Εργοδικά θεωρήματα δομής και εφαρμογές στις πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις

Διπλωματική Εργασία

Κωνσταντίνος Τσίνας

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα – 2019

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Σύντομη περιγραφή της εργασίας

Σε αυτή την εργασία ασχολούμαστε με την ασυμπτωτική συμπεριφορά πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων. Συγκεκριμένα, μελετούμε τη σύγκλιση Cesàro ή λογαριθμικών μέσων ακολουθιών της μορφής

$$n \to f_1(n+h_1)f_2(n+h_2)\cdots f_k(n+h_k),$$

όπου οι συναρτήσεις $f_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ είναι πολλαπλασιαστικές και οι h_i είναι (όχι απαραίτητα διαφορετικοί) ακέραιοι, τους οποίους αποκαλούμε και shifts. Τέτοια όρια ονομάζονται«συσχετισμοί» των συναρτήσεων $f_1, \ldots, f_k$.

Η εικασία Chowla αφορά τους συσχετισμούς της συνάρτησης λ του Liouville. Ισχυρίζεται ότι οι συσχετισμοί της συνάρτησης λ είναι μηδενικοί, για οποιαδήποτε επιλογή διακεκριμένων shifts h_i. Η εικασία Chowla δείχνει μια «τυχαιότητα» στην κατανομή των τιμών 1 και -1, δηλαδή για αρκετά μεγάλους αριθμούς, οι όροι $\lambda(n+h_1)\cdots\lambda(n+h_k)$ απαλείφονται τελικά μεταξύ τους στο άθροισμα. Ένα απλό, αλλά αρκετά σημαντικό πόρισμα της εικασίας αυτής είναι ότι όλες οι διαφορετικές k-άδες από -1 και 1 εμφανίζονται σε διαδοχικούς όρους της ακολουθίας $\lambda(n)$ και μάλιστα με την ίδια συχνότητα. Επιπλέον, η εικασία Chowla μπορεί να διατυπωθεί για τη συνάρτηση Möbius μ και αποδεικνύεται ότι οι δύο παραπάνω εικασίες είναι ισοδύναμες.

Σε αυτήν την εργασία προσεγγίζουμε το πρόβλημα από τη σκοπιά της εργοδικής θεωρίας. Χρησιμοποιώντας την αρχή του Furstenberg μεταφέρουμε τον υπολογισμό μέσων όρων αριθμητικών συναρτήσεων σε υπολογισμό μέσων όρων συναρτήσεων πάνω από ένα μετροθεωρητικό σύστημα. Η ιδέα αυτή χρησιμοποιήθηκε για πρώτη φορά από τον Harry Furstenberg το 1977 στην απόδειξη του θεωρήματος του Szemerèdi. Χρησιμοποιώντας θεωρήματα δομής για μετροθεωρητικά συστήματα οδηγούμαστε σε κάποια μερικά αποτελέσματα πάνω στην εικασία Chowla. Οι αποδείξεις δείχνουν την σημασία μιας μεγάλης κλάσης συστημάτων, που ονομάζονται nilsystems. Τα nilsystems έχουν καθοριστικό ρόλο στις αποδείξεις, καθώς ναι μεν έχουν μια απλή σχετικά μορφή, εμφανίζονται δε σε όλα τα γενικότερα συστήματα μέσω των θεωρημάτων δομής.

Το Μέρος 1 της εργασίας αποτελείται από δύο κεφάλαια, στα οποία παρουσιάζονται κάποια βασικά στοιχεία που χρησιμοποιούνται στη συνέχεια.

Στο Μέρος 2, που αποτελείται από τρία κεφάλαια, διατυπώνονται και αποδεικνύονται τα βασικά αποτελέσματα της εργασίας.

Το Κεφάλαιο 1 αφορά τις αριθμητικές συναρτήσεις. Δίνεται ο ορισμός των (ισχυρά) απεριοδικών συναρτήσεων που αποτελούν μια γενικότερη κατηγορία πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων, στην οποία ανήκουν οι συναρτήσεις μ και λ. Πολλά αποτελέσματα των επόμενων κεφαλαίων ισχύουν για όλες τις (ισχυρά) απεριοδικές συναρτήσεις. Επίσης, ορίζουμε τις νόρμες Gowers και αποδεικνύουμε την αρχή του Furstenberg.

Στο Κεφάλαιο 2 παρουσιάζουμε στοιχεία της εργοδικής θεωρίας. Δίνεται ο ορισμός των παραγόντων k-τάξης για ένα μετροθεωρητικό σύστημα καθώς και ο ορισμός των nilsystems. Διατυπώνουμε το εργοδικό θεώρημα δομής για εργοδικά συστήματα και παίρνουμε σαν πορίσματα κάποια θεωρήματα διάσπασης. Δίνεται, επίσης, ο ορισμός των nilsequences και διατυπώνουμε το αντίστροφο θεώρημα για τις νόρμες Gowers.

Στο Κεφάλαιο 3 αποδεικνύουμε ένα θεώρημα για τους λογαριθμικούς συσχετισμούς απεριοδικών συναρτήσεων. Το σημαντικότερο πόρισμα αυτού του θεωρήματος είναι ότι αποδεικνύεται η εικασία Chowla για περιττό αριθμό όρων δηλαδή για περιττό αριθμό απο shifts. Επιπλέον, χρησιμοποιώντας και αποτελέσματα από το [[32]], αποδεικνύουμε ότι όλες οι διαφορετικές τριάδες από -1 και 1 εμφανίζονται άπειρες φορές στην ακολουθία $\lambda(n)$ με λογαριθμική πυκνότητα $1/8$. Ένα ανάλογο αποτέλεσμα έχουμε για τις τετράδες από -1 και 1.

Στο Κεφάλαιο 4 μελετούμε τα συστήματα Liouville που προκύπτουν από την αρχή του Furstenberg. Αποδεικνύουμε ότι εάν ένα τέτοιο σύστημα Liouville είναι εργοδικό, τότε ισχύει η εικασία Chowla (για μέσους όρους πάνω την αντίστοιχη ακολουθία διαστημάτων). Αποδεικνύουμε ένα αντίστροφο θεώρημα για τις ημινόρμες ομοιομορφίας και δείχνουμε ότι η εργοδικότητα του συστήματος Liouville συνεπάγεται ότι η αντίστοιχη ημινόρμα είναι μηδέν. Αυτό σε συνδυασμό με τα αποτελέσματα στο [33] δίνει ότι ισχύει η εικασία Chowla. Κατά συνέπεια, εάν ένα σύστημα Liouville είναι εργοδικό, τότε θα πρέπει να είναι ένα σύστημα Bernoulli.

Στο Κεφάλαιο 5 διατυπώνουμε την εικασία Sarnak που αφορά δυναμικά συστήματα μηδενικής εντροπίας. Χρησιμοποιώντας την εργοδική εκδοχή της εικασίας Chowla, δείχνουμε ότι η εικασία Chowla συνεπάγεται την εικασία Sarnak, ενώ στη συνέχεια δείχνουμε ότι ισχύει και το αντίστροφο στην περίπτωση των λογαριθμικών μέσων όρων. Επίσης, χρησιμοποιούμε ένα θεώρημα δομής για το σύστημα της συνάρτησης Möbius και αποδεικνύουμε ότι ισχύει η λογαριθμική εικασία Sarnak για όλα τα συστήματα με αριθμήσιμα το πλήθος εργοδικά μέρη. Σαν συνέπεια, έχουμε ότι η συνάρτηση Liouville έχει υπεργραμμική block αύξηση.

Θα ήθελα σε αυτό το σημείο να ευχαριστήσω τους καθηγητές κ. Γιαννόπουλο, κ. Φραντζικινάκη και κ. Γατζούρα για τη βοήθειά τους στο να ολοκληρωθεί αυτή η εργασία και για την καθοδήγηση που μου προσέφεραν κατά διάρκεια της συγγραφής της.

Συμβολισμοί

Στα επόμενα κεφάλαια θα χρησιμοποιήσουμε ασυμπτωτικές σχέσεις σε διάφορα σημεία. Ο συμβολισμός $X \ll Y$ ή $Y \gg X$ σημαίνει ότι η ποσότητα $X = O(Y)$, δηλαδή ότι υπάρχει σταθερά C έτσι, ώστε $|X| \leqslant CY$. Αντίθετα, αν ε είναι μια ασυμπτωτική σταθερά, τότε ο συμβολισμός $X = o(Y)$ σημαίνει ότι υπάρχει συνάρτηση $c(\varepsilon)$ έτσι, ώστε $|X| \leqslant c(\varepsilon)Y$ και η $c(\varepsilon)$ τείνει στο 0, όταν το ε τείνει στο αντίστοιχο όριο.

Θα συμβολίζουμε με έντονα γράμματα όπως $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ τυχαίες μεταβλητές ή συναρτήσεις για να τις διακρίνουμε από απλές μεταβλητές. Επίσης, σε ορισμένα σημεία θα χρησιμοποιήσουμε το συμβολισμό

$\underline{h}$ για διανύσματα, ενώ για το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων θα χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\cdot$. Τέλος, αν $z = (z_1, \ldots, z_m)$ και $w = (w_1, \ldots, w_n)$ είναι διανύσματα με συντεταγμένες στο $\mathbb{C}$, συμβολίζουμε με $z \otimes w$ το τανυστικό γινόμενο $z \otimes w = (z_1 w_1, \ldots, z_m w_1, \ldots, z_1 w_n, \ldots, z_m w_n)$.

Μέρος I

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Στοιχεία αριθμητικών συναρτήσεων και ακολουθιών

1.1 Πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις

Ορισμός 1.1.1. Μια αριθμητική συνάρτηση $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ ονομάζεται πολλαπλασιαστική εάν:

(i) $f(1) = 1$, και

(ii) $f(mn) = f(m)f(n)$ για οποιουσδήποτε ακεραίους αριθμούς m, n με μέγιστο κοινό διαιρέτη $(m, n) = 1$.

Μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση ονομάζεται πλήρως πολλαπλασιαστική, εάν η σχέση στη συνθήκη (ii) ισχύει για οποιουσδήποτε ακέραιους αριθμούς m, n.

Μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση καθορίζεται λοπόν απο τις τιμές της στις δυνάμεις πρώτων αριθμών p^k. Εκτός από την τετριμμένη συνάρτηση $f = 1$, ένα άλλο γνωστό παράδειγμα πολλαπλασιαστικής συνάρτησης είναι η συνάρτηση $\varphi(n)$ του Euler, που ορίζεται ως το πλήθος των φυσικών μικρότερων ή ίσων του n, οι οποίοι είναι σχετικά πρώτοι με τον n. Παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $\varphi(n)$ καθορίζεται από τη συνθήκη $\varphi(p^k) = p^{k-1}(p-1)$ όπου ο αριθμός p είναι πρώτος. Προφανώς, η συνάρτηση φ δεν είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

Σε αυτήν την εργασία αχολούμαστε, κυρίως, με πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στο μοναδιαίο δίσκο $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C}, |z| \leqslant 1\}$. Επίσης, συμβολίζουμε με $\mathcal{M}$ το σύνολο που ορίζεται από τη σχέση

$$\mathcal{M} := \{f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}, f \text{ πολλαπλασιαστική και } |f(p)| = 1 \text{ για κάθε πρώτο } p\}.$$

Για παράδειγμα, οι συναρτήσεις Liouville και Moebius που ορίζονται στα επόμενα κεφάλαια είναι στοιχεία του συνόλου $\mathcal{M}$. Στη συνέχεια, θα συμβολίζουμε για συντομία με $\mathbb{P}$ το σύνολο των θετικών πρώτων αριθμών.

Ορισμός 1.1.2. Μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση $x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ καλείται χαρακτήρας Dirichlet με περίοδο q, όπου $q \geq 1$ είναι ένας φυσικός αριθμός, εάν

(i) είναι περιοδική με περίοδο q,

(ii) είναι πλήρως πολλαπλασιαστική, και

(iii) $x(n) \neq 0$ αν και μόνο αν $(n, q) = 1$.

Είναι προφανές ότι ένας χαρακτήρας Dirichlet με περίοδο q καθορίζεται από τις τιμές του στα αντιστρέψιμα στοιχεία του δακτυλίου $\mathbb{Z}_q$. Συνεπώς, οι χαρακτήρες Dirichlet καθορίζονται από τους χαρακτήρες της ομάδας των αντιστρέψιμων στοιχείων του $\mathbb{Z}_q$. Δοθέντος ενός ομοιομορφισμού $x^* : \mathbb{Z}_q^* \to \mathbb{C}^*$, μπορούμε να επεκτείνουμε πολλαπλασιαστικά τον x^* στους ακεραίους σχετικά πρώτους με τον q και μετά να θέσουμε $x^*(n) = 0$ στους υπόλοιπους ακεραίους. Έτσι, παίρνουμε έναν χαρακτήρα Dirichlet.

Για έναν θετικό διαιρέτη d του q, λέμε ότι ο χαρακτήρας x περιόδου q επάγει έναν χαρακτήρα περιόδου d, εάν για a, b σχετικά πρώτους με τον q και τέτοιους ώστε $a \equiv b (\mathrm{mod}\ d)$, ισχύει $x(a) = x(b)$. Δηλαδή, μπορούμε σε αυτήν την περίπτωση να θεωρήσουμε τον x σαν χαρακτήρα περιόδου d. Ένας χαρακτήρας Dirichlet θα λέγεται πρωταρχικός, εάν δεν υπάρχει τέτοιου είδους επαγόμενος χαρακτήρας για οποιονδήποτε διαιρέτη της περιόδου q.

1.2 Απόσταση πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων και απεριοδικότητα

Ας υποθέσουμε ότι f, g είναι δύο πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις φραγμένες από το 1. Ορίζουμε την απόσταση D μεταξύ των συναρτήσεων f και g σύμφωνα με τη σχέση:

$$D(f,g) := \Big(\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p} (1 - \mathrm{Re}(f(p)\overline{g(p)})) \Big)^{\frac{1}{2}} \tag{1.2.1}$$

Για δύο συναρτήσεις $f, g \in \mathcal{M}$, έχουμε επίσης

$$D(f,g)^2 = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{|f(p) - g(p)|^2}{p}.$$

Η D είναι ψευδομετρική, δηλαδή ικανοποιεί τις σχέσεις:

(i) $D(f, f) \geq 0$, με ισότητα εάν και μόνο εάν $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}(1 - |f(p)|^2) = 0$,[1]

(ii) $D(f, g) = D(g, f)$, και

(iii) $D(f, g) \leqslant D(f, h) + D(h, g)$ (τριγωνική ανισότητα).

Εάν για δύο πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις f, g έχουμε $D(f, g) < \infty$, τότε λέμε ότι η f προσποιείται πως είναι η g. Για παράδειγμα, η πολλαπλασιαστική συνάσρτηση $\varphi(n)/n$ προσποιείται πως είναι η 1.

[1] Συνεπώς, η D δεν είναι μετρική αφού μπορούμε να έχουμε $D(f, 1) = 0$ για κάποια $f \in \mathcal{M} - \{1\}$ που δεν είναι πλήρως πολλαπλασιαστική.

Μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση f καλείται απεριοδική, εάν το όριο

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} f(an+b) = 0$$

για οποιουσδήποτε φυσικούς a, b. Ισοδύναμα, η f είναι απεριοδική, εάν για οποιονδήποτε χαρακτήρα Dirichlet ισχύει

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n\leqslant N} f(n)x(n) = 0.$$

Για παράδειγμα, η συνάρτηση Liouville είναι απεριοδική συνάρτηση.

Ορίζουμε τώρα

$$D(f,g,N)^2 = \sum_{p\in\mathbb{P}, p\leqslant N} \frac{1}{p}\big(1 - \mathrm{Re}(f(p)\overline{g(p)})\big)$$

και

$$M(f,N) = \min_{|t|\leqslant N} D(f, n^{it}, N)^2.$$

Λέμε ότι μια συνάρτηση είναι ισχυρά απεριοδική εάν για οποιονδήποτε χαρακτήρα Dirichlet έχουμε ότι $M(f\cdot x, N) \to \infty$ καθώς $N \to \infty$. Η ισχυρή απεριοδικότητα συνεπάγεται την απεριοδικότητα. Για φραγμένες πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στο σύνολο των πραγματικών αριθμών αποδεικνύεται ότι ισχύει και το αντίστροφο. Η ισχυρή απεριοδικότητα είναι η συνθήκη με την οποία αχολούμαστε σε αυτήν την εργασία. Μπορεί να δειχθεί ότι οι συναρτήσεις Möbius και Liouville είναι ισχυρά απεριοδικές. Για απεριοδικές συναρτήσεις, τα θεωρήματα των επόμενων κεφαλαίων παύουν να ισχύουν.

Μπορούμε, επίσης, να μελετήσουμε την συμπεριφορά των μέσων όρων πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων. Ένα θεώρημα του Halasz [19] δίνει αναγκαίες και ικανές συνθήκες για να έχει μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση μέση τιμή (και αν αυτή είναι μηδενική ή όχι). Παρουσιάζουμε, αρχικά, στην επόμενη ενότητα κάποιους συμβολισμούς για μέσους όρους.

1.3 Μέσοι όροι ακολουθιών

Για ένα σύνολο A συμβολίζουμε με $|A|$ το πλήθος των στοιχείων του. Για μια συνάρτηση f με τιμές στο $|A|$ συμβολίζουμε με

$$\mathbb{E}_{x\in A} f(x) = \frac{1}{|A|} \sum_{x\in A} f(x)$$

τον μέσο όρο της f πάνω από το A. Ορίζουμε ως Cesàro μέσο μιας ακολουθίας f πάνω από το διάστημα $[0, N)$ την τιμή

$$\frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f(n).$$

Θα χρειαστούμε μέσους όρους πάνω απο τυχαία διαστήματα φυσικών. Γι' αυτό το λόγο δίνουμε τον εξής ορισμό.

Ορισμός 1.3.1. Έστω G μια τοπικά συμπαγής ομάδα και έστω m_G το μέτρο Haar της ομάδας. Μια ακολουθία Følner της G είναι μια ακολουθία $\mathbf{\Phi} = (\Phi_{\mathrm{N}})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ από συμπαγή σύνολα με θετικό μέτρο τέτοια ώστε, για οποιοδήποτε $g \in G$ ισχύει

$$\frac{m_G(g\Phi_N \triangle \Phi_N)}{m_G(\Phi_N)} \to 0$$

καθώς $N \to \infty$.

Εάν f είναι μια τοπικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση στην ομάδα G, τότε ορίζουμε τον μέσο όρο της f πάνω απο την ακολουθία $\mathbf{\Phi}$ μέσω της σχέσης

$$\mathbb{E}_{x\in\mathbf{\Phi}} f(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{m_G(\Phi_N)} \int_{\Phi_N} f dm_G. \tag{1.3.1}$$

Λέμε ότι η ακολουθία δέχεται μέσους όρους, εάν για οποιαδήποτε ακολουθία Følner το όριο στη σχέση (1.3.1) υπάρχει και όλα αυτά τα όρια είναι ίσα μεταξύ τους.

Θα ασχοληθούμε με μέσους όρους πάνω από το σύνολο $\mathbb{Z}$ των ακεραίων. Θα συμβολίζουμε με $[N]$ το σύνολο $\{1, 2, \ldots, N\}$ και ως διάστημα στους ακεραίους θα εννοούμε ένα σύνολο της μορφής $\{a, a+1, \ldots, b\}$ για κάποιους ακεραίους a, b με $a < b$. Ένα παράδειγμα ακολουθίας Følner στους ακεραίους είναι μια ακολουθία διαστημάτων με μήκη που τείνουν στο άπειρο. Θα δείξουμε ότι αρκεί να θεωρούμε μέσους όρους πάνω από ακολουθίες Følner αυτής της μορφής.

Πρόταση 1.3.2. *Έστω $f = (f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ μια φραγμένη ακολουθία με τιμές σε έναν χώρο Banach. Τότε, η f δέχεται μέσους όρους εάν και μόνο εάν δέχεται μέσους όρους πάνω από ακολουθίες διαστημάτων με μήκη που τείνουν στο άπειρο.*

Απόδειξη. Το ευθύ είναι προφανές. Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία f δέχεται μέσους όρους πάνω από ακολουθίες διαστημάτων με μήκη που τείνουν στο άπειρο και έστω z η κοινή τιμή αυτών των ορίων. Έστω, επίσης, $\mathbf{\Phi} = (\Phi_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathrm{N}}$ μια ακολουθία Følner.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $N \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$\delta_N = \frac{1}{|\Phi_N|} |\Phi_n \triangle (1 + \Phi_N)|.$$

Τότε, $\delta_N \to 0$ για $N \to \infty$ και μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία ακεραίων (L_N) τέτοια, ώστε

$$L_N \delta_N \to 0 \quad \text{και} \quad L_N \to \infty \quad \text{καθώς} \quad N \to \infty.$$

Για $N \in \mathbb{N}$ γράφουμε το Φ_N σαν ξένη ένωση διαστημάτων. Έστω Φ'_N η ένωση των διαστημάτων με μήκη μεγαλύτερα του L_N και έστω m_N το πλήθος των διαστημάτων με μήκος μικρότερο ή ίσο του L_N. Τότε, ισχύει

$$L_N \delta_N = L_n \frac{|\Phi_N \triangle (1 + \Phi_N)|}{|\Phi_N|} \geq \frac{L_n m_N}{|\Phi_N|} \geq \frac{|\Phi_N| - |\Phi'_N|}{|\Phi_N|}.$$

Συνεπώς, έχουμε $\frac{|\Phi'_N|}{|\Phi_N|} \to 1$ καθώς $n \to \infty$ και για αρκετά μεγάλο $N \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$\|\mathbb{E}_{n\in\Phi_N} f(n) - \mathbb{E}_{n\in\Phi'_N} f(n)\| < \varepsilon.$$

Ο μέσος όρος της f πάνω από την Φ'_N είναι κυρτός συνδυασμός μέσων όρων σε διαστήματα μήκους μεγαλύτερου του L_N. Για αρκετά μεγάλο $N \in \mathbb{N}$, αυτοί οι μέσοι όροι είναι ε-κοντά στο z οπότε καταλήγουμε στην

$$\|\mathbb{E}_{n\in\Phi'_N} f(n) - z\| \leqslant \varepsilon.$$

Το ζητούμενο έπεται. □

Για μια συνάρτηση f πάνω σε ένα σύνολο A φυσικών ορίζουμε τον λογαριθμικό μέσο όρο από τη σχέση

$$\mathbb{E}^{log}_{n\in A} f(n) := \frac{1}{\sum_{n\in A}\frac{1}{n}} \sum_{n\in A} \frac{f(n)}{n}.$$

Μια ακολουθία διαστημάτων $I_N = (a_N, b_N)$ θα λέγεται ακολουθία Følner για λογαριθμικούς μέσους εάν $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{n\in I_N} \frac{1}{n} = \infty$. Αυτό είναι ισοδύναμο με τη σχέση $\frac{b_N}{a_N} \to \infty$. Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε τους εξής συμβολισμούς για μέσους όρους πάνω από μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I} = (\mathrm{I_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ με μήκη που τείνουν στο άπειρο:

(i) για Cesàro μέσους

$$\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} a(n) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in I_N} a(n),$$

και

(ii) για λογαριθμικούς μέσους

$$\mathbb{E}^{\log}_{n\in\mathbf{I}} a(n) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}^{\log}_{n\ I_N} a(n),$$

με την προϋπόθεση ότι τα όρια αυτά υπάρχουν.

Χρησιμοποιώντας άθροιση κατά μέρη συμπεραίνουμε ότι, εάν μια ακολουθία δέχεται μέσους όρους για Cesàro μέσους στην ακολουθία $\mathbf{I} = ([\mathrm{N}])_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$, τότε ο λογαριθμικός μέσος της ακολουθίας πάνω από το $\mathbf{I}$ υπάρχει και ισούται με τον Cesàro μέσο. Το αντίστροφο δεν ισχύει.

Τέλος, εάν μια ακολουθία f δέχεται μέσους όρους πάνω από μια οποιαδήποτε ακολουθία Følner στους φυσικούς, τότε θα γράφουμε το κοινό τους όριο ως $\mathbb{E}_{n\in\mathbb{N}} f(n)$.

Σχόλιο 1.3.3. Όλοι οι μέσοι όροι ορίστηκαν πάνω στην ομάδα $\mathbb{Z}$, δηλαδή για αμφίπλευρες ακολουθίες.Όταν έχουμε μια ακολουθία Følner που αποτελείται από διαστήματα στους φυσικούς, τότε όλοι οι συμβολισμοί και οι προτάσεις εφαρμόζονται παρόμοια για μέσους όρους στους φυσικούς.

Ας θεωρήσουμε μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση f. Έστω $m(f)$ η μέση τιμή της f, δηλαδή

$$m(f) = \lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in[N]} f(n).$$

Θεώρημα 1.3.4 (Halasz). *Η μέση τιμή $m(f)$ της f υπάρχει και είναι μη μηδενική αν και μόνο αν:*

(i) *υπάρχει τουλάχιστον ένας θετικός ακέραιος k τέτοιος, ώστε $f(2^k) \neq -1$, και*

(ii) *η σειρά $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}(1 - f(p))$ συγκλίνει.*

Η μέση τιμή $m(f)$ είναι 0 αν και μόνο αν ισχύει μία από τις παρακάτω συνθήκες:

(iii) *υπάρχει πραγματικός αριθμός u τέτοιος, ώστε να έχουμε $f(2^k) = -2^{kiu}$ για όλους τους θετικούς ακεραίους k,*

(iv) *$D(f, n^{it}) = \infty$ για οποιονδήποτε $t \in \mathbb{R}$.*

Πόρισμα 1.3.5 (Wirsing). *Αν η πολλαπλασιαστική συνάρτηση f παίρνει πραγματικές τιμές, τότε το $m(f)$ υπάρχει.*

Απόδειξη. Επειδή $\mathrm{Re}(p^{it}) = \mathrm{Re}(p^{-it})$ και $f(p) \in \mathbb{R}$ συμπεραίνουμε ότι

$$D(1, n^{2it}) = D(n^{it}, n^{-it}) \leqslant 2D(f, n^{it})$$

από την τριγωνική ανισότητα. Συνεπώς, επειδή για $t \neq 0$ έχουμε ότι $D(1, n^{it}) = \infty$ έπεται ότι $D(f, n^{it}) = \infty$ για $t \neq 0$.

(α) Εάν ισχύει $D(f, 1) = \infty$, τότε $D(f, n^{it}) = 0$ για όλους τους πραγματικούς αριθμούς t, οπότε από τη συνθήκη (iv) στο Θεώρημα 1.3.4 έχουμε $m(f) = 0$.

(β) Εάν ισχύει $D(f, 1) < \infty$, τότε η σειρά $\sum_{p\in\mathbb{P}} \frac{1}{p}(1 - f(p))$ συγκλίνει (άρα ικανοποιείται η συνθήκη (ii)). Τότε, ελέγχουμε αν ισχύει $f(2^k) = -1$ για κάθε φυσικό αριθμό k, οπότε τελικά ισχύει η συνθήκη (i) ή η συνθήκη (iii). □

1.4 Συσχετισμοί ακολουθιών και η αρχή του Furstenberg

Έστω $\{a_1, \dots, a_m\}$ μια οικογένεια φραγμένων (δίπλευρων) ακολουθιών με τιμές στους μιγαδικούς αριθμούς. Γράφουμε $\mathcal{C}^0(z) = z$ και $\mathcal{C}^1 = \bar{z}$ για $z \in \mathbb{C}$. Θεωρούμε, επίσης, μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I} = (\mathrm{I}_\mathrm{N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ με μήκη που τείνουν στο άπειρο.

Ορισμός 1.4.1. Λέμε ότι η οικογένεια $\{a_1, \dots, a_m\}$ δέχεται συσχετισμούς πάνω απο την ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I}$, εάν για οποιαδήποτε $n \in \mathbb{N}$, $e_1, \dots, e_n \in \{0, 1\}$, $j_1, \dots, j_n \in \{1, \dots, m\}$ και $h_1, \dots, h_m \in \mathbb{Z}$ το όριο

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{s\in I_N}\Big(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}^{e_i} a_{j_i}(s + h_i)\Big) \tag{1.4.1}$$

υπάρχει. Λέμε ότι η οικογένεια αυτών των ακολουθιών δέχεται συσχετισμούς, εάν δέχεται συσχετισμούς πάνω από οποιαδήποτε ακολουθία διαστημάτων με μήκη που τείνουν στο άπειρο (όταν ισχύει αυτό, το όριο στην σχέση (1.4.1) δεν εξαρτάται από την επιλογή της ακολουθίας $\mathbf{I}$).

Τα $h_1, \dots, h_m$ δεν είναι απαραίτητο να είναι διαφορετικά μεταξύ τους και το ίδιο ισχύει για τους δείκτες $j_1, \dots, j_m$. Έναν παρόμοιο ορισμό μπορούμε να δώσουμε για λογαριθμικούς μέσους: με τους παραπάνω συμβολισμούς λέμε ότι η οικογένεια $\{a_1, \dots, a_m\}$ δέχεται συσχετισμούς για λογαριθμικούς μέσους, εάν το όριο

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}^{log}_{s\in I_N}\Big(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}^{e_i} a_{j_i}(s + h_i)\Big)$$

υπάρχει. Όταν η οικογένεια αποτελείται μόνο από μια ακολουθία μιγαδικών a, τότε το όριο στη σχέση (1.4.1) παίρνει τη μορφή

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{s\in I_N}\Big(\prod_{i=1}^{n} b_{j_i}(s + h_i)\Big),$$

όπου κάθε ακολουθία b_{j_i} ισούται με την a η την $\overline{a}$.

Πρόταση 1.4.2 (Αρχή Furstenberg)**.** *Έστω $\{a_1, \dots, a_m\}$ μια οικογένεια φραγμένων ακολουθιών μιγαδικών αριθμών. Τότε, υπάρχει ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα (X, T)[2], ένα σημείο w με*

[2] Ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα είναι ένα ζεύγος (X, T), όπου X είναι ένας συμπαγής μετρικός χώρος και $T : X \to X$ είναι μια συνεχής συνάρτηση. Θα θεωρούμε συστήματα όπου ο μετασχηματισμός T είναι, επιπλέον, αντιστρέψιμος.

πυκνή τροχιά και συνεχείς συναρτήσεις $F_i, i = 1, \ldots, m$ *τέτοιες ώστε*

$$a_i(n) = F_i(T^n w) \tag{1.4.2}$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ *και για όλα τα* $i \in \{1, \ldots, m\}$. *Επιπλέον, εάν η οικογένεια* $\{a_1, \ldots, a_m\}$ *δέχεται συσχετισμούς πάνω απο μια ακολουθία διαστημάτων* $\mathbf{I} = (\mathrm{I_N})_{\mathrm{N} \in \mathbb{N}}$ *με μήκη που τείνουν στο άπειρο, τότε υπάρχει ένα* T*-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας* μ *στο* X *τέτοιο ώστε, για οποιαδήποτε* $n \in \mathbb{N}$, $e_1, \ldots, e_n \in \{0, 1\}$ *και* $h_1, \ldots, h_n \in \mathbb{Z}$ *να ισχύει*

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}_{s \in I_N} \Big(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}^{e_i} a_{j_i}(s + h_i) \Big) = \int_X \prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}^{e_i} F_{j_i}(T^{h_i} x) d\mu(x). \tag{1.4.3}$$

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε την πρόταση στην περίπτωση $m = 1$ (δηλαδή για μία ακολουθία). Η γενική περίπτωση είναι παρόμοια.[3]

Θεωρούμε έναν κλειστό δίσκο D στο μιγαδικό επίπεδο που περιέχει όλες τις τιμές της ακολουθίας a στο εσωτερικό του. Γράφουμε ένα σημείο του χώρου $D^{\mathbb{Z}}$ σαν μια ακολουθία $z = (z(n))_{n \in \mathbb{Z}}$. Εφοδιάζουμε το $D^{\mathbb{Z}}$ με την τοπολογία γινόμενο και με το shift T που ορίζεται από τη σχέση

$$Tz(n) = z(n + 1)$$

για $n \in \mathbb{Z}$. Ορίζουμε, επίσης, το σημείο $w \in D^{\mathbb{Z}}$ ως $w(n) = a(n)$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ (εάν η ακολουθία a ορίζεται στους φυσικούς ορίζουμε $w(n) = a(n)$ για $n \geq 0$ και $w(n) = 0$ διαφορετικά). Τέλος, έστω X η κλειστή τροχιά του σημείου w στο $D^{\mathbb{Z}}$ μέσω του μετασχηματισμού T. Το (X, T) είναι ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα και το $w \in X$ έχει πυκνή τροχιά.

Ορίζουμε τη συνεχή συνάρτηση $F : X \to D$ τέτοια, ώστε για ένα $z \in X$ να έχουμε $f(z) = z(0)$. Τότε, είναι προφανές ότι ικανοποιείται η σχέση (1.4.2).

Για την ακολουθία $\mathbf{I}$ της πρότασης, ορίζουμε την ακολουθία μέτρων μ_N από τη σχέση

$$\mu_N = \frac{1}{|I_N|} \sum_{s \in I_N} \delta_{T^s w},$$

και έστω μ το w^*-όριο μιας συγκλίνουσας υπακολουθίας της μ_N. Η ύπαρξη ενός τέτοιου μέτρου εξασφαλίζεται από το γεγονός ότι ο χώρος των T-αναλλοίωτων μέτρων πιθανότητας είναι w^*-συμπαγής. Το μέτρο μ είναι T-αναλλοίωτο και για όλα τα $e_1, \ldots, e_l \in \{0, 1\}$ και $h_1, \ldots, h_l \in \mathbb{Z}$ έχουμε

$$\lim_{N \to \infty} \mathbb{E}_{s \in I_N} \Big(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}^{e_i} a(s + h_i) \Big) = \lim_{N \to \infty} \mathbb{E}_{s \in I_N} \Big(\prod_{i=1}^{n} \mathcal{C}^{e_i} T^{h_i} F(T^n w) \Big) = \int_X \prod_{i=1}^{s} \mathcal{C}^{e_i} T^{h_i} f d\mu,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Μία παρόμοια εκδοχή της αρχής του Furstenberg παίρνουμε εάν απαιτήσουμε η οικογένεια $\{a_1, \ldots, a_m\}$ να δέχεται συσχετισμούς για λογαριθμικούς μέσους.

Για μία φραγμένη ακολουθία a που δέχεται συσχετισμούς πάνω από μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I}$ με μήκη που τείνουν στο άπειρο, υπάρχουν άπειρες επιλογές συστημάτων, συναρτήσεων και σημείων

[3] Να σημειώσουμε ότι η κατασκευή των συναρτήσεων F_i και του συστήματος (X, T) δίνει ότι οι συναρτήσεις $T^n F_i$ (για τις διάφορες τιμές των n και i) διαχωρίζουν τα σημεία του χώρου X.

που ικανοποιούν την Πρόταση 1.4.2. Ένα σύστημα που ικανοποιεί αυτές τις συνθήκες ονομάζεται σύστημα Furstenberg για το ζεύγος (a, I). Εάν απαιτήσουμε οι συναρτήσεις $T^n F_j$ για τις διάφορες τιμές των n, j να διαχωρίζουν τα σημεία του X, τότε το σύστημα Furstenberg είναι μοναδικό μέχρι ισομορφισμού.

Χρησιμοποιώντας την αρχή του Furstenberg μπορούμε να μεταφέρουμε αποτελέσματα από την εργοδική θεωρία σε αποτελέσματα πάνω απο φραγμένες ακολουθίες μιγαδικών και αντίστροφα. Σε αυτή την εργασία θα χρησιμοποιήσουμε αυτή την αρχή για να αποδείξουμε την ύπαρξη συσχετισμών για ακολουθίες ή για να υπολογίσουμε το αντίστοιχο όριο.

1.5 Οι νόρμες ομοιομορφίας Gowers

Σε αυτήν την ενότητα εισάγουμε μια κλάση από νόρμες πάνω από πεπερασμένες αβελιανές ομάδες. Συμβολίζουμε με $[[k]]$ το σύνολο $\{0,1\}^k$. Για μια αβελιανή ομάδα θα ορίσουμε την ομάδα $Q^k(G)$ των k-διάστατων κύβων. Ξεκινώντας από τον κύβο $[[k]]$, καλούμε έδρα του $[[k]]$ ένα υποσύνολο του $[[k]]$,το οποίο λαμβάνουμε σταθεροποιώντας μία από τις k συντεταγμένες. Για κάθε έδρα (a), το συμπληρωματικό της σύνολο είναι και αυτό έδρα του $[[k]]$, και την ονομάζουμε απέναντι έδρα. Για ένα ζεύγος απέναντι εδρών, μία από αυτές θα περιέχει το σημείο $\{1, \ldots, 1\}$ και αυτή η έδρα θα ονομάζεται άνω έδρα του κύβου. Για ένα σύνολο X θα συμβολίζουμε, επίσης, με $X^{[[k]]}$ το σύνολο X^{2^k} και για μία κορυφή ε του κύβου $[[k]]$ γράφουμε $|\varepsilon|$ για το άθροισμα των συντεταγμένων του ε.

Για μια αβελιανή ομάδα G και ένα $g \in G$ ορίζουμε

$$g^{[[k]]} = (g, g, ..., g) \ (2^k \text{ όροι})$$

και αν (a) είναι έδρα του $[[k]]$ ορίζουμε το $g^{(a)} \in G^{[[k]]}$ από τη σχέση

$$(g^{(a)})_\varepsilon = \begin{cases} g \ \textit{για} \ \varepsilon \in (a) \\ 0 \ \textit{διαφορετικά} \end{cases}$$

Ορισμός 1.5.1. Έστω μια αβελιανή ομάδα G. Η ομάδα των k-διάστατων κύβων $Q^k(G)$ ορίζεται ως η υποομάδα του $G^{[[k]]}$ που παράγεται από τα στοιχεία $g^{(a)}$, όπου $g \in G$ και (a) είναι μία έδρα του $[[k]]$.

Παρατήρηση 1.5.2. Ισοδύναμα θα μπορούσαμε να ορίσουμε την ομάδα $Q^k(G)$ ως την υποομάδα του $G^{[[k]]}$ που παράγεται από τα στοιχεία $g^{[[k]]}$ και $g^{(a)}$ για μία άνω έδρα (a) του $[[k]]$.

Συμβολίζουμε με $a_1, \ldots, a_k$ τις άνω έδρες του $[[k]]$, όπου $a_j = \{\varepsilon \in [[k]], \varepsilon_j = 1\}$. Από την προηγούμενη παρατήρηση έχουμε ότι η ομάδα $Q^k(G)$ αποτελείται από στοιχεία της μορφής

$$\mathbf{g} = \mathrm{x}^{[[\mathrm{k}]]} + \sum_{\mathrm{j}=1}^{\mathrm{k}} \mathrm{t}_\mathrm{j}^{(\mathrm{a_j})}, \ \textit{για} \ \mathrm{x}, \mathrm{t}_1, \ldots, \mathrm{t}_\mathrm{k} \in \mathrm{G}. \tag{1.5.1}$$

Γράφοντας $\underline{t} = \{t_1, \ldots, t_k\}$ έχουμε ότι για κάθε $\varepsilon \in [[k]]$ ισχύει

$$g_\varepsilon = x + \varepsilon \cdot \underline{t}. \tag{1.5.2}$$

Αυτή είναι η παραμετρική μορφή των στοιχείων της ομάδας $Q^k(G)$.

Ας θεωρήσουμε μια συμπαγή αβελιανή ομάδα G και έστω $m_G^{[[k]]}$ το μέτρο Haar της ομάδας $Q^k(G)$. Για τις 2^k συναρτήσεις $f_\varepsilon, \varepsilon \in [[k]]$ έχουμε από την (1.5.2) ότι

$$\int_{Q^k(G)} \prod_{\varepsilon\in[[k]]} f_\varepsilon(x_\varepsilon) dm_G^k = \int_{G^{k+1}} \prod_{\varepsilon\in[[k]]} f_\varepsilon(x+\varepsilon\cdot \underline{t}) dm_G(y) dm_{G^k}(\underline{t}), \tag{1.5.3}$$

όπου με m_H σθμβολίζουμε το μέτρο Haar μιας ομάδας H.

Λήμμα 1.5.3. *Έστω $k \geq 1$ και f μια συνάρτηση σε μια συμπαγή αβελιανή ομάδα G. Τότε,*

$$\int_{Q^k(G)} \prod_{\varepsilon\in[[k]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} f(x_\varepsilon) dm_G^k(\mathbf{x}) \geq \mathbf{0}.$$

Απόδειξη. Για μια συνάρτηση $G \in L^2(m_G^{k-1})$ ορίζουμε τον τελεστή P από τη σχέση

$$PG(\mathbf{x}) = \int_{\mathrm{G}} \mathrm{G}(\mathrm{g}^{[[\mathrm{k}-1]]}\cdot \mathbf{x}) \mathrm{dm_G(g)}. \tag{1.5.4}$$

Για $\eta \in [[k-1]]$ ορίζουμε

$$F(\mathbf{x}) = \prod_{\eta\in[[\mathrm{k}-1]]} \mathcal{C}^{|\eta|}\mathrm{f}(\mathrm{x}_\eta) \ \textit{για}\ \mathbf{x} \in \mathrm{Q}^{\mathrm{k}-1}(\mathrm{G}).$$

Από τη σχέση (1.5.3) και τον ορισμό του τελεστή P, έχουμε ότι το αρχικό ολοκλήρωμα είναι ίσο με

$$\int_{Q^{k-1}(G)} F\cdot \overline{F} dm_G^{k-1} = \int_{Q^{k-1}(G)} PF\cdot P\overline{F} dm_G^{k-1} = \|PF\|_{L^2(m_G^{k-1})} \geq 0.$$

□

Ορισμός 1.5.4. Έστω $k \geq 1$. Εάν f είναι μια φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση σε μια συμπαγή αβελιανή ομάδα G, η νόρμα Gowers $\|f\|_{U^k(G)}$ τάξης k ορίζεται ως

$$\|f\|_{U^k(G)} = \Big(\int_{Q^k(G)} \prod_{\varepsilon\in[[k]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} f(x_\varepsilon) dm_G^k(\mathbf{x})\Big)^{\frac{1}{2^\mathrm{k}}}.$$

Χρησιμοποιώντας τη σχέση (1.5.3) έχουμε ότι

$$\|f\|_{U^k(G)}^{2^k} = \int_{G^{k+1}} \prod_{\varepsilon\in[[k]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} f(x+\varepsilon\cdot\underline{t}) dm_G(x) dm_{G^k}(t). \tag{1.5.5}$$

Επιπλέον, θέτοντας $\underline{s} = \{t_1, \ldots, t_{k-1}\}$ και $h = t_k$ στην (1.5.5) παίρνουμε ότι

$$\|f\|_{U^k(G)}^{2^k} = \int_G \|f\cdot \overline{S_u f}\|_{U^{k-1}(G)}^{2^{k-1}} dm_G(u), \tag{1.5.6}$$

όπου $S_u f = f(x+u)$. Τέλος, εύκολα βλέπουμε ότι $\|f\|_{U^k(G)} \geq \|f\|_{U^{k-1}(G)}$ για $k \geq 2$. Εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz διαδοχικά μπορούμε να καταλήξουμε στο εξής αποτέλεσμα:

Θεώρημα 1.5.5 (Ανισότητα Cauchy-Schwarz-Gowers). *Έστω $k \geq 1$ και για κάθε $\varepsilon \in [[k]]$, έστω F_ε μια φραγμένη, μετρήσιμη συνάρτηση σε μια συμπαγή αβελιανή ομάδα G. Τότε,*

$$\Big| \int_{Q^k(G)} \prod_{\varepsilon \in [[k]]} f_\varepsilon(x_\varepsilon) dm_G^k \Big| \leqslant \prod_{\varepsilon \in [[k]]} \|f_\varepsilon\|_{U^k(G)}.$$

Στην περίπτωση $k = 1$, επειδή $Q^1(G) = G \times G$, έχουμε ότι για μια συνάρτηση f ισχύει $\|f\|_{U^1(G)} = |\int_G f dm_G|$. Αυτό δείχνει ότι η $\|\cdot\|_{U^1(G)}$ δεν μπορεί να είναι νόρμα. Θα δείξουμε ότι οι $\|\cdot\|_{U^k(G)}$ είναι ημινόρμες για $k \geq 1$ και νόρμες για $k \geq 2$.

Πρόταση 1.5.6. *Για $k \geq 1$ και μια συμπαγή αβελιανή ομάδα G, η απεικόνιση $f \to \|f\|_{U^k(G)}$ είναι ημινόρμα στο χώρο $L^\infty(m_G)$.*

Απόδειξη. Θα δείξουμε την υποπροσθετικότητα (η θετική ομογένεια είναι προφανής). Έστω, λοιπόν, g, h δύο φραγμένες, μετρήσιμες συναρτήσεις. Από τον Ορισμό 1.5.4 έχουμε

$$\|g + h\|_{U^k(G)}^{2^k} = \int_{Q^k(G)} \prod_{\varepsilon \in [[k]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}(g(x_\varepsilon + h(x_\varepsilon)))dm_G^k.$$

Αναπτύσσοντας το γινόμενο μέσα στο ολοκλήρωμα, έχουμε ότι η $\|g + h\|_{U^k(G)}$ είναι το άθροισμα 2^{2^k} όρων, κάθε ένας από τους οποίους αντιστοιχεί σε ένα υποσύνολο A του $[[k]]$. Για κάθε τέτοιο υποσύνολο A, ο αντίστοιχος όρος έχει τη μορφή

$$\int_{Q^k(G)} \prod_{\varepsilon \in [[k]]} f_\varepsilon(x_\varepsilon) dm_G^k,$$

όπου

$$f_\varepsilon = \begin{cases} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} g \ \textit{για } \varepsilon \in A \\ \mathcal{C}^{|\varepsilon|} h \ \textit{διαφορετικά} \end{cases}.$$

Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz-Gowers το παραπάνω ολοκλήρωμα φράσσεται από $\|g\|_{U^k(G)}^{|A|} \cdot \|h\|_{U^k(G)}^{2^k - |A|}$. Αθροίζοντας πάνω από όλα τα υποσύνολα A , παίρνουμε

$$\|g + h\|_{U^k(G)}^{2^k} \leqslant (\|g\|_{U^k(G)} + \|h\|_{U^k(G)})^{2^k}.$$

□

Στην περίπτωση $k = 2$ έχουμε

$$\|f\|_{U^2(G)}^4 = \int_{G^3} f(x)\overline{f(x + t_1)f(x + t_2)}f(x + t_1 + t_2)dm_G(x)dm_G(t_1)dm_G(t_2).$$

Χρησιμοποιώντας την αντιστροφή Fourier και για τις τέσσερις συναρτήσεις μέσα στο ολοκλήρωμα και αναπτύσσοντας, καταλήγουμε στη σχέση

$$\|f\|_{U^2(G)} = \Big(\sum_{\gamma \in \hat{G}} |f(\hat{\gamma})|^4 \Big)^{\frac{1}{4}} = \|\hat{f}\|_{\ell^4(\hat{G})}. \tag{1.5.7}$$

Πρόταση 1.5.7. *Για $k \geq 2$ η $\|\cdot\|_{U^k(G)}$ είναι νόρμα στο χώρο $L^\infty(m_G)$.*

Απόδειξη. Έστω ότι η f δεν είναι ταυτοτικά μηδενική. Τότε, από τη σχέση (1.5.7) παίρνουμε ότι $\|f\|_{U^2(G)} > 0$. Συνεπώς, για $k \geq 2$ έχουμε $\|f\|_{U^k(G)} \geq \|f\|_{U^2(G)} > 0$ και σε συνδυασμό με την Πρόταση 1.5.6 παίρνουμε το ζητούμενο. □

Χρησιμοποιώντας το συμβολισμό για μέσους όρους μπορούμε να γράψουμε τον ορισμό των νορμών Gowers ως

$$\|f\|_{U^k(G)}^{2^k} = \mathbb{E}_{x\in G}\Big(\mathbb{E}_{\underline{t}\in G^k}\prod_{\varepsilon\in[[k]]}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}f(x+\varepsilon\cdot\underline{t})\Big), \tag{1.5.8}$$

και η αναδρομική σχέση (1.5.6) γράφεται

$$\|f\|_{U^k(G)}^{2^k} = \mathbb{E}_{g\in G}\|f\cdot\overline{S_g f}\|_{U^{k-1}(G)}^{2^{k-1}}. \tag{1.5.9}$$

Επειδή θα χρησιμοποιήσουμε τις νόρμες Gowers κυρίως πάνω από την αβελιανή ομάδα $\mathbb{Z}_N$, ο συμβολισμός με μέσους όρους είναι πιο εύχρηστος.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Nilsystems και θεωρήματα δομής

2.1 Οι εργοδικές ημινόρμες και οι χαρακτηριστικοί παράγοντες

Σε αυτήν την ενότητα θα ορίσουμε τους χαρακτηριστικούς παράγοντες Z_k ενός συστήματος. Ας θυμηθούμε τον ορισμό του αναλλοίωτου παράγοντα ενός συστήματος (X, μ, T) (τον οποίο θα συμβολίζουμε με $I(T)$ ή απλά με I, όταν δεν υπάρχει αμφιβολία για το σύστημα στο οποίο αναφερόμαστε) ως τη μικρότερη σ-άλγεβρα που κάνει όλες τις T-αναλλοίωτες συναρτήσεις μετρήσιμες. Ένα σύστημα λέγεται εργοδικό, εάν αυτός ο παράγοντας είναι η τετριμμένη σ-άλγεβρα mod- σύνολα μέτρου 0. Ο παράγοντας αυτός είναι χαρακτηριστικός για την L^2 σύγκλιση των μέσων όρων

$$\mathbb{E}_{n\in\mathbb{N}} T^n f$$

για μια μετρήσιμη συνάρτηση f, με την έννοια ότι το όριο αυτό δεν αλλάζει αν αντικαταστήσουμε την f με την $\mathbb{E}_\mu(f|I(T))$. Οι παράγοντες μεγαλύτερης τάξης που θα ορίσουμε είναι «χαρακτηριστικοί» με την ίδια έννοια [1] για την L^2 σύγκλιση του ορίου

$$\mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{N}^k} \prod_{\varepsilon\in[[k]]-\{0\}} T^{\underline{h}\cdot\varepsilon} f_\varepsilon$$

για μετρήσιμες συναρτήσεις f_ε (χρησιμοποιούμε παραπάνω το συμβολισμό που χρησιμοποιήσαμε στην Ενότητα 1.5 και θα χρειαστούμε τον ίδιο συμβολισμό στη συνέχεια). Επιπλέον, στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $[[k]]^\star$ το σύνολο $[[k]] \setminus \{0, 0, \dots, 0\}$.

Ορισμός 2.1.1. Θεωρούμε δύο συστήματα που διατηρούν το μέτρο (X_1, μ_1, T_1) και (X_2, μ_2, T_2) καθώς και τις απεικονίσεις $p_i : (X_i, \mu_i, T_i) \to (Y, v, T)$ για $i = 1, 2$ σε έναν κοινό παράγοντα Y. Τότε, ορίζουμε την σχετικά δεσμευσμένη σύνδεση $\mu_1 \times_Y \mu_2$ των X_1, X_2 ως το μέτρο στο χώρο $X_1 \times X_2$ που χαρακτηρίζεται απο τη σχέση

$$\int_{X_1\times X_2} f_1(x_1) f_2(x_2) d(\mu_1 \times_Y \mu_2)(x_1, x_2) = \int_Y \mathbb{E}_v(f_1|Y) \cdot \mathbb{E}_v(f_2|Y) dv \tag{2.1.1}$$

[1] Ο αυστηρός ορισμός είναι ότι η διαφορά αυτών των δύο μέσων όρων συγκλίνει στο 0 στον $L^2(\mu)$, καθώς δεν είναι γνωστό εκ των προτέρων ότι υπάρχουν τα αντίστοιχα όρια.

για όλες τις συναρτήσεις $f_1 \in L^\infty(\mu_1)$ και $f_2 \in L^\infty(\mu_2)$.

Ιδιαίτερα, στην περίπτωση που $X = X_1 = X_2$ και $p_1 = p_2$, τότε η σύνδεση $\mu \times_{I(T)} \mu$ πάνω από την αναλλοίωτη σ-άλγεβρα θα ονομάζεται το δεσμευμένο τετράγωνο του μ .

Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι μας δίνεται ένα σύστημα (X, μ, T) που διατηρεί το μέτρο. Θα χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω κατασκευή για να ορίσουμε τα μέτρα $\mu^{[[k]]}$ στο γινόμενο $X^{[[k]]}$, μέσω των οποίων θα ορίσουμε τις ημινόρμες $|||\cdot|||_k$ για έναν φυσικό αριθμό k. Ας ορίσουμε τετριμμένα το μέτρο $\mu^{[[0]]}$ ως το μέτρο μ.

Στην περίπτωση $k = 1$, ορίζουμε το μέτρο $\mu^{[[1]]}$ στο χώρο $(X \times X, T \times T)$ από τη σχέση $\mu^{[1]} = \mu \times_{I(T)} \mu$. Είναι προφανές απο την σχέση (2.1.1) ότι εάν το σύστημα είναι εργοδικό, τότε το μέτρο $\mu^{[[1]]}$ ταυτίζεται με το μέτρο γινόμενο $\mu \times \mu$. Όμοια, έχοντας ορίσει το μέτρο $\mu^{[[1]]}$, ορίζουμε το μέτρο $\mu^{[[2]]}$ στον χώρο $(X^{[[2]]}, T^{[[2]]})$ από τη σχέση $\mu^{[[2]]} = \mu^{[[1]]} \times_{I(T\times T)} \mu^{[[1]]}$.

Με την ίδια λογική κατασκευάζουμε επαγωγικά το μέτρο $\mu^{[[k]]}$. Πιο συγκεκριμένα, εάν έχει οριστεί το μέτρο $\mu^{[[k]]}$ στο χώρο $X^{[[k]]}$ και είναι $T^{[[k]]}$-αναλλοίωτο, τότε ορίζουμε το μέτρο $\mu^{[[k+1]]}$ στον χώρο $X^{[[k+1]]}$ από τη σχέση

$$\mu^{[[k+1]]} = \mu^{[[k]]} \times_{I(T^{[[k]]})} \mu^{[[k]]}.$$

Ταυτίζοντας το $X^{[[k+1]]}$ με το γινομένο $X^{[[k]]} \times X^{[[k]]}$ και γράφοντας τα στοιχεία του ως $x = (x', x'')$, όπου για $\underline{h} \in [[k]]$,

$$x'_{\underline{h}} = x_{\underline{h}0} \qquad \textit{και} \qquad x''_{\underline{h}} = x_{\underline{h}1},$$

έχουμε απο την παραπάνω κατασκευή και τις ιδιότητες της δεσμευμένης τιμής ότι

$$\begin{aligned}\int_{X^{[[k+1]]}} F'(x')F''(x'')d\mu^{[[k+1]]} &= \int_{X^{[[k]]}} \mathbb{E}_{\mu^{[[k]]}}(F'|I(T^{[[k]]})) \cdot \mathbb{E}_{\mu^{[[k]]}}(F''|I(T^{[[k]]}))d\mu^{[[k]]} \\ &= \int_{X^{[[k]]}} F' \cdot \mathbb{E}_{\mu^{[[k]]}}(F''|I(T^{[[k]]}))d\mu^{[[k]]}.\end{aligned}$$

Από αυτήν την σχέση βλέπουμε εύκολα ότι το μέτρο $\mu^{[[k+1]]}$ είναι $T^{[[k+1]]}$-αναλλοίωτο (είναι, επίσης, αναλλοίωτο και ως προς τις απεικονίσεις $T^{[[k]]} \times Id_{X^{[[k]]}}$, $Id_{X^{[[k]]}} \times T^{[[k]]}$).

Για την εργοδική διάσπαση των μέτρων $\mu^{[[k]]}$ ισχύει το εξής: αν για $k \geq 0$ η εργοδική διάσπαση του $\mu^{[[k]]}$ είναι

$$\mu^{[[k]]} = \int_\Omega (\mu^{[[k]]})_\omega dP(\omega)$$

για κάποιον χώρο πιθανότητας (Ω, P), τότε έχουμε ότι

$$\mu^{[[k+1]]} = \int_\Omega (\mu^{[[k]]})_\omega \times (\mu^{[[k]]})_\omega dP(\omega).$$

Έχοντας ορίσει τα μέτρα $\mu^{[[k]]}$, είμαστε σε θέση να ορίσουμε τις ημινόρμες $|||\cdot|||_k$.

Ορισμός 2.1.2 (ημινόρμες Host-Kra)**.** Έστω ένα σύστημα (X, μ, T) και $f \in L^\infty(\mu)$. Τότε, για δοσμένο φυσικό αριθμό k, ορίζουμε την εργοδική ημινόρμα τάξης k (συμβολισμός $|||f|||_k$) από τη σχέση

$$|||f|||_k = \Big(\int_{X^{[[k]]}} \prod_{\varepsilon\in[[k]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} f(x_\varepsilon) d\mu^{[[k]]}(x)\Big)^{\frac{1}{2^k}}. \tag{2.1.2}$$

Δεν είναι προφανές εκ των προτέρων ότι το ολοκλήρωμα στο δεξί μέλος της (2.1.2) είναι μη αρνητικό. Στην περίπτωση $k=1$ βλέπουμε εύκολα ότι $|||f|||_1 = \|\mathbb{E}_\mu(f|I(T))\|_2$. Για $k \geq 1$ και f φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\int_{X^{[[k]]}} \prod_{\varepsilon\in[[k]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} f(x_\varepsilon) d\mu^{[[k]]}(x) &= \int_{X^{[[k-1]]}} F \cdot \mathbb{E}_{\mu^{[[k-1]]}}(\overline{F}|I(T^{[[k-1]]}))d\mu^{[[k-1]]} \\ &= \int_{X^{[[k-1]]}} \left|\mathbb{E}_{\mu^{[[k-1]]}}(F|I(T^{[[k-1]]}))\right|^2 d\mu^{[[k-1]]} \\ &\geq \Big| \int_{X^{[[k-1]]}} F d\mu^{[[k-1]]} \Big|^2,\end{aligned}$$

όπου θέσαμε $F(x) = \prod_{\varepsilon\in[[k-1]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} f(x_\varepsilon)$ για $x \in X^{[[k-1]]}$. Από αυτές τις ανισότητες συμπεραίνουμε ότι οι εργοδικές ημινόρμες είναι καλά ορισμένες και ικανοποιούν την σχέση

$$|||f|||_{k+1} \geq |||f|||_k$$

για οποιοδήποτε φυσικό $k \geq 1$.

Παρατηρούμε ότι ο ορισμός των εργοδικών ημινορμών είναι αρκετά παρόμοιος με τον ορισμό των νορμών Gowers. Μάλιστα, η απόδειξη του γεγονότος ότι οι εργοδικές ημινόρμες είναι όντως ημινόρμες είναι όμοια με την απόδειξη της Πρότασης 1.5.6. Επίσης, έχουμε το ανάλογο της ανισότητας Cauchy-Schwarz-Gowers:

Πρόταση 2.1.3. *Έστω (X, μ, T) ένα σύστημα, k θετικός ακέραιος και $f_\varepsilon \in L^\infty(\mu)$ για $\varepsilon \in [[k]]$. Τότε, ισχύει*

$$\Big| \int_{X^{[[k]]}} \prod_{\varepsilon\in[[k]]} f_\varepsilon d\mu^{[[k]]} \Big| \leqslant \prod_{\varepsilon\in[[k]]} |||f_\varepsilon|||_k. \tag{2.1.3}$$

Τέλος, έχουμε την αναδρομική σχέση για τις εργοδικές ημινόρμες

$$|||f|||_1^2 = \mathbb{E}_{n\in\mathbb{N}} \int T^n f \cdot \overline{f} d\mu \;\; \textit{και} \;\; |||f|||_{k+1}^{2^{k+1}} = \mathbb{E}_{n\in\mathbb{N}} |||T^n f \cdot \overline{f}|||_k^{2^k}, \tag{2.1.4}$$

η οποία θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για έναν διαφορετικό ορισμό.

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σύστημα (X, μ, T) και για $\varepsilon \in [[k]]^*$ η συνάρτηση f_ε ανήκει στον $L^{2^k}(\mu)$. Η εικόνα του $\mu^{[[k]]}$ μέσω της προβολής $X^{[[k]]} \to X$ στην ε-συντεταγμένη είναι το μέτρο μ. Αυτό σε συνδυασμό με την ανισότητα Hölder δίνει

$$\int_{X^{[[k]]}} |h \cdot \prod_{\varepsilon\in[[k]]^*} f_\varepsilon| d\mu^{[[k]]} \leqslant \|h\|_{2^k} \prod_{\varepsilon\in[[k]]^*} \|f_\varepsilon\|_{2^k}$$

για οποιαδήποτε $h \in L^{2^k}(\mu)$. Λόγω δυϊσμού, αυτό μας επιτρέπει να ορίσουμε μια δυϊκή συνάρτηση $D_k(f_\varepsilon, \varepsilon \in [[k]]^*) \in L^{\frac{2^k}{2^k-1}}(\mu)$ που ικανοποιεί την σχέση

$$\int_X h \cdot D_k(f_\varepsilon, \varepsilon \in [[k]]^*) d\mu = \int_{X^{[[k]]}} h \cdot \prod_{\varepsilon\in[[k]]} f_\varepsilon d\mu^{[[k]]}. \tag{2.1.5}$$

Για παράδειγμα, στην περίπτωση $k=1$ (δηλαδή για μία συνάρτηση) έχουμε ότι

$$D_1(f) = \mathbb{E}_\mu(f|I(T)) \tag{2.1.6}$$

από τον ορισμό της δεσμευσμένης μέσης τιμής μιας συνάρτησης. Επίσης, με $D_k(f)$ θα συμβολίζουμε την συνάρτηση $D_k(\mathcal{C}^{|\varepsilon|}f, \varepsilon \in [[k]]^*)$. Ο παραπάνω ορισμός είναι αρκετά χρήσιμος για τον χαρακτηρισμό των παραγόντων $\mathcal{Z}_k$ που θα ορίσουμε στη συνέχεια.

Η βασική ιδέα είναι να ορίσουμε μια σ-άλγεβρα μέσω των ημινορμών $|||\cdot|||_k$ με την ιδιότητα μια συνάρτηση f να είναι ορθογώνια στον $L^2(\mathcal{Z}_k)$ εάν και μόνο εάν $|||f|||_{k+1} = 0$. Αυτή η ιδιότητα, όμως, δεν είναι προφανές ότι ορίζει έναν παράγοντα. Συνεπώς, θα χρησιμοποιήσουμε έναν διαφορετικό ορισμό και θα αποδείξουμε ότι ο παράγοντας $\mathcal{Z}_k$ ικανοποιεί την τελευταία σχέση.

Ορισμός 2.1.4. Έστω ένα σύστημα $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ και k θετικός ακέραιος. Η σ-υποάλγεβρα $\mathcal{Z}_k(X)$ του $\mathcal{X}$ ορίζεται ως η οικογένεια των συνόλων $A \subset X$ για τα οποία υπάρχει ένα σύνολο $B \subset X^{[[k+1]]^*}$ που ικανοποιεί τη σχέση

$$1_A(x_0) = 1_B(\mathbf{x}^*) \textit{ για } \mu^{[[\mathrm{k+1}]]} - \textit{σχεδόν κάθε } \mathbf{x} = (\mathrm{x}_0, \mathbf{x}^*) \in \mathrm{X}^{[[\mathrm{k+1}]]}. \tag{2.1.7}$$

Πόρισμα 2.1.5. *Έστω (X, μ, T) ένα σύστημα, k θετικός ακέραιος, $p \in [1, \infty]$ και $f \in L^p(\mu)$. Τότε η f είναι μετρήσιμη ως προς τον παράγοντα $\mathcal{Z}_k$ εαν και μόνο εάν υπάρχει συνάρτηση $F \in L^p(\mu^{[[k+1]]^*})$ τέτοια ώστε $f(x_0) = F(\mathbf{x}^*)$ για $\mu^{[[k+1]]}$-σχεδόν κάθε $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_0, \mathbf{x}^*)$.*

Οι δυϊκές συναρτήσεις σχετίζονται με τους χαρακτηριστικούς παράγοντες μέσω του επόμενου λήμματος:

Λήμμα 2.1.6. *Έστω (X, μ, T) ένα σύστημα και $f_\varepsilon \in L^\infty(\mu)$ για $\varepsilon \in [[k+1]]^*$. Τότε, η δϋική συνάρτηση $D_k(f_\varepsilon, \varepsilon \in [[k+1]]^*)$ είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{Z}_k$ του συστήματος.*

Οι εργοδικές ημινόρμες χαρακτηρίζουν τους παράγοντες που ορίσαμε στον Ορισμό 2.1.4. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2.1.7. *Έστω ένα σύστημα (X, μ, T) και $f \in L^\infty(\mu)$. Τότε, τα εξής είναι ισοδύναμα:*

(i) $|||f|||_{k+1} = 0$.

(ii) *Για οποιεσδήποτε συναρτήσεις $f_\varepsilon, \varepsilon \in [[k+1]]^*$, ισχύει ότι*

$$\int_X f \cdot D_{k+1}(f_\varepsilon, \varepsilon \in [[k+1]]^*) d\mu = 0.$$

(iii) $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{Z}_k) = 0$.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το (i). Από τον ορισμό των δϋϊκών συναρτήσεων έχουμε ότι

$$\begin{aligned} \Big| \int_X f \cdot D_{k+1}(f_\varepsilon, \varepsilon \in [[k+1]]^*) d\mu \Big| &= \Big| \int_{X^{[[k+1]]}} f \cdot \prod_{\varepsilon \in [[k+1]]^*} f_\varepsilon d\mu^{[[k]]} \Big| \\ &\leqslant |||f|||_{k+1} \prod_{\varepsilon \in [[k+1]]^*} |||f_\varepsilon|||_{k+1} = 0 \end{aligned}$$

και το (ii) έπεται.

Εάν υποθέσουμε ότι ισχύει το (ii) τότε αν θέσουμε $f_\varepsilon = f$ για όλα τα ε παίρνουμε

$$0 = \int_X f \cdot D_{k+1}(f) d\mu = |||f|||_{k+1}^{2^{k+1}}$$

και έπεται το (i).

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει το (ii). Για μια φραγμένη συνάρτηση F στον $X^{[[k]]^\star}$ που έχει τη μορφή

$$F(\mathbf{x}^*) = \prod_{\varepsilon\in[[\mathrm{k}+1]]^*} \mathrm{f}_\varepsilon(\mathrm{x}_\varepsilon),$$

ισχύει

$$\int_{X^{[[k+1]]}} f(x_0)F(\mathbf{x}^*)\mathrm{d}\mu^{[[\mathrm{k}+1]]} = 0.$$

Λόγω γραμμικότητας και πυκνότητας, η τελευταία σχέση ισχύει για κάθε $F \in L^1(\mu^{[[k]]^\star})$. Έστω $h \in L^\infty(\mathcal{Z}_k)$. Από το Πόρισμα 2.1.5 υπάρχει $H \in L^\infty(\mu^{[[k+1]]^\star})$ τέτοια ώστε $h(x_0) = H(\mathbf{x}^\star)$ για $\mu^{[[k+1]]}$-σχεδόν κάθε $\mathbf{x} = (\mathrm{x}_0, \mathbf{x}^\star)$. Έτσι, για $F = H$ παίρνουμε

$$\int_X f(x)h(x)d\mu(x) = \int_{X^{[[k+1]]}} f(x_0)\cdot H(\mathbf{x}^*)\mathrm{d}\mu^{[[\mathrm{k}+1]]}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}.$$

Αφού αυτό ισχύει για όλες τις $h \in L^\infty(\mathcal{Z}_k)$, έχουμε $\mathbb{E}_\mu(f|\mathcal{Z}_k) = 0$.

Τέλος, η συνεπαγωγή (iii) $\Rightarrow$ (ii) έπεται από το Λήμμα 2.1.6. □

Πόρισμα 2.1.8. *Η γραμμική θήκη του συνόλου $\{D_{k+1}(f), f \in L^\infty(\mu)\}$ είναι πυκνός υπόχωρος του $L^1(\mathcal{Z}_k)$.*

Εφόσον οι εργοδικές ημινόρμες σχηματίζουν μια αύξουσα ακολουθία, βλέπουμε εύκολα ότι για ένα σύστημα (X, μ, T) έχουμε ότι η ακολουθία των παραγόντων $\mathcal{Z}_k(X)$ είναι αύξουσα. Επιπλέον, είναι προφανές απο το Θεώρημα 2.1.7 ότι $\mathcal{Z}_k(\mathcal{Z}_k(X)) = \mathcal{Z}_k(X)$. Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε με $Z_k(X)$ το αντίστοιχο σύστημα που είναι παράγοντας του X και με $\mathcal{Z}_k(X)$ την αντίστοιχη σ-υποάλγεβρα του Ορισμού (2.1.4). Επιπλέον, θα λέμε ότι ένα σύστημα είναι τάξης k, εάν ισχύει ότι $Z_k(X) = X$. Μια απλή συνέπεια του Θεωρήματος 2.1.7 είναι ότι για ένα σύστημα τάξης k, η ημινόρμα $|||\cdot|||_{k+1}$ είναι τελικά νόρμα στο σύστημα αυτό και αντίστροφα. Πιο συγκεκριμένα, σε ένα εργοδικό σύστημα, ο παράγοντας $Z_k(X)$ είναι ο μέγιστος παράγοντας του X που είναι σύστημα τάξης k.

Οι παράγοντες $Z_k(X)$ είναι χαρακτηριστικοί για τη σύγκλιση «κυβικών» μέσων όρων γινομένων της μορφής $\prod_{\varepsilon\in[[k]]^*} T^{\underline{h}\cdot\varepsilon} f_\varepsilon$. Η χρησιμότητα των παραγόντων Z_k εμφανίζεται στο εργοδικό θεώρημα δομής που τους συνδέει με nilsequences βαθμού k. Γι' αυτό το λόγο, στις επόμενες ενότητες θα ασχοληθούμε με μια ευρεία κατηγορία συστημάτων που γενικεύουν τις στροφές σε αβελιανές ομάδες σε γενικότερες μηδενοδύναμες ομάδες. Για παράδειγμα, σε ένα σύστημα (X, μ, T) ο παράγοντας Kronecker ορίζεται ως ο μέγιστος παράγοντας (ως προς τον εγκλεισμό) που είναι ισόμορφος με μια στροφή σε μια τοπικά συμπαγή ομάδα. Εάν το σύστημα είναι εργοδικό, τότε ο παράγοντας $Z_1(X)$ είναι ισόμορφος με τον παράγοντα Kronecker [23, Κεφάλαιο 9]. Αυτό δείχνει μια σχέση του παράγοντα Z_1 με μηδενοδύναμες ομάδες τάξης 1. Ανάλογα, οι μηδενοδύναμες ομάδες μεγαλύτερης τάξης είναι ένα φυσιολογικό περιβάλλον στο οποίο βρίσκει εφαρμογή η παραπάνω θεωρία.

2.2 Μηδενοδύναμα συστήματα στην εργοδική θεωρία

Έστω G μια ομάδα Lie. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι απλά συνεκτική (χρησιμοποιώντας την ύπαρξη μιας καθολικής επικάλυψης). Θεωρούμε ένα διακριτό υποσύνολο Γ του G. Το Γ θα λέγεται συ-συμπαγές στην G, εάν το πηλίκο G/Γ είναι συμπαγές (με την τοπολογία που επάγεται στο πηλίκο). Εάν επιπλέον η ομάδα G είναι μηδενοδύναμη τάξης k, θα λέμε ότι το $X = G/\Gamma$ είναι ένα nilmanifold k-βημάτων. Η ομάδα G δρα πάνω στο πηλίκο G/Γ με μεταφορές και γράφουμε αυτή την δράση απλά σαν γινόμενο:

$$(g, x) \to g \cdot x.$$

Για ένα σταθερό g αυτή η δράση θα συμβολίζεται με T_g. Ορίζουμε το μέτρο Haar του X ως το μοναδικό μέτρο πιθανότητας στο X που μένει αναλλοίωτο κάτω από τη δράση της G και θα το συμβολίζουμε με m_X.

Συμβολίζουμε με G_0 τη συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου της ομάδας G. Τότε η εικόνα του $G_0\Gamma$ μέσω της φυσικής προβολής στο G/Γ είναι η συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου e_X. Ένα nilmanifold X μπορεί να έχει διαφορετικές αναπαραστάσεις της μορφής G/Γ (μάλιστα, ο βαθμός μηδενοδυναμίας εξαρτάται από την αντίστοιχη αναπαράσταση). Μπορούμε να επιλέξουμε μια αναπαράσταση G/Γ τέτοια ώστε το G να είναι απλά συνεκτικό. Στις εφαρμογές θα υποθέτουμε αυτήν την συνθήκη εκτός εάν αναφέρουμε ότι χρησιμοποιούμε μια διαφορετική αναπαράσταση.

Θεωρούμε τώρα μια υποομάδα H της G. Η H θα λέγεται ρητή, εάν το σύνολο $\Gamma \cap H$ είναι συ-συμπαγές στην H. Ισοδύναμα, αυτό σημαίνει ότι το σύνολο $Y = H \cdot e_X$ είναι κλειστό στο X. Το Y ταυτίζεται με φυσικό τρόπο με το nilmanifold $H/H \cap \Gamma$ και μπορεί να θεωρηθεί σαν μια υποπολλαπλότητα του X. Έχουμε τον εξής γενικότερο ορισμό για τις υποπολλαπλότητες του X:

Ορισμός 2.2.1. Αν $X = G/\Gamma$ είναι ένα nilmanifold k-βημάτων τότε ένα κλειστό υποσύνολο Y του X λέγεται subnilmanifold εάν υπάρχει $x \in X$ και H κλειστή υποομάδα της G τέτοια ώστε $Y = H \cdot x$.

Η εικόνα ενός subnilmanifold μέσω μιας μεταφοράς είναι και αυτή ένα subnilmanifold.

Ορισμός 2.2.2. Έστω $X = G/\Gamma$ ένα nilmanifold k-βημάτων, μ το μέτρο Haar και $g \in G$. Έστω $T : X \to X$ η απεικόνιση $x \to gx$. Το σύστημα (X, T) ονομάζεται τοπολογικό nilsystem k-βημάτων και η απεικόνιση T είναι μια nilrotation. Αντίστοιχα, το σύστημα (X, μ, T) είναι ένα μετροθεωρητικό nilsystem.

Για παράδειγμα, μια στροφή σε μια αβελιανή ομάδα είναι ένα nilsystem ενός βήματος. Γνωρίζουμε ότι εάν μια στροφή (G, T) σε μια τοπικά συμπαγή αβελιανή ομάδα είναι εργοδική, τότε το σύστημα είναι ελαχιστικό και μονοσήμαντα εργοδικό. Ανάλογο αποτέλεσμα έχουμε και στην περίπτωση των nilsystems.

Πρόταση 2.2.3. *Έστω μ το μέτρο Haar ενός nilsystem (X, T). Εάν το (X, μ, T) είναι εργοδικό, τότε είναι μονοσήμαντα εργοδικό και ελαχιστικό. Αντίστροφα, εάν το τοπολογικό δυναμικό σύστημα είναι ελαχιστικό, τότε είναι μονοσήμαντα εργοδικό.*

Ο περιορισμός ενός nilsystem σε ένα T-αναλλοίωτο subnilmanifold θα λέγεται αντίστοιχα subnilsystem. Η κλειστή τροχιά ενός σημείου σε ένα nilsystem είναι ένα subnilsystem και, αφού, είναι ένα ελαχιστικό σύστημα, θα είναι και μονοσήμαντα εργοδικό. Έτσι, για κάθε συνεχή μιγαδική συνάρτηση f σε ένα nilsystem (X, T) και οποιοδήποτε σημείο $x \in X$, έχουμε από γνωστή πρόταση ότι οι μέσοι όροι

$$\frac{1}{n} \sum_{i<n} f(T^i x)$$

συγκλίνουν καθώς το $n \to \infty$. Μάλιστα, αντί να πάρουμε απλά Cesàro μέσους, μπορούμε να θεωρήσουμε μέσους όρους πάνω από διαστήματα, των οποίων τα μήκη τείνουν στο άπειρο. Τέτοιου είδους ακολουθίες είναι αρκετά χρήσιμες στη συνέχεια. Δίνουμε, λοιπόν, τον εξής ορισμό.

Ορισμός 2.2.4. Μια βασική nilsequence k-βημάτων είναι μια ακολουθία της μορφής $(f(g^n \cdot x))_{n\in\mathbb{Z}}$, όπου fείναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα nilmanifold k-βημάτων $X = G/\Gamma$ που παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, το $g \in G$ και το $x \in X$.

Μια nilsequence k-βημάτων είναι μια ακολουθία που είναι ομοιόμορφο όριο βασικών nilsequences k-βημάτων.

Από την παραπάνω συζήτηση, συμπεραίνουμε ότι οι μέσοι όροι μιας nilsequence συγκλίνουν. Επιπλέον, το σύνολο των nilsequences είναι μια άλγεβρα (με τις κατά σημείο πράξεις). Επίσης, αν $f(n)$ είναι μια nilsequence k-βημάτων, τότε και η ακολουθία $(f(an))_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι nilsequence k-βημάτων.

Η δομή των nilsystems σε σχέση με τους χαρακτηριστικούς παράγοντες περιγράφεται στο εξής θεώρημα:

Θεώρημα 2.2.5. *Έστω k θετικός ακέραιος. Εάν το $X = G/\Gamma$ είναι ένα nilmanifold k-βημάτων, τότε η ημινόρμα $|||f|||_{k+1}$ είναι νόρμα στο χώρο X. Αντίστροφα, εάν στο nilmanifold $(X = G/\Gamma, m_X, T)$ η ημινόρμα $|||f|||_{k+1}$ είναι νόρμα και το Γ δεν περιέχει μια μη τετριμμένη κανονική υποομάδα της G, τότε το X είναι ένα nilmanifold k-βημάτων.*

Πόρισμα 2.2.6. *Ένα nilsystem k-βημάτων είναι ένα σύστημα τάξης k.*

Τέλος, είναι σημαντικό να μελετήσουμε τη συμπεριφορά των nilsystems κάτω απο αντίστροφα όρια. Ας θεωρήσουμε γενικότερα ένα αριθμήσιμο κατευθυνόμενο σύνολο I και μια οικογένεια συστημάτων (X_i, μ_i, T) για κάθε $i \in I$. Για κάθε $i \leqslant j$, υποθέτουμε ότι το X_i είναι παράγοντας του X_j και συμβολίζουμε με $p_{i,j}$ την αντίστοιχη απεικόνιση. Επιπλέον, υποθέτουμε ότι για οποιαδήποτε $i \leqslant j \leqslant k$ ισχύει ότι

$$p_{i,k} = p_{i,j} \circ p_{j,k}.$$

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η οικογένεια των συστημάτων X_i μαζί με τις απεικονίσεις $p_{i,j}$ σχηματίζει ένα αντίστροφο σύστημα. Το αντίστροφο όριο αυτού του συστήματος ορίζεται να είναι ένα σύστημα (X, μ, T) μαζί με απεικονίσεις παράγοντα $p_i : X \to X_i$ που ικανοποιούν τη σχέση $p_i = p_{i,j} \circ p_j$για όλα τα $i \leqslant j$ που ανήκουν στο I και με την επιπλέον ιδιότητα, εάν υπάρχει σύστημα (Y, v, T) με απεικονίσεις $q_i : Y \to X_i$ με την ιδιότητα $q_i = p_{i,j} \circ q_j$ για όλα τα $i \leqslant j$, τότε το σύστημα X είναι παράγοντας του Y. Γράφουμε τότε $(X, \mu, T) = \lim\limits_{\leftarrow}(X_i, \mu_i, T)$.

Θεωρούμε μια ακολουθία i_n στο I με την ιδιότητα για κάθε $i \in I$ να υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο, ώστε να έχουμε $i \leqslant n$. Τότε, η οικογένεια των συστημάτων X_{i_n} μαζί με τις απεικονίσεις p_{i_n,i_k} σχηματίζουν ένα αντίστροφο σύστημα και το αντίστροφο όριο αυτού του συστήματος συμπίπτει με το αντίστροφο όριο του αρχικού συστήματος. Συνεπώς, μπορούμε να υποθέτουμε στη συνέχεια ότι το I είναι το σύνολο $\mathbb{N}$.

Σαν συνέπεια του παραπάνω ορισμού έχουμε για ότι για οποιοδήποτε $1 \leqslant p < \infty$, το σύνολο $\cup_{i\in I}\{f \circ p_i, f \in L^p(\mu_i)\}$ είναι πυκνό στον $L^p(\mu)$. Επίσης, εάν $\mathcal{X}, \mathcal{X}_i$ είναι οι σ-άλγεβρες των συστημάτων X και X_i αντίστοιχα, τότε έχουμε ότι $\mathcal{X} = \bigvee_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{X}_i)$.

Λήμμα 2.2.7. *Ένα αντίστροφο όριο συστημάτων τάξης k είναι σύστημα τάξης k.*

Απόδειξη. Αν $(X,\mu,T) = \varprojlim(X_i,\mu_i,T)$, τότε με τους παραπάνω συμβολισμούς, έχουμε $p_i^{-1}(\mathcal{X}_i) = p^{-1}(\mathcal{Z}_k(X_i)) \subset \mathcal{Z}_k(X)$. Συνεπώς, $\mathcal{X} = \bigvee_{i\in I} p_i^{-1}(\mathcal{X}_i) \subset \mathcal{Z}_k(X)$. Το ζητούμενο έπεται. □

Πρόταση 2.2.8. *Έστω $(X,\mu,T) = \varprojlim(X_i,\mu_i,T)$ ένα αντίστροφο όριο εργοδικών συστημάτων. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό k, ισχύει*

$$Z_k(X) = \varprojlim Z_k(X_i).$$

Απόδειξη. Συμβολίζουμε με $p_i, p_{i,j}$ τις απεικονίσεις μεταξύ παραγόντων, όπως στον ορισμό του αντιστρόφου ορίου, και με q_i την απεικόνιση παραγόντων $X_i \to Z_k(X_i)$. Η απεικόνιση $p_{i,j}$ επάγει μια απεικόνιση παραγόντων $p_{i,j,k} : Z_k(X_j) \to Z_k(X_i)$ και με αυτές τις απεικονίσεις, η οικογένεια των συστημάτων $Z_k(X_i)$ σχηματίζει ένα αντίστροφο σύστημα και έστω Z το αντίστροφο όριο αυτού του συστήματος. Το Z είναι σύστημα τάξης k από το Λήμμα 2.2.7. Επειδή το $Z_k(X_i)$ είναι παράγοντας του X_i, έπεται ότι το Z είναι παράγοντας του X, και άρα το Z είναι παράγοντας του $Z_k(X)$.

Μένει να δείξουμε ότι το $Z_k(X)$ είναι παράγοντας του Z. Έστω $q : X \to Z_k(X)$ η απεικόνιση παράγοντα. Τότε, για $f \in L^{2^{k+1}-1}(\mu)$, η $D_{k+1}(f)$ είναι μετρήσιμη ως προς την σ-άλγεβρα $\mathcal{Z}_k(X)$ και η κλειστή γραμμική θήκη αυτών των συναρτήσεων είναι πυκνή στο $L^1(\mathcal{Z}_k)$. Άρα αυτές οι συναρτήσεις παράγουν την σ-άλγεβρα $\mathcal{Z}_k(X)$ και αρκεί να δείξουμε ότι για μια τέτοια συνάρτηση f, η συνάρτηση $D_{k+1}(f)$ είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα $\bigvee_i p_i^{-1}(\mathcal{Z}_k(X_i))$.

Λόγω πυκνότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f έχει τη μορφή $g\circ p_i$ για κάποιο $i \in I$. Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι $D_{k+1}(f) = D_{k+1}(g) \circ p_i$. Η $D_{k+1}(g)$ είναι μετρήσιμη ως προς τη σ-άλγεβρα $\mathcal{Z}_k(X_i)$ και άρα η f είναι μετρήσιμη ως προς την $p_i^{-1}(\mathcal{Z}_k(X_i))$ και το ζητούμενο έπεται. □

Συνδυάζοντας το Λήμμα 2.2.7 και το Πόρισμα 2.2.6 έχουμε το εξής:

Πόρισμα 2.2.9. *Κάθε αντίστροφο όριο εργοδικών nilsystems k-βημάτων είναι σύστημα τάξης k.*

Σχόλιο 2.2.10. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να ορίσουμε αντίστροφα όρια τοπολογικών δυναμικών συστημάτων, όπου οι απεικονίσεις μεταξύ μετροθεωρητικών συστημάτων αντικαθίστανται με απεικονίσιες μεταξύ τοπολογικών συστημάτων. Στην περίπτωση των εργοδικών nilsystems θα χρησιμοποιούμε οποιονδήποτε από τους δύο ορισμούς όταν αναφερόμαστε σε ένα δυναμικό σύστημα (εφόσον είναι πρακτικά ισοδύναμοι).

2.3 Το εργοδικό θεώρημα δομής και θεωρήματα διάσπασης

Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι αντίστροφα όρια από nilsystems k-βημάτων είναι συστήματα τάξης k. Το βασικό θεώρημα δομής αυτής της ενότητας ισχυρίζεται ότι ισχύει και το αντίστροφο. Πιο συγκεκριμένα:

Θεώρημα 2.3.1. *Έστω k φυσικός αριθμός. Ένα εργοδικό σύστημα (X,μ,T) είναι σύστημα τάξης k, αν και μόνο αν είναι αντίστροφο όριο nilsystems k-βημάτων.*

Εφόσον για κάθε εργοδικό σύστημα (X,μ,T), ο παράγοντας $Z_k(X)$ είναι ένα σύστημα τάξης k, τότε, σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, θα είναι αντίστροφο όριο από k-βημάτων nilsystems. Για μη εργοδικά συστήματα το θεώρημα (2.3.1) δεν ισχύει (υπάρχουν, ωστόσο, ανάλογα θεωρήματα σε αυτή την περίπτωση). Για την απόδειξη του Θεωρήματος 2.3.1, βλέπε το [23, Κεφάλαια 18-20].

Σαν συνέπεια του Θεωρήματος 2.3.1 μπορούμε να πάρουμε κάποια θεωρήματα «διάσπασης» για συναρτήσεις σε εργοδικά συστήματα.

Λήμμα 2.3.2. *Έστω (X,μ,T) ένα εργοδικό σύστημα τάξης k, $p\in[1,\infty)$ και $\mathcal{F}$ μια πεπερασμένη οικογένεια συναρτήσεων στον $L^p(\mu)$. Για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει ένα nilsystem k-βημάτων $Y=Y(\varepsilon)$ και μια συνεχής απεικόνιση παράγοντα $q: X\to Y$ έτσι ώστε για κάθε $f\in\mathcal{F}$ να έχουμε μια διάσπαση της μορφής*

$$f=f_{\mathrm{nil}}\circ q+f_{\mathrm{err}},$$

όπου η συνάρτηση f_{nil} είναι συνεχής συνάρτηση στο Y και $\|f_{\mathrm{err}}\|_p<\varepsilon$. Εάν επιπλέον $f\in L^\infty(\mu)$, τότε μπορούμε να πάρουμε την f_{nil} έτσι ώστε να ισχύει $\|f_{\mathrm{nil}}\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$.

Απόδειξη. Γράφουμε το σύστημα X ως $(X,\mu,T)=\varprojlim(X_i,\mu_i,T)$ σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.1 και έστω $q_i: X\to X_i$ οι αντίστοιχες απεικονίσεις παράγοντα (μπορούμε να θεωρήσουμε ότι είναι συνεχείς). Για αρκετά μεγάλο i, έχουμε

$$\|f-\mathbb{E}_\mu(f|X_i\circ q_i)\|_p<\frac{\varepsilon}{2}$$

για κάθε $f\in\mathcal{F}$. Για ένα τέτοιο i, ορίζουμε $(Y,v,T)=(X_i,\mu_i,T)$ και θέτουμε $q=q_i$. Ορίζουμε $f_0=\mathbb{E}_\mu(f|X_i)$ και επιλέγοντας $f_{\mathrm{nil}}\in C(Y)$ με $\|f_0-f_{\mathrm{nil}}\|_{L^p(v)}<\varepsilon/2$ έχουμε τη ζητούμενη διάσπαση. $\square$

Αν έχουμε ότι $f\in L^\infty(\mu)$, τότε $\|f_0\|_{L^\infty(v)}\leqslant\|f\|_{L^\infty(\mu)}$ και μπορούμε να επιλέξουμε την f_{nil} έτσι ώστε $\|f_{\mathrm{nil}}\|_\infty\leqslant\|f\|_{L^\infty(\mu)}$.

Πρόταση 2.3.3. *Έστω (X,μ,T) ένα εργοδικό σύστημα, $k\in\mathbb{N}$, $p\in[1,\infty)$ και $\mathcal{F}$ μια οικογένεια συναρτήσεων στον $L^p(\mu)$. Τότε, για κάθε $\varepsilon>0$, υπάρχει ένα nilsystem k-βημάτων $Y=Y(\varepsilon)$ και μια απεικόνιση παράγοντα $q: X\to Y$ τέτοια ώστε κάθε $f\in\mathcal{F}$ να δέχεται μια διάσπαση της μορφής*

$$f=f_{\mathrm{nil}}\circ q+f_{\mathrm{un}}+f_{\mathrm{err}}$$

έτσι ώστε:

(i) *η συνάρτηση f_{nil} είναι μια συνεχής συνάρτηση στο Y,*

(ii) *η συνάρτηση $f_{\mathrm{un}}\in L^\infty(\mu)$ να ικανοποιεί την $|||f_{\mathrm{un}}|||_{k+1}=0$, και*

(iii) *η συνάρτηση $f_{\mathrm{err}}\in L^p(\mu)$ ικανοποιεί την $\|f_{\mathrm{err}}\|_p<\varepsilon$.*

Αν επιπλέον υποθέσουμε ότι $f\in L^\infty(\mu)$, τότε $\|f_{\mathrm{nil}}\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$ και $\|f_{\mathrm{nil}}\circ q+f_{\mathrm{err}}\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$.

Απόδειξη. Έστω $Z_k(X)$ ο παράγοντας τάξης k και $q_k: X\to Z_k(X)$ η αντίστοιχη απεικόνιση παράγοντα. Για $f\in\mathcal{F}$ θέτουμε $f_{\mathrm{un}}=f-\mathbb{E}_\mu(F|Z_k(X))$ οπότε θα ισχύει $|||f_{\mathrm{un}}|||_{k+1}=0$. Εφαρμόζοντας τώρα το Λήμμα 2.3.2 στην οικογένεια συναρτήσεων $\{\mathbb{E}_\mu(F|Z_k(X))\}$ και το σύστημα $Z_k(X)$ παίρνουμε το ζητούμενο. $\square$

Χρησιμοποιώντας nilsequences, μπορούμε να πάρουμε ανάλογα θεωρήματα για μη εργοδικά συστήματα.

Θεώρημα 2.3.4. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και (X, μ, T) ένα σύστημα. Για όλα τα $p \in [1, \infty)$ και $\varepsilon > 0$, κάθε $f \in L^\infty(\mu)$ δέχεται μια διάσπαση της μορφής*

$$f = f_{\text{un}} + f_{\text{nil}} + f_{\text{err}},$$

όπου:

(i) $|||f_{\text{un}}|||_{k+1} = 0$,

(ii) *για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, η ακολουθία $(f_{\text{nil}}(T^n x))_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια nilsequence k-βημάτων, και*

(iii) *η $f_{\text{err}} \in L^\infty(\mu)$ ικανοποιεί την $\|f_{\text{err}}\|_p < \varepsilon$.*

Επιπλέον, $\|f_{\text{nil}}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ και $\|f_{\text{nil}} + f_{\text{err}}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.

Απόδειξη. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $|f| \leqslant 1$. Έστω (Z_k, m_k, T) ο παράγοντας τάξης k του X και p_k η αντίστοιχη απεικόνιση παράγοντα. Ορίζουμε $g = \mathbb{E}_\mu(f|Z_k)$ και $f_{\text{un}} = f - g \circ p_k$. Τότε $\|g\|_{L^\infty(m_k)} \leqslant 1$ και $|||f_{\text{un}}|||_{k+1} = 0$.

Αφού το Z_k είναι σύστημα τάξης k, έχουμε λόγω πυκνότητας ότι υπάρχει γραμμικός συνδυασμός δυϊκών συναρτήσεων

$$h = \sum_{i=1}^{m} c_i D_k(h_i),$$

όπου $c_i \in \mathbb{C}$ και $h_i \in L^\infty(m_k)$ για όλα τα $1 \leqslant i \leqslant m$, με την ιδιότητα να ισχύει $\|g - h\|_{L^1(m_k)} < \frac{\varepsilon^p}{2}$. Ορίζουμε την $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$F(t) = \frac{t}{max(1, |t|)}.$$

Για $z \in Z_k$ ορίζουμε $g_{\text{nil}}(z) = F(h(z))$, $g_{\text{err}} = g - g_{\text{nil}}$, $f_{\text{nil}} = g_{\text{nil}} \circ p_k$ και $f_{\text{err}} = g_{\text{err}} \circ p_k$. Τότε $|f_{\text{nil}}| \leqslant 1$ και $|f_{\text{err}}| \leqslant 2$.

Για κάθε $x \in X$, αφού $|g(x)| \leqslant 1$, έχουμε ότι $|g_{\text{err}}(x)| \leqslant |g(x) - h(x)|$. Άρα, $\|f_{\text{err}}\|_{L^1(\mu)} = \|g_{\text{err}}\|_{L^1(m_k)} \leqslant \|f - h\|_{L^1(\mu)} < \frac{\epsilon^p}{2}$. Αφού $|f_{\text{err}}| \leqslant 2$, παίρνουμε $\|f_{\text{err}}\|_p < \varepsilon$.

Ισχυρισμός 2.3.5. *Για m_k-σχεδόν κάθε $z \in Z_k$, η ακολουθία $n \to D_k(h_i)(T^n z)$ είναι nilsequence k-βημάτων.*

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε γενικότερα ότι έχουμε ένα σύστημα (X, μ, T) και $f \in L^\infty(\mu)$. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι μια φραγμένη Borel μετρήσιμη συνάρτηση και έστω, επίσης, $\mu = \int_\Omega \mu_\omega dP$ η εργοδική διάσπαση του μέτρου μ. Ορίζουμε

$$A = \{x \in X, (D_k(f)(T^n x))_{n\in\mathbb{Z}} \text{ είναι nilsequence } k\text{-βημάτων}\}.$$

Η απεικόνιση $x \to (D_k(f)(T^n x))_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια Borel απεικόνιση από τον X στον $\ell^\infty(\mathbb{Z})$, όπου εφοδιάζουμε τον $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ με την τοπολογία της κατά σημείο σύγκλισης.[2]

[2] Μπορεί να δειχθεί ότι το σύνολο των nilsequences είναι Borel υποσύνολο του $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ [23, Κεφάλαιο 16]. Άρα, το σύνολο A είναι Borel υποσύνολο του X.

Συμβολίζουμε, επίσης, με $D_{k,\mu_\omega}(f)$ την δυϊκή συνάρτηση για την f, όταν βλέπουμε την f σαν συνάρτηση στο σύστημα (X, μ_ω, T). Αρκεί να αποδείξουμε ότι $\mu(A) = 1$ ή ισοδύναμα ότι για P-σχεδόν κάθε ω ισχύει ότι $\mu_\omega(A) = 1$. Όμως, για P-σχεδόν κάθε $\omega \in \Omega$, έχουμε ότι $D_{k,\mu_\omega}(f)(x) = D_k(f)(x)$ για μ_ω-σχεδόν κάθε $x \in X$. Έτσι, αρκεί να θεωρήσουμε την περίπτωση όπου το σύστημα (X, μ, T) είναι εργοδικό.

Από το Θεώρημα 2.3.1 το X είναι αντίστροφο όριο εργοδικών nilsystems k-βημάτων. Η συνάρτηση $D_k(f)$ είναι σχεδόν παντού ίση με μία συνεχή συνάρτηση. Επειδή το (X, T) είναι αντίστροφο όριο ελαχιστικών nilsystems k-βημάτων, έχουμε ότι η ακολουθία $n \to D_k(f)(T^n x)$ είναι ομοιόμορφο όριο βασικών nilsequences k-βημάτων και ο ισχυρισμός αποδείχθηκε. $\square$

Χρησιμοποιώντας τον ισχυρισμό, επειδή οι nilsequences σχηματίζουν μία άλγεβρα, έχουμε ότι η ακολουθία $n \to h(T^n z)$ είναι και αυτή μια nilsequence για m_k-σχεδόν κάθε $z \in Z_k$. Άρα, για m_k-σχεδόν κάθε $z \in Z_k$ η $n \to g_{\text{nil}}(T^n z)$ είναι μια nilsequence k-βημάτων. Τελικά, η ακολουθία $(f_{\text{nil}}(T^n x))_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια nilsequence k-βημάτων για μ-σχεδόν κάθε x. $\square$

Πόρισμα 2.3.6. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και (X, μ, T) ένα σύστημα. Τότε, για κάθε $\varepsilon > 0$, κάθε $f \in L^\infty(\mu)$ δέχεται μια διάσπαση $f = f_{\text{nil}} + f_{\text{un}}$ τέτοια ώστε:*

(i) *για μ-σχεδόν κάθε $x \in X$, η ακολουθία $(f_{\text{nil}}(T^n x))_{n\in\mathbb{Z}}$ είναι μια nilsequence k-βημάτων, και*

(ii) *η συνάρτηση $f_{\text{nil}} \in L^\infty(\mu)$ ικανοποιεί την σχέση $|||f_{\text{un}}|||_{k+1} < \varepsilon$.*

Επιπλέον, έχουμε $\|f_{\text{nil}}\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$.

Στη συνέχεια παρουσιάζουμε ένα θεώρημα διάσπασης για την ακολουθία συσχετισμών μιας συνάρτησης. Αρχικά, δίνουμε έναν ορισμό.

Ορισμός 2.3.7. Έστω $a_n, n \in \mathbb{Z}$ μια φραγμένη ακολουθία. Λέμε ότι η a_n τείνει στο 0 ως προς την ομοιόμορφη πυκνότητα, αν

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{M\in\mathbb{Z}} \frac{1}{M} \sum_{n=M}^{M+N-1} |a_n| = 0.$$

Θεώρημα 2.3.8. *Έστω (X, μ, T) ένα σύστημα και $F_1, \ldots, F_k \in L^\infty(\mu)$. Έστω, επίσης, $h_1, \ldots, h_k$ ακέραιοι. Τότε έχουμε μία διάσπαση*

$$\int_X F_1(T^{h_1 n}x) \cdots F_k(T^{h_k n}x) d\mu(x) = f_1(n) + f_2(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, όπου η ακολουθία $f_1 : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ είναι μια nilsequence και η ακολουθία $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ είναι μια ακολουθία που τείνει στο 0 ως προς την ομοιόμορφη πυκνότητα.

Μια γενίκευση αυτού του θεωρήματος, που αφορά σε γενικότερες πολυωνυμικές ακολουθίες, αποδείχθηκε στο [25].

2.4 Πολυωνυμικές ακολουθίες σε nilmanifolds

Σε αυτή την ενότητα κατασκευάζουμε την ομάδα των πολυωνυμικών ακολουθιών σε ένα nilmanifold. Γι' αυτήν την κατασκευή υποθέτουμε ότι μας δίνεται μια ομάδα G και έστω $G_j = [G, G_{j-1}]$.

Ορισμός 2.4.1. Έστω k θετικός ακέραιος. Ένα φιλτράρισμα $G^\circ = (G^{(j)})_{j\geq 0}$ βαθμού k είναι μια ακολουθία υποομάδων $G^{(0)}, \ldots, G^{(k+1)}$ της G με τις εξής ιδιότητες:

(i) $G^{(0)} = G$ και $G^{(k+1)} = \{e_G\}$,

(ii) για κάθε $j \geq 0$, ισχύει $G^{(j+1)} \subset G^{(j)}$, και

(iii) για κάθε $i, j \geq 0$ ισχύει $[G^{(i)}, G^{(j)}] \subset G^{(i+j)}$.

Από τον ορισμό συμπεραίνουμε εύκολα ότι οι υποομάδες $G^{(j)}$ είναι κανονικές υποομάδες της G. Επίσης, η ομάδα $G^{(1)}$ είναι μηδενοδύναμη τάξης k. Ένα απλό παράδειγμα φιλτραρίσματος σε μια ομάδα είναι η κατώτερη κεντρική σειρά. Εάν H είναι μια υποομάδα της G, τότε η ακολουθία $(H \cap G^{(j)})_{j\geq 0}$ είναι ένα φιλτράρισμα της ομάδας H (το οποίο θα συμβολίζουμε με H°). Αν η H είναι κανονική υποομάδα της G, τότε η ακολουθία $(HG^{(j)}/H)_{j\geq 0}$ είναι ένα φιλτράρισμα στο πηλίκο G/H.

Συμβολίζουμε με S το γνωστό shift στον χώρο ακολουθιών $G^{\mathbb{Z}}$. Για $a \in G^{\mathbb{Z}}$, ορίζουμε

$$\partial(a)(n) = a(n+1)a(n)^{-1}$$

για $n \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε ∂^k για τη σύνθεση $\partial \circ \cdots \circ \partial$ (k φορές). Επίσης, αν $h \in \mathbb{Z}$ συμβολίζουμε με $\partial_h(a)$ την ακολουθία $n \to a(n+h)a(n)^{-1}$.

Ορισμός 2.4.2. Μια πολυωνυμική ακολουθία στην ομάδα G με συντελεστές στο G° είναι μια ακολουθία $a = (a(n)) \in G^{\mathbb{Z}}$ τέτοια ώστε για κάθε $m \geq 0$ η ακολουθία $\partial^m(a)$ να παίρνει τιμές στην ομάδα $G^{(m)}$. Ο χώρος των πολυωνυμικών ακολουθιών με συντελεστές στο G° συμβολίζεται με $\mathrm{Poly}(G^\circ)$.

Θεώρημα 2.4.3. *Το σύνολο $\mathrm{Poly}(G^\circ)$, όπως ορίστηκε παραπάνω είναι μια υποομάδα της $G^{\mathbb{Z}}$ με τον κατά σημείο πολλαπλασιασμό. Είναι αναλλοίωτη από το shift S και για οποιουσδήποτε ακεραίους $h_1, \ldots, h_m$, η ακολουθία $\partial_{h_1} \circ \cdots \circ \partial_{h_m}$ παίρνει τιμές στο $G^{(m)}$.*

Μπορούμε να ορίσουμε τις πολυωνυμικές ακολουθίες με ένα διαφορετικό τρόπο, ο οποίος δίνει και μια κλειστή μορφή για τους όρους της ακολουθίας. Αν έχουμε μια ομάδα G και ένα φιλτράρισμα G° βαθμού k, τότε η ομάδα $\mathrm{Poly}(G^\circ)$ είναι η υποομάδα της $G^{\mathbb{Z}}$ που αποτελείται απο ακολουθίες της μορφής

$$a(n) = a_0 a_1^n a_2^{\binom{n}{2}} \cdots a_k^{\binom{n}{k}}, \tag{2.4.1}$$

όπου για κάθε $0 \leqslant m \leqslant k$, το $a_m \in G^{(m)}$.

Όλες οι ακολουθίες της μορφής (2.4.1) ανήκουν στο $\mathrm{Poly}(G^\circ)$. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε ότι το σύνολο των ακολουθιών αυτής της μορφής σχηματίζει ομάδα, οπότε αρκεί να το αποδείξουμε για την ακολουθία $a_m^{\binom{n}{m}}$, όπου $a_m \in G^{(m)}$. Αυτό είναι ένας εύκολος υπολογισμός.

Αντίστροφα, χρησιμοποιούμε επαγωγή για να δείξουμε ότι κάθε ακολουθία $a \in \mathrm{Poly}(G^\circ)$ έχει τη μορφή (2.4.1). Η περίπτωση $k = 1$ είναι προφανής. Έστω, λοιπόν, ότι ισχύει το ζητούμενο για το $k-1$. Θέτουμε $H = G/G^{(s)}$ και έστω $p : G \to H$ η φυσική προβολή. Θέτοντας $H^{(i)} = p(G^{(i)})$ παίρνουμε ένα φιλτράρισμα βαθμού $k-1$ για την H, δηλαδή το $H^\circ = (H^{(i)})$. Η ακολουθία $p \circ a$ ανήκει στο $\mathrm{Poly}(H^\circ)$ και από την επαγωγική υπόθεση μπορούμε να γράψουμε

$$p(a(n)) = b_0 b_1^n \cdots b_{k-1}^{\binom{n}{k-1}}.$$

Για $0 \leqslant m \leqslant k-1$ επιλέγουμε $c_m \in G^{(m)}$ έτσι ώστε $p(c_m) = b_m$ και ορίζουμε την ακολουθία

$$x(n) = c_0 c_1^n \cdots c_{k-1}^{\binom{n}{k-1}}$$

που είναι πολυωνυμική, όπως δείξαμε παραπάνω. Εφόσον $p(a(n)) = p(x(n))$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, υπάρχει $y \in (G^{(k)})^{\mathbb{Z}}$ τέτοια ώστε $a = xy$ και άρα η y ανήκει στην ομάδα $\mathrm{Poly}(G^\circ)$. Τότε, η y ανήκει στην ομάδα $\mathrm{Poly}(G^{(k)\circ})$, όπου $G^{(k)\circ}$ είναι το φιλτράρισμα που επάγει η G στην υποομάδα $G^{(k)}$.

Η ομάδα $G^{(k)}$ είναι αβελιανή, εφόσον $[G^{(k)}, G^{(k)}] \subset G^{(2k)} \subset G^{(k+1)} = \{e_G\}$. Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι υπάρχουν $d_1, \ldots, d_k \in G^{(k)}$ ώστε $y(n) = d_0 d_1^n \cdots d_k^{\binom{n}{k}}$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ και, κατά συνέπεια,

$$a(n) = c_0 c_1^n \cdots c_{k_1}^{\binom{n}{k-1}} d_0 d_1^n \cdots d_K^{\binom{n}{k}}.$$

Για $i = 1, 2, \ldots, k-1$ και $j = 0, 1, \ldots, k-1$ το $[c_i, d_j] \in G^{(i+k)} = \{e_G\}$ και άρα τα c_i, d_j μετατίθενται. Έχουμε τελικά

$$a(n) = (c_0 d_0)(c_1 d_1)^n \cdots (c_{k-1} d_{k-1})^{\binom{n}{k-1}} d_k^{\binom{n}{k}}.$$

Έστω τώρα $X = G/\Gamma$ ένα nilmanifold. Έστω, επίσης, G° ένα φιλτράρισμα της ομάδας G. Το φιλτράρισμα G° θα λέγεται ρητό, εάν κάθε υποομάδα $G^{(j)}$ είναι ρητή, για κάθε $j \geq 0$. Για παράδειγμα, η κάτω κεντρική σειρά μιας ομάδας είναι ένα ρητό φιλτράρισμα. Σε αυτήν την περίπτωση, το nilmanifold X θα λέγεται φιλτραρισμένο.

Αν $a = (a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι μια πολυωνυμική ακολουθία με συντελεστές στο G°, τότε η ακολουθία $b(n) = a(n) \cdot e_X$ θα λέγεται πολυωνυμική τροχιά στο X. Το σύνολο των πολυωνυμικών τροχιών του X συμβολίζεται με $\mathrm{Poly}(X, G^\circ)$.

Μπορούμε να ορίσουμε το σύνολο $\mathrm{Poly}(X, G^\circ)$ και μέσω της δράσης της ομάδας $\mathrm{Poly}(G^\circ)$ στην πολλαπλότητα X με μεταφορές. Έχουμε ότι $\mathrm{Poly}(X, G^\circ) = \mathrm{Poly}(G^\circ) \cdot e_{X^{\mathbb{Z}}}$. Η σταθεροποιούσα ομάδα του $e_{X^{\mathbb{Z}}}$ αυτής της δράσης είναι η $\mathrm{Poly}(\Gamma^\circ)$, οπότε μπορούμε να θεωρήσουμε ότι

$$\mathrm{Poly}(X, G^\circ) = \mathrm{Poly}(G^\circ)/\mathrm{Poly}(\Gamma^\circ).$$

Αποδεικνύεται ότι το σύνολο $\mathrm{Poly}(X, G^\circ)$ μπορεί να αποκτήσει τη δομή ενός nilmanifold και, μαζί με το shift S, αποκτά τη δομή ενός nilsystem, το οποίο ονομάζουμε ως το nilsystem των πολυωνυμικών τροχιών. Εάν τώρα $a = (a(n))_{n \in \mathbb{Z}}$ είναι μια πολυωνυμική ακολουθία με συντελεστές στο G° και F είναι μια συνεχής συνάρτηση στο X, τότε η ακολουθία $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$f(n) = F(a(n) \cdot e_X)$$

θα λέμε ότι είναι μια πολυωνυμική nilsequence στο φιλτραρισμένο nilmanifold $(X = G/\Gamma, G^{\circ})$.

Έστω $p : \mathrm{Poly}(X, G^{\circ}) \to X$ η απεικονίση $a \to a(0)$. Θέτοντας $b(n) = a(n) \cdot e_X$, βλέπουμε ότι η ακολουθία $(b(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ ανήκει στο $\mathrm{Poly}(X, G^{\circ})$ και για κάθε $n \in \mathbb{Z}$ ισχύει

$$a(n) = p(S^n b).$$

Σε αυτήν την περίπτωση λέμε ότι η πολυωνυμική τροχιά $(a(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ υψώνεται σε μια γραμμική τροχιά $(S^n b)_{n\in\mathbb{Z}}$. Αν f είναι η ακολουθία $(F(a(n) \cdot e_X))_{n\in\mathbb{Z}}$ που ορίσαμε παραπάνω, τότε ισχύει

$$f(n) = F \circ p(S^n b)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Αυτό δείχνει ότι κάθε πολυωνυμική nilsequence μπορεί να θεωρηθεί ως μια απλή βασική nilsequence σε κάποιο nilsystem. Συνεπώς, οι πολυωνυμικές nilsequences δεν είναι «γενικότερες» από τις απλές nilsequences.

2.5 Οι νόρμες Gowers και η σχέση τους με τις nilsequences

Οι νόρμες ομοιομορφίας Gowers, όπως ορίστηκαν στην Ενότητα 1.5, παρουσιάζουν αρκετές ομοιότητες με τις εργοδικές ημινόρμες (καθώς και τις ημινόρμες ομοιομορφίας που θα ορίσουμε στο Κεφάλαιο 4). Είδαμε ότι για την νόρμα $\|f\|_{U^2(G)}$, για μια συνάρτηση f σε μια αβελιανή ομάδα G, έχουμε μια σχέση με τους συντελεστές Fourier της f. Για μεγαλύτερης τάξης νόρμες δεν υπάρχει κάποια τέτοια σχέση. Το αντίστροφο θεώρημα για τις νόρμες Gowers συνδέει τις νόρμες Gowers με nilsequences. Πιο συγκεκριμένα, εάν μια συνάρτηση f έχει αρκετά μεγάλη νόρμα Gowers , τότε μπορούμε να βρούμε μια nilsequence φραγμένης πολυπλοκότητας με την οποία η f δεν «συσχετίζεται».

Μπορεί να δειχθεί ότι υπάρχουν (μέχρι ισομορφισμού) το πολύ αριθμήσιμα διαφορετικά nilmanifolds k-βημάτων. Έστω $(X_m)_{m\in\mathbb{N}}$ μια αρίθμησή τους και έστω $X_m = G_m/\Gamma_m$. Εφοδιάζουμε το G_m με μια μετρική Riemann, και έστω d_m η αντίστοιχη μετρική που επάγεται στο πηλίκο.

Έστω F μια Lipschitz συνάρτηση στο X_m . Ορίζουμε την Lipschitz νόρμα της F μέσω της σχέσης

$$\|F\|_{Lip} = \sup_{x\in X_m} |F(x)| + \sup_{x\neq x'} \frac{|F(x) - F(x')|}{d_m(x, x')}.$$

Μια nilsequence k-βημάτων πολυπλοκότητας $\leqslant m$ είναι μια ακολουθία της μορφής

$$f(n) = F(g^n \cdot e_X),$$

όπου η F είναι μια Lipschitz συνάρτηση στο X με $\|F\|_{Lip} \leqslant m$.

Θεώρημα 2.5.1. *Για κάθε φυσικό k και κάθε $\varepsilon > 0$, υπάρχει ένα $M \in \mathbb{N}$ και ένα $\delta > 0$, έτσι ώστε για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό N, εάν η συνάρτηση $g : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{C}$ έχει μέτρο μικρότερο του 1 και ικανοποιεί την ανισότητα*

$$\|g\|_{U^{k+1}(\mathbb{Z}_N)} \geq \varepsilon,$$

τότε υπάρχει μια nilsequence f πολυπλοκότητας $\leqslant M$ έτσι ώστε

$$\Big|\frac{1}{N}\sum_{n=0}^{N-1} f(n)g(n)\Big| \geq \delta.$$

Μπορούμε μέσω του αντίστροφου θεωρήματος να πάρουμε ένα θεώρημα διάσπασης για τις νόρμες Gowers:

Θεώρημα 2.5.2. *Έστω k θετικός ακέραιος και $F : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$. Για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει φυσικός αριθμός $M = M(\delta)$ έτσι ώστε για κάθε $N \in \mathbb{N}$, οποιαδήποτε συνάρτηση $f : \mathbb{Z}_N \to \mathbb{R}$ με $|f| \leqslant 1$ να δέχεται μια διάσπαση*

$$f(n) = f_1(n) + f_2(n) + f_3(n)$$

για κάθε $n \in \mathbb{Z}_N$, όπου:

(i) *η f_1 είναι μια nilsequence πολυπλοκότητας $\leqslant M$,*

(ii) *η συνάρτηση f_2 ικανοποιεί τη σχέση $\|f_2\|_{U^{k+1}(\mathbb{Z}_N)} \leqslant \frac{1}{F(m)}$, και*

(iii) *η συνάρτηση f_3 ικανοποιεί την $\|f_3\|_2 \leqslant \delta$.*

Το αντίστροφο θεώρημα αποδείχτηκε στην περίπτωση $k = 3$ στο [15], και στη γενική περίπτωση στο [18]. Το αντίστροφο θεώρημα για τις νόρμες Gowers αποδείχτηκε για συναρτήσεις ορισμένες στο διάστημα $[N]$, που δεν είναι ομάδα. Γι' αυτές ορίστηκε μια διαφορετική νόρμα: αν $f : [N] \to \mathbb{C}$ είναι μια συνάρτηση και $N' \geq 2^d N$ είναι ένας φυσικός, τότε επεκτείνουμε με μηδενικά την f σε μια συνάρτηση f' στο $\mathbb{Z}_N$ και ορίζουμε

$$\|f\|_{U^d[N]} = \frac{\|f'\|_{U^d(\mathbb{Z}_{N'})}}{\|1_{[N]}\|_{U^d(\mathbb{Z}_{N'})}}.$$

Στις αποδείξεις του Κεφαλαίου 3 θα χρειαστούμε ένα διαφορετικό θεώρημα διάσπασης που σχετίζεται με τις νόρμες Gowers [13]. Για τον ορισμό των ψευδοτυχαίων μέτρων, παραπέμπουμε στο παράρτημα.

Θεώρημα 2.5.3 (Θεώρημα πυκνού μοντέλου)**.** *Έστω $k \geq 1$ και έστω $N' \geq N \geq 1$ ακέραιοι. Έστω ότι το v είναι ένα $(s+2)$-ψευδοτυχαίο μέτρο στο $\mathbb{Z}_{N'}$ και $f : \mathbb{Z}_{N'} \to \mathbb{R}$ μια συνάρτηση με $f(n) \leqslant v(n)$. Τότε, η f μπορεί να διασπαστεί ως $f = f_1 + f_2$ όπου:*

(i) $\sup_{n \in \mathbb{Z}_{N'}} |f_1(n)| \leqslant 1$, *και*

(ii) $\|f_2\|_{U^{s+1}(\mathbb{Z}_{N'})} = o(1)$.

Εάν επιπλέον η f έχει φορέα στο σύνολο $\{-N, \ldots, N\}$, τότε μπορούμε να επιλέξουμε τις f_1, f_2, ώστε να έχουν φορέα στο $\{-2N, \ldots, 2N\}$.

Μέρος II

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Λογαριθμικοί συσχετισμοί αριθμητικών συναρτήσεων

3.1 Η εικασία Chowla

Για έναν θετικό ακέραιο n ορίζουμε τη συνάρτηση Moebius μ ως εξής:

(i) $\mu(n) = 1$ αν ο n είναι square-free[1] με άρτιο πλήθος πρώτων διαιρετών,

(ii) $\mu(n) = -1$, αν ο n είναι square-free με περιττό πλήθος πρώτων διαιρετών,

(iii) $\mu(n) = 0$ διαφορετικά.

Επίσης, ορίζεται και η συνάρτηση Liouville λ ως εξής:

(i) $\lambda(n) = 1$ αν ο n είναι γινόμενο άρτιου πλήθους πρώτων διαιρετών,

(ii) $\lambda(n) = -1$ αν ο n είναι γινόμενο περιττού πλήθους πρώτων διαιρετών,

όπου σε αυτήν την περίπτωση στο πλήθος των πρώτων διαιρετών προσμετράται και η πολλαπλότητά τους. Η εικασία Chowla ισχυρίζεται ότι για κάθε $k \geq 0$ και διακεκριμένους ακεραίους $h_0, h_1, \dots, h_k$ έχουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \sum_{n\leqslant x} \lambda(n+h_0)\lambda(n+h_1)\cdots\lambda(n+h_k) = 0, \tag{3.1.1}$$

όπου συμβατικά ορίζουμε $\lambda(n) = 0$ για $n \leqslant 0$. Χρησιμοποιώντας τον συμβολισμό για τους μέσους όρους, αυτό γράφεται και ως

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}_{n\leqslant x}\lambda(n+h_0)\lambda(n+h_1)\cdots\lambda(n+h_k) = 0. \tag{3.1.2}$$

[1] Δηλαδή, δεν υπάρχει πρώτος αριθμός p με $p^2|n$.

Η εικασία Chowla είναι ανοικτό πρόβλημα για $k \geq 1$ (για $k = 0$ προκύπτει με στοιχειώδη τρόπο από το θεώρημα των πρώτων αριθμών). Επίσης, δουλεύοντας με τους λογαριθμικούς μέσους όρους, έχουμε και την λογαριθμική εκδοχή της εικασίας Chowla:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{n\leqslant x} \frac{\lambda(n+h_0)\lambda(n+h_1)\cdots\lambda(n+h_k)}{n}}{\sum_{n\leqslant x}\frac{1}{n}} = 0, \tag{3.1.3}$$

το οποίο είναι βέβαια ισοδύναμο με

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{\log x} \sum_{n\leqslant x} \frac{\lambda(n+h_0)\lambda(n+h_1)\cdots\lambda(n+h_k)}{n} = 0. \tag{3.1.4}$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η εικασία Chowla συνεπάγεται και τη λογαριθμική εκδοχή της. Η περίπτωση $k = 1$ για τη λογαριθμική εκδοχή αποδείχτηκε πρόσφατα από τον Tao [32].

Σε αυτό το κεφάλαιο ασχολούμαστε με την περίπτωση όπου ο k είναι άρτιος (δηλαδή συσχετισμούς για περιττό πλήθος όρων). Αυτό είναι πόρισμα του Θεωρήματος 3.2.1, το οποίο διατυπώνεται για τυχαίες πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις που παίρνουν τιμές στο μοναδιαίο δίσκο. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι όλες οι πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις ικανοποιούν αυτή τη συνθήκη.

3.2 Η δομή των λογαριθμικών συσχετισμών

Έστω $g_0, g_1, \ldots, g_k$ πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις και $h_0, \ldots, h_k$ διαφορετικοί μεταξύ τους ακέραιοι. Θεωρούμε τους συσχετισμούς

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}_{n\leqslant x} g_0(n+h_0)\cdot g_1(n+h_1)\cdots g_k(n+h_k). \tag{3.2.1}$$

Η εικασία του Elliott ισχυρίζεται ότι το όριο στην (3.2.1) υπάρχει και ισούται με 0, εκτός εάν κάθε μία από τις συναρτήσεις g_i δεν είναι απεριοδική.

Η περίπτωση $k = 0$ είναι συνέπεια του [19]. Για $k \geq 1$, η υπόθεση που απαιτούμε για τις συναρτήσεις g_i χρειάζεται να αντικατασταθεί από την ισχυρότερη[2]

$$\liminf_{x\to\infty} inf_{|t|\leqslant x} \sum_{p\leqslant x} \frac{1 - \mathrm{Re}(g_j(p)\overline{x_j(p)p^{it}})}{p} < \infty \tag{$*$}$$

για οποιονδήποτε χαρακτήρα Dirichlet x_j.

Χρησιμοποιώντας λογαριθμικούς μέσους αντί για Cesaro μέσους, λαμβάνουμε παρόμοια τη λογαριθμική εκδοχή της εικασίας Elliott. Η εικασία Chowla είναι η περίπτωση της παραπάνω εικασίας, όπου $g_i = \lambda$ για $i = 0, 1, \ldots, k$.

Τα όρια στη σχέση (3.2.1) δεν είναι προφανές εκ των προτέρων ότι υπάρχουν. Γι' αυτό το λόγο χρησιμοποιούμε παρακάτω ένα συναρτησοειδές $\overline{\lim} : \ell^\infty(\mathbb{N}) \to \mathbb{C}$, το οποίο είναι ένα φραγμένο συναρτησοειδές νόρμας 1 που επεκτείνει το συναρτησοειδές $\lim : c_0(\mathbb{N}) \oplus \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Η ύπαρξη του $\overline{\lim}$ εξασφαλίζεται απο το θεώρημα Hahn-Banach. Στη συνέχεια, αν $1 \leqslant w_m \leqslant x_m$ είναι ακολουθίες πραγματικών που τείνουν στο άπειρο, ορίζουμε την ακολουθία $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{D}$ για τις συναρτήσεις $g_0, g_1, \ldots, g_k$ και τα shift $h_0, h_1, \ldots, h_k$ από τη σχέση

$$f(a) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \mathbb{E}^{log}_{\frac{x_m}{w_m}\leqslant n\leqslant x_m} g_0(n+ah_0)\cdot g_1(n+ah_1)\cdots g_k(n+ah_k) \tag{3.2.2}$$

[2] Δηλαδή απαιτούμε να είναι όλες οι συναρτήσεις ισχυρά απεριοδικές.

για κάθε ακέραιο a. Η λογαριθμική εικασία Elliott είναι ισοδύναμη με το ότι η συνάρτηση f, όπως ορίστηκε, ισούται με το 0 σε όλους τους μη μηδενικούς ακεραίους, εκτός εάν κάθε $g_i, i = 0, 1 \ldots k$ ικανοποιεί τη σχέση $(*)$ για κάποιους χαρακτήρες Dirichlet $x_0, x_1, \ldots, x_k$.

Το κύριο θεώρημα του κεφαλαίου, το οποίο χρησιμοποιείται για την εξαγωγή πολλών συμπερασμάτων πάνω στις εικασίες Chowla και Elliott είναι το εξής:

Θεώρημα 3.2.1 (Tao-Teräväinen)**.** *Έστω $k \geq 0$ και $h_0, h_1, \ldots, h_k$ ακέραιοι. Έστω $g_0, g_1, \ldots, g_k$ πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις. Ορίζουμε τις ακολουθίες w_m, x_m και τη συνάρτηση f, όπως στη σχέση* (3.2.2).

(i) *Η συνάρτηση f είναι ομοιόμορφο όριο περιοδικών συναρτήσεων.*

(ii) *Αν το γινόμενο $g_0 \cdot g_1 \cdots g_k$ δεν προσποιείται ασθενώς ότι είναι χ, για οποιονδήποτε χαρακτήρα Dirichlet χ, τότε η f είναι ταυτοτικά μηδενική.*

(iii) *Αν το γινόμενο $g_0 \cdot g_1 \cdots g_k$ προσποιείται ασθενώς ότι είναι χ, για κάποιον χαρακτήρα Dirichlet χ, τότε οι περιοδικές συναρτήσεις f_i απο το μέρος* (α) *μπορούν να επιλεγούν έτσι ώστε $f_i(ab) = f_i(a)x(b)$, όπου ο a είναι ακέραιος και ο b είναι ακέραιος σχετικά πρώτος με τις περιόδους των f_i και x (δηλαδή οι f_i είναι χ-ισοτυπικές).*

Πόρισμα 3.2.2. *Έστω $k \geq 0$ και $c_0, c_1, \ldots, c_k$ μη μηδενικοί ακέραιοι τέτοιοι ώστε ο $c_0 + c_1 + \cdots + c_k$ να είναι περιττός. Τότε, για κάθε μη μηδενικούς ακεραίους $h_0, h_1, \ldots, h_k$ και οποιεσδήποτε ακολουθίες πραγματικών $1 \leqslant w_m \leqslant x_m$ που τείνουν στο άπειρο έχουμε ότι:*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}^{\log}_{\frac{x_m}{w_m} \leqslant n \leqslant x_m} \mu^{c_0}(n+h_0)\mu^{c_1}(n+h_1)\cdots\mu^{c_k}(n+h_k) = 0$$

και

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}^{\log}_{\frac{x_m}{w_m} \leqslant n \leqslant x_m} \lambda^{c_0}(n+h_0)\lambda^{c_1}(n+h_1)\cdots\lambda^{c_k}(n+h_k) = 0.$$

Παρατήρηση 3.2.3. Το Πόρισμα 3.2.2 για τις ακολουθίες $w_m = x_m = m$ αποδεικνύει τη λογαριθμική εικασία Chowla στις περιπτώσεις όπου ο k είναι άρτιος.

Πόρισμα 3.2.4. *Έστω $k \geq 0$ και $g_0, g_1, \ldots, g_k$ πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις ώστε το γινόμενο $g_0 \cdot g_1 \cdots g_k$ να μην προσποιείται ότι είναι ένας χαρακτήρας Dirichlet. Τότε, για οποιουσδήποτε ακεραίους $h_0, h_1, \ldots, h_k$ και οποιεσδήποτε ακολουθίες πραγματικών $1 \leqslant w_m \leqslant x_m$ που τείνουν στο άπειρο έχουμε ότι*

$$\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}^{\log}_{\frac{x_m}{w_m} \leqslant n \leqslant x_m} g_0(n+h_0)g_1(n+h_1)\cdots g_k(n+h_k) = 0.$$

Πιο συγκεκριμένα, το όριο στο αριστερό μέλος υπάρχει και έχουμε

$$\sum_{n\leqslant x} \frac{g_0(n+h_0)g_1(n+h_1)\ldots g_k(n+h_k)}{n} = O(\log x) \text{ καθώς } x \to \infty.$$

Παρατήρηση 3.2.5. Η συνθήκη του Πορίσματος 3.2.4 δεν συνεπάγεται τη συνθήκη $(*)$ και ούτε το αντίστροφο. Ένα παράδειγμα είναι η περίπτωση όπου $g_j(n) = n^{it_j}$. Η εικασία του Elliott δεν κάνει κάποια πρόβλεψη για το όριο των λογαριθμικών συσχετισμών. Ωστόσο, χρησιμοποιώντας την ασυμπτωτική σχέση $g_j(n+h_j) = (1+o(1))n^{it_j}$ συμπεραίνουμε ότι οι λογαριθμικοί μέσοι όροι τείνουν στο 0 αν και μόνο αν $\sum_{j=0}^{k} t_j \neq 0$, δηλαδή αν και μόνο αν το γινόμενο $g_0 \cdot g_1 \cdots g_k$ δεν προσποιείται ότι είναι ένας χαρακτήρας Dirichlet.

Στις επόμενες ενότητες αποδεικνύουμε το Θεώρημα 3.2.1. Η απόδειξη χρησιμοποιεί μια μορφή του entropy decrement argument που εισήγαγε ο Tao στο [32]. Ορίζουμε $G := g_0 g_1 \cdots g_k$. Το πρώτο βήμα οδηγεί σε μία σχέση της μορφής

$$f(a) = \overline{\lim_{m\to\infty} \mathbb{E}_{2^m \leqslant p \leqslant 2^{m+1}} \overline{G(p)} f(ap)},$$

όπου το άθροισμα λαμβάνεται πάνω απο τους πρώτους αριθμούς. Επαναλαμβάνοντας αυτή τη σχέση μία ακόμα φορά καταλήγουμε στην

$$f(a) = \overline{\lim_{m_1\to\infty} \lim_{m_2\to\infty}} \mathbb{E}_{2^{m_1} \leqslant p_1 \leqslant 2^{m_1+1}} \mathbb{E}_{2^{m_2} \leqslant p_2 \leqslant 2^{m_2+1}} \overline{G(p_1)G(p_2)} f(ap_1p_2). \tag{3.2.3}$$

Στη συνέχεια αναλύουμε σύμφωνα με το Θεώρημα 2.3.8 τη συνάρτηση f σαν άθροισμα $f_1 + f_2$, όπου η f_1 ειναι nilsequence και η f_2 τείνει στο 0 ως προς ομοιόμορφη πυκνότητα, δηλαδή

$$\lim_{N\to\infty} \sup_M \mathbb{E}_{M \leqslant n \leqslant M+N} |f_2(n)| = 0. \tag{3.2.4}$$

Η ακολουθία f_2 είναι αμελητέα στην (3.2.3), ενώ η f_1 μπορεί να γραφεί σαν γραμμικός συνδυασμός μιας περιοδικής συνάρτησης f_0 και κάποιων «άρρητων» nilsequences με ένα μικρό σφάλμα. Για τις άρρητες nilsequences δείχνουμε ότι οι μέσοι όροι τους τείνουν στο 0, οπότε καταλήγουμε σε μία σχέση της μορφής

$$f(a) = \overline{\lim_{m_1\to\infty} \lim_{m_2\to\infty}} \mathbb{E}_{2^{m_1} \leqslant p_1 \leqslant 2^{m_1+1}} \mathbb{E}_{2^{m_2} \leqslant p_2 \leqslant 2^{m_2+1}} \overline{G(p_1)G(p_2)} f_0(ap_1p_2) + O(\varepsilon), \tag{3.2.5}$$

που δίνει το ζητούμενο.

Για τη συνάρτηση f_2 στην παραπάνω διάσπαση μπορούμε να αποδείξουμε κάτι ισχυρότερο.

Πρόταση 3.2.6. *Έστω (X, μ) ένας χώρος πιθανότητας και $T : X \to X$ μια απεικόνιση που διατηρεί το μέτρο. Έστω $G_1, \dots, G_k \in L^\infty(X)$ και $h_1, \dots, h_k$ ακέραιοι αριθμοί. Τότε, έχουμε μια διάσπαση*

$$\int_X G_1(T^{h_1 n}x) \cdots G_k(T^{h_k n}x) d\mu(x) = f_1(n) + f_2(n) \tag{3.2.6}$$

για όλους τους $n \in \mathbb{Z}$, όπου η $f_1 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ είναι nilsequence και η $f_2 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ είναι μια ακολουθία για την οποία

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}_{p \leqslant x} |f_2(ap)| = 0 \text{ για κάθε μη μηδενικό ακέραιο } a, \tag{3.2.7}$$

όπου στην παραπάνω σχέση παίρνουμε μέσους όρους πάνω από τους πρώτους.

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 2.3.8 έχουμε μια διάσπαση του ολοκληρώματος στη σχέση (3.2.6) σε ένα άθροισμα $f_1 + f_2$, όπου η f_1 είναι nilsequence και η f_2 ικανοποιεί τη σχέση (3.2.4). Αρκεί να δείξουμε τη σχέση (3.2.7) γι' αυτή τη συνάρτηση f_2. Σταθεροποιούμε, λοιπόν, ένα a.

Στη συνέχεια όλες οι ασυμπτωτικές σταθερές εξαρτώνται από τα $a, k, G_1, \dots, G_k, f_1, f_2$. Έστω $\varepsilon > 0$ και έστω w αρκετά μεγάλο σε σχέση με τα ε, a, k και έστω ένα $\delta > 0$ αρκετά μικρό ανάλογα με την επιλογή των w, ε, a, k και υποθέτουμε ότι το x είναι αρκετά μεγάλο ανάλογα με τα $\delta, w, \varepsilon, a, k$. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}_{x/2 \leqslant p \leqslant x} |f_2(ap)| \ll \varepsilon.$$

Αν $W = \prod_{p \leqslant W} p$, τότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}_{x/2 \leqslant p \leqslant x, p \equiv b (\bmod W)} |f_2(ap)| \ll \varepsilon$$

για όλους τους b σχετικά πρώτους με το W. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}_{x/2 \leqslant n \leqslant x, n \equiv b (\bmod W)} |f_2(an)| \frac{\varphi(W)}{W} \Lambda(W) \ll \varepsilon,$$

όπου φ η συνάρτηση Euler και Λ η συνάρτηση von Mangoldt που ορίζεται ως

$$\Lambda(n) = \begin{cases} \log p, \, \textit{εάν } n = p^k \textit{ για κάποιον πρώτο } p \\ 0, \; \textit{διαφορετικά.} \end{cases}$$

Θέτοντας $L_{b,W}(n) = \frac{\varphi(W)}{W} \Lambda(Wn + b)$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}_{x/2W \leqslant n \leqslant x/W} |f_2(a(Wn + b))| L_{b,W}(n) \ll \varepsilon.$$

Μπορούμε να γράψουμε αυτή τη σχέση ως

$$\mathbb{E}_{x/2W \leqslant n \leqslant x/W} f_2(a(Wn + b)) g(n) L_{b,W}(n) \ll \varepsilon$$

για κάποια συνάρτηση $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα πυκνού μοντέλου (Παράρτημα 3) για τα πραγματικά και φανταστικά μέρη του $gL_{b,W}$, μαζί με το ψευδοτυχαίο μέτρο $v(n)$ στο [12, Πρόταση 9.11], έχουμε μια διάσπαση

$$g(n) L_{b,W}(n) = g_1(n) + g_2(n) + g_3(n)$$

για $x/2W \leqslant n \leqslant x/W$, όπου η g_1 είναι φραγμένη από $O(1)$, η g_2 ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbb{E}_{x/2W \leqslant n \leqslant x/W} |g_2(n)| \ll \varepsilon, \tag{3.2.8}$$

και η $g_3(n)$ είναι φραγμένη από $O(v(n) + 1)$ και ικανοποιεί το φράγμα

$$\mathbb{E}_{-x/W \leqslant m, h_1, \ldots, h_k \leqslant x/W} \prod_{w_i \in \{0,1\}, 0 < i \leqslant k} g_3(n + w_1 h_1 + \ldots + w_k h_k) \ll \delta, \tag{3.2.9}$$

όπου επεκτείνουμε την g_3 με μηδενικά στους ακεραίους. Από τη σχέση (3.2.4) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{x/2W \leqslant n \leqslant x/W} f_2(a(Wn + b)) g_1(n) \ll aW \mathbb{E}_{ax/2 \leqslant n \leqslant 2ax} |f_2(n)| \ll \varepsilon$$

για x αρκετά μεγάλο. Από τη σχέση (3.2.8) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{x/2W \leqslant n \leqslant x/W} f_2(a(Wn + b)) g_2(n) \ll \varepsilon,$$

οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}_{x/2W \leqslant n \leqslant x/W} f_2(a(Wn + b)) g_3(n) \ll \varepsilon.$$

Μπορούμε να προσεγγίσουμε την ακολουθία $n \to f_1(a(Wn + b))$ με μια βασική nilsequence με σφάλμα μικρότερο του ε, για την οποία το αντίστοιχο nilmanifold και η συνάρτηση που την ορίζει δεν εξαρτώνται από τα W, b. Μπορούμε να διασπάσουμε αυτή τη nilsequence σε ένα μέρος με μικρή δυϊκή U^k-Gowers νόρμα και ένα ομοιόμορφα φραγμένο σφάλμα [13, Πρόταση 11.2]. Αφού η g_3 έχει U^k νόρμα φραγμένη από $O(\delta^{2^{-k-1}})$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}_{x/2W \leqslant n \leqslant x/W} f_1(a(Wn+b))g_3(n) \ll \varepsilon$$

για αρκετά μικρό δ, οπότε από την τριγωνική ανισότητα αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}_{x/2W \leqslant n \leqslant x/W} \int_X G_1(T^{h_1 a(Wn+b)}x) \cdots G_k(T^{h_k a(Wn+b)}x) d\mu(x) g_3(n) \ll \varepsilon.$$

Αλλάζοντας το άθροισμα με το ολοκλήρωμα και χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz μένει να δείξουμε ότι

$$\int_X |\mathbb{E}_{x/2W \leqslant n \leqslant x/W} g_3(n) G_1(T^{h_1 a(Wn+b)}x) \cdots G_k(T^{h_k a(Wn+b)}x)|^2 d\mu(x) \ll \varepsilon,$$

το οποίο είναι συνέπεια της σχέσης (3.2.9) και του [3][Λήμμα 3] για αρκετά μικρό δ. □

Τέλος, θα χρειαστούμε μια παραλλαγή της αρχής του Furstenberg που έχει πιθανοθεωρητική μορφή.

Πρόταση 3.2.7. *Θεωρούμε τις συναρτήσεις $g_0, \dots, g_k$, τις ακολουθίες x_m, w_m και τους ακεραίους $h_0, \dots, h_k$ όπως στο Θεώρημα 3.2.1, καθώς και την συνάρτηση f από τη σχέση (3.2.2). Τότε, υπάρχουν τυχαίες συναρτήσεις $\mathbf{g}_0, \dots, \mathbf{g}_k : \mathbb{Z} \to \mathbb{D}$ και ένας τυχαίος προπεπερασμένος ακέραιος $\mathbf{n} \in \hat{\mathbb{Z}}^3$, όλοι ορισμένοι σε έναν κοινό χώρο πιθανότητας Ω, έτσι ώστε:*

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}F(\mathbf{g}_i(h))_{0 \leqslant i \leqslant k, -N \leqslant h \leqslant N}, \mathbf{n}(\mathrm{mod}\ q)) \\ &\quad = \overline{\lim_{m \to \infty}} \mathbb{E}_{x_m/w_m \leqslant n \leqslant x_m} F((g_i(n+h))_{0 \leqslant i \leqslant k, -N \leqslant h \leqslant N}, n(\mathrm{mod}\ q)) \end{aligned}$$

για όλους τους φυσικούς αριθμούς N, q και οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $F : \mathbb{D}^{(k+1)(2N+1)} \times \mathbb{Z}_q \to \mathbb{R}$. Επιπλέον, οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{g_0}, \dots, \mathbf{g_k}$ και $\mathbf{n} \in \hat{\mathbb{Z}}$ είναι μια στάσιμη διαδικασία, με την έννοια ότι για οποιονδήποτε φυσικό αριθμό N, η απο κοινού κατανομή των $(\mathbf{g_i}(\mathrm{n+h}))_{0 \leqslant \mathrm{i} \leqslant \mathrm{k}, -\mathrm{N} \leqslant \mathrm{h} \leqslant \mathrm{N}} \in \mathbb{D}^{(\mathrm{k+1})(2\mathrm{N}+1)}$ και η $\mathbf{n} + \mathrm{n}$ δεν εξαρτάται από το n καθώς το n διατρέχει τους ακεραίους.

3.3 Ένα επιχείρημα εντροπίας

Το Θεώρημα 3.2.1 περιγράφει τη δομή της ακολουθίας f των συσχετισμών τυχαίων πολλαπλασιαστικών συναρτήσεων. Σε αυτήν την ενότητα προχωρούμε στην απόδειξη του θεωρήματος. Το πρώτο βήμα είναι να αποδείξουμε μια σχέση της μορφής $f(ap) \approx f(a)G(p)$ για σχεδόν όλους τους ακεραίους a και τους πρώτους p.

Σταθεροποιούμε το a και έστω p ένας πρώτος. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι όλα τα h_j είναι μη αρνητικά (διότι μεταφορές δεν επηρεάζουν το $\overline{\lim}$). Έστω $H \geq \max(h_0, \dots, h_k)$ ένας φυσικός. Απο την (3.2.2) έχουμε ότι

$$f(a)G(p) = \overline{\lim_{m \to \infty}} \frac{1}{\log w_m} \sum_{\frac{x_m}{w_m} \leqslant n \leqslant x_m} \frac{g_0(p)g_0(n+ah_0)g_1(p)g_1(n+ah_1) \cdots g_k(p)g_k(n+ah_k)}{n}.$$

[3]Το σύνολο των προπεπερασμένων φυσικών ορίζεται ως το αντίστροφο όριο των κυκλικών ομάδων $\mathbb{Z}_q$, με την μικρότερη τοπολογία που κάνει τις απεικονίσεις $n \to n(\mathrm{mod}\ q)$ συνεχείς. Είναι συμπαγής αβελιανή ομάδα.

Επειδή οι συναρτήσεις g_j είναι πολλαπλασιαστικές, μπορούμε να γράψουμε $g_j(p)g_j(n+ah_j) = g_j(pn+aph_j)$ με εξαίρεση την περίπτωση όπου $n \equiv -ah_j (\bmod p)$. Η δεύτερη περίπτωση συνεισφέρει κατά $O(\frac{1}{p})$ στο παραπάνω άθροισμα. Έτσι, παίρνουμε τη σχέση

$$f(a)G(p) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{logw_m} \sum_{\frac{x_m}{w_m} \leqslant n \leqslant x_m} \frac{g_0(pn+aph_0)\cdots g_k(pn+aph_k)}{n} + O(1/p).$$

Αν κάνουμε τώρα το pn την μεταβλητή στο άθροισμα παίρνουμε

$$f(a)G(p) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\log w_m} \sum_{\frac{px_m}{w_m} \leqslant n \leqslant px_m} \frac{g_0(n+aph_0)\cdots g_k(n+aph_k)p1_{p|n}}{n} + O(1/p).$$

Το άθροισμα στην παραπάνω σχέση μπορεί να γίνει από $\frac{x_m}{w_m}$ έως x_m, χωρίς να επηρεαστεί η τιμή του $\overline{\lim}$, επειδή το w_m τείνει στο ∞. Έτσι, παίρνουμε τελικά

$$f(a)G(p) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\log w_m} \sum_{\frac{x_m}{w_m} \leqslant n \leqslant x_m} \frac{g_0(n+aph_0)\cdots g_k(n+aph_k)p1_{p|n}}{n} + O(1/p).$$

Τελικά, από τον ορισμό της f έχουμε
(3.3.1)

$$f(a)G(p) - f(ap) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \frac{1}{\log w_m} \sum_{\frac{x_m}{w_m} \leqslant n \leqslant x_m} \frac{g_0(n+aph_0)\cdots g_k(n+aph_k)(p1_{p|n}-1)}{n} + O(1/p).$$

Τώρα, χρησιμοποιούμε την αρχή του Furstenberg: υπάρχουν τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{g_0}, \dots, \mathbf{g_k}$ τέτοιες ώστε

$$|f(a)G(p) - f(ap)| = \mathbb{E}c_p\mathbf{g_0}(\mathrm{aph_0})\cdots\mathbf{g_k}(\mathrm{aph_k})(\mathrm{p1_{p|\mathbf{n}}} - 1) + \mathrm{O(1/p)}, \tag{3.3.2}$$

οπου $c_p = \mathrm{sgn}(f(a)G(p) - f(ap))$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Για $j = 0, 1, \dots, k$ ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $\mathbf{g}_{\mathrm{j,e}}(\mathrm{n})$ ως το πλησιέστερο στο $\mathbf{g}_{\mathrm{j}}(\mathrm{n})$ Gauss ακέραιο πολλαπλάσιο του ε. Τότε, από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$|f(a)G(p) - f(ap)| = \mathbb{E}c_p\mathbf{g}_{0,\varepsilon}(\mathrm{aph_0})\cdots\mathbf{g}_{\mathrm{k},\varepsilon}(\mathrm{aph_k})(\mathrm{p1_{p|\mathbf{n}}} - 1) + \mathrm{O}(\varepsilon),$$

και, επειδή οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{g}_{\mathrm{j}}$ σχηματίζουν στάσιμη διαδικασία, έχουμε

$$|f(a)G(p) - f(ap)| = \mathbb{E}c_p\mathbf{g}_{0,\varepsilon}(\mathrm{L}+\mathrm{aph_0})\cdots\mathbf{g}_{\mathrm{k},\varepsilon}(\mathrm{L}+\mathrm{aph_k})(\mathrm{p1}_{\mathbf{n}\equiv -\mathrm{L}(\mathrm{mod\ p})} - 1) + \mathrm{O}(\varepsilon)$$

για όλους τους ακεραίους L. Παίρνοντας τους μέσους όρους πάνω απο τα διαστήματα $2^m \leqslant p < 2^{m+1}$ και $1 \leqslant L \leqslant 2^m$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}_{2^m \leqslant p < 2^{m+1}}|f(a)G(p) - f(ap)| = \mathbb{E}F_m(\mathbf{X}_{\mathrm{m}}, \mathbf{Y}_{\mathrm{m}}) + \mathrm{O}(\varepsilon) \tag{3.3.3}$$

για αρκετά μεγάλο $m = m(\varepsilon)$, όπου $\mathbf{X}_{\mathrm{m}} \in \mathbb{D}^{(\mathrm{k+1})2^{\mathrm{m+2}}\mathrm{H}'}$ είναι η τυχαία μεταβλητή

$$\mathbf{X}_{\mathrm{m}} := (\mathbf{g}_{\mathrm{j},\varepsilon}(\mathrm{L}))_{0\leqslant \mathrm{j} \leqslant \mathrm{k}, 1 \leqslant \mathrm{L} \leqslant 2^{\mathrm{m+2}}\mathrm{H}'} \tag{3.3.4}$$

με $H' = (1+|a|)H$, $\mathbf{Y}_{\mathrm{m}} \in \prod_{2^{\mathrm{m}} \leqslant \mathrm{p} \leqslant 2^{\mathrm{m}+1}} \mathbb{Z}/\mathrm{p}\mathbb{Z}$ είναι η τυχαία μεταβλητή

$$\mathbf{Y}_{\mathrm{m}} := (\mathbf{n}(\mathrm{mod} \mathrm{p}))_{2^{\mathrm{m}} \leqslant \mathrm{p} \leqslant 2^{\mathrm{m}+1}} \tag{3.3.5}$$

και $F_m : \mathbb{D}^{(k+1)2^{m+2}H'} \times \prod_{2^m \leqslant p \leqslant 2^{m+1}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ είναι η συνάρτηση

$$\begin{aligned} &F_m((g_{j,L})_{0\leqslant j\leqslant k, q\leqslant L\leqslant 2^{m+2}H'}, (n_p)_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}) \\ &\qquad := \mathbb{E}_{1\leqslant L\leqslant 2^m}\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}} c_p g_{0,L+aph_0}\cdots g_{k,L+aph_k}(p1_{n_p\equiv -L(\mathrm{mod}\ p)}-1) \end{aligned}$$

Από το κινέζικο θεώρημα υπολοίπων συμπεραίνουμε ότι οι τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{Y}_{\mathrm{m}}$ είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες στο $\prod_{2^m \leqslant p \leqslant 2^{m+1}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ και είναι ανεξάρτητες μεταξύ τους.

Έστω $\mathbf{U}_{\mathrm{m}} = (\mathbf{u}_{\mathrm{p}})_{2^{\mathrm{m}} \leqslant \mathrm{p} < 2^{\mathrm{m}+1}}$ μια τυχαία μεταβλητή επιλεγμένη ομοιόμορφα απο το

$$\prod_{2^m \leqslant p \leqslant 2^{m+1}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}.$$

Για οποιοδήποτε διάνυσμα $X_m = (g_{j,L})_{0\leqslant j\leqslant k, 1\leqslant L\leqslant 2^{m+2}H'}$,

$$F_m(X_m, \mathbf{U}_{\mathrm{m}}) = \mathbb{E}_{2^{\mathrm{m}}\leqslant \mathrm{p}<2^{\mathrm{m}+1}} \mathbf{Z}_{\mathrm{p}},$$

όπου $\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}$ είναι η τυχαία μεταβλητή

$$\mathbf{Z}_{\mathrm{p}} := \mathbb{E}_{1\leqslant \mathrm{L}\leqslant 2^{\mathrm{m}}} \mathrm{c_p g_{0,L+ph_0}\cdots g_{k,L+ph_k}(p1_{\mathbf{u}_p\equiv -L(mod\ p)}-1)}.$$

Οι μεταβλητές $\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}$ είναι προφανώς ανεξάρτητες μεταξύ τους και έχουν μέση τιμή 0, αφού το $\mathbf{u}_{\mathrm{p}}$ επιλέχθηκε ομοιόμορφα απο το $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Επίσης, από την τριγωνική ανισότητα βλέπουμε εύκολα ότι το μέτρο της $\mathbf{Z}_{\mathrm{p}}$ είναι φραγμένο από $O(1)$. Από την ανισότητα Hoeffding, υπάρχει σταθερά c ώστε

$$\mathbf{P}(|\mathrm{F_m}(\mathrm{X_m}, \mathbf{U}_{\mathrm{m}})| \geq \varepsilon) \ll \exp(-\mathrm{c}\varepsilon^2 2^{\mathrm{m}}/\mathrm{m}). \tag{3.3.6}$$

Για να περάσουμε από το $\mathbf{U}_{\mathrm{m}}$ πίσω στο $\mathbf{Y}_{\mathrm{m}}$, θα χρησιμοποιήσουμε το παρακάτω λήμμα:

Λήμμα 3.3.1. *Έστω $\mathbf{Y}, \mathbf{U}$ τυχαίες μεταβλητές που παίρνουν τιμές σε ένα σύνολο $\mathcal{Y}$, με την $\mathbf{U}$ να ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή. Τότε, για κάθε υποσύνολο E του $\mathcal{Y}$, έχουμε ότι*

$$\mathbf{P}(\mathbf{Y} \in \mathrm{E}) \leqslant \frac{\mathbf{H}(\mathbf{U}) - \mathbf{H}(\mathbf{Y}) + \log 2}{\log \frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{U}\in \mathrm{E})}}.$$

Απόδειξη. Έχουμε

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y}|1_{\mathbf{Y}\in\mathrm{E}}) = \mathbf{H}(\mathbf{Y}, 1_{\mathbf{Y}\in\mathrm{E}}) - \mathbf{H}(\mathbf{1}_{\mathbf{Y}\in\mathrm{E}}) = \mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}(1_{\mathbf{Y}\in\mathrm{E}}) \geq \mathbf{H}(\mathbf{Y}) - \log 2,$$

από την ανισότητα Jensen. Από την ίδια ανισότητα έχουμε πάλι

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{Y}|1_{\mathbf{Y}\in\mathrm{E}}) &= \mathbf{P}(\mathbf{Y}\in\mathrm{E})\mathbf{H}(\mathbf{Y}|\mathbf{Y}\in\mathrm{E}) + \mathbf{P}(\mathbf{Y}\notin\mathrm{E})\mathbf{H}(\mathbf{Y}|\mathbf{Y}\notin\mathrm{E}) \\ &\leqslant \mathbf{P}(\mathbf{Y}\in\mathrm{E})\log|\mathrm{E}| + (1-\mathbf{P}(\mathbf{Y}\in\mathrm{E}))\log|\mathcal{Y}| \\ &= \log|\mathcal{Y}| - \mathbf{P}(\mathbf{Y}\in\mathrm{E})\log\frac{|\mathcal{Y}|}{|\mathrm{E}|} \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{U}) - \mathbf{P}(\mathbf{Y}\in\mathrm{E})\log\frac{1}{\mathbf{P}(\mathbf{U}\in\mathrm{E})}. \end{aligned}$$

Συνδυάζοντας αυτές τις δύο σχέσεις παίρνουμε το ζητούμενο. □

Παίρνοντας $\mathbf{U} = \mathbf{U}_{\mathrm{m}}$ και $E = \{Y : |F_m(X_m, Y)| \geq \varepsilon\}$ μαζί με τη σχέση (3.3.6), έχουμε ότι, για αρκετά μεγάλο m που εξαρτάται απο τα a, ε,

$$\mathbf{P}(|\mathrm{F}_{\mathrm{m}}(\mathrm{X}_{\mathrm{m}}, \mathbf{Y})| \geq \varepsilon) \ll \varepsilon \tag{3.3.7}$$

για οποιαδήποτε τυχαία μεταβλητή $\mathbf{Y}$ στο χώρο $\prod_{2^m \leqslant p \leqslant 2^{m+1}} \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ με αρκετά μεγάλη εντροπία, με την έννοια ότι

$$\mathbf{H}(\mathbf{U}_{\mathrm{m}}) - \mathbf{H}(\mathbf{Y}) \ll \varepsilon^3 \frac{2^{\mathrm{m}}}{\mathrm{m}}.$$

Έστω m_0 αρκετά μεγάλος φυσικός. Για $m \geq m_0$ ορίζουμε την τυχαία μεταβλητή $\mathbf{Y}_{<\mathrm{m}} := (\mathbf{Y}_{\mathrm{m}'})_{\mathrm{m}_0 \leqslant \mathrm{m}' \leqslant \mathrm{m}}$. Είδαμε ότι οι $\mathbf{Y}_{\mathrm{m}}$ είναι ανεξάρτητες τυχαίες μεταβλητές με ομοιόμορφη κατανομή. Συνεπώς, έχουμε τη σχέση

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}} = \mathrm{Y}_{<\mathrm{m}}) = \mathbf{H}(\mathbf{U}_{\mathrm{m}}) \tag{3.3.8}$$

για οποιαδήποτε τιμή Y_m του $\mathbf{Y}_{\mathrm{m}}$.

Πρόταση 3.3.2. *Για* log-*σχεδόν κάθε* $m \geq m_0$ *έχουμε*

$$\mathbf{I}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} : \mathbf{Y}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}) \leqslant \varepsilon^4 \frac{2^{\mathrm{m}}}{\mathrm{m}}. \tag{3.3.9}$$

Απόδειξη. Για $m \geq m_0$ θεωρούμε την ποσότητα $\mathbf{H}(\mathbf{X}_{\mathrm{m+1}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}})$. Μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{X}_{\mathrm{m+1}} = (\mathbf{X}_{\mathrm{m}}, \mathbf{X}'_{\mathrm{m}})$, όπου $\mathbf{X}'_{\mathrm{m}} := (\mathbf{g}_{\mathrm{j,e}})(\mathrm{a}(\mathrm{L} + 2^{\mathrm{m}+2}\mathrm{H}))_{0 \leqslant \mathrm{j} \leqslant \mathrm{k}, 1 \leqslant \mathrm{L} \leqslant 2^{\mathrm{m}+2}\mathrm{H}}$ είναι μια μεταφορά της $\mathbf{X}_{\mathrm{m}}$. Τότε, θα έχουμε

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_{\mathrm{m+1}|\mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}}}) \leqslant \mathbf{H}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}}) + \mathbf{H}(\mathbf{X}'_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}}) = \mathbf{2H}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}}),$$

διότι, λόγω στασιμότητας ισχύει $\mathbf{H}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}}) = \mathbf{H}(\mathbf{X}'_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}})$. Αφού $\mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}} = (\mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}, \mathbf{Y}_{\mathrm{m}})$, έχουμε την ταυτότητα

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}}) = \mathbf{H}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}) - \mathbf{I}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} : \mathbf{Y}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}),$$

οπότε

$$\frac{\mathbf{H}(\mathbf{X}_{\mathrm{m+1}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m+1}})}{2^{m+1}} \leqslant \frac{\mathbf{H}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}})}{2^m} - \frac{\mathbf{I}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} : \mathbf{Y}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}})}{2^m}.$$

Τηλεσκοπίζοντας αυτή τη σχέση καταλήγουμε στην

$$\sum_{m \geq m_0} \frac{\mathbf{I}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} : \mathbf{Y}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}})}{2^m} < \infty,$$

και τελικά

$$\sum_{m \geq m_0, \mathbf{I}(\mathbf{X}_{\mathrm{m}} : \mathbf{Y}_{\mathrm{m}} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}) \geq \varepsilon^4 \frac{\mathbf{2^m}}{\mathbf{m}}} \frac{1}{m} < \infty,$$

που δίνει το ζητούμενο. $\square$

Έστω ένα m για το οποίο ικανοποιείται η σχέση (3.3.9). Για $X_m, Y_{<m}$ στο σύνολο τιμών των $\mathbf{X}_\mathrm{m}, \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}$, αντίστοιχα, έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbf{I}(\mathbf{X}_\mathrm{m} : \mathbf{Y}_\mathrm{m} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}) &= \mathbf{I}(\mathbf{Y}_\mathrm{m} : \mathbf{X}_\mathrm{m} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}) \\ &= \mathbf{H}(\mathbf{Y}_\mathrm{m} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}) - \mathbf{H}(\mathbf{Y}_\mathrm{m} | \mathbf{X}_\mathrm{m}, \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}}) \\ &= \sum_{\mathrm{X}_\mathrm{m}, \mathrm{Y}_{<\mathrm{m}}} \mathbf{P}(\mathbf{X}_\mathrm{m} = \mathrm{X}_\mathrm{m}, \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}} = \mathrm{Y}_{<\mathrm{m}}) \cdot (\mathbf{H}(\mathbf{Y}_\mathrm{m} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}} = \mathrm{Y}_{<\mathrm{m}}) \\ &- \mathbf{H}(\mathbf{Y}_\mathrm{m} | \mathbf{X}_\mathrm{m} = \mathrm{X}_\mathrm{m}, \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}} = \mathrm{Y}_{<\mathrm{m}})).\end{aligned}$$

Από την ανισότητα Markov έχουμε ότι, με πιθανότητα $1 - O(\varepsilon)$, υπάρχει ζεύγος τιμών $(X_m, Y_{<m})$ τέτοιο ώστε

$$\mathbf{H}(\mathbf{Y}_\mathrm{m} | \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}} = \mathrm{Y}_{<\mathrm{m}}) - \mathbf{H}(\mathbf{Y}_\mathrm{m} | \mathbf{X}_\mathrm{m} = \mathrm{X}_\mathrm{m}, \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}} = \mathrm{Y}_{<\mathrm{m}}) \ll \varepsilon^3 \frac{2^\mathrm{m}}{\mathrm{m}},$$

οπότε απο τη σχέση (3.3.7) καταλήγουμε στο φράγμα

$$\mathbf{P}(|\mathrm{F}_\mathrm{m}(\mathbf{X}_\mathrm{m}, \mathbf{Y}_\mathrm{m})| \geq \varepsilon | \mathbf{X}_\mathrm{m} = \mathrm{X}_\mathrm{m}, \mathbf{Y}_{<\mathrm{m}} = \mathrm{Y}_\mathrm{m}) \ll \varepsilon.$$

Επομένως, πολλαπλασιάζοντας με $\mathbf{P}(\mathbf{X}_\mathrm{m} = \mathrm{X}_\mathrm{m}, \mathbf{Y}_\mathrm{m} = \mathrm{Y}_\mathrm{m})$ και αθροίζοντας πάνω από τα $X_m, Y_{<m}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E} F_m(\mathbf{X}_\mathrm{m}, \mathbf{Y}_\mathrm{m}) \ll \varepsilon.$$

Αυτό, σε συνδυασμό με την (3.3.3) οδηγεί στη σχέση

$$\mathbb{E}_{2^m \leqslant p < 2^{m+1}} |f(a) G(p) - f(ap)| = O(\varepsilon).$$

Πόρισμα 3.3.3. *Για κάθε ακέραιο a και κάθε $\varepsilon > 0$, έχουμε*

$$\mathbb{E}_{2^m \leqslant p < 2^{m+1}} |f(a) G(p) - f(ap)| \ll \varepsilon \tag{3.3.10}$$

για log*-σχεδόν κάθε φυσικό αριθμό m.*

Σχόλιο 3.3.4. Το παραπάνω επιχείρημα, το οποίο ονομάζεται «entropy decrement argument», το εισήγαγε ο Tao [32] στην προσπάθεια του να αποδείξει την λογαριθμική εικασία Chowla στην περίπτωση $k = 1$.

Για να συνεχίσουμε την απόδειξη, θα χρειαστεί να αναλύσουμε την f σαν άθροισμα $f_1 + f_2$ όπως είδαμε στην Ενότητα 3.1. Στη συνέχεια παρουσιάζουμε κάποιες ιδιότητες των nilcharacters που απαιτούνται στην απόδειξη.

3.4 Nilcharacters και σύμβολα

Έστω $G/\Gamma = (G/\Gamma, (G_i)_{i>0})$ ένα φιλτραρισμένο nilmanifold.

Ορισμός 3.4.1. Ένας nilcharacter βαθμού d είναι μια βασική nilsequence $x(n) = F(g(n)\Gamma)$, τέτοια, ώστε $\|F(y)\|_{\mathbb{C}^m} = 1$[4] για όλα τα $y \in G/\Gamma$ και για την οποία υπάρχει ένας συνεχής ομοιομορφισμός $\eta : G_d \to \mathbb{R}$ που απεικονίζει το Γ_d στους ακεραίους ,τέτοιος ώστε

$$F(g_d y) = \exp(\eta(g_d)) F(y) \tag{3.4.1}$$

[4] Σε αυτή την ενότητα επιτρέπουμε οι ακολουθίες να παίρνουν τιμές διανύσματα και όχι απλούς αριθμούς, για να αποφύγουμε διάφορες επιπλοκές στον ορισμό των συμβόλων. Ο αναγνώστης μπορεί να θεωρήσει ότι $m = 1$ σε μια πρώτη ανάγνωση.

για όλα τα $g_d \in G_d$ και $y \in G/\Gamma$.

Ορισμός 3.4.2. Δύο nilcharacters $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^m$ και $x' : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}^{m'}$ βαθμού d λεγονται d-ισοδύναμοι εάν το τανυστικό γινόμενο $x \otimes x'$ ίσούται με μία βασική nilsequence βαθμού $\leqslant d-1$. Αυτή είναι μια σχέση ισοδυναμίας. Η κλάση ισοδυναμίας $[x]_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})}$ του nilcharacter x ως προς την παραπάνω σχέση ονομάζεται σύμβολο τάξης d. Ο χώρος των συμβόλων αποτελεί ομάδα[5](την οποία θα συμβολίζουμε $\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})$) με πράξεις

$$[x]_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})} + [x']_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})} := [x \otimes x']_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})},$$

και

$$-[x]_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})} := [\overline{x}]_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})},$$

και ταυτοτικό στοιχείο $0 := [1]_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})}$. Επιπλέον, έχουμε τη σχέση $[qx]_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})} = [x^{\otimes q}]_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})}$.

Στη συνέχεια θα συμβολίζουμε το $[x]_{\mathrm{Symb}^d(\mathbb{Z})}$ απλά ως $[x]$, όπου δεν δημιουργείται σύγχυση για το βαθμό d. Παρατηρούμε, επίσης, ότι τα σύμβολα συμπεριφέρονται καλά ως προς διαστολές κατά φυσικούς αριθμούς q:

$$[x(q\cdot)] = q^d[x]. \tag{3.4.2}$$

Για να το δούμε αυτό, γράφουμε $x(n) = F(g(n)\Gamma)$ για ένα φιλτραρισμένο nilmanifold $X = (G/\Gamma, (G_i)_{i>0})$ και αρκεί να δείξουμε ότι η απεικόνιση

$$p : n \to F(g(qn)\Gamma) \otimes \overline{F}(g(n)\Gamma)^{\otimes q^d}$$

μπορεί να γραφεί σαν μια nilsequence βαθμού $< d$. Δίνουμε ένα φιλτράρισμα στην ομάδα G^2 θέτοντας την ομάδα G_i^2 να παράγεται από το $G_j \times G_j$ για $j > i$ μαζί με το σύνολο $\{(g^{q^i}, g), g \in G_i\}$. Αυτό το φιλτράρισμα είναι ρητό ως προς το Γ^2 και άρα το G^2/Γ^2 είναι ένα nilmanifold βαθμού $\leqslant d$. Επίσης, χρησιμοποιώντας την κλειστή μορφή των πολυωνυμικών ακολουθιών (σχέση (2.4.1)) βλέπουμε ότι η απεικόνιση

$$r : n \to (g(qn), g(n))\Gamma^2$$

ανήκει στην ομάδα $\mathrm{Poly}(G^2/\Gamma^2)$. Γράφοντας τότε την απεικόνιση p σαν $G(r(n))$, όπου $G \in \mathrm{Lip}(G^2/\Gamma^2)$ είναι η συνάρτηση $G(x,y) = F(x) \otimes \overline{F}^{\otimes q^d}(y)$. Η G είναι αναλλοίωτη από τη δράση της ομάδας $G_2^2 = \{(g^{q^d}, g), g \in G_d\}$. Παίρνοντας το πηλίκο πάνω από αυτή την ομάδα οδηγούμαστε σε ένα nilmanifold βαθμού $< d$ και το ζητούμενο έπεται.

Στην περίπτωση $d = 1$, η πολυωνυμική ακολουθία $g(n)$ θα έχει τη μορφή ${g_1}^n g_0$, οπότε όλοι οι nilcharacters βαθμού 1 έχουν τη μορφή $x(n) = c\exp(2\pi i a n)$, όπου c είναι μοναδιαίο διάνυσμα στο $\mathbb{C}^m$ και ο a είναι πραγματικός. Δύο nilcharacters $c\exp(2\pi i a n), c'\exp(2\pi i a' n)$ είναι 1-ισοδύναμοι, αν και μόνο αν $a - a' \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, $\mathrm{Symb}^1(\mathbb{Z}) \approxeq \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Για $d \geq 2$, ο $\exp(2\pi i(a_d n^d + \cdots + a_0))$ είναι ένας nilcharacter βαθμού d. Ωστόσο, υπάρχουν πολλά περισσότερα σύμβολα που δεν έχουν αυτή τη μορφή. Ένα παράδειγμα είναι η ακολουθία $n \to \exp(2\pi i\{an\}bn)$, όπου οι a, b είναι πραγματικοί αριθμοί. Χρησιμοποιώντας μια κατάλληλη διαμέριση της μονάδας, μπορούμε να τροποποιήσουμε αυτή την ακολουθία ώστε να είναι ένας nilcharacter βαθμού 2 (που έχει ως τιμές διανύσματα). Τότε, αυτή η ακολουθία έχει διαφορετικό σύμβολο από οποιαδήποτε ακολουθία της μορφής $n \to \exp(2\pi i P(n))$, όπου το $P(n)$ είναι πολυώνυμο δευτέρου βαθμού.

[5]Για μια απόδειξη αυτού του ισχυρισμού βλ. [18].

Πρόταση 3.4.3. *Έστω $d \geq 1$ και x ένας nilcharacter βαθμού d με $[x] \neq 0$. Τότε, ισχύει $\lim_{y\to\infty} \mathbb{E}_{n\leqslant y} x(n) = 0$.*

Λήμμα 3.4.4. *Έστω $g(n)$ μια πολυωνυμική ακολουθία σε ένα φιλτραρισμένο nilmanifold G/Γ. Τότε, υπάρχει μια ρητή υποομάδα G' του G και μια παραγοντοποίηση $g = \varepsilon g'\gamma$, όπου το ε είναι σταθερά, η $\gamma(n)$ είναι ρητή (δηλαδή υπάρχει $r \in \mathbb{N}$ ώστε $\gamma(n)^r \in \Gamma$) για όλα τα n και η $g'(n)$ είναι πλήρως ισοκαταναμεμημένη στο G'/Γ', όπου $\Gamma' = G' \cap \Gamma$.*

Για την απόδειξη του λήμματος, βλ. [16].

Απόδειξη της Πρότασης 3.4.3. Για $d = 1$ η απόδειξη είναι απλή χρησιμοποιώντας ανάλυση Fourier. Έστω $d \geq 2$. Γράφουμε $x(n) = F(g(n))$, όπου $F : G \to \mathbb{C}^m$ είναι λείος Γ-αυτομορφισμός και $g : \mathbb{Z} \to G$ μια πολυωνυμική ακολουθία. Τώρα, γράφουμε $g(n) = \varepsilon g'(n)\gamma(n)$ όπως στο Λήμμα 3.4.4. Αφού η γ είναι ρητή, είναι περιοδική με μία περίοδο q. Επειδή η F είναι Γ-αυτομορφισμός, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}_{n\leqslant x} F(\varepsilon g'(qn+a)\gamma(qn+a)) = 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}_{n\leqslant x} F(\varepsilon g'(qn+a)\gamma(a)) = 0$$

για κάθε a. Ας υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει για κάποιο a. Λόγω πλήρους ισοκατανομής αυτό δίνει

$$\int_{G'/\Gamma'} F(\varepsilon g'(qn+a)\gamma(a))d\mu(g) \neq 0.$$

Από το αναλλοίωτο στις μεταφορές του μέτρου Haar, έχουμε για κάθε h στην κεντρική ομάδα του ${G'}_d$, ότι

$$\int_{G'/\Gamma'} F(\varepsilon g'(qn+a)\gamma(a))d\mu(g) = \int_{G'/\Gamma'} F(h\varepsilon g'(qn+a)\gamma(a))d\mu(g).$$

Από τη σχέση (3.4.1) βλέπουμε ότι $\eta({G'}_d) = 0$. Άρα, η ακολουθία $F(\varepsilon g'(gn+a)\gamma(a))$ είναι nilsequence βαθμού το πολύ $d-1$. Επειδή και οι δείκτριες συναρτήσεις των αριθμητικών προόδων είναι nilsequences βαθμού το πολύ $d-1$, συμπεραίνουμε ότι και η x είναι nilsequence βαθμού το πολύ $d-1$, οπότε $[x] = 0$, άτοπο. $\square$

Καλούμε ένα nilcharacter x άρρητο, εάν για όλους τους φυσικούς αριθμούς q ισχύει $q[x] \neq 0$. Για $d = 1$, οι άρρητοι χαρακτήρες έχουν τη μορφή $\exp(an), a \notin \mathbb{Q}$. Για μεγαλύτερους βαθμούς έχουμε το εξής λήμμα.

Λήμμα 3.4.5. *Για $d \geq 2$, ένας nilcharacter x βαθμού d είναι άρρητος αν και μόνο αν $[x] \neq 0$.*

Απόδειξη. Έστω ότι έχουμε $q[x] = 0$ για κάποιο φυσικό αριθμό q, οπότε θα ισχύει $[x(q\cdot)] = 0$. Έτσι, έχουμε την αναπαράσταση

$$x(qn) = F(g(n)\Gamma)$$

για κάθε n και μια βασική nilsequence βαθμού $\leqslant d-1$. Επειδή ο x έχει μέτρο 1, μπορούμε να θεωρήσουμε ότι το ίδιο ισχύει και για την F. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Taylor καθώς και τον τύπο Baker-Hausdorff-Campbell, μπορούμε να γράψουμε την πολυωνυμική ακολουθία $g(n)$ ως

$$g(n) = \prod_{j \leqslant d} {g_j}^{n^j}.$$

Παίρνοντας ρίζες των g_j, έχουμε $g_j = ({g_j}')^{q^{|j|}}$, οπότε τελικά $g(n) = g'(qn)$, όπου

$$g'(n) = \prod_{j \leqslant d} ({g_j}')^{n^j}.$$

Προφανώς, για την ακολουθία $x_1(n) := x(qn)$ έχουμε $\operatorname{tr}(x_1(n) \otimes \overline{x_1(n)})) = m$, οπότε

$$\operatorname{tr}(\mathbb{E}_{n \leqslant y} x(n) \otimes \overline{F(g'(n)\Gamma)} 1_{q|n}) = \frac{m}{q} + o(1)$$

όταν $y \to \infty$. Από την ανισότητα Cauchy-Schwarz έχουμε $|\operatorname{tr}(z)| \leqslant m^{\frac{1}{2}} \|z\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}$ για κάθε $z \in \mathbb{C}^{m \times m}$, οπότε χρησιμμοποιώντας ανάλυση Fourier έχουμε

$$\limsup_{x \to \infty} \|\mathbb{E}_{n \leqslant y} x(n) \otimes \overline{F(g'(n)\Gamma)} \exp(an/q)\|_{\mathbb{C}^{m \times m}} > 0$$

για κάποιον ακέραιο a. Από την Πρόταση 3.4.3 έχουμε

$$[x \otimes \overline{F(g'(\cdot)\Gamma)} \exp(a \cdot /q)] = 0.$$

Όμως, η ακολουθία $\overline{F(g'(\cdot)\Gamma)} \exp(a \cdot /q)$ είναι βασική nilsequence βαθμού $\leqslant d-1$, οπότε έχει σύμβολο 0. Άρα θα ισχύει ότι και $[x] = 0$ και το ζητούμενο έπεται. □

Χρησιμοποιώντας αυτό το λήμμα, έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 3.4.6. *Έστω $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ μια nilsequence βαθμού $\leqslant d$. Τότε, η f μπορεί να γραφεί ως το ομοιόμορφο όριο πεπερασμένων αθροισμάτων της μορφής*

$$f_0 + \sum_{i=1}^{d} \sum_{j=1}^{J_i} c_{i,j} x_{i,j} \tag{3.4.3}$$

όπου $f_0 : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$ είναι περιοδική, $J_1, \ldots, J_d$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant d$ και $1 \leqslant j \leqslant J_i$, ο $x_{i,j}$ είναι ένας βαθμού i άρρητος nilcharacter και $c_{i,j} : \mathbb{C}^{m_{i,j}} \to \mathbb{C}$ είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές.

Απόδειξη. Μπορούμε να θεωρήσουμε επαγωγικά ότι $d = 1$ ή $d > 1$ και ότι η πρόταση έχει αποδειχθεί για $d-1$. Χωρίς βλάβη της γενικότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η f είναι βασική nilsequence $f(n) = F(g(n))$ (και μετά να περάσουμε στο όριο). Η συνάρτηση $F : G \to \mathbb{C}$ δρα με φυσικό τρόπο και στο πηλίκο G/Γ_d, στο οποίο δρα η συμπαγής ομάδα G_d/Γ_d. Χρησιμοποιώντας το ανάπτυγμα Fourier μπορούμε να προσεγγίσουμε την F ομοιόμορφα από πεπερασμένους γραμμικούς συνδυασμούς λείων συναρτήσεων, καθε μία εκ των οποίων ικανοποιεί την σχέση (3.4.1) για κάποιον χαρακτήρα η, οπότε μπορούμε να υποθέσουμε ότι το ίδιο ισχύει για την F χωρίς βλάβη της γενικότητας. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι $|F| < 1$.

Μπορούμε να θεωρήσουμε το G/Γ_d σαν μια δέσμη ινών πάνω απο το nilmanifold πηλίκο G/Γ_d, με ίνες ισόμορφες με το G_d/Γ_d. Χρησιμοποιώντας μια διαμέριση της μονάδας, μπορούμε να γράψουμε $1 = {y_1}^2 + \cdots + {y_k}^2$ στο G/Γ_d, όπου κάθε $y_i : G/G_d \to \mathbb{R}$ είναι λεία και έχει φορέα σε ένα ανοικτό υποσύνολο U_i του G/G_d το οποίο είναι αρκετά μικρό, ώστε η δέσμη να είναι τετριμμένη. Έτσι, εάν $p : G/\Gamma_d \to G/G_d$ είναι η απεικόνιση πηλίκο, τότε το $p^{-1}(U_i)$ είναι ισόμορφο με το $U_i \times (G/G_d)$. Για κάθε i, μπορούμε να κατασκευάσουμε με αυτό τον τρόπο μια Γ-αυτομορφική λεία συνάρτηση $F_i : G \to \mathbb{C}$ που ικανοποιεί την (3.4.1), τέτοια ώστε $|F_i(x)| = |y_i(p(x\Gamma))|$ για όλα τα $x \in G$, οπότε θα ισχύει $|F_1|^2 + \cdots + |F_k|^2 = 1$. Εάν τώρα θέσουμε

$$x := (F(g(n)), \sqrt{1 - |F(g(n))|^2} F_1(g(n)), \ldots, \sqrt{1 - |F(g(n))|^2} F_k(g(n)),$$

βλέπουμε ότι ο x είναι ένας nilcharacter βαθμού d και η f είναι ένα γραμμικό συναρτησοειδές που εφαρμόζεται στο x. Αν ο x είναι άρρητος, τελειώσαμε. Αν $[x] = 0$, πάλι τελειώσαμε λόγω της επαγωγικής υπόθεσης. Η μόνη περίπτωση που μένει είναι όταν $d = 1$, οπότε ο x έχει τη μορφή $\exp(an/q)$ για κάποιον ρητό a/q. Όμως, σε αυτή την περίπτωση, ο x και κατά συνέπεια η f είναι περιοδική, οπότε και πάλι ισχύει το ζητούμενο. $\square$

Οι άρρητοι nilcharacters παρουσιάζουν απλοποιήσεις σε διγραμμικά αθροίσματα. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε το εξής λήμμα:

Λήμμα 3.4.7. *Έστω x ένας άρρητος nilcharacter, $\varepsilon > 0$, y αρκετά μεγάλο σε σχέση με το ε και z αρκετά μεγάλο σε σχέση με τα ε, y, z. Τότε, για οποιεσδήποτε φραγμένες ακολουθίες a_n, b_m, έχουμε*

$$\|\mathbb{E}_{p \leqslant y} \mathbb{E}_{m \leqslant z} a_p b_m x(pm)\|_{\mathbb{C}^m} \ll \varepsilon.$$

Απόδειξη. Αναπτύσσοντας, έχουμε

$$\|\sum_{j \leqslant J} x_j\|_{\mathbb{C}^m}{}^2 = \|\sum_{j \leqslant J} \sum_{j' \leqslant J} x_j \otimes x_{j'}\|_{\mathbb{C}^{m \times m}}.$$

Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|\mathbb{E}_{p,p' \leqslant y} a_p a_{p'} \mathbb{E}_{m \leqslant z} x(pm) \otimes \overline{x}(p'm)\|_{\mathbb{C}^{m \times m}} \ll \varepsilon^2.$$

Η περίπτωση $p = p'$ θα είναι αποδεκτή για y αρκετά μεγάλο, οπότε αρκεί απο την τριγωνική ανισότητα να δείξουμε ότι

$$\|\mathbb{E}_{m \leqslant z} x(pm) \overline{x}(p'm)\|_{\mathbb{C}^{m \times m}} \ll \varepsilon^2$$

για κάθε $p \neq p'$ και z αρκετά μεγάλο. Αλλά, εφόσον ο x είναι άρρητος, έχουμε από τη σχέση (3.4.2) ότι $[x(pm) \otimes \overline{x}(p'm)] \neq 0$. Συνεπώς, από την Πρόταση 3.4.3 έχουμε το ζητούμενο. $\square$

Έχουμε ένα παρόμοιο αποτέλεσμα για μέσους όρους πάνω απο πρώτους (στη μεταβλητή m):

Λήμμα 3.4.8. *Έστω x ένας άρρητος nilcharacter, $\varepsilon > 0$, y αρκετά μεγάλο σε σχέση με το ε και z αρκετά μεγάλο σε σχέση με τα ε, y, z. Τότε, για οποιεσδήποτε φραγμένες ακολουθίες a_n, b_m, έχουμε*

$$\|\mathbb{E}_{p_1 \leqslant y} \mathbb{E}_{p_2 \leqslant z} a_{p_1} b_{p_2} x(p_1 p_2)\|_{\mathbb{C}^m} \ll \varepsilon.$$

Απόδειξη. Έστω w αρκετά μεγάλο σε σχέση με το ε (υποθέτουμε ότι το y είναι αρκετά μεγάλο συναρτήσει των ε, x, z, w). Έστω W το γινόμενο των πρώτων μικρότερων του w. Τότε, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\|\mathbb{E}_{p_1 \leqslant y} \mathbb{E}_{p_2 \leqslant z, p_2 \equiv c (\bmod W)} a_{p_1} b_{p_2} x(p_1 p_2)\|_{\mathbb{C}^m} \ll \varepsilon$$

για όλα τα $1 \leqslant c \leqslant W$ που είναι σχετικά πρώτα με το W. Αυτό είναι συνέπεια της επόμενης σχέσης (για αρκετά μεγάλο z):

$$\|\mathbb{E}_{p \leqslant y} \mathbb{E}_{m \leqslant z/W} a_p b_{Wm+c} \frac{W}{\varphi(W)} \Lambda(Wm+c) x(p(Wm+c))\|_{\mathbb{C}^m} \ll \varepsilon,$$

όπου φ και Λ είναι οι συναρτήσεις Euler και von Mangoldt αντίστοιχα. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα πυκνού μοντέλου (Παράρτημα 3), για αρκετά μεγάλο z, μπορούμε να γράψουμε

$$b_{Wm+c} \frac{W}{\varphi(W)} \Lambda(Wm+c) = b_m{}' + b''_m + b'''_m,$$

όπου $b'_m = O(1)$ είναι μια φραγμένη ακολουθία, b''_m είναι μια ακολουθία με

$$\mathbb{E}_{m \leqslant z/W} |b''_m| \ll \varepsilon \tag{3.4.4}$$

και b'''_m είναι μια ακολουθία με

$$\mathbb{E}_{m \leqslant z/W} |b'''_m| \ll 1 \tag{3.4.5}$$

και

$$\mathbb{E}_{-z/w \leqslant m, h_1, \ldots, h_k \leqslant z/W} \prod_{a \in \{0,1\}^{k+1}} b'''_{m + a_1 h_1 + \cdots + a_k h_k} \ll \varepsilon^{2^{k+1}}, \tag{3.4.6}$$

όπου επεκτείνουμε την b'''_m με μηδενικά στους ακεραίους.

Από το προηγούμενο λήμμα (με ε/W στη θέση του ε), έχουμε

$$\|\mathbb{E}_{p \leqslant y} \mathbb{E}_{m \leqslant z/W} a_p b'_m x(p(Wm+c))\|_{\mathbb{C}^m} \ll \varepsilon$$

για z αρκετά μεγάλο, ενώ από την (3.4.4) έχουμε

$$\|\mathbb{E}_{p \leqslant y} \mathbb{E}_{m \leqslant z/W} a_p b''_m x(p(Wm+c))\|_{\mathbb{C}^m} \ll \varepsilon.$$

Τέλος, από τις (3.4.5), (3.4.6) και την [23, Πρόταση 11.2] εφαρμοσμένη πάνω στην ακολουθία $x(p(Wn+c))$ για $p \leqslant y$, έχουμε το φράγμα

$$\|\mathbb{E}_{p \leqslant y} \mathbb{E}_{m \leqslant z/W} a_p b'''_m x(p(Wm+c))\|_{\mathbb{C}^m} \ll \varepsilon.$$

Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε τώρα το ζητούμενο. □

Είμαστε τώρα σε θέση να συνεχίσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 3.2.1. Αρχικά, ασχολούμαστε με την περίπτωση όπου

$$\sum_p \frac{1-|g_j(p)|}{p} = \infty$$

για κάποιο $0 \leqslant j \leqslant k$. Εφαρμόζοντας το θεώρημα Wirsing (Πόρισμα 1.3.5), έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{p\leqslant x}|g_j(n)| = o(1) \text{ για } x \to \infty,$$

από την οποία, μέσω της τριγωνικής ανισότητας, συμπεραίνουμε ότι η f μηδενίζεται ταυτοτικά και άρα σε αυτή την περίπτωση ισχύει το ζητούμενο. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε στη συνέχεια ότι

$$\sum_p \frac{1-|g_j(p)|}{p} < \infty$$

για όλα τα $0 \leqslant j \leqslant k$. Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\sum_p \frac{1-|G(p)|}{p} < \infty.$$

Πιο συγκεκριμένα, έχουμε ότι για κάθε ε ισχύει $|G(p)| = 1 - O(\varepsilon)$ για όλα τα p, εκτός ίσως απο ένα πεπερασμένο πλήθος πρώτων. Αν $|G(p)| = 1 - O(\varepsilon)$, τότε

$$|f(a)G(p) - f(ap)| = |f(a) - \overline{G(p)}f(ap)| + O(\varepsilon)$$

για κάθε a. Από το Πόρισμα 3.3.3 συμπεραίνουμε ότι για κάθε φυσικό αριθμό a και $\varepsilon > 0$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}|f(a) - \overline{G(p)}f(ap)| \ll \varepsilon$$

για log-σχεδόν κάθε m. Επίσης, από την τριγωνική ανισότητα έχουμε την ασυμπτωτική σχέση

$$f(a) = \mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}\overline{G(p)}f(ap) + O(\varepsilon)$$

για log-σχεδόν κάθε m.

Θεωρούμε το συναρτησοειδές $\overline{\lim_{m\to\infty}}$ με την ιδιότητα $\overline{\lim_{m\to\infty}} a_m = 0$ για όλες τις ακολουθίες που έχουν φορέα ένα log-μικρό σύνολο (αυτό το συναρτησοειδές υπάρχει από το θεώρημα Hahn-Banach). Εφαρμόζοντας το $\overline{\lim_{m\to\infty}}$ στην τελευταία σχέση και στέλνοντας το ε στο 0, παίρνουμε

$$f(a) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}\overline{G(p)}f(ap), \tag{3.4.7}$$

την οποία επαναλαμβάνουμε για να καταλήξουμε στην

$$f(a) = \overline{\lim_{m_1\to\infty}\lim_{m_2\to\infty}}\mathbb{E}_{2^{m_1}\leqslant p_1<2^{m_1+1}}\mathbb{E}_{2^{m_2}\leqslant p_2<2^{m_2+1}}\overline{G(p_1)G(p_2)}f(ap_1p_2). \tag{3.4.8}$$

Από την Πρόταση 3.2.6, γράφουμε την f στη μορφή $f = f_1 + f_2$, όπου η f_1 είναι nilsequence και η f_2 ικανοποιεί την σχέση $\lim_{x\to\infty}\mathbb{E}_{p\leqslant x}|f_2(ap)| = 0$ για οποιοδήποτε μη μηδενικό ακέραιο a.

Συνεπώς, για την f_2 ισχύει $\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}|f_2(ap)| \ll \varepsilon$ για log-σχεδόν κάθε m. Από την τριγωνική ανισότητα συμπεραίνουμε ότι

$$f(a) = \overline{\lim_{m_1\to\infty}\lim_{m_2\to\infty}}\mathbb{E}_{2^{m_1}\leqslant p_1<2^{m_1+1}}\mathbb{E}_{2^{m_2}\leqslant p_2<2^{m_2+1}}\overline{G(p_1)G(p_2)}f_1(ap_1p_2) + O(\varepsilon). \tag{3.4.9}$$

Από την Πρόταση 3.4.6 μπορούμε να γράψουμε

$$f_1(ap) = f_0(ap) + \sum_{i=1}^{D}\sum_{j=1}^{J_i} c_{i,j}x_{i,j}(ap) + O(\varepsilon),$$

όπου η f_0 είναι περιοδική, το $c_{i,j}$ είναι γραμμικό συναρτησοειδές και κάθε $x_{i,j}$ είναι άρρητος nilcharacter βαθμού i. Από το Λήμμα 3.4.8, η συνεισφορά των $x_{i,j}$ στην (3.4.9) είναι $O(\varepsilon)$. Έτσι, καταλήγουμε στην

$$f(a) = \overline{\lim_{m_1\to\infty}\lim_{m_2\to\infty}}\mathbb{E}_{2^{m_1}\leqslant p_1<2^{m_1+1}}\mathbb{E}_{2^{m_2}\leqslant p_2<2^{m_2+1}}\overline{G(p_1)G(p_2)}f_0(ap_1p_2) + O(\varepsilon). \tag{3.4.10}$$

Τελικά, η f είναι περιοδική με περίοδο ίδια με αυτή της f_0 . Αυτό αποδεικνύει το πρώτο σκέλος του θεωρήματος.

Για να αποδείξουμε το επόμενο μέρος, θα χρησιμοποιήσουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 3.4.9. *Έστω x ένας χαρακτήρας Dirichlet ώστε η G να μην προσποιείται ασθενώς ότι είναι ο x. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό a ισχύει $\mathbb{E}_{n\leqslant y}f(an)\overline{x}(n) = o(1)$ καθώς $y\to\infty$.*

Απόδειξη. Αφού η G δεν προσποιείται πως είναι η x, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}(1-\mathrm{Re}(\overline{G(p)}x(p)) \gg 1$$

για log-μεγάλο σύνολο φυσικών m. Μάλιστα, μπορούμε να επιλέξουμε το συναρτησοειδές $\overline{\lim}$ που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω, έτσι ώστε

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}(1-\mathrm{Re}(\overline{G(p)}x(p))) \neq 0,$$

ή ισοδύναμα,

$$\overline{\lim_{m\to\infty}}\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}\overline{G(p)}x(p) \neq 1. \tag{3.4.11}$$

Από το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 3.2.1 που μόλις αποδείξαμε, η f είναι ε-κοντά σε μία περιοδική συνάρτηση f_0. Από την (3.4.7) έχουμε

$$f_0(an) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}\overline{G(p)}f_0(apn) + O(\varepsilon),$$

και άρα

$$f_0(an)\overline{x}(n) = \overline{\lim_{m\to\infty}}\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}\overline{G(p)}x(p)f_0(apn)\overline{x}(pn) + O(\varepsilon).$$

Η συνάρτηση $n\to f_0(an)\overline{x}(n)$ είναι περιοδική και άρα έχει μια καλά ορισμένη μέση τιμή t. Αφού ο p είναι ένας αρκετά μεγάλος πρώτος, η συνάρτηση $n\to f_0(apn)\overline{x}(pn)$ έχει την ίδια μέση τιμή. Παίρνοντας τώρα μέσες τιμές στην τελευταία σχέση (το οποίο χρειάζεται πεπερασμένα το πλήθος n), συμπεραίνουμε ότι

$$t = \overline{\lim_{m\to\infty}}\mathbb{E}_{2^m\leqslant p<2^{m+1}}\overline{G(p)}x(p)t + O(\varepsilon),$$

και άρα, από την (3.4.11), $t\ll\varepsilon$. Έτσι, η συνάρτηση $n\to f_0(an)\overline{x}(n)$ έχει μέση τιμή $O(\varepsilon)$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}_{n\leqslant y}f(an)\overline{x}(n) \ll \varepsilon$$

για αρκετά μεγάλα y, που είναι το ζητούμενο. □

Αποδεικνύουμε τώρα το δεύτερο σκέλος του Θεωρήματος 3.2.1. Έστω a ένας ακέραιος και ας υποθέσουμε ότι η G δεν προσποιείται πως είναι κάποιος χαρακτήρας Dirichlet x. Έστω $\varepsilon > 0$. Από το (i) του Θεωρήματος 3.2.1, η f είναι ε-κοντά σε μία περιοδική συνάρτηση f_0 με περίοδο q. Από την Πρόταση 3.4.9 έχουμε

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \mathbb{E}_{n\leqslant 2^m} f(an)\overline{x}(n) = 0$$

για κάθε χαρακτήρα Dirichlet x, το οποίο δίνει

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \mathbb{E}_{n\leqslant 2^m, n\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)} f(an) = 0.$$

Προσεγγίζοντας την f με την f_0 καταλήγουμε στην

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \mathbb{E}_{n\leqslant 2^m, n\equiv 1(\mathrm{mod}\ q)} f_0(an) \ll \varepsilon.$$

Από την περιοδικότητα της f_0, το πρώτο σκέλος της παραπάνω σχέσης ισούται με $f_0(a)$. Παίρνοντας όρια καταλήγουμε στο $f(a) = 0$, που είναι το ζητούμενο.

Μένει να αποδείξουμε το μέρος (iii) του θεωρήματος. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι η G προσποιείται πως είναι ένας χαρακτήρας x με περίοδο q_0. Τότε, δεν μπορεί να προσποιείται πως είναι ένας άλλος χαρακτήρας Dirichlet που επάγεται από έναν πρωταρχικό χαρακτήρα διαφορετικό από αυτόν του x. Έστω $\varepsilon > 0$, a ακέραιος, f_0 μια q-περιοδική συνάρτηση ε-κοντά στην f. Μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το q είναι πολλαπλάσιο του q_0 (διαστέλλοντας την περίοδο της f_0). Από την Πρόταση 3.4.9 έχουμε

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \mathbb{E}_{n\leqslant 2^m} f(an)\overline{x'}(n) = 0$$

για κάθε χαρακτήρα Dirichlet x' που επάγεται από διαφορετικό πρωταρχικό χαρακτήρα από αυτόν που επάγεται ο x. Έτσι, αναπτύσσοντας τον χαρακτήρα Dirichlet, έχουμε

$$\overline{\lim_{m\to\infty}} \mathbb{E}_{n\leqslant 2^m, n\equiv b(\mathrm{mod}\ q)} f(an) = tx(b)$$

για κάθε b σχετικά πρώτο με το q και κάποιο t ανεξάρτητο του b. Το αριστερό μέλος αυτής της σχέσης είναι ίσο με $f_0(ab) + O(\varepsilon)$ και συνεπώς

$$f_0(ab) = tx(b) + O(\varepsilon)$$

και, ιδιαίτερα (αντικαθιστώντας το b με 1 και χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα)

$$f_0(ab) = f_0(a)x(b) + O(\varepsilon).$$

Εάν αντικαταστήσουμε την περιοδική συνάρτηση $f_0(a)$ με το μέσο όρο $\overline{f_0}(a) = \mathbb{E}_{1\leqslant b\leqslant q,(b,q)=1} f_0(ab)\overline{x}(b)$, τότε η $\overline{f_0}$ είναι επίσης περιοδική με περίοδο q και είναι $O(\varepsilon)$ κοντά στην f_0 (και άρα και στην f). Επιπλέον, για κάθε ακέραιο c σχετικά πρώτο με τον q, μπορούμε να κάνουμε την αλλαγή μεταβλητών $b' \equiv bc(\mathrm{mod}\ q)$ για να δούμε ότι η $\overline{f_0}$ ικανοποιεί την ταυτότητα

$$\overline{f_0}(ac) = \mathbb{E}_{1\leqslant b\leqslant q,(b,q)=1} f_0(abc)\overline{x}(b) = \mathbb{E}_{1\leqslant b'\leqslant q,(b',q)=1} f_0(ab')\overline{x}(b')x(c) = x(c)\overline{f_0}(a),$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

Σχόλιο 3.4.10. Θα μπορούσαμε, χωρίς ουσιαστικές αλλαγές, να αποδείξουμε μια πιο γενική εκδοχή του Θεωρήματος 3.2.1 που αφορά σε πιο γενικούς συσχετισμούς της μορφής

$$f(a) = \overline{\lim_{m\to\infty}} \mathbb{E}^{\log}_{x_m/w_m \leqslant n \leqslant x_m} g_0(q_1 n + ah_0)\cdots g_k(q_k n + ah_k)$$

για σταθερούς $q_1, q_2, \ldots, q_k$. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού υπάρχει στο [34].

3.5 Η ακολουθία των προσήμων της συνάρτησης Liouville

Οι συσχετισμοί της συνάρτησης Liouville έχουν άμεση σχέση με τις διαφορετικές ακολουθίες προσήμων που λαμβάνονται από διαδοχικούς όρους της ακολουθίας $\lambda(n)$. Πιο συγκεκριμένα, για οποιοδήποτε $e = (e_1, e_2, \ldots, e_k) \in \{-1, +1\}^k$, ορίζουμε ως A_e το σύνολο των φυσικών αριθμών n για τους οποίους $\lambda(n+h) = e_h$ για όλα τα $0 \leqslant h \leqslant k$. Η ισχύς της εικασίας Chowla συνεπάγεται ότι για κάθε $e \in \{-1, +1\}^k$ το σύνολο A_e έχει πυκνότητα $\frac{1}{2^k}$. Αντίστοιχα, αν δεχθούμε ότι ισχύει η λογαριθμική εκδοχή της εικασίας Chowla, τότε το σύνολο A_e έχει λογαριθμική πυκνότητα $\frac{1}{2^k}$. Αυτό, βέβαια, έχει ως συνέπεια ότι όλες οι διαφορετικές ακολουθίες προσήμων με k όρους λαμβάνονται άπειρες φορές απο τη συνάρτηση λ.

Η περίπτωση $k = 1$ προκύπτει από το θεώρημα των πρώτων αριθμών. Στο [20], ο Hildebrand απέδειξε ότι για $k \leqslant 3$, όλοι οι διαφορετικοί συνδυασμοί λαμβάνονται άπειρες φορές από την λ. Στο [28], οι Matomaki, Radziwill και Tao βελτίωσαν αυτό το αποτέλεσμα, δείχνοντας ότι τα σύνολα A_e έχουν θετική κάτω πυκνότητα. Επιπλέον, για $k \geq 3$ απέδειξαν ότι υπάρχουν τουλάχιστον $k + 5$ διαφορετικοί συνδυασμοί προσήμων για τις οποίες τα αντίστοιχα σύνολα A_e έχουν θετική πυκνότητα.

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 3.2.1 και το Πόρισμα 3.2.2 μπορούμε να βελτιώσουμε αυτά τα αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.5.1. (α) *Αν $e \in \{-1, +1\}^3$ και το A_e είναι το σύνολο που ορίστηκε παραπάνω, τότε έχουμε*

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}^{\log}_{n \leqslant x} 1_{A_e}(n) = \frac{1}{8}.$$

(β) *Αν $e \in \{-1, +1\}^4$ και A_e είναι το σύνολο που ορίστηκε παραπάνω, τότε*

$$\liminf_{x\to\infty} \mathbb{E}^{\log}_{n \leqslant x} 1_{A_e}(n) \geq \frac{1}{32}$$

και, κατά συνέπεια, όλοι οι 16 διαφορετικοί συνδυασμοί προσήμων συναντώνται άπειρες φορές στην ακολουθία $\lambda(n)$.

Για το μέρος (α) μπορούμε αποδείξουμε το εξής γενικότερο αποτέλεσμα:

Πρόταση 3.5.2. *Αν $k = 0, 1, 2$, $e_0, \ldots, e_k \in \{-1, +1\}^k$, A είναι το σύνολο των φυσικών n για τους οποίους $\lambda(n + j) = e_j$ για $j = 0, \ldots, k$ και $1 \leqslant w_m \leqslant x_m$ είναι ακολουθίες που τείνουν στο άπειρο, τότε*

$$\lim_{x\to\infty} \mathbb{E}^{\log}_{x_m/w_m \leqslant n \leqslant x_m} 1_A(n) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να γράψουμε

$$1_A(n) = \frac{1}{2^{k+1}} \prod_{j=0}^{k} (1 + e_j \lambda(n+j)).$$

Αναπτύσσοντας αυτό το γινόμενο, παίρνουμε έναν όρο $\frac{1}{2^{k+1}}$ και όρους της μορφής $\prod_{j \in J} \lambda(n+j)$ όπου J είναι ένα μη κενό υποσύνολο του $\{0, \ldots, k\}$. Η ισχύς της λογαριθμικής εικασίας Chowla στην περίπτωση $k = 1$ [32] δίνει ότι αν $|J| = 2$ ο αντίστοιχος όρος είναι αμελητέος, εάν πάρουμε λογαριθμικούς μέσους όρους στην παραπάνω σχέση. Με την ίδια λογική, η ισχύς της λογαριθμικής εικασίας Chowla στις περιπτώσεις $k = 0, 2$ (Πόρισμα 3.2.2) δίνουν ότι το ίδιο ισχύει στις περιπτώσεις όπου $|J| = 1, 3$. Το ζητούμενο έπεται. □

Για το μέρος (β) εργαζόμαστε όμοια. Ας υποθέσουμε ότι το A_e έχει μηδενική κάτω πυκνότητα. Τότε, υπάρχουν ακολουθίες $1 \leqslant w_m \leqslant x_m$ που τείνουν στο άπειρο για τις οποίες ισχύει

$$\liminf_{m \to \infty} \mathbb{E}^{\log}_{x_m/w_m \leqslant n \leqslant x_m} 1_{A_e}(n) = 0.$$

Αναπτύσσοντας όπως στην απόδειξη της Πρότασης 3.5.2 και χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 3.2.4, βλέπουμε ότι το αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης γράφεται

$$\frac{1}{16}(1 + e_0 e_1 e_2 e_3 a),$$

όπου το a δίνεται από τη σχέση

$$a = \overline{\lim_{m \to \infty}} \mathbb{E}^{\log}_{x_m/w_m \leqslant n \leqslant x_m} \lambda(n)\lambda(n+1)\lambda(n+2)\lambda(n+3) \tag{3.5.1}$$

για κάποιο συναρτησοειδές $\overline{\lim}$.

Λήμμα 3.5.3. *Για το a, όπως ορίστηκε παραπάνω, ισχύει $-1/2 \leqslant a \leqslant 1/2$.*

Απόδειξη. Θέτοντας όπου n το $n+1$ συμπεραίνουμε ότι

$$a = \overline{\lim_{m \to \infty}} \mathbb{E}^{\log}_{x_m/w_m \leqslant n \leqslant x_m} \lambda(n+1)\lambda(n+2)\lambda(n+3)\lambda(n+4).$$

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες $ab \geq a + b - 1, -a - b - 1$ για $a, b \in \{-1, +1\}$ πάνω στους $t = \lambda(n)\lambda(n+1)\lambda(n+2)\lambda(n+3)$ και $s = \lambda(n+1)\lambda(n+2)\lambda(n+3)\lambda(n+4)$, και παρατηρώντας ότι $\lambda^2 = 1$, συμπεραίνουμε ότι

$$\overline{\lim_{m \to \infty}} \mathbb{E}^{\log}_{x_m/w_m \leqslant n \leqslant x_m} \lambda(n)\lambda(n+4) \geq 2a - 1, -2a - 1.$$

Όμως, η περίπτωση $k = 1$ της λογαριθμικής εικασίας Chowla δίνει ότι το όριο στο αριστερό μέλος είναι 0, οπότε προκύπτει το ζητούμενο. □

Τα παραπάνω επιχειρήματα μας οδηγούν τελικά στο φράγμα:

$$\frac{1}{16}\left(1 - \frac{1}{2}\right) \leqslant \liminf_{m \to \infty} \mathbb{E}^{\log}_{x_m/w_m \leqslant n \leqslant x_m} 1_{A_e}(n) \leqslant \frac{1}{16}$$

το οποίο τελικά δίνει το μέρος (β).

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Δυναμικά συστήματα αριθμητικών συναρτήσεων

4.1 Εργοδικότητα ακολουθιών

Θεωρούμε μια φραγμένη ακολουθία $a(n)$. Ας υποθέσουμε ότι η ακολουθία αυτή δέχεται συσχετισμούς πάνω απο μία ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I}$. Τότε, όπως είδαμε, μπορούμε να ορίσουμε το αντίστοιχο σύστημα Furstenberg για την ακολουθία $a(n)$. Στην περίπτωση της συνάρτησης Liouville και όταν $\mathbf{I} = ([\mathrm{N}])_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$, το αντίστοιχο σύστημα θα ονομάζεται σύστημα Liouville.

Ορισμός 4.1.1. Έστω $\mathbf{I} = (\mathrm{I_n})$ μια ακολουθία διαστημάτων με $|I_n| \to \infty$. Λέμε ότι μια φραγμένη ακολουθία $a(n)$ είναι εργοδική για την ακολουθία $\mathbf{I}$, εάν δέχεται συσχετισμούς πάνω απο τη $\mathbf{I}$ και το αντίστοιχο σύστημα Furstenberg είναι εργοδικό.

Παρατήρηση 4.1.2. Έναν παρόμοιο ορισμό έχουμε αν υποθέσουμε ότι η ακολουθία δέχεται συσχετισμούς για λογαριθμικούς μέσους. Τότε, θα λέμε αντίστοιχα ότι η ακολουθία είναι εργοδική για λογαριθμικούς μέσους.

Ο ορισμός είναι ισοδύναμος με το να ισχύει η παρακάτω ταυτότητα

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in[N]}(\mathbb{E}_{m\in\mathbf{I}} b(m+n)c(m)) = \mathbb{E}_{m\in\mathbf{I}} b(m)\mathbb{E}_{m\in\mathbf{I}} c(m) \tag{4.1.1}$$

για οποιεσδήποτε ακολουθίες $b(m), c(m)$ που έχουν τη μορφή $a_1(m+h_1)\cdots a_k(m+h_k)$, όπου όλα τα $a_I \in \{a, \overline{a}\}$ και οι $h_1, \dots, h_k$ είναι μη αρνητικοί ακέραιοι. Παρόμοια σχέση έχουμε και στην περίπτωση των λογαριθμικών μέσων.

Το σύστημα Liouville δεν γνωρίζουμε εάν είναι εργοδικό. Η εικασία Chowla συνεπάγεται ότι το σύστημα αυτό πρέπει να είναι ένα σύστημα Bernoulli και κατά συνέπεια εργοδικό. Σε αυτό το κεφάλαιο θα αποδείξουμε το εξής θεώρημα [7]:

Θεώρημα 4.1.3 (Frantzikinakis). *Έστω $\mathbf{I} = ([\mathrm{N_k}])$ μια ακολουθία διαστημάτων με μήκη που τείνουν στο άπειρο. Εάν η συνάρτηση Liouville είναι εργοδική για λογαριθμικούς μέσους, τότε ισχύει η εικασία Chowla για λογαριθμικούς μέσους στο $\mathbf{I}$.*

Πόρισμα 4.1.4. *Εάν η συνάρτηση Liouville είναι εργοδική για Cesàro μέσους στο* $\mathbf{I} = ([\mathrm{N}])_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$, *τότε ικανοποιεί την εικασία Chowla για Cesàro μέσους στο* $\mathbf{I}$.

Η απόδειξη βασίζεται στην ισοδυναμία της λογαριθμικής εικασίας Chowla και της τοπικής ομοιομορφίας της συνάρτησης Liouville. Αυτό αποδείχτηκε στο [33]. Μάλιστα, η τοπική ομοιομορφία για μια ισχυρά απεριοδική πολλαπλασιαστική συνάρτηση είναι συνέπεια της εργοδικότητας του αντίστοιχου συστήματος Furstenberg. Αυτό διατυπώνεται στα δύο επόμενα θεωρήματα, όπου οι ημινόρμες $\|\cdot\|_{U^s(\mathbf{I})}, \|\cdot\|_{U^s_\star(\mathbf{I})}$ ορίζονται στην επόμενη ενότητα.

Θεώρημα 4.1.5. *Έστω* $f_1 \in \mathcal{M}$[1] *μια ισχυρά απεριοδική πολλαπλασιαστική συνάρτηση, η οποία είναι εργοδική για λογαριθμικούς μέσους στο* $\mathbf{I} = ([\mathrm{N_k}]), \mathrm{N_k} \to \infty$. *Τότε, για κάθε* $k \geq 2$ *ισχύει*

$$\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}} f_1(m+n_1)\cdots f_k(m+n_k) = 0 \tag{4.1.2}$$

για οποιεσδήποτε πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις $f_2, \ldots, f_k \in \mathcal{M}$ *και όλους τους διαφορετικούς ακεραίους* $n_1, \ldots, n_k \in \mathbb{N}$.

Θεώρημα 4.1.6. *Έστω* $f \in \mathcal{M}$ *μια ισχυρά απεριοδική πολλαπλασιαστική συνάρτηση που είναι εργοδική για Cesàro (αντίστοιχα λογαριθμικούς) μέσους στο* $\mathbf{I} = ([\mathrm{N_k}]), \mathrm{N_k} \to \infty$. *Τότε, ισχύει* $\|f\|_{U^s(\mathbf{I})} = \|f\|_{U^s_\star(\mathbf{I})} = 0$ *(αντίστοιχα* $\|f\|_{U^s_{\log}(\mathbf{I})} = \|f\|_{U^s_{\star,\log}(\mathbf{I})} = 0$*) για κάθε* $s \in \mathbb{N}$.

Εφαρμόζοντας το Θεώρημα 4.1.5 στην περίπτωση όπου όλες οι συναρτήσεις είναι ίσες με μία απεριοδική συνάρτηση με τιμές $-1, 1$ (άρα θα είναι και ισχυρά απεριοδική) έχουμε το εξής:

Πόρισμα 4.1.7. *Έστω* $f : \mathbb{N} \to \{-1, 1\}$ *μια απεριοδική συνάρτηση που δέχεται συσχετισμούς για λογαριθμικούς μέσους πάνω απο την ακολουθία* $\mathbf{I} = ([\mathrm{N_k}]), \mathrm{N_k} \to \infty$. *Τότε, το αντίστοιχο σύστημα Furstenberg είναι εργοδικό αν και μόνο εάν είναι σύστημα Bernoulli.*

Για την απόδειξη θα χρειαστούμε ένα λήμμα του Kátai [24].

Λήμμα 4.1.8. *Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *υπάρχει* $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$ *και* $K = K(\varepsilon)$ *ώστε να ισχύει το εξής: αν* $N \geq K$ *και* $a : [N] \to \mathbb{C}$ *είναι μια ακολουθία φραγμένη από το 1, η οποία ικανοποιεί την*

$$\max_{1<p<q<K;p,q\in\mathbb{P}} |\mathbb{E}_{n\in[\lfloor N/q\rfloor]} a(pn)\overline{a}(qn)| < \delta,$$

τότε

$$\sup_{f\in\mathcal{M}} |\mathbb{E}_{n\in[N]} f(n)a(n)| < \varepsilon.$$

Πόρισμα 4.1.9. *Έστω* $N_k \to \infty$ *ακέραιοι και* $a_k : [N_k] \to \mathbb{C}$ *ακολουθίες φραγμένες απο το 1 οι οποίες ικανοποιούν την*

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_{n\in[cN_k]} a_k(pn)\overline{a_k}(p'n) = 0$$

για κάθε $p, p' \in \mathbb{N}, p \neq p'$ *και κάθε* $c > 0$. *Τότε,*

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{f\in\mathcal{M}} |\mathbb{E}_{n\in[N_k]} f(n)a_k(n)| = 0.$$

[1] Το σύνολο $\mathcal{M}$ ορίστηκε στην Ενότητα 1.1.

4.2 Οι ημινόρμες ομοιομορφίας $\|\cdot\|_{U^s(\mathbf{I})}$

Έστω μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I} = (\mathrm{I_N})$ με μήκη που τείνουν στο άπειρο και μια φραγμένη ακολουθία a που δέχεται συσχετισμούς πάνω στο $\mathbf{I}$. Τότε, ορίζουμε τις ημινόρμες ομοιομορφίας $\|\cdot\|_{U^s(\mathbf{I})}$ επαγωγικά ως

$$\|a\|^2_{U^1(\mathbf{I})} = \mathbb{E}_{h\in\mathbb{N}}(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}}a(n+h)\overline{a(n)}),$$

και για $s \in \mathbb{N}$

$$\|a\|^{2^{s+1}}_{U^{s+1}(\mathbf{I})} = \mathbb{E}_{h\in\mathbb{N}}\|S_h a\cdot\overline{a}\|^{2^s}_{U^s(\mathbf{I})}, \tag{4.2.1}$$

όπου S_h είναι το shift στον χώρο των ακολουθιών

$$S_h(a)(n) = a(n+h).$$

Για να δείξουμε ότι τα όρια αυτά υπάρχουν, θεωρούμε το αντίστοιχο σύστημα Furstenberg (X,μ,T) για το ζεύγος $a, \mathbf{I}$ και έστω F η αντίστοιχη συνάρτηση όπως στην Πρόταση 1.4.2. Τότε, η σχέση (4.2.1) δίνει ότι $\|a\|_{U^s(\mathbf{I})} = |||F|||_s$. Επιπλέον, από τον ορισμό των ημινορμών Host-Kra παίρνουμε μια κλειστή μορφή για τις νόρμες ομοιομορφίας:

$$\|a\|^{2^s}_{U^s(\mathbf{I})} = \mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{N}^s}(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}}\prod_{\varepsilon\in[[s]]}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})).$$

Επίσης, έχουμε

$$\|a\|_{U^s(\mathbf{I})} \leqslant \|a\|_{U^{s+1}(\mathbf{I})}$$

για κάθε s φυσικό. Ομοίως, εάν η ακολουθία a δέχεται λογαριθμικούς συσχετισμούς, τότε ορίζουμε τις ημινόρμες $\|\cdot\|_{U^s_{\log}(\mathbf{I})}$ επαγωγικά ως

$$\|a\|_{U^1_{\log}(\mathbf{I})} = \mathbb{E}_{h\in\mathbb{N}}(\mathbb{E}^{\log}_{n\in\mathbf{I}}a(n+h)\overline{a(n)})$$

και

$$\|a\|^{2^{s+1}}_{U^{s+1}_{\log}(\mathbf{I})} = \mathbb{E}_{h\in\mathbb{N}}\|S_h a\cdot\overline{a}\|^{2^s}_{U^s_{\log}(\mathbf{I})}.$$

Επιπλέον, θα χρειαστούμε και κάποιες παραλλαγές αυτών των ημινορμών. Για $s \in \mathbb{N}$ και μια ακολουθία Følner $\mathbf{I}$, ορίζουμε

$$\|a\|_{U^s_\star(\mathbf{I})} := \limsup_{H\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{n\in I_N}\|S_n a\|_{U^s[H]} \tag{4.2.2}$$

και

$$\|a\|_{U^s_{\star,\log}(\mathbf{I})} := \limsup_{H\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}^{\log}_{n\in I_N}\|S_n a\|_{U^s[H]}. \tag{4.2.3}$$

Γι' αυτές τις ημινόρμες έχουμε το εξής λήμμα[7]:

Λήμμα 4.2.1. *Έστω $s \in \mathbb{N}$ και a φραγμένη ακολουθία που δέχεται συσχετισμούς σε μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I}$ με μήκη που τείνουν στο άπειρο. Τότε,*

$$\|a\|_{U^s_\star(\mathbf{I})} \leqslant 4\|a\|_{U^s(\mathbf{I})}.$$

Παρόμοια σχέση έχουμε και στην περίπτωση που η a δέχεται λογαριθμικούς συσχετισμούς.

Οι νόρμες ομοιομορφίας θα μας χρειαστούν για να αποδείξουμε μια ισοδύναμη σχέση με την εργοδικότητα για το σύνολο των ισχυρά απεριοδικών συναρτήσεων. Καταρχάς, έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 4.2.2. *Έστω $f_1 \in \mathcal{M}$ μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση που δέχεται log-συσχετισμούς πάνω απο μια ακολουθία $\mathbf{I} = ([\mathrm{N_k}]), \mathrm{N_k} \to \infty$ τέτοια ώστε $\|f_1\|_{U^s_{\log}(\mathbf{I})} = 0$ για κάποιον $s \geq 2$. Τότε, έχουμε*

$$\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}} f_1(m+n_1)\dots f_s(m+n_s) = 0$$

για οποιεσδήποτε $f_2, \dots, f_s \in \mathcal{M}$ και διακεκριμένους φυσικούς $n_1, \dots, n_s$.

Παρατήρηση 4.2.3. Στο [[6]] αποδεικνύεται ότι για μια απεριοδική πολλαπλασιαστική συνάρτηση f ισχύει $\lim\limits_{N\to\infty} \|f_N\|_{U^s(Z_N)} = 0$, όπου f_N είναι η περιοδική επέκταση της $f \cdot 1_{[N]}$. Ωστόσο, η συνθήκη της τοπικής ομοιομορφίας είναι πιο ισχυρή και δεν μπορούμε μέσα απο τις νόρμες Gowers να βγάλουμε κάποιο συμπέρασμα για την f. Εξάλλου, η απεριοδικότητα δεν είναι ικανή συνθήκη για να ισχύει η εργοδικότητα και κατά συνεπεια η εικασία του Elliott [26].

Για να αποδείξουμε την Πρόταση 4.2.2 θα χρειαστούμε μια ταυτότητα που απέδειξε ο Tao στο [32]. Η απόδειξη χρησιμοποιεί πιθανοθεωρητικές μεθόδους και είναι παρόμοια με το entropy decrement argument που χρησιμοποιήσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο.

Πρόταση 4.2.4. *Έστω $\mathbf{I} = ([\mathrm{N_k}]), \mathrm{N_k} \to \infty$ μια ακολουθία διαστημάτων, $(c_p)_{p\in\mathbb{P}}$ μια φραγμένη ακολουθία μιγαδικών αριθμών, s φυσικός αριθμός, $a_1, \dots, a_s$ φραγμένες ακολουθίες και $n_1, \dots, n_s \in \mathbb{N}$. Τότε, αν υποθέσουμε ότι και στα δύο μέρη της παρακάτω σχέσης το όριο $\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}}$ υπάρχει για κάθε $p \in \mathbb{P}$ και το όριο $\mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}}$ υπάρχει, έχουμε*

$$\mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}} c_p (\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}} \prod_{j=1}^{s} a_j(pm+pn_j)) = \mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}} c_p (\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}} \prod_{j=1}^{s} a_j(m+pn_j)).$$

Πόρισμα 4.2.5. *Έστω $\mathbf{I}$, $s, n_1, \dots, n_s$ όπως στην προηγούμενη πρόταση και έστω $f_1, \dots f_s \in \mathcal{M}$. Ας υποθέσουμε ότι και στα δύο μέρη της παρακάτω σχέσης το όριο $\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}}$ υπάρχει για κάθε $p \in \mathbb{P}$ και το όριο $\mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}}$ υπάρχει. Επιπλέον, ας υποθέσουμε ότι το όριο $\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}} \prod_{j=1}^{s} f_j(pm+pn_j)$ υπάρχει για κάθε πρώτο p. Τότε, έχουμε*

$$\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}} \prod_{j=1}^{s} f_j(m+n_j) = \mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}} c_p (\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}} \prod_{j=1}^{s} f_j(m+pn_j)), \tag{4.2.4}$$

όπου $c_p = \prod_{j=1}^{s} \overline{f_j(p)}$.

Απόδειξη. Για $p \in \mathbb{P}$ και $j = 1, \dots, s$ ισχύει

$$f_j(p(m+n_j)) = f_j(p) f_j(m+n_j),$$

εκτός εάν $m \equiv -n_j (\mathrm{mod}\ p)$. Συνεπώς,

$$\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}} \prod_{j=1}^{s} f_j(m+n_j) = c_p \mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}} \prod_{j=1}^{s} f_j(pm+pn_j) + O(1/p).$$

Παίρνοντας μέσους όρους πάνω απο το $\mathbb{P}$ έχουμε

$$\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}}\prod_{j=1}^{s} f_j(m+n_j) = \mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}} c_p(\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}}\prod_{j=1}^{s} f_j(pm+pn_j)).$$

Από την Πρόταση 4.2.4 παίρνουμε το ζητούμενο. □

Τέλος, θα χρειαστούμε το εξής εργοδικό θεώρημα:

Πρόταση 4.2.6. *Έστω $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο, $s\geq 2$, $F_1,F_2,\ldots,F_s\in L^\infty(\mu)$ και $n_1,\ldots,n_s$ διακεκριμένοι ακέραιοι. Έστω ότι ισχύει $|||F_1|||_s=0$. Τότε,*

$$\mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}}|\int\prod_{j=1}^{s} T^{pn_j}F_j d\mu| = 0.$$

Σκιαγράφηση της απόδειξης. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}}\int\prod_{j=1}^{s}(T\times T)^{pn_j}(F_j\otimes\overline{F_j})d(\mu\times\mu) = 0.$$

Όπως στο [4, Θεώρημα 1.6], χρησιμοποιώντας την Gowers ομοιομορφία της W-tricked von Mangoldt συνάρτησης [13], έχουμε ότι το όριο αυτό γράφεται

$$\lim_{W\to\infty}\mathbb{E}_{(k,W)=1}\mathbb{E}_{n\in\mathbb{N}}\int\prod_{j=1}^{s}(T\times T)^{(nW+k)n_j}(F_j\otimes\overline{F_j})d(\mu\times\mu).$$

Ωστόσο, ο δεύτερος μέσος όρος τείνει στο 0, καθώς $|||F_1\otimes\overline{F_1}|||_{s-1,T\times T}\leqslant |||F_1|||^2_{s,T}=0$ λόγω της υπόθεσης. Το ζητούμενο έπεται. □

Είμαστε τώρα σε θέση να αποδείξουμε την Πρόταση 4.2.2. Έστω ότι το ζητούμενο δεν ισχύει. Τότε, υπάρχουν πολλαπλασιαστικές συναρτήσεις $f_2,\ldots,f_s\in\mathcal{M}$, διακεκριμένοι θετικοί ακέραιοι $n_1,\ldots,n_s$ και μια υπακολουθία $\mathbf{I}'=(\mathrm{N}'_\mathrm{k})$ της (N_k) τέτοια ώστε το όριο $\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}'}\prod_{j=1}^{s} g_j(m+k_j)$ να υπάρχει για οποιαδήποτε $k_1,\ldots,k_s$, και $g_1,\ldots,g_s\in\{a_1,\ldots,a_s,\overline{a_1},\ldots,\overline{a_s}\}$ και, επιπλέον, να ισχύει

$$\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}'}\prod_{j=1}^{s} f_j(m+n_j)\neq 0.$$

Χρησιμοποιώντας το Πόρισμα 4.2.5 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}}|\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}'}\prod_{j=1}^{s} f_j(m+pn_j)| = 0. \tag{4.2.5}$$

Από την αρχή Furstenberg υπάρχει σύστημα $(X,\mathcal{X},\mu,T)$ και συναρτήσεις $F_1,\ldots,F_s\in L^\infty(\mu)$ έτσι ώστε για κάθε $p\in\mathbb{P}$ να ισχύει

$$\mathbb{E}^{\log}_{m\in\mathbf{I}'}\prod_{j=1}^{s} f_j(m+pn_j) = \int\prod_{j=1}^{s} T^{pn_j}F_j d\mu. \tag{4.2.6}$$

Επιπλέον, έχουμε $|||F_1|||_s = \|f_1\|_{U^s_{\log}(\mathbf{I}')}$. Λόγω της υπόθεσης και επειδή η $\mathbf{I}'$ είναι υπακολουθία της $\mathbf{I}$, ισχύει $\|f_1\|_{U^s_{\log}(\mathbf{I}')} = 0$. Τέλος, από την Πρόταση 4.2.6 έχουμε

$$\mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}}\Big|\int\prod_{j=1}^{s} T^{pn_j}F_j d\mu\Big| = 0.$$

Αυτό σε συνδυασμό με τη σχέση (4.2.6) οδηγεί σε άτοπο.

4.3 Ένα αντίστροφο θεώρημα για την $U^s(\mathbf{I})$-ημινόρμα

Σε αυτήν την ενότητα θα αποδείξουμε ένα θεώρημα που συνδέει την $U^s(\mathbf{I})$ ημινόρμα με nilsequences μικρότερου βαθμού. Ας θεωρήσουμε αρχικά ένα εργοδικό nilsystem s-βημάτων $X = G/\Gamma$ και έστω b το στοιχείο που ορίζει την στροφή σε αυτό. Υποθέτουμε, επίσης, οτι η ομάδα G παράγεται απο το στοιχείο b και τη συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου και ότι το nilmanifold X είναι εφοδιασμένο με μία Riemann μετρική d. Για μία συνάρτηση F στο X μπορούμε ορίσουμε τη νόρμα

$$\|F\|_{\mathrm{Lip}(X)} := sup_{x\in X}|F(x)| + \sup_{x,y\in X, x\neq y}\frac{|F(x)-F(y)|}{d(x,y)}.$$

Είναι εύκολο να αποδείξουμε ότι η $\|\cdot\|_{Lip(X)}$ είναι νόρμα. Έστω, λοιπόν, $\mathrm{Lip}(X)$ ο χώρος των συναρτήσεων με φραγμένη $\mathrm{Lip}(X)$-νόρμα.

Το σύνολο G_s είναι συνεκτικό για $s \geq 2$ και η ομάδα $K_s = G_s/(G_s\cap\Gamma)$ είναι ένας τόρος. Έστω $\hat{K}_s$ η δυϊκή ομάδα της K_s.

Ορισμός 4.3.1. Ένας κατακόρυφος nilcharacter με συχνότητα $x \in \hat{K}_s$ της πολλαπλότητας X είναι μια συνάρτηση $\Phi \in \mathrm{Lip}(X)$ τέτοια ώστε για κάθε $g \in G_s$ και $y \in X$ να έχουμε

$$\Phi(g\cdot y) = x(g)\Phi(y).$$

Η γραμμική θήκη του συνόλου των κατακόρυφων nilcharacters είναι ίση με τον χώρο $C(X)$. Επίσης, αν X^0 είναι η συνεκτική συνιστώσα του ταυτοτικού στοιχείου στην πολλαπλότητα X, τότε ο περιορισμός της Φ στο X^0 είναι ένας κατακόρυφος nilcharacter με την ίδια συχνότητα. Συμβολίζουμε με Ψ_X το σύνολο των nilsequences της μορφής $F((b^n x))_{n\in\mathbb{N}}$, όπου η συνάρτηση F έχει $\|F\|_{\mathrm{Lip}(X)} \leqslant 1$[2].

Θεώρημα 4.3.2. *Έστω $s \in \mathbb{N}$ και έστω ότι η ακολουθία a είναι εργοδική για Cesàro μέσους στην ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I} = (\mathrm{I}_\mathrm{N})$. Εάν $\|a\|_{U^s(\mathbf{I})} > 0$, τότε υπάρχει μία nilsequence $(s-1)$-βημάτων f και ένα nimanifold $(s-2)$-βημάτων Y τέτοια ώστε*

$$\limsup_{M\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{n\in I_N}\sup_{\psi\in\psi_Y}|\mathbb{E}_{m\in[n,n+M]}a(m)f(m)\psi(m)| > 0.$$

Παρατήρηση 4.3.3. Παρόμοια σχέση ισχύει για λογαριθμικούς μέσους. Αν υποθέσουμε ότι η a είναι εργοδική για λογαριθμικούς μέσους και ότι $\|a\|_{U^s_{\log}(\mathbf{I})} > 0$, τότε έχουμε την ίδια σχέση με $\mathbb{E}^{\log}_{n\in I_N}$ στη θέση του $\mathbb{E}_{n\in I_N}$.

[2]Το σύνολο Ψ_X δεν είναι άλγεβρα. Ωστόσο, υπάρχει nilmanifold X' τέτοιο ώστε το $\Psi_{X'}$ να περιέχει το άθροισμα και το γινόμενο οποιωνδήποτε στοιχείων του Ψ_X.

Θα αποδείξουμε δύο θεωρήματα διάσπασης, τα οποία χρειάζονται για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.3.2. Επίσης, θα χρησιμοποιήσουμε δύο αποτελέσματα των Green και Tao ([16] και [14, Πρόταση 2.7] αντίστοιχα):

Πρόταση 4.3.4. *Έστω $s \geq 2$ και $X = G/\Gamma$ ένα nilmanifold s-βημάτων. Τότε, υπάρχει ένα nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y και $C > 0$ ώστε για οποιουσδήποτε κατακόρυφους nilcharacters F_1, F_2 του X με την ίδια συχνότητα και με $\mathrm{Lip}(X)$-νόρμα φραγμένη απο το 1, για κάθε $b \in G$ και κάθε $h \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $F_1(b^{n+h} \cdot e_X)\overline{F_2(b^n e_X)}$ να είναι μια nilsequence $(s-1)$-βημάτων στο $C \cdot \Psi_Y$.*

Πρόταση 4.3.5. *Έστω $\delta > 0$ και $s \geq 2$ φυσικός. Τότε, υπάρχει θετικός αριθμός $L = L(\delta, s)$ και ένα nilmanifold $(s-1)$-βημάτων X τέτοια ώστε, για αρκετά μεγάλο $M \in \mathbb{N}$, κάθε ακολουθία $a : [M] \to \mathbb{C}$ φραγμένη από το 1 να δέχεται μια ανάλυση $a = a_{M,\mathrm{st}} + a_{M,\mathrm{un}}$ με τις εξής ιδιότητες:*

(α) *η $a_{M,\mathrm{st}}$ είναι μια nilsequence $(s-1)$-βημάτων στο $L \cdot \Psi_X$ και $\|a_{M,\mathrm{st}}\|_\infty \leqslant 4$, και*

(β) *$\|a_{M,\mathrm{un}}\|_{U^s(\mathbb{Z}_M)} \leqslant \delta$.*

Μπορούμε να πάρουμε το πρώτο θεώρημα διάσπασης από την Πρόταση 4.3.5. Θα χρειαστούμε γι' αυτό την εξής ανισότητα:

Λήμμα 4.3.6. *Έστω $s \geq 2, M$ φυσικοί και $a_\varepsilon : [(s+1)M] \to \mathbb{C}$ ακολουθίες φραγμένες από το 1. Τότε,*

$$\mathbb{E}_{m\in[M]}|\mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^s} \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} a_\varepsilon(m+\varepsilon\cdot\underline{h})| \leqslant (s+1)^{s+1}((2s)^s+1)\Big(\min_{\varepsilon\in[[s]]^\star} \|a_\varepsilon\|_{U^s(\mathbb{Z}_{(s+1)M})}^{\frac{1}{s+1}} + \frac{1}{M}\Big). \tag{4.3.1}$$

Απόδειξη. Έστω $M' = (s+1)M$. Γράφουμε $\underline{h} = (h_1, \dots, h_s)$ και παρατηρούμε ότι ο μέσος όρος στην παραπάνω ανισότητα είναι μικρότερος από

$$(s+1)^{s+1}\mathbb{E}_{m\in\mathbb{Z}_{M'}}\Big|\mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{Z}_{M'}^s} \prod_{j=1}^s 1_{[M]}(h_j) \cdot \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} a_\varepsilon(m+\varepsilon\cdot\underline{h})\Big|, \tag{4.3.2}$$

όπου τα $m + \varepsilon \cdot \underline{h}$ υπολογίζονται $(\mathrm{mod}\ M')$.

Έστω R ακέραιος τέτοιος ώστε $0 < R < M/2$. Ορίζουμε την συνάρτηση f στο $\mathbb{Z}_{M'}$ έτσι ώστε $f(0) = 0$, η f αυξάνεται γραμμικά μέχρι το 1 στο διάστημα $[0, R]$, $f(r) = 1$ για $r \in [R, M-R]$, η f φθίνει γραμμικά στο $[M-R, M]$ και $f(r) = 0$ στο $[M, M']$. Τηλεσκοπίζοντας βλέπουμε ότι η απόλυτη τιμή της διαφοράς ανάμεσα στο μέσο όρο της σχέσης (4.3.2) και του μέσου

$$\mathbb{E}_{m\in\mathbb{Z}_{M'}}\Big|\mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{Z}_{M'}^s} \prod_{j=1}^s f(h_j) \cdot \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} a_\varepsilon(m+\varepsilon\cdot\underline{h})\Big| \tag{4.3.3}$$

είναι φραγμένη από το $2sR/M'$. Επιπλέον, έχουμε

$$\|\hat{f}\|_{l^1(\mathbb{Z}_{M'})} \leqslant \frac{2M}{R} \leqslant \frac{M'}{R}.$$

Κατά συνέπεια, ο μέσος στη σχέση (4.3.3) είναι μικρότερος από

$$\frac{M'^s}{R^s} \max_{z_1,\dots,z_s\in\mathbb{Z}_{M'}} \mathbb{E}_{m\in\mathbb{Z}_{M'}}\Big|\mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{Z}_{M'}^s} \prod_{j=1}^s \exp(h_j z_j/M') \cdot \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} a_\varepsilon(m+\varepsilon\underline{h})\Big|.$$

Για $j = 1, \ldots, s$ θέτουμε $\varepsilon_j \in [[s]]^\star$ να είναι το στοιχείο που έχει 1 στην j-συντεταγμένη και 0 σε όλες τις άλλες θέσεις. Αντικαθιστώντας τις $a_{\varepsilon_j}(n)$ με $a_{\varepsilon_j}(n)\exp(-nz_j/M')$ και την $a_{(1,\ldots,1)}(n)$ με την $a_{(1,\ldots,1)}(n)\exp(n(z_1+z_2+\cdots+z_s)/M')$, έχουμε ότι οι Gowers νόρμες όλων των ακολουθιών παραμένουν ίδιες και ο όρος $\prod_{j=1}^s \exp(h_j z_j/M')$ στην τελευταία σχέση εξαφανίζεται. Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz-Gowers βλέπουμε

$$\mathbb{E}_{m\in\mathbb{Z}_{M'}}\Big|\mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{Z}_{M'}^s}\prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} a_\varepsilon(m+\varepsilon\cdot\underline{h})\Big| \leqslant \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star}\|a_e\|_{U^s(\mathbb{Z}_{M'})},$$

και, αφού όλες οι ακολουθίες είναι φραγμένες από το 1, έχουμε ότι ο όρος στο αριστερό μέλος της παραπάνω σχέσης φράσσεται από

$$K = \min_{\varepsilon\in[[s]]^\star}\|a_\varepsilon\|_{U^s(\mathbb{Z}_{M'})}.$$

Συνδυάζοντας όλες τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι το δεξί μέλος της (4.3.1) είναι μικρότερο η ίσο από

$$(s+1)^{s+1}\Big(\frac{2sR}{M'}+\frac{M'^s}{R^s}K\Big).$$

Για $M \leqslant 4$ το ζητούμενο είναι προφανές. Για $M > 4$ επιλέγουμε $R = \lfloor K^{\frac{1}{s+1}}M'/4s\rfloor + 1$, οπότε η τελευταία ποσότητα φράσσεται από το

$$((4s)^s+1)K^{\frac{1}{s+1}}+\frac{2}{M}$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Θεώρημα 4.3.7 (πρώτο θεώρημα δομής). *Για κάθε $\varepsilon > 0$ και $s \geq 2$ υπάρχει $C > 0$ και ένα nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y με την εξής ιδιότητα: Για κάθε $M \in \mathbb{N}$ αρκετά μεγάλο και κάθε ακολουθία $a : [(s+1)M] \to \mathbb{C}$ που είναι φραγμένη από το 1, η ακολουθία $A : [M] \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$A(m) = \mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^s}\prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(m+\varepsilon\underline{h}) \ \text{ για } \ m\in[M]$$

δέχεται μία διάσπαση της μορφής $A = A_{M,\mathrm{st}} + A_{M,\mathrm{er}}$ τέτοια ώστε:

(α) $A_{M,\mathrm{st}}(m) = \mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^s}\psi_{M,\underline{h}}(m)$ *για* $m\in[m]$, *όπου* $\psi_{M,\underline{h}}\in C\cdot\Psi_Y$ *για κάθε* $\underline{h}\in[M]^s$, *και*

(β) $\mathbb{E}_{m\in[M]}|A_{M,\mathrm{er}}(m)| \leqslant \varepsilon$.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.3.5 για ένα $\delta > 0$ που θα ορίσουμε στη συνέχεια, παίρνουμε ένα nilmanifold $(s-1)$-βημάτων $X = X(\delta, s)$ και ένα $L > 0$ ώστε για αρκετά μεγάλο $M \in \mathbb{N}$, να έχουμε την διάσπαση $a(n) = a_{M,\mathrm{st}} + a_{M,\mathrm{un}}$ με $n \in [(s+1)M]$ όπου $a_{M,\mathrm{st}} \in L\cdot\Psi_X$, $\|a_{M,\mathrm{st}}\|_\infty \leqslant 4$ και $\|a_{M,\mathrm{un}}\|_{U^s(\mathbb{Z}_{(s+1)M})} \leqslant \delta$.

Ορίζουμε

$$A_{M,\mathrm{st}} = \mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^s}\prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}a_{M,\mathrm{st}}(m+\varepsilon\cdot\underline{h}).$$

Χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.3.6 και τηλεσκοπίζοντας έχουμε ότι αν το δ είναι αρκετά μικρό, τότε η συνάρτηση $A_{M,\mathrm{er}} = A - A_{M,\mathrm{st}}$ ικανοποιεί την υπόθεση (β) του θεωρήματος.

Αφού $a_{M,\mathrm{st}} \in L \cdot \Psi_X$, υπάρχει ένα nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y (μπορούμε, για παράδειγμα, να πάρουμε $Y = X^{2^s-1}$ με την μετρική γινόμενο) και μία σταθερά C τέτοια ώστε για κάθε $M \in \mathbb{N}$ και $\underline{h} \in [M]^s$, η ακολουθία $\psi_{M,\underline{h}} : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\psi_{M,\underline{h}}(m) = \prod_{\varepsilon \in [[s]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} a_{M,\mathrm{st}}(m + \varepsilon \cdot \underline{h})$$

να ανήκει στο $C \cdot \Psi_Y$. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Το δεύτερο θεώρημα δομής που θα χρειαστούμε αποδεικνύεται με εργαλεία εργοδικής θεωρίας. Ας σημειώσουμε ότι η υπόθεση της εργοδικότητας για την ακολουθία a μπορεί να παραλειφθεί.

Θεώρημα 4.3.8 (δεύτερο θεώρημα δομής). *Έστω μια φραγμένη ακολουθία a, η οποία είναι εργοδική για Cesàro μέσους πάνω από μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I} = (\mathrm{I_N})_{\mathrm{N} \in \mathbb{N}}$. Τότε, για κάθε φυσικό αριθμό s η ακολουθία $A : \mathbb{N}^s \to \mathbb{C}$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$A(\underline{h}) = \mathbb{E}_{n \in \mathbf{I}} \prod_{\varepsilon \in [[s]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} a(n + \varepsilon \cdot \underline{h}) \ \ \text{με} \ \ \underline{h} \in \mathbb{N}^s$$

μπορεί να διασπαστεί ως $A = A_{\mathrm{st}} + A_{\mathrm{er}}$ έτσι, ώστε να ισχύει:

(α) *η A_{st} είναι ομοιόμορφο όριο ακολουθιών της μορφής*

$$\underline{h} \to \int A_{\mathrm{st},x}(\underline{h}) d\mu(x),$$

όπου η ολοκλήρωση γίνεται σε ένα χώρο πιθανότητας $(X, \mathcal{X}, \mu)$ και, για $x \in X$, η ακολουθία $A_{\mathrm{st},x} : \mathbb{N}^s \to \mathbb{C}$ ορίζεται από τη σχέση

$$A_{\mathrm{st},x} = \mathbb{E}_{n \in \mathbf{I}} \prod_{\varepsilon \in [[s]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} f_x(n + \varepsilon \cdot \underline{h}),$$

όπου η $f_x : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ είναι μια nilsequence s-βημάτων και $\|f_x\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty$, και για $n \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση $x \to f_x(n)$ είναι μ-μετρήσιμη, και

(β) $\lim_{M \to \infty} \mathbb{E}_{\underline{h} \in [M]^s} |A_{\mathrm{er}}(\underline{h})| = 0.$

Απόδειξη. Έστω $(X, \mathcal{X}, \mu, T)$ το σύστημα Furstenberg που αντιστοιχεί στην ακολουθία a και την ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I}$ και έστω $F \in L^\infty(\mu)$ η συνάρτηση που δίνει η Πρόταση 1.4.2. Τότε, θα έχουμε

$$A(\underline{h}) = \int \prod_{\varepsilon \in [[s]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} T^{\varepsilon \cdot \underline{h}} F d\mu$$

για κάθε $\underline{h} \in \mathbb{N}^s$. Έστω $F_{\mathrm{st}} = \mathbb{E}(F|\mathcal{Z}_s)$, όπου $\mathcal{Z}_s$ ο χαρακτηριστικός παράγοντας τάξης s. Τότε, θα έχουμε $|||F - F_{\mathrm{st}}|||_{s+1} = 0$. Τώρα, θέτουμε

$$A_{\mathrm{st}}(\underline{h}) = \int \prod_{\varepsilon \in [[s]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|} T^{\varepsilon \cdot \underline{h}} F_{\mathrm{st}} d\mu$$

για κάθε $h \in \mathbb{N}^s$. Επίσης, έστω $A_{\rm er} = A - A_{\rm st}$. Εφόσον ισχύει $|||F - F_{\rm st}|||_{s+1} = 0$, θα έχουμε

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^s}\Big|\int \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} T^{\varepsilon\cdot\underline{h}}(F - F_{\rm st})d\mu\Big| = 0,$$

οπότε τηλεσκοπίζοντας καταλήγουμε στην

$$\lim_{M\to\infty} \mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^s}|A_{\rm er}(\underline{h})| = 0.$$

Το σύστημα $(X, \mathcal{Z}_s, \mu, T)$ είναι σύστημα τάξης s, οπότε είναι αντίστροφο όριο από nilsystems s-βημάτων. Άρα, η $A_{\rm st}$ είναι ομοιόμορφο όριο ακολουθιών της μορφής

$$\underline{h} \to \int \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}H(b^{\varepsilon\cdot\underline{h}}y)dm_Y \quad \text{για } h \in \mathbb{N}^s,$$

όπου $Y = G/\Gamma$ είναι ένα nilmanifold s-βημάτων, $b \in G$, m_Y είναι το μέτρο Haar και η H είναι συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$\|H\|_\infty \leqslant \|F_{\rm st}\|_\infty \leqslant \|F\|_\infty = \|a\|_\infty.$$

Το όριο $\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}}\prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}H(b^{n+\varepsilon\cdot\underline{h}}y)$ υπάρχει. Χρησιμοποιώντας αυτήν την ιδιότητα και το αναλλοίωτο του μέτρου m_Y στις μεταφορές κατά b^n, παίρνουμε

$$\int \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}H(b^{\varepsilon\cdot\underline{h}}y)dm_Y = \int \mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}H(b^{n+\varepsilon\cdot\underline{h}}y)dm_Y = \int \mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} \prod_{\varepsilon\in[[s]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}f_x(n+\varepsilon\cdot\underline{h})dm_Y, \tag{4.3.4}$$

όπου θέσαμε, για $y \in Y$, $f_y(n) = H(b^n y)$, $m \in \mathbb{N}$. Τότε, για κάθε $y \in Y$ η $f_y(n)$ είναι μια nilsequence s-βημάτων, $\|f_y\|_\infty \leqslant \|H\|_\infty \leqslant \|a\|_\infty$ και για σταθερό $n \in \mathbb{N}$ η απεικόνιση $y \to f_y(n) = H(b^n y)$ είναι m_Y-μετρήσιμη. Η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Επιστρέφουμε στο Θεώρημα 4.3.2. Υποθέτουμε, αρχικά, (χωρίς βλάβη της γενικότητας) ότι $\|a\|_\infty \leqslant 1$. Παρατηρούμε ότι ισχύει

$$\|a\|_{U^s(\mathbf{I})}^{2^s} = \mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{N}^{s-1}}|\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} \prod_{\varepsilon\in[[s-1]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})|^2.$$

Πράγματι, έχουμε διαδοχικά ότι

$$\begin{aligned}
\|a\|_{U^s(\mathbf{I})}^{2^s} &= \mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{N}^s}\Big(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} \prod_{\varepsilon\in[[s]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})\Big) \\
&= \mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{N}^{s-1}}\mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{N}}\Big(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} \prod_{\varepsilon\in[[s-1]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h}+h)\cdot \prod_{\varepsilon\in[[s-1]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}\overline{a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})}\Big) \\
&= \mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{N}^{s-1}}\Big(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} \prod_{\varepsilon\in[[s-1]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})\cdot \mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} \prod_{\varepsilon\in[[s-1]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}\overline{a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})}\Big) \\
&= \mathbb{E}_{\underline{h}\in\mathbb{N}^{s-1}}\Big|\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} \prod_{\varepsilon\in[[s-1]]} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})\Big|^2
\end{aligned}$$

όπου στην τρίτη γραμμή χρησιμοποιήσαμε την εργοδικότητα της a. Τώρα, εφόσον $\|a\|_{U^s(\mathbf{I})} > 0$, θα έχουμε

$$\mathbb{E}_{h\in\mathbb{N}^{s-1}}\Big(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}}\prod_{\varepsilon\in[[s-1]]}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})\cdot A(\underline{h})\Big)>0, \tag{4.3.5}$$

όπου το

$$A(\underline{h})=\mathbb{E}_{n'\in\mathbf{I}}\prod_{\varepsilon\in[[s-1]]}\mathcal{C}^{|\varepsilon|+1}a(n'+\varepsilon\cdot\underline{h}).$$

Από το Θεώρημα 4.3.8 έχουμε μια διάσπαση

$$A(\underline{h})=A_{\mathrm{st}}(\underline{h})+A_{er}(\underline{h})$$

έτσι ώστε:

(α) η A_{st} είναι ομοιόμορφο όριο ακολουθιών της μορφής

$$\underline{h}\to\int A_{\mathrm{st},x}(\underline{h})d\mu(x)$$

με

$$A_{\mathrm{st},x}=\mathbb{E}_{n'\in\mathbf{I}}\prod_{\varepsilon\in[[s-1]]}\mathcal{C}^{|\varepsilon|+1}f_x(n'+\varepsilon\cdot\underline{h}),$$

όπου για $x\in X$ η ακολουθία f_x είναι μια nilsequence $(s-1)$-βημάτων με $\|f_x\|_\infty\leqslant\|a\|_\infty\leqslant 1$ και για $n\in\mathbb{N}$ η απεικόνιση $x\to f_x(n)$ είναι μ-μετρήσιμη, και

(β) $\lim_{M\to\infty}\mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^{s-1}}|A_{er}(\underline{h})|=0$.

Χρησιμοποιώντας την ομοιόμορφη σύγκλιση των ακολουθίων $A_{\mathrm{st},x}$, καθώς και τη συνθήκη (β), συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{M\to\infty}\mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^{s-1}}\Big(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}}\prod_{\varepsilon\in[[s-1]]}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})\int A_{\mathrm{st},x}(\underline{h})d\mu(x)\Big)>0.$$

Συνεπώς,

$$\lim_{M\to\infty}\int\mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^{s-1}}\Big(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}}\prod_{\varepsilon\in[[s-1]]}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})A_{\mathrm{st},x}(\underline{h})d\mu(x)\Big)>0.$$

Από το λήμμα του Fatou συμπεραίνουμε ότι υπάρχει $x\in X$ τέτοιο ώστε

$$\limsup_{M\to\infty}\big|\mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^{s-1}}\big(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}}\prod_{\varepsilon\in[[s-1]]}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})A_{\mathrm{st},x}(\underline{h})\big)\big|>0.$$

Από τον ορισμό των $A_{\mathrm{st},x}$ και το γεγονός ότι τα όρια $\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}}$ και $\mathbb{E}_{n'\in\mathbf{I}'}$ υπάρχουν, παίρνουμε

$$\limsup_{M\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\big|\mathbb{E}_{n,n'\in\mathbf{I_N}}a(n)f_x(n')\big(\mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^{s-1}}\prod_{\varepsilon\in[[s-1]]^\star}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}(a(n+\varepsilon\cdot\underline{h})\cdot\overline{f_x(n'+\varepsilon\cdot\underline{h})})\big)\big|>0.$$

Δηλαδή, υπάρχει μια nilsequence $(s-1)$-βημάτων f τέτοια ώστε

$$\limsup_{M\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\big|\mathbb{E}_{n,n'\in\mathbf{I_N}}a(n)f(n')\big(\mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^{s-1}}\prod_{\varepsilon\in[[s-1]]^\star}\mathcal{C}^{|\varepsilon|}\hat{a}_{n,n'}(\varepsilon\cdot\underline{h})\big)\big|>0,$$

όπου η ακολουθία $\hat{a}_{n,n'}$ ορίζεται από τη σχέση

$$\hat{a}_{n,n'}(k) = a(n+k)f(n'+k).$$

Τώρα αλλάζουμε τους μέσους όρους πάνω από τα n, n' με μέσους όρους πάνω από από ένα $m \in \mathbb{N}$. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε

$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n,n'\in I_N} \left|\mathbb{E}_{m\in[M]} a(m+n)f(m+n')A_{M,n,n'}(m)\right| = \delta > 0,$$

όπου ορίσαμε

$$A_{M,n,n'} = \mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^{s-1}} \prod_{\varepsilon\in[[s-1]]^\star} \mathcal{C}^{|\varepsilon|}\hat{a}_{n,n'}(m+\varepsilon\cdot\underline{h}), \quad m \in [M].$$

Για $M, n, n' \in \mathbb{N}$, από το Θεώρημα 4.3.7 (για $\varepsilon = \delta/3$) παίρνουμε ότι υπάρχει $C > 0$ και ένα nilmanifold $(s-2)$-βημάτων Y έτσι ώστε για αρκετά μεγάλο M να υπάρχουν nilsequences $(s-2)$-βημάτων $f_{M,n,n',\underline{h}} \in C\cdot\Psi_Y$ τέτοιες ώστε

$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n,n'\in I_N} \left|\mathbb{E}_{m\in[M]} a(m+n)f(m+n')\mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^{s-1}} f_{M,n,n',\underline{h}}(m)\right| > \delta/2 > 0.$$

Επομένως,

$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n,n'\in I_N} \mathbb{E}_{\underline{h}\in[M]^{s-1}} \left|\mathbb{E}_{m\in[M]} a(m+n)f(m+n')f_{M,n,n',\underline{h}}(m)\right| > 0,$$

οπότε έχουμε

$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n,n'\in I_N} \sup_{\psi\in\Psi_Y} \left|\mathbb{E}_{m\in[M]} a(m+n)f(m+n')\psi(m)\right| > 0.$$

Τελικά, έχουμε

$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in I_N} \sup_{\psi\in\Psi_Y, h\in\mathbb{N}} \left|\mathbb{E}_{m\in[n,n+M]} a(m)f(m+h)\psi(m)\right| > 0 \tag{4.3.6}$$

για κάποια nilsequence $(s-1)$-βημάτων f.

Τώρα αρκεί να δείξουμε ότι το sup στην τελευταία σχέση μπορεί να αφαιρεθεί. Γνωρίζουμε ότι η γραμμική θήκη του συνόλου των κατακόρυφων nilcharacters είναι πυκνή στο χώρο $C(X)$. Έτσι, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f(n) = F(b^n \cdot e_X), n \in \mathbb{N}$ για κάποιο nilmanifold $(s-1)$-βημάτων $X = G/\Gamma$, $b \in G$ και F ένα κατακόρυφο nilcharacter με $\|F\|_{\mathrm{Lip}(X)} \leqslant 1$. Από την απόδειξη της Πρότασης 3.4.6 υπάρχει $k \in \mathbb{N}$ και κατακόρυφοι nilcharacters $F_1, \ldots, F_k$ με την ίδια συχνότητα και με $\mathrm{Lip}(X)$ νόρμα φραγμένη απο το 1 τέτοιοι ώστε να έχουμε $|F_1(x)|^2 + \ldots + |F_k(x)|^2 = 1$ για κάθε $x \in X$. Θέτουμε $f_j(n) = F_j(b^n \cdot e_X)$. Τότε, θα ισχύει $|f_1(n)|^2 + \cdots + |f_k(n)|^2 = 1$ για κάθε n και από αυτή τη σχέση σε συνδυασμό με την (4.3.6) έχουμε ότι για κάποιο $j \in \{1, \ldots, k\}$ ισχύει

$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in I_N} \sup_{\psi\in\Psi_Y, h\in\mathbb{N}} \left|\mathbb{E}_{m\in[n,n+M]} a(m)f(m+h)|f_j(m)|^2\psi(m)\right| > 0. \tag{4.3.7}$$

Έτσι, από την Πρόταση 4.3.4 παίρνουμε ένα nilmanifold $(s-2)$-βημάτων Y' και ένα $C' > 0$ με την ιδιότητα, για κάθε $h \in \mathbb{N}$, η ακολουθία $(f(n+h)\overline{f_j(n)})_{n\in\mathbb{N}}$ να είναι μια nilsequence $(s-2)$-βημάτων στο $C\cdot\Psi_{Y'}$. Συνεπώς, μεγαλώνοντας το nilmanifold Y στην (4.3.7), ο όρος $f(m+h)\overline{f_j(m)}$ μπορεί να απορροφηθεί στο sup. Δηλαδή, ισχύει ότι

$$\limsup_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in I_N} \sup_{\psi\in\Psi_Y,} \left|\mathbb{E}_{m\in[n,n+M]} a(m)f_j(m)\psi(m)\right| > 0$$

και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

4.4 Τοπική ομοιομορφία και εργοδικότητα

Τώρα είμαστε σε θέση να αποδείξουμε το Θεώρημα 4.1.6. Η τοπική ομοιομορφία της συνάρτησης Liouville συνεπάγεται την ισχύ της εικασίας Chowla για λογαριθμικούς μέσους, όπως αποδείχτηκε στο [33]. Πιο συγκεκριμένα, έχουμε την εξής πρόταση:

Πρόταση 4.4.1 (Tao). *Έστω $s \in \mathbb{N}$, f η συνάρτηση Liouville ή Moebius και ας υποθέσουμε ότι η f δέχεται συσχετισμούς για λογαριθμικούς μέσους πάνω απο μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I} = ([\mathrm{N_k}])$ με $N_k \to \infty$. Εάν ισχύει $\|f\|_{U^s_{\star,\log}(\mathbf{I})} = 0$, τότε η f ικανοποιεί την λογαριθμική εικασία Chowla για $(s+1)$ όρους πάνω από την ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I}$.*

Για μια ισχυρά απεριοδική συνάρτηση το Θεώρημα 4.1.6 σε συνδυασμό με την Πρόταση 4.2.2 δίνουν το Θεώρημα 4.1.5. Η απόδειξη θα γίνει για Cesàro μέσους, αλλά είναι παρόμοια για λογαριθμικούς μέσους.

Έστω, λοιπόν, μια ισχυρά απεριοδική συνάρτηση f που είναι εργοδική για Cesàro μέσους πάνω από μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I}$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο $s \in \mathbb{N}$.

(i) Η περίπτωση $s = 1$. Λόγω της εργοδικότητας έχουμε $\|f\|_{U^1(\mathbf{I})} = |\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} f(n)| = 0$[3].

(ii) Η περίπτωση $s = 2$. Λόγω της εργοδικότητας έχουμε την ταυτότητα

$$\|f\|^4_{U^2(\mathbf{I})} = \lim_{H\to\infty} \mathbb{E}_{h\in[h]} \big|\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} f(n+h)\overline{f(n)}\big|^2.$$

Από το [26], το όριο αυτό είναι 0.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι το ζητούμενο ισχύει για $s \geq 2$. Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι ισχύει για $s+1$. Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.3.2 αρκεί να δείξουμε το εξής:

Πρόταση 4.4.2. *Έστω $s \geq 2$ και f μια ισχυρά απεριοδική πολλαπλασιαστική συνάρτηση που είναι εργοδική για Cesàro μέσους πάνω από μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I} = ([\mathrm{N_k}])$ με $N_k \to \infty$. Τότε, για κάθε nilsequence s-βημάτων φ και κάθε nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y, ισχύει*

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{k\to\infty} \mathbb{E}_{n\in[N_k]} \sup_{\psi\in\Psi_Y} \big|\mathbb{E}_{n,n+M} f(m)\varphi(m)\psi(m)\big| = 0.$$

Θα χρειαστούμε επίσης την παρακάτω πρόταση [5, Πρόταση 2.4].

Πρόταση 4.4.3. *Έστω $s \in \mathbb{N}$ και X ένα nilmanifold s-βημάτων. Τότε, για κάθε $\varepsilon, L > 0$ υπάρχει $M > 0$ με την εξής ιδιότητα: εάν $\psi \in L \cdot \Psi_X$, τότε υπάρχει ένα σύστημα $(Y, \mathcal{Y}, \mu, T)$ και συναρτήσεις $F_0, \ldots, F_s$ φραγμένες από το M, έτσι ώστε η ακολουθία $b(n)$ που ορίζεται από τη σχέση*

$$b(n) = \int F_0 \cdot T^{k_1 n} F_1 \cdots T^{k_s n} F_s d\mu \tag{4.4.1}$$

όπου $k_j = \frac{(s+1)!j}{j+1}$ για $j = 1, \ldots, s$ ικανοποιεί την

$$\|\psi - b\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

[3] Η εργοδικότητα της f μπορεί να παραλειφθεί.

Για την ακολουθία φ έχουμε $\varphi(n) = \Phi(b^n \cdot e_X)$ για ένα nilmanifold s-βημάτων $X = G/\Gamma$, $b \in G$ και $\Phi \in C(X)$. Λόγω πυκνότητας, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η Φ είναι κατακόρυφος nilcharacter του X. Αν η Φ είναι τετριμμένος nilcharacter, τότε παραγοντοποιείται μέσω της πολλαπλότητας

$$X' = G/(G_s\Gamma) = (G/G_s)/((\Gamma \cap G_s)/G_s).$$

Η ομάδα G/G_s είναι μηδενοδύναμη τάξης $s-1$ και το X' είναι ένα nilmanifold $(s-1)$-βημάτων. Αν b' είναι η εικόνα του b μέσω της προβολής στην G/G_s, θα έχουμε $\varphi(n) = \Phi'(b'^n \cdot e_{X'})$ για μια $\Phi' \in C(X)$. Άρα, η φ είναι μια nilsequence $(s-1)$-βημάτων. Από την επαγωγική υπόθεση έχουμε ότι $\|f\|_{U^s(\mathbf{I})} = 0$.

Λήμμα 4.4.4. *Έστω $s \geq 2$ και a μια φραγμένη ακολουθία που δέχεται συσχετισμούς για Cesàro μέσους πάνω από μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I} = (\mathrm{I_N})$. Έστω ότι $\|a\|_{U^s(\mathbf{I})} = 0$. Τότε, για κάθε nilsequence $(s-1)$-βημάτων φ και κάθε nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y, έχουμε*

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in I_N} \sup_{\psi\in\Psi_Y} \left|\mathbb{E}_{n,n+M} a(m)\varphi(m)\psi(m)\right| = 0.$$

Απόδειξη. Αρχικά παρατηρούμε ότι αφού κάθε nilsequence $(s-1)$-βημάτων φ μπορεί να προσεγγιστεί ομοιόμορφα από nilsequences $(s-1)$-βημάτων που ορίζονται από μια συνάρτηση με φραγμένη $\mathrm{Lip}(Y)$ νόρμα, η ακολουθία φ μπορεί να απορροφηθεί απο το sup. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\varphi = 1$. Από την Πρόταση 4.3.4 αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in I_N} \left|\mathbb{E}_{m\in[M]} a(m+n) \int F_{0,M,n} \cdots T_{M,n}^{k_{s-1}m} F_{s-1,M,n} d\mu_{M,n}\right| = 0$$

για αυθαίρετους ακέραιους $k_1, \ldots, k_s$ και φραγμένες από το 1 μετρήσιμες συναρτήσεις $F_{0,M,m}, \ldots, F_{s,M,n}$. Θα χρησιμοποιήσουμε επαγωγή στο s για να δείξουμε την ισχυρότερη ανισότητα

$$\begin{aligned}\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in I_N} &\left\|\mathbb{E}_{m\in[M]} a(m+n) \cdot T_{M,n}^{k_1 m} F_{1,M,n} \cdot \cdots \cdot T_{M,n}^{k_{s-1}m} F_{s-1,M,n}\right\|_{L^2_{\mu_{M,n}}} \\ &\leqslant 4\|a\|_{U^s(\mathbf{I})}\end{aligned} \tag{4.4.2}$$

με τις συναρτήσεις που ορίστηκαν όπως παραπάνω.

Για την περίπτωση $s = 1$ αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in I_N} \left|\mathbb{E}_{m\in[M]} a(m+n)\right| \leqslant 4\|a\|_{U^1_(\mathbf{I})}.$$

Από το λήμμα Van der Corput (Παράρτημα A. 1) έχουμε ότι για κάθε $M, R \in \mathbb{N}$ με $R \leqslant M$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει

$$|\mathbb{E}_{m\in[M]} a(n+m)|^2 \leqslant 4\mathbb{E}_{r\in[R]}(1 - rR^{-1})(\mathrm{Re}(\mathbb{E}_{m\in[M]} a(m+n+r)\overline{a(m+n)}) + R^{-1} + RM^{-1}).$$

Επομένως,

$$\begin{aligned}&\lim_{M\to\infty} \limsup_{N\to\infty} (\mathbb{E}_{n\in I_N} \left|\mathbb{E}_{m\in[M]} a(m+n)\right|)^2 \\ &\leqslant 4 \limsup_{R\to\infty} \limsup_{M\to\infty} \mathbb{E}_{r\in[R]}(1 - rR^{-1}) \mathbb{E}_{m\in[M]} \mathrm{Re}(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} a(n+m+r)\overline{a(m+n)}) \\ &= 4 \limsup_{R\to\infty} \mathbb{E}_{r\in[R]}(1 - rR^{-1}) \mathrm{Re}(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} a(n+r)\overline{a(n)}) \\ &\leqslant 4 \limsup_{R\to\infty} \mathbb{E}_{r\in[R]} \mathrm{Re}(\mathbb{E}_{n\in\mathbf{I}} a(n+r)\overline{a(n)}) \\ &= 4\|a\|^2_{U^1(\mathbf{I})}.\end{aligned}$$

Επομένως το ζητούμενο ισχύει.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι η ανισότητα (4.4.2) ισχύει για $s-1$ και θα δείξουμε ότι ισχύει για s. Εφαρμόζουμε το λήμμα van der Corput και την ανισότητα Cauchy-Schwarz. Έτσι, για κάθε $M, R, n \in \mathbb{N}$ με $M \leqslant R$ ισχύει

$$\begin{aligned}
&\big|\big|\mathbb{E}_{m\in[M]}a(m+n)T_{M,n}^{k_1 m}F_{1,M,n}\cdots T_{M,n}^{k_{s-1}m}F_{s-1,M,n}\big|\big|_{L^2(\mu_{M,n}}\\
&\quad\leqslant 4\mathbb{E}_{r\in[R]}\big|\big|\mathbb{E}_{m\in[M]}a(m+n+r)\overline{a(m+n)}T_{M,n}^{\hat{k_1}m}\hat{F}_{1,M,n,r}\cdots T_{M,n}^{\hat{k_{s-1}}m}\hat{F}_{s-2,M,n,r}\big|\big|_{L^2(\mu_{M,n})}\\
&\quad+R^{-1}+RM^{-1},
\end{aligned}$$

όπου $\hat{F}_{j,M,n,r} = T_{M,n}^{k_j r}F_{j,M,n}\cdot\overline{F_{j,M,n}}$ και $\hat{k_j} = k_j - k_{s-1}$ για $j \in \{1,2,\ldots,s-2\}$. Έτσι, το τετράγωνο του αριστερού μέλους της (4.4.2) είναι μικρότερο από

$$\begin{aligned}
&4\limsup_{R\to\infty}\mathbb{E}_{r\in[R]}\limsup_{M\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\\
&\qquad\mathbb{E}_{n\in I_N}\big|\big|\mathbb{E}_{m\in[M]}a(m+n+r)\overline{a(m+n)}T_{M,n}^{\hat{k_1}m}\hat{F}_{1,M,n,r}\cdots T_{M,n}^{\hat{k_{s-1}}m}\hat{F}_{s-2,M,n,r}\big|\big|_{L^2_{\mu_{M,n}}},
\end{aligned}$$

όπου οι $\hat{F}_{j,M,n,r}$ είναι φραγμένες από το 1 και οι $\hat{k_j}$ είναι ακέραιοι. Από την επαγωγική υπόθεση για τις ακολουθίες $S_r a\cdot\overline{a}$, $r\in\mathbb{N}$, τις συναρτήσεις $\hat{F}_{j,M,n,r}$ και τους ακεραίους $\hat{k_j}$, και μετά παίρνοντας το μέσο όρο πάνω από τα $r\in\mathbb{N}$, συμπεραίνουμε ότι η τελευταία ποσότητα φράσσεται από το

$$\begin{aligned}
&16\limsup_{R\to\infty}\mathbb{E}_{r\in[R]}\|S_r a\cdot\overline{a}\|_{U^{s-1}(\mathbf{I})}\\
&\qquad\leqslant 16(\limsup_{R\to\infty}\mathbb{E}_{r\in[R]}\|S_r a\cdot\overline{a}\|_{U^{s-1}(\mathbf{I})}^{2^{s-1}})^{\frac{1}{2^{s-1}}} = 16\|a\|_{U^s(\mathbf{I})}^2
\end{aligned}$$

το οποίο σε συνδυασμό με τις παραπάνω σχέσεις δίνει το ζητούμενο. □

Το Λήμμα 4.4.4 δείχνει ότι αν η Φ είναι τετριμμένος nilcharacter, τότε ισχύει το ζητούμενο της Πρότασης 4.4.2. Κατά συνέπεια, μένει να αποδείξουμε την περίπτωση όπου ο Φ είναι μη τετριμμένος. Μάλιστα, σε αυτήν την περίπτωση δεν χρειάζεται η απεριοδικότητα ή η εργοδικότητα της f.

Πρόταση 4.4.5. *Έστω $s \geq 2$ και f μια πολλαπλασιαστική συνάρτηση. Έστω $X = G/\Gamma$ ένα nilmanifold s-βημάτων, $b \in G$ ένα στοιχείο που ορίζει μια εργοδική nilrotation και $\Phi : X \to \mathbb{C}$ ένας μη τετριμμένος κατακόρυφος nilcharacter. Τότε, για κάθε nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y έχουμε ότι*

$$\lim_{M\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mathbb{E}_{n\in[N]}\sup_{\psi\in\Psi_Y}|\mathbb{E}_{m\in[N,n+M]}f(m)\Phi(b^m\cdot e_X)\psi(m)| = 0.$$

Απόδειξη. Έστω ότι η πρόταση δεν ισχύει για μία πολλαπλασιαστική συνάρτηση f. Τότε, υπάρχουν $\varepsilon > 0$, δύο γνησίως αύξουσες ακολουθίες φυσικών $(M_k), (N_k)$ τέτοιες, ώστε $M_k/N_k \to \infty$, ένα εργοδικό nilsystem s-βημάτων $(X = G/\Gamma, \mathcal{X}, T_b)$, ένας μη τετριμμένος nilcharacter Φ του X, ένα nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y και nilsequences $(s-1)$-βημάτων $\psi_{k,n} \in \psi_Y$ τέτοιες ώστε για όλα τα αρκούντως μεγάλα $k \in \mathbb{N}$

$$\mathbb{E}_{n\in[N_k]}|\mathbb{E}_{m\in[n,n+M_k]}f(m)\varphi(m)\psi_{k,n}(m)| > \varepsilon,$$

όπου θέσαμε $\varphi(m) = \Phi(b^n\cdot e_X)$.

Εφόσον $M_k/N_k \to \infty$, έχουμε ότι για κάθε φραγμένη ακολουθία $(a(k,n))_{k,n\in\mathbb{N}}$ ισχύει

$$\lim_{k\to\infty}\big(\mathbb{E}_{n\in[N_k]}a(k,n) - \mathbb{E}_{r\in[M_k]}\mathbb{E}_{n\in[N_k],n\equiv r(\text{mod } M_k)}a(k,n)\big) = 0.$$

Εάν θέσουμε στη θέση του $a(k,n)$ την ακολουθία

$$|\mathbb{E}_{m\in[n,n+M_k]}f(m)\varphi(m)\psi_{k,n}(m)|$$

συμπεραίνουμε ότι για αρκετά μεγάλα $k\in\mathbb{N}$ υπάρχει $r\in[M_k]$ τέτοιο ώστε

$$\mathbb{E}_{n\in[N_k],n\equiv r_k(\text{mod } M_k)}\big|\mathbb{E}_{m\in[n,n+M_k]}f(m)\varphi(m)\psi_{k,n}(m)\big| > \varepsilon.$$

Χρησιμοποιώντας την συνάρτηση προσήμου sgn πάνω στις ακολουθίες $\psi_{k,n}$ μπορούμε να υποθέσουμε ότι

$$\mathbb{E}_{n\in[N_k],n\equiv r_k(\text{mod } M_k)}\big(\mathbb{E}_{m\in[n,n+M_k]}f(m)\varphi(m)\psi_{k,n}(m)\big) > \varepsilon.$$

Συνεπώς, για όλα τα αρκετά μεγάλα $k\in\mathbb{N}$ ισχύει

$$\mathbb{E}_{n\in[N_k]}f(n)g_k(n) > \varepsilon,$$

όπου

$$g_k(n) := \sum_{i=1}^{\infty} 1_{[(i-1)M_k,iM_k]}(n)\varphi(n)\psi_{k,i}(n). \tag{4.4.3}$$

Για να καταλήξουμε σε άτοπο, αρκεί να δείξουμε ότι ισχύει

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}_{n\in[N_k]}f(n)g_k(n) = 0. \tag{4.4.4}$$

Τώρα χρησιμοποιούμε το Πόρισμα 4.1.9: αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι για οποιαδήποτε διακεκριμένα $p,p'\in\mathbb{N}$ και οποιοδήποτε $c>0$ ισχύει

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}_{n\in[cN_k]}g_k(pn)\overline{g_k(p'n)} = 0.$$

Ισοδύναμα, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}_{n\in[cN_k]}\Big(\sum_{i,i'\in\mathbb{N}} 1_{I_{K,i,i'}}(n)\varphi(pn)\psi_{k,n}(pn)\overline{\varphi(p'n)\psi_{k,n}(p'n)}\Big) = 0, \tag{4.4.5}$$

όπου

$$I_{k,i,i'} = \Big[\frac{(i-1)M_k}{p},\frac{iM_k}{p}\Big)\cap\Big[\frac{(i'-1)M_k}{p'},\frac{i'M_k}{p'}\Big)$$

για $k,i,i'\in\mathbb{N}$. Τα διαστήματα $I_{k,i,i'}$ είναι ξένα μεταξύ τους για σταθερό k και, επειδή $M_k\to\infty$, διαμερίζουν το $[cN_k]$ σε υποδιαστήματα $J_{k,i}$, $i=1,\dots I_k$ με $I_k\to\infty$ και $\min\limits_{i\in[I_k]}|J_{k,i}|\to\infty$ και ένα σύνολο Z_k με $|Z_k|/N_k\to\infty$. Επειδή $|Z_k|/N_k\to\infty$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{k\to\infty}\mathbb{E}_{n\in[CN_k]}\Big(\sum_{j\in[I_k]} 1_{J_{k,l}}(n)\varphi(pn)\overline{\varphi(p'n)}\psi_{k,j}(pn)\overline{\psi'_{k,j}(p'n)}\Big) = 0,$$

όπου $\psi_{k,j} = \psi_{k,i}$, $\psi'_{k,j} = \psi_{k,i'}$ για κάποια $i = i(j)$ και $i' = i'(j)$. Εφόσον $\min_{j\in[I_k]} |J_{k,l}| \to \infty$ για $k \to \infty$, αρκεί να δείξουμε ότι αν J'_k είναι διαστήματα με $|J'_k| \to \infty$ καθώς $k \to \infty$, τότε για κάθε nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y ισχύει

$$\lim_{k\to\infty} \sup_{\psi\in\Psi_Y} |\mathbb{E}_{n\in J'_k} \varphi(pn)\overline{\varphi(p'n)}\psi(n)| = 0.$$

Αυτό είναι συνέπεια της παρακάτω πρότασης:

Πρόταση 4.4.6. *Έστω $s \geq 2$ φυσικός, $X = G/\Gamma$ ένα εργοδικό nilsystem s-βημάτων και έστω $b \in G$ το στοιχείο που ορίζει την στροφή. Επίσης, έστω F, F' δύο μη τετριμμένοι nilcharacters του X με την ίδια συχνότητα. Τότε, για οποιαδήποτε διακεκριμένα $p, p' \in \mathbb{N}$, οποιαδήποτε ακολουθία διαστημάτων $(I_N)_{N\in\mathbb{N}}$ με μήκη που τείνουν στο άπειρο και οποιοδήποτε nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y, ισχύει*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\psi\in\Psi_Y} |\mathbb{E}_{n\in I_N} F(b^{pn} \cdot e_X)\overline{F'(b^{p'n} \cdot e_X)}\psi(n)| = 0.$$

Στη συνέχεια θα αποδείξουμε την Πρόταση 4.4.6. Η πρόταση αυτή ισχυρίζεται ότι οι μη τετριμμένοι χαρακτήρες δεν «συσχετίζονται» κατά μία έννοια με nilsequences βαθμού $(s-1)$. Για να αποδείξουμε αυτόν τον ισχυρισμό, χρειαζόμαστε αρχικά την εξής πρόταση.

Πρόταση 4.4.7. *Έστω $s \in \mathbb{N}$ και $X = G/\Gamma$ ένα συνεκτικό nilmanifold s-βημάτων και $b \in G$ ένα στοιχείο που ορίζει μια εργοδική nilrotation. Έστω p, p' διακεκριμένοι φυσικοί και W η κλειστή θήκη της ακολουθίας $(b^{pn} \cdot e_X, b^{p'n} \cdot e_X)_{n\in\mathbb{N}}$ στο σύνολο $X \times X$. Τότε το W είναι ένα nilmanifold που μπορεί να αναπαρασταθεί ως $W = H/\Delta$ όπου $\Delta = \Gamma \times \Gamma$ και H είναι μια υποομάδα της G τέτοια ώστε $(b^p, b^{p'}) \in H$ και για κάθε $u \in G_s$ ισχύει*

$$(u^{p^s}, u^{p'^s}) \in H_s. \tag{4.4.6}$$

Απόδειξη. Το W είναι μια υποπολλαπλότητα του $X \times X$. Θέτουμε

$$H = \overline{\langle \Gamma \times \Gamma, (b^p, b^{p'}) \rangle}.$$

Το H είναι, λοιπόν, η μικρότερη κλειστή υποομάδα του $G \times G$ που περιέχει το στοιχείο $(b^p, b^{p'})$ καθώς και το σύνολο $\Gamma \times \Gamma$. Τότε, ισχύει $W = H/\Delta$: Πράγματι, εξ' ορισμού έχουμε ότι $W \subset H \cdot (e_X, e_X)$. Επιπλέον, έχουμε $W = H_1 \cdot (e_X, e_X)$ για κάποια κλειστή υποομάδα H_1 του $G \times G$ που περιέχει το στοιχείο $(b^p, b^{p'})$. Επειδή η W είναι συμπαγής, το σύνολο $H_2 = H_1 \cdot (\Gamma \times \Gamma)$ είναι κλειστό στην G. Αφού η H_2 είναι κλειστή υποομάδα που περιέχει το στοιχείο $(b^p, b^{p'})$ και το σύνολο Δ, θα ισχύει $H \subset H_2$ και, συνεπώς, $H \cdot (e_X, e_X) \subset H_2 \cdot (e_X, e_X) = H_1 \cdot (e_X, e_X) = W$. Τελικά, $H \cdot (e_X, e_X) = W$, οπότε έχουμε $W = H/\Delta$.

Μένει τώρα να δείξουμε τη σχέση (4.4.6). Αρκεί να δείξουμε το εξής: εάν $j \in \{1, \ldots, s\}$ και $g \in G_j$ τότε $(g^{p^j}, g^{p'^j}) \in H_j \cdot (G_{j+1} \times G_{j+1})$.

Χρησιμοποιούμε επαγωγή στο j. Έστω αρχικά ότι $j = 1$. Έστω $Z = G/(G_2\Gamma)$ και $\pi : G \to Z$ η φυσική προβολή. Εφόσον το X είναι συνεκτικό, το nilmanifold Z είναι και αυτό συνεκτικό. Επίσης, είναι μια συμπαγής αβελιανή ομάδα, οπότε είναι ένας τόρος. Η εργοδική nilrotation b απεικονίζεται σε ένα στοιχείο $b_0 = \pi(b)$ και κάθε δύναμη του b_0 δρα εργοδικά στον τόρο Z. Αφού το $\pi(H \times H)$ είναι η κλειστότητα της ακολουθίας $(b_0^{pn}, b_0^{p'n})$ στο $Z \times Z$, έχουμε ότι $(\pi \times \pi)(H) = \{(z^p, z^{p'}), z \in Z\}$. Από αυτό συμπεραίνουμε ότι

$$\{(g^p, g^{p'}), g \in G\} \subset H \cdot (G_2 \times G_2),$$

που αποδεικνύει την περίπτωση $j = 1$ της επαγωγής.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι ισχύει η πρόταση για το $j - 1 \geq 1$ και θα αποδείξουμε ότι ισχύει για το j. Παρατηρούμε, αρχικά, ότι για $g, g' \in G_j$ και $u_1, u_1', u_2, u_2' \in G_{j+1}$ ισχύει

$$\begin{aligned} g^{p^j} u_1 \cdot g'^{p^j} u_1' &= (gg')^{p^j} (\operatorname{mod} G_{j+1}) \\ g^{p'^j} u_2 \cdot g'^{p'^j} u_2' &= (gg')^{p'^j} (\operatorname{mod} G_{j+1}). \end{aligned}$$

Έπεται ότι το σύνολο των στοιχείων g του G_j για τα οποία ισχύει ο ισχυρισμός είναι μια υποομάδα του G_j. Άρα, αρκεί να δείξουμε τον ισχυρισμό για έναν μεταθέτη $g = [h, v]$ με $h \in G, v \in G_{j-1}$. Από την περίπτωση $j = 1$ της επαγωγής υπάρχουν $u, u' \in G_2$ τέτοια ώστε $(h^p u, h^{p'} u') \in H$ και από την επαγωγική υπόθεση υπάρχουν $w, w' \in G_j$ τέτοια ώστε $(v^{p^{j-1}} w, v^{p'^{j-1}} w') \in H_{j-1}$. Τότε ο μεταθέτης $([h^p u, v^{p^{j-1}} w], [h^{p'} u', v^{p'^{j-1}} w'])$ ανήκει στο H_j. Επειδή

$$\begin{aligned} [h^p u, v^{p^{j-1}} w] &= [h, v]^{p^j} = g^{p^j} (\operatorname{mod} G_{j+1}) \\ [h^{p'} u', v^{p'^{j-1}} w'] &= [h, v]^{p'^j} = g^{p'^j} (\operatorname{mod} G_{j+1}), \end{aligned}$$

συμπεραίνουμε ότι $(g^{p^j}, g^{p'^j}) \in H_j \cdot (G_{j+1} \times G_{j+1})$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

Λήμμα 4.4.8. *Έστω $s \geq 2$ και $W = H/\Delta$ ένα nilmanifold s-βημάτων και $h \in H$ μια εργοδική nilrotation. Έστω F ένας μη τετριμμένος κατακόρυφος nilcharacter του W και*

$$f(n) = F(h^n \cdot e_W), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Τότε, ισχύει $\|f\|_{U^s(\mathbf{I})} = 0$ για οποιαδήποτε ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I}$ με μήκη που τείνουν στο άπειρο.

Απόδειξη. Όπως είδαμε στην Ενότητα 2 αυτού του κεφαλαίου, ισχύει $\|f\|_{U^s(\mathbf{I})} = |||\mathrm{F}|||_{\mathrm{s}}$ όπου η ημινόρμα υπολογίζεται στο nilsystem που επάγεται στο W από την εργοδική nilrotation κατά h. Θεωρούμε τον χαρακτηριστικό παράγοντα $Z_{s-1}(W)$.

Ο χώρος $L^2(Z_{s-1}(W))$ αποτελείται από τις συναρτήσεις του $L^2(\mu_W)$ που είναι H_s αναλλοίωτες [21, Θεώρημα 13.1]. Αφού ο F είναι ένας μη τετριμμένος κατακόρυφος nilcharacter, είναι ορθογώνιος προς οποιαδήποτε H_s-αναλλοίωτη συνάρτηση, οπότε είναι ορθογώνιος προς τον χώρο $L^2(Z_{s-1}(W))$. Αυτό δίνει τελικά ότι $|||F|||_s = 0$ και το ζητούμενο αποδείχθηκε. □

Πρόταση 4.4.9. *Έστω s, W, H, Δ, h, και F όπως στο προηγούμενο λήμμα. Τότε, για οποιαδήποτε ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I} = (\mathrm{I_N})_{\mathrm{N}\in\mathbb{N}}$ με μήκη που τείνουν στο άπειρο και οποιοδήποτε nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y ισχύει*

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\psi\in\Psi_Y} |\mathbb{E}_{n\in I_N} F(h^n \cdot e_W)\psi(n)| = 0.$$

Απόδειξη. Αν θέσουμε $f(n) = F(h^n \cdot e_W)$, τότε έχουμε από το προηγούμενο λήμμα ότι $\|f\|_{U^s(\mathbf{I})} = 0$. Από την Πρόταση 4.4.3 αρκεί να αποδείξουμε το εξής: Έστω $s \in \mathbb{N}, \mathbf{I} = (\mathrm{I_N})$ μια ακολουθία διαστημάτων με μήκη που τείνουν στο άπειρο και a μια φραγμένη ακολουθία που δέχεται συσχετισμούς για Cesàro μέσους πάνω από το $\mathbf{I}$. Επίσης, για $N \in \mathbb{N}$, έστω $(X_N, \mathcal{X}_N, \mu_N, T_N)$ ένα σύστημα, $F_{0,N}, \dots, F_{s-1,N} \in L^\infty(\mu_N)$ συναρτήσεις φραγμένες από το 1 και έστω $k_1, \dots, k_{s-1}\mathbb{Z}$. Τότε, ισχύει

$$\limsup_{N\to\infty} \left| \mathbb{E}_{n\in I_N} a(n) \int F_{0,N} \cdot T_N^{k_1 n} F_{1,N} \cdots T_N^{k_{s-1} b} F_{s-1,N} d\mu_N \right| \leqslant 4\|a\|_{U^s(\mathbf{I})}.$$

Το φράγμα αυτό μπορεί να αποδειχθεί παρόμοια με το Λήμμα 4.4.4 χρησιμοποιώντας το λήμμα van der Corput και επαγωγή στο s.[4] □

Επιστρέφουμε τώρα στην αρχική πρόταση. Ας υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Τότε, υπάρχει ένα $s \geq 2$, ένα nilmanifold s-βημάτων $X = G/\Gamma$, μια εργοδική nilrotation κατά $b \in G$, μη τετριμμένοι nilcharacters F, F' με την ίδια συχνότητα, p, p' διακεκριμένοι φυσικοί αριθμοί, μια ακολουθία διαστημάτων $(I_N)_{N\in\mathbb{N}}$ με μήκη που τείνουν στο άπειρο και ένα nilmanifold $(s-1)$-βημάτων Y τέτοια ώστε

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{\psi\in\Psi_Y} |\mathbb{E}_{n\in I_N} F(b^{pn} \cdot e_X) \overline{F'(b^{p'n} \cdot e_X)} \psi(n)| > 0. \tag{4.4.7}$$

Υπάρχει φυσικός αριθμός r τέτοιος ώστε το b^r να δρα εργοδικά στη συνεκτική συνιστώσα X_0 του στοιχείου e_X. Τότε, για κάποιο $j \in \{0, \dots, r-1\}$ θα έχουμε

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{\psi\in\Psi_Y} |\mathbb{E}_{n\in I_N} F(b^{p(rn+j)} \cdot e_X) \overline{F'(b^{p'(rn+j)} \cdot e_X)} \psi(rn+j)| > 0.$$

Εφόσον $(\psi(rn+j))_{n\in\mathbb{N}} \in \Psi_Y$, συμπεραίνουμε ότι

$$\limsup_{N\to\infty} \sup_{\psi\in\Psi_Y} |\mathbb{E}_{n\in I_N} \hat{F}(\hat{b}^{pn} \cdot e_X) \overline{\hat{F}'(\hat{b}^{p'n} \cdot e_X)} \psi(n)|, \tag{4.4.8}$$

όπου $\hat{b} = b^r$ είναι μια εργοδική nilrotation στο X_0, οι συναρτήσεις $\hat{F}, \hat{F}'$ ορίζονται από τις σχέσεις $\hat{F}(x) = F(b^{pj}x), \hat{F}' = F'(b^{p'j}x)$ για $x \in X_0$ και είναι μη τετριμμένοι κατακόρυφοι nilcharacters του X_0 με την ίδια συχνότητα. Συνεπώς, αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση όπου το X είναι συνεκτικό.

Έστω $h = (b^p, b'^{p'})$. Το στοιχείο h δρα εργοδικά σε ένα nilmanifold $W = H/\Delta$ όπου H είναι μια υποομάδα του $G \times G$ τέτοια ώστε $h \in H$ και $(u^{p^s}, u^{p'^s}) \in H_s$ για κάθε $u \in G_s$. Θα δείξουμε ότι ο περιορισμός του $F \otimes \overline{F'}$ στο W είναι ένας μη τετριμμένος κατακόρυφος nilcharacter. Από την υπόθεση υπάρχει ένας χαρακτήρας y στη δυϊκή ομάδα του G_s που είναι $(G_s \cap \Gamma)$-αναλλοίωτος τέτοιος ώστε

$$F(u \cdot x) = y(u)F(x)$$
$$F'(u \cdot x) = y(u)F'(x)$$

[4] Δες επίσης το [5]

για $u \in G_s$ και $x \in X$. Κατά συνέπεια, ισχύει

$$(F \otimes \overline{F'})((u,u') \cdot (x,x')) = y(u)\overline{y(u')}(F \otimes \overline{F'})(x,x')$$

για όλα τα $u, u' \in G_s$,$x, x' \in X$. Εφόσον $H_s \subset G_s \times G_s$, έχουμε από την τελευταία σχέση ότι ο $F \otimes \overline{F'}$ είναι ένας κατακόρυφος nilcharacter του W.

Μένει να δείξουμε ότι ο χαρακτήρας $y \cdot \overline{y}$ είναι μη τετριμμένος στο H_s. Ας υποθέσουμε προς άτοπο ότι αυτό δεν ισχύει. Επειδή $(u^{p^s}, u^{p'^s}) \in H_s$ για κάθε $u \in G_s$, έχουμε ότι

$$y(u^{p^s - p'^s}) = y(u^{p^s})y(u^{p'^s}) = 1$$

για κάθε $u \in G_s$. Αφού το G_s είναι συνεκτικό για $s \geq 2$ και $p \neq p'$, η απεικόνιση $u \to u^{p^s - p'^s}$ είναι επί του G_s, άρα ο y είναι τετριμμένος χαρακτήρας στο G_s, που είναι άτοπο.

Εφαρμόζοντας την προηγούμενη πρόταση στο χαρακτήρα $F \otimes \overline{F'}$ έχουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \sup_{\psi \in \Psi_Y} |\mathbb{E}_{n \in I_N}(F \otimes \overline{F'})(b^n \cdot e_W)\psi(n)| = 0.$$

Αυτό έρχεται σε αντίφαση με τη σχέση (4.4.7) και η απόδειξη ολοκληρώθηκε. □

4.5 Το σύστημα Liouville

Όλες αποδείξεις που έγιναν στις προηγούμενες ενότητες μπορούν να τροποποιηθούν και στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε λογαριθμικούς μέσους. Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε το Θεώρημα 4.1.3. Επίσης, να σημειώσουμε ότι παρόμοια αποτελέσματα μπορούμε να πάρουμε για τη συνάρτηση Moebius στη θέση της συνάρτησης Liouville.

Η εργοδικότητα του συστήματος Liouville δεν είναι προφανής. Δεν υπάρχουν αρκετές γνωστές ιδιότητες γι' αυτό το σύστημα. Είναι πιθανό να ισχύει η εργοδικότητα πάνω απο την ακολουθία $([N])_{N\in\mathbb{N}}$ για μια τυχαία φραγμένη πολλαπλασιαστική συνάρτηση με πραγματικές τιμές[5]. Ένα σχετικό πρόσφατο αποτέλεσμα των Φραντζικινάκη και Host [8, Πρόταση 1.6] δείχνει ότι το σύστημα Liouville είναι παράγοντας ενός συστήματος που δεν έχει άρρητο φάσμα και του οποίου τα εργοδικά μέρη είναι ισόμορφα με ευθέα γινόμενα συστημάτων Bernoulli και nilsystems απείρων βημάτων. Στο επόμενο κεφάλαιο θα ασχοληθούμε εν συντομία με αυτή την πρόταση.

Μια λύση σε αυτό το πρόβλημα θα αποδείκνυε, επίσης, την ισχύ της λογαριθμικής εικασίας Sarnak για τη συνάρτηση Liouville. Η λογαριθμική εικασία Sarnak είναι ισοδύναμη με την λογαριθμική εικασία Chowla [33]. Επίσης, είναι, όπως είδαμε, ισοδύναμη με την τοπική ομοιομορφία της συνάρτησης Liouville . Στην περίπτωση των Cesàro μέσων δεν είναι γνωστό ότι ισχύει κάτι παρόμοιο. Έχουμε τη συνεπαγωγή

$$\text{Εικασία Chowla} \Rightarrow \text{Εικασία Sarnak}$$

και θα ασχοληθούμε με την δεύτερη εικασία στο επόμενο κεφάλαιο.

Τέλος, το Θεώρημα 4.1.3 οδηγεί στο εξής πόρισμα.

[5]Δεν ισχύει το ίδιο για συναρτήσεις με τιμές στο $\mathbb{C}$. Στο [9] αποδείχθηκε ότι για τη συνάρτηση $f(n) = n^{it}$ με $t \neq 0$ υπάρχει ένα μοναδικό σύστημα Furstenberg, που είναι ισόμορφο με το σύστημα $(\mathbb{T}, m_{\mathbb{T}}, Id_{\mathbb{T}})$ που δεν είναι εργοδικό και που έχει υπεραριθμήσιμα εργοδικά μέρη.

Πόρισμα 4.5.1. *Ας υποθέσουμε ότι οποτεδήποτε η συνάρτηση Liouville (ή Moebius) δέχεται συσχετισμούς για λογαριθμικούς μέσους πάνω απο μια ακολουθία διαστημάτων* $\mathbf{I} = ([\mathrm{N_k}])_{\mathrm{k}\in\mathbb{N}}$ *με* $N_k \to \infty$*, τότε το επαγόμενο σύστημα είναι εργοδικό. Τότε, η συνάρτηση Liouville (αντίστοιχα Moebius) ικανοποιεί την εικασία Chowla για λογαριθμικούς μέσους στο* $([N])_{N\in\mathbb{N}}$.

Αυτό είναι συνέπεια του γεγονότος ότι για μια φραγμένη ακολουθία a και μια ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{I}$ μπορούμε να βρούμε υπακολουθία της $\mathbf{I}$ πάνω από την οποία η a να δέχεται συσχετισμούς. Το πόρισμα αυτό δεν προϋποθέτει ότι η συνάρτηση Liouville δέχεται συσχετισμούς για λογαριθμικούς μέσους. Εάν, ωστόσο, θέλουμε να αποδείξουμε την εικασία Chowla, τότε αρκεί να δείξουμε ότι εάν έχουμε συσχετισμούς πάνω από μια ακολουθία διαστημάτων $([N_k])$, τότε η συνάρτηση Liouville είναι εργοδική γι' αυτήν την ακολουθία.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Η εικασία Sarnak

5.1 Möbius ασυμβατότητα δυναμικών συστημάτων

Σε αυτό το κεφάλαιο θα μελετήσουμε τη σύγκλιση κάποιων μέσων όρων συναρτήσεων σε τοπολογικά δυναμικά συστήματα. Πιο συγκεκριμένα, μελετάμε συσχετισμούς των αριθμητικών συναρτήσεων μ και λ που ορίσαμε σε προηγούμενα κεφάλαια. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι έχουμε ένα δυναμικό σύστημα (X, T). Το σύστημα αυτό θα λέγεται Möbius ασύμβατο (ή ορθογώνιο), εάν για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση $f : X \to \mathbb{C}$ και για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(T^n x)\mu(n) = 0. \tag{5.1.1}$$

Η εικασία του Sarnak ισχυρίζεται το εξής:

Εικασία 5.1.1. *Κάθε δυναμικό σύστημα σε ένα συμπαγή μετρικό χώρο με μηδενική τοπολογική*[1] *εντροπία είναι Möbius ασύμβατο.*

Ένα απλό παράδειγμα είναι όταν η συνάρτηση f είναι σταθερή. Τότε, η σχέση (5.1.1) γίνεται

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} \mu(n) \to 0,$$

και αυτό προκύπτει από το θεώρημα των πρώτων αριθμών. Το θεώρημα Dirichlet για αριθμητικές προόδους μπορεί ανάλογα να θεωρηθεί ως πόρισμα της εικασίας Sarnak για το σύστημα $(\mathbb{Z}_N, T)$ όπου $T(k) = k + 1$. Ένα σημαντικό πόρισμα της εικασίας 5.1.1 είναι ότι, εάν μια ακολουθία $a : \mathbb{Z} \to \{-1, 1\}$ έχει υπό-εκθετική block -αύξηση, τότε θα ισχύει $\mathbb{E}_{n\in\mathbb{Z}} a(n)\mu(n) = 0$.

Η εικασία Sarnak αποτελεί ανοικτό πρόβλημα. Χρησιμοποιώντας την variational principle μπορούμε να μεταφέρουμε το πρόβλημα σε συστήματα (X, v, T) με μετροθεωρητική εντροπία 0. Αξίζει, βέβαια, να παρατηρήσουμε ότι η σύγκλιση στην (5.1.1) απαιτούμε να ισχύει για κάθε $x \in X$ και όχι σχεδόν παντού. Μάλιστα, έχουμε την εξής γενικότερη πρόταση:

[1]Η τοπολογική εντροπία ενός συστήματος ορίζεται στο παράρτημα.

Πρόταση 5.1.2. *Έστω (X, v, T) ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και $f \in L^1(\mu)$. Τότε, για v-σχεδόν κάθε $x \in X$, έχουμε*

$$\frac{1}{N}\sum_{n \leqslant N} f(T^n x)\mu(n) \to 0.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας την εργοδική ανάλυση του v, μπορούμε να ανάγουμε το πρόβλημα στην περίπτωση που το σύστημα είναι εργοδικό. Έστω $f \in L^2(v)$. Από το φασματικό θεώρημα έχουμε

$$\Big\|\frac{1}{N}\sum_{n \leqslant N} f(T^n x)\mu(n)\Big\|_2 = \Big\|\frac{1}{N}\sum_{n \leqslant N} z^n \mu(n)\Big\|_{L^2(\sigma_f)},$$

όπου σ_f είναι το φασματικό μέτρο της f. Τώρα, θα χρησιμοποιήσουμε μια ανισότητα του Davenport[2]: για κάθε $A > 0$ έχουμε

$$\max_{z \in \mathbb{T}}\Big|\sum_{n \leqslant N} z^n \mu(n)\Big| \leqslant C_A \frac{N}{\log^A(N)} \tag{5.1.2}$$

για κάποιον $C_A > 0$ και κάθε $N \geq 2$. Επιλέγουμε $p > 1$ και $N = [p^m]$. Εφαρμόζοντας την παραπάνω ανισότητα για $A = 2$ παίρνουμε

$$\Big\|\frac{1}{N}\sum_{n \leqslant N} f(T^n x)\mu(n)\Big\|_2 \leqslant \frac{C_2}{(m \log p)^2}.$$

Από αυτήν την σχέση παίρνουμε

$$\sum_{m \geq 1}\Big\|\frac{1}{[p^m]}\sum_{n \leqslant [p^m]} f(T^n x)\mu(n)\Big\|_2 < \infty.$$

Από την τριγωνική ανισότητα παίρνουμε

$$\sum_{m \geq 1}\Big|\frac{1}{[p^m]}\sum_{n \leqslant [p^m]} f(T^n x)\mu(n)\Big| \in L^2(v),$$

και το παραπάνω άθροισμα είναι για σχεδόν κάθε x πεπερασμένο. Έτσι, για v-σχεδόν κάθε $x \in X$ έχουμε

$$\frac{1}{[p]^m}\sum_{n \leqslant [p]^m} f(T^n x)\mu(n) \to 0 \tag{5.1.3}$$

όταν $m \to \infty$.

Ας υποθέσουμε τώρα επιπλέον ότι $f \in L^\infty(v)$. Τότε, αν $[p^m] \leqslant N < [p^{m+1}] + 1$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n \leqslant N} f(T^n x)\mu(n)\Big| &= \Big|\frac{1}{N}\sum_{n \leqslant [p^m]} f(T^n x)\mu(n) + \frac{1}{N}\sum_{n=[p^m]+1}^{N} f(T^N x)\mu(n)\Big| \\ &\leqslant \Big|\frac{1}{[p^m]}\sum_{n \leqslant [p^m]} f(T^n x)\mu(n)\Big| + \frac{\|f\|_\infty}{[p^m]}(N - [p^m]) \\ &\leqslant \Big|\frac{1}{[p^m]}\sum_{n \leqslant [p^m]} f(T^n x)\mu(n)\Big| + \frac{\|f\|_\infty}{[p^m]}([p^{m+1}] - [p^m]).\end{aligned}$$

[2] Αυτή η ανισότητα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αποδείξουμε την εικασία Sarnak στην περίπτωση των εργοδικών στροφών.

Παίρνοντας το p αρκετά κοντά στο 1 και χρησιμοποιώντας την (5.1.3) καταλήγουμε στην

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} f(T^n x)\mu(n) \to 0$$

για σχεδόν κάθε x.

Για να τελειώσουμε την απόδειξη, θεωρούμε μια συνάρτηση $f \in L^1(v)$ και επιλέγουμε $g \in L^\infty(v)$ τέτοια ώστε $\|f-g\| < \varepsilon$. Από το θεώρημα Birkhoff έχουμε

$$\lim_{N\to\infty}\Big|\frac{1}{N}(f-g)(T^n x)\Big| < \varepsilon.$$

Κατά συνέπεια,

$$\limsup_{N\to\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} f(T^n x)\mu(n)\Big| \leqslant \lim_{N\to\infty}\Big|\frac{1}{N}(f-g)(T^n x)\Big| + \limsup_{N\to\infty}\Big|\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} g(T^n x)\mu(n)\Big| < \varepsilon.$$

Αφού το ε ήταν τυχαίο παίρνουμε το ζητούμενο. □

Για να αποδείξουμε την σχέση (5.1.1) για ένα συγκεκριμένο $x \in X$, μελετάμε όλα τα T-αναλλοίωτα μέτρα του X. Όπως θα δούμε στη συνέχεια, εάν όλα αυτά τα μέτρα δίνουν συστήματα εντροπίας 0, η ισχύς της εικασίας Chowla συνεπάγεται την (5.1.1) στο σημείο $x \in X$ και για κάθε $f \in C(X)$.

Μπορούμε να ορίσουμε και γενικεύσεις της εικασίας Sarnak θεωρώντας μέσους όρους της μορφής

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} f(T^n x)\mu^{k_0}(n)\mu^{k_1}(n+a_1)\dots\mu^{k_m}(n+a_m), \tag{5.1.4}$$

αλλά δεν θα ασχοληθούμε με αυτήν την περίπτωση. Επίσης, αντί της συνάρτησης μ, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση Liouville στην (5.1.1). Αποδεικνύεται ότι οι δύο αυτές διαφορετικές εικασίες είναι ισοδύναμες.

5.2 Η εργοδική εκδοχή της εικασίας Chowla

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα (X,T) και έστω $M(X)$ ο χώρος των T-αναλλοίωτων μέτρων πιθανότητας. Ένα σημείο $x \in X$ θα λέγεται quasi-generic για το μέτρο v, εάν υπάρχει ακολουθία φυσικών $N_k \to \infty$ έτσι ώστε

$$\frac{1}{N_k}\sum_{n\leqslant N_k} \delta_{T^n x} \to v \ \textit{για}\ k \to \infty, \tag{5.2.1}$$

όπου η σύγκλιση είναι ως προς την w^* τοπολογία στον χώρο $M(X)$. Για ένα σημείο $x \in X$, θα συμβολίζουμε με $QG(x)$ το σύνολο των μέτρων $v \in M(X)$ για τα οποία το x είναι quasi-generic. Αν $QG(x) = \{v\}$, λέμε ότι το x είναι generic για το μέτρο v.

Έστω $\mathbb{I} = \mathbb{N}$ ή $\mathbb{Z}$. Θεωρούμε ένα πεπερασμένο σύνολο A και εφοδιάζουμε τον χώρο των ακολουθιών $A^{\mathbb{I}}$ με το shift S. Ένα κλειστό και S-αναλλοίωτο υποσύνολο του $A^{\mathbb{I}}$ μαζί με το μετασχηματισμό S θα λέγεται subshift. Εάν επιλέξουμε ένα σημείο $w \in A^{\mathbb{I}}$ τότε θεωρούμε το subshift

$$X_w = \{x \in A^{\mathbb{Z}} : \text{ όλα τα block που εμφανίζονται στο } x \text{ εμφανίζονται και στο } w\},$$

και, επίσης, ορίζουμε τη συνάρτηση $F(w) = w(1)$. Στη συνέχεια, το σύνολο A θα είναι το σύνολο $\{-1, 0, 1\}$. Εάν έχουμε μια ακολουθία ορισμένη στους φυσικούς, ορίζουμε το σύνολο X_w όπως παραπάνω, και μιλάμε καταχρηστικά για ακολουθίες w που είναι (quasi)-generic για ένα μέτρο στο $M(X_w)$.

Το subshift X_μ είναι το σύστημα Möbius, και το subshift X_{μ^2} ονομάζεται ελεύθερο τετραγώνων (square-free) σύστημα (για το σύστημα αυτό υπάρχει μια δίπλευρη ακολουθία w, έτσι ώστε η κλειστή τροχιά του w στο $A^{\mathbb{Z}}$ να είναι το subshift X_{μ^2}). Αποδεικνύεται ότι το μ^2 είναι generic για ένα μέτρο v_{μ^2}, που ονομάζεται μέτρο Mirsky [1].

Έστω $z \in A^{\mathbb{I}}$ και N_k μια ακολουθία φυσικών που τείνει στο άπειρο. Τότε, θέτουμε

$$D(N_k, z) = \frac{1}{N_k} \sum_{n \leqslant N_k} \delta_{S^n z}. \tag{5.2.2}$$

Υποθέτουμε ότι $v \in QG(z^2)$ και ορίζουμε το μέτρο $\hat{v}^3$ ως εξής: για κάθε block B, θέτουμε

$$\hat{v}(B) = 2^{-supp(B)} v(p(b)),$$

όπου $supp(B) = \{i : B(i) \neq 0\}$ και $p : A^{\mathbb{I}} \to \mathbb{I}$ είναι η απεικόνιση

$$p(w(n)) = w(n)^2$$

για κάθε $n \in \mathbb{I}$. Είναι προφανές ότι $\hat{v} \in M(A^{\mathbb{I}})$. Με έναν απλό υπολογισμό συμπεραίνουμε ότι αν $1 \leqslant h_1 < \cdots < h_m$ είναι ακέραιοι και τα $i_j \in \{1, 2\}, j \in \{0, 1, \ldots, k\}$ δεν είναι όλα ίσα με 2, τότε

$$\int_{A^{\mathbb{I}}} F^{i_0} \cdot F^{i_1} \circ S^{h_1} \cdots F^{i_m} \circ S^{h_m} d\hat{v} = 0, \tag{5.2.3}$$

και, επιπλέον,

$$\int_{A^{\mathbb{I}}} F^2 \cdot F^2 \circ S^{h_1} \cdots F^2 \circ S^{h_m} d\hat{v} = \int_{\{0,1\}}^{\mathbb{I}} F \cdot F \circ S^{h_1} \cdots f \circ S^{h_m} dv. \tag{5.2.4}$$

Πρόταση 5.2.1. *Έστω z, v και N_k όπως ορίστηκαν παραπάνω, και $h_1 < \ldots < h_m$ θετικοί ακέραιοι, $i_j \in \{1, 2\}$ για $j \in \{0, 1, \ldots, k\}$, όχι όλα ίσα με 2. Τότε, ισχύει*

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leqslant N_k} z^{i_0}(n) \cdot z^{i_1}(n + h_1) \cdots z^{i_m}(n + h_m) \to 0 \text{ για } k \to \infty \tag{5.2.5}$$

για οποιαδήποτε επιλογή των ακεραίων h_j και i_j, αν και μόνο εάν

$$D(N_k, z) \to \hat{v} \tag{5.2.6}$$

για $k \to \infty$.

[3] Το μέτρο αυτό ονομάζεται και σχετικά ανεξάρτητη επέκταση του v.

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\frac{1}{N_k}\sum_{n\leqslant N_k} z^{i_0}(n)\cdot z^{i_1}(n+h_1)\cdots z^{i_m}(n+h_m) \tag{5.2.7}$$
$$= \frac{1}{N_k}\sum_{n\leqslant N_k}(F^{i_0}\cdot F^{i_1}\circ S^{h_1}\cdots F^{i_m}\circ S^{h_m})(S^{n-1}z).$$

Ας υποθέσουμε ότι ισχύει η (5.2.6). Τότε, έχουμε

$$\frac{1}{N_k}\sum_{n\leqslant N_k} z^{i_0}(n)\cdot z^{i_1}(n+h_1)\cdots z^{i_m}(n+h_m)\to\int_{A^{\mathbb{I}}} F^{i_0}\cdots F^{i_m}\circ S^{h_m}d\hat{v},$$

το οποίο από την (5.2.3) ισούται με 0.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι ισχύει η σχέση (5.2.5). Χωρίς βλάβη της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $D(N_k,z)\to\rho$. Από τη σχέση (5.2.7) έχουμε

$$\frac{1}{N_k}\sum_{n\leqslant N_k} z^{i_0}(n)\cdot z^{i_1}(n+h_1)\cdots z^{i_m}(n+h_m)\to\int_{A^{\mathbb{I}}} F^{i_0}\cdots F^{i_m}\circ S^{h_m}d\rho.$$

Κατά συνέπεια,

$$\int_{A^{\mathbb{I}}} F^{i_0}\cdots F^{i_m}\circ S^{h_m}d\rho = 0.$$

Επιπλέον, επειδή $F^2(u)=F(u^2)$ έχουμε από την (5.2.2) ότι

$$\int_{A^{\mathbb{I}}} F^2\cdot F^2\circ S^{h_1}\cdots F^2\circ S^{h_m}d\rho = \int_{\{0,1\}^{\mathbb{I}}} F\cdot F\circ Sh_1\cdots F\circ S^{h_k}dv.$$

Συνεπώς, από τις σχέσεις (5.2.3) και (5.2.4) καταλήγουμε στην

$$\int_{A^{\mathbb{I}}} Gd\hat{v} = \int_{A^{\mathbb{I}}} Gd\rho$$

για όλες τις συναρτήσεις G στο σύνολο

$$Y=\{F^{i_0}\cdot F^{i_1}\circ S^{h_1}\cdot sF^{i_m}\circ S^{h_m}, q\leqslant h_1<h_2<\cdots<h_m, m\geq 0, i_j\in\mathbb{N}\}.$$

Επειδή το σύνολο Y είναι μια άλγεβρα συναρτήσεων και διαχωρίζει τα σημεία του $A^{\mathbb{I}}$, συμπεραίνουμε από το θεώρημα Stone-Weierstrass ότι $\rho=\hat{v}$. □

Θεώρημα 5.2.2. *Η εικασία Chowla ισχύει αν και μόνο εάν το μ είναι generic για το μέτρο $\hat{v_{\mu^2}}$.*

Έστω τώρα (X,T) ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα και $x\in X$. Το σημείο $x\in X$ θα λέγεται πλήρως ντετερμινιστικό, εάν για κάθε μέτρο $v\in QG(x)$ ισχύει ότι το σύστημα (X,v,T) έχει εντροπία 0. Προφανώς, εάν το σύστημα έχει μηδενική εντροπία, τότε κάθε σημείο του X είναι πλήρως ντετερμινιστικό.

Θεώρημα 5.2.3. *Η εικασία Chowla συνεπάγεται ότι*

$$\frac{1}{N}\sum_{n\leqslant N} f(T^n x)\mu(n)\to 0$$

για οποιοδήποτε σύστημα (X,T), $f\in C(X)$ και κάθε πλήρως ντετερμινιστικό σημείο $x\in X$. Μάλιστα, η εικασία Chowla συνεπάγεται την εικασία Sarnak.

Για να αποδείξουμε αυτό το θεώρημα θα χρειαστούμε το επόμενο λήμμα. Έστω ότι έχουμε δύο συστήματα (X_1, T_1) και (X_2, T_2), με το σύστημα X_1 να είναι παράγοντας του X_2. Ένας ενδιάμεσος παράγοντας (X_3, T_3) (που δεν είναι ισόμορφος με τον X_3) θα λέγεται ότι είναι σχετικά Kolmogorov, εάν η σχετική εντροπία του T_3 ως προς τον T_2 είναι θετική.

Είναι εύκολο να δούμε ότι εάν η επέκταση $X_3 \to X_1$ έχει σχετική εντροπία 0 και η επέκταση $X_2 \to X_3$ είναι σχετικά Kolmogorov, τότε τα συστήματα X_1, X_2 είναι σχετικά ανεξάρτητα πάνω από τον κοινό παράγοντά τους X_3.

Έστω τώρα $v \in M(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$. Ας θυμηθούμε ότι η συνάρτηση p ορίστηκε παραπάνω από τη σχέση $p(w)(n) = (w(n))^2$ για $w \in A^{\mathbb{I}}$.

Λήμμα 5.2.4. *Η επέκταση* $(A^{\mathbb{Z}}, \hat{v}, S) \xrightarrow{p} (\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, v, S)$ *είναι είτε τετριμμένη, είτε σχετικά Kolmogorov.*

Απόδειξη. Θέτουμε $G : \{0,1\}^{\mathbb{Z}} \times \{-1,1\}^{\mathbb{Z}} \to A^{\mathbb{Z}}$ μέσω της σχέσης

$$G(a,b)(n) = a(n)b(n),$$

και είναι εύκολο να παρατηρήσουμε ότι $G_\star(v \otimes B(1/2,1/2)) = \hat{v}$, όπου $B(1/2,1/2)$ είναι ένα μέτρο Bernoulli (όπου για ένα μέτρο μ γράφουμε $G_*(\mu)$ για το μέτρο $\mu \circ G^{-1}$ στον χώρο $A^{\mathbb{Z}}$). Αυτό δείχνει ότι έχουμε μια απεικόνιση παράγοντα

$$q : (\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, v, S) \times (\{-1,1\}^{\mathbb{Z}}, B(1/2,1/2), S) \to (A^{\mathbb{Z}}, \hat{v}, S)$$

και αυτή η επέκταση είναι σχετικά Kolmogorov. Συνεπώς, το ίδιο ισχύει και για οποιονδήποτε ενδιάμεσο παράγοντα (πάνω από το $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, V, S)$). Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι ο χώρος $(A^{\mathbb{Z}}, \hat{v}, S)$ είναι ένας ενδιάμεσος παράγοντας, και αυτό προκύπτει από το γεγονός ότι η απεικόνιση $p \circ G$ είναι η προβολή στην πρώτη συντεταγμένη (εφόσον για $w \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ και $u \in \{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$ ισχύει $w = (w \cdot u)^2$). □

Λήμμα 5.2.5. *Για* $\hat{v}$*-σχεδόν κάθε* $u \in \{0,1\}^{\mathbb{Z}}$ *έχουμε*

$$\mathbb{E}_{\hat{v}}(F|p(w) = u) = 0$$

για τις συναρτήσεις F *και* p *που ορίστηκαν παραπάνω.*

Απόδειξη. Έστω $v = \int \hat{v}_\omega dP$ η εργοδική διάσπαση του μέτρου $\hat{v}$. Ισχύει ότι

$$\mathbb{E}_{\hat{v}}(F|p(w) = u) = \mathbb{E}_{\hat{v}}(F|\{0,1\}^{\mathbb{Z}})(u) = \int_{p^{-1}(u)} F d\hat{v}_u.$$

Το μέτρο $\hat{v}_u$ είναι το μέτρο γινόμενο του $B(1/2,1/2)$ με όλες τις θέσεις που ανήκουν στο φορέα του u. Αν $u(1) = 0$, τότε ισχύει το ζητούμενο. Εάν $u(1) = 1$, τότε η F στο $p^{-1}(u)$ παίρνει τις τιμές $\{-1,1\}$ με την ίδια πιθανότητα και άρα πάλι ισχύει το ζητούμενο. □

Πρόταση 5.2.6. *Έστω* (X,T) *ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα και* $x \in X$ *ένα πλήρως ντετερμινιστικό σημείο και έστω, επίσης,* z *ένα quasi-generic σημείο για το μέτρο* $v \in M(\{0,1\}^{\mathbb{Z}})$. *Έστω ότι ως προς την* w^**-τοπολογία ισχύει ότι*

$$D_{T\times S}(N_k, (x,z)) \to \rho \tag{5.2.8}$$

στον χώρο $M(X \times A^{\mathbb{Z}})$. *Τότε:*

(α) *το ρ είναι μια σύνδεση του (X, λ, T) και του $(A^{\mathbb{Z}}, \hat{v}, S)$ για κάποιο μέτρο $\lambda \in QG(x)$, και*

(β) *οι παράγοντες $(X, \lambda, T) \vee (\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, v, S)$*[4] *και $(A^{\mathbb{Z}}, \hat{v}, S)$ είναι σχετικά ανεξάρτητες πάνω από το $(\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, v, S)$ σαν παράγοντες του χώρου $(X \times A^{\mathbb{Z}}, \rho, T \times S)$.*

Απόδειξη. Από τη σχέση (5.2.8) έχουμε ότι

$$\lambda = \rho|_X \lim_{k \to \infty} D_T(N_k, x)$$

και $h(T, \lambda) = 0$ αφού το x είναι πλήρως ντετερμινιστικό. Άρα, το ρ είναι σύνδεση των χώρων (X, λ, T) και $(A^{\mathbb{Z}}, \hat{v}, S)$, και η επέκταση

$$(X, \lambda, T) \vee (\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, v, S) \to (\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, v, S)$$

έχει σχετική εντροπία 0 (χρησιμοποιώντας τον τύπο του Pinsker). Επίσης, από το Λήμμα 5.2.4 έχουμε ότι η επέκταση

$$(A^{\mathbb{Z}}, \hat{v}, S) \to (\{0,1\}^{\mathbb{Z}}, v, S)$$

είναι σχετικά Kolmogorov και το ζητούμενο έπεται. □

Επιστρέφουμε τώρα στην απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.3. Έστω ότι ισχύει η εικασία Chowla και έστω επίσης (X, T) ένα δυναμικό σύστημα μαζί με ένα πλήρως ντετερμινιστικό σημείο $x \in X$. Επιλέγουμε ακολουθία N_k τέτοια ώστε

$$D_{T \times S}(N_k, (x, z)) \to \rho \tag{5.2.9}$$

για κάποιο μέτρο ρ. Από το Θεώρημα 5.2.2 έχουμε ότι η προβολή του ρ στη δεύτερη συντεταγμένη είναι το μέτρο $\hat{v_{\mu^2}}$ όπου το v_{μ^2} είναι generic για το μ^2. Για μια $f \in C(X)$, έχουμε από την σχέση (5.2.9) ότι

$$\frac{1}{N_k} \sum_{n \leqslant N_k} f(T^n x)\mu(n) = \frac{1}{N_k} \sum_{n \leqslant N_k} f(T^n x) F(S^n \mu) \overset{k \to \infty}{\to} \int f \otimes F d\rho. \tag{5.2.10}$$

Από το Λήμμα 5.2.5 έχουμε

$$\mathbb{E}_\rho(F | \{0,1\}^{\mathbb{Z}}) = \mathbb{E}_{\hat{v_{\mu^2}}}(F | \{0,1\}^{\mathbb{Z}}) = 0$$

και σε συνδυασμό με το (β) της Πρότασης 5.2.6 παίρνουμε

$$\mathbb{E}_\rho(f \otimes F | \{0,1\}^{\mathbb{Z}}) = \mathbb{E}_\rho(f | \{0,1\}^{\mathbb{Z}}) \mathbb{E}_\rho(F | \{0,1\}^{\mathbb{Z}}) = 0.$$

Αυτό δίνει ότι $\int F \otimes f d\rho = 0$ και η απόδειξη ολοκληρώθηκε.

[4] Δηλαδή, αν θεωρήσουμε τους παράγοντες σαν σ-υποάλγεβρες του χώρου $(X, \lambda, T) \times (A^{\mathbb{Z}}, \hat{v}, T)$, συμβολίζουμε με αυτόν τον τρόπο τον μικρότερο παράγοντα που περιέχει και τις δύο αυτές σ-υποάλγεβρες.

5.3 Η λογαριθμική εκδοχή της εικασίας Sarnak

Θεωρούμε ένα δυναμικό σύστημα (X,T). Χρησιμοποιώντας λογαριθμικούς μέσους όρους, μπορούμε να πάρουμε μια διαφορετική εικασία από την Εικασία 5.1.1.

Εικασία 5.3.1. *Έστω (X,T) ένα δυναμικό σύστημα με τοπολογική εντροπία 0. Τότε, για οποιαδήποτε συνεχή συνάρτηση f και οποιοδήποτε σημείο $x \in X$ ισχύει*

$$\frac{1}{\log N}\sum_{n\leqslant N}\frac{f(T^n x)\mu(n)}{n} \to 0 \tag{5.3.1}$$

καθώς το $N \to \infty$.

Είναι προφανές ότι η εικασία Sarnak συνεπάγεται τη λογαριθμική εκδοχή της. Επίσης, η λογαριθμική εικασία Chowla συνεπάγεται τη λογαριθμική εικασία Sarnak. Ωστόσο, στην περίπτωση των λογαριθμικών μέσων όρων ισχύει και το αντίστροφο.

Πρόταση 5.3.2. *Η Εικασία 5.3.1 συνεπάγεται την λογαριθμική εικασία Chowla.*

Η Εικασία 5.3.1 μπορεί να διατυπωθεί και για τη συνάρτηση Liouville στη θέση της συνάρτησης μ (οι δύο αυτές εικασίες είναι ισοδύναμες). Στο Κεφάλαιο 4 αναφέραμε τη σχέση της εικασίας Chowla με τις ημινόρμες ομοιομορφίας $\|\cdot\|_{U^k_{\log}(\mathbf{I})}$ (Πρόταση 4.2.2). Αυτή η πρόταση οδηγεί στο εξής:

Πρόταση 5.3.3. *Η Εικασία 5.3.1 συνεπάγεται την σχέση $\|\lambda\|_{U^k_{\log}(\mathbf{I})} = 0$ για οποιονδήποτε θετικό ακέραιο k και οποιαδήποτε ακολουθία διαστημάτων με μήκη που τείνουν στο άπειρο. Ισχύει και το αντίστροφο. Πιο συγκεκριμένα, η Εικασία 5.3.1 ισοδυναμεί με το ότι για οποιονδήποτε $d \geq 1$ έχουμε*

$$\sum_{X/w\leqslant n\leqslant X}\frac{\|\lambda\|_{U^d([n,n+H]\cap\mathbb{Z})}}{n} = o_{H\to\infty}(\log w). \tag{5.3.2}$$

για όλα τα $2 \leqslant H \leqslant w \leqslant X$.[5]

Όλες οι παραπάνω ισοδυναμίες αποδείχτηκαν στο [33]. Στο ίδιο άρθρο αποδείχτηκε ότι αυτές οι εικασίες είναι ισοδύναμες και με μια εικασία σχετική με nilsequences.

Πρόταση 5.3.4. *Η Εικασία 5.3.1 είναι ισοδύναμη με το εξής: Αν (G/Γ) είναι ένα nilmanifold k-βημάτων, $F \in C(G/\Gamma)$ είναι μια Lipschitz συνεχής συνάρτηση και $x_0 \in G/\Gamma$, έχουμε ότι, για $2 \leqslant H \leqslant w \leqslant X$, ισχύει*

$$\sum_{X/w\leqslant n\leqslant X}\frac{\sup_{g\in G}|\sum_{h\leqslant H}F(g^h x_0)\lambda(n+h)|}{n} = o_{H\to\infty}(H\log w). \tag{5.3.3}$$

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι η εικασία που διατυπώνεται στην Πρόταση 5.3.4 συνεπάγεται ότι ισχύει η σχέση (5.3.2). Ας υποθέσουμε, λοιπόν, ότι $d \geq 1$ και έστω $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό σε

[5] Το γεγονός ότι η σχέση (5.3.2) συνεπάγεται ότι $||\lambda||_{U^k_{log}(\mathbf{I})} = 0$ προκύπτει από το Λήμμα 4.2.1 και το αντίστροφό του, το οποίο δείχνει ότι οι νόρμες $|||_{U^k(\mathbf{I})}$ και $|||_{U^k_*(\mathbf{I})}$ είναι ισοδύναμες.

σχέση με το d. Επιλέγουμε τα H, w, X έτσι ώστε $2 \leqslant H \leqslant w \leqslant X$ και το H να είναι αρκετά μεγάλο συναρτήσει των d, ε. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\mathbb{E}\|\lambda\|_{U^d([n,n+H]\cap\mathbb{Z})} \ll \varepsilon.$$

Αν υποθέσουμε ότι αυτό δεν ισχύει, τότε θα έχουμε

$$\|\lambda\|_{U^d([n,n+H]\cap\mathbb{Z})} \gg \varepsilon \tag{5.3.4}$$

με πιθανότητα $\gg \varepsilon$. Τότε, από την αντίστροφη εικασία για τις νόρμες Gowers [18] υπάρχει ένα (τυχαίο) nilmanifold $(d-1)$-βημάτων $\mathbf{G}/\mathbf{\Gamma}$ από μια πεπερασμένη συλλογή $\mathcal{M}$, μια συνάρτηση $\mathbf{F} : \mathbf{G}/\mathbf{\Gamma} \to \mathbb{C}$ με Lipschitz σταθερά $O_\varepsilon(1)$, ένα στοιχείο $\mathbf{g} \in \mathbf{G}$ και ένα σημείο $\mathbf{x_0} \in \mathbf{G}/\mathbf{\Gamma}$ έτσι ώστε

$$\Big|\sum_{h=1}^{H} \lambda(\mathbf{n}+\mathrm{h})\mathbf{F}(\mathbf{g}^{\mathrm{h}}\mathbf{x_0})\Big| \gg 1.^6 \tag{5.3.5}$$

Από την αρχή της περιστεροφωλιάς μπορούμε να βρούμε ένα nilmanifold G/Γ $(d-1)$-βημάτων, έτσι ώστε το $\mathbf{G}/\mathbf{\Gamma}$ να είναι ίσο με το G/Γ με πιθανότητα $\gg_\varepsilon 1$. Στη συνέχεια, θεωρούμε ένα ντετερμινιστικό σημείο x_0 στο G/Γ. Για το τυχαίο σημείο $\mathbf{x_0}$ μπορούμε να γράψουμε $\mathbf{x_0} = \mathbf{g_1}\mathrm{x}_0$ για καποιο στοιχείο $\mathbf{g_1} \in \mathrm{G}$. Τότε, θα έχουμε $\mathbf{F}(\mathbf{g}^{\mathrm{h}}\mathbf{x_0}) = \mathbf{F}(\mathbf{g_1}(\mathbf{g_1^{-1}}\mathbf{g}\mathbf{g_1})^{\mathrm{h}}\mathrm{x}_0)$. Αντικαθιστώντας το $\mathbf{g}$ με $\mathbf{g_1^{-1}}\mathbf{g}\mathbf{g_1}$ και την $\mathbf{F}$ με τη συνάρτηση $x \to \mathbf{F}(\mathbf{g_1}\mathrm{x})$, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\mathbf{x_0} = \mathrm{x}_0$. Επιπλέον, απο το θεώρημα Arzèla-Ascoli, η κλάση των Lipschitz συναρτήσεων από το G/Γ με τιμές στο $\mathbb{C}$ και με Lipschitz σταθερά $O_\varepsilon(1)$ είναι φραγμένη ως προς την ομοιόμορφη τοπολογία. Άρα, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $\mathbf{F}$ παίρνει τιμές από ένα πεπερασμένο σύνολο Lipschitz συναρτήσεων χωρίς να επηρεαστεί η σχέση (5.3.5). Χρησιμοποιώντας ξανά την αρχή περιστεροφωλιάς, μπορούμε να βρούμε μια συνάρτηση $F : G/\Gamma \to \mathbb{C}$ με

$$\Big|\sum_{h=1}^{H} \lambda(\mathbf{n}+\mathrm{h})\mathrm{F}(\mathbf{g}^{\mathrm{h}}\mathrm{x}_0)\Big| \gg_\varepsilon 1$$

με πιθανότητα $\gg_\varepsilon 1$. Πιο συγκεκριμένα,

$$\sup_{g\in G}\Big|\sum_{h=1}^{H} \lambda(\mathbf{n}+\mathrm{h})\mathrm{F}(\mathrm{g}^{\mathrm{h}}\mathrm{x}_0)\Big| \gg_\varepsilon 1$$

με πιθανότητα $\gg_\varepsilon 1$, το οποίο δίνει ότι

$$\mathbb{E}\sup_{g\in G}\Big|\sum_{h=1}^{H} \lambda(\mathbf{n}+\mathrm{h})\mathrm{F}(\mathrm{g}^{\mathrm{h}}\mathrm{x}_0)\Big| \gg_\varepsilon 1$$

το οποίο αντιφάσκει προς την αρχική μας υπόθεση.

Τέλος, θα αποδείξουμε ότι η Εικασία 5.3.1 συνεπάγεται την εικασία της Πρότασης 5.3.4. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι $s \geq 0$ και G/Γ είναι ένα nilmanifold s-βημάτων, $x_0 \in G/\Gamma$ και F Lipschitz συνάρτηση. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι η F παίρνει πραγματικές τιμές (διαχωρίζοντας σε

[6] Το $\mathbf{n}$ είναι μια τυχαία μεταβλητή στο διάστημα φυσικών $[X/w, X]$ που ακολουθεί ομοιόμορφη κατανομή.

πραγματικό και φανταστικό μέρος). Έστω, επίσης $\varepsilon > 0$. Θα δείξουμε ότι

$$\sum_{X/w \leqslant n \leqslant X} \frac{\sup_{g \in G} |\sum_{h \leqslant H} F(g^h x_0) \lambda(n+h)|}{n} \ll \varepsilon H \log w$$

για $1 \leqslant H \leqslant w \leqslant X$ και H αρκετά μεγάλο σε σχέση με το ε. Από το [17] ισχύει ότι

$$\sup_{g \in G} \Big| \sum_{h=1}^{H} \lambda(n+h) F(g^h x_0) \Big| = o_{H \to \infty}(H)$$

για $n \leqslant H \log H$. Έτσι, η συνολική συνεισφορά στην περίπτωση $n \leqslant H \log H$ είναι αμελητέα, οπότε θα ασχοληθούμε με την περίπτωση $n > H \log H$. Τότε, επειδή $\frac{1}{n+h} = \frac{1}{n} + O(\frac{1}{n \log H})$, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\sum_{H \log H, X/w \leqslant n \leqslant X} \sup_{g \in G} \Big| \sum_{h=1}^{H} \frac{\lambda(n+h)}{n+h} F(g^h x_0) \Big| \ll \varepsilon H \log w.$$

Είναι αρκετό να δείξουμε ότι

$$\sum_{H \log H, X/w \leqslant n \leqslant X} \sup_{g \in G} \max \Big(\sum_{h=1}^{H} \frac{\lambda(n+h)}{n+h} F(g^h x_0), 0 \Big) \ll \varepsilon H \log w.$$

γιατί η προηγούμενη σχέση προκύπτει από την τελευταία εφαρμόζοντάς στις F και $-F$.

Αν υποθέσουμε ότι δεν ισχύει το ζητούμενο, μπορούμε να βρούμε ακολουθίες $1 \leqslant H_i \leqslant w_i \leqslant X_i$ με $X_i \to \infty$ για $i \to \infty$, έτσι ώστε

$$\sum_{H_i \log H_i, X_i/w_i \leqslant n \leqslant X_i} \sup_{g \in G} \max \Big(\sum_{h=1}^{H} \frac{\lambda(n+h)}{n+h} F(g^h x_0), 0 \Big) \ll \varepsilon H_i \log w_i.$$

Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $H_{i+1} \geq 100 X_i$.

Η ποσότητα $\sup\limits_{g \in G} \big| \sum_{h=1}^{H} \frac{\lambda(n+h)}{n+h} F(g^h x_0) \big|$ φράσσεται από $O(H_i/n)$. Άρα, επιλέγοντας κατάλληλα τις ασυμπτωτικές σταθερές, μπορούμε να βρούμε ένα σύνολο S_i φυσικών n με $H_i \log H_i, X_i/W_i \leqslant n \leqslant X_i$ τέτοιο ώστε

$$\sum_{n \in S_i} \frac{1}{n} \gg \varepsilon \log w_i$$

και

$$\sup_{g \in G} \sum_{h=1}^{H_i} \frac{\lambda(n+h)}{n+h} F(g^h x_0) \gg \varepsilon \frac{H_i}{n}$$

για κάθε $n \in S_i$. Στη συνέχεια, μπορούμε να βρούμε ένα υποσύνολο S_i' του S_i που είναι H_i-διαχωρισμένο (Παράρτημα Α. 2) τέτοιο ώστε

(5.3.6)
$$\sum_{n \in S_i'} \frac{1}{n} \gg \frac{\varepsilon}{H_i} \log w_i.$$

Για κάθε $n \in S_i'$, επιλέγουμε $g_n \in G$ τέτοιο ώστε

(5.3.7)
$$\sum_{h=1}^{H} \frac{\lambda(n+h)}{n+h} F(g_n^h x_0) \gg \varepsilon \frac{H_i}{n}.$$

Ορίζουμε $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ από τη σχέση

$$f(n+h) = F(g_n^h x_0)$$

για $n \in S_i'$ και $1 \leqslant h \leqslant H_i$ για κάποιο i, και $f(m) = 0$ διαφορετικά. Η f είναι καλά ορισμένη καθώς τα διαστήματα $[n+1, n+H_i]$ είναι ξένα μεταξύ τους από την επιλογή των H_i και την H_i-διαχωρισιμότητα του S_i'.

Αθροίζοντας στην (5.3.7) για όλα τα $n \in S_i'$ και χρησιμοποιώντας την (5.3.6), παίρνουμε

$$\sum_{H_i \log H_i, X_i/w_i \leqslant n \leqslant 2X_i} \frac{\lambda(n)}{n} f(n) \gg \varepsilon^2 \log w_i.$$

Αν η f είναι ντετερμινιστική ακολουθία, τότε θα έχουμε

$$\sum_{H_i \log H_i, X_i/w_i \leqslant n \leqslant 2X_i} \frac{\lambda(n)}{n} f(n) = o_{w_i \to \infty}(\log w_i).$$

Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι η f είναι ντετερμινιστική.

Αφού η F είναι φραγμένη, η f παίρνει τιμές σε ένα διάστημα $[-C, C]$. Θεωρούμε τον συμπαγή χώρο $[-C, C]^{\mathbb{Z}}$ των δίπλευρων ακολουθιών μαζί με το shift T και την μετρική

$$d((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-|n|}|x_n - y_n|.$$

Ταυτίζουμε την ακολουθία f με ένα σημείο $y_0 \in [-C, C]^{\mathbb{Z}}$ κατά τον προφανή τρόπο και έστω Y η κλειστή τροχιά του σημείου y_0. Τότε, το (U, T) είνα ένα δυναμικό σύστημα. Επίσης, ορίζουμε τη συνάρτηση $F : Y \to \mathbb{R}$ με

$$F_0((y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = y_0.$$

Η F είναι συνεχής και $f(n) = F_0(T^n y_0)$. Αρκεί, λοιπόν, να δείξουμε ότι το (Y, T) έχει μηδενική τοπολογική εντροπία. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ και αρκετά μεγάλο N, πρέπει να καλύψουμε το Y με το πολύ $\exp(0(\varepsilon N))$ μπάλες ακτίνας $O(\varepsilon)$ ως προς τη μετρική

$$d_N((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) = \sup_{n\in\mathbb{Z}} 2^{-max(-n,0,n-N)}|x_n - y_n|.$$

Παρατηρούμε ότι εάν ισχύει $x_N = y_N + O(\varepsilon)$, τότε για αρκετά μεγάλο N έχουμε

$$d_N((x_n)_{n\in\mathbb{Z}}, (y_n)_{n\in\mathbb{Z}}) \ll \varepsilon.$$

Άρα, αρκεί να βρούμε ένα σύνολο $S_{\varepsilon,N}$ πεπερασμένων ακολουθιών $(x_h)_{-N\leqslant h\leqslant 2N}$ με πληθάριθμο $\exp(O(\varepsilon N))$ τέτοιο ώστε για κάθε $n \in \mathbb{Z}$, να υπάρχει ακολουθία x_h στο $S_{\varepsilon,N}$ με $f(n+h) = x_h + O(\varepsilon)$ για όλα τα $-N \leqslant h \leqslant 2N$.

Εάν αποδείξουμε τον ισχυρισμό για μια συγκεκριμένη τιμή του N, τότε παρατηρούμε ότι ισχύει ο ισχυρισμός για κάθε $N' \geq N$ καλύπτοντας το διάστημα $[-N', 2N']$ με $O(N'/N)$ μεταφορές του διαστήματος $[-N, 2N]$. Αρκεί να αποδείξουμε τον ισχυρισμό για $N = \lfloor H_{i_0}/10 \rfloor$ για αρκετά μεγάλο i_0.

Μπορούμε να παραλείψουμε τα n με $|n| \leqslant 2N$ προσθέτοντας τις ακολουθίες $(f(n+h))_{-N\leqslant H\leqslant 2N}$ για $n \leqslant 2N$ στο σύνολο $S_{\varepsilon,N}$ (αυτό αυξάνει τον πληθάριθμο του $S_{\varepsilon,N}$ κατά μία αμελητέα ποσότητα).

Για $n < -2N$, ισχύει $f(n+h) = 0$ για όλα τα $-N \leqslant h \leqslant 2N$, και άρα αυτή η περίπτωση καλύπτεται προσθέτοντας τη μηδενική ακολουθία στο $S_{\varepsilon,N}$. Στη συνέχεια υποθέτουμε ότι $n > 2N$.

Η συνάρτηση f έχει φορέα στην ένωση των διαστημάτων $[m+1,\dots,m+H_i]$ με $i \geq 1$ και $m \in S'_i$, οπότε $H_i \log H_i \leqslant m \leqslant X_i$. Επειδή $n > 2N$, ένα τέτοιο διάστημα μπορεί να τμήσει το διάστημα $[n-N, n+2N]$ εάν ισχύει $H_i \log H_i \ll n \ll X_i$. Συγκεκριμένα, υπάρχει το πολύ μία επιλογή του i για την οποία μπορεί να ισχύει αυτό. Επειδή $n \geq 2N = 2\lfloor H_{i_0}/10 \rfloor$, έχουμε ότι (αφού $H_{i+1} \geq 100 H_i$) $i \geq i_0$ και άρα $H_i \geq 10N$. Επομένως, κάθε διάστημα $[n-N, n+2N]$ τέμνει το πολύ δύο από τα διαστήματα $[m+1, m+H_i]$. Τώρα, αρκεί να κατασκευάσουμε ένα σύνολο $S'_{\varepsilon,N}$ ακολουθιών $(x_h)_{-N \leqslant h \leqslant 2N}$ με πληθάριθμο $O(\exp(O(\varepsilon N)))$ με την ιδιότητα ότι για κάθε $i \geq i_0$, κάθε $m \in S'_i$ και κάθε υποδιάστημα $[n-N, n+2N]$ του $[m+1, m+H_i]$, υπάρχει μια ακολουθία x_h στο $S'_{\varepsilon,N}$ με $f(n+h) = x_h + O(\varepsilon)$ για $-N \leqslant h \leqslant 2N$. Τότε, μπορούμε να πάρουμε για $S_{\varepsilon,N}$ το σύνολο των ακολουθιών που σχηματίζονται συνδέοντας το πολύ δύο υπακολουθίες ακολουθιών της $S'_{\varepsilon,N}$ μαζί με κάποια μηδενικά. Τότε, ο πληθάριθμος του $S_{\varepsilon,N}$ θα είναι $O(N^{O(1)}|S'_{\varepsilon,N}|^2)$, το οποίο είναι το πολύ $\exp(O(\varepsilon N))$ για αρκετά μεγάλο N.

Για τα n, m που ορίσαμε παραπάνω, έχουμε

$$f(n+h) = F(g_m^{n+h-m} x_0)$$

για $-N \leqslant h \leqslant 2N$. Συγκεκριμένα, υπάρχει πολυωνυμική ακολουθία $g_n : \mathbb{Z} \to G$ με $f(n+h) = F(g_n(h)\Gamma)$ για $-N \leqslant h \leqslant 2N$. Μπορούμε να γράψουμε την ακολουθία g_n στη μορφή

$$g_n(h) = g_{n,0} g_{n,1}^h \cdots g_{n,s}^{\binom{h}{s}},$$

όπου $g_{n,i} \in G_i$ για $i = 0, \dots, s$ όπου $G = G_0 \geq G_1 \geq G_2 \geq \ldots \geq G_s$ είναι η κατώτερη κεντρική σειρά της G.

Η ακολουθία g_n μπορεί να παραγοντοποιηθεί ως $g_n = \bar{g}_n \gamma_n$, όπου $\bar{g_n}$ είναι μια πολυωνυμική ακολουθία με συντελεστές σε ένα συμπαγές σύνολο και γ_n είναι μια πολυωνυμική ακολουθία με συντελεστές στο Γ. Επιπλέον, ισχύει $g_n(h)\Gamma = \bar{g_n}(h)\Gamma$, και άρα

$$f(n+h) = F(\bar{g}_{n,0} \cdots \bar{g}_{n,s}^{\binom{h}{s}} \Gamma)$$

για όλα τα $-N \leqslant h \leqslant 2N$ και κάποιους συντελεστές $\bar{g}_{n,0}, \dots, \bar{g}_{n,s}$ σε ένα συμπαγές υποσύνολο K του G.

Έστω A μια αρκετά μεγάλη σταθερά που θα προσδιορίσουμε αργότερα. Εφαρμόζοντας τον τύπο Baker-Hausdorff-Campbell, βλέπουμε ότι εάν μεταβάλλουμε τους συντελεστές $\bar{g}_{n,0}, \dots, \bar{g}_{n,s}$ κατά $O(N^{-A})$ (αφού εφοδιάσουμε το G με μια μετρική Riemann), τότε οι ποσότητες $\bar{g}_{n,0} \cdots \bar{g}_{n,s}^{\binom{h}{s}}$ για $-N \leqslant h \leqslant 2N$ μεταβάλλονται κατά $O(N^{-A+O(1)})$ στη μετρική της G. Αν επιλέξουμε ένα μεγιστικό N^{-A}-διαχωρισμένο δίκτυο $\mathbf{\Sigma}$ του K και θέσουμε ως $g'_{n,i}$ το κοντινότερο στο $\bar{g}_{n,i}$ στοιχείο του $\mathbf{\Sigma}$, τότε αφού η F είναι Lipschitz, έχουμε

$$f(n+h) = F(g'_{n,0}(g'_{n,1})^h \cdots (g'_{n,s})^{\binom{h}{s}}\Gamma) + O(N^{-A+O(1)}).$$

Για αρκετά μεγάλο A, το σφάλμα στην παραπάνω σχέση γίνεται $O(\varepsilon)$. Αν τώρα θέσουμε σαν $S'_{\varepsilon,N}$ το σύνολο των ακολουθιών της μορφής

$$(F(g_0 g_1^h \cdots g_s^{\binom{h}{s}}\Gamma))_{-N \leqslant h \leqslant 2N}$$

για $g_0, \ldots, g_s$, τότε το $S'_{\varepsilon,N}$ έχει πληθάριθμο $O(N^{O(A)}) = O(\exp(O(\varepsilon N)))$ για αρκετά μεγάλο N και το ζητούμενο αποδείχθηκε.

5.4 Η δομή του συστήματος των αριθμητικών προόδων με πρώτα βήματα

Η εικασία Sarnak σχετίζεται και με σύστηματα Furstenberg για τις συναρτήσεις μ και λ που ορίσαμε στο Κεφάλαιο 4 (για λογαριθμικούς μέσους). Ένα τέτοιο σύστημα είναι παράγοντας του συστήματος αριθμητικών προόδων με πρώτα βήματα. Η κατασκευή αυτού του συστήματος γίνεται ως εξής:

Έστω (X, v, T) ένα σύστημα. Εφοδιάζουμε τον χώρο $X^{\mathbb{Z}}$ με τη σ-άλγεβρα γινόμενο και ορίζουμε το μέτρο $\overline{v}$ έτσι ώστε για οποιοδήποτε φυσικό αριθμό m και συναρτήσεις $f_{-m}, \ldots, f_m \in L^\infty(v)$ να ισχύει

$$\int_{X^{\mathbb{Z}}} \prod_{i--m}^{m} f_i(x_i) d\overline{v}(\overline{x}) = \mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}} \int_X \prod_{i=-m}^{m} T^{pi} f_i dv. \tag{5.4.1}$$

Αποδεικνύεται ότι το όριο στο δεύτερο μέλος υπάρχει [3], και άρα το μέτρο $\overline{v}$ είναι καλά ορισμένο. Για να δείξουμε ότι ένα σύστημα Furstenberg (X, v, T) της συνάρτησης Möbius είναι παράγοντας του παραπάνω συστήματος εργαζόμαστε ως εξής: Μπορούμε να επιλέξουμε για X το σύνολο $A^{\mathbb{Z}}$ και ορίζουμε την απεικόνιση $p : X^{\mathbb{Z}} \to X$ από τη σχέση

$$p(\overline{x})(n) = -x_n(0) = -F(x_n) \text{ για κάθε } n \in \mathbb{Z}, \tag{5.4.2}$$

όπου $\overline{x} = (x_n)$ μια ακολουθία στο $X^{\mathbb{Z}}$. Εύκολα βλέπουμε ότι ισχύει $p \circ S = S \circ p$ (χρησιμοποιούμε το ίδιο γράμμα S για να συμβολίζουμε το shift σε χώρους ακολουθιών). Στη συνέχεια, αποδεικνύουμε ότι $p_* \overline{v} = v$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα στη σχέση (4.2.4) (στην εργοδική μορφή της) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_X \prod_{j=1}^{k} F \circ S^{h_j} dv &= (-1)^k \mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}} \int_X \prod_{j=1}^{k} F \circ S^{ph_j} dv = (-1)^k \int_{X^{\mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{k} F(x_{h_j}) d\overline{v}(\overline{x}) \\ &= \int_{X^{\mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{k} (-F(x_{h_j})) d\overline{v}(\overline{x}) = \int_{X^{\mathbb{Z}}} \prod_{j=1}^{k} (F \circ S^{h_j} \circ p)(\overline{x}) d\overline{v}(\overline{x}),\end{aligned}$$

και, επειδή είδαμε ότι η άλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις $F \circ S^{h_j}$ είναι πυκνή στο $C(X)$, παίρνουμε το ζητούμενο.

Ας υποθέσουμε ότι μας δίνεται ένα σύστημα (X, v, T) και θεωρούμε το σύστημα $(X^{\mathbb{Z}}, \overline{v}, S)$ που ορίσαμε στην προηγούμενη ενότητα. Στο [8] αποδείχθηκε ένα θεώρημα δομής για το σύστημα αυτό. Θεωρώντας γνωστό αυτό το θεώρημα και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι ένα σύστημα Furstenberg των συναρτήσεων μ και λ είναι παράγοντας αυτού του συστήματος, θα αποδείξουμε την εικασία Sarnak για συστήματα με αριθμήσιμα το πλήθος εργοδικά μέρη.

Δίνουμε αρχικά τον εξής ορισμό:

Ορισμός 5.4.1. Ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο (X, v, T) λέγεται nilsystem άπειρων βημάτων εάν είναι το αντίστροφο όριο μιας ακολουθίας από nilsystems.

Στη συνέχεια, θεωρούμε συστήματα που είναι αντίστροφα όρια εργοδικών nilsystems. Επειδή τα εργοδικά nilsystems είναι και μονοσήμαντα εργοδικά, συμπεραίνουμε ότι και το αντίστροφο όριο τους είναι ένα μονοσήμαντα εργοδικό σύστημα.

Όμοια με τους χαρακτηριστικούς παράγοντες πεπερασμένης τάξης, μπορούμε να ορίσουμε τον παράγοντα άπειρης τάξης ενός συστήματος (X, v, T). Πιο συγκεκριμένα, εάν $\mathcal{Z}_k$ είναι η σ-άλγεβρα που αντιστοιχεί στον παράγοντα τάξης k, τότε ορίζουμε τη σ-άλγεβρα $\mathcal{Z}_\infty$ ως τη σ-άλγεβρα $\bigvee_{k=1}^{\infty} \mathcal{Z}_k$. Αυτή είναι ένας παράγοντας του X και έστω $(Z_\infty, \mathcal{Z}_\infty, T)$ το αντίστοιχο σύστημα. Το σύστημα αυτό είναι ένα nilsystem άπειρων βημάτων.

Θεώρημα 5.4.2. *Έστω (X, v, T) ένα σύστημα. Τότε, το αντίστοιχο σύστημα αριθμητικών προόδων με άπειρα βήματα είναι ένα σύστημα που δεν έχει άρρητο φάσμα και του οποίου όλα σχεδόν τα εργοδικά μέρη είναι ισόμορφα με ευθέα γινόμενα από ένα nilsystem άπειρων βημάτων και ένα σύστημα Bernoulli.*

Για ένα σύστημα (X, v, T), το άρρητο φάσμα του X είναι το σύνολο των ιδιοτιμών $\exp(2\pi i a)$ του X, για τις οποίες $a \notin \mathbb{Q}$. Αντίστοιχα, ορίζουμε το ρητό φάσμα του X. Επίσης, ορίζουμε τον ρητό παράγοντα Kronecker του X ως τη μικρότερη σ-άλγεβρα, για την οποία όλες οι ρητές ιδιοσυναρτήσεις του X [7] είναι μετρήσιμες. Θα συμβολίζουμε αυτόν τον παράγοντα με $K_{\mathrm{rat}}(X)$.

Παραδείγματα. (α) Αν το σύστημα (X, v, T) είναι μια εργοδική στροφή στον $\mathbb{T}$ κατά $a \notin \mathbb{Q}$: Ορίζουμε την απεικόνιση $F : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^{\mathbb{Z}}$ με

$$F(x, y)(n) = y + nx (\mathrm{mod}\ 1).$$

Εύκολα παρατηρούμε ότι η F είναι 1-1 και επί. Επίσης, αν $R : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ είναι η απεικόνιση $R(x, y) = (x (\mathrm{mod}\ 1), x + y (\mathrm{mod}\ 1))$, τότε ισχύει $F \circ R = S \circ F$, όπου S είναι το shift στο σύστημα $(\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}, \overline{v}, S)$. Μένει να δείξουμε ότι $F_\star m_{\mathbb{T}^2} = \overline{v}$. Αν $f_{-m}, \ldots, f_0, \ldots, f_m \in L^\infty(m_{\mathbb{T}})$ (οι οποίες μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι είναι απολύτως φραγμένες από το 1 $m_{\mathbb{T}}$-σχεδόν παντού), τότε έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}} \prod_{j=-m}^{m} f_j(x_j) dF_* m_{\mathbb{T}^2} &= \int_{\mathbb{T}^2} \prod_{j=-m}^{m} f_j(F(x, y)(j)) dm_{\mathbb{T}^2}(x, y) \\ &= \int_{\mathbb{T}^2} \prod_{j=-m}^{m} f_j(y + jx (\mathrm{mod}\ 1)) dm_{\mathbb{T}^2} = \int_{\mathbb{T}^2} g(x, y) dm_{\mathbb{T}^2}(x, y),\end{aligned}$$

όπου ορίσαμε

$$g(x, y) = \prod_{j=-m}^{m} f_j(y + jx (\mathrm{mod}\ 1)).$$

Από την άλλη πλευρά, η (5.4.1) δίνει

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{T}^{\mathbb{Z}}} \prod_{j=-m}^{m} f_j(x_j) d\overline{v} &= \mathbb{E}_{p \in \mathbb{P}} \int_{\mathbb{T}} \prod_{j=-m}^{m} f_j(y + pja (\mathrm{mod}\ 1)) dm_{\mathbb{T}} \\ &= \mathbb{E}_{p \in \mathbb{P}} \int_{\mathbb{T}} g(pa, y) dm_{\mathbb{T}} = \int_{\mathbb{T}} \mathbb{E}_{p \in \mathbb{P}} g(pa, y) dm_{\mathbb{T}} = \int_{\mathbb{T}^2} g(x, y) dm_{\mathbb{T}^2}(x, y),\end{aligned}$$

[7] Δηλαδή, οι συναρτήσεις που αντιστοιχούν σε ιδιοτιμές του ρητού φάσματος.

από την ισοκατανομή της ακολουθίας $(pa)_{p\in\mathbb{P}}$ στον κύκλο και το θεώρημα φραγμένης σύγκλισης. Όλα τα παραπάνω δείχνουν ότι το σύστημα των αριθμητικών προόδων με πρώτα βήματα σε αυτή την περίπτωση είναι ισόμορφο με το σύστημα $(\mathbb{T}^2, m_{\mathbb{T}^2}, R)$, του οποίου τα εργοδικά μέρη είναι εργοδικές στροφές και το οποίο δεν έχει άρρητο φάσμα.

(β) Αν το σύστημα (X, v, T) είναι ασθενώς-mixing: Θα αποδείξουμε ότι το σύστημα των αριθμητικών προόδων με πρώτα βήματα είναι το σύστημα $(X^{\mathbb{Z}}, \rho, S)$, όπου S είναι το shift και ρ είναι το μέτρο γινόμενο στο $X^{\mathbb{Z}}$ (και άρα είναι ένα σύστημα Bernoulli). Εάν, λοιπόν, δίνονται οι συναρτήσεις $f_{-m}, \ldots, f_m$, τότε από την (5.4.1) έχουμε

$$\int_{X^{\mathbb{Z}}} \prod_{i--m}^{m} f_i(x_i) d\overline{v}(\overline{x}) = \mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}} \int_X \prod_{i=-m}^{m} T^{pi} f_i dv.$$

Όπως στην απόδειξη της Πρότασης 4.2.6 γράφουμε το όριο στο αριστερό μέλος στη μορφή

$$\lim_{W\to\infty} \mathbb{E}_{(k,W)=1} \mathbb{E}_{n\in\mathbb{N}} \int_X \prod_{i=-m}^{m} T^{(nW+k)i} f_i dv.$$

Από το εργοδικό θεώρημα για ασθενώς-mixing συστήματα [10] έχουμε ότι ο δεύτερος μέσος όρος στην παραπάνω ποσότητα συγκλίνει στο γινόμενο $\prod_{i=-m}^{m} \int f_i dv$, και άρα βλέπουμε εύκολα ότι το μέτρο $\overline{v}$ είναι το μέτρο γινόμενο στο χώρο $X^{\mathbb{Z}}$.

Λήμμα 5.4.3. *Έστω (X, v, T) ένα εργοδικό nilsystem άπειρων βημάτων και (Y, ρ, S) ένα εργοδικό σύστημα.*

(α) *Εάν τα δύο συστήματα δεν έχουν κοινό άρρητο φάσμα, τότε για κάθε σύνδεση s των δύο συστημάτων και $f \in L^\infty(v)$ ορθογώνια στον παράγοντα $K_{\text{rat}}(X)$, έχουμε*

$$\int f(x) g(y) ds(x, y) = 0 \tag{5.4.3}$$

για κάθε $g \in L^\infty(\rho)$.

(β) *Αν τα δύο συτήματα δεν έχουν κοινό φάσμα, τότε είναι ασύμβατα.*

Απόδειξη. (α) Γράφουμε $(X, v, T) = \underleftarrow{\lim}(X_i, v_i, T)$ όπου το σύστημα X_j είναι ένα εργοδικό nilsystem και έστω $p_j : X \to X_j$ οι απεικονίσεις παράγοντα. Για κάθε $i \in \mathbb{N}$, η εικόνα s_i του s υπό την απεικόνιση $p_i \times Id : X \times Y \to X_i \times Y$ είναι μια σύνδεση των X_i, Y και για κάθε $f \in L^\infty(v), g \in L^\infty(\rho)$ ισχύει

$$\int f(x) g(y) ds(x, y) = \lim_{i\to\infty} \int (f \circ p_i)(x) g(y) ds_i(x, y).$$

Αν η f είναι ορθογώνια στον παράγοντα $K_{\text{rat}}(X)$, τότε η συνάρτηση $f \circ p_j$ είναι ορθογώνια στον παράγοντα $K_{\text{rat}}(X_j)$. Άρα, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο στην περίπτωση που το σύστημα X είναι ένα εργοδικό nilsystem.

Έστω ότι το X είναι ένα nilsystem k-βημάτων. Οι ρητές ιδιοσυναρτήσεις του X είναι σταθερές στις συνεκτικές συνιστώσες του X. Άρα μπορούμε να προσεγγίσουμε την συνάρτηση f στον $L^2(v)$

από μια συνάρτηση στο $C^\infty(X)$, που είναι και αυτή ορθογώνια στο $K_{\text{rat}}(X)$. Άρα μπορούμε να υποθέσουμε ότι $f \in C^\infty(X)$. Για κάθε φυσικό αριθμό n, ισχύει

$$\int fgds = \int f \circ T^n \cdot f \circ S^n ds.$$

Παίρνουμε μέσους όρους πάνω από το $\mathbb{N}$, οπότε αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in[N]} \int f \circ T^n(x) \cdot f \circ S^n(y) ds(x,y) = 0, \tag{5.4.4}$$

Αν η g είναι ορθογώνια στον παράγοντα $\mathcal{Z}_k(Y)$, τότε ρ-σχεδόν κάθε $y \in Y$ θα ισχύει [22, Θεώρημα 2.13]

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in[N]} f(T^n x) g(S * ny) = 0$$

για κάθε $x \in X$ και άρα ισχύει η (5.4.2) s-σχεδόν παντού από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης. Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε το ζητούμενο για $g \in Z_k(Y)$. Από το εργοδικό θεώρημα δομής, ο $Z_k(Y)$ είναι αντίστροφο όριο εργοδικών nilsystems k-βημάτων. Έτσι, χρησιμοποιώντας ένα «οριακό» επιχείρημα, αναγόμαστε στην περίπτωση όπου το Y είναι ένα nilsystem k-βημάτων.

Έστω X_0 η συνεκτική συνιστώσα του e_X στο X και v_0 το μέτρο Haar του nilmanifold X_0. Το v_0 είναι ο περιορισμός του v στο X_0 (επί μία σταθερά). Αποδεικνύεται ότι για nilsystems υπάρχει φυσικός ℓ τέτοιος, ώστε τα σύνολα $T^j X_0, 0 \leqslant j \leqslant \ell$ να σχηματίζουν μια διαμέριση του X και το σύστημα (X_0, v_0, T^ℓ) να είναι πλήρως εργοδικό. Οι ρητές ιδιοτιμές του X θα είναι τότε οι $e^{2\pi i j/\ell}$ για $j = 0, 1, \dots, \ell - 1$. Ορίζουμε με τον ίδιο τρόπο τα Y_0, ρ_0 και m και έστω d το ελάχιστο κοινό πολλαπλάσιο των ℓ, m. Τότε, τα συστήματα (X_0, v_0, T^ℓ) και (Y_0, ρ_0, S^m) είναι πλήρως εργοδικά και άρα η μόνη ρητή ιδιοτιμή τους είναι το 1. Επίσης, εάν για κάποιο άρρητο a έχουμε ότι το $\exp(2\pi i a)$ είναι κοινή ιδιοτιμή των δύο αυτών συστημάτων, τότε το $\exp(2\pi i a)$ είναι ιδιοτιμή και των συστημάτων (X, v, T^d) και (Y, ρ, S^d). Τότε, εύκολα βλέπουμε ότι τα συστήματα (X, v, T) και (Y, ρ, S) έχουν μια κοινή άρρητη ιδιοτιμή, το οποίο είναι άτοπο. Συνεπώς, τα συστήματα (X_0, v_0, T^d) και (Y_0, ρ_0, S^d) δεν έχουν κοινές ιδιοτιμές εκτός του 1. Κατά συνέπεια, το σύστημα $(X_0 \times Y_0, v_0 \times \rho_0, T^d \times S^d)$ είναι εργοδικό και άρα μονοσήμαντα εργοδικό (αφού είναι και αυτό nilsystem).

Έστω $(x, y) \in X \times Y$. Υπάρχουν $i, j \in \{0, 1, \dots, d-1\}$ έτσι ώστε $x' = T^{-i}x \in X_0$ και $y' = S^{-j}y \in Y_0$. Λόγω μονοσήμαντης εργοδικότητας έχουμε ότι

$$\mathbb{E}_{n\in[N]} f(T^{dn}x) g(S^{dn}y) = \mathbb{E}_{n\in[N]} f(T^{dn+i}x') g(R^{dn+j}y') \to \int T^i f dv_0 \cdot \int T^j g d\rho_0 = 0,$$

όπου η τελευταία σχέση προκύπτει από το γεγονός ότι η f είναι ορθογώνια στον $K_{\text{rat}}(X)$ και άρα $\int T^i f dv_0 = 0$ για κάθε $i \in \mathbb{N}$. Από την τελευταία σχέση εφαρμοσμένη στα $T^q x, S^r y$ με $q, r \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in[N]} f(T^n x) g(S^n y) = 0$$

για όλα τα $x \in X, y \in Y$ το οποίο δίνει το ζητούμενο.

(β) Αρκεί να δείξουμε ότι για όλες τις $f \in C^\infty(X)$ και $g \in L^\infty(\rho)$ με $\int g d\rho = 0$ ισχύει

$$\int f \cdot g ds = 0. \tag{5.4.5}$$

Όπως στην απόδειξη του (α), αναγόμαστε στην περίπτωση όπου το (X, v, T) είναι ένα nilsystem. Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in\mathbb{N}} \int f(T^n x)g(S^n y)ds(x,y) = 0. \tag{5.4.6}$$

Μπορούμε, όπως στο (α), να υποθέσουμε ότι το σύστημα (Y, ρ, S) είναι ένα nilsystem. Τα X, Y είναι nilsystems χωρίς κοινές ιδιοτιμές (πλην του 1) και κατά συνέπεια το σύστημα $(X \times Y, v \times \rho, T \times S)$ είναι ένα εργοδικό nilsystem, δηλαδή μονοσήμαντα εργοδικό. Άρα,

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{n\in[N]} f(T^n x)g(S^n y).$$

Από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε το ζητούμενο. □

Πόρισμα 5.4.4. *Έστω (X, v, T) ένα σύστημα του οποίου τα εργοδικά μέρη είναι ισόμορφα με ευθέα γινόμενα από nilsystems άπειρων βημάτων και συστήματα Bernoulli. Έστω, επίσης, ένα εργοδικό σύστημα (Y, ρ, S) με εντροπία 0.*

(α) *Αν τα δύο αυτά συστήματα δεν έχουν κοινή άρρητη ιδιοτιμή, τότε για κάθε σύνδεση s των δύο συστημάτων και $f \in L^\infty(v)$ ορθογώνια στο $K_{\mathrm{rat}}(X)$, ισχύει*

$$\int f(x)g(y)ds(x,y) = 0$$

για κάθε $g \in L^\infty(\rho)$.

(β) *Αν τα δύο συστήματα δεν έχουν κοινό φάσμα εκτός του 1, τότε είναι ασύμβατα.*

Απόδειξη. Θα αποδείξουμε το πόρισμα στην περίπτωση που το σύστημα είναι εργοδικό (χρησιμοποιώντας την εργοδική διάσπαση αποδεικνύεται ότι το γενικότερο πρόβλημα ανάγεται σε αυτήν την περίπτωση). Από τη υπόθεση, το X είναι ευθύ γινόμενο ενός nilsystem απείρων βημάτων (X', v', T') και ενός συστήματος Bernoulli (W, λ, R).

(α) Αρκεί να δείξουμε ότι

$$\int f(x', w)g(y)ds(x', w, y) = 0, \tag{5.4.7}$$

όπου θεωρούμε την f σαν συνάρτηση στο γινόμενο $X' \times W$. Χρησιμοποιώντας μια L^2-προσέγγιση στο ορθογώνιο συμπλήρωμα του $K_{\mathrm{rat}}(X' \times R)$, αρκεί να δείξουμε την (5.4.5) για συναρτήσεις της μορφής $F(x', w) = f_1(x')f_2(w)$ για $f_1 \in L^\infty(v')$ και $f_2 \in L^\infty(\lambda)$. Επειδή τα συστήματα Bernoulli είναι ασθενώς mixing, έχουμε ότι $K_{\mathrm{rat}}(X' \times W) = K_{\mathrm{rat}}(X')$. Άρα, είτε $\int f_2 d\lambda = 0$ είτε η f_1 είναι ορθογώνια στον παράγοντα $K_{\mathrm{rat}}(X')$.

Στην πρώτη περίπτωση, έστω u η εικόνα του μέτρου s μέσω της προβολής $X' \times W \times Y \to X' \times Y$. Τότε, το s είναι μια σύνδεση του συστήματος $(X' \times Y, u, T' \times S)$ που έχει εντροπία 0 και του συστήματος Bernoulli (W, λ, R). Επειδή αυτά τα δύο συστήματα είναι ασύμβατα, παίρνουμε $s = u \times \lambda$[8]. Συνεπώς,

$$\int f_1(x')f_2(w)g(y)ds(x', w, y) = \int f_1(x')g(y)du(x', y) \int f_2(w)d\lambda(w) = 0,$$

[8] Αυτό είναι το μόνο σημείο που χρησιμοποιούμε ότι το σύστημα (Y, S) έχει εντροπία 0. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού υπάρχει στο [10]

το οποίο δίνει την (5.4.5).

Στην δεύτερη περίπτωση, έστω p η εικόνα του του s μέσω της προβολής $X' \times W \times Y \to W \times Y$. Τότε, το p ορίζει μια σύνδεση του συστήματος Bernoulli W και του συστήματος Y με εντροπία 0. Επειδή αυτά είναι ασύμβατα, παίρνουμε $p = \lambda \times \rho$. Έτσι, θεωρούμε το s σαν μια σύνδεση των συστημάτων (X', v', T') και $(W \times Y, p, R \times S)$. Επειδή το W είναι ασθενώς mixing, το σύστημα $W \times Y$ είναι εργοδικό και έχει τις ίδιες ιδιοτιμές με το σύστημα (Y, ρ, S) (και άρα δεν έχει κοινές ιδιοτιμές με το σύστημα (X', v', T')). Άρα, από το Λήμμα 5.4.3 παίρνουμε το ζητούμενο.

(β) Έστω s μια σύνδεση των συστημάτων $X' \times W$ και Y. Όπως στο (α) παίρνουμε ότι το s είναι μια σύνδεση του εργοδικού nilsystem απείρων βημάτων (X', v', T') και του εργοδικού συστήματος $(W \times Y, \lambda \times \rho, R \times S)$, και αυτά τα δύο αυτά συστήματα δεν έχουν κοινές ιδιοτιμές εκτός του 1. Άρα, από το (β) του Λήμματος 5.4.3, παίρνουμε $s = v' \times \lambda \times \rho$. Άρα τα συστήματα X και Y είναι ασύμβατα. □

Πόρισμα 5.4.5. *Έστω (X, v, T) ένα σύστημα του οποίου τα εργοδικά μέρη είναι ισόμορφα με ευθέα γινόμενα από nilsystems άπειρων βημάτων και συστήματα Bernoulli. Έστω, επίσης, ένα σύστημα (Y, ρ, S) με εντροπία 0 που έχει αριθμήσιμα το πλήθος εργοδικά μέρη.*

(α) *Αν τα δύο αυτά συστήματα δεν έχουν κοινή άρρητη ιδιοτιμή, τότε για κάθε σύνδεση s των δύο συστημάτων και $f \in L^\infty(v)$ ορθογώνια στο $K_{\mathrm{rat}}(X)$, ισχύει*

$$\int f(x)g(y)ds(x,y) = 0$$

για κάθε $g \in L^\infty(\rho)$.

(β) *Αν τα δύο αυτά συστήματα δεν έχουν κοινή ιδιοτιμή εκτός του 1, τότε για κάθε σύνδεση s των δύο αυτών συστημάτων ισχύει*

$$\int f(x)g(y)ds(x,y) = 0$$

για κάθε $f \in L^\infty(v)$ και κάθε $g \in L^{\infty\rho}$ που είναι ορθογώνια στον $L^2(\rho)$ προς κάθε S-αναλλοίωτη συνάρτηση.

Απόδειξη. Από την υπόθεση μπορούμε να γράψουμε το ρ σαν γραμμικό συνδυασμό $\rho = \sum_{j \in J} c_j \rho_j$, όπου J είναι ένα αριθμήσιμο σύνολο και τα ρ_j είναι εργοδικά μέτρα για τον χώρο Y. Έστω $Y = \cup_{j \in J} Y_j$ μια διαμέριση του Y σε S-αναλλοίωτα σύνολα με $\rho_j(Y_j) = 1$ για κάθε $j \in J$.

Έστω s μια σύνδεση των συστημάτων (X, v, T) και (Y, ρ, S), και για $j \in J$ ορίζουμε $s_j = \frac{1}{c_j} 1_{X \times Y_j} \times s$ και m_j την εικόνα του s_j μέσω της προβολής $X \times Y \to X$. Τότε, για κάθε $j \in J$, το m_j είναι ένα T-αναλοίωτο μέτρο στον X, η εικόνα του s_j μέσω της προβολής $X \times Y \to Y$ είναι το μέτρο ρ_j και το s_j είναι μια σύνδεση των συστημάτων (X, m_j, T) και (Y, ρ_j, S).

Για $j \in J$, το μέτρο ρ_j είναι απολύτως συνεχές ως προς το μέτρο ρ και άρα το φάσμα του συστήματος (Y, ρ_j, S) περιέχεται στο φάσμα του (Y, ρ, S). Όμοια, το φάσμα του (X, m_j, T) περιέχεται στο φάσμα του (X, v, T). Επιπλέον, κάθε εργοδικό μέρος του (X, m_j, T) είναι και εργοδικό μέρος του X, οπότε είναι ισόμορφο με ευθύ γινόμενο ενός nilsystem άπειρων βημάτων και ενός συστήματος Bernoulli.

(α) Έστω $f \in L^\infty(v)$ ορθογώνια προς τον παράγοντα $K_{\mathrm{rat}}(X, v)$. Η f είναι ορθογώνια προς κάθε ρητή ιδιοσυνάρτηση, οπότε για κάθε $j \in J$ η f είναι ορθογώνια στον $L^2(m_j)$ προς κάθε ρητή ιδιοσυνάρτηση του συστήματος (X, m_j, T). Από το (α) του Πορίσματος 5.4.4 έχουμε ότι $\int f(x)g(y)ds_j(x,y) = 0$ για κάθε $g \in L^\infty(\rho_j)$. Αθροίζοντας παίρνουμε $\int f(x)g(y)ds(x,y) = 0$ για κάθε $g \in L^\infty(\rho)$.

(β) Για κάθε $j \in J$, τα συστήματα (X, m_j, T) και (Y, ρ_j, S) δεν έχουν κοινή ιδιοτιμή εκτός του 1, και άρα είναι ασύμβατα από το (β) του Πορίσματος 5.4.4. Συνεπώς, $s_j = m_j \times \rho_j$ για κάθε $j \in J$. Αθροίζοντας για όλα τα j και, επειδή $\int g d\rho_j = 0$, παίρνουμε $\int f(x)g(y)ds(x,y) = 0$. □

Συνδυάζοντας τώρα αυτό το πόρισμα με το Θεώρημα 5.4.2 παίρνουμε ότι:

Θεώρημα 5.4.6. *Έστω (Y, T) ένα δυναμικό σύστημα με εντροπία 0 και το πολύ αριθμήσιμα τα πλήθος εργοδικά μέτρα. Τότε, για κάθε $y \in Y$ και κάθε $g \in C(Y)$ ισχύει*[9]

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{n} \frac{f(T^n y)\mu(n)}{n} = 0. \tag{5.4.8}$$

Απόδειξη. Έστω ότι δεν ισχύει το ζητούμενο. Δηλαδή, υπάρχει ένα σύστημα (Y, T) με εντροπία 0 και αριθμήσιμα το πλήθος εργοδικά μέρη, ένα σημείο $y_0 \in Y$ και μια συνεχής συνάρτηση f_0 τέτοια ώστε οι μέσοι όροι

$$\mathbb{E}^{\log}_{n\in[N]} f_0(T^n y_0)\mu(n)$$

να μην συγκλίνουν στο 0. Συνεπώς, μπορούμε να βρούμε μια ακολουθία $N_k \to \infty$ φυσικών έτσι ώστε το όριο

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}^{\log}_{n\in[N_k]} f_0(T^n y_0)\mu(n) \tag{5.4.9}$$

να υπάρχει και να είναι μη μηδενικό. Θέτουμε $\mathbf{N} = ([\mathbf{N_k}])_{\mathbf{k}\in\mathbb{N}}$. Περνώντας σε μια υπακολουθία της $\mathbf{N}$, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι το όριο

$$\mathbb{E}^{\log}_{n\in\mathbf{N}} f(T^n y_0) \prod_{j=1}^{\ell} \mu(n + h_j) \tag{5.4.10}$$

υπάρχει για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$, οποιαδήποτε επιλογή των ακεραίων $h_1, \dots h_\ell$ και κάθε συνεχή συνάρτηση $f \in C(Y)$.

Θέτουμε $X = A^{\mathbb{Z}}$ και εφοδιάζουμε τον χώρο αυτό με το γνωστό shift S. Θέτουμε $x_0 \in X$ την ακολουθία που ορίζεται από τη σχέση $x_0(n) = \mu(n)$. Το όριο στην σχέση (5.4.8) γράφεται τότε στη μορφή

$$\lim_{k\to\infty} \mathbb{E}_{n\in\mathbf{N}} f(T^n y_0)\Big(\prod_{j=1}^{\ell} F \circ S^{h_j}\Big)(S^n x_0)$$

όπου η συνάρτηση $F : A^{\mathbb{Z}} \to A$ ορίζεται από τη σχέση $F(x) = x(0)$. Επειδή η άλγεβρα που παράγεται από τις συναρτήσεις $F \circ S^{h_j}$ είναι πυκνή στο $C(X)$, συμπεραίνουμε ότι η ακολουθία των μέτρων

$$\mathbb{E}^{\log}_{n\in[n_k]} \delta_{(S^n x_0, T^n y_0)}$$

[9] Παρόμοια σχέση ισχύει για τη συνάρτηση λ.

συγκλίνει w^*-ασθενώς σε ένα μέτρο πιθανότητας σ στον χώρο $X \times Y$, το οποίο ικανοποιεί τη σχέση

$$\mathbb{E}^{\log}_{n\in\mathbf{N}} f(T^n y_0) \prod_{j=1}^{\ell} \mu(n+h_j) = \int \prod_{j=1}^{\ell} F \circ S^{h_j}(x) g(y) d\sigma(x,y) \tag{5.4.11}$$

για κάθε $\ell \in \mathbb{N}$, κάθε επιλογή ακεραίων $h_1, \ldots, h_\ell$ και $g \in C(Y)$. Επίσης, το μέτρο σ είναι $S \times T$-αναλλοίωτο.

Η προβολή v του μέτρου σ στον χώρο Y είναι ένα T-αναλλοίωτο μέτρο και από την υπόθεση, το σύστημα (Y, v, T) έχει αριθμήσιμα το πλήθος εργοδικά μέρη. Αφού το σύστημα έχει τπολογική εντροπία 0, όλα αυτά τα μέρη έχουν εντροπία 0 και άρα και το σύστημα (Y, v, T) έχει εντροπία 0.

Η προβολή ρ του μέτρου σ στον X είναι το w^*-όριο της ακολουθίας των μέτρων $\mathbb{E}^{\log}_{n\in[N_k]} \delta_{S^n x_0}$. Είναι, λοιπόν, ένα S-αναλλοίωτο μέτρο. Από την απόδειξη της Πρότασης 1.4.2, το μέτρο αυτό αντιστοιχεί στο σύστημα Furstenberg της συνάρτησης μ για την ακολουθία διαστημάτων $\mathbf{N}$ (για λογαριθμικούς μέσους). Είδαμε ότι το σύστημα (X, ρ, S) είναι παράγοντας του αντίστοιχου συστήματος $(X^{\mathbb{Z}}, \overline{\rho}, S)$ μέσω της απεικόνισης

$$(p(\overline{x}))(n) = -x(n)(0).$$

Ορίζουμε τώρα τη σύνδεση s των μέτρων συστημάτων $(X^{\mathbb{Z}}, \overline{\rho}, S)$ και (Y, v, T) μέσω της σχέσης

$$\int_{X^{\mathbb{Z}} \times Y} f(\overline{x}) g(y) ds(\overline{x}, y) = \int_{X \times Y} \mathbb{E}_{\overline{\rho}}(f|X)(x) g(y) d\sigma(x,y) \tag{5.4.12}$$

για κάθε $f \in L^\infty(\overline{\rho})$ και $g \in L^\infty(v)$. Από το Θεώρημα 5.4.2, το σύστημα $(X^{\mathbb{Z}}, \overline{\rho}, S)$ δεν έχει άρρητο φάσμα και τα εργοδικά του μέρη είναι γινόμενα από συστήματα Bernoulli και nilsystems απείρων βημάτων.

Ορίζουμε $\overline{F} = F \circ p$ και θα δείξουμε ότι η F είναι ορθογώνια προς τον παράγοντα Kronecker του συστήματος $(X^{\mathbb{Z}}, \overline{\rho}, S)$. Για να το δείξουμε αυτό, αρκεί να αποδείξουμε ότι

$$\mathbb{E}_{n\in\mathbb{N}} \left| \int \overline{F} \cdot \overline{F} \circ S^n d\overline{\rho} \right| = 0. \tag{5.4.13}$$

Από τον ορισμό του μέτρου $\overline{\rho}$ και το γεγονός ότι $\overline{F}(\overline{x})\overline{F}(S^n\overline{x}) = -F(x(0)) \cdot (-F(x(h)))$ παίρνουμε τελικά ότι

$$\int \overline{F} \cdot \overline{F} \circ S^n d\overline{\rho} = \mathbb{E}_{p\in\mathbb{P}} \int F \cdot F \circ S^{pn} d\rho.$$

Όμως, έχουμε ότι

$$\int F \cdot F \circ S^h d\rho = \mathbb{E}^{\log}_{n\in\mathbf{N}} \mu(n)\mu(n+h),$$

το οποίο είναι ίσο με 0 [[32]]. Τελικά, παίρνουμε τη σχέση (5.4.11).

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση $\overline{F}$ είναι ορθογώνια προς τον παράγοντα $K_{\mathrm{rat}}(X^{\mathbb{Z}})$ και άρα από το Πόρισμα 5.4.5 συμπεραίνουμε ότι

$$\int \overline{F}(\overline{x}) f_0(y) ds(\overline{x}, y) = 0,$$

άρα

$$\int F(x) f_0(y) d\sigma(x,y) = 0,$$

άρα

$$\mathbb{E}^{\log}_{n\in\mathbf{N}} f_0(T^n y_0)\mu(n) = 0,$$

που είναι άτοπο. □

Το τελευταίο θεώρημα αποδεικνύει ότι ισχύει η λογαριθμική εικασία Sarnak για συστήματα με το πολύ αριθμήσιμα το πλήθος εργοδικά αναλλοίωτα μέτρα πιθανότητας. Ειδικότερα, ισχύει για μονοσήμαντα εργοδικά συστήματα.

Μια άλλη συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.6 αφορά στην πολυπλοκότητα των subshifts. Αν έχουμε ένα subshift X, ορίζουμε ως $L_n(X)$ το σύνολο των διαφορετικών block μήκους n (n-άδων) που εμφανίζονται στο X (σαν συνεχόμενες τιμές στην ακολουθία). Έστω, $p_X(n) = |L_X(n)|$. Λέμε ότι το subshift έχει γραμμική block αύξηση, εάν $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{p_X(n)}{n} < \infty$.

Λήμμα 5.4.7. *Έστω (X,T) ένα subshift που παράγεται ως η κλειστή τροχιά ενός σημείου w. Αν το X έχει γραμμική block αύξηση, τότε το σύστημα (X,T) έχει το πολύ αριθμήσιμα εργοδικά αναλλοίωτα μέτρα.*

Κατά συνέπεια, η συνάρτηση Liouville έχει υπεργραμμική block αύξηση[10]: Πράγματι, εάν θεωρήσουμε το subshift (X,S) στο $\{-1,1\}^{\mathbb{Z}}$ που παράγει η ακολουθία $\lambda(n)$ (επεκτείνοντάς με 1 στους αρνητικούς ακεραίους), τότε θα έχουμε $\lambda(n) = F \circ S^n(\lambda)$. Αν δεν ισχύει το ζητούμενο, τότε από το Λήμμα 5.4.7 σε συνδυασμό με το Θεώρημα 5.4.6 έχουμε

$$0 = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{F(S^n\lambda)\cdot\lambda(n)}{n} = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{\log N} \sum_{n=1}^{N} \frac{\lambda(n)^2}{n} = 1,$$

που είναι άτοπο.

Γενικότερα, οι συναρτήσεις μ και λ είναι ορθογώνιες προς κάθε ακολουθία a (με πεπερασμένο σύνολο τιμών) με γραμμική block αύξηση, με την έννοια ότι οι λογαριθμικοί μέσοι της ακολουθίας $a(n)\mu(n)$ τείνουν στο 0.

[10] Βέβαια, περιμένουμε ότι $p_X(n) = 2^n$ για το subshift της λ, εάν ισχύει η εικασία Chowla.

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ A

A.1 Η ανισότητα Van der Corput

Σε αυτήν την ενότητα μελετούμε μια ανισότητα για συναρτήσεις ορισμένες πάνω από μια ομάδα που παίρνουν τιμές σε ένα χώρο Hilbert. Αρχικά, αν G είναι μια ομάδα και A είναι ένα μη κενό υποσυνόλο της G, θα συμβολίζουμε με $h + A$ το σύνολο $\{h + g, g \in A\}$. Επίσης, χρησιμοποιούμε το σύμβολο $\triangle$ για την συμμετρική διαφορά δύο συνόλων.

Λήμμα A.1.1. *Έστω G μια διακριτή αβελιανή ομάδα και A ένα πεπερασμένο μη κενό υποσύνολο της G. Έστω $(b(g))_{g\in G}$ μια ακολουθία που παίρνει τιμές σε ένα χώρο Hilbert με $\|b(g)\| \leqslant 1$ για όλα τα g. Τότε, για κάθε μη κενό πεπερασμένο υποσύνολο F του G έχουμε*

$$\|\mathbb{E}_{g\in A} b(g)\|^2 \leqslant 3 \sup_{h\in F} \frac{|A\triangle((h+A))|}{|A|} + \mathbb{E}_{k,m\in F}(\mathbb{E}_{g\in A}\langle b(g+k), b(g+m)\rangle). \tag{A.1.1}$$

Απόδειξη. Θέτουμε

$$d = \sup_{h\in F} \frac{|A\triangle((h+A))|}{|A|}.$$

Τότε,

$$\|\mathbb{E}_{g\in A}\mathbb{E}_{k\in f} b(g+k) - \mathbb{E}_{g\in A} b(g)\| \leqslant d,$$

το οποίο προκύπτει εάν αναπτύξουμε το μέσο όρο στο αριστερό μέλος. Επομένως,

$$\|\mathbb{E}_{g\in G} b(g)\|^2 \leqslant \|\mathbb{E}_{g\in a}\mathbb{E}_{k\in F} b(g+k)\|^2 + 3d.$$

Επιπλέον,

$$\|\mathbb{E}_{g\in A}\mathbb{E}_{k\in F} b(g+k)\|^2 \leqslant \mathbb{E}_{g\in A}\|\mathbb{E}_{k\in F} b(g+k)\|^2 = \mathbb{E}_{g\in A}\mathbb{E}_{k,m\in F}\langle b(g+k), b(g+l)\rangle,$$

και συνδυάζοντας τις δύο τελευταίες σχέσεις καταλήγουμε στο ζητούμενο. □

Εφαρμόζοντας το Λήμμα A.1.1 στην ομάδα $\mathbb{Z}_N$ παίρνουμε:

Πόρισμα A.1.2. *Έστω $N \in \mathbb{N}$ και f μια συνάρτηση στο $\mathbb{Z}_N$ που παίρνει τιμές σε έναν χώρο Hilbert και $\|f(n)\| \leqslant 1$ για κάθε n. Τότε, για κάθε φυσικό H με $1 \leqslant H \leqslant N$ έχουμε*

$$|\mathbb{E}_{n\in\mathbb{Z}_N} f(n)^2| \leqslant \frac{1}{H} + \sum_{h=0}^{H-1} \frac{2(H-h)}{H^2} \mathrm{Re}(\mathbb{E}_{n\in\mathbb{Z}_N} \langle f(n), f(n+h) \rangle,$$

όπου το $n+h$ υπολογίζεται $\bmod N$.

Τέλος, εάν αντί για το $\mathbb{Z}_N$ έχουμε ένα τυχαίο διάστημα I στο $\mathbb{Z}$, τότε από το Λήμμα A.1.1 για $A = I$ και $F = [0, H]$ παίρνουμε:

Πόρισμα A.1.3. *Έστω I ένα διάστημα ακεραίων και $(f(n))_{n\in\mathbb{Z}}$ μια ακολουθία που παίρνει τιμές σε έναν χώρο Hilbert με $\|f(n)\| \leqslant 1$ για κάθε $n \in \mathbb{Z}$. Τότε, για κάθε $H \geq 1$ έχουμε*

$$\|\mathbb{E}_{n\in I} f(n)\|^2 \leqslant \frac{CH}{|I|} + \frac{1}{H} + \sum_{h=0}^{H-1} \frac{2(H-h)}{H^2} \mathrm{Re}(\mathbb{E}_{n\in I} \langle f(n), f(n+h) \rangle$$

για μια σταθερά $C > 0$.

A.2 Εντροπία τυχαίων μεταβλητών και συστημάτων

Έστω (X, μ, T) ένα σύστημα που διατηρεί το μέτρο και μια διαμέριση $A = \{X_i\}_{i\in I}$ του X, όπου I ένα αριθμήσιμο σύνολο. Τότε, ορίζουμε την μετροθεωρητική εντροπία της διαμέρισης A ως την ποσότητα

$$H(A) = -\sum_{i\in I} \mu(X_i) \log \mu(X_i).$$

όπου καταχρηστικά θεωρούμε ότι $0 \cdot \log 0 = 0$.

Η εντροπία του μετασχηματισμού T ως προς τη διαμέριση A ορίζεται ως

$$h(T, A) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} H\Big(\bigvee_{n=0}^{N-1} T^{-n} A\Big).$$

Ορισμός A.2.1. Η μετροθεωρητική εντροπία του συστήματος (X, μ, T) ορίζεται ως

$$h(T) = \sup_A h(T, A),$$

όπου το *sup* λαμβάνεται πάνω από όλες τις αριθμήσιμες διαμερίσεις του X.

Εάν έχουμε δύο διαμερίσεις A, B του X, τότε ορίζουμε την δεσμευμένη εντροπία της A δεδομένης της B από τη σχέση

$$H(A|B) = -\sum_{S\in A} \sum_{Q\in B} \mu(S \cap Q) \log \frac{\mu(S \cap Q)}{\mu(Q)}.$$

Εάν έχουμε έναν διακριτό χώρο πιθανότητας (Ω, P) και μια τυχαία μεταβλητή $\mathbf{X}$, τότε αυτή ορίζει την διαμέριση $\{\{\mathbf{X} = \mathrm{X}\}, \mathrm{X} \in \Omega\}$ και άρα ορίζουμε την εντροπία της $\mathbf{X}$ ως

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}) = \sum_{X\in\Omega} P(\mathbf{X} = X) \log \frac{1}{P(\mathbf{X} = X)}.$$

Για δύο τυχαίες μεταβλητές $\mathbf{X}, \mathbf{Y}$ ορίζουμε ανάλογα την απο κοινού εντροπία

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \sum_{X \in Omega} \sum_{Y \in \Omega} P(\mathbf{X} = X, \mathbf{Y} = Y) \log \frac{1}{P(\mathbf{X} = X, \mathbf{Y} = Y)}$$

και τη δεσμευμένη εντροπία

$$\mathbf{H}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}) = \mathbf{H}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) - \mathbf{H}(\mathbf{Y}).$$

Στο Κεφάλαιο 3 χρησιμοποιούμε κυρίως αυτές τις σχέσεις για την εντροπία. Ορίζουμε τέλος την δεσμευμένη κοινή πληροφορία τριών μεταβλητών $\mathbf{X}, \mathbf{Y}, \mathbf{Z}$ ως

$$\mathbf{I}(\mathbf{X} : \mathbf{Y}|\mathbf{Z}) = \mathbf{H}(\mathbf{X}|\mathbf{Z}) - \mathbf{H}(\mathbf{X}|\mathbf{Y}, \mathbf{Z}).$$

Θεωρούμε τώρα ένα τοπολογικό δυναμικό σύστημα (X, T) και έστω d μια μετρική στον X. Ορίζουμε τότε για ένα $n \in \mathbb{N}$ την μετρική

$$d_n(x, y) = \max_{0 \leqslant i \leqslant n} \{d(T^i x, T^i y)\}.$$

Ένα σύνολο $A \subset X$ λέγεται (ε, n)-διαχωρισμένο, εάν για κάθε $x, y \in A$ διαφορετικά μεταξύ τους ισχύει $d_n(x, y) \geq \varepsilon$. Ορίζουμε

$$N(\varepsilon, n) = \max\{|A|, A \subset X \text{ είναι ένα } (\varepsilon, n) - \text{διαχωρισμένο σύνολο}\}.$$

Ορισμός Α.2.2. Η τοπολογική εντροπία $h_{\text{top}}(T)$ του T ορίζεται από τη σχέση

$$h_{\text{top}}(T) := \lim_{\varepsilon \to 0^+} \Big(\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log N(\varepsilon, n) \Big).$$

Οι δύο ορισμοί για την εντροπία συνδέονται μέσω του επόμενου θεωρήματος.

Θεώρημα Α.2.3 (Variational Principle)**.** *Έστω (X, T) ένα δυναμικό σύστημα. Για κάθε T-αναλλοίωτο μέτρο πιθανότητας μ του X, γράφουμε $h_\mu(T)$ για την μετροθεωρητική εντροπία του συστήματος (X, μ, T). Τότε, έχουμε*

$$h_{\text{top}}(T) = \sup\{h_\mu(T)\},$$

όπου το sup *λαμβάνεται πάνω από όλα τα T-αναλλοίωτα μέτρα πιθανότητας.*

Επειδή ασχολούμαστε σε αυτήν την εργασία αποκλειστικά με συστήματα εντροπίας 0, μπορούμε μέσω αυτού του θεωρήματος να αναλύουμε ιδιότητες εντροπίας ενός τοπολογικού δυναμικού συστήματος σαν ιδιότητες εντροπίας ενός μετροθεωρητικού συστήματος.

Α.3 Ψευδοτυχαία μέτρα

Σε αυτήν την ενότητα δίνουμε τον ορισμό των ψευδοτυχαίων μέτρων που εμφανίζονται στο Θεώρημα 2.5.3. Στη συνέχεια συμβολίζουμε με N μια αρκετά μεγάλη παράμετρο και έστω, επίσης ένας πρώτος αριθμός $N' \geq N$ με $N' \leqslant O(N)$. Ορίζουμε σαν μέτρο στο $\mathbb{Z}_{N'}$ μια συνάρτηση $v : \mathbb{Z}_{N'} \to \mathbb{R}^+$ (αυτή εξαρτάται από τα N, N') τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}_{n \in \mathbb{Z}_{N'}} v(n) = 1 + o(1).$$

Έστω ένας $m \times n$ πίνακας με ρητά στοιχεία $L = (L_{ij})$. Τότε, ορίζουμε τις αφφινικές γραμμικές μορφές $y_i : \mathbb{Z}_{N'}^n \to \mathbb{Z}_{N'}$ από τη σχέση $y_i(\overline{x}) = \sum_{j=1}^n L_{ij}x_j + b_i$, όπου θεωρούμε τα L_{ij} σαν στοιχεία του $\mathbb{Z}_{N'}$ με φυσικό τρόπο (ο N' έχουμε υποθέσει ότι είναι πρώτος). Τότε, το σύνολο των αφφινικών γραμμικών μορφών $\Psi = (y_1, \ldots, y_m)$ είναι ένα αφφινικό σύστημα στο $\mathbb{Z}^n$ και τα L_{ij} λέγονται συντελεστές του συστήματος.

Εάν m, d, L είναι θετικές ακέραιες παράμετροι, τότε λέμε ότι το v ικανοποιεί την (m, d, L)-συνθήκη γραμμικών μορφών, εάν ισχύει το εξής: για οποιαδήποτε $1 \leqslant d' \leqslant d$ και $1 \leqslant t \leqslant m$, οποιοδήποτε σύστημα $\Psi = (y_1, \ldots, y_t)$ πεπερασμένης πολυπλοκότητας από αφφινικές γραμμικές μορφές στον $\mathbb{Z}_d$ του οποίου όλοι οι συντελεστές $L_{ij}, 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j, \leqslant t$ έχουν αριθμητή και παρονομαστή φραγμένο απολύτως από L, και επιπλέον όλες οι t-άδες $(L_{ij})_{1 \leqslant j \leqslant t}$ είναι μη μηδενικές και ανα δύο γραμμικά ανεξάρτητες, εχουμε

$$\mathbb{E}_{n \in \mathbb{Z}_{N'}^d} \prod_{i=1}^t v(y_i(n)) = 1 + o_{m,d,L}(1). \tag{A.3.1}$$

Λέμε ότι το μέτρο v ικανοποιεί την m-συνθήκη συσχετισμού εάν για κάθε $1 \leqslant m \leqslant m'$ υπάρχει μια συνάρτηση $\tau = \tau_{m'} : \mathbb{Z}_{N'} \to \mathbb{R}^+$ με την ιδιότητα

$$\mathbb{E}_{n \in \mathbb{Z}_{N'}} \tau^q(n) \leqslant C(m', q) \tag{A.3.2}$$

για μια σταθερά $C(m', q)$ και για όλα τα $1 \leqslant q < \infty$, και επιπλέον να ισχύει

$$\mathbb{E}_{n \in \mathbb{Z}_{N'}} \prod_{i=1}^m v(n + h_i) \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant m'} \tau(h_i - h_j) \tag{A.3.3}$$

για οποιουσδήποτε $h_1, \ldots, h_m \in \mathbb{Z}_{N'}$.

Ορισμός A.3.1. Ένα μέτρο $v : \mathbb{Z}_{N'} \to \mathbb{R}^+$ λέγεται D-ψευδοτυχαίο εάν ικανοποιεί την $(D \times 2^{D-1}, 3D - 4, D)$-συνθήκη γραμμικών μορφών και την 2^{D-1}-συνθήκη συσχετισμού.

Το Θεώρημα 2.5.3 ισχυρίζεται ότι στο χώρο $\mathbb{Z}_N$ οι συναρτήσεις που είναι φραγμένες από το 1 είναι πυκνές στο χώρο των συναρτήσεων που είναι φραγμένες από ένα ψευδοτυχαίο μέτρο. Στο [[13]], οι Green-Tao δείχνουν (με τους παραπάνω συμβολισμούς και συνθήκες) ότι αν η $f : \mathbb{Z}_{N'} \to \mathbb{R}$ είναι απολύτως φραγμένη απο το $(k+1)$-ψευδοτυχαίο μέτρο v, και $\varepsilon > 0$ αρκετά μικρό σε σχέση με το N, τότε υπάρχει μια σ-άλγεβρα $\mathcal{B}$ και ένα μικρό σύνολο Ω, έτσι ώστε η f να δέχεται μια διάσπαση

$$f = f_1 + f_2 + f_3, \tag{A.3.4}$$

όπου

$$\begin{aligned} f_1 &= (1 - 1_\Omega) E(f|\mathcal{B}) \\ f_2 &= (1 - 1_\Omega)(f - E(f|\mathcal{B})) \\ f_3 &= 1_\Omega f, \end{aligned}$$

και επιπλέον έχουμε

$$\|f_1\|_{L^\infty(\mathbb{Z}_{N'})} \leqslant 1 + o_\varepsilon(1), \quad \|f_2\|_{U^k(\mathbb{Z}_{N'})} \leqslant \varepsilon^{\frac{1}{2^{k+1}}}, \quad \|f_3\|_{U^k(\mathbb{Z}_{N'})} = o_\varepsilon(1).$$

Επιπλέον, για την συνάρτηση f_3 έχουμε και την ασυμπτωτική σχέση $\|f_3\|_{L^1(\mathbb{Z}_{N'})} = o_\varepsilon(1)$.

Βιβλιογραφία

[1] F. Cellarosi and Y. G. Sinai, *Ergodic properties of square-free numbers*, J. Eur. Math. Soc. **15** (2013), no. 4, 1343-1374.

[2] E. H. El Abdalaoui, J. Kułaga-Przymus, M. Lemańczyk and T. de la Rue, *The Chowla and the Sarnak conjectures from ergodic theory point of view*, Discrete Contin. Dyn. Syst. **37** (2017), no. 6, 2899-2944.

[3] N. Frantzikinakis, B. Host and B. Kra, *Multiple recurrence and convergence for sequences related to the prime numbers*, J. Reine Angew. Math. **611** (2007), 131-144.

[4] N. Frantzikinakis, B. Host and B. Kra, *The polynomial multidimensional Szemerédi theorem along shifted primes*, Isr. J. Math. **194** (2013), 331-348.

[5] N. Frantzikinakis, *Multiple correlation sequences and nilsequences*, Invent. Math. **202** (2015), no. 2, 875-892.

[6] N. Frantzikinakis and B. Host, *Higher order Fourier analysis of multiplicative functions and applications*, J. Amer. Math. Soc. **30** (2017), 67-157.

[7] N. Frantzikinakis, *Ergodicity of the Liouville system implies the Chowla conjecture*, Discrete Anal., Paper No. 19 (2017), 41.

[8] N. Frantzikinakis, B. Host. The logarithmic Sarnak conjecture for ergodic weights. *Ann. of Math. (2)* **187** (2018), 869–931.

[9] N. Frantzikinakis and B. Host, *Furstenberg systems of bounded multiplicative functions and applications*, to appear in International Mathematics Research Notices arXiv:1804.08556.

[10] H. Furstenberg. Disjointness in ergodic theory, minimal sets, and a problem in diophantine approximation. *Math. Systems Theory* **1** (1967), 1–49.

[11] K. Granville and A. Soundararajan, *Multiplicative number theory: The pretentious approach*, Book manuscript in preparation.

[12] B. Green and T. Tao, *The primes contain arbitrarily long arithmetic progressions*, Ann. of Math. (2) **167** (2008), no. 2, 481-547.

[13] B. Green and T. Tao, *Linear equations in primes*, Ann. of Math. (2) **171** (2010), no.3, 1753-1850.

[14] B. Green and T. Tao, *An arithmetic regularity lemma, associated counting lemma, and applications*, An irregular mind, Bolyai, Soc. Math. Stud. **21**, János Bolyai Math. Soc., Budapest, (2010), 261-334.

[15] B. J. Green, T. Tao and T. Ziegler, *An inverse theorem for the Gowers $U^4[N]$ norm*, Glasgow Math. J. **53** (2011), 1-50.

[16] B. Green and T. Tao, *The quantitative behaviour of polynomial orbits on nilmanifolds*, Ann. of Math. (2) **175** (2012), no. 2, 465-540.

[17] B. Green and T. Tao, *The Möbius function is strongly orthogonal to nilsequences*, Ann. of Math. **175** (2012), no. 2, 541-566.

[18] B. Green, T. Tao and T. Ziegler, *An inverse theorem for the Gowers $U^{s+1}[N]$-norm*, Ann. of Math. (2) **176** (2012), no. 2, 1231-1372.

[19] G. Halász, *On the distribution of additive and the mean values of multiplicative arithmetic functions*, Studia Sci. Math. Hungar. 6 (1971), 211-233.

[20] A. Hildenbrand, *On consecutive values of the LIouville function*, Enseign. Math. (2) **32** (1986), no. 3-4, 219-226.

[21] B. Host and B. Kra, *Non-conventional ergodic averages and nilmanifolds*, Ann. of Math. **161** (2005), 397-488.

[22] B. Host and B. Kra, *Uniformity seminorms on ℓ^∞ and applications*, J. Analyse Math. **108** (2009), 219-276.

[23] B. Host and B. Kra, *Nilpotent Structures in Ergodic Theory*, Mathematical Surveys and Monographs, Volume 235, American Mathematical Society, 2018.

[24] I. Kátai, *A remark on a theorem of H. Daboussi*, Acta Math. Hungar. 47 (1986), 223-225.

[25] A. Leibman, *Nilsequences, null-sequences, and multiple correlation sequences*, Ergodic Theory and Dynamical Systems **35** (2015), no. 1, 176-191. Corrected version available at people.math.osu.edu/leibman.1/preprints/msqx.pdf

[26] K. Matomäki, M. Radziwiłłand T. Tao, *An averaged form of Chowla's conjecture*, Algebra & Number Theory **9** (2015), 2167-2196.

[27] K. Matomäki and M. Radziwiłł, *Multiplicative functions in short intervals*, Ann. of Math. (2), **183** (2016), no. 3, 1015-1056.

[28] K. Matomäki, M. Radziwiłłand T. Tao, *Sign patterns for the Liouville and Mobius functions*, Forum Math. Sigma, **4** (2016), e14, 44 pp.

[29] H. Montgomery and R. Vaughan, *Exponential sums with multiplicative coefficients*, Invent. Math. **43** (1977), no. 1, 69-82.

[30] O. Reingold, L. Trevisan, M. Tulsiani and S. Vadhan, *New proofs of the Green-Tao-Ziegler dense model theorem: an exposition*, preprint. arXiv:0806.0381

[31] P. Sarnak, *Tree lectures on the Möbius Function randomness and dynamics*, (2010), preprint. publications.ias.edu/sarnak/paper/506

[32] T. Tao, *The logarithmically averaged Chowla and Elliott conjectures for two-point correlations*, Forum Math. Pi **4** (2016), e8, 36 pp.

[33] T. Tao, *Equivalence of the logarithmically averaged Chowla and Sarnak conjectures*, In Number theory-Diophantine problems, uniform distribution and applications, Springer, Cham, 2017.

[34] T. Tao and J. Teräväinen, *The structure of logarithmically averaged correlations of multiplicative functions, with applications to the Chowla and Elliott conjectures*, to appear in *Duke Math J.* arXiv:1708.02610v1.

[35] A. Wirsing, *Das asymptotische Verhalten von Summen über multiplikative Funktionen II*, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **18** (1967), 411-467.