Ενισχυμένες ανισότητες Hölder και αντίστροφες Hölder για Gaussian τυχαία διανύσματα

Διπλωματική Εργασία

Ελισάβετ Δημούλα

Επιβλέπων: Απόστολος Γιαννόπουλος

Τμήμα Μαθηματικών
Πανεπιστήμιο Αθηνών
Αθήνα - 2022

Τριμελής Εξεταστική Επιτροπή

Απόστολος Γιαννόπουλος, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Αριστείδης Κατάβολος, Ομότιμος Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, ΕΚΠΑ

Αντώνιος Τσολομύτης, Καθηγητής, Τμήμα Μαθηματικών, Πανεπιστήμιο του Αιγαίου

Περιεχόμενα

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 1

Εισαγωγή

Βασικός στόχος αυτής της εργασίας είναι να παρουσιάσουμε αποτελέσματα των Chen, Δαφνή και Παούρη τα οποία δίνουν αλγεβρικά κριτήρια που εξασφαλίζουν ενισχυμένες ανισότητες Hölder και αντίστροφες Hölder για γινόμενα συναρτήσεων Gaussian τυχαίων διανυσμάτων με αυθαίρετη δομή συνδιακυμάνσεων. Θα δούμε επίσης ότι αυτές οι ανισότητες γενικεύουν κλασικά αποτελέσματα όπως η ανισότητα Prékopa-Leindler, η ανισότητα Brascamp-Lieb καθώς και η αντίστροφή της ανισότητα του Barthe, και θα μελετήσσουμε τη γεωμετρία των επιλέξιμων εκθετών αυτών των ανισοτήτων. Τέλος θα δούμε πώς αυτές οι ανισότητες μπορούν να χρησιμοποιηθούν για να αποδειχθεί η ανισότητα του Ehrhard.

1.1 Ανισότητες Hölder για Gaussian τυχαία διανύσματα

Έστω (X_1, X_2) ένα κεντραρισμένο διμεταβλητό κανονικό τυχαίο διάνυσμα και $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Το ερώτημα που μας απασχολεί είναι να δώσουμε καλά άνω και κάτω φράγματα για τη μέση τιμή

$$\mathbb{E}\left(f_1(X_1)f_2(X_2)\right).$$

Ας υποθέσουμε ότι (p_1, p_2) είναι ένα ζευγάρι Hölder συζυγών εκθετών, δηλαδή

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1. \tag{1.1}$$

Ανεξάρτητα από τη συνδιακύμανση των X_1 και X_2, από την ανισότητα Hölder έχουμε ότι αν $p_1, p_2 \geqslant 1$ τότε

$$\mathbb{E}\left(f_1(X_1)f_2(X_2)\right) \leqslant \left(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\right)^{1/p_2}, \tag{1.2}$$

ενώ από την αντίστροφη ανισότητα Hölder έχουμε ότι αν $0 < p_1 < 1$ και $p_2 < 0$ τότε

$$\mathbb{E}\left(f_1(X_1)f_2(X_2)\right) \geqslant \left(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\right)^{1/p_2}. \tag{1.3}$$

Σκοπός μας είναι να αποδείξουμε βελτιωμένα άνω και κάτω φράγματα τα οποία να παίρνουν υπόψιν τους τη συνδιακύμανση των X_1, X_2 και να είναι εύχρηστα όπως οι ανισότητες Hölder.

Υπενθυμίζουμε ότι ένας πραγματικός συμμετρικός $N \times N$ πίνακας λέγεται θετικά ορισμένος (αντίστοιχα, ημιορισμένος) και γράφουμε $A > 0$ (αντίστοιχα $A \geqslant 0$) αν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ ισχύει

$$\langle Ax, x\rangle > 0 \qquad (\text{αντίστοιχα } \langle Ax, x\rangle \geqslant 0),$$

όπου $\langle\cdot,\cdot\rangle$ είναι το συνηθισμένο εσωτερικό γινόμενο στον $\mathbb{R}^N$. Αν A, B είναι δύο πραγματικοί συμμετρικοί $N \times N$ πίνακες, θα γράφουμε $B > A$ αν $B - A > 0$ και $B \geqslant A$ αν $B - A \geqslant 0$.

Το κύριο θεώρημα της εργασίας είναι το ακόλουθο.

Θεώρημα 1.1.1 (Chen-Δαφνής-Παούρης). *Έστω $m, n_1, \ldots, n_m$ θετικοί ακέραιοι και $N = n_1 + \cdots + n_m$. Υποθέτουμε ότι X_i είναι ένα n_i-διάστατο τυχαίο διάνυσμα για $1 \leqslant i \leqslant m$ και ότι η κοινή τους κατανομή*

$$\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_m)$$

σχηματίζει ένα κεντραρισμένο από κοινού N-διάστατο Gaussian τυχαίο διάνυσμα με πίνακα συνδιακυμάνσεων $T = (T_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$, όπου T_{ij} είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων μεταξύ των X_i και X_j για $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Έστω P ο block διαγώνιος πίνακας

$$P = \operatorname{diag}\left(p_1T_{11}, \ldots, p_mT_{mm}\right).$$

Για κάθε σύνολο μη μηδενικών μετρήσιμων συναρτήσεων f_i στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) *Αν $T \leqslant P$, τότε*

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^m f_i\left(X_i\right) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}. \tag{1.4}$$

(ii) *Αν $T \geqslant P$, τότε*

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^{m} f_i\left(X_i\right) \geqslant \prod_{i=1}^{m}\left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}. \tag{1.5}$$

Υιοθετούμε τη σύμβαση ότι $\infty \cdot 0 = 0$ οποτεδήποτε αυτό συμβαίνει στο δεξιό μέλος της (1.4) ή της (1.5).

Στο Κεφάλαιο 3 παρουσιάζουμε δύο αποδείξεις για το Θεώρημα 1.1.1: η πρώτη γίνεται με χρήση του τύπου Gaussian ολοκλήρωσης κατά μέρη, ενώ για τη δεύτερη απόδειξη παρουσιάζουμε το κεντρικό επιχείρημα παρεμβολής, με χρήση της ημιομάδας τελεστών Ornstein-Uhlenbeck.

Παρατήρηση 1.1.2. Ας υποθέσουμε ότι $0 < \mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i} < \infty$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$ και ότι τουλάχιστον μία από τις f_i δεν είναι σχεδόν παντού ίση με σταθερά. Τότε έχουμε γνήσια ανισότητα στην (1.4) αν $T < P$ και στην (1.5) αν $T > P$. Για παράδειγμα, ας υποθέσουμε ότι $T > P$. Τότε, μπορούμε να βρούμε $q_1, \ldots, q_m$ με $q_1 > p_1, \ldots, q_m > p_m$ ώστε ο $Q := \mathrm{diag}(q_1 T_{11}, \ldots, q_m T_{mm})$ να ικανοποιεί την $T > Q > P$. Από την ανισότητα Jensen έχουμε

$$\left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{1/p_i} \leqslant \left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{q_i}\right)^{1/q_i}$$

και αυτή η ανισότητα είναι γνήσια αν η f_i δεν είναι σχεδόν παντού ίση με σταθερά. Συνεπώς, η (1.5) μας δίνει

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^{m} f_i\left(X_i\right) \geqslant \prod_{i=1}^{m}\left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{q_i}\right)^{1/q_i} > \prod_{i=1}^{m}\left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{1/p_i}.$$

Παρατήρηση 1.1.3. Αν η ανισότητα (1.4) (αντίστοιχα, η (1.5)) ισχύει για όλες τις μη αρνητικές $f_1, \ldots, f_m$, τότε παίρνουμε ότι $T \leqslant P$ (αντίστοιχα $T \geqslant P$). Αυτό μπορούμε να το δούμε χρησιμοποιώντας τις συναρτήσεις $f_i(x_i) = e^{\langle \alpha_i, x_i\rangle}$ για $\alpha_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. Ένας άμεσος υπολογισμός δίνει ότι για $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$,

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^{m} f_i(X_i) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\langle T\alpha, \alpha\rangle\right) \qquad \text{και} \qquad \prod_{i=1}^{m}\left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} \exp\left(\tfrac{1}{2}\langle P\alpha, \alpha\rangle\right). \tag{1.6}$$

Έτσι, εάν η (1.4) ισχύει για όλες τις μη αρνητικές συναρτήσεις τότε παίρνουμε ότι $\langle T\alpha, \alpha\rangle \leqslant \langle P\alpha, \alpha\rangle$ για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}^N$ και συμπεραίνουμε ότι $T \leqslant P$.

Όμοια, αν η (1.5) ισχύει για όλες τις μη αρνητικές συναρτήσεις τότε βλέπουμε ότι $T \geqslant P$.

Παρατήρηση 1.1.4. Αν $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathrm{Ker}(T{-}P)$ για $\alpha_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, τότε στις (1.4) και (1.5) έχουμε ισότητα αν θεωρήσουμε τις $f_i(x_i) = e^{\langle \alpha_i, x_i\rangle}$ για $1 \leqslant i \leqslant m$.

Δείχνουμε τώρα ότι η ανισότητα Hölder και η αντίστροφη ανισότητα Hölder προκύπτουν από το Θεώρημα 1.1.1. Έστω (X_1, X_2) ένα κεντραρισμένο, μη εκφυλισμένο, διμεταβλητό κανονικό τυχαίο διάνυσμα με πίνακα συνδιακυμάνσεων $T = (T_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$. Ας υποθέσουμε ότι οι εκθέτες $p_1, p_2 \neq 1$ ικανοποιούν τη συνθήκη Hölder (1.1). Θέτουμε $P = \mathrm{diag}(p_1T_{11}, p_2T_{22})$. Παρατηρούμε ότι, από την (1.1),

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 1 - (p_1 + p_2 - p_1p_2) = 1. \tag{1.7}$$

Έτσι, αν $p_1, p_2 > 1$, έχουμε ότι

$$P - T = \begin{pmatrix} T_{11}(p_1 - 1) & T_{12} \\ T_{12} & T_{22}(p_2 - 1) \end{pmatrix} \geqslant 0$$

αφού από την (1.7) έχουμε $\det(P - T) = \det(T) \geqslant 0$. Από το Θεώρημα 1.1.1 (i) έπεται η ανισότητα Hölder. Όμοια, αν $p_1, p_2 < 1$ τότε η (1.7) μας δίνει ότι $T - P \geqslant 0$ και στη συνέχεια από το Θεώρημα 1.1.1 (ii) προκύπτει η αντίστροφη ανισότητα Hölder.

Για να δούμε γιατί το Θεώρημα 1.1.1 βελτιώνει γενικά τα φράγματα που δίνουν οι ανισότητες Hölder, ας υποθέσουμε ότι $\det(T) > 0$ και ότι οι $p_1, p_2 \neq 1$ ικανοποιούν την (1.1). Έστω f_1 και f_2 δύο μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε τουλάχιστον μία από αυτές να μην είναι σχεδόν παντού ίση με σταθερά και έστω ότι

$$0 < \left(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\right)^{1/p_2} < \infty.$$

Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση $p_1, p_2 > 1$. Παρατηρούμε ότι για κάθε $1 \leqslant q_1 < p_1$ και $1 \leqslant q_2 < p_2$ ισχύει $Q - T \geqslant 0$ αν και μόνο αν $\det(Q - P) \geqslant 0$, όπου $Q := \mathrm{diag}(q_1T_{11}, q_2T_{22})$. Γράφουμε

$$\det(Q - T) = \det(T) - \varepsilon_Q T_{11}T_{22},$$

όπου $\varepsilon_Q := q_1 + q_2 - q_1q_2$. Παρατηρήστε ότι $\varepsilon_Q \to 0$ όταν $q_1 \uparrow p_1$ και $q_2 \uparrow p_2$. Αφού $\det(T) > 0$, υπάρχουν εκθέτες $1 \leqslant q_1 < p_1$ και $1 \leqslant q_2 < p_2$ ώστε $T \leqslant Q < P$, συνεπώς το Θεώρημα 1.1.1 (i) και η ανισότητα Hölder μας δίνουν

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(f_1(X_1)f_2(X_2)\big) &\leqslant \left(\mathbb{E}f_1(X_1)^{q_1}\right)^{1/q_1}\left(\mathbb{E}f_2(X_2)^{q_2}\right)^{1/q_2} \\ &< \left(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\right)^{1/p_2}.\end{aligned}$$

Όμοια, αν $p_1, p_2 < 1$, υπάρχουν εκθέτες $p_1 < q_1 \leqslant 1$ και $p_2 < q_2 \leqslant 1$ ώστε $T \geqslant Q > P$, συνεπώς το Θεώρημα 1.1.1 (ii) και η ανισότητα Hölder πάλι, μας δίνουν

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(f_1(X_1)f_2(X_2)\big) &\geqslant \left(\mathbb{E}f_1(X_1)^{q_1}\right)^{1/q_1}\left(\mathbb{E}f_2(X_2)^{q_2}\right)^{1/q_2} \\ &> \left(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\right)^{1/p_2}.\end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, και στις δύο περιπτώσεις, οι εκθέτες q_1, q_2 βελτιώνουν την ανισότητα Hölder.

Παράδειγμα 1.1.5. Υποθέτουμε ότι $m = 2$ και ότι X_1, X_2 είναι τυπικές κανονικές τυχαίες μεταβλητές με $\mathbb{E}(X_1X_2) = t$ όπου $0 \leqslant t \leqslant 1$. Τα απλούστερα φράγματα τύπου Hölder για την $\mathbb{E}\big(f_1(X_1)f_2(X_2)\big)$ προκύπτουν ως εξής. Παρατηρούμε ότι

$$(1-t)I_2 \leqslant T \leqslant (1+t)I_2.$$

Από το Θεώρημα 1.1.1 έχουμε ότι για $q_t := 1-t$ και $p_t := 1+t$,

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{E}f_1(X_1)^{q_t}\big)^{1/q_t}\big(\mathbb{E}f_2(X_2)^{q_t}\big)^{1/q_t} &\leqslant \mathbb{E}\big(f_1(X_1)f_2(X_2)\big) \\ &\leqslant \big(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_t}\big)^{1/p_t}\big(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_t}\big)^{1/p_t}\end{aligned} \tag{1.8}$$

για οποιεσδήποτε μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις f_1, f_2. Ειδικότερα, αν $t = 0$ τότε οι X_1, X_2 είναι ανεξάρτητες και οι τρεις ποσότητες στην (1.8) είναι ίσες. Αν $t = 1$ τότε η αριστερή ανισότητα είναι η ανισότητα Jensen και η δεξιά ανισότητα είναι η ανισότητα Cauchy-Schwarz. Για να ελέγξουμε ότι η (1.8) είναι ακριβής, παρατηρούμε ότι $(1,1) \in \mathrm{Ker}(T-(1+t)I_2)$ και $(1,-1) \in \mathrm{Ker}(T-(1-t)I_2)$. Από την Παρατήρηση 1.1.4, οι $f_1(x) = f_2(x) = e^x$ μας δίνουν ισότητα στην αριστερή ανισότητα της (1.8), ενώ οι συναρτήσεις $f_1(x) = e^x$ και $f_2(x) = e^{-x}$ μας δίνουν ισότητα στη δεξιά ανισότητα της (1.8).

1.2 Σύνδεση με την ανισότητα Brascamp-Lieb

Στο πρώτη ενότητα του Κεφαλαίου 4 αποδεικνύουμε ότι η ανισότητα (1.4) συνδέεται στενά με την ανισότητα Brascamp-Lieb, που αποδείχτηκε αρχικά από τους Brascamp και Lieb, και αργότερα γενικεύτηκε πλήρως από τον Lieb. Η ανισότητα ισχυρίζεται ότι αν $m \geqslant n$, $p_1, \ldots, p_m \geqslant 1$ με $\sum_{i=1}^m \frac{n_i}{p_i} = n$ και $U_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_i}$ είναι γραμμικές και επί απεικονίσεις για $1 \leqslant i \leqslant m$, τότε για κάθε σύνολο μη αρνητικών $f_i \in L_{p_i}(\mathbb{R}^{n_i})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, ο λόγος

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_ix)dx}{\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}} \tag{1.9}$$

μεγιστοποιείται από κεντραρισμένες Gaussian συναρτήσεις, δηλαδή συναρτήσεις της μορφής

$$f_i(x_i) = \exp(-\langle A_ix_i, x_i\rangle),$$

όπου A_i είναι ένας $(n_i \times n_i)$-διάστατος πραγματικός συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας.

Ο Ball διατύπωσε πρώτος τη γεωμετρική μορφή της ανισότητας Brascamp-Lieb και την χρησιμοποίησε για να αποδείξει ακριβείς ανισότητες για κυρτά σώματα στον $\mathbb{R}^n$. Στη συνέχεια αυτή η ανισότητα γενικεύτηκε από τον Barthe, ενώ αργότερα οι Bennett, Carbery, Christ και Tao απέδειξαν ότι, με κατάλληλη αλλαγή μεταβλητής, μπορεί κανείς να πάρει την αρχική ανισότητα Brascamp-Lieb από τη γεωμετρική μορφή της.

Η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb μπορεί να γραφτεί σε μια ισοδύναμη μορφή, όπου το μέτρο Lebesgue αντικαθίσταται από το μέτρο Gauss.

Θεώρημα 1.2.1 (Gaussian γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb). *Υποθέτουμε ότι $n \leqslant m$ και $n_1, \ldots, n_m \leqslant n$ είναι θετικοί ακέραιοι. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$, έστω $n_i \times n$ πίνακας U_i με $U_i U_i^* = I_{n_i}$ και $p_i > 0$ ώστε*

$$U^* P^{-1} U = I_n \tag{1.10}$$

όπου $P := \mathrm{diag}(p_1 I_{n_1}, \ldots, p_n I_{n_m})$. Τότε, αν $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to [0, \infty)$, $i = 1, \ldots, m$, είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(U_i x) d\gamma_n(x) \leqslant \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{L_{p_i}(\gamma_{n_i})} \tag{1.11}$$

όπου γ_n είναι το n-διάστατο Gaussian μέτρο στον $\mathbb{R}^n$.

Θα αποδείξουμε ότι το Θεώρημα 1.1.1 (i) είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα 1.2.1. Αξίζει να σημειωθεί ότι η σχέση του Θεωρήματος 1.1.1 (ii) με την αντίστροφη ανισότητα Brascamp-Lieb δεν έχει διευκρινιστεί πλήρως.

1.3 Gaussian υπερσυσταλτότητα

Η Gaussian υπερσυσταλτότητα ανακαλύφθηκε από τον Nelson (1973) και ισχυρίζεται ότι αν οι $p, q > 1$ και $t \geqslant 0$ ικανοποιούν την $(p-1)(q-1)^{-1} \geqslant e^{-2t}$, τότε

$$\|P_t f\|_{L_q(\gamma_n)} \leqslant \|f\|_{L_p(\gamma_n)}, \tag{1.12}$$

για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, όπου $(P_t)_{t \geq 0}$ είναι η ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck. Αργότερα, ο Borell (1982) απέδειξε μια αντίστροφη ανισότητα υπερσυσταλτότητας για το μέτρο πιθανότητας Bernoulli. Το αποτέλεσμά του επεκτάθηκε από τους Mossel, Oleszkiewicz και Sen (2013) σε μια γενικότερη κατηγορία μέτρων πιθανότητας που ικανοποιούν λογαριθμικές ανισότητες Sobolev κάποιας μορφής. Στην ειδική περίπτωση του Gaussian μέτρου, το αποτέλεσμά τους ισχυρίζεται ότι αν οι $p, q < 1$ και $t \geqslant 0$ ικανοποιούν την $(1-p)(1-q)^{-1} \geqslant e^{-2t}$, τότε

$$\|P_t f\|_{L_q(\gamma_n)} \geqslant \|f\|_{L_p(\gamma_n)}, \tag{1.13}$$

για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$.

Στην τρίτη ενότητα του Κεφαλαίου 4 δείχνουμε ότι με κατάλληλα επιλεγμένους πίνακες συνδιακυμάνσεων και εκθέτες, το Θεώρημα 1.1.1 γενικεύει την Gaussian υπερσυσταλτότητα και την αντίστροφη μορφή της.

1.4 Γενίκευση της ανισότητας Young

Η ακριβής ανισότητα Young και η αντίστροφη ανισότητα Young ισχυρίζονται ότι αν f_1, f_2 είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ και οι $p, q, r > 0$ ικανοποιούν την $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$, τότε έχουμε αντίστοιχα ότι

$$\|f_1 * f_2\|_r \leqslant C^n \|f_1\|_p \|f_2\|_q \ \text{ για } p, q, r \geqslant 1 \tag{1.14}$$

και

$$\|f_1 * f_2\|_r \geqslant C^n \|f_1\|_p \|f_2\|_q \ \text{ για } p, q, r \leqslant 1, \tag{1.15}$$

όπου $C := C_p C_q / C_r$, $C_u^2 = |u|^{1/u} / |u'|^{1/u'}$ για $1/u + 1/u' = 1$.

Η ακριβής ανισότητα Young (1.14) αποδείχθηκε από τον Beckner (1975) και λίγο αργότερα από τους Brascamp και Lieb (1976). Στην εργασία τους οι Brascamp και Lieb απέδειξαν μια γενίκευση της (1.14), τη λεγόμενη ανισότητα Brascamp-Lieb. Επιπλέον, εισήγαγαν την αντίστροφη ανισότητα (1.15).

Στην τέταρτη ενότητα του Κεφαλαίου 4 αποδεικνύουμε την ακόλουθη Lebesgue εκδοχή του Θεωρήματος 1.1.1. Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι συνεπάγεται τόσο την ακριβή ανισότητα Young όσο και την αντίστροφη ανισότητα Young.

Θεώρημα 1.4.1. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_m \leqslant n$ και $p_1, \ldots, p_m \geqslant 1$ θετικοί πραγματικοί αριθμοί ώστε*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{p_i} = n. \tag{1.16}$$

Υποθέτουμε ότι U_i είναι ένας $n_i \times n$ πίνακας με τάξη n_i για $1 \leqslant i \leqslant m$. Θέτουμε $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$. Έστω U ένας $N \times n$ πίνακας με block γραμμές $U_1, \ldots, U_m$, δηλαδή $U^* = (U_1^*, \ldots, U_m^*)$. Έστω B ένας $n \times n$ πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος *πίνακας. Θέτουμε*

$$P = \operatorname{diag}(p_1 I_{n_1}, \ldots, p_m I_{n_m}),$$
$$D_{UBU^*} = \operatorname{diag}(U_1 B U_1^*, \ldots, U_m B U_m^*).$$

Για μη αρνητικές $f_i \in L_{p_i}(\mathbb{R}^{n_i})$, $i \leqslant m$ *ισχύουν τα παρακάτω.*

(i) *Αν*

$$UBU^* \leqslant PD_{UBU^*}, \tag{1.17}$$

τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x) dx \leqslant \left(\frac{\det(B)}{\prod_{i=1}^m \det(U_i B U_i^*)^{\frac{1}{p_i}}} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}. \tag{1.18}$$

Ισότητα ισχύει αν $f_i(x_i) = \exp\left(-p_i^{-1} \left\langle (U_i B U_i^*)^{-1} x_i, x_i \right\rangle\right)$ *για* $i \leqslant m$.

(ii) *Αν*

$$UBU^* \geqslant PD_{UBU^*}, \tag{1.19}$$

τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x) dx \geqslant \left(\frac{\det(B)}{\prod_{i=1}^m \det(U_i B U_i^*)^{\frac{1}{p_i}}} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}. \tag{1.20}$$

1.5 Γενίκευση του Λήμματος του Barthe

Ο Barthe χρησιμοποίησε τεχνικές μεταφοράς του μέτρου για να δώσει μια απλή απόδειξη της ακριβούς ανισότητας Young και της αντίστροφής της. Αργότερα, γενίκευσε το επιχείρημα και απέδειξε μια αντίστροφη μορφή της ανισότητας Brascamp-Lieb (1.9), γνωστή ως ανισότητα Barthe. Ο πυρήνας των εργασιών του ήταν μια ανισότητα την οποία παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε στην πρώτη ενότητα του Κεφαλαίου 5.

Πρόταση 1.5.1 (λήμμα του Barthe). *Υποθέτουμε ότι* $p, q, r \geqslant 1$ *με* $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ *και θέτουμε* $c\sqrt{r'/q'}$ *και* $s = \sqrt{r'/p'}$. *Αν* f, g, F, G *είναι συνεχείς και θετικές συναρτήσεις στον* $L_1(\mathbb{R})$ *που ικανοποιούν τις* $\int f = \int F$ *και* $\int g = \int G$, *τότε*

$$\left(\int \left(\int f^{\frac{1}{p}}(cx + sy) g^{\frac{1}{q}}(sx + cy) dx \right)^r dy \right)^{\frac{1}{r}} \tag{1.21}$$

$$\leqslant \int \left(\int F^{\frac{r}{p}}(cX - sY) G^{\frac{r}{q}}(sX + cY) dY \right)^{\frac{1}{r}} dX. \tag{1.22}$$

Στη δεύτερη ενότητα του Κεφαλαίου 5, χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.4.1, παρουσιάζουμε και αποδεικνύουμε μια γενίκευση του λήμματος του Barthe, που παράγει μια αμφίπλευρη ανισότητα ροπών. Για διευκόλυνση στο συμβολισμό, συμφωνούμε για τα ακόλουθα:

(A1) Έστω $m, n, n_1, \ldots, n_m$ θετικοί ακέραιοι. Συμβολίζουμε με U_i έναν $n_i \times n$ πίνακα με $\mathrm{rank}(U_i) = n$ για $i \leqslant m$. Θέτουμε $N = \sum_{i=1}^m n_i$ και συμβολίζουμε με U τον $N \times n$ πίνακα με block γραμμές $U_1, \ldots, U_m$.

(A2) Έστω $c_1, \ldots, c_m$ θετικοί αριθμοί και A ένας $n \times n$-διάστατος, πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Θέτουμε $A_i = U_i A U_i^*$ για $i \leqslant m$ και υποθέτουμε ότι

$$U^* C_A U = A^{-1} \tag{1.23}$$

όπου $C_A := \mathrm{diag}\left(c_1 A_1^{-1}, \ldots, c_m A_m^{-1}\right)$.

Θεώρημα 1.5.2. *Υποθέτουμε ότι τα (A1) και (A2) ισχύουν και ο W ικανοποιεί την*

$$\sqrt{C_A} U A U^* \sqrt{C_A} + W W^* = I_N.$$

Για $\rho > 0$ θέτουμε

$$\Gamma_\rho = \frac{(\det(A))^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{N-n}{2\rho}}} \prod_{i=1}^m \frac{(c_i p_i)^{\frac{n_i}{2p_i}}}{(\det(A_i))^{\frac{1}{2p_i}}}, \tag{1.24}$$

όπου

$$p_i := \frac{1}{c_i \left(1 + \frac{1-c_i}{\rho c_i}\right)}. \tag{1.25}$$

Έστω f_i μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^{n_i}$ για $i \leqslant m$. Ορίζουμε

$$F(x,y) = \prod_{i=1}^m f_i \left(U_i x + \frac{1}{\sqrt{c_i}} \sqrt{A_i} W_i y \right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}.$$

(i) *Για $\rho \geqslant 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} F^{\rho}(x,y) dy \right)^{\frac{1}{\rho}} dx \geqslant \Gamma_\rho \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i} \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y) dx \right)^{\rho} dy \right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{1.26}$$

(ii) *Για $0 < \rho \leqslant 1$,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} F^{\rho}(x,y) dy \right)^{\frac{1}{\rho}} dx \leqslant \Gamma_\rho \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y) dx \right)^{\rho} dy \right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{1.27}$$

Επιπλέον, έχουμε ισότητα στις (1.26) *και* (1.27) *αν* $\rho = 1$ (*για κάθε επιλογή των* f_i) *ή αν*

$$f_i(x) = \exp\left(-c_i\langle x, A_i^{-1}x\rangle\right), \quad x \in \mathbb{R}^{n_i} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

(*για κάθε* $\rho > 0$).

Στην τρίτη ενότητα του Κεφαλαίου 5 δίνουμε εφαρμογές του Θεωρήματος 1.5.2:

(i) Αποδεικνύουμε την ακόλουθη ανισότητα για συνελίξεις: Έστω f_1, f_2 μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$F_\lambda(x,y) = f_1\left(x + \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}y\right) f_2\left(x - \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}y\right)$$

για $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, και για $\rho > 0$ θέτουμε

$$p_1 = \frac{\rho}{(\rho-1)\lambda+1}, \;\; p_2 = \frac{\rho}{(\rho-1)(1-\lambda)+1}$$

και

$$\mathfrak{I}_\rho = \left(\frac{\lambda^{\frac{1}{p_1}}(1-\lambda)^{\frac{1}{p_2}} p_1^{\frac{1}{p_1}} p_2^{\frac{1}{p_1}}}{\rho^{\frac{2}{\rho}}}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

(i) Αν $\rho \geqslant 1$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda^{\rho}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \geqslant \mathfrak{I}_\rho \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x,y)dx\right)^{\rho} dy\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

(ii) Αν $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda^{\rho}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \leqslant \mathfrak{I}_\rho \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x,y)dx\right)^{\rho} dy\right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

(ii) Αποδεικνύουμε την ακόλουθη αναδιατύπωση της ακριβούς ανισότητας Young και της αντίστροφης ανισότητας Young. Έστω $f_1,\; f_2$ μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\lambda \in (0,1)$, θεωρούμε τους $p_1,\; p_2$ και $\mathfrak{I}_\rho$ όπως στην προηγούμενη πρόταση, και θέτουμε

$$\mathfrak{I}'_\rho = \frac{\mathfrak{I}_\rho}{(\lambda(1-\lambda))^{\frac{n}{2\rho}}}.$$

(i) Αν $\rho \geqslant 1$, τότε

$$\|f_1 * f_2\|_\rho \leqslant \mathfrak{I}'_\rho \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \leqslant \|\,(f_1{}^\rho * f_2{}^\rho)^{\frac{1}{\rho}}\,\|_1. \tag{1.28}$$

(ii) Αν, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, τότε

$$\|f_1 * f_2\|_\rho \geqslant \mathfrak{I}'_\rho \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \geqslant \|\,(f_1{}^\rho * f_2{}^\rho)^{\frac{1}{\rho}}\,\|_1. \tag{1.29}$$

(iii) Αφήνοντας το $\rho \to \infty$ στις προηγούμενες προτάσεις παίρνουμε την ανισότητα Hölder και την ανισότητα Prékopa-Leindler, η οποία είναι η συναρτησιακή μορφή της θεμελιώδους ανισότητας Brunn-Minkowski. Στην πραγματικότητα παίρνουμε την ισχυρότερη εκδοχή της ανισότητας Prékopa-Leindler, την οποία απέδειξαν οι Brascamp και Lieb (1976), η οποία εμφανίζει το essential supremum και αποφεύγει προβλήματα μετρησιμότητας.

(iv) Αποδεικνύουμε τις ακόλουθες ανισότητες εντροπίας: Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι $(A1)$ και $(A2)$ και ο W ικανοποιεί την

$$\sqrt{C_A}UAU^*\sqrt{C_A} + WW^* = I_N.$$

Αν g_i είναι πυκνότητες πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \leqslant m$, ορίζουμε

$$G(x,y) = \prod_{i=1}^m g_i(\sqrt{c_i}U_i x + W_i y). \tag{1.30}$$

Τότε,

$$D_1 \mathrm{Ent}\left(\int_{\mathbb{R}^n} G(x,\cdot)dx\right) \leqslant \sum_{i=1}^m (1-c_i)\mathrm{Ent}(g_i) + D_2 \leqslant D_1 \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Ent}\left(G(x,\cdot)\right) dx, \tag{1.31}$$

όπου

$$D_1 := \left(\frac{\prod_{i=1}^m \det(A_i)}{\det(A)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad D_2 := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (1-c_i)\log\det(A_i).$$

Παρόμοια αποτελέσματα ανακάλυψαν ανεξάρτητα σε μια εργασία τους οι Barthe και Wolff (2013) χρησιμοποιώντας ξανά μεθόδους μεταφοράς μέτρου.

1.6 Μια ανισότητα για ροπές λογαριθμικά κοίλων συναρτήσεων

Στο Κεφάλαιο 6 παρουσιάζουμε μια ισχυρή ανισότητα των Δαφνή και Παούρη για τις ροπές λογαριθμικά κοίλων συνάρτησεων Gaussian τυχαίων διανυσμάτων.

Θεώρημα 1.6.1. *Έστω $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, $g : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$ λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση, και X ένα Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$. Τότε:*

(α) *Για κάθε $0 \leqslant r \leqslant 1$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}f(\sqrt{r}X) \geqslant \big(\mathbb{E}f(X)^r\big)^{1/r} \qquad \textit{και} \qquad \mathbb{E}g(\sqrt{r}X) \leqslant \big(\mathbb{E}g(X)^r\big)^{1/r}. \tag{1.32}$$

(β) *Για κάθε $q \geqslant 1$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}f(\sqrt{q}X) \leqslant \big(\mathbb{E}f(X)^q\big)^{1/q} \qquad \textit{και} \qquad \mathbb{E}g(\sqrt{q}X) \geqslant \big(\mathbb{E}g(X)^q\big)^{1/q}. \tag{1.33}$$

Ισότητα ισχύει και στις δύο περιπτώσεις αν $r = q = 1$ ή $f(x) = g(x) = \exp(-\langle a, x\rangle + c)$, όπου $a \in \mathbb{R}^k$ και $c \in \mathbb{R}$.

Για την απόδειξη συνδυάζουμε το Θεώρημα 1.1.1 με την ανισότητα του Barthe. Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ένα αποτέλεσμα ευστάθειας για τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev. Έστω X ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$. Ορίζουμε την εντροπία μιας μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ως προς X, θέτοντας

$$\mathrm{Ent}_X(f) := \mathbb{E}|f(X)| \log |f(X)| - \mathbb{E}|f(X)| \log \mathbb{E}|f(X)|,$$

αν οι παραπάνω μέσες τιμές είναι πεπερασμένες. Η λογαριθμική ανισότητα Sobolev, η οποία αποδείχθηκε από τον Gross, ισχυρίζεται ότι αν $X \sim N(0, I_k)$ τότε

$$\mathrm{Ent}_X(|f|^2) \leqslant 2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2 \tag{1.34}$$

για κάθε $f \in L_2(\gamma_k)$. Μπορούμε φυσικά, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, να διατυπώσουμε αυτή την ανισότητα μόνο για $f \geqslant 0$. Επίσης, ο Carlen απέδειξε ότι ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η f είναι εκθετική συνάρτηση.

Από το Θεώρημα 1.6.1, εφαρμόζοντας τον τύπο Gaussian ολοκλήρωσης κατά μέρη, παίρνουμε την ακόλουθη ακριβή ανισότητα ευστάθειας για την ανισότητα του Gross, στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι λογαριθμικά κοίλη.

Θεώρημα 1.6.2. *Έστω X ένα τυπικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$ και $f = e^{-v} \in \mathcal{L}^{2,1}(\gamma_k)$, όπου $v : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή, στον φορέα της, συνάρτηση. Τότε,*

$$2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2 - \mathbb{E}f(X)^2 \Delta v(X) \leqslant \mathrm{Ent}_X(f^2) \leqslant 2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2. \tag{1.35}$$

Το Θεώρημα 1.6.2, διασφαλίζει ότι εάν μια λογαριθμική κοίλη συνάρτηση $f = e^{-v}$ είναι κοντά στο να είναι εκθετική, με την έννοια ότι η $\mathbb{E}f(X)^2 \Delta v(X)$ είναι μικρή, τότε η λογαριθμική ανισότητα Sobolev για την f είναι σχεδόν ακριβής.

1.7 Η ανισότητα Ehrhard

Ο A. Ehrhard (1983) απέδειξε την ακόλουθη ανισότητα Brunn–Minkowski για κυρτά σύνολα A, B στον $\mathbb{R}^n$:

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)), \;\; \lambda \in [0,1], \tag{1.36}$$

όπου γ_n είναι το τυπικό Gaussian μέτρο στον $\mathbb{R}^n$, δηλαδή, το μέτρο με πυκνότητα

$$(2\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2/2}$$

και Φ είναι η Gaussian συνάρτηση κατανομής (δηλ. $\Phi(x) = \gamma_1(-\infty, x)$). Επίσης, η ανισότητα γίνεται ισότητα εαν τα A και B είναι παράλληλοι ημίχωροι. Αυτό είναι ένα θεμελιώδες αποτέλεσμα για το μέτρο Gauss και έχει βρει πολλές εφαρμογές.

Την ανισότητα του Ehrhard επεξέτεινε αρχικά ο R. Latała (1996) στην περίπτωση που το ένα από τα δύο σύνολα είναι Borel και το άλλο είναι κυρτό. Ο C. Borell (2003) απέδειξε ότι ισχύει για όλα τα ζεύγη Borel συνόλων.

Θεώρημα 1.7.1 (Ehrhard-Borell). *Έστω A, B δύο σύνολα Borel στον $\mathbb{R}^n$ και έστω $\lambda \in (0,1)$. Τότε*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{1.37}$$

Ο Borell χρησιμοποίησε την ημιομάδα θερμότητας και μια αρχή μέγιστου στην απόδειξή του, η οποία στη συνέχεια αναπτύχθηκε περαιτέρω από τους Barthe και Huet (2009).

Στο Κεφάλαιο 7 παρουσιάζουμε μια απόδειξη της ανισότητας Ehrhard-Borell που έδωσαν οι Παούρης και Neeman, η οποία χρησιμοποιεί παρεμβολή κατά μήκος της ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck. Απέδειξαν επίσης μια βελτιωμένη ανισότητα Jensen για Gaussian τυχαίες μεταβλητές που παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον.

Θεώρημα 1.7.2. *Έστω $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ ανοικτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$, έστω $\Omega = \prod_{i=1}^k \Omega_i$ και $X \sim \gamma_A$. Αν $J : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη C^2 συνάρτηση, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε $x \in \Omega$, $A \odot \mathcal{E}_{d_1,\ldots,d_k}(H_J(x)) \succcurlyeq 0$.*

(β) *Για κάθε k-άδα μετρήσιμων συναρτήσεων $f_i : \mathbb{R}^{d_i} \to \Omega_i$,*

$$\mathbb{E}J(f_1(X_1), \ldots, f_k(X_k)) \geqslant J(\mathbb{E}f_1(X_1), \ldots, \mathbb{E}f_k(X_k)). \tag{1.38}$$

Στο Θεώρημα 1.7.2 γράφουμε $\odot$ για το κατά σημείο γινόμενο πινάκων, $\succcurlyeq$ για τη διάταξη θετικά ημιορισμένων πινάκων, και H_J για τον Εσσιανό πίνακα μιας συνάρτησης J.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2

Summary

The main goal of this thesis is to present results of Chen, Dafnis and Paouris which provide algebraic criteria that ensure improved Hölder and inverse Hölder inequalities for products of functions of Gaussian random vectors with arbitrary covariance structure. We will also see that these inequalities generalize classical results such as the Prékopa-Leindler inequality, the Brascamp-Lieb inequality and its inverse Barthe inequality, and we will study the geometry of eligible exponents for these inequalities. Finally, we will see how one can use these inequalities to prove the Ehrhard-Borell inequality.

2.1 Hölder inequalities for Gaussian random vectors

Let (X_1, X_2) be a centered bivariate normal random vector and $f_1, f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ be non-negative measurable functions. The question we are concerned with is to give good upper and lower bounds for the expectation

$$\mathbb{E}\left(f_1(X_1)f_2(X_2)\right).$$

Suppose that (p_1, p_2) are Hölder-conjugate exponents, namely

$$\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} = 1. \tag{2.1}$$

Regardless of the covariance of X_1 and X_2, from Hölder inequality we have that if $p_1, p_2 \geqslant 1$ then

$$\mathbb{E}\left(f_1(X_1)f_2(X_2)\right) \leqslant \left(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\right)^{1/p_2}, \tag{2.2}$$

while from the inverse Hölder inequality we have that if $0 < p_1 < 1$ and $p_2 < 0$ then

$$\mathbb{E}\left(f_1(X_1)f_2(X_2)\right) \geqslant \left(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\right)^{1/p_1}\left(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\right)^{1/p_2}. \tag{2.3}$$

Our purpose is to obtain improved upper and lower bounds which take into account the covariance of X_1, X_2 and are easy to use like Hölder inequalities.

Recall that a real symmetric $N \times N$ matrix is called positive definite (resp. semi-definite), and we write $A > 0$ (resp. $A \geqslant 0$), if for every $x \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ we have that

$$\langle Ax, x\rangle > 0 \qquad (\text{resp. } \langle Ax, x\rangle \geqslant 0),$$

where $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is the standard inner product on $\mathbb{R}^N$. If A, B are two real symmetric $N \times N$ matrices then we write $B > A$ if $B - A > 0$ and $B \geqslant A$ if $B - A \geqslant 0$.

The main theorem of the thesis is the following.

Theorem 2.1.1 (Chen-Dafnis-Paouris). *Let $m, n_1, \ldots, n_m$ be positive integers and $N = n_1 + \cdots + n_m$. Suppose that X_i is an n_i-dimensional random vector for $1 \leqslant i \leqslant m$, such that their joint law*

$$\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_m)$$

forms a centered jointly N-dimensional Gaussian random vector with covariance matrix $T = (T_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant m}$, where T_{ij} is the covariance matrix between X_i and X_j for $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Let P be the block diagonal matrix

$$P = \operatorname{diag}\left(p_1 T_{11}, \ldots, p_m T_{mm}\right).$$

For every set of non-negative measurable functions f_i on $\mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ the following statements hold.

(i) *If $T \leqslant P$, then*

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^{m} f_i\left(X_i\right) \leqslant \prod_{i=1}^{m}\left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}. \tag{2.4}$$

(ii) *If $T \geqslant P$, then*

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^{m} f_i\left(X_i\right) \geqslant \prod_{i=1}^{m}\left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}. \tag{2.5}$$

We adopt the convention that $\infty \cdot 0 = 0$ for the right-hand side of (2.4) and (2.5) whenever we are in such a situation.

In Chapter 3 we present two proofs of Theorem 2.1.1. The first one is done using Gaussian integration by parts. For the second proof we present the central interpolation argument, using the Ornstein-Uhlenbeck semigroup.

Remark 2.1.2. Suppose that $0 < \mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i} < \infty$ for $1 \leqslant i \leqslant m$ and at least one of the f_i's is not equal to a constant almost everywhere. Then we get strict inequality in (2.4) if $T < P$ and in (2.5) if $T > P$. For example, let us assume that $T > P$. This allows us to find $q_1, \ldots, q_m$ with $q_1 > p_1, \ldots, q_m > p_m$ such that $Q := \mathrm{diag}(q_1 T_{11}, \ldots, q_m T_{mm})$ satisfies $T > Q > P$. From Jensen inequality,

$$\left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{1/p_i} \leqslant \left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{q_i}\right)^{1/q_i}$$

and this inequality is strict if f_i is not a.e. a constant. So (2.5) yields

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^m f_i\left(X_i\right) \geqslant \prod_{i=1}^m \left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{q_i}\right)^{1/q_i} > \prod_{i=1}^m \left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{1/p_i}.$$

Remark 2.1.3. If the inequality (2.4) (resp. (2.5)) holds for all non-negative functions $f_1, \ldots, f_m$, then we get that $T \leqslant P$ (resp. $T \geqslant P$). We can see this using the functions $f_i(x_i) = e^{\langle \alpha_i, x_i \rangle}$ for $\alpha_i \in \mathbb{R}^{n_i}$. A direct calculation gives that for $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$,

$$\mathbb{E}\prod_{i=1}^m f_i(X_i) = \exp\left(\tfrac{1}{2}\langle T\alpha, \alpha\rangle\right) \qquad \text{and} \qquad \prod_{i=1}^m \left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}} \exp\left(\tfrac{1}{2}\langle P\alpha, \alpha\rangle\right). \tag{2.6}$$

So if (2.4) holds for all non-negative functions then we get that $\langle T\alpha, \alpha\rangle \leqslant \langle P\alpha, \alpha\rangle$ for all $\alpha \in \mathbb{R}^N$ and we conclude that $T \leqslant P$.

Similarly, if (2.5) holds for all non-negative functions, then we see that $T \geqslant P$.

Remark 2.1.4. If $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathrm{Ker}(T-P)$ for $\alpha_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, then we have equality in (2.4) and (2.5) if we consider the functions $f_i(x_i) = e^{\langle \alpha_i, x_i \rangle}$ for $1 \leqslant i \leqslant m$.

We now show that Hölder inequality and the inverse Hölder inequality follow from Theorem 2.1.1. Let (X_1, X_2) be a centered, non-degenerate, bivariate normal random vector with covariance matrix $T = (T_{ij})_{1\leqslant i,j\leqslant 2}$. Suppose that the exponents $p_1, p_2 \neq 1$ satisfy Hölder's condition (2.1). We set $P = \mathrm{diag}(p_1 T_{11}, p_2 T_{22})$. We notice that, from (2.1),

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) = 1 - (p_1 + p_2 - p_1 p_2) = 1. \tag{2.7}$$

So, if $p_1, p_2 > 1$, we have that

$$P - T = \begin{pmatrix} T_{11}(p_1 - 1) & T_{12} \\ T_{12} & T_{22}(p_2 - 1) \end{pmatrix} \geqslant 0$$

since from (2.7) we have $\det(P - T) = \det(T) \geqslant 0$. From Theorem 2.1.1 (i) we obtain Hölder inequality. Similarly, if $p_1, p_2 < 1$ then (2.7) gives us that $T - P \geqslant 0$ and then Theorem 2.1.1 (ii) implies the inverse Hölder inequality.

To see why Theorem 2.1.1 generally improves the bounds given by Hölder inequalities, suppose that $\det(T) > 0$ and that $p_1, p_2 \neq 1$ satisfy (2.1). Let f_1 and f_2 be two non-negative measurable functions such that at least one of them is not a.e. equal to a constant and let

$$0 < \big(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\big)^{1/p_1}\big(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\big)^{1/p_2} < \infty.$$

First we consider the case $p_1, p_2 > 1$. We observe that for every $1 \leqslant q_1 < p_1$ and $1 \leqslant q_2 < p_2$ we have $Q - T \geqslant 0$ if and only if $\det(Q-P) \geqslant 0$, where $Q := \operatorname{diag}(q_1T_{11}, q_2T_{22})$. We write

$$\det(Q-T) = \det(T) - \varepsilon_Q T_{11}T_{22},$$

where $\varepsilon_Q := q_1+q_2-q_1q_2$. Notice that $\varepsilon_Q \to 0$ when $q_1 \uparrow p_1$ and $q_2 \uparrow p_2$. Since $\det(T) > 0$, there exist exponents $1 \leqslant q_1 < p_1$ and $1 \leqslant q_2 < p_2$ such that $T \leqslant Q < P$, therefore Theorem 2.1.1 (i) and Hölder inequality give us

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(f_1(X_1)f_2(X_2)\big) &\leqslant \big(\mathbb{E}f_1(X_1)^{q_1}\big)^{1/q_1}\big(\mathbb{E}f_2(X_2)^{q_2}\big)^{1/q_2}\\ &< \big(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\big)^{1/p_1}\big(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\big)^{1/p_2}.\end{aligned}$$

Similarly, if $p_1, p_2 < 1$, there exist exponents $p_1 < q_1 \leqslant 1$ and $p_2 < q_2 \leqslant 1$ such that $T \geqslant Q > P$, therefore Theorem 2.1.1 (ii) and Hölder inequality again, give us

$$\begin{aligned}\mathbb{E}\big(f_1(X_1)f_2(X_2)\big) &\geqslant \big(\mathbb{E}f_1(X_1)^{q_1}\big)^{1/q_1}\big(\mathbb{E}f_2(X_2)^{q_2}\big)^{1/q_2}\\ &> \big(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_1}\big)^{1/p_1}\big(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_2}\big)^{1/p_2}.\end{aligned}$$

In other words, in both cases, the exponents q_1, q_2 improve Hölder inequality.

Example 2.1.5. Suppose that $m = 2$ and X_1, X_2 are standard normal random variables with $\mathbb{E}(X_1X_2) = t$ where $0 \leqslant t \leqslant 1$. The simplest Hölder-type bounds for $\mathbb{E}\big(f_1(X_1)f_2(X_2)\big)$ arise as follows. We notice that

$$(1-t)I_2 \leqslant T \leqslant (1+t)I_2.$$

From Theorem 2.1.1 we have that for $q_t := 1-t$ and $p_t := 1+t$,

$$\begin{aligned}\big(\mathbb{E}f_1(X_1)^{q_t}\big)^{1/q_t}\big(\mathbb{E}f_2(X_2)^{q_t}\big)^{1/q_t} &\leqslant \mathbb{E}\big(f_1(X_1)f_2(X_2)\big)\\ &\leqslant \big(\mathbb{E}f_1(X_1)^{p_t}\big)^{1/p_t}\big(\mathbb{E}f_2(X_2)^{p_t}\big)^{1/p_t}\end{aligned} \tag{2.8}$$

for any non-negative measurable functions f_1, f_2. In particular, if $t = 0$ then X_1, X_2 are independent and the three quantities in (2.8) are equal. If $t = 1$ then the left-hand side inequality is Jensen inequality and the right-hand side inequality is Cauchy-Schwarz inequality. To check that (2.8) is accurate, we observe that $(1,1) \in \mathrm{Ker}(T-(1+t)I_2)$ and $(1,-1) \in \mathrm{Ker}(T-(1-t)I_2)$. From Remark 2.1.4, the functions $f_1(x) = f_2(x) = e^x$ give us equality in the left-hand side inequality of (2.8), while the functions $f_1(x) = e^x$ and $f_2(x) = e^{-x}$ give us equality in the right-hand side inequality of (2.8).

2.2 Connection to the Brascamp-Lieb inequality

In the first section of Chapter 4 we show that the inequality (2.4) is closely related to the Brascamp-Lieb inequality, first proved by Brascamp and Lieb, and later fully generalized by Lieb. The inequality claims that if $m \geqslant n$ and $p_1, \dots, p_m \geqslant 1$ satisfy $\sum_{i=1}^m \frac{n_i}{p_i} = n$, and $U_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{n_i}$ are linear and onto mappings for $1 \leqslant i \leqslant m$, then for every non-negative $f_i \in L_{p_i}(\mathbb{R}^{n_i})$, $1 \leqslant i \leqslant m$, the ratio

$$\frac{\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x)dx}{\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}} \tag{2.9}$$

is maximized by centered Gaussian functions, i.e. functions of the form

$$f_i(x_i) = \exp(-\langle A_i x_i, x_i\rangle),$$

where A_i is an $(n_i \times n_i)$-dimensional real symmetric and positive definite matrix.

Ball first formulated the geometric form of the Brascamp-Lieb inequality and used it to prove sharp volume inequalities for convex bodies in $\mathbb{R}^n$. This inequality was then generalized by Barthe, and later Bennett, Carbery, Christ and Tao proved that, with a suitable change of variables, one can get the original Brascamp-Lieb inequality from its geometric form.

The geometric Brascamp–Lieb inequality can be written in an equivalent form, in which Lebesgue measure is replaced by Gauss measure.

Theorem 2.2.1 (Gaussian geometric Brascamp-Lieb inequality). *Suppose that $n \leqslant m$ and $n_1, \dots, n_m \leqslant n$ are positive integers. For any $i = 1, \dots, m$, let U_i be an $n_i \times n$ matrix with $U_i U_i^* = I_{n_i}$ and $p_i > 0$ such that*

$$U^* P^{-1} U = I_n \tag{2.10}$$

where $P := \mathrm{diag}(p_1 I_{n_1}, \dots, p_n I_{n_m})$. Then, if $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to [0,\infty)$, $i = 1, \dots, m$, are measurable functions, we have

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x) d\gamma_n(x) \leqslant \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L_{p_i}(\gamma_{n_i})} \tag{2.11}$$

where γ_n is the n-dimensional Gaussian measure on $\mathbb{R}^n$.

We will prove that Theorem 2.1.1 (i) is equivalent to Theorem 2.2.1. It is worth noticing that the relation of Theorem 2.1.1 (ii) with the inverse Brascamp-Lieb inequality is not fully clarified.

2.3 Gaussian hypercontractivity

The Gaussian hypercontractivity was discovered by Nelson (1973) and states that if $p, q > 1$ and $t \geqslant 0$ satisfy $(p-1)(q-1)^{-1} \geqslant e^{-2t}$, then

$$\|P_t f\|_{L_q(\gamma_n)} \leqslant \|f\|_{L_p(\gamma_n)}, \tag{2.12}$$

for every measurable function $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, where $(P_t)_{t\geq 0}$ is the Ornstein-Uhlenbeck semigroup. Later, Borell (1982) proved an inverse hypercontractivity inequality for the Bernoulli probability measure. His result was extended by Mossel, Oleszkiewicz and Sen (2013) to a more general class of probability measures that satisfy logarithmic Sobolev inequalities of some form. In the special case of Gaussian measure, their result states that if $p, q < 1$ and $t \geqslant 0$ satisfy $(1-p)(1-q)^{-1} \geqslant e^{-2t}$, then

$$\|P_t f\|_{L_q(\gamma_n)} \geqslant \|f\|_{L_p(\gamma_n)}, \tag{2.13}$$

for every measurable function f on $\mathbb{R}^n$.

In the third section of Chapter 4 we show that choosing appropriately the covariance matrix and exponents, from Theorem 2.1.1 we obtain Gaussian hypercontractivity and its inverse form.

2.4 Generalization of Young inequality

The sharp Young inequality and the inverse Young inequality state that if f_1, f_2 are non-negative measurable functions on $\mathbb{R}^n$ and $p, q, r > 0$ satisfy $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$, then we have

$$\|f_1 * f_2\|_r \leqslant C^n \|f_1\|_p \|f_2\|_q \quad \text{for } p, q, r \geqslant 1 \tag{2.14}$$

and

$$\|f_1 * f_2\|_r \geqslant C^n \|f_1\|_p \|f_2\|_q \quad \text{for } p, q, r \leqslant 1, \tag{2.15}$$

where $C := C_p C_q / C_r$, $C_u^2 = |u|^{1/u} / |u'|^{1/u'}$ for $1/u + 1/u' = 1$.

The sharp Young inequality (2.14) was proved by Beckner (1975) and shortly afterwards by Brascamp and Lieb (1976). In the latter paper, Brascamp and Lieb proved a generalization of (2.14), the so-called Brascamp-Lieb inequality. Furthermore, they introduced the inverse inequality (2.15).

In the fourth section of Chapter 4 we prove the following Lebesgue version of Theorem 2.1.1. Next, we show that it implies both the sharp Young inequality and the inverse Young inequality.

Theorem 2.4.1. *Let $m, n \in \mathbb{N}$, $n_1, \dots, n_m \leqslant n$ and $p_1, \dots, p_m \geqslant 1$ be real numbers such that*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{p_i} = n. \tag{2.16}$$

Suppose that U_i is an $n_i \times n$ matrix of rank n_i for $1 \leqslant i \leqslant m$. We set $N = \sum_{i=1}^m n_i$. Let U be the $N \times n$ matrix with block rows $U_1, \dots, U_m$, i.e., $U^* = (U_1^*, \dots, U_m^*)$. Let B be an $n \times n$ real symmetric and positive definite matrix. Set

$$\begin{aligned} P &= \operatorname{diag}(p_1 I_{n_1}, \dots, p_m I_{n_m}), \\ D_{UBU^*} &= \operatorname{diag}(U_1 B U_1^*, \dots, U_m B U_m^*). \end{aligned}$$

For non-negative $f_i \in L_{p_i}(\mathbb{R}^{n_i})$, $i \leqslant m$ the following statements hold.

(i) *If*

$$UBU^* \leqslant PD_{UBU^*}, \tag{2.17}$$

then

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(U_i x) dx \leqslant \left(\frac{\det(B)}{\prod_{i=1}^m \det(U_i B U_i^*)^{\frac{1}{p_i}}} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{p_i}. \tag{2.18}$$

Equality holds if $f_i(x_i) = \exp\left(-p_i^{-1} \left\langle (U_i B U_i^*)^{-1} x_i, x_i \right\rangle\right)$ for $i \leqslant m$.

(ii) *If*

$$UBU^* \geqslant PD_{UBU^*}, \tag{2.19}$$

then

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(U_i x) dx \geqslant \left(\frac{\det(B)}{\prod_{i=1}^m \det(U_i B U_i^*)^{\frac{1}{p_i}}} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{p_i}. \tag{2.20}$$

2.5 Generalization of Barthe's Lemma

Barthe used measure transportation techniques to give a simple proof of the sharp Young inequality and its inverse. Later, he generalized the argument and proved an inverse form of the Brascamp-Lieb inequality (2.9), known as Barthe's inequality. The core of his work was an inequality which we present and prove in the first section of Chapter 5.

Proposition 2.5.1 (Barthe's lemma). *Suppose that $p, q, r \geqslant 1$ satisfy $1/p + 1/q = 1 + 1/r$ and set $c\sqrt{r'/q'}$ and $s = \sqrt{r'/p'}$. For any continuous and positive functions f, g, F, G on $L_1(\mathbb{R})$ that satisfy $\int f = \int F$ and $\int g = \int G$, we have that*

$$\left(\int \left(\int f^{\frac{1}{p}}(cx+sy)g^{\frac{1}{q}}(sx+cy)dx\right)^r dy\right)^{\frac{1}{r}} \tag{2.21}$$

$$\leqslant \int \left(\int F^{\frac{r}{p}}(cX-sY)G^{\frac{r}{q}}(sX+cY)dY\right)^{\frac{1}{r}} dX. \tag{2.22}$$

In the second section of Chapter 6, using Theorem 2.4.1, we present and prove a generalization of Barthe's lemma, which produces a two-sided moment inequality. For notational convenience we agree on the following:

(A1) Let $m, n, n_1, \ldots, n_m$ be positive integers. Denote by U_i an $n_i \times n$ matrix with $\operatorname{rank}(U_i) = n$ for $i \leqslant m$. Set $N = \sum_{i=1}^m n_i$ and let U be the $N \times n$ matrix with block rows $U_1, \ldots, U_m$.

(A2) Let $c_1, \ldots, c_m$ be positive numbers and A be an $n \times n$-dimensional, real, symmetric and positive definite matrix. Set $A_i = U_i A U_i^*$ for $i \leqslant m$ and suppose that

$$U^* C_A U = A^{-1} \tag{2.23}$$

where $C_A := \operatorname{diag}\left(c_1 A_1^{-1}, \ldots, c_m A_m^{-1}\right)$.

Theorem 2.5.2. *Suppose that (A1) and (A2) hold and that W satisfies*

$$\sqrt{C_A} U A U^* \sqrt{C_A} + W W^* = I_N.$$

For $\rho > 0$ set

$$\Gamma_\rho = \frac{(\det(A))^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{N-n}{2\rho}}} \prod_{i=1}^m \frac{(c_i p_i)^{\frac{n_i}{2p_i}}}{(\det(A_i))^{\frac{1}{2p_i}}}, \tag{2.24}$$

where

$$p_i := \frac{1}{c_i\left(1 + \frac{1-c_i}{\rho c_i}\right)}. \tag{2.25}$$

Let f_i be non-negative measurable functions on $\mathbb{R}^{n_i}$ for $i \leqslant m$. Define

$$F(x,y) = \prod_{i=1}^m f_i\left(U_i x + \frac{1}{\sqrt{c_i}}\sqrt{A_i} W_i y\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}.$$

(i) *For* $\rho \geqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} F^{\,\rho}(x,y)dy \right)^{\frac{1}{\rho}} dx \geqslant \Gamma_\rho \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i} \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)dx \right)^{\rho} dy \right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{2.26}$$

(ii) *For* $0 < \rho \leqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} F^{\,\rho}(x,y)dy \right)^{\frac{1}{\rho}} dx \leqslant \Gamma_\rho \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)dx \right)^{\rho} dy \right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{2.27}$$

Moreover, one has equality in (2.26) *and* (2.27) *if* $\rho = 1$ *(for any choice of the* f_i*'s) or if*

$$f_i(x) = \exp\left(-c_i\langle x, A_i^{-1}x\rangle\right), \quad x \in \mathbb{R}^{n_i} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

(for any $\rho > 0$*).*

In the third section of Chapter 5 we provide applications of Theorem 2.5.2:

(i) We prove the following inequality for convolutions: Let f_1, f_2 be non-negative measurable functions on $\mathbb{R}^n$ and $\lambda \in [0,1]$. Consider the function

$$F_\lambda(x,y) = f_1\left(x + \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}y\right) f_2\left(x - \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}y\right)$$

for $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$, and for $\rho > 0$ set

$$p_1 = \frac{\rho}{(\rho-1)\lambda + 1}, \quad p_2 = \frac{\rho}{(\rho-1)(1-\lambda)+1}$$

and

$$\mathfrak{J}_\rho = \left(\frac{\lambda^{\frac{1}{p_1}}(1-\lambda)^{\frac{1}{p_2}} p_1^{\frac{1}{p_1}} p_2^{\frac{1}{p_1}}}{\rho^{\frac{2}{\rho}}} \right)^{\frac{n}{2}}.$$

(i) If $\rho \geqslant 1$, then

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda^{\,\rho}(x,y)dy \right)^{\frac{1}{\rho}} dx \geqslant \mathfrak{J}_\rho \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2}$$
$$\geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x,y)dx \right)^{\rho} dy \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

(ii) If $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, then

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda^{\ \rho}(x,y)dy \right)^{\frac{1}{\rho}} dx \leqslant \mathfrak{J}_\rho \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2}$$
$$\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x,y)dx \right)^{\rho} dy \right)^{\frac{1}{\rho}}.$$

(ii) We prove the following reformulation of the sharp Young inequality and the inverse Young inequality. Let $f_1,\ f_2$ be non-negative measurable functions on $\mathbb{R}^n$. For any $\lambda \in (0,1)$, let $p_1,\ p_2$ and $\mathfrak{J}_\rho$ be as in the previous proposition, and set

$$\mathfrak{J}'_\rho = \frac{\mathfrak{J}_\rho}{(\lambda(1-\lambda))^{\frac{n}{2\rho}}}.$$

(i) If $\rho \geqslant 1$, then

$$\|f_1 * f_2\|_\rho \leqslant \mathfrak{J}'_\rho \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \leqslant \| \left(f_1^{\ \rho} * f_2^{\ \rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \|_1. \tag{2.28}$$

(ii) If, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, then

$$\|f_1 * f_2\|_\rho \geqslant \mathfrak{J}'_\rho \|f_1\|_{p_1} \|f_2\|_{p_2} \geqslant \| \left(f_1^{\ \rho} * f_2^{\ \rho}\right)^{\frac{1}{\rho}} \|_1. \tag{2.29}$$

(iii) Letting $\rho \to \infty$ in the previous proposition we get Hölder inequality and Prékopa-Leindler inequality, which is the functional form of the fundamental Brunn-Minkowski inequality. In fact, we get the stronger version of the Prékopa-Leindler inequality, proved by Brascamp and Lieb (1976), which involves the essential supremum and avoids measurability problems.

(iv) We prove the following entropy inequalities: Assume that $(A1)$ and $(A2)$ hold and that W satisfies

$$\sqrt{C_A} U A U^* \sqrt{C_A} + WW^* = I_N.$$

Let g_i be probability densities on $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \leqslant m$, and define

$$G(x,y) = \prod_{i=1}^{m} g_i(\sqrt{c_i} U_i x + W_i y). \tag{2.30}$$

Then,

$$D_1 \mathrm{Ent} \left(\int_{\mathbb{R}^n} G(x,\cdot) dx \right) \leqslant \sum_{i=1}^{m} (1-c_i) \mathrm{Ent}(g_i) + D_2 \leqslant D_1 \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Ent}\left(G(x,\cdot)\right) dx, \tag{2.31}$$

where

$$D_1 := \left(\frac{\prod_{i=1}^m \det(A_i)}{\det(A)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{and} \quad D_2 := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (1-c_i) \log\det(A_i).$$

Similar results were independently discovered by Barthe and Wolff (2013) again using measure transportation methods.

2.6 An inequality for moments of log-concave functions

In Chapter 6 we present a strong inequality of Dafnis and Paouris for the moments of log-concave functions of Gaussian random vectors.

Theorem 2.6.1. *Let $k \in \mathbb{N}$, let $f : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$ be a log-concave function, let $g : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$ be a log-convex function, and let X be a Gaussian random vector on $\mathbb{R}^k$. Then:*

(i) *For every $0 \leqslant r \leqslant 1$ we have that*

$$\mathbb{E}f(\sqrt{r}X) \geqslant \big(\mathbb{E}f(X)^r\big)^{1/r} \qquad \textit{and} \qquad \mathbb{E}g(\sqrt{r}X) \leqslant \big(\mathbb{E}g(X)^r\big)^{1/r}. \tag{2.32}$$

(ii) *For every $q \geqslant 1$ we have that*

$$\mathbb{E}f(\sqrt{q}X) \leqslant \big(\mathbb{E}f(X)^q\big)^{1/q} \qquad \textit{and} \qquad \mathbb{E}g(\sqrt{q}X) \geqslant \big(\mathbb{E}g(X)^q\big)^{1/q}. \tag{2.33}$$

Equality holds in both cases if $r = q = 1$ or $f(x) = g(x) = \exp(-\langle a, x\rangle + c)$, where $a \in \mathbb{R}^k$ and $c \in \mathbb{R}$.

For the proof we combine Theorem 2.1.1 with Barthe's inequality. Next we prove a stability result for the logarithmic Sobolev inequality. Let X be a random vector on $\mathbb{R}^k$. We define the entropy of a measurable function $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ in terms of X, setting

$$\mathrm{Ent}_X(f) := \mathbb{E}|f(X)| \log|f(X)| - \mathbb{E}|f(X)| \log \mathbb{E}|f(X)|,$$

if the expectations above are finite. The logarithmic Sobolev inequality, which was proved by Gross, states that if $X \sim N(0, I_k)$ then

$$\mathrm{Ent}_X(|f|^2) \leqslant 2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2 \tag{2.34}$$

for every $f \in L_2(\gamma_k)$. Without loss of generality we may of course formulate this inequality only for $f \geqslant 0$. Carlen proved that equality holds if and only if f is an exponential function.

From Theorem 2.6.1, applying the Gaussian integration by parts formula, we obtain the following sharp stability inequality for Gross's inequality, in the case where the function is log-concave.

Theorem 2.6.2. *Let X be a standard Gaussian random vector on $\mathbb{R}^k$ and $f = e^{-v} \in \mathcal{L}^{2,1}(\gamma_k)$, where $v : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ is a convex, on its support, function. Then,*

$$2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2 - \mathbb{E}f(X)^2 \Delta v(X) \leqslant \mathrm{Ent}_X(f^2) \leqslant 2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2. \tag{2.35}$$

Theorem 2.6.2 ensures that if a logarithmically concave function $f = e^{-v}$ is close to being exponential, in the sense that $\mathbb{E}f(X)^2\Delta v(X)$ is small, then the logarithmic Sobolev inequality for f is almost sharp.

2.7 Ehrhard's inequality

Ehrhard (1983) proved the following Brunn–Minkowski inequality for convex sets A, B on $\mathbb{R}^n$:

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)), \quad \lambda \in [0,1], \tag{2.36}$$

where γ_n is the standard Gaussian measure on $\mathbb{R}^n$, that is, the measure with density

$$(2\pi)^{-n/2}e^{-|x|^2/2}$$

and Φ is the Gaussian distribution function (i.e. $\Phi(x) = \gamma_1(-\infty, x)$). Also, this inequality becomes equality if A and B are parallel half-spaces. This is a fundamental result for the Gaussian measure and has found many applications.

Ehrhard's inequality was first extended by R. Latała (1996) to the case where one of the two sets is Borel and the other one is convex. Finally, Borell (2003) proved that it holds for all pairs of Borel sets.

Theorem 2.7.1 (Ehrhard-Borell). *Let A, B be two Borel sets in $\mathbb{R}^n$ and $\lambda \in (0,1)$. Then*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{2.37}$$

Borell used the heat semigroup and a maximum principle in his proof; this approach was then further developed by Barthe and Huet (2009).

In Chapter 7 we present a proof of the Ehrhard-Borell inequality given by Paouris and Neeman, which uses interpolation along the Ornstein-Uhlenbeck semigroup. They also proved an improved Jensen inequality for Gaussian random variables, which is of independent interest.

Theorem 2.7.2. *Let* $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ *be open intervals on* $\mathbb{R}$*, let* $\Omega = \prod_{i=1}^k \Omega_i$ *and* $X \sim \gamma_A$*. If* $J : \Omega \to \mathbb{R}$ *is a bounded* C^2 *function then the following are equivalent:*

(i) *For every* $x \in \Omega,\ A \odot \mathcal{E}_{d_1,\ldots,d_k}(H_J(x)) \succcurlyeq 0$*.*

(ii) *For every* k*-tuple of measurable functions* $f_i : \mathbb{R}^{d_i} \to \Omega_i$*,*

$$\mathbb{E}J(f_1(X_1), \ldots, f_k(X_k)) \geqslant J(\mathbb{E}f_1(X_1), \ldots, \mathbb{E}f_k(X_k)). \tag{2.38}$$

In Theorem 2.7.2 we write $\odot$ for the pointwise product of matrices, $\succcurlyeq$ for the order of positive semi-definite matrices, and H_J for the Hessian matrix of a function J.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3

Ανισότητες Hölder για Gaussian τυχαία διανύσματα

Στο κεφάλαιο αυτό θα παρουσιάσουμε δύο αποδείξεις για το Θεώρημα 1.1.1, το οποίο μας δίνει μια ενισχυμένη μορφή της γνωστής ανισότητας Hölder καθώς και μια ενισχυμένη μορφή της αντίστροφης ανισότητας Hölder. Η πρώτη απόδειξη χρησιμοποιεί τον τύπο Gaussian ολοκλήρωσης κατά μέρη, τον οποίο αποδεικνύουμε στην πρώτη ενότητα του κεφαλαίου. Η δεύτερη απόδειξη βασίζεται στην ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck. Αποδεικνύουμε αρχικά κάποιες βασικές ιδιότητές της και στη συνέχεια τις χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε το θεώρημα.

3.1 Gaussian ολοκλήρωση κατά μέρη

Έστω g μια Gaussian τυχαία μεταβλητή με διασπορά $\mathbb{E}g^2 = \sigma^2$. Συμβολίζουμε με ϕ τη συνάρτηση πυκνότητας

$$\phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\nu}} \exp\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right). \tag{3.1}$$

της g. Σημειώνουμε ότι $x\phi(x) = -\sigma^2\phi'(x)$. Επομένως, αν $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ είναι μια συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση, ολοκληρώνοντας κατά μέρη έχουμε

$$\begin{aligned}\mathbb{E}F(g) &= \int xF(x)\phi(x)dx \\ &= -\sigma^2 \int F'(x)\phi(x)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + \sigma^2 \int F'(x)\phi(x)dx \\ &= \sigma^2 \int F'(x)\phi(x)dx = \sigma^2\mathbb{E}F'(g)\end{aligned}$$

αν υποθέσουμε ότι $\lim\limits_{x\to\pm\infty} F(x)\phi(x) = 0$ και ότι τα ολοκληρώματα και στα δύο μέλη είναι πεπερασμένα. Έπεται ότι

$$\mathbb{E}gF(g) = \mathbb{E}g^2\mathbb{E}F'(g). \tag{3.2}$$

Αυτός ο υπολογισμός γενικεύεται στα Gaussian τυχαία διανύσματα ως εξής.

Έστω $g = (g_\ell)_{1\leqslant \ell\leqslant n}$ ένα Gaussian τυχαίο διάνυσμα. Για κάθε συνεχώς διαφορίσιμη συνάρτηση

$$F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$$

που ικανοποιεί κάποιες απλές συνθήκες αυξητικότητας (τις οποίες θα συζητήσουμε παρακάτω), θα δείξουμε πώς μπορούμε να ολοκληρώσουμε την $\mathbb{E}g_1F(g)$ κατά μέρη. Αν $\sigma^2 = \mathbb{E}g_1^2 > 0$ τότε το Gaussian διάνυσμα $\hat{g} = (\hat{g}_\ell)_{1\leqslant \ell\leqslant n}$ που ορίζεται από τη σχέση

$$\hat{g}_\ell = g_\ell - \lambda_\ell g_1 \text{ όπου } \lambda_\ell = \frac{\mathbb{E}g_1g_\ell}{\sigma^2} \tag{3.3}$$

είναι ανεξάρτητο από την g_1, αφού η συνδιακύμανση

$$\mathbb{E}g_1\hat{g}_\ell = \mathbb{E}g_1g_\ell - \lambda_\ell\sigma^2 = 0.$$

Αν ορίσουμε $\lambda = (\lambda_\ell)_{1\leqslant \ell\leqslant n}$ τότε μπορούμε να γράψουμε $g = \hat{g} + g_1\lambda$. Αν συμβολίσουμε με $\mathbb{E}_1$ τη μέση τιμή ως προς g_1 μόνο για ένα σταθερό $\hat{g}$, τότε χρησιμοποιώντας την (3.1) βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}_1g_1F(g) = \mathbb{E}_1g_1F(\hat{g} + g_1\lambda) = \sigma^2\mathbb{E}_1\frac{\partial F}{\partial t}(\hat{g} + t\lambda)\Big|_{t=g_1} \tag{3.4}$$

αν υποθέσουμε ότι για κάθε $\hat{g}$ ισχύει $\lim_{t\to\pm\infty} F(\hat{g} + t\lambda)\phi(t) = 0$ και ότι τα δύο μέλη της (3.4) είναι πεπερασμένα, κάτι που μπορούμε να εξασφαλίσουμε επιβάλλοντας κάποιες ήπιες συνθήκες αυξητικότητας στην F και τις μερικές παράγώγους της (δείτε παρακάτω). Αν υποθέσουμε ότι οι

$$g_1F(\hat{g} + g_1\lambda) \text{ και } \frac{\partial F}{\partial x}(\hat{g} + t\lambda)\Big|_{t=g_1}$$

είναι απολύτως ολοκληρώσιμες τότε, ολοκληρώνοντας την (3.4) ως προς $\hat{g}$, από το θεώρημα Fubini έχουμε

$$\mathbb{E}g_1 F(g) = \sigma^2 \mathbb{E}\frac{\partial F}{\partial t}(\hat{g} + t\lambda)\Big|_{t=g_1}. \tag{3.5}$$

Τέλος, αν υπολογίσουμε την παράγωγο, έχουμε

$$\frac{\partial F}{\partial t}(\hat{g} + t\lambda)\Big|_{t=g_1} = \sum_{\ell \leqslant n} \lambda_\ell \frac{\partial F}{\partial x_\ell}(\hat{g} + g_1\lambda) = \sum_{\ell \leqslant n} \lambda_\ell \frac{\partial F}{\partial x_\ell}(g), \tag{3.6}$$

και η (3.5) παίρνει τη μορφή

$$\mathbb{E}g_1 F(g) = \sum_{\ell \leqslant n} \mathbb{E}(g_1 g_\lambda)\mathbb{E}\frac{\partial F}{\partial x_\ell}(g).$$

Αυτός ο τύπος ονομάζεται τύπος Gaussian ολοκλήρωσης κατά μέρη.

Οι συνθήκες που χρησιμοποιήσαμε για την απόδειξη του τύπου συνήθως επαληθεύονται εύκολα στις εφαρμογές. Για παράδειγμα, αρκεί να έχουμε το πολύ εκθετική αυξητικότητα της F και των μερικών παραγώγων της. Αν υποθέσουμε ότι

$$|F(x)| \leqslant c_1 e^{c_2|x|}$$

όπου $|x|$ είναι η Ευκλείδεια νόρμα του x και ότι, για κάθε $1 \leqslant \ell \leqslant n$,

$$\text{είτε} \quad \left|\frac{\partial F}{\partial x_\ell}(x)\right| \leqslant c_1 e^{c_2|x|} \;\; \text{ή} \;\; \mathbb{E}(g_1 g_\ell) = 0$$

τότε δεν είναι δύσκολο να δούμε ότι όλες οι παραπάνω υποθέσεις ικανοποιούνται. Όταν $\mathbb{E}(g_1 g_\ell) = 0$, τότε η μερική παράγωγος $\frac{\partial F}{\partial x_\ell}$ δεν εμφανίζεται στην (3.6), συνεπώς δεν χρειάζεται να κάνουμε κάποια υπόθεση για την αυξητικότητά της.

3.2 Πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1

Έστω $m, n_1, \ldots, n_m$ θετικοί ακέραιοι και $N = n_1 + \cdots + n_m$. Υποθέτουμε ότι X_i είναι ένα n_i-διάστατο τυχαίο διάνυσμα για $1 \leqslant i \leqslant m$ και ότι η κοινή τους κατανομή

$$\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_m)$$

σχηματίζει ένα κεντραρισμένο από κοινού N-διάστατο Gaussian τυχαίο διάνυσμα με πίνακα συνδιακυμάνσεων $T = (T_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, όπου T_{ij} είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων μεταξύ των X_i και X_j για $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Έστω P ο block διαγώνιος πίνακας

$$P = \operatorname{diag}(p_1 T_{11}, \ldots, p_m T_{mm}).$$

Κάνοντας μια αλλαγή μεταβλητής μπορούμε να υποθέσουμε, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, ότι

$$T_{11} = I_{n_1}, \ldots, T_{mm} = I_{n_m}.$$

Δηλαδή, κάθε X_i είναι ένα n_i-διάστατο τυπικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα, Θέτουμε $A = T - P$. Ξεκινάμε με ένα λήμμα το οποίο είναι το βασικό τεχνικό συστατικό της απόδειξης.

Λήμμα 3.2.1. *Έστω $L_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, m$, πραγματικές συναρτήσεις με τις πρώτες τέσσερις μερικές παραγώγους τους ομοιόμορφα φραγμένες. Ορίζουμε ϕ : $[0,1] \to \mathbb{R}$ με*

$$\phi(u) = \log \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^m L_i(\sqrt{u}X_i)\right)\right)$$

και $\phi_i : [0,1] \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant m$, με

$$\phi_i(u) = \frac{1}{p_i} \log \mathbb{E}\left(\exp(p_i L_i(\sqrt{u}X_i))\right),$$

όπου στην περίπτωση που $p_i = 0$ θέτουμε $\phi_i(u) = \mathbb{E}(L_i(\sqrt{u}X_i))$. Αν $A \leqslant 0$ τότε

$$\phi(u) \leqslant \sum_{i=1}^m \phi_i(u) + Ku^2, \tag{3.7}$$

ενώ αν $A \geqslant 0$ τότε

$$\phi(u) \geqslant \sum_{i=1}^m \phi_i(u) - Ku^2, \tag{3.8}$$

όπου $K > 0$ είναι μια σταθερά που εξαρτάται μόνο από τις $\|\cdot\|_\infty$-νόρμες των πρώτων τεσσάρων μερικών παραγώγων των $L_1, \ldots, L_m$.

Απόδειξη. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ γράφουμε $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}$ και συμβολίζουμε με $\partial_{x_{ij}} L_i(x_i)$ τη μερική παράγωγο της L_i ως προς x_{ij}. Χρησιμοποιώντας τη σχέση

$$\mathbb{E}(X_{ij}X_{ij'}) = \delta_{j,j'}$$

που ισχύει για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$ και $1 \leqslant j, j' \leqslant n_i$, κάνοντας Gaussian ολοκλήρωση κατά μέρη και παίρνοντας υπ' όψιν μας την $T_{ii} = I_{n_i}$, έχουμε

$$\begin{aligned}
\phi'(u) &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{1}{\exp(\phi(u))} \mathbb{E} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \partial_{x_{ij}} L_i(\sqrt{u} X_i) \exp \left(\sum_{k=1}^{m} L_k(\sqrt{u} X_k) \right) \right) \\
&= \frac{1}{2\exp(\phi(u))} \left(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{E} \partial^2_{x_{ij}} L_i(\sqrt{u} X_i) \exp \left(\sum_{k=1}^{m} L_k(\sqrt{u} X_k) \right) \right. \\
&\qquad + \sum_{i,i'=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{j'=1}^{n_{i'}} \mathbb{E}(X_{ij} X_{i'j'}) \\
&\qquad\qquad \left. \mathbb{E} \partial_{x_{ij}} L_i(\sqrt{u} X_i) \partial_{x_{i'j'}} L_{i'}(\sqrt{u} X_{i'}) \exp \left(\sum_{k=1}^{m} L_k(\sqrt{u} X_k) \right) \right)
\end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned}
\phi_i'(u) &= \frac{1}{2\sqrt{u}} \frac{1}{\exp(p_i \phi_i(u))} \mathbb{E} \left(\sum_{j=1}^{n_i} X_{ij} \partial_{x_{ij}} L_i(\sqrt{u} X_i) \exp(p_i L_i(\sqrt{u} X_i)) \right) \\
&= \frac{1}{2\exp(p_i \phi_i(u))} \sum_{j=1}^{n_i} \mathbb{E} (\partial^2_{x_{ij}} L_i(\sqrt{u} X_i) + p_i (\partial_{x_{ij}} L_i(\sqrt{u} X_i))^2) \exp(p_i L_i(\sqrt{u} X_i)).
\end{aligned}$$

Άρα,

$$\begin{aligned}
\phi'(0) - \sum_{i=1}^{m} \phi_i'(0) &= \frac{1}{2} \sum_{i,i'=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} \sum_{j'=1}^{n_{i'}} \mathbb{E}(X_{ij} X_{i'j'}) \partial_{x_{ij}} L_i(0) \partial_{x_{i'j'}} L_{i'}(0) \\
&\qquad - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n_i} p_i (\partial_{x_{ij}} L_i(0))^2 \\
&= \frac{1}{2} \langle AV, V \rangle,
\end{aligned} \tag{3.9}$$

όπου

$$V = (\partial_{x_{11}} L_1(0), \ldots, \partial_{x_{1n_1}} L_1(0), \ldots, \partial_{x_{m1}} L_m(0), \ldots, \partial_{x_{mn_m}} L_m(0)).$$

Με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας Gaussian ολοκλήρωση κατά μέρη, μπορούμε να κάνουμε αντίστοιχο υπολογισμό και να εκφράσουμε τις δεύτερες παραγώγους των $\phi, \phi_1, \ldots, \phi_m$ συναρτήσει των πρώτων τεσσάρων μερικών παραγώγων των $L_1, \ldots, L_m$. Από την υπόθεση ότι οι $L_1, \ldots, L_m$ έχουν τις πρώτες τέσσερις μερικές παραγώγους τους φραγμένες, βλέπουμε ότι

$$\sup_{0 \leqslant u \leqslant 1} \left| \phi''(u) - \sum_{i=1}^{m} \phi''(0) \right| \leqslant K$$

για κάποια θετική σταθερά K. Χρησιμοποιώντας αυτή την ανισότητα, την (3.9) και το γεγονός ότι

$$\phi(0) = \sum_{i=1}^{m} \phi_i(0),$$

συμπεραίνουμε από το θεώρημα μέσης τιμής ότι αν $A \leqslant 0$ τότε

$$\begin{aligned} \phi(u) - \sum_{i=1}^{m} \phi_i(u) &\leqslant \phi(0) - \sum_{i=1}^{m} \phi_i(0) + \left(\phi'(0) - \sum_{i=1}^{m} \phi_i'(0)\right) u + Ku^2 \\ &= 0 + \frac{1}{2}\langle AV, V\rangle u + Ku^2 \\ &\leqslant Ku^2, \end{aligned}$$

απ' όπου προκύπτει η (3.7). Όμοια, αν $A \geqslant 0$ παίρνουμε την (3.8), και αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1. Για να αποφύγουμε τετριμμένες περιπτώσεις, υποθέτουμε ότι καμία από τις f_i δεν είναι ταυτοτικά μηδενική και ότι κανένας από τους T_{ii} δεν είναι ο μηδενικός πίνακας. Αρχικά θεωρούμε την περίπτωση που

$$f_1 = \exp(L_1), \ldots, f_m = \exp(L_m),$$

και οι $L_1, \ldots, L_m$ ορίζονται στους $\mathbb{R}^{n_1}, \ldots, \mathbb{R}^{n_m}$ αντίστοιχα και έχουν ομοιόμορφα φραγμένες μερικές παραγώγους όλων των τάξεων. Ορίζουμε

$$\phi(u, x_1, \ldots, x_m) = \log \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^{m} L_i(x_i + \sqrt{u}X_i)\right)\right)$$

και

$$\phi_i(u, x_i) = \frac{1}{p_i} \log \mathbb{E}\left(\exp(p_i L_i(x_i + \sqrt{u}X_i))\right),$$

για $u \in [0,1]$ και $x_i = (x_{i1}, \ldots, x_{in_i}) \in \mathbb{R}^{n_i}$, όπου στην περίπτωση $p_i = 0$ θέτουμε $\phi_i = \mathbb{E}(L_i(x_i + \sqrt{u}X_i))$. Αφού οι πρώτες τεσσερις μερικές παράγωγοι των $L_1, \ldots, L_m$ είναι ομοιόμορφα φραγμένες, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον τύπο της Gaussian ολοκλήρωσης κατά μέρη, όπως στην απόδειξη του Λήμματος 3.2.1 και να ελέγξουμε ότι υπάρχει μια σταθερά $K > 0$ ανεξάρτητη από τα $u, x_1, \ldots, x_m$ ώστε οι τέσσερις πρώτες μερικές παράγωγοι των $\phi_1(u, x_1 + \cdot), \ldots, \phi_m(u, x_m + \cdot)$ να είναι ομοιόμορφα φραγμένες από K. Έστω ότι K' είναι η σταθερά που παίρνουμε εφαρμόζοντας την

(3.7) στις $\phi_1(u, x_1+\cdot), \ldots, \phi_m(u, x_m+\cdot)$ αντί για τις $L_1, \ldots, L_m$, δηλαδή η K' ικανοποιεί την

$$\log \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^m \phi_i(u, x_i+\sqrt{v}X_i)\right)\right) \leqslant \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}\log \mathbb{E}\left(\exp(p_i\phi_i(u, x_i+\sqrt{v}X_i)\right) + K'v^2. \tag{3.10}$$

Παρατηρήστε ότι η K' εξαρτάται μόνο από την K.

Θα δείξουμε ότι για κάθε $M\in\mathbb{N}$, και για κάθε $1\leqslant j\leqslant M$,

$$\phi\left(\frac{j}{M}, x_1, \ldots, x_m\right) \leqslant \sum_{i=1}^m \phi_i\left(\frac{j}{M}, x_i\right) + \frac{K'j}{M^2}. \tag{3.11}$$

Αφού $\phi_i(0,\cdot) = L_i(\cdot)$ για $1\leqslant i\leqslant m$, η περίπτωση $j=1$ προκύπτει αν θέσουμε $u=0$ και $v=1/M$ στην (3.10). Υποθέτουμε ότι η (3.11) ισχύει για κάποιον $1\leqslant j\leqslant M-1$. Γράφουμε

$$\phi\left(\frac{j+1}{M}, x_1, \ldots, x_m\right) = \log \mathbb{E}\left(\exp\left(\phi\left(\frac{j}{M}, x_1+\frac{X_1}{\sqrt{M}}, \ldots, x_m+\frac{X_m}{\sqrt{M}}\right)\right)\right).$$

Από την επαγωγική υπόθεση και την (3.10) με $u=j/M$ και $v=1/M$, έχουμε

$$\begin{aligned}
&\phi\left(\frac{j+1}{M}, x_1, \ldots, x_m\right) \\
&\quad\leqslant \log \mathbb{E}\left(\exp\left(\sum_{i=1}^m \phi_i\left(\frac{j}{M}, x_i+\frac{X_i}{\sqrt{M}}\right)\right)\right) + \frac{K'j}{M^2} \\
&\quad\leqslant \sum_{i=1}^m \frac{1}{p_i}\log \mathbb{E}\left(\exp\left(p_i\phi_i\left(\frac{j}{M}, x_i+\frac{X_i}{\sqrt{M}}\right)\right)\right) + \frac{K'}{M^2} + \frac{K'j}{M^2} \\
&\quad= \sum_{i=1}^m \phi_i\left(\frac{j+1}{M}, x_i\right) + \frac{K'(j+1)}{M^2}.
\end{aligned}$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού. Τώρα, θέτοντας $j=M$ και παίρνοντας $x_1, \ldots, x_m$ τα μηδενικά διανύσματα στην (3.11), και αφήνοντας το $M\to\infty$, παίρνουμε την (1.4) στην περίπτωση που $f_1 = \exp(L_1), \ldots, f_m = \exp(L_m)$. Με παρόμοιο επιχείρημα παίρνουμε και την (1.5) σε αυτή την περίπτωση.

Θεωρούμε τώρα τη γενική περίπτωση όπου οι $f_1, \ldots, f_m$ είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Σημειώνουμε ότι, σε ό,τι ακολουθεί, αν $p=0$ τότε το $(\mathbb{E}f(Y)^p)^{1/p}$

θα θεωρείται ίσο με $\exp(\mathbb{E}(\log f(Y)))$ και η τελευταία ποσότητα είναι καλά ορισμένη. Αρχικά, υποθέτουμε ότι για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i} < \infty \text{ αν } p_i \neq 0 \text{ και } \mathbb{E}(\log f_i(X_i)) > -\infty \text{ αν } p_i = 0. \tag{3.12}$$

Με αυτή την υπόθεση, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, μπορούμε να κάνουμε την πρόσθετη υπόθεση ότι $1/2 \leqslant f_1, \ldots, f_m \leqslant 1$. Θέτουμε

$$f_{i,j} = \frac{1}{2}\mathbf{1}_{([-j,j]^{n_i})^c} + f_i \mathbf{1}_{[-j,j]^{n_i}}.$$

Αφού $f_{i,j} \uparrow f_i$ καθώς το $j \to \infty$, μπορούμε επιπλέον να υποθέσουμε, από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, ότι $f_i = 1/2$ στο $([-1,1]^{n_i})^c$ και $1/2 \leqslant f_i \leqslant 1$ στο $[-1,1]^{n_i}$. Παίρνοντας κατάλληλη συνέλιξη με εξομαλυντές, κατασκευάζουμε μια ακολουθία παραγωγίσιμων συναρτήσεων $(g_{i,j})_{j\geqslant 1}$ που ικανοποιεί τις $g_{i,j} = 1/2$ στο $([-3/2,3/2]^{n_i})^c$, $1/2 \leqslant g_{i,j} \leqslant 1$ στο $[-3/2,3/2]^{n_i}$, και συγκλίνει στην f_i σχεδόν παντού ως προς το μέτρο Lebesgue. Συνεπώς, με αυτή την κατασκευή,

$$\begin{aligned} \lim_{j\to\infty} (\mathbb{E}g_{i,j}(X_i)^{p_i})^{1/p_i} &= (\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i}, \\ \lim_{j\to\infty} \mathbb{E}\prod_{i=1}^m g_{i,j}(X_i) &= \mathbb{E}\prod_{i=1}^m f_i(X_i). \end{aligned} \tag{3.13}$$

Θέτουμε $L_{i,j} = \log g_{i,j}$. Τότε, οι $L_{i,j}$ έχουν ομοιόμορφα φραγμένες παραγώγους όλων των τάξεων και $g_{i,j} = \exp(L_{i,j})$. Από το πρώτο μέρος του επιχειρήματος και από την (3.13) παίρνουμε τις (1.4) και (1.5).

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, μένει να εξετάσουμε την περίπτωση που η (3.12) δεν ισχύει για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. Θέτουμε

$$\begin{aligned} I &= \{i : p_i > 0, \mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i} = \infty\}, \\ I' &= \{i : p_i > 0, \mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i} < \infty\}, \\ J &= \{i : p_i \leqslant 0, \mathbb{E}\log f_i(X_i) = -\infty \text{ αν } p_i = 0 \text{ και } \mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i} = \infty \text{ αν } p_i < 0\}, \\ J' &= \{i : p_i \leqslant 0, \mathbb{E}\log f_i(X_i) > -\infty \text{ αν } p_i = 0 \text{ και } \mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i} < \infty \text{ αν } p_i < 0\}. \end{aligned}$$

Παρατηρούμε ότι $I \cup I' \cup J \cup J' = \{1, \ldots, m\}$ και $I \cup J \neq \varnothing$. Στην περίπτωση που $P \geqslant T$ έχουμε $p_1, \ldots, p_m \geqslant 1$. Αυτό σημαίνει ότι $I \neq \varnothing$ και $J = \varnothing = J'$. Άρα,

$$\prod_{i=1}^m (\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i} = \prod_{i\in I} (\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i} \cdot \prod_{i\in I'} (\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i} = \infty,$$

απ' όπου έπεται η (1.4). Υποθέτουμε τώρα ότι $P \leqslant T$. Αν $J \neq \varnothing$, παρατηρώντας ότι $(\mathbb{E} f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i} = 0$ για κάθε $i \in J$ παίρνουμε

$$\prod_{i=1}^{m} (\mathbb{E} f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i} = \prod_{i \in I \cup I' \cup J'} (\mathbb{E} f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i} \cdot \prod_{i \in J} (\mathbb{E} f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i} = 0$$

και έπεται η (1.5). Έστω ότι $J = \varnothing$. Τότε $I \neq \varnothing$ και $\{1, \ldots, m\} = I \cup I' \cup J'$. Παρατηρούμε ότι $\mathbb{E}(f_i(X_i) \wedge M)^{p_i} < \infty$ για κάθε $M > 0$ και κάθε $i \in I$. Εφαρμόζοντας την προηγούμενη περίπτωση (3.12) στις $(f_i \wedge M)_{i \in I}$ και $(f_i)_{i \in I' \cup J'}$ παίρνουμε

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \prod_{i \in I} (f_i(X_i) \wedge M) \cdot \prod_{i \in I' \cup J'} f_i(X_i) & \\ \geqslant \prod_{i \in I} (\mathbb{E}(f_i(X_i) \wedge M)^{p_i})^{1/p_i} \cdot \prod_{i \in I' \cup J'} (\mathbb{E} f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i}. & \end{aligned}$$

Από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης, αφήνοντας το $M \to \infty$ παίρνουμε

$$\prod_{i=1}^{m} \mathbb{E} f_i(X_i) \geqslant \prod_{i \in I} (\mathbb{E} f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i} \cdot \prod_{i \in I' \cup J'} (\mathbb{E} f_i(X_i)^{p_i})^{1/p_i} = \infty,$$

το οποίο μας δίνει την (1.5). Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

3.3 Ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck

Ορισμός 3.3.1 (ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck). Η ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck ορίζεται στον $L_p(\gamma_n)$ ως εξής: Για κάθε $f \in L_p(\gamma_n)$ και για κάθε $t \geqslant 0$ ορίζουμε

$$(P_t f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-t} x + \sqrt{1 - e^{-2t}}\, y\right) d\gamma_n(y). \tag{3.14}$$

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η $(P_t)_{t \geqslant 0}$ είναι καλά ορισμένη και ότι για κάθε $t \geqslant 0$ ο τελεστής $P_t : L_p(\gamma_n) \to L_p(\gamma_n)$ είναι συστολή.

Πρόταση 3.3.2. *Έστω $p \geqslant 1$ και $t \geqslant 0$. Αν $f \in L_p(\gamma_n)$ τότε $P_t f \in L_p(\gamma_n)$ και*

$$\|P_t f\|_p \leqslant \|f\|_p .$$

Θα χρειαστούμε ένα λήμμα.

Λήμμα 3.3.3. *Έστω $\theta \in \mathbb{R}$ και $\phi_\theta : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ η απεικόνιση*

$$\phi_\theta(x, y) = \cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y.$$

Τότε,

$$(\gamma_n \otimes \gamma_n) \circ \phi_\theta^{-1} = \gamma_n.$$

Απόδειξη. Θεωρούμε τον γραμμικό μετασχηματισμό $T : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ που έχει ως πίνακα τον

$$A = \begin{pmatrix} \cos\theta \cdot I_n & \sin\theta \cdot I_n \\ -\sin\theta \cdot I_n & \cos\theta \cdot I_n \end{pmatrix}.$$

Παρατηρούμε ότι ο A είναι ορθογώνιος και ότι

$$T(x,y) = (\cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y, \cos\theta \cdot y - \sin\theta \cdot x) = (\phi_\theta(x,y), \cos\theta \cdot y - \sin\theta \cdot x).$$

Τότε, για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$,

$$\begin{aligned}(\gamma_n \otimes \gamma_n) \circ \phi_\theta^{-1}(B) &= \gamma_n \otimes \gamma_n \left(\phi_\theta^{-1}(B)\right) = \gamma_n \otimes \gamma_n \left(T^{-1}(B \times \mathbb{R}^n)\right) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2n}{2}}} \int_{T^{-1}(B\times\mathbb{R}^n)} e^{-|(x,y)|^2/2} d(x,y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{-|(x,y)|^2/2} \mathbf{1}_{B\times\mathbb{R}^n} \circ T d(x,y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{-|T^{-1}(x,y)|^2/2} \mathbf{1}_{B\times\mathbb{R}^n} d(x,y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2n}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n} e^{-|(x,y)|^2/2} \mathbf{1}_{B\times\mathbb{R}^n} d(x,y) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{2n}{2}}} \int_{B\times\mathbb{R}^n} e^{-|(x,y)|^2/2} d(x,y) \\ &= \gamma_{2n}(B \times \mathbb{R}^n) = \gamma_n(B)\gamma_n(\mathbb{R}^n) = \gamma_n(B),\end{aligned}$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τον τύπο αλλαγής μεταβλητής, λαμβάνοντας υπ' όψιν μας το ότι ο T είναι ορθογώνιος και συνεπώς $|\det T| = 1$, καθώς και το ότι $|T(x,y)| = |T^{-1}(x,y)| = |(x,y)|$ για κάθε $(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Ελέγξαμε ότι για κάθε $B \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^n)$ ισχύει ότι $(\gamma_n \otimes \gamma_n) \circ \phi_\theta^{-1}(B) = \gamma_n(B)$, και αυτό αποδεικνύει το ζητούμενο. $\square$

Απόδειξη της Πρότασης 3.3.2. Εξηγούμε πρώτα την περίπτωση $p = 1$. Έστω $t \geqslant 0$. Παρατηρούμε ότι

$$(e^{-t})^2 + (\sqrt{1-e^{-2t}})^2 = 1,$$

οπότε υπάρχει $\theta \in \mathbb{R}$ ώστε $e^{-t} = \cos\theta$ και $\sqrt{1-e^{-2t}} = \sin\theta$. Συνεπώς, αν $f \in L_1(\gamma_n)$, χρησιμοποιώντας τη σχέση $\gamma_n = (\gamma_n \otimes \gamma_n) \circ \phi^{-1}$ του Λήμματος 3.3.3 γράφουμε

$$\begin{aligned}+\infty > \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| d\gamma_n(z) &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} |f(\cos\theta \cdot x + \sin\theta \cdot y)|\, d\gamma_n(y) d\gamma_n(x) \qquad (3.15)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(e^{-t} \cdot x + \sqrt{1-e^{-2t}} \cdot y)\right| d\gamma_n(y) d\gamma_n(x),\end{aligned}$$

απ' όπου έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left| f(e^{-t} \cdot x + \sqrt{1 - e^{-2t}} \cdot y) \right| d\gamma_n(y) < +\infty$$

γ_n-σχεδόν για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε ότι το παραπάνω ισχύει για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τότε, έχουμε

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-t} \cdot x + \sqrt{1 - e^{-2t}} \cdot y\right) d\gamma_n(y) \in \mathbb{R}^n$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. Τέλος, από την (3.15) παίρνουμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} |P_t f(x)| d\gamma_n(x) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)| d\gamma_n(z) < +\infty,$$

άρα $P_t f \in L_1(\gamma_n)$ και $\|P_t f\|_1 \leqslant \|f\|_1$.

Έστω τώρα ότι $p > 1$ και $t > 0$. Τότε, αν $f \in L_p(\gamma_n)$ από το Λήμμα 3.3.3 έχουμε ότι

$$+\infty > \int_{\mathbb{R}^n} |f(z)|^p d\gamma_n(z) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) \right|^p d\gamma_n(y) d\gamma_n(x). \tag{3.16}$$

Επομένως, η

$$x \mapsto \int_{\mathbb{R}^n} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) \right|^p d\gamma_n(y)$$

είναι ολοκληρώσιμη. Τώρα, από την ανισότητα Hölder και την (3.16) παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\|P_t f\|_p^p &\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) \right| d\gamma_n(x) \right)^p d\gamma_n(y) \\
&\leqslant \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) \right|^p d\gamma_n(x) \right) d\gamma_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} \left| f\left(e^{-t}x + \sqrt{1 - e^{-2t}}y\right) \right|^p d\gamma_n(x) d\gamma_n(y) \\
&= \|f\|_p^p < +\infty.
\end{aligned}$$

Έπεται ότι $P_t f \in L_p(\gamma_n)$ και $\|P_t f\|_p \leqslant \|f\|_p$. □

Χρησιμοποιώντας πάλι το Λήμμα 3.3.3 δείχνουμε ότι το μέτρο Gauss είναι αναλλοίωτο ως προς την $(P_t)_{t \geqslant 0}$.

Πρόταση 3.3.4. *Για κάθε $f \in L_1(\gamma_n)$ και $t \geqslant 0$ ισχύει ότι*

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_t f d\gamma_n = \int_{\mathbb{R}^n} f d\gamma_n.$$

Απόδειξη. Παρατηρούμε ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(z)d\gamma_n(z) = \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-t}\cdot x + \sqrt{1-e^{-2t}}\cdot y\right) d\gamma_n(y)d\gamma_n(x)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n} P_t f(x) d\gamma_n(x)$$

από το Λήμμα 3.3.3. □

Η επόμενη πρόταση δείχνει ότι η $(P_t)_{t\geqslant 0}$ είναι όντως ημιομάδα τελεστών.

Πρόταση 3.3.5. *Για κάθε* $t,s\geqslant 0$ *ισχύει* $P_{t+s} = P_t\circ P_s$. *Επίσης,* $P_0 f = f$.

Απόδειξη. Έστω $f\in L_1(\gamma_n)$ και $t,s>0$. Τότε,

$$P_t(P_s f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} P_s f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) d\gamma_n(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f\Big(e^{-s}(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y) + \sqrt{1-e^{-2s}}z\Big)d\gamma_n(z)d\gamma_n(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f\Big(e^{-(s+t)}x + e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}y + \sqrt{1-e^{-2s}}z\Big)d\gamma_n(z)d\gamma_n(y)$$
$$= \int_{\mathbb{R}^n}\int_{\mathbb{R}^n} f\Big(e^{-(s+t)}x + \sqrt{1-e^{-2(t+s)}}\Big(\frac{e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}}{\sqrt{1-e^{-2(t+s)}}}y + \frac{\sqrt{1-e^{-2s}}}{\sqrt{1-e^{-2(t+s)}}}z\Big)\Big)$$
$$d\gamma_n(z)d\gamma_n(y).$$

Παρατηρούμε ότι

$$\left(\frac{e^{-s}\sqrt{1-e^{-2t}}}{\sqrt{1-e^{-2(t+s)}}}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{1-e^{-2s}}}{\sqrt{1-e^{-2(t+s)}}}\right)^2 = 1.$$

Οπότε, όπως πριν, παίρνουμε ότι

$$P_t(P_s f)(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(e^{-(s+t)}x + \sqrt{1-e^{-2(t+s)}}w)d\gamma_n(w) = P_{s+t}f(x).$$

Τέλος, αν $t=0$ ή $s=0$ τότε το αποτέλεσμα είναι άμεσο, αφού

$$P_0 f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x)d\gamma_n(y) = f(x),$$

για κάθε $x\in\mathbb{R}^n$. □

Σημείωση: Με $C_b^k(\mathbb{R}^n)$ συμβολίζουμε την κλάση όλων των $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ που έχουν φραγμένες και συνεχείς μερικές παραγώγους έως και k-οστής τάξης.

Πρόταση 3.3.6 (βασικές ιδιότητες). *Η ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck* $(P_t)_{t\geqslant 0}$ *έχει τις ακόλουθες ιδιότητες:*

(i) *Για κάθε φραγμένη και συνεχή* f *έχουμε ότι*

$$P_\infty f = \lim_{t\to\infty} P_t f = \int f d\gamma_n.$$

(ii) *Για κάθε* $t \geqslant 0$ *έχουμε ότι*

$$(P_t(fg))^2 \leqslant P_t(f^2)\cdot P_t(g^2).$$

(iii) *Αν* $f \leqslant g$ *τότε* $P_t f \leqslant P_t g$.

(iv) *Για κάθε* f, g *και* $\alpha, b \in \mathbb{R}$ *έχουμε ότι*

$$P_t(\alpha f + bg) = \alpha P_t(f) + bP_t(g).$$

(v) $P_t(1) \equiv 1$ *για κάθε* $t \geqslant 1$.

Απόδειξη. (i) Έχουμε ότι

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) d\gamma_n(y).$$

Τώρα, $\lim_{t\to\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) = f(y)$ από τη συνέχεια της f, και αφού η f είναι φραγμένη συνάρτηση, εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{t\to\infty} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) d\gamma_n(y) = \int_{\mathbb{R}^n} f(y) d\gamma_n(y).$$

(ii) Για κάθε $t \geqslant 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned}(P_t(fg)(x))^2 &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) g\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) d\gamma_n(y)\right)^2 \\ &\leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) d\gamma_n(y)\right) \\ &\qquad\qquad \times \left(\int_{\mathbb{R}^n} g^2\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right) d\gamma_n(y)\right) \\ &= P_t(f^2)P_t(g^2)\end{aligned}$$

εφαρμόζοντας την ανισότητα Cauchy-Schwarz.

(iii) και (iv) Ελέγχονται άμεσα από τον ορισμό.

(v) Παρατηρούμε ότι

$$P_t(1) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1} d\gamma_n(y) = \gamma_n(\mathbb{R}^n) = 1$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$. □

Πρόταση 3.3.7. *Αν ορίσουμε* $P_t(g_1, \ldots, g_n) = (P_t(g_1), \ldots, P_t(g_n))$ *τότε για κάθε* $t \geqslant 0$ *έχουμε*

$$\nabla P_t(f) = e^{-t} P_t(\nabla f),$$

όπου $f \in C_b^1(\mathbb{R}^n)$.

Απόδειξη. Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_t f}{\partial x_i}(x) &= \lim_{h \to 0} \frac{P_t f(x + he_i) - P_t f(x)}{h} \\
&= \lim_{h \to 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f\left(e^{-t}(x + he_i) + \sqrt{1 - e^{-2t}} y\right) - f\left(e^{-t} x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y\right)}{h} d\gamma_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{h \to 0} \frac{f\left(e^{-t}(x + he_i) + \sqrt{1 - e^{-2t}} y\right) - f\left(e^{-t} x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y\right)}{h} d\gamma_n(y) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} e^{-t} \frac{\partial f}{\partial x_i} \left(e^{-t} x + \sqrt{1 - e^{-2t}} y\right) d\gamma_n(y) \\
&= e^{-t} P_t \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x),
\end{aligned}$$

από το γενικευμένο θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης, αφού η ∇f είναι φραγμένη, σε χώρο πιθανότητας. Συνεπώς,

$$\nabla (P_t f) = e^{-t} \left(P_t \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}\right), \cdots, P_t \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}\right)\right) = e^{-t} P_t (\nabla f),$$

που είναι το ζητούμενο. □

Ορισμός 3.3.8. Στον $C_b^2(\mathbb{R}^n)$ ορίζουμε τον γεννήτορα L της ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck από τη σχέση

$$Lf(x) = \lim_{t \to 0^+} \frac{P_t f(x) - f(x)}{t},$$

όπου $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$ και $x \in \mathbb{R}^n$.

Πρόταση 3.3.9. *Ο L είναι καλά ορισμένος και ικανοποιεί τα παρακάτω:*
(i) *Για κάθε $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$ έχουμε*

$$(Lf)(x) = \triangle f(x) - \langle x, \nabla f(x) \rangle$$

και από αυτόν τον τύπο έπεται ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} Lfg d\gamma_n = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\gamma_n.$$

(ii) *Για κάθε $t \geqslant 0$,*

$$\frac{d}{dt}(P_t f) = LP_t f = P_t Lf.$$

(iii) *Αν ορίσουμε $F^{(t)}(x) = F(t,x) := \log P_t f(x)$ τότε*

$$\frac{\partial F^{(t)}}{\partial t}(x) = LF^{(t)}(x) + \left| \nabla F^{(t)}(x) \right|^2,$$

όπου με $|x|$ συμβολίζουμε την Ευκλείδεια νόρμα του διανύσματος x.

Απόδειξη. Έστω $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$ και $x \in \mathbb{R}^n$.
(i) Για κάθε $t > 0$ και $h \neq 0$ έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &\frac{P_{t+h}f(x) - P_t f(x)}{h} \\ &\qquad = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{f\left(e^{-(t+h)}x + \sqrt{1-e^{-2(t+h)}}y\right) - f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)}{h} d\gamma_n(y) \end{aligned}$$

και

$$\begin{aligned} &\lim_{h\to 0} \frac{f\left(e^{-(t+h)}x + \sqrt{1-e^{-2(t+h)}}y\right) - f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right)}{h} \\ &= -\left\langle \nabla f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right), e^{-t}x \right\rangle + \left\langle \nabla f\left(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}y\right), \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y \right\rangle \\ &= g(t,y). \end{aligned}$$

Τώρα θεωρώντας $0 < t_1 < t_2 < \infty$ αφού η ∇f είναι φραγμένη υπάρχουν $M_1, M_2 > 0$ ώστε $|g(t,y)| \leqslant M_1 + M_2 \sum_{i=1}^n |y_i|$ για κάθε $t_1 \leqslant t \leqslant t_2$ και για κάθε $y \in \mathbb{R}^n$, και

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(M_1 + M_2 \sum_{i=1}^n |y_i| \right) d\gamma_n(y) < +\infty.$$

Συνεπώς, από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης έχουμε

$$\begin{aligned}\lim_{h\to 0}\frac{P_{t+h}f(x)-P_tf(x)}{h} &= -\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle \nabla f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right), e^{-t}x\right\rangle d\gamma_n(y)\\ &\quad+\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle \nabla f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right), \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right\rangle d\gamma_n(y).\end{aligned}$$

Επομένως για να δείξουμε ότι ο L είναι καλά ορισμένος αρκεί να δείξουμε ότι υπάρχει το όριο της τελευταίας ποσότητας όταν $t\to 0^+$. Προφανώς,

$$\begin{aligned}&\lim_{t\to 0^+}\int_{\mathbb{R}^n}-\left\langle \nabla f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right), e^{-t}x\right\rangle d\gamma_n(y)\\ &\qquad= -\int_{\mathbb{R}^n}\langle \nabla f(x), x\rangle\, d\gamma_n(y) = -\langle f(x), x\rangle,\end{aligned}$$

αφού $f\in L_2(\gamma_n)$ και η ∇f είναι φραγμένη. Για τον δεύτερο όρο του δεξιού μέλους έχουμε ότι

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle \nabla f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right), \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right\rangle d\gamma_n(y)\\ &\quad= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle \nabla f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right), \frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}y\right\rangle e^{-|y|^2/2}dy\\ &\quad= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\left\langle \nabla f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}}, ye^{-|y|^2/2}\right\rangle dy\\ &\quad= \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\langle \nabla K_t(y), \nabla h(y)\rangle\, dy,\end{aligned}$$

όπου

$$K_t(y) = f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\frac{e^{-2t}}{\sqrt{1-e^{-2t}}} \quad \text{και} \quad h(y)=\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}e^{-|y|^2/2}.$$

Έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}\langle \nabla K_t(y), \nabla h(y)\rangle\, dy = \int_{\mathbb{R}^n}\Delta K_t(y)e^{-|y|^2/2}dy¨,$$

και

$$\Delta K_t(y) = \sum_{i=1}^n\frac{\partial^2}{\partial y_i^2}f\left(e^{-t}x+\sqrt{1-e^{-2t}}y\right)\longrightarrow \sum_{i=1}^n\frac{\partial^2 f}{\partial y_i^2}(x) = \Delta f(x)$$

όταν $t\to 0^+$. Οπότε, εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης παίρνουμε τελικά ότι

$$\begin{aligned}\frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta K_t(y)e^{-|y|^2/2}dy &\longrightarrow \frac{1}{(2\pi)^{n/2}}\int_{\mathbb{R}^n}\Delta f(x)e^{-|y|^2/2}dy\\ &= \Delta f(x)\int_{\mathbb{R}^n}\mathbf{1}d\gamma_n(y) = \Delta f(x).\end{aligned}$$

Άρα, πράγματι ο L είναι καλά ορισμένος και

$$Lf(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x) \rangle .$$

Από αυτή τη σχέση, με εφαρμογή του τύπου του Green, βλέπουμε ότι για κάθε $f, g \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$

$$\int_{\mathbb{R}^n} Lf \cdot g d\gamma_n = -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla f, \nabla g \rangle d\gamma_n.$$

(ii) Για $t > 0$ έχουμε

$$\frac{d}{dt} P_t f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P_{t+h} f(x) - P_t f(x)}{h} = \lim_{h \to 0} P_t \left(\frac{P_h(x) - f(x)}{h} \right) = P_t \left(Lf(x) \right),$$

αφού $f \in C_b^2(\mathbb{R}^n)$. Υπολογίζοντας το ίδιο όριο με διαφορετικό τρόπο, παίρνουμε

$$\frac{d}{dt} P_t f(x) = \lim_{h \to 0} \frac{P_h \left(P_t \right) f(x) - P_t f(x)}{h} = L \left(P_t f(x) \right)$$

και συνεπώς έχουμε τη ζητούμενη ιδιότητα. □

3.4 Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1

Όπως και στην πρώτη απόδειξη του θεωρήματος, υποθέτουμε χωρίς περιορισμό της γενικότητας ότι

$$T_{11} = I_{n_1}, \ldots, T_{mm} = I_{n_m}.$$

Θεωρούμε την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck $(P_t)_{t \geqslant 0}$. Αρχικά δείχνουμε το επόμενο θεώρημα.

Θεώρημα 3.4.1. *Έστω $m \geqslant n$ και $n_1, \ldots, n_m \leqslant n$ θετικοί ακέραιοι, και έστω $N = n_1 + \cdots + n_m$. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ θεωρούμε $n_i \times n$ πίνακες U_i με $U_i U_i^* = I_{n_i}$, τον $N \times n$ πίνακα U που έχει block σειρές $U_1, \ldots, U_m$ και τον $N \times N$ διαγώνιο πίνακα D με μη μηδενικά διαγώνια στοιχεία,*

$$D = \operatorname{diag} \left(d_1 I_{n_1}, \ldots, d_m I_{n_m} \right).$$

Αν $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ είναι μη αρνητικές Lebesgue μετρήσιμες συναρτήσεις, τότε έχουμε:

(i) *Αν $UU^* \leqslant D^{-1}$ τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x) d\gamma_n(x) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x_i)^{1/d_i} d\gamma_{n_i}(x_i) \right)^{d_i}. \tag{3.17}$$

(ii) *Αν* $UU^* \geqslant D^{-1}$ *τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x) d\gamma_n(x) \geqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x_i)^{1/d_i} d\gamma_{n_i}(x_i) \right)^{d_i}. \tag{3.18}$$

Απόδειξη. Όπως και στην πρώτη απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1, υποθέτουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι οι f_i είναι ομαλές και ομοιόμορφα φραγμένες από πάνω και μακριά από το 0 στον $\mathbb{R}^n$. Για $1 \leqslant i \leqslant m$ ορίζουμε

$$F_i^{(t)}(x_i) = \log P_t f_i(x_i) \qquad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}.$$

Για $t \in [0, \infty)$ ορίζουμε

$$\alpha(t) := \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m P_t f_i(U_i x)^{d_i} d\gamma_n(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \exp\left(\sum_{i=1}^m d_i F_i^{(t)}(U_i x) \right) d\gamma_n(x).$$

Σημειώνουμε ότι από την Πρόταση 3.3.6 (i) και την Πρόταση 3.3.5 έχουμε ότι

$$\lim_{t\to\infty} \alpha(t) = \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i d\gamma_{n_i} \right)^{d_i} \quad \text{και } \alpha(0) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x)^{d_i} d\gamma_n(x).$$

Έτσι, αρκεί να δείξουμε ότι αν ικανοποιείται η υπόθεση $UU^* \leqslant D^{-1}$ (αντίστοιχα, $UU^* \geqslant D^{-1}$) τότε η $\alpha(t)$ είναι αύξουσα (αντίστοιχα, φθίνουσα). Για τον σκοπό αυτό, υπολογίζουμε την παράγωγο

$$\alpha'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^m d_i \left(LF_i^{(t)}(U_i x) + \left| \nabla F_i^{(t)}(U_i x) \right|^2 \right) \exp\left(\sum_{i=1}^m d_i F_i^{(t)}(U_i x) \right) d\gamma_n(x),$$

όπου χρησιμοποιήσαμε την Πρόταση 3.3.9 (iii) στον $\mathbb{R}^{n_i}$ για κάθε $i = 1, \ldots, m$. Σταθεροποιούμε το t και θέτουμε $F_i = F_i^{(t)}$ και $H_i = F_i \circ U_i$. Αφού $U_i U_i^* = I_{n_i}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned} LH_i(x) &= \triangle H_i(x) - \langle x, \nabla H_i(x) \rangle \\ &= \triangle F_i(U_i x) - \langle U_i x, \nabla F_i(U_i x) \rangle \\ &= LF_i(U_i x). \end{aligned}$$

Έτσι, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την n-διάστατη ολοκλήρωση κατά μέρη (Πρόταση 3.3.9 (ii)) για τις συναρτήσεις $H_i(x)$ και $G(x) := \exp\left(\sum_{i=1}^m d_i F_i(U_i x)\right)$ και παίρνουμε, για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} LF_i(U_ix)G(x)d\gamma_n(x) &= \int_{\mathbb{R}^n} LH_i(x)G(x)d\gamma_n(x)\\ &= -\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla H_i(x), \nabla G(x)\rangle d\gamma_n(x)\\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{j=1}^m d_j \left\langle \nabla F_i(U_ix), U_iU_j^* \nabla F_j(U_jx)\right\rangle \exp\left(\sum_{i=1}^m d_iF_i(U_ix)\right) d\gamma_n(x).\end{aligned}$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned}\alpha'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(-\sum_{i=1}^m\sum_{j=1}^m d_id_j \left\langle \nabla F_i(U_ix), U_iU_j^*\nabla F_j(U_jx)\right\rangle\\ + \sum_{i=1}^m d_i \left|\nabla F_i(U_ix)\right|^2 \Big) \exp\left(\sum_{i=1}^m d_iF_i(U_ix)\right) d\gamma_n(x)\end{aligned}$$

ή ισοδύναμα

$$\alpha'(t) = \int_{\mathbb{R}^n} \Big(-\Big|\sum_{i=1}^m d_iU_i^*\nabla F_i(U_ix)\Big|^2 + \sum_{i=1}^m d_i \left|\nabla F_i(U_ix)\right|^2 \Big) \exp\Big(\sum_{i=1}^m d_iF_i(U_ix)\Big) d\gamma_n(x).$$

Αυτό συνεπάγεται ότι η απόδειξη θα ολοκληρωθεί αν δείξουμε ότι

(i) $UU^* \leqslant D^{-1}$ αν και μόνο αν

$$\left|\sum_{i=1}^m d_iU_i^*\xi_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^m d_i \left|\xi_i\right|^2, \forall \xi_i \in \mathbb{R}^{n_i}. \tag{3.19}$$

(ii) $UU^* \geqslant D^{-1}$ αν και μόνο αν

$$\left|\sum_{i=1}^m d_iU_i^*\xi_i\right|^2 \geqslant \sum_{i=1}^n d_i \left|\xi_i\right|^2, \forall \xi_i \in \mathbb{R}^{n_i}. \tag{3.20}$$

Για να ελέγξουμε την (3.19) γράφουμε $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^N$ με $\xi_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ και τότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned} UU^* \leqslant D^{-1} &\iff \langle UU^*x, x\rangle \leqslant \left\langle D^{-1}x, x\right\rangle, \forall x \in \mathbb{R}^N\\ (x = D\xi) &\iff \langle UU^*D\xi, D\xi\rangle \leqslant \langle \xi, D\xi\rangle, \forall \xi \in \mathbb{R}^N\\ &\iff \left|U^*D\xi\right|^2 \leqslant \langle \xi, D\xi\rangle, \forall \xi \in \mathbb{R}^N\\ &\iff \left|\sum_{i=1}^m d_iU_i^*\xi_i\right|^2 \leqslant \sum_{i=1}^m d_i|\xi_i|^2, \forall \xi_i \in \mathbb{R}^{n_i}.\end{aligned}$$

Όμοια ελέγχεται και η (3.20). □

Στη συνέχεια, δείχνουμε ότι το Θεώρημα 1.1.1 προκύπτει από το Θεώρημα 3.4.1. Για τον σκοπό αυτό, διατυπώνουμε και αποδεικνύουμε ένα βασικό αποτέλεσμα της Γραμμικής Άλγεβρας.

Λήμμα 3.4.2. *Έστω n, N θετικοί ακέραιοι. Έστω T ένας $N \times N$ συμμετρικός και θετικά ημιορισμένος πίνακας με $\mathrm{rank}(T) = n$. Τότε, υπάρχει ένας $N \times n$ πίνακας $U = U(T)$ με $\mathrm{rank}(U) = \mathrm{rank}(T) = n$ ώστε $T = UU^*$. Επιπλέον, ο U ορίζεται μονοσήμαντα έως έναν ορθογώνιο μετασχηματισμό.*

Απόδειξη. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_N$ οι ιδιοτιμές του $T^2 = T^*T = TT^*$, αριθμημένες έτσι ώστε $\lambda_1 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n > 0 = \lambda_{n+1} = \ldots = \lambda_N$ και έστω $v_1, \ldots, v_N$ τα αντίστοιχα ιδιοδιανύσματα. Θεωρούμε τους $N \times N$ πίνακες $V = (v_1, \ldots, v_N)$ και $L = \mathrm{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, 0, \ldots, 0)$. Είναι γνωστό ότι ο T αναπαρίσταται ως

$$T = VLV^* = \left(V\sqrt{L})(V\sqrt{L}\right)^* =: V_L V_L^*$$

όπου $V_L := V\sqrt{L}$. Γράφουμε

$$\begin{aligned} V_L &= (v_1, \ldots, v_N)\mathrm{diag}\left(\sqrt{\lambda_1}, \ldots, \sqrt{\lambda_n}, 0, \ldots, 0\right) \\ &= \left(\sqrt{\lambda_1}v_1 \ldots \sqrt{\lambda_n}v_n \mathbb{O}_{N\times 1} \ldots \mathbb{O}_{N\times 1}\right) \\ &= \begin{pmatrix} u_1 & \mathbb{O}_{1\times(N-n)} \\ \vdots & \vdots \\ u_N & \mathbb{O}_{1\times(N-n)} \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} U & \mathbb{O}_{N\times(N-n)} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

και έτσι

$$T = V_L V_L^* \left(\langle u_i, u_j\rangle\right) = UU^*,$$

όπου U είναι ο $N \times n$ πίνακας με γραμμές $u_1, \ldots, u_N$.

Για τη μοναδικότητα του U, χρειάζεται να δείξουμε ότι αν V είναι ένας $N \times n$ πίνακας με $VV^* = T = UU^*$ τότε $\Phi U^* = V^*$ για κάποιον $\Phi \in O(n)$, ορθογώνιο μετασχηματισμό στον $\mathbb{R}^n$. Αν γράψουμε $v_1, \ldots, v_N$ για τις γραμμές του V έχουμε ότι

$$\mathbb{R}^n = \mathrm{span}\{u_1, \ldots, u_N\} = \mathrm{span}\{v_1, \ldots, v_N\}.$$

Ορίζουμε τη γραμμική απεικόνιση $\Phi : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ με $\Phi u_i = v_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, N$ ή ισοδύναμα $\Phi U^* = V^*$. Με αυτή την κατασκευή είναι εύκολο να δούμε ότι $\Phi \in O(n)$. Πράγματι, από τον ορισμό,

$$\langle \Phi u_i, \Phi u_j\rangle = \langle v_i, v_j\rangle = \langle u_i, u_j\rangle$$

για $1 \leqslant i, j \leqslant N$, και έτσι

$$\langle \Phi x, \Phi x \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \langle \Phi u_i, \Phi u_j \rangle = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} \alpha_i \alpha_j \langle u_i, u_j \rangle = \langle x, x \rangle$$

για κάθε $x = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i u_i \in \mathbb{R}^n$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη. □

Δεύτερη απόδειξη του Θεωρήματος 1.1.1. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα p_i είναι μη μηδενικά και ότι $T_{11} = I_{n1}, \ldots, T_{mn} = I_{nm}$. Θέτουμε $n = \mathrm{rank}(T)$. Από το Λήμμα 3.4.2 υπάρχει ένας $N \times n$ πίνακας U ώστε $T = UU^*$. Συμβολίζουμε με $u_1^i, \ldots, u_{n_i}^i$ τις γραμμές του U_i και με U τον $N \times n$ πίνακες με block γραμμές $U_1, \ldots, U_m$. Αφού

$$T = UU^* = \left(U_i U_j^*\right)_{i,j \leqslant m},$$

έχουμε ότι $U_i U_i^* = T_{ii} = I_{ni}$ για $1 \leqslant i \leqslant m$. Από την άλλη πλευρά, παρατηρούμε ότι τα $(X_{ij} : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n_i)$ και $\left(\langle Z, u_j^i \rangle : 1 \leqslant i \leqslant m, 1 \leqslant j \leqslant n_i\right)$ είναι ισοκατανεμημένα, όπου Z είναι ένα n-διάστατο τυπικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα. Άρα,

$$X = \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} \overset{d}{=} \begin{pmatrix} U_1 Z \\ \vdots \\ U_m Z \end{pmatrix} = UZ.$$

Έτσι, έχουμε ότι

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^{m} f_i(X_i) = \mathbb{E} \prod_{i=1}^{m} f_i(U_i Z) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(U_i x) d\gamma_n(x).$$

Τώρα, το Θεώρημα 1.1.1 έπεται άμεσα από το Θεώρημα 3.4.1. □

Παρατήρηση 3.4.3. Αντίστροφα, από το Θεώρημα 1.1.1 μπορούμε να πάρουμε το Θεώρημα 3.4.1. Πράγματι, αν U και D είναι οι πίνακες που ορίζονται στο Θεώρημα 3.4.1, τότε οι $T = UU^*$ και $P = D^{-1}$ ικανοποιούν τις υποθέσεις του Θεωρήματος 1.1.1. Εφαρμόζοντάς το και δουλεύοντας όπως στην προηγούμενη απόδειξη, παίρνουμε το Θεώρημα 3.4.1.

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4

Ανισότητα Brascamp-Lieb και Gaussian υπερσυσταλτότητα

Σε αυτό το κεφάλαιο μελετάμε διασυνδέσεις του πρώτου μέρους του Θεωρήματος 1.1.1 με γνωστές ανισότητες. Αρχικά θα δείξουμε ότι το πρώτο μέρος του Θεωρήματος 1.1.1 είναι ουσιαστικά μια αναδιατύπωση της γεωμετρικής ανισότητας Brascamp-Lieb για μέτρα Gauss. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε κάποιες γεωμετρικές ιδιότητες των επιλέξιμων εκθετών στο Θεώρημα 1.1.1 (i). Τέλος, θα δείξουμε ότι το Θεώρημα 1.1.1 γενικεύει την Gaussian υπερσυσταλτότητα και την αντίστροφη μορφή της.

4.1 Ανισότητα Brascamp-Lieb

Η γενική διατύπωση της ανισότητας Brascamp-Lieb είναι η ακόλουθη.

Θεώρημα 4.1.1 (ανισότητα Brascamp-Lieb). *Έστω $m \in \mathbb{N}$, $p_j \geqslant 1$, $n_j \in \mathbb{N}$ για $j = 1, \ldots, m$ με $\sum_{j=1}^m n_j/p_j = n$ και $g_j \in L_{p_j}(\mathbb{R}^{n_j})$ με $g_j \geqslant 0$. Αν $B_j : \mathbb{R}^{n_j} \to \mathbb{R}^{n_j}$ είναι γραμμικές και επί απεικονίσεις για κάθε $j = 1, 2, \ldots, m$, τέτοιες ώστε*

$$\bigcap_{j=1}^{m} \mathrm{Ker}(B_j) = \{0\},$$

τότε

$$\left\| \prod_{j=1}^{m} g_j\,(B_j x) \right\|_{L_1(\mathbb{R}^n)} \leqslant D^{-1/2} \prod_{j=1}^{m} \|g_j\|_{L_{p_j}(\mathbb{R}^{n_j})}$$

όπου

$$D = \inf \left\{ \frac{\det(\sum_{j=1}^m c_j B_j^t A_j B_j)}{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}} \;\middle|\; A_j :\ \textit{θετικά ορισμένοι } n_j \times n_j \textit{ πίνακες} \right\}$$

με $c_j = 1/p_j$ *για κάθε* $j = 1, 2, \ldots, n$.

Μια παρατήρηση που είναι σημαντική για γεωμετρικές εφαρμογές είναι ότι αν οι γραμμικές απεικονίσεις B_j του Θεωρήματος 4.1.1 είναι ορθογώνιες προβολές, ας τις ονομάσουμε P_j, που ικανοποιούν την

$$I_n = \sum_{j=1}^{m} c_j P_j$$

για κάποιους $c_1, \ldots, c_m > 0$ τότε η σταθερά D του θεωρήματος είναι ακριβώς ίση με 1. Έτσι, παίρνουμε την ακόλουθη πολύ χρήσιμη ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 4.1.1.

Θεώρημα 4.1.2. *Έστω* $m, n \in \mathbb{N}$. *Για* $j = 1, \ldots m$, *έστω* E_j *ένας* n_j*-διάστατος υπόχωρος του* $\mathbb{R}^n$ *και* P_j *η ορθογώνια προβολή επί του* E_j. *Αν*

$$I_n = \sum_{j=1}^{m} c_j P_j$$

για κάποιους $c_1, \ldots, c_m > 0$ *τότε για οποιεσδήποτε μη αρνητικές ολοκληρώσιμες συναρτήσεις* $f_j : E_j \to \mathbb{R}$ *έχουμε*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{j=1}^{m} f_j^{c_j}(P_j x)\,dx \leqslant \prod_{j=1}^{m} \Big(\int_{E_j} f_j \Big)^{c_j}. \tag{4.1}$$

Για την απόδειξη του Θεωρήματος 4.1.2 αρκεί να δείξουμε ότι με τις υποθέσεις του θεωρήματος ισχύει οτι $D = 1$ όπου D είναι η σταθερά του Θεωρήματος 4.1.1. Θα χρειαστούμε το ακόλουθο λήμμα που καλύπτει τη “μονοδιάστατη περίτωση”.

Λήμμα 4.1.3 (Ball-Barthe). *Έστω* $u_1, \ldots, u_m \in S^{n-1}$ *και* $c_1, \ldots, c_m > 0$ *που ικανοποιούν τη σχέση*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i u_i \otimes u_i = I_n.$$

Τότε,

$$\det\left(\sum_{i=1}^{m} c_i t_i u_i \otimes u_i\right) \geqslant \prod_{i=1}^{m} t_i^{c_i} \tag{4.2}$$

για κάθε $t_1, \ldots, t_m > 0$.

Απόδειξη. Για διευκόλυνσή μας, θέτουμε $v_i = \sqrt{c_i}u_i$ για $i = 1, \ldots, m$. Με I συμβολίζουμε πάντα κάποιο υποσύνολο του $\{1, \ldots, m\}$ με πληθικότητα n. Για $I = \{i_1, \ldots, i_n\}$ ορίζουμε

$$d_I := \det[v_{i_1}, \ldots, v_{i_n}]^2 \quad \text{και} \quad t_I := t_{i_1} \cdots t_{i_n}.$$

Θεωρούμε τους $n \times m$ πίνακες $M = [v_1, \ldots, v_m]$ και $\tilde{M} = [\sqrt{t_1}v_1, \ldots, \sqrt{t_m}v_m]$. Τότε,

$$MM^t = I_n \quad \text{και} \quad \tilde{M}\tilde{M}^t = \sum_{i=1}^{m} t_i v_i \otimes v_i. \tag{4.3}$$

Από την ταυτότητα Cauchy-Binet έπεται ότι

$$\sum_I d_I = 1 \quad \text{και} \quad \det\left(\sum_{i=1}^{m} t_i v_i \otimes v_i\right) = \sum_I t_I d_I,$$

όπου τα αθροίσματα είναι πάνω από όλα τα σύνολα $I \subset \{1, \ldots, m\}$ με πληθικότητα n. Συνεπώς, το διακριτό μέτρο μ στα υποσύνολα n στοιχείων του $\{1, \ldots, m\}$ που ορίζεται από την $\mu(\{I\}) = d_I$ είναι ένα μέτρο πιθανότητας.

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου συμπεραίνουμε ότι

$$\det\left(\sum_{i=1}^{m} t_i v_i \otimes v_i\right) = \sum_I t_I d_I \geqslant \prod_I t_I^{d_I}. \tag{4.4}$$

Ο παράγοντας t_i εμφανίζεται στο $\prod_I t_I^{d_I}$ ακριβώς $\sum_{I, i\in I} d_I$ φορές. Επιπλέον, εφαρμόζοντας την ταυτότητα Cauchy-Binet στα διανύσματα $v_1, \ldots, v_{i-1}, v_{i+1}, \ldots, v_m$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\sum_{I, i\in I} d_I &= \sum_I d_I - \sum_{I, i\notin I} d_I = 1 - \det\left(\sum_{j\neq i} v_j \otimes v_j\right)\\ &= 1 - \det(Id_n - v_i \otimes v_i) = \langle v_i, v_i\rangle = c_i.\end{aligned}$$

Αντικαθιστώντας αυτή την ισότητα στην (4.4) παίρνουμε την (4.2). □

Πρόταση 4.1.4 (Barthe). *Έστω $E_1, \ldots, E_m$ γραμμικοί υπόχωροι του $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 1$ και $c_1, \ldots, c_m > 0$ που ικανοποιούν την $\sum_{j=1}^m c_j P_{E_j} = I_n$. Αν $A_j : E_j \to E_j$ είναι θετικά ορισμένοι γραμμικοί μετασχηματισμοί για $j = 1, \ldots, m$, τότε*

$$\det\left(\sum_{j=1}^m c_j A_j P_{E_j}\right) \geqslant \prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}. \tag{4.5}$$

Έπεται ότι

$$D = \inf\left\{\frac{\det(\sum_{j=1}^m c_j P_j^t A_j P_j)}{\prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j}} \;\middle|\; A_j : E_j \to E_j \text{ θετικά ορισμένοι}\right\} = 1.$$

Απόδειξη. Μπορούμε να υποθέσουμε ότι $\dim E_j \geqslant 1$ για $j = 1, \ldots, m$. Για $j = 1, \ldots, m$, έστω ότι $\dim E_j = n_j$ και έστω $\{u_1^{(j)}, \ldots, u_{n_j}^{(j)}\}$ μια ορθοκανονική βάση του E_j που αποτελείται από ιδιοδιανύσματα του A_j. Συμβολίζουμε με $\lambda_k^{(j)} > 0$ την ιδιοτιμή του A_j που αντιστοιχεί στο $u_k^{(j)}$. Τότε,

$$\det A_j = \prod_{k=1}^{n_j} \lambda_k^{(j)}$$

για $j = 1, \ldots, m$. Για $j = 1, \ldots, m$ ορίζουμε $M_j = \sqrt{c_j}[u_1^{(j)}, \ldots, u_{n_j}^{(j)}]$ και θεωρούμε θετικά ορισμένο γραμμικό μετασχηματισμό B_j με $A_j = B_j B_j^t$. Παρατηρούμε ότι

$$c_j A_j P_{E_j} = (M_j B_j)(M_j B_j)^t = \sum_{k=1}^{n_j} c_j \lambda_k^{(j)} u_k^{(j)} \otimes u_k^{(j)}.$$

Από το Λήμμα 4.1.3 συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}\det\left(\sum_{j=1}^m c_j A_j P_{E_j}\right) &= \det\left(\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^{n_j} c_j \lambda_k^{(j)} u_k^{(j)} \otimes u_k^{(j)}\right) \\ &\geqslant \prod_{j=1}^m \left(\prod_{k=1}^{n_j} \lambda_k^{(j)}\right)^{c_j} = \prod_{j=1}^m (\det A_j)^{c_j},\end{aligned} \tag{4.6}$$

το οποίο δίνει το ζητούμενο. □

Ο Lehec (2013) απέδειξε ότι η γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb είναι ισοδύναμη με την ακόλουθη Gaussian γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb.

Θεώρημα 4.1.5 (Gaussian γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb). *Υποθέτουμε ότι $n \leqslant m$ και $n_1, \ldots, n_m \leqslant n$ είναι θετικοί ακέραιοι. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$, έστω $n_i \times n$ πίνακας U_i με $U_i U_i^* = I_{n_i}$ και $p_i > 0$ ώστε*

$$U^* P^{-1} U = I_n \tag{4.7}$$

όπου $P := \operatorname{diag}(p_1 I_{n_1}, \ldots, p_n I_{n_m})$. Τότε, αν $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to [0, \infty)$, $i = 1, \ldots, m$, είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x) d\gamma_n(x) \leqslant \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L_{p_i}(\gamma_{n_i})} \tag{4.8}$$

όπου γ_n είναι το n-διάστατο Gaussian μέτρο στον $\mathbb{R}^n$.

Στόχος μας είναι να δείξουμε ότι το Θεώρημα 1.1.1 (i) είναι ισοδύναμο με τη γεωμετρική ανισότητα Brascamp-Lieb, συνεπώς αρκεί να δείξουμε ότι είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα 4.1.5. Στην ενότητα 3.4 δείξαμε ότι το Θεώρημα 1.1.1 (i) είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα 3.4.1 (i). Άρα αρκεί να δείξουμε ότι το Θεώρημα 4.1.5 είναι ισοδύναμο με το Θεώρημα 3.4.1 (i). Το γεγονός ότι το Θεώρημα 4.1.5 συνεπάγεται το Θεώρημα 3.4.1 (i) είναι απλό. Πράγματι, αν υποθέσουμε ότι $U_i U_i^* = I_{n_i}$ για $1 \leqslant i \leqslant m$ και η (4.8) ισχύει για κάποιους $p_1, \ldots, p_m > 0$, έχουμε

$$\begin{aligned}
U^* P^{-1} U = I_n &\Longrightarrow U^* P^{-1} U \leqslant I_n \\
&\Longleftrightarrow \lambda_1 \left(U^* P^{-1} U \right) \leqslant 1 \\
&\Longleftrightarrow \lambda_1 \left(P^{-1/2} U U^* P^{-1/2} \right) \leqslant 1 \\
&\Longleftrightarrow P^{-1/2} U U^* P^{-1/2} \leqslant I_N \\
&\Longleftrightarrow U U^* \leqslant P,
\end{aligned} \tag{4.9}$$

όπου $\lambda_1 := \|A\|_{\rm op}$ είναι η μεγαλύτερη ιδιοτιμη του πραγματικού συμμετρικού πίνακα A. Συνεπώς, οι υποθέσεις του Θεωρήματος 3.4.1 ικανοποιούνται από τους U_i και τους $d_i = p_i^{-1}$ για $i \leqslant m$, οπότε έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x) d\gamma_n(x) &\leqslant \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x_i)^{1/d_i} d\gamma_n(x_i) \right)^{d_i} \\
&= \prod_{i=1}^m \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x_i)^{p_i} d\gamma_n(x_i) \right)^{1/p_i} \\
&= \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L_{p_i}(\gamma_{n_i})}.
\end{aligned}$$

Για την αντίστροφη κατύθυνση θεωρούμε τους U και D όπως στο Θεώρημα 3.4.1 (i) και ορίζουμε $P = D^{-1}$. Τότε, η $UU^* \leqslant P$ είναι ισοδύναμη με την $\|A\|_{\rm op} \leqslant 1$ όπου $A := U^*P^{-1}U$. Έστω $\lambda_1, \dots, \lambda_n \geqslant 0$ οι ιδιοτιμές του A σε μη αύξουσα διάταξη και $\theta_1, \dots, \theta_n$ τα αντίστοιχα ορθοκανονικά ιδιοδιανύσματα. Έστω k ο μεγαλύτερος ακέραιος ώστε $\lambda_1 = \cdots = \lambda_k$. Θεωρούμε τη διάσπαση του ταυτοτικού πίνακα I_n,

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i\lambda_1} U_i^*U_i + \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) \theta_i\theta_i^* = I_n \tag{4.10}$$

την οποία ελέγχουμε εύκολα επαληθεύοντας ότι τα δύο μέλη της ισότητας συμφωνούν στα $\theta_1, \dots, \theta_n$. Αν $\lambda_1 < 1$ αυτή η ισότητα μπορεί επίσης να γραφτεί ως εξής

$$\sum_{i=1}^{k} \frac{1}{p_i} U_i^*U_i + \sum_{i=k+1}^{n} \left(1 - \frac{\lambda_i}{\lambda_1}\right) \theta_i\theta_i^* + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} \left(\frac{1}{\lambda_1} - 1\right) U_i^*U_i = I_n.$$

Σημειώνουμε ότι οι συντελεστές στις δύο τελευταίες ισότητες είναι όλοι θετικοί, αφού $\lambda_1 = \|A\|_{\rm op} \leqslant 1$. Συνοψίζοντας, υπάρχει κάποιος $\nu \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ ώστε να υπάρχουν $k_j \times n$ πίνακες B_j με $B_jB_j^* = I_{k_j}$ και $b_j > 0$ για $1 \leqslant j \leqslant \nu$ που ικανοποιούν την

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} U_i^*U_i + \sum_{j=1}^{\nu} \frac{1}{b_j} B_j^*B_j = I_n, \tag{4.11}$$

όπου συμφωνούμε ότι ο $\sum_{j=1}^{0} \frac{1}{b_j} B_j^*B_j$ είναι ο n-διάστατος μηδενικός πίνακας. Για δοθείσες μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to [0, \infty)$, $i \leqslant m$, θέτουμε

$$g_1 = f_1, \dots, g_m = f_m, g_{m+1} = 1, \dots, g_{m+\nu} = 1.$$

Αφού οι p_i και b_j ικανοποιούν τη σχέση (4.11), εισάγοντας αυτές τις g_i στην (4.8) παίρνουμε την (3.19), παρατηρώντας ότι $\|g_i\|_{L_{b_i}(\gamma_{k_i})} = 1$ για κάθε $m+1 \leqslant i \leqslant m+\nu$. Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη του ισχυρισμού μας.

4.2 Η γεωμετρία των επιλέξιμων εκθετών

Ορισμός 4.2.1. Έστω $n \leqslant N$ και U ένας $N \times n$ πίνακας με $\mathrm{rank}(U) = n$. Υποθέτουμε ότι ο U έχει ως block γραμμές τους $n_i \times n$ πίνακες U_i, $1 \leqslant i \leqslant m$, και ότι $U_iU_i^* = I_{n_i}$. Τότε, ορίζουμε

$$\mathcal{C}(U) = \left\{(c_1, \dots, c_m) : UU^* \leqslant C^{-1}\right\} \tag{4.12}$$

όπου $C = \mathrm{diag}(c_1 I_{n_1}, \ldots, c_m I_{n_m})$. Η συζήτηση που έγινε στην προηγούμενη ενότητα δείχνει ότι εάν $(c_1, \ldots, c_m) \in \mathcal{C}(U)$ τότε οι $c_1, \ldots, c_m$ ικανοποιούν την (4.11). Από την άλλη πλευρά, αν οι $c_1, \ldots, c_m$ ικανοποιούν την (4.11) τότε

$$U^* C U = \sum_{i=1}^{m} c_i U_i^* U_i \leqslant I_n$$

και από την (4.9) έχουμε ότι $(c_1, \ldots, c_m) \in \mathcal{C}(U)$. Δηλαδή, έχουμε ότι

$$(c_1, \ldots, c_m) \in \mathcal{C}(U) \ \text{ αν και μόνο αν οι } \ (c_1, \ldots, c_m) \ \text{ ικανοποιούν την } \ (4.11). \tag{4.13}$$

Στην επόμενη πρόταση συγκεντρώνουμε μερικές ενδιαφέρουσες ιδιότητες του συνόλου $\mathcal{C}(U)$.

Πρόταση 4.2.2. *Έστω U ένας $N \times n$ πίνακας όπως στον παραπάνω ορισμό.*

(i) *Έστω V ένας πίνακας που έχει τις ίδιες διαστάσεις με τον U και ικανοποιεί την $UU^* = VV^*$. Τότε, $\mathcal{C}(U) = \mathcal{C}(V)$.*

(ii) *Ορίζουμε τον $n_i \times N$ πίνακα $R_i = (\mathbf{0}_{n_i \times n_1}, \ldots, I_{n_i}, \ldots, \mathbf{0}_{n_i \times n_m})$ για $1 \leqslant i \leqslant m$. Για $\sigma \subseteq \{1, \ldots, m\}$ ορίζουμε τον $\left(\sum_{i \in \sigma} n_i\right) \times N$ πίνακα $\Xi_\sigma := ([R_i^*] : i \in \sigma)^*$, δηλαδή οι πίνακες R_i, $i \in \sigma$ είναι οι block γραμμές του Ξ_σ. Τότε*

$$P_\sigma \mathcal{C}(U) \subseteq \mathcal{C}\left(\Xi_\sigma U\right),$$

όπου P_σ είναι η προβολή από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}^\sigma$ με $P_\sigma(c) = (c_i)_{i \in \sigma}$.

(iii) *Το $\mathcal{C}(U)$ είναι κυρτό υποσύνολο του $\mathbb{R}^m$ και*

$$\left\{ x \in [0, \infty)^m : \sum_{i=1}^{m} x_i \leqslant 1 \right\} \subseteq \mathcal{C}(U) \subseteq [0, 1]^m.$$

(iv) *Αν $(c_1, \ldots, c_m) \in \mathcal{C}(U)$ και $\lambda_1, \ldots, \lambda_m \in [0, 1]$, τότε*

$$(\lambda_1 c_1, \ldots, \lambda_m c_m) \in \mathcal{C}(U). \tag{4.14}$$

Απόδειξη. (i) Από το Λήμμα 3.4.2, έχουμε ότι $V^* = \Phi U^*$ για κάποιον $\Phi \in O(n)$. Έστω $(c_1, \ldots, c_m) \in \mathcal{C}(U)$. Από τον ορισμό του $\mathcal{C}(U)$ έχουμε ότι για κάποιους

$$B = \begin{pmatrix} (\longleftarrow B_1 \longrightarrow) \\ \vdots \\ (\longleftarrow B_\nu \longrightarrow) \end{pmatrix}$$

και $L = \mathrm{diag}\,(b_1 I_{k_1}, \dots, b_\nu I_{k_\nu})$ ισχύει ότι $U^*CU + B^*LB = I_n$. Εφαρμόζοντας τους Φ και Φ^*, ισοδύναμα έχουμε ότι

$$\Phi U^* C U \Phi^* + \Phi B^* L B \Phi^* = \Phi I_n \Phi^*$$

ή

$$V^* C V + B_\Phi^* L B_\Phi = I_n,$$

όπου

$$B_\Phi := B\Phi^* = \begin{pmatrix} (\longleftarrow B_1\Phi^* \longrightarrow) \\ \vdots \\ (\longleftarrow B_\nu\Phi^* \longrightarrow) \end{pmatrix}.$$

Από τα παραπάνω έχουμε ότι $(c_1, \dots, c_N) \in \mathcal{C}(V)$. Έτσι έχουμε αποδείξει ότι $\mathcal{C}(U) \subseteq \mathcal{C}(V)$. Το ίδιο επιχείρημα μας δίνει και τον άλλον εγκλεισμό $\mathcal{C}(V) \subseteq \mathcal{C}(U)$.

(ii) Έστω $x = (x_i)_{i\in\sigma} \in P_\sigma \mathcal{C}(U)$. Αυτό σημαίνει ότι για κάποιο $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathcal{C}(U)$ έχουμε $x_i = c_i$ για κάθε $i \in \sigma$. Από τον ορισμό του $\mathcal{C}(U)$ έπεται ότι ισχύει η (4.11) και μπορεί να γραφεί ως

$$\sum_{i\in\sigma} x_i U_i^* U_i + \sum_{i\notin\sigma} c_i U_i^* U_i + \sum_{j=1}^{\nu} b_j B_j^* B_j = I_n.$$

Σημειώνουμε ότι ο $\Xi_\sigma U$ έχει ως block γραμμές τους πίνακες U_i, $i \in \sigma$. Από την τελευταία ισότητα συμπεραίνουμε ότι $x \in \mathcal{C}(\Xi_\sigma U)$.

(iii) Υποθέτουμε ότι $(c_1, \dots, c_m), (\widehat{c}_1, \dots, \widehat{c}_m) \in \mathcal{C}(U)$ και $\lambda \in [0,1]$. Τότε υπάρχουν $b_j, \widehat{b}_j, B_j$ και $\widehat{B}_j$ ώστε

$$\sum_{i=1}^{m} c_i U_i^* U_i + \sum_{j=1}^{\nu_1} b_j B_j^* B_j = I_n \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^{m} \widehat{c}_i U_i^* U_i + \sum_{j=1}^{\nu_2} \widehat{b}_j \widehat{B}_j^* \widehat{B}_j = I_n.$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^{m} (\lambda c_i + (1-\lambda)\widehat{c}_i)\, U_i^* U_i + \sum_{j=1}^{\nu_1} \lambda b_j B_j^* B_j + \sum_{j=1}^{\nu_2} (1-\lambda)\widehat{b}_j \widehat{B}_j^* \widehat{B}_j \\
&= \lambda \left(\sum_{i=1}^{m} c_i U_i^* U_i + \sum_{j=1}^{\nu_1} b_j B_j^* B_j \right) + (1-\lambda) \left(\sum_{i=1}^{m} \widehat{c}_i U_i^* U_i + \sum_{j=1}^{\nu_2} \widehat{b}_j \widehat{B}_j^* \widehat{B}_j \right) \\
&= \lambda I_n + (1-\lambda) I_n = I_n,
\end{aligned}$$

οπότε έχουμε ότι $\lambda c_i + (1-\lambda)\widehat{c}_i \in \mathcal{C}(U)$ και αυτό δείχνει ότι το $\mathcal{C}(U)$ είναι κυρτό.

Για το δεύτερο μέρος του (iii), αφού ο $U_i^*U_i$ είναι προβολή από τον $\mathbb{R}^m$ στον $\mathbb{R}^{n_i}$ για $1 \leqslant i \leqslant m$, έχουμε ότι

$$\|U^*CU\|_{\mathrm{op}} = \left\| \sum_{i=1}^m c_i U_i^* U_i \right\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sum_{i=1}^m c_i \, \|U_i^* U_i\|_{\mathrm{op}} \leqslant \sum_{i=1}^m c_i \tag{4.15}$$

για κάθε $N \times N$ διαγώνιο πίνακα $C = \mathrm{diag}(c_1 I_{n_1}, \ldots, c_m I_{n_m})$. Από την (4.9) έχουμε ότι

$$c = (c_1, \ldots, c_m) \in \mathcal{C}(U) \iff \|U^*CU\|_{\mathrm{op}} \leqslant 1,$$

άρα από την (4.15) έχουμε

$$\left\{ x \in [0,\infty)^m : \sum_{i=1}^m x_i \leqslant 1 \right\} \subseteq \mathcal{C}(U).$$

Από την άλλη πλευρά, πάλι από την (4.9), έχουμε ότι

$$(c_1, \ldots, c_m) \in \mathcal{C}(U) \iff UU^* - C^{-1} \leqslant 0 \iff \langle (UU^* - C^{-1})x, x \rangle \leqslant 0$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^N$. Θεωρώντας τα διανύσματα $\mathbf{x}_i = (0, \ldots, 0, x_i, 0, \ldots, 0) \in \mathbb{R}^N$, $1 \leqslant i \leqslant m$, για κάθε μη μηδενικό $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, παίρνουμε ότι $c_i \leqslant 1$ και αυτό δείχνει ότι $\mathcal{C}(U) \subset [0,1]^m$.

Ο ισχυρισμός (iv) επαληθεύεται εύκολα αν ξαναγράψουμε την (4.11) ως

$$\sum_{i=1}^m \lambda_i c_i U_i^* U_i + \sum_{i=1}^m (1-\lambda_i) c_i U_i^* U_i + \sum_{j=1}^{\nu} b_j B_j^* B_j = I_n.$$

Από αυτή τη σχέση και από τον ορισμό του $\mathcal{C}(U)$ έχουμε ότι $(\lambda_1 c_1, \ldots, \lambda_m c_m) \in \mathcal{C}(U)$. □

Υπενθυμίζουμε ότι ένα κυρτό σώμα K στον $\mathbb{R}^n$ λέγεται 1-unconditional αν για κάθε $x \in K$, το K περιέχει και το κεντρικά συμμετρικό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο που έχει κορυφές το σημείο και όλες τις ανακλάσεις του ως προς τα βασικά επίπεδα του συστήματος αξόνων. Ισοδύναμα, αν $\|\cdot\|$ είναι η νόρμα που επάγεται από το K στον $\mathbb{R}^n$, για κάθε $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ η νόρμα

$$\|\varepsilon_1 \, x_1 \, e_1 + \varepsilon_2 x_2 e_2 + \ldots + \varepsilon_n x_n e_n\|$$

είναι σταθερή για όλα τα πρόσημα $\varepsilon_i = \pm 1$, όπου e_i είναι τα βασικά διανύσματα.

Μπορούμε τώρα να συζητήσουμε τη γεωμετρία των επιλέξιμων εκθετών στο Θεώρημα 1.1.1 (i). Θεωρούμε μόνο την κανονικοποιημένη εκδοχή του, δηλαδή υποθέτουμε ότι $T_{ii} = I_{n_i}$ για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$. Ωστόσο, μια απλή αλλαγή μεταβλητής δείχνει ότι αυτή η πιο απλή εκδοχή του θεωρήματος είναι ισοδύναμη με τη γενική διατύπωσή του.

Έστω $\mathbf{X}$ το Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^N$, με πίνακα συνδιακυμάνσεων $T = (T_{ij})_{i,j \leqslant m}$, όπως στο Θεώρημα 1.1.1, με $T_{ii} = I_{n_i}$. Ορίζουμε $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ στον $\mathbb{R}^m$ να είναι το σύνολο όλων των διανυσμάτων $(1/p_1, \dots, 1/p_m) \in [0,\infty)^m$ για τα οποία

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^m f_i(X_i) \leqslant \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{L_{p_i}(\gamma_{n_i})}, \quad \forall f_i, \quad 1 \leqslant i \leqslant m. \tag{4.16}$$

Επίσης ορίζουμε $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ να είναι τα σύνολο όλων των διανυσμάτων $(1/p_1, \dots, 1/p_m) \in \mathcal{C}(\mathbf{X}) \cap (0,1)^m$, με την ακόλουθη ιδιότητα: Για κάθε $1 \leqslant i \leqslant m$, αν $q > p_i$ τότε υπάρχουν $f_1, \dots, f_m$ μετρήσιμες συναρτήσεις ώστε

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^m f_i(X_i) > \prod_{i \neq j} \left(\mathbb{E} f_j(X_j)^{p_j}\right)^{1/p_j} \left(\mathbb{E} f_i(X_i)^q\right)^{1/q}.$$

Αν $(1/p_1, \dots, 1/p_m) \in \mathcal{C}(\mathbf{X})$, τότε λέμε ότι οι $(p_1, \dots, p_m)$ είναι επιλέξιμοι εκθέτες στο Θεώρημα 1.1.1 (i). Αντίστοιχα, αν $(1/p_1, \dots, 1/p_m) \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$, τότε λέμε ότι οι $(p_1, \dots, p_m)$ είναι μια επιλογή βέλτιστων εκθετών στο Θεώρημα 1.1.1 (i).

Από το Λήμμα 3.4.2 υπάρχει πίνακας U ώστε $T = UU^*$ και θέτουμε $\mathcal{C}(T) = \mathcal{C}(U)$. Παρατηρούμε ότι το $\mathcal{C}(T)$ είναι καλά ορισμένο, από την Πρόταση 4.2.2 (i). Τέλος, από την Παρατήρηση 1.1.3 έχουμε ότι $\mathcal{C}(\mathbf{X}) = \mathcal{C}(U) = \mathcal{C}(T)$. Επίσης, γνωρίζουμε ότι το $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ είναι κυρτό υποσύνολο του $[0,\infty)^m$ το οποίο ικανοποιεί την

$$\left\{ y \in [0,\infty)^m : \sum_{i=1}^m y_i \leqslant 1 \right\} \subseteq \mathcal{C}(\mathbf{X}) \subseteq (0,1]^m.$$

Αφού το $\mathcal{C}(\mathbf{X})$ έχει την ιδιότητα (4.14) μπορεί να επεκταθεί σε ένα 1-unconditional κυρτό σώμα $\tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{X})$ στον $\mathbb{R}^m$, με τον προφανή τρόπο: $(c_1, \dots, c_m) \in \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{X})$ αν και μόνο αν $(|c_1|, \dots, |c_m|) \in \mathcal{C}(\mathbf{X})$.

Σε αυτή την περίπτωση έχουμε ότι

$$B_1^m \subseteq \tilde{\mathcal{C}}(\mathbf{X}) \subseteq B_\infty^m, \tag{4.17}$$

όπου

$$B_1^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \sum_{i \leqslant m} |x_i| \leqslant 1\} \quad \text{και} \quad B_\infty^m = \{x \in \mathbb{R}^m : \max_{i \leqslant m} |x_i| \leqslant 1\}.$$

Η επαγόμενη νόρμα στον $\mathbb{R}^m$ δίνεται από την

$$\|c\|_{\tilde{\mathcal{C}}(X)} = \|U|C|U^*\|_{\mathrm{op}}$$

για κάθε $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ όπου

$$|C| := \operatorname{diag}\left(|c_1| I_{n_1}, \dots, |c_m| I_{n_m}\right).$$

Επιπλέον μπορούμε να δείξουμε ότι αν $(1/p_1, \dots, 1/p_m) \in \partial\mathcal{C}(\mathbf{X}) \cap (0,1)^m$ τότε υπάρχουν $a = (a_1, \dots, a_m)$ στον $\mathbb{R}^N$ όπου $a_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ και $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}$ της μορφής $f_i(x_i) = \exp(\langle a_i, x_i \rangle), \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ ώστε να ισχύει η ισότητα στην (1.4). Πράγματι, από την Παρατήρηση 1.1.4 είναι αρκετό να δείξουμε ότι $\langle (P-T)\alpha, \alpha \rangle = 0$. Παρατηρούμε αρχικά ότι

$$(c_1, \dots, c_m) \in \partial\mathcal{C}(\mathbf{X}) \Leftrightarrow \|\sqrt{C} T \sqrt{C}\|_{\mathrm{op}} = 1 \Leftrightarrow \lambda_1(\sqrt{C} T \sqrt{C}) = 1.$$

Έστω $v_1 \in \mathbb{R}^N$ το κανονικό ιδιοδιάνυσμα της $\lambda_1 = \lambda_1(\sqrt{C} T \sqrt{C})$. Τότε, για $a = \sqrt{C} v_1 \in \mathbb{R}^N$ έχουμε ότι

$$\langle T\alpha, \alpha \rangle = \left\langle \sqrt{C} T \sqrt{C} v_1, v_1 \right\rangle = \lambda_1 \langle v_1, v_1 \rangle = 1 = \left\langle C^{-1}\alpha, \alpha \right\rangle.$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι ειδικότερα δείξαμε ότι $\partial\mathcal{C}(\mathbf{X}) \cap (0,1)^m \subseteq \mathcal{B}(\mathbf{X})$. Επίσης, έχουμε ότι $\mathcal{B}(\mathbf{X}) \subseteq \partial\mathcal{C}(\mathbf{X}) \cap (0,1)^m$ από την ανισότητα Hölder και έτσι έχουμε δείξει την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.2.3. *Έστω $\mathbf{X}$ το Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^N$ με πίνακα συνδιακυμάνσεων $T = (T_{ij})_{i,j \leqslant m} \neq I_N$, όπως στο Θεώρημα 1.1.1, με $T_{ii} = I_{n_i}$, και έστω το σύνολο $\mathcal{B}(\mathbf{X})$ όπως ορίστηκε παραπάνω. Τότε, για κάθε $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathbb{R}^m$ και $C = \operatorname{diag}(c_1 I_{n_1}, \dots, c_m I_{n_m})$, έχουμε ότι*

$$c \in \mathcal{B}(\mathbf{X}) \Longleftrightarrow c \in \partial\mathcal{C}(\mathbf{X}) \cap (0,1)^m \Longleftrightarrow \|\sqrt{C} T \sqrt{C}\|_{\mathrm{op}} = 1.$$

Επίσης, για κάθε $c = (c_1, \dots, c_m) \in \mathcal{B}(\mathbf{X})$, υπαρχουν συναρτήσεις

$$f_i(x_i) = \exp^{(\langle \alpha_i, x_i \rangle)}, \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$$

ώστε να έχουμε ισότητα στην (1.4) για $(p_1, \dots, p_m) = (1/c_1, \dots, 1/c_m)$.

Τέλος, εξετάζουμε την περίπτωση όπου $m = 2$ και $n_1 = n_2 = 1$, δηλαδή $\mathbf{X} = (X_1, X_2)$, όπου X_1 και X_2 είναι δύο τυπικά Gaussian τυχαία διανύσματα με $\mathbb{E}[X_1 X_2] = t \in [0,1]$. Ένας άμεσος υπολογισμός δείχνει ότι το σύνολο των επιλέξιμων εκθετών είναι το

$$\mathcal{C}(\mathbf{X}) = \left\{ (x,y) \in [0,1]^2 : \left(\frac{1}{x} - 1\right)\left(\frac{1}{y} - 1\right) \geqslant t^2 \right\}$$

και

$$\|(x,y)\|_{\tilde{\mathcal{C}}(X)} = \frac{\sqrt{(|x| + |y|)^2 - 4(1-t^2)|xy|} + |x| + |y|}{2}.$$

Επιπλέον, το ζευγάρι των εκθετών (p_1, p_2) με $p_1, p_2 \geqslant 1$ είναι το καλύτερο δυνατό στην (1.4) αν και μόνο αν το $(1/p_1, 1/p_2)$ ανήκει στο $\mathcal{B}(\mathbf{X}) = \partial\mathcal{C}(\mathbf{X}) \cap (0,1)^2$ ή ισοδύναμα, αν και μόνο αν

$$(p_1 - 1)(p_2 - 1) = t^2 p_1 p_2.$$

4.3 Υπερσυσταλτότητα στον χώρο του Gauss

Θυμηθείτε την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck $(P_t)_{t\geqslant 0}$ που ορίστηκε στην (3.14). Η Gaussian υπερσυσταλτότητα ανακαλύφθηκε από τον Nelson (1973) και ισχυρίζεται ότι αν οι $p, q > 1$ και $t \geqslant 0$ ικανοποιούν την $(p-1)(q-1)^{-1} \geqslant e^{-2t}$, τότε

$$\|P_t f\|_{L_q(\gamma_n)} \leqslant \|f\|_{L_p(\gamma_n)}, \tag{4.18}$$

για κάθε $f \in L_p(\gamma_n)$.

Είναι γνωστό ότι η ανισότητα (4.18) της υπερσυσταλτότητας είναι ισοδύναμη με τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev την οποία θα συζητήσουμε περισσότερο στο Κεφάλαιο 6. Ορίζουμε την εντροπία μιας μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ θέτοντας

$$\mathrm{Ent}(f) := \mathbb{E}|f| \log |f| - \mathbb{E}|f| \log \mathbb{E}|f|,$$

αν οι παραπάνω μέσες τιμές (ως προς το γ_n) είναι πεπερασμένες.

Θεώρημα 4.3.1 (λογαριθμική ανισότητα Sobolev). *Για κάθε $f \in C_b^1(\gamma_n)$ ισχύει η ανισότητα*

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log |f| \, d\gamma_n - \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, d\gamma_n \cdot \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \, d\gamma_n \right) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n, \tag{4.19}$$

δηλαδή

$$\int |f|^2 \log |f| \, d\gamma_n \leqslant \int |\nabla f|^2 d\gamma_n + \|f\|_2^2 \log \|f\|_2, \tag{4.20}$$

με τη σύμβαση $f^2 \log |f| = 0$ αν $f = 0$.

Απόδειξη. Θα υποθέσουμε ότι $f \in C_1^\infty(\mathbb{R}^n)$ και $f \geq c > 0$. Θέτουμε $\phi = f^2$, οπότε $\nabla f = \frac{\nabla \phi}{2\sqrt{\phi}}$ και η ανισότητα παίρνει τη μορφή

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi \log \phi \, d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\gamma_n \cdot \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\gamma_n \right) \leqslant \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla \phi|^2}{\phi} \, d\gamma_n. \tag{4.21}$$

Παρατηρούμε ότι το αριστερό μέλος είναι ίσο με

$$\int_{\mathbb{R}^n} P_0 \phi \cdot \log P_0 \phi - \int_{\mathbb{R}^n} P_\infty \phi \cdot \log P_\infty \phi, \tag{4.22}$$

Μπορούμε λοιπόν να το γράψουμε στη μορφή

$$-\int_0^\infty \left(\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_t\phi \cdot \log P_t\phi \, d\gamma_n \right] \right) dt. \tag{4.23}$$

Όμως,

$$\frac{d}{dt} \left[\int_{\mathbb{R}^n} P_t\phi \cdot \log P_t\phi \, d\gamma_n \right] = \int_{\mathbb{R}^n} \left\{ LP_t\phi \cdot \log P_t\phi + \frac{d}{dt} P_t\phi \right\} \tag{4.24}$$

και

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{d}{dt} P_t\phi &= \int_{\mathbb{R}^n} P_\infty\phi \, d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} P_0\phi \, d\gamma_n \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\gamma_n \right) d\gamma_n - \int_{\mathbb{R}^n} \phi \, d\gamma_n = 0. \end{aligned}$$

Συνεπώς, το αριστερό μέλος της $(*)$ είναι ίσο με

$$\begin{aligned} -\int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} LP_t f \cdot \log P_t\phi \, d\gamma_n &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla P_t\phi, \nabla \log P_t\phi \rangle \, d\gamma_n \, dt \\ &= \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla P_t\phi|^2}{P_t\phi} \, d\gamma_n \, dt. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την

$$|P_t \partial_{x_i}\phi|^2 = \left| P_t \left(\sqrt{\phi} \cdot \frac{\partial_{x_i}\phi}{\sqrt{\phi}} \right) \right|^2 \leqslant P_t\phi \cdot P_t \left(\frac{(\partial_{x_i}\phi)^2}{\phi} \right), \tag{4.25}$$

συμπεραίνουμε ότι

$$|\nabla P_t\phi|^2 = e^{-2t} |P_t(\nabla\phi)|^2 = e^{-2t} \sum_{i=1}^n |P_t \partial_{x_i}\phi|^2 \leqslant e^{-2t} P_t\phi \cdot \sum_{i=1}^n P_t \left(\frac{(\partial_{x_i}\phi)^2}{\phi} \right).$$

Έπεται ότι

$$\begin{aligned} \int_0^\infty \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla P_t\phi|^2}{P_t\phi} \, d\gamma_n \, dt &\leqslant \int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^n P_t \left(\frac{(\partial_{x_i}\phi)^2}{\phi} \right) d\gamma_n \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} P_t \left(\frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} \right) d\gamma_n \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} \, d\gamma_n \, dt \\ &= \int_0^\infty e^{-2t} \, dt \cdot \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} \, d\gamma_n \\ &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{|\nabla\phi|^2}{\phi} \, d\gamma_n, \end{aligned}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Το Θεώρημα 4.3.1 γράφεται ισοδύναμα στη μορφή

$$\mathrm{Ent}(|f|^2) \leqslant 2\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_n \tag{4.26}$$

για κάθε $f \in C_b^1(\gamma_n)$. Δείχνουμε εδώ πώς η (4.18) προκύπτει από αυτή την ανισότητα.

Απόδειξη. Ορίζουμε $F(t) = \|P_t f\|_{q(t)}$ όπου $q(0) = p$ και $q(t) = 1 + (p-1)\exp(2t)$. Θα δείξουμε ότι $F' \leqslant 0$ και από την $F(t) \leqslant F(0)$, $t \geqslant 0$ θα προκύψει το ζητούμενο. Θα χρησιμοποιήσουμε την ακόλουθη σχέση την οποία αποδείξαμε στην Ενότητα 3.3:

$$\frac{d}{dt}(P_t f) = LP_t f = P_t Lf \ \text{ όπου } (Lf)(x) = \Delta f(x) - \langle x, \nabla f(x)\rangle .$$

Έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\left(F(t)^{q(t)}\right)' &= F'(t)F(t)^{q(t)-1} + F(t)^{q(t)}\ln\left(F(t)\right)q(t)\\
&= \frac{\partial}{\partial t}\int (P_t f)^{q(t)}\, d\gamma_n\\
&= \int \frac{\partial}{\partial t}\exp\left(q(t)\ln(P_t f)\right)d\gamma_n\\
&= \int (P_t f)^{q(t)-1}\left(\frac{\partial}{\partial t}P_t f\right)q(t) + (P_t f)^{q(t)}\ln(P_t f)q'(t)d\gamma_n.
\end{aligned}$$

Ακόμα έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
F'(t)F(t)^{q(t)-1} &= -F(t)^{q(t)}\ln\left(F(t)^{q(t)}\right)\frac{q'(t)}{q(t)} + \int (P_t f)^{q(t)-1}\left(LP_t f\right)q(t)d\gamma_n\\
&\quad + \int (P_t f)^{q(t)}\ln\left((P_t f)^{q(t)}\right)\frac{q'(t)}{q(t)}d\gamma_n\\
&= \frac{q'(t)}{q(t)}\,\mathrm{Ent}_{\gamma_n}\left((P_t f)^{q(t)}\right) - q(t)\left(q(t)-1\right)\int (P_t f)^{q(t)-2}\left|\nabla P_t f\right|^2 d\gamma_n.
\end{aligned}$$

Από τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
F'(t)F(t)^{q(t)-1} &\leqslant \frac{q'(t)q(t)}{2}\int \left|\nabla (P_t f)^{q(t)-2}\right|^2 d\gamma_n\\
&\qquad - q(t)\left(q(t)-1\right)\int (P_t f)^{q(t)-2}\left|\nabla P_t f\right|^2 d\gamma_n\\
&= q(t)\left(\frac{q'(t)}{2} - \left(q(t)-1\right)\right)\int (P_t f)^{q(t)-2}\left|\nabla P_t f\right|^2 d\gamma_n\\
&= 0
\end{aligned}$$

αφού $q(t) = 1 + (p–1)\exp(2t)$. Μάλιστα, η επίλυση της εξίσωσης $q'(t)/2 = q(t)–1$ με $q(0) = p$ οδηγεί ακριβώς στη συνάρτηση $q(t) = 1 + (p–1)\exp(2t)$. $\square$

Αργότερα, ο Borell (1982) απέδειξε μια αντίστροφη ανισότητα υπερσυσταλτότητας για το μέτρο πιθανότητας Bernoulli. Το αποτέλεσμά του επεκτάθηκε από τους Mossel, Oleszkiewicz και Sen (2013) σε μια γενικότερη κατηγορία μέτρων πιθανότητας που ικανοποιούν λογαριθμικές ανισότητες Sobolev κάποιας μορφής. Στην ειδική περίπτωση του Gaussian μέτρου, το αποτέλεσμά τους ισχυρίζεται ότι αν οι $p, q < 1$ και $t \geqslant 0$ ικανοποιούν την $(1-p)(1-q)^{-1} \geqslant e^{-2t}$, τότε

$$\|P_t f\|_{L_q(\gamma_n)} \geqslant \|f\|_{L_p(\gamma_n)}, \tag{4.27}$$

για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$.

Σε αυτή την ενότητα θα δούμε πώς το Θεώρημα 1.1.1 γενικεύει αυτά τα δύο αποτελέσματα. Για να πάρουμε τις (4.18) και (4.27) από το Θεώρημα 1.1.1, θεωρούμε $2n$-διαστατα τυπικά Gaussian τυχαία διανύσματα X και Y ώστε ο κοινός τους πίνακας συνδιακυμάνσεων να είναι ο

$$T = \begin{pmatrix} I_n & e^{-t} I_n \\ e^{-t} I_n & I_n \end{pmatrix}, \qquad t \geqslant 0. \tag{4.28}$$

Για τυχούσες μετρήσιμες συναρτήσεις $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, έχουμε

$$\mathbb{E} g(X) f(Y) = \mathbb{E} g(X) P_t f(X).$$

Πράγματι, σημειώνουμε ότι εφόσον το τυχαίο Gaussian διάνυσμα χαρακτηρίζεται από τη μέση τιμή και τον πίνακα συνδιακυμάνσεών του, το (X, Y) έχει την ίδια κοινή κατανομή με το $\big(X, e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}Z\big)$, όπου Z είναι ένα ανεξάρτητο αντίγραφο του X. Ένας υπολογισμός με χρήση δεσμευμένης μέσης τιμής μας δίνει

$$\begin{aligned} \mathbb{E} g(X) f(Y) &= \mathbb{E}\left(\mathbb{E}\left(g(X) f\left(e^{-t}X + \sqrt{1-e^{-2t}}Z\right) \middle| X\right)\right) \\ &= \mathbb{E} g(X) P_t f(X). \end{aligned}$$

Για πραγματικό αριθμό $r \neq 1$, έστω r' ο Hölder συζυγής εκθέτης του r. Για $p, q \in \mathbb{R}$ και $q \neq 1$ θεωρούμε τον διαγώνιο $2n \times 2n$ πίνακα

$$P_0 = \begin{pmatrix} q' I_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & p I_n \end{pmatrix}.$$

Με απευθείας υπολογισμό δείχνουμε ότι για κάθε $p,q>1$,

$$T \leqslant P_0 \Leftrightarrow \frac{p-1}{q-1} \geqslant e^{-2t} \tag{4.29}$$

και για κάθε $p,q<1$,

$$T \geqslant P_0 \Leftrightarrow \frac{1-p}{1-q} \geqslant e^{-2t}. \tag{4.30}$$

Υπενθυμίζουμε τις σχέσεις δυϊσμού

$$\|f\|_{L_r(\gamma_n)} = \sup_{\|g\|_{L_{r'}(\gamma_n)}\leqslant 1} \mathbb{E}f(X)g(X), \quad r>1 \tag{4.31}$$

και, για f μη αρνητική,

$$\|f\|_{L_r(\gamma_n)} = \inf_{g>0,\|g\|_{L_{r'}(\gamma_n)}\geqslant 1} \mathbb{E}f(X)g(X), \quad r<1. \tag{4.32}$$

Έστω f μια μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Αν $p,q>1$ και $(p-1)/(q-1)\geqslant e^{-2t}$, τότε η (4.30) συνεπάγεται ότι $T\geqslant P_0$ και τότε από την (4.32) και από το Θεώρημα 1.1.1 (ii) έχουμε

$$\begin{aligned}
\|P_tf\|_{L_q(\gamma_n)} &= \inf_{g>0,\|g\|_{L_{q'}(\gamma_n)}\geqslant 1} \mathbb{E}g(X)P_tf(X) \\
&= \inf_{g>0,\|g\|_{L_{q'}(\gamma_n)}\geqslant 1} \mathbb{E}g(X)f(Y) \\
&\geqslant \inf_{g>0,\|g\|_{L_{q'}(\gamma_n)}\geqslant 1} \|g\|_{L_{q'}(\gamma_n)}\|f\|_{L_p(\gamma_n)} \\
&= \|f\|_{L_p(\gamma_n)},
\end{aligned}$$

το οποίο μας δίνει την (4.27). Με παρόμοιο τρόπο, χρησιμοποιώντας τις (4.29), (4.31) και το Θεώρημα 1.1.1 (i) παίρνουμε την (4.18).

Αντίστροφα, μπορεί κανείς να ανακτήσει την ειδική περίπτωση του Θεωρήματος 1.1.1, για $m=2$, $n_1=n_2=n$ και τον $2n\times 2n$ πίνακα συνδιακυμάνσεων T όπως στην (4.28), χρησιμοποιώντας τις ανισότητες υπερσυσταλτότητας και αντίστροφης υπερσυσταλτότητας (4.18) και (4.27).

Πράγματι, ας υποθέσουμε για παράδειγμα ότι $T\leqslant P=\mathrm{diag}(qI_n,pI_n)$. Έτσι $p,q>1$, και εφαρμόζοντας την (4.29) βλέπουμε ότι $\frac{p-1}{q'-1}\geqslant e^{-2t}$. Αυτό μας επιτρέπει να χρησιμοποιήσουμε το ζευγάρι p,q' στην (4.18) και συνδυάζοντας με την ανισότητα Hölder έχουμε

$$\mathbb{E}g(X)f(Y) = \mathbb{E}g(X)P_tf(X) \leqslant \|g\|_{L_q(\gamma_n)}\|P_tf\|_{L_{q'}(\gamma_n)} \leqslant \|g\|_{L_q(\gamma_n)}\|f\|_{L_p(\gamma_n)}.$$

Αυτό δίνει το Θεώρημα 1.1.1 (i). Αν αντί για την (4.29) χρησιμοποιήσουμε την (4.30), δείχνουμε το (ii) του Θεωρήματος 1.1.1.

Σημειώνουμε ότι η σύνδεση μεταξύ του Θεωρήματος 1.1.1 (i) και της Gaussian υπερσυσταλτότητας είναι κλασική όπως δείχνει η ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 4.3.2. *Υποθέτουμε ότι ξ και η είναι τυπικά Gaussian τυχαία διανύσματα με κοινή κανονική κατανομή, των οποίων η συσχέτιση $\rho = \mathbb{E}(\xi\eta)$ ικανοποιεί την $-1 < \rho < 1$ και υποθέτουμε ότι $(p-1)(q-1) \geqslant \rho^2$. Αν $f \in L_2(\xi) \cap L_p(\xi)$ και $g \in L_2(\eta) \cap L_q(\eta)$ τότε*

$$|\mathbb{E}(fg)| \leqslant \|f\|_p \|g\|_q.$$

Απόδειξη. Ένα προσεγγιστικό επιχείρημα δείχνει ότι αρκεί να αποδειχθεί το αποτέλεσμα για

$$f = \sum_{j=0}^{m} \alpha_j h_j(\xi) \quad \text{και} \quad g = \sum_{k=0}^{n} \beta_k h_k(\eta).$$

Θεωρούμε $t \in \mathbb{R}$ ώστε $e^{2t} = \rho^2$, και θέτουμε $r = 1+\rho^2(p'-1)$. Σημειώνουμε ότι $1 < r < q$ και $p' = 1 + e^{2t}(r-1)$. Τότε,

$$\begin{aligned}
|\mathbb{E}(fg)| &= \big|\mathbb{E}(f\mathbb{E}(g\big|\xi)\big| \\
&\leqslant \|f\|_p \|\mathbb{E}(g\big|\xi)\|_{p'} \quad \text{(από την ανισότητα Hölder)} \\
&= \|f\|_p \|P_t(g)\|_{p'} \\
&\leqslant \|f\|_p \|g\|_r \quad \text{(από υπερσυσταλτότητα)} \\
&\leqslant \|f\|_p \|g\|_q.
\end{aligned}$$

□

4.4 Ανισότητα Young και αντίστροφη ανισότητα Young

4.4.1 Ακριβής ανισότητα Young και αντίστροφη ανισότητα Young

Η ακριβής ανισότητα Young και η αντίστροφη ανισότητα Young ισχυρίζονται ότι αν f_1, f_2 είναι μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ και οι $p, q, r > 0$ ικανοποιούν την $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$, τότε έχουμε αντίστοιχα ότι

$$\|f_1 * f_2\|_r \leqslant C^n \|f_1\|_p \|f_2\|_q \ \text{ για } p, q, r \geqslant 1 \tag{4.33}$$

και

$$\|f_1 * f_2\|_r \geqslant C^n \|f_1\|_p \|f_2\|_q \ \text{ για } p, q, r \leqslant 1, \tag{4.34}$$

όπου $C := C_pC_q/C_r$, $C_u^2 = |u|^{1/u}/|u'|^{1/u'}$ για $1/u + 1/u' = 1$.

Η ακριβής ανισότητα Young (4.33) αποδείχθηκε από τον Beckner (1975) και λίγο αργότερα από τους Brascamp και Lieb (1976). Στην εργασία τους οι Brascamp και Lieb απέδειξαν μια γενίκευση της (4.33), τη λεγόμενη ανισότητα Brascamp-Lieb. Επιπλέον, εισήγαγαν την αντίστροφη ανισότητα (4.34). Σε αυτή την παράγραφο αποδεικνύουμε το Θεώρημα 1.4.1 και δείχνουμε ότι συνεπάγεται τόσο την ακριβή ανισότητα Young όσο και την αντίστροφη ανισότητα Young. Για ευκολία, το διατυπώνουμε και πάλι εδώ.

Θεώρημα 4.4.1. *Έστω $m, n \in \mathbb{N}$, $n_1, \ldots, n_m \leqslant n$ και $p_1, \ldots, p_m \geqslant 1$ πραγματικοί αριθμοί ώστε*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{p_i} = n. \tag{4.35}$$

Υποθέτουμε ότι U_i είναι ένας $n_i \times n$ πίνακας με τάξη n_i για $1 \leqslant i \leqslant m$. Θέτουμε $N = \sum_{i=1}^{m} n_i$. Έστω U ένας $N \times n$ πίνακας με block γραμμές $U_1, \ldots, U_m$, δηλαδή $U^* = (U_1^*, \ldots, U_m^*)$. Έστω B ένας $n \times n$ πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Θέτουμε

$$\begin{aligned} P &= \mathrm{diag}(p_1 I_{n_1}, \ldots, p_m I_{n_m}), \\ D_{UBU^*} &= \mathrm{diag}(U_1BU_1^*, \ldots, U_mBU_m^*). \end{aligned}$$

Για μη αρνητικές $f_i \in L_{p_i}(\mathbb{R}^{n_i})$, $i \leqslant m$ ισχύουν τα παρακάτω.

(i) *Αν*

$$UBU^* \leqslant PD_{UBU^*}, \tag{4.36}$$

τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(U_i x)dx \leqslant \left(\frac{\det(B)}{\prod_{i=1}^{m} \det(U_iBU_i^*)^{\frac{1}{p_i}}} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{p_i}. \tag{4.37}$$

Ισότητα ισχύει αν $f_i(x_i) = \exp\left(-p_i^{-1}\left\langle (U_iBU_i^*)^{-1}x_i, x_i \right\rangle\right)$ για $i \leqslant m$.

(ii) *Αν*

$$UBU^* \geqslant PD_{UBU^*}, \tag{4.38}$$

τότε

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(U_i x)dx \geqslant \left(\frac{\det(B)}{\prod_{i=1}^{m} \det(U_iBU_i^*)^{\frac{1}{p_i}}} \right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{p_i}. \tag{4.39}$$

Όπως παρατήρησαν οι Brascamp και Lieb, από την ακριβή αντίστροφη ανισότητα Young μπορεί κανείς να πάρει την ανισότητα Prékopa-Leindler. Από την άλλη πλευρά, ο Lieb (1990) έδειξε ότι η ακριβής ανισότητα Young συνεπάγεται την ανισότητα δυνάμεων εντροπίας του Shannon.

Ας δούμε αρχικά πώς οι (4.33) και (4.34) προκύπτουν από το Θεώρημα 4.4.1. Θεωρούμε τους πίνακες

$$
\begin{aligned}
U &= \begin{pmatrix} I_n & -I_n \\ \mathbb{O} & I_n \\ I_n & \mathbb{O} \end{pmatrix}, \\
B_1 &= \begin{pmatrix} c_3(1-c_3)I_n & (1-c_2)(1-c_3)I_n \\ (1-c_2)(1-c_3)I_n & c_2(1-c_2)I_n \end{pmatrix}, \\
B_2 &= \begin{pmatrix} c_3(1+c_3)I_n & (c_2-1)(1+c_3)I_n \\ (c_2-1)(1+c_3)I_n & c_2(c_2-1)I_n \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

όπου $c_1 = p^{-1}$, $c_2 = q^{-1}$ και $c_3 = |r'|^{-1}$, και ορίζουμε

$$P := \mathrm{diag}(pI_n, qI_n, r'I_n).$$

Μπορούμε να ελέγξουμε ότι αν $p, q, r \geqslant 1$ τότε $UB_1U^* \leqslant PD_{UB_1U^*}$ και αν $0 < p, q, r \leqslant 1$ τότε $UB_2U^* \geqslant PD_{UB_2U^*}$. Και στις δύο περιπτώσεις, απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$\left(\frac{\det B_i}{(\det U_1 B_i U_1^*)^{\frac{1}{p}} (\det U_2 B_i U_2^*)^{\frac{1}{q}} (\det U_3 B_i U_3^*)^{\frac{1}{r'}}} \right)^{\frac{1}{2}} = C^n.$$

Τότε, για τυχούσες αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις $f_1, f_2, g \in \mathbb{R}^n$, εφαρμόζουμε το Θεώρημα 4.4.1 (i) με τους U, B_1, P και το Θεώρημα 4.4.1 (ii) με τους U, B_2, P. Τέλος, οι σχέσεις δυϊσμού (4.31) και (4.32) οδηγούν στις (4.33) και (4.34), αντίστοιχα.

4.4.2 Απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1

Πριν δώσουμε την απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1, θα κάνουμε κάποια σχόλια για τις υποθέσεις του. Αρχικά, παρατηρούμε ότι η πρόσθετη υπόθεση (4.35) που εμφανίζεται στο Θεώρημα 4.4.1 είναι στην πραγματικότητα απαραίτητη προϋπόθεση λόγω της ομογένειας του μέτρου Lebesgue. Επιπλέον, στο επόμενο λήμμα θα δούμε ότι κάτω από αυτή τη συνθήκη ομογένειας, η υπόθεση (4.36) είναι ισοδύναμη με την (4.42).

Λήμμα 4.4.2. *Με τις υποθέσεις του Θεώρηματος* 4.4.1, *τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα.*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{p_i} = n \quad \textit{και } UBU^* \leqslant PD_{UBU^*}, \tag{4.40}$$

$$B^{-1} = U^*(PD_{UBU^*})^{-1}U, \tag{4.41}$$

$$B^{-1} = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} U_i^*(U_iBU_i^*)^{-1}U_i. \tag{4.42}$$

Απόδειξη. Προφανώς οι (4.41) και (4.42) είναι ισοδύναμες. Αρχικά θα δούμε γιατί η (4.41) συνεπάγεται την (4.40). Γράφουμε $B = \Sigma\Sigma^*$ και $C_B^{-1} := PD_{UBU^*}$. Τότε η (4.41) μπορεί να γραφεί ισοδύναμα ως

$$(U\Sigma)^* C_B (U\Sigma) = \left(\sqrt{C_B}U\Sigma\right)^* \left(\sqrt{C_B}U\Sigma\right) = I_n \tag{4.43}$$

και έτσι $\left(\sqrt{C_B}U\Sigma\right)\left(\sqrt{C_B}U\Sigma\right)^* \leqslant I_N$ ή ισοδύναμα $UBU^* \leqslant PD_{UBU^*}$. Η συνθήκη ομογένειας $\sum_{i=1}^m n_i/p_i = n$ προκύπτει αν πάρουμε το ίχνος στην (4.43). Πράγματι, αν ορίσουμε $U_{i\Sigma} := U_i\Sigma$, άμεσος υπολογισμός δείχνει ότι

$$\begin{aligned}(U\Sigma)^* C_B (U\Sigma) &= \sum_{i=1}^{m} c_i (U_i\Sigma)^* (U_iBU_i^*)^{-1} (U_i\Sigma) \\ &= \sum_{i=1}^{m} c_i U_{i\Sigma}^* (U_{i\Sigma}U_{i\Sigma}^*)^{-1} U_{i\Sigma} = \sum_{i=1}^{m} c_i \left(\tilde{U}_{i\Sigma}\right)^* \tilde{U}_{i\Sigma}\end{aligned}$$

όπου, $\tilde{U}_{i\Sigma} := (U_{i\Sigma}U_{i\Sigma}^*)^{-1/2} U_{i\Sigma}$. Σημειώνουμε ότι $\tilde{U}_{i\Sigma}\left(\tilde{U}_{i\Sigma}\right)^* = I_{n_i}$, και έτσι,

$$n = \mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}\left((U\Sigma)^* C_B (U\Sigma)\right) = \mathrm{tr}\left(\sum_{i=1}^{m} c_i \left(\tilde{U}_{i\Sigma}\right)^* \tilde{U}_{i\Sigma}\right) = \sum_{i=1}^{m} c_i n_i = \sum_{i=1}^{m} \frac{n_i}{p_i}.$$

Για να δούμε γιατί η (4.40) συνεπάγεται την (4.41) υπενθυμίζουμε ότι η $UBU^* \leqslant PD_{UBU^*}$ γράφεται ισοδύναμα ως $\left(\sqrt{C_B}U\Sigma\right)\left(\sqrt{C_B}U\Sigma\right)^* \leqslant I_N$, το οποίο συνεπάγεται ότι

$$(U\Sigma)^* C_B (U\Sigma) \leqslant I_n. \tag{4.44}$$

Για να ολοκληρωθεί η απόδειξη πρέπει να δείξουμε ότι ισχύει ισότητα στην (4.44). Πράγματι, παρατηρούμε ότι εάν A_1, A_2 είναι δύο θετικά ορισμένοι πίνακες με $A_1 \leqslant A_2$

και $\mathrm{tr}(A_1) = \mathrm{tr}(A_2)$ τότε $A_1 = A_2$. Έτσι, με την υπόθεση της ομογένειας $\sum_{i=1}^m n_i/p_i = n$, παίρνουμε ότι

$$\mathrm{tr}\left((U\Sigma)^* C_B (U\Sigma)\right) = \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{p_i} = n = \mathrm{tr}(I_n),$$

συνεπώς ισχύει ισότητα στην (4.44). □

Παρατήρηση 4.4.3. Ο Lehec (2013) απέδειξε μια αναδιατύπωση της ανισότητας Brascamp-Lieb, η οποία λέει ότι η (4.37) ισχύει αν υποθέσουμε την (4.42). Από το Λήμμα 4.4.2 βλέπουμε ότι το Θεώρημα 4.4.1 (i) είναι ακριβώς η ανισότητα Brascamp-Lieb.

Απόδειξη του Θεωρήματος 4.4.1. Θα αποδείξουμε το (ii) του θεωρήματος. Σημειώνουμε ότι από τις υποθέσεις του θεωρήματος έχουμε ότι $\mathrm{rank}(U_i) = n_i \leqslant n = \mathrm{rank}(B)$ για κάθε $i \leqslant m$. Έτσι, ο $n_i \times n_i$ πίνακας $B_i := U_i B U_i^*$ έχει πλήρη τάξη n_i. Θεωρούμε ένα Gaussian τυχαίο διάνυσμα

$$X = (X_1, \dots, X_m) \sim N(0, UBU^*),$$

όπου $X_i \sim N(0, B_i)$. Χρησιμοποιώντας την υπόθεση (4.38), εφαρμόζουμε το Θεώρημα 1.1.1 (ii) και παίρνουμε ότι

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^m f_i(X_i) \geqslant \prod_{i=1}^m \left(\mathbb{E} f_i(X_i)^{p_i}\right)^{1/p_i}. \tag{4.45}$$

Γράφουμε $B = \Sigma\Sigma^*$ για κάποιον μη ιδιάζοντα πίνακα Σ. Τότε, ο πίνακας συνδιακυμάνσεων των X_i μπορεί να γραφεί ως $B_i = U_i B U_i^* = (U_i\Sigma)(U_i\Sigma)^*$. Έτσι, με την αλλαγή μεταβλητής $y = \Sigma x$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\mathbb{E} \prod_{i=1}^m f_i(X_i) &= \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i \Sigma x) d\gamma_n(x) \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \det(B)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x) \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x, B^{-1}x\rangle\right) dx.\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά,

$$\mathbb{E} f_i(X_i)^{p_i} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n_i}{2}} \det(B_i)^{\frac{1}{2}}} \int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x_i)^{p_i} \exp\left(-\frac{1}{2}\langle x_i, B_i^{-1} x_i\rangle\right) dx_i.$$

Τέλος, παίρνοντας τον σB στη θέση του B για $\sigma > 0$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση ομογένειας (4.35), μπορούμε να γράψουμε την (4.45) ισοδύναμα ως

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} f_i(U_i x) \exp\left(-\frac{1}{2\sigma}\langle x, B^{-1}x\rangle\right) dx$$
$$\geqslant \left(\frac{\det(B)}{\prod_{i=1}^{m}\det(B_i)^{\frac{1}{p_i}}}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^{m}\left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x_i)^{p_i} \exp\left(-\frac{1}{2\sigma}\langle x_i, B_i^{-1}x_i\rangle\right) dx_i\right)^{\frac{1}{p_i}}.$$

Αφήνοντας το $\sigma \to +\infty$, παίρνουμε την (1.20).

Για την περίπτωση ισότητας, χρησιμοποιώντας το Λήμμα 4.4.2 και παίρνοντας τις συναρτήσεις

$$f_i(x_i) = \exp\left(-p^{-1}\left\langle B_i^{-1}x_i, x_i\right\rangle\right),$$

με έναν άμεσο υπολογισμό παίρνουμε την ισότητα στην (4.39). Για την απόδειξη του (i), μπορεί κανείς να προχωρήσει με παρόμοιο τρόπο χρησιμοποιώντας το Θεώρημα 1.1.1 (i). □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 5

Σύγκριση με την ανισότητα του Barthe

Στην πρώτη ενότητα αυτού του κεφαλαίου θα παρουσιάσουμε το λήμμα του Barthe καθώς και την απόδειξη που αυτός έδωσε σε εργασία του 1998. Σε μεταγενέστερη εργασία του (1998) ο Barthe έδειξε ότι μια γενίκευση αυτού του λήμματος για περισσότερες από δύο συναρτήσεις μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την ταυτόχρονη απόδειξη της ανισότητας Brascamp-Lieb και της αντίστροφής της. Στη δεύτερη ενότητα θα δούμε πώς αυτό το Λήμμα μπορεί να γενικευτεί από το Θεώρημα 1.4.1.

5.1 Λήμμα του Barthe

Ξεκινάμε υπενθυμίζοντας το λήμμα του Barthe.

Πρόταση 5.1.1 (Barthe). *Υποθέτουμε ότι* $p, q, r \geqslant 1$ *με* $1/p+1/q = 1+1/r$ *και θέτουμε* $c = \sqrt{r'/q'}$ *και* $s = \sqrt{r'/p'}$. *Έστω* f, g, F *και* G *συνεχείς και θετικές συναρτήσεις στον* $L_1(\mathbb{R})$ *οι οποίες ικανοποιούν τις* $\int f = \int F$ *και* $\int g = \int G$. *Τότε,*

$$\left(\int \left(\int f^{\frac{1}{p}}(cx-sy)g^{\frac{1}{q}}(sx+cy)dx\right)^r dy\right)^{\frac{1}{r}} \leqslant \int \left(\int F^{\frac{r}{p}}(cX-sY)G^{\frac{r}{q}}(sX+cY)dY\right)^{\frac{1}{r}} dX. \tag{5.1}$$

Απόδειξη. Η απόδειξη βασίζεται σε μια παραμετρικοποίηση συναρτήσεων που χρησιμοποιήθηκε από τους Henstock, Macbeath (1953) και είναι εμπνευσμένη από την απόδειξη του Brunn για την ανισότητα Brunn-Minkowski. Υποθέτουμε ότι f, g, F, G είναι συνεχείς και θετικές συναρτήσεις στον $L_1(\mathbb{R})$ τέτοιες ώστε $\int f = \int F$ και $\int g = \int G$. Μπορούμε επίσης να υποθέσουμε ότι το αριστερό ολοκλήρωμα στην (5.1) είναι πεπερασμένο (χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης). Αφού $\int f = \int F$ και $\int g = \int G$, υπάρχουν δύο συναρτήσεις u και v από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$ ώστε, για κάθε t,

$$\int_{-\infty}^{u(t)} f = \int_{-\infty}^{t} F \quad \text{και} \quad \int_{-\infty}^{v(t)} g = \int_{-\infty}^{t} G.$$

Αφού οι f, g, F και G συνεχείς και δεν μηδενίζονται πουθενά, οι u και v είναι αύξουσες, 1-1 και έπί από το $\mathbb{R}$ στο $\mathbb{R}$, και συνεχώς διαφορίσιμες. Για κάθε t,

$$u'(t) \cdot f(u(t)) = F(t) \quad \text{και} \quad v'(t) \cdot g(v(t)) = G(t). \tag{5.2}$$

Η απεικόνιση $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ που ορίζεται από την $T(x, y) = (u(x), v(y))$ είναι 1-1 και επί. Έστω R η στροφή

$$\begin{pmatrix} c & -s \\ s & c \end{pmatrix}$$

στον $\mathbb{R}^2$. Θεωρούμε την αλλαγή μεταβλητής $(x, y) = \Theta(X, Y)$ στο $\mathbb{R}^2$ που δίνεται από την απεικόνιση $\Theta = R^t T R$. Αυτό σημαίνει ότι

$$x = cu(cX - sY) + sv(sX + cY) \ , \ \ y = -su(cX - sY) + cv(sX + cY).$$

Εύκολα ελέγχουμε ότι η Θ είναι διαφορίσιμη και 1-1 στο $\mathbb{R}^2$. Η Ιακωβιανή $J\Theta$ στο σημείο (X, Y) είναι ίση με

$$J\Theta(X, Y) = u'(cX - sY)v'(sX + cY).$$

Θέλουμε ένα άνω φράγμα για το ολοκλήρωμα

$$I = \left(\int \left(\int f^{\,1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) dx \right)^r dy \right)^{1/r}.$$

Χρησιμοποιώντας τον $(L_r, L_{r'})$-δυϊσμό έχουμε ότι υπάρχει μια θετική συνάρτηση h τέτοια ώστε $\|h\|_{r'} = 1$ και

$$I = \iint f^{\,1/p}(cx - sy) g^{1/q}(sx + cy) h(y) dx dy.$$

Με την αλλαγή μεταβλητής $(x,y)=\Theta(X,Y)$, βλέπουμε ότι το I είναι ίσο με

$$\iint f^{\,1/p} u(cX-sY) g^{1/q}\left(v(sX+cY)\right) h\left(-su(cX-sY)+cv(sX+cY)\right) \times u'(cX-sY)v'(sX+cY)dXdY.$$

Για να συντομεύσουμε τους τύπους γράφουμε

$$U=u(cX-sY)\ ,\ \ V=v(sX+cY)$$
$$U'=u'(cX-sY)\ ,\ V'=v'(sX+cY).$$

Από τις σχέσεις στην (5.2) παίρνουμε

$$\begin{aligned} I &= \iint f^{\,1/p}\left(u(cX-sY)\right) g^{1/q}\left(v(sX+cY)\right) h(-sU+cV)U'V'dXdY \\ &= \int \left(\int F^{1/p}(cX-sY)G^{1/q}(sX+cY)h(-sU+cV)(U')^{1/p'}(V')^{1/q'}dY \right) dX. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ανισότητα Hölder για το ολοκλήρωμα ως προς Y με παραμέτρους r και r' παίρνουμε

$$\begin{aligned} I \leqslant \int & \left(\int F^{\,r/p}(cX-sY)G^{r/q}(sX+cY)dY \right)^{1/r} \\ & \times \left(\int h^{r'}(-sU+cV)(U')^{r'/p'}(V')^{r'/q'}dY \right)^{1/r'} dX. \end{aligned}$$

Αν θέσουμε $H(X)=\int h^{r'}(-sU+cV)(U')^{r'/p'}(V')^{r'/q'}dY$, τότε

$$H(X)=\int h^{r'}\left(\alpha(X,Y)\right)\left(u'(cX-sY)\right)^{s^2}\left(v'(sX+cY)\right)^{c^2}dY,$$

όπου

$$\alpha(X,Y)=-su(cX-sY)+cv(sX+cY).$$

Έχουμε

$$\frac{\partial\alpha}{\partial Y}(X,Y)=s^2u'(cX-sY)+c^2v'(sX+cY).$$

Από την ανισότητα αριθμητικού-γεωμετρικού μέσου έχουμε ότι $(U')s^2(V')c^2 \leqslant s^2U'+c^2V'$, άρα

$$H(X)\leqslant \int h^{r'}(\alpha(X,Y))\frac{\partial\alpha}{\partial Y}(X,Y)dY=\int h^{r'}=1.$$

Αυτό αποδεικνύει ότι

$$I\leqslant \int \left(\int F^{\,r/p}(cX-sY)G^{r/q}(sX+cY)dY \right)^{1/r} dX$$

και η απόδειξη ολοκλρώθηκε. □

5.2 Γενίκευση του λήμματος του Barthe

Σε αυτή την ενότητα θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.4.1 για να αποδείξουμε μια γενικότερη μορφή της Πρότασης 5.1.1, από την οποία μπορεί κανείς να πάρει τη γενική περίπτωση (rank > 1) της ανισότητας Brascamp-Lieb και της αντίστροφής της. Για διευκόλυνση στο συμβολισμό, συμφωνούμε για τα ακόλουθα, που θα χρησιμοποιούμε σε ολόκληρη την ενότητα:

(A1) Έστω $m, n, n_1, \dots, n_m$ θετικοί ακέραιοι. Συμβολίζουμε με U_i έναν $n_i \times n$ πίνακα με $\mathrm{rank}(U_i) = n$ για $i \leqslant m$. Θέτουμε $N = \sum_{i=1}^m n_i$ και συμβολίζουμε με U τον $N \times n$ πίνακα με block γραμμές $U_1, \dots, U_m$.

(A2) Έστω $c_1, \dots, c_m$ θετικοί αριθμοί και A ένας $n \times n$-διάστατος, πραγματικός, συμμετρικός και θετικά ορισμένος πίνακας. Θέτουμε $A_i = U_i A U_i^*$ για $i \leqslant m$ και υποθέτουμε ότι

$$U^* C_A U = A^{-1} \tag{5.3}$$

όπου $C_A := \mathrm{diag}\left(c_1 A_1^{-1}, \dots, c_m A_m^{-1}\right)$.

Παρατήρηση 5.2.1. Αφού $\mathrm{rank}(U_i) = n_i$ και ο A είναι συμμετρικός και θετικά ορισμένος, αυτό συνεπάγεται ότι $n_i \leqslant n$, οι A_i^{-1} υπάρχουν και ο C_A είναι καλά ορισμένος. Επίσης, από την (5.3), το Λήμμα 4.4.2 συνεπάγεται τη συνθήκη ομογένειας

$$\sum_{i=1}^m c_i n_i = n$$

καθώς και την $UAU^* \leqslant C_A^{-1}$. Έτσι, έχουμε ότι $N \geqslant n$.

Παρατήρηση 5.2.2. Η υπόθεση (5.3) διασφαλίζει ότι υπάρχει ένας $N \times (N-n)$ πίνακας W με $\mathrm{rank}(W) = N - n$ ώστε

$$\sqrt{C_A} U A U^* \sqrt{C_A} + WW^* = I_N. \tag{5.4}$$

Με άλλα λόγια, τα διανύσματα γραμμών του $N \times N$ πίνακα $\left(\sqrt{C_A} U \sqrt{A}, W\right)$ σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^N$. Για να το δούμε αυτό θυμόμαστε ότι, για κάθε πραγματικό πίνακα M, οι M^*M και MM^* έχουν τις ίδιες μη μηδενικές ιδιοτιμές με τις ίδιες αλγεβρικές πολλαπλότητες. Αν θέσουμε $M = \sqrt{C_A} U \sqrt{A}$, τότε η (5.3) παίρνει τη μορφή $MM^* = I_n$, και έτσι, ο $I_N - \sqrt{C_A} U A U^* \sqrt{C_A} = I_N - M^*M$ είναι συμμετρικός, θετικά ημιορισμένος και έχει τάξη $N - n$. Το Λήμμα 3.4.2 εξασφαλίζει τότε την ύπαρξη του W.

Θεώρημα 5.2.3. *Υποθέτουμε ότι τα* (A1) *και* (A2) *ισχύουν και ο* W *ικανοποιεί την* (5.4). *Για* $\rho > 0$ *θέτουμε*

$$\Gamma_\rho = \frac{(\det(A))^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{N-n}{2\rho}}} \prod_{i=1}^{m} \frac{(c_i p_i)^{\frac{n_i}{2p_i}}}{(\det(A_i))^{\frac{1}{2p_i}}}, \tag{5.5}$$

όπου

$$p_i := \frac{1}{c_i\left(1 + \frac{1-c_i}{\rho c_i}\right)}. \tag{5.6}$$

Έστω f_i *μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στον* $\mathbb{R}^{n_i}$ *για* $i \leqslant m$. *Ορίζουμε*

$$F(x,y) = \prod_{i=1}^{m} f_i\left(U_i x + \frac{1}{\sqrt{c_i}}\sqrt{A_i} W_i y\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{N-n}.$$

(i) *Για* $\rho \geqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} F^{\rho}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \geqslant \Gamma_\rho \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{p_i} \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)dx\right)^{\rho} dy\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{5.7}$$

(ii) *Για* $0 < \rho \leqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} F^{\rho}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \leqslant \Gamma_\rho \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{p_i} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)dx\right)^{\rho} dy\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{5.8}$$

Επιπλέον, έχουμε ισότητα στις (5.7) *και* (5.8) *αν* $\rho = 1$ (*για κάθε επιλογή των* f_i) *ή αν*

$$f_i(x) = \exp\left(-c_i\langle x, A_i^{-1}x\rangle\right), \quad x \in \mathbb{R}^{n_i} \quad 1 \leqslant i \leqslant m$$

(*για κάθε* $\rho > 0$).

Η επαλήθευση των περιπτώσεων ισότητας είναι απλή. Για την απόδειξη των (5.7) και (5.8) θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.4.1 για κατάλληλα επιλεγμένους πίνακες. Η απόδειξη αποτελείται από δύο μέρη. Στο πρώτο μέρος θα εξετάσουμε τη "γεωμετρική" μορφή, όπου $A = I_n$ και $U_i U_i^* = I_{n_i}$ για $i \leqslant m$. Στο δεύτερο μέρος θα ασχοληθούμε με τη γενική μορφή του θεωρήματος.

Το επιχείρημα που θα δούμε βασίζεται σε μια ιδέα των Brascamp και Lieb (1976) όπου οι συγγραφείς απέδειξαν ότι η ανισότητα Prékopa-Liendler είναι συνέπεια της ακριβούς ανισότητας Young. Το Θεώρημα 5.2.3 γενικεύει την απόδειξη των Brascamp και Lieb με στόχο να προκύψει η ανισότητα του Barthe ως συνέπεια του Θεωρήματος 1.4.1 (ii).

Υπενθυμίζουμε αρχικά ένα γνωστό αποτέλεσμά για θετικά ορισμένους πίνακες, το οποίο θα χρειαστούμε.

Λήμμα 5.2.4. *Έστω k, d θετικοί ακέραιοι, A και B δύο $k \times k$ και $d \times d$ πραγματικοί, συμμετρικοί και θετικά ορισμένοι πίνακες αντίστοιχα, και X ένας $d \times k$ πίνακας. Τότε,*

$$\begin{pmatrix} A & X^* \\ X & B \end{pmatrix} \geqslant 0 \Longleftrightarrow B - XA^{-1}X^* \geqslant 0. \tag{5.9}$$

Απόδειξη. Έχουμε ότι $B - XA^{-1}X^* \geqslant 0$ αν και μόνο αν

$$\begin{aligned} I &\geqslant B^{-\frac{1}{2}} \left(XA^{-1}X^*\right) B^{-\frac{1}{2}} \\ &= B^{-\frac{1}{2}} XA^{-\frac{1}{2}} A^{-\frac{1}{2}} X^* B^{-\frac{1}{2}} \\ &= \left(B^{-\frac{1}{2}} XA^{-\frac{1}{2}}\right) \left(B^{-\frac{1}{2}} XA^{-\frac{1}{2}}\right)^*. \end{aligned}$$

Ισοδύναμα, το παραπάνω μας λέει ότι

$$\left\| B^{-\frac{1}{2}} XA^{-\frac{1}{2}} \right\| \leqslant 1 \quad ή \quad X = B^{-\frac{1}{2}} KA^{-\frac{1}{2}},$$

όπου $\|K\| \leqslant 1$. Γνωρίζοντας ότι για θετικούς πίνακες A και B ο πίνακας $\begin{pmatrix} A & X^* \\ X & B \end{pmatrix}$ είναι θετικά ορισμένος αν και μόνο αν $X = B^{-\frac{1}{2}} KA^{-\frac{1}{2}}$ για κάποιον K με $\|K\| \leqslant 1$, από τα παραπάνω έχουμε το ζητούμενο. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.2.3. Υπενθυμίζουμε κάποιον συνηθισμένο συμβολισμό που θα χρησιμοποιηθεί. Για οποιουσδήποτε θετικούς ακεραίους k, d συμβολίζουμε τον $k \times d$ μηδενικό πίνακα με $\mathbb{O}_{k \times d}$ ή απλά $\mathbb{O}$ όταν δεν υπάρχει ασάφεια. Για κάθε πραγματικό αριθμό r, με r' συμβολίζουμε τον Hölder συζυγή εκθέτη του. Δεδομένου ότι για $\rho = 1$ το Θεώρημα 5.2.3 ισχύει τετριμμένα, από το θεώρημα Fubini, μπορούμε να υποθέσουμε χωρίς βλάβη της γενικότητας ότι $\rho \neq 1$.

Το πρώτο μέρος του επιχειρήματος έχει ως εξής.

Πρώτο Μέρος. Υποθέτουμε ότι $A = I_n$ και $U_i U_i^* = I_{n_i}$ με $i \leqslant m$. Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να ξαναγράψουμε τις (5.3) και (5.4) ως

$$U^* C U = I_n, \tag{5.10}$$

$$\sqrt{C} U U^* \sqrt{C} + W W^* = I_N, \tag{5.11}$$

όπου $C := C_{I_n} = \operatorname{diag}(c_1 I_{n_1}, \ldots, c_m I_{n_m})$. Ορίζουμε g_i με $g_i\left(\sqrt{c_i}x_i\right) = f_i(x_i)$ για $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$ και θέτουμε

$$G(x) = \int_{\mathbb{R}^{N-n}} \prod_{i=1}^{m} g_i^{\,\rho}\left(\sqrt{c_i}U_i x + W_i y\right) dy, \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

και

$$\tilde{G}(y) = \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^{m} g_i\left(\sqrt{c_i}U_i x + W_i y\right) dx, \quad y \in \mathbb{R}^{N-n}.$$

Πρώτα θα αποδείξουμε την αριστερή ανισότητα της (5.7). Θέτουμε $r := 1/\rho$ και χρησιμοποιώντας τη σχέση δυϊσμού (4.32) γράφουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} F^{\,\rho}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{\rho}} dx &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} \prod_{i=1}^{m} g_i^{\rho}\left(\sqrt{c_i}U_i x + W_i y\right) dy\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \\
&= \|G\|_r^r \\
&= \left(\inf_{\|H\|_{r'}=1} \int_{\mathbb{R}^n} H(x)G(x)dx\right)^r \\
&= \left(\inf_{\|H\|_{r'}=1} \int_{\mathbb{R}^N} H(V_0 z)\prod_{i=1}^{m} g_i^{\,\rho}(V_i z)dz\right)^{\frac{1}{\rho}}
\end{aligned}$$

όπου $V_0 = \begin{pmatrix} I_n & \mathbb{O}_{n\times(N-n)} \end{pmatrix}$ και $V_i = \begin{pmatrix} \sqrt{c_i}U_i & W_i \end{pmatrix}$, $\quad 1 \leqslant i \leqslant m$.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(V_0 z)\prod_{i=1}^{m} g_i^{\rho}\left(V_i z\right) dz \geqslant \Gamma_\rho^{\rho} \prod_{i=1}^{m} \|f_i\|_{p_i}^{\rho}, \tag{5.12}$$

για κάθε μη αρνητική H με $\|H\|_{r'} = 1$, και αυτό θα ολοκληρώσει την απόδειξη της αριστερής ανισότητας της (5.7). Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.4.1 (ii) για την ακόλουθη επιλογή πινάκων:

$$V = \begin{pmatrix} V_0 \\ \vdots \\ V_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_n & \mathbb{O}_{n\times(N-n)} \\ \sqrt{C}U & W \end{pmatrix} \tag{5.13}$$

και

$$B = \begin{pmatrix} I_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & \frac{1}{\rho} I_{N-n} \end{pmatrix}, Q = \operatorname{diag}(r' I_n, q_1 I_{n_1}, \ldots, q_m I_{n_m}), \tag{5.14}$$

όπου $q_i := p_i/\rho$.

Απευθείας υπολογισμός δίνει ότι

$$VBV^* = \begin{pmatrix} I_n & U^*\sqrt{C} \\ \sqrt{C}U & R_\rho \end{pmatrix}$$

όπου $R_\rho = \sqrt{C}UU^*\sqrt{C} + \frac{1}{\rho}WW^*$. Έτσι, χρησιμοποιώντας την (5.11) και την υπόθεση ότι $U_iU_i^* = I_{n_i}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} D_{VBV^*} &:= \operatorname{diag}(V_0BV_0^*, V_1BV_1^*, \dots, V_mBV_m^*) \\ &= \operatorname{diag}\left(I_n, \left(c_1 + \frac{1-c_1}{\rho}\right) I_{n_1}, \dots, \left(c_m + \frac{1-c_m}{\rho}\right) I_{n_m}\right) \\ &= \operatorname{diag}\left(I_n, \frac{1}{p_1} I_{n_1}, \dots, \frac{1}{p_m} I_{n_m}\right). \end{aligned}$$

Για να εφαρμόσουμε το Θεωρήμα 1.4.1 (ii) γι' αυτό το σύνολο πινάκων, χρειάζεται να ελέγξουμε τις υποθέσεις του. Υπενθυμίζουμε ότι $\sum_{i=1}^m c_in_i = n$ και $\sum_{i=1}^m n_i = N$, άρα

$$\frac{n}{r'} + \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{q_i} = n(1-\rho) + \rho \sum_{i=1}^m n_ic_i + \sum_{i=1}^m n_i(1-c_i) = N,$$

και έτσι η συνθήκη (1.16) ισχύει. Χρειάζεται επίσης να ελέγξουμε ότι

$$VBV^* - QD_{VBV^*} = \begin{pmatrix} (1-r')I_n & U^*\sqrt{C} \\ \sqrt{C}U & \Delta_\rho \end{pmatrix} \geqslant 0, \tag{5.15}$$

όπου

$$\begin{aligned} \Delta_\rho &= \sqrt{C}UU^*\sqrt{C} + \frac{1}{\rho}WW^* - \operatorname{diag}\left(\frac{q_1}{p_1}I_{n_1}, \dots, \frac{q_m}{p_m}I_{n_m}\right) \\ &= \sqrt{C}UU^*\sqrt{C} + WW^* - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)WW^* - \frac{1}{\rho}I_N \\ &= \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)(I_N - WW^*) = \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\sqrt{C}UU^*\sqrt{C}. \end{aligned}$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας πάλι την (5.11), παίρνουμε

$$\Delta_\rho - \sqrt{C}U\left((1-r')I_n\right)^{-1}U^*\sqrt{C} = \Delta_\rho - \left(1 - \frac{1}{\rho}\right)\sqrt{C}UU^*\sqrt{C} = 0,$$

και από το Λήμμα 4.4.2 έχουμε ότι η (5.15) ισχύει κι αυτή.

Τώρα, εφαρμόζοντας το Θεώρημα 1.4.1 (ii) παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} H(V_0 z)\prod_{i=1}^m g_i^{\rho}(V_i z)dz &\geqslant \left(\frac{\det(B)}{\det(V_0BV_0^*)^{\frac{1}{r'}}\prod_{i=1}^m \det(V_iBV_i^*)^{\frac{1}{q_i}}}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^m \|g_i^{\rho}\|_{q_i}\\ &= \left(\frac{\rho^{-(N-n)}}{1^{\frac{1}{r'}}\prod_{i=1}^m p_i^{-\frac{\rho n_i}{p_i}}}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^m c_i^{\frac{\rho n_i}{2p_i}}\|f_i\|_{p_i}^{\rho}\\ &= \Gamma_\rho^{\rho}\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}^{\rho},\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις $\sum_{i=1}^n c_i n_i = n$, $\sum_{i=1}^m n_i = N$ και την αλλαγή μεταβλητής $\|g_i\|_{p_i/\rho} = c_i^{\rho n_i/2p_i}\|f_i\|_{p_i}^{\rho}$. Αυτό αποδεικνύει την (5.12), και έτσι έχουμε την αριστερή ανισότητα της (5.7).

Περνάμε στη δεξιά ανισότητα της (5.7). Χρησιμοποιώντας τη σχέση δυϊσμού (4.31) έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)dx\right)^{\rho}dy\right)^{\frac{1}{\rho}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\prod_{i=1}^m g_i\left(\sqrt{c_i}U_i x + W_i y\right)dx\right)^{\rho}dy\right)^{\frac{1}{\rho}}\\ &= \|\tilde{G}\|_{\rho}\\ &= \sup_{\|H\|_{\rho'}=1}\int_{\mathbb{R}^{N-n}} H(y)\tilde{G}(y)dx\\ &= \sup_{\|H\|_{\rho'}=1}\int_{\mathbb{R}^N} H(\tilde{V}_0 z)\prod_{i=1}^m g_i(V_i z)dz\end{aligned}$$

όπου $\tilde{V}_0 = \begin{pmatrix} \mathbb{O}_{(N-n)\times n} & I_{N-n}\end{pmatrix}$ και $V_i = \begin{pmatrix}\sqrt{c_i}U_i & W_i\end{pmatrix}$, $\quad 1 \leqslant i \leqslant m$, όπως πριν. Όπως και στην προηγούμενη περίπτωση, θα δείξουμε ότι ισχύει η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^N} H(\tilde{V}_0 z)\prod_{i=1}^m g_i\left(V_i z\right)dz \leqslant \Gamma_\rho \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}, \tag{5.16}$$

για κάθε H με $\|H\|_{\rho'} = 1$, και αυτό θα αποδείξει τη δεξιά ανισότητα της (5.7). Θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα 1.4.1 (i) για τους πίνακες

$$\tilde{V} = \begin{pmatrix}\tilde{V}_0\\ V_1\\ \vdots\\ V_m\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\mathbb{O}_{(N-n)\times n} & I_{N-n}\\ \sqrt{C}U & W\end{pmatrix} \tag{5.17}$$

και

$$\tilde{B} = \begin{pmatrix} \rho I_n & \mathbb{O} \\ \mathbb{O} & I_{N-n} \end{pmatrix}, \quad P = \mathrm{diag}(\rho' I_{N-n}, p_1 I_{n_1}, \ldots, p_m I_{n_m}). \tag{5.18}$$

Αυτή τη φορά έχουμε ότι

$$\tilde{V}\tilde{B}\tilde{V}^* = \begin{pmatrix} I_{N-n} & W^* \\ W & \tilde{R}_\rho \end{pmatrix},$$

όπου $\tilde{R}_\rho = \rho\sqrt{C}UU^*\sqrt{C} + WW^*$. Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα (5.11) και το γεγονός ότι $U_iU_i^* = I_{n_i}$, παίρνουμε

$$\begin{aligned} D_{\tilde{V}\tilde{B}\tilde{V}^*} &:= \mathrm{diag}\left(\tilde{V}_0\tilde{B}\tilde{V}_0^*, V_1\tilde{B}V_1^*, \ldots, V_m\tilde{B}V_m^*\right) \\ &= \mathrm{diag}\left(I_{N-n}, \rho\left(c_1 + \frac{1-c_1}{\rho}\right) I_{n_1}, \ldots, \rho\left(c_m + \frac{1-c_m}{\rho}\right) I_{n_m}\right) \\ &= \mathrm{diag}\left(I_{N-n}, \frac{\rho}{p_1} I_{n_1}, \ldots, \frac{\rho}{p_m} I_{n_m}\right). \end{aligned}$$

Για να εφαρμόσουμε το Θεώρημα 1.4.1 (i) γι' αυτό το σύνολο πινάκων, ελέγχουμε τις υποθέσεις του. Σημειώνουμε πρώτα ότι

$$\frac{N-n}{\rho'} + \sum_{i=1}^m \frac{n_i}{p_i} = (N-n)\,\frac{\rho-1}{\rho} + \sum_{i=1}^m n_i c_i + \sum_{i=1}^m n_i \frac{1-c_i}{\rho} = N,$$

επομένως η συνθήκη (1.16) ισχύει. Πρέπει επίσης να ελέγξουμε ότι

$$\tilde{V}\tilde{B}\tilde{V}^* - PD_{\tilde{V}\tilde{B}\tilde{V}^*} = \begin{pmatrix} (1-\rho')I_{N-n} & W^* \\ W & \tilde{\Delta}_\rho \end{pmatrix} \leqslant 0, \tag{5.19}$$

όπου

$$\begin{aligned} \tilde{\Delta}_\rho &= \rho\sqrt{C}UU^*\sqrt{C} + WW^* - \mathrm{diag}\left(\rho I_{n_1}, \ldots, \rho I_{n_m}\right) \\ &= \sqrt{C}UU^*\sqrt{C} + WW^* - (1-\rho)\sqrt{C}UU^*\sqrt{C} - \rho I_N \\ &= (1-\rho)\,(I_N - \sqrt{C}UU^*\sqrt{C}) = (1-\rho)\,WW^*. \end{aligned}$$

Τέλος, σημειώνουμε ότι, χρησιμοποιώντας την σχέση (5.11) ξανά, παίρνουμε

$$\tilde{\Delta}_\rho - W\left((1-\rho')I_n\right)^{-1} W^* = \tilde{\Delta}_\rho - (1-\rho)WW^* = 0$$

και έτσι από το Λήμμα 4.4.2 έχουμε ότι η (5.19) ισχύει κι αυτή. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεώρημα 1.4.1 (i), παίρνουμε

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} H(\tilde{V}_0 z)\prod_{i=1}^m g_i(V_i z)dz &\leqslant \left(\frac{\det(\tilde{B})}{\det(\tilde{V}_0\tilde{B}\tilde{V}_0^*)^{\frac{1}{\rho'}}\prod_{i=1}^m \det(V_i\tilde{B}V_i^*)^{\frac{1}{p_i}}}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^m \|g_i\|_{p_i}\\ &= \left(\frac{\rho^n}{\prod_{i=1}^m\left(\frac{\rho}{p_i}\right)^{\frac{n_i}{p_i}}}\right)^{\frac{1}{2}}\prod_{i=1}^m c_i^{\frac{n_i}{2p_i}}\|f_i\|_{p_i}\\ &= \Gamma_\rho\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i},\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τις $\sum_{i=1}^m c_i n_i = n$, $\sum_{i=1}^m n_i = N$ και την αλλαγή μεταβλητής $\|g_i\|_{p_i} = c_i^{n_i/2p_i}\|f_i\|_{p_i}$. Αυτό αποδεικνύει την (5.16), και έτσι αποδείξαμε τη δεξιά ανισότητα της (5.7).

Η απόδειξη της (5.8) για $0 < \rho \leqslant 1$ γίνεται με όμοιο τρόπο και γι' αυτό την παραλείπουμε. □

Δεύτερο Μέρος: Γενική Περίπτωση. Στη γενική περίπτωση δεν υποθέτουμε ότι $A = I_n$ και $U_iU_i^* = I_{n_i}$. Για να αναχθούμε από τη γενική περίπτωση στην προηγούμενη, ορίζουμε $\tilde{U}_i = \sqrt{A_i}U_i\sqrt{A}$ και θεωρούμε τον $N\times n$ πίνακα $\tilde{U}$ με block γραμμές $\tilde{U}_1,\ldots,\tilde{U}_m$. Τότε, από τις υποθέσεις $(A1)$ και $(A2)$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\tilde{U}_i\tilde{U}_i^* &= I_{n_i}, \quad \forall i\leqslant m,\\ \tilde{U}^*C\tilde{U} &= I_n,\\ \sqrt{C}\tilde{U}\tilde{U}^*\sqrt{C}+WW^* &= I_N,\end{aligned}$$

όπου $C := \mathrm{diag}(c_1I_{n_1},\ldots,c_mI_{n_m})$. Ορίζουμε $h_i(x) := f_i(\sqrt{A_i}x)$, $x\in\mathbb{R}^{n_i}$, και χρησιμοποιώντας την πρώτη περίπτωση, εφαρμόζουμε την αριστερή ανισότητα της (5.7), για τις h_i και $\tilde{U}$, και παίρνουμε ότι αν για παράδειγμα $\rho\geqslant 1$,

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}}\prod_{i=1}^m h_i^\rho\left(\tilde{U}_ix+\frac{1}{\sqrt{c_i}}W_iy\right)dy\right)^{\frac{1}{\rho}}dx \geqslant \frac{1}{\rho^{\frac{N-n}{2\rho}}}\prod_{i=1}^m (c_ip_i)^{\frac{n_i}{2p_i}}\|h_i\|_{p_i}. \tag{5.20}$$

Η αλλαγή μεταβλητής $x\mapsto\sqrt{A}x$ μας οδηγεί στην

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}}\prod_{i=1}^m h_i^\rho\left(\tilde{U}_ix+\frac{1}{\sqrt{c_i}}W_iy\right)dy\right)^{\frac{1}{\rho}}dx = \frac{1}{\det(A)^{\frac{1}{2}}}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}}F^\rho dy\right)^{\frac{1}{\rho}}dx, \tag{5.21}$$

και πάλι, η αλλαγή μεταβλητής $x_i \mapsto \sqrt{A_i}x_i$ μας δίνει ότι

$$\|h_i\|_{p_i} = \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i^{\,p_i}\left(\sqrt{A_i}x_i\right)dx_i\right)^{\frac{1}{p_i}} = \frac{1}{\det(A_i)^{\frac{1}{2p_i}}}\|f_i\|_{p_i}. \tag{5.22}$$

Συνδυάζοντας τις (5.20), (5.21) και (5.22) έχουμε

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} F^{\,\rho}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{\rho}}dx \geqslant \frac{\det(A)^{\frac{1}{2}}}{\rho^{\frac{N-n}{2\rho}}}\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{(c_ip_i)^{n_i}}{\det(A_i)}\right)^{\frac{1}{2p_i}}\|f_i\|_{p_i} = \Gamma_\rho\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_{p_i}.$$

Όμοια αποδεικνύουμε και τη δεξιά ανισότητα της (5.7). Η απόδειξη των υπόλοιπων ανισοτήτων είναι όμοια και γι' αυτό την παραλείπουμε. □

5.3 Εφαρμογές του Θεωρήματος 5.2.3

5.3.1 Ανισότητες συνέλιξης

Χρησιμοποιούμε κι εδώ τον συμβολισμό των $(A1)$ και $(A2)$. Υποθέτουμε ότι $m = 2$, $n_1 = n_2 = n$, $N = 2n$ και για κάθε $\lambda \in [0,1]$ θεωρούμε την τετριμμένη αναπαράσταση της ταυτοτικής απεικόνισης στον $\mathbb{R}^n$

$$\lambda I_n + (1-\lambda)I_n = I_n.$$

Θέτουμε $c_1 = \lambda$, $c_2 = 1-\lambda$, $U_1 = U_2 = A = I_n$, $W_1 = \sqrt{1-\lambda}I_n$ και $W_2 = -\sqrt{\lambda}I_n$. Τότε, ένας άμεσος υπολογισμός δείχνει ότι ισχύουν οι (5.3) και (5.4 και έτσι το Θεώρημα 5.2.3 παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Πρόταση 5.3.1. *Έστω f_1, f_2 μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$. Ορίζουμε τη συνάρτηση*

$$F_\lambda(x,y) = f_1\left(x + \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}y\right)f_2\left(x - \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}y\right), \quad (x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$$

και για $\rho > 0$ θέτουμε

$$p_1 = \frac{\rho}{(\rho-1)\lambda+1}, \quad p_2 = \frac{\rho}{(\rho-1)(1-\lambda)+1}$$

και

$$\mathfrak{I}_\rho = \left(\frac{\lambda^{\frac{1}{p_1}}(1-\lambda)^{\frac{1}{p_2}}p_1^{\frac{1}{p_1}}p_2^{\frac{1}{p_1}}}{\rho^{\frac{2}{\rho}}}\right)^{\frac{n}{2}}.$$

(i) *Αν* $\rho \geqslant 1$, *τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda^\rho(x,y)dy\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \geqslant \mathfrak{J}_\rho \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x,y)dx\right)^\rho dy\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{5.23}$$

(ii) *Αν* $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, *τότε*

$$\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda^\rho(x,y)dy\right)^{\frac{1}{\rho}} dx \leqslant \mathfrak{J}_\rho \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} \leqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F_\lambda(x,y)dx\right)^\rho dy\right)^{\frac{1}{\rho}}. \tag{5.24}$$

Ακριβής ανισότητα Young και αντιστροφη ανισότητα Young. Με μια αλλαγή μεταβλητής, η Πρόταση 5.3.1 μπορεί επίσης να δώσει αμέσως την ακόλουθη πρόταση.

Πρόταση 5.3.2. *Έστω* f_1, f_2 *μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στον* $\mathbb{R}^n$. *Για κάθε* $\lambda \in (0,1)$, *θεωρούμε τους* p_1, p_2 *και* $\mathfrak{J}_\rho$ *όπως στην Πρόταση* 5.3.1, *και θέτουμε*

$$\mathfrak{J}'_\rho = \frac{\mathfrak{J}_\rho}{(\lambda(1-\lambda))^{\frac{n}{2\rho}}}.$$

(i) *Αν* $\rho \geqslant 1$, *τότε*

$$\|f_1 * f_2\|_\rho \leqslant \mathfrak{J}'_\rho \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} \leqslant \|\left(f_1^\rho * f_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}\|_1. \tag{5.25}$$

(ii) *Αν*, $0 \leqslant \rho \leqslant 1$, *τότε*

$$\|f_1 * f_2\|_\rho \geqslant \mathfrak{J}'_\rho \|f_1\|_{p_1}\|f_2\|_{p_2} \geqslant \|\left(f_1^\rho * f_2^\rho\right)^{\frac{1}{\rho}}\|_1. \tag{5.26}$$

Η πρόταση αυτή είναι μια αναδιατύπωση της ακριβούς ανισότητας Young και της αντίστροφης ανισότητας Young. Για να το δούμε αυτό, ας υποθέσουμε ότι οι $p,\ q,\ r > 0$ ικανοποιούν την $p^{-1} + q^{-1} = 1 + r^{-1}$. Επιλέγουμε $p = r$ και $\lambda = r'/q'$ στην Πρόταση 5.3.2, όπου r', q' είναι οι συζυγείς εκθέτες των r, q αντίστοιχα. Τότε, $p_1 = p$, $p_2 = q$ και $\mathfrak{J}'_\rho = C^n$ όπου η σταθερά C έχει οριστεί στις (4.33) και (4.34). Αν $p,\ q,\ r \geqslant 1$, τότε η αριστερή ανισότητα της (5.25) δίνει την (4.33) ενώ αν $0 < p, q, r < 1$ τότε η αριστερή ανισότητα της (5.26) δίνει την (4.34).

Ανισότητα Prékopa-Leindler. Αφήνοντας το $\rho \to \infty$ στην Πρόταση 5.3.1 από τη δεξιά ανισότητα της (5.23) παίρνουμε την ανισότητα Hölder. Από την αριστερή ανισότητα παίρνουμε την ανισότητα Prékopa-Leindler, η οποία είναι η συναρτησιακή μορφή της θεμελιώδους ανισότητας Brunn-Minkowski.

Θεώρημα 5.3.3 (ανισότητα Prékopa-Leindler). *Έστω f, g, h τρείς μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in [0,1]$ ώστε*

$$h(\lambda x + (1{-}\lambda)y) \geqslant f^{\,\lambda}(x) g^{1-\lambda}(y), \;\; \forall x,\; y \in \mathbb{R}^n. \tag{5.27}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx \geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g(x)dx\right)^{1-\lambda}. \tag{5.28}$$

Απόδειξη. Εφαρμόζουμε την αριστερή ανισότητα της (5.23) για τις $f_1 := f^{\,\lambda}$ και $f_2 := g^{1-\lambda}$. Χρησιμοποιώντας την (5.27) και αφήνοντας το $\rho \to \infty$, παίρνουμε

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} h(x)dx &\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{essup}_{y\in\mathbb{R}^n} h\left(\lambda\left(x + \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}y\right) + (1-\lambda)\left(x - \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}y\right)\right) dx \\
&\geqslant \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{essup}_{y\in\mathbb{R}^n} f^{\,\lambda}\left(x + \sqrt{\frac{1-\lambda}{\lambda}}y\right) g^{1-\lambda}\left(x - \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}y\right) dx \\
&\geqslant \left(\int_{\mathbb{R}^n} f\right)^{\lambda} \left(\int_{\mathbb{R}^n} g\right)^{1-\lambda}
\end{aligned}$$

και έχουμε την (5.28). □

Παρατήρηση 5.3.4. Η απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.3 δίνει στην πραγματικότητα την ισχυρότερη εκδοχή της ανισότητας Prékopa-Leindler, την οποία απέδειξαν οι Brascamp και Lieb (1976), η οποία εμφανίζει το essential supremum και αποφεύγει προβλήματα μετρησιμότητας.

5.3.2 Ανισότητα Brascamp-Lieb και ανισότητα Barthe

Το Θεώρημα 5.2.3, χωρίς τον περιορισμό $m = 2$, οδηγεί στις ανισότητες Brascamp-Lieb και Barthe αν αφήσουμε το $\rho \to \infty$ στην (5.7).

Θεώρημα 5.3.5. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (A1) και (A2). Τότε:*

(i) (*Ανισότητα Brascamp-Lieb*) *Έστω $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to [0,\infty)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις. Τότε,*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x)dx \leqslant \left(\frac{\det(A)}{\prod_{i=1}^m \det(A_i)^{c_i}}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{\frac{1}{c_i}}. \tag{5.29}$$

Ισότητα ισχύει αν $f_i(x_i) = \exp(-c_i\langle A_i^{-1}x_i, x_i\rangle)$, $\;i \leqslant m$.

(ii) (*Ανισότητα Barthe*) *Έστω* $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to [0,\infty)$, $1 \leqslant i \leqslant m$, *μη αρνητικές μετρήσιμες συναρτήσεις και* $f : \mathbb{R}^n \to [0,\infty)$ *που ικανοποιούν την*

$$f\left(\sum_{i=1}^m c_i U_i^* x_i\right) \geqslant \prod_{i=1}^m f_i(x_i), \quad x_i \in \mathbb{R}^{n_i}. \tag{5.30}$$

Τότε,

$$\prod_{i=1}^m \|f_i\|_{\frac{1}{c_i}} \leqslant \left(\frac{\det(A)}{\prod_{i=1}^m \det(A_i)^{c_i}}\right)^{\frac{1}{2}} \int_{\mathbb{R}^n} f(x)dx. \tag{5.31}$$

Ισότητα ισχύει αν

$$f_i(x_i) = \exp(-c_i\langle A_i x_i, x_i\rangle/2), \quad i \leqslant m$$

και

$$f(x) = \exp(-\langle Ax, x\rangle/2).$$

Παρατήρηση 5.3.6. Η διατύπωση του Θεωρήματος 5.3.5 συμπίπτει με αυτήν του Lehec (2013) και διαφέρει από την αρχική διατύπωση των ανισοτήτων Brascamp-Lieb και Barthe. Ωστόσο ο Lehec στην εργασία του έχει ένα επιχείρημα που δείχνει πώς μπορούν να προκύψουν οι αρχικές ανισότητες από το Θεώρημα 5.3.5.

Απόδειξη του Θεωρήματος 5.3.5. Ο ισχυρισμός ότι οι δεδομένες συναρτήσεις δίνουν ισότητα στις ανισότητες του θεωρήματος επαληθεύονται με άμεσους υπολογισμούς, οπότε θα παραλείψουμε αυτό το μέρος της απόδειξης.

Θυμηθείτε τον πίνακα W από την (5.4). Για να δείξουμε την (5.29) στέλνουμε το ρ στο άπειρο στη δεξιά ανισότητα της (5.7) και παίρνουμε

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^{N-n}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i\left(U_i x + \frac{1}{\sqrt{c_i}}\sqrt{A_i} W_i y\right) dy \leqslant \left(\frac{\det(A)}{\prod_{i=1}^m \det(A_i)^{c_i}}\right)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{\frac{1}{c_i}}.$$

Σημειώνουμε ότι εδώ έχουμε χρησιμοποιήσει τη συνθήκη (5.2.1) στο όριο $\lim_{\rho\to\infty}\Gamma_\rho$. Τώρα παίρνουμε την ανισότητα (5.29) παρατηρώντας ότι

$$\int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i(U_i x)dx \leqslant \sup_{y\in\mathbb{R}^{N-n}} \int_{\mathbb{R}^n} \prod_{i=1}^m f_i\left(U_i x + \frac{1}{\sqrt{c_i}}\sqrt{A_i} W_i y\right) dx.$$

Για την (5.31) ορίζουμε $g_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}_+$ με $g_i(x) = f_i(A_i^{-1} x_i)$. Σημειώνουμε ότι $\|g_i\|_p = \det(A_i)^{1/p}\|f_i\|_p$. Εφαρμόζοντας την αριστερή ανισότητα της (5.7) για τις συναρτήσεις

g_i και παίρνοντας όριο καθώς $\rho \to \infty$ χρησιμοποιώντας την (5.2.1), συμπεραίνουμε ότι

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{y\in\mathbb{R}^{N-n}} \prod_{i=1}^m f_i\left(\frac{1}{\sqrt{c_i}} A_i^{-\frac{1}{2}}(\sqrt{c_i}A_i^{-\frac{1}{2}}U_i x + W_i y)\right) dx \\ &\geqslant \det(A)^{\frac{1}{2}} \prod_{i=1}^m \det(A_i)^{\frac{1}{2p_i}} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}\end{aligned}$$

και με την αλλαγή μεταβλητής $x = Az$,

$$\begin{aligned}&\int_{\mathbb{R}^n} \sup_{y\in\mathbb{R}^{N-n}} \prod_{i=1}^m f_i\left(\frac{1}{\sqrt{c_i}} A_i^{-\frac{1}{2}}(\bar{U}_i\sqrt{A}z + W_i y)\right) dz \\ &\geqslant \frac{\prod_{i=1}^m \det(A_i)^{\frac{1}{2p_i}}}{\det(A)^{\frac{1}{2}}} \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i},\end{aligned}$$

όπου $\bar{U}_i := \sqrt{c_i}A_i^{-\frac{1}{2}}U_i\sqrt{A}$. Από την (5.30), η (5.31) θα ισχύει αν επαληθεύσουμε την

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^{N-n}} \prod_{i=1}^m f_i\left(\frac{1}{\sqrt{c_i}} A_i^{-\frac{1}{2}}(\bar{U}_i\sqrt{A}z + W_i y)\right) = \sup_{(\xi_1,\ldots,\xi_m):\sum_{i=1}^m c_i U_i^*\xi_i = z} \prod_{i=1}^m f_i(\xi_i). \tag{5.32}$$

Για να δείξουμε αυτή την ταυτότητα, υποθέτουμε πρώτα ότι για συναρτήσεις $F_i : \mathbb{R}^{n_i} \to \mathbb{R}_+$, $i \leqslant m$, έχουμε

$$\sup_{y\in\mathbb{R}^{N-n}} \prod_{i=1}^m F_i(V_i(x,y)) = \sup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m):\sum_{i=1}^m \bar{U}_i^*\alpha_i = x} \prod_{i=1}^m F_i(\alpha_i). \tag{5.33}$$

Από την (5.4), αν θέσουμε $V_i = (\bar{U}_i, W_i)$ για $i \leqslant m$, τότε οι γραμμές των $V_1, \ldots, V_m$ σχηματίζουν ορθοκανονική βάση του $\mathbb{R}^N$. Υποθέτουμε ότι το $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^{n_1} \times \ldots \times \mathbb{R}^{n_m}$ ικανοποιεί την $\sum_{i=1}^m \bar{U}_i^*\alpha_i = x$. Αν θέσουμε $y = \sum_{i=1}^m W_i\alpha_i \in \mathbb{R}^{N-n}$, τότε $V_i(x,y) = \alpha_i$. Αυτό αποδεικνύει την $\geqslant$ στην (5.33). Η απόδειξη της $\leqslant$ είναι όμοια και αυτή ολοκληρώνει την απόδειξη της (5.33). Τέλος, εφαρμόζοντας την (5.33) στην

$$F_i(x_i) = f_i\left(\frac{1}{\sqrt{c_i}} A_i^{-1} x_i\right)$$

για $x_i \in \mathbb{R}^{n_i}$, έχουμε ότι

$$\begin{aligned}\sup_{y\in\mathbb{R}^{N-n}} \prod_{i=1}^m f_i\left(\frac{1}{\sqrt{c_i}} A_i^{-\frac{1}{2}}(\bar{U}_i\sqrt{A}z + W_i y)\right) &= \sup_{y\in\mathbb{R}^{N-n}} \prod_{i=1}^m f_i\left(\frac{1}{\sqrt{c_i}} A_1^{-\frac{1}{2}} V_i(\sqrt{A}z, y)\right)\\ &= \sup_{(\alpha_1,\ldots,\alpha_m):\sum_{i=1}^m \bar{U}_i^*\alpha_i=\sqrt{A}z} \prod_{i=1}^m f_i\left(\frac{1}{\sqrt{c_i}} A_i^{-\frac{1}{2}}\alpha_i\right)\\ &= \sup_{(\xi_1,\ldots,\xi_m):\sum_{i=1}^m c_i U_i^*\xi_i=z} \prod_{i=1}^m f_i(\xi_i),\end{aligned}$$

όπου στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε την αλλαγή μεταβλητής

$$\xi_i = c_i^{-1/2} A_i^{-1/2}\alpha_i.$$

Αυτό δίνει την (5.32) και έχουμε το ζητούμενο. □

5.3.3 Μια ανισότητα εντροπίας

Τέλος αποδεικνύουμε κάποιες ανισότητες εντροπίας για συναρτήσεις πυκνότητας πιθανότητας. Έστω f μια θετική μετρήσιμη συνάρτηση στον $\mathbb{R}^n$. Ορίζουμε την εντροπία της f ως εξής:

$$\mathrm{Ent}(f) := \int_{\mathbb{R}^n} f(x)\log f(x)dx - \left(\int f(x)dx\right)\log\int f(x)dx,$$

όποτε έχει νόημα αυτή η ποσότητα. Σημειώνουμε ότι αν $g(p) := \|f\|_p$, τότε

$$g'(1) = \mathrm{Ent}(f). \tag{5.34}$$

Έστω F και Γ_ρ όπως στο Θεώρημα 5.2.3. Ορίζουμε τις συναρτήσεις G_1, G_2, G_3 στο $[0,\infty)$ με

$$\begin{aligned} G_1 &= \int_{\mathbb{R}^n}\left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}} F^{\,\rho}(x,y)dy\right)^{\frac{1}{\rho}} dx,\\ G_2 &= \Gamma_\rho \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i},\\ G_3 &= \left(\int_{\mathbb{R}^{N-n}}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(x,y)dx\right)^{\rho} dy\right)^{\frac{1}{\rho}}.\end{aligned}$$

Σημειώνουμε ότι το Θεώρημα Fubini συνεπάγεται ότι $G_1(1) = G_2(1) = G_3(1)$ και το Θεώρημα 5.2.3 ισχυρίζεται ότι

$$G_1(\rho) \leqslant G_2(\rho) \leqslant G_3(\rho), \quad \text{αν } \rho \leqslant 1$$

και

$$G_1(\rho) \geqslant G_2(\rho) \geqslant G_3(\rho), \quad \text{αν } \rho \geqslant 1.$$

Παίρνοντας όλα αυτά μαζί, έχουμε

$$G_3'(1) \leqslant G_2'(1) \leqslant G_1'(1), \tag{5.35}$$

που οδηγεί στις ακόλουθες ανισότητες εντροπίας.

Πρόταση 5.3.7. *Υποθέτουμε ότι ισχύουν οι (A1) και (A2) και ο W ικανοποιεί την (5.4). Αν g_i είναι πυκνότητες πιθανότητας στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $i \leqslant m$, ορίζουμε*

$$G(x,y) = \prod_{i=1}^{m} g_i(\sqrt{c_i}U_i x + W_i y). \tag{5.36}$$

Τότε,

$$D_1 \mathrm{Ent}\left(\int_{\mathbb{R}^n} G(x,\cdot)dx\right) \leqslant \sum_{i=1}^{m}(1-c_i)\mathrm{Ent}(g_i) + D_2 \leqslant D_1 \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Ent}\left(G(x,\cdot)\right)dx, \tag{5.37}$$

όπου

$$D_1 := \left(\frac{\prod_{i=1}^m \det(A_i)}{\det(A)}\right)^{\frac{1}{2}} \quad \text{και} \quad D_2 := \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}(1-c_i)\log\det(A_i).$$

Απόδειξη. Η ιδέα της απόδειξης είναι να υπολογίσουμε τις παραγώγους των G_1, G_2 και G_3 στο $\rho = 1$. Αυτό οδηγεί στις τρείς ποσότητες της (5.37) και οι ανισότητες διατηρούνται λόγω της (5.35). Σημειώνουμε πρώτα ότι από την (5.34) έχουμε $G_1'(1) = \int_{\mathbb{R}^n} \mathrm{Ent}\left(G(x,\cdot)\right)dx$ και $G_3'(1) = \mathrm{Ent}\left(\int_{\mathbb{R}^n} G(x,\cdot)dx\right)$. Όσο για την $G_2'(1)$, υπενθυμίζοντας την Γ_ρ από την (5.5) και ορίζοντας $\Omega_\rho = \prod_{i=1}^m \|f_i\|_{p_i}$, παίρνουμε άμεσα από τον ορισμό ότι

$$\Gamma_1 = \left(\det(A)\prod_{i=1}^{m}\frac{c_i^{n_i}}{\det(A_i)}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Omega_1 = \prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_1,$$

και μετά από αρκετές πράξεις βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{d\Gamma_\rho}{d\rho}\bigg|_{\rho=1} &= \det(A)^{\frac{1}{2}}\left(\prod_{i=1}^{m}\frac{c_i^{n_i/2}}{\sqrt{\det(A_i)}}\right)\left(\sum_{i=1}^{m}\frac{(1-c_i)n_i}{2}\left[\frac{\log\det(A_i)}{n_i} - \log c_i\right]\right),\\
\frac{d\Omega_\rho}{d\rho}\bigg|_{\rho=1} &= \left(\prod_{i=1}^{m}\|f_i\|_1\right)\left(\sum_{i=1}^{m}(1-c_i)\frac{\mathrm{Ent}(f_i)}{\|f_i\|_1}\right).
\end{aligned}$$

Συνδυάζοντας όλα τα παραπάνω έχουμε

$$\begin{aligned} G_2'(1) = \left(\prod_{i=1}^m \|f_i\|_1\right) &\left(\det(A)\prod_{i=1}^m \frac{c_i^{n_i}}{\det(A_i)}\right)^{\frac{1}{2}} \\ &\times \left(\sum_{i=1}^m \frac{(1-c_i)n_i}{2}\left(\frac{2\mathrm{Ent}(f_i)}{n_i\|f_i\|_1} + \frac{\log\det(A_i)}{n_i} - \log c_i\right)\right). \end{aligned}$$

Θέτουμε $f_i(x) := g_i(\sqrt{c_i}x)$. Παρατηρούμε ότι

$$c_i^{\frac{n_i}{2}}\int f_i = \int g_i = 1 \quad \text{και} \quad c_i^{\frac{n_i}{2}}\mathrm{Ent}(f_i) = \mathrm{Ent}(g_i) + \frac{n_i}{2}\log c_i.$$

Έτσι,

$$\frac{2\mathrm{Ent}(f_i)}{n_i\|f_i\|_1} = \log c_i + \frac{2}{n_i}\mathrm{Ent}(g_i)$$

και συνεπώς,

$$\begin{aligned} G_2'(1) &= \left(\frac{\det(A)}{\prod_{i=1}^m \det(A_i)}\right)^{\frac{1}{2}}\left(\sum_{i=1}^m (1-c_i)\mathrm{Ent}(g_i) + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^m (1-c_i)\log\det(A_i)\right) \\ &= D_1^{-1}\sum_{i=1}^m (1-c_i)\mathrm{Ent}(g_i) + D_1^{-1}D_2. \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας τους υπολογισμούς μας για τις $G_1'(1), G_2'(1)$ και $G_3'(1)$, από την (5.35) παίρνουμε το ζητούμενο. □

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 6

Ροπές λογαριθμικά κοίλων συναρτήσεων σε Gaussian τυχαία διανύσματα

6.1 Εισαγωγή

Σε αυτό το κεφάλαιο χρησιμοποιούμε τον συμβολισμό $X \sim N(\xi, T)$ αν X είναι ένα Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$ με μέση τιμή $\mathbb{E}(X) = \xi \in \mathbb{R}^k$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων τον θετικά ημιορισμένο $k \times k$ πίνακα T. Λέμε ότι το X είναι κεντραρισμένο αν $\mathbb{E}(X) = 0$ και ότι το X είναι τυπικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα αν είναι κεντραρισμένο και έχει ως πίνακα συνδιακυμάνσεων τον ταυτοτικό πίνακα στον $\mathbb{R}^k$. Σε αυτή την περίπτωση, η κατανομή του X είναι το τυπικό k-διάστατο μέτρο Gauss γ_k. Τέλος, γράφουμε $\mathcal{L}^{p,s}(\gamma_k)$ για την κλάση όλων των συναρτήσεων $f \in L_p(\gamma_k)$ που όλες οι μερικές τους παράγωγοι τάξης έως s ανήκουν κι αυτές στον $L_p(\gamma_k)$.

Μια μη αρνητική συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$ λέγεται λογαριθμικά κοίλη στον φορέα της αν και μόνο αν

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \geqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$$

για κάθε $\lambda \in [0, 1]$ και $x, y \in \mathrm{supp}(f)$. Αντίστοιχα, λέγεται λογαριθμικά κυρτή στον φορέα της αν και μόνο αν

$$f((1-\lambda)x+\lambda y) \leqslant f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$$

για κάθε $\lambda \in [0,1]$ και $x, y \in \operatorname{supp}(f)$. Σε αυτό το κεφάλαιο αποδεικνύουμε μια ακριβή ανισότητα για τις Gaussian ροπές λογαριθμικά κοίλων ή λογαριθμικά κυρτών συναρτήσεων.

Θεώρημα 6.1.1. *Έστω $k \in \mathbb{N}$, $f : \mathbb{R}^k \to [0,+\infty)$ λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση, $g : \mathbb{R}^k \to [0,+\infty)$ λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση, και X ένα Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$. Τότε:*

(α) *Για κάθε $0 \leqslant r \leqslant 1$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E} f(\sqrt{r}X) \geqslant \left(\mathbb{E} f(X)^r\right)^{1/r} \qquad \textit{και} \qquad \mathbb{E} g(\sqrt{r}X) \leqslant \left(\mathbb{E} g(X)^r\right)^{1/r}. \tag{6.1}$$

(β) *Για κάθε $q \geqslant 1$ ισχύει ότι*

$$\mathbb{E} f(\sqrt{q}X) \leqslant \left(\mathbb{E} f(X)^q\right)^{1/q} \qquad \textit{και} \qquad \mathbb{E} g(\sqrt{q}X) \geqslant \left(\mathbb{E} g(X)^q\right)^{1/q}. \tag{6.2}$$

Ισότητα ισχύει και στις δύο περιπτώσεις αν $r = q = 1$ ή $f(x) = g(x) = \exp(-\langle a, x\rangle + c)$, όπου $a \in \mathbb{R}^k$ και $c \in \mathbb{R}$.

Το κύριο βήμα της απόδειξης είναι η Πρόταση 6.2.9 για την απόδειξη της οποίας συνδυάζουμε το κεντρικό θεώρημα του Κεφαλαίου 2 (Θεώρημα 6.1.1) με την ανισότητα του Barthe.

Στη συνέχεια αποδεικνύουμε ένα αποτέλεσμα ευστάθειας για τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev. Έστω X ένα τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$. Ορίζουμε την εντροπία μιας μετρήσιμης συνάρτησης $f : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ως προς X, θέτοντας

$$\mathrm{Ent}_X(f) := \mathbb{E}|f(X)| \log |f(X)| - \mathbb{E}|f(X)| \log \mathbb{E}|f(X)|,$$

αν οι παραπάνω μέσες τιμές είναι πεπερασμένες. Η λογαριθμική ανισότητα Sobolev, η οποία αποδείχθηκε από τον Gross, ισχυρίζεται ότι αν $X \sim N(0, I_k)$ τότε

$$\mathrm{Ent}_X(|f|^2) \leqslant 2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2 \tag{6.3}$$

για κάθε $f \in L_2(\gamma_k)$. Μπορούμε φυσικά, χωρίς περιορισμό της γενικότητας, να διατυπώσουμε αυτή την ανισότητα μόνο για $f \geqslant 0$. Επίσης, ο Carlen απέδειξε ότι ισότητα ισχύει αν και μόνο αν η f είναι εκθετική συνάρτηση.

Από το Θεώρημα 6.1.1, εφαρμόζοντας τον τύπο Gaussian ολοκλήρωσης κατά μέρη, παίρνουμε την ακόλουθη ακριβή ανισότητα ευστάθειας για την ανισότητα του Gross, στην περίπτωση που η συνάρτηση είναι λογαριθμικά κοίλη.

Θεώρημα 6.1.2. *Έστω X ένα τυπικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$ και $f = e^{-v} \in \mathcal{L}^{2,1}(\gamma_k)$, όπου $v : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή, στον φορέα της, συνάρτηση. Τότε,*

$$2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2 - \mathbb{E}f(X)^2 \Delta v(X) \leqslant \mathrm{Ent}_X(f^2) \leqslant 2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2. \tag{6.4}$$

Σημείωση 6.1.3. Το Θεώρημα 6.1.2, διασφαλίζει ότι εάν μια λογαριθμική κοίλη συνάρτηση $f = e^{-v}$ είναι κοντά στο να είναι εκθετική, με την έννοια ότι η $\mathbb{E}f(X)^2 \Delta v(X)$ είναι μικρή, τότε η λογαριθμική ανισότητα Sobolev για f είναι σχεδόν ακριβής.

6.2 Απόδειξη του κύριου θεωρήματος

Το πρώτο βασικό εργαλείο για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1 είναι το κεντρικό θεώρημα του προηγούμενου κεφαλαίου, το οποίο υπενθυμίζουμε εδώ.

Θεώρημα 6.2.1. *Έστω $m, n_1, \ldots, n_m$ θετικοί ακέραιοι και $N = n_1 + \cdots + n_m$. Υποθέτουμε ότι X_i είναι ένα n_i-διάστατο τυχαίο διάνυσμα για $1 \leqslant i \leqslant m$ και ότι η κοινή τους κατανομή*

$$\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_m)$$

σχηματίζει ένα κεντραρισμένο από κοινού N-διάστατο Gaussian τυχαίο διάνυσμα με πίνακα συνδιακυμάνσεων $T = (T_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant m}$, όπου T_{ij} είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων μεταξύ των X_i και X_j για $1 \leqslant i, j \leqslant m$. Έστω P ο block διαγώνιος πίνακας

$$P = \mathrm{diag}\left(p_1 T_{11}, \ldots, p_m T_{mm}\right).$$

Για κάθε σύνολο μη μηδενικών μετρήσιμων συναρτήσεων f_i στον $\mathbb{R}^{n_i}$, $1 \leqslant i \leqslant m$ ισχύουν τα ακόλουθα.

(i) *Αν $T \leqslant P$, τότε*

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^m f_i\left(X_i\right) \leqslant \prod_{i=1}^m \left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}. \tag{6.5}$$

(ii) *Αν $T \geqslant P$, τότε*

$$\mathbb{E} \prod_{i=1}^m f_i\left(X_i\right) \geqslant \prod_{i=1}^m \left(\mathbb{E}f_i(X_i)^{p_i}\right)^{\frac{1}{p_i}}. \tag{6.6}$$

Το δεύτερο βασικό εργαλείο της απόδειξης είναι η αντίστροφη της Brascamp-Lieb ανισότητα του Barthe, η οποία γενικεύει την ανισότητα Prékopa-Leindler. Θα χρειαστούμε τη γεωμετρική μορφή της ανισότητας του Barthe.

Θεώρημα 6.2.2. *Έστω $n, m, n_1, \ldots, n_m \in \mathbb{N}$. Για κάθε $i = 1, \ldots, m$ θεωρούμε έναν $n_i \times n$ πίνακα U_i ώστε $U_i U_i^* = I_{n_i}$ και υποθέτουμε ότι υπάρχουν $c_1, \ldots, c_m > 0$ ώστε*

$$\sum_{i=1}^{m} c_i U_i^* U_i = I_n.$$

Έστω $h : \mathbb{R}^n \to [0, +\infty)$ και $f_i : \mathbb{R}^{n_i} \to [0, +\infty)$, $1 \leqslant i \leqslant m$ μετρήσιμες συναρτήσεις τέτοιες ώστε, για κάθε $\xi_i \in \mathbb{R}^{n_i}$,

$$h\left(\sum_{i=1}^{m} c_i U_i^*(\xi_i)\right) \geqslant \prod_{i=1}^{m} f_i(\xi_i)^{c_i}. \tag{6.7}$$

Τότε,

$$\int_{\mathbb{R}^n} h(x) d\gamma_n(x) \geqslant \prod_{i=1}^{m} \left(\int_{\mathbb{R}^{n_i}} f_i(x) d\gamma_{n_i}(x)\right)^{c_i}. \tag{6.8}$$

Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα 6.2.1 στην ειδική περίπτωση που ο πίνακας συνδιακυμάνσεων είναι ένας $kn \times kn$ πίνακας της μορφής $T = ([T_{ij}])_{i,j \leqslant n}$, με $T_{ii} = I_k$ και $T_{ij} = tI_k$ αν $i \neq j$, όπου $-\frac{1}{n-1} \leqslant t \leqslant 1$. Ισοδύναμα, σε αυτή την περίπτωση τα $X_1, \ldots, X_n$ είναι τυπικά Gaussian τυχαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^k$, τέτοια ώστε

$$\mathbb{E}(X_i X_j^*) = \begin{cases} I_k\,, & i = j \\ tI_k\,, & i \neq j \end{cases}. \tag{6.9}$$

Για κάθε $0 \leqslant t \leqslant 1$, ένας φυσιολογικός τρόπος για να κατασκευάσουμε τυχαία διανύσματα με αυτές τις ιδιότητες είναι να θεωρήσουμε n ανεξάρτητα αντίγραφα $Z_1, \ldots, Z_n$ ενός τυχαίου διανύσματος $Z \sim N(0, I_k)$ και να θέσουμε

$$X_i := \sqrt{t} Z + \sqrt{1-t} Z_i, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

Είναι τότε εύκολο να ελέγξουμε ότι η συνθήκη (6.9) ισχύει γι' αυτά τα διανύσματα. Στη συνέχεια όμως θα κατασκευάσουμε τέτοια διανύσματα χρησιμοποιώντας μια πιο γεωμετρική γλώσσα. Περιγράφουμε αρχικά αυτή την κατασκευή για την περίπτωση $k = 1$ των θεωρημάτων, και στη συνέχεια περνάμε στη γενική k-διάστατη περίπτωση χρησιμοποιώντας ένα επιχείρημα tensorization. Ξεκινάμε με τον ορισμό του κανονικού σφαιρικού simplex.

Ορισμός 6.2.3. Λέμε ότι το $S = \mathrm{conv}\{v_1, \ldots, v_n\} \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ είναι κανονικό σφαιρικό simplex αν τα $v_1, \ldots, v_n$ είναι μοναδιαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^{n-1}$ και ικανοποιούν τις

(α) $\langle v_i, v_j \rangle = -\frac{1}{n-1}$ αν $i \neq j$, (β) $\sum_{i=1}^n v_i = 0$.

Χρησιμοποιώντας τις κορυφές ενός κανονικού σφαιρικού simplex στον $\mathbb{R}^{n-1}$ μπορούμε να ορίσουμε n διανύσματα στον $\mathbb{R}^n$ τα οποία να σχηματίζουν την ίδια γωνία ανά δύο.

Λήμμα 6.2.4. *Έστω $n \geqslant 2$ και $v_1, \dots, v_n$ οι κορυφές ενός κανονικού σφαιρικού simplex στον $\mathbb{R}^{n-1}$. Για κάθε $-\frac{1}{n-1} \leqslant t \leqslant 1$ ορίζουμε μοναδιαία διανύσματα $u_1, \dots, u_n$ στον $\mathbb{R}^n$ θέτοντας*

$$u_i = u_i(t) = \sqrt{\frac{t(n-1)+1}{n}}e_n + \sqrt{\frac{n-1}{n}(1-t)}v_i. \tag{6.10}$$

Τότε, για κάθε $i \neq j$ έχουμε

$$\langle u_i, u_j \rangle = t. \tag{6.11}$$

Επιπλέον, χρησιμοποιώντας αυτά τα διανύσματα παίρνουμε μια αναπαράσταση του ταυτοτικού τελεστή στον $\mathbb{R}^n$ ως εξής:

(α) *Αν $0 \leqslant t \leqslant 1$ τότε*

$$\frac{1}{t(n-1)+1}\sum_{i=1}^n u_i u_i^* + \frac{nt}{t(n-1)+1}\sum_{j=1}^{n-1} e_j e_j^* = I_n. \tag{6.12}$$

(β) *Αν $-\frac{1}{n-1} \leqslant t \leqslant 0$ τότε*

$$\frac{1}{1-t}\sum_{i=1}^n u_i u_i^* + \frac{-nt}{1-t}e_n e_n^* = I_n. \tag{6.13}$$

Απόδειξη. Χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες (α) και (β), και το γεγονός ότι

$$\frac{n-1}{n}\sum_{i=1}^n v_i v_i^* = I_{n-1},$$

ελέγχουμε τις (6.11), (6.12) και (6.13) με απευθείας υπολογισμό. □

Παρατήρηση 6.2.5. Αν $Z \sim N(0, I_n)$, τότε οι $X_i := \langle u_i, Z \rangle$, $i = 1, \dots, n$ είναι τυπικές Gaussian τυχαίες μεταβλητές που ικανοποιούν την (6.9) στη μονοδιάστατη περίπτωση.

Για να κάνουμε την ίδια κατασκευή στη γενική k-διάστατη περίπτωση, χρησιμοποιούμε ένα γνωστό επιχείρημα tensorization. Δίνουμε αρχικά τον ορισμό του τανυστικού γινομένου δύο πινάκων.

Ορισμός 6.2.6. Έστω $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ και $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$. Τότε το τανυστικό γινόμενο των A και B είναι ο πίνακας

$$A \otimes B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{1n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{km\times \ell n}.$$

Κάθε διάνυσμα $a \in \mathbb{R}^n$ το βλέπουμε ως $n \times 1$ πίνακα στήλη, και έχοντας αυτόν τον συμβολισμό στο μυαλό μας, διατυπώνουμε κάποιες βασικές ιδιότητες του τανυστικού γινομένου.

Λήμμα 6.2.7. (α) *Έστω* $a = (a_1, \dots, a_m)^* \in \mathbb{R}^m$ *και* $b = (b_1, \dots, b_n)^* \in \mathbb{R}^n$. *Τότε,*

$$a \otimes b^* = ab^* = \begin{bmatrix} a_1 b_1 & \cdots & a_1 b_n \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_m b_1 & \cdots & a_m b_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m\times n}.$$

Ως γραμμικός μετασχηματισμός, ο $a \otimes b^* = ab^* : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *ορίζεται από την*

$$(a \otimes b^*)(x) = (ab^*)(x) = \langle x, b\rangle a,$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^n$.

(β) *Έστω* $A_i \in \mathbb{R}^{m\times n}$ *και* $B \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$. *Τότε* $(\sum_i A_i) \otimes B = \sum_i A_i \otimes B$.

(γ) *Έστω* $A_1 \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $B_1 \in \mathbb{R}^{k\times \ell}$ *και* $A_2 \in \mathbb{R}^{n\times r}$, $B_2 \in \mathbb{R}^{\ell\times s}$. *Τότε,*

$$(A_1 \otimes B_1)(A_2 \otimes B_2) = (A_1 A_2) \otimes (B_1 B_2) \in \mathbb{R}^{km\times rs}.$$

(δ) *Για κάθε* A *και* B,

$$(A \otimes B)^* = A^* \otimes B^*.$$

Θεωρούμε τώρα τους πίνακες

$$U_i := u_i^* \otimes I_k = \begin{bmatrix} [u_{i1} I_k] & \cdots & [u_{in} I_k] \end{bmatrix} \qquad (k \times kn), \qquad i = 1, \dots, n \tag{6.14}$$

και

$$E_j := e_j^* \otimes I_k = \begin{bmatrix} [e_{j1} I_k] & \cdots & [e_{jn} I_k] \end{bmatrix} \qquad (k \times kn), \qquad j = 1, \dots, n. \tag{6.15}$$

Τότε,

$$U_i^* U_i = (u_i^* \otimes I_k)^* (u_i^* \otimes I_k) = u_i u_i^* \otimes I_k, \qquad (kn \times kn)$$

και

$$E_j^* E_j = (e_j^* \otimes I_k)^*(e_j^* \otimes I_k) = e_j e_j^* \otimes I_k, \qquad (kn \times kn).$$

Άρα, παίρνοντας το τανυστικό γινόμενο με τον I_k στα δύο μέλη της (6.12) έχουμε ότι

$$\frac{1}{p}\sum_{i=1}^{n} U_i^* U_i + \frac{nt}{p}\sum_{j=1}^{n-1} E_j^* E_j = I_{kn} \tag{6.16}$$

για κάθε $t \in [0,1]$, όπου $p := (n-1)t + 1$.

Με τη βοήθεια αυτών των πινάκων είμαστε τώρα έτοιμοι να δώσουμε την κατασκευή στη γενική κατάσταση που περιγράφεται στην (6.9). Συνοψίζουμε στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 6.2.8. *Έστω $Z_1, \ldots, Z_n$ ανεξάρτητα $N(0, I_k)$ τυχαία διανύσματα και $\mathbf{Z} = (Z_1, \ldots, Z_n) \sim N(0, I_{kn})$. Θεωρούμε τα τυχαία διανύσματα*

$$X_i := U_i \mathbf{Z} = \sum_{a=1}^{n} u_{ia} Z_a, \qquad i = 1, \ldots, n. \tag{6.17}$$

Τότε $X_i \sim N(0, I_k)$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, και για $i \neq j$ έχουμε

$$\mathbb{E}\big[X_i \otimes X_j^*\big] = \big[\mathbb{E} X_{ir} X_{j\ell}\big]_{r,\ell \leqslant k} = \big[t\delta_{r\ell}\big]_{r,\ell \leqslant k} = tI_k. \tag{6.18}$$

Απόδειξη. Έχουμε $\mathbb{E}X_i = 0$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$, και αφού

$$\mathbb{E}[Z_a \otimes Z_b^*] = [\mathbb{E} Z_{ar} Z_{b\ell}]_{r,\ell \leqslant k} = \delta_{ab} I_k$$

έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}[X_{ir} X_{j\ell}] &= \mathbb{E}\left[\left(\sum_{a=1}^{n} u_{ia} Z_{ar}\right)\left(\sum_{b=1}^{n} u_{jb} Z_{b\ell}\right)\right] \\
&= \sum_{a=1}^{n}\sum_{b=1}^{n} u_{ia} u_{jb} \mathbb{E}[Z_{ar} Z_{b\ell}] \\
&= \sum_{a=1}^{n} u_{ia} u_{ja} \mathbb{E}[Z_{ar} Z_{a\ell}] \\
&= \sum_{a=1}^{n} u_{ia} u_{ja} \delta_{r\ell} \\
&= \langle u_i, u_j \rangle \delta_{r\ell}.
\end{aligned}$$

Τώρα η απόδειξη είναι πλήρης, αφού $|u_i| = 1$ για κάθε i και από την (6.11) έχουμε ότι $\langle u_i, u_j \rangle = t$ για κάθε $i \neq j$ □

Η επόμενη πρόταση, η οποία παρουσιάζει ανεξάρτητο ενδιαφέρον, είναι το πρώτο βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1.

Πρόταση 6.2.9. *Έστω $t \in [0,1]$, $k, n \in \mathbb{N}$, $p = t(n-1)+1$, X ένα τυπικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$ και $X_1, \dots, X_n$ αντίγραφα του X ώστε*

$$\mathbb{E}[X_i \otimes X_j^*] = (\mathbb{E}[X_{ir} X_{j\ell}])_{r,\ell \leqslant k} = tI_k, \qquad i \neq j.$$

Τότε για κάθε συνάρτηση $f : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$ που είναι λογαριθμικά κοίλη στον φορέα της, έχουμε ότι

$$\mathbb{E}\left(\prod_{i=1}^n f(X_i)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \left(\mathbb{E} f(X)^{\frac{p}{n}}\right)^{\frac{n}{p}} \leqslant \mathbb{E} f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right). \tag{6.19}$$

Σημειώνουμε ότι, αφού η f είναι λογαριθμικά κοίλη, έχουμε πάντα

$$\left(\prod_{i=1}^n f(X_i)\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right),$$

με ισότητα αν $f(x) = \exp(\langle a, x\rangle + c)$, όπου $a \in \mathbb{R}^k$ και $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη της αριστερής ανισότητας στην (6.19). Η αριστερή ανισότητα στην (6.19) προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος 6.2.1 στην ειδική περίπτωση που περιγράφεται στο Λήμμα 6.2.8. Σημειώνουμε ότι η υπόθεση ότι η f είναι λογαριθμικά κοίλη δεν είναι απαραίτητη εδώ. Αυτή η ανισότητα ισχύει για κάθε μετρήσιμη συνάρτηση f. Η παρατήρηση που ακολουθεί διευκρινίζει αυτό το σημείο.

Παρατήρηση 6.2.10. Έστω ότι $-\frac{1}{n-1} \leqslant t \leqslant 1$ και $X_1, \dots, X_n$ τυπικά Gaussian τυχαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^k$ που ικανοποιούν τη συνθήκη (6.18) του Λήμματος 6.2.8. Δηλαδή, το $\mathbf{X} := (X_1, \dots, X_n)$ είναι ένα κεντραρισμένο Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^{kn}$ με πίνακα συνδιακυμάνσεων $T = [T_{i,j}]_{i,j \leqslant n}$, που έχει ως blocks τους $k \times k$ πίνακες $T_{ii} = I_k$ για κάθε $i = 1, \dots, n$ και $T_{ij} = tI_k$ για $i \neq j$. Αν θέσουμε

$$p := (n-1)t + 1 \qquad \text{και} \qquad q := 1 - t,$$

τότε δεν είναι δύσκολο να ελέγξουμε ότι, αν $t \leqslant 0$, ο q είναι η μεγαλύτερη και ο p είναι η μικρότερη ιδιάζουσα τιμή του T. Από την άλλη πλευρά, αν $t \geqslant 0$ τότε ο p είναι η μεγαλύτερη ιδιάζουσα τιμή του T και ο q είναι η μικρότερη. Έτσι έχουμε ότι

(α) Αν $t \geqslant 0$ τότε
$$qI_{kn} \leqslant T \leqslant pI_{kn}.$$

(β) Αν $t \leqslant 0$ τότε

$$pI_{kn} \leqslant T \leqslant qI_{kn}.$$

Συνεπώς, σε αυτή την κατάσταση, το Θεώρημα 6.2.1 παίρνει την ακόλουθη μορφή.

Θεώρημα 6.2.11. *Έστω $k, n \in \mathbb{N}$, $-\frac{1}{n-1} \leqslant t \leqslant 1$ και $X_1, \ldots, X_n$ τυπικά Gaussian τυχαία διανύσματα στον $\mathbb{R}^k$ με $\mathbb{E}[X_i \otimes X_j^*] = tI_k$ για κάθε $i \neq j$. Θέτουμε $p := (n-1)t + 1$ και $q := 1 - t$. Τότε, αν $f_i : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$, $i = 1, \ldots, n$ είναι μετρήσιμες συναρτήσεις, έχουμε:*

(α) *Αν $0 \leqslant t \leqslant 1$ τότε*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E} f_i(X_i)^q\right)^{1/q} \leqslant \mathbb{E} \prod_{i=1}^{n} f_i(X_i) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E} f_i(X_i)^p\right)^{1/p}. \tag{6.20}$$

(β) *Αν $-\frac{1}{n-1} \leqslant t \leqslant 0$ τότε*

$$\prod_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E} f_i(X_i)^p\right)^{1/p} \leqslant \mathbb{E} \prod_{i=1}^{n} f_i(X_i) \leqslant \prod_{i=1}^{n} \left(\mathbb{E} f_i(X_i)^q\right)^{1/q}. \tag{6.21}$$

Τώρα, η αριστερή ανισότητα της (6.19) προκύπτει άμεσα από την (6.20) αν πάρουμε $f^{1/n} = f_i$ για κάθε $i = 1, \ldots, n$. $\square$

Για την απόδειξη της δεξιάς ανισότητας στην (6.19), εφαρμόζουμε το θεώρημα του Barthe, χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση του ταυτοτικού τελεστή που μας δίνει η (6.16). Χρειαζόμαστε κάποιες τεχνικές λεπτομέρειες, τις οποίες συγκεντρώνουμε στο επόμενο λήμμα.

Λήμμα 6.2.12. *Έστω U_i και E_i, $1 \leqslant i \leqslant n$ οι πίνακες που ορίστηκαν στις (6.14) και (6.15), και έστω $p = (n-1)t + 1$ και $q = 1 - t$. Τότε,*

$$\begin{aligned}
U_i^* &= \sqrt{\frac{p}{n}} e_n \otimes I_k + \sqrt{\frac{n-1}{n}} q v_i \otimes I_k \in \mathbb{R}^{kn \times k} \\
U_i U_j^* &= \langle u_i, u_j \rangle I_k \\
U_i E_j^* &= \sqrt{\frac{n-1}{n}} q \langle v_i, e_j \rangle I_k
\end{aligned}$$

για κάθε $i \leqslant n$ και $j \leqslant n - 1$.

Απόδειξη. Η πρώτη και η δεύτερη ισότητα ελέγχονται εύκολα με άμεσο υπολογισμό. Για την τρίτη ισότητα γράφουμε

$$\begin{aligned}
U_iE_j^* &= (u_i^* \otimes I_k)(e_j^* \otimes I_k)^* \\
&= \left(\sqrt{\frac{p}{n}}e_n^* \otimes I_k + \sqrt{\frac{n-1}{n}}qv_i^* \otimes I_k\right)(e_j \otimes I_k) \\
&= \sqrt{\frac{p}{n}}(e_n^* \otimes I_k)(e_j \otimes I_k) + \sqrt{\frac{n-1}{n}}q(v_i^* \otimes I_k)(e_j \otimes I_k) \\
&= \sqrt{\frac{p}{n}}e_n^*e_j \otimes I_k + \sqrt{\frac{n-1}{n}}qv_i^*e_j \otimes I_k \\
&= \sqrt{\frac{p}{n}}\langle e_n, e_j\rangle I_k + \sqrt{\frac{n-1}{n}}q\langle v_i, e_j\rangle I_k \\
&= \mathbb{O} + \sqrt{\frac{n-1}{n}}q\langle v_i, e_j\rangle I_k.
\end{aligned}$$

□

Απόδειξη της δεξιάς ανισότητας στην (6.19). Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.2.2, χρησιμοποιώντας την αναπαράσταση του ταυτοτικού τελεστή από την (6.16). Πιο συγκεκριμένα επιλέγουμε τις παραμέτρους $n \leftrightarrow kn$, $m := 2n-1$, $n_i := k$ για κάθε $i = 1, \dots, 2n-1$, και

$$c_i := \begin{cases} \frac{1}{p} & , \ i = 1, \dots, n \\ \frac{nt}{p} & , \ i = n+1, \dots, 2n-1 \end{cases}$$

και εφαρμόζουμε το Θεώρημα 6.2.2 για τις συναρτήσεις

$$\tilde{f}_i(x) := \begin{cases} f(x)^{\frac{p}{n}} & , \ i = 1, \dots, n \\ 1 & , \ i = n+1, \dots, 2n-1 \end{cases}, \qquad x \in \mathbb{R}^k$$

και

$$h(x) := f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n U_ix\right), \qquad x \in \mathbb{R}^{kn}.$$

Από το Λήμμα 6.2.12, για κάθε $\xi_j \in \mathbb{R}^k$, $j = 1, \ldots, n$, έχουμε

$$\begin{aligned} &h\left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p} U_j^* \xi_j + \sum_{a=1}^{n-1} \frac{nt}{p} E_a^* \xi_{n+a}\right) \\ &\quad = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p} U_i U_j^* \xi_j + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{a=1}^{n-1} \frac{nt}{p} U_i E_a^* \xi_{n+a}\right) \\ &\quad = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p} U_i U_j^* \xi_j + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{a=1}^{n-1} \frac{nt}{p} \sqrt{\frac{n-1}{n}} q\langle v_i, e_a\rangle \xi_{n+a}\right). \end{aligned}$$

Γνωρίζουμε από την υπόθεση ότι τα v_i είναι κορυφές ενός κανονικού σφαιρικού simplex, άρα $\sum_{i=1}^{n} v_i = 0$ και συνεπώς θα έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p} U_i U_j^* \xi_j + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{a=1}^{n-1} \frac{nt}{p} \sqrt{\frac{n-1}{n}} q\langle v_i, e_a\rangle \xi_{n+a}\right) \\ &\quad = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p} U_i U_j^* \xi_j\right) \\ &\quad = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{p} \langle u_i, u_j\rangle \xi_j\right) \\ &\quad = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p}\xi_i + \sum_{j\neq i} \frac{t}{p}\xi_j\right)\right) \\ &\quad = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p} + (n-1)\frac{t}{p}\right)\xi_i\right). \end{aligned}$$

Από την υπόθεση γνωρίζουμε ότι $p = (n-1)t + 1$ και από αυτό έχουμε ότι $1 = \frac{(n-1)t}{p} + \frac{1}{p}$. Σε συνδυασμό με τα παραπάνω έχουμε ότι

$$\begin{aligned} &f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{1}{p} + (n-1)\frac{t}{p}\right)\xi_i\right) \\ &\quad = f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\xi_i\right) \\ &\quad \geqslant \prod_{i=1}^{n} f(\xi_i)^{1/n} = \prod_{i=1}^{n} (f(\xi_i)^{p/n})^{1/p} = \prod_{i=1}^{n} \tilde{f}(\xi_i)^{c_i}. \end{aligned}$$

Τώρα, το Θεώρημα 6.2.2 μας δίνει ότι

$$\mathbb{E}f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \mathbb{E}f\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i Z\right) \geqslant \prod_{i=1}^{n} (\mathbb{E}f(X_i)^{p/n})^{1/p} = (\mathbb{E}f(X)^{p/n})^{n/p} \tag{6.22}$$

και η απόδειξη είναι πλήρης. □

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.1. Υποθέτουμε αρχικά ότι $X \sim N(0, I_k)$. Τότε, με τον συμβολισμό του Λήμματος 6.2.8 έχουμε ότι

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} U_i \mathbf{Z} &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{p}{n}}(e_n^* \otimes I_k)\mathbf{Z} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}q}(v_i^* \otimes I_k)\mathbf{Z} \\
&= \sqrt{\frac{p}{n}}(e_n^* \otimes I_k)\mathbf{Z} + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}q}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i^*\right) \otimes I_k\mathbf{Z} \\
&= \sqrt{\frac{p}{n}}E_n\mathbf{Z} + \frac{1}{n}\sqrt{\frac{n-1}{n}q}\left(\sum_{i=1}^{n} v_i\right)^* \otimes I_k\mathbf{Z} \\
&= \sqrt{\frac{p}{n}}Z_n.
\end{aligned}$$

Έτσι, το δεξιό μέλος της (6.19) γράφεται ως

$$\mathbb{E}f\left(\sqrt{\frac{p}{n}}X\right) \geqslant (\mathbb{E}f(X)^{p/n})^{n/p} \tag{6.23}$$

όπου $p = (n-1)t + 1$, $n \in \mathbb{N}$ και $t \in [0,1]$.

Συνεπώς, αν $f : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$ είναι μια λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση και $0 < r \leqslant 1$, τότε υπάρχουν $t \in [0,1]$ και $n \in \mathbb{N}$ ώστε $r = \frac{p}{n} = \frac{(n-1)t+1}{n}$, και από την (6.23) βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}f(\sqrt{r}X) \geqslant (\mathbb{E}f(X)^r)^{1/r} \tag{6.24}$$

για κάθε $0 < r \leqslant 1$. Για την περίπτωση $r = 0$ δουλεύουμε ξεχωριστά. Αφού η f είναι λογαριθμικά κοίλη, υπάρχει μια κυρτή συνάρτηση $v : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ ώστε $f = e^{-v}$. Τότε, για $r = 0$, η ανισότητα (6.1) είναι ισοδύναμη με την ανισότητα Jensen

$$v(0) = v(\mathbb{E}X) \leqslant \mathbb{E}v(X), \tag{6.25}$$

και τώρα η απόδειξη της (6.1) είναι πλήρης.

Για κάθε $q \geqslant 1$ ορίζουμε $r = \frac{1}{q} \in (0,1]$. Θεωρούμε την $F(x) = f(x/\sqrt{r})^{1/r}$ η οποία είναι επίσης λογαριθμικά κοίλη, άρα η (6.24) για την F και το r συνεπάγεται ότι

$$\mathbb{E}f(X)^q \geqslant (\mathbb{E}f(\sqrt{q}X))^q, \tag{6.26}$$

και έπεται η (6.2).

Υποθέτουμε τώρα ότι $g : \mathbb{R}^n \to [0,+\infty)$ είναι μια λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση και $0 < p \leqslant 1$. Από την υπόθεση ότι η g είναι λογαριθμικά κυρτή και από το Θεώρημα 6.2.11 (α) έχουμε ότι

$$\mathbb{E}g\left(\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\right) \leqslant \mathbb{E}\prod_{i=1}^n g(X_i)^{1/n} \leqslant \left(\mathbb{E}g(X)^{p/n}\right)^{n/p}. \tag{6.27}$$

Όπως έχουμε δει στην αρχή της απόδειξης, ισχύει ότι

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i \stackrel{d}{=} \sqrt{\frac{p}{n}}X.$$

Άρα, χρησιμοποιώντας την (6.27) για $t \in [0,1]$ και $n \in \mathbb{N}$ τέτοια ώστε $\frac{p}{n} = \frac{(n-1)t+1}{n} = r$, συμπεραίνουμε ότι

$$\mathbb{E}g(\sqrt{r}X) \leqslant (\mathbb{E}g(X)^r)^{1/r}$$

για κάθε $0 < r \leqslant 1$. Η συνέχεια της απόδειξης για μια λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση g είναι όμοια με αυτήν της λογαριθμικά κοίλης περίπτωσης.

Για τις περιπτώσεις της ισότητας, απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι για την $f(x) = \exp(\langle a, x\rangle + c)$ ισχύει η ισότητα

$$\mathbb{E}f(\sqrt{q}X) = C\exp\left(\frac{q}{2}|a|^2\right) = (\mathbb{E}f(X)^q)^{1/q}$$

για κάθε $q \geqslant 0$.

Τέλος, ας υποθέσουμε ότι X είναι ένα γενικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$ με μέση τιμή $\xi \in \mathbb{R}^k$ και πίνακα συνδιακυμάνσεων $T = UU^*$ όπου $U \in \mathbb{R}^{k\times k}$. Αν f είναι μια λογαριθμικά κοίλη ή λογαριθμικά κυρτή θετική συνάρτηση στον $\mathbb{R}^k$, τότε το ίδιο ισχύει για την $F(x) := f(U(x-\xi))$. Επιπλέον, αν $Z \sim N(0, I_k)$ τότε $U(Z-\xi) \stackrel{d}{=} X \sim N(0,T)$. Έτσι, μπορούμε να πάρουμε το γενικό θεώρημα εφαρμόζοντας για τη συνάρτηση F την ειδική περίπτωση που έχουμε ήδη αποδείξει. □

6.3 Ευστάθεια της λογαριθμικής ανισότητας Sobolev

Η πρώτη εμφάνιση των λογαριθμικών ανισοτήτων Sobolev εντοπίζεται στο έργο του A. Stam (1959) από τη θεωρία της πληροφορίας. Οι λογαριθμικές ανισότητες Sobolev μελετήθηκαν για πρώτη φορά συστηματικά από τον Gross (1975) μαζί με τη σύνδεσή τους με τις ημιομάδες Markov και έχουν χρησιμοποιηθεί εκτενώς ως τρόπος μέτρησης των ιδιοτήτων εξομάλυνσής τους. Ένα από τα κύρια αποτελέσματα είναι η ισοδυναμία με την υπερσυσταλτότητα σε ένα γενικό πλαίσιο. Η αλληλεπίδραση μεταξύ των λογαριθμικών ανισοτήτων Sobolev και της υπερσυσταλτότητας περιγράφεται από τους Davies, Gross και Simon (1988) και Gross (1975). Υπάρχουν πολλές διαφορετικές αποδείξεις της Gaussian λογαριθμικής Sobolev ανισότητας, μταξύ των οποίων η απόδειξη του Gross (1917) ο οποίος χρησιμοποίησε μια ανισότητα δύο σημείων, tensorization και το κεντρικό οριακό θεώρημα.

Υπενθυμίζουμε τη λογαριθμική ανισότητα Sobolev, την οποία αποδείξαμε στο Κεφάλαιο 4 (βλέπε Θεώρημα 4.3.1) χρησιμοποιώντας την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck: Για κάθε $f \in L_{2,1}(\gamma_k)$ ισχύει η ανισότητα

$$\int_{\mathbb{R}^n} f^2 \log |f^2| d\gamma_k - \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma_k \cdot \log\left(\int_{\mathbb{R}^n} f^2 d\gamma_k\right) \leqslant \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla f|^2 d\gamma_k,$$

δηλαδή

$$\int |f|^2 \log |f|^2 d\gamma_k \leqslant \int |\nabla f|^2 d\gamma_k + \|f\|_2^2 \log \|f\|_2^2,$$

με τη σύμβαση $f^2 \log |f|^2 = 0$ αν $f = 0$.

Σημείωση 6.3.1. Παρατηρούμε ότι (για $f \geqslant 0$)

$$\mathrm{Ent}_X(f) = \frac{d}{dq}\left[(\mathbb{E} f(X)^q)^{\frac{1}{q}}\right]_{q=1}$$

και από το Θεώρημα 6.1.1 έπονται οι ακόλουθες ανισότητες εντροπίας.

Πρόταση 6.3.2. *Έστω X ένα Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$, και $f : \mathbb{R}^k \to [0, +\infty)$. Τότε:*

(α) *Αν η f είναι λογαριθμικά κοίλη, τότε*

$$\mathrm{Ent}_X(f) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\langle X, \nabla f(X)\rangle. \tag{6.28}$$

(β) *Αν η f είναι λογαριθμικά κυρτή, τότε*

$$\mathrm{Ent}_X(f) \leqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\langle X, \nabla f(X)\rangle. \tag{6.29}$$

Σε κάθε περίπτωση, ισότητα ισχύει όταν $f(x) = \exp(\langle a, x\rangle + c)$, όπου $a \in \mathbb{R}^k$ και $c \in \mathbb{R}$.

Απόδειξη. Ορίζουμε

$$M(q) := (\mathbb{E}f(X)^q)^{1/q} \qquad \text{και} \qquad H(q) := \mathbb{E}f(\sqrt{q}X).$$

Τότε έχουμε

$$M(1) = \mathbb{E}f(X) = H(1), \;\; M'(1) = \mathrm{Ent}_X(f) \quad \text{και} \quad H'(1) = \frac{1}{2}\mathbb{E}\langle X, \nabla f(X)\rangle.$$

Τώρα το ζητούμενο προκύπτει άμεσα από το Θεώρημα 6.1.1. □

Υπενθυμίζουμε σε αυτό το σημείο τον τύπο της Gaussian ολοκλήρωσης κατά μέρη.

Λήμμα 6.3.3. *Έστω $X, Y_1, \ldots, Y_n$ κεντραρισμένες από κοινού Gaussian τυχαίες μεταβλητές, και $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, που ικανοποιεί τη συνθήκη*

$$\lim_{|x|\to\infty} |F(x)| \exp(-a|x|^2) = 0 \tag{6.30}$$

για κάθε $a > 0$. Τότε,

$$\mathbb{E}[XF(Y_1, \ldots, Y_n)] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[XY_i]\, \mathbb{E}[\partial_i F(Y_1, \ldots, Y_n)]. \tag{6.31}$$

Χρησιμοποιώντας τον τύπο της Gaussian ολοκλήρωσης κατά μέρη μπορούμε να αξιοποιήσουμε περισσότερο την Πρόταση 6.3.2 και τελικά να αποδείξουμε το Θεώρημα 6.1.2.

Πιο συγκεκριμένα, συμβολίζουμε με $\mathcal{G}_k$ την κλάση όλων των συναρτήσεων στον $\mathbb{R}^k$ με την ιδιότητα ότι οι πρώτες παράγωγοί τους ικανοποιούν τη συνθήκη (6.30). Τότε, για κάθε $f \in \mathcal{G}_k$ το Λήμμα 6.3.3 μας δίνει

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\langle X, \nabla f(X)\rangle] &= \sum_{i=1}^{k} \mathbb{E}[X_i \partial_i f(X)] \\ &= \sum_{i=1}^{k}\sum_{j=1}^{k} \mathbb{E}[X_i X_j]\, \mathbb{E}[\partial_{ij} f(X)] = \mathbb{E}\left[\mathrm{tr}(TH_f(X))\right],\end{aligned}$$

όπου T είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων και $H_f(x)$ είναι ο Εσσιανός πίνακας της f στο $x \in \mathbb{R}^k$. Στην ειδική περίπτωση όπου $X \sim N(0, I_k)$ αυτό αποδεικνύει το εξής.

Πόρισμα 6.3.4. *Έστω $k \in \mathbb{N}$ και X ένα τυπικό Gaussian τυχαίο διάνυσμα στον $\mathbb{R}^k$. Τότε:*

(α) *Για κάθε λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση $f \in \mathcal{G}_k$ έχουμε ότι*

$$\mathrm{Ent}_X(f) \geqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\Delta f(X). \tag{6.32}$$

(β) *Για κάθε λογαριθμικά κυρτή συνάρτηση $f \in \mathcal{G}_k$ έχουμε ότι*

$$\mathrm{Ent}_X(f) \leqslant \frac{1}{2}\mathbb{E}\Delta f(X). \tag{6.33}$$

Απόδειξη του Θεωρήματος 6.1.2. Θεωρούμε $f \in \mathcal{L}^{2,1}(\gamma_k)$ και χωρίς περιορισμό της γενικότητας υποθέτουμε επίσης ότι $\mathbb{E}f^2(X) = 1$. Υποθέτουμε αρχικά ότι η f έχει φραγμένο φορέα. Τότε $f^2 \in \mathcal{G}_k$, άρα από το Πόρισμα 6.3.4, εφαρμόζοντας και τον κανόνα της αλυσίδας

$$\frac{1}{2}\Delta f^2 = |\nabla f|^2 + f\Delta f$$

παίρνουμε

$$\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2 + \mathbb{E}f(X)\Delta f(X) \leqslant \mathrm{Ent}_X(f^2) \leqslant 2\mathbb{E}|\nabla f(X)|^2. \tag{6.34}$$

Γράφοντας $f = e^{-v}$, όπου $v : \mathrm{supp}(f) \to \mathbb{R}$ είναι μια κυρτή συνάρτηση, και εφαρμόζοντας πάλι τον κανόνα της αλυσίδας

$$f\Delta f = f^2|\nabla v|^2 - f^2\Delta v = |\nabla f|^2 - f^2\Delta v,$$

βλέπουμε ότι

$$\mathbb{E}f(X)\Delta f(X) = \mathbb{E}|\nabla f(X)|^2 - \mathbb{E}f(X)^2\Delta v(X). \tag{6.35}$$

Συνδυάζοντας την (6.34) με την (6.35) έχουμε το συμπέρασμα του Θεωρήματος 6.1.2 σε αυτή την περίπτωση.

Για να απαλλαγούμε από την υπόθεση του φραγμένου φορέα, χρησιμοποιούμε ένα επιχείρημα προσέγγισης. Θεωρούμε τις συναρτήσεις $f_n := f\mathbf{1}_{nB_2^k}$, όπου $\mathbf{1}_{nB_2^k}$ είναι η δείκτρια συνάρτηση της Ευκλείδειας μπάλας στον $\mathbb{R}^k$ με ακτίνα $n \in \mathbb{N}$. Τότε, κάθε f_n έχει φραγμένο φορέα και από τα προηγούμενα έχουμε ότι

$$2\mathbb{E}|\nabla f_n(X)|^2 - \mathbb{E}f_n(X)^2\Delta v_n(X) \leqslant \mathrm{Ent}_X(f_n^2). \tag{6.36}$$

Προκειμένου να αποφύγουμε το πιθανό πρόβλημα να απειρίζονται οι παράγωγοι των f_n, $n \in \mathbb{N}$ ορίζουμε τις συναρτήσεις

$$F_n = |\nabla f|^2 \cdot \mathbf{1}_{nB_2^k}, \qquad H_n = f^2\Delta v \cdot \mathbf{1}_{nB_2^k}.$$

Σημειώνουμε ότι $F_n = |\nabla f_n|^2$ και $H_n = f_n^2 \Delta v_n$ σχεδόν παντού, επειδή θα μπορούσαν να διαφέρουν μόνο στο σύνολο μηδενικού μέτρου $\{x \in \mathbb{R}^k : |x| = n\}$. Τότε έχουμε ότι

$$0 \leqslant f_n \nearrow f, \quad 0 \leqslant F_n \nearrow |\nabla f|^2, \quad 0 \leqslant H_n \nearrow f^2 \Delta v,$$

και από το θεώρημα μονότονης σύγκλισης παίρνουμε

$$\mathbb{E}|\nabla f_n(X)|^2 = \mathbb{E}F_n(X) \longrightarrow \mathbb{E}|\nabla f(X)|^2 < \infty \tag{6.37}$$

και

$$\mathbb{E}f_n(X)^2 \Delta v_n(X) = \mathbb{E}H_n(X) \longrightarrow \mathbb{E}f(X)^2 \Delta v(X). \tag{6.38}$$

Επιπλέον, $f_n^2 \log f_n^2 \to f^2 \log f^2$ και $|f_n^2 \log f_n^2| \leqslant |f^2 \log f^2|$, για κάθε $n \in \mathbb{N}$ (όπου συμφωνούμε ότι $0 \log 0 = 0$). Από την ανισότητα του Gross (6.3) έχουμε $f^2 \log f^2 \in L_1(\gamma_k)$, οπότε εφαρμόζοντας το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης του Lebesgue βλέπουμε ότι

$$\mathrm{Ent}_X(f_n^2) \longrightarrow \mathrm{Ent}_X(f^2). \tag{6.39}$$

Αφού η (6.36) ισχύει για κάθε f_n, περνάμε στο όριο καθώς το $n \to \infty$ και χρησιμοποιώντας τις (6.37), (6.38) και (6.39), συμπεραίνουμε ότι η (6.4) ισχύει και για την f. Η απόδειξη είναι τώρα πλήρης. $\square$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 7

Μια απόδειξη της ανισότητας του Ehrhard

7.1 Εισαγωγή

Το μέτρο του Gauss γ_n είναι λογαριθμικά κοίλο. Αν A, B είναι δύο σύνολα Borel στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$ τότε

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant [\gamma_n(A)]^{\lambda}[\gamma_n(B)]^{1-\lambda}. \tag{7.1}$$

Αυτό προκύπτει, για παράδειγμα, από το γεγονός ότι η πυκνότητα του γ_n είναι λογαριθμικά κοίλη συνάρτηση. Όμως, το γεγονός ότι το γ_n είναι λογαριθμικό κοίλο δεν συνεπάγεται την ισοπεριμετρική ανισότητα στο χώρο του Gaussian.

Ο Ehrhard έδωσε μια απόδειξη της Gaussian ισοπεριμετρικής ανισότητας χρησιμοποιώντας μια διαδικασία συμμετρικοποίησης στον χώρο του Gauss, ανάλογη με την κλασική συμμετρικοποίηση κατά Steiner. Με την ίδια μέθοδο απέδειξε μια ανισότητα τύπου Brunn-Minkowski, η οποία είναι ισχυρότερη από την (7.1). Το επιχείρημά του περιοριζόταν στα κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$.

Θεώρημα 7.1.1 (Ehrhard). *Έστω A, B κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{7.2}$$

Η ανισότητα ισχύει ως ισότητα αν τα A και B είναι παράλληλοι ημίχωροι.

Για να αποδείξουμε ότι η (7.2) συνεπάγεται την (7.1) ελέγχουμε πρώτα ότι η $\log\Phi$ είναι κοίλη. Έχουμε $(\log\Phi)'(x) = \Phi'(x)/\Phi(x)$, άρα

$$(\log\Phi)''(x) = \frac{\Phi''(x)\Phi(x) - [\Phi'(x)]^2}{\Phi^2(x)}.$$

Αρκεί λοιπόν να ελέγξουμε ότι $\Phi''(x)\Phi(x) \leqslant [\Phi'(x)]^2$, και αυτή η ανισότητα είναι ισοδύναμη με την

$$g(x) = e^{-x^2/2} + x\int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt \geqslant 0, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Παραγωγίζοντας την g παίρνουμε

$$g'(x) = -xe^{-x^2/2} + xe^{-x^2/2} + \int_{-\infty}^{x} e^{-t^2/2}dt > 0,$$

το οποίο δείχνει ότι η g είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$. Από την άλλη πλευρά, εύκολα βλέπουμε ότι $g(x) \to 0$ καθώς το $x \to -\infty$. Έπεται ότι $g > 0$, άρα η $\log\Phi$ είναι κοίλη.

Θεωρούμε τώρα δύο κυρτά σύνολα A, B στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Από την

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)),$$

και χρησιμοποιώντας το γεγονός ότι η Φ είναι αύξουσα, παίρνουμε

$$\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B) \geqslant \Phi(\lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B))).$$

Αφού η Φ είναι λογαριθμικά κοίλη, έχουμε

$$\begin{aligned}\Phi(\lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B))) &\geqslant \big(\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(A))\big)^{\lambda}\big(\Phi(\Phi^{-1}(\gamma_n(B))\big)^{1-\lambda}\\ &= \gamma_n(A)^{\lambda}\gamma_n(B)^{1-\lambda}.\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (7.1) για κυρτά σύνολα. Το ίδιο επιχείρημα δείχνει ότι το γ_n είναι λογαριθμικά κοίλο αν υποθέσουμε ότι η (7.2) ισχύει για οποιαδήποτε Borel σύνολα (το οποίο ισχύει όπως θα δούμε σε αυτό το κεφάλαιο).

Ο Latała απέδειξε ότι η (7.2) εξακολουθεί να ισχύει αν το A είναι κυρτό και το B είναι τυχόν Borel σύνολο. Τελικά, ο Borell αφαίρεσε την υπόθεση της κυρτότητας για το A και απέδειξε την (7.2) σε πλήρη γενικότητα.

Θεώρημα 7.1.2 (Ehrhard-Borell). *Έστω A, B δύο σύνολα Borel στον $\mathbb{R}^n$ και $\lambda \in (0,1)$. Τότε,*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{7.3}$$

Η αρχική απόδειξη του Ehrhard για κυρτά σύνολα χρησιμοποιούσε μια διαδικασία Gaussian συμμετρικοποίησης.

Ορισμός 7.1.3 (Gaussian συμμετρικοποίηση). Έστω $1 \leqslant k \leqslant n$ και F ένας υπόχωρος του $\mathbb{R}^n$ διάστασης $n-k$. Η *Gaussian k-συμμετρικοποίηση ως προς τον F στη διεύθυνση του $u \perp F$* είναι μια απεικόνιση που σε κάθε ανοικτό ή κλειστό σύνολο $A \subset \mathbb{R}^n$ αντιστοιχεί ένα σύνολο A' το οποίο ορίζεται ως εξής. Για κάθε $x \in F$:

(i) Αν $\gamma_k(A \cap (x + F^\perp)) = 0$ τότε $A' \cap (x + F^\perp) = \emptyset$.

(ii) Αν $\gamma_k(A \cap (x + F^\perp)) = 1$ τότε $A' \cap (x + F^\perp) = x + F^\perp$.

(iii) Αν $0 < \gamma_k(A \cap (x + F^\perp)) < 1$ τότε, αν το A είναι ανοικτό,

$$A' \cap (x + F^\perp) = H(u, a) \cap (x + F^\perp)$$

όπου $H(u, a) = \{x \in \mathbb{R}^n : \langle x, u\rangle > a\}$ για $u \in S^{n-1}$ και $a \in \mathbb{R}$, ενώ αν το A είναι κλειστό,

$$A' \cap (x + F^\perp) = \overline{H(u, a)} \cap (x + F^\perp),$$

όπου ο a ορίζεται από την ισότητα

$$\gamma_k(A \cap (x + F^\perp)) = \gamma_k(H(u, a) \cap (x + F^\perp)).$$

Θα συμβολίζουμε το A' με $S(A)$ ή με $S_{F,u}(A)$ αν χρειάζεται να είμαστε πιο ακριβείς.

Ο Ehrhard απέδειξε ότι η κυρτότητα ενός συνόλου διατηρείται από τις Gaussian συμμετρικοποιήσεις.

Θεώρημα 7.1.4. *Έστω A ένα κυρτό κλειστό υποσύνολο του $\mathbb{R}^n$, και S μια Gaussian συμμετρικοποίηση στον $\mathbb{R}^n$. Τότε, το σύνολο $S(A)$ είναι επίσης κυρτό.*

Μπορούμε τώρα να αποδείξουμε την ανισότητα του Ehrhard για κυρτά σύνολα.

Θεώρημα 7.1.5 (Ανισότητα του Ehrhard). *Έστω A και B μη κενά κυρτά υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Για κάθε $\lambda \in (0, 1)$,*

$$\Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B)) \geqslant \lambda\Phi^{-1}(\gamma_n(A)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\gamma_n(B)). \tag{7.4}$$

Απόδειξη. Υποθέτουμε πρώτα ότι τα A και B είναι συμπαγή. Στον $\mathbb{R}^{n+1}$ θεωρούμε τα σύνολα $A' = A \times \{1\}$, $B' = B \times \{0\}$ και

$$C = \{y \in \mathbb{R}^{n+1} : y = \lambda a' + (1-\lambda)b',\, a' \in A',\, b' \in B',\, \lambda \in [0, 1]\}.$$

Έστω $e = (0, \dots, 0, 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ και $u \in \mathbb{R}^{n+1}$ τυχόν μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο e. Εφαρμόζουμε το Θεώρημα 7.1.4 για το σύνολο C και την n-συμμετρικοποίηση $S = S_{\langle e\rangle,u}$. Έχουμε ότι το $S(C)$ είναι κυρτό, και αυτό σημαίνει ότι η συνάρτηση

$$Q(\lambda) = \Phi^{-1}(\gamma_n(C \cap (\mathbb{R}^n \times \{\lambda\}))) = \Phi^{-1}(\gamma_n(\lambda A + (1-\lambda)B))$$

είναι κοίλη στο $[0,1]$. Τότε, για την (7.4) απλώς παρατηρούμε ότι είναι ισοδύναμη με την

$$Q(\lambda) \geqslant \lambda Q(1) + (1-\lambda)Q(0).$$

Αν τα A και B είναι *τυχόντα* κυρτά σύνολα, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το γεγονός ότι το γ_n είναι μέτρο Radon και να εφαρμόσουμε την (7.4) σε δύο ακολουθίες συμπαγών συνόλων που προσεγγίζουν τα A και B "από μέσα" και μετά να πάρουμε το όριο. □

Ο Borell χρησιμοποίησε την ημιομάδα της θερμότητας. Για κάθε Borel μετρήσιμη, μη αρνητική συνάρτηση f στον $\mathbb{R}^n$, η "εξέλιξη" της f τη χρονική στιγμή $t \geqslant 0$ είναι η συνάρτηση

$$P_t f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x + \sqrt{t}y)\, d\gamma_n(y).$$

Το βασικό βήμα για την απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.2 είναι το ακόλουθο θεώρημα.

Θεώρημα 7.1.6 (Borell). *Έστω $f_0, f_1, f_2 : \mathbb{R}^n \to [0,1]$ συναρτήσεις οι οποίες είναι δύο φορές συνεχώς διαφορίσιμες. Υποθέτουμε ότι για κάποιους $a_1, a_2 \geqslant 0$ με $a_1 + a_2 = 1$ ικανοποιείται η*

$$(\Phi^{-1} \circ f_0)(a_1x_1 + a_2x_2) \geqslant a_1(\Phi^{-1} \circ f_1)(x_1) + a_2(\Phi^{-1} \circ f_2)(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Υποθέτουμε επίσης ότι υπάρχουν $r_1, r_2 \in \mathbb{R}$ τέτοιοι ώστε

$$f_0 \geqslant \Phi(a_1r_1 + a_2r_2)$$

και

$$\limsup_{|x|\to\infty} f_i(x) \leqslant \Phi(r_i), \qquad i = 1, 2.$$

Τότε, για κάθε $t \geqslant 0$,

$$(\Phi^{-1} \circ P_tf_0)(a_1x_1 + a_2x_2) \geqslant a_1(\Phi^{-1} \circ P_tf_1)(x_1) + a_2(\Phi^{-1} \circ P_tf_2)(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$.

Μπορούμε με αυτό να δείξουμε την ανισότητα Ehrhard-Borell.

Απόδειξη του Θεωρήματος 7.1.2. Χωρίς περιορισμό της γενικότητας μπορούμε να υποθέσουμε ότι τα A και B είναι μη κενά συμπαγή υποσύνολα του $\mathbb{R}^n$. Έστω $\varepsilon \in (0,1)$. Μπορούμε να βρούμε μια άπειρες φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση $\tilde{f}_1$ τέτοια ώστε $0 \leqslant \tilde{f}_1 \leqslant 1$, $\tilde{f}_1 \equiv 1$ στο A, και $\tilde{f}_1 \equiv 0$ στο $\mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon$. Για $\delta \in (0,\varepsilon)$ ορίζουμε $f_1 = \delta + (1-\varepsilon)\tilde{f}_1$. Παρατηρήστε ότι $\alpha := \delta + (1-\varepsilon) < 1$. Τότε έχουμε $f_1 \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ και η f_1 ικανοποιεί την

$$\delta \leqslant f_1 \leqslant \alpha, \qquad f_1 \equiv \alpha \ \text{ στο } A, \qquad f_1 \equiv \delta \ \text{ στο } \mathbb{R}^n \setminus A_\varepsilon.$$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε μια συνάρτηση f_2 τέτοια ώστε

$$\delta \leqslant f_2 \leqslant \alpha, \qquad f_2 \equiv \alpha \ \text{ στο } B, \qquad f_2 \equiv \delta \ \text{ στο } \mathbb{R}^n \setminus B_\varepsilon.$$

Έστω $\lambda \in (0,1)$. Ορίζουμε

$$\gamma := \max\{\Phi(\lambda\Phi^{-1}(\alpha) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\delta)), \Phi(\lambda\Phi^{-1}(\delta) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\alpha))\}.$$

Παρατηρήστε ότι $\gamma \to 0$ όταν $\delta \to 0$. Τώρα, επιλέγουμε μια συνάρτηση f_0 τέτοια ώστε

$$\gamma \leqslant f_0 \leqslant \alpha, \quad f_0 \equiv \alpha \ \text{ στο } \lambda A_\varepsilon + (1-\lambda)B_\varepsilon, \quad f_0 \equiv \gamma \ \text{ στο } \mathbb{R}^n \setminus (\lambda A_\varepsilon + (1-\lambda)B_\varepsilon)\varepsilon.$$

Με αυτούς τους ορισμούς μπορούμε να ελέγξουμε ότι η υπόθεση

$$f_0 \geqslant \Phi(\lambda r_1 + (1-\lambda) r_2)$$

του Θεωρήματος 7.1.6 ικανοποιείται με $r_1 = r_2 = \Phi^{-1}(\gamma)$ και ότι

$$(\Phi^{-1} \circ f_0)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda(\Phi^{-1} \circ f_1)(x_1) + (1-\lambda)(\Phi^{-1} \circ f_2)(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Το Θεώρημα 7.1.6 δείχνει ότι, για κάθε $t \geqslant 0$,

$$(\Phi^{-1} \circ P_t f_0)(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geqslant \lambda(\Phi^{-1} \circ P_t f_1)(x_1) + (1-\lambda)(\Phi^{-1} \circ P_t f_2)(x_2)$$

για κάθε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$. Επιλέγοντας $t = 1$ και $x_1 = x_2 = 0$ παίρνουμε

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_0(y)\,d\gamma_n(y)\Big) \\ &\geqslant \lambda\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_1(y)\,d\gamma_n(y)\Big) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} f_2(y)\,d\gamma_n(y)\Big).\end{aligned}$$

Αφήνοντας πρώτα το $\delta \to 0$ και κατόπιν το $\varepsilon \to 0$ βλέπουμε ότι

$$\begin{aligned}\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_{\lambda A + (1-\lambda)B}(y)\,d\gamma_n(y)\Big) \\ &\geqslant \lambda\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_A(y)\,d\gamma_n(y)\Big) + (1-\lambda)\Phi^{-1}\Big(\int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{1}_B(y)\,d\gamma_n(y)\Big).\end{aligned}$$

Αυτό αποδεικνύει την (7.3). □

Η απόδειξη του Borell γενικεύτηκε περαιτέρω από τους Barthe και Huet (2009). Οι Ivanisvili και Volberg (2015) ανέπτυξαν τη μέθοδο σε μια γενική τεχνική για την απόδειξη ανισοτήτων για συνελίξεις. Μια άλλη απόδειξη δόθηκε από τον van Handel (2018). Η απόδειξη που θα παρουσιάσουμε οφείλεται στους Παούρη και Neeman (2020). Κατασκευάζει μια ποσότητα που είναι μονότονη κατά μήκος της ημιομάδας Ornstein-Uhlenbeck. Τα τελευταία χρόνια αυτή η προσέγγιση έχει εξελιχθεί σε ένα ισχυρό εργαλείο για την απόδειξη Gaussian ανισοτήτων όπως π.χ. η Gaussian υπερσυσταλτότητα, η λογαριθμική ανισότητα Sobolev και η Gaussian ισοπεριμετρική ανισότητα. Δεν υπήρχε όμως γνωστή απόδειξη της ανισότητας Ehrhard με χρήση αυτών των τεχνικών.

7.2 Βελτιωμένη ανισότητα Jensen

Σταθεροποιούμε έναν θετικά ημιορισμένο $D \times D$ πίνακα A, και έστω X Gaussian τυχαίο διάνυσμα με $X \sim \mathcal{N}(0, A)$. Για $t \geqslant 0$, ορίζουμε τον τελεστή P_t^A στον $L_1(\mathbb{R}^d, \gamma_A)$ με

$$(P_t^A f)(x) = \mathbb{E} f(e^{-t}x + \sqrt{1-e^{-2t}}X).$$

Ισχύουν τα ακόλουθα:

- Το μέτρο γ_A είναι αναλλοίωτο για τον P_t^A.
- Για κάθε $s, t \geqslant 0$, $\;P_s^A \circ P_t^A = P_{s+t}^A$,
- Αν f είναι μια συνεχής συνάρτηση που έχει όρια στο άπειρο, τότε η $P_s^A f$ συγκλίνει ομοιόμορφα στην $P_t^A f$ καθώς το $s \to t$.

Περισσότερες λεπτομέρειες σχετικά με την ημιομάδα Ornstein-Uhlenbeck $(P_t^A)_{t\geqslant 0}$ καθώς και οι αποδείξεις των παραπάνω ιδιοτήτων έχουν συζητηθεί στην Ενότητα 3.3.

Θα χρησιμοποιήσουμε επίσης τον ακόλουθο τύπο διάχυσης για την $(P_t^A)_{t\geqslant 0}$: Έστω $\Psi : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ μια φραγμένη C^2 συνάρτηση. Για κάθε φραγμένη μετρήσιμη συνάρτηση $f = (f_1, \ldots, f_k) \,:\, \mathbb{R}^D \to \mathbb{R}^k$, για κάθε $x \in \mathbb{R}^D$ και για κάθε $0 < s < t$, η $P_{t-s}^A \Psi\left(P_s^A f(x)\right)$ είναι διαφορίσιμη στο s και ικανοποιεί την

$$\frac{\partial}{\partial s} P_{t-s}^A \Psi\left(P_s^A f(x)\right) = -P_{t-s}^A \sum_{i,j=1}^{k} \partial_i \partial_j \Psi\left(f\right) \left\langle \nabla P_s^A f_i, A \nabla P_s^A f_j \right\rangle . \tag{7.5}$$

Υποθέτουμε ότι $D = \sum_{i=1}^k d_i$, όπου οι $d_i \geqslant 1$ είναι ακέραιοι. Γράφουμε τον $\mathbb{R}^D$ ως $\prod_{i=1}^k \mathbb{R}^{d_i}$ και συμβολίζουμε με Π_i την προβολή στην i-οστή συνιστώσα. Για δοθέντα

$k \times k$ πίνακα M, συμβολίζουμε με $\mathcal{E}_{d_1,\ldots,d_k}(M)$ τον $D \times D$ πίνακα που έχει (i,j)-συντεταγμένη ίση με $M_{k,\ell}$ αν $\sum_{\alpha<k} d_\alpha < i \leqslant \sum_{\alpha\leqslant k} d_\alpha$ και $\sum_{b<\ell} d_b < j \leqslant \sum_{b\leqslant \ell} d_b$. Δηλαδή κάθε συντεταγμένη $M_{k,\ell}$ του M επεκτείνεται σε ένα block $d_k \times d_\ell$. Γράφουμε '$\odot$' για το κατά σημείο γινόμενο των πινάκων, '$\succcurlyeq$' για τη διάταξη θετικά ημιορισμένων πινάκων, και H_J για τον Εσσιανό πίνακα μιας συνάρτησης J.

Αφετηρία μας είναι η ακόλουθη ανισότητα, η οποία μπορεί να θεωρηθεί ως μια βελτιωμένη ανισότητα Jensen για συσχετισμένες Gaussian μεταβλητές.

Θεώρημα 7.2.1. *Έστω $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$ ανοικτά διαστήματα στο $\mathbb{R}$, έστω $\Omega = \prod_{i=1}^k \Omega_i$ και $X \sim \gamma_A$. Αν $J : \Omega \to \mathbb{R}$ είναι μια φραγμένη C^2 συνάρτηση, τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε $x \in \Omega$, $A \odot \mathcal{E}_{d_1,\ldots,d_k}(H_J(x)) \succcurlyeq 0$.*

(β) *Για κάθε k-άδα μετρήσιμων συναρτήσεων $f_i : \mathbb{R}^{d_i} \to \Omega_i$,*

$$\mathbb{E}J(f_1(X_1), \ldots, f_k(X_k)) \geqslant J(\mathbb{E}f_1(X_1), \ldots, \mathbb{E}f_k(X_k)). \tag{7.6}$$

Είναι συχνά δυνατόν να αφαιρέσουμε τον περιορισμό ότι η J είναι φραγμένη. Για παράδειγμα, αν η J είναι συνεχής αλλά όχι φραγμένη συνάρτηση, τότε μπορεί κανείς να εφαρμόσει το Θεώρημα 7.2.1 για φραγμένα χωρία $\Omega_i' \subset \Omega_i$. Εάν η J είναι αρκετά καλή (π.χ. μονότονη ή άνω φραγμένη) τότε μπορεί κανείς να περάσει στο όριο για μια ακολουθία φραγμένων χωρίων Ω_i' που εξαντλούν τα Ω_i (π.χ. χρησιμοποιώντας το θεώρημα μονότονης σύγκλισης ή το λήμμα του Fatou).

Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, είναι γνωστό ότι το Θεώρημα 7.2.1 έχει πολλές συνέπειες. Ωστόσο, δεν ξέρουμε πώς να αποδείξουμε την ανισότητα του Ehrhard χρησιμοποιώντας μόνο το Θεώρημα 7.2.1. Θα χρειαστεί πρώτα να επεκτείνουμε το Θεώρημα 7.2.1 με διάφορους τρόπους. Για να δώσουμε ένα κίνητρο για την πρώτη μας επέκταση, σημειώνουμε ότι η συνηθισμένη ανισότητα Jensen στο $\mathbb{R}$ επεκτείνεται εύκολα στην περίπτωση που κάποια συνάρτηση είναι κυρτή μόνο σε ένα σύνολο στάθμης. Για να γίνουμε πιο ακριβείς, ας θεωρήσουμε μια C^2 συνάρτηση $\psi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ και το σύνολο $B = \{x \in \mathbb{R}^d : \psi(x) < 0\}$. Αν το B είναι συνεκτικό και ο περιορισμός της ψ στο B είναι κυρτή συνάρτηση, μπορεί κανείς να δείξει ότι το B είναι κυρτό και ως εκ τούτου $\mathbb{E}\psi(X) \geqslant \psi(\mathbb{E}X)$ για κάθε τυχαίο διάνυσμα που έχει φορέα το B. Παρόμοια τροποποίηση μπορούμε να κάνουμε στο Θεώρημα 7.2.1.

Θεώρημα 7.2.2. *Θεωρούμε τον ίδιο συμβολισμό και τις υποθέσεις του Θεωρήματος 7.2.1. Υποθέτουμε επιπλέον ότι το σύνολο $\{x \in \Omega\ :\ J(x) < 0\}$ είναι ομοιομορφικό με μια ανοικτή μπάλα. Τότε τα ακόλουθα είναι ισοδύναμα:*

(α) *Για κάθε $x \in \Omega$ τέτοιο ώστε $J(x) < 0$, ισχύει ότι $A \odot \mathcal{E}_{d_1,\ldots,d_k}(H_J(x)) \succcurlyeq 0$.*

(β) *Για κάθε k-άδα μετρήσιμων συναρτήσεων $f_i : \mathbb{R}^{d_i} \to \Omega_i$ που ικανοποιούν γ_A-σ.π. την $J(f_1, \ldots, f_k) < 0$, ισχύει ότι*

$$\mathbb{E}J(f_1(X_1), \ldots, f_k(X_k)) \geqslant J(\mathbb{E}f_1(X_1), \ldots, \mathbb{E}f_k(X_k)).$$

Σημειώνουμε ότι η επιλογή του 0 στις συνθήκες $J(x) < 0$ και $J(f_1, \ldots, f_k) < 0$ είναι αυθαίρετη, αφού μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα για τη συνάρτηση $J(\cdot) - \alpha$ για οποιονδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, παίρνοντας τον α αρκετά μεγάλο έχουμε τον ισχυρισμό του Θεωρήματος 7.2.1.

Απόδειξη. Ας υποθέσουμε ότι ισχύει το (α). Με ένα τυπικό επιχείρημα προσέγγισης βλέπουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε το (β) για μια πιο περιορισμένη κατηγορία συναρτήσεων f. Πράγματι, έστω F το σύνολο των μετρήσιμων συναρτήσεων $f = (f_1, \ldots, f_k)$ που ικανοποιούν την $J(f) < 0$ γ_A-σ.π. και έστω $F_\epsilon \subset F$ το υποσύνολο εκείνων των συναρτήσεων που είναι συνεχείς, έχουν όριο στο άπειρο, και ικανοποιούν την $J(f) \leqslant -\epsilon$ γ_A-σ.π. Κάθε $f \in F$ προσεγγίζεται στον $L_1(\gamma_A)$ από μια ακολουθία $f^{(n)} \in F_{1/n}$: περικόπτοντας τις τιμές της f έξω από μια μεγάλη μπάλα στον $\mathbb{R}^D$ και μακριά από το σύνορο του $\{x : J < 0\}$, μπορούμε να προσεγγίσουμε την $f \in F$ στον $L_1(\gamma_A)$ με $\tilde{f}$ που ικανοποιεί αυτές τις δύο προϋποθέσεις. Για να διασφαλίσουμε τη συνέχεια, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε εξομαλυντές: εάν Tg συμβολίζει τη συνέλιξη της g με έναν ομαλό εξομαλυντή με συμπαγή φορέα και $\mathcal{F}$ είναι ομοιομορφισμός από το $\{J < 0\}$ σε μια μπάλα, τότε η $\mathcal{F}^{-1} \circ (T(\mathcal{F} \circ \tilde{f}))$ είναι μια συνεχής προσέγγιση της $\tilde{f}$ που παίρνει τιμές στο $\{J < 0\}$. Με αυτά τα επιχειρήματα προσέγγισης, αρκεί να αποδείξουμε το (β) για $f \in F_\epsilon$, όπου το $\epsilon > 0$ είναι αυθαίρετα μικρό. Από τώρα και στο εξής, σταθεροποιούμε $\epsilon > 0$ και επίσης σταθεροποιούμε $f = (f_1, \ldots, f_k) \in F_\epsilon$.

Υπενθυμίζουμε ότι $\Pi_i : \mathbb{R}^{d_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{d_k} \to \mathbb{R}^{d_i}$ είναι η προβολή στο i-οστό block των συντεταγμένων. Ορίζουμε $g_i = f_i \circ \Pi_i$ και $G_{s,t}(x) = P^A_{t-s} J(P^A_s g(x))$. Αφού $f \in F_\epsilon$, έχουμε

$$G_{0,0}(x) = P^A_0 J(P^A_0(g(x))) = P^A_0 J(g(x)) = J(g(x)) \leqslant -\epsilon$$

για κάθε $x \in \mathbb{R}^D$. Ακόμα, αφού η f είναι συνεχής και μηδενίζεται στο άπειρο, έχουμε ότι $P^A_s g \to g$ ομοιόμορφα καθώς το $s \to 0$. Αφού η g είναι φραγμένη, η J είναι ομοιόμορφα συνεχής στο πεδίο τιμών της g και έτσι υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|G_{s,s}(x) - G_{r,r}(x)| < \epsilon$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^D$ και κάθε $|s - r| \leqslant \delta$.

Τώρα, σταθεροποιούμε $r \geqslant 0$ και υποθέτουμε ότι $G_{r,r} \leqslant -\epsilon$ κατά σημείο. Σύμφωνα με την προηγούμενη παράγραφο, έχουμε $G_{s,s} < 0$ κατά σημείο για κάθε $r \leqslant s \leqslant r + \delta$.

Τώρα εφαρμόζουμε την (7.5): με $B_s = B_s(x) = A \odot \mathcal{E}_{d_1,\ldots,d_k}(H_J(P_s^A g))$, έχουμε

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial s} G_{s,t} &= -P_{t-s}^A \sum_{i,j=1}^{k} \partial_i \partial_j J(g) \left\langle \nabla P_s^A g_i, A \nabla P_s^A g_j \right\rangle \\ &= -P_{t-s}^A \sum_{i,j=1}^{k} \left\langle \nabla P_s^A g_i, B_s \nabla P_s^A g_j \right\rangle\end{aligned}$$

(εδώ, χρησιμοποιήσαμε την παρατήρηση ότι η $P_s^A g_i(x)$ εξαρτάται μόνο από την $\Pi_i x$, και έτσι η $\nabla P_s^A g_i$ μηδενίζεται έξω από το i-οστό block συντεταγμένων). Η υπόθεση (α) συνεπάγεται ότι ο B_s είναι θετικά ημιορισμένος εάν $G_{s,s} < 0$. Αφού $G_{s,s} < 0$ για κάθε $r \leqslant s \leqslant r+\delta$, βλέπουμε ότι για τέτοια s, $\frac{\partial}{\partial s} G_{s,r+\delta} \leqslant 0$ κατά σημείο. Αφού η $G_{s,r+\delta}$ είναι συνεχής στο s και $G_{r,r} \leqslant -\epsilon$, έπεται ότι $G_{s,s} \leqslant -\epsilon$ κατά σημείο για κάθε $r \leqslant s \leqslant r+\delta$.

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι ο $r = 0$ ικανοποιεί την υπόθεση $G_{r,r} \leqslant -\epsilon$ της προηγούμενης παράγραφου. Από επαγωγή, προκύπτει ότι $G_{r,r} \leqslant -\epsilon$ κατά σημείο για κάθε $r \geqslant 0$. Ως εκ τούτου, ο πίνακας B_s είναι θετικά ημιορισμένος για κάθε $s \geqslant 0$ και $x \in \mathbb{R}^D$, το οποίο συνεπάγεται ότι η $G_{s,t}(x)$ είναι φθίνουσα ως προς s για κάθε $t \geqslant s$ και $x \in \mathbb{R}^D$. Άρα,

$$\mathbb{E}J(f_1(X_1), \ldots, f_k(X_k)) = \lim_{t\to\infty} G_{0,t}(0) \geqslant \lim_{t\to\infty} G_{t,t}(0) = J(\mathbb{E}f_1, \ldots, \mathbb{E}f_k).$$

Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξή του (β).

Τώρα υποθέτουμε ότι ισχύει το (β). Έστω $v \in \mathbb{R}^D$ και $y \in \Omega$ με $J(y) < 0$. Για να αποδείξουμε το (α) αρκεί να δείξουμε ότι

$$v^t (A \odot \mathcal{E}_{d_1,\ldots,d_k}(H_J(y)))v \geqslant 0. \tag{7.7}$$

Εφόσον το Ω είναι ανοικτό και η J είναι συνεχής, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $y + z \in \Omega$ και $J(y+z) < 0$ όποτε $\max_i |z_i| \leqslant \delta$. Γι' αυτό το δ, ορίζουμε $\psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με

$$\psi(t) = \max\{-\delta, \min\{\delta, t\}\}.$$

Για κάθε $\epsilon > 0$, ορίζουμε $f_{i,\epsilon} : \mathbb{R}^{d_i} \to \Omega_i$ με

$$f_{i,\epsilon} = y_i + \psi(\epsilon \langle x, \Pi_i v \rangle).$$

Από το (β),

$$\mathbb{E}J(f_{1,\epsilon}(X_1), \ldots, f_{k,\epsilon}(X_k)) \geqslant J(\mathbb{E}f_{1,\epsilon}(X_1), \ldots, \mathbb{E}f_{k,\epsilon}(X_k)).$$

Αφού η ψ είναι περιττή, έχουμε $\mathbb{E}f_{i,\epsilon}(X_i) = y_i$ για κάθε $\epsilon > 0$, άρα

$$\mathbb{E}J(f_{1,\epsilon}(X_1), \ldots, f_{k,\epsilon}(X_k)) \geqslant J(y). \tag{7.8}$$

Το θεώρημα Taylor συνεπάγεται ότι για κάθε z με $y + z \in \Omega$,

$$J(y+z) = J(y) + \sum_{i=1}^{k} \frac{\partial J(y)}{\partial y_i} z_i + \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 J(y)}{\partial y_i \partial y_j} z_i z_j + \rho(|z|),$$

όπου ρ είναι κάποια συνάρτηση τέτοια ώστε $-\epsilon^2\rho(\epsilon) \to 0$ καθώς το $\epsilon \to 0$. Τώρα εξετάζουμε τι συμβαίνει αν αντικαταστήσουμε το z_i παραπάνω με $Z_i = \psi(\epsilon \langle X_i, \Pi_i v\rangle)$ και πάρουμε τη μέση τιμή. Ελέγχουμε εύκολα ότι $\mathbb{E}Z_i = 0$, $\mathbb{E}\rho(|Z|) = o(\epsilon^2)$, και

$$\mathbb{E}Z_iZ_j = \epsilon^2(\Pi_i v)^t \mathbb{E}[X_iX_j](\Pi_i v) + o(\epsilon^2).$$

Συνεπώς,

$$\begin{aligned}\mathbb{E}J(y+Z) &= J(y) + \epsilon^2 \sum_{i,j=1}^{k} \frac{\partial^2 J(y)}{\partial y_i \partial y_j} (\Pi_i v)^t \mathbb{E}[X_iX_j](\Pi_i v) + o(\epsilon^2) \\ &= J(y) + \epsilon^2 v^t(A \odot \mathcal{E}_{d_1,\ldots,d_k}(H_J(y)))v + o(\epsilon^2).\end{aligned}$$

Από την άλλη πλευρά, $\mathbb{E}J(y+Z) = \mathbb{E}J(f_{1,\epsilon}(X_1), \ldots, f_{k,\epsilon}(X_k))$, που είναι τουλάχιστον ίσο με $J(y)$ σύμφωνα με την (7.8). Οπότε έχουμε ότι

$$\epsilon^2 v^t(A \odot \mathcal{E}_{d_1,\ldots,d_k}(H_J(y)))v + o(\epsilon^2) \geqslant 0$$

Παίρνοντας τώρα $\epsilon \to 0$ αποδεικνύουμε την (7.7). $\square$

7.3 Σύντομη απόδειξη της ανισότητας Prékopa-Leindler

Η ανισότητα Prékopa–Leindler ισχυρίζεται ότι αν οι $f, g, h : \mathbb{R}^d \to [0, \infty)$ ικανοποιούν την

$$h(\lambda x + (1-\lambda)y) \geqslant f(x)^\lambda g(y)^{1-\lambda}$$

για κάθε $x, y \in \mathbb{R}^d$ και κάποιο $\lambda \in (0, 1)$ τότε

$$\mathbb{E}h \geqslant (\mathbb{E}f)^\lambda (\mathbb{E}g)^{1-\lambda},$$

όπου οι μέσες τιμές λαμβάνονται ως προς το τυπικό Gaussian μέτρο στον $\mathbb{R}^d$. Εφαρμόζοντας έναν γραμμικό μετασχηματισμό, βλέπουμε ότι μπορούμε να αντικαταστήσουμε το τυπικό Gaussian μέτρο από οποιοδήποτε Gaussian μέτρο. Παίρνοντας όριο ως προς Gaussian μέτρα με μεγάλες συνδιακυμάνσεις, βλέπουμε επίσης ότι οι μέσες τιμές μπορούν να αντικατασταθούν από ολοκληρώματα ως προς το μέτρο Lebesgue.

Ο M. Ledoux παρατήρησε ότι η ανισότητα Prékopa-Leindler μπορεί να θεωρηθεί ως συνέπεια του Θεωρήματος 7.2.1. Θα παρουσιάσουμε μόνο την περίπτωση $d = 1$, αλλά η περίπτωση για γενικό d μπορεί να γίνει με παρόμοιο τρόπο. Εναλλακτικά, μπορεί κανείς να αποδείξει την ανισότητα Prékopa–Leindler για $d = 1$ πρώτα και μετά να την επεκτείνει για τυχόν d χρησιμοποιώντας επαγωγή και το θεώρημα Fubini.

Σταθεροποιούμε $\lambda \in (0, 1)$. Έστω ότι $(X, Y) \sim \mathcal{N}\left(0, \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}\right)$ και $Z = \lambda X + (1{-}\lambda)Y$. Γράφουμε $\sigma^2 = \sigma^2(\rho, \lambda)$ για τη διασπορά του Z και $A = A(\rho, \lambda)$ για τον πίνακα συνδιακυμάνσεων του (X, Y, Z). Σημειώνουμε ότι ο A είναι ένας πίνακας τάξης 2 και ότι μπορεί να αναλυθεί ως $A = uu^t + vv^t$, όπου το u και το v είναι και τα δύο ορθογώνια προς το $(\lambda, 1{-}\lambda, -1)^t$.

Για $\alpha, R \geqslant 0$ ορίζουμε $J_{\alpha,R} : \mathbb{R}^3_+ \to \mathbb{R}$ με

$$J_{\alpha,R}(x, y, z) = (x^{\lambda} y^{1-\lambda} z^{-\alpha})^R.$$

Λήμμα 7.3.1. *Για κάθε λ και ρ, και οποιοδήποτε $\alpha < \sigma^2$, υπάρχει $R \geqslant 0$ ώστε $A \odot H_{J_{\alpha,R}} \succcurlyeq 0$.*

Για να δούμε πώς προκύπτει η ανισότητα Prékopa-Leindler από το Θεώρημα 7.2.1 και το Λήμμα 7.3.1, ας υποθέσουμε ότι $h(\lambda x + (1{-}\lambda)y) \geqslant f^{\,\lambda}(x) g^{1-\lambda}(y)$ για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$. Τότε, $J_{\alpha,R}(f(X), g(Y), h^{1/\alpha}(Z)) \leqslant 1$ με πιθανότητα 1 (επειδή $Z = \lambda X + (1{-}\lambda)Y$ με πιθανότητα 1). Από το Θεώρημα 7.2.1, με το R από το Λήμμα 7.3.1, έχουμε

$$\begin{aligned} 1 &\geqslant \mathbb{E} J_{\alpha,R}(f(X), g(Y), h(Z)) \geqslant J_{\alpha,R}(\mathbb{E} f(X), \mathbb{E} g(Y), \mathbb{E} h(Z)) \\ &= \left(\frac{(\mathbb{E} f(X))^{\lambda} (\mathbb{E} g(Y))^{1-\lambda}}{(\mathbb{E} h^{1/\alpha}(Z))^{\alpha}} \right)^R. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια, $(\mathbb{E} h^{1/\alpha}(Z))^{\alpha} \geqslant (\mathbb{E} f)^{\lambda} (\mathbb{E} g)^{1-\lambda}$. Αυτό ισχύει για κάθε ρ και κάθε $\alpha < \sigma^2$. Στέλνοντας το $\rho \to 1$, στέλνουμε το $\sigma^2 \to 1$ και έτσι μπορούμε να πάρουμε και $\alpha \to 1$. Τέλος, σημειώνουμε ότι σε αυτό το όριο η Z συγκλίνει κατά κατανομή στην $\mathcal{N}(0, 1)$. Έτσι, παίρνουμε την ανισότητα Prékopa–Leindler για το τυπικό Gaussian μέτρο.

Απόδειξη του Λήμματος 7.3.1. Απευθείας υπολογισμός δείχνει ότι

$$H_{J_{\alpha,R}} = J_{\alpha,R}(x, y, z) \begin{pmatrix} \frac{\lambda R(\lambda R-1)}{x^2} & \frac{\lambda R(1-\lambda)R}{xy} & -\frac{\lambda \alpha R^2}{xz} \\ \frac{\lambda R(1-\lambda)R}{xy} & \frac{(1-\lambda)R((1-\lambda)R-1)}{y^2} & -\frac{(1-\lambda)\alpha R^2}{yz} \\ -\frac{\lambda \alpha R^2}{xz} & -\frac{(1-\lambda)\alpha R^2}{yz} & \frac{\alpha R(\alpha R+1)}{z^2} \end{pmatrix}.$$

Θα θέλαμε να δείξουμε ότι $A\odot H_J \succcurlyeq 0$. Δεδομένου ότι ο κατά σημείο πολλαπλασιασμός μετατίθεται με τον πολλαπλασιασμό με διαγώνιους πίνακες, αρκεί να δείξουμε ότι

$$A \odot \left(\begin{pmatrix} \lambda \\ 1-\lambda \\ -\alpha \end{pmatrix}^{\otimes 2} - \frac{1}{R} \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\alpha \end{pmatrix} \right) \geqslant 0. \tag{7.9}$$

Θέτουμε $\theta = (\lambda, 1-\lambda, -\alpha)^t$ και υπενθυμίζουμε ότι $A = uu^t + vv^t$, όπου τα u και v είναι και τα δύο ορθογώνια στο $(\lambda, 1-\lambda, -1)^t$. Τότε,

$$A \odot (\theta\theta^t) = (u \odot \theta)(u \odot \theta)^t + (v \odot \theta)(v \odot \theta)^t,$$

όπου τα $u\odot\theta$ και $v\odot\theta$ είναι και τα δύο ορθογώνια στο $(1, 1, \frac{1}{\alpha})^t$ (το οποίο ονομάζουμε w). Ειδικότερα, ο $A\odot(\theta\theta^t)$ είναι ένας θετικά ημιορισμένος πίνακας τάξης 2, του οποίου ο πυρήνας είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το w.

Από την άλλη πλευρά, $A\odot \mathrm{diag}(\lambda, 1-\lambda, -\alpha) = \mathrm{diag}(\lambda, 1-\lambda, -\alpha\sigma^2)$ (ονομάζουμε αυτόν τον πίνακα D). Τότε, $w^t D w = 1-\sigma^2/\alpha < 0$. Από το λήμμα που ακολουθεί συμπεραίνουμε ότι

$$A \odot (\theta\theta^t) - \frac{1}{R} D \geqslant 0$$

για όλα τα αρκετά μεγάλα R. □

Λήμμα 7.3.2. *Έστω A ένας θετικός ημιορισμένος πίνακας και έστω B ένας συμμετρικός πίνακας. Αν $u^t B u \geqslant \delta|u|^2$ για κάθε $u \in \ker(A)$ και $v^t A v \geqslant \delta|v|^2$ για κάθε $v \in \ker(A)^\perp$ τότε $A + \epsilon B \succcurlyeq 0$ για κάθε $0 \leqslant \epsilon \leqslant \frac{\delta^2}{\|B\|^2+\delta\|B\|}$, όπου $\|B\|$ είναι η νόρμα τελεστή του B.*

Απόδειξη. Κάθε διάνυσμα w γράφεται ως $w = u + v$ με $u \in \ker(A)$ και $v \in \ker(A)^\perp$. Τότε,

$$\begin{aligned} w^t(A+\epsilon B)w &= u^t A u + \epsilon u^t B u + 2\epsilon u^t B v + \epsilon v^t B v \\ &\geqslant \delta|u|^2 - \epsilon\|B\||u|^2 - 2\epsilon\|B\||u||v| + \epsilon\delta|v|^2. \end{aligned}$$

Θεωρώντας την παραπάνω έκφραση ως τετραγωνικό πολυώνυμο των $|u|$ και $|v|$, βλέπουμε ότι παίρνει μη αρνητική τιμή εάν $(\delta-\epsilon\|B\|)\delta \geqslant \epsilon\|B\|^2$. □

Σημειώνουμε ότι μπορεί κανείς να επεκτείνει αυτή την απόδειξη της ανισότητας Prékopa-Leindler, με ανάλογο τρόπο, ώστε να αποδείξει την ανισότητα του Barthe.

7.4 Απόδειξη της ανισότητας του Ehrhard

Η αναλογία της ανισότητας Prékopa-Leindler με την ανισότητα Ehrhard γίνεται καθαρή αν γράψουμε και τις δύο ανισότητες στην ακόλουθη μορφή. Η εκδοχή της ανισότητας Prékopa-Leindler που αποδείξαμε πιο πάνω, μπορεί να αναδιατυπωθεί ώστε να λέει ότι

$$\begin{aligned} &\exp(R(\lambda \log f(X) + (1-\lambda)\log g(Y) - \alpha \log h(Z))) \leqslant 0 \ \text{ σχεδόν βεβαίως} \\ \implies\ &\exp(R(\lambda \log \mathbb{E}f(X) + (1-\lambda)\log \mathbb{E}g(Y) - \alpha \log \mathbb{E}h(Z))) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{7.10}$$

Από την άλλη πλευρά, σε αυτή την παράγραφο θα δείξουμε ότι

$$\begin{aligned} &\Phi(R(\lambda\Phi^{-1}(f(X)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(g(Y)) - \sigma\Phi^{-1}(h(Z)))) \leqslant 0 \ \text{ σχεδόν βεβαίως} \\ \implies\ &\Phi(R(\lambda\Phi^{-1}(\mathbb{E}f(X)) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\mathbb{E}g(Y)) - \sigma\Phi^{-1}(\mathbb{E}h(Z)))) \leqslant 0. \end{aligned} \tag{7.11}$$

(Ίσως δεν είναι ακόμα σαφές γιατί το α της (7.10) έχει γίνει σ στην (7.11). Αυτή είναι η σωστή επιλογή, όπως θα φανεί από το παράδειγμα της επόμενης ενότητας.) Η (7.11) συνεπάγεται την ανισότητα Ehrhard ακριβώς όπως η (7.11) συνεπάγεται την ανισότητα Prékopa-Leindler. Ειδικότερα, η απόδειξη που δώσαμε για την (7.10) υποδεικνύει μια στρατηγική για να προσπαθήσουμε να αποδείξουμε την (7.11). Ορίζουμε τη συνάρτηση

$$J_R(x,y,z) = \Phi(R(\lambda\Phi^{-1}(x) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(y) - \sigma\Phi^{-1}(z))).$$

(Θα παραλείπουμε την παράμετρο R όταν είναι σαφές ποια είναι από το πλαίσιο). Κατ' αναλογία προς την απόδειξη που δώσαμε στην προηγούμενη παράγραφο για την ανισότητα Prékopa-Leindler, θα μπορούσαμε να προσπαθήσουμε να δείξουμε ότι, για αρκετά μεγάλο R, ισχύει ότι $A \odot H_{J_R} \succcurlyeq 0$. Δυστυχώς, αυτό δεν ισχύει.

7.4.1 Ένα παράδειγμα

Στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.2 είδαμε ότι αν $A \odot H_J \succcurlyeq 0$ τότε η

$$G_{s,t,R}(x,y) := P^A_{t-s} J_R(P^1_s f(x), P^1_s g(y), P^{\sigma^2}_s h(\lambda x + (1-\lambda)y))$$

είναι φθίνουσα ως προς s για κάθε x και y. Θα δώσουμε ένα παράδειγμα στο οποίο η $G_{s,t,R}$ υπολογίζεται ακριβώς και δεν είναι φθίνουσα.

Σε ό,τι ακολουθεί, ορίζουμε $f_s = P^1_s f$, $g_s = P^1_s g$ και $h_s = P^{\sigma^2}_s h$. Έστω ότι $f(x) = \mathbf{1}_{\{x \leqslant a\}}$, $g(y) = \mathbf{1}_{\{y \leqslant b\}}$ και $h(z) = \mathbf{1}_{\{z \leqslant c\}}$, όπου $c \geqslant \lambda a + (1-\lambda)b$. Απευθείας υπολογισμός δίνει

$$
\begin{aligned}
f_s(x) &= \Phi\left(\frac{a - e^{-s}x}{\sqrt{1-e^{-2s}}}\right) \\
g_s(y) &= \Phi\left(\frac{b - e^{-s}y}{\sqrt{1-e^{-2s}}}\right) \\
h_s(z) &= \Phi\left(\frac{c - e^{-s}z}{\sigma\sqrt{1-e^{-2s}}}\right).
\end{aligned}
$$

Άρα, από τις παραπάνω σχέσεις έχουμε ότι

$$
\begin{aligned}
&J(f_s(x), g_s(y), h_s(\lambda x + (1-\lambda)y)) \\
&\qquad = \Phi\left(R\left(\lambda f_s(x) + (1-\lambda)g_s(y) - \sigma h_s(\lambda x + (1-\lambda)y)\right)\right) \\
&\qquad = \Phi\left(R\left(\frac{\lambda a - \lambda e^{-s}x}{\sqrt{1-e^{-2s}}} + \frac{(1-\lambda)b - (1-\lambda)e^{-s}y}{\sqrt{1-e^{-2s}}} - \frac{c - e^{-s}(\lambda x + (1-\lambda)y)}{\sqrt{1-e^{-2s}}}\right)\right) \\
&\qquad = \Phi\left(R\frac{\lambda a + (1-\lambda)b - c}{\sqrt{1-e^{-2s}}}\right).
\end{aligned}
$$

Αν $c > \lambda a + (1-\lambda)b$ τότε η παραπάνω ποσότητα είναι αύξουσα ως προς s. Αφού είναι επίσης ανεξάρτητη από τα x και y, δεν μεταβάλλεται αν εφαρμόσουμε τον P^A_{t-s}. Δηλαδή, η

$$
G_{s,t,R} = \Phi\left(R\frac{\lambda a + (1-\lambda)b - c}{\sqrt{1-e^{-2s}}}\right)
$$

είναι αύξουσα ως προς s.

Σε αυτό το παράδειγμα η $G_{s,t,R\sqrt{1-e^{-2s}}}$ είναι σταθερή. Δεδομένου ότι το Θεώρημα 7.2.1 δεν ήταν φτιαγμένο για να εξετάσουμε μια τέτοια συμπεριφορά, θα το τροποποιήσουμε έτσι ώστε η συνάρτηση J να μπορεί να εξαρτάται από το s.

7.4.2 Επιτρέποντας στην J να εξαρτάται από το t

Με τον συμβολισμό της Παραγράφου 7.2, υποθέτουμε στο εξής ότι $\Omega_i \subseteq [0,1]$ για κάθε i. Τότε ο A είναι ένας $k \times k$ πίνακας και γράφουμε $\sigma_1^2, \ldots, \sigma_k^2$ για τα διαγώνια στοιχεία του. Θα θεωρήσουμε συναρτήσεις της μορφής $J : \Omega \times [0,\infty] \to \mathbb{R}$. Γράφουμε H_J για τον Εσσιανό πίνακα της J ως προς τις μεταβλητές στο Ω, και $\frac{\partial J}{\partial t}$ για την μερική παράγωγο της J ως προς τη μεταβλητή στο $[0,\infty]$. Έστω $I : [0,1] \to \mathbb{R}$ η συνάρτηση $I(x) = \phi(\Phi^{-1}(x))$, όπου $\phi = \Phi'$.

Λήμμα 7.4.1. *Υποθέτουμε ότι η $J : \Omega \times [0,\infty] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και C^2, και θεωρούμε $(X_1, \ldots, X_k) \sim \gamma_A$. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ μη αρνητικοί αριθμοί με $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$,* *έστω $D(x)$ ο $k \times k$ διαγώνιος πίνακας που έχει τον $\lambda_i \sigma_i^2 / I^2(x_i)$ στην i-θέση, και έστω $\epsilon \geqslant 0$. Αν $\frac{\partial J}{\partial t}(x,t) \leqslant 0$ και*

$$A \odot H_J(x,t) - (e^{2(t+\epsilon)} - 1)\frac{\partial J(x,t)}{\partial t} D \succcurlyeq 0 \tag{7.12}$$

για κάθε $x \in \Omega$ και $t > 0$ τότε για κάθε k-άδα μετρήσιμων συναρτήσεων $f_i : \mathbb{R} \to \Omega_i$,

$$\mathbb{E}J(P_\epsilon^{\sigma_1} f_1(X_1), \ldots, P_\epsilon^{\sigma_k} f_k(X_k), 0) \geqslant J(\mathbb{E}f_1(X_1), \ldots, \mathbb{E}f_k(X_k), \infty). \tag{7.13}$$

Συγκρίνοντας το Λήμμα 7.4.1 με τις προηγούμενες εκδοχές της ανισότητας Jensen που συζητήσαμε, παρατηρούμε ότι έχει μια πρόσθετη παράμετρο $\epsilon \geqslant 0$. Αυτό είναι βολικό όταν θέλουμε να εφαρμόσουμε το Λήμμα 7.4.1: για $\epsilon > 0$ η συνάρτηση $e^{2(t+\epsilon)} - 1$ είναι φραγμένη μακριά από το 0, και έτσι είναι ευκολότερο να ελέγξουμε την (7.12).

Απόδειξη. Γράφουμε $f_{i,s}$ αντί για $P_{s+\epsilon}^{\sigma_i^2} f_i$ και $f_s = (f_{1,s}, \ldots, f_{k,s})$. Ορίζουμε

$$G_{s,t} = P_{t-s}^A J(f_{1,s}, \ldots, f_{k,s}, s).$$

Παραγωγίζουμε ως προς s χρησιμοποιώντας την (7.5). Θα εμφανιστεί ένας ακόμα όρος (από αυτούς που εμφανίζονται στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.2) γιατί η συνάρτηση J εξαρτάται από το s:

$$\begin{aligned} -\frac{\partial}{\partial s} G_{s,t} &= P_{t-s} \sum_{i,j=1}^k \partial_i \partial_j J(f_s, s) A_{ij} f'_{i,s} f'_{j,s} - P_{t-s} \frac{\partial J}{\partial s}(f_s, s) \\ &= P_{t-s} v_s^t (A \odot H_J(f_s, s)) v_s - P_{t-s} \frac{\partial J}{\partial s}(f_s, s), \end{aligned}$$

όπου $v_s = \nabla f_s$. Οι Bakry και Ledoux έχουν αποδείξει ότι

$$|v_{i,s}| \leqslant \sigma_i^{-1} (e^{2(s+\epsilon)} - 1)^{-1/2} I(f_{i,s}).$$

Συνεπώς,

$$v_s^t D(f_s) v_s = \sum_{i=1}^k \lambda_i \left(\frac{\sigma_i |v_{i,s}|}{I(f_{i,s})} \right)^2 \leqslant (e^{2(s+\epsilon)} - 1)^{-1},$$

και έπεται ότι

$$-\frac{\partial}{\partial s} G_{s,t} \geqslant P_{t-s} \left(v_s^t (A \odot H_J(f_s, s)) v_s - (e^{2(s+\epsilon)} - 1) \frac{\partial J}{\partial s}(f_s, s) v_s^t D(f_s) v_s \right).$$

Παρατηρούμε ότι το όρισμα του P_{t-s} είναι μη αρνητικό κατά σημείο αν

$$A \odot H_J(x,s) \succcurlyeq (e^{2(s+\epsilon)} - 1) \frac{\partial J(x,s)}{\partial s} D(x)$$

για κάθε x, s. Σε αυτή την περίπτωση, η $G_{s,t}$ είναι φθίνουσα ως προς s και παίρνουμε το συμπέρασμα όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.2. □

Συνδυάζοντας τις ιδέες των αποδείξεων του Θεωρήματος 7.2.2 και του Λήμματος 7.4.1, παίρνουμε το ακόλουθο πόρισμα.

Πόρισμα 7.4.2. *Με τον συμβολισμό του Λήμματος 7.4.1, ας υποθέσουμε ότι η $J : \Omega \times [0, \infty] \to \mathbb{R}$ είναι φραγμένη και C^2, και έστω ότι $(X_1, \ldots, X_k) \sim \gamma_A$. Έστω $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ μη αρνητικοί αριθμοί με $\sum_{i=1}^k \lambda_i = 1$, έστω $D(x)$ ο $k \times k$ διαγώνιος πίνακας με i-οστό διαγώνιο όρο $\lambda_i \sigma_i^2 / I^2(x_i)$, και έστω $\epsilon \geqslant 0$. Υποθέτουμε ότι το $\{x \in \Omega : J(x, 0) < 0\}$ είναι ομοιομορφικό με μια ανοικτή μπάλα, ότι $\frac{\partial J(x,t)}{\partial t} \leqslant 0$ όταν $J(x, t) < 0$, και ότι*

$$A \odot H_J(x, t) - (e^{2(t+\epsilon)} - 1) \frac{\partial J(x, t)}{\partial t} D \succcurlyeq 0$$

για κάθε $t \geqslant 0$ και κάθε x ώστε $J(x, t) < 0$. Τότε, για κάθε k-άδα μετρήσιμων συναρτήσεων $f_i : \mathbb{R} \to \Omega_i$ που ικανοποιούν γ_A σχεδόν βεβαίως την

$$J(P_\epsilon^{\sigma_1^2} f_1, \ldots, P_\epsilon^{\sigma_k^2} f_k, 0) < 0,$$

ισχύει ότι

$$\mathbb{E} J(P_\epsilon^{\sigma_1^2} f_1(X_1), \ldots, P_\epsilon^{\sigma_k^2} f_k(X_k), 0) \geqslant J(\mathbb{E} f_1(X_1), \ldots, \mathbb{E} f_k(X_k), \infty).$$

Απόδειξη. Όπως στην απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.2, μπορούμε να υποθέσουμε ότι η $f = (f_1, \ldots, f_k)$ είναι φραγμένη, συνεχής, συγκλίνει σε μια σταθερά στο άπειρο, και μπορούμε να ισχυροποιήσουμε την υπόθεση

$$J(P_\epsilon^{\sigma_1^2} f_1, \ldots, P_\epsilon^{\sigma_k^2} f_k, 0) < 0$$

υποθέτοντας ότι

$$J(P_\epsilon^{\sigma_1^2} f_1, \ldots, P_\epsilon^{\sigma_k^2} f_k, 0) < -\eta$$

για κάποιο σταθερό αλλά οσοδήποτε μικρό $\eta > 0$. Όπως στην απόδειξη του Λήμματος 7.4.1, ορίζουμε $f_{i,s} = P_{s+\epsilon}^{\sigma_i^2} f_i$ και

$$G_{s,t} = P_{t-s}^A J(f_{1,s}, \ldots, f_{k,s}, s).$$

Ο ίδιος υπολογισμός με αυτόν του Λήμματος 7.4.1 δείχνει ότι $\frac{\partial}{\partial s} G_{s,t} \leqslant 0$ εάν $G_{s,s} = J(f_{1,s}, \ldots, f_{k,s}, s) < 0$. Η απαίτηση να ισχύει $G_{s,s} < 0$ είναι η μόνη διαφορά ως τώρα, αν κάνουμε τη σύγκριση με την απόδειξη του Λήμματος 7.4.1, όπου αποδείξαμε ότι $\frac{\partial}{\partial s} G_{s,t} \leqslant 0$ πάντα.

Τώρα χρησιμοποιούμε το επιχείρημα από την απόδειξη του Θεωρήματος 7.2.2. Λόγω ομοιόμορφης συνέχειας, υπάρχει $\delta > 0$ ώστε $|G_{s,s}(x) - G_{r,r}(x)| < \eta$ για κάθε $x \in \mathbb{R}^k$ και $|s-r| < \delta$. Άρα, αν $G_{r,r} \leqslant -\eta$ κατά σημείο τότε $G_{s,s} < 0$, και συνεπώς $G_{s,r+\delta} < 0$, κατά σημείο για κάθε $r \leqslant s \leqslant r+\delta$. Από τη συζήτηση της προηγούμενης παραγράφου, η $G_{s,r+\delta}$ είναι φθίνουσα ως προς s για $r \leqslant s \leqslant r+\delta$, άρα $G_{r+\delta,r+\delta} \leqslant G_{r,r} \leqslant -\eta$ κατά σημείο. Αφού υποθέσαμε ότι $G_{0,0} \leqslant -\eta$, έπεται με επαγωγή ότι $\lim_{t\to\infty} G_{t,t} \leqslant G_{0,0}$, το οποίο είναι το ζητούμενο. □

7.4.3 Η Εσσιανή της J

Ορίζουμε $J_R : (0,1)^3 \to 0$ με

$$J_R(x,y,z) = \Phi(R(\lambda\Phi^{-1}(x) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(y) - \sigma\Phi^{-1}(z))).$$

Έστω $H_J = H_J(x,y,z)$ ο 3×3 Εσσιανός πίνακας της J και έστω A ο 3×3 πίνακας συνδιακυμάνσεων του (X,Y,Z). Για να εφαρμόσουμε το Πόρισμα 7.4.2, θα υπολογίσουμε τον πίνακα $A \odot H_J$. Αρχικά, για συντομία, θέτουμε

$$\begin{aligned} u &= \Phi^{-1}(x) & \Xi &= \lambda u + (1-\lambda)v - \sigma w \\ v &= \Phi^{-1}(y) & \theta &= (\lambda, 1-\lambda, -\sigma)^t \\ w &= \Phi^{-1}(z) & \mathcal{I} &= \mathrm{diag}(\phi(u), \phi(v), \phi(w)). \end{aligned}$$

Θα χρησιμοποιούμε έναν δείκτη s για να υποδηλώσουμε ότι οποιαδήποτε από αυτές τις ποσότητες υπολογίζεται στο (f_s, g_s, h_s) αντί για το (x,y,z). Δηλαδή, $u_s = \Phi^{-1}(f_s)$, $\Xi_s = \lambda u_s + (1-\lambda)v_s - \sigma w_s$, και ούτω καθεξής.

Λήμμα 7.4.3. *Ισχύει ότι*

$$H_J = \phi(R\Xi)\mathcal{I}^{-1}(R\,\mathrm{diag}(\lambda u, (1-\lambda)v, -\sigma w) - R^3\Xi\theta\theta^t)\mathcal{I}^{-1}.$$

Απόδειξη. Παρατηρώντας ότι $\frac{du}{dx} = 1/\phi(u)$, από τον κανόνα της αλυσίδας παίρνουμε

$$\frac{d}{dx}\Phi(R\Xi) = R\lambda\frac{\phi(R\Xi)}{\phi(u)} = R\lambda\exp\left(-\frac{R^2\Xi^2 - u^2}{2}\right).$$

Παραγωγίζοντας ξανά, έχουμε

$$\frac{d^2}{dx^2}\Phi(R\Xi) = R\lambda(u - R^2\Xi\lambda)\frac{\phi(R\Xi)}{\phi^2(u)}$$

και

$$\frac{d^2}{dxdy}\Phi(R\Xi) = -R^3\Xi\lambda(1-\lambda)\frac{\phi(R\Xi)}{\phi(u)\phi(v)}.$$

Συνδυάζοντας όλα αυτά με τους αντίστοιχους όρους όπου έχουμε παραγώγιση ως προς z, βλέπουμε ότι

$$\frac{H_J}{\phi(R\Xi)} = -R^3\Xi \begin{pmatrix} \frac{\lambda^2}{\phi^2(u)} & \frac{\lambda(1-\lambda)}{\phi(u)\phi(v)} & -\frac{\lambda\sigma}{\phi(u)\phi(w)} \\ \frac{\lambda(1-\lambda)}{\phi(u)\phi(v)} & \frac{(1-\lambda)^2}{\phi^2(v)} & -\frac{(1-\lambda)\sigma}{\phi(v)\phi(w)} \\ -\frac{\lambda\sigma}{\phi(u)\phi(w)} & -\frac{(1-\lambda)\sigma}{\phi(u)\phi(v)} & \frac{\sigma^2}{\phi^2(w)} \end{pmatrix}$$
$$+ R \begin{pmatrix} \frac{\lambda u}{\phi^2(u)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{(1-\lambda)v}{\phi^2(v)} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\sigma w}{\phi^2(w)} \end{pmatrix}.$$

Παίρνοντας υπόψη μας τον ορισμό των $\mathcal{I}$ και θ, και αναδιατάσσοντας το παραπάνω, έχουμε το ζητούμενο. □

Έχοντας υπολογίσει την H_J, πρέπει να εξετάσουμε το $A \odot H_J$. Ο A είναι πίνακας τάξης 2, άρα μπορούμε να τον γράψουμε ως $A = aa^t + bb^t$. Επιπλέον, το γεγονός ότι $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$ σημαίνει ότι τα a και b είναι και τα δύο ορθογώνια στο $(\lambda, 1-\lambda, -1)^t$. Από τον ορισμό του θ έπεται ότι τα $a \odot \theta$ και $b \odot \theta$ είναι και τα δύο ορθογώνια προς το $(1, 1, \sigma^{-1})^t$. Αυτή η παρατήρηση μας επιτρέπει να χειριστούμε τον όρο $\theta\theta^t$ στο Λήμμα 7.4.3:

$$A \odot \theta\theta^t = (aa^t) \odot (\theta\theta^t) + (bb^t) \odot (\theta\theta^t) = (a \odot \theta)^{\otimes 2} + (b \odot \theta)^{\otimes 2}.$$

Συνοψίζουμε στο εξής:

Λήμμα 7.4.4. *Ο πίνακας $B := A \odot \theta\theta^t$ είναι θετικά ημιορισμένος και έχει τάξη 2. Ο πυρήνας του είναι ο υπόχωρος που παράγεται από το $(1, 1, \frac{1}{\sigma})^t$.*

Από την άλλη πλευρά, οι διαγώνιοι όροι του A είναι $1, 1$ και σ^2. Άρα,

$$A \odot \operatorname{diag}(\lambda u, (1-\lambda)v, -\sigma w) = \operatorname{diag}(\lambda u, (1-\lambda)v, -\sigma^3 w) =: D.$$

Συνδυάζοντας αυτή τη σχέση με το Λήμμα 7.4.3, έχουμε

$$A \odot H_J = R\phi(R\Xi)\mathcal{I}^{-1}(D - R^2\Xi B)\mathcal{I}^{-1}. \tag{7.14}$$

Θεωρούμε αυτή την παράσταση υπό το πρίσμα της απόδειξης που δώσαμε προηγουμένως για την ανισότητα Prékopa-Leindler. Πάλι, έχουμε το άθροισμα δύο πινάκων, του D και του $-R^2\Xi B$, ο ένας από τους οποίους πολλαπλασιάζεται με τον παράγοντα R^2 τον οποίο μπορούμε να επιλέξουμε μεγάλο. Υπάρχουν δύο σημαντικές διαφορές.

Η πρώτη είναι ότι ο πίνακας D (του οποίου το ανάλογο στην απόδειξη της ανισότητας Prékopa-Leindler ήταν μια σταθερά), δεν ελέγχεται κατά σημείο από τον B. Αυτή η διαφορά έχει άμεση σχέση με το παράδειγμα που δώσαμε νωρίτερα. Θα λύσουμε αυτό το πρόβλημα επιτρέποντας στον J να εξαρτάται από το t με τον σωστό τρόπο. Έτσι, ο όρος $\frac{dJ}{dt}$ του Πορίσματος 7.4.2 θα διαγραφεί με μέρος της συνεισφοράς του D.

Η δεύτερη διαφορά είναι ότι στην (7.14), ο όρος που πολλαπλασιάζεται με έναν μεγάλο παράγοντα, δηλαδή ο $-\Xi B$, δεν είναι παντού θετικά ημιορισμένος γιατί υπάρχουν $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ώστε $\Xi(x, y, z) > 0$. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο θεωρούμε την "περιορισμένη" διατύπωση της ανισότητας Jensen στο Θεώρημα 7.2.2 και το Πόρισμα 7.4.2.

7.4.4 Προσθέτοντας την εξάρτηση από το t

Υπενθυμίζουμε ότι τα X και Y έχουν διασπορά 1 και συνδιακύμανση ρ, ότι $Z = \lambda X + (1-\lambda)Y$, και ότι A είναι ο πίνακας συνδιακυμάνσεων του (X, Y, Z). Θυμηθείτε επίσης τον συμβολισμό u, v, w, Ξ και τις παραλλαγές τους με δείκτες. Για $R > 0$ ορίζουμε $r(t) = R\sqrt{1 - e^{-2t-\epsilon}}$ και

$$J_R(x, y, z, t) = \Phi(r(t)(\lambda\Phi^{-1}(x) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(y) - \sigma\Phi^{-1}(z))) = \Phi(r(t)\Xi). \tag{7.15}$$

Έστω ότι $E = \operatorname{diag}(\lambda, 1-\lambda, \sigma)/(1+\sigma^{-1})$.

Λήμμα 7.4.5. *Ορίζουμε $\Omega_\epsilon = [\Phi(-1/\epsilon), \Phi(1/\epsilon)]^3$. Για κάθε ρ, λ και ϵ, υπάρχει $R > 0$ ώστε*

$$A \odot H_J - (e^{2(t+\epsilon)} - 1)\frac{\partial J}{\partial t}\mathcal{I}^{-1}E\mathcal{I}^{-1} \succcurlyeq 0$$

στο $\{(x, t) \in \Omega_\epsilon \times [0, \infty) : \Xi(x) \leqslant -\epsilon\}$.

Απόδειξη. Έχουμε ήδη υπολογίσει τον $A \odot H_J$ στην (7.14). Εφαρμόζοντας αυτόν τον τύπο και παρατηρώντας ότι $\mathcal{I}^{-1} \succcurlyeq 0$, βλέπουμε ότι αρκεί να δείξουμε ότι

$$r(t)\phi(r(t)\Xi)(D - r^2(t)\Xi B) - (e^{2(t+\epsilon)} - 1)\frac{\partial J}{\partial t}E \succcurlyeq 0$$

όταν $\Xi \leqslant -\epsilon$. (Υπενθυμίζουμε ότι $D = \operatorname{diag}(\lambda u, (1-\lambda)v, -\sigma^3 w)$, και ότι ο B είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας τάξης 2 που εξαρτάται μόνο από τα ρ και λ, και έχει πυρήνα τον υπόχωρο που παράγεται από το $(1, 1, \sigma^{-1})^t$). Υπολογίζουμε την

$$\frac{\partial J}{\partial t} = r'(t)\Xi\phi(r(t)\Xi) = \frac{r(t)}{e^{2t+\epsilon} - 1}\Xi\phi(r(t)\Xi).$$

Τώρα, υπάρχει $\delta = \delta(\epsilon) > 0$ ώστε

$$\frac{e^{2(t+\epsilon)}-1}{e^{2t+\epsilon}-1} \geqslant 1+\delta$$

για κάθε $t \geqslant 0$. Γι' αυτό το δ,

$$\begin{aligned} r(t)\phi(r(t)\Xi)(D - r^2(t)\Xi B) - (e^{2(t+\epsilon)}-1)\frac{\partial J}{\partial t}E \\ \succcurlyeq r(t)\phi(r(t)\Xi)(D-(1+\delta)\Xi E - r^2(t)\Xi B). \end{aligned}$$

Συνεπώς, αρκεί να δείξουμε ότι $D-(1+\delta)\Xi E - r^2(t)\Xi B \succcurlyeq 0$. Αφού $\Xi \leqslant -\epsilon$, αρκεί να δείξουμε ότι $r^2(t)\epsilon B + D - (1+\delta)\Xi E \succcurlyeq 0$. Τώρα, ο B είναι θετικά ημιορισμένος πίνακας τάξης 2 που εξαρτάται μόνο από τα λ και ρ. Ο πυρήνας του παράγεται από το $\theta = (1,1,\sigma^{-1})^t$. Παρατηρούμε ότι $\theta^t D\theta = \Xi$ και $\theta^t E\theta = 1$. Συνεπώς,

$$\theta^t(D-(1+\delta)\Xi E)\theta = -\delta\Xi \geqslant \delta\epsilon > 0.$$

Στη συνέχεια, παρατηρούμε ότι μπορούμε να φράξουμε τη νόρμα του $D-(1+\delta)\Xi E$ ομοιόμοορφα. Στο Ω_ϵ έχουμε $\|D\| \leqslant 1/\epsilon$ και $|\Xi| \leqslant 2/\epsilon$. Συνολικά, αν υποθέσουμε (όπως μπορούμε να κάνουμε) ότι $\delta \leqslant 1$ τότε

$$\|D+(1+\delta)\Xi E\| \leqslant 5/\epsilon.$$

Από το Λήμμα 7.3.2, αν το $\eta > 0$ είναι αρκετά μικρό, τότε

$$\epsilon B + \eta(D-(1+\delta)\Xi E) \succcurlyeq 0.$$

Για να ολοκληρώσουμε την απόδειξη, επιλέγουμε το R αρκετά μεγάλο ώστε $R^2(1-e^\epsilon) \geqslant 1/\eta$. Τότε έχουμε $r^2(t) \geqslant 1/\eta$ για κάθε t. □

Τέλος, ολοκληρώνουμε την απόδειξη της (7.11) με μια σειρά από απλές προσεγγίσεις. Αρχικά, συμβολίζουμε με C_a το σύνολο των συνεχών συναρτήσεων $\mathbb{R} \to [0,1]$ που συγκλίνουν στο a στο $\pm\infty$, και σημειώνουμε ότι αρκεί να αποδείξουμε την (7.11) στην περίπτωση που $f,g \in C_0$ και $h \in C_1$. Πράγματι, οποιεσδήποτε μετρήσιμες $f,g : \mathbb{R} \to [0,1]$ προσεγγίζονται (κατά σημείο σε γ_1-σχεδόν κάθε σημείο) από κάτω από συναρτήσεις στο C_0, και κάθε μετρήσιμη $h : \mathbb{R} \to [0,1]$ προσεγγίζεται από πάνω από συναρτήσεις στο C_1. Αν αποδείξουμε την (7.11) γι' αυτές τις προσεγγίσεις, τότε προκύπτει (από το θεώρημα κυριαρχημένης σύγκλισης) για τις αρχικές f,g και h.

Τώρα, θεωρούμε $f, g \in C_0$ και $h \in C_1$ που ικανοποιούν την $\Xi(f, g, h) \leqslant 0$ κατά σημείο. Για $\delta > 0$, ορίζουμε

$$\begin{aligned} f_\delta &= \Phi(-1/\delta) \vee f \wedge \Phi(1/(3\delta)) \\ g_\delta &= \Phi(-1/\delta) \vee g \wedge \Phi(1/(3\delta)) \\ h_\delta &= \Phi\left(-\frac{1}{3\delta} \vee (\Phi^{-1}(h) + \delta) \wedge \frac{1}{\delta}\right). \end{aligned}$$

Αν το $\delta > 0$ είναι αρκετά μικρό τότε $\Xi(f_\delta, g_\delta, h_\delta) \leqslant -\delta$ κατά σημείο. Επιπλέον, οι f_δ, g_δ και h_δ όλες τους παίρνουν τιμές στο $[\Phi(-1/\delta), \Phi(1/\delta)]$, είναι συνεχείς, και έχουν όρια στο $\pm\infty$. Αφού $f_\delta \to f$ καθώς το $\delta \to 0$ (και όμοια για τις g και h), αρκεί να δείξουμε ότι

$$\lambda\Phi^{-1}(\mathbb{E}f_\delta) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\mathbb{E}g_\delta) \leqslant \sigma\Phi^{-1}(\mathbb{E}h_\delta) \tag{7.16}$$

για όλα τα αρκετά μικρά $\delta > 0$.

Αφού η f_δ έχει όρια στο $\pm\infty$, έπεται ότι $P_\epsilon f_\delta \to f_\delta$ ομοιόμορφα καθώς το $\epsilon \to 0$ (και όμοια για τις g_δ και h_δ). Παίρνοντας το ϵ αρκετά μικρό (τουλάχιστον τόσο μικρό όσο το $\delta/2$), μπορούμε να εξασφαλίσουμε ότι $\Xi(P_\epsilon^1 f_\delta, P_\epsilon^1 g_\delta, P_\epsilon^{\sigma^2} h_\delta) < -\epsilon$ κατά σημείο. Τώρα εφαρμόζουμε το Πόρισμα 7.4.2 με $\Omega_i = [\Phi(-1/\epsilon), \Phi(1/\epsilon)]$, τη συνάρτηση J που ορίστηκε στην (7.15), $a = 1/2$, και με $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (\lambda, 1-\lambda, \sigma^{-1})/(1+\sigma^{-1})$. Το Λήμμα 7.4.5 μας εξασφαλίζει ότι ικανοποιείται η συνθήκη του Πορίσματος 7.4.2. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} &\geqslant J_R(\mathbb{E}f_\delta, \mathbb{E}g_\delta, \mathbb{E}h_\delta, \infty) \\ &= \Phi(R(\lambda\Phi^{-1}(\mathbb{E}f_\delta) + (1-\lambda)\Phi^{-1}(\mathbb{E}g_\delta) - \sigma\Phi^{-1}(\mathbb{E}h_\delta))), \end{aligned}$$

το οποίο συνεπάγεται την (7.16) και ολοκληρώνει την απόδειξη της (7.11).

Βιβλιογραφία

[CDP] W.-K. Chen, N. Dafnis and G. Paouris. *Improved Hölder and reverse Hölder inequalities for Gaussian random vectors*. Adv. in Math. 280, pp 643–689 (2015).

[DP] N. Dafnis and G. Paouris. *An inequality for moments of log-concave functions on Gaussian random vectors*. Geometric Aspects of Functional Analysis, Lecture Notes in Math., 2169, Springer, Cham (2017), pp. 107–122.

[NP] J. Neeman and G. Paouris. *An interpolation proof of Ehrhard's inequality*. GAFA Seminar Volume, Lecture Notes in Mathematics 2266, Vol. II (2020), pp.263–278.

[1] D. Bakry and M. Ledoux. *Levy-Gromov's isoperimetric inequality for an infinite dimensional diffusion generator*. Invent. Math. 123(1), 259–281 (1996).

[2] D. Bakry, I. Gentil and M. Ledoux. *Analysis and Geometry of Markov Diffusion Operators*. (Springer, Berlin, 2013).

[3] K. M. Ball. *Volumes of Sections of Cubes and Related Problems*. Lecture Notes in Math., 1376, pp. 251–260, Springer, Berlin (1989).

[4] K. M. Ball. *Volume ratio and a reverse isoperimetric inequality*. J. Lond. Math. Soc. (2) 44 (2) (1991) 351–359.

[5] F. Barthe. *Optimal Young's inequality and its converse: a simple proof*. Geom. Funct. Anal. 8 (2) (1998) 234–242.

[6] F. Barthe. *On a reverse form of the Brascamp-Lieb inequality*. Invent. Math. 134, pp. 335–361 (1998).

[7] F. Barthe and D. Cordero-Erausquin. *Inverse Brascamp–Lieb Inequalities Along the Heat Equation*. Lecture Notes in Math., vol. 1850, Springer, Berlin, 2004, pp. 65–71.

[8] F. Barthe and N. Huet. *On Gaussian Brunn–Minkowski inequalities*. Studia Math. 191 (3) (2009) 283–304.

[9] F. Barthe and P. Wolff. *Positive Gaussian kernels also have Gaussian minimizers*. Mem. Amer. Math. Soc. 276 (2022), no. 1359, v+90 pp.

[10] F. Barthe, D. Cordero-Erausquin, M. Ledoux and B. Maurey. *Correlation and Brascamp-Lieb inequalities for Markov semigroups*. Int. Math. Res. Not. 10 (2011) 2177–2216.

[11] W. Beckner. *Inequalities in Fourier analysis*. Annals of Math., 102, pp. 159–182 (1975).

[12] J. Bennett, N. Bez and A. Carbery. *Heat-flow monotonicity related to the Hausdorff-Young inequality*. Bull. Lond. Math. Soc. 41 (6) (2009) 971–979.

[13] J. Bennett, A. Carbery, M. Christ and T. Tao. *The Brascamp-Lieb inequalities: finiteness, structure and extremals*. Geom. Funct. Anal. 17 (5) (2008) 1343–1415.

[14] R. Bhatia. *Positive Definite Matrices*. Princeton University Press, 2007.

[15] V. Bogachev. *Gaussian Measures*. Mathematical Surveys and Monographs, vol 62. American Mathematical Society (1998).

[16] A. Bonami. *Étude des coefficients de Fourier des functions de $L_p(G)$*. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 20 (2) (1970) 335–402.

[17] C. Borell. *Positivity improving operators and hypercontractivity*. Math. Z. 180 (1982) 225–234.

[18] C. Borell. *The Ehrhard inequality*. C.R. Math. Acad. Sci. Paris 337(10), 663–666 (2003).

[19] C. Borell. *Minkowski sums and Brownian exit times*. Ann. Fac. Sci. Toulouse: Math. 16(1), 37–47 (2007).

[20] H. J. Brascamp and E. H. Lieb. *Best constants in Young's inequality, its converse, and its generalization to more than three functions*. Adv. in Math., 20, pp. 151–173 (1976).

[21] H. J. Brascamp and E. H. Lieb. *On extensions of the Brunn–Minkowski and Prékopa–Leindler theorem, including inequalities for log concave functions, and with an application to the diffusion equation*. J. Funct. Anal. 22 (1976) 366–389.

[22] H. J. Brascamp, E. H. Lieb and J. M. Luttinger. *A general rearrangement inequality for multiple integrals*. J. Funct. Anal. 17 (1974) 227–237.

[23] A. Carbery. *The Brascamp–Lieb inequalities: recent developments*. Nonlinear Analysis, Function Spaces and Applications, vol. 8, Czech Academy of Sciences, Mathematical Institute, Praha, 2007, pp. 9–34.

[24] E. A. Carlen. *Superadditivity of Fisher's Information and Logarithmic Sobolev Inequalities*. Journal of Funct. Analysis 101, pp. 194–211 (1991).

[25] E. A. Carlen and D. Cordero-Erausquin. *Subadditivity of the entropy and its relation to Brascamp–Lieb type inequalities*. Geom. Funct. Anal. 19 (2) (2009) 373–405.

[26] E. A. Carlen, E. H. Lieb and M. Loss. *A sharp analog of Young's inequality on S^N and related entropy inequalities*. J. Geom. Anal. 14 (3) (2004) 487–520.

[27] W.-K. Chen. *Disorder chaos in the Sherrington–Kirkpatrick model with external field*. Ann. Probab. 41 (5) (2013) 3345–3391.

[28] T. Cover and J. Thomas. *Elements of Information Theory*. Second edition, Wiley & Sons, 2006.

[29] A. Ehrhard. *Symétrisation dans l'espace de Gauss*. Math. Scand. 53, 281–301 (1983).

[30] M. Fathi, E. Indrei and M. Ledoux. *Quantitative logarithmic Sobolev inequalities and stability estimates*. Discrete Contin. Dyn. Syst. 36 (2016), no. 12, 6835–6853.

[31] A. Figalli, F. Maggi and A. Pratelli. *Sharp stability theorems for the anisotropic Sobolev and log-Sobolev inequalities on functions of bounded variation*. Advances in Mathematics 242, pp. 80–101 (2013).

[32] R. Gardner. *The Brunn–Minkowski inequality*. Bull. Amer. Math. Soc. 39 (2002) 355–405.

[33] D. J. Garling. *Inequalities. A Journey into Linear Analysis*. Cambridge University Press, Cambridge, 2007.

[34] L. Gross. *Logarithmic Sobolev inequalities*. American Journal of Math. 97, pp. 1061–1083 (1975).

[35] E. Indrei and D. Marcon. *Quantitative Log-Sobolev Inequality for a Two Parameter Family of Functions*. International Mathematics Research Notices, 20, pp. 5563–5580 (2014).

[36] P. Ivanisvili and A. Volberg. *Bellman partial differential equation and the hill property for classical isoperimetric problems*. Preprint. arXiv:1506.03409 (2015).

[37] R. Latała. *A note on the Ehrhard inequality*. Studia Math. 118, 169–174 (1996).

[38] R. Latała. *On some inequalities for Gaussian measures*. Proc. ICM II, 813–822 (2002).

[39] M. Ledoux. *Remarks on Gaussian noise stability, Brascamp-Lieb and Slepian inequalities*. Geometric Aspects of Functional Analysis (Springer, Berlin, 2014), pp. 309–333.

[40] L. Leindler. *On a certain converse of Hölder inequality II*. Acta Sci. Math. (Szeged) 33 (1972) 217–223.

[41] J. Lehec. *Short probabilistic proof of the Brascamp–Lieb and Barthe theorems*. Canad. Math. Bull. 57 (2014), no. 3, 585–597.

[42] E. H. Lieb. *Proof of an entropy conjecture of Wehrl*. Comm. Math. Phys. 62 (1978) 35–41.

[43] E. H. Lieb. *Gaussian kernels have only Gaussian maximizers*. Inv. Math., 102, pp. 179–208 (1990).

[44] E. H. Lieb and M. Loss. *Analysis*. Second Edition. Graduate Studies in Mathematics, vol 14. American Mathematical Society (2001).

[45] E. Mossel, K. Oleszkiewicz and A. Sen. *On reverse Hypercontractivity*. Geom. and Funct. Analysis, 23, no. 3, pp. 1062–1097 (2013).

[46] J. Neeman. *A multi-dimensional version of noise stability*. Electron. Commun. Probab. 19(72), 1–10 (2014).

[47] E. Nelson. *The free Markov field*. Journal of Funct. Analysis, 12, pp. 211–227 (1973).

[48] A. Prékopa. *On logarithmic concave measures and functions*. Acta Sci. Math. 34 (1973) 335–343.

[49] M. Talagrand. *Mean Field Models for Spin Glasses, Volume I*. Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete. 3. Folge. A Series of Modern Surveys in Mathematics, 54, Springer, Berlin (2010).

[50] C. Villani. *Topics in optimal transportation*. Graduate Studies in Mathematics, vol 58. American Mathematical Society (2003).

[51] C. Villani. *Optimal transport. Old and new*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften vol 338. Springer, Berlin (2009).

[52] R. Schneider. *Convex Bodies: The Brunn–Minkowski Theory*. Cambridge University Press, Cambridge, 1993.

[53] R. van Handel. *The Borell-Ehrhard Game*. Probab. Theory Relat. Fields 170(3–4), 555–585 (2018).