Μαριαννας Χαρτζουλακη
Μαθηματικου

ΠΙΘΑΝΟΘΕΩΡΗΤΙΚΕΣ ΜΕΘΟΔΟΙ ΣΤΗ ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΚΥΡΤΩΝ ΣΩΜΑΤΩΝ

Διδακτορικη Διατριβη

Πανεπιστημιο Κρητης
Ηρακλειο 2002

Εισηγητης: Α. Γιαννοπουλος

Περιεχόμενα

1 Εισαγωγή **1**

1.1 Βασικές έννοιες - συμβολισμός 2

1.2 Ισοτροπικές θέσεις κυρτών σωμάτων 3

1.3 Συνοπτική περιγραφή της εργασίας 7

2 Λόγος όγκων **15**

2.1 Λόγος όγκων δύο κυρτών σωμάτων 15

2.1.1 Εισαγωγή 15

2.1.2 Η ℓ-νόρμα: βοηθητικά λήμματα 17

2.1.3 Το λήμμα του Slepian και η ανισότητα της Chevet 22

2.1.4 Εκτίμηση του λόγου όγκων 24

2.2 Λόγος όγκων και Ευκλείδειες τομές 27

2.2.1 Η μέθοδος των τυχαίων στροφών 28

2.2.2 Η μέθοδος των προβολών 31

2.2.3 Παρατηρήσεις 33

3 Τυχαίοι χώροι που παράγονται από 0-1 πολύτοπα **39**

3.1 Εισαγωγή 39

3.2 Γεωμετρία της μοναδιαίας μπάλας 44

3.2.1 Η ακτίνα της εγγεγραμμένης μπάλας του K_N 44

3.2.2 Κύβοι που εγγράφονται στο K_N 48

3.2.3 Όγκος και μέσο πλάτος 59

3.3 Ασυμπτωτικές ιδιότητες του X_N 62

3.3.1 Σταθερά unconditional βάσης του X_N 63

3.3.2 Εκτιμήσεις αποστάσεων Banach-Mazur 69

3.3.3 Ισοτροπικές σταθερές 71

4 Τυχαία πολύτοπα μέσα σε ένα κυρτό σώμα **81**

4.1 Quermassintegrals τυχαίων πολυτόπων 81

4.1.1 Συμμετρικοποίηση Steiner: το Θεώρημα 4.1.1 84

4.1.2 Μοναδικότητα: το Θεώρημα 4.1.2 89
4.2 Εκτιμήσεις για τον όγκο τυχαίου πολυτόπου: η περίπτωση των 1-unconditional σωμάτων 91
4.2.1 1-unconditional σώματα 93
4.2.2 Ζωνοειδή 98

5 Παράρτημα **101**
5.1 Μέσο πλάτος ισοτροπικών σωμάτων 101
5.2 Απόσταση Banach-Mazur του ℓ_p^n από τον ℓ_q^n 106

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Η διδακτορική αυτή διατριβή εντάσσεται στις περιοχές της κυρτής γεωμετρίας και της τοπικής θεωρίας των χώρων Banach. Τελείως σχηματικά, αντιμετωπίζουμε δύο κλάσεις προβλημάτων:

- Προβλήματα εκτιμήσεων γεωμετρικών παραμέτρων (όπως ο λόγος όγκων, το μέσο πλάτος, η απόσταση Banach-Mazur).

- Προβλήματα της διακριτής στοχαστικής γεωμετρίας: δηλαδή, προβλήματα που προκύπτουν από τη μελέτη τυχαία παραγόμενων γεωμετρικών αντικειμένων (n-διάστατων χώρων που ορίζονται από τυχαία 0-1 πολύτοπα με δοσμένο πλήθος κορυφών, πολυτόπων που οι κορυφές τους επιλέγονται τυχαία από κάποιο κυρτό σώμα).

Βασικό ζητούμενο των εκτιμήσεών μας είναι η ακριβής εξάρτηση από τη διάσταση (στην πρώτη περίπτωση) ή από τη διάσταση και το πλήθος των κορυφών (στη δεύτερη περίπτωση).

Οι τεχνικές που χρησιμοποιούμε είναι πιθανοθεωρητικές. Στα προβλήματα της δεύτερης ομάδας αυτό είναι αναγκαίο, από την ίδια τους τη φύση. Στα προβλήματα της πρώτης ομάδας, η πιθανοθεωρητική μέθοδος λειτουργεί με πολύ πιο έμμεσο τρόπο.

Σε αυτό το Κεφάλαιο εισάγουμε το βασικό συμβολισμό (§1.1), αναφέρουμε κάποια κλασικά εργαλεία της θεωρίας των κυρτών σωμάτων (§1.2), και δίνουμε μια πρώτη περιγραφή των αποτελεσμάτων της διατριβής (§1.3). Καθένα από τα επόμενα Κεφάλαια αναπτύσσεται αυτόνομα: στην αρχή κάθε Παραγράφου παρουσιάζονται τα προβλήματα, η ιστορία τους, και τα βασικά αποτελέσματα.

1.1 Βασικές έννοιες - συμβολισμός

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο θεωρούμε εφοδιασμένο με μια Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_2$ την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα, και γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και S^{n-1} για τη μοναδιαία σφαίρα. Ο όγκος (n-διάστατο μέτρο Lebesgue) συμβολίζεται με $|\cdot|$. Σε αυτή την εργασία, κυρτό σώμα λέμε ένα συμπαγές κυρτό υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$ με $0\in \mathrm{int}(K)$. Η ακτινική συνάρτηση $\rho_K:\mathbb{R}^n\backslash\{0\}\to\mathbb{R}^+$ του K ορίζεται από την

$$\rho_K(x)=\max\{\lambda>0:\lambda x\in K\}. \tag{1.1.1}$$

Η συνάρτηση στήριξης $h_K:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ του K ορίζεται από την

$$h_K(x)=\max\{\langle x,y\rangle:y\in K\}. \tag{1.1.2}$$

Παρατηρήστε ότι, γιά δοσμένη διεύθυνση $\theta\in S^{n-1}$, έχουμε $\rho_K(\theta)\leq h_K(\theta)$.

Γράφουμε $\mathcal{K}_n$ για την κλάση όλων των μη κενών κυρτών συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$. Η $\mathcal{K}_n$ είναι κυρτός κώνος ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski και τον πολλαπλασιασμό με μη αρνητικούς πραγματικούς αριθμούς. Το Θεώρημα του Minkowski (που είναι ταυτόχρονα και ο ορισμός των μεικτών όγκων) μας λέει ότι: αν $K_1,\dots,K_m\in\mathcal{K}_n$, $m\in\mathbb{N}$, τότε ο όγκος του $t_1K_1+\cdots+t_mK_m$ είναι ομογενές πολυώνυμο βαθμού n ως προς τα $t_i\geq 0$. Δηλαδή,

$$|t_1K_1+\cdots+t_mK_m|=\sum_{1\leq i_1,\dots,i_n\leq m}V(K_{i_1},\dots,K_{i_n})t_{i_1}\dots t_{i_n}, \tag{1.1.3}$$

όπου οι συντελεστές $V(K_{i_1},\dots,K_{i_n})$ επιλέγονται να είναι ανεξάρτητοι από μεταθέσεις των K_{i_j}. Ο συντελεστής $V(K_1,\dots,K_n)$ είναι ο μεικτός όγκος των $K_1,\dots,K_n$. Το πολικό σώμα K° του K είναι το

$$K^\circ:=\{y\in\mathbb{R}^n:\langle x,y\rangle\leq 1\ \text{ για κάθε }\ x\in K\}. \tag{1.1.4}$$

Οι βασικές ιδιότητες του πολικού σώματος είναι οι εξής:

1. Για κάθε $\theta\in S^{n-1}$, $\rho_{K^\circ}(\theta)=1/h_K(\theta)$.
2. Αν $K\subseteq L$, τότε $L^\circ\subseteq K^\circ$.
3. Αν $T\in GL(n)$, τότε $(TK)^\circ=(T^{-1})^*(K^\circ)$.
4. $(K^\circ)^\circ=K$.
5. $|TK|\cdot|(TK)^\circ|=|K|\cdot|K^\circ|$.

Έστω K συμμετρικό (ως προς την αρχή των αξόνων) κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Η απεικόνιση $\|x\|_K=\min\{\lambda\geq 0:x\in\lambda K\}$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένος με την νόρμα $\|\cdot\|_K$ θα συμβολίζεται με X_K. Αντίστροφα, αν $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα, τότε η μοναδιαία του μπάλα $K_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$.

Η δυϊκή νόρμα $\|\cdot\|_*$ της $\|\cdot\|$ ορίζεται από την

$$\|y\|_* = \max\{|\langle x, y\rangle| : \|x\| \leq 1\}. \tag{1.1.5}$$

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι $|\langle x, y\rangle| \leq \|y\|_*\|x\|$ γιά κάθε $x, y \in \mathbb{R}^n$. Αν $X^* = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ είναι ο δυϊκός χώρος του X, τότε $K_{X^*} = K_X^\circ$. Θα γράφουμε $\|\cdot\|_{K^\circ}$ ή $\|\cdot\|_*$, και $\|\cdot\|_K$ ή $\|\cdot\|$ χωρίς αυτό να δημιουργεί σύγχυση.

Αν K και T είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, η γεωμετρική τους απόσταση $d(K, T)$ δίνεται από την

$$d(K, T) = \inf\{ab : a, b > 0, K \subseteq bT, T \subseteq aK\}. \tag{1.1.6}$$

Η φυσιολογική απόσταση των n-διάστατων χώρων X_K και X_T είναι η απόσταση Banach-Mazur

$$d(X_K, X_T) = \inf_{u \in GL(n)} \|u : X_K \to X_T\| \cdot \|u^{-1} : X_T \to X_K\|. \tag{1.1.7}$$

Από τον ορισμό της γεωμετρικής απόστασης έπεται ότι

$$d(X_K, X_T) = \inf\{d(K, uT) : u \in GL(n)\}. \tag{1.1.8}$$

Με άλλα λόγια, η $d(X_K, X_T)$ είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός d για τον οποίο μπορούμε να βρούμε $u \in GL(n)$ τέτοιον ώστε $K \subseteq u(T) \subseteq dK$. Είναι φανερό ότι $d(X_K, X_T) \geq 1$ με ισότητα αν και μόνο αν οι X_K και X_T είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Σημειώνουμε την πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα $d(X, Z) \leq d(X, Y)d(Y, Z)$ που ισχύει για κάθε τριάδα n-διάστατων χώρων.

Για τις αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των Milman-Schechtman [11], και Schneider [15].

1.2 Ισοτροπικές θέσεις κυρτών σωμάτων

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Με τον όρο **θέση του** K εννοούμε κάθε γραμμική εικόνα $T(K)$, $T \in GL(n)$. Σε αυτήν την παράγραφο περιγράφουμε τρεις ειδικές θέσεις που παίζουν σημαντικό ρόλο σε αυτήν την εργασία (και, γενικότερα, στην ασυμπτωτική θεωρία των κυρτών σωμάτων).

1.2.1. Η θέση του John. Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{E}(K)$ όλων των ελλειψοειδών που περιέχονται στο K. Αποδεικνύεται ότι υπάρχει μοναδικό $E_K \in \mathcal{E}(K)$ που έχει μέγιστο όγκο: το E_K λέγεται *ελλειψοειδές μέγιστου όγκου* του K. Παίρνοντας κατάλληλη γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ του K, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E_{\tilde{K}} = B_2^n$. Λέμε ότι το $\tilde{K}$ είναι η *θέση John* του K. Η ορολογία προέρχεται από το εξής κλασικό θεώρημα του John [8].

Θεώρημα 1.2.1 *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $B_2^n \subseteq K$. Τότε, η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K αν και μόνο αν υπάρχουν $u_1, \ldots, u_m \in \mathrm{bd}(K) \cap S^{n-1}$ και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε*

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j, \tag{1.2.1}$$

όπου $(u_j \otimes u_j)(y) = \langle u_j, y \rangle u_j$ είναι η προβολή στη διεύθυνση του u_j. □

Από το Θεώρημα 1.2.1 προκύπτει εύκολα ότι

$$d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n} \tag{1.2.2}$$

για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, όπου $\ell_2^n = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$ είναι ο Ευκλείδειος χώρος.

Ορισμός: Ένα μέτρο Borel μ στην S^{n-1} λέγεται *ισοτροπικό* αν

$$\int_{S^{n-1}} \langle x, \theta \rangle^2 d\mu(x) = \frac{\mu(S^{n-1})}{n} \tag{1.2.3}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Από το Θεώρημα 1.2.1 έπεται ότι

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle u_j, \theta \rangle^2 = 1 \tag{1.2.4}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Δηλαδή, αν θεωρήσουμε το μέτρο ν στην S^{n-1} που δίνει μάζα λ_j στο σημείο u_j, $j = 1, \ldots, m$, τότε το ν είναι ισοτροπικό. Με αυτή την έννοια, η θέση του John είναι μια ισοτροπική θέση.

1.2.2. Ισοτροπική θέση και η εικασία του υπερεπιπέδου. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Υπάρχει ελλειψοειδές $E_L(K)$ που ικανοποιεί την

$$\int_{E_L(K)} \langle x, y \rangle^2 dx = \int_K \langle x, y \rangle^2 dx \tag{1.2.5}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, δηλαδή έχει τις ίδιες ροπές αδρανείας με το K (το $E_L(K)$ λέγεται ελλειψοειδές Legendre του K). Λέμε ότι το K βρίσκεται στην *ισοτροπική θέση* αν $|K| = 1$ και το $E_L(K)$ είναι πολλαπλάσιο της B_2^n. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχει σταθερά L_K με την ιδιότητα

$$\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \tag{1.2.6}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$: το K έχει την ίδια ροπή σε κάθε διεύθυνση θ. Δεν είναι δύσκολο να ελέγξει κανείς ότι κάθε κυρτό σώμα K έχει μια θέση που είναι ισοτροπική.

Επιπλέον, η θέση αυτή είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς. Άρα, η *ισοτροπική σταθερά* L_K του K είναι μονοσήμαντα ορισμένη για την κλάση $\{T(K) : T \in GL(n)\}$. Η ισοτροπική θέση του K χαρακτηρίζεται ως θέση ελαχίστου με την εξής έννοια (βλέπε [10]).

Θεώρημα 1.2.2 *Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0. Το K είναι ισοτροπικό αν και μόνο αν*

$$\int_K \|x\|_2^2 dx \leq \int_{T(K)} \|x\|_2^2 dx \tag{1.2.7}$$

για κάθε $T \in SL(n)$. □

Αποδεικνύεται εύκολα ότι $L_K \geq L_{B_2^n} \geq c > 0$ για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Ανοικτό παραμένει το εξής πρόβλημα (που πρωτοεμφανίστηκε στην [3]):

> Είναι σωστό ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_K \leq C$ για κάθε κυρτό σώμα K με κέντρο βάρους το 0;

Είναι γνωστό ότι η L_K είναι ομοιόμορφα φραγμένη για κάποιες κλάσεις συμμετρικών κυρτών σωμάτων: τις μοναδιαίες μπάλες χώρων με 1-unconditional βάση, τα ζωνοειδή και τα πολικά τους, κλπ. Το καλύτερο γενικό άνω φράγμα οφείλεται στον Bourgain [4] (βλέπε [12] για τη μη συμμετρική περίπτωση): $L_K \leq c\sqrt[4]{n}\log n$ για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$.

Μια ενδιαφέρουσα ιδιότητα της ισοτροπικής θέσης είναι ότι αν το K είναι ισοτροπικό τότε όλες οι τομές $K \cap \theta^\perp$, $\theta \in S^{n-1}$ έχουν περίπου τον ίδιο $(n-1)$-διάστατο όγκο. Αυτό έπεται από την

$$\int_K \langle x, \theta\rangle^2 dx \simeq \frac{1}{|K \cap \theta^\perp|^2} \quad , \quad \theta \in S^{n-1} \tag{1.2.8}$$

που ισχύει για κάθε κυρτό σώμα K με όγκο 1 και κέντρο βάρους το 0, και κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Άρα, η ανισότητα $L_K \leq C$ είναι ισοδύναμη με την $|K \cap \theta^\perp| \geq c$ στην περίπτωση των ισοτροπικών σωμάτων. Με βάση αυτή την παρατήρηση αποδεικνύεται ότι η καταφατική απάντηση στο πρόβλημα είναι ισοδύναμη με την «εικασία του υπερεπιπέδου»:

> Υπάρχει $c > 0$ τέτοια ώστε $\max_{\theta \in S^{n-1}} |K \cap \theta^\perp| \geq c$ για κάθε κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ με $|K| = 1$ και κέντρο βάρους το 0.

1.2.3. Θέση ελάχιστου μέσου πλάτους. Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με $0 \in \mathrm{int}(K)$. Το *μέσο πλάτος* του K ορίζεται από την

$$w(K) = \int_{S^{n-1}} h_K(u)\sigma(du), \tag{1.2.9}$$

όπου σ είναι το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}. Λέμε ότι το K βρίσκεται στη θέση *ελάχιστου μέσου πλάτους* αν $|K|=1$ και $w(K)\leq w(TK)$ για κάθε $T\in SL(n)$. Η θέση αυτή χαρακτηρίζεται από το επόμενο θεώρημα (βλέπε [7]).

Θεώρημα 1.2.3 *Ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους αν και μόνο αν $|K|=1$ και*

$$\int_{S^{n-1}}\langle u,\theta\rangle^2 h_K(u)\sigma(du)=\frac{w(K)}{n} \tag{1.2.10}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Επιπλέον, η θέση αυτή είναι μονοσήμαντα ορισμένη αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς. □

Αν θεωρήσουμε το μέτρο w_K στην S^{n-1} με πυκνότητα h_K ως προς το σ, τότε το Θεώρημα 1.2.3 δείχνει ότι το K βρίσκεται στη θέση ελάχιστου μέσου πλάτους αν και μόνο αν το w_K είναι ισοτροπικό.

Ένα φυσιολογικό ερώτημα είναι να δοθεί άνω φράγμα για το ελάχιστο μέσο πλάτος. Είναι γνωστό ότι κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ έχει γραμμική εικόνα $\tilde{K}$ όγκου 1 με

$$w(\tilde{K})\leq c\sqrt{n}\log(2d(X_K,\ell_2^n))\leq c_1\sqrt{n}\log(2n), \tag{1.2.11}$$

όπου $c,c_1>0$ είναι απόλυτες σταθερές. Η (1.2.11) προκύπτει από μια ανισότητα του Pisier [13] που συνδυάζεται με προγενέστερη δουλειά των Lewis [9], Figiel και Tomczak-Jaegermann [6]. Το ίδιο άνω φράγμα ισχύει και στη μη συμμετρική περίπτωση (περισσότερες λεπτομέρειες δίνονται στο Κεφάλαιο 2, βλέπε επίσης τα βιβλία των Pisier [14] και Tomczak-Jaegermann [16]).

1.2.4. Η ανισότητα των Brascamp-Lieb και η αντίστροφή της. Κλείνουμε αυτή την παράγραφο με τις ανισότητες των Brascamp-Lieb και Barthe (βλέπε [1], [2] και [5]).

Υποθέτουμε ότι τα $u_1,\dots,u_m\in S^{n-1}$ και $\lambda_1,\dots,\lambda_m>0$ ικανοποιούν την «ισοτροπική συνθήκη»

$$\sum_{j=1}^m\lambda_j\langle u_j,\theta\rangle^2=1 \tag{1.2.12}$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$.

Ανισότητα των Brascamp-Lieb. *Έστω $f_j:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $j=1,\dots,m$. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{j=1}^m f_j^{\lambda_j}(\langle x,u_j\rangle)dx\leq\prod_{j=1}^m\left(\int_{\mathbb{R}}f_j(t)dt\right)^{\lambda_j}. \tag{1.2.13}$$

Ανισότητα του Barthe. *Έστω $h_j : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις, $j = 1,\dots,m$. Τότε,*

(1.2.14)
$$\int_{\mathbb{R}^n} \sup\left\{\prod_{j=1}^m h_j^{\lambda_j}(\theta_j) : \theta_j \in \mathbb{R} \ \text{ και } \sum_{j=1}^m \lambda_j\theta_j u_j = x\right\} dx \geq \prod_{j=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}} h_j(t)dt\right)^{\lambda_j}.$$

Οι ανισότητες αυτές έχουν σημαντικές εφαρμογές στην κυρτή γεωμετρία (για παράδειγμα, οδηγούν σε ακριβείς εκτιμήσεις όγκων). Βασικό τους χαρακτηριστικό είναι ότι συνδυάζονται «ιδανικά» με τις ισοτροπικές συνθήκες που χαρακτηρίζουν ειδικές θέσεις όπως αυτές που περιγράψαμε πιο πάνω. Αυτός είναι ο λόγος που τις συμπεριλαμβάνουμε σ' αυτή την εισαγωγή: οι μέθοδοι που χρησιμοποιούμε είναι πιθανοθεωρητικές, ενδέχεται όμως κάποια από τα προβλήματα που συζητάμε να αντιμετωπίζονται διαφορετικά (για παράδειγμα, βλέπε §2.1 για το πρόβλημα του λόγου όγκων).

1.3 Συνοπτική περιγραφή της εργασίας

Χρησιμοποιούμε πιθανοθεωρητικές μεθόδους για να αντιμετωπίσουμε τα παρακάτω προβλήματα.

Λόγος όγκων: Στο Κεφάλαιο 2 μελετάμε το λόγο όγκων δύο κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$. Ο λόγος όγκων $\mathrm{vr}(K,L)$ των K και L ορίζεται από την

$$\mathrm{vr}(K,L) = \inf\left(\frac{|K|}{|T(L)|}\right)^{1/n},$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλους τους αφφινικούς μετασχηματισμούς T του $\mathbb{R}^n$ για τους οποίους $T(L) \subseteq K$. Αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα Α. *Έστω K και L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vr}(K,L) \leq C\sqrt{n}\log n \tag{1.3.1}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η εκτίμηση που δίνει το Θεώρημα Α είναι βέλτιστη αν εξαιρέσουμε το λογαριθμικό παράγοντα. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε χρησιμοποιεί τη μέθοδο των τυχαίων ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων, η οποία βασίζεται σε μια ανισότητα της Chevet από τη θεωρία των ανελίξεων του Gauss. Δείχνουμε ότι, αν τα συμμετρικά κυρτά σώματα K και L επιλεγούν στη θέση του ελάχιστου μέσου πλάτους, τότε τυχαίος ορθογώνιος μετασχηματισμός U ικανοποιεί τις $U(L) \subseteq \rho K$ και $\big(|\rho K|/|U(L)|\big)^{1/n} = O(\sqrt{n}\log^2 n)$. Για να απαλείψουμε τον ένα λογαριθμικό (ως προς n) παράγοντα, ξεκινάμε από μια «μεικτή» θέση των K και L, η οποία συνδυάζει ιδιότητες της θέσης ελάχιστου μέσου πλάτους με ιδιότητες της θέσης για την οποία ελαχιστοποιείται η γεωμετρική απόσταση από την B_2^n. Το πέρασμα στη μη συμμετρική περίπτωση δεν παρουσιάζει δυσκολίες.

Στο δεύτερο μέρος αυτού του Κεφαλαίου συζητάμε τη διάσταση των Ευκλείδειων τομών ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K στον $\mathbb{R}^n$ που έχει «φραγμένο λόγο όγκων» $A = \mathrm{vr}(K, B_2^n)$. Ο Szarek έχει αποδείξει ότι, σε αυτή την περίπτωση, το K έχει τομές διάστασης k ανάλογης του n που έχουν φραγμένη γεωμετρική απόσταση από την B_2^k. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα B. *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της μοναδιαίας μπάλας K του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Για κάθε $k \leq n$ υπάρχει υπόχωρος H του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, τέτοιος ώστε*

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq f(A, \lambda) \cdot \|x\| \tag{1.3.2}$$

για κάθε $x \in H$, όπου $\lambda = k/n$.

Δίνουμε δύο νέες αποδείξεις του Θεωρήματος B, οι οποίες οδηγούν στην ίδια περίπου εξάρτηση από τα A και λ:

$$f(A, \lambda) = [c_1 A]^{c_2/(1-\lambda)}, \tag{1.3.3}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές. Οι αποδείξεις βασίζονται στην M^*-ανισότητα του Milman και σε διάφορες μορφές του Θεωρήματος του Dvoretzky. Ένα ενδιαφέρον σημείο της προσέγγισής μας στην §2.2.1 είναι ότι: το να πετύχει κανείς καλύτερη εκτίμηση για την $f(A, \lambda)$ στο Θεώρημα B (για παράδειγμα, $f(A, \lambda) = O\left(A/(1-\lambda)\right)^q$ για κάποιον $q \geq 1$) είναι ισοδύναμο με μια υπόθεση κανονικότητας για τους αριθμούς κάλυψης του K από μπάλες ακτίνας t στη θέση του John (την οποία δεν έχουμε κατορθώσει να αποδείξουμε): θα πρέπει να υπάρχουν $p > 0$ και $q \geq 1$ τέτοιοι ώστε

$$N(K, A^q t B_2^n) \leq \exp(cn/t^p) \tag{1.3.4}$$

για κάθε $t \geq 1$.

Τυχαίοι χώροι που παράγονται από 0-1 πολύτοπα: Στο Κεφάλαιο 3 μελετάμε (από τη σκοπιά της τοπικής θεωρίας των χώρων Banach) την κλάση $\mathcal{B}_N$ των τυχαίων χώρων που προκύπτουν από τα $0-1$ πολύτοπα με N κορυφές: Θεωρούμε το διακριτό κύβο $E_2^n = \{-1, 1\}^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N \geq n$ θεωρούμε την κλάση των συμμετρικών κυρτών σωμάτων $K_N = \mathrm{co}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ που παράγονται από N τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από τον E_2^n. Λέμε ότι το τυχαίο K_N έχει την ιδιότητα (P) αν

$$\mathrm{Prob}\Big((x_1, \ldots, x_N) \mid \text{το } K_N \text{ έχει την } (P)\Big) \geq 1 - \exp(-n). \tag{1.3.5}$$

Απαιτούμε δηλαδή το κάτω φράγμα να τείνει στο 1 «εκθετικά» όταν η διάσταση n τείνει στο άπειρο.

Τα επόμενα θεωρήματα δίνουν ακριβή περιγραφή του τυχαίου K_N:

Θεώρημα Γ. *Υπάρχει $\lambda_0 > 1$ με την εξής ιδιότητα: αν $N \geq \lambda_0 n$, τότε με «μεγάλη πιθανότητα»*

$$K_N \supseteq c_1 B_2^n, \tag{1.3.6}$$

όπου B_2^n είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Για την απόδειξη του Θεωρήματος Γ χρησιμοποιούμε τον εξής ισχυρισμό: Αν $\delta \in (0,1)$ και $N \geq c\log(\delta^{-1})n$, τότε N σημεία $x_1, \ldots, x_N$ που επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα από τον E_2^n ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ την ανισότητα

$$c_1\|y\|_2 \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |\langle y, x_i\rangle| \leq c_2\|y\|_2 \tag{1.3.7}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, όπου $c, c_1, c_2 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Ως συνήθως, αρκεί να εξασφαλίσουμε την (1.3.7) για όλα τα σημεία y ενός 1/10-δικτύου της S^{n-1}, κάτι που γίνεται με φυσιολογικά επιχειρήματα «συγκέντρωσης του μέτρου».

Θεώρημα Δ. *Υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $n \geq n_0$ και $N > n(\log n)^2$, τότε N τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από τον E_2^n ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ την*

$$K_N \supseteq c\left(\sqrt{\log(N/n)}B_2^n \cap Q_n\right), \tag{1.3.8}$$

όπου $Q_n = [-1,1]^n$ είναι ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$.

Βασικό ρόλο στην απόδειξη του Θεωρήματος Δ παίζει το εξής αποτέλεσμα του Montgomery-Smith: υπάρχει σταθερά $r \geq 1$ τέτοια ώστε, για κάθε $\alpha > 0$ και κάθε $y \in \mathbb{R}^n$,

$$P\left(\left\{x \in E_2^n : \langle x, y\rangle \geq r^{-1}\inf_{z\in\mathbb{R}^n}\{\|z\|_1 + \alpha\|y-z\|_2\}\right\}\right) \geq r^{-1}\exp(-r\alpha^2). \tag{1.3.9}$$

Θεώρημα Ε. *Αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε το K_N έχει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$ τις εξής ιδιότητες:*

1. $|K_N|^{1/n} \simeq \sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}$ και $|K_N^\circ|^{1/n} \simeq 1/\sqrt{n\log(N/n)}$.
2. $w(K_N)w(K_N^\circ) \leq c(\varepsilon)\sqrt{\log n}$ αν $N \geq n^{1+\varepsilon}$ (και $c(\varepsilon) = O(1/\sqrt{\varepsilon})$ καθώς το $\varepsilon \to 0^+$).

Τα αποτελέσματα αυτά δείχνουν ότι αν $n \geq n_0$ και $N \geq n(\log n)^2$, τότε, για το τυχαίο K_N, η εγγεγραμμένη ακτίνα, ο όγκος, το μέσο πλάτος και η ακμή του μέγιστου εγγεγραμμένου κύβου προσδιορίζονται με ακρίβεια (ως προς τις παραμέτρους n και N). Χρησιμοποιούμε αυτή τη γεωμετρική περιγραφή του K_N για να πάρουμε ακριβείς εκτιμήσεις για διάφορες ασυμπτωτικές παραμέτρους του αντίστοιχου n-διάστατου χώρου με νόρμα X_N:

(α) Αν $N \geq c(\delta)n$, τότε ο τυχαίος $X_N \in \mathcal{B}_N$ ικανοποιεί την

$$d(X_N, \mathcal{U}_n) \geq \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{\log(2N/n)}}.$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$, όπου $\mathcal{U}_n$ η κλάση των χώρων με 1-unconditional βάση.

(β) Για κάθε $N \geq n$ και για τυχαίο X_N,

$$d(X_N, X_N^*) \leq c\sqrt{n \log n}.$$

(γ) Αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε

$$L_{K_N^\circ} \leq c.$$

για το τυχαίο K_N°.

(δ) Αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε

$$L_{K_N} \leq c\frac{\min\{\log N, \sqrt{n}\}}{\sqrt{\log(N/n)}}$$

για το τυχαίο K_N.

Τυχαία πολύτοπα μέσα σε ένα κυρτό σώμα: Στο Κεφάλαιο 4 ασχολούμαστε με ένα κλασικό πρόβλημα των γεωμετρικών πιθανοτήτων: Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$. Επιλέγουμε $N \geq n+1$ τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το K, και γράφουμε $C(x_1, \ldots, x_N)$ για την κυρτή τους θήκη. Η ροπή p-τάξης του όγκου του τυχαίου πολυτόπου $C(x_1, \ldots, x_N)$ είναι η ποσότητα

$$\mathbb{E}_p(K,N) = \int_K \cdots \int_K |C(x_1, \ldots, x_N)|^p dx_N \ldots dx_1. \tag{1.3.10}$$

Ένα από τα κλασικά προβλήματα των γεωμετρικών πιθανοτήτων είναι, για δοσμένα $p > 0$ και $N \geq n+1$, να βρεθούν εκείνες οι αφφινικές κλάσεις κυρτών σωμάτων K για τις οποίες ελαχιστοποιείται (αντίστοιχα, μεγιστοποιείται) η ποσότητα $\mathbb{E}_p(K,N)$. Ο Groemer απέδειξε ότι, για $p \geq 1$, η $\mathbb{E}_p(K,N)$ ελαχιστοποιείται αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές (η περίπτωση $n = 2$, $N = 3$ είχε μελετηθεί από τον Blaschke). Τα επόμενα δύο αποτελέσματα (σε συνεργασία με τον Γ. Παούρη) γενικεύουν το Θεώρημα του Groemer.

Θεώρημα ΣΤ. *Έστω $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Για κάθε $n\geq 2$, $N\geq n+1$ και $0\leq i\leq n-1$, ορίζουμε*

$$\mathbb{E}(K,N,f\circ W_i)=\int_K\cdots\int_K f[W_i(C(x_1,\dots,x_N))]dx_N\dots dx_1. \tag{1.3.11}$$

Τότε,

$$\mathbb{E}(K,N,f\circ W_i)\geq \mathbb{E}(B,N,f\circ W_i), \tag{1.3.12}$$

για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, όπου B είναι η μπάλα όγκου 1.

Η απόδειξη του Θεωρήματος ΣΤ βασίζεται στη μέθοδο της Steiner συμμετρικοποίησης. Βασικό ρόλο παίζει ο ολοκληρωτικός τύπος του Kubota ο οποίος μας επιτρέπει να εκφράσουμε τα quermassintegrals του τυχαίου πολυτόπου $C(x_1,\dots,x_N)$ ως ολοκληρώματα των όγκων των προβολών του. Αν $i\geq 1$ και αν η f είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα τότε η μπάλα B όγκου 1 (και οι μεταφορές της) είναι το μοναδικό κυρτό σώμα για το οποίο η $\mathbb{E}(K,N,f\circ W_i)$ παίρνει ελάχιστη τιμή:

Θεώρημα Ζ. *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν υποθέσουμε ότι το K δεν είναι μπάλα, τότε υπάρχει $\theta\in S^{n-1}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $N\geq n+1$, για κάθε $i\in\{1,\dots,n-1\}$ και για κάθε γνησίως αύξουσα κυρτή συνάρτηση $f:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ έχουμε*

$$\mathbb{E}(S(K,\theta),N,f\circ W_i)<\mathbb{E}(K,N,f\circ W_i), \tag{1.3.13}$$

όπου $S(K,\theta)$ είναι η Steiner συμμετρικοποίηση του K στη διεύθυνση του θ.

Στο δεύτερο μέρος αυτού του Κεφαλαίου δίνουμε ακριβείς εκτιμήσεις για την ποσότητα

$$\mathbb{F}(K,N)=\int_K\cdots\int_K |C(x_1,\dots,x_N)|^{1/n}dx_N\dots dx_1 \tag{1.3.14}$$

στην περίπτωση των 1-unconditional σωμάτων.

Θεώρημα Η. *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c,c_1,c_2>0$ τέτοιες ώστε: αν το K είναι 1-unconditional κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και αν $n(\log n)^2\leq N\leq \exp(cn)$, τότε*

$$c_1\frac{\sqrt{\log(N/n)}}{\sqrt{n}}\leq \mathbb{F}(K,N)\leq c_2\frac{\sqrt{\log(N/n)}}{\sqrt{n}}. \tag{1.3.15}$$

Για την απόδειξη αυτού του Θεωρήματος χρησιμοποιούμε πρόσφατα ισχυρά αποτελέσματα των Bobkov και Nazarov για την «ψ_2-συμπεριφορά» των γραμμικών συναρτησοειδών σε 1-unconditional ισοτροπικά κυρτά σώματα.

Τέλος, σε ένα σύντομο παράρτημα (Κεφάλαιο 5), δίνουμε εκτιμήσεις για το μέσο πλάτος ισοτροπικών σωμάτων και την ασυμπτωτική συμπεριφορά της απόστασης Banach-Mazur $d(\ell_p^n,\ell_q^n)$ στην περίπτωση $1\leq p<2<q\leq\infty$.

Θεώρημα Θ. *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$w(K) \leq cn^{3/4} L_K, \tag{1.3.16}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η ανισότητα του Θεωρήματος Θ βασίζεται σε μια νέα τεχνική για την εκτίμηση των αριθμών κάλυψης $N(K, tB_2^n)$ μέσω της παραμέτρου $M(K, B_2^n) = \int_K \|x\|_2 dx$, και στην ανισότητα του Dudley για τη μέση τιμή του supremum υποκανονικών ανελίξεων.

Θεώρημα Ι. *Αν $1 \leq p < 2 < q \leq +\infty$, τότε*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \liminf_{n\to\infty} \frac{d(\ell_p^n, \ell_q^n)}{n^\alpha} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{d(\ell_p^n, \ell_q^n)}{n^\alpha} \leq 1, \tag{1.3.17}$$

όπου $\alpha = \max\{1/p - 1/2, 1/2 - 1/q\}$.

Η απόδειξη του άνω φράγματος χρησιμοποιεί την «πυκνότητα» των αριθμών Hadamard στο $\mathbb{N}$ και την παρατήρηση ότι, αν ο n είναι αριθμός Hadamard, τότε $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq n^\alpha$. Για το κάτω φράγμα απαιτείται η γνώση της καλύτερης σταθεράς στην κλασική ανισότητα του Khintchine (Szarek).

Σημείωση. Αρκετά από τα αποτελέσματα αυτής της εργασίας έχουν ήδη δημοσιευτεί. Πιο συγκεκριμένα:

(α) Τα αποτελέσματα της Παραγράφου 2.1 είναι το αντικείμενο της εργασίας

> A. Giannopoulos and M. Hartzoulaki: *On the volume ratio of two convex bodies*, Bull. London Math. Soc. **34** (2002), 703-707.

(β) Τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 3 είναι το αντικείμενο της εργασίας

> A. Giannopoulos and M. Hartzoulaki: *Random spaces generated by vertices of the cube*, Discrete Comput. Geom. **28** (2002), 255-273.

(γ) Τα αποτελέσματα της Παραγράφου 4.1 είναι το αντικείμενο της εργασίας

> M. Hartzoulaki and G. Paouris: *Quermassintegrals of a random polytope in a convex body*,

η οποία πρόκειται να εμφανιστεί στο Archiv der Mathematik.

Βιβλιογραφία

[1] K.M. Ball, *Convex geometry and Functional analysis*, Handbook on the Geometry of Banach Spaces (Johnson-Lindenstrauss eds.), North-Holland, 2001.

[2] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. Math. **134** (1998), 335-361.

[3] J. Bourgain, *On high dimensional maximal functions associated to convex bodies*, Amer. J. Math. **108** (1986), 1467-1476.

[4] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127-137.

[5] H.J. Brascamp and E.H. Lieb, *Best constants in Young's inequality, its converse and its generalization to more than three functions*, Adv. in Math. **20** (1976), 151-173.

[6] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[7] A.A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Extremal problems and isotropic positions of convex bodies*, Israel J. Math. **117** (2000), 29-60.

[8] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187-204.

[9] D.R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18-29.

[10] V.D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 64-104.

[11] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986), Springer, Berlin.

[12] G. Paouris, *On the isotropic constant of non-symmetric convex bodies*, Lecture Notes in Mathematics **1745** (2000), 239-243.

[13] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Ann. of Math. **115** (1982), 375-392.

[14] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[15] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[16] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monographs **38** (1989), Pitman, London.

Κεφάλαιο 2

Λόγος όγκων

2.1 Λόγος όγκων δύο κυρτών σωμάτων

2.1.1 Εισαγωγή

Έστω K και L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Ο **λόγος όγκων** των K και L είναι η ποσότητα

$$\mathrm{vr}(K,L) := \inf \left(\frac{|K|}{|T(L)|} \right)^{1/n}, \tag{2.1.1}$$

όπου το infimum υπολογίζεται πάνω από όλους τους αφφινικούς μετασχηματισμούς T του $\mathbb{R}^n$ για τους οποίους $T(L) \subseteq K$. Απλές παρατηρήσεις πάνω στον ορισμό είναι οι εξής:

1. Ο λόγος όγκων είναι αφφινικά αναλλοίωτη ποσότητα: αν K_1, L_1 είναι μη εκφυλισμένες αφφινικές εικόνες των K, L, τότε $\mathrm{vr}(K_1, L_1) = \mathrm{vr}(K, L)$.

2. Το infimum είναι minimum: υπάρχει αφφινική εικόνα του L που περιέχεται στο K και έχει το μέγιστο δυνατό όγκο.

3. Αν τα K και L είναι συμμετρικά κυρτά σώματα τότε, προκειμένου να ορίσουμε τον $\mathrm{vr}(K,L)$, μπορούμε να περιοριστούμε στους γραμμικούς μετασχηματισμούς T του $\mathbb{R}^n$.

4. Ο λόγος όγκων ικανοποιεί την πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα

$$\mathrm{vr}(K,L) \leq \mathrm{vr}(K,M) \cdot \mathrm{vr}(M,L).$$

Γράφουμε B_2^n για την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα στον $\mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα των Brascamp-Lieb, ο Ball [1] απάντησε πλήρως στο πρόβλημα της μεγιστοποίησης του λόγου όγκων $\mathrm{vr}(K, B_2^n)$.

Θεώρημα 1. *Έστω $Q_n = [-1,1]^n$ και S_n τυχόν simplex στον $\mathbb{R}^n$. Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mathrm{vr}(K, B_2^n) \leq \mathrm{vr}(S_n, B_2^n). \tag{2.1.2}$$

Αν το K είναι συμμετρικό, τότε

$$\mathrm{vr}(K, B_2^n) \leq \mathrm{vr}(Q_n, B_2^n). \tag{2.1.3}$$

Η απόδειξη χρησιμοποιεί την αναπαράσταση του John για την ταυτοτική απεικόνιση. Ας υποθέσουμε για απλότητα ότι το K είναι συμμετρικό. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που περιέχεται στο K είναι η B_2^n. Αρκεί να δείξουμε ότι $|K| \leq |Q_n| = 2^n$. Από το Θεώρημα του John [12] υπάρχουν θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ και σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n τέτοια ώστε

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j. \tag{2.1.4}$$

Παρατηρούμε ότι $K \subseteq M := \{x : |\langle x, u_j\rangle| \leq 1,\ j = 1, \ldots, m\}$. Άρα,

$$\begin{aligned} |K| &\leq |M| = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} \chi_{[-1,1]}(\langle x, u_j\rangle) dx \\ &\leq \prod_{j=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}} \chi_{[-1,1]}(t) dt \right)^{\lambda_j} = 2^{\sum_{j=1}^{m} \lambda_j} = 2^n, \end{aligned}$$

από την ανισότητα των Brascamp-Lieb και την παρατήρηση ότι $\sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n$, που είναι απλή συνέπεια της αναπαράστασης (2.1.4). □

Μια συνέπεια της αντίστροφης ανισότητας Brascamp-Lieb του Barthe [2] είναι ότι ο $\mathrm{vr}(B_2^n, L)$ μεγιστοποιείται κι αυτός όταν $L = S_n$ (αντίστοιχα, όταν $L = B_1^n$ στη συμμετρική περίπτωση).

Θεώρημα 2. *Έστω B_1^n η μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n και S_n τυχόν simplex στον $\mathbb{R}^n$. Αν L είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\mathrm{vr}(B_2^n, L) \leq \mathrm{vr}(B_2^n, S_n). \tag{2.1.5}$$

Αν το L είναι συμμετρικό, τότε

$$\mathrm{vr}(B_2^n, L) \leq \mathrm{vr}(B_2^n, B_1^n). \tag{2.1.6}$$

Παρατηρήσεις: (α) Εύκολα ελέγχουμε ότι οι ποσότητες $\mathrm{vr}(S_n, B_2^n)$, $\mathrm{vr}(Q_n, B_2^n)$, $\mathrm{vr}(B_2^n, B_1^n)$ και $\mathrm{vr}(B_2^n, S_n)$ είναι όλες (ασυμπτωτικά) της τάξης της $\sqrt{n}$.

(β) Από τα Θεωρήματα 1 και 2 έπεται ότι

$$\mathrm{vr}(K,L) \leq \mathrm{vr}(K,B_2^n)\cdot \mathrm{vr}(B_2^n,L) \leq \mathrm{vr}(S_n,B_2^n)\cdot \mathrm{vr}(B_2^n,S_n) = n \tag{2.1.7}$$

για κάθε ζευγάρι κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$. Μια άμεση απόδειξη αυτής της εκτίμησης δίνεται στην [11], όπου μελετάται η «θέση μέγιστου όγκου» του L μέσα στο K.

(γ) Από τις προηγούμενες παρατηρήσεις βλέπουμε ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε

$$c_1\sqrt{n} \leq \max_{K,L} \mathrm{vr}(K,L) \leq n. \tag{2.1.8}$$

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι το κάτω φράγμα της (2.1.8) δίνει την πραγματική τάξη μεγέθους της ποσότητας $\max_{K,L}\mathrm{vr}(K,L)$:

Θεώρημα 3. *Έστω K και L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vr}(K,L) \leq C\sqrt{n}\log n \tag{2.1.9}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η εκτίμηση που δίνει το Θεώρημα 3 είναι βέλτιστη αν εξαιρέσουμε το λογαριθμικό παράγοντα. Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε βασίζεται στη μέθοδο των τυχαίων ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων: άμεση εφαρμογή αυτής της μεθόδου δίνει την εκτίμηση $\mathrm{vr}(K,L) = O(\sqrt{n}\log^2 n)$. Μπορούμε να απαλείψουμε τον ένα λογαριθμικό παράγοντα βασιζόμενοι σε μια ιδέα του Rudelson [19] ο οποίος ξεκίνησε με την ίδια μέθοδο για την απόδειξη της εκτίμησης $O(n^{4/3}(\log n)^9)$ για την απόσταση Banach-Mazur δύο (όχι αναγκαστικά συμμετρικών) κυρτών σωμάτων K και L στον $\mathbb{R}^n$.

2.1.2 Η ℓ-νόρμα: βοηθητικά λήμματα

Ορισμοί - συμβολισμός: Θεωρούμε τον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με την Ευκλείδεια δομή $\langle\cdot,\cdot\rangle$ και συμβολίζουμε την αντίστοιχη Ευκλείδεια νόρμα με $\|\cdot\|_2$. Η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα συμβολίζεται με B_2^n, και S^{n-1} είναι η μοναδιαία σφαίρα. Θα γράφουμε επίσης $|\cdot|$ για τον όγκο (μέτρο Lebesgue) στον $\mathbb{R}^n$, σ για το αναλλοίωτο ως προς τις στροφές μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}, και μ για το μέτρο πιθανότητας Haar πάνω στην ομάδα των ορθογώνιων μετασχηματισμών $O(n)$. Ο όγκος της B_2^n συμβολίζεται με ω_n. Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι $\omega_n = \pi^{n/2}/\Gamma(n/2+1)$.

Τα γράμματα c, c_1, c_2 κτλ. θα δηλώνουν απόλυτες θετικές σταθερές οι οποίες δεν θα είναι απαραίτητα συνεχώς οι ίδιες.

Έστω M ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η συνάρτηση

$$\|x\|_M = \inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda M\} \tag{2.1.10}$$

είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, και M είναι η μοναδιαία μπάλα του χώρου με νόρμα $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_M)$. Θα γράφουμε ℓ_2^n για τον Ευκλείδειο χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_2)$.

Το πολικό σώμα M° του M ορίζεται από τη σχέση

$$M^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle x, y\rangle| \leq 1 \ \text{ για κάθε } x \in M\}. \tag{2.1.11}$$

Με άλλα λόγια,

$$\|y\|_{M^\circ} = \max_{x \in M} |\langle x, y\rangle|. \tag{2.1.12}$$

Παρατηρούμε ότι $X_{M^\circ} = X_M^*$, δηλαδή το M° είναι η μοναδιαία μπάλα του δυϊκού χώρου του X_M. Από τον ορισμό του πολικού σώματος έπεται ότι $(TM)^\circ = (T^{-1})^*(M^\circ)$ για κάθε $T \in GL(n)$.

Αν X_{M_1} και X_{M_2} είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα όπως παραπάνω, η απόσταση Banach-Mazur $d(X_{M_1}, X_{M_2})$ ορίζεται από τη σχέση

$$d(X_{M_1}, X_{M_2}) = \inf_{T \in GL(n)} \|T : X_{M_1} \to X_{M_2}\| \cdot \|T^{-1} : X_{M_2} \to X_{M_1}\|. \tag{2.1.13}$$

Θα γράφουμε d_M για την απόσταση Banach-Mazur $d(X_M, \ell_2^n)$.

Για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα M στον $\mathbb{R}^n$ ορίζουμε το μέσο πλάτος $w(M)$ του M από τη σχέση

$$w(M) = \int_{S^{n-1}} \max_{y \in M} |\langle \theta, y\rangle| \sigma(d\theta) = \int_{S^{n-1}} \|\theta\|_{M^\circ} \sigma(d\theta). \tag{2.1.14}$$

Τότε, η ανισότητα του Urysohn (βλέπε [18], σελ. 6) μας λέει ότι

$$\left(\frac{|M|}{|B_2^n|}\right)^{1/n} \leq w(M) \tag{2.1.15}$$

με ισότητα αν και μόνο αν το M είναι μπάλα.

Αν $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, τότε ο A^*A είναι πάντα θετικός (δηλαδή, $\langle (A^*A)x, x\rangle \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$) και έχει μοναδική θετική τετραγωνική ρίζα, την οποία συμβολίζουμε με $|A|$. Οι ιδιοτιμές $s_j(A)$ του $|A|$ ονομάζονται ιδιάζουσες τιμές του A, και θα θεωρούνται διατεταγμένες σε φθίνουσα διάταξη: $s_1(A) \geq \ldots \geq s_n(A) \geq 0$. Συνέπεια του φασματικού θεωρήματος είναι η ανάλυση του A στη μορφή $A = UDV$, όπου $U, V \in O(n)$ και D ο διαγώνιος πίνακας $D = \mathrm{diag}(s_1(A), \ldots, s_n(A))$. Από αυτήν την ανάλυση βλέπουμε εύκολα ότι $\|A : \ell_2^n \to \ell_2^n\| = s_1(A)$.

Η ℓ-νόρμα: Συμβολίζουμε με $L(\ell_2^n, X_M)$ το χώρο όλων των γραμμικών τελεστών $T : \ell_2^n \to X_M$. Η **ℓ-νόρμα** ενός τελεστή $T \in L(\ell_2^n, X_M)$ ορίζεται ως εξής:

$$\ell(T) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|T(x)\|_M^2 \gamma_n(dx) \right)^{1/2}, \tag{2.1.16}$$

όπου γ_n είναι το μέτρο πιθανότητας του Gauss στον $\mathbb{R}^n$ που έχει πυκνότητα την $(2\pi)^{-n/2} \exp(-\|x\|_2^2/2)$.

Οι βασικές ιδιότητες της ℓ-νόρμας περιγράφονται στο επόμενο λήμμα:

Λήμμα 2.1.1 *Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα, και έστω $T \in L(\ell_2^n, X)$. Ισχύουν τα εξής:*

1. *Αν $U : \ell_2^n \to \ell_2^n$ ισομετρία, τότε $\ell(TU) = \ell(T)$.*
2. *Αν $S \in L(X, Y)$, τότε $\ell(ST) \leq \|S\| \cdot \ell(T)$.*
3. *Αν $W \in L(\ell_2^n, \ell_2^n)$, τότε $\ell(TW) \leq \|W\| \cdot \ell(T)$.*

Απόδειξη: (1) Απλό, αν χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το μέτρο του Gauss είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς.

(2) Προφανές από τον ορισμό και την $\|S(Tx)\| \leq \|S\| \cdot \|Tx\|$.

(3) Γράφουμε B για τη μοναδιαία μπάλα του $L(\ell_2^n, \ell_2^n)$. Η απεικόνιση $W \mapsto \ell(TW)$ είναι συνεχής και κυρτή συνάρτηση στο B, άρα παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποιο από τα ακραία σημεία του B. Θα αποδείξουμε ότι τα ακραία σημεία του συνόλου B είναι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί. Από το φασματικό θεώρημα, κάθε $W \in B$ αναλύεται στη μορφή $W = UDV$, όπου οι U, V είναι ορθογώνιοι και $D = \mathrm{diag}(s_1(W), \ldots, s_n(W))$.

Αν $W \notin O(n)$, τότε ο D στην παραπάνω ανάλυση του W δεν είναι ο ταυτοτικός. Επιπλέον, αφού $W \in B$, τα διαγώνια στοιχεία του D είναι μικρότερα ή ίσα της μονάδας, με γνήσια ανισότητα σε τουλάχιστον μία θέση. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $D = (D_1 + D_2)/2$, όπου $D_1 \neq D_2$ διαγώνιοι με την ίδια ιδιότητα. Αν θεωρήσουμε τους $W_i = UD_iV$, τότε $W = (W_1 + W_2)/2$ και οι W_1, W_2 είναι διαφορετικά στοιχεία του B, δηλαδή ο W δεν είναι ακραίο σημείο του B. Δηλαδή, τα ακραία σημεία του B είναι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί.

Χρησιμοποιώντας και την (1) βλέπουμε ότι αν $W \in L(\ell_2^n, \ell_2^n)$, $W \neq 0$, υπάρχει $U \in O(n)$ τέτοιος ώστε

$$\ell\left(T \cdot \frac{W}{\|W\|} \right) \leq \ell(TU) = \ell(T),$$

δηλαδή $\ell(TW) \leq \|W\| \cdot \ell(T)$. □

Σημείωση: Χρησιμοποιώντας την «ανάλυση $W = UDV$» μπορούμε να δούμε ότι, αντίστροφα, κάθε $U \in O(n)$ είναι ακραίο σημείο του B.

Η ℓ-νόρμα ορίστηκε από τους Figiel και Tomczak-Jaegermann [7], οι οποίοι, χρησιμοποιώντας ένα γενικό αποτέλεσμα του Lewis [14] σχετικό με νόρμες τελεστών δυϊκές ως προς το ίχνος, απέδειξαν ότι για κάθε M υπάρχει $T \in L(\ell_2^n, X_M)$ τέτοιος ώστε

$$\ell(T)\ell((T^{-1})^*) \leq nK(X_M), \tag{2.1.17}$$

όπου $K(X_M)$ είναι η σταθερά K-κυρτότητας του X_M (βλέπε [18, σελ. 20]). Από την άλλη πλευρά, μια σημαντική ανισότητα του Pisier [17] (βλέπε επίσης [18, Κεφάλαιο 2]) δείχνει ότι

$$K(X_M) \leq c_1 \log(d_M + 1) \tag{2.1.18}$$

για κάθε M, όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Από τον ορισμό της νόρμας $\|\cdot\|_M$ έχουμε $\|T(x)\|_M = \|x\|_{T^{-1}M}$ για κάθε $T \in GL(n)$. Άρα,

$$\ell(T) = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|T(x)\|_M^2 \gamma_n(dx)\right)^{1/2} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_{T^{-1}M}^2 \gamma_n(dx)\right)^{1/2}. \tag{2.1.19}$$

Για το λόγο αυτό, θα γράφουμε

$$\ell(T^{-1}(M)) := \ell(T : \ell_2^n \to X_M). \tag{2.1.20}$$

Με αυτό το συμβολισμό, τα αποτελέσματα των Lewis, Figiel-Tomczak και Pisier συνδυάζονται στο εξής:

Λήμμα 2.1.2 *Έστω M ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε*

$$\ell(TM)\ell((TM)^\circ) \leq c_1 n \log(d_M + 1), \tag{2.1.21}$$

όπου $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Εκτός από τη θεμελιώδη ανισότητα του Λήμματος 2.1.2, θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες απλές ιδιότητες του «ℓ-συναρτησοειδούς» $M \mapsto \ell(M)$.

Λήμμα 2.1.3 *Έστω M ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$c_2\sqrt{n}w(M) \leq \ell(M^\circ) \leq c_3\sqrt{n}w(M), \tag{2.1.22}$$

όπου $c_2, c_3 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Έστω $g_1,\dots,g_n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε κάποιο χώρο πιθανότητας. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} \ell(M^\circ) &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_{M^\circ}^2 \gamma_n(dx)\right)^{1/2} = \left(\mathbb{E}\|\sum_{i=1}^n g_ie_i\|_{M^\circ}^2\right)^{1/2} \\ &\simeq \mathbb{E}\|\sum_{i=1}^n g_ie_i\|_{M^\circ} = \int_{\mathbb{R}^n} \|x\|_{M^\circ}\gamma_n(dx) \end{aligned}$$

από την ανισότητα Kahane-Khintchine (βλέπε [22, §4]), και υπολογίζουμε το τελευταίο ολοκλήρωμα σε πολικές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} \ell(M^\circ) &\simeq \frac{n\omega_n}{(2\pi)^{n/2}}\int_{S^{n-1}}\int_0^\infty r^{n-1}\|r\theta\|_{M^\circ}e^{-r^2/2}dr\sigma(d\theta) \\ &= w(M)\cdot\frac{n\omega_n}{(2\pi)^{n/2}}\int_0^\infty r^ne^{-r^2/2}dr \simeq \sqrt{n}w(M). \qquad \square \end{aligned}$$

Λήμμα 2.1.4 *Έστω M ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\ell((I+S)(M)) \leq \ell(M) \tag{2.1.23}$$

για κάθε θετικό γραμμικό τελεστή S του $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 2.1.1 έχουμε

$$\ell((I+S)(M)) \leq \|(I+S)^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\|\cdot\ell(M). \tag{2.1.24}$$

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο S είναι θετικός τελεστής ελέγχουμε εύκολα ότι $s_n(I+S)\geq 1$, απ' όπου έπεται ότι $\|(I+S)^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \leq 1$. $\square$

Λήμμα 2.1.5 *Αν M_1 και M_2 είναι δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$\ell\big((M_1+M_2)^\circ\big) \leq \ell(M_1^\circ)+\ell(M_2^\circ). \tag{2.1.25}$$

Απόδειξη: Έχουμε $\|x\|_{(M_1+M_2)^\circ} = \|x\|_{M_1^\circ}+\|x\|_{M_2^\circ}$. Χρησιμοποιώντας τον ορισμό της ℓ-νόρμας και την ανισότητα του Minkowski παίρνουμε

$$\begin{aligned} \ell\big((M_1+M_2)^\circ\big) &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_{(M_1+M_2)^\circ}^2\gamma_n(dx)\right)^{1/2} \\ &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}\big(\|x\|_{M_1^\circ}+\|x\|_{M_2^\circ}\big)^2\gamma_n(dx)\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_{M_1^\circ}^2\gamma_n(dx)\right)^{1/2} + \left(\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_{M_2^\circ}^2\gamma_n(dx)\right)^{1/2} \\ &= \ell(M_1^\circ)+\ell(M_2^\circ), \end{aligned}$$

δηλαδή, την (2.1.25). $\square$

2.1.3 Το λήμμα του Slepian και η ανισότητα της Chevet

Η μέθοδος των τυχαίων ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στην εργασία της Tomczak-Jaegermann [23], και αργότερα αναπτύχθηκε από τους Benyamini και Gordon [3] για την εκτίμηση αποστάσεων Banach-Mazur μεταξύ δύο n-διάστατων χώρων με νόρμα. Βασίζεται σε μια ειδική περίπτωση της ανισότητας της Chevet (βλέπε [22, §43]) από τη θεωρία των ανελίξεων του Gauss.

Πρόταση 2.1.1 *Έστω K και L συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, και $(g_{ij})_{i,j=1}^n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας (Ω, ν). Για κάθε $\omega \in \Omega$ θεωρούμε τον τελεστή $G_\omega : X_L \to X_K$, που ορίζεται από την*

$$G_\omega = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij}(\omega) e_i \otimes e_j$$

όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ τυχούσα ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\int_\Omega \|G_\omega : X_L \to X_K\| d\nu \leq \mathrm{diam}(L) \cdot \ell(K) + \mathrm{diam}(K^\circ) \cdot \ell(L^\circ). \tag{2.1.26}$$

Η απόδειξη της Πρότασης 2.1.1 χρησιμοποιεί το λήμμα του Slepian (βλέπε [22, §43]).

Λήμμα 2.1.6 *Έστω (Ω, ν) χώρος πιθανότητας και X_i, Y_i, $i \leq m$, κανονικές τυχαίες μεταβλητές στον Ω με μέση τιμή 0, τέτοιες ώστε για κάθε $i, j \leq m$ να ισχύουν οι*

$$\begin{aligned} \int_\Omega X_i^2 d\nu &= \int_\Omega Y_i^2 d\nu \\ \int_\Omega Y_i Y_j d\nu &\leq \int_\Omega X_i X_j d\nu. \end{aligned}$$

Τότε,

$$\int_\Omega \max_{i \leq m} X_i \, d\nu \leq \int_\Omega \max_{i \leq m} Y_i \, d\nu. \qquad \square$$

Απόδειξη της Πρότασης 2.1.1: Έστω g, $(g_i)_{i=1}^n$, $(h_j)_{j=1}^n$ ανεξάρτητες τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές στον (Ω, ν), ανεξάρτητες από τις $(g_{ij})_{i,j=1}^n$.

Έστω $D(L)$ και $D(K^\circ)$ αριθμήσιμα πυκνά υποσύνολα των L και K° αντίστοιχα. Για κάθε $x \in D(L)$ και $y \in D(K^\circ)$ θεωρούμε τις τυχαίες μεταβλητές

$$\begin{aligned} X_{x,y} &= \sum_{i,j=1}^{n} x_i y_j g_{ij} + \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \cdot g \\ Y_{x,y} &= \|x\|_2 \cdot \sum_{j=1}^{n} y_j h_j + \|y\|_2 \cdot \sum_{i=1}^{n} x_i g_i. \end{aligned}$$

Θεωρώντας αρίθμηση του συνόλου των ζευγαριών $(x,y) \in D(L) \times D(K^\circ)$ έχουμε μια αρίθμηση των $X_{x,y}$ και $Y_{x,y}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι οι πρώτες m (ως προς την αρίθμηση) τυχαίες μεταβλητές $X_{x,y}$ και $Y_{x,y}$ ικανοποιούν τις προϋποθέσεις του Λήμματος του Slepian. Εφαρμόζοντας το Λήμμα για κάθε m και περνώντας στο όριο, παίρνουμε

$$\int_\Omega \sup_{y\in K^\circ} \sup_{x\in L} X_{x,y}\, d\nu \leq \int_\Omega \sup_{y\in K^\circ} \sup_{x\in L} Y_{x,y}\, d\nu. \tag{2.1.27}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_\Omega \sup_{y\in K^\circ} \sup_{x\in L} \Big(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{i,j}(\omega) \Big) d\nu(\omega) = \int_\Omega \sup_{x\in L} \sup_{y\in K^\circ} \langle G_\omega x, y \rangle d\nu(\omega). \tag{2.1.28}$$

Όμως,

$$\sup_{x\in L} \sup_{y\in K^\circ} \langle G_\omega x, y\rangle = \sup_{x\in L} \|G_\omega(x)\|_K = \|G_\omega : X_L \to X_K\|. \tag{2.1.29}$$

Χρησιμοποιώντας και τη συμμετρία της g, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \|G_\omega : X_L \to X_K\| d\nu(\omega) &= \int_\Omega \sup_{y\in K^\circ} \sup_{x\in L} \Big(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{i,j}(\omega) \Big) d\nu(\omega) \\
&\leq \int_\Omega \sup_{y\in K^\circ} \sup_{x\in L} \Big(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{i,j} + \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \cdot g \Big) d\nu \\
&\quad + \int_\Omega \sup_{y\in K^\circ} \sup_{x\in L} \Big(\sum_{i,j=1}^n x_i y_j g_{i,j} - \|x\|_2 \cdot \|y\|_2 \cdot g \Big) d\nu \\
&= 2 \int_\Omega \sup_{y\in K^\circ} \sup_{x\in L} X_{x,y} d\nu.
\end{aligned}$$

Το δεξιό μέλος της (2.1.27) γράφεται στη μορφή

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \sup_{y\in K^\circ} \sup_{x\in L} Y_{x,y} d\nu &= \int_\Omega \sup_{x\in L} \sup_{y\in K^\circ} \Big(\|x\|_2 \sum_{j=1}^n y_j h_j + \|y\|_2 \sum_{i=1}^n x_i g_i \Big) d\nu \\
&\leq \sup_{x\in L} \|x\|_2 \int_\Omega \sup_{y\in K^\circ} \left(\sum_{j=1}^n y_j h_j \right) d\nu \\
&\quad + \sup_{y\in K^\circ} \|y\|_2 \int_\Omega \sup_{x\in L} \left(\sum_{i=1}^n x_i g_i \right) d\nu \\
&= \frac{\mathrm{diam}(L)}{2} \int_\Omega \|\sum_{j=1}^n h_j e_j\|_K d\nu
\end{aligned}$$

$$+\frac{\operatorname{diam}(K^\circ)}{2}\int_\Omega \|\sum_{i=1}^n g_ie_i\|_{L^\circ}d\nu$$
$$\leq \quad \frac{\operatorname{diam}(L)}{2}\cdot \ell(K)+\frac{\operatorname{diam}(K^\circ)}{2}\cdot \ell(L^\circ),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την

$$\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n g_ie_i\right\|_M \leq \left(\mathbb{E}\left\|\sum_{i=1}^n g_ie_i\right\|_M^2\right)^{1/2}=\ell(M) \tag{2.1.30}$$

για τα K και L°. Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στην (2.1.26). □

Το επόμενο λήμμα (βλέπε [22, §43]) μας επιτρέπει να περάσουμε από τυχαίους πίνακες με τυπικές κανονικές συντεταγμένες σε ορθογώνιους πίνακες.

Λήμμα 2.1.7 (Marcus-Pisier) *Ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{O(n)}\|U:X_L\to X_K\|d\mu\leq \frac{c_4}{\sqrt{n}}\int_\Omega \|G_\omega:X_L\to X_K\|d\nu(\omega), \tag{2.1.31}$$

όπου $c_4>0$ απόλυτη σταθερά. □

Συνδυάζοντας την Πρόταση 2.1.1 με την ανισότητα των Marcus-Pisier παίρνουμε εκτίμηση για τη μέση τιμή της νόρμας ενός ορθογώνιου τελεστή $U:X_L\to X_K$ μέσω γεωμετρικών παραμέτρων των K και L.

Θεώρημα 2.1.1 *Έστω K και L δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{O(n)}\|U:X_L\to X_K\|\ \mu(dU)\leq \frac{c_4}{\sqrt{n}}\big(\operatorname{diam}(L)\ell(K)+\operatorname{diam}(K^\circ)\ell(L^\circ)\big), \tag{2.1.32}$$

όπου $c_4>0$ η σταθερά του Λήμματος 2.1.7. □

2.1.4 Εκτίμηση του λόγου όγκων

Θεωρούμε πρώτα τη συμμετρική περίπτωση. Το Θεώρημα που ακολουθεί δείχνει ότι ο λόγος όγκων $\operatorname{vr}(K,L)$ είναι ουσιαστικά «γραμμική συνάρτηση» του $\max\{d_K,d_L\}$.

Θεώρημα 2.1.2 *Έστω K και L δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\operatorname{vr}(K,L)\leq C_1\big(d_L\log(d_K+1)+d_K\log(d_L+1)\big) \tag{2.1.33}$$

όπου $C_1>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η απόδειξη θα βασιστεί στο Θεώρημα 2.1.1 και στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 2.1.8 *Έστω M συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει γραμμική εικόνα M_1 του M με τις εξής ιδιότητες:*

1. $\ell(M_1) \leq \sqrt{n}$
2. $\ell(M_1^\circ) \leq c_5\sqrt{n}\log(d_M+1)$
3. $\mathrm{diam}(M_1^\circ) = 2\|I : \ell_2^n \to X_{M_1}\| \leq 2d_M/\log(d_M+1)$

όπου $c_5 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από το Λήμμα 2.1.2 μπορούμε να υποθέσουμε ότι το M ικανοποιεί τις

$$\ell(M) \leq \sqrt{n} \ \text{ και } \ \ell(M^\circ) \leq c_1\sqrt{n}\log(d_M+1). \tag{2.1.34}$$

Θεωρούμε ένα ελλειψοειδές E_M που υλοποιεί την απόσταση d_M από το M: δηλαδή, $E_M \subseteq M \subseteq d_M E_M$. Υπάρχει θετικός γραμμικός τελεστής $S \in GL(n)$ τέτοιος ώστε $S(E_M) = B_2^n$. Τότε, $B_2^n \subseteq S(M) \subseteq d_M B_2^n$, άρα

$$w(SM) \leq d_M \ \text{ και } \ w((SM)^\circ) \leq 1. \tag{2.1.35}$$

Από το Λήμμα 2.1.3, παίρνουμε

$$\ell(SM) \leq c_3\sqrt{n} \text{ και } \ell((SM)^\circ) \leq c_3\sqrt{n}d_M. \tag{2.1.36}$$

Εάν θέσουμε $T = I + \alpha S$ όπου $\alpha = \log(d_M+1)/d_M$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\|I : \ell_2^n \to X_{TM}\| &= \|(I+\alpha S)^{-1} : \ell_2^n \to X_M\| \\
&\leq \|((\alpha S)^{-1} + I)^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \cdot \|(\alpha S)^{-1} : \ell_2^n \to X_M\| \\
&\leq \|(\alpha S)^{-1} : \ell_2^n \to X_M\| \\
&= \|I : \ell_2^n \to X_{\alpha(SM)}\| \\
&\leq 1/\alpha = d_M/\log(d_M+1)
\end{aligned}$$

Το Λήμμα 2.1.4 μας εξασφαλίζει ότι

$$\ell(TM) \leq \ell(M) \leq \sqrt{n}. \tag{2.1.37}$$

Τέλος, αφού $(I+\alpha S)(M) \subseteq M + \alpha(SM)$, από το Λήμμα 2.1.5 έχουμε

$$\begin{aligned}
\ell((TM)^\circ) &\leq \ell(M^\circ) + \alpha \cdot \ell((SM)^\circ) \\
&\leq c_1\sqrt{n}\log(d_M+1) + c_3\alpha\sqrt{n}d_M \\
&\leq (c_1+c_3)\sqrt{n}\log(d_M+1)
\end{aligned}$$

από τον τρόπο επιλογής του α. Από τα παραπάνω είναι φανερό ότι το συμπέρασμα του Λήμματος ικανοποιείται από το $M_1 := TM$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2: Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 2.1.8 βρίσκουμε γραμμικές εικόνες K_1 και L_1 των K και L αντίστοιχα, έτσι ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:

1. $\ell(K_1) \leq \sqrt{n}$ και $\ell(L_1^\circ) \leq \sqrt{n}$.
2. $\ell(K_1^\circ) \leq c_5\sqrt{n}\log(d_K+1)$ και $\ell(L_1) \leq c_5\sqrt{n}\log(d_L+1)$.
3. $\mathrm{diam}(K_1^\circ) \leq 2d_K/\log(d_K+1)$ και $\mathrm{diam}(L_1) \leq 2d_L/\log(d_L+1)$.

(για την ακρίβεια, εφαρμόζουμε το Λήμμα 2.1.8 για τα K και L° - παρατηρήστε ότι $d_L = d_{L^\circ}$). Από το Θεώρημα 2.1.1,

$$\begin{aligned}\int_{O(n)} \|U : X_{L_1} \to X_{K_1}\|\mu(dU) &\leq \frac{c_4}{\sqrt{n}}\big(\mathrm{diam}(L_1)\ell(K_1) + \mathrm{diam}(K_1^\circ)\ell(L_1^\circ)\big)\\ &\leq 2c_4\left(\frac{d_K}{\log(d_K+1)} + \frac{d_L}{\log(d_L+1)}\right).\end{aligned}$$

Άρα, υπάρχει $U_0 \in O(n)$ τέτοιος ώστε

$$U_0(L_1) \subseteq 2c_4\left(\frac{d_K}{\log(d_K+1)} + \frac{d_L}{\log(d_L+1)}\right)K_1. \tag{2.1.38}$$

Έπεται ότι

$$\mathrm{vr}(K,L) \leq 2c_4\left(\frac{d_K}{\log(d_K+1)} + \frac{d_L}{\log(d_L+1)}\right)\left(\frac{|K_1|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}\left(\frac{|B_2^n|}{|U_0(L_1)|}\right)^{1/n}. \tag{2.1.39}$$

Από την ανισότητα του Urysohn (2.1.15) παίρνουμε

$$\left(\frac{|K_1|}{|B_2^n|}\right)^{1/n} \leq w(K_1) \leq \frac{\ell(K_1^\circ)}{c_2\sqrt{n}} \leq \frac{c_5}{c_2}\log(d_K+1). \tag{2.1.40}$$

Τέλος, απλή εφαρμογή της ανισότητας του Hölder δείχνει ότι

$$\begin{aligned}\left(\frac{|B_2^n|}{|U_0(L_1)|}\right)^{1/n} &= \left(\frac{|B_2^n|}{|L_1|}\right)^{1/n} = \left(\int_{S^{n-1}}\|x\|_{L_1}^{-n}\sigma(dx)\right)^{-1/n}\\ &\leq w(L_1^\circ) \leq \frac{\ell(L_1)}{c_2\sqrt{n}}\\ &\leq \frac{c_5}{c_2}\log(d_L+1).\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{vr}(K,L) \leq \frac{2c_4c_5^2}{c_2^2}\big(d_L\log(d_K+1) + d_K\log(d_L+1)\big), \tag{2.1.41}$$

δηλαδή το Θεώρημα ισχύει με $C_1 = 2c_4c_5^2/c_2^2$. □

Πόρισμα 2.1.1 *Έστω K και L δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vr}(K,L) \leq C_2\sqrt{n}\log n \tag{2.1.42}$$

όπου $C_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το θεώρημα του John [12], $\max\{d_K, d_L\} \leq \sqrt{n}$. $\square$

Από το Πόρισμα 2.1.1 μπορούμε εύκολα να περάσουμε στη γενική περίπτωση: ο λόγος είναι ότι κάθε κυρτό σώμα M περιέχει ένα συμμετρικό κυρτό σώμα M_1 και περιέχεται σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα M_2 για τα οποία

$$|M|^{1/n} \simeq |M_1|^{1/n} \simeq |M_2|^{1/n}.$$

Θεώρημα 2.1.3 *Έστω K και L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathrm{vr}(K, L) \leq C\sqrt{n}\log n$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Έστω K και L δύο κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το κέντρο βάρους τους είναι στην αρχή των αξόνων. Το σώμα διαφορών $L-L$ του L είναι συμμετρικό, περιέχει το L, και από την ανισότητα των Rogers και Shephard [20],

$$|L - L|^{1/n} \leq 4|L|^{1/n}. \tag{2.1.43}$$

Από την άλλη πλευρά, το $K \cap (-K)$ είναι συμμετρικό, περιέχεται στο K, και οι Milman και Pajor [15] έχουν δείξει ότι

$$|K|^{1/n} \leq 2|K \cap (-K)|^{1/n}. \tag{2.1.44}$$

Από το Πόρισμα 2.1.1, υπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε $T(L - L) \subseteq K \cap (-K)$ και

$$|K \cap (-K)|^{1/n} \leq C_2\sqrt{n}\log n|T(L - L)|^{1/n}. \tag{2.1.45}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $T(L) \subseteq K$, άρα

$$\begin{aligned} \mathrm{vr}(K, L) &\leq \left(\frac{|K|}{|K \cap (-K)|}\,\frac{|K \cap (-K)|}{|T(L - L)|}\,\frac{|T(L - L)|}{|T(L)|}\right)^{1/n} \\ &\leq 8C_2\sqrt{n}\log n. \qquad \square \end{aligned}$$

2.2 Λόγος όγκων και Ευκλείδειες τομές

Η έννοια του λόγου όγκων $\mathrm{vr}(K, B_2^n)$ για συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$ πρωτοεμφανίστηκε στην εργασία [13] του Kashin, ο οποίος έδειξε ότι τυχαίοι $[n/2]$-διάστατοι υπόχωροι του ℓ_1^n έχουν ομοιόμορφα φραγμένη απόσταση Banach-Mazur από τον $\ell_2^{[n/2]}$. Πρώτος ο Szarek [21] κατάλαβε ότι αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι $\mathrm{vr}(B_1^n, B_2^n) \leq C$ όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά (και B_1^n η μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n). Ο Szarek εισήγαγε την έννοια του λόγου όγκων $\mathrm{vr}(K, B_2^n)$ και απέδειξε κάτι πολύ γενικότερο.

Θεώρημα 2.2.1 *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της μοναδιαίας μπάλας K του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Αν*

$$A = \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}, \tag{2.2.1}$$

τότε για κάθε $k \leq n$ υπάρχει υπόχωρος H του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, τέτοιος ώστε

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq (4\pi A)^{\frac{n}{n-k}} \|x\| \tag{2.2.2}$$

για κάθε $x \in H$. Επιπλέον, το σύνολο $\mathcal{H}$ των $H \in G_{n,k}$ που ικανοποιούν την (2.2.2) έχει μέτρο Haar $\nu_{n,k}(\mathcal{H}) \geq 1 - 2^{-n}$. $\square$

Σκοπός μας σε αυτήν την παράγραφο είναι να δώσουμε δύο διαφορετικές αποδείξεις αυτού του Θεωρήματος. Ο λόγος γι' αυτό είναι ότι η εκτίμηση που δίνει η (2.2.1) είναι πολύ κακή όταν $k = [\lambda n]$ με $\lambda \to 1^-$. Όπως δείχνει η προσέγγισή μας, μια καλύτερη εκτίμηση θα ήταν δυνατή αν είχαμε στη διάθεσή μας ισχυρές εκτιμήσεις για τους αριθμούς κάλυψης του K από πολλαπλάσια της B_2^n.

2.2.1 Η μέθοδος των τυχαίων στροφών

Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ με

$$g(r) = w(K \cap rB_2^n). \tag{2.2.3}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η g είναι αύξουσα και κοίλη συνάρτηση. Στο $[0, 1]$ έχουμε $g(r) = 2r$ ενώ, από το Θεώρημα του John [12], στο $[\sqrt{n}, +\infty)$ έχουμε $g(r) = w(K)$. Έπεται ότι, για κάθε $\lambda, \varepsilon \in (0, 1)$ υπάρχει $r = r(\lambda) > 0$ με την ιδιότητα

$$g(r) = w(K \cap rB_2^n) = 2(1 - \varepsilon)\sqrt{1 - \lambda}\, r. \tag{2.2.4}$$

Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε την «M^*-ανισότητα» του Milman, στη βέλτιστη μορφή της (βλέπε [9]).

Θεώρημα 2.2.2 *Έστω T ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\lambda, \varepsilon \in (0, 1)$, έχουμε*

$$\mathrm{diam}(T \cap H) \leq \frac{2w(T)}{(1 - \varepsilon/2)\sqrt{1 - \lambda}}, \tag{2.2.5}$$

για όλους τους H σε ένα υποσύνολο $\mathcal{H}$ της $G_{n,k}$ με μέτρο μεγαλύτερο από $1 - c\exp(-c'\varepsilon^2(1 - \lambda)n)$, όπου $k = [\lambda n]$ και $c, c' > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. $\square$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.2.2 για το σώμα $T = K \cap rB_2^n$: από την (2.2.4), για κάθε $H \in \mathcal{H}$ έχουμε

$$\mathrm{diam}(K \cap rB_2^n \cap H) < 2r, \tag{2.2.6}$$

απ' όπου έπεται εύκολα ότι $\mathrm{diam}(K \cap H) < 2r$. Δηλαδή, για κάθε $x \in H$ έχουμε

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq r\|x\|. \tag{2.2.7}$$

Μένει να εκτιμήσουμε το $r = r(\lambda)$. Για το σκοπό αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την «ολική μορφή» του Θεωρήματος του Dvoretzky [5]:

Θεώρημα 2.2.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ιδιότητα: για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα T στον $\mathbb{R}^n$ μπορούμε να βρούμε φυσικό αριθμό*

$$s \leq C\big(\mathrm{diam}(T)/w(T)\big)^2 \tag{2.2.8}$$

και ορθογώνιους μετασχηματισμούς $u_1, \ldots, u_s$ τέτοιους ώστε

$$\frac{w(T)}{4}B_2^n \subseteq \frac{1}{s}\big(u_1(T) + \cdots + u_s(T)\big) \subseteq w(T)B_2^n. \qquad \Box \tag{2.2.9}$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.2.3 για το σώμα $T = K \cap rB_2^n$. Αφού $T \subseteq rB_2^n$, από την (2.2.4) μπορούμε να βρούμε

$$s \leq C(\varepsilon)/(1-\lambda) \tag{2.2.10}$$

και $u_1, \ldots, u_s \in O(n)$ ώστε να ικανοποιείται η (2.2.9). Δηλαδή,

$$\begin{aligned} 2(1-\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}r \cdot |B_2^n|^{1/n} &= w(T) \cdot |B_2^n|^{1/n} \\ &\leq \frac{4}{s}|u_1(T) + \cdots + u_s(T)|^{1/n} \\ &\leq \frac{4}{s}|u_1(K) + \cdots + u_s(K)|^{1/n}. \end{aligned}$$

Αυτό που χρειαζόμαστε είναι ένα άνω φράγμα για τον όγκο του $u_1(K) + \cdots + u_s(K)$.

Θυμηθείτε ότι ο αριθμός κάλυψης $N(K, tB_2^n)$ είναι ο μικρότερος αριθμός από μπάλες ακτίνας t που η ένωσή τους καλύπτει το K. Από τον ορισμό των αριθμών κάλυψης, ελέγχεται άμεσα το εξής:

Λήμμα 2.2.1 *Αν $T_1, \ldots, T_s$ είναι συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε*

$$N(T_1 + \cdots + T_s, (t_1 + \cdots + t_s)B_2^n) \leq \prod_{i=1}^{s} N(T_i, t_iB_2^n). \tag{2.2.11}$$

για κάθε $t_1, \ldots, t_s > 0$. $\Box$

Από το Λήμμα 2.2.1, για κάθε $t \geq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned} |u_1(K)+\cdots+u_s(K)| &\leq N(u_1(K)+\cdots+u_s(K), AtsB_2^n)\cdot|AtsB_2^n| \\ &\leq \prod_{i=1}^{s} N(u_i(K), AtB_2^n)\cdot(ts)^n|K|. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$2(1-\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}\,r \leq 4At\cdot[N(K,AtB_2^n)]^{s/n}. \tag{2.2.12}$$

Ένας απλός τρόπος για να εκτιμήσουμε τον $N(K,\rho B_2^n)$ είναι ο εξής: αν $\{x_1,\ldots,x_N\}$ είναι ένα υποσύνολο του K μεγιστικό ως προς την $\|x_i-x_j\|_2 \geq \rho$, τότε $K \subseteq \bigcup_{i\leq N}(x_i+\rho B_2^n)$ και τα $x_i+(\rho/2)B_2^n$ έχουν ξένα εσωτερικά, απ' όπου βλέπουμε εύκολα ότι

$$N\cdot|(\rho/2)B_2^n| \leq |K+(\rho/2)B_2^n|. \tag{2.2.13}$$

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $B_2^n \subseteq K$, τότε $|K+(\rho/2)B_2^n| \leq (1+(\rho/2))^n|K|$, άρα

$$N(K,\rho B_2^n) \leq [1+2/\rho]^n\frac{|K|}{|B_2^n|}. \tag{2.2.14}$$

Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος 2.2.1, επιλέγοντας $\rho/2 = A$ καταλήγουμε στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 2.2.2 *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Αν*

$$A = \left(\frac{|K|}{|B_2^n|}\right)^{1/n}, \tag{2.2.15}$$

τότε

$$N(K,2AB_2^n) \leq [1+A]^n. \tag{2.2.16}$$

Από το Λήμμα 2.2.2 και την (2.2.12) με $t=2$, συμπεραίνουμε ότι

$$2(1-\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}\,r \leq 8A\cdot[1+A]^{C(\varepsilon)/(1-\lambda)}. \tag{2.2.17}$$

Χρησιμοποιώντας και την (2.2.7) παίρνουμε μια άλλη απόδειξη του Θεωρήματος του Szarek (με παρόμοια εκθετική εξάρτηση από το λ).

Θεώρημα 2.2.4 *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της μοναδιαίας μπάλας K του $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$. Για κάθε $k\leq n$ υπάρχει υπόχωρος H του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, τέτοιος ώστε*

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq f(A,\lambda)\cdot\|x\| \tag{2.2.19}$$

για κάθε $x\in H$, όπου $\lambda = k/n$ και $f(A,\lambda) = 8A\cdot[1+A]^{C/(1-\lambda)}/\sqrt{1-\lambda}$. □

Παρατήρηση: Έστω ότι οι αριθμοί κάλυψης $N(K,\rho B_2^n)$ φθίνουν με «κανονικό τρόπο» καθώς το ρ μεγαλώνει:

Υπόθεση: Υπάρχουν $c,p>0$ και $q\geq 1$ τέτοιοι ώστε

$$(*)\qquad N(K,A^q tB_2^n)\leq \exp(cn/t^p)$$

για κάθε $t\geq 1$.

Αν η υπόθεση αυτή ικανοποιείται, τότε η (2.2.12) παίρνει τη μορφή

$$(2.2.20)\qquad (1-\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}r\leq 2A^q t\cdot \exp(cs/t^p)$$

για κάθε $t\geq 1$. Επιλέγοντας $t=s^{1/p}$, βλέπουμε ότι

$$(2.2.21)\qquad r\leq C(\varepsilon)A^q\frac{1}{(1-\lambda)^{1/2+1/p}}.$$

Δεν έχουμε κατορθώσει να δείξουμε ότι στη θέση του John η υπόθεση ικανοποιείται για κάποια $p>0$ και $q\geq 1$, όμως η (2.2.21) δείχνει ότι με το επιχείρημα που παρουσιάσαμε θα είχαμε σαφή βελτίωση του Θεωρήματος 2.2.1 για $\lambda\to 1^-$.

2.2.2 Η μέθοδος των προβολών

Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, και θεωρούμε $\lambda,\varepsilon\in(0,1)$. Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, επιλέγουμε $r=r(\lambda,\varepsilon)$ που ικανοποιεί την

$$(2.2.22)\qquad g(r)=w(K\cap rB_2^n)=2(1-\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}r.$$

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Dvoretzky στη μορφή που πήρε από τους Figiel, Lindenstrauss και Milman [8]:

Θεώρημα 2.2.5 *Έστω $\|\cdot\|$ μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, και T η αντίστοιχη μοναδιαία μπάλα. Αν b είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός για τον οποίο*

$$(2.2.23)\qquad \|x\|\leq b\|x\|_2$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$, και αν

$$(2.2.24)\qquad M=\int_{S^{n-1}}\|x\|\sigma(dx),$$

τότε για κάθε $m\leq cn(M/b)^2$ υπάρχει $\mathcal{H}\subseteq G_{n,m}$ με $\nu_{n,m}(\mathcal{H})\geq 1/2$ τέτοιο ώστε: για κάθε $H\in\mathcal{H}$ να ισχύει η

$$(2.2.25)\qquad \frac{1}{2M}B_2^n\cap H\subseteq T\cap H\subseteq \frac{2}{M}B_2^n\cap H.$$

($c>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά). □

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 2.2.5 για το $T = (K \cap rB_2^n)^\circ$. Έχουμε $b \leq r$ και

$$M = \int_{S^{n-1}} \|x\|_{(K\cap rB_2^n)^\circ}\sigma(dx) = w(K \cap rB_2^n) = (1-\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}r. \tag{2.2.26}$$

Συνεπώς, αν θέσουμε $m = [c(\varepsilon)(1-\lambda)n]$ έχουμε το εξής: υπάρχει $\mathcal{H} \subseteq G_{n,m}$ με $\nu_{n,m}(\mathcal{H}) \geq 1/2$ τέτοιο ώστε: για κάθε $H \in \mathcal{H}$ να ισχύει η

$$(4c(\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}r)^{-1}B_2^n \cap H \subseteq (K \cap rB_2^n)^\circ \cap H \subseteq (c(\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}r)^{-1}B_2^n \cap H, \tag{2.2.27}$$

ή, ισοδύναμα,

$$(c(\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}r)B_2^n \cap H \subseteq P_H(K \cap rB_2^n) \subseteq (4c(\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}r)B_2^n \cap H, \tag{2.2.28}$$

όπου $P_H(T)$ είναι η ορθογώνια προβολή του T στον H.

Στο σημείο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Kubota: το $(n-m)$-στό quermassintegral $W_{n-m}(T) = V(T; m, B_2^n; n-m)$ ικανοποιεί την

$$W_{n-m}(T) = \frac{|B_2^n|}{|B_2^m|}\int_{G_{n,m}} |P_H(T)|\, \nu_{n,m}(dH). \tag{2.2.29}$$

Από τη μονοτονία των μεικτών όγκων και την $B_2^n \subseteq K$, έχουμε

$$W_{n-m}(K \cap rB_2^n) = V(K \cap rB_2^n; m, B_2^n; n-m) \leq V(K, \dots, K) = |K|. \tag{2.2.30}$$

Από τις (2.2.28) και (2.2.29) έπεται ότι

$$|B_2^n| \cdot (c(\varepsilon)\sqrt{1-\lambda}r)^m \leq |K|, \tag{2.2.31}$$

δηλαδή,

$$r \leq \frac{c_1(\varepsilon)A^{n/m}}{\sqrt{1-\lambda}}. \tag{2.2.32}$$

Δηλαδή, έχουμε το Θεώρημα 2.2.1 στην εξής μορφή.

Θεώρημα 2.2.6 *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της μοναδιαίας μπάλας K του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Για κάθε $k \leq n$ υπάρχει υπόχωρος H του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, τέτοιος ώστε*

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq f(A,\lambda)\cdot \|x\| \tag{2.2.33}$$

για κάθε $x \in H$, όπου $\lambda = k/n$ και $f(A,\lambda) = cA^{1/c(1-\lambda)}/\sqrt{1-\lambda}$. □

Σημείωση: Ο αναγνώστης θα έχει παρατηρήσει ότι το ασθενές σημείο στο παραπάνω επιχείρημα είναι η ανισότητα $V(K \cap rB_2^n, \dots, K \cap rB_2^n, B_2^n, \dots, B_2^n) \leq |K|$.

2.2.3 Παρατηρήσεις

Στην αρχή αυτής της παραγράφου δίνουμε δύο παραδείγματα κλάσεων σωμάτων για τις οποίες το Θεώρημα 2.2.1 επιδέχεται βελτίωση.

Α. Χώροι με φραγμένη σταθερά συντύπου-2

Έστω $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Η σταθερά συντύπου-2 $C_2(X)$ του X είναι ο μικρότερος $C > 0$ που ικανοποιεί το εξής: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $x_1, \ldots, x_m \in X$,

$$\sum_{i=1}^{m} \|x_i\|^2 \leq C^2 \mathbb{E}\Big\| \sum_{i=1}^{m} g_i x_i \Big\|^2. \tag{2.2.34}$$

Οι Bourgain και Milman [4] έχουν δείξει ότι

$$\mathrm{vr}(K, B_2^n) \leq c \cdot C_2(X) \log[C_2(X) + 1], \tag{2.2.35}$$

δηλαδή, οι χώροι με «φραγμένη $C_2(X)$» δίνουν μια υποκλάση των χώρων με «φραγμένο λόγο όγκων».

Θεώρημα 2.2.7 *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της μοναδιαίας μπάλας K του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Για κάθε $k \leq n$ υπάρχει υπόχωρος H του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, τέτοιος ώστε*

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq c \frac{C_2(X)}{\sqrt{1-\lambda}} \log\left(\frac{C_2(X)}{\sqrt{1-\lambda}}\right) \|x\| \tag{2.2.36}$$

για κάθε $x \in H$, όπου $\lambda = k/n$.

Για την απόδειξη, θεωρούμε πάλι τη λύση $r(\lambda)$ της εξίσωσης $w(K \cap rB_2^n) = 2\sqrt{1-\lambda}\, r$. Ο χώρος X_r με μοναδιαία μπάλα το $K \cap rB_2^n$ έχει σταθερά συντύπου-2 $C_2(X_r) \leq 2C_2(X)$, και από γνωστά αποτελέσματα των Davis, Milman και Tomczak-Jaegermann [6], Pisier [16] έπεται ότι

$$w(K \cap rB_2^n) \leq cC_2(X_r)K(X_r). \tag{2.2.37}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα (2.1.18) του Pisier, συμπεραίνουμε ότι

$$2\sqrt{1-\lambda}\, r \leq c' C_2(X) \log(2r), \tag{2.2.38}$$

απ' όπου παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Β. Χώροι με 1-συμμετρική νόρμα

Λέμε ότι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα X έχει 1-συμμετρική βάση, αν υπάρχει βάση $\{u_1, \dots, u_n\}$ του X με την ιδιότητα

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} t_i u_i \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{n} \varepsilon_i t_i u_{\pi(i)} \Big\| \tag{2.2.39}$$

για κάθε μετάθεση π του $\{1, \dots, n\}$ και κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \dots, t_n$ και προσήμων $\varepsilon_i = \pm 1$.

Αν ο X έχει 1-συμμετρική βάση, τότε η θέση του John της μοναδιαίας του μπάλας K είναι ταυτόχρονα η θέση που ελαχιστοποιεί την ποσότητα

$$M = M(K) = \int_{S^{n-1}} \|x\| \sigma(dx). \tag{2.2.40}$$

Δηλαδή, $M(K) \leq M(TK)$ για κάθε $T \in SL(n)$. Εφαρμόζεται τότε το εξής αποτέλεσμα της [10]:

Θεώρημα 2.2.8 *Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί την $M(K) \leq M(TK)$ για κάθε $T \in SL(n)$. Τότε, για κάθε $\lambda \in (0,1)$, υπάρχει $[\lambda n]$-διάστατη τομή $K \cap H$ του K τέτοια ώστε*

$$d(K \cap H, B_2^n \cap H) \leq c \frac{b}{M\sqrt{1-\lambda}} \log \left(\frac{2b}{M\sqrt{1-\lambda}} \right), \tag{2.2.41}$$

όπου $c > 0$ μια απόλυτη σταθερά, και b είναι ο μικρότερος θετικός αριθμός για τον οποίο η ανισότητα $\|x\| \leq b\|x\|_2$ ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι το K βρίσκεται στη θέση του John, έχουμε $b = 1$ και

$$\frac{1}{M} \leq \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^{-n} \sigma(dx) \right)^{1/n} = \left(\frac{|K|}{|B_2^n|} \right)^{1/n} = A, \tag{2.2.42}$$

απ' όπου έπεται το εξής:

Θεώρημα 2.2.9 *Υποθέτουμε ότι ο X έχει 1-συμμετρική βάση και ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της μοναδιαίας του μπάλας K. Για κάθε $k \leq n$ υπάρχει υπόχωρος H του $\mathbb{R}^n$ διάστασης k, τέτοιος ώστε*

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq c \frac{A}{\sqrt{1-\lambda}} \log \left(\frac{A}{\sqrt{1-\lambda}} \right) \|x\| \tag{2.2.43}$$

για κάθε $x \in H$, όπου $\lambda = k/n$ και $A = \mathrm{vr}(K, B_2^n)$. $\square$

Υπάρχουν λοιπόν κλάσεις χώρων για τις οποίες μπορούμε να πάρουμε εκτίμηση της μορφής

$$O\left(A/\sqrt{1-\lambda}\right)^q$$

στο Θεώρημα 2.2.1, για κάθε $\lambda \in (0,1)$ και κάποιο $q > 1$. Θα δείξουμε ότι αυτού του τύπου η εκτίμηση είναι ουσιαστικά ισοδύναμη με την «υπόθεση $(*)$» της Παραγράφου 2.2.1 για τους αριθμούς κάλυψης στη θέση John.

Χρειαζόμαστε κάποιους ορισμούς: Έστω X, Y n-διάστατοι χώροι με νόρμα και $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής. Οι αριθμοί Gelfand του T ορίζονται για κάθε $k \leq n$ από την

$$c_k(T) = \inf\{\|T|_S\| \ :\ S \leq X\ ,\ \mathrm{codim}(S) < k\}. \tag{2.2.44}$$

Οι αριθμοί εντροπίας του T ορίζονται για κάθε $k \leq n$ από την

$$e_k(T) = \inf\{t > 0 :\ N(T(K_X), tK_Y) \leq 2^{k-1}\}. \tag{2.2.45}$$

Οι αριθμοί Gelfand και οι αριθμοί εντροπίας του T συνδέονται μέσω της ακόλουθης πρότασης (βλέπε [18], Κεφάλαιο 5).

Πρόταση 2.2.1 *Για κάθε $\alpha > 0$ υπάρχει σταθερά ρ_α τέτοια ώστε: για κάθε $T : X \to Y$,*

$$\sup_{k\leq n} k^\alpha e_k(T) \leq \rho_\alpha \sup_{k\leq n} k^\alpha c_k(T). \tag{2.2.46}$$

Θεώρημα 2.2.10 *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου της μοναδιαίας μπάλας K του $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Αν για κάθε $k < n$ υπάρχει υπόχωρος H του $\mathbb{R}^n$ συνδιάστασης k, τέτοιος ώστε για κάθε $x \in H$*

$$\|x\| \leq \|x\|_2 \leq c\left(\frac{A}{\sqrt{\lambda}}\right)^q \|x\|, \tag{2.2.47}$$

όπου $\lambda = k/n$ και $A = \mathrm{vr}(K, B_2^n)$, τότε

$$N(K, A^q t B_2^n) \leq \exp(cn/t^{2/q}) \tag{2.2.48}$$

για κάθε $t \geq 1$.

Απόδειξη: Η υπόθεση είναι ισοδύναμη με την

$$c_k(I : X \to \ell_2^n) \leq c\left(\frac{A\sqrt{n}}{\sqrt{k}}\right)^q \tag{2.2.49}$$

για κάθε $k \leq n$. Εφαρμόζουμε την Πρόταση 2.2.1 με $\alpha = q/2$. Για κάθε $k \leq n$ έχουμε

$$k^{q/2} e_k(I : X \to \ell_2^n) \leq \rho_{q/2} A^q n^{q/2}. \tag{2.2.50}$$

Για δοσμένο $t \geq 1$ βρίσκουμε $k \leq n$ τέτοιον ώστε

$$A^q t = A^q n^{q/2}/k^{q/2} \iff k = n/t^{2/q}. \tag{2.2.51}$$

Τότε $e_k(I : \ell_2^n \to X) \leq A^q t$, δηλαδή

$$N(K, A^q t B_2^n) \leq \exp(cn/t^{2/q}). \tag{2.2.52}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. $\square$

Βιβλιογραφία

[1] K.M. Ball, *Volume ratios and a reverse isoperimetric inequality*, J. London Math. Soc. (2) **44** (1991), 351-359.

[2] F. Barthe, *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*, Invent. Math. **134** (1998), 335-361.

[3] Y. Benyamini and Y. Gordon, *Random factorization of operators between Banach spaces*, J. d'Analyse Math. **39** (1981), 45-74.

[4] J. Bourgain and V.D. Milman, *New volume ratio properties for convex symmetric bodies in* $\mathbb{R}^n$, Invent. Math. **88** (1987), 319-340.

[5] J. Bourgain, J. Lindenstrauss and V.D. Milman, *Minkowski sums and symmetrizations*, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 44-66.

[6] W.J. Davis, V.D. Milman and N. Tomczak-Jaegermann, *The distance between certain* n*-dimensional spaces*, Israel J. Math. **39** (1981), 1-15.

[7] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[8] T. Figiel, J. Lindenstrauss and V.D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), 53-94.

[9] Y. Gordon, *On Milman's inequality and random subspaces which escape through a mesh in* $\mathbb{R}^n$, Lecture Notes in Mathematics **1317** (1988), 84-106.

[10] A.A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Extremal problems and isotropic positions of convex bodies*, Israel J. Math. **117** (2000), 29-60.

[11] A.A. Giannopoulos, I. Perissinaki and A. Tsolomitis, *John's theorem for an arbitrary pair of convex bodies*, Geom. Dedicata **84** (2001), 63-79.

[12] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, New York, 1948, pp. 187-204.

[13] B.S. Kashin, *Sections of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 334-351.

[14] D.R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18-29.

[15] V.D. Milman and A. Pajor, *Entropy and asymptotic geometry of non-symmetric convex bodies*, Adv. Math. **152** (2000), 314-335.

[16] G. Pisier, *Un théorème sur les opérateurs linéaires entre espaces de Banach qui se factorisent par un espace de Hilbert*, Ann. Scient. Ec. Norm. Sup. **13** (1980), 23-43.

[17] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Ann. of Math. **115** (1982), 375-392.

[18] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[19] M. Rudelson, *Distances between non-symmetric convex bodies and the MM^*-estimate*, Positivity **4** (2000), 161-178.

[20] C.A. Rogers and G. Shephard, *The difference body of a convex body*, Arch. Math. **8** (1957), 220-233.

[21] S.J. Szarek, *On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of ℓ_1^n*, Bull. Acad. Polon. Sci. **26** (1978), 691-694.

[22] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monographs **38** (1989), Pitman, London.

[23] N. Tomczak-Jaegermann, *The Banach-Mazur distance between the trace classes C_p^n*, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 305-308.

Κεφάλαιο 3

Τυχαίοι χώροι που παράγονται από 0-1 πολύτοπα

3.1 Εισαγωγή

Οι τυχαίοι χώροι χρησιμοποιήθηκαν στην ασυμπτωτική θεωρία των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα για την απόδειξη της ύπαρξης χώρων ή τελεστών με παθολογικές ιδιότητες. Στη δεκαετία του 80, αρκετά σημαντικά προβλήματα της θεωρίας λύθηκαν με αυτό τον τρόπο. Ενδεικτικά αναφέρουμε τα εξής αποτελέσματα:

1. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε, για κάθε n υπάρχουν n-διάστατοι χώροι με νόρμα X_n, Y_n με απόσταση Banach-Mazur $d(X_n, Y_n) \geq cn$ (Gluskin, [17]).

2. Υπάρχει n-διάστατος χώρος με νόρμα X_n ο οποίος έχει σταθερά unconditional βάσης (ή, ακόμα ισχυρότερα, σταθερά βάσης) της τάξης της $\sqrt{n}$ (βλέπε [15] και [39], [18] αντίστοιχα).

3. Υπάρχει n-διάστατος χώρος με νόρμα X_n ο οποίος έχει απόσταση Banach-Mazur από τον ℓ_∞^n μεγαλύτερη από $c\sqrt{n}\log n$ (Szarek, [40]).

Όλα αυτά τα θεωρήματα εξασφαλίζουν την *ύπαρξη* κάποιων χώρων με ακραία συμπεριφορά. Η *κατασκευή* τέτοιων παραδειγμάτων μοιάζει ανέφικτη, η *πιθανοθεωρητική* όμως μέθοδος επιτυγχάνει: ορίζεται κατάλληλος χώρος πιθανότητας αποτελούμενος από n-διάστατους χώρους με νόρμα και αποδεικνύεται ότι, με μεγάλη πιθανότητα, προκύπτουν αντικείμενα - οι «τυχαίοι χώροι» - με τις επιθυμητές ιδιότητες.

Τυπικό παράδειγμα κλάσης τυχαίων χώρων είναι οι n-διάστατοι υπόχωροι του ℓ_∞^N με $N = \lambda n$, $\lambda > 1$ (ο χώρος πιθανότητας είναι η πολλαπλότητα Grassmann $G_{N,n}$

των n-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^N$, εφοδιασμένη με το μέτρο Haar - οι μοναδιαίες μπάλες είναι τυχαίες n-διάστατες κεντρικές τομές του κύβου Q_N). Οι χώροι που προκύπτουν είναι παθολογικοί όσον αφορά διάφορες ασυμπτωτικές παραμέτρους της θεωρίας. Αυτός ο τρόπος σκέψης συναντάται αρχικά στις εργασίες [24] και [16] (βλέπε επίσης [38], [41], [13] και τις εργασίες που αναφέρονται παραπάνω).

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα μελετήσουμε την απόλυτη κυρτή θήκη τυχαίου υποσυνόλου του συνόλου των κορυφών του κύβου με σταθερό μέγεθος, και την κλάση των τυχαίων χώρων που προκύπτει με αυτόν τον τρόπο. Προκειμένου να ορίσουμε ακριβώς το χώρο πιθανότητας στον οποίο θα δουλέψουμε, θεωρούμε το διακριτό κύβο $E_2^n = \{-1,1\}^n$ στον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένο με το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας, και σταθεροποιούμε $N \geq n$. Στη συνέχεια θεωρούμε N τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$ που επιλέγονται ανεξάρτητα και είναι ομοιόμορφα κατανεμημένα στον E_2^n, και για κάθε επιλογή σημείων $\{x_1, \dots, x_N\}$ γράφουμε M_N για την κυρτή θήκη

$$M_N := M(x_1, \dots, x_N) = \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_N\} \tag{3.1.1}$$

και K_N για την απόλυτη κυρτή θήκη

$$K_N := K(x_1, \dots, x_N) = \mathrm{co}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\}. \tag{3.1.2}$$

Το συμμετρικό κυρτό σώμα K_N (αν είναι μη εκφυλισμένο) ορίζει μια νόρμα στον $\mathbb{R}^n$. Θα γράφουμε X_N για το χώρο με νόρμα που έχει σαν μοναδιαία μπάλα το K_N. Με αυτό τον τρόπο, για κάθε $N \geq n$ παίρνουμε μια κλάση τυχαίων n-διάστατων χώρων, την οποία θα συμβολίζουμε με $\mathcal{B}_N$. Ο δυϊκός χώρος του X_N θα συμβολίζεται με X_N^* και η κλάση των δυϊκών χώρων με $\mathcal{B}_N^*$. Σκοπός μας είναι η (ασυμπτωτική ως προς n) μελέτη των κλάσεων $\mathcal{B}_N$ και $\mathcal{B}_N^*$ και της εξάρτησης των ιδιοτήτων τους από την παράμετρο N.

Η μελέτη της γεωμετρίας του τυχαίου K_N γίνεται στην §3.2. Για να ξεκαθαρίσουμε τι εννοούμε με τον όρο «τυχαίο K_N», συμφωνούμε ότι **το τυχαίο K_N έχει την ιδιότητα** (P) αν

$$\mathrm{Prob}\Big((x_1, \dots, x_N) \mid \text{το } K_N \text{ έχει την } (P)\Big) \geq 1 - \exp(-n). \tag{3.1.3}$$

Απαιτούμε δηλαδή το κάτω φράγμα να τείνει στο 1 «εκθετικά» όταν η διάσταση n τείνει στο άπειρο.

Έχουμε τρεις βασικές πηγές πληροφοριών για το τυχαίο K_N. Όπως θα δούμε, το πλήθος N των κορυφών πρέπει να είναι μεγαλύτερο από $n(\log n)^2$ για να τις έχουμε όλες στη διάθεσή μας.

Αρχικά θα αποδείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $\lambda_0 > 1$ με την εξής ιδιότητα: αν $N \geq \lambda_0 n$, τότε (με μεγάλη πιθανότητα) το K_N περιέχει μια μπάλα της οποίας η ακτίνα είναι ανεξάρτητη από τα n και N.

Θεώρημα 3.1.1 *Αν $N \geq \lambda_0 n$, τότε με μεγάλη πιθανότητα*

$$K_N \supseteq c_1 B_2^n, \tag{3.1.4}$$

όπου B_2^n είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και $\lambda_0 > 1$, $c_1 > 0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Από τον ορισμό του, κάθε K_N περιέχεται στο μοναδιαίο κύβο $Q_n := [-1,1]^n$, ο οποίος έχει εγγεγραμμένη ακτίνα ίση με 1. Συνεπώς, η εκτίμηση που δίνει το Θεώρημα 3.1.1 είναι βέλτιστη. Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον είναι το εύρος των τιμών της παραμέτρου N για τις οποίες ισχύει η (3.1.4): το συμπέρασμα είναι σωστό για το τυχαίο K_N ακόμα κι όταν το N είναι αρκετά μικρό, της τάξης του n.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.1.1 είναι συνέπεια της παρατήρησης ότι ένα τυχαίο «μικρό» σύνολο από κορυφές του κύβου είναι ήδη αρκετό για να αντικαταστήσει τον E_2^n στην κλασική ανισότητα του Khintchine: αν $m \geq \lambda_0 n$ και αν A είναι ένα τυχαίο υποσύνολο του E_2^n πληθικότητας $|A| = m$, τότε για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n$ έχουμε

$$\frac{1}{|A|}\sum_{\varepsilon\in A}\big|\varepsilon_1 a_1 + \ldots + \varepsilon_n a_n\big| \simeq (a_1^2 + \ldots + a_n^2)^{1/2}, \tag{3.1.5}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε το K_N περιέχει (με μεγάλη πιθανότητα) έναν κεντραρισμένο κύβο του οποίου οι ακμές έχουν μήκος της τάξης του $\sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}$.

Θεώρημα 3.1.2 *Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $n \geq n_0$ και $N \geq n(\log n)^2$, τότε*

$$K_N \supseteq \big(c_2\sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}\big)Q_n \tag{3.1.6}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, όπου $c_2 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Στην §3.2.2 θα δώσουμε τρεις αποδείξεις αυτού του αποτελέσματος. Η πρώτη είναι στοιχειώδης και αυτόνομη, αλλά δίνει το αποτέλεσμα για πολυωνυμικές τιμές του N ($N \geq n^a$, όπου a σταθερά). Η δεύτερη απόδειξη βασίζεται στη μέθοδο των Dyer, Füredi και McDiarmid [11] και εμφανίζεται σε ένα πρόσφατο άρθρο των Bárány και Pór [4]. Το θέμα τους είναι η ύπαρξη 0-1 πολυτόπων με υπερεκθετικό πλήθος εδρών, και ένα ουσιώδες βήμα στο επιχείρημά τους είναι ένα αποτέλεσμα «ισχυρότερο» από το Θεώρημα 3.1.2 (Λήμμα 4.3 στο [4]) το οποίο αποδεικνύεται με προσεκτικότερη εφαρμογή των μεθόδων της [11] για το εύρος τιμών $N \geq \exp((\log n)^2)$: τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$M_N := \mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_N\} \supseteq c\left(\sqrt{\log{(N/n)}}B_2^n \cap Q_n\right). \tag{3.1.7}$$

Η τρίτη μας απόδειξη συνδυάζει την πρώτη προσέγγιση με ένα θεώρημα του Montgomery - Smith [34] και δίνει την (3.1.7) για $N > n(\log n)^2$.

Το Θεώρημα 3.1.2 παρουσιάζει αναλογίες με το ακόλουθο αποτέλεσμα από την [20]: Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ με κέντρο βάρους το 0. Για κάθε $\delta \in (0,1)$ υπάρχει $c(\delta) > 0$ τέτοια ώστε $N \geq c(\delta)n^a$ σημεία $x_1, \ldots, x_N$ που επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα μέσα από το K να ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ τη σχέση

$$K \supseteq M_N = \mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_N\} \supseteq \frac{c \log N}{n} K, \tag{3.1.8}$$

όπου $c, a > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. Το επιχείρημα στην [20] χρησιμοποιεί κατά ουσιαστικό τρόπο την ανισότητα Brunn-Minkowski. Το Θεώρημα 3.1.2 μπορεί να θεωρηθεί σαν μια διακριτή εκδοχή της περίπτωσης $K = Q_n$ στο παραπάνω αποτέλεσμα. Είναι αξιοσημείωτο ότι η εξάρτηση από το N είναι καλύτερη.

Συνδυάζοντας το Θεώρημα 3.1.2 με γνωστές εκτιμήσεις όγκων από τα [19], [10] μπορούμε να προσδιορίσουμε τις νιοστές ρίζες των όγκων των τυχαίων K_N και K_N°.

Θεώρημα 3.1.3 (α) *Αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε για το τυχαίο K_N έχουμε*

$$|K_N|^{1/n} \simeq \sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n} \quad \textit{και} \quad |K_N^\circ|^{1/n} \simeq 1/\sqrt{n \log(N/n)}.$$

(β) *Αν $N \geq n^{1+\varepsilon}$, τότε για το τυχαίο K_N έχουμε*

$$w(K_N)w(K_N^\circ) \leq c(\varepsilon)\sqrt{\log n},$$

όπου $w(\cdot)$ είναι το μέσο πλάτος και $c(\varepsilon) = O(1/\sqrt{\varepsilon})$ καθώς το $\varepsilon \to 0^+$.

Τα τρία αυτά συμπεράσματα δίνουν ακριβή περιγραφή της μοναδιαίας μπάλας του X_N. Το τυχαίο K_N ανήκει σε μια μάλλον περιορισμένη κλάση κυρτών σωμάτων για τα οποία πολλές ασυμπτωτικές παράμετροι μπορούν να εκτιμηθούν με ακρίβεια σαν συνάρτηση των N και n. Παραδείγματα δίνονται στην §3.3: το πρώτο μας αποτέλεσμα αφορά την απόσταση Banach-Mazur του τυχαίου X_N από την κλάση $\mathcal{U}_n$ των χώρων με 1-unconditional βάση.

Θεώρημα 3.1.4 *Για κάθε $\delta \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε $c(\delta) = O(\log(\delta^{-1}))$ τέτοια ώστε: Αν $N \geq c(\delta)n$, τότε ο τυχαίος $X_N \in \mathcal{B}_N$ ικανοποιεί την*

$$d(X_N, \mathcal{U}_n) \geq \frac{c_4\sqrt{n}}{\sqrt{\log(2N/n)}} \tag{3.1.9}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$, όπου $c_4 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Συνδυάζοντας τα Θεωρήματα 3.1.2 και 3.1.4 βλέπουμε ότι, όταν $N \geq n(\log n)^2$, η $d(X_N, \mathcal{U}_n)$ επιτυγχάνεται στον ℓ_∞^n και έχει ακριβώς την τάξη που δίνεται από την (3.1.9). Επίσης, για κατάλληλο $N \simeq n$, το Θεώρημα 3.1.4 έχει σαν συνέπεια την ύπαρξη ενός χώρου του οποίου η απόσταση από την $\mathcal{U}_n$ έχει τη μεγαλύτερη δυνατή τάξη: $\sqrt{n}$ (αυτό είναι ένα γνωστό αποτέλεσμα, βλέπε [15]).

Τα Θεωρήματα 3.1.1 και 3.1.3(β) δείχνουν ότι η Ευκλείδεια μπάλα είναι «ισοδύναμη» τόσο με το ελλειψοειδές που υλοποιεί την απόσταση από τον ℓ_2^n όσο και με το ℓ-ελλειψοειδές του K_N. Έτσι, παρόλο που η σταθερά unconditional βάσης του X_N είναι μεγάλη, μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων για να πάρουμε άνω εκτιμήσεις για την απόσταση Banach-Mazur του τυχαίου X_N από ειδικές κλάσεις χώρων. Με την ίδια μέθοδο αποδεικνύουμε το εξής.

Θεώρημα 3.1.5 *Για κάθε $N \geq n$ και για τυχαίο X_N,*

$$d(X_N, X_N^*) \leq C\sqrt{n \log n}, \tag{3.1.10}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Είναι γνωστό ότι $d(X, X^*) \leq cn^{5/6}$ για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X. Αυτό που παρουσιάζει ενδιαφέρον στο Θεώρημα 3.1.5 είναι ότι η εκτίμηση $O(\sqrt{n \log n})$ ισχύει για ολόκληρο το εύρος της παραμέτρου N. Αυτό αποτελεί ένδειξη για το ότι αντίστοιχη εκτίμηση μπορεί να ισχύει σε πλήρη γενικότητα.

Τέλος, δίνουμε εκτιμήσεις για τη σταθερά ισοτροπίας των χώρων των κλάσεων $\mathcal{B}_N$ και $\mathcal{B}_N^*$. Για το τυχαίο K_N°, αν $N \geq n(\log n)^2$, η σταθερά ισοτροπίας είναι φραγμένη από απόλυτη σταθερά.

Θεώρημα 3.1.6 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c, C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα:*
(α) *Αν $n \leq N \leq n(\log n)^2$, τότε*

$$L_{K_N^\circ} \leq c\sqrt{\log(2N/n)} \leq C\sqrt{\log\log n} \tag{3.1.11}$$

για το τυχαίο K_N°.
(β) *Αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε*

$$L_{K_N^\circ} \leq C \tag{3.1.12}$$

για το τυχαίο K_N°.

Δίνουμε επίσης κάποιες εκτιμήσεις για τη σταθερά ισοτροπίας του τυχαίου K_N. Η απάντηση εδώ δεν είναι ικανοποιητική, αφού δεν καλύπτει τις «μεσαίες τιμές» της παραμέτρου N. Το πρόβλημα της σταθεράς ισοτροπίας απαιτεί ακόμα ακριβέστερες εκτιμήσεις όγκων από αυτές που δίνει το Θεώρημα 3.1.3.

Θεώρημα 3.1.7 *Έστω $N \geq n(\log n)^2$. Για το τυχαίο K_N ισχύει η ανισότητα*

$$L_{K_N} \leq C\frac{\min\{\log N, \sqrt{n}\}}{\sqrt{\log(N/n)}}, \tag{3.1.13}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

3.2 Γεωμετρία της μοναδιαίας μπάλας

Όπως αναφέραμε στην εισαγωγή, θα λέμε ότι «το τυχαίο K_N έχει κάποια ιδιότητα (P)» αν

$$\text{Prob}\Big((x_1,\ldots,x_N) \in E_2^n \times \ldots \times E_2^n : \text{ η } (P) \text{ ισχύει για το } K_N\Big) \geq 1 - e^{-n}, \tag{3.2.1}$$

όπου $K_N = \text{co}(\pm x_1,\ldots,\pm x_N)$. Σε αυτήν την παράγραφο θα δείξουμε ότι αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε η μοναδιαία μπάλα K_N του τυχαίου χώρου από την κλάση $\mathcal{B}_N$ έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $K_N \supseteq c_1 B_2^n$.
2. $K_N \supseteq \big(c_2\sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}\big)Q_n$.
3. $|K_N|^{1/n} \simeq \sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}$ και $|K_N^{\circ}|^{1/n} \simeq 1/\sqrt{n\log(N/n)}$.
4. $w(K_N)w(K_N^{\circ}) \leq c(\varepsilon)\sqrt{\log n}$ αν $N \geq n^{1+\varepsilon}$ (και $c(\varepsilon) = O(1/\sqrt{\varepsilon})$).

Τα παραπάνω ισχύουν αν $n \geq n_0$ (όπου n_0 κάποιος φυσικός που υπολογίζεται από τις αποδείξεις). Οι c_1 και c_2 είναι απόλυτες θετικές σταθερές. Οι αποδείξεις παρουσιάζονται στις επόμενες υποπαραγράφους.

3.2.1 Η ακτίνα της εγγεγραμμένης μπάλας του K_N

Θα δείξουμε αρχικά ότι αν το N ξεπερνά κάποια μικρή δύναμη του n, τότε το τυχαίο K_N περιέχει Ευκλείδεια μπάλα ακτίνας ανεξάρτητης από τα n και N.

Υπενθυμίζουμε την κλασική ανισότητα του Khintchine: Για κάθε $1 \leq p < \infty$ υπάρχουν θετικές σταθερές A_p και B_p τέτοιες ώστε για κάθε n και κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1,\ldots,a_n$ ισχύει η ανισότητα

$$A_p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2} \leq \left(\mathbb{E}\Big|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i a_i\Big|^p\right)^{1/p} \leq B_p\left(\sum_{i=1}^n |a_i|^2\right)^{1/2}.$$

Οι βέλτιστες τιμές των σταθερών A_p και B_p είναι γνωστές. Από την ανισότητα του Hölder βλέπουμε ότι $A_p = 1$ αν $p \geq 2$ και $B_p = 1$ αν $p \leq 2$. Επιπλέον, $B_p \simeq \sqrt{p}$ για μεγάλες τιμές του p.

Το κύριο εργαλείο μας θα είναι το γεγονός ότι, με μεγάλη πιθανότητα, λίγες κορυφές του κύβου αναπαριστούν τον E_2^n στην παραπάνω ανισότητα - βλέπε (3.1.5). Αυτός ο ισχυρισμός αποδείχθηκε για πρώτη φορά στην [33] (βλέπε επίσης [20] για τη μορφή με την οποία χρησιμοποιείται εδώ).

Ορισμός. Έστω f μια φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση ορισμένη σε ένα χώρο πιθανότητας (Ω,μ) και έστω $\alpha\geq 1$. Η ψ_α-Orlicz νόρμα της f ορίζεται από τη σχέση

$$\|f\|_{\psi_\alpha}=\inf\Big\{\lambda\geq 0\ :\int_\Omega \exp\left(\frac{|f(x)|^\alpha}{\lambda^\alpha}\right)d\mu\leq 2\Big\}. \tag{3.2.2}$$

Λήμμα 3.2.1 *Υπάρχει σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε για κάθε $y\in S^{n-1}$ να ισχύει ότι*

$$\|\langle\cdot,y\rangle\|_{\psi_2}\leq c. \tag{3.2.3}$$

Απόδειξη: Από την ανισότητα του Khintchine (βλέπε [27], [29]), για κάθε $p\geq 2$ έχουμε

$$\left(\mathbb{E}|\langle x,y\rangle|^p\right)^{1/p}\leq c_1\sqrt{p}\cdot\left(\mathbb{E}|\langle x,y\rangle|^2\right)^{1/2}=c_1\sqrt{p}, \tag{3.2.4}$$

όπου $c_1>0$ απόλυτη σταθερά. Αν επιλέξουμε κατάλληλα τη σταθερά $c>0$ και εφαρμόσουμε τις ανισότητες (3.2.4) στο ανάπτυγμα

$$\mathbb{E}\exp\left(\frac{\langle x,y\rangle^2}{c^2}\right)=1+\sum_{k=1}^\infty\frac{1}{k!c^{2k}}\mathbb{E}|\langle x,y\rangle|^{2k}, \tag{3.2.5}$$

παίρνουμε το ζητούμενο. □

Το επόμενο Λήμμα είναι μια ανισότητα «τύπου Bernstein» - βλέπε [8].

Λήμμα 3.2.2 *Έστω $(f_j)_{j\leq N}$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0, ορισμένες στο χώρο πιθανότητας (Ω,μ). Αν $\|f_j\|_{\psi_2}\leq A$ για κάθε $j=1,...,N$, τότε για κάθε $\varepsilon>0$ έχουμε*

$$P\left(\Big|\sum_{j=1}^N f_j\Big|\geq\varepsilon N\right)\leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2N}{8A^2}\right). \quad \square \tag{3.2.6}$$

Πρόταση 3.2.1 *Έστω $\delta\in(0,1)$. Αν $N\geq c\log(\delta^{-1})n$, τότε N σημεία $x_1,\dots,x_N$ που επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα στον E_2^n ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ την ανισότητα*

$$c_1\|y\|_2\leq\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N|\langle y,x_i\rangle|\leq c_2\|y\|_2 \tag{3.2.7}$$

για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$, όπου $c,c_1,c_2>0$ είναι απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Έστω $\theta \in (0,1)$ το οποίο θα προσδιοριστεί αργότερα, και έστω $\mathcal{N}$ ένα θ-δίκτυο της S^{n-1}, με πληθικότητα $|\mathcal{N}| \leq (1+2/\theta)^n \leq (3/\theta)^n$ (βλέπε [29], σελ. 7). Σταθεροποιούμε $y \in \mathcal{N}$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $\phi : E_2^n \to \mathbb{R}$ με $\phi(x) = |\langle x, y\rangle|$. Εν συνεχεία, για δοσμένο $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις $\phi_j : (E_2^n)^m \to \mathbb{R}$ ως εξής:

$$\phi_j(x_1, \dots, x_m) = \phi(x_j) - \mathbb{E}\phi. \tag{3.2.8}$$

Οι ϕ_j είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με μέση τιμή 0. Από την ανισότητα του Khintchine (βλέπε [37] για τη βέλτιστη σταθερά),

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \leq \mathbb{E}\phi \leq 1. \tag{3.2.9}$$

Ειδικότερα, από το Λήμμα 3.2.1 έχουμε

$$\|\phi_j\|_{\psi_2} \leq \|\phi\|_{\psi_2} + \mathbb{E}\phi \leq c+1, \tag{3.2.10}$$

οπότε οι ϕ_j ικανοποιούν τις υποθέσεις του Λήμματος 3.2.2 με $A = c+1$. Έπεται ότι

$$P\left(\Big| \sum_{j=1}^m \phi_j(x_1, ..., x_m) \Big| \geq \varepsilon m \right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{8(c+1)^2}\right) \tag{3.2.11}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Δηλαδή,

$$P\left(\Big| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \phi(x_j) - \mathbb{E}\phi \Big| \geq \varepsilon \right) \leq 2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m}{8(c+1)^2}\right). \tag{3.2.12}$$

Αν $m \geq C \max\{\log(1/\delta), \log(3/\theta)\varepsilon^{-2} n\}$, τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$, για κάθε $y \in \mathcal{N}$ ισχύει

$$\Big| \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\langle x_j, y\rangle| - \mathbb{E}\phi \Big| < \varepsilon. \tag{3.2.13}$$

Αν επιλέξουμε $\varepsilon = 1/10$ και χρησιμοποιήσουμε την (3.2.9), από την (3.2.13) παίρνουμε

$$\frac{1}{2} \leq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m |\langle x_j, y\rangle| \leq \frac{3}{2} \tag{3.2.14}$$

για κάθε $y \in \mathcal{N}$. Για να αποδείξουμε την ανάλογη σχέση για κάθε $y \in S^{n-1}$ εφαρμόζουμε ένα επιχείρημα διαδοχικής προσέγγισης: κάθε $y \in S^{n-1}$ γράφεται στη μορφή $y = \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k y_k$ όπου $y_k \in \mathcal{N}$ (βλέπε [16]), οπότε από την (3.2.14) παίρνουμε

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} - \frac{3\theta}{2(1-\theta)} &= \frac{1}{2} - \frac{3}{2}\sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \\ &\leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} |\langle x_j, y_0\rangle| - \sum_{k=1}^{\infty} \theta^k \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} |\langle x_j, y_k\rangle| \\ &\leq \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} |\langle x_j, y\rangle| \\ &\leq \sum_{k=0}^{\infty} \theta^k \frac{1}{m}\sum_{j=1}^{m} |\langle x_j, y_k\rangle| \\ &\leq \frac{3}{2(1-\theta)}. \end{aligned}$$

Επιλέγοντας το $\theta > 0$ αρκετά μικρό (για παράδειγμα, $\theta = 1/10$), ολοκληρώνουμε την απόδειξη. □

Θεώρημα 3.2.1 *Υπάρχει $\lambda_0 > 1$ με την εξής ιδιότητα: Αν $N \geq \lambda_0 n$, τότε με «μεγάλη πιθανότητα»*

$$K_N \supseteq c_1 B_2^n, \tag{3.2.15}$$

όπου B_2^n είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα και $c_1 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Σταθεροποιούμε $\delta \in (0,1)$ - το οποίο προσδιορίζει την έννοια της «μεγάλης πιθανότητας» - και θέτουμε $\lambda_0 = c\log(\delta^{-1})$. Αν $N \geq \lambda_0 n$, τότε με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ η Πρόταση 3.2.1 ισχύει για τις κορυφές $\pm x_1, \ldots, \pm x_N$ του K_N.

Θυμηθείτε ότι αν M_1, M_2 είναι κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$, τότε $M_1 \subseteq M_2$ αν και μόνο αν $h_{M_1} \leq h_{M_2}$. Από την Πρόταση 3.2.1 έχουμε

$$\begin{aligned} h_{K_N}(y) &= \max_{j\leq N} |\langle x_j, y\rangle| \geq \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} |\langle x_j, y\rangle| \\ &\geq c_1\|y\|_2 = c_1 h_{B_2^n}(y) \end{aligned}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, το οποίο δείχνει ότι $K_N \supseteq c_1 B_2^n$. □

Ειδικότερα, η Πρόταση 3.2.1 ισχύει για $\delta = e^{-n}$, αρκεί να πάρουμε $N \geq cn^2$.

Πρόταση 3.2.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$ τέτοια ώστε αν $N \geq c_3 n^2$ τότε το τυχαίο K_N περιέχει την $c_1 B_2^n$.* □

3.2.2 Κύβοι που εγγράφονται στο K_N

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι αν το N ξεπερνά κάποια συνάρτηση του n, τότε το K_N περιέχει (με μεγάλη πιθανότητα) έναν κεντραρισμένο κύβο P τέτοιον ώστε $|K_N|^{1/n} \simeq |P|^{1/n}$. Θα δούμε τρεις αποδείξεις αυτού του αποτελέσματος. Η ακμή του εγγεγραμμένου κύβου είναι βέλτιστη και στις τρεις περιπτώσεις:

$$K_N \supseteq \big(c_2\sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}\big)Q_n. \tag{3.2.16}$$

Αυτό όμως που έχει σημασία είναι η μικρότερη τιμή του N για την οποία το τυχαίο K_N έχει αυτήν την ιδιότητα.

Α. Η στοιχειώδης μέθοδος.

Η ιδέα είναι, όπως και στην απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1, να δείξουμε ότι: για αρκετά μεγάλο N, τυχαία επιλογή σημείων $x_1, \ldots, x_N \in E_2^n$ ικανοποιεί τη σχέση

$$h_{M_N}(\theta) \geq \frac{c_2\sqrt{\log(N/n)}}{\sqrt{n}} h_{Q_n}(\theta) \tag{3.2.17}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Η ακριβής διατύπωση του αποτελέσματος έχει ως εξής:

Θεώρημα 3.2.2 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $\kappa > 1$ με την εξής ιδιότητα: Αν $N \geq n^{\kappa}$, τότε το τυχαίο M_N ικανοποιεί την*

$$M_N := \mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_N\} \supseteq \big(c\sqrt{\log N}/\sqrt{n}\big)Q_n$$

όπου $c > 0$ είναι μία απόλυτη σταθερά, και $Q_n = [-1, 1]^n$ είναι ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$.

Απόδειξη: Θα γράφουμε τον N στη μορφή $N = 2^{\gamma n}$, όπου $\gamma \in (0, 1)$. Τότε, το Θεώρημα 3.2.2 είναι ο ακόλουθος ισχυρισμός:

> *Αν $(\log 2)\gamma \geq \kappa \log n/n$, τότε $M_N \supseteq c\sqrt{\gamma}Q_n$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$.*

Αρκεί να δείξουμε ότι τυχαία επιλογή σημείων $x_1, \ldots, x_N \in E_2^n$ ικανοποιεί τη σχέση

$$h_{M_N}(\theta) \geq c\sqrt{\gamma}h_{Q_n}(\theta) \tag{3.2.18}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Από τις $h_{M_N}(\theta) = \max_{j \leq N}\langle x_j, \theta\rangle$ και $h_{Q_n}(\theta) = \|\theta\|_1$ βλέπουμε ότι η (3.2.18) είναι ισοδύναμη με την

$$\max_{j \leq N}\langle x_j, \theta\rangle \geq c\sqrt{\gamma}\|\theta\|_1. \tag{3.2.19}$$

Πρόταση 3.2.3 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $A, c > 0$ με την εξής ιδιότητα: Αν $\theta \in S^{n-1}$, $N \geq n$ και $A\sqrt{\log n/n} \leq \alpha < 1/12$, τότε*

$$\text{Prob}\,(h_{M_N}(\theta) \leq \alpha\|\theta\|_1) \leq \exp\left(-\frac{N}{(2c)^{k_0}}\exp(-2c\alpha^2 n)\right), \tag{3.2.20}$$

όπου k_0 είναι ο μικρότερος θετικός ακέραιος για τον οποίο $2^{k_0} \geq 2n/\alpha$.

Απόδειξη: Τα $x_1, \dots, x_N$ επιλέγονται ανεξάρτητα στον E_2^n, συνεπώς ισχύει η σχέση

$$\text{Prob}\left(\max_{j\leq N}\langle x_j, \theta\rangle < \alpha\|\theta\|_1\right) = \big(P(\{x \in E_2^n : \langle x, \theta\rangle < \alpha\|\theta\|_1\})\big)^N. \tag{3.2.21}$$

Λόγω συμμετρίας, για να εκτιμήσουμε την τελευταία πιθανότητα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n)$, όπου $\theta_1 \geq \theta_2 \geq \dots \geq \theta_n \geq 0$ και $\theta_1^2 + \dots + \theta_n^2 = 1$. Θέτουμε k_0 το μικρότερο θετικό ακέραιο για τον οποίο $2^{k_0} \geq 2n/\alpha$ και, για κάθε $k = 0, 1, \dots, k_0 - 1$, ορίζουμε

$$B_k = \{i \leq n : 2^{-k-1} < \theta_i \leq 2^{-k}\}. \tag{3.2.22}$$

Αν $B = \bigcup_{k<k_0} B_k$ και $C = \{1, \dots, n\}\backslash B$, τότε

$$\{x \in E_2^n : \langle x, \theta\rangle \geq \alpha\|\theta\|_1\} \supseteq \left\{x \in E_2^n : \sum_{i\in B} x_i\theta_i \geq 3\alpha\sum_{i\in B}\theta_i\right\}. \tag{3.2.23}$$

Αυτό ισχύει, γιατί

$$\sum_{i\in C}\theta_i \leq \frac{n}{2^{k_0}} \leq \frac{\alpha}{2} \leq \frac{\alpha}{2}\|\theta\|_1,$$

και έτσι, αν $\sum_{i\in B} x_i\theta_i \geq 3\alpha\sum_{i\in B}\theta_i$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n x_i\theta_i &\geq \sum_{i\in B} x_i\theta_i - \sum_{i\in C}\theta_i \geq 3\alpha\sum_{i\in B}\theta_i - \sum_{i\in C}\theta_i \\ &\geq 3\alpha\|\theta\|_1 - 4\sum_{i\in C}\theta_i \geq \alpha\|\theta\|_1.\end{aligned}$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$\left\{x \in E_2^n : \sum_{i\in B} x_i\theta_i \geq 3\alpha\sum_{i\in B}\theta_i\right\} \supseteq \bigcap_{k=0}^{k_0-1}\left\{x \in E_2^n : \sum_{i\in B_k} x_i\theta_i \geq 3\alpha\sum_{i\in B_k}\theta_i\right\}, \tag{3.2.24}$$

και, δεδομένου ότι τα x_i είναι ανεξάρτητα και τα B_k είναι ξένα, αρκεί να εκτιμήσουμε την

$$P\left(x \in E_2^{s_k} : \sum_{i=1}^{s_k} x_i\theta_i \geq 3\alpha\sum_{i=1}^{s_k}\theta_i\right) \tag{3.2.25}$$

για κάθε μη κενό B_k, όπου $s_k = |B_k|$ και $2^{-k-1} < \theta_i \leq 2^{-k}$, $i = 1, \ldots, s_k$. Χρησιμοποιώντας την αρχή της συστολής (βλέπε [23], [27, σελίδα 95]), έχουμε

$$\begin{aligned} P\Big(x : \sum_{i=1}^{s_k} x_i\theta_i \geq 3\alpha \sum_{i=1}^{s_k} \theta_i\Big) &\geq P\Big(x : \sum_{i=1}^{s_k} x_i\theta_i \geq 3\alpha s_k 2^{-k}\Big) \\ &\geq (1/2)P\Big(x : \sum_{i=1}^{s_k} 2^{-k-1}x_i \geq 3\alpha s_k 2^{-k}\Big) \\ &= (1/2)P\Big(x : \sum_{i=1}^{s_k} x_i \geq 6\alpha s_k\Big). \end{aligned}$$

Η τελευταία πιθανότητα μπορεί να εκτιμηθεί με βάση το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 3.2.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $\alpha \in (0, 1/2)$ και $s \in \mathbb{N}$,*

$$P\left(\sum_{i=1}^{s} x_i > \alpha s\right) \geq c^{-1} \exp(-c(\alpha^2 s + \alpha\sqrt{s})). \tag{3.2.26}$$

Απόδειξη: Χρησιμοποιούμε την τεχνική των μεγάλων αποκλίσεων, όπως αυτή περιγράφεται στο [36, Διάλεξη 16]. Εστω F η κοινή συνάρτηση κατανομής των ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών X_i, $i = 1, \ldots, s$, όπου $P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = 1/2$. Τότε,

$$\begin{aligned} P\left(\sum_{i=1}^{s} x_i > \alpha s\right) &= \int \cdots \int \chi_{\{x_1+\ldots+x_s>\alpha s\}} dF(x_1)\ldots dF(x_s) \\ &\geq \int \cdots \int \chi_{\{\alpha s+\sqrt{s}>x_1+\ldots+x_s>\alpha s\}} dF(x_1)\ldots dF(x_s). \end{aligned} \tag{3.2.27}$$

Ορίζουμε $R(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda X_i} = (e^{\lambda} + e^{-\lambda})/2$, και βρίσκουμε $\lambda_0 > 0$ τέτοιο ώστε $R'(\lambda_0)/R(\lambda_0) = \alpha$: δηλαδή, $\lambda_0 = \log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha})/2$. Έστω G η συνάρτηση κατανομής που ικανοποιεί τη σχέση

$$dG(x) = \frac{e^{\lambda_0 x}}{R(\lambda_0)} dF(x), \tag{3.2.28}$$

και έστω $Y_1, \ldots, Y_s$ ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών, οι οποίες έχουν κοινή συνάρτηση κατανομής τη G. Εύκολα ελέγχουμε ότι $\mathbb{E}Y_i = \alpha$, $\mathrm{Var}Y_i = 1 - \alpha^2$ και $\mathbb{E}|Y_1|^3 = 1$. Ετσι, η (3.2.27) παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} P(\sum_{i=1}^{s} x_i > \alpha s) &\geq [R(\lambda_0)]^s e^{-\lambda_0(\alpha s+\sqrt{s})} \times \\ &\times \int \cdots \int \chi_{\{\alpha s+\sqrt{s}>x_1+\ldots+x_s>\alpha s\}} \frac{e^{\lambda_0(x_1+\ldots+x_s)}}{[R(\lambda_0)]^s} dF(x_1)\ldots dF(x_s) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\geq \quad e^{-\lambda_0(\alpha s+\sqrt{s})} \int \cdots \int \chi_{\{\alpha s+\sqrt{s}>x_1+\ldots+x_s>\alpha s\}} dG(x_1)\ldots dG(x_s) \\ &= \quad e^{-\lambda_0(\alpha s+\sqrt{s})} P(0<Y_1+\ldots+Y_s-s\mathbb{E}Y_1<\sqrt{s}). \end{aligned}$$

Η τελευταία πιθανότητα είναι ίση με

$$D := P\left(0 < \frac{Y_1+\ldots+Y_s-s\mathbb{E}Y_1}{\sqrt{s(1-\alpha^2)}} < \frac{1}{\sqrt{1-\alpha^2}}\right), \tag{3.2.29}$$

και από το θεώρημα Berry-Esseen (βλέπε [35]), έχουμε

$$\left| D - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{1/\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-z^2/2} dz \right| \leq \frac{2\mathbb{E}|Y_1|^3}{(\mathrm{Var}Y_1)^3\sqrt{s}} = \frac{2}{(1-\alpha^2)^{3/2}\sqrt{s}}. \tag{3.2.30}$$

Αρα, υπάρχει $s_0 \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $s \geq s_0$ και $\alpha \in (0,1/2)$,

$$D \geq \frac{1}{2\sqrt{2\pi}} \int_0^{1/\sqrt{1-\alpha^2}} e^{-z^2/2} dz \geq c^{-1} > 0. \tag{3.2.31}$$

Συνεπώς,

$$P\left(\sum_{i=1}^{s} x_i > \alpha s\right) \geq c^{-1} e^{-\lambda_0(\alpha s+\sqrt{s})}, \tag{3.2.32}$$

και αφού $\lambda_0 = \frac{1}{2}\log(\frac{1+\alpha}{1-\alpha}) \leq c'\alpha$ στο $(0,1/2)$, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Συνδυάζοντας τις (3.2.21), (3.2.23), (3.2.24) και το Λήμμα 3.2.3 με το 6α στο ρόλο του α, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} P(x \in E_2^n : \langle x,\theta\rangle \geq \alpha\|\theta\|_1) &\geq \frac{1}{(2c)^{k_0}} \exp(-c(\alpha^2 \sum_{k\leq k_0} s_k + \alpha \sum_{k\leq k_0} \sqrt{s_k})) \\ &\geq \frac{1}{(2c)^{k_0}} \exp(-c\alpha^2 n) \exp(-c\alpha\sqrt{n}\sqrt{k_0}) \\ &\geq \frac{1}{(2c)^{k_0}} \exp(-2c\alpha^2 n), \end{aligned}$$

γιατί $\alpha\sqrt{n} \geq \sqrt{k_0}$ αν επιλέξουμε τη σταθερά A αρκετά μεγάλη και θυμηθούμε τον ορισμό του k_0. Λαμβάνοντας υπόψιν μας την (3.2.19), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} P(h_M(\theta) \leq \alpha\|\theta\|_1) &\leq \left(1 - \frac{1}{(2c)^{k_0}} \exp(-2c\alpha^2 n)\right)^N \\ &\leq \exp\left(-\frac{N}{(2c)^{k_0}} \exp(-2c\alpha^2 n)\right). \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της Πρότασης 3.2.3. □

Επιλέγουμε τώρα ένα ρ-δίκτυο $\mathcal{N}$ της S^{n-1}, με πληθικότητα $|\mathcal{N}| \leq (1+(2/\rho))^n \leq \exp(2n/\rho)$. Τότε, από το Λήμμα 3.2.3 έχουμε άμεσα το ακόλουθο:

Λήμμα 3.2.4 *Έστω* $N \geq n$ *και* $\rho, \delta \in (0,1)$. *Αν*

$$\exp\left(\frac{2n}{\rho} - \frac{N}{(2c)^{k_0}}\exp(-2c\alpha^2 n)\right) \leq \delta, \tag{3.2.33}$$

τότε, N *τυχαία σημεία* $x_1, \ldots, x_N$ *που επιλέγονται ανεξάρτητα στον* E_2^n, *ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από* $1-\delta$ *την*

$$\max_{j\leq N}\langle x_j, \theta\rangle \geq \alpha\|\theta\|_1, \tag{3.2.34}$$

για κάθε $\theta \in \mathcal{N}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.2: Θέτουμε $N = 2^{\gamma n}$ και εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.2.4: Αν $A\sqrt{\log n/n} \leq \alpha < 1/12$ και αν ικανοποιείται η (3.2.33), τότε το K_N ικανοποιεί με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ τη σχέση

$$h_{K_N}(\theta) \geq \alpha\|\theta\|_1$$

για κάθε θ που ανήκει σε ένα ρ-δίκτυο της S^{n-1}. Έστω $u \in S^{n-1}$. Υπάρχει $\theta \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $\|u-\theta\|_2 < \rho$. Έπεται λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} h_{K_N}(u) &\geq h_{K_N}(\theta) - h_{K_N}(\theta - u) \geq \alpha\|\theta\|_1 - \|\theta - u\|_1 \\ &\geq \alpha\|u\|_1 - (\alpha+1)\|\theta - u\|_1 \geq \alpha\|u\|_1 - 2\sqrt{n}\rho \\ &\geq (\alpha - 2\sqrt{n}\rho)\|u\|_1 \geq \frac{\alpha}{2}\|u\|_1, \end{aligned}$$

αν επιλέξουμε $\rho = \alpha/(4\sqrt{n})$. Αν θέσουμε $\delta = e^{-n}$ και πάρουμε υπόψιν μας την υπόθεση $\gamma \geq \kappa \log n/n$, μπορούμε να ελέγξουμε ότι η (3.2.33) ικανοποιείται για $\alpha \simeq \sqrt{\gamma}$, αρκεί ο κ να είναι αρκετά μεγάλη απόλυτη σταθερά. Παρατηρούμε ότι η συνθήκη $\alpha \geq A\sqrt{\log n/n}$ ικανοποιείται επίσης αν το κ είναι αρκετά μεγάλο. Συνεπώς,

$$h_{K_N}(u) \geq c\sqrt{\gamma}\|u\|_1$$

για κάθε $u \in S^{n-1}$, το οποίο συνεπάγεται ότι $K_N \supseteq c\sqrt{\gamma}\, Q_n$ με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-e^{-n}$. □

B. Η μέθοδος των Dyer, Füredi και McDiarmid.

Θα περιγράψουμε τώρα τη μέθοδο των Dyer, Füredi και McDiarmid για τη μελέτη του M_N. Για κάθε $y \in Q_n$ ορίζουμε

$$q(y) = \inf\left\{\mathrm{Prob}\{x \in E_2^n : x \in H\} \mid H \text{ ημίχωρος }, y \in H\right\}, \tag{3.2.35}$$

και για κάθε $\beta > 0$ θέτουμε

$$Q^\beta = \{y \in Q_n \mid q(y) \geq \exp(-\beta n)\}. \tag{3.2.36}$$

Ορίζουμε $f:(-1,1)\to\mathbb{R}$ με

$$f(t)=\frac{1}{2}(1+t)\log(1+t)+\frac{1}{2}(1-t)\log(1-t), \tag{3.2.37}$$

(παρατηρήστε ότι $\lim_{t\to\pm1}f(t)=\log 2$) και, αν $y=(y_1,\dots,y_n)\in Q_n$, θέτουμε

$$F(y)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}f(y_i). \tag{3.2.38}$$

Τέλος, για κάθε $\beta>0$ ορίζουμε

$$F^{\beta}=\{y\in Q_n\mid F(y)\leq\beta\}. \tag{3.2.39}$$

Η βασική σχέση ανάμεσα στις συναρτήσεις q και F δίνεται από το εξής Λήμμα (βλέπε [11] και [4]).

Λήμμα 3.2.5 *Για κάθε $y\in Q_n$ ισχύει η ανισότητα $q(y)\leq\exp(-nF(y))$.* □

Υποθέτουμε ότι η παράμετρος N ικανοποιεί τις

$$\exp\left(c_1(\log n)^2\right)\leq N\leq\exp\left(c_2 n/\log n\right), \tag{3.2.40}$$

όπου $c_1,c_2>0$ απόλυτες σταθερές, και γράφουμε $N=\exp(\gamma n)$, δηλαδή $\gamma=\log N/n$. Συμβολίζουμε με ε ποσότητες της μορφής $c\sqrt{\gamma}/\sqrt{n}=c\sqrt{\log N}/n$ όπου $c\simeq 1$, δηλαδή ποσότητες που έχουν μικρότερη τάξη μεγέθους από αυτήν του γ.

Από το Λήμμα 3.2.5 είναι φανερό ότι

$$Q^{\gamma}\subseteq F^{\gamma} \tag{3.2.41}$$

για κάθε $\gamma>0$. Οι Dyer, Füredi και McDiarmid απέδειξαν ότι τα Q^{γ} και F^{γ} βρίσκονται το ένα κοντά στο άλλο (με την έννοια του περιέχεσθαι) και προσεγγίζουν το τυχαίο M_N όλο και καλύτερα αν $N=\exp(\gamma n)$ με το γ σταθερό και το n να τείνει στο άπειρο. Στην [11] αποδεικνύεται το εξής:

Πρόταση 3.2.4 *Έστω $\gamma,\delta\in(0,1)$. Αν $n\geq n_0(\delta)$ και $N=\exp(\gamma n)$, τότε υπάρχει $\varepsilon\simeq\sqrt{\gamma/n}$ τέτοιο ώστε*

$$\mathrm{Prob}(Q^{\gamma-\varepsilon}\subseteq M_N)>1-\delta. \quad \square \tag{3.2.42}$$

Ένα από τα βασικά αποτελέσματα στην εργασία των Bárány και Pór [4] δείχνει ότι ισχύει εγκλεισμός αντίστροφος από αυτόν της (3.2.41):

Πρόταση 3.2.5 *Έστω $\gamma\in(0,1)$. Αν $n\geq n_0$ και $N=\exp(\gamma n)$, τότε υπάρχουν $\varepsilon_1,\varepsilon_2\simeq\sqrt{\gamma/n}$ τέτοια ώστε*

$$F^{\gamma-\varepsilon_2}\cap(1/10)Q_n\subseteq Q^{\gamma+\varepsilon_1}. \quad \square \tag{3.2.43}$$

Συνδυάζοντας τις Προτάσεις 3.2.4 και 3.2.5 βλέπουμε ότι το τυχαίο M_N ικανοποιεί την

$$M_N \supseteq F^{\gamma-\varepsilon} \cap (1/10)Q_n. \tag{3.2.44}$$

Η ακριβής ποσοτική ανάλυση των αποδείξεων δείχνει ότι ο παραπάνω εγκλεισμός ισχύει αν τα γ, n και N ικανοποιούν την (3.2.40). Πρέπει δηλαδή να υποθέσουμε ότι το N έχει τάξη μεγαλύτερη της πολυωνυμικής ως προς τη διάσταση n. Παρατηρώντας ότι

$$F(y) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(y_i) \simeq \frac{\|y\|_2^2}{n}, \tag{3.2.45}$$

έχουμε

$$F^{\beta} \supseteq \sqrt{\beta n} B_2^n. \tag{3.2.46}$$

Συνεπώς, η (3.2.44) μπορεί να διατυπωθεί ως εξής.

Θεώρημα 3.2.3 *Υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και απόλυτες σταθερές $c, c_1 > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $n \geq n_0$ και $N \geq \exp\left(c_1(\log n)^2\right)$, τότε N τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από τον E_2^n ικανοποιούν με «μεγάλη πιθανότητα» την*

$$M_N := \mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_N\} \supseteq c\left(\sqrt{\log N} B_2^n \cap Q_n\right) \tag{3.2.47}$$

όπου $Q_n = [-1,1]^n$ είναι ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$. □

Δεδομένου ότι $\sqrt{\log N} B_2^n \supseteq \sqrt{\log N/n} Q_n$, το συμπέρασμα του Θεωρήματος 3.2.3 είναι ισχυρότερο από αυτό του Θεωρήματος 3.2.2. Παρουσιάζει όμως τα εξής μειονεκτήματα:

1. Ισχύει για $N \geq \exp\left(c_1(\log n)^2\right)$, ενώ το Θεώρημα 3.2.2 ισχύει για $N \geq n^a$, όπου $a > 0$ απόλυτη σταθερά (πολυωνυμικό πλήθος κορυφών).
2. Δεν είναι σαφές αν η (3.2.47) ισχύει για το «τυχαίο M_N» με τον ορισμό που έχουμε δώσει (πρέπει κανείς να αναλύσει προσεκτικά την επιρροή των διαφόρων παραμέτρων στο ούτως ή άλλως τεχνικό επιχείρημα των [4], [11]).

Όπως θα δούμε στην επόμενη υποπαράγραφο, ο συνδυασμός της πρώτης μεθόδου με ένα αποτέλεσμα παρεμβολής του Montgomery-Smith δίνει πλήρη απάντηση στο πρόβλημα, βελτιώνοντας τόσο το Θεώρημα 3.2.2 όσο και το Θεώρημα 3.2.3 (όπου καθένα από τα δύο επιδέχεται βελτίωση).

Γ. Η μέθοδος της παρεμβολής.

Η τρίτη απόδειξη που θα δώσουμε στηρίζεται σε ένα θεώρημα του Montgomery-Smith [34]. Για κάθε $t>0$ θεωρούμε τη νόρμα $K_{1,2}(\cdot,t)$ στον $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από την

$$K_{1,2}(y,t)=\inf\{\|z\|_1+t\|y-z\|_2 : z\in\mathbb{R}^n\}. \tag{3.2.48}$$

Αυτή η νόρμα είναι γνωστή στη θεωρία παρεμβολής. Για μικρά $t>0$ έχουμε $K_{1,2}(y,t)\simeq t\|y\|_2$, ενώ για μεγαλύτερα t έχουμε $K_{1,2}(y,t)\simeq \|y\|_1$. Η $K_{1,2}(\cdot,t)$ μπορεί επίσης να περιγραφεί μέσω της φθίνουσας αναδιάταξης (y_i^*) της $(|y_i|)$. Ο Holmstedt έχει δείξει ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ με την ιδιότητα

$$\frac{1}{c}K_{1,2}(y,t)\leq \sum_{i=1}^{[t^2]}y_i^*+t\left(\sum_{i=[t^2]+1}^{n}(y_i^*)^2\right)^{1/2}\leq K_{1,2}(y,t) \tag{3.2.49}$$

για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$. Το βασικό αποτέλεσμα του Montgomery-Smith είναι το εξής.

Πρόταση 3.2.6 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $r\geq 1$ τέτοια ώστε*

$$P(\{x\in E_2^n : \langle x,y\rangle > K_{1,2}(y,t)\})\leq \exp(-t^2/2) \tag{3.2.50}$$

και

$$P(\{x\in E_2^n : \langle x,y\rangle > r^{-1}K_{1,2}(y,t)\})\geq r^{-1}\exp(-rt^2) \tag{3.2.51}$$

για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$ και κάθε $t>0$.

Απόδειξη: Για λόγους πληρότητας θα σκιαγραφήσουμε την απόδειξη της (3.2.51). Βασικό ρόλο παίζει μια παραλλαγή της ανισότητας του Holmstedt: Για κάθε $t\in\mathbb{N}$ ορίζουμε τη νόρμα

$$\|y\|_{P(t)}=\sup\left\{\sum_{m=1}^{t}\left(\sum_{i\in B_m}y_i^2\right)^{1/2}\right\}, \tag{3.2.52}$$

όπου το sup παίρνεται πάνω από όλες τις διαμερίσεις $(B_1,\ldots,B_t)$ του $\{1,\ldots,n\}$. Τότε, ισχύει το εξής (βλέπε [34]).

Λήμμα 3.2.6 *Έστω $y\in\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\|y\|_{P(t^2)}\leq K_{1,2}(y,t)\leq\sqrt{2}\|y\|_{P(t^2)} \tag{3.2.53}$$

για κάθε $t>0$ με $t^2\in\mathbb{N}$. □

Χρειαζόμαστε επίσης μια στοιχειώδη ανισότητα των Paley και Zygmund (βλέπε [23, Κεφάλαιο 3]:

Λήμμα 3.2.7 *Έστω* $y \in \mathbb{R}^n$. *Τότε,*

$$P(\{x \in E_2^n : \langle x, y\rangle > \lambda \|y\|_2\}) \geq \frac{1}{3}(1-\lambda^2)^2 \tag{3.2.54}$$

για κάθε $\lambda \in (0,1)$. □

Θεωρούμε $y \in \mathbb{R}^n$ και $t > 0$ με $t^2 \in \mathbb{N}$. Από το Λήμμα 3.2.6, για κάθε $\delta > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση $(B_1, \ldots, B_{t^2})$ του $\{1, \ldots, n\}$ τέτοια ώστε

$$\|y\|_{P(t^2)} \leq (1+\delta) \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{i \in B_m} y_i^2 \right)^{1/2}. \tag{3.2.55}$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.7 παίρνουμε

$$P\left(x \in E_2^n : \langle x, y\rangle > \frac{1}{2} K_{1,2}(y,t) \right) \geq P\left(x \in E_2^n : \langle x, y\rangle > \frac{1}{\sqrt{2}} \|y\|_{P(t^2)} \right)$$

$$\begin{aligned} &\geq P\left(x \in E_2^n : \sum_{m=1}^{t^2} \sum_{i \in B_m} x_i y_i \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\delta) \sum_{m=1}^{t^2} \left(\sum_{i \in B_m} y_i^2 \right)^{1/2} \right) \\ &\geq \prod_{m=1}^{t^2} P\left(\sum_{i \in B_m} x_i y_i \geq \frac{1}{\sqrt{2}}(1+\delta) \left(\sum_{i \in B_m} y_i^2 \right)^{1/2} \right) \\ &\geq \left(\frac{1}{3}(1 - \frac{1}{2}(1+\delta)^2)^2 \right)^{t^2}. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $\delta \to 0$, συμπεραίνουμε ότι

$$P\left(x \in E_2^n : \langle x, y\rangle > \frac{1}{2} K_{1,2}(y,t) \right) \geq \exp(-(\log 12) t^2). \tag{3.2.56}$$

Αυτό είναι το ζητούμενο στην περίπτωση που $t^2 \in \mathbb{N}$. Για το τυχόν $t \geq 1$ παρατηρούμε ότι $K_{1,2}(y,t) \leq K_{1,2}(y,[t]+1)$ και $([t]+1)^2 \leq 4t^2$, οπότε το συμπέρασμα προκύπτει εύκολα από την (3.2.56) με $c = 4\log 12$. Τέλος, αν $t < 1$ η εκτίμηση προκύπτει από την ανισότητα του Holmstedt με απλή εφαρμογή της ανισότητας των Paley και Zygmund. □

Συνδυάζοντας την πρώτη μας μέθοδο με το κάτω φράγμα (3.2.51) της Πρότασης 3.2.6, θα δείξουμε το εξής.

Θεώρημα 3.2.4 *Υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $n \geq n_0$ και $N > n(\log n)^2$, τότε N τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$ που επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από τον E_2^n ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ την*

$$M_N := \mathrm{co}\{x_1, \dots, x_N\} \supseteq c\left(\sqrt{\log(N/n)}B_2^n \cap Q_n\right), \tag{3.2.57}$$

όπου $Q_n = [-1,1]^n$ είναι ο μοναδιαίος κύβος στον $\mathbb{R}^n$.

Θα βασιστούμε στη γεωμετρική ερμηνεία της $K_{1,2}(\cdot, \alpha)$: Αν σταθεροποιήσουμε $\alpha > 0$ και θεωρήσουμε το συμμετρικό κυρτό σώμα

$$C(\alpha) = r^{-1}(\alpha B_2^n \cap Q_n), \tag{3.2.58}$$

τότε εύκολα ελέγχουμε ότι η συνάρτηση στήριξης του $C(\alpha)$ ικανοποιεί την

$$h_{C(\alpha)}(y) = r^{-1} \inf\{\|z\|_1 + \alpha\|y - z\|_2 : z \in \mathbb{R}^n\} = r^{-1}K_{1,2}(y, \alpha). \tag{3.2.59}$$

Απόδειξη της (3.2.59): Παρατηρούμε αρχικά ότι η συνάρτηση $g(y) = \inf\{\|z\|_1 + \alpha\|y - z\|_2 : z \in \mathbb{R}^n\}$ είναι νόρμα, οπότε ορίζει ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, το πολικό του οποίου συμβολίζουμε με L.

Έστω $y \in \mathbb{R}^n$. Επιλέγοντας $z = y$ και $z = 0$, από τον ορισμό της g βλέπουμε ότι $g(y) \leq \min\{\|y\|_1, \alpha\|y\|_2\}$, δηλαδή $L \subseteq Q_n \cap \alpha B_2^n = rC(\alpha)$. Συνεπώς,

$$g(y) = h_L(y) \leq h_{rC(\alpha)}(y).$$

Ας υποθέσουμε ότι το L είναι γνήσιο υποσύνολο του $rC(\alpha)$. Τότε υπάρχει $x_0 \in rC(\alpha) \setminus L$, και από διαχωριστικό θεώρημα, μπορούμε να βρούμε $y \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε $g(y) = h_L(y) < \langle x_0, y\rangle$. Από τον ορισμό της g, υπάρχει $z \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$\Big(\langle x_0, z\rangle - \|z\|_1\Big) + \Big(\langle x_0, y - z\rangle - \alpha\|y - z\|_2\Big) > 0.$$

Άρα, κάποιος από τους δύο όρους είναι γνήσια θετικός. Όμως, αν $\langle x_0, z\rangle > \|z\|_1$ τότε $x_0 \notin Q_n$ και αν $\langle x_0, y - z\rangle > \alpha\|y - z\|_2$ τότε $x_0 \notin \alpha B_2^n$. Σε κάθε περίπτωση έχουμε $x_0 \notin rC(\alpha)$, το οποίο είναι άτοπο.

Άρα, $L = rC(\alpha)$ κι αυτό δείχνει ότι $g(y) = h_{rC(\alpha)}(y)$ για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$. $\square$

Με δεδομένη την (3.2.59), η (3.2.51) παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Λήμμα 3.2.8 *Έστω $\alpha > 0$. Για κάθε $\theta \in S^{n-1}$,*

$$P(\{x \in E_2^n : \langle x, \theta\rangle \geq h_{C(\alpha)}(\theta)\}) \geq r^{-1}\exp(-r\alpha^2). \quad \square \tag{3.2.60}$$

Έστω $x_1, \dots, x_N$ τυχαία σημεία του E_2^n, και έστω $M_N := M(x_1, \dots, x_N)$ η κυρτή τους θήκη. Αφού $h_{M_N}(\theta) = \max_{j \le N} \langle x_j, \theta \rangle$, έχουμε

$$\begin{aligned} P\left(h_{M_N}(\theta) \le h_{C(\alpha)}(\theta)\right) &= \left(P(\{x \in E_2^n : \langle x, \theta \rangle < h_{C(\alpha)}(\theta)\})\right)^N \\ &\le \left(1 - r^{-1}\exp(-r\alpha^2)\right)^N \\ &\le \exp\left(-\frac{N}{r}\exp(-r\alpha^2)\right) \end{aligned}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Εστω $\delta \in (0,1)$ και $\mathcal{N}$ ένα ρ-δίκτυο της S^{n-1} με πληθικότητα $|\mathcal{N}| \le (1+(2/\rho))^n$. Τότε, η παραπάνω εκτίμηση αποδεικνύει το εξής.

Λήμμα 3.2.9 *Έστω $N \ge n$ και $\rho, \delta \in (0,1)$, $\alpha > 0$. Αν*

$$\left(1 + \frac{2}{\rho}\right)^n \le \delta \exp\left(\frac{N}{r}\exp(-r\alpha^2)\right), \tag{3.2.61}$$

τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$, N τυχαία σημεία $x_1, \dots, x_N$ που επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα στον E_2^n ικανοποιούν την

$$h_{M_N}(\theta) \ge h_{C(\alpha)}(\theta) \tag{3.2.62}$$

για κάθε $\theta \in \mathcal{N}$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.4: Έστω $N \ge n(\log n)^2$. Θέτουμε

$$\alpha = \frac{1}{2\sqrt{r}}\sqrt{\log(N/n)}$$

και εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.2.9 με $\delta = e^{-n}$: Αν

$$1 + \log\left(1 + \frac{2}{\rho}\right) \le \frac{N}{rn}\exp\left(-\frac{1}{4}\log(N/n)\right) = \frac{1}{r}\left(\frac{N}{n}\right)^{3/4}, \tag{3.2.63}$$

τότε, με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$, η κυρτή θήκη M_N των $x_1, \dots, x_N$ ικανοποιεί την

$$h_{M_N}(\theta) \ge h_{C(\alpha)}(\theta)$$

για κάθε θ που ανήκει σε ένα ρ-δίκτυο της S^{n-1}. Έστω $u \in S^{n-1}$. Υπάρχει $\theta \in \mathcal{N}$ τέτοιο ώστε $\|u - \theta\|_2 < \rho$. Τότε,

$$\begin{aligned} h_{M_N}(u) &\ge h_{M_N}(\theta) - h_{M_N}(\theta - u) \ge h_{C(\alpha)}(\theta) - h_{M_N}(\theta - u) \\ &\ge h_{C(\alpha)}(u) - [h_{C(\alpha)}(\theta - u) + \|\theta - u\|_1]. \end{aligned}$$

Για αρκετά μεγάλα n ($n \ge n_0$ όπου το n_0 εξαρτάται από το r) έχουμε $\alpha \ge 1$. Επεται ότι

$$\frac{1}{r}B_2^n \subseteq C(\alpha) \subseteq \frac{\alpha}{r}B_2^n$$

και έτσι

$$h_{C(\alpha)}(\theta - u) + \|\theta - u\|_1 \leq \left(\frac{\alpha}{r} + \sqrt{n}\right)\rho \leq 2r\sqrt{n}\rho h_{C(\alpha)}(u).$$

Συνεπώς,

$$h_{M_N}(u) \geq \frac{h_{C(\alpha)}(u)}{2} \tag{3.2.64}$$

αν επιλέξουμε $\rho = 1/(4r\sqrt{n})$. Με αυτήν την επιλογή των α και ρ, απομένει να ελέγξουμε ότι η (3.2.63) ικανοποιείται για αρκετά μεγάλα n. Η συνθήκη είναι ισοδύναμη με την

$$c(r)\log n \leq \left(\frac{N}{n}\right)^{3/4} \tag{3.2.65}$$

και, λόγω της υπόθεσης ότι $N > n(\log n)^2$, αυτή ικανοποιείται αν $(\log n)^{1/2} > c(r)$ το οποίο ισχύει για $n \geq n_0 = \exp(c^2(r))$. Το θεώρημα έπεται με $c = 1/(4r^{3/2})$. $\square$

Αφού $Q_n \supseteq B_2^n$, το Θεώρημα 3.2.4 περιέχει το Θεώρημα 3.2.1 στην περίπτωση που $N \geq n(\log n)^2$. Επίσης, αφού $\sqrt{n}B_2^n \supseteq Q_n$, παίρνουμε το Θεώρημα 3.2.2 για $N \geq n(\log n)^2$:

Θεώρημα 3.2.5 *Υπάρχουν $n_0 \in \mathbb{N}$ και απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν $n \geq n_0$ και $N \geq n(\log n)^2$, τότε N τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ που επιλέγονται ομοιόμορφα και ανεξάρτητα στον E_2^n ικανοποιούν με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1 - e^{-n}$ την*

$$K_N \supseteq c\frac{\sqrt{\log(N/n)}}{\sqrt{n}}Q_n. \quad \square$$

3.2.3 Όγκος και μέσο πλάτος

Το Θεώρημα 3.2.5 είναι αρκετό για να προσδιορίσουμε την «ακτίνα όγκου» των τυχαίων K_N και K_N°. Παρατηρούμε ότι το πολικό σώμα του K_N περιγράφεται από την

$$K_N^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n \ : \ |\langle y, x_i\rangle| \leq 1, \ \ i = 1, \ldots, N\}. \tag{3.2.66}$$

δηλαδή, είναι τομή συμμετρικών λωρίδων πλάτους $\sqrt{n}$ αφού $\|x_i\|_2 = \sqrt{n}$ για κάθε $i = 1, \ldots, N$. Το πρόβλημα της εκτίμησης του όγκου τέτοιων σωμάτων έχει μελετηθεί και υπάρχουν πολύ ακριβή κάτω φράγματα (δες [19], [10] και [3], [7], [8] για σχετικά αποτελέσματα):

Λήμμα 3.2.10 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c>0$ τέτοια ώστε, για κάθε $N\geq n$*

$$|K_N^{\circ}|^{1/n} \geq \frac{c}{\sqrt{n\log(2N/n)}}. \qquad \square \tag{3.2.67}$$

Συνδυάζοντας αυτήν την εκτίμηση με την ανισότητα $|K_N|\cdot|K_N^{\circ}|\leq |B_2^n|^2$ των Blaschke-Santaló, ή χρησιμοποιώντας δυϊκά αποτελέσματα για τον όγκο της κυρτής θήκης N σημείων στην $\sqrt{n}S^{n-1}$, βλέπουμε ότι

$$|K_N|^{1/n} \leq c'\frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}. \tag{3.2.68}$$

Από την άλλη πλευρά, το Θεώρημα 3.2.5 δείχνει ότι αν $N\geq n(\log n)^2$ τότε το τυχαίο K_N περιέχει κύβο ακμής $\simeq \sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}$, άρα

$$|K_N|^{1/n} \geq c''\frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}. \tag{3.2.69}$$

Το γεγονός αυτό δείχνει ότι το Θεώρημα 3.2.5 είναι βέλτιστο με μία πολύ ισχυρή έννοια: το τυχαίο K_N έχει το μέγιστο δυνατό όγκο. Επίσης προσδιορίζει τις «ακτίνες όγκου» των K_N και K_N°:

Θεώρημα 3.2.6 *Αν $N\geq n(\log n)^2$, τότε για το τυχαίο K_N έχουμε*

$$|K_N|^{1/n}\simeq \frac{\sqrt{\log(N/n)}}{\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad |K_N^{\circ}|^{1/n}\simeq \frac{1}{\sqrt{n\log(N/n)}}. \qquad \square \tag{3.2.70}$$

Μια άλλη άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι ότι ο λόγος όγκων $\mathrm{vr}(K_N,Q_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένος.

Πρόταση 3.2.7 *Αν $N\geq n(\log n)^2$, τότε το τυχαίο K_N περιέχει έναν κύβο P με κέντρο το μηδέν, τέτοιον ώστε*

$$\left(\frac{|K_N|}{|P|}\right)^{1/n}\leq C, \tag{3.2.71}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. $\square$

Μπορούμε επίσης να προσδιορίσουμε το μέσο πλάτος του τυχαίου K_N ή K_N°. Αρχίζουμε με το K_N:

Θεώρημα 3.2.7 *Αν $n\geq n_0$ και $N\geq n(\log n)^2$, τότε το τυχαίο K_N ικανοποιεί τις*

$$c_1\sqrt{\log(N/n)}\leq w(K_N)\leq c_2\sqrt{\log N} \tag{3.2.72}$$

όπου $c_1,c_2>0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Αν γράψουμε $x_j = \sqrt{n} u_j$ όπου $u_j \in S^{n-1}$, $j \leq N$, τότε

$$w(K_N) = \int_{S^{n-1}} \max_{j\leq N} |\langle x_j, \theta\rangle| \sigma(d\theta) = \sqrt{n} \int_{S^{n-1}} \max_{j\leq N} |\langle u_j, \theta\rangle| \sigma(d\theta). \tag{3.2.73}$$

Για κάθε $A > 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned} \int_{S^{n-1}} \max_{j\leq N} |\langle u_j, \theta\rangle| \sigma(d\theta) &= \int_0^\infty \sigma\big(\theta \in S^{n-1} : \max_{j\leq N} |\langle u_j, \theta\rangle| \geq t\big) dt \\ &\leq A + \int_A^\infty \sigma\big(\theta \in S^{n-1} : \max_{j\leq N} |\langle u_j, \theta\rangle| \geq t\big) dt. \end{aligned}$$

Από τη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα (βλέπε [29]) έχουμε
(3.2.74)

$$\sigma\big(\theta \in S^{n-1} : \max_{j\leq N} |\langle u_j, \theta\rangle| \geq t\big) \leq \sum_{j=1}^N \sigma\big(\theta \in S^{n-1} : |\langle u_j, \theta\rangle| \geq t\big) \leq N e^{-ct^2 n}.$$

Οπότε,

$$\int_{S^{n-1}} \max_{j\leq N} |\langle u_j, \theta\rangle| \sigma(d\theta) \leq A + \int_A^\infty N e^{-ct^2 n} dt.$$

Επιλέγοντας $A = c\sqrt{\frac{\log N}{n}}$ και χρησιμοποιώντας την

$$\int_A^\infty e^{-ct^2 n} dt \leq \frac{C}{\sqrt{n}} e^{-c' A^2 n}$$

παίρνουμε

$$\int_{S^{n-1}} \max_{j\leq N} |\langle u_j, \theta\rangle| \sigma(d\theta) \leq c'' \frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{n}}. \tag{3.2.75}$$

Άρα,

$$w(K_N) \leq c_2 \sqrt{\log N}. \tag{3.2.76}$$

Παρατηρούμε τώρα ότι, από την ανισότητα του Urysohn και από την εκτίμηση όγκου του Θεωρήματος 3.2.6,

$$w(K_N) \geq \left(\frac{|K_N|}{|B_2^n|}\right)^{1/n} \geq c_1 \sqrt{\log(N/n)} \tag{3.2.77}$$

για το τυχαίο K_N. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Οι εκτιμήσεις αυτές δείχνουν ότι το τυχαίο K_N έχει το ελάχιστο δυνατό μέσο πλάτος, με την έννοια ότι η ανισότητα του Urysohn ισχύει περίπου σαν ισότητα (αν εξαιρέσουμε τις «πολύ μικρές» τιμές της παραμέτρου N). Το ίδιο ισχύει και για το K_N°:

Θεώρημα 3.2.8 *Αν $n \geq n_0$ και $N \geq n(\log n)^2$, τότε το τυχαίο K_N° ικανοποιεί τις*

$$\frac{c_3}{\sqrt{\log(N/n)}} \leq w(K_N^\circ) \leq \frac{c_4\sqrt{\log n}}{\sqrt{\log(N/n)}}, \tag{3.2.78}$$

όπου $c_3, c_4 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Αφού $K_N \supseteq \big(c\sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}\big)Q_n$, ισχύει ότι

$$h_{K_N^\circ}(\theta) = \|\theta\|_{K_N} \leq \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{\log(N/n)}}\|\theta\|_\infty, \tag{3.2.79}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$. Άρα,

$$w(K_N^\circ) \leq \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{\log(N/n)}}\int_{S^{n-1}} \max_{i\leq n}|\theta_i|\,\sigma(d\theta) \simeq \frac{\sqrt{\log n}}{\sqrt{\log(N/n)}}. \tag{3.2.80}$$

Το κάτω φράγμα είναι απλή συνέπεια της ανισότητας του Urysohn και του Θεωρήματος 3.2.6. □

Θυμηθείτε ότι, από την ανισότητα του Pisier (Λήμματα 2.1.2 και 2.1.3), κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα M στον $\mathbb{R}^n$ έχει γραμμική εικόνα $\tilde{M}$ (το $\tilde{M}$ λέγεται ℓ-θέση του M) τέτοια ώστε

$$w(\tilde{M})\cdot w(\tilde{M}^\circ) \leq c d_M \leq c' \log n. \tag{3.2.81}$$

Συνέπεια των Θεωρημάτων 3.2.7 και 3.2.8 είναι ότι για κάθε $N \geq n(\log n)^2$ το τυχαίο K_N ικανοποιεί την

$$w(K_N)w(K_N^\circ) \leq c\frac{\sqrt{\log N}}{\sqrt{\log(N/n)}}\sqrt{\log n}, \tag{3.2.82}$$

δηλαδή το K_N «βρίσκεται στην ℓ-θέση». Αυτή η παρατήρηση θα χρησιμοποιηθεί για εκτιμήσεις αποστάσεων Banach-Mazur, σε συνδυασμό με τη μέθοδο των τυχαίων ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων.

3.3 Ασυμπτωτικές ιδιότητες του X_N

Όπως είδαμε στην §3.2, αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε η μοναδιαία μπάλα K_N του τυχαίου χώρου X_N της κλάσης $\mathcal{B}_N$ έχει τις εξής ιδιότητες:

1. $K_N \supseteq c_1 B_2^n$.
2. $K_N \supseteq \big(c_2\sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}\big)Q_n$.

3. $|K_N|^{1/n} \simeq \sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}$ και $|K_N^\circ|^{1/n} \simeq 1/\sqrt{n\log(N/n)}$.
4. $w(K_N)w(K_N^\circ) \leq c(\varepsilon)\sqrt{\log n}$ αν $N \geq n^{1+\varepsilon}$ (και $c(\varepsilon) = O(1/\sqrt{\varepsilon})$ καθώς το $\varepsilon \to 0^+$).

Τα τυχαία K_N και K_N° ανήκουν σε μια μάλλον περιορισμένη κλάση συμμετρικών κυρτών σωμάτων, και αυτό μας επιτρέπει να προσδιορίσουμε πολλές από τις ασυμπτωτικές ιδιότητες των αντίστοιχων χώρων.

3.3.1 Σταθερά unconditional βάσης του X_N

Αρχικά θα δείξουμε ότι η σταθερά unconditional βάσης του X_N έχει τη χειρότερη δυνατή τάξη αν η παράμετρος N είναι της τάξης του n. Το γεγονός αυτό είναι αναμενόμενο λόγω των γνωστών αποτελεσμάτων των [13] και [1], που αφορούν τυχαίες τομές του ℓ_∞^m διάστασης n ανάλογης του m, που εμφανίζουν την ίδια παθολογία. Η πηγή των εκτιμήσεων μας είναι το Θεώρημα 3.2.1, το οποίο είναι το ανάλογο του θεωρήματος του Kashin [24] στο πλαίσιό μας. Οι πληροφορίες όμως που έχουμε για το τυχαίο K_N, θα μας επιτρέψουν να δώσουμε αντίστοιχες εκτιμήσεις για ολόκληρο το εύρος τιμών της παραμέτρου N.

Για να δείξουμε τον τρόπο με τον οποίο χρησιμοποιείται το Θεώρημα 3.2.1, δίνουμε πρώτα κάποιες εκτιμήσεις της απόστασης Banach-Mazur του τυχαίου X_N από τους ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$.

Θεώρημα 3.3.1 *Αν $N \geq \lambda_0 n$, τότε ο $X_N \in \mathcal{B}_N$ ικανοποιεί με μεγάλη πιθανότητα την*

$$\min_{1\leq p\leq\infty} d(X_N, \ell_p^n) \geq c\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log(2N/n)}},$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 3.2.1, αν $N \geq \lambda_0 n$ τότε το $K_N = \mathrm{co}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ ικανοποιεί με μεγάλη πιθανότητα την

$$c_1\|y\|_2 \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\langle y, x_i\rangle| \leq c_2\|y\|_2 \tag{3.3.1}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ (αν μάλιστα $N \geq n^2$, το παραπάνω ισχύει για το τυχαίο K_N).

Υποθέτουμε λοιπόν ότι ο $X_N \in \mathcal{B}_N$ ικανοποιεί την (3.3.1). Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Hölder βλέπουμε ότι

$$c_1^p\|y\|_2^p \leq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} |\langle y, x_i\rangle|^p \tag{3.3.2}$$

για κάθε $p \in [1, \infty)$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$.

Λήμμα 3.3.1 *Αν $T \in SL(n)$ και $p \in [1,\infty]$, τότε*

$$\|T : X_N \to \ell_p^n\| \geq cn^{1/p}. \tag{3.3.3}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι $1 \leq p < \infty$. Θέτουμε $A = \|T : X_N \to \ell_p^n\|$. Τότε, για κάθε $i \leq N$ έχουμε $\|Tx_i\|_p \leq A$. Άρα,

$$\begin{aligned} A^p &\geq \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N \|Tx_i\|_p^p = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^n |\langle Tx_i, e_j\rangle|^p \\ &= \sum_{j=1}^n \frac{1}{N}\sum_{i=1}^N |\langle x_i, T^*e_j\rangle|^p \geq c_1^p \sum_{j=1}^n \|T^*e_j\|_2^p. \end{aligned}$$

Όμως $|\det(T^*)| = |\det T| = 1$, άρα η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου και η ανισότητα του Hadamard μας δίνουν

$$\sum_{j=1}^n \|T^*e_j\|_2^p \geq n\prod_{j=1}^n \|T^*e_j\|_2^{p/n} \geq n|\det(T^*)|^{p/n} = n. \tag{3.3.4}$$

Έπεται ότι

$$\|T : X_N \to \ell_p^n\| = A \geq c_1 n^{1/p}. \tag{3.3.5}$$

Λόγω συνέχειας, παίρνουμε και την $\|T : X_N \to \ell_\infty^n\| \geq c_1$. $\square$

Για να δώσουμε κάτω φράγμα για την $\|T : \ell_p^n \to X_N\|$ χρησιμοποιούμε ένα απλό επιχείρημα όγκου.

Λήμμα 3.3.2 *Αν $T \in SL(n)$ και $p \in [1,\infty]$, τότε*

$$\|T : \ell_p^n \to X_N\| \geq \frac{c_1 n^{1/2-1/p}}{\sqrt{\log(N/n)}},$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Αν $A = \|T : \ell_p^n \to X_N\|$, τότε $T(B_p^n) \subseteq AK_N$, άρα

$$|B_p^n| = |T(B_p^n)| \leq A^n|K_N| \leq \left(\frac{cA\sqrt{\log(N/n)}}{\sqrt{n}}\right)^n, \tag{3.3.6}$$

απ' όπου παίρνουμε

$$\frac{2\Gamma\left(1+\frac{1}{p}\right)}{\left[\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)\right]^{1/n}} \leq \frac{cA\sqrt{\log(N/n)}}{\sqrt{n}}. \tag{3.3.7}$$

Έπεται ότι

$$\|T : \ell_p^n \to X_N\| = A \geq \frac{c_1 n^{1/2-1/p}}{\sqrt{\log(N/n)}} p^{1/p}\Gamma\big(\frac{1}{p}+1\big), \tag{3.3.8}$$

και αφού η συνάρτηση $p^{1/p}\Gamma\big(\frac{1}{p}+1\big)$ είναι φραγμένη μακριά από το 0 στο $[1,\infty)$, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Συνδυάζοντας τα δύο Λήμματα παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(X_N, \ell_p^n) &= \min_{T\in SL(n)} \|T : X_N \to \ell_p^n\| \cdot \|T^{-1} : \ell_p^n \to X_N\| \\ &\geq c\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log(N/n)}}, \end{aligned}$$

για κάθε $p \in [1,\infty]$. Παρατηρήστε ότι για $N \simeq \lambda_0 n$ παίρνουμε παράδειγμα χώρου X με την ιδιότητα $\min_{1\leq p\leq\infty} d(X,\ell_p^n) \geq c\sqrt{n}$. □

Ορισμός. Ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα Y λέγεται 1-unconditional αν υπάρχει βάση $\{u_1,\ldots,u_n\}$ του Y με την ιδιότητα

$$\Big\|\sum_{i=1}^n t_i u_i\Big\|_Y = \Big\|\sum_{i=1}^n |t_i| u_i\Big\|_Y \tag{3.3.9}$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1,\ldots,t_n$. Συμβολίζουμε με $\mathcal{U}_n$ την κλάση των n-διάστατων 1-unconditional χώρων. Γενικότερα, για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα Y ορίζουμε:

1. Τη σταθερά unconditional βάσης $\mathrm{uc}(Y)$ να είναι ο μικρότερος $A > 0$ για τον οποίο υπάρχει βάση $\{u_1,\ldots,u_n\}$ του Y με την ιδιότητα

   $$\Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i t_i u_i\Big\| \leq A\Big\|\sum_{i=1}^n t_i u_i\Big\|$$

   για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1,\ldots,t_n$ και κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n$.

2. Την τυχαία σταθερά unconditional βάσης $\mathrm{ruc}(Y)$ να είναι ο μικρότερος $A > 0$ για τον οποίο υπάρχει βάση $\{u_1,\ldots,u_n\}$ του Y με την ιδιότητα

   $$\left(\int_{E_2^n} \Big\|\sum_{i=1}^n \varepsilon_i t_i u_i\Big\|^2 d\varepsilon\right)^{1/2} \leq A\Big\|\sum_{i=1}^n t_i u_i\Big\|$$

   για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1,\ldots,t_n$.

Απλές ιδιότητες που προκύπτουν από τον ορισμό είναι οι παρακάτω:

Λήμμα 3.3.3 *Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Τότε,*

$$\mathrm{ruc}(Y) \leq \mathrm{uc}(Y), \tag{3.3.10}$$

και

$$\mathrm{ruc}(Y) \leq \mathrm{uc}(X) \cdot d(X,Y). \tag{3.3.11}$$

Ειδικότερα, $\mathrm{ruc}(Y) \leq d(Y, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$. □

Αν Y είναι ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα, γράφουμε $\mathcal{P}_Y$ για την κλάση όλων των συμμετρικών παραλληλεπιπέδων που περιέχονται στη μοναδιαία μπάλα B_Y του Y.

Πρόταση 3.3.1 (Ball, [4]) *Έστω Y ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Τότε,*

$$\inf_{P \in \mathcal{P}_Y} \left(\frac{|B_Y|}{|P|} \right)^{1/n} \leq c \cdot \mathrm{ruc}(Y^*), \tag{3.3.12}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη (σκιαγράφηση): Θέτουμε $r = \mathrm{ruc}(Y^*)$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι η συνήθης βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ ικανοποιεί την

$$\left(\int_{E_2^n} \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i t_i e_i \Big\|_{Y^*}^2 d\varepsilon \right)^{1/2} \leq r \Big\| \sum_{i=1}^n t_i e_i \Big\|_{Y^*} \tag{3.3.13}$$

για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1, \ldots, t_n$. Ορίζουμε μια νέα νόρμα $\|\cdot\|_r$ στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\Big\| \sum_{i=1}^n t_i e_i \Big\|_r = \frac{1}{r} \left(\int_{E_2^n} \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i t_i e_i \Big\|_{Y^*}^2 d\varepsilon \right)^{1/2}. \tag{3.3.14}$$

Ο $Z := (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_r)$ είναι 1-unconditional, και $B_{Y^*} \subseteq B_Z$ από την (3.3.13). Επίσης,

$$\begin{aligned}
|B_Z|^{1/n} &= \omega_n \left(\int_{S^{n-1}} \Big\| \sum_{i=1}^n \theta_i e_i \Big\|_Z^{-n} \sigma(d\theta) \right)^{1/n} \\
&= r\omega_n \left(\int_{S^{n-1}} \left(\int_{E_2^n} \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \theta_i e_i \Big\|_{Y^*}^2 d\varepsilon \right)^{-n/2} \sigma(d\theta) \right)^{1/n} \\
&\leq r\omega_n \left(\int_{S^{n-1}} \int_{E_2^n} \Big\| \sum_{i=1}^n \varepsilon_i \theta_i e_i \Big\|_{Y^*}^{-n} d\varepsilon \, \sigma(d\theta) \right)^{1/n} \\
&= r\omega_n \left(\int_{S^{n-1}} \Big\| \sum_{i=1}^n \theta_i e_i \Big\|_{Y^*}^{-n} \sigma(d\theta) \right)^{1/n} \\
&= r|B_{Y^*}|^{1/n}.
\end{aligned}$$

Από ένα θεώρημα του Losanovskii [25], για κάθε 1-unconditional χώρο X υπάρχει παραλληλεπίπεδο Q με $Q \subseteq B_X$ και $\left(|B_X|/|Q|\right)^{1/n} \le n/(n!)^{1/n} \le c_0$. Άρα, υπάρχει παραλληλεπίπεδο $Q \subseteq B_{Z^*}$ με $\left(|B_{Z^*}|/|Q|\right)^{1/n} \le c_0$.

Τότε, $Q \subseteq B_Y$ και από την ανισότητα Santaló και την αντίστροφή της για 1-unconditional σώματα παίρνουμε

$$\begin{aligned}\left(\frac{|B_Y|}{|Q|}\right)^{1/n} &\le \left(\frac{|B_Y|}{|B_{Z^*}|}\right)^{1/n}\left(\frac{|B_{Z^*}|}{|Q|}\right)^{1/n}\\ &\le c_0\frac{\omega_n^{2/n}}{4/(n!)^{1/n}}\left(\frac{|B_Z|}{|B_{Y^*}|}\right)^{1/n}\\ &\le c\cdot r.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.3.12). □

Ορισμός. Έστω $p>0$. Αν X και Y είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα και αν $T : X \to Y$ είναι ένας γραμμικός τελεστής, η p-αθροίζουσα νόρμα $\pi_p(T)$ του T είναι η μικρότερη σταθερά $A>0$ που ικανοποιεί το εξής: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή διανυσμάτων $x_1,\dots,x_m \in X$,

$$\sum_{j=1}^m \|Tx_j\|_Y^p \le A^p \cdot \sup_{y\in B_{X^*}} \sum_{j=1}^m |\langle y, x_j\rangle|^p. \tag{3.3.15}$$

Από το θεώρημα παραγοντοποίησης του Pietch [32], η $\pi_p(T)$ είναι η μικρότερη σταθερά $A>0$ για την οποία υπάρχει μέτρο πιθανότητας μ στην B_{X^*} με την ιδιότητα

$$\|Tx\|_Y^p \le A^p \int_{B_{X^*}} |\langle y, x\rangle|^p d\mu(y) \tag{3.3.16}$$

για κάθε $x \in X$.

Λήμμα 3.3.4 *Έστω ότι τα $x_1,\dots,x_N$ ικανοποιούν το συμπέρασμα της Πρότασης 3.2.1. Τότε, $\pi_1(I : X_N^* \to \ell_2^n) \simeq 1$.*

Απόδειξη: Έστω $m \in \mathbb{N}$ και $z_1,\dots,z_m \in X_N^*$. Χρησιμοποιώντας την (3.3.1), έχουμε

$$\sum_{j=1}^m \|z_j\|_2 \le \frac{1}{c_1}\cdot\frac{1}{N}\sum_{i=1}^N\sum_{j=1}^m |\langle x_i, z_j\rangle| \le \frac{1}{c_1}\cdot \sup_{y\in K_N}\sum_{j=1}^m |\langle y, z_j\rangle|, \tag{3.3.17}$$

συνεπώς, $\pi_1(I) \le c_1^{-1}$. Από την άλλη πλευρά, από τον ορισμό της $\pi_1(I)$ έχουμε επίσης

$$\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N \|x_j\|_2 \le \pi_1(I) \sup_{y\in K_N}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^N |\langle y, x_j\rangle|. \tag{3.3.18}$$

Χρησιμοποιώντας την άνω εκτίμηση στην (3.3.1) παίρνουμε

$$\sup_{y\in K_N}\frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N}|\langle y,x_j\rangle|\leq c_2\sup_{y\in K_N}\|y\|_2. \tag{3.3.19}$$

Αφού $K_N\subseteq Q_n\subseteq\sqrt{n}B_2^n$ και $\|x_j\|_2=\sqrt{n}$ για κάθε $j=1,\dots,N$, συμπεραίνουμε ότι $\sqrt{n}\leq c_2\pi_1(I)\sqrt{n}$, το οποίο συμπληρώνει την απόδειξη. □

Λήμμα 3.3.5 *Έστω Q ένα παραλληλεπίπεδο που περιέχεται στο K_N°. Τότε,*

$$|Q|^{1/n}\leq\frac{2\pi_1(I:X_N^*\to\ell_2^n)}{n}. \tag{3.3.20}$$

Απόδειξη: Το γεγονός αυτό παρατηρήθηκε απο τον Ball [1]. Παραθέτουμε ένα (κάπως διαφορετικό) επιχείρημα για λόγους πληρότητας. Ας θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση $S:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ η οποία απεικονίζει την B_∞^n στον Q. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Hadamard, την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου και τον ορισμό της $\pi_1(I:X_N^*\to\ell_2^n)$, έχουμε

$$\begin{aligned}|Q|^{1/n} &= 2|\det S|^{1/n}\leq 2\left(\prod_{i=1}^n\|Se_i\|_2\right)^{1/n}\leq\frac{2}{n}\sum_{i=1}^n\|Se_i\|_2\\ &\leq 2\pi_1(S:\ell_\infty^n\to\ell_2^n)\cdot\frac{1}{n}\sup_{y\in B_1^n}\sum_{i=1}^n|\langle y,e_i\rangle|\\ &= 2\pi_1(S:\ell_\infty^n\to\ell_2^n)/n.\end{aligned}$$

Απο τις $\pi_1(S:\ell_\infty^n\to\ell_2^n)\leq\|S:\ell_\infty^n\to X_N^*\|\cdot\pi_1(I:X_N^*\to\ell_2^n)$ και $\|S:\ell_\infty^n\to X_N^*\|\leq 1$ έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 3.3.2 *Αν $N\geq c\log(\delta^{-1})n$, τότε ο $X_N\in\mathcal{B}_N$ έχει τυχαία σταθερά unconditional βάσης*

$$\mathrm{ruc}(X_N)\geq c\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log(2N/n)}} \tag{3.3.21}$$

με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$.

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι ο X_N ικανοποιεί την (3.3.1). Από το Θεώρημα 3.2.1, αυτό συμβαίνει με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$. Από τα Λήμματα 3.3.4 και 3.3.5, για κάθε παραλληλεπίπεδο $Q\subseteq K_N^\circ$ έχουμε $|Q|^{1/n}\leq c/n$, άρα

$$\inf_{P\in\mathcal{P}_{X_N^*}}\left(\frac{|K_N^\circ|}{|P|}\right)^{1/n}\geq\frac{n}{c}|K_N^\circ|^{1/n}\geq c'\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log(2N/n)}}. \tag{3.3.22}$$

Η απόδειξη της (3.3.21) είναι τώρα άμεση, από την Πρόταση 3.3.1. □

Έστω $N \geq n(\log n)^2$. Το Θεώρημα 3.2.5 δείχνει ότι

$$d(X_N, \ell_\infty^n) \leq c\sqrt{n}/\sqrt{\log(2N/n)} \tag{3.3.23}$$

για τον τυχαίο X_N. Συνδυάζοντας αυτό το γεγονός με το Θεώρημα 3.3.2 και το Λήμμα 3.3.3, βλέπουμε ότι ο ℓ_∞^n είναι «ο 1-unconditional χώρος που βρίσκεται πιο κοντά στον X_N».

Θεώρημα 3.3.3 *Αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε για τον τυχαίο X_N έχουμε*

$$d(X_N, \mathcal{U}_n) \simeq d(X_N, \ell_\infty^n) \simeq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\log(2N/n)}}, \tag{3.3.24}$$

όπου $\mathcal{U}_n$ είναι η κλάση των n-διάστατων χώρων με 1-unconditional βάση. □

Σημείωση: Το Θεώρημα 3.3.2 και κατάλληλη επιλογή σταθεράς $\lambda > 1$ δείχνουν την ύπαρξη ενός χώρου X_N με $N = \lambda n$ για τον οποίο ισχύουν οι ανισότητες

$$d(X_N, Y) \geq \mathrm{ruc}(X_N) \geq c\sqrt{n} \tag{3.3.25}$$

για κάθε χώρο Y με 1-unconditional βάση.

3.3.2 Εκτιμήσεις αποστάσεων Banach-Mazur

Τα Θεωρήματα 3.2.1 και 3.2.7 υποδεικνύουν ότι η γεωμετρική απόσταση των K_N και B_2^n και το μέσο πλάτος του K_N ελέγχονται ταυτόχρονα για τον τυχαίο X_N. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των τυχαίων ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων (η οποία χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά στην εργασία της Tomczak-Jaegermann [42], και αργότερα αναπτύχθηκε στις [5], [12]) με σκοπό να δώσουμε άνω εκτιμήσεις της απόστασης Banach-Mazur του τυχαίου X_N από διάφορες κλάσεις χώρων.

Ο συνηθισμένος τρόπος εφαρμογής της παραπάνω μεθόδου είναι μέσα από το ακόλουθο λήμμα, το οποίο χρημοποιεί την ανισότητα της Chevet [9] (βλέπε και το Κεφάλαιο 2).

Λήμμα 3.3.6 *Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Τότε,*

$$\begin{aligned} d(X,Y) \;\leq\; & \frac{c}{n}\big[\|I : X \to \ell_2^n\|\ell(I : \ell_2^n \to Y) + \|I : \ell_2^n \to Y\|\ell(I : \ell_2^n \to X^*)\big] \\ & \times\big[\|I : Y \to \ell_2^n\|\ell(I : \ell_2^n \to X) + \|I : \ell_2^n \to X\|\ell(I : \ell_2^n \to Y^*)\big], \end{aligned}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Θα εφαρμόσουμε αυτή τη μέθοδο για να εκτιμήσουμε την απόσταση $d(X_N, X_N^*)$. Η καλύτερη γνωστή γενική εκτίμηση οφείλεται στους Bourgain και Milman [6] οι οποίοι απέδειξαν ότι

$$d(X, X^*) \leq cn^{5/6} \log^{\beta} n \tag{3.3.26}$$

για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X. Η απόδειξη της (3.3.26) βασίζεται κι αυτή στη μέθοδο των τυχαίων ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων. Αν ο X έχει 1-unconditional βάση ή αρκετές συμμετρίες, τότε δίνει ένα αρκετά καλύτερο φράγμα της τάξης $\sqrt{n} \log^{\beta} n$.

Οπως θα δούμε, παρά την έλλειψη συμμετριών που παρουσιάζει το K_N (βλέπε §3.3.1), έχουμε φράγματα αυτής της τάξης για την $d(X_N, X_N^*)$.

Θεώρημα 3.3.4 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε*

$$d(X_N, X_N^*) \leq C\sqrt{n \log n} \tag{3.3.27}$$

για κάθε $N \geq n$ και για τον τυχαίο X_N.

Απόδειξη: Εφαρμόζουμε το Λήμμα 3.3.6 με $X = X_N$ και $Y = X_N^*$. Λαμβάνοντας υπόψιν μας την $\ell(I : \ell_2^n \to X) \leq c\sqrt{n} w(K^\circ)$, παίρνουμε

$$d(X_N, X_N^*) \leq c\|I : X_N \to \ell_2^n\| \cdot \|I : \ell_2^n \to X_N\| \cdot w(K_N) w(K_N^\circ). \tag{3.3.28}$$

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση $N \geq n^2$. Από τα Θεωρήματα 3.2.7 και 3.2.8, για το τυχαίο K_N έχουμε

$$w(K_N) \leq c_2\sqrt{\log N} \quad \text{και} \quad w(K_N^\circ) \leq c_3\sqrt{\log n}/\sqrt{\log N}. \tag{3.3.29}$$

Δεδομένου ότι $K_N \subseteq Q_n \subseteq \sqrt{n} B_2^n$, έχουμε

$$\|I : X_N \to \ell_2^n\| = \max_{x \in K_N} \|x\|_2 \leq \sqrt{n}, \tag{3.3.30}$$

και, από το Θεώρημα 3.2.1 έχουμε ότι $cB_2^n \subseteq K_N$ για το τυχαίο K_N, συνεπώς

$$\|I : \ell_2^n \to X_N\| = \max_{x \in B_2^n} \|x\|_{K_N} \leq c^{-1}. \tag{3.3.31}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, παίρνουμε

$$d(X_N, X_N^*) \leq C\sqrt{n \log n} \tag{3.3.32}$$

για τον τυχαίο X_N, $N \geq n^2$.

Αν $N \leq n^2$, χρησιμοποιούμε μια γνωστή εκτίμηση των Figiel, Lindenstrauss και Milman [16]: Επειδή το K_N έχει n^α κορυφές και το K_N° έχει n^β έδρες, με $\alpha = \beta \leq 2$, ισχύει η ανισότητα

$$d(X_N, X_N^*) \leq c\sqrt{n \log n}\sqrt{\alpha + \beta} \leq c'\sqrt{n \log n}. \tag{3.3.33}$$

Τελικά, υπάρχει σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε, ανεξάρτητα από το N, να ισχύει $d(X_N, X_N^*) \leq C\sqrt{n \log n}$ γιά τον τυχαίο X_N. $\square$

3.3.3 Ισοτροπικές σταθερές

Υπενθυμίζουμε τον ορισμό της ισοτροπικής θέσης ενός συμμετρικού κυρτού σώματος W στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει $T_0 \in GL(n)$ τέτοιος ώστε το σώμα $\tilde{W} = T_0(W)$ να έχει όγκο 1 και να ικανοποιεί την ισοτροπική συνθήκη

$$\int_{\tilde{W}} \langle x, \theta\rangle^2 dx = L_W^2 \tag{3.3.34}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ (βλέπε [28] για περισσότερες λεπτομέρειες). Αυτή η θέση είναι μοναδική αν εξαιρέσουμε ορθογώνιους μετασχηματισμούς, συνεπώς η σταθερά L_W είναι αναλλοίωτη για τη γραμμική κλάση του W, και ονομάζεται ισοτροπική σταθερά του W. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι στην ισοτροπική θέση του W ελαχιστοποιείται η ποσότητα

$$\frac{1}{|T(W)|^{1+\frac{2}{n}}} \int_{T(W)} \|x\|_2^2 dx \tag{3.3.35}$$

πάνω από όλους τους $T \in GL(n)$. Ειδικότερα,

$$nL_W^2 \leq \frac{1}{|W|^{1+\frac{2}{n}}} \int_W \|x\|_2^2 dx. \tag{3.3.36}$$

Εικάζεται ότι υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε $L_W \leq C$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα W στον $\mathbb{R}^n$. Η πιο γνωστή γενική εκτίμηση οφείλεται στον Bourgain [2] ο οποίος απέδειξε ότι $L_W \leq c\sqrt[4]{n}\log n$. Η εικασία σχετίζεται με το «πρόβλημα των τομών», το οποίο αφορά την ύπαρξη μιας απόλυτης σταθεράς $c > 0$ τέτοιας ώστε κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα όγκου 1 να έχει τομή με υπερεπίπεδο, της οποίας ο όγκος να ξεπερνά το c. Η σύνδεση προκύπτει από την

$$L_W \cdot |W \cap \theta^{\perp}| \simeq 1 \tag{3.3.37}$$

η οποία ισχύει για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ και για κάθε ισοτροπικό συμμετρικό κυρτό σώμα W (βλέπε [28]).

Σκοπός μας εδώ είναι να δώσουμε άνω φράγματα για την ισοτροπική σταθερά των K_N και K_N°. Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο λήμμα (βλέπε [28]).

Λήμμα 3.3.7 *Έστω W ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$L_W \leq \frac{c}{n} \cdot \frac{1}{|W|^{1+\frac{1}{n}}} \int_W \|x\|_1 dx. \tag{3.3.38}$$

Επίσης, $L_W \leq cd(X_W, Y)$ για κάθε $Y \in \mathcal{U}_n$.

Απόδειξη: Είναι γνωστό ότι ισχύει η αντίστροφη ανισότητα Hölder

$$\Big(\int_W \langle x,y\rangle^2 dx\Big)^{1/2} \leq c\frac{1}{|W|^{1/2}}\int_W |\langle x,y\rangle| dx \tag{3.3.39}$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά, για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα W και κάθε $y\in \mathbb{R}^n$ (βλέπε [28]). Έστω T ο γραμμικός μετασχηματισμός που φέρνει το W στην ισοτροπική θέση. Τότε, για κάθε $\theta\in S^{n-1}$ έχουμε $L_W^2=\int_{TW}\langle x,\theta\rangle^2$ και $1/|W| = |\det T|$.

Εφαρμόζοντας την (3.3.39) για το $(T^{-1})^*e_i$, παίρνουμε

$$\|(T^{-1})^*e_i\|_2 L_W \leq c\int_{TW} |\langle x,(T^{-1})^*e_i\rangle| dx \tag{3.3.40}$$

για κάθε $i\leq n$. Αθροίζοντας τις παραπάνω ανισότητες, βλέπουμε ότι

$$L_W\sum_{i=1}^n \|(T^{-1})^*e_i\|_2 \leq c\int_{TW}\|T^{-1}x\|_1 dx. \tag{3.3.41}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου καταλήγουμε στην

$$nL_W\Big(\prod_{i=1}^n \|(T^{-1})^*e_i\|_2\Big)^{\frac{1}{n}} \leq |\det T|\int_W \|x\|_1 dx \tag{3.3.42}$$

Τέλος, από την ανισότητα του Hadamard και την $|\det T| = 1/|W|$ παίρνουμε το ζητούμενο.

Για να αποδείξουμε τη δεύτερη ανισότητα, θεωρούμε τυχόντα χώρο Y με 1-unconditional βάση. Από το Θεώρημα του Lozanovskii [25], υπάρχει ένας γραμμικός μετασχηματισμός T τέτοιος ώστε

$$T(B_Y^n)\subseteq B_1^n \quad \text{και} \quad \Big(\frac{|B_1^n|}{T(B_Y^n)}\Big)^{1/n}\leq c_1. \tag{3.3.43}$$

Έστω S γραμμικός μετασχηματισμός τέτοιος ώστε

$$\frac{1}{d(X_W,Y)}T(B_Y^n)\subseteq S(W)\subseteq T(B_Y^n). \tag{3.3.44}$$

Τότε, από το πρώτο μέρος του Λήμματος,

$$L_W = L_{S(W)} \leq \frac{c}{n}\frac{1}{|S(W)|^{1+\frac{1}{n}}}\int_{S(W)}\|x\|_1 dx. \tag{3.3.45}$$

Παίρνοντας υπόψιν και τις $S(W)\subseteq T(B_Y^n)\subseteq B_1^n$ και $|B_1^n|^{1/n}\geq 1/n$, συμπεραίνουμε ότι

$$L_W\leq \frac{c|B_1^n|^{\frac{1}{n}}}{|S(W)|^{\frac{1}{n}}}\leq c\Big(\frac{|B_1^n|}{|T(B_Y^n)|}\Big)^{\frac{1}{n}}\Big(\frac{|T(B_Y^n)|}{|S(W)|}\Big)^{\frac{1}{n}}\leq cc_1 d(X_W,Y). \qquad \square$$

Θεώρημα 3.3.5 *Έστω $N \geq n(\log n)^2$. Για το τυχαίο K_N° ισχύει ότι $L_{K_N^\circ} \leq C$, όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 3.2.5 έχουμε $K_N \supseteq \left(c\sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}\right)Q_n$ για το τυχαίο K_N. Έπεται ότι

$$\|x\|_1 \leq \frac{c_1\sqrt{n}}{\sqrt{\log(N/n)}}\|x\|_{K_N^\circ} \tag{3.3.46}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.3.7 έχουμε ότι

$$L_{K_N^\circ} \leq \frac{c}{\sqrt{n\log(N/n)}}\frac{1}{|K_N^\circ|^{1+\frac{1}{n}}}\int_{K_N^\circ}\|x\|_{K_N^\circ}\,dx \leq \frac{c}{\sqrt{n\log(N/n)}|K_N^\circ|^{1/n}}. \tag{3.3.47}$$

Παίρνοντας υπόψιν μας και το Λήμμα 3.2.10, έχουμε το ζητούμενο. □

Παρατήρηση Ο Junge [22] έχει αποδείξει ότι αν X είναι ένας n-διάστατος υπόχωρος ενός N-διάστατου χώρου με 1-unconditional βάση, τότε

$$L_{B_X} \leq c\sqrt{\log(2N/n)} \tag{3.3.48}$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c > 0$. Η εκτίμηση αυτή εφαρμόζεται για κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα με N έδρες. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα για την $\mathcal{B}_N^*$ στην περίπτωση που $n \leq N \leq n(\log n)^2$, συνοψίζουμε ως εξής:

Πόρισμα 3.3.1 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c, C > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα:*

(α) *Αν $n \leq N \leq n(\log n)^2$, τότε $L_{K_N^\circ} \leq c\sqrt{\log(2N/n)} \leq C\sqrt{\log\log n}$.*

(β) *Αν $N \geq n(\log n)^2$, τότε $L_{K_N^\circ} \leq C$ για ένα τυχαίο K_N°.* □

Παρατηρήστε ότι έχουμε μια $\sqrt{\log\log n}$ εκτίμηση για το τυχαίο $X_N^* \in \mathcal{B}_N^*$, η οποία ισχύει για ολόκληρο το εύρος τιμών του N.

Ολοκληρώνουμε με κάποιες απλές εκτιμήσεις για την ισοτροπική σταθερά του K_N.

Πρόταση 3.3.2 *Έστω $N \geq n(\log n)^2$. Για το τυχαίο K_N ισχύει ότι*

$$L_{K_N} \leq C\frac{\min\{\log N, \sqrt{n}\}}{\sqrt{\log(N/n)}}, \tag{3.3.49}$$

όπου $C > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Αφού $d(X_N, \ell_\infty^n) \simeq \sqrt{n}/\sqrt{\log(N/n)}$ για το τυχαίο X_N, η εκτίμηση

$$L_{K_N} \leq c_1\sqrt{n}/\sqrt{\log(N/n)} \tag{3.3.50}$$

είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 3.3.7.

Αν το N δεν είναι μεγάλο, τότε επιχειρηματολογούμε διαφορετικά: θεωρούμε τον εξωτερικό λόγο όγκων

$$\mathrm{evr}(W) := \inf\left(\frac{|E|}{|W|}\right)^{1/n} \tag{3.3.51}$$

του W, όπου το infimum είναι πάνω από όλα τα ελλειψοειδή E που περιέχουν το W. Τότε, ισχύει το εξής.

Λήμμα 3.3.8 *Έστω $z_1, \ldots, z_N \in \mathbb{R}^n$. Αν $W = \mathrm{co}\{\pm z_1, \ldots, \pm z_N\}$, τότε*

$$L_W \leq c \log N \frac{\mathrm{evr}(W)}{\sqrt{n}} \tag{3.3.52}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Ο ισχυρισμός είναι αναλλοίωτος ως προς γραμμικούς μετασχηματισμούς, συνεπώς μπορούμε να υποθέσουμε ότι το W είναι ισοτροπικό. Έστω E το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το W. Υπάρχει συμμετρικός και θετικός $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε $T(E) = B_2^n$. Τότε,

$$\int_W \langle Tx, x\rangle dx = [\mathrm{tr}(T)] L_W^2 \geq n L_W^2 |\det T|^{1/n}. \tag{3.3.53}$$

Η ισότητα ισχύει λόγω της ισοτροπικής συνθήκης (3.3.34) και η ανισότητα λόγω της ανισότητας αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου για τις ιδιοτιμές του T. Από την άλλη πλευρά,

$$\begin{aligned}
\int_W \langle Tx, x\rangle dx &\leq \int_W \max_{y\in W} \langle Tx, y\rangle dx \\
&= \int_W \|Tx\|_{W^\circ} dx \\
&= \int_W \max_{j\leq N} |\langle z_j, Tx\rangle| dx \\
&= \int_W \max_{j\leq N} |\langle Tz_j, x\rangle| dx.
\end{aligned}$$

Είναι γνωστό ότι

$$\int_W \exp\left(\frac{|\langle x, \theta\rangle|}{cL_W}\right) dx \leq 2 \tag{3.3.54}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά (βλέπε [28]). Από την ανισότητα του Markov, για κάθε $t > 0$ έχουμε

$$\left|\{x \in W \mid |\langle x, \theta\rangle| \geq cL_W t\}\right| \leq 2e^{-t}. \tag{3.3.55}$$

Χρησιμοποιώντας την (3.3.55) και ένα επιχείρημα παρόμοιο με αυτό που χρησιμοποιήθηκε για την απόδειξη του άνω φράγματος στο Θεώρημα 3.2.7, βλέπουμε ότι

$$\int_W \max_{j\leq N} |\langle Tz_j, x\rangle| dx \leq (c\log N) L_W \cdot \max_{j\leq N} \|Tz_j\|_2. \tag{3.3.56}$$

Από την $z_j \in E$ έπεται ότι $\|Tz_j\|_2 \leq 1$, $j = 1, \ldots, N$. Άρα,

$$n|\det T|^{1/n} L_W \leq c\log N \tag{3.3.57}$$

και το ζητούμενο προκύπτει από τη σχέση $|\det T|^{-1/n}|B_2^n|^{1/n} = |E|^{1/n} = \mathrm{evr}(W)$.
□

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι $L_{K_N} \leq c_2\sqrt{\log(N/n)}$: παρατηρώντας ότι $K_N \subseteq \sqrt{n}B_2^n$ και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\left(c_3\sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}\right)Q_n \subseteq K_N$, βλέπουμε ότι

$$\mathrm{evr}(K_N) \leq \sqrt{n}\frac{|B_2^n|^{1/n}}{|K_N|^{1/n}} \leq \frac{c\sqrt{n}}{\sqrt{\log(N/n)}}. \tag{3.3.58}$$

Τότε, το Λήμμα 3.3.8 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Παρατήρηση Το διάστημα $n \leq N \leq n(\log n)^2$ καλύπτεται ως εξής: ο Junge [22] έχει αποδείξει ότι οι μοναδιαίες μπάλες των προβολών των N-διάστατων χώρων 1-unconditional βάση έχουν ισοτροπική σταθερά φραγμένη από $c\log N$. Επειδή το K_N είναι η μοναδιαία μπάλα προβολής του ℓ_1^N, βλέπουμε ότι $L_{K_N} \leq c\log n$ αν $N \leq n(\log n)^2$.

Βιβλιογραφία

[1] K.M. Ball, *Normed spaces with a weak Gordon-Lewis property*, Lecture Notes in Mathematics **1470**, Springer, Berlin (1991), 36-47.

[2] J. Bourgain, *On the distribution of polynomials on high dimensional convex sets*, Lecture Notes in Mathematics **1469**, Springer, Berlin (1991), 127-137.

[3] I. Bárány and Z. Füredi, *Computing the volume is difficult*, Discrete Comput. Geom. **2** (1987), 319-326.

[4] I. Bárány and A. Pór, *On 0-1 polytopes with many facets*, Advances in Math. **161** (2001), 209-228.

[5] Y. Benyamini and Y. Gordon, *Random factorization of operators between Banach spaces*, J. d'Anal. Math. **39** (1981), 45-74.

[6] J. Bourgain and V.D. Milman, *Distances between normed spaces, their subspaces and quotient spaces*, Integral Eq. Operator Th. **9** (1986), 31-46.

[7] K. Ball and A. Pajor, *Convex bodies with few faces*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 225-231.

[8] J. Bourgain, J. Lindenstrauss and V.D. Milman, *Approximation of zonoids by zonotopes*, Acta Math. **162** (1989), 73-141.

[9] S. Chevet, *Séries de variables aléatoires à valeur dans $E\check{\otimes}F$. Application aux produits d'espaces de Wiener abstraits*, Séminaire Maurey-Schwartz, Exp. 19, Ecole Polytechnique, Palaiseau (1977).

[10] B. Carl and A. Pajor, *Gelfand numbers of operators with values in Hilbert spaces*, Inventiones Math. **94** (1988), 459-504.

[11] M.E. Dyer, Z. Füredi and C. McDiarmid, *Volumes spanned by random points in the hypercube*, Random Structures Algorithms **3** (1992), 91-106.

[12] W.J. Davis, V.D. Milman and N. Tomczak-Jaegermann, *The distance between certain n-dimensional spaces*, Israel J. Math. **39** (1981), 1-15.

[13] T. Figiel and W.B. Johnson, *Large subspaces of ℓ_∞^n and estimates of the Gordon-Lewis constants*, Israel J. Math. **37** (1980), 92-112.

[14] T. Figiel and N. Tomczak-Jaegermann, *Projections onto Hilbertian subspaces of Banach spaces*, Israel J. Math. **33** (1979), 155-171.

[15] T. Figiel, S. Kwapien and A. Pelczynski, *Sharp estimates for the constants of local unconditional structure of Minkowski spaces*, Bull. Acad. Polon. Sci. **25** (1977), 1221-1226.

[16] T. Figiel, J. Lindenstrauss and V.D. Milman, *The dimension of almost spherical sections of convex bodies*, Acta Math. **139** (1977), 53-94.

[17] E.D. Gluskin, *The diameter of the Minkowski compactum is approximately equal to n*, Funct. Anal. Appl. **15** (1981), 72-73.

[18] E.D. Gluskin, *Finite dimensional analogues of spaces without basis*, Dokl. Akad. Nauk USSR **216** (1981), 1046-1050.

[19] E.D. Gluskin, *Extremal properties of orthogonal parallelepipeds and their applications to the geometry of Banach spaces*, Math. USSR Sbornik **64** (1989), 85-96.

[20] A.A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Concentration property on probability spaces*, Advances in Math. **156** (2000), 77-106.

[21] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187-204.

[22] M. Junge, *Proportional subspaces of spaces with unconditional basis have good volume properties*, in Geometric Aspects of Functional Analysis, Operator Theory: Advances and Applications **77** (1995), 121-129.

[23] J.-P.Kahane, *Some random series of functions*, Heath Math. Monographs, 1968. Cambridge Univ. Press, 1985, 2nd edition.

[24] B.S. Kashin, *Sections of some finite-dimensional sets and classes of smooth functions*, Izv. Akad. Nauk. SSSR Ser. Mat. **41** (1977), 334-351.

[25] G.Ya. Lozanovskii, *On some Banach lattices*, Siberian Math. J. **10** (1969), 419-431.

[26] D.R. Lewis, *Ellipsoids defined by Banach ideal norms*, Mathematika **26** (1979), 18-29.

[27] M.Ledoux and M.Talagrand, *Probability in Banach spaces*, Ergeb. Math. Grenzgeb., 3. Folge, Vol. 23 Springer, Berlin (1991).

[28] V.D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 64-104.

[29] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986), Springer, Berlin.

[30] G. Pisier, *Holomorphic semi-groups and the geometry of Banach spaces*, Ann. of Math. **115** (1982), 375-392.

[31] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[32] A. Pietsch, *Absolute p-summierende Abbildugen in normierten Raümen*, Studia Math. **28** (1967), 333-353.

[33] G. Schechtman, *Random embeddings of Euclidean spaces in sequence spaces*, Israel J. Math. **40** (1981), 187-192.

[34] S.J. Montgomery-Smith, *The distribution of Rademacher sums*, Proceedings of the AMS **109** (1990), 517-522.

[35] A.N. Shiryayev, Probability, (translated by R.P. Boas), Springer, Berlin (1984)

[36] Y.G Sinai, Probability Theory: An Introductory Course, (translated by D. Haughton), Springer, Berlin (1992).

[37] S.J. Szarek, *On the best constant in the Khintchine inequality*, Studia Math. **58** (1976), 197-208.

[38] S.J. Szarek, *On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of* ℓ_1^n, Bull. Acad. Polon. Sci. **26** (1978), 691-694.

[39] S.J. Szarek, *The finite dimensional basis problem, with an appendix on nets of Grassman manifold*, Acta Math. **159** (1983), 153-179.

[40] S.J. Szarek, *Spaces with large distance to* ℓ_∞^n *and random matrices*, Amer. J. Math. **112** (1990), 899-942.

[41] S.J. Szarek and N. Tomczak-Jaegermann, *On nearly Euclidean decompositions of some classes of Banach spaces*, Compositio Math. **40** (1980), 367-385.

[42] N. Tomczak-Jaegermann, *The Banach-Mazur distance between the trace classes* C_p^n, Proc. Amer. Math. Soc. **72** (1978), 305-308.

[43] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monographs **38** (1989), Pitman, London.

Κεφάλαιο 4

Τυχαία πολύτοπα μέσα σε ένα κυρτό σώμα

4.1 Quermassintegrals τυχαίων πολυτόπων

Θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και σταθεροποιούμε $N \geq n+1$. Επιλέγουμε N τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το K και γράφουμε $C(x_1, \ldots, x_N)$ για την κυρτή τους θήκη. Η ροπή p-τάξης του όγκου του τυχαίου πολυτόπου $C(x_1, \ldots, x_N)$ είναι η ποσότητα

$$\mathbb{E}_p(K,N) = \int_K \cdots \int_K |C(x_1, \ldots, x_N)|^p dx_N \ldots dx_1. \tag{4.1.1}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $\mathbb{E}_p(T(K),N) = \mathbb{E}_p(K,N)$ για κάθε αφφινικό μετασχηματισμό T του $\mathbb{R}^n$ που διατηρεί τον όγκο. Ένα από τα κλασικά προβλήματα των γεωμετρικών πιθανοτήτων (βλέπε [23]) είναι το εξής:

> *Για δοσμένα $p > 0$ και $N \geq n+1$, να βρεθούν εκείνες οι αφφινικές κλάσεις κυρτών σωμάτων K για τις οποίες ελαχιστοποιείται (αντίστοιχα, μεγιστοποιείται) η ποσότητα $\mathbb{E}_p(K,N)$.*

Ο Groemer [12], [13] απέδειξε ότι, για $p \geq 1$, η $\mathbb{E}_p(K,N)$ ελαχιστοποιείται αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές (η περίπτωση $n=2$, $N=3$ είχε μελετηθεί από τον Blaschke [1], [2]).

Θεώρημα (Groemer) *Έστω E ελλειψοειδές όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $p \geq 1$ και κάθε $N \geq n+1$, ισχύει*

$$\mathbb{E}_p(E,N) \leq \mathbb{E}_p(K,N)$$

με ισότητα αν και μόνο αν το K είναι ελλειψοειδές. □

Αφήνοντας το $p \to \infty$, παίρνουμε ένα προγενέστερο αποτέλεσμα του Macbeath [17]: Αν $|K| = 1$ και $N \geq n+1$, τότε η ποσότητα

$$\mathbb{E}_{\infty}(K,N) = \max\{|C(x_1,\ldots,x_N)| \,:\, x_1,\ldots,x_N \in K\} \tag{4.1.2}$$

(ο μέγιστος δυνατός όγκος κυρτής θήκης N σημείων από το K) ελαχιστοποιείται όταν το K είναι ελλειψοειδές.

Πολύ λιγότερα είναι γνωστά για το μέγιστο της $\mathbb{E}_p(K,N)$. Στην περίπτωση του επιπέδου, για κάθε $N \geq 3$ η ποσότητα $\mathbb{E}_1(K,N)$ μεγιστοποιείται αν και μόνο αν το K είναι τρίγωνο: στην [10] αποδεικνύεται ότι η $\mathbb{E}_1(K,N)$ είναι μέγιστη αν το K είναι τρίγωνο, ενώ στην [11] αποδεικνύεται ότι τα τρίγωνα είναι τα μόνα «σημεία μεγίστου». Το ερώτημα είναι τελείως ανοικτό για όλες τις διαστάσεις $n \geq 3$.

Σε αυτήν την παράγραφο γενικεύουμε το θεώρημα του Groemer προς δύο κατευθύνσεις:

1. Στη θέση του όγκου θεωρούμε τυχόν quermassintegral W_i, $i = 0,1,\ldots,n-1$ του τυχαίου πολυτόπου $C(x_1,\ldots,x_N)$ (ορισμοί και συμβολισμός θα ακολουθήσουν παρακάτω).
2. Στη θέση της συνάρτησης $x \mapsto x^p$, $p \geq 1$, θεωρούμε τυχούσα γνησίως αύξουσα και συνεχή συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$.

Η ακριβής διατύπωση έχει ως εξής:

Θεώρημα 4.1.1 *Έστω $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση. Για κάθε $n \geq 2$, $N \geq n+1$ και $0 \leq i \leq n-1$, ορίζουμε*

$$\mathbb{E}(K,N,f\circ W_i) = \int_K \cdots \int_K f[W_i(C(x_1,\ldots,x_N))]dx_N \ldots dx_1. \tag{4.1.3}$$

Τότε,

$$\mathbb{E}(K,N,f\circ W_i) \geq \mathbb{E}(B,N,f\circ W_i), \tag{4.1.4}$$

για κάθε κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, όπου B είναι η μπάλα όγκου 1.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1 παρουσιάζεται στην §4.1.1 και βασίζεται στη μέθοδο της συμμετρικοποίησης Steiner: θα δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}(K,N,f\circ W_i) \geq \mathbb{E}(S(K,\theta),N,f\circ W_i) \tag{4.1.5}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$, όπου $S(K,\theta)$ είναι η συμμετρικοποίηση Steiner του K στη διεύθυνση του θ. Βασικό ρόλο θα παίξει ο ολοκληρωτικός τύπος του Kubota ο οποίος μας επιτρέπει να εκφράσουμε τα quermassintegrals του τυχαίου πολυτόπου

$C(x_1, \ldots, x_N)$ ως ολοκληρώματα των όγκων των προβολών του. Κατ' αυτόν τον τρόπο, το πρόβλημα «ανάγεται στην περίπτωση του όγκου».

Ας σημειώσουμε ότι στην περίπτωση του όγκου, αυτή η γενίκευση του θεωρήματος του Groemer είχε γίνει από τον Schöpf [24] στην περίπτωση $N = n+1$ (και, πρόσφατα, στην [16] για κάθε $N > n$).

Στην §4.1.2 θα δείξουμε ότι αν $i \geq 1$ και αν η f είναι κυρτή και γνησίως αύξουσα τότε η μπάλα B όγκου 1 (και οι μεταφορές της) είναι το μοναδικό κυρτό σώμα για το οποίο η $\mathbb{E}(K, N, f \circ W_i)$ παίρνει ελάχιστη τιμή. Ακόμα ισχυρότερα, αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 4.1.2 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ας υποθέσουμε ότι το K δεν είναι μπάλα. Τότε, υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $N \geq n+1$, για κάθε $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ και για κάθε γνησίως αύξουσα κυρτή συνάρτηση $f : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ έχουμε*

$$\mathbb{E}(S(K, \theta), N, f \circ W_i) < \mathbb{E}(K, N, f \circ W_i), \tag{4.1.6}$$

όπου $S(K, \theta)$ είναι η συμμετρικοποίηση Steiner του K στη διεύθυνση του θ.

Η ιδιότητα της μπάλας που επιτρέπει αυτό το αποτέλεσμα μοναδικότητας είναι γνωστή (βλέπε [3]): Ένα κυρτό σώμα K είναι μπάλα αν και μόνο αν το «σύνολο των μέσων» του K ως προς κάθε ευθεία (βλέπε §4.1.2 για τον ορισμό) περιέχεται σε υπερεπίπεδο κάθετο προς αυτή την ευθεία. Αν αφαιρέσουμε την απαίτηση της «καθετότητας», τότε αυτή η ιδιότητα χαρακτηρίζει τα ελλειψοειδή και χρησιμοποιήθηκε απο τον Groemer για την απόδειξη της μοναδικότητας στο θεώρημά του (περίπτωση $i = 0$ και $p \geq 1$).

Ορισμοί και συμβολισμός: Θα δουλέψουμε στον $\mathbb{R}^n$, ο οποίος είναι εφοδιασμένος με ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Η κλάση όλων των συμπαγών κυρτών υποσυνόλων του $\mathbb{R}^n$ συμβολίζεται με $\mathcal{K}_n$. Θα γράφουμε B_2^n και S^{n-1} για τη μοναδιαία μπάλα και τη μοναδιαία σφαίρα του $\mathbb{R}^n$ αντίστοιχα. Θα συμβολίζουμε με $G_{n,k}$ την πολλαπλότητα Grassmann όλων των k-διάστατων υποχώρων του $\mathbb{R}^n$, εφοδιασμένη με το μέτρο πιθανότητας Haar $\nu_{n,k}$. Θα γράφουμε $|K|$ για τον όγκο ενός κυρτού σώματος K (η διάσταση του σώματος θα είναι πάντα σαφής) και ω_n για τον όγκο της n-διάστατης Ευκλείδειας μοναδιαίας μπάλας.

Έστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο τύπος του Steiner, ο οποίος είναι ειδική περίπτωση του κλασικού θεωρήματος του Minkowski για τους μεικτούς όγκους, ισχυρίζεται ότι ο όγκος του $K + tB_2^n$, $t > 0$, μπορεί να γραφεί σαν πολυώνυμο του t:

$$|K + tB_2^n| = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} W_i(K) t^i.$$

Το i-οστό quermassintegral του K είναι ο μεικτός όγκος $W_i(K) = V(K; n-i, B_2^n; i)$ που εμφανίζεται σ' αυτόν τον τύπο (ο αναγνώστης μπορεί να ανατρέξει στο βιβλίο του Schneider [22] για τη θεωρία των μεικτών όγκων). Δύο από τα quermassintegrals, τα W_1 και W_{n-1}, είναι ιδιαίτερα σημαντικά: η επιφάνεια του K ισούται με $\partial(K) = nW_1(K)$, ενώ το μέσο πλάτος $w(K)$ του K ισούται με $w(K) = (2/\omega_n)W_{n-1}(K)$.

Θα χρησιμοποιήσουμε κάποιες βασικές ιδιότητες των quermassintegrals: είναι μονότονα, συνεχή ως προς τη μετρική Hausdorff, και ομογενή βαθμού $n-i$. Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον ολοκληρωτικό τύπο του Kubota: για κάθε $1 \leq i \leq n-1$, έχουμε

$$W_i(K) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-i}} \int_{G_{n,n-i}} |P_E(K)| \, \nu_{n,n-i}(dE). \tag{4.1.7}$$

Εδώ, με $P_E(K)$ συμβολίζουμε την ορθογώνια προβολή του K στον E.

4.1.1 Συμμετρικοποίηση Steiner: το Θεώρημα 4.1.1

Για κάθε μη μηδενικό $\theta \in \mathbb{R}^n$ γράφουμε $H(\theta)$ ή $\theta^\perp$ για τον υπόχωρο $\{x : \langle x, \theta \rangle = 0\}$. Σταθεροποιούμε μια N-άδα $Y = (y_1, \ldots, y_N)$ σημείων στον $H(\theta)$ και θεωρούμε τη συνάρτηση $F_Y : \mathbb{R}^N \to [0, +\infty)$ που ορίζεται ως εξής:

$$F_Y(t_1, \ldots, t_N) = |C(y_1 + t_1\theta, \ldots, y_N + t_N\theta)|. \tag{4.1.8}$$

Το επιχείρημα του Groemer [13] βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα:

Λήμμα 4.1.1 *Η F_Y είναι κυρτή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^N$.*

Απόδειξη: Έστω $T = (t_1, t_2, \ldots, t_N) \in \mathbb{R}^N$. Δεδομένου ότι τα $y_1, \ldots, y_N \in H(\theta)$ είναι σταθερά, στη διάρκεια αυτής της απόδειξης θα γράφουμε $C(t_1, \ldots, t_N)$ αντί για $C(y_1 + t_1\theta, \ldots, y_N + t_N\theta)$. Για κάθε $y \in P_{H(\theta)}C(t_1, \ldots, t_N)$ θεωρούμε την «κάτω» συνάρτηση του $C(t_1, \ldots, t_N)$

$$f_T(y) = \min\{r \in \mathbb{R} : y + r\theta \in C(t_1, \ldots, t_N)\} \tag{4.1.9}$$

και την «άνω» συνάρτηση του $C(t_1, \ldots, t_N)$

$$g_T(y) = \max\{r \in \mathbb{R} : y + r\theta \in C(t_1, \ldots, t_N)\}. \tag{4.1.10}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι η f_T είναι κυρτή, η g_T είναι κοίλη, και $f_T \leq g_T$. Επιπλέον, για κάθε $T = (t_1, \ldots, t_N), S = (s_1, \ldots, s_N) \in \mathbb{R}^N$ έχουμε

$$P_{H(\theta)}C(t_1, \ldots, t_N) = P_{H(\theta)}C(s_1, \ldots, s_N) = C(0, \ldots, 0) \tag{4.1.11}$$

και για κάθε $T \in \mathbb{R}^N$ μπορούμε να γράψουμε

$$C(t_1, \ldots, t_N) = \{y + r\theta : y \in C(0, \ldots, 0),\ f_T(y) \leq r \leq g_T(y)\}. \tag{4.1.12}$$

Ο όγκος του $C(t_1,\dots,t_N)$ ισούται με

$$|C(t_1,\dots,t_N)| = \|\theta\|_2 \int_{C(0,\dots,0)} \big(g_T(y)-f_T(y)\big)dy. \tag{4.1.13}$$

Έστω $T,S\in\mathbb{R}^N$. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f=\frac{f_T+f_S}{2} \quad \text{και} \quad g=\frac{g_T+g_S}{2}$$

στο $C(0,\dots,0)$. Είναι φανερό ότι η f είναι κυρτή, η g είναι κοίλη, και $f\le g$. Τέλος, ορίζουμε το κυρτό σώμα

$$L=\{y+r\theta : y\in C(0,...,0) \text{ και } f(y)\le r\le g(y)\}. \tag{4.1.14}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $y_i+\frac{t_i+s_i}{2}\theta\in L$ για κάθε $i\le N$. Αφού το L είναι κυρτό, η κυρτή θήκη αυτών των σημείων είναι υποσύνολο του L, δηλαδή

$$C\left(\frac{t_1+s_1}{2},\dots,\frac{t_N+s_N}{2}\right)\subseteq L. \tag{4.1.15}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} F_Y\left(\frac{T+S}{2}\right) &\le |L| = \|\theta\|_2\int_{C(0,\dots,0)}\big(g(y)-f(y)\big)dy \\ &= \frac{\|\theta\|_2}{2}\int_{C(0,\dots,0)}\big(g_T(y)-f_T(y)\big)dy \\ &\quad +\frac{\|\theta\|_2}{2}\int_{C(0,\dots,0)}\big(g_S(y)-f_S(y)\big)dy \\ &= \frac{F_Y(T)+F_Y(S)}{2}. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η F_Y είναι κυρτή. □

Έστω E ένας s-διάστατος υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε μια δεύτερη συνάρτηση $F_{E,Y}:\mathbb{R}^N\to[0,+\infty)$ ως εξής:

$$F_{E,Y}(t_1,\dots,t_N)=|P_E(C(y_1+t_1\theta,\dots,y_N+t_N\theta))|_s, \tag{4.1.16}$$

όπου $|\cdot|_s$ συμβολίζει τον s-διάστατο όγκο.

Λήμμα 4.1.2 *Η συνάρτηση $F_{E,Y}$ είναι κυρτή στον $\mathbb{R}^N$.*

Απόδειξη: Γράφουμε $u=P_E(\theta)$ και $w_i=P_E(y_i)$, $i=1,\dots,N$. Τότε,

$$P_E(C(y_1+t_1\theta,\dots,y_N+t_N\theta))=C(w_1+t_1u,\dots,w_N+t_Nu). \tag{4.1.17}$$

Αν $u = 0$, τότε $F_{E,Y}(t_1, \ldots, t_N) = |C(w_1, \ldots, w_N)|$ για κάθε $T = (t_1, \ldots, t_N)$, επομένως η $F_{E,Y}$ είναι (σταθερή) κυρτή συνάρτηση.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι $u \neq 0$. Για κάθε $i = 1, \ldots, N$ μπορούμε να γράψουμε το w_i στη μορφή $w_i = z_i + s_i u$, όπου $z_i \perp u$ και $s_i \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$F_{E,Y}(t_1, \ldots, t_N) = |C(z_1 + (s_1 + t_1)u, \ldots, z_N + (s_N + t_N)u)|, \tag{4.1.18}$$

Εφαρμόζοντας το Λήμμα 4.1.1 στον E (με τα z_i και u να παίζουν το ρόλο των y_i και θ αντίστοιχα), συμπεραίνουμε ότι η $F_{E,Y}$ είναι κυρτή. $\square$

Λήμμα 4.1.3 *Έστω $\theta \neq 0$ και $y_1, \ldots, y_N \in H(\theta)$. Για κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$, η συνάρτηση*

$$F_{Y,i}(t_1, \ldots, t_N) = W_i(C(y_1 + t_1\theta, \ldots, y_N + t_N\theta)) \tag{4.1.19}$$

είναι άρτια και κυρτή.

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα ότι η $F_{Y,i}$ είναι κυρτή. Η περίπτωση $i = 0$ καλύπτεται από το Λήμμα 4.1.1. Αν $i > 0$, εφαρμόζουμε τον ολοκληρωτικό τύπο του Kubota

$$W_i(A) = \frac{\omega_n}{\omega_{n-i}} \int_{G_{n,n-i}} |P_E(A)| \nu_{n,n-i}(dE)$$

στα σώματα $C(y_1 + t_1\theta, \ldots, y_N + t_N\theta)$. Έχουμε

$$\begin{aligned}
F_{Y,i}(t_1, \ldots, t_N) &= W_i(C(y_1 + t_1\theta, \ldots, y_N + t_N\theta)) \\
&= \frac{\omega_n}{\omega_{n-i}} \int_{G_{n,n-i}} |P_E(C(y_1 + t_1\theta, \ldots, y_N + t_N\theta))| \nu_{n,n-i}(dE) \\
&= \frac{\omega_n}{\omega_{n-i}} \int_{G_{n,n-i}} F_{E,Y}(t_1, \ldots, t_N) \nu_{n,n-i}(dE),
\end{aligned}$$

και η κυρτότητα της $F_{Y,i}$ έπεται από το Λήμμα 4.1.2.

Για να δείξουμε ότι η $F_{Y,i}$ είναι άρτια, παρατηρούμε ότι το $C(\{y_j + t_j\theta : j \leq N\})$ είναι ανάκλαση του $C(\{y_j - t_j\theta : j \leq N\})$ ως προς το $H(\theta)$ και χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι $W_i(A) = W_i(U(A))$ για κάθε $U \in O(n)$ και κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$. $\square$

Σταθεροποιούμε θετικούς πραγματικούς αριθμούς $r_1, \ldots, r_N$ και θεωρούμε το παραλληλεπίπεδο

$$Q = \{S = (s_1, \ldots, s_N) : |s_j| \leq r_j,\ j = 1, \ldots, N\}. \tag{4.1.20}$$

Λήμμα 4.1.4 *Για κάθε $B \in \mathbb{R}^N$ και $\alpha > 0$, ορίζουμε*

$$Q(B, \alpha) = \{S \in Q : F_{Y,i}(B + S) \leq \alpha\}. \tag{4.1.21}$$

Έστω $\lambda \in (0, 1)$. Αν $B, B' \in \mathbb{R}^N$ και $Q(B, \alpha), Q(B', \alpha) \neq \emptyset$, τότε

$$|Q(\lambda B + (1-\lambda)B', \alpha)|^{1/n} \geq \lambda |Q(B, \alpha)|^{1/n} + (1-\lambda)|Q(B', \alpha)|^{1/n}. \tag{4.1.22}$$

Απόδειξη: Έστω $S \in Q(B,\alpha)$ και $S' \in Q(B',\alpha)$. Χρησιμοποιώντας την κυρτότητα της $F_{Y,i}$ βλέπουμε ότι

$$F_{Y,i}(\lambda(B+S)+(1-\lambda)(B'+S')) \leq \lambda F_{Y,i}(B+S)+(1-\lambda)F_{Y,i}(B'+S') \leq \alpha.$$

Συνεπώς,

$$Q(\lambda B+(1-\lambda)B',\alpha) \supseteq \lambda Q(B,\alpha)+(1-\lambda)Q(B',\alpha) \tag{4.1.23}$$

και το αποτέλεσμα έπεται από την ανισότητα Brunn-Minkowski. □

Λήμμα 4.1.5 *Έστω $0 \neq \theta \in \mathbb{R}^n$ και $y_1,\dots,y_N \in H(\theta)$. Για κάθε $B \in \mathbb{R}^N$ και για κάθε $\alpha > 0$,*

$$|Q(O,\alpha)| \geq |Q(B,\alpha)|, \tag{4.1.24}$$

όπου O είναι η αρχή των αξόνων στον $\mathbb{R}^N$.

Απόδειξη: Αν το $Q(B,\alpha)$ είναι κενό, το συμπέρασμα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο. Διαφορετικά, παρατηρούμε ότι $Q(-B,\alpha)=-Q(B,\alpha)$ (επειδή η $F_{Y,i}$ είναι άρτια) και εφαρμόζουμε το Λήμμα 4.1.4 με $B'=-B$ και $\lambda=1/2$. □

Έστω τώρα K ένα κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta \in S^{n-1}$. Γράφουμε $P_\theta(K)$ για την ορθογώνια προβολή του K στον $H(\theta)$. Για κάθε $y \in P_\theta(K)$ θεωρούμε το (ενδεχομένως εκφυλισμένο) ευθύγραμμο τμήμα $\ell(K,y) := K \cap (y+\mathbb{R}\theta)$. Γράφουμε $2r(y)$ για το μήκος και $y+b(y)\theta$ για το μέσο του $\ell(K,y)$ αντίστοιχα.

Η συμμετρικοποίηση Steiner $S(K,\theta)$ του K στη διεύθυνση του θ είναι το κυρτό σώμα που ορίζεται από τις εξής συνθήκες:

1. $P_\theta(S(K,\theta)) = P_\theta(K) = P$.
2. Για κάθε $y \in P$, το μήκος και το μέσο του $\ell(S(K,\theta),y)$ είναι $2r'(y)=2r(y)$ και y (δηλαδή, $b'(y)=0$) αντίστοιχα.

Για κάθε επιλογή σημείων $y_1,\dots,y_N \in P_\theta(K)$ θέτουμε

$$M_{K,\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N) = \int_{\ell(K,y_1)} \cdots \int_{\ell(K,y_N)} f[W_i(C(x_1,\dots,x_N))]dx_N \dots dx_1. \tag{4.1.25}$$

Τότε,

$$\mathbb{E}(K,N,f\circ W_i) = \int_{P_\theta(K)} \cdots \int_{P_\theta(K)} M_{K,\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N)dy_N \dots dy_1. \tag{4.1.26}$$

Λήμμα 4.1.6 *Έστω $y_1,\dots,y_N \in P_\theta(K)$. Τότε, για κάθε συνεχή γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f:[0,+\infty) \to [0,+\infty)$ και κάθε $i=0,1,\dots,n-1$,*

$$M_{K,\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N) \geq M_{S(K,\theta),\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N). \tag{4.1.27}$$

Απόδειξη: Έστω $Q = \{S = (s_1, \ldots, s_N) : |s_j| \leq r(y_j),\ j = 1, \ldots, N\}$. Με το συμβολισμό των προηγουμένων λημμάτων, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} M_{K,\theta,f\circ W_i}(y_1, \ldots, y_N) &= \int_Q f[F_{Y,i}(B+S)]dS \\ &= \int_0^\infty |\{S \in Q : F_{Y,i}(B+S) \geq f^{-1}(t)\}|dt \\ &= \int_0^\infty \left(|Q| - |Q(B, f^{-1}(t))|\right) dt. \end{aligned}$$

Από τον ορισμό του $S(K,\theta)$,

$$M_{S(K,\theta),\theta,f\circ W_i}(y_1, \ldots, y_N) = \int_Q f[F_{Y,i}(S)]dS = \int_0^\infty \left(|Q| - |Q(O, f^{-1}(t))|\right) dt,$$

και το αποτέλεσμα έπεται από το Λήμμα 4.1.5. □

Το Λήμμα 4.1.6 και η σχέση (4.1.26) δείχνουν ότι η ποσότητα $\mathbb{E}(K, N, f \circ W_i)$ μικραίνει με κάθε συμμετρικοποίηση Steiner.

Θεώρημα 4.1.3 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta \in S^{n-1}$. Αν $S(K,\theta)$ είναι η συμμετρικοποίηση Steiner του K στη διεύθυνση του θ, τότε*

$$\mathbb{E}(S(K,\theta), N, f \circ W_i) \leq \mathbb{E}(K, N, f \circ W_i) \tag{4.1.28}$$

για κάθε συνεχή γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ και κάθε $i = 0, 1, \ldots, n-1$. □

Για κάθε κυρτό σώμα K υπάρχει ακολουθία διαδοχικών συμμετρικοποιήσεων Steiner του K η οποία συγκλίνει σε μπάλα ως προς την Hausdorff μετρική. Συνεπώς, το Θεώρημα 4.1.3 δείχνει ότι η $\mathbb{E}(K, N, f \circ W_i)$ ελαχιστοποιείται στην περίπτωση της μπάλας.

Θεώρημα 4.1.4 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 και έστω B η μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$\mathbb{E}(K, N, f \circ W_i) \geq \mathbb{E}(B, N, f \circ W_i) \tag{4.1.29}$$

για κάθε συνεχή γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ και για όλα τα $i = 0, 1, \ldots, n-1$. □

Σαν εφαρμογή παίρνουμε τη γενίκευση ενός αποτελέσματος του Macbeath. Ας υποθέσουμε ότι $|K| = |B| = 1$. Αν πάρουμε $f_p(x) = x^p$, $p > 0$ στο Θεώρημα 4.1.4, βλέπουμε ότι η

$$\left(\int_K \cdots \int_K [W_i(C(x_1, \ldots, x_N))]^p dx_N \ldots dx_1\right)^{1/p}$$

ελαχιστοποιείται στην B. Περνώντας στο όριο καθώς $p \to \infty$, έχουμε το εξής.

Πόρισμα 4.1.1 *Έστω $|K| = 1$ και $0 \leq i \leq n-1$. Για κάθε $N > n$ η μέγιστη τιμή του i-οστού quermassintegral της κυρτής θήκης N σημείων από το K είναι ελάχιστη όταν το K είναι μπάλα.* □

4.1.2 Μοναδικότητα: το Θεώρημα 4.1.2

Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\theta \in S^{n-1}$. Αν μια ευθεία L παράλληλη στο θ τέμνει το K, τότε η τομή είναι ένα (ενδεχομένως εκφυλισμένο) ευθύγραμμο τμήμα. Συμβολίζουμε με $M(K,\theta)$ το σύνολο των μέσων όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων. Τότε, ισχύει ο ακόλουθος χαρακτηρισμός των ελλειψοειδών (ή της μπάλας αντίστοιχα, βλέπε [3] - επίσης [14]):

Λήμμα 4.1.7 *Έστω K κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το K είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν γιά κάθε $\theta \in S^{n-1}$ το σύνολο των «μέσων» $M(K,\theta)$ περιέχεται σε υπερεπίπεδο. Το K είναι μπάλα αν και μόνο αν γιά κάθε $\theta \in S^{n-1}$ το σύνολο των «μέσων» $M(K,\theta)$ περιέχεται σε υπερεπίπεδο το οποίο είναι κάθετο στο θ.* □

Χρησιμοποιώντας αυτό το χαρακτηρισμό, θα δείξουμε ότι αν το K δεν είναι μπάλα, τότε υπάρχει κατάλληλη συμμετρικοποίηση Steiner $S(K,\theta)$ του K με την εξής ιδιότητα: για κάθε κυρτή γνησίως αύξουσα f και κάθε $i = 1,\dots,n-1$,

$$\mathbb{E}(S(K,\theta), N, f\circ W_i) < \mathbb{E}(K, N, f\circ W_i). \tag{4.1.30}$$

Λήμμα 4.1.8 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν το K δεν είναι ελλειψοειδές, μπορούμε να βρούμε $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $N \geq n+1$ υπάρχουν $y_1,\dots,y_N \in P_\theta(K)$ με*

$$F_{Y,i}(0,\dots,0) < F_{Y,i}(b_1,\dots,b_N) \tag{4.1.31}$$

για κάθε $i = 0,1,\dots,n-1$, όπου $y_j + b_j\theta$ είναι το μέσο του $K\cap(y_j+\mathbb{R}\theta)$. Αν το K δεν είναι μπάλα, μπορούμε να βρούμε $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε: για κάθε $N \geq n+1$ υπάρχουν $y_1,\dots,y_N \in P_\theta(K)$ τέτοια ώστε η (4.1.31) να ισχύει για κάθε $i = 1,\dots,n-1$.

Απόδειξη: (α) Αν το K δεν είναι ελλειψοειδές, υπάρχει ένα $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε το $M(K,\theta)$ να μην περιέχεται σε υπερεπίπεδο. Αυτό σημαίνει ότι για κάθε $N \geq n+1$ μπορούμε να βρούμε $y_1,\dots,y_N \in P_\theta(K)$ τέτοια ώστε

$$F_{Y,0}(b_1,\dots,b_N) = |C(y_1+b_1\theta,\dots,y_N+b_N\theta)| > 0. \tag{4.1.32}$$

Σταθεροποιούμε $i \in \{0,1,\dots,n-1\}$ και $E \in G_{n,n-i}$. Από το Λήμμα 4.1.2, η $F_{E,Y}$ είναι κυρτή συνάρτηση στον $\mathbb{R}^N$. Συνεπώς,

$$2F_{E,Y}(0,\dots,0) \leq F_{E,Y}(b_1,\dots,b_N) + F_{E,Y}(-b_1,\dots,-b_N). \tag{4.1.33}$$

Επιπλέον, αν $\theta \in E$ έχουμε γνήσια ανισότητα στην (4.1.33): Το δεξιό μέλος της παραπάνω σχέσης είναι γνήσια θετικό γιατί το $C(y_1 + b_1\theta, \ldots, y_N + b_N\theta)$ έχει μη κενό εσωτερικό, ενώ το αριστερό μέλος της μηδενίζεται.

Για κάθε $A \in \mathcal{K}_n$, η συνάρτηση $E \mapsto P_E(A)$ είναι συνεχής στην $G_{n,n-i}$. Από τον τύπο του Kubota και την (4.1.33) βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} 2F_{Y,i}(0,\ldots,0) &= \frac{2\omega_n}{\omega_{n-i}} \int_{G_{n,n-i}} F_{E,Y}(0,\ldots,0)\nu_{n,n-i}(dE) \\ &< \frac{\omega_n}{\omega_{n-i}} \int_{G_{n,n-i}} F_{E,Y}(b_1,\ldots,b_N)\nu_{n,n-i}(dE) \\ &\quad + \frac{\omega_n}{\omega_{n-i}} \int_{G_{n,n-i}} F_{E,Y}(-b_1,\ldots,-b_N)\nu_{n,n-i}(dE) \\ &= 2F_{Y,i}(b_1,\ldots,b_N), \end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η $F_{Y,i}$ είναι άρτια.

(β) Τέλος, ας υποθέσουμε ότι το K είναι ελλειψοειδές αλλά όχι μπάλα. Μπορούμε να βρούμε ένα $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε το $M(K,\theta)$ να περιέχεται σε ένα υπερεπίπεδο με κάθετο διάνυσμα $u \neq \pm\theta$. Για δοσμένο $N \geq n+1$, επιλέγουμε $y_1,\ldots,y_N \in P_\theta(K)$ τέτοια ώστε η κυρτή θήκη των μέσων $y_j + b_j\theta$ να έχει διάσταση $n-1$. Αν $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ και αν επιλέξουμε $E \in G_{n,n-i}$ έτσι ώστε $\theta \in E$ αλλά $u \notin E$, τότε

$$F_{E,Y}(0,\ldots,0) = 0 < F_{E,Y}(b_1,\ldots,b_N). \tag{4.1.34}$$

Ακολουθώντας τα βήματα του (α) και χρησιμοποιώντας τις (4.1.33) και (4.1.34) παίρνουμε την (4.1.31). □

Θεώρημα 4.1.5 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Ας υποθέσουμε ότι το K δεν είναι μπάλα. Τότε, υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ με την ακόλουθη ιδιότητα: για κάθε $N \geq n+1$, για κάθε $i \in \{1,\ldots,n-1\}$ και για κάθε κυρτή γνησίως αύξουσα συνάρτηση $f : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ έχουμε*

$$\mathbb{E}(S(K,\theta), N, f\circ W_i) < \mathbb{E}(K, N, f\circ W_i),$$

όπου $S(K,\theta)$ είναι η συμμετρικοποίηση Steiner του K στη διεύθυνση του θ.

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι τα N, i και f είναι δοσμένα (μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(0)=0$). Από το Θεώρημα 4.1.3 έχουμε

$$\mathbb{E}(S(K,\theta), N, f\circ W_i) \leq \mathbb{E}(K, N, f\circ W_i). \tag{4.1.35}$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει ισότητα στην (4.1.35). Τότε, από το Λήμμα 4.1.6 έχουμε

$$M_{K,\theta,f\circ W_i}(z_1,\ldots,z_N) = M_{S(K,\theta),\theta,f\circ W_i}(z_1,\ldots,z_N) \tag{4.1.36}$$

για κάθε επιλογή σημείων $z_1,\dots,z_N \in P_\theta(K)$. Επιλέγουμε $y_j \in P_\theta(K)$ τέτοια ώστε να ισχύει το Λήμμα 4.1.8. Γράφουμε

$$M_{K,\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N)=\int_Q f[F_{Y,i}(B+S)]dS \tag{4.1.37}$$

όπου $Q=\{S=(s_1,\dots,s_N):|s_j|\le r(y_j),\ j=1,\dots,N\}$. Εφόσον η $F_{Y,i}$ είναι κυρτή και η f είναι κυρτή και αύξουσα, έχουμε

$$2f[F_{Y,i}(S)]\le f[F_{Y,i}(B+S)]+f[F_{Y,i}(-B+S)] \tag{4.1.38}$$

για κάθε $S\in Q$, και το Λήμμα 4.1.8 δηλώνει ότι ισχύει γνήσια ανισότητα όταν $S=O$. Ολοκληρώνοντας στο Q βλέπουμε ότι

$$2M_{S(K,\theta),\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N)<M_{K,\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N)+M_{\tilde{K},\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N) \tag{4.1.39}$$

όπου $\tilde{K}$ είναι η ανάκλαση του K ως προς τον $\theta^\perp$. Από την (4.1.25) βλέπουμε εύκολα ότι

$$M_{K,\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N)=M_{\tilde{K},\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N) \tag{4.1.40}$$

και άρα,

$$M_{S(K,\theta),\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N)<M_{K,\theta,f\circ W_i}(y_1,\dots,y_N), \tag{4.1.41}$$

το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την (4.1.36). $\square$

4.2 Εκτιμήσεις για τον όγκο τυχαίου πολυτόπου: η περίπτωση των 1-unconditional σωμάτων

Όπως και στην προηγούμενη παράγραφο, θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, σταθεροποιούμε $N\ge n+1$, επιλέγουμε N τυχαία σημεία $x_1,\dots,x_N$ ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το K, και γράφουμε $C(x_1,\dots,x_N)$ για την κυρτή τους θήκη. Η μέση τιμή της «ακτίνας όγκου» του $C(x_1,\dots,x_N)$

$$\mathbb{F}(K,N)=\int_K\cdots\int_K |C(x_1,\dots,x_N)|^{1/n}dx_N\dots dx_1 \tag{4.2.1}$$

μελετήθηκε στην [16]:

Θεώρημα 4.2.1 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $N\ge n+1$,*

$$\mathbb{F}(K,N)\le CL_K\frac{\log(2N/n)}{\sqrt{n}}, \tag{4.2.2}$$

όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά και L_K είναι η σταθερά ισοτροπίας του K. $\square$

Στην προηγούμενη παράγραφο (Θεώρημα 4.1.1, περίπτωση $p = 1/n$, $i = 0$) είδαμε ότι η ποσότητα $\mathbb{F}(K,N)$ ελαχιστοποιείται όταν το K είναι ελλειψοειδές (το συγκεκριμένο αποτέλεσμα είχε αποδειχθεί στην [16]). Δεδομένου ότι η $\mathbb{F}(K,N)$ είναι αναλλοίωτη ως προς αφφινικούς μετασχηματισμούς που διατηρούν τον όγκο, εκτιμώντας από κάτω την $\mathbb{F}(B,N)$ παίρνουμε ένα γενικό κάτω φράγμα για την $\mathbb{F}(K,N)$. Μια τέτοια εκτίμηση δόθηκε στην [16]:

Θεώρημα 4.2.2 *Έστω B η μπάλα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Αν $n(\log n)^2 \leq N \leq \exp(cn)$, τότε*

$$\mathbb{F}(B,N) \geq c\frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}} \tag{4.2.3}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. □

Ορισμός Έστω $\alpha \in [1,2]$. Λέμε ότι ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 είναι ψ_α-σώμα με σταθερά b_α στη διεύθυνση του $y \neq 0$, αν

$$\left(\int_K |\langle x,y\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq b_\alpha p^{1/\alpha} \int_K |\langle x,y\rangle| dx \tag{4.2.4}$$

για κάθε $p \geq 1$. Λέμε ότι το K είναι ψ_α-σώμα με σταθερά b_α, αν η (4.2.4) ισχύει για κάθε $y \neq 0$ και κάθε $p \geq 1$.

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι αν το K είναι ψ_α-σώμα, τότε το ίδιο ισχύει για το $T(K)$, $T \in SL(n)$ (με την ίδια σταθερά b_α). Επίσης, το Λήμμα του Borell (βλέπε [19, Παράρτημα III]) δείχνει ότι κάθε κυρτό σώμα K είναι ψ_1-σώμα με σταθερά $b_1 \leq C$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά. Παραδείγματα ψ_2-σωμάτων με ομοιόμορφα φραγμένη σταθερά b_2 δίνουν οι μοναδιαίες μπάλες B_q^n των ℓ_q^n, $2 \leq q \leq \infty$ (βλέπε [6]).

Η μέθοδος απόδειξης του Θεωρήματος 4.2.1 δείχνει ότι αν το K είναι ψ_2-σώμα με σταθερά b_2, τότε ισχύει η ισχυρότερη ανισότητα

$$\mathbb{F}(K,N) \leq cb_2 L_K \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}, \tag{4.2.5}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Επιπλέον, ο Bourgain [4] έδειξε πρόσφατα ότι, σε αυτή την περίπτωση, $L_K \leq cb_2(\log b_2)^5$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι η «ακτίνα όγκου» ενός τυχαίου πολυτόπου μέσα σε ένα ψ_2-σώμα προσδιορίζεται πλήρως.

Θεώρημα 4.2.3 *Έστω K κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι το K είναι ψ_2-σώμα με σταθερά b_2. Τότε, αν $n(\log n)^2 \leq N \leq \exp(cn)$ έχουμε*

$$c\frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}} \leq \mathbb{F}(K,N) \leq Cb_2^2(\log b_2)^5 \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}, \tag{4.2.6}$$

όπου $c, C > 0$ είναι απόλυτες σταθερές. □

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε αντίστοιχα αποτελέσματα στην περίπτωση που το K είναι 1-unconditional σώμα ή ζωνοειδές. Η περίπτωση των ζωνοειδών είναι, όπως θα δούμε, απλή: η κρίσιμη ιδιότητά τους είναι η εξής: κάθε ζωνοειδές Z στον $\mathbb{R}^n$ έχει γραμμική εικόνα όγκου 1 που έχει διάμετρο της τάξης της $\sqrt{n}$. Τα 1-unconditional σώματα δεν εμπίπτουν σε καμμία από αυτές τις κατηγορίες: η μοναδιαία μπάλα B_1 του ℓ_1^n (κανονικοποιημένη ώστε να έχει όγκο 1) έχει διάμετρο της τάξης του n και η «ψ_2-σταθερά» της είναι της τάξης της $\sqrt{n}$.

4.2.1 1-unconditional σώματα

Έστω K 1-unconditional σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$. Εφόσον η $\mathbb{F}(K,N)$ είναι αναλλοίωτη ως προς την $SL(n)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η συνήθης ορθοκανονική βάση $\{e_1,\dots,e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ είναι 1-unconditional βάση για την $\|\cdot\|_K$ και ότι το K είναι ισοτροπικό, δηλαδή

$$\int_K \langle x,\theta\rangle^2 dx = L_K^2$$

για κάθε $\theta\in S^{n-1}$. Επιπλέον, είναι γνωστό (βλέπε [18]) ότι $L_K\leq C$, όπου $C>0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Οι ψ_2-ιδιότητες των ισοτροπικών 1-unconditional σωμάτων μελετήθηκαν πρόσφατα από τους Bobkov και Nazarov (βλέπε [7] και [8]).

Λήμμα 4.2.1 [8] *Έστω K ένα ισοτροπικό 1-unconditional σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $y\in\mathbb{R}^n$ και κάθε $p\geq 1$ ισχύει η ανισότητα*

$$\left(\int_K |\langle x,y\rangle|^p dx\right)^{1/p} \leq C\sqrt{p}\sqrt{n}\|y\|_\infty L_K. \tag{4.2.7}$$

Με άλλα λόγια, η ψ_2-σταθερά του K στη διεύθυνση του y ικανοποιεί την

$$b_2(y)\leq c\frac{\sqrt{n}\|y\|_\infty}{\|y\|_2} \tag{4.2.8}$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά. □

Παρατηρήστε ότι αν $y=(1,\dots,1)$ τότε $b_2(y)\leq c$, δηλαδή η «διαγώνια» διεύθυνση είναι ψ_2. Επίσης, κατά μέσο όρο το K έχει «λογαριθμική ψ_2-σταθερά»:

$$\int_{S^{n-1}} b_2(\theta)\,\sigma(d\theta)\simeq\sqrt{\log n}.$$

Το γεγονός αυτό θα χρησιμοποιηθεί για την εκτίμηση της $\mathbb{F}(K,N)$ όταν το N είναι αρκετά μεγάλο σε σχέση με τη διάσταση n (για παράδειγμα, όταν $N\geq n^2$).

Λήμμα 4.2.2 [7] *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $t_0 > 0$ και $c > 0$ τέτοιες ώστε: για κάθε ισοτροπικό 1-unconditional κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και κάθε $t \geq t_0$,*

$$\left|\left\{x \in K : \|x\|_2 \geq t\sqrt{n}\right\}\right| \leq \exp\left(-ct\sqrt{n}\right). \tag{4.2.9} \qquad \square$$

Το Λήμμα αυτό δείχνει ότι αν το N είναι αρκετά μικρό σε σχέση με τη διάσταση n (για παράδειγμα, όταν $N \leq n^2$) τότε N τυχαία σημεία $x_1, \ldots, x_N$ από το K βρίσκονται σε μια μπάλα ακτίνας της τάξης της $\sqrt{n}$, κάτι που εξασφαλίζει το σωστό φράγμα για την $\mathbb{F}(K, N)$ και σ' αυτή την περίπτωση.

Θα χρειαστούμε επίσης ακριβείς εκτιμήσεις για τον όγκο της κυρτής θήκης N σημείων και τον όγκο της τομής N συμμετρικών λωρίδων. Οι Bárány και Füredi [5] έχουν δείξει ένα άνω φράγμα για τον όγκο του $C(x_1, \ldots, x_N) = \mathrm{co}\{x_1, \ldots, x_N\}$ συναρτήσει του $\max \|x_i\|_2$:

Λήμμα 4.2.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: αν $N \geq n + 1$ και $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$, τότε*

$$|C(x_1, \ldots, x_N)|^{1/n} \leq c \cdot \max_{i \leq N} \|x_i\|_2 \cdot \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{n}. \tag{4.2.10} \qquad \square$$

Τέλος, οι Ball και Pajor [9] έχουν δείξει το εξής κάτω φράγμα για τον όγκο της τομής N συμμετρικών λωρίδων:

Λήμμα 4.2.4 *Έστω $x_1, \ldots, x_N \in \mathbb{R}^n$ και $1 \leq q < +\infty$. Αν $K(x_1, \ldots, x_N) = \mathrm{co}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_N\}$ είναι η απόλυτη κυρτή θήκη των x_i, τότε για το πολικό σώμα*

$$K^\circ(x_1, \ldots, x_N) = \{z \in \mathbb{R}^n : |\langle z, x_i \rangle| \leq 1 \ , \ i = 1, \ldots, N\} \tag{4.2.11}$$

ισχύει η ανισότητα

$$|K^\circ(x_1, \ldots, x_N)|^{1/n} \geq 2 \left(\frac{n+q}{n} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{|B_q^n|} \int_{B_q^n} |\langle z, x_j \rangle|^q dz \right)^{-1/q}. \tag{4.2.12} \qquad \square$$

Παρατηρήστε ότι, από την αντίστροφη ανισότητα Santaló (βλέπε [21]),

$$|K^\circ(x_1, \ldots, x_N)|^{1/n} \geq \frac{c}{n} |K(x_1, \ldots, x_N)|^{-1/n} \geq \frac{c}{n} |C(x_1, \ldots, x_N)|^{-1/n}. \tag{4.2.13}$$

Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να χρησιμοποιήσει το Λήμμα 4.2.3 για να εκτιμήσει τον $|K^\circ(x_1, \ldots, x_N)|$ από κάτω. Το Λήμμα 4.2.4 είναι όμως ακριβέστερο και, όπως θα φανεί παρακάτω, η δυνατότητα επιλογής κατάλληλης τιμής του q θα παίξει σημαντικό ρόλο.

Θεώρημα 4.2.4 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c, c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε: αν το K είναι 1-unconditional κυρτό σώμα όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και αν $n(\log n)^2 \leq N \leq \exp(cn)$, τότε*

$$c_1 \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}} \leq \mathbb{F}(K,N) \leq c_2 \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}. \tag{4.2.14}$$

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το K είναι ισοτροπικό. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις (μικρό και μεγάλο N):

(α) $N \leq n^2$: Έστω $t \geq t_0$, το οποίο θα επιλέξουμε κατάλληλα. Από το Λήμμα 4.2.2,

$$\mathrm{Prob}\left((x_1, \ldots, x_N) : \exists i \leq N \text{ τ.ω. } \|x_i\|_2 \geq t\sqrt{n}\right) \leq N \cdot \exp\left(-c_1 t\sqrt{n}\right). \tag{4.2.15}$$

Αν A είναι το ενδεχόμενο στην (4.2.15), χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.2.3 και το γεγονός ότι $|K| = 1$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(K,N) &= \int_A |C(x_1, \ldots, x_N)|^{1/n} + \int_{A^c} |C(x_1, \ldots, x_N)|^{1/n} \\
&\leq \mathrm{Prob}(A) + \mathrm{Prob}(A^c) \cdot c_2 t\sqrt{n} \cdot \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{n} \\
&\leq N \cdot \exp\left(-c_1 t\sqrt{n}\right) + c_2 t \cdot \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}.
\end{aligned}$$

Έχουμε υποθέσει ότι $N \leq n^2$, οπότε παρατηρούμε ότι

$$\exp\left(c_1 t\sqrt{n}\right) \geq \frac{c_1^6 t^6 n^3}{6!} \geq \frac{n \cdot N}{c_2 t\sqrt{\log 2}}$$

αν το $t \geq t_0$ επιλεγεί αρκετά μεγάλο (ανεξάρτητο από τα n και N). Έπεται ότι

$$\mathbb{F}(K,N) \leq (2c_2 t) \cdot \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}. \tag{4.2.16}$$

(β) $N \geq n^2$: Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Blaschke-Santaló (βλέπε [21]) γράφουμε

$$\mathbb{F}(K,N) \leq \mathbb{E}|K(x_1, \ldots, x_N)|^{1/n} \leq \omega_n^{2/n} \cdot \mathbb{E}|K^\circ(x_1, \ldots, x_N)|^{-1/n}. \tag{4.2.17}$$

Σύμφωνα με το Λήμμα 4.2.4, έχουμε

$$|K^\circ(x_1, \ldots, x_N)|^{-1/n} \leq \frac{1}{2}\left(\frac{n+q}{n}\sum_{j=1}^N \frac{1}{|B_q^n|}\int_{B_q^n} |\langle z, x_j\rangle|^q dz\right)^{1/q} \tag{4.2.18}$$

για κάθε $q \geq 1$. Χρησιμοποιώντας τις (4.2.17) και (4.2.18), εφαρμόζοντας την ανισότητα του Hölder και αλλάζοντας τη σειρά ολοκλήρωσης, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\mathbb{F}(K,N) &\leq \omega_n^{2/n} \int_{K\times\cdots\times K} \frac{1}{2}\left(\frac{n+q}{n}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{|B_q^n|}\int_{B_q^n}|\langle z,x_j\rangle|^q dz\right)^{1/q} dx_N\ldots dx_1 \\
&\leq \frac{\omega_n^{2/n}}{2}\left(\frac{n+q}{n}\sum_{j=1}^{N}\frac{1}{|B_q^n|}\int_{B_q^n}\int_{K\times\cdots\times K}|\langle z,x_j\rangle|^q dx_N\ldots dx_1\, dz\right)^{1/q} \\
&= \frac{\omega_n^{2/n}}{2}\left(\frac{N(n+q)}{n}\frac{1}{|B_q^n|}\int_{B_q^n}\int_K |\langle z,x\rangle|^q dx\, dz\right)^{1/q}.
\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 4.2.1 έχουμε

$$\int_K |\langle z,x\rangle|^q dx \leq \left[C\sqrt{q}\sqrt{n}\|z\|_\infty L_K\right]^q \tag{4.2.19}$$

για κάθε $z \in B_q^n$. Άρα,

$$\mathbb{F}(K,N) \leq \frac{\omega_n^{2/n}}{2} C\sqrt{q}\sqrt{n}L_K \cdot \left(\frac{N(n+q)}{n}\frac{1}{|B_q^n|}\int_{B_q^n}\|z\|_\infty^q dz\right)^{1/q}. \tag{4.2.20}$$

Παρατηρούμε ότι $\|z\|_\infty \leq \|z\|_q$ και

$$\begin{aligned}
\int_{B_q^n}\|z\|_q^q dz &= \int_0^1 qt^{q-1}|\{z\in B_q^n : \|z\|_q \geq t\}|dt \\
&= \int_0^1 qt^{q-1}|B_q^n \setminus tB_q^n|dt \\
&= |B_q^n|\int_0^1 qt^{q-1}(1-t^n)dt \\
&= \frac{n}{n+q}|B_q^n|.
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\frac{1}{|B_q^n|}\int_{B_q^n}\|z\|_\infty^q dz \leq \frac{1}{|B_q^n|}\int_{B_q^n}\|z\|_q^q dz = \frac{n}{n+q}. \tag{4.2.21}$$

Χρησιμοποιώντας τις (4.2.20) και (4.2.21), και παίρνοντας υπόψιν τις $\omega_n^{2/n} \leq c/n$ και $L_K \leq C_1$, καταλήγουμε στην

$$\mathbb{F}(K,N) \leq C_2\frac{\sqrt{q}}{\sqrt{n}} \cdot N^{1/q} \tag{4.2.22}$$

για κάθε $q \geq 1$. Επιλέγουμε $q = \log(2N/n)$. Αφού $N \geq n^2$, έχουμε

$$N^{1/q} = \exp\left(\frac{\log N}{\log(2N/n)}\right) \leq \exp\left(\frac{\log N}{\log(2\sqrt{N})}\right) \leq e^2. \tag{4.2.23}$$

Άρα,

$$\mathbb{F}(K,N) \leq C_3 \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}. \tag{4.2.24}$$

Συνδυάζοντας τα (α) και (β) παίρνουμε τη δεξιά ανισότητα του Θεωρήματος για κάθε $N \geq n+1$. Η αριστερή ανισότητα (μαζί με τους περιορισμούς για το N) προέρχεται από το Θεώρημα 4.2.2. □

Παρατηρήσεις: (α) Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι η ποσότητα $\mathbb{F}(K,N)$ είναι αύξουσα ποσότητα του N. Επίσης, από έναν κλασικό τύπο του Blaschke (βλέπε [16]) έπεται ότι

$$\mathbb{F}(K,n+1) \simeq \frac{L_K}{\sqrt{n}} \geq \frac{c}{\sqrt{n}} \tag{4.2.25}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Επομένως, για το εύρος τιμών $n+1 \leq N \leq n(\log n)^2$ έχουμε την ανισότητα

$$\mathbb{F}(K,N) \geq \frac{c}{\sqrt{n}}. \tag{4.2.26}$$

Αυτό το κάτω φράγμα υπολείπεται του «αναμενόμενου» φράγματος $c\sqrt{\log(2N/n)}\sqrt{n}$ κατά έναν όρο που φράσσεται από $\sqrt{\log\log n}$ στο διάστημα $[n+1, n(\log n)^2]$.

(β) Ο περιορισμός $N \leq \exp(cn)$ στο κάτω φράγμα του Θεωρήματος 4.2.2 είναι απολύτως φυσιολογικός: Στην [15] αποδεικνύεται ότι οποιοδήποτε εκθετικό πλήθος τυχαίων σημαίων μέσα από το K δημιουργεί πολύτοπο που «αναπαριστά» το K με την έννοια της γεωμετρικής απόστασης. Πιο συγκεκριμένα, αν σταθεροποιήσουμε $\gamma, \delta \in (0,1)$ και αν επιλέξουμε $N = \exp(\gamma n)$ σημεία $x_1, \ldots, x_N$ ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από ένα κυρτό σώμα K όγκου 1 που έχει κέντρο βάρους το 0, τότε με πιθανότητα μεγαλύτερη από $1-\delta$ έχουμε τον εγκλεισμό

$$C(x_1, \ldots, x_m) \supseteq \rho(\delta)\gamma K \tag{4.2.27}$$

όπου $\rho(\delta) > 0$ σταθερά που εξαρτάται μόνο από το δ. Παίρνοντας $\gamma = c$ και $\delta = 1/2$, βλέπουμε ότι αν $N \geq \exp(cn)$ τότε

$$c\rho(1/2) \leq \mathbb{F}(K,N) \leq 1. \tag{4.2.28}$$

Δηλαδή, $\mathbb{F}(K,N) \simeq 1$ όταν $N \geq \exp(cn)$.

4.2.2 Ζωνοειδή

Τα ζωνοειδή είναι τα όρια αθροισμάτων Minkowski ευθυγράμμων τμημάτων ως προς την Hausdorff μετρική. Ισοδύναμα, ένα συμμετρικό κυρτό σώμα Z είναι ζωνοειδές αν και μόνο αν το πολικό του σώμα είναι η μοναδιαία μπάλα ενός n-διάστατου υποχώρου κάποιου L_1 χώρου. Δηλαδή, αν υπάρχει θετικό μέτρο (το μέτρο στήριξης του Z) στην S^{n-1} τέτοιο ώστε

$$\|x\|_{Z^\circ} = \frac{1}{2}\int_{S^{n-1}} |\langle x, y\rangle| \mu(dy). \tag{4.2.29}$$

Όπως θα δούμε, το πρόβλημα της εκτίμησης της «ακτίνας όγκου» τυχαίων πολυτόπων είναι τετριμμένο για τα ζωνοειδή. Ισχύει, όπως και στην περίπτωση των 1-unconditional σωμάτων, το εξής.

Θεώρημα 4.2.5 *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε: αν το Z είναι ζωνοειδές όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$ και αν $n(\log n)^2 \leq N \leq \exp(cn)$, τότε*

$$c_1 \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}} \leq \mathbb{F}(Z, N) \leq c_2 \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}. \tag{4.2.30}$$

Απόδειξη: Αν Z είναι ζωνοειδές όγκου 1 στον $\mathbb{R}^n$, υπάρχει $T \in SL(n)$ τέτοιος ώστε

$$T(Z) \subseteq \frac{\sqrt{n}}{2} B_2^n. \tag{4.2.31}$$

Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι τα πολικά σώματα των ζωνοειδών έχουν φραγμένο λόγο όγκων. Η ακριβέστερη εκτίμηση που δίνει η (4.2.31) ισχύει αν θεωρήσουμε το Z σε κατάλληλη θέση: για παράδειγμα, αν το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του Z είναι μπάλα ή αν το Z έχει ελάχιστο μέσο πλάτος (βλέπε [20]).

Για τον υπολογισμό της $\mathbb{F}(Z, N)$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι το Z ικανοποιεί την (4.2.31). Τότε, *για κάθε* επιλογή σημείων $x_1, \ldots, x_N$ στο Z, το Λήμμα 4.2.3 μας δίνει το άνω φράγμα

$$|C(x_1, \ldots, x_N)|^{1/n} \leq c \cdot \max_{i \leq N} \|x_i\|_2 \cdot \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{n} \leq \frac{c}{2} \frac{\sqrt{\log(2N/n)}}{\sqrt{n}}. \tag{4.2.32}$$

Έχουμε λοιπόν τη δεξιά ανισότητα της (4.2.30) και μάλιστα κατά σημείο. □

Βιβλιογραφία

[1] W. Blaschke, *Lösung des "Vierpunktproblems" von Sylvester aus der Theorie der geometrischen Wahrscheinlichkeiten*, Ber. Verh. sachs. Acad. Wiss., Math. Phys. Kl. **69** (1917), 436-453.

[2] W. Blaschke, *Vorlesungen über Differentialgeometrie II*, Springer, Berlin (1923).

[3] W. Blaschke, *Kreis und Kugel*, 2 Aufl., Walter de Gruyter, Berlin, 1956.

[4] J. Bourgain, *On the isotropy constant for ψ_2-bodies*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003).

[5] I. Bárány and Z. Füredi, *Computing the volume is difficult*, Discrete Comput. Geom. **2** (1987), 319-326.

[6] F. Barthe and A. Koldobsky, *Extremal slabs in the cube and the Laplace transform*, Adv. in Math. (to appear).

[7] S.G. Bobkov and F.L. Nazarov, *On convex bodies and log-concave probability measures with unconditional basis*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003).

[8] S.G. Bobkov and F.L. Nazarov, *Large deviations of typical linear functionals on a convex body with unconditional basis*, Preprint.

[9] K. Ball and A. Pajor, *Convex bodies with few faces*, Proc. Amer. Math. Soc. **110** (1990), 225-231.

[10] L. Dalla and D.G. Larman, *Volumes of a random polytope in a convex set*, Applied geometry and discrete mathematics. Discrete Math. Theoret. Comput. Sci. **4** (Amer. Math. Soc.) (1991), 175-180.

[11] A. Giannopoulos, *On the mean value of the area of a random polygon in a plane convex body*, Mathematika **39** (1992), 279-290.

[12] H. Groemer, *On some mean values associated with a randomly selected simplex in a convex set*, Pacific J. Math. **45** (1973), 525-533.

[13] H. Groemer, *On the mean value of the volume of a random polytope in a convex set*, Arch. Math. **25** (1974), 86-90.

[14] H. Groemer, *On the average size of polytopes in a convex set*, Geom. Dedicata **13** (1982), 47-62.

[15] A.A. Giannopoulos and V.D. Milman, *Concentration property on probability spaces*, Advances in Math. **156** (2000), 77-106.

[16] A. Giannopoulos and A. Tsolomitis, Volume radius of a random polytope in a convex body, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. **134** (2003), 13-21.

[17] A.M. Macbeath, *An extremal property of the hypersphere*, Proc. Cambridge Phil. Soc. **47** (1951), 245-247.

[18] V.D. Milman and A. Pajor, *Isotropic position and inertia ellipsoids and zonoids of the unit ball of a normed n-dimensional space*, Lecture Notes in Mathematics **1376**, Springer, Berlin (1989), 64-104.

[19] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986), Springer, Berlin.

[20] G. Paouris, *Ψ_2-estimates for linear functionals on zonoids*, Geom. Aspects of Funct. Analysis (Milman-Schechtman eds.), Lecture Notes in Math. **1807** (2003).

[21] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Mathematics **94** (1989).

[22] R. Schneider, *Convex Bodies: The Brunn-Minkowski Theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **44**, Cambridge University Press, Cambridge (1993).

[23] R. Schneider, *Random approximation of convex sets*, Proceedings of the 4th international conference on stereology and stochastic geometry, Bern 1987, J. Microscopy **151** (1988), 211-227.

[24] P. Schöpf, *Gewichtete Volumsmittelwerte von Simplices, welche zufällig in einemen konvexen Körper des $\mathbb{R}^n$ gewählt werden*, Monatsch. Math. **83** (1977), 331-337.

Κεφάλαιο 5

Παράρτημα

5.1 Μέσο πλάτος ισοτροπικών σωμάτων

Έστω K ένα ισοτροπικό (όχι αναγκαστικά συμμετρικό) κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Αυτό σημαίνει ότι το K έχει όγκο $|K| = 1$, κέντρο βάρους στην αρχή των αξόνων, και υπάρχει σταθερά $L_K > 0$ τέτοια ώστε

$$\int_K \langle x, \theta \rangle^2 dx = L_K^2 \tag{5.1.1}$$

για κάθε $\theta \in S^{n-1}$.

Σε αυτήν την παράγραφο δίνουμε ένα άνω φράγμα για το μέσο πλάτος $w(K)$ του K. Είναι γνωστό (βλέπε [5]) ότι κάθε ισοτροπικό κυρτό σώμα K περιέχεται στην $[(n+1)L_K]B_2^n$, επομένως μια πρώτη εκτίμηση για το $w(K)$ είναι η

$$w(K) \leq 2(n+1)L_K. \tag{5.1.2}$$

Θα δείξουμε ότι μια καλύτερη εκτίμηση είναι πάντα δυνατή.

Θεώρημα 5.1.1 *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$w(K) \leq cn^{3/4} L_K, \tag{5.1.3}$$

όπου $c > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά.

Η μέθοδός μας βασίζεται σε μια εκτίμηση των αριθμών κάλυψης $N(K, tB_2^n)$ συναρτήσει της ποσότητας

$$M(K, B_2^n) = \int_K \|x\|_2 dx. \tag{5.1.4}$$

Υπενθυμίζουμε ότι ο αριθμός κάλυψης $N(K,tB_2^n)$ είναι ο μικρότερος φυσικός N για τον οποίο υπάρχουν N μεταφορές της tB_2^n που η ένωσή τους καλύπτει το K. Παρατηρήστε επίσης ότι

$$M(K,B_2^n)\leq\left(\int_K\|x\|_2^2dx\right)^{1/2}=\sqrt{n}L_K. \tag{5.1.5}$$

Η ιδέα να χρησιμοποιήσουμε την ποσότητα $M(K,B_2^n)$ σαν παράμετρο για εκτιμήσεις εντροπίας προέρχεται από την εργασία [7]. Έχει επίσης χρησιμοποιηθεί στην [6] για μια απόδειξη της «M^*-ανισότητας» στην περίπτωση των quasi-κυρτών σωμάτων.

Πρόταση 5.1.1 *Έστω K ένα ισοτροπικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $t>0$ έχουμε*

$$N(K,tB_2^n)\leq 2\exp\left(\frac{6n^{3/2}L_K}{t}\right). \tag{5.1.6}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το συναρτησοειδές του Minkowski $p_K(x)=\inf\{\lambda>0:x\in\lambda K\}$. Είναι φανερό ότι το p_K είναι υποπροσθετικό και θετικά ομογενές. Ορίζουμε ένα Borel μέτρο πιθανότητας στον $\mathbb{R}^n$ θέτοντας

$$\mu(A)=\frac{1}{c_K}\int_A e^{-p_K(x)}dx, \tag{5.1.7}$$

όπου $c_K=\int_{\mathbb{R}^n}\exp(-p_K(x))dx$.
Έστω $\{x_1,\dots,x_N\}$ ένα υποσύνολο του K μεγιστικό ως προς τη συνθήκη

$$i\neq j\Longrightarrow\|x_i-x_j\|_2\geq t. \tag{5.1.8}$$

Τότε, οι μπάλες $x_i+(t/2)B_2^n$ έχουν ξένα εσωτερικά και $K\subseteq\bigcup_{i\leq N}(x_i+tB_2^n)$. Συνεπώς, $N(K,tB_2^n)\leq N$.

Επιλέγουμε $b>0$ έτσι ώστε $\mu(bB_2^n)\geq 1/2$. Αν θέσουμε $y_i=(2b/t)x_i$, τότε

$$\begin{aligned}\mu(y_i+bB_2^n) &= \frac{1}{c_K}\int_{bB_2^n}e^{-p_K(x+y_i)}dx\geq\frac{1}{c_K}\int_{bB_2^n}e^{-p_K(x)}e^{-p_K(y_i)}dx\\ &= e^{-p_K(y_i)}\frac{1}{c_K}\int_{bB_2^n}e^{-p_K(x)}dx=e^{-\frac{2b}{t}p_K(x_i)}\mu(bB_2^n)\\ &\geq e^{-2b/t}\mu(bB_2^n),\end{aligned}$$

αφού $p_K(x_i)\leq 1$, $i=1,\dots,N$. Οι μπάλες $y_i+bB_2^n$ έχουν ξένα εσωτερικά, άρα

$$Ne^{-2b/t}\mu(bB_2^n)\leq\sum_{i=1}^N\mu(y_i+bB_2^n)=\mu\left(\bigcup_{i=1}^N(y_i+bB_2^n)\right)\leq 1. \tag{5.1.9}$$

Έπεται ότι

$$N(K,tB_2^n)\leq e^{2b/t}(\mu(bB_2^n))^{-1}\leq 2e^{2b/t}. \tag{5.1.10}$$

Μένει να εκτιμήσουμε το b. Πρώτα υπολογίζουμε τη σταθερά

$$\begin{aligned} c_K &= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-p_K(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{p_K(x)}^{\infty} e^{-s}dsdx \\ &= \int_0^{\infty} e^{-s}|\{x : p_K(x)\leq s\}|ds = \int_0^{\infty} s^n e^{-s}ds = n!. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} J &:= \int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_2\mu(dx) = \frac{1}{c_K}\int_{\mathbb{R}^n}\|x\|_2\int_{p_K(x)}^{\infty} e^{-s}dsdx \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^{\infty} s^{n+1}e^{-s}ds\cdot\int_K\|x\|_2dx = (n+1)M(K,B_2^n). \end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Markov, $\mu(x\in\mathbb{R}^n : \|x\|_2 > 2J)\leq 1/2$, το οποίο δείχνει ότι $\mu(2JB_2^n)\geq 1/2$. Αν επιλέξουμε $b=2J$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} N(K,tB_2^n) &\leq 2\exp(4J/t)\leq 2\exp(4(n+1)M(K,B_2^n)/t) \\ &\leq 2\exp(6n^{3/2}L_K/t). \qquad \square \end{aligned}$$

Θα χρειαστούμε επίσης τη διάσπαση Dudley-Fernique του K:

Λήμμα 5.1.1 *Έστω $K\subseteq RB_2^n$ ένα κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, όπου $R>0$. Υπάρχουν πεπερασμένα σύνολα $Z_j\subset (3R/2^j)B_2^n$, $j\in\mathbb{N}$ με*

$$\log|Z_j|\leq cn\left(\frac{2^jw(K)}{R}\right)^2, \tag{5.1.11}$$

που ικανοποιούν το εξής: Για κάθε $x\in K$ και κάθε $m\in\mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε $z_j\in Z_j$, $j=1,\ldots,m$ και $w_m\in(R/2^m)B_2^n$ τέτοια ώστε

$$x = z_1+\ldots+z_m+w_m. \tag{5.1.12}$$

Απόδειξη: Έστω $K-K$ το σώμα διαφορών του K. Από την ανισότητα του Sudakov [9] βλέπουμε ότι

$$\log N(K,tB_2^n)\leq \log N(K-K,tB_2^n)\leq cn\left(\frac{w(K-K)}{t}\right)^2 = 4cn\left(\frac{w(K)}{t}\right)^2.$$

Για κάθε $j\in\mathbb{N}$ βρίσκουμε $N_j\subset\mathbb{R}^n$ με $|N_j| = N(K,(R/2^j)B_2^n)$ τέτοιο ώστε $K\subset \bigcup_{y\in N_j}(y+(R/2^j)B_2^n)$, και θέτουμε $Z_j = (N_j-N_{j-1})\cap(3R/2^j)B_2^n$, $j\geq 1$ (και

$N_0 = \{0\}$). Αν $x \in K$ και $m \in \mathbb{N}$, για κάθε $j \leq m$ υπάρχει $y_j \in N_j$ τέτοιο ώστε $\|x - y_j\|_2 \leq R/2^j$. Γράφουμε

$$x = y_1 + (y_2 - y_1) + \ldots + (y_m - y_{m-1}) + (x - y_m),$$

και θεωρώντας τα $z_j = y_j - y_{j-1}$ και $w_m = x - y_m$ έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.1.1: Από το Λήμμα 5.1.1, κάθε $x \in K$ γράφεται στη μορφή

$$x = z_1 + \ldots + z_m + w_m,$$

όπου $z_j \in Z_j$, $w_m \in \frac{R}{2^m} B_2^n$, και η πληθικότητα του Z_j ικανοποιεί την

$$\log |Z_j| \leq \log N(K, (R/2^j) B_2^n) + \log N(K, (R/2^{j-1}) B_2^n). \tag{5.1.13}$$

Η Πρόταση 5.1.1 δείχνει ότι

$$\log |Z_j| \leq c_1 \frac{n^{3/2} L_K 2^j}{R}. \tag{5.1.14}$$

Από τη διάσπαση, για κάθε $\theta \in S^{n-1}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \max_{x \in K} |\langle x, \theta \rangle| &\leq \sum_{j=1}^m \max_{z \in Z_j} |\langle z, \theta \rangle| + \max_{z \in (R/2^m) B_2^n} |\langle z, \theta \rangle| \\ &= \sum_{j=1}^m \max_{z \in Z_j} |\langle z, \theta \rangle| + \frac{R}{2^m} \\ &\leq \sum_{j=1}^m \max_{z \in Z_j} |\langle z, \theta \rangle| + 2, \end{aligned}$$

όπου m είναι ο μικρότερος φυσικός για τον οποίο $R \leq 2^{m+1}$.

Σταθεροποιούμε $j \in \{1, \ldots, m\}$, και γράφουμε $\tilde{z}$ για το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του $z \in Z_j$ (μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε $z \in Z_j$ είναι μη μηδενικό). Γνωρίζουμε ότι

$$\int_{S^{n-1}} |\langle u, \theta \rangle| \sigma(d\theta) \leq \left(\int_{S^{n-1}} \langle u, \theta \rangle^2 \sigma(d\theta) \right)^{1/2} = \frac{1}{\sqrt{n}} \quad , \quad u \in S^{n-1} \tag{5.1.15}$$

και μια απλή εκτίμηση για την p-νόρμα της $\theta \mapsto \langle u, \theta \rangle$ δείχνει ότι

$$\|\langle u, \theta \rangle\|_p \leq c_3 \sqrt{p} \|\langle u, \theta \rangle\|_1,$$

για κάποια απόλυτη σταθερά $c_3 > 0$, απ' όπου έπεται ότι

$$\int_{S^{n-1}} \exp\left(\frac{n |\langle u, \theta \rangle|^2}{c_4^2} \right) \sigma(d\theta) \leq 2. \tag{5.1.16}$$

Από την ανισότητα του Markov βλέπουμε ότι

$$\sigma\left(\theta \in S^{n-1} : \max_{z\in Z_j} |\langle \tilde{z}, \theta\rangle| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{nt^2}{c_4^2}\right)\ |Z_j|. \tag{5.1.17}$$

Για κάθε $A>0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
\int_{S^{n-1}} \max_{z\in Z_j} |\langle \tilde{z}, \theta\rangle| \sigma(d\theta) &= \int_0^\infty \sigma\left(\theta \in S^{n-1} : \max_{z\in Z_j} |\langle \tilde{z}, \theta\rangle| \geq t\right) dt \\
&\leq A + \int_A^\infty \sigma\left(\theta \in S^{n-1} : \max_{z\in Z_j} |\langle \tilde{z}, \theta\rangle| \geq t\right) dt \\
&\leq A + \int_A^\infty 2\exp\left(-\frac{nt^2}{c_4^2}\right)\ |Z_j| dt
\end{aligned}$$

Επιλέγοντας $A \simeq \sqrt{\log|Z_j|}/\sqrt{n}$, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\int_{S^{n-1}} \max_{z\in Z_j} |\langle \tilde{z}, \theta\rangle| \sigma(d\theta) \leq c_5 \frac{\sqrt{\log|Z_j|}}{\sqrt{n}}. \tag{5.1.18}$$

Συνεπώς,

$$\int_{S^{n-1}} \max_{z\in Z_j} |\langle z, \theta\rangle| \sigma(d\theta) \leq c_5 \frac{3R}{2^j} \frac{\sqrt{\log|Z_j|}}{\sqrt{n}}. \tag{5.1.19}$$

Μπορούμε τώρα να φράξουμε το $w(K)$ ως εξής:

$$\begin{aligned}
\frac{w(K)}{2} &= \int_{S^{n-1}} \max_{x\in K} |\langle x, \theta\rangle| \sigma(d\theta) \\
&\leq 2 + \sum_{j=1}^m \int_{S^{n-1}} \max_{z\in Z_j} |\langle z, \theta\rangle| \sigma(d\theta) \\
&\leq 2 + \sum_{j=1}^m c_5 \frac{3R}{2^j} \frac{\sqrt{\log|Z_j|}}{\sqrt{n}} \\
&\leq 2 + \sum_{j=1}^m c_5 \frac{3R}{2^j} \frac{\sqrt{c_1} n^{3/4} \sqrt{L_K} 2^{j/2}}{\sqrt{Rn}} \\
&\leq 2 + c_6 \sqrt[4]{n} \sqrt{L_K} \sqrt{R} \sum_{j=1}^m \frac{1}{2^{j/2}} \\
&\leq c_7 \sqrt[4]{n} \sqrt{L_K} \sqrt{R}.
\end{aligned}$$

Αφού $R \leq (n+1)L_K$, συμπεραίνουμε ότι

$$w(K) \leq cn^{3/4} L_K. \quad \square$$

5.2 Απόσταση Banach-Mazur του ℓ_p^n από τον ℓ_q^n

Οι Gurarii, Kadec και Macaev [4] υπολόγισαν τη σωστή τάξη μεγέθους της απόστασης Banach-Mazur $d(\ell_p^n, \ell_q^n)$:

- Αν $1 \le p \le q \le 2$ ή $2 \le p \le q \le \infty$, τότε $d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{1/p-1/q}$.
- Αν $1 \le p < 2 < q \le \infty$, τότε $c_1 n^\alpha \le d(\ell_p^n, \ell_q^n) \le c_2 n^\alpha$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά, $c_2 > 0$ σταθερά που εξαρτάται από τα p και q, και $\alpha = \max\{1/p - 1/2, 1/2 - 1/q\}$.

Το ερώτημα που θα μας απασχολήσει σε αυτή την παράγραφο είναι κατά πόσον υπάρχει το όριο

$$\lim_{n\to\infty} \frac{d(\ell_p^n, \ell_q^n)}{n^\alpha} \tag{5.2.1}$$

στη δεύτερη περίπτωση ($1 \le p < 2 < q \le \infty$). Στη συνέχεια, σταθεροποιούμε τα p, q (και α), και θέτουμε $A_n = d(\ell_p^n, \ell_q^n)$.

Λήμμα 5.2.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ τέτοια ώστε: αν $1 < p < 2 < q < \infty$, τότε $A_n(p,q) \le C \max\{\sqrt{q}, \sqrt{p'}\} \cdot n^\alpha$, όπου p' ο συζυγής εκθέτης του p.*

Απόδειξη: Θα χρησιμοποιήσουμε τη μέθοδο των τυχαίων ορθογώνιων παραγοντοποιήσεων (βλέπε Κεφάλαιο 3). Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες των Chevet και Marcus-Pisier, οι Davis, Milman και Tomczak-Jaegermann [3] έδειξαν το εξής: Αν X και Y είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε

$$d(X,Y) \le c\,(d(X,\ell_2^n)T_2(Y^*) + d(Y,\ell_2^n)T_2(X))\,, \tag{5.2.2}$$

όπου T_2 η σταθερά τύπου-2 (βλέπε [8], Κεφάλαιο 9). Είναι γνωστό ότι ο ℓ_q^n, $2 \le q < \infty$ έχει σταθερά τύπου-2 φραγμένη από $c_1\sqrt{q}$ (ομοιόμορφα ως προς n). Άρα, αν γράψουμε p' για το συζυγή εκθέτη του p, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d(\ell_p^n, \ell_q^n) &\le c\left(d(\ell_q^n,\ell_2^n)T_2(\ell_{p'}^n) + d(\ell_p^n,\ell_2^n)T_2(\ell_q^n)\right) \\ &\le c\cdot c_1 \max\{\sqrt{q},\sqrt{p'}\}\max\{d(\ell_q^n,\ell_2^n), d(\ell_p^n,\ell_2^n)\} \\ &= c\cdot c_1 \max\{\sqrt{q},\sqrt{p'}\} n^\alpha. \end{aligned}$$

Συνεπώς, $A_n(p,q) \le C\max\{\sqrt{q},\sqrt{p'}\}n^\alpha$, όπου $C = c\cdot c_1$. □

Ορισμός: Ένας φυσικός αριθμός n λέγεται αριθμός Hadamard αν υπάρχει ορθογώνιος πίνακας $T_n = (a_{ij})$ με $|a_{ij}| = 1/\sqrt{n}$ για κάθε $i,j = 1,\dots,n$. Κλασικό παράδειγμα αριθμών Hadamard δίνουν οι φυσικοί n της μορφής $n = 2^k$. Σε αυτήν την περίπτωση μπορούμε να θεωρήσουμε τους πίνακες Walsh: Αυτοί είναι ορθογώνιοι $2^k \times 2^k$ πίνακες, που ορίζονται επαγωγικά. Θέτουμε $W_0 = [1]$, και

$$W_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} W_{k-1} & W_{k-1} \\ W_{k-1} & -W_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad k \geq 1. \tag{5.2.3}$$

Είναι γνωστό (βλέπε [1]) ότι: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε, για κάθε $m \geq n_0$ υπάρχει αριθμός Hadamard n που ικανοποιεί την

$$m(1-\varepsilon) \leq n \leq m. \tag{5.2.4}$$

Έστω ότι ο n είναι αριθμός Hadamard, και έστω $T_n = (a_{ij})$ όπως παραπάνω. Τότε, από την $T_n \in O(n)$ έχουμε

$$\|T_n : \ell_2^n \to \ell_2^n\| = 1, \tag{5.2.5}$$

ενώ από την $|a_{ij}| = 1/\sqrt{n}$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|T_n : \ell_1^n \to \ell_\infty^n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}. \tag{5.2.6}$$

Οι (5.2.5) και (5.2.6) μας επιτρέπουν να εκτιμήσουμε την $\|T_n : \ell_p^n \to \ell_{p'}^n\|$ (όπου p' ο συζυγής εκθέτης του p) για κάθε $p \in [1, 2]$. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του κλασικού θεωρήματος παρεμβολής του Riesz (βλέπε [2]):

Λήμμα 5.2.2 *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμικός τελεστής. Για κάθε $1 \leq p \leq 2$ ορίζουμε $M_p = \|T : \ell_p^n \to \ell_{p'}^n\|$. Τότε, αν $1 \leq p_1, p_2 \leq 2$ και*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \tag{5.2.7}$$

έχουμε

$$M_p \leq M_{p_1}^{1-\theta} M_{p_2}^{\theta}. \qquad \square \tag{5.2.8}$$

Πρόταση 5.2.1 *Έστω $1 \leq p < 2 < q \leq +\infty$. Αν ο $n \in \mathbb{N}$ είναι αριθμός Hadamard, τότε*

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq n^{\alpha}. \tag{5.2.9}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι $\alpha = 1/2 - 1/q$, οπότε $q \geq p'$. Έστω $T_n : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ικανοποιεί τις (5.2.5) και (5.2.6). Εφαρμόζουμε το Λήμμα 5.2.2: έχουμε

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2}, \tag{5.2.10}$$

όπου $\theta = 2-(2/p)$. Επομένως,

$$\|T_n : \ell_p^n \to \ell_{p'}^n\| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1-\theta} \cdot 1^\theta = n^{1/2-1/p}. \tag{5.2.11}$$

Αφού $q \geq p'$, παίρνουμε

$$\|T_n : \ell_p^n \to \ell_q^n\| \leq \|T_n : \ell_p^n \to \ell_{p'}^n\| \cdot \|I : \ell_{p'}^n \to \ell_q^n\| \leq n^{1/2-1/p} \tag{5.2.12}$$

και

$$\begin{aligned} \|T_n^{-1} : \ell_q^n \to \ell_p^n\| &\leq \|I : \ell_q^n \to \ell_2^n\| \cdot \|T_n^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \cdot \|I : \ell_2^n \to \ell_p^n\| \\ &= n^{1/2-1/q} \cdot 1 \cdot n^{1/p-1/2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq \|T_n : \ell_p^n \to \ell_q^n\| \cdot \|T_n^{-1} : \ell_q^n \to \ell_p^n\| \leq n^{1/2-1/q}. \tag{5.2.13}$$

Αν πάλι $\alpha = 1/p - 1/2 = 1/2 - 1/p'$, τότε το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι $d(\ell_{q'}^n, \ell_{p'}^n) \leq n^\alpha$, και το ζητούμενο προκύπτει από την

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = d((\ell_p^n)^*, (\ell_q^n)^*) = d(\ell_{q'}^n, \ell_{p'}^n). \qquad \square$$

Λήμμα 5.2.3 *Ισχύει η ανισότητα*

$$A_{n+m}^{pq/(p+q)} \leq A_n^{pq/(p+q)} + A_m^{pq/(p+q)} \tag{5.2.14}$$

για κάθε n και $m \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Θεωρούμε $T_n : \ell_p^n \to \ell_q^n$ και $T_m : \ell_p^m \to \ell_q^m$ τέτοιους ώστε

$$A_n = \|T_n\| \cdot \|T_n^{-1}\| \quad \text{και} \quad A_m = \|T_m\| \cdot \|T_m^{-1}\| \tag{5.2.15}$$

(παρατηρήστε ότι το ίδιο ισχύει για τους rT_n, sT_m για κάθε $r, s > 0$). Θεωρούμε τον $T_{n+m} = T_n + T_m : \ell_p^{n+m} \to \ell_q^{n+m}$. Αν $x = x_1 + x_2 \in \ell_p^{n+m} = \left(\ell_p^n \oplus \ell_p^m\right)_p$, τότε

$$\begin{aligned} \|T_{n+m}(x)\|_q &= \|T_n(x_1) + T_m(x_2)\|_q \leq \|T_n(x_1)\|_q + \|T_m(x_2)\|_q \\ &\leq \|T_n\| \cdot \|x_1\|_p + \|T_m\| \cdot \|x_2\|_p \\ &\leq \left(\|T_n\|^q + \|T_m\|^q\right)^{1/q} \left(\|x_1\|_p^p + \|x_2\|_p^p\right)^{1/p} \\ &= \left(\|T_n\|^q + \|T_m\|^q\right)^{1/q} \|x\|_p, \end{aligned}$$

άρα

$$\|T_{n+m}\| \leq \left(\|T_n\|^q + \|T_m\|^q\right)^{1/q}. \tag{5.2.16}$$

Παρατηρούμε ότι $T_{m+n}^{-1} = T_m^{-1} + T_n^{-1}$ οπότε, δουλεύοντας όπως πριν, βλέπουμε ότι

$$\|T_{n+m}^{-1}\| \leq \left(\|T_n^{-1}\|^p + \|T_m^{-1}\|^p\right)^{1/p}. \tag{5.2.17}$$

Από τις (5.2.15), (5.2.16) και (5.2.17) βλέπουμε ότι

$$A_{n+m} \leq \min_{r,s>0} \left\{ (r^q + s^q)^{1/q} \left(\left(\frac{A_n}{r}\right)^p + \left(\frac{A_m}{s}\right)^p \right)^{1/p} \right\}. \tag{5.2.18}$$

Ελαχιστοποιώντας τη δεξιά ποσότητα ως προς $r, s > 0$ παίρνουμε την (5.2.14). $\square$

Πρόταση 5.2.2 *Αν* $1 \leq p < 2 < q \leq +\infty$, *τότε*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{d(\ell_p^n, \ell_q^n)}{n^\alpha} \leq 1. \tag{5.2.19}$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι $1 < p < 2 < q < \infty$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε κάθε $m \geq n_0$ να γράφεται στη μορφή $m = n + k$ όπου n αριθμός Hadamard και $k \leq \varepsilon m$. Από την Πρόταση 5.2.1 έχουμε $A_n \leq n^\alpha$, ενώ από το Λήμμα 5.2.1 βλέπουμε ότι $A_k \leq C_{p,q} k^\alpha$, όπου $C_{p,q} = C \max\{\sqrt{q}, \sqrt{p'}\}$. Χρησιμοποιώντας και το Λήμμα 5.2.3, παίρνουμε

$$\begin{aligned} A_m &\leq (A_n^s + A_k^s)^{1/s} \\ &\leq \left(n^{\alpha s} + C_{p,q}^s k^{\alpha s}\right)^{1/s} \\ &\leq \left(m^{\alpha s} + C_{p,q}^s \varepsilon^{\alpha s} m^{\alpha s}\right)^{1/s} \\ &= m^\alpha \left(1 + C_{p,q}^s \varepsilon^{\alpha s}\right)^{1/s}, \end{aligned}$$

όπου $s = pq/(p+q)$. Έπεται ότι

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{A_m}{m^\alpha} \leq \left(1 + C_{p,q}^s \varepsilon^{\alpha s}\right)^{1/s}, \tag{5.2.20}$$

και, αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, παίρνουμε την (5.2.19). Για την περίπτωση που είτε $p = 1$ ή $q = \infty$, χρησιμοποιούμε την τριγωνική πολλαπλασιαστική ανισότητα. Παρατηρήστε για παράδειγμα ότι αν $p > 1$ και το $q = q(m)$ είναι αρκετά μεγάλο, τότε

$$\begin{aligned} \frac{A_m(p,\infty)}{\sqrt{m}} &\leq \frac{A_m(p,q)}{m^{1/2-1/q}} \cdot \frac{d(\ell_q^m, \ell_\infty^m)}{m^{1/q}} \\ &\leq \left(1 + C_{p,q}^s \varepsilon^{\alpha s}\right)^{1/s} (1+\varepsilon), \end{aligned}$$

οπότε μπορούμε να συνεχίσουμε όπως πριν. $\square$

Το καλύτερο γνωστό κάτω φράγμα είναι το εξής:

Πρόταση 5.2.3 *Αν* $1 \le p < 2 < q \le +\infty$, *τότε* $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \ge n^\alpha/\sqrt{2}$ *για κάθε* $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη: Έστω $T : \ell_p^n \to \ell_q^n$ ισομορφισμός. Τότε,

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j T^{-1}(e_j)\|_p^2 \le \|T^{-1}\|^2 \mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j e_j\|_q^2 = \|T^{-1}\|^2 n^{2/q}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν ορίσουμε $x_j = T^{-1}(e_j) \in \ell_p^n$, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η σταθερά (Rademacher) συντύπου-2 του ℓ_p^n είναι μικρότερη ή ίση από $\sqrt{2}$ (βλέπε [8], Κεφάλαιο 9), παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j T^{-1}(e_j)\|_p^2 &\ge \frac{1}{2}\sum_{j=1}^n \|T^{-1}(e_j)\|_p^2 \\ &\ge \frac{1}{2}\frac{\sum_{j=1}^n \|e_j\|_q^2}{\|T\|^2} \\ &= \frac{n}{2\|T\|^2}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, βλέπουμε ότι

$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \ge n^{1/2-1/q}/\sqrt{2}. \tag{5.2.21}$$

Αυτό δείχνει ότι $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \ge n^\alpha/\sqrt{2}$ αν $1/2-1/q \ge 1/p-1/2$. Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε τους δυϊκούς χώρους, όπως κάναμε και για το άνω φράγμα. □

Οι Προτάσεις 5.2.2 και 5.2.3 συνοψίζονται στο εξής.

Θεώρημα 5.2.1 *Αν* $1 \le p < 2 < q \le +\infty$, *τότε*

$$\frac{1}{\sqrt{2}} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{d(\ell_p^n, \ell_q^n)}{n^\alpha} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{d(\ell_p^n, \ell_q^n)}{n^\alpha} \le 1, \tag{5.2.22}$$

όπου $\alpha = \max\{1/2 - 1/q, 1/p - 1/2\}$. □

Βιβλιογραφία

[1] N. Alon and J. Spencer, *The probabilistic method*, (with an appendix by Paul Erdös), Wiley-Interscience Series in Discrete Mathematics and Optimization, John Wiley Sons, Inc., New York, 1992.

[2] C. Bennett and R. Sharpley, *Interpolation of operators*, Pure and Applied Math. **129**, Academic Press Inc., Boston, MA, 1988.

[3] W.J. Davis, V.D. Milman and N. Tomczak-Jaegermann, *The distance between certain n-dimensional spaces*, Israel J. Math. **39** (1981), 1-15.

[4] V.E. Gurarii, M.I. Kadec and V.E. Macaev, *On the distance between isomorphic L_p spaces of finite dimension*, Math. Sb. **70** (1966), 481-489.

[5] R. Kannan, L. Lovasz and M. Simonovits, *Isoperimetric problems for convex bodies and a localization lemma*, Discrete Comput. Geom. **13** (1995), 541-559.

[6] A.E. Litvak, V.D. Milman and A. Pajor, *The covering numbers and low M^*-estimate for quasi-convex bodies*, Proc. Amer. Math. Soc. **127** (1999), 1499-1507.

[7] V.D. Milman and A. Pajor, *Cas limites dans les inégalités du type de Khinchine et applications géometriques*, C. R. Acad. Sci. Paris **308** (1989), 91-96.

[8] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics **1200** (1986), Springer, Berlin.

[9] V.N. Sudakov, *Gaussian random processes and measures of solid angles in Hilbert spaces*, Soviet Math. Dokl. **12** (1971), 412-415.

ABSTRACT

The main theme of this Ph.D. Thesis is the use of probabilistic methods in the theory of high-dimensional convex bodies. We discuss the following aspects of the theory:

1. Volume ratio. Let K and L be two convex bodies in $\mathbb{R}^n$. The volume ratio $\mathrm{vr}(K,L)$ of K and L is defined by $\mathrm{vr}(K,L) = \inf(|K|/|T(L)|)^{1/n}$, where the infimum is over all affine transformations T of $\mathbb{R}^n$ for which $T(L) \subseteq K$. We show that $\mathrm{vr}(K,L) \leq c\sqrt{n}\log n$, where $c > 0$ is an absolute constant. This is optimal up to the logarithmic term. We also discuss the dimension of spherical sections of symmetric convex bodies K in $\mathbb{R}^n$ with bounded volume ratio $\mathrm{vr}(K, B_2^n)$ (possible improvements of Szarek's theorem).

2. $0-1$ **polytopes**. Let $E_2^n = \{-1,1\}^n$ be the discrete cube in $\mathbb{R}^n$. For every $N \geq n$ we consider the class of convex bodies $K_N = \mathrm{co}\{\pm x_1, \dots, \pm x_N\}$ which are generated by N random points $x_1, \dots, x_N$ chosen independently and uniformly from E_2^n. We show that if $n \geq n_0$ and $N \geq n(\log n)^2$ then, for a random K_N, the inradius, the volume radius, the mean width and the size of the maximal inscribed cube can be determined up to an absolute constant as functions of n and N . This geometric description of K_N leads to sharp estimates for several asymptotic parameters of the corresponding n-dimensional normed space X_N.

3. Random polytopes in a convex body. Let K be a convex body in $\mathbb{R}^n$ with volume $|K| = 1$. We choose $N \geq n+1$ points $x_1, \dots, x_N$ independently and uniformly from K, and write $C(x_1, \dots, x_N)$ for their convex hull. Let $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ be a continuous strictly increasing function and $0 \leq i \leq n-1$. Then, the quantity

$$\mathbb{E}(K, N, f \circ W_i) = \int_K \dots \int_K f[W_i(C(x_1, \dots, x_N))] dx_N \dots dx_1$$

is minimal if K is a ball (W_i is the i-th quermassintegral of a compact convex set). If f is convex and strictly increasing and $1 \leq i \leq n-1$, then the ball is the only extremal body. These two facts generalize a result of H. Groemer on moments of the volume of $C(x_1, \dots, x_N)$.

In the case of a 1-unconditional convex body, using recent results of Bobkov and Nazarov, we show that the volume radius

$$\mathbb{F}(K, N) = \int_K \dots \int_K |C(x_1, \dots, x_N)|^{1/n} dx_N \dots dx_1$$

is of the order of $\sqrt{\log(N/n)}/\sqrt{n}$ for all $n(\log n)^2 \leq N \leq \exp(cn)$.