ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΝΙΣΟΤΗΤΕΣ
ΚΑΙ
ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ

ΜΑΡΙΑ-ΙΣΑΒΕΛΛΑ ΖΥΜΩΝΟΠΟΥΛΟΥ

ΔΙΠΛΩΜΑΤΙΚΗ ΕΡΓΑΣΙΑ

ΤΜΗΜΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΜΑΡΤΙΟΣ 1998

Η μεταπτυχιακή αυτή εργασία κατατέθηκε στο Τμήμα Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Κρήτης τον Μάρτιο του 1998. Επιβλέπων ήταν ο Α. Γιαννόπουλος.

Την επιτροπή αξιολόγησης αποτέλεσαν οι: Α. Γιαννόπουλος, Μ. Παπαδημητράκης και Σ. Παπαδοπούλου.

Πέμπτο βιβλίο της *Συναγωγής* του Πάππου του Αλεξανδρέως.

Ο Θεός, αξιότιμε Μεγεθίων, έδωσε στους ανθρώπους την ιδιότητα να κατανοούν τη σοφία και τα μαθηματικά σε άριστο και τελειότατο βαθμό, έδωσε όμως και σε ορισμένα από τα ζώα εν μέρει αυτήν την ικανότητα. Στους ανθρώπους, που έχουν το χάρισμα του λόγου, έδωσε την ικανότητα να κάνουν τα πάντα σύμφωνα με τους κανόνες της λογικής και της απόδειξης, ενώ στα υπόλοιπα ζώα έδωσε το χάρισμα να κάνουν μόνο ό,τι είναι χρήσιμο και ωφέλιμο γιά τη ζωή του κάθε είδους, σύμφωνα με κάποια πρόνοια της φύσης. Αυτό μπορεί κανείς να το παρατηρήσει σε πολλά είδη ζώων, και ιδίως στις μέλισσες.

Είναι πράγματι αξιοθαύμαστη η οργάνωσή τους και η πειθαρχία τους στις αρχηγούς των κοινωνιών τους, και ακόμη πιό αξιοθαύμαστη η φιλοτιμία και η καθαριότητα με την οποία συλλέγουν το μέλι και η φροντίδα και η τάξη με την οποία το αποθηκεύουν. Γιατί αφού, όπως ξέρουμε, οι θεοί τους έχουν αναθέσει την αποστολή να προσφέρουν στους προικισμένους από τις μούσες ανθρώπους αυτό το κομμάτι αμβροσίας, εκείνες δεν καταδέχτηκαν να το εναποθέτουν όπου τύχει στο χώμα ή στο ξύλο, ή σε οποιοδήποτε άλλο άμορφο και ακατέργαστο υλικό, αλλά, συλλέγοντας τα ευγενέστερα υλικά από τα ωραιότερα άνθη που φυτρώνουν στη γή, κατασκευάζουν δοχεία γιά την αποθήκευση του μελιού, τις λεγόμενες κηρήθρες, που είναι όλες ίσες και όμοιες μεταξύ τους και έχουν σχήμα εξάγωνο. Και θα δούμε αμέσως οτι αυτό το μηχανεύονται ακολουθώντας έναν γεωμετρικό κανόνα. Αυτό που ενδιέφερε κυρίως τις μέλισσες ήταν να σχηματίζουν δοχεία που να είναι το ένα δίπλα στο άλλο και να εφάπτονται κατά τις πλευρές, ώστε να μην εισχωρούν στα μεσοδιαστήματα ξένα σώματα που να καταστρέφουν το μέλι. Αυτό μπορούσαν να το πετύχουν με τρία ευθύγραμμα σχήματα, κι εννοώ βέβαια σχήματα κανονικά, ισόπλευρα και ισογώνια, γιατί τα ασύμμετρα σχήματα δεν άρεσαν στις μέλισσες. Τα ισόπλευρα τρίγωνα λοιπόν, και τα τετράγωνα και τα εξάγωνα μπορούν, αν τοποθετηθούν το ένα δίπλα στο άλλο, να έχουν τις πλευρές τους εφαπτόμενες, χωρίς κενά που να καταστρέφουν τη συμμετρία. Γιατί η επιφάνεια που βρίσκεται γύρω από ένα σημείο καλύπτεται από έξι ισόπλευρα τρίγωνα και έξι γωνίες, κάθε μία από τις οποίες είναι τα 2/3 της ορθής, ή από τέσσερα τετράγωνα και τέσσερις ορθές γωνίες, ή από τρία εξάγωνα και τρείς γωνίες εξαγώνου, που η κάθε μία τους ισοδυναμεί με 1 και 1/3 της ορθής. Ενώ τρία πεντάγωνα δεν αρκούν γιά να καλύψουν την επιφάνεια γύρω από ένα σημείο, και τα τέσσερα περισσεύουν. Γιατί οι τρείς γωνίες του πενταγώνου ισοδυναμούν με λιγότερο από τέσσερις ορθές, ενώ οι τέσσερις γωνίες ισοδυναμούν με περισσότερο από τέσσερις ορθές. Ενώ δεν είναι δυνατό να χωρέσουν ούτε τρία επτάγωνα με κοινές πλευρές γύρω από ένα σημείο, γιατί οι τρείς γωνίες επταγώνου ισοδυναμούν με περισσότερο από τέσσερις ορθές. Και αυτό ισχύει ακόμη περισσότερο γιά τα πολυγωνότερα σχήματα. Εφόσον λοιπόν υπάρχουν τρία σχήματα που να μπορούν να καλύψουν πλήρως την επιφάνεια γύρω από ένα σημείο, το τρίγωνο, το τετράγωνο και το εξάγωνο, οι μέλισσες είχαν τη σοφία να επιλέξουν γιά το σκοπό τους το σχήμα με τις περισσότερες γωνίες, γιατί κατάλαβαν οτι εκείνο χωράει περισσότερο μέλι από τα άλλα δύο.

Και οι μέλισσες βέβαια ξέρουν μόνο ό,τι τους είναι χρήσιμο, οτι δηλαδή το εξάγωνο είναι μεγαλύτερο από το τετράγωνο και το τρίγωνο και μπορεί να χωρέσει περισσότερο μέλι, ενώ γιά την κατασκευή και των τριών σχημάτων καταναλίσκεται η ίδια ακριβώς ποσότητα υλικού. Εμείς όμως που υποστηρίζουμε οτι είμαστε σοφότεροι από τις μέλισσες, θα εξετάσουμε το θέμα βαθύτερα.

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Στην εργασία αυτή μελετάμε το κλασικό ισοπεριμετρικό πρόβλημα στον $\mathbf{R}^n$, καθώς και μερικά από τα πιο σημαντικά ισοπεριμετρικά προβλήματα σε μετρικούς χώρους πιθανότητας:

1. Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στο επίπεδο είναι ένα πρόβλημα ελαχίστου:

Από όλα τα επίπεδα χωρία που έχουν το ίδιο εμβαδόν A, να βρεθούν εκείνα που έχουν ελάχιστη περίμετρο.

Το πρόβλημα αυτό απασχόλησε τους γεωμέτρες από την αρχαιότητα: μέσα από απλούς γεωμετρικούς συλλογισμούς, ο Ζηνόδωρος κατέληξε στην αρχή οτι ο δίσκος είναι η λύση του. Πολύ αργότερα, ο Steiner έδωσε τις πρώτες αποδείξεις του οτι, αν υπάρχει λύση στο πρόβλημα τότε υποχρεούται να είναι ο δίσκος. Η αυστηρή απόδειξη της ύπαρξης λύσης είναι συνέπεια της ισοπεριμετρικής ανισότητας

$$P^2(K) \geq 4\pi A(K),$$

που ισχύει για κάθε χωρίο με σύνορο λεία απλή κλειστή καμπύλη. Στο πρώτο μέρος αυτής της εργασίας περιγράφουμε έναν από τους συλλογισμούς του Steiner, καθώς και μια απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας που οφείλεται στον Hurwitz και κάνει χρήση σειρών Fourier.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας, δίνουμε δύο αποδείξεις της ισοπεριμετρικής ανισότητας

$$\partial(K) \geq n|D_n|^{\frac{1}{n}}|K|^{\frac{n-1}{n}}$$

για κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$. Η πρώτη βασίζεται στην ανισότητα Brunn - Minkowski που αφορά την σχέση ανάμεσα στον όγκο και το άθροισμα Minkowski: Αν A, B είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$, τότε

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

Δίνουμε δύο αποδείξεις της ανισότητας Brunn-Minkowski: η μία χρησιμοποιεί τα λεγόμενα στοιχειώδη σύνολα (Lyusternik), η άλλη βασίζεται στην απεικόνιση του Knöthe και δίνει την ανισότητα στην κυρτή περίπτωση.

Για την δεύτερη απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας, μελετάμε την μέθοδο της συμμετρικοποίησης κατά Steiner. Με την μέθοδο αυτή, ξεκινώντας από τυχόν κυρτό σώμα και εκτελώντας διαδοχικές συμμετρικοποιήσεις οδηγείται κανείς σε σώματα οσοδήποτε κοντά σε μπάλα. Ο όγκος διατηρείται σε κάθε βήμα, ενώ η επιφάνεια μικραίνει. Ενα επιχείρημα σύγκλισης που βασίζεται στο θεώρημα επιλογής του Blaschke δείχνει οτι η μπάλα είναι η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος αν περιοριστούμε στην κλάση των κυρτών σωμάτων.

Δίνουμε δύο ακόμα εφαρμογές της συμμετρικοποίησης. Παρουσιάζουμε την λύση που έδωσε ο Blaschke στο πρόβλημα των τεσσάρων σημείων του Sylvester, και μία πρόσφατη απλή απόδειξη της ανισότητας Blaschke - Santaló για το γινόμενο των όγκων ενός συμμετρικού κυρτού σώματος και του πολικού του.

2. Το γενικευμένο ισοπεριμετρικό πρόβλημα για έναν μετρικό χώρο πιθανότητας (X, d, μ) διατυπώνεται ως εξής:

Γιά κάθε $\alpha \in (0,1)$ και κάθε $\varepsilon > 0$ να βρεθούν εκείνα τα υποσύνολα A του X που έχουν μέτρο $\mu(A) = \alpha$ και η ε-επέκτασή τους $A_\varepsilon = \{x \in X : d(x, A) \leq \varepsilon\}$ έχει το ελάχιστο δυνατό μέτρο.

Αν ένα υποσύνολο του X είναι λύση του παραπάνω προβλήματος για κάθε $\varepsilon > 0$, τότε λέμε οτι έχει ελάχιστη επιφάνεια για το δοσμένο μέτρο α. Στα πιο φυσιολογικά παραδείγματα μετρικών χώρων πιθανότητας, η λύση του παραπάνω προβλήματος είναι η ίδια για κάθε $\varepsilon > 0$ και εμφανίζει πολλές συμμετρίες:

(α) Αν $X = S^{n-1}$ είναι η Ευκλείδεια μοναδιαία σφαίρα με την γεωδαισιακή μετρική και το αναλλοίωτο ως προς τις στροφές μέτρο πιθανότητας, τότε η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος είναι η d-μπάλα

$$B(x, r) = \{x \in S^{n-1} : d(x, x_0) \leq r\}.$$

Δίνουμε απόδειξη αυτού του ισχυρισμού κάνοντας χρήση της σφαιρικής συμμετρικοποίησης.

(β) Αν $X = \{-1, 1\}^n$ είναι ο χώρος του Cantor με την φυσιολογική μετρική $d(x, y) = \frac{1}{n}|\{i \leq n : x_i \neq y_i\}|$ και το φυσιολογικό μέτρο απαρίθμησης $\mu(A) = |A|/2^n$, τότε πάλι η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος δίνεται από τις d-μπάλες.

(γ) Αν $X = \mathbf{R}^n$ είναι ο χώρος του Gauss με την Ευκλείδεια μετρική και το μέτρο πιθανότητας που έχει πυκνότητα την $(2\pi)^{-n/2} \exp(-|x|^2/2)$, τότε η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος δίνεται από τους ημιχώρους που έχουν το δοσμένο μέτρο α. Δίνουμε απόδειξη αυτού του ισχυρισμού με βάση την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα και την παρατήρηση του Poincaré.

Σε όλα τα παραπάνω παραδείγματα υπάρχει μία ακόμα παράμετρος: η διάσταση n. Συνέπεια της λύσης του ισοπεριμετρικού προβλήματος είναι σε καθεμία από τις παραπάνω περιπτώσεις η ακόλουθη παρατήρηση:

Αν $A \subseteq X$ και $\mu(A) = \frac{1}{2}$, τότε για κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\mu(A_\varepsilon) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 \varepsilon^2 n),$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Για μεγάλες διαστάσεις n, αυτό σημαίνει οτι αν επεκτείνουμε έστω και λίγο ένα υποσύνολο μέτρου $1/2$ τότε αυτό που περισσεύει είναι εξαιρετικά μικρό από την άποψη του μέτρου. Οι συμπεριφορές δηλαδή των υποσυνόλων του χώρου από την άποψη της μετρικής και από την άποψη του μέτρου είναι πολύ διαφορετικές. Το φαινόμενο αυτό αποκαλείται «συγκέντρωση του μέτρου». Δίνουμε απευθείας αποδείξεις τέτοιων εκτιμήσεων για όλα τα παραδείγματα που αναφέραμε. Το πλεονέκτημά τους είναι οτι παρακάμπτουν τις βαριές τεχνικές που απαιτούνται για την ακριβή λύση των αντίστοιχων ισοπεριμετρικών προβλημάτων, υστερούν όμως από την άποψη της διαίσθησης με την έννοια οτι η φύση των επιχειρημάτων που χρησιμοποιούνται είναι μόνο με την «ευρύτερη έννοια» γεωμετρική.

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

I. Η ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΟ ΕΠΙΠΕΔΟ

1. Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στο επίπεδο.

1.1 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στο επίπεδο διατυπώνεται με δύο τρόπους:

(α) Σαν ένα πρόβλημα *ελαχίστου*:

Από όλα τα χωρία που έχουν το ίδιο εμβαδόν A, να βρεθούν εκείνα που έχουν ελάχιστη περίμετρο.

(β) Σαν ένα πρόβλημα *μεγίστου*:

Από όλα τα χωρία που έχουν την ίδια περίμετρο P, να βρεθούν εκείνα που έχουν μέγιστο εμβαδόν.

1.2 Πρέπει πρώτα να ορίσουμε τι ακριβώς εννοούμε με τον όρο *χωρίο*: Τα χωρία που θα μας απασχολήσουν είναι αυτά που έχουν σαν σύνορό τους μιά απλή κλειστή καμπύλη. Με τον όρο καμπύλη εννοούμε την εικόνα στο επίπεδο μιάς συνεχούς συνάρτησης $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$. Η καμπύλη λέγεται κλειστή αν $\gamma(a) = \gamma(b)$, και απλή αν γιά κάθε $t_1 \neq t_2$ στο $[a,b]$ ισχύει $\gamma(t_1) \neq \gamma(t_2)$, με μόνη εξαίρεση την περίπτωση $t_1 = a, t_2 = b$. Για ευκολία θα θεωρήσουμε ακόμα οτι οι καμπύλες μας είναι κατά τμήματα λείες: αν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, θεωρούμε οτι υπάρχει μιά διαμέριση $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$ του $[a,b]$ τέτοια ώστε οι $x(t), y(t)$ να είναι συνεχώς παραγωγίσιμες σε κάθε (t_i, t_{i+1}) και να υπάρχουν οι πλευρικές τους παράγωγοι σε κάθε t_i.

1.3 Τα προβλήματα (α) και (β) είναι *δυϊκά* με την εξής έννοια: Κάθε λύση του προβλήματος (α) είναι και λύση του προβλήματος (β), και αντίστροφα.

Απόδειξη: Εστω K μιά λύση του προβλήματος (α). Δηλαδή, αν $A(K) = A(L)$ τότε $P(K) \leq P(L)$. Θεωρούμε οποιοδήποτε χωρίο W με $P(K) = P(W)$. Βρίσκουμε $\lambda > 0$ τέτοιο ώστε $A(K) = A(\lambda W) = \lambda^2 A(W)$. Πρέπει να ισχύει $P(K) \leq P(\lambda W) = \lambda P(W) = \lambda P(K)$, συνεπώς $\lambda \geq 1$. Αρα, $A(K) = \lambda^2 A(W) \geq A(W)$, δηλαδή το K έχει μέγιστο εμβαδόν γιά τη δοσμένη περίμετρο. Το K είναι και λύση του προβλήματος (β).

Με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται οτι κάθε λύση του προβλήματος (β) είναι και λύση του προβλήματος (α). $\square$

Από εδώ και πέρα λοιπόν δεν θα κάνουμε διάκριση ανάμεσα στα δύο προβλήματα και θα μιλάμε απλά γιά το ισοπεριμετρικό πρόβλημα. Μιά ακόμα παρατήρηση είναι οτι η ύπαρξη λύσεων για το πρόβλημα (α) ή το πρόβλημα (β) δεν είναι προφανής. Πρέπει κανείς να αποδείξει οτι υπάρχουν χωρία με δοσμένο εμβαδόν και ελάχιστη περίμετρο (αντίστοιχα, με δοσμένη περίμετρο και μέγιστο εμβαδόν).

1.4 Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα απασχόλησε τους γεωμέτρες από την αρχαιότητα. Δίνουμε εδώ μερικά αποτελέσματα γιά πολύγωνα, που ήταν γνωστά στον Ζηνόδωρο (2ος αιώνας π.Χ.).

1.4.1 Θεώρημα. *Ανάμεσα σε όλα τα $n-$γωνα που έχουν σταθερό εμβαδόν A, το κανονικό $n-$γωνο έχει την ελάχιστη δυνατή περίμετρο.*

Απόδειξη: Εστω K ένα n–γωνο που έχει το δοσμένο εμβαδόν A και την ελάχιστη δυνατή περίμετρο.

Θα αποδείξουμε πρώτα οτι όλες οι πλευρές του είναι ίσες. Αρκεί να το δείξουμε γιά δύο διαδοχικές πλευρές του K. Εστω AB, BC διαδοχικές πλευρές με $AB \neq BC$. Θα βρούμε ένα νέο n–γωνο K_1 που θα έχει το ίδιο εμβαδόν με το K αλλά μικρότερη περίμετρο. Αυτό είναι άτοπο.

Γιά το σκοπό αυτό αντικαθιστούμε την κορυφή B του K με μιάν άλλη B_1 και κρατάμε τις υπόλοιπες. Η επιλογή του B_1 γίνεται έτσι ώστε να έχει την ίδια απόσταση από την AC με το B αλλά το τρίγωνο AB_1C να είναι ισοσκελές (βλέπε σχήμα). Τα τρίγωνα ABC και AB_1C έχουν το ίδιο εμβαδόν, άρα και τα K, K_1. Ομως, ένας απλός υπολογισμός δείχνει οτι $P(ABC) > P(AB_1C)$, άρα και $P(K) > P(K_1)$.

Το K έχει λοιπόν όλες του τις πλευρές ίσες, και μένει να δείξουμε οτι έχει και όλες του τις γωνίες ίσες. Αν $n = 3$, αυτό είναι φανερό. Υποθέτουμε λοιπόν οτι $n \geq 4$ και υπάρχουν διαδοχικές κορυφές A, B, C, D του K τέτοιες ώστε οι γωνίες B και C να είναι άνισες, και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Το $ABCD$ έχει βάση AD και $AB = BC = CD$, είναι επομένως μη–εγγράψιμο αφού οι γωνίες B και C είναι άνισες. Μπορούμε τότε να το αντικαταστήσουμε με ένα άλλο εγγράψιμο τετράπλευρο AB_1C_1D που έχει το ίδιο εμβαδόν και μικρότερη περίμετρο.

Με την αντικατάσταση των B και C από τα B_1, C_1 παίρνουμε ένα n–γωνο K_1 τέτοιο ώστε $A(K_1) = A(K) = A$ αλλά $P(K_1) < P(K)$. Αυτό είναι άτοπο, συνεπώς το K έχει όλες του τις γωνίες ίσες.

Συμπεραίνουμε οτι το K είναι κανονικό. □

Λόγω του δυϊσμού ανάμεσα στα προβλήματα (α) και (β) έχουμε: Από όλα τα n–γωνα με περίμετρο P, το κανονικό έχει το μέγιστο δυνατό εμβαδόν. Υπολογίζοντάς το σαν συνάρτηση της περιμέτρου P παίρνουμε:

1.4.2 Θεώρημα. *Εστω $n \geq 3$ και $P > 0$. Γιά κάθε n–γωνο K_n περιμέτρου P ισχύει*

$$A(K_n) \leq A(K_n^*) = \frac{P^2}{4n} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right),$$

όπου K_n^* είναι το κανονικό n–γωνο περιμέτρου P.

Αμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 1.4.2 είναι οι εξής:

(α) Η ακολουθία $\frac{\pi}{n} \cot\left(\frac{\pi}{n}\right)$ είναι γνήσια αύξουσα και τείνει στο 1. Συνεπώς,

$$A(K_3^*) < A(K_4^*) < \ldots < A(K_n^*) \to \frac{P^2}{4\pi}.$$

(β) Κανένα πολύγωνο δεν μπορεί να είναι λύση του γενικού ισοπεριμετρικού προβλήματος. Αν γιά παράδειγμα το πολύγωνο K έχει n κορυφές, τότε για το κανονικό $(n+1)$–γωνο με την ίδια περίμετρο ισχύει

$$A(K) < A(K_{n+1}^*).$$

(γ) Αν K πολύγωνο εμβαδού A και περιμέτρου P, τότε $4\pi A < P^2$. Γιά οποιονδήποτε δίσκο ισχύει ισότητα: $4\pi A = P^2$. Επίσης, τα Θεωρήματα 1.4.1 και 1.4.2 δείχνουν οτι όσο πιό κανονικό είναι ένα πολύγωνο και όσο περισσότερες κορυφές έχει (άρα όσο πιό κοντά βρίσκεται σε κύκλο), τόσο πιό κοντά βρίσκεται στο να είναι λύση του προβλήματος.

Λέγεται οτι, συνδυάζοντας όλες τις προηγούμενες παρατηρήσεις, ο Ζηνόδωρος κατέληξε στην διατύπωση της ακόλουθης *ισοπεριμετρικής αρχής*:

Ο δίσκος είναι η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

2. Η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος από τον Steiner.

Το 1841, ο Steiner έδωσε πέντε διαφορετικές αποδείξεις του εξής θεωρήματος:

2.1 Θεώρημα. *Αν υπάρχει ένα χωρίο K_0 του οποίου το εμβαδόν δεν είναι ποτέ μικρότερο από το εμβαδόν ενός άλλου χωρίου K με την ίδια περίμετρο, τότε το K_0 είναι δίσκος.*

Απόδειξη: Δίνουμε εδώ την πρώτη από τις αποδείξεις του Steiner, που βασίζεται σε απλούς γεωμετρικούς συλλογισμούς. Υποθέτουμε οτι K_0 είναι ένα χωρίο στο επίπεδο με μέγιστο εμβαδόν γιά δοσμένη περίμετρο.

Βήμα 1: Το K_0 πρέπει να είναι *κυρτό* χωρίο, δηλαδή αν A, B είναι δύο σημεία του K_0 τότε ολόκληρο το ευθύγραμμο τμήμα AB πρέπει να περιέχεται στο K_0.

Πράγματι, ας υποθέσουμε οτι το K_0 δεν είναι κυρτό. Τότε μπορούμε να βρούμε δύο σημεία A και B του K_0 όπως στο σχήμα: το υποδιάστημα CD του AB βρίσκεται έξω από το K_0. Ενώνοντας το K_0 με το γραμμοσκιασμένο χωρίο, παίρνουμε ένα νέο χωρίο K_1 τέτοιο ώστε $A(K_1) > A(K_0)$ και $P(K_1) < P(K_0)$, αφού το ευθύγραμμο τμήμα CD έχει μικρότερο μήκος από την καμπύλη CZD. Με κατάλληλη ομοιοθεσία του K_1 προκύπτει ένα χωρίο K_1' με εμβαδόν $A(K_1') > A(K_0)$ και περίμετρο $P(K_1') = P(K_0)$, άτοπο.

Βήμα 2: Το K_0 είναι κυρτό, και ξεκινώντας από αυτό θα φτιάξουμε δύο άλλα πιό συμμετρικά χωρία K_1, K_2 που έχουν την ίδια ακραία ιδιότητα με το K_0: τα K_1, K_2 έχουν την ίδια περίμετρο και το ίδιο (άρα μέγιστο) εμβαδόν με το K_0.

Η κατασκευή των K_1 και K_2 γίνεται ως εξής: στο σύνορο του K_0 παίρνουμε δύο σημεία A, B που το χωρίζουν σε δύο τόξα γ_1 και γ_2 με το ίδιο μήκος, το μισό δηλαδή της περιμέτρου του K_0. Αν O είναι το μέσο του AB, με γ_1' συμβολίζουμε το συμμετρικό τόξο του γ_1 ως προς O, και με γ_2' το συμμετρικό του γ_2 ως προς O. Θεωρούμε το χωρίο K_1 που έχει σύνορο το $\gamma_1 \cup \gamma_1'$, και το χωρίο K_2 που έχει σύνορο το $\gamma_2 \cup \gamma_2'$.

Με αυτήν την κατασκευή, τα K_1 και K_2 είναι συμμετρικά ως προς O. Από τον τρόπο επιλογής των A και B, γιά $j = 1, 2$ έχουμε

$$P(K_j) = l(\gamma_j) + l(\gamma_j') = 2l(\gamma_j) = P(K_0), \tag{2.1}$$

όπου με l συμβολίζουμε το μήκος καμπύλης. Αφού το K_0 έχει μέγιστο εμβαδόν γιά τη δοσμένη περίμετρο,

$$A(K_0) \geq A(K_j) \quad , \quad j = 1, 2. \tag{2.2}$$

Ομως,

$$A(K_1) + A(K_2) = 2A(K_0), \tag{2.3}$$

άρα $A(K_1) = A(K_2) = A(K_0)$. Δηλαδή, καθένα από τα K_1, K_2 έχει επίσης μέγιστο εμβαδόν.

Βήμα 3: Τα K_1 και K_2 είναι δίσκοι.

Θα δείξουμε γιά παράδειγμα οτι το K_1 είναι δίσκος δείχνοντας οτι γιά κάθε σημείο C στο σύνορό του η γωνία ACB είναι ορθή. Ας υποθέσουμε οτι γιά κάποιο σημείο C (αυτό στο σχήμα) η ACB δεν είναι ορθή. Το K_1 είναι συμμετρικό ως προς O, άρα το συμμετρικό D του C ως προς O ανήκει στο σύνορο του K_1, και το $ACBD$ είναι παραλληλόγραμμο. Το K_1 αποτελείται από αυτό το παραλληλόγραμμο και τα τέσσερα καμπυλόγραμμα χωρία $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$. Φτιάχνουμε ένα άλλο χωρίο K_1' ως εξής: πρώτα κατασκευάζουμε ένα ορθογώνιο παραλληλόγραμμο $A'C'B'D'$ με πλευρές $A'C' = AC$ και $C'B' = CB$, και κατόπιν στις τέσσερες πλευρές του κολλάμε τα $\tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4$ όπως στο σχήμα. Με αυτήν την κατασκευή, γιά το χωρίο K_1' που προκύπτει έχουμε προφανώς $P(K_1') = P(K_1)$ ενώ

$$A(K_1') - A(K_1) = A(A'C'B'D') - A(ACBD) > 0, \tag{2.4}$$

αφού το ορθογώνιο $A'C'B'D'$ έχει την ίδια βάση και μεγαλύτερο ύψος από το $ACBD$. Αυτό είναι άτοπο αφού το K_1 έχει μέγιστο εμβαδόν γιά τη δοσμένη περίμετρο. Αρα, η ACB είναι ορθή, κι αφού το C ήταν τυχόν, το K_1 είναι δίσκος.

Βήμα 4: Το $K_0 = K_1 = K_2$ είναι δίσκος.

Αφού τα K_1, K_2 είναι δίσκοι, τα γ_1, γ_2 είναι ημικύκλια. Αρα και το K_0 είναι δίσκος (και βεβαίως $K_0 = K_1 = K_2$). Ετσι ολοκληρώνεται η απόδειξη. $\square$

Το Θεώρημα που μόλις αποδείξαμε μας λέει πως *αν* υπάρχει λύση γιά το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στο επίπεδο, τότε αυτή είναι υποχρεωτικά ο δίσκος. Δεν εξασφαλίζει όμως την ύπαρξη λύσης.

Ενας τρόπος γιά να παρακάμψουμε αυτό το εμπόδιο είναι ο εξής: Γνωρίζουμε οτι γιά τον δίσκο D ισχύει

$$P^2(D) = 4\pi A(D).$$

Είδαμε οτι γιά κάθε πολύγωνο K ισχύει $P^2(K) \geq 4\pi A(K)$. Αν δείξουμε οτι *γιά κάθε* χωρίο στο επίπεδο ισχύει η ανισότητα

$$P^2(K) \geq 4\pi A(K),$$

τότε ξέρουμε αυτομάτως οτι ο δίσκος έχει μέγιστο εμβαδόν γιά δοσμένη περίμετρο. Πράγματι, αν K είναι οποιοδήποτε χωρίο με $P(K) = P(D)$ τότε

$$A(K) \leq \frac{P^2(K)}{4\pi} = \frac{P^2(D)}{4\pi} = A(D).$$

Δηλαδή, ο δίσκος είναι λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος, και τώρα το επιχείρημα του Steiner αποδεικνύει οτι είναι και η *μοναδική* του λύση.

Γιά μιά πλήρη λοιπόν λύση του προβλήματος στο επίπεδο αρκεί να δείξουμε την:

Ισοπεριμετρική Ανισότητα: *Γιά κάθε χωρίο K στο επίπεδο ισχύει*

$$P^2(K) \geq 4\pi A(K),$$

όπου P η περίμετρος και A το εμβαδόν του K.

Στην επόμενη παράγραφο θα δώσουμε μιά απόδειξη αυτής της ανισότητας, η οποία κάνει χρήση σειρών Fourier και οφείλεται στον Hurwitz (1901).

3. Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας από τον Hurwitz.

Υποθέτουμε εδώ γιά ευκολία οτι το χωρίο K έχει σαν σύνορό του μιά λεία απλή κλειστή καμπύλη $\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$. Με αυτό εννοούμε οτι αν $\gamma(t) = (x(t), y(t))$, τότε οι x' και y' είναι συνεχείς και επιπλέον $(x'(t), y'(t)) \neq (0,0)$ γιά κάθε t, το οποίο εξασφαλίζει οτι η καμπύλη έχει σε κάθε σημείο εφαπτόμενο διάνυσμα το οποίο μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο.

Το μήκος της καμπύλης γ δίνεται από την

$$P = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}\, dt. \tag{3.1}$$

Θα ορίσουμε πρώτα μιά νέα παραμετρικοποίηση της καμπύλης γ: Θεωρούμε την απεικόνιση $s : [a,b] \to [0,P]$ με

$$s(t) = \int_a^t \sqrt{[x'(u)]^2 + [y'(u)]^2} du. \tag{3.2}$$

Η s είναι συνεχής και γνήσια αύξουσα συνάρτηση του t, συνεπώς ορίζεται η αντίστροφή της s^{-1} στο $[0,P]$ και μπορούμε να θεωρήσουμε την καμπύλη $\gamma_1 : [0,P] \to \mathbf{R}^2$ με $\gamma_1(s) = \gamma(t)$ όπου $s = s(t)$. Τότε, αν $x_1(s) = x(t)$ και $y_1(s) = y(t)$ έχουμε

$$\frac{dx_1}{ds} = \frac{dx}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{x'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}} \tag{3.3}$$

και

$$\frac{dy_1}{ds} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{ds} = \frac{y'(t)}{\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}}. \tag{3.4}$$

Από τις παραπάνω σχέσεις βλέπουμε οτι η γ_1 έχει την ιδιότητα $(dx_1/ds)^2+(dy_1/ds)^2 = 1$ γιά κάθε t. Εχουμε δηλαδή παραμετρικοποιήσει την καμπύλη ως *προς μήκος τόξου*.

Το εμβαδόν του χωρίου K υπολογίζεται με την βοήθεια του Θεωρήματος του Green: Θεωρούμε τις συναρτήσεις $Q(x,y) = x$ και $P(x,y) = -y$. Αν με γ_1 συμβολίσουμε και την εικόνα της καμπύλης γ_1 (το σύνορο δηλαδή του K), τότε

$$\int_{\gamma_1} Pdx + Qdy \;=\; \int\int_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dxdy, \tag{3.5}$$

και γιά τις συγκεκριμένες P και Q παίρνουμε

$$A(K) = \frac{1}{2}\int_{\gamma_1} xdy - ydx. \tag{3.6}$$

Επεται οτι

$$A(K) = \frac{1}{2}\int_0^P [x_1(s)y_1'(s) - y_1(s)x_1'(s)]ds \tag{3.7}$$

και με ολοκλήρωση κατά παράγοντες προκύπτει

$$A(K) = \int_0^P x_1(s)y_1'(s)ds. \tag{3.8}$$

Θα κάνουμε ακόμα μιά αλλαγή μεταβλητής: θέτουμε $2\pi s = P\theta$, οπότε $\theta \in [0, 2\pi]$ και αν $\gamma_2(\theta) = \gamma_1(s) = (x_2(\theta), y_2(\theta))$, έχουμε

$$[x_2'(\theta)]^2 + [y_2'(\theta)]^2 = \frac{P^2}{4\pi^2} \tag{3.9}$$

γιά κάθε θ, και

$$A(K) = \int_0^{2\pi} x_2(\theta)y_2'(\theta)d\theta. \tag{3.10}$$

Θα αποδείξουμε την ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα του Hurwitz:

Θεώρημα. *Εστω K χωρίο στο επίπεδο του οποίου το σύνορο είναι μιά απλή κλειστή και λεία καμπύλη. Τότε,*

$$4\pi A(K) \leq P^2(K),$$

ισότητα ισχύει μόνο αν το K είναι δίσκος.

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε οτι το σύνορο του K είναι η εικόνα μιάς καμπύλης $\gamma_2 : [0, 2\pi] \to \mathbf{R}^2$ η οποία ικανοποιεί τις (3.9) και (3.10).

Οι συναρτήσεις $x_2(\theta)$ και $y_2(\theta)$ είναι συνεχείς άρα έχουν σειρές Fourier, και επειδή είναι και παραγωγίσιμες οι σειρές Fourier τους συγκλίνουν σ' αυτές:

$$x_2(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta) \tag{3.11}$$

και

$$y_2(\theta) = \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(c_k \cos k\theta + d_k \sin k\theta\right). \tag{3.12}$$

Επειδή οι x_2' και y_2' είναι συνεχείς, έχουν σειρές Fourier

$$x_2'(\theta) \ \sim \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(kb_k \cos k\theta - ka_k \sin k\theta\right) \tag{3.13}$$

και

$$y_2'(\theta) \ \sim \ \sum_{k=1}^{\infty} \left(kd_k \cos k\theta - kc_k \sin k\theta\right). \tag{3.14}$$

Η ισότητα του Parseval μας δίνει

$$\int_0^{2\pi} [x_2'(\theta)]^2 d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2) \tag{3.15}$$

και

$$\int_0^{2\pi} [y_2'(\theta)]^2 d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2(c_k^2 + d_k^2). \tag{3.16}$$

Συνδυάζοντας με την (3.9) παίρνουμε

$$P^2(K) = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2). \tag{3.17}$$

Από την άλλη πλευρά, η (3.10) μας δίνει

$$A(K) = \int_0^{2\pi} x_2(\theta) y_2'(\theta) d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k(a_k d_k - b_k c_k). \tag{3.18}$$

Αφαιρώντας παίρνουμε:

$$P^2 - 4\pi A = 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} \big(k^2(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2) - 2k(a_k d_k - b_k c_k)\big) \tag{3.19}$$

$$= 2\pi^2 \sum_{k=1}^{\infty} k[(a_k - d_k)^2 + (b_k + c_k)^2] + 2\pi^2 \sum_{k=2}^{\infty} (k^2 - k)\left(a_k^2 + b_k^2 + c_k^2 + d_k^2\right) \geq 0.$$

Η ανισότητα λοιπόν ισχύει και μένει να εξετάσουμε πότε μπορεί να ισχύει ισότητα. Από την (3.19) είναι φανερό οτι γιά $k \geq 2$ πρέπει να έχουμε $a_k = b_k = c_k = d_k = 0$

(αφού $k^2 - k > 0$ αν $k \geq 2$). Επιπλέον, το πρώτο από τα δύο αθροίσματα πρέπει να μηδενίζεται κι αυτό, άρα $a_1 = d_1$ και $b_1 = -c_1$. Δηλαδή,

$$x_2(\theta) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos\theta + b_1 \sin\theta$$

και

$$y_2(\theta) = \frac{c_0}{2} - b_1 \cos\theta + a_1 \sin\theta.$$

Ενας απλός υπολογισμός δείχνει οτι

$$\left(x_2(\theta) - \frac{a_0}{2}\right)^2 + \left(y_2(\theta) - \frac{c_0}{2}\right)^2 = a_1^2 + b_1^2, \tag{3.20}$$

δηλαδή η καμπύλη γ_2 περιγράφει κύκλο, και το K είναι δίσκος. $\square$

II. Η ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΗ ΑΝΙΣΟΤΗΤΑ ΣΤΟΝ $\mathbf{R}^n$.

1. Ορισμοί – Συμβολισμός.

• Θα δουλέψουμε στον $\mathbf{R}^n$, $n \geq 2$. Ο $\mathbf{R}^n$ είναι εφοδιασμένος με το εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$ το οποίο επάγει την Ευκλείδεια νόρμα $|x| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$. Πολύ συχνά θα χρησιμοποιούμε μιά (όχι πάντα την ίδια) σταθερή ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ γιά το δοσμένο εσωτερικό γινόμενο.

Με D_n συμβολίζουμε την Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα, και με S^{n-1} τη μοναδιαία σφαίρα $\{x \in \mathbf{R}^n : |x| = 1\}$. Θα χρησιμοποιούμε τα γράμματα θ, ϕ, ξ, η κλπ γιά μοναδιαία διανύσματα. Αν $\theta \in S^{n-1}$, με $\theta^\perp$ συμβολίζουμε τον $(n-1)$–διάστατο υπόχωρο που είναι ορθογώνιος στο θ:

$$\theta^\perp = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\}.$$

Η προβολή $P_\theta : \mathbf{R}^n \to \theta^\perp$ ορίζεται από την

$$P_\theta(x) = x - \langle x, \theta \rangle \theta.$$

• Ενα *κυρτό σώμα* K στον $\mathbf{R}^n$ είναι ένα μη–κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με μη–κενό εσωτερικό. Θα λέμε οτι το κυρτό σώμα K είναι *συμμετρικό* με κέντρο συμμετρίας το 0 αν οποτεδήποτε $x \in K$ έχουμε και $-x \in K$.

• Το *άθροισμα κατά Minkowski* δύο μη–κενών υποσυνόλων A και B του $\mathbf{R}^n$ είναι το σύνολο

$$A + B := \{a + b : a \in A, b \in B\}.$$

Εύκολα ελέγχουμε οτι αν τα A και B είναι συμπαγή (αντίστοιχα, κυρτά), τότε και το άθροισμά τους $A + B$ είναι συμπαγές (αντίστοιχα, κυρτό). Ειδικότερα, το άθροισμα δύο κυρτών σωμάτων είναι ένα κυρτό σώμα.

• Με τον όρο *στοιχειώδες σύνολο* αναφερόμαστε σε μία πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων που έχουν τις ακμές τους παράλληλες πρός τους άξονες συντεταγμένων (τις διευθύνσεις δηλαδή των ορθοκανονικών διανυσμάτων e_j) και έχουν ξένα εσωτερικά. Συμβολίζουμε με $\mathcal{I}$ την κλάση όλων των στοιχειωδών συνόλων.

Αν I είναι ένα τέτοιο ορθογώνιο, με μήκη ακμών $a_1, \ldots, a_n > 0$, τότε ορίζουμε τον *όγκο* του να ισούται με

$$|I| = a_1 \cdot \ldots \cdot a_n.$$

Αν $J = \cup_{k=1}^m I_k$ είναι ένα στοιχειώδες σύνολο, τότε ορίζουμε φυσιολογικά

$$|J| = \sum_{k=1}^m |I_k|.$$

Εστω τώρα A ενα μη–κενό, φραγμένο υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Ορίζουμε τον *εσωτερικό όγκο* του A μέσω της

$$\underline{|A|} = \sup\{|J| : J \subseteq A, J \in \mathcal{I}\},$$

και τον *εξωτερικό όγκο* του A μέσω της

$$\overline{|A|} = \inf\{|J| : A \subseteq J, J \in \mathcal{I}\}.$$

Θα λέμε οτι το A *έχει όγκο*, και θα τον συμβολίζουμε με $|A|$, αν $\underline{|A|} = \overline{|A|}$. Μπορεί κανείς να δείξει οτι

Κάθε κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ *έχει όγκο.*

Οι ιδιότητες του όγκου που χρησιμοποιούμε συχνά στη συνέχεια είναι τελείως φυσιολογικές:

(ι) Ο όγκος παραμένει αναλλοίωτος ως προς στροφές και μεταφορές.

(ιι) Αν T είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbf{R}^n$, τότε γιά κάθε συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ ισχύει

$$|T(K)| = |\mathrm{det}T||K|.$$

• Η *επιφάνεια* (κατά Minkowski) ενός μη–κενού, συμπαγούς υποσυνόλου A του $\mathbf{R}^n$ ορίζεται ως εξής:

$$\partial(A) = \liminf_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|A+\varepsilon D_n| - |A|}{\varepsilon}.$$

Στην περίπτωση που το A είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$, το παραπάνω $\liminf$ είναι όριο, και ο ορισμός αυτός της επιφάνειας είναι ισοδύναμος με κάθε άλλο φυσιολογικό ορισμό που θα μπορούσε να δώσει κανείς.

2. Η ανισότητα Brunn - Minkowski.

Η ανισότητα Brunn - Minkowski συνδέει τον όγκο με την πράξη της πρόσθεσης κατά Minkowski. Θα δώσουμε τρείς διαφορετικές αποδείξεις, καθεμία από τις οποίες σχετίζεται και με έναν πολύ σημαντικό κύκλο ιδεών. Η πρώτη από αυτές χρησιμοποιεί τα στοιχειώδη σύνολα και οφείλεται στον Lyusternik (1940):

2.1 Ανισότητα Brunn - Minkowski: *Εστω A και B συμπαγή, μη–κενά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. Τότε,*

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}. \tag{2.1}$$

Απόδειξη: 1η Περίπτωση: Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που τα A και B είναι ορθογώνια με τις ακμές τους παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων. Υποθέτουμε οτι $a_1, \ldots, a_n > 0$ είναι τα μήκη των ακμών του A, και $b_1, \ldots, b_n > 0$ τα μήκη των ακμών του B. Τότε, το $A+B$ είναι κι αυτό ορθογώνιο με τις ακμές του παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων και αντίστοιχα μήκη $a_1+b_1, \ldots, a_n+b_n$. Επομένως, η (2.1) παίρνει σάυτήν την περίπτωση τη μορφή

$$((a_1+b_1)\ldots(a_n+b_n))^{\frac{1}{n}} \geq (a_1\ldots a_n)^{\frac{1}{n}} + (b_1\ldots b_n)^{\frac{1}{n}}. \tag{2.2}$$

Ισοδύναμα, ζητάμε να δείξουμε οτι

$$(2.3)\qquad \left(\frac{a_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)^{\frac{1}{n}}+\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}\cdots\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)^{\frac{1}{n}}\leq 1.$$

Ομως από την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου το αριστερό μέλος της (2.3) είναι μικρότερο ή ίσο από

$$(2.4)\qquad \frac{1}{n}\left(\frac{a_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)+\frac{1}{n}\left(\frac{b_1}{a_1+b_1}+\ldots+\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)=1.$$

Δηλαδή, η ανισότητα Brunn - Minkowski ισχύει σάυτήν την απλή περίπτωση.

2η Περίπτωση: Υποθέτουμε οτι τα A,B είναι στοιχειώδη σύνολα, καθένα δηλαδή απάυτά είναι πεπερασμένη ένωση ορθογωνίων που έχουν ξένα εσωτερικά και ακμές παράλληλες προς τους άξονες συντεταγμένων.

Ορίζουμε σαν *πολυπλοκότητα* του ζευγαριού (A,B) το συνολικό πλήθος των ορθογωνίων που σχηματίζουν τα A,B. Θα αποδείξουμε την (2.1) με επαγωγή ως προς την πολυπλοκότητα m του (A,B). Οταν $m=2$, τα A και B είναι ορθογώνια και η (2.1) έχει ήδη αποδειχθεί.

Υποθέτουμε λοιπόν οτι $m\geq 3$ και οτι η (2.1) ισχύει γιά ζευγάρια στοιχειωδών συνόλων με πολυπλοκότητα $\leq m-1$. Αφού $m\geq 3$, κάποιο από τα A και B (έστω το A) αποτελείται από τουλάχιστον δύο ορθογώνια. Εστω I_1, I_2 δυό απάυτά. Τα I_1 και I_2 έχουν ξένα εσωτερικά, συνεπώς μπορούμε να τα διαχωρίσουμε με ένα υπερεπίπεδο παράλληλο προς κάποιον κύριο υπόχωρο του $\mathbf{R}^n$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε οτι αυτό το υπερεπίπεδο περιγράφεται από την $x_n=\rho$ γιά κάποιο $\rho\in\mathbf{R}$. Ορίζουμε

$$(2.5)\qquad A^+=A\cap\{x\in\mathbf{R}^n : x_n\geq\rho\}\quad ,\quad A^-=A\cap\{x\in\mathbf{R}^n : x_n\leq\rho\}.$$

Τα A^+ και A^- είναι στοιχειώδη σύνολα, έχουν ξένα εσωτερικά και καθένα τους σχηματίζεται από λιγότερα ορθογώνια απότι το A (Το υπερεπίπεδο $x_n=\rho$ το πολύ πολύ να κόβει κάθε ορθογώνιο του A σε δυό ορθογώνια, ένα στο A^+ κι ένα στο A^-. Ομως, το I_1 περιέχεται εξ ολοκλήρου στο A^+ ενώ το I_2 στο A^-). Περνώντας τώρα στο B, βρίσκουμε υπερεπίπεδο $x_n=s$ τέτοιο ώστε αν $B^+=B\cap\{x\in\mathbf{R}^n : x_n\geq s\}$ και $B^-=B\cap\{x\in\mathbf{R}^n : x_n\leq s\}$ να ισχύει

$$(2.6)\qquad \frac{|A^+|}{|A|}=\frac{|B^+|}{|B|}.$$

Τα B^+ και B^- είναι στοιχειώδη σύνολα με πλήθος ορθογωνίων που δεν ξεπερνάει αυτό του B. Ονομάζουμε λ τον κοινό λόγο όγκων στην (2.6). Προφανώς, $0<\lambda<1$. Είναι φανερό οτι

$$(2.7)\qquad A+B=(A^++B^+)\cup(A^++B^-)\cup(A^-+B^+)\cup(A^-+B^-).$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $A^++B^+\subseteq\{x : x_n\geq\rho+s\}$ και $A^-+B^-\subseteq\{x : x_n\leq\rho+s\}$, τα A^++B^+ και A^-+B^- έχουν ξένα εσωτερικά. Χρησιμοποιώντας και την (2.7) παίρνουμε

$$(2.8)\qquad |A+B|\geq|A^++B^+|+|A^-+B^-|.$$

Με βάση την κατασκευή που κάναμε, εφαρμόζεται η επαγωγική υπόθεση στο δεξιό μέλος:

$$(2.9)\qquad |A^+ + B^+|^{\frac{1}{n}} \geq |A^+|^{\frac{1}{n}} + |B^+|^{\frac{1}{n}} \quad , \quad |A^- + B^-|^{\frac{1}{n}} \geq |A^-|^{\frac{1}{n}} + |B^-|^{\frac{1}{n}},$$

οπότε κάνοντας πράξεις στην (2.8) και παίρνοντας υπόψη την (2.6) έχουμε

$$|A+B| \geq \Big((\lambda|A|)^{1/n} + (\lambda|B|)^{1/n}\Big)^n + \Big(((1-\lambda)|A|)^{1/n} + ((1-\lambda)|B|)^{1/n}\Big)^n$$

$$= \lambda[|A|^{1/n} + |B|^{1/n}]^n + (1-\lambda)[|A|^{1/n} + |B|^{1/n}]^n = [|A|^{1/n} + |B|^{1/n}]^n,$$

απ'οπου έπεται οτι

$$(2.10)\qquad |A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

Γενική Περίπτωση: Εστω A, B τυχόντα μη–κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. Υπάρχουν ακολουθίες $\{A_m\}$ και $\{B_m\}$ στοιχειωδών συνόλων με τις ιδιότητες

$$A \subseteq A_m \quad , |A_m| \to |A| \quad , B \subseteq B_m \quad , \quad |B_m| \to |B| \quad , \quad m \in \mathbf{N}.$$

Τότε $A + B \subseteq A_m + B_m$ γιά κάθε $m \in \mathbf{N}$ και μπορούμε να επιλέξουμε τα A_m, B_m έτσι ώστε να έχουμε και $|A_m + B_m| \to |A + B|$, άρα

$$(2.11)\quad |A+B|^{\frac{1}{n}} = \lim_{m\to\infty} |A_m + B_m|^{\frac{1}{n}} \geq \lim_{m\to\infty} [|A_m|^{\frac{1}{n}} + |B_m|^{\frac{1}{n}}] = |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}. \quad \Box$$

Η ανισότητα Brunn - Minkowski γιά κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$ συχνά διατυπώνεται και ως εξής:

2.2 Πόρισμα. *Εστω K_1, K_2 κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$. Γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει*

$$(2.12)\qquad |\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2|^{1/n} \geq \lambda |K_1|^{1/n} + (1-\lambda)|K_2|^{1/n}.$$

Πιό ισχυρά, η συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbf{R}$ με $f(\lambda) = |\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2|^{1/n}$ είναι κοίλη.

Απόδειξη: Αρκεί να δείξουμε οτι $f(a\lambda + (1-a)\mu) \geq af(\lambda) + (1-a)f(\mu)$ γιά κάθε $\lambda, \mu \in [0,1]$ και $a \in (0,1)$. Εχουμε

$$(2.13)\qquad f(a\lambda + (1-a)\mu) = |(a\lambda + (1-a)\mu)K_1 + (1 - a\lambda - (1-a)\mu)K_2|^{\frac{1}{n}}$$

$$= |(a\lambda + (1-a)\mu)K_1 + (a(1-\lambda) + (1-a)(1-\mu))K_2|^{\frac{1}{n}}$$

$$= |a(\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2) + (1-a)(\mu K_1 + (1-\mu)K_2)|^{\frac{1}{n}}$$

$$\geq |a(\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2)|^{\frac{1}{n}} + |(1-a)(\mu K_1 + (1-\mu)K_2)|^{\frac{1}{n}}$$

$$= a|\lambda K_1 + (1-\lambda)K_2|^{\frac{1}{n}} + (1-a)|\mu K_1 + (1-\mu)K_2|^{\frac{1}{n}} = af(\lambda) + (1-a)f(\mu),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οτι αν $X \subseteq \mathbf{R}^n$ κυρτό, μη–κενό και $a, b > 0$ τότε $aX + bX = (a+b)X$. $\Box$

Μιά άλλη συνέπεια της ανισότητας Brunn - Minkowski είναι η ακόλουθη ανισότητα (η οποία είναι *ανεξάρτητη της διάστασης*):

2.3 Πόρισμα. *Εστω A, B συμπαγή, μη–κενά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. Γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε*

$$|\lambda A + (1-\lambda)B| \geq |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}. \tag{2.14}$$

Απόδειξη: Η συνάρτηση log είναι κοίλη, κι αυτό έχει σαν συνέπεια την

$$x^{\lambda}y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda)y \tag{2.15}$$

γιά κάθε $x, y > 0$ και $\lambda \in (0,1)$. Από την ανισότητα Brunn - Minkowski παίρνουμε

$$|\lambda A+(1-\lambda)B| \geq [\lambda|A|^{1/n}+(1-\lambda)|B|^{1/n}]^n \geq [|A|^{\lambda/n}|B|^{(1-\lambda)/n}]^n = |A|^{\lambda}|B|^{1-\lambda}. \quad \square$$

Μιά πρώτη σημαντική συνέπεια της ανισότητας Brunn - Minkowski είναι η ισοπεριμετρική ανισότητα γιά κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$:

2.4 Θεώρημα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ με $|K| = |D_n|$. Τότε,*

$$\partial(K) \geq \partial(D_n). \tag{2.16}$$

Απόδειξη: Με βάση τον ορισμό της επιφάνειας,

$$\partial(K) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|K+\varepsilon D_n| - |K|}{\varepsilon} \geq \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{[|K|^{1/n} + |\varepsilon D_n|^{1/n}]^n - |K|}{\varepsilon} \tag{2.17}$$

$$= \frac{[|D_n|^{1/n} + |\varepsilon D_n|^{1/n}]^n - |D_n|}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \frac{|D_n|[(1+\varepsilon)^n - 1]}{\varepsilon} = n|D_n|.$$

Ομως, ο αντίστοιχος υπολογισμός για την $\partial(D_n)$ δίνει $\partial(D_n) = n|D_n|$ (η ανισότητα Brunn - Minkowski ισχύει εδώ σαν ισότητα). Επομένως,

$$\partial(K) \geq \partial(D_n). \quad \square$$

Αρα, η μπάλα είναι λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος: ανάμεσα σε όλα τα κυρτά σώματα του $\mathbf{R}^n$ που έχουν δοσμένο όγκο V, η μπάλα έχει την μικρότερη επιφάνεια.

Μιά άλλη συνέπεια της ανισότητας Brunn - Minkowski είναι το Θεώρημα του Brunn γιά τις $(n-1)$–διάστατες τομές ενός κυρτού σώματος. Πιό συγκεκριμένα, θεωρούμε ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbf{R}^n$, ένα μοναδιαίο διάνυσμα $\theta \in S^{n-1}$ και την συνάρτηση $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ με

$$f(t) = |K \cap (\theta^{\perp} + t\theta)| \tag{2.18}$$

όπου $\theta^\perp$ είναι ο $(n-1)$–διάστατος υπόχωρος ο κάθετος στο θ. Η συνάρτηση f μετράει το «εμβαδόν» των παράλληλων τομών του K που είναι κάθετες στο θ. Γιά την f ισχύει το εξής:

2.5 Θεώρημα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Τότε, η συνάρτηση*

$$g(t) = [f(t)]^{\frac{1}{n-1}} = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|^{\frac{1}{n-1}}$$

είναι κοίλη στον φορέα της. Επίσης, η $\log f$ είναι κοίλη στον φορέα της.

Απόδειξη: Ταυτίζουμε τον $\theta^\perp$ με τον $\mathbf{R}^{n-1}$ και γράφουμε $K(t)$ γιά την προβολή της τομής $K \cap (\theta^\perp + t\theta)$ στον $\theta^\perp$. Δηλαδή,

$$K(t) = \{x \in \mathbf{R}^{n-1} : (x,t) \in K\}. \tag{2.19}$$

Θα αποδείξουμε οτι γιά κάθε $t, s \in \mathbf{R}$ και $\lambda \in (0,1)$

$$\lambda K(t) + (1-\lambda)K(s) \subseteq K(\lambda t + (1-\lambda)s). \tag{2.20}$$

Πράγματι, έστω $x \in K(t)$ και $y \in K(s)$. Τότε, $(x,t) \in K$ και $(y,s) \in K$ και αφού το K είναι κυρτό παίρνουμε $(\lambda x + (1-\lambda)y, \lambda t + (1-\lambda)s) \in K$, δηλαδή $\lambda x + (1-\lambda)y \in K(\lambda t + (1-\lambda)s)$. Αφού $|K(t)| = |K \cap (\theta^\perp + t\theta)|$ γιά κάθε $t \in \mathbf{R}$, το γεγονός οτι η g είναι κοίλη προκύπτει άμεσα από την ανισότητα Brunn - Minkowski.

Συνθέτοντας με την κοίλη συνάρτηση log βλέπουμε οτι η $\log g$ άρα και η $\log f$ είναι κοίλη στον φορέα της. □

Πολλές διαισθητικά φανερές προτάσεις που αφορούν όγκους κυρτών σωμάτων αποδεικνύονται με την βοήθεια της ανισότητας Brunn - Minkowski. Η χρήση της είναι συνήθως ουσιαστική, με την έννοια οτι είναι δύσκολο αν όχι αδύνατο να δοθεί πιό στοιχειώδης απόδειξη. Κλείνουμε αυτήν την παράγραφο με δύο τέτοια παραδείγματα:

2.6 Πόρισμα. *Εστω K ένα συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$, και $\theta \in S^{n-1}$. Τότε,*

$$\max_{t \in \mathbf{R}} |K \cap (\theta^\perp + t\theta)| = |K \cap \theta^\perp|. \tag{2.21}$$

Δηλαδή, η μέγιστη τομή του K κάθετα στο θ είναι η κεντρική: αυτή που περνάει από το κέντρο συμμετρίας του K.

Απόδειξη: Αμεση από το Θεώρημα 2.5. Η g είναι τώρα άρτια και κοίλη, συνεπώς παίρνει τη μέγιστη τιμή της στο 0. □

2.7 Πόρισμα. *Εστω A, B κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$, και οτι τα A, B είναι συμμετρικά, με κέντρο συμμετρίας το 0. Τότε, γιά κάθε $y \in \mathbf{R}^n$ έχουμε*

$$|A \cap (y+B)| \leq |A \cap B|. \tag{2.22}$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε οτι γιά κάθε $y \in \mathbf{R}^n$

$$\frac{1}{2}[A \cap (y+B)] + \frac{1}{2}[A \cap (-y+B)] \subseteq A \cap B. \tag{2.23}$$

Πράγματι: αν $z \in A \cap (y+B)$ και $w \in A \cap (-y+B)$, τότε $(z+w)/2 \in A$ λόγω κυρτότητας του A. Επίσης, υπάρχουν $b_1, b_2 \in B$ τέτοια ώστε $z = y + b_1$ και $w = -y + b_2$, οπότε $(z+w)/2 = (b_1+b_2)/2 \in B$. Αρα, η (2.23) ισχύει. Από το Πόρισμα 2.3 παίρνουμε

$$|A \cap B| \geq |A \cap (y+B)|^{\frac{1}{2}} |A \cap (-y+B)|^{\frac{1}{2}}. \tag{2.24}$$

Ομως, χρησιμοποιώντας την συμμετρία των A και B μπορούμε να δούμε οτι

$$-[A \cap (y+B)] = A \cap (-y+B). \tag{2.25}$$

Γιατί $z \in A \cap (-y+B)$ αν και μόνο αν $z \in A$ και υπάρχει $b \in B$ τέτοιο ώστε $z = -y + b$, δηλαδή αν και μόνο αν $-z \in A$ και $-z = y + (-b) \in y + B$. Τα $A \cap (y+B)$ και $A \cap (-y+B)$ έχουν επομένως τον ίδιο όγκο, και η (2.24) μας δίνει

$$|A \cap B| \geq |A \cap (y+B)|. \quad \square \tag{2.26}$$

3. Συμμετρικοποίηση κατά Steiner.

Στην παράγραφο αυτή θα περιγράψουμε μιά διαδικασία με την οποία ξεκινώντας από τυχόν κυρτό σώμα K οδηγούμαστε με «ομαλό τρόπο» σε όλο και πιό συμμετρικά κυρτά σώματα. Η διαδικασία αυτή χρησιμοποιείται πολύ συχνά όταν θέλουμε να δείξουμε οτι η μπάλα είναι λύση ενός προβλήματος μεγίστου–ελαχίστου.

Εστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$. Ως συνήθως, με θ συμβολίζουμε ένα μοναδιαίο διάνυσμα (κατεύθυνση) και με $\theta^{\perp}$ τον $(n-1)$–διάστατο υπόχωρο που είναι κάθετος στο θ:

$$\theta^{\perp} = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, \theta \rangle = 0\}. \tag{3.1}$$

Η *προβολή* $P_{\theta}(K)$ του K στην διεύθυνση του θ αποτελείται από όλες τις προβολές σημείων του K στον $\theta^{\perp}$. Είναι εύκολο να δεί κανείς οτι

$$P_{\theta}(K) = \{x \in \theta^{\perp} : \exists t \in \mathbf{R} : x + t\theta \in K\}. \tag{3.2}$$

3.1 Λήμμα. *Γιά κάθε κυρτό σώμα K και κάθε $\theta \in S^{n-1}$, το $P_{\theta}(K)$ είναι κυρτό σώμα.*

Απόδειξη: Δείχνουμε πρώτα οτι το $P_{\theta}(K)$ είναι κυρτό. Εστω $x, y \in P_{\theta}(K)$ και $\lambda \in (0,1)$. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί t και s τέτοιοι ώστε $x + t\theta \in K$ και $y + s\theta \in K$. Αφού το K είναι κυρτό, έχουμε

$$\lambda(x + t\theta) + (1-\lambda)(y + s\theta) = [\lambda x + (1-\lambda)y] + [\lambda t + (1-\lambda)s]\theta \in K, \tag{3.3}$$

οπότε η (3.2) μας δίνει οτι $\lambda x + (1-\lambda)y \in P_{\theta}(K)$. Αρα, το $P_{\theta}(K)$ είναι κυρτό.

Θα δείξουμε οτι το $P_{\theta}(K)$ είναι κλειστό: Εστω $\{x_n\}$ μιά ακολουθία σημείων του $P_{\theta}(K)$ και ας υποθέσουμε οτι $x_n \to x$. Υπάρχει μιά ακολουθία πραγματικών αριθμών

$\{t_n\}$ τέτοια ώστε $x_n + t_n\theta \in K$. Επειδή το K είναι φραγμένο, η $\{t_n\}$ είναι φραγμένη άρα έχει συγκλίνουσα υπακολουθία $\{t_{k_n}\}$. Αν $t_{k_n} \to t$, έχουμε $x_{k_n} + t_{k_n}\theta \to x + t\theta$, και αφού το K είναι κλειστό έπεται οτι $x + t\theta \in K$. Συνεπώς $x \in P_\theta(K)$ και το $P_\theta(K)$ είναι κλειστό.

Το οτι το $P_\theta(K)$ είναι φραγμένο και έχει μη–κενό εσωτερικό είναι προφανές: το K περιέχεται σε μιά μπάλα με κέντρο το 0, άρα το $P_\theta(K)$ θα περιέχεται σε μπάλα του $\theta^\perp$ της ίδιας ακτίνας. Επίσης, το K είναι σώμα άρα περιέχει μπάλα κάποιας θετικής ακτίνας. Το ίδιο θα συμβαίνει με οποιαδήποτε $(n-1)$–διάστατη προβολή του (η προβολή μπάλας είναι μπάλα με την ίδια ακτίνα). $\square$

Γιά να ορίσουμε την Steiner συμμετρικοποίηση του K στην κατεύθυνση του θ, θα χρειαστεί να γράψουμε το K σε μιά πιό βολική μορφή:

3.2 Λήμμα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Ορίζουμε δύο συναρτήσεις $f, g : P_\theta(K) \to \mathbf{R}$ με*

$$f(x) = \min\{t \in \mathbf{R} : x + t\theta \in K\} \quad , \quad g(x) = \max\{t \in \mathbf{R} : x + t\theta \in K\}. \tag{3.4}$$

Τότε, η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη.

Απόδειξη: Θα δείξουμε οτι η f είναι κυρτή. Αρκεί να δείξουμε οτι γιά κάθε $x, y \in P_\theta(K)$ ισχύει $f(\frac{x+y}{2}) \leq \frac{f(x)+f(y)}{2}$. Ας υποθέσουμε οτι $f(x) = t$ και $f(y) = s$. Τότε, $x + t\theta \in K$ και $y + s\theta \in K$. Επειδή το K είναι κυρτό, παίρνουμε

$$\frac{(x + t\theta) + (y + s\theta)}{2} = \frac{x + y}{2} + \frac{t + s}{2}\theta \in K. \tag{3.5}$$

Από τον ορισμό της f έπεται οτι

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{t + s}{2} = \frac{f(x) + f(y)}{2}. \tag{3.6}$$

Αρα η f είναι κυρτή, και με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε οτι η g είναι κοίλη. $\square$

Σύμφωνα με το Λήμμα 3.2 μπορούμε να γράψουμε το σώμα K στη μορφή

$$K = \{x + t\theta : x \in P_\theta(K)\ ,\ f(x) \leq t \leq g(x)\}. \tag{3.7}$$

Αντίστροφα, αν ένα χωρίο K στον $\mathbf{R}^n$ έχει σαν προβολή στον $\theta^\perp$ ένα κυρτό σώμα $P_\theta(K)$ και γράφεται στη μορφή (3.7), όπου f κυρτή, g κοίλη και $f \leq g$ στο $P_\theta(K)$, τότε το K είναι κυρτό.

Ορίζουμε τώρα την Steiner συμμετρικοποίηση του K στην κατεύθυνση του θ ως εξής:

$$S_\theta(K) = \{x + t\theta : x \in P_\theta(K)\ ,\ |t| \leq \frac{g(x) - f(x)}{2}\}. \tag{3.8}$$

Δηλαδή, γιά κάθε $x \in P_\theta(K)$ θεωρούμε ένα ευθύγραμμο τμήμα παράλληλο στο θ με μήκος $g(x) - f(x)$ και μέσο το x, και παίρνουμε την ένωση όλων αυτών των ευθυγράμμων τμημάτων.

Είναι φανερό οτι το $S_\theta(K)$ είναι συμμετρικό ως προς $\theta^\perp$ (αυτή η παρατήρηση δικαιολογεί τον όρο «συμμετρικοποίηση»). Οι βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού S_θ περιγράφονται στο επόμενο λήμμα:

3.3 Λήμμα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Τότε, το $S_\theta(K)$ είναι κυρτό σώμα, και $|S_\theta(K)| = |K|$.*

Απόδειξη: Εστω $x+t\theta, y+s\theta \in S_\theta(K)$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε, $x,y \in P_\theta(K)$ και αφού το $P_\theta(K)$ είναι κυρτό έχουμε $\lambda x + (1-\lambda)y \in P_\theta(K)$. Από την άλλη πλευρά,

$$|\lambda t + (1-\lambda)s| \leq \lambda|t| + (1-\lambda)|s| \leq \lambda\frac{g(x)-f(x)}{2} + (1-\lambda)\frac{g(y)-f(y)}{2}$$

$$\leq \frac{1}{2}[g(\lambda x + (1-\lambda)y) - f(\lambda x + (1-\lambda)y)] \tag{3.9}$$

επειδή η $g-f$ είναι κοίλη. Συνεπώς, $\lambda(x+t\theta) + (1-\lambda)(y+s\theta) \in S_\theta(K)$ και το $S_\theta(K)$ είναι κυρτό.

Γιά τον δεύτερο ισχυρισμό παρατηρούμε οτι

$$|S_\theta(K)| = \int_{P_\theta(K)} \left(\frac{(g-f)(x)}{2} - (-\frac{(g-f)(x)}{2})\right) dx \tag{3.10}$$

$$= \int_{P_\theta(K)} [g(x)-f(x)]dx = |K|. \quad \square$$

Θα δείξουμε οτι με κάθε συμμετρικοποίηση Steiner η επιφάνεια οποιουδήποτε κυρτού σώματος μικραίνει. Γιά το σκοπό αυτό χρειαζόμαστε ένα ακόμα λήμμα:

3.4 Λήμμα. *Εστω K, L κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Τότε,*

$$S_\theta(K) + S_\theta(L) \subseteq S_\theta(K+L). \tag{3.11}$$

Απόδειξη: Ξέρουμε οτι

$$S_\theta(K) = \{x + t\theta : x \in P_\theta(K), |t| \leq \frac{(g_K - f_K)(x)}{2}\} \tag{3.12}$$

και

$$S_\theta(L) = \{y + s\theta : y \in P_\theta(L), |s| \leq \frac{(g_L - f_L)(y)}{2}\}. \tag{3.13}$$

Αρα,

$$S_\theta(K) + S_\theta(L) = \{x + y + (t+s)\theta : x \in P_\theta(K), y \in P_\theta(L), \tag{3.14}$$

$$|t| \leq \frac{(g_K - f_K)(x)}{2}, |s| \leq \frac{(g_L - f_L)(y)}{2}\}.$$

Από την άλλη πλευρά,

$$S_\theta(K+L) = \{z+\rho\theta : z \in P_\theta(K+L), |\rho| \leq \frac{(g_{K+L}-f_{K+L})(z)}{2}\}. \tag{3.15}$$

Εστω $x+t\theta \in S_\theta(K)$ και $y+s\theta \in S_\theta(L)$. Τότε, $x \in P_\theta(K)$ και $y \in P_\theta(L)$ άρα υπάρχουν $t_1, s_1 \in \mathbf{R}$ τέτοια ώστε $x+t_1\theta \in K$ και $y+s_1\theta \in L$. Επεται ότι $x+y+(t_1+s_1)\theta \in K+L$, συνεπώς $x+y \in P_\theta(K+L)$. Επίσης,

$$\begin{aligned} |t+s| \leq |t|+|s| &\leq \frac{g_K(x)-f_K(x)}{2} + \frac{g_L(y)-f_L(y)}{2} \\ &= \frac{(g_K(x)+g_L(y))-(f_K(x)+f_L(y))}{2} \end{aligned} \tag{3.16}$$

οπότε σύμφωνα με τις (3.14) και (3.15) γιά την (3.11) αρκεί να δείξουμε οτι γιά κάθε $x, y \in P_\theta(K)$

$$g_K(x)+g_L(y) \leq g_{K+L}(x+y) \quad , \quad f_K(x)+f_L(y) \geq f_{K+L}(x+y). \tag{3.17}$$

Θα δείξουμε την πρώτη από τις δύο ανισότητες: Εχουμε $x+g_K(x)\theta \in K$ και $y+g_L(y)\theta \in L$, επομένως $x+y+(g_K(x)+g_L(y))\theta \in K+L$ απ'οπου συμπεραίνουμε οτι $g_K(x)+g_L(y) \leq g_{K+L}(x+y)$. $\square$

3.5 Θεώρημα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Τότε,*

$$\partial(S_\theta(K)) \leq \partial(K). \tag{3.18}$$

Απόδειξη: Εστω $\varepsilon > 0$. Εύκολα βλέπουμε οτι $S_\theta(\varepsilon D_n) = \varepsilon D_n$ και το Λήμμα 3.4 μας εξασφαλίζει οτι

$$S_\theta(K)+\varepsilon D_n = S_\theta(K)+S_\theta(\varepsilon D_n) \subseteq S_\theta(K+\varepsilon D_n). \tag{3.19}$$

Η Στεινερ συμμετρικοποίηση διατηρεί τους όγκους, συνεπώς $|S_\theta(K)| = |K|$ και $|S_\theta(K+\varepsilon D_n)| = |K+\varepsilon D_n|$ (Λήμμα 3.3). Επεται οτι

$$\frac{|S_\theta(K)+\varepsilon D_n| - |S_\theta(K)|}{\varepsilon} \leq \frac{|S_\theta(K+\varepsilon D_n)| - |S_\theta(K)|}{\varepsilon} = \frac{|K+\varepsilon D_n| - |K|}{\varepsilon}. \tag{3.20}$$

Παίρνοντας όρια καθώς $\varepsilon \to 0^+$ βλέπουμε οτι

$$\partial(S_\theta(K)) \leq \partial(K). \quad \square$$

Ορίζουμε την *διάμετρο* $\mathrm{diam}(K)$ του κυρτού σώματος K θέτοντας

$$\mathrm{diam}(K) = \max\{|z_1 - z_2| : z_1, z_2 \in K\}. \tag{3.21}$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει οτι με Steiner συμμετρικοποίηση οποιουδήποτε κυρτού σώματος ως προς οποιαδήποτε κατεύθυνση, η διάμετρος μικραίνει:

3.6 Πρόταση. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Τότε,*

$$\mathrm{diam}(S_\theta(K)) \leq \mathrm{diam}(K). \tag{3.22}$$

Απόδειξη: Εστω $z_1, z_2 \in S_\theta(K)$ τέτοια ώστε $|z_1 - z_2| = \mathrm{diam}(S_\theta(K))$. Εύκολα βλέπουμε οτι τα z_1, z_2 πρέπει να είναι της μορφής

$$z_1 = x_1 + \frac{g(x_1) - f(x_1)}{2}\theta \quad , \quad z_2 = x_2 - \frac{g(x_2) - f(x_2)}{2}\theta \tag{3.23}$$

γιά κάποια $x_1, x_2 \in P_\theta(K)$. Γράφουμε $g_i = g(x_i)$ και $f_i = f(x_i)$, και θεωρούμε τα σημεία

$$w_i = x_i + g_i\theta \quad , \quad v_i = x_i + f_i\theta, \quad i = 1, 2. \tag{3.24}$$

Τα τέσσερα αυτά σημεία ανήκουν στο K, και χρησιμοποιώντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα και απλές πράξεις βλέπουμε οτι

$$|w_1 - v_2|^2 + |w_2 - v_1|^2 - 2|z_1 - z_2|^2 = |g_1 - f_2|^2 + |g_2 - f_1|^2 - 2|\frac{g_1 - f_1}{2} + \frac{g_2 - f_2}{2}|^2 \geq 0. \tag{3.25}$$

Ομως, $|w_1 - v_2|, |w_2 - v_1| \leq \mathrm{diam}(K)$ οπότε από την (3.25) είναι φανερό οτι

$$\mathrm{diam}(S_\theta(K)) = |z_1 - z_2| \leq \max\{|w_1 - v_2|, |w_2 - v_1|\} \leq \mathrm{diam}(K). \quad \square \tag{3.26}$$

4. Απόσταση Hausdorff – Το Θεώρημα επιλογής του Blaschke.

4.1 Ορισμός. Εστω K, L μη–κενά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. Ορίζουμε την *απόσταση Hausdorff* των K και L ως εξής:

$$d(K, L) = \min\{\lambda \geq 0 : K \subseteq L + \lambda D_n \ , \ L \subseteq K + \lambda D_n\}. \tag{4.1}$$

Είναι εύκολο να δούμε οτι η d είναι μετρική:

- Γιά κάθε K, L ισχύει $d(K, L) \geq 0$ εξόρισμού, και αν $d(K, L) = 0$ τότε $K \subseteq L + 0D_n = L + \{0\} = L$ και όμοια $L \subseteq K$. Δηλαδή, $K = L$.

- Η (4.1) είναι προφανώς συμμετρική ως προς K και L, συνεπώς $d(K, L) = d(L, K)$.

- Γιά κάθε K, L και M έχουμε $d(K, L) \leq d(K, M) + d(M, L)$: Εστω $a = d(K, M)$ και $b = d(M, L)$. Τότε,

$$K \subseteq M + aD_n \ , \ M \subseteq K + aD_n \ , \ M \subseteq L + bD_n \ , \ L \subseteq M + bD_n. \tag{4.2}$$

Επεται οτι

$$K \subseteq M + aD_n \subseteq L + bD_n + aD_n = L + (b + a)D_n$$

και

$$L \subseteq M + bD_n \subseteq K + aD_n + bD_n = K + (a + b)D_n,$$

δηλαδή $d(K,L) \leq a+b$. [Χρησιμοποιήσαμε πάλι το γεγονός οτι αν X κυρτό και $a,b>0$, τότε $aX+bX=(a+b)X$.]

4.2 Ορισμός. Εστω K μη–κενό, συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Η *κυρτή θήκη* $\mathrm{co}(K)$ του K είναι το μικρότερο κυρτό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ που περιέχει το K. Μπορεί κανείς εύκολα να δεί οτι

$$\mathrm{co}(K)=\{\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_mx_m : m\in\mathbf{N}, x_i\in K, \lambda_i\geq 0, \sum_{i=1}^m\lambda_i=1\}. \tag{4.3}$$

Μιά απλή παρατήρηση είναι οτι το K είναι κυρτό αν και μόνο αν $\mathrm{co}(K)=K$.

Το λήμμα που ακολουθεί δείχνει οτι παίρνοντας κυρτές θήκες μειώνουμε την απόσταση Hausdorff:

4.3 Λήμμα: *Εστω K,L μη–κενά, συμπαγή υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. Τότε,*

$$d(K,L)\geq d(\mathrm{co}(K),\mathrm{co}(L)). \tag{4.4}$$

Απόδειξη: Θέτουμε $a=d(K,L)$. Τότε, $K\subseteq L+aD_n$ και $L\subseteq K+aD_n$.

Εστω $x\in\mathrm{co}(K)$. Από την (4.3) υπάρχουν $x_1,\ldots,x_m\in K$ και $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\geq 0$ με $\sum\lambda_i=1$ τέτοια ώστε $x=\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_mx_m$. Γιά κάθε $i=1,\ldots,m$ μπορούμε να βρούμε $y_i\in L$ τέτοιο ώστε $|x_i-y_i|\leq a$ (επειδή $K\subseteq L+aD_n$). Τότε, $y=\lambda_1y_1+\ldots+\lambda_my_m\in\mathrm{co}(L)$ και

$$|x-y|\leq\sum_{i=1}^m\lambda_i|x_i-y_i|=a\sum_{i=1}^m\lambda_i=a.$$

Επεται οτι $\mathrm{co}(K)\subseteq\mathrm{co}(L)+aD_n$. Με ανάλογο τρόπο βλέπουμε οτι $\mathrm{co}(L)\subseteq\mathrm{co}(K)+aD_n$, δηλαδή $d(\mathrm{co}(K),\mathrm{co}(L))\leq a=d(K,L)$. $\square$

4.4 Παράδειγμα. Θεωρούμε σαν K έναν δίσκο ακτίνας $R>0$ και σαν L την περιφέρειά του. Τότε, $\mathrm{co}(K)=K=\mathrm{co}(L)$ άρα $d(\mathrm{co}(K),\mathrm{co}(L))=0$ ενώ $d(K,L)=R$.

4.5 Ορισμός. Εστω $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ ακολουθία μη–κενών, συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbf{R}^n$. Λέμε οτι η $\{K_m\}$ συγκλίνει σε κάποιο συμπαγές $K\subseteq\mathbf{R}^n$ και γράφουμε $K_m\to K$ αν $d(K_m,K)\to 0$.

4.6 Πρόταση. *Εστω $\{K_m\}$ ακολουθία μη–κενών, κυρτών και συμπαγών υποσυνόλων του $\mathbf{R}^n$ και $K\subseteq\mathbf{R}^n$ συμπαγές τέτοιο ώστε $K_m\to K$. Τότε, το K είναι κυρτό.*

Απόδειξη: Εστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει $m\in\mathbf{N}$ τέτοιος ώστε $d(K_m,K)<\varepsilon$. Ομως, το K_m είναι κυρτό άρα $K_m=\mathrm{co}(K_m)$ και από το Λήμμα 4.3 βλέπουμε οτι

$$d(K_m,\mathrm{co}(K))=d(\mathrm{co}(K_m),\mathrm{co}(K))\leq d(K_m,K)<\varepsilon.$$

Η τριγωνική ανισότητα γιά την d δίνει

$$d(K,\mathrm{co}(K))\leq d(K_m,K)+d(K_m,\mathrm{co}(K))<2\varepsilon,$$

και αφού το ε ήταν τυχόν συμπεραίνουμε οτι $d(K, \mathrm{co}(K)) = 0$ δηλαδή $K = \mathrm{co}(K)$. Επεται οτι το K είναι κυρτό. $\square$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου είναι το *Θεώρημα Επιλογής του Blaschke* σύμφωνα με το οποίο τα συμπαγή κυρτά υποσύνολα οποιασδήποτε μπάλας σχηματίζουν έναν συμπαγή μετρικό χώρο με την μετρική Hausdorff:

4.7 Θεώρημα. *Εστω $R > 0$ και $\{K_m\}_{m\in\mathbf{N}}$ μιά ακολουθία μη–κενών, συμπαγών κυρτών υποσυνόλων της RD_n. Τότε, υπάρχουν υπακολουθία $\{K_{l_m}\}$ της $\{K_m\}$ και κυρτό συμπαγές $K \subseteq RD_n$ τέτοια ώστε $K_{l_m} \to K$.*

Γιά την απόδειξη θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα:

4.8 Λήμμα. *Εστω $\varepsilon > 0$. Με τις υποθέσεις του Θεωρήματος, μπορούμε να επιλέξουμε υπακολουθία δεικτών $l_1 < l_2 < \ldots < l_m < \ldots$ με την ιδιότητα*

$$d(K_{l_i}, K_{l_j}) \leq \varepsilon$$

γιά κάθε $i, j \in \mathbf{N}$.

Απόδειξη: Η μπάλα RD_n είναι συμπαγής, επομένως γιά το δοσμένο $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $x_1, \ldots, x_N \in RD_n$ τέτοια ώστε

$$RD_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{N} (x_i + \frac{\varepsilon}{2} D_n). \tag{4.5}$$

Ορίζουμε $E = \{x_1, \ldots, x_N\}$. Γιά κάθε $m \in \mathbf{N}$ θέτουμε $E_m = E \cap (K_m + \frac{\varepsilon}{2} D_n)$. Κάθε E_m είναι πεπερασμένο σύνολο, άρα συμπαγές. Θα δείξουμε οτι $d(K_m, E_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Από τον ορισμό του E_m είναι φανερό οτι $E_m \subseteq K_m + \frac{\varepsilon}{2} D_n$. Εστω $x \in K_m$. Τότε $x \in RD_n$, συνεπώς υπάρχει $i \leq N$ τέτοιο ώστε $|x - x_i| \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Αυτό σημαίνει οτι $x_i \in x + \frac{\varepsilon}{2} D_n \subseteq K_m + \frac{\varepsilon}{2} D_n$, άρα $x_i \in E_m$. Από την άλλη πλευρά, $x \in x_i + \frac{\varepsilon}{2} D_n \subseteq E_m + \frac{\varepsilon}{2} D_n$. Αρα $K_m \subseteq E_m + \frac{\varepsilon}{2} D_n$, και $d(K_m, E_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Γιά κάθε $m \in \mathbf{N}$ έχουμε βρεί $E_m \subseteq E$ με την ιδιότητα $d(K_m, E_m) \leq \frac{\varepsilon}{2}$. Ομως το E είναι πεπερασμένο σύνολο, άρα υπάρχουν πεπερασμένες (λιγότερες από 2^N) επιλογές υποσυνόλων του. Επεται οτι υπάρχουν άπειροι το πλήθος δείκτες $l_1 < l_2 < \ldots < l_m < \ldots$ και μοναδικό $E^* \subseteq E$ ώστε $d(K_{l_j}, E^*) \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

Αν τώρα $i \neq j$, η τριγωνική ανισότητα δίνει

$$d(K_{l_i}, K_{l_j}) \leq d(K_{l_i}, E^*) + d(E^*, K_{l_j}) \leq \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad \square$$

Απόδειξη του Θεωρήματος: Εφαρμόζουμε διαδοχικά το Λήμμα 4.8 με $\varepsilon = \frac{1}{m}$: Γιά $\varepsilon = 1$ μπορούμε να βρούμε υπακολουθία $K_{11}, K_{12}, \ldots, K_{1m}, \ldots$ της $\{K_m\}$ τέτοια ώστε αν $i \neq j$ να ισχύει

$$d(K_{1i}, K_{1j}) \leq 1.$$

Παίρνουμε τώρα $\varepsilon = \frac{1}{2}$ και βρίσκουμε υπακολουθία $K_{21}, K_{22}, \ldots, K_{2m}, \ldots$ της $\{K_{1j}\}$ τέτοια ώστε αν $i \neq j$ να ισχύει

$$d(K_{2i}, K_{2j}) \leq \frac{1}{2}.$$

Συνεχίζοντας έτσι ορίζουμε διαδοχικά υπακολουθία της υπακολουθίας έτσι ώστε για την m–οστή υπακολουθία $\{K_{mj}\}$ να ισχύει

$$d(K_{mi}, K_{mj}) \leq \frac{1}{m}$$

γιά κάθε $i \neq j$. Θεωρούμε τώρα την διαγώνια υπακολουθία $K_m^* = K_{mm}$. Αυτή είναι υπακολουθία της $\{K_m\}$ και ικανοποιεί το εξής: Αν $l, s \in \mathbf{N}$ και $l < s$, τότε οι K_l^*, K_s^* είναι όροι της $\{K_{lj}\}$, συνεπώς

$$d(K_l^*, K_s^*) \leq \frac{1}{l}. \tag{4.6}$$

Ορίζουμε το σύνολο

$$K = \bigcap_{l=1}^{\infty} (K_l^* + \frac{1}{l} D_n), \tag{4.7}$$

και θα δείξουμε οτι $K_m^* \to K$. Ακριβέστερα, θα δείξουμε οτι $d(K_m^*, K) \leq \frac{1}{m}$ γιά κάθε $m \in \mathbf{N}$.

Από τον ορισμό του K είναι φανερό οτι $K \subseteq K_m^* + \frac{1}{m} D_n$. Εστω $x \in K_m^*$. Από την (4.6), γιά κάθε $s > m$ μπορούμε να βρούμε $x_s \in K_s^*$ τέτοιο ώστε $|x - x_s| \leq \frac{1}{m}$. Εχουμε $x_s \in RD_n$ γιά κάθε s, άρα υπάρχουν υπακολουθία $\{x_{r_s}\}$ της $\{x_s\}$ και $y \in RD_n$ τέτοια ώστε $x_{r_s} \to y$. Αφού $|x - x_{r_s}| \leq 1/m$, είναι φανερό οτι

$$|x - y| \leq \frac{1}{m}. \tag{4.8}$$

Θα δείξουμε οτι $y \in K$. Πρέπει δηλαδή να εξασφαλίσουμε οτι $y \in K_l^* + \frac{1}{l} D_n$ γιά κάθε $l \in \mathbf{N}$. Ομως, τελικά έχουμε $r_s > l$ και από την (4.6) βλέπουμε οτι αν $r_s > l$ τότε

$$x_{r_s} \in K_{r_s}^* \subseteq K_l^* + \frac{1}{l} D_n. \tag{4.9}$$

Περνώντας στο όριο, συμπεραίνουμε οτι $y \in K_l^* + \frac{1}{l} D_n$, και επειδή το l ήταν τυχόν έχουμε $y \in K$. Η (4.8) τώρα μας δίνει

$$x \in y + \frac{1}{m} D_n \subseteq K + \frac{1}{m} D_n, \tag{4.10}$$

και επειδή το $x \in K_m^*$ ήταν τυχόν, $K_m^* \subseteq K + \frac{1}{m} D_n$. Αρα, $d(K_m^*, K) \leq \frac{1}{m}$, δηλαδή $K_m^* \to K$. Το ότι το K είναι συμπαγές και κυρτό έπεται από την (4.7). Το ότι το K είναι μη–κενό έπεται από την απόδειξη (βλέπε (4.10». $\square$

5. Δεύτερη απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας και της ανισότητας Brunn - Minkowski με τη μέθοδο της Steiner συμμετρικοποίησης.

Ο πρώτος μας στόχος σάυτήν την παράγραφο είναι να δείξουμε οτι ξεκινώντας από οποιοδήποτε κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ μπορούμε με πεπερασμένες το πλήθος διαδοχικές Steiner συμμετρικοποιήσεις να το φέρουμε οσοδήποτε κοντά σε μιά μπάλα. Κάνοντας χρήση αυτού του αποτελέσματος θα δώσουμε μιά δεύτερη απόδειξη τόσο της ισοπεριμετρικής ανισότητας όσο και της ανισότητας Brunn - Minkowski.

5.1 Λήμμα. *Εστω $\{K_m\}$ μιά ακολουθία κυρτών σωμάτων που συγκλίνει (με την Hausdorff μετρική) σε ένα κυρτό σώμα K με $r_1 D_n \subseteq K \subseteq s_1 D_n$, $0 < r_1 < s_1$. Τότε, γιά κάθε $\theta \in S^{n-1}$,*

$$S_\theta(K_m) \to S_\theta(K). \tag{5.1}$$

Απόδειξη: Μπορούμε να υποθέσουμε οτι γιά κάποια $0 < r < r_1$ και $s > s_1$ και γιά κάθε $m \geq m_1$ ισχύει $rD_n \subseteq K_m \subseteq sD_n$.

Εστω $\varepsilon > 0$. Θέλουμε να βρούμε $m_0 \in \mathbf{N}$ με την ιδιότητα $d(S_\theta(K_m), S_\theta(K)) < \varepsilon$, δηλαδή

$$S_\theta(K_m) \subseteq S_\theta(K) + \varepsilon D_n \quad , \quad S_\theta(K) \subseteq S_\theta(K_m) + \varepsilon D_n \tag{5.2}$$

γιά κάθε $m \geq m_0$. Παίρνουμε $\varepsilon' = \frac{r}{s}\varepsilon$ και από την υπόθεση του Λήμματος μπορούμε να βρούμε $m_2 \in \mathbf{N}$ τέτοιο ώστε

$$K_m \subseteq K + \frac{r}{s}\varepsilon D_n \quad , \quad K \subseteq K_m + \frac{r}{s}\varepsilon D_n \tag{5.3}$$

γιά κάθε $m \geq m_2$. Επιλέγουμε $m_0 = \max\{m_1, m_2\}$. Αν $m \geq m_0$, τότε

$$K_m \subseteq K + \frac{r}{s}\varepsilon D_n \subseteq K + \frac{\varepsilon}{s}K = \left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right) K. \tag{5.4}$$

Επεται οτι

(5.5)

$$S_\theta(K_m) \subseteq \left(1 + \frac{\varepsilon}{s}\right) S_\theta(K) = S_\theta(K) + \varepsilon S_\theta(\frac{1}{s}K) \subseteq S_\theta(K) + \varepsilon S_\theta(D_n) = S_\theta(K) + \varepsilon D_n.$$

Με τον ίδιο τρόπο δείχνουμε οτι

$$S_\theta(K) \subseteq S_\theta(K_m) + \varepsilon D_n. \tag{5.6}$$

Αρα, $d(S_\theta(K), S_\theta(K_m)) < \varepsilon$ γιά κάθε $m \geq m_0$. Δηλαδή, $S_\theta(K_m) \to S_\theta(K)$. $\square$

5.2 Θεώρημα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$, που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Θεωρούμε την κλάση όλων των πεπερασμένων Steiner συμμετρικοποιήσεων του K*

$$\mathcal{S}(K) = \{S_{\theta_l} \dots S_{\theta_1}(K) : \theta_i \in S^{n-1}, l \in \mathbf{N}\}. \tag{5.7}$$

Τότε, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $C \in \mathcal{S}(K)$ τέτοιο ώστε $d(C, \rho D_n) < \varepsilon$, όπου $\rho > 0$ η ακτίνα γιά την οποία $|K| = |\rho D_n|$.

Απόδειξη: Θεωρούμε τον αριθμό

$$\rho = \inf\{r > 0 : \exists C \in \mathcal{S}(K) : C \subseteq rD_n\}. \tag{5.8}$$

Γιά κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε C_ε τέτοιο ώστε $C_\varepsilon \subseteq (\rho+\varepsilon)D_n$. Παίρνοντας $\varepsilon = 1/m, m \in \mathbf{N}$, βρίσκουμε μιά ακολουθία $\{C_m\}$ κυρτών σωμάτων με $C_m \in \mathcal{S}(K)$ και $C_m \subseteq (\rho + \frac{1}{m})D_n$.

Ολα τα σώματα C_m περιέχονται στην $(\rho+1)D_n$, επομένως εφαρμόζεται το Θεώρημα Επιλογής του Blaschke: υπάρχει μιά υπακολουθία $\{C_{k_m}\}$ της $\{C_m\}$ με την ιδιότητα $C_{k_m} \to C$, γιά κάποιο συμπαγές κυρτό σύνολο C.

Θα δείξουμε οτι $C = \rho D_n$. Είναι εύκολο να δούμε οτι $C \subseteq \rho D_n$: Αν $\varepsilon > 0$, τότε γιά μεγάλα m έχουμε

$$C \subseteq C_{k_m} + \varepsilon D_n \subseteq (\rho + \frac{1}{k_m})D_n + \varepsilon D_n = (\rho + \frac{1}{k_m} + \varepsilon)D_n. \tag{5.9}$$

Αφού $1/k_m \to 0$ και το ε ήταν τυχόν, $C \subseteq \rho D_n$.

Ας υποθέσουμε οτι το C είναι γνήσιο υποσύνολο της ρD_n. Υπάρχει δηλαδή $x_0 \in \rho S^{n-1}$ με $x_0 \notin C$. Το C είναι κλειστό, επομένως υπάρχει $\delta > 0$ τέτοιο ώστε $[x_0 + \delta D_n] \cap C = \emptyset$.

Μπορούμε να βρούμε πεπερασμένα το πλήθος σημεία $x_1, \ldots, x_N \in \rho S^{n-1}$ τέτοια ώστε

$$\rho S^{n-1} \subseteq \bigcup_{i=0}^{N} [x_i + \delta D_n] \cap \rho S^{n-1}. \tag{5.10}$$

Θεωρούμε μοναδιαίο διάνυσμα ξ_1 στην διεύθυνση του ευθύγραμμου τμήματος $[x_0 x_1]$, και συμμετρικοποιούμε το C στην κατεύθυνση του ξ_1. Μπορούμε τότε να δούμε οτι

$$\left(\bigcup_{i=0}^{1} [x_i + \delta D_n] \cap \rho S^{n-1} \right) \cap S_{\xi_1} C = \emptyset. \tag{5.11}$$

Συνεχίζουμε συμμετρικοποιώντας το $S_{\xi_1}C$ στην κατεύθυνση ενός μοναδιαίου διανύσματος ξ_2 παράλληλου προς το ευθύγραμμο τμήμα $[x_0 x_2]$. Οπως πριν,

$$\left(\bigcup_{i=0}^{2} [x_i + \delta D_n] \cap \rho S^{n-1} \right) \cap S_{\xi_2} S_{\xi_1} C = \emptyset. \tag{5.12}$$

Μετά από N βήματα, καταλήγουμε στο κυρτό σώμα $C_1 = S_{\xi_N} \ldots S_{\xi_1} C$, το οποίο λόγω της (5.10) έχει την ιδιότητα

$$C_1 \cap (\rho S^{n-1}) = \emptyset. \tag{5.13}$$

Λόγω συμπάγειας συμπεραίνουμε οτι υπάρχει $\varepsilon > 0$ τέτοιο ώστε

$$C_1 \subseteq (\rho - \varepsilon)D_n. \tag{5.14}$$

Από την άλλη πλευρά, αφού $C_{k_m} \to C$ με διαδοχικές εφαρμογές του Λήμματος 5.1 βλέπουμε οτι

$$S_{\xi_N} \dots S_{\xi_1} C_{k_m} \to C_1. \tag{5.15}$$

Αυτό σημαίνει οτι υπάρχει $m \in \mathbf{N}$ αρκετά μεγάλο τέτοιο ώστε

$$S_{\xi_N} \dots S_{\xi_1} C_{k_m} \subseteq C_1 + \frac{\varepsilon}{2} D_n \subseteq (\rho - \frac{\varepsilon}{2}) D_n. \tag{5.16}$$

Αυτό είναι άτοπο, γιατί $C_{k_m} \in \mathcal{S}(K)$ άρα και $S_{\xi_N} \dots S_{\xi_1} C_{k_m} \in \mathcal{S}(K)$, το οποίο αντιφάσκει προς την (5.8). Αρα, $C = \rho D_n$ και αφού $C_{k_m} \to \rho D_n$ γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $C \in \mathcal{S}(K)$ τέτοιο ώστε $d(C, \rho D_n) < \varepsilon$. Το οτι $|\rho D_n| = |K|$ είναι απλή συνέπεια του οτι η Στεινερ συμμετρικοποίηση διατηρεί τους όγκους: κάθε $C \in \mathcal{S}(K)$ έχει όγκο $|C| = |K|$, άρα και $|\rho D_n| = \lim |C_{k_m}| = |K|$. $\square$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.5 και το Θεώρημα 5.2, και υποθέτοντας οτι η επιφάνεια είναι συνεχής ως προς τη μετρική Hausdorff μπορούμε να δώσουμε μιά δεύτερη απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γιά κυρτά σώματα:

5.3 Θεώρημα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ που περιέχει το 0 στο εσωτερικό του, και ρD_n η μπάλα όγκου $|\rho D_n| = |K|$. Τότε,*

$$\partial(\rho D_n) \leq \partial(K). \tag{5.17}$$

Απόδειξη: Εστω $C \in \mathcal{S}(K)$. Υπάρχουν $\theta_1, \dots, \theta_m \in S^{n-1}$ τέτοια ώστε $C = S_{\theta_m} \dots S_{\theta_1}(K)$. Σύμφωνα με το Θεώρημα 3.5,

$$\partial(K) \geq \partial(S_{\theta_1}(K)) \geq \dots \geq \partial(S_{\theta_m} \dots S_{\theta_1}(K)) = \partial(C). \tag{5.18}$$

Από την άλλη πλευρά, το Θεώρημα 5.2 μας εξασφαλίζει οτι υπάρχει ακολουθία $\{C_s\}$ στοιχείων της $\mathcal{S}(K)$ τέτοια ώστε $C_s \to \rho D_n$. Υποθέτοντας οτι η επιφάνεια είναι συνεχής ως προς την Hausdorff μετρική συμπεραίνουμε οτι

$$\partial(\rho D_n) = \lim_{s \to \infty} \partial(C_s) \leq \partial(K). \quad \square \tag{5.19}$$

Σαν μία ακόμα εφαρμογή της Steiner συμμετρικοποίησης θα δώσουμε μιά απόδειξη της ανισότητας Brunn - Minkowski (μόνο γιά κυρτά σώματα). Η απόδειξη είναι βασισμένη στο Θεώρημα του Brunn (το οποίο έχουμε ήδη αποδείξει σαν εφαρμογή της ανισότητας Brunn - Minkowski, βλέπε Θεώρημα 2.5), και προηγείται ιστορικά. Με αυτόν τον τρόπο γίνεται καθαρό το οτι η συμμετρικοποίηση, η ανισότητα Brunn - Minkowski και η ισοπεριμετρική ανισότητα σχηματίζουν έναν (ενιαίο) κύκλο ιδεών.

5.4 Θεώρημα του Brunn. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Τότε, η συνάρτηση*

$$g(t) = |K \cap (\theta^{\perp} + t\theta)|^{\frac{1}{n-1}}$$

είναι κοίλη στον φορέα της.

Απόδειξη: Μπορούμε να βρούμε μιά ακολουθία από μοναδιαία διανύσματα θ_s κάθετα στο θ τέτοια ώστε γιά την ακολουθία $K_s = S_{\theta_s} \dots S_{\theta_1}(K)$ να έχουμε $K_s \to L$, όπου L είναι ένα εκ περιστροφής κυρτό σώμα με άξονα την ευθεία $\{t\theta : t \in \mathbf{R}\}$. Η διαδικασία αυτή λέγεται Schwarz συμμετρικοποίηση (και η απόδειξη του οτι κάτι τέτοιο είναι δυνατό είναι ανάλογη με την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2). Το σώμα L έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

• Γιά κάθε t στον φορέα της g, η τομή $L \cap (\theta^\perp + t\theta)$ είναι μιά $(n-1)$–διάστατη μπάλα ακτίνας $r(t)$.

• Γιά κάθε t στον φορέα της g, έχουμε

$$|L \cap (\theta^\perp + t\theta)| = \omega_{n-1}[r(t)]^{n-1} = [g(t)]^{n-1}. \tag{5.20}$$

Εχουμε λοιπόν $g(t) = c_n r(t)$ γιά κάποια σταθερά c_n, και αρκεί να δείξουμε οτι η συνάρτηση r είναι κοίλη.

Αυτό φαίνεται ως εξής. Θεωρούμε οποιαδήποτε διδιάστατη τομή $L \cap F$ του L με έναν διδιάστατο υπόχωρο του $\mathbf{R}^n$ που περιέχει την κατεύθυνση θ. Το $L \cap F$ είναι ένα διδιάστατο κυρτό σώμα (σαν τομή κυρτών) και αν ταυτίσουμε την κατεύθυνση του θ με τον «οριζόντιο άξονα» στο F, εύκολα βλέπουμε οτι η πάνω συνάρτηση του $L \cap F$ είναι η r (και η κάτω συνάρτηση του $L \cap F$ είναι η $-r$). Επεται οτι η r είναι κοίλη, κι αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του Θεωρήματος. □

5.5 Ανισότητα Brunn - Minkowski. *Εστω A, B κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$. Τότε,*

$$|A+B|^{\frac{1}{n}} \geq |A|^{\frac{1}{n}} + |B|^{\frac{1}{n}}.$$

Απόδειξη: Στον $\mathbf{R}^{n+1}$ θεωρούμε τα σύνολα $A_1 = A \times \{0\}$ και $B_1 = B \times \{1\}$. Ορίζουμε τώρα την κυρτή τους θήκη $G = \mathrm{co}(A_1, B_1)$. Τα A_1, B_1 είναι κυρτά, επομένως εύκολα βλέπουμε οτι

$$G = \{(\lambda x + (1-\lambda)y, 1-\lambda) : \lambda \in [0,1], x \in A, y \in B\}. \tag{5.21}$$

Γιά κάθε $t \in [0,1]$ ορίζουμε

$$G(t) = \{z \in \mathbf{R}^n : (z,t) \in G\}, \tag{5.22}$$

την προβολή δηλαδή στον $\mathbf{R}^n$ της τομής του G με το υπερεπίπεδο $x_{n+1} = t$. Εύκολα βλέπουμε οτι $\frac{1}{2}[A+B] \subseteq G(\frac{1}{2})$. Αντίστροφα, αν $z \in G(\frac{1}{2})$ τότε $(z, \frac{1}{2}) \in G$, άρα υπάρχουν $x \in A$ και $y \in B$ τέτοια ώστε

$$(z, \frac{1}{2}) = (\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y, \frac{1}{2}), \tag{5.23}$$

δηλαδή $z \in \frac{1}{2}[A+B]$. Αρα, $G(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}[A+B]$.

Από το Θεώρημα του Brunn, η συνάρτηση $g(t) = |G \cap \{x_{n+1} = t\}|^{\frac{1}{n}}$ είναι κοίλη. Ειδικότερα,

$$g(\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}g(0) + \frac{1}{2}g(1),$$

δηλαδή

$$(5.24) \qquad |G(\frac{1}{2})|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2}|G(0)|^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}|G(1)|^{\frac{1}{n}}.$$

Μ'αλλα λόγια,

$$(5.25) \qquad |\frac{A+B}{2}|^{\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{2}|A|^{\frac{1}{n}} + \frac{1}{2}|B|^{\frac{1}{n}},$$

απ'οπου έπεται η ανισότητα Brunn - Minkowski. □

6. Το Λήμμα του C. Borell – Συγκέντρωση του όγκου.

Το Λήμμα του C. Borell είναι από τεχνική άποψη μιά εφαρμογή της ανισότητας Brunn - Minkowski:

6.1 Θεώρημα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$. Υποθέτουμε οτι A είναι ένα συμμετρικό κυρτό σύνολο στον $\mathbf{R}^n$ τέτοιο ώστε $|K \cap A| = \theta > \frac{1}{2}$. Τότε, γιά κάθε $t > 1$ έχουμε*

$$(6.1) \qquad |(\mathbf{R}^n \backslash tA) \cap K| \leq \theta \left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\frac{t+1}{2}}.$$

Απόδειξη: Θα δείξουμε κατ'αρχήν οτι γιά κάθε $t > 1$

$$(6.2) \qquad \mathbf{R}^n \backslash A \supseteq \frac{2}{t+1}(\mathbf{R}^n \backslash tA) + \frac{t-1}{t+1}A.$$

Εστω οτι η (6.2) δεν ισχύει. Αυτό σημαίνει οτι υπάρχει $a \in A$ το οποίο μπορεί να γραφεί στη μορφή

$$(6.3) \qquad a = \frac{2}{t+1}y + \frac{t-1}{t+1}a_1$$

γιά κάποια $a_1 \in A$ και $y \notin tA$. Ενας απλός υπολογισμός δείχνει οτι τότε

$$(6.4) \qquad \frac{1}{t}y = \frac{t+1}{2t}a + \frac{t-1}{2t}(-a_1) \in A,$$

όπου χρησιμοποιούμε το γεγονός οτι το A είναι κυρτό και συμμετρικό. Ομως τότε $y \in tA$, το οποίο είναι άτοπο.

Χρησιμοποιώντας τώρα την (6.2) και το γεγονός οτι αν X, Y είναι μη–κενά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$ και K κυρτό σύνολο τότε γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$

$$(6.5) \qquad (\lambda X + (1-\lambda)Y) \cap K \supseteq \lambda(X \cap K) + (1-\lambda)(Y \cap K),$$

συμπεραίνουμε οτι

$$(6.6) \qquad (\mathbf{R}^n \backslash A) \cap K \supseteq \frac{2}{t+1}[(\mathbf{R}^n \backslash tA) \cap K] + \frac{t-1}{t+1}(A \cap K).$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Brunn - Minkowski γιά συμπαγή σύνολα στον $\mathbf{R}^n$ παίρνουμε

$$(6.7)\qquad |(\mathbf{R}^n\backslash A)\cap K| \geq |(\mathbf{R}^n\backslash tA)\cap K|^{\frac{2}{t+1}}|A\cap K|^{\frac{t-1}{t+1}}.$$

Ομως $|A\cap K| = \theta$ και $|(\mathbf{R}^n\backslash A)\cap K| = 1-\theta$, άρα αν θέσουμε $x = |(\mathbf{R}^n\backslash tA)\cap K|$ και λύσουμε ως προς x στην (6.7) παίρνουμε $(1-\theta)^{\frac{t+1}{2}} \geq x\theta^{\frac{t-1}{2}}$ το οποίο μετασχηματίζεται στην ζητούμενη

$$|(\mathbf{R}^n\backslash tA)\cap K| = x \leq \theta\left(\frac{1-\theta}{\theta}\right)^{\frac{t+1}{2}}. \quad \square$$

6.2 Παρατήρηση. Η δύναμη του Λήμματος του Borell γίνεται κατανοητή αν π.χ. θεωρήσουμε ένα συμμετρικό A τέτοιο ώστε $|A\cap K| = \frac{2}{3}$. Τότε, το Λήμμα μας λέει οτι αν «φουσκώσουμε» το A κατά t (αν πάρουμε δηλαδή το tA), το ποσοστό του K που μένει έξω από το tA είναι μικρότερο από $2^{-t/2}$. Δηλαδή μειώνεται εκθετικά ως προς t (!)

Παρατηρήστε επίσης, οτι η ανισότητα (6.1) είναι *ανεξάρτητη της διάστασης*.

Θα δώσουμε μιά εφαρμογή του Λήμματος του Borell στην απόδειξη μιάς αντίστροφης ανισότητας Hölder (*ανισότητα τύπου Khinchine*) γιά γραμμικές συναρτήσεις ορισμένες σε κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$.

Εστω K ένα κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$. Η κλασική ανισότητα Hölder διατυπώνεται ως εξής:

6.3 Ανισότητα του Hölder. *Εστω $f,g : K\to\mathbf{R}$ συνεχείς συναρτήσεις. Αν $p>1$ και q είναι ο συζυγής εκθέτης του p ($\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$), τότε*

$$(6.8)\qquad \int_K f(x)g(x)dx \leq \left(\int_K |f(x)|^p\right)^{1/p}\left(\int_K |g(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

Απόδειξη: Η ανισότητα είναι ουσιαστικά συνέπεια της

$$x^\lambda y^{1-\lambda} \leq \lambda x + (1-\lambda)y,$$

η οποία ισχύει γιά κάθε $x,y\geq 0$ και $\lambda\in(0,1)$. Γιά ευκολία θα γράφουμε

$$\|f\|_p = \left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{1/p} \quad , \quad \|g\|_q = \left(\int_K |g(x)|^q dx\right)^{1/q}.$$

Γιά κάθε $x\in K$ έχουμε

$$(6.9)\qquad \left(\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p}\right)^{1/p}\left(\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}\right)^{1/q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q},$$

δηλαδή

$$(6.10)\qquad \frac{|f(x)||g(x)|}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{|f(x)|^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{|g(x)|^q}{\|g\|_q^q}.$$

Ολοκληρώνοντας πάνω στο K παίρνουμε

$$\frac{\int_K |f(x)||g(x)|dx}{\|f\|_p\|g\|_q} \leq \frac{1}{p}\frac{\|f\|_p^p}{\|f\|_p^p} + \frac{1}{q}\frac{\|g\|_q^q}{\|g\|_q^q} = 1, \tag{6.11}$$

απ'οπου είναι φανερό οτι

$$\int_K f(x)g(x)dx \leq \int_K |f(x)||g(x)|dx \leq \|f\|_p\|g\|_q. \quad \square$$

Αμεση συνέπεια της ανισότητας Hölder είναι η ακόλουθη ανισότητα:

6.4 Πόρισμα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$ και $f : K \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η*

$$\|f\|_p = \left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{1/p}$$

είναι αύξουσα συνάρτηση του p στο $(0, +\infty)$.

Απόδειξη: Εστω $p < p_1$ στο $(0, +\infty)$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ανισότητα Hölder γιά τις συναρτήσεις $|f|^p, 1$ και γιά τους εκθέτες $\frac{p_1}{p} > 1$ και τον συζυγή του:

$$\int_K |f|^p = \int_K |f|^p.1 \leq \left(\int_K (|f|^p)^{p_1/p}\right)^{\frac{p}{p_1}} \left(\int_K 1\right)^{1-\frac{p}{p_1}} = \left(\int_K |f|^{p_1}\right)^{\frac{p}{p_1}}. \tag{6.12}$$

Επεται οτι

$$\left(\int_K |f|^p\right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\int_K |f|^{p_1}\right)^{\frac{1}{p_1}}. \quad \square \tag{6.13}$$

Ειδικότερα, αν $f : K \to \mathbf{R}$ και $p > 1$ τότε

$$\int_K |f(x)|dx \leq \left(\int_K |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6.14}$$

Σε πλήρη γενικότητα (γιά κάθε δηλαδή συνεχή συνάρτηση f), ακόμα και στην απλούστερη μονοδιάστατη περίπτωση π.χ. $K = [0, 1]$ δεν μπορεί κανείς να περιμένει μιά αντίστροφη της ανισότητας (6.14). Γιά κάθε $p > 1$ και $M > 0$ μπορούμε να κατασκευάσουμε συνεχή συνάρτηση $f_{M,p} : [0, 1] \to \mathbf{R}$ τέτοια ώστε

$$\|f_{M,p}\|_p > M\|f_{M,p}\|_1.$$

6.5 Παράδειγμα. Ορίζουμε $f_{M,p}(x) = 1$ στο $[0, a]$, $f_{M,p}(x) = 0$ στο $[2a, 1]$ και επεκτείνουμε συνεχώς και γραμμικά στο $[a, 2a]$, όπου $a > 0$ μικρός θετικός αριθμός που θα επιλεγεί αργότερα.

Τότε, $\|f_{M,p}\|_1 = \frac{3a}{2}$ ενώ $\|f_{M,p}\|_p \geq a^{1/p}$. Αν επιλέξουμε $0 < a < (3/2M)^{\frac{p}{p-1}}$, έχουμε

$$\frac{\|f_{M,p}\|_p}{\|f_{M,p}\|_1} \geq \frac{2}{3a^{1-\frac{1}{p}}} > M.$$

Αν όμως περιοριστούμε σε γραμμικά συναρτησοειδή της μορφής

$$x \to \langle x, \theta \rangle$$

όπου $\theta \in \mathbf{R}^n$, τότε μπορούμε χρησιμοποιώντας το Λήμμα του Borell να αποδείξουμε μιά πολύ ισχυρή ανισότητα τύπου Khinchine:

6.6 Θεώρημα. *Υπάρχει μιά απόλυτη σταθερά $c > 0$ με την ακόλουθη ιδιότητα: Αν K είναι ένα κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ με όγκο $|K| = 1$, και $\theta \in \mathbf{R}^n$, τότε γιά κάθε $p > 1$ ισχύει η αντίστροφη ανισότητα Hölder*

$$\left(\int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx \right)^{\frac{1}{p}} \leq cp \int_K |\langle x, \theta \rangle| dx. \tag{6.14}$$

Απόδειξη: Γιά ευκολία θέτουμε

$$I_1 = \int_K |\langle x, \theta \rangle| dx, \tag{6.15}$$

και ορίζουμε

$$A = \{x \in \mathbf{R}^n : |\langle x, \theta \rangle| \leq 3I_1\}. \tag{6.16}$$

Το A είναι προφανώς συμμετρικό και κυρτό. Επιπλέον,

$$I_1 = \int_K |\langle x, \theta \rangle| dx \geq \int_{K \cap A^c} |\langle x, \theta \rangle| dx \geq 3I_1 |K \cap A^c|,$$

δηλαδή

$$|A \cap K| \geq \frac{2}{3}. \tag{6.17}$$

[Η συνάρτηση $|\langle x, \theta \rangle|$ δεν μπορεί να ξεπεράσει κατά πολύ τη μέση της τιμή σε μεγάλο ποσοστό του K (Ανισότητα του Markov)]. Προσπαθούμε να φράξουμε από πάνω το

$$\int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx = \int_0^\infty pt^{p-1} |\{x \in K : |\langle x, \theta \rangle| > t\}| dt. \tag{6.18}$$

Παρατηρούμε οτι $\{x \in K : |\langle x, \theta \rangle| > t\} = K \cap (\mathbf{R}^n \setminus \frac{t}{3I_1} A)$. (Πράγματι, $x \in K$ και $|\langle x, \theta \rangle| \geq t$ σημαίνει $|\langle \frac{3I_1}{t} x, \theta \rangle| \geq 3I_1$, δηλαδή $x \in K$ και $\frac{3I_1}{t} x \notin A$). Αυτό σημαίνει οτι αν $t > 3I_1$ τότε το Λήμμα του Borell αρχίζει να εφαρμόζεται και μας δίνει οτι ο όγκος $|\{x \in K : |\langle x, \theta \rangle| \geq t\}|$ γίνεται πολύ γρήγορα μικρός. Γράφουμε λοιπόν

$$\int_K |\langle x, \theta \rangle|^p dx = \int_0^{3I_1} pt^{p-1} |K \cap (\mathbf{R}^n \setminus \frac{t}{3I_1} A)| dt + \int_{3I_1}^\infty pt^{p-1} |K \cap (\mathbf{R}^n \setminus \frac{t}{3I_1} A)| dt \tag{6.19}$$

και φράσσουμε το πρώτο ολοκλήρωμα απλώς από

$$\int_0^{3I_1} pt^{p-1}dt = (3I_1)^p, \tag{6.20}$$

ενώ γιά το δεύτερο κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $t = 3I_1 s$ και χρησιμοποιούμε το Λήμμα του Borell:

$$\int_{3I_1}^{\infty} pt^{p-1}|K\cap(\mathbf{R}^n\setminus\frac{t}{3I_1}A)|dt = (3I_1)^p\int_1^{\infty} ps^{p-1}|K\cap(\mathbf{R}^n\setminus sA)|ds$$

$$\leq (3I_1)^p\int_1^{\infty} ps^{p-1}2^{-s/2}ds. \tag{6.21}$$

Παίρνοντας υπόψη τις (6.19), (6.20) και (6.21), καθώς και έναν απλό υπολογισμό με την Γ–συνάρτηση παίρνουμε

$$\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx \leq (3I_1)^p(c_1 p)^p$$

γιά κάποια απόλυτη σταθερά $c_1 > 0$, απ'οπου έπεται οτι

$$\left(\int_K |\langle x,\theta\rangle|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \leq cpI_1 = cp\int_K |\langle x,\theta\rangle|dx. \quad \square$$

6.6 Παρατήρηση. Η ισχύς της ανισότητας (6.14) γίνεται κατανοητή αν κανείς σκεφτεί οτι η σταθερά cp η οποία μας εξασφαλίζει την αντιστροφή της συνήθους ανισότητας Hölder δεν εξαρτάται ούτε από το $\theta\in\mathbf{R}^n$ ούτε από την διάσταση n ούτε από το σώμα K.

7. Το πρόβλημα των τεσσάρων σημείων του Sylvester.

Θα δώσουμε μιά ακόμα εφαρμογή της συμμετρικοποίησης κατά Steiner που οδήγησε στη λύση ενός κλασικού προβλήματος των *γεωμετρικών πιθανοτήτων*. Το 1864, ο J.J. Sylvester έθεσε το ακόλουθο ερώτημα:

Επιλέγουμε τυχαία τέσσερα σημεία στο επίπεδο. Ποιά είναι η πιθανότητα αυτά τα σημεία να σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο·

7.1 Σύντομα έγινε κατανοητό οτι το πρόβλημα έπρεπε να πάρει πιό συγκεκριμένη μορφή: πλήθος διαφορετικών απαντήσεων που βασίζονταν σε διαφορετικές ερμηνείες του ερωτήματος και έμοιαζαν όλες σωστές προκάλεσαν ευρεία συζήτηση (και βοήθησε στην αυστηρή θεμελίωση των γεωμετρικών πιθανοτήτων). Το πρόβλημα του Sylvester πήρε τελικά την εξής μορφή:

Πρόβλημα των τεσσάρων σημείων: *Εστω K ένα κυρτό σώμα στο επίπεδο. Επιλέγουμε τυχαία, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το K τέσσερα σημεία z_1, z_2, z_3, z_4.*

Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(K)$ τα z_1, z_2, z_3, z_4 να σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο.

Με τον όρο ομοιόμορφα, εννοούμε οτι γιά κάθε υποσύνολο L του K, η πιθανότητα $P(z \in L)$ να βρίσκεται στο L ένα τυχαίο σημείο του K δίνεται από την

$$P(z \in L) = \frac{A(L)}{A(K)}.$$

Δηλαδή, δεν υπάρχουν κομμάτια του K τα οποία να έχουν προτεραιότητα όταν επιλέγουμε ένα σημείο από το K (μόνο το μέγεθός τους μετράει).

Με τον όρο ανεξάρτητα, εννοούμε οτι γιά κάθε $L_i \subseteq K, i = 1, \dots, 4$ ισχύει

$$P(z_1 \in L_1, \dots, z_4 \in L_4) = P(z_1 \in L_1) \dots P(z_4 \in L_4).$$

Δηλαδή, η επιλογή του καθενός από τα τέσσερα σημεία δεν επηρεάζει ούτε επηρεάζεται από την επιλογή των υπολοίπων τριών.

7.2 Μπορεί κανείς να δεί οτι τα z_1, z_2, z_3, z_4 δεν σχηματίζουν κυρτό τετράπλευρο αν και μόνο αν κάποιο από τα z_i βρίσκεται μέσα στο τρίγωνο των υπολοίπων τριών. Προσπαθώντας λοιπόν να υπολογίσουμε την $P(K)$ γράφουμε:

$$\begin{aligned} 1 - P(K) &= P(\tau\alpha\ z_i\ \delta\varepsilon\nu\ \sigma\chi\eta\mu\tau\iota\zeta o\upsilon\nu\ \kappa\upsilon\rho\tau o\ \tau\varepsilon\tau\rho\alpha\pi\lambda\varepsilon\upsilon\rho o) \\ &= P(\cup_{i=1}^{4}\{z_i\ \sigma\tau o\ \tau\rho\iota\gamma\omega\nu o\ \tau\omega\nu\ \alpha\lambda\lambda\omega\nu\ \tau\rho\iota\omega\nu\}) \\ &= 4P(z_4 \in z_1 z_2 z_3). \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός οτι τα τέσσερα ενδεχόμενα «το z_i είναι στο τρίγωνο των άλλων τριών σημείων» είναι ξένα και ισοπίθανα. Γιά τον πρώτο ισχυρισμό, πρέπει να παρατηρήσουμε οτι η πιθανότητα δύο ή περισσότερα από τα z_i να ταυτίζονται, καθώς και η πιθανότητα τρία ή και τα τέσσερα από τα σημεία να είναι συγγραμμικά είναι μηδέν (άρα, τα τέσσερα ενδεχόμενα είναι ουσιαστικά ξένα).

7.3 Η πιθανότητα $P(z_4 \in z_1 z_2 z_3)$ δίνεται από την μέση τιμή

$$M(K) = \frac{1}{[A(K)]^3} \int_K \int_K \int_K \frac{A(z_1 z_2 z_3)}{A(K)} dz_3 dz_2 dz_1, \tag{7.1}$$

το αναμενόμενο δηλαδή ποσοστό του K που καταλαμβάνει ένα τυχαίο τρίγωνο του οποίου οι κορυφές επιλέγονται τυχαία, ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το K.

Ο υπολογισμός επομένως της $P(K)$ ανάγεται στον υπολογισμό της μέσης τιμής $M(K)$, αφού

$$P(K) = 1 - 4M(K). \tag{7.2}$$

7.4 Μία ακόμα αρχική παρατήρηση είναι οτι η ποσότητα $M(K)$ είναι αναλλοίωτη ως προς affine μετασχηματισμούς του επιπέδου: αν δηλαδή $U : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός και $a \in \mathbf{R}^2$, τότε

$$M(U(K) + a) = M(K).$$

Η απόδειξη αυτής της ισότητας γίνεται με απλή αλλαγή μεταβλητής. Η παρατήρηση αυτή δείχνει οτι το πρόβλημά μας αφορά *κλάσεις* affinely ισοδυνάμων σωμάτων και όχι *μεμονωμένα* σώματα. Γιά παράδειγμα, υπολογίζονται τα εξής:

(α) $M(D) = 35/48\pi^2$, και η μέση αυτή τιμή θα είναι η ίδια γιά κάθε δίσκο και γενικότερα γιά κάθε έλλειψη.

(β) $M(T) = 1/12$ γιά ένα ισόπλευρο τρίγωνο T, και η μέση αυτή τιμή θα είναι η ίδια γιά κάθε τρίγωνο αφού με γραμμικό μετασχηματισμό και μεταφορά μπορούμε να μεταβούμε από ένα τρίγωνο σε οποιοδήποτε άλλο.

(γ) $M(Q) = 11/144$ γιά ένα τετράγωνο Q, άρα και γιά κάθε παραλληλόγραμμο στο επίπεδο.

7.5 Τα παραδείγματα αυτά δείχνουν οτι η απάντηση στο πρόβλημα των τεσσάρων σημείων εξαρτάται από το σώμα K (ή καλύτερα από την κλάση στην οποία ανήκει). Το σχήμα του χωρίου παίζει ρόλο, επομένως το πρόβλημα πρέπει να διατυπωθεί σαν ένα πρόβλημα μεγίστου–ελαχίστου:

Πρόβλημα: *Γιά ποιά σώματα K γίνεται η $M(K)$ μέγιστη ή ελάχιστη·*

Με βάση την παρατήρηση της 7.4 μπορούμε να υποθέσουμε οτι $A(K) = 1$. Ρωτάμε λοιπόν γιά ποιά σώματα K εμβαδού 1 ελαχιστοποιείται (αντίστοιχα μεγιστοποιείται) το πολλαπλό ολοκλήρωμα

$$M(K) = \int_K \int_K \int_K A(z_1 z_2 z_3) dz_3 dz_2 dz_1. \tag{7.3}$$

Την απάντηση στο ερώτημα αυτό έδωσε ο Blaschke (1914):

7.6 Θεώρημα. *Εστω K κυρτό σώμα στο επίπεδο με $A(K) = 1$. Τότε,*

$$M(D) \leq M(K) \leq M(T),$$

όπου D ο δίσκος εμβαδού 1 και T ένα τρίγωνο εμβαδού 1. Ισότητα ισχύει αριστερά αν και μόνο αν το K είναι έλλειψη, και δεξιά αν και μόνο αν το K είναι τρίγωνο.

Η απόδειξη της αριστερής ανισότητας βασίζεται στην Steiner συμμετρικοποίηση, ενώ η απόδειξη της δεξιάς ανισότητας σε έναν αντίστροφο μετασχηματισμό (την Schüttelung ή «αντισυμμετρικοποίηση») που σε αντίθεση προς την Steiner συμμετρικοποίηση οδηγεί σε όλο και πιό «ασύμμετρα» σώματα.

Πιό συγκεκριμένα, θεωρούμε μιά ευθεία (ε) στο επίπεδο, την οποία μπορούμε χωρίς βλάβη της γενικότητας να ταυτίσουμε με τον οριζόντιο άξονα, και γράφουμε το K στη μορφή

$$K = \{(x,t) : a \leq x \leq b, f(x) \leq t \leq g(x)\},$$

όπου $[a,b]$ είναι η προβολή του K στην (ε), η f είναι κυρτή και η g είναι κοίλη στο $[a,b]$, και $f(x) \leq g(x)$ γιά κάθε $x \in [a,b]$. Τότε, η Steiner συμμετρικοποίηση του K ως προς (ε) είναι το σώμα

$$SK = \{(x,t) : a \leq x \leq b, -\frac{(g-f)(x)}{2} \leq t \leq \frac{(g-f)(x)}{2}\}.$$

Εχουμε δει οτι η Steiner συμμετρικοποίηση διατηρεί τα εμβαδά, δηλαδή $A(SK) = A(K) = 1$. Θα δείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

7.7 Πρόταση. $M(SK) \leq M(K)$.

Απόδειξη: Η μέση τιμή $M(K)$ γράφεται σαν ένα εξαπλό ολοκλήρωμα ως εξής:
(7.4)
$$M(K) = \int_a^b \int_a^b \int_a^b \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \int_{f(x_2)}^{g(x_2)} \int_{f(x_3)}^{g(x_3)} A(\mathrm{co}\{(x_i,t_i)\}) dt_3 dt_2 dt_1 dx_3 dx_2 dx_1.$$

Ορίζουμε

$$M_K(x_1,x_2,x_3) = \int_{f(x_1)}^{g(x_1)} \int_{f(x_2)}^{g(x_2)} \int_{f(x_3)}^{g(x_3)} A(\mathrm{co}\{(x_i,t_i)\}) dt_3 dt_2 dt_1 \tag{7.5}$$

γιά κάθε τριάδα από $x_i \in [a,b]$. Τότε,

$$M(K) = \int_a^b \int_a^b \int_a^b M_K(x_1,x_2,x_3) dx_3 dx_2 dx_1. \tag{7.6}$$

Αντίστοιχα γράφουμε την $M(SK)$ και ορίζουμε την συνάρτηση $M_{SK}(x_1,x_2,x_3)$. Η Πρόταση 7.7 είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου Λήμματος:

7.8 Λήμμα. *Γιά κάθε* $x_1,x_2,x_3 \in [a,b]$ *έχουμε*

$$M_{SK}(x_1,x_2,x_3) \leq M_K(x_1,x_2,x_3).$$

Πράγματι, αρκεί κατόπιν να ολοκληρώσουμε αυτήν την ανισότητα ως προς x_i. Γιά την απόδειξη του Λήμματος 7.8 θα χρειαστεί να γράψουμε την ποσότητα $M_K(x_1,x_2,x_3)$ λίγο διαφορετικά: Γιά κάθε $i = 1,2,3$ θεωρούμε την κατακόρυφη ευθεία H_{x_i} που περνάει από το $(x_i,0)$. Αυτή τέμνει το K σε ένα ευθύγραμμο τμήμα με άκρα $(x_i,f(x_i))$ και $(x_i,g(x_i))$. Θέτουμε $p_i = \frac{f(x_i)+g(x_i)}{2}$. Δηλαδή, το σημείο (x_i,p_i) είναι το μέσο του $K \cap H_{x_i}$. Θέτουμε ακόμα $l_i = \frac{g(x_i)-f(x_i)}{2}$, το μισό δηλαδή του μήκους του $K \cap H_{x_i}$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t_i = p_i + s_i$ έχουμε

$$M_K(x_1,x_2,x_3) = \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} \int_{-l_3}^{l_3} A(\mathrm{co}\{(x_i,p_i+s_i)\}) ds_3 ds_2 ds_1. \tag{7.7}$$

Λόγω συμμετρίας των διαστημάτων $[-l_i,l_i]$ αυτό είναι ίσο με

$$\int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} \int_{-l_3}^{l_3} A(\mathrm{co}\{(x_i,p_i-s_i)\}) ds_3 ds_2 ds_1, \tag{7.8}$$

και τελικά,

$$\begin{aligned} &M_K(x_1,x_2,x_3) \\ &= \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} \int_{-l_3}^{l_3} \frac{A(\mathrm{co}\{(x_i,p_i+s_i)\}) + A(\mathrm{co}\{(x_i,p_i-s_i)\})}{2} ds_3 ds_2 ds_1. \end{aligned} \tag{7.9}$$

Θα δείξουμε το ακόλουθο Λήμμα:

7.9 Λήμμα. *Γιά κάθε* $|s_i| \leq l_i$ *έχουμε*

$$A(\mathrm{co}\{(x_i, p_i + s_i)\}) + A(\mathrm{co}\{(x_i, p_i - s_i)\}) = 2\max\{A(\mathrm{co}\{(x_i, p_i)\}), A(\mathrm{co}\{(x_i, s_i)\}).$$

Απόδειξη: Το εμβαδόν ενός τριγώνου με κορυφές $(x_i, r_i), i = 1, 2, 3$ δίνεται από την σχέση

$$A(\mathrm{co}\{(x_i, r_i)\}) = \frac{1}{2}|\det(\vec{x}, \vec{r}, \vec{e})|$$

όπου $\vec{x} = (x_1, x_2, x_3), \vec{r} = (r_1, r_2, r_3)$ και $\vec{e} = (1, 1, 1)$. Γιά συντομία θα συμβολίζουμε αυτήν την ορίζουσα με $D(\vec{r})$, εννοώντας οτι είναι συνάρτηση μόνο των r_1, r_2, r_3, αφού τα x_1, x_2, x_3 είναι σταθερά σε ότι αφορά το Λήμμα 7.8. Με αυτόν τον συμβολισμό, γιά την απόδειξη του Λήμματος 7.9 αρκεί να αποδείξουμε την

$$|D(\vec{p} + \vec{s})| + |D(\vec{p} - \vec{s})| = 2\max\{|D(\vec{p})|, |D(\vec{s})|\}, \tag{7.10}$$

η οποία λόγω γραμμικότητας της ορίζουσας ως προς την δεύτερη στήλη γίνεται

$$|D(\vec{p}) + D(\vec{s})| + |D(\vec{p}) - D(\vec{s})| = 2\max\{|D(\vec{p})|, |D(\vec{s})|\}. \tag{7.11}$$

Αυτή η τελευταία ισχύει, αφού γιά τυχόντες πραγματικούς αριθμούς a και b έχουμε την ταυτότητα

$$|a + b| + |a - b| = 2\max\{|a|, |b|\}. \quad \square \tag{7.12}$$

Απόδειξη του Λήμματος 7.8: Εστω (x_i, q_i) τα μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων $SK \cap H_{x_i}$. Προφανώς, $q_i = 0, i = 1, 2, 3$. Επίσης, δουλεύοντας ακριβώς όπως και γιά το K έχουμε

$$\begin{aligned} &M_{SK}(x_1, x_2, x_3) \\ &= \int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2}\int_{-l_3}^{l_3} \frac{A(\mathrm{co}\{(x_i, q_i + s_i)\}) + A(\mathrm{co}\{(x_i, q_i - s_i)\})}{2} ds_3 ds_2 ds_1. \end{aligned} \tag{7.13}$$

Αν πάρουμε υπόψη μας το Λήμμα 7.9, γιά να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Λήμματος 7.8 είναι αρκετό να εξασφαλίσουμε οτι

$$\begin{aligned} &\int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2}\int_{-l_3}^{l_3} \max\{|D(\vec{q})|, |D(\vec{s})|\} ds_3 ds_2 ds_1 \\ &\leq \int_{-l_1}^{l_1}\int_{-l_2}^{l_2}\int_{-l_3}^{l_3} \max\{|D(\vec{p})|, |D(\vec{s})|\} ds_3 ds_2 ds_1. \end{aligned} \tag{7.14}$$

Ομως, $|D(\vec{q})| = 0 \leq |D(\vec{p})|$, γιατί $\vec{q} = \vec{0}$. Η γεωμετρική ερμηνεία είναι οτι τα μέσα (x_i, q_i) στο SK είναι συγγραμμικά, συνεπώς το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζουν είναι μηδέν – οπωσδήποτε μικρότερο ή ίσο του εμβαδού του τριγώνου που σχηματίζουν τα αντίστοιχα μέσα (x_i, p_i) στο K. Επεται οτι γιά κάθε s_1, s_2, s_3 ισχύει

$$\max\{|D(\vec{q})|, |D(\vec{s})|\} \leq \max\{|D(\vec{p})|, |D(\vec{s})|\}, \tag{7.15}$$

και ολοκληρώνοντας ως προς s_i παίρνουμε

$$M_{SK}(x_1, x_2, x_3) \leq M_K(x_1, x_2, x_3). \quad \square \tag{7.16}$$

Απόδειξη της Πρότασης 7.7: Η συνάρτηση M_{SK} δεν ξεπερνάει την M_K, αν επομένως ολοκληρώσουμε στο $[a,b] \times [a,b] \times [a,b]$ παίρνουμε

$$M(SK) = \int_a^b \int_a^b \int_a^b M_{SK}(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 \tag{7.17}$$

$$\leq \int_a^b \int_a^b \int_a^b M_K(x_1, x_2, x_3) dx_3 dx_2 dx_1 = M(K) \quad \square$$

Ορίζουμε τώρα έναν δεύτερο μετασχηματισμό, την αντισυμμετρικοποίηση TK του K ως προς (ε), με τον ακόλουθο τρόπο:

$$TK = \{(x,t) : a \leq x \leq b, 0 \leq t \leq (g-f)(x)\}.$$

Η μηδενική συνάρτηση είναι κυρτή και η $g - f$ είναι κοίλη και μη–αρνητική στο $[a,b]$, επομένως το TK είναι κυρτό. Επίσης,

$$A(TK) = \int_a^b [g(x) - f(x)] dx = A(K),$$

δηλαδή κι αυτός ο μετασχηματισμός διατηρεί τα εμβαδά. Θα δείξουμε την ακόλουθη πρόταση:

7.10 Πρόταση. $M(K) \leq M(TK)$.

Απόδειξη: Οπως και στην απόδειξη της Πρότασης 7.7, αρκεί να δείξουμε οτι γιά κάθε $x_1, x_2, x_3 \in [a,b]$ ισχύει

$$M_K(x_1, x_2, x_3) \leq M_{TK}(x_1, x_2, x_3).$$

Θεωρούμε και πάλι τις κατακόρυφες ευθείες H_{x_i} που περνούν από τα $(x_i, 0)$ και τα μέσα (x_i, w_i) των ευθυγράμμων τμημάτων $TK \cap H_{x_i}$. Αυτή τη φορά έχουμε $w_i = \frac{g(x_i) - f(x_i)}{2}$. Ο μετασχηματισμός μας διατηρεί και πάλι τα μήκη των ευθυγράμμων τμημάτων: γιά κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε οτι τα $K \cap H_x$ και $TK \cap H_x$ έχουν το ίδιο μήκος. Αρα,

$$M_{TK}(x_1, x_2, x_3) \tag{7.18}$$

$$= \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} \int_{-l_3}^{l_3} \frac{A(\mathrm{co}\{(x_i, w_i + s_i)\}) + A(\mathrm{co}\{(x_i, w_i - s_i)\})}{2} ds_3 ds_2 ds_1.$$

Με βάση το Λήμμα 7.9, η ανισότητα που θέλουμε να δείξουμε γίνεται

$$\int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} \int_{-l_3}^{l_3} \max\{|D(\vec{p})|, |D(\vec{s})|\} ds_3 ds_2 ds_1 \tag{7.19}$$

$$\leq \int_{-l_1}^{l_1} \int_{-l_2}^{l_2} \int_{-l_3}^{l_3} \max\{|D(\vec{w})|, |D(\vec{s})|\} ds_3 ds_2 ds_1.$$

Αυτή η τελευταία θα ισχύει αν και μόνο αν

$$|D(\vec{p})| \leq |D(\vec{w})|. \tag{7.20}$$

Ας θυμηθούμε πως ορίζονται τα p_i και w_i: Είναι

$$p_i = \frac{g(x_i) + f(x_i)}{2} \quad , \quad w_i = \frac{g(x_i) - f(x_i)}{2},$$

αν λοιπόν γιά κάθε συνάρτηση $h : [a, b] \to \mathbf{R}$ συμβολίσουμε με $D(h)$ την ορίζουσα $\det(\vec{x}, \vec{h}, \vec{e})$, όπου $\vec{h} = (h(x_1), h(x_2), h(x_3))$, τότε αυτό που ζητάμε είναι

$$|D(f + g)| \leq |D(g - f)|. \tag{7.21}$$

Από γραμμικότητα της ορίζουσας ως προς την δεύτερη στήλη, έχουμε $D(f + g) = D(f)+D(g)$ και $D(g-f) = D(g)-D(f)$ και υψώνοντας στο τετράγωνο βλέπουμε οτι αρκεί να δούμε οτι οι $D(f)$ και $D(g)$ είναι ετερόσημες. Αναπτύσσοντας την ορίζουσα παίρνουμε

$$D(f) = (x_3 - x_1) \left(\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} f(x_1) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} f(x_3) - f(x_2) \right). \tag{7.22}$$

Ας υποθέσουμε πρώτα οτι $x_1 < x_2 < x_3$. Τότε, εύκολα βλέπουμε οτι $x_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} x_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} x_3$, και το γεγονός οτι η f είναι κυρτή εξασφαλίζει οτι $D(f) \geq 0$. Ανάλογος υπολογισμός δείχνει οτι $D(g) \leq 0$, δηλαδή $D(f)D(g) \leq 0$ που ήταν το ζητούμενο.

Αν η διάταξη των x_i είναι διαφορετική, αντιμεταθέτουμε τις γραμμές της ορίζουσας $D(f)$ με τέτοιο τρόπο ώστε να έχουμε την πρώτη στήλη αύξουσα. Αυτή η αλλαγή μπορεί να μεταβάλει το πρόσημο της $D(f)$, η ίδια όμως αλλαγή θα μεταβάλει και το πρόσημο της $D(g)$ με τον ίδιο τρόπο. Το τελικό γινόμενο θα είναι μικρότερο ή ίσο του μηδενός, άρα και το αρχικό: γιά κάθε δυνατή διάταξη των x_i έχουμε

$$D(f)D(g) \leq 0.$$

Αυτό αποδεικνύει οτι $M_K(x_1, x_2, x_3) \leq M_{TK}(x_1, x_2, x_3)$ γιά κάθε $x_1, x_2, x_3 \in [a, b]$, και με μία ακόμα ολοκλήρωση παίρνουμε

$$M(K) \leq M(TK). \quad \square$$

Εχουμε δεί οτι με διαδοχικές Steiner συμμετρικοποιήσεις μπορούμε να φέρουμε το τυχόν κυρτό σώμα πολύ κοντά σε μπάλα (με την Hausdorff μετρική). Αντίστοιχα, στο επίπεδο ισχύει οτι με διαδοχικές αντισυμμετρικοποιήσεις μπορούμε να φέρουμε κάθε κυρτό χωρίο πολύ κοντά σε τρίγωνο. Πιό συγκεκριμένα:

7.11 Θεώρημα. *Εστω K ένα κυρτό σώμα στο επίπεδο με $A(K) = 1$. Τότε,*

(ι) Υπάρχει ακολουθία ευθειών $\{(\varepsilon_n)\}$ τέτοια ώστε: αν $K_n = S_{\varepsilon_n} \ldots S_{\varepsilon_1} K$ τότε $K_n \to \rho D$, όπου $A(\rho D) = 1$.

(ιι) Υπάρχει ακολουθία ευθειών $\{(\zeta_n)\}$ τέτοια ώστε: αν $K_n' = T_{\zeta_n} \ldots T_{\zeta_1} K$ τότε $K_n' \to T$, όπου T τρίγωνο με $A(T) = 1$. □

Χρησιμοποιώντας τις Προτάσεις 7.7, 7.10 και το Θεώρημα 7.11 μπορούμε να αποδείξουμε το Θεώρημα του Blaschke:

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.6*:* Εστω K κυρτό σώμα στο επίπεδο με $A(K) = 1$. Θεωρούμε τις ακολουθίες $\{K_n\}$ και $\{K_n'\}$ που μας δίνει το Θεώρημα 7.11. Με βάση την Πρόταση 7.7 έχουμε

$$M(K) \geq M(K_1) \geq M(K_2) \geq \ldots \geq M(K_n) \to M(\rho D) = M(D),$$

ενώ από την Πρόταση 7.10 έπεται οτι

$$M(K) \leq M(K_1') \leq M(K_2') \leq \ldots \leq M(K_n') \to M(T).$$

Μιά προσεκτική διερεύνηση των βημάτων της απόδειξης δείχνει οτι αν το αρχικό σώμα δεν είναι έλλειψη τότε μπορούμε να κάνουμε το πρώτο βήμα έτσι ώστε $M(K) > M(K_1)$. Αρα, $M(K) > M(D)$. Ομοια, αν το αρχικό σώμα δεν είναι τρίγωνο τότε μπορούμε να κάνουμε το πρώτο βήμα έτσι ώστε $M(K) < M(K_1')$. Αρα, $M(K) < M(T)$. Δηλαδή, $M(K) = M(D)$ αν και μόνο αν το K είναι έλλειψη και $M(K) = M(T)$ αν και μόνο αν το K είναι τρίγωνο (δεν θα μπούμε στις λεπτομέρειες). □

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα του Sylvester και χρησιμοποιώντας την (7.2) και τις τιμές $M(D) = 35/48\pi^2$, $M(T) = 1/12$, βλέπουμε οτι γιά κάθε κυρτό σώμα K ισχύει

$$0.666\ldots = P(T) \leq P(K) \leq P(D) \simeq 0.7045\ldots$$

8. Το πολικό σώμα ενός συμμετρικού κυρτού σώματος – Η ανισότητα Blaschke - Santaló.

Στην παράγραφο αυτή θεωρούμε μόνο συμμετρικά κυρτά σώματα K στον $\mathbf{R}^n$ με κέντρο συμμετρίας το 0 (παρόλο που πολλές από τις έννοιες που θα χρησιμοποιηθούν ορίζονται και στη μη–συμμετρική περίπτωση).

8.1 Ορισμός. Η *ακτινική συνάρτηση* ρ_K του K ορίζεται στην S^{n-1} ως εξής: αν $\theta \in S^{n-1}$, τότε

$$\rho_K(\theta) = \max\{\lambda > 0 : \lambda\theta \in K\}. \tag{8.1}$$

Είναι φανερό οτι αν μας δοθεί η ακτινική συνάρτηση ρ ενός συμμετρικού κυρτού σώματος τότε αυτό προσδιορίζεται μονοσήμαντα: σε κάθε διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$ πρέπει να προχωρήσουμε σε απόσταση $\rho(\theta)$ έως ότου συναντήσουμε το σύνορο του σώματος.

8.2 Ορισμός. Η *συνάρτηση στήριξης* h_K ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K ορίζεται στην S^{n-1} ως εξής: αν $\theta \in S^{n-1}$, τότε

$$h_K(\theta) = \max\{\langle x, \theta\rangle : x \in K\}. \tag{8.2}$$

8.3 Παρατήρηση. Το σχήμα δείχνει την σχέση ανάμεσα στην ακτινική συνάρτηση ρ_K και την συνάρτηση στήριξης h_K γιά δοσμένη διεύθυνση $\theta \in S^{n-1}$: είναι φανερό οτι $\rho_K(\theta) \leq h_K(\theta)$.

Γιά μιά αυστηρή απόδειξη παρατηρούμε οτι $\rho_K(\theta)\theta \in K$, επομένως

$$h_K(\theta) = \max_{x\in K}\langle x, \theta\rangle \geq \langle \rho_K(\theta)\theta, \theta\rangle = \rho_K(\theta)\langle\theta, \theta\rangle = \rho_K(\theta). \tag{8.3}$$

Θα ορίσουμε ένα δεύτερο σώμα στον $\mathbf{R}^n$, το *πολικό σώμα* K^o του K. Ο ορισμός μπορεί να δοθεί με δύο διαφορετικούς τρόπους. Πρώτον, αν περιγράψουμε την ακτινική συνάρτηση του K^o θέτοντας

$$\rho_{K^o}(\theta) = \frac{1}{h_K(\theta)} \quad , \quad \theta \in S^{n-1}. \tag{8.4}$$

Δεύτερον, δίνοντας απευθείας ορισμό του συνόλου K^o:

$$K^o := \{y \in \mathbf{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 1, \forall x \in K\}. \tag{8.5}$$

8.4 Λήμμα. *Οι δύο ορισμοί συμπίπτουν.*

Απόδειξη: Εστω $y \in \{y \in \mathbf{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 1, \forall x \in K\}$. Υπάρχει $\theta \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε $y = \lambda\theta$. Θα δείξουμε οτι $\lambda \leq 1/h_K(\theta)$. Εχουμε

$$\lambda h_K(\theta) = \lambda \max_{x\in K}\langle x, \theta\rangle = \max_{x\in K}\langle x, \lambda\theta\rangle = \max_{x\in K}\langle x, y\rangle \leq 1. \tag{8.6}$$

Αντίστροφα, αν $y = \lambda\theta$ γιά κάποιο $\theta \in S^{n-1}$ και κάποιο $\lambda \leq 1/h_K(\theta)$, τότε γιά κάθε $x \in K$ έχουμε

$$\langle x, y\rangle = \langle x, \lambda\theta\rangle = \lambda\langle x, \theta\rangle \leq \lambda h_K(\theta) \leq 1. \tag{8.7}$$

Συνεπώς, $y \in \{y \in \mathbf{R}^n : \langle x, y\rangle \leq 1, \forall x \in K\}$. $\square$

Παίρνοντας υπόψη την συμμετρία του K μπορούμε να γράψουμε το K^o στή μορφή

$$K^o = \bigcap_{x\in K}\{y \in \mathbf{R}^n : |\langle y, x\rangle| \leq 1\}, \tag{8.8}$$

το οποίο δείχνει οτι:

8.5 Λήμμα. *Το πολικό K^o ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K είναι συμμετρικό κυρτό σύνολο.* $\square$

8.6 Παραδείγματα. (α) Αν $K = D_n$ είναι πολύ εύκολο να δούμε οτι $h_K(\theta) = 1$ γιά κάθε $\theta \in S^{n-1}$: Εχουμε $|\langle x, \theta\rangle| \leq |x||\theta| \leq 1$ γιά κάθε $x \in D_n$, και $\langle \theta, \theta\rangle = 1$. Επεται οτι $\rho_{K^o}(\theta) = 1$, δηλαδή $K^o = D_n$.

Τελείως ανάλογα βλέπουμε οτι γιά κάθε $r > 0$ ισχύει $(rD_n)^o = \frac{1}{r}D_n$.

(β) Εστω $K = Q_2 = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 : |x| \leq 1, |y| \leq 1\}$, ένα τετράγωνο στο επίπεδο. Δεν είναι δύσκολο να δούμε οτι $K^o = L = \{(t,s) \in \mathbf{R}^2 : |t| + |s| \leq 1\}$, ένας ρόμβος στο επίπεδο. Πρώτα–πρώτα, αν $(x,y) \in K$ και $(t,s) \in L$ τότε $|xt + ys| \leq |x||t| + |y||s| \leq |t| + |s| \leq 1$. Αρα, $L \subseteq K^o$.

Αντίστροφα, αν $(t,s) \in K^o$, τότε αφού $(\mathrm{sign}t, \mathrm{sign}s) \in Q_2 = K$ έχουμε $t\mathrm{sign}t + s\mathrm{sign}s \leq 1$, δηλαδή $|t| + |s| \leq 1$. Αρα, $(t,s) \in L$ δηλαδή $K^o \subseteq L$.

Ο ίδιος ακριβώς συλλογισμός δείχνει οτι αν $K = Q_n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : |x_i| \leq 1, i = 1, \ldots, n\}$, τότε

$$K^o = \{y = (y_1, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} |y_i| \leq 1\},$$

η «μοναδιαία μπάλα του ℓ_1^n» (cross–polytope).

(γ) Αν $1 < p < +\infty$ και q ο συζυγής εκθέτης του p ($\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$), τότε το πολικό σώμα της μοναδιαίας μπάλας του ℓ_p^n

$$B_p^n = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \sum_{i=1}^{n} |x_i|^p \leq 1\},$$

είναι η μοναδιαία μπάλα του ℓ_q^n

$$B_q^n = \{y = (y_1, \ldots, y_n) : \sum_{i=1}^{n} |y_i|^q \leq 1\}.$$

Το γεγονός οτι το πολικό σώμα K^o ενός συμμετρικού κυρτού σώματος K είναι όντως κυρτό σώμα (έχει δηλαδή μη κενό εσωτερικό και είναι φραγμένο), είναι άμεση συνέπεια του ακόλουθου θεωρήματος:

8.7 Θεώρημα. *Εστω K, L δύο συμμετρικά κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$. Ισχύουν τα εξής:*

(1) Αν $K \subseteq L$, τότε $L^o \subseteq K^o$.

(2) Αν T είναι ένας αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathbf{R}^n$, τότε $(TK)^o = T^{-t}(K^o)$.

(3) Αν $K \subseteq RD_n$, τότε $\frac{1}{R}D_n \subseteq K^o$.

(4) Αν $K \supseteq \rho D_n$, τότε $K^o \subseteq \frac{1}{\rho}D_n$.

Απόδειξη: (1) Εστω $y \in L^o$. Τότε, $\langle y, x\rangle \leq 1$ γιά κάθε $x \in L$, και αφού $K \subseteq L$ έπεται οτι $\langle y, x\rangle \leq 1$ γιά κάθε $x \in K$. Αρα, $y \in K^o$.

(2) Εχουμε $y \in (TK)^o$ αν και μόνο αν $\langle z, y\rangle \leq 1$ γιά κάθε $z \in TK$, αν και μόνο αν $\langle Tx, y\rangle \leq 1$ γιά κάθε $x \in K$, αν και μόνο αν $\langle x, T^t y\rangle \leq 1$ γιά κάθε $x \in K$, αν και μόνο αν $T^t y \in K^o$, δηλαδή αν και μόνο αν $y \in T^{-t}(K^o)$.

(3),(4) Είναι άμεσες συνέπειες των (1) και (2). Αρκεί να παρατηρήσουμε οτι $RD_n = (R\mathrm{Id})(D_n)$ και $\rho D_n = (\rho\mathrm{Id})(D_n)$. □

Θα μπορούσαμε να επαναλάβουμε την διαδικασία ορισμού του πολικού σώματος πολλές φορές, ξεκινώντας από ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K, παίρνοντας το πολικό του K^o, το πολικό του πολικού $(K^o)^o$, το πολικό του πολικού του πολικού $((K^o)^o)^o$ και ούτω καθεξής. Το Θεώρημα που ακολουθεί δείχνει οτι αυτή η διαδικασία σταματάει στο δεύτερο κιόλας βήμα: ισχύει $(K^o)^o = K$. Το K και το πολικό του αποτελούν «ζευγάρι».

8.8 Θεώρημα. *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$. Τότε, $(K^o)^o = K$.*

Απόδειξη: Ο εγκλεισμός $K \subseteq (K^o)^o$ αποδεικνύεται εύκολα: έστω $x \in K$. Αν $y \in K^o$, τότε $\langle x, y\rangle \leq 1$ από τον ορισμό του K^o. Ομως τώρα, αφού το $y \in K^o$ είναι τυχόν, από τον ορισμό του $(K^o)^o$ παίρνουμε $x \in (K^o)^o$.

Η απόδειξη του άλλου εγκλεισμού θα βασιστεί σε ένα *διαχωριστικό θεώρημα.*

8.9 Λήμμα. *Εστω K μη–κενό συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$, και $x \notin K$. Τότε, υπάρχει $z \in K$ τέτοιο ώστε*

$$|x - z| = \min\{|x - y| : y \in K\}. \tag{8.9}$$

Απόδειξη: Ορίζουμε $\rho = \inf\{|x - y| : y \in K\} \geq 0$. Γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $y_\varepsilon \in K$ τέτοιο ώστε $\rho \leq |x - y_\varepsilon| < \rho + \varepsilon$. Επιλέγοντας $\varepsilon = 1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}, \ldots$, βρίσκουμε $y_n \in K$ με την ιδιότητα $\rho \leq |x - y_n| < \rho + \frac{1}{n}$, $n \in \mathbf{N}$.

Επειδή το K είναι συμπαγές, υπάρχουν $z \in K$ και υπακολουθία $\{y_{k_n}\}$ με $y_{k_n} \to z$. Ειναι φανερό οτι

$$|x - z| = \lim_n |x - y_{k_n}| = \rho. \quad \square \tag{8.10}$$

Στην περίπτωση που το K είναι κυρτό και συμπαγές, το z του Λήμματος 8.9 είναι μοναδικό:

8.10 Λήμμα. *Εστω K μη–κενό, κυρτό και συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Τότε, υπάρχει μοναδικό $z \in K$ τέτοιο ώστε*

$$|x - z| = \rho = \min\{|x - y| : y \in K\}.$$

Απόδειξη: Από το Λήμμα 8.9 ξέρουμε οτι υπάρχουν τέτοια z. Εστω οτι $|x - z_1| = \rho$. Αν $z \in K$, τότε γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$ έχουμε $\lambda z + (1-\lambda)z_1 \in K$ (επειδή το K είναι κυρτό), επομένως

$$|x - z_1|^2 \leq |x - (\lambda z + (1-\lambda)z_1)|^2 = |(x - z_1) - \lambda(z - z_1)|^2 \tag{8.11}$$

$$= |x - z_1|^2 - 2\lambda\langle x - z_1, z - z_1\rangle + \lambda^2|z_1 - z|^2,$$

απ'οπου έπεται οτι

$$\langle x - z_1, z - z_1\rangle \leq \lambda|z_1 - z|^2, \tag{8.12}$$

και παίρνοντας $\lambda \to 0^+$ βλέπουμε οτι

$$\langle x - z_1, z - z_1\rangle \leq 0 \tag{8.13}$$

γιά κάθε $z \in K$. Η συνθήκη αυτή μας λέει οτι τα διανύσματα $\vec{z_1 x}$ και $\vec{z_1 z}$ σχηματίζουν αμβλεία γωνία γιά κάθε $z \in K$, δηλαδή οτι το υπερεπίπεδο $\{z : \langle z, x - z_1\rangle = \langle z_1, x - z_1\rangle\}$ αφήνει ολόκληρο το K «από τη μιά μεριά του $\mathbf{R}^n$».

Εστω οτι υπήρχε και δεύτερο σημείο $z_2 \in K$ τέτοιο ώστε $|x - z_2| = \rho$. Τότε θα ίσχυε το ανάλογο της (8.13) με το z_2 στη θέση του z_1, δηλαδή

$$\langle z_2 - x, z_2 - z\rangle \leq 0 \tag{8.14}$$

γιά κάθε $z \in K$. Παίρνοντας $z = z_2$ στην (8.13) και $z = z_1$ στην (8.14) και προσθέτοντας κατά μέλη παίρνουμε

$$\langle z_2 - z_1, z_2 - z_1\rangle \leq 0, \tag{8.15}$$

το οποίο ισχύει μόνο αν $z_2 = z_1$. $\square$

8.11 Διαχωριστικό Θεώρημα. *Εστω K κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$, και $x \notin K$. Τότε, υπάρχει υπερεπίπεδο που διαχωρίζει γνήσια το x από το K. Δηλαδή υπάρχουν $\alpha \in \mathbf{R}$ και $\theta \in S^{n-1}$ τέτοια ώστε*

$$\max_{z \in K}\langle z, \theta\rangle < \alpha < \langle x, \theta\rangle. \tag{8.16}$$

Απόδειξη: Βρίσκουμε $z_1 \in K$ με ελάχιστη απόσταση από το x. Από την (8.13) έχουμε

$$\langle z, x - z_1\rangle \leq \langle z_1, x - z_1\rangle \tag{8.17}$$

γιά κάθε $z \in K$. Από την άλλη πλευρά, $\langle x - z_1, x - z_1\rangle > 0$ επομένως

$$\langle z_1, x - z_1\rangle < \langle x, x - z_1\rangle. \tag{8.18}$$

Από τις (8.17) και (8.18) είναι φανερό οτι αν $\theta = (x - z_1)/|x - z_1|$ τότε υπάρχει $\alpha \in \mathbf{R}$ τέτοιο ώστε

$$\max_{z \in K}\langle z, \theta\rangle = \langle z_1, \theta\rangle < \alpha < \langle x, \theta\rangle. \quad \square \tag{8.19}$$

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 8.8: Εχουμε δεί οτι $K \subseteq (K^o)^o$. Ας υποθέσουμε οτι υπάρχει $x \in (K^o)^o \backslash K$. Αφού το x δεν ανήκει στο K, υπάρχουν $\theta \in S^{n-1}$ και $\alpha \in \mathbf{R}$ τέτοια ώστε: γιά κάθε $z \in K$,

$$\langle z, \theta\rangle < \alpha < \langle x, \theta\rangle. \tag{8.20}$$

Ο α είναι γνήσια θετικός αριθμός επειδή το K περιέχει το 0 στο εσωτερικό του. Αν $y = \theta/\alpha$, τότε από την αριστερή ανισότητα της (8.20) βλέπουμε οτι $y \in K^o$. Αφού $x \in (K^o)^o$, πρέπει να ισχύει $\langle y, x\rangle \leq 1$ το οποίο έρχεται σε αντίφαση με την δεξιά ανισότητα της (8.20). Ατοπο, επομένως $K = (K^o)^o$. $\square$

Από το Θεώρημα 8.7(2) είναι φανερό οτι όσο πιό «μεγάλο» είναι ένα σώμα K τόσο πιό «μικρό» είναι το πολικό του. Γιά την ακρίβεια, το γινόμενο των όγκων

$$|K||K^o|$$

είναι αναλλοίωτο ως προς αντιστρέψιμους γραμμικούς μετασχηματισμούς:

$$|TK||T^{-t}(K^o)| = |\mathrm{det}T||K||\mathrm{det}T^{-t}||K^o| = |K||K^o|. \tag{8.21}$$

8.12 Πρόβλημα. *Να βρεθούν οι κλάσεις σωμάτων γιά τις οποίες το γινόμενο των όγκων $|K||K^o|$ γίνεται μέγιστο ή ελάχιστο.*

Το πρόβλημα του μεγίστου απαντήθηκε από τον Blaschke (στις τρείς διαστάσεις) και από τον Santaló (γιά οποιαδήποτε διάσταση). Το γινόμενο των όγκων ενός σώματος και του πολικού του γίνεται μέγιστο αν και μόνο αν το σώμα είναι μπάλα (ή ελλειψοειδές). Δίνουμε εδώ μιά απόδειξη των M. Meyer και A. Pajor που βασίζεται στη μέθοδο της Steiner συμμετρικοποίησης:

8.13 Θεώρημα. *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$ και $\theta \in S^{n-1}$. Αν $K_1 = S_\theta(K)$ είναι η Steiner συμμετρικοποίηση του K στην κατεύθυνση του θ, τότε*

$$|K||K^o| \leq |K_1||(K_1)^o|. \tag{8.22}$$

Απόδειξη: Η συμμετρικοποίηση Steiner διατηρεί τους όγκους, δηλαδή $|K| = |K_1|$. Αρκεί επομένως να δείξουμε οτι $|K^o| \leq |(K_1)^o|$.

Γιά ευκολία υποθέτουμε οτι $\theta^\perp = \mathbf{R}^{n-1}$. Δεν είναι δύσκολο να δεί κανείς οτι

$$S_\theta(K) = K_1 = \{(x, \frac{t_1 - t_2}{2}) : x \in P_\theta K, (x, t_1) \in K, (x, t_2) \in K\}. \tag{8.23}$$

Ως συνήθως, γιά κάθε $A \subseteq \mathbf{R}^n$ γράφουμε

$$A(t) = \{x \in \mathbf{R}^{n-1} : (x, t) \in A\}.$$

Ισχυρισμός: Γιά κάθε $s \in \mathbf{R}$ ισχύει

$$\frac{K^o(s) + K^o(-s)}{2} \subseteq (K_1)^o(s). \tag{8.24}$$

Απόδειξη: Εστω $y_1 \in K^o(s)$ και $y_2 \in K^o(-s)$. Αυτό σημαίνει οτι $(y_1, s) \in K^o$ και $(y_2, -s) \in K^o$. Θέλουμε να δείξουμε οτι $(y_1 + y_2)/2 \in (K_1)^o(s)$, δηλαδή οτι $(\frac{y_1+y_2}{2}, s) \in (K_1)^o$.

Εστω $(x, \frac{t_1-t_2}{2}) \in K_1$, δηλαδή $(x,t_1) \in K$ και $(x,t_2) \in K$. Αρκεί να δείξουμε οτι

$$\langle (x, \frac{t_1 - t_2}{2}), (\frac{y_1 + y_2}{2}, s) \rangle \leq 1. \tag{8.25}$$

Ομως, η ποσότητα αυτή είναι ίση με

$$\langle x, \frac{y_1 + y_2}{2} \rangle + \frac{st_1 - st_2}{2} = \frac{\langle (x,t_1),(y_1,s)\rangle + \langle (x,t_2),(y_2,-s)\rangle}{2} \leq 1$$

δηλαδή η (8.25) – άρα και η (8.24) – ισχύει.

Η ανισότητα Brunn - Minkowski τώρα δίνει

$$|(K_1)^o(s)| \geq |K^o(s)|^{\frac{1}{2}} |K^o(-s)|^{\frac{1}{2}},$$

και επειδή $|K^o(s)| = |K^o(-s)|$ λόγω συμμετρίας του K^o, παίρνουμε

$$|(K_1)^o(s)| \geq |K^o(s)| \tag{8.26}$$

γιά κάθε $s \in \mathbf{R}$. Με ολοκλήρωση συμπεραίνουμε οτι

$$|(K_1)^o| = \int_{-\infty}^{+\infty} |(K_1)^o(s)| ds \geq \int_{-\infty}^{+\infty} |K^o(s)| ds = |K^o|. \quad \square$$

8.14 Ανισότητα Blaschke - Santaló. *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$. Τότε,*

$$|K||K^o| \leq |D_n|^2. \tag{8.27}$$

Απόδειξη: Εστω $\mathcal{S}(K)$ η κλάση όλων των πεπερασμένων Steiner συμμετρικοποιήσεων του K. Από το Θεώρημα 8.13 έπεται οτι

$$|K||K^o| \leq |C||C^o|$$

γιά κάθε $C \in \mathcal{S}(K)$. Ξέρουμε οτι υπάρχει ακολουθία $\{C_m\}$ στοιχείων της $\mathcal{S}(K)$ με $C_m \to rD_n$. Τότε,

$$|K||K^o| \leq \lim_m |C_m||(C_m)^o| = |rD_n||(rD_n)^o| = |D_n|^2. \quad \square \tag{8.28}$$

Το πρόβλημα του ελαχίστου παραμένει ανοιχτό. Υπάρχει η λεγόμενη *εικασία του Mahler*: Γιά κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbf{R}^n$ ισχύει

$$|K||K^o| \geq \frac{4^n}{n!}. \tag{8.29}$$

Αν το ελάχιστο είναι όντως αυτό, τότε έχουμε ισότητα στην (8.29) αν το K είναι κύβος (και σε μερικές ακόμα περιπτώσεις).

8.15 Παρατήρηση. Ενας απλός υπολογισμός δείχνει οτι αν η εικασία του Mahler είναι σωστή, τότε γιά κάθε συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbf{R}^n$ έχουμε

$$\frac{c_1}{n} \leq \frac{4}{(n!)^{1/n}} \leq (|K||K^o|)^{\frac{1}{n}} \leq |D_n|^{2/n} \leq \frac{c_2}{n}, \tag{8.30}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι δύο απόλυτες σταθερές. Η ύπαρξη δύο τέτοιων σταθερών έχει αποδειχθεί από τους J. Bourgain και V.D. Milman («ασθενής» λύση του προβλήματος του Mahler):

8.16 Θεώρημα. *Εστω K συμμετρικό κυρτό σώμα στον $\mathbf{R}^n$. Τότε,*

$$\frac{c_1}{n} \leq (|K||K^o|)^{\frac{1}{n}} \leq \frac{c_2}{n},$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ είναι δύο απόλυτες σταθερές.

9. Η απεικόνιση του Knöthe – Μιά τρίτη απόδειξη της ανισότητας Brunn - Minkowski.

Θα κλείσουμε αυτό το κεφάλαιο με μιά τρίτη απόδειξη της ανισότητας Brunn - Minkowski, που στηρίζεται στην *απεικόνιση του Knöthe.*

9.1 Η απεικόνιση του Knöthe. Σταθεροποιούμε μία ορθοκανονική βάση $\{e_1, \ldots, e_n\}$ στον $\mathbf{R}^n$, και θεωρούμε δύο ανοιχτά και κυρτά μη–κενά υποσύνολα A και B του $\mathbf{R}^n$.

Γιά κάθε $i = 1, \ldots, n$ και $s = (s_1, \ldots, s_i) \in \mathbf{R}^i$ θεωρούμε την τομή

$$A_s = \{y \in \mathbf{R}^{n-i} : (s, y) \in A\}$$

του A, και όμοια γιά το B. Θα ορίσουμε μία ένα–προς–ένα απεικόνιση του A επί του B ως εξής:

Αν $x = (x_1, \ldots, x_n) \in A$, τότε $A_{x_1} \neq \emptyset$. Ορίζουμε τότε $\phi_1(x) = \phi_1(x_1)$ μέσω της σχέσης

$$\frac{1}{|A|} \int_{-\infty}^{x_1} |A_{s_1}|_{n-1} ds_1 = \frac{1}{|B|} \int_{-\infty}^{\phi_1(x_1)} |B_{t_1}|_{n-1} dt_1. \tag{9.1}$$

Δηλαδή, προχωράμε στην διεύθυνση του e_1 μέχρι να «κόψουμε» ποσοστό του B ίσο με το ποσοστό του A που καταλαμβάνει το $A \cap \{s = (s_1, \ldots, s_n) : s_1 \leq x_1\}$. Παρατηρήστε οτι η ϕ_1 ορίζεται στο A αλλά η τιμή της εξαρτάται μόνο από την πρώτη συντεταγμένη του $x \in A$. Επίσης,

$$\frac{\partial \phi_1}{\partial x_1} = \frac{|B|}{|A|} \frac{|A_{x_1}|_{n-1}}{|B_{\phi_1(x_1)}|_{n-1}}. \tag{9.2}$$

Συνεχίζουμε με επαγωγή. Υποθέτουμε οτι έχουμε ορίσει τις $\phi_1(x) = \phi_1(x_1)$, $\phi_2(x) = \phi_2(x_1, x_2)$, $\phi_{j-1}(x) = \phi_{j-1}(x_1, \ldots, x_{j-1})$ γιά κάποιο $j \geq 2$. Αν $x =$

$(x_1,\ldots,x_n)\in A$, τότε $A_{(x_1,\ldots,x_{j-1})}\neq\emptyset$ και ορίζουμε $\phi_j(x)=\phi_j(x_1,\ldots,x_j)$ μέσω της σχέσης

$$\frac{1}{|A_{(x_1,\ldots,x_{j-1})}|_{n-j+1}}\int_{-\infty}^{x_j}|A_{(x_1,\ldots,x_{j-1},s_j)}|_{n-j}ds_j \tag{9.3}$$

$$=\frac{1}{|B_{(\phi_1(x_1),\ldots,\phi_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1})}|_{n-j+1}}\int_{-\infty}^{\phi_j(x_1,\ldots,x_j)}|B_{(\phi_1(x_1),\ldots,\phi_{j-1}(x_1,\ldots,x_{j-1}),t_j)}|_{n-j}dt_j.$$

Είναι πάλι φανερό οτι

$$\frac{\partial\phi_j}{\partial x_j}=\frac{|B_{\phi_1(x),\ldots,\phi_{j-1}(x)}|_{n-j+1}}{|A_{x_1,\ldots,x_{j-1}}|_{n-j+1}}\frac{|A_{x_1,\ldots,x_j}|_{n-j}}{|B_{\phi_1(x),\ldots,\phi_j(x)}|_{n-j}}. \tag{9.4}$$

Συνεχίζοντας έτσι, ορίζουμε μιά συνάρτηση $\phi=(\phi_1,\ldots,\phi_n):A\to B$. Είναι εύκολο να δούμε οτι η ϕ είναι ένα–προς–ένα και επί, ενώ από την (9.4) βλέπουμε οτι οι μερικές παράγωγοι $\partial\phi_j/\partial x_j$ είναι μη–αρνητικές στο A. Από την κατασκευή της η ϕ είναι τριγωνική (δηλαδή $\phi_j(x)=\phi_j(x_1,\ldots,x_j)$), επομένως γιά την Ιακωβιανή της ϕ έχουμε

$$J(x)=\mathrm{Det}(D\phi)=\prod_{j=1}^{n}\frac{\partial\phi_j}{\partial x_j}=\frac{|B|}{|A|} \tag{9.5}$$

γιά κάθε $x\in A$, όπου χρησιμοποιούμε τις (9.2) και (9.4). Η απεικόνιση ϕ λέγεται απεικόνιση του Knöthe:

9.2 Θεώρημα. *Εστω A,B μη–κενά, ανοιχτά και κυρτά υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$. Υπάρχει ένα–προς–ένα τριγωνική απεικόνιση ϕ του A επί του B τέτοια ώστε $\frac{\partial\phi_j}{\partial x_j}\geq 0$ στο A, της οποίας η Ιακωβιανή ικανοποιεί την*

$$J(x)=\frac{|B|}{|A|}$$

γιά κάθε $x\in A$. $\square$

Με την βοήθεια της απεικόνισης του Knöthe μπορούμε να δώσουμε μία τρίτη απόδειξη της ανισότητας Brunn - Minkowski:

9.3 Ανισότητα Brunn - Minkowski. *Εστω A,B κυρτά σώματα στον $\mathbf{R}^n$. Τότε,*

$$|A+B|^{\frac{1}{n}}\geq|A|^{\frac{1}{n}}+|B|^{\frac{1}{n}}.$$

Απόδειξη: Η ανισότητα που θέλουμε να αποδείξουμε αφορά όγκους, μπορούμε επομένως γιά το σκοπό αυτό να «ταυτίσουμε» τα A και B με τα εσωτερικά τους.

Θεωρούμε την απεικόνιση του Knöthe $\phi:A\to B$. Είναι φανερό οτι

$$(\mathrm{Id}+\phi)(A)\subseteq A+\phi(A)=A+B. \tag{9.6}$$

Επομένως,

$$(9.7)\quad |A+B| \geq \int_{(\mathrm{Id}+\phi)(A)} dx = \int_A |J(\mathrm{Id}+\phi)(x)| dx = \int_A \prod_{j=1}^{n} \left(1+\frac{\partial \phi_j}{\partial x_j}(x)\right) dx$$

$$\geq \int_A \left(1+(\prod_{j=1}^{n} \frac{\partial \phi_j}{\partial x_j}(x))^{1/n}\right)^n dx = |A| \left(1+(\frac{|B|}{|A|})^{1/n}\right)^n$$

$$= \left(|A|^{1/n}+|B|^{1/n}\right)^n. \quad \square$$

III. ΣΥΓΚΕΝΤΡΩΣΗ ΤΟΥ ΜΕΤΡΟΥ – ΟΙΚΟΓΕΝΕΙΕΣ LÉVY.

1. Η ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα.

Θεωρούμε την μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} στον $\mathbf{R}^n$ εφοδιασμένη με την γεωδαισιακή μετρική ρ: η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x,y \in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x,y. Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο σ το οποίο μετράει το ποσοστό της επιφάνειας της σφαίρας που καταλαμβάνει κάθε Borel $A \subseteq S^{n-1}$.

Είναι εύκολο να δεί κανείς οτι αν $\rho(x,y) = \theta$ τότε

$$|x-y| = 2\sin\frac{\theta}{2}, \tag{1.1}$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η ευκλείδεια απόσταση των $x,y \in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leq |x-y| \leq \rho(x,y). \tag{1.2}$$

Αν $A \subseteq S^{n-1}$, τότε γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε την *ε–επέκταση* A_ε του A ως εξής:

$$A_\varepsilon = \{x \in S^{n-1} : \rho(x,A) \leq \varepsilon\}. \tag{1.3}$$

Γιά κάθε $x \in S^{n-1}$ και $r > 0$, η *μπάλα με κέντρο το x και ακτίνα r* είναι ως συνήθως το σύνολο $\{y \in S^{n-1} : \rho(y,x) \leq r\}$, ένα «σκουφί» με κέντρο το x και γωνιακή ακτίνα r.

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στη σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

Δίνονται $\alpha \in (0,1)$ και $\varepsilon > 0$. Ανάμεσα σε όλα τα υποσύνολα A της σφαίρας γιά τα οποία $\sigma(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα γιά τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_\varepsilon)$ της ε–επέκτασης.

Η απάντηση σάυτό το ερώτημα δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα. *Εστω $\alpha \in (0,1)$ και $B(x,r)$ μιά μπάλα στην S^{n-1} με ακτίνα $r > 0$ τέτοια ώστε $\sigma(B(x,r)) = \alpha$. Τότε, γιά κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \alpha$ και κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε*

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq \sigma(B(x,r)_\varepsilon) = \sigma(B(x,r+\varepsilon)). \tag{1.4}$$

Δηλαδή, γιά οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α, οι μπάλες μέτρου α δίνουν τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος, ανεξάρτητα από την τιμή του $\varepsilon > 0$. Παρατηρείστε οτι η ανισότητα Brunn - Minkowski μας έδινε το ακριβώς ανάλογο γιά τον όγκο στον $\mathbf{R}^n$: Αν K είναι συμπαγές υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$ με θετικό όγκο, και αν $|K| = |rD_n|$ γιά κάποιο $r > 0$, τότε γιά κάθε $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$|K + \varepsilon D_n| \geq |rD_n + \varepsilon D_n|. \tag{1.5}$$

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς την διάσταση. Θα περιγράψουμε την απόδειξή της στο τέλος αυτής της παραγράφου. Πριν όμως απαύτό θα συζητήσουμε κάποιες πολύ σημαντικές εφαρμογές της.

Θεωρούμε την ειδική περίπτωση $\alpha = \frac{1}{2}$. Αν $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ και $\varepsilon > 0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος της ε–επέκτασης A_ε χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq \sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)) \tag{1.6}$$

γιά κάθε $\varepsilon > 0$ και $x \in S^{n-1}$. Η (1.6) οδηγεί στην ακόλουθη ανισότητα:

1.1 Θεώρημα. *Εστω $A \subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ και $\varepsilon > 0$. Τότε,*

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - \sqrt{\pi/8}\exp(-\varepsilon^2 n/2). \tag{1.7}$$

Απόδειξη: Λόγω της (1.6), αρκεί να φράξουμε από κάτω το $\sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + \varepsilon))$. Από το σχήμα έπεται οτι

$$\sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)) = \frac{\int_0^{\frac{\pi}{2}+\varepsilon} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta}, \tag{1.8}$$

οπότε θέτοντας $h(\varepsilon, n) = 1 - \sigma(B(x, \frac{\pi}{2} + \varepsilon))$, ζητάμε άνω φράγμα γιά την

$$h(\varepsilon, n) = \frac{\int_{\frac{\pi}{2}+\varepsilon}^{\pi} \sin^n \theta d\theta}{\int_0^{\pi} \sin^n \theta d\theta} = \frac{\int_\varepsilon^{\frac{\pi}{2}} \cos^n \phi d\phi}{2I_n}, \tag{1.9}$$

όπου $I_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n \phi d\phi$. Κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $t = \phi\sqrt{n}$ παίρνουμε

$$h(\varepsilon, n) = \frac{1}{2\sqrt{n} I_n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} \cos^n(t/\sqrt{n}) dt. \tag{1.10}$$

Συγκρίνοντας τα αναπτύγματα Taylor των συναρτήσεων $\cos t$ και $\exp(-t^2/2)$ βλέπουμε οτι

$$\cos t \leq \exp(-t^2/2) \tag{1.11}$$

στο $[0, \pi/2]$, επομένως η (1.10) μας δίνει

$$h(\varepsilon, n) \leq \frac{1}{2\sqrt{n} I_n} \int_{\varepsilon\sqrt{n}}^{\frac{\pi}{2}\sqrt{n}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt = \frac{1}{2\sqrt{n} I_n} \int_0^{(\frac{\pi}{2}-\varepsilon)\sqrt{n}} \exp(-(s+\varepsilon\sqrt{n})^2/2) ds \tag{1.12}$$

$$\leq \frac{\exp(-\varepsilon^2 n/2)}{2\sqrt{n} I_n} \int_0^{\infty} \exp(-s^2/2) ds = \frac{\sqrt{\pi/8}}{\sqrt{n} I_n} \exp(-\varepsilon^2 n/2).$$

Γιά την απόδειξη του θεωρήματος αρκεί λοιπόν να δούμε οτι $\sqrt{n}I_n \geq 1$ γιά κάθε $n \geq 1$. Γιά το σκοπό αυτό παρατηρούμε οτι από την αναδρομική σχέση $(n+2)I_{n+2} = (n+1)I_n$ έπεται οτι

$$\sqrt{n+2}I_{n+2} = \sqrt{n+2}\frac{n+1}{n+2}I_n = \frac{n+1}{\sqrt{n+2}}I_n \geq \sqrt{n}I_n,$$

το οποίο σημαίνει οτι αρκεί να ελέγξουμε τις

$$I_1 = \int_0^{\pi/2} \cos\phi d\phi = 1 \geq 1$$

και

$$\sqrt{2}I_2 = \sqrt{2}\int_0^{\pi/2} \cos^2\phi d\phi = \sqrt{2}\frac{\pi}{4} \geq 1.$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της (1.7). $\square$

1.2 Παρατήρηση. Η βασική παρατήρηση όσον αφορά την ανισότητα (1.7) είναι οτι, όσο μικρό $\varepsilon > 0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-\varepsilon^2 n/2) \to 0$ και μάλιστα με πολύ ταχύ ρυθμό (εκθετικά ως προς n). Επομένως, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την ε–επέκταση οποιουδήποτε υποσυνόλου A της S^{n+1} με $\sigma(A) = \frac{1}{2}$ είναι σχεδόν μηδενικό αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη, οσοδήποτε μικρό κι αν είναι το ε.

Γιά παράδειγμα, αν πάρουμε ένα δαχτυλίδι Δ γωνιακής ακτίνας $\varepsilon > 0$ γύρω από τον ισημερινό της S^{n+1}, τότε $\Delta = B(x, \frac{\pi}{2} + \varepsilon) \cap B(-x, \frac{\pi}{2} + \varepsilon)$ επομένως

$$\sigma(\Delta) \geq 1 - 2\exp(-\varepsilon^2 n/2) \to 0$$

εκθετικά ως προς n. Δηλαδή, γιά μεγάλες διαστάσεις το μέτρο σ συγκεντρώνεται εντυπωσιακά γύρω από οποιονδήποτε μέγιστο κύκλο της S^{n+1}.

Γιά την απόδειξη του Θεωρήματος 1.1 κάναμε ουσιαστική χρήση της ισοπεριμετρικής ανισότητας στη σφαίρα. Γιά τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νού μας είναι αρκετή μιά ανισότητα σαν την (1.7) και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn - Minkowski μπορούμε να δώσουμε απλή απόδειξη της (1.7) χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα. Η παρατήρηση αυτή είναι πρόσφατη, και βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα:

1.3 Λήμμα. *Θεωρούμε το μέτρο πιθανότητας μ_D με $\mu_D(A) = |A \cap D_n|/|D_n|$ γιά κάθε Borel $A \subseteq D_n$. Αν $A, B \subseteq D_n$ συμπαγή, και*

$$\delta(A,B) := \min\{|a-b| : a \in A, b \in B\} = \rho > 0,$$

τότε

$$\min\{\mu_D(A), \mu_D(B)\} \leq \exp(-\rho^2 n/8). \tag{1.13}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+B}{2}$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Brunn - Minkowski παίρνουμε $|\frac{A+B}{2}| \geq \min\{|A|, |B|\}$. Συνεπώς,

$$\mu_D\left(\frac{A+B}{2}\right) \geq \min\{\mu_D(A), \mu_D(B)\}. \tag{1.14}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \in A$ και $b \in B$ ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει

$$|a+b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2 - |a-b|^2 \leq 4 - \rho^2, \tag{1.15}$$

επομένως

$$\frac{A+B}{2} \subseteq (1 - \frac{\rho^2}{4})^{1/2} D_n. \tag{1.16}$$

Συνδυάζοντας τις (1.14) και (1.16) βλέπουμε οτι

$$\min\{\mu_D(A), \mu_D(B)\} \leq \left(1 - \frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leq \left(\exp(-\rho^2/4)\right)^{n/2} = \exp(-\rho^2 n/8). \quad \Box \tag{1.17}$$

Απόδειξη της (1.7) (με λίγο χειρότερες σταθερές): Εστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A) = \frac{1}{2}$, και $\varepsilon > 0$. Θεωρούμε $\lambda \in (0,1)$ – το οποίο θα επιλέξουμε στο τέλος – και τα υποσύνολα της D_n

$$A_1 = \{\rho a : a \in A, \lambda \leq \rho \leq 1\} \quad , \quad B_1 = \{\rho a : a \in S^{n-1} \setminus A_\varepsilon, \lambda \leq \rho \leq 1\}. \tag{1.18}$$

Εύκολα ελέγχουμε οτι

$$\delta(A_1, B_1) \geq 2\lambda \sin\frac{\varepsilon}{2} \geq 2\frac{\lambda\varepsilon}{\pi}. \tag{1.19}$$

Από το Λήμμα 1.3 συμπεραίνουμε οτι

$$|B_1| \leq \exp(-\delta^2 n/8)|D_n| \leq \exp(-\frac{4\lambda^2\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{n}{8})|D_n|. \tag{1.20}$$

Ομως, $|B_1| = (1-\lambda^n)\sigma(A_\varepsilon^c)|D_n|$ και συνδυάζοντας με την (1.20) βλέπουμε οτι

$$\sigma(A_\varepsilon^c) \leq \frac{1}{1-\lambda^n}\exp(-\frac{\lambda^2\varepsilon^2}{\pi^2}\frac{n}{4}). \tag{1.21}$$

Επιλέγοντας π.χ. $\lambda = \frac{1}{2}$, καταλήγουμε σε μιά εκτίμηση της μορφής

$$\sigma(A_\varepsilon) \geq 1 - c_1\exp(-c_2\varepsilon^2 n) \tag{1.22}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές, το ακριβές δηλαδή ανάλογο της (1.7). $\Box$

1.4 Lipschitz συναρτήσεις πάνω στη σφαίρα. Εστω $f : S^{n-1} \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση. Ο *μέσος κατά Lévy* της f είναι ένας αριθμός M_f με την ιδιότητα

$$\sigma\left(\{x : f(x) \geq M_f\}\right) \geq \frac{1}{2} \quad , \quad \sigma\left(\{x : f(x) \leq M_f\}\right) \geq \frac{1}{2}. \tag{1.23}$$

Δεν είναι δύσκολο να δεί κανείς οτι ο M_f ορίζεται μονοσήμαντα γιά συνεχή f.

Ορίζουμε $A_f = \{x \in S^{n-1} : f(x) = M_f\}$. Τότε, έχουμε την εξής απλή παρατήρηση γιά την ε–επέκταση του A_f:

1.5 Λήμμα. *Γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει*

$$(A_f)_\varepsilon = \left(\{x : f(x) \geq M_f\}\right)_\varepsilon \cap \left(\{x : f(x) \leq M_f\}\right)_\varepsilon . \tag{1.24}$$

Απόδειξη: Εστω $y \in \{x : f(x) \geq M_f\}_\varepsilon \cap \{x : f(x) \leq M_f\}_\varepsilon$. Αυτό σημαίνει οτι υπάρχουν $x_1 \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε $f(x_1) \geq M_f$ και $\rho(y, x_1) \leq \varepsilon$, και $x_2 \in S^{n-1}$ τέτοιο ώστε $f(x_2) \leq M_f$ και $\rho(y, x_2) \leq \varepsilon$. Θεωρούμε την μπάλα $B = B(y, \varepsilon)$. Τότε $x_1, x_2 \in B$, άρα υπάρχει καμπύλη $\gamma \subset B$ που ξεκινάει από το x_1 και καταλήγει στο x_2. Από το Θεώρημα ενδιάμεσης τιμής υπάρχει $x \in \gamma$ τέτοιο ώστε $f(x) = M_f$. Επεται οτι

$$y \in B(x, \varepsilon) \subseteq (A_f)_\varepsilon. \tag{1.25}$$

Αυτό αποδεικνύει τον έναν εγκλεισμό του λήμματος, ενώ ο άλλος είναι προφανής. □

1.6 Πόρισμα. *Εστω $f : S^{n-1} \to \mathbf{R}$ συνεχής συνάρτηση, M_f ο μέσος Lévy της f, και $A_f = \{x \in S^{n-1} : f(x) = M_f\}$. Τότε,*

$$\sigma((A_f)_\varepsilon) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 \varepsilon^2 n), \tag{1.26}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές.

Απόδειξη: Από τον ορισμό του μέσου Lévy και από το Θεώρημα 1.1 έπεται οτι

$$\sigma(\{x : f(x) \geq M_f\}_\varepsilon) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 \varepsilon^2 n)$$

και

$$\sigma(\{x : f(x) \leq M_f\}_\varepsilon) \geq 1 - c_1 \exp(-c_2 \varepsilon^2 n).$$

Η (1.26) είναι τότε άμεση συνέπεια του Λήμματος 1.5. □

Θεωρούμε τώρα μιά Lipschitz συνεχή συνάρτηση $f : S^{n-1} \to \mathbf{R}$. Υπάρχει δηλαδή σταθερά $L > 0$ με την ιδιότητα

$$|f(x) - f(y)| \leq L\rho(x, y)$$

γιά κάθε $x, y \in S^{n-1}$. Οπως και πρίν, ορίζουμε $A_f = \{x : f(x) = M_f\}$ και θεωρούμε την ε–επέκτασή του. Αν $y \in (A_f)_{\varepsilon/L}$, τότε υπάρχει $x \in A_f$ τέτοιο ώστε $\rho(x, y) \leq \varepsilon/L$, και η υπόθεσή μας γιά την f δείχνει οτι

$$|f(y) - M_f| = |f(y) - f(x)| \leq L\rho(y, x) \leq \varepsilon. \tag{1.27}$$

Δηλαδή,

$$\{y : |f(y) - M_f| > \varepsilon\} \subseteq S^{n-1} \setminus (A_f)_{\varepsilon/L}. \tag{1.28}$$

Χρησιμοποιώντας και το Πόρισμα 1.6 καταλήγουμε στο εξής:

1.7 Θεώρημα. *Εστω $f : S^{n-1} \to \mathbf{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά $L > 0$. Τότε, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε*

$$\sigma\left(\{y \in S^{n-1} : |f(y) - M_f| > \varepsilon\}\right) \leq c_1 \exp(-c_2 \frac{\varepsilon^2 n}{L^2}), \tag{1.29}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές. □

Παρατηρούμε οτι αν σταθεροποιήσουμε $\varepsilon > 0$ (οσοδήποτε μικρό) και θεωρήσουμε Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις με δοσμένη Lipschitz σταθερά $L > 0$, τότε αν η διάσταση n είναι όλο και μεγαλύτερη οι συναρτήσεις τείνουν να έχουν τιμές που συγκεντρώνονται όλο και περισσότερο γύρω από τον μέσο Lévy M_f της f, με την έννοια οτι το σύνολο όπου η f διαφέρει από την τιμή M_f περισσότερο από ε είναι πολύ μικρό: έχει μέτρο το πολύ

$$\exp(-c_2 \varepsilon^2 n / L^2) \to 0$$

καθώς $n \to +\infty$, και μάλιστα με εκθετικό ρυθμό. Το φαινόμενο αυτό συχνά διατυπώνεται και ως εξής:

«Οι Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις πάνω σε μιά σφαίρα μεγάλης διάστασης είναι σχεδόν σταθερές».

Λέγοντας σχεδόν σταθερές, εννοούμε εδώ οτι οι Lipschitz συναρτήσεις παίρνουν τιμές σχεδόν ίσες με τον Lévy μέσο τους σε ένα σύνολο μεγάλο με την έννοια του μέτρου: στο συντριπτικό ποσοστό των σημείων της σφαίρας. Πολλές φορές χρειαζόμαστε κάτι τέτοιο γιά ένα μεγάλο υποσύνολο της σφαίρας με *ειδική μορφή*. Γιά παράδειγμα, γιά όλα τα σημεία $x \in S(F) := S^{n-1} \cap F$, όπου F υπόχωρος του $\mathbf{R}^n$ με όσο γίνεται μεγαλύτερη διάσταση. Θα δείξουμε οτι κάτι τέτοιο είναι δυνατό. Αρχίζουμε με ένα απλό λήμμα:

1.8 Λήμμα. *Γιά κάθε $\varepsilon \in (0,1)$ μπορούμε να βρούμε $N \leq \exp(k \log(3/\varepsilon))$ και $x_1, \ldots, x_N \in S^{k-1}$ τέτοια ώστε*

$$S^{k-1} \subseteq \cup_{i=1}^N (x_i + \varepsilon D_k). \tag{1.30}$$

Απόδειξη: Θεωρούμε ένα σύνολο σημείων $x_1, \ldots, x_N \in S^{k-1}$ με όσο γίνεται μεγαλύτερο πληθάριθμο κάτω από την απαίτηση να ισχύει

$$|x_i - x_j| \geq \varepsilon \quad , \quad 1 \leq i < j \leq N. \tag{1.31}$$

Εύκολα βλέπουμε οτι $S^{k-1} \subseteq \cup_{i=1}^N (x_i + \varepsilon D_k)$: αν υπήρχε $x \in S^{k-1}$ με την ιδιότητα $|x - x_i| \geq \varepsilon$ γιά κάθε $i = 1, \ldots, N$, τότε το $\{x, x_1, \ldots, x_N\}$ θα ικανοποιούσε την (1.31) και θα είχε πληθάριθμο $N + 1$.

Από την (1.31) έπεται οτι $(x_i + \frac{\varepsilon}{2}D_k) \cap (x_j + \frac{\varepsilon}{2}D_k) = \emptyset$ αν $i \neq j$. Επίσης, είναι φανερό οτι

$$\cup_{i=1}^{N}(x_i + \frac{\varepsilon}{2}D_k) \subseteq (1+\frac{\varepsilon}{2})D_k, \tag{1.32}$$

επομένως με σύγκριση όγκων βλέπουμε οτι

$$(1+\frac{\varepsilon}{2})^k|D_k| \geq |\cup_{i=1}^{N}(x_i + \frac{\varepsilon}{2}D_k)| = N(\frac{\varepsilon}{2})^k|D_k|, \tag{1.33}$$

απ'οπου έπεται οτι

$$N \leq (\frac{2}{\varepsilon})^k(1+\frac{\varepsilon}{2})^k = (1+\frac{2}{\varepsilon})^k \leq \exp(k\log(3/\varepsilon)). \quad \Box \tag{1.34}$$

1.9 Θεώρημα. *Εστω $f : S^{n-1} \to \mathbf{R}$ Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά Lipschitz $L > 0$. Γιά κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν $k \geq k_0 = [c\varepsilon^2 n/L^2 \log(c'L/\varepsilon)]$ και k–διάστατος υπόχωρος F του $\mathbf{R}^n$ τέτοιος ώστε*

$$|f(y) - M_f| \leq 2\varepsilon$$

γιά κάθε $y \in S(F) := S^{n-1} \cap F$, όπου M_f είναι ο μέσος Lévy της f.

Απόδειξη: Θεωρούμε το σύνολο

$$A(\varepsilon) = \{x \in S^{n-1} : |f(x) - M_f| \leq \varepsilon\}.$$

Από το Θεώρημα 1.7, υπάρχουν σταθερές $c_1, c_2 > 0$ τέτοιες ώστε

$$\sigma(A(\varepsilon)) \geq 1 - c_1\exp(-c_2\varepsilon^2 n/L^2).$$

Σταθεροποιούμε έναν υπόχωρο F_0 διάστασης k_0, και θα δείξουμε οτι υπάρχει στροφή T του $\mathbf{R}^n$ τέτοια ώστε αν $F = T(F_0)$ να ισχύει $S(F) \subseteq A(2\varepsilon)$.

Αν $x \in S(F_0)$, τότε η πιθανότητα να φέρουμε με στροφή το x στο $A(\varepsilon)$ είναι ίση με $\sigma(A(\varepsilon)) \geq 1 - c_1\exp(-c_2\varepsilon^2 n/L^2)$. Επεται οτι αν $x_1, \ldots, x_N \in S(F_0)$ τότε

$$\begin{aligned} \mathrm{Prob}(T : Tx_i \in A(\varepsilon), i = 1, \ldots, N\} &\geq 1 - \sum_{i=1}^{N}\mathrm{Prob}(T : Tx_i \notin A(\varepsilon)) \\ &= 1 - N(1 - \sigma(A(\varepsilon))) \\ &\geq 1 - Nc_1\exp(-c_2\varepsilon^2 n/L^2). \end{aligned} \tag{1.35}$$

Αν $N < \frac{1}{c_1}\exp(c_2\varepsilon^2 n/L^2)$, τότε η παραπάνω πιθανότητα είναι θετική. Δηλαδή, υπάρχει στροφή T που στέλνει όλα τα x_i στο $A(\varepsilon)$.

Θεωρούμε ένα θ–δίκτυο στην $S(F_0)$. Από το Λήμμα 1.8 υπάρχει ένα τέτοιο σύνολο $\{x_1, \ldots, x_N\} \subseteq S(F_0)$ με $N \leq \exp(k_0\log(3/\theta))$. Επομένως, αν

$$\exp(k_0\log(3/\theta)) < \frac{1}{c_1}\exp(c_2\varepsilon^2 n/L^2), \tag{1.36}$$

τότε υπάρχει στροφή T τέτοια ώστε γιά το θ–δίκτυο $y_i = Tx_i$, $i = 1, \ldots, N$ της $S(F) = S(TF_0)$ να ισχύει

$$y_i \in A(\varepsilon) \quad , \quad i = 1, \ldots, N. \tag{1.37}$$

Εστω $y \in S(F)$. Υπάρχει $i \leq N$ τέτοιο ώστε $|y - y_i| \leq \theta$, δηλαδή $\rho(y, y_i) \leq \frac{\pi}{2}\theta$. Επεται οτι $|f(y) - f(y_i)| \leq L\frac{\pi}{2}\theta$. Συνεπώς,

$$|f(y) - M_f| \leq |f(y) - f(y_i)| + |f(y_i) - M_f| \leq L\frac{\pi}{2}\theta + \varepsilon < 2\varepsilon \tag{1.38}$$

αν επιλέξουμε από την αρχή $\theta = 2\varepsilon/\pi L$. Αυτό σημαίνει οτι

$$|f(y) - M_f| \leq 2\varepsilon$$

γιά κάθε $y \in S(F)$, αρκεί να ικανοποιείται η (1.36) με $\theta = 2\varepsilon/\pi L$. Αναλύοντας αυτήν την σχέση βλέπουμε οτι ικανοποιείται γιά $k_0 = [c\varepsilon^2 n/L^2 \log(c'L/\varepsilon)]$. $\square$

1.10 Απόδειξη της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας. Θεωρούμε $A \subseteq S^{n-1}$ κλειστό, και μπάλα της μορφής $B(x, r)$ τέτοια ώστε $\sigma(A) = B(x, r)$. Θα δείξουμε οτι $\sigma(A_\varepsilon) \geq \sigma(B(x, r)_\varepsilon)$ γιά κάθε $\varepsilon > 0$.

Η απόδειξη θα γίνει με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς την διάσταση. Θεωρούμε τυχόν ζευγάρι αντιποδικών σημείων $x_0, -x_0 \in S^{n-1}$ και τυχόν μέγιστο ημικύκλιο γ που περνάει απάυτά. Ορίζουμε την *σφαιρική συμμετρικοποίηση του A ως προς γ* με τον ακόλουθο τρόπο:

Γιά κάθε $y \in \gamma$ θεωρούμε το υπερεπίπεδο H^y που περνάει από το y και είναι κάθετο στην ευθεία $[-x_0, x_0]$. Συμβολίζουμε με $S^{n-2,y}$ την σφαίρα $S^{n-1} \cap H^y$, και θέτουμε

$$A^y = A \cap H^y \subseteq S^{n-2,y}. \tag{1.39}$$

Γιά κάθε $y \in \gamma$ θεωρούμε μιά μπάλα B^y στην $S^{n-2,y}$ με κέντρο το y και ακτίνα r^y τέτοια ώστε

$$\sigma_{n-2,y}(B^y) = \sigma_{n-2,y}(A^y), \tag{1.40}$$

όπου το $\sigma_{n-2,y}$ μετράει την επιφάνεια υποσυνόλων της $S^{n-2,y}$. Τέλος, ορίζουμε

$$S_\gamma(A) = \cup_{y \in \gamma} B^y. \tag{1.41}$$

Μάυτόν τον ορισμό, το $\sigma_\gamma(A)$ είναι συμμετρικό ως προς γ και ικανοποιεί την

$$\sigma(S_\gamma(A)) = \sigma(A). \tag{1.42}$$

Το $S_\gamma(A)$ είναι η σφαιρική συμμετρικοποίηση του A ως προς γ.

Εστω A κλειστό υποσύνολο της S^{n-1}. Θεωρούμε την κλάση $\mathcal{M}(A)$ όλων των κλειστών υποσυνόλων C της S^{n-1} που ικανοποιούν: $\sigma(C) = \sigma(A)$ και $\sigma(C_\varepsilon) \leq \sigma(A_\varepsilon)$ γιά κάθε $\varepsilon > 0$. Το βασικό μας Λήμμα είναι τότε το εξής:

1.11 Λήμμα. *Εστω* $A \subseteq S^{n-1}$ *κλειστό, και* γ *ένα ημικύκλιο. Τότε,* $S_\gamma(A) \in \mathcal{M}(A)$. *Δηλαδή, γιά κάθε* $\varepsilon > 0$,

$$\sigma((S_\gamma(A))_\varepsilon) \le \sigma(A_\varepsilon). \tag{1.43}$$

Απόδειξη: Συμβολίζουμε με u το μέσο του γ, δηλαδή $S^{n-2,u}$ είναι ο ισημερινός της σφαίρας.

Ορίζουμε την τ_y−*προβολή* ως εξής: Αν $w \in S^{n-2,y}$, $w \neq \pm x_0$, θεωρούμε τον μεσημβρινό $-x_0 w x_0$. Αυτός τέμνει την $S^{n-2,u}$ σε κάποιο σημείο το οποίο ονομάζουμε $\tau_y(w)$. Γιά κάθε $y \in \gamma$ ορίζεται έτσι μιά απεικόνιση $\tau_y : S^{n-2,y} \to S^{n-2,u}$.

Ισχυρισμός 1. *Υπάρχει συγκεκριμένη συνάρτηση* f *τέτοια ώστε: Αν* $w_1 \in S^{n-2,y_1}$ *και* $w_2 \in S^{n-2,y_2}$, *τότε*

$$\rho(w_1, w_2) = f(y_1, y_2, \rho(\tau_{y_1}(w_1), \tau_{y_2}(w_2))). \tag{1.44}$$

Με άλλα λόγια, αν μας πούν ποιά είναι η απόσταση των $\tau_{y_1}(w_1)$ και $\tau_{y_2}(w_2)$ στην $S^{n-2,u}$, τότε γνωρίζουμε την απόσταση των w_1, w_2 στην S^{n-1}.

Εξήγηση: Τα κάτω σημεία προσδιορίζουν τα w_2, w_1' στην S^{n-2,y_2}. Το w_1' προσδιορίζει το w_1 στην S^{n-2,y_1}. Ο πλάγιος μέγιστος κύκλος που περνάει από τα w_1, w_2 είναι κι αυτός προσδιορισμένος, άρα και η $\rho(w_1, w_2)$. Η παρατήρηση είναι οτι το όλο σχήμα δεν εξαρτάται από τις ακριβείς θέσεις των κάτω σημείων, αλλά από την σχετική τους θέση (δηλαδή, την απόστασή τους). Μπορεί κανείς να βρεί και τύπο γιά την f, αλλά αυτό δεν έχει ιδιαίτερη σημασία.

Ισχυρισμός 2. *Αν* $C = \{w\} \subset S^{n-2,y_1}$, *τότε*

$$\tau_{y_2}(C_\varepsilon \cap S^{n-2,y_2}) = (\tau_{y_1} C)_{\eta(y_1,y_2,\varepsilon)} \cap S^{n-2,u}, \tag{1.45}$$

όπου το η *εξαρτάται μόνο από τα* y_1, y_2 *και* ε.

Εξήγηση: Η απόσταση των y_1, y_2 και το ε καθορίζουν πόσο μεγάλη είναι η «κόκκινη» τομή $C_\varepsilon \cap S^{n-2,y_2}$ (αν βέβαια δεν είναι κενή). Κατόπιν, η απόσταση του y_2 από το u και το μέγεθος της «κόκκινης» τομής στην S^{n-2,y_2} καθορίζουν το μέγεθος του $\tau_{y_2}(C_\varepsilon \cap S^{n-2,y_2})$ στην $S^{n-2,u}$. Το η είναι το μισό του μήκους αυτού του τόξου (προφανώς, το $\tau_{y_1}(w)$ είναι το μέσο του κάτω τόξου).

Ισχυρισμός 3. *Αν* C *είναι τυχόν υποσύνολο της* S^{n-2,y_1}, *τότε πάλι*

$$\tau_{y_2}(C_\varepsilon \cap S^{n-2,y_2}) = (\tau_{y_1} C)_{\eta(y_1,y_2,\varepsilon)} \cap S^{n-2,u}, \tag{1.46}$$

με το η *του προηγούμενου ισχυρισμού.*

Εξήγηση: Εστω $x \in \tau_{y_2}(C_\varepsilon \cap S^{n-2,y_2})$. Αυτό σημαίνει οτι $x = \tau_{y_2}(z)$, όπου $z \in S^{n-2,y_2}$ και $z \in C_\varepsilon$ (δηλαδή, υπάρχει $w \in C$ τέτοιο ώστε $z \in \{w\}_\varepsilon$).

Από τον προηγούμενο ισχυρισμό,

$$x \in \{\tau_{y_1}(w)\}_{\eta(y_1,y_2,\varepsilon)} \subseteq (\tau_{y_1}(C))_{\eta(y_1,y_2,\varepsilon)} \cap S^{n-2,u}. \tag{1.47}$$

Συνεπώς,

$$\tau_{y_2}(C_\varepsilon \cap S^{n-2,y_2}) \subseteq (\tau_{y_1} C)_{\eta(y_1,y_2,\varepsilon)} \cap S^{n-2,u}. \tag{1.48}$$

Ο αντίστροφος εγκλεισμός αποδεικνύεται ανάλογα.

Ισχυρισμός 4. *Γιά κάθε* $y \in \gamma$ *έχουμε*

$$\tau_y((A_\varepsilon)^y) = \cup_{z\in\gamma,\rho(z,y)\le\varepsilon}(\tau_z A^z)_{\eta(z,y,\varepsilon)}. \tag{1.49}$$

Εξήγηση: Εχουμε $w \in (A_\varepsilon)^y$ αν και μόνο αν $w \in S^{n-2,y}$ και υπάρχουν $z \in \gamma$ με $\rho(z,y) \le \varepsilon$ και $w' \in A^z$ με $\rho(w,w') \le \varepsilon$. Τότε,

$$w \in (A^z)_\varepsilon \cap S^{n-2,y}, \tag{1.50}$$

και από τον Ισχυρισμό 3 έπεται οτι

$$\tau_y(w) \in \tau_y\left((A^z)_\varepsilon \cap S^{n-2,y}\right) = (\tau_z A^z)_{\eta(z,y,\varepsilon)}. \tag{1.51}$$

Το αντίστροφο αποδεικνύεται πάλι με τη βοήθεια του Ισχυρισμού 3.

Επαναλαμβάνοντας τούς ίδιους ισχυρισμούς γιά το $S_\gamma(A)$ καταλήγουμε στις

$$(A_\varepsilon)^y = \tau_y^{-1}\left(\cup_{z\in\gamma,\rho(z,y)\le\varepsilon}(\tau_z A^z)_{\eta(z,y,\varepsilon)}\right) \tag{1.52}$$

και

$$((S_\gamma A)_\varepsilon)^y = \tau_y^{-1}\left(\cup_{z\in\gamma,\rho(z,y)\le\varepsilon}(\tau_z (S_\gamma A)^z)_{\eta(z,y,\varepsilon)}\right). \tag{1.53}$$

Από την κατασκευή, γιά κάθε $z \in \gamma$ έχουμε

$$\sigma_{n-2,z}(A^z) = \sigma_{n-2,z}((S_\gamma A)^z)$$

άρα

$$\sigma_{n-2,u}(\tau_z A^z) = \sigma_{n-2,u}(\tau_z (S_\gamma A)^z).$$

Το $\tau_z(S_\gamma A)^z$ είναι μπάλα, συνεπώς

$$\sigma_{n-2,u}\left((\tau_z A^z)_\eta\right) \ge \sigma_{n-2,u}\left((\tau_z(\sigma_\gamma A)^z)_\eta\right) \tag{1.54}$$

γιά κάθε $z \in \gamma$ και $\eta > 0$.

Επιπλέον, στην (1.53) όλα τα $(\tau_z(S_\gamma A)^z)_\eta$ είναι μπάλες με κοινό κέντρο το u, άρα υπάρχει $z_0 \in \gamma$ με $\rho(z_0,y) \le \varepsilon$ τέτοιο ώστε

$$\sigma_{n-2,u}\left(\cup_{z\in\gamma,\rho(z,y)\le\varepsilon}(\tau_z(S_\gamma A)^z)_{\eta(z,y,\varepsilon)}\right) = \sigma_{n-2,u}((\tau_{z_0}(S_\gamma A)^{z_0})_{\eta(z_0,y,\varepsilon)}). \tag{1.55}$$

Από την (1.54) αυτό είναι το πολύ ίσο με

$$\sigma_{n-2,u}((\tau_{z_0}A^{z_0})_{\eta(z_0,y,\varepsilon)}) \leq \sigma_{n-2,u}\left(\cup_{z\in\gamma,\rho(z,y)\leq\varepsilon}(\tau_z A^z)_{\eta(z,y,\varepsilon)}\right). \tag{1.56}$$

Η ανισότητα θα διατηρηθεί αν εφαρμόσουμε και στα δύο μέλη την τ_y^{-1}. Δηλαδή,

$$\sigma_{n-2,y}((A_\varepsilon)^y) \geq \sigma_{n-2,y}[((S_\gamma A)_\varepsilon)^y]. \tag{1.57}$$

Ολοκληρώνοντας ως προς y παίρνουμε

$$\sigma((S_\gamma A)_\varepsilon) \leq \sigma(A_\varepsilon),$$

δηλαδή η απόδειξη του Λήμματος είναι πλήρης. $\square$

Γιά κάθε $A \subseteq S^{n-1}$ ορίζουμε την *ακτίνα του* A

$$r(A) = \min\{r > 0 : \exists x \in S^{n-1} : A \subseteq B(x,r)\}, \tag{1.58}$$

και γιά κλειστά, μη–κενά υποσύνολα της S^{n-1} την απόσταση

$$\delta(A,B) = \min\{\rho \geq 0 : A \subseteq B_\rho, B \subseteq A_\rho\}. \tag{1.59}$$

1.12 Λήμμα. *Εστω $A \subseteq S^{n-1}$ κλειστό. Υπάρχει C^* στην κλάση $\mathcal{M}(A)$ τέτοιο ώστε $r(C^*) = \min\{r(C) : C \in \mathcal{M}(A)\}$.*

Απόδειξη: Εστω $\rho = \inf\{r(C) : C \in \mathcal{M}(A)\}$. Υπάρχει ακολουθία στοιχείων C_m της $\mathcal{M}(A)$ με την ιδιότητα $r(C_m) < \rho + \frac{1}{m}$.

Από συμπάγεια (που αποδεικνύεται όπως και το Θεώρημα επιλογής του Blaschke του Κεφαλαίου II), υπάρχει υπακολουθία C_{k_m} που συγκλίνει σε κάποιο συμπαγές $C \subseteq S^{n-1}$. Εύκολα βλέπουμε οτι η ακτίνα r είναι συνεχής ως προς την μετρική δ. Επομένως, $\rho = r(C) = \lim_m r(C_{k_m})$.

Αυτό που μένει να δείξουμε είναι οτι $C \in \mathcal{M}(A)$. Θέλουμε δηλαδή να δείξουμε οτι $\sigma(C) = \sigma(A)$ και $\sigma(C_\varepsilon) \leq \sigma(A_\varepsilon)$ γιά κάθε $\varepsilon > 0$. Αυτό είναι συνέπεια της συνέχειας του σ ως προς την δ. $\square$

1.13 Λήμμα. *Εστω $G \subseteq S^{n-1}$ που δεν είναι μπάλα. Τότε, υπάρχουν μέγιστα ημικύκλια $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ τέτοια ώστε*

$$r(\sigma_{\gamma_m}(\sigma_{\gamma_{m-1}} \ldots (\sigma_{\gamma_1}(G)))) < r(G). \tag{1.60}$$

Απόδειξη: Ανάλογη με αυτήν του Θεωρήματος II.5.2. $\square$

Απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας: Εστω $A \subseteq S^{n-1}$ κλειστό. Αυτό που ζητάμε είναι οτι υπάρχει μπάλα $B \in \mathcal{M}(A)$.

Από το Λήμμα 1.12 υπάρχει $B \in \mathcal{M}(A)$ με την ελάχιστη δυνατή ακτίνα. Εστω οτι το B δεν είναι μπάλα. Από το Λήμμα 1.13, μπορούμε να βρούμε μέγιστα ημικύκλια $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ τέτοια ώστε $r(B') < r(B)$, όπου $B' = \sigma_{\gamma_m} \ldots \sigma_{\gamma_1}(B)$. Αυτό σημαίνει οτι

$$B' \notin \mathcal{M}(A). \tag{1.61}$$

Ισχυρισμός. *Αν* $C \in \mathcal{M}(A)$ *και* γ *μέγιστο ημικύκλιο, τότε* $S_\gamma(C) \in \mathcal{M}(A)$.

Απόδειξη: Προφανώς, $\sigma(S_\gamma(C)) = \sigma(C) = \sigma(A)$. Από το Λήμμα 1.11, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\sigma((S_\gamma(C))_\varepsilon) \leq \sigma(C_\varepsilon) \leq \sigma(A_\varepsilon). \tag{1.62}$$

Επομένως, $S_\gamma(C) \in \mathcal{M}(A)$. $\square$

Εχουμε $B \in \mathcal{M}(A)$, άρα $S_{\gamma_1}(B) \in \mathcal{M}(A)$, $S_{\gamma_2}S_{\gamma_1}(A) \in \mathcal{M}(A)$, και τελικά

$$B' = S_{\gamma_m}S_{\gamma_{m-1}} \ldots S_{\gamma_1}(B) \in \mathcal{M}(A), \tag{1.63}$$

το οποίο αντιφάσκει προς την (1.61). $\square$

2. Οικογένειες Lévy.

2.1. Τα αποτελέσματα της προηγούμενης παραγράφου, και ειδικότερα το Θεώρημα 1.1, εντάσσονται στο γενικότερο πλαίσιο των οικογενειών Lévy:

Με τον όρο *μετρικός χώρος πιθανότητας* αναφερόμαστε σε έναν μετρικό χώρο (X, ρ) ο οποίος είναι ταυτόχρονα εφοδιασμένος και με ένα μέτρο πιθανότητας μ. Συνήθως υποθέτουμε οτι η διάμετρος του X είναι πεπερασμένη, και $\mathrm{diam}X \geq 1$.

Από τη στιγμή που ο X είναι μετρικός χώρος, γιά κάθε μη–κενό υποσύνολο A του X και κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να ορίσουμε την ε*–επέκταση* A_ε του A ως εξής:

$$A_\varepsilon = \{x \in X : \rho(x, A) \leq \varepsilon\}. \tag{2.1}$$

2.2 Ορισμός. Η *συνάρτηση συγκέντρωσης* $\alpha(X, \varepsilon)$ του X ορίζεται γιά κάθε $\varepsilon > 0$ από την

$$\alpha(X, \varepsilon) = 1 - \inf\{\mu(A_\varepsilon) : \mu(A) \geq \frac{1}{2}\}. \tag{2.2}$$

Στο παράδειγμα της σφαίρας S^{n-1} με την γεωδαισιακή μετρική ρ και το αναλλοίωτο ως προς τις στροφές μέτρο πιθανότητας σ, από το Θεώρημα 1.1 (ποσοτική εκδοχή της σφαιρικής ισοπεριμετρικής ανισότητας) παίρνουμε

$$\alpha(S^{n-1}, \varepsilon) \leq c_1 \exp(-c_2\varepsilon^2 n), \tag{2.3}$$

όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές. Επιπλέον, έχουμε μία οικογένεια τέτοιων χώρων, την $\{S^{n-1}\}_{n\in\mathbf{N}}$, και η διάσταση n παίζει ολοένα μεγαλύτερο ρόλο στην ανισότητα (2.3) με την έννοια οτι το άνω φράγμα φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς $n \to \infty$. Το φαινόμενο αυτό της συγκέντρωσης του μέτρου μάς έδωσε κάποια πρώτα μη–αναμενόμενα αποτελέσματα γιά την συμπεριφορά των Lipschitz συναρτήσεων πάνω στην S^{n-1} όταν το n είναι μεγάλο.

Με πρότυπο αυτό το παράδειγμα, δίνουμε τον ακόλουθο γενικό ορισμό:

2.3 Ορισμός. Μιά οικογένεια (X_n, ρ_n, μ_n) μετρικών χώρων πιθανότητας λέγεται (κανονική) οικογένεια Lévy με σταθερές c_1, c_2 αν οι συναρτήσεις συγκέντρωσης $\alpha(X_n, \varepsilon)$ ικανοποιούν την

$$\alpha(X_n, \varepsilon) \leq c_1 \exp(-c_2 \varepsilon^2 n) \tag{2.4}$$

γιά κάθε $\varepsilon > 0$.

2.4. Σε κάθε οικογένεια Lévy παρατηρούμε το φαινόμενο της συγκέντρωσης των τιμών μιάς συνάρτησης Lipschitz γύρω από τον μέσο Lévy της. Αν $f : X \to \mathbf{R}$ είναι μιά Lipschitz συνεχής συνάρτηση με σταθερά $L > 0$, τότε γιά κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε

$$\mu(\{x \in X : |f(x) - M_f| \leq \varepsilon\}) \geq 1 - 2\alpha(X, \frac{\varepsilon}{L}). \tag{2.5}$$

Η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με αυτήν του Θεωρήματος 1.7. Αν η συνάρτηση συγκέντρωσης $\alpha(X, \varepsilon)$ είναι αρκετά μικρή, κάτι που συμβαίνει σε μιά οικογένεια Lévy $\{X_n\}$ γιά μεγάλα n, τότε κάθε L-Lipschitz συνάρτηση είναι «σχεδόν σταθερή» και ίση με M_f στο μεγαλύτερο κομμάτι του X.

Στην επόμενη παράγραφο θα μελετήσουμε ένα διακριτό παράδειγμα οικογένειας Lévy.

3. Διακριτά παραδείγματα οικογενειών Lévy: Ο χώρος του Cantor E_2^n.

Θεωρούμε το σύνολο $E_2^n = \{-1, 1\}^n$ όλων των ακολουθιών $x = (x_1, \ldots, x_n)$ μήκους n, όπου $x_j = \pm 1$, $j = 1, \ldots, n$. Είναι χρήσιμο να βλέπουμε ταυτόχρονα τον E_2^n σαν υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$: αποτελείται από όλες τις κορυφές του κύβου $Q_n = [-1, 1]^n$.

Ορίζουμε μιά μετρική d_n στον E_2^n θέτοντας

$$d_n(x, y) = \frac{1}{n} |\{i \leq n : x_i \neq y_i\}| = \frac{1}{2n} \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \tag{3.1}$$

όπου με $|\cdot|$ συμβολίζουμε εδώ και τον πληθάριθμο ενός πεπερασμένου συνόλου. [Η δεύτερη ισότητα δικαιολογείται από το γεγονός οτι αν γιά κάποιο $i \leq n$ ισχύει $x_i \neq y_i$, τότε $|x_i - y_i| = 2$.]

Τέλος, θεωρούμε το φυσιολογικό μέτρο πιθανότητας στον E_2^n: Αν $A \subseteq E_2^n$, τότε

$$\mu_n(A) = \frac{|A|}{|E_2^n|} = \frac{|A|}{2^n}. \tag{3.2}$$

Ο (E_2^n, d_n, μ_n) είναι τότε ένας μετρικός χώρος πιθανότητας, μπορούμε συνεπώς να συζητάμε γιά την ισοπεριμετρική ανισότητα και την συνάρτηση συγκέντρωσης αυτού.

Η ισοπεριμετρική ανισότητα στον E_2^n. Η ε–επέκταση ενός $A \subseteq E_2^n$ είναι ως συνήθως το σύνολο $A_\varepsilon = \{x \in E_2^n : d_n(x, A) \leq \varepsilon\}$. Οι τιμές που μπορεί να πάρει η d_n είναι πεπερασμένες το πλήθος: $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$. Αυτές λοιπόν είναι και οι τιμές του ε γιά τις οποίες η ε–επέκταση του A παρουσιάζει ενδιαφέρον, με την έννοια οτι το A_ε παραμένει αμετάβλητο όταν το ε παίρνει τιμές σε ένα διάστημα της μορφής $[\frac{k}{n}, \frac{k+1}{n})$.

Το ερώτημα εδώ είναι το εξής: Μάς δίνουν έναν φυσικό $m = 1, 2, \ldots, 2^n$ και κάποιο $\varepsilon = \frac{k}{n}$, $k = 1, \ldots, n$. Γιά ποιό σύνολο A με πλήθος στοιχείων m είναι η $\frac{k}{n}$–επέκταση του A η μικρότερη δυνατή·

Η παρατήρηση είναι οτι το A θα πρέπει να έχει όσο το δυνατόν «λιγότερα κενά». Αν περιέχει μιά n–άδα $x = (x_1, \ldots, x_n)$, τότε θα πρέπει να περιέχει κατά σειρά προτεραιότητας και τις «γειτονικές» της n–άδες, αυτές δηλαδή που διαφέρουν από την x σε μία συντεταγμένη, δύο συντεταγμένες, κ.ο.κ. (εφόσον το πλήθος των στοιχείων του A επαρκεί). Αυτό, γιατί η παραμικρή επέκταση του A θα τις συμπεριλάβει ούτως ή άλλως.

Τα πιό οικονομικά σύνολα είναι οι d_n–μπάλες (οι λεγόμενες Hamming μπάλες του E_2^n). Αποδεικνύεται η ακόλουθη ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον E_2^n:

3.1 Θεώρημα (Harper). *Εστω $A \subseteq E_2^n$ με $m = \sum_{k=0}^{l} \binom{n}{k}$ στοιχεία. Τότε, γιά κάθε $s = 1, \ldots, n-l$, έχουμε*

$$\mu_n(A_{\frac{s}{n}}) \geq \frac{1}{2^n} \sum_{k=0}^{l+s} \binom{n}{k} = \mu_n((B, \frac{l}{n})_{\frac{s}{n}}). \quad \square \tag{3.3}$$

Η ισοπεριμετρική αυτή ανισότητα οδηγεί σε μιά εκτίμηση της συνάρτησης συγκέντρωσης του E_2^n. Γιά κάθε $\varepsilon > 0$, ισχύει

$$\alpha(E_2^n, \varepsilon) \leq \frac{1}{2} \exp(-2\varepsilon^2 n). \tag{3.4}$$

Δηλαδή, η $\{(E_2^n, d_n, \mu_n) : n \in \mathbf{N}\}$ είναι οικογένεια Λέψ με σταθερές $(\frac{1}{2}, 2)$. Η (3.4) ερμηνεύεται ως εξής: για να εκτιμήσουμε την $\alpha(E_2^n, \varepsilon)$ αρκεί να θέσουμε $l = n/2$ και $s = \varepsilon n$ στην (3.3). Τότε,

$$\alpha(E_2^n, \varepsilon) \leq \frac{1}{2^n} \sum_{j=(\frac{1}{2}+\varepsilon)n}^{n} \binom{n}{j},$$

το οποίο φθίνει εκθετικά στο 0 καθώς $n \to \infty$, γιατί οι «ακραίοι» διωνυμικοί συντελεστές είναι πολύ μικροί σε σύγκριση με τους «μεσαίους» όταν το n είναι μεγάλο.

Δεν θα αποδείξουμε την ανισότητα του Harper (η απόδειξη είναι συνδυαστική και γίνεται με επαγωγή ως προς n). Θα δώσουμε όμως μιά απόδειξη της «προσεγγιστικής ισοπεριμετρικής ανισότητας» στον E_2^n, απευθείας δηλαδή εκτίμηση της συνάρτησης συγκέντρωσής του. Το επιχείρημα οφείλεται στον Talagrand, και εκμεταλλεύεται την γεωμετρία του χώρου του Cantor:

3.2 Λήμμα. *Εστω A μη–κενό υποσύνολο του $\{-1,1\}^n \subset \mathbf{R}^n$. Θεωρούμε την κυρτή θήκη $\mathrm{co}(A)$ και γιά κάθε $x \in \{-1,1\}^n$ ορίζουμε*

$$d_A(x) = \min\{|x-y| : y \in \mathrm{co}(A)\}. \tag{3.5}$$

Τότε, ισχύει η ανισότητα

$$\int_{E_2^n} \exp(d_A^2(x)/8)d\mu_n(x) \leq \frac{1}{\mu_n(A)}. \tag{3.6}$$

Απόδειξη: Εξετάζουμε πρώτα την περίπτωση που το A έχει ένα στοιχείο. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε οτι το (μοναδικό) στοιχείο του A είναι το $y = (1, \ldots, 1)$. Προφανώς $\mathrm{co}(A) = A$, και γιά κάθε $i = 0, 1, \ldots, n$ υπάρχουν ακριβώς $\binom{n}{i}$ στοιχεία x του E_2^n τα οποία διαφέρουν σε i το πλήθος συντεταγμένες από το y. Γιά κάθε τέτοιο x έχουμε $d_A(x) = 2\sqrt{i}$, άρα

$$\begin{aligned}\int_{E_2^n} \exp(d_A^2(x)/8)d\mu_n(x) &= \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}e^{i/2} \\ &= \left(\frac{1+\sqrt{e}}{2}\right)^n \leq 2^n = \frac{1}{\mu_n(A)}.\end{aligned} \tag{3.7}$$

Ταυτόχρονα έχουμε αποδείξει πλήρως το Λήμμα στην περίπτωση $n = 1$, αφού η μοναδική περίπτωση που απομένει να εξετάσουμε είναι η $A = \{-1, 1\}$: τότε $d_A(x) = 0$ γιά κάθε $x \in \{-1, 1\}$ και $\mu_1(A) = 1$, άρα έχουμε ισότητα στην (3.6).

Η απόδειξη του Λήμματος θα γίνει με επαγωγή ως προς n: υποθέτουμε οτι ισχύει γιά τον φυσικό n και θα το αποδείξουμε γιά τον φυσικό $n + 1$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε οτι το A έχει τουλάχιστον δύο στοιχεία τα οποία διαφέρουν στην τελευταία τους συντεταγμένη. Ταυτίζοντας το E_2^{n+1} με το $E_2^n \times \{-1, 1\}$, μπορούμε να γράψουμε το A στη μορφή

$$A = A_{-1} \times \{-1\} \cup A_{+1} \times \{1\} \tag{3.8}$$

όπου τα A_{-1}, A_{+1} είναι μη–κενά υποσύνολα του E_2^n. Τέλος, μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\mu_n(A_{-1}) \leq \mu_n(A_{+1})$.

Εστω $x \in E_2^n$. Υπάρχει $w \in \mathrm{co}(A_{+1})$ τέτοιο ώστε $d_{A_{+1}}(x) = |x - w|$. Ομως τότε $(w, 1) \in \mathrm{co}(A)$, συνεπώς

$$d_A((x, 1)) \leq |(x, 1) - (w, 1)| = |x - w| = d_{A_{+1}}(x). \tag{3.9}$$

Ισχυρισμός: *Αν $x \in E_2^n$ και $0 \leq \alpha \leq 1$, τότε*

$$d_A^2((x, -1)) \leq 4\alpha^2 + \alpha d_{A_{+1}}^2(x) + (1 - \alpha)d_{A_{-1}}^2(x). \tag{3.10}$$

Απόδειξη του ισχυρισμού: Γιά $i = 1, -1$ θεωρούμε $z_i \in \mathrm{co}(A_i)$ τέτοια ώστε $|x - z_i| = d_{A_i}(x)$. Είναι φανερό οτι $(z_i, i) \in \mathrm{co}(A)$, επομένως $z = (\alpha z_{+1} + (1-\alpha)z_{-1}, -1+2\alpha) \in \mathrm{co}(A)$. Από το Πυθαγόρειο θεώρημα στον $\mathbf{R}^{n+1}$ παίρνουμε

$$|(x, -1) - z|^2 = 4\alpha^2 + |x - (\alpha z_{+1} + (1-\alpha)z_{-1})|^2 = 4\alpha^2 + |\alpha(x - z_{+1}) + (1-\alpha)(x - z_{-1})|^2, \tag{3.11}$$

και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την κυρτότητα της $x \to x^2$ βλέπουμε οτι

(3.12)

$$|(x,-1)-z|^2 \leq 4\alpha^2+\alpha|x-z_{+1}|^2+(1-\alpha)|x-z_{-1}|^2 = 4\alpha^2+\alpha d^2_{A_{+1}}(x)+(1-\alpha)d^2_{A_{-1}}(x).$$

Επεται η (3.10). □

Συνεχίζουμε την απόδειξη του Λήμματος ως εξής: Χρησιμοποιώντας τις (3.9) και (3.10), γιά κάθε $0 \leq \alpha \leq 1$ έχουμε

$$\begin{aligned}(3.13)\qquad & \int_{E_2^{n+1}} \exp(d_A^2(x)/8)d\mu_{n+1}(x) \\ &= \frac{1}{2^{n+1}}\left(\sum_{x\in E_2^n}\exp(d_A^2((x,1))/8)+\sum_{x\in E_2^n}\exp(d_A^2((x,-1))/8)\right) \\ &\leq \frac{1}{2}\int_{E_2^n}\exp(d^2_{A_{+1}}(x)/8)d\mu_n(x)+\frac{1}{2}\int_{E_2^n}\exp(\alpha^2/2 \\ &\quad +\alpha d^2_{A_{+1}}(x)/8+(1-\alpha)d^2_{A_{-1}}(x)/8)d\mu_n(x).\end{aligned}$$

Ομως από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$(3.14)\qquad \int_{E_2^n}\exp(d^2_{A_{+1}}(x)/8)d\mu_n(x) \leq \frac{1}{\mu_n(A_{+1})},$$

και εφαρμόζοντας την ανισότητα του Hölder παίρνουμε

$$\begin{aligned}(3.15)\qquad & \int_{E_2^n}\exp(\alpha^2/2+\alpha d^2_{A_{+1}}(x)/8+(1-\alpha)d^2_{A_{-1}}(x)/8)d\mu_n(x) \\ &\leq \frac{e^{\alpha^2/2}}{2}\left(\int_{E_2^n}\exp(d^2_{A_{+1}}/8)d\mu_n\right)^{\alpha}\left(\int_{E_2^n}\exp(d^2_{A_{-1}}/8)d\mu_n\right)^{1-\alpha} \\ &\leq \frac{e^{\alpha^2/2}}{2}\left(\frac{1}{\mu_n(A_{+1})}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{\mu_n(A_{-1})}\right)^{1-\alpha}.\end{aligned}$$

Θέτουμε $x = 1/\mu_n(A_{+1})$, $y = 1/\mu_n(A_{-1})$. Από την υπόθεσή μας είναι $x \leq y$. Συνδυάζοντας τις (3.13), (3.14) και (3.15) βλέπουμε οτι αρκεί για δοσμένα $0 < x \leq y$ να βρούμε $\alpha \in [0,1]$ που να ικανοποιεί την

$$(3.16)\qquad \frac{x}{2}+\frac{1}{2}e^{\alpha^2/2}x^{\alpha}y^{1-\alpha} \leq \frac{2}{x^{-1}+y^{-1}}.$$

Επιλέγουμε $\alpha = 1-\frac{x}{y}$. Η επιλογή αυτή ουσιαστικά λέει οτι όσο πιό μεγάλο είναι το A_{+1} από το A_{-1} τόσο πιό μεγάλο ρόλο θέλουμε να παίξει στην (3.10), δηλαδή επιλέγουμε το α κοντά στο 1. Η (3.16) παίρνει τότε τη μορφή

$$(3.17)\qquad 1+e^{\alpha^2/2}(1-\alpha)^{\alpha-1} \leq \frac{4}{2-\alpha},$$

γιά την οποία ελέγχουμε οτι ισχύει για κάθε $\alpha \in [0,1]$. □

Εστω A μη–κενό υποσύνολο του E_2^n. Η συνάρτηση d_A του Λήμματος 3.2 και η συνάρτηση απόστασης από το A

$$d_n(x,A) = \min\{\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n}|x_i - y_i| : y \in A\}$$

συγκρίνονται σύμφωνα με το επόμενο λήμμα:

3.3 Λήμμα. *Γιά κάθε μη–κενό $A \subseteq E_2^n$ έχουμε*

$$2\sqrt{n}d_n(x,A) \leq d_A(x) \quad , \quad x \in E_2^n. \tag{3.18}$$

Απόδειξη: Εστω $x \in E_2^n$. Γιά κάθε $y \in A$ ισχύει

$$\langle x-y, x\rangle = \sum_{i=1}^{n} x_i(x_i - y_i) = 2nd_n(x,y) \geq 2nd_n(x,A). \tag{3.19}$$

Από την (3.19) έπεται οτι γιά κάθε $y \in \mathrm{co}(A)$

$$\sqrt{n}|x-y| \geq \langle x-y, x\rangle \geq 2nd_n(x,A). \tag{3.20}$$

Αυτό αποδεικνύει την (3.18). □

Συνδυάζοντας τα δύο παραπάνω λήμματα δείχνουμε την ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον E_2^n:

3.4 Θεώρημα. *Εστω $A \subseteq E_2^n$ με $\mu_n(A) = \frac{1}{2}$. Τότε, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ έχουμε*

$$\mu_n(A_\varepsilon) \geq 1 - 2\exp(-\varepsilon^2 n/2). \tag{3.21}$$

Απόδειξη: Αν $x \notin A_\varepsilon$, τότε $d_n(x,A) \geq \varepsilon$ και το Λήμμα 3.3 δείχνει οτι $d_A(x) \geq 2\varepsilon\sqrt{n}$.

Ομως, από το Λήμμα 3.2 έχουμε

$$e^{\varepsilon^2 n/2}\mu_n(x : d_A(x) \geq 2\varepsilon\sqrt{n}) \leq \int_{E_2^n} \exp(d_A^2(x)/8)d\mu_n(x) \leq \frac{1}{\mu_n(A)} = 2, \tag{3.22}$$

το οποίο σημαίνει οτι

$$\mu_n(A_\varepsilon^c) \leq \mu_n(x : d_A(x) \geq 2\varepsilon\sqrt{n}) \leq 2\exp(-\varepsilon^2 n/2). \quad \square \tag{3.23}$$

Η ανισότητα του Θεωρήματος 3.4 δίνει την εκτίμηση

$$\alpha(E_2^n, \varepsilon) \leq 2\exp(-\varepsilon^2 n/2),$$

που είναι λίγο ασθενέστερη από την (3.4).

4. Η ισοπεριμετρική ανισότητα στον χώρο του Gauss.

Σ'αυτήν την παράγραφο, ο χώρος πιθανότητας που θα μελετήσουμε είναι ο $\Omega = \mathbf{R}^n$ με την Ευκλείδεια μετρική $|\cdot|$ και το μέτρο πιθανότητας γ_n που έχει πυκνότητα την συνάρτηση

$$\gamma_n(x) = (2\pi)^{-n/2} e^{-|x|^2/2}. \tag{4.1}$$

Δηλαδή, αν A είναι ένα μη–κενό υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$, τότε

$$\gamma_n(A) = \mathrm{Prob}(x \in A) = \frac{1}{(2\pi)^{n/2}} \int_A e^{-|x|^2/2} dx. \tag{4.2}$$

Το γ_n ονομάζεται *μέτρο του Gauss* και ο μετρικός χώρος πιθανότητας $(\mathbf{R}^n, |\cdot|, \gamma_n)$ *χώρος του Gauss.*

Η στενή σχέση ανάμεσα στο μέτρο του Gauss και το μέτρο στην σφαίρα έχει παρατηρηθεί από τις αρχές του αιώνα. Το γ_n είναι αναλλοίωτο ως προς τις στροφές όπως και το σ στην S^{n-1}. Πιό συγκεκριμένα, μπορεί κανείς να πάρει το γ_n σαν όριο σφαιρικών μέτρων. Αυτή είναι η λεγόμενη *παρατήρηση του Poincaré*:

Για κάθε $N \geq n$, θεωρούμε τη μπάλα του $\mathbf{R}^N$ που έχει κέντρο το 0 και ακτίνα $\sqrt{N}$. Ορίζουμε ένα μέτρο πιθανότητας $\nu_{N,n}$ στον $\mathbf{R}^n$ ως εξής: Για δοσμένο συμπαγές υποσύνολο A του $\mathbf{R}^n$ θεωρούμε τον κύλινδρο $K_{N,n}(A) = \{x \in \mathbf{R}^N : P_{N,n}(x) \in A\}$, και την τομή του $K_{N,n}(A) \cap \sqrt{N} D_N$ με την $\sqrt{N} D_N$. Θέτουμε

$$\nu_{N,n}(A) = \frac{|K_{N,n}(A) \cap \sqrt{N} D_N|}{|\sqrt{N} D_N|}. \tag{4.3}$$

Επεται οτι (για N μεγάλο)

$$\nu_{N,n}(A) = \frac{\int_A |D_{N-n}|(N - |x|^2)^{\frac{N-n}{2}} dx}{N^{N/2}|D_N|}, \tag{4.4}$$

και ένας υπολογισμός με την συνάρτηση Γάμμα δείχνει οτι

$$\nu_{N,n}(A) \to (2\pi)^{-n/2} \int_A \exp(-|x|^2/2) dx = \gamma_n(A) \tag{4.5}$$

καθώς $N \to \infty$.

Τελείως ανάλογα, μπορούμε να ορίσουμε μιά ακολουθία μέτρων πιθανότητας $\mu_{N,n}$ στον $\mathbf{R}^n$ μέσω της

$$\mu_{N,n}(A) = \sigma_N \left(K_{N,n}(A) \cap \sqrt{N} S^{N-1} \right) \quad , \quad N \geq n. \tag{4.6}$$

Τότε,

$$\mu_{N,n}(A) \to \gamma_n(A) \tag{4.7}$$

καθώς $N \to \infty$, γιά κάθε Borel υποσύνολο A του $\mathbf{R}^n$.

Με βάση αυτήν την παρατήρηση μπορούμε να αποδείξουμε μιά ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον χώρο του Gauss, ξεκινώντας από την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Η ε–επέκταση του A ορίζεται κι εδώ ως συνήθως:

$$A_\varepsilon = A + \varepsilon D_n = \{x \in \mathbf{R}^n : \exists y \in A : |x-y| \leq \varepsilon\}. \tag{4.8}$$

Ρωτάμε λοιπόν το εξής:

Δίνονται $\alpha \in (0,1)$ και $\varepsilon > 0$. Από όλα τα Borel υποσύνολα A του $\mathbf{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \alpha$, να βρεθούν εκείνα γιά τα οποία ελαχιστοποιείται το $\gamma_n(A_\varepsilon)$.

Το θεώρημα που θα αποδείξουμε παρακάτω οφείλεται στον C. Borell και ισχυρίζεται οτι η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος στον χώρο του Gauss δίνεται από τους ημιχώρους του κατάλληλου μέτρου. Η απόδειξη βασίζεται στην παρατήρηση του Poincaré (είναι χρήσιμο να παρατηρήσει κανείς οτι αν H είναι ημίχωρος, τότε για μεγάλα N η τομή του $K_{N,n}(H)$ με την $\sqrt{N}S^{N-1}$ είναι μια μπάλα στην $\sqrt{N}S^{N-1}$, η λύση δηλαδή του ισοπεριμετρικού προβλήματος στη σφαίρα):

4.1 Θεώρημα. *Εστω $\alpha \in (0,1)$, $\theta \in S^{n-1}$, και $H = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, \theta\rangle \leq \lambda\}$ ένας ημίχωρος του $\mathbf{R}^n$ με $\gamma_n(H) = \alpha$. Τότε, γιά κάθε $\varepsilon > 0$ και κάθε Borel $A \subseteq \mathbf{R}^n$ με $\gamma_n(A) = \alpha$, έχουμε*

$$\gamma_n(A_\varepsilon) \geq \gamma_n(H_\varepsilon). \tag{4.9}$$

Απόδειξη: Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε οτι το A είναι συμπαγές. Θεωρούμε $\lambda' < \lambda$, και τον ημίχωρο $H' = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, \theta\rangle \leq \lambda'\}$. Τότε $\gamma_n(A) > \gamma_n(H')$, επομένως η (4.7) μας δίνει

$$\sigma(P_{N,n}^{-1}(A)) > \sigma(P_{N,n}^{-1}(H')) \tag{4.10}$$

για μεγάλα N, όπου $P_{N,n}$ η ορθογώνια προβολή του $\mathbf{R}^N$ στον $\mathbf{R}^n$. Για μεγάλα N το $P_{N,n}^{-1}(H')$ είναι μπάλα στην $\sqrt{N}S^{N-1}$, οπότε η σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα μας δίνει

$$\sigma([P_{N,n}^{-1}(A)]_\varepsilon) \geq \sigma([P_{N,n}^{-1}(H')]_\varepsilon) \tag{4.11}$$

για κάθε $\varepsilon > 0$. Επίσης, εύκολα ελέγχουμε οτι

$$P_{N,n}^{-1}(A_\varepsilon) \supseteq [P_{N,n}^{-1}(A)]_\varepsilon. \tag{4.12}$$

Από την άλλη πλευρά $[P_{N,n}^{-1}(H')]_\varepsilon = P_{N,n}^{-1}(F)$, όπου $F = \{x \in \mathbf{R}^n : \langle x, \theta\rangle \leq \lambda' + \varepsilon(N)\}$ και $\varepsilon(N) \to \varepsilon$ όταν $N \to \infty$.

Παίρνοντας όρια στην (4.11) συμπεραίνουμε οτι

$$\gamma_n(A_\varepsilon) \geq \gamma_n(H'_\varepsilon), \tag{4.13}$$

και αφού ο H' είναι οσοδήποτε κοντά στον H, ολοκληρώνουμε την απόδειξη του θεωρήματος. $\square$

4.2 Πόρισμα. *Αν $\gamma_n(A) \geq \frac{1}{2}$ και $\varepsilon > 0$, τότε*

$$1 - \gamma_n(A_\varepsilon) \leq \frac{1}{2}\exp(-\varepsilon^2/2). \tag{4.14}$$

Απόδειξη: Από το Θεώρημα 4.1 ξέρουμε οτι

$$1 - \gamma_n(A_\varepsilon) \leq 1 - \gamma_n(H_\varepsilon)$$

όπου H ημίχωρος μέτρου $\frac{1}{2}$. Μπορούμε να υποθέσουμε οτι $H = \{x \in \mathbf{R}^n : x_1 \leq 0\}$, οπότε ολοκληρώνοντας πρώτα ως προς $x_2, \dots, x_n$ βλέπουμε οτι

$$1 - \gamma_n(H_\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_\varepsilon^\infty e^{-t^2/2} dt. \tag{4.15}$$

Παραγωγίζοντας δείχνουμε οτι η συνάρτηση

$$F(x) = e^{x^2/2} \int_x^\infty e^{-t^2/2} dt$$

είναι φθίνουσα στο $[0, \infty)$, και σε συνδυασμό με την (4.15) παίρνουμε την (4.14). $\square$

4.3 Παρατήρηση. Η ανισότητα (4.14) εκτιμάει την συνάρτηση συγκέντρωσης στον χώρο του Gauss ως εξής:

$$\alpha(\Omega_n; \varepsilon) \leq \frac{1}{2}\exp(-\varepsilon^2/2). \tag{4.16}$$

Μοιάζει διαφορετική (και ασθενέστερη) από τις αντίστοιχες εκτιμήσεις που πήραμε γιά τις οικογένειες Lévy των προηγουμένων παραγράφων. Η βασική διαφορά όμως είναι οτι εδώ έχουμε άπειρη διάμετρο γιά τον μετρικό χώρο πιθανότητας που μελετάμε. Μάλιστα, ένας απλός υπολογισμός δείχνει οτι το μεγαλύτερο ποσοστό του γ_n είναι συγκεντρωμένο σε έναν λεπτό φλοιό γύρω από την σφαίρα $\sqrt{n}S^{n-1}$. Με αυτήν την έννοια, η «ουσιαστική» διάμετρος του χώρου $(\mathbf{R}^n, |\cdot|, \gamma_n)$ είναι περίπου $\sqrt{n}$. Η ανισότητα λοιπόν που δείξαμε είναι «ισοδύναμη» με την σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά την $\sqrt{n}S^{n-1}$. Αντί γιά την ε–επέκταση ενός συνόλου A θα ήταν πιό φυσιολογικό να θεωρούμε την $\varepsilon\sqrt{n}$–επέκταση του A. Τότε, η (4.14) θα έπαιρνε την γνώριμή μας μορφή

$$1 - \gamma_n(A_{\varepsilon\sqrt{n}}) \leq \frac{1}{2}\exp(-\varepsilon^2 n/2). \tag{4.17}$$

Θα δώσουμε μία ακόμα απόδειξη του Πορίσματος 4.2 (με λίγο χειρότερες σταθερές). Γιά το σκοπό αυτό αποδεικνύουμε πρώτα την *ανισότητα των Prékopa και Leindler* η οποία μπορεί ουσιαστικά να θεωρηθεί μιά τέταρτη απόδειξη της ανισότητας Brunn - Minkowski:

4.4 Θεώρημα. *Εστω $f, g, m : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^+$ μετρήσιμες συναρτήσεις, και $\lambda \in (0,1)$ με την ιδιότητα*

$$m((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \tag{4.18}$$

γιά κάθε $x, y \in \mathbf{R}^n$. Τότε,

$$\int m \geq \left(\int f\right)^{1-\lambda} \left(\int g\right)^{\lambda}. \tag{4.19}$$

Παρατήρηση. Η ανισότητα Brunn - Minkowski είναι άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 4.4. Αν A, B είναι μη-κενά, συμπαγή και $\lambda \in (0,1)$, αρκεί να πάρουμε σαν f, g και m τις χαρακτηριστικές συναρτήσεις των A, B, και $(1-\lambda)A + \lambda B$ αντίστοιχα. Εύκολα ελέγχουμε οτι αυτή η τριάδα ικανοποιεί την (4.18), και η (4.19) μας δίνει

$$|(1-\lambda)A + \lambda B| = \int m \geq \left(\int f\right)^{1-\lambda} \left(\int g\right)^{\lambda} = |A|^{1-\lambda}|B|^{\lambda}. \tag{4.20}$$

Το γεγονός οτι η (4.20) ισχύει γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$ μας εξασφαλίζει την ανισότητα Brunn - Minkowski γιά τα A και B.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.4: Σαν πρώτο βήμα της απόδειξης ελέγχουμε την μονοδιάστατη ανισότητα Brunn - Minkowski. Εστω A και B μη–κενά συμπαγή υποσύνολα της πραγματικής ευθείας. Αυτό που θέλουμε να δείξουμε είναι οτι γιά κάθε $\lambda \in (0,1)$ ισχύει

$$|(1-\lambda)A + \lambda B| \geq (1-\lambda)|A| + \lambda|B|. \tag{4.21}$$

Η (4.21) είναι ανεξάρτητη από μεταφορές των A και B, μπορούμε επομένως να υποθέσουμε οτι το A έχει δεξιό του άκρο το 0 και το B έχει αριστερό του άκρο το 0. Τότε, το $(1-\lambda)A + \lambda B$ περιέχει ξένα αντίτυπα των $(1-\lambda)A$ και λB, επομένως το μέτρο του είναι τουλάχιστον το άθροισμα των μέτρων αυτών των δύο συνόλων.

Δείχνουμε πρώτα το Θεώρημα στην περίπτωση $n = 1$. Εστω $f, g, m : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^+$ που ικανοποιούν την (4.18). Μπορούμε να υποθέσουμε οτι οι f και g είναι φραγμένες, και διαιρώντας αν χρειαστεί τις f, g, m με $\|f\|_\infty, \|g\|_\infty$ και $\|f\|_\infty^{1-\lambda}\|g\|_\infty^{\lambda}$ μπορούμε να υποθέσουμε οτι $\sup f = \sup g = 1$.

Από την (4.18), αν $t \geq 0$ και $f(x) \geq t$, $g(y) \geq t$, τότε

$$m((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f(x)^{1-\lambda} g(y)^{\lambda} \geq t^{1-\lambda} t^{\lambda} = t, \tag{4.22}$$

δηλαδή γιά κάθε $t \geq 0$ ισχύει ο εγκλεισμός

$$\{x : m(x) \geq t\} \supseteq (1-\lambda)\{x : f(x) \geq t\} + \lambda\{x : g(x) \geq t\}. \tag{4.23}$$

Χρησιμοποιώντας την (4.21) έχουμε

$$|\{m \geq t\}| \geq (1-\lambda)|\{f \geq t\}| + \lambda|\{g \geq t\}| \tag{4.24}$$

γιά κάθε $t \geq 0$. Γράφοντας τα ολοκληρώματα συναρτήσει των συνόλων στάθμης βλέπουμε οτι

$$\int m = \int_0^\infty |\{m \geq t\}| dt \geq \int_0^1 |\{m \geq t\}| dt \tag{4.25}$$

$$\geq (1-\lambda)\int_0^1 |\{f \geq t\}| dt + \lambda \int_0^1 |\{g \geq t\}| dt = (1-\lambda)\int f + \lambda \int g.$$

Από την ανισότητα αριθμητικού–γεωμετρικού μέσου συμπεραίνουμε οτι

$$\int m \geq \left(\int f\right)^{1-\lambda} \left(\int g\right)^{\lambda}. \tag{4.26}$$

Υποθέτουμε τώρα οτι $n > 1$ και οτι το θεώρημα έχει αποδειχθεί στην περίπτωση $n-1$. Γιά κάθε $t \in \mathbf{R}$ θεωρούμε την συνάρτηση $f_t : \mathbf{R}^{n-1} \to \mathbf{R}^+$ με $f_t(y) = f(y,t)$, και ανάλογα ορίζουμε τις g_t και m_t. Η υπόθεση (4.18) μας λέει οτι γιά κάθε $t, s \in \mathbf{R}$ ισχύει

$$m_{(1-\lambda)t+\lambda s}((1-\lambda)x + \lambda y) \geq f_t(x)^{1-\lambda} g_s(y)^{\lambda} \tag{4.27}$$

γιά κάθε $x, y \in \mathbf{R}^{n-1}$. Εφαρμόζεται λοιπόν η επαγωγική υπόθεση και έχουμε

$$\int_{\mathbf{R}^{n-1}} m_{(1-\lambda)t+\lambda s} \geq \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} f_t\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g_s\right)^{\lambda} \tag{4.28}$$

γιά κάθε $t, s \in \mathbf{R}$. Αυτό σημαίνει οτι οι συναρτήσεις

$$t \to \int f_t \ \ , \ \ t \to \int g_t \ \ , \ \ t \to \int m_t \tag{4.29}$$

επίσης ικανοποιούν την (4.18). Εφαρμόζοντας λοιπόν το Θεώρημα ξανά (την περίπτωση $n = 1$ αυτήν τη φορά) παίρνουμε

$$\int m = \int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}^{n-1}} m_t) dt \geq \left(\int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}^{n-1}} f_t) dt\right)^{1-\lambda} \left(\int_{\mathbf{R}} (\int_{\mathbf{R}^{n-1}} g_t) dt\right)^{\lambda} \tag{4.30}$$

$$= \left(\int f\right)^{1-\lambda} \left(\int g\right)^{\lambda}.$$

Αυτό αποδεικνύει το επαγωγικό βήμα και το Θεώρημα. $\square$

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε μιά προσεγγιστική ισοπεριμετρική ανισότητα γιά τον χώρο του Gauss. Η ιδέα είναι πρόσφατη και έχει σχέση με το επιχείρημα του Talagrand που παρουσιάσαμε κατά τη μελέτη του E_2^n:

4.5 Θεώρημα. *Εστω A μη–κενό Borel υποσύνολο του $\mathbf{R}^n$. Τότε,*

$$\int_{\mathbf{R}^n} e^{d(x,A)^2/4} d\gamma_n(x) \leq \frac{1}{\gamma_n(A)}, \tag{4.31}$$

όπου $d(x,A)=\inf\{|x-y| : y\in A\}$. *Επομένως, αν* $\gamma_n(A)=\frac{1}{2}$ *τότε*

$$1-\gamma_n(A_\varepsilon)\leq 2\exp(-\varepsilon^2/4) \tag{4.32}$$

γιά κάθε $\varepsilon>0$.

Απόδειξη: Συμβολίζουμε με $\gamma_n(x)$ την συνάρτηση $(2\pi)^{-n/2}\exp(-|x|^2/2)$, και θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x)=e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(x)\ \ ,\ \ g(x)=\chi_A(x)\gamma_n(x)\ \ ,\ \ m(x)=\gamma_n(x). \tag{4.33}$$

Γιά κάθε $x\in\mathbf{R}^n$ και $y\in A$ έχουμε

$$\begin{aligned}(2\pi)^n f(x)g(y) &= e^{d(x,A)^2/4}e^{-|x|^2/2}e^{-|y|^2/2}\leq \exp(\frac{|x-y|^2}{4}-\frac{|x|^2}{2}-\frac{|y|^2}{2})\\ &= \exp(-\frac{|x+y|^2}{4}) = (\exp(-\frac{1}{2}|\frac{x+y}{2}|^2))^2\\ &= (2\pi)^n[m(\frac{x+y}{2})]^2,\end{aligned} \tag{4.34}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον κανόνα του παραλληλογράμμου και το γεγονός οτι $d(x,A)\leq |x-y|$. Δεδομένου οτι $g(y)=0$ αν $y\notin A$, η (4.34) μας λέει οτι οι f,g,m ικανοποιούν τις υποθέσεις της ανισότητας Prékopa - Leindler με $\lambda=\frac{1}{2}$. Εφαρμόζουμε λοιπόν το Θεώρημα 4.4 και έχουμε

$$\left(\int e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(dx)\right)\gamma_n(A)=\left(\int f\right)\left(\int g\right)\leq\left(\int m\right)^2=1. \tag{4.35}$$

Αυτό αποδεικνύει τον πρώτο ισχυρισμό του θεωρήματος. Γιά τον δεύτερο, παρατηρούμε οτι αν $\gamma_n(A)=\frac{1}{2}$ τότε

$$e^{\varepsilon^2/4}\gamma_n(x:d(x,A)\geq\varepsilon)\leq\int e^{d(x,A)^2/4}\gamma_n(dx)\leq\frac{1}{\gamma_n(A)}=2. \tag{4.36}$$

Δηλαδή, $\gamma_n(A_\varepsilon^c)\leq 2\exp(-\varepsilon^2/4)$. $\square$

4.6 Παρατήρηση. Αποδεικνύεται οτι το μέτρο του Gauss είναι λογαριθμικά κοίλο. Αν A,B είναι μη–κενά Borel υποσύνολα του $\mathbf{R}^n$ και $\lambda\in(0,1)$, τότε

$$\gamma_n((1-\lambda)A+\lambda B)\geq[\gamma_n(A)]^{1-\lambda}[\gamma_n(B)]^{\lambda}. \tag{4.37}$$

Η απόδειξη βασίζεται στην ανισότητα Brunn - Minkowski και έχει πολλές ομοιότητες με την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

1. H.G. Eggleston, *Convexity.*

2. M. Ledoux και M. Talagrand, *Probability in Banach spaces.*

3. V.D. Milman και G. Schechtman, *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces.*

4. G. Pisier, *The volume of convex bodies and Banach space geometry.*

5. R. Schneider, *Convex bodies: the Brunn-Minkowski theory.*

6. R.J. Webster, *Convexity.*