Προβλήματα παραμόρφωσης για εμφυτεύσεις πεπερασμένων μετρικών χώρων σε χώρους με νόρμα

Αναστάσιος Τσεσμετζής

Σχολή Εφαρμοσμένων Μαθηματικών
και Φυσικών Επιστημών
Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα 2005

Περιεχόμενα

Εισαγωγή

Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) με n σημεία αναπαρίσταται από τον $n \times n$ πίνακα $[\rho(x_i, x_j)]_{i,j=1}^n$. Τέτοιοι πίνακες εμφανίζονται, σαν αποτελέσματα μετρήσεων, σε διάφορες επιστημονικές περιοχές. Ένα κλασικό παράδειγμα είναι το εξής: X είναι ένα μεγάλο σύνολο από διαφορετικά είδη μικροοργανισμών, η *ανομοιότητα* των οποίων δίνεται από έναν αριθμό που υπολογίζεται με πειραματική σύγκριση κάποιου χαρακτηριστικού τους. Για την αξιοποίηση των δεδομένων είμαστε αναγκασμένοι να αναγνωρίσουμε τη δομή που κρύβει ένας μεγάλος πίνακας αριθμών. Η ιδέα είναι να αναπαραστήσουμε το μετρικό χώρο X (ισομετρικά ή περίπου ισομετρικά) μέσα σε ένα χώρο με νόρμα (για παράδειγμα, στον Ευκλείδειο χώρο) όπου θα «φαίνεται» η γεωμετρία της ρ.

Για παράδειγμα, θα ήταν πολύ χρήσιμο να καταφέρουμε να αντιστοιχίσουμε σε κάθε $u \in X$ κάποιο σημείο $f(u)$ στο επίπεδο, με τέτοιον τρόπο ώστε η απόσταση $\rho(u, v)$ να είναι ίση με την Ευκλείδεια απόσταση των $f(u)$ και $f(v)$. Μέσα από μια τέτοια αναπαράσταση θα μπορούσαμε να δούμε τη δομή του μετρικού χώρου: μεμονωμένα σημεία ή/και πυκνά συμπλέγματα σημείων θα εμφανίζονταν στο επίπεδο. Ένα άλλο πλεονέκτημα είναι ότι για να αποθηκεύσουμε όλη την πληροφορία για το μετρικό χώρο θα χρειαζόμασταν $2n$ πραγματικούς αριθμούς (τις συντεταγμένες των $f(u)$) αντί για $\binom{n}{2}$ αριθμούς. Επίσης, διάφορες παράμετροι που αφορούν ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο υπολογίζονται μέσω γεωμετρικών αλγορίθμων, ενώ αντίστοιχοι αλγόριθμοι δεν υπάρχουν για τον τυχόντα μετρικό χώρο.

Δεν είναι δύσκολο να σκεφτούμε παραδείγματα που να δείχνουν ότι η αναπαράσταση μέσω σημείων του επιπέδου δεν είναι δυνατή σε πλήρη γενικότητα. Αν θεωρήσουμε ένα μετρικό χώρο με τέσσερα σημεία που ανά δύο έχουν απόσταση ίση με 1 παίρνουμε ένα τέτοιο παράδειγμα.

Υπάρχουν μάλιστα μετρικοί χώροι με τέσσερα σημεία οι οποίοι δεν μπορούν να αναπαρασταθούν (ακριβώς) σε κανέναν Ευκλείδειο χώρο. Ένα τέτοιο παράδειγμα μας δίνουν οι κορυφές ενός τετραγώνου (με απόσταση δύο κορυφών το μικρότερο δυνατό πλήθος ακμών που πρέπει να διατρέξουμε για να πάμε από τη μία στην άλλη).

Με τον όρο *αναπαράσταση* εννοούμε μια *ισομετρική εμφύτευση*. Μια απεικόνιση $f : X \to Y$ από τον μετρικό χώρο (X, ρ) στον μετρικό χώρο (Y, d) λέγεται ισομετρική εμφύτευση αν διατηρεί τις αποστάσεις. Δηλαδή, αν $\sigma(f(x), f(y)) = \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. Για πολλές εφαρμογές θα μας αρκούσε να πετύχουμε μια εμφύτευση του μετρικού χώρου (X, ρ) στον μετρικό χώρο (Y, d) (για παράδειγμα, στον Ευκλείδειο χώρο) η οποία να παραμορφώνει τις αποστάσεις σε ένα *μικρό* *ποσοστό*. Ένας τρόπος να ορίσουμε την έννοια της *κατά προσέγγιση ισομετρικής εμφύτευσης* είναι ο εξής. Έστω $f : X \to Y$ μια εμφύτευση του μετρικού χώρου (X, d_X) στο μετρικό χώρο (Y, d_Y). Η *παραμόρφωση* της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{dist}(f) = \sup_{x\neq y} \frac{d_Y(f(x), f(y))}{d_X(x,y)} \cdot \sup_{x\neq y} \frac{d_X(x,y)}{d_Y(f(x), f(y))}.$$

Συμβολίζουμε με $c_Y(X)$ την ελάχιστη παραμόρφωση με την οποία ο X εμφυτεύεται στον Y. Αν $c_Y(X) \leq \alpha$ τότε λέμε ότι ο X είναι α-εμφυτεύσιμος στον Y.

Στο πρώτο μέρος της εργασίας μελετάμε το πρόβλημα της εμφύτευσης στον Ευκλείδειο χώρο. Τα βασικά αποτελέσματα της περιοχής είναι τα εξής.

(i) **Bourgain [1985]**: Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) με n σημεία εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο με παραμόρφωση $O(\log n)$. Δηλαδή,

$$\sup_{|X|=n} c_2(X) \leq c \log n,$$

όπου $c_2(X) = c_{\ell_2}(X)$. Η απόδειξη παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 3. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα των Johnson-Lindenstrauss, το οποίο αποδεικνύουμε στο Κεφάλαιο 2, μπορούμε να δούμε ότι η εμφύτευση μπορεί πάντα να γίνει σε Ευκλείδειο χώρο διάστασης $d = O(\log n)$. Δηλαδή, υπάρχει $c > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $n \geq 2$ μπορούμε να βρούμε $d \leq c \log n$ ώστε

$$\sup_{|X|=n} c_{\ell_2^d}(X) \leq c \log n.$$

(ii) **Enflo [1969]**: Έστω $m \geq 2$ και $n = 2^m$. Θεωρούμε τον «κύβο» $C_m = \{0,1\}^m$ εφοδιασμένο με τη μετρική Hamming: η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο 0/1 ακολουθιών x και y είναι το πλήθος των θέσεων στις οποίες διαφέρουν. Αν $\gamma < \sqrt{m} = \sqrt{\log_2 n}$ τότε δεν υπάρχει γ-εμφύτευση του C_m στον ℓ_2. Δηλαδή, η φυσιολογική εμφύτευση του C_m, αν τον θεωρήσουμε σαν υπόχωρο του ℓ_2^m, έχει τη βέλτιστη παραμόρφωση. Το αποτέλεσμα αυτό δείχνει ότι

$$\sup_{|X|=n} c_2(X) \geq c\sqrt{\log n}.$$

Η απόδειξη που παρουσιάζουμε (στο Κεφάλαιο 4) βασίζεται σε μια αναδιατύπωση του προβλήματος μέσω της θεωρίας του ημιορισμένου προγραμματισμού: Αν (X, ρ) είναι ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος με σημεία τα $x_1, \ldots, x_n$, τότε

$$c_2(X) = \max \sqrt{\frac{\sum_{p_{ij}>0} p_{ij}\rho(x_i,x_j)^2}{-\sum_{p_{ij}<0} p_{ij}\rho(x_i,x_j)^2}},$$

όπου το max παίρνεται πάνω από όλους τους συμμετρικούς θετικά ημιορισμένους $n \times n$ πίνακες $P = (p_{ij})$ που ικανοποιούν την $\sum_{j=1}^n p_{ij} = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.

(iii) **Linial, London, Rabinovich [1995]**: Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα. Η *αγωγιμότητα* $\Phi(G)$ του G είναι η ποσότητα

$$\min\left\{\frac{e(A, V\setminus A)}{|A|} : A\subset V, 1\le |A|\le \frac{1}{2}|V|\right\},$$

όπου $e(A, B)$ είναι το πλήθος των ακμών του G που συνδέουν σημείο του A με σημείο του B. Γενικά, λέμε ότι ένα γράφημα G είναι καλός expander αν η αγωγιμότητα $\Phi(G)$ δεν είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μέσο βαθμό του G. Υπάρχουν r-κανονικά γραφήματα με οσοδήποτε μεγάλο πλήθος κορυφών n και αγωγιμότητα $\Phi \ge c(r)$, όπου $c(r) > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από το n.

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε τα βασικά αποτελέσματα της φασματικής θεωρίας των γραφημάτων: μελετάμε τον πίνακα συνδεσμολογίας και τον πίνακα Laplace ενός r-κανονικού γραφήματος, και συγκρίνουμε την αγωγιμότητα του γραφήματος με το φασματικό του κενό. Συνέπεια αυτής της μελέτης είναι το εξής θεώρημα των Linial, London, Rabinovich: Έστω $G = (V, E)$ ένα r-κανονικό γράφημα με $|V| = n$ και $\Phi(G) \ge \beta$. Θεωρούμε τη μετρική ρ του συντομότερου μονοπατιού στο V. Αν ο (V, ρ) εμφυτεύεται με παραμόρφωση γ στον ℓ_2 τότε $\gamma \ge c\log n$, όπου η σταθερά $c = c(r, \beta) > 0$ είναι ανεξάρτητη από το n.

Αποδεικνύουμε επίσης την ύπαρξη μιας οικογένειας (G_k) 3-κανονικών γραφημάτων (με πλήθος κορυφών $|V_k| = 2k$) που είναι expanders: $\Phi(G_k) \ge c$, όπου $c > 0$ απόλυτη σταθερά. Έπεται ότι

$$\sup_{|X|=n} c_2(X) \ge c\log n.$$

Δηλαδή, το άνω φράγμα του Bourgain είναι (ασυμπτωτικά) ακριβές.

(iv) **Matousek [1996]**: Η *περιφέρεια* ενός γραφήματος G είναι το μήκος του συντομότερου κύκλου στο G. Γράφουμε $m(g, n)$ για το μέγιστο δυνατό πλήθος ακμών ενός απλού γραφήματος με n κορυφές το οποίο δεν περιέχει κύκλο με μήκος g ή μικρότερο από g (δηλαδή έχει περιφέρεια μεγαλύτερη ή ίση του $g + 1$).

Η ύπαρξη γραφημάτων G που έχουν n κορυφές, περιφέρεια $g+1$ και μεγάλο πλήθος ακμών $m(g, n)$, συνδέεται με το πρόβλημα της παραμόρφωσης. Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε το εξής αποτέλεσμα του Matousek: Έστω Z ένας r-διάστατος χώρος με νόρμα, για παράδειγμα κάποιος από τους ℓ_p^r, και ας υποθέσουμε ότι κάθε μετρικός χώρος με n σημεία εμφυτεύεται με παραμόρφωση γ στον Z. Έστω g ένας ακέραιος με $\gamma < g \le 5\gamma$. Τότε,

$$r \ge \frac{1}{\log_2\frac{16\gamma g}{g-\gamma}}\cdot\frac{m(g, n)}{n}.$$

Πόρισμα αυτού του αποτελέσματος και του Λήμματος των Johnson και Lindenstrauss είναι το εξής: για κάθε n, υπάρχουν μετρικοί χώροι με n σημεία οι οποίοι δεν εμφυτεύονται στον ℓ_2 με παραμόρφωση μικρότερη από

$c \log n / \log\log n$, όπου $c > 0$ κατάλληλη απόλυτη σταθερά. Δηλαδή,

$$\sup_{|X|=n} c_2(X) \geq c \frac{\log n}{\log\log n}.$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ασθενέστερο του ακριβούς κάτω φράγματος που δίνουν οι expanders. Είναι όμως τεχνικά απλούστερο και προηγείται χρονικά (με την ίδια βασικά ιδέα είχε αποδειχθεί από τον Bourgain).

(v) **Linial, Magen, Naor [2002]**: Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $G = (V, E)$ είναι ένα r-κανονικό γράφημα ($r \geq 3$) με n κορυφές και περιφέρεια ίση με g, τότε

$$c_2(G) \geq C\sqrt{g}.$$

Αν, επιπλέον, το G έχει φασματικό κενό $\varepsilon > 0$, τότε

$$c_2(G) \geq \frac{Cg}{\sqrt{\min\{g, r/\varepsilon\}}}.$$

Η απόδειξη αυτού του αποτελέσματος δίνεται στο Κεφάλαιο 6: χρησιμοποιεί τις τεχνικές των Κεφαλαίων 4 και 5 (τη μέθοδο του ημιορισμένου προγραμματισμού, τη φασματική θεωρία των γραφημάτων) και τα πολυώνυμα του Geronimus.

Στο δεύτερο μέρος της εργασίας μελετάμε *θεωρήματα τύπου Ramsey* για εμφυτεύσεις πεπερασμένων μετρικών χώρων σε χώρους με νόρμα. Θεωρήματα αυτού του είδους περιγράφουν ποσοτικά την εξής αρχή: κάθε μετρικός χώρος περιέχει «μεγάλο» υπόχωρο ο οποίος είναι «καλά δομημένος». Η λέξη «μεγάλος» αναφέρεται στον πληθάριθμο του υποχώρου, ενώ η φράση «καλά δομημένος» σημαίνει ότι ο υπόχωρος εμφυτεύεται με μικρή παραμόρφωση σε κάποιο χώρο από δεδομένη κλάση μετρικών χώρων (συνήθως, χώρων με νόρμα). Η θεωρία αυτή αναπτύσσεται παράλληλα με την *τοπική θεωρία χώρων Banach*. Η ελάχιστη παραμόρφωση αντιστοιχεί στην απόσταση Banach-Mazur και τα θεωρήματα τύπου Ramsey αντιστοιχούν σε διάφορες εκδόσεις του θεωρήματος του Dvoretzky για τους σχεδόν Ευκλείδειους υποχώρους χώρων (μεγάλης) πεπερασμένης διάστασης με νόρμα. Περιγράφουμε αναλυτικά τα εξής αποτελέσματα.

(i) **Bourgain, Figiel, Milman [1986]**: Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει σταθερά $c(\varepsilon) > 0$ με την εξής ιδιότητα: κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) με n σημεία έχει υπόχωρο Y με πληθάριθμο

$$|Y| \geq c(\varepsilon) \log n$$

ώστε ο (Y, ρ) να εμφυτεύεται στον ℓ_2 με παραμόρφωση μικρότερη από $(1 + \varepsilon)$. Επιπλέον, αν $0 < \varepsilon < 1$, μπορούμε να πάρουμε $c(\varepsilon) = c_1\varepsilon / \log(c_2/\varepsilon)$ όπου $c_1, c_2 > 0$ απόλυτες σταθερές. Το Θεώρημα των Bourgain, Figiel και Milman παρουσιάζεται στο Κεφάλαιο 7.

Η εξάρτηση από το n είναι βέλτιστη αν ενδιαφερόμαστε για «σχεδόν ισομετρικές» εμφυτεύσεις ($0 < \varepsilon < 1$): Υπάρχει $\varepsilon_0 > 0$ με την εξής ιδιότητα. Αν

$n \geq s \geq 3 + 2\log_2 n$, τότε υπάρχει μετρική d στο σύνολο $[n] = \{1, \ldots, n\}$ ώστε

$$c_2((X, d|_X)) \geq 1 + \varepsilon_0$$

για κάθε υποσύνολο X του $[n]$ με πληθάριθμο $|X| = s$. Επιπλέον, μπορούμε να επιλέξουμε την d να παίρνει μόνο τις τιμές 0, 1 και 2, οπότε $c_2(([n], d)) \leq 2$.

(ii) **Bartal, Linial, Mendel, Naor [2005]**: Στο τελευταίο Κεφάλαιο 8 μελετάμε την πρόσφατη «ισομορφική έκδοση» του προηγούμενου αποτελέσματος. Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $\alpha > 2$ και (X, d) είναι ένας μετρικός χώρος με n σημεία, τότε υπάρχει υπόχωρος Y του X με πληθάριθμο

$$|Y| \geq n^{1 - C\frac{\log a}{a}}$$

ο οποίος εμφυτεύεται σε Ευκλείδειο χώρο με παραμόρφωση μικρότερη από α. Δηλαδή, αν ξεπεράσουμε την τιμή $\alpha_0 = 2$ για τη ζητούμενη παραμόρφωση, τότε η εξάρτηση του $|Y|$ από το n γίνεται πολυωνυμική.

Μέρος I

Ευκλείδειες εμφυτεύσεις

Κεφάλαιο 1

Γραφήματα: βασικοί ορισμοί

Σε αυτό το σύντομο πρώτο κεφάλαιο εισάγουμε το συμβολισμό και την ορολογία που θα χρειαστούμε από τη Θεωρία Γραφημάτων. Ακολουθούμε τις σημειώσεις Διακριτών Μαθηματικών του Μ. Κολουντζάκη [7].

1.1 Απλά γραφήματα

Ορισμός 1.1.1 (απλό γράφημα). Ένα *απλό γράφημα* είναι ένα ζευγάρι $G = (V, E)$ όπου V είναι ένα πεπερασμένο (μη κενό) σύνολο και E είναι ένα σύνολο από *δισύνολα* του V. Τα στοιχεία του V είναι οι *κορυφές* του G, ενώ τα στοιχεία του E είναι οι *ακμές* του G. Αν $e = \{u, v\} \in E$ τότε λέμε ότι η ακμή e *συνδέει* τις κορυφές u και v.

Αν $u, v \in V$ και $\{u, v\} \in E$ γράφουμε $u \sim v$ (οι u και v συνδέονται με ακμή στο G). Τελείως ανάλογα, αν $e_1, e_2 \in E$ και $e_1 \cap e_2 \neq \emptyset$, γράφουμε $e_1 \sim e_2$ (οι e_1 και e_2 έχουν τουλάχιστον μία κοινή κορυφή).

Ορισμός 1.1.2 (γειτονιά κορυφής ή ακμής). Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα. Αν $u \in V$ τότε η *γειτονιά* του u είναι το σύνολο

$$\Gamma(u) = \{v \in V : \, u \sim v\}.$$

Ομοίως, αν $e \in E$ τότε η γειτονιά της e είναι το σύνολο

$$\Gamma(e) = \{f \in E : \, e \sim f\}.$$

Αν $S \subseteq V$ τότε $\Gamma(S) = \bigcup_{u \in S} \Gamma(u)$, ενώ αν $F \subseteq E$ τότε $\Gamma(F) = \bigcup_{e \in F} \Gamma(e)$.

Με βάση τον ορισμό που δώσαμε, σε ένα απλό γράφημα κάθε ακμή είναι γείτονας του εαυτού της, αλλά μια κορυφή δεν είναι ποτέ γείτονας του εαυτού της.

Ορισμός 1.1.3 (βαθμός κορυφής ή ακμής). Έστω $G = (V, E)$ ένα απλό γράφημα. Ο *βαθμός* μιας κορυφής $u \in V$ είναι το πλήθος των ακμών του G που έχουν την u σαν άκρο τους. Δηλαδή, ο βαθμός της $u \in V$ είναι ο αριθμός

$$\deg(u) = |\Gamma(u)|.$$

Εντελώς ανάλογα, αν $e \in E$ τότε

$$\deg(e) = |\Gamma(e)|.$$

Το G λέγεται *κανονικό* αν υπάρχει $d \in \mathbb{N}$ ώστε $\deg(u) = d$ για κάθε $u \in V$. Τότε λέμε ότι το G είναι *d–κανονικό*.

Ειδικά γραφήματα. Γράφουμε $[n] = \{1, \ldots, n\}$.

(i) Το *κενό* γράφημα με n κορυφές είναι το $E_n = ([n], \emptyset)$.

(ii) Το *πλήρες* γράφημα K_n με n κορυφές έχει σαν σύνολο ακμών όλα τα διμελή υποσύνολα του $[n]$. Δηλαδή, το K_n έχει $\binom{n}{2} = \frac{n(n-1)}{2}$ ακμές.

(iii) Το *πλήρες διμερές* γράφημα $K_{m,n}$ με m και n κορυφές έχει σύνολο κορυφών το $V = A \cup B$ όπου $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ και $B = \{b_1, \ldots, b_n\}$. Έχει σαν ακμές όλα τα δισύνολα της μορφής $\{a_i, b_j\}$ (δηλαδή, το πλήθος των ακμών του είναι $m \cdot n$).

(iv) Ο *κύκλος* με n κορυφές ($n \geq 3$) έχει σαν σύνολο κορυφών το $[n]$ και ακμές τις $\{1, 2\}, \{2, 3\}, \ldots, \{n-1, n\}, \{n, 1\}$.

Ορισμός 1.1.4 (υπογράφημα). Το γράφημα $G_1 = (V_1, E_1)$ λέγεται *υπογράφημα* του $G = (V, E)$ αν $V_1 \subseteq V$ και $E_1 \subseteq E$.

Με άλλα λόγια, το G_1 είναι υπογράφημα του G αν μπορούμε να το πάρουμε αφαιρώντας από το G κάποιες κορυφές και ακμές (προφανώς, αν αφαιρέσουμε κάποια κορυφή, τότε πρέπει να αφαιρέσουμε και όλες τις ακμές που την περιέχουν).

Μια κλάση υπογραφημάτων του $G = (V, E)$ προκύπτει ως εξής: αν $V_1 \subseteq V$, ορίζουμε

$$E_1 = E_1(V_1) = \{e = \{u, v\} \in E : u, v \in V_1\}.$$

Το $G_1 = (V_1, E_1)$ είναι το υπογράφημα του G που *επάγεται* από το V_1.

1.2 Συνεκτικότητα και μετρική σε γραφήματα

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με n κορυφές.

Ορισμός 1.2.1 (μονοπάτι). *Μονοπάτι* στο G λέμε μια ακολουθία $e_1, \ldots, e_{s-1}$ ακμών που συνδέουν διαδοχικά κάποιες κορυφές $u_1, \ldots, u_s$ του G. Δηλαδή,

$$e_1 = \{u_1, u_2\}, e_2 = \{u_2, u_3\}, \ldots, e_{s-1} = \{u_{s-1}, u_s\}.$$

Το πλήθος $s - 1$ των ακμών είναι το *μήκος* του μονοπατιού.

Θα λέμε ότι η κορυφή v είναι *προσιτή* από την κορυφή u αν υπάρχει μονοπάτι στο G που ξεκινάει από την u και καταλήγει στην v. Η σχέση

$$«u \equiv v \text{ αν η } v \text{ είναι προσιτή από την } u»$$

είναι σχέση ισοδυναμίας στο V. Συνεπώς, το V διαμερίζεται σε κλάσεις ισοδυναμίας τις οποίες ονομάζουμε *συνεκτικές συνιστώσες* του G.

Ορισμός 1.2.2 (συνεκτικό γράφημα). Το $G = (V, E)$ λέγεται *συνεκτικό* αν έχει μόνο μία συνεκτική συνιστώσα. Δηλαδή, αν κάθε κορυφή v είναι προσιτή από κάθε άλλη κορυφή u.

Ορισμός 1.2.3 (μετρική). Έστω u και v δύο κορυφές του G. Αν η v είναι προσιτή από την u ορίζουμε $d(u, v)$ να είναι το μήκος του συντομότερου μονοπατιού που συνδέει τις u και v (εκείνου που έχει τις λιγότερες δυνατές ακμές). Αν οι u και v δεν συνδέονται (δεν ανήκουν στην ίδια συνεκτική συνιστώσα) θέτουμε $d(u, v) = +\infty$. Η συνάρτηση d ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα: θα τη λέμε «μετρική του συντομότερου μονοπατιού».

Ορισμός 1.2.4 (διάμετρος). Η διάμετρος του G ορίζεται φυσιολογικά από την

$$\mathrm{diam}(G) = \max\{d(u, v) : u, v \in V\}.$$

1.3 Γενικεύσεις της έννοιας του γραφήματος

Ορισμός 1.3.1 (κατευθυνόμενο γράφημα). *Κατευθυνόμενο γράφημα* είναι ένα ζευγάρι (V, E) όπου $E \subseteq V \times V$. Το V παίζει πάλι το ρόλο του συνόλου κορυφών, όμως οι *ακμές* του κατευθυνόμενου γραφήματος είναι *διατεταγμένα ζεύγη*: η ακμή (u, v) έχει *κατεύθυνση* από την κορυφή u προς την κορυφή v.

Παρατηρήστε ότι, με τον ορισμό που δώσαμε, ένα κατευθυνόμενο γράφημα μπορεί να έχει ακμές της μορφής (u, u). Αυτές λέγονται *βρόγχοι* (ή θηλειές). Ένα γράφημα στο οποίο «επιτρέπουμε» την ύπαρξη βρόγχων λέγεται *γράφημα με αυτοσυνδέσεις*.

Ορισμός 1.3.2 (πολλαπλές ακμές). Λέμε ότι ένα (κατευθυνόμενο ή μη) γράφημα $G = (V, E)$ έχει *πολλαπλές ακμές* αν μια ακμή μπορεί να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές στο E. Δίνεται δηλαδή και μια συνάρτηση $m : E \to \mathbb{N}$ που δείχνει την *πολλαπλότητα* κάθε ακμής.

Ορισμός 1.3.3 (γραφήματα με βάρη). *Γράφημα με βάρη* είναι μια τριάδα (V, E, w), όπου V είναι το σύνολο των κορυφών, E είναι το σύνολο των ακμών, και $w : E \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση (που συνήθως παίρνει μη αρνητικές τιμές) η οποία δείχνει το βάρος (ή κόστος) της κάθε ακμής.

Σε ένα γράφημα με βάρος, το μήκος ενός μονοπατιού είναι φυσιολογικά το άθροισμα των βαρών των ακμών που το αποτελούν. Ομοίως, η απόσταση ανάμεσα σε δύο κορυφές που συνδέονται και η διάμετρος του γραφήματος ορίζονται μέσω αυτού του «γενικευμένου» μήκους.

1.4 Δέντρα και δάση

Ορισμός 1.4.1 (δέντρο, δάσος). *Δέντρο* είναι ένα συνεκτικό γράφημα που δεν έχει κύκλους. *Δάσος* είναι ένα γράφημα (συνεκτικό ή μη) που δεν έχει κύκλους. Παρατηρήστε ότι κάθε δάσος διαμερίζεται σε ασύνδετα δέντρα (τις συνεκτικές συνιστώσες του).

Ορισμός 1.4.2 (spanning tree). Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα και έστω T ένα δέντρο που είναι υπογράφημα του G και έχει σαν σύνολο κορυφών το V. Τότε λέμε ότι το T *παράγει* το G (είναι spanning tree του G).

Θεώρημα 1.4.3. *Κάθε συνεκτικό γράφημα G περιέχει δέντρο T που παράγει το G.*

Απόδειξη. Έστω ότι το G περιέχει κάποιον κύκλο με κορυφές $u_1, u_2, \dots, u_{n-1}$, $u_n = u_1$ και ακμές $e_1, e_2, \dots, e_{n-1}$. Παρατηρούμε ότι αν διαγράψουμε οποιαδήποτε από τις ακμές του κύκλου, για παράδειγμα την e_1, τότε το γράφημα παραμένει συνεκτικό: αν u και v είναι δύο κορυφές του G που συνδέονται με μονοπάτι το οποίο περιέχει την e_1, τότε μετά την διαγραφή της e_1 οι u και v εξακολουθούν να συνδέονται (μπορούμε αντί να πάμε από την u_1 στην u_2 να ακολουθήσουμε τη διαδρομή $u_1 \to u_{n-1} \to \cdots \to u_2$).

Αυτή η πράξη «διαγραφής μιας ακμής» λέγεται *σπάσιμο του κύκλου* στην ακμή e_1. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία όσο εξακολουθούν να υπάρχουν κύκλοι στο γράφημα που προκύπτει κάθε φορά. Μετά από κάθε σπάσιμο κύκλου, το νέο γράφημα έχει μικρότερο πλήθος ακμών, το ίδιο πλήθος κορυφών και παραμένει συνεκτικό. Άρα, μετά από πεπερασμένο πλήθος βημάτων καταλήγουμε σε ένα δέντρο που παράγει το G.

Θεώρημα 1.4.4. *Ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές είναι δέντρο αν και μόνο αν έχει $n-1$ ακμές.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς n. Έστω G ένα δέντρο με n κορυφές. Δείχνουμε πρώτα το εξής:

Ισχυρισμός: Το G έχει τουλάχιστον μία κορυφή u με βαθμό $\deg(u) = 1$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι όλες οι κορυφές του G έχουν βαθμό μεγαλύτερο ή ίσο του 2 (το γράφημα είναι συνεκτικό, άρα δεν έχει κορυφές μηδενικού βαθμού). Μπορούμε τότε να βρούμε στο G μονοπάτια οσοδήποτε μεγάλου μήκους στα οποία δεν εμφανίζεται ποτέ τμήμα της μορφής $\cdots u \to v \to u \cdots$, γιατί μπορούμε πάντα να φύγουμε από κάποια κορυφή χρησιμοποιώντας άλλη ακμή από αυτήν που χρησιμοποιήσαμε για να μπούμε σε αυτήν, και να κινούμαστε έτσι για πάντα. Αν πάρουμε ένα μονοπάτι αρκετά μεγάλου μήκους, πρέπει σε αυτό κάποια κορυφή να εμφανίζεται περισσότερες από μία φορές. Θεωρούμε μια τέτοια κορυφή u που έχει την ιδιότητα η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές εμφανίσεις της να είναι ελάχιστη. Τότε το μονοπάτι περιέχει κύκλο που ξεκινάει από την u και καταλήγει στην u. Αυτό είναι άτοπο, αφού το G είναι δέντρο. □

Συνέπεια του ισχυρισμού είναι ότι το υπογράφημα G_1 που επάγεται από το $V \setminus \{u\}$ είναι δέντρο: δεν έχει κύκλους γιατί είναι υπογράφημα δέντρου, και παραμένει συνεκτικό γιατί η κορυφή που αφαιρέθηκε είχε βαθμό 1. Από την επαγωγική υπόθεση το G_1 έχει $n-2$ ακμές, άρα το πλήθος των ακμών του G είναι ίσο με $n-1$.

Αντίστροφα, έστω G ένα συνεκτικό γράφημα με n κορυφές και $n-1$ ακμές. Από το Θεώρημα 1.4.3 υπάρχει δέντρο T που παράγει το G. Το T έχει n κορυφές και είναι δέντρο, άρα έχει $n-1$ ακμές. Συνεπώς, $T = G$. □

1.5 Διμερή γραφήματα

Ορισμός 1.5.1 (διμερές γράφημα). Ένα γράφημα $G = (V, E)$ λέγεται *διμερές* αν μπορούμε να γράψουμε το V στη μορφή $V = A \cup B$ με $A \cap B = \emptyset$ έτσι ώστε κάθε ακμή $e \in E$ να περιέχει ακριβώς μία κορυφή από το A και μία κορυφή από το B (δηλαδή, να μην υπάρχουν ακμές από το A στο A ή από το B στο B).

Θεώρημα 1.5.2. *Κάθε δέντρο είναι διμερές γράφημα.*

Απόδειξη. Με επαγωγή ως προς n. Έστω T ένα δέντρο με n κορυφές. Το T έχει μια κορυφή u με βαθμό $\deg(u) = 1$. Εστω v ο μοναδικός γείτονας της u. Αφαιρούμε από το T την κορυφή u και την ακμή $\{u, v\}$. Το γράφημα T_1 που προκύπτει είναι δέντρο με $n-1$ κορυφές. Από την επαγωγική υπόθεση, το T είναι διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A_1 και B_1.

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $v \in A_1$. Ορίζουμε $A = A_1$ και $B = B_1 \cup \{u\}$. Τότε, το αρχικό δέντρο T είναι διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A και B: αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η κορυφή u ανήκει στο B και συνδέεται μόνο με την κορυφή v που ανήκει στο A. □

Τα διμερή γραφήματα χαρακτηρίζονται από την ακόλουθη Πρόταση.

Πρόταση 1.5.3. *Ένα γράφημα είναι διμερές αν και μόνο αν όλοι οι κύκλοι του έχουν άρτιο μήκος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι το G είναι διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A και B, και ότι $C : u_1 \to u_2 \to \cdots \to u_n \to u_1$ είναι ένας κύκλος στο G. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι η κορυφή u_1 ανήκει στο A. Τότε, η u_2 ανήκει στο B, η u_3 ανήκει στο A, κλπ. Δηλαδή, αν ο j είναι άρτιος έχουμε $u_j \in B$ ενώ αν ο j είναι περιττός έχουμε $u_j \in A$. Αφού η u_n είναι γείτονας της u_1, έχουμε $u_n \in B$. Άρα, ο n είναι άρτιος.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι $G = (V, E)$ είναι ένα συνεκτικό γράφημα που όλοι οι κύκλοι του έχουν άρτιο μήκος. Σταθεροποιούμε $u \in V$ και ορίζουμε A να είναι το σύνολο όλων των $v \in V$ που έχουν άρτια απόσταση από την u, και $B = V \setminus A$. Θα δείξουμε ότι το G είναι διμερές με σύνολα κορυφών τα A και B. Έστω ότι υπάρχει ακμή του G που συνδέει τις $a_1, a_2 \in A$. Θεωρούμε δύο ελάχιστα μονοπάτια π_1 και π_2 από την u προς τις a_1 και a_2 αντίστοιχα. Ο κύκλος C που σχηματίζεται αν ακολουθήσουμε πρώτα το π_1, κατόπιν την ακμή a_1a_2 και τέλος το π_2 κατά την αντίθετη φορά, έχει μήκος $|C| = |\pi_1| + 1 + |\pi_2|$, δηλαδή περιττό αριθμό. Αυτό είναι άτοπο.

Αν το G δεν είναι συνεκτικό και όλοι οι κύκλοι του έχουν άρτιο μήκος, το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι κάθε συνεκτική συνιστώσα του G είναι διμερές γράφημα, άρα και το G είναι διμερές. □

1.6 Ταιριάσματα

Ορισμός 1.6.1 (ταίριασμα). Δύο ακμές του γραφήματος $G = (V, E)$ λέγονται *ανεξάρτητες* αν δεν έχουν κοινή κορυφή. Κάθε σύνολο M ανεξάρτητων ακμών του G λέγεται *ταίριασμα*.

Αν G είναι ένα διμερές γράφημα όπως στον Ορισμό 1.5.1, τότε ένα ταίριασμα M λέγεται *πλήρες ταίριασμα του A* αν κάθε κορυφή του A ανήκει σε κάποια ακμή από το M.

Το θεώρημα του γάμου.

Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω $A_1, \ldots, A_n$ ένα *σύστημα υποσυνόλων* του X. Ένα σύνολο σημείων $x_1 \in A_1, \ldots, x_n \in A_n$ λέγεται *σύστημα ξένων αντιπροσώπων* για τα $A_1, \ldots, A_n$ αν τα $x_1, \ldots, x_n$ είναι διαφορετικά ανά δύο.

Για κάθε $J \subseteq [n]$ ορίζουμε $A(J) = \bigcup\{A_j : j \in J\}$. Αν τα $A_1, \ldots, A_n$ έχουν σύστημα ξένων αντιπροσώπων $x_1, \ldots, x_n$, τότε για κάθε $J \subseteq [n]$ έχουμε

$$|A(J)| \geq |J|.$$

Αυτό είναι φανερό, αφού το $A(J)$ περιέχει το $\{x_j : j \in J\}$ που έχει πληθάριθμο $|J|$. Το *θεώρημα του γάμου* ισχυρίζεται ότι η παραπάνω *συνθήκη του Hall* είναι και ικανή για την ύπαρξη συστήματος ξένων αντιπροσώπων:

Θεώρημα 1.6.2. *Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω $F = \{A_1, \ldots, A_n\}$ ένα σύστημα υποσυνόλων του X. Το F έχει σύστημα ξένων αντιπροσώπων αν και μόνο αν $|A(J)| \geq |J|$ για κάθε $J \subseteq [n]$.* □

Έστω G ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A και B. Αν $J \subseteq A$, γράφουμε $N(J)$ για το σύνολο όλων των $v \in B$ που συνδέονται με κορυφή από το A. Εφαρμόζοντας το «θεώρημα του γάμου» μπορεί κανείς να δείξει το εξής.

Θεώρημα 1.6.3. *Έστω G ένα διμερές γράφημα με σύνολα κορυφών A και B. Αν*

$$|N(J)| \geq |J|$$

για κάθε $J \subseteq A$, τότε υπάρχει πλήρες ταίριασμα του A. □

Απόδειξη. Γράφουμε $A = \{a_1, \ldots, a_m\}$ και παίρνουμε το σύστημα υποσυνόλων

$$N(a_1), \ldots, N(a_m)$$

του B. Τότε, το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του γάμου: παρατηρήστε ότι $A(J) = N(J)$. □

Πόρισμα 1.6.4. *Κάθε κανονικό διμερές γράφημα έχει πλήρες ταίριασμα.*

Απόδειξη. Έστω ότι το $G = (A \cup B, E)$ είναι d–κανονικό. Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι υποθέσεις του Θεωρήματος 1.6.3. Έστω $J \subseteq A$ και έστω E_1 το σύνολο των ακμών που ξεκινούν από κάποια κορυφή του J. Έχουμε υποθέσει ότι το G είναι d–κανονικό, άρα $|E_1| = d|J|$.

Έστω τώρα E_2 το σύνολο των ακμών που καταλήγουν σε κορυφή του $N(J)$. Όπως πριν, έχουμε $|E_2| = d|N(J)|$.

Αφού $E_1 \subseteq E_2$, έχουμε $d|J| \leq d|N(J)|$. Δηλαδή, $|N(J)| \geq |J|$. □

Κεφάλαιο 2

Το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss

2.1 Συγκέντρωση του μέτρου

Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ ένας μετρικός χώρος πιθανότητας. Δηλαδή, ο (X, d) είναι μετρικός χώρος και το μ είναι ένα μέτρο πιθανότητας στη σ-άλγεβρα $\mathcal{A}$ των Borel υποσυνόλων του (X, d). Αν $A \in \mathcal{A}$ και $t > 0$, η t-*περιοχή* του A είναι το σύνολο

$$A_t = \{x \in X : d(x, A) \leq t\}. \tag{2.1.1}$$

Ορισμός 2.1.1. *Η συνάρτηση συγκέντρωσης του $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ ορίζεται στο $(0, \infty)$ από την*

$$\alpha(X, t) := 1 - \inf\{\mu(A_t) : \mu(A) \geq 1/2\}. \tag{2.1.2}$$

Λέμε ότι υπάρχει «συγκέντρωση μέτρου» στο χώρο αν η $\alpha(X, t)$ φθίνει γρήγορα (για παράδειγμα, εκθετικά ως προς t). Πολλές από τις εφαρμογές της συγκέντρωσης του μέτρου βασίζονται στο εξής θεώρημα.

Θεώρημα 2.1.2. *Έστω $(X, \mathcal{A}, d, \mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν $f : X \to \mathbb{R}$ είναι μια συνάρτηση Lipschitz με σταθερά 1, δηλαδή αν $|f(x) - f(y)| \leq d(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$, τότε*

$$\mu\left(\{x \in X : |f(x) - \mathrm{med}(f)| > t\}\right) \leq 2\alpha(X, t) \tag{2.1.3}$$

όπου $\mathrm{med}(f)$ είναι ο μέσος Lévy της f.

Σημείωση. Ο μέσος Lévy $\mathrm{med}(f)$ της f είναι ένας αριθμός για τον οποίο

$$\mu(\{f \geq \mathrm{med}(f)\}) \geq 1/2 \text{ και } \mu(\{f \leq \mathrm{med}(f)\}) \geq 1/2. \tag{2.1.4}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.2. Θέτουμε $A = \{x : f(x) \geq \mathrm{med}(f)\}$ και $B = \{x : f(x) \leq \mathrm{med}(f)\}$. Αν $y \in A_t$ τότε υπάρχει $x \in A$ με $d(x, y) \leq t$, οπότε

$$f(y) = f(y) - f(x) + f(x) \geq -d(y, x) + \mathrm{med}(f) \geq \mathrm{med}(f) - t \tag{2.1.5}$$

αφού η f είναι 1-Lipschitz. Ομοίως, αν $y\in B_t$ τότε υπάρχει $x\in B$ με $d(x,y)\leq t$, οπότε

$$f(y)=f(y)-f(x)+f(x)\leq d(y,x)+\mathrm{med}(f)\leq \mathrm{med}(f)+t. \tag{2.1.6}$$

Δηλαδή, αν $y\in A_t\cap B_t$ τότε $|f(x)-\mathrm{med}(f)|\leq t$. Με άλλα λόγια,

$$\{x\in X: |f(x)-\mathrm{med}(f)|>t\}\subseteq (A_t\cap B_t)^c=A_t^c\cup B_t^c. \tag{2.1.7}$$

Όμως, από τον ορισμό της συνάρτησης συγκέντρωσης έχουμε $\mu(A_t)\geq 1-\alpha(X,t)$ και $\mu(B_t)\geq 1-\alpha(X,t)$. Επιστρέφοντας στην (2.1.7) βλέπουμε ότι

$$\mu\left(\{|f-\mathrm{med}(f)|>t\}\right)\leq (1-\mu(A_t))+(1-\mu(B_t))\leq 2\alpha(X,t). \tag{2.1.8}$$ □

Στην περίπτωση που η συνάρτηση συγκέντρωσης φθίνει πολύ γρήγορα, το Θεώρημα 2.1.2 δείχνει ότι οι 1-Lipschitz συνεχείς συναρτήσεις είναι «σχεδόν σταθερές» σε «σχεδόν ολόκληρο το χώρο». Ισχύει μάλιστα και το αντίστροφο.

Πρόταση 2.1.3. *Έστω $(X,\mathcal{A},d,\mu)$ μετρικός χώρος πιθανότητας. Αν για κάποιο $t>0$ και για κάθε 1-Lipschitz συνάρτηση $f:X\to\mathbb{R}$ έχουμε*

$$\mu\left(\{x\in X: |f(x)-\mathrm{med}(f)|>t\}\right)\leq \eta, \tag{2.1.9}$$

τότε $\alpha(X,t)\leq\eta$.

Απόδειξη. Έστω A Borel υποσύνολο του X με $\mu(A)\geq 1/2$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=d(x,A)$. Η f είναι 1-Lipschitz και $\mathrm{med}(f)=0$ γιατί η f παίρνει μη αρνητικές τιμές και $\mu(\{x:f(x)=0\})\geq 1/2$. Από την (2.1.9) παίρνουμε

$$\mu(\{x\in X: d(x,A)>t\})\leq\eta, \tag{2.1.10}$$

δηλαδή $1-\mu(A_t)\leq\eta$. Έπεται ότι $\alpha(X,t)\leq\eta$. □

Για περισσότερες πληροφορίες παραπέμπουμε τον αναγνώστη στο βιβλίο [8] του Ledoux.

2.2 Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα

Θεωρούμε τη μοναδιαία σφαίρα S^{n-1} στον $\mathbb{R}^n$ εφοδιασμένη με τη γεωδαισιακή μετρική ρ: η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο σημείων $x,y\in S^{n-1}$ είναι η κυρτή γωνία xoy στο επίπεδο που ορίζεται από την αρχή των αξόνων o και τα x,y. Η S^{n-1} γίνεται χώρος πιθανότητας με το μοναδικό αναλλοίωτο ως προς στροφές μέτρο σ: για κάθε Borel σύνολο $A\subseteq S^{n-1}$ θέτουμε

$$\sigma(A):=\frac{|\tilde{A}|}{|B_2^n|}, \tag{2.2.1}$$

όπου B_2^n είναι η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα και

$$\tilde{A}:=\{sx: x\in A \text{ και } 0\leq s\leq 1\}. \tag{2.2.2}$$

Είναι εύκολο να δεί κανείς ότι αν $\rho(x,y)=\theta$ τότε

$$\|x-y\|_2 = 2\sin\frac{\theta}{2}, \tag{2.2.3}$$

συνεπώς η γεωδαισιακή και η Ευκλείδεια απόσταση των $x,y\in S^{n-1}$ συγκρίνονται μέσω της

$$\frac{2}{\pi}\rho(x,y) \leq \|x-y\|_2 \leq \rho(x,y). \tag{2.2.4}$$

Το ισοπεριμετρικό πρόβλημα στη σφαίρα διατυπώνεται ως εξής:

> Δίνονται $\alpha\in(0,1)$ και $t>0$. Ανάμεσα σε όλα τα Borel υποσύνολα A της σφαίρας για τα οποία $\sigma(A)=\alpha$, να βρεθούν εκείνα για τα οποία ελαχιστοποιείται η επιφάνεια $\sigma(A_t)$ της t-περιοχής του A.

Η απάντηση δίνεται από το ακόλουθο θεώρημα:

Ισοπεριμετρική ανισότητα στη σφαίρα. *Έστω $\alpha\in(0,1)$ και*

$$B(x,r)=\{y\in S^{n-1} : \rho(x,y)\leq r\}$$

μια μπάλα στην S^{n-1} με ακτίνα $r>0$ που επιλέγεται ώστε $\sigma(B(x,r))=\alpha$. Τότε, για κάθε $A\subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A)=\alpha$ και για κάθε $t>0$ έχουμε

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\big(B(x,r)_t\big) = \sigma\big(B(x,r+t)\big). \tag{2.2.5}$$

Δηλαδή, για οποιοδήποτε δοσμένο μέτρο α και οποιοδήποτε $t>0$ οι μπάλες μέτρου α δίνουν τη λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος.

Η απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας γίνεται με σφαιρική συμμετρικοποίηση και επαγωγή ως προς τη διάσταση. Ας θεωρήσουμε την ειδική περίπτωση $\alpha=1/2$. Αν $\sigma(A)=1/2$ και $t>0$, τότε μπορούμε να εκτιμήσουμε το μέγεθος του A_t χρησιμοποιώντας την ισοπεριμετρική ανισότητα:

$$\sigma(A_t) \geq \sigma\left(B\big(x,\tfrac{\pi}{2}+t\big)\right) \tag{2.2.6}$$

για κάθε $t>0$ και $x\in S^{n-1}$. Εκτιμώντας από κάτω το δεξιό μέλος της (2.2.6) οδηγούμαστε στην ακόλουθη ανισότητα.

Θεώρημα 2.2.1. *Έστω $A\subseteq S^{n+1}$ με $\sigma(A)=1/2$ και έστω $t>0$. Τότε,*

$$\sigma(A_t) \geq 1-\sqrt{\pi/8}\exp(-t^2n/2). \tag{2.2.7}$$

Παρατήρηση. Αυτό που έχει σημασία σε σχέση με την εκτίμηση στην (2.2.7) είναι ότι, όσο μικρό $t>0$ κι αν διαλέξουμε, η ακολουθία $\exp(-t^2n/2)$ τείνει στο 0 καθώς $n\to\infty$ και μάλιστα με πολύ ταχύ ρυθμό (εκθετικά ως προς n). Επομένως, το ποσοστό της σφαίρας που μένει έξω από την t-περιοχή οποιουδήποτε υποσυνόλου A της S^{n+1} με $\sigma(A)=1/2$ είναι «σχεδόν μηδενικό» αν η διάσταση n είναι αρκετά μεγάλη.

Η απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1 βασίζεται πολύ ισχυρά στη σφαιρική ισοπεριμετρική ανισότητα. Για τις περισσότερες όμως εφαρμογές που έχουμε στο νού μας είναι αρκετή μια ανισότητα σαν την (2.2.7) και όχι η ακριβής λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος. Θα δώσουμε μια απλή απόδειξη της (2.2.7) χωρίς να περάσουμε μέσα από την ισοπεριμετρική ανισότητα, χρησιμοποιώντας την ανισότητα Brunn-Minkowski.

Ορισμός 2.2.2. *Έστω A και B μη κενά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε*

$$A + B := \{a + b \mid a \in A,\, b \in B\} \tag{2.2.8}$$

και για κάθε $t \geq 0$,

$$tA = \{ta \mid a \in A\}. \tag{2.2.9}$$

Η ανισότητα Brunn-Minkowski συνδέει το άθροισμα Minkowski με τον όγκο $|\cdot|$ στον $\mathbb{R}^n$:

Θεώρημα 2.2.3 (ανισότητα Brunn-Minkowski). *Έστω K και T δύο μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Τότε,*

$$|K + T|^{1/n} \geq |K|^{1/n} + |T|^{1/n}. \tag{2.2.10}$$

Παρατηρήσεις. Στην περίπτωση που τα K και T είναι κυρτά σώματα (κυρτά συμπαγή με μη κενό εσωτερικό), ισότητα στην (2.2.10) μπορεί να ισχύει μόνο αν τα K και T είναι ομοιοθετικά (δηλαδή, αν $K = aT + x$ για κάποιον $a \geq 0$ και κάποιο $x \in \mathbb{R}^n$).

Η (2.2.10) εκφράζει με μια έννοια το γεγονός ότι ο όγκος είναι **κοίλη** συνάρτηση ως προς την πρόσθεση κατά Minkowski. Για το λόγο αυτό συχνά γράφεται στην ακόλουθη μορφή: Αν K, T είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$, τότε

$$|\lambda K + (1-\lambda)T|^{1/n} \geq \lambda |K|^{1/n} + (1-\lambda)|T|^{1/n}. \tag{2.2.11}$$

Χρησιμοποιώντας την (2.2.11) και την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου, μπορούμε ακόμα να γράψουμε:

$$|\lambda K + (1-\lambda)T| \geq |K|^{\lambda} |T|^{1-\lambda}. \tag{2.2.12}$$

Η ασθενέστερη αυτή μορφή της ανισότητας Brunn-Minkowski έχει το πλεονέκτημα ότι είναι ανεξάρτητη της διάστασης.

Λήμμα 2.2.4. *Θεωρούμε το ομοιόμορφο μέτρο πιθανότητας μ στην Ευκλείδεια μοναδιαία μπάλα B_2^n. Δηλαδή, $\mu(A) = |A|/|B_2^n|$ για κάθε Borel $A \subseteq B_2^n$. Αν $A, C \subseteq B_2^n$ συμπαγή, και*

$$d(A, C) := \min\{\|a - c\|_2 : a \in A, c \in C\} = \rho > 0, \tag{2.2.13}$$

τότε

$$\min\{\mu(A), \mu(C)\} \leq \exp(-\rho^2 n/8). \tag{2.2.14}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε το σύνολο $\frac{A+C}{2}$. Από την ανισότητα Brunn–Minkowski παίρνουμε $\left|\frac{A+C}{2}\right| \geq \min\{|A|,|C|\}$. Συνεπώς,

$$\mu\left(\frac{A+C}{2}\right) \geq \min\{\mu(A),\mu(C)\}. \tag{2.2.15}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $a \in A$ και $c \in C$, ο κανόνας του παραλληλογράμμου δίνει

$$\|a+c\|_2^2 = 2\|a\|_2^2 + 2\|c\|_2^2 - \|a-c\|_2^2 \leq 4-\rho^2, \tag{2.2.16}$$

επομένως

$$\frac{A+C}{2} \subseteq \sqrt{1-\frac{\rho^2}{4}}B_2^n. \tag{2.2.17}$$

Συνδυάζοντας τις (2.2.15) και (2.2.17) βλέπουμε ότι

$$\min\{\mu(A),\mu(C)\} \leq \left(1-\frac{\rho^2}{4}\right)^{n/2} \leq \exp(-\rho^2 n/8). \qquad \square \tag{2.2.18}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.2.1: Έστω $A \subseteq S^{n-1}$ με $\sigma(A)=1/2$ και έστω $t>0$. Θέτουμε $C = S^{n-1}\setminus A_t$ και θεωρούμε τα υποσύνολα

$$A_1 = \{\rho a : a\in A, \tfrac{1}{2}\leq \rho\leq 1\} \text{ και } C_1 = \{\rho a : a\in C, \tfrac{1}{2}\leq \rho\leq 1\} \tag{2.2.19}$$

της B_2^n. Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$d(A_1,C_1) \geq \sin\frac{t}{2} \geq \frac{t}{\pi}. \tag{2.2.20}$$

Από το Λήμμα 2.2.4 συμπεραίνουμε ότι

$$|C_1| \leq \exp(-d^2n/8)|B_2^n| \leq \exp\left(-t^2n/(8\pi^2)\right)|B_2^n|. \tag{2.2.21}$$

Όμως, από τον ορισμό του σ έχουμε $|B_2^n|\sigma(C) = |\tilde{C}|$ και $|C_1| = (1-2^{-n})|\tilde{C}|$. Συνδυάζοντας με την (2.2.21) βλέπουμε ότι

$$\sigma(A_t^c) = \sigma(C) \leq \frac{1}{1-2^{-n}}\exp\left(-t^2n/(8\pi^2)\right). \tag{2.2.22}$$

Δηλαδή,

$$\sigma(A_t) \geq 1 - c_1\exp(-c_2t^2n) \tag{2.2.23}$$

όπου $c_1 = 2$ και $c_2 = 1/(8\pi^2)$. Η (2.2.23) είναι εντελώς ανάλογη με την ανισότητα του Θεωρήματος 2.2.1 αν εξαιρέσουμε τις ακριβείς τιμές των σταθερών c_1 και c_2. $\square$

2.3 Το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss

Θεώρημα 2.3.1 (Johnson-Lindenstrauss, [6]). *Έστω X ένα σύνολο n-σημείων σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο. Για κάθε $\varepsilon \in (0,1]$ υπάρχει $(1+\varepsilon)$-εμφύτευση του X στον ℓ_2^k για κάποιον $k = O(\varepsilon^{-2}\log n)$.*

Η απόδειξη θα βασιστεί στο Λήμμα του Lévy που είναι άμεση συνέπεια των αποτελεσμάτων των §2.1 και §2.2.

Θεώρημα 2.3.2 (Λήμμα του Lévy). *Αν $f : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ είναι μια 1-Lipschitz συνάρτηση τότε, για κάθε $t > 0$,*

$$\mathbb{P}[f < \mathrm{med}(f) - t] \leq e^{-t^2 n/2} \quad \textit{και} \quad \mathbb{P}[f > \mathrm{med}(f) + t] \leq e^{-t^2 n/2}. \tag{2.3.1}$$

Έστω $1 \leq k \leq n$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f_k : S^{n-1} \to \mathbb{R}$ που απεικονίζει κάθε $x \in S^{n-1}$ στο μήκος $f_k(x)$ της προβολής του πάνω στον υπόχωρο H_k που παράγεται από τα πρώτα k διανύσματα της συνήθους ορθοκανονικής βάσης του $\mathbb{R}^n$. Δηλαδή,

$$f_k(x) = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2} \tag{2.3.2}$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_n)$.

Λήμμα 2.3.3. *Υπάρχει πραγματικός αριθμός $m = m(n,k)$ ώστε*

$$\mathbb{P}[f_k < m - t] \leq e^{-t^2 n/2} \quad \textit{και} \quad \mathbb{P}[f_k > m + t] \leq e^{-t^2 n/2} \tag{2.3.3}$$

για κάθε $t > 0$. Αν το n είναι μεγαλύτερο από κατάλληλη απόλυτη σταθερά και αν $k \geq 10\log n$, τότε $m \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{n}}$.

Απόδειξη. Η (2.3.3) ισχύει με $m = \mathrm{med}(f)$. Αυτό είναι άμεση συνέπεια του Λήμματος 2.3.2, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι η f_k είναι 1-Lipschitz.

Μένει να δούμε το κάτω φράγμα για το m. Παρατηρήστε ότι

$$\mathbb{E}[f_k^2] = k\mathbb{E}[x_1^2] = \frac{k}{n}\mathbb{E}[\|x\|_2^2] = \frac{k}{n}. \tag{2.3.4}$$

Για κάθε $t > 0$ μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} \frac{k}{n} &= \mathbb{E}[f_k^2] \leq \mathbb{P}[f \leq m+t]\cdot(m+t)^2 + \mathbb{P}[f > m+t]\cdot\|f_k\|_\infty^2 \\ &\leq (m+t)^2 + e^{-t^2 n/2}. \end{aligned}$$

Επιλέγουμε $t = \sqrt{k/5n}$. Έχουμε υποθέσει ότι $k \geq 10\log n$, απ' όπου έπεται ότι $\exp(-t^2 n/2) \leq \frac{1}{n}$. Άρα,

$$\frac{k}{n} \leq (m+t)^2 + \frac{1}{n}, \tag{2.3.5}$$

δηλαδή,

$$m \geq \sqrt{\frac{k-1}{n}} - t \geq \frac{1}{2}\sqrt{\frac{k}{n}} \tag{2.3.6}$$

αν το n (οπότε και το k) είναι αρκετά μεγάλο. Ακριβέστερος υπολογισμός δείχνει ότι $m = \sqrt{k/n} + O(1/\sqrt{n})$ για κάθε k. $\square$

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι το n είναι αρκετά μεγάλο. Έστω X ένα σύνολο n σημείων στον ℓ_2. Θέτουμε $k = 200\varepsilon^{-2}\log n$. Αν $k \geq n$ τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε, οπότε υποθέτουμε ότι $k < n$.

Έστω L ο τυχαίος k-διάστατος γραμμικός υπόχωρος του ℓ_2^n. Έστω $p_L : \ell_2^n \to L$ η ορθογώνια προβολή επί του L και έστω $m = m(n,k)$.

Έστω x και y στο X. Θα δείξουμε ότι η πιθανότητα (ως προς L) να μην ισχύει η

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) m\|x-y\|_2 \leq \|p_L(x) - p_L(y)\|_2 \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) m\|x-y\|_2 \tag{2.3.7}$$

είναι μικρότερη από $\frac{1}{n^2}$.

Θέτουμε $u = x - y$. Αφού κάθε p_L είναι γραμμική απεικόνιση, η (2.3.7) γράφεται

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{3}\right) m\|u\|_2 \leq \|p_L(u)\|_2 \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{3}\right) m\|u\|_2, \tag{2.3.8}$$

και, επειδή όλοι οι όροι της ανισότητας είναι θετικά ομογενείς, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|u\|_2 = 1$. Δηλαδή, για σταθερό $u \in S^{n-1}$ ζητάμε να ισχύει η

$$\mathbb{P}\left(L : \big|\, \|p_L(u)\|_2 - m \,\big| > \frac{\varepsilon m}{3}\right) \leq \frac{1}{n^2}. \tag{2.3.9}$$

Όμως, η πιθανότητα αυτή είναι ακριβώς ίση με την

$$\mathbb{P}\left(x \in S^{n-1} : \big|\, f_k(x) - m \,\big| > \frac{\varepsilon m}{3}\right). \tag{2.3.10}$$

Από το Λήμμα 2.3.3 είναι μικρότερη από

$$2\exp\left(-\frac{\varepsilon^2 m^2 n}{18}\right) \leq \exp\left(-\frac{\varepsilon^2 k}{72}\right) < n^{-2}. \tag{2.3.11}$$

Αφού υπάρχουν λιγότερα από n^2 ζευγάρια σημείων $x, y \in X$, υπάρχει κάποιος L ώστε η (2.3.7) να ισχύει για κάθε $x, y \in X$. Τότε, η απεικόνιση $p_L : X \to L$ ορίζει μια εμφύτευση του X στον ℓ_2^k με παραμόρφωση $D \leq (1+\varepsilon/3)/(1-\varepsilon/3) < 1+\varepsilon$ (αν $0 < \varepsilon < 1$). $\square$

Το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss (Θεώρημα 2.3.1) παίζει σημαντικό ρόλο στο πρόβλημα της παραμόρφωσης για Ευκλείδειες εμφυτεύσεις. Έστω (X,d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Ας υποθέσουμε ότι έχουμε βρει μια εμφύτευση $f : X \to \ell_2$ με παραμόρφωση $\mathrm{dist}(f) = \alpha$. Θεωρώντας τον υπόχωρο του ℓ_2 που παράγουν τα $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι η f εμφυτεύει τον X στον ℓ_2^n. Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 2.3.1 με $\varepsilon = 1/2$ για το σύνολο $f(X)$ στον ℓ_2^n βρίσκουμε $k \leq C\log n$ και εμφύτευση $h : f(X) \to \ell_2^k$ με παραμόρφωση $\mathrm{dist}(h) < 2$. Τότε, η $f_1 = h \circ f : X \to \ell_2^k$ είναι μια (2α)–εμφύτευση του X στον ℓ_2^k. Με άλλα λόγια, ισχύει η εξής «αρχή αναγωγής της διάστασης»:

> Αν ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος X εμφυτεύεται με παραμόρφωση α σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο, τότε εμφυτεύεται με παραμόρφωση 2α στον $\ell_2^{C\log|X|}$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Κεφάλαιο 3

Ευκλείδειες εμφυτεύσεις: άνω φράγματα

Έστω $f : X \to Y$ μια εμφύτευση του μετρικού χώρου (X, ρ) στο χώρο με νόρμα $(Y, \|\cdot\|)$. Η **παραμόρφωση** της f ορίζεται ως εξής:

$$\mathrm{dist}(f) = \sup_{x \neq y} \frac{\|f(x) - f(y)\|}{\rho(x,y)} \cdot \sup_{x \neq y} \frac{\rho(x,y)}{\|f(x) - f(y)\|}.$$

Συμβολίζουμε με $c_Y(X)$ την ελάχιστη παραμόρφωση με την οποία ο X εμφυτεύεται στον Y. Αν $c_Y(X) \leq \alpha$ τότε λέμε ότι ο X είναι α–εμφυτεύσιμος στον Y. Σε αυτό το Κεφάλαιο ο χώρος Y είναι κάποιος ℓ_p, $1 \leq p \leq \infty$. Γράφουμε $c_p(X)$ αντί για $c_{\ell_p}(X)$.

3.1 Άνω φράγματα για ℓ_∞-εμφυτεύσεις

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος. Μια εμφύτευση $f : (X, \rho) \to \ell_\infty^d$ προσδιορίζεται από τις d «συντεταγμένες» $f_1, \ldots, f_d : X \to \mathbb{R}$. Προκειμένου να δώσουμε άνω φράγμα για την $c_\infty(X)$, θα προσπαθήσουμε να ορίσουμε τις f_i έτσι ώστε για κάποιον $\gamma \geq 1$ να ισχύουν τα εξής:

(α) Για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $i = 1, \ldots, d$,

$$|f_i(x) - f_i(y)| \leq \rho(x,y).$$

(β) Για κάθε $x, y \in X$ υπάρχει $i = i(x,y) \in \{1, \ldots, d\}$ ώστε

$$|f_i(x) - f_i(y)| \geq \frac{1}{\gamma} \rho(x,y).$$

Τότε,

$$\rho(x,y) \geq \|f_i(x) - f_i(y)\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq d} |f_i(x) - f_i(y)| \geq \frac{1}{\gamma} \rho(x,y) \tag{3.1.1}$$

για κάθε $x, y \in X$, δηλαδή η $f = (f_1, \ldots, f_d)$ είναι γ-εμφύτευση του X στον ℓ_∞^d (και $c_\infty(X) \leq \gamma$).

Μια τεχνική που χρησιμοποιείται συχνά για την κατασκευή τέτοιων εμφυτεύσεων είναι η εξής. Θεωρούμε μια οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ υποσυνόλων του X και ορίζουμε $f_i : X \to \mathbb{R}$ με

$$f_i(x) = \rho(x, A_i) = \inf\{\rho(x,u) : u \in A_i\}. \tag{3.1.2}$$

Από την τριγωνική ανισότητα για την ρ έπεται ότι

$$|f_i(x) - f_i(y)| = |\rho(x, A_i) - \rho(y, A_i)| \leq \rho(x, y) \tag{3.1.3}$$

για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $i \in I$. Μένει να επιλέξουμε την οικογένεια $(A_i)_{i\in I}$ με τέτοιο τρόπο ώστε να ικανοποιείται το (β) για όσο γίνεται μικρότερη σταθερά γ.

Πρόταση 3.1.1 (εμφύτευση του Fréchet). *Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) με n σημεία εμφυτεύεται ισομετρικά στον ℓ_∞^n.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Για κάθε $i = 1, \ldots, n$ ορίζουμε

$$f_i(x) = \rho(x, \{x_i\}) = \rho(x, x_i). \tag{3.1.4}$$

Από την τριγωνική ανισότητα έχουμε: για κάθε $x, y \in X$ και για κάθε $i \leq n$, $|f_i(x) - f_i(y)| = |\rho(x, x_i) - \rho(y, x_i)| \leq \rho(x, y)$. Συνεπώς,

$$\|f(x) - f(y)\|_{\ell_\infty^n} = \max_{1\leq i\leq n} |f_i(x) - f_i(y)| \leq \rho(x, y). \tag{3.1.5}$$

Από την άλλη πλευρά, αν $x = x_i$ και $y = x_j$ στον X, έχουμε

$$\|f(x_i) - f(x_j)\|_{\ell_\infty^n} \geq |f_j(x_i) - f_j(x_j)| = |\rho(x_i, x_j) - \rho(x_j, x_j)| = \rho(x_i, x_j). \tag{3.1.6}$$

Δηλαδή, $\|f(x) - f(y)\|_{\ell_\infty^n} = \rho(x, y)$ για κάθε $x, y \in X$. □

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Το επιχείρημα της Πρότασης 3.1.1 δείχνει ότι μπορούμε να εμφυτεύσουμε ισομετρικά τον X στον ℓ_∞^{n-1}. Αρκεί να ορίσουμε την εμφύτευση $f = (f_2, \ldots, f_n) : X \to \ell_\infty^{n-1}$ (αυτή παραμένει ισομετρία). Αν όμως θεωρήσουμε διάσταση d σημαντικά μικρότερη από n, τότε η ελάχιστη δυνατή παραμόρφωση με την οποία μπορούμε να εμφυτεύσουμε τον X στον ℓ_∞^d θα είναι μια συνάρτηση των n και d.

Θεώρημα 3.1.2 (Matousek, [12]). *Έστω $\gamma = 2q - 1 \geq 3$ ένας περιττός φυσικός αριθμός και έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Υπάρχουν $d = O(qn^{1/q}\log n)$ και γ-εμφύτευση του X στον ℓ_∞^d.*

Απόδειξη. Γράφουμε $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Η απόδειξη θα βασιστεί στην ιδέα που χρησιμοποιήσαμε πιο πάνω. Οι συντεταγμένες f_i της εμφύτευσης θα είναι συναρτήσεις απόστασης από κατάλληλα υποσύνολα του X τα οποία επιλέγονται τυχαία.

Ορίζουμε $p = n^{-1/q}$ και για κάθε $j = 1, 2, \ldots, q$ θέτουμε $p_j = \min\{\frac{1}{2}, p^j\}$. Τέλος, θέτουμε $m = \lceil 24n^{1/q}\log n\rceil$.

Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ και $j = 1, 2, \ldots, q$, επιλέγουμε τυχαίο υποσύνολο A_{ij} του X ως εξής. Θεωρούμε ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές $\{Z_{ij}^k : i \leq m, j \leq q, k \leq n\}$ σε κάποιο χώρο πιθανότητας $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, οι οποίες παίρνουν τις τιμές 0 ή 1 με πιθανότητα

$$\mathbb{P}(Z_{ij}^k = 0) = 1 - p_j \quad \text{και} \quad \mathbb{P}(Z_{ij}^k = 1) = p_j, \tag{3.1.7}$$

και θέτουμε

$$A_{ij}(\omega) = \{x_k : \ Z_{ij}^k(\omega) = 1\}. \tag{3.1.8}$$

Με άλλα λόγια, κάθε σημείο του X ανήκει στο A_{ij} με πιθανότητα p_j και η επιλογή του x_k είναι ανεξάρτητη από την επιλογή του x_s αν $k \neq s$. Αν $(i, j) \neq (i', j')$, τότε το A_{ij} είναι ανεξάρτητο από το $A_{i'j'}$.

Θέτουμε $d = qm$ και ορίζουμε (την τυχαία εμφύτευση) $f : X \to \ell_\infty^d$ με

$$f(x) = (\rho(x, A_{11}), \ldots, \rho(x, A_{m1}), \ldots, \rho(x, A_{1q}), \ldots, \rho(x, A_{mq}))\,. \tag{3.1.9}$$

Θα δείξουμε ότι με θετική πιθανότητα η f είναι $(2q-1)$-εμφύτευση.

Λήμμα 3.1.3. *Έστω x, y δύο διακεκριμένα σημεία του X. Υπάρχει δείκτης $j \in \{1, 2, \ldots, q\}$ ώστε αν τα τυχαία σύνολα A_{ij} επιλέγονται όπως παραπάνω τότε, για κάθε $i = 1, \ldots, m$,*

$$\mathbb{P}\left(|\rho(x, A_{ij}) - \rho(y, A_{ij})| \geq \frac{1}{\gamma} \rho(x, y) \right) \geq \frac{p}{12}. \tag{3.1.10}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\Delta = \frac{1}{\gamma}\rho(x, y)$. Ορίζουμε $B_0 = \{x\}$, B_1 την κλειστή μπάλα ακτίνας Δ με κέντρο το y, B_2 την κλειστή μπάλα ακτίνας 2Δ με κέντρο το x, και ούτω καθεξής, με τελευταία την B_q που είναι η κλειστή μπάλα ακτίνας $q\Delta$ με κέντρο το x (αν ο q είναι άρτιος) ή το y (αν ο q είναι περιττός). Θυμηθείτε ότι $\gamma = 2q - 1$, οπότε οι ακτίνες των B_{q-1} και B_q έχουν άθροισμα ίσο με $\rho(x, y)$. Δηλαδή, οι τελευταίες δύο μπάλες εφάπτονται. Για κάθε $t = 0, 1, \ldots, q$ γράφουμε n_t για το πλήθος των σημείων του X που ανήκουν στην B_t.

Δείχνουμε πρώτα ότι υπάρχει κάποιος δείκτης $j \in \{1, \ldots, q\}$ με την ιδιότητα: για κάποιο $0 \leq t \leq q$ ισχύουν οι

$$n_t \geq n^{(j-1)/q} \qquad \text{και} \qquad n_{t+1} \leq n^{j/q}. \tag{3.1.11}$$

Αυτό είναι απλή συνέπεια της αρχής του περιστερώνα: χωρίζουμε το διάστημα $[1, n]$ σε q διαστήματα $I_1, I_2, \ldots, I_q$, θέτοντας

$$I_j = \left[n^{(j-1)/q}, n^{j/q} \right] \tag{3.1.12}$$

και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν η ακολουθία $(n_1, n_2, \ldots, n_q)$ δεν είναι αύξουσα, υπάρχει κάποιος t ώστε $n_{t+1} < n_t$. Υπάρχει j ώστε $n_t \in I_j$. Γι' αυτόν τον j ικανοποιείται το ζητούμενο.

(ii) Αν $1 = n_0 \leq n_1 \leq \cdots \leq n_q \leq n$ τότε, από την αρχή του περιστερώνα, υπάρχουν t και j ώστε οι n_t και n_{t+1} να ανήκουν στο I_j. Γι' αυτόν τον j ικανοποιείται το ζητούμενο.

Θα δείξουμε ότι για τον δείκτη j που επιλέξαμε ικανοποιείται το συμπέρασμα του Λήμματος. Έστω $i \in \{1, \dots, m\}$. Ορίζουμε τα ενδεχόμενα

E_1 : «το σύνολο A_{ij} περιέχει σημείο της B_t»

E_2 : «το σύνολο A_{ij} είναι ξένο προς το εσωτερικό της B_{t+1}».

Αν δείξουμε ότι $\mathbb{P}[E_1 \cap E_2] \geq \frac{p}{12}$ τότε παίρνουμε το Λήμμα, αφού για κάθε A_{ij} που ικανοποιεί τα E_1 και E_2 έχουμε $\rho(x, A_{ij}) \geq (t+1)\Delta$ και $\rho(y, A_{ij}) \leq t\Delta$ (αν ο t είναι περιττός) ή $\rho(y, A_{ij}) \geq (t+1)\Delta$ και $\rho(x, A_{ij}) \leq t\Delta$ (αν ο t είναι άρτιος). Σε κάθε περίπτωση,

$$|\rho(x, A_{ij}) - \rho(y, A_{ij})| \geq \Delta = \frac{1}{\gamma}\rho(x, y). \tag{3.1.13}$$

Γράφουμε

$$\mathbb{P}[E_1] = 1 - \mathbb{P}[A_{ij} \cap B_t = \emptyset] = 1 - (1 - p_j)^{n_t} \geq 1 - e^{-p_j n_t}. \tag{3.1.14}$$

Όμως,

$$p_j n_t \geq p_j n^{(j-1)/q} = p_j p^{-j+1} = \min\left\{\frac{1}{2}, p^j\right\} p^{-j+1} \geq \min\left\{\frac{1}{2}, p\right\}. \tag{3.1.15}$$

Άρα, αν $p \geq \frac{1}{2}$ έχουμε $\mathbb{P}[E_1] \geq 1 - e^{-1/2} > \frac{1}{3} \geq \frac{p}{3}$, ενώ αν $p < \frac{1}{2}$ έχουμε $\mathbb{P}[E_1] \geq 1 - e^{-p} \geq \frac{p}{3}$.

Από την άλλη πλευρά, αφού $p_j \leq \frac{1}{2}$,

$$\mathbb{P}[E_2] \geq (1 - p_j)^{n_{t+1}} \geq (1 - p_j)^{n^{j/q}} \geq (1 - p_j)^{1/p_j} \geq \frac{1}{4}. \tag{3.1.16}$$

Η B_t και το εσωτερικό της B_{t+1} έχουν κενή τομή, άρα τα E_1 και E_2 είναι ανεξάρτητα ενδεχόμενα. Έπεται ότι

$$\mathbb{P}[E_1 \cap E_2] = \mathbb{P}[E_1] \cdot \mathbb{P}[E_2] \geq \frac{p}{3} \cdot \frac{1}{4} = \frac{p}{12}, \tag{3.1.17}$$

κι αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Συνέχεια της απόδειξης του Θεωρήματος 3.1.2. Από τον τρόπο ορισμού της f έχουμε

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \leq \rho(x, y) \tag{3.1.18}$$

για κάθε $x, y \in X$. Θα δείξουμε ότι το ενδεχόμενο

«E : για κάθε $x, y \in X$ υπάρχουν i και j ώστε $|\rho(x, A_{ij}) - \rho(y, A_{ij})| \geq \frac{1}{\gamma}\rho(x, y)$»

έχει θετική πιθανότητα. Για σταθερά $x, y \in X$, θεωρούμε τον $j = j(x,y)$ του Λήμματος 3.1.3. Η πιθανότητα να μην ισχύει η ανισότητα για κανέναν $i \leq m$ φράσσεται από

$$\left(1 - \frac{p}{12}\right)^m \leq e^{-pm/12} \leq n^{-2} \tag{3.1.19}$$

από τον ορισμό του m. Το πλήθος των ζευγαριών $\{x, y\}$ είναι $\binom{n}{2} < n^2$. Έπεται ότι

$$\mathbb{P}[E^c] < 1. \tag{3.1.20}$$

Υπάρχουν λοιπόν A_{ij} για τα οποία η εμφύτευση f ικανοποιεί την

$$\|f(x) - f(y)\|_\infty \geq \frac{1}{\gamma}\rho(x,y) \tag{3.1.21}$$

για κάθε $x, y \in X$. Η $f : X \to \ell_\infty^{mq}$ έχει παραμόρφωση γ και $d = mq = O(qn^{1/q}\log n)$. □

3.2 Άνω φράγματα για Ευκλείδειες εμφυτεύσεις

Σε αυτή την Παράγραφο δείχνουμε το άνω φράγμα του Bourgain [3] για την $c_2(X)$.

Θεώρημα 3.2.1 (Bourgain). *Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) με n σημεία εμφυτεύεται σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο με παραμόρφωση $O(\log n)$.*

Η απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1 είναι παρόμοια με αυτήν του Θεωρήματος 3.1.2 για τις εμφυτεύσεις μετρικών χώρων στον ℓ_∞^d. Για την ακρίβεια, προηγήθηκε χρονικά της δουλειάς του Matousek και είναι το πρώτο αποτέλεσμα αυτής της περιοχής στο οποίο χρησιμοποιήθηκε αυτή η ιδέα: Οι συντεταγμένες της συνάρτησης που θα ορίσουμε θα είναι συναρτήσεις απόστασης από υποσύνολα του X.

Θέτουμε $q = \lfloor \log_2 n \rfloor + 1$. Για κάθε $j = 1, \ldots, q$ θεωρούμε τυχαίο υποσύνολο A_j του X παίρνοντας κάθε σημείο του X να ανήκει ανεξάρτητα από τα υπόλοιπα σημεία στο A_j με πιθανότητα 2^{-j}.

Λήμμα 3.2.2. *Έστω x, y δύο διακεκριμένα σημεία του X. Υπάρχουν πραγματικοί αριθμοί $\Delta_1, \ldots, \Delta_q \geq 0$ με $\Delta_1 + \cdots + \Delta_q = \frac{1}{2}\rho(x,y)$ ώστε*

$$P_j = \mathbb{P}(|\rho(x, A_j) - \rho(y, A_j)| \geq \Delta_j) \geq \frac{1}{12} \tag{3.2.1}$$

για κάθε $j = 1, \ldots, q$.

Απόδειξη. Ορίζουμε μια αύξουσα ακολουθία θέτοντας $r_0 = 0$ και r_j τη μικρότερη ακτίνα για την οποία ισχύουν ταυτόχρονα οι

$$|B(x, r_j)| \geq 2^j \qquad \text{και} \qquad |B(y, r_j)| \geq 2^j,$$

όπου $B(x, r) = \{y \in X : \rho(x,y) \leq r\}$. Γράφουμε $j(x,y)$ για το μεγαλύτερο φυσικό $j \leq q-1$ για τον οποίο $r_j < \frac{1}{2}\rho(x,y)$, και θέτουμε $r_j = \frac{1}{2}\rho(x,y)$ για κάθε

$j(x,y) < j \le q$. Θα δείξουμε ότι το συμπέρασμα του Λήμματος ικανοποιείται με $\Delta_j = r_j - r_{j-1}$. Παρατηρήστε ότι αν $q \ge j > j(x,y)+1$ δεν έχουμε να δείξουμε τίποτα.

Έστω $j \in \{1,2,\dots,j(x,y)+1\}$. Θεωρούμε το τυχαίο $A_j \subseteq X$ τα στοιχεία του οποίου επιλέγονται με πιθανότητα 2^{-j}. Από τον ορισμό του r_j έχουμε $|B^\circ(x,r_j)| < 2^j$ ή $|B^\circ(y,r_j)| < 2^j$, όπου $B^\circ(x,r) = \{y \in X : \rho(x,y) < r\}$. Παρατηρήστε ότι το παραπάνω ισχύει και στην περίπτωση $j = q$, αφού $|X| \le 2^q$ από τον ορισμό του q. Παίρνοντας αν χρειαστεί το y στη θέση του x, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|B^\circ(x,r_j)| < 2^j$.

Το τυχαίο σύνολο A_j ικανοποιεί την $|\rho(x,A_j) - \rho(y,A_j)| \ge \Delta_j$ αν τέμνει την $B(y,r_{j-1})$ και είναι ξένο προς την $B^\circ(x,r_j)$. Η πιθανότητα να συμβαίνει αυτό το ενδεχόμενο υπολογίστηκε στο Λήμμα 3.1.3 (πάρτε $p = 1/2$). $\square$

Κάθε απεικόνιση $\varphi : X \to \mathbb{R}$ επάγει μια *γραμμική ψευδομετρική* ν στον X, η οποία ορίζεται από την

$$\nu(x,y) = |\varphi(x) - \varphi(y)|. \tag{3.2.2}$$

Γράφουμε ν_A για τη γραμμική ψευδομετρική που αντιστοιχεί στην απεικόνιση $y \mapsto \rho(y,A)$. Παρατηρήστε ότι $\nu_A(x,y) \le \rho(x,y)$ για κάθε $A \subseteq X$ και για κάθε $x,y \in X$: θα γράφουμε $\nu_A \le \rho$ και θα λέμε ότι η ν_A *κυριαρχείται* από την ρ.

Το επόμενο Λήμμα δείχνει ότι αν μια μετρική ρ στο X προσεγγίζεται από έναν κυρτό συνδυασμό γραμμικών ψευδομετρικών, οι οποίες κυριαρχούνται από την ρ, τότε υπάρχει καλή εμφύτευση του (X,ρ) στον ℓ_2.

Λήμμα 3.2.3. *Έστω (X,ρ) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος, και έστω $\nu_1,\dots,\nu_N$ γραμμικές ψευδομετρικές με $\nu_i \le \rho$ για κάθε $i = 1,\dots,N$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i \ge \frac{1}{\gamma}\rho \tag{3.2.3}$$

για κάποιους μη αρνητικούς αριθμούς $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ που έχουν άθροισμα ίσο με 1. Τότε, υπάρχει γ-εμφύτευση του (X,ρ) στον ℓ_2.

Απόδειξη. Έστω $\varphi_i : X \to \mathbb{R}$ η απεικόνιση που επάγει τη γραμμική ψευδομετρική ν_i. Ορίζουμε μια εμφύτευση $f : X \to \ell_2^N$ ως εξής:

$$f(y) = (\sqrt{\alpha_1}\varphi_1(y), \dots, \sqrt{\alpha_N}\varphi_N(y)). \tag{3.2.4}$$

Από τη μία πλευρά έχουμε

$$\|f(x) - f(y)\|_2^2 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \nu_i(x,y)^2 \le \rho(x,y)^2, \tag{3.2.5}$$

αφού $\alpha_1 + \cdots + \alpha_N = 1$ και όλες οι ν_i κυριαρχούνται από την ρ. Από την άλλη πλευρά, με απλή εφαρμογή της ανισότητας Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned}\|f(x)-f(y)\|_2 &= \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \nu_i(x,y)^2\right)^{1/2}\\ &= \left(\sum_{i=1}^N \alpha_i\right)^{1/2}\left(\sum_{i=1}^N \alpha_i \nu_i(x,y)^2\right)^{1/2}\\ &\geq \sum_{i=1}^N \alpha_i \nu_i(x,y).\end{aligned}$$

Από την υπόθεση, η τελευταία ποσότητα είναι μεγαλύτερη ή ίση από $\frac{1}{\gamma}\rho(x,y)$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Για κάθε $A \subseteq X$ η απεικόνιση $y \mapsto \rho(y,A)$ επάγει μια γραμμική ψευδομετρική που κυριαρχείται από την ρ. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 3.2.2 θα δείξουμε ότι υπάρχει κυρτός συνδυασμός αυτών των ψευδομετρικών, ο οποίος φράσσεται από κάτω από την $\frac{1}{24q}\rho$.

Για το σκοπό αυτό, για κάθε $A \subseteq X$ και για κάθε $j = 1,\dots,q$ ορίζουμε

$$\pi_j(A) = \mathbb{P}[A_j = A] \tag{3.2.6}$$

όπου A_j το τυχαίο σύνολο που τα σημεία του επιλέγονται ανεξάρτητα και με πιθανότητα 2^{-j} από το X. Από το Λήμμα 3.2.2, για κάθε ζευγάρι $\{x,y\}$ σημείων του X έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{A\subseteq X} \pi_j(A)\cdot \nu_A(x,y) &\geq \sum_{\{A\subseteq X:\nu_A(x,y)\geq \Delta_j\}} \pi_j(A)\cdot \nu_A(x,y)\\ &\geq \frac{1}{12}\Delta_j.\end{aligned}$$

Προσθέτοντας ως προς $j = 1,\dots,q$, παίρνουμε

$$\sum_{A\subseteq X}\left(\sum_{j=1}^q \pi_j(A)\right)\cdot \nu_A(x,y) \geq \frac{1}{12}\sum_{j=1}^q \Delta_j = \frac{1}{24}\rho(x,y). \tag{3.2.7}$$

Θέτουμε

$$\alpha_A = \frac{1}{q}\sum_{j=1}^q \pi_j(A). \tag{3.2.8}$$

Χρησιμοποιώντας την $\sum_{A\subseteq X}\pi_j(A) = 1$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{A\subseteq X}\alpha_A = 1. \tag{3.2.9}$$

Από την (3.2.7) παίρνουμε

$$\sum_{A\subseteq X}\alpha_A \nu_A \geq \frac{1}{24q}\rho, \tag{3.2.10}$$

και το Λήμμα 3.2.3 δείχνει ότι ο X εμφυτεύεται στον ℓ_2 με παραμόρφωση $24q$. □

Στο Κεφάλαιο 2 είδαμε ότι το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss (Θεώρημα 2.3.1) μας εξασφαλίζει την εξής «αρχή αναγωγής της διάστασης» για Ευκλείδειες εμφυτεύσεις:

> Αν ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος X εμφυτεύεται με παραμόρφωση α σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο, τότε εμφυτεύεται με παραμόρφωση 2α στον $\ell_2^{C\log|X|}$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Από το Θεώρημα 3.2.1 παίρνουμε λοιπόν άμεσα το εξής:

Θεώρημα 3.2.4. *Κάθε μετρικός χώρος (X, ρ) με n σημεία εμφυτεύεται με παραμόρφωση $O(\log n)$ στον ℓ_2^d για κάποιον $d = O(\log n)$.* □

Κεφάλαιο 4

Ημιορισμένος προγραμματισμός και Ευκλείδεια παραμόρφωση

4.1 Αναδιατύπωση του προβλήματος

Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Γράφουμε $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Για τον υπολογισμό της $c_2(X)$ μπορούμε να περιοριστούμε σε συναρτήσεις $f : X \to \ell_2$ που έχουν *συντελεστή συστολής* 1, δηλαδή ικανοποιούν την

$$\|f(x_i) - f(x_j)\|_2 \geq \rho(x_i, x_j) \tag{4.1.1}$$

για κάθε $i, j \leq n$. Τότε, $\mathrm{dist}(f) \leq \gamma$ αν και μόνο αν

$$\rho(x_i, x_j)^2 \leq \|f(x_i) - f(x_j)\|_2^2 \leq \gamma^2 \rho(x_i, x_j)^2 \tag{4.1.2}$$

για κάθε $i, j \leq n$. Με άλλα λόγια, $c_2(X) \leq \gamma$ αν και μόνο αν υπάρχει $f : X \to \ell_2$ η οποία ικανοποιεί την (4.1.2).

Θα μεταφράσουμε αυτό το πρόβλημα σε ένα πρόβλημα ημιορισμένου προγραμματισμού. Ένας πίνακας T λέγεται θετικά ημιορισμένος αν $\langle s, Ts \rangle \geq 0$ για κάθε $s \in \mathbb{R}^n$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν ένας συμμετρικός πίνακας T είναι θετικά ημιορισμένος τότε υπάρχει πίνακας U ώστε $T = U^t U$. Πράγματι, κάθε συμμετρικός πίνακας διαγωνοποιείται, οπότε ο T γράφεται στη μορφή $T = A^t L A$ για κάποιο διαγώνιο πίνακα L. Αφού ο T είναι θετικά ημιορισμένος, έχουμε $L_{ii} \geq 0$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε το διαγώνιο πίνακα $(\sqrt{L})_{ii} = \sqrt{L_{ii}}$ παίρνουμε $T = U^t U$, όπου $U = \sqrt{L} A$. Ισχύει και το αντίστροφο: εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε πίνακας της μορφής $T = U^t U$ είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος.

Οι θετικά ημιορισμένοι πίνακες συνδέονται με το πρόβλημα: αν $f : X \to \ell_2$ μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η f απεικονίζει τον X στον ℓ_2^n. Αν θεωρήσουμε τη γραμμική απεικόνιση $U : \ell_2^n \to \ell_2^n$ που ορίζεται από την $Ue_i = f(x_i)$, τότε ο πίνακας $T = U^t U$ είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος: για κάθε $i, j \leq n$

έχουμε

$$t_{ij} := \langle e_i, Te_j\rangle = \langle e_i, U^tUe_j\rangle = \langle f(x_i), f(x_j)\rangle. \tag{4.1.3}$$

Συνεπώς,

$$\|f(x_i)-f(x_j)\|_2^2 = \|f(x_i)\|^2-2\langle f(x_i), f(x_j)\rangle+\|f(x_j)\|_2^2 = t_{ii}-2t_{ij}+t_{jj}. \tag{4.1.4}$$

Λήμμα 4.1.1. *Έστω (X,ρ) ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Τότε, $c_2(X) \leq \gamma$ αν και μόνο αν υπάρχει συμμετρικός θετικά ημιορισμένος $n\times n$ πίνακας $T = (t_{ij})$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $i, j \leq n$,*

$$d(x_i, x_j)^2 \leq t_{ii} - 2t_{ij} + t_{jj} \leq \gamma^2 d(x_i, x_j)^2. \tag{4.1.5}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει $f : X \to \ell_2^n$ που ικανοποιεί την (4.1.2). Τότε, ο $T = (t_{ij})$ με $t_{ij} = \langle f(x_i), f(x_j)\rangle$ είναι συμμετρικός, θετικά ημιορισμένος και ικανοποιεί την (4.1.5). Αντίστροφα, αν υπάρχει τέτοιος πίνακας T τότε τον γράφουμε στη μορφή $T = U^tU$ και θεωρούμε την απεικόνιση $f : X \to \ell_2^n$ που στέλνει το x_i στην i–οστή στήλη του U. Η f ικανοποιεί την (4.1.2). □

Θα μεταφράσουμε το νέο αυτό πρόβλημα χρησιμοποιώντας το εξής Λήμμα.

Λήμμα 4.1.2. *Ενας συμμετρικός $n \times n$ πίνακας $T = (t_{ij})$ είναι θετικά ημιορισμένος αν και μόνο αν για κάθε συμμετρικό θετικά ημιορισμένο $n \times n$ πίνακα $Q = (q_{ij})$ έχουμε*

$$\sum_{i,j=1}^{n} q_{ij}t_{ij} \geq 0. \tag{4.1.6}$$

Απόδειξη. Έστω ότι ο T ικανοποιεί την (4.1.6). Έστω $s = (s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{R}^n$. Παρατηρούμε ότι ο πίνακας $Q_s = (s_is_j)_{i,j=1}^n$ είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. Συνεπώς,

$$\langle s, Ts\rangle = \sum_{i,j=1}^{n} s_is_jt_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} (Q_s)_{ij}t_{ij} \geq 0. \tag{4.1.7}$$

Άρα, ο T είναι θετικά ημιορισμένος.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε τυχόντα συμμετρικό θετικά ημιορισμένο $n \times n$ πίνακα Q και τον γράφουμε στη μορφή $Q = A^tLA$ όπου $A = (a_{ij})$ και L διαγώνιος πίνακας με $l_{kk} \geq 0$. Αν Δ_{kk} είναι ο πίνακας που έχει μια μονάδα στη θέση kk και μηδενικά σε όλες τις άλλες θέσεις, τότε

$$Q = \sum_{k=1}^{n} l_{kk}A^t\Delta_{kk}A. \tag{4.1.8}$$

Για να δείξουμε ότι ικανοποιείται η (4.1.6) αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A^t\Delta_{kk}A)_{ij}t_{ij} \geq 0 \tag{4.1.9}$$

για κάθε $k = 1, \ldots, n$. Ομως, εύκολα ελέγχουμε ότι $(A^t \Delta_{kk} A)_{ij} = a_{ki} a_{kj}$. Αν λοιπόν θεωρήσουμε το διάνυσμα $a_k = (a_{k1}, \ldots, a_{kn})$ έχουμε

$$\sum_{i,j=1}^{n} (A^t \Delta_{kk} A)_{ij} t_{ij} = \sum_{i,j=1}^{n} a_{ki} a_{kj} t_{ij} = \langle a_k, T a_k \rangle \geq 0 \tag{4.1.10}$$

αφού ο T είναι συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος. □

Σύμφωνα με τα παραπάνω, το πρόβλημα υπολογισμού της $c_2(X)$ μεταφράζεται στο εξής πρόβλημα ημιορισμένου προγραμματισμού. Έστω $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ και ρ μια μετρική στο X. Ζητάμε τη μικρότερη σταθερά $\gamma \geq 1$ για την οποία υπάρχει συμμετρικός $n \times n$ πίνακας $T = (t_{ij})$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(i) $\sum_{i,j} q_{ij} t_{ij} \geq 0$ για κάθε συμμετρικό θετικά ημιορισμένο $n \times n$ πίνακα $Q = (q_{ij})$.

(ii) $\rho(x_i, x_j)^2 \leq t_{ii} - 2t_{ij} + t_{jj}$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

(iii) $t_{ii} - 2t_{ij} + t_{jj} \leq \gamma^2 \rho(x_i, x_j)^2$ για κάθε $i, j = 1, \ldots, n$.

Χρησιμοποιώντας τη θεωρία του ημιορισμένου προγραμματισμού (περνώντας στο δυϊκό πρόβλημα) μπορούμε να βρούμε ακριβή τύπο για την $c_2(X)$.

Θεώρημα 4.1.3 (Linial, London, Rabinovich, [9]). *Έστω (X, ρ) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος. Αν $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$ τότε*

$$c_2(X) = \max \sqrt{\frac{\sum_{p_{ij}>0} p_{ij} \rho(x_i, x_j)^2}{-\sum_{p_{ij}<0} p_{ij} \rho(x_i, x_j)^2}}, \tag{4.1.11}$$

όπου το max *παίρνεται πάνω από όλους τους συμμετρικούς θετικά ημιορισμένους $n \times n$ πίνακες $P = (p_{ij})$ που ικανοποιούν την $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε ότι η «ελάχιστη Ευκλείδεια παραμόρφωση» $c_2(X)$ είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ποσότητα στο δεξιό μέλος της (4.1.11). Αυτή την ανισότητα χρειαζόμαστε για να δώσουμε κάτω φράγματα για την $c_2(X)$.

Θέτουμε $\gamma = c_2(X)$. Υποθέτουμε ότι υπάρχει συμμετρικός θετικά ημιορισμένος πίνακας $P = (p_{ij})$ με $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$ και

$$\gamma < \sqrt{\frac{\sum_{p_{ij}>0} p_{ij} \rho(x_i, x_j)^2}{-\sum_{p_{ij}<0} p_{ij} \rho(x_i, x_j)^2}}, \tag{4.1.12}$$

και θα καταλήξουμε σε άτοπο. Από την (4.1.12) έχουμε

$$\sum_{p_{ij}>0} p_{ij} \rho(x_i, x_j)^2 + \gamma^2 \sum_{p_{ij}<0} p_{ij} \rho(x_i, x_j)^2 > 0. \tag{4.1.13}$$

Επίσης, υπάρχει συμμετρικός πίνακας $T = (t_{ij})$ που ικανοποιεί τις

$$\begin{aligned} 0 &\leq \sum_{p_{ij}>0} p_{ij} t_{ij} + \sum_{p_{ij}<0} p_{ij} t_{ij} \\ \rho(x_i, x_j)^2 &\leq t_{ii} + t_{jj} - 2t_{ij} \\ -\gamma^2 \rho(x_i, x_j)^2 &\leq -\big(t_{ii} + t_{jj} - 2t_{ij}\big). \end{aligned}$$

Πολλαπλασιάζοντας τη δεύτερη συνθήκη με $\frac{p_{ij}}{2}$ αν $p_{ij} > 0$, την τρίτη συνθήκη με $-\frac{p_{ij}}{2}$ αν $p_{ij} < 0$ και προσθέτοντας όλες τις ανισότητες που θα προκύψουν στην πρώτη συνθήκη, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 0 &< \sum_{p_{ij}>0} p_{ij}\rho(x_i,x_j)^2 + \gamma^2 \sum_{p_{ij}<0} p_{ij}\rho(x_i,x_j)^2 \\ &\leq 2\sum_{p_{ij}\neq 0} p_{ij}(t_{ii}+t_{jj}) \\ &= 2\sum_{i,j=1}^{n} p_{ij}(t_{ii}+t_{jj}) \\ &= 2\sum_{i=1}^{n} t_{ii}\sum_{j=1}^{n} p_{ij} + 2\sum_{j=1}^{n} t_{jj}\sum_{i=1}^{n} p_{ij} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Καταλήξαμε σε άτοπο, άρα

$$c_2(X) \geq \sqrt{\frac{\sum_{p_{ij}>0} p_{ij}\rho(x_i,x_j)^2}{-\sum_{p_{ij}<0} p_{ij}\rho(x_i,x_j)^2}}, \tag{4.1.14}$$

για όλους τους συμμετρικούς θετικά ημιορισμένους $n \times n$ πίνακες $P = (p_{ij})$ που ικανοποιούν την $\sum_{j=1}^{n} p_{ij} = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. □

4.2 Κάτω φράγμα για τον Hamming κύβο

Θεωρούμε το σύνολο $C_m = \{0,1\}^m$ των κορυφών του κύβου $[0,1]^n$ εφοδιασμένο με τη μετρική Hamming. Η απόσταση $\rho(x,y)$ δύο 0/1 ακολουθιών x και y είναι το πλήθος των θέσεων στις οποίες διαφέρουν:

$$\rho(x,y) = |\{i \leq m : x_i \neq y_i\}| = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| = \|x-y\|_1. \tag{4.2.1}$$

Παρατηρήστε ότι η ταυτοτική απεικόνιση $Id : C_m \to \ell_2^m$ ικανοποιεί τις

$$\rho(x,y) \leq \sqrt{m}\|x-y\|_2 \leq \sqrt{m}\,\rho(x,y). \tag{4.2.2}$$

Άρα, υπάρχει $\sqrt{m}$-εμφύτευση του (C_m, ρ) στον ℓ_2.

Θεώρημα 4.2.1 (Enflo, [5]). *Για κάθε $m \geq 2$ έχουμε*

$$c_2(C_m, \rho) = \sqrt{m} = \sqrt{\log_2 n}, \tag{4.2.3}$$

όπου $n = 2^m$. Δηλαδή, η φυσιολογική εμφύτευση του C_m, αν τον θεωρήσουμε σαν υπόχωρο του ℓ_2^m, έχει τη βέλτιστη παραμόρφωση.

Απόδειξη. Από την (4.2.2) έχουμε $c_2(C_m, \rho) \leq \sqrt{m}$. Θα δείξουμε ότι αυτό το φράγμα είναι ακριβές χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.1.3.

Θεωρούμε τον συμμετρικό $2^m \times 2^m$ πίνακα $P = (P_{x,y})_{x,y\in C_m}$ που ορίζεται ως εξής:

- $P_{x,y} = -1$ αν $\rho(x, y) = 1$.
- $P_{x,y} = m - 1$ αν $x = y$.
- $P_{x,y} = 1$ αν $\rho(x, y) = m$.
- $P_{x,y} = 0$ αλλιώς.

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο P είναι θετικά ημιορισμένος και $\sum_{y \in C_m} P_{x,y} = 0$ για κάθε $x \in C_m$. Παρατηρούμε ότι:

$$\sum_{P_{x,y}>0} P_{x,y}\, \rho(x, y)^2 = 2^m \cdot m^2 \quad \text{και} \quad -\sum_{P_{x,y}<0} P_{x,y}\, \rho(x, y)^2 = 2^m \cdot m. \tag{4.2.4}$$

Άρα, $c_2(C_m, \rho) \geq \sqrt{m}$. □

Η απόδειξη αυτή οδηγεί σε μια γενική μέθοδο που αποφεύγει τη θεωρία του ημιορισμένου προγραμματισμού αν και χρησιμοποιεί την ίδια ιδέα (βλέπε [12]). Έστω (X, ρ) ένας μετρικός χώρος, όπου $X = \{x_1, \ldots, x_n\}$. Με τον όρο «ακμή» του X εννοούμε οποιοδήποτε δισύνολο $\{x_i, x_j\} \subseteq X$. Αν σ είναι τυχούσα μετρική στο X, για κάθε σύνολο A ακμών του X θέτουμε

$$\sigma^2(A) = \sum_{\{x,y\} \in A} \sigma(x, y)^2, \tag{4.2.5}$$

και αν E, F είναι δύο σύνολα ακμών του X τότε θέτουμε

$$R_{E,F}(\sigma) = \sqrt{\frac{\sigma^2(F)}{\sigma^2(E)}}. \tag{4.2.6}$$

Έστω $f : (X, \rho) \to \ell_2$ μια γ-εμφύτευση. Η f επάγει στον X τη μετρική

$$\sigma(x, y) = \|f(x) - f(y)\|_2. \tag{4.2.7}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma \leq \rho \leq \gamma \cdot \sigma$. Τότε, για κάθε σύνολο A ακμών του X έχουμε

$$\rho^2(A) = \sum_{\{x,y\} \in A} \rho^2(x, y) \leq \gamma^2 \sum_{\{x,y\} \in A} \sigma^2(x, y) = \gamma^2 \sigma^2(A) \tag{4.2.8}$$

και όμοια

$$\rho^2(A) \geq \sigma^2(A), \tag{4.2.9}$$

οπότε αν E, F είναι δύο σύνολα ακμών του X παίρνουμε

$$R_{E,F}(\sigma) = \sqrt{\frac{\sigma^2(F)}{\sigma^2(E)}} \geq \frac{1}{\gamma} \sqrt{\frac{\rho^2(F)}{\rho^2(E)}} = \frac{R_{E,F}(\rho)}{\gamma}. \tag{4.2.10}$$

Με άλλα λόγια,

$$\gamma \geq \frac{R_{E,F}(\rho)}{R_{E,F}(\sigma)}. \tag{4.2.11}$$

Επιλέγοντας κατάλληλα τα E και F πετυχαίνουμε κάτω φράγμα για το γ.

Στην περίπτωση του Hamming κύβου C_m θα χρησιμοποιήσουμε το εξής απλό λήμμα.

Λήμμα 4.2.2. *Έστω x_1, x_2, x_3, x_4 τυχόντα σημεία σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο. Τότε,*

$$\|x_1 - x_3\|^2 + \|x_2 - x_4\|^2 \leq \|x_1 - x_2\|^2 + \|x_2 - x_3\|^2 + \|x_3 - x_4\|^2 + \|x_4 - x_1\|^2. \tag{4.2.12}$$

Απόδειξη. Αν οι x_i είναι πραγματικοί αριθμοί τότε απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned}(x_1 - x_2)^2 + (x_2 - x_3)^2 + (x_3 - x_4)^2 + (x_4 - x_1)^2 - (x_1 - x_3)^2 - (x_2 - x_4)^2 \\ = (x_1 - x_2 + x_3 - x_4)^2 \geq 0.\end{aligned}$$

Αν τα x_i ανήκουν σε κάποιον Ευκλείδειο χώρο, τότε θεωρώντας μια ορθοκανονική βάση του υποχώρου που παράγουν και γράφοντας κάθε x_i στη μορφή $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{id})$ αναγόμαστε στην πραγματική περίπτωση (το τετράγωνο της Ευκλείδειας νόρμας του x_i είναι το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων του). $\square$

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.1. Θεωρούμε τα εξής σύνολα «ακμών» του C_m:

$$E = \{\{x, y\} : \rho(x, y) = 1\} \quad \text{και} \quad F = \{\{x, y\} : \rho(x, y) = m\}. \tag{4.2.13}$$

Δηλαδή, η ακμή $\{x, y\} \in E$ αν οι x και y είναι γειτονικές κορυφές του C_m ενώ η ακμή $\{x, y\} \in F$ αν οι x και y είναι αντιδιαμετρικές κορυφές του C_m ($x_i = 1 - y_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$). Παρατηρήστε ότι $|E| = m2^{m-1}$ και $|F| = 2^{m-1}$.

Έστω $f : (C_m, \rho) \to \ell_2^n$ μια εμφύτευση και έστω σ η μετρική που επάγεται στον C_m από την f. Υπολογίζουμε πρώτα την ποσότητα $R_{E,F}(\rho)$. Αφού $\rho^2(F) = |F| \cdot m^2 = 2^{m-1}m^2$ και $\rho^2(E) = |E| = 2^{m-1}m$, έχουμε

$$R_{E,F}(\rho) = \sqrt{m}. \tag{4.2.14}$$

Αν λοιπόν δείξουμε ότι $R_{E,F}(\sigma) \leq 1$ θα πάρουμε $\gamma \geq R_{E,F}(\rho) = \sqrt{m}$.

Δείχνουμε ότι $R_{E,F}(\sigma) \leq 1$ με επαγωγή ως προς m. Η περίπτωση $m = 2$ καλύπτεται από το Λήμμα 4.2.2. Για το επαγωγικό βήμα, θεωρούμε $m > 2$ και χωρίζουμε το C_m στα υποσύνολα $C_m^0 = \{x \in C_m : x_m = 0\}$ και $C_m^1 = \{x \in C_m : x_m = 1\}$. Έστω E_0 το σύνολο των ακμών και F_0 το σύνολο των διαγωνίων του C_m^0. Αντίστοιχα, έστω E_1 το σύνολο των ακμών και F_1 το σύνολο των διαγωνίων του C_m^1. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε

$$\sigma^2(F_0) \leq \sigma^2(E_0) \quad \text{και} \quad \sigma^2(E_1) \leq \sigma^2(F_1). \tag{4.2.15}$$

Ορίζουμε $E_{01} = E \setminus (E_0 \cup E_1)$ το σύνολο των ακμών του C_m που συνδέουν τους υποκύβους C_m^0 και C_m^1. Για κάθε $u \in \{0, 1\}^{m-1}$ γράφουμε $\overline{u}$ για την «αντιδιαμετρική κορυφή» της u στον $\{0, 1\}^{m-1}$ και θεωρούμε το τετράπλευρο που έχει κορυφές τα $u0$, $\overline{u}0$, $\overline{u}1$ και $u1$. Οι πλευρές του είναι δύο ακμές του E_{01}, μια διαγώνιος από το F_0 και μια από το F_1, οι δε διαγώνιοι του είναι από το F. Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Λήμματος 4.2.2 για τις εικόνες των κορυφών αυτού του τετραπλεύρου μέσω της f και προσθέτοντας τις ανισότητες πάνω από όλα αυτά τα τετράπλευρα, παίρνουμε

$$\sigma^2(F) \leq \sigma^2(E_{01}) + \sigma^2(F_0) + \sigma^2(F_1). \tag{4.2.16}$$

Από την επαγωγική υπόθεση για τους δύο υποκύβους, το αριστερό μέλος φράσσεται από $\sigma^2(E_{01}) + \sigma^2(E_0) + \sigma^2(E_1) = \sigma^2(E)$. Άρα, $\sigma^2(F) \leq \sigma^2(E)$. Δηλαδή, $R_{E,F}(\sigma) \leq 1$. $\square$

Κεφάλαιο 5

Ακριβές κάτω φράγμα: expanders

5.1 Expanders

Σε αυτή την παράγραφο θεωρούμε ένα r-κανονικό γράφημα $G = (V, E)$ με n κορυφές (όλες οι κορυφές έχουν τον ίδιο βαθμό $r \geq 3$). Υποθέτουμε ότι το G είναι συνεκτικό και το βλέπουμε σαν μετρικό χώρο με τη φυσιολογική μετρική: αν $u, v \in V$ τότε η απόσταση $d(u, v)$ είναι το μήκος του συντομότερου μονοπατιού που συνδέει τις u και v.

Για να δώσουμε κάτω φράγμα για την $c_2(V, d)$ θα χρησιμοποιήσουμε την τεχνική που εφαρμόσαμε στην §4.2 για τον κύβο Hamming. Θυμηθείτε ότι αν τ είναι μια μετρική στον (V, d), για κάθε σύνολο A δισυνόλων με στοιχεία από το V θέτουμε

$$\tau^2(A) = \sum_{\{u,v\}\in A} \tau(u, v)^2, \tag{5.1.1}$$

και αν E, F είναι δύο σύνολα δισυνόλων με στοιχεία από το V τότε θέτουμε

$$R_{E,F}(\tau) = \sqrt{\frac{\tau^2(F)}{\tau^2(E)}}. \tag{5.1.2}$$

Έστω $f : (V, d) \to \ell_2$ μια γ-εμφύτευση. Η f επάγει στο V τη μετρική

$$\sigma(u, v) = \|f(u) - f(v)\|_2. \tag{5.1.3}$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sigma \leq d \leq \gamma \cdot \sigma$, και ελέγχουμε εύκολα ότι

$$\gamma \geq \frac{R_{E,F}(d)}{R_{E,F}(\sigma)}. \tag{5.1.4}$$

Με κατάλληλη επιλογή των E και F πετυχαίνουμε ένα καλό κάτω φράγμα για το γ.

Η επιλογή μας είναι η εξής: σαν E παίρνουμε το σύνολο όλων των ακμών του G και σαν F το σύνολο όλων των δισυνόλων με στοιχεία διακεκριμένες κορυφές του G.

Λήμμα 5.1.1. *Αν $G = (V, E)$ είναι ένα r-κανονικό γράφημα με n κορυφές, τότε*

$$R_{E,F}(d) \geq \frac{c}{\sqrt{r}\log r}\sqrt{n} \cdot \log n. \tag{5.1.5}$$

Απόδειξη. Προφανώς,

$$d^2(E) = |E| = \frac{nr}{2}. \tag{5.1.6}$$

Για να φράξουμε την ποσότητα $d^2(F)$ από κάτω, παρατηρούμε το εξής: αν σταθεροποιήσουμε μια κορυφή $v_0 \in V$, υπάρχουν το πολύ

$$1 + r + r(r-1) + \cdots + r(r-1)^{k-1} \leq r^k + 1 \tag{5.1.7}$$

κορυφές σε απόσταση το πολύ ίση με k από την v_0. Αν λοιπόν πάρουμε $k = \left\lfloor \log_r \frac{n-3}{2} \right\rfloor - 1$, τότε το πλήθος των ζευγαριών που έχουν απόσταση μικρότερη ή ίση από k φράσσεται από

$$\frac{n(r^k+1)}{2} < \frac{n(n-1)}{4}. \tag{5.1.8}$$

Δηλαδή, για τα μισά τουλάχιστον ζευγάρια σημείων $\{u, v\} \in F$ έχουμε $d(u, v) \geq k$. Άρα,

$$d^2(F) \geq \frac{n(n-1)}{4}\left(\log_r \frac{n-3}{2}\right)^2 \geq \frac{c_1}{(\log r)^2} n^2 \log^2 n. \tag{5.1.9}$$

Έπεται η (5.1.5). □

Έστω $f : (V, d) \to \ell_2^m$ μια εμφύτευση και έστω σ η μετρική που επάγεται στο V από την f. Σκοπός μας είναι να δείξουμε μια ανισότητα της μορφής

$$\sigma^2(F) \leq \alpha^2 n \cdot \sigma^2(E). \tag{5.1.10}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{\{u,v\}\in F} \|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq \alpha^2 n \sum_{\{u,v\}\in E} \|f(u) - f(v)\|_2^2. \tag{5.1.11}$$

Τότε, η (5.1.4) και το Λήμμα 5.1.1 θα μας δώσουν την

$$\mathrm{dist}(f) \geq \frac{c}{\alpha\sqrt{r}\log r} \cdot \log n. \tag{5.1.12}$$

Όπως είδαμε στην απόδειξη του Λήμματος 4.2.2, για την απόδειξη της (5.1.11) αρκεί να δείξουμε ότι για κάθε πραγματική συνάρτηση $f : V \to \mathbb{R}$ ισχύει η ανισότητα

$$\sum_{\{u,v\}\in F} (f(u) - f(v))^2 \leq \alpha^2 n \sum_{\{u,v\}\in E} (f(u) - f(v))^2. \tag{5.1.13}$$

Προσθέτοντας την ίδια σταθερά $s \in \mathbb{R}$ σε όλες τις τιμές $f(v)$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{v\in V} f(v) = 0$. Τότε,

$$\begin{aligned}\sum_{\{u,v\}\in F}(f(u)-f(v))^2 &= (n-1)\sum_{v\in V}f(v)^2-\sum_{u\neq v}f(u)f(v)\\ &= n\sum_{v\in V}f(v)^2-\left(\sum_{v\in V}f(v)\right)^2\\ &= n\int_V f(v)^2,\end{aligned}$$

όπου

$$\int_V f(v)^2=\sum_{v\in V}f(v)^2. \tag{5.1.14}$$

Το άθροισμα

$$\sum_{\{u,v\}\in E}(f(u)-f(v))^2 \tag{5.1.15}$$

στο δεξιό μέλος επιδέχεται την εξής ερμηνεία: επιλέγουμε τυχούσα κατεύθυνση για κάθε ακμή του G και για κάθε $e : v \to u$ σκεφτόμαστε την ποσότητα $f(u) - f(v)$ σαν την «παράγωγο $(\partial_e f)(v)$ της f στην κατεύθυνση της e στο σημείο v». Τότε, η «κλίση» της f στο σημείο v είναι το διάνυσμα $((\partial_e f)(v))_{v\in e}$ και

$$|\nabla f(v)|^2=\sum_{\{u,v\}\in E}(f(u)-f(v))^2. \tag{5.1.16}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{\{u,v\}\in E}(f(u)-f(v))^2=\frac{1}{2}\int_V|\nabla f(v)|^2. \tag{5.1.17}$$

Η ζητούμενη ανισότητα (5.1.13) παίρνει έτσι την εξής μορφή: για κάθε $f : V \to \mathbb{R}$ με $\int_V f(v) = 0$, θέλουμε

$$\int_V f(v)^2\leq\frac{\alpha^2}{2}\int_V|\nabla f(v)|^2. \tag{5.1.18}$$

Η ανισότητα (5.1.18) θυμίζει την ανισότητα του Poincaré σε πολλαπλότητες Riemann, την οποία περιγράφουμε στο τυπικό παράδειγμα της σφαίρας S^{n-1} (εφοδιασμένης με τη γεωδαισιακή μετρική ρ και το αναλλοίωτο ως προς ορθογώνιους μετασχηματισμούς μέτρο πιθανότητας σ_n). Η πρώτη μη μηδενική ιδιοτιμή $\lambda_1 = \lambda_1(S^{n-1}) > 0$ του τελεστή Laplace Δ στον (S^{n-1}, ρ) χαρακτηρίζεται από την ανισότητα

$$\lambda_1\mathrm{Var}(f)\leq\int_{S^{n-1}}f\cdot(-\Delta f)\,d\sigma=\int_{S^{n-1}}|\nabla f|^2d\sigma, \tag{5.1.19}$$

όπου

$$\mathrm{Var}(f) = \int_{S^{n-1}} f^2 d\sigma - \left(\int_{S^{n-1}} f\, d\sigma\right)^2. \tag{5.1.20}$$

Η δεύτερη σημαντική παρατήρηση είναι ότι, γενικά, ανισότητες τύπου Poincaré συνδέονται με το ισοπεριμετρικό πρόβλημα και το φαινόμενο της συγκέντρωσης του μέτρου. Ειδικότερα, αν M είναι μια πολλαπλότητα Riemann, η ιδιοτιμή λ_1 του τελεστή Laplace συνδέεται με τη σταθερά του Cheeger $h(M)$ μέσω της

$$4\lambda_1(M) \geq h(M)^2. \tag{5.1.21}$$

Το ανάλογο της σταθεράς του Cheeger στο πλαίσιο των γραφημάτων είναι η έννοια της *αγωγιμότητας* με την οποία θα ξεκινήσουμε. Αφού ορίσουμε κατάλληλα την έννοια του πίνακα Laplace L_G του γραφήματος G, θα δείξουμε μια ανισότητα που συνδέει την αγωγιμότητα με την πρώτη μη μηδενική ιδιοτιμή του L_G, το ανάλογο της (5.1.21). Τέλος, θα αποδείξουμε μια ανισότητα τύπου Poincaré: η (5.1.18) ισχύει με σταθερά α αντιστρόφως ανάλογη προς την αγωγιμότητα του G. Δηλαδή, τα r-κανονικά γραφήματα που δεν εμφυτεύονται καλά στον Ευκλείδειο χώρο είναι εκείνα που έχουν «μεγάλη αγωγιμότητα». Αυτοί είναι οι λεγόμενοι expanders.

Ορισμός 5.1.2. Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με n κορυφές. Αν A και B είναι υποσύνολα του V θέτουμε

$$e(A, B) = \{(u, v) :\, u \in A, v \in B, \{u, v\} \in E\}. \tag{5.1.22}$$

Με άλλα λόγια, $e(A, B)$ είναι το πλήθος των ακμών του G που συνδέουν σημείο του A με σημείο του B (αν $u, v \in A \cap B$ και $\{u, v\} \in E$, τότε μετράμε την ακμή $\{u, v\}$ δύο φορές).

Η *αγωγιμότητα* $\Phi(G)$ του G είναι η ποσότητα

$$\min\left\{\frac{e(A, V\setminus A)}{|A|} :\, A \subset V, 1 \leq |A| \leq \frac{1}{2}|V|\right\}. \tag{5.1.23}$$

Γενικά, λέμε ότι ένα γράφημα G είναι καλός expander αν η αγωγιμότητα $\Phi(G)$ δεν είναι πολύ μικρή σε σχέση με το μέσο βαθμό του G.

Ορισμός 5.1.3. Έστω $r \geq 3$ και $\varepsilon > 0$. Μια οικογένεια $(G_i)_{i\in\mathbb{N}}$ λέγεται «οικογένεια expanders» με παραμέτρους (r, ε) αν ικανοποιούνται τα εξής:

(i) Κάθε G_i είναι r-κανονικό γράφημα με n_i κορυφές, όπου n_i είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία που δεν αυξάνει πολύ γρήγορα: $n_{i+1} \leq n_i^2$.

(ii) Κάθε G_i έχει αγωγιμότητα $\Phi(G_i) \geq \varepsilon$.

Παραδείγματα expanders.

1. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το σύνολο $V_m = \mathbb{Z}_m \times \mathbb{Z}_m$. Ορίζουμε ένα 4-κανονικό γράφημα G_m ως εξής: κάθε $(x, y) \in V_m$ συνδέεται με τα $(x + y, y)$, $(x - y, y)$, $(x, y + x)$ και $(x, x - y)$ (οι πράξεις γίνονται $\bmod m$). Ο Margulis απέδειξε ότι η οικογένεια $(G_m)_{m\in\mathbb{N}}$ είναι οικογένεια expanders.

2. Έστω p πρώτος. Θεωρούμε το σύνολο $V_p = \mathbb{Z}_p$. Ορίζουμε ένα 3-κανονικό γράφημα G_p ως εξής: κάθε $x \in V_p$ συνδέεται με τα $x+1$, $x-1$ και x^{-1} (οι πράξεις γίνονται $\mathrm{mod}\, p$). Οι Lubotzky, Philips και Sarnak απέδειξαν ότι η οικογένεια (G_p) είναι οικογένεια expanders.

Στις επόμενες παραγράφους ακολουθούμε (σε γενικές γραμμές) τις σημειώσεις των Linial και Wigderson [11].

5.2 Το φάσμα ενός γραφήματος

Έστω $G = (V, E)$ ένα r-κανονικό γράφημα με $|V| = n$. Ο *πίνακας συνδεσμολογίας* $A_G = (a_{uv})$ του G είναι ένας $n \times n$ πίνακας που έχει τα στοιχεία του V σαν δείκτες των γραμμών και των στηλών του, και η (u, v) συντεταγμένη του είναι το πλήθος (1 ή 0) των ακμών του G που συνδέουν τις κορυφές u και v. Αφού το G είναι r-κανονικό, έχουμε

$$\sum_{u \in V} a_{uv} = \sum_{v \in V} a_{uv} = r \tag{5.2.1}$$

για κάθε $u, v \in V$.

Ο A_G είναι συμμετρικός, άρα έχει n πραγματικές ιδιοτιμές $\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n$ και υπάρχει μια ορθοκανονική βάση $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ του $\mathbb{R}^n$ που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A_G:

$$A_G v_i = \mu_i v_i, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{5.2.2}$$

Το σύνολο $\{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ είναι το *φάσμα* του γραφήματος G.

Το φάσμα του G δίνει αρκετές πληροφορίες για τις ιδιότητες του γραφήματος G. Μερικές αρχικές παρατηρήσεις συνοψίζονται στο εξής:

Λήμμα 5.2.1. *Έστω $G = (V, E)$ ένα r-κανονικό γράφημα με $|V| = n$, και έστω A_G ο πίνακας συνδεσμολογίας και $\{\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n\}$ το φάσμα του G. Τότε,*

(i) *$\mu_1 = r$, και ένα ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή r είναι το $(1, 1, \ldots, 1)$.*

(ii) *$\mu_1 > \mu_2$ αν και μόνο αν το G είναι συνεκτικό.*

(iii) *$\mu_1 = -\mu_n$ αν και μόνο αν το G είναι διμερές.* □

Η επόμενη Πρόταση δίνει μια πρώτη ένδειξη για τη σχέση του φάσματος με την αγωγιμότητα.

Πρόταση 5.2.2 (expander mixing lemma). *Έστω $G = (V, E)$ ένα r-κανονικό γράφημα με $|V| = n$, και έστω A_G ο πίνακας συνδεσμολογίας και $\{\mu_1 \geq \mu_2 \geq \cdots \geq \mu_n\}$ το φάσμα του G. Θέτουμε $\lambda = \max\{|\mu_2|, |\mu_n|\}$. Τότε, για κάθε $A, B \subseteq V$ έχουμε*

$$\left| |e(A, B)| - \frac{r|A| \cdot |B|}{n} \right| \leq \lambda \sqrt{|A| \cdot |B|}. \tag{5.2.3}$$

Η ανισότητα συνδέει την παράμετρο λ με το πόσο «τυχαίο» είναι το γράφημα G: Παρατηρήστε ότι η ποσότητα $\frac{r|A|\cdot|B|}{n}$ είναι η μέση τιμή της $|e(A,B)|$ αν υποθέσουμε ότι οι r κορυφές με τις οποίες συνδέουμε κάθε $u \in V$ επιλέγονται ανεξάρτητα και ομοιόμορφα από το V (εδώ επιτρέπουμε αυτοσυνδέσεις και πολλαπλές ακμές). Επομένως, το αριστερό μέλος συγκρίνει το πλήθος των ακμών που συνδέουν τα A και B στο δοθέν γράφημα G με το αναμενόμενο πλήθος των ακμών στο τυχαίο r-κανονικό γράφημα που ορίζεται στο V.

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με χ_A και χ_B τα χαρακτηριστικά διανύσματα των A και B (δηλαδή, $\chi_S(u) = 1$ αν $u \in S$ και $\chi_S(u) = 0$ αν $u \notin S$). Παρατηρήστε ότι

$$\langle \chi_A, A_G\chi_B\rangle = \sum_{u,v\in V} a_{uv}\chi_A(u)\chi_B(v) = |e(A,B)|. \tag{5.2.4}$$

Έστω $\{v_1,\dots,v_n\}$ μια ορθοκανονική βάση ιδιοδιανυσμάτων του A_G που αντιστοιχούν στις $\mu_1,\mu_2,\dots,\mu_n$.

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $v_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,1,\dots,1)$. Έχουμε

$$\chi_A = \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i \quad \text{και} \quad \chi_B = \sum_{j=1}^n \beta_j v_j \tag{5.2.5}$$

για κάποιους $\alpha_i, \beta_j \in \mathbb{R}$. Άρα,

$$\langle \chi_A, A_G\chi_B\rangle = \Big\langle \sum_{i=1}^n \alpha_i v_i, \sum_{j=1}^n \beta_j\mu_j v_j\Big\rangle = \sum_{i=1}^n \alpha_i\beta_i\mu_i. \tag{5.2.6}$$

Παρατηρούμε ότι

$$\alpha_1 = \langle \chi_A, v_1\rangle = \frac{|A|}{\sqrt{n}} \quad \text{και} \quad \beta_1 = \langle \chi_B, v_1\rangle = \frac{|B|}{\sqrt{n}}. \tag{5.2.7}$$

Αφού $\mu_1 = r$, συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$|e(A,B)| = r\frac{|A|\cdot|B|}{n} + \sum_{i=2}^n \mu_i\alpha_i\beta_i. \tag{5.2.8}$$

Άρα,

$$\left| |e(A,B)| - \frac{r|A|\cdot|B|}{n}\right| \leq \left|\sum_{i=2} \mu_i\alpha_i\beta_i\right|. \tag{5.2.9}$$

Από τον ορισμό του λ και την ανισότητα Cauchy-Schwarz,

$$\left|\sum_{i=2}^n \mu_i\alpha_i\beta_i\right| \leq \lambda\sum_{i=2}^n |\alpha_i\beta_i| \leq \lambda\|\chi_A\|_2\|\chi_B\|_2 = \lambda\sqrt{|A|\cdot|B|}. \tag{5.2.10}$$

Έπεται το ζητούμενο. □

Η επόμενη Πρόταση δίνει ένα απλό κάτω φράγμα για την παράμετρο λ (οι Alon-Boppana έχουν δείξει ότι για κάθε r-κανονικό γράφημα με n κορυφές ισχύει η ισχυρότερη ανισότητα $\lambda \geq 2\sqrt{r-1} + o_n(1)$).

Πρόταση 5.2.3. *Αν G είναι ένα r-κανονικό γράφημα με n κορυφές, τότε*

$$\lambda(G) \geq \sqrt{r}(1 - o_n(1)). \tag{5.2.11}$$

Απόδειξη. Υπολογίζουμε με δύο τρόπους το ίχνος του A_G^2. Από τη μία πλευρά, αφού ο A_G είναι συμμετρικός και το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων κάθε γραμμής ή στήλης είναι ίσο με r, έχουμε $(A_G^2)_{ii} = r$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Άρα,

$$\mathrm{tr}(A_G^2) = nr. \tag{5.2.12}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\mathrm{tr}(A_G^2) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i^2 \leq r^2 + (n-1)\lambda^2. \tag{5.2.13}$$

Άρα,

$$\lambda^2 \geq r\frac{n-r}{n-1}, \tag{5.2.14}$$

απ΄ όπου έπεται ότι $\lambda \geq \sqrt{r}(1 - o_n(1))$. □

5.3 Αγωγιμότητα και φασματικό κενό

Έστω $G = (V, E)$ ένα γράφημα με n κορυφές. Επιλέγουμε κάποια κατεύθυνση για τις ακμές του.

Ορισμός 5.3.1 (φασματικό κενό). Το *φασματικό κενό* του G είναι η διαφορά των δύο πρώτων ιδιοτιμών του A_G. Δηλαδή, ο αριθμός

$$\mu_1 - \mu_2 = r - \mu_2. \tag{5.3.1}$$

Όπως θα δούμε, ο $r - \mu_2$ περιγράφει την αγωγιμότητα του G.

Ορισμός 5.3.2 (πίνακας συνδεσμολογίας στο $V \times E$). Ο $V \times E$ *πίνακας συνδεσμολογίας* του G ορίζεται ως εξής: αν $v \in V$ και $e \in E$ θέτουμε $M_{v,e} = 1$ αν η ακμή e καταλήγει στην κορυφή v, $M_{v,e} = -1$ αν η e ξεκινάει από την v, και $M_{v,e} = 0$ αλλιώς.

Ορισμός 5.3.3 (κλίση). Έστω $f : V \to \mathbb{R}$. Ο *τελεστής κλίσης* είναι η απεικόνιση $f \mapsto fM$. Το *διάνυσμα κλίσης* fM *της* f περιγράφει τη μεταβολή της f κατά μήκος κάθε ακμής: για κάθε $e \in E$ που ξεκινάει από την u και καταλήγει στην v ισχύει

$$(fM)_e = f(v) - f(u). \tag{5.3.2}$$

Ορισμός 5.3.4 (απόκλιση). Έστω $g : E \to \mathbb{R}$. Ο *τελεστής απόκλισης* είναι η απεικόνιση $g \mapsto Mg$. Η *απόκλιση της* g είναι ένα V-διάνυσμα: για κάθε $v \in V$ ισχύει

$$(Mg)_v = \sum_{e \to u} g(e) - \sum_{e \leftarrow v} g(e). \tag{5.3.3}$$

Ορισμός 5.3.5 (πίνακας Laplace). Ο *πίνακας Laplace* του G είναι ο πίνακας $L_G = MM^t$. Απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned} (L_G)_{uv} &= \deg(u), \quad \text{αν } u = v, \\ (L_G)_{uv} &= -1, \quad \text{αν } u \neq v \text{ και } \{u, v\} \in E(G), \\ (L_G)_{uv} &= 0, \quad \text{αλλιώς.} \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι ο πίνακας L_G δεν εξαρτάται από την κατεύθυνση που επιλέξαμε για τις ακμές του G.

Στην περίπτωση που το G είναι r-κανονικό έχουμε το εξής.

Λήμμα 5.3.6. *Εστω $G = (V, E)$ ένα r-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Αν A_G είναι ο πίνακας συνδεσμολογίας και L_G είναι ο πίνακας Laplace του G, ισχύουν τα εξής:*

(i) $L_G = r \cdot I - A_G$.

(ii) *Το φάσμα $\{\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n\}$ του L_G περιέχεται στο $[0, 2r]$.*

(iii) *$\mu_i(A_G) = r - \lambda_{n-i+1}(L_G)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. Ειδικότερα, $\lambda_n(L_G) = 0$.*

(iv) *Το φασματικό κενό $\mu_1(A_G) - \mu_2(A_G)$ ισούται με τη μικρότερη θετική ιδιοτιμή $\lambda_{n-1}(L_G)$ του L_G.*

Απόδειξη. Άσκηση. □

Θα χρειαστούμε την αναπαράσταση των ιδιοτιμών ενός συμμετρικού πραγματικού πίνακα μέσω των *πηλίκων Rayleigh*.

Θεώρημα 5.3.7. *Έστω A ένας πραγματικός συμμετρικός $n \times n$ πίνακας και έστω $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_n$ οι ιδιοτιμές του. Έστω $\{x_1, \ldots, x_n\}$ μια ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$, όπου το x_i είναι ιδιοδιάνυσμα που αντιστοιχεί στην ιδιοτιμή λ_i. Τότε,*

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= \max_{x \neq 0} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|_2^2} \\ \lambda_2 &= \max_{x \neq 0,\ x \perp x_1} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|_2^2} \\ \cdots & \quad \cdots \\ \lambda_n &= \max_{x \neq 0,\ x \perp x_1,\ \ldots,\ x \perp x_{n-1}} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|_2^2}. \end{aligned}$$

Οι παραπάνω ισότητες γράφονται επίσης ως εξής: για κάθε $1 \leq i \leq n$,

$$\lambda_i = \min_{\dim(F) = n-i+1} \max_{x \in F \setminus \{0\}} \frac{\langle x, Ax \rangle}{\|x\|_2^2}. \tag{5.3.4}$$

Το βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου συνδέει την αγωγιμότητα του G με το φασματικό του κενό.

Θεώρημα 5.3.8. *Έστω $G = (V, E)$ ένα συνεκτικό, r-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Αν $\lambda = \mu_2(A_G)$, τότε*

$$\frac{r - \lambda}{2} \leq \Phi(G) \leq \sqrt{2r(r - \lambda)}. \tag{5.3.5}$$

Απόδειξη του κάτω φράγματος: Θυμηθείτε ότι το $\vec{1} = (1, \ldots, 1)$ είναι ιδιοδιάνυσμα του A_G που αντιστοιχεί στην $\mu_1(A_G) = r$. Από το Θεώρημα 5.3.7, για να δείξουμε ότι $\lambda \geq r - 2\Phi(G)$ αρκεί να βρούμε ένα διάνυσμα $y \perp \vec{1}$ με την ιδιότητα

$$\langle y, A_G y\rangle \geq (r - 2\Phi(G))\|y\|_2. \tag{5.3.6}$$

Για κάθε $S \subseteq V$ θεωρούμε το διάνυσμα

$$y = y(S) = |V \setminus S| \cdot \chi_S - |S| \cdot \chi_{V\setminus S}. \tag{5.3.7}$$

Παρατηρήστε ότι $y(S) \perp \vec{1}$. Άρα,

$$\lambda \cdot \|y\|_2^2 \geq \langle y, A_G y\rangle. \tag{5.3.8}$$

Ένας απλός υπολογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned} \|y(S)\|_2^2 &= |V \setminus S|^2|S| + |S|^2|V \setminus S| = |S| \cdot |V \setminus S| \cdot (|S| + |V \setminus S|) \\ &= n|S| \cdot |V \setminus S|. \end{aligned}$$

Επίσης, από την (5.2.4) παίρνουμε

$$\langle y, A_G y\rangle = |e(S)||V \setminus S|^2 + |e(V \setminus S)||S|^2 - 2|S||V \setminus S||e(S, V \setminus S)|,$$

όπου $e(S) = e(S, S)$ για $S \subseteq V$. Αφού το G είναι r-κανονικό, έχουμε

$$r|S| = |e(S)| + |e(S, V \setminus S)| \tag{5.3.9}$$

και

$$r|V \setminus S| = |e(V \setminus S)| + |e(S, V \setminus S)|. \tag{5.3.10}$$

Λύνοντας τις τελευταίες δύο εξισώσεις ως προς $|e(S)|$, $|e(V \setminus S)|$ και αντικαθιστώντας στην προηγούμενη, παίρνουμε

$$\langle y, A_G y\rangle = nr|S||V \setminus S| - n^2|e(S, V \setminus S)|. \tag{5.3.11}$$

Επιστρέφοντας στην (5.3.8) βλέπουμε ότι

$$\lambda \geq \frac{\langle y, A_G y\rangle}{\|y\|^2} = r - \frac{n|e(S, V \setminus S)|}{|S||V \setminus S|}. \tag{5.3.12}$$

Τώρα επιλέγουμε το S: από τον ορισμό της αγωγιμότητας, υπάρχει $S_0 \subseteq V$ με $|S_0| \leq n/2$ ώστε

$$\Phi(G) = |e(S_0, V \setminus S_0)|/|S_0|. \tag{5.3.13}$$

Αφού $|V \setminus S_0| \geq n/2$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lambda \geq r - \frac{n\Phi(G)}{|V \setminus S_0|} \geq r - 2\Phi(G). \qquad \square \tag{5.3.14}$$

Απόδειξη του άνω φράγματος: Ξεκινάμε από την εξής παρατήρηση.

Λήμμα 5.3.9. *Αν* $f : V \to \mathbb{R}$ *είναι μια συνάρτηση, τότε*

$$\langle f, L_G f\rangle = \|fM\|_2^2 = \sum_{\{u,v\}\in E} (f(u)-f(v))^2. \tag{5.3.15}$$

Απόδειξη. Βλέποντας την f σαν διάνυσμα με δείκτες από το V, γράφουμε

$$\langle f, L_G f\rangle = \langle f, MM^t f\rangle = \langle (fM)^t, (fM)^t\rangle = \|fM\|_2^2. \tag{5.3.16}$$

Από τον ορισμό του διανύσματος κλίσης έπεται το συμπέρασμα. □

Ορίζουμε

$$B_f = \sum_{\{u,v\}\in E} |f^2(u) - f^2(v)|. \tag{5.3.17}$$

Αν $\beta_0 < \beta_1 < \cdots < \beta_m$ είναι οι διαφορετικές τιμές που παίρνει η f, ορίζουμε

$$L_i = \{x \in V : f(x) \geq \beta_i\} \tag{5.3.18}$$

για $i = 0, 1, \ldots, m$. Παρατηρήστε ότι $L_0 \supseteq L_1 \supseteq \cdots \supseteq L_m$.

Λήμμα 5.3.10. *Με τους παραπάνω ορισμούς,*

$$B_f = \sum_{i=1}^{m} |e(L_i, V\setminus L_i)| \cdot (\beta_i^2 - \beta_{i-1}^2). \tag{5.3.19}$$

Απόδειξη. Για κάθε $\{u,v\} \in E$, αν $f(u) = \beta_p > \beta_q = f(v)$, τότε η συνεισφορά της ακμής $\{u,v\}$ στο B_f ισούται με

$$\beta_p^2 - \beta_q^2 = (\beta_p^2 - \beta_{p-1}^2) + (\beta_{p-1}^2 - \beta_{p-2}^2) + \cdots + (\beta_{q+1}^2 - \beta_q^2). \tag{5.3.20}$$

Αν λοιπόν αθροίσουμε ως προς όλες τις ακμές, ο όρος $(\beta_i^2 - \beta_{i-1}^2)$ εμφανίζεται από μία φορά για κάθε ακμή $\{u,v\}$ με την ιδιότητα $f(u) \geq \beta_i$ και $f(v) \leq \beta_{i-1}$, δηλαδή, από μία φορά για κάθε ακμή $\{u,v\}$ με την ιδιότητα $u \in L_i$ και $v \notin L_i$. Με άλλα λόγια, εμφανίζεται συνολικά $|e(L_i, V\setminus L_i)|$ φορές. Έπεται το ζητούμενο. □

Λήμμα 5.3.11. *Ισχύει η ανισότητα*

$$B_f \leq \sqrt{2r}\, \|fM\|_2 \cdot \|f\|_2. \tag{5.3.21}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε

$$\begin{aligned} B_f &= \sum_{\{u,v\}\in E} |f^2(u) - f^2(v)| = \sum_{\{u,v\}\in E} |f(u)+f(v)|\cdot|f(u)-f(v)| \\ &\leq \sqrt{\sum_{\{u,v\}\in E} (f(u)+f(v))^2}\cdot\sqrt{\sum_{\{u,v\}\in E} (f(u)-f(v))^2}. \end{aligned}$$

Όμως,

$$\sqrt{\sum_{\{u,v\}\in E} (f(u)-f(v))^2} = \|fM\|_2 \tag{5.3.22}$$

και

$$\begin{aligned}\sqrt{\sum_{\{u,v\}\in E}(f(u)+f(v))^2} &\leq \sqrt{2\sum_{\{u,v\}\in E}(f^2(u)+f^2(v))}\\ &= \sqrt{2r\sum_{u\in V}f^2(u)}=\sqrt{2r}\cdot\|f\|_2.\end{aligned}$$

Από τις δύο τελευταίες ανισότητες προκύπτει το ζητούμενο. □

Λήμμα 5.3.12. *Αν $f\geq 0$ και $|\mathrm{supp}(f)|\leq n/2$, τότε*

$$B_f\geq \Phi(G)\|f\|_2^2. \tag{5.3.23}$$

Απόδειξη. Αφού η f μηδενίζεται σε περισσότερα από τα μισά $u\in V$ και παίρνει θετικές τιμές στα υπόλοιπα, έχουμε $\beta_0=0$ και $|L_i|\leq n/2$ για κάθε $i=1,\ldots,m$. Άρα,

$$\frac{|e(L_i,V\setminus L_i)|}{|L_i|}\geq \Phi(G). \tag{5.3.24}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}B_f &= \sum_{i=1}^m |e(L_i,V\setminus L_i)|\cdot(\beta_i^2-\beta_{i-1}^2)\\ &\geq \Phi(G)\sum_{i=1}^m |L_i|\cdot(\beta_i^2-\beta_{i-1}^2)\\ &= \Phi(G)\sum_{i=1}^m \beta_i^2\cdot(|L_i|-|L_{i+1}|)\\ &= \Phi(G)\sum_{i=1}^m \beta_i^2\cdot|\{u: f(u)=\beta_i\}|.\end{aligned}$$

Η τελευταία ποσότητα είναι ίση με $\Phi(G)\|f\|_2^2$. □

Έχοντας τα προηγούμενα Λήμματα στη διάθεση μας, συνεχίζουμε ως εξής. Για κάθε ιδιοτιμή μ_i του A_G, ο $r-\mu_i$ είναι ιδιοτιμή του πίνακα Laplace $L_G=r\cdot I-A_G$. Έστω λ η δεύτερη ιδιοτιμή του A_G και έστω g ένα ιδιοδιάνυσμα του A_G που αντιστοιχεί στην λ (τότε το g είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του L_G που αντιστοιχεί στην $r-\lambda$). Θέτουμε $f=g^+$, δηλαδή $f(u)=g(u)$ αν $g(u)>0$ και $f(u)=0$ αλλιώς. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|\mathrm{supp}(f)|\leq n/2$, αλλιώς θα μπορούσαμε να ξεκινήσουμε με το $-g$ που είναι επίσης ιδιοδιάνυσμα του A_G για την ιδιοτιμή λ. Ορίζουμε $V^+=\mathrm{supp}(f)$. Τότε, για κάθε $u\in V^+$ έχουμε

$$\begin{aligned}(L_Gf)(u) &= rf(x)-\sum_{v\in V}a_{uv}f(v)\\ &= rg(u)-\sum_{v\in V^+}a_{uv}g(v)\\ &\leq rg(u)-\sum_{v\in V}a_{uv}g(v)\\ &= (L_Gg)(u)=(r-\lambda)g(u).\end{aligned}$$

Αφού $f(u)=0$ για κάθε $u\notin V^+$, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}\|fM\|_2^2 &= \langle f, L_G f\rangle = \sum_{u\in V} f(u)(L_G f)(u)\\ &\leq (r-\lambda)\sum_{u\in V^+} g^2(u)\\ &= (r-\lambda)\sum_{u\in V} f^2(u) = (r-\lambda)\|f\|_2^2.\end{aligned}$$

Από το Λήμμα 5.3.11 έχουμε

$$B_f \leq \sqrt{2r}\,\|fM\|_2\cdot\|f\|_2 \tag{5.3.25}$$

και από το Λήμμα 5.3.12,

$$B_f \geq \Phi(G)\|f\|_2^2. \tag{5.3.26}$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε

$$\Phi(G)\|f\|_2^2 \leq \sqrt{2r}\,\|fM\|_2\cdot\|f\|_2. \tag{5.3.27}$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο και συνδυάζοντας με την $\|fM\|_2^2\leq(r-\lambda)\|f\|_2^2$ παίρνουμε

$$\Phi^2(G)\|f\|_2^2 \leq 2r\cdot\|fM\|_2^2 \leq 2r(r-\lambda)\|f\|_2^2, \tag{5.3.28}$$

άρα $\Phi^2(G)\leq 2r(r-\lambda)$. □

Μπορούμε τώρα να επιστρέψουμε στην ανισότητα Poincaré (5.1.13) που ζητούσαμε.

Λήμμα 5.3.13. *Έστω $G=(V,E)$ ένα συνεκτικό, r-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Αν $\lambda=\mu_2(A_G)$, τότε*

$$r-\lambda = \min\left\{\langle L_G f, f\rangle : \|f\|_2=1,\ \sum_{v\in V} f(v)=0\right\}. \tag{5.3.29}$$

Απόδειξη. Έχουμε $L_G = r\cdot Id - A_G$, άρα

$$\langle L_G f, f\rangle = r\langle f,f\rangle - \langle A_G f, f\rangle = r - \langle A_G f, f\rangle \tag{5.3.30}$$

για κάθε $f: V\to\mathbb{R}$ με $\|f\|_2=1$. Άρα,

$$\begin{aligned}&\min\left\{\langle L_G f, f\rangle : \|f\|_2=1,\ \sum_{v\in V} f(v)=0\right\}\\ &= r-\max\left\{\langle A_G f, f\rangle : \|f\|_2=1,\ \sum_{v\in V} f(v)=0\right\}.\end{aligned} \tag{5.3.31}$$

Από το Θεώρημα 5.3.7 έχουμε

$$\max\left\{\langle A_G f, f\rangle : \|f\|_2=1,\ \sum_{v\in V} f(v)=0\right\} = \lambda. \tag{5.3.32}$$

Έπεται το ζητούμενο. □

Θεώρημα 5.3.14. *Έστω $G=(V,E)$ ένα r-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Αν $f:V\to\mathbb{R}$ και $\sum_{v\in V} f(v)=0$, τότε*

$$\sum_{v\in V} f^2(v) \leq \frac{2r}{\Phi^2(G)} \sum_{\{u,v\}\in E} (f(v)-f(u))^2. \tag{5.3.33}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_2=1$. Από το Λήμμα 5.3.9 και από το Λήμμα 5.3.13 έχουμε

$$\sum_{\{u,v\}\in E} (f(v)-f(u))^2 = \langle L_G f, f\rangle \geq r-\lambda = (r-\lambda)\sum_{v\in V} f^2(v). \tag{5.3.34}$$

Από το Θεώρημα 5.3.8 έχουμε

$$r-\lambda \geq \frac{\Phi^2(G)}{2r}. \tag{5.3.35}$$

Συνδυάζοντας τις δύο ανισότητες παίρνουμε την (5.3.33). □

Άμεση συνέπεια είναι το εξής κάτω φράγμα για την Ευκλείδεια παραμόρφωση (βλέπε §5.1).

Θεώρημα 5.3.15. *Έστω $G=(V,E)$ ένα r-κανονικό γράφημα με n κορυφές. Για κάθε εμφύτευση $f:(V,d)\to\ell_2^m$,*

$$\mathrm{dist}(f) \geq \frac{c\Phi(G)}{r\log r}\cdot \log n. \tag{5.3.36}$$

Απόδειξη. Προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 5.3.14 σε συνδυασμό με τις (5.1.11), (5.1.12), (5.1.13) και το Λήμμα 5.1.1. □

5.4 Ύπαρξη γραφημάτων με μεγάλη αγωγιμότητα

Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε ότι ένα τυχαίο r-κανονικό διμερές γράφημα έχει μεγάλη αγωγιμότητα. Αυτό αποδεικνύει την ύπαρξη οικογενειών γραφημάτων που είναι expanders.

Ορισμός 5.4.1. Έστω $G=(V,E)$ ένα γράφημα. Με τον όρο *ταίριασμα* του G εννοούμε ένα υποσύνολο A του E που έχει την εξής ιδιότητα: κάθε $u\in V$ εμφανίζεται σε μία το πολύ ακμή από το A. Αν κάθε $u\in V$ εμφανίζεται σε ακριβώς μία ακμή από το A, τότε λέμε ότι το A είναι ένα *τέλειο ταίριασμα*.

Θεώρημα 5.4.2. *Υπάρχουν $n_0\in\mathbb{N}$ και σταθερά $c>0$ ώστε: για κάθε άρτιο $n\geq n_0$ υπάρχει 3-κανονικό γράφημα $G=(V,E)$ με n κορυφές και αγωγιμότητα $\Phi(G)\geq c$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε ότι για αρκετά μικρό $c>0$ και για αρκετά μεγάλο άρτιο n, με μεγάλη πιθανότητα, ένα τυχαίο 3-κανονικό γράφημα με n κορυφές έχει αγωγιμότητα $\Phi(G)\geq c$.

Δημιουργούμε ένα τυχαίο 3-κανονικό γράφημα G επιλέγοντας τρία τυχαία τέλεια ταιριάσματα, τα G_1, G_2 και G_3. Για να δημιουργήσουμε ένα τυχαίο γράφημα

G_1 με $n = 2k$ κορυφές και k ακμές, ορίζουμε ακμές επιλέγοντας ομοιόμορφα τυχαία ζευγάρια διακεκριμένων κορυφών και βγάζοντας τα από το σωρό των διαθέσιμων κορυφών (συνεπώς, η επιλογή κάθε ζευγαριού εξαρτάται από τις προηγούμενες επιλογές). Συνεχίζουμε έτσι μέχρι να εξαντλήσουμε το σύνολο των n κορυφών. Τότε, έχουμε πετύχει ένα τέλειο ταίριασμα στο G (k ακμές καλύπτουν τις $n = 2k$ κορυφές).

Επαναλαμβάνουμε αυτή τη διαδικασία τρεις φορές (καθεμία ανεξάρτητη από τις άλλες). Παίρνουμε έτσι τρία γραφήματα $G_1 = (V, E_1)$, $G_2 = (V, E_2)$, $G_3 = (V, E_3)$. Κατά «πάσα πιθανότητα» τα ταιριάσματα E_i είναι σχεδόν ξένα (αν το n είναι μεγάλο, η ίδια ακμή δεν πρόκειται να επιλεγεί περισσότερες από μία φορές). Τέλος, συνδυάζουμε τα τρία γραφήματα σε ένα ορίζοντας $G = (V, E_1 \cup E_2 \cup E_3)$. Το G είναι 3-κανονικό από την κατασκευή του.

Θα εκτιμήσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Phi(G) < c$. Για κάθε $S \subset V$ συμβολίζουμε με $\partial(S)$ το *σύνορο* του S το οποίο ορίζεται από την

$$\partial(S) = \Gamma(S) \setminus S. \tag{5.4.1}$$

Με άλλα λόγια, $\partial(S)$ είναι το σύνολο των κορυφών του G που συνδέονται με το S με κάποια ακμή αλλά δεν ανήκουν στο S. Από τον ορισμό της αγωγιμότητας έχουμε $\Phi(G) < 3c$ αν υπάρχει $S \subset V$ ώστε

$$|S| \leq k \quad \text{και} \quad |\partial(S)| < c|S|. \tag{5.4.2}$$

Η πιθανότητα $\mathbb{P}$ αυτού του ενδεχομένου ικανοποιεί την

$$\begin{aligned} \mathbb{P} &\leq \sum_{\{S:|S|\leq k\}} \mathrm{Prob}(|\partial(S)| < c|S|) \\ &\leq \sum_{\{S:|S|\leq k\}} \sum_{\{T:|T|=c|S|\}} \mathrm{Prob}(\partial(S) \subset T), \end{aligned}$$

όπου, για απλότητα στο συμβολισμό, γράφουμε cs αντί για $\lfloor cs \rfloor$. Μετρώντας το πλήθος όλων των S που έχουν πληθάριθμο $s = 1, \ldots, k$ και το πλήθος όλων των T που έχουν πληθάριθμο cs βλέπουμε ότι

$$\mathbb{P} \leq \sum_{s=1}^{k} \binom{n}{s} \binom{n-s}{cs} \cdot \mathrm{Prob}(\partial(S_0) \subset T_0) \tag{5.4.3}$$

όπου S_0 και T_0 είναι σταθερά ξένα υποσύνολα του V με πληθαρίθμους s και cs αντίστοιχα.

Παρατηρήστε ότι αν $\partial(S_0) \subset T_0$ τότε $\Gamma(S_0) \subset S_0 \cup T_0$. Αν λοιπόν γράφουμε $[s] := \{1, \ldots, s\}$, τότε

$$\mathbb{P} \leq \sum_{s=1}^{k} \binom{n}{s} \binom{n}{cs} \cdot \mathrm{Prob}(\Gamma([s]) \subseteq [s + cs]). \tag{5.4.4}$$

Μένει τώρα να εκτιμήσουμε την πιθανότητα του ενδεχομένου $\Gamma([s]) \subseteq [s+cs]$. Για να συμβαίνει αυτό το ενδεχόμενο πρέπει στα τρία τέλεια ταιριάσματα G_i οι κορυφές του $[s]$ να συνδέονται με κορυφές του $[s+cs]$. Αν περιοριστούμε σε κάποιο από τα G_i, η πιθανότητα να συμβεί κάτι τέτοιο φράσσεται από

$$\frac{s+cs-1}{n-1}\cdot\frac{s+cs-3}{n-3}\cdots\frac{s+cs-s+1}{n-s+1}=\prod_{j=1}^{s/2}\frac{s+cs-2j+1}{n-2j+1}. \tag{5.4.5}$$

Αυτό το φράγμα προκύπτει ως εξής: συνδέουμε διαδοχικά $s/2$ κορυφές από το $[s]$ με κορυφές από το $[s+cs]$ υπολογίζοντας σε κάθε βήμα την πιθανότητα η επόμενη κορυφή του $[s]$ που συνδέουμε, να συνδέεται με κάποια από τις κορυφές του $[s+cs]$ που δεν έχουν ήδη συνδεθεί. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}\prod_{j=1}^{s/2}\frac{s+cs-2j+1}{n-2j+1} &< \prod_{j=0}^{(s/2)-1}\frac{s+cs-2j}{n-2j}\\ &= \frac{2^{s/2}\prod_{j=0}^{(s/2)-1}\left(\frac{s+cs}{2}-j\right)}{2^{s/2}\prod_{j=0}^{(s/2)-1}\left(\frac{n}{2}-j\right)}\\ &= \frac{\binom{(s+cs)/2}{s/2}}{\binom{n/2}{s/2}}.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\mathrm{Prob}(\Gamma([s])\subseteq[s+cs])<\left(\frac{\binom{(s+cs)/2}{s/2}}{\binom{n/2}{s/2}}.\right)^3. \tag{5.4.6}$$

Επιστρέφοντας στην (5.4.4) παίρνουμε

$$\mathbb{P}<\sum_{s=1}^{k}\frac{\binom{n}{s}\binom{n}{cs}\left(\binom{(s+cs)/2}{s/2}\right)^3}{\binom{n/2}{s/2}^3}. \tag{5.4.7}$$

Χρησιμοποιώντας την προσέγγιση $\binom{n}{\alpha n}=2^{h(\alpha)n}$ όπου

$$h(\alpha)=\alpha\log_2(1/\alpha)+(1-\alpha)\log_2(1/(1-\alpha)), \tag{5.4.8}$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\log_2\left(\frac{\binom{n}{s}\binom{n}{cs}\left(\binom{(s+cs)/2}{s/2}\right)^3}{\binom{n/2}{s/2}^3}\right) &\equiv n\cdot h\big(\frac{s}{n}\big)+n\cdot h\big(\frac{cs}{n}\big)\\ &\quad +3\frac{s+cs}{2}h\big(\frac{s}{s+cs}\big)-3\frac{n}{2}h\big(\frac{s}{n}\big)\\ &= -\frac{n}{2}\left(h\big(\frac{s}{n}\big)-2h\big(\frac{cs}{n}\big)\right)\\ &\quad +3\frac{s+cs}{2}h\big(\frac{1}{1+c}\big).\end{aligned}$$

Αν το $c>0$ είναι αρκετά μικρό και αν $s\le n/2$, τότε

$$h(s/n)<c_1h(cs/n)\quad\text{όπου}\quad c_1\simeq c\log(1/c) \tag{5.4.9}$$

και

$$h(1/(1+c)) \simeq h(c) \simeq c\log_2(1/c). \tag{5.4.10}$$

Έπεται ότι

$$\mathbb{P} < \sum_{s=1}^{k} 2^{-((1-c_1)h(s/2k)k-2c_1s)}. \tag{5.4.11}$$

Παρατηρήστε ότι αν το $c>0$ είναι αρκετά μικρό, οπότε και το $c_1>0$ είναι αρκετά μικρό, έχουμε

$$(1-c_1)h(s/2k)k \geq (1-c_1)\frac{s}{2k}\log_2\left(\frac{2k}{s}\right)\cdot k = \frac{(1-c_1)s}{2}\log_2\left(\frac{2k}{s}\right) > 4c_1s \tag{5.4.12}$$

για κάθε $s=1,\ldots,k$. Συνεπώς,

$$\mathbb{P} < \sum_{s=1}^{k} 2^{-\left(\frac{(1-c_1)s}{4}\log_2\left(\frac{2k}{s}\right)\right)}. \tag{5.4.13}$$

Παρατηρήστε ότι αν $s\geq\sqrt{k}$ έχουμε

$$2^{-\left(\frac{(1-c_1)s}{4}\log_2\left(\frac{2k}{s}\right)\right)} \leq 2^{-\rho\sqrt{k}}, \tag{5.4.14}$$

για κάποια σταθερά $\rho(c_1)>0$, ενώ αν $s\leq\sqrt{k}$ έχουμε

$$2^{-\left(\frac{(1-c_1)s}{4}\log_2\left(\frac{2k}{s}\right)\right)} = \left(\frac{s}{2k}\right)^{(1-c_1)s/4} \leq \frac{1}{k^{\alpha s}}, \tag{5.4.15}$$

όπου $\alpha=\frac{1-c_1}{8}$. Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{P} &< \sum_{s=1}^{\sqrt{k}}\left(\frac{1}{k^{\alpha}}\right)^{s} + k\cdot 2^{-\rho\sqrt{k}} < \frac{c'}{k^{\alpha}} + k\cdot 2^{-\rho\sqrt{k}} \\ &\to 0\end{aligned}$$

όταν $k\to\infty$. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. $\square$

Κεφάλαιο 6

Περιφέρεια γραφήματος και Ευκλείδεια παραμόρφωση

6.1 Γραφήματα χωρίς σύντομους κύκλους

Η *περιφέρεια* ενός γραφήματος G είναι το μήκος του συντομότερου κύκλου στο G. Γράφουμε $m(g,n)$ για το μέγιστο δυνατό πλήθος ακμών ενός απλού γραφήματος με n κορυφές το οποίο δεν περιέχει κύκλο με μήκος g ή μικρότερο από g (δηλαδή έχει περιφέρεια μεγαλύτερη ή ίση του $g+1$).

Είναι φανερό ότι $m(2,n) = \binom{n}{2}$, αφού το πλήρες γράφημα r_n έχει περιφέρεια ίση με 3. Από ένα θεώρημα του Turán, το μέγιστο πλήθος ακμών που μπορεί να έχει ένα «ελεύθερο τριγώνων» γράφημα με n κορυφές είναι $m(3,n) = \lfloor \frac{n}{2} \rfloor \cdot \lceil \frac{n}{2} \rceil$. Παράδειγμα ενός τέτοιου γραφήματος δίνει το πλήρες διμερές γράφημα $r_{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor, \lceil \frac{n}{2} \rceil}$.

Από τον ορισμό είναι φανερό ότι η $m(g,n)$ είναι φθίνουσα συνάρτηση του g. Μια απλή παρατήρηση είναι ότι για κάθε r, ισχύει η ανισότητα

$$m(2r,n) \geq m(2r+1,n) \geq \frac{1}{2} m(2r,n). \tag{6.1.1}$$

Αυτό είναι άμεση συνέπεια της παρατήρησης ότι κάθε γράφημα G έχει διμερές υπογράφημα H το οποίο περιέχει τις μισές τουλάχιστον από τις ακμές του G. Επομένως, αν θέλουμε να δώσουμε φράγματα για την ποσότητα $m(g,n)$, μπορούμε πάντα να υποθέτουμε ότι ο g είναι άρτιος.

Το πρόβλημα να υπολογιστεί η ακριβής συμπεριφορά της συνάρτησης $m(g,n)$ (για παράδειγμα, όταν το g είναι σταθερό και $n \to \infty$) είναι ανοικτό. Στις επόμενες δύο Προτάσεις δίνουμε κάποια σχετικά απλά (άνω και κάτω) φράγματα.

Πρόταση 6.1.1. *Για κάθε n και g,*

$$m(g,n) \leq n^{1+1/\lfloor g/2 \rfloor} + n. \tag{6.1.2}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι ο $g = 2r$ είναι άρτιος. Θεωρούμε ένα γράφημα G με n κορυφές και $m = m(g,n)$ ακμές, το οποίο δεν περιέχει κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο από g. Ο μέσος βαθμός του G είναι $\overline{d} = \frac{2m}{n}$.

Θέτουμε $\delta_0 = \frac{\overline{d}}{2}$. Παρατηρούμε ότι αν διαγράψουμε μια κορυφή που έχει βαθμό μικρότερο από δ_0 (μαζί με τις ακμές που την περιέχουν) τότε το γράφημα που θα προκύψει έχει μέσο βαθμό

$$\overline{d}_1 \geq \frac{2m - \overline{d}}{n-1} = \frac{n\overline{d} - \overline{d}}{n-1} = \overline{d}. \tag{6.1.3}$$

Διαγράφοντας συνεχώς τέτοιες κορυφές, καταλήγουμε σε ένα υπογράφημα $H \subseteq G$ που έχει *ελάχιστο* βαθμό $\delta \geq \frac{\overline{d}}{2}$.

Έστω v_0 μια κορυφή του H. Αφού το H δεν έχει κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο από $2r$, αν θεωρήσουμε το υπογράφημα F του H που επάγεται από το σύνολο των κορυφών που έχουν απόσταση το πολύ ίση με r από την v_0 τότε το πλήθος των κορυφών του F είναι τουλάχιστον

$$1 + \delta + \delta(\delta - 1) + \cdots + \delta(1-\delta)^{r-1} \geq (\delta - 1)^r. \tag{6.1.4}$$

Πράγματι, κάθε κορυφή u που έχει απόσταση s από την v_0 (όπου $s < r$) συνδέεται με την «προηγούμενη της» και με $\delta - 1$ το πλήθος κορυφές που έχουν απόσταση $s + 1$ από την v_0 (διαφορετικά θα είχαμε κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο από g). Έπεται ότι $(\delta - 1)^r \leq n$, δηλαδή $\delta \leq n^{1/r} + 1$. Συνεπώς,

$$m = \frac{1}{2}\overline{d}n = \delta n \leq n^{1+1/r} + n. \tag{6.1.5}$$

Αν $g = 2r + 1$, το ζητούμενο προκύπτει από τις $m(g, n) \leq m(g - 1, n)$ και $\lfloor g/2 \rfloor = \lfloor (g - 1)/2 \rfloor$. $\square$

Χρησιμοποιώντας την πιθανοθεωρητική μέθοδο θα δώσουμε ένα απλό κάτω φράγμα.

Πρόταση 6.1.2. *Για κάθε $g \geq 3$ και κάθε $n \geq 2$,*

$$m(g, n) \geq \frac{1}{9} n^{1+1/(g-1)}. \tag{6.1.6}$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $n \geq 4^{g-1} \geq 16$. Αλλιώς, ένα μονοπάτι μήκους n ικανοποιεί το ζητούμενο.

Θεωρούμε το τυχαίο γράφημα $G(n, p)$ με n κορυφές, όπου καθεμία από τις $\binom{n}{2}$ πιθανές ακμές επιλέγεται, ανεξάρτητα από τις υπόλοιπες, με πιθανότητα $p \in (0, 1)$. Η τιμή της παραμέτρου p θα επιλεγεί κατάλληλα.

Έστω E το σύνολο των ακμών του $G(n, p)$ και έστω $F \subseteq E$ το σύνολο των ακμών που περιέχονται σε κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο του g. Διαγράφοντας όλες τις ακμές του F (όχι όμως τις κορυφές που περιέχουν) από το $G(n, p)$, παίρνουμε ένα γράφημα που δεν έχει κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο του g. Αν για κάποιον m δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}\,|E \setminus F| \geq m, \tag{6.1.7}$$

τότε υπάρχει γράφημα με n κορυφές, m ακμές, και περιφέρεια μεγαλύτερη από g.

Έχουμε $\mathbb{E}\,|E| = \binom{n}{2}p$ και $\mathbb{E}\,|F| = \binom{n}{2}q$, όπου q είναι η πιθανότητα ένα σταθερό ζευγάρι $e = \{u, v\}$ να ανήκει στο F. Για να συμβαίνει κάτι τέτοιο, πρέπει η e

να είναι ακμή του $G(n,p)$ – το οποίο συμβαίνει με πιθανότητα p – και να υπάρχει μονοπάτι μήκους $r \in \{2,\dots,g-1\}$ το οποίο να συνδέει τις u και v. Το πλήθος των μονοπατιών μήκους r από την u στην v είναι μικρότερο από n^{r-1} και η πιθανότητα να ανήκουν στο $G(n,p)$ όλες οι ακμές ενός τέτοιου μονοπατιού είναι p^r. Άρα,

$$q = \mathbb{P}(e \in F) \leq \sum_{r=2}^{g-1} p^{r+1} n^{r-1} = \frac{pn}{pn-1}(p^g n^{g-2} - p^2) \leq 2p^g n^{g-2} \tag{6.1.8}$$

αν $np \geq 2$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}\,|E \setminus F| = \mathbb{E}\,|E| - \mathbb{E}\,|F| \geq \binom{n}{2} p(1 - 2p^{g-1}n^{g-2}). \tag{6.1.9}$$

Αν επιλέξουμε $p = \frac{n^{1/(g-1)}}{2n}$ τότε παίρνουμε

$$\mathbb{E}\,|E \setminus F| \geq \frac{1}{9} n^{1+1/(g-1)}. \tag{6.1.10}$$

Τέλος, η υπόθεση ότι $n \geq 4^{g-1}$ εξασφαλίζει την $np \geq 2$. □

Η ύπαρξη γραφημάτων χωρίς σύντομους κύκλους συνδέεται με το πρόβλημα της παραμόρφωσης για εμφυτεύσεις μετρικών χώρων.

Θεώρημα 6.1.3 (Παραμόρφωση και Διάσταση, [12]). *Έστω Z ένας r-διάστατος χώρος με νόρμα, για παράδειγμα κάποιος από τους ℓ_p^d, και ας υποθέσουμε ότι κάθε μετρικός χώρος με n σημεία εμφυτεύεται με παραμόρφωση γ στον Z. Έστω g ένας ακέραιος με $\gamma < g \leq 5\gamma$. Τότε,*

$$r \geq \frac{1}{\log_2 \frac{16\gamma g}{g-\gamma}} \cdot \frac{m(g,n)}{n}. \tag{6.1.11}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε ένα γράφημα G που έχει σαν σύνολο κορυφών το $V = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$, δεν περιέχει κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο του g και έχει $m = m(g,n)$ ακμές. Γράφουμε $\mathcal{G}$ για το σύνολο όλων των υπογραφημάτων $H \subseteq G$ που μπορούμε να πάρουμε διαγράφοντας κάποιες από τις ακμές του G, χωρίς όμως να διαγράψουμε κορυφές του G. Για κάθε $H \in \mathcal{G}$ ορίζουμε μια μετρική ρ_H στο σύνολο V θέτοντας

$$\rho_H(u,v) = \min\{g, d_H(u,v)\}, \tag{6.1.12}$$

όπου $d_H(u,v)$ είναι το μήκος του συντομότερου μονοπατιού το οποίο συνδέει τα u και v στο H.

Έστω ότι για κάθε $H \in \mathcal{G}$ υπάρχει γ-εμφύτευση $f_H : (V, \rho_H) \to Z$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\frac{1}{\gamma}\rho_H(u,v) \leq \|f_H(u) - f_H(v)\|_Z \leq \rho_H(u,v) \tag{6.1.13}$$

για κάθε $u, v \in V$. Η διάμετρος του V είναι το πολύ ίση με g, μπορούμε λοιπόν (μεταφέροντας αν χρειαστεί το $f_H(V)$ κατά ένα διάνυσμα) να υποθέσουμε ότι

$$f_H(V) \subseteq B_Z(0,g) = \{x \in Z : \|x\|_Z \leq g\}. \tag{6.1.14}$$

Έστω $\beta < \frac{1}{4}\left(\frac{g}{\gamma} - 1\right)$. Παρατηρήστε ότι $0 < \beta \leq 1$. Θεωρούμε ένα β-δίκτυο (ως προς την $\|\cdot\|_Z$) στην $B_Z(0, g)$. Ένα απλό επιχείρημα όγκου δείχνει ότι το N μπορεί να επιλεγεί ώστε να έχει πληθάριθμο

$$|N| \leq \left(\frac{4g}{\beta}\right)^r . \tag{6.1.15}$$

Για κάθε $H \in \mathcal{G}$, ορίζουμε μια καινούργια απεικόνιση $g_H : V \to N$ θέτοντας $g_H(v)$ να είναι το πλησιέστερο προς το $f_H(v)$ σημείο του N (αν υπάρχουν περισσότερα από ένα τέτοια σημεία, επιλέγουμε κάποιο στην τύχη). Θα δείξουμε ότι αν H_1, H_2 είναι διακεκριμένα στοιχεία της $\mathcal{G}$ τότε οι απεικονίσεις g_{H_1} και g_{H_2} είναι διαφορετικές: Αφού τα σύνολα ακμών των H_1 και H_2 είναι διαφορετικά, μπορούμε να βρούμε ένα ζευγάρι κορυφών u και v οι οποίες να ορίζουν ακμή στο H_1, όχι όμως και στο H_2 (ή να ορίζουν ακμή στο H_2, όχι όμως και στο H_1). Τότε $\rho_{H_1}(u, v) = 1$, αλλά $\rho_{H_2}(u, v) = g$. Αλλιώς, θα υπήρχε μονοπάτι από το u στο v με μήκος μικρότερο από g στο H_2 και, ενώνοντας με την ακμή $\{u, v\}$ του H_1, θα είχαμε έναν κύκλο με μήκος μικρότερο ή ίσο από g στο G. Από τον ορισμό των f_{H_i} και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_Z$ βλέπουμε εύκολα ότι

$$\|g_{H_1}(u) - g_{H_1}(v)\|_Z \leq \|f_{H_1}(u) - f_{H_1}(v)\|_Z + 2\beta \leq 1 + 2\beta \tag{6.1.16}$$

και

$$\|g_{H_2}(u) - g_{H_2}(v)\|_Z \geq \|f_{H_2}(u) - f_{H_2}(v)\|_Z - 2\beta \geq \frac{g}{\gamma} - 2\beta > 1 + 2\beta. \tag{6.1.17}$$

Συνεπώς, ισχύει τουλάχιστον μία από τις $g_{H_1}(u) \neq g_{H_2}(u)$ ή $g_{H_1}(v) \neq g_{H_2}(v)$.

Υπάρχουν λοιπόν τουλάχιστον $|\mathcal{G}|$ διαφορετικές απεικονίσεις από το V στο N. Δηλαδή,

$$|\mathcal{G}| = 2^{m(g,n)} \leq |N|^n \leq \left(\frac{4g}{\beta}\right)^{nr} . \tag{6.1.18}$$

Παίρνοντας λογαρίθμους και αφήνοντας το $\beta \to \frac{1}{4}\left(\frac{g}{\gamma} - 1\right)$ έχουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 6.1.4. *Έστω Z ένας d-διάστατος χώρος με νόρμα ώστε κάθε μετρικός χώρος με n σημεία εμφυτεύεται με παραμόρφωση γ στον Z, όπου ο $\gamma > 1$ θεωρείται σταθερός και το $n \to \infty$. Τότε,*

(i) *Αν $\gamma < 3$ έχουμε $d = \Omega(n)$.*

(ii) *Αν $\gamma < 5$ έχουμε $d = \Omega(\sqrt{n})$.*

(iii) *Αν $\gamma < 7$ έχουμε $d = \Omega(\sqrt[3]{n})$.*

Απόδειξη. Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.1.3 αν χρησιμοποιήσουμε τα γνωστά φράγματα για τις συναρτήσεις $m(3, n)$, $m(5, n)$ και $m(7, n)$ καθώς το $n \to \infty$. □

Θεώρημα 6.1.5 ([12]). *Για κάθε n, υπάρχουν μετρικοί χώροι με n σημεία οι οποίοι δεν εμφυτεύονται στον ℓ_2 με παραμόρφωση μικρότερη από $c \log n / \log \log n$, όπου $c > 0$ κατάλληλη απόλυτη σταθερά.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι κάθε μετρικός χώρος με n σημεία εμφυτεύεται στον ℓ_2 με παραμόρφωση $\gamma \leq \zeta \log n / \log \log n$, όπου $\zeta > 0$ σταθερά που θα επιλεγεί κατάλληλα. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο γ είναι φυσικός αριθμός.

Από το λήμμα των Johnson-Lindenstrauss, κάθε μετρικός χώρος με n σημεία είναι (2γ)-εμφυτεύσιμος στον ℓ_2^r για κάποιον $r \leq C \log n$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Θέτουμε $g = 4\gamma$. Από την Πρόταση 6.1.2 έχουμε

$$m(g,n) \geq \frac{1}{9} n^{1+\frac{1}{4\gamma-1}}. \tag{6.1.19}$$

Από το Θεώρημα 6.1.3 έπεται ότι

$$C \log n \geq r \geq \frac{c_1}{\log \gamma} n^{\frac{1}{4\gamma-1}} \tag{6.1.20}$$

όπου $c_1 > 0$ απόλυτη σταθερά. Παίρνοντας λογαρίθμους και φράσσοντας όλους τους υπόλοιπους όρους, βλέπουμε ότι

$$c_2 \log \log n \geq \frac{1}{4\gamma - 1} \log n > \frac{1}{4\gamma} \log n \tag{6.1.21}$$

όπου $c_2 > 0$ απόλυτη σταθερά. Δηλαδή,

$$\gamma > \frac{\log n}{4c_2 \log \log n}. \tag{6.1.22}$$

Αν η σταθερά $\zeta > 0$ είναι αρκετά μικρή (ανεξάρτητη από το n) καταλήγουμε σε άτοπο. □

6.2 Περιφέρεια και Ευκλείδεια παραμόρφωση

Σε αυτή την Παράγραφο δείχνουμε δύο ανισότητες τύπου Poincaré για r-κανονικά γραφήματα με περιφέρεια g.

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω $G = (V, E)$ ένα r-κανονικό γράφημα ($r \geq 3$) με n κορυφές και περιφέρεια ίση με g. Αν $1 < s < g/2$ και αν $f : V \to \ell_2$ τότε*

$$\sum_{d(u,v)=s} \|f(u) - f(v)\|_2^2 \leq Cs(r-1)^{s-1} \sum_{d(u,v)=1} \|f(u) - f(v)\|_2^2, \tag{6.2.1}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι το φασματικό κενό του G είναι σχετικά μεγάλο, τότε η επόμενη ανισότητα είναι ισχυρότερη.

Θεώρημα 6.2.2. *Έστω $G=(V,E)$ ένα r-κανονικό γράφημα ($r\geq 3$) με n κορυφές, περιφέρεια ίση με g και φασματικό κενό $\varepsilon>0$. Αν $1<s<g/2$ και αν $f:V\to \ell_2$ τότε*

$$\sum_{d(u,v)=s}\|f(u)-f(v)\|_2^2\leq C(r-1)^s\frac{1-e^{-C\varepsilon s/r}}{\varepsilon}\sum_{d(u,v)=1}\|f(u)-f(v)\|_2^2, \tag{6.2.2}$$

όπου $C>0$ απόλυτη σταθερά.

Συνδυάζοντας τα παραπάνω παίρνουμε το εξής (βλέπε [10]).

Θεώρημα 6.2.3 (Linial, Magen, Naor, 2002). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ με την εξής ιδιότητα: αν $G=(V,E)$ είναι ένα r-κανονικό γράφημα ($r\geq 3$) με n κορυφές και περιφέρεια ίση με g, τότε*

$$c_2(G)\geq C\sqrt{g}. \tag{6.2.3}$$

Αν, επιπλέον, το G έχει φασματικό κενό $\varepsilon>0$, τότε

$$c_2(G)\geq \frac{Cg}{\sqrt{\min\{g,r/\varepsilon\}}}. \tag{6.2.4}$$

Η απόδειξη θα βασιστεί στη μέθοδο του ημιορισμένου προγραμματισμού (την οποία περιγράψαμε στην §4.1) και στα πολυώνυμα του Geronimus.

6.2α′ Πολυώνυμα του Geronimus

Έστω $G=(V,E)$ ένα r-κανονικό γράφημα με n κορυφές και περιφέρεια g. Έστω $A=A_G=(a_{uv})$ ο πίνακας συνδεσμολογίας του G. Για κάθε $t\in\mathbb{N}_0$ θεωρούμε τον πίνακα $A^{(t)}$ που έχει συντεταγμένες $A^{(t)}_{uv}=1$ αν $d(u,v)=t$ και $A^{(t)}_{uv}=0$ αλλιώς.

Υπάρχουν πολυώνυμα P_t που ικανοποιούν τα εξής: κάθε P_t έχει βαθμό t και $P_t(A)=A^{(t)}$ για κάθε $t<g/2$. Παρατηρήστε ότι $P_0(x)=1$ και $P_1(x)=x$.

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι

$$A^{(t)}-A\cdot A^{(t-1)}=-rA^{(t-2)}=-rI \quad \text{αν} \quad t=2 \tag{6.2.5}$$

και

$$A^{(t)}-A\cdot A^{(t-1)}=-(r-1)A^{(t-2)} \quad \text{αν} \quad 2<t<g/2. \tag{6.2.6}$$

Έπεται ότι

$$P_2(x)=xP_1(x)-rP_0(x)=x^2-r \tag{6.2.7}$$

και

$$P_t(x)=xP_{t-1}(x)-(r-1)P_{t-2}(x) \quad \text{αν} \quad t>2. \tag{6.2.8}$$

Τα πολυώνυμα P_t είναι γνωστά σαν «πολυώνυμα του Geronimus». Επιλύοντας την αναδρομική σχέση (6.2.8) παίρνουμε την ακόλουθη τριγωνομετρική αναπαράσταση: για κάθε $t > 0$,

$$P_t(2\sqrt{r-1}\cos\theta) = (r-1)^{t/2-1}\frac{(r-1)\sin((t+1)\theta) - \sin((t-1)\theta)}{\sin\theta}. \tag{6.2.9}$$

Η σχέση αυτή (από τη στιγμή που δίνεται) ελέγχεται πρώτα για $t = 1, 2$ και μετά για $t > 2$ βάσει της αναδρομικής σχέσης (6.2.8).

Παρατηρούμε επίσης ότι όλες οι ρίζες του πολυωνύμου P_t είναι πραγματικές και βρίσκονται μεταξύ του $-2\sqrt{r-1}$ και του $2\sqrt{r-1}$. Από την (6.2.9) αρκεί να ελέγξουμε ότι υπάρχουν t διαφορετικές τιμές του θ στο $[0, \pi)$ για τις οποίες η ποσότητα $P_t(2\sqrt{r-1}\cos\theta)$ μηδενίζεται. Αυτό ελέγχεται ως εξής: για $q = 0, 1, \ldots, t$ ορίζουμε $\theta_q = \left(\frac{\pi}{2} + q\pi\right)/(t+1)$. Τότε, η ποσότητα $P_t(2\sqrt{r-1}\cos\theta_q)$ είναι θετική όταν ο q είναι άρτιος, και αρνητική όταν ο q είναι περιττός. Άρα, υπάρχει μια ρίζα ανάμεσα στο θ_q και στο θ_{q+1}, δηλαδή έχουμε t ρίζες στο διάστημα που θέλαμε.

Τέλος, με επαγωγή μπορούμε να ελέγξουμε ότι: για κάθε $t > 0$,

$$P_t(r) = r(r-1)^{t-1} \tag{6.2.10}$$

και

$$P_t'(r) = \frac{1}{(r-2)^2}\big(t(r-1)^{t+1} - 2(r-1)^t - t(r-1)^{t-1} + 2\big). \tag{6.2.11}$$

Το πρώτο λήμμα που θα χρειαστούμε δείχνει ότι, παρόλο που τα πολυώνυμα του Geronimus δεν είναι κυρτά στο $[-r, r]$, ικανοποιούν ένα «λήμμα χορδών». Η απόδειξη χρησιμοποιεί μια κλασική ανισότητα του Markov: αν P είναι ένα πραγματικό πολυώνυμο βαθμού s τότε $\|P'\|_{L^\infty[-1,1]} \leq s^2\|P\|_{L^\infty[-1,1]}$.

Λήμμα 6.2.4. *Έστω $s \geq 40$ ένας άρτιος φυσικός. Για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε $x \in [-r, r-\varepsilon]$,*

$$\frac{P_s(r) - P_s(r-\varepsilon)}{\varepsilon} \geq \frac{P_s(r) - P_s(x)}{r-x}. \tag{6.2.12}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{P_s(r) - P_s(x)}{r-x} \tag{6.2.13}$$

και θα δείξουμε ότι η f είναι αύξουσα στο $[-r, r]$. Παραγωγίζοντας το δεξιό μέλος και αναπτύσσοντας, βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$h(x) := P_s(x) + (r-x)P_s'(x) \leq P_s(r) \tag{6.2.14}$$

για κάθε $x \in [-r, r]$. Παρατηρούμε ότι $h(r) = P_s(r)$ και, αφού η P_s είναι άρτια συνάρτηση όταν ο s είναι άρτιος, έχουμε

$$h(-r) = P_s(r) - 2rP_s'(r) < P_s(r) \tag{6.2.15}$$

αφού $P_s'(r) > 0$. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι αν $h'(x_0) = 0$ τότε $h(x_0) \le P_s(r)$. Τώρα, $h'(x) = (r-x)P_s''(x)$, άρα οι ρίζες της h' συμπίπτουν με τις ρίζες της P_s''. Αφού το P_s έχει όλες τις ρίζες του στο διάστημα $[-2\sqrt{r-1}, 2\sqrt{r-1}]$, το ίδιο ισχύει για το P_s''. Αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι $h(x) < P_s(r)$ στο διάστημα $[-2\sqrt{r-1}, 2\sqrt{r-1}]$. Κάθε σημείο αυτού του διαστήματος γράφεται στη μορφή $x = 2\sqrt{r-1}\cos\theta$ για κάποιο $0 \le \theta \le \pi$. Χρησιμοποιώντας την (6.2.9) παίρνουμε (6.2.16)

$$P_s(r) = P_s(2\cos\theta\sqrt{r-1}) = (r-1)^{s/2-1}\frac{(r-1)\sin((s+1)\theta) - \sin((s-1)\theta)}{\sin\theta}.$$

Όταν $r \ge 1$ και $0 \le \alpha < \pi$, ισχύει η $\sin(r\alpha) \le r\sin\alpha$. Συνεπώς,

$$\|P_s\|_{L^\infty[-2\sqrt{r-1},2\sqrt{r-1}]} \le (r-1)^{s/2-1}\big((r-1)(s+1) + (s-1)\big). \tag{6.2.17}$$

Από την ανισότητα του Markov έχουμε

$$\|P_s'\|_{L^\infty[-2\sqrt{r-1},2\sqrt{r-1}]} \le \frac{s^2}{2\sqrt{r-1}}\|P_s\|_{L^\infty[-2\sqrt{r-1},2\sqrt{r-1}]}. \tag{6.2.18}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\|h\|_{L^\infty[-2\sqrt{r-1},2\sqrt{r-1}]} &\le \|P_s\|_{L^\infty[-2\sqrt{r-1},2\sqrt{r-1}]} + 2r\|P_s'\|_{L^\infty[-2\sqrt{r-1},2\sqrt{r-1}]}\\
&\le (r-1)^{s/2-1}\big((r-1)(s+1) + (s-1)\big)\left(1 + \frac{rs^2}{\sqrt{r-1}}\right)\\
&\le r(r-1)^{s-1} = P_s(r).
\end{aligned}$$

Η τελευταία ανισότητα ελέγχεται σχετικά απλά για κάθε $r \ge 3$ και $s \ge 40$. □

Λήμμα 6.2.5. *Για κάθε φυσικό s και για κάθε $\varepsilon \le r/20$,*

$$P_s(r-\varepsilon) \ge r(r-1)^{s-1}\, e^{-150\varepsilon s/r}. \tag{6.2.19}$$

Απόδειξη. Έστω $y_1, \dots, y_s$ οι ρίζες του P_s. Από το θεώρημα μέσης τιμής, και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $y_1, \dots, y_s \in [-2\sqrt{r-1}, 2\sqrt{r-1}]$, $\varepsilon \le r/20$ και $r \ge 3$, βλέπουμε ότι υπάρχει $a \in (r-\varepsilon, r)$ με την ιδιότητα

$$\begin{aligned}
\log\left[\frac{P_s(r)}{P_s(r-\varepsilon)}\right] &= \varepsilon\frac{P_s'(a)}{P_s(a)} = \varepsilon\cdot\sum_{i=1}^{s}\frac{1}{a-y_i}\\
&\le \frac{\varepsilon s}{r-\varepsilon-2\sqrt{r-1}} \le \frac{150\varepsilon s}{r}.
\end{aligned}$$

Αφού $P_s(r) = r(r-1)^{s-1}$, παίρνουμε το ζητούμενο. □

Λήμμα 6.2.6. *Έστω $s \ge 40$ ένας άρτιος φυσικός και έστω $0 < \varepsilon \le r$. Τότε,*

$$1 - \frac{P_s(r-\varepsilon)}{P_s(r)} \le C\left(1 - e^{-C\varepsilon s/r}\right), \tag{6.2.20}$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Στην περίπτωση που $\varepsilon \le r/20$, χρησιμοποιούμε το Λήμμα 6.2.5. Όταν $\varepsilon > r/20$, το δεξιό μέλος είναι κάτω φραγμένο από απόλυτη σταθερά. Το αριστερό μέλος είναι το πολύ ίσο με 2, διότι το P_s παίρνει ελάχιστη τιμή στο $[-2\sqrt{r-1}, 2\sqrt{r-1}]$ και η απόδειξη του Λήμματος 6.2.4 δείχνει ότι $P_s(x) \ge -P_s(r)$ για κάθε x σε αυτό το διάστημα. □

6.2β′ Απόδειξη των Θεωρημάτων

Απόδειξη των Θεωρημάτων 6.2.1 και 6.2.2. Έστω G ένα r-κανονικό γράφημα με περιφέρεια g και έστω $1 < s < g/2$. Αν $u, v \in V$ και $d(u,v) = s$, τότε υπάρχει μοναδικό μονοπάτι μήκους s το οποίο συνδέει τις u και v. Με άλλα λόγια, υπάρχει ένα μονοσήμαντα ορισμένο σύνολο κορυφών $\{w_{uv}(i)\}_{i=0}^{s}$ ώστε $w_{uv}(0) = u$, $w_{uv}(s) = v$ και $\{w_{uv}(i-1), w_{uv}(i)\} \in E$ για κάθε $i = 1, \ldots, s$. Κάθε ακμή $e \in E$ εμφανίζεται σε ακριβώς $s(r-1)^{s-1}$ τέτοια μονοπάτια. Επομένως, για κάθε $f : V \to \ell_2$,

$$\begin{aligned}
\sum_{d(u,v)=s} \|f(u) - f(v)\|_2^2 &\leq \sum_{d(u,v)=s} \left(\sum_{i=1}^{s} \|f(w_{uv}(i)) - f(w_{uv}(i-1))\|_2 \right)^2 \\
&\leq \sum_{d(u,v)=s} s \sum_{i=1}^{s} \|f(w_{uv}(i)) - f(w_{uv}(i-1))\|_2^2 \\
&= s^2(r-1)^{s-1} \sum_{d(u,v)=1} \|f(u) - f(v)\|_2^2.
\end{aligned}$$

Αυτό δείχνει ότι οι ανισότητες των Θεωρημάτων 6.2.1 και 6.2.2 ισχύουν για φραγμένο s, άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $s \geq 40$. Παρόμοιο επιχείρημα δείχνει ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι ο s είναι άρτιος. Επιπλέον, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f : V \to \mathbb{R}$.

Δείχνουμε πρώτα το Θεώρημα 6.2.2. Θεωρούμε τον πίνακα

$$Q = \alpha \cdot Id - A + \beta A^{(s)}, \tag{6.2.21}$$

όπου $40 \leq s < g/2$ είναι ένας άρτιος φυσικός, και

$$\begin{aligned}
\alpha &= r - \frac{\varepsilon P_s(r)}{P_s(r) - P_s(r-\varepsilon)} \\
\beta &= \frac{\varepsilon}{P_s(r) - P_s(r-\varepsilon)}.
\end{aligned}$$

Ο Q είναι συμμετρικός. Επίσης, $A\vec{1} = r\vec{1}$ και $A^{(s)}\vec{1} = P_s(r)\vec{1}$, άρα $Q\vec{1} = 0$. Αφού το φασματικό κενό του G είναι $\varepsilon > 0$, οι υπόλοιπες ιδιοτιμές του A βρίσκονται στο $[-r, r-\varepsilon]$. Για να δείξουμε λοιπόν ότι ο Q είναι θετικά ημιορισμένος αρκεί να δείξουμε ότι

$$\alpha - x + \beta P_s(x) \geq 0 \tag{6.2.22}$$

για κάθε $x \in [-r, r-\varepsilon]$. Αυτό ισχύει, από το Λήμμα 6.2.4.

Θεωρούμε $f : V \to \mathbb{R}$. Τότε, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\alpha - r + \beta P_s(r) = 0$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
0 \leq \langle Qf, f \rangle &= \alpha \sum_{u \in V} f(u)^2 - \sum_{u,v \in V} A_{uv} f(u) f(v) + \beta \sum_{u,v \in V} A_{uv}^{(s)} f(u) f(v) \\
&= \frac{1}{2} \sum_{d(u,v)=1} |f(u) - f(v)|^2 - \frac{\beta}{2} \sum_{d(u,v)=s} |f(u) - f(v)|^2.
\end{aligned}$$

Άρα, παίρνοντας υπ΄ όψιν και το Λήμμα 6.2.6, έχουμε

$$\begin{aligned}\sum_{d(u,v)=s}|f(u)-f(v)|^2 &\leq \frac{1}{\beta}\sum_{d(u,v)=1}|f(u)-f(v)|^2\\ &= \frac{r(r-1)^{s-1}}{\varepsilon}\left[1-\frac{P_s(r-\varepsilon)}{P_s(r)}\right]\sum_{d(u,v)=1}|f(u)-f(v)|^2\\ &\leq C(r-1)^s\cdot\frac{1-e^{-C\varepsilon s/r}}{\varepsilon}\sum_{d(u,v)=1}|f(u)-f(v)|^2.\end{aligned}$$

Η απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.1 γίνεται με τον ίδιο περίπου τρόπο. Επιστρέφουμε στην προηγούμενη κατασκευή και αφήνουμε το $\varepsilon \to 0^+$. Τότε, παίρνουμε τον πίνακα

$$\tilde{Q} = \left[r-\frac{P_s(r)}{P_s'(r)}\right]\cdot Id - A + \frac{1}{P_s'(r)}A^{(s)}, \tag{6.2.23}$$

ο οποίος είναι επίσης συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος λόγω συνέχειας. Δουλεύοντας όπως παραπάνω, παίρνουμε την ανισότητα

$$\begin{aligned}\sum_{d(u,v)=s}|f(u)-f(v)|^2 &\leq P_s'(r)\sum_{d(u,v)=1}|f(u)-f(v)|^2\\ &= \frac{s(r-1)^{s+1}-2(r-1)^s-s(r-1)^{s-1}+2}{(r-2)^2}\\ &\quad\times\sum_{d(u,v)=1}|f(u)-f(v)|^2,\end{aligned}$$

απ΄ όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.2.3. Έστω G ένα r-κανονικό γράφημα ($r \geq 3$) με n κορυφές και περιφέρεια g. Έστω $f : V \to \ell_2$ μια εμφύτευση που ικανοποιεί την

$$\frac{1}{\gamma}d(u,v) \leq \|f(u)-f(v)\|_2 \leq d(u,v) \tag{6.2.24}$$

για κάθε $u, v \in V$. Θέτουμε $s = \lfloor g/2 \rfloor - 1$. Αφού υπάρχουν $r(r-1)^{s-1}$ κορυφές του G σε απόσταση s από δοθείσα κορυφή, παίρνουμε

$$\sum_{d(u,v)=s}\|f(u)-f(v)\|_2^2 \geq \frac{s^2r(r-1)^{s-1}n}{\gamma^2} \tag{6.2.25}$$

και

$$\sum_{d(u,v)=1}\|f(u)-f(v)\|_2^2 \leq rn. \tag{6.2.26}$$

Από το Θεώρημα 6.2.1 βλέπουμε ότι

$$\frac{s^2r(r-1)^{s-1}n}{\gamma^2} \leq Cs(r-1)^s n, \tag{6.2.27}$$

άρα

$$\gamma \geq c_1\sqrt{g}. \tag{6.2.28}$$

Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι το G έχει φασματικό κενό $\varepsilon > 0$, ο ίδιος συλλογισμός και το Θεώρημα 6.2.2 δείχνουν ότι

$$\gamma \geq c_2 g\sqrt{\frac{\varepsilon/r}{1-e^{-Cg\varepsilon/r}}} \geq \frac{c_2 g}{\sqrt{\min\{g, r/\varepsilon\}}}. \tag{6.2.29}$$

□

Δεν είναι γνωστό αν η ανισότητα $c_2(G) \geq c\sqrt{g}$ είναι βέλτιστη. Ένα άλλο ανοικτό πρόβλημα είναι να δοθούν κάτω φράγματα για την ποσότητα $c_1(G)$ συναρτήσει της περιφέρειας g (για r-κανονικά γραφήματα). Είναι άγνωστο αν υπάρχει $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ με $\lim\limits_{n\to\infty} f(n) = \infty$ ώστε $c_1(G) \geq f(g)$ για κάθε r-κανονικό γράφημα G.

Μέρος II

Φαινόμενα τύπου Ramsey

Κεφάλαιο 7

Ευκλείδεια υποσύνολα πεπερασμένων μετρικών χώρων

7.1 Εισαγωγή

Έστω (X,ρ) και (Y,d) δύο πεπερασμένοι μετρικοί χώροι με το ίδιο πλήθος σημείων. Η *απόσταση Lipschitz* των X και Y είναι η ποσότητα

$$d(X,Y)=\inf\left\{\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}\|\psi^{-1}\|_{\mathrm{Lip}}\right\}, \tag{7.1.1}$$

όπου το infimum παίρνεται πάνω από όλες τις ένα προς ένα και επί απεικονίσεις $\psi:X\to Y$. Υπενθυμίζουμε ότι

$$\|\psi\|_{\mathrm{Lip}}=\max\left\{\frac{d(\psi(x),\psi(y))}{\rho(x,y)}\,:\,x,y\in X, x\neq y\right\}. \tag{7.1.2}$$

Αν $d(X,Y)\leq\alpha$ τότε λέμε ότι οι X και Y είναι α-ισομορφικοί.

Σε αυτό το Κεφάλαιο θα δούμε την απόδειξη ενός θεωρήματος των Bourgain, Figiel και Milman [4] το οποίο μπορεί να θεωρηθεί σαν το ανάλογο του κλασικού θεωρήματος του Dvoretzky (βλέπε [13]) για τις Ευκλείδειες τομές χώρων πεπερασμένης διάστασης με νόρμα.

Θεώρημα 7.1.1. *Έστω $\varepsilon>0$. Υπάρχει σταθερά $c(\varepsilon)>0$ με την εξής ιδιότητα: κάθε πεπερασμένος μετρικός χώρος (X,d) έχει υποσύνολο Y με πληθάριθμο*

$$|Y|\geq c(\varepsilon)\log|X| \tag{7.1.3}$$

ώστε ο (Y,d) να εμφυτεύεται $(1+\varepsilon)$-ισομορφικά στον ℓ_2. Επιπλέον, αν $0<\varepsilon<1$, μπορούμε να πάρουμε $c(\varepsilon)=c_1\varepsilon/\log(c_2/\varepsilon)$ όπου $c_1,c_2>0$ απόλυτες σταθερές.

Η απόδειξη παρουσιάζεται στην §7.2. Στην §7.3 δείχνουμε ότι η λογαριθμική τάξη μεγέθους του $|Y|$ είναι βέλτιστη, ακόμα κι αν υποθέσουμε ότι ο ίδιος ο X είναι 2-ισομορφικός με ένα υποσύνολο του ℓ_2.

7.2 Ευκλείδεια υποσύνολα πεπερασμένων μετρικών χώρων

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.1 θεωρούμε $0 < \varepsilon < 1$ και σταθεροποιούμε $0 < \delta < \frac{1}{2}$ που ικανοποιεί την $(1+\delta)^2 \leq 1+\varepsilon$. Θεωρούμε επίσης τον ελάχιστο φυσικό m για τον οποίο $(1+\delta)^{m-1} > 4$.

Έστω (X,d) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος (χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $|X| > m$). Θα ορίσουμε επαγωγικά μια φθίνουσα ακολουθία συνόλων

$$X = X_0 \supset X_1 \supset \cdots \supset X_k \tag{7.2.1}$$

που ικανοποιούν την

$$|X_{i+1}| \geq \frac{1}{m}|X_i| \qquad \text{για } i \geq 0. \tag{7.2.2}$$

Ας υποθέσουμε ότι το X_i έχει οριστεί και ότι

$$|X_i| \geq \frac{1}{m^i}|X| > m. \tag{7.2.3}$$

Επιλέγουμε τυχόν $x_i \in X_i$ και ορίζουμε

$$d_i = \max\{d(x_i,x) : x \in X_i\}. \tag{7.2.4}$$

Στη συνέχεια, παίρνουμε κάποιο $y_i \in X_i$ για το οποίο $d(x_i,y_i) = d_i$ και θέτουμε

$$A_i = \left\{x \in X_i : d(x_i,x) \leq \frac{1}{4}d_i\right\}. \tag{7.2.5}$$

Τέλος, ορίζουμε $g(i) = 0$ αν $|A_i| \geq \frac{1}{m}|X_i|$ και $g(i) = 1$ αλλιώς. Προκειμένου να ορίσουμε το X_{i+1} διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

(i) Αν $g(i) = 0$ τότε θέτουμε $X_{i+1} = A_i$.

(ii) Αν $g(i) = 1$, μπορούμε να βρούμε $\eta \in [1/4, 1)$ ώστε το σύνολο

$$B_\eta = \{x \in X_i : \eta d_i < d(x_i,x) \leq (1+\delta)\eta d_i\}$$

να έχει πληθάριθμο $|B_\eta| \geq \frac{1}{m}|X_i|$. [Πράγματι, αν θεωρήσουμε τα σύνολα B_{η_k}, όπου $\eta_k = (1+\delta)^k/4$, $k = 0,\ldots,m-1$, τότε από την $(1+\delta)^{m-1} > 4$ έχουμε $A_i \cup \left(\bigcup_{k=0}^{m-1} B_{\eta_k}\right) = X_i$, άρα για κάποιο k ισχύει η ανισότητα $|B_{\eta_k}| \geq \frac{1}{m}|X_i|$.] Σε αυτή την περίπτωση θέτουμε $X_{i+1} = B_\eta$.

Όπως ορίστηκε το X_{i+1}, ικανοποιεί την

$$|X_{i+1}| \geq \frac{1}{m}|X_i| \geq \frac{1}{m^{i+1}}|X|. \tag{7.2.6}$$

Αν $|X| \leq m^{i+2}$ σταματάμε εδώ, αλλιώς μπορούμε να συνεχίσουμε την επαγωγική διαδικασία με τον ίδιο τρόπο. Αν λοιπόν υποθέσουμε ότι $m^k < |X| \leq m^{k+1}$, τότε ορίζουμε $x_i, y_i, g(i)$ για όλα τα $i = 0,1,\ldots,k-1$.

Θεωρούμε τα σύνολα

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \{x_i : 0 \leq i < k,\, g(i) = 1\}\\ \tilde{Y} &= \{y_i : 0 \leq i < k,\, g(i) = 0\}.\end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι $\tilde{X} \cap \tilde{Y} = \emptyset$, άρα

$$|\tilde{X}| + |\tilde{Y}| = k. \tag{7.2.7}$$

Έπεται ότι κάποιο από τα $\tilde{X}$ και $\tilde{Y}$ έχει τουλάχιστον $\frac{k}{2}$ στοιχεία.

Βήμα 1: Θα δείξουμε ότι το $\tilde{X}$ έχει μεγάλο υποσύνολο που είναι $(1+\delta)^2$-ισομορφικό με κάποιο υποσύνολο του ℓ_2. Η απόδειξη θα βασιστεί στο εξής Λήμμα.

Λήμμα 7.2.1. *Έστω $S = \{s_1, s_2, \dots, s_k\}$ ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω ρ μια μετρική στο S η οποία ικανοποιεί τις $\rho(s_i, s_j) = \rho(s_i, s_k)$ για $1 \leq i < j \leq k$ και*

$$\rho(s_1, s_k) \geq \rho(s_2, s_k) \geq \cdots \geq \rho(s_k, s_k) = 0. \tag{7.2.8}$$

Τότε, ο (S, ρ) είναι ισομετρικός με κάποιον υπόχωρο του ℓ_2.

Απόδειξη. Θέτουμε $m_i = \rho(s_i, s_k)$, $i = 1, \dots, k-1$. Ορίζουμε $u_1 = 0$ και θεωρούμε τη σφαίρα $S(1)$ του ℓ_2^{k-1} με κέντρο το u_1 και ακτίνα $r_1 = m_1$. Θα επιλέξουμε $u_2, \dots, u_k$ στην $S(1)$.

Παίρνουμε τυχόν $u_2 \in S(1)$ και θεωρούμε τη σφαίρα $S(2)$ του ℓ_2^{k-1} με κέντρο το u_2 και ακτίνα m_2. Η τομή $S(1) \cap S(2)$ είναι μια σφαίρα με διάμετρο

$$2r_2 = \frac{m_2\sqrt{4m_1^2 - m_2^2}}{m_1} > m_2. \tag{7.2.9}$$

Επιλέγουμε $u_3 \in S(1) \cap S(2)$ και θεωρούμε τη σφαίρα $S(3)$ του ℓ_2^{k-1} με κέντρο το u_3 και ακτίνα m_3. Αφού $m_3 \leq m_2$, η τομή $S(1) \cap S(2) \cap S(3)$ είναι μη κενή. Επιλέγουμε $u_4 \in S(1) \cap S(2) \cap S(3)$ και συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Επαγωγικά δείχνουμε ότι αν $i < k-1$ τότε η τομή $S(1) \cap \cdots \cap S(i)$ είναι μια σφαίρα με διάμετρο $2r_i$ μεγαλύτερη από m_i: παρατηρήστε ότι

$$2r_i = \frac{m_i\sqrt{4r_{i-1}^2 - m_i^2}}{r_{i-1}} > m_i. \tag{7.2.10}$$

Επιλέγουμε $u_{i+1} \in S(1) \cap \cdots \cap S(i)$ και θεωρούμε τη σφαίρα $S(i+1)$ του ℓ_2^{k-1} με κέντρο το u_{i+1} και ακτίνα m_{i+1}. Αφού $m_{i+1} \leq m_i$, η τομή $S(1) \cap \cdots \cap S(i+1)$ είναι μη κενή. Συνεχίζουμε με τον ίδιο τρόπο.

Με τη διαδικασία που περιγράψαμε, ορίζονται $u_1, \dots, u_k \in \ell_2^{k-1}$ με την ιδιότητα $\rho(s_i, s_j) = \|u_i - u_j\|_2$ για κάθε $i, j = 1, \dots, k$.

Η απεικόνιση $s_i \mapsto u_i$ είναι ισομετρική εμφύτευση. □

Γράφουμε $\tilde{X} = \{x_{i_1}, \dots, x_{i_s}\}$ όπου $i_1 < \cdots < i_s$, και για συντομία θέτουμε $z_j := x_{i_j}$, $j = 1, \dots, s$.

Λήμμα 7.2.2. *Για κάθε $p < j \le s$ ορίζουμε*

$$d_1(z_p, z_j) = d_1(z_j, z_p) = \max\{d(z_p, z_\tau) : p < \tau \le s\}. \tag{7.2.11}$$

Τότε, η d_1 είναι μετρική στο $\tilde{X}$. Αν θέσουμε $\delta_p = d_1(z_p, z_j)$ για κάθε $1 \le p < j \le s$, τότε η d_1 ικανοποιεί τις

$$d(z_p, z_j) \le d_1(z_p, z_j) = \delta_p \le (1+\delta) d(z_p, z_j). \tag{7.2.12}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η d_1 είναι μετρική. Αρκεί να ελέγξουμε την τριγωνική ανισότητα. Έστω $p < j \le s$. Θα δείξουμε ότι για κάθε $r \le s$ ισχύει

$$d_1(z_p, z_j) \le d_1(z_p, z_r) + d_1(z_r, z_j). \tag{7.2.13}$$

Αν $p \le r$ τότε $d_1(z_p, z_j) = d_1(z_p, z_r)$, οπότε η (7.2.13) ισχύει προφανώς. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $r < p < j$. Υπάρχει $\kappa > p$ ώστε $d_1(z_p, z_j) = d(z_p, z_\kappa)$. Τότε,

$$d_1(z_p, z_j) = d(z_p, z_\kappa) \le d(z_p, z_r) + d(z_r, z_\kappa). \tag{7.2.14}$$

Όμως $r < p$ και $r < j$, άρα $d(z_p, z_r) \le d_1(z_p, z_r)$ και $d(z_r, z_\kappa) \le d_1(z_r, z_\kappa) = d_1(z_r, z_j)$. Επιστρέφοντας στην (7.2.14) παίρνουμε την (7.2.13).

Περνάμε τώρα στην απόδειξη της (7.2.12). Προφανώς $d(z_p, z_j) \le d_1(z_p, z_j)$. Επιλέγουμε $\kappa > p$ ώστε $d_1(z_p, z_j) = d(z_p, z_\kappa)$. Έχουμε $g(i_p) = 1$, οπότε $z_\kappa, z_j \in \{x \in X_{i_p} : \eta d_{i_p} < d(z_p, x) \le (1+\delta)\eta d_{i_p}\}$ για κάποιο $\eta \in [\frac{1}{4}, 1)$. Συνεπώς,

$$d(z_p, z_\kappa) \le (1+\delta)\eta d_{i_p} \quad \text{και} \quad \eta d_{i_p} < d(z_p, z_j), \tag{7.2.15}$$

απ' όπου προκύπτει η $d_1(z_p, z_j) \le (1+\delta) d(z_p, z_j)$ □

Από το Λήμμα 7.2.2 ο $(\tilde{X}, d_1)$ είναι $(1+\delta)$-ισομορφικός με τον $(\tilde{X}, d|_{\tilde{X}})$. Αρκεί λοιπόν να βρούμε μεγάλο υποσύνολο του $(\tilde{X}, d_1)$ το οποίο να είναι $(1+\delta)$-ισομορφικό με κάποιο υποσύνολο του ℓ_2. Για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε

$$\tilde{X}_n = \{z_p \in \tilde{X} : (1+\delta)^{-n} \le \delta_p < (1+\delta)^{1-n}\}. \tag{7.2.16}$$

Παρατηρούμε ότι αν $z_p \in \tilde{X}_n$ και $z_j \in \tilde{X}_{n+m}$ τότε $p < j$. Πράγματι, αν είχαμε $j < p$ τότε για κάθε $p < \tau \le s$ θα έπρεπε να ισχύει η

$$\delta_p = d(z_p, z_\tau) \le d(z_p, z_j) + d(z_j, z_\tau) \le 2\delta_j, \tag{7.2.17}$$

οπότε

$$(1+\delta)^{-n} \le \delta_p \le 2\delta_j < 2(1+\delta)^{1-m-n} < \frac{1}{2}(1+\delta)^{-n}. \tag{7.2.18}$$

Θεωρούμε τώρα τα σύνολα

$$U_\alpha = \cup\{\tilde{X}_n : n \equiv \alpha (\mathrm{mod}\ m)\} \tag{7.2.19}$$

για $\alpha = 0, 1, \ldots, m-1$. Κάποιο από αυτά, ας το πούμε X', έχει πληθάριθμο $|X'| \ge \frac{1}{m}|\tilde{X}|$.

Από τον ορισμό του X', αν $z_p, z_j \in X'$ και $p < j$, τότε είτε $\{z_p, z_j\} \subset \tilde{X}_n$ για κάποιον ακέραιο n ή $z_p \in \tilde{X}_n$ και $z_j \in \tilde{X}_{n+sm}$ για κάποιον $s \geq 1$. Στην πρώτη περίπτωση έχουμε

$$\frac{1}{1+\delta} < \frac{\delta_p}{\delta_j} < 1 + \delta, \tag{7.2.20}$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση έχουμε

$$\delta_j \leq (1+\delta)^{1-n-sm} \leq (1+\delta)^{1-m}\delta_p \leq \frac{\delta_p}{4}. \tag{7.2.21}$$

Αν $z_p \in X'$, ορίζουμε

$$\overline{\delta}_p = \min\{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leq \tau \leq p\}. \tag{7.2.22}$$

Λήμμα 7.2.3. *Για $z_p, z_j \in X'$ με $p < j$ θέτουμε*

$$d_2(z_p, z_j) = d_2(z_j, z_p) = \overline{\delta}_p. \tag{7.2.23}$$

Τότε, η d_2 είναι μετρική στο X' και ικανοποιεί την

$$\frac{1}{1+\delta} d_1(z_p, z_j) \leq d_2(z_p, z_j) \leq d_1(z_p, z_j). \tag{7.2.24}$$

Απόδειξη. Η d_2 είναι μετρική. Για την τριγωνική ανισότητα θεωρούμε $p < j$ και r ώστε $z_p, z_j, z_r \in X'$ και διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: αν $r < p < j$, τότε $\overline{\delta}_p \leq \overline{\delta}_r$ αφού $\{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leq \tau \leq r\} \subset \{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leq \tau \leq p\}$. Έτσι,

$$d_2(z_p, z_j) \leq d_2(z_r, z_p) \leq d_2(z_r, z_p) + d_2(z_r, z_j). \tag{7.2.25}$$

Αν $p < r$, τότε $d_2(z_p, z_j) = d_2(z_p, z_r)$, οπότε η ανισότητα ισχύει πάλι.

Για την απόδειξη της (7.2.24) θεωρούμε $z_p, z_j \in X'$ με $p < j$ και παρατηρούμε κατ΄ αρχήν ότι

$$d_1(z_p, z_j) = \delta_p \in \{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leq \tau \leq p\} \tag{7.2.26}$$

οπότε

$$d_2(z_p, z_j) = \min\{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leq \tau \leq p\} \leq d_1(z_p, z_j). \tag{7.2.27}$$

Αν $\tau \leq p$, οι (7.2.20) και (7.2.21) δίνουν αντίστοιχα

$$\frac{1}{1+\delta} < \frac{\delta_\tau}{\delta_p} \tag{7.2.28}$$

και

$$\delta_p \leq \delta_\tau / 4 \leq (1+\delta)\delta_\tau. \tag{7.2.29}$$

Έτσι,

$$d_1(z_p, z_j) = \delta_p \leq (1+\delta) \min\{\delta_\tau : z_\tau \in X', 1 \leq \tau \leq p\} = (1+\delta) d_2(z_p, z_j). \tag{7.2.30}$$

Έχουμε λοιπόν αποδείξει το Λήμμα. □

Ο μετρικός χώρος (X', d_2) ικανοποιεί τις υποθέσεις του Λήμματος 7.2.1. Άρα, είναι ισομετρικός με κάποιον υπόχωρο του ℓ_2. Από την κατασκευή, ο $(\tilde{X}, d)$ έχει υποσύνολο που είναι $(1+\delta)^2$-ισομορφικό με υπόχωρο του ℓ_2 και έχει πληθάριθμο τουλάχιστον ίσο με $|X'| \geq \frac{1}{m}|\tilde{X}|$.

Βήμα 2: Θα δείξουμε ότι το $\tilde{Y}$ έχει μεγάλο υποσύνολο που είναι $(1+\delta)^2$-ισομορφικό με κάποιο υποσύνολο του ℓ_2.

Γράφουμε $\tilde{Y} = \{y_{j_1}, \dots, y_{j_t}\}$ όπου $t = k - s$ και $j_1 < \cdots < j_t$, και για συντομία θέτουμε $w_i := y_{j_i}$, $i = 1, \dots, t$.

Λήμμα 7.2.4. *Ο $(\tilde{Y}, d|_{\tilde{Y}})$ είναι 5-ισομορφικός με κάποιο υποσύνολο της πραγματικής ευθείας.*

Απόδειξη. Ορίζουμε $T(w_i) = d(w_i, w_t)$. Παρατηρούμε ότι αν $w_i = y_{j_i}$, τότε

$$\{w_{i+1}, \dots, w_t\} \subset A_{j_i}. \tag{7.2.31}$$

Αφού $\mathrm{diam}(A_{j_i}) \leq 2 \cdot \frac{1}{4} d(x_{j_i}, y_{j_i}) = \frac{1}{2} d_{j_i}$ και

$$T(w_i) = d(w_i, w_t) \geq d(w_i, x_{j_i}) - d(w_t, x_{j_i}) \geq d_{j_i} - \frac{1}{4} d_{j_i} = \frac{3}{4} d_{j_i}, \tag{7.2.32}$$

συμπεραίνουμε ότι, για κάθε $i < \kappa \leq t$,

$$T(w_\kappa) \leq \frac{1}{2} d_{j_i} \leq \frac{2}{3} T(w_i). \tag{7.2.33}$$

Επομένως, αν $1 \leq i < \kappa \leq t$, τότε $d(w_i, w_\kappa) \leq 5 d_{j_i}/4$ και, από την (7.2.32),

$$\frac{d(w_i, w_\kappa)}{5} \leq \frac{d_{j_i}}{4} \leq \frac{T(w_i)}{3} \leq |T(w_i) - T(w_\kappa)| \leq d(w_i, w_\kappa). \tag{7.2.34}$$

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Περνώντας σε υπόχωρο μπορούμε να βελτιώσουμε την εκτίμηση του Λήμματος. Για $i = 1, 2, \dots, \lfloor t/(m-1) \rfloor + 1 = t'$ ορίζουμε $v_i = w_{1+(i-1)m}$. Παρατηρήστε ότι

$$t' > \frac{t}{m-1} > \frac{t}{m} = \frac{1}{m}|\tilde{Y}|. \tag{7.2.35}$$

Η (7.2.33) δείχνει ότι

$$T(v_{i+1}) \leq \left(\frac{2}{3}\right)^m T(v_i), \tag{7.2.36}$$

και, αν θέσουμε $\alpha = (2/3)^m$, βλέπουμε ότι για κάθε $1 \leq i < \kappa \leq t'$ ισχύει η

$$(1-\alpha) d(v_i, w_t) \leq T(v_i) - T(v_\kappa) \leq T(v_i) = d(v_i, w_t). \tag{7.2.37}$$

Επίσης,

$$d(v_i, v_\kappa) \leq d(v_i, w_t) + d(v_\kappa, w_t) \leq (1+\alpha) d(v_i, w_t) \tag{7.2.38}$$

και

$$d(v_i, w_t) \leq d(v_i, v_\kappa) + d(v_\kappa, w_t), \tag{7.2.39}$$

άρα

$$d(v_i, v_\kappa) \geq (1-\alpha) d(v_i, w_t). \tag{7.2.40}$$

Έπεται ότι η T ορίζει μια $(1+\alpha)/(1-\alpha)^2$-ισομορφική εμφύτευση του $V = \{v_1, \ldots, v_{t'}\}$ στον ℓ_2. Αν $0 < \varepsilon < 1$ και $\alpha = (2/3)^m < \varepsilon/6$, τότε έχουμε βρει μια $(1+\varepsilon)$-ισομορφική εμφύτευση.

Αν υποθέσουμε ότι $(1+\delta)^2 \leq 1+\varepsilon$, τότε ένα από τα σύνολα X' και V που κατασκευάσαμε έχει τουλάχιστον $\frac{k}{2m}$ στοιχεία και είναι $(1+\varepsilon)$-εμφυτεύσιμο στον ℓ_2. Αφού $m^{k+1} \geq |X|$, έχουμε $k+1 \geq \frac{1}{\log m} \log |X|$, όπου το m εξαρτάται μόνο από το ε σύμφωνα με τις σχέσεις $(1+\delta)^2 \leq 1+\varepsilon$ και $(1+\delta)^{m-1} > 4$. Από την

$$\frac{3k}{2} \geq k+1 \geq \frac{1}{\log m} \log |X| \tag{7.2.41}$$

παίρνουμε τελικά ότι κάποιο από τα X', V έχει περισσότερα από $\frac{1}{3m \log m} \log |X|$ σημεία. Ο περιορισμός ικανοποιείται αν πάρουμε $\delta \simeq \varepsilon$, και ο m προσδιορίζεται από την $(1+\delta)^m \simeq c$ για κάποια σταθερά c. Δηλαδή, $m \simeq c_1/\log(1+\delta) \simeq c_1/\delta$. Αντικαθιστώντας το m, λαμβάνουμε μια εκτίμηση της μορφής

$$|Y| \geq \big(c_1\varepsilon/\log(c_2/\varepsilon)\big) \cdot \log |X|. \tag{7.2.42}$$

7.3 Μια κατασκευή

Έστω X ένα πεπερασμένο σύνολο και έστω $D \subseteq [0, \infty)$. Μια μετρική d στο X λέγεται D-μετρική αν $d(x,y) \in D$ για κάθε $x, y \in X$. Σε αυτή την παράγραφο σταθεροποιούμε το σύνολο $D = \{0, 1, 2\}$. Συμβολίζουμε με $c_2(X)$ την ελάχιστη δυνατή απόσταση *Lipschitz* του (X, d) από υποσύνολο του ℓ_2.

Λήμμα 7.3.1. *Αν d είναι μια D-μετρική στο σύνολο X τότε είτε $c_2(X) = 1$ ή $c_2(X) \geq 1 + \varepsilon_0$, όπου $\varepsilon_0 > 0$ είναι μια απόλυτη σταθερά. Η απόσταση $1+\varepsilon_0$ πετυχαίνεται με κάποιο χώρο (X, d) που έχει πληθάριθμο $|X| = 4$.*

Απόδειξη. Έστω d μια D-μετρική στο σύνολο X. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $|X| \geq 4$, αλλιώς ο X είναι ισομετρικός με υποσύνολο του επιπέδου. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωση: Υποθέτουμε ότι η σχέση $d(x,y) \leq 1$ είναι μεταβατική στο X. Τότε, είναι σχέση ισοδυναμίας. Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.2.1 ελέγχουμε ότι $c_2((X,d)) = 1$.

Δεύτερη περίπτωση: Η σχέση $d(x,y) \leq 1$ δεν είναι μεταβατική. Τότε, μπορούμε να βρούμε $x, y, z \in X$ που ικανοποιούν τις $d(x,y) = 1$, $d(y,z) = 1$ και $d(x,z) = 2$. Παίρνουμε ένα (τυχόν) άλλο σημείο $w \in X$ και θέτουμε $X_0 = \{x, y, z, w\}$. Ας υποθέσουμε ότι ο (X_0, d) εμφυτεύεται ισομετρικά στον ℓ_2. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $T(x) = e$, $T(y) = 0$ και $T(z) = -e$, όπου e μοναδιαίο διάνυσμα στον ℓ_2. Όμως τότε, οι αποστάσεις $\|e-T(w)\|_2$, $\|0-T(w)\|_2$ και $\|-e-T(w)\|_2$ δεν μπορούν να είναι όλες ίσες με 1 ή 2. Άρα, $c_2((X_0,d))>1$. Αφού $c_2((X,d))\geq c_2((X_0,d))$ και υπάρχουν πεπερασμένοι το πλήθος D-μετρικοί χώροι της μορφής $\{x,y,z,w\}$, η ύπαρξη του ε_0 είναι προφανής. □

Λήμμα 7.3.2. *Έστω $\mathcal{D}_s$ το σύνολο όλων των D-μετρικών d στο σύνολο $[s]=\{1,\dots,s\}$ οι οποίες είναι ισομετρικές με υποσύνολο του ℓ_2. Τότε,*

$$|\mathcal{D}_s|\leq s!2^s. \tag{7.3.1}$$

Απόδειξη. Από την απόδειξη του προηγούμενου Λήμματος είναι φανερό ότι αρκεί να δώσουμε άνω φράγμα για το πλήθος των σχέσεων ισοδυναμίας στο σύνολο $[s]$. Μετά από κατάλληλη μετάθεση του $[s]$ οι κλάσεις ισοδύναμων στοιχείων γίνονται διαστήματα που περιγράφονται από την ακολουθία των αρχικών τους σημείων. Αφού υπάρχουν το πολύ 2^s τέτοιες ακολουθίες, ισχύει το φράγμα $s!2^s$. □

Θεώρημα 7.3.3. *Υπάρχει $\varepsilon_0>0$ με την εξής ιδιότητα. Αν $n\geq s\geq 3+2\log_2 n$, τότε υπάρχει μετρική d στο σύνολο $[n]=\{1,\dots,n\}$ ώστε*

$$c_2((X,d|_X))\geq 1+\varepsilon_0 \tag{7.3.2}$$

για κάθε υποσύνολο X του $[n]$ με πληθάριθμο $|X|=s$. Επιπλέον, μπορούμε να επιλέξουμε την d να παίρνει μόνο τις τιμές 0, 1 και 2, οπότε $c_2(([n],d))\leq 2$.

Απόδειξη. Θέτουμε $D=\{0,1,2\}$ και $N=\binom{n}{2}$. Γράφουμε $\mathcal{A}_n$ για την κλάση όλων των D-μετρικών στο $[n]$. Παρατηρούμε ότι υπάρχουν ακριβώς 2^N D-μετρικές στο $[n]$. Ορίζουμε

$$\xi=\{d\in\mathcal{A}_n:\exists X\subset Z_n:\,|X|=s,\,c_2((X,d|_X))=1\}. \tag{7.3.3}$$

Από το Λήμμα 7.3.2 βλέπουμε ότι

$$|\xi|\leq\binom{n}{s}s!2^s2^{N-\binom{s}{2}}. \tag{7.3.4}$$

Αφού $\binom{n}{s}<n^s/s!$, για να δείξουμε ότι $|\xi|<|\mathcal{A}_n|$ αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$(2n)^s2^{-\binom{s}{2}}\leq 1. \tag{7.3.5}$$

Ισοδύναμα, αρκεί να ικανοποιείται ο περιορισμός $\log_2 n\leq\frac{s-3}{2}$. □

Κεφάλαιο 8

Φαινόμενα τύπου Ramsey

8.1 Εισαγωγή

Σκοπός αυτού του Κεφαλαίου είναι να παρουσιάσει ένα αποτέλεσμα των Bartal, Linial, Mendel και Naor [2], το οποίο μπορεί να θεωρηθεί σαν η ισομορφική έκδοση του θεωρήματος των Bourgain, Figiel και Milman (που αποδείχθηκε στο Κεφάλαιο 7).

Ορισμός 8.1.1 (συναρτήσεις Ramsey). Έστω $\mathcal{M}$ μια κλάση μετρικών χώρων. Αν X είναι ένας μετρικός χώρος και $\alpha \geq 1$, συμβολίζουμε με $R_{\mathcal{M}}(X;\alpha)$ το μέγιστο πληθάριθμο υποχώρου Y του X ο οποίος εμφυτεύεται σε κάποιον $Z \in \mathcal{M}$ με παραμόρφωση μικρότερη ή ίση του α (για συντομία γράφουμε $c_{\mathcal{M}}(Y) \leq \alpha$).

Συμβολίζουμε με $R_{\mathcal{M}}(\alpha, n)$ το μεγαλύτερο ακέραιο m για τον οποίο ισχύει το εξής: κάθε μετρικός χώρος με n σημεία έχει υπόχωρο μεγέθους m ο οποίος είναι α-εμφυτεύσιμος σε κάποιον $Z \in \mathcal{M}$. Δηλαδή,

$$R_{\mathcal{M}}(\alpha, n) = \inf_{\{X:|X|=n\}} R_{\mathcal{M}}(X;\alpha). \tag{8.1.1}$$

Αν $\alpha = 1$ τότε παραλείπουμε το α από το συμβολισμό. Αν $\mathcal{M} = \{X\}$ τότε γράφουμε X αντί για $\mathcal{M}$. Αν $\mathcal{M} = \{\ell_p\}$ τότε γράφουμε R_p αντί για R_{ℓ_p}.

Αν $\mathcal{N}$ είναι μια κλάση μετρικών χώρων, γράφουμε $R_{\mathcal{M}}(\mathcal{N};\alpha, n)$ για το μεγαλύτερο ακέραιο m για τον οποίο ισχύει το εξής: κάθε μετρικός χώρος με n σημεία ο οποίος ανήκει στην $\mathcal{N}$ έχει υπόχωρο μεγέθους m ο οποίος είναι α-εμφυτεύσιμος σε κάποιον $Z \in \mathcal{M}$. Δηλαδή,

$$R_{\mathcal{M}}(\mathcal{N};\alpha, n) = \inf_{\{X\in\mathcal{N}:|X|=n\}} R_{\mathcal{M}}(X;\alpha). \tag{8.1.2}$$

Με αυτό το συμβολισμό, τα αποτελέσματα του Κεφαλαίου 7 διατυπώνονται ως εξής:

Θεώρημα 8.1.2 (Bourgain, Figiel, Milman). *Για κάθε $\alpha > 1$ υπάρχει $C(\alpha) > 0$ ώστε $R_2(\alpha, n) \geq C(\alpha)\log n$. Επιπλέον, υπάρχει $\alpha_0 > 1$ με την ιδιότητα $R_2(\alpha_0, n) = O(\log n)$.* □

Πρώτοι οι Bartal, Bollobás και Mendel [1] έδειξαν ότι για «μεγάλες τιμές του α» η συμπεριφορά των συναρτήσεων Ramsey είναι διαφορετική: είναι πολυωνυμική ως προς n. Συγκεκριμένα, απέδειξαν ότι

$$R_2(\alpha, n) \geq R_{UM}(\alpha, n) \geq \exp\left((\log n)^{1-O(1/\alpha)}\right), \tag{8.1.3}$$

όπου UM είναι η κλάση των υπερμετρικών χώρων. Το αποτέλεσμα αυτό «τελειοποιήθηκε» από τους Bartal, Linial, Mendel και Naor [2]:

Θεώρημα 8.1.3 (Bartal, Linial, Mendel, Naor, 2005). *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $\alpha > 1$ και για κάθε $n \geq 2$,*

$$R_2(\alpha, n) \geq n^{1-C\frac{\log(2\alpha)}{\alpha}}. \tag{8.1.4}$$

Με άλλα λόγια, για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε μετρικός χώρος με n σημεία έχει υπόχωρο μεγέθους $n^{1-\varepsilon}$ ο οποίος εμφυτεύεται σε χώρο Hilbert με παραμόρφωση $O\left(\frac{\log(1/\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$. Η απόδειξη αυτού του Θεωρήματος είναι τεχνική και απαιτεί πλήθος βημάτων, τα οποία παρουσιάζονται σις επόμενες παραγράφους. Βασικό ρόλο στην απόδειξη παίζει η έννοια της μετρικής σύνθεσης.

Ορισμός 8.1.4 (μετρική σύνθεση). Έστω M ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος και έστω $\mathcal{N} = \{N_x\}_{x\in M}$ μια οικογένεια ξένων πεπερασμένων μετρικών χώρων. Για κάθε $\beta \geq 1/2$, η *β-σύνθεση* $C = M_\beta[\mathcal{N}]$ είναι ένας μετρικός χώρος πάνω στην ξένη ένωση $\bigsqcup_x N_x$. Οι αποστάσεις των σημείων του C ορίζονται ως εξής: Αν $x, y \in M$ και $u \in N_x$, $v \in N_y$, θέτουμε

$$\begin{aligned} d_C(u,v) &= d_{N_x}(u,v) \qquad \text{αν } x = y \\ d_C(u,v) &= \beta\gamma d_M(x,y) \qquad \text{αν } x \neq y, \end{aligned}$$

όπου

$$\gamma = \frac{\max_{x\in M} \operatorname{diam}(N_x)}{\min\{d_M(x,y) : x, y \in M, x \neq y\}}. \tag{8.1.5}$$

Με άλλα λόγια, πρώτα πολλαπλασιάζουμε τις αποστάσεις στον M με $\beta\gamma$ και μετά αντικαθιστούμε κάθε σημείο x του M με ένα ισομετρικό αντίτυπο του N_x.

Ορισμός 8.1.5 (κλειστότητα ως προς τη μετρική σύνθεση). Έστω $\mathcal{M}$ μια κλάση μετρικών χώρων και έστω $\beta \geq 1/2$. Η *κλειστότητα* $\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M})$ *της $\mathcal{M}$ ως προς $\geq \beta$-μετρικές συνθέσεις* είναι η μικρότερη κλάση $\mathcal{C}$ μετρικών χώρων που περιέχει την $\mathcal{M}$ και ικανοποιεί την ακόλουθη συνθήκη: Αν $M \in \mathcal{M}$ και $\mathcal{N} = \{N_x\}_{x\in M}$ είναι μια οικογένεια μετρικών χώρων καθένας από τους οποίους είναι ισομετρικός με κάποιο χώρο στη $\mathcal{C}$, τότε η μετρική σύνθεση $M_{\beta'}[\mathcal{N}]$ ανήκει στην $\mathcal{C}$ για κάθε $\beta' \geq \beta$.

8.2 Άνω φράγματα μέσω της μετρικής σύνθεσης

Ορισμός 8.2.1. Μια κλάση $\mathcal{C}$ πεπερασμένων μετρικών χώρων λέγεται

(α) *Μετρική κλάση* αν είναι κλειστή ως προς ισομετρίες.

(β) *Κληρονομική* αν από τις $M \in \mathcal{C}$ και $N \subset M$ έπεται ότι $N \in \mathcal{C}$.

(γ) *Αναλλοίωτη ως προς διαστολές* αν για κάθε $(M, d) \in \mathcal{C}$ και για κάθε $\lambda > 0$ έπεται ότι $(M, \lambda d) \in \mathcal{C}$.

Θέτουμε $\mathcal{M}^{\overset{\alpha}{\hookleftarrow}} = \{X : c_{\mathcal{M}}(X) \leq \alpha\}$. Δηλαδή, $\mathcal{M}^{\overset{\alpha}{\hookleftarrow}}$ είναι η κλάση όλων των μετρικών χώρων που εμφυτεύονται με παραμόρφωση το πολύ α σε κάποιον μετρικό χώρο από την κλάση $\mathcal{M}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\mathcal{M}^{\overset{\alpha}{\hookleftarrow}}$ είναι μια κληρονομική και αναλλοίωτη ως προς διαστολές μετρική κλάση.

Θυμηθείτε ότι $R_{\mathcal{C}}(X)$ είναι ο μέγιστος πληθάριθμος υποχώρου του X που εμφυτεύεται ισομετρικά σε κάποιο μετρικό χώρο από την κλάση $\mathcal{C}$.

Πρόταση 8.2.2. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κληρονομική και αναλλοίωτη ως προς διαστολές μετρική κλάση πεπερασμένων μετρικών χώρων. Τότε, για κάθε πεπερασμένο μετρικό χώρο M, για κάθε κλάση $\mathcal{N} = \{N_x\}_{x\in M}$ και για κάθε $\beta \geq 1/2$,*

$$R_{\mathcal{C}}\big(M_\beta[\mathcal{N}]\big) \leq R_{\mathcal{C}}(M) \cdot \max_{x\in M} R_{\mathcal{C}}(N_x). \tag{8.2.1}$$

Ειδικότερα, για κάθε πεπερασμένο μετρικό χώρο N,

$$R_{\mathcal{C}}\big(M_\beta[N]\big) \leq R_{\mathcal{C}}(M) \cdot R_{\mathcal{C}}(N). \tag{8.2.2}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $m = R_{\mathcal{C}}(M)$ και $k = \max_{x\in M} R_{\mathcal{C}}(N_x)$. Ας υποθέσουμε ότι $R_{\mathcal{C}}\big(M_\beta[\mathcal{N}]\big) > R_{\mathcal{C}}(M) \cdot \max_{x\in M} R_{\mathcal{C}}(N_x)$. Έστω $X \in M_\beta[\mathcal{N}]$ με $|X| > mk$. Για κάθε $z \in M$ θέτουμε $X_z = X \cap N_z$. Ορίζοντας το σύνολο $Z = \{z \in M : X_z \neq \emptyset\}$, βλέπουμε ότι $|X| = \sum_{z\in M} |X_z|$. Αν $|Z| \leq m$ τότε μπορούμε να βρούμε κάποιο $z \in Z$ ώστε $|X_z| > k$. Όμως το X_z δε μπορεί να ανήκει στην $\mathcal{C}$ αφού $k = \max_{x\in M} R_{\mathcal{C}}(N_x)$ και επομένως, επειδή η $\mathcal{C}$ είναι κληρονομική, το X δεν ανήκει σ' αυτήν. Αν $|Z| > m$, τότε επιλέγουμε ένα στοιχείο από κάθε X_z και σχηματίζουμε το σύνολο Z'. Η μετρική σ' αυτό είναι ένα πολλαπλάσιο της μετρικής του M σύμφωνα με τον ορισμό της μετρικής σύνθεσης. Λαμβάνοντας υπόψιν το γεγονός ότι η κλάση $\mathcal{C}$ είναι αναλλοίωτη ως προς διαστολές, βλέπουμε ότι το Z' δεν ανήκει σ' αυτήν. Από την κληρονομικότητα της $\mathcal{C}$ έπεται ότι $X \notin \mathcal{C}$. □

Στη συνέχεια θέτουμε $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, n) = R_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}; 1, n)$. Δηλαδή, $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, n) \geq t$ αν και μόνο αν για κάθε $X \in \mathcal{A}$ με $|X| = n$ υπάρχει υπόχωρος του X με t στοιχεία ο οποίος είναι ισομετρικός με κάποιο χώρο στην κλάση $\mathcal{C}$.

Λήμμα 8.2.3. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κληρονομική και αναλλοίωτη ως προς διαστολές μετρική κλάση πεπερασμένων μετρικών χώρων. Έστω $\mathcal{A}$ μια κλάση μετρικών χώρων και έστω $\delta \in (0, 1)$. Αν για κάποιο φυσικό $m > 1$ έχουμε $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, m) \leq m^\delta$, τότε για κάθε $\beta \geq 1/2$ και για άπειρους το πλήθος φυσικούς n έχουμε*

$$R_{\mathcal{C}}(\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{A}), n) \leq n^\delta. \tag{8.2.3}$$

Απόδειξη. Έστω $\beta \geq 1/2$. Θεωρούμε $A \in \mathcal{A}$ τέτοιο ώστε $|A| = m$ και $R_{\mathcal{C}}(A) \leq m^{\delta}$. Ορίζουμε αναδομικά τα σύνολα $A_0 = A$ και $A_i = A_{\beta}[A_{i-1}]$. Είναι προφανές ότι αυτά ανήκουν στην κλάση $\mathrm{comp}_{\beta}(\mathcal{A})$. Επιπλέον $|A_i| = m^{i+1}$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 8.2.2 παίρνουμε

$$R_{\mathcal{C}}(A_i) \leq R_{\mathcal{C}}(A) \cdot R_{\mathcal{C}}(A_{i-1}) \leq R_{\mathcal{C}}(A_{i-1})m^{\delta} \leq \cdots \leq (m^{i+1})^{\delta} = |A_i|^{m}. \tag{8.2.4}$$

Από την τελευταία σχέση έπεται η

$$R_{\mathcal{C}}\big(\mathrm{comp}_{\beta}(\mathcal{A}), m^i\big) \leq (m^i)^{\delta}, \tag{8.2.5}$$

που είναι η ζητούμενη. □

Λήμμα 8.2.4. *Έστω $\mathcal{C}$ μια μη κενή, κληρονομική και αναλλοίωτη ως προς διαστολές μετρική κλάση πεπερασμένων μετρικών χώρων. Έστω $\mathcal{A}$ μια κλάση μετρικών χώρων που ικανοποιεί την $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, m) < m$ για κάποιον φυσικό m. Δηλαδή, υπάρχει κάποιος $A \in \mathcal{A}$ που δεν έχει ισομετρικό αντίγραφο στην $\mathcal{C}$. Τότε, υπάρχει $\delta \in (0,1)$ ώστε για κάθε $\beta \geq 1/2$ και για άπειρους το πλήθος φυσικούς n να έχουμε*

$$R_{\mathcal{C}}(\mathrm{comp}_{\beta}(\mathcal{A}), n) \leq n^{\delta}. \tag{8.2.6}$$

Απόδειξη. Έστω ένα $A \in \mathcal{A}$ με πληθάριθμο $|A| = m$, το οποίο δεν έχει ισομετρικό αντίγραφο στην $\mathcal{C}$. Επειδή η $\mathcal{C}$ είναι μη κενή και κληρονομική, έπεται ότι $m > 1$. Βρίσκουμε $\delta \in (0,1)$ ώστε $R_{\mathcal{C}}(\mathcal{A}, m) \leq m^{\delta} < m$. Το Λήμμα 8.2.3 ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πόρισμα 8.2.5. *Έστω $\mathcal{C}$ μια κληρονομική και αναλλοίωτη ως προς διαστολές μετρική κλάση πεπερασμένων μετρικών χώρων η οποία δεν περιέχει όλους τους πεπερασμένους μετρικούς χώρους. Τότε, υπάρχει $\delta \in (0,1)$ ώστε*

$$R_{\mathcal{C}}(n) \leq n^{\delta} \tag{8.2.7}$$

για άπειρους το πλήθος φυσικούς n.

Απόδειξη. Έστω A ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος που δεν ανήκει στη $\mathcal{C}$. Αν $|A| = m$ τότε $R_{\mathcal{C}}(m) < m$. Η συνέχεια είναι μια εφαρμογή του προηγούμενου Λήμματος, όπου $\mathcal{A} = \mathrm{comp}_{\beta}(\mathcal{A})$ είναι η κλάση όλων των πεπερασμένων μετρικών χώρων. □

Έχουμε δει ότι αν $\mathcal{M}$ είναι μια οικογένεια πεπερασμένων μετρικών χώρων, τότε η $\mathcal{M}\overset{\alpha}{\hookleftarrow}$ είναι μια κληρονομική, αναλλοίωτη ως προς τις διαστολές μετρική κλάση. Αν θέσουμε $\mathcal{C} = \mathcal{M}\overset{\alpha}{\hookleftarrow}$ τότε βλέπουμε εύκολα ότι $R_{\mathcal{C}}(n) = R_{\mathcal{M}}(\alpha, n)$. Από το Πόρισμα 8.2.5 παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 8.2.6. *Έστω $\mathcal{M}$ μια κλάση πεπερασμένων μετρικών χώρων και έστω $\alpha \geq 1$. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Υπάρχει φυσικός n ώστε $R_{\mathcal{M}}(\alpha, n) < n$.*

(β) *Υπάρχει $\delta \in (0,1)$ ώστε $R_{\mathcal{M}}(\alpha, n) \leq n^{\delta}$ για άπειρους το πλήθος φυσικούς n.*

Ορισμός 8.2.7. Μια οικογένεια μετρικών χώρων $\mathcal{N}$ λέγεται *σχεδόν κλειστή ως προς τη μετρική σύνθεση* αν για κάθε $\lambda > 1$ υπάρχει $\beta \geq 1/2$ ώστε $c_{\mathcal{N}}(X) \leq \lambda$ για κάθε $X \in \mathrm{comp}_\beta(\mathcal{N})$. Ισοδύναμα, αν

$$\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N} \overset{\lambda}{\hookleftarrow}. \tag{8.2.8}$$

Λήμμα 8.2.8. *Έστω $\mathcal{M}$ μια μετρική κλάση πεπερασμένων μετρικών χώρων και έστω $\mathcal{N}$ μια κλάση πεπερασμένων μετρικών χώρων που είναι σχεδόν κλειστή ως προς τη μετρική σύνθεση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει κάποιος χώρος στην $\mathcal{N}$ ο οποίος δεν είναι α-εμφυτεύσιμος στην $\mathcal{M}$. Τότε, υπάρχει $\delta \in (0,1)$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $1 \leq \alpha' < \alpha$ έχουμε $R_{\mathcal{M}}(\mathcal{N};\alpha',n) \leq n^\delta$ για άπειρους το πλήθος φυσικούς n.*

Απόδειξη. Η υπόθεση ότι κάποιος χώρος από την $\mathcal{N}$ δεν είναι α-εμφυτεύσιμος στην $\mathcal{M}$ συνεπάγεται ότι $R_{\mathcal{M}}(\mathcal{N};\alpha,m) < m$ για κάποιο φυσικό m. Από το Λήμμα 8.2.4 συμπεραίνουμε ότι

$$R_{\mathcal{M}}(\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{N});\alpha,n) \leq n^\delta \tag{8.2.9}$$

για κάποιον $\delta \in (0,1)$ και για άπειρους το πλήθος φυσικούς n.

Ας θέσουμε τώρα $\lambda = \alpha/\alpha'$ για $1 \leq \alpha' < \alpha$. Αφού η $\mathcal{N}$ είναι σχεδόν κλειστή ως προς τη μετρική σύνθεση, υπάρχει $\beta \geq 1/2$ ώστε $\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{N}) \subseteq \mathcal{N} \overset{\lambda}{\hookleftarrow}$. Ισοδύναμα, για κάθε $Z \in \mathrm{comp}_\beta(\mathcal{N})$ υπάρχει $N \in \mathcal{N}$ ο οποίος είναι λ-ισόμορφος με τον Z. Αν n είναι ένας φυσικός που ικανοποιεί την (8.2.9), τότε για $|Z| = n = |N|$ μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο X του N ώστε $c_{\mathcal{M}}(X) \leq \alpha'$ και $|X| \geq R_{\mathcal{M}}(\mathcal{N};\alpha',n)$. Έστω Y το υποσύνολο του Z που αντιστοιχεί στο X μέσω της λ-ισοδυναμίας των Z και N. Τότε, $|Y| = |X| \geq R_{\mathcal{M}}(\mathcal{N};\alpha',n)$ και παίρνοντας τη σύνθεση των απεικονίσεων $Z \to N \hookrightarrow \mathcal{M}$ βλέπουμε ότι $c_{\mathcal{M}}(Z) \leq \lambda\alpha' = \alpha$.

Έχουμε δείξει ότι για κάθε φυσικό n που ικανοποιεί την (8.2.9) και για κάθε $Z \in \mathrm{comp}_\beta(\mathcal{N})$ με n στοιχεία, υπάρχει $Y \subseteq Z$ με τουλάχιστον $R_{\mathcal{M}}(\mathcal{N};\alpha',n)$ το πλήθος στοιχεία, το οποίο είναι α-ισόμορφο με κάποιο σύνολο στην $\mathcal{M}$. Άρα,

$$R_{\mathcal{M}}(\mathcal{N};\alpha',n) \leq R_{\mathcal{M}}(\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{N});\alpha,n) \leq n^\delta \tag{8.2.10}$$

που είναι το ζητούμενο. □

Πρόταση 8.2.9. *Έστω $(X,\|\cdot\|)$ ένας χώρος με νόρμα. Η κλάση $\mathcal{M}$ των πεπερασμένων υποσυνόλων του X είναι σχεδόν κλειστή ως προς τη μετρική σύνθεση.*

Απόδειξη. Πρέπει να δείξουμε ότι για κάθε $\lambda > 1$ υπάρχει $\beta \leq 1/2$ ώστε $\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M}) \subseteq \mathcal{M} \overset{\lambda}{\hookleftarrow}$.

Έστω $\lambda > 1$ και έστω $Z \in \mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M})$ για κάποιο β που θα προσδιορίσουμε αργότερα. Θα αποδείξουμε το ζητούμενο με επαγωγή ως προς το πλήθος των βημάτων που απαιτούνται για να κατασκευάσουμε τον Z από χώρους που ανήκουν στην κλάση $\mathcal{M}$. Αν $Z \in \mathcal{M}$, τότε προφανώς $Z \in \mathcal{M} \overset{\lambda}{\hookleftarrow}$ και δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε. Έστω λοιπόν ότι ο Z είναι της μορφής $M_\beta[(N_x)_{x\in M}]$ όπου $M \in \mathcal{M}$, όπου $N_x \in \mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M})$ και κάθε N_x δημιουργείται από μια μικρότερη ακολουθία μετρικών συνθέσεων. Η επαγωγική υπόθεση μας δίνει ένα $\beta \geq 1/2$ ώστε κάθε

N_x να είναι λ-εμφυτεύσιμο στον X μέσω των $\phi_x : N_x \to X$. Μάλιστα, επειδή η κλάση των υποσυνόλων ενός χώρου με νόρμα είναι αναλλοίωτη ως προς διαστολές, μπορούμε να υποθέσουμε ότι οι ϕ_x ικανοποιούν την

$$\forall u, v \in N_x \qquad d_{N_x}(u,v) \leq \|\phi_x(u) - \phi_x(v)\| \leq \lambda d_{N_x}(u,v) \tag{8.2.11}$$

και με κατάλληλη μετατόπιση μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|\phi_x(u)\| \leq \lambda \mathrm{diam}(N_x)$, για κάθε $u \in N_x$.

Ορίζουμε $\phi : Z \to X$ από τη $\phi(u) = \beta\gamma x + \phi_x(u)$ όταν $u \in N_x$, όπου

$$\gamma = \frac{\max \mathrm{diam}(N_x)}{\min_{x \neq y \in M} \|x - y\|}. \tag{8.2.12}$$

Θα εκτιμήσουμε το β ώστε η ϕ να είναι λ-ισομορφισμός. Υποθέτουμε αρχικά ότι $\beta > 2\lambda$. Αν $u, v \in N_x$, τότε

$$d_Z(u,v) = d_{N_x}(u,v) \leq \|\phi_x(u) - \phi_x(v)\| = \|\phi(u) - \phi(v)\| \leq \lambda d_{N_x}(u,v). \tag{8.2.13}$$

Αν $u \in N_x$, $v \in N_y$ για $x \neq y$, τότε

$$\begin{aligned}
\|\phi(u) - \phi(v)\| &= \|(\beta\gamma x + \phi_x(u)) - (\beta\gamma y + \phi_y(v))\| \\
&\leq \beta\gamma\|x - y\| + \|\phi_x(u) - \phi_y(v)\| \\
&\leq \beta\gamma\|x - y\| + \lambda(\mathrm{diam}(N_x) + \mathrm{diam}(N_y)) \\
&\leq \beta\gamma\|x - y\| + 2\lambda \max \mathrm{diam}(N_x) \\
&\leq \beta\gamma\|x - y\| + 2\lambda\gamma \min_{z \neq w \in M} \|z - w\| \\
&\leq \beta\gamma\|x - y\| + 2\lambda\gamma\|x - y\| = (\beta + 2\lambda)\gamma\|x - y\| \\
&= \frac{\beta + 2\lambda}{\beta} \beta\gamma\|x - y\| \\
&= \frac{\beta + 2\lambda}{\beta} d_Z(u,v).
\end{aligned}$$

Όμοια,

$$\begin{aligned}
\|\phi(u) - \phi(v)\| &\geq \beta\gamma\|x - y\| - \|\phi_x(u) - \phi_y(v)\| \\
&\geq \beta\gamma\|x - y\| - \lambda(\mathrm{diam}(N_x) + \mathrm{diam}(N_y)) \\
&\geq (\beta - 2\lambda)\,\gamma\|x - y\| \\
&= \frac{\beta - 2\lambda}{\beta} d_Z(u,v).
\end{aligned}$$

Άρα, η παραμόρφωση της ϕ φράσσεται από $\frac{\beta+2\lambda}{\beta}\frac{\beta}{\beta-2\lambda}$. Απαιτώντας να ισχύει η

$$\frac{\beta + 2\lambda}{\beta}\frac{\beta}{\beta - 2\lambda} \leq \lambda, \tag{8.2.14}$$

παίρνουμε $\beta \geq 2\lambda\frac{\lambda+1}{\lambda-1}$. Αυτό αποδεικνύει την Πρόταση. $\square$

8.3 Υπερμετρικές και ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένα δένδρα

Ορισμός 8.3.1. Ένας μετρικός χώρος (X, d) λέγεται *υπερμετρικός* αν για κάθε $x, y, z \in X$ έχουμε

$$d(x, z) \leq \max\{d(x, y), d(y, z)\}. \tag{8.3.1}$$

Ορισμός 8.3.2. Έστω $k \in \mathbb{N}$. Ένας μετρικός χώρος λέγεται *k-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένο δένδρο* (θα γράφουμε $k - HST$ για συντομία) αν τα σημεία του είναι τα φύλλα ενός δένδρου T με ρίζα και αν ικανοποιούνται τα εξής: Σε κάθε κορυφή $u \in T$ αντιστοιχεί μια τιμή $\Delta(u) \geq 0$ ώστε $\Delta(u) = 0$ αν και μόνο αν το u είναι φύλλο του T. Επιπλέον, αν μια κορυφή u είναι απόγονος μιας κορυφής v τότε $\Delta(u) \leq \Delta(v)/k$. Η απόσταση δύο φύλλων $x, y \in T$ ορίζεται να είναι ίση με $\Delta(\mathrm{lca}(x, y))$, όπου $\mathrm{lca}(x, y)$ είναι ο μικρότερος κοινός πρόγονος των x και y στο T.

Ένα k-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένο δένδρο λέγεται *ακριβές* αν $\Delta(u) = \Delta(v)/k$ για οποιεσδήποτε εσωτερικές κορυφές u και v με την u *απόγονο* της v.

Λήμμα 8.3.3. *Έστω (X, d) ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος.*

(α) *Ο X είναι υπερμετρικός αν και μόνο αν είναι 1-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένο δένδρο.*

(β) *Αν ο X είναι k-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένο δένδρο για κάποιον $k \geq 1$ τότε είναι υπερμετρικός.*

Απόδειξη. (α) Η απόδειξη θα στηριχθεί πάνω στα ακόλουθα Λήμματα.

Λήμμα 8.3.4. *Αν x, y, z είναι στοιχεία ενός υπερμετρικού χώρου X τέτώστε $d(x, y) = d_1$, $d(x, z) = d_2$ και $d_2 > d_1$, τότε $d(y, z) = d_2$.*

Απόδειξη. Από τη μια πλευρά έχουμε $d(y, z) \leq \max(d(x, y), d(x, z)) = d_2$. Από την άλλη πλευρά, $d_2 = d(x, z) \leq \max(d(x, y), d(y, z))$. Αφού $d(x, y) = d_1 < d_2$, παίρνουμε $\max(d(x, y), d(y, z)) = d(y, z)$, δηλαδή $d_2 \leq d(y, z)$. □

Λήμμα 8.3.5. *Έστω X ένα $1 - HST$. Αν $x, y, z \in X$, τουλάχιστον δύο αποστάσεις μεταξύ αυτών είναι ίσες.*

Απόδειξη. Ο X ορίζεται από ένα δέντρο T με ρίζα r και τιμές Δ_i στις κορυφές του. Συμβολίζουμε με $[x, y]$ το μοναδικό μονοπάτι που ενώνει τα x, y. Κάθε μονοπάτι περνάει από τον αντίστοιχο ελάχιστο κοινό πρόγονο κάθε ζεύγους. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η τιμή Δ_{xz} του $\mathrm{lca}(x, z)$, είναι η μεγαλύτερη των τριών και η Δ_{xy} η μικρότερη. Το μονοπάτι $[x, z]$ περνάει από τον $\mathrm{lca}(x, y)$ αφού διαφορετικά σχηματίζεται κύκλος στο δέντρο. Όμοια, το $[y, z]$ περνάει από τους $\mathrm{lca}(x, y)$ και $\mathrm{lca}(x, z)$. Έτσι, τα μονοπάτια $[y, z], [x, z]$ ταυτίζονται τουλάχιστον στο μονοπάτι $[\mathrm{lca}(x, y), z]$. Αφού η Δ_{xy} είναι η μικρότερη τιμή, ο $\mathrm{lca}(y, z)$ ανήκει στο $[\mathrm{lca}(x, y), z]$. Από τις υποθέσεις προκύπτει επίσης ότι $\mathrm{lca}(y, z) \in [\mathrm{lca}(x, y), \mathrm{lca}(x, z)]$. Λόγω της τελευταίας σχέσης, αν ο $\mathrm{lca}(y, z)$ ήταν διαφορετικός από τον $\mathrm{lca}(x,z)$, θα παίρναμε ότι οι x,z έχουν έναν κοινό πρόγονο – τον $\mathrm{lca}(y,z)$ – με τιμή μικρότερη της Δ_{xz}. Καταλήγουμε σε άτοπο, οπότε $\mathrm{lca}(y,z)=\mathrm{lca}(x,z)$. □

Μπορούμε τώρα να δείξουμε το (α). Υποθέτουμε πρώτα ότι ο X είναι κάποιο $1-HST$ πάνω σε ένα δέντρο T με ρίζα r και τιμές Δ_i. Αν $x,y,z\in X$, τότε από το Λήμμα 8.3.5 μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\Delta_{xy}=\Delta_1$, $\Delta_{xz}=\Delta_1$, $\Delta_{yz}=\Delta_2$ και $\Delta_1\geq\Delta_2$. Εύκολα τώρα ελέγχουμε οτι ικανοποιείται η $\Delta_{xz}\leq\max\{\Delta_{xy},\Delta_{yz}\}$, απ' όπου καταλήγουμε στην

$$d(x,z)\leq\max\{d(x,y),d(y,z)\},\ \text{για κάθε } x,y,z\in X. \tag{8.3.2}$$

Άρα, ο X είναι υπερμετρικός χώρος.

Αντίστροφα, έστω X ένας υπερμετρικός χώρος. Αν διατάξουμε όλες τις δυνατές αποστάσεις στον X, παίρνουμε μια αύξουσα ακολουθία $d_1<d_2<\cdots<d_k$. Αυτό που θα κάνουμε στη συνέχεια είναι να κατασκεύσουμε επαναληπτικά μια ακολουθία από δέντρα, το τελευταίο από τα οποία θα είναι το ζητούμενο $1-HST$. Σε κάθε βήμα θα δημιουργούνται μετρικές σχέσεις μεταξύ των φύλλων του δέντρου, οι οποίες σταδιακά θα γίνονται όλο και περισσότερο ακριβείς ως προς τις πραγματικές αποστάσεις στον X.

Βρίσκουμε ένα ζευγάρι σημείων x_1,y_1 για τα οποία ισχύει $d(x_1,y_1)=d_1$. Θεωρούμε ένα δέντρο – μονοπάτι με k κορυφές. Επιλέγοντας τη μία ακραία κορυφή του μονοπατιού, δίνουμε τιμές στις k κορυφές σύμφωνα με τον τύπο

η i–στή κορυφή παίρνει την i–στή σε μέγεθος μικρότερη τιμή d_i.

Η ρίζα του δέντρου είναι εκείνη η κορυφή που έχει τιμή d_k. Στην d_1–κορυφή επισυνάπτουμε δύο φύλλα x_1,y_1 καθώς και ένα φύλλο x για κάθε $x\in X$ με την ιδιότητα $d(x_1,x)=d_1$. Το Λήμμα 8.3.4 μας εξασφαλίζει ότι $d(y_1,x)=d_1$ και $d(x,y)=d_1$ για οποιαδήποτε δύο φύλλα x,y από την κορυφή d_1. Συνεχίζουμε επισυνάπτοντας ένα φύλλο z στην κορυφή d_i όταν $d(x_1,z)=d_i$. Από το Λήμμα 8.3.4 βλέπουμε ότι $d(y,z)=d_i$ για κάθε y από την d_1–κορυφή και κάθε z από την d_i–κορυφή.

Δείχνουμε τώρα ότι για κάθε φύλλο x στην d_i–κορυφή και κάθε φύλλο y στην d_j–κορυφή, όπου $d_j<d_i$, ισχύει $d(x,y)=d_i$. Προφανώς $d(x_1,x)=d_i$ και $d(x_1,y)=d_j$. Μια εφαρμογή του Λήμματος 8.3.4 δίνει το ζητούμενο. Επίσης, για δύο φύλλα x,y στην d_i–κορυφή με απόσταση $d(x,y)=d_r$ στον X, ισχύει $d_r\leq d_i$ αφού $d_r=d(x,y)\leq\max(d(x,x_1),d(x_1,y))=\max(d_i,d_i)=d_i$.

Μέχρι τώρα έχουμε κατασκευάσει ένα δέντρο στο οποίο διατηρούνται οι αποστάσεις ως προς τα σημεία x_1,y_1. Αν επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία περιοριζόμενοι στα φύλλα μιας κορυφής, αυτό που θα πάρουμε είναι ένα δέντρο που σέβεται τις πραγματικές αποστάσεις ως προς δύο άλλα σημεία x_2,y_2, ενώ διατηρεί τις μετρικές σχέσεις από τα x_1,y_1. Πιο συγκεκριμένα, εφαρμόζουμε επαναληπτικά τα παρακάτω βήματα σε κάθε κορυφή του δέντρου που προκύπτει κάθε φορά:

(1) Διατάσσουμε τις αποστάσεις μεταξύ των φύλλων σε αύξουσα τάξη.

(2) Θεωρούμε ένα δέντρο με κορυφές τόσες όσες είναι το πλήθος των αποστάσεων και δίνουμε σε κάθε κορυφή μια τιμή από τις δυνατές αποστάσεις ώστε αν η κορυφή u έχει απόγονο την v, οι αντίστοιχες τιμές να είναι διαδοχικές και κατά φθίνουσα τάξη.

(3) Επιλέγουμε δύο φύλλα x_m, y_m με τη μικρότερη δυνατή απόσταση και μοιράζουμε τα υπόλοιπα φύλλα στις κορυφές του δέντρου, ανάλογα με το αν οι αποστάσεις από το x_m συμπίπτουν με την τιμή κάποιας κορυφής.

(4) Επισυνάπτουμε με μια ακμή το δέντρο που δημιουργήθηκε στην αρχική κορυφή όπου εφαρμόσαμε τα βήματα, έτσι ώστε οι τιμές να βαίνουν κατά φθίνουσα τάξη.

Η παραπάνω διαδικασία σταματά όταν σε κάθε κορυφή τα φύλλα έχουν ανά δύο την ίδια απόσταση. Βέβαια, το δέντρο που δημιουργήθηκε ορίζει κάποιο $1-HST$ και αυτό που μένει να δείξουμε είναι ότι ο χώρος X είναι ισομετρικός με το τελικό δέντρο. Έστω λοιπόν x, y δύο στοιχεία του X με απόσταση d_i. Αν τα x, y είναι τα αρχικά σημεία x_1, y_1 που είχαμε επιλέξει ή ένα τουλάχιστον από αυτά είναι φύλλο στην d_1- κορυφή, τότε έχουμε τελειώσει. Διαφορετικά τα x, y είναι φύλλα σε κάποιες κορυφές του αρχικού δέντρου εκτός της d_1. Αν ανήκουν σε διαφορετικές κορυφές τότε προηγούμενη παρατήρηση μας δίνει το ζητούμενο. Αλλιώς τα δύο σημεία ανήκουν στην ίδια κορυφή u οπότε εκτελώντας τα βήματα 1–4 παίρνουμε ένα υποδέντρο με ρίζα την u. Συνεχίζουμε εξετάζοντας τις πιθανές σχέσεις μεταξύ των κορυφών στις οποίες ανήκουν τα φύλλα x, y στο νέο υποδέντρο όπου από τα βήματα 1–4 πέφτουμε κάθε φορά σε ένα λεπτότερο μετρικό επίπεδο. Φτάνουμε τελικά σε ένα δέντρο με τα φύλλα x, y να ανήκουν είτε σε διαφορετικές κορυφές, είτε στην ίδια κορυφή και τα βήματα 1–4 δεν εφαρμόζονται. Σε κάθε περίπτωση πάντως η ίδια η κατασκευή εξασφαλίζει ότι d_i θα είναι η τιμή του ελάχιστου κοινού προγόνου των δύο υπό εξέταση σημείων απ΄ όπου συμπεραίνουμε ότι η απόσταση των x, y στο τελικό $1-HST$ είναι d_i. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη της πρότασης.

(β) Αφού κάθε k-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένο δένδρο είναι 1-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένο δένδρο, το (α) μας δίνει ότι ο X είναι υπερμετρικός χώρος. □

Συμβολισμός. Στη συνέχεια γράφουμε UM για την κλάση των υπερμετρικών χώρων, $k-HST$ για την κλάση των k-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένων δένδρων, και EQ για την κλάση των «ισόπλευρων χώρων».

Πρόταση 8.3.6. *Η κλάση των k-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένων δένδρων είναι η κλειστότητα της κλάσης EQ των ισόπλευρων χώρων ως προς την k-μετρική σύνθεση. Δηλαδή,*

$$k-HST = \mathrm{comp}_k(EQ). \tag{8.3.3}$$

Ειδικότερα, η κλάση των υπερμετρικών χώρων είναι η κλειστότητα της κλάσης EQ των ισόπλευρων χώρων ως προς την 1-μετρική σύνθεση:

$$UM = \mathrm{comp}_1(EQ). \tag{8.3.4}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε αρχικά με επαγωγή ότι $\mathrm{comp}_k(EQ) \subseteq k-HST$. Αν X είναι ένας ισόπλερος χώρος, τότε μπορούμε να θεωρήσουμε το δέντρο T με ρίζα r και $|X|$ σε πλήθος φύλλα. Δίνουμε στη ρίζα την τιμή της απόστασης του X. Τότε, το T είναι ένα $k-HST$ ισομετρικό του X. Έτσι, $X \in k-HST$.

Υποθέτουμε τώρα ότι ο X είναι της μορφής $Q_k[\mathcal{N}]$, όπου $Q \in EQ$ και $\mathcal{N} = (N_x)_{x\in Q}$ είναι μια οικογένεια χώρων τέτοια ώστε $N_x \in \mathrm{comp}_k(EQ)$ για κάθε $x \in Q$. Η επαγωγική υπόθεση δίνει ότι $Q \in k-HST$ και $N_x \in k-HST$ για κάθε $x \in Q$. Σε κάθε φύλλο x του Q επισυνάπτουμε το δέντρο N_x από τη ρίζα r_x. Το δέντρο T που θα προκύψει θα έχει ως ρίζα τη ρίζα r του Q. Θα δώσουμε τιμές στις κορυφές του T ώστε να πάρουμε ένα $k-HST$. Στα υποδέντρα N_x με ρίζα r_x αφήνουμε τις τιμές όπως πριν. Στη ρίζα r του T δίνουμε την τιμή $\Delta_r = k\gamma d_Q$, όπου

$$\gamma = \frac{\max_{x\in Q}\mathrm{diam}(N_x)}{\min_Q d(x,y)} \tag{8.3.5}$$

όπως στον ορισμό της μετρικής σύνθεσης, και d_Q η απόσταση στον Q. Προφανώς $k\gamma d_Q = k\ \max_{x\in Q}\mathrm{diam}(N_x)$, ενώ αν λάβουμε υπόψιν το γεγονός ότι $\mathrm{diam}(N_x) = \Delta_{r_x}$ παίρνουμε $k\gamma d_Q = k\ \max_{x\in Q}(\Delta_{r_x})$. Έτσι, για κάθε $x \in Q$,

$$\Delta_{r_x} \leq \max_{x\in Q}(\Delta_{r_x}) = \frac{1}{k}k\max_{x\in Q}(\Delta_{r_x}) = \frac{1}{k}\Delta_r. \tag{8.3.6}$$

Επομένως, το T είναι ένα $k-HST$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο X είναι ισομετρικός με το T, οπότε $X \in k-HST$. Έπεται ότι $\mathrm{comp}_k(EQ) \subseteq k-HST$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό ας θεωρήσουμε ένα χώρο $X \in k-HST$ όπως ορίζεται από ένα δέντρο T με ρίζα r και τιμές στις κορυφές Δ_i. Συνεχίζουμε με επαγωγή ως προς το βάθος του δέντρου. Αν το T έχει βάθος 0, τότε προφανώς ο X είναι ισομετρικός με έναν ισόπλευρο χώρο. Αλλιώς, έστω $r_1, r_2, \ldots, r_n$ είναι οι απόγονοι της ρίζας r του T και έστω $T_1, T_2, \ldots, T_n$ τα αντίστοιχα υποδέντρα που επάγονται με ρίζες τα r_i. Η επαγωγική υπόθεση δίνει ότι οι $k-HST$ χώροι N_i που ορίζουν τα υποδέντρα T_i, ανήκουν στην κλάση $\mathrm{comp}_k(EQ)$. Θεωρούμε τώρα έναν ισόπλευρο χώρο Q με απόσταση d και n σημεία. Αφού $\Delta_{r_i} \leq \frac{\Delta_r}{k}$, παίρνουμε $k\ \max_i(\Delta_{r_i}) \leq \Delta_r$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\epsilon \geq 1$ ώστε $\epsilon k\ \max_i(\Delta_{r_i}) = \Delta_r$. Θέτουμε $\beta = \epsilon k$ και ορίζουμε τη μετρική σύνθεση $Q_\beta[(N_i)]$. Ο χώρος αυτός ανήκει στην $\mathrm{comp}_k(EQ)$ και, επιπλέον, είναι ισομετρικός με τον X. Αφού ο X ήταν τυχών, καταλήγουμε στην $k-HST \subseteq \mathrm{comp}_k(EQ)$. □

Πρόταση 8.3.7. *Κάθε υπερμετρικός χώρος εμφυτεύεται ισομετρικά στον ℓ_2. Ειδικότερα,*

$$R_2(\alpha, n) \geq R_{UM}(\alpha, n). \tag{8.3.7}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν υπερμετρικό χώρο X που ορίζεται από ένα δέντρο T με ρίζα r και τιμές Δ_i στις κορυφές του. Με επαγωγή ως προς το βάθος του δέντρου, δείχνουμε ότι ο X απεικονίζεται ισομετρικά σε κάποιο Ευκλείδειο χώρο. Αν το T έχει βάθος 1, τότε απεικονίζουμε κάθε φύλλο σε ένα διάνυσμα $\frac{\Delta_r}{\sqrt{2}}e_i$, διαφορετικό κάθε φορά. Αλλιώς, έστω $v_1, v_2, \ldots, v_m$ οι απόγονοι της ρίζας r και έστω $\Delta_{v_1}, \Delta_{v_2}, \ldots, \Delta_{v_m}$ οι αντίστοιχες τιμές. Για κάθε υποδέντρο T_{v_i} με ρίζα v_i, έχουμε μια ισομετρική εμφύτευση στην Ευκλείδεια σφαίρα ακτίνας $\frac{\Delta_{v_i}}{\sqrt{2}}$. Όμως, για κάθε i έχουμε $\Delta_{v_i} \leq \Delta_r$, οπότε μπορούμε να βρούμε πάνω στη σφαίρα ακτίνας $\frac{\Delta_r}{\sqrt{2}}$ ένα ισομετρικό αντίγραφο του τελευταίου συνόλου. Αν απεικονίσουμε τώρα τις εικόνες των T_{v_i} επί της $\frac{\Delta_r}{\sqrt{2}}$-σφαίρας σε κάθετους υποχώρους, παίρνουμε το ζητούμενο.

Για την ανισότητα, λόγω των παραπάνω, παρατηρούμε ότι κάθε πεπερασμένος μετρικός χώρος με n σημεία έχει έναν υπόχωρο πληθαρίθμου $R_{UM}(\alpha, n)$ που εμφυτεύεται με παραμόρφωση α στον ℓ_2. Από τον ορισμό της συνάρτησης R παίρνουμε την (8.3.7). □

Λήμμα 8.3.8. *Για κάθε $k > 1$, κάθε υπερμετρικός χώρος είναι k-ισόμορφος με ένα ακριβές k-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένο δένδρο.*

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν υπερμετρικό χώρο X και ένα $k > 1$. Το Λήμμα 8.3.3 μας επιτρέπει να τον ταυτίσουμε με ένα $1 - HST$. Υποθέτουμε λοιπόν ότι χαρακτηρίζεται από ένα δέντρο T με ρίζα r και κατάλληλες τιμές στις κορυφές του. Θα ορίσουμε μια πεπερασμένη ακολουθία από $1 - HST$ που ορίζονται από τα δέντρα $T_1, T_2, \ldots, T_n$ ώστε το τελευταίο να είναι ένα ακριβές $1 - HST$, k-ισόμορφο με τον X. Έστω u μια ελάχιστη ως προς το βάθος του δέντρου κορυφή, η οποία έχει έναν απόγονο v για τον οποίο ισχύει $\Delta(u) \neq k\Delta(v)$. Βρίσκουμε έναν φυσικό i ώστε

$$k^i \leq \frac{\Delta(u)}{\Delta(v)} < k^{i+1} \tag{8.3.8}$$

Δίνουμε τώρα νέα τιμή στην κορυφή v ορίζοντας $\Delta'(v) = \frac{\Delta(u)}{k^i}$. Στη συνέχεια επισυνάπτουμε $i-1$ κορυφές $u_1, u_2, \ldots, u_{i-1}$ στην ακμή $[u, v]$ δίνοντάς τους τιμές $\Delta_1 = \frac{\Delta(u)}{k}, \Delta_2 = \frac{\Delta(u)}{k^2}, \ldots, \Delta_{i-1} = \frac{\Delta(u)}{k^{i-1}}$ αντίστοιχα. Παίρνουμε έτσι ένα δέντρο T_1, οπότε μπορούμε να επαναλάβουμε την προηγούμενη διαδικασία βρίσκοντας μια κορυφή του σε ελάχιστο βάθος ώστε $\Delta_{T_1}(u) \neq k\Delta_{T_1}(v)$. Συνεχίζουμε μ' αυτό τον τρόπο όσο είναι απαραίτητο, οπότε καταλήγουμε σ' ένα δέντρο T_n που ορίζει ένα $1 - HST$. Από την κατασκευή το T_n είναι ακριβές $1 - HST$ και έχει τα ίδια φύλλα με το T. Μένει να δειχθεί ότι το T_n είναι k-ισόμορφο με τον X.

Παρατηρούμε ότι, από την κατασκευή των T_j, η επισύναψη κορυφών στην ακμή $[u, v]$ δεν αλλάζει τον ελάχιστο κοινό πρόγονο δύο φύλλων x, y. Έτσι, για κάθε $x, y \in X$ παίρνουμε $\mathrm{lca}_T(x, y) = \mathrm{lca}_{T_n}(x, y)$. Από την άλλη πλευρά, για κάθε κορυφή $u \in \mathrm{T} \cap T_n$, η σχέση (8.3.8) μας δίνει

$$\Delta_T(u) \leq \Delta_{T_n}(u) < k\Delta_T(u). \tag{8.3.9}$$

Αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Λήμμα 8.3.9. *Κάθε μετρικός χώρος με n σημεία είναι n-ισόμορφος με έναν υπερμετρικό χώρο.*

Απόδειξη. Έστω M ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Με επαγωγή ως προς τον πληθάριθμο n του χώρου, θα δείξουμε ότι υπάρχει $1 - HST$ X με $\mathrm{diam}(M) = \mathrm{diam}(X)$ και n-ισομορφισμός $f : M \to X$.

Αν $n = 2$ το ζητούμενο είναι προφανές. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $n > 2$ και ορίζουμε ένα γράφημα με σύνολο κορυφών M όπου η $[u,v]$ είναι ακμή αν και μόνο αν $d_M(u,v) < \frac{\mathrm{diam}(M)}{n}$. Το γράφημα είναι μη συνεκτικό. Για να το δούμε, υποθέτουμε το αντίθετο, οπότε μπορούμε να βρούμε δύο σημεία u, v με $d_M(u,v) = \mathrm{diam}(M)$, και ένα μονοπάτι από την u στη v μήκους το πολύ n. Εφαρμόζοντας διαδοχικά την τριγωνική ανισότητα για όλα τα σημεία αυτού του μονοπατιού, καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned}\mathrm{diam}(M) &= d_M(u,v) \le d_M(u,v_1) + \cdots + d_M(v_k,v)\\ &< \frac{\mathrm{diam}(M)}{n} + \cdots + \frac{\mathrm{diam}(M)}{n}\\ &\le n\frac{\mathrm{diam}(M)}{n}\\ &= \mathrm{diam}(M)\end{aligned}$$

Έστω $A_1, A_2, \dots, A_m$ τα σύνολα κορυφών που ορίζουν οι συνεκτικές συνιστώσες του γραφήματος. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν $1 - HST$ $X_1, \dots, X_m$ με $\mathrm{diam}(X_i) = \mathrm{diam}(A_i, d_M) < \mathrm{diam}(M)$ και εμφυτεύσεις $f_i : A_i \to X_i$ όπου για κάθε u, v από το A_i ικανοποιείται η

$$d_M(u,v) \le d_{X_i}(f_i(u), f_i(v)) \le |A_i|\, d_M(u,v) < n\, d_M(u,v). \tag{8.3.10}$$

Έστω T_i το δέντρο που ορίζει τον X_i. Κατασκευάζουμε τώρα ένα δέντρο T με ρίζα r. Η r έχει m απογόνους, όπου ο i-στός απόγονος u_i είναι η ρίζα ενός υποδέντρου ισόμορφου με το T_i. Δίνουμε στην r την τιμή $\mathrm{diam}(M)$ και σε κάθε άλλη κορυφή την τιμή που προκύπτει από το T_i. Αφού $\Delta(u_i) = \mathrm{diam}(X_i) < \mathrm{diam}(M) = \Delta(r)$, το δέντρο T ορίζει έναν υπερμετρικό χώρο X όπου $\mathrm{diam}(M) = \mathrm{diam}(X)$. Θεωρούμε την απεικόνιση $f : M \to X$ με $f(u) = f_i(u)$ όταν $u \in A_i$. Θα δείξουμε ότι είναι n-ισομορφισμός. Λόγω της (8.3.10) αρκεί να δειχθεί για $u \in A_i, v \in A_j$. Έτσι, από τον ορισμό των A_k παίρνουμε

$$n\, d_M(u,v) \ge \mathrm{diam}(M) = d_X(f(u), f(v)). \tag{8.3.11}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$d_M(u,v) \le \mathrm{diam}(M) = d_X(f(u), f(v)). \tag{8.3.12}$$

Συνδυάζοντας τις τελευταίες δύο σχέσεις, βλέπουμε ότι η f είναι n-ισομορφισμός. $\square$

8.4 Φαινόμενα τύπου Ramsey

Το κεντρικό αποτέλεσμα αυτού του Κεφαλαίου είναι το εξής.

Θεώρημα 8.4.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $\alpha > 2$ να ισχύει η*

$$R_{UM}(\alpha, n) \ge n^{1 - C\frac{\log \alpha}{\alpha}}. \tag{8.4.1}$$

Ορισμός 8.4.2 (συναρτήσεις Ramsey). Έστω $\mathcal{M}, \mathcal{N}$ δύο κλάσεις μετρικών χώρων. Συμβολίζουμε με $\psi_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}, \alpha)$ τον μεγαλύτερο $\psi \in (0,1]$ που ικανοποιεί το εξής: για κάθε $X \in \mathcal{N}$ και για κάθε συνάρτηση βάρους $w : X \to \mathbb{R}^+$ υπάρχει υπόχωρος Y του X που είναι α-εμφυτεύσιμος στην $\mathcal{M}$ και ικανοποιεί την

$$\sum_{x \in Y} [w(x)]^{\psi} \geq \left(\sum_{x \in X} w(x) \right)^{\psi}. \tag{8.4.2}$$

Αν $\mathcal{N}$ είναι η κλάση όλων των μετρικών χώρων τότε γράφουμε $\psi_{\mathcal{M}}(\alpha)$ αντί για $\psi_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}, \alpha)$.

Συμφωνούμε επίσης να γράφουμε:

(i) $\psi_k(\mathcal{N}, \alpha) = \psi_{k-HST}(\mathcal{N}, \alpha)$ και, ειδικότερα, $\psi_k(\alpha) = \psi_{k-HST}(\alpha)$.

(ii) $\psi(\mathcal{N}, \alpha) = \psi_1(\mathcal{N}, \alpha) = \psi_{UM}(\mathcal{N}, \alpha)$ και, ειδικότερα, $\psi(\alpha) = \psi_{UM}(\alpha)$.

Θεωρώντας τη σταθερή συνάρτηση βάρους $w(x) = 1$, από τον ορισμό 8.4.2 παίρνουμε άμεσα το εξής.

Πρόταση 8.4.3.

$$R_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}; \alpha, n) \geq n^{\psi_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}, \alpha)}. \tag{8.4.3}$$

Ειδικότερα,

$$R_{\mathcal{M}}(\alpha, n) \geq n^{\psi_{\mathcal{M}}(\alpha)}. \tag{8.4.4}$$

Για την απόδειξη λοιπόν του Θεωρήματος 8.4.1 αρκεί να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα 8.4.4. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C > 0$ ώστε για κάθε $\alpha > 2$ να ισχύει η*

$$\psi(\alpha) \geq 1 - C \frac{\log \alpha}{\alpha}. \tag{8.4.5}$$

8.4α΄ Συναρτήσεις Ramsey και μετρική σύνθεση

Λήμμα 8.4.5. *Έστω $\mathcal{M}$, $\mathcal{N}$ και $\mathcal{P}$ κλάσεις μετρικών χώρων. Για κάθε $\alpha_1, \alpha_2 \geq 1$ ισχύει η ανισότητα*

$$\psi_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, \alpha_1 \alpha_2) \geq \psi_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}, \alpha_1) \cdot \psi_{\mathcal{N}}(\mathcal{P}, \alpha_2). \tag{8.4.6}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\psi_1 = \psi_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}, \alpha_1)$ και $\psi_2 = \psi_{\mathcal{N}}(\mathcal{P}, \alpha_2)$. Θεωρούμε $P \in \mathcal{P}$ και μια συνάρτηση βάρους $w : P \to \mathbb{R}^+$. Τότε υπάρχουν υπόχωρος P' του P και α_2-εμφύτευση $f : P' \to N$, όπου $N \in \mathcal{N}$, που ικανοποιεί την

$$\sum_{x \in P'} w(x)^{\psi_2} \geq \left(\sum_{x \in P} w(x) \right)^{\psi_2}. \tag{8.4.7}$$

Όμοια, για κάθε συνάρτηση $w' : N \to \mathbb{R}^+$ υπάρχουν υπόχωρος N' του N και α_1-εμφύτευση $g : N' \to M$, όπου $M \in \mathcal{M}$, που ικανοποιεί την

$$\sum_{x \in N'} w'(x)^{\psi_1} \geq \left(\sum_{x \in N} w'(x) \right)^{\psi_1}. \tag{8.4.8}$$

Θέτουμε $P'' = f^{-1}(N')$ και $w' = \big(w \circ f^{-1}\big)^{\psi_2}$. Τότε,

$$\begin{aligned}
\sum_{x\in P''} w(x)^{\psi_1\psi_2} &= \sum_{y\in N'} \Big(w\big(f^{-1}(y)\big)^{\psi_2}\Big)^{\psi_1} = \sum_{y\in N'} w'(y)^{\psi_1} \\
&\geq \left(\sum_{y\in N} w'(y)\right)^{\psi_1} = \left(\sum_{x\in P'} w(x)^{\psi_2}\right)^{\psi_1} \\
&\geq \left(\sum_{x\in P} w(x)\right)^{\psi_2\psi_1}
\end{aligned}$$

Ορίζοντας $h : P'' \to M$ με $h(x) = g(f(x))$ για κάθε $x \in P''$, παίρνουμε μια $\alpha_1\alpha_2$-εμφύτευση του P'' στον M.

Έχουμε δείξει λοιπόν ότι για κάθε $P \in \mathcal{P}$ και για κάθε συνάρτηση βάρους $w : P \to \mathbb{R}^+$, υπάρχει υποσύνολο P'' του P το οποίο είναι $\alpha_1\alpha_2$-εμφυτεύσιμο σε κάποιον $M \in \mathcal{M}$, και επιπλέον ικανοποιείται η

$$\sum_{x\in P''} w(x)^{\psi_1\psi_2} \geq \left(\sum_{x\in P} w(x)\right)^{\psi_2\psi_1}. \tag{8.4.9}$$

Αφού $\psi_{\mathcal{M}}(\mathcal{P}, \alpha_1\alpha_2)$ είναι η μεγαλύτερη σταθερά για την οποία ικανοποιείται η (8.4.9), καταλήγουμε στην (8.4.6). □

Ορισμός 8.4.6. Έστω T ένα δέντρο με ρίζα r. Μια κορυφή v του T θα λέγεται *εκφυλισμένη* αν έχει βαθμό 2 και δεν είναι η r.

Από τον παραπάνω ορισμό έπεται ότι αν T είναι ένα δέντρο πάνω στο οποίο ορίζεται ένα $k - HST$ και αν v είναι μια μη-εκφυλισμένη κορυφή, τότε $\Delta(v)$ είναι η διάμετρος του υποχώρου που επάγεται από το υποδέντρο με ρίζα v. Επίσης, εκφυλισμένες κορυφές δεν επηρεάζουν τη μετρική του $k - HST$, εκτός αν ο χώρος είναι ένα ακριβές $k - HST$.

Λήμμα 8.4.7. *Έστω $\mathcal{M}$ μια κλάση μετρικών χώρων. Έστω $k \geq 1$ και $\alpha \geq 1$. Για κάθε $\beta \geq \alpha k$,*

$$\psi_k(\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M}), \alpha) = \psi_k(\mathcal{M}, \alpha). \tag{8.4.10}$$

Απόδειξη. Από την $\mathcal{M} \subseteq \mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M})$ συμπεραίνουμε ότι $\psi_k(\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M}), \alpha) \leq \psi_k(\mathcal{M}, \alpha)$.

Για τον αντίστροφο εγκλεισμό, θέτουμε $\psi = \psi_k(\mathcal{M}, \alpha)$. Αν $X \in \mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M})$, θα δείξουμε ότι για κάθε συνάρτηση βάρους $w : X \to \mathbb{R}^+$, υπάρχει υπόχωρος Y του X, α-ισόμορφος με κάποιο $k - HST$ H μέσω μιας διαστολής f - δηλαδή $d_X(u,v) \leq d_H(f(u), f(v)) \leq \alpha d_X(u,v)$ - που επιπλέον ικανοποιεί την

$$\sum_{x\in Y} w(x)^{\psi} \geq \left(\sum_{x\in X} w(x)\right)^{\psi}. \tag{8.4.11}$$

Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή πάνω στη δομή του χώρου $\mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M})$. Παρατηρήστε ότι, αν $X \in \mathcal{M}$, τότε η ζητούμενη ανισότητα ικανοποιείται από τον ορισμό της ψ. Διαφορετικά, ο X είναι της μορφής $M_\beta[\{N_x\}_{x\in M}]$, όπου $M \in \mathcal{M}$ και $N_x \in \mathrm{comp}_\beta(\mathcal{M})$ για κάθε $x \in M$.

Από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε $x \in M$ υπάρχει υπόχωρος Y_x του N_x, α-ισόμορφος με ένα $k-HST$ H_x, που ορίζεται πάνω στο δέντρο T_x, μέσω μιας διαστολής. Επίσης,

$$\sum_{z\in Y_x} w(z)^\psi \geq \Big(\sum_{z\in N_x} w(z)\Big)^\psi. \tag{8.4.12}$$

Ορίζουμε συνάρτηση βάρους w' στον M θέτοντας $w'(x) = \sum_{z\in N_x} w(z)$. Τότε, υπάρχει υπόχωρος Y_M του M και ένα $k-HST$ H_M, πάνω στο δέντρο T_M, α-ισομορφικός με τον Y_M μέσω διαστολής, και

$$\sum_{x\in Y_M} w'(x)^\psi \geq \Big(\sum_{x\in M} w'(x)\Big)^\psi. \tag{8.4.13}$$

Θέτουμε $Y = \cup_{x\in Y_M} Y_x$. Τότε, $Y \subseteq X$ και

$$\begin{aligned}
\sum_{z\in Y} w(z)^\psi &= \sum_{x\in Y_M}\sum_{z\in Y_x} w(z)^\psi \geq \sum_{x\in Y_M}\Big(\sum_{z\in N_x} w(z)\Big)^\psi \\
&= \sum_{x\in Y_M} w'(x)^\psi \geq \Big(\sum_{x\in M} w'(x)\Big)^\psi \\
&= \Big(\sum_{x\in M}\Big(\sum_{z\in N_x} w(z)\Big)\Big)^\psi = \Big(\sum_{z\in X} w(z)\Big)^\psi.
\end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sum_{z\in Y} w(z)^\psi \geq \Big(\sum_{z\in X} w(z)\Big)^\psi. \tag{8.4.14}$$

Αν λοιπόν δείξουμε ότι ο Y είναι α-ισόμορφος με ένα $k-HST$ H, έχουμε τελειώσει.

Κατασκευάζουμε ένα $k-HST$ H πάνω σε κάποιο δέντρο T ως εξής: Έστω T' ένα δέντρο ισόμορφο με το T_M και με τιμές στις κορυφές του $\Delta_{T'}(u) = \beta\gamma\cdot\Delta_{T_M}(u)$, όπου $\gamma = \frac{\max_{x\in M}\mathrm{diam}(N_x)}{\min_M d_M(x,y)}$ όπως στη μετρική σύνθεση. Σε κάθε φύλλο του T' που αντιστοιχεί σε ένα σημείο x του Y_M, δημιουργούμε ένα υποδέντρο ισόμορφο με το T_x, με ρίζα το x και τιμές στις κορυφές του όπως στο T_x. Ονομάζουμε T το δέντρο που προέκυψε. Αφού οι χώροι Y_x, H_x είναι α–ισόμορφοι μέσω διαστολής, έπεται ότι

$$\Delta_T(x) = \mathrm{diam}(H_x) \leq \alpha\,\mathrm{diam}(Y_x) \leq \alpha\,\mathrm{diam}(N_x). \tag{8.4.15}$$

Έστω p ο γονέας του x στο T_M. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η p δεν είναι εκφυλισμένη κορυφή του T_M. Τότε, η διαστολή μεταξύ των T_M και H_M, θα δώσει $\Delta_{T_M}(p) \geq d_M(x,y)$, για κάποιο $y \in M$. Επομένως, καταλήγουμε στην

$$\Delta_T(p) \geq \beta\gamma\cdot\min\{d_M(u,v) : u \neq v \in M\}. \tag{8.4.16}$$

Οι σχέσεις (8.4.15),(8.4.16) καθώς και η υπόθεση $\beta \geq \alpha k$, δίνουν τελικά

$$\frac{\Delta_T(p)}{\Delta_T(x)} \geq \frac{\beta}{\alpha} \geq k. \tag{8.4.17}$$

Αφού τα δέντρα T', T_x ορίζουν $k-HST$, από την τελευταία ανισότητα έπεται ότι και το T ορίζει ένα $k-HST$ H.

Μένει να δείξουμε ότι ο Y είναι α–ισόμορφος με τον H. Για κάθε $x \in M$ έχουμε έναν α-ισομορφισμό $f_x : Y_x \to H_x$ που για όλα τα $u, v \in Y_x$ ικανοποιεί την

$$d_{Y_x}(u,v) \leq d_{H_x}(f_x(u), f_x(v)) \leq \alpha d_{Y_x}(u,v). \tag{8.4.18}$$

Επίσης, υπάρχει α-ισομορφισμός $f_M : Y_M \to H_M$ ώστε για κάθε $x, y \in M$

$$d_{Y_M}(x,y) \leq d_{H_M}(f_M(x), f_M(y)) \leq \alpha d_{Y_M}(x,y). \tag{8.4.19}$$

Ορίζουμε $f : Y \to H$ ως εξής: αν $x \in M$ και $v \in Y_x$ θέτουμε $f(v) = f_x(v)$. Τότε, αν λάβουμε υπόψιν τον ορισμό της μετρικής στη μετρική σύνθεση και τον τρόπο ορισμού του $k-HST$ H, για κάθε $u, v \in Y_x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} d_Y(u,v) = d_{Y_x}(u,v) &\leq d_{H_x}(f_x(u), f_x(v)) = d_H(f(u), f(v)) \\ &\leq \alpha d_{Y_x}(u,v) = \alpha d_Y(u,v). \end{aligned}$$

Αν $u \in Y_x$, $v \in Y_y$ και $x \neq y$ στοιχεία του U_M, τότε

$$\begin{aligned} d_Y(u,v) = \beta\gamma d_{Y_M}(u,v) &\leq \beta\gamma d_{H_M}(f_M(x), f_M(y)) = d_H(f(u), f(v)) \\ &\leq \alpha\beta\gamma d_{Y_M}(u,v) = \alpha d_Y(u,v). \end{aligned}$$

Δηλαδή, $d_Y(u,v) \leq d_H(f(u), f(v)) \leq \alpha d_Y(u,v)$ για κάθε $u, v \in Y$. □

8.4β′ Λόγος όψεων

Ορισμός 8.4.8. Ο *λόγος όψεων* ενός πεπερασμένου μετρικού χώρου M είναι η ποσότητα

$$\Phi(M) = \frac{\mathrm{diam}(M)}{\min\{d_M(x,y) : x \neq y \in M\}}. \tag{8.4.20}$$

Μπορεί κανείς να βλέπει τον $\Phi(M)$ σαν την κανονικοποιημένη διάμετρο του M ή σαν την απόσταση Lipschitz του M από την κλάση των ισόπλευρων χώρων.

Ορισμός 8.4.9. Έστω $\Phi \geq 1$. Η κλάση όλων των μετρικών χώρων M με λόγο όψεων $\Phi(M) \leq \Phi$ συμβολίζεται με $\mathcal{N}(\Phi)$. Συμφωνούμε επίσης να γράφουμε:

(i) $\psi(\Phi, \alpha) = \psi(\mathcal{N}(\Phi), \alpha)$. Όμοια, $\psi_k(\Phi, \alpha) = \psi_k(\mathcal{N}(\Phi), \alpha)$, και γενικότερα, αν $\mathcal{M}$ είναι μια κλάση μετρικών χώρων, $\psi_{\mathcal{M}}(\Phi, \alpha) = \psi_{\mathcal{M}}(\mathcal{N}(\Phi), \alpha)$.

(ii) $\mathrm{comp}_\beta(\Phi) = \mathrm{comp}_\beta(\mathcal{N}(\Phi))$.

Σκοπός μας είναι να δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 8.4.10. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C' > 0$ ώστε για κάθε $\alpha > 2$ και για κάθε $\Phi \geq 1$ να ισχύει η ανισότητα*

$$\psi(\Phi, \alpha) \geq 1 - C' \frac{\log \alpha + \log \log(4\Phi)}{\alpha}. \tag{8.4.21}$$

Ορισμός 8.4.11. Σταθεροποιούμε ένα $q \geq 1$. Μια ακολουθία $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών λέγεται *q-διασπάσιμη* αν υπάρχει $\omega > 0$ ώστε

$$\{i \in \mathbb{N} : x_i > 0\} = \left\{ i \in \mathbb{N} : x_i \geq \frac{1}{q} \sum_{j=1}^{\infty} x_j \right\} \bigcup \{i \in \mathbb{N} : x_i = \omega\}. \tag{8.4.22}$$

Θα αποδείξουμε το εξής.

Πρόταση 8.4.12. *Έστω $q \geq 2$ και έστω $t \geq 8$ ακέραιος. Έστω (X, d) ένας μετρικός χώρος με n σημεία και έστω $w : X \to \mathbb{R}^+$ μια συνάρτηση βάρους. Υποθέτουμε ότι η $\{w(x)\}_{x \in X}$ είναι q-διασπάσιμη. Τότε, υπάρχει υπόχωρος $Y \subseteq X$ ο οποίος είναι $4t$-ισόμορφος με υπερμετρικό χώρο και ικανοποιεί την*

$$\sum_{x \in Y} [w(x)]^{\psi} \geq \left(\sum_{x \in X} w(x) \right)^{\psi}, \tag{8.4.23}$$

όπου

$$\psi = \Big(t \log(4q\Phi(X)) \Big)^{-2/t}. \tag{8.4.24}$$

Απόδειξη. Θέτουμε $\beta(\Phi) = [t \log_2(4q\Phi)]^{-2/t}$. Με επαγωγή ως προς n θα δείξουμε ότι κάθε μετρικός χώρος (M, d, w) με βάρος, ο οποίος έχει n σημεία, περιέχει υπόχωρο $N \subset M$ που ικανοποιεί την

$$\sum_{x \in N} [w(x)]^{\beta(\Phi(M))} \geq \left(\sum_{x \in M} w(x) \right)^{\beta(\Phi(M))} \tag{8.4.25}$$

και εμφυτεύεται με παραμόρφωση $4t$ μέσω μιας διαστολής f, σε έναν υπερμετρικό χώρο H με $\mathrm{diam}(H) = \mathrm{diam}(M)$.

Για ευκολία στο συμβολισμό, αν $S \subset M$ γράφουμε $w(S) = \sum_{x \in S} w(x)$.

Έστω (M, d, w) ένας μετρικός χώρος με βάρος, ο οποίος έχει n σημεία. Υποθέτουμε ότι η w είναι q-διασπάσιμη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $w(M) = 1$ και ότι $\min\{d(x, y) : x \neq y \in M\} = 1$. Θέτουμε $\Phi = \Phi(M)$. Από την προηγούμενη υπόθεση έχουμε $\Phi = \mathrm{diam}(M)$. Τέλος, για κάθε $x \in M$ και $r > 0$ θέτουμε $B(x, r) = \{y \in M : d(y, x) < r\}$.

Λήμμα 8.4.13. *Υπάρχουν $i \in \{1, \ldots, t\}$ και $x_0 \in M$ ώστε αν θέσουμε*

$$A = \{x_0\} \cup B\left(x_0, \frac{(i-1)\Phi}{4t}\right) \qquad \text{και} \qquad B = M \setminus B\left(x_0, \frac{i\Phi}{4t}\right), \tag{8.4.26}$$

τότε

$$\max\left\{ \frac{w(A)^{\beta(\Phi/2)}}{[\max_{y \in A} w(y)]^{\beta(\Phi/2) - \beta(\Phi)}}, w(A)^{(\log_2 q)^{-1/(t-1)}} \right\} + w(B) \geq 1. \tag{8.4.27}$$

Απόδειξη. Το γεγονός ότι η w είναι q-διασπάσιμη εξασφαλίζει ότι μπορούμε να γράψουμε $M = N_1 \cup N_2$, όπου τα N_1 και N_2 είναι ξένα, έτσι ώστε να έχουμε $w(x) \geq \frac{1}{q}$ για κάθε $x \in N_1$ και $w(x) = \omega$ για κάθε $x \in N_2$, για κάποιον $\omega > 0$. Διακρίνουμε δύο περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωση: $\mathrm{diam}_M(N_1) > \frac{\Phi}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση υπάρχουν $x_0, x_0' \in N_1$ ώστε $d(x_0, x_0') > \frac{\Phi}{2}$. Ειδικότερα, $B(x_0, \Phi/4) \cap B(x_0', \Phi/4) = \emptyset$, οπότε, εναλάσσοντας τα x_0 και x_0' αν χρειαστεί, μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$w(B(x_0, \Phi/4)) \leq \frac{w(M)}{2} = \frac{1}{2}. \tag{8.4.28}$$

Αφού $x_0 \in N_1$, έχουμε $w(x_0) \geq \frac{1}{q}$. Επομένως, υπάρχει $i \in \{1, \ldots, t\}$ ώστε

$$w\left(\{x_0\} \cup B\left(x_0, \frac{(i-1)\Phi}{4t}\right)\right)^{(\log_2 q)^{-1/(t-1)}} \geq w\left(B\left(x_0, \frac{i\Phi}{4t}\right)\right), \tag{8.4.29}$$

γιατί αλλιώς θα είχαμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} &\geq w\left(B\left(x_0, \frac{\Phi}{4}\right)\right) \\
&> w\left(\{x_0\} \cup B\left(x_0, \frac{(t-1)\Phi}{4t}\right)\right)^{(\log_2 q)^{-1/(t-1)}} \\
&> \cdots \\
&> w\left(B\left(x_0, \frac{\Phi}{4t}\right)\right)^{(\log_2 q)^{-1}} \\
&\geq [w(x_0)]^{(\log_2 q)^{-1}} \\
&\geq \frac{1}{q^{(\log_2 q)^{-1}}} = \frac{1}{2},
\end{aligned}$$

το οποίο είναι άτοπο. Σταθεροποιούμε έναν τέτοιο δείκτη i και ορίζουμε τα A και B όπως στο Λήμμα 8.4.13. Τότε,

$$\begin{aligned}
w(A)^{(\log_2 q)^{-1/(t-1)}} + w(B) &= w\left(\{x_0\} \cup B\left(x_0, \frac{(i-1)\Phi}{4t}\right)\right)^{(\log_2 q)^{-1/(t-1)}} \\
&\quad + \left[1 - w\left(B\left(x_0, \frac{i\Phi}{4t}\right)\right)\right] \geq 1.
\end{aligned}$$

Δεύτερη περίπτωση: $\mathrm{diam}_M(N_1) \leq \frac{\Phi}{2}$. Σε αυτή την περίπτωση επιλέγουμε $x_0 \in M$ με την ιδιότητα $d(x_0, N_1) = \max_{x \in M} d(x, N_1)$. Θα δείξουμε πρώτα ότι $N_1 \cap B(x_0, \Phi/4) = \emptyset$. Πράγματι, αν αυτό δεν ήταν σωστό, θα είχαμε $d(x_0, N_1) < \Phi/4$ οπότε, από την επιλογή του x_0, για κάθε $x, y \in M$ θα είχαμε

$$d(x,y) \leq d(x, N_1) + d(y, N_1) + \mathrm{diam}(N_1) < 2d(x_0, N_1) + \frac{\Phi}{2} < \Phi, \tag{8.4.30}$$

το οποίο είναι άτοπο.

Θέτουμε $m = |N_2|$ και για κάθε $i \in \{0, \ldots, t\}$ ορίζουμε

$$\epsilon_i = \frac{|(\{x_0\} \cup B(x_0, \frac{i\Phi}{4t})) \cap N_2|}{m}. \tag{8.4.31}$$

Παρατηρήστε ότι, αφού $x_0 \in N_2$,

$$\frac{1}{m} = \epsilon_0 \leq \epsilon_t \leq 1. \tag{8.4.32}$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει $i \in \{1, \ldots, t\}$ ώστε

$$\epsilon_{i-1}^{\beta(\Phi/2)} m^{\beta(\Phi/2)-\beta(\Phi)} \geq \epsilon_i. \tag{8.4.33}$$

Πράγματι, αν θέσουμε $a = \log_2(2q\Phi) \geq 1$, και αν δεν υπάρχει τέτοιο i, τότε για κάθε $i \in \{1, \ldots, t\}$ έχουμε

$$\epsilon_{i-1} < \left(\frac{\epsilon_i}{m^{\frac{1}{(ta)^{2/t}} - \frac{1}{[t(a+1)]^{2/t}}}} \right)^{(ta)^{2/t}}. \tag{8.4.34}$$

Ορίζουμε $b = m^{\frac{1}{(ta)^{2/t}} - \frac{1}{[t(a+1)]^{2/t}}}$ και $c = (ta)^{2/t}$. Η ανισότητα παίρνει τότε τη μορφή $\epsilon_{i-1} < (\epsilon_i/b)^c$. Επαναλαμβάνοντας τον ίδιο συλλογισμό t φορές, παίρνουμε:

$$\frac{1}{m} = \epsilon_0 < \frac{\epsilon_t^{c^t}}{b^{c+c^2+\cdots+c^t}} = \frac{\epsilon_t^{c^t}}{b^{\frac{c}{c-1}(c^t-1)}} \leq \frac{1}{b^{c^t-1}}. \tag{8.4.35}$$

Άρα,

$$m^{(t^2a^2-1)\left[\frac{1}{(ta)^{2/t}} - \frac{1}{[t(a+1)]^{2/t}}\right]} < m. \tag{8.4.36}$$

Εφαρμόζοντας όμως το θεώρημα μέσης τιμής για τη συνάρτηση $\frac{1}{x^{2/t}}$ στο διάστημα $[\alpha, \alpha+1]$, βλέπουμε ότι $\frac{1}{\alpha^{2/t}} - \frac{1}{(\alpha+1)^{2/t}} \geq \frac{2}{t(\alpha+1)^{1+2/t}}$, ενώ προφανώς $t^2a^2 - 1 \geq \frac{t^2a^2}{2}$. Οπότε

$$\begin{aligned}
(t^2a^2-1)\left[\frac{1}{(ta)^{2/t}} - \frac{1}{[t(a+1)]^{2/t}}\right] &\geq \frac{t^2a^2}{2}\frac{2}{t^{1+2/t}(a+1)^{1+2/t}} \\
&\geq t^{1-2/t}\left(\frac{a}{a+1}\right)^2 \\
&\geq 8^{3/4} \cdot \frac{1}{4} \geq 1,
\end{aligned}$$

και έτσι καταλήγουμε σε άτοπο.

Επιλέγουμε ένα δείκτη $i \in \{1, \ldots, t\}$ που ικανοποιεί την (8.4.33) και θεωρούμε A και B όπως στο Λήμμα 8.4.13, γι' αυτό το συγκεκριμένο i. Παρατηρούμε ότι

$$B = M \setminus B\left(x_0, \frac{i\Phi}{4t}\right) \supset M \setminus B\left(x_0, \frac{\Phi}{4}\right) \supset N_1, \tag{8.4.37}$$

οπότε

$$\begin{aligned}
\frac{w(A)^{\beta(\Phi/2)}}{[\max_{y\in A} w(y)]^{\beta(\Phi/2)-\beta(\Phi)}} + w(B) &= \frac{(\omega\epsilon_{i-1}m)^{\beta(\Phi/2)}}{\omega^{\beta(\Phi/2)-\beta(\Phi)}} + w(N_1) + (1-\epsilon_i)m\omega \\
&= \omega^{\beta(\Phi)}(\epsilon_{i-1}m)^{\beta(\Phi/2)} + w(N_1) + (1-\epsilon_i)m\omega \\
&\geq (m\omega)^{\beta(\Phi)}\epsilon_i + w(N_1) + (1-\epsilon_i)m\omega \\
&\geq m\omega\epsilon_i + w(N_1) + (1-\epsilon_i)m\omega \\
&= w(M) = 1.
\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Συνέχεια της απόδειξης της Πρότασης 8.4.12: Έστω i, A και B όπως στο Λήμμα 8.4.13. Παρατηρήστε ότι $A \neq \emptyset$ και $\mathrm{diam}(A) < \frac{\Phi}{2} < \mathrm{diam}(M)$. Ειδικότερα έχουμε $|A| < n$ και $|B| < n$. Από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν υπόχωροι $A' \subset A$ και $B' \subset B$ για τους οποίους

$$\begin{aligned} \sum_{x\in A'} [w(x)]^{\beta(\Phi(A))} &\geq w(A)^{\beta(\Phi(A))}, \\ \sum_{x\in B'} [w(x)]^{\beta(\Phi(B))} &\geq w(B)^{\beta(\Phi(B))} \geq w(B), \end{aligned}$$

ιεραρχικά καλά διαχωρισμένα δένδρα X και Y με $\mathrm{diam}(X) = \mathrm{diam}(A)$, $\mathrm{diam}(Y) = \mathrm{diam}(B)$, και $4t$-Lipschitz διαστολές $f : A' \to X$, $g : B' \to Y$. Έστω T_X το δένδρο που ορίζει τον X και έστω r_X η ρίζα του. Έστω T_Y το δένδρο που ορίζει τον Y και έστω r_Y η ρίζα του. Ορίζουμε ένα δένδρο T ως εξής: ρίζα του είναι το r και από αυτήν ξεκινούν δύο μόνο υποδένδρα τα οποία είναι ισομορφικά με τα T_X και T_Y. Στη ρίζα του T δίνουμε την τιμή $\Delta(r) = \mathrm{diam}(M)$, και αφήνουμε τις τιμές των T_X και T_Y αμετάβλητες. Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} \Delta(r) &= \mathrm{diam}(M) \geq \max\{\mathrm{diam}(A), \mathrm{diam}(B)\} \\ &= \max\{\mathrm{diam}(X), \mathrm{diam}(Y)\} = \max\{\Delta(r_X), \Delta(r_Y)\}. \end{aligned}$$

Με αυτό τον τρόπο, τα φύλλα του T, $X \cup Y$, σχηματίζουν ένα ιεραρχικά καλά διαχωρισμένο δένδρο με $\mathrm{diam}(X \cup Y) = \Phi = \mathrm{diam}(M)$. Ορίζουμε $h : A' \cup B' \to X \cup Y$ θέτοντας $h|_{A'} = f$ και $h|_{B'} = g$. Αν $a \in A'$ και $b \in B'$ τότε

$$d_T(h(a), h(b)) = \Phi \geq d(a, b). \tag{8.4.38}$$

Επιπλέον,

$$d(a, b) \geq d(a, x_0) - d(b, x_0) \geq \frac{\Phi i}{4t} - \frac{\Phi(i-1)}{4t} = \frac{\Phi}{4t} = \frac{d_T(h(a), h(b))}{4t}, \tag{8.4.39}$$

άρα η h είναι $4t$-Lipschitz.

Παρατηρούμε ότι, αφού $\beta(\Phi) \leq \beta(\Phi(A)) \leq (\log_2 q)^{-1/(t-1)}$ και $w(x) \leq 1$ κατά σημείο,

$$\sum_{x\in A'} [w(x)]^{\beta(\Phi)} \geq \sum_{x\in A'} [w(x)]^{\beta(\Phi(A))} \geq w(A)^{\beta(\Phi(A))} \geq w(A)^{(\log_2 q)^{-1/(t-1)}}. \tag{8.4.40}$$

Επιπλέον, αφού $\Phi(A) \leq \Phi/2$,

$$\begin{aligned} \sum_{x\in A'} [w(x)]^{\beta(\Phi)} &\geq \frac{1}{[\max_{y\in A} w(y)]^{\beta(\Phi(A))-\beta(\Phi)}} \sum_{x\in A'} [w(x)]^{\beta(\Phi(A))} \\ &\geq [\max_{y\in A} w(y)]^{\beta(\Phi)} \left[\frac{w(A)}{\max_{y\in A} w(y)}\right]^{\beta(\Phi(A))} \\ &\geq [\max_{y\in A} w(y)]^{\beta(\Phi)} \left[\frac{w(A)}{\max_{y\in A} w(y)}\right]^{\beta(\Phi/2)}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

(8.4.41)
$$\sum_{x\in A'}[w(x)]^{\beta(\Phi)} \geq \max\left\{\frac{w(A)^{\beta(\Phi/2)}}{[\max_{y\in A} w(y)]^{\beta(\Phi/2)-\beta(\Phi)}}, w(A)^{(\log_2 q)^{-1/(t-1)}}\right\},$$

και με βάση το Λήμμα 8.4.13,

$$\sum_{x\in A'\cup B'}[w(x)]^{\beta(\Phi)} \geq \sum_{x\in A'}[w(x)]^{\beta(\Phi)} + w(B) \geq 1. \tag{8.4.42}$$

Έτσι ολοκληρώνεται το επαγωγικό βήμα. □

Πρόταση 8.4.14. *Σταθεροποιούμε $q \geq 16$ και θεωρούμε μια ακολουθία $x = (x_i)_{i=1}^{\infty}$ μη αρνητικών πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $p = 1 - \frac{\log_2\log_2 q}{\log_2 q}$. Υπάρχει ακολουθία $y = (y_i)_{i=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $y_i \leq x_i$ για κάθε i,*

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i^p \geq \left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right)^p, \tag{8.4.43}$$

και η ακολουθία $\{y_i^p\}_{i=1}^{\infty}$ είναι q-διασπάσιμη.

Απόδειξη. Έστω $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών που δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Για κάθε $p \geq 0$, η (p,∞) νόρμα της x ορίζεται από την

$$\|x\|_{p,\infty} = \sup\{i^{1/p}x_i^* : i \geq 1\} \tag{8.4.44}$$

όπου $\{x_i^*\}_{i=1}^{\infty}$ είναι η μη–αύξουσα αναδιάταξη της ακολουθίας $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$.

Λήμμα 8.4.15. *Για κάθε $x \in \ell_1$ και για κάθε $0 < p < 1$,*

$$\|x\|_{p,\infty} \geq \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{1/p}\frac{\|x\|_1^{1/p}}{\|x\|_\infty^{(1-p)/p}}. \tag{8.4.45}$$

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x\|_1 = 1$ και $\|x\|_\infty = x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$. Αφού $\|x\|_{p,\infty} \geq x_1$, αν

$$x_1 \geq \left(\frac{1-p}{2-p}\right)^{1/p}\frac{1}{x_1^{(1-p)/p}} \tag{8.4.46}$$

ισχύει το ζητούμενο. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x_1 < \frac{1-p}{2-p}$.

Θέτουμε $\alpha = \|x\|_{p,\infty}^p$ και $j = \lceil \alpha/x_1^p\rceil + 1$. Παρατηρήστε ότι $x_i \leq (\alpha/i)^{1/p}$ για κάθε $i \geq 1$. Άρα,

$$\sum_{i=1}^{j-1} x_i \leq (j-1)x_1 \leq \lceil\frac{\alpha}{x_1^p}\rceil x_1 \leq x_1\left(\frac{\alpha}{x_1^p}+1\right) = \alpha x_1^{1-p} + x_1, \tag{8.4.47}$$

και

$$\begin{aligned}
\sum_{i=j}^{\infty} x_i &\leq \sum_{i=j}^{\infty}\frac{\alpha^{1/p}}{i^{1/p}} \leq \alpha^{1/p}\int_{j-1}^{\infty} z^{-1/p}dz \\
&\leq \alpha^{1/p}\frac{p}{1-p}\cdot\left\lceil\frac{\alpha}{x_1^p}\right\rceil^{-\frac{1-p}{p}} \leq \alpha^{1/p}\frac{p}{1-p}\left(\frac{x_1^p}{\alpha}\right)^{\frac{1-p}{p}} \\
&= \frac{p}{1-p}\alpha x_1^{1-p}.
\end{aligned}$$

Προσθέτοντας τις δύο ανισότητες και χρησιμοποιώντας το φράγμα που έχουμε υποθέσει για τον x_1, παίρνουμε

$$\frac{1}{1-p}\alpha x_1^{1-p}+\frac{1-p}{2-p}\geq 1, \tag{8.4.48}$$

απ΄ όπου απλοποιώντας έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Συνέχεια της απόδειξης της Πρότασης 8.4.14: Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η x είναι φθίνουσα ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών και ότι $\|x\|_1=1$.

Θα δείξουμε πρώτα ότι υπάρχουν δείκτες $0\leq l\leq b$ ώστε $x_l^p\geq \frac{2}{q}$ και

$$S=\sum_{i=1}^{l}x_i^p+(b-l)x_b^p\geq 1. \tag{8.4.49}$$

Έστω $l\geq 0$ ο μεγαλύτερος ακέραιος για τον οποίο $x_l^p\geq\frac{2}{q}$. Αν $\sum_{i=1}^{l}x_i^p\geq 1$ τότε έχουμε τελειώσει. Αλλιώς, θεωρούμε την ακολουθία $z=(x_{l+1},x_{l+2},\ldots)$. Από την επιλογή του l, για κάθε $i>l$ έχουμε $x_i<(2/q)^{1/p}$, άρα $\|z\|_\infty\leq(2/q)^{1/p}$. Επιπλέον,

$$\frac{1-p}{(2-p)\|z\|_\infty^{1-p}}\geq\frac{\log_2\log_2 q}{2}\left(\frac{\log_2 q}{2}\right)^{(1-p)/p}\geq 1. \tag{8.4.50}$$

Για την απόδειξη της παραπάνω σχέσης, παρατηρούμε ότι

$$\frac{1-p}{(2-p)\|z\|_\infty^{1-p}}\geq\frac{\frac{\log_2\log_2 q}{\log_2 q}}{2(2/q)^{\frac{1-p}{p}}}=\frac{\log_2\log_2 q}{2}\left(\frac{\log_2 q}{2}\right)^{\frac{1-p}{p}}\frac{q^{\frac{1-p}{p}}}{(\log_2 q)^{\frac{1}{p}}}, \tag{8.4.51}$$

ενώ παίρνοντας λογαρίθμους, βλέπουμε ότι $\frac{q^{\frac{1-p}{p}}}{(\log_2 q)^{\frac{1}{p}}}=1$. Από την άλλη πλευρά,

$$\left(\frac{\log_2 q}{2}\right)^{1-p}\geq\left(\frac{4}{2}\right)^{1-p}=2^{1-p}\geq 1 \tag{8.4.52}$$

οπότε $\frac{\log_2\log_2 q}{2}\left(\frac{\log_2 q}{2}\right)^{(1-p)/p}\geq 1$.

Εφαρμόζουμε τώρα το Λήμμα 8.4.15 για την z και παίρνουμε $\|z\|_{p,\infty}^p/\|z\|_1\geq 1$. Δηλαδή, υπάρχει ακέραιος $b>l$ που ικανοποιεί την

$$(b-l)x_b^p\geq\|z\|_1=1-\sum_{i=1}^{l}x_i\geq 1-\sum_{i=1}^{l}x_i^p. \tag{8.4.53}$$

Αν $b=l$, υποθέτουμε ότι ο l είναι ο ελάχιστος δείκτης που ικανοποιεί την (8.4.49). Σ΄ αυτή την περίπτωση έπεται ότι

$$S=\sum_{i=1}^{l}x_i^p=\sum_{i=1}^{l-1}x_i^p+x_l^p<1+x_l^p\leq 2. \tag{8.4.54}$$

Όμοια, αν $b > l$, σταθεροποιούμε ένα l και υποθέτουμε ότι ο b είναι ο ελάχιστος δείκτης που ικανοποιεί την (8.4.49). Τότε,

$$S = \sum_{i=1}^{l} x_i^p + (b-l)x_b^p \leq \sum_{i=1}^{l} x_i^p + (b-l-1)x_{b-1}^p + x_b^p < 1 + x_b^p \leq 2. \tag{8.4.55}$$

Ορίζουμε μια ακολουθία $\{y_i\}_{i=0}^{\infty}$ ώστε $y_i = x_i$ για $i \leq l$, $y_i = x_b$ για $l < i \leq b$ και $y_i = 0$ για $i > b$. Είναι φανερό ότι $y_i \leq x_i$ για όλα τα $i \geq 1$, ενώ $\sum_{i\geq 1} y_i^p = S \geq 1 = (\sum_{i\geq 1} x_i)^p$. Τέλος, για $i \leq l$ έχουμε $y_i^p = x_i^p \geq \frac{2}{q} \geq \frac{S}{q} = \frac{1}{q}\sum_{j\geq 1} y_j^p$, για $l < i \leq b$, $y_i^p = x_b^p$ και για $i > b$, $y_i^p = 0$, άρα η $\{y_i^p\}_{i=0}^{\infty}$ είναι q-διασπάσιμη. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.4.10: Υποθέτουμε ότι $\alpha \geq 32$. Έστω X ένας μετρικός χώρος με $\Phi(X) \leq \Phi$, και έστω $w : X \to \mathbb{R}^+$ μια συνάρτηση βάρους. Θέτουμε $t = \lfloor \frac{\alpha}{4} \rfloor$. Εφαρμόζοντας την Πρόταση 8.4.14 στην ακολουθία $\{w(x)\}_{x\in X}$ με $q = 2^t$, παίρνουμε μια συνάρτηση βάρους w' τέτοια ώστε $w'(x) \leq w(x)$ για κάθε $x \in X$, η $\{w'(x)^p\}_{x\in X}$ είναι q-διασπάσιμη, και

$$\sum_{x\in X} w'(x)^p \geq \left(\sum_{x\in X} w(x)\right)^p, \tag{8.4.56}$$

όπου $p = 1 - \frac{log_2(t)}{t}$.

Θέτουμε $\beta = \Big(t\,\log\big(4q\Phi(X)\big)\Big)^{-2/t}$ και εφαρμόζουμε την Πρόταση 8.4.12 στον X με συνάρτηση βάρους την $w'' = w'^p$. Παίρνουμε έτσι έναν υπόχωρο Y του X ο οποίος είναι $4t$–ισόμορφος με κάποιον υπερμετρικό χώρο, και ικανοποιεί την

$$\sum_{x\in Y} w(x)^{p\beta} \geq \sum_{x\in Y} w'(x)^{p\beta} \geq \left(\sum_{x\in X} w'(x)^p\right)^{\beta} \geq \left(\sum_{x\in X} w(x)\right)^{p\beta}. \tag{8.4.57}$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι $\psi(\Phi,\alpha) \geq p\beta$. Τώρα, αφού $\Phi(X) \leq \Phi$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\beta &= \Big(t\log(4q\Phi(X))\Big)^{-2/t} \geq \Big(t\log(4\,2^t\Phi)\Big)^{-2/t} \\
&= e^{-\frac{\log(t\log(4\,2^t\Phi))}{t/2}} \geq 1 - \frac{\log(t\log(42^t\Phi))}{t/2} \\
&= 1 - \frac{\log t + \log(t\log 2)}{t/2} - \frac{2\log\log(4\Phi)}{t} \\
&\geq 1 - \frac{4\log t}{t} - \frac{2\log\log(4\Phi)}{t}.
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned}
\psi(\Phi,\alpha) &\geq \left(1-\frac{\log_2 t}{t}\right)\left(1-\frac{4\log t}{t}-\frac{2\log\log(4\Phi)}{t}\right)\\
&= 1-\frac{\log_2 t}{t}-\frac{4\log t}{t}-\frac{2\log\log(4\Phi)}{t}\\
&+ \frac{\log_2 t}{t}\frac{4\log t}{t}+\frac{\log_2 t}{t}\frac{2\log\log(4\Phi)}{t}\\
&\geq 1-\frac{\log_2 t}{t}-\frac{4\log t}{t}-\frac{2\log\log(4\Phi)}{t}\\
&= 1-\frac{(4+\frac{1}{\log 2})\log t+2\log\log(4\Phi)}{t}\\
&\geq 1-\big(4+\frac{1}{\log 2}\big)\frac{\log t+\log\log(4\Phi)}{t}\\
&= 1-\big(4+\frac{1}{\log 2}\big)\frac{\log(\lfloor\frac{\alpha}{4}\rfloor)+\log\log(4\Phi)}{\lfloor\frac{\alpha}{4}\rfloor}\\
&\geq 1-\big(4+\frac{1}{\log 2}\big)\frac{\log\alpha+\log\log(4\Phi)}{\frac{1}{8}\alpha}\\
&= 1-\big(32+\frac{8}{\log 2}\big)\frac{\log\alpha+\log\log(4\Phi)}{\alpha}.
\end{aligned}$$

Η απόδειξη του θεωρήματος ολοκληρώνεται αν θέσουμε $C'=32+\frac{8}{\log 2}$. □

8.4γ΄ Από τους υπερμετρικούς χώρους στα k-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένα δένδρα

Ορισμός 8.4.16. Έστω ένας ακέραιος $h>1$ και $i\in\{0,1,\dots,h-1\}$. Λέμε ότι ένα δέντρο T με ρίζα είναι (i,h)-*περιοδικά αραιό* αν για κάθε $l\equiv i \mod h$, κάθε κορυφή του T σε βάθος l είναι εκφυλισμένη. Το δέντρο T λέγεται h-*περιοδικά αραιό* αν υπάρχει $i\in\{0,1,\dots,h-1\}$ ώστε το T να είναι (i,h)- περιοδικά αραιό.

Στα επόμενα, αν T' είναι κάποιο υποδέντρο ενός δέντρου T με ρίζα, θα υποθέτουμε ότι το T' έχει ρίζα τη ρίζα του T και τα φύλλα του T' είναι και φύλλα του T. Συμβολίζουμε με $\mathrm{lvs}(T)$ τα φύλλα του T.

Λήμμα 8.4.17. *Θεωρούμε έναν ακέραιο $h>1$ και ένα πεπερασμένο δέντρο T με ρίζα. Τότε, για κάθε $w:\mathrm{lvs}(T)\to\mathbb{R}^+$, υπάρχει $h-$περιοδικά αραιό υποδέντρο T' του T που ικανοποιεί την*

$$\sum_{v\in\mathrm{lvs}(T')} w(v)^{\frac{h-1}{h}} \geq \left(\sum_{v\in\mathrm{lvs}(T)} w(v)\right)^{\frac{h-1}{h}}. \tag{8.4.58}$$

Απόδειξη. Για κάθε $i\in\{0,1,\dots,h-1\}$ γράφουμε $f_i(T)$ για το μέγιστο της ποσότητας $\sum_{v\in\mathrm{lvs}(T')} w(v)^{\frac{h-1}{h}}$ πάνω από όλα τα (i,h)-περιοδικά αραιά υποδέντρα T' του T. Με επαγωγή ως προς το βάθος του T, θα δείξουμε ότι

$$\prod_{i=0}^{h-1} f_i(T) \geq \left(\sum_{v\in\mathrm{lvs}(T)} w(v)\right)^{h-1}, \tag{8.4.59}$$

απ΄ όπου προκύπτει η ζητούμενη

$$\max_{0\le i\le h-1} f_i(T) \ge \left(\sum_{v\in \mathrm{lvs}(T)} w(v)\right)^{\frac{h-1}{h}}. \tag{8.4.60}$$

Αν το T έχει βάθος 0, οπότε αποτελείται από μια κορυφή v, τότε $f_i(T) = w(v)^{\frac{h-1}{h}}$ και έτσι

$$\prod_{i=0}^{h-1} f_i(T) = \left(w(v)^{\frac{h-1}{h}}\right)^h = w(v)^{h-1}. \tag{8.4.61}$$

Διαφορετικά, το T έχει βάθος τουλάχιστον 1. Έστω r η ρίζα του και $v_1,\dots,v_l$ οι απόγονοι της. Συμβολίζουμε με T_j το υποδέντρο με ρίζα v_j. Παρατηρούμε τώρα ότι για κάθε $j=1,\dots,l$, κάθε $(h-1,h)$-περιοδικά αραιό υποδέντρο του T_j είναι $(0,h)$-περιοδικά αραιό υποδέντρο του T. Έτσι,

$$f_0(T) \ge \max_{1\le j\le l} f_{h-1}(T_j). \tag{8.4.62}$$

Τώρα, για $i\in\{1,\dots,h-1\}$, κάθε $(i-1,h)$-περιοδικά αραιό υποδέντρο του T_j είναι (i,h)-περιοδικά αραιό υποδέντρο του T. Αν λοιπόν για κάθε $j=1,\dots,l$, θεωρήσουμε εκείνο το υποδέντρο του T_j που δίνει την τιμή $f_{i-1}(T_j)$ και σχηματίσουμε το υποδέντρο του T με ρίζα το r και απογόνους κάθε τέτοιο υποδέντρο, παίρνουμε:

$$f_i(T) = \sum_{1\le j\le l} f_{i-1}(T_j). \tag{8.4.63}$$

Εφαρμόζοντας την ανισότητα του Hölder παίρνουμε

$$\sum_{j=1}^{l}\prod_{i=1}^{h-1}[f_{i-1}(T_j)]^{\frac{1}{h-1}} \le \left(\prod_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{l} f_{i-1}(T_j)\right)^{\frac{1}{h-1}}. \tag{8.4.64}$$

Έτσι, από την επαγωγική υπόθεση και τις παραπάνω σχέσεις, έχουμε:

$$\begin{aligned}
\prod_{i=0}^{h-1} f_i(T) &\geq \max_{1\leq j\leq l} f_{h-1}(T_j)\cdot \prod_{i=1}^{h-1}\sum_{j=1}^{l} f_{i-1}(T_j)\\
&\geq \max_{1\leq j\leq l} f_{h-1}(T_j)\cdot \left(\sum_{j=1}^{l}\left(\prod_{i=1}^{h-1} f_{i-1}(T_j)\right)^{\frac{1}{h-1}}\right)^{h-1}\\
&= \max_{1\leq j\leq l} f_{h-1}(T_j)\cdot \left(\sum_{j=1}^{l}\left(\prod_{i=0}^{h-2} f_{i}(T_j)\right)^{\frac{1}{h-1}}\right)^{h-1}\\
&\geq \left(\sum_{j=1}^{l}\left(f_{h-1}(T_j)\cdot\prod_{i=0}^{h-2} f_{i}(T_j)\right)^{\frac{1}{h-1}}\right)^{h-1}\\
&= \left(\sum_{j=1}^{l}\left(\prod_{i=0}^{h-1} f_{i}(T_j)\right)^{\frac{1}{h-1}}\right)^{h-1}\\
&\geq \left(\sum_{j=1}^{l}\sum_{v\in \mathrm{lvs}(T_j)} w(v)\right)^{h-1}\\
&= \left(\sum_{v\in \mathrm{lvs}(T)} w(v)\right)^{h-1}.
\end{aligned}$$

□

Πρόταση 8.4.18. *Για κάθε* $k > \alpha > 1$,

$$\psi_k(UM,\alpha) \geq 1 - \frac{1}{\lceil \log_{k/\alpha}\alpha\rceil}. \tag{8.4.65}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε έναν υπερμετρικό χώρο X και μια συνάρτηση βάρους $w : X \to \mathbb{R}^+$. Θέτουμε $h = \lceil \log_{k/\alpha}\alpha\rceil$ και $s = k^{1/h}$. Από το Λήμμα 8.3.6 παίρνουμε ότι ο X είναι s-ισόμορφος με ένα ακριβές $s - HST$ Y μέσω μιας διαστολής g. Έστω T το δέντρο που ορίζει τον Y. Το Λήμμα 8.4.17 δίνει ένα υποδέντρο S του T το οποίο είναι (i,h)-περιοδικά αραιό για κάποιο $i \in \{0,1,\ldots,h-1\}$, και

$$\sum_{v\in \mathrm{lvs}(S)} w(g^{-1}(v))^{\frac{h-1}{h}} \geq \left(\sum_{x\in X} w(x)\right)^{\frac{h-1}{h}}. \tag{8.4.66}$$

Επισυνάπτοντας ένα μονοπάτι μήκους $h-1-i$ στη ρίζα του S, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το S είναι $(h-1,h)$-περιοδικά αραιό. Όμοια, προσθέτοντας κατάλληλα μονοπάτια στα φύλλα του S, μπορούμε να υποθέσουμε ότι υπάρχει ένας ακέραιος m ώστε όλα τα φύλλα του S είναι σε βάθος mh. Έστω r η ρίζα του S.

Μετασχηματίζουμε τώρα το S ως εξής: Για κάθε ακέραιο $0 \leq j < m$, διαγράφουμε όλες τις κορυφές του S που το βάθος τους βρίσκεται στο διάστημα $[jh+1,(j+1)h-1]$, και συνδέουμε κάθε κορυφή σε βάθος jh με όλους τους απογόνους της σε βάθος $(j+1)h$. Συμβολίζουμε με S' το δέντρο που παίρνουμε και θεωρούμε τον μετρικό χώρο Y' που ορίζεται από το δέντρο S'. Ο Y' είναι ένα ακριβές $s^h - HST$.

Θα δείξουμε ότι ο Y' είναι s^{h-1}-ισόμορφος με ένα υπόχωρο του X μέσω μιας διαστολής. Έστω λοιπόν u, v δύο σημεία του Y' και έστω w ο ελάχιστος κοινός πρόγονος αυτών στο S. Αν q είναι το βάθος του w στο S, τότε $q \not\equiv h-1 ($ mod $h)$, αφού το S είναι $(h-1, h)$-περιοδικά αραιό. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε $q = i + jh$ για κάποιους $j \geq 0$ και $i \in \{0, \cdots, h-2\}$. Συμβολίζοντας με w' τον ελάχιστο κοινό πρόγονο των u, v στο S', βλέπουμε από την κατασκευή του S', ότι αυτός βρίσκεται σε βάθος jh. Έτσι, $d_Y(u,v) = \frac{\Delta(r)}{s^{i+jh}}$ και $d_{Y'}(u,v) = \frac{\Delta(r)}{s^{jh}}$. Δηλαδή

$$d_Y(u,v) \leq d_{Y'}(u,v) \leq s^i d_Y(u,v) \leq s^{h-2} d_Y(u,v). \tag{8.4.67}$$

Επομένως, ο Y' είναι s^{h-2}-ισόμορφος με τον Y και μάλιστα η απεικόνιση είναι διαστολή. Αφού ο Y είναι s-ισόμορφος με κάποιο υπόχωρο του X μεσω διαστολής, παίρνουμε ότι ο Y' είναι s^{h-1}-ισόμορφος με έναν υπόχωρο του X.

Έχουμε δείξει ο X έχει έναν υπόχωρο s^{h-1}-ισόμορφο με κάποιο $k = s^h - HST$ και ικανοποιεί την (8.4.66). Αν δείξουμε ότι $s^{h-1} \leq \alpha$, τότε $\psi_k(UM, \alpha) \geq \frac{h-1}{h} = 1 - \frac{1}{\lceil \log_{k/\alpha} \alpha \rceil}$. Πραγματικά, η επιλογή του h μας δίνει $h - 1 \leq \log_{k/\alpha} \alpha$, ή $\frac{1}{h-1} \geq \log_\alpha(\frac{k}{\alpha})$. Επομένως, $\alpha^{\frac{h}{h-1}} \geq k$ απ' όπου προκύπτει $s^{h-1} = k^{\frac{h-1}{h}} \leq \alpha$. □

8.4δ′ Από τα k-ιεραρχικά καλά-διαχωρισμένα δένδρα στη μετρική σύνθεση

Πρόταση 8.4.19. *Για κάθε $\alpha, \beta \geq 1$, αν ένας μετρικός χώρος L είναι α-ισοδύναμος με ένα $\beta\alpha - HST$, τότε ο L είναι $(1 + 2/\beta)$-ισοδύναμος με κάποιο μετρικό χώρο στην κλάση $\mathrm{comp}_\beta(\alpha)$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $k = \alpha\beta$ και θεωρούμε X ο οποίος είναι $k - HST$ και α-ισόμορφος με τον L μέσω της $f : L \to X$. Μάλιστα, για κάθε $x, y \in L$ έχουμε

$$d_L(x,y) \leq d_X(f(x), f(y)) \leq \alpha d_L(x,y). \tag{8.4.68}$$

Έστω T το δέντρο που ορίζει τον X. Για μια κορυφή $u \in T$, συμβολίζουμε με T_u το υποδέντρο του T με ρίζα την u. Συμβολίζουμε επίσης με $X_u \subseteq X$ το HST που ορίζεται από το T_u και ορίζουμε $L_u = f^{-1}(X_u)$. Η παραπάνω σχέση δίνει $\mathrm{diam}(L_u) \leq \mathrm{diam}(X_u) = \Delta(u)$.

Σκοπεύουμε να κατασκευάσουμε ένα μετρικό χώρο $Z \in \mathrm{comp}_\beta(\alpha)$ και μια διαστολή $g : L \to Z$, ετσι ώστε για κάθε $x, y \in L$ να ικανοποιείται η $d_L(x,y) \leq d_Z(g(x), g(y)) \leq \big(1 + \frac{2}{\beta}\big) d_L(x,y)$. Αυτό θα γίνει με επαγωγή πάνω στο μέγεθος του L. Επιπλέον θα υποθέσουμε ότι $\mathrm{diam}(Z) \leq \mathrm{diam}(L) = \Delta$.

Έστω r η ρίζα του δέντρου με τιμή $\Delta(r) = \Delta$, και C το σύνολο των απογόνων της r. Από την επαγωγική υπόθεση, για κάθε $u \in C$ υπάρχουν μετρικός χώρος $N_u \in \mathrm{comp}_\beta(\alpha)$ και διαστολή $g_u : L_u \to N_u$, ώστε $\mathrm{diam}(N_u) \leq \mathrm{diam}(L_u) = \Delta(u)$ και για κάθε $x, y \in L_u$,

$$d_{L_u}(x,y) \leq d_{N_u}(g_u(x), g_u(y)) \leq \big(1 + \frac{2}{\beta}\big) d_{L_u}(x,y). \tag{8.4.69}$$

Ορίζουμε το μετρικό χώρο $M = (C, d_M)$ θέτοντας για οποιαδήποτε δύο διακεκριμμένα στοιχεία u, v του C,

$$d_M(u,v) = \max\{d_L(x,y) : \ x \in L_u, y \in L_v\}. \tag{8.4.70}$$

Έστω $u \neq v \in C$ και $x \in L_u, y \in L_v$. Αφού $d_X(f(x), f(y)) = \Delta$, από την (8.4.68) παίρνουμε $\Delta/\alpha \leq d_L(x,y) \leq \Delta$. Δηλαδή, για κάθε $u \neq v \in C$ και $x \in L_u, y \in L_v$,

$$\frac{\Delta}{\alpha} \leq d_L(x,y) \leq d_M(u,v) \leq \mathrm{diam}(L) = \Delta. \tag{8.4.71}$$

Άρα, $\mathrm{diam}(M) \leq \Delta$, οπότε $\Phi(M) \leq \alpha$. Χρησιμοποιώντας τις $\Delta(u), \Delta(v) \leq \Delta/k$ και $k = \alpha\beta$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} d_L(x,y) \leq d_M(u,v) &\leq d_L(x,y) + \mathrm{diam}(L_u) + \mathrm{diam}(L_v) \\ &= d_L(x,y) + \Delta(u) + \Delta(v) \leq d_L(x,y) + 2\frac{\Delta}{k} \\ &\leq d_L(x,y) + 2\frac{\alpha d_L(x,y)}{\beta\alpha} \leq \big(1 + \frac{2}{\beta}\big) d_L(x,y). \end{aligned}$$

Τώρα, θέτουμε

$$\gamma = \frac{\max_{u \in C} \mathrm{diam}(N_u)}{\min_{u,v \in C} d_M(u,v)} \ \ \text{και} \ \ \beta' = \frac{1}{\gamma}. \tag{8.4.72}$$

Από την (8.4.69) παίρνουμε $\min_{u,v\in C} d_M(u,v) \geq \Delta/\alpha$, ενώ η $\mathrm{diam}(N_u) \leq \mathrm{diam}(L_u) = \Delta(u)$ δίνει $\max_{u\in C} \mathrm{diam}(N_u) \leq \Delta/k$. Έπεται λοιπόν ότι

$$\beta' \geq \frac{\Delta/\alpha}{\Delta/k} = \beta. \tag{8.4.73}$$

Ορίζουμε τώρα τον $Z \in \mathrm{comp}_\beta(\alpha)$ από την $Z = M_{\beta'}[\{N_u\}_{u \in C}]$ και θεωρούμε την απεικόνιση $g : L \to Z$ που ορίζεται για κάθε $u \in C$ και $x \in L_u$ από την $g(x) = g_u(x)$.

Θεωρούμε $u, v \in C$ και $x \in L_u, y \in L_v$. Αν $u = v$, το ζητούμενο έπεται από την (8.4.69). Αν $u \neq v$ τότε, από τον ορισμό της μετρικής σύνθεσης έχουμε $d_Z(g(x), g(y)) = \beta'\gamma d_M(u,v) = d_M(u,v)$, και λόγω των παραπάνω συμπεραίνουμε ότι $\mathrm{diam}(Z) \leq \Delta$ και

$$d_L(x,y) \leq d_Z(g(x), g(y)) \leq \big(1 + \frac{2}{\beta}\big) d_L(x,y). \tag{8.4.74}$$

Η απόδειξη της Πρότασης έχει ολοκληρωθεί. □

8.4ε΄ Κάτω φράγμα για τη συνάρτηση Ramsey

Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 8.4.4. Η απόδειξη θα βασισθεί στην ακόλουθη:

Πρόταση 8.4.20. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C'' > 0$ ώστε για κάθε πεπερασμένο μετρικό χώρο $\hat{X}$ και για κάθε $\alpha > 2$,*

$$\psi\Big(\hat{X}, \frac{\alpha}{2}\Big) \geq \psi(\hat{X}, \alpha)\bigg(1 - C''\frac{\log\alpha}{\alpha}\bigg). \tag{8.4.75}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε μια συνάρτηση βάρους $w : \hat{X} \to \mathbb{R}^+$ και θεωρούμε έναν υπόχωρο X του $\hat{X}$ ο οποίος είναι α-ισόμορφος με κάποιον υπερμετρικό χώρο Y, που ικανοποιεί τη σχέση (8.4.2) του Ορισμού 8.4.2 με $\psi(\hat{X}, \alpha)$. Θεωρούμε δύο αριθμούς $\alpha', \beta \geq 1$, που θα καθοριστούν παρακάτω, και ορίζουμε $k = \alpha\alpha'\beta$. Η Πρόταση 8.4.18 μας δίνει έναν υπόχωρο Y' του Y, α'-ισοδύναμο με κάποιο $k - HST$, που ικανοποιεί τη συνθήκη (8.4.2) με $\psi_k(UM, \alpha') \geq 1 - \frac{\log(k/\alpha')}{\alpha'}$. Απεικονίζοντας τον X σ' έναν υπερμετρικό Y και μετά στέλνοντας την εικόνα του X στον Y, σ' ένα $k - HST$, εφαρμόζουμε το Λήμμα 8.4.5 και παίρνουμε έναν υπόχωρο X' του X, $\alpha\alpha'$-ισοδύναμο με κάποιο $k - HST\ W$, που ικανοποιεί την (8.4.2) με εκθέτη

$$\psi_k(UM, \alpha') \cdot \psi(\hat{X}, \alpha) \geq \Big(1 - \frac{\log(k/\alpha')}{\alpha'}\Big)\psi(\hat{X}, \alpha). \tag{8.4.76}$$

Θέτουμε $\Phi = \alpha\alpha'$. Έχουμε λοιπόν ότι ο X' είναι Φ-ισοδύναμος με ένα $\Phi\beta - HST$ και επομένως, από την Πρόταση 8.4.19, ο X' είναι $(1+2/\beta)$ ισοδύναμος με κάποιον μετρικό χώρο $Z \in \mathrm{comp}_\beta(\Phi)$. Συνδυάζοντας το Λήμμα 8.4.7 με το Θεώρημα 8.4.10, βρίσκουμε έναν υπόχωρο Z' του Z, β–ισόμορφο με ένα υπερμετρικό χώρο, που ικανοποιεί μια σχέση σαν την (8.4.2) με εκθέτη $\psi(\mathrm{comp}_\beta(\Phi), \beta)$. Στέλνοντας την εικόνα του X' στον Z, σ' έναν υπερμετρικό χώρο, εφαρμόζουμε το Λήμμα 8.4.5 και παίρνουμε έναν υπόχωρο X'' του X που είναι $\beta(1 + 2/\beta) = \beta + 2$ ισοδύναμος με κάποιον υπερμετρικό χώρο U και ικανοποιεί την (8.4.2) με εκθέτη

$$\left(1 - C'\frac{\log\beta + \log\log(4\Phi)}{\beta}\right)\left(1 - \frac{\log(\alpha\beta)}{\log\alpha'}\right)\psi(\hat{X}, \alpha). \tag{8.4.77}$$

Αν τώρα επιλέξουμε $\beta = \frac{\alpha}{2} - 2$ και $\Phi = 2^{2\alpha}$ (απ' όπου προσδιορίζεται ο α'), παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 - C'\frac{\log\beta + \log\log(4\Phi)}{\beta} &= 1 - C'\frac{\log(\frac{\alpha}{2} - 2) + \log\log(4\,2^{2\alpha})}{\frac{\alpha}{2} - 2} \\ &\geq 1 - C'\frac{\log\alpha + \log((2\alpha + 1)\log 2)}{\frac{1}{3}\alpha} \\ &\geq 1 - 3C'\frac{\log\alpha + \log(4\alpha)}{\alpha} \\ &\geq 1 - 3C'\frac{\log\alpha + 2\log(\alpha)}{\alpha} \\ &= 1 - 9C'\frac{\log\alpha}{\alpha}. \end{aligned}$$

Επιπλέον,

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\log(\alpha\beta)}{\log\alpha'} &= 1 - \frac{\log(\alpha(\frac{\alpha}{2} - 2))}{\log(\frac{2^{2\alpha}}{\alpha})} \\ &\geq 1 - \frac{\log(\alpha^2)}{\alpha} = 1 - 2\frac{\log(\alpha)}{\alpha}. \end{aligned}$$

Παίρνουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\psi\Big(\hat{X},\frac{\alpha}{2}\Big) &\geq \left(1-9C'\frac{\log\alpha}{\alpha}\right)\left(1-2\frac{\log\alpha}{\alpha}\right)\psi(\hat{X},\alpha)\\ &= \left(1-9C'\frac{\log\alpha}{\alpha}-2\frac{\log\alpha}{\alpha}+18C'\frac{\log\alpha}{\alpha}\frac{\log\alpha}{\alpha}\right)\psi(\hat{X},\alpha)\\ &\geq \left(1-\Big(9C'+2\Big)\frac{\log\alpha}{\alpha}\right)\psi(\hat{X},\alpha).\end{aligned}$$

Θέτοντας $C''=9C'+2$ καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε το

Θεώρημα 8.4.21. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $C>0$ ώστε για κάθε $\alpha>2$ να ισχύει η*

$$\psi(\alpha)\geq 1-C\frac{\log\alpha}{\alpha}. \tag{8.4.78}$$

Απόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι $\alpha>8$. Θεωρούμε ένα μετρικό χώρο X και θέτουμε $\Phi=\Phi(X)$. Θυμίζουμε ότι Φ είναι η απόσταση του X από κάποιον «ισόπλευρο» χώρο. Έτσι $\psi(X,\Phi)=1$. Θέτουμε $m=\lfloor\alpha\rfloor$ και $M=\lceil\log\Phi\rceil$. Αν $M\leq m+1$, τότε

$$\psi(X,\alpha)\geq\psi(X,2^M)\geq\psi(X,\Phi)=1. \tag{8.4.79}$$

Διαφορετικά, από την Πρόταση 8.4.20, παίρνουμε

$$\psi\Big(X,\frac{\alpha}{2}\Big)\geq\psi(X,\alpha)\Big(1-C''\frac{\log\alpha}{\alpha}\Big), \tag{8.4.80}$$

οπότε εφαρμόζοντας επαναληπτικά αυτή την πρόταση, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\psi(X,\alpha) &\geq \psi(X,2^m)\geq\psi(X,2^M)-C''\sum_{i=m+1}^{M}\frac{i}{2^i}\\ &\geq 1-C''\sum_{i=m+1}^{\infty}\frac{i}{2^i}=1-C''\frac{m+2}{2^m}\\ &\geq 1-6C''\frac{\log\alpha}{\alpha}.\end{aligned}$$

Αφού ο X ήταν τυχών, αν θέσουμε $C=6C''$, καταλήγουμε στην

$$\psi(\alpha)\geq 1-C\frac{\log\alpha}{\alpha}. \tag{8.4.81}$$

□

8.5 Παραμορφώσεις οσοδήποτε κοντά στο 2

Σκοπός μας σ' αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα:

Θεώρημα 8.5.1. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$, έτσι ώστε για κάθε $k \geq 1$, για κάθε $0 < \epsilon < 1$ και για όλους τους θετικούς ακεραίους n, να ισχύει:*

$$R_{k-HST}(2+\epsilon, n) \geq n^{\frac{c\epsilon}{\log(2k/\epsilon)}}. \tag{8.5.1}$$

Συγκεκριμένα,

$$R_{UM}(2+\epsilon, n) \geq n^{\frac{c\epsilon}{\log(2k/\epsilon)}}. \tag{8.5.2}$$

Σε συνδυασμό με την Πρόταση 8.3.5, το προηγούμενο θεώρημα δίνει

$$R_2(2+\epsilon, n) \geq n^{\frac{c\epsilon}{\log(2k/\epsilon)}}. \tag{8.5.3}$$

Παίρνοντας υπόψιν την Πρόταση 8.4.3 για τις συναρτήσεις Ramsey, για να δείξουμε τα παραπάνω, αρκεί να αποδείξουμε το

Θεώρημα 8.5.2. *Υπάρχει απόλυτη σταθερά $c > 0$, έτσι ώστε για κάθε $k \geq 1$ και για κάθε $0 < \epsilon < 1$,*

$$\psi_k(2+\epsilon) \geq \frac{c\epsilon}{\log(2k/\epsilon)}. \tag{8.5.4}$$

Η απόδειξη θα στηριχθεί στα παρακάτω.

Λήμμα 8.5.3. *Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς $\alpha > 2$ και $s \geq 2$, και έναν ακέραιο $t \geq 1$. Έστω M ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Τότε, ικανοποιείται τουλάχιστον μία από τις ακόλουθες δύο συνθήκες:*

(1) *Ο M περιέχει έναν υπόχωρο N, με τουλάχιστον s στοιχεία, που είναι α-ισόμορφος με έναν ισόπλευρο χώρο.*

(2) *Ο M περιέχει έναν υπόχωρο N, με τουλάχιστον n/s^t στοιχεία, έτσι ώστε $\mathrm{diam}(N) < (\alpha/2)^{-t}\mathrm{diam}(M)$.*

Απόδειξη. Η απόδειξη θα γίνει με επαγωγή πάνω στον t. Υποθέτουμε ότι ο M δεν περιέχει υπόχωρο με s στοιχεία, α–ισόμορφο με ισόπλευρο χώρο, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη. Για $t = 0$, θέτουμε $N_0 = M$. Για $t \geq 1$, η επαγωγική υπόθεση δίνει έναν υπόχωρο N_{t-1}, μεγέθους τουλάχιστον n/s^{t-1}, ώστε $\mathrm{diam}(N_{t-1}) < (\alpha/2)^{-t+1}\mathrm{diam}(M)$.

Έστω $\{c_1, \dots, c_h\}$ ένα μεγιστικό υποσύνολο του N_{t-1} ως προς την ιδιότητα $d(c_i, c_j) \geq \mathrm{diam}(N_{t-1})/\alpha$ για κάθε $i \neq j$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\{c_1, \dots, c_h\}$ είναι α–ισόμορφο με έναν ισόπλευρο χώρο με μετρική $\mathrm{diam}(N_{t-1})$. Επομένως, $h \leq s$. Θέτουμε $C_i = N_{t-1} \cap B(c_i, \mathrm{diam}(N_{t-1})/\alpha)$. Η μεγιστικότητα του $\{c_1, \dots, c_h\}$ δίνει $\cup_{i=1}^h C_i = N_{t-1}$, και αν ορίσουμε N_t να είναι εκείνο το C_i με το μεγαλύτερο πλήθος στοιχείων, τότε $|N_t| \geq \frac{|N_{t-1}|}{h} \geq n/s^t$. Τέλος,

$$\begin{aligned}
\mathrm{diam}(N_t) &\leq \mathrm{diam}\Big(B\big(c_i, \mathrm{diam}(N_{t-1})/\alpha\big)\Big) \\
&< \frac{2}{\alpha}\mathrm{diam}(N_{t-1}) \\
&\leq \left(\frac{2}{\alpha}\right)^t \mathrm{diam}(M).
\end{aligned}$$

□

Πόρισμα 8.5.4. *Σταθεροποιούμε $\alpha > 2$ και έναν ακέραιο $n \geq 4$. Έστω M ένας μετρικός χώρος με n σημεία. Τότε,*

$$R_{EQ}(M;\alpha,n) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\lceil \log_{\alpha/2}\Phi(M)\rceil^{-1}} \geq n^{\frac{1}{2}\lceil \log_{\alpha/2}\Phi(M)\rceil^{-1}}. \tag{8.5.5}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζοντας το προηγούμενο Λήμμα με $t = \lceil \log_{\alpha/2}\Phi(M)\rceil$ και $s = (n/2)^{1/t}$, παίρνουμε έναν υπόχωρο N του M.

Ισχυριζόμαστε ότι δεν ικανοποιείται η δεύτερη συνθήκη. Διαφορετικά, θα είχαμε $|N| \geq n/s^t = 2$ και έτσι $\mathrm{diam}(N) \geq \min_{x\neq y} d_M(x,y)$. Η τελευταία όμως σχέση συνεπάγεται την $\min_{x\neq y} d_M(x,y) < (\alpha/2)^{-t}\mathrm{diam}(M)$, απ' όπου καταλήγουμε στην $(\alpha/2)^t < \Phi(M)$, που είναι αδύνατη για το δεδομένο t.

Έτσι, έχουμε δείξει ότι κάθε χώρος με n σημεία έχει έναν υπόχωρο α-ισόμορφο με έναν ισόπλευρο χώρο, που έχει πληθάριθμο τουλάχιστον $s = (n/2)^{\lceil \log_{\alpha/2}\Phi(M)\rceil^{-1}}$. Αν θυμηθούμε τον ορισμό της συνάρτησης R, καταλήγουμε στη ζητούμενη ανισότητα

$$R_{EQ}(M;\alpha,n) \geq \left(\frac{n}{2}\right)^{\lceil \log_{\alpha/2}\Phi(M)\rceil^{-1}}. \tag{8.5.6}$$

Η άλλη ανισότητα είναι προφανής. □

Λήμμα 8.5.5. *Έστω $x = \{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία μη αρνητικών αριθμών. Τότε, υπάρχει ακολουθία $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε $y_i \leq x_i$ για κάθε $i \geq 1$, και*

$$\sum_{i\geq 1} y_i^{1/2} \geq \left(\sum_{i\geq 1} x_i\right)^{1/2}. \tag{8.5.7}$$

Επιπλέον, μία από τις ακόλουθες δύο συνθήκες ικανοποιείται:

1. *Για όλα τα $i > 2$, $y_i = 0$.*
2. *Υπάρχει $\omega > 0$, ώστε για κάθε $i \geq 1$, είτε $y_i = \omega$, είτε $y_i = 0$.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $\sum_{i\geq 1} x_i = 1$ και $x_1 \geq x_2 \geq \cdots \geq 0$. Θα δείξουμε πρώτα το ακόλουθο:

(α) Είτε $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 1$,

(β) είτε υπάρχει $l \geq 3$ ώστε $l\sqrt{x_l} \geq 1$.

Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το β. Δηλαδή για κάθε $i \geq 3$ έχουμε $x_i \leq i^{-2}$, και θα δείξουμε ότι $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 1$. Θέτουμε $b = \lfloor \frac{1}{\sqrt{x_2}} \rfloor$. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}
\sum_{i=b+1}^{\infty} x_i &\leq \sum_{i=b+1}^{\infty} i^{-2} \leq \int_b^{\infty} z^{-2}dz = \int_b^{x_2^{-1/2}} z^{-2}dz + \int_{x_2^{-1/2}}^{\infty} z^{-2}dz \\
&\leq x_2\big(x_2^{-1/2} - b\big) + \int_{x_2^{-1/2}}^{\infty} z^{-2}dz \\
&= x_2\big(x_2^{-1/2} - b\big) + \sqrt{x_2} = 2\sqrt{x_2} - bx_2.
\end{aligned}$$

Έτσι,

$$\begin{aligned} x_1 &= 1 - \sum_{i=2}^{\infty} x_i \geq 1 - (b-1)x_2 - (2\sqrt{x_2} - bx_2) \\ &= 1 - 2\sqrt{x_2} + x_2 = (1 - \sqrt{x_2})^2, \end{aligned}$$

απ΄ όπου παίρνουμε τη ζητούμενη $\sqrt{x_1} + \sqrt{x_2} \geq 1$.

Ορίζουμε τώρα την ακολουθία $\{y_i\}$, ανάλογα με το ποια συνθήκη από τις (α), (β) αληθεύει. Συγκεκριμένα:

1. Αν αληθεύει η (α) τότε θέτουμε $y_1 = x_2$, $y_2 = x_2$ και $y_i = 0$ για $i \geq 3$.

2. Αν αληθεύει η (β), θέτουμε $y_1 = y_2 = \ldots = y_l = x_l$ και $y_i = 0$ για $i \geq l+1$.

Ολοκληρώνουμε την απόδειξη του Λήμματος παρατηρώντας ότι και στις δύο περιπτώσεις έχουμε $y_i \leq x_i$ και

$$\sum_{i\geq 1} y_i^{1/2} \geq \left(\sum_{i\geq 1} x_i \right)^{1/2}. \tag{8.5.8}$$

□

Πόρισμα 8.5.6. *Για κάθε* $k \geq 1$, $\alpha > 2$ *και* $\Phi > 1$,

$$\psi_k(\Phi, \alpha) \geq \psi_{EQ}(\Phi, \alpha) \geq \frac{1}{4} \lceil \log_{\alpha/2} \Phi \rceil^{-1}. \tag{8.5.9}$$

Απόδειξη. Κατ΄ αρχήν παρατηρούμε ότι $EQ \subseteq k - HST$, οπότε $\psi_k(\Phi, \alpha) \geq \psi_{EQ}(\Phi, \alpha)$. Θα δείξουμε τη δεύτερη ανισότητα.

Έστω M ένας πεπερασμένος μετρικός χώρος με n σημεία και λόγο όψεων $\Phi(M) \leq \Phi$. Θεωρούμε μια συνάρτηση βάρους $w : M \to \mathbb{R}^+$ και, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\sum_{x\in M} w(x) = 1$. Εφαρμόζουμε το Λήμμα 8.5.5 για την ακολουθία $\{w(x)\}_{x\in M}$, και παίρνουμε μια ακολουθία $\{w'(x)\}_{x\in M}$ ώστε $w'(x) \leq w(x)$ για κάθε $x \in M$. Επιπλέον, είτε υπάρχουν $u, v \in M$ ώστε $w(u)^{1/2} + w(v)^{1/2} \geq w'(u)^{1/2} + w'(v)^{1/2} \geq 1$, είτε υπάρχει $N \subseteq M$ ώστε $w(x) \geq w'(x) = \omega > 0$ για κάθε $x \in N$ και $|N|\omega^{1/2} \geq 1$.

Στην πρώτη περίπτωση, το υποσύνολο $\{u, v\}$ είναι ισομετρικό με ισόπλευρο χώρο, οπότε $\psi_{EQ}(M, \alpha) \geq \frac{1}{2}$. Για την άλλη περίπτωση, αν $|N| \leq 4$ τότε $\omega \geq 1/16$ κι έτσι μπορούμε να βρούμε δύο σημεία $u', v' \in N$ ώστε

$$w(u')^{1/4} + w(v')^{1/4} \geq w'(u')^{1/4} + w'(v')^{1/4} = 2\omega^{1/4} \geq 1. \tag{8.5.10}$$

Το υποσύνολο $\{u', v'\}$ είναι ισομετρικό με κάποιον ισόπλευρο χώρο, οπότε $\psi_{EQ}(M, \alpha) \geq \frac{1}{4}$. Αν $|N| \geq 4$, από το Πόρισμα 8.5.4 παίρνουμε ένα υποσύνολο N' του N, α-ισόμορφο με έναν ισόπλευρο χώρο, όπου $|N'| \geq |N|^{\frac{1}{2}\lceil \log_{\alpha/2} \Phi(M) \rceil^{-1}}$. Τότε,

$$\begin{aligned} \sum_{x\in N'} w(x)^{\frac{1}{4}\lceil \log_{\alpha/2} \Phi(M) \rceil^{-1}} &\geq |N|^{\frac{1}{2}\lceil \log_{\alpha/2} \Phi(M) \rceil^{-1}} \omega^{\frac{1}{4}\lceil \log_{\alpha/2} \Phi(M) \rceil^{-1}} \\ &= (|N|\omega^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}\lceil \log_{\alpha/2} \Phi(M) \rceil^{-1}} \geq 1, \end{aligned}$$

και έτσι $\psi_{EQ}(M,\alpha) \geq \frac{1}{4}\lceil \log_{\alpha/2}\Phi(M)\rceil^{-1}$.

Σύμφωνα με τα παραπάνω, καταλήγουμε στην

$$\psi_k(\Phi,\alpha) \geq \max\left\{\frac{1}{4},\frac{1}{2},\frac{1}{4}\lceil \log_{\alpha/2}\Phi(M)\rceil^{-1}\right\} \geq \frac{1}{4}\lceil \log_{\alpha/2}\Phi\rceil^{-1} \tag{8.5.11}$$

που είναι η ζητούμενη. □

Ορισμός 8.5.7. Ένα δέντρο με ρίζα θα λέγεται *h-αραιό*, αν ο αριθμός των ακμών μεταξύ οποιονδήποτε δύο μη-εκφυλισμένων κορυφών είναι τουλάχιστον h.

Πρόταση 8.5.8. *Για κάθε $k > \alpha > 1$,*

$$\psi_k(UM,\alpha) \geq \frac{1}{\lceil \log_\alpha k\rceil}. \tag{8.5.12}$$

Απόδειξη. Θα χρειαστούμε το παρακάτω:

Λήμμα 8.5.9. *Δοθέντων ένος δέντρου T που ορίζει ένα $\alpha - HST$ H_T, μιας συνάρτησης βάρους $w : \mathrm{lvs}(T) \to \mathbb{R}^+$ και ενός φυσικού h, υπάρχει υποδέντρο S του T, με ρίζα τη ρίζα του T και $\mathrm{lvs}(S) \subseteq \mathrm{lvs}(T)$, το οποίο ορίζει ένα $\alpha^h - HST$ H_S και ικανοποιεί την*

$$\sum_{v\in \mathrm{lvs}(S)} w(v)^{\frac{1}{h}} \geq \left(\sum_{v\in \mathrm{lvs}(T)} w(v)\right)^{\frac{1}{h}}. \tag{8.5.13}$$

Απόδειξη. Για ένα δέντρο R και $i \in \{0,1,\ldots,h-1\}$, ορίζουμε $f_i(R)$ να είναι η μέγιστη τιμή της ποσότητας $\sum_{v\in\mathrm{lvs}(S)} w(v)^{\frac{1}{h}}$ πάνω απ' όλα τα h-αραιά υποδέντρα S του R, όπου κάθε κορυφή σε βάθος μικρότερο από i είτε είναι φύλλο, είτε είναι εκφυλισμένη κορυφή του S. Προφανώς, $f_0(R) = \max_i f_i(R)$.

Θα αποδείξουμε με επαγωγή ως προς το βάθος του T τη σχέση $\prod_{i=0}^{h-1} f_i(T) \geq \sum_{v\in\mathrm{lvs}(T)} w(v)$, από την οποία προκύπτει η $f_0(T) \geq \left(\sum_{v\in\mathrm{lvs}(T)} w(v)\right)^{\frac{1}{h}}$.

Αν το T έχει βάθος 0, τότε $f_i(T) = w(v)$ για κάθε i, επομένως $\prod_{i=0}^{h-1} f_i(T) = w(v)$. Διαφορετικά, το T έχει βάθος τουλάχιστον 1 οπότε συμβολίζουμε με T_j τα υποδέντρα που επάγονται με ρίζα τους απογόνους της ρίζας του T. Παίρνοντας τη ρίζα του T μαζί με την ένωση των υποδέντρων που καθορίζουν τις ποσότητες $f_{h-1}(T_j)$, έχουμε ένα h-αραιό υποδέντρο του T όπου κάθε κορυφή σε βάθος μικρότερο από 0 είτε είναι εκφυλισμένη, είτε είναι φύλλο. Επομένως,

$$f_0(T) \geq \sum_j f_{h-1}(T_j). \tag{8.5.14}$$

Θεωρούμε ένα $i > 0$. Αν v_j είναι απόγονος της ρίζας του T, γράφουμε T_j για το υποδέντρο με ρίζα το v_j. Έστω S_j ένα h-αραιό υποδέντρο του T_j που προσδιορίζει την τιμή της ποσότητας $f_{i-1}(T_j)$. Κατασκευάζουμε ένα υποδέντρο S συνδέοντας την ακμή μεταξύ της ρίζας του T και της v_j, με το S_j. Θα πάρουμε έτσι ένα h-αραιό υποδέντρο του T, όπου κάθε κορυφή σε βάθος μικρότερο από i είτε είναι φύλλο, είτε είναι εκφυλισμένη κορυφή του S. Έτσι,

$$f_i(T) = \max_j f_{i-1}(T_j) \quad \forall i \in \{1,\ldots,h-1\}. \tag{8.5.15}$$

Από την επαγωγική υπόθεση,

$$\begin{aligned}\prod_{i=0}^{h-1} f_i(T) &\geq \left(\sum_j f_{h-1}(T_j)\right) \cdot \prod_{i=1}^{h-1} \max_j f_{i-1}(T_j) \\ &\geq \sum_j \left(f_{h-1}(T_j) \cdot \prod_{i=1}^{h-1} f_{i-1}(T_j)\right) = \sum_j \prod_{i=0}^{h-1} f_{i-1}(T_j) \\ &\geq \sum_j \sum_{v \in \mathrm{lvs}(T_j)} w(v) = \sum_{v \in \mathrm{lvs}(T)} w(v).\end{aligned}$$

Για να δούμε ότι το υποδέντρο S που καθορίζει η τιμή $f_0(T)$ είναι $\alpha^h - HST$, αρκεί να παρατηρήσουμε ότι μεταξύ δύο μη–εκφυλισμένων κορυφών u, v του S υπάχει ένα μονοπάτι μήκους τουλάχιστον h. Διαγράφοντας λοιπόν τις ενδιάμεσες εκφυλισμένες κορυφές και υποθέτοντας ότι η u είναι γονέας της v, παίρνουμε $\Delta(v) \leq \frac{\Delta(u)}{\alpha^h}$. □

Έστω X ένας υπερμετρικός χώρος. Το Λήμμα 8.3.6 δίνει ένα $\alpha - HST$ W, α-ισόμορφο με τον X. Υποθέτουμε ότι ο W ορίζεται πάνω στο δέντρο T και θεωρούμε τον φυσικό $h = \lceil \log_\alpha k \rceil$. Τότε, $\alpha^h \geq k$ και από το προηγούμενο λήμμα παίρνουμε ένα $\alpha^h - HST$ $H \subseteq W$, που ικανοποιεί την

$$\sum_{x \in H} w(x)^{\frac{1}{h}} \geq \left(\sum_{x \in W} w(x)\right)^{\frac{1}{h}}. \tag{8.5.16}$$

Αν θέσουμε X' την αντίστροφη εικόνα του H, στον X, η τελευταία σχέση γίνεται

$$\sum_{x \in X'} w(x)^{\frac{1}{\lceil \log_\alpha k \rceil}} \geq \left(\sum_{x \in X} w(x)\right)^{\frac{1}{\lceil \log_\alpha k \rceil}}. \tag{8.5.17}$$

Αφού $\alpha^h \geq k$, συμπεραίνουμε ότι ο H είναι $k - HST$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.5.2: Από το Θεώρημα 8.4.20 υπάρχει σταθερά θ ώστε $\psi(\theta/2) \geq 1/2$. Δηλαδή κάθε πεπερασμένος μετρικός χώρος X, έχει έναν υπόχωρο X' που είναι $\frac{\theta}{2}$-ισόμορφος με κάποιον υπερμετρικό χώρο Y και ικανοποιεί τη συνθήκη (8.4.2) του Ορισμού 8.4.2 με $\psi = 1/2$.

Σταθεροποιούμε $k \geq 1$ και $0 < \epsilon < 1$, και θέτουμε $\beta = 8k/\epsilon$, $k' = \theta\beta$. Από την Πρόταση 8.5.7, ο Y περιέχει έναν υπόχωρο Y' που είναι 2-ισόμορφος με ένα $k' - HST$ και ικανοποιεί την (8.4.2) με $\psi_{k'}(UM, 2) \geq \lceil \log k' \rceil^{-1}$. Απεικονίζοντας τον X στον Y και μετά την εικόνα του X στον Y, σ' ένα $k' - HST$, εφαρμόζουμε το Λήμμα 8.4.5 και παίρνουμε κάποιον υπόχωρο X'' του X, ο οποίος είναι $\frac{\theta}{2} \cdot 2 = \theta$–ισόμορφος με κάποιον $k' - HST$ και ικανοποιεί την (8.4.2) με

$$\psi(\theta) \geq \psi(\theta/2) \cdot \psi_{k'}(UM, 2) \geq \frac{1}{2\lceil \log k' \rceil}. \tag{8.5.18}$$

Έχουμε λοιπόν ότι ο X'' είναι θ-ισόμορφος με κάποιον $\theta\beta - HST$, οπότε η Πρόταση 8.4.19 δείχνει ότι ο X'' είναι $(1 + 2/\beta)$-ισοδύναμος με ένα μετρικό χώρο $Z \in$

$\mathrm{comp}_\beta(\theta)$. Έτσι,

$$\psi_{\mathrm{comp}_\beta(\theta)}\Big(1+\frac{2}{\beta}\Big) \geq \psi_{k'}(\theta) \geq \frac{1}{2\lceil \log k' \rceil}. \tag{8.5.19}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 8.4.7 και το φράγμα που δίνει το Πόρισμα 8.5.6, παίρνουμε

$$\begin{aligned} \psi_k\Big(\mathrm{comp}_\beta\Big(\theta, 2+\frac{\epsilon}{4}\Big)\Big) &= \psi_k\Big(\theta, 2+\frac{\epsilon}{4}\Big) \geq \frac{1}{4}\,\frac{1}{\lceil \log_{(1+\epsilon/8)}\theta\rceil} \\ &\geq \frac{1}{4}\,\frac{1}{2\log_{(1+\epsilon/8)}\theta} = \frac{1}{8}\,\frac{\log(1+\epsilon/8)}{\log\theta} \\ &\simeq \frac{1}{8}\,\frac{\frac{\epsilon}{8}}{\log\theta} = \frac{c'\epsilon}{\log\theta}, \end{aligned}$$

όπου $c' = \frac{1}{64}$. Δηλαδή, ο Z περιέχει έναν υπόχωρο Z', $(2+\epsilon/4)$-ισοδύναμο με $k-HST$.

Απεικονίζοντας τον X στον $Z \in \mathrm{comp}_\beta(\theta)$, και μετά την εικόνα του X σε κάποιον $k-HST$, εφαρμόζουμε το Λήμμα 8.4.5 και παίρνουμε έναν υπόχωρο του X, ο οποίος είναι $(2+\epsilon/4)(1+2/\beta) \leq (2+\epsilon)$-ισόμορφος με $k-HST$, και ικανοποιεί τη συνθήκη (8.4.2) με

$$\begin{aligned} \psi_k(2+\epsilon) &\geq \psi_k\Big(\mathrm{comp}_\beta\Big(\theta, 2+\frac{\epsilon}{4}\Big)\Big)\cdot\psi_{\mathrm{comp}_\beta(\theta)}\Big(1+\frac{2}{\beta}\Big) \\ &\geq \frac{c'\epsilon}{2\log\theta\lceil\log k'\rceil} = \frac{c'\epsilon}{2\log\theta\lceil\log(8\theta k/\epsilon)\rceil} \\ &\geq \frac{c'}{4\log\theta}\,\frac{\epsilon}{\log(8\theta k/\epsilon)} = \frac{c'}{4\log\theta}\,\frac{\epsilon}{\log(4\theta)+\log(2k/\epsilon)} \\ &\geq \frac{c'}{4\log\theta}\,\frac{\epsilon}{\log(4\theta)\cdot\log(2k/\epsilon)} = \frac{c\epsilon}{\log(2k/\epsilon)}, \end{aligned}$$

όπου $c = \frac{c'}{4\log\theta\log(4\theta)}$. □

Βιβλιογραφία

[1] Y. Bartal, B. Bollobás and M. Mendel, *Ramsey-type theorems for metric spaces with applications to online problems*, In the 42nd Annual Symposium on Foundations of Computer Science (2001), 396–405.

[2] Y. Bartal, N. Linial, M. Mendel and A. Naor, *On metric Ramsey–type phenomena*, Annals of Mathematics (2005, to appear).

[3] J. Bourgain, *On Lipschitz embeddings of finite metric spaces in Hilbert space*, Israel J. Math. **52** (1985), 46–52.

[4] J. Bourgain, T. Figiel and V. D. Milman, *On Hilbertian subsets of finite metric spaces*, Israel J. Math. **55** (1986), 147–152.

[5] P. Enflo, *On the non-existence of uniform homeomorphisms between L_p-spaces*, Ark. Mat. **8** (1969), 103–105.

[6] W. B. Johnson and J. Lindenstrauss, *Extensions of Lipschitz mappings into a Hilbert space*, In Conference in modern analysis and probability, AMS (1984), 189-206.

[7] M. Κολουντζάκης, *Σημειώσεις Διακριτών Μαθηματικών*, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο Κρήτης.

[8] M. Ledoux, *The concentration of measure phenomenon*, Mathematical Surveys and Monographs **89**, Amer. Math. Soc. (2001).

[9] N. Linial, E. London and Y. Rabinovich, *The geometry of graphs and some of its algorithmic applications*, Combinatorica **15** (1995), 215–245.

[10] N. Linial, A. Magen and A. Naor, *Girth and Euclidean distortion*, Geom. Funct. Analysis **12** (2002), 380–394.

[11] N. Linial and A. Wigderson, *Expander graphs and their applications*, Lecture Notes, Hebrew University, 2003.

[12] J. Matousek, *Lectures on discrete geometry*, Springer-Verlag, New York, 2002.

[13] V. D. Milman and G. Schechtman, *Asymptotic Theory of Finite Dimensional Normed Spaces*, Lecture Notes in Math. **1200** (1986), Springer, Berlin.