Η διάμετρος του Banach-Mazur compactum

Δημητρης Μητσοτακης

Διπλωματικη Εργασια

Πανεπιστημιο Κρητης
Τμημα Μαθηματικων

Απριλιος 2000

.

Η διπλωματική αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Απρίλιο του 2000. Επιβλέπων ήταν ο Α. Γιαννόπουλος.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Α. Γιαννόπουλος, Ε. Δεληγιάννη και Σ. Παπαδοπούλου.

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Εισαγωγή

Σύντομη παρουσίαση της εργασίας

1. Η έννοια του Banach-Mazur compactum παρέχει ένα φυσιολογικό πλαίσιο για την ποσοτική μελέτη των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα, στο οποίο η διάσταση παίζει πολύ σημαντικό ρόλο.

Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 2, κάθε n-διάστατος πραγματικός διανυσματικός χώρος με νόρμα είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $\mathbb{R}^n$ αν τον εφοδιάσουμε με κατάλληλη νόρμα $\|\cdot\|$. Γι' αυτόν το λόγο, ο τυπικός χώρος με νόρμα που μελετάμε σε αυτήν την εργασία, είναι της μορφής $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Η μοναδιαία μπάλα $B_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ του X είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα. Αντίστροφα, αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, τότε το K επάγει στον $\mathbb{R}^n$ τη νόρμα $\|x\|_K = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$, και ο χώρος $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ έχει το K σαν μοναδιαία μπάλα του. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται σαφές ότι η μελέτη των χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα αναπτύσσεται παράλληλα με αυτήν των συμμετρικών κυρτών σωμάτων.

Υποθέτουμε ότι η Ευκλείδεια δομή στον $\mathbb{R}^n$ ορίζεται από ένα εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$. Τότε, ο δυϊκός χώρος X^* του X έχει νόρμα την $\|y\|_* = \max\{|\langle x, y\rangle| : x \in B_X\}$. Η μοναδιαία μπάλα B_{X^*} του X^* είναι το πολικό σώμα της B_X.

Έστω X και Y δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα. Κάθε αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός $T : X \to Y$ είναι ισομορφισμός των X και Y. Η απόσταση Banach-Mazur $d(X, Y)$ των X και Y ορίζεται από την

$$d(X,Y) = \min\{||T|| \cdot ||T^{-1}|| \bigm| T : X \to Y, \textit{ισομορφισμός}\},$$

και μετράει πόσο «καλά ισόμορφοι» είναι οι X και Y. Η γεωμετρική ερμηνεία αυτού του ορισμού είναι η εξής: η $d(X, Y)$ είναι ο μικρότερος $d \geq 1$ για τον οποίο υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ με την ιδιότητα $B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq dB_Y$. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι: για κάθε X και Y, $d(X,Y)=d(Y,X)$ (η d είναι συμμετρική), $d(X,Y)=1$ αν και μόνο αν ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y, και $d(X^*,Y^*)=d(X,Y)$ όπου X^*,Y^* είναι οι δυϊκοί χώροι των X,Y αντίστοιχα.

2. Στο Κεφάλαιο 3, ορίζουμε το σύνολο $\mathcal{B}_n$ όλων των κλάσεων ισοδυναμίας n-διάστατων χώρων με νόρμα, όπου ο X θεωρείται ισοδύναμος με τον X' αν και μόνο αν οι X και X' είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Αποδεικνύουμε ότι το $\mathcal{B}_n$ γίνεται συμπαγής μετρικός χώρος, με μετρική την $\log d$: η τριγωνική ανισότητα είναι συνέπεια της

$$d(X,Y)\leq d(X,Z)\,d(Z,Y),$$

η οποία επαληθεύεται εύκολα για κάθε τριάδα $X,Y,Z\in\mathcal{B}_n$. Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{B}_n,\log d)$ είναι το n-διάστατο Banach-Mazur compactum. Συνήθως, αντί για την $\log d$, χρησιμοποιούμε την d σαν μία «πολλαπλασιαστική» απόσταση στον $\mathcal{B}_n$.

Το Banach-Mazur compactum δεν έχει μελετηθεί πλήρως. Αν εξαιρέσουμε μερικά θεμελιώδη αποτελέσματα, τα περισσότερα ερωτήματα που έχουν τεθεί σε σχέση με τη δομή του, παραμένουν αναπάντητα. Για περισσότερες πληροφορίες, παραπέμπουμε τον αναγνώστη στα βιβλία των Milman και Schechtman [MS], Pisier [Pi1], [Pi2], και Tomczak-Jaegermann [TJ], καθώς και στα άρθρα επισκόπησης [Gl2], [LM], [Pel], και [Sz2].

3. Το πρώτο κλασικό αποτέλεσμα για τη γεωμετρία του $\mathcal{B}_n$ είναι το Θεώρημα του John [J] για τη μέγιστη δυνατή απόσταση ενός n-διάστατου χώρου με νόρμα από τον Ευκλείδειο χώρο ℓ_2^n. Ξεκινώντας από έναν n-διάστατο χώρο $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$, ο John θεώρησε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T\in GL(n)$ για τον οποίο η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου που περιέχεται στο $K=T(B_X)$. Όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 4, χρησιμοποιώντας αυτήν την «μεγιστική ιδιότητα» της B_2^n, μπορούμε να πάρουμε πολλές πληροφορίες για το K:

(α) Υπάρχουν σημεία επαφής $x_1,\dots,x_m$ των K και B_2^n (δηλαδή, $\|x_i\|_K=|x_i|=1$), και $\lambda_1,\dots,\lambda_m>0$ τέτοια ώστε να ισχύει η ακόλουθη αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης: για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$,

$$x=\sum_{i=1}^m\lambda_i\langle x,x_i\rangle x_i.$$

(β) $B_2^n\subseteq K\subseteq\sqrt{n}B_2^n$.

Ειδικότερα, η (β) δίνει ένα άνω φράγμα για την $d(X,\ell_2^n)$:

Θεώρημα του John: $d(X,\ell_2^n)\leq\sqrt{n}$ *για κάθε* $X\in\mathcal{B}_n$.

Η εκτίμηση που μάς δίνει το Θεώρημα του John είναι απολύτως ακριβής. Αποδεικνύεται ότι $d(\ell_\infty^n,\ell_2^n)=d(\ell_1^n,\ell_2^n)=\sqrt{n}$. Με άμεση εφαρμογή της πολλαπλασιαστικής τριγωνικής ανισότητας για την d, παίρνουμε άνω φράγμα για την διάμετρο του $\mathcal{B}_n$:

$$\mathrm{diam}(\mathcal{B}_n):=\max\{d(X,Y):\ X,Y\in\mathcal{B}_n\}\leq n.$$

4. Σε πολλές σημαντικές περιπτώσεις, η απόσταση Banach-Mazur $d(X,Y)$ είναι πολύ μικρότερη από n. Στο Κεφάλαιο 5, μελετάμε την περίπτωση που οι X και Y είναι χώροι ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$. Οι Gurarii, Kadec και Macaev [GKM] υπολόγισαν τη σωστή τάξη μεγέθους της $d(\ell_p^n, \ell_q^n)$:

(α) Αν $1 \leq p \leq q \leq 2$ ή $2 \leq p \leq q \leq \infty$, τότε $d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{1/p-1/q}$.

(β) Αν $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$, τότε $c_1 n^{\alpha} \leq d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq c_2 n^{\alpha}$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά, $c_2 > 0$ σταθερά που εξαρτάται από τα p και q, και $\alpha = \max\{1/p - 1/2, 1/2 - 1/q\}$.

Η απόδειξη του (β) απαιτεί την χρήση των πινάκων Walsh, και το Θεώρημα Κυρτότητας του M. Riesz, το οποίο παρουσιάζουμε αναλυτικά.

5. Το βασικότερο ίσως πρόβλημα που προκύπτει από το Θεώρημα του John, είναι ο προσδιορισμός της $\mathrm{diam}(\mathcal{B}_n)$. Η ακριβής τιμή αυτής της ποσότητας είναι γνωστή μόνο στην περίπτωση $n=2$. Τότε, γνωρίζουμε ότι $\mathrm{diam}(\mathcal{B}_2) = 3/2$, από αποτελέσματα των Asplund [As] και Stromquist [Str]. Το «λιγότερο φιλόδοξο» πρόβλημα του προσδιορισμού της σωστής τάξης μεγέθους της $\mathrm{diam}(\mathcal{B}_n)$ καθώς το n τείνει στο άπειρο, παρέμεινε ανοικτό για πολλά χρόνια. Η απάντηση δόθηκε από τον Gluskin [Gl1] το 1981:

Θεώρημα του Gluskin: *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε*

$$\mathrm{diam}(\mathcal{B}_n) \geq cn$$

για κάθε n.

Επομένως, η διάμετρος του Banach-Mazur compactum είναι της τάξης του n. Στη λύση που έδωσε για το πρόβλημα, ο Gluskin δεν έδωσε ακριβή περιγραφή ενός ζευγαριού χώρων $X, Y \in \mathcal{B}_n$ με απόσταση $d(X,Y) \geq cn$ (για την ακρίβεια, ακόμα και στις μέρες μας δεν υπάρχει συγκεκριμένο παράδειγμα χώρων που να έχουν απόσταση ουσιαστικά μεγαλύτερη από $C\sqrt{n}$).

Η ύπαρξη ζευγαριού χώρων με απόσταση της τάξης του n εξασφαλίζεται με πιθανοθεωρητικά επιχειρήματα. Ο Gluskin [Gl2] περιγράφει την ιδέα του ως εξής. Ας θεωρήσουμε το ζευγάρι $X = Y = \ell_1^n$, και ας πάρουμε σαν T έναν τυχαίο πίνακα που οι συντεταγμένες του είναι ανεξάρτητες standard Gaussian τυχαίες μεταβλητές. Δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι η ανισότητα $\|T\|\,\|T^{-1}\| \geq cn$ ισχύει με *μεγάλη πιθανότητα* για πίνακες T αυτής της μορφής. Αυτό μάς δίνει την ιδέα ότι, «πειράζοντας» λίγο τον χώρο ℓ_1^n μπορεί να πετύχουμε ένα ζευγάρι χώρων X και Y για τους οποίους θα ισχύει $\|T\|\,\|T^{-1}\| \geq cn$ για *κάθε* $T \in GL(n)$. Αυτό είναι πράγματι εφικτό.

Η απόδειξη του Θεωρήματος δίνεται στο Κεφάλαιο 6. Ο Gluskin θεώρησε χώρους που η μοναδιαία τους μπάλα είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα της μορφής $K = \mathrm{co}\{\pm e_i, \pm x_j, 1 \leq j \leq 2n\}$, όπου $\{e_i\}_{i \leq n}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και τα $x_j, j \leq 2n$, είναι $2n$ τυχαία σημεία που επιλέγονται ανεξάρτητα στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}, την οποία έχουμε εφοδιάσει με το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας σ. Αν (X_n, Y_n) είναι ένα ζευγάρι ανεξάρτητων «χώρων Gluskin», μπορούμε να δείξουμε ότι η πιθανότητα

$$\mathrm{Prob}\{(X_n, Y_n) : \|T\|_{X_n\to Y_n}\|T^{-1}\|_{Y_n\to X_n} \leq cn\}$$

είναι εκθετικά μικρή, ομοιόμορφα ως προς $T \in SL(n)$. Συνδυάζοντας αυτό το δεδομένο με ακριβείς εκτιμήσεις για τον πληθάριθμο ε-δικτύων σε κατάλληλους χώρους τελεστών, βλέπουμε ότι για τα «περισσότερα» ζευγάρια (X_n, Y_n), η ανισότητα $\|T\|_{X_n\to Y_n}\|T^{-1}\|_{Y_n\to X_n} \geq cn$ ισχύει για ένα αρκετά λεπτό δίκτυο στην $SL(n)$. Ένα τυπικό επιχείρημα, το οποίο όμως καθίσταται δυνατό χάρη στην ακρίβεια των παραπάνω εκτιμήσεων, μάς επιτρέπει να περάσουμε από το δίκτυο στον τυχόντα $T \in SL(n)$, κάτι που δείχνει ότι $d(X_n, Y_n) \geq c'n$ με $c' = c/2$.

Εκτός από την απάντηση που έδωσε στο πρόβλημα της διαμέτρου του $\mathcal{B}_n$, η μέθοδος του Gluskin αποδείχθηκε χρήσιμη σε πλήθος άλλων προβλημάτων. Οι «τυχαίοι χώροι» παρείχαν το κατάλληλο πλαίσιο για να δοθούν παραδείγματα «παθολογικής συμπεριφοράς», και βοήθησαν στην επίλυση πολλών ανοικτών προβλημάτων της ασυμπτωτικής θεωρίας χώρων πεπερασμένης διάστασης. Ένα παράδειγμα είναι το εξής θεώρημα του Szarek [Sz3]: Υπάρχουν n-διάστατοι χώροι με νόρμα, που έχουν σταθερά βάσης της τάξης της $\sqrt{n}$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι η «πεπερασμένη έκδοση» του φημισμένου θεωρήματος του Enflo [En] για την ύπαρξη διαχωρίσιμου χώρου Banach που δεν έχει βάση Schauder.

6. Έστω $X \in \mathcal{B}_n$. Συμβολίζουμε με $R_n(X)$ την «ακτίνα» του Banach-Mazur compactum $\mathcal{B}_n$ ως προς X:

$$R_n(X) = \max\{d(X, Y) : Y \in \mathcal{B}_n\}.$$

Με αυτήν την ορολογία, το θεώρημα του John μάς λέει ότι $R_n(\ell_2^n) = n^{1/2}$. Είναι φυσιολογικό να ζητήσουμε ανάλογα αποτελέσματα, βάζοντας στη θέση του ℓ_2^n άλλους χαρακτηριστικούς n-διάστατους χώρους. Σε αυτήν την κατεύθυνση, ο Pelczynski [Pel] έθεσε ένα πρόβλημα με προφανή γεωμετρική σημασία: ποιά είναι η τάξη μεγέθους της μέγιστης δυνατής «απόστασης Banach-Mazur από τον κύβο» $R_n(\ell_\infty^n)$; Μέχρι πρόσφατα, το μόνο που ήταν γνωστό ήταν ότι $n^{1/2} \leq R_n(\ell_\infty^n) \leq n$, απλή συνέπεια του θεωρήματος του John.

Οι Bourgain και Szarek [BS] απέδειξαν ότι $R_n(\ell_\infty^n) = o(n)$. Στην προσπάθειά τους αυτή, μελέτησαν βαθύτερα τη σχέση ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K με το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που το περιέχει. Με την υπόθεση ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K, απέδειξαν ότι για κάθε $\delta \in (0,1)$ μπορούμε να επιλέξουμε $x_1, \ldots, x_m$, $m \geq (1-\delta)n$ μεταξύ των σημείων επαφής των K και B_2^n, έτσι ώστε, για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $(t_i)_{i\leq m}$,

$$\frac{f(\delta)}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^m |t_i| \leq |\sum_{i=1}^m t_i x_i| \leq \|\sum_{i=1}^m t_i x_i\|_K \leq \sum_{i=1}^m |t_i|.$$

Το σημαντικό μέρος αυτής της σειράς ανισοτήτων είναι βέβαια το πρώτο. Οι Dvoretzky και Rogers [DR] είχαν αποδείξει αντίστοιχη ανισότητα μόνο για $m \leq \sqrt{n}$.

Αυτή τη στιγμή είναι γνωστό (βλέπε [ST], [Gi]) ότι μπορούμε να πάρουμε $f(\delta) = c\delta$, και, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 7, αυτό μάς οδηγεί σε ένα άνω φράγμα για την $R_n(\ell_\infty^n)$, το οποίο δεν μοιάζει να είναι βέλτιστο:

Απόσταση Banach-Mazur από τον κύβο ([Sz2], [Gi]): *Υπάρχουν απόλυτες σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε*

$$c_1 n^{1/2} \log n \leq R_n(\ell_\infty^n) = R_n(\ell_1^n) \leq c_2 n^{5/6}.$$

Το κάτω φράγμα $R_n(\ell_\infty^n) \geq c_1 n^{1/2} \log n$ οφείλεται στον Szarek. Ο χώρος που έχει απόσταση τάξης $n^{1/2} \log n$ από τον ℓ_∞^n, είναι δυϊκός «χώρου Gluskin».

Κεφάλαιο 2

Απόσταση Banach-Mazur

2.1 Συμμετρικά κυρτά σώματα και χώροι με νόρμα

(α) Ορισμοί

Δουλεύουμε στον $\mathbb{R}^n$, τον οποίο έχουμε εφοδιάσει με μία Ευκλείδεια δομή που ορίζεται από το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$. Η συνήθης ορθοκανονική βάση συμβολίζεται με $\{e_1, \dots, e_n\}$. Η Ευκλείδεια νόρμα $\sqrt{\langle x, x \rangle}$ συμβολίζεται με $|\cdot|$, η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα με B_2^n, και

$$D(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : |y - x| \leq r\},$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ και κάθε $r > 0$.

Κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα μη κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο K του $\mathbb{R}^n$, που έχει μη κενό εσωτερικό. Θα λέμε ότι το κυρτό σώμα K είναι **συμμετρικό** με κέντρο συμμετρίας το o, αν για κάθε $x \in K$ έχουμε και $-x \in K$.

Με τον όρο **στοιχειώδες σύνολο** αναφερόμαστε σε μία πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων που έχουν τις ακμές τους παράλληλες πρός τους άξονες συντεταγμένων (τις διευθύνσεις των ορθοκανονικών διανυσμάτων e_j), και έχουν ξένα εσωτερικά. Συμβολίζουμε με $\mathcal{I}$ την κλάση όλων των στοιχειωδών συνόλων.

Αν I είναι ένα τέτοιο ορθογώνιο, με μήκη ακμών $a_1, \dots, a_n > 0$, τότε ορίζουμε τον **όγκο** του να ισούται με

$$|I| = a_1 \dots a_n.$$

Αν $J = \cup_{k=1}^m I_k$ είναι ένα στοιχειώδες σύνολο, τότε ορίζουμε

$$|J| = \sum_{k=1}^m |I_k|.$$

Έστω τώρα A ένα μη κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε τον **εσωτερικό όγκο** του A μέσω της

$$\underline{|A|} = \sup\{|J| : J \subseteq A, J \in \mathcal{I}\},$$

και τον **εξωτερικό όγκο** του A μέσω της

$$\overline{|A|} = \inf\{|J| : A \subseteq J, J \in \mathcal{I}\}.$$

Θα λέμε ότι το A **έχει όγκο** (είναι Jordan μετρήσιμο), και θα τον συμβολίζουμε με $|A|$, αν $\underline{|A|} = \overline{|A|}$. Μπορεί κανείς να δείξει ότι:

Κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$ έχει όγκο.

Οι ιδιότητες του όγκου που χρησιμοποιούμε συχνά στη συνέχεια είναι τελείως φυσιολογικές:

(α) Ο όγκος παραμένει αναλλοίωτος ως προς στροφές και μεταφορές.

(β) Αν T είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$, τότε γιά κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$ ισχύει

$$|T(K)| = |\text{det}T||K|.$$

Γράφουμε $L(\mathbb{R}^n)$ για το σύνολο όλων των γραμμικών μετασχηματισμών του $\mathbb{R}^n$, $GL(n)$ για το σύνολο των αντιστρέψιμων γραμμικών μετασχηματισμών $T \in L(\mathbb{R}^n)$, και $SL(n)$ για το σύνολο των $T \in GL(n)$ με ορίζουσα $\det T = \pm 1$. Αν $T \in L(\mathbb{R}^n)$, ο συζυγής T^* του T ορίζεται από την

$$\langle Tx, y\rangle = \langle x, T^*y\rangle, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

(β) Συμμετρικά κυρτά σώματα

Θεωρούμε μία νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, η μοναδιαία μπάλα $B_X = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ του χώρου με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το γεγονός ότι η B_X είναι συμπαγές σύνολο και έχει μη κενό εσωτερικό, οφείλεται στο ότι η $\|\cdot\|$ είναι ισοδύναμη με την Ευκλείδεια νόρμα. Δηλαδή, υπάρχουν $a, b > 0$ τέτοιοι ώστε

$$a|x| \leq \|x\| \leq b|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Ισοδύναμα,

$$(1/b)B_2^n \subseteq B_X \subseteq (1/a)B_2^n,$$

το οποίο δείχνει ότι η B_X είναι φραγμένο σύνολο και περιέχει μία ανοικτή μπάλα με κέντρο το o. Η B_X είναι κλειστό σύνολο, γιατί είναι κλειστή ως προς την $\|\cdot\|$, και, από την ισοδυναμία των νορμών, κάθε κλειστό σύνολο ως προς την $\|\cdot\|$ είναι κλειστό ως προς την Ευκλείδεια μετρική. Τέλος, η κυρτότητα και η συμμετρία της B_X είναι απλές συνέπειες των ιδιοτήτων της νόρμας: η $\|\cdot\|$ είναι άρτια, θετικά ομογενής συνάρτηση, και ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Ο Minkowski όρισε την συνάρτηση

$$\|x\|_K = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\},$$

και απέδειξε ότι είναι νόρμα, για την οποία ισχύει $\|x\|_K \leq 1$ αν και μόνο αν $x \in K$. Η ύπαρξη του λεγόμενου **συναρτησοειδούς του Minkowski** δείχνει ότι, με μία έννοια, η μελέτη των συμμετρικών κυρτών σωμάτων στον $\mathbb{R}^n$ είναι ισοδύναμη με τη μελέτη των νορμών πάνω στον $\mathbb{R}^n$:

Πρόταση 2.1.1 *Έστω $K \subseteq \mathbb{R}^n$ ένα συμμετρικό κυρτό σώμα. Τότε, το συναρτησοειδές του Minkowski*

$$\|x\|_K = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$$

είναι νόρμα, και

$$K = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\|_K \leq 1\}.$$

Απόδειξη: Το K περιέχει μία μπάλα με κέντρο το o. Πράγματι, αφού το K έχει μη κενό εσωτερικό, υπάρχουν $x \in K$ και $r > 0$ τέτοια ώστε $D(x,r) \subseteq K$. Λόγω συμμετρίας έχουμε $D(-x,r) \subseteq K$, και λόγω κυρτότητας, $D(o,r) = [D(x,r) + D(-x,r)]/2 \subseteq K$.

Έστω $x \in \mathbb{R}^n$. Υπάρχει $\lambda > 0$ αρκετά μεγάλο, ώστε $(1/\lambda)x \in D(o,r) \subseteq K$, άρα, $x \in \lambda K$. Αυτό δείχνει ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, το σύνολο $\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}$ είναι μη κενό, άρα ορίζεται το

$$\inf\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\}.$$

Θεωρούμε μία γνησίως φθίνουσα ακολουθία $\lambda_s \to \lambda$. Υπάρχουν $y_s \in K$ τέτοια ώστε $x = \lambda_s y_s$, και λόγω της συμπάγειας του K μπορούμε να υποθέσουμε ότι $y_s \to y \in K$. Τότε, $x = \lambda y \in K$. Άρα το infimum είναι minimum, και η $\|x\|_K$ είναι καλά ορισμένη. Επίσης, είναι τώρα φανερό ότι $\|x\|_K \geq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και $\|x\|_K = 0$ αν και μόνο αν $x = o$.

Από τη συμμετρία του K ως προς το o, έχουμε $x \in \lambda K$ αν και μόνο αν $-x \in \lambda K$. Αυτό αποδεικνύει ότι

$$\|-x\|_K = \min\{\lambda \geq 0 : -x \in \lambda K\} = \min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\} = \|x\|_K.$$

Επίσης, αν $t > 0$, τότε

$$\begin{aligned} \|tx\|_K &= \min\{\lambda \geq 0 : tx \in \lambda K\} = \min\{\lambda \geq 0 : x \in (\lambda/t)K\} \\ &= \min\{t\mu : \mu \geq 0, x \in \mu K\} = t\min\{\mu \geq 0 : x \in \mu K\} \\ &= t\|x\|_K. \end{aligned}$$

Οι δύο προηγούμενες σχέσεις αποδεικνύουν ότι $\|tx\|_K = |t| \cdot \|x\|_K$, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ και κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Για την τριγωνική ανισότητα, παρατηρούμε ότι $x \in \|x\|_K K$ και $y \in \|y\|_K K$, οπότε η κυρτότητα του K μάς εξασφαλίζει ότι $x + y \in (\|x\|_K + \|y\|_K)K$, δηλαδή

$$\|x+y\|_K \leq \|x\|_K + \|y\|_K, \quad x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Τέλος, $x \in K$ αν και μόνο αν $\min\{\lambda \geq 0 : x \in \lambda K\} \leq 1$, δηλαδή $\|x\|_K \leq 1$. $\square$

(γ) Ισομορφισμοί και ισομετρίες

1. Έστω X και Y χώροι με νόρμα. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται **φραγμένος** αν υπάρχει σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε

$$(*) \qquad \|Tx\| \leq c\|x\|$$

για κάθε $x \in X$.

Αν ο T είναι φραγμένος, ορίζουμε τη **νόρμα** $\|T\|$ του T σαν τη μικρότερη σταθερά c για την οποία η $(*)$ ισχύει για κάθε $x \in X$. Τότε,

$$\|T\| = \sup_{x \neq 0} \frac{\|Tx\|}{\|x\|} = \sup_{x \in B_X} \|Tx\| = \sup_{\|x\|=1} \|Tx\|.$$

Έστω $B(X,Y)$ το σύνολο των φραγμένων τελεστών $T : X \to Y$. Το $B(X,Y)$ είναι γραμμικός χώρος, και η $\|\cdot\| : B(X,Y) \to \mathbb{R}$ με $T \mapsto \|T\|$ είναι νόρμα.

Ο **δυϊκός χώρος** του X είναι ο γραμμικός χώρος X^* των φραγμένων γραμμικών συναρτησοειδών $x^* : X \to \mathbb{R}$. Δηλαδή, $X^* = B(X, \mathbb{R})$.

3. Ο $T : X \to Y$ λέγεται **ισομορφισμός** αν είναι γραμμικός, ένα προς ένα και επί τελεστής, και οι $T : X \to Y$, $T^{-1} : Y \to X$ είναι φραγμένοι τελεστές.

Ο $T : X \to Y$ λέγεται **ισομετρικός ισομορφισμός** αν είναι ισομορφισμός και, επιπλέον, για κάθε $x \in X$ ισχύει $\|Tx\| = \|x\|$.

Δύο χώροι X και Y με νόρμα λέγονται **ισομετρικά ισόμορφοι** αν υπάρχει ισομετρικός ισομορφισμός $T : X \to Y$. Από τη σκοπιά της Συναρτησιακής Ανάλυσης, δύο τέτοιοι χώροι **ταυτίζονται**: έχουν την ίδια γραμμική και μετρική δομή, αφού τα σημεία τους βρίσκονται σε ένα προς ένα αντιστοιχία που διατηρεί τις αποστάσεις και τη γραμμική δομή του χώρου.

Πρόταση 2.1.2 *Έστω X ένας n-διάστατος χώρος με νόρμα. Μπορούμε να ορίσουμε νόρμα $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$, έτσι ώστε ο X να είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$.*

Απόδειξη: Έστω $\|\cdot\|$ η νόρμα του X, και $\{x_1, \ldots, x_n\}$ μία βάση του. Ορίζουμε $T : X \to \mathbb{R}^n$, με

$$T(t_1x_1 + \ldots + t_nx_n) = t_1e_1 + \ldots + t_ne_n,$$

όπου $\{e_1, \ldots, e_n\}$ η συνήθης βάση του $\mathbb{R}^n$. Ο T είναι γραμμικός ισομορφισμός. Ορίζουμε $\|\cdot\|'$ στον $\mathbb{R}^n$, θέτοντας

$$\|t_1e_1 + \ldots + t_ne_n\|' = \|t_1x_1 + \ldots + t_nx_n\|.$$

Η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον $\mathbb{R}^n$, και

$$\|x\|' = \|T^{-1}(x)\|, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Άρα, ο T είναι ισομετρικός ισομορφισμός μεταξύ των X και $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|')$. □

Μπορούμε λοιπόν πάντα να ταυτίζουμε έναν n-διάστατο χώρο με νόρμα, με έναν χώρο της μορφής $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

(δ) Το πολικό σώμα ενός συμμετρικού κυρτού σώματος

Έστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Το **πολικό σώμα** του K είναι το

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \forall x \in K,\, |\langle x, y\rangle| \leq 1\}.$$

Θεωρούμε το χώρο $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$, και το δυϊκό του χώρο X^*. Τα γραμμικά συναρτησοειδή $f : X \to \mathbb{R}$ αναπαρίστανται από $y_f \in \mathbb{R}^n$: για κάθε $f \in X^*$ υπάρχει μοναδικό $y_f \in \mathbb{R}^n$ τέτοιο ώστε

$$f(x) = \langle y_f, x\rangle, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

και αντίστροφα, κάθε $y \in \mathbb{R}^n$ ορίζει $f_y \in X^*$ με τον ίδιο τρόπο. Μπορούμε λοιπόν να ταυτίσουμε (ως γραμμικό χώρο) τον X^* με τον $\mathbb{R}^n$. Μεταφέρουμε τη νόρμα του X^* στον $\mathbb{R}^n$, ορίζοντας

$$\|y\|_* = \|f_y\|_{X^*} = \max_{x \in B_X} |f_y(x)| = \max\{|\langle y, x\rangle| : x \in K\}.$$

Τότε, η μοναδιαία μπάλα του $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_*)$ είναι ακριβώς το K°. Πράγματι,

$$K^\circ = \{y \in \mathbb{R}^n : \max_{x \in K} |\langle y, x\rangle| \leq 1\} = \{y \in \mathbb{R}^n : \|y\|_* \leq 1\}.$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το εξής:

Πρόταση 2.1.3 *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, και $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$. Τότε, το K° είναι η μοναδιαία μπάλα του δυϊκού χώρου του X.* □

Από τον ορισμό του πολικού σώματος, και από τον χαρακτηρισμό του που μάς δίνει η προηγούμενη Πρόταση, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε τις παρακάτω βασικές ιδιότητές του:

Πρόταση 2.1.4 *Έστω K, K_1 συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

(α) Αν $K \subseteq K_1$, τότε $K_1^\circ \subseteq K^\circ$.

(β) $(K^\circ)^\circ = K$.

(γ) Αν $T \in GL(n)$, τότε $(TK)^\circ = T^{-*}K^\circ$.

(δ) $|K||K^\circ| = |TK||(TK)^\circ|$.

Απόδειξη: (α) Αν $y \in K_1^\circ$, τότε για κάθε $x \in K_1$ έχουμε $|\langle x, y\rangle| \leq 1$, και αφού $K \subseteq K_1$ έπεται ότι για κάθε $x \in K$ θα είναι $|\langle x, y\rangle| \leq 1$, δηλαδή $y \in K^\circ$.

(β) Ο $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ είναι αυτοπαθής, άρα το K είναι η μοναδιαία μπάλα του $X^{**} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{K^\circ})^*$. Δηλαδή, το K είναι το πολικό σώμα του K°.

(γ) Έχουμε $y \in (TK)^\circ$ αν και μόνο αν για κάθε $x \in TK$ ισχύει $|\langle x, y\rangle| \leq 1$, δηλαδή αν, για κάθε $z \in K$ ισχύει $|\langle Tz, y\rangle| = |\langle z, T^*y\rangle| \leq 1$, δηλαδή, αν $T^*y \in K^\circ$. Άρα, $(TK)^\circ = (T^*)^{-1}(K^\circ)$.

(δ) Έχουμε $|TK| = |\det T| \cdot |K|$ και $|(TK)^\circ| = |(T^*)^{-1}(K^\circ)| = |\det T|^{-1}|K^\circ|$. Άρα,

$$|TK| \cdot |(TK)^\circ| = |\det T| \cdot |K| \cdot |\det T|^{-1}|K^\circ| = |K| \cdot |K^\circ|. \quad \square$$

(ε) Κλασικοί χώροι - όγκος

Στον $\mathbb{R}^n$, θεωρούμε τις νόρμες: $\|x\|_\infty = \max_{1\leq k\leq n}|x_k|$, και

$$\|x\|_p = \left(\sum_{k=1}^n |x_k|^p\right)^{1/p}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

Αν $1 \leq p < r \leq \infty$, τότε για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει

$$\|x\|_r \leq \|x\|_p \leq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{r}}\|x\|_r.$$

Συμβολίζουμε τον αντίστοιχο χώρο $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_p)$ με ℓ_p^n. Η μοναδιαία μπάλα του ℓ_p^n συμβολίζεται με B_p^n, και έχει όγκο ίσο με

$$|B_p^n| = \frac{[2\Gamma(1+\frac{1}{p})]^n}{\Gamma(1+\frac{n}{p})}.$$

Ειδικότερα,

$$\omega_n := |B_2^n| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}.$$

Αν K είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, η ακτινική του συνάρτηση ρ_K ορίζεται στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} από την

$$\rho_K(\theta) = \frac{1}{\|\theta\|_K} = \max\{\lambda > 0 : \lambda\theta \in K\}.$$

Ο όγκος του K σε πολικές συντεταγμένες, υπολογίζεται από την

$$|K| = \int_{S^{n-1}}\int_0^{\rho_K(\theta)} r^{n-1}dr d\theta = |B_2^n|\int_{S^{n-1}}\rho_K^n(\theta)\sigma(d\theta) = \omega_n\int_{S^{n-1}}\|\theta\|_K^{-n}\sigma(d\theta),$$

όπου σ το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}.

2.2 Απόσταση Banach-Mazur

Δύο χώροι X και Y που έχουν την ίδια πεπερασμένη διάσταση είναι ισόμορφοι. Αν όμως θελήσουμε να εξετάσουμε πιό προσεκτικά τις μετρικές ιδιότητές τους, τότε το βασικό πρόβλημα είναι το εξής: πόσο «κοντά» βρίσκεται ο X στο να είναι ***ισομετρικά ισόμορφος*** με τον Y;

(α) Ορισμός και ιδιότητες

Η έννοια της απόστασης Banach-Mazur εμφανίζεται στο βιβλίο του Banach «Théorie des opérations linéaires» (1932). Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα, άπειρης ενδεχομένως διάστασης, και ας υποθέσουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y (γράφουμε $X \sim Y$). Υπάρχει δηλαδή τουλάχιστον ένας φραγμένος τελεστής $T : X \to Y$ που είναι ισομορφισμός διανυσματικών χώρων και τέτοιος ώστε ο T^{-1} να είναι επίσης φραγμένος τελεστής. ***Ορίζουμε*** την ***απόσταση Banach-Mazur*** των X και Y ως εξής:

$$d(X,Y) = \inf\{||T|| \cdot ||T^{-1}|| \mid T : X \to Y, \textit{ισομορφισμός}\}$$

Αν οι X και Y δεν είναι ισόμορφοι ($X \not\sim Y$), θέτουμε $d(X,Y) = +\infty$.

Ιδιότητες της απόστασης Banach-Mazur: Έστω X, Y, Z χώροι με νόρμα. Τότε,

(α) $d(X,Y) \geq 1$.
(β) $d(X,Y) = d(Y,X)$.
(γ) $d(X,Y) \leq d(X,Z)\, d(Z,Y)$.
(δ) Αν οι X και Y είναι αυτοπαθείς, τότε $d(X^*,Y^*) = d(X,Y)$.

Απόδειξη: (α) Έστω $I_X : X \to X$ ο ταυτοτικός τελεστής. Για κάθε ισομορφισμό $T : X \to Y$ ισχύει

$$1 = \|I_X\| = \|T^{-1}T\| \leq \|T^{-1}\|\,\|T\|,$$

επομένως,

$$1 \leq d(X,Y).$$

(β) Είναι προφανές ότι ο $T : X \to Y$ είναι ισομορφισμός αν και μόνο αν ο $T^{-1} : Y \to X$ είναι ισομορφισμός, και $(T^{-1})^{-1} = T$. Έπεται ότι $d(X,Y) = d(Y,X)$.

(γ) Έστω $T' : X \to Z$ και $T'' : Z \to Y$ ισομορφισμοί. Τότε, ο $T = T'' \circ T' : X \to Y$ είναι ισομορφισμός, άρα

$$\begin{aligned} d(X,Y) &\leq \|T\|\,\|T^{-1}\| = \|T'' \circ T'\|\,\|(T')^{-1} \circ (T'')^{-1}\| \\ &\leq \|T''\|\,\|(T'')^{-1}\|\,\|T'\|\,\|(T')^{-1}\| \end{aligned}$$

και αφού αυτό ισχύει για κάθε T', T'' έπεται ότι

$$d(X,Y) \leq d(X,Z)\, d(Z,Y).$$

(δ) Έστω πάλι $T : X \to Y$ ισομορφισμός. Τότε, ο συζυγής τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ του T, που ορίζεται από την $T^*(y^*) = y^* \circ T$ για κάθε $y^* \in Y^*$, είναι ισομορφισμός και ικανοποιεί τις $\|T^*\| = \|T\|$, και $(T^*)^{-1} = (T^{-1})^*$. Άρα,

$$\|T\|\,\|T^{-1}\| = \|T^*\|\,\|(T^*)^{-1}\| \geq d(X^*,Y^*),$$

και αφού ο T ήταν τυχών, θα ισχύει

$$d(X,Y) \geq d(X^*,Y^*).$$

Ας υποθέσουμε τώρα ότι οι X και Y είναι αυτοπαθείς. Από το προηγούμενο κομμάτι της απόδειξης έχουμε $d(X^*,Y^*) \geq d(X^{**},Y^{**})$. Όμως, ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X^{**}, δηλαδή $d(X,X^{**})=1$. Όμοια, $d(Y,Y^{**})=1$. Έπεται ότι

$$d(X,Y) \leq d(X,X^{**})d(X^{**},Y^{**})d(Y^{**},Y) = d(X^{**},Y^{**}) \leq d(X^*,Y^*),$$

και συνδυάζοντας με την προηγούμενη ανισότητα, βλέπουμε ότι

$$d(X,Y) = d(X^*,Y^*). \quad \square$$

(β) Γεωμετρική ερμηνεία

Ενδιαφέρον παρουσιάζει η γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur:

Πρόταση 2.2.1 *Έστω X και Y ισόμορφοι χώροι με νόρμα. Τότε,*

$$d(X,Y) = \inf\{d>0 : \big|\exists T : X \to Y \text{ ισομορφισμός} :\ B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq d\,B_Y\}.$$

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε ότι $d(X,Y) < d < +\infty$. Από τον ορισμό της απόστασης, υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ με $\|T\|\,\|T^{-1}\| < d$. Από τον ορισμό της νόρμας τελεστή, έχουμε:

(α) Για κάθε $x \in B_X$, $\|Tx\|_Y \leq \|T\|\,\|x\|_X \leq \|T\|$, άρα

$$T(B_X) \subseteq \|T\|\,B_Y.$$

(β) Για κάθε $y \in B_Y$, $\|T^{-1}y\|_X \leq \|T^{-1}\|\,\|y\|_Y \leq \|T^{-1}\|$, άρα

$$T^{-1}(B_Y) \subseteq \|T^{-1}\|\,B_X,$$

ή, ισοδύναμα,

$$B_Y \subseteq \|T^{-1}\|\,T(B_X).$$

Αν θέσουμε $S = \|T^{-1}\|\,T$, τότε, από την (α), $S(B_X) \subseteq \|T\|\,\|T^{-1}\|\,B_Y$, και από την (β), $B_Y \subseteq S(B_X)$. Δηλαδή, υπάρχει $S : X \to Y$ τέτοιος ώστε

$$B_Y \subseteq S(B_X) \subseteq d\,B_Y.$$

Αντίστροφα, αν $B_Y \subseteq S(B_X) \subseteq dB_Y$ για κάποιον $S : X \to Y$, τότε $d(X,Y) \leq \|S\|\,\|S^{-1}\| \leq d$. $\square$

Από τα παραπάνω γίνεται φανερό ότι η απόσταση Banach-Mazur δύο χώρων X, Y είναι μικρή αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός της μοναδιαίας μπάλας του X που «μοιάζει» με τη μοναδιαία μπάλα του Y (περιέχει την B_Y και περιέχεται σε «μικρό» πολλαπλάσιο της B_Y).

(γ) Η απόσταση Banach-Mazur σε χώρους πεπερασμένης διάστασης

Έστω X και Y ισόμορφοι χώροι με νόρμα. Δεν είναι γενικά σωστό ότι υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε

$$d(X,Y) = \|T\|\,\|T^{-1}\|.$$

Για το αντιπαράδειγμα που θα δώσουμε, θα χρειαστούμε έναν ορισμό.

Ορισμός Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται **γνήσια κυρτός**, αν για κάθε $x \neq y \in X$ με $\|x\| = \|y\| = 1$ έπεται ότι $\|\frac{x+y}{2}\| < 1$.

Θεωρούμε τώρα τον διανυσματικό χώρο c_0 των μηδενικών πραγματικών ακολουθιών και ορίζουμε τις νόρμες

$$\|x\|_0 = \sup_n |x_n| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{2^{2n}}\Big)^{1/2}, \quad \|x\|_1 = \sup_n |x_n| + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_{n+1}|^2}{2^{2n}}\Big)^{1/2}.$$

Θέτουμε $X_0 = (c_0, \|\cdot\|_0)$ και $X_1 = (c_0, \|\cdot\|_1)$. Εύκολα βλέπουμε ότι ο X_0 είναι γνήσια κυρτός, αφού αν $x, y \in X_0$ με $x \neq y$ και $\|x\|_0 = \|y\|_0 = 1$, τότε $\|\frac{x+y}{2}\|_0 = 1$ αν και μόνο αν ισχύει ισότητα στις

$$\sup_n |x_n + y_n| \leq \sup_n |x_n| + \sup_n |y_n|$$

και

$$\Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n + y_n|^2}{2^{2n}}\Big)^{1/2} \leq \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x_n|^2}{2^{2n}}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|y_n|^2}{2^{2n}}\Big)^{1/2},$$

δηλαδή, αν $x = ay$ για κάποιο $a \in \mathbb{R}^+$, το οποίο δίνει $x = y$ γιατί τα x, y έχουν νόρμα ίση με 1.

Όμως ο X_1 δεν είναι γνήσια κυρτός: αν πάρουμε $x = e_1$, $y = \frac{3}{4}e_1 + \frac{1}{2}e_2$, τότε $\|x\|_1 = 1$ και $\|y\|_1 = \frac{3}{4} + \frac{1}{4} = 1$, αλλά $x + y = \frac{7}{4}e_1 + \frac{1}{2}e_2$, οπότε

$$\|x + y\|_1 = \frac{7}{4} + \frac{1}{4} = 2,$$

και $x \neq y$.

Οι ισομετρικοί ισομορφισμοί διατηρούν όλες τις μετρικές ιδιότητες των νορμών, άρα ο X_0 και ο X_1 δεν είναι ισομετρικά ισόμορφοι. Θα δείξουμε όμως ότι $d(X_0, X_1) = 1$.

Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε $T_n : X_0 \to X_1$ με

$$T_n(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_n, x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots),$$

και ελέγχουμε εύκολα ότι ο $T_n^{-1} : Y \to X$ ορίζεται από την

$$T_n^{-1}(x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) = (x_2, \ldots, x_n, x_1, x_{n+1}, \ldots).$$

Εκτιμάμε πρώτα την $\|T_n\|$. Για κάθε $x \in c_0$,

$$\begin{aligned}
\|T_n(x)\|_1 &= \sup_m |x_m| + \Big(\frac{|x_1|^2}{2^2} + \cdots + \frac{|x_{n-1}|^2}{2^{2(n-1)}} + \frac{|x_{n+1}|^2}{2^{2n}} + \sum_{m>n+1} \frac{|x_m|^2}{2^{2(m-1)}}\Big)^{1/2} \\
&\leq \sup_m |x_m| + \Big(\sum_{m=1}^{n-1} \frac{|x_m|^2}{2^{2m}}\Big)^{1/2} + \Big(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{|x_m|^2}{2^{2(m-1)}}\Big)^{1/2} \\
&\leq \|x\|_0 + \sup_m |x_m| \Big(\sum_{m=n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2(m-1)}}\Big)^{1/2} \\
&\leq \|x\|_0(1 + a_n),
\end{aligned}$$

όπου $a_n \to 0$. Τελείως ανάλογα,

$$\begin{aligned}
\|T_n^{-1}(x)\|_0 &= \|(x_2,\ldots,x_n,x_1,x_{n+1},\ldots)\|_0 \\
&= \sup_m |x_m| + \Big(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{|x_{m+1}|^2}{2^{2m}} + \frac{|x_1|^2}{2^{2n}} + \sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{|x_m|^2}{2^{2m}}\Big)^{1/2} \\
&\leq \sup_m |x_m| + \Big(\sum_{m=1}^{n-1}\frac{|x_{m+1}|^2}{2^{2m}}\Big)^{1/2} + \frac{|x_1|}{2^n} + \sup_m |x_m|\Big(\sum_{m=n+1}^{\infty}\frac{1}{2^{2m}}\Big)^{1/2} \\
&\leq \|x\|_1(1+\beta_n),
\end{aligned}$$

όπου $\beta_n \to 0$. Έπεται ότι $d(X_0, X_1) \leq \inf_n(1+a_n)(1+\beta_n) = 1$. □

Υποθέτουμε τώρα ότι $\dim X = \dim Y = n$. Ξέρουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y. Σε αυτήν την περίπτωση, η απόσταση Banach-Mazur των X και Y «πιάνεται» για κάποιον ισομορφισμό $T : X \to Y$:

Πρόταση 2.2.2 *Αν* $\dim X = \dim Y = n$*, τότε*

$$d(X,Y) = \min\{\|T\|\,\|T^{-1}\| \big| T : X \to Y \textit{ ισομορφισμός}\}$$

Απόδειξη: Από τον ορισμό του inf, υπάρχει ακολουθία $S_n : X \to Y$ τέτοια ώστε

$$\|S_n\|\,\|S_n^{-1}\| \to d(X,Y).$$

Θεωρούμε την ακολουθία $T_n = \|S_n^{-1}\|\,S_n$. Τότε, $\|T_n^{-1}\| = 1$ και

$$\|T_n\| = \|T_n\|\,\|T_n^{-1}\| = \|S_n\|\,\|S_n^{-1}\| \to d(X,Y).$$

Λόγω της συμπάγειας της μοναδιαίας μπάλας του $B(Y,X)$, μπορούμε να βρούμε υποακολουθία $T_{k_n}^{-1} \xrightarrow{\|\cdot\|} S$, για κάποιον $S \in B(Y,X)$ με $\|S\| = 1$. Η $\{\|T_{k_n}\|\}$ είναι φραγμένη, άρα υπάρχει υπακολουθία $T_{\lambda_{k_n}} \xrightarrow{\|\cdot\|} T$, όπου $T \in B(X,Y)$. Επίσης,

$$I_Y = T_{\lambda_{k_n}} \circ T_{\lambda_{k_n}}^{-1} \to T \circ S$$

και $I_X = T_{\lambda_{k_n}}^{-1} \circ T_{\lambda_{k_n}} \to S \circ T$, άρα οι S, T είναι ισομορφισμοί και $S = T^{-1}$. Τέλος,

$$\|T\|\,\|S\| = \lim \|T_{\lambda_{k_n}}\|\,\|T_{\lambda_{k_n}}^{-1}\| = d(X,Y).$$

Δηλαδή, $\|T\|\,\|T^{-1}\| = d(X,Y)$. □

Πόρισμα 2.2.1 *Αν* $\dim X = \dim Y = n$ *τότε,* $d(X,Y) = 1$ *αν και μόνο αν ο* X *είναι* ***ισομετρικά ισόμορφος*** *με τον* Y.

Απόδειξη: Έστω ότι $d(X,Y) = 1$. Τότε, σύμφωνα με την προηγούμενη πρόταση, υπάρχει ισομορφισμός $T : X \to Y$ τέτοιος ώστε $\|T\|\,\|T^{-1}\| = d(X,Y) = 1$. Άρα, $\|T\| = 1/\|T^{-1}\|$.

Έστω $x \in X$. Τότε,

$$\begin{aligned} \|x\| = \|T^{-1}Tx\| &\leq \|T^{-1}\|\,\|Tx\| = \frac{1}{\|T\|}\|Tx\| \\ &\leq \frac{1}{||T||}||T||\,||x|| = ||x||. \end{aligned}$$

Άρα, ο $T' = T/\|T\| : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός. Το αντίστροφο είναι προφανές: αν $T : X \to Y$ είναι ισομετρικός ισομορφισμός, τότε $1 \leq d(X,Y) \leq \|T\|\,\|T^{-1}\| = 1$. $\square$

Κεφάλαιο 3

Το Banach-Mazur compactum

3.1 Το Λήμμα του Auerbach

Ορισμός Έστω X χώρος με νόρμα. Ένα **διορθογώνιο σύστημα** στον X είναι μία ακολουθία ζευγαριών $(x_i, x_i^*)_{i\in I} \subseteq X \times X^*$ τέτοια ώστε $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, $i, j \in I$. Αν $\|x_i\|_X = \|x_i^*\|_{X^*} = 1$, $i \in I$, τότε το σύστημα λέγεται **νορμαρισμένο**.

Το λήμμα του Auerbach εξασφαλίζει την ύπαρξη «πλήρους» νορμαρισμένου διορθογώνιου συστήματος σε κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα:

Λήμμα 3.1.1 *Έστω X χώρος με νόρμα διάστασης n. Μπορούμε να βρούμε διανύσματα $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ και $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in X^*$, με $\|x_i\| = 1$ και $\|x_i^*\| = 1$, τέτοια ώστε $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$.*

Απόδειξη: Έστω $e_1, e_2, \ldots, e_n$ μια βάση του X. Τότε κάθε $y \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $y = \sum_{i=1}^n y_i e_i$. Για κάθε επιλογή n διανυσμάτων $y_1, \ldots, y_n \in X$, γράφουμε

$$y_k = \sum_{i=1}^n y_{ki} e_i, \quad k = 1, \ldots, n.$$

Τότε, τα $y_1, \ldots, y_n$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα αν και μόνο αν

$$|\det(y_{ki})_{i,k=1}^n| > 0.$$

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$, και ορίζουμε $f : S_X \times \cdots \times S_X \to \mathbb{R}$ με

$$f(y_1, y_2, \ldots, y_n) = \det(y_{ki}).$$

Η συνάρτηση αυτή είναι συνεχής: Αν $y_k^{(m)} \in S_X$, και $y_k^{(m)} \to y_k$, τότε

$$\| \sum_{i=1}^{n} (y_{ki} - y_{ki}^{(m)}) e_i \| \geq c \sum_{i=1}^{n} |y_{ki} - y_{ki}^{(m)}|$$

για κάποια σταθερά $c > 0$ που εξαρτάται μόνο από τα e_i, άρα $y_{ki}^{(m)} \to y_{ki}$ για κάθε $i, k \leq n$. Τότε,

$$f(y_1^{(m)}, \ldots, y_n^{(m)}) = \det(y_{ki}^{(m)}) \to \det(y_{ki}) = f(y_1, \ldots, y_m),$$

δηλαδή η f είναι συνεχής. Αφού η f ορίζεται στο συμπαγές $S_X \times \cdots \times S_X$, έπεται ότι παίρνει μέγιστη τιμή σε κάποια n-άδα $(x_1, \ldots, x_n) \in S_X \times \cdots \times S_X$. Η f είναι περιττή ως προς κάθε y_k, και προφανώς υπάρχουν γραμμικά ανεξάρτητες n-άδες $(y_1, \ldots, y_n)$ στο πεδίο ορισμού της. Άρα, στο σημείο μεγίστου έχουμε

$$f(x_1, \ldots, x_n) > 0.$$

Τότε, ορίζουμε

$$x_i^*(x) = \frac{f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)}{f(x_1, \ldots, x_n)}, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Παρατηρούμε ότι ο παρονομαστής είναι σταθερός και διάφορος του μηδενός, ενώ ο αριθμητής είναι ορίζουσα της οποίας μεταβάλεται μόνο η στήλη του x. Επίσης,

(α) $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, άρα $\|x_i^*\| \geq x_i^*(x_i) = 1$, και

(β) Αν $\|x\| = 1$, τότε

$$|x_i^*(x)| = \frac{|f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n)|}{|f(x_1, \ldots, x_n)|} \leq 1,$$

άρα $\|x_i^*\| \leq 1$.

Τα (α) και (β) δίνουν το ζητούμενο. $\square$

Παρατήρηση Το λήμμα του Auerbach έχει μια πολύ ενδιαφέρουσα γεωμετρική ερμηνεία. Ας υποθέσουμε ότι ο X είναι n-διάστατος χώρος με νόρμα, και $x_1, \ldots, x_n$ είναι τα μοναδιαία διανύσματα που μας δίνει το λήμμα του Auerbach: δηλαδή, υπάρχουν $x_i^* \in X^*$ με $\|x_i^*\| = 1$, τέτοια ώστε $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$, $i = 1, \ldots, n$. Τα x_i είναι βάση του X, μπορούμε λοιπόν να ορίσουμε «ℓ_1 και ℓ_∞ νόρμα» στον X, θέτοντας

$$\| \sum_{i \leq n} \lambda_i x_i \|_1 = \sum_{i \leq n} |\lambda_i| \, , \; \| \sum_{i \leq n} \lambda_i x_i \|_\infty = \max_{i \leq n} |\lambda_i|.$$

Οι αντίστοιχες μοναδιαίες μπάλες είναι: η κυρτή θήκη $B_1 = \mathrm{co}\{\pm x_1, \ldots, \pm x_n\}$ των $\pm x_i$, και το παραλληλεπίπεδο B_∞ με κορυφές τα $\sum_{i \leq n} \varepsilon_i x_i$, $\varepsilon_i \in \{-1, +1\}$.

Αν $x \in B_1$, τότε $x = \sum \lambda_i x_i$ όπου $\sum |\lambda_i| \leq 1$, και αφού $\|x_i\| = 1$, $i \leq n$, προφανώς

$$\|x\| = \| \sum_{i \leq n} \lambda_i x_i \| \leq \sum_{i \leq n} |\lambda_i| \|x_i\| = \sum_{i \leq n} |\lambda_i| \leq 1,$$

άρα, $x \in B_X$. Δηλαδή, $B_1 \subseteq B_X$.

Αν πάλι, $x = \sum_{i\le n} \lambda_i x_i \in B_X$, τότε $|x^*(x)| \le 1$ για κάθε $x^* \in B_{X^*}$, άρα και για $x^* = x_i^*$, $i = 1, \ldots, n$. Δηλαδή,

$$1 \ge \max_{j\le n} |x_j^*(x)| = \max_{j\le n} |\sum_{i\le n} \lambda_i x_j^*(x_i)| = \max_{j\le n} |\lambda_j| = \|x\|_\infty.$$

Άρα, $x \in B_\infty$. Δηλαδή, $B_X \subseteq B_\infty$. Έπεται ότι

$$B_1 \subseteq B_X \subseteq B_\infty \subseteq nB_1.$$

3.2 Το Banach-Mazur compactum

Με τη βοήθεια του Λήμματος του Auerbach, μπορούμε να δώσουμε μία πρώτη εκτίμηση για την απόσταση μεταξύ ενός χώρου X διάστασης n και του ℓ_1^n.

Πρόταση 3.2.1 *Αν X είναι ένας χώρος διάστασης n με νόρμα, τότε $d(X, \ell_1^n) \le n$.*

Απόδειξη: Έχουμε δεί ότι κάθε n-διάστατος χώρος με νόρμα είναι ισομετρικά ισόμορφος με χώρο της μορφής $(\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, μπορούμε λοιπόν να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$.

Από το Λήμμα του Auerbach, υπάρχουν $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ και $x_1^*, x_2^*, \ldots, x_n^* \in X^*$ με $\|x_i\| = 1$ και $\|x_i^*\| = 1$, τέτοια ώστε $x_i^*(x_j) = \delta_{ij}$. Τότε, όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο, τα $x_1, \ldots, x_n$ σχηματίζουν βάση του $\mathbb{R}^n$, και, για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |t_i| \le \max_{i\le n} |t_i| \le \|\sum_{i=1}^n t_i x_i\| \le \sum_{i=1}^n |t_i|.$$

Ορίζουμε $T : \ell_1^n \to X$ με $T(e_i) = x_i$. Τότε, αν $y = \sum_{i=1}^n t_i e_i \in \ell_1^n$,

$$\|T(y)\| = \|\sum_{i=1}^n t_i x_i\| \le \sum_{i=1}^n |t_i| = \|y\|_{\ell_1^n}$$

και

$$\|T(y)\| = \|\sum_{i=1}^n t_i x_i\| \ge \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n |t_i| = \frac{1}{n}\|y\|_{\ell_1^n}.$$

Δηλαδή, για κάθε $y \in \ell_1^n$ έχουμε

$$\frac{1}{n}\|y\|_{\ell_1^n} \le \|Ty\| \le \|y\|_{\ell_1^n}.$$

Από την πρώτη ανισότητα παίρνουμε ότι $\|T^{-1}\| \le n$, και από τη δεύτερη ότι $\|T\| \le 1$. Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Από την προηγούμενη πρόταση και την πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την απόσταση Banach-Mazur, παίρνουμε ένα άνω φράγμα για τη διάμετρο του Banach-Mazur compactum:

Πόρισμα 3.2.1 *Αν X και Y είναι n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε $d(X,Y) \leq n^2$.*

Απόδειξη: Έχουμε $d(X,Y) \leq d(X,\ell_1^n)\cdot d(\ell_1^n,Y) \leq n\cdot n = n^2$. $\square$

Το γεγονός ότι ο λογάριθμος της απόστασης Banach-Mazur μοιάζει πολύ με μετρική, οδηγεί στην ιδέα να ορίσουμε τον «μετρικό χώρο των n-διάστατων χώρων». Αυτή η ιδέα γίνεται πραγματικότητα παρακάτω.

Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $\mathcal{B}_n$ η κλάση όλων των n-διάστατων χώρων με νόρμα. Ορίζουμε μία σχέση ισοδυναμίας στην $\mathcal{B}_n$, θέτοντας

$$X \sim Y \Longleftrightarrow d(X,Y) = 1,$$

δηλαδή αν ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y. Συμβολίζουμε πάλι με $\mathcal{B}_n$ το σύνολο των κλάσεων ισοδυναμίας ως προς την $\sim$, και ορίζουμε τη μετρική ρ που επάγεται από την $\log d$ στο $\mathcal{B}_n \times \mathcal{B}_n$: Αν $[X],[Y]$ είναι οι κλάσεις ισοδυναμίας των X και Y, θέτουμε

$$\rho([X],[Y]) = \log d(X,Y).$$

Η ρ είναι καλά ορισμένη και ικανοποιεί τα αξιώματα της μετρικής. Ο μετρικός χώρος $(\mathcal{B}_n,\rho)$ ονομάζεται **Banach-Mazur compactum**. Στη συνέχεια ταυτίζουμε την $[X]$ με τον X, γιατί σε όλα τα προβλήματα τα οποία θα μάς απασχολήσουν, ισομετρικά ισόμορφοι χώροι ουσιαστικά συμπίπτουν. Ο όρος compactum δικαιολογείται από την επόμενη πρόταση:

Πρόταση 3.2.2 *Το Banach-Mazur compactum $(\mathcal{B}_n,\rho)$ είναι **συμπαγής μετρικός χώρος**.*

Απόδειξη: Από την απόδειξη της Πρότασης 3.2.1 βλέπουμε ότι, για κάθε $[X] \in \mathcal{B}_n$ υπάρχει $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|) \in [X]$ τέτοιος ώστε:

$$\frac{1}{n}\|x\|_{\ell_1^n} \leq \|x\| \leq \|x\|_{\ell_1^n}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Στη συνέχεια ορίζουμε Φ_n το σύνολο όλων των νορμών στον $\mathbb{R}^n$ που ικανοποιούν την παραπάνω ανισότητα, και

$$\mathcal{A}_n = \{f : S_{\ell_1^n} \to \mathbb{R} |\ f \in \Phi_n\},$$

το σύνολο των περιορισμών των $f \in \Phi_n$ στην $S_{\ell_1^n}$. Σε κάθε $f \in \mathcal{A}_n$, αντιστοιχεί ένας χώρος $(\mathbb{R}^n, f)$ που ανήκει σε κάποια κλάση $[X]_f \in \mathcal{B}_n$.

Θεωρούμε το $\mathcal{A}_n$ σαν υποσύνολο του $C(S_{\ell_1^n})$ με τη συνήθη μετρική $\|f-g\|_\infty$. Θα δείξουμε ότι το $\mathcal{A}_n$ είναι ισοσυνεχές, ομοιόμορφα φραγμένο και κλειστό υποσύνολο του $C(S_{l_1^n})$.

(α) Το $\mathcal{A}_n$ είναι ισοσυνεχές: Έστω $\varepsilon > 0$. Παίρνουμε $\delta = \varepsilon$. Αν $x, y \in S_{\ell_1^n}$ με $\|x-y\|_{\ell_1^n} < \delta$ και $f \in \mathcal{A}_n$, τότε $f = \|\cdot\| \,|_{S_{\ell_1^n}}$ για κάποια $\|\cdot\| \in \Phi_n$. Άρα,

$$|f(x) - f(y)| = \Big|\|x\| - \|y\|\Big| \leq \|x-y\| \leq \|x-y\|_{\ell_1^n} < \delta = \varepsilon.$$

(β) Το $\mathcal{A}_n$ είναι ομοιόμορφα φραγμένο: Έστω $f \in \mathcal{A}_n$. Τότε, υπάρχει νόρμα $\|\cdot\| \leq \|\cdot\|_{\ell_1^n}$ τέτοια ώστε $f = \|\cdot\|$, άρα

$$\max_{x \in S_{\ell_1^n}} |f(x)| = \max_{x \in S_{\ell_1^n}} \|x\| \leq \max_{x \in S_{\ell_1^n}} \|x\|_{\ell_1^n} = 1.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\mathcal{A}_n$ είναι κλειστό, άρα το Θεώρημα Ascoli - Arzelá μάς εξασφαλίζει ότι το $\mathcal{A}_n$ είναι συμπαγές.

Ορίζουμε τώρα μία απεικόνιση $\phi : \mathcal{A}_n \to \mathcal{B}_n$ ως εξής: αν $f \in \mathcal{A}_n$, τότε υπάρχει $\|\cdot\|_f$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε $\|\cdot\|_f|_{S_{\ell_1^n}} = f$ και $\frac{1}{n}\|\cdot\|_{\ell_1^n} \leq \|\cdot\|_f \leq \|\cdot\|_{\ell_1^n}$. Θέτουμε $\phi(f) = [X_f]$, όπου $X_f = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_f)$. Παρατηρούμε ότι η ϕ είναι *επί*. Αφού το $\mathcal{A}_n$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος, αν δείξουμε ότι η ϕ είναι συνεχής, θα συμπεράνουμε ότι ο $\phi(\mathcal{A}_n) = \mathcal{B}_n$ είναι συμπαγής μετρικός χώρος.

Για το σκοπό αυτό, υποθέτουμε ότι $f_m, f \in \mathcal{A}_n$, και ότι $f_m \to f$ ομοιόμορφα στην $S_{\ell_1^n}$. Θέλουμε να δείξουμε ότι $X_{f_m} \to X_f$ ως προς την απόσταση Banach-Mazur.

Θεωρούμε τον ταυτοτικό τελεστή $I_m : (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_m) \to (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού η $\|\cdot\|_m$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $\|\cdot\|$ στην $S_{\ell_1^n}$, υπάρχει $m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε, για κάθε $m \geq m_0$ και κάθε $x \in S_{\ell_1^n}$, $\Big|\|x\|_m - \|x\|\Big| < \varepsilon$. Άρα,

$$\|x\| \leq \|x\|_m + \varepsilon \leq \|x\|_m + \varepsilon n \|x\|_m = (1 + \varepsilon n)\|x\|_m$$

και

$$\|x\|_m \leq \|x\| + \varepsilon \leq (1 + \varepsilon n)\|x\|.$$

Αν $x \in \mathbb{R}^n$, τότε $\frac{x}{\|x\|_{\ell_1^n}} \in S_{\ell_1^n}$, οπότε για κάθε $m \geq m_0$ έχουμε

$$\Big\|\frac{x}{\|x\|_{\ell_1^n}}\Big\| \leq (1 + \varepsilon n)\Big\|\frac{x}{\|x\|_{\ell_1^n}}\Big\|_m \Rightarrow \|x\| \leq (1 + \varepsilon n)\|x\|_m.$$

Δηλαδή, $\|I_m\| \leq 1 + \varepsilon n$. Όμοια, $\|x\|_m \leq (1 + \varepsilon n)\|x\|$, άρα

$$\|I_m^{-1}\| \leq (1 + \varepsilon n).$$

Έπεται ότι

$$d(\|\cdot\|_m, \|\cdot\|) \leq \|I_m\| \cdot \|I_m^{-1}\| \leq (1 + \varepsilon n)^2$$

για κάθε $m \geq m_0$. Άρα,

$$d(\|\cdot\|_m, \|\cdot\|) \overset{m \to \infty}{\longrightarrow} 1,$$

το οποίο ολοκληρώνει την απόδειξη. $\square$

3.3 Το Θεώρημα των Ascoli-Arzelá

Σε αυτήν την παράγραφο θα αποδείξουμε το θεώρημα των Ascoli-Arzelá, το οποίο χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για να ορίσουμε το Banach-Mazur compactum.

Ορισμοί (α) Έστω (K,ρ) ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Ένα υποσύνολο S του $C(K)$ ονομάζεται ***ισοσυνεχές*** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε αν $\rho(x,y) < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$ για κάθε $f \in S$.

(β) Αν $S \subset C(K)$, το S λέγεται ***ολικά φραγμένο*** αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και $f_1, f_2, \ldots, f_n \in S$, ώστε $S \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} D(f_k, \varepsilon)$.

(γ) Το S λέγεται ***σχετικά συμπαγές*** στον $C(K)$ αν η κλειστή θήκη $\overline{S}$ του S είναι συμπαγές υποσύνολο του $C(K)$.

Θεώρημα 3.3.1 ***(Ascoli-Arzelá)*** *Έστω K ένας συμπαγής μετρικός χώρος. Ένα $S \subset C(K)$ είναι σχετικά συμπαγές αν και μόνο αν είναι ομοιόμορφα φραγμένο και ισοσυνεχές.*

Απόδειξη: Έστω ότι το S είναι σχετικά συμπαγές. Τότε είναι και (ολικά) φραγμένο υποσύνολο του $C(K)$. Έστω $\varepsilon > 0$. Το S περιέχει ένα πεπερασμένο ε-δίκτυο $N = \{f_1, \ldots, f_n\}$. Δηλαδή, για κάθε $f \in S$ υπάρχει $i \leq n$ τέτοιο ώστε $\|f - f_i\| < \varepsilon$. Τότε, για κάθε $f \in S$ έχουμε

$$\|f\| < \varepsilon + \max \|f_i\|,$$

άρα το S είναι ομοιόμορφα φραγμένο.

Επιπλέον, κάθε f_i είναι συνεχής, άρα ομοιόμορφα συνεχής στο K. Δηλαδή, για το ίδιο $\varepsilon > 0$, υπάρχει $\delta_i > 0$ ώστε για κάθε x, y με $d(x,y) < \delta_i$ να ισχύει $|f_i(x) - f_i(y)| < \varepsilon$. Παίρνουμε $\delta = \min_i \delta_i > 0$. Αν $f \in S$ και $i \leq n$ τέτοιο ώστε $\|f - f_i\| < \varepsilon$, τότε για κάθε x, y με $d(x,y) < \delta$ έχουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(y)| &\leq |f(x) - f_i(x)| + |f_i(x) - f_i(y)| + |f_i(y) - f(y)| \\ &< \varepsilon + \varepsilon + \varepsilon = 3\varepsilon, \end{aligned}$$

και, επειδή το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι το S είναι ισοσυνεχές.

Αντίστροφα τώρα, για να δείξουμε ότι το S είναι σχετικά συμπαγές πρέπει για τυχόν $\varepsilon > 0$, να κατασκευάσουμε πεπερασμένο ε-δίκτυο του S. Θεωρούμε το σύνολο $B(K,\mathbb{R})$ όλων των φραγμένων $h : K \to \mathbb{R}$ με απόσταση την

$$\|h - g\| = \sup_{x \in K} |h(x) - g(x)|.$$

Ο $B(K,\mathbb{R})$ είναι πλήρης μετρικός χώρος, και

$$B(K,\mathbb{R}) \supseteq C(K) \supseteq S.$$

Θα βρούμε $h_1, \ldots, h_m \in B(K,\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε $S \subseteq \bigcup_{i=1}^{m} D(h_i, 2\varepsilon)$. Το S είναι ισοσυνεχές, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $f \in S$ και για κάθε $x, y \in K$ με $d(x,y) < \delta$ να έχουμε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Επίσης ο K είναι συμπαγής μετρικός χώρος, άρα ολικά φραγμένος. Επομένως, υπάρχουν $x_1, \ldots, x_s \in K$ τέτοια ώστε $K = \bigcup_{i \leq s} D(x_i, \delta/2)$. Ορίζουμε

$$U_1 = D(x_1, \delta/2)$$

$$\begin{aligned} U_2 &= D(x_2,\delta/2)\setminus D(x_1,\delta/2) \\ &\dots \\ U_i &= D(x_i,\delta/2)\setminus \bigcup_{j<i} D(x_j,\delta/2) \\ &\dots \end{aligned}$$

Το S είναι ομοιόμορφα φραγμένο, άρα υπάρχει διάστημα $I=[a,b]\subseteq\mathbb{R}$ τέτοιο ώστε $f(x)\in I$ για κάθε $x\in K$ και κάθε $f\in S$. Ορίζουμε διαμέριση $a=y_1<y_2<\ldots<y_l=b$ του $[a,b]$, με $y_i-y_{i-1}<\varepsilon$, και θεωρούμε όλες τις $h:K\to\mathbb{R}$ που είναι σταθερές σε κάθε U_i και παίρνουν τιμές στο $\{y_1,y_2,\ldots,y_l\}$. Οι h είναι πεπερασμένες το πλήθος.

Έστω $f\in S$. Για κάθε $i\leq s$ υπάρχει $j(i)\leq l$ τέτοιο ώστε $|f(x_i)-y_{j(i)}|<\varepsilon$. Τότε, θεωρούμε την $h:K\to\mathbb{R}$ που παίρνει τιμή $y_{j(i)}$ στο U_i. Αν $x\in K$, υπάρχει $i\leq s$ τέτοιο ώστε $x\in U_i$. Τότε,

$$|f(x)-h(x)|\leq|f(x)-f(x_i)|+|f(x_i)-y_{j(i)}|<\varepsilon+\varepsilon=2\varepsilon.$$

Άρα,

$$S\subseteq\bigcup_{i=1}^{N}D(h_i,2\varepsilon).$$

Τέλος, παίρνουμε $f_h\in S$ με $f_h\in D(h,2\varepsilon)$. Άν $f\in S$, υπάρχει h τέτοια ώστε $\|f-h\|<2\varepsilon$ και $\|f_h-h\|<2\varepsilon$. Από την τριγωνική ανισότητα, $\|f-f_h\|<4\varepsilon$, δηλαδή $S\subseteq\bigcup_h D(f_h,4\varepsilon)$. Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Κεφάλαιο 4

Το θεώρημα του John: άνω φράγμα για τη διάμετρο

4.1 Ελλειψοειδές μέγιστου όγκου ενός κυρτού σώματος

Ελλειψοειδές στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$(*) \qquad E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i \rangle^2}{\alpha_i^2} \leq 1 \right\},$$

όπου $\{v_i\}_{i \leq n}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του E αντίστοιχα).

Πρόταση 4.1.1 *Το $E \subseteq \mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε $E = T(B_2^n)$.*

Απόδειξη: Υποθέτουμε πρώτα ότι το E είναι ελλειψοειδές, ορίζεται δηλαδή από την $(*)$ για κάποια ορθοκανονική βάση $\{v_1, \ldots, v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$, και κάποιους $\alpha_1, \ldots, \alpha_n > 0$. Έστω T ο γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις $T(v_i) = \alpha_i v_i$, $i = 1, \ldots, n$. Ο T είναι προφανώς αντιστρέψιμος, και $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν υπάρχει $y = \sum_{j=1}^{n} t_j v_j \in B_2^n$ με $x = Ty$. Τότε όμως, η ισότητα

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\langle x, v_i \rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\langle \sum_{j=1}^{n} t_j \alpha_j v_j, v_i \rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^{n} t_i^2$$

δείχνει ότι $x \in T(B_2^n)$ αν και μόνο αν $x \in E$, δηλαδή $E = T(B_2^n)$.

Αντίστροφα, έστω $T \in GL(n)$ και $E = T(B_2^n)$. Γράφουμε $S = T^{-1}$, και έχουμε

$$\|x\|_E^2 = \|x\|_{S^{-1}(B_2^n)}^2 = |Sx|^2 = \langle Sx, Sx\rangle = \langle S^*Sx, x\rangle.$$

Ο S^*S είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα γράφεται στη μορφή U^*DU όπου D διαγώνιος πίνακας με θετικά διαγώνια στοιχεία $\alpha_1^{-2}, \ldots, \alpha_n^{-2}$, και ο U είναι ορθογώνιος πίνακας. Θεωρούμε τον διαγώνιο πίνακα $D_1 = \sqrt{D}$ με διαγώνια στοιχεία τα $\alpha_1^{-1}, \ldots, \alpha_n^{-1}$. Αφού ο U είναι ορθογώνιος, έχουμε $S^*S = A^2$, όπου $A = U^*D_1U$. Δηλαδή,

$$\|x\|_E^2 = \langle A^2x, x\rangle = |Ax|^2 = |D_1Ux|^2 = \sum_{i=1}^n \frac{\langle Ux, e_i\rangle^2}{\alpha_i^2} = \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2},$$

όπου τα $v_i = U^*e_i$ αποτελούν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Έπεται ότι $x \in E$ αν και μόνο αν ικανοποιείται η $(*)$ για τα συγκεκριμένα v_i και α_i, δηλαδή το E είναι ελλειψοειδές. $\square$

Παρατήρηση Από την απόδειξη είναι φανερό ότι ο όγκος του E ισούται με

$$|E| = |B_2^n| \prod_{i=1}^n \alpha_i.$$

Θεωρούμε τώρα ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ και την οικογένεια $\mathcal{E}(K)$ όλων των *ελλειψοειδών* που περιέχονται στο K. O F. John (1948) έδειξε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχεται στο K και έχει τον μέγιστο δυνατό όγκο. Θα λέμε ότι το E είναι το **ελλειψοειδές μέγιστου όγκου** του K. Για την απόδειξη, βλέπουμε ταυτόχρονα ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές E που περιέχει το K και έχει ελάχιστο όγκο:

Πρόταση 4.1.2 *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \supseteq K$ με ελάχιστο όγκο.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την οικογένεια $\mathcal{E}'(K)$ όλων των ελλειψοειδών που περιέχουν το K, και τον αριθμό

$$V = \inf\{|E| : E \in \mathcal{E}'(K)\} > 0.$$

Υπάρχει ακολουθία $T_m \in GL(n)$ έτσι ώστε $E_m = T_m^{-1}(B_2^n) \supseteq K$ και

$$|E_m| = \frac{|B_2^n|}{|\det(T_m)|} \to V.$$

Αφού $\|T_m : X_K \to \ell_2^n\| \leq 1$, $m \in \mathbb{N}$, μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $\{T_{k_m}\}$ και $S \in L(\mathbb{R}^n)$ με $T_{k_m} \to S$. Τότε,

$$|\det(S)| = |B_2^n|/V > 0,$$

επομένως, $S \in GL(n)$. Ορίζουμε $E = S^{-1}(B_2^n)$. Έχουμε

$$\|S : X_K \to \ell_2^n\| = \lim \|T_{k_m} : X_K \to \ell_2^n\| \leq 1,$$

άρα $E \supseteq K$. Αφού $|E| = V$, το E είναι ένα ελλειψοειδές που περιέχει το K, με τον ελάχιστο δυνατό όγκο.

Δείχνουμε τώρα ότι υπάρχει ένα μόνο ελλειψοειδές με αυτήν την ιδιότητα. Έστω ότι τα E_1 και E_2 περιέχουν το K και έχουν ελάχιστο όγκο. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $E_1 = B_2^n$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και

$$E_2 = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle^2 / \alpha_i^2 \leq 1 \right\}.$$

Θεωρούμε ένα τρίτο ελλειψοειδές, τον «μέσο όρο» τους

$$F = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}(1 + \alpha_i^{-2}) \langle x, v_i \rangle^2 \leq 1 \right\}.$$

Είναι φανερό ότι $F \supseteq E_1 \cap E_2 \supseteq K$, επομένως

$$(*) \qquad |F| \geq |E_1| = |E_2|.$$

Αφού $E_1 = B_2^n$, η $(*)$ παίρνει τη μορφή

$$\begin{aligned} 1 = \left(\prod_{i=1}^n \alpha_i \right)^2 &\leq \prod_{i=1}^n \frac{2}{1 + \alpha_i^{-2}} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i^2}{1 + \alpha_i^2} \\ &= \prod_{i=1}^n \frac{2\alpha_i}{1 + \alpha_i^2}, \end{aligned}$$

οπότε, $2\alpha_i = 1 + \alpha_i^2$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Τότε όμως, $\alpha_i = 1$, $i = 1, \ldots, n$. Άρα, $E_1 = E_2$. $\square$

Η Πρόταση 4.1.2 μάς δίνει την ύπαρξη και την μοναδικότητα του ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου του K:

Θεώρημα 4.1.1 *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές $E \in \mathcal{E}(K)$ με μέγιστο όγκο.*

Απόδειξη: Είδαμε ότι υπάρχει μοναδικό ελλειψοειδές F ελάχιστου όγκου του K°. Θεωρούμε το $E = F^\circ$. Τότε $E \subseteq K$, και αν E_1 είναι ένα άλλο ελλειψοειδές με

$E_1 \subseteq K$, τότε $E_1^\circ \supseteq K^\circ$, άρα $|E_1^\circ| \geq |F|$. Επομένως, χρησιμοποιώντας και την Πρόταση 2.1.4, παίρνουμε

$$|E_1| = \frac{|B_2^n|^2}{|E_1^\circ|} \leq \frac{|B_2^n|^2}{|F|} = |E|.$$

Ισότητα μπορεί να ισχύει μόνο αν $E_1^\circ = F$, δηλαδή $E_1 = E$. Άρα, το E είναι το μοναδικό ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. $\square$

4.2 Το θεώρημα του John: στοιχειώδης απόδειξη

Ο F. John [J] έδειξε ότι αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, τότε $B_2^n \subseteq \sqrt{n}K$. Άμεση συνέπεια αυτού του ισχυρισμού είναι ένα άνω φράγμα για την απόσταση Banach-Mazur τυχόντος n-διάστατου χώρου με νόρμα από τον ℓ_2^n.

Θεώρημα 4.2.1 *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X έχουμε $d(X, \ell_2^n) \leq \sqrt{n}$.*

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Θεωρούμε τη μοναδιαία μπάλα B_X του X, και το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου E της B_X. Αν δεχτούμε το θεώρημα του John, ισχύει

$$\frac{1}{\sqrt{n}} E \subseteq B_X \subseteq E.$$

Όμως το E είναι ελλειψοειδές, άρα υπάρχει $T \in GL(n)$ τέτοιος ώστε $E = T^{-1}(B_2^n)$. Άρα,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subseteq T(B_X) \subseteq B_2^n.$$

Έπεται ότι

$$d(X, \ell_2^n) \leq \|T : X \to \ell_2^n\| \cdot \|T^{-1} : \ell_2^n \to X\| \leq 1 \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}. \quad \square$$

Το Θεώρημα 4.2.1 και η πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d μάς δίνουν ένα άνω φράγμα για τη διάμετρο του Banach-Mazur compactum.

Θεώρημα 4.2.2 *Αν X και Y είναι δύο n-διάστατοι χώροι με νόρμα, τότε*

$$d(X, Y) \leq n. \quad \square$$

Δηλαδή, η διάμετρος $\mathrm{diam}(\mathcal{B}_n)$ του n-οστού Banach-Mazur compactum είναι μικρότερη ή ίση του n.

Δίνουμε τώρα μία στοιχειώδη απόδειξη του Θεωρήματος του John:

Θεώρημα 4.2.3 *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε ότι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το K. Τότε,*

$$B_2^n \subseteq \sqrt{n}K.$$

Απόδειξη: Υποθέτουμε ότι το συμπέρασμα δεν ισχύει. Τότε, υπάρχει x στο σύνορο του K το οποίο είναι εσωτερικό σημείο της $(1/\sqrt{n})B_2^n$. Αλλάζοντας συντεταγμένες αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο του K στο x είναι παράλληλο με το $\{x : x_1 = 0\}$. Δηλαδή,

$$K \subset P = \big\{x \in \mathbb{R}^n : |x_1| \leq \frac{1}{c}\big\},$$

όπου $c > \sqrt{n}$. Για κάθε $a, b > 0$ ορίζουμε το ελλειψοειδές

$$E_{a,b} = \big\{x \in \mathbb{R}^n : a^2x_1^2 + b^2\sum_{i=2}^{n} x_i^2 \leq 1\big\}.$$

Ισχυρισμός. Αν $\frac{a^2-b^2}{c^2} + b^2 \leq 1$, τότε $K \subseteq E_{a,b}$.

[Πράγματι: αν $y \in K$, τότε $y \in P \cap B_2^n$. Άρα,

$$|y_1| \leq \frac{1}{c} \quad , \quad \sum_{i=1}^{n} y_i^2 \leq 1.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} a^2y_1^2 + b^2\sum_{i=2}^{n} y_i^2 &= (a^2-b^2)y_1^2 + b^2\sum_{i=1}^{n} y_i^2 \\ &\leq \frac{a^2-b^2}{c^2} + b^2 \\ &\leq 1. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $y \in E_{a,b}$.]

Από την άλλη πλευρά, ο όγκος του $E_{a,b}$ ισούται με $|E_{a,b}| = |B_2^n|/(ab^{n-1})$. Αν λοιπόν $ab^{n-1} > 1$, τότε $|E_{a,b}| < |B_2^n|$. Με την υπόθεση ότι $c > \sqrt{n}$, θα δείξουμε ότι υπάρχουν $a, b > 0$ που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις

$$ab^{n-1} > 1 \quad , \quad \frac{a^2-b^2}{c^2} + b^2 \leq 1.$$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί θα έχουμε βρεί ελλειψοειδές που περιέχει το K και έχει όγκο γνήσια μικρότερο από τον όγκο της B_2^n.

Για κάθε $\varepsilon \in (0, 1/2)$, θέτουμε $b_\varepsilon = 1 - \varepsilon$ και $a_\varepsilon = (1 + \varepsilon + 2\varepsilon^2)^{n-1}$. Τότε,

$$a_\varepsilon b_\varepsilon^{n-1} = [(1-\varepsilon)(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)]^{n-1} = (1+\varepsilon^2-2\varepsilon^3)^{n-1} > 1.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned}\frac{a_\varepsilon^2-b_\varepsilon^2}{c^2}+b_\varepsilon^2 &= \frac{(1+\varepsilon+2\varepsilon^2)^{2(n-1)}}{c^2}+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-\varepsilon)^2\\ &= \frac{1}{c^2}[1+2(n-1)\varepsilon+O(\varepsilon^2)]+\left(1-\frac{1}{c^2}\right)(1-2\varepsilon+\varepsilon^2)\\ &= 1+2\varepsilon\left(\frac{n}{c^2}-1\right)+O(\varepsilon^2).\end{aligned}$$

Αφού $(n/c^2)-1<0$, είναι φανερό ότι η ποσότητα αυτή γίνεται μικρότερη από 1 αν αφήσουμε το $\varepsilon\to 0^+$. Για μικρό λοιπόν $\varepsilon>0$, το ελλειψοειδές $E_{a_\varepsilon,b_\varepsilon}$ μάς οδηγεί σε άτοπο. □

Στην παράγραφο που ακολουθεί θα δούμε την πλήρη μορφή του Θεωρήματος του John, σαν πόρισμα του οποίου θα πάρουμε και το Θεώρημα 4.2.3. Η λεπτομερέστερη ανάλυση που θα κάνουμε, θα χρησιμοποιηθεί στο Κεφάλαιο 7.

4.3 Σημεία επαφής και η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K είναι η B_2^n. Το $u\in\mathbb{R}^n$ λέγεται **σημείο επαφής** των K και B_2^n αν $|u|=\|u\|_K=1$, δηλαδή αν ανήκει στην τομή των συνόρων τους. Το θεώρημα του John περιγράφει την κατανομή των σημείων επαφής πάνω στη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}:

Θεώρημα 4.3.1 *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε υπάρχουν σημεία επαφής $u_1,\dots,u_m$ των K και B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1,\dots,\lambda_m$ τέτοιοι ώστε*

$$x=\sum_{j=1}^m \lambda_j\langle x,u_j\rangle u_j$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις Το Θεώρημα 4.3.1 μάς λέει ότι η ταυτοτική απεικόνιση I του $\mathbb{R}^n$ αναπαρίσταται στη μορφή

$$I=\sum_{j=1}^m \lambda_j u_j\otimes u_j,$$

όπου $u_j\otimes u_j$ είναι η προβολή στην διεύθυνση του u_j: $(u_j\otimes u_j)(x)=\langle x,u_j\rangle u_j$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$

$$|x|^2=\langle x,x\rangle=\sum_{j=1}^m \lambda_j\langle x,u_j\rangle^2.$$

Επίσης, παίρνοντας $x = e_i$, $i = 1, \ldots, n$, όπου $\{e_i\}$ η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε

$$\begin{aligned} n &= \sum_{i=1}^{n} |e_i|^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle e_i, u_j\rangle^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \sum_{i=1}^{n} \langle e_i, u_j\rangle^2 = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j |u_j|^2 \\ &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j. \end{aligned}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος: Από τις παρατηρήσεις που προηγήθηκαν, αν υπάρχει η ζητούμενη αναπαράσταση θα πρέπει να ισχύει $\sum(\lambda_j/n) = 1$. Αυτό λοιπόν που χρειάζεται να δείξουμε είναι ότι η I/n γράφεται σαν κυρτός συνδυασμός πινάκων της μορφής $u \otimes u$, όπου u σημείο επαφής των K και B_2^n. Ορίζουμε δηλαδή

$$W = \{u \otimes u : |u| = \|u\|_K = 1\},$$

και δείχνουμε ότι $I/n \in \mathrm{co}(W)$. Παρατηρούμε ότι το $\mathrm{co}(W)$ είναι κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^{n^2}$, και ότι $W \neq \emptyset$: αν η B_2^n δεν ακουμπούσε το σύνορο του K, θα μπορούσαμε να βρούμε $rB_2^n \subseteq K$ με το r λίγο μεγαλύτερο από 1, οπότε η B_2^n δεν θα ήταν το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

Υποθέτουμε ότι $I/n \notin \mathrm{co}(W)$. Από διαχωριστικό θεώρημα, μπορύμε να βρούμε $\phi \in \mathbb{R}^{n^2}$ και $r \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε

$$\langle \phi, I/n\rangle < r \leq \langle \phi, A\rangle$$

για κάθε $A \in \mathrm{co}(W)$. Ειδικότερα, για κάθε σημείο επαφής u των K και B_2^n έχουμε

$$\langle \phi, I/n\rangle < r \leq \langle \phi, u \otimes u\rangle.$$

Οι πίνακες I/n και $u \otimes u$ είναι συμμετρικοί, οπότε παίρνοντας τον $\psi = (\phi + \phi^*)/2$ αντί του ϕ έχουμε ότι ο ψ είναι συμμετρικός και εξακολουθεί να ικανοποιεί την

$$\langle \psi, I/n\rangle < r \leq \langle \psi, u \otimes u\rangle$$

για κάθε $u \otimes u \in W$. Έστω $\beta = \mathrm{tr}(\psi)/n$. Αφού $\mathrm{tr}(I/n) = 1$ και $\mathrm{tr}(u \otimes u) = \sum u_i^2 = 1$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} \langle \psi - \beta I, I/n\rangle &= \langle \psi, I/n\rangle - \beta \\ &= 0 < r - \beta \\ &\leq \langle \psi - \beta I, u \otimes u\rangle \end{aligned}$$

για κάθε $u \otimes u \in W$. Παίρνοντας $B = \psi - \beta I$, έχουμε:

Λήμμα 4.3.1 *Αν $I/n \notin \mathrm{co}(W)$, τότε υπάρχουν $s > 0$ και B συμμετρικός με $\mathrm{tr}(B) = 0$ έτσι ώστε*

$$\langle B, u \otimes u \rangle \geq s$$

για κάθε $u \otimes u \in W$. □

Για $\delta > 0$ αρκετά μικρό, θεωρούμε το ελλειψοειδές

$$E_\delta = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle (I + \delta B)x, x \rangle \leq 1\}.$$

[Αν $M = \max\{|\langle Bx, y\rangle| : |x| = |y| = 1\}$ και $0 < \delta < 1/M$, τότε ο $I + \delta B$ είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, άρα έχει συμμετρική θετική τετραγωνική ρίζα S_δ, και $E_\delta = S_\delta^{-1}(B_2^n)$.]

Θα δείξουμε ότι $E_\delta \subseteq K$ αν το δ είναι μικρό, δείχνοντας ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \rho_K(v)$ για κάθε $v \in S^{n-1}$:

1η Περίπτωση: Έστω U το σύνολο των σημείων επαφής των K, B_2^n. Αν $u \in U$ και $v \in S^{n-1}$ με $|u - v| < s/2M$, τότε από το Λήμμα 4.3.1,

$$\langle (I + \delta B)u, u \rangle \geq 1 + \delta s,$$

ενώ

$$\begin{aligned} |\langle v + \delta Bv, v\rangle - \langle u + \delta Bu, u\rangle| &= \delta |\langle Bv, v\rangle - \langle Bu, u\rangle| \\ &\leq \delta |\langle Bv, v - u\rangle| + \delta |\langle Bu, u - v\rangle| \\ &\leq 2M\delta |u - v| < \delta s. \end{aligned}$$

Άρα, αν το $v \in S^{n-1}$ απέχει απόσταση μικρότερη της $s/2M$ από το U, τότε

$$\langle (I + \delta B)v, v \rangle > 1 + \delta s - \delta s = 1,$$

δηλαδή $v \notin E_\delta$. Όμως, $v \in B_2^n \subseteq K$ για κάθε $v \in S^{n-1}$. Άρα, σε αυτήν την περίπτωση ισχύει ότι

$$\rho_{E_\delta}(v) < 1 \leq \rho_K(v).$$

2η Περίπτωση: Έστω V το σύνολο των $v \in S^{n-1}$ που απέχουν τουλάχιστον $s/2M$ από το U. Τότε, το V είναι συμπαγές και $r = \max\{\|v\| : v \in V\} < 1$. Θέτουμε $\lambda = \min\{\langle Bv, v\rangle : v \in V\}$. Παρατηρήστε ότι τα r, λ δεν εξαρτώνται από το δ (εξαρτώνται μόνο από τον B και το U). Αν $0 < \delta < (1 - r^2)/|\lambda|$, τότε

$$\begin{aligned} \langle (I + \delta B)(v/\|v\|), v/\|v\| \rangle &= \frac{1 + \delta \langle Bv, v\rangle}{\|v\|^2} \\ &\geq \frac{1 + \delta\lambda}{r^2} > 1, \end{aligned}$$

δηλαδή $v/\|v\| \notin E_\delta$. Αυτό σημαίνει ότι $\rho_{E_\delta}(v) \leq \rho_K(v)$.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω καταλήγουμε στο εξής:

Λήμμα 4.3.2 *Υπάρχει $\delta_0 > 0$ τέτοιο ώστε $E_\delta \subseteq K$ για κάθε $0 < \delta < \delta_0$.* □

Μπορούμε τώρα να καταλήξουμε σε άτοπο: Παίρνουμε $\delta > 0$ αρκετά μικρό ώστε ο $I+\delta B$ να είναι θετικά ορισμένος και το ελλειψοειδές E_δ να περιέχεται στο K. Αφού η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, έχουμε $|E_\delta| \leq |B_2^n|$. Όμως,

$$|E_\delta| = |S_\delta^{-1}(B_2^n)| = |B_2^n|/\sqrt{\det(I+\delta B)}.$$

Άρα, $\det(I+\delta B) \geq 1$. Από την άλλη πλευρά, η ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου μάς δίνει

$$[\det(I+\delta B)]^{\frac{1}{n}} \leq \frac{\mathrm{tr}(I+\delta B)}{n} = 1 + \delta\frac{\mathrm{tr}(B)}{n} = 1,$$

γιατί $\mathrm{tr}(B) = 0$. Για να ισχύουν τα παραπάνω, πρέπει να έχουμε ισότητα στην ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου. Τότε όμως, όλες οι ιδιοτιμές του $I+\delta B$ είναι ίσες, δηλαδή $I+\delta B = \mu I$. Έπεται ότι ο B είναι πολλαπλάσιο του ταυτοτικού πίνακα, και αφού $\mathrm{tr}(B) = 0$ παίρνουμε $B = 0$.

Αυτό είναι άτοπο, γιατί από το Λήμμα 4.3.1 έχουμε $\langle Bu, u\rangle \geq s > 0$, $u \in U$. Επομένως $I/n \in \mathrm{co}(W)$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης που μάς δίνει το Θεώρημα 4.3.1, χαρακτηρίζει το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου με την εξής έννοια:

Θεώρημα 4.3.2 *Έστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbb{R}^n$, που περιέχει την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε*

$$I = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j u_j \otimes u_j.$$

Τότε, η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K.

Απόδειξη: Ορίζουμε

$$L = \{y \in \mathbb{R}^n : |\langle u_j, y\rangle| \leq 1, j = 1, \ldots, m\}.$$

Τότε $K \subseteq L$, οπότε αρκεί να αποδείξουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του L. Έστω

$$E = \{y \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^{-2}\langle y, v_i\rangle^2 \leq 1\},$$

όπου $\{v_i\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\alpha_i > 0$. Υποθέτουμε ότι $E \subseteq L$. Για κάθε $j = 1, \ldots, m$ έχουμε

$$y(u_j) = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle u_j, v_i\rangle^2\right)^{-1/2} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle u_j, v_i\rangle v_i \in E \subseteq L,$$

οπότε η $|\langle u_j, y(u_j)\rangle| \leq 1$ δίνει

$$(*) \qquad \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle u_j, v_i\rangle^2 \leq 1 \quad , \quad j=1,\ldots,m.$$

Πολλαπλασιάζοντας με λ_j και προσθέτοντας, βλέπουμε ότι

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle u_j, v_i\rangle^2\right)^{1/2} \leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n.$$

Αφού $|x|^2 = \sum \lambda_j \langle x, u_j\rangle^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$, και τα v_i σχηματίζουν ορθοκανονική βάση, χρησιμοποιώντας την $(*)$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{n} \alpha_i &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \alpha_i \lambda_j \langle v_i, u_j\rangle^2 \\
&= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \langle v_i, u_j\rangle^2\right) \\
&\leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle v_i, u_j\rangle^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} \langle v_i, u_j\rangle^2\right)^{1/2} \\
&= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \langle v_i, u_j\rangle^2\right)^{1/2} \leq n.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου $(\prod \alpha_i)^{1/n} \leq \sum \alpha_i/n \leq 1$, επομένως $|E| \leq |B_2^n|$. Δηλαδή, η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. $\square$

Μπορούμε τώρα να δώσουμε μία δεύτερη απόδειξη για το θεώρημα του John:

Πρόταση 4.3.1 *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε $K \subset \sqrt{n} B_2^n$.*

Απόδειξη: Θεωρούμε την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j\rangle u_j$$

του Θεωρήματος 4.3.1. Αφού $u_j \in S^{n-1}$, έχουμε

$$1 = \langle u_j, u_j\rangle \leq \|u_j\|_K \|u_j\|_{K^\circ} = \|u_j\|_{K^\circ} \quad , \quad j=1,\ldots,m.$$

Από την άλλη πλευρά, σε κάθε u_j τα K και B_2^n έχουν το ίδιο εφαπτόμενο υπερεπίπεδο με κάθετο διάνυσμα το u_j (για τη μπάλα, το εφαπτόμενο υπερεπίπεδο σε κάθε σημείο

$u \in S^{n-1}$ έχει κάθετο διάνυσμα το u). Επομένως, για κάθε $x \in K$ έχουμε $\langle x, u_j \rangle \leq 1$, και λόγω συμμετρίας του K,

$$(*) \qquad |\langle x, u_j \rangle| \leq 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι

$$\|u_j\|_K = \|u_j\|_{K^\circ} = |u_j| = 1, \quad j = 1, \ldots, m.$$

Έστω τώρα $x \in K$. Τότε, από την $(*)$

$$\begin{aligned} |x|^2 &= \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2 \\ &\leq \sum_{j=1}^{m} \lambda_j = n. \end{aligned}$$

Δηλαδή, $|x| \leq \sqrt{n}$. Αρα, $B_2^n \subseteq K \subseteq \sqrt{n} B_2^n$. □

Ολοκληρώνουμε αυτό το Κεφάλαιο με μία ακόμα παρατήρηση. Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, τότε η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K°. Επίσης, κάθε σημείο επαφής των K και B_2^n είναι, όπως είδαμε στην απόδειξη της Πρότασης 4.3.1, σημείο επαφής των K° και B_2^n. Άρα, αλλάζοντας τους ρόλους των K και K°, βλέπουμε ότι η αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης μέσω σημείων επαφής εξασφαλίζεται και στην περίπτωση του ελλειψοειδούς ελάχιστου όγκου:

Θεώρημα 4.3.3 *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του συμμετρικού κυρτού σώματος K, τότε υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε*

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Το Θεώρημα του John σε αυτή τη μορφή, θα χρησιμοποιηθεί στο Κεφάλαιο 7.

Κεφάλαιο 5

Η απόσταση του ℓ_p^n από τον ℓ_q^n

Σε πολλές σημαντικές περιπτώσεις, η απόσταση Banach-Mazur $d(X,Y)$ δύο χώρων με νόρμα X και Y διάστασης n, είναι πολύ μικρότερη από n. Σε αυτό το Κεφάλαιο, θα μελετήσουμε αναλυτικά την περίπτωση που οι X και Y είναι χώροι ℓ_p^n, $1 \leq p \leq \infty$. Οι Gurarii, Kadec και Macaev [GKM] υπολόγισαν τη σωστή τάξη μεγέθους της $d(\ell_p^n, \ell_q^n)$:

(α) Αν $1 \leq p \leq q \leq 2$ ή $2 \leq p \leq q \leq \infty$, τότε $d(\ell_p^n, \ell_q^n) = n^{1/p-1/q}$.

(β) Αν $1 \leq p < 2 < q \leq \infty$, τότε $c_1 n^\alpha \leq d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq c_2 n^\alpha$, όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά, $c_2 > 0$ σταθερά που εξαρτάται από τα p και q, και $\alpha = \max\{1/p - 1/2, 1/2 - 1/q\}$.

Θα δώσουμε πλήρη απόδειξη αυτών των εκτιμήσεων. Η απόδειξη του (β) απαιτεί την χρήση των πινάκων Walsh, την ανισότητα του Khintchine, και το Θεώρημα Κυρτότητας του M. Riesz, τα οποία αναπτύσσουμε σε ξεχωριστές παραγράφους.

5.1 Τα p και q είναι από την ίδια πλευρά του 2

Η κατάσταση εδώ είναι απλή. Ο «χειρότερος» ισομορφισμός ανάμεσα στους ℓ_p^n και ℓ_q^n είναι η ταυτοτική απεικόνιση. Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση $2 = p < q$.

Θεώρημα 5.1.1 *Αν $q > 2$, τότε $d(\ell_2^n, \ell_q^n) = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$.*

Απόδειξη: Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύουν οι ανισότητες

$$\|x\|_q \leq \|x\|_2 \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \|x\|_q.$$

Δηλαδή,

$$\|Id : \ell_2^n \to \ell_q^n\| \leq 1, \quad \|Id : \ell_q^n \to \ell_2^n\| \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},$$

απ' όπου παίρνουμε

$$d(\ell_2^n,\ell_q^n)\leq \|Id:\ell_2^n\to\ell_q^n\|\cdot\|Id:\ell_q^n\to\ell_2^n\|\leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Έστω τώρα $T:\ell_q^n\to\ell_2^n$ ισομορφισμός, με $\|T:\ell_q^n\to\ell_2^n\|=1$. Αν $\{e_j\}_{j\leq n}$ είναι η κανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, τότε έχουμε

$$1=\|e_j\|_q=\|T^{-1}(Te_j)\|_q\leq\|T^{-1}:\ell_2^n\to\ell_q^n\|\,\|Te_j\|_2,\ \ j=1,\dots,n.$$

Όμως, από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^n\|Te_j\|_2^2 &= \mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm1}\Big\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_jTe_j\Big\|_2^2=\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm1}\Big\|T(\sum_{j=1}^n\varepsilon_je_j)\Big\|_2^2\\ &\leq \mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm1}\Big\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_je_j\Big\|_q^2=n^{2/q},\end{aligned}$$

γιατί $\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_je_j\|_q=n^{1/q}$ για κάθε επιλογή προσήμων $\varepsilon_j=\pm1$. Άρα, υπάρχει $k\in\{1,\dots,n\}$ για το οποίο $n\|Te_k\|_2^2\leq n^{2/q}$, δηλαδή

$$\|Te_k\|_2\leq n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}}.$$

Έπεται ότι

$$\|T^{-1}:\ell_2^n\to\ell_q^n\|\geq\|Te_k\|_2^{-1}\geq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Άρα

$$\|T:\ell_q^n\to\ell_2^n\|\cdot\|T^{-1}:\ell_2^n\to\ell_q^n\|\geq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},$$

και αφού ο T ήταν τυχών,

$$d(\ell_2^n,\ell_q^n)\geq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.\qquad\square$$

Με πολύ λίγο κόπο μπορούμε τώρα να καλύψουμε και τις υπόλοιπες περιπτώσεις:

Θεώρημα 5.1.2 *Αν $1\leq p<q\leq 2$ ή $2\leq p<q\leq+\infty$, τότε $d(\ell_p^n,\ell_q^n)=n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}$.*

Απόδειξη: Ας υποθέσουμε πρώτα ότι $2\leq p<q\leq+\infty$. Από την πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα,

$$d(\ell_q^n,\ell_2^n)\leq d(\ell_q^n,\ell_p^n)d(\ell_p^n,\ell_2^n),$$

και από το Θεώρημα 5.1.1, $d(\ell_q^n,\ell_2^n)=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}$ και $d(\ell_p^n,\ell_2^n)=n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$. Έπεται ότι

$$d(\ell_p^n,\ell_q^n)\geq n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Η αντίστροφη ανισότητα είναι άμεση συνέπεια της

$$\|x\|_q\leq\|x\|_p\leq\|x\|_q n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}},\quad x\in\mathbb{R}^n,$$

απ' όπου παίρνουμε

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \le \|Id : \ell_p^n \to \ell_q^n\| \cdot \|Id : \ell_q^n \to \ell_p^n\| \le n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}.$$

Τέλος, αν $1 \le p < q \le 2$, τότε οι συζυγείς εκθέτες q', p' ικανοποιούν την $2 \le q' < p' \le +\infty$, άρα, από δυϊσμό παίρνουμε

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) = d(\ell_{p'}^n, \ell_{q'}^n) = n^{\frac{1}{q'}-\frac{1}{p'}} = n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{q}}. \quad \square$$

5.2 Τα p και q βρίσκονται εκατέρωθεν του 2

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση $1 \le p < 2 < q \le +\infty$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $c(p,q) > 0$ για την οποία

$$\frac{1}{\sqrt{2}} n^{\alpha} \le d(\ell_p^n, \ell_q^n) \le c(p,q) n^{\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}$$

όπου

$$\alpha = \max\left\{\frac{1}{p} - \frac{1}{2}, \frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right\}.$$

Όπως θα δούμε στη συνέχεια, στην περίπτωση $n = 2^k$, $k \in \mathbb{N}$, μπορεί κανείς να αντικαταστήσει τη σταθερά $c(p,q)$ με 1.

(α) Μελετάμε πρώτα το άνω φράγμα, κάνοντας τις επιπλέον υποθέσεις $n = 2^k$ και $\alpha = \frac{1}{2} - \frac{1}{q}$. Θα χρειαστούμε τους πίνακες Walsh. Αυτοί είναι ορθογώνιοι $2^k \times 2^k$ πίνακες, που ορίζονται επαγωγικά ως εξής: Θέτουμε $W_0 = [1]$, και

$$W_k = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} W_{k-1} & W_{k-1} \\ W_{k-1} & -W_{k-1} \end{bmatrix}, \qquad k \ge 1.$$

Επαγωγικά αποδεικνύουμε ότι κάθε W_k είναι ορθογώνιος πίνακας. Αν λοιπόν $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ είναι ο τελεστής που αντιστοιχεί στον W_k, $n = 2^k$, έχουμε

$$\|T : \ell_2^n \to \ell_2^n\| = 1.$$

Από την άλλη πλευρά, όλες οι συντεταγμένες του W_k είναι $\pm 1/\sqrt{n}$, άρα $\|Te_j\|_\infty = 1/\sqrt{n}$, $j = 1, \ldots, n$. Αφού κάθε $x \in B_1^n$ είναι κυρτός συνδυασμός των $\pm e_j$, συμπεραίνουμε ότι

$$\|T : \ell_1^n \to \ell_\infty^n\| = \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Εφαρμόζουμε το Θεώρημα κυρτότητας του M. Riesz (βλέπε Παράγραφο 4). Έχουμε

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{2},$$

όπου $\theta = 2 - (2/p)$. Επομένως,

$$\|T : \ell_p^n \to \ell_{p'}^n\| \leq \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{1-\theta} \cdot 1^\theta = n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

Έχουμε υποθέσει ότι $\frac{1}{2} - \frac{1}{q} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{2}$, άρα $q \geq p'$. Επομένως,

$$\|T : \ell_p^n \to \ell_q^n\| \leq \|T : \ell_p^n \to \ell_{p'}^n\| \cdot \|Id : \ell_{p'}^n \to \ell_q^n\| \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}.$$

Επίσης,

$$\begin{aligned} \|T^{-1} : \ell_q^n \to \ell_p^n\| &\leq \|Id : \ell_q^n \to \ell_2^n\| \cdot \|T^{-1} : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \cdot \|Id : \ell_2^n \to \ell_p^n\| \\ &= n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} \cdot 1 \cdot n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}, \end{aligned}$$

άρα

$$\|T : \ell_p^n \to \ell_q^n\| \cdot \|T^{-1} : \ell_q^n \to \ell_p^n\| \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}},$$

απ' όπου συμπεραίνουμε ότι

$$d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}} = n^\alpha.$$

(β) Θα δείξουμε με επαγωγή ότι $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \leq c(p,q)n^\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, στην περίπτωση $\alpha = (1/2) - (1/q)$. Η ύπαρξη και η επιλογή της σταθεράς $c(p,q)$ θα γίνει σαφής από το επαγωγικό βήμα.

Υποθέτουμε λοιπόν ότι $d(\ell_p^m, \ell_q^m) \leq c(p,q)m^\alpha$ αν $1 \leq m \leq 2^k$. Έστω $n = 2^k + m$, όπου $1 \leq m < 2^k$. Γράφουμε

$$\ell_p^n = \left(\ell_p^{2^k} \oplus \ell_p^m\right)_p,$$

και, σύμφωνα με το βήμα (α) και την επαγωγική υπόθεση, βρίσκουμε $T_1 : \ell_p^{2^k} \to \ell_q^{2^k}$ και $T_2 : \ell_p^m \to \ell_q^m$ που ικανοποιούν τις

$$\|T_1\| = \|T_1^{-1}\| \leq 2^{k\alpha/2}$$

και

$$\|T_2\| = \|T_2^{-1}\| \leq \sqrt{c(p,q)}m^{\alpha/2}.$$

Θεωρούμε τον $T = T_1 + T_2 : \ell_p^n \to \ell_q^n$. Αν $x = x_1 + x_2 \in \ell_p^n = \left(\ell_p^{2^k} \oplus \ell_p^m\right)_p$, τότε

$$\begin{aligned} \|Tx\|_q &= \|T_1x_1 + T_2x_2\|_q \leq \|T_1x_1\|_q + \|T_2x_2\|_q \\ &\leq 2^{k\alpha/2}\|x_1\|_p + \sqrt{c(p,q)}m^{\alpha/2}\|x_2\|_p \\ &\leq \left(\|x_1\|_p^p + \|x_2\|_p^p\right)^{1/p} \left(2^{kq\alpha/2} + c(p,q)^{q/2}m^{q\alpha/2}\right)^{1/q} \\ &= \|x\|_p \left(2^{kq\alpha/2} + c(p,q)^{q/2}m^{q\alpha/2}\right)^{1/q} \\ &\leq \|x\|_p \left(2^{k\alpha/2} + \sqrt{c(p,q)}m^{\alpha/2}\right). \end{aligned}$$

Αν πάρουμε $c(p,q)=(2^{\alpha/2}-1)^{-2}$, ελέγχουμε εύκολα ότι

$$2^{k\alpha/2}+\sqrt{c(p,q)}m^{\alpha/2}\leq \sqrt{c(p,q)}(2^k+m)^{\alpha/2},\quad k=0,1,2,\dots,\quad 1\leq m<2^k.$$

Άρα,

$$\|Tx\|_q\leq \sqrt{c(p,q)}n^{\alpha/2}\|x\|_p,$$

δηλαδή, $\|T\|\leq\sqrt{c(p,q)}n^{\alpha/2}$. Όμοια, αφού $T^{-1}=T_1^{-1}+T_2^{-1}$, δείχνουμε ότι $\|T^{-1}\|\leq\sqrt{c(p,q)}n^{\alpha/2}$. Άρα,

$$d(\ell_p^n,\ell_q^n)\leq c(p,q)n^\alpha,\quad n\in\mathbb{N}.$$

(γ) Αν $\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{q}$, τότε $1\leq q'<2<p'\leq+\infty$. Όμως τώρα,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}=\frac{1}{p}-\frac{1}{2}\geq\frac{1}{2}-\frac{1}{q}=\frac{1}{q'}-\frac{1}{2}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το βήμα (β) για τους p',q':

$$d(\ell_{q'}^n,\ell_{p'}^n)\leq c(p',q')n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p'}}=c(p',q')n^{\frac{1}{p}-\frac{1}{2}}=c(p,q)n^\alpha.$$

Παρατηρώντας ότι $c(p',q')=(2^{\alpha/2}-1)^{-2}=c(p,q)$ και χρησιμοποιώντας δυϊσμό, συμπεραίνουμε ότι

$$d(\ell_p^n,\ell_q^n)=d((\ell_p^n)^*,(\ell_q^n)^*)=d(\ell_{q'}^n,\ell_{p'}^n)\leq c(p,q)n^\alpha.$$

Συνδυάζοντας τα (α)-(γ), έχουμε αποδείξει το εξής:

Θεώρημα 5.2.1 *Έστω $1\leq p<2<q\leq+\infty$. Υπάρχει σταθερά $c(p,q)>0$ για την οποία $d(\ell_p^n,\ell_q^n)\leq c(p,q)n^\alpha$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$, όπου*

$$\alpha=\max\{(1/p)-(1/2),(1/2)-(1/q)\}.$$

Για το κάτω φράγμα θα χρειαστούμε την έννοια του **συντύπου-2** (για n διανύσματα):

Ορισμός Έστω X n-διάστατος χώρος με νόρμα. Η σταθερά συντύπου-2 του X για n διανύσματα, είναι η μικρότερη θετική σταθερά C που ικανοποιεί το εξής: Για κάθε επιλογή διανυσμάτων $x_1,\dots,x_n\in X$,

$$\sum_{j=1}^n\|x_j\|^2\leq C^2\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm1}\|\sum_{j=1}^n\varepsilon_jx_j\|^2.$$

Λήμμα 5.2.1 *Η σταθερά συντύπου-2 του ℓ_p^n, $1\leq p\leq 2$, είναι φραγμένη από μία σταθερά $C>0$ (ανεξάρτητη των n και p).*

Απόδειξη: Έστω $x_1, \ldots, x_n \in \ell_p^n$, με $x_j = (x_{j1}, \ldots, x_{jn})$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\left(\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\|_p^2\right)^{p/2} &\geq \mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\|_p^p \\
&= \mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\sum_{i=1}^n|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_{ji}|^p \\
&= \sum_{i=1}^n \mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_{ji}|^p \\
&\geq \sum_{i=1}^n \left(\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_{ji}|\right)^p.
\end{aligned}$$

Από την ανισότητα του Khintchine (βλέπε Παράγραφο 3),

$$\left(\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_{ji}|\right)^p \geq A_1^p\left(\sum_{j=1}^n |x_{ji}|^2\right)^{p/2}$$

για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Δηλαδή,

$$\left(\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\|_p^2\right)^{p/2} \geq A_1^p \sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n |x_{ji}|^2\right)^{p/2}.$$

Από την ανισότητα του Minkowski, η τελευταία ποσότητα είναι μεγαλύτερη ή ίση από

$$A_1^p\left[\sum_{j=1}^n\left(\sum_{i=1}^n |x_{ji}|^p\right)^{2/p}\right]^{p/2} = A_1^p\left(\sum_{j=1}^n \|x_j\|_p^2\right)^{p/2}.$$

Άρα,

$$\sum_{j=1}^n \|x_j\|_p^2 \leq A_1^{-2}\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j x_j\|_p^2. \qquad \square$$

Θεώρημα 5.2.2 *Αν $1 \leq p < 2 < q \leq +\infty$, τότε $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \geq \frac{1}{\sqrt{2}} n^\alpha$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου*

$$\alpha = \max\{(1/p) - (1/2), (1/2) - (1/q)\}.$$

Απόδειξη: Έστω $T : \ell_p^n \to \ell_q^n$ ισομορφισμός. Τότε,

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j T^{-1}(e_j)\|_p^2 \leq \|T^{-1}\|^2 \mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j e_j\|_q^2 = \|T^{-1}\|^2 n^{2/q}.$$

Από την άλλη πλευρά, αν ορίσουμε $x_j = T^{-1}(e_j) \in \ell_p^n$, από το Λήμμα 5.2.1 παίρνουμε

$$\mathrm{Ave}_{\varepsilon_j=\pm 1}\|\sum_{j=1}^n \varepsilon_j T^{-1}(e_j)\|_p^2 \geq A_1^2 \sum_{j=1}^n \|T^{-1}(e_j)\|_p^2 \geq A_1^2 \frac{\sum_{j=1}^n \|e_j\|_q^2}{\|T\|^2} = \frac{A_1^2 n}{\|T\|^2}.$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες, βλέπουμε ότι

$$\|T\| \cdot \|T^{-1}\| \geq A_1 n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Αυτό δείχνει ότι $d(\ell_p^n, \ell_q^n) \geq A_1 n^{\alpha}$ αν $(1/2)-(1/q) \geq (1/p)-(1/2)$. Σε αντίθετη περίπτωση, θεωρούμε τους δυϊκούς χώρους, όπως κάναμε και για το άνω φράγμα. Είναι γνωστό ότι η καλύτερη δυνατή τιμή της A_1 είναι $A_1 = 1/\sqrt{2}$, οπότε η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

5.3 Η ανισότητα του Khintchine

Θεωρούμε τον $E_2^n = \{-1,1\}^n$ σαν χώρο πιθανότητας, ορίζοντας $\mu(A) = |A|/2^n$. Οι **συναρτήσεις Rademacher** $r_i : E_2^n \to \{-1,1\}$ που ορίζονται από τις

$$r_i(\varepsilon) = r_i(\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n) = \varepsilon_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές στον (E_2^n, μ): Αν $i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}$ και $\delta_{i_1}, \ldots, \delta_{i_k} \in \{-1,1\}$, τότε

$$P(\varepsilon_{i_1} = \delta_{i_1}, \ldots, \varepsilon_{i_k} = \delta_{i_k}) = P(\varepsilon_{i_1} = \delta_{i_1}) \ldots P(\varepsilon_{i_k} = \delta_{i_k}) = \frac{1}{2^k}.$$

Στην απόδειξη του κάτω φράγματος για την $d(\ell_p^n, \ell_q^n)$, χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα του Khintchine, η οποία μπορεί να διατυπωθεί σαν μία ανισότητα για τις συναρτήσεις Rademacher:

Θεώρημα 5.3.1 *Για κάθε $1 \leq p < \infty$ υπάρχουν θετικές σταθερές A_p και B_p τέτοιες ώστε: για κάθε n και κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $a_1, \ldots, a_n$,*

$$A_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i^2|\right)^{1/2} \leq \left(\int_{E_2^n} |\sum_{i=1}^n a_i r_i(\varepsilon)|^p d\varepsilon\right)^{1/p} \leq B_p \left(\sum_{i=1}^n |a_i^2|\right)^{1/2}.$$

Απόδειξη: Η ανισότητα είναι ομογενής με βαθμό 1, επομένως μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{i=1}^n a_i^2 = 1$. Δείχνουμε την δεξιά ανισότητα, πρώτα για $p = k \in \mathbb{N}$: Ορίζουμε $f(\varepsilon) = \sum_{i=1}^n a_i r_i(\varepsilon)$. Τότε,

$$|f(\varepsilon)|^k \leq k! e^{|f(\varepsilon)|} \leq k! \left(e^{f(\varepsilon)} + e^{-f(\varepsilon)}\right).$$

Από την ανεξαρτησία των r_i, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{E_2^n} e^{f(\varepsilon)}d\varepsilon &= \int_{E_2^n}\prod_{i=1}^n \exp(a_i r_i(\varepsilon))d\varepsilon = \prod_{i=1}^n \int_{E_2^n}\exp(a_i r_i(\varepsilon))d\varepsilon \\ &= \prod_{i=1}^n \cosh(a_i).\end{aligned}$$

Παίρνοντας αναπτύγματα Taylor ελέγχουμε την ανισότητα $\cosh(x) \leq \exp(x^2/2)$, οπότε συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{E_2^n} e^{f(\varepsilon)}d\varepsilon \leq \prod_{i=1}^n \exp(a_i^2/2) = \sqrt{e}.$$

Λόγω συμμετρίας ισχύει και η $\int e^{-f(\varepsilon)}d\varepsilon \leq \sqrt{e}$. Δηλαδή,

$$\left(\int_{E_2^n} |\sum_{i=1}^n a_i r_i(\varepsilon)|^k d\varepsilon\right)^{1/k} \leq \left(2\sqrt{e}k!\right)^{1/k}\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2},$$

που είναι η δεξιά ανισότητα για $p = k$, με $B_k \simeq k$. Έστω $p \geq 2$. Θεωρώντας τον φυσικό αριθμό $k = [p]+1$ και την ανισότητα του Hölder βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\int_{E_2^n} |\sum_{i=1}^n a_i r_i(\varepsilon)|^p d\varepsilon\right)^{1/p} &\leq \left(\int_{E_2^n} |\sum_{i=1}^n a_i r_i(\varepsilon)|^k d\varepsilon\right)^{1/k} \\ &\leq ck\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2} \\ &\leq 2cp\left(\sum_{i=1}^n a_i^2\right)^{1/2}.\end{aligned}$$

Αυτό σημαίνει ότι $B_p \leq cp$. Συμπληρώνουμε την απόδειξη δείχνοντας την αριστερή ανισότητα στην περίπτωση $1 \leq p < 2$. Βρίσκουμε $\theta \in (0,1)$ τέτοιο ώστε $2 = p\theta + 4(1-\theta)$, δηλαδή $\theta = 2/(4-p)$. Τότε, από την ανισότητα του Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{E_2^n} |f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon &= \int_{E_2^n} |f(\varepsilon)|^{p\theta}|f(\varepsilon)|^{4(1-\theta)}d\varepsilon \\ &\leq \left(\int_{E_2^n}|f(\varepsilon)|^p d\varepsilon\right)^{\theta}\left(\int_{E_2^n}|f(\varepsilon)|^4 d\varepsilon\right)^{1-\theta}.\end{aligned}$$

Από την δεξιά ανισότητα (αφού $B_4 \leq (48\sqrt{e})^{1/4} \leq 3$),

$$\int_{E_2^n} |f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon \leq \left(\int_{E_2^n}|f(\varepsilon)|^p d\varepsilon\right)^{\theta} 3^{1-\theta}\left(\int_{E_2^n}|f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon\right)^{2(1-\theta)},$$

το οποίο μας δίνει

$$3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}\left(\int_{E_2^n}|f(\varepsilon)|^2 d\varepsilon\right)^{1/2}\leq\left(\int_{E_2^n}|f(\varepsilon)|^p d\varepsilon\right)^{1/p}.$$

Άρα, $A_p\geq 3^{\frac{1}{2}-\frac{1}{p}}$. $\square$

5.4 Το θεώρημα κυρτότητας του M. Riesz

Έστω $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ γραμμικός τελεστής. Συμβολίζουμε με T και τον πίνακα $(a_{ij})_{i,j\leq n}$ του μετασχηματισμού, καθώς και τη διγραμμική μορφή που ορίζεται από αυτόν. Δηλαδή,

$$T(x,y)=\langle Tx,y\rangle=\sum_{i,j=1}^n a_{ij}x_iy_j,\quad x=(x_i),y=(y_j)\in\mathbb{R}^n.$$

Γράφουμε ακόμα

$$X_j=\sum_{i=1}^n a_{ij}x_i,\quad Y_i=\sum_{j=1}^n a_{ij}y_j,$$

οπότε,

$$T(x,y)=\sum_{j=1}^n X_jy_j=\sum_{i=1}^n x_iY_i. \tag{1}$$

Από την (1) και την ανισότητα του Hölder συμπεραίνουμε ότι

$$|T(x,y)|\leq\|X\|_q\|y\|_{q'},\quad |T(x,y)|\leq\|x\|_p\|Y\|_{p'}, \tag{2}$$

όπου $X=(X_1,\dots,X_n)$ και $Y=(Y_1,\dots,Y_n)$.

Για κάθε $1\leq p,q\leq\infty$, θέτουμε $\alpha=\frac{1}{p}$ και $\beta=\frac{1}{q}$ (συμφωνούμε ότι $1/\infty=0$). Ορίζουμε

$$M(\alpha,\beta)=\max\{|T(x,y)|:\|x\|_p\leq 1,\|y\|_{q'}\leq 1\},$$

όπου q' ο συζυγής εκθέτης του q (κι εδώ συμφωνούμε ότι οι 1 και ∞ είναι συζυγείς εκθέτες). Παρατηρήστε ότι $M(\alpha,\beta)$ είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία

$$|T(x,y)|\leq M(\alpha,\beta)\|x\|_p\|y\|_{q'} \tag{3}$$

για κάθε $x,y\in\mathbb{R}^n$.

Με αυτόν το συμβολισμό, το Θεώρημα κυρτότητας του M. Riesz διατυπώνεται ως εξής:

Θεώρημα 5.4.1 *Η συνάρτηση $M(\alpha,\beta)$ είναι λογαριθμικά κυρτή στο τρίγωνο $\Delta = \{(\alpha,\beta) : 0 \leq \beta \leq \alpha \leq 1\}$.*

Με τον όρο «λογαριθμικά κυρτή» εννοούμε ότι: αν (α_1,β_1) και (α_2,β_2) είναι δύο σημεία του Δ, και αν $\theta \in (0,1)$, τότε

$$M(\theta\alpha_1 + (1-\theta)\alpha_2, \theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2) \leq [M(\alpha_1,\beta_1)]^{\theta}[M(\alpha_2,\beta_2)]^{1-\theta}.$$

Δηλαδή, η συνάρτηση $\log M$ είναι κυρτή στο Δ.

Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε δύο λήμματα:

Λήμμα 5.4.1 *Η σταθερά $M = M(\alpha,\beta)$ ισούται με*

$$M = \max_{\|x\|_p \leq 1} \|X\|_q = \max_{\|y\|_{q'} \leq 1} \|Y\|_{p'}. \tag{4}$$

Επιπλέον, αν $\|x\|_p \leq 1$, $\|y\|_{q'} \leq 1$, και $|T(x,y)| = M$, τότε, για κάθε $i,j \in \{1,\dots,n\}$,

$$|X_j| = M|y_j|^{q'-1}, \quad |Y_i| = M|x_i|^{p-1} \tag{5}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $N = \max\{\|X\|_q : \|x\|_p \leq 1\}$. Από την (2), αν $\|x\|_p \leq 1$ και $\|y\|_{q'} \leq 1$, έχουμε

$$|T(x,y)| \leq \|X\|_q \leq N,$$

άρα, $M \leq N$. Αντίστροφα, αν μάς δώσουν $x \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\|_p \leq 1$, μπορούμε να βρούμε $y \in \mathbb{R}^n$ με $\|y\|_{q'} \leq 1$ για το οποίο

$$T(x,y) = \sum_{j=1}^{n} X_j y_j = \|X\|_q.$$

Άρα $\|X\|_q \leq M$, και αφού το x ήταν τυχόν, $N \leq M$. Αποδείξαμε έτσι την πρώτη ισότητα στην (4), ενώ η δεύτερη αποδεικνύεται με τον ίδιο ακριβώς τρόπο.

Τέλος, αν $|T(x,y)| = M$, πρέπει να ισχύει $\|x\|_p = \|y\|_{q'} = 1$ και, ταυτόχρονα,

$$\sum_{j=1}^{n} X_j y_j = \|X\|_q \|y\|_{q'}, \quad \sum_{i=1}^{n} x_i Y_i = \|x\|_p \|Y\|_{p'}.$$

Για να έχουμε όμως ισότητα στην ανισότητα του Hölder, πρέπει να υπάρχουν c,d τέτοια ώστε

$$|X_j|^q = c|y_j|^{q'}, \quad j = 1,\dots,n$$

και

$$|x_i|^p = d|Y_i|^{p'}, \quad i = 1,\dots,n.$$

Αντικαθιστώντας αυτές τις τιμές στις (4), και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\|x\|_p = \|y\|_{q'} = 1$, βλέπουμε ότι $c = M^q$ και $d = M^{-p'}$, απ' όπου έπονται οι (5). $\square$

Λήμμα 5.4.2 *Μία συνεχής συνάρτηση f είναι κυρτή σε ένα διάστημα $J = [a, b]$ αν και μόνο αν για κάθε υποδιάστημα $[w, z]$ του J υπάρχει τουλάχιστον ένα $\theta \in (0, 1)$ για το οποίο*

$$f(\theta w + (1-\theta)z) \leq \theta f(w) + (1-\theta) f(z).$$

Απόδειξη: Αν η f είναι κυρτή στο J τότε για κάθε υποδιάστημα $[w, z]$ του J και για κάθε $\theta \in (0, 1)$, έχουμε

$$f(\theta w + (1-\theta)z) \leq \theta f(w) + (1-\theta) f(z).$$

Αντίστροφα τώρα υποθέτουμε ότι η f δεν είναι κυρτή. Τότε, υπάρχουν $\theta_0 \in (0, 1)$ και $a_1, b_1 \in J, a_1 < b_1$, τέτοια ώστε

$$f(\theta_0 a_1 + (1-\theta_0)b_1) > \theta_0 f(a_1) + (1-\theta_0) f(b_1).$$

Θέτουμε $x_0 = \theta_0 a_1 + (1-\theta_0)b_1$. Η f είναι συνεχής στο J, άρα υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε για κάθε $\theta \in (\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta)$ να ισχύει

$$(*) \qquad f(\theta a_1 + (1-\theta)b_1)) > \theta f(a_1) + (1-\theta) f(b_1).$$

Ορίζουμε

$$w = \inf\{x = \theta a_1 + (1-\theta)b_1 : f(x) > \theta f(a_1) + (1-\theta) f(b_1)\},$$

και

$$z = \sup\{x = \theta a_1 + (1-\theta)b_1 : f(x) > \theta f(a_1) + (1-\theta) f(b_1)\}.$$

Τότε, $a_1 \leq w < z \leq b_1$ από την $(*)$, αν $w = \theta' a_1 + (1-\theta')b_1$ και $z = \theta'' a_1 + (1-\theta'')b_1$ έχουμε

$$f(w) = \theta' f(a_1) + (1-\theta') f(b_1), \quad f(z) = \theta'' f(a_1) + (1-\theta'') f(b_1),$$

και για κάθε $y = \theta a_1 + (1-\theta)b_1 \in [w, z]$ ισχύει

$$f(y) > \theta f(a_1) + (1-\theta) f(b_1).$$

Από την υπόθεση όμως, υπάρχει $y = \lambda w + (1-\lambda)z = (\lambda\theta' + (1-\lambda)\theta'')a_1 + (\lambda(1-\theta') + (1-\lambda)(1-\theta''))b_1 \in [w, z]$ τέτοιο ώστε

$$f(y) \leq \lambda f(w) + (1-\lambda) f(z) = (\lambda\theta' + (1-\lambda)\theta'') f(a_1) + (\lambda(1-\theta') + (1-\lambda)(1-\theta'')) f(b_1),$$

το οποίο είναι άτοπο. □

Απόδειξη του θεωρήματος: Παίρνουμε τυχόντα σημεία (α_1, β_1) και (α_2, β_2) του Δ, γράφουμε $M_1 := M(\alpha_1, \beta_1)$ και $M_2 = M(\alpha_2, \beta_2)$, και (σύμφωνα με το Λήμμα 5.4.2), προσπαθούμε να βρούμε *κάποιο* $\theta \in (0, 1)$ τέτοιο ώστε, αν θέσουμε

$$\alpha = \theta\alpha_1 + (1-\theta)\alpha_2, \quad \beta = \theta\beta_1 + (1-\theta)\beta_2, \quad M = M(\alpha, \beta),$$

να ισχύει

$$M \leq M_1^{\theta} M_2^{1-\theta}. \tag{6}$$

Για το τυχόν $\theta \in (0,1)$ (το οποίο τελικά θα επιλεγεί κατάλληλα), βρίσκουμε $x, y \in \mathbb{R}^n$ με $\|x\|_p = \|y\|_{q'} = 1$, για τα οποία $|T(x,y)| = M$. Αν $p_i = 1/\alpha_i$ και $q_i = 1/\beta_i$ $(i = 1,2)$, το Λήμμα 5.4.1 μάς δίνει

$$M\left(\sum_i |x_i|^{(p-1)p_1'}\right)^{1/p_1'} = \left(\sum_i |Y_i|^{p_1'}\right)^{1/p_1'} \leq M_1 \left(\sum_j |y_j|^{q_1'}\right)^{1/q_1'},$$

και

$$M\left(\sum_j |y_j|^{(q'-1)q_2}\right)^{1/q_2} = \left(\sum_j |X_j|^{q_2}\right)^{1/q_2} \leq M_2 \left(\sum_i |x_i|^{p_2}\right)^{1/p_2}.$$

Υψώνουμε την πρώτη ανισότητα στη δύναμη $1-\theta$, τη δεύτερη στη δύναμη θ, και πολλαπλασιάζουμε. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} M&\left(\sum_i |x_i|^{(p-1)p_1'}\right)^{(1-\theta)/p_1'} \left(\sum_j |y_j|^{(q'-1)q_2}\right)^{\theta/q_2} \\ &\leq M_1^{1-\theta} M_2^{\theta} \left(\sum_i |x_i|^{p_2}\right)^{\theta/p_2} \left(\sum_j |y_j|^{q_1'}\right)^{(1-\theta)/q_1'}. \end{aligned} \tag{7}$$

Για να πάρουμε την (6) από την (7), θα θέλαμε να απαλείψουμε τα x_i και y_j από την (7). Για το σκοπό αυτό προσπαθούμε να βρούμε $\lambda, \mu \in [0,1]$ για τα οποία

$$p_2 = \lambda(p-1)p_1' + (1-\lambda)p, \quad q_1' = \mu(q'-1)q_2 + (1-\mu)q',$$

όπου $p = 1/\alpha$ και $q = 1/\beta$. Οι εξισώσεις αυτές έχουν λύση την

$$\lambda = \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)\frac{p_2}{p_1'}, \quad \mu = \left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)\frac{q_1'}{q_2}, \tag{8}$$

δεν έχουμε όμως ακόμα επαληθεύσει ότι αυτά τα λ, μ βρίσκονται στο $[0,1]$. Αν το δεχτούμε προς στιγμή, εφαρμόζοντας την ανισότητα του Hölder, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\|x\|_p = \|y\|_{q'} = 1$, παίρνουμε

$$\sum_i |x_i|^{p_2} \leq \left(\sum_i |x_i|^{(p-1)p_1'}\right)^{\lambda} \left(\sum_i |x_i|^{p}\right)^{1-\lambda} = \left(\sum_i |x_i|^{(p-1)p_1'}\right)^{\lambda},$$

και

$$\sum_j |y_j|^{q_1'} \leq \left(\sum_j |y_j|^{(q'-1)q_2}\right)^{\mu} \left(\sum_j |y_j|^{q'}\right)^{1-\mu} = \left(\sum_j |y_j|^{(q'-1)q_2}\right)^{\mu}.$$

Χρησιμοποιώντας αυτές τις εκτιμήσεις, καθώς και τον ορισμό των λ, μ στην (8), από την (7) παίρνουμε την (6).

Τα λ, μ είναι σίγουρα μη αρνητικά. Θα επιλέξουμε λοιπόν τώρα το θ, έτσι ώστε να μην ξεπερνούν το 1. Από την (8), η $\lambda, \mu \leq 1$ είναι ισοδύναμη με την

$$\frac{q_1'}{q_2} \leq \frac{1-\theta}{\theta} \leq \frac{p_1'}{p_2}. \tag{9}$$

Όμως τα (α_i, β_i) ανήκουν στο Δ, και αυτό σημαίνει ότι $p_1 \leq q_1$ (άρα, $q_1' \leq p_1'$) και $p_2 \leq q_2$. Επομένως,

$$\frac{q_1'}{q_2} \leq \frac{p_1'}{p_2},$$

και αφού το κλάσμα $(1-\theta)/\theta$ παίρνει οποιαδήποτε θετική τιμή καθώς το θ μεταβάλλεται στο $(0,1)$, υπάρχει τιμή του θ για την οποία ισχύει η (9). Γι' αυτήν την τιμή του θ, ισχύει η (6):

$$M \leq M_1^{1-\theta} M_2^{\theta}.$$

Η αρχική μας παρατήρηση δείχνει ότι η $\log M$ είναι κυρτή στο Δ, και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Όπως παρατηρήσαμε στην αρχή, $M(\alpha, \beta)$ είναι η μικρότερη σταθερά για την οποία

$$|T(x,y)| \leq M(\alpha,\beta) \|x\|_p \|y\|_{q'},$$

δηλαδή, στη γλώσσα των τελεστών,

$$M(\alpha,\beta) = \|T : \ell_p^n \to \ell_q^n\|,$$

αν χρησιμοποιήσουμε το δυϊσμό μεταξύ των ℓ_q^n και $\ell_{q'}^n$. Το θεώρημα του M. Riesz έχει λοιπόν την εξής ειδική μορφή.

Θεώρημα 5.4.2 *Έστω $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ γραμμικός τελεστής. Για κάθε $1 \leq p \leq 2$ ορίζουμε $M_p = \|T : \ell_p^n \to \ell_{p'}^n\|$. Τότε, αν $1 \leq p_1, p_2 \leq 2$ και*

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2},$$

έχουμε

$$M_p \leq M_{p_1}^{1-\theta} M_{p_2}^{\theta}.$$

Απόδειξη: Αφού $1 \leq p_1, p_2 \leq 2$, έχουμε $p_1 \leq p_1'$ και $p_2 \leq p_2'$. Επίσης, ο δυϊσμός δίνει

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{p_1'} + \frac{\theta}{p_2'}.$$

Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 5.4.1. $\square$

Για την εκτίμηση της απόστασης Banach-Mazur των ℓ_p^n και ℓ_q^n στην παράγραφο 5.2, χρησιμοποιήσαμε την ειδική περίπτωση

$$p_1 = 1, \quad p_2 = 2, \quad p \in [1,2]$$

του Θεωρήματος 5.4.2.

Κεφάλαιο 6

Το θεώρημα του Gluskin: κάτω φράγμα για τη διάμετρο

6.1 Το Θεώρημα του Gluskin

Η εκτίμηση $\mathrm{diam}(\mathcal{B}_n) \leq n$ που δίνει το Θεώρημα του John μοιάζει πολύ «εύκολη» για να είναι ακριβής. Τα παραδείγματα που είδαμε στο προηγούμενο Κεφάλαιο δείχνουν ότι για «πολύ διαφορετικούς» χώρους X και Y (όπως ο ℓ_1^n και ο ℓ_∞^n), η απόσταση $d(X,Y)$ δεν ξεπερνάει την τάξη της $\sqrt{n}$ καθώς το n τείνει στο άπειρο.

Όμως, ο E.D. Gluskin [Gl1] απέδειξε ότι η σωστή τάξη μεγέθους της $\mathrm{diam}(\mathcal{B}_n)$ καθώς το n τείνει στο άπειρο, είναι n. Η ακριβής διατύπωση του Θεωρήματος του Gluskin (το οποίο προκάλεσε μεγάλη εντύπωση), είναι η εξής:

Θεώρημα 6.1.1 *(Gluskin, 1981) Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$, υπάρχουν χώροι με νόρμα E_1, E_2 διάστασης n τέτοιοι ώστε για κάθε $T \in SL(n)$ να ισχύει*

$$\|T : E_1 \to E_2\| \geq c\sqrt{n} \quad , \quad \|T^{-1} : E_2 \to E_1\| \geq c\sqrt{n}.$$

Άρα, $d(E_1, E_2) \geq c^2 n$.

Αυτό που προκάλεσε ακόμα μεγαλύτερη εντύπωση, είναι η μέθοδος απόδειξης του θεωρήματος, η οποία είναι πιθανοθεωρητική: η ύπαρξη των E_1, E_2 εξασφαλίζεται με θετική πιθανότητα μέσα από μία κλάση ζευγαριών «τυχαίων χώρων». Ο Gluskin θεώρησε χώρους που η μοναδιαία τους μπάλα είναι ένα συμμετρικό κυρτό σώμα της μορφής $K = \mathrm{co}\{\pm e_i, \pm x_j, 1 \leq j \leq 2n\}$, όπου $\{e_i\}_{i\leq n}$ είναι η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, και τα $x_j, j \leq 2n$, είναι $2n$ τυχαία σημεία που επιλέγονται ανεξάρτητα στην Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα S^{n-1}, την οποία έχουμε εφοδιάσει με το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας σ. Στην παράγραφο 6.2 περιγράφουμε αυτήν την κλάση, και τις γεωμετρικές ιδιότητες της μοναδιαίας μπάλας αυτών των χώρων.

Αν (X_n, Y_n) είναι ένα ζευγάρι ανεξάρτητων «χώρων Gluskin», μπορούμε να δείξουμε ότι η πιθανότητα

$$\mathrm{Prob}\{(X_n, Y_n) : \|T\|_{X_n \to Y_n} \|T^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \leq cn\}$$

είναι εκθετικά μικρή, ομοιόμορφα ως προς $T \in SL(n)$. Συνδυάζοντας αυτό το δεδομένο με ακριβείς εκτιμήσεις για τον πληθάριθμο ε-δικτύων σε κατάλληλους χώρους τελεστών, βλέπουμε ότι για τα «περισσότερα» ζευγάρια (X_n, Y_n), η ανισότητα $\|T\|_{X_n \to Y_n} \|T^{-1}\|_{Y_n \to X_n} \geq cn$ ισχύει για ένα αρκετά λεπτό δίκτυο στην $SL(n)$. Ένα τυπικό επιχείρημα, το οποίο όμως καθίσταται δυνατό χάρη στην ακρίβεια των παραπάνω εκτιμήσεων, μάς επιτρέπει να περάσουμε από το δίκτυο στον τυχόντα $T \in SL(n)$, κάτι που δείχνει ότι $d(X_n, Y_n) \geq c'n$ με $c' = c/2$. Η ακριβής διατύπωση και απόδειξη των παραπάνω δίνεται στις παραγράφους 6.3 και 6.4.

6.2 Τυχαίοι χώροι

Σταθεροποιούμε μία ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ του $\mathbb{R}^n$. Με S^{n-1} συμβολίζουμε την Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα, και με σ το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας στην S^{n-1}.
Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$\mathcal{A}_m = S^{n-1} \times \ldots \times S^{n-1} = \{(x_1, \ldots, x_m) : x_i \in S^{n-1}\},$$

το σύνολο των m-άδων από μοναδιαία διανύσματα. Αν $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m) \in \mathcal{A}_m$, ορίζουμε έναν χώρο με νόρμα $E_{\mathbf{x}} = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{\mathbf{x}})$, παίρνοντας σαν μοναδιαία του μπάλα το συμμετρικό κυρτό σώμα

$$K_{\mathbf{x}} = \mathrm{co}\{\pm e_i, \pm x_j : 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq m\}.$$

Παρατηρήστε ότι το $K_{\mathbf{x}}$ έχει μη κενό εσωτερικό γιατί περιέχει τη μοναδιαία μπάλα $\mathrm{co}\{\pm e_i : 1 \leq i \leq n\}$ του ℓ_1^n. Πιό συγκεκριμένα, η ανισότητα

$$(*) \qquad \|x\|_1 \leq \sqrt{n}|x|, \quad x \in \mathbb{R}^n$$

εξασφαλίζει το εξής:

Λήμμα 6.2.1 *Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_m$, ισχύει $K_{\mathbf{x}} \supseteq \frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n$.*

Απόδειξη: Από την $(*)$ έπεται ότι

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subseteq B_1^n = \mathrm{co}\{\pm e_1, \ldots, \pm e_n\} \subseteq K_{\mathbf{x}}. \quad \square$$

Το $K_{\mathbf{x}}$ περιέχει τη μπάλα ακτίνας $1/\sqrt{n}$, και έχει κορυφές πολύ απομακρυσμένες από αυτήν: τα $\pm e_i, \pm x_j$ είναι σε απόσταση ίση με 1 από το o. Οι κορυφές δημιουργούν «ακίδες»: αυτές που αντιστοιχούν στα e_i είναι συμμετρικά τοποθετημένες, αυτές όμως που αντιστοιχούν στην τυχαία επιλογή των x_j είναι ακατάστατα διασκορπισμένες στον $\mathbb{R}^n$. Θα δούμε ότι αν το m δεν είναι μεγάλο, τότε ο όγκος του $K_{\mathbf{x}}$ δεν είναι πολύ μεγαλύτερος από αυτόν της $\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n$. Για την απόδειξη αυτής της εκτίμησης χρειαζόμαστε το Θεώρημα του Καραθεοδωρή:

Λήμμα 6.2.2 *Αν $A \subset \mathbb{R}^n$ και $x \in co(A)$, τότε το x είναι κυρτός συνδιασμός γραμμικά ανεξάρτητων σημείων του A. Ειδικότερα, το x είναι κυρτός συνδιασμός το πολύ $n+1$ σημείων του A.*

Απόδειξη: Το σημείο $x \in co(A)$ γράφεται

$$x = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i x_i, \;\; x_i \in A, \, \lambda_i > 0, \; \sum_{i=1}^{k} \lambda_i = 1$$

για κάποιο $k \in \mathbb{N}$, που είναι το μικρότερο δυνατό. Υποθέτουμε ότι τα $x_1, \ldots, x_k$ είναι affinely εξαρτημένα. Τότε υπάρχουν $a_1, \ldots, a_k \in \mathbb{R}^n$, όχι όλα μηδέν, με

$$\sum_{i=1}^{k} a_i x_i = o \;\; \textit{και} \sum_{i=1}^{k} a_i = 0.$$

Διαλέγουμε m τον ελάχιστο φυσικό για τον οποίο το λ_m/a_m είναι θετικό (παρατηρήστε ότι τα λ_i είναι θετικά και τουλάχιστον ένα από τα a_i είναι θετικό). Τότε, στην κυρτή αναπαράσταση

$$x = \sum_{i=1}^{k} \big(\lambda_i - \frac{\lambda_m}{a_m} a_i\big) x_i$$

όλοι οι συντελεστές είναι μη αρνητικοί και τουλάχιστον ένας από αυτούς είναι μηδέν. Αυτό έρχεται σε αντίθεση με το ότι το k είναι το μικρότερο δυνατό. Άρα τα $x_1, \ldots, x_k$ είναι affinely ανεξάρτητα, απ' όπου έπεται ότι $k \leq n+1$. $\square$

Λήμμα 6.2.3 *Για κάθε $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_m$, ισχύει*

$$|K_{\mathbf{x}}| \leq \left(2e^2 \frac{m+n}{n^2}\right)^n.$$

Απόδειξη: Έστω $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_m$, και $B(\mathbf{x}) = \{\pm e_i, \pm x_j\}$. Για κάθε $\{y_1, \ldots, y_n\} \subseteq B(\mathbf{x})$, θεωρούμε το simplex

$$S(y_1, \ldots, y_n) = \mathrm{co}\{o, y_1, \ldots, y_n\}.$$

Τότε,

$$K_{\mathbf{x}} \subseteq W := \bigcup S(y_1, \ldots, y_n). \tag{1}$$

Για την απόδειξη της (1) σκεφτόμαστε ως εξής: Αν $z \in K_{\mathbf{x}}$, θεωρούμε την ημιευθεία που ξεκινάει από το o και περνάει από το z (μπορούμε βέβαια να υποθέσουμε ότι $z \neq o$). Αυτή τέμνει το σύνορο του $K_{\mathbf{x}}$ σε κάποιο σημείο $b(z)$. Το $b(z)$ ανήκει σε κάποια έδρα $F(K_{\mathbf{x}}, z)$ του $K_{\mathbf{x}}$, και οι κορυφές της $F(K_{\mathbf{x}}, z)$ είναι στοιχεία του $B(\mathbf{x})$. Η $F(K_{\mathbf{x}}, z)$ είναι $(n-1)$-διάστατη, οπότε το Θεώρημα του Καραθεοδωρή μάς εξασφαλίζει ότι το $b(z)$ είναι κυρτός συνδυασμός κάποιων $y_1(z), \dots, y_n(z) \in B(\mathbf{x}) \cap F(K_{\mathbf{x}}, z)$. Το z είναι κυρτός συνδυασμός των o και $b(z)$, άρα $z \in S(y_1(z), \dots, y_n(z)) \subseteq W$.

Από την (1) συμπεραίνουμε ότι

$$|K_{\mathbf{x}}| \leq \sum |S(y_1, \dots, y_n)|, \tag{2}$$

όπου το άθροισμα είναι πάνω από όλα τα δυνατά $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq B(\mathbf{x})$. Κάθε simplex $S(y_1, \dots, y_n)$ είναι γραμμική εικόνα του «κανονικού» simplex $S(e_1, \dots, e_n) = \mathrm{co}\{o, e_1, \dots, e_n\}$ μέσω του $T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ που ορίζεται από τις $T(e_i) = y_i$, $i = 1, \dots, n$. Επομένως,

$$|S(y_1, \dots, y_n)| = |\mathrm{det} T| \cdot |S(e_1, \dots, e_n)|. \tag{3}$$

Με επαγωγή ως προς τη διάσταση, εύκολα βλέπουμε ότι

$$|S(e_1, \dots, e_n)| = \frac{1}{n!}, \tag{4}$$

ενώ η ανισότητα του Hadamard μάς εξασφαλίζει ότι

$$|\mathrm{det} T| = |\mathrm{det}(y_1, \dots, y_n)| \leq \prod_{i=1}^{n} |y_i| = 1. \tag{5}$$

[Η $|\mathrm{det}(y_1, \dots y_n)|$ δίνει τον όγκο ενός παραλληλεπιπέδου με ακμές $|y_i|$, η μεγαλύτερη λοιπόν τιμή που μπορεί να πάρει είναι όταν το παραλληλεπίπεδο είναι ορθογώνιο, δηλαδή όταν τα y_i είναι ορθογώνια, οπότε είναι ίση με το γινόμενο των ακμών $|y_i|$.]

Τέλος, το πλήθος των $\{y_1, \dots, y_n\} \subseteq B(\mathbf{x})$ είναι ίσο με $\binom{2(m+n)}{n}$, και ο τύπος του Stirling δείχνει ότι

$$\begin{aligned} \binom{2(m+n)}{n} &\leq \frac{[2(m+n)]^{2(m+n)}}{n^n (2m+n)^{2m+n}} = \left(\frac{2(m+n)}{n}\right)^n \left(1 + \frac{n}{2m+n}\right)^{2m+n} \\ &\leq \left(\frac{2e(m+n)}{n}\right)^n. \end{aligned} \tag{6}$$

Επιστρέφοντας στην (2), και συνδυάζοντας τις (3)-(6), βλέπουμε ότι

$$|K_{\mathbf{x}}| \leq \left(\frac{2e(m+n)}{n}\right)^n \frac{1}{n!} \leq \left(\frac{2e^2(m+n)}{n^2}\right)^n. \quad \square$$

Χρησιμοποιώντας τα δύο λήμματα και το γεγονός ότι ο όγκος της B_2^n ισούται με

$$|B_2^n| = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{n}{2}+1)} \geq \left(\frac{c}{\sqrt{n}}\right)^n$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά, καταλήγουμε στην εξής περιγραφή των σωμάτων $K_{\mathbf{x}}$:

Θεώρημα 6.2.1 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την ιδιότητα: Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και κάθε $\mathbf{x} \in \mathcal{A}_m$, έχουμε $K_{\mathbf{x}} \supseteq \frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n$ και*

$$\left(\frac{|K_{\mathbf{x}}|}{|\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n|} \right)^{1/n} \leq C \frac{\max\{m,n\}}{n}.$$

Απόδειξη: Ο εγκλεισμός αποδείχθηκε στο Λήμμα 6.2.1. Από το Λήμμα 6.2.3 έπεται ότι

$$\begin{aligned} \frac{|K_{\mathbf{x}}|}{|\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n|} &\leq n^{n/2} \left(\frac{\sqrt{n}}{c} \right)^n \left(\frac{2e^2(m+n)}{n^2} \right)^n \\ &\leq \left(\frac{4e^2 \max\{m,n\}}{cn} \right)^n , \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται το ζητούμενο, με $C = 4e^2/c$. [Η τιμή της c είναι ασυμπτωτικά (ως προς n) ίση με $(2e\pi)^{1/2}$, οπότε, για μεγάλα n μπορούμε να πάρουμε $C \leq 10$]. $\square$

6.3 Σταθερός $E_{\mathbf{y}}$ και τυχαίος $E_{\mathbf{x}}$

Σταθεροποιούμε πρώτα $\mathbf{y} \in \mathcal{A}_m$ και $T \in SL(n)$. Προσπαθούμε να εκτιμήσουμε την $\|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\|$ καθώς το $\mathbf{x}$ διατρέχει το $\mathcal{A}_m$. Θα δούμε ότι «με μεγάλη πιθανότητα», η νόρμα του T είναι μεγάλη.

Λήμμα 6.3.1 *Αν $\alpha = (3e^3/\pi)^{1/2}$, τότε για κάθε $0 < \rho < 1$ έχουμε*

$$\mathrm{Prob} \left(\mathbf{x} \in \mathcal{A}_m : \|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \leq \rho \frac{n^{3/2}}{\alpha(m+n)} \right) \leq \rho^{mn}.$$

Απόδειξη: Θέτουμε $r = \frac{\rho n^{3/2}}{\alpha(m+n)}$. Η $\|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \leq r$ είναι ισοδύναμη με την $T(K_{\mathbf{x}}) \subseteq rK_{\mathbf{y}}$, και αφού $x_j \in K_{\mathbf{x}}$, $j = 1, \ldots, m$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathrm{Prob}\Big(\mathbf{x} \in \mathcal{A}_m : \|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \leq r \Big) \leq \mathrm{Prob}\Big(\mathbf{x} \in \mathcal{A}_m : T(x_j) \in rK_{\mathbf{y}}, j \leq m \Big).$$

Όμως τα x_j επιλέγονται ανεξάρτητα από την S^{n-1}. Άρα,

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}\Big(\mathbf{x} \in \mathcal{A}_m : \|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \leq r \Big) &\leq \Big\{ \mathrm{Prob}\left(x \in S^{n-1} : \|Tx\|_{E_{\mathbf{y}}} \leq r \right) \Big\}^m \\ &= \Big(\sigma(rT^{-1}(K_{\mathbf{y}}) \cap S^{n-1}) \Big)^m . \end{aligned}$$

Το $T^{-1}(rK_{\mathbf{y}})$ είναι συμμετρικό κυρτό σώμα. Ειδικότερα, το o είναι εσωτερικό του σημείο. Αν θέσουμε

$$W = \{ w = rz : 0 \leq r \leq 1, z \in S^{n-1} \cap T^{-1}(rK_{\mathbf{y}}) \},$$

τότε
$$\sigma(rT^{-1}(K_{\mathbf{y}})\cap S^{n-1})=\frac{|W|}{|B_2^n|}\leq\frac{|T^{-1}(rK_{\mathbf{y}})|}{|B_2^n|},$$
αφού, λόγω κυρτότητας, $W\subseteq T^{-1}(rK_{\mathbf{y}})$. Έχουμε $|\mathrm{det}T|=1$, επομένως το Λήμμα 6.2.3 και η επιλογή του α μάς εξασφαλίζουν ότι
$$\begin{aligned}\frac{|T^{-1}(rK_{\mathbf{y}})|}{|B_2^n|} &= r^n\frac{|K_{\mathbf{y}}|}{|B_2^n|}\\ &\leq r^n\left(2e^2\frac{m+n}{n^2}\right)^n\frac{\Gamma(\frac{n}{2}+1)}{\pi^{n/2}}\\ &\leq \rho^n.\end{aligned}$$
Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι
$$\mathrm{Prob}\left(\mathbf{x}\in\mathcal{A}_m:\|T:E_{\mathbf{x}}\to E_{\mathbf{y}}\|\leq\rho\frac{n^{3/2}}{\alpha(m+n)}\right)\leq\rho^{mn}.\quad\square$$

Σκοπός μας είναι να βρούμε χώρους $E_{\mathbf{x}}$ και $E_{\mathbf{y}}$ με την ιδιότητα:

«*Για κάθε* $T\in SL(n)$, $\|T:E_{\mathbf{x}}\to E_{\mathbf{y}}\|\geq c\sqrt{n}$.»

Κρατάμε τον $E_{\mathbf{y}}$ σταθερό. Αφού $e_i\in K_{\mathbf{x}}$, $i=1,\dots,n$ για κάθε $\mathbf{x}\in\mathcal{A}_m$, έχουμε
$$\|T:E_{\mathbf{x}}\to E_{\mathbf{y}}\|\geq\max_{i\leq n}\|Te_i\|_{E_{\mathbf{y}}},$$
δηλαδή, ο σκοπός μας εξυπηρετείται (για κάθε $\mathbf{x}\in\mathcal{A}_m$) από κάθε τελεστή $T:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ γιά τον οποίο
$$\max_{i\leq n}\|Te_i\|_{E_{\mathbf{y}}}>\sqrt{n}.$$
Μάς ενδιαφέρει λοιπόν το μέγεθος του «κακού» συνόλου
$$\mathcal{M}_{\mathbf{y}}=\left\{T\in SL(n):\|Te_i\|_{E_{\mathbf{y}}}\leq\sqrt{n},i=1,\dots,n\right\}.$$

Ορισμός Αν $\varepsilon>0$ και K είναι ένα υποσύνολο ενός χώρου με νόρμα X, τότε το $L\subseteq K$ λέγεται ε-**δίκτυο** για το K αν για κάθε $x\in K$ υπάρχει $y\in L$ με την ιδιότητα $\|x-y\|<\varepsilon$.

Στο επόμενο λήμμα, δίνουμε εκτίμηση για τον πληθάριθμο ενός ε-δικτύου για το $\mathcal{M}_{\mathbf{y}}$ ως προς τη νόρμα $\|\cdot:\ell_2^n\to\ell_2^n\|$.

Λήμμα 6.3.2 *Έστω* $\mathbf{y}\in\mathcal{A}_m$, *και το σύνολο* $\mathcal{M}_{\mathbf{y}}$ *που ορίστηκε παραπάνω. Για κάθε* $\varepsilon>0$ *υπάρχει* ε*-δίκτυο* $\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon)\subseteq\mathcal{M}_{\mathbf{y}}$ *του* $\mathcal{M}_{\mathbf{y}}$ *ως προς την* $\|\cdot:\ell_2^n\to\ell_2^n\|$, *με πληθάριθμο*
$$|\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon)|\leq\left(c\frac{m+n}{n\varepsilon}\right)^{n^2},$$
όπου $c>0$ *απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη: Ταυτίζουμε τον $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με την ακολουθία $(x_i)_{i\le n} \in (\mathbb{R}^n)^n$, όπου $x_i = Te_i$. Τότε,

$$\mathcal{M}_{\mathbf{y}} \equiv \left\{(x_i) \in (\mathbb{R}^n)^n : |\det(x_1,\dots,x_n)| = 1, x_i \in \sqrt{n}K_{\mathbf{y}}, i=1,\dots,n\right\}.$$

Συμβολίζουμε με $\|\cdot\|_\infty$ τη νόρμα που επάγεται στον $(\mathbb{R}^n)^n$ από την $\|\cdot : \ell_2^n \to \ell_2^n\|$, και με U_∞ την αντίστοιχη μοναδιαία μπάλα.

Ισχυρισμός: Ισχύει ο εγκλεισμός

$$U_\infty \subseteq \left\{(x_i) \in (\mathbb{R}^n)^n : x_i \in \sqrt{n}K_{\mathbf{y}}, i=1,\dots,n\right\} = (\sqrt{n}K_{\mathbf{y}})^n.$$

Απόδειξη: Έχουμε $K_{\mathbf{y}} \supseteq B_1^n \supseteq \frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n$, άρα

$$\|w\|_{E_{\mathbf{y}}} \le \sqrt{n}|w|$$

για κάθε $w \in \mathbb{R}^n$. Έστω $(x_i) \in U_\infty$, δηλαδή $\|(x_i)\|_\infty \le 1$. Υπάρχει $T:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ με $\|T:\ell_2^n \to \ell_2^n\| \le 1$, για τον οποίο $x_i = Te_i$, $i=1,\dots,n$. Τότε,

$$\|x_i\|_{E_{\mathbf{y}}} = \|Te_i\|_{E_{\mathbf{y}}} \le \sqrt{n}|Te_i| \le \sqrt{n}\|T:\ell_2^n \to \ell_2^n\|\,|e_i| \le \sqrt{n},$$

για κάθε $i=1,\dots,n$. Δηλαδή, $x_i \in \sqrt{n}K_{\mathbf{y}}$, $i=1,\dots,n$. $\square$

Έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon) \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{y}}$ μεγιστικό ως προς την ιδιότητα: Αν $\mathbf{w} \neq \mathbf{w}'$ στο $\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon)$, τότε $\|\mathbf{w}-\mathbf{w}'\|_\infty \ge \varepsilon$.

Αφού το $\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon)$ είναι μεγιστικό ως προς αυτήν την ιδιότητα, το $\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon)$ είναι ε-δίκτυο. Δηλαδή,

$$\mathcal{M}_{\mathbf{y}} \subseteq \bigcup_{\mathbf{w}\in\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon)} (\mathbf{w}+U_\infty).$$

Επίσης, από τον τρόπο ορισμού του, το $\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon)$ έχει τις εξής δύο ιδιότητες:

(α) Τα $\mathbf{w}+\frac{\varepsilon}{2}U_\infty$ έχουν ξένα εσωτερικά, γιατί $\|\mathbf{w}-\mathbf{w}'\|_\infty \ge \varepsilon$ αν $\mathbf{w}\neq\mathbf{w}'$.

(β) Τα $\mathbf{w}+\frac{\varepsilon}{2}U_\infty$ περιέχονται στο $(1+\frac{\varepsilon}{2})(\sqrt{n}K_{\mathbf{y}})^n$. Πράγματι, αφού τα U_∞ και $\mathcal{M}_y$ περιέχονται στο $(\sqrt{n}K_{\mathbf{y}})^n$, για κάθε $\mathbf{w} \in \mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon)$ έχουμε

$$\mathbf{w}+\frac{\varepsilon}{2}U_\infty \subseteq \mathcal{M}_{\mathbf{y}}+\frac{\varepsilon}{2}U_\infty \subseteq (1+\frac{\varepsilon}{2})(\sqrt{n}K_{\mathbf{y}})^n.$$

Θέτουμε $N = \mathrm{card}(\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon))$. Από το (β) έχουμε

$$\left|\bigcup_{\mathbf{w}}(\mathbf{w}+\frac{\varepsilon}{2}U_\infty)\right|_{n^2} \le \left|\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)(\sqrt{n}K_{\mathbf{y}})^n\right|_{n^2},$$

και χρησιμοποιώντας το (α) βλέπουμε ότι

$$N\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n^2}|U_\infty|_{n^2} \le \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^{n^2}|\sqrt{n}K_{\mathbf{y}}|_n^n.$$

Από το Λήμμα 6.2.3,

$$|K_{\mathbf{y}}|_n \leq \left(2e^2\frac{m+n}{n^2}\right)^n,$$

οπότε, αν υποθέσουμε επιπλέον ότι $\varepsilon < 1$, παίρνουμε

$$N \leq \frac{1}{|U_\infty|_{n^2}}\left(1+\frac{2}{\varepsilon}\right)^{n^2}\left(2e^2\frac{m+n}{n^{3/2}}\right)^{n^2} \leq \frac{1}{|U_\infty|_{n^2}}\left(6e^2\frac{m+n}{n^{3/2}\varepsilon}\right)^{n^2}.$$

Στο Λήμμα που ακολουθεί, θα δείξουμε ότι

$$|U_\infty|_{n^2} \geq \left(\frac{c_1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά, απ' όπου έπεται το ζητούμενο. $\square$

Λήμμα 6.3.3 *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$ τέτοια ώστε*

$$|U_\infty|_{n^2} \geq \left(\frac{c_1}{\sqrt{n}}\right)^{n^2}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα U_2 του $\mathbb{R}^{n^2}$, τη μοναδιαία σφαίρα S, και το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας σ στην S. Είναι γνωστό ότι

$$|U_2|_{n^2} = \frac{\pi^{n^2/2}}{\Gamma(\frac{n^2}{2}+1)},$$

και αν γράψουμε τον όγκο της U_∞ σε πολικές συντεταγμένες, καταλήγουμε στην

$$|U_\infty|_{n^2} = |U_2|_{n^2}\int_S \|(x_i)\|_\infty^{-n^2}\sigma(d(x_i)).$$

Από την ανισότητα του Hölder,

$$\begin{aligned} 1 &= \int_S \|(x_i)\|_\infty \|(x_i)\|_\infty^{-1} d\sigma \leq \left(\int_S \|(x_i)\|_\infty^2 d\sigma\right)^{1/2}\left(\int_S \|(x_i)\|_\infty^{-2} d\sigma\right)^{1/2} \\ &\leq \left(\int_S \|(x_i)\|_\infty^2 d\sigma\right)^{1/2}\left(\int_S \|(x_i)\|_\infty^{-n^2} d\sigma\right)^{1/n^2}. \end{aligned}$$

Άρα,

$$|U_\infty|_{n^2}^{1/n^2} \geq \frac{|U_2|_{n^2}^{1/n^2}}{\left(\int_S \|(x_i)\|_\infty^2 d\sigma\right)^{1/2}} \geq \frac{c}{n\left(\int_S \|(x_i)\|_\infty^2 d\sigma\right)^{1/2}}.$$

Ισχυρισμός: Ισχύει η ανισότητα

$$\left(\int_S \|(x_i)\|_\infty^2 d\sigma\right)^{1/2} \leq \frac{c_2}{\sqrt{n}}.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε μία ακολουθία $\{g_{ij}\}$ από ανεξάρτητες standard Gaussian τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας Ω. Τότε, θέτοντας $m = n^2$ και παίρνοντας πολικές συντεταγμένες, έχουμε

$$\begin{aligned}\int_\Omega \|(g_{ij}(\omega))\|_\infty^2 d\omega &= \frac{1}{(2\pi)^{m/2}}\int_{\mathbb{R}^m} \|(x_i)\|_\infty^2 e^{-\|(x_i)\|_\infty^2/2}\sigma(d(x_i)) \\ &= \frac{m|B_2^m|}{(2\pi)^{m/2}}\int_S\int_0^\infty r^{m-1}\|(rx_i)\|_\infty^2 e^{-r^2/2} dr\sigma(d(x_i)) \\ &= m\int_S \|(x_i)\|_\infty^2 \sigma(d(x_i)).\end{aligned}$$

Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\int_\Omega \|(g_{ij}(\omega))\|_\infty^2 d\omega \leq c_2^2 n.$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι για κάθε $T : \ell_2^n \to \ell_2^n$ υπάρχει $y \in \mathbb{R}^n$ με $|y| = 1$, τέτοιο ώστε: για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|\langle y, x\rangle| \cdot \|T\| \leq |Tx|.$$

Πράγματι, υπάρχει $z \in \mathbb{R}^n$ με $|z| = 1$ για το οποίο $|T^*z| = \|T^*\| = \|T\|$. Τότε, αν πάρουμε $y = T^*z/\|T\|$, έχουμε $|y| = 1$ και

$$|\langle y, x\rangle| \cdot \|T\| = |\langle T^*z, x\rangle| = |\langle z, Tx\rangle| \leq |Tx|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Για κάθε $\omega \in \Omega$, θεωρούμε τον $T_\omega : \ell_2^n \to \ell_2^n$ με $T_\omega e_j = (g_{ij}(\omega))$, και με βάση την προηγούμενη παρατήρηση επιλέγουμε y_ω τέτοιο ώστε

$$|\langle y_\omega, x\rangle| \cdot \|T_\omega\| \leq |T_\omega x|$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε,

$$\begin{aligned}\int_\Omega\int_{S^{n-1}} \exp\left(a|T_\omega x|^2\right)\sigma(dx)d\omega &\geq \int_\Omega\int_{S^{n-1}} \exp\left(a\langle y_\omega, x\rangle^2\|T_\omega\|^2\right)\sigma(dx)d\omega \\ &= \int_\Omega\int_{S^{n-1}} \exp\left(a\langle e_1, x\rangle^2\|T_\omega\|^2\right)\sigma(dx)d\omega \\ &\geq \sigma\left(x : \langle e_1, x\rangle^2 \geq 1/2\right)\int_\Omega \exp\left(\frac{a}{2}\|T_\omega\|^2\right)d\omega \\ &\geq 4^{-n}\int_\Omega \exp\left(\frac{a}{2}\|T_\omega\|^2\right)d\omega \\ &\geq 4^{-n}\exp\left(\int_\Omega \frac{a}{2}\|T_\omega\|^2 d\omega\right).\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε κατά σειρά το γεγονός ότι το σ είναι αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς (επομένως μπορούμε να αντικαταστήσουμε το y_ω με το e_1 στην ολοκλήρωση πάνω στην S^{n-1}), το γεγονός ότι $\sigma(x : \langle e_1, x\rangle^2 \geq 1/2) \geq 4^{-n}$, και την κυρτότητα της εκθετικής συνάρτησης (ανισότητα του Jensen). Τελικά,

$$(*) \qquad \exp\left(\int_\Omega \frac{a}{2}\|T_\omega\|^2 d\omega\right) \leq 4^n \int_\Omega \int_{S^{n-1}} \exp\left(a|T_\omega x|^2\right)\sigma(dx)d\omega.$$

Από την άλλη πλευρά, αν υποθέσουμε ότι $0 < a < 1/2$, τότε

$$\int_\Omega \int_{S^{n-1}} \exp\left(a|T_\omega x|^2\right)\sigma(dx)d\omega = \int_\Omega \int_{S^{n-1}} \exp\left(a\sum_i (\sum_j g_{ij}(\omega)x_j)^2\right)\sigma(dx)d\omega$$

$$= \int_{S^{n-1}} \left(\int_\Omega \exp\left(a\sum_i (\sum_j g_{ij}(\omega)x_j)^2\right)d\omega\right)\sigma(dx),$$

και αφού η $\sum_j g_{ij}x_j$ ακολουθεί την ίδια κατανομή με την g_{ii} για κάθε $x \in S^{n-1}$, και οι g_{ii} είναι ανεξάρτητες, το τελευταίο ολοκλήρωμα ισούται με

$$\begin{aligned}\int_{S^{n-1}} \int_\Omega \exp\left(a\sum_i g_{ii}^2(\omega)\right)d\omega\sigma(dx) &= \int_\Omega \exp\left(a\sum_i g_{ii}^2(\omega)\right)d\omega \\ &= \left(\int_\Omega \exp(ag_{11}^2(\omega))d\omega\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{1-2a}}\right)^n.\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$(**) \qquad \int_\Omega \int_{S^{n-1}} \exp\left(a|T_\omega x|^2\right)\sigma(dx)d\omega = \left(\frac{1}{\sqrt{1-2a}}\right)^n.$$

Συνδυάζοντας τις $(*)$ και $(**)$ παίρνουμε

$$\exp\left(\int_\Omega \frac{a}{2}\|(g_{ij}(\omega))\|_\infty^2 d\omega\right) \leq \left(\frac{4}{\sqrt{1-2a}}\right)^n,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_\Omega \|(g_{ij}(\omega))\|_\infty^2 \leq \left(\frac{2}{a}\log\frac{4}{\sqrt{1-2a}}\right)n =: c_2^2 n.$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Είναι τώρα φανερό ότι

$$|U_\infty|_{n^2}^{1/n^2} \geq \frac{c}{n\left(\int_S \|(x_i)\|_\infty^2 d\sigma\right)^{1/2}} \geq \frac{c/n}{c_2/\sqrt{n}} = \frac{c_1}{\sqrt{n}},$$

και η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης. □

6.4 Κάτω φράγμα για τη διάμετρο

Είμαστε τώρα σε θέση να δώσουμε την ακριβή διατύπωση και την απόδειξη του Θεωρήματος του Gluskin:

Θεώρημα 6.4.1 *Αν $m = 2n$, τότε με μεγάλη πιθανότητα ως προς $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in \mathcal{A}_m \times \mathcal{A}_m$ ισχύει το εξής: Για κάθε $T \in SL(n)$,*

$$\|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \geq c\sqrt{n}, \quad \|T : E_{\mathbf{y}} \to E_{\mathbf{x}}\| \geq c\sqrt{n}$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Θεωρούμε $r, \varepsilon > 0$ τα οποία θα επιλεγούν κατάλληλα, σταθεροποιούμε $\mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2n}$, και ορίζουμε

$$\mathcal{L}_{\mathbf{y}} = \left\{ \mathbf{x} \in \mathcal{A}_{2n} \mid \exists T \in SL(n) : \|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| < (r - \varepsilon)\sqrt{n} \right\}.$$

Από το Λήμμα 6.3.2, αν $0 < \varepsilon < 1$, υπάρχει ε-δίκτυο $\mathcal{N}_{\mathbf{y}}(\varepsilon) = \{T_1, \ldots, T_N\}$ του $\mathcal{M}_{\mathbf{y}}$ με

$$N \leq \left(\frac{3c}{\varepsilon} \right)^{n^2},$$

όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Έστω $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathbf{y}}$. Υπάρχει $T \in SL(n)$ για τον οποίο

$$\|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| < (r - \varepsilon)\sqrt{n}.$$

Αν $r - \varepsilon \leq 1$, τότε $T \in \mathcal{M}_{\mathbf{y}}$, επομένως υπάρχει $k \in \{1, \ldots, N\}$ τέτοιος ώστε

$$\|T_k - T : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \leq \varepsilon.$$

Όμως, για κάθε $S \in L(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned} \|Sw\|_{E_{\mathbf{y}}} &\leq \sqrt{n}|Sw| \leq \sqrt{n}\|S : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \, |w| \\ &\leq \sqrt{n}\|S : \ell_2^n \to \ell_2^n\| \, \|w\|_{E_{\mathbf{x}}} \end{aligned}$$

για κάθε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2n}$ και $w \in \mathbb{R}^n$. Άρα, θέτοντας $S = T_k - T$, παίρνουμε

$$\|T_k - T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \leq \varepsilon\sqrt{n},$$

και, από την τριγωνική ανισότητα,

$$\|T_k : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \leq r\sqrt{n}.$$

Δηλαδή, ισχύει το εξής:

Λήμμα 6.4.1 *Αν $\mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathbf{y}}$, τότε υπάρχει $k \in \{1, \ldots, N\}$ για το οποίο*

$$\|T_k : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \leq r\sqrt{n}. \quad \square$$

Άμεση συνέπεια του Λήμματος είναι ότι

$$\mathrm{Prob}(\mathcal{L}_{\mathbf{y}}) \leq \sum_{k=1}^{N} \mathrm{Prob}(\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{2n} : \|T_k : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \leq r\sqrt{n}).$$

Ερχόμαστε τώρα στο Λήμμα 6.3.1, και ορίζουμε το r από την

$$\rho\frac{\sqrt{n}}{3\alpha} = r\sqrt{n},$$

δηλαδή $r = \rho/3\alpha$. Όποιο κι αν είναι το $\rho \in (0,1)$, έχουμε

$$\mathrm{Prob}(\mathcal{L}_{\mathbf{y}}) \leq N\rho^{2n^2} \leq \left(\frac{3c\rho^2}{\varepsilon}\right)^{n^2}.$$

Επιλέγουμε τώρα το ρ έτσι ώστε

$$r - \varepsilon = \frac{\rho}{3\alpha} - \varepsilon \leq 1$$

και

$$\frac{3c\rho^2}{\varepsilon} < \frac{1}{2}.$$

Οι δύο αυτές ανισότητες συμβιβάζονται αν $\varepsilon = \rho/6\alpha$ και το ρ είναι αρκετά μικρό. Γιατί τότε $r - \varepsilon = \frac{\rho}{6\alpha} \leq 1$ (θυμηθείτε ότι $\alpha = (3e^3/\pi)^{1/2} > 1$), και με αυτήν την επιλογή του ε, $\frac{3c\rho^2}{\varepsilon} = 18c\alpha\rho$, το οποίο μπορεί να γίνει μικρότερο από $1/2$ αν το ρ είναι μικρό (οι c και α είναι απόλυτες θετικές σταθερές). Έχουμε λοιπόν αποδείξει το εξής:

Λήμμα 6.4.2 *Υπάρχει $c > 0$ απόλυτη σταθερά, με την ιδιότητα: Για κάθε $\mathbf{y} \in \mathcal{L}_{\mathbf{y}}$,*

$$\mathrm{Prob}(\mathcal{L}_{\mathbf{y}}) \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{n^2},$$

όπου

$$\mathcal{L}_{\mathbf{y}} = \left\{\mathbf{x} \in \mathcal{A}_{2n} \mid \exists T \in SL(n) : \|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| < c\sqrt{n}\right\}. \quad \Box$$

Θεωρούμε τώρα τον χώρο πιθανότητας $\mathcal{A}_{2n} \times \mathcal{A}_{2n}$, και το ενδεχόμενο

$$G = \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \mathbf{x} \in \mathcal{L}_{\mathbf{y}}\} \cup \{(\mathbf{x},\mathbf{y}) : \mathbf{y} \in \mathcal{L}_{\mathbf{x}}\}.$$

Είναι φανερό ότι

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}(G) &= \int_{\mathcal{A}_{2n}}\int_{\mathcal{A}_{2n}} \chi_G(x,y)\,dxdy \\ &\leq 2\int_{\mathcal{A}_{2n}} \mathrm{Prob}(\mathcal{L}_{\mathbf{y}})d(\mathbf{y}) \\ &< 2\left(\frac{1}{2}\right)^{n^2}. \end{aligned}$$

Άρα υπάρχουν (με μεγάλη μάλιστα πιθανότητα) $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2n}$ με την ιδιότητα: Για κάθε $T \in SL(n)$,

$$\|T : E_{\mathbf{x}} \to E_{\mathbf{y}}\| \geq c\sqrt{n}, \quad \|T : E_{\mathbf{y}} \to E_{\mathbf{x}}\| \geq c\sqrt{n}.$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος είναι πλήρης. $\square$

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος είναι το ότι η διάμετρος του Banach-Mazur compactum είναι μεγαλύτερη ή ίση του $c^2 n$:

Θεώρημα 6.4.2 *Υπάρχει $c > 0$ απόλυτη σταθερά με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ μπορούμε να βρούμε n-διάστατους χώρους με νόρμα E_1 και E_2 τέτοιους ώστε*

$$d(E_1, E_2) \geq c^2 n.$$

Απόδειξη: Θεωρούμε $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathcal{A}_{2n}$ όπως στο Θεώρημα 6.4.1, και ορίζουμε $E_1 = E_{\mathbf{x}}$, $E_2 = E_{\mathbf{y}}$. Αν $T \in SL(n)$, τότε και ο $T^{-1} \in SL(n)$. Άρα,

$$\|T : E_1 \to E_2\| \cdot \|T^{-1} : E_2 \to E_1\| \geq [c\sqrt{n}]^2 = c^2 n,$$

όπου $c > 0$ η σταθερά του Θεωρήματος 6.4.1. $\square$

Η εκτίμηση του Gluskin και το Θεώρημα του John δίνουν οριστική απάντηση στο πρόβλημά μας. Η διάμετρος του Banach-Mazur compactum είναι της τάξης του n:

$$c^2 n \leq \max\big\{d(X, Y) : \mathrm{dim} X = \mathrm{dim} Y = n\big\} \leq n.$$

Κεφάλαιο 7

Απόσταση Banach-Mazur από τον κύβο

7.1 Το πρόβλημα

Το πρόβλημα που θα μάς απασχολήσει σε αυτό το Κεφάλαιο παραμένει ανοικτό και αφορά την τάξη μεγέθους της μεγαλύτερης δυνατής απόστασης Banach-Mazur από τον ℓ_∞^n. Ορίζουμε

$$R_\infty^n = \max\{d(X, \ell_\infty^n) : \dim X = n\}.$$

Από το Θεώρημα του John και την πολλαπλασιαστική τριγωνική ανισότητα για την d βλέπουμε ότι $R_\infty^n \leq n$, ενώ στο Κεφάλαιο 5 είδαμε ότι $d(\ell_\infty^n, \ell_2^n) = \sqrt{n}$. Άρα, $\sqrt{n} \leq R_\infty^n \leq n$. Το ερώτημα να προσδιοριστεί η ασυμπτωτική συμπεριφορά της R_∞^n, καθώς το n τείνει στο άπειρο, τέθηκε από τον A. Pelczynski [P].

Ο S.J. Szarek [Sz.1], χρησιμοποιώντας τυχαίους χώρους παρόμοιους με τους χώρους του Gluskin που συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 6, έδειξε ότι $R_\infty^n \geq c\sqrt{n}\log n$. Δηλαδή, η R_∞^n έχει τάξη μεγέθους γνήσια μεγαλύτερη από $\sqrt{n}$ (ο ℓ_∞^n δεν είναι «ασυμπτωτικό κέντρο» του Banach–Mazur compactum).

Από την άλλη πλευρά, οι J. Bourgain και S.J. Szarek [BS] απέδειξαν ότι $R_\infty^n = o(n)$, και αργότερα, οι S.J. Szarek και M. Talagrand [ST] έδωσαν το καλύτερο άνω φράγμα $R_\infty^n \leq cn^{7/8}$. Σκοπός μας είναι να δώσουμε πλήρη απόδειξη του εξής αποτελέσματος:

Θεώρημα [Gi] *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$ τέτοια ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$,*

$$R_\infty^n \leq cn^{5/6}.$$

Μερικές παρατηρήσεις πριν την απόδειξη. Λόγω δυϊσμού, αν ορίσουμε $R_1^n = \max\{d(X, \ell_1^n) : \dim X = n\}$, ισχύει

$$R_\infty^n = R_1^n.$$

Θα προσπαθήσουμε λοιπόν να φράξουμε την $d(X, \ell_1^n)$, όπου X τυχών n-διάστατος χώρος με νόρμα. Από τον ορισμό της απόστασης Banach-Mazur, μπορούμε στη θέση του X να πάρουμε οποιονδήποτε χώρο Y που είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον X. Θα υποθέσουμε λοιπόν, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$, και ότι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει τη μοναδιαία μπάλα B_X του X είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n.

Σκοπός μας είναι να βρούμε n διανύσματα $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε: για κάθε $t_1, \ldots, t_n \in \mathbb{R}$,

$$\frac{1}{cn^{5/6}} \sum_{i=1}^{n} |t_i| \leq \Big\| \sum_{i=1}^{n} t_i u_i \Big\| \leq \sum_{i=1}^{n} |t_i|.$$

Γιατί τότε, αν ορίσουμε $T : \ell_1^n \to X$ με $Te_i = u_i$ όπου e_i η συνήθης ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, έχουμε $\|T\| \leq 1$ και $\|T^{-1}\| \leq cn^{5/6}$, δηλαδή

$$d(X, \ell_1^n) \leq \|T\| \cdot \|T^{-1}\| \leq cn^{5/6}.$$

Τα βασικά εργαλεία που θα οδηγήσουν στην απόδειξη του θεωρήματος είναι: ένα Λήμμα τύπου Dvoretzky-Rogers για την κατανομή των σημείων επαφής της B_X και της B_2^n που οφείλεται στους Szarek και Talagrand, και ένα συνδυαστικό Λήμμα των Sauer και Shelah. Τα δύο αυτά αποτελέσματα αναπτύσσονται στις επόμενες δύο παραγράφους, ενώ το βασικό επιχείρημα που θα μάς δώσει το Θεώρημα παρουσιάζεται στην Παράγραφο 7.4.

7.2 Το λήμμα των Szarek και Talagrand

Αφετηρία μας είναι το θεώρημα του John για την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης μέσω σημείων επαφής ενός συμμετρικού κυρτού σώματος που έχει την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n σαν ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου.

Θεώρημα 7.2.1 *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου ή μέγιστου όγκου του K, τότε υπάρχουν σημεία επαφής $u_1, \ldots, u_m$ των K και B_2^n, και θετικοί πραγματικοί αριθμοί $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ τέτοιοι ώστε*

$$x = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle u_j$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

Παρατηρήσεις Στο Κεφάλαιο 4 είδαμε ότι από το Θεώρημα 7.2.1 έπεται το εξής: Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$,

$$|x|^2 = \langle x, x \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle x, u_j \rangle^2.$$

Το Θεώρημα 7.2.1 μας λέει με μία έννοια ότι υπάρχουν πολλά σημεία επαφής ανάμεσα σε ένα συμμετρικό κυρτό σώμα και το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του. Ενας τρόπος ποσοτικής περιγραφής αυτού του ισχυρισμού είναι ο εξής:

Πρόταση 7.2.1 *Αν η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου ή μέγιστου όγκου του K, τότε για κάθε $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ υπάρχει σημείο επαφής των K και B_2^n με την ιδιότητα:*

$$\langle u, Tu \rangle \geq \frac{\mathrm{tr} T}{n}.$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 7.2.1, αν $T \in L(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ τότε

$$\mathrm{tr} T = \langle T, I \rangle = \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \langle T, u_j \otimes u_j \rangle.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν και την $\sum \lambda_j = n$, συμπεραίνουμε ότι υπάρχει u ανάμεσα στα u_j με την ιδιότητα

$$\langle u, Tu \rangle = \langle T, u \otimes u \rangle \geq \frac{\mathrm{tr} T}{n}. \quad \square$$

Οι Dvoretzky και Rogers έδειξαν ακριβή αποτελέσματα γιά την κατανομή των σημείων επαφής στην επιφάνεια του ελλειψοειδούς μέγιστου όγκου. Ολα τους εκφράζουν με τον ένα ή τον άλλο τρόπο την αρχή ότι, αν και οι νόρμες $|\cdot|$ και $\|\cdot\|$ μπορεί να διαφέρουν ως και $\sqrt{n}$ γιά κάποια x, υπάρχουν πολλές και «αρκετά ορθογώνιες» διευθύνσεις στις οποίες οι δύο νόρμες συγκρίνονται καλά:

Πρόταση 7.2.2 *Αν B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K, υπάρχει ορθοκανονική ακολουθία $y_1, \ldots, y_n$ στον $\mathbb{R}^n$ τέτοια ώστε*

$$\left(\frac{n-i+1}{n} \right)^{1/2} \leq \|y_i\|_K \leq |y_i| = 1 \quad , \quad i = 1, \ldots, n.$$

Απόδειξη: Ορίζουμε τα y_i επαγωγικά. Σαν y_1 μπορούμε να πάρουμε οποιοδήποτε σημείο επαφής των K και B_2^n. Ας υποθέσουμε ότι έχουν επιλεγεί τα $y_1, \ldots, y_{i-1}$. Θέτουμε $F_i = \mathrm{span}\{y_1, \ldots, y_{i-1}\}$. Τότε, $\mathrm{tr}(P_{F_i^\perp}) = n - i + 1$, και από την Πρόταση 7.2.1 υπάρχει σημείο επαφής u_i τέτοιο ώστε

$$|P_{F_i^\perp} u_i|^2 = \langle u_i, P_{F_i^\perp} u_i \rangle \geq \frac{n-i+1}{n}.$$

Επεται ότι $\|P_{F_i} u_i\|_K \leq |P_{F_i} u_i| \leq \sqrt{(i-1)/n}$. Ορίζουμε $y_i = P_{F_i^\perp} u_i / |P_{F_i^\perp} u_i|$. Τότε,

$$1 = |y_i| \geq \|y_i\|_K \geq |\langle u_i, y_i \rangle| = |P_{F_i^\perp} u_i| \geq \left(\frac{n-i+1}{n} \right)^{1/2}. \quad \square$$

Πόρισμα 7.2.1 *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές μέγιστου όγκου του K. Αν $k = [n/2]+1$, μπορούμε να βρούμε ορθοκανονικά διανύσματα $y_1, \ldots, y_k$ τέτοια ώστε*

$$\frac{1}{2} \leq \|y_j\| \leq 1 \quad , \quad j = 1, \ldots, k. \quad \square$$

Οι Szarek και Talagrand [ST] χρησιμοποίησαν την αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης με διαφορετικό τρόπο, και απέδειξαν ένα άλλο «Λήμμα τύπου Dvoretzky-Rogers»:

Πρόταση 7.2.3 *Υποθέτουμε ότι η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του K. Για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$, μπορούμε να βρούμε $k \geq (1-\varepsilon)n$ και σημεία επαφής $y_1, \ldots, y_k$ των K και B_2^n, με την εξής ιδιότητα: Αν $j \in \{1, \ldots, k\}$ και $F_j = \mathrm{span}\{y_i : i \neq j\}$, τότε*

$$|P_{F_j^\perp}(y_j)| \geq \sqrt{\varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Απόδειξη: Έστω $k \leq n$. Από το Θεώρημα 7.2.1, μπορούμε να βρούμε σημεία επαφής $x_1, \ldots, x_m$ των K και B_2^n, και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m > 0$, τέτοια ώστε

$$x = \sum_{j=1}^m \lambda_j \langle x, x_j \rangle x_j, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Από όλες τις k-άδες που μπορούμε να επιλέξουμε μέσα από το $\{x_1, \ldots, x_m\}$, επιλέγουμε εκείνα τα $y_1, \ldots, y_k$ για τα οποία μεγιστοποιείται ο k-διάστατος όγκος $|\mathrm{co}\{\pm y_1, \ldots, \pm y_k\}|$. Τότε, αν $F_j = \mathrm{span}\{y_i : i \neq j\}$, έχουμε

$$|P_{F_j^\perp}(y_j)| \geq |P_{F_j^\perp}(x_i)|, \quad j = 1, \ldots, k, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Αυτό ισχύει γιατί: έχουμε

$$|\mathrm{co}\{\pm y_1, \ldots, \pm y_k\}| = |\mathrm{co}\{\pm y_i : i \neq j\}| \cdot |P_{F_j^\perp}(y_j)|,$$

οπότε, αν υπήρχε σημείο επαφής x_i των K και B_2^n με την ιδιότητα $|P_{F_j^\perp}(y_j)| \geq |P_{F_j^\perp}(x_i)|$, τότε η $\mathrm{co}\{\pm x_i, \pm y_1, \ldots, \pm y_{j-1}, \pm y_{j+1}, \ldots, \pm y_k\}$ θα είχε μεγαλύτερο όγκο από την $\mathrm{co}\{\pm y_1, \ldots, \pm y_k\}$.

Από την Πρόταση 7.2.1, υπάρχει x_i για το οποίο

$$|P_{F_j^\perp}(x_i)|^2 = \langle x_i, P_{F_j^\perp}(x_i) \rangle \geq \frac{\mathrm{tr}(P_{F_j^\perp})}{n} = \frac{n-k+1}{n}.$$

Παίρνοντας $k = [(1-\varepsilon)n]+1$, βλέπουμε ότι

$$|P_{F_j^\perp}(y_j)| = \max_{i \leq m} |P_{F_j^\perp}(x_i)| \geq \sqrt{\frac{n-k+1}{n}} \geq \sqrt{\varepsilon}, \quad j = 1, \ldots, k. \quad \square$$

Το Λήμμα των Szarek και Talagrand μαζί με το Λήμμα των Sauer και Shelah, που θα αποδείξουμε στην επόμενη παράγραφο, είναι τα βασικά συστατικά της εκτίμησής μας για την R_∞^n.

7.3 Το λήμμα των Sauer και Shelah

Οι Sauer και Shelah (βλέπε [S], [Sh]) απέδειξαν, ο ένας ανεξάρτητα από τον άλλον, ένα συνδυαστικό λήμμα που θα παίξει βασικό ρόλο στην εκτίμηση που θα δώσουμε για την R_∞^n. Το λήμμα διατυπώνεται με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Για το δικό μας σκοπό, θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1,1\}^n$ όλων των n-άδων $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n)$ με $\varepsilon_j = \pm 1$, και για κάθε $\sigma \subseteq \{1,\ldots,n\}$ θεωρούμε τη συνάρτηση **περιορισμού συντεταγμένων** $P_\sigma : E_2^n = \{-1,1\}^n \to \{-1,1\}^\sigma$ με $(\varepsilon_1,\ldots,\varepsilon_n) \mapsto (\varepsilon_j)_{j\in\sigma}$. Τότε ισχύει το εξής:

Θεώρημα 7.3.1 *Έστω $A \subseteq E_2^n = \{-1,1\}^n$ με πληθάριθμο $|A| > \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{k}$. Υπάρχει $\sigma \subseteq \{1,\ldots,n\}$ με $|\sigma| > k$, τέτοιο ώστε η απεικόνιση P_σ να είναι επί. Δηλαδή,*

$$P_\sigma(A) = \{-1,1\}^\sigma.$$

Απόδειξη: Κάνουμε επαγωγή ως προς k και $n-k$.

Αν $k=0$ και $|A| > \binom{n}{0} = 1$, τότε στο A μπορούμε να βρούμε $\varepsilon, \varepsilon'$ με $\varepsilon \neq \varepsilon'$. Υπάρχει λοιπόν $j \in \{1,\ldots,n\}$ τέτοιο ώστε $\varepsilon_j = 1$ και $\varepsilon'_j = -1$ ή $\varepsilon_j = -1$ και $\varepsilon'_j = 1$. Σε κάθε περίπτωση, ορίζοντας $\sigma = \{j\}$, έχουμε $|\sigma| = 1 > 0 = k$, και $P_\sigma(A) = \{-1,1\}^\sigma$.

Αν πάλι $n-k=1$, δηλαδή $k=n-1$, και $|A| > \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} = 2^n - 1$, τότε $|A| = 2^n$, δηλαδή $A = E_2^n$. Σε αυτήν την περίπτωση παίρνουμε $\sigma = \{1,\ldots,n\}$, οπότε $|\sigma| = n > k$, και $P_\sigma(A) = P_\sigma(E_2^n) = E_2^n$.

Ας υποθέσουμε ότι το λήμμα έχει αποδειχθεί για τον E_2^n αν $k \leq m-1$, $1 \leq n-k \leq m$ [ο προηγούμενος συλλογισμός δείχνει ότι αυτό είναι σωστό για $m=1$]. Θα δείξουμε ότι το λήμμα ισχύει για $k \leq m$, $1 \leq n-k \leq m+1$.

Επαγωγικό βήμα: Υποθέτουμε ότι $A \subseteq E_2^n$, και $|A| > \binom{n}{0} + \ldots + \binom{n}{k}$, και $k \leq m$, $1 \leq n-k \leq m+1$. Θεωρούμε το σύνολο $A_1 \subseteq E_2^{n-1}$ που σχηματίζεται αν από κάθε στοιχείο του A αφαιρέσουμε τη n-οστή συντεταγμένη του. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Αν $|A_1| > \binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n-1}{k}$ τότε $n-1-k < m$. Μπορούμε λοιπόν να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση (για τον E_2^{n-1} στη θέση του E_2^n), και να βρούμε $\sigma_1 \subseteq \{1,\ldots,n-1\}$ με $|\sigma_1| > k$, για το οποίο $P_{\sigma_1}(A_1) = \{-1,1\}^{\sigma_1}$. Όμως $P_{\sigma_1}(A) = P_{\sigma_1}(A_1)$, άρα το ζητούμενο ισχύει με $\sigma = \sigma_1$.

Αν πάλι $|A_1| \leq \binom{n-1}{0} + \ldots + \binom{n}{k}$, τότε από το τρίγωνο του Pascal έχουμε

$$|A| - |A_1| > \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} - \sum_{i=0}^{k} \binom{n-1}{i} = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}.$$

Τότε, θεωρούμε τα σύνολα

$$B_1 = \{x \in A_1 : (x,1) \in A\}, \quad B_2 = \{x \in A_1 : (x,-1) \in A\},$$

και την τομή τους

$$C = \{x \in A_1 : (x,1) \in A, (x,-1) \in A\}.$$

Έχουμε $|B_1| + |B_2| = |A|$ και $|A_1| = |B_1| + |B_2| - |B_1 \cap B_2|$, άρα

$$|C| = |B_1 \cap B_2| = |A| - |A_1| > \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n-1}{i}.$$

Αφού $k-1 < m$, μπορούμε να εφαρμόσουμε την επαγωγική υπόθεση (για τον E_2^{n-1} στη θέση του E_2^n), και να βρούμε $\sigma_1 \subseteq \{1, \ldots, n-1\}$ με $|\sigma_1| > k-1$, τέτοιο ώστε $P_{\sigma_1}(C) = \{-1,1\}^{\sigma_1}$.

Όμως, $C \times \{1\} \cup C \times \{-1\} \subseteq A$. Αν λοιπόν θέσουμε $\sigma = \sigma_1 \cup \{n\}$, έχουμε $|\sigma| > k$ και

$$P_\sigma(A) \supseteq P_\sigma(C \times \{1\} \cup C \times \{-1\}) = \{-1,1\}^\sigma. \quad \square$$

Είναι χρήσιμο να σκεφτόμαστε τα στοιχεία του E_2^n σαν τις κορυφές του κύβου $Q_n = [-1,1]^n$ στον $\mathbb{R}^n$. Η συνάρτηση περιορισμού συντεταγμένων P_σ δεν είναι τίποτε άλλο από την ορθογώνια προβολή στον υπόχωρο συντεταγμένων $\mathbb{R}^\sigma$. Τότε, το λήμμα των Sauer και Shelah μάς λέει ότι:

Αν $A \subseteq \{-1,1\}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, και $|A| > \sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i}$, τότε υπάρχει $\sigma \subseteq \{1, \ldots, n\}$ με $|\sigma| > k$ για το οποίο: η ορθογώνια προβολή $P_\sigma(\mathrm{co}(A))$ της κυρτής θήκης των σημείων του A στον $\mathbb{R}^\sigma$ είναι ολόκληρος ο μοναδιαίος κύβος του $\mathbb{R}^\sigma$:

$$P_\sigma(\mathrm{co}(A)) = Q_\sigma := [-1,1]^\sigma.$$

Σε αυτή του τη μορφή, το Θεώρημα 7.3.1 έχει σαφές γεωμετρικό περιεχόμενο (και αυτή τη μορφή του θα χρησιμοποιήσουμε).

7.4 Άνω φράγμα για την R_∞^n

Το πρώτο μας Λήμμα είναι μία ειδική περίπτωση του Λήμματος των Sauer και Shelah:

Λήμμα 7.4.1 *Αν M είναι ένα υποσύνολο του $\{-L,L\}^m$, $L > 0$, με πληθάριθμο $|M| \geq 2^{m-1}$, τότε μπορούμε να βρούμε $\sigma \subseteq \{1, \ldots, m\}$, $|\sigma| \geq \frac{m}{2}$, τέτοιο ώστε η συνάρτηση περιορισμού συντεταγμένων*

$$P_\sigma : (\delta_j)_{j \leq m} \mapsto (\delta_j)_{j \in \sigma}$$

να απεικονίζει το M επί του $\{-L,L\}^\sigma$. $\square$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.4.1 και ένα επαγωγικό επιχείρημα παίρνουμε:

Λήμμα 7.4.2 *Έστω* $u_1, \ldots, u_s \in \mathbb{R}^n$, $|u_i| \leq 1$. *Θεωρούμε το συμμετρικό κυρτό σύνολο*

$$E = \{(\delta_j)_{j \leq s} \in \mathbb{R}^s : |\sum_{j=1}^{s} \delta_j u_j|^2 \leq 2s\}.$$

Τότε, για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ *υπάρχει* $\sigma \subseteq \{1, \ldots, s\}$ *με πληθάριθμο* $|\sigma| \geq (1-\varepsilon)s$, *τέτοιο ώστε*

$$P_\sigma(E) \supseteq c\sqrt{\varepsilon}\,[-1,1]^\sigma,$$

όπου $c > 0$ *είναι απόλυτη σταθερά, και* P_σ *η ορθογώνια προβολή επί του* $\mathbb{R}^\sigma$.

Συμβολισμός: Στην απόδειξη θέτουμε $S = \{1, \ldots, s\}$, $Q = [-1,1]^s$, $Q_\tau = [-1,1]^\tau$ για κάθε $\tau \subseteq S$, και

$$\alpha_k = \sum_{r=0}^{k-1} 2^{r/2}, \quad \beta_k = \sum_{r=0}^{k-1} 2^r, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Απόδειξη: Θεωρούμε όλα τα σημεία της μορφής $(\delta_j^{(1)})_{j \leq s} \in \mathbb{R}^s$, με $\delta_j^{(1)} = \pm 1$. Από τον κανόνα του παραλληλογράμμου,

$$\mathrm{Ave}_{\delta_j^{(1)} = \pm 1} \Big|\sum_{j=1}^{s} \delta_j^{(1)} u_j\Big|^2 = \sum_{j=1}^{s} |u_j|^2 \leq s.$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov, βρίσκουμε $M^1 \subseteq \{-1,1\}^s$ με πληθάριθμο $|M^1| \geq 2^{s-1}$, τέτοιο ώστε, για κάθε $(\delta_j^{(1)}) \in M^1$,

$$\Big|\sum_{j=1}^{s} \delta_j^{(1)} u_j\Big|^2 \leq 2s.$$

Από το Λήμμα 7.4.1 μπορούμε να βρούμε $\sigma_1 \subseteq S$, με πληθάριθμο $|\sigma_1| \geq \frac{s}{2}$, για το οποίο $P_{\sigma_1}(M^1) = \{-1,1\}^{\sigma_1}$. Αφού $M^1 \subseteq E \cap Q$ και το τελευταίο σύνολο είναι κυρτό, συμπεραίνουμε ότι

$$Q_{\sigma_1} \subseteq P_{\sigma_1}(E \cap Q).$$

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ως προς k το εξής:

Ισχυρισμός Για $k = 1, 2, \ldots$, μπορούμε να βρούμε $\sigma_k \subseteq S$ με πληθάριθμο $|\sigma_k| \geq (1 - \frac{1}{2^k})s$, τέτοιο ώστε

$$Q_{\sigma_k} \subseteq P_{\sigma_k}(\alpha_k E \cap \beta_k Q).$$

Αν $k = 1$, ο ισχυρισμός έπεται από το πρώτο βήμα της απόδειξης και τον ορισμό των α_1, β_1.

Επαγωγικό βήμα: Θεωρούμε όλα τα σημεία της μορφής $\delta_j^{(k+1)}$, $j \leq s$, όπου $\delta_j^{(k+1)} = 0$ αν $j \in \sigma_k$ και $\delta_j^{(k+1)} = \pm 2^{k/2}$ αν $j \notin \sigma_k$. Τότε, από τον κανόνα του παραλληλογράμου παίρνουμε

$$\mathrm{Ave}_{(\delta_j^{(k+1)})_{j\leq s}} \Big|\sum_{j=1}^{s} \delta_j^{(k+1)} u_j\Big|^2 = \sum_{j\notin\sigma_k} 2^k |u_j|^2 \leq s.$$

Παρατηρήστε ότι ο πληθάριθμος του συνόλου των $(\delta_j^{(k+1)})_{j\leq s}$ είναι $2^{s-|\sigma_k|}$. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα του Markov, μπορούμε να βρούμε $M^{k+1} \subseteq [\mathbf{0}_{\sigma_k} \times \{-2^{k/2}, 2^{k/2}\}^{S\setminus\sigma_k}] \cap E$ με $|M^{k+1}| \geq 2^{s-|\sigma_k|-1}$. Τότε, το Λήμμα 7.4.1 μάς εξασφαλίζει $\sigma_{k+1}^* \subseteq S\setminus\sigma_k$, με πληθάριθμο $|\sigma_{k+1}^*| \geq \frac{1}{2}(s - |\sigma_k|)$, τέτοιο ώστε

$$P_{\sigma_k\cup\sigma_{k+1}^*}(M^{k+1}) = \mathbf{0}_{\sigma_k} \times \{-2^{k/2}, 2^{k/2}\}^{\sigma_{k+1}^*}.$$

Αφού $M^{k+1} \subseteq E \cap 2^{k/2}Q$ και το τελευταίο σύνολο είναι κυρτό, έπεται ότι

$$\mathbf{0}_{\sigma_k} \times 2^k Q_{\sigma_{k+1}^*} \subseteq P_{\sigma_k\cup\sigma_{k+1}^*}(2^{k/2}E \cap 2^k Q).$$

Ας υποθέσουμε ότι $a \in Q_{\sigma_k}$ και $b \in Q_{\sigma_{k+1}^*}$. Από την επαγωγική μας υπόθεση, μπορούμε να βρούμε $w_a \in \beta_k Q_{\sigma_{k+1}^*}$ για το οποίο

$$(a, w_a) \in P_{\sigma_k\cup\sigma_{k+1}^*}(\alpha_k E \cap \beta_k Q).$$

Ορίζουμε $v_{a,b} = b - w_a$. Είναι φανερό ότι $v_{a,b} \in (\beta_k + 1)Q_{\sigma_{k+1}^*} = 2^k Q_{\sigma_{k+1}^*}$, άρα

$$(\mathbf{0}_{\sigma_k}, v_{a,b}) \in P_{\sigma_k\cup\sigma_{k+1}^*}(2^{k/2}E \cap 2^k Q).$$

Όμως τότε,

$$\begin{aligned} (a,b) &= (a, w_a) + (\mathbf{0}_{\sigma_k}, v_{a,b}) \\ &\in P_{\sigma_k\cup\sigma_{k+1}^*}(\alpha_k E \cap \beta_k Q) + P_{\sigma_k\cup\sigma_{k+1}^*}(2^{k/2}E \cap 2^k Q) \\ &\subseteq P_{\sigma_k\cup\sigma_{k+1}^*}(\alpha_{k+1} E \cap \beta_{k+1} Q). \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν δείξει ότι

$$Q_{\sigma_k\cup\sigma_{k+1}^*} \subseteq P_{\sigma_k\cup\sigma_{k+1}^*}(\alpha_{k+1} E \cap \beta_{k+1} Q).$$

Θέτουμε $\sigma_{k+1} = \sigma_k \cup \sigma_{k+1}^*$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $|\sigma_{k+1}| \geq (1 - \frac{1}{2^{k+1}})s$, και αυτό ολοκληρώνει το επαγωγικό βήμα της απόδειξης του ισχυρισμού.

Ειδικότερα, ο ισχυρισμός μάς δίνει ότι για κάθε $k = 1, 2, \ldots$, υπάρχει $\sigma_k \subseteq S$ με $|\sigma_k| \geq (1 - \frac{1}{2^k})s$, τέτοιο ώστε

$$[-1,1]^{\sigma_k} \subseteq P_{\sigma_k}\Big(\frac{2^{k/2}}{\sqrt{2}-1}E\Big).$$

Άρα,

$$P_{\sigma_k}(E) \supseteq c\,\sqrt{\frac{1}{2^k}}\,[-1,1]^{\sigma_k},$$

όπου $c=\sqrt{2}-1$. Η «συνεχής έκδοση» του Λήμματος έπεται άμεσα, με λίγο χειρότερη τιμή της σταθεράς c. □

Παράδειγμα Παίρνουμε $n=s+1$ και $u_i=\frac{1}{\sqrt{2}}(e_i+e_n)$, $i=1,\ldots,s$, όπου $\{e_i\}_{i\leq n}$ είναι η κανονική ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$. Τότε,

$$|\sum_{j=1}^{s}\delta_j u_j|^2=\frac{1}{2}\,\left[\sum_{j=1}^{s}\delta_j^2+(\sum_{j=1}^{s}\delta_j)^2\right],$$

επομένως αναγκαίες συνθήκες ώστε το $(\delta_j)_{j\leq s}$ να ανήκει στο E είναι οι

$$\sum_{j=1}^{s}\delta_j^2\leq 4s \quad , \quad |\sum_{j=1}^{s}\delta_j|\leq 2\sqrt{s}.$$

Έστω $\varepsilon\in(0,1)$, και σ τυχόν υποσύνολο του $\{1,\ldots,s\}$ με $|\sigma|=m\geq(1-\varepsilon)s$. Τότε, ένα σημείο $(t,t,\ldots,t)$ ανήκει στην $P_\sigma(E)$ μόνο αν υπάρχει $(\delta_j)_{j\notin\sigma}$ για το οποίο ικανοποιούνται οι

$$mt^2+\sum_{j\notin\sigma}\delta_j^2\leq 4s \quad , \quad |mt+\sum_{j\notin\sigma}\delta_j|\leq 2\sqrt{s},$$

και, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz, μπορούμε να δούμε ότι αυτό είναι δυνατό μόνο αν $|t|\leq c\sqrt{\varepsilon}$.

Το παράδειγμα αυτό δείχνει ότι το Λήμμα 7.4.2 είναι βέλτιστο.

Πρόταση 7.4.1 *Θεωρούμε τον χώρο με νόρμα $X=(\mathbb{R}^n,\|\cdot\|)$, και ένα $\varepsilon\in(0,1)$. Υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει τη μοναδιαία μπάλα B_X του X είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Τότε, μπορούμε να βρούμε διανύσματα $z_1,\ldots,z_m$ στον X με $\|z_i\|=|z_i|=1$ και $m\geq(1-\varepsilon)n$, που ικανοποιούν το εξής: για κάθε επιλογή πραγματικών αριθμών $t_1,\ldots,t_m$, ισχύει*

$$|\sum_{i=1}^{m}t_iz_i|\geq c\frac{\varepsilon}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{m}|t_i|,$$

όπου $c>0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη: Σύμφωνα με το Λήμμα των Szarek και Talagrand, μπορούμε να επιλέξουμε $x_1,\ldots,x_s\in B_X$ με $s\geq(1-\frac{\varepsilon}{2})n$, τέτοια ώστε

$$\mathrm{dist}\,(x_i,\ \mathrm{span}\{x_j,j\neq i\})\geq\sqrt{\frac{\varepsilon}{2}},\ \ i,j=1,\ldots,s.$$

Όμως τότε, υπάρχουν $v_i \perp \mathrm{span}\{x_j,\ j \neq i\}$ που σχηματίζουν διορθογώνιο σύστημα με τα x_j (δηλαδή, $\langle x_i, v_i\rangle = 1$) και έχουν μήκος $|v_i| \leq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}$. Δηλαδή, υπάρχουν $v_1, \ldots, v_s \in \mathbb{R}^n$ για τα οποία

$$|v_i| \leq \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}} \quad , \quad \langle x_i, v_j\rangle = \delta_{ij},\ \ i,j = 1,\ldots,s.$$

Ορίζουμε $u_i = \sqrt{\frac{\varepsilon}{2}}\, v_i$, και εφαρμόζοντας το Λήμμα 7.4.2 βρίσκουμε $\sigma \subseteq \{1,\ldots,s\}$ με $|\sigma| \geq (1-\frac{\varepsilon}{2})s$, για το οποίο

$$P_\sigma(E) \supseteq c\sqrt{\varepsilon}\,[-1,1]^\sigma.$$

Είναι φανερό ότι $|\sigma| \geq (1-\varepsilon)n$. Αν $(t_i)_{i\in\sigma}$ είναι τυχούσα επιλογή πραγματικών αριθμών, έχουμε

$$\sum_{i\in\sigma} |t_i| = \langle\, \sum_{i\in\sigma} t_i x_i, \sum_{j\in\sigma} \mathrm{sign}(t_j) v_j\, \rangle.$$

Αφού $(c\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{sign}(t_j))_{j\in\sigma} \in P_\sigma(E)$, μπορούμε να βρούμε $(\delta_j)_{j\leq s}$ στο E, τέτοια ώστε $\delta_j = c\sqrt{\varepsilon}\,\mathrm{sign}(t_j)$ αν $j \in \sigma$. Παρατηρούμε ότι αν $i \in \sigma$ και $j \notin \sigma$ τότε $\langle x_i, v_j\rangle = 0$, επομένως

$$\begin{aligned}
\langle\, \sum_{i\in\sigma} t_i x_i, \sum_{j\in\sigma} \mathrm{sign}(t_j) v_j\, \rangle &= \frac{1}{c\sqrt{\varepsilon}}\, \langle\, \sum_{i\in\sigma} t_i x_i, \sum_{j=1}^{s} \delta_j v_j\, \rangle \\
&\leq \frac{1}{c\sqrt{\varepsilon}}\, |\sum_{i\in\sigma} t_i x_i|\, \sqrt{\frac{2}{\varepsilon}}\, |\sum_{j=1}^{s} \delta_j u_j| \\
&\leq \frac{2\sqrt{s}}{c\varepsilon}\, |\sum_{i\in\sigma} t_i x_i| \\
&\leq \frac{\sqrt{n}}{c'\varepsilon}\, |\sum_{i\in\sigma} t_i x_i|.
\end{aligned}$$

Επιλέγουμε σαν z_i, $i = 1,\ldots,|\sigma| = m$, εκείνα τα x_j για τα οποία $j \in \sigma$, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε το άνω φράγμα για την R_∞^n:

Θεώρημα 7.4.1 *$R_\infty^n \leq cn^{5/6}$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη: Θεωρούμε τυχόντα χώρο με νόρμα $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει τη μοναδιαία μπάλα B_X του X είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Θεωρούμε τα $z_1,\ldots,z_m$ της Πρότασης 7.4.1: $m \geq (1-\varepsilon)n$, όπου το $\varepsilon \in (0,1)$ θα επιλεγεί κατάλληλα. Ορίζουμε $F = \langle z_1,\ldots,z_m\rangle$, και παίρνουμε τυχούσα ορθοκανονική βάση $y_1,\ldots,y_{n-m}$ του $F^\perp$. Από το Θεώρημα του John, για κάθε $j = 1,\ldots,n-m$ ισχύει

$$|y_j| \leq \|y_j\| \leq \sqrt{n}|y_j| = \sqrt{n}.$$

Άρα, αν θέσουμε $w_j = y_j/\|y_j\|$, έχουμε $\|w_j\| = 1$ και $|w_j| \geq 1/\sqrt{n}$, $j = 1, \ldots, n-m$.

Θεωρούμε τα n διανύσματα $z_1, \ldots, z_m, w_1, \ldots, w_{n-m}$. Παρατηρήστε ότι $n-m \leq \varepsilon n$. Έστω $t_1, \ldots, t_m, s_1, \ldots, s_{n-m} \in \mathbb{R}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i + \sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j\Big| &\leq \Big\|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i + \sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j\Big\| \\ &\leq \sum_{i=1}^{m} |t_i| + \sum_{j=1}^{n-m} |s_j|, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την $K \subseteq B_2^n$, την τριγωνική ανισότητα, και τις $\|z_i\| = \|w_j\| = 1$.

Από την άλλη πλευρά, τα $\sum_i t_i z_i$ και $\sum_j s_j w_j$ είναι κάθετα. Άρα,

$$\begin{aligned} \Big|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i + \sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j\Big| &= \left(\Big|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\Big|^2 + \Big|\sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j\Big|^2\right)^{1/2} \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Big|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\Big| + \Big|\sum_{j=1}^{n-m} s_j w_j\Big|\right) \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\Big|\sum_{i=1}^{m} t_i z_i\Big| + \left(\sum_{j=1}^{n-m} s_j^2 |z_j|^2\right)^{1/2}\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{c\varepsilon}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{m} |t_i| + \frac{1}{\sqrt{n}}\frac{1}{\sqrt{n-m}}\sum_{j=1}^{n-m} |s_j|\right) \\ &\geq \frac{1}{\sqrt{2}}\min\left\{\frac{c\varepsilon}{\sqrt{n}}\,,\,\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}n}\right\}\left(\sum_{i=1}^{m} |t_i| + \sum_{j=1}^{n-m} |s_j|\right). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$d(X, \ell_1^n) \leq \sqrt{2}\max\{\sqrt{n}/c\varepsilon, \sqrt{\varepsilon}n\}$$

για κάθε $\varepsilon \in (0,1)$. Το βέλτιστο ε ικανοποιεί την

$$\sqrt{n} = c\varepsilon^{3/2} n \Longrightarrow \varepsilon = 1/c^{2/3} n^{1/3}.$$

Γι' αυτήν την τιμή του ε, παίρνουμε

$$d(X, \ell_1^n) \leq \frac{\sqrt{2}}{c^{1/3}} n^{5/6}.$$

Αφού ο X ήταν τυχών, συμπεραίνουμε ότι

$$R_\infty^n = R_1^n \leq c n^{5/6},$$

όπου $c = \sqrt{2}/c^{1/3}$ θετική απόλυτη σταθερά. Αν κανείς προσέξει τις τιμές των σταθερών στα βήματα της απόδειξης, βλέπει ότι στο τελικό αποτέλεσμα μπορούμε να πάρουμε $c \leq 3$. $\square$

Βιβλιογραφία

[As] E. Asplund, *Comparison between plane symmetric convex bodies and parallelograms*, Math. Scand. **8** (1960), 171-180.

[B] S. Banach, *Théorie des opérations linéaires*, Warszawa 1932. New Edition 1979.

[BS] J. Bourgain and S.J. Szarek, *The Banach-Mazur distance to the cube and the Dvoretzky-Rogers factorization*, Israel J. Math. **62** (1988), 169-180.

[DR] A. Dvoretzky and C.A. Rogers, *Absolute and unconditional convergence in normed linear spaces*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **36** (1950), 192-197.

[En] P. Enflo, *A counterexample to the approximation property*, Acta Math. **130** (1973), 309-317.

[Gi] A.A. Giannopoulos, *A note on the Banach-Mazur distance to the cube*, Operator Theory: Advances and Applications, Vol. 77 (1995), 67-73.

[Gl1] E.D. Gluskin, *The diameter of the Minkowski compactum is approximately equal to n*, Funct. Anal. Appl. **15** (1981), 72-73.

[Gl2] E.D. Gluskin, *Probability in the geometry of Banach spaces*, Proc. Int. Congr. Berkeley, Vol. 2 (1986), 924-938.

[GKM] V.E. Gurarii, M.I. Kadec and V.E. Macaev, *On the distance between isomorphic L_p spaces of finite dimension*, Math. Sb. **70** (1966), 481-489.

[J] F. John, *Extremum problems with inequalities as subsidiary conditions*, Courant Anniversary Volume, Interscience, New York (1948), 187-204.

[LM] J. Lindenstrauss and V.D. Milman, *The local theory of normed spaces and its applications to convexity*, Handbook of Convex Geometry (Edited by P.M. Gruber and J.M. Wills) (1993), 1149-1220.

[MS] V.D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite-Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1200 (1986).

[Pel] A. Pelczynski, *Structural theory of Banach spaces and its interplay with analysis and probability*, Proc. Int. Congress Math. 1983, North-Holland, Amsterdam (1984), 237-269.

[Pi1] G. Pisier, *Factorization of Linear Operators and the Geometry of Banach Spaces*, CBMS, Vol. 60 (1986).

[Pi2] G. Pisier, *The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry*, Cambridge Tracts in Math., Vol. 94 (1989).

[S] N. Sauer, *On the density of families of sets*, J. Comb. Theory, Ser. A, **13** (1972), 145-147.

[Sh] S. Shelah, *A combinatorial problem: stability and order for models and theories in infinitary languages*, Pacific J. Math. **41** (1972), 247-261.

[Str] W. Stromquist, *The maximum distance between two dimensional spaces*, Math. Scand. **48** (1981), 205-225.

[Sz1] S.J. Szarek, *Spaces with large distance to ℓ_∞^n and random matrices*, American J. Math. **112** (1990), 899-942.

[Sz2] S.J. Szarek, *On the geometry of the Banach-Mazur compactum*, Lecture Notes in Mathematics **1470** (1991), 48-59.

[Sz3] S.J. Szarek, *The finite dimensional basis problem, with an appendix on nets of Grassman manifold*, Acta Math. **159** (1983), 153-179.

[ST] S.J. Szarek and M. Talagrand, *An isomorphic version of the Sauer-Shelah lemma and the Banach-Mazur distance to the cube*, GAFA Seminar '87-88, Lecture Notes in Mathematics **1376** (1989), 105-112.

[TJ] N. Tomczak-Jaegermann, *Banach-Mazur Distances and Finite-Dimensional Operator Ideals*, Pitman Monographs, Vol. 38 (1989).