Η ιδιότητα προσέγγισης και το πρόβλημα της βάσης σε χώρους Banach

Ανδρεασ Μητροπουλοσ

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2012

Περιεχόμενα

Κεφάλαιο 1

Περιγραφή της εργασίας

1.1 Το πρόβλημα

Ορισμός 1.1.1. Έστω X χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{K}$ (το $\mathbb{K}$ είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$) και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Η (x_n) λέγεται *βάση Schauder* του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικοί $a_n = a_n(x) \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n. \tag{1.1.1}$$

Ορισμός 1.1.2. Ένας χώρος Banach X έχει την *ιδιότητα προσέγγισης* (**AP**) αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τελεστής πεπερασμένης τάξης $T : X \to X$ (δηλαδή, $T(x) = \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x)x_i$ για κάποια $n \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ και $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subset X^*$) ώστε $\|T(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$.

Το *πρόβλημα της βάσης*, το ερώτημα αν κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει βάση Schauder, το οποίο διατυπώθηκε από τον Mazur στο Scottish Book το 1936 (υπ΄ αριθμόν 153, με ημερομηνία 6 Νοεμβρίου 1936), έμεινε ένα από τα κεντρικά ανοικτά προβλήματα της συναρτησιακής ανάλυσης μέχρι το 1972, οπότε ο Σουηδός μαθηματικός Per Enflo έδωσε αρνητική απάντηση. Παράλληλα, ο Mazur είχε διατυπώσει το *πρόβλημα της προσέγγισης* σε χώρους Banach. Το πρόβλημα αυτό ρωτάει αν κάθε διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει την ιδιότητα προσέγγισης, δηλαδή αν σε κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach ο ταυτοτικός τελεστής μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα σε συμπαγή υποσύνολα από τελεστές πεπερασμένης τάξης. Εύκολα μπορεί να ελέγξει κανείς ότι οι χώροι Hilbert έχουν αυτή την ιδιότητα. Ο Enflo [3] κατασκεύασε έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach, ο οποίος δεν έχει την παραπάνω ιδιότητα.

Εύκολα βλέπουμε ότι αν ο X έχει βάση Schauder, τότε έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Έτσι, ο χώρος που κατασκεύασε ο Enflo δεν έχει βάση Schauder.

Ορισμός 1.1.3. Έστω X χώρος Banach και έστω $1 \leqslant \lambda < \infty$. Λέμε ότι ο X έχει την *λ-ιδιότητα προσέγγισης* ($\lambda - \mathbf{AP}$) αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X, υπάρχει τελεστής πεπερασμένης τάξης $T : X \to X$ με νόρμα $\|T\| \leqslant \lambda$ ώστε $\|T(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$.

Λέμε ότι ο X έχει την *φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης* (**BAP**) αν έχει την *λ-ιδιότητα προσέγγισης* για κάποιον $\lambda \geqslant 1$.

Είναι φανερό ότι σε έναν χώρο Banach ισχύουν οι συνεπαγωγές

(1.1.2) $$\text{Ο } X \text{ έχει βάση} \implies \text{Ο } X \text{ έχει την } BAP \implies \text{Ο } X \text{ έχει την } AP.$$

Εκτός από το παράδειγμα του Enflo θα παρουσιάσουμε και κάποια άλλα μεταγένεστερα αντιπαραδείγματα για το πρόβλημα της βάσης, όπως του Davie [2] και του Szankowski [16], καθώς και τα αντιπαραδείγματα των Figiel–Johnson [4] και του Szarek [21], που δείχνουν ότι οι αντίστροφες συνεπαγωγές της (1.1.2) δεν ισχύουν.

Στο Κεφάλαιο 2 εισάγουμε την έννοια της βάσης Schauder και δείχνουμε το εξής βασικό αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.1.4. *Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach X περιέχει κλειστό υπόχωρο με βάση Schauder.*

Στην συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιες ειδικές κατηγορίες βάσεων Schauder, τις φραγμένα πλήρεις και συρρικνούσες βάσεις και τέλος εισάγουμε την έννοια της ιδιότητας προσέγγισης. Οι ακόλουθες ισοδυναμίες αποτελούν χαρακτηρισμό για το πότε ένας χώρος έχει την ιδιότητα προσέγγισης:

Θεώρημα 1.1.5. *Έστω X χώρος Banach. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

(i) *Ο X έχει την ιδιότητα προσέγγισης.*

(ii) *Για κάθε ζεύγος ακολουθιών $\{x_n\}_{i=1}^{\infty} \subset X$, $\{x_n^*\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$ με*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \, \|y_i^*\| < \infty$$

που ικανοποιούν την $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n = 0$ για κάθε $x \in X$, ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0.$$

Θεώρημα 1.1.6. *Οι ακόλουθες τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(i) *Κάθε χώρος Banach X έχει την ιδιότητα προσέγγισης.*

(ii) *Αν* $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ *είναι ένας πίνακας που ικανοποιεί τις* $\lim_j a_{i,j} = 0$ *για κάθε* $i \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} \max_j |a_{i,j}| < \infty$ *και* $A^2 = 0$, *τότε*

$$\mathrm{tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n} = 0. \tag{1.1.3}$$

(iii) *Κάθε συνεχής συνάρτηση* $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιεί την*

$$\int_0^1 K(s,t)K(t,u)dt = 0 \tag{1.1.4}$$

για κάθε s *και* $u \in [0,1]$, *ικανοποιεί την*

$$\int_0^1 K(t,t)dt = 0. \tag{1.1.5}$$

Αυτές οι ισοδυναμίες παίζουν βασικό ρόλο στην απόδειξη του ότι οι κατασκευές που θα παρουσιάσουμε οδηγούν σε χώρους που δεν έχουν την ιδιότητα προσέγγισης.

1.2 Οι κατασκευές

1.2.1. Το παράδειγμα του Enflo

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε την κατασκευή του Enflo [3]. Σε αυτήν την κατασκευή εμφανίζονται οι λεγόμενοι τελεστές πεπερασμένης έκτασης.

Ορισμός 1.2.1 (τελεστές πεπερασμένης έκτασης)**.** Έστω X χώρος Banach που παράγεται από μια ακολουθία $\{e_k\}$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Λέμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ είναι *τελεστής πεπερασμένης έκτασης* αν, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$T(e_k) = \sum_i a_{k,i} e_i, \tag{1.2.1}$$

όπου το πλήθος των μη μηδενικών a_{ki} είναι πεπερασμένο.

Για κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο M του $\{e_j\}$ θέτουμε

$$\mathrm{Tr}(M,T) = \sum_{e_i \in M} a_{ii} \quad \text{και} \quad \tilde{\mathrm{Tr}}(M,T) = \frac{1}{|M|} \sum_{e_i \in M} a_{ii}, \tag{1.2.2}$$

όπου $|M|$ είναι ο πληθάριθμος του M.

Ορισμός 1.2.2. Αν η ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων $\{e_j\}$ παράγει έναν χώρο Banach, θα λέμε ότι η $\{e_j\}$ έχει την *ιδιότητα A* αν για κάθε πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό $\sum_{j=1}^{r} a_j e_j$ ισχύει

$$\left\|\sum_{j=1}^{r} a_j e_j\right\| \geqslant \max_{1\leqslant k\leqslant r} \|a_k e_k\|. \tag{1.2.3}$$

Αν M είναι ένα σύνολο διανυσμάτων σε έναν χώρο Banach X, συμβολίζουμε με $\langle M\rangle$ τον κλειστό υπόχωρο του X ο οποίος παράγεται από το M.

Η κατασκευή του Enflo βασίζεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 1.2.3. *Έστω X χώρος Banach ο οποίος παράγεται από μια ακολουθία $\{e_j\}$ η οποία έχει την ιδιότητα A. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (M_m) ξένων ανά δύο πεπερασμένων υποσυνόλων του $\{e_j\}$ και υπάρχουν σταθερές $a>1$ και $K>0$ ώστε*

(i) $\dim(M_{m+1}) > (\dim(M_m))^a$, *και*

(ii) $|\tilde{\mathrm{Tr}}(M_{m+1},T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(M_m,T)| \leqslant K\|T\|(\log\dim(M_m))^{-1}$

για κάθε $m\geqslant 1$ και για κάθε τελεστή πεπερασμένης έκτασης $T : X\to X$. Τότε, υπάρχει σταθερά $C>0$ ώστε

$$\|I-T\|_{\langle M_m\rangle} \geqslant 1 - C\|T\|(\log\dim(M_m))^{-1} \tag{1.2.4}$$

για κάθε τελεστή $T : X\to X$ πεπερασμένης τάξης.

Θα κατασκευάσουμε υπόχωρους (M_m) πεπερασμένης διάστασης οι οποίοι ικανοποιούν τις συνθήκες του Λήμματος. Θεωρούμε την ομάδα $H_{2n} = \mathbb{Z}_2^{2n} = \{0,1\}^{2n}$ των ακολουθιών $a=(a_1,a_2,\ldots,a_{2n})$ μήκους $2n$ από 0 ή 1. Συμβολίζουμε με W^m το σύνολο των συναρτήσεων Walsh που είναι γινόμενα m διαφορετικών R_j, $1\leqslant j\leqslant 2n$, όπου R_j είναι οι συναρτήσεις Rademacher, που ορίζονται ως εξής:

$$R_j(a) = (-1)^{a_j}, \tag{1.2.5}$$

για κάθε $j=1,\ldots 2n$. Γράφουμε w_m για τα στοιχεία του W^m και ορίζουμε,

$$F_m = \sum_{w_m\in W^m} w_m. \tag{1.2.6}$$

Για κάθε $a\in H_{2n}$, με $|a| = \sum a_j$ συμβολίζουμε το πλήθος των μη μηδενικών συντεταγμένων του a. Οι βασικές ιδιότητες των F_m δίνονται από το εξής Λήμμα.

Λήμμα 1.2.4. *Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και για κάθε $1\leqslant m\leqslant 2n$ ισχύουν τα εξής:*

(i) $F_m(0) = \|F_m\|_\infty = \binom{2n}{m}$.

(ii) $|F_m(a)| = (1 - mn^{-1})\|F_m\|_\infty$ *αν* $|a| = 1$.

(iii) $|F_{n-1}(a)| = |F_{n+1}(a)| \leqslant n^{-1}\|F_{n-1}\|_\infty = n^{-1}\|F_{n+1}\|_\infty$ *αν* $0 < |a| < 2n$.

(iv) $F_m(a) = (-1)^m F_m(b)$ *αν* $|a| + |b| = 2n$.

Θεωρούμε τώρα τον χώρο Banach όλων των πραγματικών συναρτήσεων με πεδίο ορισμού το H_{2n}, εφοδιασμένον με την $\|\cdot\|_\infty$-νόρμα, και βλέπουμε ότι:

(i) Αν p είναι μια μετάθεση των $2n$ αντιγράφων του $\mathbb{Z}_2$ στον H_{2n}, τότε η p ορίζει μια ισομετρία του $\mathrm{span}(W^m)$ επί του εαυτού του, μέσω της

$$(U_p(w_m))(a) = w_m(p(a)). \tag{1.2.7}$$

(ii) Αν $t : a \mapsto a + b$ είναι μια μεταφορά στον H_{2n}, τότε η t ορίζει μια ισομετρία του $\mathrm{span}(W^m)$ επί του εαυτού του, μέσω της

$$(U_t(w_m))(a) = w_m(t(a)). \tag{1.2.8}$$

Θεωρώντας την ομάδα G των ισομετριών του $\mathrm{span}(W^{n-1} \cup W^{n+1})$ που παράγεται από τις U_p και τις U_t δείχνουμε το εξής:

Λήμμα 1.2.5. *Έστω T ένας γραμμικός μετασχηματισμός του* $\mathrm{span}(W^{n-1} \cup W^{n+1})$. *Υπάρχει $U \in G$ τέτοιος ώστε, αν*

$$f = \frac{F_{n-1}}{\|F_{n-1}\|} - \frac{F_{n+1}}{\|F_{n+1}\|}, \tag{1.2.9}$$

τότε

$$\left|\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1}, T)\right| \leqslant \frac{2}{n}\frac{\|TUf\|}{\|Uf\|}. \tag{1.2.10}$$

Για την κατασκευή του χώρου θεωρούμε δύο αύξουσες ακολουθίες $\{k_m\}$ και $\{n_m\}$ φυσικών αριθμών, τις οποίες επιλέγουμε κατάλληλα ώστε να ικανοποιούν κάποιες συνθήκες που περιγράφουμε παρακάτω. Ορίζουμε $K_{mj} := \mathbb{Z}_2^{2n_m}$, $1 \leqslant j \leqslant k_m$, και θεωρούμε την ξένη ένωση

$$K_m := K_{m1} \cup K_{m2} \cup \cdots \cup K_{mk_m}. \tag{1.2.11}$$

Θεωρούμε τον χώρο $C(K_m)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : K_m \to \mathbb{R}$, εφοδιασμένον με την $\|\cdot\|_\infty$, και ορίζουμε τον χώρο

$$B_1 = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus C(K_m)\right)_2. \tag{1.2.12}$$

Ο χώρος B που κατασκευάζει ο Enflo είναι κλειστός υπόχωρος του B_1. Για κάθε m ορίζουμε έναν υπόχωρο $\mathrm{span}(M_m)$ του $C(K_m) \oplus C(K_{m+1})$ διάστασης $k_m t_m$, όπου

$$t_m = \dim(W_{n_m}^{n_m-1}) = \dim(W_{n_m}^{n_m+1}) = \binom{2n_m}{n_m-1}. \tag{1.2.13}$$

Απαιτούμε από το M_m να ικανοποιεί τις ακόλουθες συνθήκες:

(A) Η συνιστώσα του $e \in M_m$ στον $C(K_{mj})$ είναι ίση με 0 για όλα τα j εκτός από ένα, για το οποίο είναι στοιχείο του $W_{n_m}^{n_m+1}$.

(B) Η συνιστώσα του $e \in M_m$ στον $C(K_{m+1,j})$ είναι 0 ή στοιχείο του $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ και, για κάθε j, κάθε στοιχείο του $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ εμφανίζεται σαν συνιστώσα κάποιου e.

(Γ) Διαφορετικά στοιχεία του M_m δεν μπορούν να έχουν την ίδια μη μηδενική συνιστώσα στον $C(K_{mj})$ ή στον $C(K_{m+1,j})$.

(Δ) $\mathrm{card}(N_{mi} \cap N_{mj}) \leqslant 2t_{m+1}/n_{m+1}$ για κάθε $i \neq j$.

(E) $\mathrm{card}(N_{mj} \cap M_{mi}) \leqslant \min\{t_{m+1}/n_{m+1}, t_m/n_m\}$.

(Z) Αν $\sigma(e)$ είναι το πλήθος των j για τα οποία $e \in N_{mj}$, τότε

$$\sum_{e \in M_m} \left| \frac{1}{k_m t_m} - \frac{\sigma(e)}{k_{m+1} t_{m+1}} \right| \leqslant \frac{1}{n_{m+1}}, \tag{1.2.14}$$

όπου με M_{mj} συμβολίζουμε το σύνολο των t_m στοιχείων του M_m που έχουν μη μηδενική συνιστώσα στον $C(K_{mj})$ και με N_{mj} το σύνολο των t_{m+1} στοιχείων του M_m που έχουν μη μηδενική συνιστώσα στον $C(K_{m+1,j})$. Ο B ορίζεται να είναι ο υπόχωρος του B_1 που παράγεται από το $M = \bigcup M_m$. Αποδεικνύοντας ότι ο M έχει την ιδιότητα A και χρησιμοποιώντας τις συνθήκες $(A)-(Z)$ δείχνουμε ότι για κάθε τελεστή πεπερασμένης έκτασης $T : B \to B$ ισχύουν οι ακόλουθες σχέσεις:

$$\left| k_{m+1} \tilde{\mathrm{Tr}}(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{\mathrm{Tr}}(N_{mj}, T) \right| \leqslant \frac{k_{m+1}\|T\|}{n_{m+1}} \tag{1.2.15}$$

και

$$|\tilde{\mathrm{Tr}}(N_{mj}, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(M_{m+1,j}, T)| \leqslant \frac{4\|T\|}{n_{m+1}}. \tag{1.2.16}$$

Τέλος επιλέγοντας σταθερές $a > 1$ και $\gamma > 1$ έτσι ώστε

$$1 < a < \gamma \quad \text{και} \quad a < (2+\gamma)/(1+\gamma), \tag{1.2.17}$$

ορίζουμε

$$n_m = [a^m] \quad \text{και} \quad k_m = [t_m^\gamma]. \tag{1.2.18}$$

Δείχνοντας ότι μπορούμε να επιλέξουμε τα M_m έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι συνθήκες $(A)-(Z)$ και λόγω των (1.2.15) και (1.2.16) βλέπουμε ότι οι συνθήκες (i) και (ii) του λήμματος 1.2.3. ικανοποιούνται, επομένως ο χώρος που κατασκευάσαμε δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης.

1.2.2. Το παράδειγμα του Davie

Στο Κεφάλαιο 4 παρουσιάζουμε την κατασκευή του Davie [2]. Ο Davie απέδειξε το εξής:

Θεώρημα 1.2.6. *Έστω $2 < p < \infty$. Υπάρχει κλειστός υπόχωρος του ℓ_p, ο οποίος δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης.*

Για την απόδειξη θεωρούμε μια αβελιανή ομάδα G_k τάξεως $3 \cdot 2^k$ και χρησιμοποιώντας ένα πιθανοθεωρητικό λήμμα, αποδεικνύουμε ότι υπάρχει διαμέριση του συνόλου των χαρακτήρων της G_k σε δύο σύνολα. Συγκεκριμένα αποδεικνύουμε το εξής:

Λήμμα 1.2.7. *Έστω G_k αβελιανή ομάδα τάξεως $3 \cdot 2^k$, για κάποιον $k \geqslant 0$. Τότε, υπάρχει διαμέριση του συνόλου των χαρακτήρων $H_k = \{\gamma_j\}_{j=1}^{3\cdot 2^k}$ της G_k σε δύο σύνολα $H_k^+ = \{\sigma_j\}_{j=1}^{2^k}$ και $H_k^- = \{\tau_j\}_{j=1}^{2^{k+1}}$, με $|H_k^+| = 2^k$ και $|H_k^-| = 2^{k+1}$, ώστε για κάθε $g \in G_k$ να ισχύει*

$$\left| 2\sum_{j=1}^{2^k} \sigma_j(g) - \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \tau_j(g) \right| \leqslant \kappa 2^{k/2}\sqrt{k+1}, \tag{1.2.19}$$

όπου $\kappa > 0$ απόλυτη σταθερά.

Σημείωση. Χαρακτήρας της G είναι κάθε ομομορφισμός από την G στην πολλαπλασιαστική ομάδα $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Χρησιμοποιώντας το λήμμα αυτό κατασκευ- άζουμε εναν άπειρο πίνακα $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^\infty$ μιγαδικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες:

(i) $A^2 = 0$.

(ii) $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^\infty a_{i,i} \neq 0$.

(iii) $\sum_{i=1}^\infty (\max_j |a_{i,j}|)^r < \infty$ για κάθε $r > 2/3$.

Επιπλέον, κάθε γραμμή και κάθε στήλη του A περιέχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών στοιχείων. Θεωρώντας αυτόν τον πίνακα και χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1.6 κατασκευάζουμε έναν κλειστό υπόχωρο του ℓ_p, για $2 < p < \infty$, ο οποίος δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης.

1.2.3. Το παράδειγμα του Szankowski

Στο Κεφάλαιο 5 παρουσιάζουμε την κατασκευή του Szankowski[16]. Ο Szankowski κατασκεύασε κλειστό υπόχωρο του ℓ_p, για $1 \leqslant p < 2$ οποίος δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Ειδικότερα ο Szankowski κατασκεύασε κλειστό υπόχωρο του ℓ_p, για $1 \leqslant p < 2$, ο οποίος δεν έχει την συμπαγή ιδιότητα προσέγγισης.

Ορισμός 1.2.8. Ένας χώρος Banach έχει την *συμπαγή ιδιότητα προσέγγισης* (**CAP**) *αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγής τελεστής $T : X \to X$ που ικανοποιεί την $\|T(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$. Προφανώς, κάθε χώρος που έχει την ιδιότητα προσέγγισης έχει και την συμπαγή ιδιότητα προσέγγισης.*

Η κατασκευή βασίζεται στο εξής κριτήριο για την (CAP) :

Θεώρημα 1.2.9. *Έστω X χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ και $\{x_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ διανυσμάτων στους X και X^* αντίστοιχα, μια ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του X και μια αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ φυσικών αριθμών, ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:*

(i) $x_j^*(x_j) = 1$ *για κάθε* j.

(ii) *Η* $\{x_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ *είναι* w^**-μηδενική και* $\|\cdot\|$*-φραγμένη.*

(iii) *Για κάθε* $n \geqslant 1$ *και για κάθε* $T : X \to X$ *ισχύει*

$$|\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T)| \leqslant \sup\{\|T(x)\| : x \in F_n\}, \tag{1.2.20}$$

όπου $\beta_0(T) = 0$ *και, αν* $n \geqslant 1$,

$$\beta_n(T) = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} x_j^*(T(x_j)). \tag{1.2.21}$$

(iv) $\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, *όπου* $\gamma_n = \sup\{\|x\| : x \in F_n\}$.

Τότε, ο X δεν έχει την (CAP).

Για την κατασκευή του χώρου ορίζουμε

$$\sigma_n = \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\}, \tag{1.2.22}$$

για κάθε $n \geqslant 1$ και θεωρούμε μια ακολουθία $\{f_k(j)\}_{k=1}^{9}$ εννέα ακεραίων, η οποία μας επιτρέπει να ορίσουμε διαμερίσεις Δ_n, V_n του σ_n σε ξένα σύνολα. Ο χώρος μας είναι ο χώρος X όλων των ακολουθιών $x = (a_4, a_5, a_6, \ldots)$ που ικανοποιούν την

$$\|x\| = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{B \in \Delta_n} \left(\sum_{j \in B} |a_j|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} < \infty. \tag{1.2.23}$$

Συμβολίζοντας με $\{e_j\}_{j=4}^{\infty}$ τα μοναδιαία διανύσματα του X και με $\{e_j^*\}_{j=4}^{\infty}$ τα αντίστοιχα διορθογώνια συναρτησοειδή στον X^*, θεωρούμε τον κλειστό υπόχωρο Z του X ο οποίος παράγεται από την ακολουθία

$$z_i = e_{2i} - e_{2i+1} + e_{4i} + e_{4i+1} + e_{4i+2} + e_{4i+3}, \qquad i \geqslant 2. \tag{1.2.24}$$

Τότε θέτοντας,

$$z_i^* = \frac{1}{2}(e_{2i}^* - e_{2i+1}^*), \qquad i \geqslant 2 \tag{1.2.25}$$

και για κάθε $T : Z \to Z$,

$$\beta_n(T) = \frac{1}{2^n} \sum_{i \in \sigma_n} z_i^*(Tz_i), \qquad n \geqslant 1, \tag{1.2.26}$$

βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 1.2.9. Έτσι, ο Z δεν έχει την (CAP).

Στην Παράγραφο 3 αυτού του Κεφαλαίου παρουσιάζουμε την κατασκευή ενός Banach lattice, πάλι από τον Szankowski [15], ο οποίος δεν έχει την (CAP).

Ορισμός 1.2.10. Ένας μερικά διατεταγμένος πραγματικός χώρος Banach X λέγεται Banach lattice αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) αν $x \leqslant y$, τότε $x + z \leqslant y + z$, για κάθε $x, y, z \in X$.

(ii) $ax \geqslant 0$, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $a \geqslant 0$.

(iii) Για κάθε $x, y \in X$ υπάρχουν το ελάχιστο άνω φράγμα $x \vee y$ και το μέγιστο κάτω φράγμα $x \wedge y$ των x και y.

(iv) $\|x\| \leqslant \|y\|$, όταν $|x| \leqslant |y|$, όπου η απόλυτη τιμή $|x|$ ορίζεται ως $|x| = x \vee (-x)$.

Με τον όρο sublattice ενός Banach lattice X, εννοούμε έναν γραμμικό υπόχωρο Y του X, ώστε το $x \vee y$, (και άρα και το $x \wedge y = x + y - x \vee y$) να ανήκει στον Y, για κάθε $x, y \in Y$.

Συγκεκριμένα ο Szankowski έδειξε το εξής:

Θεώρημα 1.2.11. *Έστω $1 \leqslant r < p < \infty$. Τότε, υπάρχει sublattice του*

$$\ell_p(L_r(0,1)) = (L_r(0,1) \oplus L_r(0,1) \cdots)_p,$$

ο οποίος δεν έχει την (CAP).

Η κατασκευή του χώρου είναι παρόμοια με την προηγούμενη και βασίζεται πάλι στο Θεώρημα 1.2.9. Με την βοήθεια ενός συνδυαστικού λήμματος εξασφαλίζουμε ότι υπάρχει διαμέριση Δ_n του $[0,1]$ σε M_n ξένα $\mathcal{B}_n$-μετρήσιμα σύνολα, όπου με $\mathcal{B}_n$ συμβολίζουμε την

σ-άλγεβρα των υποσυνόλων του $[0,1]$, που παράγονται από το σύνολο των διαστημάτων $\left\{ \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right], i = 1, \ldots, 2^n \right\}$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Ο χώρος μας X είναι ο χώρος X όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων f στο $[0,1]$ που ικανοποιούν την

$$\|f\| = \left(\sum_{m=2^6}^{\infty} \sum_{B \in \Delta_m} M_m^{ap} \left(\int_B |f(t)|^r dt \right)^{p/r} \right)^{1/p} < \infty, \tag{1.2.27}$$

όπου a είναι ένας αριθμός για τον οποίο ισχύει

$$0 < ap < \frac{p}{r} - 1. \tag{1.2.28}$$

Θεωρώντας τις συναρτήσεις Walsh w_j στο $[0,1]$ και ορίζοντας για κάθε $T : X \to X$ και $n = 1, 2, \ldots$,

$$\beta_n(T) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} w_j \left(T w_j \right), \tag{1.2.29}$$

βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες του Θεωρήματος 1.2.9.

1.2.4. Το παράδειγμα των Figiel–Johnson

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε την κατασκευή ενός χώρου που έχει την ιδιότητα προσέγγισης, αλλά δεν έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης, από τους Figiel–Johnson [4]. Αποδεικνύουμε το εξής:

Θεώρημα 1.2.12. *Υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach X, ο οποίος μάλιστα έχει διαχωρίσιμο δυϊκό, που έχει την ιδιότητα προσέγγισης, αλλά δεν έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης.*

Η απόδειξη βασίζεται στο εξής θεώρημα:

Θεώρημα 1.2.13. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε, για κάθε νόρμα $|\cdot|$ στον X η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$ ο $(X, |\cdot|)$ να έχει την λ-ιδιότητα προσέγγισης. Τότε, ο X^* έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης.*

Επίσης χρησιμοποιούμε το παράδειγμα του Lindenstrauss [10]:

Θεώρημα 1.2.14. *Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X, υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach Z ώστε ο Z^{**} να έχει φραγμένα πλήρη βάση και ο Z^{**}/Z να είναι ισόμορφος με τον X.*

Από αυτό το θεώρημα έπεται, με χρήση του γεγονότος ότι αν ένας δυϊκός χώρος X^* έχει την (AP) τότε την έχει και ο X, ότι υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach Z με βάση

Schauder, του οποίου ο δυϊκός χώρος Z^* είναι διαχωρίσιμος, αλλά δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Τότε από το θεώρημα 1.2.13 μπορούμε να ορίσουμε ισοδύναμη νόρμα $|||\cdot|||_n$ στον Z έτσι ώστε ο $(Z, |||\cdot|||_n)$ να μην έχει την n-μετρική ιδιότητα προσέγγισης. Έπεται ότι ο χώρος

$$X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus (Z, |||\cdot|||_n)\right)_2 \tag{1.2.30}$$

έχει την ιδιότητα προσέγγισης, δεν έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης και έχει διαχωρίσιμο δυϊκό.

1.2.5. Το παράδειγμα του Szarek

Στο τελευταίο κεφάλαιο παρουσιάζουμε την κατασκευή του Szarek [21], ενός χώρου που έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης, αλλά δεν έχει βάση Schauder. Η κατασκευή βασίζεται σε ένα αποτέλεσμα του Szarek [20]:

Θεώρημα 1.2.15. *Για κάθε $\delta \in (0,1)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε ο χώρος $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Ο X είναι ισομετρικός με ένα πηλίκο του ℓ_1^N, όπου $N \leqslant 2n$.*

(ii) *Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2. \tag{1.2.31}$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subseteq B_1^n \subseteq B_X \subseteq B_2^n. \tag{1.2.32}$$

(iii) *Ο λόγος όγκων της B_X είναι φραγμένος:*

$$\left(\frac{|B_X|}{|\sqrt{n}^{-1} B_2^n|}\right)^{1/n} \leqslant 8. \tag{1.2.33}$$

(iv) *Ο X ικανοποιεί το θεώρημα του Grothendieck με σταθερά C.*

(v) *Αν $\|T\|_{L(X)} \leqslant c(\delta)\sqrt{n}$, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\|T - \lambda I\|_{C_0} \leqslant \delta n$.*

Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα αποδεικνύουμε το εξής:

Πρόταση 1.2.16. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $q \in [2,\infty]$ υπάρχει n-διάστατος υπόχωρος $Y = Y_q^n$ του L_q με την εξής ιδιότητα: αν F είναι ένας χώρος με νόρμα του οποίου όλοι οι n-διάστατοι υπόχωροι είναι D-Ευκλείδειοι, τότε*

$$\mathrm{bc}(Y \oplus_2 F) \geqslant c n^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} D^{-1/2}. \tag{1.2.34}$$

Ειδικότερα,

$$\mathrm{bc}(Y \oplus_2 \ell_2) \geqslant c n^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)}. \tag{1.2.35}$$

Λέμε ότι ένας χώρος Z με νόρμα είναι D-Ευκλείδειος αν έχει απόσταση Banach-Mazur $d(Z, \ell_2^{\dim(Z)}) \leqslant D$ από τον $\ell_2^{\dim(Z)}$. Με $Z \oplus_2 Z'$ συμβολίζουμε το ευθύ άθροισμα, εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|(z,z')\| = (\|z\|^2 + \|z'\|^2)^{1/2}$, δύο χώρων Z και Z' με νόρμα.
Θεωρώντας τώρα τους χώρους $Y_{q_k}^{n_k}$ της προηγούμενης πρότασης, όπου q_k ακολουθίες πραγματικών αριθμών με $q_k \downarrow 2$ και n_k ακολουθίες φυσικών αριθμών με $n_k \uparrow \infty$, αποδεικνύουμε, χρησιμοποιώντας τα αποτελέσματα του John και του Lewis [9] για την απόσταση Banach–Mazur και την πρόταση 1.2.16 ότι ο χώρος

$$Z = \left(\oplus Y_{q_k}^{n_k}\right)_{\ell_2} \tag{1.2.36}$$

δεν έχει βάση.

Κεφάλαιο 2

Βάσεις Schauder και η ιδιότητα προσέγγισης

2.1 Βάσεις Schauder

Ορισμός 2.1.1. Έστω X χώρος Banach πάνω από το $\mathbb{K}$ (το $\mathbb{K}$ είναι το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$) και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Η (x_n) λέγεται *βάση Schauder* του X αν για κάθε $x \in X$ υπάρχουν μοναδικοί $a_n = a_n(x) \in \mathbb{K}$ ώστε

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n. \tag{2.1.1}$$

Αν (x_n) είναι μια βάση Schauder του X, τότε μπορούμε να βλέπουμε τον X σαν «χώρο ακολουθιών» μέσω της ταύτισης $x \longleftrightarrow (a_1(x), a_2(x), \dots)$: η βάση μας παρέχει ένα «σύστημα συντεταγμένων» για τον X. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν μια ακολουθία (x_n) είναι βάση Schauder του X τότε τα $x_n, n \in \mathbb{N}$ είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Ειδικότερα, $x_n \neq 0$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Πρόταση 2.1.2. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder. Τότε, ο X είναι διαχωρίσιμος.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (η απόδειξη είναι εντελώς ανάλογη στην περίπτωση που $\mathbb{K} = \mathbb{C}$). Έστω (x_n) μια βάση Schauder του X. Θέτουμε

$$D = \left\{ x \in X : x = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k : n \in \mathbb{N}, a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Q} \right\}. \tag{2.1.2}$$

Είναι σαφές ότι το D είναι αριθμήσιμο υποσύνολο του X. Θα δείξουμε ότι το D είναι πυκνό υποσύνολο του X. Έστω $x \in X$ και $\varepsilon > 0$. Αφού η (x_n) είναι βάση του X, υπάρχουν $n \in \mathbb{N}$ και πραγματικοί αριθμοί $\beta_1, \dots, \beta_n$ ώστε $\|x - y\| < \varepsilon/2$ όπου $y = \sum_{k=1}^{n} \beta_k x_k$.

Θέτουμε $M = \max\{\|x_k\| : k = 1, \dots, n\}$. Επειδή το σύνολο $\mathbb{Q}$ των ρητών αριθμών είναι πυκνό υποσύνολο του $\mathbb{R}$, για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει $a_k \in \mathbb{Q}$ ώστε $|a_k - \beta_k| < \varepsilon/(2nM)$. Θεωρούμε το $z = \sum_{k=1}^{n} a_k x_k \in D$. Τότε, έχουμε

$$\|x - z\| < \|x - y\| + \|y - z\| < \frac{\varepsilon}{2} + \sum_{k=1}^{n} |a_k - \beta_k| \|x_k\| < \varepsilon. \tag{2.1.3}$$

Από αυτό έπεται ότι το D είναι πυκνό υποσύνολο του X, άρα ο X είναι διαχωρίσιμος. □

Θεώρημα 2.1.3. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_n). Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε την φυσιολογική «προβολή» $P_n : X \to X$ που ορίζεται μέσω της*

$$P_n(x) = P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i. \tag{2.1.4}$$

Τότε, κάθε P_n είναι φραγμένος τελεστής και $\sup_n \|P_n\| < +\infty$.

Απόδειξη. Κάθε P_n είναι γραμμικός τελεστής και $P_n \circ P_n = P_n$. Γενικότερα, αν $n < m$ τότε $P_n \circ P_m = P_m \circ P_n = P_n$. Θα δείξουμε ότι οι τελεστές P_n είναι φραγμένοι.

Για κάθε $x \in X$ έχουμε $P_n(x) \to x$, άρα το $\{\|P_n(x)\| : n \in \mathbb{N}\}$ είναι φραγμένο στο $\mathbb{R}$. Ορίζουμε μια νέα νόρμα $|||\cdot|||$ στον X ως εξής:

$$|||x||| = \sup_n \|P_n(x)\|. \tag{2.1.5}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $|||\cdot|||$ είναι νόρμα που ικανοποιεί την

$$\|x\| = \lim_{n\to\infty} \|P_n(x)\| \leq \sup_n \|P_n(x)\| = |||x|||, \quad x \in X. \tag{2.1.6}$$

Ισχυρισμός. Ο $(X, |||\cdot|||)$ είναι πλήρης.

Απόδειξη. Έστω $y^k = \sum_{i=1}^{\infty} a_i^k x_i$ μια $|||\cdot|||$-Cauchy ακολουθία στον X. Τότε, οι ακολουθίες $(P_n(y^k))_k$ είναι $\|\cdot\|$-Cauchy στον X ομοιόμορφα ως προς n: Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\forall k_1, k_2 \geq k_0(\varepsilon) \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n(y^{k_1}) - P_n(y^{k_2})\| < \varepsilon. \tag{2.1.7}$$

Όμως για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η ακολουθία $(P_n(y^k))_k$ βρίσκεται σε έναν χώρο πεπερασμένης διάστασης (τον $X_n = \mathrm{span}\{x_1, \dots, x_n\}$), επομένως συγκλίνει σε κάποιο $z_n \in X_n$. Επίσης, λόγω της (2.1.7), η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη ως προς n. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\forall k \geq k_0(\varepsilon) \;\; \forall n \in \mathbb{N}, \quad \|P_n(y^{k_1}) - z_n\| \leq \varepsilon. \tag{2.1.8}$$

Η ακολουθία $(z_n)_n$ είναι $\|\cdot\|$-Cauchy: έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $k_0 \in \mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $k \geq k_0$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$, να έχουμε $\|P_n(y^k) - z_n\| < \varepsilon/3$. Τότε, για κάθε $n, m \in \mathbb{N}$ παίρνουμε

$$\|z_n - z_m\| < \frac{2\varepsilon}{3} + \|P_n(y^k) - P_m(y^k)\| \tag{2.1.9}$$

αν $k \geq k_0$. Αφού $\lim_{n\to\infty} P_n(y^k) = y^k$, αν σταθεροποιήσουμε κάποιο $k \geq k_0$ και πάρουμε τα n, m αρκετά μεγάλα, βλέπουμε ότι

$$\|P_n(y^k) - P_m(y^k)\| < \frac{\varepsilon}{3}, \tag{2.1.10}$$

δηλαδή

$$\|z_n - z_m\| < \varepsilon. \tag{2.1.11}$$

Ο $(X, \|\cdot\|)$ είναι πλήρης, άρα υπάρχει $z \in X$ τέτοιο ώστε $\|z_n - z\| \to 0$. Παρατηρούμε ότι αν $m > n$, τότε

$$P_n(z_m) = P_n(\lim_k P_m(y^k)) = \lim_k P_n(P_m(y^k)) = \lim_k P_n(y^k) = z_n. \tag{2.1.12}$$

(η δεύτερη ισότητα ισχύει γιατί όλα τα $P_m(y^k)$ ανήκουν στον πεπερασμένης διάστασης χώρο $(X_m, \|\cdot\|)$ στον οποίο η P_n είναι συνεχής).

Από την (2.1.12) συμπεραίνουμε ότι υπάρχει ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{K}$ ώστε

$$z_n = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{2.1.13}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Έπεται ότι

$$z = \lim_{n\to\infty} z_n = \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i. \tag{2.1.14}$$

Τέλος, από την (2.1.8) βλέπουμε ότι

$$|||z - y^k||| = \sup_n \|z_n - P_n(y^k)\| \to 0 \tag{2.1.15}$$

όταν $k \to \infty$, το οποίο αποδεικνύει τον ισχυρισμό. □

Θεωρούμε τώρα την ταυτοτική απεικόνιση $I : (X, |||\cdot|||) \to (X, \|\cdot\|)$. Η I είναι γραμμικός, 1-1 και επί τελεστής. Αφού $\|x\| \leq |||x|||$ για κάθε $x \in X$, ο I είναι φραγμένος τελεστής. Οι δύο χώροι είναι πλήρεις, άρα εφαρμόζεται το θεώρημα αντίστροφης απεικόνισης: ο I^{-1} είναι φραγμένος, δηλαδή υπάρχει $K > 0$ ώστε

$$\sup_n \|P_n(x)\| = |||x||| \leq K\|x\| \tag{2.1.16}$$

για κάθε $x \in X$. Άρα, κάθε P_n είναι φραγμένος τελεστής και

$$\sup_n \|P_n\| \leq K < +\infty. \qquad \square \tag{2.1.17}$$

Ορισμός 2.1.4. Ο αριθμός $M = \sup_n \|P_n\|$ λέγεται *σταθερά της βάσης* (x_i). Αν $M = 1$ τότε η βάση (x_i) λέγεται *μονότονη*.

Από την $P_n \circ P_m = P_n$, $n < m$ παίρνουμε το εξής.

Πόρισμα 2.1.5. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_i). Για κάθε $n < m$ και κάθε $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$ ισχύει*

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\Big\| \leq M \Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\Big\| \tag{2.1.18}$$

όπου M η σταθερά της βάσης (x_i).

Απόδειξη. Θέτουμε $x = \sum_{i=1}^{m} a_i x_i$. Τότε, $P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i$. Το συμπέρασμα προκύπτει από την $\|P_n(x)\| \leq \|P_n\| \cdot \|x\| \leq M\|x\|$. $\square$

Ορισμός 2.1.6. Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_i). Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $x_i^* : X \to \mathbb{K}$ με $x_i^*\left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n\right) = a_i$. Κάθε x_i^* είναι γραμμικό συναρτησοειδές, και $x_j^*(x_i) = \delta_{ij}$, $i, j \in \mathbb{N}$.

Η ακολουθία $\{x_i^* : i \in \mathbb{N}\}$ είναι η *διορθογώνια ακολουθία* της $\{x_i : i \in \mathbb{N}\}$. Κάθε $x \in X$ γράφεται στην μορφή

$$x = \sum_{i=1}^{\infty} x_i^*(x) x_i. \tag{2.1.19}$$

Επιπλέον, κάθε $x_i^* \in X^*$:

Πρόταση 2.1.7. *Έστω X χώρος Banach με βάση Schauder την (x_i), και έστω (x_i^*) η διορθογώνια ακολουθία της (x_i). Κάθε x_i^* είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές και*

$$\|x_i^*\|_* \leq \frac{2M}{\|x_i\|}, \tag{2.1.20}$$

όπου $M > 0$ η σταθερά της βάσης (x_i).

Απόδειξη. Θέτουμε $P_0 \equiv 0$ και θεωρούμε τυχόν $x \in X$. Από την $x_i^*(x)x_i = P_i(x) - P_{i-1}(x)$ βλέπουμε ότι

$$|x_i^*(x)| = \frac{1}{\|x_i\|}\,\|P_i(x) - P_{i-1}(x)\| \leq \frac{2M}{\|x_i\|}\,\|x\|, \tag{2.1.21}$$

όπου $M > 0$ είναι η σταθερά της βάσης (x_i). $\square$

Πρόταση 2.1.8 (αρχή των μικρών διαταραχών). *Έστω X χώρος Banach και έστω (x_n) βάση Schauder του X, με σταθερά βάσης $M > 0$ και $\delta := \inf\{\|x_n\| : n \in \mathbb{N}\} > 0$. Αν (y_n) είναι ακολουθία στον X η οποία ικανοποιεί την*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < \frac{\delta}{2M}, \tag{2.1.22}$$

τότε η (y_n) είναι επίσης βάση Schauder του X.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι αν η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$ συγκλίνει, τότε η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i$ συγκλίνει: έστω ότι $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i \in X$. Για κάθε $n < m$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=n}^{m} \lambda_i y_i \right\| &\leq \max_{n \leq i \leq m} |\lambda_i| \sum_{i=n}^{m} \|y_i - x_i\| + \left\| \sum_{i=n}^{m} \lambda_i x_i \right\| \\ &\leq \frac{2M}{\delta} \|x\| \sum_{i=n}^{m} \|y_i - x_i\| + \left\| \sum_{i=n}^{m} \lambda_i x_i \right\|, \end{aligned} \tag{2.1.23}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την τριγωνική ανισότητα και την $|\lambda_i| = |x_i^*(x)| \leq \frac{2M}{\delta}\|x\|$. Από τις υποθέσεις μας, το δεξιό μέλος τείνει στο μηδέν όταν $n, m \to \infty$. Άρα, η $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i$ είναι ακολουθία Cauchy στον X. Έπεται ότι υπάρχει το $y = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i$.

Ορίζουμε $T : X \to X$ ως εξής: κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στη μορφή $x = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i$. Ορίζουμε

$$T\left(\sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda_i y_i. \tag{2.1.24}$$

Ο T είναι καλά ορισμένος γραμμικός τελεστής, και για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|x - T(x)\| = \left\| \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n (x_n - y_n) \right\| \leq \frac{2M}{\delta} \|x\| \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\|, \tag{2.1.25}$$

δηλαδή

$$\|I - T\| \leq \frac{2M}{\delta} \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n - y_n\| < 1. \tag{2.1.26}$$

Έπεται ότι ο T είναι ισομορφισμός: ο αντίστροφος του T είναι ο τελεστής $S = \sum_{k=0}^{\infty} (I - T)^k$. Η σύγκλιση της σειράς έπεται από την $\|I - T\| < 1$: Αφού $\|(I - T)^k\| \leq \|I - T\|^k$ για κάθε k, παίρνουμε

$$\sum_{k=0}^{\infty} \|(I - T)^k\| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \|I - T\|^k = \frac{1}{1 - \|I - T\|}. \tag{2.1.27}$$

Χρησιμοποιώντας την $\lim_n (I-T)^n = 0$, βλέπουμε ότι

$$T\left(\sum_{k=0}^{\infty}(I-T)^k\right) = \lim_{n\to\infty} T\left(\sum_{k=0}^{n}(I-T)^k\right) = \lim_{n\to\infty}(I-(I-T)^{n+1}) = I. \tag{2.1.28}$$

Με τον ίδιο τρόπο ελέγχουμε ότι

$$\left(\sum_{k=0}^{\infty}(I-T)^k\right)T = I. \tag{2.1.29}$$

Τέλος, εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε $x \in X$ γράφεται μονοσήμαντα στην μορφή $\sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n y_n$: αρκεί να γράψουμε το $T^{-1}(x)$ στην μορφή $T^{-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\lambda_n x_n$. □

2.1α′ Βασικές ακολουθίες

Ορισμός 2.1.9. Έστω X χώρος Banach και έστω (x_n) ακολουθία στον X. Η (x_n) λέγεται *βασική ακολουθία* αν είναι βάση για τον υπόχωρο $Y = \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ που παράγει. Η επόμενη Πρόταση μας δίνει ένα κριτήριο για να εξετάζουμε αν μια ακολουθία είναι βασική.

Πρόταση 2.1.10. *Έστω X χώρος Banach και έστω (x_n) ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων στον X. Η (x_n) είναι βασική ακολουθία αν και μόνο αν υπάρχει σταθερά $K > 0$ με την ιδιότητα*

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq K \left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\| \tag{2.1.30}$$

για κάθε $n < m$ και για κάθε $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη. Η μία κατεύθυνση προκύπτει άμεσα αν εφαρμόσουμε το Πόρισμα 2.1.5 για τον $Y = \overline{\mathrm{span}}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση, ας υποθέσουμε ότι η (x_n) ικανοποιεί την (2.1.30). Παρατηρούμε πρώτα ότι τα διανύσματα x_n είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Αν $\sum_{i=1}^{m} a_i x_i = 0$, τότε για κάθε $2 \leq j \leq m$ έχουμε

$$|a_j|\,\|x_j\| \leq \Big\|\sum_{i=1}^{j} a_i x_i\Big\| + \Big\|\sum_{i=1}^{j-1} a_i x_i\Big\| \leq 2K\Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\Big\| = 0. \tag{2.1.31}$$

Η ίδια ανισότητα ισχύει (με σταθερά K αντί για $2K$) όταν $j = 1$. Έπεται ότι $a_1 = \cdots = a_m = 0$.

Θεωρούμε τον $F = \mathrm{span}\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$. Ο F είναι πυκνός υπόχωρος του Y. Για κάθε n ορίζουμε $P_n : F \to F$ με

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{\min\{m,n\}} a_i x_i. \tag{2.1.32}$$

Ο P_n είναι καλά ορισμένος, λόγω της γραμμικής ανεξαρτησίας των x_i, και από την (2.1.30) συμπεραίνουμε ότι $\|P_n\| \leq K$ για κάθε n. Χρησιμοποιώντας την πυκνότητα του F στον Y μπορούμε να επεκτείνουμε τον P_n σε ολόκληρο τον Y, με διατήρηση της $\|P_n\| \leq K$.

Έστω $x \in Y$. Από τον τρόπο ορισμού των P_n βλέπουμε ότι υπάρχει (μοναδική) ακολουθία $(a_i)_{i\in\mathbb{N}}$ στο $\mathbb{K}$ ώστε

$$P_n(x) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \tag{2.1.33}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (χρησιμοποιήστε την $P_n \circ P_m = P_n$ αν $n < m$). Μένει να δείξουμε ότι $P_n(x) \to x$. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $z = \sum_{i=1}^{n} b_i x_i \in F$ ώστε $\|x - z\| < \varepsilon$. Για κάθε $m > n$ έχουμε $P_m(z) = z$, άρα

$$\begin{aligned} \|x - P_m(x)\| &\leq \|x - z\| + \|z - P_m(z)\| + \|P_m(z) - P_m(x)\| \\ &\leq (1 + \|P_m\|)\,\|x - z\| < (1 + K)\,\varepsilon, \end{aligned} \tag{2.1.34}$$

το οποίο αποδεικνύει το ζητούμενο. □

Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach περιέχει κλειστό υπόχωρο με βάση. Με άλλα λόγια, σε κάθε απειροδιάστατο χώρο Banach υπάρχει βασική ακολουθία. Η απόδειξη βασίζεται στο εξής *Λήμμα του Mazur*:

Πρόταση 2.1.11. *Έστω X απειροδιάστατος χώρος με νόρμα και έστω F υπόχωρος του X με πεπερασμένη διάσταση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $x \in X$ με $\|x\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την*

$$\|y\| \leq (1 + \varepsilon)\|y + \lambda x\| \tag{2.1.35}$$

για κάθε $y \in F$ και $\lambda \in \mathbb{K}$.

Απόδειξη. Ζητάμε $x \in S_X$ το οποίο να είναι «κάθετο» στον F (στην περίπτωση που ο X είναι χώρος Hilbert, οποιοδήποτε $x \in S_X$ με $x \perp F$ ικανοποιεί το ζητούμενο, με σταθερά 1, από το Πυθαγόρειο Θεώρημα).

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $0 < \varepsilon < 1$. Αφού $\dim(F) < \infty$, η μοναδιαία σφαίρα S_F του F είναι συμπαγής. Άρα, μπορούμε να βρούμε $y_1, \ldots, y_k \in S_F$ τα οποία να σχηματίζουν $\varepsilon/2$–δίκτυο: για κάθε $y \in S_F$ υπάρχει $j \leq k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$.

Από το θεώρημα Hahn–Banach, για κάθε $j = 1, \ldots, k$ μπορούμε να βρούμε $y_j^* \in X^*$ με $\|y_j^*\| = 1$ και $y_j^*(y_j) = 1$. Ο υπόχωρος $\bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ έχει πεπερασμένη συνδιάσταση, συνεπώς, αφού $\dim(X) = \infty$, υπάρχει $x \in \bigcap_{j=1}^{k} \mathrm{Ker}(y_j^*)$ με $\|x\| = 1$. Δηλαδή,

$$y_1^*(x) = \cdots = y_k^*(x) = 0. \tag{2.1.36}$$

Έστω $y \in S_F$ και $\lambda \in \mathbb{K}$. Υπάρχει $j \leq k$ ώστε $\|y - y_j\| < \varepsilon/2$. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned} \|y+\lambda x\| &\geq \|y_j+\lambda x\| - \|y-y_j\| \geq \|y_j+\lambda x\| - \frac{\varepsilon}{2} \\ &\geq y_j^*(y_j+\lambda x) - \frac{\varepsilon}{2} = y_j^*(y_j) - \frac{\varepsilon}{2} \\ &= 1 - \frac{\varepsilon}{2} \geq \frac{1}{1+\varepsilon}, \end{aligned} \tag{2.1.37}$$

δηλαδή $\|y\| = 1 \leq (1+\varepsilon)\|y+\lambda x\|$ για κάθε $y \in S_F$ και κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$.

Έπεται το συμπέρασμα για κάθε $y \in F$: Αν $y = 0$, τότε είναι προφανές. Αν $0 \neq y \in F$, τότε $\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| = 1$, άρα για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ έχουμε,

$$\left\|\frac{y}{\|y\|}\right\| \leqslant (1+\varepsilon)\left\|\frac{y}{\|y\|} + \lambda\frac{x}{\|y\|}\right\|, \tag{2.1.38}$$

δηλαδή $\|y\| \leqslant (1+\varepsilon)\|y+\lambda x\|$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Θεώρημα 2.1.12. *Κάθε απειροδιάστατος χώρος Banach X περιέχει κλειστό υπόχωρο με βάση Schauder.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε κάτι ισχυρότερο: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει βασική ακολουθία (x_i) στον X με σταθερά $M \leq 1+\varepsilon$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε ακολουθία (ε_n) θετικών αριθμών, με $\prod_{n=1}^{\infty}(1+\varepsilon) \leq 1+\varepsilon$.

Θεωρούμε τυχόν $x_1 \in X$ με $\|x_1\| = 1$ και θέτουμε $F_1 = \mathrm{span}\{x_1\}$. Από το Λήμμα του Mazur υπάρχει $x_2 \in X$ με $\|x_2\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon_2)\|y + a_2 x_2\| \tag{2.1.39}$$

για κάθε $y \in F_1$ και για κάθε $a_2 \in \mathbb{K}$. Θέτουμε $F_2 = \mathrm{span}\{x_1, x_2\}$ και επιλέγουμε $x_3 \in X$ με $\|x_3\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon_3)\|y + a_3 x_3\| \tag{2.1.40}$$

για κάθε $y \in F_2$ και για κάθε $a_3 \in \mathbb{K}$.

Στο n–οστό βήμα, θέτουμε $F_n = \mathrm{span}\{x_1, \ldots, x_n\}$ και επιλέγουμε $x_{n+1} \in X$ με $\|x_{n+1}\| = 1$, το οποίο ικανοποιεί την

$$\|y\| \leq (1+\varepsilon_{n+1})\|y + a_{n+1} x_{n+1}\| \tag{2.1.41}$$

για κάθε $y \in F_n$ και για κάθε $a_{n+1} \in \mathbb{K}$. Με αυτό τον τρόπο ορίζεται ακολουθία (x_i) στον X. Θα δείξουμε ότι: αν $n < m$ και $a_1, \ldots, a_m \in \mathbb{K}$, τότε

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right\| \leq (1+\varepsilon)\left\|\sum_{i=1}^{m} a_i x_i\right\|. \tag{2.1.42}$$

Για την απόδειξη της (2.1.42) χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι για κάθε $n \leq k < m$ έχουμε $y_k = \sum_{i=1}^{k} a_i x_i \in F_k$, και την επιλογή των x_i: έχουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| = \|y_n\| \leq (1+\varepsilon_{n+1})\|y_n + a_{n+1}x_{n+1}\| = (1+\varepsilon_{n+1})\|y_{n+1}\|, \tag{2.1.43}$$

και, επαγωγικά,

$$\|y_n\| \leq (1+\varepsilon_{n+1})\|y_{n+1}\| \leq \prod_{j=n+1}^{n+2}(1+\varepsilon_j)\|y_{n+2}\| \leq \cdots \leq \prod_{j=n+1}^{m}(1+\varepsilon_j)\|y_m\|, \tag{2.1.44}$$

δηλαδή,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \right\| \leq \prod_{j=n+1}^{m}(1+\varepsilon_j) \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\| \leq (1+\varepsilon) \left\| \sum_{i=1}^{m} a_i x_i \right\|. \tag{2.1.45}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η (x_i) είναι βασική, με σταθερά $M \leq 1+\varepsilon$. □

2.1β′ Παραδείγματα βάσεων Schauder

Κάποιοι από τους κλασικούς χώρους Banach έχουν μια πολύ φυσιολογική βάση Schauder. Για παράδειγμα, εύκολα ελέγχουμε ότι η συνήθης ακολουθία (e_n), όπου $e_n = (0,\dots,0,1,0,\dots)$ με τη μονάδα στη n-οστή θέση, είναι βάση Schauder για τον $\ell_p, 1 \leq p < \infty$ και για τον c_0.

Πράγματι, αν $p = 1$, τότε για κάθε $n < m$ και κάθε $a_1,\dots,a_m \in \mathbb{R}$ έχουμε,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Big\|_1 = \sum_{i=1}^{n} |a_i| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |a_i| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{m} a_i e_i \Big\|_1. \tag{2.1.46}$$

Από την Πρόταση 2.1.10 έπεται ότι η (e_n) είναι μονότονη βάση Schauder του ℓ_1. Ανάλογα ελέγχουμε ότι η (e_n) είναι βάση Schauder του $\ell_p, 1 < p < \infty$ και του c_0.

Σε αυτή την Παράγραφο θα συζητήσουμε κάποια κλασικά παραδείγματα βάσεων σε χώρους συναρτήσεων.

1. Η βάση του Schauder για τον $C[0,1]$.

Η βάση του Schauder (f_n) στον $C[0,1]$ ορίζεται ως εξής: οι πρώτες πέντε συναρτήσεις της ακολουθίας είναι οι:

(i) $f_0(t) = 1$ στο $[0,1]$.

(ii) $f_1(t) = t$ στο $[0,1]$.

(iii) $f_2(t) = 2t$ στο $[0,1/2]$ και $f_2(t) = 2-2t$ στο $[1/2,1]$.

(iv) $f_3(t) = 4t$ στο $[0,1/4]$, $f_3(t) = 2-4t$ στο $[1/4,1/2]$ και $f_3(t) = 0$ στο $[1/2,1]$.

(v) $f_4(t) = 0$ στο $[0,1/2]$, $f_4(t) = 4t-2$ στο $[1/2,3/4]$ και $f_4(t) = 4-4t$ στο $[3/4,1]$.

Γενικά, αν $k \geq 1$ και $i = 1,\dots,2^k$, ορίζουμε την f_{2^k+i} θέτοντας

$$f_{2^k+i}(t) = f_2(2^k t - i + 1) \quad \text{αν} \quad \frac{i-1}{2^k} \leq t \leq \frac{i}{2^k} \tag{2.1.47}$$

και $f_{2^k+i}(t) = 0$ αλλιώς.

Βασική παρατήρηση. Θεωρούμε την αρίθμηση $t_0 = 0$, $t_1 = 1$, $t_2 = 1/2$, $t_3 = 1/4$, $t_5 = 3/4$ κλπ των δυαδικών ρητών $k/2^m$ του $[0,1]$. Από τον τρόπο ορισμού των f_n έχουμε

$$f_n(t_n) = 1 \quad \text{και} \quad f_m(t_n) = 0 \ \text{ αν } m > n. \tag{2.1.48}$$

Έπεται ότι οι f_n είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

Βασική συνέπεια του τρόπου ορισμού των f_n είναι η εξής: για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ο υπόχωρος $\mathrm{span}\{f_0, f_1, \dots, f_{2^n}\}$ συμπίπτει με τον υπόχωρο F_n των κατά τμήματα γραμμικών συνεχών συναρτήσεων που έχουν κόμβους στους δυαδικούς ρητούς $k/2^n$, $k = 0,1,\dots,2^n$. Αυτό προκύπτει εύκολα αν παρατηρήσουμε ότι και οι δύο χώροι έχουν διάσταση 2^n+1. Μια βάση του F_n είναι η $\{g_0, g_1, \dots, g_{2^n}\}$, όπου η g_i ορίζεται μονοσήμαντα από τις $g_i(l/2^n) = \delta_{il}$, $l = 0,1,\dots,2^n$.

Η επόμενη παρατήρηση είναι ότι ο υπόχωρος που παράγεται από τις f_n είναι πυκνός στον $C[0,1]$. Αυτό προκύπτει από την προηγούμενη παρατήρηση και από το γεγονός ότι $\overline{\bigcup_{n=1}^{\infty} F_n}^{\|\cdot\|_\infty} = C[0,1]$ (για τον τελευταίο ισχυρισμό, χρησιμοποιήστε την πυκνότητα των δυαδικών ρητών στο $[0,1]$).

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.10, προκειμένου να δείξουμε ότι η (f_n) είναι βάση για τον $C[0,1]$, αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει σταθερά $K > 0$ με την ιδιότητα

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i f_i\Big\| \leq K \Big\|\sum_{i=1}^{m} a_i f_i\Big\| \tag{2.1.49}$$

για κάθε $n < m$ και για κάθε $a_1, \dots, a_m \in \mathbb{R}$. Θα δείξουμε ότι η (2.1.49) ισχύει με $K = 1$ (με άλλα λόγια, η (f_n) είναι μονότονη βάση του $C[0,1]$): θέτουμε $P_n = \sum_{i=1}^{n} a_i f_i$ και $P_m = \sum_{i=1}^{m} a_i f_i$. Παρατηρήστε ότι, για κάθε $k \leq n$ ισχύει

$$P_m(t_k) = \sum_{i=0}^{m} a_i f_i(t_k) = \sum_{i=0}^{n} a_i f_i(t_k) = P_n(t_k), \tag{2.1.50}$$

αφού $f_{n+1}(t_k) = \cdots = f_m(t_k) = 0$. Έπεται ότι

$$\|P_n\|_\infty = \max_{0\leq k\leq n} |P_n(t_k)| = \max_{0\leq k\leq n} |P_m(t_k)| \leq \max_{0\leq k\leq m} |P_m(t_k)| = \|P_m\|_\infty. \tag{2.1.51}$$

Τα παραπάνω δείχνουν ότι η $(f_n)_{n\geq 0}$ είναι βάση Schauder του $C[0,1]$. Κάθε $f \in C[0,1]$ γράφεται μονοσήμαντα στην μορφή $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f_n$. Χρησιμοποιώντας μάλιστα την βασική παρατήρηση, μπορούμε να υπολογίσουμε εύκολα τους συντελεστές a_n: έχουμε

$$a_n = f(t_n) - \sum_{k=0}^{n-1} a_k f_k(t_n) \tag{2.1.52}$$

για κάθε $n \geq 0$, απ΄ όπου υπολογίζονται διαδοχικά οι $a_0, a_1, \ldots, a_n, \ldots$.

2. Το σύστημα Haar στον $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$

Το σύστημα Haar (h_n) στον $L_p[0,1]$, $1 \leq p < \infty$ ορίζεται ως εξής: οι πρώτες τέσσερις συναρτήσεις της ακολουθίας είναι οι:

(i) $h_0(t) = 1$ στο $[0,1]$.

(ii) $h_1(t) = 1$ στο $[0,1/2]$ και $h_1(t) = -1$ στο $(1/2,1]$.

(iii) $h_2(t) = 1$ στο $[0,1/4]$, $h_2(t) = -1$ στο $(1/4,1/2]$ και $h_2(t) = 0$ στο $(1/2,1]$.

(iv) $h_3(t) = 0$ στο $[0,1/2)$, $h_3(t) = 1$ στο $[1/2,3/4]$ και $h_3(t) = -1$ στο $(3/4,1]$.

Γενικά, αν $k \geq 1$ και $i = 0,1,\ldots,2^k-1$, ορίζουμε την h_{2^k+i} θέτοντας

$$h_{2^k+i}(t) = h_1(2^k t - i) \quad \text{αν} \quad \frac{i}{2^k} \leq t \leq \frac{i+1}{2^k} \tag{2.1.53}$$

και $h_{2^k+i}(t) = 0$ αλλιώς. Το σύστημα Haar συνδέεται με την βάση του Schauder ως εξής: για κάθε $n \geq 1$,

$$f_n(t) = 2^{n-1} \int_0^t h_{n-1}(s)\, ds. \tag{2.1.54}$$

Παρατηρήσεις. (α) Για κάθε $n \geq 1$ έχουμε

$$\int_0^1 h_n(t)\, dt = 0. \tag{2.1.55}$$

(β) Αν $n < m$ τότε συμβαίνει ένα από τα εξής δύο: είτε οι h_n, h_m έχουν ξένους φορείς ή ο φορέας της h_m περιέχεται στον φορέα της h_n και η h_n είναι σταθερή (ίση με 1 ή -1) στον φορέα της h_m. Σε κάθε περίπτωση, αν $n \neq m$ έχουμε

$$\int_0^1 h_n(t) h_m(t)\, dt = 0. \tag{2.1.56}$$

(γ) Από το (β) έπεται ότι οι h_n, $n \geq 0$ είναι γραμμικά ανεξάρτητες: αν $a_1h_1+\cdots+a_nh_n \equiv 0$, τότε για κάθε $j = 1, \ldots, n$ έχουμε

$$0 = \int_0^1 (a_1h_1 + \cdots + a_nh_n)(t)h_j(t)\,dt = a_j. \tag{2.1.57}$$

Θα δείξουμε ότι η $(h_n)_{n\geq 0}$ είναι μονότονη βάση του $L_p[0,1]$. Παρατηρούμε πρώτα ότι ο υπόχωρος που παράγουν οι h_n είναι πυκνός στον $L_p[0,1]$. Έστω $k \in \mathbb{N}$ και έστω H_k ο υπόχωρος που παράγουν οι χ_I, όπου I διάστημα της μορφής $\left[\frac{i-1}{2^k}, \frac{i}{2^k}\right]$, $i = 1, \ldots, 2^k$. Η διάσταση του H_k είναι 2^k και οι $h_0, h_1, \ldots, h_{2^k-1}$ ανήκουν στον H_k και είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Άρα,

$$H_k = \mathrm{span}\{h_n : 0 \leq n \leq 2^k - 1\} \subseteq \overline{\mathrm{span}\{h_n : n \geq 0\}}^{\|\cdot\|_p}. \tag{2.1.58}$$

Δεδομένου ότι $L_p[0,1] = \overline{\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k}^{\|\cdot\|_p}$, συμπεραίνουμε ότι

$$L_p[0,1] = \overline{\mathrm{span}\{h_n : n \geq 0\}}^{\|\cdot\|_p}. \tag{2.1.59}$$

Σύμφωνα με την Πρόταση 2.1.10, προκειμένου να δείξουμε ότι η (h_n) είναι μονότονη βάση για τον $L_p[0,1]$, αρκεί να δείξουμε ότι: για κάθε $g = \sum_{k=0}^{n} a_kh_k$ και για κάθε $a_{n+1} \in \mathbb{R}$, ισχύει

$$\|g\|_p^p \leq \|g + a_{n+1}h_{n+1}\|_p^p. \tag{2.1.60}$$

Παρατηρούμε ότι η g είναι σταθερή (ίση, ας πούμε, με c) στον φορέα I της h_{n+1} ενώ η $g + a_{n+1}h_{n+1}$ παίρνει τις τιμές $c \pm a_{n+1}$ σε δύο διαστήματα μήκους $|I|/2$. Στο $[0,1] \setminus I$ οι g, $g + a_{n+1}h_{n+1}$ συμπίπτουν. Άρα,

$$\begin{aligned} \|g + a_{n+1}h_{n+1}\|_p^p - \|g\|_p^p &= \int_I \left(|c + a_{n+1}h_{n+1}(t)|^p - |c|^p\right)\,dt \\ &= \frac{|I|}{2}\left(|c + a_{n+1}|^p + |c - a_{n+1}|^p - 2|c|^p\right). \end{aligned} \tag{2.1.61}$$

Η τελευταία ποσότητα είναι μη αρνητική: όταν $p \geq 1$, η $x \mapsto |x|^p$ είναι κυρτή, συνεπώς, χρησιμοποιώντας την ανισότητα

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p \leq \frac{|x|^p + |y|^p}{2} \tag{2.1.62}$$

με $x = c + a_{n+1}$ και $y = c - a_{n+1}$ παίρνουμε το ζητούμενο.

2.2 Φραγμένα πλήρεις και συρρικνούσες βάσεις

Ορισμός 2.2.1. Μια βάση Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ενός χώρου Banach λέγεται συρρικνούσα αν η ακολουθία των διορθογώνιων συναρτησοειδών $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση του X^*, δηλαδή αν $\overline{\mathrm{span}}\{x_n^* : n = 1, 2, \ldots\} = X^*$.

Η επόμενη πρόταση μας δίνει ένα απλό, αλλά χρήσιμο κριτήριο για να ελέγχουμε πότε μια βάση είναι συρρικνούσα.

Πρόταση 2.2.2. *Μια βάση Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ενός χώρου Banach X είναι συρρικνούσα αν και μόνο αν*

$$\lim_{n\to\infty} \left\| x^* \mid_{\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i=n}^{\infty}} \right\| = 0, \tag{2.2.1}$$

όπου $\left\| x^* \mid_{\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i=n}^{\infty}} \right\| = \sup\left\{ x^*(y) : y \in \overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i=n}^{\infty} \right\}$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι συρρικνούσα. Έστω P_n η φυσιολογική n-οστή προβολή του X ως προς την βάση. Για κάθε $a_i = a_i(x) \in \mathbb{K}$ και για κάθε $n < m$ έχουμε

$$P_n^* \left(\sum_{i=1}^{m} a_i x_i^* \right) = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*. \tag{2.2.2}$$

Αφού η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι συρρικνούσα, έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \|P_n^* x^* - x^*\| = 0 \tag{2.2.3}$$

για κάθε $x^* \in X^*$. Παίρνοντας υπόψιν το γεγονός ότι $P_{n-1}^*(x^* \mid_{\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i=1}^{\infty}}) = 0$ και γράφοντας $x^* = (x^* - P_{n-1}^* x^*) + P_{n-1}^* x^*$ για κάθε $x^* \in X^*$, παίρνουμε το ζητούμενο.

Αντίστροφα, έστω ότι ισχύει η (2.2.1) και έστω $x \in X$ με $\|x\| = 1$. Τότε,

$$\begin{aligned} |(x^* - P_n^* x^*)(x)| &= |x^*(I_x - P_n)(x)| \\ &\leqslant \left\| x^* \mid_{\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}} \right\| \|I_x - P_n\| \|x\| \\ &\leqslant (K+1) \left\| x^* \mid_{\overline{\operatorname{span}}\{x_i\}_{i=n+1}^{\infty}} \right\| \|x\|, \end{aligned} \tag{2.2.4}$$

όπου K η σταθερά της βάσης $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Έπεται ότι $\|P_n^* x^* - x^*\| \to 0$ καθώς $n \to \infty$. □

Πρόταση 2.2.3. *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ συρρικνούσα βάση ενός χώρου Banach X. Τότε, η απεικόνιση $T(x^{**}) = (x^{**}(x_1), x^{**}(x_2), \ldots)$ είναι ισομορφισμός από τον X^{**} στον χώρο όλων των ακολουθιών $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ για τις οποίες ισχύει*

$$|||(a_n)||| = \sup_n \| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \| < \infty. \tag{2.2.5}$$

Επιπλέον, αν η βάση $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μονότονη, τότε η T είναι ισομετρία.

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι η $|||\cdot|||$ ορίζει νόρμα στον διανυσματικό χώρο όλων των ακολουθιών (a_n), με $|||(a_n)||| < \infty$. Έστω P_n η φυσιολογική προβολή στον X και έστω K η σταθερά της βάσης $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Τότε, για κάθε $x^{**} \in X^{**}$ έχουμε

$$P_n^{**}(x^{**}) = \sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*)(x_i). \tag{2.2.6}$$

Επίσης,

$$|||T(x^{**})||| = \sup_n \Big\| \sum_{i=1}^{n} x^{**}(x_i^*)x_i \Big\| = \sup_n \|P_n^{**}(x^{**})\| \leqslant K\|x^{**}\|. \tag{2.2.7}$$

Άρα, ο T είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής, με $\|T\| \leqslant K$.

Έστω $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ώστε $\sup_n \Big\| \sum a_i x_i \Big\| < \infty$. Τότε, το $\Big\{ \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\}_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένο στον X^{**}, επομένως υπάρχει $x^{**} \in X^{**}$ ώστε $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i \overset{w^*}{\to} x^{**}$. Άρα, $x^{**}(x_i^*) = a_i$ για κάθε i. Επίσης,

$$\|x^{**}\| \leqslant \limsup_n \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\| \leqslant |||(a_n)|||. \tag{2.2.8}$$

Επομένως, έχουμε $\|x^{**}\| \leqslant \|T(x^{**})\|$ και $T(x^{**}) = (a_n)$. Αν η βάση $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι μονότονη, τότε $K = 1$, άρα η T είναι ισομετρία. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ορισμός 2.2.4. Μια βάση Schauder $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ ενός χώρου Banach X λέγεται φραγμένα πλήρης αν, για κάθε ακολουθία $a_n \in \mathbb{K}$ με $\sup_n \Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i x_i \Big\| < \infty$, η σειρά $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n$ συγκλίνει.

Πρόταση 2.2.5. *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ μια φραγμένα πλήρης βάση Schauder ενός χώρου Banach X. Τότε, ο X είναι ισομορφικός με έναν δυϊκό χώρο. Συγκεκριμένα, ο X είναι ισομορφικός με τον $\Big(\overline{\mathrm{span}}\{x_n^* : n = 1, 2, \ldots\}\Big)^*$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $Z = \overline{\mathrm{span}}\{x_n^* : n = 1, 2, \ldots\}$ και ορίζουμε $J : X \to Z^*$ με $Jx(z) = z(x)$. Είναι σαφές ότι ο J είναι γραμμικός τελεστής. Έστω $x \in X$. Τότε, για κάθε $z \in Z$ έχουμε $|J(x)(z)| = |z(x)| \leqslant \|z\|\|x\|$. Άρα,

$$\|J(x)\| \leqslant \|x\| \tag{2.2.9}$$

για κάθε $x \in X$.

Ο ισχυρισμός είναι ότι $\frac{1}{K}\|x\| \leqslant \|J(x)\|$ για κάθε $x \in X$, όπου K η σταθερά της βάσης $(x_n)_{n=1}^{\infty}$. Αρκεί να το δείξουμε για κάθε $x \in \mathrm{span}\{\mathrm{x_n} : \mathrm{n} = 1, 2, \ldots\}$. Πράγματι, έστω $x \in \mathrm{span}\{\mathrm{x_n} : \mathrm{n} = 1, 2, \ldots\}$. Τότε, υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ ώστε $P_n(x) = x$. Από το θεώρημα Hahn–Banach, υπάρχει $x^* \in X^*$ με $\|x^*\| = 1$, ώστε $x^*(x) = \|x\|$. Τότε, $P_n^* x^*(x) = x^*(x)$, $P_n^* x^* \in Z$ και $\|P_n^* x^*\| \leqslant K$. Από τον ορισμό της J έχουμε

$$|J(x)P_n^*(x^*)| = |P_n^*(x^*)(x)| = \|x\|. \tag{2.2.10}$$

Έπεται ότι

$$\frac{1}{K} \leqslant \|J(x)\| \leqslant \|x\| \tag{2.2.11}$$

για κάθε $x \in X$. Μένει να δείξουμε ότι η J είναι επί.

Πρώτα παρατηρούμε ότι οι όροι της ακολουθίας $\big(J(x_n)\big)_{n=1}^{\infty}$ είναι τα διορθογώνια συναρτησοειδή της $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$. Έστω $z^* \in Z^*$. Τότε, για κάθε $z \in Z$ με $\|z\| \leqslant 1$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$, έχουμε

$$\left|\left(\sum_{i=1}^{n} z^*(x_i^*)J(x_i)\right)(z)\right| = \left|z^*\left(\sum_{i=1}^{n} J(x_i)(z)x_i^*\right)\right| \leqslant \|z^*\|\Big\|\sum_{i=1}^{n} J(x_i)(z)x_i^*\Big\| \leqslant K\|z^*\|. \tag{2.2.12}$$

Άρα,

$$\Big\|\sum_{i=1}^{n} z^*(x_i^*)J(x_i)\Big\| \leqslant K\|z\| \tag{2.2.13}$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Εφ'οσον η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένα πλήρης, υπάρχει $x \in X$ ώστε $x = \sum_{n=1}^{\infty} z^*(x_n^*)x_n$. Τότε,

$$J(x) = \sum_{n=1}^{\infty} z^*(x_n^*)J(x_n) = z^*. \tag{2.2.14}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι $\overline{\text{span}}\{J(x_n) : n = 1, 2, \ldots\} = Z^*$, δηλαδή η $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ είναι συρρικνούσα βάση.

Το αντίστροφο του παραπάνω αποτελέσματος ισχύει επίσης.

Πρόταση 2.2.6. *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ συρρικνούσα βάση ενός χώρου Banach X. Τότε, η ακολουθία $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ των διορθογώνιων συναρτησοειδών της $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένα πλήρης βάση του X^*.*

Απόδειξη. Έστω (a_n) ακολουθία πραγματικών αριθμών, ώστε $\sup_n \Big\|\sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*\Big\| < \infty$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε $x_n^* = \sum_{i=1}^{n} a_i x_i^*$. Εφ' όσον η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση του X, ο X είναι διαχωρίσιμος, άρα από το θεώρημα συμπάγειας του Αλάογλου, ο (S_{X^*}, w^*) είναι συμπαγής και μετρικοποιήσιμος. Επομένως, υπάρχουν υπακολουθία $(x_{i_n}^*)$ της (x_n^*) και $x^* \in X^*$ ώστε $x_{i_n}^* \overset{w^*}{\to} x^*$. Αφού η (x_n) είναι *συρρικνούσα*, υπάρχει (μοναδική) ακολουθία πραγματικών αριθμών (β_n) ώστε $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n x_n$. Επειδή $x_{i_n}^* \overset{w^*}{\to} x^*$, προκύπτει ότι $a_n = \beta_n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Αρα, $x^* = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x_n^*$. Το συμπέρασμα έπεται. □

Μπορούμε τώρα να περάσουμε στο βασικό αποτέλεσμα αυτής της παραγράφου, το οποίο αποδείχθηκε από τον James.

Θεώρημα 2.2.7 (James 1951). *Έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ βάση Schauder ενός χώρου Banach X. Τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(i) *Η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένα πλήρης και συρρικνούσα βάση.*

(ii) *Ο X είναι αυτοπαθής.*

Απόδειξη. (i) $\Rightarrow$ (ii). Αφού η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι φραγμένα πλήρης, από την Πρόταση 2.2.5 έχουμε ότι η απεικόνιση $J : X \to Z^*$, όπου $Z = \overline{\text{span}}\{x_n^* : n = 1, 2, \ldots\}$, είναι ισομορφισμός επί. Επειδή η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι και συρρικνούσα, έχουμε ότι $Z = X^*$. Έπεται ότι $Z^* = X^{**}$. Τότε, η J συμπίπτει με την κανονική εμφύτευση $\tau : X \to X^{**}$, η οποία είναι επί. Έπεται ότι ο X είναι αυτοπαθής.

(ii) $\Rightarrow$ (i). Έστω ότι ο X είναι αυτοπαθής και έστω $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ βάση του X. Ο ισχυρισμός είναι ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι συρρικνούσα, δηλαδή ότι $X^* = Z$.

Πράγματι, υποθέτουμε προς άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει. Τότε, από το θεώρημα Hahn–Banach, μπορούμε να βρούμε $0 \neq x^{**} \in X^{**}$ ώστε $x^{**}(z) = 0$ για κάθε $z \in Z$. Επειδή ο X είναι αυτοπαθής, υπάρχει $0 \neq x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n \in X$ ώστε $x = x^{**}$. Ειδικότερα, έχουμε

$$0 = x^{**}(x_n^*) = x_n^*(x) \tag{2.2.15}$$

για κάθε n. Έπεται ότι $x = 0$, το οποίο είναι άτοπο.

Εφ'οσον ο X είναι αυτοπαθής, θα είναι και ο X^*. Από τον παραπάνω ισχυρισμό έπεται ότι η $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$ είναι συρρικνούσα βάση του X^*. Τότε, από την Πρόταση 2.2.6 και από το γεγονός ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι η ακολουθία των διορθογώνιων συναρτησοειδών της $(x_n^*)_{n=1}^{\infty}$, και αφού ο X είναι αυτοπαθής, προκύπτει ότι η $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι και φραγμένα πλήρης βάση του X. Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πρόταση 2.2.8. *Έστω (x_n) μία συρρικνούσα βάση ενός χώρου Banach. Τότε, ο ℓ_1 δεν εμφυτεύεται ισομετρικά στον X.*

Απόδειξη. Πράγματι, αφού η (x_n) είναι συρρικνούσα βάση του X, ο X^* είναι διαχωρίσιμος. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ισομορφική εμφύτευση $T : \ell_1 \to X$. Τότε, ο συζυγής τελεστής $T^* : X^* \to \ell_1^*$ είναι επί, και άρα ο ℓ_1^*, δηλαδή ο ℓ_∞ είναι διαχωρίσιμος, το οποίο είναι άτοπο. □

Παράδειγμα 2.2.9. Η συνήθης βάση $e_n = (0, \ldots, 1, 0, \ldots, 0)$ (με την μονάδα στη n-οστή θέση) του ℓ_p, $1 < p < \infty$ είναι φραγμένα πλήρης και συρρικνούσα.

Πράγματι, αφού για κάθε ακολουθία (a_n) πραγματικών αριθμών ισχύει

$$\Big\| \sum_{i=1}^{n} a_i e_i \Big\|_p = \Big(\sum_{i=1}^{n} |a_i|^p \Big)^{\frac{1}{p}}, \tag{2.2.16}$$

προκύπτει ότι η (e_n) είναι φραγμένα πλήρης. Επειδή υπάρχει ισομετρία επί $T : \ell_q \to \ell_p^*$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, και μάλιστα οι εικόνες της βάσης $(e_n)_{n=1}^{\infty}$ του ℓ_q μέσω της T είναι τα διορθογώνια συναρτησοειδή (e_n^*) της βάσης του ℓ_p, έπεται ότι η (e_n) είναι συρρικνούσα βάση.

Για τον ίδιο λόγο, επειδή υπάρχει ισομετρία επί $T : \ell_1 \to c_0^*$, η (e_n) είναι συρρικνούσα βάση του c_0. Επίσης, η (e_n) είναι φραγμένα πλήρης βάση του ℓ_1.

Παρατηρήστε ότι, επειδή οι χώροι c_0 και ℓ_1 δεν είναι αυτοπαθείς, από το Θεώρημα 2.2.7 έπεται ότι η (e_n) δεν είναι φραγμένα πλήρης βάση του c_0 και δεν είναι συρρικνούσα βάση του ℓ_1.

2.3 Η ιδιότητα προσέγγισης

Ορισμός 2.3.1. Έστω X χώρος Banach. Λέμε ότι ο X έχει την *ιδιότητα προσέγγισης* (**AP**) αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τελεστής πεπερασμένης τάξης $T : X \to X$ (δηλαδή, $T(x) = \sum_{i=1}^n x_i^*(x)x_i$ για κάποια $n \in \mathbb{N}$, $\{x_i\}_{i=1}^n \subset X$ και $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subset X^*$) ώστε $\|T(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε χώρος X που έχει βάση Schauder έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Πράγματι, αν $\{P_n\}_{n=1}^\infty$ είναι η ακολουθία των προβολών που αντιστοιχούν σε κάποια βάση Schauder του X τότε, για κάθε συμπαγές $K \subset X$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $n(\varepsilon, K)$ ώστε $\|P_n(x) - x\| < \varepsilon$ για κάθε $x \in K$ και $n > n(\varepsilon, K)$.

Οι επόμενες δύο προτάσεις περιγράφουν την δομή των συμπαγών υποσυνόλων ενός χώρου Banach και των δυϊκών χώρων κάποιων χώρων τελεστών που σχετίζονται με την ιδιότητα προσέγγισης.

Πρόταση 2.3.2. *Ενα κλειστό υποσύνολο K ενός χώρου Banach X είναι συμπα- γές αν και μόνο αν υπάρχει ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ στον X ώστε $\|x_n\| \to 0$ και $K \subseteq \overline{\mathrm{conv}}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$.*

Απόδειξη. Εύκολα ελέγχουμε ότι αν $\|x_n\| \to 0$ τότε το σύνολο

$$\left\{ \sum_{n=1}^\infty \lambda_n x_n : \lambda_n \geqslant 0, \sum_{n=1}^\infty \lambda_n \leqslant 1 \right\} \tag{2.3.1}$$

είναι συμπαγές και συμπίπτει με την $\overline{\mathrm{conv}}(\{x_n\}_{n=1}^\infty)$. Αυτό αποδεικνύει την μία κατεύθυνση.

Για την αντίστροφη κατεύθυνση θεωρούμε τυχόν συμπαγές υποσύνολο K του X. Μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_{i,1}\}_{i=1}^{n_1}$ του X ώστε $2K \subset \bigcup_{i=1}^{n_1} B(x_{i,1}, 1/4)$. Ορίζουμε

$$K_2 = \bigcup_{i=1}^{n_1} \{(B(x_{i,1}, 1/4) \cap 2K) - x_{i,1}\}. \tag{2.3.2}$$

Τότε, το K_2 είναι συμπαγές υποσύνολο της $B(0, 1/4)$. Μπορούμε να βρούμε πεπερασμένο υποσύνολο $\{x_{i,2}\}_{i=1}^{n_2}$ της $B(0, 1/2)$ ώστε $2K_2 \subset \bigcup_{i=1}^{n_2} B(x_{i,2}, 1/4^2)$. Ορίζουμε

$$K_3 = \bigcup_{i=1}^{n_2} \{(B(x_{i,2}, 1/4^2) \cap 2K_2) - x_{i,2}\}. \tag{2.3.3}$$

Συνεχίζουμε επαγωγικά, ορίζοντας $\{x_{i,j}\}_{i=1}^{n_j}$ για κάθε $j \geqslant 1$, με τον ίδιο τρόπο.

Για κάθε $x \in K$ υπάρχει $1 \leqslant i_1 \leqslant n_1$ ώστε $2x - x_{i_1,1} \in K_2$. Συνεπώς, υπάρχει $1 \leqslant i_2 \leqslant n_2$ ώστε $4x - 2x_{i_1,1} - x_{i_2,2} \in K_3$. Γενικά, για κάθε k μπορούμε να βρούμε $i_1, \ldots, i_k$ ώστε

$$x - \sum_{j=1}^{k} \frac{x_{i_j,j}}{2^j} \in \frac{1}{2^k} K_{k+1}. \tag{2.3.4}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $x \in \overline{\mathrm{conv}}\{x_{i,j} : j \geqslant 1, 1 \leqslant i \leqslant n_j\}$. Αφού $\|x_{i,j}\| \leqslant 2 \cdot 4^{-j+1}$ για κάθε $j > 1$ και για κάθε $1 \leqslant i \leqslant n_j$, έχουμε το συμπέρασμα. □

Πρόταση 2.3.3. *Έστω X και Y χώροι Banach. Θεωρούμε τον $L(X,Y)$ εφοδιασμένο με την τοπολογία τ της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του X: αυτή είναι η τοπικά κυρτή τοπολογία που παράγεται από τις ημινόρμες της μορφής $\|T\|_K = \sup\{\|T(x)\| : x \in K\}$, όπου το K διατρέχει τα συμπαγή υποσύνολα του X. Τότε, τα συνεχή γραμμικά συναρτησοειδή του $(L(X,Y),\tau)$ είναι ακριβώς τα συναρτησοειδή της μορφής*

$$\varphi(T) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i^*(T(x_i)), \tag{2.3.5}$$

όπου $\{x_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$, $\{y_i^*\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$, και $\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\|\,\|y_i^*\| < \infty$.

Απόδειξη. Θεωρούμε πρώτα ένα συναρτησοειδές φ που έχει αναπαράσταση αυτής της μορφής. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_i \neq 0$ για κάθε i. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ θετικών αριθμών που τείνει στο $+\infty$ και ικανοποιεί την

$$\sum_{i=1}^{\infty} \eta_i \|x_i\| \|y_i^*\| = C < \infty. \tag{2.3.6}$$

Ορίζουμε

$$K = \left\{ \frac{x_i}{\|x_i\|\eta_i} : i \geqslant 1 \right\} \cup \{0\}. \tag{2.3.7}$$

Τότε, το K είναι συμπαγές και

$$|\varphi(T)| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i^*\| \|x_i\| |\eta_i| T\left(\frac{x_i}{\|x_i\|\eta_i} \right) \leqslant C\|T\|_K. \tag{2.3.8}$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι φ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $L(X,Y)$ το οποίο ικανοποιεί την $|\varphi(T)| \leqslant C\|T\|_K$ για κάποια σταθερά $C > 0$ και κάποιο συμπαγές υποσύνολο K του X. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $K = \overline{\mathrm{conv}}\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ για κάποια ακολουθία με $\|x_n\| \to 0$. Ορίζουμε $S : L(X,Y) \to (Y \oplus Y \oplus \cdots)_0$ με $S(T) = (Tx_1, Tx_2, \ldots)$. Τότε

$|\varphi(T)| \leqslant C\|S(T)\|$, απ' όπου προκύπτει ότι υπάρχει γραμμικό συναρτησοειδές ψ ορισμένο στην κλειστότητα του $SL(X,Y)$, με την ιδιότητα $\varphi(T) = \psi(S(T))$. Από το θεώρημα Hahn–Banach μπορούμε να επεκτείνουμε το ψ σε συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές στον $(Y \oplus Y \oplus \cdots)_0$, δηλαδή σε στοιχείο του $(Y^* \oplus Y^* \oplus \cdots)_1$. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $\{y_n^*\}_{n=1}^\infty$ στον Y^* ώστε $\sum_{n=1}^\infty \|y_n^*\| < \infty$ και $\varphi(T) = \sum_{n=1}^\infty y_n^*(T(x_n))$. □

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω X χώρος Banach. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

(i) *Ο X έχει την ιδιότητα προσέγγισης.*

(ii) *Για κάθε χώρο Banach Y, ο υπόχωρος των τελεστών πεπερασμένης τάξης είναι πυκνός στον $L(Y,X)$ με την τοπολογία τ της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του Y.*

(iii) *Για κάθε χώρο Banach Y, ο υπόχωρος των τελεστών πεπερασμένης τάξης είναι πυκνός στον $L(X,Y)$ με την τοπολογία τ της ομοιόμορφης σύγκλισης στα συμπαγή υποσύνολα του X.*

(iv) *Για κάθε ζεύγος ακολουθιών $\{x_n\}_{i=1}^\infty \subset X$, $\{x_n^*\}_{i=1}^\infty \subset X^*$ με*

$$\sum_{i=1}^\infty \|x_i\|\,\|y_i^*\| < \infty$$

που ικανοποιούν την $\sum_{n=1}^\infty x_n^*(x)x_n = 0$ για κάθε $x \in X$, ισχύει

$$\sum_{n=1}^\infty x_n^*(x_n) = 0.$$

(v) *Για κάθε χώρο Banach Y, για κάθε συμπαγή τελεστή $T \in L(Y,X)$ και για κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει τελεστής πεπερασμένης τάξης $T_1 \in L(Y,X)$ ώστε $\|T - T_1\| < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Η ισοδυναμία των (i) και (iv) προκύπτει από την Πρόταση 2.3.3: η συνθήκη (i) σημαίνει ότι ο ταυτοτικός τελεστής είναι στην τ-κλειστή θήκη του χώρου των τελεστών πεπερασμένης τάξης στον X. Αυτό συμβαίνει αν και μόνο αν κάθε τ-συνεχές γραμμικό συναρτησοειδές φ στον $L(X)$, το οποίο μηδενίζεται στους τελεστές τάξης 1, μηδενίζεται και στον ταυτοτικό τελεστή. Όμως αυτό είναι ισοδύναμο με την συνθήκη (iv).

Από την (ii) ή την (iii), επιλέγοντας $Y = X$, παίρνουμε την (i). Θα δείξουμε ότι η (i) έχει σαν συνέπεια τις (ii) και (iii). Έστω $T : Y \to X$. Για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του Y, το σύνολο $T(K)$ είναι συμπαγές στον X. Λόγω της υπόθεσης (i), για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τελεστής $T_1 : X \to X$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T_1Ty - Ty\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $y \in K$. Αφού ο T_1T έχει πεπερασμένη τάξη, έπεται το (ii). Έστω τώρα $T : X \to Y$, $T \neq 0$. Θεωρούμε τυχόν συμπαγές $K \subset X$ και $\varepsilon > 0$. Από την υπόθεση (i), υπάρχει τελεστής $T_1 : X \to X$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T_1x - x\| \leqslant \varepsilon/\|T\|$ για κάθε $x \in K$. Τότε, $\|TT_1x - Tx\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$, και έπεται το (iii).

Μένει να δείξουμε την ισοδυναμία των (i) και (v). Υποθέτουμε πρώτα ότι ισχύει η (i) και θεωρούμε έναν συμπαγή τελεστή $T : Y \to X$. Το σύνολο $K = \overline{T(B_Y)}$ είναι συμπαγές, άρα, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τελεστής $T_1 : X \to X$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T_1 x - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$. Τότε, $\|T_1 T - T\| \leqslant \varepsilon$, το οποίο αποδεικνύει την (v).

Υποθέτουμε τέλος ότι ισχύει η (v) και θεωρούμε τυχόν συμπαγές $K \subset X$ και $\varepsilon > 0$. Από την Πρόταση 2.3.2 μπορούμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, να υποθέσουμε ότι $K = \overline{\mathrm{conv}}\{x_n\}$ για κάποια ακολουθία $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον X με $\|x_n\| \downarrow 0$ και $\|x_1\| < 1$. Ορίζουμε $U = \overline{\mathrm{conv}}\{\pm x_n/\|x_n\|\}$. Το U είναι συμπαγές υποσύνολο του X και είναι συμμετρικό ως προς το 0. Θεωρούμε τον $Y = \mathrm{span}(U) = \bigcup_{n=1}^{\infty} nU$ και ορίζουμε μια νόρμα $|||\cdot|||$ που έχει σαν μοναδιαία μπάλα το U: $|||y||| = \inf\{\lambda > 0 : y \in \lambda U\}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι ο $(Y, |||\cdot|||)$ είναι πλήρης. Ο ταυτοτικός τελεστής $I : Y \to X$ είναι συμπαγής. Συνεπώς, από την (v), υπάρχουν $\{y_i^*\}_{i=1}^{\infty} \subset Y^*$ και $\{u_i\}_{i=1}^{\infty} \subset X$ ώστε

$$\left\| \sum_{i=1}^{m} y_i^*(x) u_i - x \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \tag{2.3.9}$$

για κάθε $x \in U$, άρα και για κάθε $x \in K$. Τα συναρτησοειδή y_i^* είναι $|||\cdot|||$-συνεχή, μπορεί όμως να μην είναι $\|\cdot\|$-συνεχή (συνεπώς, δεν είναι απαραιτήτως περιορισμοί στοιχείων του X^* στον Y). Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη αρκεί να δείξουμε ότι, για κάθε $y^* \in Y^*$ και για κάθε $\delta > 0$ (στην περίπτωσή μας, για $\delta = \varepsilon/2m \cdot \max_i \|u_i\|$) υπάρχει $x^* \in X^*$ ώστε $|y^*(x) - x^*(x)| < \delta$ για κάθε $x \in K$, δηλαδή $|y^*(x_n) - x^*(x_n)| < \delta$ για κάθε n.

Παρατηρούμε ότι, αφού $x_n/\|x_n\|^{1/2} \in U$, έχουμε $|||x_n||| \leqslant \|x_n\|^{1/2}$ για κάθε n, άρα $|||x_n||| \to 0$. Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $|y^*(x_n)| < \delta/2$. Ορίζουμε

$$K_0 = \frac{2}{\delta}\overline{\mathrm{conv}}\{\pm x_n\}_{n=n_0+1}^{\infty}. \tag{2.3.10}$$

Παρατηρήστε ότι οι κλειστές θήκες ως προς τις $\|\cdot\|$ και $|||\cdot|||$ συμπίπτουν. Επίσης, ορίζουμε

$$F = \Big\{x : x \in \mathrm{span}\{x_n\}_{n=1}^{n_0}, y^*(x) = 1\Big\}. \tag{2.3.11}$$

Τότε, το F είναι $\|\cdot\|$-κλειστό, το K_0 είναι $\|\cdot\|$-συμπαγές και $K_0 \cap F = \emptyset$. Από την γεωμετρική μορφή του θεωρήματος Hahn–Banach υπάρχει $\|\cdot\|$-κλειστό υπερεπίπεδο $\tilde{F}$ του X ώστε $F \subset \tilde{F}$ και $\tilde{F} \cap K_0 = \emptyset$. Θεωρούμε $x^* \in X^*$ με $\tilde{F} = \{x : x^*(x) = 1\}$. Τότε, $x^*(x_n) = y^*(x_n)$ για κάθε $n \leqslant n_0$ και $|x^*(x_n)| < \delta/2$ για κάθε $n > n_0$. Έπεται ότι $|x^*(x_n) - y^*(x_n)| < \delta$ για κάθε n. □

Θεώρημα 2.3.5. *Οι ακόλουθες τρεις προτάσεις είναι ισοδύναμες.*

(i) *Κάθε χώρος Banach X έχει την ιδιότητα προσέγγισης.*

(ii) *Αν $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ είναι ένας πίνακας που ικανοποιεί τις $\lim_j a_{i,j} = 0$ για κάθε $i \geqslant 1$,*

$\sum_{i=1}^{\infty} \max_j |a_{i,j}| < \infty$ *και* $A^2 = 0$, *τότε*

$$\text{tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n} = 0. \tag{2.3.12}$$

(iii) *Κάθε συνεχής συνάρτηση* $K : [0,1] \times [0,1] \to \mathbb{R}$ *που ικανοποιεί την*

$$\int_0^1 K(s,t)K(t,u)dt = 0 \tag{2.3.13}$$

για κάθε s *και* $u \in [0,1]$, *ικανοποιεί την*

$$\int_0^1 K(t,t)dt = 0. \tag{2.3.14}$$

Απόδειξη. (ii)⇒(i). Έστω X ένας χώρος Banach ο οποίος δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Από το Θεώρημα 2.3.4 μπορούμε να βρούμε $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X$ και $\{x_n^*\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ με $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|\|x_n^*\| < \infty$ και $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n = 0$ για κάθε $x \in X$, αλλά $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \neq 0$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|x_n\| \to 0$ και $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n^*\| < \infty$. Θεωρούμε τον πίνακα $A = \big(x_i^*(x_j)\big)_{i,j=1}^{\infty}$. Τότε,

$$\lim_j x_i^*(x_j) = 0, \quad \sum_{i=1}^{\infty} \max_j |x_i^*(x_j)| < \infty \tag{2.3.15}$$

και $A^2 = 0$, διότι τα στοιχεία του A^2 είναι της μορφής $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_i)x_k^*(x_n)$. Όμως,

$$\text{tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) \neq 0. \tag{2.3.16}$$

(iii)⇒(ii). Υποθέτουμε ότι $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ είναι ένας πίνακας που ικανοποιεί τις $\lim_j a_{i,j} = 0$ για κάθε $i \geqslant 1$, $\sum_{i=1}^{\infty} \max_j |a_{i,j}| < \infty$ και $A^2 = 0$, αλλά $\text{tr}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,n} \neq 0$. Θέτουμε $\alpha_i = \max_j |a_{i,j}|$ και επιλέγουμε ακολουθία $\{\eta_i\}_{i=1}^{\infty}$ θετικών αριθμών ώστε $\eta_i \to \infty$ και $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\eta_i < 1$. Ορίζουμε $b_{i,j} = \frac{a_{i,j}}{\alpha_i\eta_i}$. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχουν πεπερασμένα το πλήθος ζευγάρια (i,j) ώστε $|b_{i,j}| > \varepsilon$: με αυτήν την έννοια, $\lim_{i,j} b_{i,j} = 0$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i\eta_i < 1$, επιλέγουμε ακολουθίες $\{t_i\}, \{s_i\}$ θετικών πραγματικών αριθμών ώστε $1 = t_1 > s_1 > t_2 > s_2 > \cdots$, $\lim_i t_i = 0$ και $t_i - s_i > \alpha_i\eta_i$ για κάθε i.

Έστω $\{\varphi_i\}_{i=1}^{\infty}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $\varphi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες: για κάθε i έχουμε $0 \leqslant \varphi \leqslant 1$, η φ_i μηδενίζεται έξω από το $[s_i, t_i]$ και $\int_{s_i}^{t_i} \varphi_i(t)dt = \alpha_i\eta_i$.

Εύκολα ελέγχουμε ότι η συνάρτηση

$$K(s,t)=\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}\sqrt{\varphi_i(s)\varphi_j(t)}b_{i,j} \tag{2.3.17}$$

είναι συνεχής στο $[0,1]\times[0,1]$ (παρατηρήστε ότι σε κάθε σημείο (s,t) το άθροισμα περιέχει έναν μόνο μη μηδενικό όρο). Από το γεγονός ότι $A^2=0$ έπεται ότι $\int_0^1 K(s,t)K(t,u)dt=0$ για κάθε s και u, ενώ

$$\int_0^1 K(t,t)dt=\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^1\varphi_n(t)dt\cdot b_{n,n}=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\eta_n b_{n,n}=\sum_{n=1}^{\infty}a_{n,n}\neq 0. \tag{2.3.18}$$

(i)⇒(iii). Υποθέτουμε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $K:[0,1]\times[0,1]\to\mathbb{R}$ που ικανοποιεί την $\int_0^1 K(s,t)K(t,u)dt=0$ για κάθε s και $u\in[0,1]$, αλλά $\int_0^1 K(t,t)dt\neq 0$. Για κάθε $s\in[0,1]$ ορίζουμε $f_s\in C[0,1]$ με $f_s(t)=K(s,t)$. Από την συνέχεια της $K(s,t)$ βλέπουμε ότι το $K_0=\{f_s : 0\leqslant s\leqslant 1\}$ είναι συμπαγές υποσύνολο του $C[0,1]$. Θα δείξουμε ότι ο $X_0=\overline{\text{span}}(K_0)$ είναι ένας υπόχωρος του $C[0,1]$ ο οποίος δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Πράγματι, ας θεωρήσουμε ένα $\varepsilon>0$ για το οποίο υπάρχει τελεστής T πεπερασμένης τάξης (δηλαδή, $T(g)=\sum_{i=1}^{n}x_i^*(g)f_i$) στον X_0 με την ιδιότητα $\|T(g)-g\|<\varepsilon$ για κάθε $g\in K_0$. Αφού ο $\text{span}(K_0)$ είναι πυκνός στον X_0, χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε (αυξάνοντας, αν χρειαστεί, το n) ότι $f_i\in K_0$ για κάθε i, δηλαδή $f_i=f_{s_i}$ για κάποια $s_i\in[0,1]$. Τα συναρτησοειδή x_i^* επεκτείνονται σε συναρτησοειδή στον $C[0,1]$, μπορούμε λοιπόν να τα βλέπουμε σαν μέτρα στο $[0,1]$. Αφού τα μέτρα πεπερασμένου φορέα είναι w^*-πυκνά στο σύνολο όλων των μέτρων, μπορούμε να υποθέσουμε ότι κάθε x_i^* είναι ένα μέτρο με πεπερασμένο φορέα, συνεπώς (αυξάνοντας πάλι, αν χρειαστεί, το n) ότι κάθε x_i^* είναι της μορφής $x_i^*(g)=\lambda_i g(u_i)$ για κατάλληλα $u_i\in[0,1]$ και $\lambda_i\in\mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $s,t\in[0,1]$,

$$\left|K(s,t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K(s,u_i)K(s_i,t)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{2.3.19}$$

Ειδικότερα,

$$\left|K(t,t)-\sum_{i=1}^{n}\lambda_i K(t,u_i)K(s_i,t)\right|\leqslant\varepsilon. \tag{2.3.20}$$

Αυτό όμως οδηγεί σε άτοπο αν το $\varepsilon>0$ είναι αρκετά μικρό, διότι $\int_0^1 K(t,t)dt\neq 0$, ενώ

$$\int_0^1 K(s_i,t)K(t,u_i)dt=0 \tag{2.3.21}$$

για κάθε i. □

Ορισμός 2.3.6. Έστω X χώρος Banach και έστω $1 \leqslant \lambda < \infty$. Λέμε ότι ο X έχει την *λ-ιδιότητα προσέγγισης* ($\lambda - \mathbf{AP}$) αν, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X, υπάρχει τελεστής πεπερασμένης τάξης $T : X \to X$ ώστε $\|T(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$, και $\|T\| \leqslant \lambda$.

Λέμε ότι ο X έχει την *φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης* (**BAP**) αν έχει την *λ-ιδιότητα προσέγγισης* για κάποιον $\lambda \geqslant 1$.

Τέλος, λέμε ότι ο X έχει την *μετρική ιδιότητα προσέγγισης* (**MAP**) αν έχει την *1-ιδιότητα προσέγγισης*.

Κεφάλαιο 3

Η κατασκευή του Enflo

3.1 Τελεστές πεπερασμένης έκτασης

Ορισμός 3.1.1 (τελεστές πεπερασμένης έκτασης)**.** Έστω X χώρος Banach που παράγεται από μια ακολουθία $\{e_k\}$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Λέμε ότι ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to X$ είναι **τελεστής πεπερασμένης έκτασης** αν, για κάθε $k \in \mathbb{N}$,

$$T(e_k) = \sum_i a_{k,i} e_i, \tag{3.1.1}$$

όπου το πλήθος των μη μηδενικών a_{ki} είναι πεπερασμένο.

Λήμμα 3.1.2. *Έστω X χώρος Banach που παράγεται από μια ακολουθία $\{e_k\}$ γραμμικά ανεξάρτητων διανυσμάτων. Αν $T : X \to X$ είναι ένας φραγμένος τελεστής πεπερασμένης τάξης τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τελεστής πεπερασμένης έκτασης και πεπερασμένης τάξης $T_1 : X \to X$ ώστε $\|T - T_1\| \leqslant \varepsilon$.*

Απόδειξη. Έστω $\{v_1, v_2, \ldots, v_r\}$ μια βάση της εικόνας του T. Κάθε v_i, $i = 1, \ldots, r$ γράφεται στη μορφή

$$v_i = \sum_{j=1}^{\infty} a_{i,j} e_j. \tag{3.1.2}$$

Επίσης, για κάθε $x \in X$, το $T(x)$ γράφεται με μοναδικό τρόπο ως

$$T(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i v_i \tag{3.1.3}$$

για κάποιους $b_i = b_i(x) \in \mathbb{R}$.

Θεωρούμε τυχόν $\delta > 0$, το οποίο θα επιλεγεί κατάλληλα αργότερα. Μπορούμε να βρούμε $N \in \mathbb{N}$ ώστε, αν ορίσουμε

$$v_i' = \sum_{j=1}^{N} a_{i,j} e_j, \qquad i = 1, \dots, r, \tag{3.1.4}$$

να ισχύει

$$\|v_i - v_i'\| \leqslant \delta \quad \text{για κάθε}\, i = 1, \dots, r. \tag{3.1.5}$$

Ορίζουμε $T_1 : X \to X$ ως εξής: για κάθε $x \in X$,

$$T_1(x) = \sum_{i=1}^{r} b_i(x) v_i'. \tag{3.1.6}$$

Θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = \mathrm{span}(\{v_1, \dots, v_r\})$ του X και ορίζουμε $\|\cdot\|'$ στον Y, θέτοντας

$$\|y\|' = \sum_{i=1}^{r} |b_i|, \quad \text{όπου}\ y = \sum_{i=1}^{r} b_i v_i. \tag{3.1.7}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η $\|\cdot\|'$ είναι νόρμα στον Y. Αφού ο Y είναι χώρος πεπερασμένης διάστασης, οι νόρμες $\|\cdot\|$ και $\|\cdot\|'$ είναι ισοδύναμες: δηλαδή, υπάρχει $m > 0$ ώστε

$$m \sum_{i=1}^{r} |b_i| = m \left\| \sum_{i=1}^{r} b_i v_i \right\|' \leqslant \left\| \sum_{i=1}^{r} b_i v_i \right\| \tag{3.1.8}$$

για κάθε $b_i \in \mathbb{R}$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε $\delta = \frac{\varepsilon m}{\|T\|}$ και, ορίζοντας τα v_i' όπως στην (3.1.4), για κάθε $b_i \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{i=1}^{r} b_i v_i - \sum_{i=1}^{r} b_i v_i' \right\| &= \left\| \sum_{i=1}^{r} b_i (v_i - v_i') \right\| \leqslant \sum_{i=1}^{r} |b_i| \, \|v_i - v_i'\| \\ &\leqslant \frac{\varepsilon m}{\|T\|} \sum_{i=1}^{r} |b_i|. \end{aligned} \tag{3.1.9}$$

Τότε, από την (3.1.8) παίρνουμε

$$\left\| \sum_{i=1}^{r} b_i v_i - \sum_{i=1}^{r} b_i v_i' \right\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|T\|} \left\| \sum_{i=1}^{r} b_i v_i \right\|. \tag{3.1.10}$$

Παρατηρήστε ότι ο τελεστής $T_1 : X \to X$ που ορίστηκε στην (3.1.6) είναι τελεστής πεπερασμένης έκτασης: για κάθε j έχουμε

$$T_1(e_j) = \sum_{i=1}^{r} b_{i,j} e_i. \tag{3.1.11}$$

Από την (3.1.10), για κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\|T(x) - T_1(x)\| \leqslant \frac{\varepsilon}{\|T\|}\, \|T(x)\| \leqslant \varepsilon \|x\|. \tag{3.1.12}$$

Συνεπώς, $\|T_1 - T\| \leqslant \varepsilon$. □

Ορισμός 3.1.3. Έστω X χώρος Banach ο οποίος παράγεται από το γραμμικά ανεξάρτητο σύνολο $\{e_j\}_{j=1}^{\infty}$ και έστω $T : X \to X$ τελεστής πεπερασμένης έκτασης. Για κάθε $k \geqslant 1$ έχουμε

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{k,i} e_i, \tag{3.1.13}$$

με το πλήθος των μη μηδενικών $a_{k,i}$ πεπερασμένο. Για κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο M του $\{e_j\}$ θέτουμε

$$\mathrm{Tr}(M,T) = \sum_{e_i \in M} a_{ii} \quad \text{και} \quad \tilde{\mathrm{Tr}}(M,T) = \frac{1}{|M|} \sum_{e_i \in M} a_{ii}, \tag{3.1.14}$$

όπου $|M|$ είναι ο πληθάριθμος του M.

Ορισμός 3.1.4. Αν η ακολουθία μη μηδενικών διανυσμάτων $\{e_j\}$ παράγει έναν χώρο Banach, θα λέμε ότι η $\{e_j\}$ έχει την *ιδιότητα A* αν για κάθε πεπερασμένο γραμμικό συνδυασμό $\sum_{j=1}^{r} a_j e_j$ ισχύει

$$\left\| \sum_{j=1}^{r} a_j e_j \right\| \geqslant \max_{1 \leqslant k \leqslant r} \|a_k e_k\|. \tag{3.1.15}$$

Παρατηρήστε ότι αν η $\{e_j\}$ έχει την ιδιότητα A τότε τα e_j είναι γραμμικά ανεξάρτητα. Πράγματι, αν $\sum_{j=1}^{r} a_j e_j = 0$ τότε, αφού τα e_j έχουν την ιδιότητα A, έχουμε

$$\|a_k e_k\| \leqslant \left\| \sum_{j=1}^{r} a_j e_j \right\| = 0 \tag{3.1.16}$$

για κάθε $k = 1, \ldots, r$, απ' όπου έπεται ότι $a_k = 0$ για κάθε k.

Γενικά, αν M είναι ένα σύνολο διανυσμάτων σε έναν χώρο Banach X, θα συμβολίζουμε με $\langle M \rangle$ τον κλειστό υπόχωρο του X ο οποίος παράγεται από το M.

Λήμμα 3.1.5. *Έστω X χώρος Banach ο οποίος παράγεται από μια ακολουθία $\{e_j\}$ η οποία έχει την ιδιότητα A. Έστω $T : X \to X$ τελεστής πεπερασμένης έκτασης και έστω M ένα πεπερασμένο υποσύνολο του $\{e_j\}$. Τότε,*

$$|\tilde{\mathrm{Tr}}(M,T)| \leqslant \|T|_{\langle M\rangle}\|. \tag{3.1.17}$$

Απόδειξη. Από τον ορισμό έχουμε

$$\tilde{\mathrm{Tr}}(M,T) = \frac{1}{|M|}\sum_{e_i\in M} a_{ii}. \tag{3.1.18}$$

Τα e_i έχουν την ιδιότητα A, οπότε

$$\|a_ie_i\| \leqslant \left\|\sum_{j=1}^{r} a_je_j\right\| \tag{3.1.19}$$

για κάθε r και κάθε επιλογή των a_j. Ειδικότερα,

$$|a_{ii}| = \frac{\|a_{ii}e_i\|}{\|e_i\|} \leqslant \frac{\left\|\sum_{j=1}^{r} a_{ji}e_j\right\|}{\|e_i\|} = \frac{\|T(e_i)\|}{\|e_i\|} \leqslant \|T|_{\langle M\rangle}\|, \tag{3.1.20}$$

για κάθε i. Από την (3.1.18) έπεται το συμπέρασμα του λήμματος. □

Λήμμα 3.1.6. *Έστω X χώρος Banach ο οποίος παράγεται από μια ακολουθία $\{e_j\}$ η οποία έχει την ιδιότητα A. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ακολουθία (M_m) ξένων ανά δύο πεπερασμένων υποσυνόλων του $\{e_j\}$ και υπάρχουν σταθερές $a > 1$ και $K > 0$ ώστε*

(i) $\dim(M_{m+1}) > (\dim(M_m))^a$, *και*

(ii) $|\tilde{\mathrm{Tr}}(M_{m+1},T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(M_m,T)| \leqslant K\|T\|(\log\dim(M_m))^{-1}$

για κάθε $m \geqslant 1$ και για κάθε τελεστή πεπερασμένης έκτασης $T : X \to X$. Τότε, υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε

$$\|I - T\|_{\langle M_m\rangle} \geqslant 1 - C\|T\|(\log\dim(M_m))^{-1} \tag{3.1.21}$$

για κάθε τελεστή $T : X \to X$ πεπερασμένης τάξης.

Απόδειξη. Λόγω του Λήμματος 3.1.2, αρκεί να δείξουμε την (3.1.21) για κάθε τελεστή $T_1 : X \to X$ που έχει πεπερασμένη τάξη και πεπερασμένη έκταση.

Αφού ο T έχει πεπερασμένη τάξη, έχουμε

$$\lim_{k\to\infty} \tilde{\mathrm{Tr}}(M_k,T) = 0. \tag{3.1.22}$$

Από το Λήμμα 3.1.5 παίρνουμε,

$$\|I-T\|_{\langle M_m\rangle} \geqslant |\tilde{\mathrm{Tr}}(M_m, I-T)| \geqslant 1-|\tilde{\mathrm{Tr}}(M_m,T)|. \tag{3.1.23}$$

Θέτουμε, $B_m = \tilde{\mathrm{Tr}}(M_m,T)$. Τότε, από την συνθήκη (ii) έχουμε

$$|B_m| \leqslant |B_m - B_{m+1}| + |B_{m+1}-B_{m+2}| + \cdots \leqslant K\|T\| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\log(\dim M_k)}. \tag{3.1.24}$$

Επίσης, από την συνθήκη (i), επαγωγικά βλέπουμε ότι

$$\dim M_k = \dim M_{m+k-m} > (\dim M_m)^{a^{k-m}}. \tag{3.1.25}$$

Τότε έχουμε,

$$\begin{aligned}\|I-T\|_{\langle M_m\rangle} &\geqslant 1 - K\|T\| \sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{\log(\dim M_m)^{a^{k-m}}} \\ &= 1 - \frac{K\|T\|}{\log(\dim M_m)} \sum_{k=m}^{\infty} \left(\frac{1}{a}\right)^{k-m} \\ &= 1 - \frac{K\|T\|}{\log(\dim M_m)} \frac{1}{1-\frac{1}{a}}.\end{aligned} \tag{3.1.26}$$

Έτσι, έπεται η (3.1.21) με $C = \frac{K}{1-a^{-1}}$. □

3.2 Συναρτήσεις Walsh

Θεωρούμε την ομάδα $H_{2n} = \mathbb{Z}_2^{2n} = \{0,1\}^{2n}$ των ακολουθιών $a = (a_1, a_2, \dots, a_{2n})$ μήκους $2n$ από 0 ή 1. Τότε, $|H_{2n}| = 2^{2n}$.

Οι συναρτήσεις Rademacher R_j, $1 \leqslant j \leqslant 2n$, ορίζονται ως εξής:

$$R_j(a) = (-1)^{a_j}. \tag{3.2.1}$$

Συμβολίζουμε με W^m το σύνολο των συναρτήσεων Walsh που είναι γινόμενα m διαφορετικών R_j. Γράφουμε w_m για τα στοιχεία του W^m. Ορίζουμε

$$F_m = \sum_{w_m \in W^m} w_m \tag{3.2.2}$$

και, για κάθε $a \in H_{2n}$, ορίζουμε $|a| = \sum a_j$, δηλαδή το πλήθος των μη μηδενικών συντεταγμένων του a.

Λήμμα 3.2.1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $1 \leqslant m \leqslant 2n$ ισχύουν τα εξής:*

(i) $F_m(0) = \|F_m\|_\infty = \binom{2n}{m}$.

(ii) $|F_m(a)| = (1 - mn^{-1})\|F_m\|_\infty$ *αν* $|a| = 1$.

(iii) $|F_{n-1}(a)| = |F_{n+1}(a)| \leqslant n^{-1}\|F_{n-1}\|_\infty = n^{-1}\|F_{n+1}\|_\infty$ *αν* $0 < |a| < 2n$.

(iv) $F_m(a) = (-1)^m F_m(b)$ *αν* $|a| + |b| = 2n$.

Απόδειξη. (i) Από το γεγονός ότι $w_m(0) = 1$, και αφού $\mathrm{card}(W^m) = \binom{2n}{m}$, έχουμε

$$F_m(0) = \sum_{w_m \in W^m} w_m(0) = \sum_{w_m \in W^m} 1 = \mathrm{card}(W^m) = \binom{2n}{m}. \tag{3.2.3}$$

Επίσης, αφού κάθε w_m παίρνει την τιμή 1 ή 0, έχουμε

$$|F_m(a)| \leqslant \sum_{w_m \in W^m} |w_m(a)| = \sum_{w_m \in W^m} 1 = \binom{2n}{m}. \tag{3.2.4}$$

Έπεται ότι

$$\|F_m\| \leqslant \binom{2n}{m} = F_m(0). \tag{3.2.5}$$

Προφανώς, $F_m(0) \leqslant \|F_m\|_\infty$. Έτσι,

$$\|F_m\|_\infty = F_m(0) = \binom{2n}{m}. \tag{3.2.6}$$

(ii) Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $a = (1, 0, \ldots, 0)$, διότι η τιμή της $F_m(a)$ εξαρτάται μόνο από τα n, m και $|a|$. Προφανώς, $R_1(a) = -1$ και $R_j(a) = 1$, για όλα τα άλλα j. Τότε,

$$w_m(a) = R_{j_1} \cdots R_{j_m}(a) = \begin{cases} 1, & \text{αν } j_1, \ldots, j_m \neq 1 \\ -1, & \text{αν } 1 \in \{j_1, \cdots, j_m\} \end{cases}. \tag{3.2.7}$$

Έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned} F_m(a) &= \binom{2n-1}{m} - \binom{2n-1}{m-1} \\ &= \frac{(2n-1)!}{m!(2n-1-m)!} - \frac{(2n-1)!}{(m-1)!(2n-m)!} \\ &= \frac{2n(2n-1)!(2n-m)}{(2n)m!(2n-1-m)!(2n-m)} - \frac{2n(2n-1)!m}{2n(m-1)!(2n-m)!m} \\ &= \left(\frac{2n-m}{2n} - \frac{m}{2n}\right)\binom{2n}{m} \\ &= \left(1 - \frac{m}{n}\right)\binom{2n}{m}. \end{aligned} \tag{3.2.8}$$

Έπεται ότι, αν $|a| = 1$ τότε

$$|F_m(a)| = \Big(1 - \frac{m}{n}\Big)\, \|F_m\|_\infty. \tag{3.2.9}$$

(iv) Επειδή $|a| + |b| = 2n$, μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα a και b είναι συμπληρωματικά. Τότε, $R_j(a) = -R_j(b)$ για κάθε j. Έχουμε,

$$w_m(a) = \prod_{k=1}^{m} R_{j_k}(a) = (-1)^m \prod_{k=1}^{m} R_{j_k}(b) = (-1)^m w_m(b). \tag{3.2.10}$$

Άρα,

$$F_m(a) = \sum_{w_m \in W^m} w_m(a) = (-1)^m \sum_{w_m \in W^m} w_m(b) = (-1)^m F_m(b). \tag{3.2.11}$$

(iii) Παρατηρήστε ότι, για κάθε μιγαδικό αριθμό z ισχύει

$$\begin{aligned}\sum_{m=0}^{2n} z^m F_m(a) &= (1 + zR_1(a)) \cdots (1 + zR_{2m}(a)) \\ &= (1 + (-1)^{a_1} z) \cdots (1 + (-1)^{a_{2n}} z).\end{aligned} \tag{3.2.12}$$

Για $|a| = r$, παίρνουμε

$$\sum_{m=0}^{2n} z^m F_m(a) = (1 - z)^r (1 + z)^{2n-r}. \tag{3.2.13}$$

Τότε, διαιρώντας και τα δύο μέλη με z^{m+1} και ολοκληρώνοντας πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, παίρνουμε

$$F_m(a) = \frac{1}{2\pi i} \int (1 - z)^r (1 + z)^{2n-r} \frac{dz}{z^{m+1}}. \tag{3.2.14}$$

Αν θέσουμε $z = e^{i\theta}$, $-\pi \leqslant \theta \leqslant \pi$, τότε η (3.2.14) γράφεται,

$$F_m(a) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (1 - e^{i\theta})^r (1 + e^{i\theta})^{2n-r} e^{-im\theta} d\theta. \tag{3.2.15}$$

Θα υπολογίσουμε την υπό ολοκλήρωση ποσότητα. Θέτουμε $A = (1 - e^{i\theta})^r$, $B = (1 + e^{i\theta})^{2n-r}$ και $C = e^{-im\theta}$. Τότε,

$$\begin{aligned}A = (1 - \cos\theta - i\sin\theta)^r &= \left(2\sin^2\frac{\theta}{2} - 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^r \\ = 2^r \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^r &\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right)^r\end{aligned} \tag{3.2.16}$$

και

$$B = (1+\cos\theta + i\sin\theta)^{2n-r} = \left(2\cos^2\frac{\theta}{2} + 2i\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r} \tag{3.2.17}$$
$$= 2^{2n-r}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}\left(\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}.$$

Τότε, παίρνουμε

$$A\cdot B\cdot C = 2^{2n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}\left(\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}\right)^{r}\left(e^{i\theta/2}\right)^{2n-r}e^{-im\theta} \tag{3.2.18}$$
$$= 2^{2n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}e^{i(n-m)\theta}\left(\frac{\sin\frac{\theta}{2} - i\cos\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2} + i\sin\frac{\theta}{2}}\right)^{r}$$
$$= 2^{2n}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}e^{i(n-m)\theta}i^{-r}.$$

Έτσι, η (3.2.15) γράφεται

$$F_m(a) = \frac{1}{2\pi}2^{2n}\int_{-\pi}^{\pi} i^{-r}e^{i(n-m)\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}d\theta, \tag{3.2.19}$$

όπου $|a| = r$. Τότε,

$$|F_{n-1}(a)| = \frac{1}{2\pi}2^{2n}\left|\int_{-\pi}^{\pi} i^{-r}e^{i\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}\right|d\theta \tag{3.2.20}$$

και

$$|F_{n+1}(a)| = \frac{1}{2\pi}2^{2n}\left|\int_{-\pi}^{\pi} i^{-r}e^{-i\theta}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}\right|d\theta \tag{3.2.21}$$

Θέτοντας $t = -\theta$ στο δεύτερο ολοκλήρωμα, παίρνουμε

$$|F_{n-1}(a)| = |F_{n+1}(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi}2^{2n}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}\right|d\theta \tag{3.2.22}$$
$$= \frac{1}{2\pi}2^{2n}2\int_{0}^{\pi}\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{r}\left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r}d\theta,$$

όπου η τελευταία ισότητα προκύπτει από το γεγονός ότι η υπό ολοκλήρωση συνάρτηση στο πρώτο ολοκλήρωμα είναι άρτια. Μένει να δείξουμε ότι

$$|F_{n+1}(a)| \leqslant \frac{1}{n}\|F_{n-1}\|_\infty. \tag{3.2.23}$$

Θέτουμε

$$T(r) = \int_0^\pi \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^r \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-r} d\theta. \tag{3.2.24}$$

Παρατηρήστε ότι

$$T(2) = T(2n-2). \tag{3.2.25}$$

Πράγματι,

$$\begin{aligned} T(2n-2) &= \int_0^\pi \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n-2} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2} d\theta = \int_0^\pi \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-2} d\theta \\ &= T(2), \end{aligned} \tag{3.2.26}$$

όπου η δεύτερη ισότητα προκύπτει αν θέσουμε $\theta = \pi - y$ στο πρώτο ολοκλήρωμα. Τότε, από την (3.2.19) για $r=2$ και λόγω της (3.2.24), έχουμε

$$|F_n(a)| = \frac{1}{2\pi} 2^{2n} 2 \int_0^\pi \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-2} d\theta = \frac{1}{2\pi} 2^{2n} T(2). \tag{3.2.27}$$

Για τον ίδιο λόγο, αν $r = 2n-2$ έχουμε πάλι την (3.2.27). Έτσι για $r=2$ και $r=2n-2$, από την (3.2.22) έπεται ότι

$$|F_{n+1}(a)| \leqslant |F_n(a)|. \tag{3.2.28}$$

Έστω τώρα $2 < r < 2n-2$. Γράφουμε $r = (1-t)2 + t(2n-2)$ και $2n-r = (1-t)(2n-2) + t\cdot 2$. Έστω $a, b \geqslant 0$ ώστε

$$a^r b^{2n-r} \leqslant \max\{a^2 b^{2n-2}, a^{2n-2} b^2\}. \tag{3.2.29}$$

Τότε,

$$a^r b^{2n-r} \leqslant (a^2)^{1-t} (a^{2n-2})^t (b^2)^t (b^{2n-2})^{1-t} = (a^2 b^{2n-2})^{1-t} (a^{2n-2} b^2)^t. \tag{3.2.30}$$

Τότε, για $a = \sin\frac{\theta}{2}$ και $b = \cos\frac{\theta}{2}$, από την (3.2.24) έχουμε

$$\begin{aligned} T(r) &\leqslant \int_0^\pi \left[\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-2}\right]^{1-t} \left[\left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n-2} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2}\right]^t d\theta \\ &\leqslant \left[\int_0^\pi \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2n-2} d\theta\right]^{1-t} \left[\int_0^\pi \left(\sin\frac{\theta}{2}\right)^{2n-2} \left(\cos\frac{\theta}{2}\right)^{2} d\theta\right]^t \\ &= T(2)^{1-t} T(2n-2)^t, \end{aligned} \tag{3.2.31}$$

όπου η δεύτερη ανισότητα προκύπτει από την ανισότητα Hölder. Άρα, λόγω της (3.2.25), παίρνουμε

$$T(r) \leqslant T(2). \tag{3.2.32}$$

Τότε για $2 < r < 2n-2$, από τις (3.2.22), (3.2.24), (3.2.32) και (3.2.27) έπεται ότι

$$|F_{n+1}(a)| \leqslant \frac{1}{2\pi} 2^{2n} 2T(2) = |F_n(a)|. \tag{3.2.33}$$

Έτσι η (3.2.28) ισχύει για όλα τα r.

Έχουμε $F_n(a) = \sum_{w_n \in W^n}$, με $w_n = R_{j_1} \cdots R_{j_n}$. Για $|a| = 2$,

$$w_n(a) = \begin{cases} 1, & \text{αν} \{j_1, \dots, j_n\} \neq 1 \text{ και του } 2 \\ -2, & \text{αν} 1 \in \{j_1, \dots, j_n\} \text{ και } \{j_1, \dots, j_n\} \neq 2 \\ 1, & \text{αν} \{j_1, \dots, j_n\} \neq 1 \text{ και } 2 \in \{j_1, \dots, j_n\} \end{cases} \tag{3.2.34}$$

Έτσι, παίρνουμε

$$\begin{aligned} F_n(a) &= \binom{2n-2}{n} - 2\binom{2n-2}{n-1} + \binom{2n-2}{n-2} \\ &= \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} - 2\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!} + \frac{(2n-2)!}{n!(n-2)!} \\ &= \frac{(2n-2)!2n(2n-1)n(n-1)}{2n(2n-1)n!n(n-1)(n-2)!} - 2\frac{(2n-2)!2n(2n-1)nn}{2n(2n-1)n(n-1)!n(n-1)!} \\ &+ \frac{(2n-2)!2n(2n-1)n(n-1)}{2n(2n-1)n!n(n-1)(n-2)!} \\ &= \left(\frac{n^2-n-2n^2+n^2-n}{2n(2n-1)}\right)\binom{2n}{n} \\ &= -\frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n}. \end{aligned} \tag{3.2.35}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} |F_n(a)| &= \frac{1}{2n-1}\binom{2n}{n} = \frac{1}{2n-1}\frac{2n!(n+1)}{n!(n+1)n(n-1)!} \\ &= \frac{n+1}{2n-1}\frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} \leqslant \frac{1}{n}\binom{2n}{n-1} \end{aligned} \tag{3.2.36}$$

για κάθε $n \geqslant 2$. Τότε, από την (3.2.28) και από το γεγονός ότι

$$\|F_{n-1}\|_\infty = \binom{2n}{n-1} = \binom{2n}{n+1} = \|F_{n+1}\|_\infty, \tag{3.2.37}$$

παίρνουμε

$$|F_{n+1}(a)| \leqslant \frac{1}{n}\|F_{n-1}\|_\infty = \frac{1}{n}\|F_{n+1}\|_\infty. \tag{3.2.38}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Ορισμός 3.2.2. Θεωρούμε τον χώρο Banach όλων των πραγματικών συναρτήσεων του H_{2n} με την $\|\cdot\|_\infty$-νόρμα.
(α) Αν p είναι μια μετάθεση των $2n$ αντιγράφων του $\mathbb{Z}_2$ στον H_{2n}, τότε έχουμε

$$R_j(p(a)) = R_{p^{-1}(j)}(a) \tag{3.2.39}$$

με τους προφανείς συμβολισμούς. Έτσι, η p ορίζει μια ισομετρία του $\mathrm{span}(W^m)$ επί του εαυτού του, μέσω της

$$(U_p(w_m))(a) = w_m(p(a)). \tag{3.2.40}$$

Πράγματι, αφού η p είναι μετάθεση, η U_p είναι επί. Αρκεί να δείξουμε ότι $\|U_p w_m\|_2 = \|w_m\|_2$. Όμως, αφού οι συναρτήσεις Walsh αποτελούν, σαν διανύσματα, ορθοκανονική βάση του ℓ_2, αν

$$w_m = \sum_{1\leqslant i_k\leqslant 2n} a_{i_1\ldots i_m} R_{i_1}\cdots R_{i_m}, \tag{3.2.41}$$

τότε

$$\begin{aligned} \|w_m\|_2^2 &= \Bigg\|\sum_{1\leqslant i_k\leqslant 2n} a_{i_1\ldots i_m} R_{i_1}\cdots R_{i_m}\Bigg\|_2^2 \\ &= \sum_{1\leqslant i_k\leqslant 2n} a_{i_1\ldots i_m}^2 \\ &= \Bigg\|\sum_{1\leqslant i_k\leqslant 2n} a_{i_1\ldots i_m} R_{p^{-1}(i_1)\cdots R_{p^{-1}(i_m)}}\Bigg\|_2^2 \\ &= \|U_p w_m\|_2^2, \end{aligned} \tag{3.2.42}$$

για κάθε $k = 1, \ldots, m$ με τα i_k διαφορετικά ανά δύο.
(β) Αν $t : a \mapsto a + b$ είναι μια μεταφορά στον H_{2n}, τότε έχουμε

$$R_j(t(a)) = (-1)^{b_j} R_j(a). \tag{3.2.43}$$

Έτσι, η t ορίζει μια ισομετρία του $\mathrm{span}(W^m)$ επί του εαυτού του, μέσω της

$$(U_t(w_m))(a) = w_m(t(a)). \tag{3.2.44}$$

Πράγματι, η U_t είναι επί. θα δείξουμε ότι $\|U_t w_m\|_2^2 = \|w_m\|_2^2$. Πάλι, από το γεγονός ότι οι συναρτήσεις Walsh αποτελούν ορθοκανονική βάση του ℓ_2 έχουμε ότι αν

$$w_m = \sum_{1\leqslant m\leqslant 2n} a_m w_m, \tag{3.2.45}$$

τότε

$$\begin{aligned} \|U_t w_m\|_2^2 &= \Big\| U_t\Big(\sum_{1\leqslant m\leqslant 2n} a_m w_m\Big)\Big\|_2^2 = \Big\|\sum_{1\leqslant m\leqslant 2n} a_m U_t w_m\Big\|_2^2 \\ &= \Big\|\sum_{1\leqslant m\leqslant 2n} a_m (-1)^{\gamma_m} w_m\Big\|_2^2 = \sum_{1\leqslant m\leqslant 2n} a_m^2 \\ &= \Big\|\sum_{1\leqslant m\leqslant 2n} a_m w_m\Big\|_2^2 = \|w_m\|_2^2. \end{aligned} \tag{3.2.46}$$

Θεωρούμε την ομάδα G των ισομετριών του $\mathrm{span}(W^{n-1}\cup W^{n+1})$ που παράγεται από τις U_p και τις U_t. Αφού οι συναρτήσεις Walsh είναι ορθογώνιες σαν διανύσματα στον $\ell_2(H_{2n})$, το $W^{n-1}\cup W^{n+1}$ είναι μια βάση του $\mathrm{span}(W^{n-1}\cup W^{n+1})$. Σταθεροποιούμε αυτήν την βάση στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 3.2.3. *Έστω T ένας γραμμικός μετασχηματισμός του $\mathrm{span}(W^{n-1}\cup W^{n+1})$. Υπάρχει $U\in G$ τέτοιος ώστε, αν*

$$f = \frac{F_{n-1}}{\|F_{n-1}\|} - \frac{F_{n+1}}{\|F_{n+1}\|}, \tag{3.2.47}$$

τότε

$$\Big|\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1},T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1},T)\Big| \leqslant \frac{2}{n}\frac{\|TUf\|}{\|Uf\|}. \tag{3.2.48}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον τελεστή

$$\tilde{T} = \frac{1}{|G|}\sum_{U\in G} U^{-1}TU. \tag{3.2.49}$$

Τότε, έχουμε

$$\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1},\tilde{T}) = \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1},T) \quad \text{και} \quad \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1},\tilde{T}) = \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1},T). \tag{3.2.50}$$

Πράγματι,

$$\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1},\tilde{T}) = \frac{1}{|W^{n-1}|}\sum_{w_{n-1}\in W^{n-1}}\langle \tilde{T}w_{n-1},w_{n-1}\rangle \tag{3.2.51}$$
$$= \frac{1}{|W^{n-1}|}\frac{1}{|G|}\sum_{w_{n-1}\in W^{n-1}}\sum_{U\in G}\langle U^{-1}TUw_{n-1},w_{n-1}\rangle$$
$$= \frac{1}{|W^{n-1}|}\frac{1}{|G|}\sum_{w_{n-1}\in W^{n-1}}\sum_{U\in G}\langle TUw_{n-1},w_{n-1}\rangle$$
$$= \frac{1}{|G|}\sum_{U\in G}\left(\frac{1}{|W^{n-1}|}\sum_{w_{n-1}\in W^{n-1}}\langle Tw_{n-1},w_{n-1}\rangle\right)$$
$$= \frac{1}{|W^{n-1}|}\sum_{w_{n-1}\in W^{n-1}}\langle Tw_{n-1},w_{n-1}\rangle$$
$$= \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1},T),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η U είναι ισομετρία και $\{Uw_m : w_m\in W^m\} = \{w_m\in W^m\}$. Ανάλογα δείχνουμε ότι

$$\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1},\tilde{T}) = \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1},T). \tag{3.2.52}$$

Έστω $x\in \mathrm{span}(W_{n-1}\cup W^{n+1})$. Τότε, υπάρχει $U\in G$ ώστε

$$\|TUx\| \geqslant \|\tilde{T}x\|. \tag{3.2.53}$$

Πράγματι,

$$\|\tilde{T}x\| = \left\|\frac{1}{|G|}\sum_{U\in G}U^{-1}TUx\right\| = \frac{1}{|G|}\sum_{U\in G}\|TUx\| \leqslant \max_{U\in G}\|TUx\|. \tag{3.2.54}$$

Επίσης, για κάθε $U\in G$ έχουμε

$$U^{-1}\tilde{T}U = \tilde{T}. \tag{3.2.55}$$

Πράγματι, έστω $w\in \mathrm{span}(W_{n-1}\cup W^{n+1})$. Τότε,

$$\tilde{T}w = \frac{1}{|G|}\sum_{U\in G}U^{-1}TU(w) = \frac{1}{|G|}\sum_{U\in G}U_t^{-1}U^{-1}TUU_t(w) \tag{3.2.56}$$
$$= U^{-1}\left(\frac{1}{|G|}\sum_{U\in G}U^{-1}TU\right)U(w) = U^{-1}\tilde{T}U(w),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι οι $U_t^{-1}U^{-1}$ και UU_t ανήκουν στην ομάδα G των ισομετριών του $\mathrm{span}(W_{n-1} \cup W^{n+1})$ που παράγεται από τις U_p και U_t.

Θεωρούμε τώρα $w, w' \in \mathrm{span}(W_{n-1} \cup W^{n+1})$. Τότε, υπάρχει t ώστε

$$U_t(w) = w \quad \text{και} \quad U_t(w') = -w'. \tag{3.2.57}$$

Παρατηρήστε πρώτα ότι $w \neq w'$. Πράγματι, αν $w = w'$, τότε $U_t(w) = U_t(w') \Rightarrow w = -w'$, δηλαδή $w = -w$, το οποίο είναι άτοπο. Αν $w, w' \in W_{n-1}$, τότε

$$\begin{aligned} U_t w(a) = w_{n-1}(t(a)) &= (-1)^{b_{j_1}} R_{j_1}(a) \cdots (-1)^{b_{j_{n-1}}} R_{j_{n-1}}(a) \\ &= (-1)^{\gamma_{n-1}} R_{j_1}(a) \cdots R_{j_{n-1}}(a) \\ &= (-1)^{\gamma_{n-1}} w(a). \end{aligned} \tag{3.2.58}$$

Ομοίως, έχουμε $U_t w'(a) = (-1)^{\gamma_{n-1}} w'(a)$.

Για $a = (1, \dots, 1, 0, \dots, 0)$ έχουμε $U_t(w) = w$ και $U_t(w') = -w'$. Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν $w, w' \in W^{n+1}$ ή αν $w \in W^{n-1}$ και $w' \in W^{n+1}$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$\tilde{T}(w) = k_w w \tag{3.2.59}$$

για κάθε $w \in \mathrm{span}(W_{n-1} \cup W^{n+1})$.

Πράγματι, από την (3.2.57) μπορούμε να επιλέξουμε t ώστε $U_t(w) = w$ και $U_t(w') = -w'$, για κάθε $w \neq w' \in \mathrm{span}(W^{n-1} \cup W^{n+1})$. Τότε,

$$\begin{aligned} \tilde{T}w &= \frac{1}{|G|} \sum_{U \in G} U^{-1} T U(w) = \frac{1}{|G|} \sum_{U \in G} U_t^{-1} U^{-1} T U U_t(w) \\ &= \frac{1}{|G|} \sum_{U \in G} U_t^{-1} U^{-1} T U(w) = U_t^{-1} \left(\frac{1}{|G|} \sum_{U \in G} U^{-1} T U(w) \right) \\ &= U_t^{-1}(\tilde{T}w) = U_{-t}(\tilde{T}w). \end{aligned} \tag{3.2.60}$$

Επίσης, $U_t(w') = -w'$ άρα $w' = -U_t^{-1}(w') = -U_{-t}(w')$ και έπεται ότι

$$\langle \tilde{T}w, w' \rangle = \langle U_{-t}(\tilde{T}w), -U_{-t}(w') \rangle = -\langle \tilde{T}w, w' \rangle. \tag{3.2.61}$$

Δηλαδή, $\langle \tilde{T}w, w' \rangle = 0$ για κάθε ζευγάρι συναρτήσεων Walsh $w, w' \in \mathrm{span}(W^{n-1} \cup W^{n+1})$. Άρα, η $\tilde{T}w$ είναι πολλαπλάσιο της w για κάθε $w \in \mathrm{span}(W^{n-1} \cup W^{n+1})$.

Τότε,

$$k_w = \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) \quad \text{και} \quad k_w = \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1}, T), \tag{3.2.62}$$

όπου $w \in W^{n-1}$ στην πρώτη ισότητα και $w \in W^{n+1}$ στην δεύτερη.

Πρώτα θα δείξουμε ότι αν $w, w' \in W^{n-1}$ (ή αν $w, w' \in W^{n+1}$) με $\tilde{T}w = kw$ και $\tilde{T}w' = k'w'$, τότε $k = k'$. Πράγματι, υπάρχει s ώστε $w' = sw$. Τότε, από τις (3.2.59) και (3.2.55) έχουμε

$$k'w' = \tilde{T}w' = \tilde{T}sw = ss^{-1}\tilde{T}sw = s\tilde{T}w = skw = kw'. \tag{3.2.63}$$

Άρα, $k = k'$.

Έστω $w \in W^{n-1}$. Τότε, από τις (3.2.50)και (3.2.59) έχουμε

$$\begin{aligned}(3.2.64)\qquad \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) = \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, \tilde{T}) &= \frac{1}{|W^{n-1}|} \sum_{w_{n-1} \in W^{n-1}} \langle T\widetilde{w_{n-1}}, w_{n-1} \rangle \\ &= \frac{1}{|W^{n-1}|} \sum_{w_{n-1} \in W^{n-1}} \langle k w_{n-1}, w_{n-1} \rangle \\ &= \frac{1}{|W^{n-1}|} \sum_{w_{n-1} \in W^{n-1}} k_{n-1} = k_{n-1}.\end{aligned}$$

Ανάλογα βλέπουμε ότι

$$(3.2.65)\qquad \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1}, T) = k_{n+1}.$$

Θα δείξουμε τώρα ότι

$$(3.2.66)\qquad \big|\tilde{T} f(0)\big| = \big|\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1}, T)\big|.$$

Πράγματι, από τις (3.2.59) και (3.2.62) έχουμε

$$\begin{aligned}(3.2.67)\qquad \tilde{T} F_{n-1} &= \sum_{w_{n-1} \in W^{n-1}} \tilde{T} w_{n-1} = \sum_{w_{n-1} \in W^{n-1}} k_{n-1} w_{n-1} \\ &= \sum_{w_{n-1} \in W^{n-1}} \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) w_{n-1} \\ &= \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) \sum_{w_{n-1} \in W^{n-1}} w_{n-1} \\ &= \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) F_{n-1}.\end{aligned}$$

Ομοίως δείχνουμε ότι

$$(3.2.68)\qquad \tilde{T} F_{n+1} = \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1}, T) F_{n+1}.$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}(3.2.69)\qquad \tilde{T} f &= \frac{\tilde{T} F_{n-1}}{\|\tilde{T} F_{n-1}\|_\infty} - \frac{\tilde{T} F_{n+1}}{\big\|\tilde{T} F_{n+1}\big\|_\infty} \\ &= \frac{\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) F_{n-1}}{\big\|\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) F_{n-1}\big\|_\infty} - \frac{\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1}, T) F_{n+1}}{\big\|\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1}, T) F_{n+1}\big\|_\infty}.\end{aligned}$$

Από το (i) του Λήμματος 3.2.1 έχουμε $F_{n-1}(0) = \|F_{n-1}\|_\infty$, άρα η (3.2.66) έπεται από την (3.2.69). Τότε,

$$(3.2.70)\qquad \big\|\tilde{T} f\big\| \geqslant \big|\tilde{T} f(0)\big| = \big|\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1}, T)\big|.$$

Τέλος, θα δείξουμε ότι

$$\|Uf\| \leqslant \frac{2}{n}, \tag{3.2.71}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$ και για κάθε $U \in G$.

Πράγματι, έστω $a = (a_1, \dots, a_{2n})$. Τότε,

$$|f(a)| \leqslant \left|\frac{F_{n-1}(a)}{\|F_{n-1}\|_\infty}\right| + \left|\frac{F_{n-1}(a)}{\|F_{n-1}\|_\infty}\right|. \tag{3.2.72}$$

Αν $a = (0, \cdots, 0)$, τότε από το (i) του Λήμματος 3.1.2 και την (3.2.72) έχουμε $|f(a)| \leqslant 2$. Αν $a = (1, \dots, 1)$, τότε $w_{n-1} = R_{i_1}(a) \cdots R_{i_n}(a) = (-1)^{2n} = 1$. Άρα,

$$F_{n-1}(a) = \sum_{w_{n-1} \in W^{n-1}} w_{n-1} = \binom{2n}{n-1} = \|F_{n-1}\|_\infty. \tag{3.2.73}$$

Ομοίως έχουμε $F_{n+1}(a) = \|F_{n+1}\|_\infty$. Από την (3.2.72) έπεται ότι $|f(a)| \leqslant 2$. Αν $0 < |a| < 2n$, τότε από το (iii) του Λήμματος 3.1.2 έχουμε

$$|f(a)| \leqslant \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{2}{n}. \tag{3.2.74}$$

Έτσι, σε κάθε περίπτωση έχουμε

$$\|f\| \leqslant \frac{2}{n}, \tag{3.2.75}$$

για κάθε $n = 1, 2, \dots$. Εφ'οσον η U είναι ισομετρία, η (3.2.71) έπεται άμεσα. Τότε, από τις (3.2.70), (3.2.53) και (3.2.71) εχουμε

$$\begin{aligned} |\tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n-1}, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(W^{n+1}, T)| &= |\tilde{T}f(0)| \leqslant \|\tilde{T}f\| \leqslant \|TUf\| \\ &= \|Uf\| \frac{\|TUf\|}{\|Uf\|} \\ &\leqslant \frac{2}{n} \frac{\|TUf\|}{\|Uf\|}. \end{aligned} \tag{3.2.76}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Οι χώροι (W^{n-1}) και (W^{n+1}) παίζουν στο Λήμμα 3.2.3 έναν ρόλο ανάλογο με αυτόν των (M_m) και (M_{m+1}) στο Λήμμα 3.1.6. Αφού το n έχει την ίδια τάξη μεγέθους με τον $\log\binom{2n}{n-1}$, βλέπουμε ότι η συνθήκη (ii) ικανοποιείται. Όμως, αφού οι (W^{n-1}) και (W^{n+1}) έχουν την ίδια διάσταση, στο Λήμμα 3.2.3 δεν έχουμε κάτι παρόμοιο με την συνθήκη του Λήμματος 3.1.6. Θα ξεπεράσουμε αυτήν την δυσκολία με συνδυαστικά επιχειρήματα.

3.3 Κατασκευή του χώρου

Θεωρούμε δύο αύξουσες ακολουθίες $\{k_m\}$ και $\{n_m\}$ φυσικών αριθμών, οι οποίες θα επιλεγούν κατάλληλα στη συνέχεια. Ορίζουμε $K_{mj} := \mathbb{Z}_2^{2n_m}$, $1 \leqslant j \leqslant k_m$, και θεωρούμε την ξένη ένωση

$$K_m := K_{m1} \cup K_{m2} \cup \cdots \cup K_{mk_m}. \tag{3.3.1}$$

Θεωρούμε τον χώρο $C(K_m)$ των συνεχών συναρτήσεων $f : K_m \to \mathbb{R}$, εφοδιασμένον με την $\|\cdot\|_\infty$, και ορίζουμε τον χώρο

$$B_1 = \left(\sum_{m=1}^{\infty} \oplus C(K_m)\right)_2. \tag{3.3.2}$$

Δηλαδή, μια συνάρτηση $f = (f_1, f_2, \ldots, f_m, \ldots)$ με $f_m \in C(K_m)$ ανήκει στον B_1 αν

$$\|f\|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \|f_m\|_\infty^2 < \infty. \tag{3.3.3}$$

Είναι γνωστό ότι το ℓ_2-άθροισμα χώρων πεπερασμένης διάστασης είναι αυτοπαθής χώρος. Ο χώρος B που θα κατασκευάσουμε θα είναι κλειστός υπόχωρος του B_1. Άρα, ο B θα είναι αυτοπαθής και διαχωρίσιμος.

Θα χρησιμοποιήσουμε το Λήμμα 3.2.3 για διάφορες τιμές του n. Για τον λόγο αυτό, θα γράφουμε W_n^m αντί για W^m. Ορίζουμε

$$t_m = \dim(W_{n_m}^{n_m-1}) = \dim(W_{n_m}^{n_m+1}) = \binom{2n_m}{n_m-1}. \tag{3.3.4}$$

Θα ορίσουμε επίσης, για κάθε m, έναν υπόχωρο $\mathrm{span}(M_m)$ του $C(K_m) \oplus C(K_{m+1})$ διάστασης $k_m t_m$. Το σύνολο M_m που τον παράγει, θα έχει $k_m t_m$ στοιχεία και θα ικανοποιεί τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

(A) Η συνιστώσα του $e \in M_m$ στον $C(K_{mj})$ θα είναι ίση με 0 για όλα τα j εκτός από ένα, για το οποίο θα είναι στοιχείο του $W_{n_m}^{n_m+1}$.

(B) Η συνιστώσα του $e \in M_m$ στον $C(K_{m+1,j})$ θα είναι 0 ή στοιχείο του $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ και, για κάθε j, κάθε στοιχείο του $W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1}$ θα εμφανίζεται σαν συνιστώσα κάποιου e.

(Γ) Διαφορετικά στοιχεία του M_m δεν μπορούν να έχουν την ίδια μη μηδενική συνιστώσα στον $C(K_{mj})$ ή στον $C(K_{m+1,j})$.

Από τις συνθήκες (A), (Γ) και από την $\mathrm{card}(M_m) = k_m t_m$ βλέπουμε ότι υπάρχει 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στα στα στοιχεία του M_m και του $W_{n_m}^{n_m+1} \times \{1, 2, \ldots, k_m\}$. Συμβολίζουμε με M_{mj} το σύνολο των t_m στοιχείων του M_m που έχουν μη μηδενική συνιστώσα στον $C(K_{mj})$ και με N_{mj} το σύνολο των t_{m+1} στοιχείων του M_m που έχουν μη μηδενική συνιστώσα στον $C(K_{m+1,j})$. Τα σύνολα M_{mj} είναι ξένα ανά δύο. Αντίστροφα, αν έχουμε k_m ξένα ανά δύο σύνολα M_{mj} καθένα από τα οποία έχει t_m στοιχεία και k_{m+1} υποσύνολα N_m του $\bigcup_j M_{mj}$ καθένα από τα οποία έχει t_{m+1} στοιχεία, τότε μπορούμε να ορίσουμε, κατά προφανή τρόπο, σύνολα M_m με τις παραπάνω τρεις ιδιότητες. Παρακάτω, θα ζητήσουμε τρεις ακόμα ιδιότητες από τα M_m και στο τέλος θα δείξουμε ότι μπορούμε να τις ικανοποιήσουμε όλες ταυτόχρονα.

Ο B θα είναι ο υπόχωρος του B_1 που παράγεται από το $M = \bigcup_m M_m$. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι το M έχει την ιδιότητα A. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\max_p \left| \left(\sum a_j e_j \right) \right| \geqslant \max_p |(a_k e_k)(p)| \tag{3.3.5}$$

όπου το p διατρέχει το K_{mi}. Γνωρίζουμε ότι, σε κάθε K_{mi}, κάθε $e \in M$ παίρνει την τιμή 0 ή παίρνει τις τιμές κάποιας συνάρτησης Walsh w_k. Στην πρώτη περίπτωση η ανισότητα ισχύει κατά τετριμμένο τρόπο, ενώ στην δεύτερη περίπτωση ισχύει για τον εξής λόγο: αφού οι συναρτήσεις Walsh είναι ορθογώνιες σαν διανύσματα στον ℓ_2, η ℓ_2-νόρμα του αθροίσματος μιας w_k και ενός γραμμικού συνδυασμού άλλων συναρτήσεων Walsh είναι μεγαλύτερη ή ίση από την ℓ_2-νόρμα της w_k. Όμως, η w_k παίρνει μόνο τις τιμές ± 1, άρα η $\|\cdot\|_\infty$-νόρμα ενός τέτοιου αθροίσματος δεν μπορεί να είναι μικρότερη από 1. Πράγματι, έστω $g_s = a_s e_s|_{K_{m,s}}$ και ας υποθέσουμε ότι $\|g_1 + \cdots + g_s\|_2^2 < \|g_k\|_2^2$. Τότε,$\sum_i \|g_i\|_2^2 < 1$, το οποίο είναι άτοπο. Άρα, $\|g_1 + \cdots + g_s\|_\infty^2 \geqslant \|g_k\|_2^2$.

Αυτό αποδεικνύει ότι το M έχει την ιδιότητα A. Μένει να εξετάσουμε τις συνθήκες (i) και (ii) του Λήμματος 3.1.6.

Εξετάζουμε πρώτα την (ii). Παρατηρήστε ότι αν $T : B \to B$ είναι ένας τελεστής πεπερασμένης έκτασης, τότε

$$\begin{aligned} k_{m+1}\left|\tilde{\mathrm{Tr}}(M_m, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(M_{m+1}, T)\right| &= \left| k_{m+1}\tilde{\mathrm{Tr}}(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{\mathrm{Tr}}(M_{m+1,j}, T) \right| \\ &\leqslant \left| k_{m+1}\tilde{\mathrm{Tr}}(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{\mathrm{Tr}}(N_{mj}, T) \right| \\ &\quad + \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \left| \tilde{\mathrm{Tr}}(N_{mj}, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(M_{m+1,j}, T) \right|. \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

Θα εκτιμήσουμε την τελευταία ποσότητα στα επόμενα λήμματα. Για τον σκοπό αυτό επιβάλλουμε τρεις ακόμα συνθήκες στα M_m:

(Δ) $\mathrm{card}(N_{mi} \cap N_{mj}) \leqslant 2t_{m+1}/n_{m+1}$ για κάθε $i \neq j$.

(Ε) $\mathrm{card}(N_{mj} \cap M_{mi}) \leqslant \min\{t_{m+1}/n_{m+1}, t_m/n_m\}$.

(Z) Αν $\sigma(e)$ είναι το πλήθος των j για τα οποία $e \in N_{mj}$, τότε

$$\sum_{e \in M_m} \left| \frac{1}{k_m t_m} - \frac{\sigma(e)}{k_{m+1} t_{m+1}} \right| \leqslant \frac{1}{n_{m+1}}. \tag{3.3.7}$$

Λήμμα 3.3.1. *Αν ισχύει η συνθήκη* (Z) *τότε, για κάθε τελεστή* $T : B \to B$ *πεπερασμένης έκτασης έχουμε*

$$\left| k_{m+1} \tilde{\mathrm{Tr}}(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{\mathrm{Tr}}(N_{mj}, T) \right| \leqslant \frac{k_{m+1} \|T\|}{n_{m+1}}. \tag{3.3.8}$$

Απόδειξη. Για κάθε $e \in M_m$ γράφουμε $Te = a(e)e + y$, όπου y είναι ένας γραμμικός συνδυασμός άλλων στοιχείων του M. Τότε, από το Λήμμα 3.1.5 έχουμε $|\tilde{\mathrm{Tr}}(M_m, T)| \leqslant \|T|_{M_m}\|$, δηλαδή $|a(e)| \leqslant \|T\|$. Συνεπώς,

(3.3.9)
$$\begin{aligned} \left| k_{m+1} \tilde{\mathrm{Tr}}(M_m, T) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \tilde{\mathrm{Tr}}(N_{mj}, T) \right| &= \left| \frac{k_{m+1}}{k_m t_m} \sum_{e \in M_m} a(e) - \sum_{j=1}^{k_{m+1}} \frac{1}{k_{m+1} t_{m+1}} \sum_{e \in N_{mj}} a(e) \right| \\ &= \sum_{e \in M_m} \left| \left(\frac{k_{m+1}}{k_m t_m} - \frac{\sigma(e)}{k_{m+1} t_{m+1}} \right) a(e) \right| \\ &\leqslant \frac{k_{m+1} \|T\|}{n_{m+1}}. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το Λήμμα. □

Λήμμα 3.3.2. *Αν ισχύουν οι* (Δ) *και* (Ε) *τότε, για κάθε τελεστή* $T : B \to B$ *πεπερασμένης έκτασης έχουμε*

$$|\tilde{\mathrm{Tr}}(N_{mj}, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(M_{m+1,j}, T)| \leqslant \frac{4\|T\|}{n_{m+1}}. \tag{3.3.10}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο $E = \mathrm{span}(N_{mj} \cup M_{m+1,j})$. Ορίζουμε $T' : E \to E$ ως εξής: Αν $Te_k = \sum a_j e_j$ τότε ορίζουμε $T'(e_k) = \sum a_j e_j$, όπου το τελευταίο άθροισμα είναι μόνο πάνω από εκείνα τα e_j που ανήκουν στον E. Από τον ορισμό είναι φανερό ότι οι T και T' έχουν το ίδιο ίχνος στον N_{mj} και στον $M_{m+1,j}$. Επιπλέον, αν $p \in K_{m+1,j}$ έχουμε $Tx(p) = T'x(p)$, γιατί όλα τα διανύσματα του M που δεν ανήκουν στο $N_{mj} \cup M_{m+1,j}$ μηδενίζονται στο $K_{m+1,j}$. Παίρνοντας τον περιορισμό στο $K_{m+1,j}$ έχουμε μία 1-1 και επί απεικόνιση από τον E στον $\mathrm{span}(W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}-1} \cup W_{n_{m+1}}^{n_{m+1}+1})$. Ορίζουμε μια νόρμα $|||\cdot|||$ στον E έτσι ώστε να γίνει ισομετρία. Θεωρούμε το στοιχείο Uf του Λήμματος 3.2.3, με $n = n_{m+1}$ και τον T' στην θέση του T, που αντιστοιχεί στο $x \in E$. Τότε, το Λήμμα 3.2.3 μας δίνει

$$|\tilde{\mathrm{Tr}}(N_{mj}, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(M_{m+1,j}, T)| \leqslant \frac{2|||T'x|||}{n_{m+1}|||x|||}. \tag{3.3.11}$$

Έχουμε

$$|||T'x||| = \max_{p\in K_{m+1,j}} |T'x(p)| = \max_{p\in K_{m+1,j}} |Tx(p)| \leqslant \|Tx\|. \tag{3.3.12}$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$\|x\| \leqslant 2|||x|||. \tag{3.3.13}$$

Από το (ii) του Λήμματος 3.2.1, αν $p \in K_{m+1,j}$ έχουμε

$$\big|F_{n_{m+1}-1}(p)\big| = \left(1 - \frac{n_{m+1}-1}{n_{m+1}}\right)\big\|F_{n_{m+1}-1}\big\|_\infty \tag{3.3.14}$$

και

$$\big|F_{n_{m+1}+1}(p)\big| = \left(1 - \frac{n_{m+1}+1}{n_{m+1}}\right)\big\|F_{n_{m+1}+1}\big\|_\infty. \tag{3.3.15}$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\big|x(p)\big| &= \left|\frac{F_{n_{m+1}-1}(p)}{\big\|F_{n_{m+1}-1}\big\|_\infty} - \frac{F_{n_{m+1}+1}(p)}{\big\|F_{n_{m+1}+1}\big\|_\infty}\right| \geqslant 1 - \frac{n_{m+1}-1}{n_{m+1}} - 1 + \frac{n_{m+1}+1}{n_{m+1}} \\ &= \frac{2}{n_{m+1}}.\end{aligned} \tag{3.3.16}$$

Επομένως,

$$|||x||| = \max_{p\in K_{m+1,j}} |x(p)| > \frac{2}{n_{m+1}}. \tag{3.3.17}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\big\|F_{n_{m+1}-1}\big\|_\infty = \binom{2n_{m+1}}{n_{m+1}-1} = \binom{2n_{m+1}}{n_{m+1}+1} = \big\|F_{n_{m+1}+1}\big\|_\infty =: t_{m+1}. \tag{3.3.18}$$

Από την

$$\big|x(p)\big| = \left|\frac{F_{n_{m+1}-1}(p)}{\big\|F_{n_{m+1}-1}\big\|_\infty} - \frac{F_{n_{m+1}+1}(p)}{\big\|F_{n_{m+1}+1}\big\|_\infty}\right|, \tag{3.3.19}$$

αν $i \neq j$, η συνθήκη (Δ) δίνει

$$\big|x(p)\big| \leqslant \frac{\mathrm{card}(N_{mi}\cap N_{mj})}{t_{m+1}} \leqslant \frac{2}{n_{m+1}} \tag{3.3.20}$$

για κάθε $p \in K_{m+1,i}$. Άρα, η $|||x|||$ ισούται με το $\max \big|x(p)\big|$ πάνω από όλο το K_{m+1}. Στο $K_{m,i}$, από την συνθήκη (E) έχουμε

$$\big|x(p)\big| \leqslant \frac{\mathrm{card}(N_{mj} \cap M_{mi})}{t_{m+1}} \leqslant \frac{1}{n_{m+1}} \leqslant \frac{|||x|||}{2}. \tag{3.3.21}$$

Στο $K_{m+2,i}$ έχουμε

$$\big|x(p)\big| \leqslant \frac{\mathrm{card}(M_{m+1,j} \cap N_{m+1,i})}{t_{m+1}} \leqslant \frac{1}{n_{m+1}} \leqslant \frac{|||x|||}{2}. \tag{3.3.22}$$

Αυτό αποδεικνύει την $\|x\| \leqslant 2|||x|||$ και το Λήμμα. □

Είμαστε τώρα έτοιμοι να δούμε ότι ο χώρος B που κατασκευάσαμε δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης.

Θεώρημα 3.3.3. *Υπάρχει διαχωρίσιμος αυτοπαθής χώρος Banach B με μια ακολουθία (M_n) υποχώρων πεπερασμένης διάστασης, με $\dim(M_n) \to \infty$ καθώς $n \to \infty$ και μια σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε τελεστή T πεπερασμένης τάξης,*

$$\|I - T\|_{\langle M_n \rangle} \geqslant 1 - \frac{C\|T\|}{\log \dim(M_n)}. \tag{3.3.23}$$

Ειδικότερα, ο B δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης, άρα δεν έχει βάση Schauder.

Απόδειξη. Επιλέγουμε σταθερές $a > 1$ και $\gamma > 1$ έτσι ώστε

$$1 < a < \gamma \quad \text{και} \quad a < (2+\gamma)/(1+\gamma) \tag{3.3.24}$$

και ορίζουμε

$$n_m = [a^m] \quad \text{και} \quad k_m = [t_m^{\gamma}]. \tag{3.3.25}$$

Από τον τύπο του Stirling έχουμε $t_m \simeq 2^{2n_m}/\sqrt{\pi n_m}$ – εδώ, το σύμβολο $\simeq$ σημαίνει ότι το πηλίκο των δύο αριθμών τείνει στο 1. Θα δείξουμε ότι μπορούμε να επιλέξουμε τα M_m έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι έξι συνθήκες (A)–(Z). Αν το δεχτούμε αυτό, παίρνουμε

$$\log \dim(\mathrm{span}(M_m)) = \log(k_m t_m) \simeq (\gamma+1)(\log 4) a^m, \tag{3.3.26}$$

άρα η συνθήκη (i) του Λήμματος 3.1.6 ικανοποιείται. Από την (3.3.6), και τα Λήμματα 3.3.1 και 3.3.2 παίρνουμε ότι, για κάθε τελεστή $T : B \to B$ πεπερασμένης έκτασης ισχύει

$$\big|\tilde{\mathrm{Tr}}(M_{m+1}, T) - \tilde{\mathrm{Tr}}(M_m, T)\big| \leqslant \frac{5\|T\|}{n_{m+1}} \leqslant \frac{K\|T\|}{\log \dim(\mathrm{span}(M_m))}. \tag{3.3.27}$$

Έτσι, ικανοποιείται και η συνθήκη (ii) του Λήμματος 3.1.6. Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Οι συνθήκες. Για την κατασκευή των M_m παρατηρούμε αρχικά ότι ο λόγος $t_{m+1}/k_m = O(t^{a-\gamma})$ είναι πολύ μικρός. Θέτοντας $L = [k_m/t_{m+1}]$, παίρνουμε

$$0 \leqslant k_m - Lt_{m+1} < t_{m+1} - O(k_m t_m^{-\gamma}). \tag{3.3.28}$$

Θα επιλέξουμε όλα τα $N_{mj} = N_j$ να είναι υποσύνολα του $\{1, \dots, Lt_{m+1}\} \times \mathbb{Z}_{t_m}$, όπου $\mathbb{Z}_{t_m}$ είναι η ομάδα των ακεραίων $\bmod t_m$ ως προς την πρόσθεση. Ταυτίζουμε την $\mathbb{Z}_{t_m}$ με την $W_{n_m}^{n_m+1}$, και έτσι, κάθε N_j θα επιλεγεί ως υποσύνολο του $M_m = \{1, \dots, k_m\} \times W_{n_m}^{n_m+1}$. Το M_{mj} θα είναι το σύνολο $\{j\} \times W_{n_m}^{n_m+1}$. Για να επιλέξουμε τα N_j αριθμούμε τα στοιχεία με την διάταξη

$$(1, 0), (2, 0), \dots, (Lt_{m+1}, 0), (1, 1), (2, 1), \dots. \tag{3.3.29}$$

Ο γενικός τύπος είναι $(j, j\rho + k)$, όπου $j = 1, 2, \dots, Lt_{m+1}$, $k = 0, 1, \dots, t_m - 1$ και $\rho = 0, 1, 2, \dots$. Η διάταξη είναι η λεξικογραφική: πρώτα αυξάνει το ρ, μετά το k, και τέλος το j.

Επιλέγουμε τα σύνολα $N_1, N_2, \dots$ έτσι ώστε καθένα από αυτά να έχει t_{m+1} διαδοχικά στοιχεία με βάση την παραπάνω διάταξη. Αφού κάθε τιμή του ρ δίνει Lt_m σύνολα N_j και αφού χρειαζόμαστε k_{m+1} σύνολα N_j, θα χρησιμοποιήσουμε όλα τα στοιχεία για τα οποία $0 \leqslant \rho < \nu$ αλλά κανένα με $\rho > \nu$, όπου $\nu = [k_{m+1}/Lt_m]$. Έχουμε $|\sigma(e) - k_{m+1}/Lt_m| \leqslant 1$ αν $e \in M_{m1} \cup \dots \cup M_{m,Lt_{m+1}}$ γιατί κάθε τέτοιο e εμφανίζεται μόνο μία φορά για κάθε τιμή του ρ. Επίσης, έχουμε $\sigma(e) = 0$ για όλα τα άλλα $e \in M_m$. Στην πρώτη περίπτωση παίρνουμε

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma(e)\neq 0} \left| \frac{1}{k_m t_m} - \frac{\sigma(e)}{k_{m+1}t_{m+1}} \right| &\leqslant \frac{k_m t_m}{k_{m+1}t_{m+1}} \left| \frac{k_{m+1}t_{m+1}}{k_m t_m} - \frac{k_{m+1}}{Lt_m} \right| \\ &\leqslant k_m t_m \left(\frac{1}{k_{m+1}t_{m+1}} + \frac{|L - k_m/t_{m+1}|}{Lk_m t_m} \right) \\ &\leqslant \frac{1}{L} + \frac{k_m t_m}{k_{m+1}t_{m+1}}. \end{aligned} \tag{3.3.30}$$

Αυτό είναι πολύ μικρότερο από $1/n_{m+1}$ αν το m είναι αρκετά μεγάλο. Το σχετικό πλήθος των e για τα οποία $\sigma(e) = 0$ είναι $O(t_m^{\alpha-\gamma})$, το οποίο είναι επίσης πολύ μικρότερο από $1/n_{m+1}$. Έτσι, εξασφαλίζουμε την συνθήκη (Ζ). Η (Ε) ισχύει προφανώς με 1 στο δεξιό μέλος. Μένει να εξασφαλίσουμε την συνθήκη (Δ).

Ας υποθέσουμε ότι δύο διαφορετικά N_j έχουν ένα κοινό σημείο $(j, j\rho_1 + k_1) = (j, j\rho_2 + k_2)$ με $(\rho_1, k_1) \neq (\rho_2, k_2)$. Τότε, $\rho_1 \neq \rho_2$. Όλα τα άλλα στοιχεία στην τομή αυτών των N_j μπορούν να γραφτούν στη μορφή $(\chi, \chi\rho_1 + k_1) \neq (\chi\rho_2 + k_2)$, όπου $|\chi - i| < t_{m+1}$. Αν $|\chi - j| = \mu$, τότε $0 < \mu < t_{m+1}$ και $(\mu, \mu\rho_1) = (\mu, \mu\rho_2)$, δηλαδή ο t_m διαιρεί τον $\mu(\rho_1 - \rho_2)$. Αυτό μας δίνει

$$\mu \geqslant \frac{t_m}{|\rho_1 - \rho_2|} \geqslant \frac{t_m}{\nu}. \tag{3.3.31}$$

Αν $t_m/\nu > n_{m+1}$ τότε έπεται η (Δ). Έχουμε

$$t_m/\nu \simeq Lt_m^2/k_{m+1} \simeq k_m t_m^2/(t_{m+1}k_{m+1}). \tag{3.3.32}$$

Η τάξη μεγέθους της τελευταίας ποσότητας είναι $t_m^{\gamma+2-a(\gamma+1)}$ και ο εκθέτης είναι θετικός από την υπόθεσή μας. Έτσι, η (Δ) ισχύει για μεγάλες τιμές του m, και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Κεφάλαιο 4

Η κατασκευή του Davie

4.1 Ανισότητες τύπου Bernstein

4.1α΄ Στοιχεία από την Θεωρία Πιθανοτήτων

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τα παρακάτω.

1. Έστω X διακριτή τυχαία μεταβλητή, η οποία παίρνει την τιμή η_k με πιθανότητα $p_k = \mathbb{P}(X = \eta_k)$, $k \geqslant 1$. Τότε, η μέση τιμή της X ισούται με

$$\mathbb{E}\,(X) = \sum_k \eta_k p_k = \sum_k \eta_k \mathbb{P}(X = \eta_k). \tag{4.1.1}$$

2. Έστω $X_1, \dots, X_m$ ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές σε έναν χώρο πιθανότητας. Τότε,

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^m X_i\right) = \prod_{i=1}^m \mathbb{E}\,(X_i). \tag{4.1.2}$$

3. Έστω X τυχαία μεταβλητή σε έναν χώρο πιθανότητας. Τότε,

$$\mathbb{P}\,(X > 0) = \mathbb{E}\,(\mathbf{1}_{(0,\infty)}(X)), \tag{4.1.3}$$

όπου $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(X) = 1$ αν $X > 0$ και $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(X) = 0$ αν $X \leqslant 0$.

Για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $\mathbf{1}_{(0,\infty)}(X) \leqslant e^{\lambda X}$. Συνεπώς,

$$\mathbb{P}\,(X > 0) \leqslant \mathbb{E}\,(e^{\lambda X}). \tag{4.1.4}$$

4.1β΄ Αθροίσματα ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών

Σε ό,τι ακολουθεί, με κ_1 συμβολίζουμε μια απόλυτη θετική σταθερά που η τιμή της θα προσδιοριστεί κατά την απόδειξη.

Πρόταση 4.1.1. (α) *Έστω* $a_1,\dots,a_n$ *πεπερασμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και έστω* $\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n$ *ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τις τιμές* 1 *και* -1 *με πιθανότητα* $1/2$. *Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j\right| > \kappa_1\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\log n\right)^{1/2}\right) < \frac{\kappa_1}{n^3}. \tag{4.1.5}$$

(β) *Έστω* $a_1,\dots,a_n$ *πεπερασμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών και έστω* $\rho_1,\dots,\rho_n$ *ακολουθία ανεξάρτητων τυχαίων μεταβλητών που παίρνουν τις τιμές* 2 *και* -1 *με πιθανότητα* $1/3$ *και* $2/3$ *αντίστοιχα. Τότε,*

$$\mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right| > \kappa_1\left(\sum_{j=1}^n |a_j|^2\log n\right)^{1/2}\right) < \frac{\kappa_1}{n^3}. \tag{4.1.6}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι οι $a_1,\dots,a_n$ είναι πραγματικοί αριθμοί. Αν $a_j=0$ για κάθε $j=1,\dots,n$ τότε το συμπέρασμα ισχύει. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $\sum_{j=1}^n |a_j|^2\neq 0$ και τότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\sum_{j=1}^n |a_j|^2=1$, διότι οι (4.1.5) και (4.1.6) είναι ομογενείς.

(α) Γράφουμε $\varepsilon=(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_n)$ και ορίζουμε

$$f(\varepsilon)=\left|\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j\right|. \tag{4.1.7}$$

Χρησιμοποιώντας την προφανή ανισότητα $e^{|t|}\leqslant e^t+e^{-t}$ και την ανεξαρτησία των ε_j βλέπουμε ότι για κάθε $\lambda>0$,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\left[\exp(\lambda f(\varepsilon))\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[e^{\lambda\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j}+e^{-\lambda\sum_{j=1}^n a_j\varepsilon_j}\right]\\ &= \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^n e^{\lambda a_j\varepsilon_j}+\prod_{j=1}^n e^{-\lambda a_j\varepsilon_j}\right]\\ &= \prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left[e^{\lambda a_j\varepsilon_j}\right]+\prod_{j=1}^n \mathbb{E}\left[e^{-\lambda a_j\varepsilon_j}\right]\\ &= 2\prod_{j=1}^n\cosh(\lambda a_j)\leqslant 2\prod_{j=1}^n\exp(\lambda^2a_j^2)\\ &= 2\exp(\lambda^2).\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

Στο τελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την ανισότητα $\cosh x \leqslant e^{x^2}$ η οποία ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (παρατηρήστε ότι $\cosh x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{n!} = e^{x^2}$) και την υπόθεση ότι $\sum_{j=1}^{n} a_j^2 = 1$. Έπεται ότι

$$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda f(\varepsilon) - \lambda^2 - 3\log n\right] \leqslant 2\exp(-3\log n) = \frac{2}{n^3}. \tag{4.1.9}$$

Επιλέγοντας $\lambda = \sqrt{3\log n}$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left[\exp(\sqrt{3\log n} f(\varepsilon) - 6\log n)\right] \leqslant \frac{2}{n^3}. \tag{4.1.10}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$\mathbb{P}\left(f(\varepsilon) > 2\sqrt{3\log n}\right) \leqslant \mathbb{E}\left[\exp(\sqrt{3\log n} f(\varepsilon) - 6\log n)\right] \leqslant \frac{2}{n^3}, \tag{4.1.11}$$

και έχουμε το ζητούμενο με $\kappa_1 = 2\sqrt{3}$.
(β) Γράφουμε $\rho = (\rho_1, \ldots, \rho_n)$ και ορίζουμε

$$g(\rho) = \left|\sum_{j=1}^{n} a_j \rho_j\right|. \tag{4.1.12}$$

Έστω $\lambda > 0$. Από την ανεξαρτησία των ρ_j έπεται ότι

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\left[\exp(\lambda g(\rho))\right] &\leqslant \mathbb{E}\left[\prod_{j=1}^{n} e^{\lambda a_j \rho_j} + \prod_{j=1}^{n} e^{-\lambda a_j \rho_j}\right] \\ &= \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{\lambda a_j \rho_j}\right] + \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda a_j \rho_j}\right]. \end{aligned} \tag{4.1.13}$$

Λήμμα 4.1.2. *Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ ισχύει*

$$e^{2t} + 2e^{-t} \leqslant 3e^{2t^2}. \tag{4.1.14}$$

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$u(t) = 3e^{2t^2+t} - e^{3t} - 2. \tag{4.1.15}$$

Παραγωγίζοντας, έχουμε

$$u'(t) = 3(4t+1)e^{2t^2+t} - 3e^{3t} = 3e^{3t}[(4t+1)e^{2t^2-2t} - 1]. \tag{4.1.16}$$

Η συνάρτηση $s(t)=(4t+1)e^{2t^2-2t}-1$ έχει παράγωγο

$$s'(t)=e^{2t^2-2t}[4+(4t+1)2(2t-1)]=e^{2t^2-2t}(8t^2-2t+1)>0. \tag{4.1.17}$$

Έπεται ότι η s είναι γνησίως αύξουσα, και αφού $s(0)=0$, η $u'(t)=3e^{3t}s(t)$ είναι αρνητική στο $(-\infty,0)$ και θετική στο $(0,+\infty)$. Αυτό αποδεικνύει ότι $u(t)\geqslant u(0)=0$ για κάθε $t\in\mathbb{R}$. Τότε,

$$3e^{2t^2}-e^{2t}-2e^{-t}=e^{-t}u(t)\geqslant 0 \tag{4.1.18}$$

για κάθε $t\in\mathbb{R}$. □

Από την υπόθεση για τις ρ_j, και χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.1.2, έχουμε

$$\mathbb{E}\left[e^{\lambda a_j\rho_j}\right]=\frac{1}{3}e^{2\lambda a_j}+\frac{2}{3}e^{-\lambda a_j}\leqslant e^{2\lambda^2a_j^2} \tag{4.1.19}$$

και

$$\mathbb{E}\left[e^{-\lambda a_j\rho_j}\right]=\frac{1}{3}e^{-2\lambda a_j}+\frac{2}{3}e^{\lambda a_j}\leqslant e^{2\lambda^2a_j^2}. \tag{4.1.20}$$

Συνεπώς,

$$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda g(\rho))\right]\leqslant 2\prod_{j=1}^{n}e^{2\lambda^2a_j^2}=2e^{2\lambda^2}, \tag{4.1.21}$$

όπου, στο τέλος, χρησιμοποιήσαμε την υπόθεση ότι $\sum_{j=1}^n a_j^2=1$. Έπεται ότι

$$\mathbb{E}\left[\exp(\lambda g(\rho)-2\lambda^2-3\log n\right]\leqslant 2\exp(-3\log n)=\frac{2}{n^3}. \tag{4.1.22}$$

Επιλέγοντας $\lambda=\sqrt{3\log n}$ παίρνουμε

$$\mathbb{E}\left[\exp(\sqrt{3\log n}g(\rho)-9\log n)\right]\leqslant\frac{2}{n^3}. \tag{4.1.23}$$

Από την ανισότητα του Markov,

$$\mathbb{P}\left(g(\rho)>3\sqrt{3\log n}\right)\leqslant\mathbb{E}\left[\exp(\sqrt{3\log n}g(\rho)-9\log n)\right]\leqslant\frac{2}{n^3}, \tag{4.1.24}$$

και έχουμε το ζητούμενο με $\kappa_1=3\sqrt{3}$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι $a_i=y_i+iz_i\in\mathbb{C}$, $i=1,\dots,n$. Έχουμε $|a_i|^2=y_i^2+z_i^2$ και

$$\left|\sum_{i=1}^n a_i\rho_i\right|^2=\left|\sum_{i=1}^n y_i\rho_i\right|^2+\left|\sum_{i=1}^n z_i\rho_i\right|^2. \tag{4.1.25}$$

Παρατηρούμε ότι, για κάθε $\kappa > 0$,

$$(4.1.26)\quad \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n a_j\rho_j\right| > 2\kappa_1\sqrt{\sum_{j=1}^n |a_j|^2\log n}\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n y_j\rho_j\right| > \kappa_1\sqrt{\log n\sum_{j=1}^n y_j^2}\right) + \mathbb{P}\left(\left|\sum_{j=1}^n z_j\rho_j\right| > \kappa_1\sqrt{\log n\sum_{j=1}^n z_j^2}\right) \leqslant \frac{2\kappa_1}{n^3}.$$

Το ίδιο ακριβώς επιχείρημα καλύπτει την περίπτωση των μιγαδικών συντελεστών στο (α). □

4.2 Η κατασκευή

Ορισμός 4.2.1. Έστω G αβελιανή ομάδα τάξεως k. **Χαρακτήρας** της G είναι κάθε ομομορφισμός από την G στην πολλαπλασιαστική ομάδα $\{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$. Θα χρησιμοποιήσουμε τα παρακάτω:

(i) Αν η τάξη της G ισούται με k, τότε η G έχει ακριβώς k χαρακτήρες.

(ii) Αν γ είναι ένας χαρακτήρας της G τότε $\overline{\gamma(g)} = \gamma(g^{-1})$ για κάθε $g \in G$ και $\gamma(e) = 1$, όπου e είναι το ουδέτερο στοιχείο της G.

(iii) Αν γ_1, γ_2 είναι διαφορετικοί χαρακτήρες της G τότε οι γ_1 και γ_2 είναι ορθογώνιοι: δηλαδή,

$$(4.2.1)\qquad \sum_{g\in G}\gamma_1(g)\gamma_2(g^{-1}) = \sum_{g\in G}\gamma_1(g)\overline{\gamma_2(g)} = 0.$$

Λήμμα 4.2.2. *Έστω G_k αβελιανή ομάδα τάξεως $3\cdot 2^k$, για κάποιον $k \geqslant 0$. Τότε, υπάρχει διαμέριση του συνόλου των χαρακτήρων $H_k = \{\gamma_j\}_{j=1}^{3\cdot 2^k}$ της G_k σε δύο σύνολα $H_k^+ = \{\sigma_j\}_{j=1}^{2^k}$ και $H_k^- = \{\tau_j\}_{j=1}^{2^{k+1}}$, με $|H_k^+| = 2^k$ και $|H_k^-| = 2^{k+1}$, ώστε για κάθε $g \in G_k$ να ισχύει*

$$(4.2.2)\qquad \left|2\sum_{j=1}^{2^k}\sigma_j(g) - \sum_{j=1}^{2^{k+1}}\tau_j(g)\right| \leqslant \kappa 2^{k/2}\sqrt{k+1},$$

όπου $\kappa > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Θεωρούμε μια αρίθμηση $\{\gamma_j\}_{j=1}^{3\cdot 2^k}$ των χαρακτήρων της G_k. Από την Πρόταση 4.1.1(β) μπορούμε να επιλέξουμε ακολουθία $\{\theta_j\}_{j=1}^{3\cdot 2^k}$ ώστε κάθε θ_j να ισούται με 2 ή -1 και

$$\left|\sum_{j=1}^{3\cdot 2^k} \theta_j \gamma_j(g)\right| \leqslant \kappa 2^{k/2}\sqrt{k+1} \tag{4.2.3}$$

για κάθε $g \in G$, όπου $\kappa > 0$ απόλυτη σταθερά.

Το πλήθος αυτών των ανισοτήτων είναι $n = 3 \cdot 2^k$, άρα για την ύπαρξη της $\{\theta_j\}_{j=1}^{3\cdot 2^k}$ αρκεί να ικανοποιείται η συνθήκη $n < n^3/\kappa$, δηλαδή να έχουμε $n > n_0 = \sqrt{\kappa}$. Αν όμως $n < n_0$ τότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε.

Θέτοντας $g = e$, όπου e το ουδέτερο στοιχείο της G_k, βλέπουμε ειδικότερα ότι

$$\left|\sum_{j=1}^{3\cdot 2^k} \theta_j\right| \leqslant \kappa 2^{k/2}\sqrt{k+1}. \tag{4.2.4}$$

Αλλάζοντας λοιπόν το πολύ $2\kappa 2^{k/2}\sqrt{k+1}$ από τους θ_j, και αντικαθιστώντας την σταθερά κ από την 2κ, μπορούμε να υποθέσουμε επιπλέον ότι

$$\sum_{j=1}^{3\cdot 2^k} \theta_j = 0, \tag{4.2.5}$$

δηλαδή ακριβώς 2^{k+1} από τους θ_j είναι ίσοι με -1 και ακριβώς 2^k από τους θ_j είναι ίσοι με 2. Ονομάζουμε σ_j εκείνους τους γ_j για τους οποίους $\theta_j = 2$ και τ_j εκείνους τους γ_j για τους οποίους $\theta_j = -1$. Τότε, αν $H_k^+ = \{\sigma_j\}_{j=1}^{2^k}$ και $H_k^- = \{\tau_j\}_{j=1}^{2^{k+1}}$, έχουμε $|H_k^+| = 2^k$, $|H_k^-| = 2^{k+1}$, και

$$\left|2\sum_{j=1}^{2^k} \sigma_j(g) - \sum_{j=1}^{2^{k+1}} \tau_j(g)\right| \leqslant \kappa\sqrt{k+1}2^{k/2} \tag{4.2.6}$$

για κάθε $g \in G_k$. □

Θεώρημα 4.2.3. *Υπάρχει άπειρος πίνακας $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ μιγαδικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες:*

(i) $A^2 = 0$.

(ii) $\mathrm{tr}(A) = \sum_{i=1}^{\infty} a_{i,i} \neq 0$.

(iii) $\sum_{i=1}^{\infty}(\max_j |a_{i,j}|)^r < \infty$ *για κάθε* $r > 2/3$.

Επιπλέον, κάθε γραμμή και κάθε στήλη του A περιέχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών στοιχείων.

Απόδειξη. Για κάθε $k \geqslant 0$ θεωρούμε έναν ορθογώνιο πίνακα U_k τάξης $3 \cdot 2^k$, ο οποίος θα επιλεγεί κατάλληλα. Γράφουμε τον U_k στη μορφή

$$U_k = \begin{pmatrix} 2^{(k+1)/2}P_k \\ 2^{k/2}Q_k \end{pmatrix}, \tag{4.2.7}$$

όπου $2^{(k+1)/2}P_k$ είναι ο $2^{k+1}\times(3\cdot 2^k)$ πίνακας που σχηματίζεται από τις πρώτες 2^{k+1} γραμμές του U_k και $2^{k/2}Q_k$ είναι ο $2^k \times (3 \cdot 2^k)$ πίνακας που σχηματίζεται από τις τελευταίες 2^k γραμμές του U_k. Από την $U_kU_k^* = I_{3\cdot 2^k}$ συμπεραίνουμε ότι

$$P_kP_k^* = 2^{-(k+1)}I_{2^{k+1}}, \quad Q_kQ_k^* = 2^{-k}I_{2^k} \quad P_kQ_k^* = Q_kP_k^* = 0 \tag{4.2.8}$$

για κάθε $k \geqslant 0$. Ορίζουμε
(4.2.9)

$$A = (a_{i,j}) = \begin{pmatrix} P_0^*P_0 & P_0^*Q_1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ -Q_1^*P_0 & P_1^*P_1 - Q_1^*Q_1 & P_1^*Q_2 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & -Q_2^*P_1 & P_2^*P_2 - Q_2^*Q_2 & P_2^*Q_3 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & -Q_3^*P_2 & P_3^*P_3 - Q_3^*Q_3 & P_3^*Q_4 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $A^2 = 0$. Παρατηρούμε ότι

$$\mathrm{tr}(P_k^*P_k - Q_k^*Q_k) = 0 \tag{4.2.10}$$

για κάθε $k \geqslant 1$, απ' όπου βλέπουμε ότι

$$\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(P_0^*P_0) = 1. \tag{4.2.11}$$

Θα ορίσουμε τους U_k έτσι ώστε κάθε στοιχείο στο k-οστό block γραμμών του A, δηλαδή κάθε στοιχείο των πινάκων $-Q_k^*P_{k-1}$, $P_k^*P_k - Q_k^*Q_k$ και $P_k^*Q_{k+1}$, να φράσσεται απολύτως από $C2^{-3k/2}\sqrt{k+1}$, όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά. Αφού το k-οστό block περιέχει $3 \cdot 2^k$ γραμμές, αυτό θα μας δώσει ότι

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(\max_j |a_{i,j}|\right)^r \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} 3 \cdot 2^k C^r 2^{-3kr/2}(k+1)^{r/2} < \infty. \tag{4.2.12}$$

Τέλος, από τον ορισμό του A είναι φανερό ότι κάθε γραμμή και κάθε στήλη του περιέχει πεπερασμένο αριθμό μη μηδενικών στοιχείων.

Ορισμός των U_k. Παρατηρήστε ότι, αφού $P_k^*Q_{k+1} = (Q_{k+1}^*P_k)^*$, αρκεί να ορίσουμε τους U_k έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι

$$P_kP_k^* = 2^{-(k+1)}I_{2^{k+1}}, \quad Q_kQ_k^* = 2^{-k}I_{2^k} \quad P_kQ_k^* = Q_kP_k^* = 0 \tag{4.2.13}$$

για κάθε $k \geqslant 0$ και το φράγμα $C2^{-3k/2}\sqrt{k+1}$ μόνο για τους πίνακες $Q_k^*P_{k-1}$ και $P_k^*P_k - Q_k^*Q_k$.

Εφοδιάζουμε το σύνολο $\{1, 2, \ldots, 3\cdot 2^k\}$ με την δομή Αβελιανής ομάδας G_k και ορίζουμε τους χαρακτήρες σ_j^k και τ_j^k όπως στο Λήμμα 4.2.2. Παίρνουμε σαν γραμμές του P_k τις

$$3^{-1/2}2^{-(2k+1)/2}\tau_j^k, \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2^{k+1}). \tag{4.2.14}$$

Δηλαδή, τα στοιχεία του P_k είναι

$$3^{-1/2}2^{-(2k+1)/2}\tau_j^k(i), \qquad (i \in G_k, 1 \leqslant i \leqslant 3\cdot 2^k, 1 \leqslant j \leqslant 2^{k+1}). \tag{4.2.15}$$

Ομοίως, παίρνουμε σαν γραμμές του Q_k τις

$$3^{-1/2}2^{-k}\theta_j^k\sigma_j^k, \qquad (1 \leqslant j \leqslant 2^k), \tag{4.2.16}$$

όπου τα θ_j^k είναι ίσα με $+1$ ή -1 και θα οριστούν κατάλληλα. Δηλαδή, τα στοιχεία του Q_k είναι

$$3^{-1/2}2^{-k}\theta_j^k\sigma_j^k(i), \qquad (i \in G_k, 1 \leqslant i \leqslant 3\cdot 2^k, 1 \leqslant j \leqslant 2^k). \tag{4.2.17}$$

Όπως και αν οριστεί η ακολουθία $\{\theta_j^k\}_{j=1}^{2^k}$, η ορθογωνιότητα των χαρακτήρων μας εξασφαλίζει ότι ο πίνακας U_k είναι ορθογώνιος.

Τα στοιχεία του $Q_k^*P_{k-1}$ είναι τα

$$3^{-1}2^{1/2-2k}\sum_{j=1}^{2^k}\theta_j^k\overline{\sigma_j^k(h)}\tau_j^{k-1}(g), \qquad h \in G_k, g \in G_{k-1} \tag{4.2.18}$$

ενώ τα στοιχεία του $P_k^*P_k - Q_k^*Q_k$ είναι τα

$$3^{-1}2^{-2k}\left(\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{2^{k+1}}\tau_j^k(h) - \sum_{j=1}^{2^k}\sigma_j^k(h)\right), \qquad h \in G_k. \tag{4.2.19}$$

Για την επαλήθευση της τελευταίας σχέσης χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι οι τ_j^k και σ_j^k είναι χαρακτήρες: συγκεκριμένα, το γεγονός ότι $\tau_j^k(h_1 \circ h_2) = \tau_j^k(h_1)\tau_j^k(h_2)$, όπου $\circ$ είναι ο πολλαπλασιασμός στην G_k, και ότι $\overline{\tau_j(h)} = \tau_j(h^{-1})$. Πρέπει να δείξουμε ότι, για κατάλληλη επιλογή της $\{\theta_j^k\}_{j=1}^{2^k}$, όλες αυτές οι ποσότητες φράσσονται απολύτως από $C2^{-3k/2}\sqrt{k+1}$. Οι δεύτερες είναι ανεξάρτητες από την επιλογή των θ_j^k και έχουν την σωστή τάξη μεγέθους από το Λήμμα 4.2.2. Το πλήθος των πρώτων ποσοτήτων είναι $3\cdot 2^{k-1}\cdot 3\cdot 2^k \leqslant 5n^2$, όπου $n = 2^k$. Από την Πρόταση 4.1.1(α) βλέπουμε ότι, αν $5\cdot 2^{2k} < 2^{3k}/\kappa$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε την $\{\theta_j^k\}_{j=1}^{2^k}$ έτσι ώστε όλες τους να φράσσονται όπως ζητάμε (για τις πεπερασμένες το πλήθος τιμές του k που ικανοποιούν την $5\cdot 2^{2k} > 2^{3k}/\kappa$ δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Έτσι, μπορούμε να ορίσουμε $\{U_k\}_{k=1}^{\infty}$ με τις απαιτούμενες ιδιότητες, και η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης. □

Θα βασιστούμε σε μία από τις ισοδυναμίες του Θεωρήματος 2.3.4, την οποία υπενθυμίζουμε:

Λήμμα 4.2.4 (από το Θεώρημα 2.3.4). *Έστω X χώρος Banach. Τα παρακάτω είναι ισοδύναμα.*

(i) *Ο X έχει την ιδιότητα προσέγγισης.*

(ii) *Για κάθε ζεύγος ακολουθιών $\{x_n\}_{i=1}^{\infty} \subset X$, $\{x_n^*\}_{i=1}^{\infty} \subset X^*$ με*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|x_i\| \, \|y_i^*\| < \infty$$

που ικανοποιούν την $\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x)x_n = 0$ για κάθε $x \in X$, ισχύει

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0.$$

Θεώρημα 4.2.5. *Έστω $2 < p < \infty$. Υπάρχει κλειστός υπόχωρος του ℓ_p, ο οποίος δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης.*

Απόδειξη. Έστω $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$ ο πίνακας του Θεωρήματος 4.2.3. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_i = \max_{j \in \mathbb{N}} |a_{ij}| \tag{4.2.20}$$

και

$$b_{ij} = a_{ij} \left(\frac{A_j}{A_i} \right)^{\frac{1}{p+1}} \quad \text{αν } A_i \neq 0 \tag{4.2.21}$$

και $b_{ij} = 0$ αλλιώς. Τέλος, ορίζουμε

$$y_i = (b_{in})_{n \in \mathbb{N}}. \tag{4.2.22}$$

Θεωρούμε τον πίνακα $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{\infty}$. Έχουμε $B^2 = A^2 = 0$ και

$$\mathrm{tr}(B) = \sum_{i=1}^{\infty} b_{ii} = \sum_{i=1}^{\infty} a_{ii} = \mathrm{tr}(A) \neq 0. \tag{4.2.23}$$

Επίσης, κάθε γραμμή και κάθε στήλη του πίνακα B περιέχει πεπερασμένο αριθμό μη-μηδενικών στοιχείων. Έχουμε

$$\|y_i\| = \left(\sum_{j=1}^{\infty} |b_{ij}|^p\right)^{1/p} \leqslant \left(\sum_{j=1}^{\infty} \left(\frac{A_j}{A_i}\right)^{\frac{p}{p+1}} \max_{l\in\mathbb{N}} |a_{il}|^p\right)^{1/p} = A_i^{\frac{p}{p+1}} \left(\sum_{j=1}^{\infty} A_j^{\frac{p}{p+1}}\right)^{1/p}. \tag{4.2.24}$$

Εφ' όσον $\frac{p}{p+1} > \frac{2}{3}$, έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| < \infty. \tag{4.2.25}$$

Ορίζουμε $Y = \overline{\mathrm{span}}(\{y_i\}_{i=1}^{\infty})$. Θα δείξουμε ότι ο Y δεν έχει την (**AP**).

Έστω ℓ_p^* ο δυϊκός του ℓ_p. Γνωρίζουμε ότι $\ell_p^* \simeq \ell_q$, όπου q ο συζυγής εκθέτης του p. Θεωρούμε την συνήθη βάση $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ του ℓ_q. Τότε, κάθε $e_n \in Y^*$ και έχουμε

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| \, \|e_i\|_* = \sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| < \infty. \tag{4.2.26}$$

Έστω $y \in Y = \overline{\mathrm{span}}(\{y_i\}_{i=1}^{\infty})$. Τότε, υπάρχει ακολουθία (y_N) στον Y ώστε $\lim\limits_{N\to\infty} y_N = y$, όπου, για κάθε k και $N \in \mathbb{N}$,

$$y_N = \sum_{k=1}^{N} a_{k,N} y_k \tag{4.2.27}$$

για κάποιους $a_{k,N} \in \mathbb{C}$. Έχουμε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i(y_N) &= \sum_{i=1}^{\infty} y_i \sum_{k=1}^{N} a_{k,N} b_{k,i} \\ &= \left(\sum_{i=1}^{\infty} b_{in} \sum_{k=1}^{N} a_{k,N} b_{k,i}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= \left(\sum_{k=1}^{N} a_{k,N} \sum_{i=1}^{\infty} b_{in} b_{ki}\right)_{n\in\mathbb{N}} \\ &= 0. \end{aligned} \tag{4.2.28}$$

Η απεικόνιση $x \mapsto \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i(x)$ είναι συνεχής. Συνεπώς,

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i(y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i(\lim y_N) = \lim_{N\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} y_i e_i(y_N) = 0. \tag{4.2.29}$$

Αλλά,

$$\sum_{i=1}^{\infty} e_i(y_i) = \mathrm{tr}(B) \neq 0. \tag{4.2.30}$$

Από το Λήμμα 4.2.4 συμπεραίνουμε ότι ο Y δεν έχει την (**AP**). □

Παρατήρηση 4.2.6. (i) Στο επόμενο κεφάλαιο θα δούμε ότι και για $1 \leqslant p < 2$, ο ℓ_p έχει υπόχωρο που δεν έχει την (**AP**). Ο ℓ_2 δεν έχει τέτοιους υπόχωρους.

(ii) Αφού κάθε υπόχωρος του ℓ_2 έχει την (**AP**), το επιχείρημα που χρησιμοποιήσαμε στην προηγούμενη απόδειξη, δείχνει ότι αν $A = (a_{i,j})_{i,j=1}^{\infty}$ είναι ένας πίνακας ώστε $A^2 = 0$ και $\sum_{i=1}^{\infty} (\sup |a_{i,j}|)^{2/3} < \infty$, τότε $\mathrm{tr}(A) = 0$. Έτσι ο εκθέτης $2/3$ που εμφανίζεται στο Θεώρημα 4.2.3 είναι ο μικρότερος δυνατός.

(iii) Στο Θεώρημα (2.3.5) είδαμε ότι το πρόβλημα προσέγγισης έχει μια ισοδύναμη διατύπωση στο σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $K(s,t)$ στο $[0,1] \times [0,1]$. Θα δώσουμε τώρα μια ισχυρότερη απάντηση στο πρόβλημα αυτό: Θεωρούμε τον πίνακα A του Θεωρήματος (4.2.3). Αφού $\mathrm{tr}(A) \neq 0$, από την απόδειξη του Θεωρήματος (2.3.5)((iii)⇒ (ii)), βλέπουμε ότι για την συνάρτηση $K(s,t)$, η οποία ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz, με σταθερά $< 1/2$, ισχύει $\int_0^1 K(s,t)K(t,u)dt = 0$, για κάθε s, u, αλλά $\int_0^1 K(t,t)dt \neq 0$. Επίσης μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει συνάρτηση με τις παραπάνω ιδιότητες, που να ικανοποιεί μία συνθήκη Lipschitz με σταθερά $< 1/2$.

(iv) Αποδεικνύεται ότι και ο c_0 έχει υπόχωρο που δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης.

Κεφάλαιο 5

Η κατασκευή του Szankowski

5.1 Συμπαγής ιδιότητα προσέγγισης

Ορισμός 5.1.1. Ένας χώρος Banach έχει την **συμπαγή ιδιότητα προσέγγισης (CAP)** αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει συμπαγής τελεστής $T : X \to X$ που ικανοποιεί την $\|T(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$. Προφανώς, κάθε χώρος που έχει την ιδιότητα προσέγγισης έχει και την συμπαγή ιδιότητα προσέγγισης.

Ορισμός 5.1.2. Ένας μερικά διατεταγμένος πραγματικός χώρος Banach X λέγεται Banach lattice αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) αν $x \leqslant y$, τότε $x + z \leqslant y + z$, για κάθε $x, y, z \in X$.

(ii) $ax \geqslant 0$, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $a \geqslant 0$.

(iii) Για κάθε $x, y \in X$ υπάρχουν το ελάχιστο άνω φράγμα $x \vee y$ και το μέγιστο κάτω φράγμα $x \wedge y$ των x και y.

(iv) $\|x\| \leqslant \|y\|$, όταν $|x| \leqslant |y|$, όπου η απόλυτη τιμή $|x|$ ορίζεται ως $|x| = x \vee (-x)$.

Με τον όρο sublattice ενός Banach lattice X, εννοούμε έναν γραμμικό υπόχωρο Y του X, ώστε το $x \vee y$, (και άρα και το $x \wedge y = x + y - x \vee y$) να ανήκει στον Y, για κάθε $x, y \in Y$.

Ορισμός 5.1.3. Ένας μερικά διατεταγμένος πραγματικός χώρος Banach X λέγεται Banach lattice αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) αν $x \leqslant y$, τότε $x + z \leqslant y + z$, για κάθε $x, y, z \in X$.

(ii) $ax \geqslant 0$, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $a \geqslant 0$.

(iii) Για κάθε $x, y \in X$ υπάρχουν το ελάχιστο άνω φράγμα $x \vee y$ και το μέγιστο κάτω φράγμα $x \wedge y$ των x και y.

(iv) $\|x\| \leqslant \|y\|$, όταν $|x| \leqslant |y|$, όπου η απόλυτη τιμή $|x|$ ορίζεται ως $|x| = x \vee (-x)$.

Με τον όρο sublattice ενός Banach lattice X, εννοούμε έναν γραμμικό υπόχωρο Y του X, ώστε το $x \vee y$, (και άρα και το $x \wedge y = x + y - x \vee y$) να ανήκει στον Y, για κάθε $x, y \in Y$.

Θα χρησιμοποιήσουμε το ακόλουθο κριτήριο για την (CAP), το οποίο ουσιαστικά χρησιμοποιήθηκε στην κατασκευή του Enflo.

Θεώρημα 5.1.4. *Έστω X χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι υπάρχουν ακολουθίες $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ και $\{x_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ διανυσμάτων στους X και X^* αντίστοιχα, μια ακολουθία $\{F_n\}_{n=1}^{\infty}$ πεπερασμένων υποσυνόλων του X και μια αύξουσα ακολουθία $\{k_n\}_{n=1}^{\infty}$ φυσικών αριθμών, ώστε να ικανοποιούνται τα εξής:*

(i) *$x_j^*(x_j) = 1$ για κάθε j.*

(ii) *Η $\{x_j^*\}_{j=1}^{\infty}$ είναι w^*-μηδενική και $\|\cdot\|$-φραγμένη.*

(iii) *Για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $T : X \to X$ ισχύει*

$$|\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T)| \leqslant \sup\{\|T(x)\| : x \in F_n\}, \tag{5.1.1}$$

όπου $\beta_0(T) = 0$ και, αν $n \geqslant 1$,

$$\beta_n(T) = \frac{1}{k_n} \sum_{j=1}^{k_n} x_j^*(T(x_j)). \tag{5.1.2}$$

(iv) *$\sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n < \infty$, όπου $\gamma_n = \sup\{\|x\| : x \in F_n\}$.*

Τότε, ο X δεν έχει την (CAP).

Απόδειξη. Από τις υποθέσεις (iii) και (iv) βλέπουμε ότι το

$$\beta(T) = \lim_{n\to\infty} \beta_n(T) \tag{5.1.3}$$

υπάρχει για κάθε $T : X \to X$ και ορίζει ένα γραμμικό συναρτησοειδές στον $B(X)$. Θεωρούμε μια ακολουθία $\{\eta_n\}_{n=1}^{\infty}$ φυσικών αριθμών που τείνει στο άπειρο και ικανοποιεί την $C = \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n \gamma_n < \infty$, και ορίζουμε

$$K = \{0\} \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\eta_n \gamma_n} F_n. \tag{5.1.4}$$

Το K είναι συμπαγές σύνολο, και

$$|\beta(T)| \leqslant C \sup\{\|T(x)\| : x \in K\}. \tag{5.1.5}$$

Από την υπόθεση (i) βλέπουμε ότι αν I είναι ο ταυτοτικός τελεστής στον X τότε $\beta_n(I) = 1$ για κάθε $n \geqslant 1$, άρα $\beta(I) = 1$. Θα δείξουμε ότι $\beta(T) = 0$ για κάθε συμπαγή τελεστή $T : X \to X$. Τότε θα έχουμε ότι

$$\sup\{\|T(x) - x\| : x \in K\} \geqslant C^{-1}|\beta(I - T)| = C^{-1} \tag{5.1.6}$$

για κάθε συμπαγή $T : X \to X$, το οποίο αποδεικνύει το θεώρημα.

Έστω λοιπόν $T : X \to X$ συμπαγής τελεστής και έστω $\delta > 0$. Επιλέγουμε ακολουθία $\{y_i\}_{i=1}^m$ στον X ώστε, για κάθε φυσικό j να υπάρχει $i(j)$ με

$$\|T(x_j) - y_{i(j)}\| \leqslant \delta. \tag{5.1.7}$$

Για κάθε $n \geqslant 1$ έχουμε

$$\beta_n(T) = \frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} x_j^*(y_{i(j)}) + \frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} x_j^*(T(x_j) - y_{i(j)}), \tag{5.1.8}$$

άρα

$$|\beta_n(T)| \leqslant \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{k_n}\sum_{j=1}^{k_n} |x_j^*(y_i)| + \delta \sup_j \|x_j^*\|. \tag{5.1.9}$$

Αφού η $\{x_j^*\}$ είναι w^*-μηδενική, έπεται ότι

$$|\beta(T)| \leqslant \delta \sup_j \|x_j^*\|. \tag{5.1.10}$$

Το $\delta > 0$ ήταν τυχόν, άρα $\beta(T) = 0$. □

Παρατήρηση 5.1.5. Η απόδειξη του θεωρήματος εξακολουθεί να ισχύει αν, για κάθε $n \geqslant 1$, ορίσουμε τους $\beta_n(T)$ θέτοντας

$$\beta_n(T) = \frac{1}{k_n}\sum_{j\in\sigma_n} x_j^*(T(x_j)), \tag{5.1.11}$$

όπου σ_n είναι τυχόν σύνολο φυσικών που έχει πληθάριθμο k_n. Για παράδειγμα, μπορούμε να ορίσουμε

$$\beta_n(T) = \frac{1}{2^n}\sum_{j=2^n+1}^{2^{n+1}} x_j^*(T(x_j)), \qquad (n \geqslant 1). \tag{5.1.12}$$

5.2 Η κατασκευή

Θεώρημα 5.2.1. *Για κάθε $1 \leqslant p < 2$ υπάρχει υπόχωρος του ℓ_p ο οποίος δεν έχει την* (CAP).

Η απόδειξη βασίζεται σε ένα συνδυαστικό λήμμα, για την διατύπωση του οποίου εισάγουμε πρώτα κάποιον συμβολισμό. Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$\sigma_n = \{2^n, 2^n + 1, \ldots, 2^{n+1} - 1\} \tag{5.2.1}$$

και για κάθε $j \geqslant 8$ ορίζουμε μια ακολουθία $\{f_k(j)\}_{k=1}^{9}$ εννέα ακεραίων, ως εξής:

$$\begin{aligned} f_k(4i+s) &= 2i + k - 1, && i \geqslant 2, 0 \leqslant s \leqslant 3, k = 1,2 \\ f_k(4i+s) &= 4i + (s+k-2) \operatorname{mod} 4, && i \geqslant 2, 0 \leqslant s \leqslant 3, k = 3,4,5 \\ f_k(4i+s) &= 8i + k - 6, && i \geqslant 2, s = 0,1, k = 6,7,8,9 \\ f_k(4i+s) &= 8i + k - 2, && i \geqslant 2, s = 2,3, k = 6,7,8,9. \end{aligned}$$

Μια βασική ιδιότητα των f_k είναι ότι $f_k(j) \neq j$ για κάθε k και j. Αυτό θα μας επιτρέψει να ορίσουμε μια διαμέριση των φυσικών σε σχετικά μεγάλα υποσύνολα με τέτοιον τρόπο ώστε, για κάθε $1 \leqslant k \leqslant 9$, καθώς το j διατρέχει ένα από τα σύνολα της διαμέρισης, οι αντίστοιχοι ακέραιοι $f_k(j)$ να ανήκουν σε διαφορετικά σύνολα της διαμέρισης. Συγκεκριμένα, χρειαζόμαστε το εξής.

Λήμμα 5.2.2. *Υπάρχουν διαμερίσεις Δ_n και V_n του σ_n σε ξένα σύνολα και μια ακολουθία $\{m_n\}_{n=1}^{\infty}$ φυσικών με $m_n \geqslant 2^{n/8-2}$, $n \geqslant 2$, ώστε:*

(i) *Αν $A \in V_n$ τότε $m_n \leqslant \operatorname{card}(A) \leqslant 2m_n$.*

(ii) *Κάθε στοιχείο της V_n περιέχει το πολύ έναν αντιπρόσωπο από κάθε στοιχείο της Δ_n, δηλαδή: αν $A \in V_n$ και $B \in \Delta_n$, $n \geqslant 2$, τότε $\operatorname{card}(A \cap B) \leqslant 1$.*

(iii) *Για κάθε $A \in V_n$, $n \geqslant 3$ και για κάθε $1 \leqslant k \leqslant 9$, το σύνολο $f_k(A)$ περιέχεται σε κάποιο στοιχείο της Δ_{n-1} ή της Δ_n ή της Δ_{n+1}.*

Απόδειξη. Για κάθε $n \geqslant 2$ και για $l = 0,1,2,3$, θέτουμε $\sigma_n^l = \{j \in \sigma_n : j \equiv l \,(\operatorname{mod} 4)\}$ και ορίζουμε $\varphi_n^l : \sigma_n^0 \to \sigma_n^l$ με $\varphi_n^l(j) = j + l$. Επίσης, για κάθε $n \geqslant 2$ και για $r = 0,1$, ορίζουμε $\psi_n^r : \sigma_n^0 \to \sigma_{n+1}^0$ με $\psi_n^r(j) = 2j + 4r$.

Με ένα επαγωγικό επιχείρημα βλέπουμε ότι, για κάθε $n \geqslant 2$ η σ_n^0 αναπαρίσταται σαν καρτεσιανό γινόμενο $C_n \times D_n$, όπου

$$\operatorname{card}(D_{2m}) = \operatorname{card}(D_{2m+1}) = \operatorname{card}(C_{2m-1}) = \operatorname{card}(C_{2m}) = 2^{m-1} \tag{5.2.2}$$

για κάθε $m \geqslant 1$, έτσι ώστε:

> Για κάθε $c \in C_{n+1}$ υπάρχουν $r \in \{0,1\}$ και $d \in D_n$ ώστε $\psi_n^r(C_n \times \{d\}) = \{c\} \times D_{n+1}$ και, για κάθε $d \in D_{n+1}$, υπάρχει $c \in C_n$ ώστε $\psi_n^0(\{c\} \times D_n) \cup \psi_n^1(\{c\} \times D_n) = C_{n+1} \times \{d\}$.

Γράφουμε τώρα κάθε D_n, $n \geqslant 2$, σαν Καρτεσιανό γινόμενο τεσσάρων όρων $D_n = \prod_{l=0}^{3} D_n^l$, έτσι ώστε

$$\mathrm{card}(D_n^0) \leqslant \mathrm{card}(D_n^1) \leqslant \mathrm{card}(D_n^2) \leqslant \mathrm{card}(D_n^3) \leqslant 2\mathrm{card}(D_n^0). \tag{5.2.3}$$

Μπορούμε τώρα να ορίσουμε τις διαμερίσεις V_n και Δ_n, θέτοντας

$$V_n = \left\{ \varphi_n^l(\{f\} \times D_n^l) : f \in C_n \times \prod_{j \neq l} D_n^i, l = 0, 1, 2, 3 \right\} \tag{5.2.4}$$

και

$$\Delta_n = \left\{ \varphi_n^l(C_n \times \prod_{j \neq i} D_n^i \times \{d\}) : d \in D_n^l, l = 0, 1, 2, 3 \right\}. \tag{5.2.5}$$

Με αυτήν την κατασκευή, η συνθήκη (i) ισχύει με

$$m_n = \mathrm{card}(D_n^0) \geqslant \left(\frac{\mathrm{card}(D_n)}{8} \right)^{1/4} \geqslant 2^{n/8-2}. \tag{5.2.6}$$

Η συνθήκη (ii) ισχύει προφανώς, ενώ η επαλήθευση της (iii) είναι απλή αλλά μακροσκελής. □

Απόδειξη του θεωρήματος. Έστω $1 \leqslant p < 2$. Θεωρούμε τον χώρο X όλων των ακολουθιών $x = (a_4, a_5, a_6, \ldots)$ που ικανοποιούν την

$$\|x\| = \left(\sum_{n=2}^{\infty} \sum_{B \in \Delta_n} \left(\sum_{j \in B} |a_j|^2 \right)^{p/2} \right)^{1/p} < \infty, \tag{5.2.7}$$

όπου Δ_n είναι η διαμέριση του σ_n που μας εξασφαλίζει το Λήμμα 5.2.2. Ο χώρος X είναι ℓ_p-ευθύ άθροισμα χώρων πεπερασμένης διάστασης, άρα είναι ισόμορφος με κάποιον υπόχωρο του ℓ_p. Στην πραγματικότητα, είναι ισόμορφος με τον ℓ_p. Συμβολίζουμε με $\{e_j\}_{j=4}^{\infty}$ τα μοναδιαία διανύσματα του X και με $\{e_j^*\}_{j=4}^{\infty}$ τα αντίστοιχα διορθογώνια συναρτησοειδή στον X^*. Θεωρούμε τον κλειστό υπόχωρο Z του X ο οποίος παράγεται από την ακολουθία

$$z_i = e_{2i} - e_{2i+1} + e_{4i} + e_{4i+1} + e_{4i+2} + e_{4i+3}, \qquad i \geqslant 2. \tag{5.2.8}$$

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.2 θα αποδείξουμε ότι ο Z δεν έχει την συμπαγή ιδιότητα προσέγγισης. Ορίζουμε

$$z_i^* = \frac{1}{2}(e_{2i}^* - e_{2i+1}^*), \qquad i \geqslant 2 \tag{5.2.9}$$

και για κάθε $T : Z \to Z$, θέτουμε

$$\beta_n(T) = \frac{1}{2^n} \sum_{i \in \sigma_n} z_i^*(Tz_i), \qquad n \geqslant 1. \tag{5.2.10}$$

Για να αποδείξουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (iii) και (iv) του Θεωρήματος 5.1.2, παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $i \geqslant 2$, ο περιορισμός του $\frac{1}{4}(e_{4i}^* + e_{4i+1}^* + e_{4i+2}^* + e_{4i+3}^*)$ και του z_i^* στον Z συμπίπτουν (συμπίπτουν σε κάθε z_j). Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant 2$ και για κάθε $T : Z \to Z$, έχουμε ότι το $\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T)$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i \in \sigma_n} (e_{2i}^* - e_{2i+1}^*) T(e_{2i} - e_{2i+1} + e_{4i} + e_{4i+1} + e_{4i+2} + e_{4i+3}) \\
& - \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i \in \sigma_{n-1}} (e_{4i}^* + e_{4i+1}^* + e_{4i+2}^* + e_{4i+3}^*) T(e_{2i} - e_{2i+1} + e_{4i} + e_{4i+1} + e_{4i+2} + e_{4i+3}) \\
= \; & \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i \in \sigma_{n-1}} e_{4i}^* T(e_{4i} - e_{4i+1} + e_{8i} + \cdots + e_{8i+3} - e_{2i} + e_{2i+1} - e_{4i} - \cdots - e_{4i+3}) \\
& + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i \in \sigma_{n-1}} e_{4i+1}^* T(-e_{4i} + e_{4i+1} - e_{8i} + \cdots - e_{8i+3} - e_{2i} + e_{2i+1} - e_{4i} - \cdots - e_{4i+3}) \\
& + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i \in \sigma_{n-1}} e_{4i+2}^* T(e_{4i+2} - e_{4i+3} + e_{8i+4} + \cdots + e_{8i+7} - e_{2i} + e_{2i+1} - e_{4i} - \cdots - e_{4i+3}) \\
& + \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{i \in \sigma_{n-1}} e_{4i+3}^* T(-e_{4i+2} + e_{4i+3} - e_{8i+4} + \cdots - e_{8i+7} - e_{2i} + e_{2i+1} - e_{4i} - \cdots - e_{4i+3}) \\
= \; & \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{j \in \sigma_{n+1}} e_j^*(Ty_j),
\end{aligned}$$

όπου

$$\sum_{k=1}^{9} \lambda_{j,k} e_{f_k(j)} = y_j \in Z, \qquad j \geqslant 8, \tag{5.2.11}$$

με f_k τις συναρτήσεις που ορίστηκαν πριν από το Λήμμα 5.2.2 και, για κάθε j, $|\lambda_{j,k}| = 1$ αν $k \leqslant 8$ και $|\lambda_{j,9}| = 2$.

Γράφουμε τώρα

$$\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T) = \frac{1}{2^{n+1}} \sum_{A \in V_{n+1}} \text{Average} \left[\left(\sum_{j \in A} \theta_j e_j^* \right) T \left(\sum_{j \in A} \theta_j y_j \right) \right], \tag{5.2.12}$$

όπου ο μέσος όρος παίρνεται πάνω από όλες τις $2^{\mathrm{card}(A)}$ επιλογές προσήμων $\{\theta_j\}_{j\in A}$. Από τον ορισμό της νόρμας του X και από την συνθήκη (ii) του Λήμματος 5.2.2 έχουμε, για κάθε $A \in V_{n+1}$, $n \geqslant 2$ και για κάθε $\{\theta_j\}_{j\in A}$,

$$\left\|\sum_{j\in A}\theta_j e_j^*\right\|_{Z^*} \leqslant \left\|\sum_{j\in A}\theta_j e_j^*\right\|_{X^*} = [\mathrm{card}(A)]^{1/q} \leqslant (2m_{n+1})^{1/q}, \tag{5.2.13}$$

όπου $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$. Από την συνθήκη (iii) του Λήμματος 5.2.2 έχουμε, για κάθε A και για κάθε $\{\theta_j\}_{j\in A}$ και $1 \leqslant k \leqslant 9$,

$$\left\|\sum_{j\in A}\theta_j e_{f_k(j)}\right\| = [\mathrm{card}(A)]^{1/2} \leqslant (2m_{n+1})^{1/2}, \tag{5.2.14}$$

συνεπώς,

$$\left\|\sum_{j\in A}\theta_j y_j\right\| \leqslant 15 m_{n+1}^{1/2}. \tag{5.2.15}$$

Έπεται ότι

$$|\beta_n(T)-\beta_{n-1}(T)| \leqslant 2^{-n-1}(2^{n+1}m_{n+1}^{-1})(2m_{n+1})^{1/q}\sup\{\|Tz\| : z \in E_n\}, \tag{5.2.16}$$

όπου

$$E_n = \left\{\sum_{j\in A}\theta_j y_j : A \in V_{n+1}, \theta_j = \pm 1\right\}. \tag{5.2.17}$$

Θέτοντας $F_n = 2m_{n+1}^{-1/p}E_n$, βλέπουμε ότι ικανοποιούνται οι συνθήκες (iii) και (iv) του Θεωρήματος 5.1.2. $\square$

Παρατήρηση 5.2.3. Με κατάλληλη τροποποίηση, η απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.1 δουλεύει και στην περίπτωση $2 < p \leqslant \infty$. Αρκεί να ορίσουμε τις διαμερίσεις V_n και Δ_n με τέτοιον τρόπο ώστε κάθε $A \in V_n$ να περιέχεται σε κάποιο στοιχείο της Δ_n και ταυτόχρονα, για κάθε $A \in V_n$, $k = 1, \ldots, 9$, και για κάθε B στην Δ_{n-1} ή στην Δ_n ή στην Δ_{n+1}, να έχουμε $\mathrm{card}(B \cap f_k(A)) \leqslant 1$. Κάτω από αυτές τις προϋποθέσεις, για κάθε $A \subset V_{n+1}$, $n \geqslant 2$ και $\{\theta_j\}_{j\in A}$, έχουμε

$$\left\|\sum_{j\in A}\theta_j e_j^*\right\| \leqslant (2m_{n+1})^{1/2} \quad \textit{και} \quad \left\|\sum_{j\in A}\theta_j y_j\right\| \leqslant 15 m_{n+1}^{1/p}. \tag{5.2.18}$$

5.3 Ιδιότητα προσέγγισης και Banach Lattices

Banach Lattices

Ορισμός 5.3.1. Ένας μερικά διατεταγμένος πραγματικός χώρος Banach X λέγεται Banach lattice αν ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) αν $x \leqslant y$, τότε $x + z \leqslant y + z$, για κάθε $x, y, z \in X$.

(ii) $ax \geqslant 0$, για κάθε $x \in X$ και για κάθε $a \geqslant 0$.

(iii) Για κάθε $x, y \in X$ υπάρχουν το ελάχιστο άνω φράγμα $x \vee y$ και το μέγιστο κάτω φράγμα $x \wedge y$ των x και y.

(iv) $\|x\| \leqslant \|y\|$, όταν $|x| \leqslant |y|$, όπου η απόλυτη τιμή $|x|$ ορίζεται ως $|x| = x \vee (-x)$.

Με τον όρο sublattice ενός Banach lattice X, εννοούμε έναν γραμμικό υπόχωρο Y του X, ώστε το $x \vee y$, (και άρα και το $x \wedge y = x + y - x \vee y$) να ανήκει στον Y, για κάθε $x, y \in Y$.

Ορισμός 5.3.2. Ένας Banach lattice X λέγεται *$\sigma-$πλήρης ως προς την διάταξη* αν κάθε φραγμένο σύνολο (ακολουθία) στον X έχει ελάχιστο άνω φράγμα.

Ορισμός 5.3.3. Έστω (Ω, Σ, μ) ένας πλήρης σ-πεπερασμένος χώρος μέτρου. Ένας χώρος Banach X που αποτελείται από κλάσεις ισοδυναμίας (ως προς την ισότητα σχεδόν παντού) τοπικά ολοκληρώσιμων πραγματικών συναρτήσεων στην Σ λέγεται *συναρτησιακός χώρος* Köthe αν ισχύουν οι ακόλουθες συνθήκες:

(1) Αν f μετρήσιμη, $g \in X$ και $|f(\omega)| \leqslant |g(\omega)|$ σχεδόν παντού στο Ω, τότε $f \in X$ και $\|f\| \leqslant \|g\|$.

(2) Για κάθε $\sigma \in \Sigma$ με $\mu(\sigma) < \infty$, η χαρακτηριστική συνάρτηση χ_σ του σ ανήκει στον X.

Στον παραπάνω ορισμό, υπενθυμίζουμε ότι ένας χώρος μέτρου λέγεται *πλήρης* αν κάθε υποσύνολο ενός συνόλου μηδενικού μέτρου είναι μετρήσιμο. Επίσης, μια συνάρτηση f λέγεται *τοπικά ολοκληρώσιμη* αν είναι μετρήσιμη και $\int_\sigma |f(\omega)| d\mu < \infty$ για κάθε $\sigma \in \Sigma$ με $\mu(\sigma) < \infty$. Παρατηρήστε ότι κάθε συναρτησιακός χώρος Köthe είναι Banach lattice, με την προφανή διάταξη ($f \geqslant 0$ αν $f(\omega) \geqslant 0$ σχεδόν παντού). Μάλιστα, είναι και σ-πλήρης ως προς την διάταξη. Πράγματι, αν $\{f_n\}_{n=1}^\infty$ είναι μια αύξουσα και φραγμένη ως προς την διάταξη ακολουθία στον X, τότε το $f(\omega) = \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega)$ είναι το ελάχιστο άνω φράγμα της $\{f_n\}_{n=1}^\infty$. Για περισσότερα σχετικά με τους Banach lattices και τους συναρτησιακούς χώρους Köthe παραπέμπουμε στο [12].

Η κατασκευή

Θα κατασκευάσουμε Banach lattice ο οποίος δεν έχει την συμπαγή ιδιότητα προσέγγισης.

Θεώρημα 5.3.4. *Έστω $1 \leqslant r < p < \infty$. Τότε, υπάρχει sublattice του*

$$\ell_p(L_r(0,1)) = (L_r(0,1) \oplus L_r(0,1) \cdots)_p, \tag{5.3.1}$$

ο οποίος δεν έχει την (CAP).

Για την απόδειξη χρειαζόμαστε ένα συνδυαστικό λήμμα, το οποίο θα μας εξασφαλίσει κατάλληλη διαμέριση του $[0,1]$. Εισάγουμε πρώτα τον απαραίτητο συμβολισμό. Έστω $I = [0,1]$ και έστω λ το μέτρο Lebesgue στο I. Με J_n συμβολίζουμε το σύνολο των διαστημάτων $\left\{ \left[\frac{i-1}{2^n}, \frac{i}{2^n}\right], i = 1, \ldots, 2^n \right\}$ και με $\mathcal{B}_n$ την σ-άλγεβρα των υποσυνόλων του I τα οποία παράγονται από τα J_n, για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Για κάθε n, έστω ϕ_n η μετάθεση του $\{1, 2, \ldots, 2^n\}$ που ορίζεται ως εξής:

$$\phi_n(2i) = 2i - 1 \quad \text{και} \quad \phi_n(2i-1) = 2i, \qquad (i = 1, 2, \ldots, 2^{n-1}). \tag{5.3.2}$$

Η απεικόνιση ϕ_n επάγει με προφανή τρόπο μετάθεση των J_n, και άρα μια απεικόνιση (την οποία συμβολίζουμε πάλι με ϕ_n) από την κλάση όλων των $\mathcal{B}_n$-μετρήσιμων υποσυνόλων του $[0,1]$ στον εαυτό της.

Λήμμα 5.3.5. *Για κάθε $n \geqslant 2^6$ υπάρχει διαμέριση Δ_n του $[0,1]$ σε M_n ξένα $\mathcal{B}_n$-μετρήσιμα σύνολα ίσου μέτρου M_n^{-1}, ώστε:*

(i) $M_n \geqslant 2^{n/16}$ *για κάθε* $n \geqslant 2^6$.

(ii) $\lambda(\phi_n(A) \cap B) \leqslant 4\lambda(A)\lambda(B)$ *για κάθε* $A \in \Delta_n, B \in \Delta_m$, *όπου* $n, m \geqslant 2^6$.

Σημείωση. Ο περιορισμός $n \geqslant 2^6$ στην διατύπωση του Λήμματος δεν έχει ιδιαίτερη σημασία και απλώς διευκολύνει την παρουσίαση της απόδειξης.

Απόδειξη. Ταυτίζουμε το $[0,1]$ με το $D = \{-1,1\}^{\mathbb{N}_0}$, το οποίο εφοδιάζουμε με το σύνηθες μέτρο γινόμενο. Με αυτήν την ταύτιση, η $\mathcal{B}_n$ αντιστοιχεί στην άλγεβρα των υποσυνόλων του D που εξαρτώνται μόνο από τις πρώτες n συντεταγμένες. Η απεικόνιση ϕ_n από την κλάση των $\mathcal{B}_n$-μετρήσιμων υποσυνόλων στον εαυτό της, προκύπτει από αυτήν την ταύτιση. Ορίζουμε $\phi_n : D \to D$ με

$$\phi_n(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n, \theta_{n+1}, \ldots) = (\theta_1, \theta_2, \ldots, -\theta_n, \theta_{n+1}, \ldots). \tag{5.3.3}$$

Το D μπορεί να αναπαρασταθεί ως γινόμενο $\prod_{i=1}^{\infty} D_i$, όπου $D_i = \{-1,1\}^{2^i}$. Γράφουμε π_i για την φυσιολογική προβολή $\pi_i : D \to D_i$.

Για κάθε $i \geqslant 5$ επιλέγουμε ένα σύστημα διαμερίσεων $\{\Omega_n\}_{n=2^{i+2}}^{2^{i+3}-1}$ του D_{i-1} σε ξένα σύνολα, με $(\mathrm{card}(D_{i-1}))^{1/2} = 2^{2^{i-2}}$, ώστε αν $\sigma \in \Omega_n$ και $\eta \in \Omega_m$ με $n \neq m$ τότε $\mathrm{card}(\sigma \cap \eta) = 1$. Τέτοιες διαμερίσεις υπάρχουν: Πράγματι, θεωρούμε το D_{i-1} ως πεπερασμένο σώμα και ένα υποσώμα F του D_{i-1} με $\mathrm{card}F = (\mathrm{card}(D_{i-1}))^{1/2} =: q$ (αυτό είναι δυνατόν, καθώς το q είναι δύναμη πρώτου). Θέτουμε Ω_n την διαμέριση του D_{i-1} στο σύνολο όλων των ευθειών που είναι παράλληλες προς μία σταθερή ευθεία της μορφής xF, $0 \neq x \in D_{i-1}$. Το πλήθος αυτών των ευθειών είναι $(q^2-1)/(q-1) = q+1$, που είναι μεγαλύτερο από το πλήθος 2^{i+2} των διαμερίσεων που χρειαζόμαστε. Θα ορίσουμε τώρα τις διαμερίσεις του D. Για κάθε $2^{i+1} \leqslant n < 2^{i+2}$, $i = 5, 6, \dots$, θέτουμε τα στοιχεία της Δ_n να είναι τα ακόλουθα σύνολα:

(i) $\{t \in D : \pi_{i-1}(t) \in \sigma, t_n = -1\}$, όπου $\sigma \in \Omega_{2n}$, και

(ii) $\{t \in D : \pi_{i-1}(t) \in \sigma, t_n = 1\}$, όπου $\sigma \in \Omega_{2n+1}$.

Το πλήθος των συνόλων αυτής της μορφής στην Δ_n είναι $2\,(\mathrm{card}(D_{i-1}))^{1/2} = 2^{1+2^{i-2}}$, και αφού $n < 2^{i+2}$, βλέπουμε ότι η συνθήκη (i) του Λήμματος ικανοποιείται.

Θα ελέγξουμε τώρα ότι ικανοποιείται και η συνθήκη (ii). Έστω

$$A = \{t \in D : \pi_{i-1}(t) \in \sigma, t_n = \theta\}, \quad \sigma \in \Omega_{2n+(1+\theta)/2}, \quad 2^{i+1} \leqslant n < 2^{i+2} \tag{5.3.4}$$

και

$$B = \{t \in D : \pi_{j-1}(t) \in \eta, t_m = \theta'\}, \quad \eta \in \Omega_{2m+(1+\theta')/2}, \quad 2^{j+1} \leqslant m < 2^{j+2}. \tag{5.3.5}$$

Τότε,

$$\phi_n(A) = \{t \in D : \pi_{i-1}(t) \in \sigma, t_n = -\theta\} \tag{5.3.6}$$

και

$$\lambda(A) = \frac{1}{2}\lambda\left(\pi_{i-1}^{-1}(\sigma)\right) = 2^{-2^{i-2}-1}, \quad \lambda(B) = \frac{1}{2}\lambda\left(\pi_{j-1}^{-1}(\eta)\right) = 2^{-2^{j-2}-1}. \tag{5.3.7}$$

Διακρίνουμε τώρα δύο περιπτώσεις:

(1) Αν $i \neq j$, τότε οι π_{i-1} και π_{j-1} εξαρτώνται από διαφορετικές συντεταγμένες, άρα

$$\begin{aligned}\lambda\left(\phi_n(A) \cap B\right) &\leqslant \lambda\left(\pi_{i-1}(\sigma) \cap \pi_{j-1}^{-1}(\eta)\right) = \lambda\left(\pi_{i-1}^{-1}(\sigma)\right)\lambda\left(\pi_{j-1}^{-1}(\eta)\right) \\ &= 4\lambda(A)\lambda(B).\end{aligned}$$

(2) Αν $i = j$, τότε είτε $n = m$ και $\theta = \theta'$, οπότε τα $\phi_n(A)$ και $B = A$ είναι ξένα, είτε από την επιλογή των διαμερίσεων Ω_n έχουμε $\mathrm{card}(\sigma \cap \eta) = 1$. Σε αυτήν την περίπτωση έχουμε

$$\begin{aligned}\lambda\left(\phi_n(A) \cap B\right) &\leqslant \lambda\left(\pi_{i-1}^{-1}(\sigma \cap \eta)\right) = 2^{-2^{i-1}} \\ &= \left(2^{-2^{i-2}}\right)^2 = 4\lambda(A)\lambda(B).\end{aligned}$$

Η απόδειξη είναι πλήρης. □

Απόδειξη του θεωρήματος. Έστω $1 \leqslant r < p < \infty$ και έστω X ο χώρος όλων των μετρήσιμων συναρτήσεων f στο $[0,1]$ που ικανοποιούν την

$$\|f\| = \left(\sum_{m=2^6}^{\infty} \sum_{B \in \Delta_m} M_m^{ap} \left(\int_B |f(t)|^r dt \right)^{p/r} \right)^{1/p} < \infty, \tag{5.3.8}$$

όπου τα M_m και Δ_m δίνονται από το Λήμμα 5.3.5 και a είναι ένας αριθμός για τον οποίο ισχύει

$$0 < ap < \frac{p}{r} - 1. \tag{5.3.9}$$

Για κάθε $f \in X$ έχουμε

$$M_{2^6}^{a-1} \|f\|_1 \leqslant \|f\| \leqslant M \|f\|_\infty, \tag{5.3.10}$$

όπου

$$M = \left(\sum_{m=2^6}^{\infty} M_m^{1+ap-p/r} \right)^{1/p} < \infty. \tag{5.3.11}$$

Τότε, ο X είναι συναρτησιακός χώρος Köthe στο $[0,1]$ και άρα Banach lattice. Προφανώς ο X είναι sublattice του $\ell_p\left(L_r(0,1)\right)$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 5.1.2 θα δείξουμε ότι ο X δεν έχει την (CAP).

Έστω w_j οι συναρτήσεις Walsh στο $[0,1]$, που ορίζονται ως εξής: $w_1(t) = r_0(t) = 1$, $w_2(t) = r_1(t)$, $w_3(t) = r_2(t)$, $w_4(t) = r_1(t)r_2(t)$, $w_5(t) = r_3(t)$, και γενικά

$$w_j(t) = r_{k_1+1}(t) r_{k_2+1}(t) \cdots r_{k_l+1}(t), \tag{5.3.12}$$

αν $j - 1 = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots 2^{k_l}$, $0 \leqslant k_1 < k_2 < \cdots < k_l$, όπου $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι οι συναρτήσεις Rademacher. Παρατηρήστε ότι οι συναρτήσεις Walsh σχηματίζουν ορθοκανονικό σύστημα στον $L_2(0,1)$ και $\|w_j\|_\infty = 1$, για κάθε j. Έτσι, αν θεωρήσουμε την $\{w_j\}_{j=1}^{\infty}$ σαν ακολουθία στον X ή στον X^*, είναι φραγμένη. Ειδικότερα, αν την θεωρήσουμε στον X^*, έχουμε $w_j \xrightarrow{w^*} 0$, δηλαδή ικανοποιούνται οι δύο πρώτες συνθήκες του Θεωρήματος 5.1.2.

Ορίζουμε τώρα, για κάθε $T : X \to X$ και $n = 1, 2, \ldots$,

$$\beta_n(T) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=1}^{2^n} w_j\left(T w_j\right), \tag{5.3.13}$$

όπου

$$w_j\left(T w_j\right) = \int_0^1 w_j(t) \left(T w_j\right)(t) dt. \tag{5.3.14}$$

Θα δείξουμε ότι ικανοποιούνται και οι άλλες δύο συνθήκες του Θεωρήματος 5.1.2, για κατάλληλη επιλογή των F_n, η οποία θα γίνει αργότερα.

Παρατηρούμε πρώτα ότι οι $\{w_j\}_{j=1}^{2^n}$ αποτελούν βάση του χώρου των $\mathcal{B}_n$-μετρήσιμων συναρτήσεων στο $[0,1]$. Εφ' όσον το $\{2^{n/2}\chi_i^n\}_{i=1}^{2^n}$, όπου $\chi_i^n = \chi_{[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}]}$ είναι βάση του ίδιου χώρου, και μάλιστα ορθοκανονική στον $L_2(0,1)$, έπεται ότι

$$\beta_n(T) = \sum_{i=1}^{2^n} \chi_i^n\left(T\chi_i^n\right) \tag{5.3.15}$$

(το ίχνος ενός γραμμικού μετασχηματισμού σε έναν πεπερασμένης διάστασης χώρο με εσωτερικό γινόμενο είναι ανεξάρτητο από την επιλογή της ορθοκανονικής βάσης). Από την (5.3.15) παίρνουμε

$$\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T) = \sum_{i=1}^{2^n} \chi_i^n\left(T\chi_{\phi_n(i)}^n\right), \qquad n = 1, 2, \ldots, \tag{5.3.16}$$

όπου ϕ_n η μετάθεση που ορίσαμε πριν από το Λήμμα 5.3.5. Η διαμέριση Δ_n του $[0,1]$, του Λήμματος 5.3.5, επάγει με προφανή τρόπο μια διαμέριση Δ_n' του $\{1,2,\ldots,2^n\}$, όπου κάθε $A' \in \Delta_n'$ αντιστοιχεί στο σύνολο $A = \bigcup_{i\in A'}\left[\frac{i-1}{2^n},\frac{i}{2^n}\right]$ της Δ_n. Έχουμε

$$\sum_{i\in A'} \chi_i^n\left(T\chi_{\phi_n(i)}^n\right) = \text{Average}\left[\left(\sum_{i\in A'}\theta_i\chi_i^n\right)\left(\sum_{i\in A'}T\theta_i\chi_{\phi_n(i)}^n\right)\right], \tag{5.3.17}$$

όπου ο μέσος όρος λαμβάνεται πάνω από όλες τις $2^{\mathrm{card}(A')}$ επιλογές προσήμων $\theta_i, i \in A'$, με $\mathrm{card}(A') = 2^n M_n^{-1}$. Ισχυριζόμαστε τώρα ότι

$$|\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T)| \leqslant \sum_{A'\in\Delta_n'} \int_{A'} |Tf(t)|dt, \tag{5.3.18}$$

όπου $f = \sum_{i\in A'}\theta_i\chi_{\phi_n(i)}^n$ είναι μια $\mathcal{B}_n$-μετρήσιμη συνάρτηση με $|f| = \chi_{\phi_n(A)}$. Για την απόδειξη της (5.3.18) θα χρειαστούμε το επόμενο Λήμμα:

Λήμμα 5.3.6. *Έστω $A = (a_{ij})_{j=1}^{\infty}$. Τότε υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1$, ώστε*

$$\sum_{i=1}^{m}\left|\sum_{j=1}^{m}\varepsilon_j a_{ij}\right| \geqslant \left|\sum_{i=1}^{m} a_{ii}\right| \tag{5.3.19}$$

Σημείωση. Από το Λήμμα έπεται ότι αν $A : \ell_\infty \to \ell_1^m$ τότε

$$\|A\| = \max\{\|Ax\|_1 : x \in \mathrm{ext}(B_{\ell_\infty^m})\} \geqslant |\mathrm{tr}A|, \tag{5.3.20}$$

όπου με $\mathrm{ext}(B_{\ell_\infty^m})$ συμβολίζουμε το σύνολο των ακραίων σημείων της $B_{\ell_\infty^m}$.

Απόδειξη του Λήμματος 5.3.6. Θα δείξουμε ότι υπάρχουν $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m = \pm 1$, ώστε

$$\sum_i \varepsilon_i \sum_j \varepsilon_j a_{ij} \geqslant \sum a_{ii}. \tag{5.3.21}$$

Αν θέσουμε $b_{ij} = a_{ij} + a_{ji}$, τότε προκύπτει ότι

$$\sum_{1 \leqslant j < i < m} \varepsilon_i \varepsilon_j b_{ij} \geqslant 0. \tag{5.3.22}$$

Ο τελευταίος ισχυρισμός έπεται με επαγωγή στο m:

$$\sum_{1 \leqslant j < i < m+1} \varepsilon_i \varepsilon_j b_{ij} = \sum_{1 \leqslant j < i < m} \varepsilon_i \varepsilon_j b_{ij} + \varepsilon_{m+1} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j b_{mj}. \tag{5.3.23}$$

Έχοντας επιλέξει τα ε_i έτσι ώστε

$$\sum_{1 \leqslant j < i < m+1} \varepsilon_i \varepsilon_j b_{ij} \geqslant 0, \tag{5.3.24}$$

παίρνουμε

$$\varepsilon_{m+1} = \mathrm{sgn} \sum_{j=1}^{m} \varepsilon_j b_{mj}. \tag{5.3.25}$$

□

Θα δείξουμε τώρα την (5.3.18). Έχουμε

$$\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T) = \sum_{A' \in \Delta_n'} \sum_{i \in A'} \chi_i^n \left(T \chi_{\phi_n(i)}^n \right) \tag{5.3.26}$$

Σταθεροποιούμε ένα $A' \in \Delta_n'$ με $\mathrm{card}(A') = 2^n M_n^{-1}$. Τότε, από το Λήμμα 5.3.6 μπορούμε να βρούμε $\theta_i = \pm 1, i \in A'$, ώστε

$$\sum_{i \in A', A' \in \Delta_n'} \left| \sum_{i \in A', A' \in \Delta_n'} \theta_i \int_{A'} T \chi_{\phi_n(i)}^n \right| \geqslant \left| \sum_{i \in A', A' \in \Delta_n'} \chi_i^n T \chi_{\phi_n(i)}^n \right|. \tag{5.3.27}$$

Από την (5.3.26) έπεται ότι

$$\begin{aligned} |\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T)| &\leqslant \sum_{i \in A', A' \in \Delta_n'} \int_{A'} \left| T \sum_{i \in A', A' \in \Delta_n'} \theta_i \chi_{\phi_n(i)}^n \right| \\ &= \sum_{A' \in \Delta_n'} \int_{A'} |Tf(t)| dt. \end{aligned} \tag{5.3.28}$$

Θέτουμε

$$E_n = \big\{ f : f\mathcal{B}_n - \text{μετρήσιμη και } |f| = \chi_{\phi_n(A)} \ \text{ για κάποιο } A \in \Delta_n \big\}. \tag{5.3.29}$$

Τότε, λόγω της (5.3.18) έχουμε

$$\begin{aligned} |\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T)| &\leqslant \sum_{A' \in \Delta_n'} \Big| \sum_{i \in A'} \chi_i^n T \chi_{\phi_n(i)}^n \Big| \\ &\leqslant M_n \sup \Big\{ \int_A |Tf(t)| dt : A \in \Delta_n, f \in E_n \Big\}. \end{aligned} \tag{5.3.30}$$

Από τον ορισμό της νόρμας στον X και από την ανισότητα Hölder έχουμε, για κάθε $g \in X$ και για κάθε $A \in \Delta_n$,

$$\|g\| \geqslant M_n^a M_n^{1-\frac{1}{r}} \int_A |g(t)| dt. \tag{5.3.31}$$

Έτσι, για κάθε $n \geqslant 2^6$,

$$|\beta_n(T) - \beta_{n-1}(T)| \leqslant M_n^{\frac{1}{r}-a} \sup\{\|Tf\| : f \in E_n\}. \tag{5.3.32}$$

Από την συνθήκη (ii) του Λήμματος 5.3.5, για κάθε $f \in E_n$ με $|f| = \chi_{\phi_n(A)}$ όπου $A \in \Delta_n$, έχουμε:

$$\begin{aligned} \|f\| &= \Big(\sum_{m=2^6}^{\infty} \sum_{B \in \Delta_m} M_m^{ap} \lambda\left(B \cap \phi_n(A)\right)^{p/r} \Big)^{1/p} \\ &\leqslant \Big(\sum_{m=2^6}^{\infty} \sum_{B \in \Delta_m} M_m^{ap} \left(4\lambda(A)\lambda(B)\right)^{p/r} \Big)^{1/p} \\ &\leqslant \Big(\sum_{m=2^6}^{\infty} M_m M_m^{ap} 4^{p/r} M_m^{-p/r} M_n^{-p/r} \Big)^{1/p} \\ &= 4^{1/r} M_n^{-1/r} \Big(\sum_{m=2^6}^{\infty} M_m^{1+ap-p/r} \Big)^{1/p}. \end{aligned} \tag{5.3.33}$$

Θέτοντας $F_n := M_n^{1/r-a} E_n$ για κάθε $n \geqslant 2^6$, βλέπουμε ότι οι συνθήκες (i) και (ii) του Θεωρήματος 5.1.2 ικανοποιούνται. Επομένως, ο X δεν έχει την (CAP). □

Παρατήρηση 5.3.7. Αν $r = 2 < p < \infty$, ο χώρος $\ell_p\left(L_2(0,1)\right)$ είναι ισομορφικός με συμπληρωματικό υπόχωρο του $\ell_p\left(L_p(0,1)\right)$, ο οποίος με τη σειρά του είναι ισομετρικός με τον $L_p(0,1)$ – ο $\ell_2 = L_2(0,1)$ είναι ισομορφικός με συμπληρωματικό υπόχωρο του $L_p(0,1)$. Έτσι, σε αυτήν την περίπτωση ο χώρος X του Θεωρήματος 5.3.4 είναι sublattice του lattice $Y_p = \ell_p\left(L_2(0,1)\right) \oplus L_p(0,1)$ και ο Y_p είναι ισομορφικός με τον $L_p(0,1)$.

Κεφάλαιο 6

Ιδιότητα προσέγγισης και φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης

6.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο περιγράφουμε το εξής αποτέλεσμα των T. Figiel και W. B. Johnson [4]: υπάρχει χώρος Banach X ο οποίος έχει την ιδιότητα προσέγγισης αλλά δεν έχει την ιδιότητα φραγμένης προσέγγισης. Υπενθυμίζουμε ότι:

(i) Ο X έχει την ιδιότητα προσέγγισης αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τελεστής $T : X \to X$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$.

(ii) Ο X έχει την λ-μετρική ιδιότητα προσέγγισης αν για κάθε συμπαγές υποσύνολο K του X και για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει τελεστής $T : X \to X$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T\| \leqslant \lambda$ και $\|T(x) - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$.

(iii) Ο X έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης αν έχει την λ-μετρική ιδιότητα προσέγγισης για κάποιον $\lambda > 0$.

Παρατηρήστε ότι αν ο X έχει την *φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης* τότε έχει και την *ιδιότητα προσέγγισης*. Πράγματι, έστω $\varepsilon > 0$ και έστω K συμπαγές υποσύνολο του X. Τότε, υπάρχουν $x_i, i = 1, \ldots, n$, ώστε $K \subset \bigcup_{i=1}^{n} B(x_i, \varepsilon/(3\lambda))$ και τελεστής $T : X \to X$ πεπερασμένης τάξης, ώστε $\|T\| \leqslant \lambda$ και $\|Tx_i - x_i\| \leqslant \varepsilon/3$ για κάθε i. Προσεγγίζοντας το τυχόν $x \in K$ με κάποιο x_i και χρησιμοποιώντας τα παραπάνω, βλέπουμε εύκολα ότι $\|Tx - x\| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in K$.

6.2 Το βασικό επιχείρημα των Figiel και Johnson

Οι Figiel και Johnson αποδεικνύουν το εξής θεώρημα.

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε, για κάθε νόρμα $|\cdot|$ στον X η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$ ο $(X, |\cdot|)$ να έχει την λ-μετρική ιδιότητα προσέγγισης. Τότε, ο X^* έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης.*

Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach. Συμβολίζουμε με $\mathcal{A}$ την οικογένεια των νορμών $|\cdot|$ στον X οι οποίες είναι ισοδύναμες με την $\|\cdot\|$ και η δυϊκή τους νόρμα είναι της μορφής

$$|x^*|_* = \|x^*\|_* + Md(x^*, Z), \tag{6.2.1}$$

όπου $M > 0$, Z είναι υπόχωρος του X^* πεπερασμένης διάστασης, και

$$d(x^*, Z) = \inf\{\|x^* - z\|_* : z \in Z\}. \tag{6.2.2}$$

Από το γεγονός ότι κάθε υπόχωρος Z του X^* πεπερασμένης διάστασης είναι w^*-κλειστός, ελέγχουμε εύκολα ότι κάθε νόρμα της παραπάνω μορφής είναι η δυϊκή νόρμα για μια νόρμα $|\cdot|$ στον X η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$.

Ορισμός 6.2.2. Έστω $\varepsilon, \lambda > 0$. Λέμε ότι ο χώρος Banach X έχει την (ε, λ)-μετρική ιδιότητα προσέγγισης αν, για κάθε υπόχωρο Z του X πεπερασμένης διάστασης και για κάθε $\delta > 0$, υπάρχει τελεστής $T : X \to X$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T\| \leqslant \lambda + \delta$ και $\|T(z) - z\| \leqslant (\varepsilon + \delta)\|z\|$ για κάθε $z \in Z$.

Πρόταση 6.2.3. *Έστω $\lambda > 0$. Υποθέτουμε ότι για κάθε νόρμα $|\cdot|$ στην $\mathcal{A}$ ο $(X, |\cdot|)$ έχει την λ-μετρική ιδιότητα προσέγγισης. Τότε, για κάθε $0 < \varepsilon < 1$, ο $(X^*, \|\cdot\|_*)$ έχει την $(\varepsilon, \lambda(1 + 2\varepsilon^{-1}\lambda))$-μετρική ιδιότητα προσέγγισης.*

Απόδειξη. Έστω Z ένας υπόχωρος του X^* πεπερασμένης διάστασης. Θεωρούμε $\beta > \lambda$ και $\delta > 0$ και ορίζουμε τη νόρμα

$$|x^*|_* = \|x^*\|_* + 2\varepsilon^{-1}\beta d(x^*, Z). \tag{6.2.3}$$

Επιλέγουμε υπόχωρο Y του X πεπερασμένης διάστασης ώστε, για κάθε $z^* \in Z$,

$$\|z^*\|_* \leqslant (1 + \delta)\sup\{|z^*(y)| : y \in Y, \|y\| \leqslant 1\}. \tag{6.2.4}$$

Αφού ο $(X, |\cdot|)$ έχει την λ-μετρική ιδιότητα προσέγγισης, υπάρχει τελεστής $T : X \to X$ πεπερασμένης τάξης ώστε $|T| \leqslant \beta$ και

$$\|T(y) - y\| \leqslant \delta\|y\|, \tag{6.2.5}$$

για κάθε $y \in Y$. Για κάθε $x^* \in X^*$ έχουμε

$$\|T^*(x^*)\|_* + 2\varepsilon^{-1}\beta d(T^*(x^*), Z) \leqslant \beta\left(\|x^*\|_* + 2\varepsilon^{-1}\beta d(x^*, Z)\right). \tag{6.2.6}$$

Έπεται ότι

$$\|T^*(x^*)\|_* \leqslant \beta(1+2\varepsilon^{-1}\beta)\|x^*\|_*, \tag{6.2.7}$$

άρα

$$\|T\| \leqslant \beta(1+2\varepsilon^{-1}\beta). \tag{6.2.8}$$

Έστω $z^* \in Z$. Έχουμε,

$$2\varepsilon^{-1}\beta d(T^*(z^*), Z) \leqslant \beta\|z^*\|_*, \tag{6.2.9}$$

άρα υπάρχει $w^* \in Z$ με την ιδιότητα

$$\|T^*(z^*) - w^*\|_* \leqslant \frac{\varepsilon}{2}\|z^*\|_*. \tag{6.2.10}$$

Για κάθε $y \in Y$, με $\|y\| \leqslant 1$, έχουμε

$$|T^*z^*(y) - z^*(y)| = |z^*(Ty - y)| \leqslant \delta\|z^*\|_*. \tag{6.2.11}$$

Τότε παίρνουμε,

$$|z^*(y) - w^*(y)| \leqslant \left(\delta + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|z^*\|_*. \tag{6.2.12}$$

Άρα,

$$\begin{aligned} \|z^* - w^*\|_* &\leqslant (1+\delta)\sup\{|z^*(y) - w^*(y)| : y \in Y, \|y\| \leqslant 1\} \\ &\leqslant (1+\delta)\left(\delta + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|z^*\|_*. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\|T^*(z^*) - z^*\|_* \leqslant \left((1+\delta)\Big(\delta + \frac{\varepsilon}{2}\Big) + \frac{\varepsilon}{2}\right)\|z^*\|. \tag{6.2.13}$$

Αφού οι $\beta > \lambda$ και $\delta > 0$ ήταν τυχόντες, έπεται το ζητούμενο. □

Πρόταση 6.2.4. *Έστω $0 < \varepsilon < 1$ και $\lambda > 0$. Αν ο $(X, \|\cdot\|)$ έχει την (ε, λ)-μετρική ιδιότητα προσέγγισης, τότε ο $(X, \|\cdot\|)$ έχει την $(1-\varepsilon)^{-1}\lambda$-μετρική ιδιότητα προσέγγισης.*

Απόδειξη. Έστω Z ένας υπόχωρος του X πεπερασμένης διάστασης. Θεωρούμε $\beta > \lambda$ και $0 < \varepsilon < \delta < 1$. Επαγωγικά, ορίζουμε ακολουθία $\{T_n\}$ τελεστών πεπερασμένης τάξης στον X με $\|T_n\| \leqslant \beta$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|T_1(z) - z\| \leqslant \delta\|z\| \tag{6.2.14}$$

για κάθε $z \in Z$ και

$$\|T_{n+1}(x) - x\| \leqslant \delta\|x\| \tag{6.2.15}$$

για κάθε $x \in \mathrm{span}\{Z \cup T_n(X) \cup T_{n-1}(X) \cup \cdots \cup T_1(X)\}$.

Για κάθε n ορίζουμε $S_n : X \to X$ μέσω της

$$I - S_n = (I - T_n)(I - T_{n-1}) \cdots (I - T_1). \tag{6.2.16}$$

Τότε, για κάθε $z \in Z$ έχουμε $\|(I - S_n)(z)\| \leqslant \delta^n \|z\|$. Επίσης,

$$S_n = T_n + \sum_{k=1}^{n-1} (I - T_n)(I - T_{n-1}) \cdots (I - T_{k+1}) T_k, \tag{6.2.17}$$

άρα

$$\|S_n\| \leqslant \delta^{n-1}\beta + \cdots + \delta\beta + \beta < (1-\delta)^{-1}\beta. \tag{6.2.18}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο X έχει την $(\tau, (1-\delta)^{-1}\beta)$-μετρική ιδιότητα προσέγγισης για κάθε $\tau > 0$, $1 > \delta > \varepsilon$ και $\beta > \lambda$. Έπεται ότι ο X έχει την $(1-\varepsilon)^{-1}\lambda$-μετρική ιδιότητα προσέγγισης. □

Θεώρημα 6.2.5. *Έστω $(X, \|\cdot\|)$ ένας χώρος Banach. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ ώστε, για κάθε νόρμα $|\cdot|$ στον X η οποία είναι ισοδύναμη με την $\|\cdot\|$ ο $(X, |\cdot|)$ να έχει την λ-μετρική ιδιότητα προσέγγισης. Τότε, ο X^* έχει την $2\lambda(1+4\lambda)$-μετρική ιδιότητα προσέγγισης.*

Απόδειξη. Επιλέγουμε $\varepsilon = 1/2$ και συνδυάζουμε τις προηγούμενες δύο προτάσεις. □

6.3 Η ιδιότητα προσέγγισης στον δυϊκό χώρο

Θεώρημα 6.3.1. *Έστω X χώρος Banach. Τότε, ο X^* έχει την ιδιότητα προσέγγισης αν και μόνο αν για κάθε χώρο Banach Y, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε συμπαγή τελεστή $T : X \to Y$ υπάρχει τελεστής $T_1 : X \to Y$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - T_1\| \leqslant \varepsilon$.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 6.3.2. *Έστω X χώρος Banach, D ένας υπόχωρος του X^{**} πεπερασμένης διάστασης και $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει τελεστής $S : D \to X$ ώστε $\|S\| \leqslant 1 + \varepsilon$ και $S\,|_{D\cap X} = I$.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι $L(\ell_1^n, X^{**}) = L(\ell_1^n, X)^{**}$. Αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η απεικόνιση $T \mapsto (Te_1, \ldots, Te_n)$ είναι ισομετρία ανάμεσα στους $L(\ell_1^n, X)$ και $(X \oplus \cdots \oplus X)_\infty$.

Θεωρούμε την ταυτοτική απεικόνιση $I : D \to X^{**}$ και τυχόν $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ και διανύσματα $u_1, \ldots, u_n \in D$ νόρμας $\|u_j\| \leqslant 1 + \varepsilon$, ώστε

$$B_D \subseteq \mathrm{conv}\{u_1, \ldots, u_n\}. \tag{6.3.1}$$

Συνεπώς, υπάρχει τελεστής $V : \ell_1^n \to D$ με $\|V\| \leqslant 1+\varepsilon$ και $V(B_1^n) \supseteq B_D$. Αφού ο IV ανήκει στον $L(\ell_1^n, X)^{**}$, υπάρχει δίκτυο $\{S_\alpha\}$ στον $L(\ell_1^n, X)$ ώστε $\|S_\alpha\| \leqslant 1+\varepsilon$ για κάθε α και $S_\alpha \to IV$ στην w^*-τοπολογία του $L(\ell_1^n, X)^{**}$. Για κάθε $e \in \ell_1^n$ και για κάθε $x^* \in X^*$ ορίζουμε $(e, x^*) \in L(\ell_1^n, X)^*$ με

$$(e, x^*)(S) = x^*(Se). \tag{6.3.2}$$

Τότε, για κάθε $e \in \ell_1^n$ έχουμε $S_\alpha e \to IVe$ στην w^*-τοπολογία.

Ορίζουμε $B = \{e \in \ell_1^n : Ve \in D \cap X\}$ και παρατηρούμε ότι $S_\alpha e \to IVe$ στην w-τοπολογία, για κάθε $e \in B$. Παίρνοντας κατάλληλο κυρτό συνδυασμό των S_α και χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα προσέγγισης, κατασκευάζουμε τελεστή $T : \ell_1^n \to X$ με $\|T\| \leqslant 1 + 2\varepsilon$ και $T|_B = IV|_B$. Παρατηρήστε ότι αν $v_1, v_2 \in \ell_1^n$ και $Vv_1 = Vv_2 \in D$, τότε $v_1 - v_2 \in B$, το οποίο σημαίνει ότι $Tv_1 = Tv_2$. Αν λοιπόν ορίσουμε $S : D \to X$ θέτοντας $Sd = Tv$ όπου $v \in \ell_1^n$ είναι οποιοδήποτε διάνυσμα που ικανοποιεί την $d = Vv$, έχουμε έναν καλά ορισμένο τελεστή που ικανοποιεί τις $\|S\| \leqslant 1 + 2\varepsilon$ και $S|_{D\cap X} = I|_{D\cap X}$. □

Απόδειξη του θεωρήματος 6.3.1. Υποθέτουμε πρώτα ότι για κάθε χώρο Banach Y, για κάθε $\varepsilon > 0$ και για κάθε συμπαγή τελεστή $T : X \to Y$ υπάρχει τελεστής $T_1 : X \to Y$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T - T_1\| \leqslant \varepsilon$. Έστω Z χώρος Banach, έστω $T : Z \to X^*$ συμπαγής τελεστής και έστω $\varepsilon > 0$. Θεωρώντας τον συμπαγή τελεστή $T^*|_X : X \to Z^*$ και χρησιμοποιώντας την υπόθεση, βρίσκουμε $\{x_i^*\}_{i=1}^n \subset X^*$ και $\{z_i^*\}_{i=1}^n \subset Z^*$ ώστε, για κάθε $x \in X$ με $\|x\| \leqslant 1$ να ισχύει

$$\left\| T^*x - \sum_{i=1}^n x_i^*(x) z_i^* \right\| \leqslant \varepsilon. \tag{6.3.3}$$

Συνεπώς, για κάθε $z \in Z$ με $\|z\| \leqslant 1$ έχουμε

$$\left\| Tz(x) - \sum_{i=1}^n z_i^*(z) x_i^*(x) \right\| \leqslant \varepsilon, \tag{6.3.4}$$

δηλαδή

$$\left\| Tz - \sum_{i=1}^n z_i^*(z) x_i^* \right\| \leqslant \varepsilon. \tag{6.3.5}$$

Από το Θεώρημα 2.3.4 συμπεραίνουμε ότι ο X^* έχει την ιδιότητα προσέγγισης.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι ο X^* έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Έστω $T : X \to Y$ συμπαγής τελεστής και έστω $0 < \varepsilon < 1/2$. Ο τελεστής $T^* : Y^* \to X^*$ είναι συμπαγής, άρα υπάρχουν $\{y_i^{**}\}_{i=1}^n$ στον Y^{**} και $\{x_i^*\}_{i=1}^n$ στον X^* ώστε

$$\left\| T^*y^* - \sum_{i=1}^n y_i^{**}(y^*) x_i^* \right\| \leqslant \varepsilon \tag{6.3.6}$$

για κάθε $y^* \in Y^*$ με $\|y^*\| \leqslant 1$. Έπεται ότι

$$\left\| Tx - \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y_i^{**} \right\| \leqslant \varepsilon \tag{6.3.7}$$

για κάθε $x \in X$ με $\|x\| \leqslant 1$. Αυτό δεν είναι αρκετό για την απόδειξη, αφού τα y_i^{**} δεν είναι αναγκαστικά στον Y. Στο σημείο αυτό χρησιμοποιούμε το Λήμμα 6.3.2. Από την συμπάγεια του T μπορούμε να βρούμε $\{x_j\}_{j=1}^m$ στην μοναδιαία μπάλα B_X του X, ώστε

$$T(B_X) \subset \bigcup_{j=1}^{m} B_Y(Tx_j, \varepsilon). \tag{6.3.8}$$

Εφαρμόζουμε το Λήμμα 6.3.2 για τον $D = \mathrm{span}\left(\{Tx_j\}_{j=1}^m \cup \{y_i^{**}\}_{i=1}^n\right)$. Θα δείξουμε ότι

$$\left\| Tx - \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) S y_i^{**} \right\| \leqslant 4\varepsilon \tag{6.3.9}$$

για κάθε $x \in B_X$. Πράγματι, αν $x \in B_X$ μπορούμε να βρούμε j ώστε $\|Tx_j - Tx\| \leqslant \varepsilon$. Τότε,

$$\left\| Tx_j - \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) y_i^{**} \right\| \leqslant 2\varepsilon. \tag{6.3.10}$$

Εφαρμόζοντας τον S παίρνουμε

$$\left\| Tx_j - \sum_{i=1}^{n} x_i^*(x) S y_i^{**} \right\| \leqslant 2\varepsilon(1+\varepsilon) \leqslant 3\varepsilon. \tag{6.3.11}$$

Αυτό αποδεικνύει τον ισχυρισμό και ταυτόχρονα το θεώρημα. □

Θεώρημα 6.3.3. (i) *Έστω X χώρος Banach. Αν ο X^* έχει την ιδιότητα προσέγγισης, τότε ο X έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Ειδικότερα, αν ο X είναι αυτοπαθής, τότε ο X έχει την ιδιότητα προσέγγισης αν και μόνο αν ο X^* έχει την ιδιότητα προσέγγισης.*

(ii) *Υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach με βάση Schauder του οποίου ο δυϊκός χώρος X^* είναι διαχωρίσιμος, αλλά δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης.*

Απόδειξη. (i) Χρησιμοποιούμε την ισοδυναμία των (i) και (iv) του θεωρήματος 2.3.4. Έστω $\{x_n\}_{n=1}^\infty \subset X$ και $\{x_n^*\}_{n=1}^\infty \subset X^*$ που ικανοποιούν τις

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\| \|x_n^*\| < \infty \quad \text{και} \quad \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x) x_n = 0 \tag{6.3.12}$$

για κάθε $x \in X$. Τότε, $\sum_{n=1}^{\infty} x^*(x_n)x_n^* = 0$ για κάθε $x^* \in X^*$. Δηλαδή, αν $J : X \to X^{**}$ είναι η φυσιολογική εμφύτευση του X στον X^{**}, έχουμε

$$\sum_{n=1}^{\infty} Jx_n(x^*)x_n^* = 0 \tag{6.3.13}$$

για κάθε $x \in X$. Αφού ο X^* έχει την ιδιότητα προσέγγισης, συμπεραίνουμε ότι

$$\sum_{n=1}^{\infty} Jx_n(x_n^*) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n^*(x_n) = 0. \tag{6.3.14}$$

Αν ο X είναι αυτοπαθής τότε $X = X^{**}$, οπότε αν ο X έχει την ιδιότητα προσέγγισης, θα την έχει και ο X^{**}. Έπεται ότι ο X^* έχει την ιδιότητα προσέγγισης.

(ii) Γνωρίζουμε ότι υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach ο οποίος δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Στην επόμενη παράγραφο θα δείξουμε ότι υπάρχει χώρος Banach Z με τις εξής ιδιότητες: ο Z^{**} έχει βάση Schauder και ο Z^{**}/Z είναι ισόμορφος με τον X. Περνώντας στους δυϊκούς χώρους, παίρνουμε $Z^{***} \approx Z^* \oplus X^*$ (παρατηρήστε ότι, για κάθε χώρο Banach Z, η απεικόνιση που στέλνει κάθε συναρτησοειδές του Z^{**} στον περιορισμό του στον Z είναι προβολή νόρμας 1 από τον Z^{***} επί του Z^*). Αφού ο X δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης, το ίδιο ισχύει για τον X^*, από το πρώτο μέρος του θεωρήματος. Όμως, εύκολα ελέγχουμε ότι κάθε συμπληρωματικός υπόχωρος ενός χώρου που έχει την ιδιότητα προσέγγισης, έχει κι αυτός την ιδιότητα προσέγγισης. Συνεπώς, ο Z^{***}, ο οποίος είναι δυϊκός του χώρου Z^{**} που έχει βάση Schauder, δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης.

Επιπλέον, αν ο X έχει διαχωρίσιμο δυϊκό (αν για παράδειγμα, πάρουμε το παράδειγμα χώρου ισόμορφου με υπόχωρο του c_0 του κεφαλαίου 4) τότε ο Z^{***} είναι διαχωρίσιμος. □

Συνδυάζοντας τα αποτελέσματα των παραγράφων 6.2 και 6.3 μπορούμε τώρα να αποδείξουμε ότι υπάρχουν χώροι Banach που έχουν την (AP) αλλά δεν έχουν την (BAP).

Θεώρημα 6.3.4. *Υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach X, ο οποίος μάλιστα έχει διαχωρίσιμο δυϊκό, που έχει την ιδιότητα προσέγγισης, αλλά δεν έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης.*

Απόδειξη. Από το θεώρημα 6.3.3 υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach Z με βάση Schauder του οποίου ο δυϊκός χώρος Z^* είναι διαχωρίσιμος αλλά δεν έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Από το Θεώρημα 6.2.5, για κάθε $n \geqslant 1$ μπορούμε να ορίσουμε ισοδύναμη νόρμα $|||\cdot|||_n$ στον Z έτσι ώστε ο $(Z, |||\cdot|||_n)$ να μην έχει την n-μετρική ιδιότητα προσέγγισης. Τότε, ο χώρος

$$X = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus (Z, |||\cdot|||_n) \right)_2 \tag{6.3.15}$$

έχει την ιδιότητα προσέγγισης, δεν έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης και έχει διαχωρίσιμο δυϊκό. □

6.4 Το παράδειγμα του Lindenstrauss

Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Σε αυτήν την παράγραφο θα κατασκευάσουμε διαχωρίσιμο χώρο Banach Z, ώστε ο Z^{**}/Z να είναι ισόμορφος με τον X.

Πρόταση 6.4.1. *Έστω X διαχωρίσιμος χώρος Banach. Έστω $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία, πυκνή στη μοναδιαία σφαίρα $S_X = \{x \in X : \|x\| = 1\}$ του X. Έστω Y^* ο χώρος που αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $a = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ πραγματικών αριθμών για τις οποίες ισχύει*

$$\|a\| = \sup \left(\sum_{j=1}^{k} \left\| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} a_i x_i \right\|^2 \right)^{1/2} < \infty, \tag{6.4.1}$$

όπου το supremum παίρνεται πάνω από όλες τις επιλογές φυσικών k και ακεραίων $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k$. Τότε, ο Y^* είναι ισόμορφος με τον δυϊκό χώρο ενός διαχωρίσιμου χώρου Banach Y με μονότονη συρρικνούσα βάση.

Απόδειξη. Είναι φανερό ότι τα μοναδιαία διανύσματα $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ σχηματίζουν μονότονη φραγμένα πλήρη βάση του Y^*. Τότε, από την Πρόταση 2.2.5 ο Y^* είναι ισόμορφος με έναν δυϊκό χώρο, ο οποίος είναι κλειστός γραμμικός υπόχωρος του Y^{**}, που παράγεται από τα διορθογώνια συναρτησοειδή $\{e_n^*\}_{n=1}^{\infty}$ της $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$. Για να διαπιστώσουμε ότι ο Y έχει συρρικνούσα βάση, θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα των Johnson, Rosental και Zippin [8, Θεώρημα 1.4], την απόδειξη του οποίου παραλείπουμε:

Θεώρημα 6.4.2. *Έστω X χώρος Banach. Τότε, ο X έχει συρρικνούσα βάση, και ισοδύναμα ο X^* έχει φραγμένα πλήρη βάση, αν ικανοποιείται ένα από τα επόμενα:*

(i) *ο X^* έχει βάση.*

(ii) *ο X έχει βάση, ο X^* είναι διαχωρίσιμος και έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης.*

Εφ' όσον ο Y^* έχει βάση, έπεται ότι ο Y έχει μονότονη συρρικνούσα βάση. □

Σε ότι ακολουθεί, θεωρούμε έναν διαχωρίσιμο χώρο Banach X και τον χώρο Y της Πρότασης 6.4.1.

Πρόταση 6.4.3. *Υπάρχει τελεστής $T : Y^* \to X$ με $\|T\| \leqslant 1$, που είναι απεικόνιση πηλίκο.*

Απόδειξη. Εύκολα βλέπουμε ότι αν $a = (a_i)_{i=1}^{\infty} \in Y^*$, τότε η σειρά $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ συγκλίνει και $\| \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i \| \leqslant \|a\|_{Y^*}$. Έτσι, ο $T : a \to \sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i$ είναι ένας καλά ορισμένος τελεστής από τον Y^* στον X, με $\|T\| \leqslant 1$. Επίσης $T(e_n) = (x_n)$. Αφού η $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$ είναι πυκνή στην S_X και ο $T(S_{Y^*})$ περιέχει την $\{x_i\}_{i=1}^{\infty}$, έπεται ότι ο $\overline{T(S_{Y^*})}$ περιέχει την S_X. Άρα, ο T είναι απεικόνιση πηλίκο. □

Θεωρούμε τώρα τον συζυγή τελεστή $T^* : X^* \to Y^{**}$.

Λήμμα 6.4.4. $T^*(X^*) \cap J(Y) = \{\emptyset\}$.

Απόδειξη. Έστω $x^* \in X^*$ και $u = \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n e_n^* \in JY$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|T^* x^*\| = \|x^*\| \leqslant \|T^* x^* + u\|. \tag{6.4.2}$$

Από αυτό έπεται ότι το $T^*X^* + JY$ είναι ευθύ άθροισμα. Έχουμε

$$(T^* x^* + u)(e_n) = x^*(x_n) + \beta_n \tag{6.4.3}$$

και $\lim_{n\to\infty} \beta_n = 0$. Άρα,

$$\begin{aligned} \|T^* x^* + u\| &\geqslant \sup_n |x^*(x_n) + \beta_n| \geqslant \limsup_{n\to\infty} |x^*(x_n)| \\ &= \|x^*\| = \|T^* x^*\|. \end{aligned} \tag{6.4.4}$$

□

Πρόταση 6.4.5. *$Y^{**} = JY \oplus T^*X^*$. Άρα, $Y^{**} \approx Y \oplus X^*$.*

Απόδειξη. Έστω $y^{**} \in Y^{**}$ με $\|y^{**}\| = 1$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$d = d\left(y^{**}, JY \oplus T^* X^*\right) \leqslant \frac{7}{8}. \tag{6.4.5}$$

Ορίζουμε ένα σύνολο A ως εξής: λέμε ότι $u \in A$ αν υπάρχουν ακέραιοι k και $0 = n_0 < n_1 < \cdots < n_k$ και $\{x_j^*\} \in X^*$, $j = 1 \dots k$ ώστε:

$$u = \sum_{j=1}^{k} \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} x_j^*(x_i)\, e_i^*, \quad \text{με} \quad \sum_{j=1}^{k} \|x_j^*\|^2 \leqslant 1 \tag{6.4.6}$$

Οι ακέραιοι n_j που εμφανίζονται στην (6.4.6) ονομάζονται *σημεία διαίρεσης*. Από τον ορισμό της νόρμας στον Y^* και από το θεώρημα Hahn–Banach έπεται ότι $\overline{\text{conv}}^{\|\cdot\|}(A) = S_{Y^{**}}$, όπου $\text{conv}(A) = \{\sum \lambda_i z_i : \lambda_i \geqslant 0, \sum \lambda_i = 1, z_i \in A\}$. Έστω $y^{**} \in Y^{**}$ με $\|y^{**}\| = 1$. Τότε, υπάρχει ακολουθία

$$v_m = \sum_{l=1}^{\gamma_m} \lambda_{l,m} u_{l,m} \tag{6.4.7}$$

με $\lambda_{l,m} \geqslant 0, \sum \lambda_{l,m} = 1, u_{l,m} \in A$ και $v_m \xrightarrow{w^*} y^{**}$ καθώς $m \to \infty$. Θεωρούμε τις ακόλουθες δύο περιπτώσεις:

(i) Υπάρχει ακέραιος i_0 ώστε για κάθε $i > i_0$, $\limsup \sum' \lambda_{l,m} \geqslant \frac{1}{8}$, όπου στο $\sum'$ αθροίζουμε μόνο τους δείκτες l για τους οποίους τα $u_{l,m}$ δεν έχουν σημείο διαίρεσης ανάμεσα στο i_0 και στο i.

(ii) Δεν υπάρχει τέτοιος i_0.

Υποθέτουμε πρώτα ότι ισχύει η περίπτωση (i). Τότε, υπάρχει υπακολουθία της $(v_m)_{m=1}^{\infty}$, την οποία λέμε κι αυτήν $(v_m)_{m=1}^{\infty}$, ώστε $v_m = v'_m + v''_m$, με $v'_m = \sum' \lambda_{l,m} u_{l,m}$, όπου κανένα $u_{l,m}$ δεν έχει σημείο διαίρεσης ανάμεσα στο i_0 και σε κάποιο i_m, με $\sum' \lambda_{l,m} \geqslant \frac{1}{8}$ και $lim_m i_m = \infty$. Τότε, $\|v''_m\| \leqslant \frac{7}{8}$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε, περνώντας σε υπακολουθία αν χρειασθεί, ότι το $w^* - \lim v''_m$ υπάρχει και έστω ότι είναι ίσο με z^{**}. Τότε, $\|z^{**}\| \leqslant \frac{7}{8}$ και $v'_m \overset{w^*}{\to} y^{**} - z^{**}$. Από την υπόθεση για τα $u_{l,m}$ υπάρχει $t^*_m \in X^*$ με $\|t^*_m\| \leqslant \sum' \lambda_{l,m} \leqslant 1$, ώστε $v'_m(e_i) = t^*_m(x_i)$ για κάθε $i_0 \leqslant i \leqslant i_m$. Πάλι χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι το $w^* - \lim t^*_m$ υπάρχει και έστω ότι είναι ίσο με t^*. Τότε, για κάθε $i \geqslant i_0$ έχουμε

$$(y^{**} - z^{**})(e_i) = v'_m(e_i) = t^*_m(x_i) = T^* t^*(e_i). \tag{6.4.8}$$

Δηλαδή, το $(y^{**} - z^{**})$ διαφέρει από τον T^*t^* κατά ένα στοιχείο του

$$\mathrm{span}\{e^*_i : i = 1, \ldots, i_0\} \subset JY. \tag{6.4.9}$$

Επομένως,

$$d = d\left(y^{**}, JY \oplus T^*X^*\right) \leqslant \|z^{**}\| \leqslant \frac{7}{8}. \tag{6.4.10}$$

Εξετάζουμε τώρα την περίπτωση (ii). Θα χρειαστούμε το εξής: Υποθέτουμε ότι α_i, β_i και λ_i είναι μη αρνητικοί αριθμοί με $\sum_i \lambda_i \leqslant 1$ και $\alpha_i^2 + \beta_i^2 \leqslant 1$ για κάθε i. Τότε,

$$\left(\sum_i \alpha_i \lambda_i\right)^2 + \left(\sum_i \beta_i \lambda_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_i \lambda_i\right)\left(\sum_i \lambda_i\left(\alpha_i^2 + \beta_i^2\right)\right) \leqslant 1. \tag{6.4.11}$$

Επιλέγουμε i_0 ώστε

$$\Big\|\sum_{i=1}^{i_0} y^{**}(e_i) e^*_i\Big\| \geqslant \frac{7}{8}. \tag{6.4.12}$$

Αυτό γίνεται, γιατί

$$1 = \|y^{**}\| = \lim_{m\to\infty} \Big\|\sum_{i=1}^{m} y^{**}(e_i) e^*_i\Big\|. \tag{6.4.13}$$

Αφού βρισκόμαστε στην δεύτερη περίπτωση, υπάρχει $i_1 > i_0$ ώστε, για αρκετά μεγάλα m,

$$\sum{}'' \lambda_{l,m} \geqslant \frac{7}{8}, \tag{6.4.14}$$

όπου το $\sum''$ λαμβάνεται πάνω από όλους τους δείκτες l για τους οποίους το $u_{l,m}$ έχει ένα σημείο διαίρεσης ανάμεσα στο i_0 και στο i_1. Για κάθε l θέτουμε $v_{l,m} = t_{l,m} + z_{l,m}$, όπου το $t_{l,m} \in JY$ ορίζεται ως εξής: $t_{l,m}(e_i) = u_{l,m}(e_i)$ αν $i \leqslant i(l,m)$ και $t_{l,m}(e_i) = 0$ αν $i > i(l,m)$, όπου $i\,(l,m)$ είναι το πρώτο σημείο διαίρεσης μετά το i_0 (από τον ορισμό έχουμε $i\,(l,m) \leqslant i_1$). Από την (6.4.6) έπεται ότι

$$1 \geqslant \|u_{l,m}\|^2 \geqslant \|t_{l,m}\|^2 + \|z_{l,m}\|^2. \tag{6.4.15}$$

Έστω $t_m = \sum'' \lambda_{l,m} t_{l,m}$, $z_m = \sum'' \lambda_{l,m} z_{l,m}$ και $v'_m = v_m - (t_m + z_m)$. Τότε, $\|v'_m\| \leqslant \frac{1}{8}$ και $z_m\,(e_i) = 0$ για κάθε $i \leqslant i_0$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας υποθέτουμε ότι $v'_m \overset{w^*}{\to} v^{**}, t_m \overset{w^*}{\to} t^{**}$ και $z_m \overset{w^*}{\to} z^{**}$. Τότε, $\|v^{**}\| \leqslant \frac{1}{8}, y^{**} = v^{**} + t^{**} + z^{**}$ και $z^{**}(e_i) = 0$, για κάθε $i \leqslant i_0$. Από την (6.4.12) έχουμε

$$\|t^{**}\| \geqslant \Big\| \sum_{i=1}^{i_0} t^{**}(e_i)e_i^* \Big\| = \Big\| \sum_{i=1}^{i_0} (y^{**} - v^{**})e_i e_i^* \Big\| \geqslant \frac{7}{8} - \|v^{**}\| \geqslant \frac{3}{4}. \tag{6.4.16}$$

Έπεται ότι

$$\liminf \sum{}'' \lambda_{l,m}\|t_{l,m}\| \geqslant \frac{3}{4}. \tag{6.4.17}$$

Από τις (6.4.11) και (6.4.15) έχουμε

$$\Big(\sum{}'' \lambda_{l,m}\|t_{l,m}\|\Big)^2 + \Big(\sum{}'' \lambda_{l,m}\|z_{l,m}\|\Big)^2 \leqslant 1. \tag{6.4.18}$$

Άρα,

$$\sum{}'' \lambda_{l,m}\|z_{l,m}\| \leqslant \frac{\sqrt{7}}{4}. \tag{6.4.19}$$

Επομένως,

$$\|z^{**}\| \leqslant \limsup \sum{}'' \lambda_{l,m}\|z_{l,m}\| \leqslant \frac{\sqrt{7}}{4}. \tag{6.4.20}$$

Αφού $t^{**} \in \mathrm{span}\{e_i^* : i = 1, \ldots, i_1\} \subset JY$, έπεται ότι

$$d = d\,(y^{**}, JY \oplus T^*X^*) \leqslant \|v^*\| + \|z^*\| \leqslant \frac{1}{8} + \frac{\sqrt{7}}{4} < \frac{7}{8}. \tag{6.4.21}$$

$\square$

Θεώρημα 6.4.6. *Για κάθε διαχωρίσιμο χώρο Banach X, υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach Z ώστε ο Z^{**} να έχει φραγμένα πλήρη βάση και ο Z^{**}/Z να είναι ισόμορφος με τον X.*

Απόδειξη. Έστω Z ο πυρήνας της απεικόνισης T της Πρότασης 6.4.3. Δηλαδή, ο Z αποτελείται από όλες τις ακολουθίες $z = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$ πραγματικών αριθμών για τις οποίες ισχύει $\sum_{i=1}^{\infty} a_i x_i = 0$ και

$$\|z\| = \sup \left(\sum_{j=1}^{k} \Big\| \sum_{i=n_{j-1}+1}^{n_j} a_i x_i \Big\|^2 \right)^{1/2} < \infty. \tag{6.4.22}$$

Τότε, τα μοναδιαία διανύσματα $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ σχηματίζουν φραγμένα πλήρη βάση του Z^{**}. Θα δείξουμε ότι ο Z^{**} μπορεί να ταυτιστεί με τον χώρο όλων των ακολουθιών $z = (a_1, \ldots, a_n, \ldots)$ για τις οποίες ισχύει η δεύτερη συνθήκη. Δηλαδή, θα δείξουμε ότι ο Z^{**} ταυτίζεται με τον Y^*. Για την ακρίβεια θα δείξουμε ότι ο Z^* μπορεί να ταυτιστεί με τον JY. Η ταύτιση δεν είναι οπωσδήποτε και ισομετρία. Προφανώς, αν $\eta^* \in JY$, τότε $\eta^* |_Z \in Z^*$. Αντίστροφα, αν $z^* \in Z^*$, από το θεώρημα Hahn–Banach υπάρχει $y^{**} \in Y^{**}$ ώστε $y^{**} |_Z = z^*$ και $\|y^{**}\| = \|z^*\|$. Από την Πρόταση 6.4.5 υπάρχει μοναδικό $x^* \in X^*$ ώστε $\eta^* = y^{**} - T^* x^* \in JY$. Τότε, $\eta^* |_Z = z^*$. Παρατηρήστε ότι

$$\|z^*\|_{Z^*} \leqslant \|\eta^*\|_{Y^*} \leqslant \|y^{**}\|_{Y^{**}} + \|x^*\| \leqslant 2\|z^*\|_{Z^*}. \tag{6.4.23}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι ο Z^{**}/Z είναι ισόμορφος με τον $Y^*/\mathrm{ker}T$, και άρα με τον X. □

Πρόταση 6.4.7. *Έστω X διαχωρίσιμος απειροδιάστατος χώρος Banach. Τότε, υπάρχει μονότονη νόρμα στον χώρο των τελικά μηδενικών ακολουθιών ώστε ο X να είναι ισόμορφος με το πηλίκο B/C, όπου*

$$B = \big\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots) : \|\lambda\| = sup_n \big\|(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots)\big\| < \infty \big\} \tag{6.4.24}$$

και

$$C = \big\{ \lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \ldots) : \lim_{m,n\to\infty} \big\|(0, \ldots, 0, \lambda_m, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots)\big\| = 0 \big\}. \tag{6.4.25}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα των Johnson, Rosenthal και Zippin [8] που χρησιμοποιήσαμε και στην απόδειξη της Πρότασης 6.4.1. Θεωρούμε τον χώρο Z του θεωρήματος 6.4.6. Τότε, ο Z^{**}/Z είναι ισόμορφος με τον X. Από το γεγονός ότι ο Z^* έχει βάση Schauder συμπεραίνουμε ότι ο Z έχει συρρικνούσα βάση. Από την Πρόταση 2.2.3, ο Z^{**} είναι ισόμορφος με τον χώρο όλων των ακολουθιών (λ_n) για τις οποίες ισχύει $\|(\lambda_n)\| = \sup_n \| \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_i \| < \infty$, όπου $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ είναι η βάση του Z. Έπεται ότι ο B/C είναι ισόμορφος με τον X. □

Θεώρημα 6.4.8. *Ένας διαχωρίσιμος δυϊκός χώρος Banach X^* έχει την ιδιότητα προσέγγισης αν και μόνο αν είναι συμπληρωματικός υπόχωρος ενός δυϊκού χώρου που έχει βάση Schauder.*

Απόδειξη Υποθέτουμε ότι ο X^* είναι συμπληρωματικός υπόχωρος ενός δυϊκού χώρου με βάση Schauder, άρα έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Έπεται ότι ο X^* έχει την ιδιότητα προσέγγισης.

Αντίστροφα, έστω ότι ο X^* είναι διαχωρίσιμος και έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Θεωρούμε τον χώρο Y της Πρότασης 6.4.1. Ο Y^{**} είναι διαχωρίσιμος και από την Πρόταση 6.4.5 έχουμε $Y^{**} \approx Y \oplus X^*$. Τότε, από την υπόθεση για τον X^* και το γεγονός ότι ο Y έχει βάση, άρα και την ιδιότητα προσέγγισης, έχουμε ότι ο Y^{**} έχει την ιδιότητα προσέγγισης. Εδώ χρησιμοποιούμε ένα αποτέλεσμα τουRosenthal: Ένας διαχωρίσιμος δυϊκός χώρος που έχει την ιδιότητα προσέγγισης, έχει και την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης. Τότε, πάλι από το αποτέλεσμα των Johnson, Rosenthal και Zippin [8] που χρησιμοποιήσαμε πριν, και αφού ο Y^* έχει βάση Schauder, έπεται ότι και ο Y^{**} έχει βάση Schauder. Αφού ο X^* είναι ισόμορφος με έναν συμπληρωματικό υπόχωρο του Y^{**}, η απόδειξη είναι πλήρης. □

Ένα παρόμοιο αποτέλεσμα αποδεικνύεται από τους Johnson, Rosenthal και Zippin [8] και από τον Pelczynski [13]:

Θεώρημα 6.4.9. *Ένας διαχωρίσιμος χώρος Banach,όχι απαραίτητα δυϊκός έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης αν και μόνο αν είναι ισομορφικός με συμπληρωματικό υπόχωρο ενός χώρου με βάση Schauder.*

Θα παρουσιάσουμε την απόδειξη του Pelczynski [13]. Θα χρειαστούμε το Λήμμα του Auerbach[12]:

Λήμμα 6.4.10. *Σε κάθε $n-$ διάστατο χώρο με νόρμα X υπάρχει νορμαρισμένο διορθογώνιο σύστημα μήκους n. Δηλαδή μπορούμε να βρούμε $x_i \in X, x_j \in X^*, i, j = 1, \cdots, n$, ώστε: $\|x_i\| = 1 = \|x_j^*\|$, για κάθε $i, j = 1, \cdots, n$ και*

$$x_j^*(x_i) = \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = j \\ 0, & i \neq j \end{cases} \tag{6.4.26}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.4.9.: Αν ο X είναι ισομορφικός με συμπληρωματικό υπόχωρο ενός χώρου με βάση, τότε προφανώς ο X έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης. Θα δείξουμε τον αντίστροφο ισχυρισμό. Ξεκινάμε με δύο παρατηρήσεις:

1. Υποθέτουμε ότι ο X είναι διαχωρίσιμος και έχει την $\lambda-$ ιδιότητα προσέγγισης. Τότε υπάρχει μια ακολουθία τελεστών $S_n : X \to X$ πεπερασμένης τάξης, ώστε:

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} S_n x \quad \text{και} \quad \Big\| \sum_{i=1}^{n} S_i \Big\| \leqslant \lambda, \tag{6.4.27}$$

για κάθε $x \in X$ και για κάθε $n = 1, 2, \ldots$
Πράγματι έστω $\{y_i\}_{i=1}^{\infty}$ μια ακολουθία πυκνή στον X. Τότε για κάθε $n = 1, 2, \ldots,$ υπάρχουν τελεστές $T_n \in B(X)$ πεπερασμένης τάξης ώστε $\|T_n\| \leqslant \lambda$ και

$$\|T_n y_i - y_i\| \leqslant 1/n, \tag{6.4.28}$$

για κάθε $i = 1, 2, \ldots, n$.Τότε οι τελεστές $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, που ορίζονται ως εξής:

$$S_1 = T_1 \quad \text{και} \quad S_n = T_n - T_{n-1}, \tag{6.4.29}$$

για κάθε $n > 1$, ικανοποιούν την (6.4.27).

2. Έστω X ένας $n-$διάστατος χώρος Banach. Τοτε υπάρχουν τελεστές $\{U_i\}_{i=1}^{n^2} \in L(X,X)$, ώστε $\dim U_k X = 1$,

$$\Big\| \sum_{i=1}^{k} U_i \Big\| \leqslant 2, \tag{6.4.30}$$

για κάθε $k = 1, \cdots, n^2$ και

$$\sum_{i=1}^{n^2} U_i x = x, \tag{6.4.31}$$

για κάθε $x \in X$. Πράγματι από το Λήμμα του Auerbach έστω $\{x_j\}_{j=1}^{n}$ και $\{x_j^*\}_{j=1}^{n}$ ένα νορμαρισμένο διορθογώνιο σύστημα στον X. Έστω $i = rn + j, 0 \leqslant r < n, 1 \leqslant j \leqslant n$. Θέτουμε ,

$$U_i x = \frac{x_j^*(x) x_j}{n}. \tag{6.4.32}$$

Τότε για κάθε $k = rn + j$ παίρνουμε:

$$\Big\| \sum_{i=1}^{k} U_i \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{i=1}^{rn} U_i \Big\| + \sum_{i=1}^{j} \|U_{rn+i}\| = \|rI/n\| + \sum_{i=1}^{j} n^{-1} \leqslant 2, \tag{6.4.33}$$

όπου I ο ταυτοτικός τελεστής.

Έστω τώρα ότι ο X είναι διαχωρίσιμος και έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης. Επιλέγουμε μία $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία τελεστών πεπερασμένης τάξης όπως στην παρατήρηση 1. Αφού κάθε $S_n X$ είναι πεπερασμένης διάστασης, μπορούμε να κατασκευάσουμε για κάθε n τελεστές $\{U_{i,n}\}_{i=1}^{m_n}$ στον $S_n X$, με $m_n = (\dim S_n X)^2$, που να ικανοποιούν τις συνθήκες της παρατήρησης 2. Θέτουμε

$$V_j = U_{i,n} S_n, \tag{6.4.34}$$

αν $j = m_1 + m_2 + \cdots + m_{n-1} + i, 1 \leqslant i \leqslant m_n, n = 1, 2, \ldots$ Τότε έχουμε $\dim V_j X = 1$, για κάθε $j = 1, 2, \ldots$,με

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} V_j x, \tag{6.4.35}$$

για κάθε $x \in X$ και

$$\Big\| \sum_{j=1}^{k} V_j \Big\| \leqslant 5\lambda, \tag{6.4.36}$$

για κάθε k. Έστω $v_j \in V_j X$ ένα διάνυσμα με $\|v_j\| = 1$,για κάθε $j = 1, 2, \ldots$ και Y ο χώρος όλων των ακολουθιών $y = (a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots)$, ώστε

$$\sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j < \infty. \tag{6.4.37}$$

Θέτουμε

$$\|y\| = \sup_k \Big\| \sum_{j=1}^{k} a_j v_j \Big\|. \tag{6.4.38}$$

Τότε τα μοναδιαία διανύσματα v_j σχηματίζουν μονότονη, φραγμένα πλήρη βάση στον Y. Ορίζουμε $V : X \to Y$, με $Vx = (a_1, a_2, \ldots)$ όπου τα a_j ορίζονται μέσω της:

$$V_j x = a_j v_j, \tag{6.4.39}$$

για κάθε $j = 1, 2, \ldots$ Τότε $\|V\| \leqslant 5, \|V^{-1}\| \leqslant 1$, άρα ο V είναι ισομορφισμός επί. Έστω $U : Y \to X$, με

$$U(a_1, a_2, \ldots) = \sum_{j=1}^{\infty} a_j v_j. \tag{6.4.40}$$

Τότε ο $IV : X \to X$ είναι ο ταυτοτικός τελεστής και ο VX είναι συμπληρωματικός υπόχωρος του Y. $\square$

Κεφάλαιο 7

Η κατασκευή του Szarek

7.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το Κεφάλαιο περιγράφουμε την κατασκευή ενός χώρου Banach X, ο οποίος έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης, αλλά δεν έχει βάση Schauder. Το αποτέλεσμα οφείλεται στον Szarek [21] και δείχνει κάτι ακόμα ισχυρότερο:

Θεώρημα 7.1.1. *Υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach με unconditional διάσπαση πεπερασμένης διάστασης ο οποίος δεν έχει δομή τοπικής βάσης και άρα δεν έχει βάση Schauder.*

Έστω (x_n) βάση ενός χώρου Banach. Με $bc(x_n)$ συμβολίζουμε την μικρότερη σταθερά K, ώστε

$$\Big\| \sum_{n=1}^{N} t_n x_n \Big\| \leqslant \Big\| \sum_{n=1}^{M} t_n x_n \Big\|, \tag{7.1.1}$$

για κάθε $N \leqslant M$ και κάθε t_n. Γράφουμε,

$$bc(X) = \inf\{bc(x_n) : (x_n) \text{βάση του} X\}. \tag{7.1.2}$$

Λέμε ότι ο X έχει *δομή τοπικής βάσης* (**LBS**) αν και μόνο αν $X = \overline{\cup_n E_n}$, όπου $E_n \subset E_{n+1}$ είναι πεπερασμένης διάστασης υπόχωροι του X, με $bc(E_n) \leqslant C$, όπου C μία σταθερά. Προφανώς αν ο X έχει βάση, τότε έχει την (**LBS**).

Ένας χώρος Banach X έχει *διάσπαση πεπερασμένης διάστασης*(**FDD**) αν υπάρχει ακολουθία $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ υποχώρων του X, με $\dim X_n < \infty$, ώστε κάθε $x \in X$ να έχει μοναδική αναπαράσταση της μορφής

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} x_n, \qquad x_n \in X_n. \tag{7.1.3}$$

Η διάσπαση λέγεται unconditional αν, για κάθε $x \in X$, η σύγκλιση της σειράς στην (7.1.3) είναι unconditional.
Παρατηρήστε ότι αν $\dim X_n = 1$ για κάθε n, για παράδειγμα αν $X_n = \mathrm{span}\{x_n\}$, τότε η $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι διάσπαση πεπερασμένης διάστασης του X αν και μόνο αν η $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι βάση Schauder του X.
Κάθε διάσπαση πεπερασμένης διάστασης $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ καθορίζει μία ακολουθία προβολών $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον X, θέτοντας

$$P_n\left(\sum_{i=1}^{\infty} x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i. \tag{7.1.4}$$

Αυτές οι προβολές είναι φραγμένοι γραμμικοί τελεστές, με $\sup\|P_n\| < \infty$. Ο αριθμός $\sup\|P_n\|$ λέγεται η σταθερά της διάσπασης $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.
Αντίστροφα, κάθε ακολουθία φραγμένων προβολών $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ στον X με

$$P_nP_m = P_{\min(m,n)} \quad \text{και} \quad \lim_n P_n x = x, \tag{7.1.5}$$

για κάθε $x \in X$ καθορίζει μία διάσπαση πεπεραμένης διάστασης στον X θέτοντας

$$X_1 = P_1X \quad \text{και} \quad X_n = (P_n - P_{n-1})\,X, \tag{7.1.6}$$

για κάθε $n > 1$. Έτσι οι προβολές $(P_n - P_{n-1})$ μας δείχνουν ότι κάθε χώρος με διάσπαση πεπερασμένης διάστασης έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης, άρα και την ιδιότητα προσέγγισης.
Εύκολα κανείς μπορεί να διαπιστώσει, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα Banach– Steinhauss ότι αν $\{X_n\}$ μια διάσπαση πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου Banach X, τότε ο $\mathrm{span}\cup_n X_n(X)$ είναι πυκνός στον X. Έτσι αν ο X έχει διάσπαση πεπερασμένης διάστασης, τότε είναι διαχωρίσιμος. Το παράδειγμα του Enflo μας δείχνει ότι το αντίστροφο δεν ισχύει.
Αν η διάσπαση $\{X_n\}$ είναι unconditional, για κάθε ακολουθία $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ προσήμων ο τελεστής M_θ, με

$$M_\theta\left(\sum_{n=1}^{\infty} x_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \theta_n x_n \tag{7.1.7}$$

είναι φραγμένος γραμμικός τελεστής. Η σταθερά $\sup_n\|M_\theta\|$ λέγεται η unconditional σταθερά της διάσπασης. Από το Θεώρημα (7.7.1) βλέπουμε ότι η ύπαρξη της διάσπασης πεπερασμένης διάστασης δεν συνεπάγεται την ύπαρξη βάσης. Αυτό όμως που ισχύει είναι το εξής [14]:

Λήμμα 7.1.2. *Εστω $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$ μία διάσπαση πεπερασμένης διάστασης ενός χώρου Banach. Υποθέτουμε ότι κάθε B_n έχει βάση $\{x_{i,n}\}_{i=1}^{k_n}$, με K_n τη σταθερά της βάσης και $\sup_n K_n < \infty$. Τότε η ακολουθία*

$$x_{1,1}, x_{2,1}, \cdots, x_{k_1,1}, x_{1,2}, \cdots x_{k_2,2}, x_{1,3}, \cdots \tag{7.1.8}$$

σχηματίζει μία βάση του X, της οποίας η σταθερά είναι $\leqslant K \sup_n K_n$, όπου K η σταθερά διάσπασης της $\{B_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Υπενθυμίζουμε τώρα το αποτέλεσμα των Johnson, Rosenthal και Zippin [8] και του Pelczynski [13]:

Θεώρημα 7.1.3. *Ενας διαχωρίσιμος χώρος Banach έχει την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης αν και μονο αν ειναι ισομορφικός με συμπληρωματικό υπόχωρο ενός χώρου Banach με βαση Schauder.*

Παρατηρήστε ότι από το προηγούμενο Θεώρημα, το αποτέλεσμα του Szarek δείχνει το εξής:

Θεώρημα 7.1.4. *Υπάρχει διαχωρίσιμος χώρος Banach χωρίς βάση, ο οποίος όμως είναι ισομορφικός με συμπληρωματικό υπόχωρο ενός χώρου Banach με βάση Schauder.*

7.2 p-αθροίζοντες τελεστές

Σε αυτήν την παράγραφο εισάγουμε την έννοια του p-αθροίζοντος τελεστή. Για μια εκτενέστερη μελέτη των p-αθροιζόντων τελεστών παραπέμπουμε στο [11] και στα βιβλία [1] και [12].

Ορισμός 7.2.1. *Έστω X και Y χώροι Banach και έστω $p \geqslant 1$. Ένας γραμμικός τελεστής $T : X \to Y$ λέγεται p-αθροίζων αν υπάρχει σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $m \in \mathbb{N}$ και για κάθε επιλογή διανυσμάτων $x_1, \ldots, x_m \in X$ έχουμε*

$$\left(\sum_{i=1}^{m} \|Tx_i\|^p\right)^{1/p} \leqslant C \sup\left\{\left(\sum_{i=1}^{m} |x^*(x_i)|^p\right)^{1/p} : x^* \in B_{X^*}\right\}. \tag{7.2.1}$$

Αν ο T είναι p–αθροίζων, η μικρότερη σταθερά $C > 0$ για την οποία ικανοποιείται ο ορισμός συμβολίζεται με $\pi_p(T)$. Αλλιώς, θέτουμε $\pi_p(T) = +\infty$. Παίρνοντας $m = 1$ βλέπουμε ότι κάθε p–αθροίζων τελεστής $T : X \to Y$ είναι φραγμένος, με $\|T\| \leqslant \pi_p(T)$.

Συμβολίζουμε την κλάση όλων των p-αθροιζόντων τελεστών $T : X \to Y$ με $\Pi_p(X, Y)$. Μπορεί κανείς να ελέγξει τα εξής:

(a) Η κλάση $\Pi_p(X, Y)$ είναι γραμμικός υπόχωρος του $B(X, Y)$, η $\pi_p(\cdot)$ είναι νόρμα στον $\Pi_p(X, Y)$ και ο $(\Pi_p(X, Y), \pi_p(\cdot))$ είναι χώρος Banach.

(β) Αν X, Y, Z είναι χώροι Banach και αν $T : X \to Y$ και $S : Y \to Z$ είναι φραγμένοι τελεστές, τότε

$$\pi_p(S \circ T) \leqslant \pi_p(S)\|T\| \ \text{ και } \ \pi_p(S \circ T) \leqslant \|S\|\pi_p(T). \tag{7.2.2}$$

Δηλαδή, αν ένας από τους δύο τελεστές είναι p–αθροίζων, το ίδιο ισχύει και για τη σύνθεσή τους.

Το Θεώρημα του Pietsch δίνει ικανή και αναγκαία συνθήκη για να είναι ο $T : X \to Y$ p-αθροίζων.

Θεώρημα 7.2.2 (Pietsch, 1967). *Έστω X, Y χώροι Banach και έστω $T : X \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Τότε, $T \in \Pi_p(X,Y)$ αν και μόνο αν υπάρχουν $C > 0$ και μέτρο πιθανότητας μ στην (B_{X^*}, w^*) τέτοια ώστε*

$$\|Tx\| \leqslant C \left(\int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\mu(x^*) \right)^{1/p} \tag{7.2.3}$$

για κάθε $x \in X$. Σε αυτήν την περίπτωση, η μικρότερη σταθερά C που ικανοποιεί τα παραπάνω ισούται με $\pi_p(T)$.

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχουν $C > 0$ και μ στην (B_{X^*}, w^*) τέτοια ώστε να ικανοποιείται η (7.2.3). Αν $x_1, \ldots, x_m \in X$, τότε

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m \|Tx_i\|^p &\leqslant C^p \int_{B_{X^*}} \sum_{i=1}^n |x^*(x_i)|^p d\mu(x^*) \\ &\leqslant C^p \sup \left\{ \sum_{i=1}^m |x^*(x_i)|^p : x^* \in B_{X^*} \right\}. \end{aligned} \tag{7.2.4}$$

Άρα, $T \in \Pi_p(X,Y)$ και $\pi_p(T) \leqslant C$.

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι $T \in \Pi_p(X,Y)$ και $\pi_p(T) = 1$. Ορίζουμε $Q \subset C(B_{X^*})$ ως εξής: η f ανήκει στο Q αν και μόνο αν είναι της μορφής

$$f(x^*) = \sum_{i=1}^m (\|Tx_i\|^p - |x^*(x_i)|^p) \tag{7.2.5}$$

για κάποια $m \in \mathbb{N}$ και $x_1, \ldots, x_m \in X$. Εύκολα ελέγχουμε ότι το Q είναι κυρτό. Αν η f ορίζεται από το $\{x_1, \ldots, x_m\} \subset X$ και η g ορίζεται από το $\{z_1, \ldots, z_s\} \subset X$, τότε για κάθε $\lambda \in (0,1)$ η $\lambda f + (1-\lambda) g$ ορίζεται από το $\{\lambda^{1/p} x_i : i \leqslant m\} \cup \{(1-\lambda)^{1/p} z_j : j \leqslant s\}$. Τέλος, θέτουμε $Q' = \mathrm{conv}(\{Q, 0\})$.

Θεωρούμε τον θετικό κώνο P του $C(B_{X^*})$. Αυτός αποτελείται από όλες τις $f \in C(B_{X^*})$ για τις οποίες $f(x^*) > 0$ για κάθε $x^* \in B_{X^*}$. Αφού $\pi_p(T) = 1$, αν $f \in Q'$ τότε υπάρχει $x^* \in B_{X^*}$ τέτοιο ώστε $f(x^*) \leqslant 0$. Δηλαδή, $P \cap Q' = \emptyset$.

Αφού ο P είναι ανοικτός, από το θεώρημα Hahn-Banach υπάρχουν $\mu \in [C(B_{X^*})]^*$ και $c \in \mathbb{R}$ τέτοια ώστε: για κάθε $g \in Q'$ και για κάθε $f \in P$,

$$\mu(g) \leqslant c < \mu(f). \tag{7.2.6}$$

Όμως: (α) $0 \in Q'$ άρα $c \geqslant 0$, και (β) για κάθε $\lambda > 0$ έχουμε $f \in P \Rightarrow \lambda f \in P$ και $\mu(\lambda f) = \lambda \mu(f)$, άρα $c \leqslant 0$. Επίσης, αφού το μ είναι συνεχές και $\mu(f) > 0$ για κάθε $f \in P$, συμπεραίνουμε ότι $f \geqslant 0 \Rightarrow \mu(f) \geqslant 0$. Δηλαδή το μ είναι θετικό μέτρο και, διαιρώντας με τη νόρμα του, μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι μέτρο πιθανότητας. Επιστρέφοντας στην (7.2.6) βλέπουμε ότι

$$\int_{B_{X^*}} g(x^*)d\mu(x^*) \leqslant 0 \text{ για κάθε } g \in Q. \tag{7.2.7}$$

Έστω τώρα $x \in X$. Παίρνοντας την $g(x^*) = \|Tx\|^p - |x^*(x)|^p$ και βάζοντας την στην (7.2.7) έχουμε

$$\|Tx\|^p \leqslant C^p \int_{B_{X^*}} |x^*(x)|^p d\mu(x^*) \tag{7.2.8}$$

με $C = \pi(T) = 1$. □

Πόρισμα 7.2.3. *Έστω X και Y χώροι Banach και έστω $1 \leqslant p < r$. Τότε,*

(i) $\Pi_p(X,Y) \subseteq \Pi_r(X,Y)$.

(ii) *Για κάθε $T \in \Pi_p(X,Y)$ ισχύει $\pi_r(T) \leqslant \pi_p(T)$.*

Απόδειξη. Οι δύο ισχυρισμοί προκύπτουν άμεσα από το Θεώρημα 7.2.2 με απλή εφαρμογή της ανισότητας του Hölder. □

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.2, μπορούμε να αντικαταστήσουμε την B_{X^*} με την κλειστή θήκη του συνόλου των ακραίων σημείων της. Έτσι, στην ειδική περίπτωση όπου $X = C(K)$ με τον K συμπαγή, παίρνουμε το εξής.

Θεώρημα 7.2.4. *Έστω $T : C(K) \to Y$ ένας γραμμικός τελεστής. Έχουμε $T \in \Pi_p(X,Y)$ αν και μόνο αν υπάρχουν $C > 0$ και μέτρο πιθανότητας μ στο K τέτοια ώστε*

$$\|Tf\| \leqslant C \left(\int_K |f(x)|^p d\mu(x) \right)^{1/p} \tag{7.2.9}$$

για κάθε $f \in C(K)$.

Τέλος, λέμε ότι ένας χώρος X με νόρμα ικανοποιεί το **θεώρημα του Gro- thendieck** με σταθερά C αν $\pi_1(T) \leqslant C\|T\|$ για κάθε $T \in L(X,Y)$.

7.3 Προκαταρκτικά αποτελέσματα

Αν H είναι ένας χώρος Hilbert πεπερασμένης διάστασης και ο $T \in L(H)$ είναι συμπαγής τελεστής, συμβολίζουμε με $(s_j(T))_{j=1}^{\dim(T)}$ την ακολουθία των s-αριθμών του T (δηλαδή, των ιδιοτιμών του $|T| := (T^*T)^{1/2}$, τις οποίες παίρνουμε με την πολλαπλότητά τους και σε φθίνουσα διάταξη). Θεωρούμε επίσης την quasi-νόρμα

$$\|T\|_{C_0} = \sum_j \min\{s_j(T), 1\}. \tag{7.3.1}$$

Η $\|\cdot\|_{C_0}$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα αλλά δεν είναι θετικά ομογενής.

Θα χρησιμοποιήσουμε το βασικό αποτέλεσμα του Szarek [20, Θεώρημα 1.5]:

Θεώρημα 7.3.1. *Για κάθε $\delta \in (0,1)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ υπάρχει μια νόρμα $\|\cdot\|$ στον $\mathbb{R}^n$ ώστε ο χώρος $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ να έχει τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Ο X είναι ισομετρικός με ένα πηλίκο του ℓ_1^N, όπου $N \leqslant 2n$.*

(ii) *Για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$ ισχύει*

$$\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \|x\|_1 \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2. \tag{7.3.2}$$

Ισοδύναμα,

$$\frac{1}{\sqrt{n}}B_2^n \subseteq B_1^n \subseteq B_X \subseteq B_2^n. \tag{7.3.3}$$

(iii) *Ο λόγος όγκων της B_X είναι φραγμένος:*

$$\left(\frac{|B_X|}{|\sqrt{n}^{-1}B_2^n|}\right)^{1/n} \leqslant 8. \tag{7.3.4}$$

(iv) *Ο X ικανοποιεί το θεώρημα του Grothendieck με σταθερά C.*

(v) *Αν $\|T\|_{L(X)} \leqslant c(\delta)\sqrt{n}$, τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}^n$ ώστε $\|T - \lambda I\|_{C_0} \leqslant \delta n$.*

Πρόταση 7.3.2. *Έστω $\delta \in (0,1)$ και $n \in \mathbb{N}$. Θεωρούμε έναν χώρο X ο οποίος ικανοποιεί το συμπέρασμα του Θεωρήματος 7.3.1. Για κάθε $\alpha \in (0,1)$ υπάρχει υπόχωρος X_0 του X συνδιάστασης $\mathrm{codim}(X_0) \leqslant \alpha n$, ώστε*

$$\|Tx\|_2 \leqslant c_0(\alpha)\gamma_2(T)n^{-1/2}\|x\|_2 \tag{7.3.5}$$

για κάθε $x \in X_0$. Ειδικότερα,

$$\|T\|_{C_0} \leqslant (\alpha + c_0(\alpha)\gamma_2(T)n^{-1/2})n. \tag{7.3.6}$$

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε τον πρώτο ισχυρισμό: από αυτόν έπεται ότι το πολύ $[\alpha n]$ από τους s-αριθμούς του T είναι μεγαλύτεροι ή ίσοι από $c(\alpha)\gamma_2(T)/\sqrt{n}$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ο λόγος όγκων της B_X ως προς την $n^{-1/2}B_2^n$ είναι μικρότερος ή ίσος από 8, επιλέγουμε υπόχωρο X_1 του $\mathbb{R}^n$ συνδιάστασης $\mathrm{codim}(X_1) \leqslant \frac{\alpha n}{3}$ ώστε

$$c_1(\alpha)\sqrt{n}\|x\|_2 \leqslant \|x\| \leqslant \sqrt{n}\|x\|_2 \tag{7.3.7}$$

για κάθε $x \in X_1$. Ορίζουμε $X_2 = X_1 \cap T^{-1}(X_1)$. Παρατηρήστε ότι $\mathrm{codim}(X_2) \leqslant \frac{2\alpha n}{3}$.

Επιλέγουμε $A : X \to \ell_2$ και $B : \ell_2 \to X$ ώστε $T = B \circ A$ και $\|A\| \cdot \|B\| = \gamma_2(T)$. Αφού ο X ικανοποιεί το θεώρημα του Grothendieck με σταθερά C, έχουμε

$$\pi_2(T) \leqslant \pi_1(T) \leqslant \pi_1(A)\|B\| \leqslant C\|A\| \cdot \|B\| = C\gamma_2(T), \tag{7.3.8}$$

άρα

$$\pi_2(T\,|_{X_2}) \leqslant C\gamma_2(T). \tag{7.3.9}$$

Τότε, από την (7.3.7) παίρνουμε

$$\pi_2(T : (X_2, \|\cdot\|_2) \to (X_2, \|\cdot\|_2)) = \|T\,|_{X_2}\|_{\mathrm{HS}} \leqslant c_1(\alpha)^{-1} C\gamma_2(T). \tag{7.3.10}$$

Αφού $\|S\|_{\mathrm{HS}}^2 = \sum s_j^2(S)$, από την ανισότητα του Markov προκύπτει ότι το πολύ $\alpha n/3$ από τους s-αριθμούς του $T\,|_{X_2}$ είναι μεγαλύτεροι από $\sqrt{3/\alpha n}c_1(\alpha)^{-1}C\gamma_2(T)$. Έπεται το ζητούμενο για κάποιον υπόχωρο X_0 του X_2, με σταθερά $c_0(\alpha) = \sqrt{3/\alpha}c_1(\alpha)^{-1}C$. □

Πρόταση 7.3.3. *Έστω $n \in \mathbb{N}$, $\delta \in (0,1)$ και $q \in [2,\infty]$. Υπάρχει χώρος με νόρμα $Y_q = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_{(q)})$ με τις παρακάτω ιδιότητες:*

(i) *Ο Y_q είναι ισομετρικός με υπόχωρο του ℓ_q^N για κάποιον $N \leqslant 2n$.*

(ii) *Αν $\|S\|_{L(Y_q)} \leqslant c_1(\delta)n^{1/2-1/q}$ τότε υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $\|S - \lambda I\|_{C_0} \leqslant \delta n$.*

(iii) *Αν $\alpha \in (0,1)$ και $T \in L(Y_q)$, τότε*

$$\|T\|_{C_0} \leqslant (\alpha + c_0'(\alpha)\gamma_2(T)n^{1/q-1/2})n. \tag{7.3.11}$$

Απόδειξη. Στην περίπτωση $q = \infty$ το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 7.3.1 και την Πρόταση 7.3.2. Πράγματι, αν ορίσουμε $Y_\infty = X^*$ τότε το (i) έπεται από το Θεώρημα 7.3.1(i). Αφού $\|T\|_{C_0} = \|T^*\|_{C_0}$, έχουμε

$$\gamma_2(T^* : Y_\infty \to Y_\infty) = \gamma_2(T : X \to X) \quad \text{και} \quad \|S^*\|_{L(Y_\infty)} = \|S\|_{L(X)}. \tag{7.3.12}$$

Τότε, τα (ii) και (iii) προκύπτουν από το Θεώρημα 7.3.1 (v) και την Πρόταση 7.3.2 αντίστοιχα.

Στην περίπτωση $2 \leqslant q < \infty$, ορίζουμε Y_q τον ίδιο υπόχωρο του $\mathbb{R}^N$ με τον Y_∞, αυτή τη φορά εφοδιασμένο με την ℓ_q^N-νόρμα. Τότε, η (i) ισχύει αυτομάτως. Αφού $\|x\|_\infty \leqslant \|x\|_q \leqslant N^{1/q}\|x\|_\infty \leqslant 2^{1/q}n^{1/q}\|x\|_\infty$, οι (ii) και (iii) προκύπτουν από τις αντίστοιχες ιδιότητες του Y_∞.

Παρατηρήστε ότι στην περίπτωση $q = 2$ το συμπέρασμα είναι προφανές. □

Τέλος, θα χρησιμοποιήσουμε το εξής Λήμμα.

Λήμμα 7.3.4. *Έστω $\beta \in (0,1)$. Αν ο $T \in L(\ell_2^n)$ ικανοποιεί την $\|T - \frac{1}{2}I\|_{C_0} \leqslant \beta n$, τότε*

$$\|T^2 - \frac{1}{4}I\|_{C_0} \leqslant 3\sqrt{\beta}n. \tag{7.3.13}$$

Απόδειξη. Από την $\|T-\frac{1}{2}I\|_{C_0}\leqslant \beta n$ βλέπουμε ότι το πολύ $\sqrt{\beta}n$ από τους s-αριθμούς του $T-\frac{1}{2}I$ είναι μεγαλύτεροι από $\sqrt{\beta}$. Συνεπώς, υπάρχει υπόχωρος E του ℓ_2^n με συνδιάσταση $\mathrm{codim}(E)\leqslant \sqrt{\beta}n$ ώστε

$$\|Tx-\frac{1}{2}x\|_2\leqslant \sqrt{\beta}\|x\|_2 \tag{7.3.14}$$

για κάθε $x\in E$. Ορίζουμε $E_1=E\cap T^{-1}(E)$. Τότε, $\mathrm{codim}(E_1)\leqslant 2\sqrt{\beta}n$. Από την

$$T^2-\frac{1}{4}I=T(T-\frac{1}{2}I)+\frac{1}{2}(T-\frac{1}{2}I) \tag{7.3.15}$$

βλέπουμε ότι αν $x\in E_1$, οπότε και $Tx-\frac{1}{2}x\in E$, τότε

$$\begin{aligned}\|T^2x-\frac{1}{4}x\|_2 &\leqslant \|T(Tx-\frac{1}{2}x)\|_2+\frac{1}{2}\|Tx-\frac{1}{2}x\|_2\\ &\leqslant \left[(\frac{1}{2}+\sqrt{\beta})\sqrt{\beta}+\frac{1}{2}\sqrt{\beta}\right]\|x\|_2\\ &=(\beta+\sqrt{\beta})\|x\|_2.\end{aligned} \tag{7.3.16}$$

Συνεπώς,

$$\|T^2-\frac{1}{2}I\|_{C_0}\leqslant 2\sqrt{\beta}n+(1-2\sqrt{\beta})n(\beta+\sqrt{\beta})<3\sqrt{\beta}n. \tag{7.3.17}$$

Με μια πιο προσεκτική εκδοχή του ίδιου επιχειρήματος, μπορούμε να δώσουμε το φράγμα $(6+\ln(1/\beta))\beta n$. □

7.4 Το τοπικό αποτέλεσμα

7.4α′ Απόσταση Banach-Mazur

Η έννοια της απόστασης Banach-Mazur εμφανίζεται στο βιβλίο του Banach «Théorie des opérations linéaires» (1932). Έστω X και Y δύο χώροι με νόρμα, άπειρης ενδεχομένως διάστασης, και ας υποθέσουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y (γράφουμε $X\sim Y$). Ορίζουμε την *απόσταση Banach-Mazur* των X και Y ως εξής:

$$d(X,Y):=\inf\{||T||\cdot||T^{-1}||\;\big|\;T:X\to Y \text{ ισομορφισμός}\}. \tag{7.4.1}$$

Αν οι X και Y δεν είναι ισόμορφοι ($X\not\sim Y$), θέτουμε $d(X,Y)=+\infty$. Οι βασικές ιδιότητες της απόστασης Banach-Mazur είναι οι ακόλουθες:

(i) $d(X,Y)\geq 1$.

(ii) $d(X,Y)=d(Y,X)$.

(iii) $d(X,Y) \leqslant d(X,Z)\,d(Z,Y)$.

(iv) Αν οι X και Y είναι αυτοπαθείς, τότε $d(X^*,Y^*) = d(X,Y)$.

Γεωμετρική ερμηνεία της απόστασης Banach-Mazur: Η απόσταση δύο χώρων X και Y είναι μικρή αν υπάρχει γραμμικός μετασχηματισμός της μοναδιαίας μπάλας του X που «μοιάζει» με τη μοναδιαία μπάλα του Y (περιέχει την B_Y και περιέχεται σε «μικρό» πολλαπλάσιο της B_Y), δηλαδή αν X και Y ισόμορφοι χώροι με νόρμα, τότε

$$d(X,Y) = \inf\{d>0 \mid \exists T : X \to Y \;:\; B_Y \subseteq T(B_X) \subseteq d\,B_Y\}. \tag{7.4.2}$$

Η απόσταση Banach-Mazur σε χώρους πεπερασμένης διάστασης: Υποθέτουμε ότι $\dim X = \dim Y = n$. Ξέρουμε ότι ο X είναι ισόμορφος με τον Y. Σε αυτή την περίπτωση, η απόσταση Banach-Mazur των X και Y «πιάνεται» για κάποιον ισομορφισμό $T : X \to Y$ και είναι η ποσότητα: $d(X,Y) = \min\{\|T\|\,\|T^{-1}\| \mid T : X \to Y$ ισομορφισμός$\}$. Σε αυτήν την περίπτωση μία επιπλέον ιδιότητα της απόστασης Banach-Mazur είναι η εξής: Αν $\dim X = \dim Y = n$ τότε, $d(X,Y) = 1$ αν και μόνο αν ο X είναι ισομετρικά ισόμορφος με τον Y.

Στην επόμενη παράγραφο θα χρησιμοποιήσουμε μια εκτίμηση της απόστασης Banach-Mazur,η οποία προέκυψε από το Θεώρημα του John. Δίνουμε πρώτα έναν ορισμό:

Ορισμός 7.4.1. *Ελλειψοειδές* στον $\mathbb{R}^n$ είναι ένα κυρτό σώμα της μορφής

$$E = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{i=1}^n \frac{\langle x, v_i\rangle^2}{\alpha_i^2} \leqslant 1 \right\}, \tag{7.4.3}$$

όπου $\{v_1,\dots,v_n\}$ είναι ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^n$ και $\alpha_1,\dots,\alpha_n$ είναι θετικοί πραγματικοί αριθμοί (οι διευθύνσεις και τα μήκη των ημιαξόνων του E αντίστοιχα).

Θεωρούμε τώρα ένα συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$. Ο F. John (1948) έδειξε ότι αν η μοναδιαία Ευκλείδεια μπάλα B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου που περιέχει το συμμετρικό κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$, τότε $B_2^n \subseteq \sqrt{n}K$. Άμεση συνέπεια αυτού του ισχυρισμού είναι ένα άνω φράγμα για την απόσταση Banach-Mazur τυχόντος n-διάστατου χώρου με νόρμα από τον ℓ_2^n. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε την εξής ισοδύναμη περιγραφή των ελλειψοειδών:

Πρόταση 7.4.2. *Ένα κυρτό σώμα E στον $\mathbb{R}^n$ είναι ελλειψοειδές αν και μόνο αν υπάρχει αντιστρέψιμος γραμμικός μετασχηματισμός T ($T \in GL(n)$) ώστε $E = T(B_2^n)$.*

Θεώρημα 7.4.3. *Για κάθε n-διάστατο χώρο με νόρμα X έχουμε $d(X,\ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$.*

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$. Θεωρούμε την μοναδιαία μπάλα B_X του X και το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου E της B_X. Υπάρχει $T \in GL(n)$ ώστε

$E = T^{-1}(B_2^n)$. Τότε, $T(B_X) \subseteq B_2^n$ και η B_2^n είναι το ελλειψοειδές ελάχιστου όγκου του $T(B_X)$. Αν δεχτούμε το θεώρημα του John, τότε

$$\frac{1}{\sqrt{n}} B_2^n \subseteq T(B_X) \subseteq B_2^n. \tag{7.4.4}$$

Έπεται ότι

$$\|T : X \to \ell_2^n\| \cdot \|T^{-1} : \ell_2^n \to X\| \leqslant 1 \cdot \sqrt{n} = \sqrt{n}, \tag{7.4.5}$$

άρα, $d(X, \ell_2^n) \leqslant \sqrt{n}$. □

Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε ένα αποτέλεσμα του Lewis [9]:

Πρόταση 7.4.4. *Έστω $1 < p < \infty$ και $F \subset L_p(\mu)$ ένας n-διάστατος υπόχωρος. Τότε,$d(F, \ell_2^n) \leqslant n^{|1/2-1/p|}$.*

Λέμε ότι ένας χώρος Z με νόρμα είναι D-**Ευκλείδειος** αν έχει απόσταση Banach-Mazur $d(Z, \ell_2^{\dim(Z)}) \leqslant D$ από τον $\ell_2^{\dim(Z)}$. Αν Z και Z' είναι δύο χώροι με νόρμα, συμβολίζουμε με $Z \oplus_2 Z'$ το ευθύ τους άθροισμα, εφοδιασμένο με τη νόρμα $\|(z, z')\| = (\|z\|^2 + \|z'\|^2)^{1/2}$.

Πρόταση 7.4.5. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και $q \in [2, \infty]$ υπάρχει n-διάστατος υπόχωρος $Y = Y_q^n$ του L_q με την εξής ιδιότητα: αν F είναι ένας χώρος με νόρμα του οποίου όλοι οι n-διάστατοι υπόχωροι είναι D-Ευκλείδειοι, τότε*

$$\mathrm{bc}(Y \oplus_2 F) \geqslant c n^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)} D^{-1/2}. \tag{7.4.6}$$

Ειδικότερα,

$$\mathrm{bc}(Y \oplus_2 \ell_2) \geqslant c n^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)}. \tag{7.4.7}$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $\delta > 0$ το οποίο θα επιλεγεί κατάλληλα και θεωρούμε τον υπόχωρο $Y = Y_q$ που μας δίνει η Πρόταση 7.3.3. Έστω $\{x_j\}$ μια βάση του $Y \oplus_2 F$. Θέτουμε $b = \mathrm{bc}(\{x_j\})$ και υποθέτουμε προς άτοπο ότι

$$b < c n^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{q}\right)} \tag{7.4.8}$$

για κάποια σταθερά $c > 0$ η οποία επίσης θα επιλεγεί κατάλληλα. Έστω $m \leqslant M = \dim(Y \oplus F)$ (το M μπορεί να απειρίζεται). Συμβολίζουμε με P_m την m-στή προβολή

$$P_m\left(\sum_{j=1}^{M} t_j x_j\right) = \sum_{j=1}^{m} t_j x_j. \tag{7.4.9}$$

Τότε, $b = \sup_m \|P_m\|$. Γράφουμε την P_m στη μορφή

(7.4.10)
$$P_m = \begin{bmatrix} S_m & B_m \\ A_m & C_m \end{bmatrix} \begin{matrix} Y \\ F \end{matrix},$$

όπου S_m είναι τελεστής στον Y, $A_m \in L(Y, F)$ κλπ. Τότε, αν επιλέξουμε την σταθερά c έτσι ώστε $c \leqslant c'(\delta)$, έχουμε

(7.4.11)
$$\|S_m\|_{L(Y)} \leqslant b < cn^{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{q}\right)} D^{-1/2} \leqslant c'(\delta) n^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q}}.$$

Για την ακρίβεια, αυτό ισχύει για κάθε $c > 0$ αν υποθέσουμε ότι $n \geqslant n(c, \delta, q)$.

Από την Πρόταση 7.3.3(ii) υπάρχει $\lambda_m \in \mathbb{R}$ ώστε

(7.4.12)
$$\|S_m - \lambda I\|_{C_0} = \inf_{\lambda \in \mathbb{R}} \|S_m - \lambda I\|_{C_0} \leqslant \delta n.$$

Προφανώς, $\lambda_0 = 0$ και $\lambda_M = 1$ (ή $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = 1$ στην περίπτωση που $M = \infty$). Αφού ο $P_{m+1} - P_m$ είναι τελεστής τάξης 1, έχουμε $\text{rank}(S_{m+1} - S_m) \leqslant 1$, άρα

(7.4.13)
$$\|S_{m+1} - S_m\|_{C_0} \leqslant 1.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \min\{|\lambda_{m+1} - \lambda_m|, 1\} n &= \|\lambda_{m+1} I - \lambda_m I\|_{C_0} \\ &\leqslant \|S_{m+1} - \lambda_{m+1} I\|_{C_0} + \|S_m - \lambda_m I\|_{C_0} + \|S_{m+1} - S_m\|_{C_0} \\ &\leqslant 2\delta n + 1, \end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι αν $\delta \leqslant 1/3$και $n \geq \delta^{-1}$ τότε

(7.4.14)
$$|\lambda_{m+1} - \lambda_m| < 3\delta.$$

Δεδομένου ότι μπορούμε να υποθέσουμε ότι το n είναι αρκετά μεγάλο, η συνθήκη $\delta \leqslant 1/3$ είναι ο μόνος περιορισμός για το δ που έχει σημασία.

Επιλέγουμε τον μικρότερο $m \leqslant M$ για τον οποίο $\lambda \geqslant 1/2$. Τότε, αν $k = m$ ή $k = m-1$ έχουμε $|\lambda_k - \frac{1}{2}| < 2\delta$. Άρα, $\|\lambda_k I - \frac{1}{2} I\|_{C_0} < 2\delta n$, απ' όπου παίρνουμε

(7.4.15)
$$\|S_k - \frac{1}{2} I\|_{C_0} \leqslant 3\delta n.$$

Από το Λήμμα 7.3.4,

(7.4.16)
$$\|S_k^2 - \frac{1}{4} I\|_{C_0} \leqslant 3\sqrt{3\delta} n.$$

Η P_k είναι προβολή: έχουμε $P_k^2 = P_k$, άρα $S_k = S_k^2 + B_k A_k$. Έπεται ότι

(7.4.17)
$$\frac{1}{4} I = (S_k^2 - \frac{1}{4} I) + B_k A_k - (S_k - \frac{1}{2} I),$$

συνεπώς,

$$\begin{aligned}\frac{n}{4} = \|\frac{1}{4}I\|_{C_0} &\leqslant \|S_k^2 - \frac{1}{4}I\|_{C_0} + \|S_k - \frac{1}{2}I\|_{C_0} + \|B_kA_k\|_{C_0} \\ &\leqslant (3\sqrt{3\delta}+\delta)n + \|B_kA_k\|_{C_0}.\end{aligned} \tag{7.4.18}$$

Μπορούμε να παραγοντοποιήσουμε τον $T = B_kA_k$ μέσα από έναν n-διάστατο υπόχωρο του F, άρα

$$\gamma_2(T) \leqslant \|B_k\| \cdot \|A_k\| \cdot D \leqslant b^2 D. \tag{7.4.19}$$

Από την Πρόταση 7.3.3(iii),

$$\|B_kA_k\|_{C_0} \leqslant (\alpha + c_0'(\alpha) b^2 D n^{\frac{1}{q}-\frac{1}{2}})n < (\alpha + c^2 c_0'(\alpha))n. \tag{7.4.20}$$

Έτσι, έχουμε

$$\frac{1}{4} < (3\sqrt{3\delta}+\delta) + (\alpha + c^2 c_0'(\alpha)). \tag{7.4.21}$$

Επιλέγοντας $\alpha = \frac{1}{12}$ και τις σταθερές δ και c έτσι ώστε

$$3\sqrt{3\delta}+\delta \leqslant \frac{1}{12} \quad \text{και} \quad c^2 \leqslant \frac{c_0'(1/12)^{-1}}{12}, \tag{7.4.22}$$

καταλήγουμε σε άτοπο. □

7.5 Κατασκευή του χώρου

Έστω (W_n) ακολουθία χώρων με νόρμα. Θεωρούμε τον χώρο

$$(\oplus_n W_n)_{\ell_2} = \left\{ (w_n) : \sum_n \|w_n\|^2 < \infty \right\}, \tag{7.5.1}$$

εφοδιασμένο με τη νόρμα

$$\|(w_n)\| = \left(\sum_n \|w_n\|^2 \right)^{1/2}. \tag{7.5.2}$$

Θεώρημα 7.5.1. *Υπάρχουν ακολουθίες πραγματικών αριθμών $q_k \downarrow 2$ και φυσικών αριθμών $n_k \uparrow \infty$ ώστε, αν $Y_{q_k}^{n_k}$ είναι οι χώροι της προηγούμενης παραγράφου, ο χώρος $Z = \left(\oplus Y_{q_k}^{n_k}\right)_{\ell_2}$ να μην έχει βάση.*

Απόδειξη. Ορίζουμε τους n_k, q_k επαγωγικά. Θέτουμε $n_1 = q_1 = 4$ και, αν οι n_j, q_j έχουν οριστεί για κάθε $1 \leqslant j < k$, επιλέγουμε $q_k \in (2, q_{k-1})$ με την ιδιότητα

$$n_{k-1}^{\frac{1}{2}-\frac{1}{q_k}} \leqslant 2 \tag{7.5.3}$$

και, στη συνέχεια, $n_k > n_{k-1}$ με την ιδιότητα

$$n_k^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_k})} \geqslant n_{k-1}. \tag{7.5.4}$$

Έστω $k \geqslant 2$. Θεωρούμε υπόχωρο Z_0 του Z ώστε, αν ταυτίσουμε τον $Y_{q_k}^{n_k}$ με την φυσιολογική του εικόνα στον Z, να ισχύει $Y_{q_k}^{n_k} \subset Z_0$. Τότε, $Z_0 = Y_{q_k}^{n_k} \oplus_2 F$ για κάποιον $F \subset \big(\oplus_{j\neq k} Y_{q_j}^{q_j}\big)_{\ell_2}$.

Ο ισχυρισμός είναι ότι κάθε n_k-διάστατος υπόχωρος E του F είναι $\sqrt{n_{k-1}}$-Ευκλείδειος. Πράγματι, αν συμβολίσουμε με Q_j την φυσιολογική προβολή του Z στον j-στό του προσθετέο, τότε $E \subset (\oplus_{j\neq k} Q_j(E))_{\ell_2}$ και

$$d(Q_j(E), \ell_2^{\dim(Q_j(E))}) \leqslant (\dim(Q_j(E)))^{1/2} \leqslant n_j^{1/2} \leqslant n_{k-1}^{1/2} \tag{7.5.5}$$

για κάθε $j < k$, από το θεώρημα του John, ενώ

$$d(Q_j(E), \ell_2^{\dim(Q_j(E))}) \leqslant (\dim(Q_j(E)))^{1/2-1/q_j} \leqslant n_j^{1/2-1/q_{k+1}} \leqslant 2 \leqslant n_{k-1}^{1/2} \tag{7.5.6}$$

για κάθε $j > k$, από το θεώρημα του Lewis και τον τρόπο επιλογής των q_j και n_j. Από την Πρόταση 7.4.5 και από την (7.5.4),

$$\mathrm{bc}(Z_0) \geqslant c n_k^{\frac{1}{2}(\frac{1}{2}-\frac{1}{q_k})} \geqslant c\sqrt{n_{k-1}}. \tag{7.5.7}$$

Αφού $n_k \uparrow \infty$, συμπεραίνουμε ότι ο Z δεν έχει δομή τοπικής βάσης, και άρα δεν έχει βάση. $\square$

Σημείωση: Αφού $Z = \big(\oplus Y_{q_k}^{n_k}\big)_{\ell_2}$, προφανώς ο Z έχει διάσπαση πεπερασμένης διάστασης, άρα έχει και την φραγμένη ιδιότητα προσέγγισης.

Βιβλιογραφία

[1] F. Albiac and N. J. Kalton, *Topics in Banach space Theory*, Springer, GTM, 2005.

[2] A. M. Davie, *The approximation problem for Banach spaces*, Bull. London Math. Soc. **5** (1973), 261–266.

[3] P. Enflo, *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces*, Acta Mathematica **130** (1973), 309–317.

[4] T. Figiel and W. B. Johnson, *The approximation property does not imply the bounded approximation property*, Proc. Amer. Math. Soc. **4** (1973), 197–200.

[5] E. D. Gluskin, *The diameter of Minkowski compactum is roughly equal to n*, Functional Anal. Appl. **15** (1981), 72–73.

[6] E. D. Gluskin, *Finite dimensional analogues of spaces without a basis*, Dokl. Akad. Nauk. SSSR **261** (1981), 1046–1050.

[7] A. Grothendieck, *Produits tensoriels topologiques et espaces nucléaires*, Mem. Amer. Math. Soc. **16** (1955).

[8] W. B. Johnson, H. P. Rosenthal, and M. Zippin, *On bases, finite dimensional decompositions and weaker structures in Banach spaces*, Israel J. Math. **9** (1971), 488–506.

[9] D. R. Lewis, *Finite dimensional subspaces of L_p*, Studia Math. **63** (1978), 207–212.

[10] J. Lindenstrauss, *"On James's paper separable conjugate spaces"*, Israel J. Math. **9** (1971), 279–284.

[11] J. Lindenstrauss and A. Pelczynski, *Absolutely summing operators in $\mathcal{L}_p$-spaces and their applications*, Studia Math. **29** (1968), 275–326.

[12] J. Lindenstrauss and L. Tzafriri, *Classical Banach Spaces I & II*, Springer Verlag, 1977 & 1979.

[13] A. Pelczynski, *Any separable space with the bounded approximation property is a complemented subspace of a Banach space with a basis*, Studia Math. **40** (1971), 239–243.

[14] A.Pelczynski and P.Wojtaszczyk, *Banach spaces with finite dimensional expansions of identity and universal bases of finite dimensional subspaces*, Studia Math, **40** (1971), 91–108.

[15] A. Szankowski, *A Banach lattice without, the approximation property* Israel J. Math. **24** (1976), 329–337.

[16] A. Szankowski, *Subspaces without approximation property*, Israel J. Math. **30** (1978), 123–129.

[17] S. J. Szarek, *On Kashin's almost Euclidean orthogonal decomposition of ℓ_1^n*, Bull. Acad. Sc. Polon. 26 (1978).

[18] S. J. Szarek, *The finite dimensional basis problem with an appendix on nets of Grassmann manifolds*, Acta Mathematica **151** (1983), 153–179.

[19] S. J. Szarek, *On the existence and uniqueness of complex structure and spaces with few operators*, Trans. Amer. Math. Soc. **293** (1986), 339–353.

[20] S. J. Szarek, *A superreflexive Banach space which does not admit complex structure*, Proc. Amer. Math. Soc. **97** (1986), 437–444.

[21] S. J. Szarek, *A Banach space without a basis which has the bounded approximation property*, Acta Math. **159** (1987), 81–98.

[22] S. J. Szarek and N. Tomczak–Jaegermann, *On nearly Euclidean decompositions for some classes of Banach spaces*, Compositio Math. **40** (1970), 367–385.