, w^*) είναι τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος, υπάρχει ανοικτή κυρτή περιοχή V_1 του x^* τέτοια ώστε $V_1 \subseteq \partial_e B_{X^*} \setminus (K \cup (-K))$, δηλαδή $V_1 \cap (K \cup (-K)) = \varnothing$. Το V_1 είναι ανοικτό κυρτό, άρα το $V_2 := V_1 - x^*$ είναι ανοικτό κυρτό. Έτσι, $(x^* + V_2) \cap (K \cup (-K)) = \varnothing$, και το V_2 είναι ανοικτή κυρτή περιοχή του $0 \in X^*$. Μάλιστα, το V_2 μπορεί να επιλεγεί συμμετρικό (αν δεν είναι, το αντικαθιστούμε με το $V_2 \cap (-V_2)$). Έχουμε λοιπόν μια w^*-ανοικτή κυρτή συμμετρική περιοχή του 0, έστω V, τέτοια ώστε

$$(x^* + V) \cap (K \cup (-K)) = \varnothing.$$

Μάλιστα, $x^* \notin V$. Πράγματι, έστω για άτοπο ότι $x^* \in V$. Αφού $x^* \in \partial_e B_{X^*} \subseteq S_{X^*}$, έχουμε $\|x^*\| = 1$. Τώρα, $2x^* \in x^* + V = V_1 \subseteq \partial_e B_{X^*} \subseteq S_{X^*}$, άρα $\|2x^*\| = 1$, το οποίο είναι άτοπο.

Θέτουμε $U_1 := U \cup ((x^* + V) \cap \partial_e B_{X^*})$. Το U είναι γνήσιο υποσύνολο του U_1, αφού $x^* \in U_1$ αλλά $x^* \notin (K \cup (-K)) \supseteq K \supseteq U$. Θα δείξουμε ότι $U_1 \cap (-U_1) = \varnothing$.

Έστω, για άτοπο, $y^* \in U_1 \cap (-U_1)$. Τότε, είτε $y^* \notin U$ είτε $y^* \in U$ οπότε $-y^* \notin U$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $y^* \notin U$ (αφού το $U_1 \cap (-U_1)$ είναι συμμετρικό, στη δεύτερη περίπτωση μπορούμε να αντικαταστήσουμε το y^* με το $-y^*$). Τότε,

$$y^* \in (x^* + V) \cap \partial_e B_{X^*} \implies y^* \in x^* + V \implies y^* \notin K \cup (-K) \supseteq U \implies y^* \notin (-U).$$

Άρα, $-y^* \notin U$, δηλαδή $-y^* \in x^* + V$. Τότε,

$$0 = y^* - y^* \in 2x^* + 2V,$$

δηλαδή $-x^* \in V$ και λόγω της συμμετρίας του V παίρνουμε $x^* \in V$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα, $U_1 \cap (-U_1) = \varnothing$ και το U_1 είναι ανοικτό υποσύνολο του $\partial_e B_{X^*}$ το οποίο περιέχει γνήσια το U, ενώ το U είναι μεγιστικό με αυτή την ιδιότητα. Έχουμε καταλήξει σε άτοπο, άρα $\partial_e B_{X^*} \subseteq K \cup (-K)$.

Από το θεώρημα Krein-Milman έχουμε

$$B_{X^*} = \overline{\text{conv}}(\partial_e B_{X^*}) \subseteq \overline{\text{conv}}(K \cup (-K)) \subseteq B_{X^*}$$

αφού το B_{X^*} είναι κυρτό και weak*-κλειστό. Άρα,

$$B_{X^*} = \overline{\text{conv}}(K \cup (-K)).$$

Από το θεώρημα Hahn-Banach, για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|x\| = \sup_{x^* \in B_{X^*}} |x^*(x)| = \sup_{x^* \in K \cup (-K)} |x^*(x)| = \sup_{x^* \in K} |x^*(x)| = \max_{x^* \in K} |x^*(x)|.$$

Ορίζουμε $J : X \to C(K)$, με $x \mapsto J(x) := \hat{x} : K \to \mathbb{R}$, όπου

$$x^* \mapsto \hat{x}(x^*) := x^*(x).$$

Ο J είναι καλά ορισμένος. Αρκεί να δείξουμε ότι $\hat{x} \in C(K)$. Έστω $x_n^* \xrightarrow{w^*} x^*$. Τότε, $\hat{x}(x_n^*) = x_n^*(x) \to x^*(x) = \hat{x}(x^*)$, άρα η $\hat{x}$ είναι συνεχής. Επίσης,

$$\|J(x)\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(x^*)| : x^* \in K\} = \|x\|.$$

Άρα, ο J είναι ισομετρική εμφύτευση: δηλαδή, οι $J : X \to J(X)$ και $J^{-1} : J(X) \to X$ είναι ισομετρικοί ισομορφισμοί. Τώρα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο X είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος. Αφού ο $J^{-1} : J(X) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής και ο $J(X)$ είναι κλειστός υπόχωρος του $C(K)$, υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : C(K) \to X$ με $T(\hat{x}) = x$ για κάθε $x \in X$ και $\|T\| = 1$ (όχι απαραίτητα ισομετρία).

Πριν συνεχίσουμε την απόδειξη χρειαζόμαστε την ακόλουθη:

Πρόταση 2.3.10. *Έστω E, F χώροι με νόρμα και έστω $T : E \to F$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε $T^* : F^* \to R^*$ με $g \mapsto T^*(g) : E \to \mathbb{R}$, που*

$$T^*(g)(x) := g(T(x)), \qquad x \in E.$$

Τότε ο T^* είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T^*\| = \|T\|$ και είναι ο μοναδικός φραγμένος γραμμικός τελεστής με την ιδιότητα $T^*(g)(x) = g(T(x))$ για κάθε $g \in F^*$ και για κάθε $x \in E$.

Η απόδειξη παραλείπεται. Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε το συμβολισμό

$$\langle x, T^*(g)\rangle = \langle T(x), g\rangle$$

και γενικά $\langle x, f\rangle := f(x)$.

Συνεχίζουμε με την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.9. Έχουμε $T : C(K) \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T\| = 1$ και μάλιστα

$$T(\hat{x}) = x \text{ για κάθε } \hat{x} \in J(X) \subseteq C(K).$$

Άρα ορίζεται ο συζυγής τελεστής T^* του T,

$$T^* : X^* \to C(K)^* \simeq \mathcal{M}(K)$$

από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, και $\|T^*\| = 1$. Αν $u^* \in U \subseteq \partial_e(B_{X^*}) \subseteq S_{X^*}$ και $T^*(u^*) = \mu \in \mathcal{M}(K)$ τότε

$$\|\mu\| = \|T^*(u^*)\| \leqslant \|T^*\| \cdot \|u^*\| = 1.$$

Έστω V τυχούσα ανοικτή ως προς την σχετική weak*-τοπολογία του K περιοχή του $u^* \in V \subseteq K$. Θέτουμε $K_0 := K \setminus V$ και ορίζουμε $v^* \in X^*$ με

$$v^*(x) := \int_V \hat{x}\, d\mu = \int_V \hat{x}(x^*)\, d\mu(x^*) = \int_V x^*(x)\, d\mu(x^*)$$

και $w^* \in X^*$ με

$$w^*(x) := \int_{K_0} \hat{x}\, d\mu = \int_{K_0} \hat{x}(x^*)\, d\mu(x^*) = \int_{K_0} x^*(x)\, d\mu(x^*).$$

Έχουμε $\mu \in \mathcal{M}(K)$, $K \subseteq B_{X^*} \subseteq X^*$, $V, K_0 \subseteq K$ και το K συμπαγές. Παρατηρούμε ότι

$$|v^*(x)| \leqslant \int_V |x^*(x)|\, d\mu \leqslant \int_V \|x\|\, d\mu = \|x\| \int \mathbf{1}_V\, d\mu = \|x\| \cdot |\mu|(V),$$

άρα $\|v^*\| \leqslant |\mu|(V)$. Ομοίως $|w^*(x)| \leqslant |\mu|(K_0) \cdot \|x\|$, άρα $\|w^*\| \leqslant |\mu|(K_0)$.

Τώρα:

$$\begin{aligned}\int_K x^*(x)\, d\mu &= \int_K \hat{x}(x^*)\, d\mu(x^*) = \langle \hat{x}, \mu\rangle = \langle \hat{x}, T^*(u^*)\rangle \\ &= \langle T(\hat{x}), u^*\rangle = \langle x, u^*\rangle = u^*(x).\end{aligned}$$

Άρα

$$v^*(x)+w^*(x) = \int_V x^*(x)d\mu(x^*)+\int_{K\setminus V} x^*(x)d\mu(x^*) = \int_K x^*(x)d\mu(x^*) = \int_K x^*(x)d\mu(x^*) = u^*(x),$$

δηλαδή $v^* + w^* = u^*$. Έχουμε $\|u^*\| = 1$ (αφού $u^* \in U \subseteq \partial_e B_{X^*} \subseteq S_{X^*}$). Επίσης, το K είναι η ξένη ένωση των V και K_0, άρα

$$|\mu|(V) + |\mu|(K_0) = |\mu|(K) = \|\mu\| \leqslant 1$$

και
$$1=\|u^*\|=\|v^*+w^*\|\leqslant\|v^*\|+\|w^*\|\leqslant|\mu|(V)+|\mu|(K_0),$$
άρα $|\mu|(V)+|\mu|(K_0)=1$ και $\|v^*\|+\|w^*\|=1$. Παρατηρούμε ότι $u^*\in\partial_e B_{X^*}$ και
$$u^*=\|v^*\|\frac{v^*}{\|v^*\|}+\|w^*\|\frac{w^*}{\|w^*\|},$$
όπου $\frac{v^*}{\|v^*\|},\frac{w^*}{\|w^*\|}\in B_{X^*}$ και $\|w^*\|=1-\|v^*\|$. Από τον ορισμό του ακραίου σημείου έχουμε $u^*=\frac{v^*}{\|v^*\|}=\frac{w^*}{\|w^*\|}$, δηλαδή $v^*=\|v^*\|u^*$ και $w^*=\|w^*\|u^*$.

Θα δείξουμε ότι $\|v^*\|=|\mu|(V)$ και $\|w^*\|=|\mu|(K_0)$. Έστω γα άτοπο π.χ. ότι $\|w^*\|\neq|\mu|(K_0)$. Τότε $\|w^*\|<|\mu|(K_0)$ και $\|v^*\|\leqslant|\mu|(V)$, άρα
$$1=\|v^*\|+\|w^*\|<|\mu|(K_0)+|\mu|(V)=1,$$
το οποίο είναι άτοπο.

Θέτουμε $a:=|\mu|(K_0)=\|w^*\|$. Έστω για άτοπο ότι $a>0$. Έχουμε
$$u^*(x)=\frac{1}{\|w^*\|}w^*(x)=\frac{1}{a}\int_{K_0}x^*(x)d\mu(x^*)\leqslant\max_{x^*\in K_0}|x^*(x)|,$$
και το max υπάρχει αφού το K_0 είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς. Θα δείξουμε ότι
$$u^*\in C:=\overline{\operatorname{conv}(K_0\cup(-K_0))}^{w^*}.$$
Ξέρουμε ότι για κάθε $x\in X$,
$$u^*(x)\leqslant|u^*(x)|\leqslant\max_{x^*\in K_0}|x^*(x)|=\max_{x^*\in K_0\cup(-K_0)}x^*(x)=\max_{x^*\in\overline{\operatorname{conv}(K_0\cup(-K_0))}^{w^*}}x^*(x).$$
Δηλαδή, για κάθε $x\in X$,
$$\hat{x}(u^*)\leqslant\max_{x^*\in\overline{\operatorname{conv}(K_0\cup(-K_0))}^{w^*}}\hat{x}(x^*).$$
Όμως $\{\hat{x}:x\in X\}=J(X)\subseteq C(K)$ και μάλιστα το $J(X)$ είναι υποάλγεβρα της $C(K)$ που διαχωρίζει τα σημεία του K και $\mathbf{1}\in J(X)$. Άρα $J(X)^{\|\cdot\|_\infty}=C(K)$. Έστω για άτοπο ότι $u^*\notin C$. Από διαχωριστικό θεώρημα, υπάρχει $f\in C(K)$ τέτοιο ώστε
$$\max_{x^*\in\overline{\operatorname{conv}(K_0\cup(-K_0))}^{w^*}}f(x^*)<f(u^*),$$
το οποίο είναι άτοπο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $u^*\in C=\overline{\operatorname{conv}(K_0\cup(-K_0))}^{w^*}$. Θα δείξουμε ότι $u^*\in\partial_e C$. Όμως, $u^*\in\partial_e B_{X^*}$ και $C\subseteq B_{X^*}$ αφού $K_0\subseteq B_{X^*}$ και η B_{X^*} είναι κυρτό και w^*-κλειστό σύνολο. Άρα $u^*\in\partial_e C=\partial_e(\overline{\operatorname{conv}(K_0\cup(-K_0))}^{w^*})$ και έπεται ότι $u^*\in K_0\cup(-K_0)$. Σε αυτό το σημείο χρησιμοποιούμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 2.3.11 (Milman). *Έστω X τοπικά κυρτός τοπολογικός διανυσματικός χώρος και έστω $K\subseteq X$ κλειστό και φραγμένο. Τότε, $\partial_e(\overline{\operatorname{conv}}(K)\subseteq K$.*

Άρα $u^* \in K_0 \cup (-K_0)$ (αφού το $K_0 \cup (-K_0)$ είναι κλειστό). Όμως $u^* \in V$, άρα $u^* \notin K_0$, συνεπώς $-u^* \in K_0$. Έτσι έχουμε $K_0 \cap (-U) \neq \varnothing$, άρα $K \cap (-U) \neq \varnothing$, το οποίο είναι άτοπο.

Επομένως $a = 0$, δηλαδή $|\mu|(K_0) = \|w^*\| = 0$ και άρα $|\mu(V)| = 1$ για κάθε w^*-ανοικτή περιοχή V του u^*. Αφού το μ είναι κανονικό, έχουμε

$$|\mu|(\{u^*\}) = \inf\{|\mu|(V : V\ w^* - \text{ανοικτό}, \{u^*\} \subseteq V\} = 1.$$

Όμως, $|\mu|(K) = \|\mu\| = 1$. Άρα, για κάθε $A \subseteq K$ έχουμε $|\mu|(A) = 1$ αν $u^* \in A$ και $|\mu|(A) = 0$ αν $u^* \notin A$. Δηλαδή, $|\mu| = \delta_{u^*}$. Άρα, $\mu = \pm\delta_{u^*}$. [Πράγματι: έχουμε $\mu = \mu^+ - \mu^-$ και $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$, απ' όπου έπεται ότι $\mu^+(\{u^*\}) = 1$ ή $\mu^-(\{u^*\}) = 1$, συνεπώς $\mu = \mu^+ = \delta_{u^*}$ ή $\mu = -\mu^- = -\delta_{u^*}$.]

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mu = \delta_{u^*}$. Τότε, για κάθε $u^* \in U$ έχουμε $T^*(u^*) = \mu = \delta_{u^*}$. Αφού $K = \overline{U}^{w^*}$ και ο T^* είναι w^*-συνεχής, ισχύει $T^*(x^*) = \delta_{x^*}$ για κάθε $x^* \in K$.

Τώρα θα δείξουμε ότι ο J είναι επί του $C(K)$. Έστω $f \in C(K)$. Τότε, για κάθε $x^* \in K$ έχουμε

$$x^*(T(f)) = \langle Tf, x^*\rangle = \langle f, T^*(x^*)\rangle = \langle f, \delta_{x^*}\rangle = f(x^*).$$

Δηλαδή, $\widehat{T(f)} = f$. Άρα, $J(T(f)) = f$, και αυτό δείχνει ότι η J είναι επί. Άρα, $X \simeq C(K)$. $\square$

Μέχρι τώρα έχουμε μόνο ένα παράδειγμα πλήρως διατεταγμένου χώρου $C(K)$, τον ℓ_∞. Η επόμενη πρόταση δίνει και άλλα μη τετριμμένα παραδείγματα.

Πρόταση 2.3.12. (i) *Αν $C(K) \simeq X^*$ όπου X χώρος με νόρμα, τότε ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος.*

(ii) *Αν (Ω, Σ, μ) είναι σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου τότε ο $L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος.*

(iii) *Για κάθε συμπαγή τοπολογικό χώρο Hausdorff K, ο $C(K)^{**}$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το θεώρημα Banach-Dieudonne.

Θεώρημα 2.3.13 (Banach-Dieudonne). *Έστω C κυρτό υποσύνολο ενός δυϊκού χώρου X^*. Το C είναι* weak**-κλειστό αν και μόνο αν το $C \cap \lambda B_{X^*}$ είναι* weak**-κλειστό για κάθε $\lambda > 0$.*

Απόδειξη της Πρότασης 2.3.12. (i) Θέτουμε $P := \{f \in C(K) : f \geqslant 0\}$ (ο θετικός κώνος του $C(K)$). Από την υπόθεση έχουμε $C(K) \simeq X^*$, άρα μπορούμε να ταυτίσουμε τους δύο χώρους και συνεπώς να θεωρήσουμε την weak*-τοπολογία στον $C(K)$.

Θα δείξουμε ότι το P είναι weak*-κλειστό. Έστω $\lambda > 0$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.13 αρκεί να δείξουμε ότι το $P \cap \lambda B_{C(K)}$ είναι weak*-κλειστό. Επειδή $f \geqslant 0$ και η $f(x) \leqslant \lambda$ είναι ισοδύναμη με την $\left|f(x) - \frac{\lambda}{2}\right| \leqslant \frac{\lambda}{2}$, έχουμεε ότι

$$P \cap \lambda B_{C(K)} = \{f : \|f - (\lambda/2) \cdot \mathbf{1}\|_\infty \leqslant \lambda/2\}$$

που είναι weak*-κλειστό σύνολο ως κλειστή μπάλα.

Για να δείξουμε ότι ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος, αρκεί να δείξουμε ότι ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος. Έστω $\varnothing \neq A, B \subseteq C(K)$ τέτοια ώστε για κάθε $f \in A$ και $g \in B$ να ισχύει $f \leqslant g$. Για κάθε $f \in A$ και $g \in B$ ορίζουμε

$$C_{f,g} := \{h \in C(K) : f \leqslant h \leqslant g\}.$$

Το ζητούμενο είναι να δείξουμε ότι

$$\bigcap\{C_{f,g} : f \in A, g \in B\} \neq \varnothing.$$

Προφανώς, για σταθεροποιημένες $f \in A$ και $g \in B$ έχουμε $C_{f,g} \neq \varnothing$ και το $C_{f,g}$ είναι φραγμένο και weak*-κλειστό σύνολο. Επειδή ο $C(K)$ είναι weak*-συμπαγής και τα σύνολα $C_{f,g}$ είναι weak*-κλειστά, για να δείξουμε ότι η τομή τους είναι μη κενή αρκεί να δείξουμε ότι η οικογένεια $\{C_{f,g} : f \in A, g \in B\}$ έχει την ιδιότητα πεπερασμένων τομών. Δηλαδή αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $f_1, \ldots, f_n \in A$ και για κάθε $g_1, \ldots, g_m \in B$ ισχύει

$$\bigcap_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,m}} C_{f_i,g_j} \neq \varnothing,$$

το οποίο ισχύει αφού το τελευταίο σύνολο περιέχει, για παράδειγμα, την $\max\{f_1, \ldots, f_n\}$.

(ii) Άμεσο από το (i). Πράγματι, αφού $L_\infty(\mu) = L_1(\mu)^*$ και $L_\infty(\mu) \simeq C(K)$, συμπεραίνουμε ότι $C(K) \simeq L_1(\mu)^*$, οπότε ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος, άρα και ο $L_\infty(\mu)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος.

(iii) Αρκεί να δείξουμε ότι ο $\mathcal{M}(K)$ ($\simeq C(K)^*$) είναι ισομετρικά ισόμορφος με ένα άπειρο άθροισμα $\sum\limits_{i\in I} L_1(\mu_i)$ όπου $|I| = |\ell_1|$. Τότε,

$$C(K)^{**} \simeq \mathcal{M}(K)^* \simeq \sum_{j \in J} L_\infty(\mu_j),$$

όπου $|J| = |\ell_\infty|$, άρα από το (ii) ο $C(K)^{**}$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος (χρησιμοποιούμε εδώ τις $L_1^* \simeq L_\infty$ και $\ell_1^* \simeq \ell_\infty$).

Χρησιμοποιώντας το λήμμα του Zorn θα δείξουμε ότι υπάρχει μεγιστική (ως προς $|I|$) οικογένεια $(\mu_i)_{i\in I}$ μέτρων πιθανότητας στο K τέτοια ώστε $\mu_i \perp \mu_j$ (τα μ_i και μ_j είναι αμοιβαία ιδιάζοντα) δηλαδή, υπάρχουν $E_i, F_j \in \mathcal{B}(K)$ ώστε $E_i \cup F_j = K$, $E_i \cap F_j = \varnothing$ και το E_i είναι μ_i-μηδενικό (δηλαδή $\mu_i(A) = 0$ για κάθε $A \subseteq E_i$) ενώ το F_j είναι μ_j-μηδενικό (δηλαδή $\mu_j(A) = 0$ για κάθε $A \subseteq F_j$). Μια τέτοια οικογένεια είναι, για παράδειγμα, η οικογένεια $(\delta_x)_{x\in K}$ όλων των μέτρων Dirac: για κάθε $x \neq y$ βλέπουμε ότι $\delta_x \perp \delta_y$ παίρνοντας $E_x = K \setminus \{x\}$ και $F_y = \{x\}$.

Στο χώρο

$$N := \{A \subseteq \mathcal{M}(K) : \text{ για κάθε } \mu \neq \nu \in A \text{ ισχύει; } \mu \perp \nu \text{ και για κάθε } \mu \in A \text{ ισχύει } \mu(K)\}$$

θεωρούμε την προφανή μερική διάταξη του περιέχεσθαι. Έχουμε $N \neq \varnothing$ και κάθε αλυσίδα $(A_i)_{i\in I}$ στην N έχει άνω φράγμα το $\bigcup_{i\in I} A_i$. Από το λήμμα του Zorn υπάρχει μεγιστικό (ως προς τη σχέση του περιέχεσθαι) $A \in N$. Η οικογένεια $A = (\mu_i)_{i\in I}$ είναι μια μεγιστική οικογένεια αμοιβαία ιδιαζόντων μέτρων πιθανότητας.

Έστω $\nu \in \mathcal{M}(K)$. Από το θεώρημα ανάλυσης Lebesgue για πεπερασμένα μέτρα, για κάθε $i \in I$ έχουμε

$$\nu(B) = \int_B f_i \, d\mu_i + \gamma_i(B), \qquad B \in \mathcal{B}(K)$$

όπου $\gamma_i \in \mathcal{M}(K)$ τέτοιο ώστε $\gamma_i \perp \mu_i$ και $f_i = \frac{d\nu}{d\mu_i}$ είναι η Radon-Nikodym παράγωγος του ν ως προς μ_i (χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι το ν είναι θετικό μέτρο).

Έστω A τυχόν πεπερασμένο υποσύνολο του I, δηλαδή $A = \{i_1, \dots, i_n\}$, $n \in \mathbb{N}$.
Αρχικά για $n = 2$ ($i_1 \equiv 1$, $i_2 \equiv 2$)

$$\nu(B) = \int_B f_1\, d\mu_1 + \gamma_1(B) \quad \text{και} \quad \nu(B) = \int_B f_2\, d\mu_2 + \gamma_2(B), \qquad B \in \mathcal{B}(K).$$

και έχουμε

$\mu_1 \perp \gamma_1$, A μ_1-μηδενικό, B γ_1-μηδενικό, $A \cup B = K$, $A \cap B = \varnothing$,

$\mu_2 \perp \gamma_2$, C μ_2-μηδενικό, D γ_2-μηδενικό, $C \cup D = K$, $C \cap D == \varnothing$,

$\mu_1 \perp \mu_2$, E μ_1-μηδενικό, F μ_2-μηδενικό, $E \cup F = K$, $E \cap F = \varnothing$. Τότε, αφού $f_1, f_2 \geqslant 0$,

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_{L_1(\mu_1)} + \|f_2\|_{L_1(\mu_2)} &= \int_K f_1\, d\mu_1 + \int_K f_2\, d\mu_2 \\
&= \int_{K \setminus (A \cup E)} f_1\, d\mu_1 + \int_{K \setminus (C \cup F)} f_2\, d\mu_2 \\
&= \int_{B \cap F} f_1\, d\mu_1 + \int_{D \cup E} f_2\, d\mu_2 \\
&= \int_{B \cap F} f_1\, d\mu_1 + \gamma_1(B \cap F) + \int_{D \cup E} f_2\, d\mu_2 + \gamma_2(D \cup E) \\
&= \nu(B \cap F) + \nu((D \cup E) \leqslant \nu(F) + \nu(E) \\
&\leqslant \nu(K) = \|\nu\|.
\end{aligned}$$

(Το ίδιο συμπέρασμα θα είχαμε και απευθείας με τα E, F).

Για $n = 3$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\mu_1 \perp \mu_3 &\Longrightarrow A\ \mu_1 - \text{μηδενικό},\ B\ \mu_2 - \text{μηδενικό}, \\
\mu_1 \perp \mu_3 &\Longrightarrow C\ \mu_1 - \text{μηδενικό},\ D\ \mu_3 - \text{μηδενικό}, \\
\mu_2 \perp \mu_3 &\Longrightarrow E\ \mu_2 - \text{μηδενικό},\ F\ \mu_3 - \text{μηδενικό}.
\end{aligned}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\|f_1\|_{\mu_1} + \|f_2\|_{\mu_2} + \|f_3\|_{\mu_3} &= \int_{K \setminus (A \cup C)} f_1\, d\mu_1 + \int_{K \setminus (B \cup E)} f_2\, d\mu_2 + \int_{K \setminus (D \cup F)} f_3\, d\mu_3 \\
&\leqslant \nu(B \cap D) + \nu(A \cap F) + \nu(C \cup E) \leqslant \nu(K) = \|\nu\|.
\end{aligned}$$

Ομοίως στη γενική περίπτωση.

Άρα, για κάθε πεπερασμένο $A \subseteq I$,

$$\sum_{i \in A} \|f_i\|_{L_1(\mu_i)} \leqslant \|\nu\|.$$

Έπεται ότι

$$\sum_{i \in I} \|f_i\|_{L_1(\mu_i)} \leqslant \|\nu\| < \infty$$

αφού $\nu \in \mathcal{M}(K)$, και έπεται ότι αριθμήσιμοι μόνο το πλήθος όροι του αθροίσματος είναι μημηδενικοί. Θέτουμε $\nu_0 := \sum_{i \in I} f_i d\mu_i$. Δηλαδή,

$$\nu_0(B) = \sum_{i \in I} \int_B f_i\, d\mu_i, \qquad B \in \mathcal{B}(K).$$

Έχουμε $\nu_0 \in \mathcal{M}(K)$ και $\nu - \nu_0 = \sum_{j \in I} \gamma_j \perp \mu_i$ για κάθε $i \in I$ (αφού $\gamma_j \perp \mu_i$) άρα $\nu = \nu_0$.

Έτσι, η $f : \mathcal{M}(K) \to \ell_1(L_1(\mu_i))$ με $\nu \mapsto (f_i)_{i \in I}$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Άρα, ο $\mathcal{M}(K)$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με ένα ℓ_1-άθροισμα χώρων $L_1(\mu_i)$. Έπεται ότι $C(K)^{**} \simeq \mathcal{M}(K)^* \simeq \ell_\infty$-άθροισμα χώρων $L_\infty(\mu_i)$, συνεπώς ο $C(K)^{**}$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος. $\square$

Παρατήρηση 2.3.14. Υπάρχουν πλήρως διατεταγμένοι χώροι $C(K)$ που δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι με κάποιον δυϊκό χώρου Banach. Δηλαδή δεν ισχύει το αντίστροφο της Πρότασης 2.3.12 (i).

Θεώρημα 2.3.15. *Ο $L_\infty[0,1]$ είναι ισόμορφος με τον ℓ_∞.*

Απόδειξη. Ο ℓ_∞ εμφυτεύεται ισομετρικά (όχι επί) στον $L_\infty[0,1]$ μέσω της $F : \ell_\infty \to L_\infty[0,1]$ με

$$(\xi(n))_{n=1}^\infty \mapsto \sum_{n=1}^\infty \xi(n)\chi_{A_n}(t),$$

όπου $(A_n)_{n=1}^\infty$ τυχούσα διαμέριση του $[0,1]$ σε σύνολα θετικού μέτρου.

Η F είναι καλά ορισμένη: Παρατηρούμε ότι

$$\Big|\sum_n \xi(n)\chi_{A_n}(t)\Big| \leqslant \|\xi\|_\infty \sum_n \chi_{A_n} = \|\xi\|_\infty.$$

Άρα, $\sum_n \xi(n)\chi_{A_n} \in L_\infty[0,1]$.

Η F είναι ισομετρία: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει n_o τέτοιος ώστε $\|\xi\|_\infty - \varepsilon < |\xi(n_0)|$. Έστω $t \in A_{n_0}$. Τότε,

$$\Big\|\sum_n \xi(n)\chi_{A_n}\Big\|_\infty \geqslant |\xi(n_0)|\chi_{A_{n_0}}(t) > \|\xi\|_\infty - \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι

$$\Big\|\sum_n \xi(n)\chi_{A_n}\Big\|_\infty = \|\xi\|_\infty.$$

Όμως ο ℓ_∞ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος. Άρα ο ℓ_∞ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_\infty[0,1]$, ταυτίζοντας τον ℓ_∞ με τον $F(\ell_\infty)$, δηλαδή $L_\infty[0,1] = F(\ell_\infty) \oplus Z$, όπου Z κλειστός. [Πράγματι, ο $F(\ell_\infty)$ είναι εμφυτεύσιμος και κλειστός υπόχωρος του $L_\infty[0,1]$, η $id : F(\ell_\infty) \to F(\ell_\infty)$ επεκτείνεται σε $P : L_\infty[0,1] \to F(\ell_\infty)$ προβολή (αφού $P^2 = P$) και άρα ο $F(\ell_\infty)$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_\infty[0,1]$. Για το γεγονός ότι ο $F(\ell_\infty)$ είναι κλειστός στον $L_\infty[0,1]$ χρησιμοποιούμε το ότι η F^{-1} είναι συνεχής, άρα αντιστρέφει κλειστά σύνολα σε κλειστά σύνολα.]

Τώρα θα δείξουμε ότι ο $L_\infty[0,1]$ εμφυτεύεται ισομετρικά στον ℓ_∞. Ο L_1 είναι διαχωρίσιμος, άρα η μοναδιαία μπάλα S_{L_1} είναι διαχωρίσιμη. Επιλέγουμε ακολουθία $(\varphi_n)_{n=1}^\infty$ πυκνή στην S_{L_1} και ορίζουμε την απεικόνιση $G : L_\infty[0,1] \to \ell_\infty$ με

$$f \mapsto \Big(\int_0^1 \varphi_n f\, dt\Big)_{n=1}^\infty.$$

Η G είναι καλά ορισμένη διότι

$$\Big|\int_0^1 \varphi_n f\, dt\Big| \leqslant \int_0^1 |\varphi_n|\, \|f\|_\infty dt = \|f\|_\infty \|\varphi_n\|_1 = \|f\|_\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, το οποίο δείχνει ότι $\|G(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$, και μπορούμε να δείξουμε ότι είναι ισομετρία: Έστω $\varepsilon > 0$. Για n σταθερό έχουμε $\frac{\varphi_n f}{\|f\|_\infty} \in B_{L_1}$ άρα υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ ώστε $\left\|\varphi_m - \frac{\varphi_n f}{\|f\|_\infty}\right\| < \varepsilon$, οπότε

$$\int_0^1 \varphi_n f\, dt > (1-\varepsilon)\|f\|_\infty.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\|G(f)\|_\infty \geqslant \|f\|_\infty$.

Έπεται, όπως πριν, ότι ο $L_\infty[0,1]$ είναι συμπληρωματικός στον ℓ_∞. Επίσης $\ell_\infty \approx \ell_\infty \oplus \ell_\infty$ και

$$L_\infty[0,1] \approx L_\infty\Big[0, \frac{1}{2}\Big] \oplus L_\infty\Big[\frac{1}{2}, 1\Big] \approx L_\infty[0,1] \oplus L_\infty[0,1].$$

Από το Θεώρημα 2.3.16 (βλ. παρακάτω) έπεται ότι $L_\infty[0,1] \approx \ell_\infty$. □

Θεώρημα 2.3.16 (Pełczynski)**.** *Έστω X, Y χώροι Banach ώστε ο X να είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του Y και ο Y ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X. Έστω επίσης ότι ο X είναι ισόμορφος με τον $X \oplus X$ και ο Y είναι ισόμορφος με τον $Y \oplus Y$. Τότε, ο X είναι ισόμορφος με τον Y.*

Απόδειξη. Έχουμε $X \approx Y \oplus E$ και $Y \approx X \oplus F$, άρα

$$X \approx Y \oplus Y \oplus E \approx Y \oplus X$$

και

$$Y \approx X \oplus X \oplus F \approx X \oplus Y,$$

συνεπώς $X \approx Y$. □

Πρόταση 2.3.17. *Για κάθε άπειρο συμπαγή τοπολογικό χώρο Hausdorff K, ο $C(K)$ περιέχει έναν υπόχωρο ισομετρικό με τον c_0. Αν ο K είναι μετρικοποιήσιμος τότε κάθε υπόχωρος είναι συμπληρωματικός.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθο θεώρημα του Sobczyk, η απόδειξη του οποίου παραλείπεται.

Θεώρημα 2.3.18 (Sobczyk)**.** *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach και έστω E κλειστός υπόχωρος του X. Έστω ότι υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : E \to c_0$. Τότε υπάρχει γραμμικός τελεστής $\tilde{T} : X \to c_0$ τέτοιος ώστε $\tilde{T}\big|_E = T$ και $\|\tilde{T}\| < 2\|T\|$.*

Απόδειξη της Πρότασης 2.3.17. Υπενθυμίζουμε ότι ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος αν και μόνο αν ο K ίναι μετρικοποιήσιμος (Θεώρημα 2.1.3).

Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει ακολουθία $(U_n)_{n=1}^\infty$ μη-κενών ξένων ανοικτών υποσυνόλων του K, χρησιμοποιώντας επαγωγή. Έστω $A = \{x \in K : \{x\} \text{ ανοικτό στο } K\}$. Αν το A είναι άπειρο, τότε έχουμε άμεσα το ζητούμενο. Έστω λοιπόν ότι το A είναι πεπερασμένο. Τότε, ο $K \setminus A$ είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff με άπειρο πλήθος σημείων. Επομένως, δίχως βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι στον K τα μονοσύνολα δεν είναι ανοικτά. Επιλέγουμε U_1 ανοικτό ώστε το $K_1 := K \setminus \overline{U_1}$ να έχει άπειρο πλήθος σημείων (αυτό μπορούμε να το κάνουμε γιατί αλλιώς θα είχαμε πεπερασμένο ανοικτό υποσύνολο του K, το οποίο είναι άτοπο αφού τα μονοσύνολα δεν είναι ανοικτά, άρα ούτε τα πεπερασμένα υποσύνολα του K είναι ανοικτά). Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο: ο K_1 είναι συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff με άπειρο πλήθος σημείων, άρα μπορούμε βα βρούμε U_2 ανοικτό ώστε το $K_2 := K_1 \setminus \overline{U_2}$ να έχει άπειρο πλήθος σημείων, και ούτω καθεξής.

Έστω τώρα ακολουθία $(\varphi_n)_{n=1}^{\infty}$ συνεχών συναρτήσεων στο K τέτοιον ώστε $0 \leqslant \varphi_n \leqslant 1$, $\|\varphi_n\|_\infty = 1$ και $\{s \in K : \varphi_n(s) > 0\} \subseteq U_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. [Δείχνουμε ότι τέτοιες φ_n υπάρχουν. Ο K είναι συμπαγής Hausdorff, άρα φυσιολογικός. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα του Urysohn για τα ξένα κλειστά σύνολα $K \setminus U_n$ και $\{x_n\}$, όπου $x_n \in U_n$, και να βρούμε $\varphi_n : K \to [0,1]$ συνεχή ώστε $\varphi_n(y) = 0$ για κάθε $y \in K \setminus U_n$. Έπεται ότι $\{s \in K : \varphi_n(s) > 0\} = \{s \in K : \varphi_n(s) \neq 0\} \subseteq U_n$ και $\varphi_n(x_n) = 1$, άρα $\|\varphi_n\|_\infty = 1$.]

Τότε, για κάθε $(a_n)_n \in c_{00}$ έχουμε

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \Big\|_\infty = \max_n |a_n|.$$

[Πράγματι, αφού $\{s \in K : \varphi_n(s) > 0\} \subseteq U_n$ και τα U_n είναι ξένα ανά δύο, ισχύει ότι $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = a_{n_0}\varphi_{n_0}(x)$ αν $x \in U_{n_0}$ (οπότε $x \in K \setminus U_n$ για κάθε $n \neq n_0$ και $\varphi_n(x) = 0$ για κάθε $n \neq n_0$) αλλιώς $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x) = 0$. Άρα,

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \Big\|_\infty \leqslant \max_n |a_n| \cdot \|\varphi_n\|_\infty = \max_n |a_n|.$$

Αντίστροφα, αν $\max_n |a_n| = |a_{n_0}|$ και επιλέξουμε $x \in U_{n_0}$ με $\varphi_{n_0}(x) = 1$, τότε

$$\Big\| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n \Big\|_\infty \geqslant |a_{n_0}| \cdot \varphi_{n_0}(x) = |a_{n_0}| = \max_n |a_n|,$$

απ' όπου προκύπτει η ισότητα.]

Όμως, η $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι βάση του c_{00} με την ιδιότητα $\sum_n a_n e_n = (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, άρα

$$\Big\| \sum_n a_n e_n \Big\|_\infty = \max_n |a_n| = \Big\| \sum_n a_n \varphi_n \Big\|_\infty.$$

Άρα,

$$\mathrm{span}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\} \simeq \mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = c_{00},$$

όπου $\varphi_n \mapsto e_n$. Άρα,

$$\overline{\mathrm{span}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty} \simeq \overline{\mathrm{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty} = c_0,$$

όπου $\overline{\mathrm{span}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty}$ υπόχωρος του $C(K)$ ισομετρικός με τον c_0.

Τώρα, έστω K μετρικοποιήσιμος. Τότε, από το Θεώρημα 2.1.3 ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος. Από το θεώρημα Sobczyk υπάρχει επέκταση $\tilde{T} : C(K) \to c_0 \simeq \overline{\mathrm{span}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty}$ του ισομετρικού ισομορφισμού $T : \overline{\mathrm{span}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty} \to c_0$ με $\|\tilde{T}\| < 2$. Άρα, ο $\overline{\mathrm{span}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty}$ είναι συμπληρωματικός αφού ο $\tilde{T}$ είναι προβολή, άρα $C(K) = \overline{\mathrm{span}\{\varphi_n : n \in \mathbb{N}\}}^{\|\cdot\|_\infty} \oplus \ker(\tilde{T})$. □

Πρόταση 2.3.19. *Αν ο K είναι μετρικοποιήσιμος και ο $C(K)$ είναι πλήρως διατεταγμένος τότε το K είναι πεπερασμένο σύνολο.*

Απόδειξη. Έστω προς άτοπο ότι το K είναι άπειρο. Τότε $C(K) \supseteq F$, όπου F κλειστός συμπληρωματικός υπόχωρος τέτοιος ώστε $F \simeq c_0$. Όμως, ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος (ως πλήρως διατεταγμένος), άρα ο c_0 είναι εμφυτεύσιμος, το οποίο είναι άτοπο αφού σύμφωνα με το Θεώρημα **;;** δεν υπάρχει φραγμένη γραμμική προβολή από τον ℓ_∞ επί του c_0, δηλαδή ο c_0 δεν είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του ℓ_∞ (ο c_0 είναι κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞ και αν ήταν εμφυτεύσιμος θα ήταν και συμπληρωματικός). □

Πρόταση 2.3.20. *Οι μόνοι ισομετρικά εμφυτεύσιμοι διαχωρίσιμοι χώροι Banach είναι οι πεπερασμένης διάστασης και ισομετρικά ισόμορφοι με τον* $\ell_\infty^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_\infty)$ *για κάποιο* $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Έστω X ισομετρικά εμφυτεύσιμος χώρος Banach. Από το Θεώρημα 2.3.9 έχουμε $X \simeq C(K)$, όπου $C(K)$ πλήρως διατεταγμένος και K συμπαγής τοπολογικός χώρος Hausdorff. Όμως, από την υπόθεση ο X είναι διαχωρίσιμος, δηλαδή ο $C(K)$ είναι διαχωρίσιμος, άρα από το Θεώρημα 2.1.3 ο K είναι μετρικοποιήσιμος. Από την Πρόταση 2.3.19 έπεται ότι το K είναι πεπερασμένο. Τότε, έχουμε $C(K) = \{f : K \to \mathbb{R}\} = \mathbb{R}^K$, δηλαδή ο $C(K)$ είναι ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^{|K|}$, Άρα,

$$(C(K), \|\cdot\|_\infty) \simeq (\mathbb{R}^{|K|}, \|\cdot\|_\infty) = \ell_\infty^{|K|}.$$

□

Μάλιστα, αργότερα θα δούμε ότι δεν υπάρχουν απειροδιάστατοι εμφυτεύσιμοι διαχωρίσιμοι χώροι Banach. Αυτό το δείξαμε για ισομετρικά εμφυτεύσιμους χώρους.

2.4 Χώροι συνεχών συναρτήσεων $C(K)$ με K υπεραριθμήσιμο μετρικό χώρο

Θα ταξινομήσουμε τους (γραμμικά) ισόμορφους (ως χώρους Banach) χώρους $C(K)$. Υπενθυμίζουμε αρχικά το θεώρημα Banach-Stone: Αν K, L είναι συμπαγείς τοπολογικοί χώροι Hausdorff και $C(K) \simeq C(L)$ (οι δύο χώροι είναι ισομετρικά ισόμορφοι) τότε οι K και L είναι ομοιομορφικοί.

Από το θεώρημα Banach-Stone, αν οι K και L είναι μη ομοιομορφικοί συμπαγείς τοπολογικοί χώροι Hausdorff τότε οι $C(K)$ και $C(L)$ δεν μπορούν να είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Όμως μπορούν να είναι ισόμορφοι ως χώροι Banach. Για να βρούμε μη ομοιομορφικούς K, L τέτοιους ώστε $C(K) \approx C(L)$ θα χρειαστούμε το εξής.

Πρόταση 2.4.1. *Έστω K άπειρος συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε $C(K) \approx C(K) \oplus \mathbb{R}$. Επίσης, ο $C(K)$ είναι ισόμορφος με ταυπερεπίπεδά του.*

Απόδειξη. Από την Πρόταση 2.3.17, αφού ο K είναι μετρικοποιήσιμος, ο $C(K)$ περιέχει υπόχωρο ισοομετρικά ισόμορφο με τον c_0, και ο υπόχωρος αυτός είναι συμπληρωματικός. Δηλαδή,

$$C(K) = E \oplus A \approx E \oplus c_0 \approx E \oplus c_0 \oplus \mathbb{R},$$

όπου $c_0 \approx c_0 \oplus \mathbb{R}$ μέσω του ισομορφισμού χώρων Banach

$$(x_n)_n \mapsto ((x_{n+1})_n, x_1)$$

όπου $(x_n)_n \in c_0$ και x_1 είναι ο πρώτος όρος της ακολουθίας (ο τελεστής αυτός λέγεται shift).

Σχόλιο. Τον $c_0 \oplus \mathbb{R}$ τον βλέπουμε ως χώρο Banach με νόρμα το άθροισμα των νορμών:

$$\|((x_n)_n, y)\| := \|x\|_\infty + |y|.$$

Άρα,

$$C(K) \approx E \oplus c_0 \approx E \oplus c_0 \oplus \mathbb{R} \approx C(K) \oplus \mathbb{R}.$$

Πριν αποδείξουμε ότι ο $C(K)$ είναι ισόμορφος με τα υπερεπίπεδά του, υπενθυμίζουμε τον ορισμό.

Ορισμός 2.4.2. Έστω X διανυσματικός χώρος και Y υπόχωρος του X. Λέμε ότι ο Y έχει συνδιάσταση 1, και γράφουμε $\operatorname{codim}(Y) = 1$, αν $\dim(X/Y) = 1$. Ισοδύναμα, αν υπάρχει $x \in X$ τέτοιο ώστε $x \notin Y$ και $X = \operatorname{span}\{Y \cup \{x\}\}$. Αν $\operatorname{codim}(Y) = 1$ τότε κάθε σύνολο $x_0 + Y$, όπου $x_0 \in X$, λέγεται υπερεπίπεδο του X.

Γενική παρατήρηση: Έστω X χώρος Banach και Y_1, Y_2 υπερεπίπεδα του X. Αν $x \notin Y_1 \cup Y_2$ τότε

$$X = \operatorname{span}\{Y_1 \cup \{x\}\} = \operatorname{span}\{Y_2 \cup \{x\}\}.$$

Δηλαδή, για κάθε $y \in X$ έχουμε $y = y_1 + \lambda_1 x = y_2 + \lambda_2 x$ για κάποια $y_i \in Y_i$ και $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$Y_1 \approx X/\langle x\rangle \approx Y_2,$$

δηλαδή οποιαδήποτε δύο υπερεπίπεδα είναι ισόμορφα ως χώροι Banach.

Τώρα θα δείξουμε ότι ο $C(K)$ είναι ισόμορφος με τα υπερεπίπεδά του. Προφανώς, ο $C(K)$ είναι υπερεπίπεδο του $C(K) \oplus \mathbb{R}$, αφού $C(K) \oplus \mathbb{R}/C(K) \approx \mathbb{R}$ και $\dim(\mathbb{R}) = 1$.

Όμως οποιαδήποτε δύο υπερεπίπεδα είναι ισόμορφα. Άρα, ο $C(K) \oplus \mathbb{R} \approx C(K)$ είναι ισόμορφος με τα υπερεπίπεδά του. $\square$

Παρατήρηση 2.4.3. Η μετρικοποιησιμότητα του $C(K)$ είναι απαραίτητα. Παράδειγμα συμπαγούς τοπολογικού χώρου Hausdorff τέτοιου ώστε ο $C(K)$ να μην ισόμορφος με υπερεπίπεδά του έχει δοθεί από τον Plebanek.

Έχοντας πλέον στα χέρια μας την Πρόταση 2.4.1 θα βρούμε μη ομοιομορφικούς K, L τέτοιους ώστε $C(K) \approx C(L)$. Θέτουμε

$$K := [0,1] \cup \{2\} \quad \text{και} \quad L := [0,1].$$

Έχουμε $C(K) \approx C[0,1] \oplus \mathbb{R}$ μέσω της $f \mapsto (f\big|_{[0,1]}, f(2))$. Από την Πρόταση 2.4.1 έπεται ότι $C[0,1] \oplus \mathbb{R} \approx C[0,1] = C(L)$, δηλαδή $C(K) \approx C(L)$, αλλά οι K και L είναι μη ομοιομορφικοί (αν υπάρχει ομοιομορφισμός $g : [0,1] \cup \{2\} \to [0,1]$ θα πρέπει να απεικονίζει μεμονωμένα σημεία σε μεμονωμένα σημεία, και εδώ το $g(2)$ δεν είναι μεμονωμένο σημείο αφού το $[0,1]$ δεν έχει τέτοια).

Ομοίως, από την Πρόταση 2.4.1 ο $C[0,1]$ είναι ισόμορφος με το υπερεπίπεδό του $\{f : f(0) = f(1)\}$. Πράγματι, το σύνολο αυτό είναι υπερεπίπεδο ως πυρήνας του φραγμένου γραμμικού τελεστή $x^* \in C[0,1]^*$ με $x^*(f) := f(1) - f(0)$. Τώρα,

$$\{f \in C[0,1] : f(0) = f(1)\} \simeq C(\mathbb{T}),$$

όπου $\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{i\vartheta} : \vartheta \in [0, 2\pi]\}$, μέσω της $G : f \mapsto G(f) \in C(\mathbb{T})$ με

$$G(f)(e^{i\vartheta}) = f\Big(\frac{\vartheta}{2\pi}\Big), \qquad \vartheta \in [0, 2\pi].$$

Έτσι, $C[0,1] \approx C(\mathbb{T})$ παρόλο που τα $[0,1]$ και $\mathbb{T}$ δεν είναι ομοιομορφικά (π.χ. αν αφαιρέσουμε ένα εσωτερικό σημείο του $[0,1]$ έχουμε δύο συνεκτικές συνιστώσες ενώ αν αφαιρέσουμε την εικόνα του από το $\mathbb{T}$ έχουμε μία συνεκτική συνιστώσα). Θα δούμε αργότερα ότι

$$C[0,1] \approx C([0,1]^2).$$

Θέλουμε να μελετήσουμε τους χώρους $C(K)$ για K άπειρο συμπαγή μετρικό χώρο. Θα χρειαστεί να διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) K αριθμήσιμο, και

(ii) K υπεραριθμήσιμο.

Φυσικά, αφού ο K είναι συμπαγής μετρικός χώρος, ο K είναι διαχωρίσιμος. Όμως, θα μπορούσε και ο ίδιος ο K να είναι αριθμήσιμος.

Η πιο απλή περίπτωση ενός άπειρου K είναι η συμπαγοποίηση ενός σημείου (Alexandroff) του $\mathbb{N}$ που τη συμβολίζουμε με $\gamma\mathbb{N}$ και αποτελείται από τους όρους μιας συγκλίνουσας ακολουθίας και το όριό της, π.χ. $K = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \cup \{0\}$. Τότε, $C(K) \equiv c$ (οι συγκλίνουσες ακολουθίες) και $c \approx c_0 \oplus \mathbb{R}$. Άρα $C(K) \approx c_0$ από την Πρόταση 2.4.1, αφού ο c_0 είναι υπερεπίπεδο του $c_0 \oplus \mathbb{R}$.

Όπως θα δούμε λίγο παρακάτω, για K αριθμήσιμο έχουμε $\mathcal{M}(K) \simeq \ell_1$, άρα $C(K)^* \simeq \ell_1$, δηλαδή ο $C(K)^*$ είναι διαχωρίσιμος. Όμως ο $C[0,1]^*$ δεν είναι διαχωρίσιμος αφού από το Θεώρημα **;;** (Banach-Mazur) ο $C[0,1]$ περιέχει αντίγραφο του ℓ_1.

Σε αυτή την ενότητα θα περιοριστούμε στην περίπτωση που ο K είναι υπεραριθμήσιμος. Το πιο εντυπωσιακό αποτέλεσμα είναι το ακόλουθο θεώρημα του Miljutin.

Θεώρημα 2.4.4 (Miljutin). *Για κάθε υπεραριθμήσιμο συμπαγή μετρικό χώρο K ισχύει $C(K) \approx C[0,1]$.*

Σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.4.4 θα παίξουν το σύνολο του Cantor $\Delta := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$, το κλειστό μοναδιαίο διάστημα $[0,1]$ και ο κύβος του Hilbert $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Αποδεικνύουμε ότι αν ο K είναι αριθμήσιμος τότε $\mathcal{M}(K) \simeq \ell_1$. Έστω $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ απαρίθμηση του K. Έστω $\mu \in \mathcal{M}(K)$. Γράφοντας το K ως ξένη αριθμήσιμη ένωση των $\{a_n\} \in \mathcal{B}(K)$, $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\mu(K) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(\{a_n\}) \quad \text{και} \quad |\mu|(K) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(\{a_n\}).$$

Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε τον ισομετρικό ισομορφισμό $T : \mathcal{M}(K) \to \ell_1$ με

$$\mu \mapsto T(\mu) := \big(\mu(\{a_n\})\big)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Ο T είναι καλά ορισμένος: αφού $\mu \in \mathcal{M}(K)$ έχουμε

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(\{a_n\})| \leqslant \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(\{a_n\}) = |\mu|(K) < \infty.$$

Ο T είναι επί: Έστω $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \ell_1$. Ορίζουμε $\mu \in \mathcal{M}(K)$ τσι ώστε $\mu(\{a_n\}) := b_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$ έχουμε

$$\mu(A) = \mu\left(\bigcup_{a_n\in A} \{a_n\}\right) = \sum_{a_n\in A} \mu(\{a_n\}) = \sum_{a_n\in A} b_n,$$

το οποίο είναι καλά ορισμένο προσημασμένο μέτρο.

Ο T είναι ισομετρία: Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\|\mu\| = \left\| \big(\mu(\{a_n\})\big)_{n\in\mathbb{N}} \right\|_1 ,$$

δηλαδή ότι $|\mu|(K) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(\{a_n\})|$, δηλαδή να δείξουμε ότι

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu|(\{a_n\}) = \sum_{n\in\mathbb{N}} |\mu(\{a_n\})|.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι $|\mu|(\{a_n\}) = |\mu(\{a_n\})|$. Από τη διάσπαση Hahn του μ έχουμε $\mu = \mu^+ - \mu^-$ και $|\mu| = \mu^+ + \mu^-$. Αφού $\mu^+ \perp \mu^-$, είτε $\mu^=(\{a_n\}) = 0$ ή $\mu^-(\{a_n\}) = 0$. Σε κάθε περίπτωση $|\mu|(\{a_n\}) = |\mu(\{a_n\})|$, άρα έχουμε το ζητούμενο. □

Επιστρέφουμε τώρα στην περίπτωση που ο K είναι υπεραριθμήσιμος. Θα χρειαστούμε τα ακόλουθα τοπολογικά αποτελέσματα.

Πρόταση 2.4.5. (i) *Αν K είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος, τότε ο K είναι ομοιομορφικός με κλειστό υποσύνολο του κύβου του Hilbert* $[0,1]^{\mathbb{N}}$.

(ii) *Αν K είναι ένας υπεραριθμήσιμος μετρικός χώρος, τότε ο $\Delta := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι ομοιομορφικός με κλειστό υποσύνολο του K.*

Απόδειξη. (i) Αφού ο K είναι συμπαγής μετρικός χώρος, είναι διαχωρίσιμος. Έστω $(s_n)_{n=1}^{\infty}$ πυκνό αριθμήσιμο υποσύνολο του K. Έστω d η μετρική στο K. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 \leqslant d \leqslant 1$. Για παράδειγμα, αν $\max(d) := \max\{d(x,y) : x,y \in K\} > 1$ αντικαθιστούμε την d με την $\frac{d}{\max(d)}$ (έχουμε $\max(d) < \infty$ αφού ο K είναι συμπαγής).

Ορίζουμε $\vartheta : K \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ με $\vartheta(x) := \big(d(x,s_n)\big)_{n=1}^{\infty}$. Η ϑ είναι συνεχής αφού οι $x \mapsto d(x,s_n)$ είναι συνεχείς. Επίσης η ϑ είναι 1-1 αφού αν $x \neq y$ τότε υπάρχει s_n ώστε $d(x,s_n) \neq d(y,s_n)$. Αφού ο K είναι συμπαγής, ο $[0,1]^{\mathbb{N}}$ είναι Hausdorff και η ϑ είναι 1-1 και συνεχής, η ϑ είναι ομοιομορφισμός του K στο $\vartheta(K)$. Τέλος, το $\vartheta(K)$ είναι συμπαγές, άρα κλειστό.

(ii) Έστω K υπεραριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος και έστω $\varepsilon > 0$.

Ισχυρισμός 1: Υπάρχουν δύο ξένα υπεραριθμήσιμα κλειστά υποσύνολα K_0, K_1, το καθένα με διάμετρο το πολύ ε.

Πράγματι, έστω E το σύνολο των $s \in K$ για τα οποία υπάρχει περιοχή U_s του s που είναι αριθμήσιμο σύνολο. Ο K είναι Lindelöf ως συμπαγής, άρα το E είναι αριθμήσιμο σύνολο. Έστω $s_0 \neq s_1$ με $s_0, s_1 \in K \setminus E$. Θέτουμε $\delta := \min\left\{\frac{\rho(s_0,s_1)}{3}, \frac{\varepsilon}{2}\right\}$. Θέτουμε $K_0 := \widehat{B}(s_0,\delta)$ και $K_1 := \widehat{B}(s_1,\delta)$. Τότε, τα K_0, K_1 είναι κλειστά σύνολα, και από την επιλογή του δ είναι ξενα και έχουν διάμετρο μικρότερη ή ίση από ε. Τέλος, είναι υπεραριθμήσιμα ως περιοχές των $s_0, s_1 \notin E$ αντίστοιχα.

Τώρα συνεχίζουμε με επαγωγή:

Ισχυρισμός 2: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $t = (t_1,\dots,t_n) \in \{0,1\}^n$ υπάρχει υπεραριθμήσιμο συμπαγές $K_{t_1,t_2,\dots,t_n} \subseteq K$ με διάμετρο μικρότερη ή ίση από 2^{-n}, έτσι ώστε

$$K \supseteq K_{t_1} \supseteq K_{t_1,t_2} \supseteq \cdots \supseteq K_{t_1,\dots,t_n} \supseteq K_{t_1,\dots,t_{n+1}} \supseteq \cdots$$

και
$$K_{t_1,\dots,t_n,0} \cap K_{t_1,\dots,t_n,1} = \varnothing.$$

Η απόδειξη γίνεται με επαγωγή. Για $n = 1$ εφαρμόζοντας τον Ισχυρισμό 1 βρίσκουμε ξένα, υπεραριθμήσιμα, κλειστά (άρα συμπαγή) $K_0, K_1 \subseteq K$ με διάμετρο μικρότερη ή ίση από $\frac{1}{2} = 2^{-1}$.

Έστω ότι έχουμε ορίσει τα σύνολα $K_{t_1,t_2,\dots,t_n}$ για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε $t = (t_1, \dots, t_n) \in \{0,1\}^n$ μπορούμε να εφαρμόσουμε τον Ισχυρισμό 1 για τον συμπαγή μετρικό χώρο $K_{t_1,t_2,\dots,t_n}$ με $\varepsilon = \frac{1}{2^{n+1}}$ και να βρούμε υπεραριθμήσιμα, ξένα και σχετικώς κλειστά $K_{t_1,\dots,t_n,0}, K_{t_1,\dots,t_n,1} \subseteq K_{t_1,\dots,t_n}$ με διάμετρο μικρότερη ή ίση από $2^{-(n+1)}$. Τα $K_{t_1,\dots,t_n,0}$ και $K_{t_1,\dots,t_n,1}$ είναι κλειστά υποσύνολα του συμπαγούς K, άρα συμπαγή. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Από τον Ισχυρισμό 2, η $(K_{t_1,\dots,t_n})_{n\in\mathbb{N}}$, όπου $t_i \in \{0,1\}$, είναι φθίνουσα ακολουθία στον συμπαγή μετρικό χώρο K, άρα
$$\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_{t_1,\dots,t_n} \neq \varnothing$$
και μάλιστα μονοσύνολο αφού $\delta\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} K_{t_1,\dots,t_n}\right) \leqslant \frac{1}{2^n} \to 0$. Έτσι, ορίζεται καλά η απεικόνιση $\sigma : \{0,1\}^{\mathbb{N}} \to K$ με $t \mapsto \sigma(t) :=$ το μοναδικό στοιχείο του $\bigcap_{n=1}^{\infty} K_{t_1,\dots,t_n}$.

Δείχνουμε ότι η σ είναι 1-1: Έστω $t \neq r \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Έστω m ο ελάχιστος φυσικός για τον οποίο $t_m \neq r_m$. Ας υποθέσουμε, για παράδειγμα, ότι $t_m = 0$ και $r_m = 1$. Τότε, $K_{t_1,\dots,t_{m-1}} = K_{r_1,\dots,r_{m-1}}$. Όμως, $K_{t_1,\dots,t_{m-1},0} \cap K_{t_1,\dots,t_{m-1},1} = \varnothing$, άρα $K_{t_1,\dots,t_{m-1},t_m} \cap K_{r_1,\dots,r_{m-1},r_m} = \varnothing$. Αφού $\sigma(t)]inK_{t_1,\dots,t_{m-1},t_m}$ και $\sigma(r) \in K_{r_1,\dots,r_{m-1},r_m}$, συμπεραίνουμε ότι $\sigma(t) \neq \sigma(r)$.

Βλέπουμε τον $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ως τοπολογικό χώρο με την τοπολογία γινόμενο, όπου στο $\{0,1\}$ θεωρούμε την διακριτή τοπολογία (όλα τα σύνολα είναι ανοικτά και κλειστά) η οποία προκύπτει αν θεωρήσουμε τον $\{0,1\}$ ως τοπολογικό υπόχωρο του $\mathbb{R}$.

Μένει να δείξουμε ότι η σ είναι συνεχής (Τότε, η $\sigma : \Delta \to \sigma(\Delta)$ είναι 1-1 και συνεχής, από τον συμπαγή χώρο $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ στο $\sigma(\Delta)$, άρα το $\sigma(\Delta)$ είναι κλειστό στο K και ομοιομορφικό με τον Δ.) Έστω $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με $P_\lambda \to x$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\pi_n(P_\lambda) \to \pi_n(x)$, άρα $\sigma(P_\lambda) \to \sigma(x)$. □

Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος (άρα και Hausdorff) και έστω E κλειστό υποσύνολο του K. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να ταυτίσουμε τον $C(E)$ με κάποιο πηλίκο του $C(K)$. Πράγματι, θεωρούμε τον τελεστή $R : C(K) \to C(E)$ με
$$f \mapsto R(f) := f\big|_E.$$

Ο R είναι καλά ορισμένος: έχουμε $f\big|_E \in C(E)$, αφού ο περιορισμός συνεχούς συνάρτησης είναι συνεχής συνάρτηση.

Ο R είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής: έχουμε $\|R(f)\|_{C(E)} \leqslant \|f\|_{C(K)}$, άρα ο R είναι φραγμένος με $\|R\| \leqslant 1$.

Ο R είναι επί: Έστω $g \in C(E)$, δηλαδή $g : E \to \mathbb{R}$ συνεχής. Από το θεώρημα επέκτασης του Tietze υπάρχει $\tilde{g} : K \to \mathbb{R}$ συνεχής επέκταση της g, δηλαδή υπάρχει $\tilde{g} \in C(K)$ ώστε $\tilde{g}\big|_E \equiv g$, άρα $R(\tilde{g}) = g$.

Από τα παραπάνω έχουμε
$$C(E) \simeq C(K)/\mathrm{Ker}(R),$$

δηλαδή ο $C(E)$ είναι πηλίκο του $C(K)$.

Ας υποθέσουμε ότι μπορούμε να βρούμε φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : C(E) \to C(K)$. Βλέποντας τον $C(E)$ ως $C(K)/\mathrm{Ker}(R)$, έχουμε ότι η απεικόνιση επιλέγει ένα στοιχείο κάθε συμπλόκου. Η T είναι ένας γραμμικός τελεστής επέκτασης, που ορίζει μια επέκταση της κάθε $f \in C(E)$ σε ένα στοιχείο του $C(K)$. Προφανώς $R \circ T = id_{C(E)}$.

Ο $T : C(E) \to T(C(E))$ είναι ισομορφισμός και η εικόνα $T(C(E))$ είναι υπόχωρος του $C(K)$. Μάλιστα είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $C(K)$, αφού η $T \circ R : C(K) \to T(C(E)) \subseteq C(K)$ είναι προβολή. Επίσης, ο πυρήνας $\mathrm{Ker}(T \circ R) = \{f \in C(K) : f\big|_E = 0\}$ είναι επίσης συμπληρωματικός υπόχωρος μέσω της $I - T \circ R$, όπου $I = id_{C(K)}$.

Σημειώνουμε ότι δεν υπάρχει γραμμικός τελεστής επέκτασης από τον c_0 στον $\ell_\infty \equiv C(\beta\mathbb{N})$. Η μετρικοποιησιμότητα του K παίζει σημαντικό ρόλο για την ύπαρξη τελεστή επέκτασης.

Θεώρημα 2.4.6 (Borsuk)**.** *Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος και E κλειστό υποσύνολο του K. Τότε $\exists T : C(E) \to C(K)$ φραγμένος γραμμικός τελεστής (στο εξής απλώς «τελεστής»), τ.ω. $T(f)|_E = f$ (δηλ. $T(R)$ επέκταση της f), $\|T\| = 1$ και $T(1) = 1$ (όπου $1(x) = 1$ για κάθε x).*

*Ειδικότερα, $C(E)$ ισομετρικά ισόμορφος με (νόρμας 1) συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(K)$. (Δηλ. $\exists Y$ συμπληρωματικός υπόχωρος του $C(K)$ τ.ω. $C(E) \cong Y$ και η προβολή $P : C(K) \to Y$ έχει νόρμα $\| P \| = 1$. Εδώ $Y = T\big(C(E)\big)$ και T **ισομετρική** εμφύτευση αφού:*

$$\|T(f)\|_{C(K)} \geqslant \|T(f)|_E\| C(E) = \|f\| C(E) \text{ και } |T(f)|_{C(K)} \leqslant 1 \cdot \|f\|_{C(E)}.)$$

Μάλιστα, η προβολή $a : C(K) \to \ker T = \{0\}$ (αφού T 1-1 ως ισομετρία) έχει νόρμα $\|a\| = 0 \leqslant 2$.

Για την απόδειξη του θεωρήματος θα χρειαστώ τους εξής ορισμούς.

Ορισμός 2.4.7. *Εκλέπτυνση (refinement) ενός καλύμματος $(U_a)_{a\in A}$ ενός τ.χ. X, είναι ένα νέο κάλυμμα $(V_b)_{b\in B}$ τ.ω.*

$$(*) \qquad \forall b \in B\ \exists a \in A : V_b \subseteq U_a.$$

Η (*) ισοδύναμα λέει ότι υπάρχει $\varphi : B \to A$ απεικόνιση τ.ω.

$$V_b \subseteq U_{\varphi(b)}\ \forall b \in B.$$

(Η φ λέγεται απεικόνιση εκλέπτυνσης).

Μια συλλογή υποσυνόλων $\{U_a : a \in A\}$ ενός τ.χ. X λέγεται τοπικά πεπερασμένη (locally finite) αν για κάθε $x \in X$ υπάρχει ανοιχτή περιοχή του x, V_x: $\{a \in A : V_x \cap U_a \neq \emptyset\}$ πεπερασμένο.

Ένας τ.χ. X λέγεται παρασυμπαγής (paracompact) αν κάθε ναοιχτό κάλυμμα του X έχει τοπικά πεπερασμένη εκλέπτυνση.

Θεώρημα 2.4.8. *Κάθε μετρικός χώρος είναι παρασυμπαγής.*

Συνεχίζουμε με τους εξής ορισμούς.

Ορισμός 2.4.9. *Έστω X τ.χ. και $(\varphi_i)_{i\in I}$ οικογένεια συνεχώς συναρτήσεων στον X (δηλαδή $\varphi : X \to \mathbb{R}$). Η $\{\varphi_i : i \in I\}$ είναι διαμέριση της μονάδας (για τον X) αν*

- $(\varphi_i \neq 0) := (\{x \in X : \varphi_i(x) \neq 0\})_{i\in I}$ *είναι τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα του X*

- $\sum_{i\in I} \varphi_i(x) = 1\ \forall x \in X$.

(το άθροισμα ορίζεται καλά αφού κάθε $x \in X$ ανήκει σε πεπερασμένο πλήθος από τα $\{\varphi_i \neq 0\}$ διότι $(\varphi_i \neq 0)_{i\in I}$ τοπικά πεπερασμένο).

Έστω τώρα επιπλέον ότι $(U_i)_{i\in I}$ ανοιχτό κάλυμμα του X. Λέμε ότι η διαμέριση της μονάδας $\{\varphi_i : i \in I\}$ κυριαρχείται (subordinate) από το κάλυμμα $(U_i)_{i\in I}$ αν $\{x \in X : \varphi_i(x) \neq 0\} \subseteq U_i\ \forall i \in I$.

Πρόταση 2.4.10. *X παρασυμπαγής αν και μόνον αν κάθε ανοιχτό κάλυμμα του X έχει διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από αυτό.*

Απόδειξη. (του θεωρήματος Borsuk) Θέτω $U := K \setminus E$. U μετρικός χώρος (ως υποσύνολο του μ.χ. K), άρα U παρασυμπαγής.

Για κάθε $u \in U$ θέτω

$$V_u := \{s \in U : d(s,u) < \frac{1}{2}d(u,E)\} \subseteq U.$$

Κάθε V_u είναι ανοιχτό υποσύνολο του U, $fd(u,E) > 0$ (αφού $u \notin E$ και E κλειστό). Για κάθε $u \in U$, $u \in V_u$ (αφού $d(u,u) = 0 < \frac{1}{2}d(u,E)$). $U = \cup_{u\in U}\{u\} = \cup_{u\in U} V_u$ και άρα $(V_u)_{u\in U}$ αοιστό κάλυμμα του U. Από πρόταση, υπάρχει διαμέριση της μονάδας που κυριαρχείται από το κάλυμμα $(V_u)_{u\in U}$.

Μάλιστα, επειδή U T4, η διαμέριση της μονάδας προκύπτει από Urysohn και άρα παίρνει τιμές στο $[0,1]$. Δηλαδή υπάρχει οικογένεια $(\varphi_j)_{j\in J}$ συνεχών συναρτήσεων στο U τ.ω.

(i) $0 \leqslant \varphi_j \leqslant 1\ \forall j \in J$

(ii) $\{\varphi_j \neq 0\}_{j\in J} = \{\varphi_j > 0\}_{j\in J}$ τοπικά πεπερασμένο κάλυμμα του U

(iii) $\sum_{j\in J} \varphi_j(s) = 1\ \forall s \in U$

(iv) $\forall j \in J\ \exists u_j \in U$ τ.ω. $\{\varphi_j > 0\} \subseteq V_{u_j}$ (αφού $(\varphi_j)_{j\in J}$ κυριαρχείται από $(V_u)_{u\in U}$)

Αφού E συμπαγής (ως κλειστό στον συμπαγή K), ισχύει

$$d(u_j, E) = \min\{d(u_j, v) : v \in E\}$$

δηλαδή μπορώ να επιλέξω $v_j \in E$ με $d(u_j,E) = d(u_j, v_j$.

Υπενθυμίζω ότι στόχος είναι να ορίσω $T : C(E) \to C(K)$.

Έστω $f \in C(E)$. Ορίζω

$$T(f) : K \to \mathbb{R} : s \mapsto T(f)(s) := \begin{cases} f(s), & \text{αν } s \in E \text{ (άρα } T(f)|_E = f) \\ \sum_{j\in J} \varphi_j(s) f(v_j), & \text{αν } s \in U \ (U = K \setminus E) \end{cases}$$

όπου v_j έχει επιλεχθεί έτσι ώστε $d(u_j,E) = d(u_j,v_j)$.

Για να ολοκληρώσω την απόδειξη αρκεί ν.δ.ο. $Tf \in C(K)$.

Πράγματι, τότε προφανώς T γραμμική, $T(1) = \sum_{j\in J} \varphi_j = 1$ και $\|T\| = 1$ αφού $\|T(f)\|_{C(K)} \geqslant \|f\|_{C(E)}$ και

$$\|Tf\|_{C(K)} \leqslant \max\left\{\|f\|, \left\|\sum_j f(v_j)\varphi_j\right\|\right\},$$

αφού

$$\sum_j f(v_j)\varphi_j \leqslant \sum_j \|f\|_E\varphi_j = \|f\|_E \left(\sum_j \varphi_j\right) = \|f\|_E \cdot 1 \implies \|\sum_j f(v_j)\varphi_j\| \leqslant \|f\|_E.$$

Αρκεί λοιπόν να δείξω ότι Tf συνεχής. $Tf|_U = \sum_{j\in J} f(v_j)\varphi_j$ που είναι συνεχής στο U ως άθροισμα συνεχών.

Έστω $t \in K$. Αν $t \in U$, $T(f)$ συνεχής στο t (αφού $T(f)$ συνεχής σε κάθε $x \in U$).

Έστω λοιπόν $t \in E$. Έστω $\varepsilon > 0$. $T(f)(t) = f(t)$. Πρέπει να βρω $\delta > 0$ τ.ω. για κάθε $s \in K$ με $d(s,t) < \delta$ να ισχύει $|(Tf)(s) - (Tf)(t)| < \varepsilon$. Αφού f συνεχής στο E, επιλέγω $\delta > 0$ τ.ω. για κάθε $v \in E$ με $d(v,t) < 4\delta$, να ισχύει

$$(*) \qquad |f(v) - f(t)| < \varepsilon.$$

Έστω $s \in K$ με $d(s,t) < \delta$.

Αν $s \in E$: $|Tf(s) - Tf(t)| = |f(s) - f(t)| < \varepsilon$. Έστω λοιπόν $s \in U$. $Tf(s) = \sum_j \varphi_j(s) f(v_j)$ και $Tf(t) = f(t)$.

Θ.δ.ο. $|Tf(s) - Tf(t)| = \sum_{\varphi_j(s)>0} \varphi_j(s)|f(v_j) - f(t)|$.

- Αν $f(v_j) \geqslant f(t)$, τότε

$$Tf(s) = \sum_{\varphi_j(s)>0} \varphi_j(s) f(v_j) \geqslant \sum_{\varphi_j(s)>0} \varphi_j(s) f(t) = f(t) = Tf(t)$$

  και

$$|Tf(s) - Tf(t)| = Tf(s) - Tf(t) = \sum_{\varphi_j(s)>0} \varphi_j(s)\big(f(v_j) - f(t)\big) = \sum_{\varphi_j(s)>0} \varphi_j(s)|f(v_j) - f(t)|.$$

- Όμοια, αν $f(v_j) < f(t)$, $Tf(s) < Tf(t)$ και

$$Tf(t) - Tf(s) = \sum_{\varphi_j(s)>0} \varphi_j(s)(f(t) - f(v_j)).$$

Άρα σε κάθε περίπτωση

$$\begin{aligned} |Tf(s) - Tf(t)| &= \sum_{\varphi_j(s)>0} \varphi_j(s)|f(v_j) - f(t)| \leqslant (\max_{\varphi_j(s)>0} |f(v_j) - f(t)|) \underbrace{\left(\sum_{\varphi_j(s)>0} \varphi_j(s)\right)}_{=1} \\ &= \max_{\varphi_j(s)>0} |f(v_j) - f(t)|. \end{aligned}$$

(Το max υπάρχει αφού το σύνολο δεικτών j με $\varphi_j(s) > 0$ είναι πεπερασμένο αφού $(\varphi_j \neq 0)_{(} j \in J$ τοπικά πεπερασμένο.)

Αν $\varphi_j(s) > 0 \overset{(4)}{\implies} s \in Vu_j \implies d(s,u_j) < \frac{1}{2}d(u_j,E) \overset{t\in E}{\leqslant} \frac{1}{2}d(u_j,t) \leqslant \frac{1}{2}(d(u_j,s) + d(s,t)) = \frac{1}{2}d(s,u_j) + \frac{1}{2}d(s,t) \implies d(s,u_j) \leqslant d(s,t) < \delta$.

Άρα $\frac{1}{2}d(u_j, E) < \frac{1}{2}\delta + \frac{1}{2}\delta \implies d(u_j, E) < 2\delta$. Άρα $d(u_j, v_j) = d(u_j, E) < 2\delta$. Τώρα

$$d(t, v_j) \leqslant d(t, s) + d(s, u_j) + d(u_j, v_j) < \delta + \delta + 2\delta = 4\delta,$$

άρα από (*) $|f(v_j) - f(t)| < \varepsilon$ $\forall j$ με $\varphi_j(s) > 0$. Αφού $\{j : \varphi_j(s) > 0\}$ πεπερασμένο,

$$\max_{\varphi_j(s)>0} |f(v_j) - f(t)| < \varepsilon$$

άρα $|Tf(s) - Tf(t)| < \varepsilon$. □

Υπενθυμίζουμε ότι το σύνολο του Cantor $\Delta := \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ είναι τοπολογικός χώρος με την καρτεσιανή τοπολογία γινόμενο και μετρικός χώρος (ως αριθμήσιμο γινόμενο μετρικών χώρων) με μετρική την

$$d(x, y) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}|y_n - x_n|,$$

όπου $x = (x_n)_n$, $y = (y_n)_n \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$. Η τοπολογία $\mathcal{T}_d$ ταυτίζεται με την τοπολογία γινόμενο.

Έστω K υπεραριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε

α) $C(K)$ ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του $C[0,1]^{\mathbb{N}}$

(Απόδειξη. Από Προτ. 2.4.5. (i), K ισόμορφος με F, όπου F κλειστό υποσύνολο του $[0,1]^{\mathbb{N}}$, άρα από Borsuk $C(F)$ ισομετρικά ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του $C([0,1]^{\mathbb{N}})$. Όμως από Banach-Stone, το ότι K ισομορφικός με F, είναι ισοδύναμο με το ότι $C(K) \cong C(F)$ (ισομετρικά ισόμορφοι). Ειδικότερα, $C(K)$ ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του $C[0,1]^{\mathbb{N}}$).

β) $C(K) \supseteq$ συμπληρωματικό υπόχωρο $\mathcal{F}$ και $\mathcal{F} \approx C(\Delta)$.

(Απόδειξη. Από Προτ. 2.4.5. (ii), Δ ομοιομορφικός με E όπου $E \subseteq K$ κλειστό, άρα $C(\Delta) \cong C(E)$ και από Borsuk $C(E) \cong \mathcal{F}$ συμπληρωματικός υπόχωρος του $C(K)$).

Πρόταση 2.4.11. $C(\Delta) \cong C_0(C(\Delta))$.

Απόδειξη. Αφού $\Delta = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ υπεραριθμήσιμος συμπαγής (Tychonoff) μετρικός χώρος, από Προτ. 4.4.1. $C(\Delta)$ ισόμορφος με τα υπερεπίπεδά του. Θέτω

$$Z := \{f \in C(\Delta) : f(0, 0, ..., 0, ...) = 0\} \subseteq C(\Delta).$$

$Z = \ker F$ όπου $F \in C(\Delta)^*$ με $F(f) = f(0, ...)$ $\forall f \in C(\Delta)$. Άρα Z υπερεπίπεδο του $C(\Delta)$. Άρα $C(\Delta) \approx Z$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτω

$$\Delta_n := \{(s_k)_{k=1}^{\infty} \in \Delta : \forall k < n \ s_k = 0 \text{ και } s_n = 1\} \subseteq \Delta,$$

δηλαδή $n = \min\{m \in \mathbb{N} : s_m \neq 0, (s_k)_{k=1}^{\infty} \in \Delta \setminus \{0\}\}$.

Θ.δ.ο. Δ_n ομοιομορφικό με Δ. Ορίζω

$$W : \Delta_\infty \to \Delta_n : (s_k)_{k=1}^{\infty} \mapsto (0, ..., 0, 1, s_1, s_2, ...)$$

Η W είναι προφανώς 1-1 και επί. Αρκεί ν.δ.ο. W συνεχής (τότε και W^{-1} συνεχής). Έστω $(P_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ δίκτυο στο $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με $P_\lambda \to x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}} \iff \forall n\ \pi_n(P_\lambda) \to \pi(x) \overset{\{0,1\}\ \text{διακριτός}}{\iff} \forall n$ τελικά $\pi_n(P_\lambda) = \pi_n(x) \iff W(P_\lambda) \to W(x)$.

Άρα W ομοιομορφισμός. Άρα Δ_n clopen ως ομοιομορφικό με clopen.

Υπενθυμίζουμε ότι

$$\ell_\infty(X_i)_{i\in I} + \{(x_i)_{i\in I} \in \prod_{i\in I} X_i : (\|x_i\|)_{i\in I} \text{ φραγμένο}\}$$

είναι χώρος Banach με $\|(x_i)_{i\in I}\} = \sup_{i\in I}\|x_i\|$. Ομοίως ορίζονται οι $\ell_p(X_i)_{i\in I}$ και $C_0(X_i)_{i\in I}$.

Ορίζω

$$S : Z \to \ell_\infty(C(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}} : f \mapsto (F|_{\Delta_n})_{n=1}^\infty.$$

Η S είναι καλά ορισμένη: $(F|_{\Delta_n})_{n=1}^\infty \in \ell_\infty(C(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$ αφού $f|_{\Delta_n}$ συνεχής ($f \in C(\Delta)$) και

$$\|f|_{\Delta_n}\|_\infty \leqslant \max\{1, \|f\|_\infty\}\ \forall n,$$

δηλαδή $(\|f|_{\Delta_n}\})_n$ φραγμένη.

Θ.δ.ο. $S(Z) = C_0(C(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Έστω $f \in Z$. $f(0) = 0$, f συνεχής στο 0. Για το $\subseteq$ πρέπει ν.δ.ο. $\|f|_{\Delta_n}\|_\infty \overset{n\to\infty}{\to} 0$.

Έστω $N \in \mathbb{N}$. Έστω $x_\infty = (x_k)_{k=1}^\infty \in \Delta_N$ δηλαδή $x_k = 0\ \forall k < N$ και $x_N = 1$. Τότε

$$(**) \qquad d(x,0) \leqslant \sum_{k=N}^\infty \frac{1}{2^k} \overset{N\to\infty}{\to} 0 \text{ (αφού } d(x,y) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k}|y_k - x_k|).$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού f συνεχής στο $0 = (0,0,...)$, $\forall x \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ με $d(x,0) < \delta$, $|f(x)| < \varepsilon$. Όμως από (**) $\exists N_0 \in \mathbb{N} : \forall N \geqslant N_0\ \forall x \in \Delta_N\ d(x,0) < \delta$ άρα $|f|_{\Delta_n}(x)| < \varepsilon$. Άρα $f|_{\Delta_n} \overset{\text{ομ.}}{\to} 0$, δηλαδή $\|f|_{\Delta_n}\|_\infty \to 0$. Άρα $S(Z) \subseteq C_0(c(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$.

Τώρα υ.δ.ο. $C_0(C(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq C(Z)$. Έστω $(g_n)_{n\in\mathbb{N}} \in C_0(C(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$, δηλαδή $g_n : \Delta_n \to \mathbb{R}$ συνεχείς με $\|g_n\|_\infty \overset{n\to\infty}{\to} 0$. Αρκεί ν.δ.ο. $\exists f \in Z$ τέτοιο ώστε $Sf = (g_n)_{n=1}^\infty$, δηλαδή αρκεί $\forall n F|_{\Delta_n} = g_n$.

Πρώτα πρέπει ν.δ.ο. $\cup_n\Delta_n = \Delta\setminus\{0\}$. Το $\subseteq$ είναι προφανές. Έστω $x \in \Delta\setminus\{0\}$. Τότε υπάρχει το $\min\{m \in \mathbb{N} : x_m \neq 0\} = n$. Άρα $x \in \Delta_n \subseteq \cup_n\Delta_n$. Επίσης $(\Delta_n)_n$ ακολουθία ξένων ανά δύο υποσυνόλων του Δ. Έτσι το Δ γράφεται ως ξένη ένωση $(\cup_n\Delta_n) \cup (\{(0,0,...)\})$. Έτσι μπορώ να ορίσω $f \in \Delta$ με

- $f(0,0,...) = 0$
- $f(x) = g(x)$ αν $x \in \Delta_n$.

Η f είναι καλά ορισμένη, συνεχής και $f \in Z$ με $f|_{\Delta_n} = g_n$.

Άρα όντως η S είναι επί του $C_0(C(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Τέλος, αν $f \in Z$, $\|f\|_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}}\|f|_{\Delta_n}\|_\infty$, δηλαδή S ισομετρία. Άρα $Z \cong C_0(C(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}}$. Άρα $C(\Delta) \approx Z \approx C_0(C(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}} \approx C_0(C(\Delta))$ αφού Δ_n ομοιομορφικό με Δ, δηλαδή $C(\Delta_n) \cong C(\Delta)$. και άρα

$$C_0(C(\Delta_n))_{n\in\mathbb{N}} \approx C_0(C(\Delta))_{n\in\mathbb{N}} \equiv C_0(C(\Delta)).$$

□

Για να αποδείξουμε το Θεώρημα του Miljutin, θα χρειαστεί να έχουμε τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.3.16.

(Υπενθύμιση: Θεωρ. 2.3.16. Τεχνική αποσύνθεσης του Pelczynski. Έστω X, Y χώροι Banach τέτοιοι ώστε $X \approx$ συμπληρωματικό υπόχωρο του του Y και $Y \approx$ συμπληρωματικό υπόχωρο του X. Υποθέτω επίσης ότι είναι (α) $X \approx X^2 := X \oplus X$ και $Y \approx Y^2$ ή (β) $X \approx C_0(X)$ και $X \approx \ell_p(X)$ για κάποιο $1 \leqslant p < \infty$. Τότε $X \approx Y$.)

Εμείς θέλουμε να εφαρμόσουμε τη τεχνική Pelczynski για $X := C(\Delta)$ και $Y := C[0,1]^{\mathbb{N}}$. Είδαμε ότι ο $C(\Delta)$ ικανοποιεί το (β) και ότι $C(\Delta) \approx$ συμπληρωματικό υπόχωρο του $C[0,1]^{\mathbb{N}}$. Μένει ν.δ.ο. $C[0,1]^{\mathbb{N}} \approx$ συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(\Delta)$ δηλαδή ότι ο $C[0,1]^{\mathbb{N}}$ εμφυτεύεται συμπληρωματικά στο $C(\Delta)$.

Για να δούμε τη δυσκολία του παραπάνω πρώτα θα δούμε το πρόβλημα της εμφύτευσης του $C[0,1]$ *συμπληρωματικά* στο $C(\Delta)$. Η σκέτη εμφύτευση είναι εύκολη. Η

$$\varphi : \Delta \to [0,1] \text{ με } \varphi((s_n)_{n=1}^{\infty}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^n}$$

είναι συνεχής, γραμμική και επί. Έτσι η

$$F : C[0,1] \to C(\Delta) : f \mapsto f \circ \varphi$$

είναι *ισομετρική εμφύτευση*. Πράγματι,

$$\|f\|_\infty = \max_{x \in [0,1]} |f(x)| = |f(x_0)|$$

όπου

$$\begin{aligned} x_0 \in [0,1] &\implies \exists (s_n) : \varphi((s_n)) = x_0 \implies \|f\|_\infty = |f \circ \varphi((s_n)_{n=1}^{\infty})| \leqslant \|f \circ \varphi\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty \\ &\implies \|f\|_\infty = \|f \circ \varphi\|_\infty. \end{aligned}$$

Όμως η εικόνα της εμφύτευσης *δεν* είναι συμπληρωματική στον $C(\Delta)$. Θα κάνουμε μια παράκαμψη από την απόδειξη του Θεωρήματος του Miljutin για να το εξηγήσουμε.

Έστω

$$\mathcal{B}[0,1] := \{f : [0,1] \to \mathbb{R} | f \text{ φραγμένη και Borel-μετρήσιμη}\}.$$

Έστω

$$D := \{q \in (0,1) : q = \frac{k}{2^n} : 1 \leqslant k \leqslant 2^n,\ k, n \in \mathbb{N}\} \subseteq (0,1) \cap \mathbb{Q}.$$

Το D λέγεται το σύνολο των δυαδικών ρητών στο $(0,1)$. Ο $(\mathcal{B}[0,1], \|\cdot\|_\infty)$ είναι χώρος Banach, όπου $\|f\|_\infty = \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1} |f(t)|$. Έστω

$$E := \{f \in \mathcal{B}[0,1] | f \text{ δεξιά συνεχής παντού}, f \text{ συνεχής στα } t \notin D \text{ και το } f(t^-) = \lim_{s \to t^-} f(s)$$

Αν $t > \frac{1}{2}$: $s_1 = \xi_1 = 1^n$ αφού $\sum_{n \geqslant 2} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} < t$. Αν $t < \frac{1}{2}$: $s_1 = \xi_1 = 0$. Η περίπτωση $t = \frac{1}{2}$ αποκλείεται αφού $t \notin \Delta$.

Έστω ότι έχουμε δείξει $s_k = \xi_k\ \forall k < n$. Αρκεί να δειξουμε ότι $s_n = \xi_n$. Θεωρούμε τον

$$a := t - (s_1 + ... + s_{n-1}) = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{s_k}{2^k} = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{\xi_k}{2^k}.$$

Όμοια με πριν, δηλαδή διακρίνοντας περιπτώσεις για το αν $a > \frac{1}{2^{n+1}}$ ή $a < \frac{1}{2^{n+1}}$ προκύπτει ότι $s_n = \xi_n$. Άρα $s = \xi$.

Επομένως για κάθε $t \in [0,1] \setminus \Delta$ ορίζεται η $\varphi^{-1}(t)$. Θέλω να επεκτείνω τη φ^{-1} σε ολόκληρο το $[0,1]$ έτσι ώστε να είναι δεξιά-συνεχής, δηλαδή να ορίσω

$$\rho : [0,1] \to \Delta \text{ με } \rho(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{αν } t \in [0,1] \setminus \Delta \\ \lim_{x \to t^+} \varphi^{-1}(x), & \text{αν } t \in \Delta \end{cases}.$$

Η φ^{-1} είναι συνεχής στο $[0,1] \setminus \Delta$. Το Δ αποτελείται από μεμονωμένα σημεία. Έστω $t \in \Delta$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ με $(t, t+\delta) \subseteq [0,1] \setminus \Delta$. Άρα

$$\lim_{x \to t^+} \varphi^{-1}(x) = \lim_{x \to t^+} \varphi^{-1}|_{(t,t+\delta)}(x)$$

το οποίο υπάρχει. Πράγματι, π.χ. για $t = \frac{1}{2}$, έστω $N \in \mathbb{N}$ και $\frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{2^N}$. Τότε

$$\varphi^{-1}(x) = (1, \underbrace{0, 0, ..., 0}_{N \text{ το πλήθος}}, *, *, ...) \overset{N \to \infty}{\longrightarrow} (1, 0, 0, ...).$$

Ομοίως στη γενική περίπτωση $t = \frac{k}{2^n}$.

Έτσι, ρ δεξιά συνεχής και $\varphi \circ \rho = id_{[0,1]}$ αφού για $t \in \Delta$:

$$\varphi(\rho(t)) = \varphi(\lim_{x \to t^+} \varphi^{-1}(x)) = \lim_{x \to t^+} \varphi(\varphi^{-1}(x)) = t.$$

Ορίζω

$$T : C(\Delta) \to E : f \mapsto T(f) := f \circ \rho.$$

Η T είναι καλά ορισμένη αφού ρ δεξιά συνεχής, συνεχής στα $t \notin \Delta$ και υπάρχει το (t^-) και f συνεχής.

Θα δείξουμε ότι T ισομετρικός ισομορφισμός. T ισομετρία: $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ $\|f\|_\infty = |f(k)|$, για κάποιο $k \in \Delta$ (αφού Δ συμπαγής).

Αν $k \in \varphi^{-1}(\Delta)$: $\varphi(k) \in [0,1] \setminus \Delta \implies k = \rho(\varphi(k))$. Άρα $\|f\|_\infty = |f \circ \rho(\varphi(k)| \leqslant \|Tf\|_\infty$.

Αν $k \in \varphi^{-1}(\Delta)$ υπάρχει $(k_n) \subseteq \varphi^{-1}([0,1] \setminus \Delta)$ τέτοιο ώστε $k_n \to k \implies f(k_n) \to f(k)$, άρα $|f(k_n)| \to |f(k)|$, δηλαδή

$$|f(k) = \lim_{n \to \infty} |f(k_n)| \overset{k_n \in \varphi^{-1}([0,1]\setminus\Delta)}{\leqslant} \|Tf\|_\infty.$$

T επί: Έστω $g \in E$. $T(g\varphi) = g\varphi\rho = g$. Για κάθε $s_1, .., s_n \in \{0,1\}$ θέτω

$$\Delta_{s_1,...,s_n} = \{t = (t_k)_{k=1}^\infty \in \Delta : t_k = s_k \ \forall 1 \leqslant k \leqslant n\}.$$

Το $\Delta_{s_1,...,s_n}$ είναι clopen υποσύνολο του Δ (ως ομοιομορφικό με αυτό). Θέτουμε

$$q := q(s_1, ..., s_n) := \varphi(s_1, ..., s_n, 0, ...) = \sum_{k=1}^n \frac{s_k}{2^k} = \frac{k}{2^n}$$

για κάποιο k. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε τέτοιο $q = \frac{k}{2^n}$ με $0 \leqslant k \leqslant 2^n - 1$ ορίζουμε

$$I_{n,q} := \begin{cases} [q, q+2^{-n}), & \text{αν } q + 2^{-n} < 1, \\ [q, 1], & \text{αν } q + 2^{-1} = 1. \end{cases}$$

Τότε για την T ισχύει

$$T(X_{\Delta_{s_1,\dots,s_n}}) = X_{I_{n,q(s_1,\dots,s_n)}}$$

αφού $T(X_{\Delta_{s_1,\dots,s_n}}) = X_{\Delta_{s_1,\dots,s_n}} \circ \rho$ και $\rho(t) \in \Delta_{s_1,\dots,s_n} \iff t = (s_1,...,s_n,*,...)$. Άρα $q \leqslant t \leqslant q + 2^{-1}$.

Είδαμε ότι $C[0,1]$ εμφυτεύεται ισομετρικά στο $C(\Delta)$ μέσω της φ και $(\Delta) \cong E$. Άρα $C[0,1]$ εμφυτεύεται ισομετρικά στο E. Η εμφύτευση αυτή είναι ισομετρικά ισοδύναμη με την έννοια ότι υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός από το $C(\Delta)$ στο E που απεικονίζει το $C[0,1]$ στο $C[0,1]$.

Πρόταση 2.4.12. *Δεν υπάρχει φραγμένη προβολή από το E στον $C[0,1]$. Ισοδύναμα, ο $C[0,1]$ δεν είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του E.*

Απόδειξη. Ο $C[0,1]$ είναι κλειστός υπόχωρος του χώρου Banach E. Άρα μπορώ να θεωρήσω το χώρο πηλίκο $E/C[0,1]$ ο οποίος είναι χώρος Banach με

$$\|f + C[0,1]\|_{E/C[0,1]} = d(f, C[0,1]) = \inf\{\|f-g\|_\infty : g \in C[0,1]\}$$

Στον E ανήκουν προφανώς όλες οι συναρτήσεις της μορφής

$$f = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k I_{n,q}, \text{ όπου } n \in \mathbb{N}, a_0, ..., a_{2^n-1} \in \mathbb{R}, q = \frac{k}{2^n}.$$

Ορίζω τον τελεστή

$$\begin{aligned} S : E &\longrightarrow \ell_\infty(\Delta) := \{g : \Delta \to \mathbb{R} | g \text{ φραγμ.}\} \\ f &\mapsto S(f) : \Delta \to \mathbb{R} : q \mapsto S(f)(q) := \frac{1}{2}(f(q) - f(q^-)) \end{aligned}$$

$S(f)$ φραγμένη αφού για κάθε $q \in \Delta, |S(f)(q)| \leqslant \|f\|_\infty$. Άρα $S(f) \in \ell_\infty(\Delta)$ με $\|S(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ δηλαδή S φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|S\| \leqslant 1$.

Για $f = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k I_{n,q} \in E, q = \frac{k}{2^n}, a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$.

Για $q_0 = \frac{k_0}{2^{n_0}} \in \Delta$ έχουμε $f(q_0) = a_{k_0}$ και $f(q_0^-) = a_{k_0-1}$ δηλαδή

$$\|S(f)\|_\infty = \frac{1}{2} \max_{k=0,1,\dots,2^n-1} |a_k - a_{k-1}| = d(f, C[0,1]).$$

Η S απεικονίζει τοω χώρο

$$A := \{f = \sum_{k=0}^{2^n-1} a_k I_{n,q} : q = \frac{k}{2^n}, a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}\} \subseteq E$$

στον υπόχωρο των πεπερασμένα μη-μηδενικών συναρτήσεων στο Δ, δηλαδή $C_{00}(\Delta)$. (Πράγματι, η $S(f)$ είναι μη μηδενική στα $2^n - 1$ σημεία ασυνέχειας της f). Άρα $S(A) = C_{00}(\Delta)$ όπου $\overline{A}^{\|\cdot\|_\infty} = E$ και $\overline{C_{00}(\Delta)}^{\|\cdot\|_\infty} = C_0(\Delta)$. Άρα $S(E) = C_0(\Delta)$.

Επίσης $\ker S = C[0,1]$. Ξέρω ότι $E/\ker S \approx \operatorname{im} S$. Άρα $E/C[0,1] \cong C_0(\Delta)$.

Έστω για άτοπο ότι $\ker S = C[0,1]$ συμπληρωματικός στο E. Τότε υπάρχει φραγμένος γραμμικός τελεστής $R : C_0(\Delta) \to E$ τέτοιος ώστε $SR = I_{C_0(\Delta)}$. Ο R λέγεται lifting της S.

Πράγματι, έστω $P : E \to E$ φραγμένη προβολή με $\ker P = C[0,1] = \ker S$. $\mathrm{im}P$ κλειστός υπόχωρος του E, $E = \ker P \oplus \mathrm{im}P = \ker S \oplus \mathrm{im}P$. Άρα $S|_{\mathrm{im}P} : \mathrm{im}P \to C_0(\Delta)$ 1-1, επί και συνεχής άρα και $(S|_{\mathrm{im}P})^{-1}$ συνεχής. Ορίζω

$$R : C_0(\Delta \to \mathrm{im}P \subseteq E : R := (S|_{\mathrm{im}P})^{-1}$$

δηλαδή $R(f) = (S|_{\mathrm{im}P})^{-1}(f)$ και

$$SR(f) = S(\underbrace{(S|_{\mathrm{im}P})^{-1}(f)}_{\in \mathrm{im}P}) = (S|_{\mathrm{im}P})((S|_{\mathrm{im}P})^{-1}(f)) = f \ \forall f \in C_0(\Delta).$$

Έστω e_d ένα στοιχείο της κονονικής βάσης Schauder του $C_0(\Delta)$ όπου

$$e_d = \begin{cases} 1, & \text{αν } x = d \\ 0, & \text{αν } x \neq d \end{cases}$$

Θέτω $f_d = R(e_d) \in E$. Θα διαλέξω επαγωγικά $(d_n)_{n=1}^{\infty}$ στο Δ, ανοιχτά διαστήματα $(J_n)_{n=1}^{\infty}$ στο (0,1) και πρόσημα $(\varepsilon)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

$$\sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k f_{d_k}(t) \geqslant \frac{n}{2}, n \in \mathbb{N}, t \in J_n.$$

Ξεκινάω την επαγωγή παίρνοντας $d_1 = \frac{1}{2}$. Τότε είτε $|f_{d_1}(d_1)| \geqslant 1$ ή $|f_{d_1}(d_1^-)| \geqslant 1$. Πράγματι,

$$f_{d_1}(d_1) - f_{d_1}(d_1^-) = 2S(f_{d_1}(d_1)) = 2S(R(e_{d_1})(d_1)) = 2e_{d_1}(d_1) = 2$$

άρα

$$2 \leqslant |f_{d_1}(d_1)| + |f_{d_1}(d_1^-)| \implies |f_{d_1}(d_1)| \geqslant 1 \text{ ή } |f_{d_1}(d_1^-)| \geqslant 1.$$

Επομένως, επειδή $f_{d_1} \in E$, η f_{d_1} είναι δεξιά συνεχής και άρα αν $|f_{d_1}| \geqslant 1$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0 :$ $\forall t \in J_1 = (d_1, d_1 + \varepsilon)$ με $|f_{d_1}(t) > \frac{1}{2}$, δηλαδή υπάρχει πρόσημο ε_1 τέτοιο ώστε $\varepsilon_1 f_{d_1}(t) > \frac{1}{2}$ $\forall t \in J_1$.

Αν $|f_{d_1}(d_1^-)| \geqslant 1$ τότε υπάρχει $\varepsilon > 0 : |f_{d_1}(t) > \frac{1}{2}$, για κάθε $t \in (d_1 - \varepsilon, d_1)$ και θέτω J_1 αυτό το διάστημα.

Σε κάθε περίπτωση υπάρχει ανοιχτό διάδτημα J_1 με άκρο το d_1 τέτοιο ώστε $\varepsilon_1 f_{d_1}(t) > \frac{1}{2}$ $\forall t \in J_1$.

Επαγωγική υπόθεση: έστω ότι έχουν επιλεγεί $d_1, ..., d_{n-1} \in \Delta$, $\varepsilon_1, ..., \varepsilon_{n-1}$ πρόσημα και $J_1, ..., J_{n-1}$ ανοικτά διαστήματα έτσι ώστε για κάθε $i = 1, ..., n-1$και για κάθε $t \in J_i$

$$\sum_{k=1}^{i} \varepsilon_k f_{d_k}(t) \geqslant \frac{i}{2}.$$

Ειδικότερα

$$\sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k f_{d_k}(t) \geqslant \frac{n-1}{2} \ \forall t \in J_{n-1}.$$

Παίρνουμε $d_n \in J_{n-1}$. Όπως στην επαγωγική βάση, $|f_{d_n}(d_n)| \geqslant 1$ ή $|f_{d_n}(d_n^-)| \geqslant 1$ και άρα υπάρχει πρόσημο ε_n τέτοιο ώστε

$$\varepsilon_n f_{d_n}(d_n) \geqslant 1 \ \text{ ή } \ \varepsilon_n f_{d_n}(d_n^-) \geqslant 1$$

οπότε είτε

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k f_{d_k}(d_n) = \sum_{k=1}^{n-1} \varepsilon_k f_{d_k}(d_n) + \varepsilon_n f_{d_n}(d_n) \geqslant \frac{n-1}{2} + 1$$

ή

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k f_{d_k}(d_n^-) \geqslant \frac{n-1}{2} + 1.$$

Οπότε όπως πριν μπορούμε να διαλέξουμε ανοικτό διάστημα J_n με άκρο το d_n τέτοιο ώστε $\varepsilon_n d_{d_n}(t) > 1/2 \ \forall t \in J_n$ και άρα

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k f_{d_k}(t) \geqslant \frac{n-1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{n}{2} \ \forall t \in J_n.$$

Αυτό λοκληρώνει την επαγωγική απόδειξη.

Τότε

$$\frac{n}{2} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k R(e_{d_k})(t) \ \forall n \in \mathbb{N} \ \forall t \in J_n$$

και άρα (αφού R γραμμική)

$$\frac{n}{2} \| R(\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k e_{d_k}) \|_\infty \leqslant \|R\| \cdot 1 \ \forall n$$

άρα $\|R\| = \infty$ δηλαδή R μη φραγμένη, άτοπο.

Άρα $C[0,1]$ μη συμπληρωματικός στο E. □

Το επόμενο αποτέλεσμα είναι το Λήμμα του Multijin. Ο Multijin έδειξε ότι ο $C[0,1]$ εμφυτεύεται ως συμπληρωματικός υπόχωρος του $C(\Delta)$. Πράγματι, μπορούμε να κατεσκευάσουμε έναν διαφορετικό συνεχή επιμορφισμό

$$\varphi : \Delta \to [0,1]$$

έτσι ώστε να υπάρχει $R : C(\Delta) \to C[0,1]$ με $R(f \circ \psi) = f$ και $\|R\| = 1$, R φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Λήμμα 2.4.13 (Λήμμα Multijin)**.** *Υπάρχει συνεχής επιμορφισμός $\varphi : \Delta \times \Delta \to [0,1]$ και $S : C(\Delta \times \Delta) \to C[0,1]$ τελεστής με $\|s\| = 1$ τέτοιος ώστε $S(f\varphi) = f \ \forall f \in C[0,1]$.*

Απόδειξη. Ξεκινάμε με ένα επιχείρημα παρόμοιο με την προηγούμενη περίπτωση.

Είχαμε ορίσει $\varphi_0 : \Delta \to [0,1]$ με

$$\varphi_0((s_n)_n) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s_n}{2^n}$$

και ρ η δεξιά-συνεχής δεξιά αντίστροφος της φ_0 δηλαδή $\varphi_0 \rho =_{[0,1]}$ με

$$\rho : [0,1] \to \Delta : \rho(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{αν } t \in [0,1] \setminus \Delta \\ \lim_{x \to t^+} \varphi^{-1}(t), & \text{αν } t \in \Delta \end{cases}$$

Ορίζουμε

$$T : C(\Delta \times \Delta) \to B[0,1]^2 : f \mapsto Tf$$

όπου

$$Tf : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} : (s,t) \mapsto Tf(s,t) := f(\rho(s), \rho(t)).$$

Θα δείξουμε ότι T ισομετρική εμφύτευση.

Προφανώς $\|Tf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ $\forall f \in B[0,1]^2$. Αφού $\Delta \times \Delta$ συμπαγής, υπάρχουν $k, l \in \Delta$ τέτοια ώστε $\|f\|_\infty = |f(k,l)|$. Αρκεί να δείξουμε ότι $k, l \in \rho[0,1]$ διότι τότε θα είναι

$$|f(k,l)| \leqslant \sup_{(s,t)\in[0,1]^2} |f(\rho(s), \rho(t))| = \|T(f)\|_\infty.$$

Αν $\varphi_0(k), \varphi_0(l) \in [0,1] \setminus \Delta$ τότε $k = \rho(\varphi_0(k))$ και $l = \rho(\varphi_0(l))$.

Αν π.χ. $k, l \in \varphi_0^{-1}(\Delta)$ τότε υπάρχουν $(k_n), (l_n) \subseteq \varphi_0^{-1}([0,1] \setminus \Delta)$ τέτοια ώστε $k_n \to k$ και $l_n \to l$ άρα

$$f(k,l) \overset{f \text{ συνεχής}}{=} \lim_n f(k_n, l_n) \leqslant \lim_n \|Tf\|_\infty = \|Tf\|_\infty$$

άρα $\|f\|_\infty = f(k,l) \leqslant \|Tf\|_\infty$.

Ομοίως αν π.χ. $k \in \varphi_0^{-1}([0,1] \setminus \Delta)$ και $l \in \varphi_0^{-1}(\delta)$.

Επομένως

$$T(X_{\Delta_{r_1,\ldots,r_m} \times \Delta_{s_1,\ldots,s_n}}) = X_{I_{m,q(r_1,\ldots,r_m)} \times I_{n,q(s_1,\ldots,s_n)}}$$

όπου $r_1, ..., r_m, s_1, .., s_n \in \{0,1\}$ και $\Delta_{s_1,\ldots,s_n}, I_{n,q}$ όπως είχαν οριστεί.

Θέτουμε

$$F := T(C(\Delta \times \Delta)) \subseteq B[0,1]^2.$$

$C(\Delta \times \Delta) \cong F$. Ο F είναι κλειστός υπόχωρος του $B[0,1]^2$. Ορίζουμε

$$\vartheta : [0,1]^2 \to [0,1]^2 : (t,u) \mapsto (t, u^2 t + (1-t)u).$$

Θα δείξουμε ότι ϑ ομοιομορφισμός.

ϑ 1-1: έστω $(t_1, u_1^2 t_1 + (1-t_1)u_1) = (t_2, u_2 t_2 + (1-t_2)u_2)$. Θέτουμε $t = t_1 - t_2$. Τότε $(u_1^2 - u_2^2)t + (1-t)(u_1 - u_2) = 0$. Αρκεί να δείξουμε ότι $u_1 = u_2$. Έστω για άτοπο ότι $u_1 \neq u_2$. Τότε $(u_1 + u_2)t + (1-t) = 0$, $(u_1+u_2)t \geqslant 0$ και $(1-t) \geqslant 0$. Άρα πρέπει $t = 1$ και $u_1 = -u_2$ όμως $u_1, u_2 \geqslant 0$. Άρα $u_1 = u_2 = 0$, άτοπο. Άρα ϑ 1-1.

ϑ επί: Έστω $t \in [0,1]$ σταθερό. Έστω $v \in [0,1]$. Θέλω να δείξω ότι υπάρχει $u \in [0,1]^2$ τέτοιο ώστε $\vartheta(t,u) = (t,v) \iff u^2 t + (1-t)u = v$. Αυτό πράγματι ισχύει αφού η

$$f : [0, +\infty) \to \mathbb{R} : f(x) = tx^2 + (1-t)x$$

έχει $f'(x) = 2tx + (1-t) \geqslant 0$ άρα f αύξουσα στο $[0,+\infty)$ με $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ δηλαδή η $f|_{[0,1]}$ είναι επί του $[0,1]$. Άρα για $v \in [0,1]$ υπάρχει $u \in [0,1]$ τέτοιο ώστε $f(u) = v$.

ϑ συνεχής αφού οι συντεταγμένες είναι πολυώνυμα.

Άρα ϑ ομοιομορφισμός (αφού $[0,1]^2$ σθμπαγής Hausdorff).

Είδαμε ότι για στεθερό $t \in [0,1]$ η $u \mapsto f(u)$ είναι γνησίως αύξουσα, συνεχής και, από τα προηγούμενα, 1-1 και επί άρα ομοιομορφισμός του $[0,1]$ στο $[0,1]$. Είδαμε επίσης ότι ϑ ομοιομορφισμός του $[0,1]^2$ στο $[0,1]^2$.

Έστω

$$\vartheta^{-1} : [0,1]^2 \to [0,1]^2 : (t,v) \mapsto (t, \sigma(t,v)).$$

Η $v \mapsto \sigma(t,v)$ είναι γνησίως αύξουσα και ομοιομορφισμός (πράγματι, $\sigma(t,v) = f^{-1}(v)$ ομοιομορφισμός και γνησίως αύξουσα αφού f τέτοια).

Ορίζω

$$\varphi : \Delta \times \Delta \to [0,1] : \varphi(r,s) = \sigma(\varphi_0(r), \varphi_0(s)).$$

Η φ είναι συνεχής και επί αφου φ_0 και σ συνεχείς και επί. Μένει να ορίσω τελεστή νόρμας 1

$$S : C(\Delta) \to C[0,1]$$

τέτοιο ώστε $S(f\varphi) = f$ $f \in C[0,1]$.

Ορίζω

$$V : B[0,1]^2 \to B[0,1] : f \mapsto Vf$$

με

$$Vf : [0,1] \to \mathbb{R} : u \mapsto Vf(u) = \int_0^1 f \circ \rho(t,u) dt \in \mathbb{R}$$

όπου ϑ ο ομοιομορφισμός υπο είχαμε ορίσει.

V καλά ορισμένη αφού f καλά ορισμένη (ως μετρήσιμη και φραγμένη) και $\|Vf\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ δηλαδή V φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|V\| \leqslant 1$. Μάλιστα $\|V\| = 1$ αφού π.χ. $\Pi \in B[0,1]^2$ με $V(\Pi) = \Pi$ και $\|\Pi\|_\infty = 1$.

Είχαμε ορίσει

$$T : C(\Delta \times \Delta) \to B[0,1]^2 : f \mapsto Tf$$

όπου

$$Tf : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R} : (s,t) \mapsto Tf(s,t) := f(\rho(s), \rho(t))$$

και είχαμε δείξει ότι T ισομετρική εμφύτευση.

Έστω $f \in C[0,1]$. Τότε $f\varphi \in C(\Delta \times \Delta)$ (συνεχής ως σύνθεση συνεχών). Θα δείξουμε ότι $V(T(f\varphi)) = f$. Έστω $u \in [0,1]$. Τότε

$$\begin{aligned} V(T(f\varphi)) &= \int_0^1 T(f\varphi)(\vartheta(u,t))dt = \int_0^1 T(f\varphi)(t, u^2t + (1-t)u)dt \\ &= \int_0^1 f\varphi(\rho(t), \rho(u^2t + (1-t)u))dt = \int_0^1 f(\sigma(\varphi_0\rho(t), \varphi_0\rho(u^2t + (1-t)u)))dt \\ &\overset{\varphi_0\rho = id}{=} \int_0^1 f(\sigma(\underbrace{t, u^2t + (1-t)u}_{\vartheta(t,u)})dt = \int_0^1 f(u)dt = f(u) \cdot 1 = f(u). \end{aligned}$$

Άρα $V(T(f\varphi)) = f$. Επίσης $\|VT\| = 1$ αφού T ισομετρία και $\|V\| = 1$. Για να δείξουμε ότι VT είναι ο ζητούμενος S αρκεί να δείξουμε ότι $VT(C(\Delta \times \Delta)) \subseteq C[0,1]$, δηλαδή $V(F) \subseteq C[0,1]$.

Κάθε στοιχείο του F μπορεί να προσεγγιστεί από στοιχεία της μορφής

$$T(X_{\Delta_{r_1,\ldots,r_m} \times \Delta_{s_1,\ldots,s_n}}) = X_{I_{m,q(r_1,\ldots,r_m)} \times I_{n,q(s_1,\ldots,s_n)}}$$

όπου γενικά

$$I_{n,q} := \begin{cases} [q, q+2^{-n}), & \text{αν } q + 2^{-n} < 1, \\ [q,1], & \text{αν } q + 2^{-1} = 1. \end{cases}.$$

Έστω $a, b \in (0,1]$. Επομένως αρκεί να δείξουμε ότι

$$g := V(X_{[0,a)\times[0,b)}) = V(X_{[0,a]\times[0,b]}) \in C[0,1].$$

Έστω $u \in [0,1]$. Είναι

$$\begin{aligned} V(X_{[0,a]\times[0,b]})(u) &= \int_0^1 X_{[0,a]\times[0,b]} \circ \vartheta_u(t)dt = \int_0^1 X_{\vartheta_u^{-1}([0,a]\times[0,b])} \\ &= \mu(\vartheta_u^{-1}([0,a]\times[0,b]) = \mu(\{t : 0 \leqslant t \leqslant a \text{ και } u^2t + u(1-t) \leqslant b\}) \\ &= \mu(\{t : 0 \leqslant t \leqslant a \text{ και } t \geqslant \frac{u-b}{u-u^2}\}) \\ &= \mu(\{t : \frac{u-b}{u-u^2} \leqslant t \leqslant a\}). \end{aligned}$$

Η δευτεροβάθμια ως προς u εξίσωση

$$u - b = (u-u^2)a \iff au^2 + (1-a)u - b = 0$$

έχει δύο ετερόσημες λύσεις (στο $\mathbb{R}$) αφού $-b < 0$ και η διακρίνουσα $\Delta = (1-a)^2 + 4ab > 0$.

Η θετική λύση είναι στο $(0,1]$ (π.χ. από Bolzano στο $[0,1]$). Άρα είναι όντως λύση αφού πρέπει $u \in [0,1]$.

Έστω $\pi(a,b)$ η μοναδική θετική λύση. Μάλιστα η λύση είναι στο $(b,1]$ (Bolzano στο $[b,1)$). Άρα $\pi(a,b) > b$ και τελικά έχουμε

$$g(u) = \begin{cases} a, & \text{αν } u \leqslant b \\ a - \frac{u-b}{u-u^2}, & \text{αν } b \leqslant u \leqslant \pi(a,b) \\ 0, & \text{αν } \pi(a,b) \leqslant u \leqslant 1 \end{cases}$$

Η g είναι συνεχής άρα η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το θεώρημα του Miljutin.

Θεώρημα 2.4.14 (Miljutin)**.** *Έστω K υπεραριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε $C(K) \approx C[0,1]$ (ισόμορφοι ως χώροι Banach).*

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι $C(K) \approx$ συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(\Delta)$. Ισχύει ότι $\Delta\times\Delta = \{0,1^{\mathbb{N}} \times \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ομοιομορφικό με $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \Delta$ άρα και $C(\Delta\times\Delta) \cong C(\Delta)$ (αντίστροφο Banach-Stone). Άρα από Λήμμα 4.4.7. (Multijin) υπάρχει συνεχής και επί $\psi : \Delta \to [0,1]$ και τελεστής $R : C(\Delta) \to C[0,1]$ με $\|R\| = 1$ τέτοια ώστε $R(f\psi) = f \ \forall f \in C[0,1]$.

$$R(X_\Delta) = R(X_{\psi^{-1}[0,1]}) = R(X_{[0,1]}\psi) = X_{[0,1]}.$$

Έστω $t \in [0,1]$ σταθερό. Θεωρώ το γραμμικό συναρτησοειδές

$$C(\Delta) \to \mathbb{R} : f \mapsto (Rf)(t)$$

Από Riesz representation $C(\Delta) \cong M(\Delta)$ άρα υπάρχει $\mu_t \in M(\Delta)$:

$$(Rf)(t) = \int_\Delta f d\mu_t.$$

Ορίζουμε $\tilde{\psi} : \Delta^{\mathbb{N}} \to [0,1]^{\mathbb{N}}$ με $\tilde{\psi}(s_1,...,s_n,...) = (\psi(s_1),...,\psi(s_n),...)$. ψ συνεχής και επί άρα και $\tilde{\psi}$ συνεχής και επί.

Θα ορίσουμε $\tilde{R} : C(\Delta^{\mathbb{N}}) \to C[0,1]^{\mathbb{N}}$ έτσι ώστε $\tilde{R}(f\psi) = f \ \forall f \in C[0,1]^{\mathbb{N}}$.

Πράγματι, έστω

$$A := \{f \in C(\Delta^{\mathbb{N}}) : \text{η } f$$

Ορίζουμε $\tilde{f} : \Delta^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ με $\tilde{f}(\xi_1,...,\xi_n,...) = f(\xi_{n_0})$. Τότε f συνεχής και εξαρτάται μόνο από μία συντεταγμένη, άρα $\tilde{f} \in A$. Άρα ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Stone-Weierstrass. Αρα $\overline{A}^{\|\cdot\|_\infty} = C(\Delta^{\mathbb{N}})$.

Έστω $f \in A$ και έστω ότι εξαρτάται μόνο από τις πρώτες n συντεταγμένες $s_1,...,s_n \in \Delta$. Θα γράφουμε $f(s_1,...,s_n)$ αντί για $f(s_1,...,s_n,*,*,...)$ αφού η f δεν επηρεάζεται από τις τιμές στα $*$.

Έστω $t_1,...,t_n \in [0,1]$. Ορίζουμε

$$\tilde{R}f(t_1,...,t_n) := \int_\Delta \cdots \int_\Delta f(s_1,...,s_n) d\mu_{t_1}(s_1)...d\mu_{t_n}(s_n),$$

όπου το μ_{t_1} προκύπτει εφαρμόζοντας το $R(f_{s_2,...,s_n})(t_1)$ με $f_{s_2,...,s_n}(s_1) = (f(s_1,...,s_n)$, το μ_{t_2} εφαρμόζοντας το $R(g_{s_3,...,s_n})(t_2)$ οπου

$$g_(s_2,...,s_n) = \int_\Delta f(s_1,...,s_n) d\mu_{t_1}(s_1) = R(f_{s_2,...,s_n})(t_1)$$

και $g_{s_3,...,s_n} : \Delta \to \mathbb{R}$ με $g_{s_3,...,s_n}(s_2) = g(s_2,s_3,...,s_n)$ κ.λπ. Έτσι έχουμε ορίσει

$$\tilde{R} : A \to C(\ell_\infty[0,1]) : f \mapsto Rf$$

με

$$RF : \ell_\infty[0,1] \to \mathbb{R} : (t_n) \mapsto R(f)(t_1,...,t_{N_f})$$

όπου

$$t_1,...,t_{N_f}$$

οι πεπερασμένες N_f-συντεταγμένες από τις οποίες καθορίζεται η f. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\ell_\infty[0,1] = ([0,1] \oplus [0,1] \oplus ...)_\infty = (\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}[0,1])_\infty = \{(t_n)_n \in \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}[0,1] : (|t_n|)_n \in \ell_\infty\} = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}}[0,1]$$

όπου

$$\bigoplus_{i\in\mathbb{N}}[0,1] = \{(t_n)_n \in [0,1]^{\mathbb{N}} : t_i \neq 0 \text{ για πεπερ. πλήθος } i\}.$$

Η $\tilde{R}$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|\tilde{R}\| = 1$. Πράγματι,

$$\|\tilde{R}(f)\| \leqslant \|f\|_\infty \mu_{t_1}(\Delta)..\mu_{t_n}(\Delta) = \|f\|_\infty$$

και $R(1) = 1$. Επίσης $\overline{A} = C(\Delta^{\mathbb{N}})$. Άρα η $\tilde{R}$ επεκτείνεται σε νόρμας 1 γραμμικό τελεστή $\tilde{R} : C(\Delta^{\mathbb{N}}) \to C(\ell_\infty[0,1])$.

Έστω μια $f \in C(\Delta^{\mathbb{N}})$ της μορφής $f_1(s_1),...,f_n(s_n)$. Τότε

$$\tilde{R}(f)(t) = Rf_1(t)...Rf_n(t)$$

άρα $\tilde{R}f \in C[0,1]$. Η γραμμική θήκη τέτοιων είναι πυκνή στο $C(\Delta^{\mathbb{N}})$ άρα $\tilde{R} : C(\Delta^{\mathbb{N}}) \to C[0,1]$.

Έστω $f \in C[0,1]^{\mathbb{N}}$ της μορφής $f_1(t_1), ..., f_n(t_n)$. Τότε $\tilde{R}(f\tilde{\psi}) = f$ αφού $R(f_i\psi) = f$. Άρα $\tilde{R}(f\tilde{\psi}) = f \ \forall f \in C[0,1]^{\mathbb{N}}$ (πάλι επειδή η γραμμική θήκη των $f \in C[0,1]^{\mathbb{N}}$ της μορφής $f_1(t_1), ..., f_n(t_n)$ είναι πυκνή στο $C[0,1]^{\mathbb{N}}$ από Stone-Weierstrass). $\tilde{R}$ είναι επί του $C[0,1]^{\mathbb{N}}$. Άρα η

$$\tilde{R}^{-1} : C[0,1]^{\mathbb{N}} \to C(\Delta^{\mathbb{N}}) : f \mapsto f\tilde{\psi}$$

είναι 1-1 (αφού $f_1\tilde{\psi} = f_2\tilde{\psi} \implies R(f_1\tilde{\psi}) = R(f_2\tilde{\psi}) \implies f_1 = f_2$) αρα $C[0,1]^{\mathbb{N}} \approx$ συμπληρωματικό υπόχωρου του $C(\Delta^{\mathbb{N}})$ νόρμας 1. Επίσης αφού Δ ομοιομορφικό με $\Delta^{\mathbb{N}}$ ισχύει $C(\Delta^{\mathbb{N}} \cong C(\Delta)$. Άρα τελικά $C[0,1]^{\mathbb{N}}$ ισόμορφο με συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(\Delta)$.

Έστω τώρα K συμπαγής μετρικός χώρος και υπεραριθμήσιμος. Τότε, όπως έχουμε δει, συνδυάζοντας το θεώρημα του Borsuk με την πρόταση 2.4.5 παίρνουμε ότι $C[0,1]^{\mathbb{N}} \approx$ συμπληρωματικό υπόχωρο του $C(\Delta)$. Άρα

$$C(K) \approx \text{ συμπληρωματικό υπόχωρο του } C(\Delta). \tag{2.4.1}$$

Επίσης, πάλι συνδυάζοντας πρόταση 2.4.4 και Borsuk παίρνουμε ότι

$$C(\Delta) \approx \text{ συμπληρωματικό υπόχωρο του } C(K). \tag{2.4.2}$$

Αρα από πρόταση 2.4.11

$$C(\Delta) \approx C_0(C(\Delta)). \tag{2.4.3}$$

Οι (2.4.1), (2.4.2) και (2.4.3) είναι οι προϋποθέσεις για να εφαρμόσουμε την τεχνική Pelczynski. Αυτή δίνει $C(K) \approx C(\Delta)$. Ειδικότερα $C[0,1] \approx C(\Delta)$. Άρα

$$C(K) \approx C(\Delta) \approx C[0,1]$$

δηλαδή $C(K) \approx C[0,1]$. □

2.5 Χώροι συνεχών συναρτήσεων σε αριθμήσιμους συμπαγείς μετρικούς χώρους

Τώρα θα συζητήσουμε εν συντομία την περίπτωση που ο K είναι αριθμήσιμος. Η πιο απλή περίπτωση είναι όταν $K = \gamma\mathbb{N}$, η συμπαγοποίηση ενός σημείου (Alexandroff) του $\mathbb{N}$, η οποία όπως είδαμε αποτελείται από τους όρους μιας συγκλίνουσας ακολουθίας και το όριό της (π.χ. $K = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \cup \{0\}$) οπότε $C(\gamma\mathbb{N}) = c \approx c_0$, όπου c είναι ο χώρος των συγκλινουσών ακολουθιών στο $\mathbb{R}$ με την $\|\cdot\|_\infty$.

Το 1960 οι Bessaga και Pełczynski ταξινόμησαν όλους τους χώρους $C(K)$ όπου K αριθμήσιμος συμπαγής. Όμως, η ταξινόμηση αυτή απαιτεί γνώση διατακτικών αριθμών, οπότε εμείς θα συζητήσουμε απλά την περίπτωση που ο K έχει την απλούστερη δομή.

Έστω K αριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος. Έστω

$$H := \{x \in K : x \text{ μεμονωμένο σημείο του } K\} = \bigcup_{x \in U} \{x\}$$

η ένωση των μεμονωμένων σημείων του K. Κάθε μεμονωμένο σημείο του X είναι εξ' ορισμού κάποια ανοικτή μπάλα. Άρα, για κάθε $x \in U$ το $\{x\}$ είναι ανοικτό και άρα το U είναι ανοικτό (ως ένωση ανοικτών).

Θα δείξουμε ότι το U είναι πυκνό. Πράγματι, για κάθε $x \in K \setminus U$ έχουμε $\overline{K \setminus \{x\}} = K$, δηλαδή το $K \setminus \{x\}$ είναι ανοικτό και πυκνό. Ο K είναι πλήρης μετρικός χώρος (ως συμπαγής μετρικός χώρος) και η $(K \setminus \{x\})_{x\in K\setminus U}$ είναι αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών και πυκνών συνόλων, επειδή ο K είναι αριθμήσιμος. Από το θεώρημα Baire το $\bigcap_{x\in K\setminus U}(K \setminus \{x\})$ είναι ανοικτό και πυκνό. Όμως,

$$\bigcap_{x\in K\setminus U}(K \setminus \{x\}) = K \setminus \left(\bigcup_{x\in K\setminus U}\{x\}\right) = K \setminus (K \setminus U) = U.$$

Άρα, το U είναι ανοικτό και πυκνό.

Ορίζουμε $K' := K \setminus U$ το σύνολο των σημείων συσσώρευσης του K. Το σύνολο K' λέγεται Cantor-Bendixson παράγωγος του K. Ανάλογα ορίζεται το $K'' = (K')'$ και γενικότερα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ το $K^{(n+1)} := (K^{(n)})'$. Προφανώς,

$$K \supseteq K' \supseteq K'' \supseteq \cdots \supseteq K^{(n)} \supseteq .$$

Λέμε ότι ο K έχει πεπερασμένο δείκτη Cantor-Bendixson αν και μόνο το $K^{(n)}$ είναι πεπερασμένο σύνολο για κάποιον $n \in \mathbb{N}$. Φυσικά, αν το $K^{(n)}$ είναι πεπερασμένο τότε $K^{(n+1)} = \varnothing$ (γενικά, ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος δεν έχει σημεία συσσώρευσης, αλλά το αντίστροφο δεν ισχύει αφού π.χ. $\mathbb{N}' = \varnothing$ αλλά ο $(\mathbb{N}, |\cdot|)$ είναι άπειρος μετρικός χώρος).

Αν ο K έχει πεπερασμένο δείκτη Cantor-Bendixson, ορίζουμε

$$\sigma(K) := \min\{n \in \mathbb{N} : K^{(n)} \text{ πεπερασμένο}\}.$$

Παράδειγμα 2.5.1. Είναι εύκολο να κατασκευάσουμε παραδείγματα χώρων K οι οποίοι δεν έχουν πεπερασμένο δείκτη Cantor-Bendixson (θα λέμε ότι έχουν άπειρο). Αρχικά, παρατηρούμε ότι αν E είναι κλειστό υποσύνολο του K τότε $E' \subseteq K'$, άρα $\sigma(E) \leqslant \sigma(K)$ (αφού, επαγωγικά, $E^{(n)} \subseteq K^{(n)}$ για κάθε n και αν το $K^{(n)}$ είναι πεπερασμένο τότε το $E^{(n)}$ είναι πεπερασμένο).

Σχόλιο: Στον προηγούμενο συλλογισμό δεν χρησιμοποιήσαμε κάπου την υπόθεση ότι το E είναι κλειστό. Μας χρειάστηκε μόνο το ότι, ως κλειστό υποσύνολο του K, ο E είναι συμπαγής μετρικός χώρος, άρα ορίζεται το E', αφού ουσιαστικά τον ορισμό της παραγώγου Cantor-Bendixson τον είχαμε δώσει μόνο για συμπαγείς μετρικούς χώρους, το οποίο απαιτείται ώστε η έννοια της παραγώγου Cantor-Bendixson να ταυτίζεται με την έννοια του παραγώγου συνόλου. Πράγματι, γενικά αν $E \subseteq K$ ενδέχεται να έχουμε $E' \subsetneq E$ με την έννοια του παραγώγου συνόλου, σύγχυση που αποφεύγεται αν το E είναι κλειστό στο K.

Έστω K αριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος. Θέτουμε $K_1 := K \times \gamma\mathbb{N}$. Ο K_1 είναι αριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος με τη μετρική γινόμενο $\max\{d_K, d_{\gamma\mathbb{N}}\}$. Έστω $\gamma\mathbb{N} = \left\{1, \frac{1}{2}\frac{1}{3}, \ldots\right\} \cup \{0\}$. Παρατηρούμε ότι $K_1' \supseteq K \times \{0\}$. Πράγματι, αν $x \in K$ τότε $\left(x, \frac{1}{n}\right) \to (x, 0)$ και $\left(x, \frac{1}{n}\right) \neq (x, 0)$, άρα $(x, 0) \in K_1'$.

Άρα, $\sigma(K_1) > \sigma(K \times \{0\})$ (αφού αν το $K_1^{(n)}$ είναι πεπερασμένο τότε το $(K \times \{0\})^{(n-1)}$ είναι πεπερασμένο). Όμως, ο $K \times \{0\}$ είναι ομοιομορφικός με τον K. Άρα, $\sigma(K \times \{0\}) = \sigma(K)$, πότε

$\sigma(K_1) > \sigma(K)$. Έτσι, μπορούμε να κατασκευάσουμε μια ακολουθία συμπαγών μετρικών χώρων $(K_r)_{r=1}^{\infty}$ με $\sigma(K_r) \to \infty$, όπου για κάθε n ορίζουμε $K_{n+1} := K_n \times \gamma\mathbb{N}$.

Έστω K_∞ η συμπαγοποίηση ενός σημείου της ξένης ένωσης $\bigsqcup_{r=1}^{\infty} K_r$ (επιλέγουμε στοιχείο $\infty \notin \bigsqcup_{r=1}^{\infty} K_r$ και ορίζουμε $K_\infty := (\bigsqcup_{r=1}^{\infty} K_r) \cup \{\infty\})$. Τότε $\sigma(K_\infty) = \infty$, δηλαδή ο K_∞ δεν έχει πεπερασμένο δείκτη Cantor-Bendixson.

Αν ο K έχει άπειρο δείκτη Cantor-Bendixson, τότε ο δείκτης του μπορεί να οριστεί ως ένας αριθμήσιμος διατακτικός αριθμός. Αυτό χρησιμοποιήθηκε από τους Bessaga και Pełczynski για να κάνουν μια πλήρη ταξινόμηση (ως προς γραμμικό ισομορφισμό) όλων τον χώρων $C(K)$, όπου K αριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος. Όμως, εμείς δεν θα ασχοληθούμε με αυτό. Θα αποδείξουμε ένα αποτέλεσμα που μας κατευθύνει στην ταξινόμηση τέτοιων χώρων $C(K)$.

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Ο K είναι αριθμήσιμος με πεπερασμένο δείκτη Cantor-Bendixson.*

(ii) $C(K) \approx c_0$.

(iii) *Ο $C(K)$ εμφυτεύεται σε ένα χώρο με ελεύθερη (unconditional) βάση.*

(iv) *Ο $C(K)$ έχει την ιδιότητα (U).*

Δίνουμε κάποιες επεξηγήσεις και ορισμούς για τα (iii) και (iv).

Ορισμός 2.5.3. Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον χώρο Banach X. Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ στον X λέγεται ελεύθερα συγκλίνουσα αν η $\sum_{n=1}^{\infty} x_{\pi(n)}$ συγκλίνει για κάθε μετάθεση του $\mathbb{N}$.

Ορισμός 2.5.4. Μια βάση Schauder $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ του X λέγεται ελεύθερη αν για κάθε $x \in X$ η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} e_n^*(x)e_n$ συγκλίνει ελεύθερα, όπου $e_n^* \in X^*$ τα φραγμένα γραμμικά συναρτησοειδή που ορίζονται από τις $e_n^*(e_j) = \delta_{nj}$, $j \in \mathbb{N}$.

Ορισμός 2.5.5. Λέμε ότι μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ σε ένα χώρο Banach X είναι ασθενώς ελεύθερα Cauchy ή ασθενώς ελεύθερα συγκλίνουσα αν για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty.$$

Ορισμός 2.5.6. Μία ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ σε ένα χώρο Banach X λέγεται ασθενώς Cauchy αν για κάθε $x^* \in X^*$ υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} x^*(x_n)$.

Ορισμός 2.5.7. Λέμε ότι ένας χώρος Banach X έχει την ιδιότητα (U) αν για κάθε ασθενώς Cauchy ακολουθία $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ υπάρχει αθενώς ελεύθερα Cauchy σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} u_k$ στον X έτσι ώστε

$$x_n - \sum_{k=1}^{n} u_k \xrightarrow{\text{weak}} 0.$$

Υπενθύμιση: Αν $(y_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μια ακολουθία στον X τότε $y_n \xrightarrow{\text{weak}} y$ αν για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $x^*(y_n) \to x^*(y)$.

Το Θεώρημα 2.5.2 που θα αποδείξουμε είναι γενίκευση του θεωρήματος Karlin: Ο $C[0,1]$ δεν έχει ελεύθερη βάση και δεν μπορεί να εμφυτευτεί σε χώρο με ελεύθερη βάση.

Επίσης, στην απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.2 θεωρούμε γνωστή την ακόλουθη:

Πρόταση 2.5.8 (Pełczynski). *Αν ο X έχει ελεύθερη βάση τότε ο X έχει την ιδιότητα (U).*

Λήμμα 2.5.9. *Έστω $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ σειρά στον χώρο X. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ είναι ασθενώς ελεύθερα Cauchy.*

(ii) *Υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε: για κάθε $(\xi_n)_n \in c_{00}$,*

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n x_n \right\| \leqslant C \max_n |\xi(n)|.$$

(iii) *Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε: για κάθε $F \subseteq \mathbb{N}$ πεπερασμένο και για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_n = \pm 1$,*

$$\left\| \sum_{n \in F} \varepsilon_n x_n \right\| \leqslant M.$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.5.2. Θα δείξουμε ότι (i) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (i).

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω K αριθμήσιμο με $\sigma(K) < \infty$. Θα δείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή στο $\sigma(K)$.

Επαγωγική βάση: Υποθέτουμε πρώτα ότι $\sigma(K) = 1$, δηλαδή το K' είναι πεπερασμένο. Έστω $K' = \{s_1, \dots, s_n\}$, δηλαδή τα $s_1, \dots, s_n$ είναι τα μοναδικά σημεία συσσώρευσης του K. Έστω $V_1, \dots, V_n$ ξένες ανοικτές περιοχές των $s_1, \dots, s_n$ αντίστοιχα. Έστω $j \in \{1, \dots, n\}$. Θα δείξουμε ότι το V_j είναι κλειστό (άρα τα $V_1, \dots, V_n$ είναι clopen). [Πράγματι, έστω $(x_n)_n$ ακολουθία στο V_j με $x_n \to x$ και έστω για άτοπο ότι $x \notin V_j$. Τότε $x \neq s_j$. Αφού x όριο ακολουθίας και $x_n \neq x$ για κάθε n, το x είναι σημείο συσσώρευσης, δηλαδή υπάρχει $i \in \{1, \dots, n\}$ τέτοιο ώστε $x = s_i \in V_i$ για κάποιο $i \neq j$. Τότε $x_n \to x$ και $x \in V_i$, όπου V_i ανοικτό. Άρα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $x_n \in V_i$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Άρα, $x_{n_0} \in V_i \cap V_j$, το οποίο είναι άτοπο για $i \neq j$.]

Άρα τα $V_1, \dots, V_n$ είναι clopen. Θέτουμε $V_{n+1} := K \setminus (V_1 \cup \dots \cup V_n)$, το οποίο είναι clopen ως τομή clopen συνόλων. Το V_{n+1} ποτελείται μόνο από μεμονωμένα σημεία. Θα δείξουμε ότι το V_{n+1} είναι πεπερασμένο. Έχουμε $V_{n+1} = \bigcup_{x \in V_{n+1}} \{x\}$, όπου $\{x\}$ ανοικτό, και το V_{n+1} είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς K. Άρα,

$$V_{n+1} = \bigcup_{x \in J} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$$

όπου $J = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_k}\}$ πεπερασμένο υποκάλυμμα του $\{x\}_{x \in V_{n+1}}$. Άρα, όντως, το V_{n+1} είναι πεπερασμένο clopen.

Επομένως, το $U_1 := V_1 \cup V_{n+1}$ είναι clopen ανοικτή περιοχή του s_1, ξένη ανά δύο με τα $V_2, \dots, V_n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε λοιπόν να θεωρήσουμε ότι είχαμε επιλέξει ως V_1 το U_1. Έτσι, τα $V_1, \dots, V_n$ είναι clopen διαμέριση του K σε n το πλήθος σύνολα. Κάθε V_j είναι αριθμήσιμο clopen συμπαγές με ένα σημείο συσσώρευσης. Άρα το V_j είναι ομοιομορφικό με το $\gamma\mathbb{N}$ (αφού μπορούμε να γράψουμε το V_j ως τους όρους μιας συγκλίνουσας ακολουθίας μαζί με το όριό της, το σημείο συσσώρευσης s_j). Άρα, το K είναι ομοιομορφικό με το $\gamma\mathbb{N}\oplus\cdots\oplus\gamma\mathbb{N}$ (με n το πλήθος προσθετέους). Έπεται ότι

$$C(K)\simeq C(\gamma\mathbb{N}\oplus\cdots\oplus\gamma\mathbb{N})\simeq \ell_\infty^n(C(\gamma\mathbb{N}))=\ell_\infty^n(c)\simeq c_0.$$

[Για τον δεύτερο ισομορφισμό παρατηρήστε ότι αν $f:\prod_i X_i\to\mathbb{R}$ συνεχής τότε για κάθε i η $\pi_i\circ f:X_i\to\mathbb{R}$ είναι συνεχής.]

Συνεχίζουμε επαγωγικά. Έστω ότι έχουμε δείξει ότι $\sigma(K)\approx c_0$ για $\sigma(K)<n$, $n\geqslant 2$.

Για το επαγωγικό βήμα υποθέτουμε ότι $\sigma(K)=n$ και θα δείξουμε ότι $\sigma(K)\approx c_0$. Ξέρουμε ότι $\sigma(K')=n-1<n$, άρα $C(K')\approx c_0$. Ο K είναι συμπαγής μετρικός χώρος και το K' είναι κλειστό υποσύνολο του K. Θεωρούμε τον $R:C(K)\to C(K')$ με $R(f)=R\big|_{K'}$. Από το θεώρημα Borsuk ο $C(K')$ είναι ισομετρικά ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο νόρμας 1 του $C(K)$. Δηλαδή, $C(K)\approx C(K')\oplus E$, όπου μάλιστα $E=\ker(R)$. Θέτουμε $U:=K\setminus K'$ το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του K. Θα δείξουμε ότι $E\approx c_0(U)$.

Διευκρίνιση: Υπενθυμίζουμε τους εξής ορισμούς:

(i) Αν $(X,\|\cdot\|)$ είναι χώρος Banach τότε $c_0(X):=\{(x_n)_{n=1}^\infty\in X\oplus X\oplus\cdots:\|x_n\|\to 0\}$ με την $\|\cdot\|_\infty$.

(ii) Αν X τοπικά συμπαγής τότε $c_0(X):=\{f\in C(X):\forall\varepsilon>0\ \exists K_f$ συμπαγές τ.ω. $|f(t)|<\varepsilon\ \forall t\in X\setminus K_f\}$ με την $\|\cdot\|_\infty$.

Εδώ ο U δεν είναι χώρος Banach αλλά είναι τοπικά συμπαγής ως ανοικτό υποσύνολο του συμπαγούς K. Άρα το $c_0(U)$ αναφέρεται στον δεύτερο ορισμό. Τώρα, για κάθε $f\in E\subseteq C(K)$ έχουμε $f\big|_{K'}\equiv 0$, όπου f συνεχής στο K. Άρα, για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει $V_f\supseteq K'$, με V_f ανοικτό στο K, ώστε $|f(t)|<\varepsilon$ για κάθε $t\in V_f$. Θέτουμε $K_f:=K\setminus V_f\subseteq U$, το οποίο είναι συμπαγές στο K άρα και στο U. Άρα, $f\in c_0(U)$. Ομοίως, αν $f\in c_0(U)$ τότε μπορούμε να επεκτείνουμε την f συνεχώς στο K με $f\big|_{K'}\equiv 0$. Άρα, $f\in E$. Έχουμε λοιπόν $E=c_0(U)$. Αφού το E είναι αριθμήσιμο, συμπεραίνουμε ότι $c_0(U)\simeq c_0$. Άρα, $C(K)\approx c_0$.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Άμεσο, αφού η κανονική βάση του c_0 είναι ελεύθερη.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Άμεσο, από την Πρόταση **;;** (Pełczynski).

(iv) $\Longrightarrow$ (i) Έστω ότι ο $C(K)$ έχει την ιδιότητα (ii). Τότε ο K είναι αριθμήσιμος (αφού αν ήταν υπεραριθμήσιμος, από το θεώρημα Miljutin θα είχαμε $C(K)\approx C[0,1]$ και ο $C[0,1]$ δεν έχει την ιδιότητα (ii), άτοπο). Μένει να δείξουμε ότι $\sigma(K)<\infty$. Αφού ο K είναι αριθμήσιμος, όπως έχουμε δει, ισχύει ότι $\mathcal{M}(K)\simeq\ell_1$, άρα από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε $C(K)^{**}\simeq\mathcal{M}(K)^*\simeq\ell_1^*\simeq\ell_\infty$. Επομένως, μπορούμε να ταυτίσουμε τον $C(K)^{**}$ με τον $\ell_\infty(K):=\{f:K\to\mathbb{R}\mid f$ φραγμένη$\}$.

Υπενθυμίζουμε ότι από το θεώρημα Goldstein, $\overline{B_{\hat X}}^{w^*}=B_{X^{**}}$. Εδώ, $X:=C(K)\simeq\hat X$ και $X^{**}=\ell_\infty(K)$. Άρα, η $B_{C(K)}$ είναι weak*-πυκνή στην $B_{\ell_\infty(K)}$, και η $B_{\ell_\infty(K)}$ είναι μετρικοποιήσιμη αφού ο $\ell_1(K)$ είναι διαχωρίσιμος (Λήμμα 2.1.4).

Έστω $h\in\ell_\infty(K)$ με $\|h\|\leqslant 1$, δηλαδή $h\in B_{\ell_\infty(K)}$. Υπάρχει (g_n) ακολουθία στον $C(K)$ με $\|g_n\|\leqslant 1$ και $g_n\xrightarrow{w^*}h$. Άρα η (g_n) είναι ασθενώς Cauchy ακολουθία. Αφού ο $C(K)$ έχει την ιδιότητα (ii), μπορούμε να βρούμε ασθενώς ελεύθερα Cauchy (AEC) σειρά $\sum\limits_{n=1}^\infty f_n$ στον $C(K)$ τέτοια ώστε η $(g_n - \sum_{k=1}^n f_k)_n$ να συγκλίνει ασθενώς στο $0 \in C(K)$ (άμεση εφαρμογή των ορισμών). Όμως, $g_n \xrightarrow{w^*} h$. Άρα, $h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$ ως προς την w^*-τοπολογία. [Αυστηρότερα: Έστω $\hat{:}(C(K), w) \to (C(K)^{**}, w^*)$ η κανονική εμφύτευση. Έχουμε $\hat{g_n} \xrightarrow{w^*} h$. Επίσης, $g_n - \sum_{k=1}^n f_k \xrightarrow{w} 0$, άρα $\hat{g_n} - \sum_{k=1}^n \hat{f}_k \xrightarrow{w^*} 0$. Συνεπώς, $\hat{g_n} - \sum_{k=1}^n \hat{f}_k \xrightarrow{w^*} h - \sum_{k=1}^{\infty} \hat{f}_k$. Άρα, $h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k$.]

Ειδικότερα,

$$\sum_{k=1}^{\infty} f_k(s) = h(s) \ \text{ για κάθε } s \in K.$$

Όμως η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ είναι ασθενώς ελεύθερα Cauchy. Άρα, για κάθε $x^* \in C(K)^*$ ισχύει $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |x^*(f_n)| < \infty$. Από το Λήμμα 2.2.6 (iii) υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$\left\| \sum_{k\in F} \varepsilon_k f_k \right\| \leqslant M$$

για κάθε πεπερασμένο $F \subseteq \mathbb{N}$ και κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_k \in \{-1, 1\}$. Δηλαδή, για κάθε $s \in K$ και για κάθε $N \in \mathbb{N}$ και $\varepsilon \in \{-1, 1\}$ έχουμε

$$\left| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k f_k(s) \right| \leqslant \left\| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k f_k \right\| \leqslant M.$$

Άρα, για κάθε $s \in K$ έχουμε

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(s)| = \sup_N \sup_{\varepsilon_k = \pm 1} \left| \sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k f_k(s) \right| \leqslant M.$$

Ορίζουμε $\varphi : K \to \setminus$ με

$$\varphi(s) := \sum_{k=1}^{\infty} f_k(s)| \leqslant M,$$

άρα $\varphi \in \ell_\infty(K)$ με $\|\varphi\|_\infty \leqslant M$. Ορίζουμε επίσης $\psi : K \to \mathbb{R}$ με

$$\psi(s) := \sum_{k=1}^{\infty} (|f_k(s)| - f_k(s)) = \varphi(s) - h(s),$$

άρα $\psi \in \ell_\infty(K)$ με $\|\psi\|_\infty \leqslant M + 1$.

Γενικά, για $f : X \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in \mathbb{R}$ ορίζουμε:

(i) f άνω ημισυνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x_0 τέτοια ώστε $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$ για κάθε $x \in U$,

(ii) f κάτω ημισυνεχής στο x_0 αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x_0 τέτοια ώστε $f(x) \geqslant f(x_0) - \varepsilon$ για κάθε $x \in U$.

Εδώ, οι φ και ψ είναι κάτω ημισυνεχείς στο K, αφού $h \in \ell_\infty(K) \equiv C(K)^{**}$ άρα συνεχής, και $f_k \in C(K)$ για κάθε $k \in \mathbb{N}$, άρα $\sum\limits_{k=1}^{N} \varepsilon_k f_k \in C(K)$, άρα η $\left|\sum\limits_{k=1}^{N} \varepsilon_k f_k\right|$ είναι κάτω ημισυνεχής, άρα η

$$\varphi = \sum_{k=1}^{\infty} |f_k| = \sup_N \sup_{\varepsilon_k = \pm 1} \left|\sum_{k=1}^{N} \varepsilon_k f_k\right|$$

είναι κάτω ημισυνεχής ως supremum κάτω ημισυνεχών συναρτήσεων.

Έστω για άτοπο ότι ο K δεν έχει πεπερασμένο δείκτη Cantor-Bendixson.

Ισχυρισμός: Έστω $K \neq \varnothing$ αριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος. Τότε το σύνολο U των μεμονωμένων σημείων του είναι μη κενό.

Απόδειξη του ισχυρισμού. Έστω, προς άτοπο, ότι $U = \varnothing$. Έχουμε δει ότι $\overline{U} = K$. ρα, $K = \varnothing$, το οποίο είναι άτοπο. □

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\sigma(K) = \infty$, το $K^{(n)}$ είναι άπειρο και ειδικότερα μη κενό. Κάθε $K^{(n)}$ είναι κλειστό, άρα συμπαγές αφού ο K είναι συμπαγής. Άρα, ο $K^{(n)} \neq \varnothing$ είναι αριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος. Έπεται ότι

$$K^{(n+1)} = K^{(n)} \setminus U_n \subsetneq K^{(n)}$$

αφού το σύνολο U_n των μεμονωμένων σημείων του $K^{(n)}$ είναι μη κενό. Άρα,

$$K \supsetneq K' \supsetneq K^{(2)} \supsetneq \cdots \supsetneq K^{(n)} \supsetneq \cdots$$

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_n := K^{(n-1)} \setminus K^{(n)} \neq \varnothing$. Τα $(E_n)_n$ είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n \subsetneq K$, αφού $\bigcap_n K^{(n)} \neq \varnothing$ από την ιδιότητα πεπερασμένης τομής, η οποία ισχύει αφού ο K είναι συμπαγής.

Θέλουμε λοιπόν να επιλέξουμε συγκεκριμένη $h \in \ell_\infty(K)$ με $\|h\| \leqslant 1$. Ορίζουμε $h : K \to \mathbb{R}$ με $h(s) = (-1)^n$ αν $s \in E_n$ και $h(s) = 0$ αν $s \in K]setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Η h είναι καλά ορισμένη, αφού τα E_n είναι ξένα ανά δύο, και $h \in \ell_\infty(K)$ με $\|h\| = 1$. Από πριν έχουμε ορίσει $\psi \in \ell_\infty(K)$ με $\psi = \varphi - h$, άρα $h = \varphi - \psi$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $\alpha_n := \sup_{s \in E_{2n}} \varphi(s)$. Προφανώς $|\alpha_n| \leqslant \|\varphi\| \leqslant M$.

Έστω $\varepsilon > 0$ και $n \in \mathbb{N}$. Από τον χαρακτηρισμό του supremum υπάρχει $s_0 \in E2n$ τέτοιο ώστε $\varphi(s_0) > \alpha_n - \varepsilon$. Όμως, η φ είναι κάτω ημισυνεχής στο K. Άρα, υπάρχει ανοικτή περιοχή U_0 του s_0 ώστε $\varphi(s) > \alpha_n - \varepsilon$ για κάθε $s \in U_0$. Το U_0 είναι ανοικτό στο K, άρα το $U_0 \cap K^{(2n-2)}$ είναι σχετικώς ανοικτό στο $K^{(2n-2)}$ και $U_0 \cap K^{(2n-2)} \neq \varnothing$ αφού $s_0 \in E_{2n} \subseteq K^{(2n-1)} \subseteq K^{(2n-2)}$.

Θα δείξουμε ότι $U_0 \cap E_{2n-1} \neq \varnothing$. Έχουμε $U_0 \cap E_{2n-1} = U_0 \cap K^{(2n-2)} \setminus K^{(2n-1)}$. Όμως $K^{(2n-1)} = (K^{(2n-2)})' = K^{(2n-2)} \setminus V_{2n-2}$, όπου V_{2n-2} είναι το σύνολο των μεμονωμένων σημείων του $K^{(2n-2)}$. Ξέρουμε ότι το V_{2n-2} είναι μη κενό, σχετικώς ανοικτό και σχετικώς πυκνό στο $K^{(2n-2)}$, άρα $V_{2n-2} \cap U_0 \cap K^{(2n-2)} \neq \varnothing$. Τώρα,

$$V_{2n-2} = K^{(2n-2)} \setminus (K^{(2n-2)})' - K^{(2n-2)} \setminus K^{(2n-1)}.$$

Άρα, $U_0 \cap L^{(2n-2)} \setminus K^{(2n-1)} \neq \varnothing$, δηλαδή $U_0 \cap E_{2n-1} \neq \varnothing$.

Επομένως υπάρχει $s_1 \in U_0 \cap E_{2n-1}$, άρα $\varphi(s_1) > a_n - \varepsilon$. Έχουμε $h(s_1) = -1$, άρα

$$\psi(s_1) = \varphi(s_1) - h(s_1) > a_n + 1 - \varepsilon.$$

Η ψ είναι κάτω ημισυνεχής, άρα υπάρχει U_1 ανοικτό στο K ώστε $\psi(s) > a_n + 1 - \varepsilon$ για κάθε $s \in U_1$. Όπως προηγουμένως, το $U_1 \cap K^{(2n-3)}$ είναι σχετικώς ανοικτό στο $K^{(2n-3)}$ και, όπως πριν, $U_1 \cap E_{2n-2} \neq \varnothing$, επειδή τα μεμονωμένα σημεία του $K^{(2n-3)}$ είναι πυκνά σε αυτόν. Συνεχίζοντας όπως πριν, παίρνουμε $s_2 \in U_1 \cap E_{2n-2}$. Τότε $\psi(s_2) > a_n + 1 - \varepsilon$, άρα

$$\varphi(s_2) = \psi(s_2) + h(s_2) > a_n + 2 - \varepsilon.$$

Όμως,

$$\varphi(s_2) \leqslant \sup_{s \in E_{2(n-1)}} \varphi(s) = a_{n-1}.$$

Άρα, $a_{n-1} > a_n + 2 - \varepsilon$, δηλαδή $a_n < a_{nn-1} - 2 + \varepsilon$, όπου ε τυχόν. Έπεται ότι $a_n \leqslant a_{n-1} - 2$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Άρα, $a_n \to -\infty$, το οποίο είναι άτοπο αφού $|a_n| \leqslant M$ για κάθε n. Αυτό αποδεικνύει ότι $\sigma(K) < \infty$. □

Από το Θεώρημα 2.5.2 συμπεραίνουμε ότι αν K, L είναι αριθμήσιμοι συμπαγείς μετρικοί χώροι με $\sigma(K)$, $\sigma(L) < \infty$ και $\sigma(K) \neq \sigma(L)$, τότε οι K και L δεν είναι ομοιομορφικοί, αφού $\sigma(K) \neq \sigma(L)$, αλλά $C(K) \approx c_0$ και $C(L) \approx c_0$.

Παρατήρηση 2.5.10. Αν K είναι ένας αριθμήσιμος συμπαγής μετρικός χώρος τότε $C(K)^* \simeq \ell_1$. Δηλαδή, ο ℓ_1 είναι ο δυϊκός (για την ακρίβεια ισομετρικός με τον δυϊκό) πολλών μη-ισόμορφων χώρων Banach.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Χώροι $L_1(\mu)$ και $C(K)$

3.1 Ορισμοί

Πριν ξεκινήσουμε υπενθυμίζουμε κάποιους ορισμούς και αποτελέσματα για συμπαγείς τελεστές, ασθενείς και ασθενείς* τοπολογίες και τους χώρους Schur.

Ορισμός 3.1.1. Έστω X τοπολογικός χώρος και $A \subseteq X$. Το A λέγεται σχετικώς συμπαγές (ή προσυμπαγές) αν η κλειστή θήκη $\overline{A}$ του A είναι συμπαγές σύνολο στον X.

Ορισμός 3.1.2. Ένας τελεστής $T : X \to Y$ μεταξύ δύο χώρων Banach λέγεται συμπαγής αν το $T(B_X)$ είναι σχετικά συμπαγές στον Y, δηλαδή το $\overline{T(B_X)}^{\|\cdot\|}$ είναι συμπαγές στον Y.

Σε κάθε χώρο με νόρμα X μπορούμε να θεωρήσουμε την weak-τοπολογία για την οποία ισχύει:

> «Αν (x_i) δίκτυο στον X και $x \in X$ τότε $x_i \xrightarrow{w} x$ αν και μόνο αν $x^*(x_i) \to x^*(x)$ για κάθε $x^* \in X^*$.»

Η weak-τοπολογία είναι ασθενέστερη από την $\|\cdot\|$-τοπολογία του X, δηλαδή αν το $U \subseteq X$ είναι w-ανοικτό τότε το U είναι και $\|\cdot\|$-ανοικτό. Συνεπώς, αν το $F \subseteq X$ είναι w-κλειστό τότε το F είναι και $\|\cdot\|$-κλειστό. Έπεται ότι, για κάθε $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{A}^{\|\cdot\|} \subseteq \overline{A}^{w}$.

Το θεώρημα του Mazur ισχυρίζεται ότι για κάθε κυρτό $A \subseteq X$ ισχύει $\overline{A}^{w} = \overline{A}^{\|\cdot\|}$. Άρα, για ένα κυρτό σύνολο $A \subseteq X$ ισχύει ότι το A είναι w-κλειστό αν και μόνο αν το A είναι $\|\cdot\|$-κλειστό.

Αν X χώρος με νόρμα, στον X^* μπορούμε να θεωρήσουμε την weak*-τοπολογία του X^* για την οποία:

> Αν (x_i^*) δίκτυο στον X^* και $x^* \in X^*$ τότε $x_i^* \xrightarrow{w^*} x^*$ αν και μόνο αν $x_i^*(x) \to x^*(x)$ για κάθε $x \in X$.

Η w^*-τοπολογία του X^* είναι ασθενέστερη από την $\|\cdot\|_{X^*}$-τοπολογία του X^*. Το θεώρημα του Alaoglu ισχυρίζεται ότι η $B_{X^*} = \{x^* \in X^* : \|x^*\| \leqslant 1\}$ είναι w^*-συμπαγές σύνολο. Επίσης, ένα $A \subseteq X^*$ είναι w^*-κλειστό αν και μόνο αν το A είναι w^*-κλειστό και $\|\cdot\|$-φραγμένο.

Ο χώρος (B_{X^*}, w^*) είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν ο X είναι διαχωρίσιμος. Ο (B_X, w) είναι μετρικοποιήσιμος αν και μόνο αν ο X^* είναι διαχωρίσιμος.

Ορισμός 3.1.3. Ένας τελεστής $T : X \to Y$ μεταξύ δύο χώρων Banach λέγεται w-συμπαγής αν το $\overline{T(B_X)}^w$ είναι w-συμπαγές στον Y.

Ορισμός 3.1.4. Έστω X χώρος Banach. Λέμε ότι ο X είναι χώρος Schur (ή έχει την ιδιότητα Schur) αν $\xrightarrow{w} \equiv \xrightarrow{\|\cdot\|}$, δηλαδή για ακολουθία (x_n) στον X ισχύει $x_n \xrightarrow{w} 0 \iff x_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$.

Σχόλιο: η κατεύθυνση $(\Longleftarrow)$ ισχύει πάντα.

Θεώρημα 3.1.5. *Ο ℓ_1 είναι χώρος Schur.*

Θεώρημα 3.1.6. *Έστω X χώρος Schur και $A \subseteq X$. Τότε, το A είναι w-συμπαγές στον X αν και μόνο αν είναι $\| \cdot \|$-συμπαγές στον X.*

Από το Θεώρημα 3.1.6 έχουμε ότι ένας τελεστής $T : X \to \ell_1$ είναι w-συμπαγής αν και μόνο αν είναι weak-συμπαγής.

Θεώρημα 3.1.7. *Ο $T : c_0 \to X$ είναι w-συμπαγής αν και μόνο αν είναι συμπαγής.*

Τα παραπάνω είναι συνέπειες του ότι ο ℓ_1 είναι χώρος Schur.

Υπενθυμίζουμε ότι $c_0 \approx c \simeq C(K)$, όπου $K = \gamma\mathbb{N} = \left\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \ldots\right\} \cup \{0\}$. Επομένως, μπορούμε να θεωρούμε τον c_0 ως χώρο συνεχών συναρτήσεων $C(K)$. Επίσης, $\ell_1 = L_1(\nu)$, όπου ν το μέτρο αρίθμησης στο $\mathbb{N}$. Δηλαδή, ο ℓ_1 είναι ειδική περίπτωση των χώρων $L_1(\mu)$.

3.2 Γενικές παρατηρήσεις για τους χώρους $L_1(\mu)$

Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος μέτρου, όπου μ μέτρο πιθανότητας: $\mu(\Omega) = 1$. Το να θεωρήσουμε μόνο χώρους πιθανότητας δεν είναι περιοριστικό. Πράγματι, ας υποθέσουμε ότι θεωρούσαμε αντί για μέτρο πιθανότητας μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο ν στην σ-άλγεβρα Σ του Ω. Τότε μπορούμε πάντα να βρούμε μια ν-ολοκληρώσιμη συνάρτηση φ τέτοια ώστε $\varphi > 0$ παντού και $\int_\Omega \varphi \, d\nu = 1$. Πράγματι, έστω $(A_n)_n$ ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων στο Ω με $\Omega = \bigcup_{n=1}^\infty A_n$ και $0 < \mu(A_n) < \infty$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν θέσουμε $\varphi = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n \mu(A_n)} \chi_{A_n}$ τότε $\varphi > 0$ παντού και, από το θεώρημα τλΒεππο-Λει,

$$\int_\Omega \varphi \, d\nu = \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n \mu(A_n)} \mu(A_n) = 1.$$

Ορίζουμε

$$\mu(A) := \int_A \varphi \, d\nu, \qquad A \in \Sigma.$$

Το μ είναι μέτρο πιθανότητας στον (Ω, Σ). Η φ είναι η παράγωγος Radon-Nikodym του μ ως προς ν και σύμφωνα με τον συμβολισμό του αντίστοιχου θεωρήματος έχουμε $\varphi = \frac{d\mu}{d\nu}$ και γράφουμε ισοδύναμα $d\mu = \varphi \, d\nu$.

Θα δείξουμε ότι $L_1(\Omega, \mu) \simeq L_1(\Omega, \nu)$ (οι δύο χώροι είναι ισομετρικά ισόμορφοι). Ορίζουμε $U : L_1(\nu) \to L_1(\mu)$ με $f \mapsto U(f) : \Omega \to \mathbb{R}$, όπου

$$\omega \mapsto U(f)(\omega) := \frac{f(w)}{\varphi(w)}.$$

Η U είναι καλά ορισμένη, ισομετρία αφού από την $d\mu = \varphi\, d\nu$ έπεται ότι

$$\int |f|\, d\nu = \int \frac{|f|}{\varphi}\, d\mu$$

και επί διότι $U(\varphi f) = f$.

Ορισμός 3.2.1. Έστω X μη κενό σύνολο. Ο X λέγεται Πολωνικός χώρος αν είναι πλήρης διαχωρίσιμος μετρικός χώρος.

Συνήθως ο μετρήσιμος χώρος (Ω, Σ) θα είναι ο $(K, \mathcal{B}(K))$, όπου K Πολωνικός χώρος και το μέτρο πιθανότητας μ θα είναι μη ατομικό μέτρο. Θα δείξουμε ότι υπάρχει μόνο ένας τέτοιος $L_1(K, \mathcal{B}(K), \mu)$, ο $L_1([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$, όπου λ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Ακριβέστερα θα δείξουμε ότι

$$L_1(K, \mu) \simeq L_1([0,1], \lambda).$$

Υπενθύμιση – Ορισμοί. Έστω $(X, \mathcal{A}, \mu)$ σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου.

- Ένα $A \in \mathcal{A}$ λέγεται άτομο αν $\mu(A) > 0$ και για κάθε $B \in \mathcal{A}$, $B \subseteq A$ με $\mu(B) < \mu(A)$ ισχύει ότι $\mu(B) = 0$.
- Το μέτρο μ λέγεται μη ατομικό αν για κάθε $A \in \mathcal{A}$ με $\mu(A) > 0$ υπάρχει $B \subseteq A$, $B \in \mathcal{A}$ με $0 < \mu(B) < \mu(A)$. Δηλαδή, αν ο χώρος δεν έχει κανένα άτομο.

Έστω $(K, \mathcal{B}(K), \mu)$, όπου K Πολωνικός χώρος και μ μη ατομικό μέτρο. Πρώτα θα δείξουμε ότι ο K έχει πληθάριθμο $|K| = c = |\mathbb{R}|$. Ο K είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, και από αυτό έπεται ότι $|K| \leqslant c$. Πράγματι, αν D αριμήσιμο πυκνό υποσύνολο στο K. Τότε

$$|K| \leqslant |D^{\mathbb{N}}| \leqslant |\mathbb{N}^{\mathbb{N}}| \leqslant c.$$

Έστω για άτοπο ότι $|K| < c$. Τότε το K είναι αριθμήσιμο. Όμως τότε, ο $(K, \mathcal{B}(K), \mu)$ έχει τουλάχιστον ένα άτομο, αφού

$$\mu(K) = \sum_{x \in K} \mu(\{x\}),$$

άρα υπάρχει $x \in K$ ώστε $\mu(\{x\}) > 0$ και το $\{x\}$ είναι άτομο. Αυτό οδηγεί σε άτοπο αφού το μ είναι μη-ατομικό μέτρο. Άρα $|K| = c$. Επομένως $K \approx [0,1]$.

Δείχνουμε ότι υπάρχει Borel ισομορφισμός $\sigma : [0,1] \to K$ που διατηρεί το μέτρο, δηλαδή υπάρχει $\sigma : [0,1] \to K$ που είναι 1-1, επί, Borel μετρήσιμη, με την σ^{-1} επίσης Borel μετρήσιμη, και τέτοια ώστε

$$\lambda(\sigma^{-1}(B)) = \mu(B)$$

για κάθε $B \in \mathcal{B}(K)$. Έτσι ορίζεται ο ισομετρικός ισομορφισμός $L_1(K, \mu) \to L_1([0,1], \lambda)$ με $f \mapsto f \circ \sigma$, για τον οποίο

$$\int |f|\, d\mu = \int |f \circ \sigma|\, d\lambda.$$

Έχουμε δει ότι ο ℓ_1 είναι χώρος Schur. Θα δείξουμε ότι ο $L_1 := L_1([0,1], \mathcal{B}[0,1], \lambda)$ δεν είναι χώρος Schur. Θεωρούμε την ορθοκανονική βάση $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ του $L_2[0,1]$ με $f_n(x) := \sqrt{2}\sin(\pi x)$, $n \in \mathbb{N}$. Έστω $g \in L_2[0,1]$. Από την ανισότητα Bessel,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |\langle g, f_k \rangle|^2 \leqslant \|g\|_2^2.$$

Άρα, $|\langle g, f_k\rangle| \to 0$, δηλαδή

$$\lim_{k\to\infty}\int_0^1 f_k(x)g(x)\,dx = 0.$$

Επομένως $f_n \xrightarrow{w} 0$ στον L_1. Πράγματι, έχουμε $(L_1)^* = L_\infty$ και αν $\varphi \in (L_1)^*$ τότε υπάρχει $g \in L_\infty$ τέτοια ώστε

$$\varphi(f) = \int fg\,d\lambda$$

για κάθε $f \in L_1$. Έχουμε $g \in L_\infty \subseteq L_2$ (αφού το λ είναι μέτρο πιθανότητας στο $[0,1]$), άρα

$$\varphi(f_n) = \int f_n g\,d\lambda \to 0,$$

δηλαδή $f_n \xrightarrow{w} 0$. Όμως δεν ισχύει ότι $f_n \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Άρα ο L_1 δεν είναι χώρος Schur. Σημειώνουμε ότι ο L_1 δεν είναι αυτοπαθής, αφού ο L_1 είναι διαχωρίσιμος αλλά ο $L_1^* = L_\infty$ δεν είναι διαχωρίσιμος.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω $(f_n)_n$ ακολουθία στον $L_1(\Omega,\Sigma,\mu)$ με $\|f_n\| = 1$ για κάθε n και ξένους φορείς: $\mathrm{supp}(f_n)\cap\mathrm{supp}(f_m) = \varnothing$ για κάθε $n \neq m$. Τότε η $(f_n)_{n=1}^\infty$ είναι 1-συμπληρωματική βασική ακολουθία, ισομετρικά ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1. Δηλαδή, για κάθε $(a_i)_i \in c_{00}$,*

$$\left\|\sum_{i=1}^\infty a_i f_i\right\|_{L_1} = \left\|\sum_{i=1}^\infty a_i e_i\right\|_{\ell_1} = \sum_{i=1}^\infty |ai|.$$

Υπενθυμίζουμε ότι αν X είναι ένας χώρος Banach τότε μια ακολουθία $(x_k)_{k=1}^\infty$ στον X λέγεται βασική ακολουθία αν είναι βάση για τον $[x_k] := \overline{\mathrm{span}}\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$. Η βασική ακολουθία $(x_k)_{k=1}^\infty$ λέγεται συμπληρωματική αν ο $[x_k]$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X.

Απόδειξη του Λήμματος 3.2.2. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $a_1,\dots,a_n \in \mathbb{R}$ και $(f_i)_i \subseteq L_1$, $\|f_i\| = 1$, με φορείς $\mathrm{supp}(f_i)$ ξένους ανά δύο. Τότε

$$\left\|\sum_{i=1}^n a_i f_i\right\|_1 = \int_\Omega\left|\sum_{i=1}^n a_i f_i\right| d\mu = \int_\Omega \sum_{i=1}^n |a_i|\,|f_i|\,d\mu = \sum_{i=1}^n |a_i|\int_\Omega |f_i|\,d\mu = \sum_{i=1}^n |a_i|,$$

όπου η δεύτερη ισότητα ισχύει επειδή για κάθε $x \in \Omega$ πάρχει ένα το πολύ $i_0 \in \{1,\dots,n\}$ τέτοιο ώστε $f_{i_0}(x) \neq 0$, διότι οι φορείς των f_i είναι ξένοι, άρα

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i f_i\right|(x) = |a_{i_0} f_{i_0}(x)| = \sum_{i=1}^n |a_i f_i(x)|.$$

Ορίζουμε $P : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ με

$$f \mapsto P(f) := \sum_{n=1}^\infty \left(\int_\Omega f h_n\,d\mu\right) f_n \in L_1$$

(αφού $f_n \in L_1$ με ξένους φορείς) όπου $h_n : \Omega \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση με

$$h_n(\omega) := \frac{\overline{f_n(\omega)}}{|f_n(\omega)|}$$

αν $f_n(\omega) \neq 0$ και $h_n(\omega)Q = 0$ αν $f_n(\omega) = 0$.

Θα δείξουμε ότι ο P είναι προβολή στο $[f_n]$. Γράφουμε τον Ω ως ξένη ένωση

$$\Omega - \left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\{|f_n| > 0\}\right) \cup \left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{f_n = 0\}\right).$$

Έστω $f \in L_1(\mu)$. Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\int_\Omega P(f)h_n\,d\mu = \int_\Omega fh_n\,d\mu$$

για κάθε n (αυτό σημαίνει ακριβώς ότι $P(P(f)) = P(f)$).

Αν θεωρήσουμε ότι οι συναρτήσεις μας παίρνουν τιμές στο $\mathbb{R}$, έχουμε $h_n = \operatorname{sgn}(f_n)$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_\Omega P(f)h_n\,d\mu &= \int_{\{|f_n|>0\}} P(f)h_n\,d\mu + \int_{\{f_n=0\}} P(f)\cdot 0\,d\mu \\
&= \int_{\{|f_n|>0\}} \left(\int_\Omega fh_n\,d\mu\right) f_nh_n\,d\mu \\
&= \int_{\{|f_n|>0\}} \left(\int_\Omega fh_n\,d\mu\right) |f_n|\,d\mu \\
&= \int_\Omega fh_n\,d\mu \cdot \int_{\{|f_n|>0\}} |f_n|\,d\mu \\
&= \int_\Omega fh_n\,d\mu \cdot \|f_n\|_1 = \int_\Omega fh_n\,d\mu.
\end{aligned}$$

Άρα ο P είναι προβολή με $P(f_k) = \sum_n f_n \in [f_n]$ για κάθε k, άρα επί του $[f_n]$. Επίσης,

$$\begin{aligned}
\|P(f)\|_1 &= \int_\Omega \left|\sum_n \left(\int_\Omega fh_n\,d\mu\right) f_n\right| d\mu = \int_\Omega \sum_n \left|\int_\Omega fh_n\,d\mu\right| \cdot |f_n|\,d\mu \\
&= \sum_n \left|\int_\Omega fh_n\,d\mu\right| \cdot 1 \leqslant \sum_n \int_{\{|f_n|>0\}} |f|\,d\mu \\
&= \int_{\bigcup_n\{|f_n|>0\}} |f|\,d\mu \leqslant \int_\Omega |f|\,d\mu = \|f\|_1,
\end{aligned}$$

και $\|P(P(f))\|_1 = \|P(f)\|_1$, άρα $\|P\| = 1$.

Άρα, ο $[f_n]$ είναι 1-συμπληρωματικός υπόχωρος του $L - 1$. Η (f_n) είναι βασική ακολουθία ως ισομετρικά ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1, άρα είναι 1-συμπληρωματική βασική ακολουθία. □

3.3 Ασθενώς συμπαγή υποσύνολα του $L_1(\mu)$

Έστω (Ω, Σ, μ) χώρος πιθανότητας. Θέλουμε να βρούμε τα w-συμπαγή υποσύνολα του $L_1(\mu)$. Θα το κάνουμε μέσω υπακολουθιών. Αυτή η προσέγγιση λέγεται τεχνική ολίσθησης (gliding hump technique). Παρακάτω θα γενικεύσουμε το εξής:

Πρόταση 3.3.1. *Έστω $(x^{(n)})_{n=1}^{\infty}$ κανονικοποιημένη ακολουθία στον ℓ_1 τ.ω. $x_j^{(n)} \xrightarrow{n\to\infty} 0$ για κάθε $j \in \mathbb{N}$, δηλαδή η $x^{(n)}$ να συγκλίνει κατά συντεταγμένη. Αυτό γίνεται π.χ. αν $x^{(n)} \xrightarrow{w} 0$ χωρίς απαραίτητα να υποθέσουμε ότι $x^{(n)} \xrightarrow{\|\cdot\|} 0$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(x^{(n_k)})_{k=1}^{\infty}$ της $(x^{(n)})_n$ η οποία είναι βασική ακολουθία ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1.*

Η γενίκευση που θα δείξουμε είναι η ακόλουθη:

Λήμμα 3.3.2. *Έστω $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ φραγμένη ακολουθία στον $L_1(\mu)$ τέτοια ώστε $h_n \to 0$ κατά μέτρο. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$, $\mu(|h_n| \geqslant \varepsilon) \to 0$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(h_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ της $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ και ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε*

$$\|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 \to 0.$$

Απόδειξη. Θα κάνουμε μια επαγωγική διαδικασία στην οποία εφαρμόζεται μια τεχνική παρόμοια με την τεχνική της ολίσθησης για συναρτήσεις. Αφού $h_n \to 0$ κατά μέτρο, υπάρχει υπακολουθία $(h_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ της $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $h_{n_k} \to 0$ σχεδόν παντού. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι ολόκληρη η ακολουθία συγκλίνει σχεδόν παντού, δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} h_n(\omega) = 0$ μ-σχεδόν παντού.

Θέτουμε $h_{n_1} := h_1$ και

$$F_1 := \left\{\omega \in \Omega : |h_{n_1}(\omega)| > \frac{1}{2}\right\}.$$

Η h_{n_1} είναι ολοκληρώσιμη και από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος υπάρχει $\delta_1 > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $E \in \Sigma$ με $\mu(E) < \delta_1$ ισχύει $\int_E |h_{n_1}|\,d\mu < \frac{1}{2}$.

Αφού $h_n \to 0$ κατά μέτρο, μπορούμε να διαλέξουμε $n_2 > n_1$ τέτοιο ώστε $\mu\left(|h_{n_2}| > \frac{1}{2^2}\right) < \delta_1$. Θέτουμε

$$F_2 := \left\{\omega \in \Omega : |h_{n_2}(\omega)| > \frac{1}{2^2}\right\}.$$

Εφαρμόζοντας την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος για τις h_{n_1} και h_{n_2}, βρίσκουμε $\delta_2 > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $E \in \Sigma$ με $\mu(E) < \delta_2$ να ισχύει $\int_E |h_{n_i}|\,d\mu < \frac{1}{2^2}$ για $i = 1, 2$.

Έπειτα βρίσκουμε $n_3 > n_2$ τέτοιον ώστε $\mu\left(|h_{n_3}| > \frac{1}{2^3}\right) < \delta_2$ και θέτουμε

$$F_3 := \left\{\omega \in \Omega : |h_{n_3}(\omega)| > \frac{1}{2^3}\right\}.$$

Συνεχίζοντας επαγωγικά, βρίσκουμε υπακολουθία $(h_{n_k})_{k=1}^{\infty}$ της $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ και ακολουθία συνόλων $(F_k)_{k=1}^{\infty}$ με $F_k = \left\{\omega \in \Omega : |H_{n_k}(\omega)| > \frac{1}{2^k}\right\}$, απ' όπου έπεται ότι, για κάθε k,

$$\|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{F_k}\|_1 = \int_{F_k^c} |h_{n_k}| \leqslant \frac{1}{2^k}\mu(F_k^c) \leqslant \frac{1}{2^k}.$$

Τα σύνολα F_k δεν είναι απαραίτητα ξένα, μπορούμε όμως να τα κάνουμε: θέτουμε

$$A_1 := F_1 \setminus \bigcup_{k>1} F_k,\ A_2 = F_2 \setminus \bigcup_{k>2} F_k, \dots,\ A_i = G_i \setminus \bigcup_{k>i} F_k, \dots$$

Τότε:

$$\int_{F_k} |h_{n_k}|d\mu - \int_{A_k} |h_{n_k}|d\mu = \int_{\cup_{j>k} F_j} |h_{n_k}|d\mu$$

αφού $A_k \bigsqcup \left(\bigcup_{j>k} F_k\right) = F_k$. Τώρα:

$$\int_{\bigcup_{j>k} F_j} |h_{n_k}| d\mu \leqslant \sum_{j>k} \int_{F_j} |h_{n_k}| d\mu \leqslant \sum_{j>k} \frac{1}{2^{j-1}} = \frac{1}{2^{k-1}}$$

όπου χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $\mu(F_j) \leqslant \delta_{j-1}$ άρα $\int_{F_j} |h_{n_i}| d\mu < \frac{1}{2^{j-1}}$ για $i = 1, 2, \ldots, j$. Επομένως, παίρνοντας υπόψη και την $A_k \subseteq F_k$, έχουμε

$$\begin{aligned} \|h_{n_k}\chi_{F_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 &= \int |h_{n_k}| \cdot |\chi_{F_k} - \chi_{A_k}| \, d\mu = \int |h_{n_k}|(\chi_{F_k} - \chi_{A_k}) \\ &= \int_{F_k} |h_{n_k}| d\mu - \int_{A_k} |h_{n_k}| d\mu \leqslant \frac{1}{2^{k-1}}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$\|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 \leqslant \|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{F_k}\|_1 + \|h_{n_k}\chi_{F_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 \leqslant \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{k-1}} \longrightarrow 0$$

όταν $k \to \infty$. Δηλαδή, $\|h_{n_k} - h_{n_k}\chi_{A_k}\|_1 \longrightarrow 0$. □

Ορισμός 3.3.3. Ένα φραγμένο υποσύνολο $\mathcal{F} \subseteq L_1(\mu)$ λέγεται ισο-ολοκληρώσιμο ή ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε $E \in \Sigma$ με $\mu(E) < \delta$ ισχύει

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_E |f| \, d\mu < \varepsilon, \quad \text{δηλ.} \quad \lim_{\mu(E) \to 0} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_E |f| \, d\mu = 0.$$

Παρατήρηση 3.3.4. Αν θεωρήσουμε ότι το μ είναι μη-ατομικό μέτρο, μπορούμε να παραλείψουμε τη λέξη «φραγμένο» αφού για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να διαμερίσουμε το Ω σε πεπερασμένα το πλήθος σύνολα μέτρου μικρότερου από δ.

Παραδείγματα 3.3.5. (i) Έστω $h \in L_1(\mu)$, $h \geqslant 0$. Το $\mathcal{F} := \{f \in L_1(\mu) : |f| \leqslant h\}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο. Πράγματι, για κάθε $f \in \mathcal{F}$ και $E \in \Sigma$ έχουμε $\int_E |f| \, d\mu \leqslant \int_E h \, d\mu$, άρα

$$\sup_{f \in \mathcal{F}} \int_E |f| \, d\mu \leqslant \int_E h \, d\mu \longrightarrow 0$$

όταν $\mu(E) \to 0$.

(ii) Θα δείξουμε ότι η κλειστή μοναδιαία μπάλα $B_{L_2(\mu)}$ του $L_2(\mu)$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο υποσύνολο του $L_1(\mu)$. Αυτό προκύπτει από την ανισότητα Cauchy-Schwarz: Έστω $f \in B_{L_2(\mu)}$ και $E \in \Sigma$. Τότε

$$\int_E |f| \, d\mu = \|f \cdot \chi_E\|_1 \leqslant \|f\|_2 \|\chi_E\|_2 \leqslant 1 \cdot \sqrt{\mu(E)},$$

άρα

$$\sup_{f \in B_{L_2(\mu)}} \int_E |f| \, d\mu \leqslant \sqrt{\mu(E)} \longrightarrow 0$$

όταν $\mu(E) \to 0$.

(iii) Η κλειστή μοναδιαία μπάλα του $L_1(\mu)$ δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Πράγματι, θέτουμε $\mathcal{F} := \{\delta^{-1}\chi_{[0,\delta]} : 0 < \delta < 1\}$, $\mu = \lambda =$ το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$ και $E := [0, \delta]$. Τότε,

$$\int \delta^{-1}\chi_{[0,\delta]} d\lambda = \frac{1}{\delta}\lambda([0,\delta]) = 1.$$

Άρα,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_E f\,d\mu = 1 \not\to 0$$

όταν $\delta \to 0$.

Λήμμα 3.3.6. *Έστω $\mathcal{F}$ και $\mathcal{G}$ φραγμένα σύνολα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμων συναρτήσεων στον $L_1(\mu)$. Τότε τα σύνολα $\mathcal{F}\cup\mathcal{G}$ και $\mathcal{F}+\mathcal{G} := \{f+g : f\in\mathcal{F}, g\in\mathcal{G}\}\subseteq L_1(\mu)$ είναι φραγμένα και ομοιόμορφα ολοκληρώσιμα.*

Λήμμα 3.3.7. *Έστω $\mathcal{F}$ φραγμένο υποσύνολο του $L_1(\mu)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο.*

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty}\sup\limits_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|>m\}}|f|\,d\mu = 0$.

Απόδειξη. (i) $\Longrightarrow$ (ii) Έχουμε υποθέσει ότι το $\mathcal{F}$ είναι φραγμένο. Άρα, υπάρχει $A>0$ τέτοιος ώστε $\mathcal{F}\subseteq B_{\|\cdot\|_1}(0,A)$, δηλαδή

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\|f\|_1 \leqslant A.$$

Έστω $f\in\mathcal{F}$. Από την ανισότητα Markov,

$$\mu(|f|>M)\leqslant \frac{1}{M}\int|f|d\mu = \frac{\|f\|_1}{M}\leqslant\frac{A}{M}\overset{M\to\infty}{\longrightarrow}0.$$

Άρα, το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο. Εφαρμόζοντας τον ορισμό για $E=\{|f|>M\}$ έχουμε ότι

$$\lim_{\mu(|f|>M)\to 0}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|d\mu = 0,$$

δηλαδή

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|d\mu = 0.$$

(ii) $\Longrightarrow$ (i)Έστω $f\in\mathcal{F}$ και $E\in\Sigma$. Έστω επίσης $M>0$ τυχόν. Για κάθε $f\in\mathcal{F}$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_E|f|d\mu &= \int_{E\cap\{|f|\leqslant M\}}|f|d\mu + \int_{E\cap\{|f|>M\}}|f|d\mu \leqslant M\cdot\mu(E\cap\{|f|\leqslant M\}) + \int_{E\cap\{|f|>M\}}|f|d\mu\\ &\leqslant M\cdot\mu(E) + \int_{\{|f|>M\}}|f|d\mu \leqslant M\cdot\mu(E) + \sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|d\mu.\end{aligned}$$

Άρα, για κάθε $E\in\Sigma$ και κάθε $M>0$ έχουμε

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_E|f|d\mu\leqslant M\cdot\mu(E)+\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|d\mu.$$

Έστω $\varepsilon>0$. Τώρα χρησιμοποιούμε την υπόθεσή μας (ii): Υπάρχει $M=M(\varepsilon)>0$ τέτοιος ώστε $\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|d\mu<\frac{\varepsilon}{2}$. Επιλέγουμε $\delta:=\frac{\varepsilon}{2M}$. Τότε, για κάθε $E\in\Sigma$ με $\mu(E)<\delta$ έχουμε

$$\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_E|f|d\mu\leqslant M\cdot\frac{\varepsilon}{2M}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon,$$

το οποίο μας δίνει το ζητούμενο. □

Παρατηρούμε ότι αν $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία φραγμένη από μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση h, τότε η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, όπως είδαμε στ Παράδειγμα 3.3.5 (i). Το επόμενο λήμμα λέει κατά κάποιον τρόπο το αντίστροφο, δηλαδή ότι η ομοιόμορφη ολοκληρωσιμότητα είναι μια συνθήκη που μπορεί να αντικαταστήσει την ύπαρξη μιας κυριαρχούσας συνάρτησης στο θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης (Θ.Κ.Σ.) του Lebesgue.

Λήμμα 3.3.8. *Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη ακολουθία στον $L_1(\mu)$ τέτοια ώστε $f_n \to g \in L_1(\mu)$ σχεδόν παντού. Τότε*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu = \int_\Omega g \, d\mu.$$

Απόδειξη. Για κάθε $M > 0$ θεωρούμε τις «περικοπές» των f_n και g

$$f_n^{(M)} := \begin{cases} M & , \text{αν } f_n > M \\ f_n & , \text{αν } |f_n| \leqslant M \\ -M & , \text{αν } f_n < -M \end{cases} \qquad \text{και} \qquad g^{(M)} := \begin{cases} M & , \text{αν } g > M \\ g & , \text{αν } |g| \leqslant M \\ -M & , \text{αν } g < -M \end{cases}$$

Γράφουμε

$$\Big| \int_\Omega f_n d\mu - \int_\Omega g d\mu \Big| \leqslant \Big| \int_\Omega (f_n - f_n^{(M)}) d\mu \Big| + \Big| \int_\Omega f_n^{(M)} d\mu - \int_\Omega g d\mu \Big| + \Big| \int_\Omega (g - g^{(M)}) d\mu \Big|,$$

όπου

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega (f_n - f_n^{(M)}) d\mu \Big| &= \Big| \int_{\{|f_n| \leqslant M\}} (f_n - f_n^{(M)}) d\mu + \int_{\{|f_n| > M\}} (f_n - f_n^{(M)}) d\mu \Big| \\ &\leqslant \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n - f_n^{(M)}| d\mu = \int_{\{|f_n| > M\}} (|f_n| - M) d\mu \\ &\leqslant \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu \leqslant \sup_n \int_{\{|f_n| > M\}} |f_n| d\mu \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0 \end{aligned}$$

από το Λήμμα 3.3.7 αφού η ακολουθία (f_n) είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. [Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι αν $f_n > M$ τότε $|f_n - f_n^{(M)}| = f_n - M = |f_n| - M$ ενώ αν $f_n < -M$ τότε $|f_n - f_n^{(M)}| = |f_n + M| = -f_n - M = |f_n| - M$.]

Αντίστοιχα,

$$\begin{aligned} \Big| \int_\Omega (g - g^{(M)}) d\mu \Big| = \Big| \int_{\{|g| > M\}} (g - g^{(M)}) d\mu \Big| &\leqslant \int_{\{|g| > M\}} (|g| - M) d\mu \\ &\leqslant \int_{\{|g| > M\}} |g| d\mu \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} 0. \end{aligned}$$

Μένει να δείξουμε ότι

$$\int_\Omega f_n^{(M)} d\mu \overset{M\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega g^{(M)} d\mu,$$

το οποίο ισχύει από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, αφού $f_n^{(M)} \to g^{(M)}$ σχεδόν παντού (λόγω της $f_n \to g$ σχεδόν παντού) και $|f_n^{(M)}| \leqslant M \in L_1(\mu)$ (αφού $\mu(\Omega) = 1$). Επομένως,

$$\int_\Omega f_n d\mu \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \int_\Omega g d\mu.$$

□

Το επόμενο λήμμα (subsequence splitting) μας επιτρέπει να πάρουμε μια αυθαίρετη φραγμένη ακολουθία στον $L_1(\mu)$ και να εξαγάγουμε μια υπακολουθία που μπορεί να χωριστεί σε δύο ακολουθίες, μία με ξένους φορείς και μία ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Λήμμα 3.3.9 (subsequence splitting). *Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ φραγμένη ακολουθία στον $L_1(\mu)$. Τότε υπάρχει υπακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και ακολουθία ξένων ανά δύο μετρήσιμων συνόλων $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε, αν θέσουμε $B_n := \Omega \setminus A_n$, η οικογένεια $(g_n\chi_{B_n})_{n=1}^{\infty}$ να είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f_n\|_1 \leqslant 1$ για κάθε n. Πράγματι, αφού η $(f_n)_n$ είναι φραγμένη στον $L_1(\mu)$, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|f_n\|_1 \leqslant M$ για κάθε n, άρα $\left\|\frac{f}{M}\right\|_1 \leqslant 1$ για κάθε n, και δουλεύουμε με τις $\frac{f_n}{M}$, $n \geqslant 1$.

Πρώτα θα βρούμε υπακολουθία $(f_{n_s})_{s=1}^{\infty}$ της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ και ακολουθία μετρήσιμων συνόλων (F_s) έτσι ώστε αν $E_s = \Omega \setminus F_s$ τότε η $(f_{n_s}\chi_{E_s})_{s=1}^{\infty}$ να είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη και να έχουμε $f_{n_s}\chi_{F_s} \overset{s\to\infty}{\longrightarrow} 0$ μ-σχεδόν παντού.

Από την ανισότητα Markov έχουμε

$$0 \leqslant \mu(|f_n| > k) \leqslant \frac{\|f_n\|_1}{k} \leqslant \frac{1}{k}$$

για κάθε k, άρα η ακολουθία $(\mu(|f_n| > k))_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένη στο $\mathbb{R}$. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα Bolzano-Weierstrass η ακολουθία $(\mu(|f_n| > k))_{n=1}^{\infty}$ έχει συγκλίνουσα υπακολουθία στο $\mathbb{R}$ και έστω a_k το όριό της. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι

$$\mu(|f_n| > k) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} a_k$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$. Αυστηρότερα θα έπρεπε να γράφουμε $\mu(|f_{n_m}| > k) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} a_k$ αλλά μπορούμε απλά να υποθέσουμε ότι ξεκινάμε με την ακολουθία $(f_{n_m})_{m=1}^{\infty}$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η σειρά $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει στο $\mathbb{R}$ δείχνοντας ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant 1$. Είναι γνωστό ότι

$$\int_{\Omega} |f_n| d\mu = \int_0^{\infty} \mu(|f_n| > t)\, dt.$$

Έτσι,

$$1 \geqslant \int_{\Omega} |f_n| d\mu = \int_0^{\infty} \mu(|f_n| > t) dt = \sum_{k=1}^{\infty} \int_{k-1}^{k} \mu(|f_n| > t) dt \geqslant \sum_{k=1}^{\infty} \mu(|f_n| > k),$$

όπου η τελευταία ανισότητα ισχύει αφού για κάθε $t \in [k-1, k]$ έχουμε $\mu(|f_n| > k) \leqslant \mu(|f_n| > t)$, άρα

$$\mu(|f_n| > k) = \int_{k-1}^{k} \mu(|f_n| > k) dt \leqslant \int_{k-1}^{k} \mu(|f_n| > t) dt.$$

Επομένως, η ακολουθία $\sum\limits_{k=1}^{N} a_k$ ομοιόμορφα φραγμένη από τη μονάδα. Πράγματι, για κάθε $N \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=1}^{N} a_k = \sum_{k=1}^{N} \lim_{n\to\infty} \mu(|f_n| > k) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{N} \mu(|f_n| > k) \leqslant 1.$$

Έπεται ότι $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k \leqslant 1$.

Τώρα θέλουμε, για κάθε k, να «επιταχύνουμε» τη σύγκλιση της ακολουθίας $(\mu(|f_n| > k))_{n=1}^{\infty}$ στο a_k. Αφού $\mu(|f_n| > k) \to a_k$, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ υπάρχει $n_s \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $0 \leqslant \mu(|f_{n_s}| > k) < a_k + 2^{-2s}$ για $1 \leqslant k \leqslant 2^s$. Φυσικά ισχύει για κάθε k, απλά για $k > 2^s$ έχουμε $a_k \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2^s}$, άρα η ανισότητα $\mu(|f_{n_s}| > k) \leqslant \frac{1}{k} \leqslant \frac{1}{2^s}$ δίνει καλύτερη προσέγγιση από την $\mu(|f_{n_s}| > k) < a_k + 2^{-2s} \leqslant \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}}$.

Έτσι, δημιουργούμε υπακολουθία $(f_{n_s})_{s=1}^{\infty}$ της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ και $1 \leqslant k \leqslant 2^s$

$$\mu(|f_{n_s}| > k) < a_k + 2^{-2s} \leqslant \frac{1}{2^s} + \frac{1}{2^{2s}}. \tag{3.3.1}$$

Τώρα, για κάθε $s \in \mathbb{N}$ θέτουμε $E_s := \{\omega \in \Omega : |f_{n_s}(\omega)| \leqslant 2^s\}$ και $F_s := \{\omega \in \Omega : |f_{n_s}(\omega)| > 2^s\} = \Omega \setminus E_s$. Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{s=1}^{\infty} \mu(F_s) \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\|f_{n_s}\|_1}{2^s} \leqslant \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s} = 1 < \infty,$$

άρα από το λήμμα Borel-Cantelli έχουμε $\mu\left(\limsup\limits_s F_s\right) = 0$, όπου $\omega \in \limsup\limits_s F_s$ αν και μόνο αν το ω ανήκει σε άπειρα το πλήθος F_s.

Άρα, μ-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$, υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος F_s τέτοια ώστε $\omega \in F_s$. Άρα, $f_{n_s}\chi_{F_s} \longrightarrow 0$ μ-σχεδόν παντού, αφού $f_{n_s}\chi_{F_s} \longrightarrow 0$ στο $\Omega \setminus \limsup\limits_s F_s$.

Θέτουμε $h_s := f_{n_s}\chi_{E_s}$ για κάθε $s \in \mathbb{N}$, και θα δείξουμε ότι η $(h_s)_{s=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Σύμφωνα με το Λήμμα 3.3.7 για να δείξουμε ότι η $(h_s)_{s=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sup_s \int_{\{|h_s|>2^r\}} |h)s| d\mu \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(μπορούμε να αντικαταστήσουμε το $<$ του λήμματος με 2^M αφού $M \to \infty$ αν και μόνο αν $2^M \to \infty$).

Για κάθε $k > 2^s$ έχουμε $\{|f_{n_s}| > k\} \cap E_s = \varnothing$, άρα $\{|h_s| > k\} = \{|f_{n_s}|\chi_{E_s} > k\} = \varnothing$ (αφού αν $\omega \in \{|f_{n_s}|\chi_{E_s} > k\}$ τότε $\omega \in E_s$ και $|f_{n_s}| > k$, άρα $\omega \in \{|f_{n_s}| > k\} \cap E_s$, το οποίο είναι άτοπο). Άρα, $\mu(|h_s| > k) = \mu(\varnothing) = 0$.

Έστω $r \in \mathbb{N}$ σταθεροποιημένο. Τότε, για κάθε $s < r$, αφού $2^r > 2^s$ έχουμε $\mu(|h_s| > 2^r) = \varnothing$, άρα $\int_{\{|h_s|>2^r\}} |h_s| d\mu = 0$.

Έστω τώρα $s \geqslant r$. Τότε,

$$\int_{\{|h_s|>2^r\}} |h_s| d\mu = \int_{\{|h_s|>2^r\}} (|h_s| - 2^r + 2^r) d\mu = \int_{\{|h_s|>2^r\}} (|h_s| - 2^r) d\mu + 2^r \mu(|h_s| > 2^r),$$

και

$$2^r \mu(|h_s| > 2^r) \leqslant 2^r \mu(|f_{n_s}| > 2^r) \leqslant 2^r (a_{2^r} + 2^{-2s} = 2^r a_{2^r} + 2^{r-2s} \leqslant 2^r a_{2^r} + 2^{-s}.$$

Όπως κάναμε και για να δείξουμε ότι $\sum_k a_k < \infty$,

$$\begin{aligned}\int_{\{|h_s|>2^r\}}(|h_s|-2^r)d\mu &= \int_0^\infty \mu(|h_s|-2^r>t)dt = \sum_{k=1}^\infty \int_{k-1}^k \mu(|h_s|-2^r>t)dt \\ &\leqslant \sum_{k=1}^\infty \mu(|h_s|-2^r>k-1) = \sum_{k=0}^\infty \mu(|h_s|-2^r>k) = \sum_{k=0}^\infty \mu(|h_s|>2^r+k) \\ &= \sum_{k=2^r}^\infty \mu(|h_s|>k) = \sum_{k=2^r}^{2^s} \mu(|h_s|>k) \leqslant \sum_{k=2^r}^{2^s}(a_k+2^{-2s}) \\ &= \sum_{k=2^r}^{2^s} a_k + 2^{s-r}\cdot 2^{-2s} \leqslant \sum_{k=2^r}^\infty a_k + 2^{-s-r} \leqslant \sum_{k=2^r}^\infty a_k + 2^{-r}.\end{aligned}$$

Τελικά,

$$\sup_s \int_{\{|h_s|>2^r\}} |h_s|d\mu \leqslant \sum_{k=2^r}^\infty a_k + 2^{-r} + 2^r a_{2^r} + 2^{-r} \overset{r\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

όπου $2^r a_{2^r} \to 0$ επειδή $\sum_{k=1}^\infty a_k < \infty$ και η (a_k) είναι φθίνουσα, άρα $ka_k \to 0$.

Άρα δείξαμε ότι η $(h_s)_{s\in\mathbb{N}}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Από πριν, $f_{n_s} - h_s = f_{n_s}\chi_{F_s} \to 0$ μ-σχεδόν παντού, και το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, άρα $f_{n_s} - h_s \to 0$ κατά μέτρο, και η $(f_{n_s}-h_s)_{s=1}^\infty$ είναι φραγμένη στον L_1 (με $\|f_{n_s}-h_s\|_1 = \|f_{n_s}\chi_{F_s}\|_1 \leqslant \|f_{n_s}\|_1 \leqslant 1$), άρα εφαρμόζεται το Λήμμα 3.3.2 για την $(h'_s)_{s=1}^\infty$ με $h'_s := f_{n_s} - h_s = f_{n_s}\chi_{F_s}$ (υσιαστικά, η h_s είναι η «προβολή» της f_{n_s} στο E_s και η h'_s είναι η «προβολή» της f_{n_s} στο F_s). Επομένως, από το Λήμμα 3.3.2, υπάρχει υπακολουθία $(h'_{s_r})_{r=1}^\infty$ της $(h'_s)_{s=1}^\infty$ και ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων $(A_r)_{r=1}^\infty$ στην Σ τέτοια ώστε $\|h'_{s_r} - h'_{s_r}\chi_{A_r}\|_1 \to 0$, δηλαδή $\|h'_{s_r}\chi_{B_r}\|_1 \to 0$, όπου $B_r : -\Omega \setminus A_r$.

Τώρα θα δείξουμε ότι χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $A_r \subseteq F_{s_r}$. Πράγματι, αν όχι, θεωρούμε τα $A'_r := A_r \cap F_{s_r}$. Τότε τα A'_r είναι ξένα, $B'_r = \Omega \setminus A'_r = B_r \cup E_{s_r}$, αι $h'_{s_r}\chi_{B'_r} = h'_{s_r}\chi_{B_r}$ αφού $\chi_{F_{s_r}}\chi_{B_r} = \chi_{F_{s_r}\cap B_r} = \chi_{F_{s_r}\cap(B_r\cup E_{s_r})} = \chi_{F_{s_r}}\chi_{B'_r}$.

Θα δείξουμε ότι η $\{h'_{s_r}\chi_{B_r}\}_{r=1}^\infty$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Για συντομία θέτουμε $g_r := h'_{s_r}\chi_{B_r}$. Ξέρουμε ότι $\int |g_r|d\mu \to 00$. Έστω $\varepsilon > 0$. Πρέπει να βρούμε $\delta > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $E \in \Sigma$ με $\mu(E) < \delta$ να ισχύει $\sup_r \int_E |g_r|d\mu < \varepsilon$.

Αφού $\int |g_r|d\mu \to 0$, υπάρχει $r_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $r \geqslant r_0$, $\int |g_r|d\mu < \varepsilon$. Έστω $i \in \{1, 2, \dots, r_0-1\}$. Αφού το μ είναι πεπερασμένο, από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος υπάρχει $\delta_i > 0$ ώστε για κάθε $E \in \Sigma$ με $\mu(E) < \delta_i$, $\int |g_i|d\mu < \varepsilon$. Θέτουμε $\delta := \min \delta_i$. Τότε, για κάθε $E \in \Sigma$ με $\mu(E) < \delta$ έχουμε $\int |g_i|d\mu < \varepsilon$ για κάθε $i = 1, 2, \dots, r_0 - 1$. Από πριν, γα κάθε $r \geqslant r_0$, $\int_E |g_r|d\mu \leqslant \int |g_r|d\mu \leqslant \varepsilon$. Τελικά, για κάθε $E \in \Sigma$ με $\mu(E) < \delta$ και για κάθε $r \in \mathbb{N}$ έχουμε $\int_E |g_r|d\mu \leqslant \varepsilon$, άρα

$$\sup_r \int_E |g_r|d\mu \leqslant \varepsilon.$$

Επομένως, η $\{h'_{s_r}\chi_{B_r}\}_{r=1}^\infty$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη και από πριν η $\{h_{s_r}\}_{r=1}^\infty$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Από το Λήμμα 3.3.6 έπεται ότι και η $\{h'_{s_r}\chi_{B_r} + hs_r\}_{r=1}^\infty$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Τελικά, η ζητούμενη $(g_r)_{r=1}^{\infty}$ είναι η $(f_{n_{s_r}})_{r=1}^{\infty}$ και $f_{n_{s_r}}\chi_{B_r} = h'_{s_r}\chi_{B_r} + hs_r\chi_{B_r} = h'_{s_r}\chi_{B_r} + h_{s_r}$, αφού $h_{s_r}\chi_{B_r} = f_{n_{s_r}}\chi_{E_{s_r}\cap B_r}$ και $E_{s_r}\cap B_r = E_{s_r}$ άφού $A_r \subseteq F_{s_r}$, $B_r = \Omega\setminus A_r$, $E_{s_r} = \Omega\setminus F_{s_r}$. Άρα, η $(f_{n_{s_r}}\chi_{B_r})_{r=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη και τα A_n ξένα. □

Θεώρημα 3.3.10. *Έστω $\mathcal{F}$ φραγμένο σύνολο στον $L_1(\mu)$. Τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) *Το $\mathcal{F}$ είναι σχετικώς w-συμπαγές.*

(ii) *Το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο.*

(iii) *Το $\mathcal{F}$ δεν περιέχει βασική ακολουθία ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1.*

(iv) *Το $\mathcal{F}$ δεν περιέχει συμπληρωματική βασική ακολουθία ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1.*

(v) *Για κάθε ακολουθία $(A_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένων μετρήσιμων συνόλων,*

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{A_n}|f|\,d\mu - 0.$$

Θεωρούμε δεδομένο το εξής:

Θεώρημα 3.3.11 (Eberlein-Smulian)**.** *Έστω X χώρος Banach και $A\subseteq X$. Τότε, το $\overline{A}^w$ είναι w-συμπαγές αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στο A υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) η οποία είναι w-συγκλίνουσα.*

Ας σημειώσουμε εδώ ότι αυτή η ισοδυναμία δεν είναι προφανής αφού ο (X,w) είναι τοπολογικός χώρος, όχι απαραίτητα μετρικός, συνεπώς η ισοδυναμία συμπάγειας και ακολουθιακής συμπάγειας δεν είναι εκ των προτέρων γνωστή.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.3.10. (i) $\Longrightarrow$ (iii) Η κανονική βάση Schauder $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ του ℓ_1 δεν έχει w-συγκλίνουσα υπακολουθία. Πράγματι, αφού ο ℓ_1 είναι χώρος Schur, ο ισχυρισμός αυτός είναι ισοδύναμος με το ότι η $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ δεν έχει $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα υπακολουθία. Έστω (e_{k_n}) υπακολουθία της (e_n). Τότε, $\|e_{k_n}-e_{k_m}\|_1 = 2$ για κάθε $n\neq m$, άρα η (e_{k_n}) δεμ είναι Cauchy, άρα ούτε $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα. Επομένως, το $\mathcal{F}$ δεν μπορεί να περιέχει βασική ακολουθία ισοδύναμη με την (e_n), από το θεώρημα Eberlein-Smulian (αφού το $\overline{\mathcal{F}}^w$ είναι w-συμπαγές, άρα w-ακολουθιακά συμπαγές).

Σημείωση: Στο παρόν κεφάλαιο όταν γράφουμε «ακολουθία Cauchy» αναφερόμαστε στη συνήθη έννοια από την θεωρία των μετρικών χώρων, ενώ με τη φράση «βασική ακολουθία» αναφερόμαστε σε μια ακολουθία που είναι βάση Schauder για την κλειστή γραμμική θήκη του συνόλου των όρων της.

(iii) $\Longrightarrow$ (iv) Είναι προφανές, αφού κάθε συμπληρωματική βασική ακολουθία είναι βασική ακολουθία.

(ii) $\Longrightarrow$ (v) Έστω $\mathcal{F}$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο και έστω (A_n) ακολουθία ξένων μετρήσιμων συνόλων. Τότε, αφού τα A_n είναι ξένα ανά δύο, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mu(A_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A_n\right) \leqslant \mu(\Omega) < \infty.$$

Άρα, $\mu(A_n) \to 0$. Άρα, αφού το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{A_n} |f|\, d\mu = 0.$$

Μένει να δείξουμε τις συνεπαγωγές (iv) $\Longrightarrow$ (ii), (v) $\Longrightarrow$ (ii) και (ii) $\Longrightarrow$ (i). Τότε, (i) $\Longrightarrow$ (iii) $\Longrightarrow$ (iv) $\Longrightarrow$ (ii) $\Longrightarrow$ (i) και (ii) $\Longrightarrow$ (v) $\Longrightarrow$ (ii), άρα όλες οι προτάσεις είναι ισοδύναμες.

Πρώτα θα δείξουμε ότι (iv) $\Longrightarrow$ (ii). Υποθέτουμε για άτοπο ότι δεν ισχύει το (ii), δηλαδή το $\mathcal{F}$ δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε, για κάθε $M > 0$,

$$\sup_{f\in\mathcal{F}} \int_{\{|f|>M\}} |f| d\mu \geqslant \varepsilon.$$

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Μπορούμε να βρούμε $f_n \in \mathcal{F}$ τέτοια ώστε

$$\int_{\{|f_n|>n\}} |f_n| d\mu \geqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θέτουμε $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Έτσι έχουμε ότι υπάρχουν $\delta > 0$ και ακολουθία (f_n) στο $\mathcal{F}$ ώστε

$$\int_{\{|f_n|>n\}} |f_n| d\mu \geqslant \delta \tag{3.3.2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Η (f_n) είναι φραγμένη ακολουθία στον $L_1(\mu)$, αφού από την υπόθεση το $\mathcal{F}$ είναι φραγμένο σύνολο στον $L_1(\mu)$. Από το Λήμμα 3.3.9 υπάρχει υπακολουθία $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ της $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $g_n = g_n\chi_{A_n} + g_n\chi_{B_n}$, όπου (A_n) ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων, $B_n = \Omega \setminus A_n$ και η $(g_n\chi_{B_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Τότε η (3.3.2) ισχύει για την (g_n), επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα παραπάνω ισχύουν για την αρχική ακολουθία (f_n). Έχουμε λοιπόν τα εξής: $f_n = f_n\chi_{A_n} + f_n\chi_{B_n}$, τα A_n είναι ξένα, $B_n = \Omega\setminus A_n$, η $(f_n\chi_{B_n})_n$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, άρα $\lim\limits_{\mu(e)\to 0} \sup\limits_n \int_{E\cap B_n} |f_n|d\mu = 0$, και ειδικότερα, επειδή $\mu(|f_n| > n) \to 0$ έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{B_n\cap\{|f_n|>n\}} |f_n|d\mu = 0.$$

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Έχουμε $\lim\limits_{M\to\infty} \sup\limits_n \int_{B_n\cap\{|f_n|>M\}} |f_n|d\mu = 0$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει M_0 τέτοιος ώστε για κάθε $M > M_0$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $\left|\int_{B_n\cap\{|f_n|>n\}} |f_n|d\mu\right| < \varepsilon$. Παίρνουμε $n = M$. Τότε: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε για κάθε $n > n_0$ ισχύει $\left|\int_{B_n\cap\{|f_n|>n\}} |f_n|d\mu\right| < \varepsilon$, δηλαδή $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{B_n\cap\{|f_n|>n\}} |f_n|d\mu = 0$. □

Τώρα, $\int_{\{|f_n|>n\}} |f_n|d\mu \geqslant \delta$ και $B_n = \Omega \setminus A_n$. Άρα, $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_n\cap\{|f_n|>n\}} |f_n|d\mu \geqslant \delta$. Τότε, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$,

$$\int_{A_n\cap\{|f_n|>n\}} |f_n|d\mu \geqslant \frac{\delta}{2},$$

και $A_n \supseteq A_n \cap \{|f_n| > n\}$, άρα $\int_{A_n} |f_n|d\mu \geqslant \frac{\delta}{2}$.

Τώρα, «διαγράφοντας» τους όρους $1, 2, \ldots, n_0 - 1$ (πεπερασμένους το πλήθος) μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$a_n := \int_{A_n} |f_n| d\mu \geqslant \frac{\delta}{2} \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N}. \tag{3.3.3}$$

Τότε, $\left\| \frac{f_n \chi_{A_n}}{a_n} \right\|_1 = 1$ για κάθε n, δηλαδή η $\left(\frac{f_n \chi_{A_n}}{a_n} \right)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία με όρους νόρμας 1 και ξένους φορείς, άρα εφαρμόζεται το Λήμμα 3.2.2, δηλαδή η $\left(\frac{f_n \chi_{A_n}}{a_n} \right)_{n=1}^{\infty}$ είναι νόρμας 1 συμπληρωματική βασική ακολουθία στον $L_1(\mu)$, ισομετρικά ισοδύναμη με την κανονική βάση Schauder του ℓ_1.

Έστω h_n όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.2, δηλαδή

$$h_n(\omega) := \operatorname{sgn}\left(\frac{f_n \chi_{A_n}}{a_n} \right).$$

Οι h_n έχουν νόρμα 1 στον $L_\infty(\mu)$ και είναι κάθετες ανά δύο – κάθε h_n έχει φορέα που περιέχεται στο A_n. Όπως είδαμε και πριν, η $(f_k \chi_{B_k})_{k=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, άρα

$$\lim_{\mu(E) \to 0} \sup_k \int_{E \cap B_k} |f_k| d\mu = 0.$$

Είδαμε ότι $\mu(A_n) \to$. Άρα $\lim\limits_{n \to \infty} \sup\limits_k \int_{A_n \cap B_k} |f_k| d\mu = 0$, άρα για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και κάθε $k \in \mathbb{N}$, $\int_{A_n \cap B_k} |f_k| d\mu < \varepsilon$.

Εφαρμόζοντας το παραπάνω για $\varepsilon = \frac{\delta}{4} \cdot \frac{1}{2^n}$ έχουμε ότι: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $\lambda_n \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$\int_{A_{\lambda_n} \cap B_k} |f_k| d\mu < \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta}{2^n}.$$

Συνεπώς, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$,

$$\int_{A_{\lambda_n} \cap B_{\lambda_m}} |f_{\lambda_m}| d\mu < \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta}{2^n}.$$

Έτσι, περνώντας στην υπακολουθία $(f_{\lambda_n})_{n=1}^{\infty}$ μπορούμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$

$$\int_{A_n \cap B_m} |f_m| d\mu < \frac{1}{4} \cdot \frac{\delta}{2^n}.$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $f \in L_1(\mu)$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \int_{\Omega} f h_n d\mu \right| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} |f| d\mu = \int_{\bigcup\limits_n A_n} |f| d\mu \leqslant \|f\|_1 < \infty.$$

Επομένως, ορίζεται καλά ο $T : L_1(\mu) \to \ell_1$ με

$$f \mapsto T(f) := \left(\int_{\Omega} f h_n d\mu \right)_{n=1}^{\infty}$$

και είδαμε ότι $\|T(f)\|_{\ell_1} \leqslant \|f\|_1$, δηλαδή ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T\| \leqslant 1$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\xi = (\xi_n)_n \in \ell_1$ ισχύει

$$\left\| \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n a_n^{-1} f_n \chi_{A_n} \right\|_{L_1} = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n|$$

αφού η $(a_n^{-1} f_n \chi_{A_n})_{n=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με την κανονική βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ του ℓ_1.

Από την υπόθεση, το $\mathcal{F}$ είναι φραγμένο σύνολο στον L_1. Άρα, υπάρχει $C > 0$ ώστε $\|f_n\|_{L_1} \leqslant C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ορίζουμε $R : \ell_1 \to L_1(\mu)$ με

$$\xi = (\xi_n)_n \mapsto R(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \xi_n \frac{1}{a_n} f_n.$$

Θα δείξουμε ότι ο R είναι καλά ορισμένος φραγμένος γραμμικός τελεστής. Έχουμε

$$\begin{aligned} \|R(\xi)\|_{L_1} &= \int_\Omega |R(\xi)| d\mu \leqslant \int_\Omega \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \frac{1}{a_n} |f_n| d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \frac{1}{a_n} \int_\Omega |f_n| d\mu \\ &\leqslant \sum_{n=1}^{\infty} |\xi_n| \frac{2}{\delta} C = \frac{2C}{\delta} \|\xi\|_{\ell_1}. \end{aligned}$$

Άρα, ο R είναι καλά ορισμένος και $\|R\| \leqslant \frac{2C}{\delta}$.

Έστω $k \in \mathbb{N}$. Θα δείξουμε ότι

$$T(R(e_k)) - e_k = \left(a_k^{-1} \int_{A_n \cap B_k} f_k h_n d\mu \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Έχουμε $R(e_k) = \sum_{n=1}^{\infty} (e_k)_n \frac{1}{a_n} f_n = \frac{1}{a_k} f_k$. Άρα,

$$T(R(e_k)) = T\left(\frac{1}{a_k} f_k\right) = \left(\int_\Omega \frac{1}{a_k} f_k h_n d\mu \right)_{n=1}^{\infty} = \left(\frac{1}{a_k} \int_{A_n} f_k h_n d\mu \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Τώρα, για $n = k$ έχουμε

$$\frac{1}{a_k} \int_{A_k} f_k h_k d\mu = \frac{1}{a_k} \int_{A_k} f_k \mathrm{sgn}(f_k) d\mu = \frac{1}{a_k} \int_{A_k} |f_k| d\mu = 1,$$

ενώ για $n \neq k$ έχουμε

$$\frac{1}{a_k} \int_{A_k} f_k h_n d\mu = \frac{1}{a_k} \int_{A_n} (f_k \chi_{A_k} + f_k]chi_{B_k}) h_n d\mu = \frac{1}{a_k} \int_{A_n} f_k \chi_{B_k} h_n d\mu = \frac{1}{a_k} \int_{A_n \cap B_k} f_k h_n d\mu.$$

Επομένως $(T(R(e_k)) - e_k)_n = 0$ για $n = k$ και

$$(T(R(e_k)) - e_k)_n = \frac{1}{a_k} \int_{A_n \cap B_k} f_k h_n d\mu$$

για $n \neq k$. Όμως, $A_n \cap B_n = \varnothing$. Άρα, μπορούμε να γράψουμε

$$T(R(e_k)) - e_k = \left(a_k^{-1} \int_{A_n \cap B_k} f_k h_n d\mu \right)_{n=1}^{\infty}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\Big|\frac{1}{a_k}\int_{A_n\cap B_k} f_k h_n d\mu\Big| \leqslant \frac{1}{a_k}\int_{A_n\cap B_k} |f_k| d\mu \leqslant \frac{2}{\delta}\frac{1}{4}\frac{1}{2^n}\delta = \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Άρα,

$$\|TR(e_k) - e_k\|_{\ell_1} \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}$$

για κάθε $k \in \mathbb{N}$, όπου $(e_k)_{k=1}^{\infty}$ η κανονική βάση Schsuder του ℓ_1. Έπεται ότι

$$\|TR - I_{\ell_1}\| \leqslant \frac{1}{2} < 1,$$

άρα ο TR είναι αντιστρέψιμος. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι ο ℓ_1 και γενικότερα ο L_1 είναι άλγεβρα Banach με πολλαπλασιασμό τη συνέλιξη και εφαρμόζουμε το εξής θεώρημα: Αν $\mathcal{A}$ είναι μια άλγεβρα Banach με μονάδα e και $x \in \mathcal{A}$ με $\|e - x\| < 1$ τότε το x είναι αντιστρέψιμο και $x^{-1} = e + \sum\limits_{n=1}^{\infty}(e-x)^n$.

Θέτουμε $U := (TR)^{-1}$. Τότε, $UTR = I$, άρα $(RUT)^2 = R(UTR)UT = RUT$. Δηλαδή, ο RUT είναι προβολή στον $\mathrm{Im}(R) = R(\ell_1)$. Έπεται ότι ο R είναι ισομορφισμός και ο $R(\ell_1)$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_1(\mu)$. Αυτό αποδεικνύει ότι η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι συμπληρωματική βασική ακολουθία, ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1. Έχουμε άτοπο από την υπόθεση (iv), άρα έχουμε αποδείξει την συνεπαγωγή (iv) $\Longrightarrow$ (ii).

(v) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω για άτοπο ότι δεν ισχύει το (ii), δηλαδή ότι το $\mathcal{F}$ δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο. Ακριβώς όπως στην απόδειξη της συνεπαγωγής (iv) $\Longrightarrow$ (ii), καταλήγουμε στην $\int_{A_n}|f_n|d\mu \geqslant \frac{\delta}{2}$ για κάθε n. η οποία έρχεται σε αντίφαση με την υπόθεση (v), και έχουμε άτοπο.

Μένει να δείξουμε ότι (ii) $\Longrightarrow$ (i). Έστω $\mathcal{F}$ ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο $\|\cdot\|$-φραγμένο σύνολο στον $L_1(\mu)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 3.3.12. *Έστω X χώρος Banach και $A \subseteq X$. Τότε, το A είναι σχετικώς w-συμπαγές αν και μόνο αν το A είναι $\|\cdot\|$-φραγμένο και $\overline{A}^{(X^{**},w^*)} \subseteq X$.*

Επομένως, αρκεί να δείξουμε ότι $\overline{A}^{(X^{**},w^*)} \subseteq L_1$, όπου ταυτίζουμε τον L_1 με τον $\widehat{L_1} \neq L_1^{**}$. Για κάθε $M > 0$ θεωρούμε τα σύνολα

$$\mathcal{F}_M = \{f\cdot\chi_{\{|f|\leqslant M\}} : f \in \mathcal{F}\} \subseteq L_1(\mu) \quad \text{και} \quad \mathcal{F}^M = \{f\cdot\chi_{\{|f|>M\}} : f \in \mathcal{F}\} \subseteq L_1(\mu).$$

Προφανώς $\mathcal{F} \subseteq \mathcal{F}_M + \mathcal{F}^M$, αφού για κάθε $f \in \mathcal{F}$ έχουμε $f = f\cdot\chi_{\{|f|\leqslant M\}} + f\cdot\chi_{\{|f|>M\}}$. Στο εξής θα γράφουμε γενικά $\overline{A}^{w^*}$ και θα εννοούμε το $\overline{A}^{(X^{**},w^*)}$. Τα $\overline{\mathcal{F}_M}^{w^*}$ και $\overline{\mathcal{F}^M}^{w^*}$ είναι w^*-κλειστά και $\|\cdot\|$-φραγμένα (αφού το $\mathcal{F}$ είναι φραγμένο και άρα υπάρχει $C > 0$ τέτοιος ώστε $\|f\|_1 \leqslant C$ για κάθε $f \in \mathcal{F}$). Άρα, από γνωστή πρόταση, τα $\overline{\mathcal{F}_M}^{w^*}$ και $\overline{\mathcal{F}^M}^{w^*}$ είναι w^*-συμπαγή. Από τη συνέχεια της $+$ το $\overline{\mathcal{F}_M}^{w^*} + \overline{\mathcal{F}^M}^{w^*}$ είναι w^*-συμπαγές, άρα w^*-κλειστό. Άρα,

$$\overline{\mathcal{F}}^{w^*} \subseteq \overline{\mathcal{F}_M + \mathcal{F}^M}^{w^*} \subseteq \overline{\mathcal{F}_M}^{w^*} + \overline{\mathcal{F}^M}^{w^*}.$$

Έστω $g \in \mathcal{F}_M$. Τότε $\|g\|_2 \leqslant \|g\|_\infty \leqslant M$. Άρα, $\mathcal{F}_M \subseteq MB_{L_2(\mu)}$. Επειδή ο $L_2(\mu)$ είναι αυτοπαθής και διαχωρίσιμος, η $(B_{L_2(\mu)}, w)$ είναι συμπαγής, άρα και το $MB_{L_2(\mu)}$ είναι w-συμπαγές για κάθε

$M>0$. Άρα, το $\mathcal{F}_M$ είναι σχετικώς w-συμπαγές στον $L_2(\mu)$ για κάθε $M>0$ (κλειστό υποσύνολο συμπαγούς είναι συμπαγές). Έχουμε $L_2(\mu)\subseteq L_1(\mu)$ επειδή $\mu(\Omega)=1$. Θεωρούμε τον ταυτοτικό εγκλεισμό $i:L_2(\mu)\to L_1(\mu)$, ο οποίος είναι $(\|\cdot\|_2,\|\cdot\|_1)$-συνεχής (αφού $\|f\|_1\leqslant\|f\|_2$) άρα και $((L_2,w),(L_1,w))$-συνεχής. Άρα, για κάθε $M>0$ η εικόνα $i(\mathcal{F}_M)=\mathcal{F}_M$ είναι σχετικώς w-συμπαγές σύνολο στον $L_1(\mu)$. Πράγματι, το $\overline{\mathcal{F}_M}^{(L_2,w)}$ είναι w-συμπαγές και η i συνεχής, άρα το $\overline{\mathcal{F}_M}^{(L_2,w)}$ είναι (L_1,w)-συμπαγές, όπου $\overline{\mathcal{F}_M}^{(L_2,w)}=\overline{\mathcal{F}_M}^{(L_1,w)}\cap L_2=\overline{\mathcal{F}_M}^{(L_1,w)}$. Τώρα, αφού το $\mathcal{F}_M$ είναι σχετικώς w-συμπαγές, από την Πρόταση 3.3.12 έχουμε ότι

$$\overline{\mathcal{F}_M}^{(L_1^{**},w^*)}\subseteq L_1(\mu)$$

για κάθε $M>0$. Από την υπόθεση, το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο, δηλαδή

$$\lim_{M\to\infty}\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|d\mu=0.$$

Για κάθε $M>0$ θέτουμε

$$\varepsilon(M):=\sup_{f\in\mathcal{F}}\int_{\{|f|>M\}}|f|d\mu=\sup_{g\in\mathcal{F}^M}\int|g|d\mu.$$

Έτσι, για κάθε $f\in\mathcal{F}^M$ ισχύει ότι $\|f\|_1\leqslant\varepsilon(M)$, δηλαδή $f\in\varepsilon(M)B_{L_1(\mu)}$. Άρα, $\mathcal{F}^M\subseteq\varepsilon(M)B_{L_1(\mu)}$. Ταυτίζοντας τον L_1 με τον $\widehat{L_1}$, από το θεώρημα Goldstine έχουμε ότι η B_{L_1} είναι w^*-πυκνή στην $B_{L_1^{**}}$, άρα

$$\overline{\mathcal{F}^M}^{w^*}\subseteq\varepsilon(M)\overline{B_{L_1(\mu)}}^{w^*}=\varepsilon(M)B_{L_1^{**}(\mu)}.$$

Στόχος μας ήταν να δείξουμε ότι $\overline{\mathcal{F}}^{w^*}\subseteq L_1(\mu)$. Έστω $f\in\overline{\mathcal{F}}^{w^*}$. Γράφουμρ $f=\psi+\varphi\in\overline{\mathcal{F}_M}^{w^*}+\overline{\mathcal{F}^M}^{w^*}]subseteq L_1(\mu)+\varepsilon(M)B_{L_1^{**}}$. Τότε, $\psi\in L_1(\mu)$ και $\varphi\in\varepsilon(M)B_{L_1^{**}}$. Έπεται ότι

$$d(f,L_1(\mu))=\inf\{\|f-g\|_1:g\in L_1(\mu)\}\leqslant\|f-\psi\|_1=\|\varphi\|_1\leqslant\varepsilon(M)$$

για κάθε $M>0$, άρα

$$d(f,L_1(\mu))\leqslant\lim_{M\to\infty}\varepsilon(M)=0$$

αφού το $\mathcal{F}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμο. Από την $d(f,L_1(\mu))=0$ και το γεγονός ότι ο $L_1\equiv\widehat{L_1}$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστός στον L_1^{**} συμπεραίνουμε ότι $f\in L_1(\mu)$. □

Ορισμός 3.3.13 (υπενθύμιση)**.** Ένας χώρος Banach X λέγεται w-ακολουθιακά πλήρης αν και μόνο αν για κάθε w-Cauchy ακολουθία (x_n) (δηλαδή τέτοια ώστε να υπάρχει το $\lim\limits_{n\to\infty}x^*(x_n)$ για κάθε $x^*\in X^*$) ισχυει ότι η (x_n) είναι w-συγκλίνουσα.

Θεώρημα 3.3.14. *Ο $L_1(\mu)$ είναι w-ακολουθιακά συμπαγής.*

Απόδειξη. Έστω $(f_n)_{n=1}^\infty\subseteq L_1(\mu)$ w-Cauchy ακολουθία. Τότε δεν υπάρχει υπακολουθία $(f_{k_n})_{n=1}^\infty$ ισοδύναμη με την κανονική βάση του ℓ_1. Πράγματι, αν υπήρχε θα ήταν w-Cauchy, άρα και η συνήθης βάση του ℓ_1 θα ήταν w-Cauchy, άτοπο.

Άρα η $(f_n)_{n=1}^\infty$ είναι σχετικώς w-συμπαγής, άρα η (f_n) είναι w-συγκλίνουσα (έχει συγκλίνουσα υπακολουθία και είναι w-Cauchy). □

Υπενθυμίζουμε τα εξής:

Ορισμός 3.3.15. Μια σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ ονομάζεται ασθενώς ελεύθερα συγκλίνουα αν για κάθε $x^* \in X^*$ ισχύει $\sum_{n=1}^{\infty} |x^*(x_n)| < \infty$.

Θεώρημα 3.3.16. *Κάθε ασθενώς ελεύθερα συγκλίνουσα σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ στον X είναι ελεύθερα συγκλίνουσα αν και μόνο αν ο X δεν περιέχει αντίγραφο του c_0.*

Πόρισμα 3.3.17. *Έστω X w-ακολουθιακά πλήρης χώρος Banach. Τότε κάθε ασθενώς ελεύθερα συγκλίνουσα σειρά στον X είναι ελεύθερα συγκλίνουσα.*

Συνδυάζοντας τα παραπάνω με το Θεώρημα **;;** παίρνουμε άμεσα το ακόλουθο:

Πόρισμα 3.3.18. *Ο c_0 δεν είναι ισόμορφος με υπόχωρο του $L_1(\mu)$. Δηλαδή, ο $L_1(\mu)$ δεν περιέχει αντίγραφο του c_0.*

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 3.3.16 για τον $X = L_1(\mu)$. □

3.4 w-συμπάγεια στον $\mathcal{M}(K)$

Έστω K συμπαγής Hausdorff (όχι κατ' ανάγκη μετρικοποιήσιμος) τοπολογικός χώρος. Υπενθυμίζουμε ότι:

- Ένα μέτρο μ στην $\mathcal{B}(K)$ λέγεται κανονικό αν και μόνο αν:
  - (i) $\mu(K) < \infty$.
  - (ii) $\mu(A) = \inf\{\mu(U) : U \text{ ανοικτό}, A \subseteq U\}$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$, και
  - (iii) $\mu(A) = \sup\{\mu(C) : C \text{ συμπαγές}, C \subseteq A\}$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$.
- Ένα προσημασμένο Borel μέτρο στον K λέγεται κανονικό αν και μόνο αν τα μ^+ και μ^- είναι κανονικά, όπου $\mu = \mu^+ - \mu^-$, $\mu^+ \perp \mu^-$ η διάσπαση Jordan του μ.
- Με $\mathcal{M}(K)$ συμβολίζουμε τον χώρο των προσημασμένων κανονίκών Borel μέτρων, ο οποίος είναι χώρος Banach με νόρμα
$$\|\mu\| := |\mu|(K) = \mu^+(K) + \mu^-(K).$$
- Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz,
$$\mathcal{M}(K) \simeq C(K)^*.$$
Επομένως, μπορούμε να μιλάμε για την weak-τοπολογία του $\mathcal{M}(K)$, ταυτίζοντάς τον με τον $C(K)^*$.
- Στην απόδειξη της Πρότασης 2.3.12 (iii), που έλεγε ότι ο $C(K)$ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος, είχαμε αποδείξει ότι $\mathcal{M}(K) \simeq \ell_1$-άθροισμα χώρων $L_1(\mu_i)$, $i \in I$ όπου $(\mu_i)_{i\in I}$ οικογένεια μέτρων πιθανότητας. Δηλαδή, $\mathcal{M}(K) \simeq \ell_1(L_1(\mu_i))_{i\in I}$ (βλ. ορισμό του $\ell_1(X_i)_{i\in I}$).

Χρησιμοποιώντας τοτελευταίο, θα δείξουμε ότι μπορούμε να επεκτείνουμε το Θεώρημα 3.3.10 που αναφέρεται σε «$\mathcal{F}$ φραγμένο υποσύνολο του $L_1(\mu)$» σε «$\mathcal{F}$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{M}(K)$».

Όμως, θα χρειαστούμε και άλλους χαρακτηρισμούς της w-συμπάγειας στον $\mathcal{M}(K)$.

Ορισμός 3.4.1. Έστω $\mathcal{A} \subseteq \mathcal{M}(K)$. Το $\mathcal{A}$ λέγεται ομοιόμορφα κανονικό αν και μόνο αν για κάθε $U \subseteq K$ ανοικτό και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $H \subseteq U$ συμπαγές ώστε $|\mu|(U \setminus H) < \varepsilon$ για κάθε $\mu \in \mathcal{A}$.

Οι επόμενες ισοδυναμίες οφείλονται στον Grothendieck:

Θεώρημα 3.4.2. *Έστω $\mathcal{A}$ φραγμένο υποσύνολο του $\mathcal{M}(K)$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *$\mathcal{A}$ σχετικώς w-συμπαγές.*

(ii) *$\mathcal{A}$ ομοιόμορφα κανονικό.*

(iii) *Για κάθε ακολουθία $(B_n)_{n=1}^\infty$ ξένων ανά δύο Borel συνόλων στο K και για κάθε ακολουθία $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ στο $\mathcal{A}$,*
$$\lim_{n\to\infty} |\mu_n|(B_n) = 0.$$

(iv) *Για κάθε ακολουθία $(U_n)_{n=1}^\infty$ ξένων ανά δύο συνόλων ανοικτών στο K και για κάθε ακολουθία $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ στο $\mathcal{A}$,*
$$\lim_{n\to\infty} \mu_n(U_n) = 0.$$

(v) *Για κάθε ακολουθία $(U_n)_{n=1}^\infty$ ξένων ανά δύο συνόλων ανοικτών στο K και για κάθε ακολουθία $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ στο $\mathcal{A}$,*
$$\lim_{n\to\infty} |\mu_n|(U_n) = 0.$$

Παρατήρηση 3.4.3. Το θεώρημα ισχύει και για μιγαδικά μέτρα, όμως εμείς για ευκολία θα το αποδείξουμε για πραγματικά (προσημασμένα) μέτρα.

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.2. (iii) $\Longrightarrow$ (iv) Άμεσο αφού κάθε ανοικτό σύνολο είναι Borel και
$$|\mu_n(U_n)| \leqslant |\mu_n|(U_n) \longrightarrow 0.$$

(iv) $\Longrightarrow$ (v) Έστω για άτοπο ότι δεν ισχύει το (iv). Δηλαδή, υπάρχει ακολουθία $(U_n)_{n=1}^\infty$ ανοικτών ξένων ανά δύο συνόλων και ακολουθία κανονικών προσημασμένων μέτρων $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ στο $\mathcal{A}$ τέτοια ώστε $|\mu_n|(U_n) \not\to 0$. Για κάθε n γράφουμε $\mu_n = \mu_n^+ - \mu_n^-$, οπότε $|\mu_n| = \mu_n^+ + \mu_n^-$. Επομένως, είτε $\mu_n^+(U_n) \not\to 0$ ή $\mu_n^-(U_n) \not\to 0$.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\mu_n^+(U_n) \not\to 0$. Επομένως, υπάρχουν $\delta > 0$ και υπακολουθία $(\mu_{k_n}^+(U_{k_n}))_{n=1}^\infty$ της $(\mu_n^+(U_n))_{n=1}^\infty$ ώστε $\mu_{k_n}^+(U_{k_n}) \geqslant \delta > 0$ για κάθε $n \geqslant 1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας θεωρούμε ότι αυτό ισχύει για ολόκληρη την ακολουθία, δηλαδή $\mu_n^+(U_n) \geqslant \delta > 0$ για κάθε $n \geqslant 1$.

Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα διάσπασης Hahn, υπάρχει $P_n \in \mathcal{B}(K)$ τέτοιο ώστε $\mu_n^+(U_n) = \mu_n(U_n \cap P_n)$. Θέτουμε $B_n := U_n \cap P_n \in \mathcal{B}(K)$. Τότε, $\mu_n(B_n) \geqslant \delta$ για κάθε $n \geqslant 1$. Όμως, το μ_n είναι κανονικό, άρα το μ_n^- είναι κανονικό και $\mu_n^-(B_n) = \inf\{\mu_n^-(G) : G \text{ ανοικτό}, B_n \subseteq$

$G\}$, άρα υπάρχει ανοικτό $G_n \supseteq B_n$ τέτοιο ώστε $\mu_n^-(G_n) \leqslant \frac{\delta}{2}$. Θέτουμε $O_n := G_n \cap U_n$ που είναι ανοικτό και $B_n \subseteq O_n \subseteq U_n$ με $\mu_n^-(O_n) \leqslant \mu_n^-(G_n) \leqslant \frac{\delta}{2}$ άρα

$$\mu_n(O_n) = \mu_n^+(O_n) - \mu_n^-(O_n) \geqslant \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2}$$

αφού $\mu_n^+(B_n) \geqslant \delta$. Άρα η $(O_n)_{n=1}^\infty$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο ανοικτών συνόλων με την ιδιότητα ότι η $(\mu_n(O_n))_{n=1}^\infty$ δεν συγκλίνει στο 0, το οποίο είναι άτοπο από την υπόθεση (iv).

(v) $\Longrightarrow$ (ii) Έστω για άτοπο ότι το $\mathcal{A}$ δεν είναι ομοιόμορφα κανονικό. Τότε υπάρχει ανοικτό $U \subseteq K$ και $\delta > 0$ ώστε

(3.4.1) για κάθε $H \subseteq K$ συμπαγές υπάρχει $\mu \in \mathcal{A} :\ |\mu|(U \setminus H) > \delta,$

δηλαδή για κάθε συμπαγές $H \subseteq K$ έχουμε

$$\sup_{\mu \in \mathcal{A}} |\mu|(U \setminus H) > \delta.$$

Προκειμένου να καταλήξουμε σε άτοπο αρκεί να κατασκευάσουμε επαγωγικά ακολουθία $(V_n)_{n=1}^\infty$ ξένων ανοικτών υποσυνόλων του K και ακολουθία $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ τέτοια ώστε $|\mu_n|(V_n) > \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Τότε $|\mu_n|(V_n) \not\to 0$, το οποίο είναι άτοπο από την (v).

Εφαρμόζουμε την (3.4.1) για $H_0 = \varnothing \subseteq K$. Τότε υπάρχει $\mu_1 \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $|\mu_1|(U \setminus H_0) > \delta$, δηλαδή $|\mu_1|(U) > \delta$. Όμως το μ_1 είναι κανονικό, άρα το $|\mu_1|$ είναι κανονικό, άρα από εσωτερική κανονικότητα υπάρχει συμπαγές $F_1 \subseteq U \setminus H_0$ τέτοιο ώστε $|\mu_1|(F_1) > \delta$. Το F_1 είναι κλειστό και αγού ο K είναι συμπαγής και Hausdorff είναι T_4, συνεπώς αφού $F_1 \subseteq U \setminus H_0$, το F_1 είναι κλειστό και το $U \setminus H_0$ είναι ανοικτό, υπάρχει ανοικτό V_1 τέτοιο ώστε

$$F_1 \subseteq V_1 \subseteq \overline{V_1} \subseteq U \setminus H_0.$$

Εφαρμόζουμε την (3.4.1) για $H_1 := \overline{V_1} \subseteq K$ (το $\overline{V_1}$ είναι συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο συμπαγούς). Υπάρχει $\mu_2 \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $|\mu_2|(U \setminus H_1) > \delta$. Το μ_2 είναι κανονικό, άρα το $|\mu_2|$ είναι κανονικό. Συνεπώς, υπάρχει συμπαγές $F_2 \subseteq U \setminus H_1$ τέτοιο ώστε $|\mu_2|(F_2) > \delta$. Ο K είναι T_4, το F_2 είναι κλειστό, το $U \setminus H_1 = U \cap H_1^c$ είναι ανοικτό και $F_2 \subseteq U \setminus H_1$, άρα υπάρχει V_2 ανοικτό τέτοιο ώστε

$$F_2 \subseteq V_2 \subseteq \overline{V_2} \subseteq U \setminus H_1.$$

Εφαρμόζουμε την (3.4.1) για το $H_2 = \overline{V_1} \cup \overline{V_2}$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο επαγωγικά. Έτσι έχουμε ακολουθία $(V_n)_{n=1}^\infty \subseteq K$ ανοικτών συνόλων και $(\mu_n)_{n=1}^\infty \subseteq \mathcal{A}$ με $|\mu_n|(V_n) \geqslant |\mu_n|(F_n) > \delta$. Τέλος, τα V_n είναι ξένα ανά δύο, αφού για κάθε n ισχύει $\overline{V_n} \subseteq U \setminus (\overline{V_1} \cup \cdots \cup \overline{V_{n-1}})$, δηλαδή $\overline{V_n} \cap \overline{V_n} = \varnothing$ για κάθε $m < n$, άρα η $(\overline{V_n})_{n=1}^\infty$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων, άρα και η $(V_n)_{n=1}^\infty$ είναι ακολουθία ξένων ανά δύο συνόλων.

Έτσι καταλήγουμε σε αυτό που θέλαμε καιέχουμε άτοπο από το (ii).

(ii) $\Longrightarrow$ (i) Έστω $\mathcal{A}$ ομοιόμορφα κανονικό. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι σχετικώς w-συμπαγές. Από το θεώρημα Eberlein-Smulian, αρκεί να δείξουμε ότι το $\mathcal{A}$ είναι σχετικώς w-ακολουθιακά συμπαγές. Έστω $(\mu_n) \subseteq \mathcal{A}$ ακολουθία. Πάλι από το θεώρημα Eberlein-Smulian, αρκεί να δείξουμε ότι το $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι σχετικώς w-συμπαγές.

Θέτουμε $\mu := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}|\mu_n|$. Αφού κάθε μ_n είναι πεπερασμένο μέτρο, το μ είναι πεπερασμένο μέτρο στην $\mathcal{B}()$. Επίσης, $\mu_n \ll \mu$ αφού $|\mu_n| \ll \mu$. Από το θεώρημα Radon-Nikodym, για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχει $f_n = \frac{d\mu_n}{d\mu}$ τέτοια ώστε $\mu_n(A) = \int_A f_n\, d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$. Τότε,

$$|\mu_n|(A) = \int_A |f_n|\, d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$, άρα

$$\|\mu_n\| = |\mu_n|(K) = \int_K |f_n|\, d\mu = \|f_n\|_1.$$

Έστω $\mathcal{N}(K)$ ο κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{M}(K)$ που αποτελείται από τα κανονικά προσημασμένα μέτρα που είναι απόλυτα συνεχή ως προς μ. Ορίζουμε τον ισομετρικό ισομορφισμό $L_1(\mu) \to \mathcal{N}(K)$ με $f \mapsto \mu_f$, όπου

$$\mu_f(A) = \int_A f\, d\mu.$$

[Πράγματι, $\|\mu_f\| = \|f\|_1$ και για το επί χρησιμοποιούμε το θεώρημα Radon-Nikodym.] Η f_n απεικονίζεται στο μ_n, αφού $f_n = \frac{d\mu_n}{d\mu}$. Επομένως, το να δείξουμε ότι το $\{\mu_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι σχετικώς w-συμπαγές είναι ισοδύναμο με το να δείξουμε ότι το $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι σχετικώς w-συμπαγές. Από το Θεώρημα 3.3.10 για το τελευταίο αρκεί να δείξουμε ότι η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Έστω για άτοπο ότι η (f_n) δεν είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Τότε, υπάρχει $\varepsilon > 0$ ώστε για κάθε $n \in \mathbb{N}$ να υπάρχει U_n ανοικτό τέτοιο ώστε $\mu(U_n) < \frac{1}{2^n}$ και $\sup_k \int_{U_n} |f_k|\, d\mu > \varepsilon$. Θέτουμε $V_n := \bigcup_{k>n} U_k$. Τότε η (V_n) είναι φθίνουσα ακολουθία ανοικτών συνόλων με

$$\mu(V_n) \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \mu(U_k) < \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2^n}$$

και $V_n \supseteq U_n$ άρα

$$\sup_k \int_{V_n} |f_k|\, d\mu > \varepsilon \tag{3.4.2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Το $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα κανονικό, άρα υπάρχει συμπαγές $E_n \subseteq V_n$ τέτοιο ώστε $|\mu_k|(V_n \setminus E_n) < \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}$ για κάθε k, όπου $|f_k| = \frac{d|\mu_k|}{d\mu}$, άρα

$$\sup_k \int_{V_n \setminus E_n} |f_k|\, d\mu = \sup_k |\mu_k|(V_n \setminus E_n) \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} < \frac{\varepsilon}{2^{n+2}}.$$

Προφανώς, αφού $E_n \subseteq V_n$,

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leqslant \mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n\right) \leqslant \frac{1}{2^n} \to 0,$$

δηλαδή $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n\right) = 0$. Το $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n$ είναι κλειστό ως τομή συμπαγών, άρα το $\left(\bigcap_n E_n\right)^c$ είναι ανοικτό, και αφού το $\mathcal{A}$ είναι ομοιόμορφα κανονικό υπάρχει συμπαγές $H \subseteq \left(\bigcap_n E_n\right)^c$ τέτοιο ώστε $\nu\left(\left(\bigcap_n E_n\right)^c \setminus H\right) < \frac{\varepsilon}{2}$ για κάθε $\nu \in \mathcal{A}$. Θεωρούμε το $W := H^c = K \setminus H$ που είναι ανοικτό, και έχουμε $\bigcap_n E_n \subseteq W$ και

$$\nu\left(W \setminus \bigcap_n E_n\right) = \nu\left(H^c \cap \left(\bigcap_n E_n\right)^c\right) = \nu\left(\left(\bigcap_n E_n\right)^c \setminus H\right) < \frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $\nu \in \mathcal{A}$. Άρα,

$$\sup_k |\mu_k| \left(W \setminus \bigcap_n E_n \right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Όμως $|\mu_k| \ll \mu$ και $\mu\left(\bigcap_n E_n\right) = 0$, άρα $|\mu_k|\left(\bigcap_n E_n\right) = 0$ για κάθε k. Άρα, $\sup_k |\mu_k|(W) < \frac{\varepsilon}{2}$, δηλαδή

$$\sup_k \int_W |f_k| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ισχύει $H \subseteq \bigcup_n E_n^c$, και κάθε E_n^c είναι ανοικτό. Δηλαδή, η $(E_n^c)_{n=1}^\infty$ είναι ανοικτό κάλυμμα του συμπαγούς H. Άρα, υπάρχει πεπερασμένο υποκάλυμμα. Δηλαδή, υπάρχει $N \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $H \subseteq \bigcap_{i=1}^N E_i^c$, άρα $\bigcap_{i=1}^N E_i \subseteq W$, και συνεπώς

$$\int_{\bigcap_{i=1}^N E_i} |f_k| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε k. Τώρα, αφού η (V_n) είναι φθίνουσα,

$$\begin{aligned} V_{N+1} &= \left(\bigcap_{n=1}^N E_n \right) \cup \left(V_{N+1} \setminus \bigcap_{n=1}^N E_n \right) = \left(\bigcap_{n=1}^N E_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^N (V_{N+1} \setminus E_n) \right) \\ &\subseteq \left(\bigcap_{n=1}^N E_n \right) \cup \left(\bigcup_{n=1}^N (V_n \setminus E_n) \right). \end{aligned}$$

Έτσι,

$$\int_{V_{N+1}} |f_k| \, d\mu \leqslant \int_{\bigcap_{n=1}^N E_n} |f_k| \, d\mu + \sum_{n=1}^N \int_{V_n \setminus E_n} |f_k| \, d\mu < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^N \frac{\varepsilon}{2^{k+1}} < \varepsilon,$$

άρα

$$\sup_k \int_{V_{N+1}} |f_k| \, d\mu < \varepsilon,$$

το οποίο είναι άτοπο από την (3.4.2).

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.4.2 μένει να δείξουμε ότι (i) $\Longrightarrow$ (iii).

(i) $\Longrightarrow$ (iii) Έστω $(B_n)_{n=1}^\infty$ τυχούσα ακολουθία ξένων Borel συνόλων στο K και έστω $(\mu_n)_{n=1}^\infty$ αυθαίρετη ακολουθία προσημασμένων μέτρων στο $\mathcal{A}$. Θέτουμε

$$\mu := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{2^n} |\mu_n|,$$

οπότε $\mu_n \ll \mu$ και το μ είναι πεπερασμένο μέτρο.

Όπως είδαμε και πριν, από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχουν $g_n \in L_1$ τέτοιες ώστε $g_n = \frac{d\mu_n}{d\mu}$, δηλαδή $\mu_n(A) = \int_A g_n \, d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$.

Λόγω του ισομετρικού ισομορφισμού που ορίσαμε πριν, αν το $\mathcal{A}$ είναι σχετικώς w-συμπαγές στον $\mathcal{M}(K)$ τότε η $(g_n)_{n=1}^\infty$ είναι σχετικώς w-συμπαγής στον $L_1(K, \mu)$, άρα ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Τώρα, αφού η (B_n) είναι ακολουθία ξένων συνόλων, έχουμε

$$\sum_{n=1}^\infty \mu(B_n) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^\infty B_n \right) \leqslant \mu(K) < \infty,$$

άρα $\mu(B_n) \to 0$. Η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη, άρα

$$|\mu_n|(B_n) = \int_{B_n} |g_n|\, d\mu \longrightarrow 0$$

καθώς το $n \to \infty$. □

3.5 Η ιδιότητα Dunford-Pettis

Ορισμός 3.5.1. Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Λέμε ότι ο T είναι Dunford-Pettis (D-P) τελεστής (ή πλήρως συνεχής) αν και μόνο αν για κάθε w-συμπαγές $W \subseteq X$ ισχύει ότι το $T(W)$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές υποσύνολο του Y.

Υπενθυμίζουμε ότι ο $T : X \to Y$ λέγεται συμπαγής αν το $T(B_X)$ είναι σχετικώς συμπαγές στον Y. Ισοδύναμα, αν για κάθε φραγμένο $B \subseteq X$ το $T(B)$ είναι σχετικώς συμπαγές υποσύνολο του Y, δηλαδή το $\overline{T(B)}^{\|\cdot\|}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του Y.

Άρα, αν ο $T : X \to Y$ είναι συμπαγής τότε ο T είναι Dunford-Pettis τελεστής. Πράγματι, αν θεωρήσουμε ένα w-συμπαγές $W \subseteq X$ τότε το W είναι $\|\cdot\|$-φραγμένο, και αφού ο T είναι συμπαγής το $\overline{T(W)}^{\|\cdot\|}$ είναι συμπαγές (το $T(W)$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστό, διότι είναι w-κλειστό αφού είναι w-συμπαγές ως συνεχής εικόνα w-συμπαγούς.

Παρατήρηση 3.5.2. Έστω X αυτοπαθής χώρος Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο T είναι Dunford-Pettis τελεστής.

Απόδειξη. Έχουμε δει την κατεύθυνση ($\Longrightarrow$) χωρίς την υπόθεση της αυτοπάθειας. Για την αντίστροφη κατεύθυνση παρατηρούμε ότι αφού ο X είναι αυτοπαθής η B_X είναι w-συμπαγής, οπότε αν ο T είναι Dunford-Pettis τότε το $T(B_X)$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές άρα και σχετικώς $\|\cdot\|$-συμπαγές. Έπεται ότι ο T είναι συμπαγής. □

Πρόταση 3.5.3. *Έστω X, Y χώροι Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ο T είναι Funford-Pettis τελεστής αν και μόνο αν ο T είναι $((X, w), (Y, \|\cdot\|))$-ακολουθιακά συνεχής, δηλαδή αν για κάθε ακολουθία (x_n) με $x_n \xrightarrow{w} x$ ισχύει ότι $T(x_n) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x)$.*

Υπενθυμίζουμε ότι σε τοπολογικούς χώρους η συνέχεια χαρακτηρίζεται από δίκτυα και όχι ακολουθίες. Δηλαδή, αν $f : (X, \mathcal{T}) \to (\mathcal{Y}, \mathcal{S})$ συνάρτηση τότε η ακολουθιακή συνέχεια της f δεν συνεπάγεται απαραίτητα την συνέχεια της f, ενώ το αντίστροφο ισχύει πάτα.

Απόδειξη της Πρότασης 3.5.3. ($\Longrightarrow$) Έστω $T : X \to Y$ Dunford-Pettis τελεστής και (x_n) ακολουθία στον X με $x_n \xrightarrow{w} 0$. Υποθέτουμε για άτοπο ότι $\|T(x_n)\| \not\to 0$. Τότε υπάρχει $\delta > 0$ και υπακολουθία $(T(x_{k_n}))_{n=1}^{\infty}$ της $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\|T(x_{k_n})\| \geqslant \delta > 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Θέτουμε $W := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$. Αφού $x_n \xrightarrow{w} 0$, το W είναι w-συμπαγές και αφού ο T είναι Dunford-Pettis το $T(W)$ ίναι $\|\cdot\|$-συμπαγές, άρα $\|\cdot\|$-ακολουθιακά συμπαγές, άρα υπάρχει υπακολουθία $(T_{x_{k_{\lambda_n}}})_{n=1}^{\infty}$ της $(T(x_{k_n}))_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $T(x_{k_{\lambda_n}}) \xrightarrow{w} y$. Όμως ο T ίναι φραγμένος, άρα ο T ίναι $(\|\cdot\|, \|\cdot\|)$-συνεχής, συνεπώς και $(\text{weak}, \text{weak})$-συνεχής. Έχουμε $x_n \xrightarrow{w} 0$, άρα $x_{k_{\lambda_n}} \xrightarrow{w} 0$, άρα $T(x_{k_{\lambda_n}}) \xrightarrow{w} T(0) = 0$. Συνεπώς, $y = 0$ και $\|T(x_{k_{\lambda_n}})\| \to 0$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\|T(x_{k_n})\| \geqslant \delta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

($\Longleftarrow$) Έστω T $((X,w),(Y,\|\cdot\|))$-ακολουθιακά συνεχής. Θα δείξουμε ότι ο T είναι τελεστής Dunford-Pettis. Έστω W w-συμπαγές υποσύνολο του Y. Αρκεί να δείξουμε ότι το $T(W)$ είναι $\|\cdot\|$-(ακολουθιακά) συμπαγές. Έστω $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στο $T(W)$. Τότε, η (x_n) είναι ακολουθία στο w-συμπαγές W, το οποίοισοδύναμα (από το θεώρημα Eberlein) είναι w-ακολουθιακά συμπαγές, άρα υπάρχει υπακολουθία (x_{k_n}) της (x_n) τέτοια ώστε $x_{k_n} \xrightarrow{w} x$ για κάποιο $x \in X$. Από την υπόθεση ο T είναι $(w,\|\cdot\|)$-ακολουθιακά συνεχής, άρα $T(x_{k_n}) \xrightarrow{\|\cdot\|} T(x)$. Η $(T(x_{k_n}))_{n=1}^{\infty}$ είναι συγκλίνουσα υπακολουθία της $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$, άρα το $T(W)$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές στον Y. □

Ορισμός 3.5.4. Έστω X χώρος Banach. Λέμε ότι ο X έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis (D-P) αν και μόνο αν για κάθε χώρο Banach Y και κάθε w-συμπαγή τελεστή $T : X \to Y$ ο T είναι Dunford-Pettis ελεστής.

Παράδειγμα 3.5.5. Οι c_0 και ℓ_1 έχουν την ιδιότητα Dunford-Pettis.

Απόδειξη. Έστω Y χώρος Banach και $T : c_0 \to Y$ w-συμπαγής τελεστής. Όπως έχουμε δει (Θεώρημα 3.6.2) αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι ο $T : c_0 \to Y$ είναι συμπαγής. Άρα ο T είναι Dunford-Pettis τελεστής.

Όσον αφορά τον ℓ_1, έχουμε δει ότι ο ℓ_1 είναι χώρος Schur. Άρα, από το Θεώρημα 3.1.6, ένα υποσύνολο W του X είναι w-συμπαγές αν είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές. Άρα, ο T είναι Dunford-Pettis τελεστής, αφού είναι (weak, weak)-συνεχής. □

Αντίθετα, αν ο X είναι απειροδιάστατος αυτοπαθής χώρος Banach τότε ο X δεν έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis.

Απόδειξη. Ξέρουμε ότι η B_X δεν είναι $\|\cdot\|$-συμπαγής, αφού ο X είναι απειροδιάστατος. Ο X είναι αυτοπαθής, άρα η B_X είναι w-συμπαγής. Άρα, ο $I : X \to X$ δεν είναι Dunford-Pettis τελεστής. Άρα ο X δεν έχει την ιδιότητα τλΔυνφορδ-Πεττις (αφού από το θεώρημα Alaoglu η $(B_{X^{**}}, w^*)$ είναι συμπαγής και $(X,w) = (X^{**}, w^*)$ για αυτοπαθείς χώρους X). □

Πριν προχωρήσουμε παρακάτω θα χρειαστεί να θυμηθούμε τον ορισμό του συζυγούς ενός τελεστή και τις ιδιότητές του.

Ορισμός 3.5.6. Έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Ορίζουμε τον συζυγή τελεστή του T ως εξής: $T^* : Y^* \to X^*$ με $y^* \mapsto y^* \circ T$.

Αν ο T είναι φραγμένος τότε ο T^* είναι επίσης φραγμένος και $\|T^*\| = \|T\|$.

Θεώρημα 3.5.7 (Gantmacher)**.** *Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Ο T είναι w-συμπαγής αν και μόνο αν ο δισυζυγής $T^{**} : X^{**} \to Y^{**}$ έχει εικόνα $T^{**}(X^{**}) \subseteq Y$.*

(ii) *Ο T είναι w-συμπαγής αν και μόνο αν ο $T^* : Y^* \to X^*$ είναι $((Y^*, w^*), (X^*, w))$-συνεχής.*

(iii) *Ο T είναι w-συμπαγής αν και μόνο αν ο T^* είναι w-συμπαγής.*

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Θεώρημα 3.5.8. *Έστω X χώρος Banach. Ο X έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis αν και μόνο αν για κάθε ακολουθία (x_n) στον X με $x_n \xrightarrow{w} 0$ και για κάθε ακολουθία (f_n) στον X^* με $f_n \xrightarrow{w} 0$ ισχύει $f_n(x_n) \xrightarrow{|\cdot|} 0$.*

Απόδειξη. ($\Longleftarrow$) Έστω Y χώρος Banach και $T : X \to Y$ w-συμπαγής τελεστής. Θα δείξουμε ότι ο T είναι τελεστής Dunford-Pettis. Έστω για άτοπο ότι ο T δεν είναι Dunford-Pettis. Τότε υπάρχει ακολουθία (x_n) στον X τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{w} 0$ αλλά $\|T(x_n)\| \not\to 0$ (από την Πρόταση 3.5.3) άρα υπάρχουν $\delta > 0$ και υπακολουθία $(T(x_{k_n}))_{n=1}^{\infty}$ της $(T(x_n))_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $\|T(x_{k_n})\| \geqslant \delta > 0$ για κάθε n.

Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\|T(x_n)\| \geqslant \delta > 0$ για κάθε n. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχουν $f_n \in Y^*$ τέτοια ώστε $f_n(T(x_n)) = \|T(x_n)\|$ και $\|f_n\| = 1$. Αφού ο $T : X \to Y$ είναι w-συμπαγής, από το θεώρημα Gantmacher ο $T : Y^* \to X^*$ είναι w-συμπαγής. Η ακολουθία $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq Y^*$ ικανοποιεί την $\|f_n\| = 1$ για κάθε n. Έτσι, $(T^*(f_n))_{n=1}^{|infty} \subseteq T^*(B_{Y^*})$, όπου $\overline{T^*(B_{Y^*})}$ w-συμπαγές, άρα w-ακολουθιακά συμπαγές από το θεώρημα Eberlein. Άρα, υπάρχει υπακολουθία $(T^*(f_{k_n}))_{n=1}^{\infty}$ της $(T^*(f_n))_{n=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $T^*(f_{k_n}) \xrightarrow{w} x^* \in X^*$. Αφού $x_{k_n} \xrightarrow{w} 0$, συμπεραίνουμε ότι $(T^*(f_{k_n}) - x^*)(x_{k_n}) \to 0$.

Τώρα, αφού $x_{k_n} \xrightarrow{w} 0$ έχουμε $x^*(x_{k_n}) \to 0$, άρα

$$T^*(f_{k_n})(x_{k_n}) = (T^*(f_{k_n}) - x^*)(x_{k_n}) + x^*(x_{k_n}) \to 0.$$

Όμως $T^*(f_{k_n})(x_{k_n}) = (f_{k_n} \circ T)(x_{k_n}) = \|T(x_{k_n})\|$, άρα $\|T(x_{k_n})\| \to 0$, το οποίο είναι άτοπο αφού $\|T(x_{k_n})\| \geqslant \delta$ για κάθε n.

($\Longrightarrow$) Έστω τώρα (x_n) ακολουθία στον X τέτοια ώστε $x_n \xrightarrow{w} 0$ και (f_n) ακολουθία στον X^* τέτοια ώστε $f_n \xrightarrow{w} 0$. Ξέρουμε ότι ο X έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis. Θα δείξουμε ότι $f_n(x_n) \to 0$.

Ορίζουμε $T : X \to c_0$ με $T(x) = (f_n(x))_n \in c_0$ (αφού $f_n \xrightarrow{w} 0$, έχουμε $f_n \xrightarrow{w^*} 0$, άρα $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in X$). Ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|T\| \leqslant \sup_n \|f_n\|$. το οποίο υπάρχει αφού η (f_n) είναι φραγμένη ως w-συγκλίνουσα. Έτσι, ορίζεται ο συζυγής τελεστής $T^* : \ell_1 \to X^*$ με $\|T^*\| = \|T\|$ (χρησιμοποιούμε εδώ το γεγονός ότι $c_0^* \simeq \ell_1$). Έστω (e_k) η κανονική βάση Schauder του ℓ_1. Τότε, $T^*(e_k) = f_k$ για κάθε k (αφού $T^*(e_k)(x) = e_k(T(x)) = f_k(x)$ για κάθε k). Άρα,

$$T^*(B_{\ell_1}) \subseteq \mathrm{conv}(\{f_k : k \in \mathbb{N}\}),$$

και από το θεώρημα Mazur έπεται ότι

$$\overline{T^*(B_{\ell_1})}^{w} \subseteq \overline{\mathrm{conv}(\{f_k : k \in \mathbb{N}\})}^{w} = \overline{\mathrm{conv}(\{f_k : k \in \mathbb{N}\})}^{\|\cdot\|},$$

το οποίο είναι w-συμπαγές ως κλειστή κυρτή θήκη του w-συμπαγούς συνόλου $\{f_k : k \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ (αφού $f_k \xrightarrow{w} 0$). Χρησιμοποιούμε εδώ το γεγονός ότι αν X είναι πλήρης μετρικός τοπικά κυρτός χώρος τότε για κάθε συμπαγές $K \subseteq X$ έχουμε και ότι το $\overline{\mathrm{conv}(K)}$ είναι συμπαγές.

Άρα, το $\overline{T^*(B_{\ell_1})}^{w}$ είναι w-συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο w-συμπαγούς συνόλου. Άρα, ο T^* είναι w-συμπαγής και από το θεώρημα Gantmacher ο T είναι w-συμπαγής. Αφού ο T είναι w-συμπαγής και ο X έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis, ο T είναι τελεστής Dunford-Pettis. Τότε, αφού $x_n \xrightarrow{w} 0$, από την Πρόταση 3.5.3 έχουμε ότι $\|T(x_n)\|_\infty \to 0$. Τότε,

$$|f_n(x_n)| \leqslant \sup_k |f_k(x_n)| = \|T(x_n)\|_\infty \to 0,$$

άρα $\lim_{n\to\infty} f_n(x_n) = 0$. $\square$

Ακολουθεί το κύριο θεώρημα της παραγράφου.

Θεώρημα 3.5.9 (θεώρημα Dunford-Pettis). (i) *Αν μ είναι σ-πεπερασμένο μέτρο τότε ο $L_1(\mu)$ έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis.*

(ii) *Αν K είναι συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος τότε ο $C(K)$ έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis.*

Απόδειξη. (ii) Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $C(K)$ με $f_n \xrightarrow{w} 0$ και $(\mu_n)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στον $\mathcal{M}(K) \simeq C(K)^*$ με $\mu_n \xrightarrow{w} 0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας (διαιρώντας με $\sup_n \|f_n\|$ και $\sup_n \|\mu_n\|$ αντίστοιχα) υποθέτουμε ότι $f_n \in B_{C(K)}$ και $\mu_n \in B_{\mathcal{M}(K)}$ για κάθε n. Τότε μπορούμε να ορίσουμε το θετικό πεπερασμένο μέτρο

$$\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n}\mu_n.$$

Τότε, $|\mu_n| \ll \nu$ για κάθε n, άρα $\mu_n \ll \nu$ για κάθε n. Από το θεώρημα Radon-Nikodym υπάρχουν οι $g_n = \frac{d\mu_n}{d\nu} \in L_1(K, \mathcal{B}(K), \nu)$ με $d\mu_n = g_n d\nu$, δηλαδή για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$ ισχύει $\mu_n(A) = \int_A g_n d\nu$. Ειδικότερα, $|\mu_n|(A) = \int_A |g_n| d\nu$, άρα

$$\|\mu_n\| = |\mu_n|(K) = \int_K |g_n|\, d\nu.$$

Όπως έχουμε ξαναδεί στα προηγούμενα, ορίζεται ο ισομετρικός ισομορφισμός $L_1(\nu) \to \mathcal{N}(K) := \{\mu \in \mathcal{M}(K) : \mu \ll \nu\} \leqslant \mathcal{M}(K)$ (κλειστός υπόχωρος του $\mathcal{M}(K)$) με $f \mapsto \mu_f$, όπου $\mu_f(A) := \int_A f\, d\mu_f$ για κάθε $A \in \mathcal{B}(K)$, και ειδικότερα $g_n \mapsto \mu_n$.

Τώρα, αφού η (μ_n) είναι w-μηδενική, η (g_n) θα είναι w-μηδενική. Άρα το σύνολο $\{g_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$ είναι w-συμπαγές στον $L_1(\nu)$. Επειδή $\overline{\{g_n : n \in \mathbb{N}\}}^w = \{g_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{0\}$, παίρνουμε ότι το $\{g_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι σχετικώς w-συμπαγές στον $L_1(\nu)$, άρα από το Θεώρημα 3.3.10 η $(g_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη.

Έστω $M > 0$. Έχουμε $f_n \xrightarrow{w} 0$ και $g_n \xrightarrow{w} 0$, άρα $f_n g_n \xrightarrow{w} 0$. Παρατηρήστε ότι $f_n \in C(K)$ ενώ $g_n \in L_1(\nu)$, δηλαδή οι ασθενείς τοπολογίες αυτών των δύο χώρων είναι διαφορετικές εν γένει. Εδώ όμως $\|f_n\| \leqslant 1$ και $\nu(K) < \infty$, άρα $\int_K |f_n|\, d\nu < \infty$, δηλαδή $f_n \in L_1(K, \mathcal{B}(K), \nu)$. Άρα, όταν γράφουμε $f_n g_n \xrightarrow{w} 0$ αναφερόμαστε στην weak τοπολογία του $L_1(\nu)$.

Τώρα, αφού $f_n g_n \xrightarrow{w} 0$, έχουμε $f_n g_n \to 0$ κατά σημείο. [Πράγματι, αν $h_n \xrightarrow{w} 0$ έχουμε $h_n \to 0$ κατά σημείο. Έστω $t \in K$. Θεωρούμε το $\delta_t \in L_1^*$ με $\delta_t(h) = h(t)$. Αφού $h_n \xrightarrow{w} 0$, έχουμε $\delta_t(h_n) \to \delta_t(0)$, δηλαδή $h_n(t)]to0$.]

Έτσι έχουμε $f_n g_n \chi_{\{|g_n| \leqslant M\}} \to 0$ κατά σημείο και

$$|f_n g_n \chi_{\{|g_n| \leqslant M\}}| \leqslant \|f_n\| \cdot M \cdot 1 \leqslant M \in L_1(\nu).$$

Το ν είναι πεπερασμένο μέτρο, άρα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\{|g_n| \leqslant M\}} f_n g_n\, d\nu = \lim_{n\to\infty} \int f_n g_n \chi_{\{|g_n| \leqslant M\}} d\nu = 0.$$

Τώρα:

$$\begin{aligned}\left|\int_K f_n g_n d\nu\right| &\leqslant \left|\int_{\{|g_n|\leqslant M\}} f_n g_n d\nu\right| + \left|\int_{\{|g_n|>M\}} f_n g_n d\nu\right| \\ &\leqslant \left|\int_{\{|g_n|\leqslant M\}} f_n g_n d\nu\right| + \sup_n \left|\int_{\{|g_n|>M\}} f_n g_n d\nu\right|,\end{aligned}$$

άρα

$$\begin{aligned}\limsup_n \left|\int_K f_n g_n d\nu\right| &\leqslant \lim_n \left|\int_{\{|g_n|\leqslant M\}} f_n g_n d\nu\right| + \sup_n \left|\int_{\{|g_n|>M\}} g_n d\nu\right| \\ &= \sup_n \left|\int_{\{|g_n|>M\}} g_n d\nu\right|\end{aligned}$$

αφού το πρώτο όριο στο δεξιό μέλος είναι ίσο με 0 $|f_n| \leqslant \|f_n\| \leqslant 1$. Αφήνοντας το $M \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\lim_{M\to+\infty} \sup_n \left|\int_{\{|g_n|>M\}} g_n d\nu\right| = 0$$

διότι η (g_n) είναι ομοιόμορφα ολοκληρώσιμη. Άρα,

$$\lim_{n\to\infty} \int f_n g_n d\nu = 0.$$

Όμως $g_n d\nu = d\mu_n$ (αφού $g_n = \frac{d\mu_n}{d\nu}$) άρα $\lim\limits_n \int f_n d\mu_n = 0$.

Δείξαμε ότι αν $f_n \xrightarrow{w} 0$ και $\mu_n \xrightarrow{w} 0$ τότε $\int f_n d\mu_n \to 0$. Θα εξηγήσουμε τώρα ότι αυτό σημαίνει ότι ο $C(K)$ έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis.

Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε τον ισομετρικό ισομορφισμό $\mathcal{M}(K) \to C(K)^*$, με $\mu \mapsto I_\mu : C(K) \to \mathbb{R}$, όπου

$$f \mapsto I_\mu(f) := \int_K f\, d\mu.$$

Άρα, ισοδύναμα, δείξαμε ότι αν $f_n \xrightarrow{w} 0$ και $I_{\mu_n} \xrightarrow{w} 0$ τότε $I_{\mu_n}(f_n) \to 0$. Δηλαδή, αν $f_n \xrightarrow{w} 0$ και $f_n^* \xrightarrow{w} 0$ τότε $f_n^*(f_n) \to 0$. Από το Θεώρημα 3.5.8 έπεται τώρα ότι ο $C(K)$ έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis.

(i) Έστω μ σ-πεπερασμένο. Τότε $L_1(\mu)^* \simeq L_\infty(\mu)$, όπου ο $L_\infty(\mu)$ μπορεί να θεωρηθεί ως χώρος $C(K)$ για κατάλληλο K συμπαγή Hausdorff τοπολογικό χώρο.

Στην απόδειξη του μέρους (ii) είδαμε ότι αν (g_n) w-συμπαγής στον $C(K)$ με $g_n \xrightarrow{w} 0$ και (f_n) w-συμπαγής στον $L_1(\mu)$ με $f_n \xrightarrow{w} 0$, τότε $\int f_n g_n\, d\mu \to 0$. Ακριβώς όμοια, αν (f_n) w-μηδενική στον $L_1(\mu)$ και (g_n) w-μηδενική στον $L_\infty(\mu)$ τότε $\int f_n g_n\, d\mu \to 0$, όπου έχουμε τον ισομετρικό ισομορφισμό $L_\infty \to L_1^*$, με $g \mapsto S(g) : L_1 \to \mathbb{R}$, όπου

$$f \mapsto \int fg\, d\mu.$$

Δηλαδή αν $(f_n) \subset L_1$, $f_n \xrightarrow{w} 0$, $(S(g_n)) \subset L_1^*$, $S(g_n) \xrightarrow{w} 0$, τότε $S(g_n)(f_n) \to 0$. Άρα, ο $L_1(\mu)$ έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis. $\square$

Πόρισμα 3.5.10. *Αν K είναι συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος, τότε ο $\mathcal{M}(K)$ έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis.*

Απόδειξη. Από την απόδειξη της Πρότασης 2.3.12 έχουμε $\mathcal{M}(K) \simeq \ell_1(L_1(\mu_i))_{i\in I}$, όπου οι L_1, ℓ_1 έχουν την ιδιότητα Dunford-Pettis. □

Σχόλιο: Το θεώρημα Funford-Pettis προέκυψε από την προσπάθεια μελέτης γραμμικών τελεστών $T : L_p(\mu) \to L_p(\mu)$, $p \geqslant 1$, που χρησιμεύουν στην επίλυση ολοκληρωτικών εξισώσεων. Από το θεώρημα Dunford-Pettis έχουμε άμεσα την εξής εφαρμογή:

Θεώρημα 3.5.11. *Έστω $T : L_1(\mu) \to L_1(\mu)$ ή $T : C(K) \to C(K)$ ασθενώς συμπαγής τελεστής. Τότε ο $T^2 - T \circ T$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγής.*

Απόδειξη. Δίνουμε την απόδειξη στην περίπτωση του $L_1(\mu)$ (η απόδειξη για τον $C(K)$ είναι όμοια). Το $T(B_{L_1})$ είναι σχετικώς w-συμπαγές, αφού ο T είναι w-συμπαγής. Ο L_1 έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis, άρα ο T είναι Dunford-Pettis τελεστής, συνεπώς το $T(\overline{T(B_{L_1})}^w)$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές.

Γνωρίζουμε ότι η εικόνα κυρτού συνόλου μέσω γραμμικής απεικόνισης είναι κυρτό σύνολο. Εδώ, ο T είναι γραμμικός τελεστής και η B_{L_1} κυρτό σύνολο, άρα το $T(B_{L_1})$ είναι κυρτό σύνολο. Από το θεώρημα Mazur έπεται ότι $\overline{T(B_{L_1})}^w = \overline{T(B_{L_1})}^{\|\cdot\|}$ και μπορούμε να γράφουμε απλά $\overline{T(B_{L_1})}$. Ομοίως, ο $T^2 = T \circ T$ είναι γραμμική απεικόνιση, άρα το $T^2(B_{L_1})$ είναι κυρτό σύνολο. Ισχύει ότι

$$T^2(B_{L_1}) = T(T(B_{L_1})) \subseteq T(\overline{T(B_{L_1})})$$

και το $T(\overline{T(B_{L_1})})$ είναι $\|\cdot\|$-κλειστό (ως $\|\cdot\|$-συμπαγές στον Hausdorff χώρο L_1), άρα το $\overline{T^2(B_{L_1})}^{\|\cdot\|}$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές ως κλειστό υποσύνολο του συμπαγούς συνόλου $T(\overline{T(B_{L_1})})$. Άρα, το $T^2(B_{L_1})$ είναι σχετικώς $\|\cdot\|$-συμπαγές. Συνεπώς, ο T^2 είναι $\|\cdot\|$-συμπαγής. □

Γενικά σχόλια. Οι συμπαγείς τελεστές έχουν καλές φασματικές ιδιότητες. [Υπενθυμίζουμε ότι το φάσμα ενός γραμμικού τελεστή $T : V \to V$ είναι το σύνολο $\sigma(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} :$ ο $\lambda \cdot I - T$ είναι μη αντιστρέψιμος$\}$. Γενικά, ο $\lambda \in \mathbb{C}$ είναι ιδιοτιμή του T αν υπάρχει $x]inX$, $x \neq 0$ ώστε $Tx = \lambda x$, και για κάθε ιδιοτιμή λ του T ισχύει ότι $\lambda \in \sigma(T)$.]

Για έναν συμπαγή τελεστή T, κάθε $\lambda \in \sigma(T)$ με $\lambda \neq 0$ είναι ιδιοτιμή του T και το μοναδικό σημείο συσσώρευσης του $\sigma(T)$ είναι το 0. Αυτές οι ιδιότητες επεκτείνονται εύκολα στην περίπτωση που ο T^2 είναι συμπαγής. Έτσι, οι w-συμπαγείς τελεστές σε χώρους της μορφής $L_1(\mu)$ ή $C(K)$ έχουν παρόμοιες ιδιότητες, αφού όπως είδαμε τότε ο T^2 είναι $\|\cdot\|$-συμπαγής.

Έτσι, το θεώρημα Dunford-Pettis ώθησε την ανάπτυξη της θεωρίας των γραμμικών τελεστών. Η αρχική απόδειξη του θεωρήματος βασίστηλε στην θεωρία αναπαραστάσεων τελεστών στον L_1: Έστω $T : L_1(\mu) \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Ο T ορίζει ένα διανυσματικό μέτρο $\nu : \Sigma \to X$ με $\nu(E) := T(\chi_E)$ για κάθε $E \in \Sigma$. Έτσι,

$$\|\nu(E)\| \leqslant \|T\| \cdot \mu(E).$$

Οι Dunford, Pettis και Phillips έδειξαν ότι αν ο T είναι w-συμπαγής, τότε αποδεικνύεται ένα θεώρημα τύπου Radon-Nikodym για διανυσματικά μέτρα, το οποίο δίνει μία λεγόμενη Bohner ολοκληρώσιμη συνάρτηση $g : \Omega \to X$ τέτοια ώστε

$$\mu(E) = \int_E g(\omega)\, d\mu(\omega),$$

και έτσι έχουμε την εξής αναπαράσταση του T:

$$T(f) = \int g(\omega) f(\omega)\, d\mu(\omega).$$

Διατύπωσαν επίσης το θεώρημα Dunford-Pettis γι' αυτή την αναπαράσταση.

Ειδικότερα, αν ο X είναι αυτοπαθής τότε κάθε $T : L_1(\mu) \to X$ είναι w-συμπαγής και έτσι έχουμε το θεώρημα Radon-Nikodym για διανυσματικά μέτρα με τιμές στον X (ιδιότητα Radon-Nikodym). Αυτή την ιδιότητα την έχουν γενικότερα οι δυϊκοί αυτοπαθείς χώροι. Στο παρόν κεφάλαιο δεν θα ασχοληθούμε με τη μελέτη των χώρων που έχουν την ιδιότητα Radon-Nikodym.

Λέμε ότι ένας χώρος Banach έχει την ιδιότητα Krein-Milman αν κάθε κλειστό και φραγμένο (όχι απαραίτητα συμπαγές) κυρτό υποσύνολο του X είναι η κλειστή κυρτή θήκη του συνόλου των ακραίων σημείων του. Προφανώς, οι αυτοπαθείς χώροι έχουν την ιδιότητα Krein-Milman. Το εντυπωσιακό όμως είναι ότι κάθε χώρος που έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym έχει την ιδιότητα Krein-Milman. Το αντίστροφο αποτελεί ανοικτό πρόβλημα.

3.6 Ασθενώς συμπαγείς τελεστές σε χώρους $C(K)$

Ορισμός 3.6.1. Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Λέμε ότι ο T είναι αυστηρά ιδιάζων (strictly singular) αν δεν υπάρχει απειροδιάστατος υπόχωρος E του X τέτοιος ώστε ο $T\big| + E : E \to T(E)$ να είναι ισομορφισμός στην εικόνα του (δηλ. 1-1, γραμμικός, φραγμένος και ο $(T\big|_E)^{-1}$ φραγμένος.

Θεώρημα 3.6.2. *Έστω $T : c_0 \to X$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε: ο T είναι συμπαγής αν και μόνο αν ο T είναι w-συμπάγής αν και μόνο αν ο T είναι αυστηρά ιδιάζων.*

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Τώρα θα δούμε τι ισχύει για την ιδιότητα του «αυστηρά ιδιάζοντος» για γενικούς χώρους $C(K)$. Έχουμε δει ότι ένας τελεστής $T : C(K) \to X$ είναι w-συμπαγής αν και μόνο αν ο T είναι Dunford-Pettis τελεστής (αφού από το θεώρημα Dunford-Pettis ο $C(K)$ έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis).

Θεώρημα 3.6.3. *Έστω K συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος. Αν $T : C(K) \to X$ είναι w-συμπαγής τελεστής τότε ο T είναι αυστηρά ιδιάζων.*

Απόδειξη. Έστω για άτοπο ότι υπάρχει υπόχωρος Y του $C(K)$ με $\dim(Y) = \infty$ τέτοιος ώστε ο $T\big|_Y : Y \to T(Y)$ να είναι ισομορφισμός στην εικόνα του $T(Y) \subseteq X$, Αφού ο T είναι w-συμπαγής και η B_Y είναι φραγμένο υποσύνολο του $C(K)$, η εικόνα $T(B_Y)$ είναι σχετικώς w-συμπαγές σύνολο. Θέτουμε $S := (T\big|_Y)^{-1} : T(Y) \to Y$. Έχουμε ότι ο S είναι ισομορφισμός.

Θα δείξουμε ότι η B_Y είναι w-συμπαγές σύνολο. Ισχύει ότι το $\overline{T(B_Y)}^{w} = \overline{T(B_Y)}^{\|\cdot\|} = \overline{T(B_Y)}$ είναι w-συμπαγές σύνολο στον X. Αφού ο $(T\big|_Y)^{-1}$ είναι φραγμένος, το $T(Y)$ είναι κλειστό στον X. Άρα, το $\overline{T(B_Y)}$ είναι w-συμπαγές στον $T(Y)$. Αφου ο S είναι (weak, weak)-συνεχής, το $S(\overline{T(B_Y)})$ είναι w-συμπαγές. Τώρα, επειδή οι S, S^{-1} είναι συνεχείς, έχουμε

$$S(\overline{T(B_Y)}) = \overline{S(T(B_Y))} = \overline{B_Y} = B_Y.$$

Άρα, η B_Y είναι w-συμπαγές σύνολο (Τα σύνολα είναι κυρτά, άρα από το θεώρημα Mazur μπορούμε να γράφουμε $\bar{\cdot}$ χωρίς να αναφέρουμε αν η κλειστή θήκη είναι στην $\|\cdot\|$ την weak τοπολογία).

Τώρα, ο $C(K)$ έχει την ιδιότητα Dunford-Pettis. Άρα, ο T είναι Dunford-Pettis τελεστής, και αφού η B_Y είναι w-συμπαγές υποσύνολο του $C(K)$ συμπεραίνουμε ότι το $T(B_Y)$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές. Άρα, η $B_Y = S(T(B_Y))$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές σύνολο στον Y. Έπεται ότι $\dim(Y) < \infty$, το οποίο είναι άτοπο. □

Παρατήρηση 3.6.4. Το Θεώρημα 3.6.3 εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τον $C(K)$ με τον $L_1(\mu)$.

Θεώρημα 3.6.5 (Pełczynski)**.** *Έστω K συμπαγής Hausdorff τοπολογικός χώρος και X χώρος Banach. Αν $T : C(K) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, ο οποίος δεν είναι w-συμπαγής, τότε υπάρχει κλειστός υπόχωρος E του $C(K)$ τέτοιος ώστε $E \approx c_0$ (άρα E απειροδιάστατος) τέτοιος ώστε ο $T\big|_E$ να είναι ισομορφισμός.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz έχουμε $C(K)^* \simeq \mathcal{M}(K)$. Αφού ο $T : C(K) \to X$ δεν είναι w-συμπαγής, από το θεώρημα Gantmacher ο $T^* : X^* \to \mathcal{M}(K)$ ($\equiv C(K)^*$) δεβ είναι w-συμπαγής. Άρα το $T^*(B_{X^*})$ δεν είναι σχετικώς w-συμπαγές υποσύνολο του $\mathcal{M}(K)$. Άρα, από την ισοδυναμία (i)$\iff$(iv)' του Θεωρήματος 3.4.2 υπάρχει ακολουθία $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ ξένων ανοικτών συνόλων στο K και ακολουθία προσημασμένων μέτρων $(\nu_n)_{n=1}^{\infty}$ στο $T^*(B_{X^*})$, δηκαδή $\nu_n = T^*(x_n^*)$, όπου $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία στην B_{X^*}, έτοια ώστε $\nu_n(U_n) \not\to 0$. Άρα υπάρχει υπακολουθία $(\nu_{k_n}(U_{k_n}))_n$ της $(\nu_n(U_n))_n$ και $\delta > 0$ ώστε $\nu_{k_n}(U_{k_n}) > \delta$ για κάθε n. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\nu_n(U_n) > \delta$ για κάθε n.

Έστω $n \in \mathbb{N}$. Αφού $\nu_n \in \mathcal{M}(K)$, το ν_n είναι κανονικό, δηλαδή

$$|\nu_n|(U_n) = \sup\{|\nu_n|(K) : K \text{ συμπαγές}, K \subseteq U_n\}.$$

Έχουμε $|\nu_n|(U_n) \geqslant \nu_n(U_n) > \delta$. Άρα, υπάρχει συμπαγές $F_n \subseteq U_n$ τέτοιο ώστε $|\nu_n|(F_n) > \frac{\delta}{2}$. Τότε, $|\nu_n|(U_n \setminus F_n) \leqslant \frac{\delta}{2}$. Ο χώρος K είναι T_4 (ως συμπαγής και T_2) και τα F_n και $K \setminus U_n$ είναι ξένα και κλειστά στο K. Από το λήμμα Urysohn υπάρχει $f_n : K \to [0,1]$ συνεχής (άρα $f_n \in C(K)$) τέτοια ώστε $f_n \equiv 0$ στο $K \setminus U_n$ και $f_n \equiv 1$ στο F_n.

Ισχυρισμός: Η $(f_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ισομετρικά ισοδύναμη με την κανονική βάση $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ του c_0. Δηλαδή,

$$\left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k f_k\right\|_{C(K)} = \left\|\sum_{k=1}^{\infty} a_k e_k\right\|_{c_0}$$

για κάθε $a = (a_k) \in c_0$.

Απόδειξη του Ισχυρισμού. Αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε τελικά μηδενική ακολουθία $a = (a_1, \ldots, a_{N_0}, 0, \ldots) \in c_{00}$ ισχύει

$$\left\| \sum_{k=1}^{N_0} a_k f_k \right\|_\infty = \max_{1 \leqslant k \leqslant N_0} |a_k|.$$

Θεωρούμε $k_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $|a_{k_0}| = \max |a_k|$. Έστω $x \in F_{k_0}$. Αφού $F_n \subseteq U_n$ και τα U_n είναι ξένα ανά δύο, βλέπουμε ότι τα F_n είναι επίσης ξένα ανά δύο. Άρα, για κάθε $i \neq k_0$ έχουμε $x \notin F_i$, συνεπώς $f_i(x) = 0$ για κάθε $i \neq k_0$ (αφού $\{f_i = 1\} \subseteq F_i$). Άρα,

$$\left\| \sum_{k=1}^{N_0} a_k f_k \right\|_\infty \geqslant |a_{k_0}|\, |f_k(x_0)| = |a_{k_0}| = \max_{1 \leqslant k \leqslant N_0} |a_k|.$$

Επίσης, αν $x \in K$ τότε υπάρχει το πολύ ένας δείκτης i τέτοιος ώστε $x \in F_i$, άρα το πολύ ένας δείκτης i τέτοιος ώστε $f_i(x) = 1$. Άρα,

$$\left\| \sum k = 1^{N_0} a_k f_k \right\|_\infty \leqslant |a_k| \cdot 1 \leqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant N_0} |a_k|,$$

και έχουμε δείξει το ζητούμενο. □

Από τον Ισχυρισμό έχουμε

$$[f_n] = \overline{\text{span}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}} \simeq \overline{\text{span}\{e_n : n \in \mathbb{N}\}} = c_0.$$

Έστω $S : c_0 \to [f_n]$ ο ισομετρικός ισομορφισμός. Ισχύει $S(e_n) = f_n$ για κάθε n. Τον S τον βλέπυμε σαν ισομετρική εμφύτευση $S : c_0 \to C(K)$. Από την υπόθεση έχουμε $T : C(K) \to X$. Άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τον φραγμένο γραμμικό τελεστή $TS := T \circ S : c_0 \to X$. Θα δείξουμε ότι ο TS δεν είναι συμπαγής.

Έστω για άτοπο ότι ο TS είναι συμπαγής, άρα και τελεστής Dunford-Pettis. Από την Πρόταση 3.5.3 ο TS είναι $((c_0, w), (C(K), \|\cdot\|_\infty))$-ακολουθιακά συνεχής. Ξέρουμε ότι $e_n \xrightarrow{w} 0$, άρα $TS(e_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_\infty} 0$, άρα

$$|x_n^*(TS(e_n))| \leqslant \|x_n^*\| \cdot \|TS(e_n)\| \leqslant \|TS(e_n)\| \to 0,$$

όπου (x_n^*) είναι η ακολουθία στην B_{X^*} με $\nu_n = T^*(x_n^*)$. Από τον ορισμό του T^* έχουμε

$$I_{T^*(x_n^*)}(f_n) = x_n^* \circ T(f_n),$$

όπου, από το θεώρημα αναπαράστασης του Riesz, $\varphi : \mathcal{M}(K) \to C(K)^*$ είναι ο τελεστής $\mu \mapsto I_\mu : C(K) \to \mathbb{R}$ με

$$f \mapsto I_\mu(f) := \langle f, \mu \rangle := \int_K f d\mu.$$

Έτσι, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $f_n \equiv 0$ στο $K \setminus U_n$, $U_n = F_n \cup (U_n \setminus F_n)$ και $f_n \equiv 1$ στο

F_n, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
x_n^*(TS(e_n)) &= x_n^*(T(f_n)) = x_n^* \circ T(f_n) = I_{T^*(x_n^*)}(f_n) = I_{V_n}(f_n) \\
&= \langle f_n, \nu_n \rangle = \int_K f_n d\nu_n = \int_{U_n} f_n d\nu_n \\
&= \int_{U_n} d\nu_n + \int_{U_n} (f_n - 1) d\nu_n = \nu_n(U_n) - \int_{U_n} (1 - f_n) d\nu_n \\
&= \nu_n(U_n) - \int_{U_n \setminus F_n} (1 - f_n) d\nu_n,
\end{aligned}$$

όπου $0 \leqslant 1 - f_n \leqslant 1$ για κάθε n. Παρατηρήστε ότι δεν ξέρουμε αν

$$(*) \qquad \int_{U_n \setminus F_n} |1 - f_n| \, d\nu_n \leqslant \int_{U_n \setminus V_n} d\nu_n$$

αφού εν γένει δεν ισχύει «$f \leqslant g \implies \int f d\nu \leqslant \int g d\nu$» για ν προσημασμένο μέτρο (για παράδειγμα θεωρήστε ν αρνητικό και $f = \chi_E$, $g = 0$). Όμως, $\nu_n \leqslant |\nu_n|$, άρα για κάθε $f \geqslant 0$ έχουμε $\int f d\nu_n \leqslant \int f d|\nu_n|$. [Πράγματι, $\int f d\nu_n = \int f d\nu_n^+ - \int f d\nu_n^- \leqslant \int f d\nu_n^+ + \int f d\nu_n^- = \int f d|\nu_n|$.]

Έτσι, αφού $1 - f_n \leqslant 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\nu_n(U_n) - \int_{U_n \setminus F_n} (1 - f_n) d\nu_n \geqslant \nu_n(U_n) - \int_{U_n \setminus G_n} (1 - f_n) d|\nu_n| \geqslant]nu_n(U_n) - \int_{U_n \setminus F_n} d|\nu_n| \\
= \nu_n(U_n) - |\nu_n|(U_n \setminus F_n) > \delta - \frac{\delta}{2} = \frac{\delta}{2},
\end{aligned}$$

δηλαδή $x_n^*(TS(e_n)) > \frac{\delta}{2}$ για κάθε n, ενώ $|x_n^*(TS(e_n))| \to 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα ο $TS : c_0 \to X$ δεν είναι συμπαγής. Από το Θεώρημα 3.6.2 συμπεραίνουμε ότι ο T δεν είναι αυστηρά ιδιάζων, δηλαδή υπάρχει απειροδιάστατος υπόχωρος E του c_0 τέτοιος ώστε ο $TS\big|_E : E \to TS(E)$ να είναι ισομορφισμός. Τώρα, από την Πρόταση **;;** ο E περιέχει κλειστό υπόχωρο Z τετοιον ώστε $Z \approx c_0$ και ο Z να είναι συμπληρωματικός στον c_0. Άρα, $|c_0| = |Z| \leqslant |E| \leqslant |c_0|$ και έπεται ότι $E \approx c_0$.

Τέλος, ο $S : c_0 \to C(K)$ είναι ισομετρική εμφύτευση, άρα ο $S\big|_E : E \to S(E)$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, δηλαδή $E \simeq S(E)$. Άρα, ο $T\big|_{S(E)} : S(E) \to TS(E)$ είναι ισομορφισμός και $S(E) \approx c_0$. □

Υπενθυμίζουμε εδώ (Πρόταση **;;**) ότι κάθε απειροδιάστατος κλειστός υπόχωρος του ℓ_p/c_0, όπου $1 \leqslant p < \infty$, περιέχει κλειστό υπόχωρο Z τέτοιον ώστε $Z \approx \ell_p/c_0$ και ο Z είναι συμπληρωματικός στον ℓ_p/c_0.

Υπενθυμίζουμε επίσης ότι ένας χώρος Banach Y λέγεται εμφυτεύσιμοος (injective) αν για κάθε χώρο Banach X, για κάθε κλειστό υπόχωρο E του X και για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : E \to Y$ υπάρχει επέκταση $\tilde{T} : X \to Y$ που είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής.

Πόρισμα 3.6.6. *Έστω X χώρος Banach με την ιδιότητα ότι δεν υπάρχει κλειστός υπόχωρος E του X τέτοιος ώστε $E \approx c_0$. Τότε, κάθε φραγμένος γραμμικός τελεστής $T : C(K) \to X$ είναι w-συμπαγής.*

Απόδειξη. Άμεση από το Θεώρημα 3.6.5 με αντιθετοαντιστροφή. □

Θεώρημα 3.6.7. *Έστω X εμφυτεύσιμος χώρος Banach και $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν ο T δεν είναι w-συμπαγής τότε υπάρχει κλειστός υπόχωρος F του ℓ_∞ με $F \approx \ell_\infty$ τέτοιος ώστε ο $T\big|_F : F \to T(F)$ να είναι ισομορφισμός.*

Ακριβέστερα, υπάρχει $S : \ell_\infty \to X$ τέτοιος ώστε ο $T\big|_{S(\ell_\infty)} : S(\ell_\infty) \to T(S(\ell_\infty))$ να είναι ισομορφισμός και $S(\ell_\infty) \approx \ell_\infty$.

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι ο X εμφυτεύεται ισομετρικά στον $\ell_\infty(\Gamma)$, με $\Gamma = B_{X^*}$. Πράγματι, έστω $\tau : X \to \ell_\infty(\Gamma)$, $x \mapsto \tau(x) := \hat{x} : B_{X^*} \to \mathbb{R}$, όπου $\hat{x}(x^*) := x^*(x) \in \mathbb{R}$. Από το θεώρημα Hahn-Banach έχουμε

$$\|\tau(x)\|_\infty = \|\hat{x}\|_\infty = \sup\{|\hat{x}(x^*) : \|x^*\| = 1\} = \sup\{|x^*(x)| : \|x^*\| = 1\} = \|x\|.$$

Άρα, η τ είναι ισομετρική εμφύτευση, δηλαδή $X \hookrightarrow \ell_\infty(\Gamma)$ ισομετρικά.

Στο εξής θεωρούμε τον X ως κλειστό υπόχωρο του $\ell_\infty(\Gamma)$ (ταυτίζοντας τον X με τον $\tau(X) \subset \ell_\infty(\Gamma)$). Αφού ο X είναι εμφυτεύσιμος, υπάρχει φραγμένη προβολή $P : \ell_\infty(\Gamma) \to X$ με $P(\ell_\infty(\Gamma)) = X$. Πράγματι, ο $id : X \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, ο X είναι εμφυτεύσιμος και κλειστός υπόχωρος του $\ell_\infty(\Gamma)$, άρα υπάρχει επέκταση $P : \ell_\infty(\Gamma) \to X$.

Από την υπόθεση έχουμε $T : X \to Y$. Θεωρούμε τον $TP : \ell_\infty(\Gamma) \to Y$. Θα δείξουμε ότι ο TP δεν είναι w-συμπαγής. Πράγματι, ο P είναι επέκταση του id_X άρα $P(B_X) = B_X$, άρα $TP(B_X) = T(B_X)$. Ο T δεν είναι w-συμπαγής, άρα το $T(B_X)$ δεν είναι σχετικώς w-συμπαγές, άρα το $TP(B_X)$ δεν είναι σχετικώς w-συμπαγές, και αφού η B_X είναι φραγμένο υποσύνολο του $\ell_\infty(\Gamma)$ συμπεραίνουμε ότι ο TP δεν είναι w-συμπαγής.

Τώρα, ο $TP : \ell_\infty(\Gamma) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής ο οποίος δεν είναι w-συμπαγής, και ο $\ell_\infty(\Gamma)$ είναι χώρος της μορφης $C(K)$ με τον K συμπαγή Hausdorff. Άρα, από το Θεώρημα 3.6.5 (Pełczynski) υπάρχει κλειστός υπόχωρος E του $\ell_\infty(\Gamma)$ τέτοιος ώστε $E \approx c_0$ και ο $TP\big|_E$ να είναι ισομορφισμός στην εικόνα του.

Έστω $J : c_0 \to E$ ισομορφισμός (υπάρχει αφού $E \approx c_0$). Ο E είναι κλειστός υπόχωρος του $\ell_\infty(\Gamma)$, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τον φραγμένο γραμμικό τελεστή $PJ : c_0 \to X$, όπου X εμφυτεύσιμος και c_0 κλειστός υπόχωρος του ℓ_∞. Άρα, υπάρχει επέκταση $S : \ell_\infty \to X$ του PJ (S φραγμένος γραμμικός τελεστής).

Θεωρούμε τον $TPJ : c_0 \to Y$. Έστω $F := TPJ(c_0)$. Τότε, ο TPJ είναι ισομορφισμός στην εικόνα του. [Πράγματι, $TPJ(c_0) = TP(E) = TP\big|_E(E) \approx E \approx c_0$.]

Έτσι, ορίζεται ο φραγμένος γραμμικός τελεστής $(TPJ)^{-1} : G \to c_0 \subseteq \ell_\infty$. Ο ℓ_∞ είναι εμφυτεύσιμος και ο G είναι κλειστός υπόχωρος του Y, άρα υπάρχει επέκταση $R : Y \to \ell_\infty$ του $(TPJ)^{-1}$. Τώρα, $RTPJ = R \circ TPJ = I_{c_0}$ (αφού ο R είναι επέκταση του $(TPJ)^{-1}$). Ο $RTS = RT \circ S$ είναι επέκταση του $RTPJ = I_{c_0}$ (αφού ο S είναι επέκταση του PJ). Ο $RTS - I_{\ell_\infty}$ μηδενίζεται στον c_0, και μπορούμε να εφαρμόσουμε το ακόλουθο θεώρημα, την απόδειξη του οποίου παραλείπουμε:

Θεώρημα 3.6.8. *Έστω $T : \ell_\infty \to \ell_\infty$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T\big|_{c_0} = 0$. Τότε υπάρχει άπειρο $A \subseteq \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $T\big|_{\ell_\infty(A)} = 0$.*

Συμπεραίνουμε ότι υπάρχει άπειρο υποσύνολο A του $\mathbb{N}$ τέτοιο ώστε ο $RTS - I_{\ell_\infty}$ να μηδενίζεται στον $\ell_\infty(A)$. Δηλαδή, $(RTS - I_{\ell_\infty})\big|_{\ell_\infty(A)} = 0$. Άρα, ο $RTS\big|_{\ell_\infty(A)}$ είναι ισομορφισμός του $\ell_\infty(A)$

στην εικόνα του. Άρα ο $S\big|_{\ell_\infty(A)}$ είναι ισομορφισμός στην εικόνα του. Αφού $\ell_\infty(A) \simeq \ell_\infty(\mathbb{N})$, θέτοντας $F := S(\ell_\infty)$ έχουμε $F \approx \ell_\infty$ και ο $T\big|_F$ είναι ισομορφισμός στην εικόνα του. □

3.7 Υπόχωροι των $L_1(\mu)$ και $C(K)$

Στο Θεώρημα 3.5.11 είδαμε ότι αν $X = L_1(\mu)$ ή $X = C(K)$ τότε, αν ο $T : X \to X$ είναι w-συμπαγής έπεται ότι ο T^2 είναι συμπαγής. Το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της ενότητας είναι άμεση συνέπεια του παραπάνω.

Πρόταση 3.7.1. *Οι χώροι $L_1(\mu)$ και $C(K)$ δεν έχουν απειροδιάστατους συμπληρωματικούς αυτοπαθείς υπόχωρους.*

Απόδειξη. Έστω $X = L_1(\mu)$ ή $C(K)$. Υποθέτουμε για άτοπο ότι υπάρχει υαπειροδιάστατος υπόχωρος E του X ο οποίος είναι αυτοπαθής και συμπληρωματικός. Αφού ο E είναι συμπληρωματικός, υπάρχει προβολή $P : X \to E$, φραγμένος γραμμικός τελεστής, με $P(X) = E$. Αφού ο E είναι αυτοπαθής και $P : X \to E$, ο P είναι w-συμπαγής. Ο P είναι προβολή στον E, άρα $P\big|_E = id_E$ και $P^2 = P$. Όμως ο P^2 είναι συμπαγής (αφού ο $P : X \to X$ είναι w-συμπαγής) από το Θεώρημα 3.5.11. Άρα ο P είναι συμπαγής, δηλάδή το $\overline{P(B_X)}$ είναι συμπαγές. Όμως $B_E = P(B_E) \subseteq P(B_X)$, άρα $B_E = \overline{B_E} \subseteq \overline{P(B_X)}$. Άρα, η B_E είναι συμπαγής, το οποίο είναι άτοπο αφού $\dim(E) = \infty$. □

Στην παραπάνω απόδειξη χρησιμοποιήσαμε την εξής παρατήρηση: «Έστω $T : X \to Y$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Αν ο X ή ο Y είναι αυτοπαθής τότε ο T είναι w-συμπαγής».

Πράγματι, αν ο X είναι αυτοπαθής τότε ξέρουμε ότι η B_X είναι w-συμπαγής, άρα το $T(B_X)$ είναι w-συμπαγές. Αν ο Y είναι αυτοπαθής, τότε αφού το $T(B_X)$ είναι φραγμένο θα είναι και w-συμπαγές.

Πρόταση 3.7.2. *Έστω X μη αυτοπαθής υπόχωρος του $L_1(\mu)$. Τότε ο X περιέχει υπόχωρο E τέτοιον ώστε $E \approx \ell_1$ ο οποίος είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_1(\mu)$.*

Απόδειξη. Αφού ο X δεν είναι αυτοπαθής, η B_X δεν είναι w-συμπαγές σύνολο στον $L_1(\mu)$. Έχουμε ότι η B_X είναι φραγμένο υποσύνολο του $L_1(\mu)$ και δεν είναι σχετικώς w-συμπαγές σύνολο. Άρα, από το Θεώρημα 3.3.10 η B_X περιέχει συμπληρωματική (στον $L_1(\mu)$) βασική ακολουθία (f_n) η οποία είναι ισοδύναμη με την κανονική βάση (e_n) του ℓ_1. Αφού η (f_n) είναι συμπληρωματική, ο $E := \overline{\mathrm{span}}\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_1(\mu)$ και $E \approx \overline{\mathrm{span}}\{e_n : n \in \mathbb{N}\} = \ell_1$. □

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 3.7.1 και 3.7.2 παίρνουμε άμεσα την ακόλουθη:

Πρόταση 3.7.3. *Έστω X απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του $L_1(\mu)$. Τότε ο X περιέχει συμπληρωματικό υπόχωρο ισόμορφο με τον ℓ_1.*

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι ο X δεν είναι αυτοπαθής, και τότε από την Πρόταση 3.7.2 έχουμε το ζητούμενο. Από την Πρόταση 3.7.1 ο $L_1(\mu)$ δεν περιέχει απειροδιάστατους συμπληρωματικούς αυτοπαθείς υπόχωρους. Εδώ $\dim(X) = \infty$ και ο X είναι συμπληρωματικός, άρα ο X δεν είναι αυτοπαθής. □

Για να διατυπώσουμε την αντίστοιχη πρόταση (της Πρότασης 3.7.3) για τον $C(K)$ θα χρειαστούμε το εξής:

Θεώρημα 3.7.4 (θεώρημα Sobczyk). *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach, E κλειστός υπόχωρος του X, και $T : E \to c_0$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε υπάρχει επέκταση $\tilde{T} : X \to c_0$, φραγμένος γραμμικός τελεστής με $\|\tilde{T}\| \leqslant 2\|T\|$.*

Πόρισμα 3.7.5. *Έστω E κλειστός υπόχωρος ενός διαχωρίσιμου χώρου Banach, τέτοιος ώστε $E \approx c_0$. Τότε υπάρχει φραγμένη προβολή $P : X \to E$.*

Πρόταση 3.7.6. *Έστω K συμπαγής μετρικός χώρος. Αν X είναι απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του $C(K)$ τότε ο X περιέχει συμπληρωματικό υπόχωρο ισόμορφο με τον c_0.*

Απόδειξη. Αφού ο X είναι απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του $C(K)$, από την Πρόταση 3.7.1 ο X δεν είναι αυτοπαθής. Έστω $P : C(K) \to X$ προβολή στον X. Τότε, ο P δεν είναι w-συμπαγής (διότι ο X δεν είναι αυτοπαθής, οπότε το $P(B_X) = B_X$ είναι κλειστό και δεν είναι w-συμπαγές). Ο $P : C(K) \to X$ είναι φραγμένος γραμμικός και όχι w-συμπαγής τελεστής, άρα από το Θεώρημα 3.6.5 (Pełczynski) υπάρχει κλειστός υπόχωρος E του $C(K)$ τέτοιος ώστε $E \approx c_0$ και ο $P\big|_E$ είναι ισομορφισμός στην εικόνα $P(E)$. Άρα, $P(E) \approx E \approx c_0$ και ο $P(E)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X.

Αρκεί να δείξουμε ότι ο $P(E)$ είναι συμπληρωματικός. Θα δείξουμε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος: Ο K είναι διαχωρίσιμος ως συμπαγής μετρικός χώρος. Σε μετρικούς χώρους, υποσύνολο (με τη σχετική μετρική) διαχωρίσιμου συνόλου είναι διαχωρίσιμο. Εδώ $X \subseteq K$ και ο K είναι διαχωρίσιμος μετρικός χώρος, άρα ο X είναι διαχωρίσιμος. Τώρα, από το Πόρισμα 3.7.5, αφού ο $P(E)$ είναι κλειστός υπόχωρος του διαχωρίσιμου χώρου Banach X και $E \approx c_0$, υπάρχει φραγμένη προβολή $Q : X \to P(E)$ στον $P(E)$, άρα ο $P(E)$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X. □

Σημείωση: Εν γένει, τοπολογικός υπόχωρος διαχωρίσιμου τοπολογικού χώρου δεν είναι διαχωρίσιμος. Δηλαδή, αν ο K δεν είναι μετρικοποιήσιμος, μπορούμε να βρούμε υπόχωρο ισόμορφο με τον c_0 αλλά όχι απαραίτητα συμπληρωματικό.

Ορισμός 3.7.7. Ένας χώρος Banach λέγεται πρώτος αν για κάθε απειροδιάστατο συμπληρωματικό υπόχωρο του X ισχύει $E \approx X$.

Θεώρημα 3.7.8. *Οι χώροι c_0 και ℓ_p, $1 \leqslant p < \infty$ είναι πρώτοι.*

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Υπενθυμίζουμε πάλι το Θεώρημα 2.3.16 του Pełczynski: Έστω X, Y χώροι Banach τέτοιοι ώστε ο X να είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του Y και ο Y να είναι ισόμορφος με συμπληρωματικό υπόχωρο του X. Υποθέτουμε επίσης ότι

(α) Είτε $X \approx X^2 := X \oplus X$ και $Y \approx Y^2$

(β) Είτε $X \approx c_0(X)$ ή $X \approx \ell_p(X)$ για $1 \leqslant p < \infty$.

Τότε $X \approx Y$. Έχουμε δει την απόδειξη με την υπόθεση (α). Η απόδειξη με την υπόθεση (β) παραλείπεται.

Πρόταση 3.7.9. *Ο ℓ_∞ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος χώρος. Έτσι, αν E είναι υπόχωρος του X με $E \approx \ell_\infty$ τότε ο E είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X.*

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Με τα παραπάνω εργαλεία είμαστε πλέον σε θέση να αποδείξουμε το ακόλουθο:

Θεώρημα 3.7.10. *Ο ℓ_∞ είναι πρώτος.*

Απόδειξη. Έστω X απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του ℓ_∞. Θα δείξουμε ότι $X \approx \ell_\infty$. Ξέρουμε ότι ο ℓ_∞ είναι χώρος $C(K)$, όπου K συμπαγής χώρος Hausdorff (από το Θεώρημα 2.2.5). Άρα μπορούμε να εφαρμόσουμε την Πρόταση 3.7.1 και να πάρουμε άμεσα ότι ο ℓ_∞ δεν έχει απειροδιάστατους συμπληρωματικούς αυτοπαθείς υπόχωρους, άρα ο X δεν είναι αυτοπαθής.

Ο X είναι συμπληρωματικός, άρα υπάρχει φραγμένη προβολή $P : \ell_\infty \to X$ με $X = P(\ell_\infty)$. Δείχνουμε ότι ο P δεν είναι w-συμπαγής. [Έστω για άτοπο ότι ο P είναι w-συμπαγής. Τότε το $\overline{P(\ell_\infty)}$ είναι w-συμπαγές και $B_X = P(B_X) \subseteq \overline{P(B_{\ell_\infty})}$, άρα η B_X είναι w-συμπαγές σύνολο και έπεται ότι ο X είναι αυτοπαθής, άτοπο.]

Ο ℓ_∞ είναι εμφυτεύσιμος και ο $P : \ell_\infty \to X$ είναι φραγμένος, γραμμικός και όχι w-συμπαγής, άρα υπάρχει κλειστός υπόχωρος F του ℓ_∞ τέτοιος ώστε $F \approx \ell_\infty$ και ο $P\big|_F$ είναι ισομορφισμός με τον $P(F)$. Έχουμε $F \approx P(F) \subseteq P(\ell_\infty) = X$ και ο $P(F)$ είναι κλειστός υπόχωρος του X, $P(F) \approx \ell_\infty$. Όμως ο ℓ_∞ είναι ισομετρικά εμφυτεύσιμος. Άρα, από την Πρόταση 3.7.9 ο $P(F)$ είναι συμπληρωματικός στον X. Έτσι, έχουμε ότι:

- Ο X είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του ℓ_∞.
- $\ell_\infty \approx P(F)$, και ο $P(F)$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του X.

Είτε $\ell_\infty \approx \ell_\infty(\ell_\infty)$ αν δεχτούμε το Θεώρημα 2.3.16 για $p = \infty$ ή $\ell_\infty \simeq C(K) \approx C(\Delta) \approx c_0(c_0(\Delta)) \approx c_0(C(K)) \approx c_0(\ell_\infty)$ χρησιμοποιώντας το θεώρημα Miljutin, την Πρόταση ;; και το γεγονός ότι $C(\Delta) \approx C(K)$. Από τα παραπάνω ικανοποιείται το Θεώρημα 2.3.16 (b) της τεχνικής Pełczynski, άρα $X \approx \ell_\infty$. □

Πόρισμα 3.7.11. *Δεν υπάρχουν απειροδιάστατοι διαχωρίσιμοι εμφυτεύσιμοι χώροι Banach.*

Απόδειξη. Έστω X διαχωρίσιμος και εμφυτεύσιμος χώρος Banach. Αφού ο X είναι διαχωρίσιμος, ο X εμφυτεύεται ισομετρικά στον ℓ_∞ μέσω του $T : X \to \ell_\infty$ με $x \mapsto (x_n^*(x))$ όπου (x_n) πυκνή στον X και (x_n^*) ακολουθία στον X^* με $\|x_n^*\| = 1$ και $x_n^*(x_n) = \|x_n\|$ (αυτό είναι το Θεώρημα ;;).

Αφού ο X είναι εμφυτεύσιμος και $T(X) \simeq X$, ο $T^{-1} : T(X) \to X$ επεκτείνεται σε $S : \ell_\infty \to X$, άρα ο $T \circ S : \ell_\infty \to T(X)$ είναι προβολή στον $T(X)$. [Πράγματι, $T \circ S\big|_{T(X)} = T \circ T^{-1}\big|_{T(X)} = id\big|_{T(X)}$ και $(T \circ S)^2 = T \circ S$.] Άρα $X \simeq T(X)$ και ο $T(X)$ είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του ℓ_∞.

Έστω για άτοπο ότι ο X είναι απειροδιάστατος. Τότε, ο $T(X)$ είναι απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του πρώτου ℓ_∞, άρα $T(X) \approx \ell_\infty$, δηλαδή $X \approx \ell_\infty$. Όμως ο X είναι διαχωρίσιμος, άρα ο ℓ_∞ είναι διαχωρίσιμος, άτοπο.

Από τα παραπάνω έπεται ότι δεν υπάρχουν απειροδιάστατοι διαχωρίσιμοι εμφυτεύσιμοι χώροι Banach. □

Σχόλιο: Οι L_1 και $C[0,1]$ δεν είναι πρώτοι. Πράγματι:

- Ο L_1 περιέχει συμπληρωματικό υπόχωρο $\approx \ell_1$ (Πρόταση 3.7.2).

- Ο $C[0,1]$ περιέχει συμπληρωματικό υπόχωρο $\approx c_0$ (Πρόταση 3.7.6).

Η ταξινόμηση των συμπληρωματικών υποχώρων κλασικών χώρων συναρτήσεων παραμένει ανοικτό πρόβλημα. Συγκεκριμένα, για τον L_1 έχουμε την εξής εικασία:

Εικασία 3.7.12. *Κάθε απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του L_1 είναι ισόμορφος είτε με τον L_1 είτε με τον ℓ_1.*

Το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα προς αυτή την κατεύθυνση είναι το ακόλουθο θεώρημα των Lewis-Stegall (1973): «Κάθε δυϊκός συμπληρωματικός υπόχωρος του L_1 είναι ισόμορφος με τον ℓ_1». Μάλιστα ισχύει κάτι γενικότερο: μπορούμε να αντικαταστήσουμε την υπόθεση της δυϊκότητας με την ιδιότητα Radon-Nikodym.

Η αντίστοιχη εικασία για τον $C[0,1]$ είναι η ακόλουθη:

Εικασία 3.7.13. *Κάθε απειροδιάστατος συμπληρωματικός υπόχωρος του $C[0,1]$ είναι ισόμορφος με κάποιον χώρο $C(K)$ για K συμπαγή μετρικό χώρο.*

Εδώ το καλύτερο γνωστό αποτέλεσμα είναι του Rosenthal, ο οποίος απέδειξε το εξής: «Αν X είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του $C[0,1]$ με μη διαχωρίσιμο δυϊκό τότε $X \approx C[0,1]$».

Αφού ο L_1 και ο $C[0,1]$ δεν είναι πρώτοι, είναι φυσικό να θέλουμε να ελέγξουμε αν ικανοποιούν τον εξής ασθενέστερο ορισμό:

Ορισμός 3.7.14. Ένας χώρος Banach X λέγεται πρωταρχικός αν οποτεδήποτε έχουμε $X \approx Y \oplus Z$ τότε είτε $X \approx Y$ είτε $X \approx Z$.

Προφανώς, αν ο X είναι πρώτος τότε ο X είναι πρωταρχικός. Αποδεικνύεται ότι οι L_1 και $C[0,1]$ είναι πρωταρχικοί. Το αποτέλεσμα για τον L_1 αποδείχτηκε από τους Enflo και Starbird. Για τον $C[0,1]$ αποδείχτηκε από τους Lindenstrauss και Pełczynski. Φυσικά, το τελευταίο αυτό θεώρημα είναι και συνέπεια του θεωρήματος του Rosenthal που αναφέρθηκε παραπάνω, το οποίο όμως αποδείχτηκε λίγο αργότερα: Αν $C[0,1] \approx Y \oplus Z$ τότε κάποιος από τους Y, Z έχει μη διαχωρίσιμο δυϊκό, αλλιώς ο $C[0,1]^*$ ίναι διαχωρίσιμος, το οποίο είναι άτοπο.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Η ιδιότητα Radon–Nikodym

4.1 Διανυσματικά μέτρα και ολοκλήρωση διανυσματικών συναρτήσεων

Στο κεφάλαιο αυτό θα ασχοληθούμε με το εξής ερώτημα: «Υπό ποιες συνθήκες σε ένα χώρο Banach E μπορούμε να έχουμε το θεώρημα Radon–Nikodym για E-μέτρα, δηλαδή μέτρα με τιμές στον E;» Θα δούμε ότι το θεώρημα είναι ισοδύναμο με γεωμετρικές συνθήκες για τη δομή των κυρτών συνόλων στον E. Επίσης, θα δούμε τη σύνδεση με την ύπαρξη παραγώγων για E-Lipschitz συναρτήσεις.

Ορισμός 4.1.1. Έστω $(\Omega, \mathcal{B})$ μετρήσιμος χώρος, δηλαδή $\mathcal{B}$ είναι μια σ-άλγεβρα του Ω. Έστω E χώρος Banach. Ένα E-μέτρο στο Ω είναι μια απεικόνιση $\tau : \mathcal{B} \to E$ τέτοια ώστε $\tau(\varnothing) = 0 \in E$ και

$$\tau\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$$

για κάθε $(A_i)_{i=1}^{\infty} \subseteq \mathcal{B}$ με τα A_i ξένα ανά δύο.

Για να έχει νόημα το τελευταίο, πρέπει η σειρά $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tau(A_i)$ να συγκλίνει ελεύθερα, δηλαδή η σειρά $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \tau(A_{\pi(i)})$ να συγκλίνει για κάθε μετάθεση π του $\mathbb{N}$.

Ορισμός 4.1.2. Αν τ είναι ένα E-μέτρο, ορίζουμε την κύμανση $|\tau|$ του τ ως

$$|\tau|(A) := \sup\Big\{ \sum_{j\in J} \|\tau(A_j)\| : (A_j)_{j\in J} \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } A, A_j \in \mathcal{B}\Big\}.$$

Η $|\tau|$ είναι θετικό μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{B})$. Μας ενδιαφέρουν κυρίως τα E-μέτρα με πεπερασμένη κύμανση, δηλαδή $|\tau|(\Omega) < \infty$.

Παραδείγματα 4.1.3. (i) $(\Omega, \mathcal{B}) = (\mathbb{N}, \mathcal{P}(\mathbb{N}))$. Ένα E-μέτρο τ καθορίζεται από τα διανύσματα $x_i := \tau(\{i\}) \in E$ για τα οποία η σειρά $\sum x_i$ συγκλίνει ελεύθερα. Μάλιστα, το τ έχει πεπερασμένη κύμανση αν και μόνο αν $\sum\limits_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\| < \infty$, αφού (χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι το $|\tau|$ είναι μέτρο) έχουμε

$$|\tau|(\Omega) = |\tau|\left(\bigcup_{i\in\mathbb{N}}\{i\}\right) = \sum_{i\in\mathbb{N}} |\tau|(\{i\}) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \|x_i\|.$$

(ii) $(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = ([0,1], \mathcal{L}[0,1], m)$, όπου m το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Παίρνουμε

$$E := L_p[0,1] := \Big\{ f : [0,1] \to \mathbb{R} \mid \int |f|^p dm < \infty \Big\}$$

για $1 \leqslant p < \infty$.

Ορίζουμε $\tau : \mathcal{B} \to E$ με $\tau(A) := \chi_A \in L_p$. Τότε, το τ είναι E-μέτρο αν και μόνο αν $p < \infty$. Επίσης, $|\tau|(\Omega) < \infty$ αν και μόβνο αν $p = 1$. Μάλιστα, $|\tau|(A) = \infty$ για κάθε A με $m(A) > 0$ αν $1 < p < \infty$.

Για την απόδειξη αυτών των ισχυρισμών ας υποθέσουμε πρώτα ότι $1 < p < \infty$. Έστω $A \in \mathcal{L}[0,1]$ με $m(A) > 0$ και έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε διαμέριση του A σε n το πλήθος σύνολα $A_1, \ldots, A_n$ με $m(A_i) = \frac{m(A)}{n}$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τότε:

$$|\tau|(A) = \sum_{i=1}^{n} \|\tau(A_i)\|_p = \sum_{i=1}^{n} \frac{m(A)^{1/p}}{n^{1/p}} = m(A)^{1/p} \frac{n}{n^{1/p}} = m(A)^{1/p} n^{1-1/p} \longrightarrow \infty$$

όταν $n \to \infty$, αφού $1 - \frac{1}{p} > 0$. Άρα, $|\tau|(A) = \infty$ για κάθε A με $m(A) > 0$.

Έστω τώρα $p = 1$. Θα δείξουμε ότι $|\tau| = m$ (άρα, $|\tau(\Omega)| = m(\Omega) = 1 < \infty$). Για κάθε διαμέριση $(A_j)_{j\in J}$ του A έχουμε

$$\sum_j \|\tau(A_j)\|_1 = \sum_j \|\chi_{A_j}\|_1 = \sum_j \int \chi_{A_j} dm = \sum_j m(A_j) = m\left(\bigcup_j A_j\right) = m(A).$$

Άρα,

$$|\tau|(A) = \sup\Big\{ \sum_{j\in J} \|\tau(A_j)\|_1 : (A_j)_{j\in J} \text{ διαμέριση του } A \Big\} = m(A)$$

για κάθε $A \in \mathcal{L}[0,1]$, δηλαδή $|\tau| = m$.

Μένει να δείξουμε ότι για $p = \infty$ το τ δεν είναι σ-πεπερασμένο E-μέτρο. Θεωρούμε για παράδειγμα την ακολουθία $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ των ξένων ανά δύο συνόλων στην $\mathcal{L}[0,1]$ με $A_1 = \left[0, \frac{1}{2}\right)$, $A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$, …, $A_n = \left[\frac{2^{n-1}-1}{2^{n-1}}, \frac{2^n-1}{2^n}\right)$, … Παρατηρούμε ότι

$$\sum_{i=1}^{N} \chi_{A_i}(x) = \chi_{\left[0, \frac{2^N-1}{2^N}\right)}(x) \to \chi_{[0,1)}(x),$$

δηλαδή $\sum\limits_{i=1}^{N} \chi_{A_i} \to \chi_\Omega$ σχεδόν παντού. Όμως,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{N} \chi_{A_i} - \chi_\Omega \Big\|_\infty = 1$$

για κάθε $N \in \mathbb{N}$, δηλαδή η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \chi_{A_i}$ δεν συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_\infty$. Έτσι,

$$\tau\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) \neq \sum_{i=1}^{\infty} \tau(A_i).$$

Ορισμός 4.1.4. Έστω τ μέτρο με πεπερασμένη κύμανση. Έστω $f \in L_1(|\tau|)$. Αν η $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ είναι απλή, τότε ορίζουμε

$$\int f\, d\tau := \sum_{i=1}^{m} a_i \tau(A_i) \in E.$$

Αν η f είναι μετρήσιμη, τότε υπάρχει ακολουθία απλών μετρήσιμων $(f_n) \subseteq L_1(|\tau|)$ τέτοια ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού και $\int_\Omega |f_n - f_m|\, d|\tau| \longrightarrow 0$ όταν $n, m \to \infty$. Ορίζουμε

$$\int f\, d\tau := \lim_n \int_\Omega f_n\, d\tau,$$

όπου το $\int_\Omega f_n\, d\tau$ ορίστηκε πριν. Επειδή για f απλή έχουμε

$$\Big\| \int_\Omega f\, d\tau \Big\| \leqslant \int_\Omega |f|\, d|\tau|,$$

άμεσα έχουμε την ίδια ανισότητα και για μετρήσιμη f (χρησιμοποιούμε εδώ την $\|\tau(A)\| \leqslant |\tau|(A)$).

Το σύνολο $\{\chi_A : A \in \mathcal{B}\}$ είναι σχετικώς συμπαγές στον $L_1(|\tau|)$. Πράγματι, το $\{\chi_A : A \in \mathcal{B}\}$ είναι φραγμένο υποσύνολο του αυτοπαθούς $L_2(|\tau|)$, άρα η B_{L_2} είναι w-συμπαγής, άρα το $\overline{\{\chi_A : A \in \mathcal{B}\}}^w$ είναι w-συμπαγές, δηλαδή το $\{\chi_A : A \in \mathcal{B}\}$ είναι σχετικώς συμπαγές. Αφού το ολοκλήρωμα είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής $\int \cdot\, d\tau : L_1(|\tau|) \to E$, $f \mapsto \int f\, d\tau$, έχουμε ότι η εικόνα $\tau(\{\chi_A : A \in \mathcal{B}\}) = \{\tau(\chi_A) : A \in \mathcal{B}\}$ είναι σχετικώς w-συμπαγές σύνολο ως συνεχής εικόνα σχετικώς w-συμπαγούς συνόλου. Χρησιμοποιούμε εδώ την παρατήρηση ότι

$$\overline{\tau(\{\chi_A : A \in \mathcal{B}\})}^w = \tau(\overline{\{\chi_A : A \in \mathcal{B}\}}^w).$$

Στο παράδειγμα (i), αν η τ έχει πεπερασμένη κύμανση, τότε το $\overline{\{\tau(A) : A \in \mathcal{P}(\mathbb{N})\}}^w$ είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές.

Όμως στο παράδειγμα (ii), στην περίπτωση $p = 1$, το σύνολο $\overline{\{\tau(A) : A \in \mathcal{L}[0,1]\}}^w$ είναι w-συμπαγές αλλά όχι $\|\cdot\|$-συμπαγές.

Ορισμός 4.1.5. Έστω τ ένα E-μέτρο με πεπερασμενη κύμανση και μ ένα σ-πεπερασμένο μέτρο. Λέμε ότι το τ είναι απόλυτα συνεχές ως προς μ και γράφουμε $\tau \ll \mu$ αν: από την $\mu(A) = 0$ έπεται ότι $\tau(A) = 0$.

Ισχύει ότι $\tau \ll \mu$ αν και μόνο αν $|\tau| \ll \mu$, το οποίο με τη σειρά του είναι ισοδύναμο με το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\mu(A) < \delta$ τότε $|\tau|(A) < \varepsilon$. Ειδικότερα, $\tau \ll |\tau|$.

Στο εξής θα μελετήσουμε τις μετρήσιμες διανυσματικές συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις που παίρνουν τιμές σε ένα χώρο Banach. Έστω $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ πλήρης χώρος μέτρου, μ ένα σ-πεπερασμένο θετικό μέτρο, και E χώρος Banach. Μια απλή συνάρτηση $f = \sum_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, όπου $a_i \in E$, λέγεται μετρήσιμη αν $A_i \in \mathcal{B}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Γενικά, μια συνάρτηση $f : \Omega \to E$ λέγεται μετρήσιμη αν είναι κατά σημείο όριο μιας ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων σχεδόν παντού.

Πρόταση 4.1.6 (χαρακτηρισμός μετρήσιμων συναρτήσεων). *Η $f : \Omega \to E$ είναι μετρήσιμη αν και μόνο αν* (i) *η $x^* \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη για κάθε $x^* \in E^*$ και* (ii) *υπάρχει $A_0 \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $\mu(A_0) = 0$ και ο $\overline{\text{span}}\{f(\omega) : \omega \notin A_0\}$ είναι διαχωρίσιμοος υπόχωρος του E.*

Η συνθήκη (ii) περιγράφεται με την φράση «η f έχει σχεδόν διαχωρίσιμες τιμές».

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Δείχνουμε αυτή την κατεύθυνση πρώτα για απλές μετρήσιμες συναρτήσεις. Πράγματι, αν $f = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$, τότε $x^* \circ f = \sum_{i=1}^{m} x^*(a_i)\chi_{A_i}$ που είναι απλή μετρήσιμη. Αν τώρα f είναι μετρήσιμη συνάρτηση, υπάρχει ακολουθία (f_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού, και αφού η x^* είναι συνεχής έχουμε $x^* \circ f_n \to x^* \circ f$, άρα η $x^* \circ f$ είναι μετρήσιμη ως κατά σημείο όριο απλών μετρήσιμων συναρτήσεων. Έχουμε έτσι δείξει το (i). Για το (ii), αν $f = \sum\limits_{i=1}^{m} a_i \chi_{A_i}$ είναι απλή μετρήσιμη συνάρτηση τότε $\text{span}\{f(\omega) : \omega \in \Omega\} = \text{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$, ο οποίος είναι κλειστός υπόχωρος του E, άρα ο $\overline{\text{span}}\{f(\omega) : \omega \in \Omega\} = \text{span}\{a_1, \ldots, a_n\}$ είναι διαχωρίσιμος, με αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο το $\text{span}_{\mathbb{Q}}\{a_1, \ldots, a_n\}$.

Αν τώρα $f : \Omega \to E$ είναι μια μετρήσιμη συνάρτηση τότε υπάρχει ακολουθία (f_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $f_n \to f$ σχεδόν παντού, δηλαδή υπάρχει $A_0 \in \mathcal{B}$ τέτοιο ώστε $\mu(A_0) = 0$ και $f_n(\omega) \to f(\omega)$ για κάθε $\omega \in \Omega \setminus A_0$. Τότε το $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \text{span}\{f_n(\omega) : \omega \in \Omega\}$ είναι πυκνό στο $\overline{\text{span}}\{f(\omega) : \omega \notin A_0\}$ και έπεται ότι το $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \text{span}_{\mathbb{Q}}\{f_n(\omega) : \omega \in \Omega\}$ είναι αριθμήσιμο και πυκνό στο $\overline{\text{span}}\{f(\omega) : \omega \notin A_0\}$. Πράγματι: Έστω $x \in \overline{\text{span}}\{f(\omega) : \omega \notin A_0\}$ και έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχουν $\omega_1, \ldots, \omega_m \in \Omega \setminus A_0$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $\Big\|x - \sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f(\omega_i)\Big\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Αφού $\omega_i \notin A_0$ υπάρχει n_i ώστε $|\lambda_i| \cdot \|f_n(\omega_i) - f(\omega_i)\| < \frac{\varepsilon}{2m}$ για κάθε $n \geqslant n_i$. Θέτουμε $n_0 = \max\{n_1, \ldots, n_m\}$. Τότε,

$$\Big\|x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f_{n_0}(\omega_i)\Big\| \leqslant \Big\|x - \sum_{i=1}^{m} \lambda_i f(\omega_i)\Big\| + \sum_{i=1}^{m} |\lambda_i| \cdot \|f_{n_0}(\omega_i) - f(\omega_i)\| < \varepsilon.$$

Αφού $\sum\limits_{i=1}^{m} \lambda_i f_{n_0}(\omega_i) \in \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \text{span}\{f_n(\omega) : \omega \in \Omega\}$, έχουμε τον ισχυρισμό.

($\Longleftarrow$) Έστω ότι ισχύουν τα (i) και (ii). Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $A_0 = \varnothing$, δηλαδή ο $F := \overline{\text{span}}\{f(\omega) : \omega \in \Omega\}$ είναι διαχωρίσιμος κλειστός υπόχωρος του E με $f(\omega) \in F$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Έστω $x \in F$, $x \neq 0$. Τότε από το θεώρημα Hahn-Banach έχουμε $\|x\| = \max\{x^*(x) : x^* \in F^*, \|x^*\| = 1\}$. Αφού ο F είναι διαχωρίσιμος, υπάρχει ακολουθία $(x_i^*)_{i=1}^{\infty} \subset F^*$ τέτοια ώστε $\|x\| = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} x_i^*(x)$ για κάθε $x \in F$. Έτσι, για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε $\|f(\omega)\| = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} x_i^* \circ f(\omega)$, δηλαδή η $\|f(\cdot)\| = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}} x_i^* \circ f$ είναι μετρήσιμη (από το (i)) ως supremum μιας ακολουθίας μετρήσιμων συναρτήσεων.

Θα δείξουμε ότι η $\|f(\cdot) - x\|$ είναι μετρήσιμη για κάθε $x \in F$. [Συμβολισμός: Την $\|f(\cdot)\| : \Omega \to \mathbb{R}$ θα την συμβολίζουμε με $\|f\|$.]

Πράγματι, για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε $\|f(\omega) - x\| = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}}(x_i^* \circ f(\omega) - x_i^*(x))$, δηλαδή η $\|f(\cdot) - x\| = \sup\limits_{i \in \mathbb{N}}(x_i^* \circ f - x_i^*(x))$ είναι μετρήσιμη. Σταθεροποιούμε $(x_n)_n$ πυκνή ακολουθία στον διαχωρίσιμο χώρο F και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Θέτουμε $A_n = A_n(\varepsilon) = \{\omega \in \Omega : \|f(\omega) - x_n\| \leqslant \varepsilon\}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Κάθε A_n είναι μετρήσιμο αφού η $\|f(\cdot) - x\|$ είναι μετρήσιμη. Επίσης, αφού $f(\omega) \in F$ και η $(x_n)_n$ είναι πυκνή στον F, έχουμε $\Omega = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Θέτουμε $B_n = B_n(\varepsilon) = A_n(\varepsilon) \setminus \bigcup_{k<n} A_k(\varepsilon)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Αν ορίσουμε $g := \sum_{i\in\mathbb{N}} x_i\chi_{B_i}$ τότε $\|g(\omega) - f(\omega)\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $\omega \in \Omega$ και η g παίρνει αριθμήσιμες το πλήθος τιμές. Παίρνοντας $\varepsilon = 1/n$ έχουμε ότι η f είναι ομοιόμορφο όριο αριθμήσιμα απλών συναρτήσεων, δηλαδή $\sup_{\omega\in\Omega} \|g_m(\omega) - f(\omega)\| \longrightarrow 0$ όπου $g_m = \sum_{i=1}^{\infty} x_i\chi_{B_i(1/m)}$. Άρα η f είναι κατά σημείο όριο ακολουθίας απλών μετρήσιμων συναρτήσεων: Για παράδειγμα, θεωρώντας τις $g_{m,N} = \sum_{i=1}^{N} x_i\chi_{B(1/m)}$ έχουμε $g_{m,N} \to f$ κατά σημείο όταν $m, N \to \infty$, και η $(g_{m,N})_{m,N\in\mathbb{N}}$ είναι ακολουθία αφού το $\mathbb{N}\times\mathbb{N}$ είναι αριθμήσιμο. □

Ορισμός 4.1.7 (ολοκλήρωση διανυσματικών συναρτήσεων)**.** Έστω $f : \Omega \to E$ μετρήσιμη, όπου $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος θετικού σ-πεπερασμένου μέτρου και E χώρος Banach. Αν η $f = \sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i}$ είναι απλή με $\mu(A_i) < \infty$ και $a_i \in E$ για κάθε $i = 1, \dots, m$, τότε ορίζουμε

$$\int_\Omega f d\mu := \sum_{i=1}^{m} a_i\mu(A_i) \in E.$$

Ορισμός 4.1.8. Μια μετρήσιμη συνάρτηση $f : \Omega \to E$ λέγεται Bochner ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία (f_n) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων που συγκλίνει σχεδόν παντού στην f και είναι Cauchy κατά μέσο, δηλαδή

$$\int_\Omega \|f_n - f_m\| d\mu \longrightarrow 0$$

όταν $n, m \to \infty$. Αν η $f : \Omega \to E$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη, τότε ορίζουμε το ολοκλήρωμα Bochner της f ως

$$\int_\Omega f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n d\mu.$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο αυτό υπάρχει και είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της (f_n). Επίσης, όπως θα δούμε, ισχύει ότι

$$\left\|\int_\Omega f d\mu\right\| \leqslant \int_\Omega \|f\| d\mu < \infty.$$

Πρόταση 4.1.9. *Μια συνάρτηση $f : \Omega \to E$ είναι Bochner ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν είναι μετρήσιμη και $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$.*

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Η f είναι μετρήσιμη ως Bochner ολοκληρώσιμη. Αρκεί να δείξουμε ότι $\int_\Omega \|f\| d\mu < \infty$ για f απλή μετρήσιμη. Έστω $f = \sum_{i=1}^{m} a_i\chi_{A_i}$ με τα A_i ξένα και $\mu(A_i) < \infty$. Τότε,

$$\int_\Omega \|f\| d\mu = \int_\Omega \Big\|\sum_{i=1}^{m} ai\chi_{A_i}(\omega)\Big\| d\mu(\omega) = \int_\Omega \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|\chi_{A_i}(\omega) d\mu(\omega) = \sum_{i=1}^{m} \|a_i\|\mu(A_i) < \infty,$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι τα A_i είναι ξένα, $\|a_i\| \in \mathbb{R}$, $\mu(A_i) < \infty$ και το άθροισμα είναι πεπερασμένο.

($\Longleftarrow$) Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι το μ είναι πεπερασμένο μέτρο, δηλαδή $\mu(\Omega) < \infty$. Έστω f μετρήσιμη με $\int_\Omega \|f(\omega)\| d\mu(\omega) < \infty$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.1.6 βρίσκουμε συνάρτηση $g = \sum_{j=1}^{\infty} a_j \chi_{B_j}$ με τα B_j ξένα και $\|g(\omega) - f(\omega)\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $\omega \in \Omega$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_\Omega \Big\| f(\omega) - \sum_{j=1}^m a_j \chi_{B_j}(\omega) \Big\| d\mu(\omega) &\leqslant \int_\Omega \|f(\omega) - g(\omega)\| d\mu(\omega) + \int_\Omega \Big\| g(\omega) - \sum_{j=1}^m a_j \chi_{B_j}(\omega) \Big\| d\mu(\omega) \\ &\leqslant \varepsilon\mu(\Omega) + \int_\Omega \Big\| \sum_{j=m+1}^{\infty} a_j \chi_{B_j} \Big\| d\mu \\ &= \varepsilon\mu(\Omega) + \int_\Omega \sum_{j=m+1}^{\infty} \|a_j\| \chi_{B_j}(\omega) d\mu(\omega)\end{aligned}$$

αν πάρουμε υπόψη μας το γεγονός ότι τα B_j είναι ξένα. Όμως, για κάθε $\omega \in B_j$ ισχύει $\|f(\omega) - a_j\| \leqslant \varepsilon$, δηλαδή

$$\|a_j\| \leqslant \|f(\omega) - a_j\| + \|f(\omega)\| \leqslant \varepsilon + \|f(\omega)\|.$$

Άρα,

$$\int_\Omega \sum_{j=m+1}^{\infty} \|a_j\| \chi_{B_j}(\omega) d\mu(\omega) \leqslant \int_\Omega (\varepsilon + \|f(\omega)\|) \chi_{\bigcup\limits_{j=m+1}^{\infty} B_j}(\omega) d\mu(\omega) = \int_{\bigcup\limits_{j=m+1}^{\infty} B_j} (\varepsilon + \|f\|) d\mu,$$

όπου

$$\mu\left(\bigcup_{j=m+1}^{\infty} B_j \right) = \sum_{j=m+1}^{\infty} \mu(B_j) \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

[Η σειρά $\sum\limits_{j=1}^{\infty} \mu(B_j)$ συγκλίνει στο $\mu\left(\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} B_j \right)$.] Άρα μπορούμε να επιλέξουμε m αρκετά μεγάλο ώστε

$$\int_{\bigcup\limits_{j=m+1}^{\infty} B_j} (\varepsilon + \|f\|) d\mu \leqslant \varepsilon\mu(\Omega).$$

Τελικά, για μεγάλα m,

$$\int_\Omega \sum_{j=m+1}^{\infty} \|a_j\| \chi_{B_j}(\omega) d\mu(\omega) \leqslant 2\varepsilon\mu(\Omega).$$

Θέτουμε $g_m = \sum_{j=1}^m a_j \chi_{B_j(1/m)}$. Τότε, όπως έχουμε δει, $g_m \to f$ σχεδόν παντού, και φυσικά

$$\int_\Omega \|g_n - g_m\| d\mu \leqslant \int_\Omega \|f - g_n\| d\mu + \int_\Omega \|f - g_m\| d\mu \longrightarrow 0$$

όταν $n, m \to \infty$. Άρα όντως η f είναι Bochner ολοκληρώσιμη. □

Ορισμός 4.1.10. Ο χώρος $L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, E) := L_1(\mu, E) = \{[f] \mid f : \Omega \to E \text{ Bochner ολοκληρώσιμη}\}$ είναι χώρος με νόρμα αν θέσουμε

$$\|f\|_1 := \int_\Omega \|f\| \, d\mu = \int_\Omega \|f(\omega)\| \, d\mu(\omega)$$

όπου με $[f]$ συμβολίζουμε τις κλάσεις ισοδυναμίας ως προς την $f \sim g \iff f = g$ σχεδόν παντού. Όμοια ορίζονται οι $L_p(\mu, E)$, $1 < p \leqslant \infty$.

Οι ιδιότητες του ολοκληρώματος bochner είναι αντίστοιχες με αυτές του κλασικού ολοκληρώματος (για $f : \Omega \to \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$ ή $[0, \infty]$). Για παράδειγμα, το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue εξακολουθεί να ισχύει:

Θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης: Έστω $(f_n) \subseteq L_1(\mu, E)$ ακολουθία ολοκληρώσιμων συναρτήσεων τέτοια ώστε $\|f_n\| \leqslant g \in L_1(\mu)$ (δηλαδή, για κάθε $\omega \in \Omega$, $\|f_n(\omega)\| \leqslant g(\omega)$, όπου $g : \Omega \to [0, +\infty]$ ολοκληρώσιμη) και $f_n \to f$ μ-σχεδόν παντού (δηλαδή, $f_n \overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow} \|f\|$ μ-σχεδόν παντού). Τότε $f \in L_1(\mu, E)$ και

$$\int f_n \, d\mu \overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow} \int f \, d\mu.$$

Άλλες αναλογίες είναι οι εξής:

Γραμμικότητα του ολοκληρώματος: Αν $T : E \to F$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τότε

$$T\Big(\int_\Omega f \, d\mu\Big) = \int_\Omega T(f) \, d\mu$$

για κάθε $f : \Omega \to E$ Bochner ολοκληρώσιμη.

Σύγκριση με το ολοκλήρωμα Riemann: Στην ειδική περίπτωση που $(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = ([0,1], \mathcal{L}[0,1], m)$ και έχουμε $f : [0,1] \to E$ συνεχή, τότε το $\int f \, d\mu$ ταυτίζεται με το ολοκλήρωμα Riemann $\int_0^1 f(x) \, dx$ (το ολοκλήρωμα Riemann δεν το έχουμε ορίσει για f με τιμές σε χώρο Banach αλλά ορίζεται κατ' αναλογία με την πραγματική περίπτωση ως το όριο των αθροισμάτων Riemann).

Πρόταση 4.1.11 (θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για το ολοκλήρωμα Bochner)**.** *Έστω m το μέτρο Lebesgue στον $\mathbb{R}^n$ και $B_u(r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, u) < r\}$ η μπάλα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο $u \in \mathbb{R}^n$ και ακτίνα $r > 0$. Έστω $f \in L_1(m, E)$. Τότε,*

$$\frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} \|f(v) - f(u)\| \, dm(v) \overset{r \to 0^+}{\longrightarrow} 0 \tag{4.1.1}$$

m-σχεδόν για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$. Γι' αυτά τα u,

$$f(u) = \lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} f(v) \, dm(v) \tag{4.1.2}$$

m-σχεδόν για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$.

Απόδειξη. Για ευκολία υποθέτουμε ότι ο E είναι διαχωρίσιμος. Έστω $f : \Omega \to E$ Bochner ολοκληρώσιμη. Έστω $(x_n)_{n=1}^\infty$ πυκνή ακολουθία στον E. Εφαρμόζουμε το κλασικό θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue για την συνάρτηση $\|f(\cdot) - x_n\| : \Omega \to \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f(u) - x_n\| = \lim_{r \to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} \|f(v) - x_n\| dm(v)$$

m-σχεδόν για κάθε $u \in \mathbb{R}^n$. Γι' αυτά τα u και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$\begin{aligned}
&\limsup_{r\to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} \|f(v) - f(u)\| dm(v) \\
&\quad \leqslant \limsup_{r\to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} (\|f(v) - x_n\| + \|x_n - f(u)\|) dm(v) \\
&\quad = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} \|f(v) - x_n\| dm(v) + \|x_n - f(u)\| \\
&\quad = \|f(u) - x_n\| + \|x_n - f(u)\| = 2\|x_n - f(u)\|.
\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι πυκνή στον E, επιλέγουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|x_n - f(u)\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} \|f(v) - f(u)\| dm(v) \leqslant \varepsilon,$$

δηλαδή

$$\limsup_{r\to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} \|f(v) - f(u)\| dm(v) = 0$$

m-σχεδόν για κάθε u. Επειδή $m(B_u(r)) > 0$ και $\|f(v) - f(u)\| \geqslant 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} \|f(v) - f(u)\| dm(v) = 0$$

m-σχεδόν για κάθε u. Τώρα, επειδή $\left\|\int f d\mu\right\| \leqslant \int \|f\| d\mu$, έχουμε

$$\lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} (f(v) - f(u)) dm(v) = 0$$

δηλαδή

$$f(u) = \lim_{r\to 0} \frac{1}{m(B_u(r))} \int_{B_u(r)} f(v) dm(v) = 0.$$

[Υποθέσαμε ότι ο χώρος είναι διαχωρίσιμος ώστε να εφαρμόσουμε το θεώρημα παραγώγισης του Lebesgue αριθμήσιμες το πλήθος φορές, μία για κάθε x_n. Αλλιώς, πρέπει να χρησιμοποιήσουμε το σξίωμα της επιλογής, να εφαρμόσουμε το θεώρημα για κάθε $x \in E$ και στο τέλος να πάρουμε $x = f(u)$.] $\square$

Φυσικά, το θεώρημα εξακολουθεί να ισχύει αν αντικαταστήσουμε τις μπάλες με οικογένεια $\{E_x(r)\}_{r>0}$ μετρήσιμων υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ που συρρικνούνται φυσιολογικά στο $x \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή $E_x(r) \subseteq B_x(r)$ για κάθε $r > 0$ αλλά επίσης υπάρχει $\alpha > 0$ ώστε $m(E_x(r)) > \alpha m(B)x(r))$ για κάθε $r > 0$.

Για $n = 1$ από το θεώρημα παραγώγισης παίρνουμε ότι για κάθε $f \in L_1(m, E)$ η συνάρτηση

$$g(t) := \int_0^t f(x) dx$$

είναι διαφορίσιμη σχεδόν παντού με $g'(t) = f(t)$ σχεδόν παντού. Πράγματι,

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{g(t)-g(0)}{t-0} = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{t}\int_0^t f(x)dx = \lim_{t\to 0^+} \frac{1}{m(B_{t/2}(t/2))}\int_{B_{t/2}(t/2)} f(x)dm(x) = f(t)$$

και

$$\lim_{t\to 0^-} \frac{1}{t}\int_0^t f(x)dx = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{-t}\int_t^- f(x)dx = \lim_{t\to 0^-} \frac{1}{m(B_{t/2}(|t|/2))}\int_{B_{t/2}(|t|/2)} f(x)dm(x) = f(t).$$

Έστω $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος (θετικού) μέτρου, όπου E χώρος Banach. Έστω $f \in L_1(\mu, E)$. Το $\tau : \mathcal{B} \to E$ με

$$A \mapsto \tau(A) := \int_A f d\mu = \int_\Omega f\chi_A d\mu$$

είναι E-μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{B})$. Μάλιστα $\tau \ll \mu$ αφού

$$|\tau|(A) = \int_A \|f\|d\mu.$$

Απόδειξη. Πράγματι,

$$|\tau|(A) = \sup\left\{\sum_{i\in I}\|\tau(A_i)\| : (A_j)_{j\in J} \text{ πεπερασμένη διαμέριση του } A\right\}.$$

Έστω (A_j) διαμέριση του A. Αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για $f = \sum\limits_{i=1}^m \beta_i\chi_{B_i}$ απλή, όπου τα B_i είναι ξένα. Έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^m \|\tau(A_i)\| &= \sum\left\|\int_{A_j}\sum_{i=1}^m \beta_i\chi_{B_i}d\mu\right\| = \sum_{j\in J}\left\|\sum_{i=1}^m \beta_i\mu(A_j\cap B_i)\right\| \leqslant \sum_{i,j}\|\beta_i\|\mu(A_j\cap B_i)\\ &= \sum_{i=1}^m \|\beta_i\|\mu(A\cap B_),\end{aligned}$$

όπου

$$\int_A \|f\|d\mu = \int_A \left\|\sum_{i=1}^m \beta_i\chi_{B_i}\right\|d\mu = \int_A\sum_{i=1}^m \|\beta_i\|\chi_{B_i}d\mu = \sum_{i=1}^m \|\beta_i\|\mu(A\cap B_i).$$

Άρα $|\tau|(A) \leqslant \int_A \|f\|d\mu$ και

$$\begin{aligned}|\tau(A)| &\geqslant \sum_{j=1}^m \|\tau(A\cap B_j)\| = \sum_{j=1}^M\left\|\int_{A\cap B_j}\beta_i\chi_{B_i}d\mu\right\| = \sum_{j=1}^m\left\|\int\sum_{j=1}^m \beta_i\chi_{A\cap B_i\cap B_j}d\mu\right\|\\ &= \sum_{j=1}^m\left\|\int\beta_j\chi_{A\cap B_j}d\mu\right\| = \sum_{j=1}^m\|\beta_j\mu(A\cap B_j)\| = \sum_{j=1}^m\|\beta_j\|\mu(A\cap B_j)\\ &= \int_A \|f\|d\mu.\end{aligned}$$

□

Στην επόμενη ενότητα θα δούμε το αντίστροφο, δηλαδή πότε ένα διανυσματικό μέτρο τ με πεπερασμένη κύμανση, για το οποίο $\tau \ll \mu$, προκύπτει με αυτό τον τρόπο.

4.2 Η ιδιότητα Radon-Nikodym

Ορισμός 4.2.1. Έστω E χώρος Banach και C κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του E. Λέμε ότι το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym (RM) αν για κάθε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ και για κάθε E-μέτρο $\tau : \mathcal{B} \to E$ το οποίο ικανοποιεί την $\frac{\tau(A)}{\mu(A)} \in C$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$, ισχύει ότι υπάρχει $f \in L_1(\mu, E)$ τέτοια ώστε

$$\tau(A) = \int_A f(\omega)\, d\mu(\omega) \text{ για κάθε } A \in \mathcal{B}.$$

Θα λέμε ότι ολόκληρος ο χώρος E έχει την ιδιότητα (RN) όταν η κλειστή μοναδιαία μπάλα B_E έχει την ιδιότητα (RN). Έστω E, C όπως στον ορισμό. Αν το C έχει την ιδιότητα (RN) και F είναι ένα κλειστό και κυρτό υποσύνολο του C τότε το F έχει την ιδιότητα (RN). [Πράγματι, αν $\frac{\tau(A)}{\mu(A)} \in F \subseteq C$ τότε $\tau(A) = \int_A f\, d\mu$, $f \in L_1(\mu, E)$.]

Άρα, αν ολόκληρος ο χώρος έχει την ιδιότητα (RN) τότε κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του E έχει την ιδιότητα (RN). [Πράγματι, αφού ο E έχει την ιδιότητα (RN), γνωρίζουμε ότι η B_E έχει την ιδιότητα (RN), άρα για κάθε $M > 0$ το σύνολο MB_E έχει την ιδιότητα (RN) (παίρνουμε την Mf στη θέση της f). Τότε, για κάθε κλειστό, κυρτό και φραγμένο C υπάρχει $M > 0$ ώστε $C \subseteq MB_e$ και έπεται ότι το C έχει την ιδιότητα (RN).]

Στον ορισμό της ιδιότητας (RN), αφού το C είναι φραγμένο, η υπόθεση $\frac{\tau(A)}{\mu(A)} \in C$ συνεπάγεται ότι υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε, για κάθε $A \in \mathcal{B}$, $\|\tau(A)\| \leqslant M\mu(A)$. Άρα, για κάθε πεπερασμένη διαμέριση $(A_i)_{i\in I}$ του A έχουμε

$$\sum_{i\in I} \|\tau(A_i)\| \leqslant M \sum_{i\in I} \mu(A_i) = M \cdot \mu(A).$$

Άρα, για κάθε $A \in \mathcal{B}$ έχουμε $|\tau|(A) \leqslant M \cdot \mu(A)$. Ειδικότερα, $|\tau|(\Omega) \leqslant M$, δηλαδή το τ είναι E-μέτρο με πεπερασμένη κύμανση.

Μάλιστα, για την $f \in L_1(\mu, E)$ θα δείξουμε ότι $f \in L_\infty(\mu, E)$, δηλαδή ότι υπάρχει $N > 0$ ώστε $\|f\| \leqslant N$ μ-σχεδόν παντού. Ξέρουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}$ ισχύει $|\tau|(A) \leqslant M\mu(A)$, όπου $|\tau|(A) = \int_A \|f\| d\mu$. Επιλέγουμε $A = \{\|f\| \geqslant M + 1\}$. Τότε

$$\int_{\{\|f\|\geqslant M+1\}} \|f\|\, d\mu \leqslant M \cdot \mu(\|f\| \geqslant M + 1),$$

όπου

$$\int_{\{\|f\|\geqslant M+1\}} \|f\|\, d\mu \geqslant (M + 1)\mu(\|f\| \geqslant M + 1),$$

άρα $\mu(\|f\| \geqslant M + 1) \leqslant 0$, δηλαδή$\mu(\|f\| \geqslant M + 1) = 0$. Άρα, $f \in L_\infty(\mu, E)$.

Επίσης, αποδεικνύεται ότι το σύνολο

$$\Big\{\tau(A) = \int_A f\, d\mu : A \in \mathcal{B}\Big\}$$

είναι σχετικώς $\|\cdot\|$-συμπαγές.

Η f του ορισμού καλείται παράγωγος Radon-Nikodym του τ ως προς μ και συμβολίζεται με $\frac{d\tau}{d\mu}$. Δηλαδή,

$$\tau(A) = \int_A \frac{d\tau}{d\mu}(\omega)\, d\mu(\omega), \qquad A \in \mathcal{B}.$$

Αν ο χώρος E έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym και τ είναι ένα E-μέτρο με $\tau \ll \mu$, όπου μ σ-πεπερασμένο μέτρο, τότε το τ εξακολουθεί να έχει παράγωγο Radon-Nikodym ως προς μ, η οποία δίνεται από τον τύπο

$$\frac{d\tau}{d\mu} = \Big(\frac{d|\tau|}{d\mu}\Big)\Big(\frac{d\tau}{d|\tau|}\Big) \in L_1(\mu, E).$$

Εδώ, όμως, επειδή μειώσαμε τις υποθέσεις, δεν ισχύει πλέον ότι $\frac{d\tau}{d\mu} \in L_\infty(\mu, E)$ (οι $\frac{d|\tau|}{d\mu}, \frac{d\tau}{d|\tau|}$ ορίζονται καλά αφού $\tau \ll \mu$ αν και μόνο αν $|\tau| \ll \mu$, και $\tau \ll |\tau|$).

Παραδείγματα 4.2.2 (Παραδείγματα E-μέτρων που δεν έχουν παράγωγο Radon-Nikodym).
(i) $E = L_1[0,1]$ με m το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Όπως είδαμε, το E-μέτρο $\tau : \mathcal{B} \to E$ με $\tau(A) := \chi_A$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$ έχει πεπερασμένη κύμανση $|\tau| = m$. Θα δείξουμε ότι δεν υπάρχει $f \in L_1(\mu, E)$ τέτοια ώστε $\tau(A) = \int_A f\, d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$. Έστω για άτοπο ότι υπάρχει τέτοια $f : [0,1] \to L_1[0,1]$ Bochner ολοκληρώσιμη. Έχουμε $s \mapsto f(s) : [0,1] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(s)(t)$. Μπορούμε λοιπόν να βλέπουμε την f ως $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη, με $(s,t) \mapsto f(s,t) = f(s)(t)$. Αφού $\tau(A) = \int_A f(s)dm(s) \in L_1[0,1]$, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_A \int_B f(s,t)dm(s)\, dm(t) &= \int_A \left(\int_B f(s)dm(s)\right) dm(t) = \int_A \tau(B)dm \\ &= \int_A \chi_B dm = m(A \cap B)\end{aligned}$$

για κάθε $A, B \in \mathcal{L}[0,1]$. Δηλαδή,

$$\int_{A\times B} f\, dm^2 = m(A \cap B), \qquad A, B \in \mathcal{L}[0,1].$$

Άρα η f μηδενίζεται εκτός της διαγωνίου, το οποίο είναι άτοπο.

Για το επόμενο παράδειγμα υπενθυμίζουμε το **Λήμμα Riemann-Lebesgue**: Έστω $a < b$ και $f \in L_1[a,b]$. Τότε,

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(t)e^{ikt}dt = 0.$$

Πόρισμα 4.2.3. *Αν* $A \in \mathcal{L}[a,b]$ *τότε* $\lim\limits_{k\to\infty} \int_A e^{ikt}dt = 0$.

(ii) Παίρνουμε $E = c_0$ και $(\Omega, \mathcal{B}, \mu) := ([0,2\pi], \mathcal{L}[0,2\pi], m)$, όπου m είναι το κανονικοποιημένο μέτρο Lebesgue στο $[0,2\pi]$. Ορίζουμε το E-μέτρο $\tau : \mathcal{B} \to E$ με $\tau(A) = \big(\int_A e^{int}dm(t)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ για κάθε $A \in \mathcal{L}[0,2\pi]$. Από το Πόρισμα 4.2.3 έχουμε $\tau(A) \in c_0 = E$ για κάθε $A \in \mathcal{L}[0,2\pi]$, δηλαδή η τ είναι καλά ορισμένη. Προφανώς, $\tau \ll m$ από την απόλυτη συνέχεια του ολοκληρώματος και το m είναι πεπερασμένο μέτρο. Όμως, δεν υπάρχει $f = (f_n) \in L_1(m, E)$ τέτοια ώστε $\tau(A) = \int_A f\, dm$. Πράγματι, αν υπήρχε, θα έπρεπε να ισχύει

$$\int_A f_n dm = \int_A e^{int}dm(t), \qquad A \in \mathcal{L}[0,2\pi]$$

άρα $f_n(t) = e^{int}$ για κάθε n και t. Όμως τότε $f(t) = (f_n(t))_n = (e^{int})_n \notin c_0$, και έχουμε άτοπο αφού $f : \Omega \to E$.

Στα παραπάνω παραδείγματα, το γεγονός ότι το E-μέτρο τ δεν έχει παράγωγο Radon-Nikodym προκύπτει και από το ότι το $\{\tau(A) : A \in \mathcal{B}\}$ δεν είναι σχετικώς $\|\cdot\|$-συμπαγές. Για παράδειγμα, στο (i) το σύνολο $\{\tau(A) : A \in \mathcal{B}\} = \{\chi_A : A \in \mathcal{B}\}$ δεν είναι σχετικώς $\|\cdot\|$-συμπαγές στον $L_1[0,1]$.

Ορισμός 4.2.4. Μια οικογένεια $\mathcal{F} \subseteq C[a,b]$ συνεχών συναρτήσεων λέγεται ισοσυνεχής αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ τέτοιο ώστε: για κάθε $x, y \in [a,b]$ με $|x-y| < \delta$ και κάθε $f \in \mathcal{F}$ ισχύει $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

Θεώρημα 4.2.5 (Arzelà-Ascoli). *Έστω $(f_n)_{n=1}^{\infty} \subseteq C[a,b]$ η οποία είναι ομοιόμορφα φραγμένη και ισοσυνεχής. Τότε η (f_n) έχει ομοιόμορφα συγκλίνουσα υπακολουθία: δηλαδή, υπάρχουν υπακολουθία (f_{k_n}) της (f_n) και $f \in C[a,b]$ ώστε $\|f_{k_n} - f\|_\infty \to 0$.*

Απόδειξη. Παραλείπεται. □

Πόρισμα 4.2.6. *Ένα $\mathcal{F} \subseteq C[a,b]$ είναι $\|\cdot\|_\infty$-συμπαγές αν και μόνο αν είναι κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές.*

(iii) Παίρνουμε $E = C[0,1]$, $(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = ([0,1], \mathcal{L}[0,1], m)$, όπου m το μέτρο Lebesgue στο $[0,1]$. Ορίζουμε $\tau : \mathcal{L}[0,1] \to C[0,1]$ με $A \mapsto \tau(A) : [0,1] \to [0,1]$ όπου $\tau(A)(t) := m(A \cap [0,t])$.

Η τ είναι καλά ορισμένη και μάλιστα η οικογένεια $\{\tau(A) : A \in \mathcal{L}[0,1]\}$ εόναι ισοσυνεχής: Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε $\delta = \varepsilon$ και παρατηρούμε ότι αν $x < y$ στο $[0,1]$ με $|x-y| < \delta$ τότε για κάθε $A \in \mathcal{L}[0,1]$ ισχύει

$$|\tau(A)(x) - \tau(A)(y)| = |m(A \cap [0,x]) - m(A \cap [0,y])| = m(A \cap (x,y]) + |x-y| < \varepsilon.$$

Επίσης, προφανώς, $\|\tau(A)\|_\infty \leqslant 1$ για κάθε $A \in \mathcal{L}[0,1]$. Από το πόρισμα του θεωρήματος Arzelà-Ascoli, το $\overline{\{\tau(A) : A \in \mathcal{L}[0,1]\}}^{\|\cdot\|_\infty}$ είναι $\|\cdot\|_\infty$-συμπαγές ως κλειστό, φραγμένο και ισοσυνεχές ως κλειστή θήκη ισοσυνεχούς συνόλου. Επίσης, επειδή για κάθε $A \in \mathcal{L}[0,1]$

$$\|\tau(A)\|_\infty = \sup\{m(A \cap [0,t]) : t \in [0,1]\} = m(A),$$

εύκολα βλέπουμε ότι

$$|\tau|(A) = \sup\left\{\sum \|\tau(A_n)\|_\infty : A = \bigsqcup A_n\right\} = m(A)$$

για κάθε $A \in \mathcal{L}[0,1]$, δηλαδή $|\tau| = m$, άρα το τ είναι E-μέτρο με πεπερασμένη κύμανση και $\|\cdot\|$-σχετικώς συμπαγές. Όμως θα δείξουμε ότι το τ δεν έχει παράγωγο Radon-Nikodym ως προς m. Έστω για άτοπο ότι υπάρχει $f \in L_1(m, C[0,1])$ τέτοια ώστε

$$\tau(A) = \int_A f(s)dm(s)$$

για κάθε $A \in \mathcal{L}[0,1]$. Τότε, για κάθε $t \in [0,1]$ έχουμε

$$m(A \cap [0,t]) = \tau(A)(t) = \Big| \int_A f(s)dm(s) \Big|(t) = \int_A f(s)(t)dm(s),$$

όπου $f(s) \in C[0,1]$ για κάθε s. ρα,

$$\int_A \chi_{[0,t]}(s)dm(s) = \int_A f(s)(t)dm(s)$$

για κάθε $A \in \mathcal{L}[0,1]$, απ' όπου έπεται ότι $f(s)(t) = \chi_{[0,t]}(s)$ m-σχεδόν παντού. Τότε $f(s) \notin C[0,1]$ και έχουμε καταλήξει σε άτοπο.

Η ιδιότητα Radon-Nikodym μπορεί ισοδύναμα να μεταφραστεί σε αναπαράσταση τελεστών από τον $L_1(\mu)$ στον E. Υπενθυμίζουμε ότι μια $\varphi \in L_1(\mu)$ λέγεται συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας (σ.π.π.) αν $\varphi \geqslant 0$ και $\int \varphi d\mu = 1$.

Έστω $\mathcal{P}(\mu)$ το σύνολο των σ.π.π. και $\mathcal{P}(\mu, A)$ το σύνολο των σ.π.π. με φορέα το A (δηλαδή, $\varphi(x) = 0$ για κάθε $x \notin A$).

Ορισμός 4.2.7. Ένας γραμμικός τελεστής $T : L_1(\mu) \to E$ λέγεται αναπαραστάσιμος αν υπάρχει $f \in L_\infty(\mu, E)$ τέτοια ώστε

$$T(g) = \int g(\omega) f(\omega) d\mu(\omega)$$

για κάθε $g \in L_1(\mu)$. Χρειάζεται εδώ προσοχή το ότι μιλάμε για συναρτήσεις g που παίρνουν πραγματικές τιμές. Για κάθε $\omega \in \Omega$ έχουμε $g(\omega) \in \mathbb{R}$, $f(\omega) \in E$ και $g(\omega) f(\omega) \in E$.

Πρόταση 4.2.8. *Έστω E χώρος Banach και C φραγμένο, κυρτό και κλειστό υποσύνολο του E. Τότε, το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym στο C αν και μόνο αν για κάθε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, για κάθε φραγμένο γραμμικό τελεστή $T : L_1(\mu) \to E$ και για κάθε σ.π.π. $\varphi \in \mathcal{P}(\mu)$ ισχύει ότι ο T είναι αναπαραστάσιμος, δηλαδή υπάρχει $f \in L_\infty(\mu, E)$ τέτοια ώστε*

$$T(g) = \int g(\omega) f(\omega) d\mu(\omega), \qquad g \in L_1(\mu). \tag{4.2.1}$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι ο T όπως ορίζεται στην (4.2.1) είναι όντως φραγμένος γραμμικός τελεστής και μάλιστα με νόρμα $\|T\| \leqslant \|f\|_\infty = \sup\{\|f(\omega)\| : \omega \in \Omega\}$. Πράγματι,

$$\|T(g)\| \leqslant \int |g(\omega)| \cdot \|f(\omega)\| d\mu(\omega) \leqslant \|f\|_\infty \int |g(\omega)| d\mu(\omega) = \|f\|_\infty \|g\|_1.$$

($\Longleftarrow$) Θα δείξουμε ότι το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Έστω τ ένα E-μέτρο και $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας με $\frac{\tau(A)}{\mu(A)} \in C$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$. Ορίζουμε $T : \mathrm{span}\{\chi_A : A \in \mathcal{B}\} \to E$ με $\tau(\chi_A) = \tau(A) \in E$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$. Επειδή το C είναι κυρτό, έχουμε

$$T\left(\sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{A_i}\right) = \sum_{i=1}^m \lambda_i \mu(A_i) \frac{\tau(A_i)}{\mu(A_i)} \in C$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και $\lambda_i > 0$ με $\sum_{i=1}^m \lambda_i \mu(A_i) = 1$, δηλαδή για κάθε $\sum_{i=1}^m \lambda_i \chi_{A_i} \in \mathcal{P}(\mu)$. Η T επεκτείνεται μοναδικά σε $T : L_1(\mu) = \overline{\mathrm{span}}^{\|\cdot\|_1}\{\chi_A : A \in \mathcal{B}\} \to E$.

Θα δείξουμε ότι $T(\varphi) \in C$ για κάθε $\varphi \in \mathcal{P}(\mu)$. Αφού η T είναι συνεχής και το C είναι κλειστό, αρκεί να το δείξουμε για απλές μετρήσιμες $\varphi \in \mathcal{P}(\mu)$, κάτι που έχουμε ήδη κάνει. Άρα, $T(g) = \int g f d\mu$. Για $g = \chi_A$ παίρνουμε

$$\tau(A) = T(\chi_A) = \int_A f d\mu, \qquad A \in \mathcal{B}.$$

($\Longrightarrow$) Έστω $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $T : L_1(\mu) \to E$ με $T(\varphi) \in C$ για κάθε $\varphi \in \mathcal{P}(\mu)$, όπου το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Ορίζουμε $\tau : \mathcal{B} \to E$ με $\tau(A) = T(\chi_A) \in E$. Το τ είναι E-μέτρο και $\frac{\tau(A)}{\mu(A)} \in C$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$, αφού $\frac{\chi_A}{\mu(A)} \in \mathcal{P}(\mu) \implies T\left(\frac{\chi_A}{\mu(A)}\right) \in C$ όπου

$T\left(\frac{\chi_A}{\mu(A)}\right) = \frac{\tau(A)}{\mu(A)}$. Τώρα, αφού το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym, υπάρχει $f \in L_1(\mu, E)$ (μάλιστα $f \in L_\infty(\mu, E)$) τέτοια ώστε

$$T(\chi_A) = \tau(A) = \int_A f d\mu = \int \chi_A f d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}$. Αν $g = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i} \in L_1(\mu)$ απλή τότε

$$T(g) = \sum_{i=1}^m a_i T(\chi_{A_i}) = \sum_{i=1}^m a_i \int \chi_{A_i} f d\mu = \int \left(\sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}\right) f d\mu \int g f d\mu.$$

Αν $g \in L_1(\mu)$ τότε υπάρχει ακολουθία (g_n) απλών μετρήσιμων τέτοια ώστε $|g_n| \leqslant |g|$ και $g_n \to g$, άρα $g_n f \to gf$ σχεδόν παντού και $\|g_n f\|_\infty \leqslant \|gf\|_\infty$, άρα από το θεώρημα κυριαρχημένης παίρνουμε

$$T(g) = \lim_n T(g_n) = \lim_n \int g_n f d\mu = \int g f d\mu.$$

□

Συμβολισμός: Για $B \in \mathcal{B}$ με $\mu(B) > 0$ και $T : L_1(\mu) \to E$ ορίζουμε

$$\Gamma_b := T(\mathcal{P}(\mu, B)) = \left\{T(\varphi) : \varphi \in L_1(\mu), \varphi \geqslant 0, \int_B \varphi d\mu = 2 \text{ και } \overline{\{x : \varphi(x) \neq 0\}} = B\right\}.$$

Τότε, από την Πρόταση **;;**, ένα σύνολο C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym αν και μόνο αν κάθε τελεστής $T : L_1(\mu) \to E$ για τον οποίο $\Gamma_\Omega \subseteq C$ είναι αναπαραστάσιμος.

Λήμμα 4.2.9. *Έστω $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $T : L_1(\mu) \to E$ φραγμένος γραμμικός τελεστής. Τότε ο T είναι αναπαραστάσιμος αν και μόνο αν για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \in \mathcal{B}$, $B \subseteq A$ με $\mu(B) > 0$ τέτοιο ώστε*

$$\mathrm{diam}(\Gamma_B) = \sup\{\|T(\varphi) - T(\psi)\| : \varphi, \psi \in \mathcal{P}(\mu, B)\} < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $B \subseteq A$ με $\mu(B) > 0$ και $\mathrm{diam}(\Gamma_B) < \varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $(B_i)_{i \in I}$, αριθμήσιμα το πλήθος, ξένα ανά δύο ώστε $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ και $\mathrm{diam}(\Gamma_{B_i}) < \varepsilon$ για κάθε $i \in I$. Αφού $\mu(\Omega) = 1 > 0$, υπάρχει $B_1 \subseteq \Omega$ με $\mu(B_1) > 0$ και $\mathrm{diam}(\Gamma_{B_1}) < \varepsilon$. Αν $\mu(\Omega \setminus B_1) = 0$ έχουμε τελειώσει: γράφουμε $\Omega = B_1 \cup (\Omega \setminus B_1)$ και παρατηρουμε ότι $\mathrm{diam}(\Gamma_{\Omega \setminus B_1}) = 0$, ενώ επίσης $\mathrm{diam}(\Gamma_{B_1}) < \varepsilon$. Αν $\mu(\Omega \setminus B_1) > 0$ τότε υπάρχει $B_2 \subseteq \Omega \setminus B_1$ με $\mu(B_2) > 0$ και $\mathrm{diam}(\Gamma_{B_2}) < \varepsilon$. Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο εξαντλούμε το Ω σε πεπερασμένα το πλήθος βήματα ή κατασκευάζουμε άπειρη ακολουθία (B_n) με $B_{n+1} \subseteq \Omega \setminus \left(\bigcup_{i=1}^n B_i\right)$ και $\mathrm{diam}(\Gamma_{B_n}) < \varepsilon$ για κάθε n.

Τελικά, μπορούμε να γράψουμε $\Omega = \bigsqcup_{i \in I} B_i$ με το I αριθμήσιμο και $\mathrm{diam}(\Gamma_{B_i}) < \varepsilon$ για κάθε $i \in I$. Θέτουμε

$$x_i = T\left(\frac{\chi_{B_i}}{\mu(B_i)}\right) \in \Gamma_{B_i} \quad \text{και} \quad h = \sum_{i \in I} x_i \chi_{B_i}.$$

Έστω $g \in \mathcal{P}(\mu)$, δηλαδή $g \in L_1$, $g \geqslant 0$ και $\|g\|_1 = 1$. Θέτουμε $a_i = \int_{B_i} g d\mu$. Τότε, $\sum\limits_{i\in I} a_i = 1$ (αφού $\Omega = \bigsqcup\limits_{i\in I} B_i$ και $\int_\Omega g d\mu = 1$). Έχουμε $\frac{g\chi_{B_i}}{a_i}$, $\frac{\chi_{B_i}}{\mu(B_i)} \in \mathcal{P}(\mu, B_i)$, άρα

$$\begin{aligned}\left\|T(g) - \int g h d\mu\right\| &= \left\|\sum_{i\in I} T\left(\frac{g\chi_{B_i}}{a_i}\right) a_i - \sum_{i\in I}\int_{B_i} g(\omega) x_i(\omega) d\mu(\omega)\right\| \\ &= \left\|\sum_{i\in I} T\left(\frac{g\chi_{B_i}}{a_i}\right) - \sum_{i\in I} x_i a_i\right\| \\ &= \left\|\sum_{i\in I}\left(T\left(\frac{g\chi_{B-i}}{a_i}\right) - x_i\right)\right\| \\ &\leqslant \sum_{i\in I}\left\|T\left(\frac{g\chi_{B_i}}{a_i}\right) - T\left(\frac{\chi_{B_i}}{\mu(B_i)}\right)\right\| \\ &\leqslant \sum_{i\in I} a_i\varepsilon = \varepsilon\sum_{i\in I} a_i = \varepsilon.\end{aligned}$$

Επομένως, για κάθε μη κανονικοποιημένη $g \in L_1$ ισχύει

$$\left\|T(g) - \int g h d\mu\right\| \leqslant \varepsilon\|g\|_1 \tag{4.2.2}$$

από τη γραμμικότητα του T και του ολοκληρώματος. Εφαρμόζοντας τα παραπάνω για $\varepsilon =]frac1n$ παίρνουμε διαμερίσεις $\{B_i^n\}_{i\in I_n}$ έτσι ώστε για κάθε n η $\{B_i^n\}_{i\in I_n}$ να είναι εκλέπτυνση της $\{B_i^{n-1}\}_{i\in I_{n-1}}$. Θέτουμε $x_i^n := T\left(\frac{\chi_{B_i^n}}{\mu(B_i^n)}\right)$ και $h_n := \sum_{i\in I_n} x_i^n \chi_{B_i^n}$. Θα δείξουμε ότι η (h_n) είναι ομοιόμορφα Cauchy.

Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $N \in \mathbb{N}$ με $\frac{1}{N} < \varepsilon$. Έστω $m \geqslant n \geqslant N$. Αν $\omega \in \Omega$ τότε υπάρχουν $i \in I_n$ και $j \in I_m$ ώστε $\omega \in B_i^n \cap B_j^m$, και έτσι, $\|h_m(\omega) - h_n(\omega)\| = \|x_j^m(\omega) - x_i^n(\omega)\|$. Επειδή $m \geqslant n$, η $\{B_i^m\}_{i\in I_m}$ είναι εκλέπτυνση της $\{B_i^n\}_{i\in I_n}$, άρα υπάρχει k τέτοιος ώστε $B_j^m \subseteq B_k^n$, και επειδή τα B_i^n είναι ξένα έχουμε $B_j^m \subseteq B_i^n$, συνεπώς $\Gamma_{B_j^m} \subseteq \Gamma_{B_i^n}$ και έπεται ότι $x_j^m(\omega), x_i^n(\omega) \in \Gamma_{B_i^n}$. Αφού $\mathrm{diam}(\Gamma_{B_i^n}) < \frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{N} < \varepsilon$, συμπεραίνουμε ότι $\|x_j^m(\omega) - x_i^n(\omega)\| < \varepsilon$, δηλαδή $\|h_m(\omega) - h_n(\omega)\| < \varepsilon$. Έτσι, η $(h_n)_n$ είναι ομοιόμορφα Cauchy στον χώρο Banach E, άρα υπάρχει $f \in L_\infty(\mu, E)$ τέτοια ώστε $h_n \to f$ ομοιόμορφα, δηλαδή $\|h_n - f\|_\infty \to 0$.

Από την (4.2.2) με $\varepsilon = \frac{1}{n}$ παίρνουμε

$$\lim n \to \infty \left\|T(g) - \int g h_n d\mu\right\| = 0$$

όπου $\int g h_n d\mu \longrightarrow \int g f d\mu$ από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, άρα $T(g) = \int g f d\mu$ για κάθε $g \in L_1(\mu)$.

($\Longrightarrow$) Έστω T αναπαραστάσιμος και έστω $f \in L_\infty(\mu, E)$ τέτοια ώστε $T(g) = \int g f d\mu$ για κάθε $g \in L_1(\mu)$. Έστω $\varepsilon > 0$ και $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$. Θέτουμε $\|f\|_\infty = \sup\{\|f(\omega)\| : \omega \in A\}$ και $B = \{\omega \in A : \|f\|_\infty - \varepsilon \leqslant \|f(\omega)\| \leqslant \|f\|_\infty\}$. Τότε $B \subseteq A$ και $\mu(B) > 0$. Έστω $\tau(\varphi)$, $\tau(\psi) \in \Gamma_B$, δηλαδή $\varphi, \psi \geqslant 0$ και $\int_B \varphi = \int_B \psi = 1$. Τότε

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| = \left\|\int_B (\varphi - \psi) f d\mu\right\| = \left\|\int_B \varphi f d\mu - \int_B \psi f d\mu\right\|.$$

□

Ορισμός 4.2.10. Έστω C φραγμένο, κυρτόκαι κλειστό σύνολο σε ένα χώρο Banach E. Έστω $x^* \in E^*$ και $a > 0$. Ορίζουμε τη φέτα $S(C, X^*, a)$ ως εξής:

$$S(C, x^*, a) := \{y \in C : x^*(y) \geqslant \sup\{x^*(x) : x \in C\} - q\}.$$

Παρατηρήστε ότι $S(C, x^*, a) \neq \varnothing$ από τον χαρακτηρισμό του supremum.

Το C λέγεται dentable αν έχει φέτες οσοδήποτε μικρής διαμέτρου, δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $x^* \in E^*$ και $a > 0$ τέτοια ώστε

$$\operatorname{diam}(S(C, x^*, a)) < \varepsilon.$$

Ένα $y \in C$ λέγεται denting point του C αν το y ανήκει σε φέτες οσοδήποτε μικρής διαμέτρου, δηλαδή αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει φέτα $S(C, x^*, a)$ τέτοια ώστε $y \in S(C, x^*, a)$ και $\operatorname{diiam}(S(C, x^*, a)) < \varepsilon$ (ειδικότερα, τότε, $S(C, x^*, a) \subseteq B(y, \varepsilon)$).

Υπενθύμιση: Δεύτερο Διαχωριστικό Θεώρημα. Έστω E χώρος Banach, $K \subseteq E$ συμπαγές και κυρτό, $F \subseteq E$ κλειστό και κυρτό, και έστω ότι $K \cap F = \varnothing$. Τότε υπάρχει $f \in E^*$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{x \in K} f(x) < \inf_{y \in F} f(y).$$

Επίσης, παίρνοντας $\tilde{f} = -f$ έχουμε ότι υπάρχει $\tilde{f} \in E^*$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{y \in F} \tilde{f}(y) < \inf_{x \in K} \tilde{f}(y).$$

Ισχυρισμός 1. Το C δεν είναι dentable αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε $x \in \overline{\operatorname{conv}}(C \setminus B(x, \varepsilon))$ για κάθε $x \in C$.

Απόδειξη. ($\Longrightarrow$) Έστω ότι το C δεν είναι dentable. Δηλαδή, υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $f \in X^*$ και $a > 0$ να ισχύει $\operatorname{diam}(S(C, f, a)) > 2\varepsilon$.

Έστω για άτοπο ότι υπάρχει $x \in C$ τέτοιο ώστε $x \notin \overline{\operatorname{conv}}(C \setminus B(x, \varepsilon))$. Τότε $x \cap \overline{\operatorname{conv}}(C \setminus B(x, \varepsilon)) = \varnothing$, όπου το $\{x\}$ είναι συμπαγές (και τετριμμένα κυρτό) στον E και το $\overline{\operatorname{conv}}(C \setminus B(x, \varepsilon))$ είναι κλειστό και κυρτό στον E. Άρα, από το δεύτερο διαχωριστικό θεώρημα, υπάρχει $f \in X^*$ τέτοιο ώστε

$$\sup_{y \in \overline{\operatorname{conv}}(C \setminus B(x, \varepsilon))} f(y) < f(x),$$

ισοδύναμα,

$$\sup_{y \in C \setminus B(x, \varepsilon)} f(y) < f(x).$$

Επομένως, υπάρχει $a > 0$ τέτοιος ώστε

$$\sup_{y \in C \setminus B(x, \varepsilon)} f(y) + a < f(x).$$

Παρατηρούμε ότι $S(C, f, a/2) \subseteq B(x, \varepsilon)$. Πράγματι, αν $y \in S(C, f, a/2)$ τότε

$$f(y) + \frac{a}{2} \geqslant \sup_{z \in C} f(z) \geqslant f(x) \geqslant \sup_{w \in C \setminus B(x, \varepsilon)} f(w) + a,$$

άρα $f(y) > \sup_{w \in C \setminus B(x, \varepsilon)} f(w)$, συνεπώς $y \notin C \setminus B(x, \varepsilon)$, άρα $y \in B(x, \varepsilon)$. Αφού $S(C, f, a/2) \subseteq B(x, \varepsilon)$, έχουμε $\operatorname{diam}(S(C, f, a/2)) \leqslant 2\varepsilon$, το οποίο είναι άτοπο. □

Ισχυρισμός 2. Το y είναι denting point του C αν και μόνο αν η $id : (C, w) \to (C, \|\cdot\|)$ είναι συνεχής στο $y \in C$. [Υπενθυμίζουμε ότι η $id^{-1} : (C, \|\cdot\|) \to (C, w)$ είναι πάντα συνεχής αφού $\mathcal{T}_w \subseteq \mathcal{T}_{\|\cdot\|}$.]

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$ τυχόν. Για να δείξουμε ότι η id είναι συνεχής στο y, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει ανοικτή περιοχή U του y τέτοια ώστε $id(U) \subseteq B(y, \varepsilon)$, δηλαδή να δείξουμε ότι $U \subseteq B(y, \varepsilon)$. Αφού το y είναι denting point του C, υπάρχει $x^* \in E^*$ και $a > 0$ ώστε $\operatorname{diam}(S(C, x^*, a)) < \frac{\varepsilon}{2}$, άρα $y \in S(C, x^*, a) \subseteq B(y, \varepsilon/2)$.

Θέτουμε $\kappa := \sup_{x \in C} x^*(x) - a$, οπότε $S(C, x^*, a) = \{z \in C : x^*(z) \geqslant \kappa\} = (x^*)^{-1}([\kappa, \infty))$. Το $S(C, x^*, a)$ είναι w-κλειστό ως αντίστροφη εικόνα κλειστού συνόλου μέσω του w-συνεχούς x^*. Έχουμε $y \in S(C, x^*, a)$, άρα $x^*(y) \geqslant \kappa$.

Αν $x^*(y) > \kappa$ τότε $y \in (x^*)^{-1}(\kappa, \infty) \subseteq S(C, x^*, a) \subseteq B(y, \varepsilon/2) \subseteq B(y, \varepsilon)$, και το $U = (x^*)^{-1}(\kappa, \infty)$ είναι w-ανοικτή περιοχή του y, άρα έχουμε το ζητούμενο.

Έστω λοιπόν ότι $x^*(y) = \kappa$. Αφού $x^* \neq 0$, υπάρχει $z_0 \in E$ τέτοιο ώστε $\|z_0\| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $x^*(z_0) > 0$ (για παράδειγμα, το $z_0 = \pm \frac{y}{\|y\|} \frac{\varepsilon}{4}$). Αρκεί να δείξουμε ότι

$$S(C, x^*, a + x^*(z_0)) \subseteq B(y, \varepsilon).$$

[Τότε, $y \in S(C, x^*, a) \subseteq S(C, x^*, a + x^*(z_0))$ και $x^*(y) = \kappa > \kappa - x^*(z_0)$, άρα το $U = (x^*)^{-1}(\kappa - x^*(z_0), \infty)$ είναι w-ανοικτή περιοχή του y με $U \subseteq S(C, x^*, a + x^*(z_0)) \subseteq B(y, \varepsilon)$.]

Έστω λοιπόν $z \in S(C, x^*, a + x^*(z_0))$. Τότε $x^*(z) \geqslant \kappa - x^*(z_0)$, άρα $x^*(z + z_0) \geqslant \kappa$. Τότε $z + z_0 \in S(C, x^*, a) \subseteq B(y, \varepsilon/2)$, άρα $\|z - y\| \leqslant \|z + z_0 - y\| + \|z_0\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$. Συνεπώς, $z \in B(y, \varepsilon)$ και έχουμε δείξει ότι $S(C, x^*, a + x^*(z_0)) \subseteq B(y, \varepsilon)$. □

Σε αυτό το σημείο θα χρειαστεί να εισαγάγουμε την έννοια της δεσμευμένης μέσης τιμής και των martingales. Έστω $\mathcal{B}_0, \mathcal{B}$ σ-άλγεβρες στο $\Omega \neq \varnothing$ και μ μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{B})$. Επίσης με μ θα συμβολίζουμε το $\mu\big|_{\mathcal{B}_0}$ που είναι μέτρο πιθανότητας στον $(\Omega, \mathcal{B}_0)$. Έστω $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$. Ορίζουμε ως δεσμευμένη μέση τιμή (conditional expectation) της f ως προς $\mathcal{B}_0$ και συμβολίζουμε με $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f)$ την συνάρτηση $g \in L_1(\Omega, \mathcal{B}_0, \mu)$ η οποία ικανοποιεί την

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}_0$.

Απόδειξη της ύπαρξης και της μοναδικότητας της δεσμευμένης μέσης τιμής. Θεωρούμε το προσημασμένο μέτρο $\nu : \mathcal{B}_0 \to \mathbb{R}$ με $\nu(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{B}_0$, για το οποίο ξέρουμε ότι $\nu \ll \mu$. Τότε, από το θεώρημα Radon-Nikodym, υπάρχει $g \in L_1(\Omega, \mathcal{B}_0, \mu)$ τέτοιο ώστε $\nu(A) = \int_A g d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{B}_0$, άρα

$$\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}_0$. Έπεται από το θεώρημα Radon-Nikodym ότι η g είναι μοναδική μ-σχεδόν παντού. □

Ισχύει επίσης η ανισότητα

$$\|\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f)\|_1 \leqslant \|f\|_1, \qquad f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$$

και προφανώς $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f)) = \mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f)$ για κάθε $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$, άρα ο $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0} : L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu) \to L_1(\Omega, \mathcal{B}_0, \mu)$ είναι φραγμένη γραμμική προβολή νόρμας 1 (τη λέμε συσταλτική προβολή). Αποδεικνύεται επίσης ότι η $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}$ είναι συσταλτική προβολή ως τελεστής $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0} : L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mu) \to L_p(\Omega, \mathcal{B}_0, \mu)$ για κάθε $1 \leqslant p < \infty$.

Όμοια ορίζεται η δεσμευμένη μέση τιμή μιας διανυσματικής $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, E)$ ως $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f) := g \in L_1(\Omega, \mathcal{B}_0, \mu, E)$ όπου $\int_A f d\mu = \int_A g d\mu$ για κάθε $A \in \mathcal{B}_0$. Εδώ εξασφαλίζουμε την ύπαρξη της g ορίζοντας πρώτα για απλή μετρήσιμη $f = \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i}$, $a_i \in E$, $A_i \in \mathcal{B}$,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f) = \sum_{i=1}^m a_i \mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(\chi_{A_i}),$$

όπου $\chi A_i \in L_1(\Omega, \mathcal{B}_0, \mu)$ άρα η $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(\chi_{A_i})$ έχει ήδη οριστεί. Για γενική μετρήσιμη $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}_0, \mu, E)$ θεωρούμε ακολουθία (f_n) απλών μετρήσιμων $f_n \to f$ σχεδόν παντού και ορίζουμε

$$\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f) = \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f_n).$$

Όπως και στην πραγματική περίπτωση, η $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0} : L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mu, E) \to L_p(\Omega, \mathcal{B}, \mu, E)$, $1 \leqslant p < \infty$ είναι συσταλτική προβολή.

Ορισμός 4.2.11. Έστω $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^\infty$ αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών του Ω και μ μέτρο πιθανότητας στην σ-άλγεβρα $\mathcal{B} := \sigma\left(\bigcup_{n=1}^\infty \mathcal{B}_n\right) \subseteq \mathcal{P}(\Omega)$. Μια ακολουθία συναρτήσεων (f_n) με $f_n \in L_1(\Omega, \mathcal{B}_n, \mu)$ για κάθε n λέγεται martingale αν

$$f_m = \mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}(f_n)$$

για κάθε $m < n$.

Αν $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ τότε η ακολουθία $f_n := \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(f)$ είναι martingale και για $\mathcal{B} = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{B}_n\right)$ ισχύει $\|f_n - f\|_1 \to 0$.

Επίσης, αποδεικνύεται ότι αν ένα martingale συγκλίνει ως προς την $\|\cdot\|_1$ τότε συγκλίνει σχεδόν παντού. Τέλος, τα διανυσματικά martingales ορίζονται όμοια και θα δούμε κάτω από ποιες προϋποθέσεις ένα φραγμένο διανυσματικό martingale συγκλίνει είτε ως προς την $\|\cdot\|_1$ είτε κατά σημείο.

Θεώρημα 4.2.12. *Έστω C κλειστό, φραγμένο και κυρτό σύνολο σε ένα χώρο Banach E. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Κάθε κλειστό κυρτό υποσύνολο του C είναι dentable.*

(ii) *Το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.*

(iii) *Για κάθε χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ και για κάθε διανυσματικό martingale (f_n) στον $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ τέτοιο ώστε $f_n(\omega) \in C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $\omega \in \Omega$, ισχύει ότι η (f_n) συγκλίνει μ-σχεδόν παντού.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθο:

Λήμμα 4.2.13. *Έστω $T : L_1(\mu) \to E$, όπου μ είναι σ-πεπερασμένο μέτρο στον $(\Omega, \mathcal{B})$. Έστω $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$, έστω επίσης $x^* \in E^*$ και $a > 0$. Τότε υπάρχει $B \subseteq A$ με $\mu(B) > 0$ και $\Gamma_B \subseteq S(\overline{\Gamma_A}, x^*, a)$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\gamma := \sup_{x \in \Gamma_A} x^*(x) - a = \sup_{x \in \overline{\Gamma_A}} x^*(x) - a$, όπου $\sup_{x \in \Gamma_A} x^*(x) \leqslant \|x^*\| \cdot \|T\| < \infty$. Έχουμε

$$S(\overline{\Gamma_A}, x^*, a) = \{y \in \overline{\Gamma_A} : x^*(y) \geqslant \gamma\}.$$

Το $S(\overline{\Gamma_A}, x^*, a)$ είναι καλά ορισμένη slice αφού το $\overline{\Gamma_A}$ είναι κλειστό, φραγμένο (από $\|T\|$) και κυρτό ως κλειστή θήκη κύρτού. Θέτουμε

$$L_1(A) := \{\varphi \in L_1(\mu) : \text{supp}(\varphi) := \overline{\{\omega \in \Omega : \varphi(\omega) \neq 0\}} \subseteq A\}.$$

Όμοια ορίζεται το $L_\infty(A)$. Από τον χαρακτηρισμό του supremum, επειδή $a > 0$, υπάρχει $T(\varphi) \in \Gamma_A$, δηλαδή $\varphi \in \mathcal{P}(\mu, A)$ ώστε $\sup_{x \in \Gamma_A} x^*(x) \geqslant x^*(T(\varphi)) > \gamma$. Θέτουμε

$$K := \{\psi \in L_1(A) : \psi \geqslant 0 \text{ και } x^*(T(\psi)) \leqslant \gamma \|\psi\|_1\} \neq \varnothing$$

(αφού π.χ. $\psi = 0 \in K$). Έχουμε $\|\varphi\|_1 = 1$, άρα $x^*(T(\varphi)) > \gamma\|\varphi\|_1$, συνεπώς $\varphi \notin K$, δηλαδή $K \cap \{\varphi\} = \varnothing$, όπου το $\{\varphi\}$ είναι συμπαγές κυρτό υποσύνολο του $L_1(A)$ και το K είναι κυρτό κλειστό υποσύνολο του $L_1(A)$ και μάλιστα κώνος. [Πράγματι, το ότι το K είναι κλειστό το βλέπουμε εύκολα με ακολουθίες αφού η $x^* \circ T$ είναι συνεχής. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε ότι αν $a > 0$ και $\psi \in K$ τότε $a\psi \in K$. Τέλος, αν $\psi_1, \psi_2 \in K$ τότε επειδή $\psi_1, \psi_2 \geqslant 0$ έχουμε $\|\psi_1\|_1 + \|\psi_2\|_1 = \|\psi_1 + \psi_2\|_1$, άρα $x^*(T(\psi_1 + \psi_2)) = x^*(T(\psi_1)) + x^*(T(\psi_2)) \leqslant \gamma\|\psi_1\|_1 + \gamma\|\psi_2\|_1 = \gamma\|\psi_1 + \psi_2\|_1$, άρα $\psi_1 + \psi_2 \in K$. Από όλα τα παραπάνω έχουμε ότι το K είναι κώνος και ειδικότερα είναι κυρτό σύνολο.]

Έτσι, από το δεύτερο διαχωριστικό θεώρημα, υπάρχει $\tilde{g} \in L_1^*(A)$ ώστε

$$\sup_{\psi \in K} \tilde{g}(\psi) < \tilde{g}(\psi).$$

Όμως, $L_1^* \simeq L_\infty$ μέσω του ισομετρικού ισομορφισμού $L_\infty \to L_1^*$ με $\psi \mapsto I_\psi : L_1 \to \mathbb{R}$, όπου $f \mapsto I_\psi(f) := \int f\psi d\mu$. Επομένως, υπάρχει $g \in L_\infty(A)$ τέτοια ώστε

$$\sup_{\psi \in K} \int \psi g < \int \varphi g.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω και το ότι το K είναι κώνος, θα δείξουμε ότι

$$\sup_{\psi \in K} \int \psi g d\mu = 0.$$

Αφού $0 \in K$ το supremum αυτό είναι σίγουρα μη αρνητικό. Έστω για άτοπο ότι είναι γνήσια θετικό. Τότε υπάρχει $\psi \in K$ ώστε $\int \psi g d\mu > 0$. Όμως, για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $\lambda\psi \in K$ και $\int (\lambda\psi) g d\mu = \lambda \int \psi g d\mu$. Αφήνοντας το $\lambda \to +\infty$ παίρνουμε

$$+\infty = \sup_{\psi \in K} \psi g d\mu < \int \varphi g d\mu,$$

το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, $\sup_{\psi\in K}\int \psi g d\mu = 0$ και έχουμε $\int \varphi g d\mu > 0$ όπου $\varphi \geqslant 0$. Άρα το $B = \{\omega : g(\omega) > 0\}$ έχει θετικό μέτρο, αφού αν $\mu(B) = 0$ τότε θα είχαμε

$$\int \varphi g = \int_B \varphi g + \int_{\Omega\setminus B} \varphi g = \int_{\Omega\setminus B} \varphi g \leqslant 0.$$

Θα δείξουμε ότι αυτό το σύνολο B είναι το ζητούμενο, δηλαδή ικανοποιεί την

$$\Gamma_B \subseteq S(\overline{\Gamma_A}, x^*, a).$$

Έστω $T(\psi) \in \Gamma_B$, δηλαδή $0 \leqslant \psi \in L_1(B)$, $\int \psi d\mu = 1$. Τότε, ακριβώς όπως πριν (αυτή τη φορά για το $L_1(B)$) παίρνουμε $\int \psi g > 0$. Άρα, $\psi \notin K$, δηλαδή $x^*(T(\psi)) > \gamma$, δηλαδή $T(\psi) \in S(\overline{\Gamma_A}, x^*, a)$. $\square$

Σχόλιο για τη δεσμευμένη μέση τιμή. Έστω E χώρος Banach. Έστω $\mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \mathcal{B}_3 \subseteq \mathcal{B}$ σ-άλγεβρες, όπου $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας, και έστω $g_3 : \Omega \to E$ $\mathcal{B}_3$-μετρήσιμη. Τότε, $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_1}(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_2}(g_3)) = \mathbb{E}_{\mathcal{B}_1}(g_3)$ μ-σχεδόν παντού.

Απόδειξη. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την γνωστή ισοδυναμία ότι $g = 0$ μ-σχεδόν παντού αν και μόνο αν $\int_A g d\mu = 0$ για κάθε $A \in \mathcal{B}$. Αυτό είναι γνωστό για g με τιμές στο $[0, \infty]$ ή στο $\mathbb{R}$ ή στο $\mathbb{C}$. Για γενικό χώρο Banach E το έχουμε άμεσα για απλές, αφού $\int_{A_i} \sum_{i=1}^m a_i \chi_{A_i} = a_i \mu(A_i)$ για $i = 1, \ldots, m$, άρα και για γενική μετρήσιμη g.

Τώρα, για κάθε $A \in \mathcal{B}_1$ έχουμε

$$\int_A \mathbb{E}_{\mathcal{B}_1}(g_3) d\mu = \int_A g_3 d\mu = \int_A \mathbb{E}_{\mathcal{B}_2}(g_3) d\mu = \int_A \mathbb{E}_{\mathcal{B}_1}(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_2}(g_3)) d\mu,$$

και αφού οι $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_1}(g_3), \mathbb{E}_{\mathcal{B}_1}(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_2}(g_3))$ είναι $\mathcal{B}_1$-μετρήσιμες έπεται ότι είναι ίσες μ-σχεδόν παντού. $\square$

Λήμμα 4.2.14. *Έστω $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{B}_n)_{n=1}^\infty$ αύξουσα ακολουθία σ-αλγεβρών με $\mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{B}$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έστω (g_n) ακολουθία με $g_n \in L_1(\Omega, \mathcal{B}_n, \mu, E)$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τέτοια ώστε*

$$\sum_{n=1}^\infty \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1 < \varepsilon$$

για κάποιο $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $\mathcal{B}_n$-martingale (f_n) τέτοιο ώστε $\|g_n - f_n\|_1 \leqslant \varepsilon$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\sum_{n=k}^\infty \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1 \leqslant \sum_{n=1}^\infty \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1 < \varepsilon,$$

άρα

$$\|g_k - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_{k+1})\|_1 + \sum_{n=k+1}^\infty \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1 < \varepsilon.$$

Για $n > k$

$$\begin{aligned}\|\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_n) - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_{n+1})\|_1 &= \|\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_n) - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1}))\|_1 = \|\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1}))\|_1 \\ &\leqslant \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1,\end{aligned}$$

άρα
$$\sum_{n=k+1}^{\infty} \|\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_n) - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_{n+1})\|_1 \leqslant \sum_{n=k+1}^{\infty} \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1$$
και τελικά
$$\|g_k - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_{k+1})\|_1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \|\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_n) - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_{n+1})\|_1 M\varepsilon$$
για κάθε $k \in \mathbb{N}$.

Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{N}$ και θέτουμε $h_n := \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_n)$. Θα δείξουμε ότι η ακολουθία $(h_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία Cauchy στον χώρο Banach $L_1(\mu, E)$. Ξέρουμε ότι $\sum\limits_{n=k+1}^{\infty} \|h_n - h_{n+1}\|_1 < \varepsilon$. Έστω $\delta > 0$ τυχόν. Τότε, υπάρχει $n_0 > k+1$ τέτοιος ώστε $\sum\limits_{n=n_0}^{\infty} \|h_n - h_{n+1}\|_1 < \delta$. Έτσι, για κάθε $m > n \geqslant n_0$,
$$\begin{aligned}\|h_n - h_m\|_1 &\leqslant \|h_n - h_{n+1}\|_1 + \|h_{n+1} - h_{n+2}\|_1 + \cdots + \|h_{m-1} - h_m\|_1 = \sum_{i=n}^{m-1} \|h_i - h_{i+1}\|_1 \\ &< \sum_{i=n_0}^{\infty} \|h_i - h_{i+1}\|_1 < \delta.\end{aligned}$$
Άρα, η (h_n) είναι ακολουθία Cauchy.

Αφού ο $L_1(\mu, E)$ είναι πλήρης, η $(h_n)_{n \geqslant k+1}$ είναι συγκλίνουσα στον $L_1(\mu, E)$. Φυσικά, αφού η $(h_n)_{n \geqslant K=1}$ είναι συγκλίνουσα, θα είναι συγκλίνουσα και η $(h_n)_{n\geqslant 1}$ και μάλιστα στο ίδιο όριο. Άρα, υπάρχει $f_k \in L_1(\mu, E)$ τέτοια ώστε $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_n) \xrightarrow{\|\cdot\|_1} f_k$. Θα δείξουμε ότι $\|g_k - f_k\|_1 \leqslant \varepsilon$.

Από την υπόθεση,
$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1 < \varepsilon.$$
Άρα, για κάθε $m > k$,
$$\|g_k - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_m)\|_1 \leqslant \|g_k - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_{k+1})\|_1 + \sum_{n=k+1}^{\infty} \|\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_n) - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_{n+1})\|_1 < \varepsilon.$$
Άρα, για $m \to \infty$, $\|g_k - f_k\|_1 \leqslant \varepsilon$ (αφού $\|\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(g_m) - f_k\|_1 \xrightarrow{m\to\infty} 0$).

Τέλος, πρέπει να δείξουμε ότι η $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι martingale. Εξ ορισμού, $f_k \in L_1(\Omega, \mathcal{B}_k, \mu, E)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $f_m = \mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}(f_n)$ για κάθε $m < n$. Έστω $m < n$. Έχουμε
$$\mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_k)) = \mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}(g_k) \xrightarrow{k\to\infty} f_m.$$
Όμως $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_k) \xrightarrow{k\to\infty} f_n$ και ο τελεστής $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}$ είναι συνεχής, άρα $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}(\mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_k)) \to \mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}(f_n)$. Από τη μοναδικότητα του ορίου,
$$\mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}(f_n) = f_m.$$
Άρα, η $(f_k)_{k=1}^{\infty}$ είναι martingale. □

Παρατήρηση 4.2.15. Έστω $\mathcal{B}_0 \subseteq \mathcal{B}$, $f \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, E)$ και $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f) \in L_1(\Omega, \mathcal{B}_0, \mu, E)$. Τότε,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{B}_0}(f) \in \overline{\mathrm{conv}}\{f(\omega) : \omega \in \Omega\}.$$

Έτσι, αν στο Λήμμα 4.2.14 πάρχει κλειστό κυρτό σύνολο C τέτοιο ώστε $g_n(\Omega) \subseteq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, τότε έπεται ότι $f_n(\Omega) \subseteq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.12. Έστω C κυρτό φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του χώρου Banach E.

(i) $\Longrightarrow$ (ii) Υποθέτουμε ότι κάθε κλειστό κυρτό υποσύνολο του C είναι dentable. Θα δείξουμε ότι το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Έστω $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $T : L_1(\mu) \to E$ φραγμένος γραμμικός τελεστής τέτοιος ώστε $T(\varphi) \in C$ για κάθε $\varphi \in \mathcal{P}(\mu)$. Σύμφωνα με την Πρόταση 4.2.8 αρκεί να δείξουμε ότι ο T είναι αναπαραστάσιμος. Έστω $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ και έστω $\varepsilon > 0$. Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.9 αρκεί να βρούμε $B \subseteq A$ με $\mu(B) > 0$ και $\mathrm{diam}(\Gamma_B) < \varepsilon$. Αφού $T(\mathcal{P}(\mu)) \subseteq C$, ισχύει ότι $\Gamma_A \subseteq C$ και αφού το C είναι κλειστό βλέπουμε ότι $\overline{\Gamma_A} \subseteq C$. Το $\overline{\Gamma_A}$ είναι κλειστό κυρτό υποσύνολο του C, άρα από την υπόθεση (i) το $\overline{\Gamma_A}$ είναι dentable, δηλαδή υπάρχουν $x^* \in E^*$ και $a > 0$ τέτοια ώστε $\mathrm{diam}(S(\overline{\Gamma_A}, x^*, a)) < \varepsilon$. Από το Λήμμα 4.2.13 υπάρχει $B \subseteq A$ με $\mu(B) > 0$ και $\Gamma_B \subseteq S(\Gamma_A, x^*, a)$, άρα $\mathrm{diam}(\Gamma_B) < \varepsilon$. Επομένως, από το Λήμμα 4.2.9 ο T είναι αναπαραστάσιμος και από την Πρόταση 4.2.8 το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.

(ii) $\Longrightarrow$ (iii) Υποθέτουμε ότι το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Έστω $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ χώρος πιθανότητας και $(\mathcal{B}_n)$ αύξουσα ακολουθία υπο-σ-αλγεβρών της $\mathcal{B}$ τέτοια ώστε $\mathcal{B} = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{B}_n\right)$.

Έστω (f_n) ένα $(\mathcal{B}_n)$ martingale, $f_n : \Omega \to C$. Θα δείξουμε ότι η (f_n) συγκλίνει σχεδόν παντού. Αφού η (f_n) είναι martingale, αρκεί να δείξουμε ότι είναι $\|\cdot\|_1$-συγκλίνουσα (η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού παραλείπεται). Θέτουμε

$$\mathcal{A} := \left\{ B \in \mathcal{B} : \text{το } \lim_{n\to\infty} \int_B f_n d\mu \text{ υπάρχει} \right\}.$$

Θα δείξουμε ότι $\bigcup_n \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}$.

Έστω $A \in \bigcup_n \mathcal{B}_n$. Υπάρχει $m \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $A \in \mathcal{B}_m$ και αφού η (f_n) είναι martingale, για κάθε $n \geqslant m$ έχουμε $f_m = \mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}(f_n)$ άρα

$$\int_A f_n d\mu = \int_A f_m d\mu,$$

δηλαδή η ακολουθία $\left(\int_A f_n d\mu\right)_n$ είναι τελικά σταθερή, άρα συγκλίνουσα, το οποίο σημαίνει ότι $A \in \mathcal{A}$.

Τώρα θα δείξουμε ότι η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin (δηλαδή $\Omega \in \mathcal{A}$ και η $\mathcal{A}$ είναι κλειστή ως προς μονότονες διαφορές και αριθμήσιμες μονότονες ενώσεις). Έχουμε $\Omega \in calA$: για παράδειγμα, $\Omega \in \mathcal{B}_1 \subseteq \bigcup_n \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}$. Έστω $A, B \in \mathcal{A}$ με $A \subseteq B$. Τότε,

$$\int_{B\setminus A} f_n d\mu = \int_B f_n d\mu - \int_A f_n d\mu$$

και αφού $A, B \in \mathcal{A}$ το $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{B\setminus A} f_n d\mu$ υπάρχει, άρα $B \setminus A \in \mathcal{A}$. Τώρα, αν (A_m) είναι αύξουσα ακολουθία συνόλων στην $\mathcal{A}$ τότε το $\lim\limits_{n\to\infty} \int_{A_m} f_n d\mu$ υπάρχει για κάθε m, και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\int_{\bigcup\limits_m A_m} f_n d\mu = \lim_{m\to\infty} \int_{A_m} f_n d\mu$$

αφού η (A_m) είναι αύξουσα, άρα

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\bigcup\limits_m A_m} f_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \left(\lim_{m\to\infty} \int_{A_m} f_n d\mu \right) = \lim_{m\to\infty} \left(\lim_{n\to\infty} \int_{A_m} f_n d\mu \right).$$

Άρα η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin με $\bigcup\limits_n \mathcal{B}_n \subseteq \mathcal{A}$, και αφού η $\bigcup\limits_n \mathcal{B}_n$ είναι άλγεβρα άρα και κλειστή ως προς πεπερασμένες τομές, συμπεραίνουμε ότι

$$\sigma\left(\bigcup_n \mathcal{B}_n\right) = \delta\left(\bigcup_n \mathcal{B}_n\right)$$

όπου με $\delta(\mathcal{C})$ συμβολίζουμε την ελάχιστη κλάση Dynkin που περιέχει την $\mathcal{C}$. Έπεται ότι $\mathcal{B} = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{B}_n\right) = \delta\left(\bigcup_n \mathcal{B}_n\right) \subseteq \mathcal{A}$ (αφού η $\mathcal{A}$ είναι κλάση Dynkin και περιέχει την $\bigcup\limits_n \mathcal{B}_n$) και τελικά $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{A} \subseteq \mathcal{B}$, δηλαδή $\mathcal{A} = \mathcal{B}$. Δείξαμε έτσι ότι το όριο $\lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$ υπάρχει για κάθε $A \in \mathcal{B}$.

Ορίζουμε $\tau : \mathcal{B} \to E$ με $\tau(A) := \lim\limits_{n\to\infty} \int_A f_n d\mu$. Το τ είναι E-μέτρο. Θα δείξουμε ότι το τ έχει πεπερασμένη κύμανση, δηλαδή ότι $|\tau|(\Omega) < \infty$. Από την υπόθεση έχουμε $f_n(\omega) \in C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$, και το C είναι φραγμένο, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|f_n(\omega)\| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$. Ξέρουμε ότι αν (a_n) είναι ακολουθία στον E με $a_n \to a \in E$ τότε $\|a_n\| \to \|a\|$. Έτσι,

$$|\tau|(\Omega) = \sup\left\{ \sum_j \|\tau(A_j)\| : (A_j)_{j\in J} \text{ διαμέριση του } A, |J| < \infty \right\},$$

όπου

$$\sum_j \|\tau(A_j)\| = \sum_j \left\| \lim_n \int_{A_j} f_n d\mu \right\| = \sum_j \lim_n \left\| \int_{A_j} f_n d\mu \right\| \leqslant \sum_j \int_{A_j} M d\mu = M < \infty.$$

Άρα, $|\tau|(\Omega) \leqslant M < \infty$, δηλαδή το τ έχει πεπερασμένη κύμανση.

Δείχνουμε τώρα ότι για κάθε $A \in \mathcal{B}$ με $\mu(A) > 0$ ισχύει $\frac{\tau(A)}{\mu(A)} \in C$. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_\omega \frac{f_n \chi_A}{\mu(A)} d\mu \in C.$$

Τότε, αφού το C είναι κλειστό,

$$\frac{\tau(A)}{\mu(A)} = \lim_n \int_\Omega \frac{f_n \chi_A}{\mu(A)} \in C.$$

Η $f_n : \Omega \to C$ είναι μετρήσιμη και $f_n \in L_1(\Omega, \mathcal{B}, \mu, E)$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\int \frac{\varphi \chi_A}{\mu(A)} d\mu \in C$ για $\varphi : \Omega \to C$ απλή μετρήσιμη. Έστω $\varphi = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i}$, όπου $b_i \in C$, η κανονική μορφή της απλής φ, δηλαδή τα B_i είναι ξένα ανά δύο και $\bigcup\limits_{i=1}^m B_i = \Omega$. Τότε $\varphi\chi_A = \sum_{i=1}^m b_i \chi_{B_i\cap B}$ και η $(B_i\cap A)_{i=1}^m$ είναι διαμέριση του A. Έτσι,

$$\frac{1}{\mu(a)}\int \varphi\chi_A d\mu = \frac{1}{\mu(A)}\sum_{i=1}^m b_i\mu(B_i\cap A) = \sum_{i=1}^m \frac{\mu(B_i\cap A)}{\mu(A)} b_i \in C$$

αφού το C είναι κυρτό, $b_i\in C$, $\frac{\mu(B_i\cap A)}{\mu(A)} \geqslant 0$ και $\sum\limits_{i=1}^m \frac{\mu(B_i\cap A)}{\mu(A)} = \frac{\mu(A)}{\mu(A)} = 1$.

Τώρα, υπάρχει ακολουθία (φ_m) απλών μετρήσιμων συναρτήσεων $\varphi_m : \Omega \to C$ ώστε $\varphi_m \to f_n$ και $\int \|\varphi_k - \varphi_m\| d\mu \to 0$ και

$$\int f_n d\mu = \lim_{m\to\infty} \int \varphi_m d\mu \in C$$

αφού το C είναι κλειστό. Έτσι, αφού $\frac{\tau(A)}{\mu(A)} \in C$ για κάθε $A\in\mathcal{B}$ με $\mu(A)>0$, όπου μ μέτρο πιθανότητας και το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym, υπάρχει $f\in L_\infty(\mu,E)$ τέτοια ώστε $\tau(A) = \int_A f d\mu$ για κάθε $A\in\mathcal{B}$.

Έστω $m\in\mathbb{N}$ και έστω $A\in\mathcal{B}_m$. Τότε,

$$\int_A f d\mu = \tau(A) = \int_A f_m d\mu$$

για κάθε $A\in\mathcal{B}_m$, άρα από τον ορισμό της δεσμευμένης μέσης τιμής έχουμε $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_m}(f) = f_m$ για κάθε $m\in\mathbb{N}$. Έστι, $\|f_m - f\|_1 \overset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Αφού η (f_n) είναι martingale και $\|f_m - f\|_1 \to 0$, έπεται ότι $f_m \to f$ σχεδόν παντού.

(iii) $\Longrightarrow$ (i) Υποθέτουμε ότι για κάθε χώρο πιθανότητας $(\Omega,\mathcal{B},\mu)$ και για κάθε αύξουσα ακολουθία $(\mathcal{B}_n)$ υπο-σ-αλγεβρών της $\mathcal{B}$, κάθε martingale (f_n) τέτοιο ώστε $f_n(\omega)\in C$ για κάθε n και ω συγκλίνει σχεδόν παντού.

Έστω για άτοπο ότι υπάρχει κλειστό κυρτό υποσύνολο του C που δεν είναι dentable. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι το C δεν είναι dentable. Όπως είχαμε δεί πιο πριν στον Ισχυρισμό 1, το C δεν είναι dentable αν και μόνο αν υπάρχει $\varepsilon>0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x\in C$ έχουμε $x\in\overline{\mathrm{conv}}(C\setminus B(x,\varepsilon))$. Για να καταλήξουμε σε άτοπο αρκεί να ορίσουμε επαγωγικά μια αύξουσα ακολουθία πεπερασμένων υπο-σ-αλγεβρών $\mathcal{B}_n$ του $[0,1]$ και $\mathcal{B}_n$-μετρήσιμες $g_n : [0,1]\to C$, Bochner ολοκληρώσιμες, τέτοιες ώστε

$$\|g_n(t) - g_{n+1}(t)\| \geqslant \varepsilon \tag{4.2.3}$$

για κάθε n και $t\in[0,1]$, και

$$\sum_{n=1}^\infty \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}. \tag{4.2.4}$$

Πράγματι, έστω ότι έχουμε τα παραπάνω. Τότε ικανοποιείται το Λήμμα 4.2.14, άρα υπάρχει (f_n) που είναι $(\mathcal{B}_n)$-martingale τέτοιο ώστε $\|f_n - g_n\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$ για κάθε n. Τότε $\|f_n - f_{n+1}\|_1 \geqslant \frac{\varepsilon}{2}$, γιατί αν είχαμε $\|f_n - f_{n+1}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ θα παίρναμε $\|g_n - g_{n+1}\|_1 \leqslant \|g_n - f_n\|_1 + \|f_n - f_{n+1}\|_1 + \|f_{n+1} - g_{n+1}\|_1 < \varepsilon$ που είναι άτοπο από την (4.2.3). Επομένως, η (f_n) δεν συγκλίνει ως προς $\|\cdot\|_1$ ούτε σχεδόν παντού.

Θέτουμε $\mathcal{B}_1 = \{\varnothing,[0,1]\}$ την τετριμμένη σ-άλγεβρα στο $[0,1]$. Σταθεροποιούμε $x\in C$. Ορίζουμε $g_1 : [0,1]\to C$ με $g_1(t) = x$ για κάθε t. Η g_1 είναι $\mathcal{B}_1$-μετρήσιμη.

Υπενθυμίζουμε ότι αν $(X, \mathcal{A})$ είναι μετρήσιμος χώρος, ένα μη κενό $A \in \mathcal{A}$ λέγεται άτομο της σ-άλγεβρας $\mathcal{A}$ αν δεν έχει μη κενά υποσύνολα B που ανήκουν στην $\mathcal{A}$. Επίσης, είναι γνωστό ότι αν $\mathcal{A}$ είναι μια πεπερασμένη σ-άλγεβρα τότε υπάρχει διαμέριση του X σε άτομα της $\mathcal{A}$, δηλαδή υπάρχουν $m \in \mathbb{N}$ και $A_1, \ldots, A_m \in \mathcal{A}$ ξένα ανά δύο άτομα της $\mathcal{A}$ ώστε $X = \bigsqcup_{i=1}^{m} A_i$.

Έστω ότι έχουν κατασκευαστεί η πεπερασμένη άλγεβρα $\mathcal{B}_n$ και η g_n. Αφού η $\mathcal{B}_n$ είναι πεπερασμένη, μπορούμε να γράψουμε $[-,1] = \bigcup_{i=1}^{m} A_i$, όπου τα A_i είναι ξένα ανά δύο άτομα της $\mathcal{B}_n$. Η $g_n : [0,1] \to C$ έχει επιλεγεί ως $\mathcal{B}_n$-μετρήσιμη. Επομένως, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_m \in C$ τέτοια ώστε $g_n = \sum_{i=1}^{m} x_i \chi_{A_i}$. Ξέρουμε ότι $x_i \in \overline{\mathrm{conv}}(C \setminus B(x_i, \varepsilon))$, όπου

$$\mathrm{conv}(C \setminus B(x,\varepsilon)) = \left\{ \sum_{j=1}^{k} \lambda_j y_j : k \in \mathbb{N}, \lambda_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{k} \lambda_j = 1, y_j \in C, \|y_j - x\| \geqslant \varepsilon \right\},$$

άρα για κάθε i υπάρχουν $x_{i,1}, \ldots, x_{i,k_i} \in C$ και $\lambda_{i,1}, \ldots, \lambda_{i,k_i} \geqslant 0$ με $\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{i,j} = 1$ τέτοια ώστε $\|x_i - x_{i,j}\| \geqslant \varepsilon$ για κάθε $j = 1, \ldots, k_i$ και

$$\left\| \sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{i,j} x_{i,j} - x_i \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}.$$

Για κάθε i με $m(A_i) > 0$ διαμερίζουμε το A_i σε k_i το πλήθος σύνολα $A_{i,j}$, $j \leqslant k_i$, με τέτοιο τρόπο ώστε $m(A_{i,j}) = \lambda_{i,j} m(A_i)$ για κάθε i, j. Αν $m(A_i) = 0$ μπορούμε να επιλέξουμε $A_{i,1} = A_1$ και $A_{i,j} = \varnothing$ για κάθε $j \neq i$.

Ορίζουμε $\mathcal{B}_{n+1}$ την άλγεβρα που παράγεται από τα $\{A_{i,j} : j = 1, \ldots, k_i.i = 1, \ldots, m\}$. Αυτά είναι τα άτομα της $\mathcal{B}_{n+1}$. Ορίζουμε

$$g_{n+1} := \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{i,j} \chi_{A_{i,j}}.$$

Η g_{n+1} είναι $\mathcal{B}_{n+1}$-μετρήσιμη.

Τότε οι g_n ικανοποιούν τις (4.2.3) και (4.2.4). Πράγματι:

(4.2.3) Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $t \in [0,1]$. Θα δείξουμε ότι $\|g_n(t) - g_{n+1}(t)\| \geqslant \varepsilon$. Υπάρχουν μοναδικά i, j ώστε $t \in A_{i,j}$, άρα $g_{n+1}(t) = x_{ij}$ και $g_n(t) = x_i$. Όμως, $\|x_i - x_{ij}\| \geqslant \varepsilon$.

(4.2.3) Θα δείξουμε ότι $\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1 \leqslant \frac{\varepsilon}{4}$. Έχουμε $g_n = \sum_{i=1}^{m} x_i \chi_{A_i}$ και $g_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} x_{ij} \chi_{A_{i,j}}$, άρα

$$\mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{k_i} \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(x_{ij} \chi_{A_{i,j}})$$

όπου $\mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(x_{ij} \chi_{A_{i,j}}) = \lambda_{ij} x_{ij} \chi_{A_i}$ αφού $A_i \in \mathcal{B}_n$ και $\int \lambda_{ij} x_{ij} \chi_{A_i} = \lambda_{ij} x_{ij} m(A_i) = x_{ij} m(A_{ij})$. Άρα,

$$\mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1}) = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k_i} \lambda_{ij} x_{ij} \right) \chi_{A_i}.$$

Έτσι,

$$
\begin{aligned}
\|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\|_1 &= \left\| \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{k_i} (x_i - \lambda_{ij}x_{ij}) \right) \chi_{A_i} \right\|_1 \leqslant \sum_{i=1}^{m} \left\| \sum_{j=1}^{k_i} (x_i - \lambda_{ij}x_{ij}) \right\| \mu(A_i) \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} \mu(A_i) = \frac{\varepsilon}{2^{n+3}}.
\end{aligned}
$$

Έπεται ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|g_n - \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(g_{n+1})\| \leqslant \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^{n+3}} = \frac{\varepsilon}{8} < \frac{\varepsilon}{4}.$$

□

Παρατηρήσεις 4.2.16. (i) Τα A_i στο επαγωγικό βήμα της κατασκευής μπορούν να επιλεγούν να είναι διαστήματα και μάλιστα τέτοια ώστε $\mathcal{B}[0,1] = \sigma\left(\bigcup_n \mathcal{B}_n\right)$. Επομένως, στον ορισμό της ιδιότητας Radon-Nikodym και στο Θεώρημα 4.2.12 (iii) αντί να μιλάμε για τυχόντα χώρο πιθανότητας μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέτουμε πάντα ότι $(\Omega, \mathcal{B}, \mu) = ([0,1], \mathcal{B}[0,1], m)$ στην ιδιότητα Radon-Nikodym και στα martingales.

(ii) Έπεται ότι το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym αν και μόνο αν κάθε κλειστό κυρτόδιαχωρίσιμο υποσύνολο του C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.

Θεώρημα 4.2.17. (i) *Κάθε w-συμπαγές κυρτό σύνολο C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.*

(ii) *Κάθε διαχωρίσιμο w^*-συμπαγές κυρτό $C \subseteq F^*$ έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.*

Απόδειξη. (i) Έστω C w-συμπαγές και κυρτό. Τότε είναι επίσης $\|\cdot\|$-κλειστό και φραγμένο. Επίσης από την Παρατήρηση (ii) χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι και διαχωρίσιμο.

Αφού τα κλειστά κυρτά υποσύνολα του C είναι w-κλειστά, άρα w-συμπαγή, αρκεί να δείξουμε ότι το C είναι dentable. Τότε, αφού το C είναι τυχόν, έχουμε δείξει ότι κάθε κυρτό κλειστό υποσύνολο του C είναι dentable (ως κυρτό w-συμπαγές) άρα από το Θεώρημα 4.2.12 το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.

Θέτουμε $D := \overline{\mathrm{Ext}(C)}^w \neq \varnothing$ (αφού το C είναι w-συμπαγές και κυρτό, από το θεώρημα Krein-Milman έχουμε $\mathrm{Ext}(C) \neq \varnothing$). Έστω $\varepsilon > 0$. Το C είναι διαχωρίσιμο, άρα υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ πυκνή στο C. Έχουμε $C \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} \hat{B}(x_n, \varepsilon)$. Αφού $\mathrm{Ext}(C) \subseteq C$ έχουμε $D \subseteq C$. Άρα, $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\hat{B}(x_n, \varepsilon) \cap D)$ και τα σύνολα $\hat{B}(x_n, \varepsilon) \cap D$ είναι w-κλειστά, άρα από το θεώρημα Baire υπάρχει n_0 τέτοιος ώστε $\mathrm{Int}_W(\hat{B}(x_{n_0}, \varepsilon) \cap D) \neq \varnothing$, δηλαδή υπάρχει $V \cap D \neq \varnothing$ w-ανοικτό στο D με το V w-ανοικτό στο C τέτοιο ώστε

$$\varnothing \neq V \cap D \subseteq \hat{B}(x_{n_0}, \varepsilon) \cap D \subseteq \hat{B}(x_{n_0}, \varepsilon).$$

Θέτουμε $C_1 := \overline{\mathrm{conv}}(V \cap D)$ και $C_2 := \overline{\mathrm{conv}}(D \setminus V)$. Από το θεώρημα Krein-Milman έχουμε

$$
\begin{gathered}
C = \overline{\mathrm{conv}}(\mathrm{Ext}(C)) \subseteq \overline{\mathrm{conv}}(\overline{\mathrm{Ext}(C)}^w) = \overline{\mathrm{conv}}(D) = \mathrm{conv}(D) \\
\mathrm{conv}((V \cap D) \cup (D \setminus V)) \subseteq \mathrm{conv}(C_1 \cup C_2) \subseteq C,
\end{gathered}
$$

άρα $C = \mathrm{conv}(C_1 \cup C_2)$. Παρατηρήστε ότι $\mathrm{diam}(C_1) \leqslant \mathrm{diam}(\hat{B}(x_{n_0}, \varepsilon)) = 2\varepsilon$.

Επίσης, $D \cap V \neq \varnothing$, δηλαδή $\overline{\mathrm{Ext}(C)}^w \cap V \neq \varnothing$, όπου το V είναι ανοικτό, άρα $\mathrm{Ext}(C) \cap V \neq \varnothing$. Έστω $z_0 \in \mathrm{Ext}(C) \cap V$. Το $D \setminus V$ είναι w-κλειστό στο w-συμπαγές D, άρα το $D \setminus V$ είναι w-συμπαγές. Θα δείξουμε ότι $z_0 \notin C_2$. Αρκεί να δείξουμε ότι $\mathrm{Ext}(C_2) \subseteq D \setminus V$. [Τότε, αφού $C_2 \subseteq C$ έχουμε $\mathrm{Ext}(C) \cap C_2 \subseteq \mathrm{Ext}(C_2) \subseteq D \setminus V$, όπου $z_0 \in \mathrm{Ext}(C)$, $z_0 \in D \setminus V$. Άρα, $z_0 \notin C_2$, αλλιώς $z_0 \in \mathrm{Ext}(C) \cap C_2 \subseteq D \setminus V$.]

Έστω $0 < s < 1$. Θέτουμε

$$K_s := \{\lambda z + \mu y : z \in C_1, y \in C_2, \lambda + \mu = 1, 0 \leqslant \lambda \leqslant s\}.$$

Ισχυρισμός: $C = \{\lambda z + \mu y : z \in C_1, y \in C_2, \lambda + \mu = 1, \mu \geqslant 0\}$.

Απόδειξη. Έχουμε $C = \mathrm{conv}(C_1 \cup C_2)$, όπου τα C_1, C_2 είναι κυρτά. Έστω $u \in C$. Τότε $u = \sum\limits_i \lambda_i x_i + \sum\limits_j \mu_j y_j$ όπου $x_i \in C_1$, $y_j \in C_2$ και $\sum\limits_i \lambda_i + \sum\limits_j \mu_j = 1$. Θέτουμε $\lambda = \sum\limits_i \lambda_i$ και $\mu = \sum\limits_j \mu_j$. Τότε $u = \lambda \left(\sum\limits_i \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \right) + \mu \left(\sum\limits_j \frac{\mu_j}{\mu} y_j \right)$ και $\sum\limits_i \frac{\lambda_i}{\lambda} x_i \in C_1$, $\sum\limits_j \frac{\mu_j}{\mu} y_j \in C_2$. □

Με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι το K_s είναι κυρτό υποσύνολο του C. Επίσης, επειδή η $f : C \to [0,1]$ με $f(\lambda z + \mu y) = \lambda$ είναι συνεχής και $K_s = f^{-1}([0,s])$, το K_s είναι κλειστό υποσύνολο του C. Τώρα, $z_0 \in \mathrm{Ext}(C)$ και $z_0 \in V \cap D \subseteq C_1$ και $z_0 \notin C_2$. Άρα $z_0 \notin K_s$. [Πράγματι, $z_0 \in \mathrm{Ext}(C) \subseteq C$, άρα $z_0 = \lambda z + \mu y$, όπου $\lambda, \mu \geqslant 0$, $\lambda + \mu = 1$, $z \in C_1 \subseteq C$ και $y \in C_2 \subseteq C$. Έστω για άτοπο ότι $\lambda \neq 1$. Επίσης $\mu \neq 1$ αφού $z_0 \notin C_2$. Αφού $z_0 \in \mathrm{Ext}(C)$ συμπεραίνουμε ότι $z_0 = y = z \in C_1$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $\lambda = 1$ και $z_0 \notin K_s$.]

Για να δείξουμε ότι το C είναι dentable πρέπει να βρούμε x^* και $a > 0$ ώστε $\mathrm{diam}(S(C, x^*, a)) < 3\varepsilon$. Έστω $u, v \in C \setminus K_s$. Αφού $u, v \in C$ έχουμε $u = \lambda_1 z_1 + \mu_1 y_1$ και $v = \lambda_2 z_2 + \mu_2 y_2$ (από τον ισχυρισμό) όπου $z_i \in C_1$, $y_i \in C_2$ και $\lambda_i + \mu_i = 1$, και αφού $u, v \notin K_s$ έχουμε $\lambda_i > s$ (άρα $0 \leqslant \mu_i < 1 - s$). Έτσι,

$$\begin{aligned} \|u - v\| &= \|\lambda_1 z_1 - \lambda_2 z_1 + \lambda_2 z_1 - \lambda_2 z_2 + \mu_1 y_1 - \mu_2 y_2\| \\ &\leqslant |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|z_1\| + |\lambda_2| \cdot \mathrm{diam}(C_1) + (1-s)\|y_1\| + (1-s)\|y_2\| \\ &\leqslant |\lambda_1 - \lambda_2| \cdot \|z_1\| + \mathrm{diam}(C_1) + (1-s)(\|y_1\| + \|y_2\|). \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $\lambda_1 - \lambda_2 < 1 - s$ (αφού $\lambda_1 \leqslant 1$, $\lambda_2 > s$) και όμοια $\lambda_2 - \lambda_1 < 1 - s$, άρα $|\lambda_1 - \lambda_2| < 1 - s$. Επίσης $\mathrm{diam}(C_1) \leqslant 2\varepsilon$ και αφού το C είναι φραγμένο έχουμε $\|z_1\|, \|y_1\|, \|y_2\| \leqslant M$. Έτσι,

$$\|u - v\| \leqslant (1-s)M + 2\varepsilon + 2M(1-s) = 3M(1-s) + 2\varepsilon.$$

Επιλέγουμε s κοντά στο 1 έτσι ώστε $1 - s < \frac{\varepsilon}{3M}$, άρα $3M(1-s) < \varepsilon$. Τότε $\|u - v\| < 3\varepsilon$ για κάθε $u, v \in C \setminus K_s$ για την συγκεκριμένη επιλογή του s. Άρα, $\mathrm{diam}(C \setminus K_s) < 3\varepsilon$.

Όπως έχουμε δει, $z_0 \notin K_s$, άρα μπορούμε να βρούμε συναρτησοειδές f τέτοιο ώστε $\sup\limits_{y \in K_s} f(y) < f(z_0)$, δηλαδή υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $\sup\limits_{y \in K_s} f(y) < f(z_0) - a$. Αρκεί να δείξουμε ότι $S(C, f, a) \subseteq C \setminus K_s$. [Τότε, $\mathrm{diam}(S(C, f.a)) < 3\varepsilon$, δηλαδή το C είναι dentable.] Έστω για άτοπο ότι υπάρχει

$u \in S(C,f,a)$ έτοιο ώστε $u \notin C \setminus K_s$, δηλαδή $u \in K_s$. Τότε, χρησιμοποιώντας τις $u \in S(C,f,a)$ και $u \in K_s$, παίρνουμε

$$\sup_{x\in C} f(x) - a \leqslant f(u) \leqslant \sup_{y\in K_s} f(y) < f(z_0) - a \leqslant \sup_{x\in C} f(x) - a,$$

το οποίο είναι άτοπο.

(ii) Έστω C w^*-συμπαγές και $\|\cdot\|$-διαχωρίσιμο κυρτό υποσύνολο του F^*. Θα δείξουμε ότι μπορούμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας να υποθέσουμε ότι ο F είναι διαχωρίσιμος. Αφού το C είναι διαχωρίσιμο, υπάρχει αριθμήσιμο $D \subseteq D$ τέτοιο ώστε $\overline{D} = C$. Τότε, ο $\langle C\rangle \equiv \mathrm{span}(C)$ είναι διαχωρίσιμος, με αριθμήσιμο πυκνό υποσύνολο τον $\mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(D)$. Έστω $\{f_n : n \in \mathbb{N}\} = \mathrm{span}_{\mathbb{Q}}(D)$. Έχουμε $f_n \in F^*$ και $\|f_n\| = \sup\{|f_n(x)| : \|x\| = 1, x \in F\}$. Έστω $\varepsilon > 0$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ επιλέγουμε $x_n \in F$ με $\|x_n\| = 1$ τέτοιο ώστε

$$\|f_n\| - \varepsilon < |f_n(x_n)|.$$

Θέτουμε $F_0 = \overline{\mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}}$. Ο F_0 είναι διαχωρίσιμος υπόχωρος του F. Θεωρούμε την $G : F^* \to F_0^*$ με $f \mapsto f\big|_{F_0}$. Αρκεί να δείξουμε ότι η $F\big|_C$ είναι ισομετρία. Τότε, $C \simeq G(C) \subseteq F_0^*$ και ο F_0 ίναι διαχωρίσιμος.

Πράγματι, θα δείξουμε ότι για κάθε $f \in C$ ισχύει $\|f\| = \|f\big|_{F_0}\|$. Προφανώς, $\|f\big|_{F_0}\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| = 1, x \in F_0\} \leqslant \|f\|$. Έστω $f \in C$ και $x \in F$ με $\|x\| = 1$. Αφού $f \in C \subseteq \mathrm{span}(C)$, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f - f_n\| < \varepsilon$. Έτσι,

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqslant |(f - f_n)(x)| + |f_n(x)| \leqslant \varepsilon + \|f_n\| < 2\varepsilon + |f_n(x_n)| \\ &\leqslant 2\varepsilon + \|f_n - f\| + |f(x_n)| \leqslant 3\varepsilon + \|f\big|_{F_0}\|. \end{aligned}$$

Το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, άρα $|f(x)| \leqslant \|f\big|_{F_0}\|$ για κάθε $x \in F$ με $\|x\| = 1$. Έπεται ότι $\|f\| = \|f\big|_{F_0}\|$. Άρα η G είναι ισομετρία και όντως χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι ο F είναι διαχωρίσιμος.

Έστω $\{y_m : m \in \mathbb{N}\}$ $\|\cdot\|$-πυκνό υποσύνολο του F. Έστω (f_n) $(\mathcal{B}_n)$-martingale από τον χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{B}, \mu)$ στο C, όπου $\mathcal{B} = \bigcup_n \mathcal{B}_n$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$ έχουμε $f_n(\omega) \in C$, όπου το C είναι φραγμένο, άρα υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|f_n(\omega)\| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $\omega \in \Omega$. Έστω $m \in \mathbb{N}$. Το πραγματικό martingale $f_n(\cdot)(y_m) : \Omega \to \mathbb{R}$ συγκλίνει σχεδόν παντού καθώς $n \to \infty$, από το Θεώρημα 4.2.12 (διότι $|f_n(\cdot)(y_m)| \leqslant M\|y_m\|$ και το $[-M\|y_m\|, M\|y_m\|]$ είναι κλειστό κυρτό και φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}$ και έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.] Το $f_n(\cdot)(y_m)$ είναι martingale αφού για κάθε $k < n$ έχουμε

$$\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(f_n(\cdot)(y_m)) = (\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(f_n))(\cdot)(y_m) = f_k(\cdot)(y_m)$$

όπου η πρώτη ισότητα ισχύει αφού

$$\int_A f_n(\omega)(y_m)d\mu(\omega) = \int_A (\mathbb{E}_{\mathcal{B}_k}(f_n))(\omega)(y_m)d\mu(\omega)$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}_k$.

Επομένως, μ-σχεδόν για κάθε $t \in \Omega$ υπάρχει το $a_{m,t} := \lim_{n\to\infty} f_n(t)(y_m)$. Γι' αυτά τα $t \in \Omega$ θα δείξουμε ότι η $f_n(t)$ είναι w^*-συγκλίνουσα (έχουμε $f_n(t) \in C \subseteq F^*$). Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και έστω $\xi \in F$. Αφού η $\{y_m\}_{m=1}^{\infty}$ είναι πυκνή στον F, υπάρχει $m_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε $\|\xi - y_m\| < \frac{\varepsilon}{2M}$. Επίσης, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$, $|f_n(t)(y_{m_0}) - a_{m_0,t}| < \varepsilon$. Έτσι, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$|f_n(t)(\xi) - a_{m_0,t}| \leqslant |f_n(t)(\xi - y_{m_0})| + |f_n(t)(y_{m_0}) - a_{m_0,t}| < M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Έτσι, η $f_n(t)(\xi)$ είναι συγκλίνουσα για κάθε ξ όταν $n \to \infty$. Θέτουμε $f(t)$ το w^*-όριο της $f_n(t)$ (το οποίο υπάρχει μ-σχεδόν για κάθε t). Επειδή $f_n(t) \in C$ για κάθε n και t, και το C είναι w^*-κλειστό (ως w^*-συμπαγές) έχουμε $f(t) \in C$ ια κάθε t. Όμως, το C είναι $\|\cdot\|$-διαχωρίσιμο. Θα δείξουμε ότι η $f : \Omega \to F^*$ είναι μετρήσιμη.

Έστω $A_0 := \{t \in \Omega : \text{ δεν υπάρχει το } w^* - \text{ όριο της } f_n(t)\}$. Έχουμε $\mu(A_0) = 0$. Έτσι, $\overline{\text{span}}\{f(t) : \omega \notin A_0\} \subseteq \overline{\text{span}}(C)$, και ο $\text{span}(C)$ είναι διαχωρίσιμος, άρα το ίδιο ισχύει και για τον $\overline{\text{span}}\{f(t) : \omega \notin A_0\}$. Για να χρησιμοποιήσουμε την Πρόταση 4.1.6 και να συμπεράνουμε ότι η f είναι μετρήσιμη, αρκεί να δείξουμε ότι η $y^{**} \circ f : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη για κάθε $y^{**} \in F^{**}$.

Από το θεώρημα Banach-Alaoglu η μοναδιαία κλειστή μπάλα $B_{F^*} := \widehat{B}(0,1) : -\{y^* \in F^* : \|y^*\| \leqslant 1\}$ είναι w^*-συμπαγής άρα και κάθε $\|\cdot\|$-κλειστή μπάλα $\widehat{B}(x_0^*, \delta)$, όπου $x_0^* \in F^*$, $\delta > 0$, είναι w^*-συμπαγής. Κάθε $\|\cdot\|$-ανοικτή μπάλα $B(x_o^*, \varepsilon)$ γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση $\|\cdot\|$-κλειστών μπαλών, π.χ. $\bigcup_{n=n_0}^{\infty} \widehat{B}\left(x_0^*, \varepsilon - \frac{1}{n}\right)$, δηλαδή αριθμήσιμη ένωση w^*-συμπαγών συνόλων. Επειδή το C είναι διαχωρίσιμο, κάθε $\|\cdot\|$-ανοικτό υποσύνολο γράφεται ως αριθμήσιμη ένωση ανοικτών μπαλών, άρα και w^*-συμπαγών $\widehat{B}\left(x_0^*, \varepsilon - \frac{1}{n}\right) \cap C \in \mathcal{B}(C, w^*)$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(X, \mathcal{T}) := \sigma(\mathcal{T})$ την Borel σ-άλγεβρα που παράγεται από τα $\mathcal{T}$-ανοικτά σύνολα. Έτσι, $\mathcal{B}(C, \|\cdot\|) \subseteq \mathcal{B}(C, w^*)$. Όμως, $\mathcal{B}(C, w^*) \subseteq \mathcal{B}(C, w) \subseteq \mathcal{B}(C, \|\cdot\|)$, άρα οι $w^*, w, \|\cdot\|$ Borel σ-άλγεβρες του C ταυτίζονται.

Για κάθε $y \in F$ η $f(\cdot)(y) : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μετρήσιμη αφού $f(\cdot)(y) = \hat{y} \circ f$. Άρα η $y^{**} \circ f$ είναι μετρήσιμη για κάθε $y^{**} \in F^{**}$ και από την Πρόταση 4.1.6 η f είναι μετρήσιμη. Μένει να δείξουμε ότι

$$\int_A f d\mu = \int_A f_n d\mu$$

για κάθε $A \in \mathcal{B}_n$. Τότε $f_n = \mathbb{E}_{\mathcal{B}_n}(f)$ για κάθε n, άρα $\|f_n - f\|_1 \to 0$, άρα $f_n \to f$ σχεδόν παντού, και το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Έχουμε $\int_A f d\mu, \int_A f_n d\mu \in F^*$. Άρα αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε $x \in F$

$$\Big(\int_A f d\mu\Big)(x) = \Big(\int_A f_n d\mu\Big)(x).$$

Παρατηρούμε ότι για $g : \Omega \to F^*$ απλή μετρήσιμη ισχύει

$$\Big(\int g d\mu\Big)(x) = \int g(\omega)(x) d\mu(\omega)$$

για κάθε $x \in F$, άρα το ίδιο ισχύει και για κάθε μετρήσιμη g. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\int_A f(\omega)(x) d\mu(\omega) = \int_A f_n(\omega)(x) d\mu(\omega)$$

για κάθε $x \in F$. μως $F = \overline{\{y_m : m \in \mathbb{N}\}}$ και οι $\int_A f d\mu, \int_A f_n d\mu$ είναι συνεχείς, άρα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int_A f(\omega)(y_m) d\mu(\omega) = \int_A f_n(\omega)(y_m) d\mu(\omega)$$

για κάθε $m \in \mathbb{N}$. Έστω $A \in \mathcal{B}_n$ και $m \in \mathbb{N}$. Έχουμε $\int_A f_n(\cdot)(y_m) = \int_A f_k(\cdot)(y_m)$, ως martingale, δηλαδή η $\left(\int_A f_k(\cdot)(y_m)d\mu\right)_{k\geqslant n}$ είναι σταθερή και συγκλίνει στο $\int_A f_n(\cdot)(y_m)d\mu$. Όμως,$f_k(\omega)(y_m) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} f(\omega)(y_m)$ μ-σχεδόν για κάθε $\omega \in \Omega$ και $\|f_k(\omega)(y_m)\chi_A(\omega)\| \leqslant M\|y_m\| \in L_1$, άρα από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης

$$\int_A f_k(\omega)(y_m)d\mu(\omega) \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \int_A f(\omega)(y_m)d\mu(\omega),$$

και από τη μοναδικότητα του ορίου παίρνουμε

$$\int_A f(\omega)(y_m)d\mu(\omega) = \int_A f_n(\omega)(y_m)d\mu(\omega).$$

□

Παρατηρήσεις 4.2.18. Στο (ii) του Θεωρήματος 4.2.17 δεν μπορούμε να παραλείψουμε την διαχωρισιμότητα του C. Πράγματι, όπως έχουμε δει, ο c_0 δεν έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym αφού το διανυσματικό μέτρο

$$\tau(A) = \left(\int_A \mathbf{1}\,dt, \int_A e^{it}dt, \ldots, \int_A e^{int}dt, \ldots\right) \in c_0, \qquad A \in \mathcal{L}[0, 2\pi]$$

δεν έχει παράγωγο Radon-Nikodym ως προς το μέτρο Lebesgue στο $[0, 2\pi]$. Επομένως, ούτε η $B_{\ell_\infty} \equiv B_{\ell_1^*}$ έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym, αφού η B_{c_0} είναι κλειστό κυρτό υποσύνολο της B_{ℓ_∞}. Όμως η $B_{\ell_1^*}$ είναι w^*-συμπαγές κυρτό υποσύνολο του ℓ_1^* και δεν έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym αφού η $B_{\ell_1^*} \equiv B_{\ell_\infty}$ δεν είναι διαχωρίσιμη.

Στο Θεώρημα 4.2.17 έχουμε ότι (ii) $\Longrightarrow$ (i). Πράγματι, ένα διαχωρίσιμο w-συμπαγές κυρτό υποσύνολο του E μπορεί να θεωρηθεί ως διαχωρίσιμο w^*-συμπαγές κυρτό υποσύνολο του E^{**}. Χρησιμοποιούμε το ότι η $\tau : (E, w) \to (\tau(E), w) \subseteq (E^{**}, w^*)$ είναι ομοιομορφισμός και $\overline{\tau(E)}^{w^*} = E^{**}$. Άρα, αν C είναι ένα w-συμπαγές διαχωρίσιμο κυρτό υποσύνολο του E τότε το $\tau(C)$ είναι w^*-συμπαγές διαχωρίσιμο υποσύνολο του C^{**}, άρα το $\tau(C)$ έχει την ιδιότητα τλΡαδον-Νικοδψμ, και έπεται ότι το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.

Πόρισμα 4.2.19. (i) *Κάθε διαχωρίσιμος δυϊκός χώρος Banach X^* έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.*

(ii) *Κάθε αυτοπαθής χώρος έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.*

Απόδειξη. (i) Η B_{X^*} είναι διαχωρίσιμο w^*-συμπαγές κυρτό σύνολο, άρα από το Θεώρημα 4.2.17 (ii) έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.

(ii) Ο X είναι αυτοπαθής, άρα η B_X είναι w-συμπαγές κυρτό σύνολο και συνεπώς έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. □

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.17 (i) παρατηρήσαμε ότι υπάρχει σύνδεση ανάμεσα στην ιδιότητα Radon-Nikodym και τα ακραία σημεία. Μάλιστα ισχύει η ακόλουθη:

Πρόταση 4.2.20. *Κάθε κλειστό φραγμένο και κυρτό σύνολο που έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym είναι η $\|\cdot\|$-κλειστή θήκη της κυρτής θήκης των ακραίων σημείων του, δηλαδή*

$$C = \overline{\mathrm{conv}}^{\|\cdot\|}\mathrm{Ext}(C).$$

Παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα της Πρότασης 4.2 μοιάζει με το θεώρημα Krein-Milman. Όμως το θεώρημα Krein-Milman απαιτεί το K να είναι συμπαγές. Εδώ δεν απαιτούμε το K να είναι συμπαγές σε κάποια τοπολογία (απαιτούμε να είναι κλειστό και φραγμένο, που είναι ασθενέστερο). Για παράδειγμα, έστω $C = B_{X^*}$, όπου X^* διαχωρίσιμος. Η B_{X^*} είναι w^*-συμπαγής από το θεώρημα Banach-Alaoglu, άρα από το θεώρημα Krein-Milman παίρνουμε $C = \overline{\mathrm{conv}}^{w^*}\mathrm{Ext}(C)$. Όμως, από την Πρόταση 4.2 παίρνουμε το ισχυρότερο αποτέλεσμα $C = \overline{\mathrm{conv}}^{\|\cdot\|}\mathrm{Ext}(C)$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 4.2 θα χρειαστούμε το εξής:

Λήμμα 4.2.21. *Έστω $C \neq \varnothing$ και $f, g : C \to \mathbb{R}$ άνω φραγμένες. Έστω $a > 0$ και $\delta := \sup\{|f(y) - g(y)| : y \in C\}$ και έστω ότι $\delta < a/2$. Τότε,*

$$S(C, g, a - 2\delta) \subseteq S(C, f, a).$$

Απόδειξη. Έστω $y \in S(C, g, a - 2\delta)$, δηλαδή

$$g(y) \geqslant \sup(g) - (a - 2\delta). \tag{4.2.5}$$

Πρέπει να δείξουμε ότι $f(y) \geqslant \sup(f) - a$. Αρχικά παρατηρούμε ότι

$$\sup(f) - \sup(g) \leqslant \delta. \tag{4.2.6}$$

Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$. Αφού η f είναι φραγμένη, υπάρχει $x_0 \in C$ τέτοιο ώστε $\sup(f) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$. Έτσι,

$$\sup(f) - \sup(g) \leqslant f(x_0) - g(x_0) + \varepsilon \leqslant |f(x_0) - g(x_0)| + \varepsilon \leqslant \delta + \varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Άρα, όντως $\sup(f) - \sup(g) \leqslant \delta$. Τώρα, χρησιμοποιώντας τις (4.2.6) και (4.2.5) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\sup(f) - a &= \sup(f) - \sup(g) + \sup(g) - a \leqslant \delta + \sup(g) - a \leqslant \delta + g(y) + a - 2\delta - a = g(y) - \delta\\ &\leqslant f(y).\end{aligned}$$

Άρα, όντως $y \in S(C, f, a)$. □

Για την απόδειξη της Πρότασης θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα για f, g γραμμικές, όμως αργότερα θα χρησιμοποιηθεί και για αυθαίρετες άνω φραγμένες συναρτήσεις.

Ορισμός 4.2.22. Έδρα ενός κυρτού συνόλου C λέγεται ένα κυρτό υποσύνολο F του C με την εξής ιδιότητα: αν $x, y \in C$ και $\frac{x+y}{2} \in F$ τότε $x, y \in F$. Δηλαδή, αν για κάποιο $z \in F$ έχουμε $z = \frac{x+y}{2}$ με τα x, y στο C τότε αναγκαστικά $x, y \in F$.

Παρατηρούμε ότι αυθαίρετη τομή από (οσεσδήποτε) έδρες είναι έδρα και ότι ισχύει η μεταβατική ιδιότητα για τις έδρες, δηάδή, αν το A είναι έδρα του B και το B είναι έδρα του C τότε το A είναι έδρα του C.

Ο ορισμός της έδρας είναι ισοδύναμος με το εξής:

$(*)$ Για κάθε $x, y \in C$ και για κάθε $0 < \lambda < 1$ αν $\lambda x + (1 - \lambda)y \in F$ τότε $x, y \in F$.

Απόδειξη. Έστω F που ικανοποιεί την $(*)$. Έστω ότι $x, y \in C$ και $\frac{x+y}{2} \in F$. Εφαρμόζοντας την $(*)$ με $\lambda = \frac{1}{2}$ έχουμε ότι $x, y \in F$.

Αντίστροφα, έστω F έδρα, $x, y \in C$ και $\lambda x + (1-\lambda)y \in F$ για κάποιο $\lambda \in (0,1)$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x, y \in F$. Αφού το F είναι έδρα, αρκεί να δείξουμε ότι $\frac{x+y}{2} \in F$. Αν $\lambda = \frac{1}{2}$ έχουμε τελειώσει, άρα υποθέτουμε ότι $\lambda \neq \frac{1}{2}$, και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\lambda > \frac{1}{2}$. Θα δείξουμε ότι $x \in F$. Πράγματι,

$$\lambda x + (1-\lambda)y = \frac{x + (2\lambda - 1)x + (1 - (2\lambda - 1))y}{2},$$

όπου $x, (2\lambda-1)x + (2-2\lambda)y \in C$, άρα αφού το F είναι έδρα παίρνουμε ότι $x, (2\lambda-1)x+(2-2\lambda)y \in F$.

Αν $\lambda < \frac{3}{4}$, δηλαδή $2\lambda - 1 < \frac{1}{2}$, τότε έχουμε τελειώσει αφού το $\frac{x+y}{2}$ είναι κυρτός συνδυασμός των $(2\lambda-1)x + (2-2\lambda)y$ και x και το F είναι κυρτό.

Άρα υποθέτουμε ότι $\lambda >]frac34$. Τότε,

$$(2\lambda - 1)x + (2 - 2\lambda)y = \frac{x + (4\lambda - 3)x + ky}{2},$$

όπου $k = 4\lambda - 4$. Άρα, $(4\lambda-3)x + (4\lambda-4)y \in F$.

Αν $\lambda < \frac{7}{8}$, δηλαδή $4\lambda - 3 < \frac{1}{2}$, τότε έχουμε τελειώσει αφού το F είναι κυρτό και άρα $\frac{x+y}{2} \in F$. Αν $\lambda > \frac{7}{8}$ συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο. Η διαδικασία τελειώνει, αφού υπάρχει N έτοιος ώστε $\lambda < 1 - \frac{1}{2^N}$, οπότε σε N βήματα έχουμε δείξει ότι $\frac{x+y}{2} \in F$, άρα $x, y \in F$. □

Η $(*)$ είναι ακριβώς ο ορισμός του ακραίου υποσυνόλου του C. Έτσι, παίρνουμε απευθείας ότι το $\{x\}$ είναι έδρα του C αν και μόνο αν $x \in \mathrm{Ext}(C)$. Επίσης, έστω $x^* \in E^*$ και $C \subseteq E$ κυρτό και συμπαγές. Θέτουμε $M = \max\limits_{x \in C} x^*(x)$. Τότε το $F := \{x \in C : x^*(x) = M\}$ είναι κλειστή έδρα του C. Πράγματι το $F = (x^*)^{-1}(\{M\})$ είναι κλειστό υποσύνολο του C και είναι έδρα ως ακραίο υποσύνολο του C.

Συνεχίζουμε τώρα με την απόδειξη της Πρότασης 4.2.

Απόδειξη της Πρότασης 4.2. Έστω C κλειστό, φραγμένο και κυρτό σύνολο με την ιδιότητα Radon-Nikodym. Θα δείξουμε ότι $C = \overline{\mathrm{conv}}^{\|\cdot\|}(\mathrm{Ext}(C))$. Πρώτα θα δείξουμε ότι $\mathrm{Ext}(C) \neq \varnothing$. Υπενθυμίζουμε το εξής γνωστό θεώρημα.

Θεώρημα 4.2.23 (Bishop-Phelps). *Έστω $F \neq \varnothing$ κλειστό, κυρτό και φραγμένο σύνολο σε ένα χώρο Banach E. Θέτουμε*

$$A := \{z^* \in E^* : \exists c_0 \in F \text{ τ.ω. } z^*(c_0) = \sup\{z^*(x) : x \in F\} = \max\{z^*(x) : x \in F\}\}.$$

Τότε $\overline{A}^{\|\cdot\|} = E^*$.

Δεν είναι δεδομένο ότι η z^* θα «πιάνει» το μέγιστο αφού το F είναι απλώς κλειστό φραγμένο και όχι απαραίτητα συμπαγές. Αν ήταν συμπαγές, θα είχαμε $A = E^*$.

Για να δείξουμε ότι $\mathrm{Ext}(C) \neq \varnothing$ θα κατασκευάσουμε έδρες $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ επαγωγικά έτσι ώστε το F_1 να είναι κλειστή έδρα του C και το F_{n+1} κλειστή έδρα του F_n και $\mathrm{diam}(F_n) \to 0$. Τότε, αφού $C \subseteq E$ και ο E είναι χώρος Banach άρα πλήρης, ισχύει $\bigcap\limits_n F_n \neq \varnothing$ και άρα το $\bigcap\limits_n F_n$ είναι μονοσύνολο, άρα $\bigcap\limits_n F_n \in \mathrm{Ext}(C)$, αφού το $\bigcap\limits_n F_n$ είναι έδρα ως τομή εδρών.

Κατασκευή: Έχουμε $F_1 := C$ που είναι κλειστή έδρα του C. Έστω ότι έχουμε κατασκευάσει την κλειστή έδρα F_n. Αφού η F_n είναι κλειστό κυρτό υποσύνολο του C και το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym από το Θεώρημα 4.2.12 το F_n δηλαδή για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει slice $S(F_n, x^*, a)$ με $\operatorname{diam}(S(F_n, x^*, a)) < \varepsilon$. Παίρνουμε $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Έτσι βρίσκουμε slice $S_n := S(F_n, x_n^*, a_n)$ με $\operatorname{diam}(S_n) < \frac{1}{n}$, όπου $x_n^* \in F_n$, $a_n > 0$. Χρησιμοποιούμε το θεώρημα Bishop-Phelps για το F_n. Έτσι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $z_n^* \in E^*$ το οποίο «πιάνει» το μέγιστο στο F_n και $\|x_n^* - z_n^*\| < \varepsilon$. Επιλέγουμε $\varepsilon < \frac{a_n}{2M}$, όπου για κάθε $x \in C$ ισχύει $\|x\| \leqslant M$. Από το Λήμμα 4.2.21 υπάρχει slice $S(F_n, z_n^*, \xi_n) \subseteq S_n$, όπου $\xi_n = a_n - 2\sup\{|x_n^*(y) - z_n^*(y)| : y \in F_n\}$. Θέτουμε

$$F_{n+1} := \{x \in F_n : z_n^*(x) = \max\{z_n^*(y) : y \in F_n\}\} \subseteq S(F_n, z_n^*, \xi_n) \subseteq S_n$$

και άρα $\operatorname{diam}(F_{n+1}) < \frac{1}{n}$. Επομένως, $\lim\limits_{n\to\infty} \operatorname{diam}(F_n) = 0$. Άρα, $\operatorname{Ext}(C) \neq \varnothing$.

Θέτουμε $K := \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|}(\operatorname{Ext}(C)) \neq \varnothing$. Πρέπει να δείξουμε ότι $K = C$. Έστω για άτοπο ότι $K \neq C$, οπότε το K είναι γνήσιο υποσύνολο του C. Θεωρούμε $x \in C \setminus K$. Από το δεύτερο διαχωριστικό θεώρημα, υπάρχει $f \in E^*$ τέτοιο ώστε $\sup\limits_{y\in K} f(y) < f(x)$, άρα υπάρχει $a > 0$ τέτοιο ώστε $\sup\limits_{y\in K} f(y) + a < f(x)$. εωρούμε την slice $S(C, f, a)$. Από το θεώρημα Bishop-Phelps υπάρχει $g \in E^*$ το οποίο «πιάνει» το $\sup\limits_{y\in C} g(y)$ και $\|g - f\| < \frac{a}{2M}$. Έτσι, $\sup\{|f(y) - g(y)| : y \in C\} < \frac{a}{2}$, άρα υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιο ώστε $S(C, g, \xi) \subseteq S(C, f, a)$. Θέτουμε $F := \{x \in C : g(x) = \max\{g(y) : y \in C\}\}$. Τότε, $F \subseteq S(C, g, \xi) \subseteq S(C, f, a)$. Έτσι, για κάθε $z \in F$ έχουμε

$$f(z) \geqslant \sup_{y\in C} f(y) - a > f(x) - a > \sup_{y\in K} f(y),$$

άρα $z \notin K$.

Άρα, το F είναι κλειστή έδρα του C και $F \cap K = \varnothing$. Όπως στο πρώτο μέρος της απόδειξης, μπορούμε να κατασκευάσουμε ακολουθία (F_n) κλειστών εδρών με $F_1 := F$ έτσι ώστε $\operatorname{diam}(F_n) \to 0$, άρα

$$\bigcap_n F_n = \{x_0\} \subseteq \operatorname{Ext}(C) \subseteq \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{Ext}(C)).$$

Όμως $x_0 \in F_1 = F$, άρα $x \notin K = \overline{\operatorname{conv}}(\operatorname{Ext}(C))$, το οποίο είναι άτοπο. □

Σχόλιο: Δεν γνωρίζουμε αν η Πρόταση 4.2 χαρακτηρίζει τα σύνολα με την ιδιότητα Radon-Nikodym. Δηλαδή, δεν ξέρουμε αν ισχύει ότι η $C = \overline{\operatorname{conv}}^{\|\cdot\|}(\operatorname{Ext}(C))$ συνεπάγεται ότι το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Επίσης, αν ισχύει ότι $\operatorname{Ext}(F) \neq \varnothing$ για κάθε κλειστό κυρτό $F \subseteq C$ δεν ξέρουμε αν αυτό συνεπάγεται ότι το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Θα δούμε παρακάτω ότι το Θεώρημα 4.2.28 που είναι μια ισχυρότερη έκδοση της Πρότασης 4.2 χαρακτηρίζει τετριμμένα τα σύνολα που έχουν την ιδιότητα Radon-Nikodym.

Ορισμός 4.2.24. Έστω C κλειστό κυρτό σύνολο σε ένα χώρο Banach E.

(i) Ένα $x \in C$ καλείται εκτεθειμένο σημείο του C αν υπάρχει $x^* \in E^*$ τέτοιο ώστε $x^*(x) > x^*(y)$ για κάθε $y \in C$, $y \neq x$.

(ii) Ένα $x \in C$ καλείται ισχυρά εκτεθειμένο σημείο του C αν υπάρχει $x^* \in E^*$ τέτοιο ώστε $x^*(x) > x^*(y)$ για κάθε $y \in C$, $y \neq x$, δηλαδή είναι εκτεθειμένο, και επιπλέον

$$\lim_{a \to 0^+} \operatorname{diam}(S(C, x^*, a)) = 0.$$

Ένα x^* που ικανοποιεί το (ii) λέγεται συναρτησειδές που εκθέτει ισχυρά το x.

Παρατήρηση 4.2.25. Κάθε εκτεθειμένο σημείο x του C ανήκει στο $\operatorname{Ext}(C)$, δηλαδή είναι ακραίο σημείο του C. Πράγματι, έστω $y, z \in C$ και $\lambda \in (0,1)$ ώστε $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Πρέπει να δείξουμε ότι $x = y = z$. Αν $x = y$ ή $x = z$ τότε αυτομάτως έχουμε $x = y = z$ αφού $\lambda \in (0,1)$. Έστω λοιπόν για άτοπο ότι $x \neq y$ και $x \neq z$. Αφού το x είναι εκτεθειμένο σημείο, υπάρχει x^* τέτοιο ώστε $x^*(x) > x^*(y)$ και $x^*(x) > x^*(z)$. Όμως τότε $x^*(x) = \lambda x^*(y) + (1-\lambda)x^*(z) < \lambda x^*(x) + (1-\lambda)x^*(x) = x^*(x)$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα $x \in \operatorname{Ext}(C)$. Το αντίστροφο δεν ισχύει γενικά.

Στις πεπερασμένες διαστάσεις έχουμε ότι το x είναι ισχυρά εκτεθειμένο σημείο αν και μόνο αν είναι εκτεθειμένο σημείο. Γενικά, κάθε ισχυρά εκτεθειμένο σημείο είναι denting point (βλέπε Ορισμό 4.2.10) αλλά ένα denting point δεν είναι απαραίτητα εκτεθειμένο σημείο.

Ορισμός 4.2.26. Έστω $C \neq \varnothing$ και $f : C \to \mathbb{R}$. Έστω $x \in C$ τέτοιο ώστε $f(x) = \sup_{y \in C} f(y) = \max_{y \in C} f(y)$. Αν $\operatorname{diam}(S(C, f, a)) \to 0$ όταν $a \to 0^+$ τότε λέμε ότι η f έχει ισχυρό μέγιστο στο x.

Θεώρημα 4.2.27. *Έστω C φραγμένο, κλειστό και κυρτό σύνολο σε ένα χώρο Banach E, το οποίο έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Έστω f πραγματική συνάρτηση η οποία είναι άνω φραγμένη και άνω ημι-συνεχής στο C, δηλαδή για κάθε $x_0 \in C$ και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει ανοικτή περιοχή U του x_0 τέτοια ώστε $f(x) \leqslant f(x_0) + \varepsilon$ για κάθε U, ή ισοδύναμα, $\limsup_{x \to x_0} f(x) \leqslant f(x_0)$. Τότ, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x^* \in E^*$ με $\|x^*\| \leqslant \varepsilon$ τέτοιο ώστε η $f + x^*$ να έχει ισχυρό μέγιστο στο C.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει σε δύο βήματα. Το πρώτο βήμα είναι να δείξουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x^* \in E^*$ τέτοιο ώστε $\|x^*\| < \varepsilon$ και $a > 0$ τέτοιο ώστε $\operatorname{diam}(S(C, f + x^*, a)) \leqslant 2\varepsilon$. Το δεύτερο βήμα είναι ένα απλό επαναληπτικό / αναδρομικό / επαγωγικό επιχείρημα.

Βήμα 1. Έστω για άτοπο ότι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $x^* \in E^*$ με $\|x^*\| < \varepsilon$ και για κάθε $a > 0$ ισχύει

$$\operatorname{diam}(S(C, f + x^*, a)) > 2\varepsilon.$$

Για να καταλήξουμε σε άτοπο θα δείξουμε ότι το C δεν έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Για να το καταφέρουμε αυτό αρκεί να βρούμε κλειστό κυρτό υποσύνολο του C που δεν είναι dentable. Για το παραπάνω $\varepsilon > 0$ επιλέγουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $2^{-n_0} < \varepsilon$. Έτσι, μπορούμε για κάθε $n \geqslant n_0$ να ορίσουμε

$$A_n := \bigcup_{\|x^*\| \leqslant \varepsilon - 2^{-n}} S(C, f + x^*, 4^{-n}) \subseteq C.$$

Το A_n δεν είναι απαραίτητα κυρτό.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in E$ ισχύει ότι

$$\operatorname{conv}(A_n) \subseteq \operatorname{conv}(A_{n+1} \setminus B(y, \varepsilon)) + 4 \cdot 2^{-n} B(0,1).$$

Έστω για άτοπο ότι υπάρχουν n, $y \in E$ και $x \in \mathrm{conv}(A_n) \subseteq A_n$ και $x^* \in E^*$ με $\|x^*\| \leqslant \varepsilon - 2^{-n}$ τέτοια ώστε $x \in S(C, f + x^*, 4^{-n})$ αλλά $x \notin \Gamma := \mathrm{conv}(A_{n+1} \setminus B(y,\varepsilon)) + 4 \cdot 2^{-n}B(0,1)$, όπου το Γ είναι κυρτό ως άθροισμα κυρτών συνόλων, $\mathrm{Int}(\Gamma) \neq \varnothing$ και $x \notin \mathrm{Int}(\Gamma)$ αφού $x \notin \Gamma$.

Από το πρώτο διαχωριστικό θεώρημα υπάρχει $y^* \in E^*$ ώστε $\|y^*\| = 1$ και $y^*(x) \geqslant \sup_{z\in\Gamma} y^*(z)$. Τώρα, επειδή το Γ είναι της μορφής $Z + \Theta$, ισχύει

$$\sup_{z+\vartheta\in Z+\Theta} y^*(z+\vartheta) = \sup_{z\in Z} y^*(z) + \sup_{\vartheta\in\Theta} y^*(\vartheta)$$

άρα

$$\sup_{\gamma\in\Gamma} y^*(\gamma) \geqslant y^*(z) + 4 \cdot 2^{-n}$$

για κάθε $z \in \mathrm{conv}(A_{n+1} \setminus B(y,\varepsilon))$. Χρησιμοποιήσαμε εδώ την

$$\sup_{\xi\in 4\cdot 2^{-n}B(0,1)} y^*(\xi) = \sup_{w\in B(0,1)} y^*(4\cdot 2^{-n}w) = 4\cdot 2^{-n}\|y^*\| = 4\cdot 2^{-n}.$$

Θέτουμε $z^* := x^* + 2^{-(n+1)}y^* \in E^*$. Τότε

$$\|z^*\| \leqslant \|x^*\| + 2^{-(n+1)}\|y^*\| \leqslant \varepsilon - \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} = \varepsilon - \frac{1}{2^{n+1}}.$$

Άρα $S(C, f+z^*, 4^{-(n+1)}) \subseteq A_{n+1}$. Έτσι, $y^*(x) \geqslant y^*(z) + 4\cdot 2^{-n}$ για κάθε $z \in S(C, f+z^*, 4^{-(n+1)}) \setminus B(y,\varepsilon)$. [Παρατηρήστε ότι $S(C, f+z^*, 4^{-(n+1)}) \setminus B(y,\varepsilon) \neq \varnothing$ αφού $\mathrm{diam}(S(C, f+z^*, 4^{-(n+1)})) > 2\varepsilon$.] Έτσι, για $z \in S(C, f+x^*, 4^{-n})$ ισχύει

$$\begin{aligned} f(x) + z^*(x) &= f(x) + x^*(x) + 2^{-(n+1)}y^*(x) \geqslant f(z) + x^*(z) - 4^{-n} + 2^{-(n+1)}y^*(x) \\ &\geqslant f(z) + x^*(z) - 4^{-n} + 2^{-(n+1)}y^*(z) + \frac{1}{2^{n+1}}\cdot\frac{4}{2^n} = f(z) + (x^* + 2^{-(n+1)}y^*)(z) - \frac{1}{2^{2n}} + \frac{2}{2^{2n}} \\ &= f(z) + x^*(z) + 4^{-n}. \end{aligned}$$

Όμως $z \in S(C, f+z^*, 4^{-(n+1)})$. Άρα,

$$f(z) + x^*(z) + 4^{-(n+1)} \geqslant \sup_{\xi\in C}(f+z^*)(\xi) \geqslant f(x) + z^*(x) \geqslant f(z) + x^*(z) + 4^{-n},$$

απ' όπου έπεται ότι $4^{-(n+1)} \geqslant 4^{-n}$, άρα $4 \leqslant 1$ που είναι άτοπο.

Δείξαμε λοιπόν ότι για κάθε $n > n_0$ και για κάθε $y \in E$ ισχύει $\mathrm{conv}(A_n) \subseteq \mathrm{conv}(A_{n+1} \setminus B(y,\varepsilon)) + 4\cdot 2^{-n}B(0,1)$. Θέτουμε

$$A := \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \overline{\mathrm{conv}}\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_n\Big) \subseteq C.$$

Το A είναι κλειστό κυρτό υποσύνολο του C. Θα δείξουμε ότι $A \neq \varnothing$ και ότι το A δεν είναι dentable. [Τότε το C δεν έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.] Για να δείξουμε ότι $A \neq \varnothing$ αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε n

$$\mathrm{conv}(A_n) \subseteq A + 8\cdot 2^{-n}B(0,1).$$

Πράγματι, έστω $n \in \mathbb{N}$. Έστω $M \geqslant n$. Θα δείξουμε ότι $\mathrm{conv}(A_n) \subseteq \mathrm{conv}(A_M) + 8 \cdot 2^{-n} B(0,1)$. Ισχύει

$$\begin{aligned}\mathrm{conv}(A_n) &\subseteq \mathrm{conv}(A_{n+1}) + 4 \cdot 2^{-n} B(0,1) \subseteq \mathrm{conv}(A_{n+2}) + 4\Big(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}}\Big) B(0,1) \\ &\subseteq \mathrm{conv}(A_M) + 4\Big(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \cdots + \frac{1}{2^{M-1}}\Big) B(0,1) \subseteq \mathrm{conv}(A_M) + 4 \cdot \frac{2}{2^n} B(0,1) \\ &= \mathrm{conv}(A_M) + 8 \cdot 2^{-n} B(0,1).\end{aligned}$$

Άρα, $\mathrm{conv}(A_n) \subseteq \bigcap\limits_{M \geqslant n} \mathrm{conv}(A_M) + 8 \cdot 2^{-n} B(0,1)$, όπου

$$\bigcap_{M \geqslant n} \mathrm{conv}(A_M) \subseteq \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \bigcup_{m=n}^{\infty} \mathrm{conv}(A_m) \subseteq \bigcap_{n=n_0}^{\infty} \mathrm{conv}\Big(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m]Big) \subseteq A.$$

Έτσι, όντως έχουμε

$$\mathrm{conv}(A_n) \subseteq A + 8 \cdot 2^{-n} B(0,1) \tag{4.2.7}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Ακριβώς όπως πριν (χωρίς αυτή τη φορά να παραλείψουμε το $B(y,\varepsilon)$) παίρνουμε $\mathrm{conv}(A_n) \subseteq \mathrm{conv}(A_m \setminus B(y,\varepsilon)) + 8 \cdot 2^{-n} B(0,1)$ για κάθε $m \geqslant n$. Θα δείξουμε ότι

$$\mathrm{conv}\Big(\bigcup_{k=n}^{m} A_k \Big) \subseteq \mathrm{conv}(A_{m+1} \setminus B(y,\varepsilon)) + 16 \cdot 2^{-n} B(0,1) \tag{4.2.8}$$

για κάθε $m > n \geqslant n_0$ και κάθε $y \in E$.

Αφού το δεξιό μέλος είναι κυρτό και

$$\bigcup_{k=n}^{m} 8 \cdot 2^{-k} B(0,1) = 8 \cdot 2^{-n} B(0,1),$$

αρκεί να δείξουμε ότι

$$\bigcup_{k=n}^{m} A_k \subseteq \mathrm{conv}(A_{m+1} \setminus B(y,\varepsilon)) + 8 \cdot 2^{-n} B(0,1).$$

Έστω $x \in A$. Σταθεροποιούμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε $16 \cdot 2^{-n} < \varepsilon$. Έχουμε $x \in \overline{\mathrm{conv}}\,(\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m)$, άρα υπάρχει $u \in \bigcup\limits_{m>n} \mathrm{conv}\,(\bigcup_{k=n}^{m} A_k)$ με $\|x-u\| \leqslant 2^{-n}$. Δηλαδή, υπάρχουν $m > n$ και $u \in \mathrm{conv}\,(\bigcup_{k=n}^{m} A_k)$ ώστε $\|x-u\| \leqslant 2^{-n}$.

Από την (4.2.8) για $y = x$ υπάρχει $v \in \mathrm{conv}(A_{m+1} \setminus B(x,\varepsilon))$ και υπάρχει $\xi \in 16 \cdot 2^{-n} B(0,1)$ ώστε $u = v + \xi$, άρα $\|v-u\| \leqslant 16 \cdot 2^{-n}$ και $\|x-v\| \leqslant 17 \cdot 2^{-n}$. Αφού $v \in \mathrm{conv}(A_{m+1} \setminus B(x,\varepsilon))$ το v γράφεται ως $v = \sum_{j=1}^{M} \lambda_j v_j$, όπου $v_j \in A_{m+1}$, $v_j \notin B(x,\varepsilon)$ δηλαδή $\|v)j - x\| \geqslant \varepsilon$, $\lambda_j \geqslant 0$ και $\sum\limits_{j=1}^{M} \lambda_j = 1$. Από την (4.2.7) για $n = m+1$ έχουμε $v_j \in \mathrm{conv}(A_{m+1}) \subseteq A + 8 \cdot 2^{-(m+1)} B(0,1)$ για κάθε j, δηλαδή για κάθε j υπάρχει $w_k \in A$ τέτοιο ώστε $\|w_j - v_j\| \leqslant 8 \cdot 2^{-(m+1)} \leqslant 8 \cdot 2^{-n} < \frac{\varepsilon}{2}$. Άρα $\|w_j - x\| > \frac{\varepsilon}{2}$ (αφού $\|v_j - x\| \geqslant \varepsilon$). Συνεπώς, $w_j \in A \setminus B(x,\varepsilon/2)$ για κάθε j. Τώρα,

$$\Big\| x - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j w_j \Big\| \leqslant \Big\| x - \sum_{j=1}^{M} \lambda_j v_j \Big\| + \sum_{j=1}^{M} |\lambda_j| \cdot \|v_j - w_j\| \leqslant 17 \cdot 2^{-n} + 8 \cdot 2^{-n} = 25 \cdot 2^{-n}.$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$, επειδή $\sum_{j=1}^{M} \lambda_j w_j \in \operatorname{conv}(A \setminus B(x, \varepsilon/2))$ παίρνουμε ότι $x \in \overline{\operatorname{conv}}(A \setminus B(x, \varepsilon/2))$. Άρα, υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $x \in \overline{\operatorname{conv}}(A \setminus B(x, \delta))$ για κάθε $x \in A$. Από τον Ισχυρισμό 1 μετά από τον Ορισμό 4.2.10 έπεται ότι το A δεν είναι dentable, το οποίο είναι άτοπο αφού το C έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym.

Βήμα 2. Αφού η f είναι άνω ημι-συνεχής, τα σύνολα $S(C, f + x^*, a)$ είναι κλειστά. Από το Βήμα 1 για κάθε f άνω ημι-συνεχή και άνω φραγμένη και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x^* \in E^*$ τέτοιο ώστε $\|x^*\| < \varepsilon$ και $a > 0$ τέτοιο ώστε $\operatorname{diam}(S(C, f + x^*, a)) \leqslant 2\varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Από το Βήμα 1 υπάρχει $x_1^* \in E^*$ με $\|x_1^*\| < \frac{\varepsilon}{2}$ και $a_1 > 0$ ώστε $\operatorname{diam}(S(C, f + x_1^*, a_1)) \leqslant \frac{1}{2}$. Θέτουμε $\varepsilon_2 := \min\left\{\frac{\varepsilon}{4}, \frac{a_1}{2M}\right\}$ (όπου $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\| \leqslant M$ για κάθε $x \in C$). Η $f + x_1^*$ είναι άνω ημι-συνεχής στο C και άνω φραγμένη (αφού f άνω φραγένη και $|x_1^*(z)| \leqslant \|x_1^*\| \cdot M$ για κάθε $z \in C$). Εφαρμόζουμε το Βήμα 1 για την $f + x_1^*$ και το ε_2 και βρίσκουμε $x_2^* \in E^*$ με $\|x_2^*\| < \varepsilon_2$ και $b_2 > 0$ τέτοια ώστε $\operatorname{diam}(S(C, f + x_1^* + x_2^*, b_2)) \leqslant \frac{1}{4}$. Τώρα από το Λήμμα 4.2.21 (με f την $f + x_1^*$ και g την $f + x_1^* + x_2^*$) έχουμε

$$\delta_2 = \sup\{|(f + x_1^*)(y) - (f + x_1^* + x_2^*)(y)| : y \in C\} \leqslant \|x_2^*\| \cdot M < \varepsilon_2 M < \frac{a_1}{2},$$

άρα υπάρχει $a_2 := b_2 - 2\delta_2 < b_2$ τέτοιο ώστε $S(C, f + x_1^* + x_2^*, a_2) \subseteq S(C, f + x_1^*, a_1)$. Φυσικά, αφού $a_2 < b_2$ ισχύει ότι $S(C, x^*, a_2) \subseteq S(C, x^*, b_2)$ για κάθε x^*, άρα

$$\operatorname{diam}(S(C, f + x_1^* + x_2^*, a_2)) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Συνεχίζοντας με τον ίδιο τρόπο επαγωγικά, βρίσκουμε $x_k^* \in E^*$ και μια φθίνουσα ακολουθία της μορφής $S_k := S\left(C, f + \sum_{k=1}^{n} x_k^*, a_k\right)$ με διαμέτρους $\operatorname{diam}(S_k) \leqslant \frac{1}{2^k} \to 0$. Επιπλέον, τα x_k^* μπορούν να επιλεγούν με νόρμα τόσο μικρή ώστε $\sum\limits_{k=n}^{\infty} \|x_k^*\| < \frac{a_{n-1}}{2}$ για κάθε $n > 1$ και $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \|x_k^*\| \leqslant \varepsilon$ (για παράδειγμα, απαιτώντας το $\varepsilon_n \leqslant \min\left\{\frac{\varepsilon}{2^n}, \frac{a_{n-1}}{4}, \ldots, \frac{a_1}{2^n}\right\}$ για κάθε $n > 1$).

Επειδή η $(S_k)_k$ είναι φθίνουσα ακολουθία κλειστών συνόλων στο C με $\operatorname{diam}(S_k) \to 0$, από το θεώρημα Cantor χουμε $\bigcap\limits_k S_k = \{x_0\}$ για κάποιο $x_0 \in C$. Θα δείξουμε ότι η $f + \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^*$ έχει ισχυρό μέγιστο στο x_0. Έστω $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε το $S_{n-1} = S(C, f + x_1^* + \cdots + x_{n-1}^*, a_{n-1})$. Θέτουμε $g = f + \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k^*$. Τότε, υποθέτοντας χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι $M \leqslant 1$,

$$\sup\{|f(y) - g(y)| : y \in C\} \leqslant \sum_{k=n}^{\infty} \|x_k^*\| \cdot M \leqslant \frac{a_{n-1}}{2}.$$

Άρα από το Λήμμα 4.2.21 υπάρχουν $\xi_{n-1} \leqslant a_{n-1}$ τέτοιο ώστε $S\left(C, f + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*, \xi_{n-1}\right) \subseteq S_{n-1}$ για κάθε n. Άρα, $\operatorname{diam}\left(S\left(C, f + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*, \xi_{n-1}\right)\right) \longrightarrow 0$ (και $\xi_n \to 0$). Επίσης,

$$\begin{aligned}\Big(f + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*\Big)(x_0) &\geqslant f(x_0) + \sum_{k=N}^{\infty} x_k^*(x_0) + \sum_{k=1}^{N} x_k^*(x_0) = \sum_{k=N}^{\infty} x_k^*(x_0) + \Big(f + \sum_{k=1}^{N} x_k^*\Big)(x_0)\\ &\geqslant \sum_{k=N}^{\infty} x_k^*(x_0) + \sup_{x \in C}\Big(f + \sum_{k=1}^{N} x_k^*\Big)(x) - a_N.\end{aligned}$$

Έστω $y \in S\left(C, f + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*, \xi_N\right)$. Τότε,

$$\begin{aligned}\Big(f + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*\Big)(x_0) &\geqslant \sum_{k=N}^{\infty} x_k^*(y) + \sum_{k=N}^{\infty} x_k^*(y - x_0) + f(y) + \sum_{k=1}^{N} x_k^*(y) - a_N \\ &= \Big(f + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*\Big)(y) + \sum_{k=N}^{\infty} x_k^*(y - x_0) - a_N \\ &\overset{N\to\infty}{\longrightarrow} f(y) + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*(y)\end{aligned}$$

αφού $\|\sum_{k=N}^{\infty} x_k^*(y)| \leqslant \frac{a_{N-1}}{2}\|y\| \to 0$. Άρα όντως η $f + \sum_{k=1}^{\infty} x_k^*$ έχει ισχυρό μέγιστο στο x_0. □

Θεώρημα 4.2.28. *Έστω C κλειστό, φραγμένο και κυρτό σύνολο σε ένα χώρο Banach E, το οποίο έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. Τότε, $C = \overline{\text{conv}}(A)$, όπου*

$$A := \{x \in C : x \text{ ισχυρά εκτεθειμένο σημείο του } C\}.$$

Επίσης, το σύνολο των x^* που εκθέτουν ισχυρά σημεία του C, δηλαδή το

$$G := \{x^* \in E^* : \exists x \in C \text{ t.w.to } x^* \text{ εκθέτει ισχυρά το } x\}$$

είναι πυκνό G_δ στον E.

Απόδειξη. Πρώτα θα δείξουμε ότι το G είναι G_δ-σύνολο. Υπενθυμίζουμε ότι το $x \in C$ καλείται ισχυρά εκτεθειμένο σημείο του C αν υπάρχει $x^* \in E^*$ τέτοιο ώστε $x^*(x) > x^*(y)$ για κάθε $y \in C$, $y \neq x$, δηλαδή είναι εκτεθειμένο, και επιπλέον $\lim\limits_{a\to 0^+} \text{diam}(S(C, x^*, a)) = 0$. Θέτουμε

$$G_n := \{x^* : \text{diam}(S(C, x^*, a)) < 1/n \text{ για κάποιο } a > 0\}.$$

Η (G_n) είναι φθίνουσα και από το Λήμμα 4.2.21 κάθε G_n είναι ανοικτό υποσύνολο του E^*. Πράγματι, υπάρχει $M > 0$ τέτοιος ώστε $\|x\| \leqslant M$ για κάθε $x \in C$ και $B_{E^*}\left(x^*, \frac{a}{2M}\right) \subseteq G_n$, αφού αν $g \in B_{E^*}\left(x^*, \frac{a}{2M}\right)$ τότε $\|g - x^*\| \leqslant \frac{a}{2M}$, άρα $\sup\{|x^*(y) - g(y)| : y \in C\} < \frac{a}{2}$, άρα υπάρχει $\xi > 0$ τέτοιος ώστε $S(C, g, \xi) \subseteq S(C, x^*, a)$, το οποίο μας δίνει $\text{diam}(S(C, g, \xi)) < \frac{1}{n}$, και συνεπώς $g \in G_n$.

Τώρα θα δείξουμε ότι $\overline{G_n}^{\|\cdot\|} = E^*$. Έστω $f \in E^*$. Προφανώς η f είναι άνω ημισυνεχής και άνω φραγμένη στο C. Άρα, υπάρχει $x^* \in E^*$ με $\|x^*\| \leqslant \varepsilon$ τέτοιο ώστε $\text{diam}(S(C, f + x^*, a)) \overset{a\to 0^+}{\longrightarrow} 0$, δηλαδή για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a_n > 0$ ώστε $\text{diam}(S(C, x^*, a_n)) < \frac{1}{n}$, άρα $f + x^* \in G_n$, όπου $\|f - (f + x^*)\| = \|x^*\| \leqslant \varepsilon$, άρα $f \in \overline{G_n}$. Έπεται ότι $\overline{G_n} = E^*$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Τώρα, $x^* \in G \iff$ υπάρχει x τ.ω. $x^*(x) > x^*(y)$ για κάθε $y \neq x$ και $\text{diam}(S(C, x^*, a)) \overset{a\to 0^+}{\longrightarrow} 0$ $\iff$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a_n > 0$ ώστε $\text{diam}(S(C, x^*, a_n)) < 1/n \iff x^* \in \bigcap\limits_n G_n$. Άρα, $G = \bigcap\limits_n G_n$, και αφού τα G_n είναι ανοικτά το G είναι G_δ. Επίσης, επειδή τα G_n είναι ανοικτά και πυκνά υποσύνολα του E^* και ο $(E^*, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης, από το θεώρημα Baire το $G = \bigcap\limits_n G_n$ είναι πυκνό στον E^*.

Ειδικότερα $G \neq \varnothing$ άρα υπάρχουν x^* και $x \in C$ ώστε το x^* να εκθέτει ισχυρά το x. Θέτουμε $K := \overline{\text{conv}}(A)$, όπου $A = \{x \in C : x \text{ ισχυρά εκτεθειμένο σημείο του } C\} \neq \varnothing$. Άρα, $K \neq \varnothing$.

Πρέπει να δείξουμε ότι $K = C$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $x \in C$ με $x \notin K$. Από το δεύτερο διαχωριστικό θεώρημα υπάρχει $x^* \in E^*$ τέτοιο ώστε $\sup_{y \in K} x^*(y) < x^*(x)$. Μάλιστα, επειδή $\overline{G} = E^*$ μπορούμε να βρούμε $y^* \in G$ τέτοιο ώστε $\sup_{y \in K} y^*(y) < y^*(x)$. Αφού $y^* \in G$ υπάρχει $x_0 \in A$ τέτοιο ώστε το y^* να εκθέτει ισχυρά το x_0 στο C, άρα $y^*(x_0) > y^*(\xi)$ για κάθε $\xi \neq y$. Ειδικότερα, $y^*(x_0) \geqslant y^*(x) > \sup_{y \in K} y^*(y)$, άρα $x_0 \notin K$, άτοπο αφού $x_0 \in A$. □

Πόρισμα 4.2.29. *Ένα w-συμπαγές κυρτό σύνολο σε ένα χώρο Banach είναι η κλειστή κυρτή θήκη των ισχυρά εκτεθειμένων σημείων του.*

Απόδειξη. Άμεση από το προηγούμενο θεώρημα, αφού κάθε κυρτό w-συμπαγές σύνολο έχει την ιδιότητα Radon-Nikodym. □

Βιβλιογραφία

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach Space Theory*, Grad. Texts in Math. **233**, Springer, New York, 2006.

[2] Y. Benyamini and J. Lindenstrauss, *Geometric nonlinear functional analysis*, American Mathematical Society Colloquium Publications, vol. **48**, Amer. Math. Soc., Providence, RI (2000).

[3] F. Albiac and N. J. Kalton, *A characterization of real $C(K)$-spaces*, Amer. Math. Monthly 114 (2007), no. 8, 737-743.

[4] C. Bessaga and A. Pełczynski, *Spaces of continuous functions. IV. On isomorphical classification of spaces of continuous functions*, Studia Math. 19 (1960), 53-62.

[5] K. Borsuk, *Über Isomorphie der Funktionalraüme*, Bull. Int. Acad. Pol. Sci. (1933), 1-10.

[6] N. Dunford and B. J. Pettis, *Linear operations on summable functions*, Trans. Amer. Math. Soc. 47 (1940), 323-392.

[7] D. B. Goodner, *Projections in normed linear spaces*, Trans. Amer. Math. Soc. 69 (1950), 89-108.

[8] A. Grothendieck, *Sur les applications linéaires faiblement compactes despaces du type $C(K)$*, Canad. J. Math. 5 (1953), 129-173.

[9] M. I. Kadets and A. Pełczynski, *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p*, Studia Math. 21 (1961/1962), 161-176.

[10] J. L. Kelley, *Banach spaces with the extension property*, Trans. Amer. Math. Soc. 72 (1952), 323-326.

[11] J. Lindenstrauss, *On complemented subspaces of m*, Israel J. Math. 5 (1967), 153-156.

[12] A. A. Miljutin, *Isomorphism of the spaces of continuous functions over compact sets of the cardinality of the continuum*, Teor. Funkciĭ Funkcional. Anal. Priložen. Vyp. 2 (1966), 150-156.

[13] L. Nachbin, *On the Hahn-Banach theorem*, An. Acad. Bras. Cienc. 21 (1949), 151-154.

[14] A. Pełczynski, *On the isomorphism of the spaces m and M*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 6 (1958), 695-696.

[15] A. Pełczynski, *Projections in certain Banach spaces*, Studia Math. 19 (1960), 209-228.

[16] A. Pełczynski, *Banach spaces on which every unconditionally converging operator is weakly compact*, Bull. Acad. Pol. Sci. Ser. Sci. Math. Astron. Phys. 10 (1962), 641-648.

[17] R. S. Phillips, *On linear transformations*, Trans. Amer. Math. Soc. 48 (1940), 516-541.