Σημειώσεις Αρμονικής Ανάλυσης

ΣΕΜΦΕ – Εθνικό Μετσόβιο Πολυτεχνείο
Αθήνα, 2023

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Από την Εισαγωγή του "Fourier series and wavelets" των J.-P. Kahane και P. G. Lemarié-Rieusset.

«Η πρώτη απάντηση που μπορεί να δώσει κανείς στο ερώτημα «ποιο είναι το αντικείμενο της ανάλυσης Fourier» είναι να πει ότι ουσιαστικά ασχολείται με δύο τύπους:

$$f(x) = \sum c_n e^{inx} \tag{1}$$

και

$$c_n = \int f(x) e^{-inx} \frac{dx}{2\pi}. \tag{2}$$

Στον πρώτο υπεισέρχεται μια σειρά και στον δεύτερο ένα ολοκλήρωμα.

Μπορούμε να κοιτάξουμε αυτούς τους τύπους με δύο τρόπους. Ο πρώτος είναι να ξεκινήσουμε με μια συγκλίνουσα τριγωνομετρική σειρά και να ορίσουμε μια συνάρτηση $f(x)$ ίση με το άθροισμά της. Ένα ερώτημα είναι τι είδους συναρτήσεις παίρνουμε από αυτόν τον τύπο. Αν μας δώσουν μια τέτοια συνάρτηση, είναι οι συντελεστές καλά ορισμένοι; Μπορούμε να τους υπολογίσουμε από τον δεύτερο τύπο; Αυτός ο κύκλος ιδεών εγκαινιάστηκε από τον Riemann και συνεχίστηκε από τους Cantor, Lebesgue και Denjoy. Είναι αξιοσημείωτο ότι το ολοκλήρωμα Riemann, το ολοκλήρωμα Lebesgue, το ολοκλήρωμα Denjoy, όλα τους είτε εισήχθησαν σε σχέση με αυτό το συγκεκριμένο πρόβλημα είτε εφαρμόστηκαν αμέσως σε αυτό. Ήταν επίσης το πρόβλημα της μοναδικότητας των τριγωνομετρικών σειρών που οδήγησε τον Cantor στη θεωρία της υπερπεπερασμένης επαγωγής. Οι τριγωνομετρικές σειρές συνέχισαν να μελετώνται, ως ένα αντικείμενο των καθαρών μαθηματικών, παρέχοντας συνεχώς κίνητρο για την αλληλεπίδραση διαφόρων θεωριών: πραγματικές συναρτήσεις, μιγαδικές συναρτήσεις, θεωρία συνόλων, θεωρία αριθμών.

Ο δεύτερος τρόπος είναι να ξεκινήσουμε με μια συνάρτηση $f(x)$, να εφαρμόσουμε τον δεύτερο τύπο για να υπολογίσουμε τους συντελεστές c_n και να κοιτάξουμε τη σειρά στον πρώτο τύπο. Είναι σωστό ότι συγκλίνει στην $f(x)$; Αυτή ήταν η ιδέα του Fourier. Ο Fourier είπε ότι η (2) εφαρμόζεται σε κάθε συνάρτηση και ότι είναι πιθανό να δείξουμε ότι η σειρά στην (1) συγκλίνει σε αυτή τη συνάρτηση. Έκανε λάθος. Πρώτα-πρώτα, θα έπρεπε κανείς να ορίσει ποιες συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες. Κατόπιν, το θέμα της σύγκλισης των σειρών Fourier είναι πολύ ευαίσθητο: συνυπάρχουν εδώ δύσκολα θεωρήματα και παράξενα αντιπαραδείγματα. Θα συναντήσει κανείς τα ονόματα των Dirichlet, du Bois-Reymond, Kolmogorov, Carleson που συνδέονται με κάποια φημισμένα αποτελέσματα. Όμως, η διαίσθηση του Fourier ήταν ουσιαστικά σωστή. Αν μας δώσουν ένα περιοδικό φαινόμενο f, με περίοδο 2π (μπορεί να είναι μια συνάρτηση, ένα μέτρο, μια κατανομή με την έννοια του Schwartz, ίσως κάτι άλλο), είναι το χρέος των μαθηματικών να ορίσουν μια έννοια ολοκληρώματος ώστε η (2) να έχει νόημα. Οι συντελεστές c_n ονομάζονται συντελεστές Fourier. Κατόπιν, η σειρά στην (1) ορίζεται, τουλάχιστον τυπικά. Είναι η σειρά Fourier της f. Πάλι, είναι το χρέος των μαθηματικών να πούν πώς παίρνουμε την f από τη σειρά Fourier της. Μέθοδοι αθροισιμότητας και σύγκλιση σε χώρους συναρτήσεων εξυπηρετούν ακριβώς αυτόν τον σκοπό. Μάλιστα, οι σειρές Fourier υπήρξαν μία από τις πηγές της συναρτησιακής ανάλυσης.

Ασφαλώς, ο Fourier είχε προγόνους. Ο Daniel Bernoulli είχε την ιδέα να εκφράσει τη λύση του προβλήματος της παλλόμενης χορδής με τη βοήθεια τριγωνομετρικών σειρών – δηλαδή, να εκφράσει την κίνηση της χορδής ως την υπέρθεση κινήσεων που αντιστοιχούν σε καθαρές αρμονικές. Ο Euler εφάρμοσε την (2) σε ειδικές περιπτώσεις. Όπως όμως παρατηρεί ο Riemann, ο Fourier ήταν ο πρώτος που θεώρησε τις (1) και (2) μαζί: αναλύεις την f χρησιμοποιώντας τους τύπους (2) του Fourier, συνθέτεις την f μέσω της σειράς Fourier της στην (1). Η ανάλυση και η σύνθεση είναι δύο συμπληρωματικές όψεις αυτού που σήμερα ονομάζεται αρμονική ανάλυση.

Επιπλέον, το κίνητρο του Fourier δεν ήταν η θεωρία των παλλόμενων χορδών όπου οι αρμονικές συστήνονται από μόνες τους με έναν μάλλον φυσιολογικό τρόπο. Ήταν η θεωρία της θερμότητας. Οι σειρές Fourier είναι ένα μέρος μόνο ενός μεγάλου προγράμματος: να καταλάβουμε και να προβλέψουμε τη διάχυση της θερμότητας. Ο Fourier έπρεπε να χτίσει ένα μαθηματικό μοντέλο για τη διάδοση της θερμότητας. Είναι η λεγόμενη εξίσωση της θερμότητας, ή εξίσωση του Fourier. Έπρεπε να δείξει πώς να το χρησιμοποιήσει σε πλήθος ειδικών περιπτώσεων. Οι σειρές Fourier είναι ένα πρακτικό εργαλείο για τον υπολογισμό της θερμοκρασίας σε ένα δοσμένο σημείο, ένα δοσμένο σώμα, με δοσμένες συνοριακές συνθήκες.

Έτσι, η κληρονομιά του Fourier δεν είναι μόνο η συλλογή προβλημάτων αποτελεσμάτων, θεωριών, εννοιών που προέρχονται από τους τύπους (1) και (2). Είναι περισσότερο ο λόγος ύπαρξής τους. Ο Fourier αντιμετώπισε ένα σημαντικό πρόβλημα της φύσης. Μπόρεσε να κατασκευάσει ένα καλό μαθηματικό μοντέλο. Στη συνέχεια ήθελε μια γενική και ισχυρή μέθοδο για να λύσει κάποιο είδος εξίσωσης: ήταν οι τύποι (1) και (2). Έχοντας ανακαλύψει το εργαλείο, προσπάθησε να υποδείξει την εφαρμοσιμότητα και την ακρίβειά του στην εκτέλεση αριθμητικών υπολογισμών. Η μαθηματική μοντελοποίηση και τα αλγοριθμικά μαθηματικά είναι μέρος της κληρονομιάς του Fourier.»

Αρχικά ήταν το πρόβλημα της παλλόμενης χορδής, και η μεταγενέστερη μελέτη της ροής της θερμότητας, που οδήγησε στην ανάπτυξη της ανάλυσης Fourier. Οι νόμοι που διέπουν αυτά τα φυσικά φαινόμενα εκφράστηκαν από δύο διαφορετικές μερικές διαφορικές εξισώσεις, την κυματική εξίσωση και την εξίσωση της θερμότητας, και αυτές λύθηκαν μέσω των σειρών Fourier. Σε αυτό το εισαγωγικό κεφάλαιο θα περιγράψουμε με κάποιες λεπτομέρειες την εξέλιξη αυτών των ιδεών. Η παρουσίαση που θα γίνει δεν μπορεί ακόμη να βασιστεί σε καθαρά μαθηματικά επιχειρήματα. Θα περιγράψουμε κάποια ευλογοφανή επιχειρήματα με στόχο να δώσουμε ένα κίνητρο για την αυστηρή ανάλυση που θα ακολουθήσει σε επόμενα κεφάλαια.

1.1 Η παλλόμενη χορδή

Το πρόβλημα είναι να μελετήσουμε την κίνηση μιας χορδής που έχει σταθεροποιημένα τα άκρα της και επιτρέπεται να πάλλεται ελεύθερα. Στο μυαλό μας έχουμε φυσικά συστήματα όπως οι χορδές ενός μουσικού οργάνου. Θα ξεκινήσουμε με μια σύντομη περιγραφή διαφόρων φυσικών φαινομένων που παρατηρούμε, πάνω στα οποία θα βασιστεί η μελέτη μας. Αυτά είναι τα εξής:

(α) η απλή αρμονική κίνηση,

(β) τα στάσιμα και οδεύοντα κύματα,

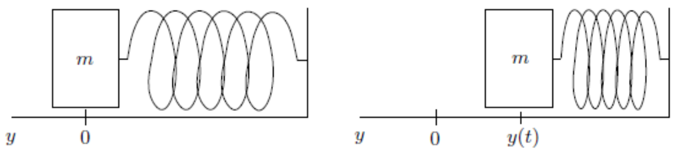
(γ) οι αρμονικές και η υπέρθεση των τόνων.

Η κατανόηση των εμπειρικών δεδομένων πίσω από αυτά τα φαινόμενα θα είναι το κίνητρο για τη μαθηματική μας προσέγγιση στις παλλόμενες χορδές.

Απλή αρμονική κίνηση

Η απλή αρμονική κίνηση περιγράφει τη συμπεριφορά του πιο βασικού συστήματος ταλάντωσης (που ονομάζεται απλός αρμονικός ταλαντωτής). Συνεπώς, είναι ένα φυσιολογικό σημείο για να ξεκινήσουμε τη μελέτη μας. Θεωρούμε μια μάζα $\{m\}$ η οποία είναι προσδεδεμένη σε ένα οριζόντιο ελατήριο, το οποίο είναι με τη σειρά του προσδεδεμένο σε κάποιον σταθερό τοίχο, και υποθέτουμε ότι το σύστημα βρίσκεται πάνω σε μια επιφάνεια χωρίς τριβές.

Επιλέγουμε έναν άξονα που η αρχή του συμπίπτει με το κέντρο της μάζας όταν βρίσκεται σε ηρεμία (δηλαδή, το ελατήριο δεν είναι τεντωμένο ούτε συμπιεσμένο). Αν μετακινήσουμε τη μάζα από την αρχική της θέση ισορροπίας και μετά την αφήσουμε ελεύθερη, τότε θα κάνει *απλή αρμονική κίνηση*. Μπορούμε να περιγράψουμε αυτή την κίνηση μαθηματικά, αν βρούμε τη διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση της μάζας.



Σχήμα 1.1: Απλός αρμονικός ταλαντωτής

Έστω $y(t)$ η μετατόπιση της μάζας τη χρονική στιγμή t. Υποθέτουμε ότι το ελατήριο είναι ιδανικό, δηλαδή ικανοποιεί τον νόμο του Hooke: η δύναμη επαναφοράς F που ασκείται από το ελατήριο στη μάζα δίνεται από την $F = -ky(t)$. Εδώ, $k > 0$ είναι μια δοσμένη φυσική ποσότητα, η σταθερά του ελατηρίου. Εφαρμόζοντας το νόμο του Νεύτωνα (δύναμη = μάζα × επιτάχυνση), παίρνουμε

$$-ky(t) = my''(t),$$

όπου χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό y'' για τη δεύτερη παράγωγο της y ως προς t. Θέτοντας $c = \sqrt{k/m}$, παίρνουμε τη συνήθη διαφορική εξίσωση δεύτερης τάξης

$$y''(t) + c^2 y(t) = 0. \tag{1.1.1}$$

Η γενική λύση της (1.1.1) δίνεται από την

$$y(t) = a\cos ct + b\sin ct,$$

όπου οι a και b είναι σταθερές. Εύκολα ελέγχουμε ότι όλες οι συναρτήσεις αυτής της μορφής είναι λύσεις της (1.1.1) και στις Ασκήσεις αυτού του Κεφαλαίου περιγράφεται μια απόδειξη για το ότι αυτές είναι οι μόνες (δύο φορές παραγωγίσιμες) λύσεις αυτής της διαφορικής εξίσωσης.

Στην παραπάνω έκφραση για την $y(t)$, η ποσότητα c δίνεται, όμως οι a και b μπορούν να είναι οποιοιδήποτε πραγματικοί αριθμοί. Για να προσδιορίσουμε τη συγκεκριμένη λύση της εξίσωσης, πρέπει να επιβάλουμε δύο αρχικές συνθήκες αφού έχουμε δύο άγνωστες σταθερές a και b. Για παράδειγμα, αν μας δοθούν οι $y(0)$ και $y'(0)$, η αρχική θέση και ταχύτητα της μάζας, τότε η λύση του φυσικού προβλήματος είναι μοναδική και δίνεται από την

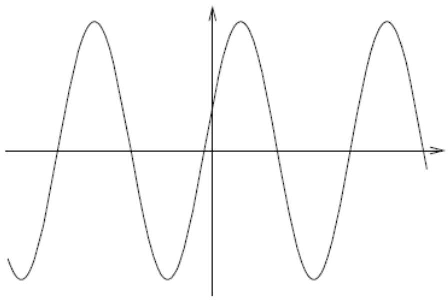
$$y(t) = y(0)\cos ct + \frac{y'(0)}{c}\sin ct.$$

Μπορούμε εύκολα να επαληθεύσουμε ότι υπάρχουν σταθερές $A > 0$ και $\varphi \in \mathbb{R}$ ώστε

$$a \cos ct + b \sin ct = A \cos(ct - \varphi).$$

Λόγω της φυσικής ερμηνείας που δώσαμε πιο πάνω, ονομάζουμε τον $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ «πλάτος», την σταθερά c «συχνότητα», τον φ «φάση» (που προσδιορίζεται μονοσήμαντα έως ένα ακέραιο πολλαπλάσιο του 2π) και τον $2\pi/c$ «περίοδο» της κίνησης.

Η τυπική γραφική παράσταση της συνάρτησης $A\cos(ct-\varphi)$ μας δείχνει ένα κυματόμορφο μοτίβο το οποίο παίρνουμε μεταφέροντας και διαστέλλοντας (ή συρρικνώνοντας) τη συνήθη γραφική παράσταση της $\cos t$.



Σχήμα 1.2: Η γραφική παράσταση της $A \cos(ct - \varphi)$

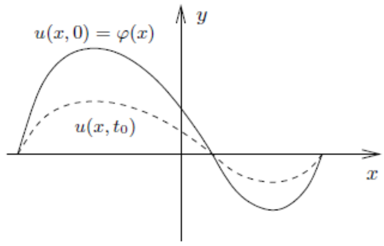
Αξίζει τον κόπο να συγκρατήσουμε δύο παρατηρήσεις σχετικά με τη συζήτηση που κάναμε για την απλή αρμονική κίνηση. Η πρώτη είναι ότι στη μαθηματική περιγραφή του πιο απλού συστήματος ταλάντωσης, της απλής αρμονικής κίνησης, υπεισέρχονται οι πιο βασικές τριγωνομετρικές συναρτήσεις $\cos t$ και $\sin t$. Είναι σημαντικό για όσα θα ακολουθήσουν να θυμηθούμε τη σύνδεση αυτών των συναρτήσεων με τους μιγαδικούς αριθμούς, η οποία εκφράζεται από την ταυτότητα του Euler $e^{it} = \cos t + i \sin t$. Η δεύτερη παρατήρηση είναι ότι η απλή αρμονική κίνηση προσδιορίζεται ως συνάρτηση του χρόνου από δύο αρχικές συνθήκες, μία που προσδιορίζει τη θέση και μία που προσδιορίζει την ταχύτητα (ας πούμε, για παράδειγμα, την χρονική στιγμή $t = 0$). Αυτή την ιδιότητα εξακολουθούν να εμφανίζουν, όπως θα δούμε, πιο γενικά συστήματα ταλάντωσης.

Στάσιμα και οδεύοντα κύματα

Η παλλόμενη χορδή μπορεί να ιδωθεί μέσω μονοδιάστατων κυματικών κινήσεων. Περιγράφουμε εδώ δύο είδη κινήσεων που έχουν απλές γραφικές αναπαραστάσεις.

Πρώτα, θεωρούμε τα λεγόμενα *στάσιμα κύματα*. Αυτές είναι κυματοειδείς κινήσεις της εξής μορφής: υπάρχει ένα αρχικό προφίλ $y = \varphi(x)$ που αναπαριστά το κύμα κατά τη χρονική στιγμή $t = 0$, και ένας παράγοντας ενίσχυσης $\psi(t)$, ο οποίος εξαρτάται από το t, ώστε η κίνηση να περιγράφεται από την $y = u(x, t)$ με

$$u(x, t) = \varphi(x)\psi(t).$$

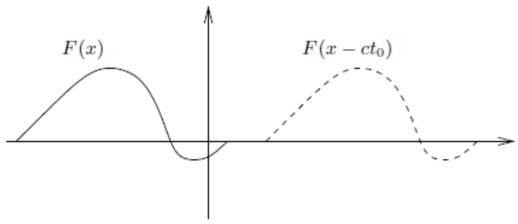


Σχήμα 1.3: Ένα στάσιμο κύμα σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές: $t = 0$ και $t = t_0$

Η φύση των στάσιμων κυμάτων υποδεικνύει τη μαθηματική ιδέα του «χωρισμού μεταβλητών» στην οποία θα επανέλθουμε αργότερα.

Ένας δεύτερος τύπος κυματικής κίνησης που παρατηρούμε συχνά στη φύση είναι αυτός του *οδεύοντος κύματος*. Η περιγραφή του είναι πολύ απλή: υπάρχει ένα αρχικό προφίλ $F(x)$ ώστε να έχουμε $u(x,t) = F(x)$ όταν $t = 0$. Καθώς το t εξελίσσεται, αυτό το προφίλ μετατοπίζεται προς τα δεξιά κατά ct μονάδες, όπου c είναι μια θετική σταθερά, δηλαδή

$$u(x,t) = F(x - ct).$$



Σχήμα 1.4: Ένα οδεύον κύμα σε δύο διαφορετικές χρονικές στιγμές: $t = 0$ και $t = t_0$

Αφού η κίνηση ως προς t γίνεται με ρυθμό c, αυτή η σταθερά αναπαριστά την *ταχύτητα* του κύματος. Η συνάρτηση $F(x - ct)$ είναι ένα μονοδιάστατο οδεύον κύμα που κινείται προς τα δεξιά. Όμοια, η $u(x,t) = F(x + ct)$ είναι ένα μονοδιάστατο οδεύον κύμα που κινείται προς τα αριστερά.

Αρμονικές και υπέρθεση των τόνων

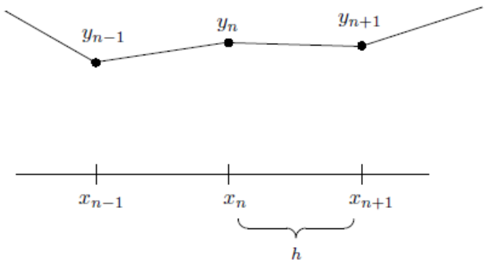
Η τελευταία φυσική παρατήρηση που θέλουμε να κάνουμε (χωρίς να μπούμε τώρα σε λεπτομέρειες) είναι μία που οι μουσικοί έχουν κάνει από πάρα πολύ παλιά. Είναι η ύπαρξη των αρμονικών, ή υπερτόνων. Οι *καθαροί τόνοι* συνοδεύονται από συνδυασμούς *υπερτόνων* στους οποίους κυρίως οφείλεται η ποιότητα του τόνου (ή χρώμα του τόνου) ενός μουσικού οργάνου. Η ιδέα του συνδυασμού ή υπέρθεσης τόνων υλοποιείται μαθηματικά από τη βασική έννοια της γραμμικότητας, όπως θα δούμε στη συνέχεια.

Στρέφουμε τώρα την προσοχή μας στο βασικό μας πρόβλημα, που είναι να περιγράψουμε την κίνηση μιας παλλόμενης χορδής. Πρώτα θα εξηγήσουμε πώς προκύπτει η κυματική εξίσωση, δηλαδή η μερική διαφορική εξίσωση που διέπει την κίνηση της χορδής.

1.1.1 Παραγωγή της κυματικής εξίσωσης

Θεωρούμε μία ομογενή χορδή η οποία είναι τοποθετημένη στο (x, y)-επίπεδο και είναι τεντωμένη κατά μήκος του x-άξονα, ανάμεσα στο $x = 0$ και το $x = L$. Αν της προκαλέσουμε μια δόνηση, τότε η μετατόπιση $y = u(x, t)$ της χορδής είναι μια συνάρτηση των x και t, και σκοπός μας είναι να βρούμε τη διαφορική εξίσωση που ικανοποιεί αυτή η συνάρτηση.

Γι' αυτό το σκοπό, θεωρούμε ότι η χορδή έχει υποδιαιρεθεί σε ένα μεγάλο πλήθος N από μάζες (τις οποίες σκεφτόμαστε ως ξεχωριστά σωματίδια) που είναι ομοιόμορφα κατανεμημένες κατά μήκος του x-άξονα, έτσι ώστε το n-οστό σωματίδιο να έχει την x-συντεταγμένη του στο σημείο $x_n = nL/N$. Σκεφτόμαστε συνεπώς την παλλόμενη χορδή σαν ένα σύνθετο σύστημα N σωματιδίων, καθένα από τα οποία ταλαντώνεται *μόνο κατά την κατακόρυφη διεύθυνση*. Όμως, σε αντίθεση με τον απλό αρμονικό ταλαντωτή που θεωρήσαμε στην προηγούμενη ενότητα, η ταλάντωση κάθε σωματιδίου επηρεάζεται από τους άμεσους γείτονές του μέσω της τάσης της χορδής.



Σχήμα 1.5: Μία παλλόμενη χορδή ως διακριτό σύστημα μαζών

Θέτουμε λοιπόν $y_n(t) = u(x_n, t)$, και παρατηρούμε ότι $x_{n+1} - x_n = h$, όπου $h = L/N$. Αν υποθέσουμε ότι η χορδή έχει σταθερή πυκνότητα $\rho > 0$, είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι κάθε σωματίδιο έχει μάζα ρh. Από το νόμο του Νεύτωνα, η δύναμη που ασκείται στο n-οστό σωματίδιο είναι ίση με $\rho h y_n''(t)$. Τώρα κάνουμε την απλή υπόθεση ότι αυτή η δύναμη οφείλεται στη επίδραση των δύο γειτονικών σωματιδίων, αυτών που έχουν x-συντεταγμένες x_{n-1} και x_{n+1}. Υποθέτουμε επίσης ότι η δύναμη (ή τάση) που έρχεται από τα δεξιά του n-οστού σωματιδίου είναι ανάλογη με $(y_{n+1} - y_n)/h$, όπου h είναι η απόσταση μεταξύ των x_{n+1} και x_n. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε την τάση ως

$$\frac{\tau}{h}(y_{n+1} - y_n),$$

όπου $\tau > 0$ είναι μια σταθερά ίση με τον συντελεστή τάσης της χορδής. Υπάρχει μία ακόμη, όμοια, δύναμη που έρχεται από τα αριστερά, ίση με

$$\frac{\tau}{h}(y_{n-1} - y_n).$$

Οι δύο αυτές δυνάμεις, οι οποίες δρούν σε αντίθετες διευθύνσεις, μας δίνουν τη ζητούμενη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στους ταλαντωτές $y_n(t)$, δηλαδή

$$\rho h y_n''(t) = \frac{\tau}{h}(y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t)). \tag{1.1.2}$$

Από τη μία πλευρά, με τον συμβολισμό που έχουμε επιλέξει, βλέπουμε ότι

$$y_{n+1}(t) + y_{n-1}(t) - 2y_n(t) = u(x_n + h, t) + u(x_n - h, t) - 2u(x_n, t).$$

Από την άλλη πλευρά, για κάθε λογική συνάρτηση $F(x)$ (δηλαδή, μια συνάρτηση που έχει συνεχή παράγωγο δεύτερης τάξης) έχουμε

$$\frac{F(x+h)+F(x-h)-2F(x)}{h^2} \longrightarrow F''(x) \quad \text{καθώς } h \to 0.$$

Μπορούμε λοιπόν να συμπεράνουμε, διαιρώντας στην (1.1.2) με h και αφήνοντας το h να τείνει στο 0 (δηλαδή, το N να τείνει στο άπειρο), ότι

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \tau \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

δηλαδή

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad \text{με } c = \sqrt{\tau/\rho}.$$

Αυτή η σχέση είναι γνωστή ως η *μονοδιάστατη κυματική εξίσωση*, ή πιο απλά η *κυματική εξίσωση*. Για λόγους που θα γίνουν φανεροί αργότερα, ο συντελεστής $c > 0$ ονομάζεται *ταχύτητα* της κίνησης.

Σχετικά με αυτή τη μερική διαφορική εξίσωση, κάνουμε μια σημαντική απλουστευτική μαθηματική παρατήρηση. Αυτή έχει να κάνει με την *αλλαγή κλίμακας*, ή στη γλώσσα της φυσικής, την «αλλαγή μονάδων». Δηλαδή, μπορούμε να σκεφτόμαστε τη συντεταγμένη x ως $x = aX$ όπου a είναι κατάλληλη θετική σταθερά. Συναρτήσει της νέας συντεταγμένης X, το διάστημα $0 \leqslant x \leqslant L$ γίνεται $0 \leqslant X \leqslant L/a$. Όμοια, μπορούμε να αντικαταστήσουμε τη συντεταγμένη t του χρόνου με $t = bT$, όπου b είναι μια άλλη θετική σταθερά. Αν θέσουμε $U(X,T) = u(x,t)$, τότε

$$\frac{\partial U}{\partial X} = a\frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{και} \quad \frac{\partial^2 U}{\partial X^2} = a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

και όμοια σχέση ισχύει για τις παραγώγους ως προς t. Έτσι, αν επιλέξουμε τις σταθερές a και b κατάλληλα, μπορούμε να μετασχηματίσουμε τη μονοδιάστατη κυματική εξίσωση στην

$$\frac{\partial^2 U}{\partial T^2} = \frac{\partial^2 U}{\partial X^2},$$

το οποίο σημαίνει ότι η ταχύτητα c είναι πλέον ίση με 1. Επιπλέον, έχουμε την ελευθερία να μετασχηματίσουμε το διάστημα $0 \leqslant x \leqslant L$ στο $0 \leqslant X \leqslant \pi$. (Θα δούμε ότι η επιλογή του π είναι βολική σε πολλές περιστάσεις.) Όλα αυτά επιτυγχάνονται αν πάρουμε $a = L/\pi$ και $b = L/(c\pi)$. Αν λύσουμε τη νέα εξίσωση, μπορούμε φυσικά να επιστρέψουμε στην αρχική εξίσωση κάνοντας την αντίστροφη αλλαγή συντεταγμένων. Άρα, δεν θυσιάζουμε τη γενικότητα αν σκεφτόμαστε ότι η κυματική εξίσωση μας δίνεται στο διάστημα $[0,\pi]$ και έχει ταχύτητα $c = 1$.

1.1.2 Επίλυση της κυματικής εξίσωσης

Έχοντας εξηγήσει πώς φτάνουμε στην κυματική εξίσωση, περιγράφουμε τώρα δύο μεθόδους για να την λύσουμε:

- χρησιμοποιώντας οδεύοντα κύματα,
- χρησιμοποιώντας την υπέρθεση στάσιμων κυμάτων.

Παρόλο που η πρώτη προσέγγιση είναι πολύ απλή και κομψή, δεν δίνει άμεσα την πλήρη κατανόηση του προβλήματος. Η δεύτερη μέθοδος το επιτυγχάνει και, ταυτόχρονα, έχει μεγάλο εύρος εφαρμογών.

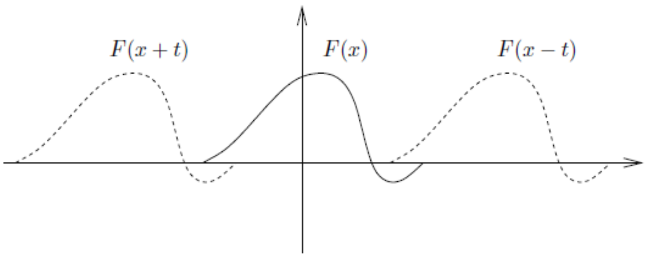
Πίστευαν αρχικά ότι η δεύτερη μέθοδος εφαρμόζεται μόνο στις απλές περιπτώσεις όπου η αρχική θέση και ταχύτητα της χορδής είναι κι αυτές υπέρθεση στάσιμων κυμάτων. Όμως, ως συνέπεια των ιδεών του Fourier, έγινε σαφές ότι μπορεί κανείς να μελετήσει το πρόβλημα με καθέναν από τους δύο τρόπους, για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες.

Οδεύοντα κύματα

Για να απλουστεύσουμε την κατάσταση όπως πριν, υποθέτουμε ότι $c = 1$ και $L = \pi$, δηλαδή η εξίσωση που θέλουμε να λύσουμε είναι η

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \text{για} \;\; 0 \leqslant x \leqslant \pi, \;\; \text{με} \;\; t \geqslant 0.$$

Η κρίσιμη παρατήρηση είναι η εξής: αν F είναι οποιαδήποτε δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση, τότε οι $u(x,t) = F(x+t)$ και $u(x,t) = F(x-t)$ είναι λύσεις της κυματικής εξίσωσης. Η επαλήθευση αυτού του ισχυρισμού είναι μια απλή άσκηση στην παραγώγιση. Παρατηρήστε ότι η γραφική παράσταση της $u(x,t) = F(x-t)$ την χρονική στιγμή $t = 0$ είναι απλώς η γραφική παράσταση της F, και ότι τη χρονική στιγμή $t = 1$ γίνεται η γραφική παράσταση της F μεταφερμένο προς τα δεξιά κατά 1. Έτσι, αναγνωρίζουμε ότι η $F(x-t)$ είναι ένα οδεύον κύμα το οποίο ταξιδεύει προς τα δεξιά με ταχύτητα 1. Όμοια, η $u(x,t) = F(x+t)$ είναι ένα κύμα που ταξιδεύει προς τα αριστερά με ταχύτητα 1.



Σχήμα 1.6: Κύματα που ταξιδεύουν και στις δύο κατευθύνσεις

Η συζήτηση που κάναμε για τους τόνους και τους συνδυασμούς τους μας οδηγεί στην παρατήρηση ότι η κυματική εξίσωση είναι *γραμμική*. Αυτό σημαίνει ότι αν $u(x,t)$ και $v(x,t)$ είναι δύο λύσεις της, τότε το ίδιο ισχύει για την $\alpha u(x,t) + \beta v(x,t)$, όπου α και β είναι τυχούσες σταθερές. Μπορούμε λοιπόν να υπερθέσουμε δύο κύματα που ταξιδεύουν σε αντίθετες κατευθύνσεις και να συμπεράνουμε ότι αν οι F και G είναι δύο φορές παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε η

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$$

είναι λύση της κυματικής εξίσωσης. Θα δείξουμε μάλιστα ότι όλες οι λύσεις είναι αυτής της μορφής.

Αφαιρούμε προς στιγμήν τις υποθέσεις ότι $0 \leqslant x \leqslant \pi$ και $t \geqslant 0$, και υποθέτουμε ότι u είναι μία δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση που λύνει την κυματική εξίσωση για κάθε πραγματικό x και t. Θεωρούμε το ακόλουθο νέο ζεύγος μεταβλητών $\xi = x + t$, $\eta = x - t$, και ορίζουμε $v(\xi, \eta) = u(x,t)$. Ο τύπος αλλαγής μεταβλητών δείχνει ότι η v ικανοποιεί την

$$\frac{\partial^2 v}{\partial \xi \partial \eta} = 0.$$

Ολοκληρώνοντας αυτή τη σχέση δύο φορές παίρνουμε $v(\xi,\eta) = F(\xi) + G(\eta)$, απ' όπου έπεται ότι

$$u(x,t) = F(x+t) + G(x-t),$$

για κάποιες συναρτήσεις F και G.

Πρέπει τώρα να συνδέσουμε αυτό το αποτέλεσμα με το αρχικό μας πρόβλημα, δηλαδή την φυσική κίνηση μιας χορδής. Εκεί είχαμε θέσει τον περιορισμό $0 \leqslant x \leqslant \pi$, το αρχικό σχήμα της χορδής $u(x,0) = f(x)$, καθώς και το γεγονός ότι η χορδή έχει σταθερά άκρα, δηλαδή $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ για κάθε $t \geqslant 0$. Για να χρησιμοποιήσουμε την παραπάνω απλή παρατήρηση, επεκτείνουμε αρχικά την f σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$ κάνοντάς την περιττή στο $[-\pi,\pi]$ και κατόπιν περιοδική ως προς x με περίοδο 2π, και κάνουμε το ίδιο για τη λύση $u(x,t)$ του προβλήματός μας. Τέλος, θέτουμε $u(x,t) = u(x,-t)$ για $t < 0$. Τότε, η επέκταση u είναι λύση της κυματικής εξίσωσης σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$, και $u(x,0) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συνεπώς, $u(x,t) = F(x+t) + G(x-t)$, και θέτοντας $t = 0$ βλέπουμε ότι

$$F(x) + G(x) = f(x).$$

Αφού υπάρχουν πολλές επιλογές των F και G που ικανοποιούν αυτήν την ταυτότητα, είναι λογικό να επιβάλουμε άλλη μία αρχική συνθήκη στην u (όμοια με τις δύο αρχικές συνθήκες στην περίπτωση της απλής αρμονικής κίνησης), δηλαδή την αρχική ταχύτητα της χορδής, την οποία συμβολίζουμε με $g(x)$:

$$\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),$$

όπου φυσικά $g(0) = g(\pi) = 0$. Πάλι, επεκτείνουμε την g στο $\mathbb{R}$, κάνοντάς την αρχικά περιττή στο $[-\pi,\pi]$, και μετά περιοδική με περίοδο 2π. Οι δύο αρχικές συνθήκες της θέσης και της ταχύτητας μεταφράζονται τώρα στο ακόλουθο σύστημα

$$\begin{aligned} F(x) + G(x) &= f(x), \\ F'(x) - G'(x) &= g(x). \end{aligned}$$

Παραγωγίζοντας την πρώτη εξίσωση και προσθέτοντάς την στη δεύτερη, παίρνουμε

$$2F'(x) = f'(x) + g(x).$$

Όμοια

$$2G'(x) = f'(x) - g(x),$$

άρα υπάρχουν σταθερές C_1 και C_2 ώστε

$$F(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) + \int_0^x g(y)\,dy\right] + C_1$$

και

$$G(x) = \frac{1}{2}\left[f(x) - \int_0^x g(y)\,dy\right] + C_2.$$

Αφού $F(x) + G(x) = f(x)$ συμπεραίνουμε ότι $C_1 + C_2 = 0$, άρα, η τελική λύση της κυματικής εξίσωσης με τις δεδομένες αρχικές συνθήκες παίρνει τη μορφή

$$u(x,t) = \frac{1}{2}[f(x+t) + f(x-t)] + \frac{1}{2}\int_{x-t}^{x+t} g(y)\,dy.$$

Αυτή η μορφή της λύσης είναι γνωστή ως *τύπος του d'Alembert*. Παρατηρήστε ότι οι επεκτάσεις που επιλέξαμε για τις f και g εγγυώνται ότι η χορδή έχει πάντα σταθερά άκρα, δηλαδή, $u(0,t) = u(\pi,t) = 0$ για κάθε t.

Κλείνουμε με άλλη μία παρατήρηση. Το πέρασμα από $t \geqslant 0$ σε $t \in \mathbb{R}$, και μετά πίσω σε $t \geqslant 0$, που κάναμε πιο πάνω, εκφράζει την ιδιότητα αντιστροφής του χρόνου της κυματικής εξίσωσης. Με άλλα λόγια, μια λύση u της κυματικής εξίσωσης για $t \geqslant 0$, οδηγεί σε μια λύση u^- που ορίζεται για αρνητικό χρόνο $t < 0$, την $u^-(x,t) = u(x,-t)$, κάτι που προκύπτει από το αναλλοίωτο της κυματικής εξίσωσης κάτω από τον μετασχηματισμό $t \mapsto -t$. Η κατάσταση είναι πολύ διαφορετική στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας.

Υπέρθεση στάσιμων κυμάτων

Παρουσιάζουμε τώρα τη δεύτερη μέθοδο επίλυσης της κυματικής εξίσωσης, η οποία βασίζεται σε δύο θεμελιώδη συμπεράσματα από τις προηγούμενες φυσικές παρατηρήσεις μας. Από όσα συζητήσαμε για τα στάσιμα κύματα, οδηγούμαστε στο να κοιτάξουμε για ειδικές λύσεις της κυματικής εξίσωσης οι οποίες είναι της μορφής $\varphi(x)\psi(t)$. Αυτή η διαδικασία, η οποία δουλεύει εξίσου καλά σε άλλα πλαίσια (στην περίπτωση της εξίσωσης της θερμότητας, για παράδειγμα), λέγεται *χωρισμός μεταβλητών* και κατασκευάζει λύσεις που ονομάζονται καθαροί τόνοι. Μετά, από τη γραμμικότητα της κυματικής εξίσωσης, αναμένουμε ότι μπορούμε να συνδυάσουμε αυτούς τους καθαρούς τόνους σε έναν πιο σύνθετο συνδυασμό ήχου. Σπρώχνοντας αυτή την ιδέα παραπέρα, μπορούμε να ελπίζουμε τελικά ότι θα εκφράσουμε τη γενική λύση της κυματικής εξίσωσης συναρτήσει αθροισμάτων αυτών των ειδικών λύσεων.

Παρατηρήστε ότι στο ένα μέλος της κυματικής εξίσωσης υπεισέρχεται μόνο παραγώγιση ως προς x, ενώ στο άλλο, μόνο παραγώγιση ως προς t. Αυτή η παρατήρηση μας δίνει άλλον έναν λόγο για να κοιτάξουμε για λύσεις της εξίσωσης που είναι της μορφής $u(x,t) = \varphi(x)\psi(t)$ (δηλαδή, να «χωρίσουμε μεταβλητές»), με την ελπίδα να αναγάγουμε μια δύσκολη μερική διαφορική εξίσωση σε ένα σύστημα απλούστερων συνήθων διαφορικών εξισώσεων. Στην περίπτωση της κυματικής εξίσωσης, αν η u είναι αυτής της μορφής, παίρνουμε

$$\varphi(x)\psi''(t) = \varphi''(x)\psi(t),$$

και συνεπώς

$$\frac{\psi''(t)}{\psi(t)} = \frac{\varphi''(x)}{\varphi(x)}.$$

Η κρίσιμη παρατήρηση εδώ είναι ότι το αριστερό μέλος εξαρτάται μόνο από το t ενώ το δεξιό μέλος μόνο από το x. Αυτό μπορεί να συμβαίνει μόνο αν και τα δύο μέλη είναι ίσα με μία σταθερά, ας την πούμε λ. Άρα, η κυματική εξίσωση ανάγεται στο σύστημα

$$\begin{aligned} \psi''(t) - \lambda\psi(t) &= 0 \\ \varphi''(x) - \lambda\varphi(x) &= 0. \end{aligned} \tag{1.1.3}$$

Αν εστιάσουμε στην πρώτη εξίσωση αυτού του συστήματος, αναγνωρίζουμε την εξίσωση που είχαμε πάρει στη μελέτη της απλής αρμονικής κίνησης. Αρκεί να θεωρήσουμε μόνο την περίπτωση όπου

$\lambda < 0$, γιατί αν $\lambda \geqslant 0$ τότε η λύση ψ δεν θα ταλαντώνεται καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος. Συνεπώς, μπορούμε να γράψουμε $\lambda = -m^2$, και τότε η λύση της εξίσωσης δίνεται από την

$$\psi(t) = \alpha \cos mt + \beta \sin mt.$$

Όμοια, βλέπουμε ότι η λύση της δεύτερης εξίσωσης στην (1.1.3) είναι η

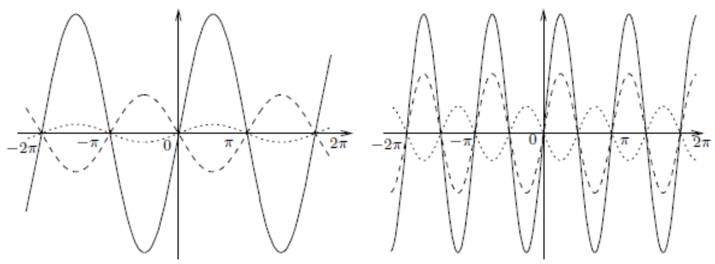
$$\varphi(x) = \tilde{\alpha} \cos mx + \tilde{\beta} \sin mx.$$

Τώρα παίρνουμε υπ' όψιν μας το γεγονός ότι η χορδή είναι προσδεδεμένη στα $x = 0$ και $x = \pi$. Αυτό μεταφράζεται στις $\varphi(0) = \varphi(\pi) = 0$, που με τη σειρά τους δίνουν $\tilde{\alpha} = 0$, και αν $\tilde{\beta} \neq 0$ τότε ο m πρέπει να είναι ακέραιος. Αν $m = 0$ τότε η λύση μηδενίζεται ταυτοτικά, και αν $m \leqslant -1$ μπορούμε να μετονομάσουμε τις σταθερές και να αναχθούμε στην περίπτωση $m \geqslant 1$ αφού η συνάρτηση $\sin y$ είναι περιττή και η συνάρτηση $\cos y$ είναι άρτια. Τελικά, καταλήγουμε να μαντέψουμε ότι για κάθε $m \geqslant 1$, η συνάρτηση

$$u_m(x,t) = (\alpha_m \cos mt + \beta_m \sin mt) \sin mx,$$

την οποία αναγνωρίζουμε ως *στάσιμο κύμα*, είναι λύση της κυματικής εξίσωσης. Σημειώνουμε ότι στο επιχείρημα που προηγήθηκε διαιρέσαμε με φ και ψ, οι οποίες μηδενίζονται σε κάποια σημεία, επομένως πρέπει πράγματι να ελέγξουμε με απευθείας υπολογισμό (ο οποίος είναι μια απλή άσκηση) ότι το στάσιμο κύμα u_m λύνει την εξίσωση.

Πριν προχωρήσουμε περισσότερο με την ανάλυση της κυματικής εξίσωσης, ας συζητήσουμε λίγο περισσότερο τα στάσιμα κύματα. Η ορολογία προέρχεται από την εικόνα που βλέπουμε αν κοιτάξουμε τη γραφική παράσταση της $u_m(x,t)$ για κάθε σταθερό t. Ας υποθέσουμε αρχικά ότι $m = 1$, και ας πάρουμε την $u(x,t) = \cos t \sin x$. Το Σχήμα 1.7 αριστερά δίνει τη γραφική παράσταση της u για διαφορετικές τιμές του t.



Σχήμα 1.7: Θεμελιώδης τόνος και υπερτόνοι σε διαφορετικές χρονικές στιγμές

Η περίπτωση $m = 1$ αντιστοιχεί στον *θεμελιώδη τόνο* ή *πρώτη αρμονική* της παλλόμενης χορδής.

Τώρα παίρνουμε $m = 2$ και κοιτάζουμε την $u(x,t) = \cos 2t \sin 2x$. Αυτή αντιστοιχεί στον *πρώτο υπερτόνο* ή *δεύτερη αρμονική*, και αυτή η κίνηση περιγράφεται στο Σχήμα 1.7 δεξιά. Παρατηρήστε ότι $u(\pi/2, t) = 0$ για κάθε t. Σημεία όπως αυτό, που παραμένουν ακίνητα στη διάρκεια του χρόνου, ονομάζονται κόμβοι, ενώ τα σημεία στα οποία η κίνηση έχει μέγιστο πλάτος ονομάζονται αντι-κόμβοι.

Για μεγαλύτερες τιμές του m παίρνουμε περισσότερους υπερτόνους ή υψηλότερες αρμονικές. Σημειώνουμε ότι καθώς το m αυξάνει, η συχνότητα αυξάνει, και η περίοδος $2\pi/m$ φθίνει. Συνεπώς, ο θεμελιώδης τόνος έχει χαμηλότερη συχνότητα από τους υπερτόνους.

Επιστρέφουμε τώρα στο αρχικό πρόβλημα. Υπενθυμίζουμε ότι η κυματική εξίσωση είναι γραμμική με την έννοια ότι αν u και v είναι δύο λύσεις της εξίσωσης, τότε το ίδιο ισχύει για την $\alpha u + \beta v$ για οποιεσδήποτε σταθερές α και β. Αυτό μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε κι άλλες λύσεις παίρνοντας γραμμικούς συνδυασμούς των στάσιμων κυμάτων u_m. Αυτή η τεχνική, η οποία ονομάζεται *υπέρθεση*, οδηγεί στην τελική μας εικασία για τη λύση της κυματικής εξίσωσης:

$$u(x,y) = \sum_{m=1}^{\infty} (\alpha_m \cos mt + \beta_m \sin mt)\, \sin mx. \tag{1.1.4}$$

Σημειώνουμε ότι αυτό το άθροισμα είναι άπειρο, συνεπώς προκύπτουν ζητήματα σχετικά με τη σύγκλιση, δεδομένου όμως ότι όλα μας τα επιχειρήματα ως τώρα είναι τυπικά, δεν ανησυχούμε γι' αυτό το θέμα τώρα.

Ας υποθέσουμε ότι η παραπάνω έκφραση δίνει *όλες* τις λύσεις της κυματικής εξίσωσης. Αν τότε ζητήσουμε η αρχική θέση της χορδής τη χρονική στιγμή $t = 0$ να δίνεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f στο $[0, \pi]$, και φυσικά να ικανοποιείται η $f(0) = f(\pi) = 0$, θα έχουμε $u(x, 0) = f(x)$, άρα

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin mx = f(x).$$

Αφού το αρχικό σχήμα της χορδής μπορεί να είναι οποιαδήποτε λογική συνάρτηση f, πρέπει να μας αποσχολήσει το ακόλουθο βασικό ερώτημα:

> Αν μας δοθεί μια συνάρτηση f στο $[0, \pi]$, με $f(0) = f(\pi) = 0$, είναι σωστό ότι μπορούμε να βρούμε συντελεστές α_m ώστε
>
> $$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin mx\,; \tag{1.1.5}$$

Το ερώτημα, όπως τίθεται, είναι ασαφές, στη συνέχεια όμως του μαθήματος θα προσπαθήσουμε να το διατυπώσουμε με ακρίβεια και θα επιχειρήσουμε να το απαντήσουμε. Αυτό ήταν το βασικό πρόβλημα που οδήγησε στην Ανάλυση Fourier.

Μια απλή παρατήρηση μας επιτρέπει να μαντέψουμε έναν τύπο που δίνει τους συντελεστές α_m αν υποθέσουμε ότι ισχύει το ανάπτυγμα της (1.1.5). Αυτό που κάνουμε είναι να πολλαπλασιάσουμε τα δύο μέλη της ισότητας με $\sin nx$ και να ολοκληρώσουμε στο $[0, \pi]$. Δουλεύοντας τυπικά, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx &= \int_0^{\pi} \left(\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin mx \right) \sin nx\, dx \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \int_0^{\pi} \sin mx\, \sin nx\, dx = \alpha_n \cdot \frac{\pi}{2},\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι

$$\int_0^{\pi} \sin mx\, \sin nx\, dx = \begin{cases} 0, & \text{αν; } m \neq n \\ \pi/2, & \text{αν } m = n \end{cases}$$

Μαντεύουμε λοιπόν ότι ο α_n, ο οποίος θα ονομάζεται n-οστός συντελεστής Fourier ημιτόνων της f, είναι ο

$$\alpha_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} f(x) \sin nx\, dx. \tag{1.1.6}$$

Θα επιστρέψουμε σε αυτόν τον τύπο, και σε άλλους παρόμοιους, αργότερα.

Μπορούμε να μετασχηματίσουμε το ερώτημα για τη σειρά Fourier ημιτόνων στο $[0, \pi]$ σε ένα πιο γενικό ερώτημα στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Αν μπορούσαμε να εκφράσουμε την f στο $[0, \pi]$ ως σειρά ημιτόνων, τότε αυτό το ανάπτυγμα θα ίσχυε και στο $[-\pi, \pi]$ αν επεκτείναμε την f σε αυτό το διάστημα κάνοντάς την περιττή. Όμοια, μπορούμε να ρωτήσουμε αν μια άρτια συνάρτηση $g(x)$ στο $[-\pi, \pi]$ μπορεί να εκφραστεί ως σειρά συνημιτόνων, δηλαδή

$$g(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha'_m \cos mx.$$

Πιο γενικά, αφού κάθε συνάρτηση F στο $[-\pi, \pi]$ γράφεται στη μορφή $f + g$, όπου η f είναι περιττή και η g άρτια, μπορούμε να ρωτήσουμε αν η F γράφεται στη μορφή

$$F(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin mx + \sum_{m=0}^{\infty} \alpha'_m \cos mx,$$

ή, εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Euler $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, θα μπορούσαμε να ελπίζουμε ότι η F παίρνει τη μορφή

$$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}.$$

Κατ' αναλογία προς την (1.1.6) μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{imx}\, e^{-inx}\, dx = \begin{cases} 0, & \text{αν; } m \neq n \\ 1, & \text{αν } \ m = n, \end{cases}$$

και να δούμε ότι αναμένουμε να ισχύει η

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F(x) e^{-inx} dx.$$

Η ποσότητα c_n είναι ο n-οστός *συντελεστής Fourier* της F.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε εκ νέου το πρόβλημα που τέθηκε παραπάνω:

> **Ερώτημα**: Αν μας δοθεί μια λογική συνάρτηση F στο $[-\pi, \pi]$, με συντελεστές Fourier όπως ορίστηκαν πιο πάνω, είναι σωστό ότι
>
> $$F(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} c_m e^{imx}\,; \tag{1.1.7}$$

Αυτή η διατύπωση του προβλήματος, μέσω μιγαδικών εκθετικών, είναι η μορφή που θα χρησιμοποιούμε περισσότερο στη συνέχεια του μαθήματος.

Ο Joseph Fourier (1768-1830) ήταν ο πρώτος που πίστεψε ότι η «τυχούσα» συνάρτηση F θα μπορούσε να αναπαρίσταται από μια σειρά όπως η (1.1.7). Με άλλα λόγια, η ιδέα του ήταν ότι κάθε συνάρτηση είναι γραμμικός συνδυασμός (ενδεχομένως άπειρος) των πιο βασικών τριγωνομετρικών συναρτήσεων $\sin mx$ και $\cos mx$, όπου το m διατρέχει τους ακεραίους. Αν και αυτή η ιδέα είχε εμμέσως εμφανιστεί σε προηγούμενες δουλειές, ο Fourier είχε την πεποίθηση που έλειπε από τους προηγούμενούς του, και την χρησιμοποίησε στη μελέτη του για την διάχυση της θερμότητας. Έτσι ξεκίνησε το αντικείμενο της «ανάλυσης Fourier». Αυτός ο κλάδος, ο οποίος αναπτύχθηκε αρχικά με στόχο την επίλυση κάποιων προβλημάτων της φυσικής, βρήκε πολλές εφαρμογές στα μαθηματικά και άλλες επιστήμες, όπως θα δούμε.

Επιστρέφουμε στην κυματική εξίσωση. Για να διατυπώσουμε το πρόβλημα σωστά, πρέπει να επιβάλουμε δύο αρχικές συνθήκες, όπως δείχνει η εμπειρία μας με την απλή αρμονική ταλάντωση και τα οδεύοντα κύματα. Οι συνθήκες προσδιορίζουν την αρχική θέση και ταχύτητα της χορδής. Δηλαδή, απαιτούμε από την u να ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση και τις δύο συνθήκες

$$u(x,0) = f(x) \quad \text{και} \quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x),$$

όπου f και g είναι προκαθορισμένες συναρτήσεις. Παρατηρήστε ότι αυτό είναι συνεπές προς την (1.1.4) με την έννοια ότι απαιτεί οι f και g να εκφράζονται ως

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m \sin mx \quad \text{και} \quad g(x) = \sum_{m=1}^{\infty} m\beta_m \sin mx.$$

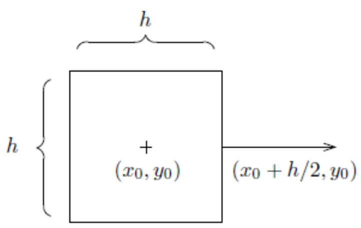
1.2 Η εξίσωση της θερμότητας

Σε αυτή την ενότητα θα συζητήσουμε το πρόβλημα της διάχυσης της θερμότητας ακολουθώντας το ίδιο πλαίσιο όπως για την κυματική εξίσωση. Αρχικά, παράγουμε την χρονο-εξαρτημένη εξίσωση της θερμότητας, και στη συνέχεια μελετάμε την εξίσωση της θερμότητας σταθερής κατάστασης στον δίσκο, η οποία μας οδηγεί πίσω στο βασικό πρόβλημα (1.1.7).

1.2.1 Παραγωγή της εξίσωσης της θερμότητας

Θεωρούμε μια άπειρη μεταλλική πλάκα την οποία σκεφτόμαστε ως το $\mathbb{R}^2$, και υποθέτουμε ότι μας έχει δοθεί μια αρχική κατανομή θερμότητας τη χρονική στιγμή $t = 0$. Συμβολίζουμε τη θερμοκρασία στο σημείο (x, y) την χρονική στιγμή t με $u(x, y, t)$.

Θεωρούμε ένα μικρό τετράγωνο S με κέντρο το (x_0, y_0), το οποίο έχει τις πλευρές του παράλληλες στους άξονες, με μήκος h, όπως φαίνεται στο Σχήμα 1.8.



Σχήμα 1.8: Ροή θερμότητας διαμέσου ενός μικρού τετραγώνου

Η ποσότητα της θερμικής ενέργειας στο S τη χρονική στιγμή t δίνεται από την

$$H(t) = \iint_S u(x,y,t)\,dx\,dy,$$

όπου σ είναι μια σταθερά που ονομάζεται ειδική θερμότητα του υλικού. Συνεπώς, η ροή θερμότητας στο S είναι ίση με

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \sigma \iint_S \frac{\partial u}{\partial t}\, dx\, dy,$$

που είναι κατά προσέγγιση ίση με

$$\sigma h^2 \frac{\partial u}{\partial t}(x_0, y_0, t),$$

αφού το εμβαδόν του S είναι h^2. Τώρα εφαρμόζουμε το νόμο του Νεύτωνα: η θερμότητα ρέει από την υψηλότερη προς την χαμηλότερη θερμοκρασία με ρυθμό ανάλογο προς τη διαφορά, δηλάδη, την κλίση.

Άρα, η ροή θερμότητας διαμέσου της κατακόρυφης πλευράς στα δεξιά είναι ίση με

$$-\kappa h \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + h/2, y_0, t),$$

όπου $\kappa > 0$ είναι η αγωγιμότητα του υλικού. Παρόμοιο επιχείρημα για τις άλλες πλευρές δείχνει ότι η συνολική ροή θερμότητας διαμέσου του τετραγώνου S δίνεται από την

$$\kappa h \left[\frac{\partial u}{\partial x}(x_0 + h/2, y_0, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0 - h/2, y_0, t) + \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0 + h/2, t) - \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0 - h/2, t) \right].$$

Εφαρμόζοντας το θεώρημα μέσης τιμής και αφήνοντας το h να τείνει στο 0, βλέπουμε ότι

$$\frac{\sigma}{\kappa} \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}.$$

Αυτή είναι η χρονο-εξαρτημένη εξίσωση της θερμότητας, την οποία συχνά λέμε εξίσωση της θερμότητας για συντομία.

1.2.2 Εξίσωση της θερμότητας σταθερής κατάστασης στον δίσκο

Μετά από ένα μεγάλο χρονικό διάστημα, δεν υπάρχει πλέον ανταλλαγή θερμότητας, δηλαδή το σύστημα φτάνει σε θερμική ισορροπία και έχουμε $\partial u/\partial t = 0$. Σε αυτή την περίπτωση η χρονο-εξαρτημένη εξίσωση της θερμότητας ανάγεται στην *εξίσωση της θερμότητας σταθερής κατάστασης*

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \tag{1.2.1}$$

Ο τελεστής $\partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ είναι τόσο σημαντικός στα μαθηματικά και τη φυσική που συχνά συμβολίζεται με Δ και φέρει το όνομα τελεστής Laplace ή *Λαπλασιανή*. Έτσι, η εξίσωση της θερμότητας σταθερής κατάστασης γράφεται στη μορφή

$$\Delta u = 0,$$

και οι λύσεις αυτής της εξίσωσης ονομάζονται *αρμονικές συναρτήσεις*.

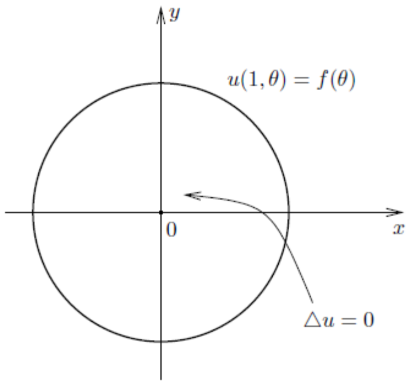
Θεωρούμε τον μοναδιαίο δίσκο στο επίπεδο

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 < 1\}$$

που έχει ως σύνορο τον μοναδιαίο κύκλο C. Σε πολικές συντεταγμένες (r, ϑ), με $0 \leqslant r$ και $0 \leqslant \vartheta < 2\pi$, έχουμε

$$D = \{(r, \vartheta) : 0 \leqslant r < 1\} \quad \text{και} \quad C = \{(r, \vartheta) : r = 1\}.$$

Το πρόβλημα, το οποίο συχνά ονομάζεται πρόβλημα Dirichlet (για τη Λαπλασιανή στον μοναδιαίο δίσκο), είναι να λυθεί η εξίσωση της θερμότητας σταθερής κατάστασης στον μοναδιαίο δίσκο αν επιβάλουμε τη συνοριακή συνθήκη $u = f$ στον C. Αυτό αντιστοιχεί στο να σταθεροποιήσουμε μια προκαθορισμένη κατανομή θερμοκρασίας στον κύκλο, να περιμένουμε για πολύ καιρό, και μετά να κοιτάξουμε την κατανομή θερμοκρασίας στο εσωτερικό του δίσκου.



Σχήμα 1.9: Το πρόβλημα Dirichlet για τον δίσκο

Παρόλο που η μέθοδος του χωρισμού μεταβλητών θα μας φανεί χρήσιμη για την εξίσωση (1.2.1), μια δυσκολία πηγάζει από το γεγονός ότι η συνοριακή συνθήκη δεν εκφράζεται εύκολα συναρτήσει των ορθογώνιων συντεταγμένων. Δεδομένου ότι αυτή η συνοριακή συνθήκη περιγράφεται με τον καλύτερο τρόπο από τις συντεταγμένες (r, ϑ), δηλαδή $u(1, \vartheta) = f(\vartheta)$, ξαναγράφουμε τη Λαπλασιανή σε πολικές συντεταγμένες. Εφαρμόζοντας τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}.$$

Τώρα πολλαπλασιάζουμε και τα δύο μέλη με r^2, και αφού $\Delta u = 0$, παίρνουμε

$$r^2\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + r\frac{\partial u}{\partial r} = -\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2}.$$

Χωρίζοντας αυτές τις μεταβλητές, και κοιτάζοντας για μια λύση της μορφής $u(r, \vartheta) = F(r)G(\vartheta)$, βλέπουμε ότι

$$\frac{r^2 F''(r) + rF'(r)}{F(r)} = -\frac{G''(\vartheta)}{G(\vartheta)}.$$

Αφού τα δύο μέλη εξαρτώνται από διαφορετικές μεταβλητές, πρέπει και τα δύο να είναι σταθερά, ας πούμε ίσα με λ. Παίρνουμε έτσι τις ακόλουθες εξισώσεις:

$$\begin{aligned} &G''(\vartheta) + \lambda G(\vartheta) = 0, \\ &r^2 F''(r) + rF'(r) - \lambda F(r) = 0. \end{aligned}$$

Αφού η G πρέπει να είναι περιοδική με περίοδο 2π, συμπεραίνουμε ότι $\lambda \geqslant 0$ και (όπως έχουμε ήδη δεί) ισχύει ότι $\lambda = m^2$, όπου m είναι ένας ακέραιος. Άρα,

$$G(\vartheta) = \tilde{\alpha}\cos m\vartheta + \tilde{\beta}\sin m\vartheta.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Euler, $e^{ix} = \cos x + i \sin x$, μπορούμε να ξαναγράψουμε την G συναρτήσει μιγαδικών εκθετικών ως

$$G(\vartheta) = Ae^{im\vartheta} + Be^{-im\vartheta}.$$

Εάν $\lambda = m^2$ και $m \neq 0$, δύο απλές λύσεις της εξίσωσης ως προς F είναι οι $F(r) = r^m$ και $F(r) = r^{-m}$. Εάν $m = 0$, τότε οι $F(r) = 1$ και $F(r) = \ln r$ είναι δύο λύσεις. Εάν $m > 0$, παρατηρούμε ότι η r^{-m} δεν είναι φραγμένη καθώς το r τείνει στο 0, άρα η $F(r)G(\vartheta)$ δεν είναι φραγμένη στην αρχή των αξόνων. Το ίδιο συμβαίνει εάν $m = 0$ και $F(r) = \ln r$. Απορρίπτουμε αυτές τις λύσεις γιατί δεν συμφωνούν με τη διαίσθησή μας. Συνεπώς, μας απομένουν οι παρακάτω ειδικές συναρτήσεις:

$$u_m(r, \vartheta) = r^{|m|} e^{im\vartheta}, \qquad m \in \mathbb{Z}.$$

Τώρα κάνουμε τη σημαντική παρατήρηση ότι η εξίσωση (1.2.1) είναι *γραμμική* και έτσι, όπως στην περίπτωση της παλλόμενης χορδής, μπορούμε να υπερθέσουμε τις παραπάνω ειδικές λύσεις και να πάρουμε τη γενική λύση που εικάζουμε:

$$u(r, \vartheta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m r^{|m|} e^{im\vartheta}.$$

Αν αυτή η έκφραση έδινε όλες τις λύσεις της εξίσωσης της θερμότητας σταθερής κατάστασης, τότε για κάθε λογική f θα είχαμε

$$u(1, \vartheta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\vartheta} = f(\vartheta).$$

Ρωτάμε λοιπόν και πάλι σε αυτό το πλαίσιο: αν μας δοθεί μια λογική συνάρτηση f στο $[0, 2\pi]$ με $f(0) = f(2\pi)$, είναι σωστό ότι μπορούμε να βρούμε συντελεστές a_m ώστε

$$f(\vartheta) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} a_m e^{im\vartheta} \,;$$

1.3 Ασκήσεις

1.1. Έστω $n \in \mathbb{Z}$. Επαληθεύστε ότι η $f(x) = e^{inx}$ είναι περιοδική με περίοδο 2π και ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{inx}\, dx = \begin{cases} 1, & \text{αν } \ n = 0 \\ 0, & \text{αν } \ n \neq 0, \end{cases}$$

Χρησιμοποιώντας αυτό το γεγονός αποδείξτε ότι αν $m, n \geqslant 1$ τότε

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \, \cos mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{αν } \ m \neq n \\ 1, & \text{αν } \ m = n, \end{cases}$$

και όμοια

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \sin mx \, dx = \begin{cases} 0, & \text{αν; } m \neq n \\ 1, & \text{αν } \ m = n, \end{cases}$$

Τέλος, δείξτε ότι

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \, \cos mx \, dx = 0 \quad \text{για κάθε } n, m.$$

[*Υπόδειξη:* Υπολογίστε τους $e^{inx}e^{-imx} + e^{inx}e^{imx}$ και $e^{inx}e^{-imx} - e^{inx}e^{imx}$.]

1.2. Αποδείξτε ότι αν η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ η οποία είναι λύση της εξίσωσης

$$f''(t) + c^2 f(t) = 0,$$

τότε υπάρχουν σταθερές a και b ώστε

$$f(t) = a\cos ct + b\sin ct.$$

Αυτό μπορεί να γίνει με παραγώγιση των συναρτήσεων $g(t) = f(t)\cos ct - c^{-1}f'(t)\sin ct$ και $h(t) = f(t)\sin ct + c^{-1}f'(t)\cos ct$.

1.3. Δείξτε ότι αν a και b είναι πραγματικοί αριθμοί, τότε μπορούμε να γράψουμε

$$a\cos ct + b\sin ct = A\cos(ct - \varphi),$$

όπου $A = \sqrt{a^2 + b^2}$ και ο φ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \quad \text{και} \quad \sin\varphi = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}.$$

1.4. Έστω F μια συνάρτηση στο (a, b) με δύο συνεχείς παραγώγους. Αποδείξτε ότι αν τα x και $x + h$ ανήκουν στο (a, b), μπορούμε να γράψουμε

$$F(x+h) = F(x) + hF'(x) + \frac{h^2}{2}F''(x) + h^2\varphi(h),$$

όπου $\varphi(h) \to 0$ καθώς το $h \to 0$. Συμπεράνατε από αυτό ότι

$$\frac{F(x+h) + F(x-h) - 2F(x)}{h^2} \longrightarrow f''(x) \quad \text{καθώς το } h \to 0.$$

[*Υπόδειξη:* Αυτό είναι απλή εφαρμογή του θεωρήματος Taylor. Παρατηρήστε ότι

$$F(x+h) - F(x) = \int_x^{x+h} F'(y)\,dy,$$

και μετά γράψτε $F'(y) = F'(x) + (y-x)F''(x) + (y-x)\psi(y-x)$, όπου $\psi(h) \to 0$ καθώς το $h \to 0$.]

1.5. Δείξτε ότι η Λαπλασιανή

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

δίνεται σε πολικές συντεταγμένες από τον τύπο

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial\vartheta^2}.$$

Επίσης, αποδείξτε ότι

$$\left|\frac{\partial u}{\partial x}\right|^2 + \left|\frac{\partial u}{\partial y}\right|^2 = \left|\frac{\partial u}{\partial r}\right|^2 + \frac{1}{r^2}\left|\frac{\partial u}{\partial\vartheta}\right|^2.$$

1.6. Δείξτε ότι αν $n \in \mathbb{Z}$ τότε οι μόνες λύσεις της διαφορικής εξίσωσης

$$r^2F''(r) + rF'(r) - n^2F(r) = 0,$$

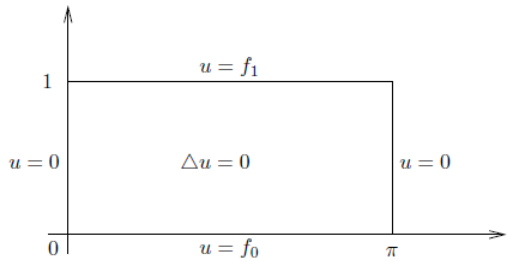
οι οποίες είναι δύο φορές παραγωγίσιμες όταν $r > 0$, δίνονται από γραμμικούς συνδυασμούς των r^n και r^{-n} όταν $n \neq 0$, και γραμμικούς συνδυασμούς των 1 και $\ln r$ όταν $n = 0$.

[*Υπόδειξη:* Αν η F λύνει την εξίσωση, γράψτε $F(r) = g(r)r^n$, βρείτε την εξίσωση που ικανοποιεί η g, και συμπεράνατε ότι $rg'(r) + 2bg(r) = c$, όπου c είναι μια σταθερά.]

1.7. Θεωρήστε το πρόβλημα Dirichlet που περιγράφεται στο Σχήμα 1.10. Πιο συγκεκριμένα, ψάχνουμε μια λύση της εξίσωσης της θερμότητας σταθερής κατάστασης $\Delta u = 0$ στο ορθογώνιο $R = \{(x, y) : 0 \leqslant x \leqslant \pi, 0 \leqslant y \leqslant 1\}$, η οποία μηδενίζεται στις κατακόρυφες πλευρές του R και ικανοποιεί τις

$$u(x, 0) = f_0(x) \quad \text{και} \quad u(x, 1) = f_1(x),$$

όπου οι f_0 και f_1 είναι αρχικά δεδομένα που σταθεροποιούν την κατανομή θερμοκρασίας στις οριζόντιες πλευρές του ορθογωνίου.



Σχήμα 1.10: Το πρόβλημα Dirichlet σε ένα ορθογώνιο

Χρησιμοποιώντας χωρισμό μεταβλητών δείξτε ότι αν οι f_0 και f_1 έχουν αναπτύγματα Fourier

$$f_0(x) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \sin kx \quad \text{και} \quad f_1(x) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k \sin kx,$$

τότε

$$u(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\sinh k(1-y)}{\sinh k} A_k + \frac{\sinh ky}{\sinh k} B_k \right) \sin kx.$$

Υπενθυμίζουμε τους ορισμούς του υπερβολικού ημιτόνου και συνημιτόνου:

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2} \quad \text{και} \quad \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}.$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Ολοκλήρωμα Riemann

Σε αυτό το κεφάλαιο υπενθυμίζουμε τον ορισμό και τις βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann στο $\mathbb{R}$, και τη θεωρία ολοκλήρωσης κατάλληλων συνεχών συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^d$. Παραλείπουμε αρκετές λεπτομέρειες διότι υποθέτουμε ότι ο αναγνώστης είναι ήδη αρκετά εξοικειωμένος με αυτό το υλικό.

Ξεκινάμε με τη θεωρία του ολοκληρώματος Riemann σε ένα κλειστό και φραγμένο διάστημα της πραγματικής ευθείας. Εκτός από τα βασικά αποτελέσματα για το ολοκλήρωμα, θα συζητήσουμε την έννοια του συνόλου μέτρου 0 και θα δώσουμε μια ικανή και αναγκαία συνθήκη για το σύνολο των σημείων ασυνέχειας μιας φραγμένης συνάρτησης που εξασφαλίζει την ολοκληρωσιμότητά της.

Συζητάμε επίσης πολλαπλά και επαναλαμβανόμενα ολοκληρώματα. Ειδικότερα, επεκτείνουμε την έννοια του ολοκληρώματος σε ολόκληρο τον $\mathbb{R}^d$ περιορίζοντας τη μελέτη μας σε συναρτήσεις που φθίνουν αρκετά γρήγορα στο άπειρο.

2.1 Ολοκλήρωμα Riemann

Έστω $[a,b]$ ένα κλειστό διάστημα. *Διαμέριση* του $[a,b]$ θα λέμε κάθε πεπερασμένο υποσύνολο $P = \{x_0, x_1, \ldots, x_n\}$ του $[a,b]$ με $x_0 = a < x_1 < \cdots < x_n = b$. Θα γράφουμε $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ για να τονίσουμε αυτήν ακριβώς τη διάταξη.

Κάθε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ χωρίζει το $[a,b]$ σε n υποδιαστήματα $[x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Ονομάζουμε *πλάτος* της διαμέρισης P τον αριθμό

$$\|P\| = \max\{x_1 - x_0, x_2 - x_1, \ldots, x_n - x_{n-1}\}.$$

Παρατηρήστε ότι δεν απαιτούμε από τα $[x_k, x_{k+1}]$ να έχουν το ίδιο μήκος.

Η διαμέριση P_1 λέγεται *εκλέπτυνση* της P αν $P \subseteq P_1$, δηλαδή αν η P_1 προκύπτει από την P με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν P_1, P_2 είναι δύο διαμερίσεις του $[a,b]$, η *κοινή εκλέπτυνση* των P_1, P_2 είναι η διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$.

Θεωρούμε τώρα μια *φραγμένη* συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ και μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$. Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ορίζουμε τους πραγματικούς αριθμούς

$$m_k(f,P) = m_k = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}$$

και

$$M_k(f,P) = M_k = \sup\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}.$$

Το άνω και το κάτω άθροισμα της f ως προς την P είναι οι αριθμοί

$$U(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} M_k(x_{k+1} - x_k)$$

και

$$L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} m_k(x_{k+1} - x_k)$$

αντίστοιχα. Είναι φανερό ότι για κάθε διαμέριση P ισχύει

$$L(f,P) \leqslant U(f,P)$$

αφού $m_k \leqslant M_k$ και $x_{k+1} - x_k > 0$, $k = 0,1,\dots,n-1$. Ισχύει όμως μια πολύ πιο ισχυρή ανισότητα:

Λήμμα 2.1.1. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και P_1, P_2 δύο διαμερίσεις του $[a,b]$. Τότε,*

$$L(f,P_1) \leqslant U(f,P_2).$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται στον ακόλουθο ισχυρισμό:

> Έστω $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ και $x_k < y < x_{k+1}$ για κάποιο $k = 0,1,\dots,n-1$. Αν $P_1 = P \cup \{y\}$, τότε
>
> $$L(f,P) \leqslant L(f,P_1) \leqslant U(f,P_1) \leqslant U(f,P).$$

Απόδειξη του ισχυρισμού:. Θέτουμε $m_k^{(1)} = \inf\{f(x) : x_k \leqslant x \leqslant y\}$ και $m_k^{(2)} = \inf\{f(x) : y \leqslant x \leqslant x_{k+1}\}$. Τότε, $m_k \leqslant m_k^{(1)}$ και $m_k \leqslant m_k^{(2)}$ (διότι $A \subseteq B \Longrightarrow \inf B \leqslant \inf A$). Επομένως,

$$L(f,P_1) - L(f,P) = m_k^{(1)}(y - x_k) + m_k^{(2)}(x_{k+1} - y) - m_k(x_{k+1} - x_k) \geqslant 0.$$

Εντελώς ανάλογα δείχνουμε ότι $U(f,P_1) \leqslant U(f,P)$. □

Για την απόδειξη του λήμματος θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$ των P_1 και P_2. Η P προκύπτει από την P_1 με προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων. Αν εφαρμόσουμε τον ισχυρισμό πεπερασμένες το πλήθος φορές, παίρνουμε $L(f,P_1) \leqslant L(f,P)$.

Αφού η P προκύπτει από την P_2 με την προσθήκη πεπερασμένων το πλήθος σημείων, όμοια βλέπουμε ότι $U(f,P) \leqslant U(f,P_2)$. Από την άλλη πλευρά, $L(f,P) \leqslant U(f,P)$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, έχουμε $L(f,P_1) \leqslant L(f,P) \leqslant U(f,P) \leqslant U(f,P_2)$. □

Ορισμός 2.1.2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Ορίζουμε σαν *κάτω ολοκλήρωμα* της f στο $[a,b]$ το

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup\Big\{L(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\}$$

και σαν *άνω ολοκλήρωμα* της f στο $[a,b]$ το

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf\Big\{U(f,P) : P \text{ διαμέριση του } [a,b]\Big\}.$$

Από το Λήμμα 2.1.1 έχουμε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται *Riemann ολοκληρώσιμη* αν

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Η κοινή αυτή τιμή λέγεται *ολοκλήρωμα Riemann* της f στο $[a,b]$ και συμβολίζεται με

$$\int_a^b f(x)dx \quad \text{ή} \quad \int_a^b f.$$

2.1.1 Το κριτήριο του Riemann

Θεώρημα 2.1.3 (κριτήριο Riemann). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ τέτοια ώστε*

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx.$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Από τον ορισμό του κάτω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_1 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx < L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Από τον ορισμό του άνω ολοκληρώματος, υπάρχει διαμέριση P_2 του $[a,b]$ τέτοια ώστε

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx > U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε την κοινή εκλέπτυνση $P = P_1 \cup P_2$. Τότε,

$$U(f,P) - \frac{\varepsilon}{2} \leqslant U(f,P_2) - \frac{\varepsilon}{2} < \overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx < L(f,P_1) + \frac{\varepsilon}{2} \leqslant L(f,P) + \frac{\varepsilon}{2},$$

απ' όπου έπεται ότι $0 \leqslant U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$.

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει διαμέριση P_ε του $[a,b]$ τέτοια ώστε $U(f,P_\varepsilon) <$

$L(f,P_\varepsilon)+\varepsilon$. Τότε,

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant U(f,P_\varepsilon) < L(f,P_\varepsilon)+\varepsilon \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon,$$

δηλαδή

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \underline{\int_a^b} f(x)dx+\varepsilon$$

για κάθε $\varepsilon>0$. Έπεται ότι

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx,$$

δηλαδή η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Παρατήρηση 2.1.4. Είναι μια απλή άσκηση (στις ακολουθίες) να δούμε ότι το κριτήριο του Riemann είναι ισοδύναμο με την εξής πρόταση: Μια φραγμένη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{P_n\}_{n=1}^{\infty}$ διαμερίσεων του $[a,b]$ τέτοια ώστε $U(f,P_n)-L(f,P_n)\longrightarrow 0$ καθώς το $n\to\infty$.

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann μπορούμε να δείξουμε ότι οι μονότονες και οι συνεχείς $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες.

Θεώρημα 2.1.5. *Κάθε μονότονη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι η f είναι αύξουσα. Η f είναι προφανώς φραγμένη. Για κάθε $n\in\mathbb{N}$ θεωρούμε τη διαμέριση $P_n=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_{n-1}<x_n=b\}$ του $[a,b]$ σε n ίσα υποδιαστήματα. Δηλαδή,

$$x_k=a+\frac{k(b-a)}{n}, \qquad k=0,1,\dots,n.$$

Τότε, αφού η f είναι αύξουσα έχουμε

$$U(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}M_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_{k+1})\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\cdot\left(f(x_1)+\cdots+f(x_n)\right),$$

ενώ

$$L(f,P_n)=\sum_{k=0}^{n-1}m_k(x_{k+1}-x_k)=\sum_{k=0}^{n-1}f(x_k)\frac{b-a}{n}=\frac{b-a}{n}\cdot\left(f(x_0)+\cdots+f(x_{n-1})\right).$$

Άρα,

$$U(f,P_n)-L(f,P_n)=\frac{[f(x_n)-f(x_0)](b-a)}{n}=\frac{[f(b)-f(a)](b-a)}{n}\to 0.$$

Από την Παρατήρηση 2.1.4 έπεται ότι η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Θεώρημα 2.1.6. *Κάθε συνεχής συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon>0$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[a,b]$, άρα ομοιόμορφα συνεχής. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $\delta>0$ με την εξής ιδιότητα:

Αν $x,y\in[a,b]$ και $|x-y|<\delta$, τότε $|f(x)-f(y)|<\frac{\varepsilon}{b-a}$.

Μπορούμε επίσης να βρούμε $n \in \mathbb{N}$ τέτοιο ώστε

$$\frac{b-a}{n} < \delta.$$

Χωρίζουμε το $[a, b]$ σε n υποδιαστήματα του ιδίου μήκους $\frac{b-a}{n}$. Θεωρούμε δηλαδή τη διαμέριση P_n που αποτελείται από τα σημεία

$$x_k = a + \frac{k(b-a)}{n}, \qquad k = 0, 1, \ldots, n.$$

Έστω $k = 0, 1, \ldots, n-1$. Η f είναι συνεχής στο κλειστό διάστημα $[x_k, x_{k+1}]$, άρα παίρνει μέγιστη και ελάχιστη τιμή σε αυτό. Υπάρχουν δηλαδή $y_k', y_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ τέτοια ώστε

$$M_k = f(y_k') \quad \text{και} \quad m_k = f(y_k'').$$

Επιπλέον, το μήκος του $[x_k, x_{k+1}]$ είναι ίσο με $\frac{b-a}{n} < \delta$, άρα

$$|y_k' - y_k''| < \delta.$$

Από την επιλογή του δ παίρνουμε

$$M_k - m_k = f(y_k') - f(y_k'') = |f(y_k') - f(y_k'')| < \frac{\varepsilon}{b-a}.$$

Έπεται ότι

$$U(f, P_n) - L(f, P_n) = \sum_{k=0}^{n-1}(M_k - m_k)(x_{k+1} - x_k), \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varepsilon}{b-a}(x_{k+1} - x_k) = \frac{\varepsilon}{b-a}(b-a) = \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη. □

Παρατήρηση 2.1.7. Μια παρατήρηση που πολλές φορές είναι χρήσιμη για να αποδείξουμε ότι μια φραγμένη συνάρτηση είναι ολοκληρώσιμη είναι η εξής:

> Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a, b)$ με την ιδιότητα ότι για κάθε μικρό $\delta > 0$ η f είναι ολοκληρώσιμη στα διαστήματα $[a, c-\delta]$ και $[c+\delta, b]$. Τότε η f είναι ολοκληρώσιμη.

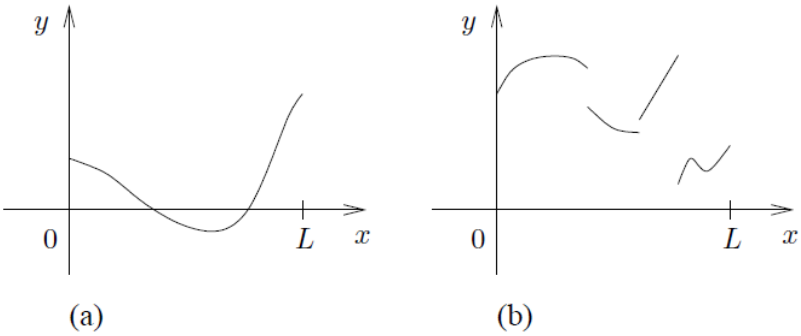
Απόδειξη. Η f είναι φραγμένη, άρα υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a, b]$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε $\delta > 0$, αρκετά μικρό, ώστε $4\delta M \leqslant \varepsilon/3$. Στη συνέχεια βρίσκουμε διαμερίσεις P_1 και P_2 των $[a, c-\delta]$ και $[c+\delta, b]$ αντίστοιχα, έτσι ώστε $U(f, P_1) - L(f, P_1) < \varepsilon/3$ και $U(f, P_2) - L(f, P_2) < \varepsilon/3$. Αυτό μπορεί να γίνει, διότι η f είναι ολοκληρώσιμη σε καθένα από αυτά τα δύο διαστήματα. Τώρα, αν θεωρήσουμε τη διαμέριση $P = P_1 \cup P_2$ παρατηρούμε ότι κάποιο από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P είναι το $[c-\delta, c+\delta]$ και ισχύει ότι

$$\begin{aligned} U(f, P) - L(f, P) &= [U(f, P_1) - L(f, P_1)] + (M^* - m^*)((c+\delta) - (c-\delta)) + [U(f, P_2) - L(f, P_2)] \\ &\leqslant 2\delta(M^* - m^*) + \frac{2\varepsilon}{3}, \end{aligned}$$

όπου

$$M^* = \sup\{f(x) : c-\delta \leqslant x \leqslant c+\delta\} \leqslant M \quad \text{και} \quad m^* = \inf\{f(x) : c-\delta \leqslant x \leqslant c+\delta\} \geqslant -M,$$

άρα $2\delta(M^* - m^*) \leqslant 4\delta M \leqslant \varepsilon/3$, και τελικά, $U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon$. □



Σχήμα 2.1: Συναρτήσεις στο $[0, L]$: (a) συνεχείς και (b) τμηματικά συνεχείς

Ορισμός 2.1.8 (τμηματικά συνεχής συνάρτηση). Μια φραγμένη συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ λέγεται *τμηματικά συνεχής* αν έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας. Χρησιμοποιώντας πεπερασμένες το πλήθος φορές την Παρατήρηση 2.1.7, μία φορά «γύρω» από κάθε σημείο ασυνέχειας, μπορούμε να δείξουμε ότι όλες οι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις είναι ολοκληρώσιμες (αφήνεται ως άσκηση).

2.1.2 Ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann

Σε αυτή την παράγραφο αναφέρουμε τις πιο βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος Riemann και αποδεικνύουμε μερικές από αυτές. Η απόδειξη των υπολοίπων είναι μια καλή άσκηση.

Θεώρημα 2.1.9 (γραμμικότητα του ολοκληρώματος). *Αν $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες συναρτήσεις και $t, s \in \mathbb{R}$, τότε η $tf + sg$ είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b (tf + sg)(x)dx = t \int_a^b f(x)dx + s \int_a^b g(x)dx.$$

Θεώρημα 2.1.10. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση και $c \in (a,b)$. Η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη στα $[a,c]$ και $[c,b]$. Τότε, ισχύει*

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Θεώρημα 2.1.11. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $m \leqslant f(x) \leqslant M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$m(b-a) \leqslant \int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a).$$

Σημείωση. Ο αριθμός

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x)dx$$

είναι η *μέση τιμή* της f στο $[a,b]$.

Πόρισμα 2.1.12. *Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $f(x) \geqslant g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Τότε,*

$$\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx.$$

Θεώρημα 2.1.13. *Έστω $f : [a,b] \to [m,M]$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση και $\varphi : [m,M] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η $\varphi \circ f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Θα βρούμε διαμέριση P του $[a,b]$ με την ιδιότητα $U(\varphi \circ f, P) - L(\varphi \circ f, P) < \varepsilon$. Το ζητούμενο έπεται από το κριτήριο του Riemann.

Η φ είναι συνεχής στο $[m,M]$, άρα είναι φραγμένη: υπάρχει $A > 0$ ώστε $|\varphi(\xi)| \leqslant A$ για κάθε $\xi \in [m,M]$. Επίσης, η φ είναι ομοιόμορφα συνεχής: αν θέσουμε $\varepsilon_1 = \varepsilon/(2A + b - a) > 0$, υπάρχει $0 < \delta < \varepsilon_1$ ώστε, για κάθε $\xi, \eta \in [m,M]$ με $|\xi - \eta| < \delta$ ισχύει $|\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| < \varepsilon_1$.

Εφαρμόζοντας το κριτήριο του Riemann για την ολοκληρώσιμη συνάρτηση f, βρίσκουμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_k < x_{k+1} < \cdots < x_n = b\}$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) = \sum_{k=0}^{n-1} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2.$$

Ορίζουμε

$$I = \{0 \leqslant k \leqslant n-1 : \; M_k(f) - m_k(f) < \delta\}$$
$$J = \{0 \leqslant k \leqslant n-1 : \; M_k(f) - m_k(f) \geqslant \delta\}.$$

Παρατηρούμε τα εξής:

(i) Αν $k \in I$, τότε για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$ έχουμε $|f(x) - f(x')| \leqslant M_k(f) - m_k(f) < \delta$. Παίρνοντας $\xi = f(x)$ και $\eta = f(x')$, έχουμε $\xi, \eta \in [m,M]$ και $|\xi - \eta| < \delta$. Άρα,

$$|(\varphi \circ f)(x) - (\varphi \circ f)(x')| = |\varphi(\xi) - \varphi(\eta)| < \varepsilon_1.$$

Αφού τα x, x' ήταν τυχόντα στο $[x_k, x_{k+1}]$, συμπεραίνουμε ότι $M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f) \leqslant \varepsilon_1$ (εξηγήστε γιατί). Έπεται ότι

$$\sum_{k \in I} (M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leqslant \varepsilon \sum_{k \in I} (x_{k+1} - x_k) \leqslant (b-a)\varepsilon_1.$$

(ii) Για το J έχουμε

$$\delta \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) \leqslant \sum_{k \in J} (M_k(f) - m_k(f))(x_{k+1} - x_k) < \delta^2,$$

άρα

$$\sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < \delta < \varepsilon_1.$$

Επίσης,

$$|(\varphi \circ f)(x) - (\varphi \circ f)(x')| \leqslant |(\varphi \circ f)(x)| + |(\varphi \circ f)(x')| \leqslant 2A$$

για κάθε $x, x' \in [x_k, x_{k+1}]$, άρα $M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f) \leqslant 2A$ για κάθε $k \in J$. Έπεται ότι

$$\sum_{k \in J} (M_k(\varphi \circ f) - m_k(\varphi \circ f))(x_{k+1} - x_k) \leqslant 2A \sum_{k \in J} (x_{k+1} - x_k) < 2A\varepsilon_1.$$

Από τα παραπάνω συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned} U(\varphi\circ f,P)-L(\varphi\circ f,P) &= \sum_{k=0}^{n-1}(M_k(\varphi\circ f)-m_k(\varphi\circ f))(x_{k+1}-x_k) \\ &= \sum_{k\in I}(M_k(\varphi\circ f)-m_k(\varphi\circ f))(x_{k+1}-x_k)+\sum_{k\in J}(M_k(\varphi\circ f)-m_k(\varphi\circ f))(x_{k+1}-x_k) \\ &< (b-a)\varepsilon_1+2A\varepsilon_1=\varepsilon. \end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1.13 μπορούμε να ελέγξουμε εύκολα την ολοκληρωσιμότητα διαφόρων συναρτήσεων που προκύπτουν από τη σύνθεση μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης f με κατάλληλες συνεχείς συναρτήσεις.

Θεώρημα 2.1.14. *Έστω $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Τότε:*

(α) *Η $|f|$ είναι ολοκληρώσιμη και*

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right|\leqslant\int_a^b|f(x)|dx.$$

(β) *Για κάθε $p>0$ η $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη. Ειδικότερα, η f^2 είναι ολοκληρώσιμη.*

(γ) *Η fg είναι ολοκληρώσιμη.*

Απόδειξη. Τα (α) και (β) είναι άμεσες συνέπειες του Θεωρήματος 2.1.13. Για το (γ) γράψτε

$$fg=\frac{(f+g)^2-(f-g)^2}{4}$$

και χρησιμοποιήστε το (β) σε συνδυασμό με το γεγονός ότι οι $f+g$, $f-g$ είναι ολοκληρώσιμες. □

Μια σύμβαση. Ως τώρα ορίσαμε το $\int_a^b f(x)dx$ μόνο στην περίπτωση $a<b$ (δουλεύαμε στο κλειστό διάστημα $[a,b]$). Για πρακτικούς λόγους επεκτείνουμε τον ορισμό και στην περίπτωση $a\geqslant b$ ως εξής:

(α) Αν $a=b$, θέτουμε $\int_a^a f=0$ (για κάθε f).

(β) Αν $a>b$ και η $f:[b,a]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη, ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)dx=-\int_b^a f(x)dx.$$

2.1.3 Σύνολα μηδενικού μέτρου και ασυνέχειες ολοκληρώσιμων συναρτήσεων*

Είδαμε ότι όλες οι τμηματικά συνεχείς συναρτήσεις $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες. Σε αυτή την ενότητα θα μελετήσουμε πιο προσεκτικά τις ασυνέχειες των ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Αρχίζουμε με έναν ορισμό.

Ορισμός 2.1.15. Λέμε ότι ένα υποσύνολο E του $\mathbb{R}$ έχει *μηδενικό μέτρο* (ή *μέτρο* 0) αν για κάθε $\varepsilon>0$ υπάρχει μια αριθμήσιμη οικογένεια ανοικτών διαστημάτων $\{I_k\}_{k=1}^{\infty}$ τέτοια ώστε

(i) $E\subset\bigcup_{k=1}^{\infty}I_k$,

(ii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\ell(I_k)<\varepsilon$, όπου $\ell(I_k)$ είναι το μήκος του διαστήματος I_k.

Η πρώτη συνθήκη μας λέει ότι η ένωση των διαστημάτων καλύπτει το E, και η δεύτερη ότι αυτή η ένωση είναι μικρή. Μπορείτε εύκολα να αποδείξετε ότι κάθε πεπερασμένο σύνολο σημείων έχει μηδενικό μέτρο. Ένα πιο απαιτητικό επιχείρημα χρειάζεται για να αποδείξετε ότι κάθε αριθμήσιμο σύνολο σημείων έχει μηδενικό μέτρο. Θα δούμε την ιδέα που μας το εξασφαλίζει, αποδεικνύοντας το εξής γενικότερο λήμμα.

Λήμμα 2.1.16. *Η ένωση αριθμήσιμων το πλήθος συνόλων μέτρου* 0 *έχει μέτρο* 0.

Απόδειξη. Έστω $E_1, E_2, \dots$ υποσύνολα του $\mathbb{R}$, καθένα από τα οποία έχει μέτρο 0, και ας θέσουμε $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και για κάθε i επιλέγουμε ανοικτά διαστήματα $I_{i,1}, I_{i,2}, \dots$ ώστε

$$E_i \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} I_{i,k} \quad \text{και} \quad \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{i,k}) < \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Είναι φανερό ότι $E \subset \bigcup_{i,k=1}^{\infty} I_{i,k}$, και

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \ell(I_{i,k}) < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^i} = \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, το E έχει μέτρο 0. □

Μια σημαντική παρατήρηση είναι ότι αν το E έχει μέτρο 0 και είναι *συμπαγές* τότε μπορούμε να βρούμε *πεπερασμένα το πλήθος* ανοικτά διαστήματα I_k, $k = 1, \dots, N$, τα οποία ικανοποιούν τις συνθήκες (i) και (ii) του ορισμού. Στο Παράρτημα Α υπενθυμίζουμε τις βασικές τοπολογικές έννοιες στο πλαίσιο του Ευκλείδειου χώρου.

Μπορούμε τώρα να δείξουμε τον χαρακτηρισμό των Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων μέσω του συνόλου των σημείων ασυνέχειάς τους.

Θεώρημα 2.1.17. *Μια φραγμένη συνάρτηση* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *είναι ολοκληρώσιμη αν και μόνο αν το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της* f *έχει μέτρο* 0.

Γράφουμε $J = [a, b]$ και $I(c, r) = (c - r, c + r)$ για το ανοικτό διάστημα με κέντρο το c και ακτίνα $r > 0$. Ορίζουμε την *ταλάντωση της* f *στο* $I(c, r)$ θέτοντας

$$\operatorname{osc}(f, c, r) = \sup\{|f(x) - f(y)| : x, y \in J \cap I(c, r)\}.$$

Η ποσότητα αυτή είναι καλά ορισμένη και παίρνει πραγματική τιμή, διότι η f είναι φραγμένη. Κατόπιν, ορίζουμε την *ταλάντωση της* f *στο* c θέτοντας

$$\operatorname{osc}(f, c) = \lim_{r \to 0^+} \operatorname{osc}(f, c, r).$$

Το όριο αυτό υπάρχει διότι η $\operatorname{osc}(f, c, r)$ είναι $\geqslant 0$ και φθίνει καθώς $r \to 0^+$. Η βασική παρατήρηση είναι ότι η f είναι συνεχής στο c αν και μόνο αν $\operatorname{osc}(f, c) = 0$. Αυτό είναι φανερό από τους ορισμούς (εξηγήστε τις λεπτομέρειες). Για κάθε $\varepsilon > 0$ ορίζουμε ένα σύνολο A_ε ως εξής:

$$A_\varepsilon := \{c \in J : \operatorname{osc}(f, c) \geqslant \varepsilon\}.$$

Τότε, το σύνολο των σημείων του J στα οποία η f είναι ασυνεχής είναι η ένωση $D := \bigcup_{\varepsilon > 0} A_\varepsilon$. Αυτό το βήμα θα παίξει σημαντικό ρόλο στην απόδειξη του θεωρήματος.

Λήμμα 2.1.18. *Για κάθε* $\varepsilon > 0$ *το σύνολο* A_ε *είναι κλειστό, συνεπώς συμπαγές.*

Απόδειξη. Το επιχείρημα είναι απλό. Έστω $c_n \in A_\varepsilon$ με $c_n \to c$, και ας υποθέσουμε ότι $c \notin A_\varepsilon$. Γράφουμε $\operatorname{osc}(f, c) = \varepsilon - \delta$ για κάποιο $\delta > 0$. Επιλέγουμε $r > 0$ τέτοιο ώστε $\operatorname{osc}(f, c, r) < \varepsilon - \delta/2$ και n αρκετά μεγάλο ώστε $|c_n - c| < r/2$. Τότε, $I(c_n, r/2) \subseteq I(c, r)$, άρα $\operatorname{osc}(f, c_n, r/2) \leqslant \operatorname{osc}(f, c, r) < \varepsilon$. Αυτό συνεπάγεται ότι $\operatorname{osc}(f, c_n) < \varepsilon$, και έχουμε καταλήξει σε άτοπο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.17. Υποθέτουμε αρχικά ότι το σύνολο D των σημείων ασυνέχειας της f έχει μέτρο 0, και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Αφού $A_\varepsilon \subset D$, το A_ε έχει μέτρο 0, και αφού το A_ε είναι συμπαγές μπορούμε να το καλύψουμε με πεπερασμένα το πλήθος ανοικτά διαστήματα $I_1, \ldots, I_N$ που έχουν άθροισμα μηκών $\sum_{k=1}^{N} \ell(I_k) < \varepsilon$. Το συμπλήρωμα $I^c = J \setminus I$ της ένωσης $I = I_1 \cup \cdots \cup I_N$ αυτών των διαστημάτων είναι συμπαγές, και γύρω από κάθε σημείο $z \in I$ μπορούμε να βρούμε ένα διάστημα F_z τέτοιο ώστε $\sup_{x,y \in F_z} |f(x) - f(y)| < \varepsilon$, διότι $z \notin A_\varepsilon$. Μπορούμε τώρα να επιλέξουμε πεπερασμένο υποκάλυμμα του καλύμματος $\{F_z : z \in I^c\}$ του I^c, το οποίο συμβολίζουμε με $\{I_{N=1}, \ldots, I_{N_1}\}$. Θεωρώντας όλα τα άκρα των διαστημάτων $I_1, I_2, \ldots, I_{N_1}$ δημιουργούμε μια διαμέριση P του $[a, b]$ και μπορούμε να ελέγξουμε (άσκηση!) ότι

$$U(f, P) - L(f, p) \leqslant 2M \sum_{k=1}^{N} \ell(I_k) + \varepsilon(b - a) \leqslant C\varepsilon,$$

όπου $C = 2M + (b - a)$. Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$.

Αντίστροφα, ας υποθέσουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$, και έστω D το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f. Αφού $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_{1/n}$, αρκεί να δείξουμε ότι κάθε $A_{1/n}$ έχει μέτρο 0. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και επιλέγουμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a, b]$ τέτοια ώστε $U(f, P) - L(f, P) < \varepsilon/n$. Τότε, αν το $A_{1/n}$ τέμνει κάποιο $I_j = (x_{j-1}, x_j)$ πρέπει να έχουμε $\sup_{x \in I_j} f(x) - \inf_{x \in I_j} f(x) \geqslant 1/n$ (εξηγήστε γιατί), και αυτό δείχνει ότι

$$\frac{1}{n} \sum_{\{j : I_j \cap A_{1/n} \neq \varnothing\}} \ell(I_j) \leqslant U(f, P) - L(f, P) < \frac{\varepsilon}{n}.$$

Τότε, παίρνοντας διαστήματα που τέμνουν το $A_{1/n}$ και κάνοντάς τα λίγο μεγαλύτερα, μπορούμε να καλύψουμε το $A_{1/n}$ με ανοικτά διαστήματα που έχουν συνολικό μήκος $\leqslant 2\varepsilon$. Συνεπώς, το $A_{1/n}$ έχει μέτρο 0 και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Σημείωση. Παρατηρήστε ότι χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 2.1.17 μπορούμε να δώσουμε σύντομη εναλλακτική απόδειξη του Θεωρήματος 2.1.13 και των σημαντικών συνεπειών του που συγκεντώσαμε στο Θεώρημα 2.1.14. Ειδικότερα, βλέπουμε αμέσως ότι αν οι $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμες τότε η fg είναι επίσης ολοκληρώσιμη. Εξηγήστε όλους αυτούς τους ισχυρισμούς. Για παράδειγμα, αν D_1 είναι το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της f, D_2 το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της g και D το σύνολο των σημείων ασυνέχειας της fg, είναι φανερό ότι $D \subseteq D_1 \cup D_2$. Αν λοιπόν οι f και g είναι ολοκληρώσιμες, τότε από το Θεώρημα 2.1.17 τα D_1, D_2 έχουν μέτρο 0, από το Λήμμα 2.1.16 βλέπουμε ότι το D έχει επίσης μέτρο 0, και εφαρμόζοντας πάλι το Θεώρημα 2.1.17 συμπεραίνουμε ότι η fg είναι ολοκληρώσιμη.

2.1.4 Ο ορισμός του Riemann*

Ο ορισμός που δώσαμε για την ολοκληρωσιμότητα μιας φραγμένης συνάρτησης $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ οφείλεται στον Darboux. Ο πρώτος αυστηρός ορισμός της ολοκληρωσιμότητας δόθηκε από τον Riemann και είναι ο εξής:

Ορισμός 2.1.19. Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Λέμε ότι η f είναι *ολοκληρώσιμη* στο $[a, b]$ αν υπάρχει ένας πραγματικός αριθμός $I(f)$ με την εξής ιδιότητα:

> Για κάθε $\varepsilon > 0$ μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ είναι διαμέριση του $[a, b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$ και αν $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$, $k = 0, 1, \ldots, n-1$ είναι τυχούσα επιλογή σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P, τότε
>
> $$\left| \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f) \right| < \varepsilon.$$

Σε αυτή την περίπτωση λέμε ότι ο $I(f)$ είναι το (R)-ολοκλήρωμα της f στο $[a, b]$.

Συμβολισμός. Συνήθως γράφουμε Ξ για την επιλογή σημείων $\{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ και $\sum(f, P, \Xi)$ για το άθροισμα

$$\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k).$$

Παρατηρήστε ότι τώρα το Ξ «υπεισέρχεται» στον συμβολισμό $\sum(f,P,\Xi)$, αφού για την ίδια διαμέριση P μπορούμε να έχουμε πολλές διαφορετικές επιλογές $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$.

Θεώρημα 2.1.20. *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux αν και μόνο αν είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Riemann. Γράφουμε $I(f)$ για το ολοκλήρωμα της f με τον ορισμό του Riemann.

Έστω $\varepsilon > 0$. Μπορούμε να βρούμε μια διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ (με αρκετά μικρό πλάτος) ώστε για κάθε επιλογή σημείων $\Xi = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_{n-1}\}$ με $\xi_k \in [x_k, x_{k+1}]$ να ισχύει

$$\left|\sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)(x_{k+1} - x_k) - I(f)\right| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n-1$ μπορούμε να βρούμε $\xi_k', \xi_k'' \in [x_k, x_{k+1}]$ ώστε

$$m_k > f(\xi_k') - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \quad \text{και} \quad M_k < f(\xi_k'') + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}.$$

Άρα,

$$L(f,P) > \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k')(x_{k+1} - x_k) - \frac{\varepsilon}{4} > I(f) - \frac{\varepsilon}{2}$$

και

$$U(f,P) < \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k'')(x_{k+1} - x_k) + \frac{\varepsilon}{4} < I(f) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Έπεται ότι

$$U(f,P) - L(f,P) < \varepsilon,$$

δηλαδή η f είναι ολοκληρώσιμη κατά Darboux. Επίσης,

$$I(f) - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{\int_a^b} f(x)dx \leqslant \overline{\int_a^b} f(x)dx < I(f) + \frac{\varepsilon}{2},$$

και αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν,

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \overline{\int_a^b} f(x)dx = I(f).$$

Δηλαδή,

$$\int_a^b f(x)dx = I(f).$$

Αντίστροφα: υποθέτουμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Darboux. Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$ του $[a,b]$ ώστε

$$U(f,P) - L(f,P) < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Η f είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [a,b]$. Επιλέγουμε

$$\delta = \frac{\varepsilon}{6nM} > 0.$$

Έστω P' διαμέριση του $[a,b]$ με πλάτος $\|P\| < \delta$, *η οποία είναι και εκλέπτυνση της* P. Τότε, για κάθε επιλογή Ξ σημείων από τα υποδιαστήματα που ορίζει η P' έχουμε

$$\int_a^b f(x)dx - \frac{\varepsilon}{4} < L(f,P) \leqslant L(f,P') \leqslant \sum(f,P',\Xi) \leqslant U(f,P') \leqslant U(f,P) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Δηλαδή,

$$\left|\sum(f,P',\Xi)-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Ζητάμε να δείξουμε το ίδιο πράγμα για *τυχούσα* διαμέριση P_1 με πλάτος μικρότερο από δ (η δυσκολία είναι ότι μια τέτοια διαμέριση δεν έχει κανένα λόγο να είναι εκλέπτυνση της P).

Έστω $P_1=\{a=y_0<y_1<\cdots<y_m=b\}$ μια τέτοια διαμέριση του $[a,b]$. Θα «προσθέσουμε» στην P_1 ένα-ένα όλα τα σημεία x_k της P τα οποία δεν ανήκουν στην P_1 (αυτά είναι το πολύ $n-1$).

Ας πούμε ότι ένα τέτοιο x_k βρίσκεται ανάμεσα στα διαδοχικά σημεία $y_l<y_{l+1}$ της P_1. Θεωρούμε την $P_2=P_1\cup\{x_k\}$ και τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)}=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{m-1}\}$ με $\xi_l\in[y_l,y_{l+1}]$, $l=0,1,\dots,m-1$. Επιλέγουμε δύο σημεία $\xi_l'\in[y_l,x_k]$ και $\xi_l''\in[x_k,y_{l+1}]$ και θεωρούμε την επιλογή σημείων $\Xi^{(2)}=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_{l-1},\xi_l',\xi_l'',\dots,\xi_{m-1}\}$ που αντιστοιχεί στην P_2. Έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_2,\Xi^{(2)})\right|&=|f(\xi_l)(y_{l+1}-y_l)-f(\xi_l')(x_k-y_l)-f(\xi_l'')(y_{l+1}-x_k)|\\&\leqslant 3M\max_l|y_{l+1}-y_l|<3M\delta=\frac{\varepsilon}{2n}.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας τη δοσμένη $(P_1,\Xi^{(1)})$ με όλο και λεπτότερες διαμερίσεις $(P_k,\Xi^{(k)})$ που προκύπτουν με την προσθήκη σημείων της P, μετά από n το πολύ βήματα φτάνουμε σε μια διαμέριση P_0 και μια επιλογή σημείων $\Xi^{(0)}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) η P_0 είναι κοινή εκλέπτυνση των P και P_1, και έχει πλάτος μικρότερο από δ.

(β) αφού η P_0 είναι εκλέπτυνση της P, έχουμε

$$\left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})-\int_a^b f(x)dx\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

(γ) αφού κάναμε το πολύ n βήματα για να φτάσουμε στην P_0 και αφού σε κάθε βήμα τα αθροίσματα απείχαν το πολύ $\frac{\varepsilon}{2n}$, έχουμε

$$\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right|<n\frac{\varepsilon}{2n}=\frac{\varepsilon}{2}.$$

Δηλαδή, για την τυχούσα διαμέριση P_1 πλάτους $<\delta$ και για την τυχούσα επιλογή $\Xi^{(1)}$ σημείων από τα υποδιαστήματα της P_1, έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\int_a^b f(x)dx\right|&<\left|\sum(f,P_1,\Xi^{(1)})-\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})\right|+\left|\sum(f,P_0,\Xi^{(0)})-\int_a^b f(x)dx\right|\\&<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι η f είναι ολοκληρώσιμη με τον ορισμό του Riemann, καθώς και ότι οι $I(f)$ και $\int_a^b f(x)dx$ είναι ίσοι. □

2.2 Χώροι ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Σκοπός μας είναι να συζητήσουμε τους κλασικούς χώρους ολοκληρώσιμων συναρτήσεων. Θα ξεκινήσουμε όμως με τον γενικό ορισμό του μετρικού χώρου και του χώρου με νόρμα.

Ορισμός 2.2.1 (μετρική). Έστω X ένα μη κενό σύνολο. *Μετρική* στο X λέγεται κάθε συνάρτηση $d:X\times X\to\mathbb{R}$ με τις παρακάτω ιδιότητες:

(α) $d(x,y)\geqslant 0$ για κάθε $x,y\in X$ και $d(x,y)=0$ αν και μόνον αν $x=y$.

(β) $d(x,y)=d(y,x)$ για κάθε $x,y\in X$.

(γ) $d(x,z) \leqslant d(x,y) + d(y,z)$ για κάθε $x,y,z \in X$.

Σκεφτόμαστε την $d(x,y)$ ως την απόσταση των x και y. Η (γ) είναι η λεγόμενη *τριγωνική ανισότητα.* Αν d είναι μια μετρική στο X τότε το ζεύγος (X,d) λέγεται *μετρικός χώρος*. Τα στοιχεία του X θα λέγονται και *σημεία.*

Το κλασικό παράδειγμα είναι η *συνήθης μετρική* στο $\mathbb{R}$ που ορίζεται ως εξής:

$$d(x,y) = |x-y|, \quad x,y \in \mathbb{R}.$$

Ορισμός 2.2.2 (νόρμα). Έστω X ένας διανυσματικός χώρος πάνω από το $\mathbb{K}$, όπου $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ή $\mathbb{C}$. *Νόρμα* στον X είναι κάθε συνάρτηση $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}$ με τις εξής ιδιότητες:

(α) $\|x\| \geqslant 0$ για κάθε $x \in X$ και $\|x\| = 0$ αν και μόνον αν $x = 0$.

(β) $\|\lambda x\| = |\lambda|\,\|x\|$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$ και κάθε $x \in X$.

(γ) $\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$ για κάθε $x,y \in X$.

Σκεφτόμαστε τη νόρμα $\|x\|$ του x ως την απόσταση του x από το 0. Η (γ) είναι η λεγόμενη *τριγωνική ανισότητα.* Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε το ζεύγος $(X,\|\cdot\|)$ λέγεται *χώρος με νόρμα.*

Παρατήρηση 2.2.3. Αν $\|\cdot\|$ είναι μια νόρμα στον X, τότε η συνάρτηση $d : X \times X \to \mathbb{R}$ με

$$d(x,y) = \|x-y\|, \qquad x,y \in X$$

είναι μετρική (η μετρική που επάγεται στον X από τη νόρμα). Πράγματι,

- $d(x,y) = \|x-y\| \geqslant 0$ για κάθε $x,y \in X$ και ισχύει $d(x,y) = \|x-y\| = 0$ αν και μόνο αν $x = y$.
- $d(y,x) = \|y-x\| = \|(-1)(x-y)\| = |-1| \cdot \|x-y\| = \|x-y\| = d(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$.
- Αν $x,y,z \in X$ τότε $d(x,z) = \|x-z\| = \|(x-y)+(y-z)\| \leqslant \|x-y\| + \|y-z\| = d(x,y) + d(y,z)$.

Επιπλέον, η d είναι συμβατή με τη γραμμική δομή του χώρου:

- Η d είναι αναλλοίωτη ως προς μεταφορές, δηλαδή $d(x+z, y+z) = d(x,y)$ για κάθε $x,y,z \in X$.
- Η d είναι ομογενής, δηλαδή $d(\lambda x, \lambda y) = |\lambda| d(x,y)$ για κάθε $x,y \in X$ και για κάθε $\lambda \in \mathbb{K}$.

Ορισμός 2.2.4 (ο χώρος των συνεχών συναρτήσεων). Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα στο $\mathbb{R}$. Ο χώρος $C[a,b]$ των συνεχών (πραγματικών) συναρτήσεων επί του $[a,b]$ είναι το σύνολο

$$C[a,b] = \{f : [a,b] \to \mathbb{R} \;:\; f \text{ συνεχής}\}.$$

Ο χώρος $C[a,b]$ είναι γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$ με τις κατά σημείο πράξεις. Αν $f,g \in C[a,b]$ και $\lambda \in \mathbb{R}$ ορίζουμε $f+g, \lambda \cdot f : [a,b] \to \mathbb{R}$ με

$$(\lambda \cdot f)(x) := \lambda \cdot f(x) \quad \text{και} \quad (f+g)(x) := f(x) + g(x), \qquad x \in [a,b].$$

Γνωρίζουμε ότι $f+g, \lambda \cdot f \in C[a,b]$, και εύκολα ελέγχουμε ότι η τριάδα $(C[a,b],+,\cdot)$ ικανοποιεί τα αξιώματα του διανυσματικού χώρου.

Στον $C[a,b]$ ορίζουμε την $\|\cdot\|_\infty : C[a,b] \to \mathbb{R}$, με

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in [a,b]\}.$$

Παρατηρήστε ότι το sup όντως υπάρχει, αφού κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη, και το sup είναι στην πραγματικότητα max διότι η $|f|$ ως συνεχής συνάρτηση και ορισμένη σε κλειστό διάστημα παίρνει μέγιστη τιμή. Επίσης, εξ ορισμού έχουμε $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in [a,b]$.

Στον $C[a,b]$ μπορούμε επίσης να θεωρήσουμε την «1-νόρμα»

$$\|f\|_1 := \int_a^b |f(x)|\,dx$$

και γενικότερα, για κάθε $1 \leqslant p < \infty$, την «p-νόρμα»

$$\|f\|_p := \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}.$$

Οι ποσότητες αυτές είναι καλά ορισμένες: αν $f \in C([a,b])$ τότε $|f|^p \in C[a,b]$, άρα η $|f|^p$ είναι ολοκληρώσιμη. Γενικότερα, από το Θεώρημα 2.1.13 έχουμε ότι αν $f \in \mathcal{R}[a,b]$ τότε για κάθε $p > 0$ η συνάρτηση $|f|^p$ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$ η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα στον $C[a,b]$. Οι περιπτώσεις $p = 1$ και $p = \infty$ είναι απλές:

(i) $p = 1$: Έστω $f, g \in C[a,b]$. Τότε,

$$\|f+g\|_1 = \int_a^b |f(x)+g(x)|\,dx \leqslant \int_a^b (|f(x)|+|g(x)|)\,dx = \int_a^b |f(x)|\,dx + \int_a^b |g(x)|\,dx = \|f\|_1 + \|g\|_1.$$

(i) $p = \infty$: Έστω $f, g \in C[a,b]$. Για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$|f(x)+g(x)| \leqslant |f(x)| + |g(x)| \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty,$$

άρα

$$\|f+g\|_\infty = \sup\{|f(x)+g(x)| : x \in [a,b]\} \leqslant \|f\|_\infty + \|g\|_\infty.$$

Για να αποδείξουμε την τριγωνική ανισότητα στην περίπτωση $1 < p < \infty$ θα χρειαστεί να συζητήσουμε τις ανισότητες Holder και Minkowski.

Ορισμός 2.2.5 (συζυγείς εκθέτες). Αν $p, q > 1$ και $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε λέμε ότι οι p και q είναι *συζυγείς εκθέτες*. Συμφωνούμε επίσης ότι ο συζυγής εκθέτης του $p = 1$ είναι ο $q = \infty$.

Πρόταση 2.2.6 (ανισότητα Holder). *Έστω $p, q > 1$ συζυγείς εκθέτες. Τότε, για κάθε $f, g \in C[a,b]$ ισχύει ότι*

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \left(\int_a^b |g(x)|^q\,dx\right)^{1/q},$$

δηλαδή

$$\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Η απόδειξη που θα δώσουμε βασίζεται στην ανισότητα Young.

Λήμμα 2.2.7 (ανισότητα Young). *Αν $x, y \geqslant 0$ και $p, q > 1$ με $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, τότε*

$$xy \leqslant \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = y^q$.

Απόδειξη. Η συνάρτηση $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \ln x$ είναι γνησίως κοίλη. Αν λοιπόν $a, b > 0$ και $t \in (0, 1)$, τότε

$$t \ln a + (1-t) \ln b \leqslant \ln(ta + (1-t)b), \tag{2.2.1}$$

με ισότητα μόνο αν $a = b$. Από την (2.2.1) και τις ιδιότητες του λογαρίθμου, παίρνουμε

$$a^t b^{1-t} \leqslant ta + (1-t)b. \tag{2.2.2}$$

Έστω τώρα $x, y \geqslant 0$. Αν $x = 0$ ή $y = 0$ τότε η ανισότητα του λήμματος ισχύει τετριμμένα αφού το αριστερό μέλος είναι ίσο με 0. Υποθέτουμε λοιπόν ότι $x, y > 0$. Εφαρμόζουμε την ανισότητα (2.2.2) με $a = x^p$, $b = y^q$. Αφού $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, επιλέγοντας $t = \frac{1}{p}$, συμπεραίνουμε ότι

$$xy = a^{1/p} b^{1/q} \leqslant \frac{a}{p} + \frac{b}{q} = \frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q}$$

με ισότητα μόνο αν $x^p = a = b = y^q$. □

Απόδειξη της ανισότητας Holder. Υποθέτουμε πρώτα ότι

$$\|f\|_p^p = \int_a^b |f(x)|^p \, dx = 1 \quad \text{και} \quad \|g\|_q^q = \int_a^b |g(x)|^q \, dx = 1.$$

Από την ανισότητα Young, για κάθε $x \in [a, b]$ ισχύει ότι

$$|f(x)g(x)| \leqslant \frac{1}{p}|f(x)|^p + \frac{1}{q}|g(x)|^q.$$

Ολοκληρώνοντας την τελευταία ανισότητα παίρνουμε

$$\int_a^b |f(x)g(x)| \, dx \leqslant \frac{1}{p} \int_a^b |f(x)|^p \, dx + \frac{1}{q} \int_a^b |g(x)|^q \, dx = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 = \|f\|_p \|g\|_q.$$

Στη γενική περίπτωση: μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f\|_p \neq 0$ και $\|g\|_q \neq 0$ (αλλιώς $f \equiv 0$ ή $g \equiv 0$ από την Άσκηση 2.7, άρα $fg \equiv 0$ και το αριστερό μέλος της ζητούμενης ανισότητας μηδενίζεται, οπότε δεν έχουμε τίποτα να δείξουμε). Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f_1 = \frac{f}{\|f\|_p} \quad \text{και} \quad g_1 = \frac{g}{\|g\|_q}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\int_a^b |f_1(x)|^p \, dx = \frac{1}{\|f\|_p^p} \int_a^b |f(x)|^p \, dx = 1 \quad \text{και} \quad \int_a^b |g_1(x)|^q \, dx = \frac{1}{\|g\|_q^q} \int_a^b |g(x)|^q \, dx = 1.$$

Από την ειδική περίπτωση της ανισότητας που δείξαμε παραπάνω, έχουμε

$$\int_a^b |f_1(x)g_1(x)|\,dx \leqslant 1, \quad \text{δηλαδή,} \quad \int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \|f\|_p\|g\|_q,$$

όπως θέλαμε. □

Παρατήρηση 2.2.8. Στην ειδική περίπτωση $p = 2$, οπότε ο συζυγής εκθέτης του p είναι ο $q = 2$, η ανισότητα Holder παίρνει την εξής μορφή: Για κάθε $f, g \in C[a,b]$ ισχύει ότι

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\,dx \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_a^b |g(x)|^2\,dx\right)^{1/2},$$

δηλαδή $\|fg\|_1 \leqslant \|f\|_2\|g\|_2$. Αυτή είναι η κλασική ανισότητα Cauchy-Schwarz.

Πρόταση 2.2.9 (ανισότητα Minkowski). *Έστω $1 < p < \infty$. Αν $f, g \in C[a,b]$, τότε*

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/p} \leqslant \left(\int_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p} + \left(\int_a^b |g(x)|^p\,dx\right)^{1/p},$$

δηλαδή

$$\|f+g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\|f+g\|_p > 0$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f+g\|_p^p &= \int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx = \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)+g(x)|\,dx\\ &\leqslant \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|f(x)|\,dx + \int_a^b |f(x)+g(x)|^{p-1}|g(x)|\,dx\\ &\leqslant \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}\|f\|_p + \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q}\|g\|_p,\end{aligned}$$

όπου, στο τελευταίο βήμα, εφαρμόσαμε την ανισότητα Holder για τα ζευγάρια $|f+g|^{p-1}, |f|$ και $|f+g|^{p-1}, |g|$. Παρατηρούμε ότι $(p-1)q = p$ (οι p και q είναι συζυγείς εκθέτες). Συνεπώς,

$$\left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^{(p-1)q}\,dx\right)^{1/q} = \left(\int_a^b |f(x)+g(x)|^p\,dx\right)^{1/q} = \|f+g\|_p^{p/q}.$$

Έπεται ότι

$$\|f+g\|_p^p \leqslant \|f+g\|_p^{p/q}\,(\|f\|_p + \|g\|_p).$$

Χρησιμοποιώντας την $p - \frac{p}{q} = 1$ συμπεραίνουμε ότι

$$\|f+g\|_p = \frac{\|f+g\|_p^p}{\|f+g\|_p^{p/q}} \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p,$$

που είναι το ζητούμενο. □

Είναι εύκολο να ελέγξουμε ότι για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$ η $\|\cdot\|_p$ ικανοποιεί τις προϋποθέσεις (α) και (β) της νόρμας. Συνεπώς, έχουμε αποδείξει το εξής.

Θεώρημα 2.2.10. *Για κάθε $1 \leqslant p \leqslant \infty$ ο $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ είναι χώρος με νόρμα.*

Σε κάθε χώρο με νόρμα μπορούμε να μιλήσουμε για συγκλίνουσες ακολουθίες και βασικές ακολουθίες. Αν $(X, \|\cdot\|)$ είναι ένας χώρος με νόρμα και (x_n) μια ακολουθία στον X, λέμε ότι η ακολουθία (x_n) συγκλίνει σε κάποιο $x \in X$, και γράφουμε $x_n \to x$, αν

$$\|x_n - x\| \longrightarrow 0$$

καθώς $n \to \infty$.

Έστω (x_n) μια ακολουθία στον X. Μιμούμενοι τις γνωστές αποδείξεις από τον Απειροστικό Λογισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι:

(α) Αν $x_n \longrightarrow x$ και $x_n \longrightarrow y$ για κάποια $x, y \in X$, τότε $x = y$ (μοναδικότητα του ορίου).

(β) Αν $x_n \longrightarrow x$ για κάποιο $x \in X$, τότε η (x_n) είναι *φραγμένη*. Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε $\|x_n\| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Μια ακολουθία (x_n) στον X λέγεται *βασική* (ή *ακολουθία Cauchy*) αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $m, n \geqslant n_0$ να έχουμε

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon.$$

Πάλι, μιμούμενοι τις γνωστές αποδείξεις από τον Απειροστικό Λογισμό, μπορούμε να δείξουμε ότι:

(α) Αν η (x_n) είναι βασική, τότε είναι φραγμένη.

(β) Αν $x_n \longrightarrow x$ για κάποιο $x \in X$, τότε η (x_n) είναι βασική.

Γνωρίζουμε ότι για ακολουθίες (x_n) στο $\mathbb{R}$ ισχύει και το αντίστροφο του (β). Κάθε βασική ακολουθία συγκλίνει. Σύμφωνα με τον επόμενο ορισμό, αυτό σημαίνει ότι ο $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ είναι *πλήρης*.

Ορισμός 2.2.11 (χώρος Banach). *Ένας χώρος με νόρμα $(X, \|\cdot\|)$ λέγεται πλήρης (ή χώρος Banach) αν κάθε βασική ακολουθία (x_n) στον X είναι συγκλίνουσα, δηλαδή υπάρχει $x \in X$ ώστε $x_n \longrightarrow 0$.*

Δεν είναι σωστό ότι κάθε χώρος με νόρμα είναι πλήρης. Μάλιστα, οι χώροι συναρτήσεων που συζητάμε σε αυτή την ενότητα (με την εξαίρεση του $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$) δεν είναι πλήρεις.

Πρόταση 2.2.12. *Έστω $1 \leqslant p < \infty$. Ο χώρος $(C[a,b], \|\cdot\|_p)$ δεν είναι πλήρης.*

Το παράδειγμα που ακολουθεί αφορά την $\|\cdot\|_1$ και το διάστημα $[0,1]$. Όμως, με κατάλληλη τροποποίησή του μπορείτε να δώσετε πλήρη απόδειξη της Πρότασης 2.2.12.

Παράδειγμα 2.2.13. Θα δείξουμε ότι ο $(C[0,1], \|\cdot\|_1)$ δεν είναι πλήρης. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $(f_n)_{n\geqslant 2}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2} \\ n\left(x - \frac{1}{2}\right) & \text{αν } \frac{1}{2} < x < \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \\ 1 & \text{αν } \frac{1}{2} + \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Δείχνουμε πρώτα ότι η (f_n) είναι βασική ακολουθία ως προς την $\|\cdot\|_1$. Για κάθε $n > m$ έχουμε $a_m = \frac{1}{2} + \frac{1}{m} > \frac{1}{2} + \frac{1}{n} = a_n$ και

$$\begin{aligned}\|f_n - f_m\|_1 &= \int_0^{1/2} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx + \int_{1/2}^{a_m} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx + \int_{a_m}^{1} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \\ &= \int_{1/2}^{a_m} |f_n(x) - f_m(x)|\, dx \leqslant a_m - \frac{1}{2} = \frac{1}{m}.\end{aligned}$$

Έστω τώρα $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$, και αν $n > m \geqslant n_0$, τότε

$$\|f_n - f_m\|_1 \leqslant \frac{1}{m} \leqslant \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

δηλαδή, η (f_n) είναι βασική. Ας υποθέσουμε ότι $f_n \to f$ (ως προς την $\|\cdot\|_1$) για κάποια συνεχή $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Δηλαδή,

$$\int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \longrightarrow 0$$

καθώς το $n \to \infty$. Ειδικότερα,

$$0 \leqslant \int_0^{1/2} |f(x)|\, dx = \int_0^{1/2} |f_n(x) - f(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0,$$

δηλαδή $\int_0^{1/2} |f(x)|\, dx = 0$. Αφού η f είναι συνεχής στο $[0, 1/2]$, πρέπει να ισχύει $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [0, 1/2]$.

Έστω τώρα $\delta \in (1/2, 1)$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\frac{1}{2} + \frac{1}{n} < \delta$ για κάθε $n \geqslant n_0$. Τότε, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $f_n(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$. Όμως,

$$0 \leqslant \int_\delta^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \leqslant \int_0^1 |f_n(x) - f(x)|\, dx \to 0,$$

άρα

$$\int_\delta^1 |1 - f(x)|\, dx = 0.$$

Από τη συνέχεια της f συμπεραίνουμε ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in [\delta, 1]$, και αφού το δ ήταν τυχόν στο $(1/2, 1)$, έπεται ότι $f(x) = 1$ για κάθε $x \in (1/2, 1]$. Όμως, τότε, η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 1/2$, το οποίο είναι άτοπο αφού η f υποτέθηκε συνεχής στο $[0, 1]$. □

Όπως θα δούμε στο επόμενο κεφάλαιο, ο χώρος $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.

2.3 Ασκήσεις

2.1. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $L(f,P) = U(f,P)$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

2.2. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b] \cap \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x) dx = 0.$$

2.3. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $\lambda \in \mathbb{R}$ τέτοιος ώστε: για κάθε

$[\gamma,\delta] \subseteq [a,b]$ ισχύει $\inf\{f(x) : \gamma \leqslant x \leqslant \delta\} \leqslant \lambda$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx \leqslant \lambda(b-a).$$

2.4. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση με

$$\int_a^b f(x)dx > 0.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει $\lambda > 0$ και μη τετριμμένο υποδιάστημα $[\gamma,\delta] \subseteq [a,b]$ ώστε $f(x) \geqslant \lambda$ για κάθε $x \in [\gamma,\delta]$.

2.5. (α) Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ φραγμένη συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι η g είναι συνεχής παντού, εκτός από ένα σημείο $x_0 \in (a,b)$. Αποδείξτε ότι η g είναι ολοκληρώσιμη.

(β) Αποδείξτε ότι κάθε τμηματικά συνεχής συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι ολοκληρώσιμη.

2.6. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία

$$a_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

συγκλίνει στο $\int_0^1 f(x)dx$.

(β) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{1}+\sqrt{2}+\cdots+\sqrt{n}}{n\sqrt{n}} = \frac{2}{3}.$$

2.7. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με $f(x) \geqslant 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

αν και μόνο αν $f(x) = 0$ για κάθε $x \in [a,b]$.

2.8. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Σκοπός αυτής της άσκησης είναι να δείξουμε ότι η f έχει πολλά σημεία συνέχειας.

(α) Υπάρχει διαμέριση P του $[a,b]$ ώστε $U(f,P)-L(f,P) < b-a$ (εξηγήστε γιατί). Αποδείξτε ότι υπάρχουν $a_1 < b_1$ στο $[a,b]$ ώστε $b_1 - a_1 < 1$ και

$$\sup\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} - \inf\{f(x) : a_1 \leq x \leq b_1\} < 1.$$

(β) Επαγωγικά ορίστε κιβωτισμένα διαστήματα $[a_n,b_n] \subseteq (a_{n-1},b_{n-1})$ με μήκος μικρότερο από $1/n$ ώστε

$$\sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} - \inf\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} < \frac{1}{n}.$$

(γ) Η τομή αυτών των κιβωτισμένων διαστημάτων περιέχει ακριβώς ένα σημείο. Αποδείξτε ότι η f είναι συνεχής σε αυτό.

(δ) Τώρα, αποδείξτε ότι η f έχει άπειρα σημεία συνέχειας στο $[a,b]$ (δεν χρειάζεται περισσότερη δουλειά!).

(ε) Έστω $g : [a,b] \to \mathbb{R}$ ολοκληρώσιμη (όχι αναγκαστικά συνεχής) συνάρτηση με $g(x) > 0$ για κάθε $x \in [a,b]$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b g(x)dx > 0.$$

2.9. Θεωρούμε τη συνάρτηση $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$\kappa(x) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \notin \mathbb{Q} \text{ ή } x = 0 \\ \frac{1}{q} & \text{αν } x = \frac{p}{q},\ p,q \in \mathbb{N},\ \text{ΜΚΔ}(p,q) = 1 \end{cases}$$

(α) Αποδείξτε ότι η κ είναι συνεχής στο $x \in [0,1]$ αν και μόνο αν $x \notin \mathbb{Q}$.

(β) Αποδείξτε ότι η κ είναι Riemann ολοκληρώσιμη.

2.10. Μπορούμε να κατασκευάσουμε Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις οι οποίες έχουν πυκνό σύνολο σημείων ασυνέχειας ως εξής.

(α) Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x < 0$ και $f(x) = 1$ αν $x \geqslant 0$. Επιλέγουμε μια αριθμήσιμη πυκνή ακολουθία $\{r_n\}$ στο $[0,1]$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} f(x - r_n), \qquad x \in [0,1]$$

είναι ολοκληρώσιμη και είναι ασυνεχής σε όλα τα σημεία της ακολουθίας $\{r_n\}$.

[*Υπόδειξη:* Η F είναι μονότονη και φραγμένη.]

(β) Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{3^n} g(x - r_n),$$

όπου $g(x) = \sin(1/x)$ αν $x \neq 0$ και $g(0) = 0$. Αποδείξτε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη, ασυνεχής σε κάθε $x = r_n$, και δεν είναι μονότονη σε κανένα υποδιάστημα του $[0,1]$.

[*Υπόδειξη:* Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι $3^{-k} > \sum\limits_{n=k+1}^{\infty} 3^{-n}$.]

(γ) Το παράδειγμα που έδωσε ο Riemann ήταν η συνάρτηση

$$F(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(nx)}{n^2},$$

όπου $(x) = x$ αν $x \in (-1/2, 1/2]$ και έπειτα επεκτείνουμε την (x) στο $\mathbb{R}$ περιοδικά, δηλαδή $(x+1) = (x)$. Μπορεί κανείς να δείξει ότι η F είναι ασυνεχής στα σημεία $x = m/(2n)$, όπου $m, n \in \mathbb{Z}$, ο m είναι περιττός και $n \neq 0$.

2.11. Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{p\to\infty} \|f\|_p = \|f\|_\infty.$$

2.12. Έστω $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $1 \leqslant p < \infty$ ώστε

$$\int_a^b |f(x)|^p dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b |f(x)g(x)|\, dx = 0.$$

Στη συνέχεια αποδείξτε ότι η ανισότητα Holder και η ανισότητα Minkowski ισχύουν για Riemann ολοκληρώσιμες συναρτήσεις. Συμπεράνατε ότι η

$$\|f\|_p = \left(\int_a^b |f(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

είναι *ημινόρμα* στον $\mathcal{R}[a,b]$, δηλαδή ικανοποιεί όλες τις απαιτήσεις του ορισμού της νόρμας εκτός από την «$\|x\| = 0 \implies x = 0$».

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ακολουθίες και σειρές συναρτήσεων

3.1 Ακολουθίες συναρτήσεων: κατά σημείο σύγκλιση

Ορισμός 3.1.1. Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η *ακολουθία συναρτήσεων* (f_n) συγκλίνει *κατά σημείο* στη συνάρτηση f αν για κάθε $x \in I$ ισχύει

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x).$$

Γράφουμε τότε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο ή ακόμη ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$.

Παρατηρήσεις 3.1.2. (α) Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$, $f, g : I \to \mathbb{R}$ και (f_n), (g_n) ακολουθίες συναρτήσεων από το I στο $\mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και $g_n \to g$ κατά σημείο, τότε: (i) για κάθε $t, s \in \mathbb{R}$ ισχύει $tf_n + sg_n \to tf + sg$ κατά σημείο, και (ii) $f_ng_n \to fg$ κατά σημείο. Πράγματι, για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$(tf_n + sg_n)(x) = tf_n(x) + sg_n(x) \to tf(x) + sg(x) = (tf + sg)(x)$$

και

$$(f_ng_n)(x) = f_n(x)g_n(x) \to f(x)g(x) = (fg)(x),$$

από τις αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων ακολουθιών πραγματικών αριθμών.

(β) Η κατά σημείο σύγκλιση είναι ασθενής: δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα, την παραγώγιση και την εναλλαγή ορίων. Τα βασικά ερωτήματα που συζητάμε παρακάτω έχουν αρνητική απάντηση:

> *Πρόβλημα 1:* Έστω $f_n, f : I \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι συνεχής συνάρτηση, είναι σωστό ότι η f είναι συνεχής;

Η απάντηση είναι αρνητική: ένα παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = x^n$. Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \to f$ κατά σημείο, όπου η $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την

$$f(x) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant x < 1 \\ 1, & x = 1. \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι ασυνεχής στο σημείο $x_0 = 0$. Μπορούμε μάλιστα να δώσουμε παράδειγμα ακολουθίας συνεχών συναρτήσεων η οποία συγκλίνει σε συνάρτηση με άπειρα το πλήθος σημεία ασυνέχειας: θεωρούμε το σύνολο $A = \{1/k : k = 1, 2, \dots\}$ και, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, ορίζουμε συνάρτηση $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ ως εξής: με κέντρο καθένα από τα σημεία $1/k$, $k = 1, \dots, n$ θεωρούμε το διάστημα $I_{n,k} = \left[\frac{1}{k} - \frac{1}{3n(n+1)}, \frac{1}{k} + \frac{1}{3n(n+1)}\right]$ και ορίζουμε την f_n να είναι «τριγωνική» σε κάθε $I_{n,k}$ ώστε στο σημείο $1/k$ να παίρνει την τιμή 1 και $f_n(x) = 0$ αν $x \notin \bigcup_{k=1}^n I_{n,k}$. Τότε, κάθε f_n είναι συνεχής και συγκλίνει (κατά σημείο) στη συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x \in A \\ 0, & x \in [0,1] \setminus A \end{cases}$$

η οποία είναι ασυνεχής σε κάθε σημείο του A.

Πρόβλημα 2: Έστω $f_n, f : [a,b] \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο, και κάθε f_n είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$, είναι σωστό ότι η f είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx\,;$$

Η απάντηση είναι αρνητική: για παράδειγμα, θεωρούμε την ακολουθία των συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = \begin{cases} 2n^2 x, & 0 \leqslant x \leqslant \frac{1}{2n} \\ -2n^2\left(x - \frac{1}{n}\right), & \frac{1}{2n} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \\ 0, & \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx = \frac{1}{2} \not\to 0 \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Ένα άλλο παράδειγμα μας δίνει η ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = n^2 x(1-x)^n$. Αν $x = 0$ τότε $f_n(0) = 0 \to 0$. Όμοια, αν $x = 1$ τότε $f_n(1) = 0 \to 0$. Στην περίπτωση $0 < x < 1$ εφαρμόζουμε το κριτήριο του λόγου:

$$\frac{f_{n+1}(x)}{f_n(x)} = \frac{(n+1)^2 x(1-x)^{n+1}}{n^2 x(1-x)^n} = \frac{(n+1)^2}{n^2}(1-x) \to 1 - x < 1.$$

Συνεπώς, $f_n(x) \to 0$ όταν $n \to \infty$.

Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως,

$$\begin{aligned} \int_0^1 f_n(x)\,dx &= n^2 \int_0^1 x(1-x)^n dx = n^2 \int_0^1 (1-t)t^n dt = n^2 \int_0^1 (t^n - t^{n+1})\,dt \\ &= n^2\left(\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n+2}\right) = \frac{n^2}{(n+1)(n+2)} \to 1. \end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\int_0^1 f_n(x)\,dx \to 1 \neq 0 = \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Πρόβλημα 3: Έστω I διάστημα στο $\mathbb{R}$ και $f_n, f : I \to \mathbb{R}$. Αν $f_n \to f$ κατά σημείο και κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο I, είναι σωστό ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο I και ότι $f_n' \to f'$ κατά σημείο;

Όπως δείχνουν τα επόμενα παραδείγματα, η απάντηση είναι αρνητική:

(α) Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων (f_n), όπου η $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ορίζεται από την $f_n(x) = \frac{x}{1+nx}$. Τότε: (i) αν $x = 0$ έχουμε $f_n(0) = 0 \to 0$ και (ii) αν $x > 0$ έχουμε

$$f_n(x) = \frac{x}{1+nx} = \frac{1}{n}\,\frac{x}{\frac{1}{n}+x} \to 0.$$

Άρα, $f_n(x) \to 0$ για κάθε $x \in [0,\infty)$. Συνεπώς, $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο. Όμως, $f_n'(x) = \frac{1}{(1+nx)^2}$ και για $x = 0$ έχουμε $f_n'(0) = 1 \to 1$, ενώ για $x > 0$ ισχύει ότι $f_n'(x) \to 0$. Δηλαδή, η (f_n') δεν συγκλίνει κατά σημείο στην $f' \equiv 0$.

(β) Θεωρούμε την ακολουθία των συναρτήσεων $f_n : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in (0,\pi)$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant \frac{1}{n} \to 0$. Άρα, $f_n \to 0$ κατά σημείο.

Όμως, η ακολουθία $f_n' : (0,\pi) \to \mathbb{R}$ με $f_n'(x) = \cos nx$ *δεν* συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0,\pi)$. Πράγματι· αν υπάρχει $x \in (0,\pi)$ ώστε $\cos nx \to \alpha \in \mathbb{R}$, τότε $\cos(3nx) \to \alpha$. Από την ταυτότητα

$$\cos(3nx) = 4\cos^3(nx) - 3\cos(nx)$$

βλέπουμε ότι $\alpha = 4\alpha^3 - 3\alpha$. Συνεπώς, $\alpha = 0$ ή $\alpha^2 = 1$. Αν $\alpha = 0$ τότε από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ συμπεραίνουμε ότι $\sin^2(nx) \to 1$. Όμως,

$$\sin^2(nx) = \frac{1-\cos(2nx)}{2}$$

οπότε $\cos(2nx) \to -1$, άτοπο. Αν $\alpha^2 = 1$, από την ταυτότητα $\sin^2(nx) + \cos^2(nx) = 1$ έχουμε ότι $\sin(nx) \to 0$. Τότε, από την

$$\sin(n+1)x = \sin(nx)\cos x + \sin x\cos(nx)$$

παίρνουμε

$$\sin x\cos(nx) \to 0$$

και επειδή $\sin x \neq 0$ για $x \in (0,\pi)$ έπεται ότι $\cos(nx) \to 0$, άτοπο.

Σημείωση 3.1.3. Η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται καλά ούτε ως προς την εναλλαγή ορίων: υπάρχουν συνεχείς συναρτήσεις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ και $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$ αλλά $\lim\limits_{n\to\infty}\lim\limits_{x\to 0} f_n(x) \neq f(0)$. Με άλλα λόγια δεν ισχύει η εναλλαγή των ορίων

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to x} f_n(t) = \lim_{t\to x}\lim_{n\to\infty} f_n(t).$$

Ένα παράδειγμα μας δίνουν οι $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(t) = (1-t)^n$. Έχουμε $f_n(t) \to f(t)$ για κάθε $t \in [0,1]$ όπου

$$f(t) = \begin{cases} 1, & t = 0 \\ 0, & 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\lim_{n\to\infty}\lim_{t\to 0} f_n(t) = 1 \neq 0 = \lim_{t\to 0} f(t).$$

Πολύ περισσότερο, μπορούμε να έχουμε ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, η οποία να συγκλίνει σε μια συνάρτηση $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ η οποία να μην έχει όριο στο σημείο 0. Για παράδειγμα, θεωρήστε τις $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(t) = \begin{cases} 0, & 0 \leqslant t \leqslant 1/n \\ \sin(\pi/t), & 1/n \leqslant t \leqslant 1 \end{cases}$$

Εύκολα βλέπουμε ότι

$$f_n(t) \to f(t) = \begin{cases} 0, & t = 0 \\ \sin(\pi/t), & 0 < t \leqslant 1 \end{cases}$$

3.2 Ακολουθίες συναρτήσεων: ομοιόμορφη σύγκλιση

Ορισμός 3.2.1. Έστω I διάστημα και $f_n, f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Λέμε ότι η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in I$ ισχύει $|f_n(x) - f(x)| \leqslant \varepsilon$.

Συμβολίζουμε με $\mathcal{B}(I)$ τον χώρο των φραγμένων συναρτήσεων $f : I \to \mathbb{R}$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η συνάρτηση $\|\cdot\|_\infty : \mathcal{B}(I) \to \mathbb{R}$ με

$$\|g\|_\infty = \sup\{|g(x)| : x \in I\}$$

είναι νόρμα και ότι «$|g(x)| \leqslant \varepsilon$ για κάθε $x \in I$» αν και μόνο αν $\|g\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Συνεπώς, ένας άλλος τρόπος να περιγράψουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση είναι ο εξής: Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n \geqslant n_0$ ισχύει $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon$, ή πιο απλά:

Η ακολουθία (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στην f αν $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Δύο χρήσιμες παρατηρήσεις για την $\|\cdot\|_\infty$ είναι οι εξής: αν $f, g \in \mathcal{B}(I)$ τότε $|f(x)| \leqslant \|f\|_\infty$ για κάθε $x \in I$ (και ομοίως, $|g(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in I$). Επίσης, $|f(x)g(x)| = |f(x)|\,|g(x)| \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in I$, άρα

$$\|fg\|_\infty = \sup\{|f(x)g(x)| : x \in I\} \leqslant \|f\|_\infty \|g\|_\infty. \tag{3.2.1}$$

Συγκρίνοντας τους δύο ορισμούς βλέπουμε ότι η ομοιόμορφη σύγκλιση είναι πιο ισχυρή από την κατά σημείο σύγκλιση:

Πρόταση 3.2.2. *Έστω $f_n, f : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα, τότε $f_n \to f$ κατά σημείο.*

Απόδειξη. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, έχουμε ότι $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Από τον ορισμό της $\|\cdot\|_\infty$, για κάθε $x \in I$ και κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε

$$|f_n(x) - f(x)| \leqslant \|f_n - f\|_\infty \to 0.$$

Έπεται ότι $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in I$. □

Ορισμός 3.2.3. Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η ακολουθία συναρτήσεων (f_n) λέγεται *ομοιόμορφα φραγμένη στο I* αν υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f_n(x)| \leqslant M \text{ για κάθε } x \in I \text{ και για κάθε } n \in \mathbb{N}.$$

Ισοδύναμα, αν $\|f_n\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Δηλαδή, αν ο M είναι κοινό φράγμα για όλες τις $|f_n|$.

Πρόταση 3.2.4. *Έστω I διάστημα, $f, g : I \to \mathbb{R}$ και (f_n), (g_n) ακολουθίες συναρτήσεων από το I στο $\mathbb{R}$ και $t, s \in \mathbb{R}$.*

(α) *Αν $f_n \to f$ ομοιόμορφα και $g_n \to g$ ομοιόμορφα στο I, τότε $tf_n + sg_n \to tf + sg$ ομοιόμορφα στο I.*

(β) *Αν, επιπλέον, οι $(f_n), (g_n)$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, τότε $f_ng_n \to fg$ ομοιόμορφα στο I.*

Απόδειξη. (α) Παρατηρούμε ότι

$$\|(tf_n + sg_n) - (tf + sg)\|_\infty = \|t(f_n - f) + s(g_n - g)\|_\infty \leqslant |t|\,\|f_n - f\|_\infty + |s|\,\|g_n - g\|_\infty \to 0.$$

(β) Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leqslant M$ και $|g_n(x)| \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$. Δηλαδή, $\|f_n\|_\infty \leqslant M$ και $\|g_n\|_\infty \leqslant M$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$. Επίσης, αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο X, έχουμε $f_n \to f$ κατά σημείο. Άρα, για κάθε $x \in X$ ισχύει $|f(x)| = \lim_{n\to\infty} |f_n(x)| \leqslant M$. Δηλαδή, $\|f\|_\infty \leqslant M$. Τώρα γράφουμε

$$\begin{aligned}\|f_n g_n - fg\|_\infty &= \|(f_n - f)g_n + f(g_n - g)\|_\infty \leqslant \|(f_n - f)g_n\|_\infty + \|f(g_n - g)\|_\infty \\ &\leqslant \|f_n - f\|_\infty \|g_n\|_\infty + \|f\|_\infty \|g_n - g\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty \cdot M + M \cdot \|g_n - g\|_\infty \to 0,\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας και την (3.2.1). □

Το επόμενο θεώρημα, γνωστό ως κριτήριο Cauchy, μας δίνει μια χρήσιμη ικανή και αναγκαία συνθήκη για την ομοιόμορφη σύγκλιση μιας ακολουθίας συναρτήσεων (f_n).

Θεώρημα 3.2.5 (κριτήριο Cauchy). *Έστω $f_n : I \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ αν και μόνο αν για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geqslant n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι υπάρχει συνάρτηση $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I. Έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε, για κάθε $n \geqslant n_0$, $\|f_n - f\|_\infty < \varepsilon/2$. Συνεπώς, για κάθε $n, m \geqslant n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f_m\|_\infty = \|(f_n - f) + (f - f_m)\|_\infty \leqslant \|f_n - f\|_\infty + \|f - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Αντίστροφα, υποθέτουμε ότι για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon)$ ώστε: αν $n, m \geqslant n_0$ τότε $\|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon$. *Σταθεροποιούμε* $x \in I$. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει n_0 ώστε: αν $n, m \geqslant n_0$ τότε

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon. \tag{3.2.2}$$

Άρα, η ακολουθία $(f_n(x))$ είναι βασική ακολουθία στο $\mathbb{R}$. Συνεπώς, συγκλίνει σε κάποιον αριθμό, ο οποίος εξαρτάται από το x. Ορίζουμε $f : I \to \mathbb{R}$ με $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$. Προφανώς, $f_n \to f$ κατά σημείο.

Αφήνοντας το $m \to \infty$ στην (3.2.2) παρατηρούμε ότι (για τυχόν $\varepsilon > 0$ και το $n_0 = n_0(\varepsilon)$ που χρησιμοποιήσαμε προηγουμένως): για κάθε $x \in I$ και για κάθε $n, m \geqslant n_0$,

$$|f_n(x) - f(x)| = \lim_{m\to\infty} |f_n(x) - f_m(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Συνεπώς, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in I\} \leqslant \varepsilon.$$

Αφού το $\varepsilon > 0$ ήταν τυχόν, συμπεραίνουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα. □

3.2.1 Συνέχεια, ολοκλήρωμα και παράγωγος

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι η κατά σημείο σύγκλιση δεν συμπεριφέρεται πάντοτε καλά σε σχέση με τη συνέχεια, το ολοκλήρωμα και την παραγώγιση. Όπως θα δούμε σε αυτή την παράγραφο, αν υποθέσουμε ομοιόμορφη σύγκλιση στη θέση της κατά σημείο σύγκλισης τότε έχουμε ισχυρά θετικά αποτελέσματα.

Θεώρημα 3.2.6. *Έστω I διάστημα, $f, f_n : I \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι:*

(i) *$f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I, και*

(ii) *κάθε f_n είναι συνεχής στο x_0.*

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0.

Ειδικότερα, αν κάθε f_n είναι συνεχής στο I, τότε η f είναι συνεχής στο I.

Απόδειξη. Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f_n \to f$ ομοιόμορφα, υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε

$$\|f_{n_0} - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Αφού η f_{n_0} είναι συνεχής στο x_0, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$,

$$|f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| \leqslant \frac{\varepsilon}{3}.$$

Τότε, για κάθε $x \in I$ με $|x - x_0| < \delta$ γράφουμε

$$\begin{aligned} |f(x) - f(t_0)| &\leqslant |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + |f_{n_0}(x_0) - f(x_0)| \\ &\leqslant \|f_{n_0} - f\|_\infty + |f_{n_0}(x) - f_{n_0}(x_0)| + \|f_{n_0} - f\|_\infty \\ &< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Άρα, η f είναι συνεχής στο x_0. □

Σημείωση. Σύμφωνα με το προηγούμενο θεώρημα, αν μια ακολουθία συνεχών συναρτήσεων συγκλίνει κατά σημείο σε ασυνεχή συνάρτηση, τότε η σύγκλιση δεν μπορεί να είναι ομοιόμορφη.

Θεώρημα 3.2.7. *Έστω (f_n) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a, b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_n : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$. Τότε, η f είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και*

$$\int_a^b f_n(x)\,dx \to \int_a^b f(x)\,dx.$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η f είναι ολοκληρώσιμη. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$. Αυτό είναι δυνατό, διότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a, b]$.

Αφού η f_n είναι ολοκληρώσιμη, μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_m = b\}$ του $[a, b]$ ώστε

$$U(f_n, P) - L(f_n, P) = \sum_{k=0}^{m-1} (M_k(f_n) - m_k(f_n))(x_{k+1} - x_k) < \frac{\varepsilon}{2}$$

όπου $M_k = \sup\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ και $m_k = \inf\{f_n(x) : x \in [x_k, x_{k+1}]\}$ (θυμηθείτε το κριτήριο του Riemann). Χρησιμοποιώντας την $\|f_n - f\|_\infty < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$, ελέγχουμε ότι

$$m_k(f_n) - \frac{\varepsilon}{4(b-a)} \leqslant m_k(f) \leqslant M_k(f) \leqslant M_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{4(b-a)}$$

για κάθε $k = 0, 1, \dots, m-1$. Έπεται ότι

$$U(f,P) - L(f,P) \leqslant U(f_n,P) - L(f_n,P) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{\varepsilon}{2(b-a)}(x_{k+1} - x_k) < \varepsilon.$$

Από το κριτήριο του Riemann, η f είναι ολοκληρώσιμη.

Η σύγκλιση των ολοκληρωμάτων είναι τώρα άμεση συνέπεια της $\|f_n - f\|_\infty \to 0$: παρατηρούμε ότι

$$\left| \int_a^b f_n(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx \right| \leqslant \int_a^b |f_n(x) - f(x)|\,dx \leqslant \int_a^b \|f_n - f\|_\infty dx = (b-a)\|f_n - f\|_\infty \to 0,$$

απ' όπου έπεται το θεώρημα. □

Το παράδειγμα της ακολουθίας συναρτήσεων (f_n) στο $(0,\pi)$ με $f_n(x) = \frac{\sin(nx)}{n}$ δείχνει ότι δεν μπορούμε να περιμένουμε ανάλογα καλή συμπεριφορά για τις παραγώγους: έχουμε $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $(0,\pi)$, αλλά η ακολουθία $f_n'(x) = \cos(nx)$ δεν συγκλίνει για καμία τιμή του $x \in (0,\pi)$. Παρ' όλα αυτά, ισχύει το εξής:

Θεώρημα 3.2.8. *Έστω $f_n, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_n είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και ότι η παράγωγός της, f_n', είναι συνεχής στο $[a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:*

(i) *$f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, και*

(ii) *υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε η $(f_n(x_0))$ να είναι συγκλίνουσα σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.*

Τότε, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f' \equiv g$.

Απόδειξη. Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού,

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^x f_n'(s)\,ds, \qquad x \in [a,b].$$

Από το προηγούμενο θεώρημα συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{x_0}^x f_n'(s)\,ds \to \int_{x_0}^x g(s)\,dx, \qquad x \in [a,b].$$

Συνεπώς,

$$f_n(x) \to \xi + \int_{x_0}^x g(s)\,ds.$$

Ορίζουμε

$$f(x) = \xi + \int_{x_0}^x g(s)\,ds.$$

Από το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε $f'(x) = g(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$. Μένει να δείξουμε ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}
|f_n(x) - f(x)| &= \left| f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(s)\,ds - \xi - \int_{x_0}^{x} g(s)\,ds \right| \\
&\leqslant |f_n(x_0) - \xi| + \left| \int_{x_0}^{x} (f_n'(s) - g(s))\,ds \right| \\
&\leqslant |f_n(x_0) - \xi| + |x - x_0|\,\|f_n' - g\|_\infty \\
&\leqslant |f_n(x_0) - \xi| + |b - a|\,\|f_n' - g\|_\infty .
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\|f_n - f\|_\infty \leqslant |f_n(x_0) - \xi| + |b-a|\,\|f_n' - g\|_\infty \to 0$. □

Αν κάνουμε την ισχυρότερη υπόθεση ότι η (f_n) συγκλινει κατά σημείο σε κάποια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ τότε το προηγούμενο θεώρημα παίρνει την εξής απλούστερη μορφή.

Θεώρημα 3.2.9. *Αν $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι συναρτήσεις με συνεχή παράγωγο, ώστε $f_n(x) \to f(x)$ για κάθε $x \in [a,b]$ και $f_n' \to g$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$, τότε η f είναι παραγωγίσιμη με συνεχή παράγωγο την g.*

Απόδειξη. Λόγω της *ομοιόμορφης* σύγκλισης $f_n' \to g$, για κάθε $x \in [a,b]$ έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt \to \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά από το Θεμελιώδες Θεώρημα του Απειροστικού Λογισμού έχουμε

$$\int_a^x f_n'(t)dt = f_n(x) - f_n(a).$$

Επειδή $f_n(x) \to f(x)$ και $f_n(a) \to f(a)$ έπεται ότι

$$f(x) - f(a) = \int_a^x g(t)dt.$$

Αλλά η g είναι συνεχής συνάρτηση, ως *ομοιόμορφο* όριο συνεχών συναρτήσεων. Κατά συνέπεια το αόριστο ολοκλήρωμά της είναι παραγωγίσιμη συνάρτηση με παράγωγο την g. Δηλαδή η f είναι παραγωγίσιμη και $f' = g$. □

3.2.2 Πληρότητα του $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$

Όπως θα δούμε σε αυτή την ενότητα, ο χώρος $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης. Αρχικά θεωρούμε ένα διάστημα I και τον χώρο $\mathcal{B}(I)$ των *φραγμένων συναρτήσεων* $f : I \to \mathbb{R}$ με νόρμα την

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in I\}$$

και θα δείξουμε ότι είναι πλήρης.

Πρόταση 3.2.10. *Έστω I διάστημα. Ο χώρος με νόρμα $(\mathcal{B}(I), \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $\mathcal{B}(I)$. Θα δείξουμε ότι υπάρχει $f \in \mathcal{B}(I)$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$.

Έστω $\varepsilon > 0$. Υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε αν $n, s \geqslant n_0$ τότε

$$\|f_n - f_s\|_\infty = \sup\{|f_n(x) - f_s(x)| : x \in I\} \leqslant \varepsilon.$$

Από το Θεώρημα 3.2.5 υπάρχει $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Μένει να δείξουμε ότι $f \in \mathcal{B}(I)$. Παίρνουμε $\varepsilon = 1$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε $\|f_{n_0} - f\|_\infty \leqslant 1$. Τότε, $f_{n_0}, f - f_{n_0} \in \mathcal{B}(I)$, άρα

$$f = f_{n_0} + (f - f_{n_0}) \in \mathcal{B}(I).$$

Πιο συγκεκριμένα, $\|f\|_\infty \leqslant \|f_{n_0}\|_\infty + \|f - f_{n_0}\|_{infty} \leqslant \|f_{n_0}\|_\infty + 1 < +\infty$. □

Κάθε συνεχής συνάρτηση $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη, άρα ο χώρος $C[a, b]$ είναι διανυσματικός χώρος του $\mathcal{B}[a, b]$. Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι, από την Πρόταση 3.2.10, ο $(\mathcal{B}[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης, μπορούμε να δείξουμε το εξής.

Θεώρημα 3.2.11. *Ο χώρος $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$ είναι πλήρης.*

Απόδειξη. Έστω (f_n) βασική ακολουθία στον $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. Τότε, οι f_n ανήκουν στον $\mathcal{B}[a, b]$ και η (f_n) είναι βασική ως προς την $\|\cdot\|_\infty$, άρα από την Πρόταση 3.2.10 υπάρχει $f \in \mathcal{B}[a, b]$ ώστε $\|f_n - f\|_\infty \to 0$. Οι f_n είναι συνεχείς και $f_n \to f$ ομοιόμορφα, άρα το Θεώρημα 3.2.6 μας εξασφαλίζει ότι η f είναι συνεχής. Συνεπώς, $f \in C[a, b]$ και $\|f_n - f\|_\infty \to 0$, το οποίο σημαίνει ότι η (f_n) είναι συγκλίνουσα στον $(C[a, b], \|\cdot\|_\infty)$. □

3.3 Σειρές Συναρτήσεων

Ορισμός 3.3.1. Έστω I διάστημα και $f_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $s_n : I \to \mathbb{R}$ με

$$s_n(x) = f_1(x) + f_2(x) + \cdots + f_n(x).$$

Αν υπάρχει συνάρτηση $s : I \to \mathbb{R}$ ώστε $s_n \to s$ κατά σημείο στο I, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty f_k$ *συγκλίνει κατά σημείο στην s στο I* και γράφουμε

$$s = \sum_{k=1}^\infty f_k.$$

Αν, επιπλέον, $s_n \to s$ ομοιόμορφα στο I, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^\infty f_k$ *συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο I*.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω $f_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Αν η σειρά $\sum_{k=1}^\infty f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην s στο I, τότε συγκλίνει κατά σημείο στην s στο I.*

Απόδειξη. Αρκεί να θυμηθούμε ότι αν $s_n \to s$ ομοιόμορφα τότε $s_n \to s$ κατά σημείο. □

Πρόταση 3.3.3. *Έστω $f_k, g_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$ και $a, b \in \mathbb{R}$. Αν $\sum_{k=1}^\infty f_k = s$ και $\sum_{k=1}^\infty g_k = t$ ομοιόμορφα στο I, τότε $\sum_{k=1}^\infty (af_k + bg_k) = as + bt$ ομοιόμορφα στο I. Το ίδιο ισχύει για την κατά σημείο σύγκλιση.*

Απόδειξη. Άμεση από τις αντίστοιχες προτάσεις για ακολουθίες συναρτήσεων. □

Πρόταση 3.3.4 (κριτήριο Cauchy). *Έστω $f_k : I \to \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^\infty f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα (σε κάποια συνάρτηση) στο I αν και μόνον αν ισχύει το εξής: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε: για κάθε $n > m \geqslant n_0$ και για κάθε $x \in I$,*

$$|f_{m+1}(x) + \cdots + f_n(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε το κριτήριο Cauchy στην ακολουθία συναρτήσεων (s_n). Παρατηρήστε ότι: αν $n > m$ τότε $s_n - s_m = f_{m+1} + \cdots + f_n$. □

Θεώρημα 3.3.5 (κριτήριο Weierstrass). *Έστω $f_k : I \to \mathbb{R}$ φραγμένες συναρτήσεις, $k \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sup\{|f_k(x)| : x \in I\} \leqslant M_k, \qquad k \in \mathbb{N}$$

δηλαδή ότι ο M_k είναι άνω φράγμα της $|f_k|$, και ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Τότε, η $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο I.

Απόδειξη. Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $x \in I$ η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ συγκλίνει απολύτως, αφού

$$\sum_{k=1}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty.$$

Συνεπώς, η σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει κατά σημείο στο I. Θέτουμε $s = \sum_{k=1}^{\infty} f_k$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in I$ έχουμε

$$\begin{aligned} |s(x) - s_n(x)| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} f_k(x) - \sum_{k=1}^{n} f_k(x) \right| = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} f_k(x) \right| \\ &\leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |f_k(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k. \end{aligned}$$

Από την $\sum_{k=1}^{\infty} M_k < +\infty$ έχουμε

$$\|s - s_n\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} M_k \to 0$$

όταν $n \to \infty$. Άρα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ είναι ομοιόμορφη. □

Παράδειγμα 3.3.6. Θεωρούμε τη σειρά συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Έχουμε $f_k(x) = \frac{\sin(kx)}{k^2}$, οπότε

$$|f_k(x)| \leqslant \frac{1}{k^2}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ συγκλίνει, άρα η $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάποια συνάρτηση στο $\mathbb{R}$.

Τα επόμενα τρία θεωρήματα προκύπτουν άμεσα από τα Θεωρήματα 3.2.6, 3.2.7 και 3.2.8 (αν τα εφαρμόσουμε για την ακολουθία των συναρτήσεων $s_n = f_1 + \cdots + f_n$).

Θεώρημα 3.3.7. *Έστω I διάστημα, $f, f_k : I \to \mathbb{R}$ και $x_0 \in I$. Υποθέτουμε ότι:*

(i) *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο I, και*

(ii) *κάθε f_k είναι συνεχής στο x_0.*

Τότε, η f είναι κι αυτή συνεχής στο x_0.

Ειδικότερα, αν κάθε f_k είναι συνεχής στο I, τότε η f είναι συνεχής στο I.

Θεώρημα 3.3.8. *Έστω (f_k) ακολουθία συναρτήσεων που είναι ορισμένες σε ένα κλειστό διάστημα $[a,b]$. Υποθέτουμε ότι κάθε $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$ είναι Riemann–ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην f στο $[a,b]$. Τότε, η f είναι Riemann-ολοκληρώσιμη στο $[a,b]$ και*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b f_k(x)\,dx.$$

Θεώρημα 3.3.9. *Έστω $f_k, g : [a,b] \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$. Υποθέτουμε ότι κάθε f_k είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και ότι η παράγωγός της, f_k', είναι συνεχής στο $[a,b]$. Υποθέτουμε επίσης ότι:*

(i) *η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k'$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην g στο $[a,b]$, και*

(ii) *υπάρχει $x_0 \in [a,b]$ ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ να συγκλίνει σε κάποιον $\xi \in \mathbb{R}$.*

Τότε, η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} f_k$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, η f είναι παραγωγίσιμη στο $[a,b]$ και $f' \equiv g$. Δηλαδή,

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} f_k\right)' = \sum_{k=1}^{\infty} f_k'.$$

3.4 Ασκήσεις

3.1. Έστω $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \begin{cases} 0, & x < \frac{1}{n+1} \text{ ή } \frac{1}{n} < x \\ \sin^2\left(\frac{\pi}{x}\right), & \frac{1}{n+1} \leqslant x \leqslant \frac{1}{n} \end{cases}$. Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια συνεχή συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Ισχύει ότι $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$;

3.2. Έστω $f_n(x) = n^p x(1-x^2)^n$, $x \in [0,1]$, με $p > 0$ παράμετρο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $p > 0$ η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε κάποια $f : [0,1] \to \mathbb{R}$. Για ποιές τιμές του p είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη; Για ποιές τιμές του p ισχύει ότι $\int_0^1 f_n \to \int_0^1 f$;

3.3. (α) Έστω I διάστημα, $f_n : I \to \mathbb{R}$ για $n = 1,2,\dots$ και $f : I \to \mathbb{R}$ ώστε $f_n \to f$ ομοιόμορφα στο I. Αποδείξτε ότι $|f_n| \to |f|$ ομοιόμορφα στο I.

(β) Έστω $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = (-1)^n\left(1 + \frac{x}{n}\right)$ για $n = 1,2,\dots$ Αποδείξτε ότι η $(|f_n|)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0,1]$ ενώ η (f_n) δεν συγκλίνει.

3.4. Έστω $f_n(x) = \frac{1}{n}e^{-n^2x^2}$, $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι $f_n \to 0$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$ και $f_n' \to 0$ κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι σε κάθε διάστημα το οποίο περιέχει το 0 η f_n' *δεν* συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση, ενώ σε κάθε κλειστό διάστημα το οποίο *δεν* περιέχει το 0 η f_n' συγκλίνει ομοιόμορφα στη μηδενική συνάρτηση.

3.5. Ορίζουμε ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = n^2 x(1-x)^{nx}.$$

Αποδείξτε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο και βρείτε την οριακή συνάρτηση f. Βρείτε το όριο των ολοκληρωμάτων

$$I_n = \int_0^1 f_n(t)\,dt.$$

Είναι η σύγκλιση της (f_n) στην f ομοιόμορφη;

3.6. Θεωρούμε την ακολουθία συναρτήσεων $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ με

$$f_n(x) = nxe^{-\sqrt{n}x}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n \to f \equiv 0$ κατά σημείο αλλά όχι ομοιόμορφα στο $[0,\infty)$. Εξετάστε αν $f_n \to 0$ ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\alpha,\infty)$, $\alpha > 0$.

3.7. Έστω $f_n : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \frac{nx}{nx+1}$. Αποδείξτε ότι:

(i) Η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο. Ποιά είναι η οριακή συνάρτηση f;

(ii) Για κάθε $\alpha > 0$, η (f_n) συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[\alpha, \infty)$, αλλά δεν συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[0, \alpha]$.

3.8. Υποθέτουμε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ συγκλίνει απολύτως. Αποδείξτε ότι οι σειρές συναρτήσεων $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin(kx)$ και $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos(kx)$ συγκλίνουν ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

3.9. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1+k^2x^2}$ συγκλίνει για κάθε $x \neq 0$ και αποκλίνει για $x = 0$. Αποδείξτε ότι η σειρά συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[\alpha, \infty)$ ή $(-\infty, -\alpha]$, όπου $\alpha > 0$.

3.10. Έστω $\alpha > 1/2$. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k^{\alpha}(1 + kx^2)}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

3.11. Αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty}(1-x)x^k$ συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0, 1]$. Αντιθέτως, αποδείξτε ότι η $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^k(1 - x)$ συγκλινει ομοιόμορφα στο $[0, 1]$.

3.12. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{\sqrt{k}} \sin\left(1 + \frac{x}{k}\right)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα της μορφής $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$.

3.13. Αποδείξτε ότι η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k \frac{x^2+k}{k^2}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε οποιοδήποτε διάστημα της μορφής $[-\alpha, \alpha]$, $\alpha > 0$, αλλά δεν συγκλίνει απολύτως για καμία τιμή του x.

3.14. Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{x^{2k+1}}{2k + 1} - \frac{x^{k+1}}{2k + 2}\right)$$

συγκλίνει κατά σημείο, αλλά όχι ομοιόμορφα, στο $[0, 1]$.

3.15. Ορίζουμε $I(x) = 0$ αν $x \leqslant 0$ και $I(x) = 1$ αν $x > 0$. Έστω (x_k) ακολουθία διαφορετικών ανά δύο σημείων σε κάποιο διάστημα (a, b) και έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ απολύτως συγκλίνουσα σειρά. Αποδείξτε ότι η

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k I(x - x_k)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στο (a, b) και ότι η συνάρτηση που ορίζεται από αυτή τη σειρά είναι συνεχής σε κάθε $x_0 \in (a, b) \setminus \{x_k : k \in \mathbb{N}\}$.

3.16. (α) Εξετάστε ως προς την κατά σημείο και την ομοιόμορφη σύγκλιση τις ακολουθίες συναρτήσεων $f_n, g_n : [0, 1] \to \mathbb{R}$, όπου

$$f_n(x) = x^n \qquad \text{και} \qquad g_n(x) = x^n(1 - x).$$

(β) Εξετάστε για ποιά $x \geqslant 0$ συγκλίνουν οι σειρές

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{και} \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}.$$

Για ποιές τιμές του $\alpha > 0$ είναι η σύγκλιση ομοιόμορφη στο διάστημα $[0, \alpha]$;

3.17. (α) Αποδείξτε ότι η σειρά συναρτήσεων

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$$

συγκλίνει κατά σημείο στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη σε κάθε κλειστό διάστημα $[-\alpha,\alpha]\subset\mathbb{R}$.

(β) Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x\sin(n^2x)}{n^2}$ είναι συνεχής.

3.18. (α) Έστω I διάστημα, $f_n, g_n, f, g : I\to\mathbb{R}$ για $n=1,2,\dots$ ώστε $f_n\to f$ και $g_n\to g$ ομοιόμορφα στο I. Αποδείξτε ότι αν οι f,g είναι φραγμένες τότε $f_ng_n\to fg$ ομοιόμορφα στο I.

(β) Βρείτε ακολουθίες $(f_n),(g_n)$ ορισμένες στο $\mathbb{R}$, οι οποίες συγκλίνουν ομοιόμορφα, αλλά η (f_ng_n) δεν συγκλίνει ομοιόμορφα.

3.19. Έστω $f_n, f : I\to\mathbb{R}$ ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Αν κάθε f_n είναι ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής.

3.20. Έστω $f, f_n : [a,b]\to[m,M]$ για κάθε $n\in\mathbb{N}$ και $f_n\to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$. Έστω $g:[m,M]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αποδείξτε ότι $g\circ f_n\to g\circ f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

3.21. Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $f:[0,1]\to\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$\int_0^{1-\frac{1}{n}} f_n(x)\,dx \to \int_0^1 f(x)\,dx.$$

Ισχύει πάντα το ίδιο αν η σύγκλιση είναι κατά σημείο;

3.22. (α) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$f_n(x) = f\left(x+\frac{1}{n}\right),\quad n\in\mathbb{N}$$

συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

(β) Έστω $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ομοιόμορφα συνεχής και (δ_n) ακολουθία με $\delta_n>0$ για κάθε n και $\delta_n\to 0$. Θέτουμε

$$f_n(x) = \frac{1}{\delta_n}\int_x^{x+\delta_n} f(t)dt,\quad x\in\mathbb{R}.$$

Αποδείξτε ότι $f_n\to f$ ομοιόμορφα.

3.23. Έστω I διάστημα και $f_n : I\to\mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων ώστε $f_n\to f$ ομοιόμορφα, για κάποια συνεχή συνάρτηση $f:I\to\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι για κάθε $x_0\in I$ και κάθε ακολουθία (x_n) στο I με $x_n\to x_0$ ισχύει $f_n(x_n)\to f(x_0)$.

3.24. (α) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ασυνεχών συναρτήσεων που συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση.

(β) Δώστε παράδειγμα ακολουθίας ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ που συγκλίνει κατά σημείο σε μια μη ολοκληρώσιμη συνάρτηση $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

3.25. Αν $f_n, g_n : [0,1]\to[0,1]$ είναι συνεχείς συναρτήσεις και $f_n\to f$, $g_n\to g$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$, αποδείξτε ότι η ακολουθία (h_n) όπου $h_n = f_n\circ g_n$ (δηλ. $h_n(x)=f_n(g_n(x))$) συγκλίνει ομοιόμορφα στην $h=f\circ g$.

3.26. Έστω $f_n:[0,1]\to\mathbb{R}$ ακολουθία συναρτήσεων και έστω ότι $f_n\to f$ ομοιόμορφα, όπου $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ συνεχής. Αν κάθε f_n έχει ρίζα, αποδείξτε ότι η f έχει ρίζα.

3.27. Έστω $f_n:[a,b]\to\mathbb{R}$ ακολουθία αυξουσών συναρτήσεων. Υποθέτουμε ότι η (f_n) συγκλίνει κατά σημείο σε μια συνεχή συνάρτηση f. Αποδείξτε ότι η f είναι αύξουσα και ότι η σύγκλιση είναι ομοιόμορφη.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

4.1 Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass

Το προσεγγιστικό θεώρημα του Weierstrass ισχυρίζεται ότι τα πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο $(C[a,b], \|\cdot\|_\infty)$.

Θεώρημα 4.1.1 (Weierstrass). *Έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο $p : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ώστε ο περιορισμός του p στο $[a,b]$ να ικανοποιεί την*

$$\|f - p\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, για κάθε $x \in [a,b]$,

$$|f(x) - p(x)| \leqslant \varepsilon.$$

Σημείωση. Εφαρμόζοντας διαδοχικά το θεώρημα με $\varepsilon = \frac{1}{n}$ ($n \in \mathbb{N}$) μπορούμε να βρούμε ακολουθία πολυωνύμων (p_n) με την ιδιότητα $\|f - p_n\|_\infty \to 0$.

Για την απόδειξη, παρατηρούμε ότι αρκεί να εξετάσουμε την περίπτωση του $C[0,1]$. Αυτό προκύπτει από το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.1.2. *Έστω $a < b$ στο $\mathbb{R}$. Υπάρχει γραμμική ισομετρία επί $T : C[a,b] \to C[0,1]$ που απεικονίζει πολυώνυμα σε πολυώνυμα.*

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι ο μετασχηματισμός $\sigma : [0,1] \to [a,b]$ με $\sigma(x) = a + x(b-a)$ είναι 1-1 και επί, με αντίστροφο τον μετασχηματισμό $\sigma^{-1}(y) = \frac{y-a}{b-a}$. Ορίζουμε $T : C[a,b] \to C[0,1]$ με $T(f) = g$, όπου $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $g = f \circ \sigma$. Η $g = T(f)$ είναι καλά ορισμένη και συνεχής ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων: για κάθε $x \in [0,1]$,

$$g(x) = f(\sigma(x)) = f(a + x(b-a)).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι

$$\|T(f)\|_\infty = \max\{|f(a + x(b-a))| : x \in [0,1]\} = \max\{|f(y)| : y \in [a,b]\} = \|f\|_\infty$$

για κάθε $f \in C[a,b]$. Επίσης, η T είναι γραμμική απεικόνιση: αν $f_1, f_2 \in C[a,b]$ και $a, b \in \mathbb{R}$, τότε

$$T(af_1 + bf_2) = aT(f_1) + bT(f_2).$$

Τέλος, αν $p(y) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k y^k$ είναι ένα πολυώνυμο, έχουμε

$$[T(p)](x) = p(a + x(b-a)) = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k (a + x(b-a))^k,$$

δηλαδή η συνάρτηση $T(p)$ είναι επίσης πολυώνυμο. □

Σημείωση. Με βάση το λήμμα βλέπουμε εύκολα ότι, αν αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $C[0,1]$ τότε έχουμε το ίδιο συμπέρασμα για οποιονδήποτε $C[a,b]$. Πράγματι, έστω $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής, άρα υπάρχει πολυώνυμο q ώστε

$$\|T(f) - q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Ορίζουμε $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ με $p(y) = q(\sigma^{-1}(y))$. Η συνάρτηση p είναι πολυώνυμο (ακριβέστερα, περιορισμός πολυωνύμου στο $[a,b]$) και $T(p) = q$ (εξηγήστε γιατί). Τότε,

$$\|f - p\|_\infty = \|T(f-p)\|_\infty = \|T(f) - T(p)\|_\infty = \|T(f) - q\|_\infty \leqslant \varepsilon.$$

Συνεπώς, αρκεί να αποδείξουμε το θεώρημα στην περίπτωση του $C[0,1]$. Θα χρειαστούμε τα παρακάτω λήμματα.

Λήμμα 4.1.3. *Για κάθε $x \in [0,1]$ ισχύουν οι ταυτότητες:*

(α) $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$.

(β) $\sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = x$.

(γ) $\sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = \left(1 - \frac{1}{n}\right) x^2 + \frac{1}{n} x$.

Απόδειξη. (α) Προκύπτει άμεσα από τον διωνυμικό τύπο:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = [x + (1-x)]^n = 1.$$

(β) Παρατηρούμε ότι, για κάθε $k = 1, \dots, n$,

$$\frac{k}{n} \binom{n}{k} = \frac{(n-1)!}{(k-1)!(n-k)!} = \binom{n-1}{k-1}.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} \frac{k}{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} &= x \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} x^{k-1} (1-x)^{n-k} \\ &= x \sum_{j=0}^{n-1} \binom{n-1}{j} x^j (1-x)^{n-1-j} = x. \end{aligned}$$

(γ) Παρατηρούμε ότι, αν $k \geqslant 1$,

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2 \binom{n}{k} = \frac{k}{n} \binom{n-1}{k-1} = \frac{n-1}{n} \frac{k-1}{n-1} \binom{n-1}{k-1} + \frac{1}{n} \binom{n-1}{k-1},$$

και, αν $k \geqslant 2$, η τελευταία ποσότητα ισούται με

$$\left(1-\frac{1}{n}\right)\binom{n-2}{k-2}+\frac{1}{n}\binom{n-1}{k-1}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \left(1-\frac{1}{n}\right)\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^k(1-x)^{n-k}+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^k(1-x)^{n-k}\\ &= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x.\end{aligned}$$

□

Λήμμα 4.1.4. *Για κάθε $x \in [0,1]$,*

$$\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=\frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{1}{4n}.$$

Απόδειξη. Από την $\left(\frac{k}{n}-x\right)^2=\left(\frac{k}{n}\right)^2-2\frac{k}{n}x+x^2$ και το προηγούμενο λήμμα, συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &= \left(1-\frac{1}{n}\right)x^2+\frac{1}{n}x-2x^2+x^2\\ &= \frac{x(1-x)}{n}\leqslant\frac{1}{4n},\end{aligned}$$

αφού $4x(1-x)\leqslant 1$ για κάθε $x \in [0,1]$. □

Λήμμα 4.1.5. *Έστω $\delta > 0$ και $x \in [0,1]$. Αν $F = F(\delta, x)$ είναι το σύνολο των $k \in \{0,1,\dots,n\}$ για τα οποία $\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta$, τότε*

$$\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{4n\delta^2}.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{k\in F}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} &\leqslant \frac{1}{\delta^2}\sum_{k\in F}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant \frac{1}{\delta^2}\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\\ &\leqslant \frac{1}{4n\delta^2}\end{aligned}$$

από το προηγούμενο λήμμα. □

Ορισμός 4.1.6 (πολυώνυμα Bernstein). Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε το n-οστό πολυώνυμο Bernstein $B_n(f)$ της f ως εξής:

$$[B_n(f)](x)=\sum_{k=0}^{n}f(k/n)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k},\quad x\in[0,1].$$

Παρατηρήστε ότι το $B_n(f)$ είναι όντως πολυώνυμο (με βαθμό το πολύ ίσο με n) και ότι $[B_n(f)](0) = f(0)$ και $[B_n(f)](1) = f(1)$.

Επίσης, το Λήμμα 4.1.3 δείχνει ότι αν $f_k(x) = x^k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$B_n(f_0) = f_0, \quad B_n(f_1) = f_1, \quad B_n(f_2) = \left(1 - \frac{1}{n}\right) f_2 + \frac{1}{n} f_1.$$

Ειδικότερα, για $k = 0, 1, 2$,

$$\|f_k - B_n(f_k)\|_\infty \to 0$$

όταν $n \to \infty$.

Θεώρημα 4.1.7 (Bernstein). *Για κάθε $f \in C[0,1]$ ισχύει ότι $B_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.*

Απόδειξη. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής και έστω $\varepsilon > 0$. Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής, άρα υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $x, y \in [0,1]$ και $|x - y| < \delta$ τότε $|f(x) - f(y)| \leqslant \varepsilon/2$. Λόγω της $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} = 1$, για κάθε $x \in [0,1]$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|f(x) - [B_n(f)](x)| &= \left| f(x) - \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^n f(x) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} - \sum_{k=0}^n f(k/n) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&= \left| \sum_{k=0}^n (f(x) - f(k/n)) \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \right| \\
&\leqslant \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}.
\end{aligned}$$

Έστω $F = F(\delta, x)$ το σύνολο των $k \in \{0, 1, \ldots, n\}$ για τα οποία $\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta$. Από το Λήμμα 4.1.5 παίρνουμε

$$\sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}.$$

Επίσης, παρατηρήστε ότι:

(α) Αν $k \in F$ τότε $|f(x) - f(k/n)| \leqslant 2\|f\|_\infty$, και

(β) Αν $k \notin F$ τότε $|f(x) - f(k/n)| \leqslant \varepsilon/2$.

Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε

$$\begin{aligned}
|f(x) - [B_n(f)](x)| &\leqslant \sum_{k=0}^n |f(x) - f(k/n)| \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \notin F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} + 2\|f\|_\infty \sum_{k \in F} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} \\
&\leqslant \frac{\varepsilon}{2} + 2\|f\|_\infty \frac{1}{4n\delta^2} \\
&\leqslant \varepsilon,
\end{aligned}$$

αν $n > n_0 = \left[\|f\|_\infty / (\varepsilon\delta^2)\right] + 1$. Η επιλογή του n_0 είναι ανεξάρτητη από το $x \in [0,1]$, άρα, για κάθε $n > n_0$ έχουμε $\|f - B_n(f)\|_\infty \leqslant \varepsilon$. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.1. Αφού κάθε $B_n(f)$ είναι πολυώνυμο, το θεώρημα είναι άμεση συνέπεια του θεωρήματος του Bernstein. □

4.2 Τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Ορισμός 4.2.1 (τριγωνομετρικά πολυώνυμα). *Πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο* είναι κάθε πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός των συναρτήσεων $\cos kx$ και $\sin kx$. Δηλαδή, κάθε συνάρτηση της μορφής

$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

όπου $n \in \mathbb{N}$ και $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Ο βαθμός του T είναι ο μικρότερος $n \geqslant 0$ για τον οποίο το T έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής. Συμβολίζουμε με $\mathcal{T}$ τον χώρο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων και με $\mathcal{T}_n$ τον χώρο όλων των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό μικρότερο ή ίσο από n. Παρατηρήστε ότι ο $\mathcal{T}_n$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

όπου $n \geqslant 0$, $c_k \in \mathbb{C}$. Ο βαθμός του p είναι ο μικρότερος $n \geqslant 0$ για τον οποίο το p έχει μια αναπαράσταση αυτής της μορφής. Σημειώνουμε ότι η μηδενική συνάρτηση είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο μηδενικού βαθμού.

Από τον ορισμό του $\mathcal{T}_n$ είναι φανερό ότι παράγεται από το σύνολο

$$A_n = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}.$$

Γράφουμε

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(A_n).$$

Μάλιστα, ισχύει ότι το σύνολο A_n είναι βάση του $\mathcal{T}_n$, και ειδικότερα, $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n+1$. Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αρκεί να δείξουμε ότι το A_n είναι γραμμικώς ανεξάρτητο σύνολο. Θα χρειαστούμε την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 4.2.2 (σχέσεις ορθογωνιότητας). *Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Αν $m, n = 0, 1, 2, \dots$ και $m \neq n$ τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx \, dx = 0.$$

(ii) *Αν $m, n = 1, 2, \dots$ και $m \neq n$ τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx \, dx = 0.$$

(iii) *Αν* $m = 0, 1, 2, \dots$ *και* $n = 1, 2, \dots$ *τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx \, dx = 0.$$

(iv) *Αν* $m, n = 1, 2, \dots$ *τότε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx \, dx = \frac{1}{2}.$$

Απόδειξη. Αφήνεται ως άσκηση. Χρησιμοποιήστε τις ταυτότητες

$$\begin{aligned} 2\cos\vartheta\cos\varphi &= \cos(\vartheta-\varphi) + \cos(\vartheta+\varphi), \\ 2\sin\vartheta\cos\varphi &= \sin(\vartheta+\varphi) + \sin(\vartheta-\varphi), \\ 2\sin\vartheta\sin\varphi &= \cos(\vartheta-\varphi) - \cos(\vartheta+\varphi), \end{aligned}$$

και τις $2\cos^2\vartheta = \cos 2\vartheta + 1$, $2\sin^2\vartheta = 1 - \cos 2\vartheta$. □

Πρόταση 4.2.3. *Το σύνολο* $A_n = \{1, \cos x, \cos 2x, \dots, \cos nx, \sin x, \dots, \sin nx\}$ *είναι γραμμικώς ανεξάρτητο (πάνω από το* $\mathbb{R}$*).*

Απόδειξη. Δείχνουμε ότι αν

$$T(x) = \nu_0 + \sum_{k=1}^{n} (\nu_k \cos kx + \mu_k \sin kx) \equiv 0,$$

για κάποιους $\nu_k, \mu_k \in \mathbb{R}$, τότε

$$\nu_0 = \nu_1 = \cdots = \nu_n = \mu_1 = \cdots = \mu_n = 0.$$

Αυτό προκύπτει άμεσα από την Πρόταση 4.2.2. Για παράδειγμα, για κάθε $m = 1, \dots, n$ έχουμε

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{-\pi}^{\pi} T(x) \sin mx dx \\ &= \nu_0 \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx dx + \sum_{k=1}^{n} \left(\nu_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \sin mx dx + \mu_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, \sin mx dx \right) \\ &= \mu_m \int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \, \sin mx dx = \pi \mu_m, \end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \, \sin mx dx = 0$ για κάθε $0 \leqslant k \leqslant n$ και $\int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \, \sin mx dx = 0$ για κάθε $1 \leqslant k \leqslant n$, $k \neq m$. Όμοια δείχνουμε ότι $\nu_m = 0$ για κάθε $m = 0, 1, \dots, n$. □

Σε αυτή την ενότητα θα ασχοληθούμε αποκλειστικά με τριγωνομετρικά πολυώνυμα, δίνουμε όμως και τους ορισμούς της τριγωνομετρικής σειράς, στη μιγαδική και την πραγματική περίπτωση.

Ορισμός 4.2.4 (τριγωνομετρική σειρά). Τριγωνομετρική σειρά είναι μια σειρά της μορφής

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}. \tag{4.2.1}$$

Το συμμετρικό n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (4.2.1) είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

Λέμε ότι η τριγωνομετρική σειρά (4.2.1) συγκλίνει (κατά σημείο ή ομοιόμορφα) σε μια συνάρτηση s αν $s_n \to s$ (κατά σημείο ή ομοιόμορφα, αντίστοιχα).

Με τον όρο *πραγματική τριγωνομετρική σειρά* αναφερόμαστε σε μια σειρά της μορφής

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{4.2.2}$$

όπου $a_k, b_k \in \mathbb{R}$. Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς (4.2.2) είναι το πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Όπως παραπάνω, λέμε ότι η τριγωνομετρική σειρά (4.2.2) συγκλίνει (κατά σημείο ή ομοιόμορφα) σε μια συνάρτηση s αν $s_n \to s$ (κατά σημείο ή ομοιόμορφα, αντίστοιχα).

Σκοπός μας είναι να δείξουμε ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον χώρο των συνεχών 2π-περιοδικών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Θεώρημα 4.2.5. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε*

$$\|f - p\|_\infty = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon.$$

Ισοδύναμα, υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ μιγαδικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων τέτοια ώστε $\|f - p_m\|_\infty \to 0$.

Στη συνέχεια θα δούμε και άλλες αποδείξεις του Θεωρήματος 4.2.5. Δίνουμε όμως εδώ μια απόδειξη που είναι «ανεξάρτητη» από τη θεωρία των σειρών Fourier. Ξεκινάμε με μια χρήσιμη παρατήρηση για τα πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα

Πρόταση 4.2.6. *Κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n. Δηλαδή, υπάρχει πολυώνυμο $p(t, s)$ βαθμού n ώστε*

$$T(x) = p(\cos x, \sin x).$$

Η απόδειξη της Πρότασης 4.2.6 θα βασιστεί στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 4.2.7. *Για κάθε $n \geqslant 1$, οι συναρτήσεις $\cos nx$ και $(\sin(n+1)x)/\sin x$ είναι πολυώνυμα του $\cos x$ βαθμού n.*

Απόδειξη. Δείχνουμε με επαγωγή ότι: για κάθε $n \geqslant 1$ υπάρχουν $a_{n,0}, \ldots, a_{n,n-1} \in \mathbb{R}$ ώστε

$$\cos nx = 2^{n-1}\cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j}\cos^j x. \tag{4.2.3}$$

Παρατηρήστε ότι η (4.2.3) ισχύει τετριμμένα για $n = 1$, ενώ για $n = 2$ γνωρίζουμε ότι

$$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1.$$

Υποθέτουμε ότι η (4.2.3) ισχύει για το $\cos kx$, $k \geqslant 2$. Από την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\cos[(k+1)x] + \cos[(k-1)x] = 2\cos kx \cos x$$

παίρνουμε

$$\begin{aligned}\cos(k+1)x &= 2\cos kx\cos x - \cos(k-1)x \\ &= 2\cos x\left(2^{k-1}\cos^k x + \sum_{j=0}^{k-1} a_{k,j}\cos^j x\right) - 2^{k-2}\cos^{k-1} x - \sum_{j=0}^{k-2} a_{k-1,j}\cos^j x \\ &= 2^k\cos^{k+1} x + \sum_{j=0}^{k} a_{k+1,j}\cos^j x\end{aligned}$$

για κατάλληλους $a_{k+1,j} \in \mathbb{R}$. Για τον δεύτερο ισχυρισμό του λήμματος, χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική ταυτότητα

$$\sin[(k+1)x] - \sin[(k-1)x] = 2\cos kx \sin x$$

δείχνουμε επαγωγικά ότι, για κάθε $n \geqslant 1$,

$$\frac{\sin(n+1)x}{\sin x} = 2^n\cos^n x + \sum_{j=0}^{n-1} a_{n,j}\cos^j x$$

για κατάλληλους $a_{n,j} \in \mathbb{R}$ (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). □

Πρόταση 4.2.8. *Για κάθε $n \geqslant 0$ θεωρούμε το σύνολο*

$$B_n = \{1, \cos x, \cos^2 x, \dots, \cos^n x, \sin x, \sin x\cos x, \dots, \sin x\cos^{n-1} x\}.$$

Τότε,

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(B_n) = \mathrm{span}(A_n).$$

Απόδειξη. Από την Πρόταση 4.2.3 γνωρίζουμε ότι $\dim(\mathcal{T}_n) = 2n+1$: το A_n είναι μία βάση του $\mathcal{T}_n$. Από το Λήμμα 4.2.7 έχουμε

$$\mathcal{T}_n \subseteq \mathrm{span}(B_n),$$

όπου $\mathrm{span}(B_n)$ είναι ο γραμμικός χώρος που παράγεται από το B_n. Επιπλέον, αφού $\mathrm{span}(B_n) \supseteq \mathcal{T}_n$ και $\dim(\mathrm{span}(B_n)) \leqslant 2n+1$, συμπεραίνουμε ότι, τελικά,

$$\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(B_n) = \mathrm{span}(A_n).$$

Ειδικότερα, κάθε πολυώνυμο του $\cos x$, βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, ανήκει στον χώρο $\mathcal{T}_n$. □

Παρατηρήστε ότι η Πρόταση 4.2.6 είναι άμεση συνέπεια της Πρότασης 4.2.8. Πράγματι, κάθε πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο $T(x)$ βαθμού n ανήκει στον $\mathcal{T}_n = \mathrm{span}(B_n)$, άρα γράφεται στη

μορφή
$$T(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} b_k \cos^k x + \sum_{k=0}^{n-1} \sin x \cdot \cos^k x,$$
και η συνάρτηση στο δεξιό μέλος είναι πολυώνυμο των $\cos x$ και $\sin x$ βαθμού n.

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 4.2.8 και το Θεώρημα 4.1.1 του Weierstrass θα δείξουμε ότι ο χώρος $\mathcal{T}$ των πραγματικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων είναι «πυκνός» στον χώρο των συνεχών 2π-περιοδικών πραγματικών συναρτήσεων.

Θεώρημα 4.2.9. *Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση. Για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο T ώστε*
$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon.$$
Ισοδύναμα, μπορούμε να βρούμε ακολουθία $\{T_m\}$ πραγματικών τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - T_m\|_\infty \to 0$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα τον ισχυρισμό του θεωρήματος, κάνοντας την επιπλέον υπόθεση ότι η f είναι άρτια: δηλαδή, $f(-x) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε $g : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ με
$$g(y) = f(\arccos y).$$
Η g είναι καλά ορισμένη, διότι $\arccos y \in [0, \pi]$ για κάθε $y \in [-1, 1]$, και συνεχής, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων. Από το Θεώρημα 4.1.1 υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_\infty \leqslant \varepsilon$. Δηλαδή,
$$|f(\arccos y) - p(y)| \leqslant \varepsilon$$
για κάθε $y \in [-1, 1]$. Ορίζουμε $T(x) = p(\cos x)$. Το T είναι πολυώνυμο του $\cos x$, άρα $T \in \mathcal{T}$ από την Πρόταση 4.2.8. Παρατηρούμε ότι, για κάθε $x \in [0, \pi]$ υπάρχει $y \in [-1, 1]$ ώστε $y = \cos x$, και τότε,
$$|f(x) - T(x)| = |f(x) - p(\cos x)| = |f(\arccos y) - p(y)| \leqslant \varepsilon.$$
Αφού οι f και T είναι άρτιες συναρτήσεις, έπεται ότι
$$\|f - T\|_\infty = \max\{|f(x) - T(x)| : -\pi \leqslant x \leqslant \pi\} \leqslant \varepsilon,$$
το οποίο είναι το ζητούμενο.

Για τη γενική περίπτωση, θεωρούμε τυχούσα συνεχή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ και ορίζουμε
$$f_1(x) = f(x) + f(-x) \quad \text{και} \quad f_2(x) = [f(x) - f(-x)] \sin x.$$
Παρατηρήστε ότι οι f_1 και f_2 είναι άρτιες, συνεχείς και 2π-περιοδικές. Άρα, μπορούμε να βρούμε τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1 και T_2 ώστε
$$\|f_1 - T_1\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{και} \quad \|f_2 - T_2\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$
Αν θέσουμε
$$T_3(x) = \frac{1}{2}(T_1(x) \sin^2 x + T_2(x) \sin x),$$

τότε $T_3 \in \mathcal{T}$ και, για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$,

$$\begin{aligned}|2f(x)\sin^2 x - 2T_3(x)| &= |f_1(x)\sin^2 x + f_2(x)\sin x - T_1(x)\sin^2 x - T_2(x)\sin x| \\ &\leqslant |(f_1(x) - T_1(x))\sin^2 x| + |(f_2(x) - T_2(x))\sin x| \\ &\leqslant |f_1(x) - T_1(x)| + |f_2(x) - T_2(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, αν ορίσουμε $f_3(x) = f(x)\sin^2 x$ τότε

$$\|f_3 - T_3\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.$$

Θεωρούμε τώρα τη συνάρτηση $g(x) := f\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$. Η g είναι συνεχής και 2π-περιοδική. Συνεπώς, ο ίδιος συλλογισμός δείχνει ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο T_4 ώστε, για τη συνάρτηση $f_4(x) = g(x)\sin^2 x$ να ισχύει $\|f_4 - T_4\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Αν ορίσουμε $T_5(x) = T_4(x + \pi/2)$, τότε το T_5 είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί) και για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αν θέσουμε $y = x + \pi/2$ έχουμε

$$\begin{aligned}|f(x)\cos^2 x - T_5(x)| &= |f(x)\cos^2 x - T_4(x + \pi/2)| \\ &= |f(y - \pi/2)\sin^2 y - T_4(y)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\|f_5 - T_5\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2},$$

όπου $f_5(x) = f(x)\cos^2 x$.

Παρατηρήστε ότι $f = f_3 + f_5$, διότι $f(x) = f(x)\sin^2 x + f(x)\cos^2 x$. Ορίζουμε $T = T_3 + T_5$. Τότε, $T \in \mathcal{T}$ και

$$\begin{aligned}\|f - T\|_\infty &= \|(f_3 + f_5) - (T_3 + T_5)\|_\infty \\ &\leqslant \|f_3 - T_3\|_\infty + \|f_5 - T_5\|_\infty \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει το θεώρημα. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.2.5. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω $\varepsilon > 0$. Γράφουμε $f = u + iv$ και, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 4.2.9 βρίσκουμε πραγματικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα T_1, T_2 τέτοια ώστε

$$\|u - T_1\|_\infty \leqslant \varepsilon/\sqrt{2} \ \text{ και } \ \|v - T_2\|_\infty \leqslant \varepsilon/\sqrt{2}.$$

Παρατηρήστε ότι αν ορίσουμε $p = T_1 + iT_2$ τότε

$$|f(x) - p(x)|^2 = |u(x) - T_1(x)|^2 + |v(x) - T_2(x)|^2 \leqslant \|u - T_1\|_\infty^2 + \|v - T_2\|_\infty^2 \leqslant \varepsilon^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, άρα

$$\|f - p\|_\infty = \max\{|f(x) - p(x)| : x \in \mathbb{R}\} \leqslant \varepsilon.$$

Μένει να δείξουμε ότι η $p = T_1 + iT_2$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υπάρχει $n \in \mathbb{N}$ τέτοιος ώστε τα

T_1, T_2 να γράφονται στη μορφή

$$T_1(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx) \ \text{ και } \ T_2(x) = t_0 + \sum_{k=1}^{n}(t_k \cos kx + s_k \sin kx),$$

όπου $a_k, b_k, t_k, s_k \in \mathbb{R}$. Χρησιμοποιώντας τις $\cos kx = \frac{1}{2}(e^{ikx} + e^{-ikx})$ και $\sin kx = \frac{1}{2i}(e^{ikx} - e^{-ikx})$ για $1 \leqslant k \leqslant n$, με απευθείας υπολογισμό βλέπουμε ότι υπάρχουν $c_k \in \mathbb{C}$, $|k| \leqslant n$ τέτοιοι ώστε

$$p(x) = T_1(x) + iT_2(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx},$$

δηλαδή το p είναι (μιγαδικό) τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού το πολύ ίσου με n. □

4.3 Ασκήσεις

4.1. (α) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^n f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

(β) Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αν ισχύει $\int_0^1 x^{2n} f(x)\,dx = 0$ για κάθε $n = 0, 1, 2, \ldots$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$.

4.2. (α) Έστω $f, g : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχείς συναρτήσεις με $f(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$. Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο $p : [0,1] \to \mathbb{R}$ ώστε $f(x) < p(x) < g(x)$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(β) Αποδείξτε ότι υπάρχει πολυώνυμο q ώστε $e^x \leqslant q(x) \leqslant e^{2x}$ για κάθε $x \in [0,1]$.

(γ) *Αν $h : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, αποδείξτε ότι υπάρχει γνησίως αύξουσα ακολουθία πολυωνύμων (p_n) ώστε $p_n \to h$ ομοιόμορφα στο $[0,1]$.*

4.3. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Αποδείξτε ότι, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει πολυώνυμο p ώστε $\|f - p\|_\infty < \varepsilon$ και $\|f' - p'\|_\infty < \varepsilon$.

4.4. Έστω $0 < a < b < 1$ και $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία (p_n) πολυωνύμων *με ακέραιους συντελεστές*, ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα στο $[a,b]$.

4.5. Έστω $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση, η οποία δεν είναι πολυώνυμο. Αν (p_n) είναι ακολουθία πολυωνύμων ώστε $p_n \to f$ ομοιόμορφα, αποδείξτε ότι $\deg(p_n) \to \infty$.

4.6. Αποδείξτε πλήρως την Πρόταση 4.2.2 οι συναρτήσεις $1, \cos x, \ldots, \cos nx, \sin x, \ldots, \sin nx$ είναι ορθογώνιες.

4.7. Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν το T είναι περιττή συνάρτηση, τότε $\lambda_k = 0$ για κάθε $k = 0, 1, \ldots, n$.

(β) Αν το T είναι άρτια συνάρτηση, τότε $\mu_k = 0$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$.

4.8. Αποδείξτε ότι: για κάθε $k \in \mathbb{N}$ υπάρχει πολυώνυμο $p(t)$ βαθμού $2k$ ώστε $\sin^{2k} x = p(\cos x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

4.9. (α) Αποδείξτε ότι, αν $k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ikt}\,dt = \begin{cases} 0, & \text{αν } k \neq 0 \\ 1, & \text{αν } k = 0 \end{cases}, \tag{4.3.1}$$

και συμπεράνατε ότι το σύνολο $\{e^{ikx} : k \in \mathbb{Z}\}$ είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητο.

(β) Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $0 < \mu_1 < \mu_2 < \cdots < \mu_n$. Αποδείξτε ότι οι συναρτήσεις

$$e^{i\mu_1 x}, e^{i\mu_2 x}, \ldots, e^{i\mu_n x}$$

είναι $\mathbb{C}$-γραμμικώς ανεξάρτητες. Χρειάζεται η υπόθεση ότι όλοι οι μ_j είναι θετικοί;

4.10. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-n}^{n} b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $p(x) = q(x)$ για κάθε x σε ένα $A \subseteq [0, 2\pi)$ με πληθάριθμο $|A| \geqslant 2n + 1$, αποδείξτε ότι $a_k = b_k$ για κάθε $|k| \leqslant n$.

4.11. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n. Αποδείξτε ότι το $p(x)$ παίρνει μόνο πραγματικές τιμές αν και μόνο αν για κάθε $|k| \leqslant n$ ισχύει $a_{-k} = \overline{a_k}$.

4.12. (α) Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Αποδείξτε ότι υπάρχουν μοναδικές f_e και f_o τέτοιες ώστε: η f_e είναι άρτια, η f_o είναι περιττή, και $f = f_e + f_o$.

(β) Έστω $p(x) = a_0 + \sum_{k=1}^{n}(a_k \cos kx + b_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Να βρείτε τις συναρτήσεις p_e και p_o.

(γ) Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Να βρείτε τις συναρτήσεις p_e και p_o.

4.13. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ και $q(x) = \sum_{k=-m}^{m} b_k e^{ikx}$ δύο μιγαδικά τριγωνομετρικά πολυώνυμα. Αν $r(x) = p(x)q(x)$ αποδείξτε ότι το $r(x)$ είναι επίσης τριγωνομετρικό πολυώνυμο και εκφράστε τους συντελεστές του συναρτήσει των συντελεστών a_k, b_k των $p(x)$ και $q(x)$.

4.14. Έστω $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e^{ikx}$ μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο και $m \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι η συνάρτηση $q(x) = p(x)e^{imx}$ είναι μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο και βρείτε τους συντελεστές του.

4.15. (α) Για κάθε $k \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$A_k(x) = \sum_{j=1}^{k} \sin jx.$$

Αποδείξτε ότι: αν $k > m$ τότε

$$|A_k(x) - A_m(x)| \leqslant \frac{1}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$, αποδείξτε ότι

$$\left|\sum_{j=m+1}^{k} \lambda_j \sin jx\right| \leqslant \frac{\lambda_{m+1}}{|\sin(x/2)|}$$

για κάθε $n \geqslant k > m \geqslant 1$ και για κάθε $0 < x < \pi$.

4.16. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $M > 0$. Αν $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots \geqslant \lambda_n \geqslant 0$ και $k\lambda_k \leqslant M$ για κάθε $k = 1, \ldots, n$, αποδείξτε ότι

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx\right| \leqslant (\pi + 1)M$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

[*Υπόδειξη:* Μπορείτε να υποθέσετε ότι $0 < x < \pi$. Γράψτε, αν θέλετε,

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \sin kx = \sum_{k=1}^{m} \lambda_k \sin kx + \sum_{k=m+1}^{n} \lambda_k \sin kx,$$

όπου $m = \min\{N, \lfloor \pi/x \rfloor\}$.]

4.17. (α) Έστω $0 < \delta < \pi$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $x \in [\delta, 2\pi - \delta]$,

$$\left|\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos kx\right| \leqslant \frac{1}{2\sin\frac{\delta}{2}} \qquad \text{και} \qquad \left|\sum_{k=1}^{n} \sin kx\right| \leqslant \frac{1}{\sin\frac{\delta}{2}}.$$

(β) Έστω (t_k) φθίνουσα ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών τέτοια ώστε $t_k \to 0$. Αποδείξτε ότι οι σειρές $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \cos kx$ και $\sum_{k=1}^{\infty} t_k \sin kx$ συγκλίνουν κατά σημείο στο $(0, 2\pi)$ και ομοιόμορφα σε κάθε διάστημα $[\delta, 2\pi - \delta]$, όπου $0 < \delta < \pi$. Συμπεράνατε ότι ορίζουν συνεχείς συναρτήσεις στο $(0, 2\pi)$.

4.18. (Λήμμα του Stečkin). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ πραγματικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο και έστω $x_0 \in \mathbb{R}$ με την ιδιότητα

$$f(x_0) = \|f\|_\infty = \max\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\}.$$

Αποδείξτε ότι: αν $|t| \leqslant \frac{\pi}{n}$ τότε

$$f(x_0 + t) \geqslant \|f\|_\infty \cos(nt).$$

4.19. (Ανισότητα του Bernstein). Έστω $T(x) = \lambda_0 + \sum_{k=1}^{n}(\lambda_k \cos kx + \mu_k \sin kx)$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Αποδείξτε ότι

$$\|f'\|_\infty \leqslant n\|f\|_\infty.$$

4.20. Έστω $T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ τριγωνομετρικό πολυώνυμο. Υποθέτουμε ότι το T παίρνει θετικές πραγματικές τιμές. Αποδείξτε ότι υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο Q ώστε

$$T(x) = |Q(x)|^2$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σειρές Fourier

5.1 Σειρές Fourier ολοκληρώσιμων συναρτήσεων

Θεωρούμε συναρτήσεις με μιγαδικές τιμές. Αν $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι οποιαδήποτε συνάρτηση, τότε η f γράφεται στη μορφή $f = u + iv$, όπου $u(x) = \mathrm{Re}(f(x))$ και $v(x) = \mathrm{Im}(f(x))$, $x \in [a,b]$. Λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη αν οι u, v είναι ολοκληρώσιμες, και ορίζουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b u(x)\,dx + i\int_a^b v(x)\,dx.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι εξακολουθεί να ισχύει η γραμμικότητα: αν οι $f, g : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμες και αν $t, s \in \mathbb{C}$ τότε

$$\int_a^b (tf(x) + sg(x))\,dx = t\int_a^b f(x)\,dx + s\int_a^b g(x)\,dx.$$

Θα χρησιμοποιούμε συχνά το εξής: αν η $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ είναι ολοκληρώσιμη, τότε

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\,dx. \tag{5.1.1}$$

Για την απόδειξη αυτού του ισχυρισμού, γράφουμε

$$\int_a^b f(x)\,dx = Re^{ix_0}, \quad \text{όπου } R = \left|\int_a^b f(x)\,dx\right| \quad \text{και } x_0 \in \mathbb{R},$$

και παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| &= e^{-ix_0}\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b e^{-ix_0} f(x)\,dx \\ &= \int_a^b \mathrm{Re}(e^{-ix_0} f(x))\,dx \leqslant \int_a^b |e^{-ix_0} f(x)|\,dx \\ &= \int_a^b |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Στην τρίτη ισότητα χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι αφού το ολοκλήρωμα της $e^{-ix_0}f(x)$ είναι πραγματικός αριθμός θα ισούται με το ολοκλήρωμα της $\mathrm{Re}(e^{-ix_0}f(x))$. Στην πρώτη ανισότητα, αμέσως μετά, χρησιμοποιούμε την ανισότητα $\mathrm{Re}(z) \leqslant |z|$, που ισχύει για κάθε $z \in \mathbb{C}$, και τη μονοτονία του ολοκληρώματος για πραγματικές συναρτήσεις.

Ορισμός 5.1.1 (μιγαδικές συναρτήσεις στον μοναδιαίο κύκλο). Συμβολίζουμε με $\mathbb{T}$ τον μοναδιαίο κύκλο

$$\mathbb{T} = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\} = \{e^{ix} : x \in \mathbb{R}\}.$$

Αν $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ είναι συνάρτηση με μιγαδικές τιμές, ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$f(x) = F(e^{ix}).$$

Παρατηρήστε ότι η f είναι 2π-περιοδική. Αντίστροφα, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε η $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με $F(e^{ix}) = f(x)$ είναι καλά ορισμένη (πράγματι, αν $e^{ix_1} = e^{ix_2}$ για κάποιους $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ τότε $x_2 = x_1 + 2k\pi$ για κάποιον ακέραιο k, άρα $f(x_1) = f(x_2)$ από την 2π-περιοδικότητα της f). Έχουμε λοιπόν μια 1-1 αντιστοιχία ανάμεσα στις συναρτήσεις $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και τις 2π-περιοδικές συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι μια 2π-περιοδική συνάρτηση, η οποία είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο διάστημα μήκους 2π, τότε ισχύουν τα ακόλουθα:

(i) Για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$ η f είναι ολοκληρώσιμη στο $[a, b]$ και

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,dx.$$

(ii) Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx.$$

Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση.

Με βάση την αντιστοιχία των $F : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που περιγράψαμε πιο πάνω, λέμε ότι η F είναι ολοκληρώσιμη αν η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάποιο (άρα σε κάθε) διάστημα μήκους 2π, η F είναι συνεχής αν η f είναι συνεχής, η F είναι παραγωγίσιμη αν η f είναι παραγωγίσιμη, η F είναι συνεχώς παραγωγίσιμη αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

Στο εξής θα ταυτίζουμε την F με την f και θα γράφουμε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ αν η f είναι ολοκληρώσιμη, $f \in C(\mathbb{T})$ αν η f είναι συνεχής, $f \in C^1(\mathbb{T})$ αν η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη και ούτω καθεξής.

Ορισμός 5.1.2 (p-νόρμα). Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $1 \leqslant p < \infty$ ορίζουμε

$$\|f\|_p = \left(\frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |f(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Γράφοντας $\mathbb{T}$ εννοούμε οποιοδήποτε διάστημα μήκους 2π, για παράδειγμα το $(-\pi, \pi]$. Ορίζουμε επίσης

$$\|f\|_\infty = \sup\{|f(x)| : x \in \mathbb{R}\} = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p.$$

Ορισμός 5.1.3 (σειρά Fourier). Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ ορίζουμε τον k-οστό *συντελεστή Fourier* της f μέσω της

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx. \tag{5.1.2}$$

Από την (5.1.1) έχουμε

$$|\widehat{f}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx = \|f\|_1,$$

χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι $|e^{-ikx}| = 1$. Συνεπώς, η ακολουθία $\{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη.

Η *σειρά Fourier* της f είναι η σειρά συναρτήσεων

$$S(f,x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Το *n-οστό μερικό άθροισμα* της σειράς Fourier της f είναι το μιγαδικό τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}.$$

Το βασικό πρόβλημα που θα μας απασχολήσει είναι το εξής: αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, θα εξετάσουμε αν η ακολουθία $s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx}$ «συγκλίνει» στην f. Όπως θα δούμε, το ερώτημα έχει καταφατική απάντηση αν περιοριστούμε σε «καλές συναρτήσεις» ή αν θεωρήσουμε «κατάλληλη έννοια σύγκλισης».

Παρατήρηση 5.1.4. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $k \geqslant 0$ ορίζουμε

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx$$

και για κάθε $k \geqslant 1$ ορίζουμε

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Αν η f είναι άρτια, δηλαδή $f(-x) = f(x)$ για κάθε x, τότε όλοι οι συντελεστές b_k μηδενίζονται, και

$$a_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx.$$

Αν η f είναι περιττή, δηλαδή $f(-x) = -f(x)$ για κάθε x, τότε όλοι οι συντελεστές a_k μηδενίζονται, και

$$b_k(f) = \frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx.$$

Παρατηρούμε ότι: αν $k \in \mathbb{Z}\setminus\{0\}$ τότε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx - i\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_k(f) - ib_k(f)}{2} \tag{5.1.3}$$

και

$$\widehat{f}(-k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx + i\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx = \frac{a_k(f) + ib_k(f)}{2}. \tag{5.1.4}$$

Επίσης,

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0(f)}{2}. \tag{5.1.5}$$

Παίρνουμε έτσι την επόμενη πρόταση.

Πρόταση 5.1.5. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύουν οι*

$$a_k(f) = \widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k) \ \ \textit{και} \ \ b_k(f) = i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k)). \tag{5.1.6}$$

Επίσης, ισχύει ότι

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \tag{5.1.7}$$

και

$$S(f,x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{ikx} = \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx) \tag{5.1.8}$$

Απόδειξη. Οι ισότητες $a_0(f) = 2\widehat{f}(0)$, $a_k(f) = \widehat{f}(k)+\widehat{f}(-k)$ και $b_k(f) = i(\widehat{f}(k)-\widehat{f}(-k))$ προκύπτουν άμεσα από τις (5.1.3), (5.1.4) και (5.1.5). Για την (5.1.7) γράφουμε

$$\begin{aligned}
s_n(f,x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}\\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=-n}^{-1} \widehat{f}(k)e^{ikx}\\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(-k)e^{-ikx}\\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(k)(\cos kx + i\sin kx) + \sum_{k=1}^{n} \widehat{f}(-k)(\cos kx - i\sin kx)\\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(\widehat{f}(k) + \widehat{f}(-k))\cos kx + \sum_{k=1}^{n} i(\widehat{f}(k) - \widehat{f}(-k))\sin kx\\
&= \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{n}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx),
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την (5.1.6). □

Παράδειγμα 5.1.6. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = x$ στο $[-\pi,\pi)$ και την επεκτείνουμε σε 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Η f είναι προφανώς ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,\pi]$. Θα υπολογίσουμε τους συντελεστές Fourier της f. Αφού η f είναι περιττή, έχουμε

$$\widehat{f}(0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\,dx = 0.$$

Για κάθε $k \neq 0$ γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{f}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x e^{-ikx}\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\left[-\frac{e^{-ikx}}{ik}\right]'\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-xe^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi} + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx \\ &= \frac{1}{2\pi}\,\frac{-\pi e^{-ik\pi} - \pi e^{ik\pi}}{ik} \\ &= -\frac{1}{2k}\,\frac{e^{ik\pi} + e^{-ik\pi}}{i} \\ &= \frac{(-1)^{k+1}}{ik}.\end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx = 0.$$

Έπεται ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) \sim \sum_{k\neq 0} \frac{(-1)^{k+1}}{ik} e^{ikx} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}e^{ikx} - (-1)^{-k+1}e^{-ikx}}{ik} = 2\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}\frac{\sin kx}{k}. \tag{5.1.9}$$

Για να βρούμε τη σειρά Fourier της f θα μπορούσαμε εναλλακτικά να υπολογίσουμε τους συντελεστές $a_k(f)$, $b_k(f)$ και να χρησιμοποιήσουμε την

$$S(f,x) \sim \frac{a_0(f)}{2} + \sum_{k=1}^{\infty}(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx).$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι $a_k(f) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, διότι η f είναι περιττή. Αυτό σημαίνει ότι

$$S(f,x) \sim \sum_{k\neq 0} b_k(f)\sin kx.$$

Χρησιμοποιώντας ολοκλήρωση κατά μέρη μπορούμε να υπολογίσουμε τους συντελεστές

$$b_k(f) = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin kx\,dx = \frac{2\cdot(-1)^{k+1}}{k}, \qquad k \geqslant 1$$

και να καταλήξουμε πάλι στην (5.1.9).

5.2 Βασικές ιδιότητες των συντελεστών Fourier

Δίνουμε αρχικά κάποιες βασικές και χρήσιμες ιδιότητες των σειρών Fourier, τις οποίες θα χρησιμοποιούμε συχνά στα επόμενα.

Λήμμα 5.2.1. *Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ισχύουν τα ακόλουθα:*

(α) *Για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,*

$$\widehat{(af + bg)}(k) = a\widehat{f}(k) + b\widehat{g}(k). \tag{5.2.1}$$

(β) *Για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{\overline{g}}(k) = \overline{\widehat{g}(-k)}. \tag{5.2.2}$$

(γ) *Αν* $a \in \mathbb{R}$ *και* $f_a(x) = f(x+a)$ *τότε για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{f_a}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t+a)e^{-ikt}dt = e^{ika}\widehat{f}(k). \tag{5.2.3}$$

(δ) *Αν* $n \in \mathbb{Z}$ *και* $g_n(x) = f(x)e^{inx}$ *τότε για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$,

$$\widehat{g_n}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)e^{int}e^{-ikt}dt = \widehat{f}(k-n). \tag{5.2.4}$$

Απόδειξη. Όλοι οι ισχυρισμοί προκύπτουν από τον ορισμό των συντελεστών Fourier, με απευθείας υπολογισμό (η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση). □

Παρατήρηση 5.2.2. Θα χρησιμοποιούμε συχνά την εξής παρατήρηση: Αν

$$p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$$

είναι ένα τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού n τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ με $|k| \leqslant n$ έχουμε

$$\widehat{p}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} p(x)e^{-ikx}dx = \sum_{s=-n}^{n} c_s \cdot \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i(s-k)x}dx = c_k, \tag{5.2.5}$$

διότι το ολοκλήρωμα της $e^{i(s-k)x}$ είναι ίσο με 2π αν $s = k$ και με 0 για όλα τα υπόλοιπα s, ενώ αν $|k| > n$ τότε $\widehat{p}(k) = 0$ διότι όλα τα ολοκληρώματα στην (5.2.5) είναι ίσα με 0.

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι αν μια συνεχής συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier ίσους με μηδέν, τότε είναι αναγκαστικά η μηδενική συνάρτηση. Για την απόδειξη χρησιμοποιούμε το γεγονός ότι τα τρογωνομετρικά πολυώνυμα είναι, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο, πυκνά στον $(C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty)$.

Πρόταση 5.2.3. *Έστω* $f \in C(\mathbb{T})$ *τέτοια ώστε* $\widehat{f}(k) = 0$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$. *Τότε,* $f \equiv 0$.

Απόδειξη. Από την υπόθεση και από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος έπεται ότι για κάθε τριγωνομετρικό πολυώνυμο $p(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{ikx}$ ισχύει ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)p(x)\,dx = \sum_{k=-n}^{n} c_k \int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{ikx}dx = \sum_{k=-n}^{n} c_k \cdot 2\pi\widehat{f}(-k) = 0. \tag{5.2.6}$$

Έχουμε $\overline{f} \in C(\mathbb{T})$. Από το Θεώρημα 4.2.5 υπάρχει ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|\overline{f} - p_m\|_\infty \to 0$. Παρατηρήστε ότι οι $\overline{p_m}$ είναι επίσης τριγωνομετρικά πολυώνυμα και

$$\|f - \overline{p_m}\|_\infty = \|\overline{f} - p_m\|_\infty \to 0.$$

Χρησιμοποιώντας και την (5.2.6) για το $\overline{p_m}$, για κάθε m έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{f(x)}\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\overline{p_m(x)}\,dx\right| \\ &= \left|\int_{-\pi}^{\pi} f(x)(\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)})\,dx\right| \\ &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,|\overline{f(x)} - \overline{p_m(x)}|\,dx \\ &\leqslant \int_{-\pi}^{\pi}\|f\|_\infty\|\overline{f} - \overline{p_m}\|_\infty\,dx \\ &= 2\pi\|f\|_\infty\|f - p_m\|_\infty \longrightarrow 0.\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|^2\,dx = 0,$$

και, αφού η f είναι συνεχής, συμπεραίνουμε ότι $f \equiv 0$. □

Άμεση συνέπεια της Πρότασης 5.2.3 είναι το εξής αποτέλεσμα «μοναδικότητας».

Πόρισμα 5.2.4. *Έστω $f, g \in C(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε $\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, $f \equiv g$.*

Απόδειξη. Από το Λήμμα 5.2.1 έχουμε ότι

$$\widehat{f-g}(k) = \widehat{f}(k) - \widehat{g}(k) = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αφού $f - g \in C(\mathbb{T})$, από την Πρόταση 5.2.3 συμπεραίνουμε ότι $f - g \equiv 0$. □

Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Όπως είδαμε, για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f}(k)| = \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)e^{-ikx}dx\right| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)|\,dx = \|f\|_1.$$

Με άλλα λόγια, η $\{\widehat{f}(k)\}_{k=-\infty}^{\infty}$ είναι φραγμένη. Ισχύει όμως κάτι ισχυρότερο:

Θεώρημα 5.2.5 (Riemann-Lebesgue). *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\lim_{|k|\to\infty}\widehat{f}(k) = 0.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.5 θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα προσέγγισης.

Λήμμα 5.2.6. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνάρτηση με πραγματικές τιμές και έστω $\varepsilon > 0$. Τότε, υπάρχει $g \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|g\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty$ και $\|f - g\|_1 \leqslant \varepsilon$.*

Απόδειξη. Θέτουμε $\delta = \pi\varepsilon$. Μπορούμε να βρούμε διαμέριση $P = \{-\pi = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \pi\}$ του $[-\pi, \pi]$ ώστε $U(f,P) - L(f,P) \leqslant \delta$. Συμβολίζουμε με f^* την κλιμακωτή συνάρτηση που ορίζεται ως εξής:

$$f^*(x) = \sup_{x_k\leqslant y\leqslant x_{k+1}} f(y), \qquad x \in [x_k, x_{k+1}), \quad 0 \leqslant k \leqslant n-1.$$

Από τον τρόπο ορισμού της f^* έχουμε $|f^*| \leqslant \|f\|_\infty$. Επιπλέον,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(x) - f(x)|\,dx = \int_{-\pi}^{\pi}(f^*(x) - f(x))\,dx \leqslant \delta,$$

διότι

$$\int_{-\pi}^{\pi}(f^*(x)-f(x))\,dx = U(f,P)-\int_{-\pi}^{\pi}f(x)\,dx \leqslant U(f,P)-L(f,P)\leqslant \delta.$$

Τροποποιούμε τώρα την f^* ώστε να πάρουμε μια συνεχή συνάρτηση g με $g(-\pi)=g(\pi)$ η οποία να προσεγγίζει κι αυτή την f ως προς την $\|\cdot\|_1$. Για αρκετά μικρό $\eta>0$, θέτουμε $g(x)=f^*(x)$ αν η απόσταση του x από καθένα από τα σημεία $x_0,\dots,x_N$ είναι $\geqslant \eta$. Στην η-περιοχή του x_k για $k=1,\dots,n-1$, ορίζουμε την g να είναι η γραμμική συνάρτηση που ικανοποιεί τις $g(x_k\pm\eta)=f^*(x_k\pm\eta)$. Κοντά στο $x_0=-\pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(-\pi)=0$ και $g(-\pi+\eta)=f^*(-\pi+\eta)$. Όμοια, κοντά στο $x_n=\pi$, παίρνουμε την g γραμμική με $g(\pi)=0$ και $g(\pi-\eta)=f^*(\pi-\eta)$.

Αφού $g(-\pi)=g(\pi)=0$, μπορούμε να επεκτείνουμε την g σε μια συνεχή περιοδική συνάρτηση σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Η απόλυτη τιμή αυτής της επέκτασης παραμένει φραγμένη από $\|f\|_\infty$. Επιπλέον, η g διαφέρει από την f^* μόνο στα $n-1$ διαστήματα μήκους 2η και τα δύο διαστήματα μήκους η γύρω από τα $x_0,\dots,x_n$ και $|f^*(x)-g(x)|\leqslant 2\|f\|_\infty$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$. Συνεπώς,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(x)-g(x)|\,dx \leqslant 2\|f\|_\infty\cdot 2\eta n.$$

Αν επιλέξουμε το η αρκετά μικρό, παίρνουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f^*(x)-g(x)|\,dx\leqslant\delta.$$

Τότε, η τριγωνική ανισότητα μας δίνει

$$\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\,dx\leqslant 2\delta,$$

άρα $\|f-g\|_1\leqslant \delta/\pi=\varepsilon$. □

Παρατήρηση 5.2.7. Το ίδιο αποτέλεσμα ισχύει για συναρτήσεις $f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$ με μιγαδικές τιμές. Γράφουμε $f=u+iv$, όπου $u,v\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι το πραγματικό και το φανταστικό μέρος της f. Παρατηρήστε ότι $|u|\leqslant|f|$ και $|v|\leqslant|f|$, άρα $\|u\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$ και $\|v\|_\infty\leqslant\|f\|_\infty$. Για τυχόν $\varepsilon>0$ βρίσκουμε πραγματικές συναρτήσεις $g_1,g_2\in C(\mathbb{T})$ τέτοιες ώστε $\|g_1\|_\infty\leqslant\|u\|_\infty$, $\|g_2\|_\infty\leqslant\|v\|_\infty$, $\|u-g_1\|_1\leqslant\varepsilon/2$ και $\|v-g_2\|_1\leqslant\varepsilon/2$. Τότε, η $g=g_1+ig_2\in C(T)$ και

$$\|f-g\|_1=\|(u-g_1)+i(v-g_2)\|_1\leqslant\|u-g_1\|_1+\|v-g_2\|_1\leqslant\varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Επίσης, για κάθε $x\in\mathbb{T}$ έχουμε

$$|g(x)|^2=|u(x)|^2+|v(x)|^2\leqslant\|u\|_\infty^2+\|v\|_\infty^2\leqslant 2\|f\|_\infty^2,$$

άρα $\|g\|_\infty\leqslant\sqrt{2}\|f\|_\infty$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.5. Έστω $\varepsilon>0$. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι πυκνά στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$: υπάρχει τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε

$$\|f-p\|_1\leqslant\varepsilon.$$

Πράγματι, αυτό είναι άμεσο από το Λήμμα 5.2.6 και το Θεώρημα 4.2.5: βρίσκουμε αρχικά $g\in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\|f-g\|_1\leqslant\varepsilon/2$ και στη συνέχεια τριγωνομετρικό πολυώνυμο p τέτοιο ώστε $\|g-p\|_\infty\leqslant\varepsilon/2$.

Τότε, $\|g-p\|_1 \leqslant \|g-p\|_\infty \leqslant \varepsilon/2$, και από την τριγωνική ανισότητα για την $\|\cdot\|_1$ έπεται ότι

$$\|f-p\|_1 \leqslant \|f-g\|_1 + \|g-p\|_1 \leqslant \varepsilon/2+\varepsilon/2=\varepsilon.$$

Έστω $n=n(p)$ ο βαθμός του p. Για κάθε $|k|>n$ ισχύει

$$\widehat{f}(k)=\widehat{f-p}(k)+\widehat{p}(k)=\widehat{f-p}(k),$$

διότι $\widehat{p}(k)=0$ από την Παρατήρηση 5.2.2. Συνεπώς,

$$|\widehat{f}(k)|=|\widehat{f-p}(k)|\leqslant \|f-p\|_1\leqslant\varepsilon$$

για κάθε $|k|>n$. Αφού το $\varepsilon>0$ ήταν τυχόν, έπεται ότι $\lim\limits_{|k|\to\infty}\widehat{f}(k)=0$. □

Παρατήρηση 5.2.8. Έστω $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση. Για κάθε $k\neq 0$, ολοκληρώνοντας κατά μέρη γράφουμε

$$\begin{aligned}2\pi\widehat{f}(k)&=\int_{-\pi}^{\pi}f(x)e^{-ikx}dx=f(x)\,\frac{-e^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi}+\frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-ikx}dx\\&=\frac{1}{ik}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-ikx}dx,\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι, αφού η f είναι 2π-περιοδική,

$$f(x)\,\frac{-e^{-ikx}}{ik}\Big|_{-\pi}^{\pi}=0.$$

Με άλλα λόγια,

$$\widehat{f}(k)=\frac{1}{ik}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)e^{-ikx}dx=\frac{1}{ik}\widehat{f'}(k)$$

για κάθε $k\neq 0$. Από την περιοδικότητα της f είναι φανερό ότι

$$2\pi\widehat{f'}(0)=\int_{-\pi}^{\pi}f'(x)=f(\pi)-f(-\pi)=0.$$

Συνεπώς,

$$\widehat{f'}(k)=ik\widehat{f}(k),\qquad k\in\mathbb{Z}. \tag{5.2.7}$$

Ομοίως, αν η $f:\mathbb{T}\to\mathbb{C}$ είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη, τότε

$$\widehat{f''}(k)=(ik)\widehat{f'}(k)=(ik)^2\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, και επαγωγικά έχουμε την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.2.9. *Έστω $f\in C^m(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι m φορές συνεχώς παραγωγίσιμη. Τότε,*

$$\widehat{f^{(m)}}(k)=(ik)^m\widehat{f}(k)$$

για κάθε $k\in\mathbb{Z}$, και

$$\lim_{|k|\to\infty}[k^m\widehat{f}(k)]=0.$$

Ειδικότερα, υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{|k|^m}.$$

Απόδειξη. Είναι άμεση συνέπεια της (5.2.7), την οποία εφαρμόζουμε, διαδοχικά, m φορές. Ο τελευταίος ισχυρισμός προκύπτει από το λήμμα Riemann-Lebesgue (Θεώρημα 5.2.5) το οποίο εφαρμόζουμε για την $f^{(m)}$. □

Θα εκμεταλλευτούμε την Πρόταση 5.2.9 για να δείξουμε ότι η σειρά Fourier μιας συνάρτησης $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ με συνεχή δεύτερη παράγωγο συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Ξεκινάμε με την επόμενη πρόταση, η οποία δείχνει ότι αν τα μερικά αθροίσματα s_n μιας τριγωνομετρικής σειράς

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$$

συγκλίνουν σε μια ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ως προς την $\|\cdot\|_1$, τότε $c_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Πρόταση 5.2.10. *Έστω $\sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{ikx}$ μια τριγωνομετρική σειρά και έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν $\|s_n - f\|_1 \to 0$ καθώς το $n \to \infty$, τότε*

$$c_k = \widehat{f}(k) \quad \text{για κάθε } k \in \mathbb{Z}.$$

Απόδειξη. Σταθεροποιούμε $k \in \mathbb{Z}$ και γράφουμε

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - s_n(x))e^{-ikx}dx + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)e^{-ikx}\,dx.$$

Από την Παρατήρηση 5.2.2, για κάθε $n \geqslant |k|$ έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} s_n(x)e^{-ikx}\,dx = c_k.$$

Επομένως, για κάθε $n \geqslant |k|$ έχουμε

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(k) - c_k| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - s_n(x))e^{-ikx}\,dx\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - s_n(x)|\,dx = \|f - s_n\|_1 \to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n \to \infty$. Έπεται ότι $c_k = \widehat{f}(k)$. □

Χρησιμοποιώντας την Πρόταση 5.2.10 και το θώρημα μοναδικότητας (Πόρισμα 5.2.4) μπορούμε να δώσουμε καταφατική απάντηση στο ερώτημα της σημειακής σύγκλισης της $s_n(f)$ στην f αν η f είναι συνεχής και η σειρά των συντελεστών Fourier της f συγκλίνει απολύτως.

Θεώρημα 5.2.11. *Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty.$$

Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f. Δηλαδή,

$$s_n(f) \longrightarrow f \ \text{ ομοιόμορφα.}$$

Απόδειξη. Από την υπόθεση ότι $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$ βλέπουμε ότι η ακολουθία συναρτήσεων

$$s_n(f,x) = \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx}$$

είναι ομοιόμορφα βασική: πράγματι, για κάθε $m > n$ έχουμε

$$\|s_m(f) - s_n(f)\|_\infty = \max_{x\in\mathbb{T}} |s_m(f,x) - s_n(f,x)| \leqslant \sum_{n<|k|\leqslant m} |\widehat{f}(k)| \to 0$$

όταν $m,n \to \infty$. Συνεπώς, η $\{s_n(f)\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνάρτηση $g \in C(\mathbb{T})$. Ειδικότερα,

$$\|s_n(f) - g\|_1 \leqslant \|s_n(f) - g\|_\infty \to 0,$$

οπότε η Πρόταση 5.2.10 μας εξασφαλίζει ότι

$$\widehat{f}(k) = \widehat{g}(k)$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αφού οι συνεχείς συναρτήσεις f και g έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier, από το Πόρισμα 5.2.4 συμπεραίνουμε ότι $g \equiv f$. Συνεπώς, $s_n(f) \longrightarrow f$ ομοιόμορφα. □

Η υπόθεση $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < \infty$ του Θεωρήματος 5.2.11 εξασφαλίζεται, για παράδειγμα, αν η f έχει συνεχή δεύτερη παράγωγο. Αυτό προκύπτει από την Πρόταση 5.2.9, αφού υπάρχει $C > 0$ ώστε, για κάθε $k \neq 0$,

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{|k|^2}.$$

Συνεπώς, έχουμε άμεσα την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.2.12. *Έστω $f \in C^2(\mathbb{T})$, δηλαδή η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και η f'' είναι συνεχής. Τότε, η σειρά Fourier της f συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.*

Παρατήρηση 5.2.13. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ένα φυσιολογικό ερώτημα που προκύπτει από το Θεώρημα 5.2.11 είναι να δοθούν ικανές συνθήκες ώστε η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ να συγκλίνει: αυτό εξασφαλίζει, όπως είδαμε, την ομοιόμορφη σύγκλιση της $S(f)$ στην f. Είδαμε ότι αρκεί η συνέχεια της f''. Όπως θα δούμε αργότερα, η σύγκλιση της σειράς $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|$ εξασφαλίζεται και με ασθενέστερες υποθέσεις για την f. Αρκεί να υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχώς παραγωγίσιμη. Ακόμα ασθενέστερη συνθήκη για την f είναι να ικανοποιεί *συνθήκη Holder τάξης* $\alpha > 1/2$: δηλαδή, να υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x-y|^\alpha$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.

5.3 Μοναδικότητα σειρών Fourier

Από την Πρόταση 5.2.3 γνωρίζουμε ότι αν μια συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{C}$ έχει όλους τους συντελεστές Fourier $\widehat{f}(k)$ ίσους με μηδέν, τότε $f\equiv 0$. Σε αυτή την παράγραφο δείχνουμε το ακόλουθο ισχυρότερο θεώρημα μοναδικότητας.

Θεώρημα 5.3.1. *Έστω $f\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0\in\mathbb{T}$ τότε $f(x_0)=0$.*

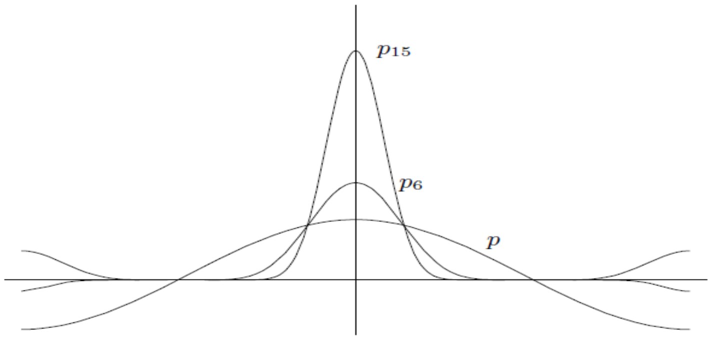
Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $x_0=0$. [Η απόδειξη αφήνεται ως άσκηση: αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η $g(x)=f(x+x_0)$ είναι συνεχής στο 0 – υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.]

Θα υποθέσουμε ότι $f(0)>0$ και θα καταλήξουμε σε άτοπο (τελείως ανάλογα αποκλείουμε την περίπτωση $f(0)<0$). Η ιδέα είναι να ορίσουμε κατάλληλη ακολουθία $\{p_m\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων τα οποία παρουσιάζουν «κορυφή» στο σημείο 0 και από αυτήν τους την ιδιότητα να συμπεράνουμε ότι
$$\lim_{k\to\infty}\int_{-\pi}^{\pi}p_m(x)f(x)\,dx=+\infty.$$
Αυτό είναι προφανώς άτοπο, αφού η υπόθεση ότι $\widehat{f}(k)=0$ για κάθε $k\in\mathbb{Z}$ δείχνει ότι όλα τα παραπάνω ολοκληρώματα είναι ίσα με 0 (εξηγήστε γιατί).

Αρχικά, αφού η f είναι ολοκληρώσιμη, είναι φραγμένη συνάρτηση: υπάρχει $M>0$ ώστε $|f(x)|\leqslant M$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$. Εφαρμόζοντας τον ορισμό της συνέχειας για την f στο σημείο 0, βρίσκουμε $0<\delta<\pi/2$ ώστε $f(x)>f(0)/2$ για κάθε $x\in(-\delta,\delta)$.

Παρατηρούμε ότι $\cos x\leqslant\cos\delta<1$ αν $\delta\leqslant|x|\leqslant\pi$. Συνεπώς, υπάρχει $\varepsilon>0$ ώστε
$$|\varepsilon+\cos x|<1-\varepsilon/2$$
για κάθε $\delta\leqslant|x|\leqslant\pi$. Αρκεί να επιλέξουμε $0<\varepsilon<\frac{2(1-\cos\delta)}{3}$. Πράγματι, τότε, αν $\varepsilon+\cos x\geqslant 0$ έχουμε $|\varepsilon+\cos x|=\varepsilon+\cos x\leqslant\varepsilon+\cos\delta<1-\varepsilon/2$ από την επιλογή του ε, ενώ αν $\varepsilon+\cos x<0$ έχουμε $|\varepsilon+\cos x|=-\cos x-\varepsilon\leqslant 1-\varepsilon<1-\varepsilon/2$.

Ορίζουμε
$$p(x)=\varepsilon+\cos x.$$
Τότε, $p(0)=1+\varepsilon$, συνεπώς υπάρχει $0<\eta<\delta$ ώστε
$$p(x)\geqslant 1+\varepsilon/2,\qquad x\in(-\eta,\eta).$$
Τώρα, για κάθε $m=1,2,\ldots$, ορίζουμε
$$p_m(x)=[p(x)]^m=(\varepsilon+\cos x)^m.$$



Σχήμα 5.1: Οι συναρτήσεις p, p_6 και p_{15} όταν $\varepsilon = 0.1$

Παρατηρήστε ότι κάθε p_m είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο (εξηγήστε γιατί). Αφού $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x)\, dx = 0, \qquad k = 1, 2, \dots .$$

Γράφουμε

$$\int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x)\, dx = \int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} p_m(x) f(x)\, dx + \int_{\eta \leqslant |x| < \delta} p_m(x) f(x)\, dx + \int_{|x| < \eta} p_m(x) f(x)\, dx,$$

και παρατηρούμε ότι:

(i) Για το πρώτο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\left| \int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} p_m(x) f(x)\, dx \right| \leqslant 2\pi M (1 - \varepsilon/2)^m \to 0$$

όταν $m \to \infty$.

(ii) Για το δεύτερο ολοκλήρωμα έχουμε

$$\int_{\eta \leqslant |x| < \delta} p_m(x) f(x)\, dx \geqslant 0$$

διότι $p(x) \geqslant 0$ και $f(x) \geqslant 0$ στο $\{x : \eta \leqslant |x| < \delta\}$. Για την πρώτη ανισότητα παρατηρήστε ότι $p(x) = \varepsilon + \cos x \geqslant \varepsilon + \cos \delta > 0$ διότι $0 < \delta < \pi/2$.

(iii) Για το τρίτο ολοκλήρωμα ισχύει το κάτω φράγμα

$$\int_{|x| < \eta} p_m(x) f(x)\, dx \geqslant 2\eta \frac{f(0)}{2} (1 + \varepsilon/2)^m.$$

Αφού

$$\lim_{m \to \infty} (1 + \varepsilon/2)^m = +\infty,$$

συνδυάζοντας τα παραπάνω βλέπουμε ότι

$$\lim_{m \to \infty} \int_{-\pi}^{\pi} p_m(x) f(x)\, dx = +\infty.$$

Έτσι, οδηγούμαστε σε άτοπο στην περίπτωση που η f παίρνει πραγματικές τιμές.

Στη γενική περίπτωση που η f παίρνει τιμές στο $\mathbb{C}$, γράφουμε $f(x) = u(x) + iv(x)$, όπου οι u και v είναι ολοκληρώσιμες πραγματικές συναρτήσεις. Αν θέσουμε $g(x) = \overline{f(x)}$, έχουμε

$$u(x) = \frac{f(x) + g(x)}{2} \quad \text{και} \quad v(x) = \frac{f(x) - g(x)}{2i}.$$

Παρατηρούμε ότι

$$\widehat{g}(k) = \overline{\widehat{f}(k)} = 0, \qquad k \in \mathbb{Z}.$$

Έπεται ότι

$$\widehat{u}(k) = \frac{\widehat{f}(k) + \widehat{g}(k)}{2} = 0 \qquad \text{και} \qquad \widehat{v}(k) = \frac{\widehat{f}(k) - \widehat{g}(k)}{2i} = 0$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έστω ότι η f είναι συνεχής στο x_0. Από τη συνέχεια των u και v στο x_0, από το γεγονός ότι οι συντελεστές Fourier των u και v μηδενίζονται και από το αποτέλεσμα στην πραγματική περίπτωση, συμπεραίνουμε ότι $u(x_0) = v(x_0) = 0$. Άρα, $f(x_0) = u(x_0) + iv(x_0) = 0$. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.3.1 είναι η Πρόταση 5.2.3: Αν $f \in C(\mathbb{T})$ και $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, τότε $f \equiv 0$.

5.4 Συνελίξεις και καλοί πυρήνες

Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Η *συνέλιξη* $f * g$ των f και g ορίζεται στο $\mathbb{R}$ μέσω της

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) g(x - y)\, dy.$$

Η τιμή της συνάρτησης είναι καλά ορισμένη για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αφού η $y \mapsto f(y)g(x-y)$ ως γινόμενο ολοκληρώσιμων συναρτήσεων είναι ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

Η συνέλιξη μπορεί να ιδωθεί σαν «σταθμισμένος μέσος». Για παράδειγμα, αν $g \equiv 1$ τότε η $f * g$ είναι σταθερή, με τιμή

$$(f * 1)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)\, dy.$$

Δηλαδή, ισούται με τη μέση τιμή της f στο $[-\pi, \pi]$. Από μια άλλη οπτική γωνία, η συνέλιξη $(f * g)(x)$ συχνά αντικαθιστά, υπό μία έννοια, το κατά σημείο γινόμενο $f(x)g(x)$ των f και g.

Σημαντική παρατήρηση: Οι συνελίξεις μπαίνουν στη μελέτη μας μέσω της παρατήρησης ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f αναπαρίστανται ως εξής:

$$\begin{aligned} s_n(f, x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{ikx} = \sum_{k=-n}^{n} \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) e^{-iky} dy \right) e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y) \left(\sum_{k=-n}^{n} e^{ik(x-y)} \right) dy = (f * D_n)(x), \end{aligned}$$

όπου D_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Dirichlet, που ορίζεται από τη σχέση

$$D_n(x) = \sum_{k=-n}^{n} e^{ikx}.$$

Παρατηρούμε λοιπόν ότι για την κατανόηση των μερικών αθροισμάτων $s_n(f)$ αρκεί να μελετήσουμε τη συνέλιξη $f * D_n$. Θα επανέλθουμε σε αυτό ακριβώς το θέμα, αφού προηγουμένως κάνουμε μια πρώτη γενική μελέτη της έννοιας της συνέλιξης.

Στην επόμενη πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες των συνελίξεων.

Πρόταση 5.4.1. *Έστω f, g και $h \in \mathcal{R}(\mathbb{R})$. Τότε:*

(i) $f * (g + h) = (f * g) + (f * h)$.

(ii) $(cf) * g = c(f * g) = f * (cg)$ *για κάθε* $c \in \mathbb{C}$.

(iii) $f * g = g * f$.

(iv) $(f * g) * h = f * (g * h)$.

(v) *Η* $f * g$ *είναι συνεχής.*

(vi) $\widehat{f * g}(k) = \widehat{f}(k)\widehat{g}(k)$ *για κάθε* $k \in \mathbb{Z}$.

Οι πρώτες τέσσερις προτάσεις περιγράφουν τις αλγεβρικές ιδιότητες των συνελίξεων: γραμμικότητα, μεταθετικότητα και προσεταιριστικότητα. Η πέμπτη πρόταση δείχνει ότι η συνέλιξη $f * g$ δύο συναρτήσεων είναι «πιο ομαλή» από τις f και g. Η $f * g$ είναι συνεχής ενώ οι f και g είναι απλώς ολοκληρώσιμες κατά Riemann. Τέλος, η έκτη πρόταση παίζει πολύ βασικό ρόλο στη μελέτη των σειρών Fourier. Γενικά, οι συντελεστές Fourier του γινομένου fg δύο συναρτήσεων δεν είναι γινόμενα των αντίστοιχων συντελεστών Fourier των f και g. Αν όμως αντικαταστήσουμε το γινόμενο των f και g με την συνέλιξή τους $f * g$, τότε έχουμε αυτή τη σχέση.

Απόδειξη. Οι ιδιότητες (i) και (ii) προκύπτουν άμεσα από τη γραμμικότητα του ολοκληρώματος. Για την απόδειξη της (iii), σταθεροποιούμε $x \in \mathbb{R}$ και, χρησιμοποιώντας την αλλαγή μεταβλητής $u = x - y$, γράφουμε

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x - y)\, dy = \frac{1}{2\pi} \int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x - u)g(u)\, du.$$

Αφού οι f, g είναι 2π-περιοδικές, η συνάρτηση $F(u) = f(x-u)g(u)$ είναι επίσης 2π-περιοδική. Συνεπώς,

$$\int_{x-\pi}^{x+\pi} f(x - u)g(u)\, du = \int_{-\pi}^{\pi} f(x - u)g(u)\, du.$$

Τότε,

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(u)f(x - u)\, du = (g * f)(x).$$

Οι υπόλοιπες ιδιότητες αιτιολογούνται εύκολα αν κάνουμε την πρόσθετη υπόθεση ότι οι f και g είναι συνεχείς. Σε αυτή την περίπτωση, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά της ολοκλήρωσης. Για την (iv), κάνοντας αλλαγή της σειράς ολοκλήρωσης και κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, γράφουμε

$$\begin{aligned}
[(f*g)*h](x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(y)h(x-y)\,dy \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(y-t)h(x-y)\,dt\,dy \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)g(y-t)h(x-y)\,dy\,dt \\
&= \frac{1}{4\pi^2}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\int_{-\pi}^{\pi} g(y-t)h((x-t)-(y-t))\,dy\,dt.
\end{aligned}$$

Η συνάρτηση $G(u) = g(u)h(x-t-u)$ είναι 2π-περιοδική. Με την αλλαγή μεταβλητής $u = y-t$ έχουμε

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y-t)h((x-t)-(y-t))\,dy &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi-t}^{\pi-t} g(u)h(x-t-u)\,du \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(u)h(x-t-u)\,du = (g*h)(x-t).
\end{aligned}$$

Επιστρέφοντας στην προηγούμενη σχέση παίρνουμε

$$[(f*g)*h](x) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)(g*h)(x-t)\,dt = [f*(g*h)](x).$$

Για την απόδειξη της (vi) γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{f*g}(k) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(f*g)(x)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{1}{2\pi}\left(\int_{-\pi}^{\pi} f(y)g(x-y)\,dy\right)e^{-ikx}dx \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x-y)e^{-ik(x-y)}dx\right)dy \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)e^{-iky}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(x)e^{-ikx}dx\right)dy \\
&= \widehat{f}(k)\widehat{g}(k).
\end{aligned}$$

Τέλος, δείχνουμε ότι αν οι f και g είναι συνεχείς, τότε η $f*g$ είναι συνεχής. Αρχικά, γράφουμε

$$(f*g)(x_1) - (f*g)(x_2) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1-y) - g(x_2-y)]\,dy.$$

Αφού η g είναι συνεχής, είναι ομοιόμορφα συνεχής σε κάθε κλειστό και φραγμένο διάστημα. Όμως, η g είναι ταυτόχρονα περιοδική, συνεπώς είναι ομοιόμορφα συνεχής σε ολόκληρο το $\mathbb{R}$. Αν μας δώσουν κάποιο $\varepsilon > 0$, μπορούμε να βρούμε $\delta > 0$ ώστε: αν $|s-t| < \delta$ τότε $|g(s) - g(t)| < \varepsilon$. Αν υποθέσουμε ότι

$|x_1 - x_2| < \delta$, τότε έχουμε $|(x_1 - y) - (x_2 - y)| < \delta$ για κάθε y, συνεπώς

$$\begin{aligned} |(f*g)(x_1) - (f*g)(x_2)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi} f(y)[g(x_1-y) - g(x_2-y)]\,dy\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|\,|g(x_1-y) - g(x_2-y)|\,dy \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|\,dy \\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2\pi}\,2\pi\|f\|_\infty. \end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει ότι η $f*g$ είναι (ομοιόμορφα) συνεχής. Έτσι ολοκληρώνεται η απόδειξη της πρότασης, με την πρόσθετη υπόθεση ότι οι f και g είναι συνεχείς.

Στη γενική περίπτωση, όπου οι f και g υποτίθενται απλώς ολοκληρώσιμες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τα αποτελέσματα που έχουμε αποδείξει ως τώρα (για συνεχείς f και g), σε συνδυασμό με το Λήμμα 5.2.6 (και την παρατήρηση μετά από αυτό). Εφαρμόζοντας το λήμμα, βρίσκουμε ακολουθίες $\{f_m\}$ και $\{g_m\}$ συνεχών συναρτήσεων με $\|f_m\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|f\|_\infty$ και $\|g_m\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|g\|_\infty$, οι οποίες προσεγγίζουν τις f και g αντίστοιχα. Τότε,

$$f*g - f_m*g_m = (f-f_m)*g + f_m*(g-g_m).$$

Από τις ιδιότητες της ακολουθίας $\{f_m\}$,

$$\begin{aligned} |(f-f_m)*g(x)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_m(y)|\,|g(x-y)|\,dy \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\|g\|_\infty\int_{-\pi}^{\pi} |f(y) - f_m(y)|\,dy \\ &= \|g\|_\infty\|f-f_m\|_1 \longrightarrow 0 \qquad \text{όταν } m\to\infty. \end{aligned}$$

Έπεται ότι $(f-f_m)*g \to 0$ ομοιόμορφα ως προς x. Όμοια,

$$\begin{aligned} |(f_m*(g-g_m))(x)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f_m(y)|\,|g(x-y) - g_m(x-y)|\,dy \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\|f_m\|_\infty\int_{-\pi}^{\pi} |g(x-y) - g_m(x-y)|\,dy \\ &= \frac{1}{2\pi}\|f_m\|_\infty\int_{-\pi}^{\pi} |g(u) - g_m(u)|\,du \\ &\leqslant \frac{\sqrt{2}\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |g(u) - g_m(u)|\,du \\ &= \sqrt{2}\|f\|_\infty\|g-g_m\|_1 \longrightarrow 0 \qquad \text{όταν } m\to\infty, \end{aligned}$$

δηλαδή $f_m*(g-g_m) \to 0$ ομοιόμορφα, συνεπώς $f_m*g_m \to f*g$ ομοιόμορφα. Αφού οι f_m*g_m είναι συνεχείς, συμπεραίνουμε ότι η $f*g$ είναι επίσης συνεχής. Αυτό αποδεικνύει την (v).

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε την (vi). Αν σταθεροποιήσουμε κάποιον k, έχουμε

$$\begin{aligned}|\widehat{f}(k) - \widehat{f_m}(k)| &= \frac{1}{2\pi}\left|\int_{-\pi}^{\pi}(f(x) - f_m(x))e^{-ikx}dx\right| \\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x) - f_m(x)|\, dx,\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει ότι $\widehat{f_m}(k) \to \widehat{f}(k)$ όταν $m \to \infty$. Όμοια δείχνουμε ότι $\widehat{g_m}(k) \to \widehat{g}(k)$. Αφού η $\{f_m * g_m\}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $f * g$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|(f_m * g_m)(x) - (f * g)(x)|\, dx \leqslant \|(f_m * g_m) - (f * g)\|_\infty \to 0.$$

Τότε, όπως παραπάνω, συμπεραίνουμε ότι

$$\widehat{f_m * g_m}(k) \to \widehat{f * g}(k)$$

όταν $m \to \infty$. Είδαμε όμως προηγουμένως ότι $\widehat{f_m}(k)\widehat{g_m}(k) = \widehat{f_m * g_m}(k)$, διότι οι f_m και g_m είναι συνεχείς. Η (vi) προκύπτει αν αφήσουμε το m να πάει στο άπειρο. Οι ιδιότητες (iii) και (iv) αποδεικνύονται με παρόμοια επιχειρήματα. □

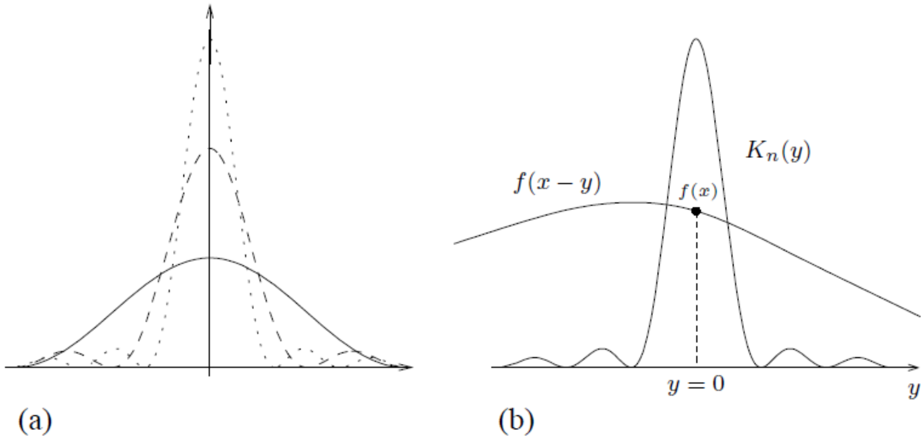
Ορισμός 5.4.2 (καλοί πυρήνες). Μια ακολουθία $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ συναρτήσεων $K_n \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ λέγεται ακολουθία *καλών πυρήνων* αν ικανοποιεί τα εξής:

(i) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\, dx = 1.$$

(ii) Υπάρχει σταθερά $M > 0$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,
$$\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|\, dx \leqslant M.$$

(iii) Για κάθε $\delta > 0$,
$$\lim_{n\to\infty}\int_{\delta\leqslant|x|\leqslant\pi} |K_n(x)|\, dx = 0.$$

Πολύ συχνά, δουλεύουμε με μη αρνητικούς πυρήνες: έχουμε $K_n(x) \geqslant 0$ για κάθε n και για κάθε x. Σε αυτή την περίπτωση, η ιδιότητα (ii) προκύπτει άμεσα από την (i) και δεν χρειάζεται να συμπεριληφθεί στον ορισμό. Η ιδιότητα (i) μας λέει ότι η K_n ορίζει μια «κατανομή μοναδιαίας μάζας» στον μοναδιαίο κύκλο και η ιδιότητα (iii) μας λέει ότι, καθώς το n μεγαλώνει, αυτή η μάζα «συγκεντρώνεται κοντά στο μηδέν».



Σχήμα 5.2: Καλοί πυρήνες

Η σχέση των συνελίξεων και των ακολουθιών καλών πυρήνων με το πρόβλημα της σύγκλισης των σειρών Fourier γίνεται φανερή από το επόμενο βασικό θεώρημα.

Θεώρημα 5.4.3. *Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ μια ακολουθία καλών πυρήνων και έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ στο οποίο η f είναι συνεχής, έχουμε*

$$\lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = f(x).$$

Επίσης, αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε

$$f * K_n \longrightarrow f \ \ \textit{ομοιόμορφα}.$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f είναι συνεχής στο x και θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$. Από τη συνέχεια της f στο x, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε: αν $|y| < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon\pi}{M}$. Χρησιμοποιώντας την ιδιότητα (i) της $\{K_n\}$, γράφουμε

$$\begin{aligned}(f * K_n)(x) - f(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y)\,dy - f(x)\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y) f(x-y)\,dy - f(x)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)\,dy\\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)[f(x-y) - f(x)]\,dy.\end{aligned}$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}|(f * K_n)(x) - f(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(y)[f(x-y) - f(x)]\,dy\right|\\ &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta} |K_n(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\,dy\\ &\quad + \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi} |K_n(y)|\,|f(x-y) - f(x)|\,dy.\end{aligned}$$

Για το πρώτο ολοκλήρωμα παρατηρούμε ότι: αν $|y| < \delta$ τότε $|f(x-y) - f(x)| < \frac{\varepsilon\pi}{M}$. Χρησιμοποιώντας και την ιδιότητα (ii) της $\{K_n\}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy &\leqslant \frac{\varepsilon}{2M}\int_{|y|<\delta}|K_n(y)|\,dy\\ &\leqslant \frac{\varepsilon}{2M}\int_{-\pi}^{\pi}|K_n(y)|\,dy\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Για το δεύτερο ολοκλήρωμα χρησιμοποιούμε την ιδιότητα (iii) της $\{K_n\}$ για το συγκεκριμένο δ: έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi}|K_n(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi}|K_n(y)|\,(|f(x-y)|+|f(x)|)\,dy\\ &\leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi}|K_n(y)|\,dy\to 0\end{aligned}$$

καθώς το $n\to\infty$. Συνεπώς, υπάρχει $n_0\in\mathbb{N}$ ώστε, για κάθε $n\geqslant n_0$,

$$\frac{1}{2\pi}\int_{\delta\leqslant|y|\leqslant\pi}|K_n(y)|\,|f(x-y)-f(x)|\,dy\leqslant\frac{\varepsilon}{2}.$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$|(f*K_n)(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon$$

για κάθε $n\geqslant n_0$. Άρα, $(f*K_n)(x)\to f(x)$ καθώς το $n\to\infty$.

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, παρατηρήστε ότι αν $f\in C(\mathbb{T})$ τότε η f είναι ομοιόμορφα συνεχής. Αυτό σημαίνει ότι το $\delta>0$ που επιλέξαμε στην αρχή της απόδειξης μπορεί να επιλεγεί ανεξάρτητα από το x (εξαρτάται μόνο από το ε). Συνεπώς, το επιχείρημα που ακολούθησε δείχνει ότι η σύγκλιση της $f*K_n$ στην f είναι ομοιόμορφη. □

5.4.1 Ο πυρήνας του Dirichlet

Έστω $n\geqslant 0$. Ο n-οστός *πυρήνας Dirichlet* είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx},\qquad x\in\mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ότι $D_n(0)=2n+1$. Θα δείξουμε ότι: αν $0<|x|\leqslant\pi$,

$$D_n(x)=\frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})x\right)}{\sin(x/2)}. \tag{5.4.1}$$

Για τον σκοπό αυτό, θέτουμε $\omega=e^{ix}$ και γράφουμε

$$D_n(x)=\sum_{k=0}^{n}\omega^k+\sum_{k=-n}^{-1}\omega^k=\sum_{k=0}^{n}\omega^k+\sum_{k=1}^{n}(1/\omega)^k.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\sum_{k=0}^{n}\omega^k=\frac{1-\omega^{n+1}}{1-\omega},$$

και
$$\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{\omega}\right)^k = \frac{1}{\omega}\frac{1-\omega^{-n}}{1-\frac{1}{\omega}} = \frac{\omega^{-n}-1}{1-\omega}.$$
Συνεπώς,
$$D_n(x) = \frac{\omega^{-n}-\omega^{n+1}}{1-\omega} = \frac{e^{-inx}-e^{i(n+1)x}}{1-e^{ix}} = \frac{e^{ix/2}}{e^{ix/2}}\,\frac{e^{-i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}-e^{i\left(n+\frac{1}{2}\right)x}}{e^{-ix/2}-e^{ix/2}},$$
απ' όπου προκύπτει η (5.4.1).

Από την $\sin y \geqslant \frac{2}{\pi}y$, $y\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ βλέπουμε ότι $|\sin(x/2)|\geqslant\frac{|x|}{\pi}$ για κάθε $x\in[-\pi,\pi]$. Τότε, η (5.4.1) μας δίνει ότι
$$|D_n(x)| \leqslant \frac{\pi}{|x|} \quad \text{αν } \ 0<|x|\leqslant\pi.$$

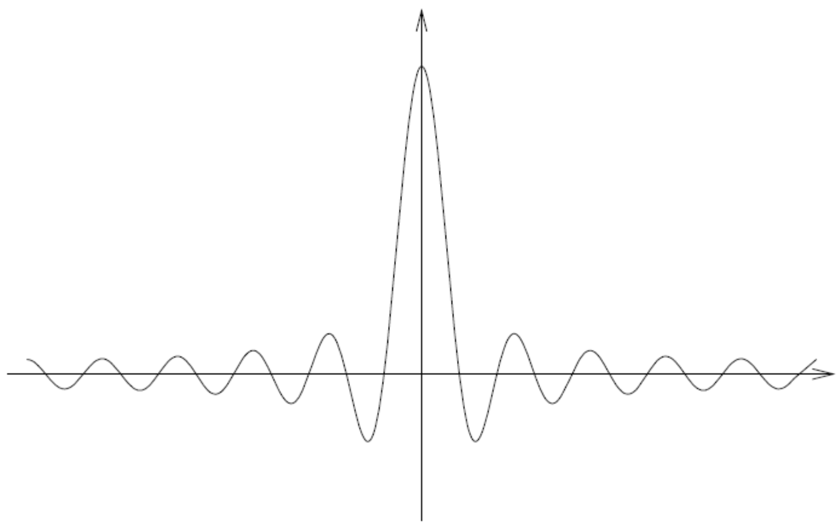
Παρατηρήστε επίσης ότι η D_n μηδενίζεται στα σημεία $x\in[-\pi,\pi]$ για τα οποία $\left(n+\frac{1}{2}\right)x = k\pi$ όπου k ακέραιος, και αλλάζει πρόσημο αριστερά και δεξιά από καθένα από αυτά τα σημεία.

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο πυρήνας του Dirichlet εμφανίζεται πολύ φυσιολογικά στη μελέτη του βασικού μας προβλήματος. Αρκεί να παρατηρήσετε ότι τα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier μιας συνάρτησης f αναπαρίστανται ως εξής:
$$s_n(f,x) = (f*D_n)(x).$$

Το Θεώρημα 5.4.3 και η παραπάνω ταυτότητα θέτουν φυσιολογικά το ερώτημα αν η ακολουθία $\{D_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Από την $D_n(x)=\sum_{k=-n}^{n}e^{ikx}$ και την $\int_{-\pi}^{\pi}e^{ikx}dx = 0$ αν $k\neq 0$, είναι φανερό ότι
$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}D_n(x)\,dx = 1$$
για κάθε $n\in\mathbb{N}$, δηλαδή ικανοποιείται η ιδιότητα (i). Όμως, υπάρχει σταθερά $c>0$ ώστε, για κάθε $n\in\mathbb{N}$,

$$\int_{-\pi}^{\pi}|D_n(x)|\,dx \geqslant c\ln n, \tag{5.4.2}$$

δηλαδή δεν ικανοποιείται η ιδιότητα (ii). Μπορούμε μάλιστα, όπως θα δούμε αμέσως παρακάτω, να δώσουμε πολύ ακριβείς ασυμπτωτικές εκτιμήσεις για το ολοκλήρωμα της $|D_n|$. Το μεγάλο «μειονέκτημα» του πυρήνα του Dirichlet είναι ότι δεν διατηρεί πρόσημο: παίρνει τόσο θετικές όσο και αρνητικές τιμές.



Σχήμα 5.3: Ο πυρήνας Dirichlet για μεγάλες τιμές του N

Ορισμός 5.4.4 (σταθερές Lebesgue). Για κάθε $n \geqslant 0$, η n-οστή σταθερά Lebesgue L_n ορίζεται ως εξής:

$$L_n = \|D_n\|_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(x)|\,dx. \tag{5.4.3}$$

Στην επόμενη πρόταση υπολογίζουμε την τάξη μεγέθους της σταθεράς L_n για μεγάλες τιμές του n.

Πρόταση 5.4.5. *Ισχύει ότι*

$$L_n \sim \frac{4\ln n}{\pi^2}$$

καθώς το $n \to \infty$.

Σημείωση. Ο συμβολισμός $a_n \sim b_n$ σημαίνει ότι η ακολουθία $\{a_n - b_n\}$ είναι φραγμένη: υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε $|a_n - b_n| \leqslant A$ για κάθε n. Ένας άλλος τρόπος για να περιγράψουμε την ίδια ιδιότητα είναι να γράψουμε $a_n - b_n = O(1)$. Γράφοντας $a_n = b_n + o(1)$ εννοούμε ότι $a_n - b_n \to 0$ καθώς το $n \to \infty$.

Απόδειξη. Αφού η D_n είναι άρτια και $\sin\frac{x}{2} > 0$ στο $(0,\pi)$, έχουμε

$$\begin{aligned} L_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)x)| \cdot \frac{1}{\sin(x/2)}\,dx \\ &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)x)| \left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{2}{x}\right) dx + \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)x)|\,\frac{1}{x}\,dx =: A_n + B_n. \end{aligned}$$

Ο πρώτος όρος είναι φραγμένος: αν θεωρήσουμε την $\varphi(x) = \left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{2}{x}\right)$ τότε $\lim\limits_{x\to 0^+}\varphi(x) = 0$, άρα η φ επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στο $[0,\pi]$, άρα είναι φραγμένη. Έπεται ότι

$$|A_n| = \left|\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} |\sin((n+1/2)x)| \left(\frac{1}{\sin\frac{x}{2}} - \frac{2}{x}\right) dx\right| \leqslant \|\varphi\|_\infty,$$

δηλαδή $A_n = O(1)$. Για τον δεύτερο όρο, κάνοντας την αλλαγή μεταβλητής $s = \left(n + \frac{1}{2}\right) x$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} B_n &= \frac{2}{\pi} \int_0^{n\pi + \pi/2} |\sin s| \, \frac{ds}{s} = \frac{2}{\pi} \int_\pi^{n\pi} |\sin s| \, \frac{ds}{s} + O(1) \\ &= C_n + O(1), \end{aligned}$$

αφού, λόγω της $\lim_{s \to 0^+} \frac{\sin s}{s} = 1$ η $s \mapsto \frac{\sin s}{s}$ επεκτείνεται σε συνεχή συνάρτηση στο $[0, \pi]$, η οποία είναι μάλιστα φραγμένη από 1, άρα έχουμε

$$\int_0^\pi \frac{\sin s}{s} \, ds = O(1)$$

και

$$\int_{n\pi}^{n\pi + \pi/2} \frac{|\sin s|}{s} \, ds \leqslant \frac{\pi}{2} \frac{1}{n\pi} \leqslant \frac{1}{2}.$$

Μένει λοιπόν να δείξουμε ότι

$$C_n := \frac{2}{\pi} \int_\pi^{n\pi} |\sin s| \, \frac{ds}{s} = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1). \tag{5.4.4}$$

Έχουμε

$$\begin{aligned} C_n &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{k\pi}^{(k+1)\pi} \frac{|\sin s|}{s} \, ds \\ &= \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_0^\pi \frac{|\sin(k\pi + t)|}{k\pi + t} \, dt \\ &= \frac{2}{\pi} \int_0^\pi (\sin t) \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi + t} \, dt, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι $|\sin(k\pi + t)| = |\sin t| = \sin t$ για κάθε $t \in [0, \pi]$ και $k \in \mathbb{Z}$. Παρατηρούμε τώρα ότι, για κάθε $t \in (0, \pi)$,

$$\frac{1}{(k+1)\pi} \leqslant \frac{1}{k\pi + t} \leqslant \frac{1}{k\pi},$$

άρα

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k\pi + t} \leqslant \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}.$$

Τα δύο αθροίσματα $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k+1}$ και $\sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$ είναι $\ln n + O(1)$. Αφού $\int_0^\pi \sin t \, dt = 2$, καταλήγουμε στην

$$C_n = \frac{4}{\pi^2} \ln n + O(1)$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Πόρισμα 5.4.6. *Για κάθε $f \in L_\infty(\mathbb{T})$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $n \geqslant 2$ ισχύει*

$$|s_n(f, x)| \leqslant C (\ln n) \, \|f\|_\infty,$$

όπου $C > 0$ απόλυτη σταθερά.

Απόδειξη. Έχουμε

$$
\begin{aligned}
|s_n(f,x)| &\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|\,|D_n(t)|\,dt \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\|f\|_\infty |D_n(t)|\,dt \\
&= \|D_n\|_1\|f\|_\infty \leqslant C\cdot \ln n\,\|f\|_\infty
\end{aligned}
$$

διότι $\|D_n\|_1 = L_n \leqslant C\cdot \ln n$ από την Πρόταση 5.4.5. □

Παρατήρηση 5.4.7. Αν η $\{D_n\}$ ήταν ακολουθία καλών πυρήνων, τότε από το Θεώρημα 5.4.3 θα είχαμε

$$s_n(f) = f * D_n \longrightarrow f$$

ομοιόμορφα, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$. Όπως θα δούμε στην επόμενη ενότητα, το πρόβλημα της κατά σημείο σύγκλισης της $\{s_n(f)\}$ στην f είναι πολύπλοκο, ακόμα και στην περίπτωση των συνεχών συναρτήσεων (η απάντηση είναι αρνητική).

5.5 Σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να δείξουμε ότι υπάρχουν $f \in C(\mathbb{T})$ που η σειρά Fourier τους αποκλίνει σε κάποιο σημείο. Θα δώσουμε δύο αποδείξεις. Η πρώτη είναι έμμεση και χρησιμοποιεί την αρχή ομοιόμορφου φράγματος (θεώρημα Banach-Steinhaus) ενώ η δεύτερη είναι κατασκευαστική.

5.5.1 Απόδειξη μέσω της αρχής ομοιόμορφου φράγματος

Σε αυτή την ενότητα θα δείξουμε (όχι κατασκευαστικά) ότι υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ για την οποία η ακολουθία $s_n(f,0)$ δεν είναι φραγμένη (άρα, δεν συγκλίνει). Ξεκινάμε με την επόμενη πρόταση, η οποία συνδέει το πρόβλημα με την συμπεριφορά της ακολουθίας (L_n).

Πρόταση 5.5.1. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$*

$$\sup_{f\in C(\mathbb{T}),\ \|f\|_\infty\leqslant 1} |s_n(f,0)| = L_n.$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι αν $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι μια συνάρτηση με πραγματικές τιμές, τότε για κάθε $\delta > 0$ υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ με πραγματικές τιμές ώστε $|f(x)| \leqslant \|g\|_\infty$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-g(x)|\,dx < \delta.$$

Η συνάρτηση $g(x) = \operatorname{sign} D_n(x)$, όπου $\operatorname{sign} u$ είναι το πρόσημο του u αν $u \neq 0$ και $\operatorname{sign} 0 = 0$, είναι Riemann ολοκληρώσιμη (έχει πεπερασμένα το πλήθος σημεία ασυνέχειας, όσα είναι τα σημεία στα οποία αλλάζει πρόσημο η D_n) και $\|g\|_\infty = 1$. Μπορούμε λοιπόν να βρούμε $f \in C(\mathbb{T})$ με πραγματικές τιμές ώστε $\|f\|_\infty \leqslant 1$ και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x)-\operatorname{sign} D_n(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{2n+1}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned} |s_n(f,0)| &= |s_n(g,0) - s_n(g-f,0)| \geqslant |s_n(g,0)| - |s_n(g-f,0)| \\ &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)D_n(-y)\,dy\right| - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)-g(y)||D_n(-y)|\,dy \\ &\geqslant \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} g(y)D_n(-y)\,dy\right| - \|D_n\|_\infty \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)-g(y)|\,dy \\ &\geqslant 0\left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \operatorname{sign} D_n(y)D_n(y)\,dy\right| - \frac{\varepsilon\|D_n\|_\infty}{2n+1} \\ &\geqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |D_n(y)|\,dy - \varepsilon, \end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι η D_n είναι άρτια, καθώς και την $\|D_n\|_\infty = 2n+1$. Από τα παραπάνω βλέπουμε ότι $|s_n(f,0)| \geqslant L_n - \varepsilon$.

Από την άλλη πλευρά, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$ έχουμε

$$|s_n(f,0)| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |f(y)|\,|D_n(y)|\,dy \leqslant \|D_n\|_1\|f\|_\infty \leqslant L_n,$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Από την Πρόταση 5.5.1 και την Πρόταση 5.4.5, για κάθε n υπάρχει $f_n \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$|s_n(f_n,0)| \sim L_n \sim \frac{4}{\pi^2}\ln n.$$

Θα δείξουμε ότι υπάρχει *μία* $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε

$$\sup_n |s_n(f,0)| = +\infty.$$

Ειδικότερα, η f έχει σειρά Fourier η οποία αποκλίνει στο σημείο 0. Για την απόδειξη θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus. Για λόγους πληρότητας δίνουμε την (σχετικά απλή) απόδειξή του, η οποία βασίζεται στο θεώρημα Baire.

Πρόταση 5.5.2. *Έστω X πλήρης μετρικός χώρος και έστω $\{f_n\}$ ακολουθία συνεχών συναρτήσεων $f_n : X \to \mathbb{R}$ με την εξής ιδιότητα: για κάθε $x \in X$ ισχύει*

$$\sup_n |f_n(x)| < \infty.$$

Τότε, υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$A_m = \{x \in X : \text{ για κάθε } n \in \mathbb{N},\ |f_n(x)| \leqslant m\}.$$

Κάθε A_m είναι κλειστό υποσύνολο του X: αυτό φαίνεται αμέσως αν γράψουμε

$$A_m = \bigcap_{n=1}^{\infty}\{x \in X : |f_n(x)| \leqslant m\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} f_n^{-1}([-m,m])$$

και θυμηθούμε ότι για κάθε $n \in \mathbb{N}$ η αντίστροφη εικόνα του $[-m,m]$ μέσω της f_n είναι κλειστό υποσύνολο του X και ότι η τομή κλειστών συνόλων είναι κλειστό σύνολο.

Παρατηρήστε ότι $X = \bigcup_{m=1}^{\infty} A_m$: Έστω $x \in X$. Από την υπόθεση, η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ είναι φραγμένη, δηλαδή υπάρχει $M_x > 0$ ώστε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$, $|f_n(x)| \leqslant M_x$. Υπάρχει $m = m(x) \in \mathbb{N}$ με $m \geqslant M_x$. Τότε, $x \in A_m$.

Ο X είναι πλήρης, οπότε το θεώρημα Baire μας εξασφαλίζει ότι κάποιο A_{m_0} έχει μη κενό εσωτερικό, δηλαδή υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r > 0$ ώστε $B(x_0, r) \subseteq A_{m_0}$. Όμως τότε, η $\{f_n\}$ είναι ομοιόμορφα φραγμένη στην $B(x_0, r)$: για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ισχύει $|f_n(x)| \leqslant m_0$. □

Ορισμός 5.5.3. Έστω X, Y δύο χώροι με νόρμα και έστω $T : X \to Y$ γραμμικός τελεστής (γραμμική απεικόνιση). Λέμε ότι ο T είναι φραγμένος αν υπάρχει σταθερά $M > 0$ τέτοια ώστε

$$\|T(x)\|_Y \leqslant M\,\|x\|_X$$

για κάθε $x \in X$.

Η αρχή του ομοιόμορφου φράγματος διατυπώνεται για μια ακολουθία $\{T_n\}$ φραγμένων γραμμικών τελεστών $T_n : X \to Y$ για τους οποίους ισχύει

$$\sup_n \|T_n(x)\|_Y < \infty$$

για κάθε $x \in X$. Αν ο X είναι πλήρης, η γραμμικότητα των T_n και η απλή ιδέα της απόδειξης της Πρότασης 5.5.2 μας δίνουν ότι οι T_n είναι ομοιόμορφα φραγμένοι. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής:

Θεώρημα 5.5.4 (αρχή ομοιόμορφου φράγματος, Banach-Steinhaus). *Έστω X χώρος Banach, Y χώρος με νόρμα, και έστω $\{T_n\}$ μια ακολουθία από φραγμένους γραμμικούς τελεστές $T_n : X \to Y$ με την ιδιότητα: για κάθε $x \in X$,*

$$\sup_n \|T_n(x)\|_Y < +\infty.$$

Τότε, υπάρχει $M > 0$ ώστε: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in X$,

$$\|T_n(x)\|_Y \leqslant M\,\|x\|_X.$$

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε $f_n : X \to \mathbb{R}$ με $f_n(x) = \|T_n(x)\|_Y$. Κάθε f_n είναι Lipschitz συνεχής συνάρτηση. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι ο T_n είναι φραγμένος, άρα υπάρχει $M_n > 0$ τέτοιος ώστε $\|T_n(x)\|_Y \leqslant M_n\|x\|_X$ για κάθε $x \in X$. Αν $x, y \in X$, τότε

$$|f_n(x) - f_n(y)| = |\,\|T_n(x)\|_Y - \|T_n(y)\|_Y\,| \leqslant \|T_n(x) - T_n(y)\|_Y = \|T_n(x-y)\|_Y \leqslant M_n\|x-y\|_X.$$

Από την υπόθεσή μας, για κάθε $x \in X$ ισχύει

$$\sup_n |f_n(x)| = \sup_n \|T_n(x)\|_Y < +\infty.$$

Από την Πρόταση 5.5.2 υπάρχουν $x_0 \in X$ και $r, M_1 > 0$ ώστε για κάθε $x \in B(x_0, r)$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$|f_n(x)| = \|T_n(x)\|_Y \leqslant M_1.$$

Έστω $x \in X$ με $\|x\|_X \leqslant 1$. Τότε, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ έχουμε $\|T_n(x_0 + (r/2)x)\|_Y \leqslant M_1$ και $\|T_n(x_0)\|_Y \leqslant M_1$ (γιατί

$x_0, x_0 + (r/2)x \in B(x_0, r)$). Άρα, για κάθε $n \in \mathbb{N}$

$$\|T_n(x)\|_Y = \frac{2}{r}\|T_n((r/2)x)\|_Y = \frac{2}{r}\|T_n(x_0 + (r/2)x) - T_n(x_0)\|_Y$$
$$\leqslant \frac{2}{r}\left(\|T_n(x_0 + (r/2)x)\|_Y + \|T_n(x_0)\|_Y\right) \leqslant \frac{4M_1}{r}.$$

Τώρα, για κάθε $x \neq 0$ θέτουμε $x_1 = x/\|x\|_X$ και παρατηρούμε ότι $\|x_1\|_X = 1$, άρα

$$\|T_n(x)\|_Y = \|T_n(\|x\|_X x_1)\|_X = \|x\|_X\|T_n(x_1)\|_Y \leqslant \frac{4M_1}{r}\|x\|_X$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, οπότε το ζητούμενο έπεται με $M = 4M_1/r$. □

Εφαρμόζουμε το θεώρημα Banach-Steinhaus για τους γραμμικούς τελεστές $T_n : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathbb{C}, |\cdot|)$ με $f \mapsto T_n(f) := s_n(f, 0)$, $f \in C(\mathbb{T})$.

Θεώρημα 5.5.5. *Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ ώστε*

$$\sup_n |s_n(f, 0)| = +\infty.$$

Απόδειξη. Για κάθε n θεωρούμε τον τελεστή $T_n : (C(\mathbb{T}), \|\cdot\|_\infty) \to \mathbb{C}$ με

$$T_n(f) = s_n(f, 0).$$

Κάθε T_n είναι φραγμένο γραμμικό συναρτησοειδές: η γραμμικότητα ελέγχεται εύκολα, και

$$\|T_n\| = \sup\{|s_n(f, 0)| : f \in C(\mathbb{T}), \|f\|_\infty \leqslant 1\} = L_n.$$

Ας υποθέσουμε ότι, για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ ισχύει

$$\sup_n |T_n(f)| = \sup_n |s_n(f, 0)| < \infty.$$

Από το θεώρημα Banach-Steinhaus υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|s_n(f, 0)| = |T_n(f)| \leqslant M$$

για κάθε $f \in C(\mathbb{T})$ με $\|f\|_\infty \leqslant 1$. Από την Πρόταση 5.5.1 παίρνουμε

$$L_n = \sup_{f \in C(\mathbb{T}),\, \|f\|_\infty \leqslant 1} |s_n(f, 0)| \leqslant M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, άρα η (L_n) είναι φραγμένη, το οποίο είναι άτοπο από την Πρόταση 5.4.5.

Συνεπώς, υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\limsup_n |s_n(f, 0)| = +\infty$. Ειδικότερα, η σειρά Fourier της f αποκλίνει στο σημείο 0. □

5.5.2 Μια κατασκευή του Lebesgue

Σε αυτή την ενότητα δίνουμε μια κατασκευαστική απόδειξη, που οφείλεται στον Lebesgue, για την ύπαρξη συνεχούς 2π-περιοδικής συνάρτησης $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ για την οποία

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n(f, 0)| = \infty.$$

Θα μας βοηθήσει να θεωρήσουμε μια παραλλαγή του πυρήνα Dirichlet.

Ορισμός 5.5.6. Για κάθε $n \geqslant 1$ ορίζουμε

$$D_n^*(y) = \frac{D_{n-1}(y) + D_n(y)}{2}, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$D_n^*(y) = \frac{1}{\sin\frac{y}{2}}\left(\sin\left(n - \tfrac{1}{2}\right)y + \sin\left(n + \tfrac{1}{2}\right)y\right) = \frac{\sin(ny)}{\tan\frac{y}{2}}.$$

Αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, για κάθε $n \geqslant 1$ και για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θέτουμε

$$s_n^*(f, x) := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t) D_n^*(x - t)\, dt.$$

Δεδομένου ότι

$$D_n(y) - D_n^*(y) = \frac{D_n(y) - D_{n-1}(y)}{2} = \frac{e^{iny} + e^{-iny}}{2} = \cos(ny),$$

συμπεραίνουμε ότι

$$s_n(f, x) = s_n^*(f, x) + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(x - t)\, dt. \tag{5.5.1}$$

Λήμμα 5.5.7. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι*

$$s_n(f, x) - s_n^*(f, x) \to 0 \ \text{ καθώς το } n \to \infty.$$

Απόδειξη. Λόγω της (5.5.1) αρκεί να ελέγξουμε ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos n(x - t)\, dt &= \cos(nx)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos(nt)\, dt \\ &\quad + \sin(nx)\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin(nt)\, dt \to 0,\end{aligned}$$

το οποίο ισχύει από το λήμμα Riemann-Lebesgue. □

Παρατήρηση 5.5.8. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$\varphi(y) = \frac{1}{\tan\frac{y}{2}} - \frac{2}{y}.$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι το $\lim_{y\to 0}\varphi(y)$ υπάρχει, άρα $\varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν λοιπόν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τότε $f\varphi \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, και από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi(x - t)\sin n(x - t)\, dt \to 0.$$

Έπεται ότι

$$s_n^*(f,x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\varphi(x-t)\sin n(x-t)\,dt \to 0.$$

Από το Λήμμα 5.5.7 καταλήγουμε στην

$$s_n(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}\,dt \to 0. \tag{5.5.2}$$

Παρατήρηση 5.5.9. Αφού $D_n^* = \frac{1}{2}(D_{n-1}+D_n)$, οι βασικές ιδιότητες της D_n^* προκύπτουν άμεσα από αυτές της D_n. Έχουμε ότι η D_n^* είναι άρτια συνάρτηση, και

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_n^*(y)\,dy = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} D_n^*(y)\,dy = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Τα δύο βασικά άνω φράγματα για την $|D_n^*(y)|$ είναι:

$$|D_n^*(y)| \leqslant \frac{1}{2}(|D_{n-1}(y)| + |D_n(y)|) \leqslant \frac{1}{2}\left((2n-1)+(2n+1)\right) = 2n$$

με ισότητα όταν $y=0$, και

$$|D_n^*(y)| \leqslant \frac{\pi}{|y|}, \qquad 0 < |y| \leqslant \pi.$$

Από την Παρατήρηση 5.5.8 έχουμε ότι, για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$,

$$s_n(f,x) - \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\frac{\sin n(x-t)}{x-t}\,dt \to 0. \tag{5.5.3}$$

Η κατασκευή του Lebesgue: Θα ορίσουμε μια άρτια 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, θέτοντας

$$f(t) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \sin(n_k t)\chi_{I_k}(t), \qquad 0 < t < \pi,$$

όπου $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ είναι μια γνησίως αύξουσα ακολουθία φυσικών που θα επιλεγεί κατάλληλα, χ_{I_k} είναι η δείκτρια συνάρτηση του διαστήματος $I_k = \left(\frac{\pi}{n_k}, \frac{\pi}{n_{k-1}}\right]$, και $\{c_k\}$ είναι μια φθίνουσα μηδενική ακολουθία θετικών πραγματικών αριθμών που θα επιλεγεί κατάλληλα. Παρατηρήστε ότι αν ο n_k είναι πολλαπλάσιο του n_{k-1} τότε η f θα είναι συνεχής (και ίση με 0) σε όλα τα σημεία π/n_k και ότι η υπόθεση $c_k \to 0$ εξασφαλίζει ότι η f είναι συνεχής στο 0 αν θέσουμε $f(0)=0$. Κατόπιν, επεκτείνουμε την f στο $[-\pi,0)$ ώστε να γίνει άρτια συνάρτηση, και τέλος, την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Επειδή τα διαστήματα I_k έχουν ξένους φορείς, αυτό που περιμένουμε από την (5.5.3) είναι ότι, αν επιλέξουμε κατάλληλα τις παραμέτρους, ο βασικός όρος στο μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f,0)$ θα είναι ο k-οστός, δηλαδή ο $c_k\sin(n_k t)\chi_{I_k}(t)$.

Αρχικά ορίζουμε $c_1 = 1$, $n_1 = 2$ και $I_1 = (\pi/2, \pi]$. Στο I_1 έχουμε

$$f(t) = c_1\sin(n_1 t).$$

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ορίσει $n_1 < n_2 < \cdots < n_{k-1}$, τους $c_1,\ldots,c_{k-1}$, και τα διαστήματα I_j, $j = 1,\ldots,k-1$. Ορίζουμε

$$\varphi(t) = \sum_{j=1}^{k-1} c_j \sin(n_j t)\chi_{I_j}(t) \quad \text{αν } t \in (\pi/n_{k-1}, \pi]$$

και $\varphi(t) = 0$ αλλιώς. Παρατηρούμε ότι η $t \mapsto \varphi(t)/t$ είναι φραγμένη: πράγματι, η φ μηδενίζεται στο $[0, \pi/n_{k-1}]$, άρα

$$|\varphi(t)| \leqslant c_1 \leqslant \frac{c_1 n_{k-1}}{\pi} t.$$

Από το λήμμα Riemann-Lebesgue έχουμε

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \sin(nt)\, dt = 0.$$

Ορίζουμε $n_k = n_{k-1}N_k$, όπου ο $N_k \geqslant 2^k$ είναι αρκετά μεγάλος ώστε να ισχύει

$$\left| \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \sin(n_k t)\, dt \right| < 1. \tag{5.5.4}$$

Στη συνέχεια, θέτουμε $I_k = (\pi/n_k, \pi/n_{k-1}]$ και ορίζουμε $f(t) = c_k \sin(n_k t)$ στο I_k, όπου $0 < c_k < c_{k-1} < 1$ τον οποίο θα επιλέξουμε. Για να εκτιμήσουμε το μερικό άθροισμα $s_{n_k}(f, 0)$ αρκεί, από την (5.5.3), να εκτιμήσουμε το

$$\begin{aligned} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(t) \sin(n_k t) \frac{dt}{t} &= \frac{2}{\pi} \left(\int_{(0,\pi/n_k]} + \int_{(\pi/n_k, \pi/n_{k-1}]} + \int_{(\pi/n_{k-1}, \pi]} \right) \\ &=: A_k + B_k + C_k. \end{aligned}$$

Από την (5.5.4) βλέπουμε ότι $C_k = O(1)$: στο $(\pi/n_{k-1}, \pi]$ έχουμε $f(t) = \varphi(t)$, άρα

$$\left| \int_0^\pi f(t) \sin(n_k t) \frac{dt}{t} \right| = \left| \int_0^\pi \frac{\varphi(t)}{t} \sin(n_k t)\, dt \right| < \frac{\pi}{2}.$$

Επίσης, ανεξάρτητα από τον τρόπο επιλογής των c_k, από την $\sin y \leqslant y$ στο $(0, \pi)$ και την $0 < c_k \leqslant 1$ έχουμε

$$|A_k| \leqslant \int_{(0,\pi/n_k]} |\sin(n_k t)| \frac{dt}{t} \leqslant n_k \frac{\pi}{n_k} = \pi.$$

Τέλος,

$$\begin{aligned} B_k &= c_k \int_{I_k} (\sin n_k t)^2 \frac{dt}{t} = c_k \int_{I_k} \frac{1 - \cos(2n_k t)}{2t}\, dt \\ &= \frac{c_k}{2} \int_{I_k} \frac{dt}{t} - \frac{c_k}{2} \int_{I_k} \cos(2n_k t) \frac{dt}{t} \\ &=: B_k' - B_k''. \end{aligned}$$

Για τον B_k' έχουμε

$$B_k' = \frac{c_k}{2} \int_{I_k} \frac{dt}{t} = \frac{c_k}{2} \ln\left(\frac{n_k}{n_{k-1}} \right) = \frac{c_k}{2} (\ln N_k).$$

Επιλέγοντας $c_k = (\ln N_k)^{-\varepsilon}$, όπου $0 < \varepsilon < 1$, έχουμε $c_k \to 0$ και

$$B_k' = \frac{1}{2} (\ln N_k)^{1-\varepsilon} \to \infty$$

καθώς το $k \to \infty$. Το ολοκλήρωμα στον όρο B_k'' ισούται με

$$\int_{I_k} \cos(2n_k t) \frac{dt}{t} = \frac{\sin(2n_k t)}{2n_k t} \Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} + \int_{I_k} \frac{\sin(2n_k t)}{2n_k} \frac{dt}{t^2}.$$

Από την επιλογή των n_k έχουμε ότι

$$\frac{\sin(2n_k t)}{2n_k t}\Big|_{\pi/n_k}^{\pi/n_{k-1}} = \frac{\sin(2\pi)}{2\pi} - \frac{\sin(2\pi N_k)}{2\pi N_k} = 0.$$

Επίσης,

$$\left|\int_{I_k} \frac{\sin(2n_k t)}{2n_k}\frac{dt}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{2n_k}\int_{\pi/n_k}^{\infty}\frac{dt}{t^2} = \frac{1}{2n_k}\frac{n_k}{\pi} = \frac{1}{2\pi} = O(1).$$

Συγκεντρώνοντας όλες τις εκτιμήσεις μας, βλέπουμε ότι

$$s_{n_k}(f,0) = \frac{1}{2}(\ln N_k)^{1-\varepsilon} + O(1),$$

απ' όπου έπεται ότι $s_{n_k}(f,0) \to \infty$. □

5.6 Σημειακή σύγκλιση και η αρχή της τοπικότητας

Το πρόβλημα της σημειακής σύγκλισης, δηλαδή του να αποφανθούμε αν για κάποιο (ή κάποια) $x_0 \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι $s_n(f,x_0) \to f(x_0)$ είναι το δυσκολότερο στη μελέτη των σειρών Fourier. Το θεώρημα που θα αποδείξουμε σε αυτή την ενότητα εξασφαλίζει ότι αν υποθέσουμε την ύπαρξη παραγώγου για την f στο x_0 τότε η απάντηση είναι καταφατική.

Θεώρημα 5.6.1. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $x_0 \in \mathbb{R}$. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε*

$$s_n(f,x_0) \to f(x_0).$$

Απόδειξη. Ορίζουμε μια συνάρτηση $F : [-\pi,\pi] \to \mathbb{C}$ με

$$F(t) = \begin{cases} \frac{f(x_0-t)-f(x_0)}{t} & \text{αν } 0 < |t| \leqslant \pi \\ -f'(x_0) & \text{αν } t = 0 \end{cases}$$

Αφού η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, από τον ορισμό της F βλέπουμε ότι $\lim_{t\to 0} F(t) = F(0)$, δηλαδή η F είναι συνεχής στο 0. Ειδικότερα, η F είναι φραγμένη σε μια περιοχή $(-\eta,\eta)$ του 0. Η f είναι φραγμένη, συνεπώς η F είναι φραγμένη στο $[-\pi,-\eta] \cup [\eta,\pi]$:

$$|F(t)| \leqslant \frac{|f(x_0-t)| + |f(x_0)|}{|t|} \leqslant \frac{2\|f\|_\infty}{\eta}$$

αν $\eta \leqslant |t| \leqslant \pi$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω έχουμε ότι η F είναι φραγμένη στο $[-\pi,\pi]$. Επιπλέον, η F είναι ολοκληρώσιμη στο $[-\pi,-\delta] \cup [\delta,\pi]$ για κάθε $0 < \delta < \pi$. Έπεται ότι η F είναι ολοκληρώσιμη (εξηγήστε γιατί, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Riemann).

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $s_n(f,x_0)=(f*D_n)(x_0)$, γράφουμε

$$\begin{aligned} s_n(f,x_0)-f(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t)D_n(t)\,dt - f(x_0) \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0-t)D_n(t)\,dt - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x_0)D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} [f(x_0-t)-f(x_0)]D_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,tD_n(t)\,dt. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} tD_n(t) &= t\,\frac{\sin(n+1/2)t}{\sin(t/2)} \\ &= \frac{t}{\sin(t/2)}\big(\sin(nt)\cos(t/2)+\cos(nt)\sin(t/2)\big) \\ &= \frac{t\cos(t/2)}{\sin(t/2)}\,\sin(nt) + t\,\cos(nt) \\ &= g_1(t)\sin(nt)+g_2(t)\cos(nt), \end{aligned}$$

όπου οι συναρτήσεις $g_1(t)=\frac{t\cos(t/2)}{\sin(t/2)}$ και $g_2(t)=t$ είναι συνεχείς στο $[-\pi,\pi]$ (η g_1 επεκτείνεται συνεχώς στο 0, διότι $\lim_{t\to 0}\frac{t\cos(t/2)}{\sin(t/2)}=2$). Τώρα, αφού οι $F(t)g_1(t)$ και $F(t)g_2(t)$ είναι ολοκληρώσιμες στο $[-\pi,\pi]$, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} s_n(f,x_0)-f(x_0) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)\,tD_n(t)\,dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)g_1(t)\sin(nt)\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} F(t)g_2(t)\,\cos(nt)\,dt \\ &\to 0+0=0 \end{aligned}$$

όταν $n\to\infty$, από το λήμμα Riemann–Lebesgue. □

Παρατήρηση 5.6.2. Εξετάζοντας την απόδειξη του Θεωρήματος 5.6.1 παρατηρούμε ότι το συμπέρασμα $s_n(f,x_0)\to f(x_0)$ εξακολουθεί να ισχύει αν κάνουμε την εξής ασθενέστερη υπόθεση για την f: «η f είναι ολοκληρώσιμη και ικανοποιεί *συνθήκη Lipschitz* στο x_0, δηλαδή, υπάρχει $M>0$ ώστε

$$|f(x_0-t)-f(x_0)|\leqslant M|t|$$

για κάθε $t\in[-\pi,\pi]$». Μπορούμε τότε να επαναλάβουμε την απόδειξη χωρίς καμία τροποποίηση.

Μια σημαντική συνέπεια του Θεωρήματος 5.6.1 είναι η *αρχή τοπικότητας του Riemann*: η σύγκλιση ή μη της ακολουθίας $s_n(f,x_0)$ εξαρτάται μόνο από τη συμπεριφορά της f *σε μια περιοχή του* x_0. Αυτό δεν είναι καθόλου προφανές αν σκεφτούμε ότι τα μερικά αθροίσματα $s_n(f,x_0)$ ορίζονται μέσω των συντελεστών Fourier $\widehat{f}(k)$, $|k|\leqslant n$, της f και οι συντελεστές Fourier προκύπτουν με ολοκλήρωση στο $[-\pi,\pi]$, δηλαδή παίρνουν υπ' όψιν τους τις τιμές της f σε *ολόκληρο το* $[-\pi,\pi]$.

Θεώρημα 5.6.3. *Έστω $f,g\in\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x_0\in\mathbb{R}$ και για κάποιο ανοικτό διάστημα $I\subset\mathbb{R}$ ώστε $x_0\in I$, ισχύει ότι*

$$f(x)=g(x)\qquad \text{για κάθε}\ \ x\in I.$$

Τότε,

$$s_n(f, x_0) - s_n(g, x_0) \to 0.$$

Ειδικότερα, η $\{s_n(f, x_0)\}$ συγκλίνει αν και μόνο αν η $\{s_n(g, x_0)\}$ συγκλίνει.

Απόδειξη. Θεωρούμε την συνάρτηση $h = f - g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Η h είναι ολοκληρώσιμη και $h(x) = 0$ για κάθε $x \in I$. Αφού το x_0 είναι εσωτερικό σημείο του I, η h είναι παραγωγίσιμη στο x_0, με $h'(x_0) = 0$.

Από το Θεώρημα 5.6.1 βλέπουμε ότι

$$s_n(h, x_0) \to h(x_0) = 0.$$

Όμως,

$$s_n(h, x_0) = s_n(f - g, x_0) = s_n(f, x_0) - s_n(g, x_0).$$

Έπεται το ζητούμενο. □

5.7 Ασκήσεις

5.1. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι: για κάθε $a < b$ στο $\mathbb{R}$,

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{a+2\pi}^{b+2\pi} f(x)\,dx = \int_{a-2\pi}^{b-2\pi} f(x)\,dx,$$

και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x+a)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \int_{-\pi+a}^{\pi+a} f(x)\,dx.$$

5.2. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x+t) - f(x)|^2 dx = 0.$$

5.3. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η f είναι άρτια, τότε $\widehat{f}(-k) = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά συνημιτόνων.

(β) Αν η f είναι περιττή, τότε $\widehat{f}(-k) = -\widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ και η $S(f)$ είναι σειρά ημιτόνων.

(γ) Αν $f(x+\pi) = f(x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ τότε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε περιττό ακέραιο k.

(δ) Αν η f παίρνει πραγματικές τιμές τότε $\overline{\hat{f}(k)} = \hat{f}(-k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν, επιπλέον, υποθέσουμε ότι η f είναι συνεχής, τότε ισχύει και το αντίστροφο.

5.4. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $a \in \mathbb{R}$ ορίζουμε

$$\tau_a(x) = f(x - a).$$

Περιγράψτε το γράφημα της τ_a σε σχέση με αυτό της f. Είναι η τ_a περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της τ_a συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

5.5. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Για κάθε $m \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$g_m(x) = f(mx).$$

Περιγράψτε το γράφημα της g_m σε σχέση με αυτό της f. Είναι η g_m περιοδική; Εκφράστε τους συντελεστές Fourier της g_m συναρτήσει των συντελεστών Fourier της f.

5.6. Έστω $f, f_n \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ $(n \in \mathbb{N})$ συναρτήσεις οι οποίες ικανοποιούν την

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\pi}^{\pi} |f(x) - f_n(x)|\, dx = 0.$$

Αποδείξτε ότι

$$\widehat{f_n}(k) \to \widehat{f}(k) \quad \text{όταν } n \to \infty,$$

ομοιόμορφα ως προς k. Δηλαδή, για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $n_0 \in \mathbb{N}$ ώστε για κάθε $n \geqslant n_0$ και για κάθε $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f_n}(k) - \widehat{f}(k)| < \varepsilon.$$

5.7. Ορίζουμε $f(x) = \pi - x$ αν $0 < x < 2\pi$, $f(0) = f(2\pi) = 0$, και επεκτείνουμε την f σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{k}.$$

5.8. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x) = (\pi - x)^2$ στο $[0, 2\pi]$ και την επεκτείνουμε σε μια 2π-περιοδική συνάρτηση ορισμένη στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι

$$S(f, x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^2}.$$

Χρησιμοποιώντας το παραπάνω, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5.9. Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 2π-περιοδική συνάρτηση. Υποθέτουμε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|f(x) - f(y)| \leqslant M|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι: υπάρχει σταθερά $C > 0$ ώστε, για κάθε k,

$$|a_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}} \qquad \text{και} \qquad |b_k(f)| \leqslant \frac{C}{k^{\alpha}}.$$

5.10. Θεωρούμε την περιττή 2π-περιοδική συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ που στο $[0, \pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = x(\pi - x).$$

Σχεδιάστε την γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και αποδείξτε ότι

$$f(x) = \frac{8}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin[(2k+1)x]}{(2k+1)^3}.$$

5.11. Έστω $0 < \delta < \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με

$$f(x) = \begin{cases} 1 - \frac{|x|}{\delta} & \text{αν } |x| \leqslant \delta \\ 0 & \text{αν } \delta \leqslant |x| \leqslant \pi \end{cases}$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f και αποδείξτε ότι

$$f(x) = \frac{\delta}{2\pi} + 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1-\cos k\delta}{k^2\pi\delta}\,\cos kx.$$

5.12. Θεωρούμε την 2π-περιοδική συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ που στο $[-\pi,\pi]$ ορίζεται από την

$$f(x) = |x|.$$

Σχεδιάστε τη γραφική παράσταση της f, υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της f και αποδείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \pi/2$ και

$$\widehat{f}(k) = \frac{-1+(-1)^k}{\pi k^2}, \qquad k \neq 0.$$

Γράψτε τη σειρά Fourier $S(f)$ της f σαν σειρά συνημιτόνων και ημιτόνων. Θέτοντας $x=0$ αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

5.13. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

(α) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{t\to 0} \int_0^{2\pi} |f(x+t) - f(x)|\,dx = 0.$$

(β) (Λήμμα Riemann-Lebesgue). Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = -\int_0^{2\pi} f\Big(x+\frac{\pi}{n}\Big)\sin nx\,dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx\,dx = 0.$$

5.14. (α) Θεωρώντας την περιττή επέκταση της $\cos x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)\setminus\{0\}$ αποδείξτε ότι

$$\cos x = \frac{8}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k\sin(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

(β) Θεωρώντας την άρτια επέκταση της $\sin x$ από το $(0,\pi)$ στο $(-\pi,\pi)$ αποδείξτε ότι

$$\sin x = \frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(2kx)}{4k^2-1}$$

για κάθε $0 < x < \pi$.

5.15. Έστω $[a,b]$ κλειστό διάστημα που περιέχεται στο εσωτερικό του $[-\pi,\pi]$. Θεωρούμε την $f(x) = \chi_{[a,b]}(x)$ που ορίζεται στο $[-\pi,\pi]$ από τις $f(x) = 1$ αν $x \in [a,b]$ και $f(x) = 0$ αλλιώς, και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f,x) \sim \frac{b-a}{2\pi} + \sum_{k\neq 0} \frac{e^{-ika} - e^{-ikb}}{2\pi ik}\, e^{ikx}.$$

Αποδείξτε ότι η $S(f)$ δεν συγκλίνει απολύτως για κανένα $x \in \mathbb{R}$. Βρείτε τα $x \in \mathbb{R}$ για τα οποία η $S(f,x)$ συγκλίνει.

5.16. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\|s_n(f)\|_\infty \leqslant C\ln(1+n)\|f\|_\infty,$$

όπου $C > 0$ σταθερά ανεξάρτητη από την f και από το n.

5.17. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$Q_n(t) = \alpha_n \left(\frac{1+\cos t}{2}\right)^n,$$

όπου η θετική σταθερά α_n επιλέγεται έτσι ώστε να έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} Q_n(t)\,dt = 1.$$

Αποδείξτε ότι: αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ είναι συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση, τότε

$$f * Q_n \longrightarrow f \ \text{ ομοιόμορφα.}$$

Παρατηρήστε ότι αυτό δίνει ακόμα μία απόδειξη του «τριγωνομετρικού» προσεγγιστικού θεωρήματος Weierstrass.

5.18. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση που ικανοποιεί την

$$f(x) = f(x+1) = f(x+\sqrt{2})$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή. [Υπόδειξη: Θεωρήστε την $g(x) = f\left(\frac{x}{2\pi}\right)$ και υπολογίστε τους συντελεστές Fourier της g.]

5.19. Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$(s_n(f)) * g = s_n(f * g) = f * (s_n(g)).$$

5.20. Έστω $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ ακολουθία καλών πυρήνων. Δείξτε ότι: για κάθε $p > 1$,

$$\lim_{n\to\infty} \|K_n\|_p = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} |K_n(x)|^p dx\right)^{1/p} = +\infty.$$

5.21. Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)g(nx)\,dx = \widehat{f}(0)\widehat{g}(0).$$

5.22. Έστω $f : [-\pi,\pi) \to \mathbb{R}$ αύξουσα συνάρτηση. Δείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{M}{|k|}$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$.

Υπόδειξη. Υπολογίστε αρχικά τους συντελεστές Fourier συναρτήσεων της μορφής $h := \chi_{[b_s,b_{s+1}]}$. Κατόπιν, δείξτε ότι η f προσεγγίζεται (ως προς την $\|\cdot\|_1$) από κλιμακωτές συναρτήσεις της μορφής

$$g(x) = \sum_{k=1}^{N} t_k \chi_{[b_s,b_{s+1}]}(x),$$

όπου $-\pi = b_1 < b_2 < \cdots < b_{N+1} = \pi$ και $-\|f\|_\infty \leqslant t_1 \leqslant \cdots \leqslant t_N \leqslant \|f\|_\infty$.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ **6**

Αθροισιμότητα σειρών Fourier

6.1 Cesàro αθροισιμότητα και το θεώρημα του Fejér

Ξεκινάμε με την κλασική έννοια της κατά Cesàro σύγκλισης σειρών μιγαδικών αριθμών. Θεωρούμε μια σειρά μιγαδικών αριθμών

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k = c_0 + c_1 + c_2 + \cdots + c_n + \cdots . \tag{6.1.1}$$

Το n-οστό μερικό άθροισμα της σειράς είναι το

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} c_k = c_0 + c_1 + \cdots + c_n.$$

Λέμε ότι η σειρά συγκλίνει στον $s \in \mathbb{C}$ αν $\lim s_n = s$. Αν θεωρήσουμε το παράδειγμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k = 1 - 1 + 1 - 1 + \cdots , \tag{6.1.2}$$

παρατηρούμε ότι η ακολουθία $\{s_n\}$ των μερικών της αθροισμάτων παίρνει διαδοχικά τις τιμές $1, 0, 1, 0, \ldots$ και δεν συγκλίνει. Δεδομένου ότι τα μερικά αθροίσματα παίρνουν «εξίσου» τις τιμές 0 και 1, έχει κάποιο νόημα να πούμε ότι, κατά μέσο όρο, είναι ίσα με $1/2$, δηλαδή ο $1/2$ είναι «κατά κάποιον τρόπο» το «άθροισμα» της σειράς. Η ιδέα αυτή μπορεί να περιγραφεί αυστηρά αν ορίσουμε την ακολουθία $\{\sigma_n\}$ των μέσων όρων των πρώτων n μερικών αθροισμάτων μιας σειράς. Αν μας δοθεί η σειρά (6.1.1), θέτουμε

$$\sigma_n = \frac{s_0 + s_1 + \cdots + s_{n-1}}{n}$$

για κάθε $n = 1, 2, \ldots$. Η ποσότητα σ_n είναι ο *n-οστός Cesàro μέσος* της ακολουθίας $\{s_k\}$ (θα την λέμε και *n-οστό άθροισμα Cesàro* της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$).

Αν υπάρχει το $\lim_{n\to\infty} \sigma_n = \sigma \in \mathbb{C}$, τότε λέμε ότι η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ είναι *Cesàro αθροίσιμη* στον σ. Όταν μιλάμε για σειρές συναρτήσεων, εξετάζουμε την κατά σημείο και την ομοιόμορφη Cesàro αθροισιμότητά τους σε κάποια συνάρτηση.

Στο παράδειγμα της σειράς (6.1.2) είναι πολύ εύκολο να ελέγξουμε ότι $\sigma_n \to 1/2$. Δηλαδή, η συγκεκριμένη σειρά αποκλίνει αλλά είναι Cesàro αθροίσιμη στον $1/2$. Μια άλλη χρήσιμη παρατήρηση είναι ότι αν μια σειρά $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ συγκλίνει και $s = \sum_{k=0}^{\infty} c_k = s$, τότε $\sigma_n \to s$, δηλαδή η σειρά είναι Cesàro αθροίσιμη στον s.

Ορισμός 6.1.1 (πυρήνας του Fejér). Ο n-οστός *πυρήνας του Fejér* είναι το τριγωνομετρικό πολυώνυμο

$$K_n(x) = \frac{D_0(x) + D_1(x) + \cdots + D_{n-1}(x)}{n}, \qquad n \geqslant 1.$$

όπου D_n είναι ο πυρήνας του Dirichlet. Παρατηρήστε ότι ο πυρήνας του Fejér ισούται με

$$\begin{aligned} K_n(x) &= \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1} D_s(x) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\sum_{k=-s}^{s} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{|k|\leqslant s\leqslant n-1} 1\right)e^{ikx} = \sum_{k=-(n-1)}^{n-1} \frac{n-|k|}{n} e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-(n-1)}^{n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{ikx}. \end{aligned}$$

Παρατήρηση 6.1.2. Από τη γραμμικότητα της συνέλιξης βλέπουμε ότι, αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τότε για την

$$\sigma_n(f,x) := \frac{s_0(f,x) + s_1(f,x) + \cdots + s_{n-1}(f,x)}{n}$$

έχουμε

$$\begin{aligned} \sigma_n(f,x) &= \frac{(f*D_0)(x) + (f*D_1)(x) + \cdots + (f*D_{n-1})(x)}{n} \\ &= \left(f * \frac{D_0 + D_1 + \cdots + D_{n-1}}{n}\right)(x) \\ &= (f*K_n)(x). \end{aligned}$$

Δηλαδή,

$$\sigma_n(f) \equiv f * K_n.$$

Παρατηρήστε ότι κάθε $\sigma_n(f)$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από $n-1$, διότι είναι μέσος όρος των $s_k(f)$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$, τα οποία έχουν την ίδια ιδιότητα. Πιο συγκεκριμένα,

$$\begin{aligned}
\sigma_n(f,x) &= \frac{s_0(f,x)+s_1(f,x)+\cdots+s_{n-1}(f,x)}{n} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{\ell=0}^{n-1}\sum_{|k|\leqslant \ell}\widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{|k|\leqslant n-1}\Bigg(\sum_{|k|\leqslant \ell<n}\mathbb{1}\Bigg)\widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{|k|\leqslant n-1}(n-|k|)\widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \sum_{|k|\leqslant n-1}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx} \\
&= \sum_{|k|\leqslant n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx}.
\end{aligned}$$

Η βασική παρατήρηση αυτής της παραγράφου είναι ότι η $\{K_n\}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων.

Πρόταση 6.1.3. *Για κάθε $n \geqslant 1$, ο n-οστός πυρήνας του Fejér δίνεται από τις*

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}, \qquad x \neq 2k\pi \tag{6.1.3}$$

και

$$K_n(x) = n, \qquad x = 2k\pi.$$

Η ακολουθία $\{K_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων.

Απόδειξη. Έστω $x \neq 2k\pi$. Έχουμε δείξει ότι, για κάθε $s = 0,1,\dots,n-1$,

$$D_s(x) = \frac{\sin\,(s+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)}.$$

Όμως,

$$\begin{aligned}
\sum_{s=0}^{n-1}\frac{\sin\,(s+\frac{1}{2})x}{\sin(x/2)} &= \frac{1}{2\sin^2(x/2)}\sum_{s=0}^{n-1}2\sin(x/2)\sin\,(s+\frac{1}{2})x \\
&= \frac{1}{2\sin^2(x/2)}\sum_{s=0}^{n-1}[\cos sx-\cos(s+1)x] \\
&= \frac{1}{2\sin^2(x/2)}(1-\cos nx) \\
&= \frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}
\end{aligned}$$

Διαιρώντας με n παίρνουμε την

$$K_n(x) = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}D_s(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)}.$$

Αν $x = 2k\pi$, έχουμε $D_s(x) = 2s + 1$, $s = 0, 1, \dots, n-1$. Συνεπώς,

$$K_n(2k\pi) = \frac{1 + 3 + \cdots + (2n-1)}{n} = \frac{n^2}{n} = n.$$

Παρατηρήστε ότι

$$K_n(x) \geqslant 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Αφού η $\{K_n\}$ είναι ακολουθία μη-αρνητικών πυρήνων, για να ελέγξουμε ότι είναι ακολουθία καλών πυρήνων αρκεί να δείξουμε ότι ικανοποιούνται οι ιδιότητες (i) και (iii) του Ορισμού 5.4.2. Η πρώτη ισχύει προφανώς: αφού

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_s(x)\,dx = 1$$

για κάθε $s \geqslant 0$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K_n(x)\,dx = \frac{1}{n}\sum_{s=0}^{n-1}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} D_s(x)\,dx = 1$$

για κάθε $n \geqslant 1$. Για την ιδιότητα (γ) παρατηρούμε ότι, από την (6.1.3), για κάθε $\delta \in (0, \pi)$ και για κάθε $\delta < |x| \leqslant \pi$, έχουμε

$$|K_n(x)| = K_n(x) = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(nx/2)}{\sin^2(x/2)} \leqslant \frac{1}{n\sin^2(x/2)} \leqslant \frac{1}{n\sin^2(\delta/2)}.$$

Είναι τώρα φανερό ότι

$$\int_{\delta \leqslant |x| \leqslant \pi} |K_n(x)|\,dx \leqslant \frac{2\pi}{n\sin^2(\delta/2)} \to 0$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 5.4.3 και της Πρότασης 6.1.3 είναι το εξής.

Θεώρημα 6.1.4. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Cesáro αθροίσιμη στην f σε κάθε σημείο συνέχειας της f: αν η f είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$, τότε*

$$\sigma_n(f, x) \to f(x).$$

Επιπλέον, αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι ομοιόμορφα Cesáro αθροίσιμη στην f: δηλαδή,

$$\sigma_n(f) \longrightarrow f \quad \textit{ομοιόμορφα}.$$

Άμεσο πόρισμα του Θεωρήματος 6.1.4 είναι το θεώρημα μοναδικότητας στην ισχυρή του μορφή.

Θεώρημα 6.1.5. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $\widehat{f}(k) = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αν η f είναι συνεχής στο σημείο $x_0 \in \mathbb{R}$ τότε $f(x_0) = 0$.*

Απόδειξη. Από την υπόθεση έχουμε

$$s_n(f, x_0) = \sum_{k=-n}^{n}\widehat{f}(k)e^{ikx_0} = 0$$

για κάθε n. Άρα,

$$\sigma_n(f, x_0) = \frac{s_0(f, x_0) + s_1(f, x_0) + \cdots + s_{n-1}(f, x_0)}{n} = 0$$

για κάθε n. Αφού η f είναι συνεχής στο x_0, το Θεώρημα 6.1.4 μας λέει ότι

$$\sigma_n(f, x_0) \to f(x_0).$$

Έπεται ότι $f(x_0) = 0$. □

Δεδομένου ότι οι Cesàro μέσοι $\sigma_n(f)$ μιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης είναι τριγωνομετρικά πολυώνυμα, μια δεύτερη άμεση συνέπεια του Θεωρήματος 6.1.4 είναι η πυκνότητα των τριγωνομετρικών πολυωνύμων στο χώρο $C(\mathbb{T})$ (έχουμε ήδη αποδείξει, με διαφορετικό τρόπο, το ίδιο αποτέλεσμα).

Θεώρημα 6.1.6. *Έστω $f \in C(\mathbb{T})$. Υπάρχει ακολουθία $\{p_n\}$ τριγωνομετρικών πολυωνύμων ώστε $\|f - p_n\|_\infty \to 0$.*

Απόδειξη. Από το Θεώρημα 6.1.4 έχουμε

$$\sigma_n(f) \longrightarrow f \quad \text{ομοιόμορφα.}$$

Παίρνοντας $p_n := \sigma_n(f)$ έχουμε το ζητούμενο. □

6.1.1 Μια συνεχής συνάρτηση με σειρά Fourier που αποκλίνει σε ένα σημείο*

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πάλι (με διαφορετικό τρόπο) ότι η υπόθεση $f \in C(\mathbb{T})$ δεν είναι αρκετή για να εξασφαλίσει την

$$f(x) = S(f, x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{ikx}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συγκεκριμένα, θα δείξουμε το εξής:

Θεώρημα 6.1.7. *Υπάρχει $f \in C(\mathbb{T})$ για την οποία*

$$\limsup_{n\to\infty} |s_n(f, 0)| = +\infty.$$

Δηλαδή, η $S(f, 0)$ αποκλίνει.

Σημαντικό ρόλο στην απόδειξη παίζουν οι *τριγωνομετρικές σειρές*

$$\sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{k} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Λήμμα 6.1.8. *Θεωρούμε τη συνάρτηση*

$$f(x) = \begin{cases} i(\pi - x) & \text{αν } 0 < x < \pi \\ -i(\pi + x) & \text{αν } -\pi < x < 0 \end{cases}$$

και την επεκτείνουμε περιοδικά στο $\mathbb{R}$. Τότε, η σειρά Fourier της f είναι η

$$S(f, x) \sim \sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Απόδειξη. Η f είναι περιττή, άρα $\widehat{f}(0) = 0$. Αν $k \neq 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
2\pi\widehat{f}(k) &= -i\int_{-\pi}^{0}(\pi + x)e^{-ikx}dx + i\int_{0}^{\pi}(\pi - x)e^{-ikx}dx \\
&= \left[-i(\pi + x)\frac{-e^{-ikx}}{ik}\right]_{-\pi}^{0} + i\int_{-\pi}^{0}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx + \left[i(\pi - x)\frac{-e^{-ikx}}{ik}\right]_{0}^{\pi} + i\int_{0}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx \\
&= -i\pi\frac{-1}{ik} - i\pi\frac{-1}{ik} + i\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx \\
&= \frac{\pi}{k} + \frac{\pi}{k} = \frac{2\pi}{k},
\end{aligned}$$

διότι $\int_{-\pi}^{\pi}\frac{e^{-ikx}}{ik}\,dx = 0$. Έπεται ότι, για κάθε $k \neq 0$,

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k},$$

και αυτό αποδεικνύει το λήμμα. □

Θα χρειαστούμε το εξής γενικό αποτέλεσμα, το οποίο παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Πρόταση 6.1.9. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αν η $\{|k\widehat{f}(k)|\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι φραγμένη ακολουθία, τότε τα μερικά αθροίσματα $s_n(f)$ της σειράς Fourier της f είναι ομοιόμορφα φραγμένα:*

$$\sup_n \|s_n(f)\|_\infty < +\infty.$$

Δηλαδή, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|s_n(f,x)| \leqslant M$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Για την απόδειξη της Πρότασης 6.1.9 χρειαζόμαστε το αντίστοιχο αποτέλεσμα για τους Cesàro μέσους της $S(f)$, το οποίο ισχύει σε πλήρη γενικότητα.

Λήμμα 6.1.10. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ισχύει ότι*

$$\sup_n \|\sigma_n(f)\|_\infty \leqslant \|f\|_\infty < +\infty.$$

Δηλαδή,

$$|\sigma_n(f,x)| \leqslant \|f\|_\infty$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ και για κάθε $x \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$\begin{aligned}
|\sigma_n(f,x)| = |(f * K_n)(x)| &= \left|\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x-t)K_n(t)\,dt\right| \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)K_n(t)|\,dt \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|f(x-t)|\,K_n(t)\,dt \\
&\leqslant \|f\|_\infty\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}K_n(t)\,dt = \|f\|_\infty.
\end{aligned}$$

Βασικό ρόλο στην απόδειξη έπαιξε το γεγονός ότι ο πυρήνας K_n παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές. □

Απόδειξη της Πρότασης 6.1.9. Από την υπόθεση, υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|k\widehat{f}(k)| \leqslant M$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Έστω $n \in \mathbb{N}$ και $x \in \mathbb{R}$. Θεωρούμε τη διαφορά

$$\begin{aligned} s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x) &= \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k)e^{ikx} - \sum_{k=-n}^{n} \left(1 - \frac{|k|}{n+1}\right)\widehat{f}(k)e^{ikx} \\ &= \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1}\widehat{f}(k)e^{ikx}. \end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$|s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)| \leqslant \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k\widehat{f}(k)|}{n+1} \leqslant \frac{(2n+1)M}{n+1} \leqslant 2M.$$

Τότε, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 6.1.10 βλέπουμε ότι

$$|s_n(f,x)| \leqslant |s_n(f,x) - \sigma_{n+1}(f,x)| + |\sigma_{n+1}(f,x)| \leqslant 2M + \|f\|_\infty,$$

και έχουμε το ζητούμενο. □

Η Πρόταση 6.1.9 εφαρμόζεται στα μερικά αθροίσματα της σειράς Fourier της συνάρτησης f του Λήμματος 6.1.8. Η σειρά

$$\sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikx}}{k}$$

είναι σειρά Fourier ολοκληρώσιμης συνάρτησης και είναι φανερό ότι $|k\widehat{f}(k)| \leqslant 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, υπάρχει $M > 0$ ώστε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\left| \sum_{1\leqslant |k|\leqslant n} \frac{e^{ikx}}{k} \right| = |s_n(f,x)| \leqslant M.$$

Παίρνουμε έτσι το εξής:

Λήμμα 6.1.11. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

$$f_n(x) = \sum_{1\leqslant |k|\leqslant n} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Υπάρχει $M > 0$ ώστε $|f_n(x)| \leqslant M$ για κάθε n και για κάθε x.

Περνάμε τώρα στην τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Με βάση την Πρόταση 6.1.9 μπορούμε να αποδείξουμε ότι *δεν υπάρχει* $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε

$$S(g,x) = \sum_{k=-\infty}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Πράγματι, αν υπήρχε τέτοια g, παρατηρώντας ότι $|k\widehat{g}(k)| \leqslant 1$ θα συμπεραίναμε, ακριβώς όπως στην περίπτωση του Λήμματος 6.1.11, ότι

$$\sup_n \|s_n(g)\|_\infty < +\infty.$$

Ειδικότερα, η ακολουθία $\{s_n(g,0)\}$ θα έπρεπε να είναι φραγμένη. Όμως,

$$|s_n(g,0)| = \left|\sum_{k=-n}^{-1} \frac{1}{k}\right| = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} \geqslant c \ln n$$

για κάποια σταθερά $c > 0$ ανεξάρτητη από το n. Δηλαδή, $|s_n(g,0)| \to +\infty$ και οδηγούμαστε σε άτοπο.

Θα χρησιμοποιήσουμε αυτήν ακριβώς την ακολουθία τριγωνομετρικών πολυωνύμων. Με λίγο διαφορετικό συμβολισμό, έχουμε δείξει το εξής:

Λήμμα 6.1.12. *Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θεωρούμε το τριγωνομετρικό πολυώνυμο*

$$g_n(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{e^{ikx}}{k}.$$

Υπάρχει $c > 0$ ώστε $|g_n(0)| \geqslant c \ln n$ για κάθε $n \in \mathbb{N}$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.7. Χρησιμοποιώντας τις ακολουθίες των τριγωνομετρικών πολυωνύμων $\{f_n\}$ και $\{g_n\}$ κάνουμε την εξής κατασκευή.

(α) Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$p_n(x) = e^{i2nx} f_n(x) = \sum_{1 \leqslant |k| \leqslant n} \frac{e^{i(k+2n)x}}{k}.$$

Παρατηρήστε ότι ο «φορέας» του p_n (δηλαδή το σύνολο των $m \in \mathbb{N}$ για τα οποία $\widehat{p_n}(m) \neq 0$) περιέχεται στο διάστημα $[n, 3n]$. Επίσης, για κάθε x,

$$|p_n(x)| = |e^{i2nx} f_n(x)| = |f_n(x)| \leqslant M,$$

από το Λήμμα 6.1.11.

Όμοια, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$q_n(x) = e^{i2nx} g_n(x) = \sum_{k=-n}^{-1} \frac{e^{i(k+2n)x}}{k}.$$

Παρατηρήστε ότι ο «φορέας» του q_n περιέχεται στο διάστημα $[n, 2n]$. Επίσης,

$$|q_n(0)| = |g_n(0)| \geqslant c \ln n,$$

από το Λήμμα 6.1.11. Τέλος, παρατηρήστε ότι

$$s_{2n}(p_n) = q_n. \tag{6.1.4}$$

(β) Θεωρούμε μια ακολουθία $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ θετικών πραγματικών αριθμών ώστε η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ να συγκλίνει. Κατόπιν, επιλέγουμε γνησίως αύξουσα ακολουθία $\{N_k\}$ φυσικών αριθμών, η οποία ικανοποιεί τα εξής:

(i) $N_{k+1} > 3N_k$ για κάθε $k \geqslant 1$.

(ii) $a_k \ln N_k \to +\infty$ όταν $k \to \infty$.

Για παράδειγμα, μπορούμε να επιλέξουμε $a_k = \frac{1}{k^2}$ και $N_k = 3^{2^k}$, $k = 1, 2, \ldots$.

(γ) Τώρα, ορίζουμε $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ως εξής:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k p_{N_k}(x).$$

Από το κριτήριο του Weierstrass, η σειρά συναρτήσεων του δεξιού μέλους συγκλίνει ομοιόμορφα: αν $r_k(x) = a_k p_{N_k}(x)$, τότε

$$\|r_k\|_\infty = a_k \|p_{N_k}\|_\infty \leqslant M a_k,$$

και

$$\sum_{k=1}^{\infty}\|r_k\|_\infty = M\sum_{k=1}^{\infty}a_k < +\infty.$$

Αφού κάθε r_k είναι συνεχής συνάρτηση (τριγωνομετρικό πολυώνυμο), η f είναι συνεχής.

(δ) Παρατηρήστε ότι, για κάθε $m \in \mathbb{N}$,

$$s_{3N_m}(f,x) = \sum_{k=1}^{m}a_k p_{N_k}(x),$$

αλλά, από την (6.1.4),

$$s_{2N_1}(f,x) = a_1 q_{N_1}(x)$$

και, για κάθε $m \geqslant 2$,

$$s_{2N_m}(f,x) = \sum_{k=1}^{m-1}a_k p_{N_k}(x) + a_m q_{N_m}(x).$$

Ειδικότερα, για $x = 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
|s_{2N_m}(f,0)| &= \left|\sum_{k=1}^{m-1}a_k p_{N_k}(0) + a_m q_{N_m}(0)\right| \\
&\geqslant a_m|q_{N_m}(0)| - \sum_{k=1}^{m-1}a_k|p_{N_k}(0)| \\
&\geqslant ca_m\ln N_m - M\sum_{k=1}^{m-1}a_k \\
&\geqslant ca_m\ln N_m - M\sum_{k=1}^{\infty}a_k.
\end{aligned}$$

Από τον ορισμό των a_m και N_m, έχουμε $a_m\ln N_m \to +\infty$ όταν $m\to\infty$. Αφού $\sum_{k=1}^{\infty}a_k < +\infty$, συμπεραίνουμε ότι

$$|s_{2N_m}(f,0)| \to +\infty.$$

Δηλαδή, $\limsup|s_n(f,0)| = +\infty$. Άρα, η $S(f,0)$ αποκλίνει. □

6.2 Abel αθροισιμότητα και ο πυρήνας του Poisson

Μια σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ λέγεται *Abel αθροίσιμη* στον $s\in\mathbb{C}$ αν για κάθε $0\leqslant r<1$ η σειρά

$$A(r) = \sum_{k=0}^{\infty}c_k r^k$$

συγκλίνει, και

$$\lim_{r\to 1^-}A(r) = s.$$

Οι ποσότητες $A(r)$ λέγονται *Abel μέσοι* της σειράς $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$. Αποδεικνύεται ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ συγκλίνει στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s. Αποδεικνύεται επίσης ότι αν η σειρά $\sum_{k=0}^{\infty}c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s τότε είναι και Abel αθροίσιμη στον s. Το παράδειγμα της σειράς

$$\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1) = 1-2+3-4+5-\cdots$$

δείχνει ότι μια σειρά μπορεί να είναι Abel αθροίσιμη χωρίς να είναι Cesàro αθροίσιμη. Μπορεί κανείς να ελέγξει ότι

$$A(r)=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k(k+1)r^k=\frac{1}{(1+r)^2}$$

για κάθε $0\leqslant r<1$, συνεπώς

$$\lim_{r\to 1^-}A(r)=\frac{1}{4}.$$

Όμως, η σειρά αυτή δεν είναι Cesàro αθροίσιμη: θα έπρεπε να ισχύει $\lim\limits_{n\to\infty}(s_n/n)=0$. Για αποδείξεις των παραπάνω ισχυρισμών παραπέμπουμε στις ασκήσεις.

Ορισμός 6.2.1 (πυρήνας του Poisson). Για κάθε $0\leqslant r<1$ θεωρούμε την συνάρτηση $P_r:[-\pi,\pi]\to\mathbb{C}$ που ορίζεται μέσω της

$$P_r(\vartheta)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}r^{|k|}e^{ik\vartheta}. \tag{6.2.1}$$

Χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weierstrass βλέπουμε ότι η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει απολύτως για κάθε ϑ και ομοιόμορφα σαν σειρά συναρτήσεων στο $[-\pi,\pi]$. Η συνάρτηση P_r λέγεται *r-πυρήνας του Poisson*. Από την ομοιόμορφη σύγκλιση της σειράς (6.2.1) έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\widehat{P_r}(k)=r^{|k|},\qquad k\in\mathbb{Z}.$$

Μπορούμε να δείξουμε ότι ο πυρήνας P_r παίρνει μη αρνητικές πραγματικές τιμές: δίνεται μάλιστα από την

$$P_r(\vartheta)=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta+r^2}.$$

Για την απόδειξη της τελευταίας ισότητας θέτουμε $\omega=re^{i\vartheta}$. Τότε,

$$\begin{aligned}P_r(\vartheta)&=\sum_{k=0}^{\infty}r^k(e^{i\vartheta})^k+\sum_{k=-\infty}^{-1}r^{-k}(e^{-i\vartheta})^{-k}=\sum_{k=0}^{\infty}(re^{i\vartheta})^k+\sum_{s=1}^{\infty}(re^{-i\vartheta})^s\\&=\sum_{k=0}^{\infty}\omega^k+\sum_{s=1}^{\infty}\overline{\omega}^s=\frac{1}{1-\omega}+\frac{\overline{\omega}}{1-\overline{\omega}}\\&=\frac{1-\overline{\omega}+(1-\omega)\overline{\omega}}{(1-\omega)(1-\overline{\omega})}=\frac{1-|\omega|^2}{|1-\omega|^2}.\end{aligned}$$

Δεδομένου ότι $|\omega|=r$ και $1-\omega=1-re^{i\vartheta}=(1-r\cos\vartheta)-ir\sin\vartheta$, καταλήγουμε στην

$$P_r(\vartheta)=\frac{1-r^2}{(1-r\cos\vartheta)^2+r^2\sin^2\vartheta}=\frac{1-r^2}{1-2r\cos\vartheta+r^2}.$$

Θα αποδείξουμε ότι η οικογένεια $\{P_r\}_{0\leqslant r\leqslant 1}$ είναι *οικογένεια καλών πυρήνων*. Δεδομένου ότι το σύνολο δεικτών είναι τώρα το διάστημα $[0,1)$, αυτό που χρειάζεται να τροποποιήσουμε είναι η συνθήκη (iii) στον Ορισμό 5.4.2. Ουσιαστικά ζητάμε το εξής: για κάθε ακολουθία $\{r_n\}$ στο $[0,1)$ με $r_n\to 1^-$, ζητάμε η ακολουθία $\{P_{r_n}\}_{n=1}^{\infty}$ να είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Η συνθήκη (ii) είναι άμεση συνέπεια της συνθήκης (i) αφού οι P_r παίρνουν μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Αποδεικνύουμε λοιπόν την εξής πρόταση.

Πρόταση 6.2.2. *Για κάθε* $0 \leqslant r < 1$ *έχουμε*

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta)\, d\vartheta = 1,$$

και για κάθε $0 < \delta < \pi$ *ισχύει ότι*

$$\lim_{r\to 1^-}\int_{\delta\leqslant |x|\leqslant \pi} P_r(\vartheta)\, d\vartheta = 0. \tag{6.2.2}$$

Απόδειξη. Έστω $0 \leqslant r < 1$. Αφού η σειρά συναρτήσεων $P_r(\vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{ik\vartheta}$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-\pi,\pi]$, έχουμε

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} P_r(\vartheta)\, d\vartheta = \sum_{k=-\infty}^{\infty}\frac{r^{|k|}}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\vartheta} d\vartheta = \frac{r^0}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^0 d\vartheta = 1,$$

χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $\int_{-\pi}^{\pi} e^{ik\vartheta}d\vartheta = 0$ αν $k \neq 0$. Έστω τώρα $0 < \delta < \pi$ και έστω $1/2 \leqslant r < 1$. Έχουμε

$$1 - 2r\cos\vartheta + r^2 = (1-r)^2 + 2r(1-\cos\vartheta) \geqslant (1-r)^2 + 2r(1-\cos\delta) \geqslant c_\delta = 1-\cos\delta > 0$$

για κάθε $\delta \leqslant |\vartheta| \leqslant \pi$ (διότι $\cos\vartheta \leqslant \cos\delta$). Συνεπώς,

$$0 \leqslant \int_{\delta\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi} P_r(\vartheta)\, d\vartheta \leqslant \int_{\delta\leqslant|\vartheta|\leqslant\pi}\frac{1-r^2}{c_\delta}\, d\vartheta \leqslant \frac{2\pi}{c_\delta}(1-r^2) \to 0$$

όταν $r \to 1^-$. Έπεται η (6.2.2). □

Ορισμός 6.2.3 (Abel μέσοι της f). Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Για κάθε $0 \leqslant r < 1$ ορίζουμε τον *r-Abel μέσο* της f μέσω της

$$A_r(f,\vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ik\vartheta}. \tag{6.2.3}$$

Αφού η ακολουθία $\{|\widehat{f}(k)|\}$ είναι φραγμένη, το κριτήριο του Weierstrass δείχνει ότι η σειρά συναρτήσεων στο δεξιό μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα στον $\mathbb{T}$. Παρατηρήστε ότι $A_r(f,\vartheta)$ είναι ο r-Abel μέσος της σειράς Fourier $S(f)$ της f.

Λόγω της ομοιόμορφης σύγκλισης της σειράς (6.2.3), μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned}
A_r(f,\vartheta) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\widehat{f}(k)e^{ik\vartheta}\\
&= \sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}\left(\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi\right)e^{ik\vartheta}\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} r^{|k|}e^{-ik(\varphi-\vartheta)}\right)d\varphi\\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi)P_r(\vartheta-\varphi)\, d\varphi\\
&= (f * P_r)(\vartheta).
\end{aligned}$$

Αφού η $\{P_r\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων, παίρνουμε αμέσως το εξής.

Θεώρημα 6.2.4. *Έστω $f : \mathbb{T} \to \mathbb{C}$ ολοκληρώσιμη συνάρτηση. Τότε, η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στην f σε κάθε σημείο συνέχειας της f: αν η f είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{T}$, τότε*

$$A_r(f, x) \to f(x).$$

Επιπλέον, αν η f είναι συνεχής σε κάθε $x \in \mathbb{T}$, τότε η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι ομοιόμορφα Abel αθροίσιμη στην f: δηλαδή,

$$A_r(f) \longrightarrow f \quad \text{ομοιόμορφα.}$$

Επιστρέφουμε τώρα σε ένα πρόβλημα που συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 1, όπου περιγράψαμε τη λύση της εξίσωσης θερμότητας σταθερής κατάστασης $\Delta u = 0$ στον μοναδιαίο δίσκο με συνοριακή συνθήκη $u = f$ στον μοναδιαίο κύκλο. Εκφράσαμε τη Λαπλασιανή σε πολικές συντεταγμένες, κάναμε χωρισμό μεταβλητών, και μαντέψαμε ότι μια λύση της εξίσωσης είναι η

$$u(r, \vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k r^{|k|} e^{ik\vartheta}, \tag{6.2.4}$$

όπου a_k είναι ο k-οστός συντελεστής Fourier της f. Με άλλα λόγια, η λύση δίνεται από την

$$u(r, \vartheta) = A_r(f, \vartheta) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\varphi) P_r(\vartheta - \varphi)\, d\varphi.$$

Μπορούμε τώρα να δείξουμε ότι αυτό ακριβώς συμβαίνει.

Θεώρημα 6.2.5. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, η συνάρτηση u που ορίζεται στον μοναδιαίο δίσκο από το ολοκλήρωμα Poisson*

$$u(r, \vartheta) = (f * P_r)(\vartheta) \tag{6.2.5}$$

έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:

(i) *Η u είναι δύο φορές συνεχώς παραγωγίσιμη στον μοναδιαίο δίσκο και ικανοποιεί την $\Delta u = 0$.*

(ii) *Αν η f είναι συνεχής στο σημείο ϑ, τότε*

$$\lim_{r \to 1^-} u(r, \vartheta) = f(\vartheta).$$

Αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε η σύγκλιση της $u(r, \cdot)$ στην f είναι ομοιόμορφη.

(iii) *Αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε η $u(r, \vartheta)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης θερμότητας σταθερής κατάστασης στον δίσκο που ικανοποιεί τις δύο προηγούμενες συνθήκες.*

Απόδειξη. Για το (i) θυμηθείτε ότι η συνάρτηση u ορίζεται μέσω της σειράς (6.2.4). Έστω $\varrho < 1$. Μέσα σε κάθε δίσκο ακτίνας $r < \varrho < 1$ με κέντρο την αρχή των αξόνων, μπορούμε να παραγωγίσουμε τη σειρά όρο προς όρο, και η σειρά που προκύπτει με την παραγώγιση συγκλίνει ομοιόμορφα. Μπορούμε λοιπόν να παραγωγίσουμε τη σειρά δύο φορές (μάλιστα, άπειρες φορές) και αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varrho < 1$ συμπεραίνουμε ότι η u είναι δύο φορές παραγωγίσιμη μέσα στον μοναδιαίο δίσκο. Επιπλέον, σε πολικές συντεταγμένες,

$$\Delta u = \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2},$$

δηλαδή η παραγώγιση όρο προς όρο δείχνει ότι $\Delta u = 0$.

Η απόδειξη του (ii) είναι απλή εφαρμογή του Θεωρήματος 6.2.4. Για να αποδείξουμε το (iii) χρησιμοποιούμε το ακόλουθο επιχείρημα. Έστω ότι μια συνάρτηση v είναι λύση της εξίσωσης θερμότητας σταθερής κατάστασης στον δίσκο και συγκλίνει στην f ομοιόμορφα καθώς $r \to 1^-$. Για τυχόν σταθερό r με $0 < r < 1$, η συνάρτηση $v(r, \vartheta)$ έχει μια σειρά Fourier

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k(r) e^{ik\vartheta} \quad \text{όπου} \quad a_k(r) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} v(r, \vartheta) e^{-ik\vartheta} d\vartheta.$$

Παίρνοντας υπ' όψιν μας το γεγονός ότι η $v(r, \vartheta)$ είναι λύση της εξίσωσης

$$\frac{\partial^2 v}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} = 0, \tag{6.2.6}$$

βλέπουμε ότι

$$a_k''(r) + \frac{1}{r} a_k'(r) - \frac{k^2}{r^2} a_k(r) = 0. \tag{6.2.7}$$

Πράγματι, μπορούμε πρώτα να πολλαπλασιάσουμε την (6.2.6) με $e^{-ik\vartheta}$ και μετά να ολοκληρώσουμε ως προς ϑ. Τότε, αφού η v είναι περιοδική, κάνοντας ολοκλήρωση κατά μέρη δύο φορές παίρνουμε

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2}(r, \vartheta) e^{-ik\vartheta} d\vartheta = -k^2 a_k(r).$$

Τέλος, μπορούμε να αλλάξουμε τη σειρά της παραγώγισης και της ολοκλήρωσης, κάτι που είναι επιτρεπτό διότι η v έχει συνεχείς παραγώγους δεύτερης τάξης. Αυτό δίνει την (6.2.7).

Έπεται ότι $a_k(r) = A_k r^k + B_k r^{-k}$ για κάποιες σταθερές A_k και B_k, όταν $k \neq 0$ (δείτε την Άσκηση 1.6. Για να υπολογίσουμε τις σταθερές, παρατηρούμε αρχικά ότι κάθε όρος $a_k(r)$ είναι φραγμένος διότι η v είναι φραγμένη, συνεπώς $B_k = 0$. Για να βρούμε τη σταθερά A_k αφήνουμε το $r \to 1$. Αφού η v συγκλίνει ομοιόμορφα στην f όταν $r \to 1$, βλέπουμε ότι

$$A_k = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) e^{-ik\vartheta} d\vartheta.$$

Με παρόμοιο επιχείρημα βλέπουμε ότι ο ίδιος τύπος ισχύει και στην περίπτωση όπου $k = 0$. Συμπεραίνουμε έτσι ότι για κάθε $0 < r < 1$, η σειρά Fourier της v δίνεται από τη σειρά της $u(r, \vartheta)$, όποτε το θεώρημα της μοναδικότητας για τις σειρές Fourier συνεχών συναρτήσεων μας εξασφαλίζει ότι $v = u$. □

Παρατήρηση 6.2.6. Από το μέρος (iii) του Θεωρήματος 6.2.5 μπορούμε να συμπεράνουμε ότι αν η u είναι λύση της $\Delta u = 0$ στον δίσκο και συγκλίνει στο 0 ομοιόμορφα καθώς $r \to 1$, τότε η u πρέπει να είναι ταυτοτικά ίση με 0. Αν όμως αντικαταστήσουμε την ομοιόμορφη σύγκλιση με την κατά σημείο σύγκλιση, αυτό το συμπέρασμα μπορεί να μην ισχύει. Παράδειγμα δίνεται στην Άσκηση 6.17.

6.3 Ασκήσεις

6.1. Έστω $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ σειρά πραγματικών αριθμών. Ορίζουμε $s_n = c_1 + \cdots + c_n$. Αποδείξτε ότι:

(α) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ συγκλίνει στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Αποδείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)\sum_{k=1}^{\infty} s_k r^k.$$

(β) Αν η σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} c_k$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον s, τότε είναι Abel αθροίσιμη στον s.

Υπόδειξη. Μπορείτε να υποθέσετε ότι $s = 0$ (εξηγήστε γιατί). Αποδείξτε πρώτα ότι, για κάθε $r \in (0,1)$,

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k r^k = (1-r)^2\sum_{k=1}^{\infty} k\sigma_k r^k.$$

6.2. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Cesàro αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(f,x) = \lim_{n\to\infty} (f * K_n)(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη τροποποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.3.

6.3. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι, για κάποιο $x \in \mathbb{R}$ υπάρχουν τα πλευρικά όρια

$$f(x^-) := \lim_{t\to x^-} f(t) \quad \text{και} \quad f(x^+) := \lim_{t\to x^+} f(t).$$

Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier $S(f)$ της f είναι Abel αθροίσιμη στο σημείο x: πιο συγκεκριμένα,

$$\lim_{r\to 1^-} A_r(f,x) = \lim_{r\to 1^-} (f * P_r)(x) = \frac{f(x^-)+f(x^+)}{2}.$$

Για την απόδειξη τροποποιήστε την απόδειξη του Θεωρήματος 5.4.3 και χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{0} P_r(x)\,dx = \frac{1}{2\pi}\int_{0}^{\pi} P_r(x)\,dx.$$

6.4. Για κάθε $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε

$$G_n(x) = K_n(x)\sin nx,$$

όπου K_n είναι ο n-οστός πυρήνας του Fejér. Αποδείξτε ότι: αν $p \in \mathcal{T}_n$ είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού μικρότερου ή ίσου από n, τότε

$$p'(x) = -2n(p * G_n)(x)$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Συμπεράνατε ότι

$$|p'(x)| \leqslant 2n\|p\|_\infty$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αυτή είναι μια «ασθενής» έκδοση της ανισότητας του Bernstein, η οποία ισχυρίζεται ότι $\|p'\|_\infty \leqslant n\|p\|_\infty$ για κάθε $p \in \mathcal{T}_n$.

6.5. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αν

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k\sqrt{a_k^2+b_k^2} = 0,$$

δείξτε ότι $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα στο $\mathbb{R}$.

6.6. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αποδείξτε ότι ο τελεστής $T : \mathcal{R}(\mathbb{T}) \to \mathcal{R}(\mathbb{T})$ που ορίζεται μέσω της $T(g) = f * g$ έχει νόρμα

$$\|T\| = \|f\|_1.$$

Υπόδειξη. Χρησιμοποιήστε τον πυρήνα του Fejér K_n, $n \in \mathbb{N}$.

6.7. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $|k\widehat{f}(k)| \leqslant A$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Αποδείξτε ότι, για κάθε n και για κάθε $x \in \mathbb{T}$ ισχύει

$$|s_n(f, x)| \leqslant \|f\|_\infty + 2A.$$

Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι

$$s_n(f, x) = \sigma_{n+1}(f, x) + \sum_{k=-n}^{n} \frac{|k|}{n+1} \widehat{f}(k) e^{ikx}.$$

6.8. Έστω $f \in C(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα

$$\lim_{n\to\infty} n\|\sigma_n(f) - f\|_1 = 0.$$

Αποδείξτε ότι η f είναι σταθερή.

6.9. Έστω (f_n) ακολουθία στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για κάθε $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\lim_{n\to\infty} \|g - g * f_n\|_1 = 0.$$

Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} \widehat{f_n}(k) = 1$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

6.10. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ άρτια ολοκληρώσιμη συνάρτηση με την ιδιότητα: $a_k(f) \geqslant 0$ για κάθε $k \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k < +\infty.$$

6.11. Έστω $0 < \alpha \leqslant 1$ και έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι για κάποιο $t \in \mathbb{T}$ η f ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(t+x) - f(t)| \leqslant A|x|^\alpha, \qquad |x| \leqslant \pi.$$

Αποδείξτε ότι: αν $\alpha < 1$ τότε

$$|\sigma_n(f, t) - f(t)| \leqslant \frac{\pi + 1}{1 - \alpha} \frac{A}{n^\alpha},$$

ενώ αν $\alpha = 1$ τότε

$$|\sigma_n(f, t) - f(t)| \leqslant 2\pi A \frac{\ln(n+1)}{n}.$$

6.12. Έστω $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ ακολουθία μη αρνητικών πραγματικών αριθμών με τις εξής ιδιότητες: (α) $a_{-n} = a_n$ για κάθε n, (β) $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, και (γ) για κάθε $n > 0$,

$$2a_n \leqslant a_{n-1} + a_{n+1}.$$

Αποδείξτε ότι υπάρχει μη αρνητική $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

Υπόδειξη. Αποδείξτε ότι $\lim_{n\to\infty} n(a_n - a_{n+1}) = 0$ και θεωρήστε την συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(a_{n-1} + a_{n+1} - 2a_n) K_n(x).$$

6.13. (α) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Υποθέτουμε ότι: για κάθε $k \geqslant 0$ ισχύει $\widehat{f}(k) = -\widehat{f}(-k) \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\widehat{f}(k)}{k} < +\infty.$$

(β) Αποδείξτε ότι: αν $a_k > 0$ και $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{k} = +\infty$, τότε η τριγωνομετρική σειρά $\sum_{k=1}^{\infty} a_k \sin kx$ δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

6.14. Έστω $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ περιττή ολοκληρώσιμη συνάρτηση ώστε $|f(x)| \leqslant M$ για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$ και $b_k(f) \geq 0$ για κάθε $k \geq 1$. Αποδείξτε ότι

$$|s_n(f, x)| \leqslant 5M$$

για κάθε $n \geq 1$ και για κάθε $x \in [-\pi, \pi]$.

6.15. (α) Αποδείξτε ότι αν η σειρά μιγαδικών αριθμών $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ είναι Cesàro αθροίσιμη στον σ και $nc_n \to 0$, τότε η $\sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$ συγκλίνει στον σ.

(β) Αποδείξτε ότι το ίδιο ισχύει αν αντικαταστήσουμε την Cesàro αθροισιμότητα με την Abel αθροισιμότητα. [*Υπόδειξη:* Εκτιμήστε τη διαφορά μεταξύ $\sum\limits_{n=1}^{N} c_n$ και $\sum\limits_{n=1}^{N} c_n r^n$, όπου $r = 1 - \frac{1}{N}$.]

6.16. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τέτοια ώστε $|k\widehat{f}(k)| \to 0$ όταν $|k| \to \infty$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο $x \in \mathbb{R}$ τότε $s_n(f, x) \to f(x)$. Αποδείξτε επίσης ότι αν $f \in C(\mathbb{T})$ τότε $s_n(f) \to f$ ομοιόμορφα.

6.17. Αν $P_r(\vartheta)$ είναι ο πυρήνας του Poisson, αποδείξτε ότι η συνάρτηση

$$u(r, \vartheta) = \frac{\partial P_r}{\partial \vartheta}$$

ικανοποιεί τα ακόλουθα: Δu στον δίσκο, και $\lim\limits_{r \to 1^-} u(r, \vartheta) = 0$ για κάθε ϑ. Όμως, η u δεν είναι ταυτοτικά ίση με 0.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

L^2-σύγκλιση σειρών Fourier

7.1 Χώροι με εσωτερικό γινόμενο

Ένα μη κενό σύνολο V λέγεται *γραμμικός χώρος* (ή *διανυσματικός χώρος*) πάνω από το $\mathbb{R}$ αν είναι εφοδιασμένο με δύο πράξεις $+ : V \times V \to V$ (την πρόσθεση) και $\cdot : \mathbb{R} \times V \to V$ (τον βαθμωτό πολλαπλασιασμό) που ικανοποιούν τα εξής:

(i) *Αξιώματα της πρόσθεσης:* Για κάθε $x, y, z \in V$ ισχύουν οι $x + y = y + x$ και $x + (y + z) = (x + y) + z$. Επίσης, υπάρχει ένα στοιχείο $\mathbf{0} \in V$ ώστε, για κάθε $x \in V$, $\mathbf{0} + x = x$. Τέλος, για κάθε $x \in V$ υπάρχει (μοναδικό) $-x \in V$ ώστε $x + (-x) = \mathbf{0}$.

(ii) *Αξιώματα του πολλαπλασιασμού:* Για κάθε $x, y \in V$ και $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, ισχύουν οι $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$, $1x = x$, $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y$ και $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$.

Άμεσες συνέπειες των αξιωμάτων του γραμμικού χώρου είναι, για παράδειγμα, οι

$$0x = \mathbf{0}, \qquad \lambda\mathbf{0} = \mathbf{0}, \qquad -x = (-1)x.$$

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα τέτοιου είδους ιδιότητες (η δομή του γραμμικού χώρου θα θεωρηθεί, σε γενικές γραμμές, γνωστή). Τα στοιχεία του V θα λέγονται σημεία (ή και διανύσματα). Πολύ συχνά, θεωρούμε βαθμωτό πολλαπλασιασμό $\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$. Αν ικανοποιούνται τα αντίστοιχα αξιώματα, λέμε ότι ο V είναι γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$.

Κλασικό παράδειγμα γραμμικού χώρου πάνω από το $\mathbb{R}$ είναι το σύνολο $\mathbb{R}^d$ όλων των d-άδων πραγματικών αριθμών $(x_1, x_2, \ldots, x_d)$. Η πρόσθεση ορίζεται κατά συντεταγμένες, μέσω της

$$(x_1, x_2, \ldots, x_d) + (y_1, y_2, \ldots, y_d) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_d + y_d).$$

Με παρόμοιο τρόπο ορίζεται ο πολλαπλασιασμός με τον $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_d) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_d).$$

Όμοια, ο χώρος $\mathbb{C}^d$ των d-άδων $(z_1, z_2, \ldots, z_d)$ μιγαδικών αριθμών γίνεται γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ αν ορίσουμε πρόσθεση κατά συντεταγμένες, δηλαδή

$$(z_1, z_2, \ldots, z_d) + (w_1, w_2, \ldots, w_d) = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots, z_d + w_d)$$

και πολλαπλασιασμό με τον $\lambda \in \mathbb{C}$ μέσω της

$$\lambda(z_1, z_2, \dots, z_d) = (\lambda z_1, \lambda z_2, \dots, \lambda z_d).$$

Ορισμός 7.1.1 (εσωτερικό γινόμενο πάνω από το $\mathbb{R}$). Έστω V γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{R}$. *Εσωτερικό γινόμενο* στον V είναι μια συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{R}$ (απεικονίζει κάθε ζεύγος $(x, y) \in V\times V$ σε κάποιον πραγματικό αριθμό $\langle x, y\rangle$) με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\langle y, x\rangle = \langle x, y\rangle$ για κάθε $x, y \in V$.

(ii) $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$ για κάθε $x, y, z \in V$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{R}$.

(iii) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in V$.

Αν $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι ένα εσωτερικό γινόμενο στον V, ορίζουμε την *επαγόμενη ημινόρμα* στον V ως εξής:

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}, \qquad x \in V.$$

Παρατηρήστε ότι $\|x\| \geqslant 0$. Αν, επιπλέον, από την $\|x\| = 0$ έπεται ότι, αναγκαστικά, $x = 0$, τότε λέμε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι *γνήσια θετικό*. Όπως θα δούμε, η $\|\cdot\|$ είναι πάντοτε ημινόρμα, και είναι νόρμα αν επάγεται από γνήσια θετικό εσωτερικό γινόμενο.

Το σύνηθες (γνήσια θετικό) εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^d$ ορίζεται μέσω της

$$\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^{d} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_d y_d,$$

όπου $x = (x_1, \dots, x_d)$ και $y = (y_1, \dots, y_d)$. Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|x\| = \langle x, x\rangle = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_d^2},$$

η οποία επάγει την συνήθη Ευκλείδεια απόσταση $\|x - y\|$ στον $\mathbb{R}^d$.

Ορισμός 7.1.2 (εσωτερικό γινόμενο πάνω από το $\mathbb{C}$). Έστω V γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$. *Εσωτερικό γινόμενο* στον V είναι μια συνάρτηση $\langle\cdot,\cdot\rangle : V\times V \to \mathbb{C}$ (απεικονίζει κάθε ζεύγος $(x, y) \in V\times V$ σε κάποιον μιγαδικό αριθμό $\langle x, y\rangle$) με τις εξής ιδιότητες:

(i) $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$ για κάθε $x, y \in V$.

(ii) $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$ για κάθε $x, y, z \in V$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$. Σε συνδυασμό με την προηγούμενη ιδιότητα βλέπουμε ότι, τώρα, το μιγαδικό εσωτερικό γινόμενο είναι «συζυγώς γραμμικό» ως προς τη δεύτερη μεταβλητή. Δηλαδή,

$$\langle x, ay + bz\rangle = \overline{a}\langle x, y\rangle + \overline{b}\langle x, z\rangle$$

για κάθε $x, y, z \in V$ και για κάθε $a, b \in \mathbb{C}$.

(iii) $\langle x, x\rangle \geqslant 0$ για κάθε $x \in V$, όπως στην πραγματική περίπτωση.

Η *επαγόμενη ημινόρμα* στον V είναι, πάλι, η

$$\|x\| = \langle x, x\rangle^{1/2}, \qquad x \in V.$$

Αν, επιπλέον, από την $\|x\| = 0$ έπεται ότι, αναγκαστικά, $x = 0$, τότε λέμε ότι το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι *γνήσια θετικό*, και όπως θα δούμε τότε η $\|\cdot\|$ είναι νόρμα.

Το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{C}^d$ ορίζεται μέσω της

$$\langle z, w\rangle = \sum_{i=1}^{d} z_i\overline{w_i} = z_1\overline{w_1} + \cdots + z_d\overline{w_d},$$

όπου $z = (z_1, \ldots, z_d)$ και $w = (w_1, \ldots, w_d) \in \mathbb{C}^d$. Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|z\| = \langle z, z\rangle = \sqrt{|z_1|^2 + \cdots + |z_d|^2}.$$

Ορισμός 7.1.3 (καθετότητα). Έστω V ένας γραμμικός χώρος με εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$, πάνω από το $\mathbb{R}$ ή το $\mathbb{C}$. Τα x και $y \in V$ λέγονται *κάθετα* ή *ορθογώνια* αν

$$\langle x, y\rangle = 0.$$

Τότε, θα γράφουμε $x \perp y$.

Μέσω της έννοιας της καθετότητας, παίρνουμε τρεις πολύ βασικές ιδιότητες που ισχύουν σε κάθε χώρο με εσωτερικό γινόμενο:

(i) **Πυθαγόρειο Θεώρημα**. Αν $x \perp y$ τότε

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τη γραμμικότητα του εσωτερικού γινομένου και τον ορισμό της νόρμας, γράφουμε

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &= \langle x, x\rangle + \langle y, y\rangle = \|x\|^2 + \|y\|^2,\end{aligned}$$

διότι $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle = 0$, αφού $x \perp y$. □

(ii) **Ανισότητα Cauchy–Schwarz**. Για κάθε $x, y \in V$,

$$|\langle x, y\rangle| \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τη μιγαδική περίπτωση (η πραγματική είναι απλούστερη). Υποθέτουμε πρώτα ότι $\|y\| = 0$. Θα δείξουμε ότι $\langle x, y\rangle = 0$ για κάθε $x \in V$, δηλαδή η ανισότητα Cauchy–Schwarz ισχύει τότε σαν ισότητα (για οποιοδήποτε $x \in V$). Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \leqslant \|x + ty\|^2 = \|x\|^2 + t\langle y, x\rangle + t\langle x, y\rangle + \|ty\|^2 = \|x\|^2 + 2t\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle),$$

διότι $\|ty\| = |t|\,\|y\| = 0$ και $\langle y, x\rangle + \langle x, y\rangle = 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle)$. Αν $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) > 0$, καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας $t \to -\infty$, ενώ αν $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) < 0$, καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας $t \to +\infty$. Συνεπώς, $\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) = 0$. Εντελώς ανάλογα, για κάθε $t \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$0 \leqslant \|x + ity\|^2 = \|x\|^2 + it\langle y, x\rangle - it\langle x, y\rangle + \|ity\|^2 = \|x\|^2 + 2t\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle),$$

διότι $\|ty\| = |t|\,\|y\| = 0$ και $\langle y, x\rangle - \langle x, y\rangle = -2i\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle)$. Αν $\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) > 0$, καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας $t \to -\infty$, ενώ αν $\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) < 0$, καταλήγουμε σε άτοπο παίρνοντας $t \to +\infty$. Συνεπώς, $\mathrm{Im}(\langle x, y\rangle) = 0$. Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι $\langle x, y\rangle = 0$.

Υποθέτουμε τώρα ότι $\|y\|^2 = \langle y, y\rangle > 0$. Θέτουμε $t = \langle x, y\rangle/\langle y, y\rangle$ και παρατηρούμε ότι $y \perp (x - ty)$. Πράγματι,

$$\langle x - ty, y\rangle = \langle x, y\rangle - t\langle y, y\rangle = \langle x, y\rangle - \langle x, y\rangle = 0,$$

από τον ορισμό του t. Έπεται ότι $ty \perp (x - ty)$. Γράφοντας $x = (x - ty) + ty$ και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα, παίρνουμε

$$\|x\|^2 = \|x - ty\|^2 + \|ty\|^2 \geqslant \|ty\|^2 = |t|^2\|y\|^2.$$

Συνεπώς, $|t|\,\|y\| \leqslant \|x\|$ και έπεται ότι

$$|\langle x, y\rangle| = |t|\,\|y\|^2 \leqslant \|x\|\,\|y\|.$$

□

(iii) **Τριγωνική Ανισότητα**. Η ημινόρμα $\|\cdot\|$ που επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ικανοποιεί την τριγωνική ανισότητα

$$\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$$

για κάθε $x, y \in V$.

Απόδειξη. Έστω $x, y \in V$. Γράφουμε

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= \|x\|^2 + 2\mathrm{Re}(\langle x, y\rangle) + \|y\|^2 \leqslant \|x\|^2 + 2|\langle x, y\rangle| + \|y\|^2\\ &\leqslant \|x\|^2 + 2\|x\|\,\|y\| + \|y\|^2 = (\|x\| + \|y\|)^2,\end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει το ζητούμενο. □

Τα πιο σημαντικά παραδείγματα χώρων με εσωτερικό γινόμενο, που σχετίζονται με τη μελέτη των σειρών Fourier, είναι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ και ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ των 2π-περιοδικών Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$.

Παράδειγμα 7.1.4 (ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$). Ο χώρος $\ell^2(\mathbb{Z})$ πάνω από το $\mathbb{C}$ είναι ο χώρος των (δίπλευρων) άπειρων ακολουθιών μιγαδικών αριθμών

$$a = (\ldots, a_{-k}, \ldots, a_{-2}, a_{-1}, a_0, a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$$

για τις οποίες

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < \infty.$$

Οι πράξεις της πρόσθεσης και του βαθμωτού πολλαπλασιασμού ορίζονται κατά συντεταγμένη, ακριβώς όπως στην περίπτωση του $\mathbb{C}^d$. Πρέπει βέβαια να ελέγξουμε ότι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι γραμμικός χώρος. Πιο συγκεκριμένα, ότι αν $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$ τότε $a + b \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Αυτό αποδεικνύεται ως εξής: για κάθε $n \in \mathbb{N}$ θέτουμε

$$a^{(n)} = (\ldots, 0, a_{-n}, \ldots, a_{-1}, a_0, a_1, \ldots, a_n, 0, \ldots)$$

και

$$b^{(n)} = (\ldots, 0, b_{-n}, \ldots, b_{-1}, b_0, b_1, \ldots, b_n, 0, \ldots)$$

και, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα για την Ευκλείδεια νόρμα στην περίπτωση της πεπερασμένης διάστασης, ελέγχουμε ότι

$$\begin{aligned} \|a^{(n)} + b^{(n)}\| &= \left(\sum_{k=-n}^{n} |a_k + b_k|^2 \right)^{1/2} \\ &\leqslant \left(\sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{k=-n}^{n} |b_k|^2 \right)^{1/2} \\ &= \|a^{(n)}\| + \|b^{(n)}\| \leqslant \|a\| + \|b\|. \end{aligned}$$

Αφήνοντας το $n \to \infty$ βλέπουμε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k + b_k|^2 \leqslant (\|a\| + \|b\|)^2 < +\infty,$$

δηλαδή $a + b \in \ell^2(\mathbb{Z})$. Ταυτόχρονα, έχουμε δείξει την τριγωνική ανισότητα $\|a + b\| \leqslant \|a\| + \|b\|$ για τη νόρμα

$$\|a\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 \right)^{1/2},$$

η οποία επάγεται από το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle a, b \rangle = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}.$$

Το γεγονός ότι η συνάρτηση $(a, b) \mapsto \langle a, b \rangle$ ορίζεται καλά (δηλαδή, η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k \overline{b_k}$ συγκλίνει (απολύτως) για κάθε $a, b \in \ell^2(\mathbb{Z})$) και ικανοποιεί τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου, αφήνεται ως άσκηση. Παρατηρήστε επίσης ότι το εσωτερικό γινόμενο του $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι γνήσια θετικό. Αν $\|a\| = 0$ τότε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 = 0,$$

δηλαδή $a_k = 0$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Συνεπώς, $a = 0$.

Επίσης, ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι *πλήρης*. Αν $\{a^{(m)}\}$ είναι μια ακολουθία στον $\ell^2(\mathbb{Z})$ η οποία είναι *βασική*, δηλαδή «για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $m_0 = m_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ ώστε $\|a^{(m)} - a^{(s)}\| < \varepsilon$ για κάθε $m, s \geqslant m_0$», τότε η $\{a^{(m)}\}$ είναι $\|\cdot\|$-συγκλίνουσα, δηλαδή «υπάρχει $a \in \ell^2(\mathbb{Z})$ ώστε $\lim_{m\to\infty} \|a - a^{(m)}\| = 0$». Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού αφήνεται ως άσκηση. Οι χώροι $\mathbb{R}^d$ και $\mathbb{C}^d$ είναι επίσης πλήρεις ως προς τη νόρμα που επάγεται από το σύνηθες εσωτερικό τους γινόμενο. Οι «πλήρεις χώροι με εσωτερικό γινόμενο» είναι οι λεγόμενοι *χώροι Hilbert*.

Παράδειγμα 7.1.5 (ο χώρος $\mathcal{R}(\mathbb{T})$). Συμβολίζουμε με $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ τον χώρο των 2π-περιοδικών Riemann ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Ο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ είναι γραμμικός χώρος, με πρόσθεση την

$$(f + g)(t) = f(t) + g(t)$$

και βαθμωτό πολλαπλασιασμό τον

$$(\lambda f)(t) = \lambda f(t).$$

Ορίζουμε εσωτερικό γινόμενο στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ ως εξής: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, θέτουμε

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt.$$

Οι ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου ελέγχονται εύκολα. Η επαγόμενη νόρμα είναι η

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο του $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ δεν είναι γνήσια θετικό: αν η f μηδενίζεται στο $[0, 2\pi]$ με την εξαίρεση πεπερασμένων το πλήθος σημείων, τότε $f \neq 0$, η f είναι ολοκληρώσιμη και $\|f\|_2 = 0$.

Επίσης, με την ορολογία του προηγούμενου παραδείγματος, ο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ δεν είναι πλήρης. Αν θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f : [0, 2\pi] \to \mathbb{C}$ με

$$f(t) = \begin{cases} \ln(1/t) & \text{αν } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{αν } t = 0 \end{cases}$$

και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά στο $\mathbb{R}$, τότε η f δεν είναι φραγμένη, άρα δεν ανήκει στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Θεωρούμε την ακολουθία των 2π-περιοδικών συναρτήσεων $\{f_n\}$, όπου η f_n ορίζεται από την

$$f_n(t) = \begin{cases} \ln(1/t) & \text{αν } \frac{1}{n} < t < 2\pi \\ 0 & \text{αν } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \end{cases}.$$

Κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη, και μπορούμε να ελέγξουμε ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Όμως, δεν υπάρχει $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $\lim\limits_{n\to\infty} \|g - f_n\| = 0$. Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση.

7.2 L^2-σύγκλιση σειρών Fourier

Σκοπός μας σε αυτή την ενότητα είναι να αποδείξουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.2.1. *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - s_n(f, t)|^2 dt = 0.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ εφοδιασμένο με το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt$$

και την επαγόμενη ημινόρμα $\|\cdot\|_2$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\|f\|_2^2 = \langle f, f\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt.$$

Με αυτόν τον συμβολισμό, αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \|f - s_n(f)\|_2 = 0.$$

Για κάθε $k \in \mathbb{Z}$ θέτουμε $e_k(t) = e^{ikt}$ και παρατηρούμε ότι η οικογένεια $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική. Δηλαδή,

$$\langle e_k, e_m\rangle = \begin{cases} 1 & \text{αν } k = m \\ 0 & \text{αν } k \neq m \end{cases}.$$

Αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ θέτουμε $a_k = \widehat{f}(k)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$. Παρατηρήστε ότι *οι συντελεστές Fourier της f είναι τα εσωτερικά γινόμενα της f με τα στοιχεία της ορθοκανονικής οικογένειας* $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$:

$$\langle f, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt = a_k.$$

Ειδικότερα,

$$s_n(f) = \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k.$$

Από το γεγονός ότι η $\{e_k\}$ είναι ορθοκανονική οικογένεια και από το γεγονός ότι $a_k = \langle f, e_k\rangle$ έπεται τώρα ότι η διαφορά $f - s_n(f) = f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k$ είναι κάθετη στο e_k για κάθε $|k| \leqslant n$. Συνεπώς,

$$f - s_n(f) \perp \sum_{k=-n}^{n} b_k e_k \tag{7.2.1}$$

για κάθε επιλογή μιγαδικών αριθμών b_k. Από αυτή την παρατήρηση προκύπτουν δύο συμπεράσματα.

Πρώτον, επιλέγοντας $b_k = a_k$ και εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο Θεώρημα για τη διάσπαση

$$f = (f - s_n(f)) + s_n(f) = \left(f - \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k\right) + \sum_{k=-n}^{n} a_k e_k,$$

παίρνουμε

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \left\|\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k\right\|_2^2.$$

Όμως, η οικογένεια $\{e_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ είναι ορθοκανονική, άρα

$$\left\|\sum_{k=-n}^{n} a_k e_k\right\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2,$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=-n}^{n} |a_k|^2.$$

Το δεύτερο συμπέρασμα που προκύπτει από την (7.2.1) είναι το ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 7.2.2 (βέλτιστη προσέγγιση). *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με συντελεστές Fourier a_k. Για κάθε επιλογή* *μιγαδικών συντελεστών c_k, $|k| \leqslant n$, έχουμε*

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leqslant \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2 .$$

Επιπλέον, ισότητα ισχύει ακριβώς όταν $c_k = a_k$ για κάθε $|k| \leqslant n$.

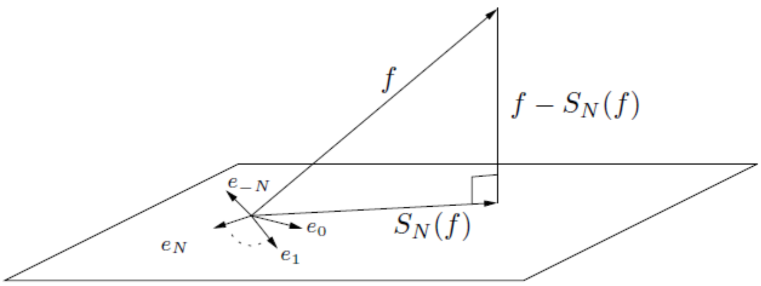
Απόδειξη. Γράφουμε

$$f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k = (f - s_n(f)) + \sum_{k=-n}^{n} b_k e_k,$$

όπου $b_k = a_k - c_k$, και εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο Θεώρημα. Ισχύει ότι

$$\left\| f - \sum_{k=-n}^{n} c_k e_k \right\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \sum_{k=-n}^{n} |a_k - c_k|^2 \geqslant \|f - s_n(f)\|_2^2,$$

με ισότητα ακριβώς όταν $\sum_{k=-n}^{n} |a_k - c_k|^2 = 0$, δηλαδή $c_k = a_k$ για κάθε $|k| \leqslant n$. □



Σχήμα 7.1: Το λήμμα της βέλτιστης προσέγγισης

Παρατήρηση 7.2.3. Η γεωμετρική ερμηνεία του λήμματος είναι η εξής: αν θεωρήσουμε τον υπόχωρο $\mathcal{T}_n$ των τριγωνομετρικών πολυωνύμων που έχουν βαθμό το πολύ ίσο με n, τότε για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, το πλησιέστερο σημείο του $\mathcal{T}_n$ προς την f είναι το $s_n(f)$. Είναι η «ορθογώνια προβολή» της f στον υπόχωρο $\mathcal{T}_n$.

Συνεχίζουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.1. Θα χρησιμοποιήσουμε το λήμμα βέλτιστης προσέγγισης και το γεγονός ότι τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα είναι «πυκνά» στον χώρο $C(\mathbb{T})$.

Υποθέτουμε αρχικά, επιπλέον, ότι η f είναι συνεχής. Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $n_0 \in \mathbb{N}$ και τριγωνομετρικό πολυώνυμο p βαθμού n_0 ώστε

$$\|f - p\|_\infty = \max_{t \in \mathbb{R}} |f(t) - p(t)| \leqslant \varepsilon.$$

Ειδικότερα,

$$\|f - p\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} |f(t) - p(t)|^2 dt \right)^{1/2} \leqslant \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \|f - p\|_\infty^2 dt \right)^{1/2} \leqslant \varepsilon.$$

Από το Λήμμα 7.2.2,

$$\|f - s_{n_0}(f)\|_2 \leqslant \|f - p\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Τώρα, για κάθε $n \geqslant n_0$ έχουμε $s_{n_0}(f) \in \mathcal{T}_n$ (εξηγήστε γιατί). Συνεπώς, πάλι από το Λήμμα 7.2.2 (στον $\mathcal{T}_n$ αυτή τη φορά),

$$\|f - s_n(f)\|_2 \leqslant \|f - s_{n_0}(f)\|_2 \leqslant \varepsilon.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$ στην περίπτωση που η f είναι συνεχής.

Στη γενική περίπτωση, όπου η f είναι απλώς ολοκληρώσιμη, βρίσκουμε πρώτα συνεχή συνάρτηση g ώστε $\|g\|_\infty \leqslant \sqrt{2}\|f\|_\infty$ και

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|\, dt \leqslant \frac{\pi\varepsilon^2}{6(\|f\|_\infty + 1)}.$$

Τότε,

$$\begin{aligned}
\|f - g\|_2^2 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|^2 dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|\,(|f(t)| + |g(t)|)\, dt \\
&\leqslant \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|\,(\|f\|_\infty + \|g\|_\infty)\, dt \\
&\leqslant \frac{3\|f\|_\infty}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t) - g(t)|\, dt \\
&\leqslant \frac{\varepsilon^2}{4},
\end{aligned}$$

δηλαδή, $\|f - g\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Για τη συνεχή g βρίσκουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p ώστε $\|g - p\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$. Τότε,

$$\|f - p\|_2 \leqslant \|f - g\|_2 + \|g - p\|_2 \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Κατόπιν, συνεχίζουμε όπως πριν: χρησιμοποιώντας το Λήμμα 7.2.2 δείχνουμε ότι $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$. □

Μια άμεση συνέπεια της απόδειξης του Θεωρήματος 7.2.1 είναι η *ταυτότητα Parseval*:

Θεώρημα 7.2.4 (ταυτότητα Parseval). *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2.$$

Απόδειξη. Έχουμε δει ότι, για κάθε $n \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\widehat{f}(k)|^2 + \|f - s_n(f)\|_2^2.$$

Αφού $\|f - s_n(f)\|_2 \to 0$, έπεται το ζητούμενο. □

Παρατήρηση 7.2.5. Στην απόδειξη της $\|f\|_2^2 = \|f - s_n(f)\|_2^2 + \|s_n(f)\|_2^2$ χρησιμοποιήθηκε μόνο το γεγονός ότι το $\{e^{ikt} : |k| \leqslant n\}$ είναι ορθοκανονικό σύνολο. Με το ίδιο επιχείρημα μπορείτε εύκολα να ελέγξετε ότι: αν θεωρήσουμε οποιοδήποτε όρθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\}$ συναρτήσεων από την $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ και αν, για τυχόν n, θεωρήσουμε τη συνάρτηση $f_n = \sum_{k=-n}^{n}\langle f, e_k\rangle e_k$, τότε

$$\|f\|_2^2 = \|f - f_n\|_2^2 + \|f_n\|_2^2 = \sum_{k=-n}^{n} |\langle f, e_k\rangle|^2.$$

Συνεπώς,

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\langle f, e_k\rangle|^2 \leqslant \|f\|_2^2,$$

για κάθε ορθοκανονικό σύνολο $E = \{e_k : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Αυτή είναι η (γενική) *ανισότητα του Bessel*. Ισότητα στην ανισότητα του Bessel ισχύει για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$, ακριβώς όταν το E είναι *βάση του* $\mathcal{R}(\mathbb{T})$, δηλαδή

$$\lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_{k=-n}^{n} \langle f, e_k\rangle e_k \right\|_2 = 0$$

για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$.

Παρατήρηση 7.2.6. Μπορούμε να ορίσουμε μια απεικόνιση $T : \mathcal{R}(\mathbb{T}) \to \ell^2(\mathbb{Z})$ θέτοντας

$$T(f) = \{\widehat{f}(k)\}_{k\in\mathbb{Z}}.$$

Παρατηρήστε ότι η T είναι γραμμική: αν $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε

$$T(af + bg) = aT(f) + bT(g).$$

Επιπλέον, η ταυτότητα του Parseval δείχνει ότι η T είναι ισομετρία: για κάθε $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$,

$$\|T(f)\| = \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)|^2 \right)^{1/2} = \|f\|_2.$$

Όπως έχουμε παρατηρήσει, ο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ δεν είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|_2$, ενώ ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης ως προς την $\|\cdot\|$. Αυτό έχει ως συνέπεια το ότι *η T δεν είναι επί*. Αν ήταν, τότε ο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ θα ήταν *ισομετρικά ισόμορφος* με τον $\ell^2(\mathbb{Z})$, άρα θα ήταν πλήρης (εξηγήστε γιατί).

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι: *υπάρχουν ακολουθίες $\{a_k\}_{k\in\mathbb{Z}}$ με την ιδιότητα $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |a_k|^2 < +\infty$, για τις οποίες δεν υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.*

Άλλη, άμεση αλλά σημαντική, συνέπεια της ταυτότητας του Parseval είναι το λήμμα Riemann–Lebesgue.

Θεώρημα 7.2.7 (λήμμα Riemann–Lebesgue). *Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε, $\widehat{f}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$.*

Παρατήρηση 7.2.8. Συχνά, χρησιμοποιούμε το λήμμα Riemann–Lebesgue στην εξής μορφή: αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τότε

$$a_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\sin(kt)\,dt \to 0 \quad \text{και} \quad b_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\cos(kt)\,dt \to 0$$

όταν $k \to \infty$. Από τις σχέσεις που συνδέουν τους $\widehat{f}(k)$, $a_k(f)$ και $b_k(f)$, ελέγχουμε εύκολα ότι η πρόταση «$a_k(f) \to 0$ και $b_k(f) \to 0$ όταν $k \to \infty$» είναι ακριβώς ισοδύναμη με την «$\widehat{f}(k) \to 0$ όταν $|k| \to \infty$» (εξηγήστε γιατί).

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με μια γενίκευση της ταυτότητας του Parseval.

Πρόταση 7.2.9. *Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Τότε,*

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}\,dt = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)}.$$

Απόδειξη. Αν V είναι ένας γραμμικός χώρος πάνω από το $\mathbb{C}$ με εσωτερικό γινόμενο $\langle \cdot, \cdot \rangle$, τότε

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}[\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2].$$

Η ταυτότητα αυτή ελέγχεται άμεσα, με πράξεις. Παρατηρήστε τώρα ότι

$$\langle f, g\rangle = \frac{1}{4}[\|f+g\|_2^2 - \|f-g\|_2^2 + i\|f+ig\|_2^2 - i\|f-ig\|_2^2]$$

και

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)\overline{\widehat{g}(k)} = \frac{1}{4}[\|\widehat{f}(k)+\widehat{g}(k)\|^2 - \|\widehat{f}(k)-\widehat{g}(k)\|^2 + i\|\widehat{f}(k)+i\widehat{g}(k)\|^2 - i\|\widehat{f}(k)-i\widehat{g}(k)\|^2].$$

Το συμπέρασμα προκύπτει άμεσα, αν εφαρμόσουμε την ταυτότητα του Parseval για τις $f+g$, $f-g$, $f+ig$ και $f-ig$. □

7.3 Ασκήσεις

7.1. Αποδείξτε ότι ο $\ell^2(\mathbb{Z})$ είναι πλήρης.

7.2. Θεωρούμε τον χώρο $\mathcal{R}(\mathbb{T})$ με τη νόρμα

$$\|f\|_2 = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

(i) Αποδείξτε ότι, αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\|f\|_2 = 0$, τότε $f(x) = 0$ σε κάθε σημείο x στο οποίο η f είναι συνεχής.

(ii) Αντίστροφα, αποδείξτε ότι αν η f παίρνει την τιμή 0 σε όλα τα σημεία στα οποία είναι συνεχής, τότε $\|f\|_2 = 0$.

7.3. Δώστε παράδειγμα ακολουθίας $\{f_n\}$ ολοκληρώσιμων συναρτήσεων $f_n : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ ώστε

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f_n(x)|^2 dx = 0,$$

αλλά για κάθε $x \in [0, 2\pi]$ η ακολουθία $\{f_n(x)\}$ δεν συγκλίνει.

7.4. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [0, 2\pi) \to \mathbb{C}$ με

$$f(t) = \begin{cases} \ln(1/t) & \text{αν } 0 < t < 2\pi \\ 0 & \text{αν } t = 0 \end{cases}$$

και την επεκτείνουμε 2π-περιοδικά. Αποδείξτε ότι η f δεν ανήκει στον $\mathcal{R}(\mathbb{T})$. Θεωρούμε τώρα την ακολουθία 2π-περιοδικών συναρτήσεων $\{f_n\}$, όπου

$$f_n(t) = \begin{cases} \ln(1/t) & \text{αν } \frac{1}{n} < t < 2\pi \\ 0 & \text{αν } 0 \leqslant t \leqslant \frac{1}{n} \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι κάθε f_n είναι Riemann ολοκληρώσιμη και ότι η $\{f_n\}$ είναι βασική ακολουθία του $\mathcal{R}(\mathbb{T})$, αλλά δεν υπάρχει $g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ ώστε $\lim_{n\to\infty} \|g - f_n\|_2 = 0$.

7.5. Θεωρούμε την ακολουθία $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$ με

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k} & \text{αν } k \geqslant 1 \\ 0 & \text{αν } k \leqslant 0 \end{cases}$$

Αποδείξτε ότι $\{a_k\}_{k=-\infty}^{\infty} \in \ell^2(\mathbb{Z})$ αλλά δεν υπάρχει $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα $\widehat{f}(k) = a_k$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

7.6. (α) Χρησιμοποιώντας τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = |x|$ και την ταυτότητα του Parseval, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} = \frac{\pi^4}{96} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{\pi^4}{90}.$$

(β) Χρησιμοποιώντας την 2π-περιοδική περιττή συνάρτηση $g : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $g(x) = x(\pi - x)$ στο $[0, \pi]$ και την ταυτότητα του Parseval, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^6} = \frac{\pi^6}{960} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

7.7. Δείξτε ότι: αν $\alpha \notin \mathbb{Z}$, τότε η σειρά Fourier της συνάρτησης

$$f(x) = \frac{\pi}{\sin \pi\alpha} e^{i(\pi - x)\alpha}$$

στο $[0, 2\pi]$, είναι η

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{ikx}}{k+\alpha}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα του Parseval, συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{(k+\alpha)^2} = \frac{\pi^2}{\sin^2(\pi\alpha)}.$$

7.8. Έστω $0 < a \leqslant \pi$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \chi_{[-a,a]}(x)$.

(i) Αποδείξτε ότι $\widehat{f}(0) = \frac{a}{\pi}$ και $\widehat{f}(k) = \frac{\sin(ka)}{\pi k}$ αν $k \neq 0$.

(ii) Αποδείξτε ότι για κάθε $x \in [-\pi, \pi] \setminus \{-a, a\}$ ισχύει

$$f(x) = \frac{a}{\pi} + \sum_{k \neq 0} \frac{\sin(ka)}{\pi k} e^{ikx}.$$

(iii) Υπολογίστε τα αθροίσματα

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(ka)}{k} \qquad \text{και} \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin^2(ka)}{k^2}.$$

7.9. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση.

(i) Αποδείξτε ότι

$$\|f - s_n(f)\|_\infty \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{|a_k(f')| + |b_k(f')|}{k}.$$

(ii) Αποδείξτε ότι

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n} \|f - s_n(f)\|_\infty = 0.$$

7.10. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση.

(i) Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C(f) > 0$ ώστε $|k\widehat{f}(k)| \leqslant C(f)$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(ii) Εξετάστε αν $\lim_{|k|\to\infty} |k\widehat{f}(k)| = 0$.

(iii) Εξετάστε αν $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(k)| < +\infty$.

7.11. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχώς παραγωγίσιμη 2π-περιοδική συνάρτηση με

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα του Parseval για τις f και f' αποδείξτε ότι

$$\int_{-\pi}^{\pi} |f(x)|^2 dx \leqslant \int_{-\pi}^{\pi} |f'(x)|^2 dx,$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(x) = a\cos x + b\sin x$ για κάποιους $a, b \in \mathbb{R}$.

7.12. (α) Έστω $f, g \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ συνεχώς παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Υποθέτουμε ότι $\int_0^{2\pi} g(t)\,dt = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\left| \int_0^{2\pi} \overline{f(t)} g(t)\,dt \right|^2 \leqslant \int_0^{2\pi} |f(t)|^2 dt \int_0^{2\pi} |g'(t)|^2 dt.$$

(β) Έστω $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ συνεχώς παραγωγίσιμη συνάρτηση με $f(a) = f(b) = 0$. Αποδείξτε ότι

$$\int_a^b |f(t)|^2 dt \leqslant \frac{(b-a)^2}{\pi^2} \int_a^b |f'(t)|^2 dt.$$

7.13. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση με συνεχή δεύτερη παράγωγο και

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Υποθέτουμε ότι $|f(x)| \geqslant |f''(x)|$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Τι μπορείτε να πείτε για την f;

7.14. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Lipschitz

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά.

(α) Για κάθε $t > 0$ ορίζουμε $g_t(x) = f(x+t) - f(x-t)$. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |g_t(x)|^2 dx = \sum_{k=-\infty}^{\infty} 4|\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2$$

και συμπεράνατε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\sin kt|^2 |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant K^2 t^2.$$

(β) Έστω $p \in \mathbb{N}$. Επιλέγοντας $t = \pi/2^{p+1}$, αποδείξτε ότι

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|^2 \leqslant \frac{K^2\pi^2}{2^{2p+1}}.$$

(γ) Δώστε άνω φράγμα για το

$$\sum_{2^{p-1} < |k| \leqslant 2^p} |\widehat{f}(k)|$$

και συμπεράνατε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

7.15. Έστω $\alpha > 1/2$ και $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ μια 2π-περιοδική συνάρτηση η οποία ικανοποιεί την συνθήκη Holder

$$|f(x) - f(y)| \leqslant K|x - y|^{\alpha}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, όπου $K > 0$ σταθερά. Αποδείξτε ότι η σειρά Fourier της f συγκλίνει απολύτως, άρα ομοιόμορφα.

7.16. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\pi - x)f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{b_k}{k}.$$

7.17. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής 2π-περιοδική συνάρτηση και έστω a_k, b_k οι συντελεστές Fourier της f. Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{a_k}{k} = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\ln\left(2\sin\frac{x}{2}\right)dx.$$

7.18. Αποδείξτε ότι η τριγωνομετρική σειρά

$$\sum_{k=2}^{\infty}\frac{\sin kx}{\ln k}$$

συγκλίνει για κάθε $x \in \mathbb{R}$ αλλά δεν είναι η σειρά Fourier κάποιας Riemann ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

7.19. Έστω $\{\varepsilon_k\}$ ακολουθία θετικών αριθμών με $\varepsilon_k \to 0$. Αποδείξτε ότι υπάρχει συνεχής συνάρτηση $f \in C(\mathbb{T})$ με την ιδιότητα: για άπειρες τιμές του $k \in \mathbb{Z}$,

$$|\widehat{f}(k)| \geqslant \varepsilon_k.$$

7.20. (α) Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και έστω $k \neq 0$. Αποδείξτε ότι

$$\widehat{f}(k) = -\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x + \pi/k)e^{-ikx}dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi}[f(x) - f(x + \pi/k)]e^{-ikx}dx.$$

(β) Υποθέτουμε ότι η f ικανοποιεί τη συνθήκη Holder $|f(x + h) - f(x)| \leqslant C|h|^{\alpha}$ για κάποιον $0 < \alpha \leqslant 1$, κάποια σταθερά $C > 0$ και για κάθε x, h. Χρησιμοποιώντας το (α) αποδείξτε ότι υπάρχει $M > 0$ ώστε

$$|k|^{\alpha}|\widehat{f}(k)| \leqslant M$$

για κάθε $k \in \mathbb{Z}$.

(γ) Αποδείξτε ότι, αν $0 < \alpha < 1$, τότε η συνάρτηση

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha}e^{i2^k x}$$

ικανοποιεί τη συνθήκη Holder του (β), και

$$\widehat{f}(k) = \frac{1}{k^{\alpha}} \quad \text{αν } k = 2^s, s \in \mathbb{N}.$$

7.21. Ο *συζυγής πυρήνας του Dirichlet* ορίζεται από την

$$\tilde{D}_n(x) = \sum_{|k|\leqslant n}\mathrm{sign}(x)e^{ikx},$$

όπου sign(x) είναι το πρόσημο του x.

(i) Αποδείξτε ότι
$$\tilde{D}_n(x) = \frac{\cos(x/2) - \cos((n+1/2)x)}{\sin(x/2)}$$
και ότι υπάρχει σταθερά $c > 0$ ώστε
$$\int_{-\pi}^{\pi} |\tilde{D}_n(x)|\, dx \leqslant c \ln n$$
για κάθε $n \geqslant 2$.

(ii) Αποδείξτε ότι υπάρχει σταθερά $C > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ τότε
$$(f * \tilde{D}_n)(0) \leqslant C \ln n$$
για κάθε $n \geqslant 2$.

(iii) Αποδείξτε ότι, για κάθε $0 < \alpha < 1$, η τριγωνομετρική σειρά
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(kx)}{k^{\alpha}}$$
συγκλίνει για κάθε x, αλλά δεν είναι σειρά Fourier κάποιας ολοκληρώσιμης συνάρτησης.

7.22. Έστω $f \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$. Ορίζουμε
$$F(x) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|s_n(f,x) - \sigma_n(f,x)|^2}{n} \right)^{1/2}.$$
Δείξτε ότι $F \in \mathcal{R}(\mathbb{T})$ και $\|F\|_2 \leqslant \|f\|_2$.

7.23. Έστω $x_n, y_m \in \mathbb{C}$, $n, m \geqslant 0$. Αποδείξτε ότι
$$\left| \sum_{n,m=0}^{\infty} \frac{x_n y_m}{n+m+1} \right| \leqslant \pi \left(\sum_{n=0}^{\infty} |x_n|^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{m=0}^{\infty} |y_m|^2 \right)^{1/2}.$$

[*Υπόδειξη.* Θεωρήστε την $\varphi(t) = i(\pi - t)e^{-it}$. Παρατηρήστε ότι $\widehat{\varphi}(k) = \frac{1}{k+1}$ και $\|\varphi\|_\infty = \pi$.]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 8

Κάποιες εφαρμογές των σειρών Fourier

8.1 Η ισοπεριμετρική ανισότητα

Έστω Γ μια κλειστή καμπύλη στο επίπεδο η οποία δεν τέμνει τον εαυτό της (την λέμε *απλή κλειστή καμπύλη*). Συμβολίζουμε με ℓ το μήκος της Γ και με $\mathcal{A}$ το εμβαδόν του φραγμένου χωρίου στο $\mathbb{R}^2$ το οποίο περικλείεται από την Γ. Το πρόβλημα που θα συζητήσουμε (το λεγόμενο *ισοπεριμετρικό πρόβλημα*) είναι να προσδιοριστεί για δοθέν μήκος ℓ εκείνη η καμπύλη Γ μήκους ℓ που μεγιστοποιεί το $\mathcal{A}$ (αν μια τέτοια καμπύλη υπάρχει). Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι η καμπύλη πρέπει να είναι κύκλος.

Η απάντηση που θα δώσουμε για το ισοπεριμετρικό πρόβλημα προκύπτει με εφαρμογή της ταυτότητας Parseval για τις σειρές Fourier. Πριν όμως επιχειρήσουμε να δώσουμε τη λύση του προβλήματος, πρέπει να ορίσουμε την έννοια της απλής κλειστής καμπύλης, του μήκους της και του εμβαδού του χωρίου που περικλείει.

Μια παραμετρικοποιημένη καμπύλη γ είναι μια απεικόνιση

$$\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2.$$

Η εικόνα της γ είναι ένα σύνολο σημείων στο επίπεδο, το οποίο ονομάζουμε *καμπύλη* και το συμβολίζουμε με Γ. Η καμπύλη Γ λέγεται *απλή* αν δεν τέμνει τον εαυτό της και *κλειστή* αν τα άκρα της συμπίπτουν. Μέσω της παραμετρικοποίησης της γ μπορούμε να εκφράσουμε αυτές τις δύο συνθήκες ζητώντας να ισχύει ότι $\gamma(s_1) \neq \gamma(s_2)$ εκτός εάν $s_1 = a$ και $s_2 = b$ και ότι στην περίπτωση αυτή έχουμε $\gamma(a) = \gamma(b)$. Μπορούμε να επεκτείνουμε την γ σε μια περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο $b-a$, και να σκεφτόμαστε την γ σαν συνάρτηση στον μοναδιαίο κύκλο. Επίσης, κάνουμε πάντα την παραδοχή ότι οι καμπύλες μας είναι λείες: υποθέτουμε ότι η γ είναι της κλάσης C^1 και ότι η παράγωγός της γ' ικανοποιεί την $\gamma'(s) \neq 0$. Αυτές οι υποθέσεις εξασφαλίζουν ότι η Γ έχει καλά ορισμένη εφαπτόμενη σε κάθε σημείο, η οποία μεταβάλλεται με συνεχή τρόπο καθώς το σημείο διατρέχει την καμπύλη. Επιπλέον, η παραμετρικοποίηση γ επάγει έναν προσανατολισμό στην Γ καθώς η παράμετρος s κινείται από το a στο b.

Κάθε C^1 αμφιμονοσήμαντη απεικόνιση $s : [c,d] \to [a,b]$ δημιουργεί μια άλλη παραμετρικοποίηση της Γ μέσω της

$$\eta(t) = \gamma(s(t)).$$

Είναι σαφές πως οι συνθήκες ότι η Γ είναι κλειστή και απλή είναι ανεξάρτητες από την παραμετρικοποίηση που επιλέγουμε. Επίσης, λέμε ότι οι δύο παραμετρικοποιήσεις γ και η είναι ισοδύναμες αν $s'(t) > 0$ για κάθε t. Αυτό σημαίνει ότι οι η και γ επάγουν τον ίδιο προσανατολισμό στην καμπύλη Γ. Αν όμως $s'(t) < 0$, τότε λέμε ότι η η αντιστρέφει τον προσανατολισμό.

Αν η Γ είνα παραμετρικοποιημένη από την $\gamma(s) = (x(s), y(s))$, τότε το *μήκος* της καμπύλης Γ ορίζεται ως εξής:

$$\ell = \int_a^b |\gamma'(s)|\, ds = \int_a^b (x'(s)^2 + y'(s)^2)^{1/2} ds.$$

Το μήκος της Γ δεν εξαρτάται από την παραμετρικοποίηση που έχουμε επιλέξει. Για να δούμε ότι αυτό πράγματι ισχύει, ας υποθέσουμε ότι $\gamma(s(t)) = \eta(t)$. Τότε, ο τύπος αλλαγής μεταβλητής και ο κανόνας της αλυσίδας συνεπάγονται ότι

$$\int_a^b |\gamma'(s)|\, ds = \int_c^d |\gamma'(s(t))|\,|s'(t)|\, dt = \int_c^d |\eta'(t)|\, dt,$$

όπως θέλαμε.

Στην απόδειξη του θεωρήματος παρακάτω, θα χρησιμοποιήσουμε μια ειδική παραμετρικοποίηση για την Γ. Λέμε ότι η γ είναι μια *παραμετρικοποίηση ως προς μήκος τόξου* αν $|\gamma'(s)| = 1$ για κάθε s. Αυτό σημαίνει ότι η $\gamma(s)$ ταξιδεύει με σταθερή ταχύτητα, και συνεπώς, το μήκος της Γ είναι ακριβώς ίσο με $b - a$. Έπεται ότι, ενδεχομένως μετά από μια πρόσθετη μεταφορά, μπορούμε να ορίσουμε μια παραμετρικοποίηση ως προς μήκος τόξου στο $[0, \ell]$. Κάθε καμπύλη επιδέχεται μια παραμετρικοποίηση ως προς μήκος τόξου (Άσκηση 8.1).

Περνάμε τώρα στο ισοπεριμετρικό πρόβλημα. Η προσπάθεια να ορίσουμε αυστηρά το εμβαδόν $\mathcal{A}$ του χωρίου που περιβάλλεται από μια απλή κλειστή καμπύλη Γ οδηγεί σε κάποια δύσκολα προβλήματα. Σε πολλές απλές περιπτώσεις, είναι φανερό ότι το εμβαδόν δίνεται από τον παρακάτω τύπο, ο οποίος είναι γνωστός από τον απειροστικό λογισμό:

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\int_\Gamma (x\, dy - y\, dx)\right| = \frac{1}{2}\left|\int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\, ds\right|. \tag{8.1.1}$$

(Δείτε, για παράδειγμα, την Άσκηση 8.3.) Έτσι, στη διατύπωση του αποτελέσματός μας, θα υιοθετήσουμε την εύκολη οδό να πάρουμε την (8.1.1) ως ορισμό μας για το εμβαδόν. Αυτή η τακτική μας επιτρέπει να δώσουμε μια σύντομη και κομψή απόδειξη της ισοπεριμετρικής ανισότητας. Μετά από την απόδειξη του θεωρήματος θα καταγράψουμε κάποια ζητήματα που αυτή η απλοποίηση αφήνει προς περαιτέρω διερεύνηση.

Θεώρημα 8.1.1. *Έστω Γ μια απλή κλειστή καμπύλη στο $\mathbb{R}^2$ με μήκος ℓ, και έστω $\mathcal{A}$ το εμβαδόν του χωρίου που περιβάλλεται από αυτή την καμπύλη. Τότε,*

$$\mathcal{A} \leqslant \frac{\ell^2}{4\pi},$$

με ισότητα αν και μόνο αν η Γ είναι κύκλος.

Η πρώτη μας παρατήρηση είναι ότι μπορούμε να κάνουμε αλλαγή κλίμακας στο πρόβλημα. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να αλλάξουμε τις μονάδες μέτρησης κατά έναν παράγοντα $\delta > 0$ ως εξής. Θεωρούμε την απεικόνιση από το επίπεδο $\mathbb{R}^2$ στον εαυτό του, που στέλνει το σημείο (x, y) στο σημείο $(\delta x, \delta y)$. Μια ματιά στον τύπο που ορίζει το μήκος μιας καμπύλης δείχνει ότι αν η Γ έχει μήκος ℓ τότε η εικόνα της μέσω αυτής της απεικόνισης έχει μήκος $\delta\ell$. Συνεπώς, αυτή η πράξη μεγεθύνει ή σμικρύνει τα μήκη κατά έναν παράγοντα δ ανάλογα με το αν $\delta \geqslant 1$ ή $\delta \leqslant 1$. Όμοια, βλέπουμε ότι η απεικόνιση μεγεθύνει (ή σμικρύνει) τα εμβαδά κατά έναν παράγοντα δ^2. Παίρνοντας $\delta = 2\pi/\ell$ βλέπουμε πως αρκεί να δείξουμε ότι αν $\ell = 2\pi$ τότε $\mathcal{A} \leqslant \pi$, με ισότητα μόνο αν η Γ είναι κύκλος.

Έστω $\gamma : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma(s) = (x(s), y(s))$ μια παραμετρικοποίηση ως προς μήκος τόξου της καμπύλης Γ, δηλαδή, $x'(s)^2 + y'(s)^2 = 1$ για κάθε $s \in [0, 2\pi]$. Αυτό συνεπάγεται ότι

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} (x'(s)^2 + y'(s)^2)\, ds = 1. \tag{8.1.2}$$

Αφού η καμπύλη είναι κλειστή, οι συναρτήσεις $x(s)$ και $y(s)$ είναι 2π-περιοδικές, άρα μπορούμε να θεωρήσουμε τις σειρές Fourier τους

$$x(s) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{iks} \quad \text{και} \quad y(s) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} b_k e^{iks}.$$

Τότε,

$$x'(s) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik) a_k e^{iks} \quad \text{και} \quad y'(s) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} (ik) b_k e^{iks}.$$

Εφαρμόζοντας την ταυτότητα Parseval και την (8.1.2) παίρνουμε

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^2 (|a_k|^2 + |b_k|^2) = 1. \tag{8.1.3}$$

Τώρα εφαρμόζουμε τη διγραμμική εκδοχή της ταυτότητας Parseval για το ολοκλήρωμα που ορίζει το εμβαδόν $\mathcal{A}$. Αφού οι $x(s)$ και $y(s)$ παίρνουν πραγματικές τιμές, έχουμε ότι $a_k = \overline{a_{-k}}$ και $b_k = \overline{b_{-k}}$, συνεπώς

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left|\int_0^{2\pi} (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\, ds\right| = \pi \left|\sum_{k=-\infty}^{\infty} k(a_k\overline{b_k} - b_k\overline{a_k})\right|.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι

$$|a_k\overline{b_k} - b_k\overline{a_k}| \leqslant 2|a_k|\,|b_k| \leqslant |a_k|^2 + |b_k|^2, \tag{8.1.4}$$

και αφού $|k| \leqslant |k|^2$, χρησιμοποιώντας την (8.1.3) βλέπουμε ότι

$$\mathcal{A} \leqslant \pi \sum_{k=-\infty}^{\infty} |k|^2 (|a_k|^2 + |b_k|^2) \leqslant \pi,$$

όπως θέλαμε.

Εάν $\mathcal{A} = \pi$, τότε το προηγούμενο επιχείρημα δείχνει ότι

$$x(s) = a_{-1}e^{-is} + a_0 + a_1 e^{is} \quad \text{και} \quad y(s) = b_{-1}e^{-is} + b_0 + b_1 e^{is},$$

διότι $|k| < |k|^2$ για κάθε $|k| \geqslant 2$. Γνωρίζουμε ότι οι $x(s)$ και $y(s)$ παίρνουν πραγματικές τιμές, άρα $a_{-1} = \overline{a_1}$ και $b_{-1} = \overline{b_1}$. Από την (8.1.4) έπεται ότι $2(|a_1|^2 + |b_1|^2) = 1$, και αφού έχουμε ισότητα στην (8.1.4) πρέπει να ισχύει ότι $|a_1| = |b_1| = 1/2$. Γράφουμε

$$a_1 = \frac{1}{2}e^{i\alpha} \quad \text{και} \quad b_1 = \frac{1}{2}e^{i\beta}.$$

Από το γεγονός ότι $1 = 2|a_1\overline{b_1} - \overline{a_1}b_1|$ έπεται ότι $|\sin(\alpha - \beta)| = 1$, άρα $\alpha - \beta = k\pi/2$ για κάποιον ακέραιο k. Έτσι, συμπεραίνουμε ότι

$$x(s) = a_0 + \cos(\alpha + s) \quad \text{και} \quad y(s) = b_0 \pm \sin(\alpha + s),$$

όπου το πρόσημο στην $y(s)$ εξαρτάται από το αν ο k είναι περιττός ή άρτιος. Σε κάθε περίπτωση, βλέπουμε ότι η Γ είναι κύκλος. Αφού στην περίπτωση του κύκλου έχουμε προφανώς ισότητα, η απόδειξη του θεωρήματος είναι πλήρης.

Η λύση του ισοπεριμετρικού προβλήματος που περιγράψαμε πιο πάνω (η οποία δόθηκε από τον Hurwitz το 1901) είναι πράγματι πολύ κομψή, αφήνει όμως αναπάντητα κάποια σημαντικά ερωτήματα, τα οποία παραθέτουμε στη συνέχεια. Έστω Γ μια απλή κλειστή καμπύλη.

(i) Πώς ορίζεται το «χωρίο που περιβάλλεται από την Γ»;

(ii) Ποιος είναι ο γεωμετρικός ορισμός του «εμβαδού» αυτού του χωρίου; Συμφωνεί αυτός ο ορισμός με την (8.1.1);

(iii) Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτά τα αποτελέσματα στην ευρύτερη δυνατή κλάση απλών κλειστών καμπυλών για τις οποίες έχει νόημα το πρόβλημα – εκείνων των καμπυλών που είναι «ευθυγραμμίσιμες» – δηλαδή, εκείνων στις οποίες μπορούμε να αποδώσουμε πεπερασμένο μήκος;

Η προσπάθεια να διευκρινιστούν τα προβλήματα που γεννιούνται συνδέεται με μερικές άλλες σημαντικές ιδέες στην ανάλυση.

8.2 Το θεώρημα ισοκατανομής του Weyl

Σε αυτή την ενότητα εφαρμόζουμε ιδέες από την ανάλυση Fourier σε ένα πρόβλημα που αφορά ιδιότητες των άρρητων αριθμών. Αρχίζουμε με μια σύντομη συζήτηση για τις ισοτιμίες, μια έννοια που είναι απαραίτητη για να καταλάβουμε το κεντρικό μας θεώρημα.

Αν x είναι ένας πραγματικός αριθμός, συμβολίζουμε με $[x]$ τον μεγαλύτερο ακέραιο που είναι μικρότερος ή ίσος του x και ονομάζουμε τον ακέραιο $[x]$ *ακέραιο μέρος* του x. Το *κλασματικό μέρος* του x ορίζεται μετά ως $\langle x \rangle = x - [x]$. Ειδικότερα, $\langle x \rangle \in [0, 1)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Για παράδειγμα, το ακέραιο και το κλασματικό μέρος του 2.7 είναι 2 και 0.7 αντίστοιχα, ενώ το ακέραιο και το κλασματικό μέρος του -3.4 είναι -4 και 0.6 αντίστοιχα.

Μπορούμε να ορίσουμε μια σχέση στο $\mathbb{R}$ λέγοντας ότι οι αριθμοί x και y είναι ισοδύναμοι, ή ισότιμοι, αν $x - y \in \mathbb{Z}$. Τότε γράφουμε

$$x = y \mod \mathbb{Z} \quad \text{ή} \quad x = y \mod 1.$$

Αυτό σημαίνει ότι ταυτίζουμε δύο αριθμούς αν διαφέρουν κατά έναν ακέραιο. Παρατηρήστε ότι κάθε πραγματικός αριθμός x είναι ισότιμος με έναν μοναδικό αριθμό στο $[0, 1)$ που είναι ακριβώς ο $\langle x \rangle$. Πρακτικά, όταν κάνουμε αναγωγή ενός αριθμού modulo $\mathbb{Z}$, θεωρούμε μόνο το κλασματικό μέρος του και αγνοούμε το ακέραιο μέρος του.

Ξεκινάμε τώρα με έναν πραγματικό αριθμό $\gamma \neq 0$ και θεωρούμε την ακολουθία $\gamma, 2\gamma, 3\gamma, \dots$. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα είναι να εξετάσουμε τι συμβαίνει σε αυτή την ακολουθία αν την αναγάγουμε modulo $\mathbb{Z}$, δηλαδή αν κοιτάξουμε την ακολουθία των κλασματικών μερών

$$\langle \gamma \rangle,\ \langle 2\gamma \rangle,\ \langle 3\gamma \rangle,\ \dots.$$

Κάποιες απλές παρατηρήσεις είναι οι εξής:

(i) Αν ο γ είναι ρητός, τότε οι διακεκριμένες τιμές που παίρνουν οι όροι της ακολουθίας $\langle n\gamma\rangle$ είναι πεπερασμένες το πλήθος.

(ii) Αν ο γ είναι άρρητος, τότε οι όροι της ακολουθίας $\langle n\gamma$ είναι όλοι διακεκριμένοι.

Πράγματι, για το (i), παρατηρούμε ότι αν $\gamma = p/q$, οι πρώτοι q όροι της ακολουθίας είναι οι

$$\langle p/q\rangle,\ \langle 2p/q\rangle,\ \langle (q-1)p/q\rangle,\ \langle qp/q\rangle = 0.$$

Κατόπιν, η ακολουθία αρχίζει να επαναλαμβάνεται, αφού

$$\langle (q+1)p/q\rangle = \langle 1+p/q\rangle = \langle p/q\rangle,$$

και ούτω καθεξής. Δείτε και την Άσκηση 8.6 για ένα πιο εκλεπτυσμένο αποτέλεσμα.

Επίσης, για το (ii), ας υποθέσουμε ότι οι αριθμοί δεν είναι όλοι διακεκριμένοι. Τότε, υπάρχουν $n_1 \neq n_2$ τέτοιοι ώστε $\langle n_1\gamma\rangle = \langle n_2\gamma\rangle$. Όμως αυτό σημαίνει ότι $n_1\gamma - n_2\gamma \in \mathbb{Z}$, άρα ο γ είναι ρητός, το οποίο είναι άτοπο.

Μπορούμε μάλιστα να δείξουμε ότι αν ο γ είναι άρρητος τότε η ακολουθία $\langle n\gamma\rangle$ είναι πυκνή στο διάστημα $[0,1)$, κάτι που απέδειξε πρώτος ο Kronecker. Με άλλα λόγια, η ακολουθία $\langle n\gamma\rangle$ μπαίνει σε κάθε υποδιάστημα του $[0,1)$ (και αυτό το επαναλαμβάνει άπειρες φορές). Θα πάρουμε αυτόν τον ισχυρισμό ως πόρισμα ενός βαθύτερου θεωρήματος που αφορά την ομοιόμορφη κατανομή της ακολουθίας $\langle n\gamma\rangle$.

Μια ακολουθία αριθμών $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n, \dots$ στο $[0,1)$ λέγεται *ισοκατανεμημένη* αν για κάθε διάστημα $(a,b) \subset [0,1)$ ισχύει ότι

$$\lim_{N\to\infty} \frac{\#\{1 \leqslant n \leqslant N : \xi_n \in (a,b)\}}{N} = b - a,$$

όπου $\#A$ συμβολίζει τον πληθάριθμο του πεπερασμένου συνόλου A. Αυτό σημαίνει ότι για μεγάλες τιμές του N, το ποσοστό των αριθμών ξ_n, με $n \leqslant N$, στο διάστημα (a,b) τείνει να γίνει ίσο με τον λόγο του μήκους του διαστήματος (a,b) προς το μήκος του διαστήματος $[0,1)$. Με άλλα λόγια, η ακολουθία $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ σαρώνει το διάστημα με ομοιόμορφο τρόπο, και κάθε υποδιάστημα παίρνει δίκαια το μερίδιό του. Πρέπει να τονιστεί ότι η σειρά των όρων της ακολουθίας παίζει πολύ σημαντικό ρόλο. Αυτό γίνεται φανερό από τα επόμενα δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 8.2.1. Η ακολουθία

$$0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 0, \frac{1}{4}, \frac{2}{4}, \frac{3}{4}, 0, \frac{1}{5}, \frac{2}{5}, \dots$$

μοιάζει να είναι ισοκατανεμημένη, αφού διατρέχει το διάστημα $[0,1)$ με πολύ κανονικό τρόπο. Αυτό φυσικά δεν είναι απόδειξη και αφήνουμε ως άσκηση στον αναγνώστη να το δείξει αυστηρά. Ένα κάπως σχετικό παράδειγμα δίνει η Άσκηση 8.8 με $\sigma = 1/2$.

Παράδειγμα 8.2.2. Έστω $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ *τυχούσα* αρίθμηση των ρητών του $[0,1)$. Τότε, η ακολουθία που ορίζεται από την

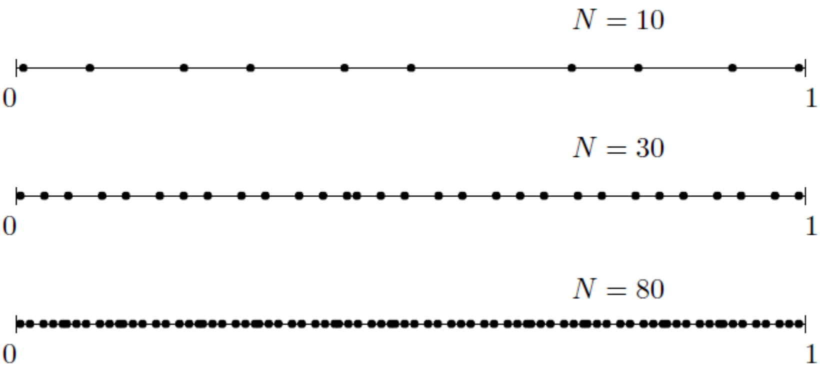
$$\xi_n = \begin{cases} r_{n/2}, & \text{αν ο } n \text{ είναι άρτιος,} \\ 0, & \text{αν ο } n \text{ είναι περιττός,} \end{cases}$$

δεν είναι ισοκατανεμημένη αφού οι «μισοί» όροι της ακολουθίας είναι ίσοι με 0. Παρ' όλα αυτά, η ακολουθία $\{\xi_n\}_{n=1}^{\infty}$ είναι προφανώς πυκνή.

Μπορούμε τώρα να διατυπώσουμε το κεντρικό θεώρημα αυτής της ενότητας.

Θεώρημα 8.2.3. *Αν ο γ είναι άρρητος, τότε η ακολουθία των κλασματικών μερών $\langle\gamma\rangle, \langle 2\gamma\rangle, \langle 3\gamma\rangle, \ldots$ είναι ισοκατανεμημένη στο* $[0,1)$.

Ειδικότερα, η ακολουθία $\langle n\gamma\rangle$ είναι πυκνή στο $[0,1)$, και παίρνουμε το θεώρημα του Kronecker ως πόρισμα. Στο Σχήμα 8.1 απεικονίζουμε το σύνολο των σημείων $\langle\gamma\rangle, \langle 2\gamma\rangle, \langle 3\gamma\rangle, \ldots, \langle N\gamma\rangle$ για τρεις διαφορετικές τιμές του N όταν $\gamma = \sqrt{2}$.



Σχήμα 8.1: Η ακολουθία $\langle\gamma\rangle, \langle 2\gamma\rangle, \langle 3\gamma\rangle, \ldots, \langle N\gamma\rangle$ όταν $\gamma = \sqrt{2}$.

Σταθεροποιούμε $(a,b) \subset [0,1)$ και θεωρούμε τη δείκτρια συνάρτηση $\chi_{(a,b)}(x)$ του διαστήματος (a,b), δηλαδή τη συνάρτηση που είναι ίση με 1 στο (a,b) και με 0 στο $[0,1)\setminus(a,b)$. Μπορούμε να επεκτείνουμε αυτή τη συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ περιοδικά (με περίοδο 1) και θα συνεχίσουμε να συμβολίζουμε αυτή την επέκταση με $\chi_{(a,b)}(x)$. Τότε, από τους ορισμούς, βλέπουμε ότι

$$\#\{1 \leqslant n \leqslant N : \langle n\gamma\rangle \in (a,b)\} = \sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma),$$

και το θεώρημα μπορεί να αναδιατυπωθεί ως ο ισχυρισμός ότι

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} \chi_{(a,b)}(n\gamma) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \quad \text{όταν } N \to \infty.$$

Αυτό το βήμα μας απαλλάσσει από τη δυσκολία του να δουλεύουμε με κλασματικά μέρη και ανάγει το πρόβλημα από τη θεωρία αριθμών στην ανάλυση.

Η καρδιά της απόδειξης βρίσκεται στο ακόλουθο λήμμα.

Λήμμα 8.2.4. *Αν η f είναι συνεχής και περιοδική με περίοδο* 1, *και γ είναι ένας άρρητος αριθμός, τότε*

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) \longrightarrow \int_0^1 f(x)\,dx \qquad \text{όταν } \ N \to \infty.$$

Απόδειξη. Η απόδειξη του λήμματος διαιρείται σε τρία βήματα.

Βήμα 1. Ελέγχουμε πρώτα ότι το συμπέρασμα του λήμματος ισχύει στην περίπτωση που η f είναι κάποιο από τα εκθετικά $1, e^{2\pi ix}, \ldots, e^{2\pi ikx}, \ldots$. Αν $f = 1$, το όριο ισχύει προφανώς. Αν $f(x) = e^{2\pi ikx}$ με $k \neq 0$, τότε το ολοκλήρωμα είναι ίσο με 0. Αφού ο γ είναι άρρητος, έχουμε $e^{2\pi ik\gamma} \neq 1$, άρα η ακολουθία

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) = \frac{e^{2\pi ik\gamma}}{N}\frac{1-e^{2\pi ikN\gamma}}{1-e^{2\pi ik\gamma}}$$

τείνει στο 0 καθώς το $N \to \infty$.

Βήμα 2. Είναι φανερό ότι αν το συμπέρασμα του λήμματος ισχύει για τις f και g, τότε ισχύει και για την $Af + Bg$ για κάθε $A, B \in \mathbb{C}$. Συνεπώς, από το πρώτο βήμα συμπεραίνουμε ότι το συμπέρασμα του λήμματος ισχύει για όλα τα τριγωνομετρικά πολυώνυμα.

Βήμα 3. Έστω $\varepsilon > 0$. Αν f είναι μια συνεχής περιοδική σύνάρτηση με περίοδο 1, μπορούμε να επιλέξουμε τριγωνομετρικό πολυώνυμο p έτσι ώστε

$$\|f - p\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f(x) - p(x)| \leqslant \varepsilon/3.$$

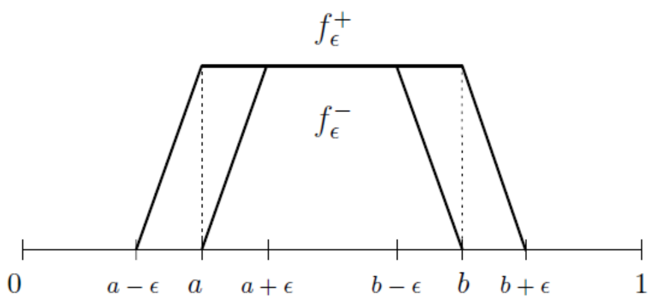
Τότε, από το Βήμα 1, για όλους τους αρκετά μεγάλους N έχουμε ότι

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p(n\gamma) - \int_0^1 p(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon/3.$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(n\gamma) - \int_0^1 f(x)\,dx\right| &\leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} |f(n\gamma) - p(n\gamma)| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} p(n\gamma) - \int_0^1 p(x)\,dx\right| + \int_0^1 |p(x) - f(x)|\,dx \\ &\leqslant \varepsilon,\end{aligned}$$

και έχουμε το λήμμα. □



Σχήμα 8.2: Προσεγγίσεις της $\chi_{(a,b)}(x)$.

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.3. Έστω $\varepsilon > 0$. Επιλέγουμε δύο συνεχείς περιοδικές συναρτήσεις f_ε^+ και f_ε^- με περίοδο 1, οι οποίες προσεγγίζουν την $\chi_{(a,b)}(x)$ στο $[0, 1)$ από πάνω και από κάτω. Οι f_ε^+ και f_ε^- είναι φραγμένες από 1 και συμφωνούν με την $\chi_{(a,b)}(x)$ έξω από κάποια διαστήματα συνολικού μήκους 2ε (δείτε το Σχήμα 8.2).

Ειδικότερα, $f_\varepsilon^-(x) \leqslant \chi_{(a,b)}(x) \leqslant f_\varepsilon^+(x)$, και

$$b-a-2\varepsilon \leqslant \int_0^1 f_\varepsilon^-(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_\varepsilon^+(x)\,dx \leqslant b-a+2\varepsilon.$$

Αν $s_N = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N \chi_{(a,b)}(n\gamma)$, τότε παίρνουμε

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f_\varepsilon^-(n\gamma) \leqslant s_N \leqslant \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f_\varepsilon^+(n\gamma).$$

Έπεται ότι

$$b-a-2\varepsilon \leqslant \liminf_{N\to\infty} s_N \leqslant \limsup_{N\to\infty} s_N \leqslant b-a+2\varepsilon.$$

Αφού αυτό ισχύει για κάθε $\varepsilon > 0$, το όριο $\lim\limits_{N\to\infty} s_N$ υπάρχει και πρέπει να είναι ίσο με $b-a$. Έτσι, ολοκληρώνεται η απόδειξη του θεωρήματος ισοκατανομής. □

Το Θεώρημα 8.2.3 έχει την ακόλουθη συνέπεια.

Πόρισμα 8.2.5. *Το συμπέρασμα του Λήμματος 8.2.4 ισχύει για κάθε συνάρτηση f η οποία είναι Riemann ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$, και περιοδική με περίοδο 1.*

Απόδειξη. Υποθέτουμε ότι η f παίρνει πραγματικές τιμές, και θεωρούμε μια διαμέριση του διαστήματος $[0,1]$, ας πούμε $0 = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = 1$. Στη συνέχεια, ορίζουμε $f_U(x) = \sup_{x_{j-1}\leqslant y\leqslant x_j} f(y)$ αν $x\in[x_{j-1},x_j)$ και $f_L(x) = \inf_{x_{j-1}\leqslant y\leqslant x_j} f(y)$ αν $x\in[x_{j-1},x_j)$. Τότε, $f_L \leqslant f \leqslant f_U$ και

$$\int_0^1 f_L(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f(x)\,dx \leqslant \int_0^1 f_U(x)\,dx.$$

Επιπλέον, αν κάνουμε τη διαμέριση αρκετά λεπτή, μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι για δοθέν $\varepsilon > 0$,

$$\int_0^1 f_U(x)\,dx - \int_0^1 f_L(x)\,dx \leqslant \varepsilon.$$

Όμως,

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f_L(n\gamma) \longrightarrow \int_0^1 f_L(x)\,dx$$

από το Λήμμα 8.2.4, διότι κάθε f_L είναι πεπερασμένος γραμμικός συνδυασμός δεικτριών συναρτήσεων διαστημάτων. Όμοια, έχουμε ότι

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N f_U(n\gamma) \longrightarrow \int_0^1 f_U(x)\,dx.$$

Από αυτούς τους δύο ισχυρισμούς παίρνουμε το συμπέρασμα του πορίσματος, χρησιμοποιώντας το προηγούμενο επιχείρημα προσέγγισης. □

Υπάρχει μια ενδιαφέρουσα ερμηνεία του λήμματος και του πορίσματός του, μέσω ενός απλού δυναμικού συστήματος. Σε αυτό το παράδειγμα, ο χώρος που θεωρούμε είναι ο κύκλος τον οποίο παραμετρικοποιούμε με τη γωνία ϑ. Θεωρούμε επίσης μια απεικόνιση αυτού του χώρου στον εαυτό του. Εδώ, επιλέγουμε μια στροφή ϱ του κύκλου κατά γωνία $2\pi\gamma$, δηλαδή, τον μετασχηματισμό $\varrho : \vartheta \mapsto \vartheta + 2\pi\gamma$.

Θέλουμε να δούμε πώς αυτός ο χώρος, με τη δράση της ϱ, εξελίσσεται στον χρόνο. Με άλλα λόγια, θέλουμε να θεωρήσουμε τις επαναλήψεις της ϱ, δηλαδή τις $\varrho, \varrho^2, \varrho^3, \ldots, \varrho^n$ με

$$\varrho^n = \varrho \circ \varrho \circ \cdots \circ \varrho : \vartheta \mapsto \vartheta + 2\pi n\gamma,$$

όπου σκεφτόμαστε ότι η δράση της ϱ^n εφαρμόζεται τη χρονική στιγμή $t = n$.

Σε κάθε Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση f ορισμένη στον κύκλο, μπορούμε επίσης να αντιστοιχίσουμε τα αποτελέσματα της στροφής ϱ, και να πάρουμε μια ακολουθία συναρτήσεων

$$f(\vartheta), f(\varrho(\vartheta)), f(\varrho^2(\vartheta)), \ldots, f(\varrho^n(\vartheta)), \ldots$$

όπου $f(\varrho^n(\vartheta)) = f(\vartheta + 2\pi n\gamma)$. Σε αυτό το ειδικό πλαίσιο, με τον όρο *εργοδικότητα* του συστήματος εννοούμε ότι ο «μέσος ως προς τον χρόνο»

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} f(\varrho^n(\vartheta))$$

υπάρχει για κάθε ϑ και ισούται με τον «μέσο ως προς τον χώρο»

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\vartheta)\, d\vartheta,$$

εάν ο γ είναι άρρητος. Μάλιστα, αυτός ο ισχυρισμός είναι απλώς μία αναδιατύπωση του Πορίσματος 8.2.5, αν κάνουμε την αλλαγή μεταβλητής $\vartheta = 2\pi x$.

Επιστρέφοντας στο πρόβλημα των ισοκατανεμημένων ακολουθιών, παρατηρούμε ότι η απόδειξη του Θεωρήματος 8.2.3 δίνει τον ακόλουθο χαρακτηρισμό.

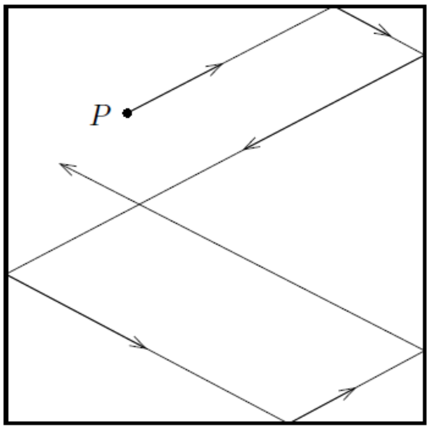
Κριτήριο του Weyl. *Μια ακολουθία πραγματικών αριθμών $\xi_1, \xi_2, \ldots$ στο $[0,1)$ είναι ισοκατανεμημένη αν και μόνο αν για όλους τους ακεραίους $k \neq 0$ ισχύει ότι*

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \xi_n} \longrightarrow 0$$

καθώς το $N \to \infty$.

Η μία κατεύθυνση αυτού του θεωρήματος έχει ήδη αποδειχθεί πιο πάνω, και η αντίστροφη κατεύθυνση αφήνεται για την Άσκηση 8.7. Ειδικότερα, βλέπουμε ότι για να κατανοήσουμε τις ιδιότητες ισοκατανομής μιας ακολουθίας ξ_n αρκεί να εκτιμήσουμε το μέγεθος του αντίστοιχου «εκθετικού αθροίσματος» $\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k \xi_n}$. Για παράδειγμα, χρησιμοποιώντας το κριτήριο του Weyl μπορούμε να δείξουμε ότι η ακολουθία $\langle n^2\gamma \rangle$ είναι ισοκατανεμημένη αν ο γ είναι άρρητος. Διάφορα παραδείγματα, όπως αυτό, υπάρχουν στις ασκήσεις του κεφαλαίου.

Ως τελευταία παρατήρηση, αναφέρουμε μια όμορφη γεωμετρική ερμηνεία των ιδιοτήτων κατανομής της ακολουθίας $\langle n\gamma \rangle$. Ας υποθέσουμε ότι οι πλευρές ενός τετραγώνου λειτουργούν ως καθρέπτες και ότι μια ακτίνα φωτός ξεκινάει από ένα σημείο P μέσα στο τετράγωνο. Ποια είναι η τροχιά που θα διαγράψει;



Σχήμα 8.3: Ανακλάσεις μιας ακτίνας φωτός σε ένα τετράγωνο.

Για να λύσουμε το πρόβλημα, η βασική ιδέα είναι να θεωρήσουμε το πλέγμα του επιπέδου που σχηματίζεται αν θεωρήσουμε διαδοχικές ανακλάσεις του αρχικού τετραγώνου κατά μήκος των ακμών του. Με κατάλληλη επιλογή άξονα, η τροχιά που διαγράφει το φως στο τετράγωνο αντιστοιχεί στην ευθεία $P + (t, \gamma t)$ στο επίπεδο. Κατά συνέπεια, ο αναγνώστης θα παρατηρήσει ότι η τροχιά είτε θα είναι κλειστή και περιοδική ή θα είναι πυκνή στο τετράγωνο. Η πρώτη από αυτές τις καταστάσεις θα προκύψει αν και μόνο αν η κλίση γ της αρχικής κατεύθυνσης του φωτός (η οποία προσδιορίζεται από τη γωνία που σχηματίζει με κάποια από τις πλευρές του τετραγώνου) είναι ρητή. Στη δεύτερη κατάσταση, όταν η γ είναι άρρητη, η πυκνότητα της τροχιάς είναι συνέπεια του θεωρήματος του Kronecker. Μπορείτε μάλιστα να διατυπώσετε ένα ισχυρότερο συμπέρασμα το οποίο παίρνουμε από το θεώρημα ισοκατανομής.

8.3 Συνεχείς αλλά πουθενά παραγωγίσιμες συναρτήσεις

Υπάρχουν πολλά προφανή παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων οι οποίες δεν είναι παραγωγίσιμες σε ένα σημείο, όπως η $f(x) = |x|$. Είναι σχεδόν εξίσου εύκολο να κατασκευάσουμε μια συνεχή συνάρτηση η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη σε οποιοδήποτε δοθέν πεπερασμένο σύνολο σημείων, ή ακόμα και σε κατάλληλα σύνολα τα οποία περιέχουν άπειρα αριθμήσιμα το πλήθος σημεία. Ένα πιο πολύπλοκο ερώτημα είναι αν υπάρχει συνεχής συνάρτηση η οποία δεν είναι παραγωγίσιμη σε κανένα σημείο (είναι, όπως λέμε, *πουθενά* παραγωγίσιμη). Το 1861, ο Riemann μάντεψε ότι η συνάρτηση

$$R(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(k^2 x)}{k^2} \tag{8.3.1}$$

είναι πουθενά παραγωγίσιμη. Οδηγήθηκε στο να θεωρήσει αυτή τη συνάρτηση διότι συνδέεται στενά με τη συνάρτηση θήτα. Ο Riemann δεν έδωσε ποτέ κάποια απόδειξη, ανέφερε όμως αυτό το παράδειγμα σε κάποια από τις διαλέξεις του. Αυτό κίνησε το ενδιαφέρον του Weierstrass ο οποίος, προσπαθώντας να δώσει μια απόδειξη, οδηγήθηκε στο πρώτο παράδειγμα μιας συνεχούς αλλά πουθενά παραγωγίσιμης συνάρτησης. Ας υποθέσουμε ότι $0 < b < 1$ και $a > 1$ είναι ένας ακέραιος. Το 1872, ο Weierstrass απέδειξε ότι αν $ab > 1 + 3\pi/2$, τότε η συνάρτηση

$$W(x) = \sum_{k=1}^{\infty} b^k \cos(a^n x)$$

είναι πουθενά παραγωγίσιμη.

Όμως, η ιστορία δεν είναι ολοκληρωμένη αν δεν πούμε τι ακριβώς ισχύει για την αυθεντική συνάρτηση του Riemann. Το 1916 ο Hardy απέδειξε ότι η R δεν είναι παραγωγίσιμη στα άρρητα πολλαπλάσια του π, καθώς και σε κάποια ρητά πολλαπλάσια του π. Πέρασαν όμως αρκετά χρόνια έως ότου, το 1969, ο Gerver έδωσε την πλήρη απάντηση στο πρόβλημα, αποδεικνυοντας πρώτα ότι η R *τελικά είναι* παραγωγίσιμη σε όλα τα ρητά πολλαπλάσια του π της μορφής $\pi p/q$ με τους p και q περιττούς ακεραίους, και μετά δείχνοντας ότι η R δεν είναι παραγωγίσιμη σε όλα τα υπόλοιπα σημεία.

Σε αυτή την ενότητα, αποδεικνύουμε το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 8.3.1. *Αν $0 < \alpha < 1$, τότε η συνάρτηση*

$$f_\alpha(x) = f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{-k\alpha} e^{i2^k x}$$

είναι συνεχής αλλά πουθενά παραγωγίσιμη.

Η συνέχεια της f είναι φανερή λόγω της απόλυτης σύγκλισης της σειράς. Η κρίσιμη ιδιότητα της f που θα χρειαστούμε είναι ότι έχει πολλούς συντελεστές Fourier ίσους με 0. Μια σειρά Fourier που παραλείπει πολλούς όρους, όπως αυτή στο θεώρημα ή όπως η $W(x)$, ονομάζεται *αραιή σειρά Fourier*.

Η απόδειξη του θεωρήματος είναι στην πραγματικότητα η ιστορία τριών μεθόδων αθροισιμότητας για τις σειρές Fourier. Πρώτον, έχουμε τη συνήθη σύγκλιση μέσω των μερικών αθροισμάτων $s_N(g) = g * D_N$. Κατόπιν, έχουμε την Cesàro αθροισιμότητα $\sigma_N(g) = f * K_N$, όπου K_N είναι ο πυρήνας Fejér. Στην τρίτη μέθοδο, η οποία σαφώς συνδέεται με τη δεύτερη, υπεισέρχονται οι *μέσοι με υστέρηση* που ορίζονται από την

$$\Delta_N(g) = 2\sigma_{2N}(g) - \sigma_N(g).$$

Με άλλα λόγια, $\Delta_N(g) = g * [2K_{2N} - K_N]$. Αυτές οι τρεις μέθοδοι οπτικοποιούνται στο Σχήμα 8.5.

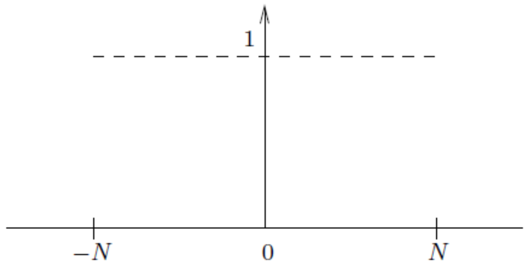
Ας υποθέσουμε ότι $g(x) \sim \sum a_k e^{ikx}$. Τότε:

- Η s_N προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον όρο $a_k e^{ikx}$ με 1 αν $|k| \leqslant N$ και με 0 αν $|k| > N$.
- Η σ_N προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον όρο $a_k e^{ikx}$ με $1-|k|/N$ αν $|k| \leqslant N$ και με 0 αν $|k| > N$.
- Η Δ_N προκύπτει αν πολλαπλασιάσουμε τον όρο $a_k e^{ikx}$ με 1 αν $|k| \leqslant N$, με $2(1-|k|/(2N))$ αν $N \leqslant |k| \leqslant 2N$, και με 0 αν $|k| > 2N$.

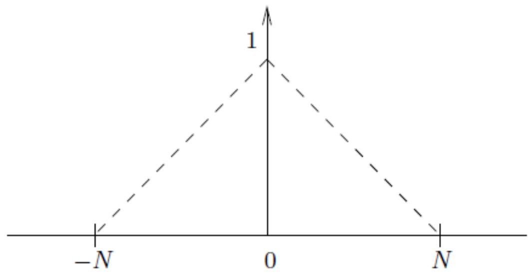
Για παράδειγμα, σημειώνουμε ότι

$$\begin{aligned}
\sigma_N(g,x) &= \frac{s_0(g,x) + s_1(g,x) + \cdots + s_{N-1}(g,x)}{N} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{\ell=0}^{N-1} \sum_{|k|\leqslant \ell} a_k e^{ikx} \\
&= \frac{1}{N} \sum_{|k|\leqslant N} (N - |k|) a_k e^{ikx} \\
&= \sum_{|k|\leqslant N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) a_k e^{ikx}.
\end{aligned}$$

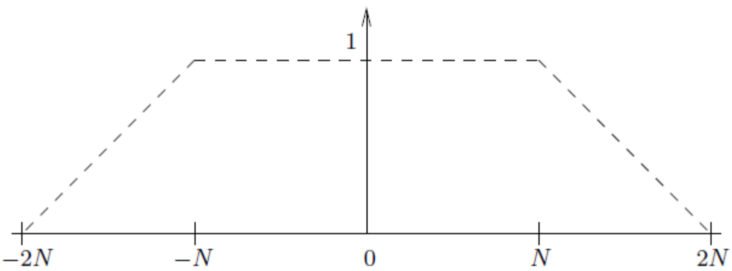
Η απόδειξη του άλλου ισχυρισμού είναι παρόμοια.



Μερικά αθροίσματα: $s_N(g,x) = \sum_{|k|\leqslant N} a_k e^{ikx}$



Μέσοι Cesàro: $\sigma_N(g,x) = \sum_{|k|\leqslant N} \left(1 - \frac{|k|}{N}\right) a_k e^{ikx}$.



Μέσοι με υστέρηση: $\Delta_N(g,x) = 2\sigma_{2N}(g,x) - \sigma_N(g,x)$.

Σχήμα 8.4: Τρεις μέθοδοι άθροισης

Οι μέσοι με υστέρηση έχουν δύο σημαντικά χαρακτηριστικά. Από τη μία πλευρά, οι ιδιότητές τους συνδέονται στενά με τα (καλά) χαρακτηριστικά των μέσων Cesàro. Από την άλλη πλευρά, για σειρές που έχουν αραιές ιδιότητες όπως αυτές της f, οι μέσοι με υστέρηση είναι ουσιαστικά ίσοι με τα μερικά αθροίσματα. Ειδικότερα, σημειώνουμε ότι για τη συνάρτησή μας $f = f_\alpha$ ισχύει ότι

$$s_N(f) = \Delta_{N'}(f), \tag{8.3.2}$$

όπου N' είναι ο μεγαλύτερος ακέραιος της μορφής 2^k με $N' \leqslant N$. Αυτό προκύπτει εύκολα από το Σχήμα 8.4 και τον ορισμό της f.

Απόδειξη του Θεωρήματος 8.3.1. Προχωράμε τώρα στην απόδειξη του θεωρήματος, η οποία θα γίνει με απαγωγή σε άτοπο. Δηλαδή, υποθέτουμε ότι η $f'(x_0)$ υπάρχει για κάποιο x_0.

Λήμμα 8.3.2. *Έστω g μια συνεχής συνάρτηση που είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Τότε, οι μέσοι Cesàro της g ικανοποιούν την $\sigma'_N(g, x_0) = O(\ln N)$, συνεπώς*

$$\Delta'_N(g, x_0) = O(\ln N).$$

Απόδειξη. Αρχικά έχουμε

$$\sigma'_N(g, x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K'_N(x_0 - t)g(t)\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K'_N(t)g(x_0 - t)\,dt,$$

όπου K_N είναι ο πυρήνας Fejér. Αφού η K_N είναι περιοδική, έχουμε $\int_{-\pi}^{\pi} K'_N(t)\,dt = 0$ και αυτό συνεπάγεται ότι

$$\sigma'_N(g, x_0) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} K'_N(t)[g(x_0 - t) - g(x_0)]\,dt.$$

Από την υπόθεση ότι η g είναι παραγωγίσιμη στο x_0 παίρνουμε

$$|\sigma'_N(g, x_0)| \leqslant C\int_{-\pi}^{\pi} |K'_N(t)|\,|t|\,dt.$$

Τώρα, παρατηρούμε ότι η K'_N ικανοποιεί τις εκτιμήσεις

$$|K'_N(t)| \leqslant AN^2 \quad \text{και} \quad |K'_N(t)| \leqslant \frac{A}{|t|^2}.$$

Για την πρώτη ανισότητα, θυμηθείτε ότι η K_N είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N που οι συντελεστές του είναι φραγμένοι από 1. Συνεπώς, η K'_N είναι τριγωνομετρικό πολυώνυμο βαθμού N που οι συντελεστές του είναι φραγμένοι από N. Έπεται ότι

$$|K'_N(t)| \leqslant (2N + 1)N \leqslant AN^2.$$

Για τη δεύτερη ανισότητα, θυμηθείτε ότι

$$K_N(t) = \frac{1}{N}\frac{\sin^2(Nt/2)}{\sin^2(t/2)}.$$

Παραγωγίζοντας αυτή την παράσταση, παίρνουμε δύο όρους:

$$\frac{\sin(Nt/2)\cos(Nt/2)}{\sin^2(t/2)} - \frac{1}{N}\frac{\cos(t/2)\sin^2(Nt/2)}{\sin^3(t/2)}.$$

Χρησιμοποιώντας τις ανισότητες $|\sin(Nt/2)| \leqslant CN|t|$ και $|\sin(t/2)| \geqslant c|t|$ (για $|t| \leqslant \pi$), παίρνουμε το ζητούμενο φράγμα για την $K'_N(t)$.

Χρησιμοποιώντας όλες αυτές τις εκτιμήσεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}|\sigma_N'(g,x_0)| &\leqslant C\int_{|t|\geqslant 1/N}|K_N'(t)|\,|t|\,dt + C\int_{|t|\leqslant 1/N}|K_N'(t)|\,|t|\,dt\\ &\leqslant CA\int_{|t|\geqslant 1/N}\frac{dt}{|t|} + CAN\int_{|t|\leqslant 1/N}dt\\ &= O(\ln N)+O(1)\\ &= O(\ln N).\end{aligned}$$

Η απόδειξη του λήμματος είναι πλήρης αν θυμηθούμε τον ορισμό του μέσου $\Delta_N(g)$. □

Λήμμα 8.3.3. *Αν* $2N = 2^k$, *τότε*

$$\Delta_{2N}(f)-\Delta_N(f) = 2^{-k\alpha}e^{i2^kx}.$$

Απόδειξη. Αυτό είναι άμεση συνέπεια της (8.3.2), αφού $\Delta_{2N}(f) = s_{2N}(f)$ και $\Delta_N(f) = s_N(f)$. □

Μπορούμε τώρα να ολοκληρώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 8.3.1. Από το Λήμμα 8.3.2 έχουμε

$$\Delta_{2n}'(f,x_0)-\Delta_N'(f,x_0) = O(\ln N),$$

ενώ το Λήμμα 8.3.3 συνεπάγεται ότι

$$|\Delta_{2n}'(f,x_0)-\Delta_N'(f,x_0)| = 2^{k(1-\alpha)} \geqslant cN^{1-\alpha}.$$

Έχουμε έτσι φτάσει σε αντίφαση, αφού η $N^{1-\alpha}$ αυξάνει πιο γρήγορα από την $\ln N$ καθώς το $N\to\infty$. □

Κλείνουμε αυτή την ενότητα με κάποιες πρόσθετες παρατηρήσεις για τη συνάρτηση $f_\alpha(x) = \sum_{k=0}^\infty 2^{-k\alpha}e^{i2^kx}$. Αυτή η συνάρτηση παίρνει μιγαδικές τιμές σε αντίθεση με τα παραδείγματα της R και της W πιο πάνω, άρα το γεγονός ότι η f_α είναι πουθενά παραγωγίσιμη δεν συνεπάγεται την ίδια ιδιότητα για το πραγματικό και το φανταστικό της μέρος. Όμως, μια μικρή τροποποίηση της απόδειξης δείχνει ότι, όντως, το πραγματικό μέρος της f_α

$$\sum_{k=0}^\infty 2^{-k\alpha}\cos(2^kx),$$

καθώς και το φανταστικό της μέρος, είναι και οι δύο πουθενά παραγωγίσιμες συναρτήσεις. Για να το δούμε αυτό, παρατηρούμε πρώτα ότι, με την ίδια απόδειξη, το Λήμμα 8.3.2 γενικεύεται ως εξής: αν g είναι μια συνεχής συνάρτηση η οποία είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε

$$\Delta_N'(g,x_0+h) = O(\ln N)\quad \text{όταν } |h|\leqslant c/N.$$

Κατόπιν, προχωράμε με την $F(x) = \sum\limits_{k=0}^\infty 2^{-k\alpha}\cos(2^kx)$, παρατηρώντας όπως παραπάνω ότι

$$\Delta_{2N}(F)-\Delta_N(F) = 2^{-k\alpha}\cos(2^kx).$$

Συνεπώς, αν υποθέσουμε ότι η F είναι παραγωγίσιμη στο x_0, βλέπουμε ότι

$$|2^{k(1-\alpha)}\sin(2^k(x_0+h))| = O(\ln N)$$

όταν $2N = 2^k$ και $|h| \leqslant c/N$. Για να καταλήξουμε σε αντίφαση, αρκεί μόνο να επιλέξουμε τον h έτσι ώστε $|\sin(2^k(x_0+h))| = 1$. Αυτό επιτυγχάνεται αν πάρουμε το δ ίσο με την απόσταση του $2^k x_0$ από τον πλησιέστερο αριθμό της μορφής $(k+1/2)\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ (οπότε $\delta \leqslant \pi/2$) και επιλέξουμε $h = \pm\delta/2^k$.

Είναι φανερό ότι αν $\alpha > 1$ τότε η συνάρτηση f_α είναι συνεχώς παραγωγίσιμη, αφού μπορούμε να παραγωγίσουμε τη σειρά όρο προς όρο. Τέλος, η «πουθενά παραγωγισιμότητα» που αποδείξαμε για $\alpha < 1$ επεκτείνεται και στην περίπτωση $\alpha = 1$ με κατάλληλη, πιο πολύπλοκη, παραλλαγή του επιχειρήματος. Χρησιμοποιώντας μάλιστα τις ίδιες τεχνικές, μπορούμε επίσης να δείξουμε ότι η συνάρτηση W του Weierstrass είναι πουθενά παραγωγίσιμη αν ικανοποιείται η συνθήκη $ab \geqslant 1$.

8.4 Η εξίσωση της θερμότητας στον κύκλο

Για την τελευταία μας εφαρμογή, επιστρέφουμε στο αρχικό πρόβλημα της διάδοσης της θερμότητας, το οποίο μελέτησε ο Fourier.

Ας υποθέσουμε ότι μας έχει δοθεί μια αρχική κατανομή θερμοκρασίας τη χρονική στιγμή $t = 0$ σε έναν δακτύλιο και μας ζητούν να περιγράψουμε τη θερμοκρασία στα σημεία του δακτυλίου τη χρονική στιγμή $t > 0$.

Ένα μοντέλο του δακτυλίου δίνει ο μοναδιαίος κύκλος. Ένα σημείο σε αυτόν τον κύκλο περιγράφεται από τη γωνία του $\vartheta = 2\pi x$, όπου η μεταβλητή x βρίσκεται μεταξύ 0 και 1. Αν $u(x,t)$ είναι η θερμοκρασία τη χρονική στιγμή t σε ένα σημείο που περιγράφεται από τη γωνία ϑ, τότε με επιχειρήματα ανάλογα αυτών που δώσαμε στο Κεφάλαιο 1 βλέπουμε ότι η u ικανοποιεί τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial u}{\partial t} = c\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{8.4.1}$$

Η σταθερά c είναι μια θετική φυσική σταθερά που εξαρτάται από το υλικό από το οποίο είναι φτιαγμένος ο δακτύλιος. Κάνοντας αλλαγή κλίμακας στη μεταβλητή του χρόνου, μπορούμε να υποθέσουμε ότι $c = 1$. Αν f είναι τα αρχικά μας δεδομένα, επιβάλλουμε τη συνθήκη

$$u(x,0) = f(x).$$

Για να λύσουμε το πρόβλημα, κάνουμε χωρισμό μεταβλητών και ψάχνουμε για ειδικές λύσεις της μορφής

$$u(x,t) = A(x)B(t).$$

Εισάγοντας αυτή την έκφραση για την u στην εξίσωση της θερμότητας παίρνουμε την

$$\frac{B'(t)}{B(t)} = \frac{A''(x)}{A(x)}.$$

Έπεται ότι τα δύο μέλη είναι σταθερά, ας πούμε ίσα με λ. Αφού η A πρέπει να είναι περιοδική με περίοδο 1, βλέπουμε ότι αναγκαστικά πρέπει να ισχύει ότι $\lambda = -4\pi^2k^2$ για κάποιον $k \in \mathbb{Z}$. Τότε, η A είναι γραμμικός συνδυασμός των εκθετικών $e^{2\pi ikx}$ και $e^{-2\pi ikx}$, ενώ η $B(t)$ είναι πολλαπλάσιο της $e^{-4\pi^2k^2t}$. Με υπέρθεση αυτών των λύσεων οδηγούμαστε στην

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-4\pi^2k^2t} e^{2\pi ikx}, \tag{8.4.2}$$

όπου, θέτοντας $t = 0$, βλέπουμε ότι $\{a_k\}$ είναι οι συντελεστές Fourier της f.

Σημειώνουμε ότι αν η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη τότε οι συντελεστές a_k είναι φραγμένοι, και αφού ο παράγοντας $e^{-4\pi^2 k^2 t}$ τείνει στο 0 πολύ γρήγορα, η σειρά που ορίζει την u συγκλίνει. Μάλιστα, σε αυτή την περίπτωση, η u είναι δύο φορές παραγωγίσιμη και είναι λύση της εξίσωσης (8.4.1).

Το φυσιολογικό ερώτημα σε σχέση με τη συνοριακή συνθήκη είναι το ακόλουθο: είναι σωστό ότι $u(x,t) \to f(x)$ καθώς το t τείνει στο 0, και με ποια έννοια· Με απλή εφαρμογή της ταυτότητας Parseval βλέπουμε ότι αυτό το όριο υπάρχει με την τετραγωνική έννοια (Άσκηση 8.11). Για την καλύτερη κατανόηση των ιδιοτήτων της λύσης μας (8.4.2), την γράφουμε στη μορφή

$$u(x,t) = (f * H_t)(x),$$

όπου H_t είναι ο *πυρήνας της θερμότητας για τον κύκλο*, που ορίζεται ως εξής:

$$H_t(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i k x}, \tag{8.4.3}$$

και όπου η συνέλιξη για συναρτήσεις με περίοδο 1 ορίζεται μέσω της

$$(f * g)(x) = \int_0^1 f(x-y) g(y)\, dy.$$

Η αναλογία ανάμεσα στον πυρήνα της θερμότητας και τον πυρήνα Poisson περιγράφεται στην Άσκηση 8.12. Όμως, σε αντίθεση με τον πυρήνα Poisson, δεν υπάρχει στοιχειώδης τύπος για τον πυρήνα της θερμότητας. Μπορούμε όμως να ελέγξουμε ότι είναι καλός πυρήνας. Η απόδειξη δεν είναι προφανής και απαιτεί τη χρήση του διάσημου τύπου άθροισης του Poisson, τον οποίο θα συζητήσουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Ως πόρισμα, θα δούμε εκεί ότι η H_t είναι παντού θετική, κάτι που δεν προκύπτει άμεσα από τον ορισμό της στην (8.4.3). Μπορούμε όμως να δώσουμε την ακόλουθη διαισθητική αιτιολόγηση για το γεγονός ότι η H_t είναι θετική. Ας υποθέσουμε ότι ξεκινάμε με μια αρχική κατανομή θερμοκρασίας f η οποία είναι παντού $\leqslant 0$. Τότε, είναι λογικό από την άποψη της φυσικής να περιμένουμε ότι $u(x,t) \leqslant 0$ για κάθε t, αφού η θερμότητα κινείται από το θερμό προς το ψυχρό. Τώρα,

$$u(x,t) = \int_0^1 f(x-y) H_t(y)\, dy.$$

Αν η H_t είναι αρνητική σε κάποιο x_0, τότε μπορούμε να επιλέξουμε $f \leqslant 0$ με φορέα κοντά στο x_0, και αυτό θα είχε ως συνέπεια την $u(x_0, t) > 0$, το οποίο είναι αντίφαση.

8.5 Ασκήσεις

8.1. Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ μια παραμετρικοποίηση για την κλειστή καμπύλη Γ.

(i) Αποδείξτε ότι η γ είναι παραμετρικοποίηση ως προς μήκος τόξου αν και μόνο αν το μήκος της καμπύλης από το $\gamma(a)$ ως το $\gamma(s)$ είναι ακριβώς ίσο με $s - a$, δηλαδή,

$$\int_a^s |\gamma'(t)|\, dt = s - a.$$

(ii) Αποδείξτε ότι κάθε καμπύλη Γ επιδέχεται παραμετρικοποίηση ως πρός μήκος τόξου. [*Υπόδειξη:* Αν η είναι τυχούσα παραμετρικοποίηση, ορίστε την $h(s) = \int_a^s |\eta'(t)|\, dt$ και θεωρήστε την $\gamma = \eta \circ h^{-1}$.]

8.2. Έστω $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ μια παραμετρικοποίηση για μια κλειστή καμπύλη Γ, με $\gamma(t) = (x(t), y(t))$.

(i) Αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{2}\int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\,ds = \int_a^b x(s)y'(s)\,ds = -\int_a^b y(s)x'(s)\,ds.$$

(ii) Ορίζουμε την *αντίστροφη παραμετρικοποίηση* της γ να είναι η $\gamma^- : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ με $\gamma^-(t) = \gamma(b + a - t)$. Η εικόνα της γ^- είναι ακριβώς η Γ, με τη διαφορά ότι τα σημεία $\gamma^-(t)$ και $\gamma(t)$ κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις. Δηλαδή, η γ^- «αντιστρέφει» τον προσανατολισμό της καμπύλης. Αποδείξτε ότι

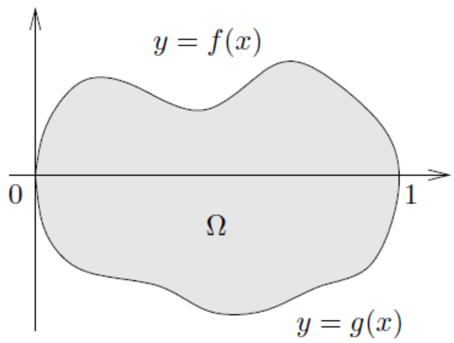
$$\int_\gamma (x\,dy - y\,dx) = -\int_{\gamma^-}(x\,dy - y\,dx).$$

Ειδικότερα, μπορούμε να υποθέσουμε (μετά από μια πιθανή αλλαγή προσανατολισμού) ότι

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\int_a^b (x(s)y'(s) - y(s)x'(s))\,ds = \int_a^b x(s)y'(s)\,ds.$$

8.3. Υποθέτουμε ότι Γ είναι μια καμπύλη στο επίπεδο, και ότι υπάρχει ένα σύστημα συντεταγμένων x και y τέτοιο ώστε ο x-άξονας να διαιρεί την καμπύλη στην ένωση των γραφημάτων δύο συνεχών συναρτήσεων $y = f(x)$ και $y = g(x)$ για $0 \leqslant x \leqslant 1$, με $f(x) \geqslant g(x)$, όπως στο Σχήμα 8.5. Έστω Ω το χωρίο ανάμεσα στα γραφήματα αυτών των δύο συναρτήσεων:

$$\Omega = \{(x,y) : 0 \leqslant x \leqslant 1 \ \text{ και } \ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}.$$



Σχήμα 8.5: Απλή εκδοχή του τύπου για το εμβαδόν

Με τη συνήθη ερμηνεία ότι το ολοκλήρωμα $\int h(x)\,dx$ δίνει το εμβαδόν κάτω από το γράφημα της συνάρτησης h, βλέπουμε ότι το εμβαδόν του Ω είναι ίσο με $\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx$. Αποδείξτε ότι αυτός ο ορισμός συμφωνεί με τον τύπο για το εμβαδόν $\mathcal{A}$ που δόθηκε στην Ενότητα 8.1, δηλαδή,

$$\int_0^1 f(x)\,dx - \int_0^1 g(x)\,dx = \left|-\int_\Gamma y\,dx\right| = \mathcal{A}.$$

Παρατηρήστε επίσης ότι αν επιλέξουμε τον προσανατολισμό της καμπύλης έτσι ώστε το Ω να βρίσκεται «στα αριστερά της» Γ, τότε αυτός ο τύπος ισχύει χωρίς να πάρουμε την απόλυτη τιμή.

Αυτός ο τύπος γενικεύεται σε κάθε σύνολο το οποίο μπορεί να γραφτεί ως πεπερασμένη ένωση χωρίων όπως το Ω πιο πάνω.

8.4. Παρατηρήστε ότι με τον ορισμό των ℓ και $\mathcal{A}$ που δώσαμε στην Ενότητα 8.1, η ισοπεριμετρική ανισότητα εξακολουθεί να ισχύει (με την ίδια απόδειξη) ακόμα και αν η Γ δεν είναι απλή.

Αποδείξτε ότι αυτή η ισχυρότερη εκδοχή της ισοπεριμετρικής ανισότητας είναι ισοδύναμη με την ανισότητα του Wirtinger, η οποία ισχυρίζεται ότι αν η f είναι 2π-περιοδική, της κλάσης C^1, και ικανοποιεί την $\int_0^{2\pi} f(t)\,dt = 0$, τότε

$$\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\,dt \leqslant \int_0^{2\pi} |f'(t)|^2\,dt$$

με ισότητα αν και μόνο αν $f(t) = A\sin t + B\cos t$.

[*Υπόδειξη:* Στη μία κατεύθυνση, παρατηρήστε ότι αν το μήκος της καμπύλης είναι 2π και γ είναι κατάλληλη παραμετρικοποίηση ως προς μήκος τόξου, τότε

$$2(\pi - \mathcal{A}) = \int_0^{2\pi} [x'(s) + y'(s)]^2\,ds + \int_0^{2\pi} (y'(s)^2 - y(s)^2)\,ds.$$

Μια αλλαγή συντεταγμένων μας εξασφαλίζει ότι $\int_0^{2\pi} y(s)\,ds = 0$. Για την άλλη κατεύθυνση, ξεκινήστε με μια πραγματική συνάρτηση f που ικανοποιεί όλες τις υποθέσεις της ανισότητας του Wirtinger. και κατασκευάστε μια συνάρτηση g, 2π-περιοδική και τέτοια ώστε ο όρος πιο πάνω που βρίσκεται μέσα στις αγκύλες να μηδενίζεται.]

8.5. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty}$, όπου γ_n είναι το κλασματικό μέρος του

$$\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n,$$

δεν είναι ισοκατανεμημένη στο $[0, 1]$.

[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε ότι η ακολουθία $U_n = \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$ ικανοποιεί την εξίσωση διαφορών $U_{r+1} = U_r + U_{r-1}$ με $U_0 = 2$ και $U_1 = 1$. Η ακολουθία U_n ικανοποιεί την ίδια εξίσωση διαφορών που ικανοποιεί η ακολουθία των αριθμών Fibonacci.]

8.6. Έστω $\vartheta = p/q$ ένας ρητός αριθμός, όπου οι p και q είναι σχετικώς πρώτοι ακέραιοι (δηλαδή, ο ϑ είναι σε ανάγωγη μορφή). Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι $q > 0$. Ορίζουμε μια ακολουθία αριθμών στο $[0, 1)$ με $\xi_n = \langle n\vartheta\rangle$, όπου $\langle\cdot\rangle$ συμβολίζει το κλασματικό μέρος. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $\{\xi_1, \xi_2, \ldots\}$ είναι ισοκατανεμημένη στα σημεία της μορφής

$$0, 1/q, 2/q, \ldots, (q-1)/q.$$

Μάλιστα, αποδείξτε ότι για κάθε $0 \leqslant a < q$ ισχύει ότι

$$\frac{\#\{n : 1 \leqslant n \leqslant N, \langle n\vartheta\rangle = a/q\}}{N} = \frac{1}{q} + O\left(\frac{1}{N}\right).$$

[*Υπόδειξη:* Για κάθε ακέραιο $k \geqslant 0$, υπάρχει μοναδικός ακέραιος n τέτοιος ώστε $kq \leqslant n < (k+1)q$ και $\langle n\vartheta\rangle = a/q$. Εξηγήστε γιατί μπορούμε να υποθέσουμε ότι $k = 0$. Αποδείξτε την ύπαρξη του n χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι αν οι p και q είναι σχετικώς πρώτοι τότε υπάρχουν ακέραιοι x, y τέτοιοι ώστε $xp + yq = 1$. Στη συνέχεια, διαιρέστε τον N με τον q, δηλαδή γράψτε $N = \ell q + r$ όπου $0 \leqslant \ell$ και $0 \leqslant r < q$. Αποδείξτε τις ανισότητες

$$\ell \leqslant \#\{n : 1 \leqslant n \leqslant N, \langle n\vartheta\rangle = a/q\} \leqslant \ell + 1.]$$

8.7. Αποδείξτε το δεύτερο μέρος του κριτηρίου του Weyl: αν μια ακολουθία αριθμών $\xi_1, \xi_2, \ldots$ στο $[0, 1)$ είναι ισοκατανεμημένη, τότε για κάθε $k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ ισχύει ότι

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i k\xi_n} \longrightarrow 0 \qquad \text{καθώς το } N \to \infty.$$

[*Υπόδειξη:* Αρκεί να δείξετε ότι $\frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(\xi_n) \to \int_0^1 f(x)\,dx$ για όλες τις συνεχείς συναρτήσεις f. Αποδείξτε πρώτα το ίδιο αν η f είναι η δείκτρια συνάρτηση ενός διαστήματος.]

8.8. Αποδείξτε ότι για κάθε $a \neq 0$ και σ με $0 < \sigma < 1$, η ακολουθία $\langle an^\sigma \rangle$ είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1)$.

[*Υπόδειξη:* Αποδείξτε ότι $\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i b n^\sigma} = O(N^\sigma) + O(N^{1-\sigma})$ αν $b \neq 0$. Μάλιστα, παρατηρήστε ότι

$$\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i b n^\sigma} - \int_1^N e^{2\pi i b x^\sigma}\,dx = O\left(\sum_{n=1}^{N} n^{-1+\sigma}\right).]$$

8.9. Σε αντιδιαστολή προς το αποτέλεσμα της Άσκησης 8.8, αποδείξτε ότι η $\langle a \ln n \rangle$ *δεν* είναι ισοκατανεμημένη για κανένα a.

[*Υπόδειξη:* Να συγκρίνετε το άθροισμα $\sum_{n=1}^{N} e^{2\pi i a \ln n}$ με το αντίστοιχο ολοκλήρωμα.]

8.10. Έστω f μια περιοδική συνάρτηση στο $\mathbb{R}$ με περίοδο 1, και $\{\xi_n\}$ μια ακολουθία που είναι ισοκατανεμημένη στο $[0,1)$. Αποδείξτε ότι:

(i) Αν η f είναι συνεχής και ικανοποιεί την $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, τότε

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+\xi_n) = 0 \quad \text{ομοιόμορφα ως προς } x.$$

[*Υπόδειξη:* Δείξτε πρώτα το ζητούμενο για τριγωνομετρικά πολυώνυμα.]

(ii) Αν η f είναι απλώς ολοκληρώσιμη στο $[0,1]$ και ικανοποιεί την $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$, τότε

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^1 \left| \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N} f(x+\xi_n) \right|^2 dx = 0.$$

8.11. Αποδείξτε ότι αν $u(x,t) = (f * H_t)(x)$ όπου H_t είναι ο πυρήνας της θερμότητας, και η f είναι Riemann ολοκληρώσιμη, τότε

$$\int_0^1 |u(x,t) - f(x)|^2\,dx \longrightarrow 0 \qquad \text{όταν } t \to 0.$$

8.12. Ξεκινώντας από την

$$u(x,t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-4\pi^2 k^2 t} e^{2\pi i k x}$$

και κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητής, οδηγούμαστε στη λύση

$$u(\vartheta,\tau) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} a_k e^{-k^2\tau} e^{ik\vartheta} = (f * h_\tau)(\vartheta)$$

της εξίσωσης

$$\frac{\partial u}{\partial \tau} = \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \quad \text{με } 0 \leqslant \vartheta \leqslant 2\pi \text{ και } \tau > 0,$$

με συνοριακή συνθήκη $u(\vartheta,0) = f(\vartheta) \sim \sum a_k e^{ik\vartheta}$. Εδώ, $h_\tau(\vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-k^2\tau} e^{ik\vartheta}$. Αυτή η μορφή του πυρήνα της θερμότητας στο $[0,2\pi]$ είναι το ανάλογο του πυρήνα Poisson, τον οποίο μπορούμε να γράψουμε ως $P_r(\vartheta) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-|k|\tau} e^{ik\vartheta}$ με $r = e^{-\tau}$ οπότε ο $r \in (0,1)$ αντιστοιχεί στον $\tau > 0$).

8.13. Το γεγονός ότι ο πυρήνας $H_t(x)$ είναι καλός πυρήνας, άρα $u(x,t) \to f(x)$ σε κάθε σημείο συνέχειας της f, δεν είναι εύκολο να αποδειχθεί. Θα το δείξουμε στο επόμενο κεφάλαιο. Μπορούμε όμως να δείξουμε απευθείας ότι η $H_t(x)$ παρουσιάζει «κορυφή» στο $x = 0$ καθώς $t \to 0$, με την εξής έννοια:

(i) Αποδείξτε ότι το ολοκλήρωμα $\int_{-1/2}^{1/2} |H_t(x)|^2\, dx$ είναι της τάξης του $t^{-1/2}$ καθώς $t \to 0$. Ακριβέστερα, αποδείξτε ότι η $t^{1/2} \int_{-1/2}^{1/2} |H_t(x)|^2\, dx$ συγκλίνει σε κάποιο μη μηδενικό όριο καθώς $t \to 0$.

(ii) Αποδείξτε ότι $\int_{-1/2}^{1/2} x^2 |H_t(x)|^2\, dx = O(t^{1/2})$ καθώς $t \to 0$.

[*Υπόδειξη:* Για το (i) να συγκρίνετε το άθροισμα $\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ck^2 t}$ με το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-cx^2 t}\, dx$, όπου $c > 0$. Για το (ii) χρησιμοποιήστε την $x^2 \leqslant C(\sin \pi x)^2$ για $-1/2 \leqslant x \leqslant 1/2$, και εφαρμόστε το θεώρημα μέσης τιμής στην $e^{-cx^2 t}$.]

8.14. Έστω f μια Riemann ολοκληρώσιμη συνάρτηση στο διάστημα $[-\pi, \pi]$. Ορίζουμε τους γενικευμένους μέσους με υστέρηση της σειράς Fourier της f θέτοντας

$$\sigma_{N,K} = \frac{s_N + \cdots + s_{N+K-1}}{K}.$$

Σημειώνουμε ότι, ειδικότερα,

$$\sigma_{0,N} = \sigma_N, \quad \sigma_{N,1} = s_N \quad \text{και} \quad \sigma_{N,N} = \Delta_N,$$

όπου Δ_N είναι οι συγκεκριμένοι μέσοι με υστέρηση που χρησιμοποιήσαμε στην Ενότητα 8.3.

(i) Αποδείξτε ότι

$$\sigma_{N,K} = \frac{1}{K}((N+K)\sigma_{N+K} - N\sigma_N)$$

και

$$\sigma_{N,K} = s_N + \sum_{N+1 \leqslant |d| \leqslant N+K-1} \left(1 - \frac{|d| - K}{K}\right) \widehat{f}(d) e^{id\vartheta}.$$

Από την τελευταία έκφραση για την $\sigma_{N,K}$ συμπεράνατε ότι

$$|\sigma_{N,K} - s_M| \leqslant \sum_{N+1 \leqslant |d| \leqslant N+K-1} |\widehat{f}(d)|$$

για κάθε $N \leqslant M < N + K$.

(ii) Χρησιμοποιώντας έναν από τους παραπάνω τύπους και το θεώρημα Fejér αποδείξτε ότι με $N = kn$ και $K = n$ ισχύει ότι

$$\sigma_{kn,n}(f, \vartheta) \longrightarrow f(\vartheta) \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty$$

αν η f είναι συνεχής στο ϑ, και επίσης ότι

$$\sigma_{kn,n}(f, \vartheta) \longrightarrow \frac{f(\vartheta^+) + f(\vartheta^-)}{2} \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty$$

αν η f παρουσιάζει άλμα στο ϑ. Στην περίπτωση που η f είναι συνεχής στο $[-\pi, \pi]$, αποδείξτε ότι $\sigma_{kn,n} \longrightarrow f$ ομοιόμορφα καθώς $n \to \infty$.

(iii) Χρησιμοποιώντας το (i), αποδείξτε ότι αν $\widehat{f}(d) = O(1/|d|)$ και $kn \leqslant m < (k+1)n$, τότε

$$|\sigma_{kn,n} - s_m| \leqslant \frac{C}{k} \quad \text{για κάποια σταθερά } C > 0.$$

(iv) Υποθέτουμε ότι $\widehat{f}(d) = O(1/|d|)$. Αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο ϑ τότε

$$s_n(g, \vartheta) \longrightarrow f(\vartheta) \quad \text{καθώς} \quad n \to \infty,$$

και αν η f παρουσιάζει άλμα στο ϑ τότε

$$s_N(f,\vartheta) \longrightarrow \frac{f(\vartheta^+) + f(\vartheta^-)}{2} \quad \text{καθώς } n \to \infty.$$

Επίσης, αποδείξτε ότι αν η f είναι συνεχής στο $[-\pi,\pi]$ τότε $s_n(f) \longrightarrow f$ ομοιόμορφα.

8.15. Το θεώρημα Dirichlet ισχυρίζεται ότι η σειρά Fourier μιας πραγματικής συνεχούς περιοδικής συνάρτησης f η οποία έχει μόνο πεπερασμένα το πλήθος τοπικά μέγιστα και ελάχιστα συγκλίνει παντού στην f (και ομοιόμορφα).

Αποδείξτε αυτό το θεώρημα δείχνοντας ότι για μια τέτοια συνάρτηση ισχύει ότι $\widehat{f}(k) = O(1/|k|)$.

[*Υπόδειξη:* Επιχειρηματολογήστε όπως στην Άσκηση 5.22. Κατόπιν, χρησιμοποιήστε το (iv) της προηγούμενης άσκησης.]

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 9

Μετασχηματισμός Fourier

9.1 Μετασχηματισμός Fourier στο $\mathbb{R}$

Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ συνεχής συνάρτηση. Τότε, η f είναι ολοκληρώσιμη σε κάθε διάστημα της μορφής $[-N, N]$, όπου $N > 0$. Δηλαδή, το

$$I_N = I_N(f) := \int_{-N}^{N} f(x)\,dx$$

ορίζεται καλά. Αν το $\lim_{N\to\infty} I_N$ υπάρχει, τότε λέμε ότι η f είναι ολοκληρώσιμη στο $\mathbb{R}$, και ορίζουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx.$$

Είναι πολύ εύκολο να δώσουμε παραδείγματα συνεχών συναρτήσεων με μη αρνητικές πραγματικές τιμές, για τις οποίες $\lim_{N\to\infty} I_N(f) = +\infty$. Θεωρήστε, για παράδειγμα, την $f(x) = 1$ ή την $f(x) = \frac{1}{1+|x|}$, η οποία μάλιστα έχει την ιδιότητα $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$. Για να εξασφαλίσουμε την σύγκλιση της $I_N(f)$ φαίνεται λογικό να θέσουμε τον περιορισμό ότι η f «φθίνει αρκετά γρήγορα» προς το 0 όταν $x \to \pm\infty$.

Ορισμός 9.1.1 (η κλάση $\mathcal{M}(\mathbb{R})$). Μια συνάρτηση $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *φθίνει αρκετά γρήγορα* αν είναι συνεχής και υπάρχει σταθερά $A > 0$ ώστε

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

Συμβολίζουμε την κλάση αυτών των συναρτήσεων με $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Εύκολα ελέγχουμε ότι η κλάση $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ είναι γραμμικός υπόχωρος του χώρου των συνεχών συναρτήσεων $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Πράγματι, αν $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε $af + bg \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ (εξηγήστε γιατί).

Λήμμα 9.1.2. *Αν $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ τότε το*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx = \lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{N} f(x)\,dx$$

υπάρχει.

Απόδειξη. Αρκεί να δείξουμε ότι το ολοκλήρωμα $I_N = \int_{-N}^{N} f(x)\,dx$ (το οποίο υπάρχει για κάθε $N > 0$, διότι η f είναι συνεχής) ικανοποιεί τη συνθήκη Cauchy: για κάθε $\varepsilon > 0$ υπάρχει $N_0 > 0$ ώστε, αν $M > N \geqslant N_0$ τότε $|I_M - I_N| < \varepsilon$.

Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2}$ για κάποια σταθερά $A > 0$. γράφουμε

$$\begin{aligned} |I_M - I_N| &\leqslant \int_{N<|x|\leqslant M} |f(x)|\,dx \leqslant A \int_{N<|x|\leqslant M} \frac{1}{1+x^2}\,dx \\ &\leqslant A \int_{N<|x|\leqslant M} \frac{1}{x^2}\,dx = 2A\left(\frac{1}{N} - \frac{1}{M}\right) \\ &\leqslant \frac{2A}{N} < \varepsilon, \end{aligned}$$

αν $M > N \geqslant N_0$, όπου $N_0 > 2A/\varepsilon$. □

Παρατήρηση 9.1.3. Στην πορεία της απόδειξης είδαμε ότι

$$\lim_{N\to\infty} \int_{|x|\geqslant N} |f(x)|\,dx = 0. \tag{9.1.1}$$

Στη συνέχεια, θα χρησιμοποιούμε ελεύθερα αυτή την παρατήρηση. Επίσης, κοιτάζοντας την απόδειξη, βλέπουμε ότι θα αρκούσε η υπόθεση ότι, για κάποιο $\varepsilon > 0$ και κάποια σταθερά $A > 0$ ισχύει η

$$|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+|x|^{1+\varepsilon}}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Επιλέγουμε $\varepsilon = 1$ για λόγους απλότητας.

Η επόμενη πρόταση περιγράφει κάποιες βασικές ιδιότητες του ολοκληρώματος για συναρτήσεις της κλάσης $\mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Πρόταση 9.1.4. *Για το ολοκλήρωμα στην $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ ισχύουν τα εξής:*

(i) *Γραμμικότητα: Αν $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ και $a, b \in \mathbb{C}$, τότε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (af(x) + bg(x))\,dx = a\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx + b\int_{-\infty}^{\infty} g(x)\,dx. \tag{9.1.2}$$

(ii) *Αναλλοίωτο ως προς μεταφορές: Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Για κάθε $t \in \mathbb{R}$,*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(iii) *Συμπεριφορά ως προς διαστολές: Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Για κάθε $\delta > 0$,*

$$\delta\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(iv) *Συνέχεια: Αν $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$, τότε*

$$\lim_{t\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\,dx = 0.$$

Απόδειξη. (i) Για κάθε $N > 0$ έχουμε

$$\int_{-N}^{N} (af(x) + bg(x))\,dx = a\int_{-N}^{N} f(x)\,dx + b\int_{-N}^{N} g(x)\,dx.$$

Περνώντας στο όριο παίρνουμε την (9.1.2).

(ii) Υπάρχει $A > 0$ ώστε $|f(x)| \leqslant \frac{A}{1+x^2}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Ορίζουμε

$$J_N = \int_{-N}^{N} f(x+t)\,dx \qquad \text{και} \qquad I_N = \int_{-N}^{N} f(x)\,dx.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $t > 0$. Τότε, αν $-N+t < N$ (δηλαδή, $N > t/2$) έχουμε

$$\begin{aligned}|J_N - I_N| &= \left|\int_{-N}^{N} f(x+t)\,dx - \int_{-N}^{N} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-N+t}^{N+t} f(x)\,dx - \int_{-N}^{N} f(x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_{N}^{N+t} f(x)\,dx - \int_{-N}^{-N+t} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{N}^{N+t} |f(x)|\,dx + \int_{-N}^{-N+t} |f(x)|\,dx \\ &\leqslant \int_{|x|\geqslant N} |f(x)|\,dx + \int_{|x|\geqslant N-t} |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Από την (9.1.1) συμπεραίνουμε ότι

$$J_N - I_N \to 0 \quad \text{όταν } N \to \infty.$$

Αφού το $\lim\limits_{N\to\infty} I_N$ υπάρχει, υπάρχει και το

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,dx = \lim_{N\to\infty} J_N = \lim_{N\to\infty} I_N = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(iii) Η απόδειξη είναι παρόμοια. Ορίζουμε

$$K_N = \int_{-N}^{N} \delta f(\delta x)\,dx \qquad \text{και} \qquad I_N = \int_{-N}^{N} f(x)\,dx.$$

Χωρίς περιορισμό της γενικότητας, υποθέτουμε ότι $\delta > 1$. Τότε, έχουμε

$$\begin{aligned}|K_N - I_N| &= \left|\int_{-N}^{N} \delta f(\delta x)\,dx - \int_{-N}^{N} f(x)\,dx\right| = \left|\int_{-\delta N}^{\delta N} f(x)\,dx - \int_{-N}^{N} f(x)\,dx\right| \\ &= \left|\int_{N}^{\delta N} f(x)\,dx - \int_{-\delta N}^{-N} f(x)\,dx\right| \leqslant \int_{N}^{\delta N} |f(x)|\,dx + \int_{-\delta N}^{-N} |f(x)|\,dx \\ &\leqslant 2\int_{|x|\geqslant N} |f(x)|\,dx.\end{aligned}$$

Από την (9.1.1) συμπεραίνουμε ότι

$$K_N - I_N \to 0 \quad \text{όταν } N \to \infty.$$

Αφού το $\lim\limits_{N\to\infty} I_N$ υπάρχει, υπάρχει και το

$$\delta\int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)\,dx = \lim_{N\to\infty} K_N = \lim_{N\to\infty} I_N = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,dx.$$

(iv) Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $N > 0$ ώστε

$$\int_{|x|\geqslant N-1} |f(x)|\,dx < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $[-N-1, N+1]$. Συνεπώς, υπάρχει $0 < t_0 < 1$ με την εξής ιδιότητα: αν $x \in [-N, N]$ και $|t| < t_0$, τότε

$$|f(x+t) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4N}.$$

Τότε, αν $|t| < t_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} |f(x+t) - f(x)|\,dx &\leqslant \int_{-N}^{N} |f(x+t) - f(x)|\,dx \\ &\quad + \int_{|x|\geqslant N} |f(x+t)|\,dx + \int_{|x|\geqslant N} |f(x)|\,dx \\ &\leqslant \int_{-N}^{N} \frac{\varepsilon}{4N}\,dx + \int_{|x|\geqslant N-1} |f(x)|\,dx + \int_{|x|\geqslant N} |f(x)|\,dx \\ &< 2N\,\frac{\varepsilon}{4N} + \frac{\varepsilon}{4} + \frac{\varepsilon}{4} = \varepsilon.\end{aligned}$$

Για το $\int_{|x|\geqslant N} |f(x+t)|\,dx$ χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι: αν $|x| \geqslant N$ και $|t| \leqslant t_0 < 1$, τότε $|x+t| \geqslant N-1$. □

Η αρχική ιδέα είναι να ορίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier μέσω της

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x\xi}\,dx, \qquad \xi \in \mathbb{R} \tag{9.1.3}$$

για κάθε $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (9.1.3) υπάρχει, διότι η συνάρτηση $x \mapsto f(x)e^{-2\pi i x\xi}$ ανήκει στην κλάση $\mathcal{M}(\mathbb{R})$. Άρα, ο $\widehat{f}(\xi)$ ορίζεται καλά για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Η συνάρτηση $\widehat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ η οποία ορίζεται έτσι, είναι φραγμένη και μπορεί κανείς να δείξει ότι η $\widehat{f}$ είναι συνεχής και $\lim_{|\xi|\to\infty} \widehat{f}(\xi) = 0$. Όμως, δεν μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $\widehat{f} \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Δεδομένου ότι βασικός μας στόχος είναι να αποδείξουμε τον τύπο αντιστροφής

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x\xi}\,d\xi, \tag{9.1.4}$$

περιορίζουμε τον ορισμό του μετασχηματισμού Fourier σε κατάλληλη υποκλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ της $\mathcal{M}(\mathbb{R})$ ώστε. αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ να μπορούμε να αποδείξουμε την (9.1.4).

Ορισμός 9.1.5 (ο χώρος του Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R})$). Η κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ λέγεται *χώρος του Schwartz* και αποτελείται από όλες τις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ οι οποίες είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμες και *φθίνουν πολύ γρήγορα* με την εξής έννοια: για κάθε $k, \ell \geqslant 0$ υπάρχει $A_{k,\ell} > 0$ ώστε

$$|x^k|\,|f^{(\ell)}(x)| \leqslant A_{k,\ell} \qquad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}. \tag{9.1.5}$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι ο χώρος του Schwartz είναι γραμμικός χώρος. Θα χρησιμοποιούμε συχνά το γεγονός ότι η κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι κλειστή ως προς την παραγώγιση και τον πολλαπλασιασμό με πολυώνυμα:

(i) Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

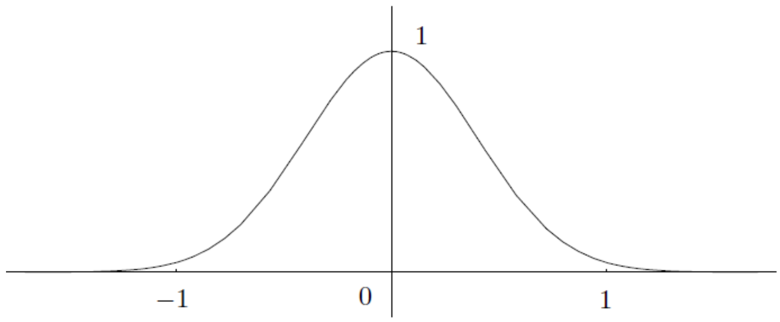
(ii) Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Από τη δεύτερη ιδιότητα έπεται άμεσα ότι: αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και $p(x)$ είναι οποιοδήποτε πολυώνυμο, τότε $p(x)f(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Η απόδειξη αυτών των ισχυρισμών αφήνεται ως άσκηση.

Παράδειγμα 9.1.6 (Gaussian συναρτήσεις). Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συνάρτησης $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι η Gaussian συνάρτηση

$$f(x) = e^{-x^2}.$$

Η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και όλες οι παράγωγοί της είναι της μορφής $p(x)e^{-x^2}$, όπου $p(x)$ πολυώνυμο. Μπορούμε τότε να ελέγξουμε εύκολα ότι η f ικανοποιεί την (9.1.5). Το ίδιο ισχύει για κάθε συνάρτηση της μορφής e^{-ax^2}, όπου $a > 0$.



Σχήμα 9.1: Η Gaussian $e^{-\pi x^2}$

Οι Gaussian συναρτήσεις θα παίξουν βασικό ρόλο στη μελέτη του μετασχηματισμού Fourier.

Ορισμός 9.1.7 (μετασχηματισμός Fourier). Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ο *μετασχηματισμός Fourier* της f είναι η συνάρτηση

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx.$$

Στην επόμενη Πρόταση παραθέτουμε τις βασικές ιδιότητες του μετασχηματισμού Fourier.

Πρόταση 9.1.8. *Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Ισχύουν τα παρακάτω:*

(i) *Αν $h \in \mathbb{R}$ και $g(x) = f(x+h)$, τότε $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\xi}$.*

(ii) *Αν $h \in \mathbb{R}$ και $g(x) = f(x)e^{-2\pi i x h}$, τότε $\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi + h)$.*

(iii) *Αν $\delta > 0$ και $g(x) = f(\delta x)$, τότε $\widehat{g}(\xi) = \frac{1}{\delta}\widehat{f}(\xi/\delta)$.*

(iv) *Αν $g(x) = f'(x)$, τότε $\widehat{g}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$.*

(v) *Αν $g(x) = -2\pi i x f(x)$, τότε $\widehat{g}(\xi) = \frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi)$.*

Απόδειξη. (i) Με την αλλαγή μεταβλητής $y = x + h$, γράφουμε

$$\begin{aligned}
\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x+h)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i(y-h)\xi}dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i y\xi}e^{2\pi i h\xi}dy = e^{2\pi i h\xi}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i y\xi}dy \\
&= \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i h\xi}.
\end{aligned}$$

(ii) Γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ixh}e^{-2\pi ix\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix(\xi+h)}dx\\ &= \widehat{f}(\xi+h).\end{aligned}$$

(iii) Με την αλλαγή μεταβλητής $y = \delta x$, γράφουμε

$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(\delta x)e^{-2\pi ix\xi}dx = \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i(y/\delta)\xi}dy\\ &= \frac{1}{\delta}\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi iy(\xi/\delta)}dy = \frac{1}{\delta}\widehat{f}(\xi/\delta).\end{aligned}$$

(iv) Κάνουμε ολοκλήρωση κατά μέρη: για κάθε $N > 0$ έχουμε

$$\int_{-N}^{N} f'(x)e^{-2\pi ix\xi}dx = \left[f(x)e^{-2\pi ix\xi}\right]_{-N}^{N} + 2\pi i\xi\int_{-N}^{N} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx.$$

Παρατηρήστε ότι

$$\left[f(x)e^{-2\pi ix\xi}\right]_{-N}^{N} = f(N)e^{-2\pi iN\xi} - f(-N)e^{2\pi iN\xi} \to 0$$

όταν $N \to \infty$, διότι $f(\pm N) \to 0$. Αφήνοντας το $N \to \infty$ παίρνουμε

$$\widehat{g}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f'(x)e^{-2\pi ix\xi}dx = 2\pi i\xi\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}dx = 2\pi i\xi\widehat{f}(\xi).$$

(v) Πρέπει να δείξουμε ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)}{h} + \widehat{2\pi ixf}(\xi) = 0.$$

Γράφουμε

$$\begin{aligned}\frac{\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)}{h} + \widehat{2\pi ixf}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}dx\\ &\quad+\int_{-\infty}^{\infty} 2\pi ixf(x)e^{-2\pi ix\xi}dx\\ &= \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi ix\xi}\left[\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h} + 2\pi ix\right]dx.\end{aligned}$$

Έστω $\varepsilon > 0$. Αφού $f(x)$ και $xf(x) \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, μπορούμε να βρούμε $N > 0$ ώστε

$$\int_{|x|\geqslant N} |f(x)|\,dx < \varepsilon \qquad \text{και} \qquad \int_{|x|\geqslant N} |x|\,|f(x)|\,dx < \varepsilon.$$

Επίσης, μπορούμε να βρούμε $h_0 > 0$ ώστε, για κάθε $0 < |h| < h_0$,

$$\left|\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h} + 2\pi ix\right| < \frac{\varepsilon}{2N(\|f\|_\infty + 1)}.$$

Για τον τελευταίο ισχυρισμό, παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned}\left|\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}+2\pi ix\right| &= \left|\frac{\cos(2\pi xh)-1}{h}-i\frac{\sin(2\pi xh)}{h}+2\pi ix\right| \\ &= \left|\frac{-2\sin^2(\pi xh)}{h}-2\pi i\frac{\sin(2\pi xh)}{2\pi h}+2\pi ix\right| \\ &\leqslant 2\pi^2x^2|h|\left|\frac{\sin^2(\pi xh)}{(\pi xh)^2}\right|+2\pi|x|\left|\frac{\sin(2\pi xh)}{2\pi xh}-1\right| \\ &\leqslant 2\pi^2N^2|h|+(2\pi)^4N^4|h|^2/6,\end{aligned}$$

όπου, στο τέλος, χρησιμοποιήσαμε την $|\sin t - t| \leqslant |t|^3/6$. Έπεται ότι

$$\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h} \longrightarrow -2\pi ix$$

ομοιόμορφα στο $[-N,N]$, όταν $h\to 0$. Συνεπώς, αν $0<|h|<h_0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\left|\frac{\widehat{f}(\xi+h)-\widehat{f}(\xi)}{h}+\widehat{2\pi ixf}(\xi)\right| &< 2\varepsilon+\int_{-N}^{N}|f(x)|\left|\frac{e^{-2\pi ixh}-1}{h}+2\pi ix\right|dx \\ &< 2\varepsilon+2N\|f\|_\infty\frac{\varepsilon}{2N(\|f\|_\infty+1)} < 3\varepsilon.\end{aligned}$$

Έπεται ότι $\widehat{-2\pi ixf}(\xi)=\frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi)$. □

Θεώρημα 9.1.9. *Αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε $\widehat{f}\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.*

Απόδειξη. Παρατηρήστε πρώτα ότι, αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$,

$$\|\widehat{f}\|_\infty \leqslant \int_{-\infty}^{\infty}|f(x)|\,dx,$$

δηλαδή η $\widehat{f}$ είναι φραγμένη. Για να δείξουμε ότι $\|\xi\widehat{f}(\xi)\|_\infty < +\infty$, παρατηρούμε ότι η $\xi\widehat{f}(\xi)$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $\frac{1}{2\pi i}f'$, η οποία είναι επίσης στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Για να δείξουμε ότι η $\frac{d\widehat{f}}{d\xi}$ είναι φραγμένη, παρατηρούμε ότι η $\frac{d\widehat{f}}{d\xi}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier της $-2\pi ixf(x)$, η οποία είναι επίσης στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Γενικά, για κάθε $k,\ell\geqslant 0$, η συνάρτηση

$$\xi^k\left(\frac{d}{d\xi}\right)^{\ell}\widehat{f}(\xi)$$

είναι ο μετασχηματισμός Fourier της

$$h_{k,\ell}(x) := \frac{1}{(2\pi i)^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k[(-2\pi ix)^{\ell}f(x)].$$

Πράγματι, παρατηρούμε αρχικά ότι

$$\frac{d^{\ell}\widehat{f}}{d\xi^{\ell}} = \frac{d^{\ell-1}}{d\xi^{\ell-1}}\left(\frac{d\widehat{f}}{d\xi}\right) = \frac{d^{\ell-1}}{d\xi^{\ell-1}}\left(\widehat{-2\pi ixf}\right) = \cdots = \widehat{(2\pi i)^{\ell}x^{\ell}f}$$

για κάθε $\ell \geqslant 1$, και

$$\xi^k \widehat{f} = \xi^{k-1}\xi\widehat{f} = \frac{1}{2\pi i}\xi^{k-1}\widehat{f'} = \cdots = \frac{1}{(2\pi i)^k}\widehat{f^{(k)}}$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Συνδυάζοντας αυτές τις δύο ταυτότητες παίρνουμε

$$\begin{aligned}\widehat{h_{k,\ell}} &= \frac{1}{(2\pi i)^k}\widehat{\left(\frac{d}{dx}\right)^k [(-2\pi i x)^\ell f]}\\ &= \frac{1}{(2\pi i)^k}\left(\frac{d}{dx}\right)^k \widehat{[(-2\pi i x)^\ell f]}\\ &= \frac{(2\pi i)^k \xi^k}{(2\pi i)^k}\widehat{(-2\pi i x)^\ell f}\\ &= \xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell}\widehat{f}.\end{aligned}$$

Αφού η $h_{k,\ell}$ ανήκει στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, η συνάρτηση $\xi^k \frac{d^\ell}{d\xi^\ell}\widehat{f}$ είναι φραγμένη συνάρτηση. □

9.2 Ο τύπος αντιστροφής

Σκοπός μας σε αυτή την παράγραφο είναι να αποδείξουμε τον τύπο αντιστροφής για τον μετασχηματισμό Fourier.

Θεώρημα 9.2.1 (τύπος αντιστροφής). *Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε*

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}\,d\xi.$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 9.2.1 θα μελετήσουμε αρχικά τον μετασχηματισμό Fourier των συναρτήσεων της μορφής $f(x) = e^{-ax^2}$, όπου $a > 0$. Όλες αυτές οι συναρτήσεις ανήκουν στον χώρο του Schwartz.

Είναι βολικό να εξετάσουμε πρώτα τη συνάρτηση $f(x) = e^{-\pi x^2}$ (δηλαδή, $a = \pi$). Ο λόγος είναι ότι, γι' αυτή την επιλογή του a,

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}\,dx = 1. \tag{9.2.1}$$

Ένας πολύ γνωστός τρόπος για να δείξουμε την (9.2.1) είναι να γράψουμε

$$\begin{aligned}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2}dx\right)^2 &= \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi(x^2+y^2)}dx\,dy\\ &= \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty} e^{-\pi r^2}r\,dr\,d\vartheta\\ &= \int_0^{\infty} 2\pi r e^{-\pi r^2}dr\\ &= \left[-e^{-\pi r^2}\right]_0^{\infty} = 1,\end{aligned}$$

κάνοντας ολοκλήρωση σε πολικές συντεταγμένες. Αυτό που θα δείξουμε είναι ότι, για τη συγκεκριμένη συνάρτηση $f(x) = e^{-\pi x^2}$, ο μετασχηματισμός Fourier της f είναι η ίδια η f:

Θεώρημα 9.2.2. *Αν $f(x) = e^{-\pi x^2}$, τότε*

$$\widehat{f}(\xi) = f(\xi) = e^{-\pi\xi^2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}.$$

Απόδειξη. Ορίζουμε $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$F(\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} e^{-2\pi i x\xi} dx.$$

Παρατηρήστε ότι

$$F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\pi x^2} dx = 1.$$

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $-2\pi i x g(x)$, όπου $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, είναι η παράγωγος $\frac{dg}{d\xi}$ της $\widehat{g}$. Αφού

$$f'(x) = -2\pi x f(x),$$

μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} F'(\xi) &= \frac{d\widehat{f}}{d\xi}(\xi) = \widehat{-2\pi i x f}(\xi) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} (-2\pi i x) f(x) e^{-2\pi i x\xi} dx \\ &= i\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x\xi} dx. \end{aligned}$$

Στην προηγούμενη παράγραφο είδαμε επίσης ότι ο μετασχηματισμός Fourier της f' είναι η συνάρτηση $2\pi i\xi\widehat{f}(\xi)$. Συνεπώς,

$$i\int_{-\infty}^{\infty} f'(x) e^{-2\pi i x\xi} dx = i(2\pi i\xi)\widehat{f}(\xi) = -2\pi\xi\widehat{f}(\xi).$$

Συνδυάζοντας τα παραπάνω, βλέπουμε ότι

$$F'(\xi) = -2\pi\xi F(\xi). \tag{9.2.2}$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $G(\xi) = F(\xi)e^{\pi\xi^2}$. Τότε, από την (9.2.2) παίρνουμε

$$G'(\xi) = F'(\xi)e^{\pi\xi^2} + 2\pi\xi F(\xi)e^{\pi\xi^2} = (-2\pi\xi F(\xi) + 2\pi\xi F(\xi))e^{\pi\xi^2} = 0,$$

δηλαδή η G είναι σταθερή. Αφού $G(0) = F(0) = 1$, έπεται ότι $G \equiv 1$, δηλαδή $\widehat{f}(\xi) = F(\xi) = e^{-\pi\xi^2}$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. □

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τον μετασχηματισμό Fourier της $f(x) = e^{-ax^2}$ για οποιαδήποτε τιμή του a. Επιλέγουμε κάπως διαφορετική κανονικοποίηση.

Πρόταση 9.2.3. *Για κάθε $\delta > 0$ θεωρούμε την συνάρτηση $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta}$. Τότε,*

$$\widehat{K_\delta}(\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}.$$

Απόδειξη. Στην προηγούμενη ενότητα είδαμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier της $g(\eta x)$ είναι η συνάρτηση $\frac{1}{\eta}\widehat{g}(\xi/\eta)$. Αν $f(x) = e^{-\pi x^2}$, τότε

$$K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} f(x/\sqrt{\delta}).$$

Εφαρμόζοντας το παραπάνω με $\eta = 1/\sqrt{\delta}$, παίρνουμε

$$\widehat{K_\delta}(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}\sqrt{\delta}\widehat{f}(\sqrt{\delta}\xi) = e^{-\pi\delta\xi^2}.$$

□

Θεωρούμε την οικογένεια $\{K_\delta\}_{\delta>0}$, όπου

$$K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}} e^{-\pi x^2/\delta}.$$

Η $\{K_\delta\}$ ικανοποιεί τις πρώτες δύο ιδιότητες μιας οικογένειας καλών πυρήνων. Ολοκλήρωση με αντικατάσταση δείχνει ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(x)\,dx = 1$$

για κάθε $\delta > 0$. Επιπλέον, οι K_δ παίρνουν μη αρνητικές πραγματικές τιμές. Συνεπώς, τετριμμένα έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |K_\delta(x)|\,dx \leqslant M$$

για κάθε $\delta > 0$, όπου $M = 1$. Για την τρίτη ιδιότητα, μας ενδιαφέρει η συμπεριφορά της K_δ όταν $\delta \to 0$. Θα δείξουμε ότι: για κάθε $s > 0$,

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{|x|>s} |K_\delta(x)|\,dx = 0.$$

Παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $r > 0$ έχουμε

$$\int_r^{\infty} e^{-\pi y^2}dy \leqslant \frac{1}{2\pi r}\int_r^{\infty} 2\pi y e^{-\pi y^2}dy = \frac{1}{2\pi r}e^{-\pi r^2}.$$

Συνεπώς, για τυχόν $s > 0$ έχουμε

$$\begin{aligned}\int_{|x|>s} |K_\delta(x)|\,dx &= \frac{2}{\sqrt{\delta}}\int_s^{\infty} e^{-\pi x^2/\delta}dx \\ &= 2\int_{s/\sqrt{\delta}}^{\infty} e^{-\pi y^2}dy \\ &\leqslant \frac{\sqrt{\delta}}{\pi s}e^{-\pi s^2/\delta} \to 0\end{aligned}$$

όταν $\delta \to 0^+$ (παρατηρήστε ότι $\sqrt{\delta} \to 0$ και $e^{-\pi s^2/\delta} \leqslant 1$ – για την ακρίβεια, ο δεύτερος όρος τείνει κι αυτός στο 0 και μάλιστα εκθετικά γρήγορα). Έτσι, έχουμε αποδείξει το ακόλουθο.

Θεώρημα 9.2.4. *Η οικογένεια $\{K_\delta\}_{\delta>0}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων καθώς το $\delta \to 0$.*

Ορισμός 9.2.5 (συνέλιξη στο $\mathbb{R}$). Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, ορίζουμε την συνέλιξη $f * g$ των f και g μέσω της

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-t)g(t)\,dt. \tag{9.2.3}$$

Δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$, η συνάρτηση $H(t) = f(x-t)g(t)$ ανήκει στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Συνεπώς, το ολοκλήρωμα στο δεξιό μέλος της (9.2.3) υπάρχει, και η $f * g$ ορίζεται καλά.

Τροποποιώντας κατάλληλα το βασικό επιχείρημα για τη «συνέλιξη με καλούς πυρήνες» μπορούμε να αποδείξουμε το εξής.

Θεώρημα 9.2.6. *Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε*

$$f * K_\delta \longrightarrow f \quad \textit{ομοιόμορφα}$$

καθώς το $\delta \to 0$.

Απόδειξη. Η f είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ και $\lim_{|x|\to+\infty} |f(x)| = 0$. Πράγματι, αφού $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ έχουμε

$$|f(x)| \leqslant \frac{M}{1+|x|}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Έπεται ότι η f είναι ομοιόμορφα συνεχής στο $\mathbb{R}$ (εξηγήστε γιατί). Επίσης, η f είναι φραγμένη: $\|f\|_\infty < +\infty$.

Θεωρούμε τυχόν $\varepsilon > 0$ και βρίσκουμε $s > 0$ με την εξής ιδιότητα: αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $|x-y| < s$ τότε $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Τώρα, γράφουμε

$$\begin{aligned}
(f * K_\delta)(x) - f(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t) f(x-t)\,dt - f(x) \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t) f(x-t)\,dt - \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t) f(x)\,dt \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t)[f(x-t) - f(x)]\,dt,
\end{aligned}$$

χρησιμοποιώντας την $\int_{-\infty}^{\infty} K_\delta(t)\,dt = 1$. Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
|(f * K_\delta)(x) - f(x)| &\leqslant \int_{|t|\leqslant s} K_\delta(t)|f(x-t) - f(x)|\,dt \\
&\quad + \int_{|t|>s} K_\delta(t)(|f(x-t)| + |f(x)|)\,dt \\
&\leqslant \varepsilon \int_{|t|\leqslant s} K_\delta(t)\,dt + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>s} K_\delta(t)\,dt \\
&\leqslant \varepsilon + 2\|f\|_\infty \int_{|t|>s} K_\delta(t)\,dt.
\end{aligned}$$

Αφού

$$\lim_{\delta\to 0^+} \int_{|t|>s} K_\delta(t)\,dt = 0,$$

υπάρχει $\delta > 0$ ώστε, για κάθε $0 < \delta < \delta_0$, $|(f * K_\delta)(x) - f(x)| < 2\varepsilon$. Επιπλέον, η επιλογή του δ_0 είναι ανεξάρτητη από το x (το δ_0 εξαρτάται μόνο από το $s = s(\varepsilon)$). Άρα, $f * K_\delta \longrightarrow f$ ομοιόμορφα όταν $\delta \to 0^+$. □

Για την απόδειξη του τύπου αντιστροφής θα χρειαστούμε επίσης την ακόλουθη «πολλαπλασιαστική ταυτότητα».

Πρόταση 9.2.7. *Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, τότε*

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y)g(y)\,dy. \tag{9.2.4}$$

Απόδειξη. Θα χρησιμοποιήσουμε το εξής. Υποθέτουμε ότι $F(x,y)$ είναι μια συνεχής συνάρτηση στο $\mathbb{R}^2$, η οποία ικανοποιεί την

$$|F(x,y)| \leqslant \frac{A}{(1+x^2)(1+y)^2}$$

για κάποια σταθερά $A > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $y \mapsto F(x,y)$ φθίνει αρκετά γρήγορα και η συνάρτηση $F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dy$ είναι συνεχής και φθίνει αρκετά γρήγορα. Ομοίως, η $F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dx$ είναι συνεχής και φθίνει αρκετά γρήγορα. Τέλος, ισχύει η ισότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)\,dy. \tag{9.2.5}$$

Εφαρμόζουμε αυτόν τον ισχυρισμό για τη συνάρτηση

$$F(x,y) = f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}.$$

Παρατηρήστε ότι

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)g(y)e^{-2\pi ixy}dy = f(x)\int_{-\infty}^{\infty} g(y)e^{-2\pi ixy}dy = f(x)\widehat{g}(x),$$

και όμοια,

$$F_2(y) = \widehat{f}(y)g(y).$$

Από την (9.2.5) παίρνουμε την (9.2.4). □

Απόδειξη του Θεωρήματος 9.2.1. Αποδεικνύουμε πρώτα ότι

$$f(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,d\xi. \tag{9.2.6}$$

Για κάθε $\delta > 0$ θέτουμε $G_\delta(x) = e^{-\pi\delta x^2}$. Στην Πρόταση 9.2.3 είδαμε ότι $G_\delta = \widehat{K_\delta}$, όπου $K_\delta(x) = \frac{1}{\sqrt{\delta}}e^{-\pi x^2/\delta}$. Εντελώς ανάλογο επιχείρημα δείχνει ότι $K_\delta = \widehat{G_\delta}$. Χρησιμοποιώντας την πολλαπλασιαστική ταυτότητα (9.2.4) παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)G_\delta(\xi)\,d\xi.$$

Από το Θεώρημα 9.2.6, χρησιμοποιώντας και το γεγονός ότι η K_δ είναι άρτια συνάρτηση, έχουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)K_\delta(-x)\,dx = (f * K_\delta)(0) \to f(0)$$

όταν $\delta \to 0$. Από την άλλη πλευρά,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)G_\delta(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{-\pi\delta\xi^2}d\xi \to \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)\,d\xi$$

όταν $\delta \to 0$ (εξηγήστε τις λεπτομέρειες, χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι $e^{-\pi\delta\xi^2} \to 1$ όταν $\delta \to 0$, ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα). Έπεται η (9.2.6).

Για το τυχόν $x \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τη συνάρτηση $F(y) = f(x+y)$ και εφαρμόζουμε την (9.2.6) γι' αυτήν. Αφού $\widehat{F}(\xi) = \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}$, παίρνουμε

$$f(x) = F(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{F}(\xi)\,d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi,$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. $\square$

Παρατήρηση 9.2.8. Θεωρούμε τους τελεστές $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και $\mathcal{F}^* : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ που ορίζονται ως εξής:

$$\mathcal{F}(f)(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-2\pi i x\xi}dx$$

και

$$\mathcal{F}^*(g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi)e^{2\pi i x\xi}d\xi.$$

Προφανώς,

$$\mathcal{F}(f) = \widehat{f},$$

δηλαδή, ο $\mathcal{F}$ είναι ο μετασχηματισμός Fourier. Ο τύπος αντιστροφής ουσιαστικά μας λέει ότι

$$(\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F})(f) = \mathcal{F}^*(\widehat{f}) = f,$$

δηλαδή,

$$\mathcal{F}^* \circ \mathcal{F} = I.$$

Επιπλέον, παρατηρούμε ότι

$$\mathcal{F}^*(f)(-y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\xi)e^{-2\pi i y\xi}d\xi = \mathcal{F}(f)(y).$$

Έπεται (εξηγήστε γιατί) ότι

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{F}^* = I.$$

Δηλαδή $\mathcal{F}^* = (\mathcal{F})^{-1}$.

Πόρισμα 9.2.9. *Ο μετασχηματισμός Fourier $\mathcal{F} : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ είναι ένα προς ένα και επί, με αντίστροφο τον $\mathcal{F}^*$.*

9.3 Ο τύπος του Plancherel

Η επόμενη πρόταση περιγράφει κάποιες βασικές ιδιότητες της συνέλιξης συναρτήσεων της κλάσης του Schwartz.

Πρόταση 9.3.1. *Αν $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ τότε*

(i) $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(ii) $f * g = g * f$.

(iii) $\widehat{(f * g)}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi)$.

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η $f * g$ φθίνει πολύ γρήγορα. Για τον σκοπό αυτό, παρατηρούμε πρώτα ότι, για κάθε $\ell \geqslant 0$ ισχύει

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\ell |g(x-y)| \leqslant A_\ell (1+|y|)^\ell \tag{9.3.1}$$

για κάποια σταθερά $A_\ell > 0$. Πράγματι, γνωρίζουμε ότι $\sup_t |t|^s |g(t)| = M_s < \infty$ για κάθε $s \geqslant 0$, διότι $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Χρησιμοποιώντας και την ανισότητα

$$|x|^\ell \leqslant (|x-y|+y|)^\ell \leqslant 2^\ell \max\{|x-y|,|y|\}^\ell \leqslant 2^\ell (|x-y|^\ell + |y|^\ell),$$

γράφουμε

$$|x|^\ell |g(x-y)| \leqslant 2^\ell |x-y|^\ell |g(x-y)| + 2^\ell |y|^\ell |g(x-y)| \leqslant 2^\ell M_\ell + 2^\ell M_0 |y|^\ell,$$

απ' όπου έπεται η (9.3.1) με $A_\ell = 2^\ell \max\{M_\ell, M_0\}$. Τώρα, μπορούμε να γράψουμε

$$\begin{aligned} |x|^\ell |(f*g)(x)| &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(y)||x|^\ell |g(x-y)|\,dy \\ &\leqslant A_\ell \int_{\mathbb{R}} |f(y)|(1+|y|^\ell)\,dy \end{aligned}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Το τελευταίο ολοκλήρωμα είναι πεπερασμένο, διότι $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^\ell |(f*g)(x)| < +\infty.$$

Στη συνέχεια δείχνουμε ότι η $f * g$ είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη και

$$(f*g)^{(k)}(x) = (f*g^{(k)})(x) \tag{9.3.2}$$

για κάθε $k \geqslant 1$. Για $k = 1$ η ισότητα προκύπτει ως εξής: έχουμε

$$\begin{aligned} &\left| \frac{(f*g)(x+t)-(f*g)(x)}{t} - (f*g')(x) \right| \\ &= \left| \int_{\mathbb{R}} f(y) \left[\frac{g(x+t-y)-g(x-y)}{t} - g'(x-y) \right] dy \right| \\ &\leqslant \int_{\mathbb{R}} |f(y)| \left| \frac{g(x+t-y)-g(x-y)}{t} - g'(x-y) \right| dy. \end{aligned}$$

Για κάθε $y \in \mathbb{R}$ έχουμε

$$g(x+t-y) = g(x-y) + tg'(x-y) + \frac{t^2}{2} g''(u)$$

για κάποιο u ανάμεσα στα $x-y$ και $x-y+t$. Συνεπώς,

$$\left| \frac{g(x+t-y)-g(x-y)}{t} - g'(x-y) \right| \leqslant \frac{|t|\|g''\|_\infty}{2}.$$

Έπεται ότι

$$\left| \frac{(f*g)(x+t)-(f*g)(x)}{t} - (f*g')(x) \right| \leqslant \frac{|t|\|g''\|_\infty}{2} \int_{\mathbb{R}} |f(y)|\,dy \to 0$$

όταν $t \to 0$. Αφού $g' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, με τον ίδιο τρόπο βλέπουμε ότι

$$(f * g)'' = [(f * g)']' = (f * g')' = f * g''.$$

Με διαδοχικές επαναλήψεις του ιδίου επιχειρήματος προκύπτει η (9.3.2).

Αφού $g^{(k)} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, συνδυάζοντας τις (9.3.1) και (9.3.2) παίρνουμε

$$\sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^{\ell} |(f * g)^{(k)}(x)| = \sup_{x\in\mathbb{R}} |x|^{\ell} |(f * g^{(k)})(x)| < +\infty.$$

Έτσι, έχουμε δείξει ότι $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$.

Για το (ii) γράφουμε

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(x-y)\,dy$$

και παρατηρούμε ότι η συνάρτηση $F(y) = f(y)g(x-y)$ ανήκει στην $\mathcal{S}(\mathbb{R})$, οπότε

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} F(-y+x)\,dy$$

από την Πρόταση 9.1.4. Όμως,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F(-y+x)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\,dy = (g * f)(x).$$

Για το (iii) θεωρούμε τη συνάρτηση $F(x,y) = f(y)g(x-y)e^{-2\pi i x\xi}$. Η $F(x,y)$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}^2$ και ικανοποιεί την

$$|F(x,y)| \leqslant \frac{A}{(1+x^2)(1+y^2)}$$

για κάποια σταθερά $A > 0$ και για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$, διότι $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Έπεται ότι, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ η $y \mapsto F(x,y)$ φθίνει αρκετά γρήγορα και η συνάρτηση

$$F_1(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dy = (f * g)(x)e^{-2\pi i x\xi}$$

είναι συνεχής και φθίνει αρκετά γρήγορα. Ομοίως, η

$$F_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dx = f(y)e^{-2\pi i y\xi}\widehat{g}(\xi)$$

είναι συνεχής και φθίνει αρκετά γρήγορα. Τέλος, ισχύει η ισότητα

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} F_2(y)\,dy,$$

δηλαδή

$$\widehat{(f * g)}(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} (f * g)(x)e^{-2\pi i x\xi}dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi i y\xi}\widehat{g}(\xi)\,dy = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi).$$

□

Ορισμός 9.3.2. Το εσωτερικό γινόμενο στην κλάση $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ ορίζεται ως εξής:

$$\langle f, g\rangle := \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Η επαγόμενη νόρμα είναι η
$$\|f\| := \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx\right)^{1/2}.$$

Θεώρημα 9.3.3 (τύπος του Plancherel). *Για κάθε* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,
$$\|\widehat{f}\| = \|f\|.$$

Απόδειξη. Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = \overline{f(-x)}$. Τότε, $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και
$$\begin{aligned}\widehat{g}(\xi) &= \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}e^{-2\pi ix\xi}\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \overline{f(-x)}\overline{e^{-2\pi i(-x)\xi}}\,dx \\ &= \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(-x)e^{-2\pi i(-x)\xi}dx} = \overline{\int_{-\infty}^{\infty} f(y)e^{-2\pi iy\xi}dy} \\ &= \overline{\widehat{f}(\xi)}.\end{aligned}$$

Θεωρούμε την $h = f * g$. Τότε, $f * g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και
$$\widehat{h}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\widehat{g}(\xi) = \widehat{f}(\xi)\overline{\widehat{f}(\xi)} = |\widehat{f}(\xi)|^2.$$

Επίσης,
$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)g(-y)\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y)\overline{f(y)}\,dy = \int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy.$$

Από τον τύπο αντιστροφής του Fourier,
$$h(0) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{h}(\xi)\,d\xi,$$

δηλαδή
$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|^2 dy = \int_{-\infty}^{\infty} |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi.$$

Με άλλα λόγια, $\|f\|^2 = \|\widehat{f}\|^2$. □

9.4 Ο τύπος άθροισης του Poisson

Σε αυτή την ενότητα περιγράφουμε μια διαδικασία «περιοδικοποίησης» για συναρτήσεις που ορίζονται στο $\mathbb{R}$ και ανήκουν στην κλάση του Schwartz. Αν $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, αντιστοιχίζουμε στην f τη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ που ορίζεται μέσω της
$$F(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k).$$

Θα δούμε ότι η F ορίζεται καλά, είναι 1-περιοδική και συνεχής. Η F είναι η *περιοδικοποίηση* της f. Μία από τις εφαρμογές της είναι ο *τύπος άθροισης του Poisson*.

Θεώρημα 9.4.1 (τύπος άθροισης του Poisson). *Αν* $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, *τότε*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k)e^{2\pi ikx} \tag{9.4.1}$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$*. Ειδικότερα,*

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k).$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα ότι η σειρά $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ συγκλίνει ομοιόμορφα σε κάθε κλειστό διάστημα $[-B, B]$, $B > 0$. Αυτό αποδεικνύει ότι η F ορίζεται καλά στο $\mathbb{R}$ και είναι συνεχής συνάρτηση.

Θεωρούμε τυχόν $B > 0$ και ορίζουμε $g_k(x) = f(x+k)$, $k \in \mathbb{Z}$. Αφού $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, υπάρχει σταθερά $M_2 > 0$ ώστε

$$|y|^2 |f(y)| \leqslant M_2 \tag{9.4.2}$$

για κάθε $y \in \mathbb{R}$. Παρατηρούμε ότι, αν $|k| > 2B$ τότε για κάθε $x \in [-B, B]$ έχουμε $|x+k| \geqslant |k| - |x| \geqslant |k|/2$. Από την (9.4.2) βλέπουμε ότι

$$|g_k(x)| = |f(x+k)| \leqslant \frac{M_2}{|x+k|^2} \leqslant \frac{4M_2}{k^2}$$

για κάθε $x \in [-B, B]$. Αφού $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{4M_2}{k^2} < +\infty$, από το κριτήριο του Weierstrass συμπεραίνουμε ότι η σειρά $\sum_{|k|>2B} g_k(x)$ συγκλίνει ομοιόμορφα στο $[-B, B]$, και αφού όλες οι g_k είναι συνεχείς συναρτήσεις, η σειρά

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} g_k(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$$

συγκλίνει ομοιόμορφα σε μια συνεχή συνάρτηση στο $[-B, B]$.

Το γεγονός ότι η F είναι 1-περιοδική προκύπτει άμεσα από τον τρόπο ορισμού της F: για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θέτοντας $m = k+1$ βλέπουμε ότι

$$F(x+1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+1+k) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} f(x+m) = F(x).$$

Ορίζουμε τώρα $G : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ με

$$G(x) := \sum_{k=-\infty}^{\infty} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}.$$

Η σειρά στο δεξιό μέλος συγκλίνει ομοιόμορφα: γνωρίζουμε ότι $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, άρα $|\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{1+k^2}$ για κάθε $k \in \mathbb{Z}$, όπου C θετική σταθερά. Αν λοιπόν ορίσουμε $h_k(x) = \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x}$, τότε

$$\|h_k\|_\infty = |\widehat{f}(k)| \leqslant \frac{C}{1+k^2}$$

και, αφού $\sum_{k=-\infty}^{\infty} \|h_k\|_\infty < +\infty$, το κριτήριο του Weierstrass εφαρμόζεται κι εδώ. Αφού κάθε h_k είναι συνεχής και 1-περιοδική (εξηγήστε γιατί), η G είναι επίσης συνεχής και 1-περιοδική.

Για την (9.4.1) αρκεί να δείξουμε ότι $F \equiv G$. Οι F και G είναι συνεχείς και 1-περιοδικές, αρκεί λοιπόν να δείξουμε ότι έχουν τους ίδιους συντελεστές Fourier. Στην περίπτωση μιας 1-περιοδικής συνάρτησης u, ο συντελεστής Fourier $\widehat{u}(k)$ ορίζεται από την

$$\widehat{u}(k) = \int_0^1 u(x) e^{-2\pi i k x} dx.$$

Έστω $m \in \mathbb{Z}$. Από το γεγονός ότι

$$s_n(x) := \sum_{k=-n}^{n} \widehat{f}(k) e^{2\pi i k x} \longrightarrow G(x) \ \text{ ομοιόμορφα}$$

και

$$\widehat{s_n}(m) = \int_0^1 s_n(x) e^{-2\pi i m x} dx = \widehat{f}(m)$$

για κάθε $n \geqslant |m|$, είναι φανερό ότι $\widehat{G}(k) = \widehat{f}(m)$. Από την άλλη πλευρά, από την ομοιόμορφη σύγκλιση της $\sum_{k=-\infty}^{\infty} f(x+k)$ στο $[0,1]$ έπεται ότι

$$\begin{aligned}
\widehat{F}(m) &= \lim_{n\to\infty} \left(\sum_{k=-n}^{n} f(x+k) \right) e^{-2\pi i m x} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_0^1 f(x+k) e^{-2\pi i m x} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=-n}^{n} \int_k^{k+1} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n+1} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-2\pi i m y} dy \\
&= \widehat{f}(m).
\end{aligned}$$

Αφού $\widehat{F}(m) = \widehat{G}(m) = \widehat{f}(m)$ για κάθε $m \in \mathbb{Z}$, συμπεραίνουμε ότι $F \equiv G$. □

9.5 Η αρχή αβεβαιότητας του Heisenberg

Η αρχή της αβεβαιότητας ισχυρίζεται ότι αν το «μεγαλύτερο μέρος» της μάζας μιας συνάρτησης συγκεντρώνεται σε κάποιο διάστημα μήκους L, τότε το «μεγαλύτερο μέρος» της μάζας του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης δεν μπορεί να συγκεντρώνεται σε κάποιο διάστημα που έχει μήκος πολύ μικρότερο από $1/L$. Η ακριβής διατύπωση είναι η εξής.

Θεώρημα 9.5.1 (αρχή της αβεβαιότητας). *Έστω $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ με την ιδιότητα*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx = 1.$$

Τότε,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geqslant \frac{1}{16\pi^2}. \tag{9.5.1}$$

Γενικότερα, για κάθε $x_0, \xi_0 \in \mathbb{R}$,

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} (x-x_0)^2 |\psi(x)|^2 dx \right) \left(\int_{-\infty}^{\infty} (\xi-\xi_0)^2 |\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi \right) \geqslant \frac{1}{16\pi^2}. \tag{9.5.2}$$

Απόδειξη. Δείχνουμε πρώτα την ανισότητα (9.5.1). Χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι οι ψ και ψ' φθίνουν πολύ γρήγορα, με ολοκλήρωση κατά μέρη και γράφοντας $|\psi|^2 = \psi\overline{\psi}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} 1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x)|^2 dx &= -\int_{-\infty}^{\infty} x\frac{d}{dx}|\psi(x)|^2 dx \\ &= -\int_{-\infty}^{\infty} \left(x\psi'(x)\overline{\psi(x)} + x\overline{\psi'(x)}\psi(x)\right) dx. \end{aligned}$$

Φράσσοντας απολύτως, χρησιμοποιώντας την τριγωνική ανισότητα και την ανισότητα Cauchy–Schwarz, βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned} 1 &\leqslant 2\int_{-\infty}^{\infty} |x|\,|\psi(x)|\,|\psi'(x)|\,dx \\ &\leqslant 2\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx\right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Από την ταυτότητα του Plancherel και το γεγονός ότι $\widehat{\psi'}(\xi) = 2\pi i\xi\widehat{\psi}(\xi)$, παίρνουμε

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\psi'(x)|^2 dx = 4\pi^2\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi.$$

Έπεται ότι

$$1 \leqslant 4\pi\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2|\psi(x)|^2 dx\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty} \xi^2|\widehat{\psi}(\xi)|^2 d\xi\right)^{1/2}.$$

Υψώνοντας στο τετράγωνο έχουμε την (9.5.1).

Η ανισότητα (9.5.2) προκύπτει άμεσα αν αντικαταστήσουμε την $\psi(x)$ με την $e^{-2\pi i x\xi_0}\psi(x+x_0)$ στην (9.5.1) και κάνουμε αλλαγή μεταβλητής. □

9.6 Ασκήσεις

9.1. Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = \chi_{[-1,1]}(x) = \begin{cases} 1 & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

και

$$g(x) = \begin{cases} 1-|x| & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{αλλιώς.} \end{cases}$$

Η f δεν είναι συνεχής, όμως το ολοκλήρωμα που ορίζει τον μετασχηματισμό Fourier έχει νόημα και γι' αυτήν. Αποδείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{\sin 2\pi\xi}{\pi\xi} \qquad \text{και} \qquad \widehat{g}(\xi) = \left(\frac{\sin\pi\xi}{\pi\xi}\right)^2,$$

με τη σύμβαση $\widehat{f}(0) = 2$ και $\widehat{g}(0) = 1$.

9.2. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier $\widehat{f}$ της f είναι συνεχής και υπάρχουν $0 < \alpha < 1$ και $M > 0$ ώστε

$$|\widehat{f}(\xi)| \leq \frac{M}{|\xi|^{1+\alpha}}$$

για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε ότι η f ικανοποιεί συνθήκη Holder τάξης α, δηλαδή υπάρχει $B > 0$ ώστε

$$|f(x+t) - f(x)| \leq B|t|^{\alpha}$$

για κάθε $x, t \in \mathbb{R}$.

9.3. Έστω $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ συνεχής συνάρτηση με τις εξής ιδιότητες: $f(0) = 0$, $f(x) = 0$ αν $|x| \geq 1$ και $f(x) = 1/\log(1/|x|)$ στο $(-\delta, \delta) \setminus \{0\}$ για κάποιο $\delta \in (0,1)$. Αποδείξτε ότι $\widehat{f} \notin \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

9.4. (α) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Ορίζουμε $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = 0$ αν $x \notin (a,b)$ και

$$f(x) = e^{-\frac{1}{x-a}} e^{-\frac{1}{b-x}}, \qquad x \in (a,b).$$

Αποδείξτε ότι η f είναι άπειρες φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$.

(β) Έστω $a, b \in \mathbb{R}$ με $a < b$. Αποδείξτε ότι υπάρχει άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ η οποία ικανοποιεί τα εξής: $F(x) = 0$ αν $x \leq a$, $F(x) = 1$ αν $x \geq b$, η F είναι γνησίως αύξουσα στο (a,b).

Υπόδειξη. Θεωρήστε τη συνάρτηση f του (α) και δοκιμάστε συναρτήσεις της μορφής

$$F(x) = c \int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt, \qquad c > 0.$$

9.5. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι

$$\widehat{f}(\xi) = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} \left[f(x) - f\left(x - \frac{1}{2\xi} \right) \right] e^{-2\pi i x \xi} dx,$$

και συμπεράνατε ότι

$$\lim_{|\xi| \to \infty} |\widehat{f}(\xi)| = 0.$$

9.6. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ με $\widehat{f}(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in \mathbb{R}$. Αποδείξτε πρώτα ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\widehat{g}(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{f}(y) g(y)\, dy$$

για κάθε $g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ και, χρησιμοποιώντας την υπόθεση για την $\widehat{f}$, συμπεράνατε ότι $f \equiv 0$ στο $\mathbb{R}$.

9.7. Αποδείξτε ότι: αν $f, g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ τότε $f * g \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$.

Υπόδειξη. Γράψτε

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x-y)g(y)\, dy = \int_{|y| \leq |x|/2} f(x-y)g(y)\, dy + \int_{|y| > |x|/2} f(x-y)g(y)\, dy.$$

9.8. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Αν

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(y) e^{-y^2} e^{2xy} dy = 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}$, αποδείξτε ότι $f \equiv 0$ στο $\mathbb{R}$.

Υπόδειξη. Θεωρήστε την $f * e^{-x^2}$.

9.9. Ο *πυρήνας του Fejér στο* $\mathbb{R}$ είναι η συνάρτηση

$$\mathcal{K}_R(t) = \begin{cases} R \left(\frac{\sin \pi t R}{\pi t R} \right)^2 & \text{αν } t \neq 0 \\ R & \text{αν } t = 0 \end{cases}$$

(α) Αποδείξτε ότι: αν $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ τότε

$$\int_{-R}^{R} \left(1 - \frac{|\xi|}{R} \right) \widehat{f}(\xi) e^{2\pi i x \xi} d\xi = (f * \mathcal{K}_R)(x).$$

(β) Αποδείξτε ότι η $\{\mathcal{K}_R\}$ είναι οικογένεια καλών πυρήνων καθώς το $R \to \infty$.

(γ) Αποδείξτε ότι: αν $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$ τότε

$$\int_{-R}^{R}\left(1-\frac{|\xi|}{R}\right)\widehat{f}(\xi)e^{2\pi ix\xi}d\xi \longrightarrow f(x) \text{ ομοιόμορφα}$$

όταν $R \to \infty$.

9.10. Αν $\mathcal{K}_R$ είναι ο πυρήνας του Fejér της προηγούμενης άσκησης, αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty}\mathcal{K}_n(x+k) = F_n(x)$$

για κάθε $n \in \mathbb{N}$, όπου

$$F_n(x) = \sum_{k=-n}^{n}\left(1-\frac{|k|}{n}\right)e^{2\pi ikx} = \frac{1}{n}\frac{\sin^2(n\pi x)}{\sin^2(\pi x)}.$$

9.11. Έστω $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R})$. Αποδείξτε ότι: αν οι f και $\widehat{f}$ μηδενίζονται έξω από κάποιο κλειστό διάστημα, τότε $f \equiv 0$.

9.12. Έστω $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$. Υποθέτουμε ότι

$$\int_a^b x^2|f(x)|^2dx \geq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}x^2|f(x)|^2dx$$

και

$$\int_c^d \xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi \geq \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\xi^2|\widehat{f}(\xi)|^2d\xi.$$

Αποδείξτε ότι

$$(b-a)(d-c) \geq \frac{1}{2\pi}.$$

9.13. Θεωρούμε τον *τελεστή του Hermite* $L : \mathcal{S}(\mathbb{R}) \to \mathcal{S}(\mathbb{R})$ που ορίζεται από τη σχέση

$$L(f) = -\frac{d^2f}{dx^2} + x^2f.$$

Στον $S(\mathbb{R})$ θεωρούμε το εσωτερικό γινόμενο

$$\langle f, g\rangle = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

(α) Αποδείξτε ότι

$$\langle L(f), f\rangle \geq \langle f, f\rangle$$

για κάθε $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (υπόδειξη: ολοκλήρωση κατά μέρη).

(β) Θεωρούμε τους τελεστές A και A^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A(f) = \frac{df}{dx} + xf \qquad \text{και} \qquad A^*(f) = -\frac{df}{dx} + xf.$$

Αποδείξτε ότι, για κάθε $f, g \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$,

(i) $\langle A(f), g\rangle = \langle f, A^*(g)\rangle$.

(ii) $\langle A(f), A(f)\rangle = \langle A^*A(f), f\rangle \geq 0$.

(iii) $A^*A = L - I$, όπου I ο ταυτοτικός τελεστής.

(γ) Για κάθε $t \in \mathbb{R}$ θεωρούμε τους τελεστές A_t και A_t^* που ορίζονται στον $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ μέσω των

$$A_t(f) = \frac{df}{dx} + txf \qquad \text{και} \qquad A_t^*(f) = -\frac{df}{dx} + txf.$$

Αποδείξτε ότι $\langle A_t^* A_t(f), f\rangle \geq 0$ και με βάση αυτή την παρατήρηση δώστε μια δεύτερη απόδειξη της αρχής της αβεβαιότητας: αν $\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx = 1$, τότε

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 |f(x)|^2 dx\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{df}{dx}\right|^2 dx\right) \geq \frac{1}{4}.$$

9.14. Ο *n-οστός πυρήνας του Landau* είναι η συνάρτηση

$$L_n(x) = \begin{cases} \frac{(1-x^2)^n}{c_n} & \text{αν } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{αν } |x| \geq 1 \end{cases}$$

όπου η σταθερά $c_n > 0$ επιλέγεται έτσι ώστε

$$\int_{-\infty}^{\infty} L_n(x)\, dx = 1.$$

Αποδείξτε ότι η $\{L_n\}_{n\geq 0}$ είναι ακολουθία καλών πυρήνων. Χρησιμοποιώντας αυτό το αποτέλεσμα αποδείξτε ότι, αν $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι συνεχής συνάρτηση που μηδενίζεται έξω από το $[-1/2, 1/2]$, τότε η ακολουθία $\{f * L_n\}$ είναι ακολουθία πολυωνύμων στο $[-1/2, 1/2]$, η οποία συγκλίνει ομοιόμορφα στην f.

9.15. Οι *αριθμοί Bernoulli* B_n ορίζονται από την

$$\frac{z}{e^z - 1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{k!} z^k.$$

(α) Αποδείξτε ότι $B_0 = 1$, $B_1 = -1/2$, $B_2 = 1/6$, $B_3 = 0$, $B_4 = -1/30$ και $B_5 = 0$.

(β) Αποδείξτε ότι, για κάθε $k \geq 1$,

$$B_k = -\frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k+1}{j} B_j.$$

(γ) Αποδείξτε ότι $B_k = 0$ αν ο k είναι περιττός και $k > 1$.

(δ) Έστω $t > 0$. Εφαρμόζοντας τον τύπο άθροισης του Poisson για την $f(x) = \frac{t}{\pi(x^2+t^2)}$ και την $\widehat{f}(\xi) = e^{-2\pi t|\xi|}$, αποδείξτε ότι

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{t^2 + k^2} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|k|}.$$

(ε) Η *συνάρτηση ζήτα* ορίζεται από τη σχέση

$$\zeta(s) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^s}, \qquad s > 1.$$

Για κάθε $t > 0$ αποδείξτε τις ταυτότητες

$$\frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{t}{t^2 + k^2} = \frac{1}{\pi t} + \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (-1)^{m+1} \zeta(2m) t^{2m-1}$$

και

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-2\pi t|k|} = \frac{2}{1 - e^{-2\pi t}} - 1.$$

(στ) Χρησιμοποιώντας την

$$\frac{z}{e^z-1}=1-\frac{z}{2}+\sum_{m=1}^{\infty}\frac{B_{2m}}{(2m)!}z^{2m}$$

αποδείξτε ότι, για κάθε $m\geq 1$,

$$2\zeta(2m)=(-1)^{m+1}\frac{(2\pi)^{2m}}{(2m)!}B_{2m}.$$

9.16. Οι *συναρτήσεις Hermite* $h_k(x)$, $k\geq 0$, ορίζονται ως εξής:

$$h_k(x)=(-1)^k e^{x^2/2}\left(\frac{d}{dx}\right)^k(e^{-x^2}).$$

(α) Αποδείξτε ότι $h_0(x)=e^{-x^2/2}$ και $h_1(x)=2xe^{-x^2/2}$.

(β) Αποδείξτε ότι $h_k(x)=P_k(x)e^{-x^2/2}$, όπου P_k είναι πολυώνυμο βαθμού k και συμπεράνατε ότι $h_k\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$.

(γ) Αποδείξτε ότι

$$\sum_{k=0}^{\infty}h_k(x)\frac{t^k}{k!}=e^{-(x^2/2-2tx+t^2)}.$$

(δ) Αποδείξτε ότι η *οικογένεια* $\{h_k\}_{k\geq 0}$ *είναι πλήρης*: αν $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R})$ και

$$\langle f,h_k\rangle=\int_{-\infty}^{\infty}f(x)h_k(x)\,dx=0$$

για κάθε $k\geq 0$, τότε $f\equiv 0$ (χρησιμοποιήστε την Άσκηση 9.8).

(ε) Ορίζουμε $h_k^*(x)=h_k(\sqrt{2\pi}x)$. Αποδείξτε ότι

$$\widehat{h_k^*}(\xi)=(-i)^k h_k^*(\xi).$$

Δηλαδή, οι h_k^* είναι ιδιοσυναρτήσεις του μετασχηματισμού Fourier.

(στ) Αν $L(f)=-\frac{d^2f}{dx^2}+x^2f$, αποδείξτε ότι

$$L(h_k)=(2k+1)h_k$$

για κάθε $k\geq 0$. Συμπεράνατε ότι οι h_k είναι ορθογώνιες ως προς το σύνηθες εσωτερικό γινόμενο στον χώρο $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ του Schwartz.

(ζ) Αποδείξτε ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty}[h_k(x)]^2dx=\sqrt{\pi}2^k k!.$$